

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR



UBI
Covilhã
Portugal

**ESTIMAÇÃO DE INCERTEZAS EM MODELOS
DINÂMICOS PELO MÉTODO DE FILTRAGEM DE
KALMAN-BUCY**

ELABORADO POR
NUNO FILIPE LAUREANO MAIA

ORIENTADO POR
PROFESSOR DOUTOR KOUAMANA BOUSSON

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA AERONÁUTICA

UNIDADE DE CIÊNCIAS DA ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AEROESPACIAIS

JUNHO 2009

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar o meu profundo agradecimento, e dedicar esta Dissertação aos meus pais, Reinaldo Pedro Maia e Lina Maria Laureano Malaquias Maia, por tudo.

Ao Professor Kouamana Bousson pela sua abertura e oportunidade de trabalhar num tema tão interessante como este.

RESUMO

A presente Dissertação visa a estimação de incertezas em modelos dinâmicos através de filtros de Kalman-Bucy. Foram estudados vários tipos de filtro de Kalman, sendo que o filtro de Kalman clássico tem a particularidade de requerer um conhecimento das características estocásticas do sistema. Porém nem sempre é possível obter essas características, dado o desconhecimento do sistema, facto que acontece na maior parte das vezes no que diz respeito a aplicações em aeronáutica. Deste modo, foi reinterpretado o filtro de Kalman-Bucy no espaço dual, com o objectivo de flexibilizar o uso deste método, sem que se tivesse em conta os significados probabilísticos. Ultrapassada esta barreira, partiu-se para a estimação de incertezas presentes nos modelos, sendo estas compostas por tudo o que não se teve em conta no modelo além dos ruídos, ou seja: perturbações, factores, externos, etc. O próximo passo consistiu na estimação das taxas angulares, com base nas perturbações, com realização de dois voos diferentes para o fornecimento e comparação de dados. Este método vai possibilitar a criação de controladores robustos, mesmo na presença de modelos incompletos ou imprecisos, implicando poupança em sensores inerciais. Caso funcione em conjunto com os sensores já existentes, pode melhorar a precisão por redundância.

Palavras-chave: Filtro de Kalman, Kalman-Bucy, Incertezas de modelos, Espaço Dual.

ABSTRACT

This Dissertation aims at estimating dynamic model uncertainties, using Kalman-Bucy filters. Some types of Kalman filters were analyzed, although the classical Kalman filter requires the knowledge of system stochastic characteristics. However, these characteristics are not always available, which happens very often with respect to applications in aeronautics. Thus, Kalman-Bucy filter was reinterpreted in the dual space, in order to increase flexibility on method application, without requiring the probabilistic meanings. After this barrier, the interest was the estimation of uncertainties in models, which are composed by everything that isn't taken into account in the model (despite the noise), meaning disturbances, external factors, wind, perturbations, etc. The next step focused on the estimation of angular rates based on uncertainties. This method will improve the creation of robust controllers, even in the presence of incomplete or imprecise models, reflecting in less money spent in inertial sensors. If combined with the present sensors, it will be possible to increase the redundancy precision.

Keywords: Kalman filter, Kalman-Bucy, Uncertainties of the models, Dual Space.

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1	10
1.1 Interesse da estimação de estados	10
1.2 Exemplo de Aplicação: Estimação de um parâmetro constante	13
Capítulo 2.....	15
2.1 Controlabilidade de estado (do modelo)	15
2.1.1 Caracterização por Kalman	16
2.2 Observabilidade do modelo	16
2.2.1 Caracterização por Kalman	16
2.3 Teorema da dualidade de Kalman.....	17
2.4 Método LQR [3]	18
2.5 Método dos observadores: Interpretação no espaço dual.....	19
2.6 Kalman-Bucy Linear.....	21
2.7 Exemplo de Aplicação	22
Capítulo 3.....	28
3.1 Método para a Estimação de Perturbações.....	28
3.1.1 Cálculo de incertezas dos modelos.	28
CAPÍTULO 4	30
4.1 Aplicação 1 : Estimação de perturbações.....	30
4.1.1 - Resultados.....	31
4.2 Aplicação 2 : Estimação das incertezas do modelo de um Voo longitudinal.	33
4.2.1 - Resultados.....	34
4.3 Aplicação 3 : Estimação das taxas angulares de Euler.	36
4.3.1 Resultados	39
Conclusão.....	46
Bibliografia	47
Anexos	48

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1 -Descrição pormenorizada do funcionamento das duas fases do Filtro de Kalman.	12
Fig. 1.2 - Resultados para a estimação da Tensão em função do tempo, utilizando filtro de Kalman..	14
Fig. 2.1 - Resultados para a estimação de estados, através do Método dos Observadores. (a): ângulo de derrapagem, (b): taxa de rolamento, (c): ângulo de pranchamento, (d): taxa de guinada.....	25
Fig. 2.2 - Resultados para a estimação de estados, através do filtro de Kalman-Bucy. (a): ângulo de derrapagem, (b): taxa de rolamento, (c): ângulo de pranchamento, (d): taxa de guinada.....	26
Fig. 4.1- Estados resultantes da filtragem de Kalman-Bucy, com a presença de perturbações constantes. (a): Ângulo de ataque, (b):Taxa de rolamento, (c): Ângulo de arfagem.	32
Fig. 4.2 - Perturbações resultantes da filtragem de Kalman-Bucy. (a): Perturbação d1, (b): Perturbação d2, (c): Perturbação d3.....	32
Fig. 4.3 - Estados resultantes após filtragem de Kalman-Bucy.(a): ângulo de arfagem,(b): taxa de rolamento, (c): ângulo de ataque.....	34
Fig. 4.4 - Perturbações resultantes após filtragem.(a): perturbação d1, (b): perturbação d2, (c): perturbação d3.....	35
Fig. 4.5 - Visualização do factor λ que fornece a solução de Tikhonov.....	38
Fig. 4.6 - Sobreposição dos voo efectuados com e sem ruído (vermelho e azul respectivamente).	39
Fig. 4.7 - Estados estimados através das observações do voo sem ruídos. (a): velocidade da componente u ,(b): velocidade da componente v ,(c):velocidade da componente w	40
Fig. 4.8 - Perturbações obtidas através da estimação de estados do voo sem ruído. (a): Componente perturbação d1, (b): Componente perturbação d2, (c): Componente perturbação d3.	40

Fig. 4.9 - Existência de múltiplos factores de Tikhonov para cada valor de estado.	41
Fig. 4.10 - Taxas obtidas através das perturbações para o voo sem ruído, implementando Tikhonov.(a): Taxa de rolamento, (b): taxa de arfagem, (c): taxa de guinada.	41
Fig. 4.11 - Estados estimados através das observações do voo com a presença de ruídos.(a): Velocidade correspondente a u , (b): Velocidade correspondente a v , (c): Velocidade correspondente a w	43
Fig. 4.12 - Pertubações obtidas através da estimação de estados, para o voo com a presença de ruído.(a): Perturbação $d1$, (b): Perturbação $d2$, (c): Perturbação $d3$	43
Fig. 4.13 - Taxas calculadas, após regularização de Tikhonov para o voo com a presença de ruído.(a): taxa de rolamento, (b): taxa de arfagem, (c): taxa de guinada.	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Dados da aeronave.	23
Tabela A.1 - Dados da aeronave <i>Skunkworks</i>	48

NOMENCLATURA

h	Altitude em relação ao nível do mar
V	Velocidade
u	Velocidade em relação ao eixo xx
v	Velocidade em relação ao eixo yy
w	Velocidade em relação ao eixo zz
T	Tracção
L	Sustentação
D	Arrasto
C_L	Coefficiente de Sustentação
C_D	Coefficiente de Arrasto
C_Y	Coefficiente de Força Lateral
ϕ	Ângulo de Rolamento
β	Ângulo de Derrapagem
θ	Ângulo de Arfagem
ψ	Ângulo de Rumo
α	Ângulo de Ataque
p	Taxa de Rolamento
q	Taxa de Arfagem
r	Taxa de Guinada
g	Aceleração da gravidade
ρ	Massa específica
S	Área alar
m	Massa do corpo
I_x	Momento de Inércia em relação xx
I_y	Momento de Inércia em relação yy
I_z	Momento de Inércia em relação zz
I_{xz}	Momento de Inércia em relação a xz
C_m	Coefficiente de Momento de Arfagem
C_l	Coefficiente de Momento de Rolamento
C_n	Coefficiente de Momento de Guinada
φ	Latitude
λ	Longitude
δ_e	Deflexão dos elevadores
δ_f	Deflexão do flaperon
λ	Factor de Tikhonov
μ	Média
σ	Desvio padrão
ξ e η	Ruído com média igual a zero
d	Ruído com média não necessariamente igual a zero
e_y	Erro de previsão

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Interesse da estimação de estados.

O Filtro de Kalman linear [1] é um método estocástico de estimação de parâmetros, que combina modelos determinísticos e estocásticos para a obtenção de estimativas de estados de sistemas. Este filtro surgiu com a necessidade de resolver um problema de obtenção de dados, para os quais não era fisicamente possível a medição. Por exemplo, para determinar a temperatura na câmara de combustão numa determinada turbina, é possível fazer medições em vários pontos antes e depois da combustão. Contudo a temperatura da reacção que se dá dentro da câmara de combustão terá de ser estimada, uma vez que não existem sensores que aguentem tais condições de temperatura e pressão adversas. A estimação de estados, pressupõe sempre que é impossível fazer a medição de determinados parâmetros, devido à inexistência de sensores. Deste modo, foi necessário desenvolver um método, capaz de estimar esses dados, com base nas observações do comportamento do sistema. O filtro de Kalman tem vindo a ser alvo de estudos e melhoramentos desde a sua origem, no entanto o que o torna um recurso imprescindível, é a capacidade de estimar estados dum sistema dinâmico com a presença de ruídos, com bastante precisão. Sendo assim, aplicando um filtro de Kalman a uma aeronave, e pegando apenas nas suas observações, é possível estimar os estados ao longo do tempo.

O filtro de Kalman é aplicável aos modelos dinâmicos escritos sob a forma seguinte forma:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (1.1)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (1.2)$$

Em que: A – é a matriz de estado, x_{k-1} o estado no instante anterior, B – Matriz de controlo u_k - o controlo, H a matriz de observações do modelo, e w_k e v_k a medida do ruído respectivamente. Assume-se que estas duas últimas são independentes e compostas por ruído branco com distribuição normal de probabilidades, ou seja:

$$p(w) \sim N(0, Q) \quad (1.3)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (1.4)$$

Ou seja, w é um ruído, que descreve uma distribuição de probabilidades Normal, com média zero e desvio padrão Q , em que Q é a matriz de covariância da variável aleatória w (1.3). O mesmo acontece em v , ou seja descreve uma distribuição Normal de probabilidades centrada em zero, desta vez com desvio padrão igual à matriz de covariância R (1.4).

Sejam o erro *a priori*:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^- \quad (1.5)$$

Em que e_k^- é chamado de erro de estimação *a priori*, composto pela diferença entre o estado actual x_k e a estimação de estado *a priori* \hat{x}_k^- , e o erro *a posteriori*:

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k \quad (1.6)$$

Em que e_k é o erro de estimação *a posteriori*, composto pela diferença entre o estado actual x_k e a estimação de estado *a posteriori* \hat{x}_k .

Sendo assim, a estimação *a priori* do erro da covariância é:

$$P_k^- = E(e_k^- e_k^{-T}) \quad (1.7)$$

E *a posteriori*:

$$P_k = E(e_k e_k^{-T}) \quad (1.8)$$

É desejado que se encontre uma relação entre o estado *a posteriori* \hat{x}_k , como uma combinação linear do estado *a priori* \hat{x}_k^- , com a ponderação da diferença entre a observação y_k , e a previsão de medição do filtro achada $H\hat{x}_k^-$.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(y_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.9)$$

Em que $(y_k - H\hat{x}_k^-)$ é chamada de diferença residual. Esta diferença é de especial importância, pois reflecte a diminuição do valor entre a estimação e a actual medida, sendo que o ideal toma proporções, quando esta diferença é igual a zero. A matriz K é o ganho que minimiza o erro de covariância *a posteriori*. De forma que este factor minimize o erro e_k , e derivando os valores em relação a K em (1.8), chega-se a:

$$K_k = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + R)^{-1} \quad (1.10)$$

Ou seja, à medida que o erro da equação de medição se aproxima de zero ($H_t \rightarrow 0$), a matriz de ganho aumenta.

A estimativa *a posteriori* de estado é Gaussiana, e reflecte a média da distribuição do estado, normalmente distribuída, em que as condições (1.3) e (1.4) são tidas em conta. A covariância da estimativa do erro *a posteriori* (1.7) reflecte a variância da distribuição do estado:

$$p(x_k | z_k) \sim N(E[x_k], [(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]) = N(\hat{x}_k, P_k) \quad (1.11)$$

Sendo assim, o algoritmo do filtro de Kalman [1] passa-se no domínio discreto, e consiste em cinco equações, divididas em duas fases: a fase de previsão, que baseada nos estados e observações anteriores, prevê os estados posteriores, e fase de correcção, que refina a previsão do valor actual, para ser utilizada no cálculo do estado seguinte. Estes dois grupos de equações funcionam

conjuntamente como um sistema de realimentação, e por isso a fase de actualização tem um papel importante, na medida que incorpora informação actualizada das estimativas anteriores e compara com as actuais, tendo em conta todo o significado probabilístico, efectuando uma correcção mais provável e precisa.

Passado finalmente às equações do filtro de Kalman, no domínio discreto, que representam o algoritmo *estimador-corrector*.

Fase de previsão:

Previsão do estado:
$$\hat{x}_k^- = A \cdot \hat{x}_{k-1} + B \cdot u_k \quad (1.12)$$

Estimação da covariância:
$$P_k^- = A \cdot P_{k-1} \cdot A^T + Q \quad (1.13)$$

Fase de actualização:

Ganho óptimo:
$$K_k = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + R)^{-1} \quad (1.14)$$

Correcção do estado:
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \cdot (z_k - H \cdot \hat{x}_k^-) \quad (1.15)$$

Correcção da covariância:
$$P_k = (I - K_k \cdot H) \cdot P_k^- \quad (1.16)$$

A previsão do estado (1.12) e a estimação da covariância (1.13), contêm os estados (1.15) e a covariância (1.16) calculados na fase de actualização. Estes resultados porém, têm em conta o ganho (1.14) que é actualizado em cada iteração, permitindo cada vez mais precisão nos resultados ao longo do tempo, aumentando de valor à medida que a diferença residual $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ converge para zero. Tudo isto, também é calculado tendo em conta as matrizes de estado da covariância do ruído Q e R , que são independentes, uma da outra, e descrevem uma distribuição normal de ruído branco com média nula como já foi dito.

Na figura seguinte, compreende-se a razão de ser chamado de *estimador-corrector*.

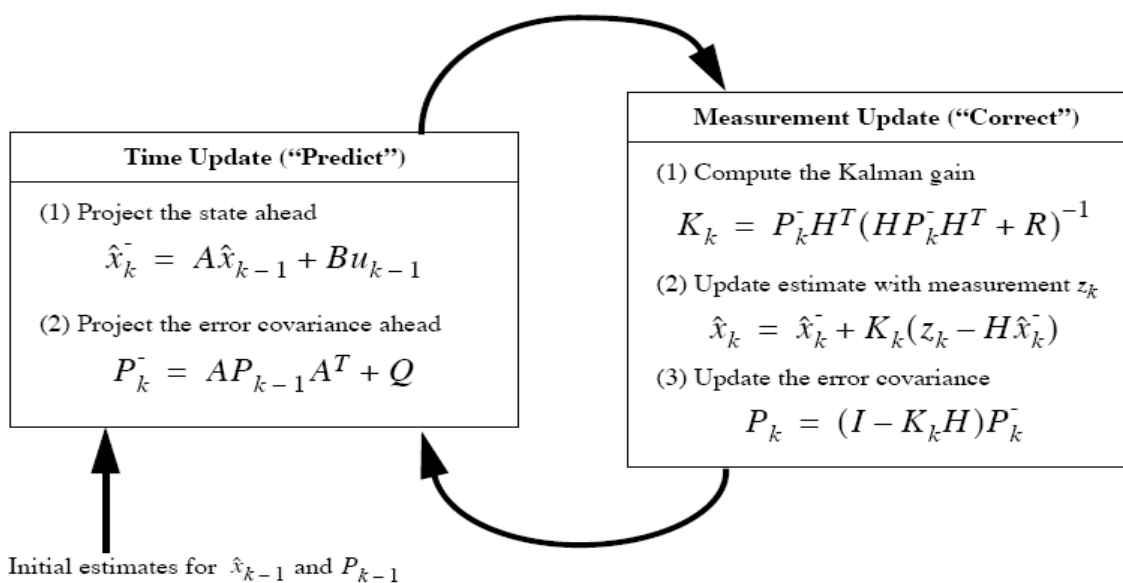


Fig. 1.1 -Descrição pormenorizada do funcionamento das duas fases do Filtro de Kalman.

Na figura (1.1), observa-se o filtro no seu domínio discreto. É possível observar a sua divisão em fase de previsão, com a previsão do estado e erro da covariância, e em fase de correcção, onde são actualizados os valores previstos e calculado o ganho a fornecer ao sistema, para que o valor estimado seja o mais próximo possível do valor teórico.

1.2 Exemplo de Aplicação: Estimação de um parâmetro constante

Para implementação do Filtro de Kalman Linear, foi utilizado um sinal electrónico com ruído presente no sistema. Vai-se assumir que temos a capacidade de reunir os dados da tensão, mas que está sujeita a um certo ruído branco aleatório com desvio padrão de 0.1 volt .Sendo assim existe a necessidade de filtrar esse ruído continuamente, para que o verdadeiro valor da tensão seja conhecido.

Considere-se o seguinte modelo:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$$

$$y = Hx_k + v_k$$

E a seguinte matriz de estado A , sujeita a ruído branco w_t .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + w_t$$

$w_t \sim N(0,0.1)$, em que o ruído branco existente é sem correlação, média zero e desvio padrão igual a 0.1.

As observações são dadas por:

$$H = (1 \ 0) + v_t$$

$v_t \sim N(0, 2 + (-1)^t)$, em que o ruído branco existente é sem correlação, média zero e desvio padrão $2 + (-1)^t$.

Matriz de covariância inicial:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Para a resolução deste exemplo, começou-se por ter de se assumir um ponto inicial, uma vez que é desconhecido o valor desde, sendo escolhido:

$$x_0 = [1 \ 1]^T$$

De seguida, foi implementado o filtro, onde se obteve o valor da tensão filtrado, apesar do ruído presente no sistema.

Após achar uma matriz de correção do valor da covariância em cada iteração, que fornecia um valor que cada vez mais se aproximasse o estado do valor verdadeiro, chegou-se ao valor final.

$$P = \begin{bmatrix} 1.7832 & 0.4656 \\ 0.4656 & 0.6823 \end{bmatrix}$$

Os resultados para a estimação de estados foram os seguintes:

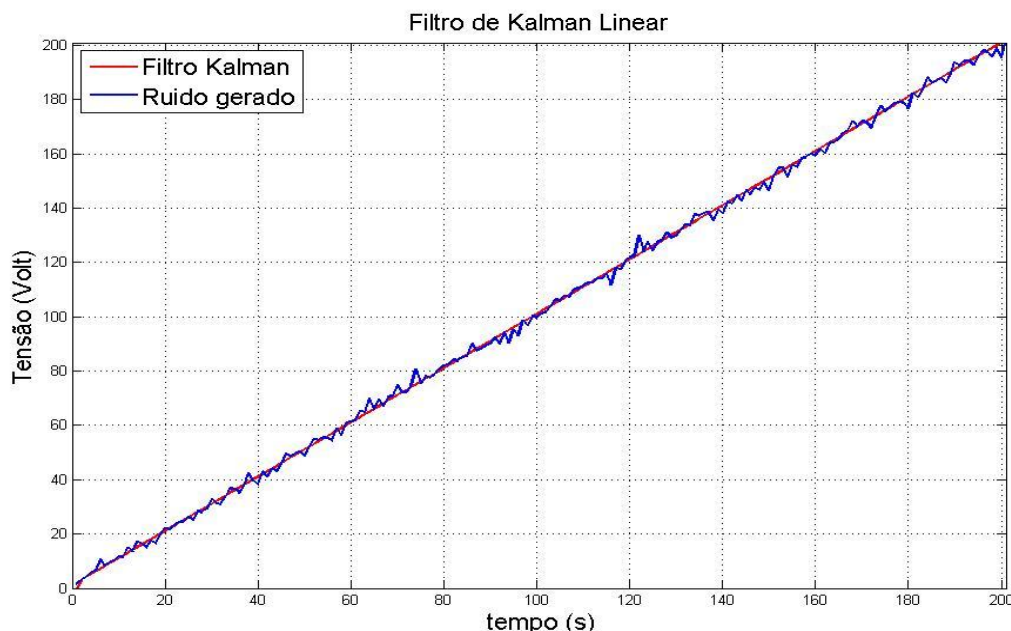


Fig. 1.2 - Resultados para a estimação da Tensão em função do tempo, utilizando filtro de Kalman.

De acordo com os resultados, é possível concluir que de acordo com o ruído existente com distribuição normal, e média e desvio padrão conhecidos, o filtro foi capaz de estimar os valores da tensão. Contudo, as matrizes Q , P e R iniciais têm de ser conhecidas e fornecidas, para que o sistema possa fornecer estados de acordo com as distribuições dos erros existentes. Uma vez que Q e R são constantes, P_k e o ganho K estabilizaram ao fim de pouco tempo, permanecendo constantes.

Sendo assim, verifica-se que este filtro é capaz de estimar estados com a presença de ruído com bastante precisão. Contudo, esta estimação está dependente das matrizes de covariância que têm obrigatoriamente que descrever uma distribuição de probabilidades e desvios padrão conhecidos, o que se torna uma limitação. De futuro, quer-se fazer o estudo de sistemas, e ultrapassar essa limitação, uma vez que não se conhece o tipo de ruído com que se vai lidar. Por exemplo, não se pode realizar um estudo do exemplo descrito acima (Fig. 1.2), se não forem conhecidas as suas matrizes de covariância, e no caso da aviação, descrever o tipo de distribuição presente numa variável que contenha vento, turbulência e ainda incertezas do modelo nem sempre se torna possível, visto que estamos a lidar, simultaneamente, com parâmetros desconhecidos. Existe por isso a necessidade de desenvolver um filtro, mais robusto, que não só tenha em conta esse tipo de incertezas e perturbações, inerentes a qualquer voo duma aeronave, mas que também não obrigue a que seja conhecida o tipo de distribuição de probabilidades e desvio padrão da covariância.

De forma a ultrapassar o que aqui é assumido como uma grande limitação, parte-se para o desenvolvimento de um filtro que ultrapasse as dificuldades inerentes a um filtro de Kalman.

Capítulo 2

MÉTODO DOS OBSERVADORES E FILTRAGEM DE KALMAN-BUCY.

Apesar de muitos sistemas físicos serem controláveis, os seus modelos matemáticos podem não possuir estas propriedades. Deste modo, requerer-se que seja possível mover de qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito, independentemente do caminho escolhido.

Por outro lado, uma vez que estamos perante a estimação de espaço de estados, a partir de observações, é condição que o sistema seja observável de modo a que seja possível a dedução do estado de um sistema $x(t)$ a partir do conhecimento das entradas $u(t)$ e saídas $y(t)$ desse sistema.

Caso sejam obedecidas estas regras, então será possível a estimação de estados do sistema em questão.

2.1 Controlabilidade de estado (do modelo)

Para sistemas do tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

$$y = Cx \tag{2.2}$$

Existem métodos que permitem o cálculo da controlabilidade e observabilidade [2].

Teorema 2.1: Um sistema é de estado controlável (em inglês: state controllable) se se pode guiar (ou “forçar”) o sistema para ir de um qualquer estado até atingir um outro (qualquer) estado dentro de um prazo finito.

Veja-se então de que forma é possível calcular a controlabilidade de um sistema.

2.1.1 Caracterização por Kalman

Segundo Kalman, a matriz de controlabilidade de estado Δ , tem a seguinte forma :

$$\Delta = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.3)$$

O sistema é controlável se a ordem da matriz de controlabilidade Δ , for igual à dimensão n da matriz de estado A , ficando assim:

$$\text{ordem}(\Delta) = n, \quad (2.4)$$

Caso a condição (2.4) seja verdade, então segundo a caracterização por Kalman, estamos perante um sistema controlável.

Sendo assim, a equação de estado (2.1) é controlável, se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e para qualquer estado final x_1 existe uma entrada $u(t)$ que transfere o estado de x_0 para x_1 em tempo finito, independentemente da trajetória seguida.

2.2 Observabilidade do modelo

Considerando de novo, que estamos perante um sistema do tipo (2.1 e 2.2), considera-se se o sistema é observável se, para qualquer estado inicial $x(0)$, existir um tempo finito t_1 tal que o conhecimento da entrada u e saída y no intervalo $[0, t_1]$ seja suficiente para se determinar de maneira única $x(0)$.

Resumindo, um sistema é observável se o estado inicial $x(0)$ poder ser obtido (observado) a partir do conhecimento da entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

Definição 2.1: Um sistema é observável se os valores do vector de observação (saída) nos tempos $t^*, t^* + \Delta t, \dots, t^* + n\Delta t$, (com $n \geq 1, \Delta t$ sendo o passo de observação), permitem ter uma estimativa fidedel do valor do vector de estado no tempo t^* .

Observe-se de seguida o método para o estudo da observabilidade de um sistema.

2.2.1 Caracterização por Kalman

À semelhança da controlabilidade, Kalman definiu uma proposição que é capaz de verificar se estamos na presença de sistemas observáveis, nomeadamente:

Matriz de observabilidade:

$$\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ou seja, θ consiste num vector construído a partir da matriz de estados A e C , em que a sua ordem terá de ser igual à dimensão n da matriz A . O sistema é observável se a ordem da matriz de observabilidade θ for igual a n :

$$\text{ordem}(\theta) = n \quad (2.6)$$

Caso a controlabilidade e observabilidade sejam verificadas, então sabe-se que o sistema permite que sejam calculados estados com o conhecimento das observações, e que vai haver solução para os todos os pontos do sistema.

2.3 Teorema da dualidade de Kalman

Considere-se o seguinte sistema no seu espaço primal E .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com:

x : vector de estado

u : vector de controlo

O sistema equivalente no espaço dual E^*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^*z + C^*v \\ w &= B^*z + D^*v \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde:

z : vector de estado (no espaço dual);

v : vector de controlo (no espaço dual);

w : vector de observação (no espaço dual);

$A^* = \overline{A^T}, B^* = \overline{B^T}, C^* = \overline{C^T}, D^* = \overline{D^T}$ são as transpostas conjugadas das matrizes correspondentes.

Chamemos (Σ) o sistema no espaço primal, (Σ^*) o sistema dual de (Σ) (no espaço dual).

Assim, o teorema da dualidade de Kalman diz:

- (1) (Σ) é controlável, se e só se (Σ^*) é observável
 (2) (Σ) é observável, se e só se (Σ^*) é controlável

Isto significa que, todo o sistema controlável no seu estado primal, será observável no correspondente estado dual, e que do mesmo modo, qualquer sistema observável no estado primal é controlável no estado dual e vice-versa. No entanto não quer dizer que um sistema controlável é observável nem que um sistema observável é controlável.

Sendo assim, antes de qualquer acção no projecto de um controlador ou de um filtro de Kalman, é absolutamente necessário que se proceda antes de mais, à verificação da controlabilidade e observabilidade do sistema. Caso o sistema não seja controlável ou observável, não é possível projectar qualquer tipo de controlador no espaço primal ou dual (segundo o caso), e por isso terá de se mudar a configuração do sistema.

2.4 Método LQR [3]

Considere-se um sistema linear cuja equação é da forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.9)$$

Com matrizes de estado A e controlo B constantes.

Para estabilizar um sistema do tipo (2.9), é necessário o cálculo de ganho K , que estabilize a aeronave de acordo com uma função de minimização do custo J .

Se quisermos estabilizar este sistema para a origem $x^* = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, então pode mostrar-se que neste caso será preciso um controlo u que guie o sistema para a origem, da forma:

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.10)$$

Onde,

Q : matriz positivamente definida ou semi-definida real e simétrica;

R : matriz positivamente definida e real e simétrica.

O vector u não sofre restrições e as matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e da energia gastos na estabilização no controlo de u .

Com o aumento de estabilidade o sistema fica,

$$\dot{x} = Ax - Bkx = (A - Bk)x. \quad (2.11)$$

Tendo em conta a função de custo J e considerando uma função de *Lyapunov* associada ao sistema sob a forma:

$$V(x) = x^T T x \quad (2.12)$$

Temos,

$$x^T (Q + k^T R k) x = - \frac{d}{dt} (x^T P x) \quad (2.13)$$

Que fica,

$$x^T (Q + k^T R k) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T [(A - Bk)^T P + P(A - Bk)] x \quad (2.14)$$

Deste modo, é necessário achar a matriz k que satisfaça a seguinte equação de *Lyapunov*:

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T R k) \quad (2.15)$$

Chegando finalmente a solução,

$$k = R^{-1} B^T P \quad (2.16)$$

Substituindo por,

$$u = -kx \quad (2.17)$$

Sendo x o vector de estado, obtém-se uma matriz de ganho óptima que proporciona uma lei de controlo óptima:

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (2.18)$$

Em que P é a solução da equação de *Riccati*:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.19)$$

Onde Q e R são as matrizes de ponderação dos vectores de estado e de controlo do sistema, respectivamente.

2.5 Método dos observadores: Interpretação no espaço dual

Nas aplicações de sistemas dinâmicos e controlo, devido ao seu elevado custo, ou aos parâmetros físicos a que está sujeito, como explicado no §1 no exemplo da medição da temperatura na câmara de combustão de uma turbina, pode acontecer que não seja possível a existência de sensores para determinados parâmetros de estado. Por isso, é necessário achar um método que permita estimar esses parâmetros sem que seja feita a sua medição, uma vez que o controlo para a actuação está calculado em função do vector de estado. (Eq. 2.17). Convém que o método seja consistente na determinação desses parâmetros, e que o erro associado a estes, neste caso, a precisão dos estados, convirja para zero, de modo a que ao longo do tempo seja possível a estimação dos estados o mais próximo possível do valor real. A condição necessária, é que o sistema seja observável, e por isso, é garantida a estimação de todos os valores dos estados, com base no vector de saída do sistema. Se assumirmos que o modelo não tem incertezas, então dá-se ao sistema o nome de *observação*, o que dá o nome de *Método dos Observadores* [4], ao método que permite estimar o estado de um sistema sem incertezas.

Sendo assim, chamemos às incertezas do sistema que foram desprezadas $\eta = 0$ e $\xi = 0$ e \hat{x} à estimativa do vector de estado x . O erro da estimação, como foi visto em (1.6 e 1.5) é: $e_x = x - \hat{x}$; logo a derivada do erro é: $\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$, o que se traduz pela seguinte equação da dinâmica do erro:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) = Ae_x \quad (2.20)$$

A equação do erro na estimação do estado é:

$$\dot{e}_x = Ae_x \quad (2.21)$$

Tendo $e_y = y - C\hat{x}$, a equação do erro de previsão da observação fica:

$$e_y = Ce_x \quad (2.22)$$

No que se segue, deduzem-se as equações dos observadores com uma abordagem de controlo no espaço dual [5] [6].

As duas equações (2.21) e (2.22) compõem o modelo no espaço de estado da dinâmica do erro. As equações correspondentes no espaço dual são:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x^d &= A^* e_x^d + C^* v \\ e_y^d &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Onde e_x^d é o vector de estado do erro no espaço dual, v é o vector de controlo do erro (no espaço dual), $A^* = \bar{A}^T$ e $C^* = \bar{C}^T$. A correspondência entre o espaço primal e o espaço dual implica que o erro primal se estabiliza em zero se e só se o erro dual se estabiliza, também, em zero. Por isso, é necessário achar um ganho $K = L^*$ tal que o sistema de malha fechada com controlo $v = -L^* e_x^d$ estabilize o erro dual para zero baseando-se na dinâmica do erro dada pela equação (2.23). A teoria dos controladores LQR ensina que neste caso tem que ter:

$$L^* = R^{-1}CP \quad (2.24)$$

Sendo P a solução da equação de Riccati:

$$AP + PA^* - PC^*R^{-1}CP + Q = 0 \quad (2.25)$$

Sendo Q uma matriz positivamente semi-definida, e R uma matriz positivamente definida.

Neste caso, a equação de malha fechada do erro no espaço dual é:

$$\dot{e}_x^d = (A^* - C^*L^*)e_x^d = (A - LC)^* e_x^d \quad (2.26)$$

A equação correspondente à anterior no espaço primal é:

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x \quad (2.27)$$

Esta equação implica:

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) = A(x - \hat{x}) - L(x - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} - L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mas, como $\dot{x} = Ax$, tem-se:

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \quad (2.29)$$

Sendo esta equação do *observador* que nos permite estimar o vector de estado.

Achado um método capaz de fazer a estimação de estados como base nos observadores, passou-se então para o próximo passo, que consistia em verificar, se era possível aplicar este método a sistemas com a presença de ruídos e incertezas, típicos de sistemas reais, nomeadamente aeronáuticos.

2.6 Kalman-Bucy Linear

O filtro de Kalman-Bucy [6] pode-se dizer que veio completar as falhas do método dos observadores. Nos sistemas que vamos utilizar, existem sempre ruídos e incertezas, e foi visto que o método dos observadores apenas é aplicável a sistemas baseados nos valores do vector de observações mas sem incertezas $\eta = 0$ e $\xi = 0$, por isso, houve a necessidade de desenvolver outro método, com base em (2.29), que tivesse em conta esse tipo de situações. Por outro lado, também é desejado que não seja conhecido o tipo de distribuição das matrizes de covariância, visto que queremos lidar com sistemas que tenham incertezas desconhecidas, e que não impliquem o seu estudo prévio. É preciso desenvolver um método, capaz de prever as matrizes de covariância, sem que estas tenham significado probabilístico e que seja robusto ao ponto de anular ruídos, como por exemplo oscilações provocadas pela turbulência durante um voo, e incertezas presentes nos modelos matemáticos do problema. Com isto, não se está a afirmar que os resultados do filtro de Kalman estudado no §1 não são satisfatórios, mas que, na prática, para ser implementado um filtro de Kalman é preciso ter um conhecimento completo do sistema, assim como dos seus ruídos, que neste caso têm de descrever uma distribuição normal em torno do valor verdadeiro, caso contrário, os resultados da filtragem serão diferentes.

Sendo assim, um houve a necessidade de desenvolver um método que tivesse em conta incertezas, e que não utilizasse valores de ruído com distribuição conhecida, uma vez que durante um voo nem sempre se sabe o tipo de perturbação que a aeronave está a sofrer, surgindo assim o Filtro de Kalman-Bucy, nomeadamente na sua forma linear.

Este método de filtragem mais robusto, foi baseado no método dos observadores, e aplica-se aos casos em que as incertezas ou ruídos do modelo/observações não são ou então não podem ser desprezadas, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \eta(t) \\ y &= Cx + \xi(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Com,

$$\eta \neq 0 \text{ e } \xi \neq 0$$

Sendo η e ξ incertezas no modelo e nas medidas, respectivamente, sendo estas aleatórias, e o vector de observação y conhecido, enquanto o estado x não.

A equação do filtro de Kalman-Bucy baseia-se na equação do método dos observadores, e também é descrita por (Eq.2.35), com dois pormenores a acrescentar ao que já foi dito:

Desta vez, a solução da equação de Riccati é diferencial:

$$(1) \quad \dot{P} = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q \quad (2.31)$$

$$(2) \quad P(t_0) = P_0 \quad (P_0 = 0 \text{ no caso de um observador, ou } P = \text{constante}).$$

$$Q = E(\eta\eta^T), R = E(\xi\xi^T), \quad (Q=0 \text{ ou } Q=I, R=I \text{ no caso de um } \textit{observador}).$$

Veja-se de seguida uma comparação entre os dois filtros, onde se realçam as diferenças entre o filtro de Kalman linear e o filtro de Kalman-Bucy, onde este último se destaca como ferramenta a utilizar em trabalhos futuros, dadas as suas características.

O filtro de Kalman é composto por cinco equações, enquanto o filtro de Kalman-Bucy é composto apenas por duas. Tal como já foi visto, repara-se que o primeiro é composto por duas fases: a fase de previsão e a fase de correcção, funcionando como um sistema de realimentação de forma a fornecer continuamente a melhor solução, enquanto no Kalman-Bucy como se passa no domínio contínuo as duas fases fundem-se, dando origem a apenas duas expressões. No filtro de Kalman, as equações aparecem discretizadas, o que faz com que seja mais intuitiva a sua percepção ao separar o filtro em duas fases. No entanto, este facto aumenta consideravelmente o tempo de processamento e a redundância, o que na aeronáutica se torna desvantajoso, uma vez que o tempo de processamento e a precisão são essenciais. Já o filtro de Kalman-Bucy, é composto por duas expressões, o que faz com que o cálculo se passe no domínio contínuo, tornando-o mais simples, uma vez que não temos previsão nem correcção, diminuindo o tempo e energia gastos no seu cálculo.

No filtro de Kalman, na ocorrência da fase de actualização de do estado \hat{x} , é possível observar que o ruído de Q e R obedecem a uma distribuição Gaussiana. Este facto, não só implica que o utilizador tenha conhecimentos de probabilidades e estatística, mas também que seja conhecida a distribuição de probabilidade do ruído, o que apenas acontece em sistemas já muito estudados ou puramente teóricos. Isto pode fazer com que se chegue a resultados insatisfatórios, (ou até que o sistema não convirja) apenas pelo facto do tipo de ruído ter de ser desconhecido. Torna-se essencial saber o tipo de distribuição, uma vez que no espaço primal Q e R têm de ter significado probabilístico. Para ultrapassar o que pode por vezes ser uma limitação, no filtro de Kalman-Bucy não é considerado nenhum tipo de distribuição de probabilidades específica, visto que tal não tem significado no espaço dual, por isso vai-se recorrer a ferramentas de controlo para estimação de estados.

No filtro de Kalman, todo o cálculo é feito no espaço primal, enquanto o KBF recorre ao espaço dual para estimar estados. Tal acontece devido às vantagens adjacentes ao espaço dual, nomeadamente: Através do Teorema da Dualidade de Kalman, um problema de controlo no espaço dual pode ser resolvido para obter estimativas no espaço primal, com a particularidade de que, a recorrência ao espaço dual não implica gastos de energia. Por isso, é possível a aplicação de ganhos com valores elevados que implicariam um gasto de energia elevado para o cálculo dos estados, uma vez que estamos no espaço dual.

2.7 Exemplo de Aplicação

O exemplo que se segue, tem como objectivo a comparação entre o filtro baseado no método dos observadores e no filtro de Kalman-Bucy. Sendo assim, pretende-se projectar um controlador que estabilize uma aeronave para a posição nula, nas variáveis de estado β – Ângulo de derrapagem, p – taxa de rolamento, ϕ – ângulo de rolamento e r – taxa de guinada, numa viragem, com o seguinte modelo latero-direccional linearizado num voo de cruzeiro [7].

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ \phi \\ r \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta a \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B são definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{Y_\beta}{V}\right) & \left(\frac{Y_p}{V}\right) & \left(\frac{g \cdot \cos(\theta_0)}{V}\right) & \left(\frac{Y_r - V}{V}\right) \\ L_\beta & L_p & 0 & L_r \\ 0 & 1 & \tan(\psi_0) & 0 \\ N_\beta & N_p & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \left(\frac{Y_{\delta r}}{V}\right) & \left(\frac{Y_{\delta a}}{V}\right) \\ L_{\delta r} & L_{\delta a} \\ 0 & 0 \\ N_{\delta r} & N_{\delta a} \end{pmatrix}$$

Com observações:

$$C = [1,7\beta + p; \phi + 0.57r]$$

E os seguintes dados, que descrevem os valores numéricos dos parâmetros destas matrizes,

Tabela 2.1 - Dados da aeronave.

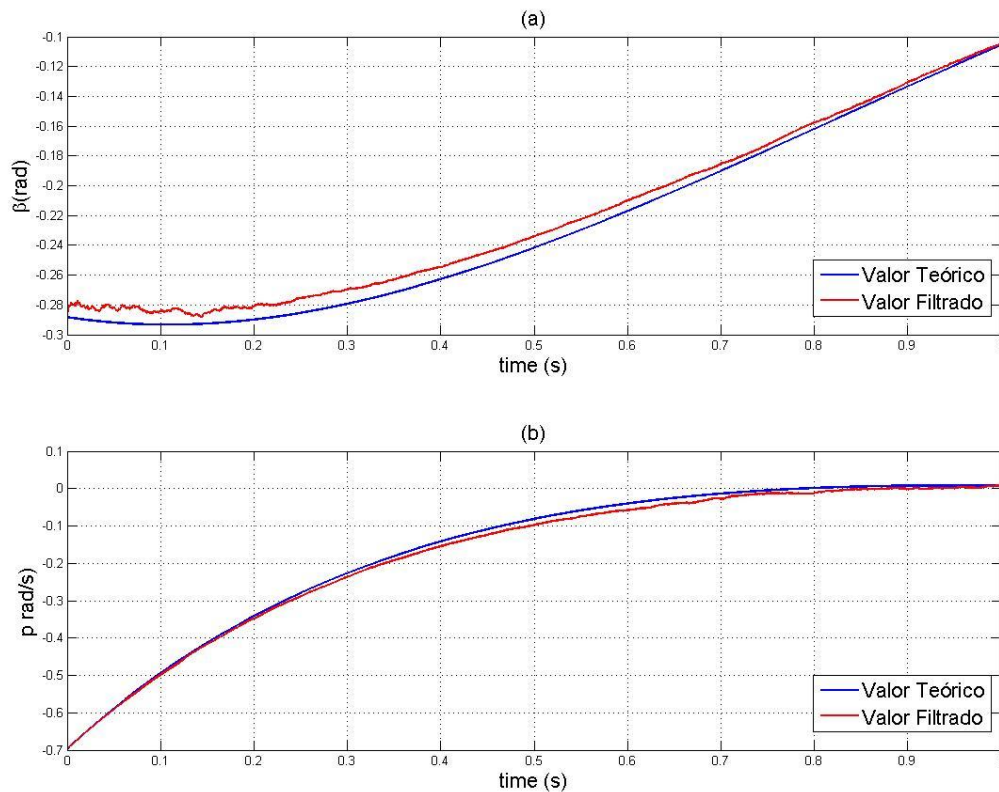
Dados gerais	Ponto de Equilíbrio
$g = 32.2;$	$Y_r = 0;$
$V = 825;$	$Y_p = 0;$
$Y_\beta = -71.73;$	$N_{\delta a} = 0.065;$
$Y_{\delta r} = 18.38;$	$N_{\delta r} = -1.169;$
$Y_{\delta a} = 0;$	$x_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]';$
$L_\beta = -4.424;$	$u_{eq} = [0 \ 0]';$
$L_p = -1.184;$	Ponto inicial
$L_r = 0.335;$	$x_0 = [0.1 \ 0.3 \ \pi/6 \ 0.3]';$
$L_{\delta a} = 2.12;$	$x_k = x_0;$
$L_{\delta r} = 0.547;$	$\Delta t = 0.005;$
$N_\beta = 2.148;$	
$N_p = -0.021;$	
$N_r = -0.228;$	

Antes de mais, foi verificada a observabilidade segundo Kalman, (Eq.2.6) onde através da igualdade (Eq.2.7) se pode admitir que o sistema é observável. Ao serem verificadas estas duas condições, automaticamente se pode afirmar que existe solução para os estados gerados através de filtro de Kalman-Bucy.

Sendo assim, foi projectado um controlador LQR capaz de estabilizar a aeronave, e posteriormente estimados os estados através de um filtro de Kalman-Bucy. Este é um controlador para sistemas lineares do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, e têm como função o cálculo do ganho óptimo K (Eq.2.16), sujeito a minimização da função de custo (Eq.2.10). O ganho obtido foi:

$$K = \begin{pmatrix} 13.9642 & 0.5871 & -7.4588 & -0.2599 & -3.5209 \\ -1.0444 & 0.1733 & -13.8391 & -4.3026 & -42.6126 \end{pmatrix}$$

Posteriormente projectou-se o filtro para as variáveis de estado referentes ao ângulo de derrapagem β , taxa de rolamento p , ângulo de pranchamento ϕ , e taxa de guinada r . Na figura que se segue, encontram-se os resultados com a implementação do método dos observadores e posteriormente os resultados através de filtragem de Kalman-Bucy.



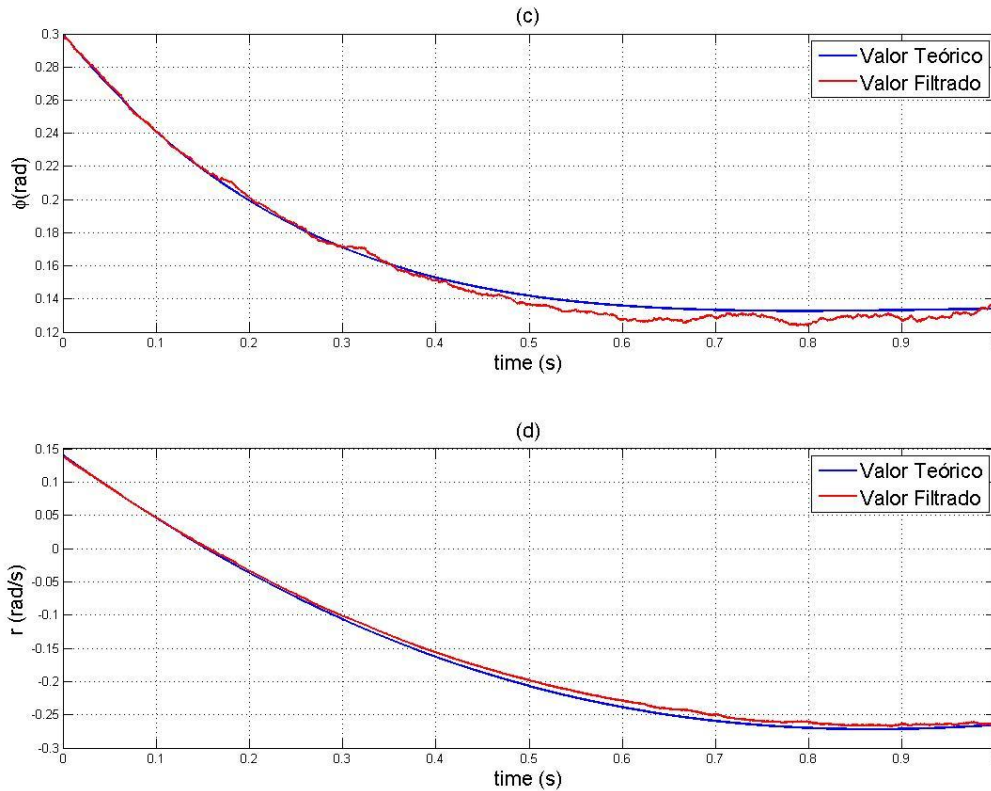


Fig. 2.1 - Resultados para a estimação de estados, através do Método dos Observadores. (a): ângulo de derrapagem, (b): taxa de rolamento, (c): ângulo de pranchamento, (d): taxa de guinada.

Através da análise dos gráficos para o método dos observadores (Fig.2.1), é possível observar que os resultados são bons, havendo geralmente uma pequena diferença entre os valores filtrados e os reais, que se mantêm desde o tempo inicial ao tempo final.

Para o ângulo de derrapagem β , (Fig.2.1(a)) observa-se uma diferença entre os dois valores até 0.8s que posteriormente converge, contudo existe sempre uma pequena diferença até ao tempo final, que nunca chega a ser completamente anulada. Para as taxas p e r , na (Fig 2.1(b) e (d)), existe uma boa relação entre os valores teóricos, com alguma diferença em $t = 0.6s$, no entanto o ângulo de rolamento ϕ (Fig.2.1(c)) tem alguma dificuldade em convergir ao longo do tempo, chegando a ter a partir de 0.4s alguma discrepância em relação ao valor teórico. Na generalidade, os resultados obtidos com a implementação do método dos observadores são bons, no entanto, nota-se que, não existe um esforço por parte do sistema, para que os valores convirjam para os valores teóricos, sendo motivo suficiente para o estudo do filtro de Kalman-Bucy.

Aplicando o filtro de Kalman-Bucy, os resultados foram os seguintes:

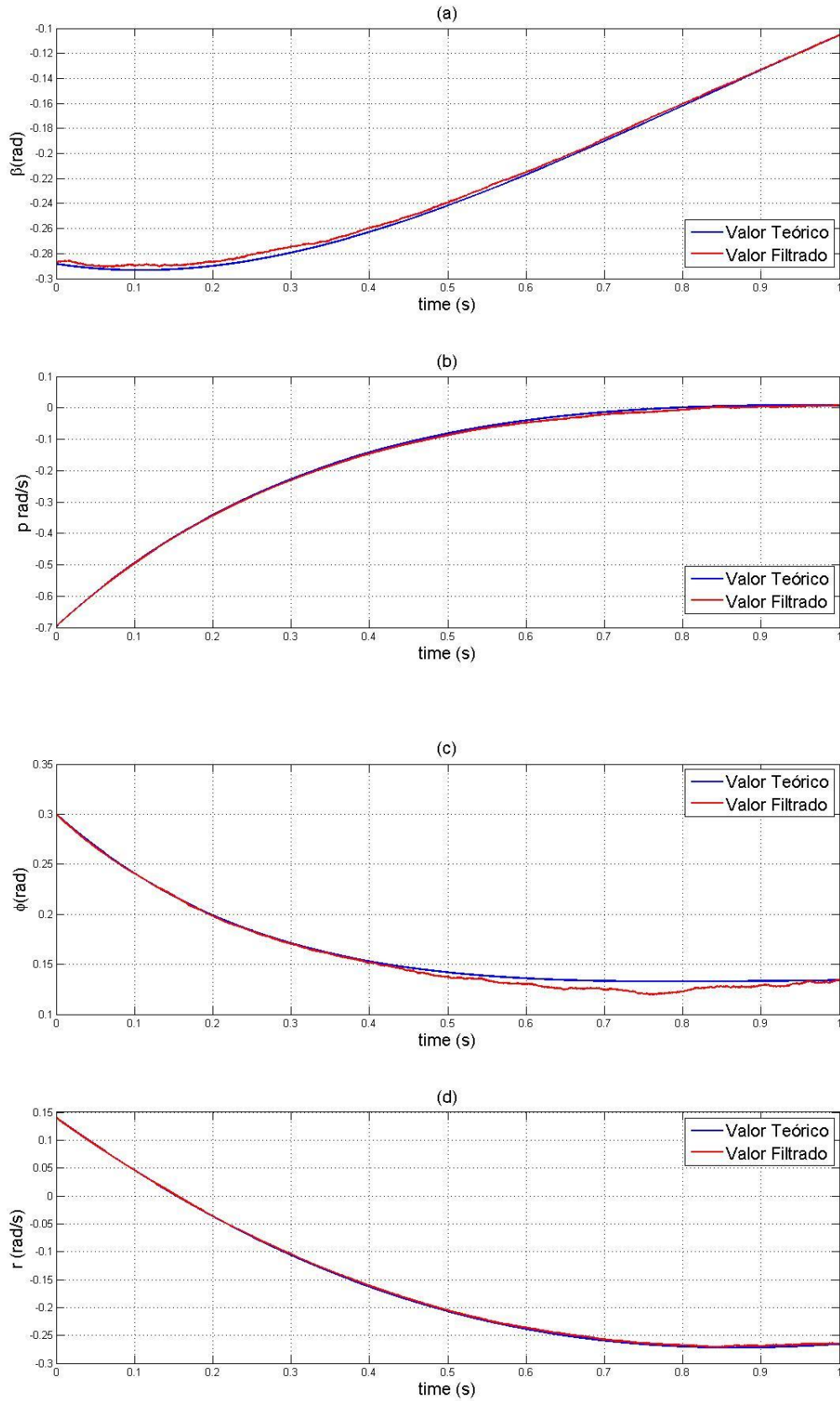


Fig. 2.2 - Resultados para a estimação de estados, através do filtro de Kalman-Bucy. (a): ângulo de derrapagem, (b): taxa de rolamento, (c): ângulo de pranchamento, (d): taxa de guinada.

Passando à implementação do filtro de Kalman-Bucy, obtido com Equação Diferencial de Riccati (Eq.2.31), onde $Q \neq I$, notam-se algumas diferenças. A estimação dos estados torna-se mais precisa, e nota-se que no geral os valores filtrados convergem para os valores teoricamente correctos. Ao observar os resultados (Fig. 2.2 (b) e (d)) verifica-se que na generalidade, as taxas acompanham quase na perfeição os valores teóricos, havendo uma diferença bastante baixa. No entanto, para os ângulos, existe uma pequena discrepância, nomeadamente até 0.3s no caso do ângulo de derrapagem (Fig.2.2(a)), que no caso do ângulo de rolamento (Fig.2.2(d)) chega a haver uma diferença de 0.025rad, nomeadamente entre 0.6-0.8s. Tal acontecimento, está normalmente associado a erros iniciais, ou a mudanças de comportamento do sistema, havendo discrepâncias enquanto o filtro de apercebe das alterações no sistema. Imediatamente após esta percepção, os valores convergem de imediato para valores próximos dos teóricos.

É de notar, que no caso da filtragem de Kalman-Bucy estamos perante observações com ruído induzido, dado não ser possível o conhecimento do tipo de ruído presente no sistema. Uma vez que os valores programados para induzirem ruído no sistema são aleatórios, cada vez que se corre o programa, os resultados vão ser diferentes, contudo em todos eles se pôde observar uma robustez do filtro chegar aos valores teóricos.

Todas as equações diferenciais foram resolvidas pelo método de Euler simples, o que não só facilitou a implementação do filtro, mas também veio comprovar que este é um método pouco exigente no que diz respeito à precisão dos métodos de integração utilizados para o cálculo dos estados, e que não dependem destes para fornecer valores bastante aceitáveis.

Estas foram motivações para que de futuro se continuasse com o estudo do filtro de Kalman-Bucy.

Capítulo 3

ESTIMAÇÃO DE INCERTEZAS DOS MODELOS

3.1 Método para a Estimação de Perturbações

No presente Capítulo vai ser apresentado um método para a estimação de incertezas de modelo baseado no filtro de Kalman-Bucy desenvolvido no capítulo anterior.

A estimação de incertezas presentes nos modelos é praticamente tão importante como a modulação do próprio modelo. Existem várias formas de incertezas, sendo que os ruídos são as mais conhecidas, contudo existem também perturbações constantes, como por exemplo o vento, *jetstream*, turbulências, e tudo o que tenha valor com média diferente de zero, que muitas vezes não são tidas em conta nos modelos. Ao admitir que existem esse tipo de perturbações (com $\mu \neq 0$), pode significar que os valores anteriores têm influência no cálculo dos futuros parâmetros. Este facto torna-se de extrema importância, e por isso faz sentido incluir nas equações de projecto de um filtro um parâmetro relativo às incertezas, de modo a tornar o filtro o mais robusto possível, capaz de prever todo o tipo de situações adversas a uma aeronave. Ter um modelo que inclua parâmetros, que não estejam directamente relacionados com o sistema em si, mas sim com factores externos, significa que é possível quantificar essa diferença. Ao quantificar essa diferença, sabe-se com maior precisão o que está a acontecer ao sistema, e deste modo torna-se possível arranjar uma solução do ponto de vista do controlo para estes parâmetros até então desconhecidos.

3.1.1 Cálculo de incertezas dos modelos.

Nos sistemas até agora estudados, ou seja primeiramente o filtro de Kalman simples na sua forma linear, tendo passado de seguida para o filtro de Kalman-Bucy (também na sua forma linear), admitiu-se sempre que as incertezas eram somente os ruídos, com média nula e não correlacionados. Ao invés do que já foi feito, estas perturbações não terão necessariamente que ser ruídos, ou seja não têm que ter média nula ($\mu \neq 0$), e também não têm de estar correlacionados.

Sendo assim, foi tido em conta mais uma variável nas equações do modelo, que incluisse um parâmetro com perturbações ($\mu \neq 0$) para juntar aos parâmetros do ruído já existentes e que o sistema fosse capaz de calcular o valor dessa perturbação. Deste modo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + d(t) + \eta(t) \\ y &= Cx + \xi(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Em que estão presentes dois tipos de ruído, nomeadamente modeláveis e incertezas não modeláveis, um com média igual a zero e outro com média não necessariamente diferente de zero, não modelada ou desconhecido. Ou seja, associando aos parâmetros correspondentes no modelo apresentado em (3.1), $\eta(t)$ e $\xi(t)$, com média igual a zero, e $d(t)$ sendo qualquer valor de média não necessariamente igual a zero, e A - matriz de estado, C – matriz de observações do modelo u - controlo, x - estado.

A realização da estimação de incertezas do modelo, tem como objectivo o desenvolvimento de um método que seja capaz calcular incertezas ou perturbações presentes nas observações fornecidas, contudo a sua implementação pode ser dividida em duas partes. A primeira, consiste na implementação do filtro de Kalman-Bucy e estimados os estados, e a segunda parte, na estimação de perturbações. Por sua vez, estas perturbações são assumidas como desconhecidas, e como tal é necessário desenvolver um novo método capaz de as prever.

Sendo d e η o conjunto das incertezas do modelo, que se podem condensar apenas em d , ou seja:

$$\dot{x} = Ax + d\tag{3.2}$$

E que,

$$y(t+h) = y(t) + h.\dot{y}(t)\tag{3.3}$$

Com,

$$\dot{y}(t) = H\dot{x} = HA\hat{x} + Hd\tag{3.4}$$

Que substituindo em (Eq.3.3) obtemos,

$$y(t+h) = y(t) + h.HA\hat{x} + hHd\tag{3.5}$$

O erro de previsão é:

$$e_y(t+h) = y(t+h) - y_{ref}(t+h)\tag{3.6}$$

Que pode ser reescrita do seguinte modo:

$$e_y(t+h) = y(t+h) - y_{ref}(t+h)\tag{3.7}$$

Que quando se junta com a equação acima (Eq3.4) fica:

$$e_y(t+h) = hHd(t) + hHA\hat{x} + y(t) - y_{ref}(t+h)\tag{3.8}$$

Donde se obtém a expressão final, colocando o termo d em evidência e igualando a expressão a zero (uma vez que interessa que haja anulação do erro), fica-se com:

$$d(t) = \frac{1}{h}H^{-1}(y_{ref}(t+h) - y(t) - hHA\hat{x}(t))\tag{3.9}$$

Esta é então a expressão, que permite calcular o valor das perturbações presentes nas observações de um voo.

Capítulo 4

APLICAÇÕES

O presente capítulo é composto pela aplicação dos métodos desenvolvidos anteriormente. Vai ser feita a aplicação prática de cada método desenvolvido no capítulo anterior, e discutidos os resultados de modo a validar os algoritmos desenvolvidos.

4.1 Aplicação 1: Estimação de perturbações.

O presente problema será a aplicação do método desenvolvido em (3.1.1). Sendo assim, será imposta inicialmente uma perturbação ao sistema de modo que se verifique se o filtro tem a capacidade para fornecer o valor das perturbações impostas inicialmente ao sistema, sem que estas tenham influência na obtenção dos próprios estados.

Deste modo, estamos perante um sistema do tipo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + d(t) + \eta(t) \\ y &= Cx + \xi(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Em que $\eta(t)$ e $\xi(t)$, representam ruído, e $d(t)$ qualquer valor de média não necessariamente igual a zero, e A - matriz de estado, B - matriz de controlo, C – matriz de observações do modelo u -controlo, x - estado.

As matrizes de estado A e controlo B consistem em:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.87 & 43.22 \\ 0 & 0.99 & -1.34 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -17.25 & -1.58 \\ -0.17 & -0.25 \end{bmatrix}$$

E as observações para o problema, consistem nas seguintes:

$$y = \begin{bmatrix} \theta - \alpha \\ q \end{bmatrix}$$

Em que o vector de estados é composto pelo ângulo de ataque α , taxa de rolamento q e ângulo de arfagem θ . Já o vector de controlo u é composto pelas deflexões dos elevadores δ_e e flaperons δ_f .

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix}$$

Onde os pontos iniciais $x_0 = [0.1 \ 0.3 \ \pi/6]$ (com pontos de equilíbrio $x_{eq} = [0 \ 0 \ 0]$) e $u_{eq} = [0 \ 0]$, e induzida uma perturbação no sistema de valores:

$$d = [1.2 \ 1.5 \ 0.8]$$

4.1.1 - Resultados

Sendo assim, à semelhança da aplicação anterior, foi calculado o ganho do controlador LQR que levasse a aeronave para o ponto de equilíbrio com o menos gasto possível, e que fossem estimados os estados correspondentes, baseados nas observações.

Após a verificação da controlabilidade sistema (Eq.2.3) que satisfaz (Eq.2.4) e observabilidade (Eq.2.5) que satisfaz (Eq.2.6), o ganho do controlador obtido foi:

$$K = \begin{pmatrix} 3.4484 & 0.7992 & 2.1682 \\ 1.4891 & -0.1246 & -2.0305 \end{pmatrix}$$

De seguida aplicou-se a filtragem de Kalman-Bucy (Eq.2.29) para obtenção dos estados, incluindo a solução diferencial de Riccati (Eq.2.29) donde resultou:

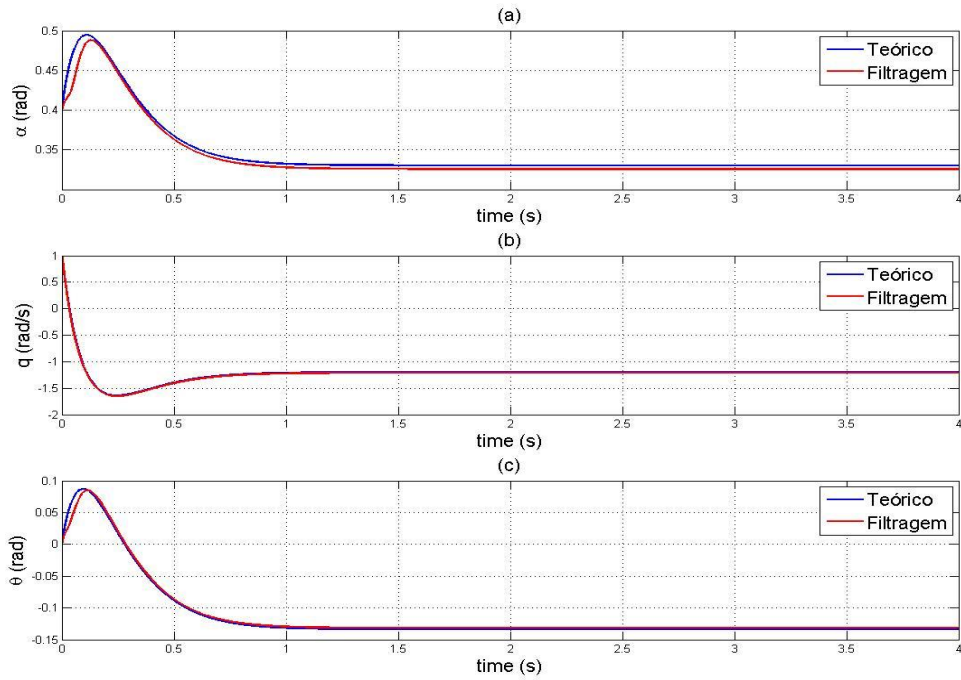


Fig. 4.1- Estados resultantes da filtragem de Kalman-Bucy, com a presença de perturbações constantes. (a): Ângulo de ataque, (b):Taxa de rolamento, (c): Ângulo de arfagem.

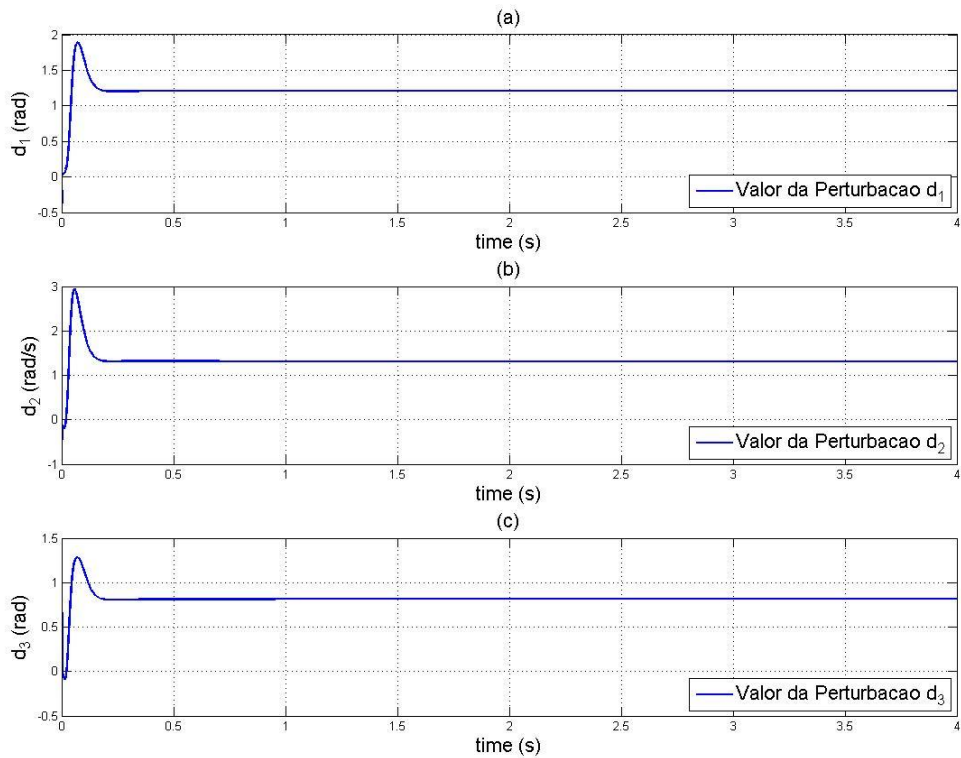


Fig. 4.2 - Perturbações resultantes da filtragem de Kalman-Bucy. (a): Perturbação d_1 , (b): Perturbação d_2 , (c): Perturbação d_3 .

Através da análise dos estados através da figura (Fig.4.1), é possível verificar que na generalidade, a estimação acompanha o comportamento do valor teórico do estado ao longo do tempo com alguma precisão. Observa-se uma pequena diferença na ordem dos $0.01rad$ ou seja cerca de 0.5° , para o caso específico do ângulo de ataque α (Fig.4.1(a)). Os resultados para a taxa de rolamento q (Fig.4.1(b)) mostram-se excelentes, na medida em que não existe praticamente diferença entre o valor teórico e o estimado. No ângulo de arfagem θ (Fig. 4.1(c)), observa-se uma diferença inicialmente na estimação que rapidamente se anula. Em geral os resultados podem-se afirmar como sendo excelentes, havendo diferenças muito pequenas entre o valor assumido como teórico e o da filtragem.

Relativamente às perturbações calculadas, através da figura (Fig.4.2) verifica-se que inicialmente os valores oscilam, mas que rapidamente convergem para o valor induzido no início. Lembre-se que foram induzidas perturbações de valor constante no sistema, nomeadamente:

$$d = [1.2 \quad 1.5 \quad 0.8]$$

E que se chegou a valores muito próximos, com excepção de d_2 (Fig.4.2.(b)). Observa-se que d_1 e d_3 ficaram com valores que rondam os $1.2rad$ e $0.8rad$, (Fig.4.2(a) e (b)), no entanto d_2 (Fig.4.2.(b)) anda por volta dos $1.3rad/s$, não chegando ao valor induzido inicialmente. Justificação para tal facto, poderá ser a exigência que esta variável (a taxa de rolamento) está sujeita, exactamente por se tratar duma taxa, e por isso depender factores mais exigentes (duas taxas) para o fornecimento do valor correcto.

O filtro foi capaz de calcular o valor dos estados e perturbações impostas inicialmente ao sistema com êxito.

4.2 Aplicação 2: Estimação das incertezas do modelo de um Voo longitudinal.

Esta aplicação consiste na estimação das incertezas do modelo, com base nas observações de um Voo longitudinal. Vai ser aplicado de novo o método desenvolvido no capítulo anterior e com ele espera-se obter o tipo de perturbações a que a aeronave esteve sujeita, durante o registo das observações.

Sendo o sistema com a presença de ruído do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + d(t) + \eta(t) \\ y &= Hx + \xi(t) \end{aligned}$$

Em que $\eta(t)$ e $\xi(t)$, representam ruído, e $d(t)$ qualquer valor de média não necessariamente igual a zero, e A - matriz de estado, C – matriz de observações do modelo u - controlo, x - estado.

O modelo consiste apenas na matriz de estado A ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -45.12 & -22.68 & -9.02 \\ -0.40 & 0.74 & -2.06 \end{bmatrix}, e \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ q \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Em que as observações são do tipo:

$$y = \begin{bmatrix} \theta - \alpha \\ q \end{bmatrix}$$

Onde os pontos iniciais $x_0 = [0.1 \ 0.3 \ \pi/6]$ (com pontos de equilíbrio $x_{eq} = [0 \ 0 \ 0]$) e $u_{eq} = [0 \ 0]$.

4.2.1 - Resultados

Antes de qualquer procedimento, uma vez que apenas temos a matriz de estado A, e que não temos B, foi verificada a observabilidade do sistema.

Através da caracterização por Kalman (Eq.2.5) e satisfeita a condição (Eq.2.6), foi verificado que o sistema é observável, por isso, faz sentido continuar com o projecto de um filtro.

Prosseguindo-se com a filtragem de Kalman, através da expressão (2.29), e aplicando o método desenvolvido para a estimação perturbações de um voo (3.9), foram obtidos os seguintes resultados:

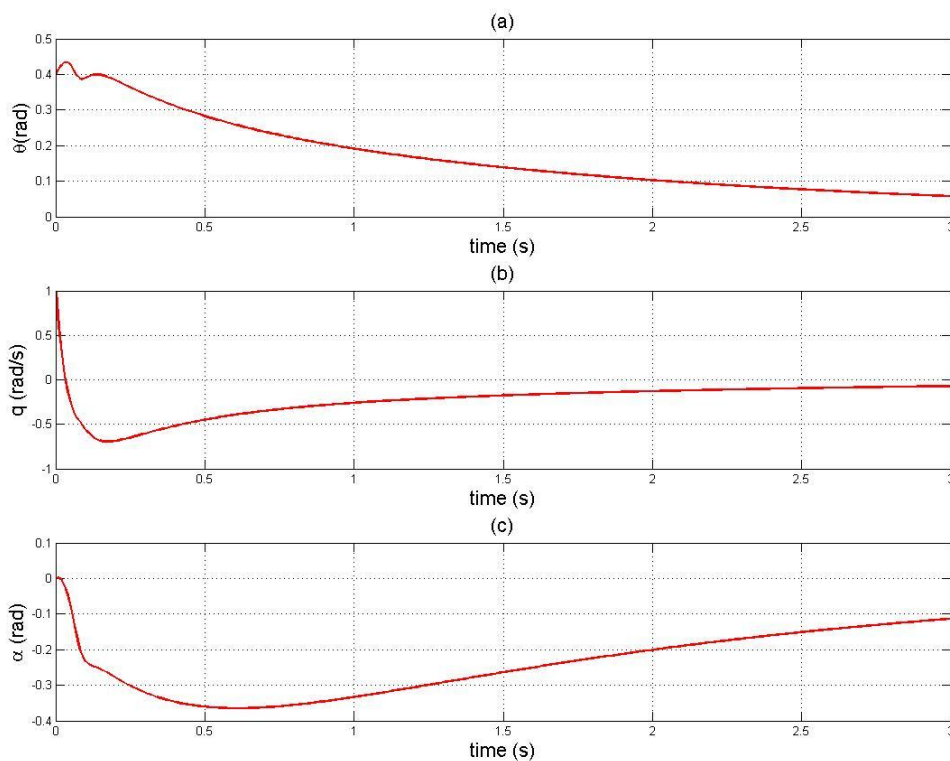


Fig. 4.3 - Estados resultantes após filtragem de Kalman-Bucy.(a): ângulo de arfagem,(b): taxa de rolamento, (c): ângulo de ataque.

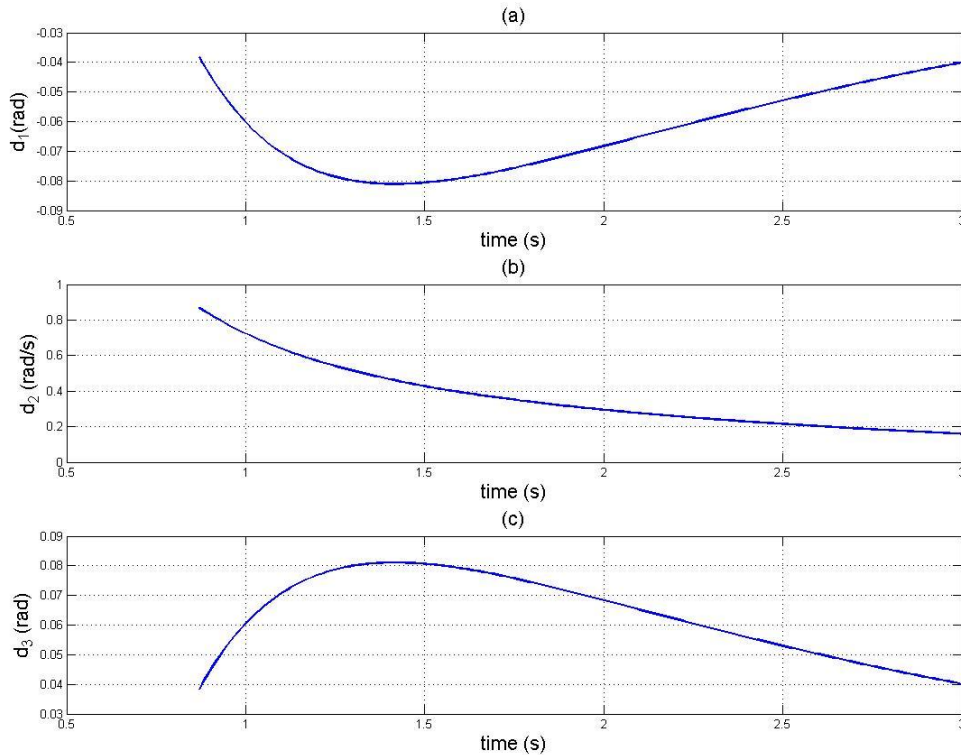


Fig. 4.4 - Perturbações resultantes após filtragem.(a): perturbação d_1 , (b): perturbação d_2 , (c): perturbação d_3 .

Através da análise do gráfico relativo à estimação dos estados (Fig.4.3), é possível observar os resultados referentes a cada variável. Recorde-se que estes valores estimados, já contêm as perturbações. A estimação referente ao ângulo de arfagem (Fig.4.3(a)) contém inicialmente oscilações até cerca de 0.25s, seguindo-se um comportamento mais linear. A taxa de rolamento (Fig.4.3(b)), sofre uma oscilação grande inicialmente, que estabiliza após 1s. Por fim a estimação do estado relativo ao ângulo de ataque (Fig.4.3 (c)) onde se verificam várias oscilações no decorrer do tempo desde 0 até -0.4 *rad*.

Passando às perturbações vistas na figura (Fig.4.4), observa-se que cada uma obedece a um tipo de comportamento diferente, seja ele mais linear, como é o caso da perturbação verificada para a taxa de rolamento (Fig.4.4(b)), ou menos linear como é o caso das restantes (Fig.4.4(a) e (c)). Tanto a perturbação d_1 como d_3 descrevem oscilações de pequena intensidade, como se pode observar na escala. Observa-se também através da análise da mesma figura, que apenas começamos a ter valores a partir de aproximadamente 0.8s. Tal acontece devido ao erro inicial cometido pelo filtro, e como tal até 0.8s, os valores devem ser ignorados. Apenas após 0.8s, é que o erro cometido pelo filtro é inferior a 0.01*rad*, obtendo-se assim apenas os resultados que interessam para o efeito. Todas as perturbações são não-lineares com diferentes declives, chegando a atingir 0.9 *rad/s* no caso da taxa de rolamento.

Apesar de haver perturbações, com vários comportamentos, o filtro foi capaz de estimar os estados com erro bastante baixo, e prever as diferentes perturbações presentes em cada variável.

4.3 Aplicação 3 : Estimação das taxas angulares de Euler.

Pode-se dizer que esta aplicação será o culminar e motivação de toda a pesquisa efectuada até este ponto. Esta consiste na aplicação prática do método desenvolvido no Capítulo III e sua comprovação. Vai ser construído um modelo, com a diferença de propositadamente se induzirem falhas, desta vez ao nível das equações, juntando ainda os ruídos e incertezas que já foram implementadas até agora. Este modelo vai estar incompleto, uma vez que se supõe a inexistência de sensores para o cálculo das taxas de manobra, que na prática se traduz na ausência de um *IMU* (*Inertial Measurement Unit*). Este é um aparelho usado frequentemente em veículos, seja em aeronaves, no espaço, em navios, e tudo o que possa ser alvo de acelerações, e é composto basicamente por um conjunto acelerómetros e giroscópios. Através deste aparelho, é possível saber o tipo de movimento que, por exemplo, uma aeronave está a descrever, através do fornecimento das acelerações medidas em determinado espaço de tempo. Tendo as acelerações podem-se calcular as derivadas correspondentes, de forma a obter as velocidades em cada eixo, e repetindo o processo, pode-se chegar à trajectória e posição descritas. Este aparelho sofre de acumulação de erro com o tempo, e por isso, normalmente funciona em paralelo com o Sistema de Posicionamento Global *GPS* de forma a anular o erro e calcular a posição exacta.

Sendo o sistema com a presença de ruído do tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + d(t) + \eta(t) \\ y &= Hx + \xi(t)\end{aligned}$$

Em que $\eta(t)$ e $\xi(t)$, representam ruído, e $d(t)$ qualquer valor de média não necessariamente igual a zero, e A - matriz de estado, C – matriz de observações do modelo u - controlo, x - estado.

Foi construído um modelo, com base na aeronave “Skunkworks” (Ver anexo) para o efeito, em que o vector de estado continha as equações, relativas às velocidades:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Onde u representa a velocidade em xx , v a velocidade em yy e w a velocidade em zz . E observações do tipo,

$$y = \begin{bmatrix} u \\ u + v \\ w \end{bmatrix}$$

Foram utilizadas as seguintes equações das velocidades,

$$\dot{u} = -\frac{QS}{m}(C_D \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_L \sin \alpha) + \frac{T}{m} - g \sin \theta - qw + rv \quad (4.2)$$

$$\dot{v} = -\frac{QS}{m}(C_D \sin \beta - C_y \cos \beta) + g \cos \theta \sin \phi - ru + pw \quad (4.3)$$

$$\dot{w} = -\frac{QS}{m}(C_D \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta - C_L \cos \alpha) + g \cos \theta \cos \phi - pv + qu \quad (4.4)$$

Contudo, foram ignorados os termos referentes as taxas e aos ângulos de Euler, de modo a que o sistema os assumisse como perturbações. Sendo assim as equações para a construção do modelo ficaram reduzidas,

$$\dot{u} = -\frac{QS}{m}(C_D \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_L \sin \alpha) + \frac{T}{m} \quad (4.5)$$

$$\dot{v} = -\frac{QS}{m}(C_D \sin \beta - C_y \cos \beta) \quad (4.6)$$

$$\dot{w} = -\frac{QS}{m}(C_D \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta - C_L \cos \alpha) \quad (4.7)$$

Sendo os termos ignorados acima (Eq.4.5 4.6 e 4.7), assumidos a partir de agora como parte das perturbações,

$$d_1 = -g \sin \theta - qw + rv \quad (4.8)$$

$$d_2 = g \cos \theta \sin \phi - ru + pw \quad (4.9)$$

$$d_3 = g \cos \theta \cos \phi - pv + qu \quad (4.10)$$

É de referir, que no trabalho anterior onde se calcularam perturbações, estas apresentavam valores com $\mu \neq 0$ e não se estava a ignorar nenhum termo referente às equações de estado. Deste modo, foi tido em conta que as perturbações d_n calculadas continham em si perturbações virtuais, (com $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$), ou seja:

$$d_n(t) = d_n(t) + \eta(t) \quad (4.11)$$

De seguida, dá-se lugar ao cálculo das taxas de manobra p , q e r , com base nas equações das perturbações achadas, em que, para efeitos de simplificação de substituiu os termos referentes aos ângulos por α_n correspondentes:

$$\begin{cases} d_1 = \alpha_1 - qw + rv \\ d_2 = \alpha_2 - ru + pw \\ d_3 = \alpha_3 - pv + qu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Utilizando as velocidades relativas a cada eixo e provenientes do filtro, preenche-se a matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Acontece que a matriz M é singular. Esta matriz é quadrada, não tem elementos na diagonal principal, é anti-simétrica e tem $\det(M) = 0$, o que implica que, quando se proceder ao cálculo das taxas, e for necessário achar a sua inversa, tal não vai ser possível. Este facto indica que estamos perante um problema mal-colocado (*ill-posed problem*), e como tal não é possível o cálculo da inversa de (4.13), sem recorrer à *Regularização* [8,9]. Para resolver este tipo de problemas, onde existe a falta de informação por parte de uma matriz singular ou mal-condicionada, ou onde se passa de valores bastante elevados para o cálculo de valores muito pequenos existem vários métodos de Regularização. Todos estes métodos têm obrigatoriamente que ser muito precisos nos seus cálculos, sendo que o seu valor residual é de grande importância,

na medida que pode influenciar valores futuros. Dos métodos existentes, foi escolhido a *Regularização de Tikhonov* [8], que consiste no seguinte:

Para a resolução de sistemas sobre-determinados de sistemas de equações lineares, normalmente é utilizado:

$$Mx = b \quad (4.14)$$

Que aplicando a norma, é conhecida como mínimos quadrados. Se M for mal-condicionada ou singular, transforma-se (4.14) na seguinte,

$$J(x) = \|Mx - b\|^2 + \|\lambda x\|^2 \quad (4.15)$$

Em que λ é um escalar, que tem como solução:

$$x_{opti} = (M^T M + \lambda^T I)^{-1} M^T b \quad (4.16)$$

O escalar λ será o factor escolhido para que o sistema consiga acompanhar os valores de saída referentes as taxas, uma vez que a matriz M não dispõe de inversa, e x_{opti} o valor do estado para o valor óptimo de λ . A este, factor dá-se o nome de *factor de Tikhonov*, que actualmente, ainda se encontra um problema aberto entre a comunidade científica. Contudo é possível calcular um valor de λ , que melhor satisfaz uma condição fixa de velocidades e estados, que consiste no ponto de viragem de uma curva em L (daí o nome *L-curve method*)[9].

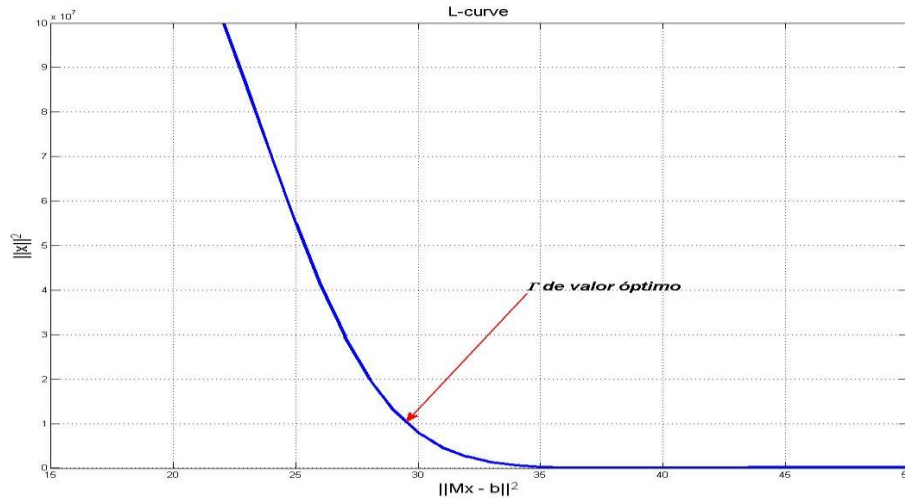


Fig. 4.5 - Visualização do factor λ que fornece a solução de Tikhonov.

O método baseou-se na aplicação da equação (4.16), numa função que minimizasse a diferença seguinte:

$$J(x_{opti}) = \|Mx_{opti} - b\|^2 \quad (4.17)$$

Em que b , consiste na diferença entre as perturbações d_n e os factores que têm em conta os ângulos de Euler α_n (Eq. 4.12) e M na matriz de singularidade.

Para comprovar o funcionamento deste método foram simulados dois voos utilizando o software “Xsens”, que actualmente, é a ferramenta computacional que produz melhores resultados em termos de simulações de voo. Sendo assim foram retiradas dois tipos de observações, referentes a cada voo.

No primeiro voo não havia ruído, o que fez com que todos os dados fossem mais lineares, e no segundo voo, induziu-se ruído, onde tudo se tornou mais oscilatório. Tudo isto para comprovar, se o método funcionava perante várias condições de voo.

Uma vez que estamos perante um filtro de Kalman-Bucy linear, houve alguma dificuldade em desempenhar um voo que usasse apenas um ponto de equilíbrio.

4.3.1 Resultados

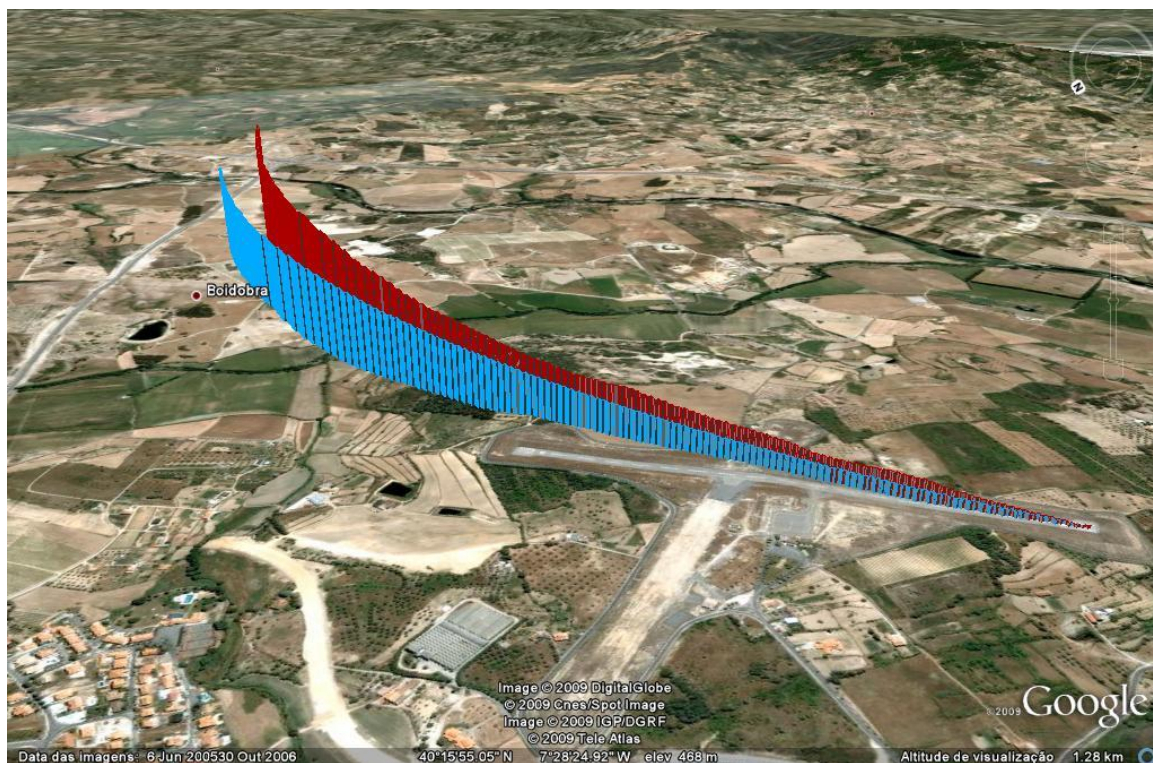


Fig. 4.6 - Sobreposição dos voos efectuados com e sem ruído (vermelho e azul respectivamente).

Na figura (Fig. 4.6) é possível observar as diferentes trajectórias descritas pela aeronave no decorrer das simulações. Em ambos os casos a aeronave percorreu aproximadamente o mesmo trajecto, com a diferença de que uma tem ruído e outra não.

Sendo assim, começou-se pelas observações fornecidas pelas simulações do voo sem ruído e filtraram-se de forma a obter os estados e perturbações. Recorde-se que se pegou nas equações das velocidades, e ignorados os termos referentes às taxas e ângulos (Eq. 4.8 4.9 e 4.10).

De seguida, procedeu-se ao cálculo das taxas (Eq. 4.12), tendo em conta o cálculo do factor de Tikhonov (Eq. 4.16).

4.3.1.1 Voo sem ruído

Os estados obtidos foram os seguintes:

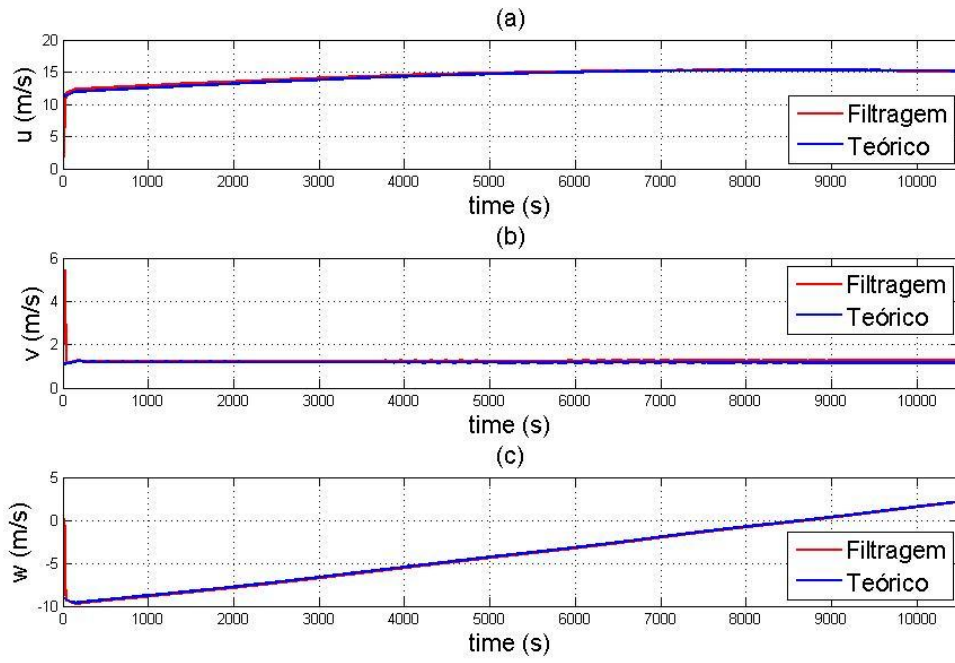


Fig. 4.7 - Estados estimados através das observações do voo sem ruídos. (a): velocidade da componente u , (b): velocidade da componente v , (c): velocidade da componente w .

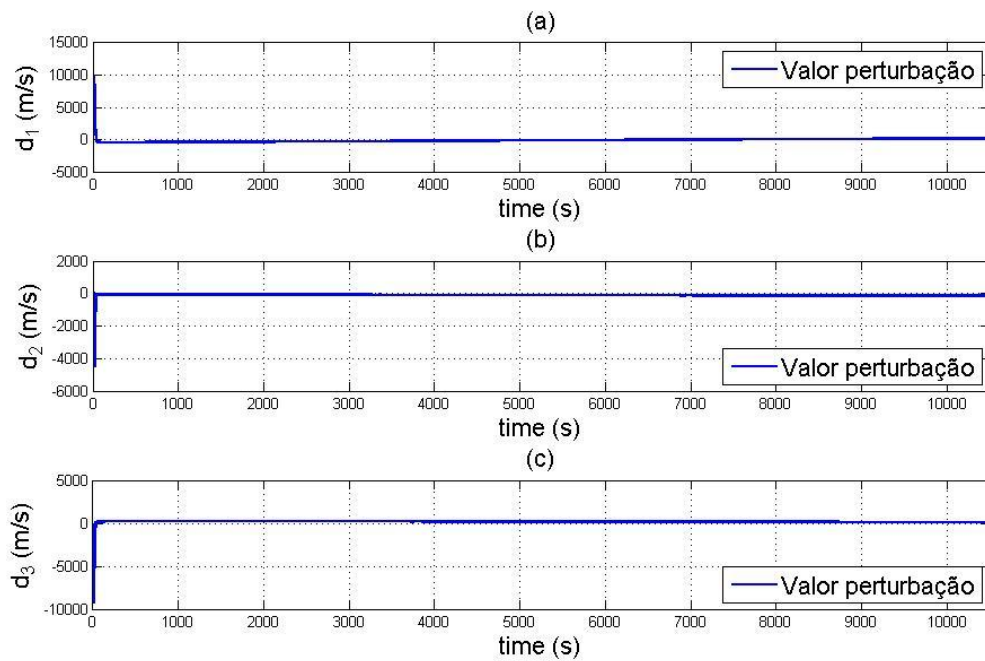


Fig. 4.8 - Perturbações obtidas através da estimação de estados do voo sem ruído. (a): Componente perturbação d_1 , (b): Componente perturbação d_2 , (c): Componente perturbação d_3 .

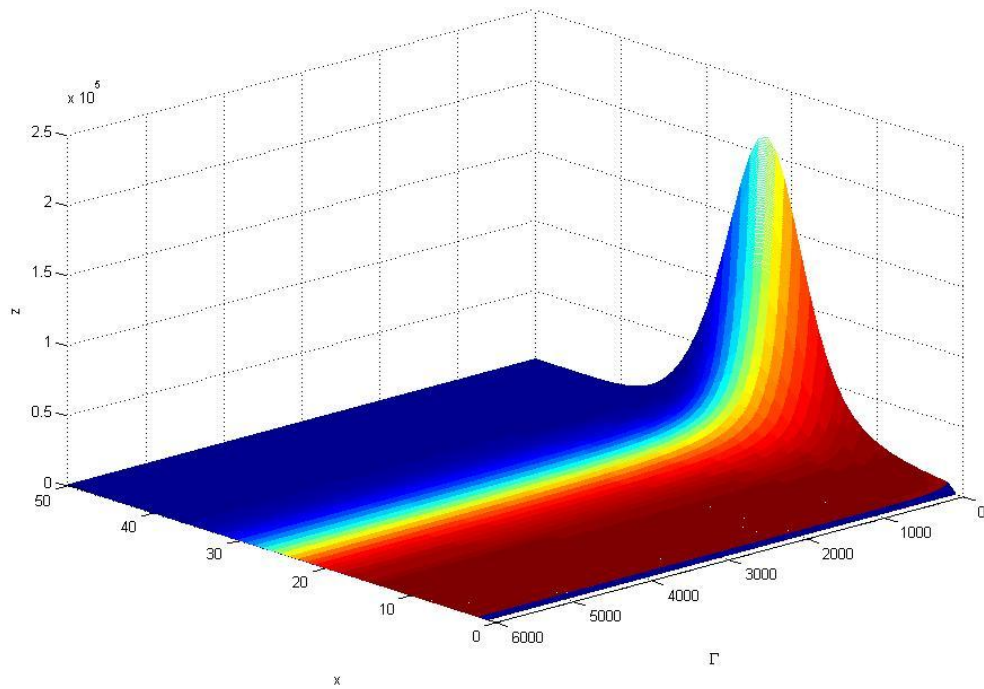


Fig. 4.9 - Existência de múltiplos factores de Tikhonov para cada valor de estado.

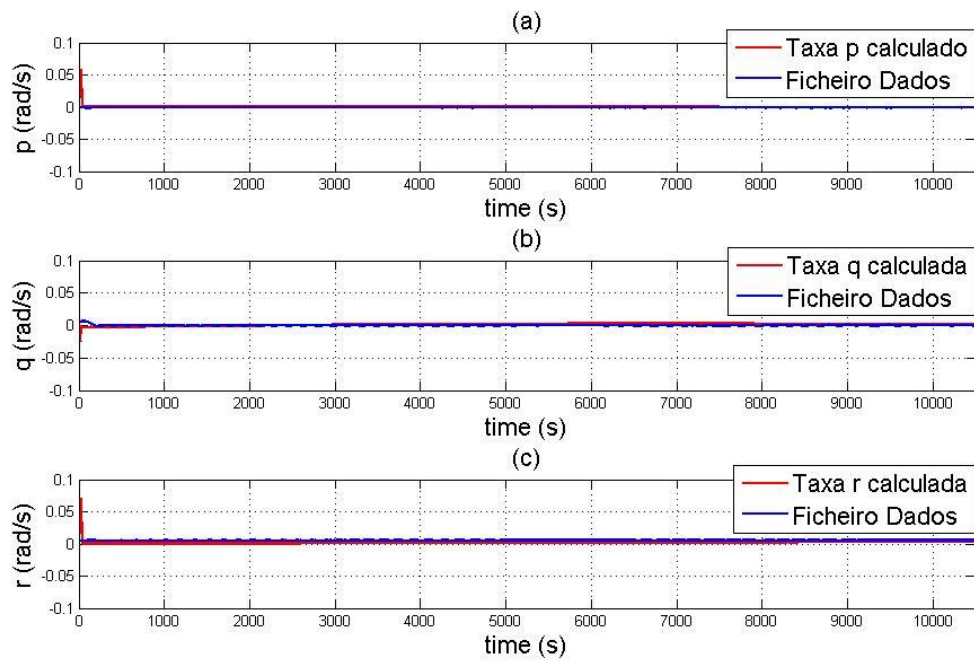


Fig. 4.10 - Taxas obtidas através das perturbações para o voo sem ruído, implementando Tikhonov. (a): Taxa de rolamento, (b): taxa de arfagem, (c): taxa de guinada.

Fazendo a análise das estimações (Fig 4.6) é possível reparar que existe um erro bastante baixo, que vai convergindo ao longo do tempo. A estimação através do filtro de Kalman-Bucy consegue acompanhar quase na perfeição as velocidades retiradas do ficheiro de dados do voo. Nota-se que a velocidade u (Fig.4.6(a)) segue com bastante precisão os valores de referência do

ficheiro de dados. A velocidade v vista na (Fig.4.6(b)), tem um comportamento linear, na ordem de $1m/s$. As pequenas oscilações que se verificam nos valores do ficheiro de dados, devem-se à constante tentativa de a aeronave se manter no mesmo ponto de equilíbrio. Finalmente em w (Fig.4.6(c)) observa-se um excelente resultado, praticamente com a sobreposição entre os valores do ficheiro e filtrados.

Uma vez que o erro cometido durante a filtragem é bastante baixo, e que estamos perante resultados excelentes foi possível continuar com o estudo para a estimação das taxas.

As perturbações encontradas (Fig.4.7), mostram um comportamento aproximadamente linear, e com valores na ordem dos -500 a $200m/s$. Em d_1 (Fig.4.7(a)), observa-se uma grande perturbação inicial, devido ao erro na filtragem, que rapidamente estabiliza para valores na ordem dos $-500m/s$. Estes valores vão progressivamente baixando até aproximadamente $-100m/s$ no tempo final. Para d_2 (Fig.4.7(b)), após a perturbação inicial, obtém-se valores mais baixos, na ordem dos $-50m/s$, que aumentam até cerca de $-150m/s$. Por fim, d_3 (Fig.4.7(c)) é a única perturbação com valores positivos, tendo valores inicialmente na ordem dos $200m/s$ e para o final $150m/s$.

Após estas perturbações, prosseguiu-se com a aplicação do método de *L-curve de Tikhonov*. Esta parte revelou-se mais complexa, uma vez que o método para encontrar a melhor solução ($\lambda_{\text{ótimo}}$), ainda não está completamente resolvido na matemática de hoje em dia. Foi feito um estudo, que se revelou demorado, que calculava os λ para todas as velocidades, de forma que revelasse se era possível arranjar uma função que aproximasse todos os λ , ou se havia alguma relação entre eles. Chegou-se por fim à conclusão, que é extremamente complicado arranjar um factor que satisfaça perfeitamente todos os parâmetros, assim como definir um meio para achar o valor óptimo de λ uma vez que existe um factor de escala de diferença entre pontos óptimos muito elevada, (Fig.4.9) tornando complicado o cálculo e a observação do ponto que melhor satisfaz os requisitos. Sendo assim, escolheu-se o factor que produzia melhores resultados, através de experimentação e com a análise dos resultados produzidos.

Foram obtidas as taxas e comparadas com as do ficheiro de dados. (Fig. 4.10). É possível observar que o erro foi bastante baixo, em todas elas, acompanhando o comportamento linear e constante ao longo do tempo, que as taxas dos valores do voo realizado seguiam. Para p (Fig 4.10(a)) observa-se que os valores rondam os $0rad/s$ e que os resultados estão praticamente sobrepostos com os do ficheiro do voo. Na taxa de arfagem (Fig. 4.10(b)), verifica-se o mesmo, também com um comportamento bastante linear até ao final. Por fim para r (Fig 4.10(c)) observa-se uma diferença inicial na ordem dos $0.0025rad/s$, que rapidamente se sobrepõe com os valores do ficheiro de voo.

Foram obtidas com bastante sucesso as taxas dos ângulos de Euler.

De seguida, foi-se verificar a capacidade do método quando sujeito a presença de ruído.

4.3.1.2 Voo com ruído

De seguida, foi realizado o estudo com o mesmo método, desta vez para um voo com ruído (a vermelho na Fig.4.6), para comprovar o método, e observar o seu comportamento perante sistemas mais exigentes. Deste modo, os resultados obtidos foram os seguintes,

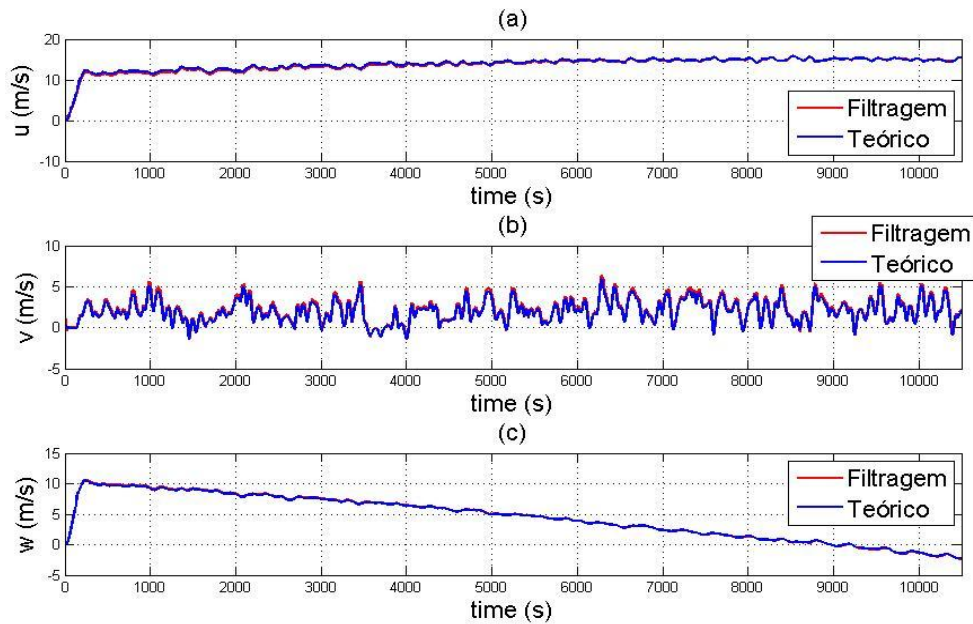


Fig. 4.11 - Estados estimados através das observações do voo com a presença de ruídos.(a): Velocidade correspondente a u , (b): Velocidade correspondente a v , (c): Velocidade correspondente a w .

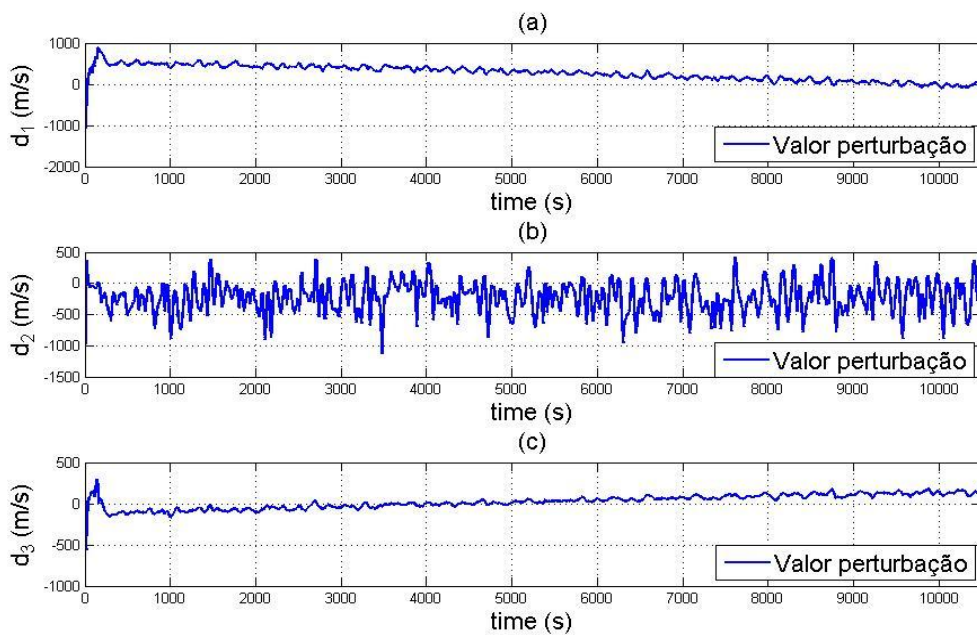


Fig. 4.12 - Perturbações obtidas através da estimação de estados, para o voo com a presença de ruído.(a): Perturbação d_1 , (b): Perturbação d_2 , (c): Perturbação d_3 .

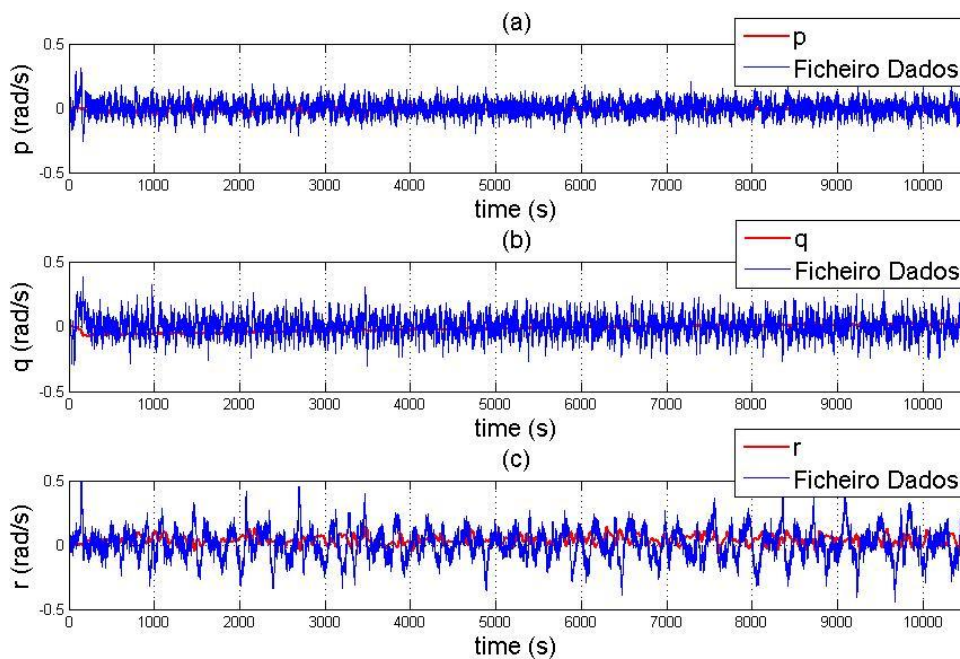


Fig. 4.13 - Taxas calculadas, após regularização de Tikhonov para o voo com a presença de ruído.(a): taxa de rolamento, (b): taxa de arfagem, (c): taxa de guinada.

Ao ser aplicada a estimação dos estados, relativos as observações com ruído (Fig. 4.11), é possível notar que se obteve mais uma vez resultados excelentes, observando-se uma sobreposição entre os valores estimados e os valores do voo. Para a velocidade u (Fig.4.11(a)), nota-se uma mínima diferença nos valores entre o filtrado e do ficheiro de dados, mas que posteriormente se sobrepõe. Apesar de estarmos perante um voo com bastante ruído, com especial atenção para a velocidade v (Fig.4.11(b)), o filtro foi capaz de calcular os estados com uma excelente exactidão. Para a velocidade w (Fig.4.11(c)) obteve-se igualmente uma sobreposição entre o ficheiro de dados e valores filtrados. Após estes excelentes resultados de filtragem, os cálculos que provenham da estimação dos estados podem ser feitos com a certeza que o filtro foi implementado da maneira mais correcta possível.

Na figura (4.12), é possível observar as perturbações presentes no modelo do voo com a presença de ruído. Observa-se que o seu valor é bastante elevado em relação as perturbações do voo sem ruído (Fig. 4.8), e que obedecem a uma distribuição muito mais oscilatória, tal como era de esperar. É possível observar que d_1 (Fig.4.12(a)) e d_3 (Fig.4.12(c)) descrevem aproximadamente o mesmo comportamento e tipo de distribuição com a diferença que um é crescente e a outro decrescente. A Perturbação d_1 sofre oscilações na ordem dos 500m/s inicialmente, diminuindo até valores finais de -50m/s. A perturbação d_2 observada no gráfico (Fig.4.12 (b)) segue o comportamento bastante oscilatório da velocidade v com valores de -1100-350m/s de pico a pico. Finalmente d_3 contem valores oscilatórios que vão desde os -150m/s inicialmente, até 150m/s.

Calculadas as perturbações, achar o factor de Tikhonov $\lambda_{\text{ótimo}}$, que fornecesse melhores resultados foi de igual modo experimental, onde se observou resultados bastante interessantes. Verificou-se que valores mais altos de λ , forneciam resultados mais lineares e por isso ausentes de

tanta oscilação, por outro lado valores de λ mais baixos, forneciam valores das taxas mais oscilatórios, que podem favorecer ou não o cálculo mais exacto dos ângulos de Euler. Persiste assim a dificuldade de, mais uma vez, definirmos o factor de Tikhonov óptimo que forneça melhores resultados ao sistema e até definir o que será melhor para o mesmo sistema: obter valores mais ou menos rígidos. Este facto poderia ser apreciado com a presença de ruído, uma vez que não existe essa dificuldade no outro sistema sem ruído estudado.

As taxas porém, são possuidoras de grandes oscilações, o que tornam o seu cálculo bastante mais complexo. No entanto, consegue-se observar um acompanhamento dos valores do voo, com um comportamento mais filtrado e menos oscilatório em todas as taxas (Fig. 4.13). Para q (Fig.4.13(a)), verifica-se a intensa oscilação fornecida pelo voo. No entanto, tal não foi impedimento para que fosse estimado de um modo bastante correcto a taxa de rolamento correspondente. Para a taxa de arfagem, o mesmo acontece (Fig.4.13(b)), apesar de uma pequena discrepância inicial, que após algum tempo converge. Para a r , uma vez que o ruído tem características diferentes dos restantes, torna-se mais fácil observar o acompanhamento oscilatório da taxa de derrapagem estimada, com os valores fornecidos do voo. (Fig. 4.13(c)).

Torna-se interessante verificar que a existência de ruído, faz com que o sistema funcione mais correctamente. Se tornarmos o sistema rígido, as taxas deixarão de ser as verdadeiras taxas, mas sim outras que não representam o comportamento do sistema, daí a importância do *factor óptimo de Tikhonov* que determina a rigidez com que estas irão ser calculadas.

Verifica-se por isso, a necessidade de um método mais eficaz para encontrar o factor de Tikhonov adaptado a este tipo de problemas, de modo a que este método possa ter aplicação em substituição dos sensores inerciais (*IMU*) poupando sensores, ou uma vez que a precisão destes se deteriora com o tempo, como complemento no melhoramento da precisão.

Conclusão

Neste trabalho foram estudados filtros para a estimação de incertezas de modelos. No Capítulo 1, foi visto que o filtro de Kalman, na sua forma original, era capaz de estimar variáveis correspondentes a uma distribuição com ruído Gaussiano com resultados bastante satisfatórios. Porém, estes são sistemas bastante conhecidos, e como tal não só se vão utilizar sistemas mais leves para a obtenção de resultados filtrados em electrónica, como é conhecido o tipo de distribuição que o ruído apresenta, fornecendo assim tudo o que um filtro de Kalman na sua forma linear e original precisa para o seu correcto funcionamento.

Uma vez que queremos lidar com sistemas de erro desconhecido, ficámos perante um problema que este filtro não resolveria, se não fosse aplicado o filtro de Kalman-Bucy adaptado. A sua capacidade de calcular estados que contenham ruídos de distribuição desconhecida, com recorrência ao espaço dual, permite lidar com ruídos com características desconhecidas, o que acontece em grande parte dos sistemas, uma vez que este espaço é de facto virtual. Kalman também mostrou, que para que seja possível o cálculo de estados o sistema tem de ser observável, o que foi verificado logo de princípio, em cada exemplo.

O método dos observadores, foi o primeiro caso a revelar as potencialidades deste novo filtro, revelando posteriormente que os resultados poderiam ser melhores, caso as matrizes de ganhos fossem adaptadas as situações em causa. Procedeu-se então a essa adaptação, e comparou-se com os *Observadores*, onde se concluiu que este seria o filtro a utilizar de futuro, dadas as suas potencialidades e baixos erros em relação a valores de referência.

Para a estimação de perturbações (§3) foi desenvolvido um método, que permitisse observar os valores interpretados como sendo incertezas, em conjunto com a filtragem de Kalman-Bucy.

Pretendendo estimar incertezas, e na perspectiva da validação do método, foram feitas algumas aplicações, incluindo um voo conhecido com perturbações conhecidas. Estas perturbações foram calculadas, e confirmaram-se com os valores conhecidos.

Por fim, foi desenvolvido um método capaz de estimar as taxas no decorrer de um voo verdadeiro, culminando na aplicação final. Após filtragem, com excelentes resultados, e cálculo de perturbações, foram achadas as taxas com sucesso, pelo que se pode afirmar que o método para a estimação das taxas angulares está desenvolvido e comprovado, tornando possível a sua aplicação na substituição, ou como complemento na precisão por redundância dos sensores inerciais.

Apesar de serem resultados excelentes, verificou-se que o método é demorado quando utilizada a abordagem por L-curve para a procura do factor de Tikhonov. Deste modo, surge a necessidade de analisar melhor futuramente a estrutura do modelo dinâmico utilizado, com o objectivo de achar mais facilmente o factor de Tikhonov que mais convém.

Bibliografia

- [1] Welch, G., Bishop G., "An Introduction to the Kalman Filter", *Chapel Hill*, TR95-041, July 2006.
- [2] Friedland, B, *Control System Design: An Introduction to State-space Methods*, McGraw-Hill, 2002.
- [3] Anderson, B. D. O., Moore, J. B, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Dover Publications, 2007.
- [4] Luenberger, D. G., "Observers for multivariable linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-11, 1966, pp.190-197.
- [5] Bousson, K., Apontamentos das aulas teóricas de Sistemas de Controlo de Voo, Departamento de Ciências Aeroespaciais, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Beira Interior, Portugal, 2009.
- [6] Matasov, A. I., "The Kalman-Bucy Filter Accuracy in the Guaranteed Parameter Estimation Problem with Uncertain Statistics", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.39, No.3, March 1994, pp.635-639.
- [7] Nelson, R. C., *Flight Stability and Automatic Control*, 2nd ed., McGraw-Hill, United States of America, 1998.
- [8] Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y., *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston & Sons, Washington D.C, 1977.
- [9] Hansen, P. C., O'Leary, D. P., "The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems", *SIAM J. Sci. Comput*, Vol.14, No.6, November 1993, pp.1487-1503.

Anexos

Os seguintes dados referem-se à aeronave *Skunkworks*.

Tabela A.1 - Dados da aeronave *Skunkworks*.

m	c	b	I_x	I_y	I_z	I_{xz}
[Kg]	[m]	[m]	[kg.m ²]	[kg.m ²]	[kg.m ²]	[kg.m ²]
3.364	0.434	1.6	0.5223	0.6608	0.1510	0

CL_0	CL_α	CL_{δ_e}	CL_q	CD_0	K_{CD}	CY_β	CY_{δ_a}	CY_{δ_r}
0.8	4.1137	0.4051	0.7716	0.2263	0.0959	8.5161	0	0.0993

Cm_0	Cm_α	Cm_{δ_e}	Cm_q	$Cm_{\dot{\alpha}}$	Cl_β	Cl_r	Cl_p	Cl_{δ_a}
-0.0944	-0.1047	-0.1929	-1.4222	-0.7317	0	0.1731	-0.6856	0

Cl_{δ_r}	Cn_β	Cn_p	Cn_{δ_a}	Cm_{δ_r}
-0.0293	0	-0.0090	0	-0.0293

Fig..A.1 - Tabela de Tracção para a aeronave *Skunkworks*.

