



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura

Análise Teórica de Vigas de Betão Armado Sujeitas à Torção com Secções “L” e “T”

Eric José Santo Abrunhosa

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Civil

(Ciclo de Estudos Integrado)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, junho de 2015

A minha Avó Damásia

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com apoios e incentivos de pessoas às quais não poderia deixar de agradecer, nomeadamente:

Ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador científico desta dissertação, quero agradecer com um muito obrigado pela constante disponibilidade, paciência e rigor, por todo o conhecimento que me foi transmitido e apoio, não só durante este período de dissertação como também ao longo deste trajeto académico.

Ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade, autor do *software* TORQUE 2.0.1, agradeço igualmente pela sua disponibilidade e colaboração na utilização do *software*.

Aos meus pais, irmã e avós, agradeço pelo amor, apoio, compreensão e orientação não só ao longo desta dissertação, mas sempre que necessitei, um muito obrigada.

A minha namorada, Inês, agradeço especialmente por todo amor, força, apoio e principalmente paciência que sempre demonstrou ter.

Sem deixar de ser e com especial atenção aos meus amigos que me auxiliaram e apoiaram em todo este percurso académico.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento teórico de vigas de betão armado com secção do tipo “L” e “T” sujeitas à torção pura. O trabalho realizado tem o propósito de expandir o campo de aplicação do GSVATM para o tratamento de vigas de betão armado com secções “L” e “T” sujeitas à torção pura, nomeadamente para calcular a resistência última bem como o comportamento global à torção de vigas com este tipo de secção visto este modelo só se encontrar válido e calibrado para secções retangulares cheias e vazadas.

Os procedimentos de cálculo adotados para este estudo baseiam-se no método proposto por Deifalla [16] para a análise de vigas de betão armado do tipo “L” e “T” sujeitas unicamente à torção. Este método, de forma resumida, consiste na subdivisão da secção transversal original em subelementos retangulares. Cada subelemento retangular é tratado e analisado como uma viga retangular independente sujeita à torção, sendo posteriormente realizada a compatibilidade ao nível da deformação para obter o comportamento da secção original.

Por forma a validar o modelo teórico proposto, as previsões teóricas são comparadas com alguns resultados experimentais disponíveis na literatura e também com os resultados de cálculo obtidos através do REBAP [26] e ACI 318R-89 [3].

Palavras-chave

Betão armado, Vigas, Torção, Secção tipo “L” e “T”, GSVATM.

Abstract

This thesis examines the theoretical behaviour of reinforced concrete beams with sections types "L" and "T", subjected to pure torsion. This work aims to expand the application field of GSVATM for the treatment of reinforced concrete beams with sections "L" and "T" subjected to pure torsion, and specifically to calculate the ultimate resistance, as well as the overall torsional behaviour of beams with this type of section, once GSVATM was found to be valid and calibrated for plain and Hollow rectangular sections.

The calculation procedures used for this study are based on the method proposed by Deifalla [16] for the analysis of reinforced concrete beams with sections "L" and "T" subjected to pure torsion. Briefly, this method consists in the subdivision of the original transversal section into rectangular sub-elements. Each rectangular sub-element is treated and analyzed as an independent rectangular beam subjected to torsion, being consequently performed the compatibility at the deformation level, so as to obtain the behaviour of the original section.

In order to validate the proposed theoretical model, the theoretical predictions are compared to some experimental results that are available in the literature, as well as with the calculation results obtained through REBAP [26] and ACI 318R-89 [3].

Keywords

Reinforced Concrete, Beams, Torsion, Section types "L" and "T", GSVATM.

Índice

Capítulo 1. Enquadramento do tema	1
1.1. Introdução	1
1.1.1. Notas históricas	1
1.1.2. Classificação dos efeitos torsionais	4
1.1.2.1 Torção de Compatibilidade e Torção de equilíbrio	4
1.1.2.2 Torção circulatoria e torção de empenamento	5
1.1.3. Estruturas correntes sujeitas à torção	6
1.1.4. Comportamento de uma viga de betão armado sujeitas à torção	8
1.2. Objetivos e justificação do tema	10
Capítulo 2. Formulação teórica do GSVATM - Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável	15
2.1. Introdução	15
2.2. GSVATM - Formulação para vigas de betão armado	16
2.2.1. Vigas de secção vazadas sujeitas à torção	16
2.2.2. Flexão nos tirantes e escoras de betão	20
2.2.3. Espessura efetiva da parede	22
2.2.4. Equações para o cálculo da curva teórica $T - \theta$	23
2.2.4.1 Equações de equilíbrio	23
2.2.4.2 Equações de compatibilidade	25
2.2.5. Relações $\sigma - \varepsilon$ para os materiais	27
2.2.6. Algoritmo de cálculo do GSVATM	31
2.3. Notas finais	34
Capítulo 3. Procedimentos para o cálculo à torção de vigas de betão armado com secção “L” e “T” e Vigas de Referência	35
3.1. Introdução	35
3.2. Descrição dos procedimentos de cálculo adotados	36
3.2.1. O procedimento de cálculo de Deifalla	36
3.2.2. Documentos Normativos	38
3.2.2.1 Regulamento Português, REBAP [26]	38

3.2.2.2	Código Americano, ACI 318R-89 [3]	40
3.3.	Vigas de referência	42
3.4.	Notas finais	46
Capítulo 4.	Análises comparativas	47
4.1.	Introdução	47
4.2.	Dados das vigas de referência para obtenção das curvas teóricas $T - \theta$ e divisões assumidas	48
4.3.	Análise comparativa das curvas teóricas $T - \theta$ e experimentais das vigas de referência para as três divisões assumidas	55
4.4.	Cálculo do momento torsor último a partir dos documentos normativos	62
4.4.1.	Cálculo do momento torsor último a partir do Regulamento Português, REBAP [26]	62
4.4.2.	Cálculo do momento torsor último a partir Código Americano ACI 318R-89 [3]	64
4.5.	Análise comparativa dos valores de momentos torsores últimos obtidos pelas normas e pelo GSVATM com os valores experimentais	66
4.6.	Notas finais	67
Capítulo 5.	Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros	69
5.1.	Introdução	69
5.2.	Conclusões	70
5.3.	Proposta de trabalhos futuros	73
Referências	75

Lista de Figuras

Figura 1.1. Corte transversal do tabuleiro da ponte Waterloo [10]	2
Figura 1.2. Caixa triangular do Royal Festival Hall para suporte da laje em consola [10]	2
Figura 1.3. Rotura frágil com fenda helicoidal devido a torção de uma viga de edifício [10] ...	3
Figura 1.4. Pórtico com torção de compatibilidade (a) e pórtico com torção de equilíbrio (b) .	4
Figura 1.5. Consola diretamente sustentada pela viga de um pórtico resistente	6
Figura 1.6. Viga curva no plano horizontal [10]	6
Figura 1.7. Viga de suporte com consolas curtas	7
Figura 1.8. Laje de pavimento apoiada em apoios de extremidade (a) e de continuidade (b) [10]	7
Figura 1.9. Curva típica $T - \theta$ de uma viga em betão armado sujeita à torção pura [29]	8
Figura 1.10. Curva $T - \theta$ Experimental e teórica da viga em betão armado M2 [23]	10
Figura 1.11. Curvas $T - \theta$ Experimentais e teóricas segundo Bernardo e Lopes para as várias vigas de referência [11]	11
Figura 1.12. Curvas $T - \theta$ Experimentais e teóricas segundo Andrade e Bernardo <i>et al.</i> para o modelo MVATM e para várias vigas de referência [6 e 12]	12
Figura 1.13. Curvas $T - \theta$ Experimentais (linhas contínuas) e teóricas (linhas a tracejado) obtidas pelo SMMT segundo Hsu e Jeng para várias vigas de referência [27]	13
Figura 1.14. Curvas $T - \theta$ Experimentais obtidas por Hsu (linha contínua) e teóricas obtidas pelo GSVATM (linha tracejado) [14]	14
Figura 2.1. Viga de secção retangular vazada sujeita a torção pura [14]	16
Figura 2.2. Modelo de treliça plana de uma viga de betão armado [14].....	17
Figura 2.3. Equilíbrio do elemento A [14]	18
Figura 2.4. Equilíbrio de um corpo livre retangular [14]	19
Figura 2.5. Distribuição das extensões e tensões na escora e no tirante de betão [29]	20
Figura 2.6. Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [32]	25
Figura 2.7. Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à compressão [14]	28
Figura 2.8. Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração [14].....	29
Figura 2.9. Curva $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas [14]	29
Figura 2.10. Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM para obtenção dos pontos da curva $T - \theta$	32
Figura 3.1. Modelo idealizado: (a) secção retangular cheia; (b) Secção retangular vazada equivalente; (c) divisão em subelementos [19]	36
Figura 3.2. Subdivisão das vigas do tipo L e T em elementos retangulares: a) Solução I, b) Solução II, c) Solução III.	37
Figura 3.3. Secção oca eficaz [10]	39

Figura 3.4. Secção oca eficaz em secções compostas [10]	39
Figura 3.5. Seleção dos retângulos componentes numa secção em “L” para o calculo de $\sum x^2 y$	41
Figura 3.6. Exemplo de viga do tipo “L” e “T”	43
Figura 4.1. 1ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”	48
Figura 4.2. 2ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”	49
Figura 4.3. 3ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”	49
Figura 4.4. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB1 [18]	55
Figura 4.5. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB2 [18]	56
Figura 4.6. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB3 [18]	56
Figura 4.7. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB4 [18]	57
Figura 4.8. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB5 [18]	57
Figura 4.9. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga BL1 [20]	58
Figura 4.10. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga BK-T [28]	58
Figura 4.11. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga TB1 [17]	59

Lista de Tabelas

Tabela 3.1. Características geométricas das vigas de referência	44
Tabela 4.1. Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas	50
Tabela 4.2. Comparação dos valores obtidos pelas curvas $T - \theta$ em estudo	60
Tabela 4.3. Previsão da resistência à torção através do REBAP	62
Tabela 4.4. Previsão da resistência à torção através do ACI 318R-89	64
Tabela 4.5. Análise comparativa	66

Simbologia

Alfabeto Latino

A_c	- Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
A_{ef}	- Área efetiva
A_{fl}	- Área da armadura GFRP longitudinal
A_{ft}	- Área da armadura GFRP de um varão transversal (área de um ramo)
A_o	- Área limitada pela linha média do fluxo de corte
A_{sl}	- Área da armadura ordinária longitudinal
A_{st}	- Área da armadura ordinária transversal (área de um ramo) / Área da secção das cintas constituintes da armadura transversal (REBAP)
A_t	- Área da secção das cintas constituintes da armadura transversal (ACI)
C	- Força de compressão que atua nas escoras de betão
E_c	- Módulo de elasticidade do betão
E_f	- Módulo de elasticidade dos varões GFRP
E_{fl}	- Módulo de elasticidade dos varões GFRP longitudinal
E_{ft}	- Módulo de elasticidade dos varões GFRP transversal
E_s	- Módulo de elasticidade do aço
E_{sl}	- Módulo de elasticidade do aço usado na armadura ordinária longitudinal
E_{st}	- Módulo de elasticidade do aço usado na armadura ordinária transversal
GJ^I	- Rigidez elástica à torção no Estado I
GJ^{II}	- Rigidez elástica à torção no Estado II (pós-fissuração)
M	- Momento fletor
M_T	- Momento torsor
\bar{N}	- Força absorvida pela armadura longitudinal
R	- Resultante das forças de compressão e tração
T	- Força de tração que atua nos tirantes de betão / Momento torsor
T_i	- Momento torsor aplicado em cada subdivisão retangular (i)

T_c, T_{cd}	- Momento torsor resistente conferido pelo betão
T_{cr}	- Momento torsor de fissuração
T_i	- Momento torsor aplicado em cada subdivisão retangular (i)
T_{ld}	- Momento torsor dependente da geometria da secção e da armadura longitudinal
T_n	- Momento torsor resistente (ACI)
T_{Rd}	- Momento torsor resistente (REBAP)
$T_{r,calc}$	- Valor teórico do momento torsor resistente
T_s	- Momento resistente conferido pelas cintas de cada componente
T_{td}	- Momento torsor dependente da geometria da secção e da armadura transversal
T_u	- Momento torsor resistente
$T_{u,exp}$	- Valor experimental do momento torsor resistente
$T_{u,i}^{a div}$	- Valor teórico do momento torsor resistente para a divisão i
T_y	- Momento torsor de cedência
V	- Esforço transversal
d_{ef}	- Diâmetro do círculo de maior tamanho possível dentro do perímetro efetivo (u_{ef})
d_v	- Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana
f'_c	- Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{cm}	- Resistência média à compressão do betão
f_{cr}	- Tensão de fissuração / Resistência à tração do betão
f_{ctm}	- Resistência média à tração do betão
f_{lfm}	- Tensão de rotura de um varão GFRP longitudinal
f_{tfm}	- Tensão de rotura de um varão GFRP transversal
f_{lym}	- Tensão média de cedência da armadura longitudinal
f_{tym}	- Tensão média de cedência da armadura transversal
f_s	- Tensão de tração nas armaduras ordinárias
f_{sl}	- Tensão na armadura longitudinal

f_{st}	- Tensão na armadura transversal
f_{sy}	- Tensão de cedência na armadura ordinária
f_{syd}	- Tensão de cedência da armadura de torção (REBAP)
f_{syt}	- Tensão de cedência da armadura longitudinal de torção
f_{syd}	- Tensão de cedência da armadura transversal de torção
f_{ty}	- Tensão de cedência da armadura transversal de torção (ACI)
h_{ef}	- Espessura efetiva de betão tracionado / Espessura efetiva da parede
i	- Subsecção transversal i resultante da divisão da secção original
k_1^c	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão no tirante de betão
k_2^c	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
n	- Número de subdivisões
p_c	- Perímetro exterior da secção transversal de betão
p_o	- Perímetro da linha média de fluxo de corte
q	- Tensão de corte / Fluxo de corte
s	- Espaçamento longitudinal da armadura transversal
t	- Espessura da parede / Espessura da escora de betão / Espessura do tirante de betão
t_c	- Espessura da escora diagonal de betão
t_t	- Espessura do tirante diagonal de betão
u	- Perímetro exterior de uma secção transversal de betão
u_{ef}	- Perímetro efetivo da linha média do fluxo de corte
x	- Altura ou largura da subsecção transversal (ACI)
x_1	- Largura ou altura das cintas a partir do eixo dos varões (ACI)
x_i	- Largura da secção transversal
$x_{1,i}$	- Largura das cintas entre eixos dos varões para a secção transversal i
y	- Altura arbitrária da viga / Altura ou largura da subsecção transversal (ACI)
y_1	- Largura ou altura das cintas a partir do eixo dos varões (ACI)
y_i	- Altura da secção transversal i
$y_{1,i}$	- Altura das cintas entre eixos dos varões para a secção transversal i

Alfabeto Grego

α	- Ângulo de inclinação de uma fissura / Ângulo de inclinação das escoras
α_t	- Coeficiente de eficiência das armaduras
β	- Ângulo entre a resultante R e a força de compressão C
γ	- Ângulo entre a resultante R e o eixo longitudinal da viga / Distorção
ε	- Extensão
ε_{cr}	- Extensão de fissuração
ε_{cu}	- Valor convencional da extensão última para o betão à compressão
ε_d	- Extensão na escora diagonal de betão
ε_{flu}	- Valor convencional da extensão última para os varões GFRP longitudinal
ε_{ftu}	- Valor convencional da extensão última para os varões GFRP transversais
ε_{ft}	- Extensão na direção das fibras de GFRP
$\varepsilon_{ft,u}$	- Valor convencional da extensão última para os varões GFRP
ε_{fu}	- Extensão última de rotura dos varões GFRP
ε_{slu}	- Valor convencional da extensão última para a armadura ordinária longitudinal
ε_{stu}	- Valor convencional da extensão última para a armadura ordinária transversal
ε_o	- Extensão correspondente ao pico de tensão f'_c
ε_s	- Extensão de tração nas armaduras ordinárias
ε_{sl}	- Extensão na armadura longitudinal
ε_{st}	- Extensão na armadura transversal
ε_{su}	- Valor convencional da extensão última para a armadura ordinária de torção
ε_1^c	- Extensão média de tração
ε_{1s}^c	- Extensão máxima de tração
ε_2^c	- Extensão média de compressão
ε_{2s}^c	- Extensão máxima de compressão
η	- Fator de redução
θ	- Rotação transversal da secção / Rotação por unidade de comprimento
θ_{cr}^I	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado I

θ_{cr}^{II}	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado II
$\theta_{m\acute{a}x}$	- Rotação de torção correspondente a $T_{m\acute{a}x}$
θ_u	- Rotação de torção correspondente a T_u
$\theta_{u,exp}$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{u,exp}$
$\theta_{u,i^a\ div}$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{u,i^a\ div}$
θ_y	- Rotação de torção correspondente a T_y
ξ	- Fator de redução / Coeficiente de redução para ter em conta o <i>softening effect</i>
ρ	- Taxa de armadura
ρ_l	- Taxa de armadura longitudinal
ρ_t	- Taxa de armadura transversal
ρ_{tot}	- Taxa de armadura total
α_{ti}	- Coeficiente de eficiência das armaduras
σ	- Tensão
σ_{ft}	- Tensão na direção das fibras de GFRP
$\sigma_{ft,u}$	- Tensão de rotura à tração dos varões GFRP
σ_1^c	- Tensão de tração no tirante de betão
σ_2^c	- Tensão de compressão na escora de betão
τ_1	- Tensão correspondente a 60% do valor da resistência à tração do betão (f_{ctm})
ϕ	- Diâmetro dos varões
φ	- Curvatura do tirante de betão
ψ	- Curvatura da escora de betão

Lista de Acrónimos

ACI	- American Concrete Institute
DIN	- Deutsches institut für normung
EC2	- Eurocode 2
ELS	- Estado limite serviço
ELU	- Estado limite último
FRP	- Polímero Reforçado com Fibras
GFRP	- Polímero Reforçado com Fibras de Vidro
GSVATM	- Generalized Softened Variable Angle Truss-Model
MVATM	- Modified Variable Angle Truss-Model
REBAP	- Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado
SMM	- Softened Membrane Model
SMMT	- Softened Membrane Model for Torsion
VATM	- Variable Angle Truss-Model

Capítulo 1. Enquadramento do tema

1.1. Introdução

1.1.1. Notas históricas

Em meados do século XX, mais precisamente na década de 60, a comunidade técnica e científica sentiu a necessidade de investigar os efeitos da torção em vigas de betão armado, pois até então a torção era em geral desprezada para efeitos de dimensionamento. A maioria dos regulamentos utilizados, até então, para o dimensionamento de estruturas, não incorporava cláusulas específicas para a torção pois era considerado que os efeitos deste esforço seriam absorvidos pela estrutura através de uma redistribuição interna de esforços e pela reserva de resistência que os elevados fatores de segurança à flexão ofereciam. Contudo, já nessa altura existia o caso das “estacas-parafuso” pré-fabricadas construídas por betão armado e para as quais, devido ao método de cravação utilizado, os esforços de torção e de compressão eram explicitamente considerados aquando do seu dimensionamento. Para resistir aos esforços simultâneos de compressão e de torção, as estacas eram dotadas de uma armadura transversal helicoidal, sendo o cálculo destas armaduras de torção baseados em bibliografia especializada da época e também recorrendo muitas vezes a ensaios experimentais para avaliar a real capacidade resistente destes elementos estruturais.

Em 1958, a DIN-1045 (documento normativo alemão) baseada nos resultados obtidos na tese de doutoramento de Ernest Rausch, incorporou, pela primeira vez informações sobre o dimensionamento à torção. Rausch em 1929 [30] propôs um modelo designado por Analogia de Treliça Espacial, com diagonais comprimidas a 45° [22].

Entre os anos de 1960 e 1968, foram realizados vários estudos e ensaios de torção em vigas de betão armado. Em 1968 surgiu a publicação “Torsion of Structural Concrete SP-18” do American Concrete Institute (ACI) [5]. Em 1971, é publicado o ACI 318-71 [3], que ditava as normas específicas para o dimensionamento de vigas à torção [29].

Ainda antes de ser aplicado qualquer documento normativo que contemplasse a torção, surgiram, para além das “estacas-parafuso” referidas anteriormente, dois projetos onde foi imprescindível considerar o efeito da torção no dimensionamento de elementos estruturais principais, a Ponte de Waterloo (Londres) e o Royal Festival Hall (Londres).

A ponte Waterloo foi projetada por Cuerel em 1948, o qual se preocupou com a necessidade de serem consideradas cargas excêntricas elevadas que geravam momentos torsores elevados nas duas vigas em caixão (com três células cada) localizadas na extremidade do tabuleiro (figura 1.1). Para avaliar a capacidade resistente à torção destas vigas foram efetuados ensaios com modelos reduzidos das vigas em caixão. A partir destes ensaios foi confirmado que o fator de forma para a rigidez de torção fornecido pela teoria de St. Venant

para um retângulo cheio era idêntico ao de um retângulo oco de proporções idênticas e que a tensão tangencial máxima na viga em caixão ocorria na parede mais fina.

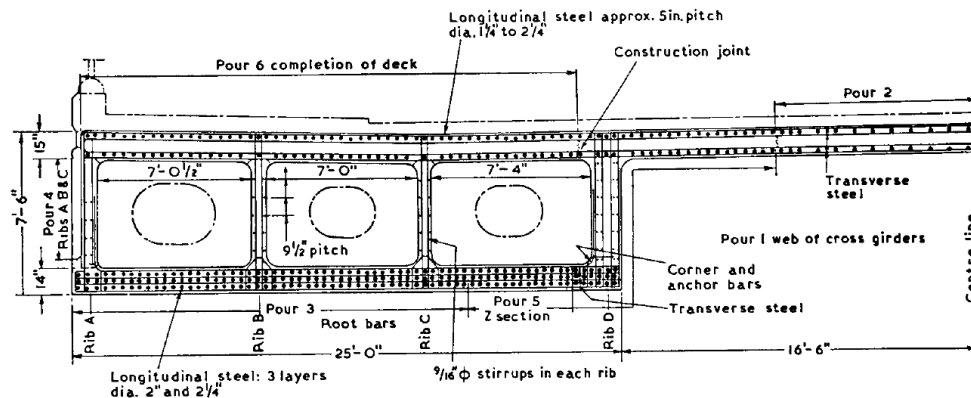


Figura 1.1. Corte transversal do tabuleiro da ponte Waterloo [10]

O Royal Festival Hall foi marcado pela sua estrutura modernista, a qual incorporava uma “caixa de torção” (figura 1.2), caixa esta constituída por uma viga em caixão triangular para suporte da laje em consola das bancadas e sujeita a elevados momentos torsores.

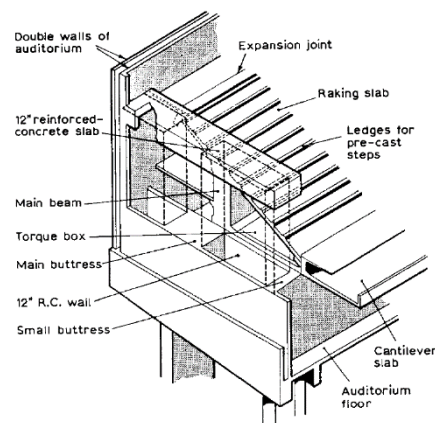


Figura 1.2. Caixa triangular do Royal Festival Hall para suporte da laje em consola [10]

Para ilustrar a problemática de, nas estruturas correntes, os efeitos torsionais serem desprezados, em 1964, foi documentado o caso de uma viga de apoio de um parque de estacionamento situado na Flórida, nos Estados Unidos da América (figura 1.3). Tal viga sofreu uma rotura frágil evidenciada através de uma fenda com desenvolvimento helicoidal. Na altura foi demonstrado que a causa desta rotura era uma insuficiência de resistência à torção por parte da viga motivada pela negligência dos esforços de torção no projeto [24].

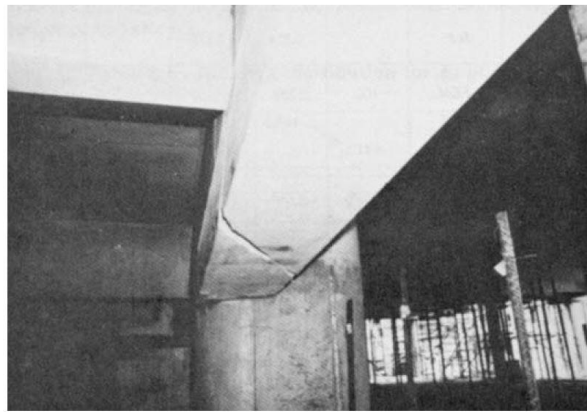


Figura 1.3. Rotura frágil com fenda helicoidal devido a torção de uma viga de edifício [10]

A preocupação em estudar adequadamente o problema da torção em vigas de betão estrutural deveu-se à necessidade dos engenheiros acompanharem a evolução da arquitetura com as suas estruturas com formas cada vez mais arrojadas e irregulares. Para este tipo de estruturas as hipóteses simplificadas que eram adotadas antes da década de 60 mostram-se responsáveis por alguns casos de fissuração e deformação pronunciada associados a uma insuficiente resistência à torção, comprometendo a estética e a durabilidade das estruturas. Estas estruturas careciam de cálculos mais pormenorizados não sendo mais aceitável desprezar os efeitos da torção, devendo estes esforços ser especificamente considerado em projeto. Contudo o cálculo dos efeitos da torção em estruturas estaticamente indeterminadas era extremamente demorosos e fastidiosos. No entanto, o avanço da arquitetura moderna foi acompanhada pelo avanço e disponibilização de programas computacionais de análise estrutural, permitindo assim aos engenheiros calcular as estruturas com maior realismo e facilidade. O cálculo dos efeitos torsionais deixaram assim de constituir uma dificuldade.

Com os estudos realizados sobre a torção, a reserva de resistência que permitia que tal esforço fosse considerado como um efeito secundário, passou a ser mais pequena. Refinaram-se os fatores de majoração das ações e de minoração para os materiais, tendo sido adotado o método de dimensionamento baseado na teoria dos Estados Limites Último em substituição do método baseado nas tensões admissíveis. Tal medida conduziu a uma redução de custos das estruturas. Este novo método de dimensionamento entrou em vigor em Portugal em 1983 com o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado (REBAP), que contemplava já explicitamente os efeitos torsionais para efeito de dimensionamento.

Apesar da evolução e atualização feita nos regulamentos e códigos, a temática da torção não deixa de ser um tema atual, pois muitos aspetos dos comportamentos de vigas de betão estrutural à torção estão ainda por elucidar. Verifica-se de facto que, com exceção do código americano, em geral os documentos normativos mais importantes incorporam poucas disposições para o dimensionamento à torção, designadamente para o ELU de resistência para secções retangulares. Vários aspetos continuam ausentes como por exemplo o comportamento em serviço e a geometria da secção.

1.1.2. Classificação dos efeitos torsionais

1.1.2.1 Torção de Compatibilidade e Torção de equilíbrio

A torção de compatibilidade e a torção de equilíbrio constituem duas situações distintas relacionadas com a forma como ocorre a torção e qual o efeito na estrutura quando a torção é desprezada no dimensionamento.

A torção de compatibilidade, como o seu próprio nome indica, resulta em virtude das condições de compatibilidade de deformação entre os vários elementos estruturais que compõem a estrutura (figura 1.4 (a)). O dimensionamento à torção de compatibilidade pode ser desprezada pois a estrutura não depende deste para o seu equilíbrio e estabilidade serem garantidos, ficando salvaguardada o ELU. No entanto, em virtude de se desprezar a resistência à torção dos elementos estruturais que compõem a estrutura, em serviço podem ocorrer deformações e fissurações excessivas, visto que a rigidez de torção em elementos de betão armado se reduz drasticamente no Estado II (estado fissurado) [29]. Este comportamento em serviço deve ser previsto, devendo-se adotar disposições construtivas adequadas com vista a garantir um controlo eficiente da fendilhação (armaduras mínimas, controlo do espaçamento das armaduras, etc.).

O dimensionamento à torção de equilíbrio torna-se necessário para ELU, pois a negligência deste efeito torsional em termos de resistência poderá comprometer a estabilidade global ou parcial da estrutura (Figura 1.4 (b))

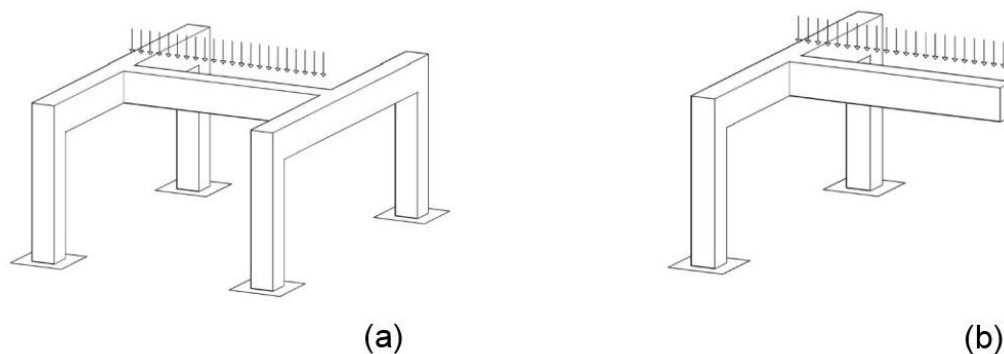


Figura 1.4. Pórtico com torção de compatibilidade (a) e pórtico com torção de equilíbrio (b)

1.1.2.2 Torção circulatoria e torção de empenamento

A forma como os esforços de torção que atuam na secção transversal são absorvidos depende da geometria da secção. Tal origina uma nova classificação para a torção.

Nas secções cheias e vazadas, os esforços provocados pela torção são resistidos por um fluxo de tensões tangenciais fechado. Neste caso a torção é designada de torção circulatoria ou torção de St. Venant. Nas secções abertas os esforços de torção são resistidos por momentos fletores transversais adicionais originando o empenamento da secção. Nesta situação a torção é designada de torção de empenamento. O empenamento surge quando existem restrições que não possibilitam as deformações longitudinais na secção [29].

Em geral as secções cheias e vazadas também sofrem algum empenamento devido aos efeitos torsionais, no entanto tal efeito é em geral muito pequeno comparativamente aos efeitos da torção circulatoria, principalmente no estado fissurado. Apenas as secções de geometria circular e secções com determinadas propriedades de configuração são totalmente livres de empenamento. Em secções abertas e compostas com até duas paredes, como por exemplo secções do tipo “L”, o empenamento apenas gera pequenos acréscimo de tensões que podem ser desprezados no seu dimensionamento, pois em geral estes não afetam a capacidade resistente da peça. Já em secções abertas compostas por três paredes, como por exemplo secções do tipo “I” e “U”, o empenamento gera esforços de flexão secundários que não devem ser desprezados aquando o seu dimensionamento.

1.1.3. Estruturas correntes sujeitas à torção

Nas secções anteriores, foi referido que o esforço de torção não pode ser desprezados quando este efeito pode afetar a estabilidade da estrutura, seja como esforço principal ou secundário. Na presente secção serão ilustrados alguns exemplos comuns de casos em que os esforços de torção se manifestam importantes e, por isso, devem explicitamente ser considerados no projeto de estabilidade.

A figura 1.5 ilustra o caso de uma laje em consola isolada diretamente apoiada pela viga de um pórtico. A referida viga encontra-se claramente sujeita a esforços de torção de equilíbrio pelo que os mesmos não podem ser desprezados.

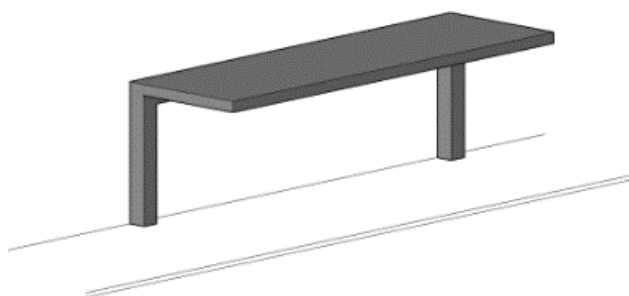


Figura 1.5. Consola diretamente sustentada pela viga de um pórtico resistente

As vigas de bordadura com desenvolvimento curvo em planta constituem outro caso de torção de equilíbrio. Em geral tais vigas recebem as reações das lajes de pavimento e das paredes exteriores se existirem, tendo estas de serem dimensionadas para os esforços de torção que resultam do facto das cargas serem excêntricas em relação aos apoios. Mesmo que as cargas sejam aplicadas de forma simétrica relativamente ao eixo da viga geram torção ao longo do desenvolvimento da mesma. A figura 1.6 ilustra o diagrama de momentos torsores para um carregamento vertical uniformemente distribuído a atuar ao longo do eixo de uma viga com desenvolvimento curvo e impedida de rodar transversalmente nos apoios [10].

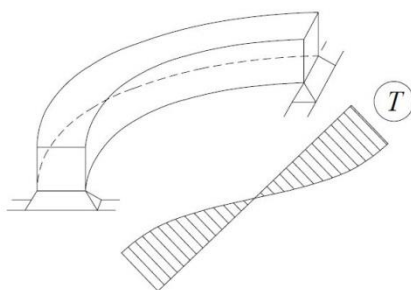


Figura 1.6. Viga curva no plano horizontal [10]

As vigas de apoio com consolas curtas sejam elas do tipo “L” ou “T”, constituem outro caso onde os efeitos da torção de equilíbrio se fazem sentir. Na viga tipo “T”, se as cargas que se encontram nas consolas curtas dessa viga de apoio forem diferentes originam torção (Figura

1.7 (a)), já nas vigas do tipo “L” a torção surge na viga sempre que existe uma carga aplicada na consola curta (Figura 1.7 (b)).

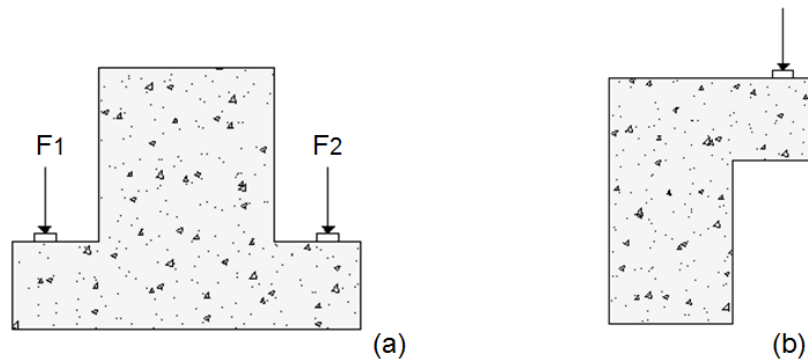


Figura 1.7. Viga de suporte com consolas curtas

Os pavimentos em lajes vigadas sujeitas a carregamentos uniformes constituem um caso corrente onde ocorre torção de compatibilidade nas vigas de apoio com ligação monolítica, sejam elas de bordo ou de continuidade (figura 1.8). No primeiro caso, ilustrado na figura 1.8 (a), o momento negativo m que a laje apresenta junto a viga é devido à restrição provocada na deformação da laje devido à rigidez de torção da viga. Por equilíbrio, este momento tem de ser absorvido pela viga de bordadura na forma, de momentos torsores T . Estes momentos torsores só têm origem devido a ligação monolítica entre a laje, viga e pilares. Na Figura 1.8 (b), a diferença de momentos fletores Δm que aparece sobre a viga de apoio de continuidade, em virtude da sua rigidez de torção restringir a deformação da laje, irá provocar, à semelhança da figura 1.8 (a), o aparecimento de momentos torsores hiperstático. Esta diferença Δm deve-se à assimetria do carregamentos e da rigidez das lajes de pavimento a esquerda e à direita da viga.

Se no dimensionamento das vigas ilustradas na figura 1.8 se contabilizar a influência da laje, então tais vigas podem ser consideradas como sendo do tipo “L” e “T” devido a ligação monolítica entre laje e viga.

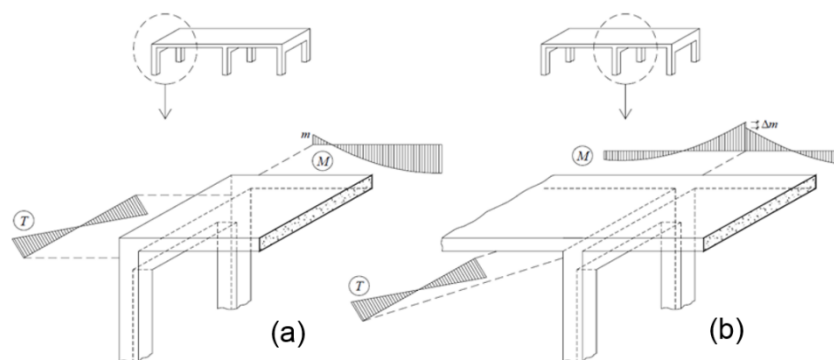


Figura 1.8. Laje de pavimento apoiada em apoios de extremidade (a) e de continuidade (b) [10]

1.1.4. Comportamento de uma viga de betão armado sujeitas à torção

Tendo por base os estudos realizados em vigas de betão armado sujeitas a torção ao longo de muitos anos, designadamente através de ensaios experimentais, é possível desenhar-se uma curva comportamental típica que relaciona o momento torsor com a rotação transversal da secção ($T - \theta$). Tal curva encontra-se ilustrada na figura 1.9 para vigas de referência com taxas de armadura de torção correntes. Tal curva, ilustrada na 1.9 e que demonstra o comportamento de uma viga de betão armado sujeita a momentos torsores crescente até à rotura, pode ser dividida em três zonas, Zona 1, 2 e 3 sendo que a zona 2 ainda é subdividida nas zonas 2.a e 2.b.

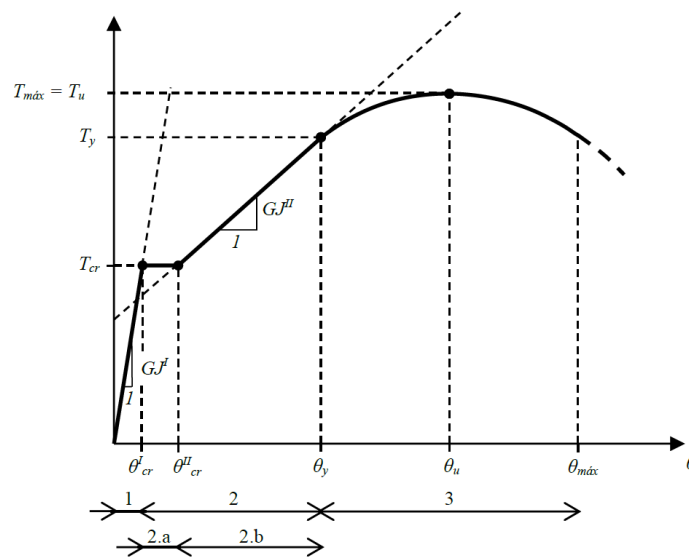


Figura 1.9. Curva típica $T - \theta$ de uma viga em betão armado sujeita à torção pura [29]

O comportamento em estado não fissurado da viga (Estado I) é representado na zona 1, o qual termina no instante em que a viga atinge o momento torsor de fissuração (T_{cr}). Nesta zona o comportamento pode ser idealizado através de uma reta de declive constante que representa a rigidez elástica à torção (GJ^I), a qual pode ser calculada através da Teoria de St. Venant. Esta reta é uma simplificação pois os ensaios mostram que, antes de ser atingido o momento torsor de fissuração efetivo, existe em geral uma ligeira diminuição da rigidez, sendo esta devido a microfissuras desenvolvidas no betão. Esta simplificação feita é considerada aceitável pois as rotações nesta fase comportamental são muito pequenas, sendo por isso admissível o cálculo da rigidez à torção com base na hipótese de um comportamento elástico-linear.

A Zona 2 é dividida nas zonas 2.a e 2.b. Quando é atingido o momento torsor de fissuração dá-se o início da Zona 2.a que é visível através da reta de declive nulo e que representa um aumento brusco da rotação com o momento torsor constante e igual ao momento torsor de fissuração. Em geral, a zona 2.a somente é observada de forma clara em ensaios de vigas com secção cheia. A zona 2.b representa o comportamento da viga em estado fissurado

(Estado II), podendo ser ainda representado por uma reta com um declive correspondente à rigidez de torção pós-fissuração (GJ'').

A Zona 3 tem início quando a viga deixa de ter um comportamento linear, que pode ocorrer por dois motivos. O primeiro sucede quando pelo menos uma das armaduras de torção, seja ela longitudinal ou transversal, entra em cedência antes da rotura do betão por compressão nas escoras (vigas com rotura dúctil). O segundo ocorre quando o betão comprimido nas escoras encontra-se sujeito a tensões elevadas. Esta situação ocorre geralmente em vigas com uma taxa elevada de armadura de torção (vigas com rotura frágil).

1.2. Objetivos e justificação do tema

Desde o final da década de 60 que se tem vindo a desenvolver o modelo de Analogia de Treliça Espacial o qual oferece uma simulação teórica do comportamento de uma viga sujeita a torção. Atualmente este modelo constitui o modelo base da maioria dos documentos normativos. Segue-se um resumo dos principais desenvolvimentos da analogia da treliça espacial bem com dos resultados obtidos com este modelo. Apenas serão contempladas as vigas de betão armado com secção retangular.

Em 1985 Hsu e Mo [23] propuseram um novo desenvolvimento do modelo de treliça espacial original apresentado por Rausch em 1929 [30]. Em tal modelo, designado por Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (VATM), o ângulo das escoras era considerado variável, permitindo ter em conta as redistribuições internas de tensões que as vigas de betão armado sujeitas à torção evidenciam ao longo dos ensaios até a rotura. Além disso, o modelo incorporava uma nova lei constitutiva para o betão à compressão que tinha em conta o efeito de amolecimento (*softening effect*) devido à existência de tensões de tração perpendicular às trajetórias das compressões principais. Através de um algoritmo de cálculo baseado no referido modelo Hsu e Mo calcularam a curva $T - \theta$ teórica de uma viga de referência M2 [23] e compararam tal curva com os resultados experimentais obtidos a partir do ensaio da referida viga [5] (figura 1.10).

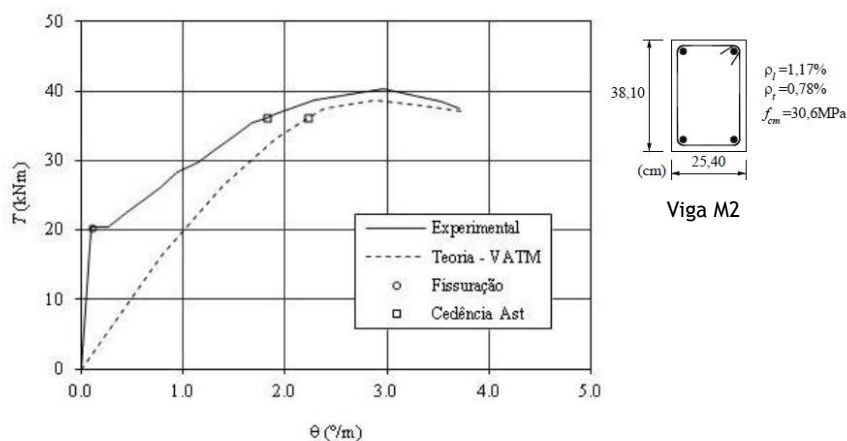


Figura 1.10. Curva $T - \theta$ Experimental e teórica da viga em betão armado M2 [23]

Verifica-se que as duas curvas se aproximam para o valor último do momento torsor, o que não acontece para níveis de torção baixos, verificando-se que a curva teórica se encontra muito abaixo da experimental. Esta observação deve-se ao facto do modelo teórico assumir que a viga se encontra totalmente fissurada desde o início do carregamento, o qual não corresponde à realidade. Assim sendo, pode concluir-se que o VATM só é válido para níveis de carregamentos elevados, para os quais as vigas se encontram extensivamente fissuradas.

Este problema foi alvo de estudo em 2008 por Bernardo e Lopes [11] na tentativa de ser ultrapassado. Tais autores desenvolveram um novo modelo que agrupa varias teorias de entre elas o VATM para simular a zona comportamental última. Para baixos níveis de carregamento foram por exemplo considerados a teoria de St. Venant e a teoria do tubo fino de Bredt com alguns ajustamentos (para a zona comportamental não fissurada). A consideração de várias teorias agrupadas num único modelo permitiu simular o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção, incluindo vigas de betão armado de alta resistência. Apesar de este modelo apresentar curvas teóricas que se aproximavam bastante das experimentais (Figura 1.11), o que validava o modelo proposto por Bernardo e Lopes, este modelo não é teoricamente satisfatório como reconhecido pelos próprios autores, pois este modelo incorpora três teorias estabelecidas para definir as três fases comportamentais existentes na curva $T - \theta$, conduzindo à necessidade dos autores estabelecerem critérios semi-empíricos para a transição entre teorias. Para além disso o modelo não permitia obter o estado interno de tensões e extensões e deformações da viga para baixos níveis de carregamento, designadamente nas armaduras, sendo um aspeto importante para a verificação da segurança dos ELS.

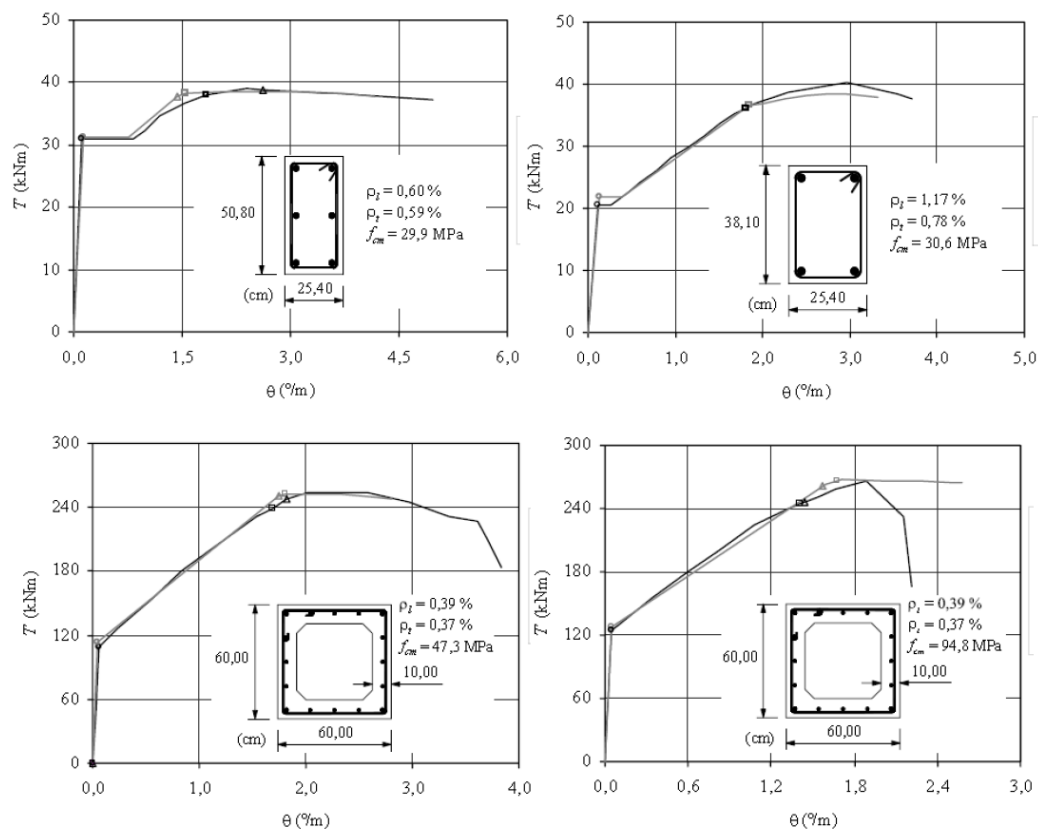


Figura 1.11. Curvas $T - \theta$ Experimentais e teóricas segundo Bernardo e Lopes para as várias vigas de referência [11]

O Modelo de Treliza com Ângulo Variável Modificado (MVATM) foi proposto por Bernardo *et al.* em 2012 [12] de forma a aperfeiçoar o modelo descrito anteriormente com principal objetivo de obter o comportamento global de vigas à torção utilizando apenas a analogia de

treliça. O MVATM, tendo por base o VATM, incorporou correções nas equações do VATM de modo a considerar a influência do betão tracionado e do núcleo de betão para secções vazadas para baixos níveis de carregamento. As curvas $T - \theta$ resultantes do MVATM foram comparadas com curvas obtidas experimentalmente e também pelo modelo de Bernardo e Lopes anteriormente referido, algumas das quais são apresentadas na Figura 1.12. A partir destes resultados é novamente notória a proximidade entre curvas teóricas e experimentais. No entanto, o problema associado à não obtenção do estado interno de tensões e deformações na viga para a fase pós-fissuração permanece devido à necessidade de incorporação de critérios semi-empíricos para o ajuste dos troços da curva $T - \theta$ antes e depois da fissuração, devido à perda da influência do betão à tração e do núcleo de betão nas secções cheias.

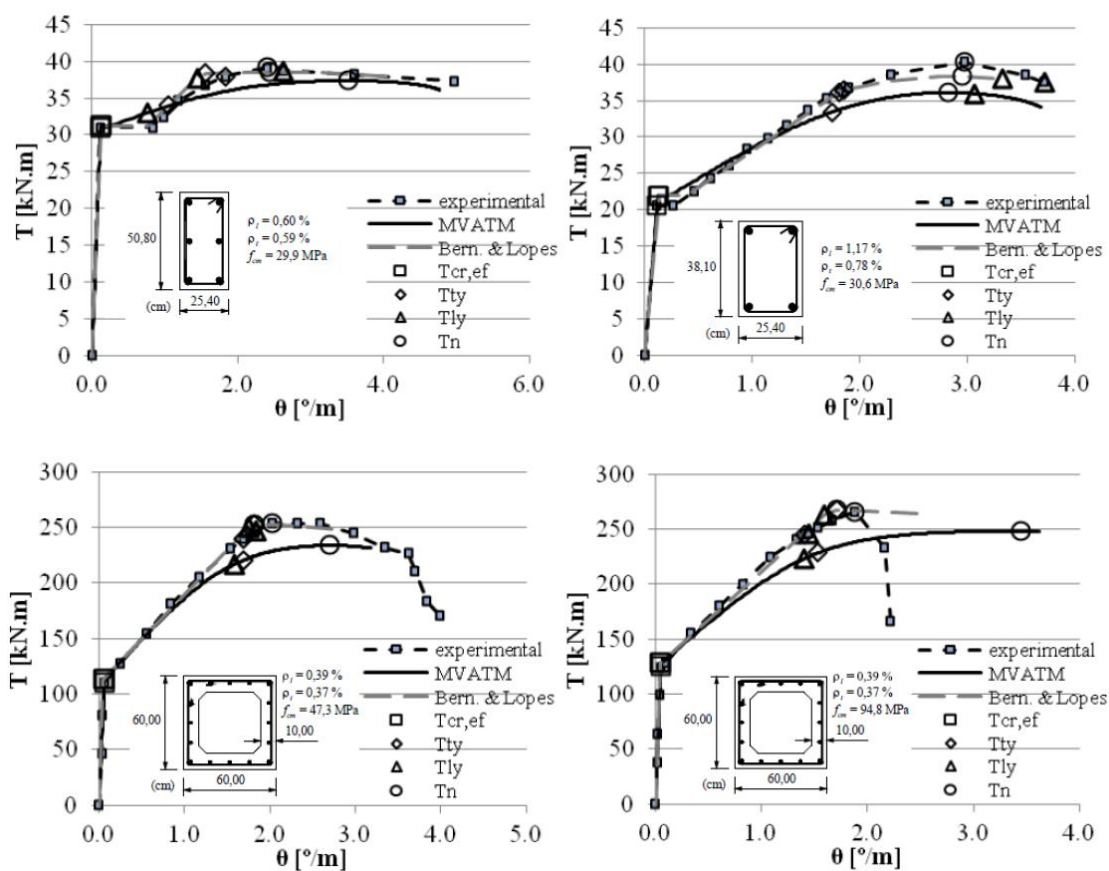


Figura 1.12. Curvas $T - \theta$ Experimentais e teóricas segundo Andrade e Bernardo *et al.* para o modelo MVATM e para várias vigas de referência [6 e 12]

Em 2009 foi proposto o modelo Softened Membrane Model of Torsion (SMMT) por Hsu e Jeng [27], o qual foi desenvolvido a partir de um modelo já existente, o Softened Membrane Model (SMM). Este último consiste num modelo de membrana desenvolvido para placas de betão armado sujeitas ao corte. O ajuste do SMM para o SMMT feito por Hus e Jeng consistiu em relacionar o fluxo de tensões de corte previstas pelo modelo SMM com o momento torsor externo aplicado nas vigas, através da Teoria de Bredt. É de referir que a contribuição do betão à tração na direção perpendicular à escora é diretamente contabilizada no SMMT através da

incorporação da lei constitutiva para o betão à tração e que este modelo não constitui uma variante do modelo de treliça espacial.

NA figura 1.13 são comparados os resultados teóricos obtidos por Hsu e Jeng a partir do SMMT, com alguns resultados experimentais de vigas de referência. Com esta comparação é visível que os resultados obtidos com o SMMT são satisfatórios, no entanto é notória a diminuição acentuada do momento torsor aquando a passagem da fase não fissurada para a fase fissurada.

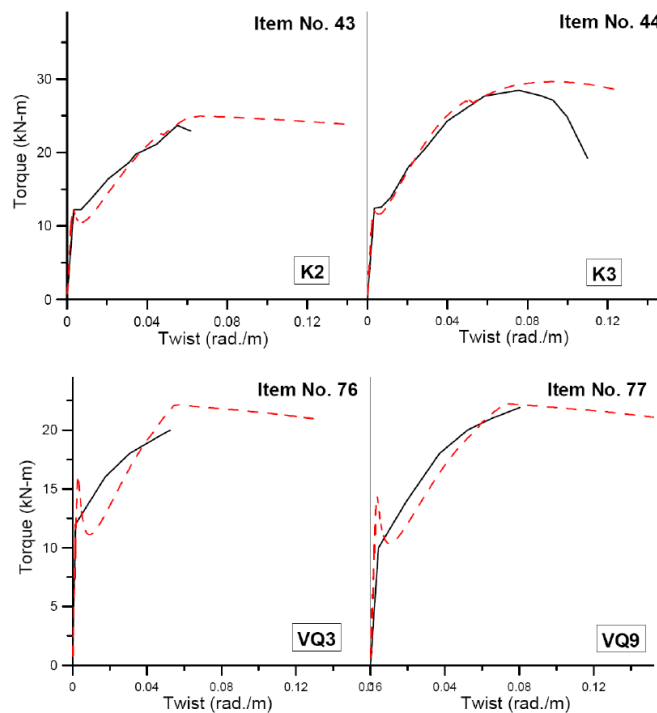


Figura 1.13. Curvas $T - \theta$ Experimentais (linhas continuas) e teóricas (linhas a tracejado) obtidas pelo SMMT segundo Hsu e Jeng para várias vigas de referência [27]

Bernardo e al. em 2014 [14] reformularam o VATM original, incorporando a contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras de forma semelhante ao considerado no SMMT, sendo este novo modelo designado por Generalized Softened Variable Angle Truss-Model (GSVATM). Na figura 1.14 são comparados os resultados teóricos obtidos pelo GSVATM com os ensaios obtidos por Hsu em vigas de betão armado sujeitas a torção, onde se verifica a consistência dos resultados obtidos através deste modelo.

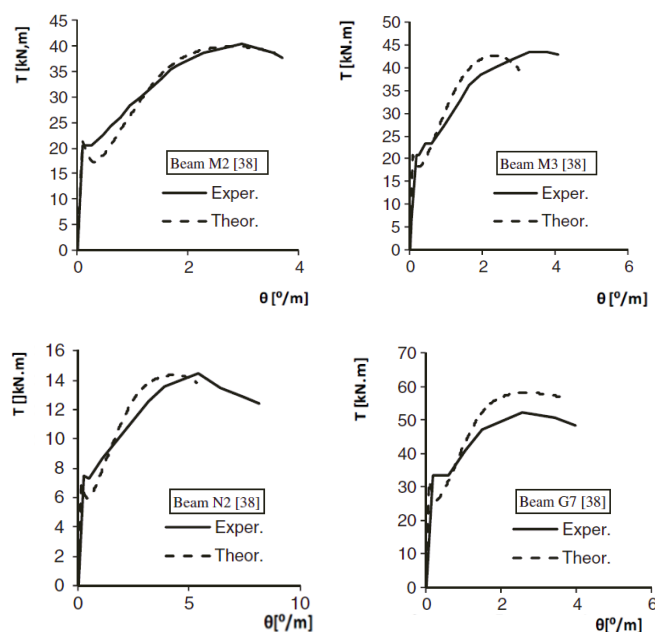


Figura 1.14. Curvas $T - \theta$ Experimentais obtidas por Hsu (linha continua) e teóricas obtidas pelo GSVATM (linha tracejado) [14]

A brusca descida acentuada do momento torsor imediatamente após a fissuração da viga é justificada por Bernardo e al. [9] em virtude da forma da curva que traduz a lei constitutiva do betão à tração adotada no modelo. Tal comportamento também é evidenciado no SMMT (figura 1.13).

Os resultados obtidos a partir do GSVATM são semelhantes aos do SMMT, contudo a formulação do GSVATM é mais simples e consequentemente mais fácil de introduzir computacionalmente. No GSVATM, tal como no SMMT, já é possível obter o estado interno de tensões e extensões da viga em estudo.

Em todas as análises comparativas anteriormente resumidas nas figuras 1.10 a 1.14, apenas foram utilizados os resultados de vigas com secção retangular cheia ou vazada. Na realidade, todos os modelos referidos são validos apenas para vigas com esse tipo de secção.

O objetivo deste trabalho consiste, numa primeira fase, numa pesquisa bibliográfica de modo a compilar resultados experimentais associados ao ensaio de vigas com secções do tipo “L” e “T” sujeitas à torção pura. Numa segunda fase, pretende-se definir e comprovar um procedimento geral para o GSVATM para prever o comportamento global à torção de vigas com o tipo de secções anteriormente referidas. Desta forma, pretende-se contribuir para expandir a aplicação do GSVATM para vigas com outro tipo de secções, que não as simplesmente retangulares.

Capítulo 2. Formulação teórica do GSVATM - Generalização do Modelo de Trelça Espacial com Ângulo Variável

2.1. Introdução

Neste segundo capítulo descreve-se de forma sucinta as teorias que constituem o modelo base da Generalização do Modelo de Trelça Espacial com Ângulo Variável (GSVATM), sendo este modelo fundamental para esta dissertação. Como descrito no capítulo anterior, o GSVATM é um modelo analítico desenvolvido para prever a curva $T - \theta$ nas três fases comportamentais de vigas de betão armado sujeita a torção. O GSVATM desenvolvido por Bernardo *et al.* [14] constitui uma generalização do VATM, sendo a principal diferença a introdução da lei constitutiva Tensão-extensão do betão à tração na formulação do VATM, a qual é traduzida através da introdução de um “tirante” perpendicular à escora de betão.

No decorrer deste capítulo é apresentada, de forma sucinta, a formulação e o procedimento de cálculo do modelo GSVATM demonstrado por Bernardo *et al.* [14] para a previsão da curva $T - \theta$ para vigas de betão armado sujeitas à torção, com secção retangular cheia ou vazada.

2.2. GSVATM - Formulação para vigas de betão armado

2.2.1. Vigas de secção vazadas sujeitas à torção

Para derivar a formulação do GSVATM foi idealizada e utilizada, à semelhança do VATM, uma viga de secção retangular vazada representada na figura 2.1, a qual é armada com um varão longitudinal em cada canto e cintas na direção transversal uniformemente espaçadas. Em tal viga é assumida a existência de escoras inclinadas com um ângulo α relativamente ao eixo longitudinal da mesma. A consideração das forças existentes nas armaduras e nas escoras constitui a premissa do modelo de treliça espacial com ângulo variável (VATM).

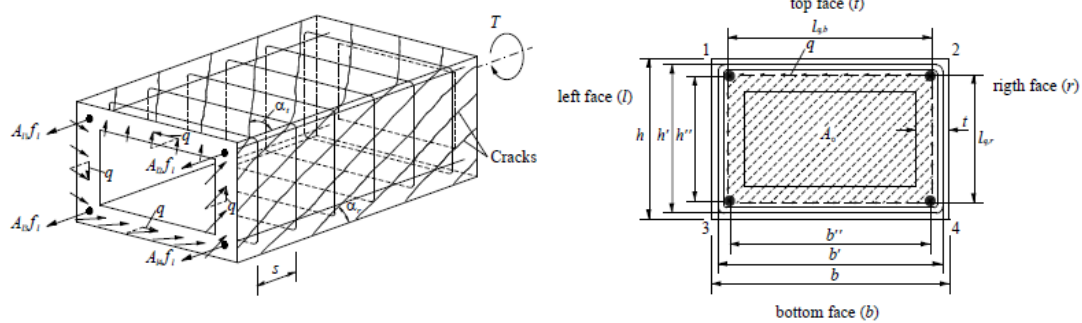


Figura 2.1. Viga de secção retangular vazada sujeita a torção pura [14]

A partir da figura 2.1 observa-se a existência de dois tipos de forças, relativas às forças nas barras longitudinais e às forças nas escoras diagonais de betão com inclinação dada pelo ângulo α . A interação das duas forças referidas constituem o fluxo de corte, q , que pode ser visualizado na secção transversal da figura 2.1. Como referido no início do capítulo, o GSVATM integra ainda a participação de “tirantes” perpendiculares às escoras de betão, os quais introduzem uma força adicional para o equilíbrio do modelo.

Na análise da viga acima ilustrada, esta pode ser considerada equivalente a um tubo de parede fina, pelo que pode ser analisada pela Teoria de Bredt, em que o fluxo de corte q , é dado por:

$$q = \frac{M_T}{2A_0} \quad (2.1)$$

Em que M_T é o momento torsor aplicado e A_0 é a área limitada pela linha média do fluxo de corte, assumindo que esta coincide com a linha média das paredes de espessura t .

A força total nas barras correspondentes à armadura longitudinal da secção é calculada através da seguinte equação:

$$A_{sl}f_{sl} \begin{cases} \frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.2)$$

Em que A_{sl} é a área total de armadura longitudinal, f_{sl} a tensão na armadura longitudinal, p_0 é o perímetro da linha media de fluxo de corte e γ é o ângulo que a resultante R das forças de tração T e de compressão C faz com o eixo longitudinal da viga (Figura 2.3).

A força distribuída na armadura transversal da parede é calculada através da seguinte equação:

$$A_{st}f_{st} = \frac{M_T s}{2A_0} \tan \gamma' \quad (2.3)$$

Em que A_{st} é a área de uma barra transversal, f_{st} a tensão na armadura transversal, s é o espaçamento longitudinal da armadura transversal e γ' é o ângulo que a resultante R faz com o eixo longitudinal da viga como ilustrado na figura 2.4 . Para se obter este angulo γ' , considera-se um modelo de treliça plana de uma viga de betão armado simplesmente apoiada de alma fina, com espessura t e com uma carga concentrada a meio vão que origina esforço transverso e momento fletor (Figura 2.2). Em tal viga é considerado um elemento de viga ,designado por A, o qual está sujeito um esforço transverso constante V e a um momento fletor variável igual a M na face esquerda e $M + Vd_v \cot \alpha$ na face direita como é ilustrado na figura 2.3, onde é também possível visualizar-se o equilíbrio do referido elemento. Para se obter o ângulo que a força R faz com o eixo longitudinal da viga é necessário efetuar um corte horizontal no elemento A com uma altura arbitrária y medida a partir da face inferior, obtendo-se um corpo livre retangular tal como ilustrado na figura 2.4.

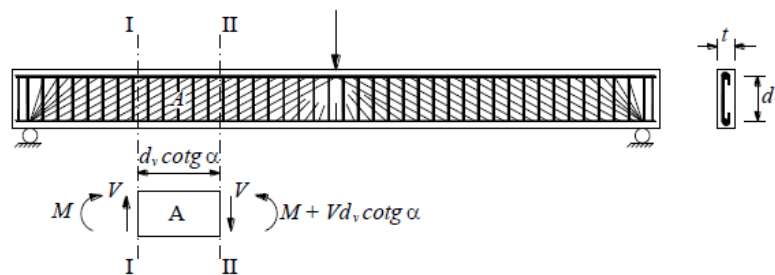


Figura 2.2. Modelo de treliça plana de uma viga de betão armado [14]

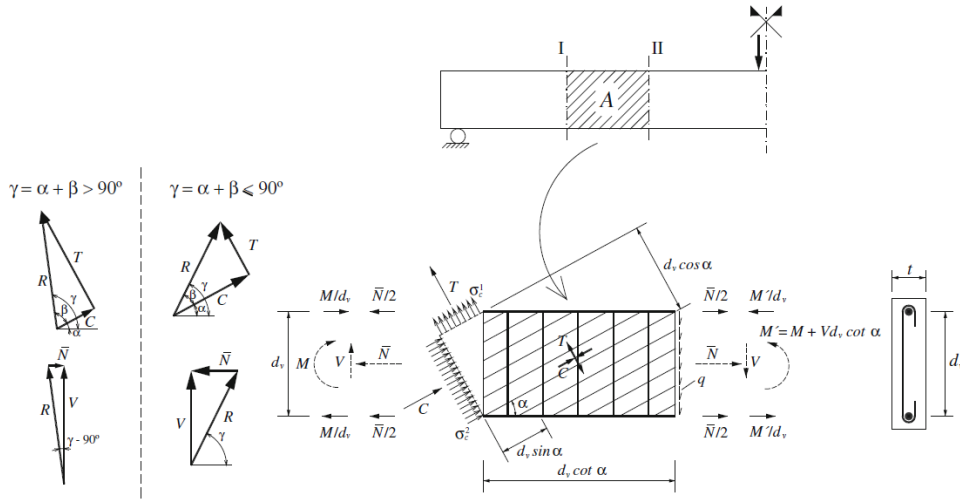


Figura 2.3. Equilíbrio do elemento A [14]

A tensão aplicada nas escoras de betão, σ_2^c , advém da força de compressão C que atua numa secção da escora com uma área transversal de t por $d_v \cos \alpha$. Já a tensão nos tirantes diagonais de betão, σ_1^c , advém da força de tração T que atua numa secção do tirante com uma área de t por $d_v \sin \alpha$. As referidas tensões são calculadas a partir das seguintes equações:

$$\sigma_2^c = \frac{C}{t d_v \cos \alpha} \quad (2.4)$$

$$\sigma_1^c = \frac{T}{t d_v \sin \alpha} \quad (2.5)$$

Em que α é o ângulo que a força de compressão C faz com o eixo longitudinal da viga, e d_v é a distância entre as armaduras longitudinais concentrada na corda superior e inferior da treliça plana, conforme figura 2.3

A resultante R das forças de tração T e de compressão C encontra-se representada na figura 2.3, no triângulo de forças superior, e calcula-se do seguinte modo:

$$R = \sqrt{C^2 + T^2} \quad (2.6)$$

Sendo:

$$R = \frac{M_T d_v}{2 A_0 \sin \gamma} \quad (2.7)$$

$$C = R \cos \beta = \frac{M_T d_v \cos \beta}{2 A_0 \sin \gamma} \quad (2.8)$$

$$T = R \sin \beta = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2 A_0 \sin \gamma} \quad (2.9)$$

Em que β e γ são os ângulos que a resultante R faz, respetivamente, com a força de compressão C e o eixo longitudinal da viga.

Estes ângulos β e γ são determinados por:

$$\beta = \arctan\left(\frac{T}{C}\right) \quad (2.10)$$

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.11)$$

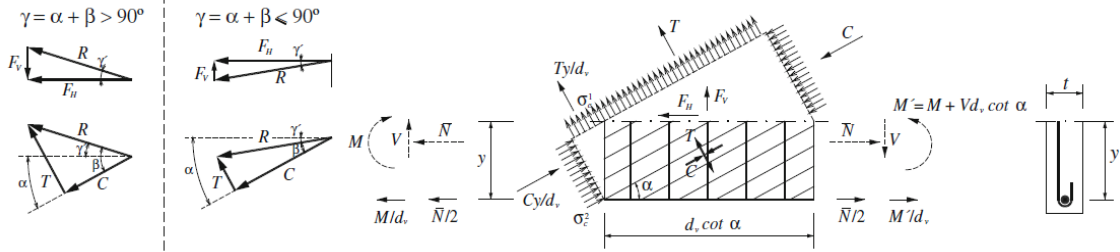


Figura 2.4. Equilíbrio de um corpo livre retangular [14]

Pelo equilíbrio do corpo livre retangular representado na figura 2.4 é possível calcular γ' :

$$\gamma' = \begin{cases} \alpha - \beta = \gamma - 2\beta & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ \beta - \alpha = 2\beta - \gamma & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.12)$$

A tensão na escora diagonal e no tirante diagonal de betão pode ser calculada através da substituição das Equações 2.8 e 2.9 nas Equações 2.4 e 2.5, respetivamente, vindo:

$$\sigma_2^c = \frac{M_T}{2A_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.13)$$

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2A_0 t_t} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.14)$$

Sendo t_c a espessura da escora diagonal de betão e t_t a espessura do tirante diagonal de betão.

As equações 2.1, 2.2, 2.3, 2.9 e 2.14 apresentadas anteriormente constituem as equações básicas de equilíbrio para a torção no GSVATM. Além de serem válidas para secções de betão armado retangulares vazadas, são também válidas para as secções cheias, visto que Hsu em 1968 [23] observou, através de ensaios experimentais, que a resistência última de uma viga com secção cheia era idêntica à de uma viga com secção vazada com as mesmas características. Sendo assim conclui-se que o núcleo central de uma viga de betão não é efetivo quando a sua rotura é próxima, visto que o momento torsor atuante é fundamentalmente resistido pela “ superfície ” exterior dessa mesma viga. Quando a armadura transversal e longitudinal atingem ambas a cedência, as Equações 2.2 e 2.3 passam a definir o equilíbrio da treliça para o momento torsor resistente último.

2.2.2. Flexão nos tirantes e escoras de betão

Sempre que uma viga de betão armado é sujeita a um esforço de torção, esta sofre uma deformação global que se traduz por uma curvatura das superfícies da viga. Essa deformação imposta pela torção origina esforços de flexão tanto nos tirantes como nas escoras de betão. A figura 2.5 considera um elemento de parede de largura unitária retirados a partir da parede superior de uma viga com espessura t . Os eixos coordenados 1 e 2 deste elemento, correspondem à direção principal de tração e de compressão respetivamente, ou seja a face do elemento perpendicular ao eixo 1 corresponde à secção transversal do tirante de betão e a face perpendicular ao eixo 2 corresponde, por sua vez, à secção transversal da escora de betão.

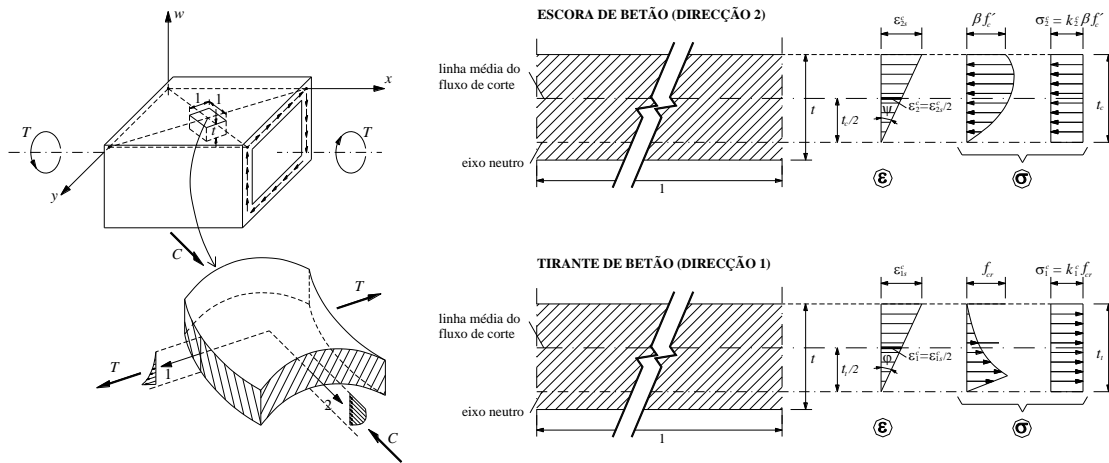


Figura 2.5. Distribuição das extensões e tensões na escora e no tirante de betão [29]

Devido à flexão nas escoras de betão, verifica-se a existência de uma área reduzida à tração na secção transversal, junto à fibra inferior, sendo essa área de tração desprezada tanto para elevados como baixos níveis de carregamento. Assim sendo, apenas a área de compressão que se prolonga por uma profundidade t_c é considerada efetiva, profundidade esta correspondente à espessura das escoras de betão. Considerando a distribuição das extensões linear, então a extensão máxima de compressão à superfície ε_{2s}^c pode ser calculada com base na curvatura ψ da escora de betão:

$$\varepsilon_2^c = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c \quad (2.16)$$

Sendo ψ a curvatura da escora de betão dada pela seguinte expressão:

$$\psi = \theta \sin(2\alpha) \quad (2.17)$$

Nos tirantes de betão é visível uma pequena área à compressão junto à fibra inferior. Para níveis de carregamento baixos considera-se que a área de secção transversal comprimida do tirante seja muito reduzida quando comparada com a área tracionada ou mesmo inexistente.

Para elevados níveis de carregamento a contribuição dos tirantes deixa de ser importante podendo a área comprimida acima referida ser desprezada. Assim sendo, apenas a área de tração que se prolonga por uma profundidade t_t é considerada efetiva. Considerando a distribuição das extensões linear, então a extensão máxima de tração à superfície ε_{1s}^c pode ser calculada com base na curvatura φ do tirante de betão:

$$\varepsilon_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{1s}^c = \varphi t_t \quad (2.19)$$

A curvatura φ do tirante de betão é dada pela seguinte expressão:

$$\varphi = -\theta \sin(2\alpha) \quad (2.20)$$

Bernardo *et al* [14] incorporaram no GSVATM a tensão existente na escora e no tirante de betão através das equações seguidamente apresentadas.

A tensão na escora diagonal de betão σ_2^c é calculada através de:

$$\sigma_2^c = k_2^c \xi f_c' \quad (2.21)$$

A tensão no tirante de betão σ_1^c é calculada através de:

$$\sigma_1^c = k_1^c f_{cr} \quad (2.22)$$

Em que k_2^c e k_1^c representam a tensão média nas escoras e nos tirantes respetivamente, ξ é um coeficiente de redução da tensão de compressão que contabiliza o *softening effect*, f_c' é a resistência à compressão uniaxial do betão obtida em provetes cilíndricos padrão e f_{cr} é a resistência à tração do betão obtida em ensaios de tração uniaxial. Estes parâmetros encontram-se descritos na secção 2.2.5.

2.2.3. Espessura efetiva da parede

No modelo *Softened Membrane Model of Torsion* (SMMT), referido no Capítulo 1, os autores Jeng e Hsu [27], assumiram que a profundidade da área de secção transversal à compressão na escora é igual à profundidade da área de secção transversal à tração no tirante, ou seja $t_c = t_t$. Com esta simplificação, além de facilitar os cálculos, visto ser apenas necessário a introdução de uma variável correspondente à espessura efetiva, esta também permite evitar confusões que poderiam surgir com a introdução de duas espessuras diferentes.

Bernardo *et al.* [14] também adotaram a mesma simplificação no GSVATM visto este modelo também incorpora uma escora e um tirante de betão. Sendo assim, substitui-se t_t por t_c em todas as equações anteriores, em que t_c é obtido a partir da substituição da Equação 2.21 na Equação 2.13:

$$t_c = \frac{M_T}{2A_0 k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.23)$$

Considera-se que a linha média de fluxo de corte se localiza a meio da profundidade efetiva t_c . Portanto, o perímetro da linha média de fluxo de corte p_o e a área limitada pela mesma linha A_o são dados por:

$$p_o = 2(x - t_c) + 2(y - t_c) = p_c - 4t_c \quad (2.24)$$

$$A_o = (x - t_c)(y - t_c) = A_c - \left(\frac{t_c}{2}\right) p_c \quad (2.25)$$

Onde x e y são a menor e a maior dimensão exterior da secção transversal retangular, p_c é o perímetro exterior da secção transversal de betão e A_c é a área delimitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão.

Seguindo esta orientação, as Equações 2.4 e 2.5 correspondentes à força de compressão e de tração são reescritas da seguinte forma:

$$C = \sigma_2^c t_c d_v \cos \alpha \quad (2.26)$$

$$T = \sigma_2^c t_c d_v \sin \alpha \quad (2.27)$$

2.2.4. Equações para o cálculo da curva teórica $T - \theta$

No modelo GSVATM é necessário recorrer a um procedimento cálculo iterativo para obtenção do valor de resistência última das vigas à torção bem como da curva $T - \theta$ em todo o historial de carga. Tal deve-se ao facto do modelo apresentar um carácter não linear e também à existência de variáveis interdependentes e inicialmente desconhecidas.

Para a obtenção da curva teórica $T - \theta$ global o GSVATM requer equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e relações constitutiva para os materiais.

2.2.4.1 Equações de equilíbrio

Para a obtenção da curva teórica $T - \theta$ baseada no GSVATM, é necessário três equações de equilíbrio para determinar o momento torsor M_T , a espessura efetiva t_c e o ângulo α das escoras de betão, a partir do qual também fica conhecida a orientação dos tirantes, visto estes serem ortogonais às escoras de betão.

Para o cálculo do momento torsor M_T , é necessário resolver a equação 2.13 em função da tensão na escora de betão:

$$M_T = 2A_0 t_c \sigma_2^c \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2.28)$$

Em alternativa o momento torsor M_T pode ainda ser expresso em função da resultante R entre a força de compressão C e de tração T a partir da equação 2.7:

$$M_T = \frac{2A_0 R \sin \gamma}{d_v} \quad (2.29)$$

Para a obtenção da espessura t_c , é necessário relacionar esta espessura com a força instalada na armadura longitudinal. Sendo assim, substitui-se a equação 2.28 na equação 2.2 e resolve-se em ordem a t_c :

$$t_c = \begin{cases} \frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ -\frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.30)$$

Para a obtenção do ângulo α , é necessário obter uma equação que relacione este parâmetro com as forças instaladas nas armaduras longitudinais e transversais. Deve referir-se que o procedimento seguidamente apresentado para o cálculo do ângulo α é válido para a situação em que $\alpha + \beta \leq 90^\circ$.

Substituindo o momento torsor M_T dado pela equação 2.28 na equação 2.2 e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtem-se uma expressão em função da força na armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl}}{t_c \sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \quad (2.31)$$

Substituindo agora a equação 2.28 na equação 2.3 e resolvendo novamente em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se agora uma expressão em função da força na armadura transversal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{st} f_{st}}{t_c \sigma_2^c s} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.32)$$

Igualando as equações 2.31 e 2.32 obtém-se:

$$\frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.33)$$

Com este procedimento, o ângulo α desapareceu na equação 2.33. No entanto, os ângulos γ e γ' podem ser expressos em função de α e β , a partir das equações $\gamma = \alpha + \beta$ e $\gamma' = \alpha - \beta$ apresentadas anteriormente (equação 2.11 e 2.12 respetivamente). Introduzindo estas duas equações na equação 2.33 vem:

$$\frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \cos(\alpha + \beta)} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st} f_{st} p_0}{\underbrace{A_{sl} f_{sl} s}_{=F}} \quad (2.34)$$

Resolvendo a equação 2.33 em ordem a α , obtém-se:

$$\alpha = \pm \arctan \left(\frac{\sqrt{F^2 (\tan \beta)^2 + F (\tan \beta)^4 + F + (\tan \beta)^2}}{F (\tan \beta)^2 + 1} \right) \quad (2.35)$$

Desta forma as equações 2.29, 2.30, 2.35 constituem as três equações de equilíbrio do GSVATM.

2.2.4.2 Equações de compatibilidade

O GSVATM também requer três equações de compatibilidade para o cálculo da curva $T - \theta$ para determinar as extensões na armadura transversal (ε_{st}), na armadura longitudinal (ε_{sl}) bem como o ângulo de torção (θ) por unidade de comprimento.

A partir do Círculo de Mohr apresentado por Vecchio e Collins em 1981 [32], para um estado de deformação de um elemento de uma placa sujeita ao corte (figura 2.6), é possível obter as equações de compatibilidade para o GSVATM.

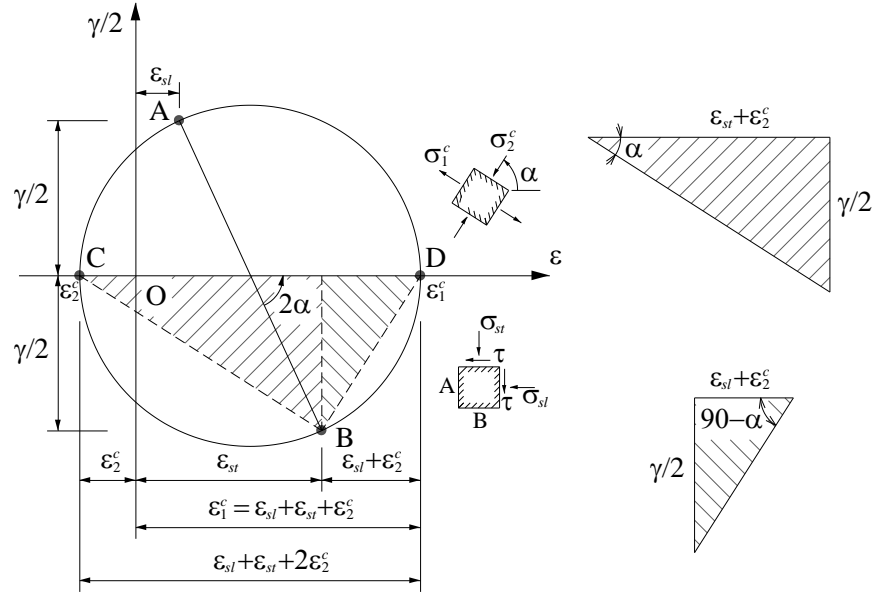


Figura 2.6. Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [32]

No Círculo de Mohr da figura 2.6, o qual traduz o estado genérico de deformação para uma placa no estado fendilhado, é possível visualizar as tensões normais associadas às faces A e B de um elemento, as quais são absorvidas pelas armaduras longitudinais e transversais, respectivamente. Os pontos A e B referidos no Círculo de Mohr correspondem ao estado de deformação nas faces A e B e têm como coordenadas $(\varepsilon_{sl}; \gamma/2)$ e $(\varepsilon_{st}; -\gamma/2)$ respectivamente, onde γ é a distorção. Já os pontos C e D com as coordenadas $(-\varepsilon_2^c; 0)$ e $(\varepsilon_1^c; 0)$, correspondem, respectivamente, à extensão na escora e à extensão no tirante, segundo as direções principais, e finalmente o ângulo α corresponde ao ângulo da direção principal do estado de tensão.

Posto isto, as três equações de compatibilidade para o GSVATM, podem ser derivadas a partir da figura 2.6.

A extensão na armadura transversal ε_{st} é calculada através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \tan \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \quad (2.36)$$

A extensão na armadura longitudinal ε_{sl} é calculada através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \cot \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \quad (2.37)$$

Por fim o ângulo de torção θ é calculado através da seguinte equação:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2t_c \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.38)$$

Estas três equações constituem as equações de compatibilidade do GSVATM, sendo válidas tanto para a condição $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ como para $\alpha + \beta > 90^\circ$ (ver figura 2.4).

A partir da figura 2.6 é ainda possível calcular a extensão de tração no tirante ε_{1s}^c a partir das extensões anteriormente referidas.

$$\varepsilon_{1s}^c = 2\varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c \quad (2.39)$$

Nas equações anteriormente apresentadas, os parâmetros ε_2^c e ε_{2s}^c representam, respetivamente, a extensão média de compressão e a extensão máxima de compressão.

2.2.5. Relações $\sigma - \varepsilon$ para os materiais

De forma a contabilizar as escoras diagonais de betão, os tirantes de betão e as armaduras ordinária à tração no GSVATM, é necessário adotar relações $\sigma - \varepsilon$ (relações constitutivas) para estes elementos. Bernardo *et al.* em 2012 [13] avaliaram, de entre varias propostas de outros autores, qual a melhor relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão e para as armaduras ordinárias à tração. Esta análise foi fundamentada em várias simulações com a formulação do VATM, de forma a ser calculado o comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção. Os referidos autores concluíram que a relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão nas escoras apresentado por Belarbi e Hsu em 1991 [7], que inclui os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang [33] para ter em conta o *softening effect*, era a mais adequada. Tal relação encontra-se graficamente apresentada na figura 2.7. Para a relação $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias à tração, Bernardo *et al.* [13] concluíram que a proposta apresentada por Belarbi e Hsu em 1994 [8] era a mais adequada.

Nobre em 2014 [29] testou várias relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração propostas por vários autores, tendo por base o GSVATM, e comparou os resultados obtidos para o momento torsor de fissuração e a sua respetiva rotação de torção com os valores experimentais de várias vigas de betão armado sujeitas à torção pura. A referida autora concluiu que, a relação $\sigma - \varepsilon$ proposta por Berlabi e Hsu em 1994 [8] e modificada por Jeng and Hsu [27] para o SMMT era a que apresentava melhores resultados, sendo a mesma graficamente apresentada na figura 2.8.

A relação $\sigma - \varepsilon$ anteriormente referida para o betão à compressão é representada na figura 2.7 é traduzida pela seguinte equações:

$$\sigma_2^c = \begin{cases} \xi f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_0} \right)^2 \right] & se \ \varepsilon_2^c \leq \xi \varepsilon_0 \\ \xi f_c' \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2^c - \xi \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 - \xi \varepsilon_0} \right)^2 \right] & se \ \varepsilon_2^c > \xi \varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Em que os fatores de redução são calculados através das seguintes equações:

$$\xi = \frac{R(f_c')}{\sqrt{1 + \frac{400\varepsilon_1^c}{\eta'}}} \quad (2.41)$$

Em que:

$$R(f_c') = \frac{5.8}{\sqrt{f_c'(MPa)}} \leq 0.9 \quad (2.42)$$

$$\eta' = \begin{cases} \eta & \text{se } \eta \leq 1 \\ \frac{1}{\eta} & \text{se } \eta > 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\eta = \frac{\rho_l f_{sl}}{\rho_t f_{st}} \quad (2.44)$$

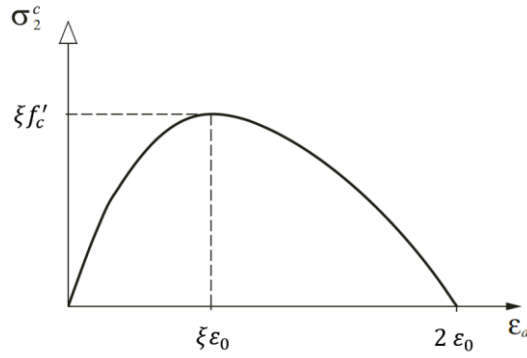


Figura 2.7. Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à compressão [14]

Onde ε_0 é a extensão correspondente ao pico de tensão f'_c , ε_d é a extensão na escora diagonal de betão, η é um fator de redução, ρ_l é a taxa de armadura longitudinal e ρ_t é a taxa de armadura transversal.

Do mesmo modo, a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração representada na figura 2.8 é traduzida pela seguinte equações:

$$\sigma_1^c = \begin{cases} E_c \varepsilon_1^c & \text{se } \varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1^c} \right)^{0.4} & \text{se } \varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.45)$$

Em que:

$$\varepsilon_{cr} = 0.00008K \quad (2.46)$$

$$E_c = 3875K \sqrt{f'_c (MPa)} \quad (2.47)$$

$$K = 1.45 \text{ (secções cheias)} \quad (2.48)$$

$$K = 1.24 \text{ (secções vazadas)} \quad (2.49)$$

Sendo ε_{cr} a extensão de fissuração

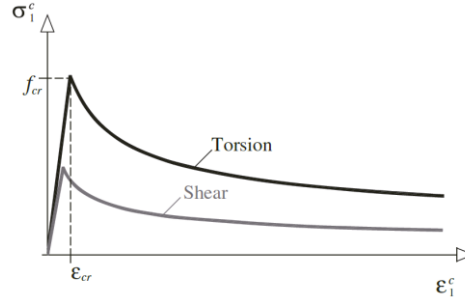


Figura 2.8. Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração [14]

Os parâmetros k_2^c e k_1^c incluídos na Equação 2.21 e 2.22 respetivamente, os quais se obtêm por integração das Equações 2.40 e 2.45 são calculados através das seguintes equações:

$$k_2^c = \begin{cases} \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_2^c}{3\xi \varepsilon_0} \right) & \text{para } \varepsilon_2^c \leq \xi \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\xi \varepsilon_0}{3\varepsilon_2^c} - \frac{(\varepsilon_2^c - \xi \varepsilon_0)^3}{3\varepsilon_2^c(2\varepsilon_0 - \xi \varepsilon_0)^2} & \text{para } \varepsilon_2^c > \xi \varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$k_1^c = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1^c}{2\varepsilon_{cr}} & \text{para } \varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{\varepsilon_{cr}}{2\varepsilon_1^c} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0.4}}{0.6\varepsilon_1^c} [(\varepsilon_1^c)^{0.6} - (\varepsilon_{cr})^{0.6}] & \text{para } \varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.51)$$

Para a lei constitutiva das armaduras ordinárias à tração como referido anteriormente, Bernardo *et al.* [13] concluíram que a relação $\sigma - \varepsilon$ que melhor se adequava na tradução do comportamento destas, era a proposta de Belarbi e Hsu (1994) [8]. Esta relação tem em conta o *stiffening effect*, o qual não era incluído nas relações resultantes de ensaios uniaxiais à tração. Esta contabilização do *stiffening effect* torna-se importante visto que parte da tração é suportado pelo betão que não se encontra fissurado, sendo essa tração transferida das armaduras para o betão por aderência. A figura 2.9 representa a curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Belarbi e Hsu [8], assumida por Bernardo *et al.* [14] para as armaduras ordinárias tracionadas.

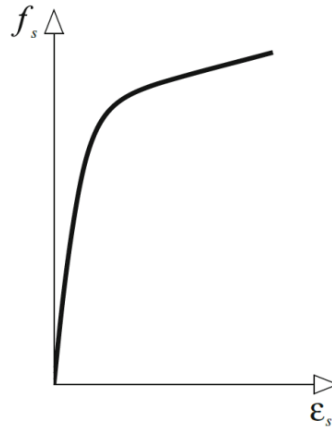


Figura 2.9. Curva $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas [14]

A figura 2.9 pode ser expressa através da seguinte equação:

$$f_s = \frac{0.975E_s\varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1.1E_s\varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0.025E_s \quad (2.52)$$

Em que:

$$m = \frac{1}{9B - 0.2} \leq 25 \quad (2.53)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}}\right)^{1.5} \quad (2.54)$$

Onde f_s é a tensão de tração nas armaduras ordinárias, ε_s é a extensão de tração nas armaduras ordinárias, E_s é o módulo de elasticidade do aço, ρ é a taxa de armadura e f_{sy} é a tensão de cedência na armadura ordinária.

2.2.6. Algoritmo de cálculo do GSVATM

Para calcular a curva teórica $T - \theta$ tendo por base o GSVATM, é necessário recorrer à um procedimento computacional, visto que, como referido anteriormente, algumas variáveis são desconhecidas e interdependentes logo no início do procedimento de cálculo. Além disso, o GSVATM possui um carácter não linear e iterativo. O fluxograma do algoritmo de cálculo é apresentado na figura 2.10, tendo sido elaborado com base nas equações apresentadas ao longo do presente capítulo, sendo ξ , α , t_c , ε_{2s}^c e ε_{1s}^c as variáveis iniciais necessárias de serem assumidas. É necessário posteriormente verificar se os valores das variáveis assumidas se aproximam da série de valores calculados para essas mesmas de acordo com as equações.

A curva $T - \theta$ termina quando a extensão máxima de compressão à superfície das escoras de betão (ε_{2s}^c) ou a extensão de tração nas armaduras de torção (ε_{sl} ou ε_{st}) atingem o seu valor convencional de rotura. Estes valores convencionais de rotura são definidos no Eurocódigo 2 [21], sendo estes valores de $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ para a extensão máxima de compressão à superfície das escoras de betão (ε_{2s}^c) e de $\varepsilon_{su} = 0,01$ para a extensão de tração nas armaduras de torção (ε_{sl} ou ε_{st}). É de referir que o valor de 0,0035 apresentado para ε_{cu} é, segundo o Eurocódigo 2 [21], válido para betões com resistência inferior a 50 MPa (valores referidos a provetes cilíndricos). Para resistências superiores, o valor de ε_{cu} reduz e o EC2 apresenta uma expressão para o seu cálculo.

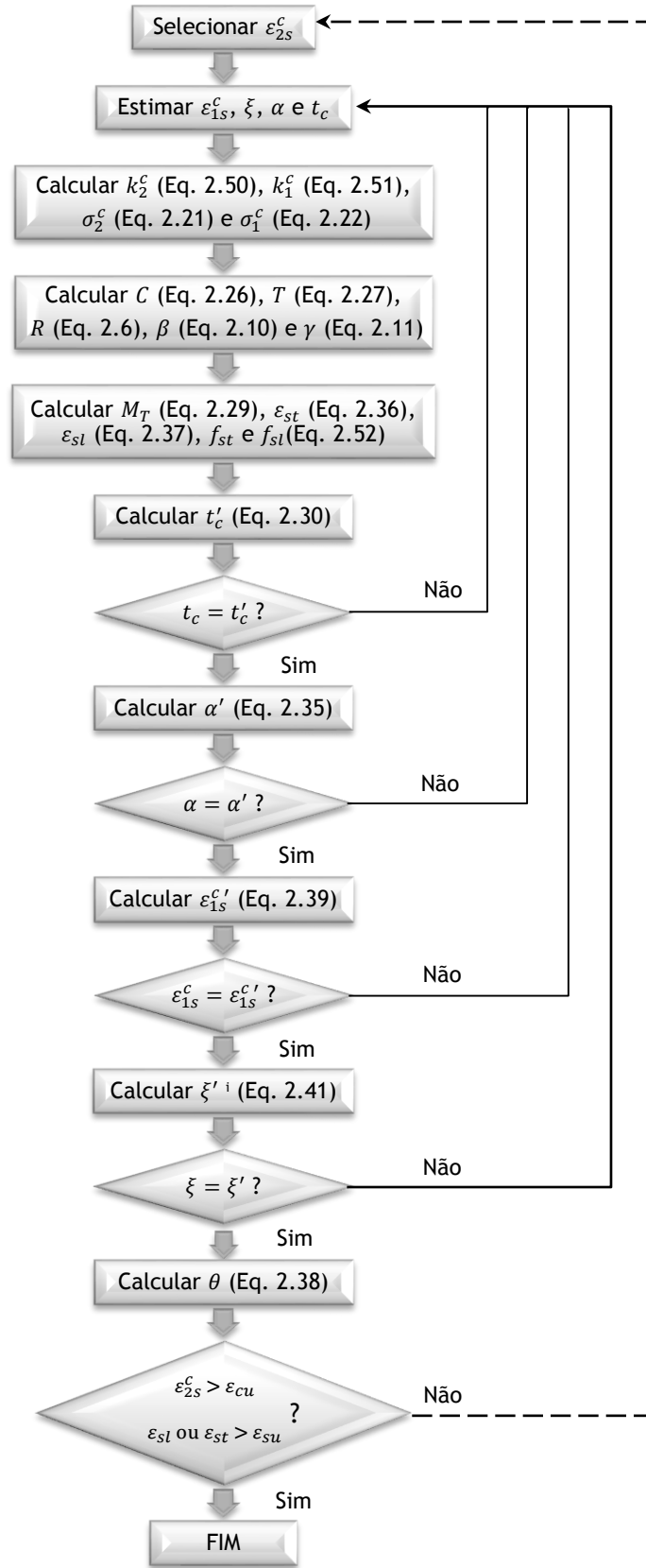


Figura 2.10. Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM para obtenção dos pontos da curva $T - \theta$

O procedimento de cálculo iterativo representado pelo fluxograma da figura 2.10 necessário para o cálculo da curva teórica $T - \theta$ é apresentado de uma forma simplificada nos passos seguintes:

1. Selecionar ε_{2s}^c
2. Assumir valores para ε_{1s}^c , ξ , t_c e α .
3. Obter k_2^c , k_1^c , σ_2^c e σ_1^c através das equações 2.50, 2.51, 2.21 e 2.22 respetivamente.
4. Calcular C e T a partir das equações 2.26 e 2.27, respetivamente. Já a resultante R será calculada com base na equação 2.6 e os ângulos β e γ pelas Equações 2.10. e 2.11, respetivamente.
5. Determinar M_T a partir da equação 2.29. As extensões ε_{st} e ε_{sl} são calculadas, respetivamente, através das equações 2.36 e 2.37. Com base nas extensões ε_{st} e ε_{sl} e na equação 2.52 são obtidas as tensões f_{st} e f_{sl} .
6. Verificar t'_c , α' , $\varepsilon_{1s}^{c'}$, e ξ' , respetivamente, a partir das equações 2.30, 2.35, 2.39 e 2.41.
7. Se:
 - 7.1. Os parâmetros calculados no passo anterior não estão suficientemente próximos dos valores assumidos no segundo passo, então deve repetir-se os passos de 2 a 6 até que estes convirjam para os valores assumidos.
 - 7.2. Os valores calculados no passo 6 forem suficientemente próximos dos valores assumidos no passo 2, então segue-se para o passo 8.
8. Calcular a rotação θ a partir da equação 2.38. Neste passo obtém-se assim um ponto de coordenadas (T, θ) o qual pertence à curva teórica $T - \theta$.
9. Selecionar outros valores para ε_{2s}^c e repetir o procedimento de forma a obter vários pontos (T, θ) para o traçado da curva $T - \theta$.

A curva $T - \theta$ termina quando a rotura convencional é alcançada, a qual é definida pelas extensões convencionais de rotura definidas no Eurocódigo 2, tal como anteriormente referido.

2.3. Notas finais

No decorrer da secção 2.2 foi exposto o procedimento de cálculo do GSVATM para obtenção de toda a curva $T - \theta$ para vigas com secção retangular cheia de betão armado sujeitas à torção pura.

Como descrito no Capítulo anterior (Capítulo 1) o modelo GSVATM constitui uma generalização do VATM original incorporando um tirante na direção perpendicular à escora de betão de modo a contabilizar a contribuição do betão à tração. Assim sendo, ao se considerar a força de tração do tirante nula no GSVATM, as equações resultantes coincidem com as equações do VATM.

Nesta dissertação o modelo GSVATM servirá de modelo base para o estudo do comportamento de vigas de betão armado à torção com secção “L” e “T”, mediante o estudo das curvas $T - \theta$.

Capítulo 3. Procedimentos para o cálculo à torção de vigas de betão armado com secção “L” e “T” e Vigas de Referência

3.1. Introdução

Este Capítulo destina-se à apresentação de um procedimento de cálculo proposto por Deifalla [16] para o tratamento de secções do tipo “L” e “T” sujeitas à torção, sejam elas reforçadas com varões de aço ou varões GFRP (Polímero Reforçado com Fibras de Vidro) para as armaduras longitudinais e transversais. Tal procedimento será adotado no presente trabalho e implementado através do GSVATM.

A referência aos varões GFRP prende-se com o facto da maioria das vigas de referência encontradas na literatura, com secção “L” ou “T”, incorporarem esta solução de varões.

Como referido anteriormente no Capítulo 2, o GSVATM apenas foi formulado e validado para vigas de betão armado com secção retangular cheia ou vazada. Sendo assim, torna-se necessário expandir a aplicabilidade do GSVATM para vigas com outro tipo de secções e também outro tipo de reforço.

No que se refere a secções “L” e “T” submetidos à torção pura, o regulamento normativo português REBAP [26] e o código americano ACI 318R-89 [3] são os únicos, de entre os documentos consultados, que incorporam disposições regulamentares que permitem calcular o momento torsor resistente normativo para este tipo de secções. Tais disposições regulamentares são também apresentadas neste capítulo com vista a serem também aferidas.

3.2. Descrição dos procedimentos de cálculo adotados

3.2.1. O procedimento de cálculo de Deifalla

Um dos procedimentos de cálculo adotados neste trabalho para o tratamento de vigas de betão armado com secções “L” e “T”, com objetivo de expandir o campo de aplicação do GSVATM, baseia-se no método proposto por Deifalla [16] para a análise de vigas do tipo “L” e “T” à torção.

Refere-se que o método que Deifalla [16] apresenta constitui uma adaptação do método apresentado anteriormente por Deifalla e Ghobarah em 2010 [19], o qual foi desenvolvido para o cálculo de vigas com secção retangular cheia sujeitas à torção e ao esforço transversal, com cintas exteriores de reforço em FRP (Polímero Reforçado com Fibras). Segundo esse método, a secção transversal de uma viga retangular cheia é inicialmente transformada numa secção retangular vazada equivalente (figuras 3.1 (a) e 3.1 (b)). Tal secção equivalente é posteriormente dividida em subelementos retangulares, como mostra a figura 3.1. Segundo os referidos autores, a idealização da secção retangular vazada equivalente é justificada através da teoria de St. Venant, a qual estipula que o fator de forma para a rigidez de torção de um retângulo cheio é idêntico ao de um retângulo oco com dimensões externas idênticas.

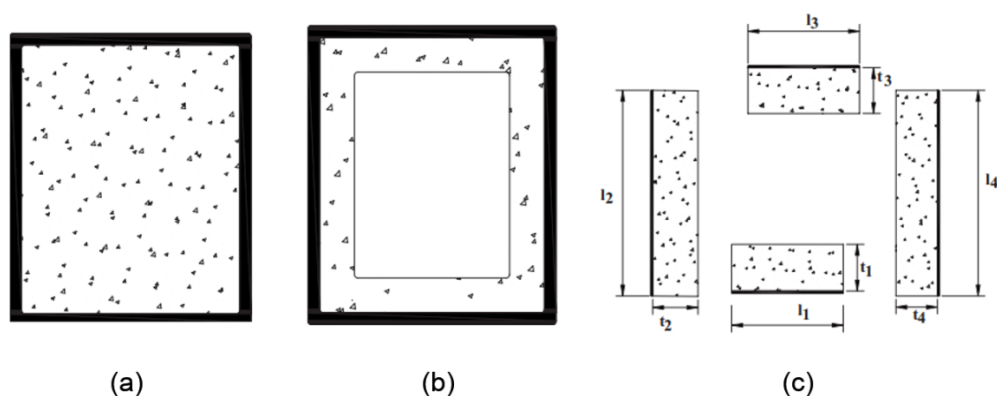


Figura 3.1. Modelo idealizado: (a) secção retangular cheia; (b) Secção retangular vazada equivalente; (c) divisão em subelementos [19]

Deiffala [16] expandiu o modelo anteriormente proposto por Deifalla e Ghobarah de forma a ser possível utilizá-lo na análise de vigas do tipo “L” e “T” sujeitas unicamente à torção e sem qualquer reforço exterior. A secção transversal deste tipo de viga é subdividida de três formas, como demonstrado na figura 3.2 (soluções I, II, III). Em seguida, e para cada subdivisão, cada subelemento retangular é tratado e analisado como uma viga retangular independente sujeita à torção. Depois de modelar e calcular estas vigas tendo por base um qualquer modelo validado para secções retangulares, o princípio da sobreposição é aplicado de forma a ser possível a obtenção da curva teórica $T - \theta$ da viga com a secção original em estudo. Para tal, é assumido que, por compatibilização da deformação, o ângulo de torção da viga com a secção

original e das suas subdivisões deve ser o mesmo. O momento torsor (T) aplicado em toda a secção transversal é dado por:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (3.1)$$

Onde T_i é o momento torsor aplicado em cada subdivisão retangular (i) que provoca o mesmo ângulo de torção, e n é o número de subdivisões.

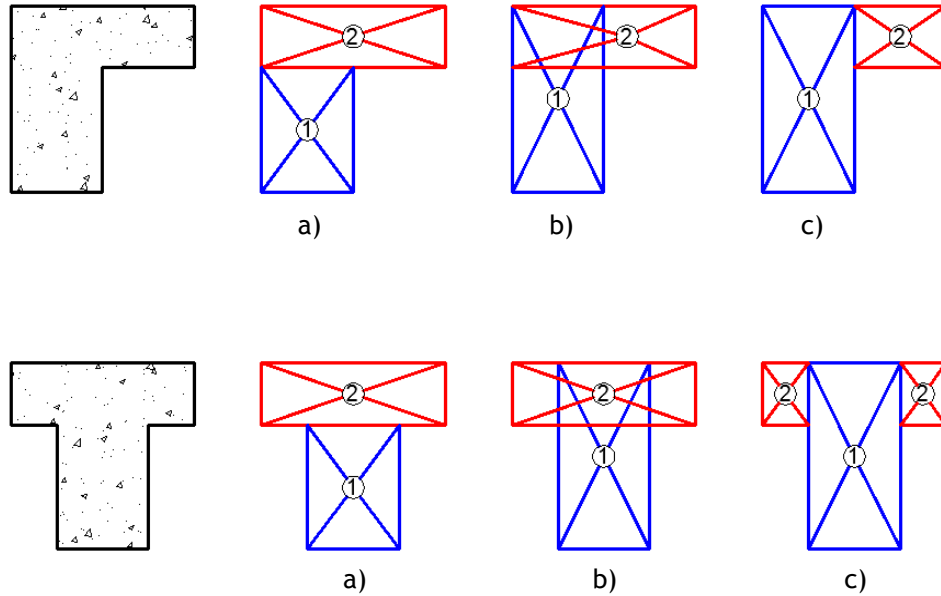


Figura 3.2. Subdivisão das vigas do tipo L e T em elementos retangulares: a) Solução I, b) Solução II, c) Solução III.

Para a contabilização dos varões GFRP no seu modelo teórico, Deifalla [16] apresentou a seguinte lei constitutiva para os varões GFRP:

$$\sigma_{ft} = E_f \varepsilon_{ft} \quad (3.2)$$

Onde σ_{ft} é a tensão na direção das fibras de GFRP, E_f o Módulo de elasticidade dos varões GFRP e ε_{ft} a extensão na mesma direção da tensão.

A extensão última convencional $\varepsilon_{ft,u}$ (que define a rotura convencional dos varões GFRP) foi assumida como sendo a especificada pelo ACI [2], sendo dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{ft,u} = 0.75 \varepsilon_{fu} \quad (3.3)$$

Sendo ε_{fu} a extensão última de rotura (igual a $\sigma_{ft,u} / E_f$, sendo $\sigma_{ft,u}$ a tensão de rotura à tração dos varões GFRP).

3.2.2. Documentos Normativos

Nesta dissertação foram analisados apenas o Regulamento português REBAP e o código americano ACI 318R-89, apesar do ACI 318R-89 já não se encontrar em vigor e o REBAP se encontrar numa fase transitória em termos de regulamentação (substituição do REBAP pelo EC2), visto que estes são os únicos documentos normativos consultados que incorporam disposições regulamentares que permitem calcular o momento torsor resistente teórico para vigas do tipo “L” e “T”. A referência ao cálculo à torção deste tipo de vigas desapareceu na versão atualmente em vigor do código americano.

O EC2 para vigas do tipo “L” e “T” refere apenas que cada subsecção deste tipo de vigas pode ser dimensionado separadamente, sem referir que tipo de divisões se deve realizar ou que procedimento de cálculo associado se deve adotar.

3.2.2.1 Regulamento Português, REBAP [26]

O REBAP no seu Artigo 55.1 especifica que para a determinação do valor do momento torsor resistente, de elementos de secções cheias ou ocas sujeitas a torção pura, esta deve ser efetuada com base num modelo plástico de treliça tubular formado por bielas de betão comprimido e por armaduras tracionadas, sendo estas as armaduras longitudinais e transversais. Sendo assim a linha de fluxo de corte é assumida como o perímetro que liga os centros dos varões longitudinais localizados nos cantos da secção em estudo. Este perímetro do fluxo de corte pode ser visualizado na figura 3.3, sendo representado por um polígono a tracejado. A partir desse polígono é possível ser contabilizada a área efetiva A_{ef} , o perímetro efetivo u_{ef} relativo a essa área e ainda desenhar um círculo com diâmetro d_{ef} com o maior tamanho possível dentro do perímetro efetivo u_{ef} . Tendo o círculo de diâmetro d_{ef} definido, é possível calcular a espessura efetiva da parede h_{ef} , sendo esta assumida igual a $d_{ef}/6$.

A esta secção fictícia obtida através do método anteriormente descrito é designada por secção oca eficaz. Tal secção, bem como os parâmetros A_{ef} , u_{ef} , d_{ef} e h_{ef} , encontram-se ilustrados na figura 3.3. É de referir que a espessura efetiva u_{ef} é assumida como inferior à espessura real no caso de secções ocas. Caso isso não se venha a verificar então a espessura a ser considerada como efetiva deve ser a espessura real da parede.

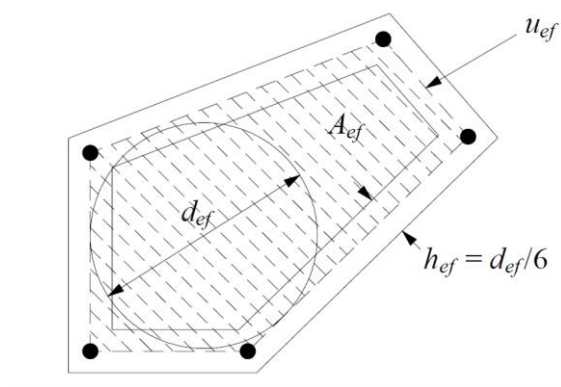


Figura 3.3. Seção oca eficaz [10]

As regras estipuladas para a determinação do momento torsor para seções “L” e “T” sujeitas à torção são tratadas no REBAP no seu Artigo 55.3, sendo estas regras as mesmas adotadas para uma seção cheia ou oca desde que se considere a seção oca eficaz para efeitos de cálculo. Para tal as seções “L” e “T” têm que resultar da justaposição das seções ocas eficazes relativas aos retângulos componentes, suprimindo os trocos de parede justapostos por forma a se obter uma única parede contornando toda a seção, como pode ser visualizado na figura 3.4. É de notar que a espessura efetiva h_{ef} pode ser diferente de retângulo para retângulo, devendo-se considerar o menor dos valores de espessura para efeitos de cálculo.

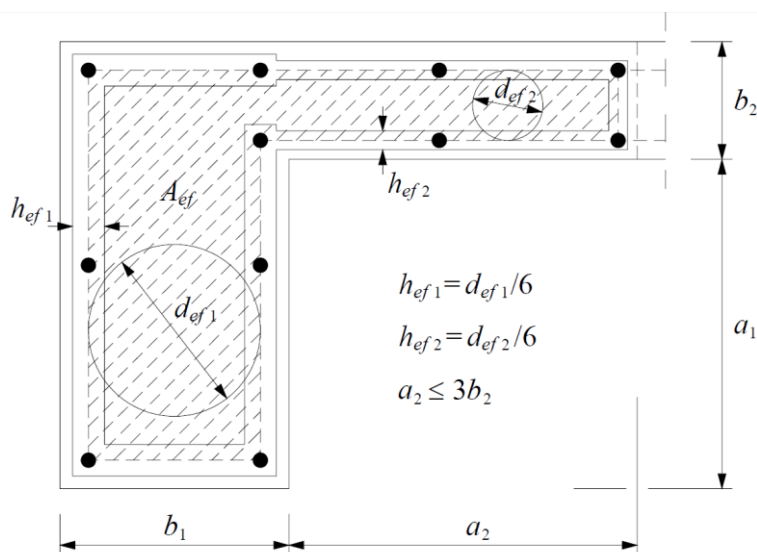


Figura 3.4. Seção oca eficaz em seções compostas [10]

O REBAP, no seu Artigo 55.2, especifica como calcular o momento torsor resistente T_{Rd} , sendo este dado pelo menor dos valores obtidos pelas seguintes expressões:

$$T_{Rd} = T_{cd} + T_{td} \quad (3.4)$$

$$T_{Rd} = T_{ld} \quad (3.5)$$

Os termos T_{cd} e T_{td} apresentados na equação 3.4 dependem da geometria da secção e, respetivamente, da classe de resistência do betão e da armadura transversal. Tais termos são dados pelas seguintes expressões:

$$T_{cd} = 2 \tau_1 h_{ef} A_{ef} \quad (3.6)$$

$$T_{td} = 2 A_{ef} \frac{A_{st}}{s} f_{syd} \quad (3.7)$$

Sendo τ_1 uma tensão correspondente a 60% do valor da resistência à tração do betão (f_{ctm}), A_{st} a área da secção das cintas constituintes da armadura transversal, s o espaçamento da armadura transversal e f_{syd} o valor da tensão de cedência do aço da armadura de torção.

Por último o termo T_{ld} apresentado na equação 3.5 depende da geometria da secção e da armadura longitudinal, sendo este termo dado pela seguinte expressão:

$$T_{ld} = 2 A_{ef} \frac{A_{sl}}{u_{ef}} f_{syd} \quad (3.8)$$

Sendo A_{sl} a área total da armadura longitudinal.

3.2.2.2 Código Americano, ACI 318R-89 [3]

O ACI assumiu a hipótese de que a resistência à torção em secções abertas do tipo “L” e “T” é igual a soma das resistências à torção de cada retângulo componente da secção da alma e do banzo, desde que a parte exterior do banzo possua uma largura inferior ou igual a três vezes a sua espessura. Na divisão da secção, os retângulos componentes não devem ser sobrepostos como é demonstrado na figura 3.5. A secção deve ser dividida de forma a maximizar o termo $\sum x^2 y$ relativo ao somatório de todos os retângulos componentes. Sendo assim, o ACI apresenta a seguinte expressão para a obtenção do momento torsor resistente T_n para este tipo de secções:

$$T_n = T_c + T_s \quad (3.9)$$

Em que:

$$T_c = \frac{\sum x^2 y}{3} (2,4 \sqrt{f'_c}) \quad (3.10)$$

$$T_s = \sum \alpha_t \frac{x_1 y_1 A_t f_{ty}}{s} \quad (3.11)$$

Sendo T_c o momento resistente conferido pelo betão e T_s o momento resistente conferido pelas cintas de cada componente. Os parâmetros x , y , x_1 e y_1 para cada componente retangular encontram-se ilustrados na figura 3.5. f'_c é o valor da resistência à compressão do betão, $\alpha_t = 0,66 + 0,33(y_1/x_1) \leq 1,5$ sendo este um coeficiente de eficiência das armaduras, A_t

é a área da secção das cintas constituintes da armadura transversal, s o espaçamento desta armadura transversal e f_{ty} é o valor da tensão de cedência do aço da armadura de torção.

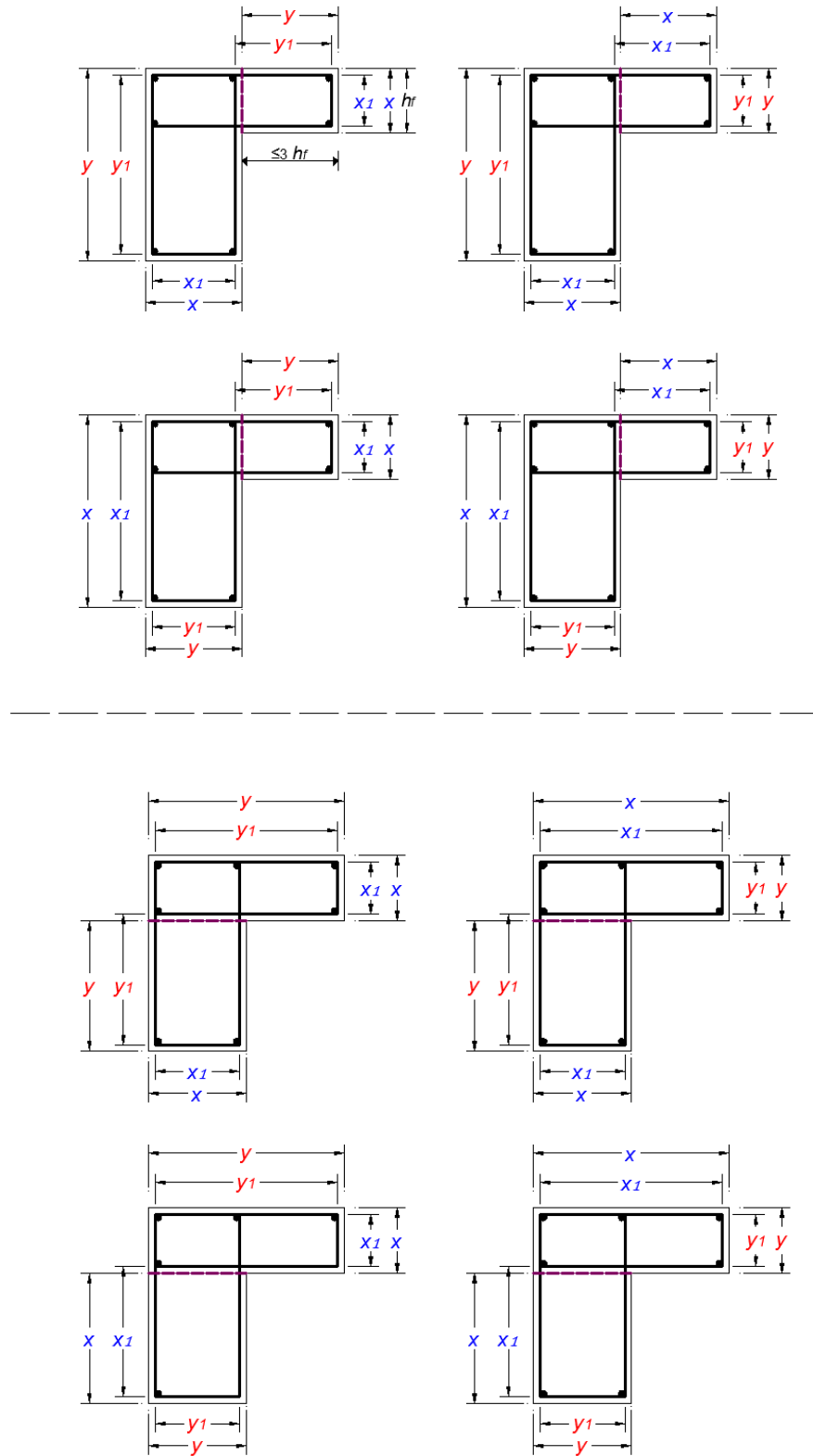


Figura 3.5. Seleção dos retângulos componentes numa secção em “L” para o cálculo de $\sum x^2 y$

3.3. Vigas de referência

Para a validação dos métodos de cálculo apresentados na secção anterior e da sua utilização conjunta com o GSVATM no tratamento de vigas “L” e “T” à torção, foram pesquisados, na literatura científica, resultados experimentais resultantes do ensaio de vigas “L” e “T” à torção pura até a rotura. De entre os resultados experimentais disponibilizados na literatura pretendia-se obter, para além dos momentos torsores resistentes, as curvas experimentais $T - \theta$ características do comportamento global das vigas ensaiadas, por forma a serem comparadas com as correspondentes curvas teóricas obtidas a partir do GSVATM. Além disso, também eram necessárias todas as características geométricas e mecânicas das vigas. A partir da consulta do número limitado de artigos encontrados na literatura que abordava o ensaio à torção pura de vigas “L” e “T”, num total de 5 artigos, apenas foram encontrados um total de 9 vigas diferentes. Verificou-se que a maioria dos artigos não disponibilizavam todos os dados necessários para o cálculo das vigas. Assim, foram apenas encontradas três vigas do tipo “L” e uma do tipo “T” em betão armado com varões convencionais de aço. Destas quatro vigas encontradas, a viga LB1 (secção “L”) e a viga TB1 (secção “T”), foram ensaiadas por Deifalla *et al.* [18 e 17]. Foram também encontradas duas vigas do tipo “L”, as vigas BL1 e BK-T ensaiadas por El-Kateb Mahmoud M. *et al* [20] e Kaminski and Plawlak [28], respetivamente. Devido ao número limitado de vigas encontradas, decidiu-se alargar o estudo a realizar para Vigas “L” e “T” de betão armado com varões GFRP e também vigas com secção retangulares de betão armado com varões GFRP (sendo o reforço com varões GFRP tanto longitudinal como transversal. No entanto, e mesmo assim, o número de vigas possíveis de serem analisadas foi reduzido pelas várias razões seguidamente descritas.

As vigas retangulares com reforço de varões GFRP encontradas na literatura (num total de 12 vigas) não foram possível de serem analisadas visto que na publicação realizada por Shehab *et al* [31] e por Deifalla *et al* [18], onde este tipo de vigas eram tratadas, só apresentavam as características geométricas da secção e a quantidade de armadura longitudinal e transversal utilizada, não sendo apresentado qualquer tipo de informação relativa à caracterização dos materiais utilizados (betão, aço e varões GFRP). Abduljalil e Sarsam [1] referem na sua publicação a viga B1 do tipo “T” com reforço de varões GFRP, a qual foi rejeitada para este estudo devido à falta de informação quanto à caracterização dos materiais, e também pelo facto da armadura transversal superior no banzo não ser constituída por cintas fechadas. Por fim, nas vigas do tipo “L” com reforço de varões GFRP, foi possível aproveitar as vigas LB2, LB3, LB4 e LB5 estudadas por Deifalla [18]. É de referir que todas as publicações encontradas e que tratavam de vigas “L” e “T” sujeitas a interação de esforços (T+V, T+M ou T+M+V), ou com reforço externo, foram também analisadas com o intuito de se encontrar vigas de referências sujeitas apenas à torção pura. Ainda assim, não foi possível o aproveitamento de nenhuma das vigas encontradas devido à falta de dados relacionados com as características das vigas, dados estes necessários para a análise das mesmas.

Resumindo, foram aproveitadas para este estudo 8 vigas, sendo 7 do tipo “L” (LB1, LB2, LB3, LB4, LB5, BL1 e BK-T) e 1 viga do tipo “T” (TB1). Esta seleção foi limitada devido aos problemas referidos anteriormente. A tabela 3.1 apresenta um resumo destas vigas onde são apresentadas as dimensões globais das vigas, e o tipo de armadura que as constituem. Quanto às características complementares necessárias ao cálculo teórico das curvas $T - \theta$ relativas às 7 vigas do tipo “L” e 1 do tipo “T” respetivamente, estas serão apresentadas no Capítulo 4, aquando da realização das análises comparativas com as previsões teóricas e normativas. A figura 3.6 apresenta uma secção transversal tipo de modo a elucidar os parâmetros utilizados na tabela 3.1.

As tabelas com os parâmetros para o cálculo do momento torsor resistente das vigas de referência a partir do REBAP e do ACI serão também apresentadas no Capítulo 4.

Finalmente, é também de referir que alguns valores tiveram de ser assumidos por falta de informação, como é o caso do recobrimento nas vigas BL1, BK-T e TB1. No caso da viga TB1 assumiu-se mais um varão longitudinal no cruzamento das armaduras transversais, de forma a obter uma disposição simétrica da armadura longitudinal. Acredita-se que a ausência do referido varão no desenho da secção do artigo consultado tenha constituído um lapso do autor.

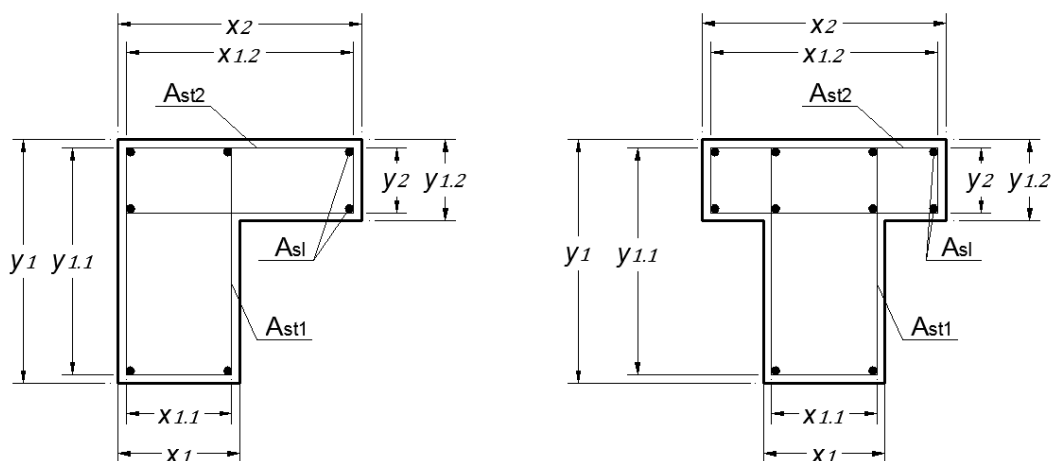


Figura 3.6. Exemplo de viga do tipo “L” e “T”

Tabela 3.1. Características geométricas das vigas de referência

Viga	Tipo de secção	x_1 (cm)	y_1 (cm)	$x_{1.1}$ (cm)	$y_{1.1}$ (cm)	x_2 (cm)	y_2 (cm)	$x_{1.2}$ (cm)	$y_{1.2}$ (cm)
LB1 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB2 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB3 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB4 [18]	"L"	15,00	35,00	9,20	30,20	30,00	15,00	25,20	11,20
LB5 [18]	"L"	15,00	35,00	9,00	30,00	30,00	15,00	25,00	11,00
BL1 [20]	"L"	12,00	30,00	6,40 ⁽¹⁾	24,40 ⁽¹⁾	30,00	15,00	24,00 ⁽¹⁾	9,00 ⁽¹⁾
BK-T [28]	"L"	18,00	25,00	13,20 ⁽¹⁾	20,70 ⁽¹⁾	33,00	10,00	28,70 ⁽¹⁾	6,20 ⁽¹⁾
TB1 [17]	"T"	12,00	40,00	6,40 ⁽¹⁾	38,40 ⁽¹⁾	40,00	8,00	36,40 ⁽¹⁾	4,40 ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Valores assumidos

Tabela 3.1. (continuação) Características geométricas das vigas de referência

							Taxa de armadura		
Viga	A_{sl} (em aço)	A_{st1} (em aço)	A_{st2} (em aço)	A_{fl} (em GFRP)	A_{fl1} (em GFRP)	A_{fl2} (em GFRP)	ρ_l (%)	ρ_t (%)	ρ_{total} (%)
LB1	4 ϕ 12+3 ϕ 10	ϕ 6//0.14	ϕ 6//0.14	-	-	-	0,917	0,413	1,330
LB2	-	ϕ 6//0.14	ϕ 6//0.14	4 ϕ 12+3 ϕ 10	-	-	0,917	0,413	1,330
LB3	-	-	-	4 ϕ 12+3 ϕ 10	ϕ 6//0.14	ϕ 6//0.14	0,917	0,413	1,330
LB4	-	-	-	4 ϕ 12+3 ϕ 10	ϕ 8//0.14	ϕ 8//0.14	0,917	0,726	1,643
LB5	-	-	-	4 ϕ 12+3 ϕ 10	ϕ 10//0.14	ϕ 10//0.14	0,917	1,122	2,039
BL1	4 ϕ 16+6 ϕ 10	ϕ 6//0.2	ϕ 10//0.2	-	-	-	2,025	0,550	2,574
BK-T	4 ϕ 16+4 ϕ 12	ϕ 8//0.125	ϕ 8//0.125	-	-	-	2,094	0,922	3,017
TB1	4 ϕ 12+6 ϕ 10	ϕ 6//0.14	ϕ 6//0.14	-	-	-	1,312	1,410	2,722

Na tabela 3.1, os parâmetros incorporados têm o seguinte significado, entendendo-se pelo subscrito “*i*” a subsecção transversal *i* :

x_i	- Largura da secção transversal
y_i	- Altura da secção transversal
$x_{1.i}$	- Largura das cintas entre eixos dos varões
$y_{1.i}$	- Altura das cintas entre eixos dos varões
A_{sl}	- Área da armadura ordinária longitudinal
$A_{st\ i}$	- Área da armadura ordinária transversal (área de um ramo)
A_{fl}	- Área da armadura GFRP longitudinal
$A_{ft\ i}$	- Área da armadura GFRP uma barra transversal (área de um ramo)
ϕ	- Diâmetro dos varões
ρ_l	- Taxa de armadura longitudinal (seja ela ordinária ou varões GFRP)
ρ_t	- Taxa de armadura transversal (seja ela ordinária ou varões GFRP)
ρ_{tot}	- Taxa de armadura total (seja ela ordinária ou varões GFRP)

Em que:

$$\rho_l = \frac{A_{sl\ total}}{A_c} \quad (3.12)$$

$$\rho_t = \frac{A_{st\ total} u}{A_c s} \quad (3.13)$$

$$\rho_{tot} = \rho_l + \rho_t \quad (3.14)$$

Sendo:

A_c	- Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão
u	- Perímetro exterior da secção transversal de betão

3.4. Notas finais

No decorrer do presente capítulo foram apresentados os procedimentos de cálculo adotados neste trabalho, a utilizar conjuntamente com o GSVATM, com o propósito de calcular a resistência última bem como o comportamento global à torção de vigas de betão armado com secção “L” e “T” sujeitas à torção pura.

Foram também apresentadas as características das vigas de referência com secção “L” ou “T” para as divisões assumidas para serem utilizadas nos estudos comparativos apresentados no Capítulo 4.

Capítulo 4. Análises comparativas

4.1. Introdução

Neste capítulo é feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos a partir do GSVATM apresentado no capítulo 2, com a implementação dos procedimentos de cálculo para o tratamento de vigas de betão armado com secções “L” e “T” apresentados no Capítulo 3, com os resultados experimentais obtidos pelos autores das vigas de referência em estudo também apresentadas no Capítulo 3. Tais análises comparativas incluem as curvas $T - \theta$ bem como o momento torsor resistente. Para este último, é ainda realizada uma comparação com as previsões obtidas a partir das disposições regulamentares dos dois documentos normativos apresentados no capítulo 3 (Regulamento português REBAP e o Código americano ACI 318R-89).

4.2. Dados das vigas de referência para obtenção das curvas teóricas $T - \theta$ e divisões assumidas

As características complementares necessárias ao cálculo teórico das curvas $T - \theta$ relativas às sete vigas do tipo “L” e uma do tipo “T” respetivamente, a partir das quais se pretende também obter o momento resistente máximo de cada viga para as análise comparativa com as previsões teóricas e experimentais, são apresentadas na Tabela 4.1. Esta seleção foi limitada devido aos problemas referidos no Capítulo 3. Os modelos de referência analisados encontram-se identificados em concordância com a designação original feita pelo autor, com a devida identificação da referência da publicação. As figuras 4.1 a 4.3 ilustram as três subdivisões assumidas para o caso em estudo nos dois tipos de vigas.

Refere-se que Deiffala apresenta apenas as três subdivisões para as vigas “L” e “T” em termos da secção de betão, não fazendo qualquer tipo de alusão à forma como devem ser dispostas a armadura longitudinal e transversal, nos retângulos componentes resultantes das divisões. A forma como as armaduras foram colocadas nos retângulos componentes, a partir da secção original, encontra-se ilustrada nas figuras 4.1 a 4.3.

Recorda-se também que alguns valores tiveram de ser assumidos por falta de informação, como é o caso do recobrimento nas vigas BL1, BK-T e TB1.

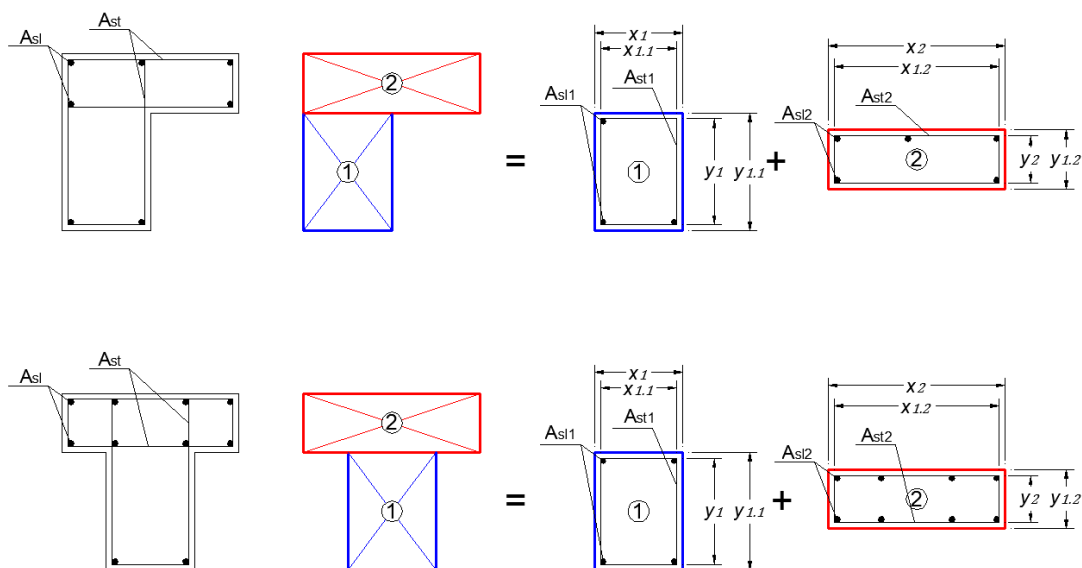


Figura 4.1. 1ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”

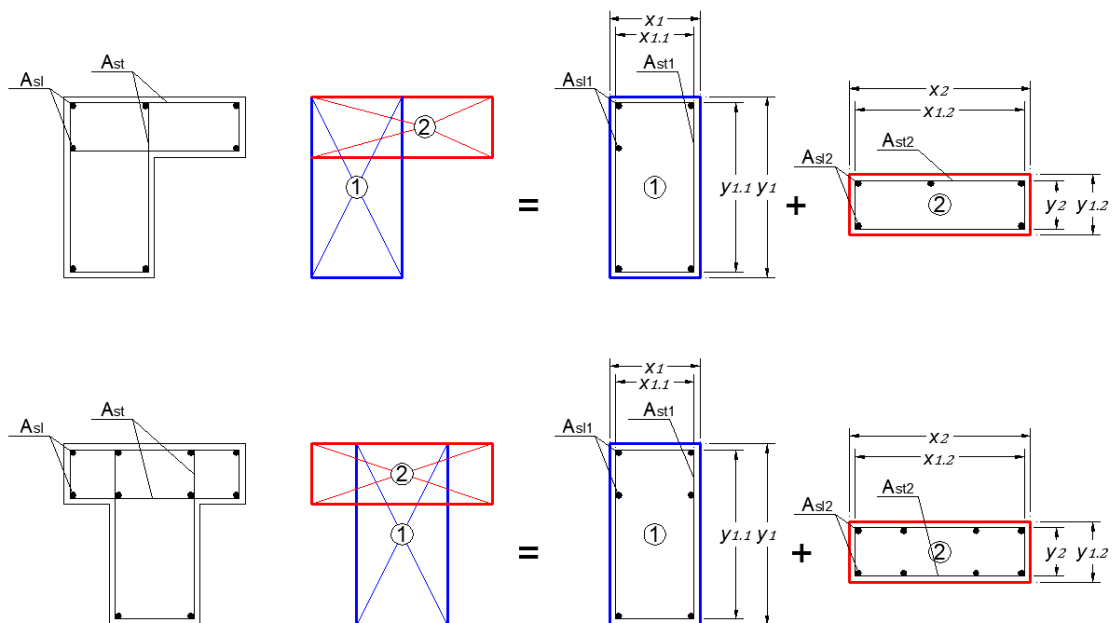


Figura 4.2. 2ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”

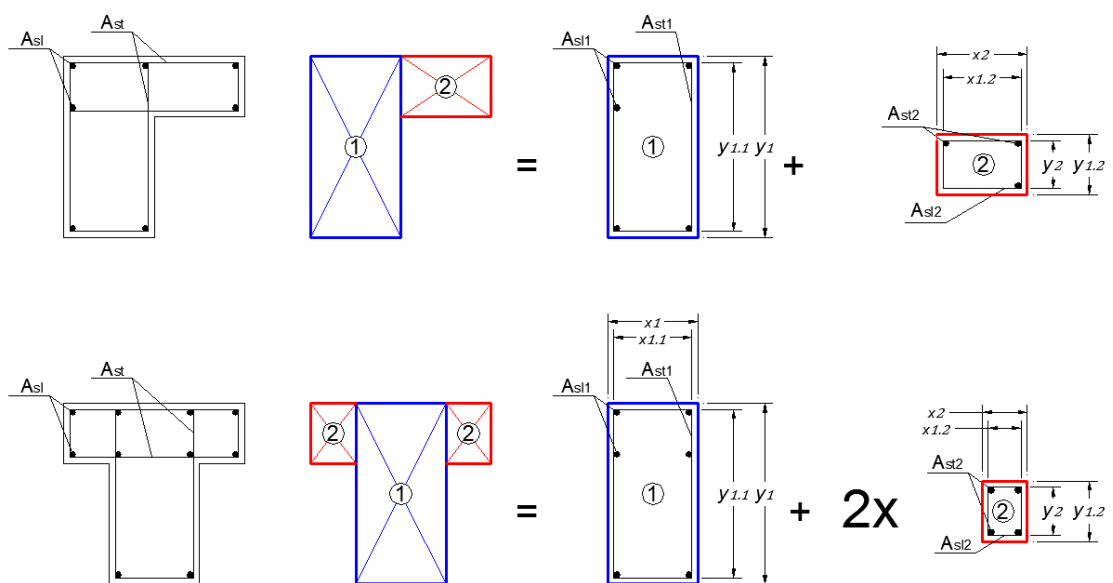
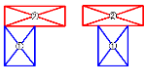


Figura 4.3. 3ª Divisão assumida para o tipo as vigas “L” e “T”

Tabela 4.1. Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

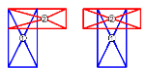
1ª Divisão 		Características Geométricas							
Viga	Tipo de secção	x_1 (cm)	y_1 (cm)	$x_{1.1}$ (cm)	$y_{1.1}$ (cm)	x_2 (cm)	y_2 (cm)	$x_{1.2}$ (cm)	$y_{1.2}$ (cm)
LB1 [18]	"L"	15,00	20,00	9,40	14,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB2 [18]	"L"	15,00	20,00	9,40	14,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB3 [18]	"L"	15,00	20,00	9,40	14,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB4 [18]	"L"	15,00	20,00	9,20	14,20	30,00	15,00	25,20	11,20
LB5 [18]	"L"	15,00	20,00	9,00	14,00	30,00	15,00	25,00	11,00
BL1 [20]	"L"	12,00	15,00	6,40 ⁽¹⁾	9,40 ⁽¹⁾	30,00	15,00	24,00 ⁽¹⁾	9,00 ⁽¹⁾
BK-T [28]	"L"	18,00	15,00	13,20 ⁽¹⁾	10,20 ⁽¹⁾	33,00	10,00	28,70 ⁽¹⁾	6,20 ⁽¹⁾
TB1 [17]	"T"	12,00	32,00	6,40	30,40	40,00 ⁽¹⁾	8,00 ⁽¹⁾	36,40 ⁽¹⁾	4,40 ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Valores assumidos

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

Características Mecânicas								
Viga	A_{sl1} (cm ²)	A_{st1}/s (cm ² /m)	A_{fl1} (cm ²)	A_{ft1}/s (cm ² /m)	A_{sl2} (cm ²)	A_{st2}/s (cm ² /m)	A_{fl2} (cm ²)	A_{ft2}/s (cm ² /m)
LB1	3,047	2,02	-	-	4,618	2,02	-	-
LB2	-	2,02	3,047	-	-	2,02	4,618	-
LB3	-	-	3,047	2,02	-	-	4,618	2,02
LB4	-	-	3,047	3,59	-	-	4,618	3,59
LB5	-	-	3,047	5,61	-	-	4,618	5,61
BL1	5,152	1,410	-	-	9,173	3,930	-	-
BK-T	6,283	4,020	-	-	8,545	4,020	-	-
TB1	3,833	2,02	-	-	6,974	2,02	-	-

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

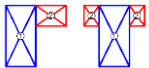
2ª Divisão 		Características Geométricas							
Viga	Tipo de secção	x_1 (cm)	y_1 (cm)	$x_{1.1}$ (cm)	$y_{1.1}$ (cm)	x_2 (cm)	y_2 (cm)	$x_{1.2}$ (cm)	$y_{1.2}$ (cm)
LB1 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB2 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB3 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	30,00	15,00	25,40	11,40
LB4 [18]	"L"	15,00	35,00	9,20	30,20	30,00	15,00	25,20	11,20
LB5 [18]	"L"	15,00	35,00	9,00	30,00	30,00	15,00	25,00	11,00
BL1 [20]	"L"	12,00	30,00	6,40 ⁽¹⁾	24,40 ⁽¹⁾	30,00	15,00	24,00 ⁽¹⁾	9,00 ⁽¹⁾
BK-T [28]	"L"	18,00	25,00	13,20 ⁽¹⁾	20,70 ⁽¹⁾	33,00	10,00	28,70 ⁽¹⁾	6,20 ⁽¹⁾
TB1 [17]	"T"	12,00	40,00	6,40 ⁽¹⁾	38,40 ⁽¹⁾	40,00	8,00	36,40 ⁽¹⁾	4,40 ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Valores assumidos

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

Características Mecânicas								
Viga	A_{sl1} (cm ²)	A_{st1}/s (cm ² /m)	A_{ft1} (cm ²)	A_{ft1}/s (cm ² /m)	A_{sl2} (cm ²)	A_{st2}/s (cm ² /m)	A_{ft2} (cm ²)	A_{ft2}/s (cm ² /m)
LB1	5,309	2,02	-	-	4,618	2,02	-	-
LB2	-	2,02	5,309	-	-	2,02	4,618	-
LB3	-	-	5,309	2,02	-	-	4,618	2,02
LB4	-	-	5,309	3,59	-	-	4,618	3,59
LB5	-	-	5,309	5,61	-	-	4,618	5,61
BL1	10.399	1,410	-	-	9,173	3,930	-	-
BK-T	10.304	4,020	-	-	8,545	4,020	-	-
TB1	6,095	2,02	-	-	6.974	2,02	-	-

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

3ª Divisão 		Características Geométricas							
Viga	Tipo de secção	x_1 (cm)	y_1 (cm)	$x_{1.1}$ (cm)	$y_{1.1}$ (cm)	x_2 (cm)	y_2 (cm)	$x_{1.2}$ (cm)	$y_{1.2}$ (cm)
LB1 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	15,00	15,00	11,40	11,40
LB2 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	15,00	15,00	11,40	11,40
LB3 [18]	"L"	15,00	35,00	9,40	30,40	15,00	15,00	11,40	11,40
LB4 [18]	"L"	15,00	35,00	9,20	30,20	15,00	15,00	11,20	11,20
LB5 [18]	"L"	15,00	35,00	9,00	30,00	15,00	15,00	11,00	11,00
BL1 [20]	"L"	12,00	30,00	6,40 ⁽¹⁾	24,40 ⁽¹⁾	18,00	15,00	12,00 ⁽¹⁾	9,00 ⁽¹⁾
BK-T [28]	"L"	18,00	25,00	13,20 ⁽¹⁾	20,70 ⁽¹⁾	15,00	10,00	11,20 ⁽¹⁾	6,20 ⁽¹⁾
TB1 [17]	"T"	12,00	40,00	6,40 ⁽¹⁾	38,40 ⁽¹⁾	14,00	8,00	10,40 ⁽¹⁾	4,40 ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Valores assumidos

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

Características Mecânicas								
Viga	A_{sl1} (cm ²)	A_{st1}/s (cm ² /m)	A_{fl1} (cm ²)	A_{ft1}/s (cm ² /m)	A_{sl2} (cm ²)	A_{st2}/s (cm ² /m)	A_{fl2} (cm ²)	A_{ft2}/s (cm ² /m)
LB1	5,309	2,02	-	-	2,702	2,02	-	-
LB2	-	2,02	5,309	-	-	2,02	2,702	-
LB3	-	-	5,309	2,02	-	-	2,702	2,02
LB4	-	-	5,309	3,59	-	-	2,702	3,59
LB5	-	-	5,309	5,61	-	-	2,702	5,61
BL1	10,399	1,410	-	-	4,367	3,930	-	-
BK-T	10,304	4,020	-	-	5,404	4,020	-	-
TB1	6,095	2,02	-	-	3,487	2,02	-	-

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

Viga	Características dos Materiais										
	f_{cm} (MPa)	f_{ctm} (MPa)	f_{lym} (MPa)	f_{tym} (MPa)	f_{lf} (MPa)	f_{tf} (MPa)	E_c (GPa)	E_{sl} (GPa)	E_{st} (GPa)	E_{fl} (GPa)	E_{ft} (GPa)
LB1	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	360,0	240,0	-	-	29,96 ⁽²⁾	210	210	-	-
LB2	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	-	240,0	400,0	-	29,96 ⁽²⁾	-	210	36,7	-
LB3	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	-	-	400,0	400,0	29,96 ⁽²⁾	-	-	36,7	36,7
LB4	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	-	-	400,0	400,0	29,96 ⁽²⁾	-	-	36,7	36,7
LB5	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	-	-	400,0	400,0	29,96 ⁽²⁾	-	-	36,7	36,7
BL1	24,0 ⁽²⁾	1,9 ⁽²⁾	360,0 ⁽¹⁾	240,0 ⁽¹⁾	-	-	28,61 ⁽²⁾	210 ⁽¹⁾	210 ⁽¹⁾	-	-
BK-T	27,1	2,8	576,0	435,0	-	-	26,41	204	203	-	-
TB1	28,0 ⁽²⁾	2,2 ⁽²⁾	360,0	240,0	-	-	29,96 ⁽²⁾	210 ⁽¹⁾	210 ⁽¹⁾	-	-

⁽¹⁾ Valores assumidos;

⁽²⁾ Valores calculados a de acordo com o EC2

Tabela 4.1. (Continuação) Características das vigas de referência em estudo consoante as três divisões assumidas

Viga	Características dos Materiais					
	$\varepsilon_0^{(2)}$ (%)	$\varepsilon_{cu}^{(2)}$ (%)	$\varepsilon_{slu}^{(2)}$ (%)	$\varepsilon_{stu}^{(2)}$ (%)	$\varepsilon_{flu}^{(3)}$ (%)	$\varepsilon_{ftu}^{(3)}$ (%)
LB1	0,197	0,35	1,00	1,00	-	-
LB2	0,197	0,35	1,00	1,00	0,82	-
LB3	0,197	0,35	1,00	1,00	0,82	0,82
LB4	0,197	0,35	1,00	1,00	0,82	0,82
LB5	0,197	0,35	1,00	1,00	0,82	0,82
BL1	0,187	0,35	1,00	1,00	-	-
BK-T	0,195	0,35	1,00	1,00	-	-
TB1	0,195	0,35	1,00	1,00	-	-

⁽²⁾ Valores calculados a de acordo com o EC2;

⁽³⁾ Valores calculados de acordo com a equação 3.2 e 3.3

Na tabela 4.1, os parâmetros listados têm o seguinte significado, entendendo-se pelo subscrito “ i ” a subsecção transversal i resultante da divisão da secção original:

x_i	- Largura da secção transversal
y_i	- Altura da secção transversal
$x_{1.i}$	- Largura das cintas a partir do eixo dos varões
$y_{1.i}$	- Altura das cintas a partir do eixo dos varões
$A_{sl\ i}$	- Área de armadura ordinária longitudinal
$A_{st\ i}$	- Área de armadura ordinária transversal (área de um ramo)
$A_{fl\ i}$	- Área de armadura GFRP longitudinal
$A_{ft\ i}$	- Área de armadura GFRP uma barra transversal (área de um ramo)
f_{cm}	- Resistência média à compressão do betão
f_{ctm}	- Resistência média à tração do betão
E_c	- Módulo de elasticidade do betão
f_{lym}	- Tensão média de cedência da armadura longitudinal
f_{tym}	- Tensão média de cedência da armadura transversal
E_{sl}	- Módulo de elasticidade do aço usado na armadura longitudinal
E_{st}	- Módulo de elasticidade do aço usado na armadura transversal
f_{lfm}	- Tensão de rotura da barra GFRP longitudinal
f_{tfm}	- Tensão de rotura da barra GFRP transversal
E_{fl}	- Módulo de elasticidade dos varões GFRP longitudinais
E_{ft}	- Módulo de elasticidade dos varões GFRP transversais
s	- Espaçamento longitudinal da armadura transversal

Foram assumidos valores convencionais de rotura para as extensões dos materiais de acordo com o EC2, designadamente para as extensões relativas ao betão (ε_0 , ε_{cu}) e às armaduras de aço (ε_{slu} , ε_{stu}). Para calcular as extensões convencionais de rotura dos varões GFRP (ε_{flu} , ε_{ftu}) foram utilizadas as equações 3.2 e 3.3.

4.3. Análise comparativa das curvas teóricas $T - \theta$ e experimentais das vigas de referência para as três divisões assumidas

Nas figuras seguintes 4.4 a 4.11 encontram-se ilustradas as curvas experimentais $T - \theta$ obtidos pelos autores para as vigas de referência apresentadas anteriormente e as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas pelo GSVATM (programa Torque 2.0.1) para as três divisões assumidas e apresentadas na secção anterior. A partir do programa Torque 2.0.1 foi calculado, de forma automática, a resposta global separada das subsecções retangulares resultantes das divisões assumidas. Seguidamente, foi aplicado o princípio da sobreposição de forma a obter a curva teórica $T - \theta$ global da viga em estudo com a secção original, conforme explicado no capítulo 3. Para tal, foi assumido que, para um dado momento torsor, os ângulos de torção da viga com a secção original e das subdivisões deve ser o mesmo. Como tal, foram somados os momentos torsores de cada subdivisão correspondente a ângulos iguais. Essa soma foi feita a partir da listagem dos resultados obtidos no programa Torque 2.0.1 com o auxílio de uma folha de cálculo, tendo-se aplicado uma percentagem de erro entre os valores dos ângulos nunca superior a 5%, sendo a maioria desse erro inferior a 1%.

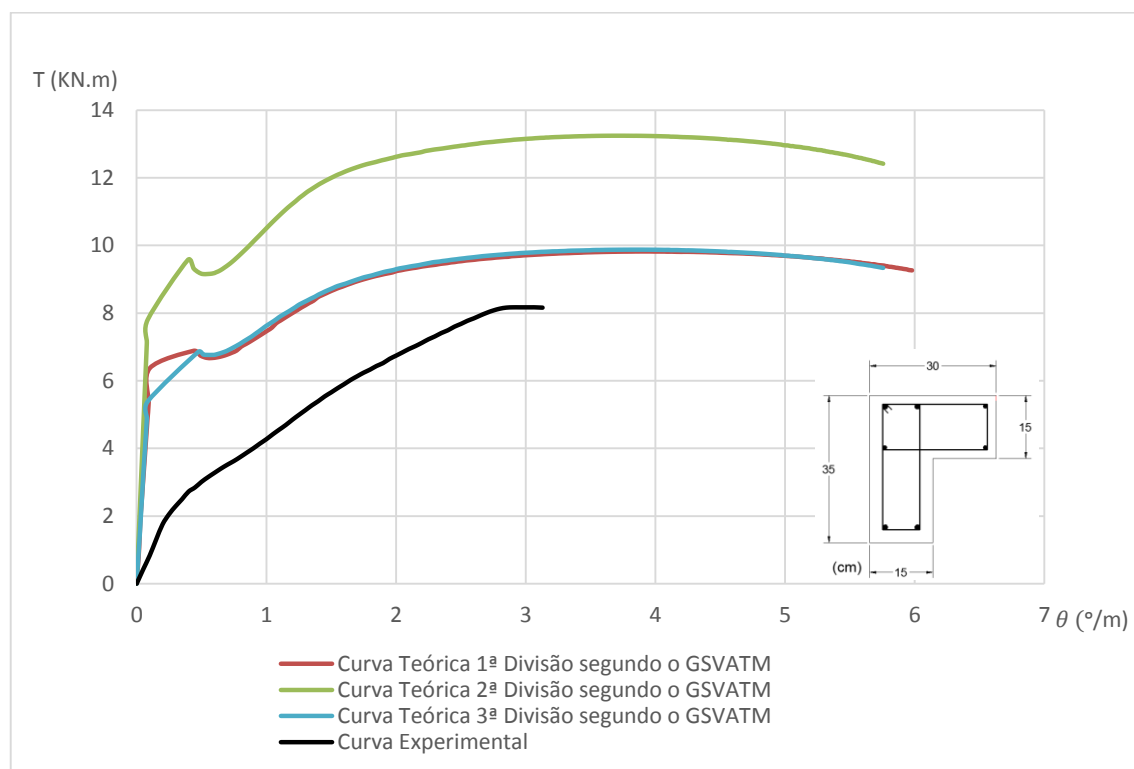


Figura 4.4. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB1 [18]

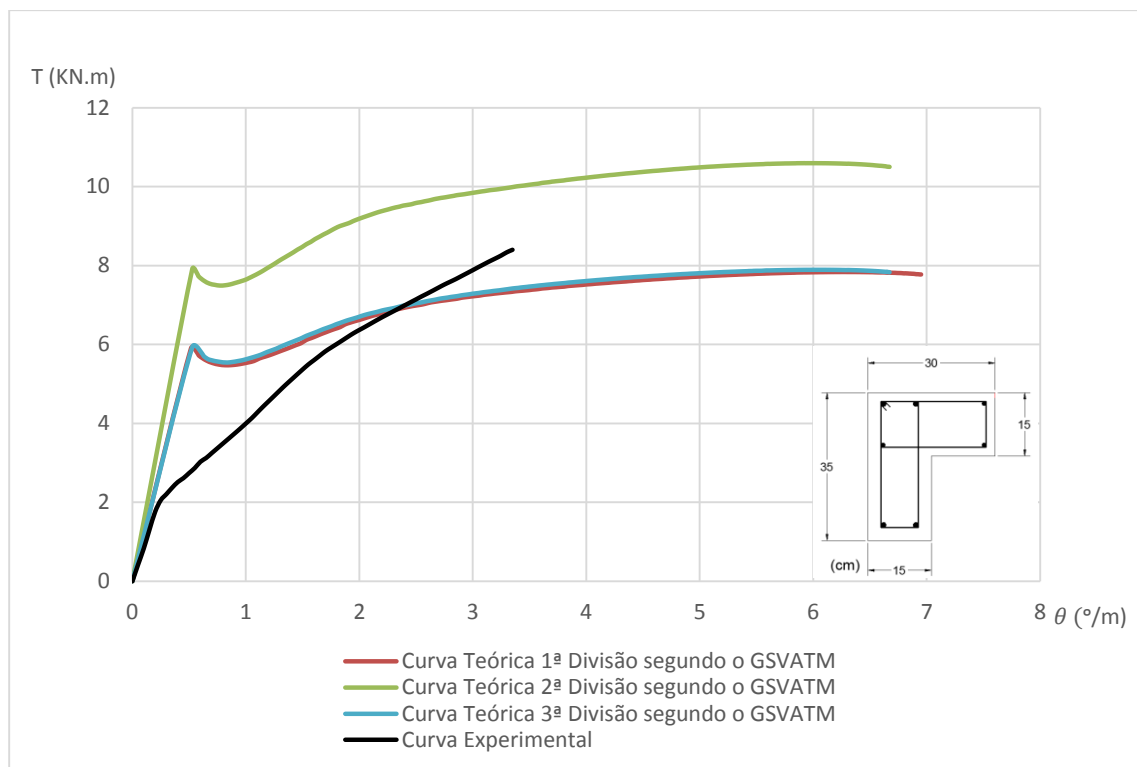


Figura 4.5. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB2 [18]

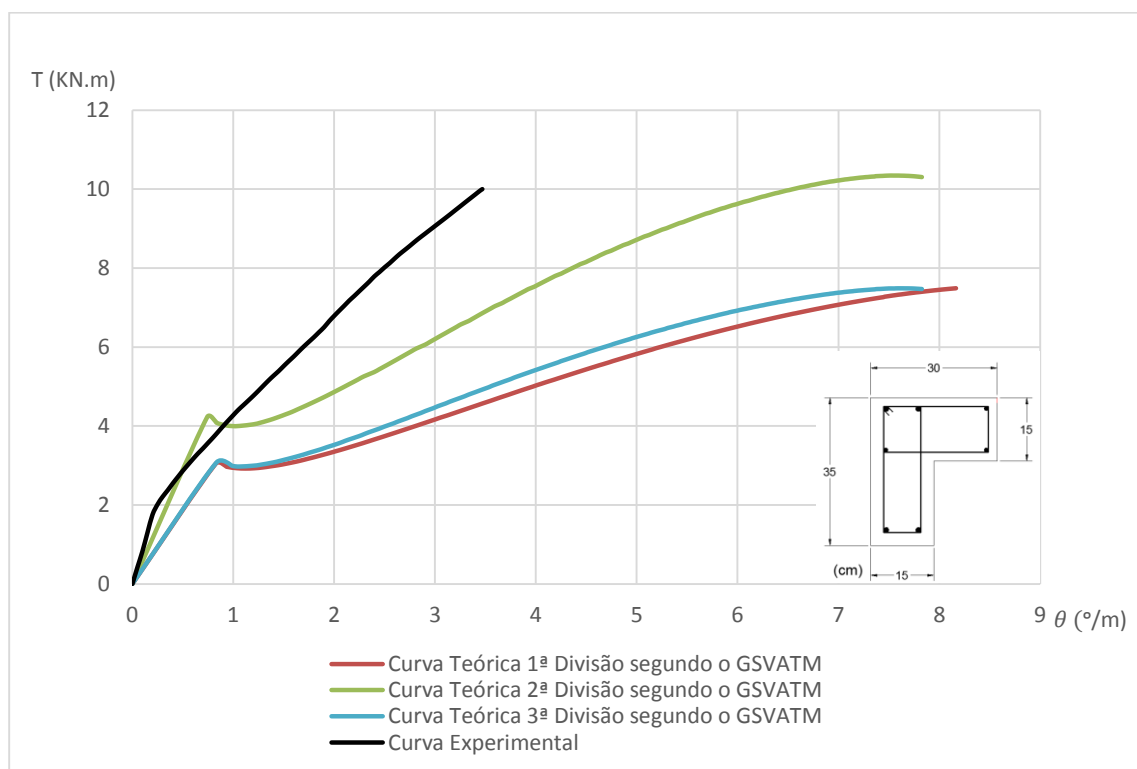


Figura 4.6. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB3 [18]

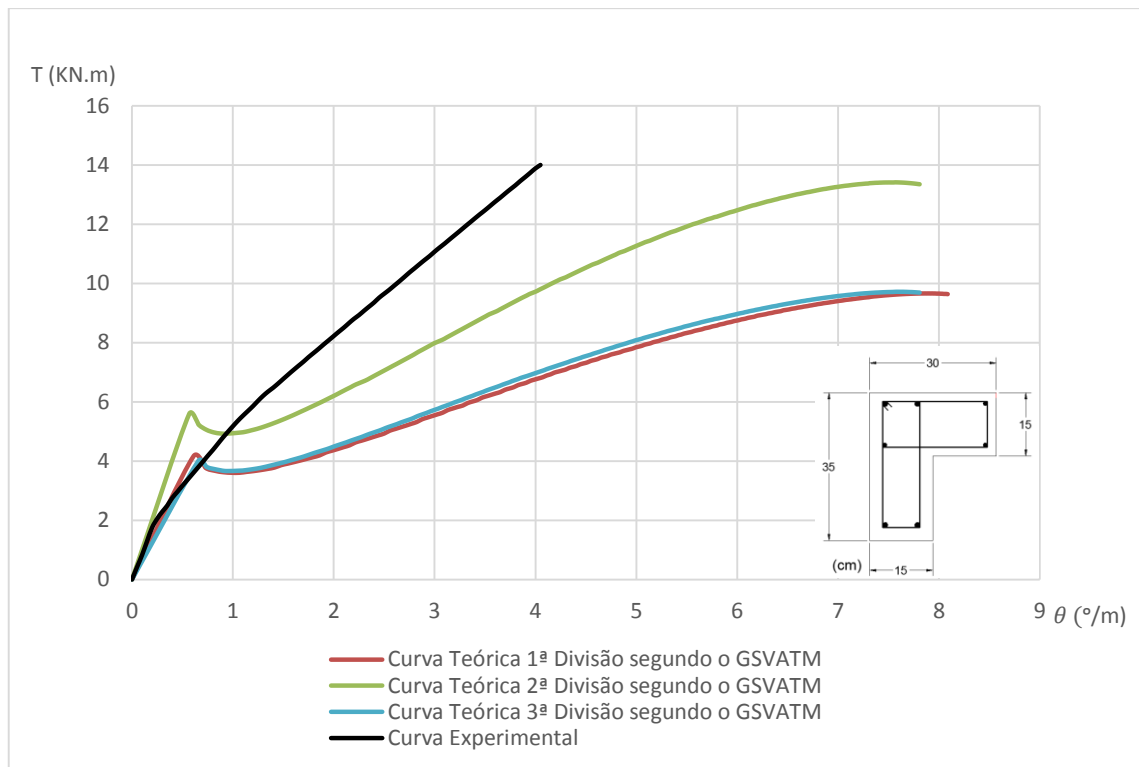


Figura 4.7. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB4 [18]

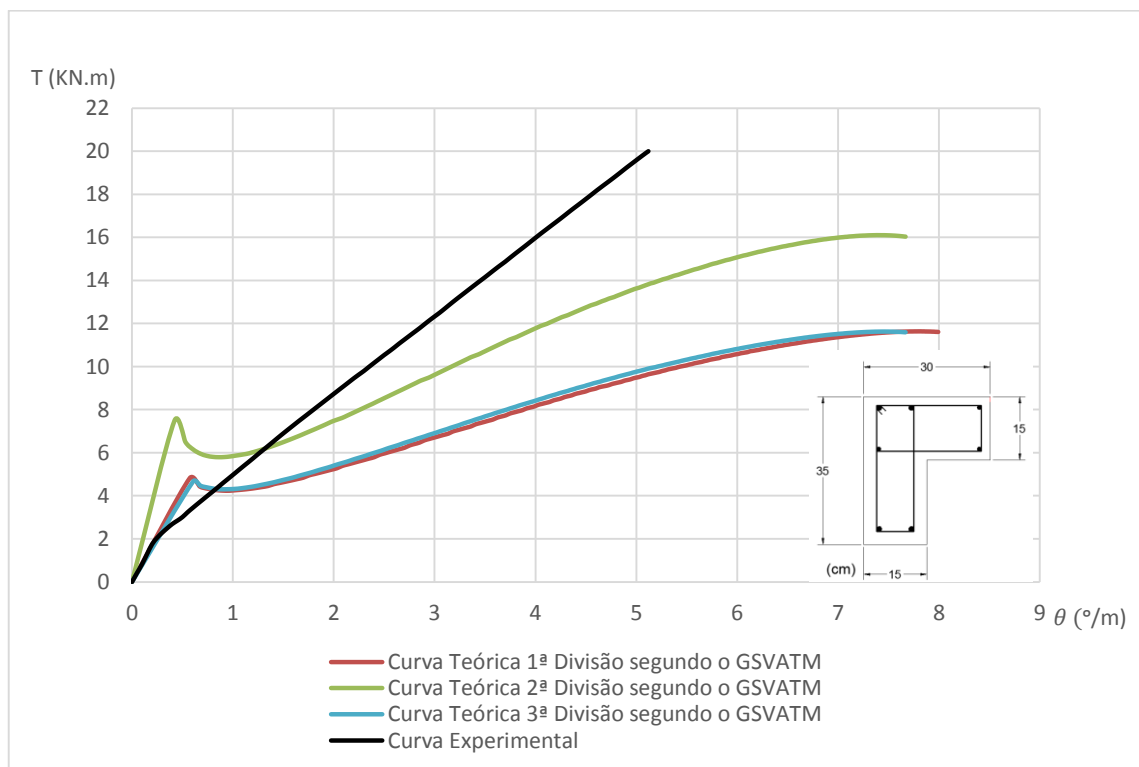


Figura 4.8. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga LB5 [18]

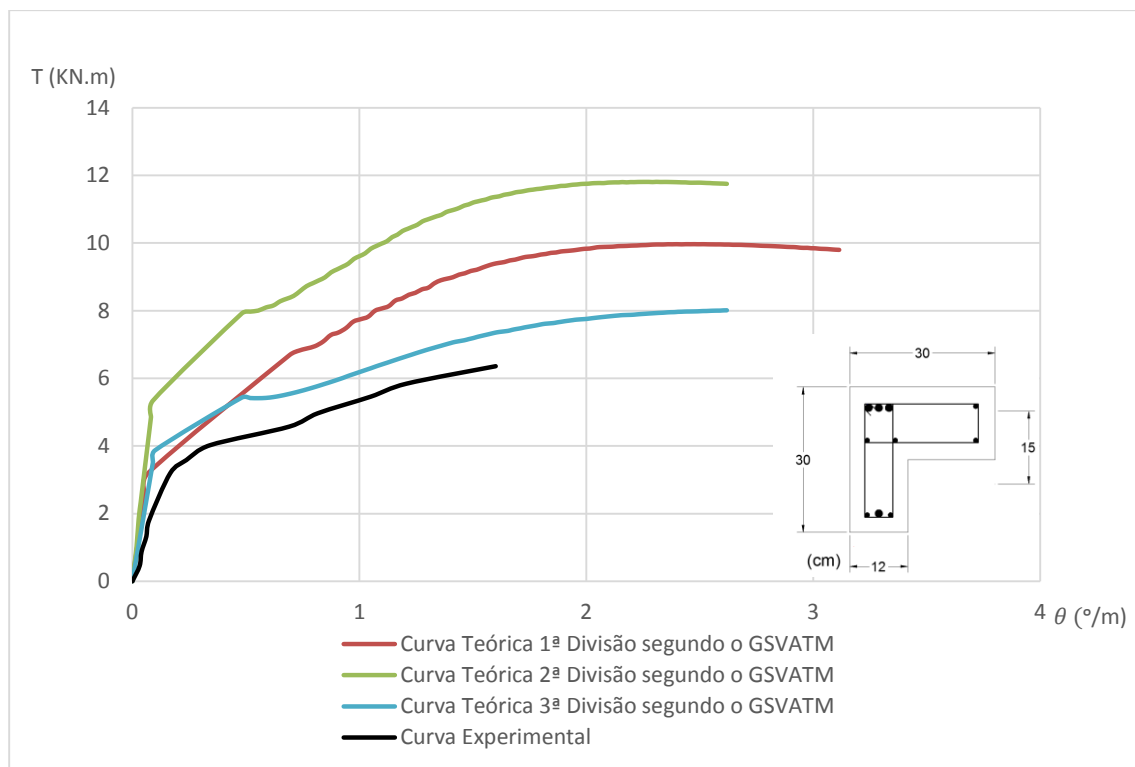


Figura 4.9. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga BL1 [20]

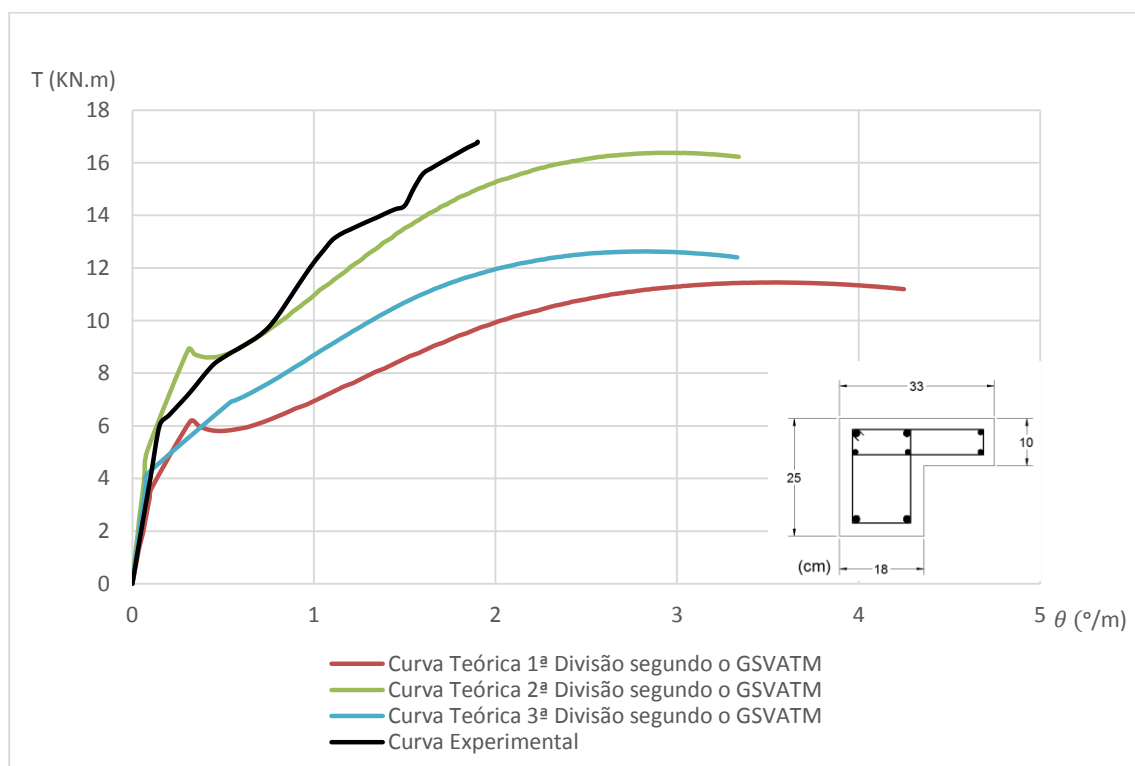


Figura 4.10. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga BK-T [28]

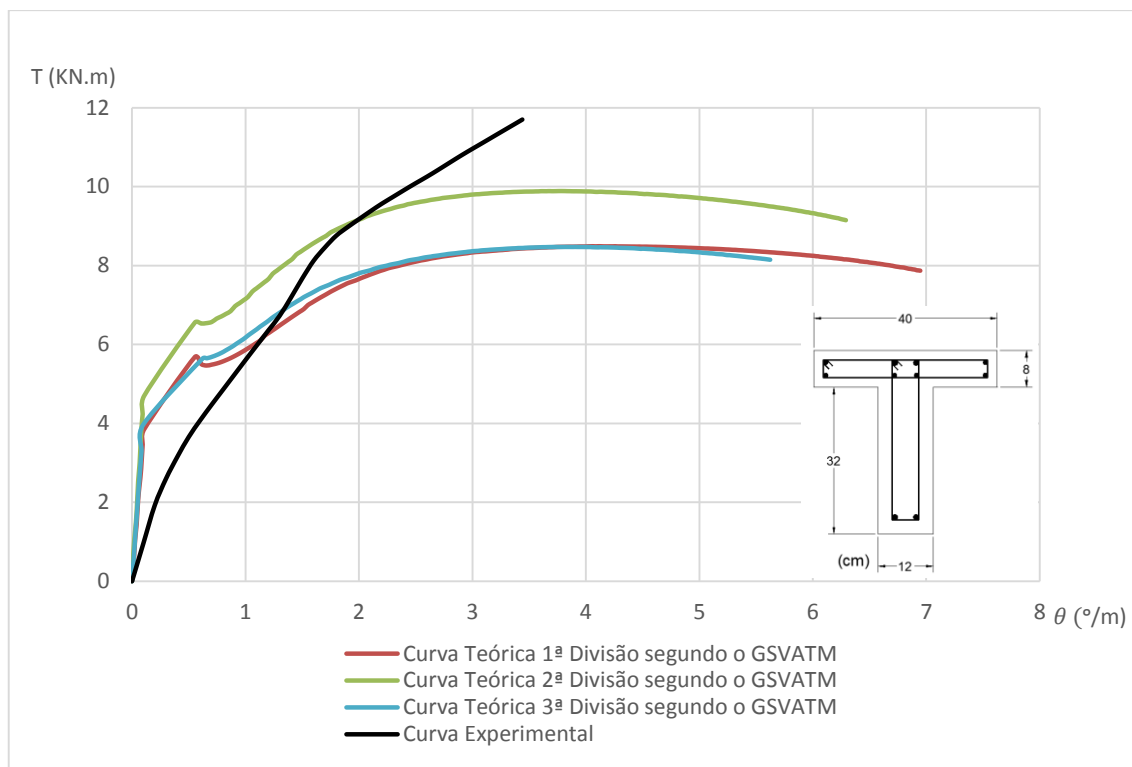


Figura 4.11. Comparação das curvas $T - \theta$ da viga TB1 [17]

Os gráficos das curvas experimentais e teóricas $T - \theta$ das figuras 4.4 a 4.11 mostram uma grande variabilidade entre as curvas teóricas apresentadas para as três divisões comparativamente às curvas experimentais das vigas de referência.

Para os momentos torsores de fissuração, observa-se que para as vigas LB1, LB2 e TB-1 (Figuras 4.4, 4.5 e 4.11), nenhum dos modelos teóricos apresenta bons resultados. Os momentos torsores de fissuração teóricos encontram-se bastante sobrestimados. Para as restantes vigas, observam-se melhores resultados para a 1ª e 3ª divisão, em particular para as vigas BL1 e BK-T (figuras 4.9 e 4.11) para as quais os valores teóricos e experimentais dos momentos torsores de fissuração são bastante próximos. Os resultados obtidos para a 2ª divisão mostram-se novamente bastante sobrestimados para todas as restantes vigas.

Para os momentos torsores últimos, observa-se novamente uma grande variabilidade de resultados. Para a Viga LB1 e LB2 (figura 4.4 e 4.5), os modelos baseados na 1ª e 3ª divisão fornecem bons resultados sendo mais notório na viga LB2 visto que na viga LB1 estes valores se encontram um pouco sobrestimados, enquanto que o modelo baseado na 2ª divisão sobrestima a resistência à torção da viga. Para a viga BL1 (figura 4.9), todos os modelos teóricos sobrestimam a resistência à torção da viga. Para as restantes vigas, o modelo teórico baseado na 2ª divisão fornece agora os melhores resultados (em particular para as vigas LB3, LB4 e BK-T), enquanto que os modelos teóricos baseados na 1ª e 3ª divisão subestimam a resistência.

No que se refere às rotações, observa-se em geral que os modelos teóricos sobrestimam bastante as rotações, particularmente para o estado último comportamental.

Refere-se que no estudo realizado por Deifalla [16] tendo por base o seu modelo teórico proposto, somente são apresentados os resultados das vigas LB3, LB4 e LB5, sendo a 2ª divisão a que melhores resultados apresenta. Para tais vigas, o presente estudo confirma em geral os resultados obtidos por Deifalla [16] para o momento torsor resistente, mas não para o momento torsor de fissuração, para o qual se observou que o modelo baseado na 2ª divisão sobrestimava bastante tal parâmetro.

Os resultados globais obtidos neste trabalho poderão dever-se ao facto do critério utilizado para obter a curva $T - \theta$ global, a partir das curvas calculadas para cada subsecção, não ser totalmente adequado, principalmente para baixos níveis de carregamento e também no que se refere ao cálculo das rotações. Além disso, como foi referido na Secção 3.3 e 4.2, existiram dúvidas sobre algumas características das vigas de referência. Acredita-se que este aspeto possa também ter fortemente contribuído para a variabilidade dos resultados obtidos.

A tabela 4.2 apresenta, de forma resumida, os valores teóricos e experimentais referentes aos momentos torsores últimos ou resistentes (T_u) e ao ângulos θ correspondentes. A tabela 4.2 apresenta também o quociente entre os valores experimentais e teóricos obtidos para o momento torsor último.

Tabela 4.2. Comparação dos valores obtidos pelas curvas $T - \theta$ em estudo

Viga	$T_{u,exp}$ (kNm)	$T_{u,1^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$T_{u,2^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$T_{u,3^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$\theta_{u,exp}$ (°/m)	$\theta_{u,1^a\ div}$ GSVATM (°/m)	$\theta_{u,2^a\ div}$ GSVATM (°/m)	$\theta_{u,3^a\ div}$ GSVATM (°/m)
LB1	8,16	9,82	13,24	9,87	3,13	3,94	3,71	3,85
LB2	8,4	7,84	10,60	7,89	3,35	6,28	5,92	6,04
LB3	10	7,49	10,34	7,49	3,47	8,17	7,58	7,60
LB4	14	9,66	13,41	9,72	4,05	7,89	7,57	7,59
LB5	20	11,64	16,10	11,63	5,12	7,82	7,39	7,46
BL1	6,36	9,97	11,81	8,01	1,60	2,48	2,31	2,62
BK-T	16,80	11,45	16,38	12,63	1,90	3,54	2,90	2,83
TB1	11,7	8,49	9,89	8,47	3,44	4,11	3,77	3,91

Tabela 4.2. (continuação) Comparação dos valores obtidos pelas curvas $T - \theta$ em estudo

Viga	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,1^a div}}$	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,2^a div}}$	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,3^a div}}$
LB1	0,83	0,62	0,83
LB2	1,07	0,79	1,06
LB3	1,34	0,97	1,34
LB4	1,45	1,04	1,44
LB5	1,72	1,24	1,72
BL1	0,64	0,54	0,79
BK-T	1,47	1,03	1,33
TB1	1,38	1,18	1,38

Na tabela 4.2, os parâmetros listados têm o seguinte significado, entendendo-se pelo subscrito “ i ” a subsecção transversal i :

$T_{u exp}$ - Valor experimental do momento torsor resistente

$T_{u,i^a div}$ - Valor teórico do momento torsor resistente

$\theta_{u exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{u exp}$

$\theta_{u,i^a div}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{u,i^a div}$

De uma forma geral, os resultados numéricos apresentados na tabela 4.2 confirmam as conclusões anteriormente expostas e baseadas na análise das figuras 4.4 a 4.11.

4.4. Cálculo do momento torsor último a partir dos documentos normativos

Nas secções 4.4.1 e 4.4.2 são apresentados os resultados referentes à metodologia de cálculo apresentada anteriormente no Capítulo 3, baseada nas disposições dos documentos normativos analisados, para calcular o momento torsor último normativo ($T_{r,calc}$) de cada viga por forma a ser comparado com os respetivos valores teóricos e experimentais.

4.4.1. Cálculo do momento torsor último a partir do Regulamento Português, REBAP [26]

A tabela 4.3 apresenta todos os parâmetros necessários para o cálculo do momento torsor último normativo de acordo com o REBAP, bem como os valores obtidos para este último e a comparação com os respetivos valores experimentais e teóricos.

Tabela 4.3. Previsão da resistência à torção através do REBAP

Viga	$d_{ef\ 1}$ (cm)	$d_{ef\ 2}$ (cm)	h_{ef1} (cm)	$h_{ef\ 2}$ (cm)	A_{ef} (m ²)	u_{ef} (m)	A_{sl} (cm ²)	f_{syl} (MPa)	A_{st}/s (cm ² /m)	f_{st} (MPa)
LB1	7,61	9,81	1,268	1,635	0,0375	1,048	6,88	360	2,02	240
LB2	7,61	9,81	1,268	1,635	0,0375	1,048	6,88	400	2,02	240
LB3	7,61	9,81	1,268	1,635	0,0375	1,048	6,88	400	2,02	400
LB4	7,20	9,40	1,200	1,567	0,0356	1,036	6,88	400	3,59	400
LB5	6,80	9,0	1,133	1,500	0,0334	1,016	6,88	400	5,61	400
BL1	7,00	4,80	1,167	0,800	0,0229	0,896	11,97	360	2,67	240
BK-T	4,20	10,8	0,700	1,800	0,0264	0,900	12,57	576	4,02	435
TB1	4,6	2,8	0,767	0,467	0,0242	2,21	9,24	360	2,02	240

Tabela 4.3. (continuação) Previsão da resistência à torção através do REBAP

Viga	f_{ctm} (MPa)	τ_1 (MPa)	T_{cd} (kNm)	T_{td} (kNm)	T_{rd} (kNm)	T_{ld} (kNm)	$T_{r,calc}$ (kNm)	$T_{u,exp}$ (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{r,calc}}$
LB1	2,21	1,33	1,26	3,64	4,90	17,73	4,90	8,16	1,67
LB2	2,21	1,33	1,26	3,64	4,90	19,69	4,90	8,4	1,72
LB3	2,21	1,33	1,26	6,06	7,32	19,69	7,32	10	1,37
LB4	2,21	1,33	1,13	10,23	11,36	18,91	11,36	14	1,23
LB5	2,21	1,33	1,00	14,99	16,00	18,09	16,00	20	1,25
BL1	1,90	1,14	0,42	2,94	3,35	22,03	3,35	6,36	1,90
BK-T	2,77	1,66	0,61	9,24	9,85	42,46	9,85	16,80	1,71
TB1	2,21	1,33	0,30	2,37	2,67	11,8	2,67	11,7	4,38

Na tabela 4.3, os parâmetros listados têm o seguinte significado:

- d_{ef} - Diâmetro do círculo de maior tamanho possível dentro do perímetro efetivo
- h_{ef} - Espessura efetiva da parede
- A_{ef} - Área efetiva limitada pelo fluxo de corte
- u_{ef} - Perímetro efetivo do fluxo de corte
- h_{ef} - Espessura efetiva da parede
- A_{sl} - Área de armadura ordinária longitudinal
- A_{st} - Área de armadura ordinária transversal (área de um ramo)
- f_{syl} - Tensão de cedência da armadura longitudinal de torção
- f_{syt} - Tensão de cedência da armadura transversal de torção
- f_{ctm} - Resistência média à tração do betão
- τ_1 - Tensão correspondente a 60% do valor da resistência à tração do betão
- T_{cd} - Momento torsor resistente dependente da geometria da secção e da classe de betão
- T_{td} - Momento torsor resistente dependente da geometria da secção e da armadura transversal
- T_{ld} - Momento torsor resistente dependente da geometria da secção e da armadura longitudinal
- $T_{r,calc}$ - Valor teórico do momento torsor resistente

- $T_{u,exp}$ - Valor experimental do momento tisor resistente
- s - Espaçamento longitudinal da armadura transversal

4.4.2. Cálculo do momento tisor último a partir Código Americano ACI 318R-89 [3]

A tabela 4.4 apresenta todos os parâmetros necessários para o cálculo do momento tisor último normativo de acordo com o Código do ACI, bem como os valores obtidos para este último e a comparação com os respectivos valores experimentais e teóricos.

Tabela 4.4. Previsão da resistência à torção através do ACI 318R-89

Viga	x (in)	y (in)	x (in)	y (in)	x_1 (in)	y_1 (in)	x_1 (in)	y_1 (in)	A_{t1}/s (in ² /in)	A_{t2}/s (in ² /in)
LB1	13,78	5,91	5,91	5,91	11,97	3,70	4,49	6,3	0,0080	0,0080
LB2	13,78	5,91	5,91	5,91	11,97	3,70	4,49	6,3	0,0080	0,0080
LB3	13,78	5,91	5,91	5,91	11,97	3,70	4,49	6,3	0,0080	0,0080
LB4	13,78	5,91	5,91	5,91	11,89	3,62	4,41	6,3	0,0141	0,0141
LB5	13,78	5,91	5,91	5,91	11,81	3,54	4,33	6,3	0,0221	0,0221
BL1	5,91	4,72	11,81	5,91	6,06	2,52	9,45	3,54	0,0056	0,0155
BK-T	7,09	5,91	12,99	3,94	5,20	5,71	8,27	2,05	0,0158	0,0158
TB1	12,60	4,72	15,75	3,15	12,20	2,52	14,33	1,73	0,0080	0,0080

Tabela 4.4. (continuação) Previsão da resistência à torção através do ACI 318R-89

Viga	f'_c (psi)	f_{ty} (psi)	$\sum x_i^2 y_i$ (in ²)	α_{t1} (-)	α_{t2} (-)	T_c (in-lb)	T_s (in-lb))	$T_{r,calc}$ (in-lb)	$T_{r,calc}$ (kNm)
LB1	4061,06	34809,05	1327	0.80	0.99	67665,14	17572,51	85236,65	9,63
LB2	4061,06	34809,05	1327	0.80	0.99	67665,14	17572,51	85236,65	9,63
LB3	4061,06	58015,08	1327	0.80	0.99	67665,14	29286,18	96951,32	10,96
LB4	4061,06	58015,08	1327	0.80	0.99	67665,14	50854,81	118519,94	13,40
LB5	4061,06	58015,08	1327	0.80	0.99	67665,14	77583,50	145248,64	16,42
BL1	3480,90	34809,05	989	0,924	0,825	46660,28	17604,07	64264,35	7.26
BK-T	3930,52	63091,40	961	0.935	0.76	48204.98	40543.58	88748.56	10.03
TB1	4061,06	34809,05	1531	0,78	0,73	78049,79	11661,50	89711,29	10,14

Tabela 4.4. (continuação) Previsão da resistência à torção através do ACI 318R-89

Viga	$T_{r,calc}$ (kNm)	$T_{u,exp}$ (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{r,calc}}$
LB1	9,63	8,16	0.85
LB2	9,63	8,4	0.87
LB3	10,96	10	0.91
LB4	13,40	14	1.04
LB5	16,42	20	1.21
BL1	7,26	6,36	0,88
BK-T	10,03	16,80	1,67
TB1	10,14	11,7	1,15

Refere-se que na tabela 4.4 apenas foram apresentados os valores que resultaram do valor máximo do termo $\sum x^2 y$ no somatório de todos os retângulos componentes, de acordo com o explicado anteriormente (Secção 3.2.2.2)

Na tabela 4.4, os parâmetros listados têm o seguinte significado:

- x, y - Altura ou largura da subsecção transversal
- x_1, y_1 - Largura ou altura das cintas a partir do eixo dos varões
- A_t - Área da secção das cintas constituintes da armadura transversal
- f'_c - Resistência à compressão uniaxial do betão
- f_{ty} - Tensão de cedência da armadura de torção
- α_t - Coeficiente de eficiência das armaduras
- T_c - Momento resistente conferido pelo betão
- T_s - Momento resistente conferido pelas cintas de cada componente
- $T_{r,calc}$ - Valor teórico do momento torsor resistente
- $T_{u,exp}$ - Valor experimental do momento torsor resistente
- s - Espaçamento longitudinal da armadura transversal

4.5. Análise comparativa dos valores de momentos torsores últimos obtidos pelas normas e pelo GSVATM com os valores experimentais

Nesta secção é feita uma análise comparativa dos momentos torsores resistente experimental das vigas em estudo, face aos valores obtidos a partir dos documentos normativos apresentados no capítulo 3 (código americano ACI 318R-89 e regulamento português REBAP) e os resultados obtidos através do GSVATM.

A tabela 4.5 apresenta, de forma resumida, os valores obtidos teoricamente através do GSVATM e através dos documentos normativos. Tais valores são comparados com os valores experimentais das vigas em estudo.

Tabela 4.5. Análise comparativa

Viga	$T_{u,exp}$ (kNm)	GSVATM						REBAP		ACI 318R-89	
		$T_{u,1^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$T_{u,2^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$T_{u,3^a\ div}$ GSVATM (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,1^a\ div}}$	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,2^a\ div}}$	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,3^a\ div}}$	$T_{r,calc}$ (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{r,calc}}$	$T_{r,calc}$ (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{r,calc}}$
LB1	8,16	9,82	13,24	9,87	0,83	0,62	0,83	4,90	1,67	9,63	0.85
LB2	8,4	7,84	10,60	7,89	1,07	0,79	1,06	4,90	1,72	9,63	0.87
LB3	10	7,49	10,34	7,49	1,34	0,97	1,34	7,32	1,37	10,96	0.91
LB4	14	9,66	13,41	9,72	1,45	1,04	1,44	11,36	1,23	13,40	1.04
LB5	20	11,64	16,10	11,63	1,72	1,24	1,72	16,00	1,25	16,42	1.21
BL1	6,36	9,97	11,81	8,01	0,64	0,54	0,79	3,35	1,90	7,26	0,88
BK-T	16,80	11,45	16,38	12,63	1,47	1,03	1,33	9,85	1,71	10,03	1,67
TB1	11,7	8,49	9,89	8,47	1,38	1,18	1,38	2,67	4,38	10,14	1,15

A título informativo, os valores da tabela 4.5 apresentados a azul representam os quocientes entre os valores experimentais e teóricos correspondentes aos melhores resultados obtidos.

A partir da tabela 4.5 é possível verificar que os valores obtidos através do GSVATM e do ACI 318R-89 são os que apresentam melhores resultados. Já os valores obtidos pelo REBAP são valores muito conservativos.

4.6. Notas finais

No presente capítulo foram apresentados os resultados das curvas $T - \theta$ obtidas teoricamente através do GSVATM com o auxílio do programa TORQUE 2.0.1, bem como uma análise comparativa destas curvas com os resultados das curvas $T - \theta$ experimentais para as vigas de referência. Foram ainda apresentados os valores de cálculo do momento torsor último para cada viga obtidos por aplicação das cláusulas do REBAP e do ACI 318R-89. Finalmente, foi apresentada uma análise comparativa entre os momentos torsores teóricos (obtidos através do GSVATM), de cálculo (obtidos através do REBAP e ACI 318R-89) com os respetivos valores experimentais.

Os resultados obtidos tendo por base o GSVATM para as 3 divisões consideradas apresentaram uma variabilidade relativamente elevada, quando comparados com os resultados experimentais. Não foi possível concluir sobre qual o procedimento a seguir para a melhor divisão da secção, visto que os resultados variaram de viga para viga e também em função do ponto da curva em análise (momento torsor de fissuração ou momento torsor resistente). Não foi também possível concluir sobre a validade do procedimento apresentado por Deifalla [16] para obter a curva $T - \theta$ global a partir das curvas individuais para cada subsecção, devido à variabilidade dos resultados anteriormente referido e também devido ao facto de, em geral, as rotações serem bastante sobrestimadas, particularmente na fase última comportamental.

Em termos de valor de momento torsor último, o REBAP é o que apresenta os valores mais conservativos quando comparados com os valores obtidos através do GSVATM e o ACI 318-89, sendo que, os valores que apresentam melhores resultados são os obtidos por o GSVATM, com exceção das vigas LB1, LB5 e TB1 para as quais é o ACI 318-89 que apresenta melhores resultados.

Capítulo 5. Conclusões e recomendações para estudos futuros

5.1. Introdução

Neste Capítulo, resumem-se as conclusões principais do presente trabalho e apresentam-se também propostas de possíveis trabalhos a elaborar no futuro, referentes ao tema em estudo.

O modelo de cálculo teórico utilizado (GSVATM), bem como ao aplicativo computacional Torque 2.0.1 associado a este modelo, permitiram uma simplificação no trabalho realizado e apresentado neste trabalho. Sendo que os resultados obtidos pelo modelo para as 3 divisões consideradas apresentaram uma variabilidade relativamente elevada, quando comparados com os resultados experimentais.

5.2. Conclusões

Seguem-se as principais conclusões obtidas ao longo deste trabalho.

Na primeira parte deste trabalho apresentou-se de forma simplificada a formulação do GSVATM. Este modelo teórico permite calcular a previsão do comportamento global de vigas de betão armado, com secção retangular cheia ou vazada, sujeitas à torção pura, designadamente através do cálculo e traçado da curva comportamental $T - \theta$.

Os procedimentos de cálculo adotados neste trabalho com o propósito de expandir o campo de aplicação do GSVATM para o tratamento de vigas de betão armado com secções “L” e “T” sujeitas à torção pura, nomeadamente para calcular a resistência última bem como o comportamento global à torção de vigas com este tipo de secção, baseiam-se no método proposto por Deifalla [16] para a análise de vigas do tipo “L” e “T” sujeitas unicamente à torção. Segundo esse método a secção transversal deste tipo de vigas é subdividida de três formas, como foi demonstrado na figura 3.2 (soluções I, II, III). Para cada subdivisão, cada subelemento retangular é tratado e analisado como uma viga retangular independente sujeita à torção. Depois de modelar e calcular estas vigas tendo por base o GSVATM, o qual é válido para secções retangulares, o princípio da sobreposição é aplicado de forma a ser possível a obtenção da curva teórica $T - \theta$ da viga com a secção original em estudo. Para tal, é assumido que, por compatibilização da deformação, o ângulo de torção da viga com a secção original e o das suas subdivisões deve ser o mesmo. Como tal, foram somados os momentos torsores de cada subdivisão correspondente a ângulos iguais. Essa soma foi feita a partir da listagem dos resultados obtidos no programa Torque 2.0.1 com o auxílio de uma folha de cálculo, tendo-se aplicado uma percentagem de erro entre os valores dos ângulos nunca superior a 5%, sendo a maioria desse erro inferior a 1%.

Para a validação do procedimento adotado e da sua utilização conjunta com o GSVATM no tratamento de vigas “L” e “T” à torção, foram pesquisados, na literatura científica, resultados experimentais resultantes do ensaio de vigas “L” e “T” à torção pura até a rotura. Pretendeu-se obter, para além dos momentos torsores resistentes, as curvas experimentais $T - \theta$ características do comportamento global das vigas ensaiadas, por forma a serem comparadas com as correspondentes curvas teóricas obtidas a partir do GSVATM. Além disso, também eram necessárias todas as características geométricas e mecânicas das vigas. Resumindo, foram aproveitadas para este estudo 8 vigas, sendo 7 do tipo “L” (LB1, LB2, LB3, LB4, LB5, BL1 e BK-T) e 1 viga do tipo “T” (TB1) sendo esta seleção limitada devido aos problemas referenciados na secção 3.3.

Neste trabalho foram ainda utilizados dois documentos normativos sendo estes o Regulamento português REBAP e o Código americano ACI 318R-89 apresentados no capítulo 3, para uma análise comparativa mais abrangente no cálculo do momento torsor resistente.

As análises comparativas das previsões tendo por base o GSVATM para as 3 divisões consideradas apresentaram uma variabilidade relativamente elevada, quando comparados com os com os escassos resultados experimentais disponíveis na literatura referentes a vigas de betão armado com secção “L” e “T” sujeitas à torção pura.

A partir desta análise comparativa observou-se o seguinte:

- Para os momentos torsores de fissuração, nenhum dos modelos teóricos baseados nas 3 divisões adotadas apresenta bons resultados para as vigas LB1, LB2 e TB-1 (Figuras 4.4, 4.5 e 4.11), encontrando-se este parâmetro bastante sobrestimados. Para as restantes vigas, observam-se melhores resultados para a 1ª e 3ª divisão, em particular para as vigas BL1 e BK-T (figuras 4.9 e 4.11) para as quais os valores teóricos e experimentais dos momentos torsores de fissuração são bastante próximos. Os resultados obtidos para a 2ª divisão mostram-se novamente bastante sobrestimados para todas as restantes vigas.
- Para os momentos torsores últimos, observa-se novamente uma grande variabilidade de resultados. Para a Viga LB1 e LB2 (figura 4.4 e 4.5), os modelos baseados na 1ª e 3ª divisão fornecem bons resultados sendo mais notório para a viga LB2 visto que na viga LB1 estes valores estão um pouco sobrestimados, enquanto que o modelo baseado na 2ª divisão sobrestima a resistência à torção da viga. Para BL1 (figura 4.9), todos os modelos teóricos sobrestimam a resistência à torção da viga. Para as restantes vigas, o modelo teórico baseado na 2ª divisão fornece agora os melhores resultados (em particular para as vigas LB3, LB4 e BK-T), enquanto que os modelos teóricos baseados na 1ª e 3ª divisão subestimam a resistência.
- As rotações obtidas a partir dos modelos teóricos são geralmente bastante sobrestimadas, particularmente para o estado último comportamental.

Não foi assim possível concluir sobre qual o procedimento a seguir para a melhor divisão da secção, visto que os resultados variaram de viga para viga e também em função do ponto da curva em análise (momento torsor de fissuração ou momento torsor resistente). Não foi também possível concluir sobre a validade do procedimento apresentado por Deifalla [16] para obter a curva $T - \theta$ global a partir das curvas individuais para cada subsecção, devido à variabilidade dos resultados anteriormente referido e também devido ao facto de, em geral, as rotações serem bastante sobrestimadas, particularmente na fase última comportamental.

Os resultados globais obtidos neste trabalho poderão dever-se ao facto do critério utilizado para obter a curva $T - \theta$ global, a partir das curvas calculadas para cada subsecção, não ser totalmente adequado, principalmente para baixos níveis de carregamento e também no que se refere ao método adotado para a compatibilização das rotações. É também de referir que a amostragem de vigas de referência analisadas foi bastante escassa. Além disso para algumas vigas existiram dúvidas sobre algumas características importantes para o cálculo do

seu comportamento teórico à torção. Acredita-se que este aspeto possa também ter fortemente contribuído para a variabilidade dos resultados obtidos.

Na análise comparativa entre os momentos torsores teóricos obtidos através do GSVATM e de cálculo obtidos através do REBAP e ACI 318R-89, com os respetivos valores experimentais, foi possível verificar que o REBAP é o que apresenta os valores mais conservativos quando comparados com os valores obtidos através do GSVATM e o ACI 318-89, sendo que os valores que apresentam melhores resultados são os obtidos por o GSVATM, com exceção das vigas LB1, LB5 e TB1 para as quais o ACI 318-89 apresenta melhores resultados.

Pode considerar-se que o presente trabalho constitui um avanço no domínio da torção na tentativa de simular as vigas do tipo “L” e “T” de betão armado sujeito à torção pura, designadamente através do GSVATM. No entanto, este trabalho deve continuar com vista a serem obtidas conclusões mais consensuais.

5.3. Proposta de trabalhos futuros

No seguimento do trabalho apresentado, considera-se importante o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Realização de mais ensaios experimentais de vigas de betão armado com secções “L”, “T” e “U” sujeitas à torção pura;
- Revisão do procedimento proposto em estudos anteriores para a compatibilização das subsecções com vista a retratar a resposta da secção original.

Referências

1. Abduljalil Ban S. and Dr. Sarsam Kaiss F. "Torsional Behavior of Reinforced Concrete T Beams Strengthened with CFRP Strips" Eng. & Tech Journal, Vol. 30. No.9. 2012, PP 1462-1482
2. ACI 440.1R-06. "Guide for the Design and Construction of 290 Structural Concrete Reinforced with GFRP Bars", ACI Committee 440, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich, 2006, pp 300. (citado em [16])
3. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-89) and Commentary (ACI 318R-89)", American Concrete Institute, Detroit, MI, 1989 (citado em [10])
4. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971 (citado em [29])
5. ACI, "Torsion of Structural Concrete (SP-18), American Concrete Institute, Detroit, Janeiro, 1968 (citado em [6 e 29])
6. Andrade, J.M.A., "Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2010
7. Belarbi, A. and Hsu, T.T.C., "Constitutive Laws of Softened Concrete Biaxial Tension-Compresion" Research Report UHCEE, Vol. 91(2), 1991 (citado em [29])
8. Belarbi, A.; Hsu, T. T. C., "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete", Strutural Jornal of American Concrete Institute, Vol. 91(4), 1994, pp. 465-474. (citado em [29])
9. Bernardo, L. F. A. ; Andrade, J. M. A. ;Oliveira, L. A. P., 2013 "Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion". Journal of Civil Engineering and Management, ISSN 1392-3730, Taylor and Francis, Vol. 19, Supplement 1, pp. S141-S152 .
10. Bernardo, L.F.A., "Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003
11. Bernardo, L.F.A., and Lopes, S.M.R., "Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams", Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, Junho 2008, pp.1143-1167
12. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., "Modified Variable Angle Truss-Model for Torsion in Reinforced Concrete Beams", Materials and Structures, Vol. 45, 2012, pp. 1877-1902

13. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., "Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study", *Engineering Structures*, Vol. 42, 2012, pp.278-296
14. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Nunes, N.C.G., "Generalized Softened Variable Angle Truss-Model for Reinforced Concrete Beams under Torsion", *Materials and Structures*, 2014, DOI: 10.1617/s11527-014-0301-z
15. CEB-FIP MODEL CODE 1990, Comité Euro-International du Béton, Suisse, 1990 (citado em [10])
16. Deifalla A. "Torsional Behavior of Flanged Concrete Beams with GFRP Stirrups" *Journal of Structural Engineering* (In Review)
17. Deifalla A., Awad A., Elgarhy M. "Effectiveness of externally bonded CFRP strips for strengthening flanged under torsion: Na experimental study" *Engineering Structures*, Elsevier, 56, 2013, PP 2065-2075
18. Deifalla A., Hamed M., Saleh A., Ali T. "Exploring GFRP bars as reinforcement for rectangular and L-shaped beams subjected to significant torsion: Na experimental study", *Engineering Structures*, Elsevier, 59,2014, pp. 776-786
19. Deifalla, A., Ghobarah, A. "Full torsional behavior of RC beams wrapped with FRP: analytical model." *ACSE, Composites for construction*, 14 (3), 2010, pp. 289-300
20. El-Kateb Mahmoud M., Abdel Rahman Amr A., Hassan Tarek K. "TORSIONAL STRENGTHENING OF REINFORCED CONCRETE BEAMS USING CFRP SHEETS" *Civil engineering Research Magazine CERM*, Al-Azhar University, 2013
21. EN 1992-1-1, "Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", Comité Europeu de Normalização, Bruxelas, Abril, 2004
22. Filho, J.J.H.S., "Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósitos de Fibras de Carbono", Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007
23. Hsu, T.T.C. and Mo, Y.L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests", *Journal of the American Concrete Institute*, 1985, Vol. 82, No. 4, pp. 443-452 (citado em [29])
24. Hsu, T.T.C., "Torsion of Reinforced Concrete", Van Nostrand Reinhold Company, 1984 (citado em [29])
25. Hsu, T.T.C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members" *Torsion of Structural Concrete SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306 (citado em [29])
26. INCM, "Regulamento de Estruturas de betão Armado e Pré-esforçado," Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa, 1983. (citado em [10])

27. Jeng, C. H. and Hsu, T.T.C., "A Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members", *Engineering Structures*, Vol. 31, 2009, pp. 1944-1954
28. Kaminski M. and Plawlak W. "Load capacity and stiffness of angular cross section reinforced concrete beams under torsion" *Archives of Civil and Mechanical Engineering* Volume 11, Issue 4, 2011, PP 885-903
29. Nobre, S.S., "Modelo Modificado de Treliza Espacial com Ângulo Variável Avaliação da Lei constitutiva do Betão à Tração para a Fissuração de Vigas de Betão Armado sujeitas à Torção", UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, Departamento de Engenharia Civil, Covilhã, 2014
30. Rausch, E. Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion). Ph.D. Thesis, Berlin. 1929. (em Alemão, citado em [22 e 6])
31. Shehab HK, El-Awady ME, Husain M, Sayed Mandour. "Behavior of concrete beams reinforced by FRP bars under torsion." In: *Proceedings of the 13th ICSGE*, Cairo, Egypt; 2009. p. 931-942
32. Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear", *IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete*, Delft, Final Report. 1981, pp. 211-225 (citado em [29])
33. Zhang, H.T.C. and Hsu, T.C., "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, 1998, pp. 24-34 (citado em [29])

