



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Ciências

## **Evolutas e Curvas do Tipo Luz**

**Boaventura Beleza dos Santos Nolasco**

Tese para a obtenção do Grau de Doutor em

**Matemática e Aplicações**

(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

**Covilhã, 22 de dezembro de 2017**



## **Dedicatória**

Em primeiro plano, a Deus, pelo dom da vida. E por outro, a obra é dedicada a uma singela homenagem à minha mãe (falecida), Luzia Nachipeco, e ao meu pai, Nolasco Chimuco, que jaz em cadeira de rodas a padecer de doença.



## **Agradecimentos**

Agradeço imenso a abertura que a Universidade da Beira Interior dá em garantir a formação às pessoas interessadas, em particular ao Professor Rui Pacheco, pelo seu empenho, dedicação, simplicidade e humildade, na construção desta tese.

À minha família (Valéria Nolasco - esposa; Jandira Nolasco, Alcides Nolasco e Janeth Nolasco - filhos) agradeço pelos sacrifícios que teve de consentir na minha ausência, sem ter mãos a medir, suportando as dificuldades da vida sem o meu acompanhamento completo.



## **Resumo**

Fazendo uso da projeção isotrópica para a geometria de Laguerre, estabelecemos uma correspondência entre curvas do tipo luz no espaço tridimensional de Minkowski e curvas no plano euclidiano. Descrevemos a geometria das curvas do tipo luz (tri-edro de Frenet-Serret, pseudo-comprimento de arco, pseudo-torção, pares de curvas associadas) em termos da curvatura das curvas planas correspondentes. Isto irá conduzir-nos a uma caracterização original de todas as curvas planas que são Laguerre-congruentes com uma curva dada.

## **Abstract**

We use the isotropic projection of Laguerre geometry in order to establish a correspondence between plane curves and null curves in the Minkowski 3-space. We describe the geometry of null curves (Frenet-Serret frame, pseudo-arc parameter, pseudo-torsion, pairs of associated curves) in terms of the curvature of the corresponding plane curves. This leads to an alternative description of all plane curves which are Laguerre congruent to a given one.





# Lista de Figuras

1.1	Traço da cúspide. . . . .	8
1.2	Espiral logaritmica. . . . .	10
1.3	A parábola e a sua curvatura . . . . .	12
1.4	A elipse e a sua curvatura . . . . .	13
1.5	Graficos da curva $(x, y) = (t, t^3)$ e da sua curvatura . . . . .	13
1.6	A elipse e as suas paralelas. . . . .	16
1.7	Astróide, a evoluta de uma elipse . . . . .	18
1.8	A curva de Neil, evoluta da parábola. . . . .	19
1.9	A curva hélice. . . . .	25
1.10	Um par de Bertrand . . . . .	31
2.1	Tipicidade causal de vetores . . . . .	35
2.2	Cone luz com vértice em $P$ . . . . .	36
2.3	Projeção isótrópica. . . . .	40
2.4	Curva $\alpha(t) = (\cosh(t), t^2, \sinh(t))$ . . . . .	41
2.5	Triedro de Frenet para uma curva do tipo luz . . . . .	43
2.6	O traço da curva $\alpha(t) = (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), \sqrt{2}t)$ . . . . .	44
2.7	A parábola e a sua $L$ -evoluta. . . . .	49
2.8	$L$ -evoluta de $r(t) = (\ln t, \sqrt{t^2 - 1} - \arctan(\sqrt{t^2 - 1}))$ . . . . .	51
2.9	$r$ e $\bar{r}$ são curvas $\mathcal{L}_I$ -congruentes . . . . .	53
2.10	Curva do tipo luz por $P$ desenvolve-se no interior de $C_P$ . . . . .	54
2.11	Duas curvas Laguerre-congruentes. . . . .	61



# Índice

<b>1</b>	<b>Curvas no espaço euclidiano</b>	<b>5</b>
1.1	Curvas parametrizadas e retas tangentes . . . . .	5
1.2	Comprimento de arco . . . . .	9
1.3	Curvas planas . . . . .	10
1.3.1	Curvatura de curvas planas . . . . .	10
1.3.2	Teorema fundamental das curvas no plano . . . . .	14
1.3.3	Curvas paralelas . . . . .	15
1.3.4	Evolutas e involutas . . . . .	17
1.4	Curvas no Espaço Euclidiano . . . . .	22
1.4.1	Triedro de Frenet-Serret . . . . .	22
1.4.2	Teorema fundamental de curvas no espaço . . . . .	25
1.4.3	Hélices generalizadas . . . . .	26
1.4.4	Curvas de Bertrand . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Evolutas e curvas do tipo luz no espaço de Minkowski</b>	<b>33</b>
2.1	Espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	34
2.2	Modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre . . . . .	39
2.3	Curvas no Espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	39
2.4	Curvas do tipo luz . . . . .	41
2.4.1	Pseudo-comprimento de arco . . . . .	41
2.4.2	Equações de Frenet-Serret . . . . .	42
2.4.3	Teorema fundamental das curvas do tipo luz . . . . .	46
2.5	$L$ -evolutas e curvas do tipo luz . . . . .	48
2.5.1	Definição de $L$ -evoluta . . . . .	48

2.5.2	Congruência de Laguerre . . . . .	51
2.5.3	Teorema de Tait para circunferências osculadoras de uma curva plana . . . . .	53
2.6	Função potencial de uma curva plana . . . . .	54
2.7	Derivada de Schwarz e curvas do tipo luz . . . . .	62
2.8	Função potencial da evoluta . . . . .	63
2.8.1	Hélices do tipo luz . . . . .	65
2.9	Curvas associadas . . . . .	67
2.9.1	Curvas de Bertrand do tipo luz no espaço de Minkowski . . . .	67
2.9.2	Curvas do tipo luz com vetor binormal comum . . . . .	68
2.9.3	Curvas <b>W</b> -direcionais . . . . .	72
<b>Bibliografia</b>		<b>77</b>



# Introdução

A geometria bidimensional de Laguerre é o estudo das propriedades do espaço das circunferências orientadas do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  invariantes para as *transformações de Laguerre*, isto é, as transformações que preservam o contacto orientado entre circunferências. Pontos de  $\mathbb{R}^2$  são interpretados como circunferências de raio zero. Um modelo eficiente e intuitivo para a geometria de Laguerre é o chamado *modelo de Minkowski* [3, 8]. Este modelo estabelece uma bijeção, designada por *projeção isotrópica* [3, 8], entre pontos do espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  e circunferências orientadas do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . O grupo das transformações de Laguerre é identificado com o subgrupo do grupo das transformações afins de  $\mathbb{R}_1^3$  que é gerado pelas isometrias lineares lorentzianas, translações e homotetias de  $\mathbb{R}_1^3$ .

Cada curva plana  $r$  define uma família de circunferências (as circunferências osculadoras) e esta família, através da projeção isotrópica, define uma curva em  $\mathbb{R}_1^3$ , que designaremos por *L-evoluta* de  $r$ . Prova-se que esta curva é uma curva do tipo luz. Reciprocamente, qualquer curva do tipo luz é a *L-evoluta* de alguma curva no plano. O objetivo geral desta tese é relacionar a geometria das curvas do tipo luz com geometria das curvas planas que lhes correspondem.

A importância das subvariedades degeneradas de uma variedade semi-riemanniana é reconhecida tanto por matemáticos e como por físicos teóricos. Existe uma vasta literatura sobre tais subvariedades (ver, por exemplo, as monografias [5, 6]). Vários autores têm também investigado o caso particular de curvas do tipo luz no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  (ver [9, 15, 17] para detalhes e referências). Estas curvas exibem propriedades muito particulares. Por exemplo, não existem curvas fechadas do tipo luz. Por outro lado, para curvas do tipo luz não existe uma definição natural de comprimento de arco, uma vez que o seu vetor tangente é do tipo luz e, como tal,

não pode ser normalizado. Alternativamente, para curvas do tipo luz distingue-se um parâmetro, designado por *pseudo-comprimento de arco*, que resulta de normalizar a segunda derivada da curva. Fazendo uso deste parâmetro, podemos então estabelecer um referencial móvel associado a curvas do tipo luz análogo ao triedro de Frenet-Serret para curvas no espaço euclidiano. Das relações entre os campos vectoriais que formam esse referencial, também designado por triedro de Frenet-Serret, e as suas derivadas, emerge uma segunda quantidade associada uma curva do tipo luz: a *pseudo-torção*.

Pretendemos descrever a geometria das curvas do tipo luz (triedro de Frenet-Serret, pseudo-comprimento de arco e pseudo-torção) em termos da curvatura das curvas planas que lhes correspondem. Este propósito irá conduzir-nos à noção de *função potencial* (ver definição 2.23). Uma função potencial, juntamente com uma certa condição inicial, determina completamente uma curva do tipo luz e a correspondente curva plana através das fórmulas do teorema 2.26. Como consequência, iremos obter uma caracterização original de todas as curvas que são *Laguerre-congruentes* com uma curva  $r$  dada (ver observação 2.28). Esta caracterização pode ser resumida da seguinte forma:

1. partindo de uma curva plana  $r$ , calculamos a pseudo-torção  $\tau$  da sua  $L$ -evoluta;
2. a menos de mudança de escala, a pseudo-torção é invariante para transformações de Laguerre de  $r$  e as funções potenciais associadas às curvas do tipo luz com pseudo-torção  $\tau$  são precisamente as soluções de uma certa equação diferencial ordinária de segunda ordem;
3. usando as fórmulas do teorema 2.26, construimos a partir destas soluções as curvas planas correspondentes;
4. desta forma, obtemos todas as curvas planas que são Laguerre-congruentes com  $r$ .

O problema de determinar condições necessárias e suficientes para duas famílias de circunferências orientadas estarem relacionadas por uma transformação de Laguerre

foi estudado por Tadahiko Kubota [14], em 1924, para o caso destas famílias definirem em  $\mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo espaço. De notar que os seus métodos não envolvem diretamente conceitos como curvatura, torção, triedro de Frenet e comprimento de arco para curvas do tipo espaço ou do tipo tempo em  $\mathbb{R}_1^3$ .

Iremos também descrever, em termos de funções potenciais, algumas classes de curvas associadas do tipo luz, nomeadamente: *pares de Bertrand* [1, 15], curvas do tipo luz com retas binormais comuns [12], e curvas *binormal-direcionais* [4]. Provaremos dois resultados interessantes sobre curvas do tipo luz:

1. uma hélice do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco admite uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco com retas binormais comuns em pontos correspondentes se, e só se, a sua pseudo-torção for nula (ver corolário 2.41);
2. dada uma curva do tipo luz  $\alpha$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco, existe (a) uma hélice do tipo luz  $\bar{\alpha}$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco e com pseudo-torção  $\bar{\tau} = 0$  e (b) uma bijeção entre pontos das duas curvas  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ , tais que, em pontos correspondentes, as retas tangentes são paralelas (ver teorema 2.45).

O trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma. No primeiro capítulo vamos relembrar alguns aspetos clássicos da geometria das curvas no plano e no espaço euclidianos. Uma vez que no segundo capítulo será estudada a relação entre a geometria das curvas planas e a geometria das curvas do tipo luz no espaço de Minkowski, precisamos de nos deter com mais detalhe em certas propriedades, por vezes menos referidas na literatura, das curvas planas. Em particular, apresentaremos o conceito de evoluta e involuta de uma curva plana, dando variados exemplos que mais tarde nos serão úteis e explicitando fórmulas para as suas curvaturas e comprimento de arco. Em relação às curvas no espaço iremos realçar a importância do triedro de Frenet e as propriedades das hélices generalizadas e das curvas de Bertrand.

No segundo capítulo, apresentamos os resultados originais deste trabalho. No entanto, antes disso começamos por estabelecer o modelo de Minkowski para a geo-



metria de Laguerre e, de seguida, apresentamos alguns aspectos já conhecidos sobre curvas do tipo luz no espaço de Minkowski. De referir, que a maioria os resultados originais foram recentemente publicados em [13]. Nesta tese, procuraremos completar esses resultados com mais exemplos e detalhes.

# Capítulo 1

## Curvas no espaço euclidiano

Neste capítulo vamos relembrar alguns aspectos da geometria diferencial das curvas no plano e no espaço euclidianos. Uma vez que no segundo capítulo será estudada a relação entre a geometria das curvas planas e a geometria das curvas do tipo luz no espaço de Minkowski, precisamos de nos deter com mais detalhe em certas propriedades, por vezes menos referidas na literatura, das curvas planas. Em particular, apresentaremos o conceito de evoluta e involuta de uma curva plana, dando variados exemplos que mais tarde nos serão úteis e explicitando fórmulas para as suas curvaturas e comprimento de arco. Em relação às curvas no espaço, faremos um tratamento mais abreviado, realçando, no entanto, a importância do triedro de Frenet e as propriedades das hélices generalizadas e das curvas de Bertrand, uma vez que, para curvas do tipo luz, existem conceitos análogos a estes. Para mais detalhes, o leitor poderá consultar as referências [20, 21].

### 1.1 Curvas parametrizadas e retas tangentes

Começamos por relembrar a definição usual de curva parametrizada.

**Definição 1.1.** Uma *curva parametrizada de classe  $C^r$*  é uma função  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . A imagem  $r(I) \subseteq \mathbb{R}^n$  é designada por rasto, traço ou caminho da curva  $r$ .

Para  $t \in \mathbf{I}$ , denotamos as coordenadas de  $r(t)$  por

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dots, r_n(t))$$

Com o objectivo de simplificar a exposição, entenderemos por *curva* uma curva parametrizada de classe  $C^r$  com  $r$  tão elevado quanto o necessário em cada contexto. Por exemplo, quando discutirmos a noção de curvatura, assumimos que as nossas curvas são de classe  $C^2$ .

*Exemplo 1.1.* Achemos uma parametrização da reta  $y - 2x = 1$ . O vetor diretor da reta é  $\mathbf{v} = (1, 2)$  e um ponto genérico da reta  $(x, y)$  sobre a reta é dado por

$$(x, y) = (0, 1) + t(1, 2) = (t, 2t + 1),$$

com  $t \in \mathbb{R}$ . Desta feita, temos  $r(t) = (t, 2t + 1)$ . Esta é uma das parametrizações da reta  $y - 2x = 1$ . Uma curva não tem só uma parametrização. Por exemplo, para a reta em causa, podemos também utilizar

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + t(3, 6)$$

ou seja,  $\tilde{r}(t) = (3t - \frac{1}{2}, 6t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

*Exemplo 1.2.* Dada a curva  $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , passemos a analisar o respetivo traço: uma vez que

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t,$$

elevando as três equações anteriores ao quadrado e somando, obtemos  $x^2 + y^2 = z^2$ . Assim, o traço desta curva está sobre a superfície cónica  $x^2 + y^2 = z^2$ .

*Exemplo 1.3.* Consideremos agora a curva

$$r(t) = (R \cos t + R \sin^2 t, R \sin t - R \sin t \cos t),$$

com  $R > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ , e encontremos a equação cartesiana do seu traço. Temos

$$x = R \cos t + R \sin^2 t, \quad y = R \sin t - R \sin t \cos t,$$

ou seja,

$$x - R = R \cos t(1 - \cos t), \quad y = R \sin t(1 - \cos t). \quad (1.1)$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos

$$\frac{y}{x-R} = \frac{R \sin t}{R \cos t}.$$

Sabe-se que  $\tan t = \pm \sqrt{\sec^2 t - 1}$ , logo, recorrendo à equação anterior

$$\frac{y}{x-R} = \pm \sqrt{\sec^2 t - 1}.$$

Tendo a necessidade de obter o  $\cos t$ , a partir da primeira relação de (1.1), vem

$$R \cos^2 t - R \cos t + x - R = 0,$$

logo

$$\cos t = \frac{R \pm \sqrt{5R^2 - 4Rx}}{2R}.$$

Este resultado pode ser empregue à expressão  $\tan t = \pm \sqrt{\sec^2 t - 1}$ , tal como se segue

$$\frac{y}{x-R} = \pm \sqrt{\frac{4R^2}{(R \pm \sqrt{5R^2 - 4Rx})^2} - 1}$$

Finalmente, elevando ao quadrado esta relação ao quadrado,

$$\frac{y^2 + (x-R)^2}{(x-R)^2} = \frac{4R^2}{R \pm \sqrt{(5R^2 - 4Rx)^2}} \quad (1.2)$$

Assim, o traço da nossa curva é dado pela equação (1.2).

Neste trabalho, iremos trabalhar com curvas regulares.

**Definição 1.2.** Uma curva  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *regular* se  $r'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ . Neste contexto, temos:

$$r'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), r'_3(t), \dots, r'_n(t)) \neq 0,$$

para todo  $t \in I$ .

*Exemplo 1.4.* Verifiquemos se as curvas abaixo são regulares ou não.

1.  $r(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\tilde{r}(t) = (t^2, t^3)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

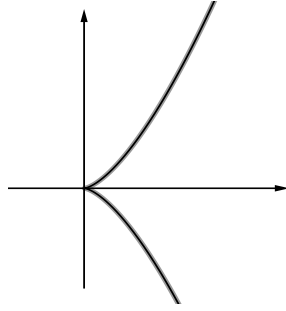


Figura 1.1: Traço da cúspide.

Para o primeiro caso, cujo traço é uma parábola, temos  $r'(t) = (1, 2t)$ . Logo  $r$  é uma curva regular porque a primeira componente da sua derivada é sempre diferente de zero. No segundo caso,  $\tilde{r}(t) = (2t, 3t^2)$ , logo  $\tilde{r}$  não é regular, pois  $\tilde{r}'(0) = 0$ .

O traço da curva  $\tilde{r}$  é a cúspide de equação  $x^3 - y^2 = 0$ , em relação à qual o ponto  $(0, 0)$  é um ponto *anguloso*, conforme a figura 1.1.

**Definição 1.3.** Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva regular e  $t_0 \in \mathbf{I}$ . A  $r'(t_0)$  chamaremos de *vector tangente* a  $r$  no ponto  $r(t_0)$ .

Se o vetor tangente a uma curva  $r$  for constante, o traço de  $r$  é uma reta. Por exemplo, a curva  $r(t) = (t, 2t + 1)$  tem vetor tangente constante  $r'(t) = (1, 2)$ , para todo  $t \in \mathbf{I}$ , e o seu traço é a reta  $y - 2x = 1$ .

**Definição 1.4.** Designa-se por *reta tangente* à curva regular  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $r(t_0)$ , com  $t_0 \in I$ , a reta  $T_{t_0}$  gerada pelo vetor tangente  $r'(t_0)$ :

$$T_{t_0} = \{P \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = r(t_0) + \lambda r'(t_0)\}.$$

*Exemplo 1.5.* Para acharmos a equação da reta tangente à curva  $x^2 + y^2 = 1$ , vamos utilizar a parametrização  $r(t) = (\cos t, \sin t)$ . Assim, o vetor tangente em  $r(t)$  é  $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ; prosseguindo, averiguamos que um ponto  $(x, y)$  sobre a reta tangente  $T_t$  satisfaz o seguinte

$$(x, y) = (\cos t, \sin t) + \lambda(-\sin t, \cos t)$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Daqui tiramos a equação cartesiana da reta tangente  $T_t$ :

$$x \cos t + y \sin t - 1 = 0.$$

## 1.2 Comprimento de arco

Dados dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n$ , denotamos por  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  o seu produto interno usual:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

A norma de um vetor  $\mathbf{u}$  será denotada por  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ .

**Definição 1.5.** O *comprimento de arco* da curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  com base no instante  $t_0$ , é a função bijetiva  $h : \mathbf{I} \rightarrow h(\mathbf{I})$  definida por:

$$h(t) = \int_{t_0}^t |r'(u)| du. \quad (1.3)$$

**Definição 1.6.** Uma curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se *parametrizada por comprimento de arco* se o vetor tangente tiver norma constante igual a 1, isto é,  $|r'(t)| = 1$ .

Qualquer curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco. Seja  $s = h(t)$  dado por (1.3) e defina-se  $\alpha = r \circ h^{-1}$ . Vamos verificar que  $|\alpha'(s)| = 1$  para todo  $s$ . Pela regra da derivação da função composta, temos

$$\alpha'(s) = (h^{-1})'(s)r'(h^{-1}(s)).$$

Aplicando o módulo e a regra da derivação da função inversa, obtemos:

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)| &= \left| \left( h^{-1}(s) \right)' \right| \cdot \left| r'(h^{-1}(s)) \right| = \frac{1}{\left| h'(h^{-1}(s)) \right|} \cdot \left| r'(h^{-1}(s)) \right| \\ &= \frac{1}{\left| h'(t) \right|} \cdot \left| r'(t) \right| = \frac{1}{\left| r'(t) \right|} \cdot \left| r'(t) \right| = 1. \end{aligned}$$

*Exemplo 1.6.* Considere-se a curva  $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$  com  $t \in \mathbb{R}$ , uma curva cujo traço é uma espiral logaritmica. Vamos determinar o seu comprimento de arco.

Para tal, temos  $r'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$  e

$$|r'(t)| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos t)} = \sqrt{2}e^t$$

O comprimento de arco com base em  $t_0 = 0$  é dado por

$$s = h(t) = \int_0^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^u \Big|_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

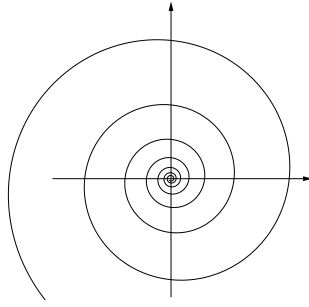


Figura 1.2: Espiral logaritmica.

Invertendo  $h$ , temos  $t = \ln \left( \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$ , com  $s \in ]-\sqrt{2}, +\infty[$ . Assim, a reparametrização da espiral logaritmica por comprimento de arco é dada por

$$\alpha(s) = r \left( h^{-1}(s) \right) = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \sin \left( \ln \left( \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$

*Exemplo 1.7.* Dada a curva  $r(t) = (t, \frac{t^2}{2})$ , procuremos o seu comprimento de arco. Resolvendo temos:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (1, t), \quad |r'(t)| = \sqrt{1+t^2} \\ s = h(t) &= \int_0^t \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2} (t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})) \end{aligned}$$

*Exemplo 1.8.* Achemos o comprimento de arco da hélice  $r(t) = (R \cos t, R \sin t, at)$ , com  $R$  uma constante positiva, e reparametrizemos a referida curva por comprimento de arco. Uma vez que  $r'(t) = (-R \sin t, R \cos t, a)$  e  $|r'(t)| = \sqrt{R^2 + a^2}$ , temos

$$s = h(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{R^2 + a^2} du = \sqrt{R^2 + a^2} (t - t_0)$$

Fazendo a reparametrização, vem:

$$\beta(s) = r \circ h^{-1}(s) = \left( R \cos \left( \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right), R \sin \left( \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right), \frac{as}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right).$$

## 1.3 Curvas planas

### 1.3.1 Curvatura de curvas planas

Consideremos uma curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por comprimento de arco. Denotamos por  $\mathbf{T}(s)$  o vetor unitário tangente à curva no instante  $s$ , isto é,  $\mathbf{T}(s) =$

$r'(s)$ . Seja  $\mathbf{N}(s)$  o vetor unitário normal à curva no instante  $s$ , obtido por rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário do vetor  $\mathbf{T}(s)$ . Designa-se o par de vetores  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$  por *diedro de Frenet* (no instante  $s$ ). Uma vez que  $\mathbf{T}$  é unitário, temos  $1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ . Derivando pela regra de Leibniz e aplicando a simetria do produto interno, obtemos

$$0 = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}'.$$

Logo, os vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  são perpendiculares em cada instante, ou seja,  $\mathbf{T}'$  é proporcional a  $\mathbf{N}$ .

**Definição 1.7.** A *curvatura* de  $r$  no instante  $s$  é a quantidade  $k(s)$  tal que  $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$  (A curvatura pode tomar valores negativos ou positivos conforme a curva “vire” à direita ou à esquerda).

Pelo mesmo argumento, observe-se que  $\mathbf{N}'$  é proporcional a  $\mathbf{T}$ . Assim, derivando a igualdade  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ , vamos obter

$$\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s).$$

Seja  $\theta(s)$  ângulo formado pelo vetor  $\mathbf{T}(s)$  e o eixo horizontal  $OX$ , que designaremos por *ângulo de viragem*. Vamos ver de seguida que a curvatura pode ser interpretada como a taxa de variação do ângulo  $\theta$  em relação ao comprimento de arco  $s$ , isto é,  $k = \theta'(s)$ . Temos:

$$\mathbf{T}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \mathbf{N}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)). \quad (1.4)$$

Derivando

$$\mathbf{T}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \quad (1.5)$$

Da definição de curvatura e aplicando (1.4) e (1.5), obtemos

$$k(s) = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \theta'(s). \quad (1.6)$$

Consideremos agora uma curva  $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$  que não esteja necessariamente parametrizada por comprimento de arco. Seja  $s = h(t)$  o parametro comprimento de arco e reparametrizemos  $r$  por comprimento de arco:  $\alpha(s) = r(h^{-1}(s))$ . Então, pela derivação da função composta, temos

$$\mathbf{T}(h(t)) = \frac{r'(t)}{h'(t)} = \frac{1}{h'(t)}(r'_1(t), r'_2(t)),$$



e, consequentemente,

$$\mathbf{N}(h(t)) = \frac{1}{h'(t)}(-r'_2(t), r'_1(t)).$$

Derivando novamente  $\mathbf{T}$ , obtemos

$$\mathbf{T}'(h(t)) = \frac{1}{h'(t)^2}(r''_1(t), r''_2(t)) - \frac{h''(t)}{h'(t)^3}(r'_1(t), r'_2(t)).$$

Assim,

$$k(h(t)) = \mathbf{T}'(h(t)) \cdot \mathbf{N}(h(t)) = \frac{r'_1(t)r''_2(t) - r''_1(t)r'_2(t)}{h'(t)^3} = \frac{r'_1(t)r''_2(t) - r''_1(t)r'_2(t)}{|r'(t)|^3}.$$

$$k = \frac{\det(r', r'')}{|r'|^3}. \quad (1.7)$$

*Exemplo 1.9.* Consideremos a curva  $r(t) = (t, t^2)$ . Temos  $r'_1(t) = 1$ ,  $r'_2(t) = 2t$ ,  $r''_1(t) = 0$  e  $r''_2(t) = 2$ . Logo a curvatura é  $k = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$ . A curvatura obtida é uma função de  $t$  sempre positiva: a curva  $r$  é *côncava* para todo o  $t$ .

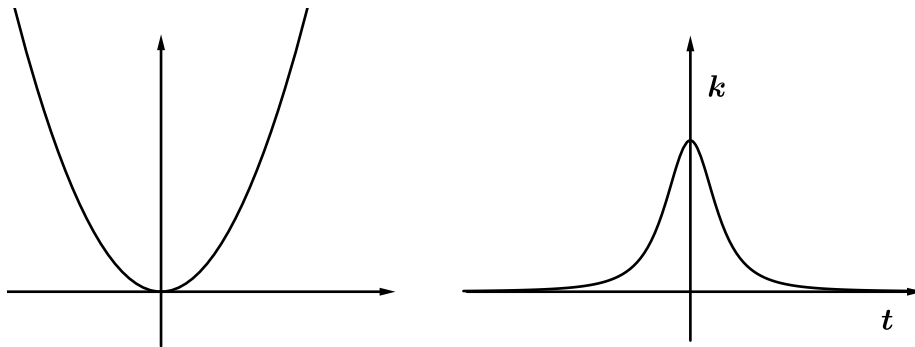


Figura 1.3: A parábola e a sua curvatura

*Exemplo 1.10.* Consideremos agora a parametrização  $r(t) = (4 \cos t, 2 \sin t)$  da elipse  $x^2 + 4y^2 = 16$ . Temos

$$r'_1(t) = -4 \sin t, \quad r'_2(t) = 2 \cos t, \quad r''_1(t) = -4 \cos t, \quad r''_2(t) = -2 \sin t$$

Então, a curvatura expressa-se do seguinte modo:

$$k = \frac{8 \sin^2 t + 8 \cos^2 t}{(16 \sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{8(4 \sin^2 t + 1 - \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + 3 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

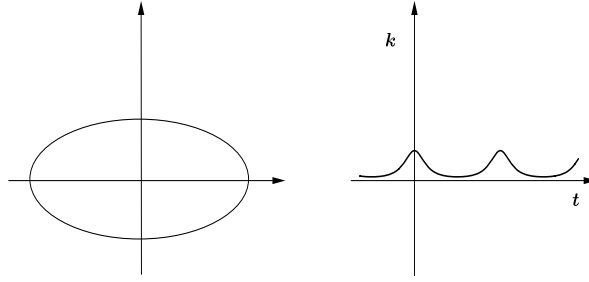


Figura 1.4: A elipse e a sua curvatura

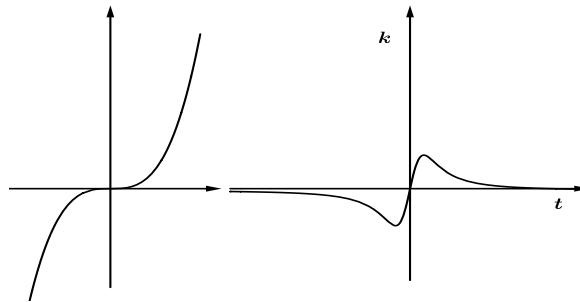
*Exemplo 1.11.* Finalmente, para a cúbica  $r(t) = (t, t^3)$ , temos:

$$r'_1 = 1, \quad r''_1 = 0, \quad r'_2 = 3t^2, \quad r''_2 = 6t.$$

Logo

$$k = \frac{6t - 0}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

Desta situação, deduz-se que: se  $t < 0$  a curva é *convexa* (curvatura negativa); se  $t > 0$  a curva é *côncava* (curvatura positiva); se  $t = 0$ , o ponto  $(0,0)$  é *ponto de inflexão*.

Figura 1.5: Graficos da curva  $(x, y) = (t, t^3)$  e da sua curvatura

De seguida apresentamos um lema que nos será útil no segundo capítulo.

**Lema 1.8.** *Seja  $r : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco  $t$ , com curvatura  $k : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $\bar{r} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva definida por  $\bar{r}(t) = r(b+a-t)$  (uma reparametrização de  $r$  com orientação oposta) com curvatura  $\bar{k} : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, para cada  $t$ ,  $\bar{k}(t) = -k'(b+a-t)$  e  $\bar{k}'(t) = k(b+a-t)$ .*

**Demonstração:** Aplicando  $n$  vezes a regra da derivação da função composta, temos

$$\bar{r}^{(n)}(t) = (-1)^n r^{(n)}(b+a-t),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $t$  é também um parâmetro comprimento de arco para  $\bar{r}$  e, tendo em conta (1.7),  $\bar{k}(t) = -k(b + a - t)$ . Derivando (1.7), obtemos

$$\bar{k}'(t) = \det(\bar{r}'(t), \bar{r}'''(t)) = \det(r'(b + a - t), r'''(b + a - t)) = k'(b + a - t).$$

### 1.3.2 Teorema fundamental das curvas no plano

A menos de movimento rígido, a curvatura determina a respetiva curva.

**Teorema 1.9** (Teorema fundamental das curvas no plano.). *Seja  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuja curvatura  $k$  coincide com  $f$ , isto é,  $k = f$ .*

*Se  $\bar{r} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é outra curva parametrizada por comprimento de arco e a sua curvatura é também dada por  $f$ , então existe um movimento rígido  $M$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\bar{r}(s) = M(r(s))$  para todo  $s \in I$ .*

**Demonstração:** Obtenhamos uma curva  $r$  parametrizada por comprimento de arco com curvatura  $k = f$ . Tendo em conta a relação (1.6), o ângulo  $\theta(s)$  entre o vetor tangente no instante  $s$  e o eixo  $OX$  deve verificar  $\theta'(s) = k(s)$ . Consideremos então  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(u)du$  para algum instante fixo  $s_0$ . Assim,

$$r(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right)$$

é uma curva parametrizada por comprimento de arco, uma vez que o vetor tangente  $r'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  tem norma 1, com curvatura  $k = f$ .

Consideremos uma segunda curva  $\bar{r}$  com curvatura  $\bar{k} = f$ . Então

$$\bar{r}(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos \bar{\theta}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \bar{\theta}(t) dt \right) + \bar{r}(s_0),$$

com

$$\bar{\theta}(s) = \int_{s_0}^s k(u)du + \bar{\theta}(s_0) = \theta(s) + \bar{\theta}(s_0).$$

Assim, pondo  $\bar{\theta}(s_0) = \theta_0$  e  $\bar{r}(s_0) = \mathbf{a}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{r}(s) &= \left( \int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \theta_0) dt, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \theta_0) dt \right) + \mathbf{a} \\ &= \left( \cos \theta_0 \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt - \sin \theta_0 \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \cos \theta_0 \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt + \sin \theta_0 \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt \right) + \mathbf{a} \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{r}(s) = \Gamma_{\mathbf{a}} \mathfrak{R}_{\theta_0}(r(s)), \quad (1.8)$$

onde  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  representa a translação segundo o vetor  $\mathbf{a}$  e  $\mathfrak{R}_{\theta_0}$  é a rotação de ângulo  $\theta_0$  em torno da origem, ou seja, a rotação representada pela matriz

$$\mathfrak{R}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Neste contexto, fica provado que a curva  $\bar{r}$  é obtida por movimento rígido da curva  $r$ , isto é, trata-se de uma transformação de  $r$  por uma rotação seguida de uma translação.

*Exemplo 1.12.* Vejamos que curvas  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  têm curvatura igual a uma constante  $k$  positiva. Fixemos  $s_0 = 0$ . Temos  $\theta(s) = \int_0^s k du = ks$ . Assim,

$$\begin{aligned} r(s) &= \left( \int_0^s \cos(kt) dt, \int_0^s \sin(kt) dt \right) = \left( \frac{\sin(ks)}{k}, -\frac{\cos(ks)}{k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \left( \frac{\sin(ks)}{k}, -\frac{\cos(ks)}{k} \right) + \left( 0, \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

é uma curva nas condições pretendidas. Logo, qualquer curva com curvatura igual a uma constante  $k$  positiva é uma circunferência de raio  $R = \frac{1}{k}$  percorrida no sentido anti-horário.

### 1.3.3 Curvas paralelas

Duas curvas planas são paralelas se a distância ao longo da normal comum é constante. Mais precisamente, estabecemos a definição seguinte.

**Definição 1.10.** Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com vetor normal  $\mathbf{N}$  e  $d$  um número real. A curva  $r_d : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$r_d(t) = r(t) + d\mathbf{N}(t)$$

diz-se uma *curva paralela* a  $r$  à distância  $|d|$ .

Se  $d = 0$ , então  $r_d(t) = r(t)$ . Se  $d \neq 0$ , existem precisamente duas curvas paralelas a  $r$  à distância  $|d|$ :  $r_d(t) = r(t) + d\mathbf{N}(t)$  e  $r_{-d}(t) = r(t) - d\mathbf{N}(t)$ .

*Exemplo 1.13.* Vamos determinar as curvas paralelas a  $r(t) = (t^2, 2t)$  à distância  $|d|$ .

Como  $r'(t) = (2t, 2)$  e  $|r'| = 2\sqrt{1+t^2}$ , temos

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(-2, 2t)}{2\sqrt{1+t^2}},$$

logo

$$\begin{aligned} r_{-d}(t) &= (t^2, 2t) - d \frac{(-1, t)}{\sqrt{1+t^2}} = \left(t^2 + \frac{d}{\sqrt{1+t^2}}, 2t - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right). \\ r_d(t) &= (t^2, 2t) + d \frac{(-1, t)}{\sqrt{1+t^2}} = \left(t^2 - \frac{d}{\sqrt{1+t^2}}, 2t + \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right). \end{aligned}$$

*Exemplo 1.14.* Consideremos agora a elipse  $r(t) = (2 \cos t, \sin t)$ . Temos

$$r'(t) = (-2 \sin t, \cos t), \quad \mathbf{N}(t) = \frac{(-\cos t, -2 \sin t)}{\sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}}$$

Assim a curva paralela expressa-se em:

$$\begin{aligned} r_d(t) &= (2 \cos t, \sin t) + d \frac{(-\cos t, -2 \sin t)}{\sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}} \\ &= \left(2 \cos t - \frac{d \cos t}{\sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}}, \sin t - \frac{2d \sin t}{\sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}}\right) \end{aligned}$$

A intuição inicial é de que uma curva paralela não intersesta a curva inicial, mas isto nem sempre acontece, como no exemplo em questão.

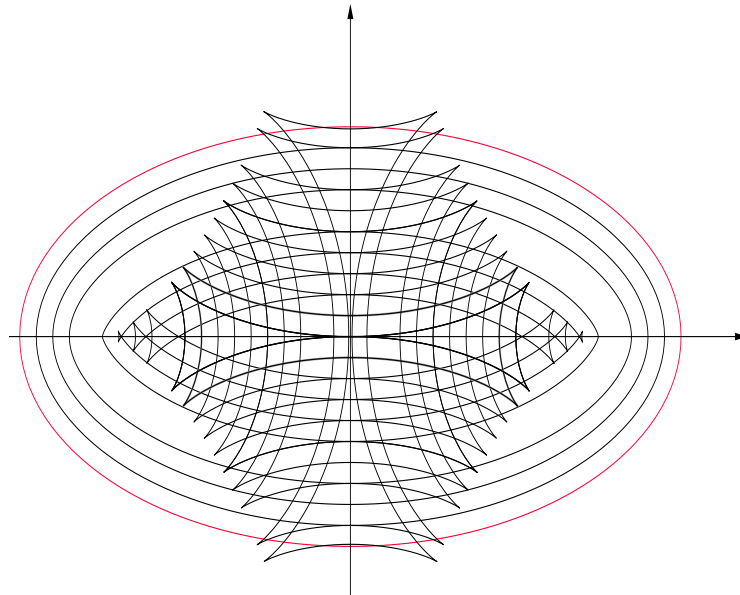


Figura 1.6: A elipse e as suas paralelas.

**Definição 1.11.** Dada uma curva plana  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a *circunferência osculadora* a  $r$  no instante  $t$  é a circunferência de centro  $r(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t)$  e raio  $\frac{1}{|k(t)|}$ .

**Teorema 1.12.** *Seja  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular,  $d$  um número real e  $r_d : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $r_d(t) = r(t) + d\mathbf{N}(t)$  uma curva paralela à distância  $|d|$ . Então a curva  $r_d$  é não regular em  $t_0$  se, e só se,  $r_d(t_0)$  é o centro da circunferência osculadora a  $r$  em  $t_0$ .*

**Demonstração:** Partamos de  $r_d(t) = r(t) + d\mathbf{N}(t)$ . Derivando, temos

$$r'_d(t) = r'(t) + d\mathbf{N}'(t) = r'(t) - k(t)d r'(t) = (1 - k(t)d)r'(t)$$

Desta igualdade,  $r_d$  é não regular em  $t_0$  se, e só se,  $d = \frac{1}{k}$ , tal como queríamos provar.

Observe-se que, se a curva  $r_d$  é regular em  $t$ , então os vetores tangentes a  $r_d$  e  $r$  no instante  $t$  são colineares. Também, os vetores terão o mesmo sentido se  $1 - kd > 0$  e sentidos contrários quando  $1 - kd < 0$ .

### 1.3.4 Evolutas e involutas

Em Geometria Diferencial é muito comum ver curvas que geram outras curvas através de diferenciação, integração ou triangulação de uma base vetorial móvel. A evoluta e a involuta são dois exemplos notáveis de curvas geradas a partir de uma curva plana dada.

#### Evolutas

**Definição 1.13.** Considere-se uma curva regular  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  com curvatura  $k(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbf{I}$ . Então, a sua *evoluta* é a curva  $\varepsilon : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varepsilon(t) = r(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t)$ , com  $t \in \mathbf{I}$ .

Assim, o traço da evoluta de uma curva é o lugar geométrico dos centros das circunferências osculadoras.

*Exemplo 1.15.* Consideremos a elipse  $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$  com  $a > b > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Podemos determinar a sua evoluta utilizando a definição. Assim, uma vez que

$$r'(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad r''(t) = (-a \cos t, -b \sin t),$$

temos

$$k(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}(-b \cos t, -a \sin t),$$

logo

$$\varepsilon(t) = r(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right).$$

Esta é uma parametrização de um astróide.

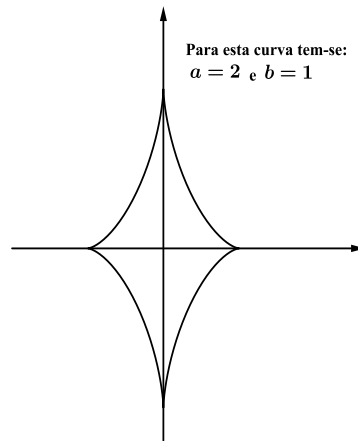


Figura 1.7: Astróide, a evoluta de uma elipse

*Exemplo 1.16.* Vamos estudar agora a evoluta da parábola  $r(t) = (t, t^2)$ . Como  $r'(t) = (1, 2t)$  e  $r''(t) = (0, 2)$ , temos

$$k(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{(-2t, 1)}{(1 + 4t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo,

$$\varepsilon(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}).$$

Esta curva denomina-se por *curva de Neil*. Tal curva, apresenta um ponto anguloso em  $t_0 = 0$ , onde  $\varepsilon'(0) = 0$ .

**Teorema 1.14.** *Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $\varepsilon : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a sua evoluta. Então  $\varepsilon$  é regular se  $k'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Neste caso, a tangente à evoluta em  $\varepsilon(t)$  é a reta normal a  $r$  em  $r(t)$ .*

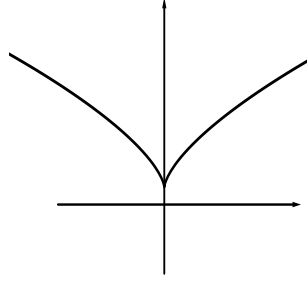


Figura 1.8: A curva de Neil, evoluta da parábola.

**Demonstração:** Tendo em conta que  $\varepsilon(t) = r(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t)$ , podemos derivar de forma a obter

$$\begin{aligned}\varepsilon'(t) &= r'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{N}(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{N}'(t) \\ &= r'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{N}(t) + \frac{1}{k(t)}(-k(t))r'(t) \\ &= -\frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{N}(t)\end{aligned}$$

Assim,  $\varepsilon'(t) \neq 0$  se, e só se,  $k'(t) \neq 0$ . Além disso, se  $k'(t) \neq 0$ , então a tangente à evoluta em  $\varepsilon(t)$  é a reta normal a  $r$  em  $(t)$ .

Analisemos o comprimento de arco  $s_\varepsilon$  da evoluta  $\varepsilon$  de uma curva  $r$ . Sabemos que  $\varepsilon'(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}\mathbf{N}(t)$ . Assumimos em primeiro lugar que  $k'(t) < 0$  para qualquer  $t$ . Então  $|\varepsilon'(t)| = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}$  e

$$s_\varepsilon = -\int_{t_0}^t \frac{k'(v)}{k^2(v)} dv = \frac{1}{k(t)} - \frac{1}{k(t_0)}. \quad (1.9)$$

Se  $k'(t) > 0$  para qualquer  $t$ , então  $|\varepsilon'(t)| = \frac{k'(t)}{k^2(t)}$  e

$$s_\varepsilon = \int_{t_0}^t \frac{k'(v)}{k^2(v)} dv = \frac{1}{k(t_0)} - \frac{1}{k(t)}. \quad (1.10)$$

Vejamos também uma fórmula para a curvatura da evoluta. Para tal, suponhamos que  $r$  está parametrizada por comprimento de arco  $s$ . Denotamos o *raio de curvatura* por  $u = \frac{1}{k}$ . Então  $\varepsilon'(s) = u'\mathbf{N}$  e  $\varepsilon''(s) = u''\mathbf{N} - \frac{u'}{u}\mathbf{T}$ . Assim, a curvatura  $k_\varepsilon$  da evoluta  $\varepsilon$  é dada por

$$k_\varepsilon = \frac{\det(\varepsilon', \varepsilon'')}{|\varepsilon'|^3} = \frac{1}{u|u'|}. \quad (1.11)$$



## Involuta

**Definição 1.15.** Uma *involuta* de uma curva regular  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva  $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que tem como evoluta a curva  $r$ .

**Teorema 1.16.** Dada uma curva regular  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $t_0 \in \mathbf{I}$ , então  $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = r(t) - s\mathbf{T}(t),$$

com  $s = \int_{t_0}^t |r'(v)| dv$  e  $\mathbf{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ , é uma involuta de  $r$ . Qualquer outra involuta de  $r$  é uma curva paralela a  $\gamma$ .

**Demonstração:** Para provarmos que  $\gamma$  é uma involuta de  $r$ , temos de verificar que  $s\mathbf{T} = \frac{1}{k_\gamma}\mathbf{N}_\gamma$ , sendo  $k_\gamma$  a curvatura de  $\gamma$  e  $\mathbf{N}_\gamma$  o vector normal a  $\gamma$ . Derivando, obtemos

$$\gamma'(t) = r'(t) - |r'(t)|\mathbf{T}(t) - s(t)k(t)|r'(t)|\mathbf{N}(t) = -s(t)k(t)|r'(t)|\mathbf{N}(t), \quad (1.12)$$

uma vez que  $r'(t) = |r'(t)|\mathbf{T}(t)$ . Derivando novamente,

$$\gamma''(t) = -(s(t)k(t)|r'(t)|)'\mathbf{N}(t) + s(t)k^2(t)|r'(t)|^2\mathbf{T}(t).$$

Assim, tendo em conta (1.7),

$$k_\gamma = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3} = \frac{s^2 k^3 |r'|^3}{|sk|r'|^3} = \text{sinal}\{ks\} \frac{1}{s}.$$

Por outro lado, (1.12) diz-nos que o vector tangente a  $\gamma$  é dado por  $\mathbf{T}_\gamma = -\text{sinal}\{sk\}\mathbf{N}$ , logo o vector normal a  $\gamma$  é dado por  $\mathbf{N}_\gamma = \text{sinal}\{sk\}\mathbf{T}$ . Assim,  $\frac{1}{k_\gamma}\mathbf{N}_\gamma = s\mathbf{T}$ .

Seja  $\tilde{\gamma}$  outra involuta de  $r$ . Queremos ver que  $\tilde{\gamma}$  e  $\gamma$  são curvas paralelas. Uma vez que

$$r = \gamma + \frac{1}{k_\gamma}\mathbf{N}_\gamma = \tilde{\gamma} + \frac{1}{k_{\tilde{\gamma}}}\mathbf{N}_{\tilde{\gamma}},$$

derivando obtemos

$$\left(\frac{1}{k_\gamma}\right)'\mathbf{N}_\gamma = \left(\frac{1}{k_{\tilde{\gamma}}}\right)'\mathbf{N}_{\tilde{\gamma}}.$$

Assim, por integração,

$$\frac{1}{k_\gamma}\mathbf{N}_\gamma = \frac{1}{k_{\tilde{\gamma}}}\mathbf{N}_{\tilde{\gamma}} + d\mathbf{N}_{\tilde{\gamma}},$$

com  $d$  uma constante real. Assim,

$$\gamma = \tilde{\gamma} + \frac{1}{k_{\tilde{\gamma}}} \mathbf{N}_{\tilde{\gamma}} - \frac{1}{k_{\gamma}} \mathbf{N}_{\gamma} = \tilde{\gamma} - d \mathbf{N}_{\tilde{\gamma}},$$

logo  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  são curvas paralelas.

*Exemplo 1.17.* Calculemos as involutas da curva regular  $r(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2})$  com  $t > 0$ . Partamos da fórmula  $\gamma(t) = r(t) - s\mathbf{T}(t)$ . O comprimento de arco de  $r$  é

$$s = \int \sqrt{144t^4 + 36t^2} dt = \int 6t\sqrt{4t^2 + 1} dt = \frac{1}{2}(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + d,$$

sendo  $d$  uma constante de integração. Além disso,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(-12t^2, 6t)}{6t\sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}}.$$

Assim, as involutas de  $r$  são as curvas

$$\gamma(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}) - \left( \frac{1}{2}(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + d \right) \cdot \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

Em particular, para  $d = 0$ , temos

$$\gamma(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(4t^2 + 1) \cdot (-2t, 1) = (t, t^2),$$

o que está de acordo com o exemplo 1.16.

*Exemplo 1.18.* Determinemos as involutas da circunferência

$$r(s) = R(\cos(s/R), \sin(s/R)).$$

Temos  $\mathbf{T}(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R))$ , logo

$$\gamma(s) = R(\cos(s/R), \sin(s/R)) - (s - s_0)(-\sin(s/R), \cos(s/R)).$$

Derivando, temos

$$\gamma'(s) = \left( \frac{s - s_0}{R} \cos(s/R), \frac{s - s_0}{R} \sin(s/R) \right).$$

Como  $|\gamma'(s)|^2 = \frac{(s - s_0)^2}{R^2}$ , o comprimento de arco  $t$  de  $\gamma$  vai ser dado por  $t = \frac{s^2}{2R}$ .

Reparametrizando por comprimento de arco, obtemos, para  $s_0 = 0$ :

$$\gamma(s(t)) = (R \cos(\sqrt{2t/R}) + \sqrt{2Rt} \sin(\sqrt{2t/R}), R \sin(\sqrt{2t/R}) - \sqrt{2Rt} \cos(\sqrt{2t/R})).$$

## 1.4 Curvas no Espaço Euclidiano

### 1.4.1 Triedro de Frenet-Serret

Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco  $s$ .

Definimos o *vetor tangente* unitário a  $r$  no instante  $s$  por

$$\mathbf{T}(s) = \frac{r'(s)}{|r'(s)|}$$

e o *vetor normal* unitário a  $r$  no instante  $s$  por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|}.$$

O *vetor binormal* unitário a  $r$  em  $s$  é dado por

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s),$$

onde  $\wedge$  denota o produto externo usual de  $\mathbb{R}^3$ . Deste modo, em cada instante  $s$ , ficamos com um referencial ortonormado e positivamente orientado em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ , designado por triedro de *Frenet-Serret*.

Em cada ponto da curva em causa, já parametrizada por comprimento arco, podemos definir três planos. O *plano osculador* é o plano formado pelos vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$ . O *plano normal* é o plano formado pelos vetores  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$ . O *plano retificante* é o plano formado pelos vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{B}$ . Por cada ponto da curva em causa, podemos definir três retas. A *reta tangente*, gerada pelo vetor tangente  $\mathbf{T}$ . A *reta normal*, gerada pelo vetor normal  $\mathbf{N}$ , e a *reta binormal*, gerada pelo vetor binormal  $\mathbf{B}$ .

A *curvatura (não sinalizada)* de  $r$  em cada instante é definida por

$$\kappa = |\mathbf{T}'|.$$

Uma vez que  $\mathbf{N}$  é unitário, então a sua derivada é perpendicular a  $\mathbf{N}$ . Por outro lado, derivando a igualdade  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ , obtemos

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}' = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{N} = -\kappa.$$

Logo podemos escrever

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

para uma certa função  $\tau$ , que se designa por *torção* da curva  $r$ .

Investiguemos agora a derivada do vetor binormal. Como  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = 0$  e  $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$ , temos

$$0 = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}' = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}'.$$

Analogamente, derivando  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$ , obtemos  $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N} = -\tau$ . Assim,

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}.$$

Estabelecemos deste modo as três *igualdades de Frenet*

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}. \quad (1.13)$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Vejamos de seguida como obter a curvatura  $\kappa$  e a torção  $\tau$  de uma curva regular  $r$  não necessariamente parametrizada por comprimento de arco. Começamos por denotar  $v(t) = |r'(t)|$ ,  $\vec{v}(t) = r'(t)$  (o *vetor velocidade*),  $a(t) = v'(t)$  e  $\vec{a}(t) = r''(t)$  (o *vetor aceleração*). Assim  $\vec{v} = v\mathbf{T}$  e

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = a\mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N},$$

sendo  $s$  o parâmetro por comprimento de arco.

Tomando o produto externo de  $\vec{v}$  por  $\vec{a}$ , obtemos, sabendo que  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{T} = 0$  e  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \mathbf{B}$ ,

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = v\mathbf{T} \wedge (a\mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N}) = v^3 \kappa \mathbf{B}.$$

Desta relação, aplicando o módulo aos dois membros, temos  $|\vec{v} \wedge \vec{a}| = |v^3| \kappa$ , uma vez que  $|\mathbf{B}| = 1$ . Logo

$$\kappa = \frac{|r' \wedge r''|}{|r'|^3}. \quad (1.14)$$

Passemos a determinar a fórmula para a torção. Derivando a igualdade  $\vec{a} = a\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$  em relação a  $t$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{da}{dt}\mathbf{T} + a\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{d(v^2\kappa)}{dt}\mathbf{N} + v^2\kappa\frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{da}{dt}\mathbf{T} + av\kappa\mathbf{N} + \frac{d(v^2\kappa)}{dt}\mathbf{N} + v^3\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}).\end{aligned}$$

Tomando o produto interno por  $\mathbf{B}$ , da relação anterior obtemos:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \mathbf{B} = v^3\kappa\tau. \quad (1.15)$$

Por outro lado, também de  $\vec{a} = a\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$ , e tendo em conta a fórmula (1.14), obtemos

$$\mathbf{N} = \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$$

Assim,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \frac{\vec{v}}{v} \wedge \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|} \quad (1.16)$$

Finalmente, das igualdades (1.14), (1.15) e (1.16), concluimos que

$$\tau = \frac{(r' \wedge r'') \cdot r'''}{|r' \wedge r''|^2}$$

*Exemplo 1.19.* Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $r(t) = (R \cos t, R \sin t, at)$ , com  $R > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Encontremos a curvatura e a torção de  $r$ , bem como os três vetores do triedro de Frenet em função do parâmetro  $t$ . Temos  $r'(t) = (-R \sin t, R \cos t, a)$  e  $|r'(t)| = \sqrt{R^2 + a^2}$ , logo

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}(-R \sin t, R \cos t, a).$$

Tomando a segunda derivada,  $r''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0)$ . Destes resultados podemos obter o seguinte:

$$r' \wedge r'' = (aR \sin t, -aR \cos t, R^2).$$

Então,  $\kappa(t) = \frac{|r' \wedge r''|}{|r'|^3} = \frac{R}{R^2 + a^2}$ . Calculando o vetor binormal, vem

$$\mathbf{B} = \frac{r' \wedge r''}{|r' \wedge r''|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}(a \sin t, -a \cos t, R).$$

Prosseguindo, calculamos o vetor normal:

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \wedge \mathbf{T}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Como  $r'''(t) = (R \sin t, -R \cos t, 0)$ , a torção vem dada por

$$\tau(t) = \frac{(r' \wedge r'') \cdot r'''}{|r' \wedge r''|^2} = \frac{a}{R^2 + a^2}$$

Na figura 1.9 encontra-se representado o traço de  $r(t) = (R \cos t, R \sin t, at)$ , com  $R = 2$  e  $a = 1/8$  quando  $t \in [0, 10\pi]$ .

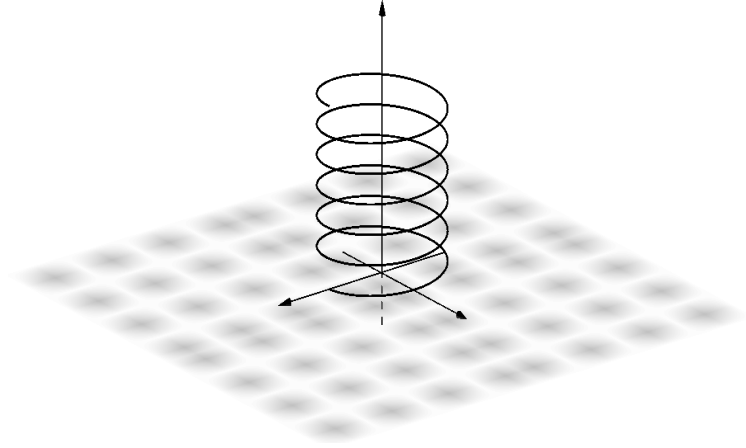


Figura 1.9: A curva hélice.

A partir das igualdades de Frenet, vemos que a curva  $r$  não é planar se, e só se, a sua torção for diferente de zero. Este exemplo é consistente com este facto. Se  $a = 0$ , a curva  $r$  desenvolve-se no plano  $Z = 0$  e a torção  $\tau = 0$ .

### 1.4.2 Teorema fundamental de curvas no espaço

Um *movimento rígido* em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que resulta da composição de uma rotação em torno de um eixo que passe na origem com uma translação. O conjunto das rotações em torno de eixos que passam pela origem, munido da operação de composição, corresponde ao grupo das matrizes ortogonais com determinante igual a 1, que se denota por  $SO(3)$ . O teorema fundamental de curvas no espaço afirma que a curvatura e a torção determinam a curva a menos de movimento rígido.

**Teorema 1.17** (Teorema fundamental de curvas no espaço). *Sejam  $k, \tau : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves com  $k > 0$ . Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuja curvatura é  $k$  e cuja torção é  $\tau$ . Se  $\tilde{r} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é outra curva*

parametrizada por comprimento de arco nessas condições, existe um movimento rígido  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que, para cada  $s \in \mathbf{I}$ ,  $\tilde{r}(s) = M(r(s))$ .

### 1.4.3 Hélices generalizadas

**Definição 1.18.** Uma curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma *hélice generalizada* se existir um vetor unitário  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$  seja constante. Ou seja, a curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma hélice generalizada se a tangente de curva  $\gamma$  formar um ângulo constante com uma direção fixa (dada pelo vetor unitário  $\mathbf{u}$ ).

**Teorema 1.19** (Teorema de Lancret). *Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular cuja curvatura nunca se anula. Então  $r$  é uma hélice generalizada se, e só se,  $\frac{\tau}{\kappa}$  é constante.*

**Demonstração:** Começemos por supôr que  $r$  é uma hélice generalizada e parametrizemos a curva por comprimento de arco. Consideremos um vetor unitário  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = c$ , para alguma constante  $c$ . Escrevemos o vetor  $\mathbf{u}$  como combinação linear dos elementos da base do triedro de Frenet. Assim, para qualquer  $s \in \mathbf{I}$ , temos

$$\mathbf{u} = \alpha_1(s)\mathbf{T}(s) + \alpha_2(s)\mathbf{N}(s) + \alpha_3(s)\mathbf{B}(s), \quad (1.17)$$

com

$$\alpha_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}, \quad \alpha_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}, \quad \alpha_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}.$$

Em particular,  $\alpha_1 = c$ . Derivando  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = c$ , vem

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{u} \cdot \kappa \mathbf{N}(s),$$

logo  $\alpha_2 = 0$ , uma vez que  $\kappa \neq 0$ . Substituindo em (1.17), podemos escrever

$$\mathbf{u} = c\mathbf{T} + \alpha_3\mathbf{B} \quad (1.18)$$

Derivando (1.18) vem:

$$0 = c\mathbf{T}' + \alpha_3'\mathbf{B} + \alpha_3\mathbf{B}' = (c\kappa - \alpha_3\tau)\mathbf{N} + \alpha_3'\mathbf{B}.$$

Assim,  $\alpha_3' = 0$  e  $c\kappa - \alpha_3\tau = 0$ . Da primeira igualdade tiramos que  $\alpha_3$  é constante, e da segunda igualdade resulta que  $\frac{\tau}{\kappa}$  é constante, uma vez que já sabemos que  $\alpha_3$  e  $c$  são constantes.

Reciprocamente, suponhamos que  $\frac{\tau}{\kappa}$  é constante. Pondo  $a = \frac{\kappa}{\tau}$ , definimos o vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{T} + a\mathbf{B}$ . Derivando, temos

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}' + a\mathbf{B}' = (\kappa - a\tau)\mathbf{N} = 0,$$

logo  $\mathbf{v}$  é constante. Por outro lado,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = 1$ , logo  $r$  é uma hélice generalizada relativamente ao vetor unitário  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ .

*Exemplo 1.20.* A curva  $r(t) = (R \cos t, R \sin t, at)$  do exemplo 1.19 é claramente uma hélice generalizada. Tal pode ser visto de duas formas. Por um lado, como  $r'(t) = (-R \sin t, R \cos t, a)$  e

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}(-R \sin t, R \cos t, a),$$

temos que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$  é constante, para  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ . Por outro lado, como a curvatura e a torção de  $r$  são constantes,  $\frac{\tau}{\kappa}$  também é constante. Logo, pelo Teorema de Lancret,  $r$  é uma hélice generalizada.

#### 1.4.4 Curvas de Bertrand

**Definição 1.20.** Uma curva  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por comprimento de arco, com curvatura  $k(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ , é chamada *curva de Bertrand* se existe uma outra curva  $\bar{r} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que as retas normais principais de  $r$  e  $\bar{r}$  em  $s \in \mathbf{I}$  sejam iguais. Neste caso, a curva  $\bar{r}$  é o *par de Bertrand* à curva  $r$ .

Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva de Bertrand e  $\bar{r}$  um seu par. Então  $\bar{r}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{r}(s) = r(s) + a(s)\mathbf{N}(s)$$

Onde, para cada  $s$ ,  $\mathbf{N}(s)$  é o vetor normal unitário de  $r$  em  $s$  e  $|a(s)|$  é a distância do ponto  $r(s)$  a  $\bar{r}(s)$ . Provemos que  $a : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma constante. Sejam  $s$  e  $\bar{s}$  os parâmetros por comprimento de arco de  $r$  e  $\bar{r}$ , respetivamente. Como  $a$  é a distância de pontos correspondentes de  $r$  e  $\bar{r}$ , logo  $a$  é uma constante se e só se, a derivada for nula. Como  $a^2 = (r - \bar{r}) \cdot (r - \bar{r})$ , logo

$$\frac{d(a^2)}{ds} = \frac{d(r - \bar{r}) \cdot (r - \bar{r})}{ds} = 2(r - \bar{r}) \cdot (r' - \bar{r}') = 2a \mathbf{N} \cdot (r' - \bar{r}'). \quad (1.19)$$



Da relação (1.19), e tendo em conta que  $r'$  e  $\bar{r}'$  são perpendiculares à normal comum  $\mathbf{N}$ , uma vez que são tangentes às curvas  $r$  e  $\bar{r}$ , respetivamente, tem-se  $\frac{d(a^2)}{ds} = 0$ , ou seja,  $a$  é constante.

**Proposição 1.21.** *Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que  $k(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ . Suponha-se também que  $\tau(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ . Então  $r$  é uma curva de Bertrand se, e só se, existem números reais  $A \neq 0$  e  $B$  tais que*

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1 \quad (1.20)$$

para todo  $s \in \mathbf{I}$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $r$  é uma curva de Bertrand com  $\bar{r}$  o seu par. Sejam  $\mathbf{T}$  e  $\bar{\mathbf{T}}$  os vetores tangentes unitários a  $r$  e  $\bar{r}$ , repetivamente. Desta maneira tem-se:

$$\frac{d(\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{T}})}{ds} = \mathbf{T}' \cdot \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{T}}'. \quad (1.21)$$

Como os vetores  $\mathbf{T}'$  e  $\bar{\mathbf{T}}'$  são paralelos à reta normal comum, a relação (1.21) anula-se. Assim, o ângulo  $\theta$  formado por  $\mathbf{T}$  e  $\bar{\mathbf{T}}$ , nos pontos correspondentes, é constante. Seja  $\bar{s}$  o parâmetro por comprimento de arco de  $\bar{r}$ . Como  $r$  é uma curva de Bertrand com par  $\bar{r}$ , temos

$$\bar{r}(s) = r(s) + a\mathbf{N}(s),$$

com  $a$  constante. Uma vez que

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\bar{r}}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{d\bar{r}}{ds}$$

e

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \mathbf{T} + a\mathbf{N}',$$

temos

$$\cos \theta = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} + a\mathbf{N}') = \frac{ds}{d\bar{s}} (1 - a\kappa). \quad (1.22)$$

Por outro lado, temos

$$\sin \theta = |\bar{\mathbf{T}} \wedge \mathbf{T}| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}} (\mathbf{T} + a(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})) \wedge \mathbf{T} \right| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau\mathbf{N} \right| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau \right|.$$

Logo

$$\frac{ds}{d\bar{s}}a\tau = \pm \sin \theta \quad (1.23)$$

Dividindo (1.22) por (1.23), vem

$$\frac{(1 - a\kappa)}{a\tau} = \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

ou seja,  $\frac{(1-a\kappa)}{a\tau} = C$  para uma certa constante  $C$ . Fazendo  $A = a$  e  $B = aC$ , concluimos que  $A\kappa + B\tau = 1$ .

Reciprocamente, se  $A\kappa + B\tau = 1$  para certas constantes  $A$  e  $B$ , definimos a curva  $\bar{r} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\bar{r}(s) = r(s) + a\mathbf{N}(s)$ , com  $a = A$ . É possível provar que esta curva é par de Bertrand de  $r$ .

**Proposição 1.22.** *Seja  $r$  uma curva de Bertrand. Então, ou  $r$  é plana ou  $\tau$  nunca se anula.*

**Demonstração:** Já vimos que, se  $r$  é uma curva de Bertrand, então  $a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} = C$  para alguma constante  $C$ , considerando as notações que adoptámos na demonstração anterior. Como  $a \neq 0$  e  $\frac{ds}{d\bar{s}} \neq 0$ , concluímos o seguinte. Se  $C \neq 0$ , então  $\tau(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ . Se  $C = 0$ , então  $\tau(s) = 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ , ou seja,  $r$  é uma curva plana.

**Proposição 1.23.** *Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva de Bertrand, com o seu par  $\bar{r}$ . Então  $\tau\bar{\tau}$  é uma constante não negativa, onde  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  indicam as torções de  $r$  e  $\bar{r}$ , respetivamente.*

**Demonstração:** Já sabemos, da prova da proposição 1.21, que

$$\bar{\mathbf{T}} = (1 - a\kappa)\frac{ds}{d\bar{s}}\mathbf{T} + a\tau\frac{ds}{d\bar{s}}\mathbf{B}.$$

Como  $\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \cos \theta$  e  $\bar{\mathbf{T}}$  é unitário, temos

$$\bar{\mathbf{T}} = \cos \theta \mathbf{T} \pm \sin \theta \mathbf{B}.$$

Daí, podemos tomar o produto vetorial

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{T}} \wedge \bar{\mathbf{N}} = \pm(\cos \theta \mathbf{T} \pm \sin \theta \mathbf{B}) \wedge \mathbf{N} = \pm(\cos \theta \mathbf{B} \mp \sin \theta \mathbf{T}), \quad (1.24)$$

uma vez que  $\bar{\mathbf{N}} = \pm \mathbf{N}$ .

Derivando  $\bar{\mathbf{B}}$ , temos, por um lado, pelas igualdades de Frenet,

$$\frac{d\bar{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{d\bar{\mathbf{B}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = -\bar{\tau} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \quad (1.25)$$

por outro lado, tendo em conta (1.24), vem

$$\frac{d\bar{\mathbf{B}}}{ds} = \pm (\cos \theta \frac{d\mathbf{B}}{ds} \mp \sin \theta \frac{d\mathbf{T}}{ds}) = \pm (-\cos \theta \tau \mathbf{N} \mp \sin \theta \kappa \mathbf{N}). \quad (1.26)$$

Igualando (1.25) a (1.26), temos

$$\bar{\tau} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \pm (\tau \cos \theta \pm \kappa \sin \theta) \mathbf{N}$$

Como  $\bar{\mathbf{N}} = \pm \mathbf{N}$ , da fórmula anterior obtem-se

$$\tau \cos \theta \pm \kappa \sin \theta = \pm \bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{ds} \quad (1.27)$$

Recorrendo a proposição 1.21, temos  $A\kappa + B\tau = 1$ , sendo  $A = a$ ,  $C = \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  e  $B = aC$ . Assim

$$\kappa \sin \theta \pm \tau \cos \theta = \frac{\sin \theta}{a} \quad (1.28)$$

Agora, vamos relacionar as igualdades (1.27) e (1.28):

$$\frac{\sin \theta}{a} = \pm \bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{ds}. \quad (1.29)$$

Das igualdades (1.23) e (1.29), concluimos que

$$\tau \bar{\tau} = \frac{\sin^2 \theta}{a^2}$$

O resultado prova que o produto das torções é uma constante não negativa.

*Exemplo 1.21.* Consideremos a curva

$$r(s) = \left( \frac{\sqrt{24}}{5} \cos s, \frac{\sqrt{24}}{5} \sin s, \frac{1}{5} s \right),$$

cujo vetor tangente e normal são dados por

$$\mathbf{T}(s) = \left( -\frac{\sqrt{24}}{5} \sin s, \frac{\sqrt{24}}{5} \cos s, \frac{1}{5} \right), \quad \mathbf{N}(s) = \left( -\cos s, -\sin s, 0 \right).$$

Fixemos  $a = 3$  e consideremos a curva paralela  $\bar{r}(s) = r(s) + 3\mathbf{N}(s)$ , ou seja,

$$\bar{r}(s) = \left( \frac{\sqrt{24}}{5} \cos s - 3 \cos s, \frac{\sqrt{24}}{5} \sin s - 3 \sin s, \frac{1}{5} s \right).$$

Esta curva tem vetor tangente e vetor normal dados por

$$\bar{\mathbf{T}}(s) = \frac{5}{\sqrt{250 - 60\sqrt{6}}} \left( \left(3 - \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \sin s, \left(\frac{\sqrt{24}}{5} - 3\right) \cos s, \frac{1}{5} \right),$$

$$\bar{\mathbf{N}}(s) = (\cos s, \sin s, 0).$$

Daqui concluímos que as retas normais em  $s$  coincidem, logo  $r$  e  $\bar{r}$  formam um par de Bertrand.

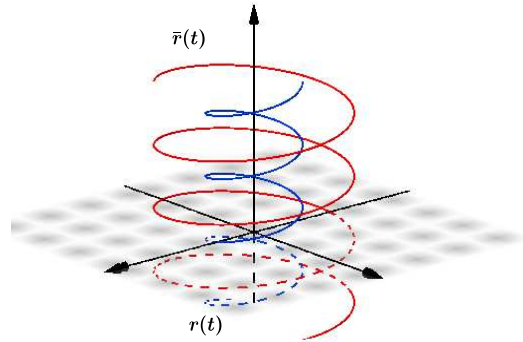


Figura 1.10: Um par de Bertrand



## Capítulo 2

# Evolutas e curvas do tipo luz no espaço de Minkowski

O modelo de Minkowski [3, 8] é um modelo eficiente e intuitivo para a geometria de Laguerre. Este modelo estabelece uma bijeção, designada por projeção isotrópica [3, 8], entre pontos do espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  e circunferências orientadas no plano euclidiano. Cada curva plana  $r$  define uma família de circunferências (as circunferências osculadoras) e esta família, através da projeção isotrópica, define uma curva em  $\mathbb{R}_1^3$ , que designaremos por  $L$ -evoluta de  $r$ . Prova-se que esta curva é uma curva do tipo luz. Reciprocamente, qualquer curva do tipo luz é a  $L$ -evoluta de alguma curva no plano.

Neste capítulo, iremos descrever a geometria das curvas do tipo luz em termos da curvatura das curvas planas que lhes correspondem através da projeção isotrópica. Este objetivo irá nos conduzir à noção de *função potencial* (ver definição 2.23). Uma função potencial, juntamente com uma certa condição inicial, determina completamente uma curva do tipo luz e a correspondente curva plana através das fórmulas do teorema 2.26. Como consequência, iremos obter uma caracterização original de todas as curvas que são *Laguerre-congruentes* com uma curva  $r$  dada (ver observação 2.28).

Iremos ainda descrever, em termos de funções potenciais, algumas classes de curvas associadas do tipo luz, nomeadamente: *pares de Bertrand* [1, 15], curvas do tipo luz com retas binormais comuns [12], e curvas *binormal-direcionais* [4].

Provaremos dois resultados interessantes sobre curvas do tipo luz:

1. uma hélice do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco admite uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco com retas binormais comuns em pontos correspondentes se, e só se, a sua pseudo-torção for nula (ver corolário 2.41);
2. dada uma curva do tipo luz  $\alpha$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco, existe (a) uma hélice do tipo luz  $\bar{\alpha}$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco e com pseudo-torção  $\bar{\tau} = 0$  e (b) uma bijeção entre pontos das duas curvas  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ , tais que, em pontos correspondentes, as retas tangentes são paralelas (ver teorema 2.45).

Vamos começar por estabelecer o modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre e, de seguida, apresentamos alguns aspectos essenciais sobre curvas do tipo luz no espaço de Minkowski (para mais detalhes e referências, consultar [9, 15, 17].

## 2.1 Espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$

**Definição 2.1.** O *Espaço de Minkowski*, que denotaremos por  $\mathbb{R}_1^3$ , é o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do *produto interno lorentziano*  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3,$$

sendo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ .

O produto interno lorentziano satisfaz as seguintes propriedades:

- *Bilinearidade*:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- *Simetria*:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ;
- *Não degenerado*: se  $\mathbf{u}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^3$  e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , então  $\mathbf{u} = 0$ .

**Definição 2.2.** Um vetor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3$  é dito: do *tipo tempo* se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle < 0$ ; do *tipo espaço* se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ ; do *tipo luz* se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  e  $\mathbf{u} \neq 0$ . Para vetores  $\mathbf{u}$  do tipo espaço, denotamos  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

Na figura 2.1 encontra-se representado o *cone luz*  $\mathcal{C}_O$  de vértice em  $O = (0, 0, 0)$ , isto é, a superfície formada pelos pontos  $X = (x, y, z)$  para os quais o vetor  $\overrightarrow{OX}$  é do tipo luz. A equação cartesiana desta superfície cônica é dada por  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . O vetor  $\mathbf{u}$  é do tipo espaço, “aponta” para o exterior do cone; o vetor  $\mathbf{v}$  é do tipo luz, é paralelo à geratriz do cone; o vetor  $\mathbf{w}$  é do tipo tempo, “aponta” para o interior do cone.

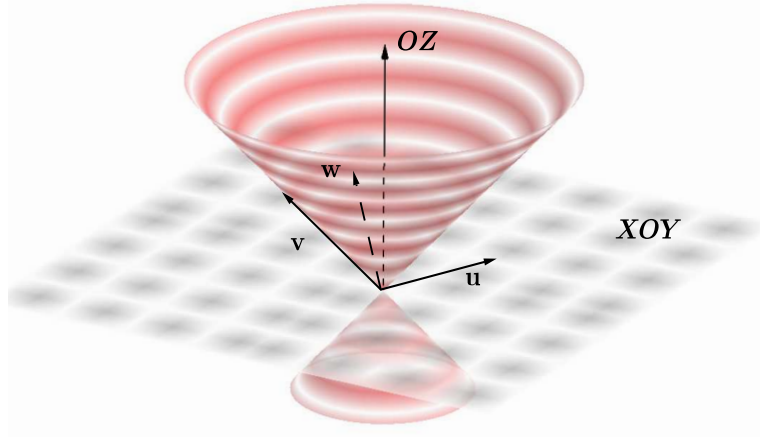


Figura 2.1: Tipicidade causal de vetores

Mais geralmente, definimos o seguinte.

**Definição 2.3.** O *cone luz* com vértice em  $P \in \mathbb{R}_1^3$  é o conjunto  $\mathcal{C}_P$  de pontos  $X \in \mathbb{R}_1^3$  tais que  $\overrightarrow{PX}$  é um vetor do tipo luz.

Sendo  $P$  e  $X$  determinados por  $P = (a, b, c)$  e  $X = (x, y, z)$ , temos  $\overrightarrow{PX} = (x - a, y - b, z - c)$  e, conseqüentemente, a equação cartesiana de  $\mathcal{C}_P$  é dada por

$$\langle \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PX} \rangle = (x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = 0.$$

A restrição do produto interno lorentziano a um subespaço vetorial  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}_1^3$  define uma certa forma bilinear. Se esta forma for degenerada, dizemos que  $\mathcal{U}$  é *singular*; se for definida positiva, isto é,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  para todo  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  não nulo, dizemos que  $\mathcal{U}$  é *euclidiano*; caso contrário, dizemos que  $\mathcal{U}$  é um subespaço *lorentziano*.

O *ortogonal* de um subespaço vetorial  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}_1^3$  é o subespaço vetorial

$$\mathcal{U}^\perp = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \}.$$



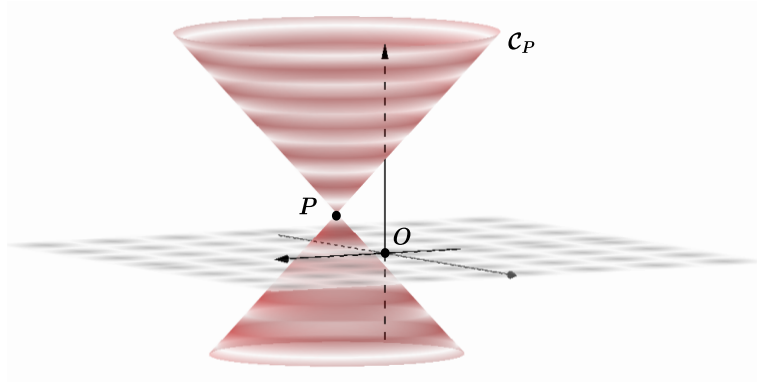


Figura 2.2: Cone luz com vértice em  $P$

De seguida apresentamos algumas propriedades para subespaços de  $\mathbb{R}_1^3$  relativos ao produto interno lorentziano.

**Proposição 2.4.** *Dado um subespaço vetorial  $U \subset \mathbb{R}_1^3$ , temos o seguinte:*

$$(i) \dim(U^\perp) + \dim(U) = 3;$$

$$(ii) (U^\perp)^\perp = U;$$

**Demonstração:** A identidade (i) é óbvia quando  $\dim(U) = 0$  ou  $\dim(U) = 3$ . Assim, suponha-se que  $\dim(U) = 1$ . Seja  $\mathbf{u}$  um gerador de  $U$  e considere-se a aplicação linear  $\xi_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\xi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ . Uma vez que o produto interno lorentziano é não degenerado, a imagem desta aplicação é um espaço vetorial de dimensão 1. Logo, da álgebra linear, concluímos que o seu núcleo tem dimensão 2. Mas o núcleo de  $\xi_{\mathbf{u}}$  é precisamente  $U^\perp$ , logo a igualdade (i) é válida.

Suponha-se agora que  $\dim(U) = 2$ . Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  geradores de  $U$ . Consideremos a aplicação linear  $\xi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\xi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\mathbf{w}) = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle).$$

Em relação às bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ , esta aplicação é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -u_3 \\ v_1 & v_2 & -v_3 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são linearmente independentes, esta matriz tem característica 2, logo o núcleo de  $\xi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$  tem dimensão 1. Mais uma vez, o núcleo de  $\xi_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$  coincide com  $U^\perp$ , logo a igualdade (i) também é válida neste caso.

Para provar (ii), observe-se que, se  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , então  $\mathbf{u} \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ , uma vez que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^\perp$ . Ou seja, temos que  $\mathcal{U} \subset (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ . Mas por (i),  $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^\perp) = 3$  e, do mesmo modo,  $\dim(\mathcal{U}^\perp) + \dim((\mathcal{U}^\perp)^\perp) = 3$ . Logo  $\dim((\mathcal{U}^\perp)^\perp) = \dim(\mathcal{U})$ . Consequentemente,  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ .

**Proposição 2.5.** *Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}_1^3$  subespaço vetorial. Então:*

(i)  $\mathcal{U}$  é euclidiano se, e só se,  $\mathcal{U}^\perp$  é subespaço lorentziano;

(ii)  $\mathcal{U}$  é singular se, e só se,  $\mathcal{U}^\perp$  é subespaço singular.

**Demonstração:** Suponha-se que  $\mathcal{U}$  é euclidiano. Neste caso, temos  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$  (caso contrário, a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathcal{U}$  seria degenerada). Assim,  $\mathbb{R}^3$  é a soma direta de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}^\perp$ :  $\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ . Se  $\mathcal{U}^\perp$  é singular, então existe  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^\perp$  não nulo tal que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$  e, simultaneamente, para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^\perp$ , o que contradiz o facto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ser não degenerado em  $\mathbb{R}^3$ . Se  $\mathcal{U}^\perp$  é euclidiano, então  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  seria definido positivo, o que contradiz o facto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ter índice  $(++-)$ . Logo  $\mathcal{U}^\perp$  é lorentziano.

Suponha-se agora que  $\mathcal{U}$  é lorentziano. Neste caso também temos  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$  (caso contrário, a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathcal{U}$  seria degenerada). Assim,  $\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ . Pelo mesmo argumento que aplicámos acima,  $\mathcal{U}^\perp$  não pode ser singular. Se  $\mathcal{U}^\perp$  é lorentziano, então temos dois vetores linearmente independentes,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{U}^\perp$ , do tipo tempo tais que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Multiplicando por um escalar, se necessário, podemos supôr que  $u_3 = v_3$ . Assim, o vetor  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, 0)$  é do tipo euclidiano e simultaneamente satisfaz

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0,$$

o que é uma contradição. Assim,  $\mathcal{U}^\perp$  é do tipo espaço.

A alínea (ii) é uma consequência imediata da alínea anterior.

Da proposição anterior resulta o seguinte corolário.

**Corolário 2.6.** *Se  $\mathcal{U}$  tiver dimensão 2, temos o seguinte:*

(i) se  $\mathcal{U}$  é euclidiano, então é necessariamente gerado por dois vetores do tipo espaço;

- (ii) se  $\mathcal{U}$  é singular, então pode ser gerado por um vetor do tipo luz e um vetor do tipo espaço;
- (iii) se  $\mathcal{U}$  é lorentziano, então pode ser gerado por um vetor do tipo tempo e um vetor do tipo espaço.

**Demonstração:** Apenas o caso (ii) não é imediato. Se  $\mathcal{U}$  é singular, então tem um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  do tipo luz. Este vetor gera  $\mathcal{U}^\perp$ , logo é ortogonal a qualquer vetor  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ .

Suponha-se que existe um vetor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  do tipo tempo em  $\mathcal{U}$ . Multiplicando por um escalar, se necessário, podemos assumir que  $u_3 = v_3$ . Assim,  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, 0)$  é um vetor do tipo espaço. Por outro lado, tendo em conta que  $\mathbf{u}$  é do tipo luz,  $\mathbf{v}$  é do tipo tempo e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , temos  $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$  o que é uma contradição.

Suponha-se agora que existe um vetor  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  do tipo luz em  $\mathcal{U}$  que seja linearmente independente de  $\mathbf{u}$ . Argumentando como no caso anterior, chegamos a nova contradição. Assim, todos os vetores linearmente independentes de  $\mathbf{u}$  em  $\mathcal{U}$  são do tipo espaço. Em conclusão, um plano singular é gerado por um vetor do tipo luz e um vetor do tipo espaço.

Finalizamos esta secção com a definição de produto vetorial em  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Definição 2.7.** Dados dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}_1^3$ , o *produto vetorial* de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , que denotamos por  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , é o vetor dado pelo determinante formal

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} - (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k},$$

onde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  são os vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .

As seguintes propriedades podem ser facilmente verificadas:

1.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ ;
2.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é ortogonal a  $\mathbf{u}$  e a  $\mathbf{v}$ ;

3.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$  se, e só se,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são linearmente dependentes;

**Observação 2.8.** É importante notar que, para o produto vetorial  $\times$  em  $\mathbb{R}_1^3$ , nem sempre, dados dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  linearmente independentes, o produto  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é linearmente independente de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Por exemplo, para  $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ , temos  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{u}$ .

## 2.2 Modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre

A geometria bidimensional de Laguerre é o estudo das propriedades do espaço das circunferências orientadas do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  invariantes para as *transformações de Laguerre*, isto é, as transformações que preservam o contacto orientado entre circunferências. Pontos de  $\mathbb{R}^2$  são interpretados como circunferências de raio zero.

Um modelo eficiente e intuitivo para a geometria de Laguerre é o chamado *modelo de Minkowski* [3, 8]. Este modelo estabelece uma bijeção, designada por *projeção isotrópica* [3, 8], entre pontos do espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  e circunferências orientadas do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Esta projeção é definida do seguinte modo. Dado  $P = (p_1, p_2, p_3)$  em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere-se o cone luz  $\mathcal{C}_P$  de vértice em  $P$ . A interseção de  $\mathcal{C}_P$  com o plano euclidiano  $\mathbb{R}^2 \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : z = 0\}$  é uma circunferência centrada em  $(p_1, p_2)$  com raio  $|p_3|$ . A orientação desta circunferência é positiva se  $p_3 > 0$  e negativa se  $p_3 < 0$ . Pontos em  $\mathbb{R}^2$  correspondem a pontos  $P = (p_1, p_2, p_3)$  em  $\mathbb{R}_1^3$  com  $p_3 = 0$ . Fazendo uso desta correspondência, as transformações de Laguerre são precisamente as transformações afins  $L : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  da forma  $L(\mathbf{u}) = \lambda A(\mathbf{u}) + \mathbf{t}$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_1^3$  e  $A \in O_1(3)$  é uma transformação ortogonal linear de  $\mathbb{R}_1^3$  (ver [3]).

## 2.3 Curvas no Espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$

Distinguimos localmente três tipos de curva no espaço de Minkowski, de acordo com a tipicidade do seu vetor tangente.

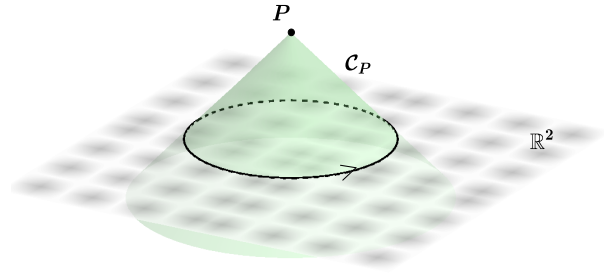


Figura 2.3: Projeção isotrópica.

**Definição 2.9.** Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva regular.

1.  $\alpha$  é do tipo espaço se  $\alpha'(t)$  é um vetor do tipo espaço, para todo  $t \in \mathbf{I}$ ;
2.  $\alpha$  é do tipo tempo se  $\alpha'(t)$  é um vetor do tipo tempo, para todo  $t \in \mathbf{I}$ ;
3.  $\alpha$  é do tipo luz se  $\alpha'(t)$  é um vetor do tipo luz, para todo  $t \in \mathbf{I}$ .

*Exemplo 2.1.* Consideremos a curva  $\alpha(t) = (\cosh(t), t^2, \sinh(t))$ . A sua derivada é

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), 2t, \cosh(t)).$$

Daqui, investigamos a sua tipicidade. Uma vez que  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 4t^2 - 1$ , temos

1.  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle < 0$  se  $t \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ;
2.  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$  se  $t = \pm \frac{1}{2}$ ;
3.  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle > 0$  se  $t \in ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

Com estes resultados,  $\alpha : ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é do tipo tempo e  $\alpha : ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é do tipo espaço.

Curvas com tipicidade definida exibem comportamentos muito particulares. Por exemplo, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** *Não existem curvas fechadas (regulares) do tipo luz nem do tipo tempo.*

**Demonstração:** Com vista a uma contradição, assumimos que existe uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $t \in \mathbf{I}$ , fechada que é do tipo luz ou tempo. Então a

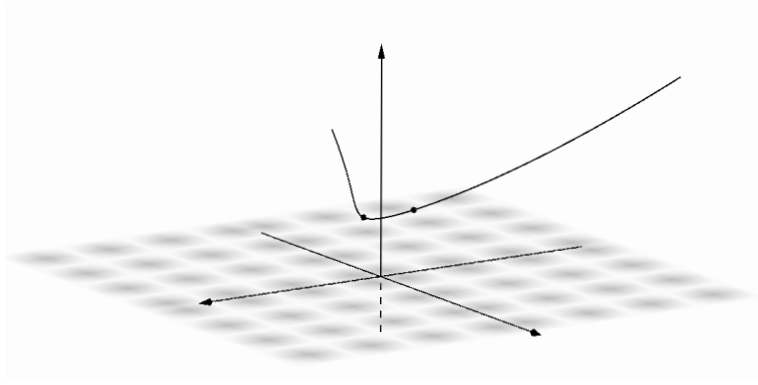


Figura 2.4: Curva  $\alpha(t) = (\cosh(t), t^2, \sinh(t))$ .

função  $z : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica, logo existe um instante  $t_0 \in \mathbf{I}$  tal que  $z'(t_0) = 0$ . Então

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \geq 0.$$

Isto é uma contradição se  $\alpha$  for do tipo tempo. Se considerarmos que a curva  $\alpha$  é do tipo luz, temos necessariamente  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ . Logo  $\alpha'(t_0) = 0$ . Em particular,  $\alpha$  não é regular em  $t = t_0$ , o que contradiz as nossas hipóteses.

Assim, concluímos que não há teoria para curvas fechadas do tipo tempo ou do tipo luz.

## 2.4 Curvas do tipo luz

### 2.4.1 Pseudo-comprimento de arco

Para curvas do tipo tempo ou do tipo espaço, podemos definir o parâmetro comprimento de arco analogamente à definição de comprimento para curvas no espaço euclidiano. No entanto, para curvas  $\alpha$  do tipo luz, uma vez que o vetor tangente é do tipo luz, não temos como normalizar esse vetor e, conseqüentemente, não existe uma definição natural de comprimento de arco. Alternativamente, para curvas do tipo luz distingue-se um parâmetro que resulta de normalizar a segunda derivada  $\alpha''$ .

Procedemos da seguinte maneira. Partindo da tipicidade causal  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ ,

derivamos de forma a obter

$$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Assuma-se que  $\alpha'(t)$  e  $\alpha''(t)$  são linearmente independentes para todo  $t$  no seu domínio. Em particular o traço de  $\alpha$  não contém nenhum segmento de reta. Logo  $\alpha'(t)$  e  $\alpha''(t)$  são vetores linearmente independentes para todo  $t$  que geram o plano singular  $\langle \alpha'(t) \rangle^\perp$ . Esta é a situação do plano singular que é gerado por um vetor do tipo luz e um vetor do tipo espaço, conforme o corolário 2.6. Então o vetor  $\alpha''(t)$  é necessariamente do tipo espaço para todo  $t$ .

Contudo, aferimos a seguinte proposição:

**Proposição 2.11.** *Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz. Existe uma reparametrização  $\beta : \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , com  $\beta = \alpha \circ \phi$  e  $\phi : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{I}$ , tal que  $|\beta''(s)| = 1$  para todo  $s \in \mathbf{J}$ .*

**Demonstração:** Procuramos uma reparametrização  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ , com  $t = \phi(s)$ . Por derivação, temos  $\beta'(s) = \phi'(s)\alpha'(\phi(s))$  e, derivando novamente, vem

$$\beta''(s) = \phi''(s)\alpha'(\phi(s)) + \phi'^2(s)\alpha''(t) \quad (2.1)$$

Como  $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$  e  $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$ , de (2.1) obtemos

$$\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \phi'^4(s)|\alpha''(t)|^2.$$

Como queremos  $|\beta''(s)| = 1$ , resulta  $\phi'^4(s)|\alpha''(t)|^2 = 1$ . Logo, se  $\phi$  for uma solução da equação diferencial de primeira ordem

$$\phi'(s) = \frac{\pm 1}{\sqrt{|\alpha''(\phi(s))|}}, \quad (2.2)$$

então  $|\beta''(s)| = 1$ .

## 2.4.2 Equações de Frenet-Serret

No espaço euclidiano, fizemos referência ao triedro de Frenet-Serret  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ , que em cada instante é constituído por vetores ortonormados. Para curvas do tipo luz em

$\mathbb{R}_1^3$ , surge a dificuldade do vetor tangente não poder ser normalizado. Ainda assim, podemos definir um referencial  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  que apresenta propriedades notáveis.

Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva do tipo luz. Vamos assumir que  $\alpha'(t)$  e  $\alpha''(t)$  são linearmente independentes para todo  $t$  no seu domínio. Admitimos também que  $\alpha$  já está parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ . Definimos o *vetor tangente*  $\mathbf{T} = \alpha'$  e o *vetor normal*  $\mathbf{N} = \alpha''$ . Uma vez que a curva está parametrizada por pseudo-comprimento de arco,  $\mathbf{N}$  é um vetor do tipo espaço unitário. O *vetor binormal*  $\mathbf{B}$  é o único vetor do tipo luz que satisfaz as condições

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0.$$

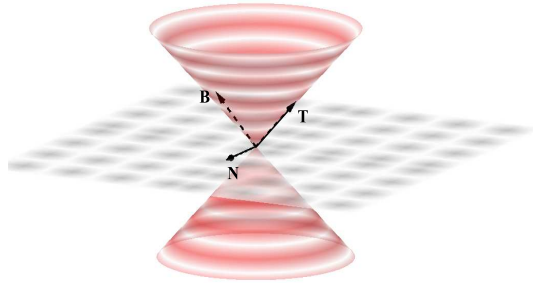


Figura 2.5: Triedro de Frenet para uma curva do tipo luz

**Definição 2.12.** Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco. A *pseudo-torção* é a função  $\tau : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle$ .

Uma vez que  $\mathbf{N}$  é um vetor do tipo espaço unitário,  $\mathbf{N}'$  é ortogonal a  $\mathbf{N}$  e temos  $\mathbf{N}' = a\mathbf{T} + b\mathbf{B}$  para certas funções  $a, b : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tomando o produto lorentziano com o vetor do tipo luz  $\mathbf{B}$ , vemos que  $a = \tau$ . Para encontrar a função  $b$ , derivamos o produto  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$ , de forma a obter

$$0 = \langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{T}' \rangle = \langle \tau\mathbf{T} + b\mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -b + 1$$

logo  $b = 1$  e  $\mathbf{N}' = \tau\mathbf{T} + \mathbf{B}$ .

Derivando  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle = -1$  e  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 0$  obtemos  $\langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle = 0$ . Por outro lado, derivando  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0$  e tendo em conta que  $\mathbf{N}' = \tau\mathbf{T} + \mathbf{B}$ , obtemos



também  $\langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle = \tau$ . Assim,  $\mathbf{B}' = \tau \mathbf{N}$ . Desta forma encontrámos as equações do triedro de Frenet para curvas do tipo luz.

$$\mathbf{T}' = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = \tau \mathbf{T} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \tau \mathbf{N}. \quad (2.3)$$

Na forma matricial, podemos também escrever

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Observe-se ainda o seguinte. Derivando  $\mathbf{N}' = \tau \mathbf{T} + \mathbf{B}$ , obtemos  $\mathbf{N}'' = \tau' \mathbf{T} + \tau \mathbf{T}' + \mathbf{B}'$ .

Uma vez que  $\mathbf{N}'' = \mathbf{T}'''$  e  $\mathbf{B}' = \tau \mathbf{N} = \tau \mathbf{T}'$ , concluímos que

$$\mathbf{T}''' - 2\tau \mathbf{T}' - \tau' \mathbf{T} = 0. \quad (2.5)$$

Pondo  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ , as funções  $T_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , verificam as seguintes igualdades.

$$T_i''' - 2\tau T_i' - \tau' T_i = 0, \quad T_1^2 + T_2^2 - T_3^2 = 0, \quad T_1'^2 + T_2'^2 - T_3'^2 = 1. \quad (2.6)$$

*Exemplo 2.2.* Avaliemos o carácter causal da curva

$$\alpha(t) = (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), \sqrt{2}t)$$

definida em  $\mathbb{R}$ . O seu traço encontra-se representado na figura 2.6. Tomando a

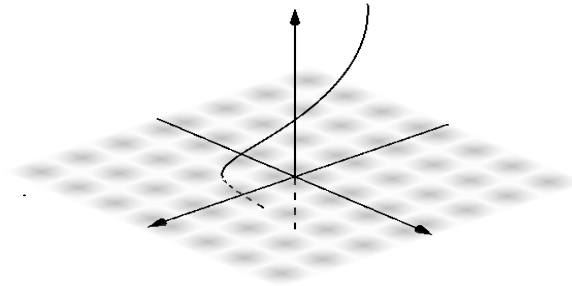


Figura 2.6: O traço da curva  $\alpha(t) = (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), \sqrt{2}t)$

derivada, temos

$$\alpha'(t) = (-\sin(t) + \cos(t), \cos(t) + \sin(t), \sqrt{2}).$$

Assim, podemos verificar que  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo  $\alpha$  é uma curva do tipo luz. A segunda derivada é dada por

$$\alpha''(t) = (-\cos(t) - \sin(t), -\sin(t) + \cos(t), 0).$$

Como  $\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = 2$ , o parâmetro  $t$  não é pseudo-comprimento de arco. Para obtermos um parâmetro pseudo-comprimento de arco temos de integrar a equação (2.2), com  $|\alpha''(\phi(s))| = \sqrt{2}$ . Assim,  $t = \phi(s) = \frac{s}{\sqrt[4]{2}}$ . Reparametrizando,

$$\beta(s) = \alpha \circ \phi(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) - \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), \sqrt[4]{2}s \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \beta'(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), \sqrt[4]{2} \right) \\ \mathbf{N}(s) &= \beta''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) - \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), 0 \right) \end{aligned}$$

Daí vamos obter o vetor binormal  $\mathbf{B}(s)$  do sistema, que se expressa por:  $\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = -1$ ,  $\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$ . Pondo  $\mathbf{B}(s) = (\alpha, \beta, \gamma)$  e cumprindo com a métrica lorentziana do produto interno, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{\alpha(\sin(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}) - \cos(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}))}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\beta(\sin(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}) + \cos(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}))}{\sqrt{2}} - \sqrt[4]{2}\gamma \\ 0 &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ 0 &= -\frac{\alpha(\sin(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}) - \cos(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}))}{\sqrt{2}} - \frac{\beta(\sin(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}) - \cos(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}))}{\sqrt[4]{2}} \end{aligned}$$

Reolvendo este sistema, obtemos

$$\mathbf{B}(s) = \left( \frac{1}{2\sqrt[4]{8}} \left( \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) - \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) \right), -\frac{1}{2\sqrt[4]{8}} \left( \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) \right), \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \right).$$

Assim, prosseguimos para calcular a pseudo-torção. Como

$$\mathbf{B}'(s) = -\frac{1}{4} \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) + \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right) - \cos\left(\frac{s}{\sqrt[4]{2}}\right), 0 \right)$$

temos

$$\tau = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

### 2.4.3 Teorema fundamental das curvas do tipo luz

Assim como, para curvas planas, a curvatura determina a curva a menos de um movimento rígido, no caso de curvas do tipo luz, a pseudo-torção determine a curva a menos de isometrias lorentzianas.

**Teorema 2.13** (Teorema fundamental das curvas nulas). *Dada uma função  $\tau : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma curva do tipo luz  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco para a qual  $\tau$  é a pseudo-torção. Se  $\bar{\alpha} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma outra curva do tipo luz nas mesmas condições, então existe uma transformação linear ortogonal  $A \in O_1(3)$  e um vetor constante  $\mathbf{u}$  tal que  $\bar{\alpha} = A\alpha + \mathbf{u}$ .*

**Demonstração:** Consideremos o sistema linear de equações diferenciais ordinárias dado por (2.4). Fixemos  $s_0 \in \mathbf{I}$  e condições iniciais  $\mathbf{T}(s_0) = \mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{N}(s_0) = \mathbf{N}_0$  e  $\mathbf{B}(s_0) = \mathbf{B}_0$  tais que

$$\langle \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_0 \rangle = \langle \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0 \rangle = \langle \mathbf{B}_0, \mathbf{N}_0 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{N}_0, \mathbf{N}_0 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0 \rangle = -1. \quad (2.7)$$

Seja  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  a única solução do sistema satisfazendo estas condições iniciais e defina-se  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(u) du. \quad (2.8)$$

Vejamos que  $\alpha$  é uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco para a qual  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  é o correspondente triedro de Frenet e  $\tau$  é a pseudo-torção. Para tal, comecemos por observar que, de (2.4),  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  satisfaz

$$\begin{aligned} (\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle)' &= 2\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle, \\ (\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle)' &= 2\tau\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle + 2\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle, \\ (\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle)' &= 2\tau\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle, \\ (\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle)' &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle + \tau\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle, \\ (\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle)' &= \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle + \tau\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle, \\ (\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle)' &= \tau\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle + \tau\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, as funções  $x_1 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle$ ,  $x_2 = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$ ,  $x_3 = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle$ ,  $x_4 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle$ ,  $x_5 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle$  e  $x_6 = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle$  formam uma solução de um sistema de seis equações

lineares ordinárias para o qual  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = -1$  e  $x_6 = 0$  formam também uma solução com as mesmas condições iniciais. Assim, pela unicidade das soluções, temos

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = -1.$$

Logo  $\alpha$  é uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco para a qual  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  é o correspondente triedro de Frenet e  $\tau$  é a pseudo-torção.

Qualquer outra curva  $\bar{\alpha}$  nas mesmas condições resulta de considerar alguma constante de integração  $\mathbf{u}$  em (2.8) e condições iniciais  $\bar{\mathbf{T}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0, \bar{\mathbf{B}}_0$  satisfazendo (2.7). Mas, tais condições iniciais definem um elemento  $A \in O_1(3)$  tal que  $\{\bar{\mathbf{T}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0, \bar{\mathbf{B}}_0\} = A\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$ . A correspondente solução de (2.4) virá então dada por  $\{\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{B}}\} = A\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ . Assim,  $\bar{\alpha} = A\alpha + \mathbf{u}$ .

O pseudo-comprimento de arco e a pseudo-torção são preservados por isometrias lorentzianas. Em relação a homotetias, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.14.** *Seja  $\alpha$  uma curva do tipo luz com parâmetro do pseudo-comprimento de arco  $s$  e pseudo-torção  $\tau$ . Seja  $\lambda \neq 0$  um número real. Então,  $\bar{s} = \sqrt{|\lambda|}s$  é o parâmetro do pseudo-comprimento de arco da curva do tipo luz  $\bar{\alpha} = \lambda\alpha$ , que tem pseudo-torção*

$$\bar{\tau}(\bar{s}) = \frac{1}{|\lambda|} \tau(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}). \quad (2.9)$$

**Demonstração:** Aplicando duas vezes a regra da derivação da função composta, vemos que o vetor tangente  $\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}}$  e o vetor normal  $\bar{\mathbf{N}} = \frac{d^2\bar{\alpha}}{d\bar{s}^2}$  de  $\bar{\alpha}$  estão relacionados com o vetor tangente  $\mathbf{T}$  e o vetor normal  $\mathbf{N}$  da curva  $\alpha$  por:

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{s}) = \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} \mathbf{T}(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}), \quad \bar{\mathbf{N}}(\bar{s}) = \text{sign}(\lambda) \mathbf{N}(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}).$$

Daqui tiramos também

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{s}) = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\lambda} \mathbf{B}(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}).$$

Da relação entre vetores normais vemos que  $\bar{s}$  é o parâmetro do pseudo-comprimento de arco de  $\bar{\alpha}$ .

Por outro lado, como

$$\frac{d\bar{\mathbf{N}}}{d\bar{s}} = \text{sinal}(\lambda) \frac{d\mathbf{N}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \text{sinal}(\lambda)(\tau\mathbf{T} + \mathbf{B}) \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} = \text{sinal}(\lambda) \left( \frac{\tau}{\lambda} \bar{\mathbf{T}} + \frac{\lambda}{|\lambda|} \bar{\mathbf{B}} \right).$$

Como a pseudo-torção  $\bar{\tau}$  é a componente de  $\bar{\mathbf{N}}'$  ao longo de  $\bar{\mathbf{T}}$ , temos

$$\bar{\tau}(\bar{s}) = \frac{\text{sinal}(\lambda)}{\lambda} \tau(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}) = \frac{1}{|\lambda|} \tau(\bar{s}/\sqrt{|\lambda|}).$$

## 2.5 $L$ -evolutas e curvas do tipo luz

### 2.5.1 Definição de $L$ -evoluta

A curva no plano de Laguerre formada pelas circunferências osculadoras a uma curva no plano euclidiano corresponde a uma curva no espaço de Minkowski através da projeção isotrópica. Mais precisamente, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 2.15.** Seja  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. Assuma-se que a curvatura e a sua derivada,  $k$  e  $k'$ , são funções em  $\mathbf{I}$  que nunca se anulam. Chama-se  $L$ -evoluta de  $r$  a curva  $\varepsilon_e : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  definida por

$$\varepsilon_e(t) = \left( r(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}(t), \frac{1}{k(t)} \right)$$

Podemos também escrever  $\varepsilon_e(t) = (\varepsilon(t), \frac{1}{k(t)})$ , sendo  $\varepsilon$  a evoluta de  $r$  no plano. A grandeza  $k(t)$  é a curvatura de  $r(t)$ ,  $\mathbf{n}(t)$  é o vetor normal a  $r$  em  $t$ . Ainda em relação à curva  $r$ , denotaremos por  $\mathbf{t}(t)$  o seu vetor tangente unitário em  $t$ .

Na figura 2.7 encontra-se representada o traço da curva  $r(t) = (t, t^2)$ , a sua evoluta e a sua  $L$ -evoluta. De observar que a derivada da curvatura de  $r$  em  $t = 0$  é nula, daí a existência de um ponto singular para a  $L$ -evoluta.

**Teorema 2.16.** Dada uma curva plana regular  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  nas condições da definição 2.15, a sua  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma curva do tipo luz. Reciprocamente, qualquer curva do tipo luz  $\varepsilon_e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é a  $L$ -evoluta de alguma curva plana  $r : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se  $\varepsilon_3$  não se anular em  $\mathbf{I}$ .

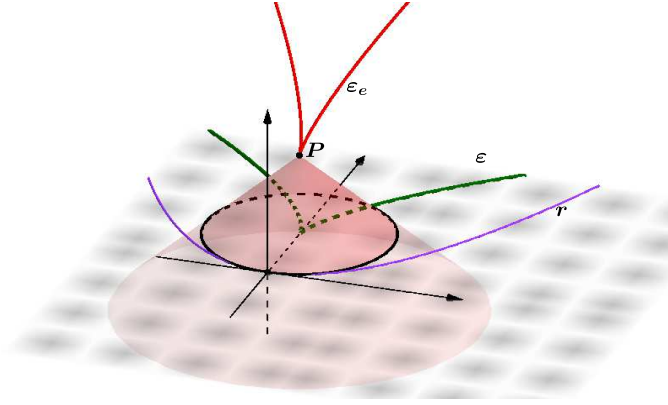


Figura 2.7: A parábola e a sua  $L$ -evoluta.

**Demonstração:** Para simplificar a exposição, vamos assumir que a curva  $r$  está parametrizada por comprimento de arco  $t$  e pomos  $u = 1/k$ . Assim,

$$\begin{aligned}\varepsilon'_e(t) &= (r'(t) + u'(t)\mathbf{n}(t) + u(t)\mathbf{n}'(t), u'(t)) = (\mathbf{t}(t) + u'(t)\mathbf{n}(t) - u(t)k(t)\mathbf{t}(t), u'(t)) \\ &= u'(t)(\mathbf{n}(t), 1)\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{n}(t)$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ , vem que  $\langle \varepsilon'_e, \varepsilon'_e \rangle = 0$ .

Reciprocamente, seja  $\varepsilon_e$  uma curva do tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$  com parametro  $t$ . Necessariamente,  $\varepsilon'_3(t) \neq 0$  para todo  $t$ , tal como vimos na demonstração da proposição 2.10. Isto significa que podemos reparametrizar  $\varepsilon_e$  com o parâmetro  $u = \varepsilon_3(t)$  e assumir que  $\varepsilon_e$  é da forma  $\varepsilon_e(u) = (\varepsilon_1(u), \varepsilon_2(u), u)$ . Por hipótese,  $u \neq 0$ . Considere-se a curva plana  $r$  definida por  $r(u) = \varepsilon(u) - u\varepsilon'(u)$ , onde  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Observe-se que  $\varepsilon$  está parametrizada por comprimento de arco: de facto, uma vez que  $\varepsilon'_e(u) = (\varepsilon'_1(u), \varepsilon'_2(u), 1)$  e  $\langle \varepsilon'_e, \varepsilon'_e \rangle = 0$ , obtemos  $|\varepsilon'| = 1$ . Logo,  $r$  é uma involuta de  $\varepsilon$ . Consequentemente,  $\varepsilon$  é a evoluta de  $r$ . Em particular, a curvatura  $k$  de  $r$  satisfaz  $k = \pm 1/u$ . Se  $k = 1/u$ , então  $\varepsilon_e$  é a  $L$ -evoluta de  $r$ . Se  $k = -1/u$ , então  $\varepsilon_e$  é a  $L$ -evoluta da curva  $\bar{r}$  dada por uma reparametrização de  $r$  que inverta a orientação.

De agora em diante, iremos sempre assumir o seguinte.

- a) todas as curvas planas são regulares e as funções  $k$  e  $k'$  nunca se anulam;
- b) todas as curvas do tipo luz, e em particular as  $L$ -evolutas, são tais que  $\varepsilon'_e$  e  $\varepsilon''_e$  são sempre linearmente independentes. Em particular, estamos a excluir

retas do tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$  e a parametrização por pseudo-comprimento de arco é sempre possível.

*Exemplo 2.3.* Exploremos da curva  $r(t) = (\ln t, \sqrt{t^2 - 1} - \arctan(\sqrt{t^2 - 1}))$ , definida para  $t > 1$ . Derivando, temos:

$$r'(t) = \frac{1}{t}(1, \sqrt{t^2 - 1}).$$

Logo

$$|r'(t)| = 1$$

e  $r$  está parametrizada por comprimento de arco. Derivando  $r'(t)$ , vem:

$$r''(t) = \frac{1}{t^2} \left( -1, \frac{1}{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

O vetor normal será dado por:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{|\mathbf{t}'(t)|} = \frac{1}{t}(-\sqrt{t^2 - 1}, 1).$$

Logo, pelas equações de Frenet, a curvatura de  $r$  é dada por:

$$k(t) = \mathbf{t}'(t) \cdot \mathbf{n}(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

Podemos escrever agora a evoluta de  $r$  no plano euclidiano,

$$\varepsilon(t) = (\ln t - t^2 + 1, 2\sqrt{t^2 - 1} - \arctan(\sqrt{t^2 - 1})),$$

bem como a L-evoluta em  $\mathbb{R}_1^3$ ,

$$\varepsilon_e(t) = \left( \varepsilon(t), \frac{1}{k(t)} \right) = (\ln t - t^2 + 1, 2\sqrt{t^2 - 1} - \arctan(\sqrt{t^2 - 1}), t\sqrt{t^2 - 1})$$

A proposição seguinte mostra-nos como relacionar o pseudo-comprimento de arco de uma  $L$ -evoluta com o parâmetro comprimento da curva plana original.

**Proposição 2.17.** *Seja  $t$  o parâmetro comprimento de arco da curva plana  $r$  e  $\varepsilon_e$  a  $L$ -evoluta de  $r$ . Seja  $s$  o pseudo-comprimento de arco de  $\varepsilon_e$ , onde  $t = \phi(s)$  e  $\phi$  é uma solução de (2.2). Então*

$$\phi'(s) = \pm \sqrt{\left| \frac{u(\phi(s))}{\dot{u}(\phi(s))} \right|}, \quad (2.10)$$

onde  $u = 1/k$  é o raio de curvatura de  $r$ .

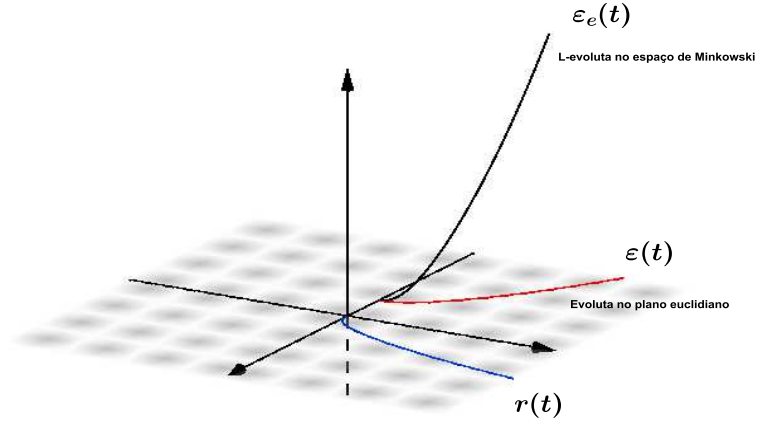


Figura 2.8:  $L$ -evoluta de  $r(t) = (\ln t, \sqrt{t^2 - 1} - \arctan(\sqrt{t^2 - 1}))$ .

**Demonstração:** Como  $\varepsilon_e(t) = (r(t) + u(t)\mathbf{n}(t), u(t))$ , temos  $\varepsilon'_e = u'(t)(\mathbf{n}(t), 1)$  e

$$\varepsilon''_e(t) = u''(t)(\mathbf{n}(t), 1) - k(t)u'(t)(\mathbf{t}(t), 0).$$

Logo

$$\langle \varepsilon''_e, \varepsilon''_e \rangle = \frac{u'^2}{u^2}.$$

O resultado segue agora da igualdade (2.2).

### 2.5.2 Congruência de Laguerre

**Definição 2.18.** Duas curvas planas  $r$  e  $\bar{r}$ , com  $L$ -evolutas  $\varepsilon_e$  e  $\bar{\varepsilon}_e$ , respetivamente, são ditas *congruentes no sentido de Laguerre* (ou *Laguerre-congruentes*) se as famílias correspondentes de circunferências osculadoras estão relacionadas por uma transformação de Laguerre, isto é, se (a menos de reparametrização)  $\bar{\varepsilon}_e = \lambda A \varepsilon_e + \mathbf{b}$  para alguns  $\lambda \neq 0$ ,  $A \in O_1(3)$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_1^3$ .

A identificação de  $\mathbb{R}^2$  com  $\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid u_3 = 0\}$  permite associar a cada movimento rígido de  $\mathbb{R}^2$  uma transformação de Laguerre. De facto, se  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um movimento rígido dado por  $M\mathbf{u} = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ , com  $A \in SO(2)$  uma rotação em torno da origem e  $\mathbf{b}$  um vetor de  $\mathbb{R}^2$ , então a correspondente transformação de Laguerre  $M_L : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é dada por, tendo em conta o modelo de Minkowski,



$M_L(\mathbf{u}) = A_L \mathbf{u} + \mathbf{b}$  com  $A_L \in O_1(3)$  dada por

$$A_L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O subgrupo do grupo  $\mathcal{L}$  das transformações de Laguerre gerado pelos movimentos rígidos de  $\mathbb{R}^2$  juntamente com o subgrupo das translações de  $\mathbb{R}_1^3$  será denotado por  $\mathcal{L}_I$ . Notemos que, se  $L \in \mathcal{L}_I$  corresponde a uma translação ao longo do eixo  $OZ$ , isto é,  $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{e}_3$ , com  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então as projeções das  $L$ -evolutas  $\varepsilon_e$  e  $\bar{\varepsilon}_e = L(\varepsilon_e)$  no plano  $\mathbb{R}^2$  coincidem. Isto implica que  $r$  e  $\bar{r}$  são involutas da mesma curva e, conseqüentemente, são paralelas:  $\bar{r} = r + \lambda \mathbf{n}$  onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário de  $\bar{r}$ .

Temos o seguinte.

**Teorema 2.19.** *Duas curvas planas  $r$  e  $\bar{r}$  são Laguerre-congruentes se, e só se, as pseudo-torções  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  de  $\varepsilon_e$  e  $\bar{\varepsilon}_e$ , respectivamente, estão relacionadas por (2.9) para algum  $\lambda \neq 0$ .*

**Demonstração:** Tendo em conta que a pseudo-torção e o parâmetro pseudo-comprimento de arco são invariantes por isometrias de Lorentz e que, para homotetias, vale a fórmula (2.9), então o enunciado do teorema é uma consequência do facto da pseudo-torção determinar a curva do tipo luz a menos de uma isometria de Lorentz.

**Observação 2.20.** O problema de determinar condições necessárias e suficientes para duas famílias de circunferências orientadas estarem relacionadas por uma transformação de Laguerre foi estudado por Tadahiko Kubota [14], em 1924, para o caso destas famílias definirem em  $\mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo espaço. Curiosamente, no mesmo artigo, o autor refere que o caso correspondente, no nosso contexto, a curvas do tipo Luz iria ser tratado num artigo subsequente. No entanto, não encontrámos na literatura qualquer indicação para a existência deste artigo. De notar também que os seus métodos não envolvem diretamente conceitos como curvatura, torção, triedro de Frenet e comprimento de arco para curvas do tipo espaço ou do tipo tempo em  $\mathbb{R}_1^3$ .

*Exemplo 2.4.* Consideremos a curva  $r(t) = -\frac{2}{3}((1-t)\sqrt{1-t}, -t\sqrt{t})$ , definida para  $t \in ]0, 1[$ . A sua evoluta no plano é a curva

$$\varepsilon(t) = \left( \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{1-t}, \left(2 - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{t} \right)$$

e a sua  $L$ -evoluta é

$$\varepsilon_e(t) = \left( \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{1-t}, \left(2 - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{t}, 2\sqrt{(1-t)t} \right)$$

Consideremos agora a transformação  $L \in \mathcal{L}_I$  dada por  $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + 2\mathbf{e}_3$ , com  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Então,

$$\bar{\varepsilon}_e(t) = L(\varepsilon_e)(t) = \left( \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{1-t}, \left(2 - \frac{4}{3}t\right)\sqrt{t}, 2\sqrt{(1-t)t} + 2 \right)$$

e  $\bar{\varepsilon}_e$  é a  $L$ -evoluta da curva

$$\bar{r}(t) = \left( -\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t} - 2\sqrt{t}, \frac{2}{3}t\sqrt{t} + 2\sqrt{1-t} \right).$$

Os traços das curvas  $r$  e  $\bar{r}$  encontram-se representados na figura 2.9.

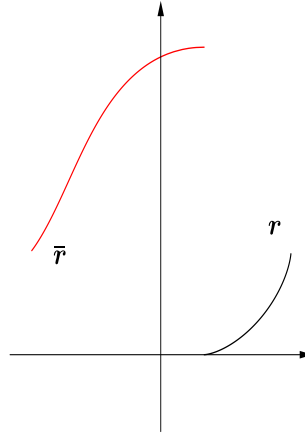


Figura 2.9:  $r$  e  $\bar{r}$  são curvas  $\mathcal{L}_I$ -congruentes

### 2.5.3 Teorema de Tait para circunferências osculadoras de uma curva plana

A correspondência entre curvas do plano euclidiano e curvas do tipo luz permite-nos relacionar um teorema antigo de P.G.Tait sobre as circunferências osculadoras no plano com a seguinte propriedade para curvas do tipo luz observada por L.K. Graves.

**Proposição 2.21** (Graves, [11]). *Uma curva do tipo luz  $\alpha$  partindo de  $P$  desenvolve-se no interior do cone luz  $C_P$ .*

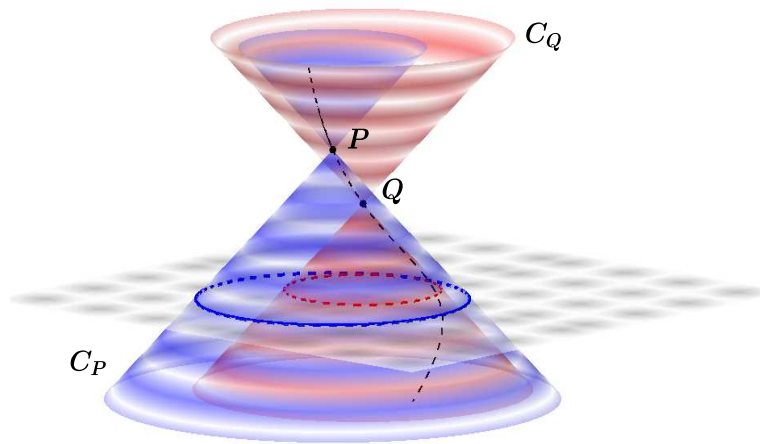


Figura 2.10: Curva do tipo luz por  $P$  desenvolve-se no interior de  $C_P$ .

Se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  é uma curva do tipo luz, com  $P = \alpha(t_0)$ , então, pela proposição anterior, ou  $\alpha(t)$  está no interior de  $C_P^+$ , a parte superior de  $C_P$ , para todo  $t > t_0$ , ou  $\alpha(t)$  está no interior de  $C_P^-$ , a parte inferior de  $C_P$ , para todo  $t > t_0$ , como ilustrado na figura 2.10. Consequentemente, em ambos os casos, a circunferência associada a  $P = \alpha(t_0)$  através da projeção isotrópica não intersecta a circunferência associada a  $Q = \alpha(t)$ , para todo  $t > t_0$ . Isto implica o seguinte.

**Proposição 2.22** (Tait, [22]). *As circunferências osculadoras de uma curva com curvatura estritamente monótona não se intersectam.*

## 2.6 Função potencial de uma curva plana

Seja  $r$  uma curva regular em  $\mathbb{R}^2$  com parâmetro comprimento de arco  $t$  e raio de curvatura  $u$ . Tendo em conta o lema 1.8, observe-se que o sinal da função  $uu'$  inverte quando a orientação de  $r$  inverte. Assim, reparametrizando a curva  $r$  se necessário, podemos definir o seguinte.

**Definição 2.23.** Seja  $t$  o parâmetro comprimento de arco da curva plana  $r$  e suponha-se que  $uu' > 0$ . Em (2.10), escolhemos

$$\text{sinal}(\phi') = \text{sinal}(u') = \text{sinal}(u)$$

e seja  $s$  o correspondente parâmetro por pseudo-comprimento de arco da  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e$  de  $r$ . A *função potencial* de  $r$  é a função positiva

$$f(s) = \phi'(s)u'(\phi(s)) = \sqrt{u(\phi(s))u'(\phi(s))}. \quad (2.11)$$

**Observação 2.24.** Tendo em conta a regra da derivação da função composta e que  $\phi'(s) = \frac{dt}{ds}$ , podemos também escrever  $f(s) = \frac{du}{ds}(s)$ .

A proposição seguinte diz-nos como calcular a pseudo-torção a partir da função potencial.

**Proposição 2.25.** *Se  $f$  é a função potencial de  $r$ , a pseudo-torção  $\tau$  da  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e$  de  $r$  é dada por*

$$\tau = \frac{1}{f}f'' - \frac{1}{2f^2}(f'^2 + 1). \quad (2.12)$$

**Demonstração:** Reparametrizemos a  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e(t) = (r(t) + u(t)\mathbf{n}(t), u(t))$  por pseudo-comprimento de arco  $t = \phi(s)$ . Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \frac{d\varepsilon_e}{ds}(s) = \phi'(s)(r'(\phi(s)) + u'(\phi(s))\mathbf{n}(\phi(s)) + u(\phi(s))\mathbf{n}'(\phi(s)), u'(\phi(s))) \\ &= \phi'(s)u'(\phi(s))(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) = f(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para determinarmos o vetor normal  $\mathbf{N}(s)$ , voltamos a derivar:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \mathbf{T}'(s) = f'(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) + f(s)\phi'(s)(\mathbf{n}'(\phi(s)), 0) \\ &= f'(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) - \frac{f(s)\phi'(s)}{u(\phi(s))}(\mathbf{t}(\phi(s)), 0). \end{aligned}$$

Mas, tendo em conta (2.10) e (2.11), temos

$$\frac{f(s)\phi'(s)}{u(\phi(s))} = 1,$$

logo

$$\mathbf{N}(s) = f'(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) - (\mathbf{t}(\phi(s)), 0). \quad (2.14)$$

Encontremos agora o vetor binormal  $\mathbf{B}(s)$ . Em relação à base  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{e}_3\}$  de  $\mathbb{R}_1^3$ , com  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , podemos escrever, tendo em vista (2.13) e (2.14),  $\mathbf{T} = (0, f, f)$  e  $\mathbf{N} = (-1, f', f')$ . Por definição de vetor binormal,  $\mathbf{B}(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s))$  é o único vetor que satisfaz

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0.$$

Assim,

$$a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0, \quad (a_2 - a_3)f = -1, \quad -a_1 + a_2f' - a_3f' = 0.$$

Daqui tiramos

$$a_1 = -\frac{f'}{f}, \quad a_2 = \frac{f'^2 - 1}{2f}, \quad a_3 = \frac{f'^2 + 1}{2f}.$$

Logo

$$\mathbf{B}(s) = \left( -\frac{f'(s)}{f(s)}\mathbf{t}(\phi(s)) + \frac{f'(s)^2 - 1}{2f(s)}\mathbf{n}(\phi(s)), \frac{f'(s)^2 + 1}{2f(s)} \right). \quad (2.15)$$

Para determinar a pseudo-torção  $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle$ , precisamos ainda de derivar o vetor normal. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(s) &= f''(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) + f'(s)\phi'(s)(\mathbf{n}'(\phi(s)), 0) - \phi'(s)(\mathbf{t}'(\phi(s)), 0) \\ &= f''(s)(\mathbf{n}(\phi(s)), 1) - \frac{f'(s)\phi'(s)}{u(\phi(s))}(\mathbf{t}(\phi(s)), 0) - \frac{\phi'(s)}{u(\phi(s))}(\mathbf{n}(\phi(s)), 0). \end{aligned}$$

Mas, tendo em conta (2.10) e (2.11),

$$\frac{\phi'(s)}{u(s)} = \frac{1}{f(s)},$$

logo

$$\mathbf{N}'(s) = \left( \left\{ f''(s) - \frac{1}{f(s)} \right\} \mathbf{n}(\phi(s)) - \frac{f'(s)}{f(s)} \mathbf{t}(\phi(s)), f''(s) \right). \quad (2.16)$$

Finalmente, usando (2.15) e (2.16), obtemos (2.12).

O teorema seguinte mostra-nos que a função potencial determina, a menos de uma transformação de Laguerre em  $\mathcal{L}_I$ , tal como definido na secção 2.5.2, a curva plana  $r$  e a sua  $L$ -evoluta.

**Teorema 2.26.** *Seja  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável positiva no intervalo aberto  $\mathbf{I} = ]a, b[$ . Fixemos  $s_0 \in \mathbf{I}$  e uma constante  $b_0$  tais que  $\int_{s_0}^s f(v)dv + b_0 \neq 0$  para  $s \in ]s_0, b[$ . Denotamos  $\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{f(v)}dv$ . Então, a curva do tipo luz  $\varepsilon_e : ]s_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por*

$$\varepsilon_e(s) = \int_{s_0}^s (\cos \theta(v), \sin \theta(v), 1) f(v)dv + (0, 0, b_0) \quad (2.17)$$

*tem parâmetro pseudo-comprimento de arco  $s$  e  $\varepsilon_e$  é a  $L$ -evoluta de alguma curva plana regular  $r$  com função potencial  $f : ]s_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . A menos de um movimento rígido de  $\mathbb{R}^2$ , esta curva plana é dada por*

$$r(t) = \int_{s_0}^{\phi^{-1}(t)} (\cos \theta(v), \sin \theta(v)) \phi'(v)dv, \quad (2.18)$$

onde o parâmetro comprimento de arco  $t$  de  $r$  satisfaz  $t = \phi(s)$  para alguma função estritamente monótona  $\phi : ]s_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada

$$\phi'(s) = \frac{\int_{s_0}^s f(v)dv + b_0}{f(s)}. \quad (2.19)$$

Mais, se  $\bar{r}$  é outra curva plana regular com função potencial  $f : ]s_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\bar{r}$  coincide com  $r$  a menos de movimento rígido, para alguma constante  $b_0$ . Consequentemente, quaisquer duas curvas planas com a mesma função potencial são  $\mathcal{L}_I$ -congruentes. Reciprocamente, se  $r$  e  $\bar{r}$  são  $\mathcal{L}_I$ -congruentes, então elas têm a mesma função potencial.

**Demonstração:** Derivando (2.17), obtemos

$$\varepsilon'_e(s) = f(s)(\cos \theta(s), \sin \theta(s), 1).$$

Daqui, vemos que  $\langle \varepsilon'_e, \varepsilon'_e \rangle = 0$ , isto é,  $\varepsilon_e$  é uma curva do tipo luz. Derivando novamente, obtemos

$$\varepsilon''_e(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s), 0) + f'(s)(\cos \theta(s), \sin \theta(s), 1).$$

Então  $\langle \varepsilon''_e, \varepsilon''_e \rangle = 1$ , o que significa que  $s$  é um parâmetro pseudo-comprimento de arco de  $\varepsilon_e$ .

Por hipótese,  $\varepsilon_3(s) = \int_{s_0}^s f(v)dv + b_0$  não se anula em  $]s_0, b[$ . Então, pelo teorema 2.16,  $\varepsilon_e$  é a  $L$ -evoluto de alguma curva plana. O raio de curvatura  $u$  desta curva plana em  $s$  é precisamente  $\varepsilon_3(s)$ .

Por outro lado, considerando a curva  $r$  definida por (2.18), temos, pelas regras da derivação da função composta e da função inversa,

$$\begin{aligned} r'(t) &= (\phi^{-1}(t))' \phi'(\phi^{-1}(t)) \left( \cos \theta(\phi^{-1}(t)), \sin \theta(\phi^{-1}(t)) \right) \\ &= \left( \cos \theta(\phi^{-1}(t)), \sin \theta(\phi^{-1}(t)) \right). \end{aligned}$$

Então  $|r'| = 1$ , ou seja,  $t$  é um parâmetro comprimento de arco da curva  $r$ . Temos também, pondo  $s = \phi^{-1}(t)$ ,

$$r''(t) = \frac{1}{\phi'(s)f(s)} (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)),$$

pelo que a curvatura de  $r$  é dada por

$$k(t) = \det(r'(t), r''(t)) = \frac{1}{\phi'(s)f(s)},$$

logo o raio de curvatura de  $r$  em  $s$  é  $\phi'(s)f(s) = \varepsilon_3(s)$ . Então, o teorema fundamental das curvas planas assegura-nos que, a menos de um movimento rígido de  $\mathbb{R}^2$ , a curva plana cuja  $L$ -evoluta é  $\varepsilon_e$  coincide com  $r$ .

Consideremos agora qualquer outra curva  $\bar{r}$  com função potencial  $f : ]s_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Sejam  $\bar{t}$  e  $\bar{u}$  o parâmetro comprimento de arco e o raio de curvatura, respetivamente, de  $\bar{r}$ . Então, por definição de função potencial,

$$f(s) = \bar{\phi}'(s)\bar{u}'(\bar{\phi}(s)) = \sqrt{\bar{u}(\bar{\phi}(s))\bar{u}'(\bar{\phi}(s))}, \quad (2.20)$$

com  $\bar{t} = \bar{\phi}(s)$ . De acordo com as nossas escolhas na definição de função potencial, temos também

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \epsilon \sqrt{\bar{u}/\bar{u}'}, \quad (2.21)$$

onde  $\epsilon := \text{sin}(\bar{\phi}') = \text{sin}(\bar{u}') = \text{sin}(\bar{u})$ . De (2.20), resulta (ver observação 2.24)  $f = d\bar{u}/ds$ . Multiplicando (2.20) e (2.21), obtemos  $\frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{u}/f$ . Então

$$\bar{u}(\bar{\phi}(s)) = \int_{s_0}^s f(v)dv + \bar{u}(\bar{\phi}(s_0)), \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\int_{s_0}^s f(v)dv + \bar{u}(\bar{\phi}(s_0))}{f(s)}. \quad (2.22)$$

Pondo  $b_0 := \bar{u}(\bar{\phi}(s_0))$ , vemos de (2.22) que  $r$  e  $\bar{r}$  têm a mesma função curvatura e o mesmo comprimento de arco  $t = \bar{t}$ , o que significa que  $r$  e  $\bar{r}$  estão relacionados por um movimento rígido. Em particular, a  $L$ -evoluta  $\bar{\varepsilon}_e$  de  $\bar{r}$  é dada por (2.17) a menos de movimento rígido atuando nas duas primeiras coordenadas. Podemos verificar esta afirmação de forma construtiva, como de seguida se apresenta.

Seja  $\bar{\varepsilon}_e = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)$  a  $L$ -evoluta de  $\bar{r}$ . Por definição de  $L$ -evoluta,  $\bar{\varepsilon}_3(s) = \bar{u}(\bar{\phi}(s))$ . Por outro lado, sabemos (ver secção 1.3.4) que a evoluta  $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$  de  $\bar{r}$  tem comprimento de arco  $\bar{u}$  e curvatura  $k_{\bar{\varepsilon}} = 1/\bar{u}\bar{u}'$ . Uma vez que

$$\int k_{\bar{\varepsilon}} d\bar{u} = \int \frac{1}{\bar{u}\bar{u}'} \frac{d\bar{u}}{ds} ds = \int \frac{1}{f} ds,$$

pondo  $\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{f(v)} dv$ , a curva  $\bar{\varepsilon}$  é dada, a menos de movimento rígido, por

$$\bar{\varepsilon}(\bar{u}(\bar{\phi}(s))) = \int_{s_0}^s (\cos \theta(v), \sin \theta(v)) f(v) dv,$$

pelo teorema fundamental das curvas planas. Consequentemente, a  $L$ -evoluta  $\bar{\varepsilon}_e$  é dada, a menos de movimento rígido atuando nas duas primeiras coordenadas, por

$$\bar{\varepsilon}_e(s) = \int_{s_0}^s (\cos \theta(v), \sin \theta(v), 1) f(v) dv + (0, 0, \bar{u}(\bar{\phi}(s_0))).$$

Finalmente, se  $r$  e  $\bar{r}$  são congruentes no sentido de Laguerre por uma transformação em  $\mathcal{L}_I$ , então as suas  $L$ -evolutas  $\bar{\varepsilon}_e$  e  $\varepsilon_e$  satisfazem  $\bar{\varepsilon}_e(s) = A\varepsilon_e(s) + \mathbf{b}$  e têm o mesmo parâmetro pseudo-comprimento de arco  $s$ , onde  $A$  é um movimento rígido atuando nas duas primeiras coordenadas e  $\mathbf{b} = (0, 0, b_0)$  é um vetor em  $\mathbb{R}_1^3$ . Os correspondentes raios de curvatura verificam  $\bar{u}(\bar{\phi}(s)) = u(\phi(s)) + b_0$ . Consequentemente,  $\bar{f}(s) = d\bar{u}/ds = du/ds = f(s)$ , ou seja,  $r$  e  $\bar{r}$  têm a mesma função potencial, tal como queríamos demonstrar.

**Observação 2.27.** Estes resultados dão-nos um procedimento geral para integrar as equações (2.6). Com efeito, dada uma função  $\tau(s)$ , se  $f(s)$  é uma solução da equação diferencial (2.12), então a curva do tipo luz (2.17) tem pseudo-torção  $\tau$  e parâmetro pseudo-comprimento de arco  $s$ . Isto significa que as componentes do vetor tangente

$$\mathbf{T} = \left( \cos \left( \int \frac{1}{f} ds \right) f, \sin \left( \int \frac{1}{f} ds \right) f, f \right) \quad (2.23)$$

de  $\varepsilon_e$  satisfazem (2.6). Mais, todas as soluções de (2.6) para uma dada função  $\tau(s)$  são desta forma.

**Observação 2.28.** Podemos também deduzir destes resultados um procedimento para construir todas as curvas que são congruentes no sentido de Laguerre com uma dada curva plana  $r$ . Com efeito, dada uma curva  $r$ , podemos calcular a sua função potencial e a pseudo-torção  $\tau$  da sua  $L$ -evoluta através das igualdades (2.11) e (2.12). Tendo em conta o teorema 2.19, encontramos a solução geral da equação

$$\frac{1}{|\lambda|} \tau(s/\sqrt{|\lambda|}) = \frac{1}{f(s)} f''(s) - \frac{1}{2f^2(s)} (f'^2(s) + 1)$$

para cada  $\lambda \neq 0$ . Uma vez que esta é uma equação diferencial de segunda ordem, as duas condições iniciais juntamente com o parâmetro  $\lambda$  determinam uma família a três parâmetros de funções potenciais. Para cada uma dessas funções, as formulas (2.18) e (2.19) definem uma curva no plano que é congruente com  $r$  no sentido de Laguerre.



Reciprocamente, qualquer curva que seja congruente com  $r$  no sentido de Laguerre pode ser construída, a menos de movimento rígido, através do procedimento agora descrito.

*Exemplo 2.5.* A equação (2.12) é equivalente à equação  $2\tau f^2 = 2ff'' - (f'^2 + 1)$ . Derivando esta equação, obtemos a equação diferencial ordinária de terceira ordem dada por

$$f''' - 2\tau f' - \tau' f = 0. \quad (2.24)$$

Para  $\tau = -\frac{5}{2s^2}$ , a solução geral de (2.24) é

$$f(s) = as + bs \sin(2 \ln s) + cs \cos(2 \ln s). \quad (2.25)$$

Um cálculo direto mostra-nos que as soluções de (2.12), com  $\tau = -\frac{5}{2s^2}$ , são precisamente aquelas funções (2.25) que satisfazem  $b^2 + c^2 - a^2 = -\frac{1}{4}$ . Em particular, para  $c = b = 0$  e  $a = \frac{1}{2}$ , temos a solução  $f(s) = \frac{s}{2}$ . Tendo em vista o teorema 2.26, o comprimento de arco  $t$  da curva plana  $r$  associada a esta função potencial é dado por  $t = \frac{s^2}{4}$  e temos

$$r(t) = \frac{t}{2} (\sin(\ln 4t) + \cos(\ln 4t), \sin(\ln 4t) - \cos(\ln 4t)). \quad (2.26)$$

A menos de movimento rígido,  $r$  é a espiral logarítmica  $\theta \mapsto e^\theta(\cos \theta, \sin \theta)$  reparametrizada por comprimento de arco  $t$ . A  $L$ -evoluta de  $r$  é dada por

$$\varepsilon_e(t(s)) = \frac{s^2}{8} (\sin(2 \ln s) + \cos(2 \ln s), \sin(2 \ln s) - \cos(2 \ln s), 2).$$

Esta curva do tipo luz é um exemplo de uma *hélice oblíqua de Cartan* em  $\mathbb{R}_1^3$ . Uma hélice oblíqua de Cartan em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco cujo vetor normal faz um ângulo constante com uma direção fixa. De acordo com a classificação estabelecida em [4], as hélices oblíquas de Cartan são precisamente as curvas do tipo luz cujas pseudo-torções são da forma  $\pm \frac{1}{(cs+b)^2}$ , com  $c \neq 0$  e  $b$  constantes.

*Exemplo 2.6.* Consideremos a *espiral de Cornu*

$$r(t) = \left( \int_0^t \cos(v^2/2) dv, \int_0^t \sin(v^2/2) dv \right).$$

Esta curva plana tem comprimento de arco  $t$  e raio de curvatura  $u = 1/t$ . De (2.10), (2.11) e (2.12) podemos ver que a  $L$ -evoluta de  $r$  tem pseudo-arco  $s = 2\sqrt{t}$ , para  $t > 0$ , a função potencial é  $f_r(s) = 8/s^3$  e a pseudo-torção é  $\tau = 15/2s^2 - s^6/128$ . Para esta pseudo-torção  $\tau$ , a solução geral de (2.24) é

$$f(s) = \frac{a + b \sin(s^4/32) + c \cos(s^4/32)}{s^3};$$

e as soluções de (2.12) são precisamente as funções  $f(s)$  que satisfazem  $a^2 - b^2 - c^2 = 64$ .

*Exemplo 2.7.* As funções potenciais associadas à pseudo-torção  $\tau = -\frac{3}{8s^2} - \frac{1}{2s}$  são da forma

$$f(s) = a\sqrt{s} + b \sin(2\sqrt{s})\sqrt{s} + c \cos(2\sqrt{s})\sqrt{s},$$

com  $a^2 - b^2 - c^2 = 1$ . Para  $a = 1$  e  $b = c = 0$ , a formula (2.18) implica que  $r(t(s)) = \frac{2}{3}(x(t(s)), y(t(s)))$ , com

$$\begin{aligned} x(t(s)) &= \sqrt{s}(2s - 3) \sin(2\sqrt{s}) + \frac{3}{4}(2s - 1) \cos(2\sqrt{s}) \\ y(t(s)) &= (2s - 1) \sin(2\sqrt{s}) - \frac{1}{2}\sqrt{s}(2s - 3) \cos(2\sqrt{s}). \end{aligned}$$

Na figura 2.11, a curva  $r$  encontra-se representada à esquerda, para  $0 < s < 500$ ; à direita, podemos observar a curva plana  $\bar{r}$  associada à função potencial

$$f_{\bar{r}}(s) = \sqrt{2s} + \sqrt{s} \sin(2\sqrt{s}),$$

que corresponde à escolha  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$  and  $c = 0$  (esta representação foi obtida por integração numérica de (2.18), para  $0 < s < 500$ ).

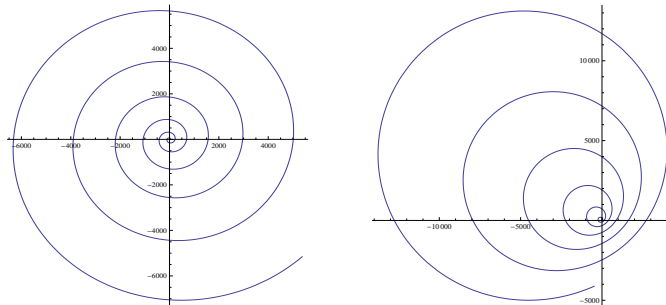


Figura 2.11: Duas curvas Laguerre-congruentes.

## 2.7 Derivada de Schwarz e curvas do tipo luz

Começamos por apresentar alguns aspetos fundamentais das derivadas de Schwarz.

Para mais detalhes, aplicações e referências, ver [19].

Dada uma função  $h : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  que admita derivada de terceira ordem, a sua *derivada de Schwarz* é definida por

$$S(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left( \frac{h''}{h'} \right)^2$$

*Exemplo 2.8.* Para as funções  $h_1(x) = 2x^3 + 1$ ,  $h_2(x) = e^x$  e  $h_3(x) = \frac{x+1}{1-x}$ , temos

$$S(h_1) = -\frac{4}{x^2} \ (x \neq 0), \quad S(h_2) = -\frac{1}{2}, \quad S(h_3) = 0.$$

Em relação ao caso  $h_3$  no exemplo anterior, temos mais geralmente a seguinte propriedade fundamental das derivadas de Schwarz.

**Proposição 2.29.** *A derivada de Schwarz de uma função fração linear*

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

com  $x \neq -\frac{d}{c}$ , é nula,  $S(h) = 0$ .

Temos ainda a seguinte propriedade.

**Proposição 2.30.** *A derivada de Schwarz da função composta  $h \circ g$  é dada por*

$$S(hog) = (S(h)og)g'^2 + S(g).$$

Muito recentemente, Z. Olszak provou que a pseudo-torção de uma curva do tipo luz pode ser descrita do seguinte modo.

**Teorema 2.31.** [18] *Se  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma curva do tipo luz com parâmetro por pseudo-comprimento de arco  $s$ , então*

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) \pm \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{1}{g'(v)} (2g(v), g(v)^2 - 1, g(v)^2 + 1) dv, \quad (2.27)$$

com  $s, s_0 \in \mathbf{I}$ , para alguma função não nula  $g$  com derivada  $g'(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ . A pseudo-torção  $\tau$  de  $\alpha$  é precisamente a derivada de Schwarz de  $g$ :

$$\tau = S(g) = \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2.$$

Consideremos a  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e$  de uma certa curva plana  $r$  com função potencial  $f$ . Podemos escrever  $\varepsilon_e$  de acordo com a fórmula (2.27). Então, o seu vetor tangente é

$$\mathbf{T}(s) = \pm \frac{1}{2g'(s)} \left( 2g(s), g^2(s) - 1, g^2(s) + 1 \right).$$

Por outro lado, sabemos também que o mesmo vetor tangente pode ser escrito em termos da função potencial do seguinte modo

$$\mathbf{T}(s) = \left( \cos \left( \int \frac{1}{f} ds \right) f, \sin \left( \int \frac{1}{f} ds \right) f, f \right).$$

Comparando as duas expressões, obtemos

$$f(s) = \pm \frac{g^2(s) + 1}{2g'(s)}.$$

Assim, integrando,

$$\int_{s_0}^s \frac{1}{f} dv = \pm 2 \int_{s_0}^s \frac{g'}{g^2 + 1} dv,$$

logo

$$\pm \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{1}{f} dv = \arctan(g(s))$$

e, conseqüentemente,

$$g(s) = \pm \tan \left( \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{1}{f} dv \right) = \pm \tan (\theta(s)/2), \quad (2.28)$$

onde  $\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{f} dv$  é o ângulo em  $s$  que define a direção do vetor tangente à curva  $r$ , em relação ao eixo horizontal.

## 2.8 Função potencial da evoluta

**Teorema 2.32.** *Seja  $r$  uma curva plana parametrizada por comprimento de arco  $t$  e seja  $\varepsilon$  a sua evoluta. A função potencial  $f$  e o parâmetro por pseudo-comprimento de arco  $s$  associados à curva  $r$  estão relacionados com a função potencial  $f_\varepsilon$  e o parâmetro por pseudo-comprimento de arco  $s_\varepsilon$ , associado a evoluta  $\varepsilon$  por:*

$$f_\varepsilon^2(s_\varepsilon(s)) = 2f^2(s) \left| \frac{df(s)}{ds} \right|. \quad (2.29)$$

e  $s_\varepsilon = \beta(s)$  com  $\beta(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{2 \left| \frac{df}{dv}(v) \right|} dv + s_\varepsilon(s_0)$ . Consequentemente, a  $L$ -evoluta de  $\varepsilon$  é dada por

$$\tilde{\varepsilon}_e(\beta(s)) = 2 \int_{s_0}^s f(v) \left| \frac{df}{ds}(v) \right| (\cos \theta(v), \sin \theta(v), 1) dv, \quad (2.30)$$

a menos de uma  $\mathcal{L}_I$ -congruência, onde  $\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{f(v)} dv$ .

**Demonstração:** Recordemos que o comprimento de arco de  $\varepsilon$  é precisamente a curvatura  $u$  de  $r$ . Por (1.11) e tendo em conta a definição de função potencial, o raio de curvatura da evoluta  $\varepsilon$  é dado por  $u_\varepsilon = u\dot{u} = f^2$ . Então, uma vez que  $f = \frac{du}{ds}$ , temos

$$f_\varepsilon^2 = \left| u_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{du} \right| = \left| f^2 \frac{du_\varepsilon}{ds} \frac{ds}{du} \right| = 2f^2 \left| \frac{df}{ds} \right|.$$

Por outro lado, e tendo em conta (2.10) e as observações anteriores, também temos

$$\frac{ds_\varepsilon}{ds} = \frac{ds_\varepsilon}{du} \frac{du}{ds} = \sqrt{\left| \frac{1}{u_\varepsilon} \frac{du_\varepsilon}{du} \right|} f = \frac{f_\varepsilon}{f} = \sqrt{2 \left| \frac{df}{ds} \right|},$$

logo  $s_\varepsilon = \beta(s)$  com  $\beta(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{2 \left| \frac{df}{ds}(v) \right|} dv + s_\varepsilon(s_0)$ .

A formula (2.30) resulta de aplicar (2.17) a  $f_\varepsilon$  e de tomar a mudança de parâmetro  $s_\varepsilon = \beta(s)$ .

**Corolário 2.33.** A pseudo-torção  $\tau_\varepsilon$  de  $\tilde{\varepsilon}_e$ , a  $L$ -evoluta de  $\varepsilon$ , é dada por

$$\tau_\varepsilon(s_\varepsilon = \beta(s)) = \frac{\tau(s) - S(\beta(s))}{2 \left| \frac{df}{ds} \right|}, \quad (2.31)$$

onde  $S(\beta(s))$  é a derivada de Schwarz de  $\beta(s)$ .

**Demonstração:** A tangente da curva  $r$  é ortogonal à tangente da sua evoluta  $\varepsilon$ , logo os ângulos  $\theta(s)$  e  $\theta_\varepsilon(s_\varepsilon)$  diferem por  $\pi/2$ , o que implica que as funções correspondentes  $g$  e  $g_\varepsilon$  dadas por (2.28) satisfazem

$$g_\varepsilon \circ \beta(s) = \pm \tan(\theta(s)/2 + \pi/4) = \pm \frac{\tan(\theta(s)/2) + 1}{1 - \tan(\theta(s)/2)} = h \circ g(s),$$

sendo  $h$  a fração linear  $h(x) = \pm \frac{1+x}{1-x}$ . Em particular,  $S(g) = S(g_\varepsilon \circ \beta)$ . Então, o teorema 2.31, juntamente com a regra da derivada de Schwarz da função composta, implica que

$$\tau(s) = S(g) = S(g_\varepsilon \circ \beta) = (S(g_\varepsilon) \circ \beta) \beta'^2 + S(\beta) = (\tau_\varepsilon \circ \beta) \beta'^2 + S(\beta).$$

Uma vez que  $\beta'^2(s) = 2 \left| \frac{df}{ds} \right|$ , esta igualdade é equivalente a (2.31).

*Exemplo 2.9.* Se o pseudo-comprimento de arco de  $\varepsilon_e$  coincide com o pseudo-comprimento de arco  $\tilde{\varepsilon}_e$ , isto é,  $s_\varepsilon(s) = s$ , de (2.29) tiramos que  $f_\varepsilon = f$  e  $\frac{df}{ds} = \pm \frac{1}{2}$ . Então  $f(s) = \pm \frac{1}{2}s + c$  para alguma constante  $c$  e (2.31) implica  $\tau_\varepsilon(s) = \tau(s)$ . Para  $f(s) = \frac{s}{2}$ , a curva plana  $r$  é a espiral logarítmica (2.26). Mais geralmente, cada função potencial  $f(s) = \pm \frac{1}{2}s + c$  corresponde à curva plana cuja  $L$ -evoluta é uma hélice oblíqua de Cartan com pseudo-torção  $\tau = -\frac{5}{2(\pm s + 2c)^2}$ .

*Exemplo 2.10.* Seja  $r$  a curva plana associada à função potencial  $f(s) = \sqrt{s}$  (ver exemplo 2.7). Então a sua evoluta tem função potencial  $f_\varepsilon(\beta(s)) = s^{1/4}$  e  $s_\varepsilon = \beta(s)$  satisfaz  $\beta'(s) = s^{-1/4}$ . Integrando, obtemos  $f_\varepsilon(s_\varepsilon) = (\frac{3}{4}s_\varepsilon)^{1/3}$ . A pseudo-torção da  $L$ -evoluta  $\tilde{\varepsilon}_e$  de  $\varepsilon$  é dada por

$$\tau_\varepsilon(s_\varepsilon) = -\frac{5}{32}(3s_\varepsilon/4)^{-2} - \frac{1}{2}(3s_\varepsilon/4)^{-2/3}$$

e temos

$$\tilde{\varepsilon}_e(s_\varepsilon(s)) = (\sqrt{s} \sin(2\sqrt{s}) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{s}), \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{s}) - \sqrt{s} \cos(2\sqrt{s}), s).$$

### 2.8.1 Hélices do tipo luz

Uma curva do tipo luz  $\alpha$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco diz-se uma *hélice do tipo luz* se a sua pseudo-torção  $\tau$  for constante [7, 15, 17]. Hélices do tipo luz admitem a seguinte classificação.

**Proposição 2.34.** [7] *Uma hélice do tipo luz com pseudo-torção  $\tau$  e parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$  é congruente com uma das seguintes curvas:*

1. se  $\tau < 0$ ,  $\varepsilon_1(s) = \frac{1}{2|\tau|}(\cos(\sqrt{2|\tau|}s), \sin(\sqrt{2|\tau|}s), \sqrt{2|\tau|}s)$ ;
2. se  $\tau = 0$ ,  $\varepsilon_2(s) = (\frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3})$ ;
3. se  $\tau > 0$ ,  $\varepsilon_3(s) = \frac{1}{2\tau}(\sqrt{2\tau}s, \cosh(\sqrt{2\tau}s), \sinh(\sqrt{2\tau}s))$ .

De seguida descrevemos as correspondentes funções potenciais.

**Teorema 2.35.** *As funções potenciais das curvas planas cujas  $L$ -evolutas têm pseudo-torção  $\tau$  constante são precisamente as seguintes:*

1. se  $\tau < 0$ , então  $f_1(s) = a \cos(\sqrt{2|\tau|}s) + b \sin(\sqrt{2|\tau|}s) + c$ , com  $2|\tau|(a^2 + b^2) + 1 = 2|\tau|c^2$ ;
2. se  $\tau = 0$ , então  $f_2(s) = as^2 + bs + c$ , com  $4ac = 1 + b^2$ ;
3. se  $\tau > 0$ , então  $f_3(s) = ae^{\sqrt{2\tau}s} + be^{-\sqrt{2\tau}s} + c$ , com  $2\tau c^2 + 1 = 8\tau ab$ .

**Demonstração:** Para  $\tau = 0$ , a solução geral de (2.24) é  $f(s) = as^2 + bs + c$ . Uma tal função é solução de (2.12), com  $\tau = 0$ , se, e só se,  $4ac = 1 + b^2$ . Os casos restantes podem ser deduzidos de forma análoga.

A curva  $\varepsilon_1$  corresponde à função potencial  $f_1$  com  $a = b = 0$  e  $c = 1/\sqrt{2|\tau|}$ ;  $\varepsilon_2$  corresponde a  $f_2$  com  $a = 3/4$ ,  $b = 0$  e  $c = 1/3$ ;  $\varepsilon_3$  corresponde a  $f_3$  com  $a = b = 1/(2\sqrt{2\tau})$  e  $c = 0$ .

Analisemos com mais detalhe o caso  $\tau = 0$ . Uma vez que  $f(s) = as^2 + bs + c$ , com  $4ac = 1 + b^2$ , e  $f(s) = \frac{du}{ds}$ , temos

$$u(s) = a\frac{s^3}{3} + b\frac{s^2}{2} + cs + d.$$

Por outro lado, como  $f(s) = u\frac{ds}{dt}$ , sendo  $t$  o parâmetro comprimento de arco para a correspondente curva plana  $r$ , temos

$$\frac{dt}{ds} = \frac{a\frac{s^3}{3} + b\frac{s^2}{2} + cs + d}{as^2 + bs + c}.$$

Façamos agora  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = \frac{1}{4}$ , de acordo com a relação  $4ac = 1 + b^2$ . Tomamos também a constante de integração  $d = 0$ . Neste caso,  $f(s) = s^2 + \frac{1}{4}$ ,

$$t = \int_{s_0}^s \frac{\frac{s^3}{3} + \frac{1}{4}s}{s^2 + \frac{1}{4}} ds = \frac{s^2}{6} + \frac{1}{12} \ln(s^2 + \frac{1}{4}) + s_0$$

e

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{f(v)} dv = 2 \arctan(2s),$$

para um  $s_0$  conveniente. Inserindo estes dados nas fórmulas do teorema 2.26, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(s) &= \left( \frac{s}{4} - \frac{s^3}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{3} + \frac{s}{4} \right); \\ r(t(s)) &= \left( -\frac{4s^4 + s^2 + 1}{24s^2 + 6}, \frac{4s^3}{12s^2 + 3} \right). \end{aligned}$$

*Exemplo 2.11.* Consideremos a função potencial  $f(s) = 1/\sqrt{2|\tau|}$ , a qual corresponde à hélice  $\varepsilon_1$ . A curva plana  $r$  correspondente é a involuta da circunferência. Explicitamente, de (2.19), temos  $\frac{dt}{ds} = s$ , onde  $t$  é o comprimento de arco de  $r$ , logo  $s = \sqrt{2t}$ ; de (2.18), vemos que

$$r(t) = \frac{1}{|2\tau|} \left( 2\sqrt{|\tau|t} \sin(2\sqrt{|\tau|t}) + \cos(2\sqrt{|\tau|t}), \sin(2\sqrt{|\tau|t}) - 2\sqrt{|\tau|t} \cos(2\sqrt{|\tau|t}) \right). \quad (2.32)$$

## 2.9 Curvas associadas

Nesta secção iremos descrever, em termos de funções potenciais, algumas classes de curvas do tipo luz associadas, nomeadamente: pares de Bertrand [1, 15], curvas do tipo luz com a direcção binormal comum [12] e curvas binormal-direccionais [4].

### 2.9.1 Curvas de Bertrand do tipo luz no espaço de Minkowski

Motivados pela noção de curva de Bertrand no espaço euclidiano, definimos o seguinte.

**Definição 2.36.** Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ . A curva  $\alpha$  é uma *curva de Bertrand* (do tipo luz) se existir uma outra curva do tipo luz  $\bar{\alpha} : \bar{\mathbf{I}} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  e uma bijecção  $\beta : \mathbf{I} \rightarrow \bar{\mathbf{I}}$  tais que, para cada  $s \in \mathbf{I}$ , as retas definidas pelas normais principais de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  em  $s$  e  $\beta(s)$  são iguais. Nesta caso,  $\bar{\alpha}$  é designada pelo *par de Bertrand de  $\alpha$*  e  $(\alpha, \bar{\alpha})$  por *par de Bertrand*.

**Teorema 2.37.** [1, 15] *Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ . A curva do tipo luz  $\alpha$  é uma curva de Bertrand se, e só se, tiver pseudo-torção constante  $\tau \neq 0$ . Neste caso, se  $\bar{\alpha} : \bar{\mathbf{I}} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  for o par de Bertrand de  $\alpha$ , com bijecção  $\beta : \mathbf{I} \rightarrow \bar{\mathbf{I}}$ , então  $\bar{s} := \beta(s)$  é pseudo-comprimento de arco de  $\bar{\alpha}$ , a curva do tipo luz  $\bar{\alpha}$  tem a mesma pseudo-torção  $\tau$  e  $\beta$  satisfaz  $\beta'(s) = \pm 1$ . Em particular, se  $\alpha$  tiver pseudo-torção constante  $\tau \neq 0$ , então*

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\tau} \mathbf{N}(s) \quad (2.33)$$

*definida em  $\mathbf{I}$  é um par de Bertrand de  $\alpha$ .*



**Corolário 2.38.** *Seja  $(\varepsilon_e, \bar{\varepsilon}_e)$  um par de Bertrand do tipo luz satisfazendo (2.33).*

*Sejam  $f$  e  $\bar{f}$  as correspondentes funções potenciais. Então*

$$\bar{f}(s) = f(s) - \frac{1}{\tau} \frac{d^2 f}{ds^2}(s). \quad (2.34)$$

**Demonstração:** Derivando (2.33), segue-se que  $\bar{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{T}(s) - \frac{1}{\tau} \frac{d^2 \mathbf{T}}{ds^2}(s)$ . Tendo em conta (2.23) e igualando as terceiras componentes, obtemos (2.34).

Como num par de Bertrand  $(\varepsilon_e, \bar{\varepsilon}_e)$  as respectivas pseudo-torções coincidem, as curvas planas correspondentes são necessariamente congruentes no sentido de Laguerre. Distinguindo as congruências em  $\mathcal{L}_I$ , temos o seguinte.

**Corolário 2.39.** *Sejam  $r$  e  $\bar{r}$  duas curvas planas em  $\mathbb{R}^2$  e sejam  $\varepsilon_e$  and  $\bar{\varepsilon}_e$  as correspondentes  $L$ -evolutas. Assuma-se que  $(\varepsilon_e, \bar{\varepsilon}_e)$  é um par de Bertrand com pseudo-torção  $\tau$  satisfazendo (2.33). Então  $r$  e  $\bar{r}$  são congruentes em  $\mathcal{L}_I$  se, e só se,  $\tau < 0$  e a função potencial  $f$  de  $r$  for  $f(s) = \frac{1}{\sqrt{2|\tau|}}$  (veja-se o exemplo 2.32).*

**Demonstração:** Uma vez que  $\varepsilon_e$  e  $\bar{\varepsilon}_e$  têm o mesmo pseudo-comprimento de arco  $s$ ,  $r$  e  $\bar{r}$  são  $\mathcal{L}_I$ -congruentes se, e só se,  $\bar{f} = f$ .

Se  $\tau < 0$ , temos, de (2.34),

$$\bar{f}(s) = a \cos(\sqrt{2|\tau|}s) + b \sin(\sqrt{2|\tau|}s) + c,$$

com  $2|\tau|(a^2 + b^2) + 1 = 2|\tau|c^2$ . Então  $\bar{f} = f$  se, e só se,  $a = b = 0$  e  $c = \frac{1}{\sqrt{2|\tau|}}$ .

Se  $\tau > 0$ , temos, de (2.34),

$$\bar{f}(s) = ae^{\sqrt{2|\tau|}s} + be^{\sqrt{2|\tau|}s} + c,$$

com  $2\tau c^2 + 1 = 8\tau ab$ . Então  $\bar{f} = f$  se, e só se,  $a = b = 0$  e  $2\tau c^2 + 1 = 0$ . Mas esta última condição é impossível, logo não podemos ter  $f = \bar{f}$ .

## 2.9.2 Curvas do tipo luz com vetor binormal comum

**Teorema 2.40.** *Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ , com pseudo-torção  $\tau$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) existe uma curva do tipo luz  $\bar{\alpha} : \bar{\mathbf{I}} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  e uma bijeção  $\beta : \mathbf{I} \rightarrow \bar{\mathbf{I}}$  tal que, para cada  $s \in \mathbf{I}$ , as retas binormais de  $\alpha$  em  $s$  e  $\bar{\alpha}$  em  $\beta(s)$  são iguais, e  $\bar{s} := \beta(s)$  é um parâmetro pseudo-comprimento de arco para  $\bar{\alpha}$ ;

b)  $\tau$  satisfaz

$$a_0^2 v(s)^4 = \pm(1 + v(s)\tau'(s)), \quad (2.35)$$

para alguma constante  $a_0 \neq 0$ , onde  $v(s)$  satisfaz

$$\frac{1}{v(s)} = -\frac{1}{2} \int \tau^2 ds. \quad (2.36)$$

Neste caso, a pseudo-torção de  $\bar{\alpha}$  satisfaz  $\bar{\tau}(\bar{s} = \beta(s)) = \pm\tau(s)$ .

**Demonstração:** Assuma-se que  $\bar{s} = \beta(s)$  é um parâmetro pseudo-comprimento de arco de  $\bar{\alpha}$  e que  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  têm reta binormal comum em pontos correspondentes, isto é,

$$\bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = a(s)\mathbf{B}(s),$$

e

$$\bar{\alpha}(\beta(s)) = \alpha(s) + v(s)\mathbf{B}(s),$$

para alguma função  $v(s) \neq 0$  em  $\mathbf{I}$ . Derivando em relação a  $s$ , obtemos

$$\beta'\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + v'\mathbf{B} + v\tau\mathbf{N}. \quad (2.37)$$

Tomando o produto interno de ambos os termos desta equação com  $\bar{\mathbf{B}}$ , obtemos

$$\beta' = a. \quad (2.38)$$

Uma vez que  $\bar{\mathbf{T}}$  é um vetor do tipo luz, isto é,  $\langle \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}} \rangle = 0$ , segue de (2.37) que

$$-2v' + v^2\tau^2 = 0, \quad (2.39)$$

o que significa que (2.36) é válida.

Derivando (2.37) em relação a  $s$ , e tendo (2.38) em consideração, temos

$$a^3\bar{\mathbf{N}} = (a + av\tau' + 2av'\tau - a'v\tau)\mathbf{N} + (av'' + av\tau - a'v')\mathbf{B} + (av\tau^2 - a')\mathbf{T}. \quad (2.40)$$

Como  $\langle \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{B}} \rangle = 0$ , a componente de  $\bar{\mathbf{N}}$  na direção  $\mathbf{T}$  é nula, isto é

$$a' = av\tau^2. \quad (2.41)$$

Então, tendo (2.39) e (2.41) em consideração, podemos reescrever (2.40) na seguinte forma

$$a^3 \bar{\mathbf{N}} = a(1 + v\tau')\mathbf{N} + av\tau(1 + \tau'v)\mathbf{B}.$$

Agora, como  $\langle \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{N}} \rangle = 1$ , desta equação resulta

$$a^4 = (1 + v\tau')^2. \quad (2.42)$$

Logo

$$\bar{\mathbf{N}} = \pm(\mathbf{N} + v\tau\mathbf{B}).$$

Derivando  $\bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = a(s)\mathbf{B}(s)$  em relação a  $s$ , segue-se que

$$a\bar{\mathbf{B}}' = a'\mathbf{B} + a\tau\mathbf{N} = a\tau(\mathbf{N} + v\tau\mathbf{B}) = \pm a\tau\bar{\mathbf{N}}.$$

Uma vez que a pseudo-torção  $\bar{\tau}$  é definida por  $\bar{\mathbf{B}}' = \bar{\tau}\bar{\mathbf{N}}$ , concluímos que  $\bar{\tau}(\beta(s)) = \pm\tau(s)$ . Observe-se também que (2.39) e (2.41) implicam que

$$a'/a = 2v'/v,$$

e conseqüentemente  $a = a_0v^2$  para alguma constante  $a_0$ . Inserindo isto em (2.42), obtemos (2.35).

Reciprocamente, dada uma curva do tipo luz  $\alpha$  com pseudo-comprimento de arco  $s$  e pseudo-torção  $\tau$ , consideramos uma função  $v(s)$  satisfazendo (2.35) e (2.36) para alguma constante  $a_0 \neq 0$ . Conseqüentemente,  $v(s)$  também satisfaz (2.39). Para  $a = a_0v^2$ , é claro que as igualdades (2.41) e (2.42) são válidas. Defina-se  $\zeta(s) = \varepsilon(s) + v(s)\mathbf{B}(s)$ . Derivando duas vezes em relação a  $s$ , obtemos

$$\zeta'(s) = \mathbf{T} + v'\mathbf{B} + v\tau\mathbf{N},$$

$$\zeta''(s) = (1 + 2v'\tau + v\tau')\mathbf{N} + (v'' + v\tau)\mathbf{B} + v\tau^2\mathbf{T}.$$

Tendo em conta que  $v(s)$  satisfaz (2.36), temos

$$\langle \zeta'(s), \zeta'(s) \rangle = -2v' + v^2\tau^2 = 0.$$

Podemos também verificar que  $\langle \zeta''(s), \zeta''(s) \rangle = (1 + v\tau)^2 = a^4$ . Assim, uma vez que  $\zeta(s)$  é uma curva do tipo luz e  $|\zeta''|^2 = a^4$ , e tendo (2.2) em consideração, vemos

que o parâmetro definido por  $\bar{s} = \beta(s)$ , com  $\beta$  satisfazendo  $\beta' = a$ , é um parâmetro pseudo-comprimento de arco de  $\zeta$ . Consideremos a correspondente reparametrização  $\bar{\alpha} = \zeta \circ \beta^{-1}$ . Então, derivando em relação a  $\bar{s}$ , é possível deduzir as seguintes igualdades para o vetor tangente  $\bar{\mathbf{T}}$  e o vetor normal  $\bar{\mathbf{N}}$  de  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{a}(\mathbf{T} + v'\mathbf{B} + v\tau\mathbf{N}), \quad \bar{\mathbf{N}} = \pm(\mathbf{N} + v\tau\mathbf{B}). \quad (2.43)$$

Como, por definição,  $\bar{\mathbf{B}}$  é o único vetor do tipo luz que satisfaz  $\langle \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{T}} \rangle = -1$  e  $\langle \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{N}} \rangle = 0$ , concluímos que  $\bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = a(s)\mathbf{B}(s)$ .

Dada uma curva  $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  no espaço euclidiano, parametrizada por comprimento de arco  $t$ , se existe outra curva  $\bar{\gamma} : \bar{\mathbf{I}} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e uma bijeção  $\beta : I \rightarrow \bar{I}$  tais que, para cada  $t \in \mathbf{I}$ , a reta binormal de  $\gamma$  em  $t$  e a reta binormal de  $\bar{\gamma}$  em  $\beta(t)$  coincidem, e  $\bar{t} := \beta(t)$  é um parâmetro comprimento de arco para  $\bar{\gamma}$ , então ambas as curvas são planas, isto é, as suas torções são funções nulas (ver [16], página 161). Para hélices do tipo luz no espaço de Minkowski temos um resultado semelhante.

**Corolário 2.41.** *Seja  $\alpha$  uma hélice do tipo luz, parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ , com pseudo-torção constante  $\tau$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe uma curva do tipo luz  $\bar{\alpha}$ , parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $\bar{s} = \beta(s)$ , tal que  $\bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = a(s)\mathbf{B}(s)$  e  $\bar{\alpha} \circ \beta(s) = \alpha(s) + v(s)\mathbf{B}(s)$  para certas funções  $a(s)$  e  $v(s)$ ;*
2.  $\tau = 0$ .

**Demonstração:** Se  $\tau$  é constante, então, qualquer função  $v(s)$  definida por (2.36) deve ser da forma

$$v(s) = \frac{1}{v_0 - \frac{1}{2}\tau^2 s}$$

para alguma constante de integração  $v_0$ , e (2.35) implica que

$$\frac{a_0^2}{(v_0 - \frac{1}{2}\tau^2 s)^4} = \pm 1,$$

que vale se, e só se,  $\tau = 0$  e  $a_0 = \pm v_0^2$ .

Uma vez que a função potencial  $\bar{f}$  de  $\bar{\alpha}$  é a terceira componente de  $\bar{\mathbf{T}}$ , vemos de (2.13), (2.14), (2.15) e (2.43) que

$$\bar{f}(\bar{s} = \beta(s)) = \frac{1}{a_0 v^2(s)} \left\{ f(s) + \frac{v^2(s) \tau^2(s)}{4f(s)} (f'^2(s) + 1) + v(s) \tau(s) f'(s) \right\}.$$

**Observação 2.42.** Em [12], os autores estudaram pares de curvas do tipo luz possuindo retas binormais comuns. Nós observamos que o teorema 2.40 não contradiz o principal resultado de [12] uma vez que, nesse artigo, os parâmetros não são necessariamente parâmetros pseudo-comprimento de arco. Se considerarmos que as binormais coincidem em pontos correspondentes,  $\bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = a(s)\mathbf{B}(s)$ , e que  $s$  e  $\bar{s} = \beta(s)$  são parâmetros pseudo-comprimento de arco de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ , então a condição inicial (2.35) é necessária.

### 2.9.3 Curvas W-direcionais

**Definição 2.43.** Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva do tipo luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$ . Seja  $\mathbf{W}$  um campo vetorial do tipo luz ao longo de  $\alpha$ , isto é, para cada valor de  $s$ , temos um vetor  $\mathbf{W}(s)$  do tipo luz. A curva do tipo luz  $\bar{\alpha}$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $\bar{s} = \beta(s)$  diz-se uma curva *W-direcional* de  $\alpha$  se o vetor tangente  $\bar{\mathbf{T}}$  coincidir com o vetor  $\mathbf{W}$  em pontos correspondentes:  $\bar{\mathbf{T}}(\beta(s)) = \mathbf{W}(s)$ .

Consideremos a *curva binormal-direcional* de  $\alpha$ , isto é, tomamos  $\mathbf{W} = \mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{B}$  é o vetor binormal de  $\alpha$ .

**Teorema 2.44.** [4] *Seja  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  a curva do tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco  $s$  com pseudo-torção  $\tau(s) \neq 0$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ . Seja  $\bar{\alpha}$  uma curva binormal-direcional com pseudo-torção  $\bar{\tau}$  e pseudo-comprimento de arco  $\bar{s} = \beta(s)$ . Então,  $\frac{d\bar{s}}{ds} = \pm\tau$  e*

$$\bar{\tau}(\beta(s)) = \frac{1}{\tau(s)}.$$

**Demonstração:** Por definição, temos  $\bar{\mathbf{T}}(\beta(s)) = \mathbf{B}(s)$ . Tendo em conta que  $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau\mathbf{N}$ , o vetor normal de  $\bar{\alpha}$  vem então dado por

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{ds}{d\bar{s}} \tau \mathbf{N}.$$

Sendo  $\bar{s}$  o pseudo-comprimento de arco de  $\bar{\alpha}$ , temos necessariamente

$$1 = |\bar{\mathbf{N}}| = \left| \frac{ds}{d\bar{s}} \tau \right|,$$

logo  $\frac{ds}{d\bar{s}} \tau = \pm 1$ , ou seja,  $\frac{d\bar{s}}{ds} = \pm \tau$ . Temos também  $\bar{\mathbf{N}}(\beta(s)) = \pm \mathbf{N}(s)$  e, consequentemente, o triedro de Frenet de  $\bar{\alpha}$  é dado por

$$\bar{\mathbf{T}}(\beta(s)) = \mathbf{B}(s), \quad \bar{\mathbf{N}}(\beta(s)) = \pm \mathbf{N}(s), \quad \bar{\mathbf{B}}(\beta(s)) = \mathbf{T}(s). \quad (2.44)$$

Derivando em relação a  $\bar{s}$  e aplicando as equações de Frenet para curvas do tipo luz, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\bar{s}) \bar{\mathbf{T}}(\bar{s}) + \bar{\mathbf{B}}(\bar{s}) &= \frac{d\bar{\mathbf{N}}}{d\bar{s}}(\bar{s}) = \pm \frac{ds}{d\bar{s}}(s) \frac{d\mathbf{N}}{ds}(s) \\ &= \pm (\tau(s) \mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s)) \left( \pm \frac{1}{\tau(s)} \right) = \mathbf{T}(s) + \frac{\mathbf{B}(s)}{\tau(s)}, \end{aligned}$$

logo, aplicando (2.44)

$$\bar{\tau}(\bar{s}) \mathbf{B}(s) + \mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(s) + \frac{\mathbf{B}(s)}{\tau(s)},$$

e, consequentemente,  $\bar{\tau}(\beta(s)) = \frac{1}{\tau(s)}$ , como queríamos demonstrar.

O vetor  $\mathbf{B}$  é dado por (2.15), isto é,

$$\mathbf{B}(s) = \left( -\frac{f''}{f} \mathbf{t} + \frac{1}{2f} (f'^2 - 1) \mathbf{n}, \frac{1}{2f} (f'^2 + 1) \right).$$

Logo, como  $\bar{\mathbf{T}}(\beta(s)) = \mathbf{B}(s)$ , a função potencial correspondente a  $\bar{\alpha}$  é

$$\bar{f}(\bar{s}) = \frac{1}{2f(\beta^{-1}(\bar{s}))} (f'^2(\beta^{-1}(\bar{s})) + 1).$$

*Exemplo 2.12.* Consideremos a função potencial  $f(s) = s/2$ . Como mostrado no exemplo 2.5, esta é a função potencial associada à  $L$ -evoluta  $\varepsilon_e$  da espiral logarítmica (2.26), que tem pseudo-torção  $\tau(s) = -\frac{5}{2s^2}$ . A função potencial associada à curva binormal-direcional  $\bar{\varepsilon}_e$  de  $\varepsilon_e$  é então dada por  $\bar{f}(\beta(s)) = \frac{5}{4s}$ . Uma vez que  $\frac{d\bar{s}}{ds} = \pm \frac{5}{2s^2}$ , podemos tomar  $\bar{s} = \frac{5}{2s}$ . Então  $\bar{f}(\bar{s}) = \bar{s}/2$ , isto é  $\bar{\varepsilon}_e$  é a  $L$ -evoluta da espiral logarítmica congruente com (2.26) em  $\mathcal{L}_I$ .

Finalizamos esta tese com a seguinte observação. Dada uma curva do tipo luz  $\alpha$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco, existe uma hélice do tipo luz  $\bar{\alpha}$  parametrizada por pseudo-comprimento de arco com pseudo-torção  $\bar{\tau} = 0$  e uma bijeção entre pontos das curvas  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  tal que, em pontos correspondentes, as retas tangentes são paralelas.

**Teorema 2.45.** *Seja  $\alpha$  uma curva do tipo luz em  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizada pseudo-comprimento de arco  $s$  e pseudo-torção  $\tau(s) \neq 0$ , para todo  $s$ . Seja  $\lambda$  uma função cuja derivada de Schwarz satisfaça  $S(\lambda) = -\tau$ . Defina-se  $\bar{s} = \lambda(s)$  e  $\mathbf{W}(\bar{s} = \lambda(s)) := \lambda'(s)\mathbf{T}(s)$ , onde  $\mathbf{T}$  é o vetor tangente de  $\alpha$ . Então a curva  $\mathbf{W}$ -direcional  $\bar{\alpha}$  é uma hélice com pseudo-comprimento de arco  $\bar{s}$  e pseudo-torção  $\bar{\tau} = 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\bar{\alpha}$  a curva  $\mathbf{W}$ -direcional (única a menos de translação), isto é,  $\bar{\alpha}'(\bar{s}) = \mathbf{W}(\bar{s})$ . Uma vez que

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\bar{s}}(\lambda(s)) = \frac{\lambda''(s)}{\lambda'(s)}\mathbf{T}(s) + \mathbf{T}'(s), \quad (2.45)$$

e  $s$  é o pseudo-comprimento de arco de  $\alpha$ , o que significa que  $\langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle = 1$ , vemos que  $\langle \mathbf{W}', \mathbf{W} \rangle = 1$ . Então  $\bar{s}$  é o parâmetro por pseudo-comprimento de arco de  $\bar{\alpha}$ . Uma vez que  $\mathbf{T}$  é uma solução de

$$\mathbf{T}''' - 2\tau\mathbf{T}' - \tau'\mathbf{T} = 0,$$

um cálculo direto mostra-nos que  $\mathbf{W}$  satisfaz

$$\frac{d^3\mathbf{W}}{d\bar{s}^3} = 0, \quad (2.46)$$

o que significa que  $\bar{\alpha}$  é uma hélice do tipo luz com pseudo-torção  $\bar{\tau} = 0$ , já que  $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{W}$  e, pelas equações de Frenet para curvas do tipo luz,

$$\frac{d^3\mathbf{W}}{d\bar{s}^3} = \bar{\mathbf{T}}''' = \bar{\tau}'\bar{\mathbf{T}} + 2\bar{\tau}\bar{\mathbf{N}}.$$

Para verificarmos a validade da igualdade (2.46), derivemos (2.45) duas vezes para obter:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{W}^2}{d\bar{s}^2} &= \frac{\lambda'''\lambda' - \lambda''^2}{\lambda'^3}\mathbf{T} + \frac{\lambda''}{\lambda'^2}\mathbf{T}' + \frac{\mathbf{T}''}{\lambda'} \\ \frac{d\mathbf{W}^3}{d\bar{s}^3} &= \frac{1}{\lambda'^3} \left( \mathbf{T}''' + \frac{2\lambda'\lambda''' - 3\lambda''^2}{\lambda'^2}\mathbf{T}' + \frac{\lambda'^2\lambda^{(iv)} - 4\lambda'\lambda''\lambda''' + 3\lambda''^3}{\lambda'^3}\mathbf{T} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como  $-\tau = S(\lambda)$ , temos

$$\tau = -\frac{2\lambda'\lambda''' - 3\lambda''^2}{2\lambda'^2}$$

e, derivando,

$$\tau' = -\frac{\lambda'^2\lambda^{(iv)} - 4\lambda'\lambda''\lambda''' + 3\lambda''^3}{\lambda'^3}$$

Inserindo em (2.47) e tendo em conta que  $\mathbf{T}''' - 2\tau\mathbf{T}' - \tau'\mathbf{T} = 0$ , concluímos finalmente que é válida a igualdade (2.46).

**Observação 2.46.** O processo que utilizámos na demonstração do teorema 2.45 é um caso particular de um procedimento de redução de equações diferenciais lineares de terceira ordem que se encontra descrito no livro de E. Cartan [2] (p. 48).





# Bibliografia

- [1] H. Balgetir, M. Bectass, and J. Inoguchi, *Null Bertrand curves and their characterizations*, Note Mat. **23**, (2004), no. 1, 7–13.
- [2] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.
- [3] T. E. Cecil, *Lie sphere geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, ISBN 978-0-387-97747-8.
- [4] J. H. Choi and Y. H. Kim, *Note on Null Helices in  $\mathbf{E}_1^3$* , Bull. Korean Math. Soc. 50 (2013) no 3, 885–899.
- [5] K.L. Duggal, and A. Bejancu. *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [6] K.L. Duggal, and B. Sahin. *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Birkhäuser, 2010.
- [7] A. Ferrández, A. Giménez, and P. Lucas. *Null generalized helices in Lorentzian space forms*, Internat. J. Modern Phys. A 16 (2001), 4845–4863.
- [8] J.P. Fillmore and A. Springer. *New Euclidean theorems by the use of Laguerre transformations*, J. Geom. 52, (1995) 74–90.
- [9] G. Hernández, *Geometría Diferencial en el espacio de Minkowski de dimensión tres*, <http://www.matem.unam.mx/gruiz/notasminkowski.pdf> (accedido em junho de 2015).

- [10] E. Ghys, S. Tabachnikov, V. Timorin, *Osculating curves: around the Tait-Kneser theorem*, Math. Intelligencer 35 (2013), no. 1.
- [11] L. K. Graves. *Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 367–392.
- [12] K. Honda and J. Inoguchi, *Deformation of Cartan framed null curves preserving the torsion*, Differ. Geom. Dyn. Syst. 5 (2003), 31–37.
- [13] B. Nolasco, R. Pacheco, *Evolutes of plane curves and null curves in Minkowski 3-space*, Journal of Geometry, Volume 108, Issue 1 (2017), pp 195–214.
- [14] T. Kubota, *On the Differential Invariants of the Laguerre Group*, Math. Proc. Cambridge, Volume 22, Issue 2 (1924), 113–123.
- [15] J-I. Inoguchi and S. Lee, *Null curves in Minkowski 3-space*, Int. Electron. J. Geom., Volume 1, Number 2 (2008), 40–83.
- [16] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*, General Publishing Com., 1997.
- [17] R. López, *Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Int. Electron. J. Geom. 7, no. 1 (2014), 44–107.
- [18] Z. Olszak, *A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative*, Filomat 29:3 (2015), 553–561. DOI 10.2298/FIL1503553O.
- [19] V. Ovsienko, S. Tabachnikov, *What Is... the Schwarzian Derivative?*, AMS Notices, 56 (01): 34–36.
- [20] P. Araújo, *Geometria Diferencial*, Coleção matemática universitária. IMPA, 2004
- [21] J. Picado, *Apontamentos de Geometria Diferencial*, <http://www.mat.uc.pt/picado/geomdif/Apontamentos/sebenta.pdf>. (acedido em dezembro de 2016)
- [22] P. G. Tait, *Note on the circles of curvature of a plane curve*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 14 (1896), 403.