



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Ciências

**Classificação Parcial das Superfícies Regradas
Desenvolvíveis em \mathbb{R}^3**

Versão final após defesa

Domingos Esteves Manuel Quiluanje

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Pedro Jorge Duarte Gil Tomé dos Santos Morais

Covilhã, 7 de Agosto de 2018

Dedicatória

À minha Família,
o núcleo em que me fiz Humano,
a Quem só Deus sabe e pode pagar pelo tanto que me completa.

Agradecimentos

Na elaboração de um trabalho, o autor não é, nem objetiva, nem subjetivamente, o único a empreender nele todos os esforços. São muitos os que intervêm nele, de modo que, uma página pode revelar-se insuficiente para mencionar todos. A memória, com os seus limites, pode também atraí-los, levando-nos ao descuido de não citar alguns dos nomes. Peço, por conseguinte, as minhas mais sinceras desculpas a quem, tendo dado seu contributo, não venha a ser mencionado nesse impresso de papel.

Começo por agradecer a Deus por me permitir trilhar o caminho que hoje me traz aqui. Agradeço-Lhe por me acompanhar, ter dado coragem e resiliência para aguentar as lutas, beber de conhecimentos e de experiências.

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Jorge Duarte Gil Tomé dos Santos Morais, cuja orientação sábia, paciente e motivadora permitiu construir esse trabalho que agora se apresenta. Sou-lhe grato pelos diálogos diversificados, conselhos, ensinamentos e por me ter mostrado a beleza que a Geometria Diferencial impõe à vista do matemático.

Agradeço à direcção da Escola Superior Politécnica de Malanje, em especial ao Professor Infeliz Carvalho Coxe, por ser a pessoa que é e por ver nos jovens a força motriz para o florescer de qualquer sociedade; a minha presença aqui é, também e principalmente, fruto de sua acção objectiva e inspiradora. Agradeço também à Dra. Edna Rosa Tomás Kidiaca por me ter prestado ajuda sempre que precisei no início desta caminhada.

Expresso meus sentimentos de gratidão à direcção do Mestrado em Matemática para Professores da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira interior, de modo especial ao Professor Doutor Jorge Manuel dos Reis Gama e ao Professor Doutor Hélder Soares Vilarinho, que, de si, tudo deram para que a formação granjeasse os resultados preconizados. Estendo estes agradecimentos à Reitoria da Universidade da Beira Interior, cujo prestígio nacional e internacional, que tem sido provado e lhe colocado nos rankings entre as melhores universidades do mundo, espelha bem o acolhimento que presta aos alunos, a qualidade de formação que oferece e a notável componente social com que se caracteriza.

Jubilo-me pelo corpo docente do Mestrado que, com o seu saber, soube dar-nos de beber dos conhecimentos em matemática necessários ao desempenho da nossa profissão. Demais, soube despertar em nós (e falo particularmente de mim) elevado interesse pela Matemática e um aprendizado gozoso nesta área do saber.

Gratulo-me pela força e coragem que recebo constantemente da minha família, a pedra angular da minha existência. Aos meus pais: Esteves Quiluanje Júlio e Maria Cândida Domingos Manuel; aos meus irmãos: Fonseca Quiluanje, Ferrão Quiluanje, Augusto Quiluanje, Esteves Quiluanje, Ginga Quiluanje, Mateus Quiluanje, Cristina Quiluanje, Maria Quiluanje. Sou ainda grato à minha mulher, Josina Alexandre, e ao meu filho, Domingos Alexandre Quiluanje, por terem suportado a minha ausência prolongada por uma razão que agora se justifica. Por último, mas não necessariamente em último lugar, rejubilo-me pela companhia tão agradável e dócil que tive dos meus colegas do Mestrado. Ter convivido com estes foi uma oportunidade singular para trocar impressões, amadurecer e conjecturar o futuro. É uma família académica que, espero, se vá eternizando a cada instante.

Resumo

No conjunto de todas as superfícies, as superfícies regradas admitem parametrizações muito simples. Basta considerar uma curva e um campo vetorial ao longo dessa curva. A superfície é obtida movimentando as retas com a direção dada pelo campo de vetores ao longo da curva. Todas as superfícies regradas têm curvatura não positiva e têm em geral, como estamos a considerar superfícies parametrizadas, pontos singulares. Os exemplos mais simples de superfícies regradas são o plano, o cilindro e o cone. Além destas, temos ainda o hiperbolóide de uma folha, o helicóide, o parabolóide hiperbólico e a faixa de Möbius. O objectivo deste trabalho é apresentar uma classificação parcial de uma subclasse das superfícies regradas, as superfícies regradas desenvolvíveis. Assim, depois da introdução, nos quatro capítulos seguintes estudamos algumas ferramentas que nos permitem atingir o objetivo preconizado, tais como: as curvas parametrizadas e o conceito de curvatura de uma curva, as noções elementares sobre superfícies, as formas fundamentais e a aplicação de Gauss que nos permite estudar a curvatura Gaussiana de uma superfície parametrizada. No último capítulo, o principal, apresentamos alguns conceitos de superfícies regradas parametrizadas e um teorema de classificação parcial. Mostramos que as superfícies regradas têm curvatura de Gauss não positiva nos seus pontos regulares e, no caso de existirem pontos singulares na superfície, a curvatura Gaussiana é nula ao longo das geratrizes que intersectam estes pontos. Se a superfície regradada é desenvolvível a curvatura de Gauss é identicamente nula em todos os pontos regulares. Por fim, ressaltamos que o teorema apresentado permite-nos classificar "parcialmente" e não todas as superfícies desenvolvíveis. Por exemplo, se o conjunto dos zeros das funções envolvidas na superfície têm um ponto de acumulação, então a superfície regradada desenvolvível não está classificada pelo teorema estudado. No entanto, reafirmamos que longe dos pontos de acumulação, uma superfície regradada desenvolvível é uma união de pedaços de cilindros, cones ou superfícies tangentes.

Palavras-chave: Curvas parametrizadas. Superfícies regradas parametrizadas. Curvaturas. Classificação parcial.

Abstract

On the set of all surfaces, the ruled surfaces allow very simple parametrizations. One may just consider a curve and a vector field along this curve. The surface is obtained by moving the straight lines with the direction given by the field of vectors along the curve. All ruled surfaces have non-positive curvature and generally have, as we are considering parametrized surfaces, singular points. The simplest examples of ruled surfaces are the plane, the cylinder, and the cone. Besides these, we also have the hyperboloid of one leaf, the helicoid, the hyperbolic paraboloid and the Möbius strip. The aim of this work is to present a partial classification of a subclass of the ruled surfaces, the developable ruled surfaces. Thus, after the introduction, in the next four chapters we have studied some tools that allow us to achieve the objective we have proposed, such as: parametrized curves and the concept of the curvature of a curve, elementary notions about surfaces, fundamental forms and the Gauss application that allows us to study the Gaussian curvature of a parametrized surface. In the last chapter, the main one, we present some concepts of parametrized ruled surfaces and a partial classification theorem. We show that the ruled surfaces have non-positive Gaussian curvature at their regular points and, in the case of singular points on the surface, the Gaussian curvature vanishes along the generators that intersect these points. If the ruled surface is developable the Gaussian curvature is identically zero at all regular points. Finally, we emphasize that the theorem presented allows us to classify "partially" and not all developable surfaces. For example, if the set of zeros of the functions involved in the surface have a point of accumulation, then the developable ruled surface is not classified by the theorem studied. However, let us reaffirm that far from the points of accumulation, a developable ruled surface is a union of pieces of cylinders, cones or tangent surfaces.

Keywords: Parametrized curves. Parametrized ruled surfaces, Curvatures. Partial classification.

Conteúdo

Introdução	1
1 Curvas no Espaço	3
1.1 Curvas parametrizadas	3
1.2 Curvatura	7
2 Noções Elementares sobre Superfícies	11
2.1 Noção intuitiva de superfícies no mundo físico	11
2.2 Conceito de superfície regular	11
2.2.1 Conceito de superfície parametrizada regular	13
2.3 Plano Tangente	15
3 Primeira Forma Fundamental. Métricas sobre superfícies	17
3.1 Comprimentos	19
3.2 Ângulos	20
3.3 Áreas	22
4 Aplicação Normal de Gauss e Segunda Forma Fundamental	27
4.1 Curvaturas	30
4.1.1 Curvatura de Gauss em coordenadas	31
5 Superfícies regradadas	37
5.1 Exemplos de superfícies regradadas parametrizadas	37
5.2 Curva de estrição	44
5.2.1 Exemplos de curvas de estrição de algumas superfícies regradadas	46
5.3 Curvatura Gaussiana de Superfícies regradadas	48
5.4 Interpretação geométrica da curva de estrição	51
5.5 Superfícies regradadas desenvolvíveis	52
5.5.1 Classificação parcial das superfícies regradadas desenvolvíveis	63
Considerações finais	65
Bibliografia	67

Lista de Figuras

1.1	Elipse.	3
1.2	Hipérbole.	3
1.3	Circunferência.	3
1.4	Triedro de Frenet ao longo da hélice circular.	8
2.1	Esfera.	13
4.1	Classificação dos pontos do toro.	35
5.1	Cilindro generalizado.	38
5.2	Cilindro generalizado.	38
5.3	Cone generalizado.	39
5.4	Cone generalizado.	39
5.5	Hiperbolóide de uma folha.	40
5.6	Helicóide.	41
5.7	Parabolóide hiperbólico.	42
5.8	Superfície tangente da hélice.	43
5.9	Faixa de Möbius.	43
5.10	Superfície tangente da circunferência.	56
5.11	Superfície normal principal da circunferência.	56
5.12	Superfície binormal da circunferência (cilindro).	57
5.13	Superfície tangente da hélice.	58
5.14	Superfície normal principal da hélice.	59
5.15	Superfície binormal da hélice.	59

Introdução

No nosso quotidiano, lidamos com formas geométricas que nos permitem intuir sobre superfícies. No ramo da engenharia e da arquitetura, numerosas e maravilhosas construções apresentam-se à nossa vista e, diante disso, ficamos admirados e maravilhados a contemplá-las. Em Matemática, mais precisamente na área da Geometria Diferencial o matemático ocupa-se, essencialmente, ao estudo de propriedades destes objectos geométricos aplicando à Geometria conceitos e técnicas do cálculo diferencial e da álgebra. Este trabalho apresenta o estudo de algumas propriedades locais de uma classe especial de superfícies chamadas Superfícies Regradas. Por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependam apenas do comportamento da superfície na vizinhança de um ponto. Como os métodos a aplicar derivam do cálculo diferencial, é natural que se considerem superfícies definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. Não obstante o trabalho estar direccionado a superfícies, as curvas aparecem de forma natural ao longo do estudo, pelo que apresentamos necessariamente um capítulo dedicado ao estudo breve de algumas propriedades locais das curvas no espaço euclidiano tridimensional.

Uma superfície regradada é parametrizada por uma curva e um conjunto de retas definidas por um campo vetorial ao longo dessa curva. O estudo desta classe especial de superfícies é um assunto clássico da Geometria Diferencial e tem despertado a atenção de outras áreas do conhecimento, como por exemplo, Computação Gráfica e Desenho Industrial. Os exemplos mais simples de superfícies regradadas são o plano, o cilindro e o cone, mas, além destas, temos ainda o hiperbolóide de uma folha, o helicóide, o parabolóide hiperbólico, a superfície tangente de uma curva regular e a faixa de Möbius.

O objectivo desta dissertação é apresentar uma classificação parcial de uma subclasse das superfícies regradadas, as superfícies regradadas desenvolvíveis. Esta subclasse das superfícies regradadas tem uma particularidade que a distingue das demais superfícies regradadas: apresenta a curvatura Gaussiana identicamente nula em seus pontos regulares e, conseqüentemente, o plano tangente em todos os pontos de uma geratriz fixada da superfície é constante. Assim, iremos apresentar alguns resultados importantes que nos servirão de ferramentas para classificar essa subclasse de superfícies regradadas.

Deste modo, o trabalho está estruturado por 5 capítulos, além da introdução e considerações finais. No capítulo 1 começamos por construir uma ideia intuitiva sobre curvas como conjunto de pontos no espaço euclidiano com dimensão 1 e, formalmente, como a trajetória contínua descrita pelo movimento de um ponto no espaço. São apresentadas definições sobre curvas parametrizadas regulares, reparametrização, vetor velocidade e o conceito de curvatura.

No capítulo 2 estudamos as noções elementares sobre superfícies, do ponto de vista local, começando por apresentar a noção intuitiva do que pode ser pensado como uma superfície no mundo físico, dando alguns exemplos do quotidiano. De seguida, estudamos o conceito de superfície regular e o plano tangente à superfície. É importante comentarmos que o conceito de superfície regular como subconjunto de \mathbb{R}^3 é útil quando queremos estudar tanto as propriedades locais como as propriedades globais das superfícies. Entretanto, como referimos atrás, o nosso foco consiste apenas em propriedades locais das superfícies, sendo, por isso, suficiente o conceito de superfície parametrizada regular. Além do mais, enquanto que as superfícies regulares não admitem auto-interseções, nas superfícies parametrizadas regulares essa restrição não é imposta.

No capítulo 3 caracterizamos uma estrutura geométrica chamada primeira forma fundamental que é obtida restringindo o produto interno usual do espaço \mathbb{R}^3 ao plano tangente da superfície, por meio da qual estudamos algumas propriedades métricas associadas à teoria local de superfícies

como é o caso da determinação de comprimentos de curvas contidas em superfícies, ângulos entre duas curvas que se intersectam e áreas de regiões da superfície. Os exemplos são apresentados de forma a concretizarem os conceitos, sendo que alguns destes exemplos são resultado da resolução de alguns exercícios propostos por [8]. Apresentamos ainda uma demonstração para o Teorema de Pappus que permite calcular a área de uma superfície de revolução, através de uma fórmula que envolve a constante 2π e o conhecimento da distância do ponto correspondente ao comprimento de arco da curva directriz ao eixo de rotação da superfície.

Quanto ao capítulo 4, o objetivo é caracterizar a curvatura de superfícies parametrizadas regulares, para tal, apresentamos a taxa de variação de um campo normal unitário na vizinhança de um ponto da superfície dada por uma aplicação linear auto-adjunta. Ao campo normal unitário de uma superfície que toma valores na esfera unitária denominamos aplicação normal de Gauss. À aplicação linear auto-adjunta associamos uma forma quadrática chamada segunda forma fundamental que nos leva aos conceitos de curvatura normal, curvatura de Gauss e curvatura média.

O quinto capítulo aborda o tópico principal deste trabalho, as superfícies regradas. Baseamo-nos em [3, 5, 9] para apresentar a teoria sobre essa classe de superfícies, sendo que nalguns conceitos quisemos seguir uma perspectiva nossa voltada para a componente didática e sistematizada. Começamos por apresentar algumas definições sobre superfícies regradas parametrizadas regulares e alguns exemplos, apresentamos também uma curva especial designada curva de estrição onde se situam os pontos singulares da superfície, caso existam, e outras importantes propriedades desta curva bem como alguns exemplos. Nas secções subsequentes deste capítulo apresentamos o teorema que diz que a curvatura de uma superfície regrada nos seus pontos regulares é sempre não positiva e é nula apenas ao longo das geratrizes que intersectam a sua curva de estrição em um ponto singular. Definimos superfície regrada desenvolvível, caracterizamos a curvatura das superfícies regradas desenvolvíveis como sempre nula ao longo dos seus pontos regulares, estudamos algumas superfícies associadas a uma curva regular com curvatura não nula e as condições impostas à directriz para que estas superfícies sejam desenvolvíveis, apresentamos um exemplo de construção de uma superfície regrada desenvolvível chamada envoltória de planos tangentes a uma superfície e, finalmente, apresentamos o teorema da classificação parcial das superfícies desenvolvíveis que determina as condições para que uma superfície regrada desenvolvível seja um cilindro, uma superfície tangente de uma curva regular ou um cone. Conclusivamente, este teorema diz que, longe dos pontos de acumulação dos zeros das funções envolvidas numa superfície regrada desenvolvível, uma superfície regrada desenvolvível é uma união de pedaços de cilindros, superfícies tangentes e cones.

Capítulo 1

Curvas no Espaço

Neste capítulo faremos um breve estudo de algumas propriedades locais de curvas no espaço [6, 8] na medida em que algumas dessas propriedades aparecem descritas de maneira natural no estudo de superfícies e auxiliam a compreensão de muitas propriedades de superfícies que pretendemos estudar. Todos temos uma ideia intuitiva do que é uma curva, podemos pensá-la como um conjunto de pontos no plano ou no espaço com dimensão igual a 1. Neste sentido, uma curva pode ser representada por meio do gráfico de uma função vetorial de uma variável real, uma figura desenhada continuamente com um lápis sem retirá-lo do papel, ou podemos ainda pensar numa curva como a descrição da trajetória do movimento contínuo duma partícula no espaço. Assim, uma curva pode representar uma reta, circunferência, elipse, parábola, hipérbole ou qualquer outro traço obtido seguindo o procedimento mencionado. Muitas curvas podem ser descritas com equações cartesianas; algebricamente, temos, por exemplo $y = x = z$ que representa uma reta, $y = 2x^2, z = 0$ que representa uma parábola, $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ que representa uma circunferência de raio unitário, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 0$ que representa uma elipse.

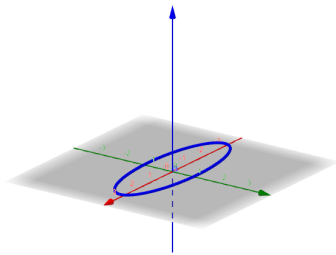


Figura 1.1: Elipse.

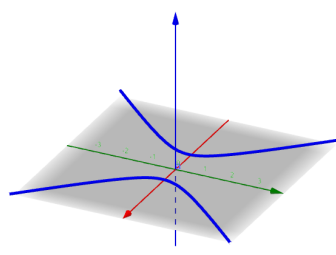


Figura 1.2: Hipérbole.

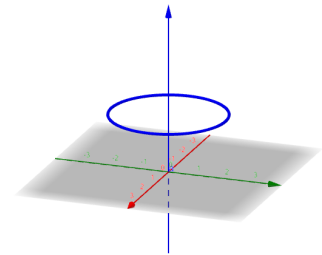


Figura 1.3: Circunferência.

Uma curva pode, entretanto, apresentar-se de várias formas e nem sempre é possível descrevê-la por meio de uma equação cartesiana. Mais, dependendo do estudo que se pretende fazer da curva, determinada representação pode ser mais útil do que outra. Portanto, no contexto da Geometria Diferencial, consideraremos uma curva como a trajetória contínua descrita por um ponto no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Para tal, no lugar de consideramos curvas descritas por equações cartesianas, consideraremos curvas parametrizadas por funções diferenciáveis de modo que se possam aplicar as técnicas de cálculo diferencial para o estudo do seu comportamento.

1.1 Curvas parametrizadas

Definição 1.1.1. Uma *curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação diferenciável

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de um intervalo conexo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 .

Na definição apresentada, o ser diferenciável significa que as funções coordenadas de α definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, são funções reais diferenciáveis. À variável t chamamos o *parâmetro da curva* α . A derivada de primeira ordem de α

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$$

chamamos *vetor tangente* ou *vetor velocidade* da curva α em $t \in I$. O *traço* da curva α é o conjunto $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$. Observe que uma curva parametrizada é uma aplicação diferenciável e o seu traço é um subconjunto de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.1.1. A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem por traço uma hélice sobre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano xy . O vetor tangente é dado por $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$.

Definição 1.1.2. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t no intervalo conexo e aberto $I \subseteq \mathbb{R}$.

A condição de regularidade imposta ao vetor tangente, $\alpha'(t) \neq 0$, da curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ garante a existência de uma reta bem definida passando pelo ponto $\alpha(t)$ na direção do vetor $\alpha'(t)$, a *reta tangente*. O estudo de muitas propriedades importantes das curvas em Geometria Diferencial depende, em grande medida, da existência de uma reta tangente em todos os pontos do intervalo I . Os pontos $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ tais que $\alpha'(t) = 0$, são chamados *pontos singulares* de α . Vamos restringir o nosso estudo às curvas que não têm pontos singulares, ou seja, às curvas regulares.

Definição 1.1.3. Dizemos que a curva $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *suave* se as suas funções coordenadas são funções de classe $C^\infty(I)$.

Para o nosso estudo, consideraremos, de agora em diante, curvas suaves parametrizadas regulares. Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada definida por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

J um intervalo de \mathbb{R} e $h: J \rightarrow I$ uma função de classe $C^\infty(J)$. Consideremos uma nova curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva β é uma curva parametrizada suave e o seu traço está contido no traço da curva α .

Definição 1.1.4. Nas condições acima, se h é estritamente monótona, isto é, $h'(t) \neq 0$, e sobrejectiva, dizemos que a curva β é uma *reparametrização* da curva α e dizemos que a função h é a *mudança de parâmetro*.

Observe que se β é uma reparametrização de α , os traços de β e α são iguais.

Derivando a igualdade $\beta(t) = \alpha(h(t))$, obtemos

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t)) h'(t).$$

Portanto, a *velocidade escalar*, isto é, a norma do vetor velocidade da curva β é

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|.$$

Assim, se α é uma curva regular as suas reparametrizações também o são. Dizemos que a reparametrização β é uma reparametrização *positiva ou que preserva a orientação* de α se h é estritamente crescente. No caso em que h é estritamente decrescente, dizemos que β é uma reparametrização *negativa ou que reverte a orientação* de α . Quando pretendemos estudar a geometria das curvas é importante ter em conta a sua velocidade. Por exemplo, se nos deslocarmos de carro a alta velocidade, teremos dificuldade em efectuar algumas curvas, o que não acontecerá se a velocidade for menor. Este facto, como se percebe, não está relacionado com a geometria da curva, mas sim com a velocidade do movimento. Torna-se assim importante “normalizar” a velocidade. Este processo é feito reparametrizando as curvas de forma a que a sua velocidade seja constante, como veremos mais adiante.

Definição 1.1.5. Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $a \in I$. À função $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2 + (z'(\xi))^2} d\xi$$

chamamos *função comprimento de arco* a partir do ponto a .

Observemos que se $b \in I$ é um ponto distinto de a então,

$$s_b(t) = \int_b^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi + \int_b^a \|\alpha'(\xi)\| d\xi = s_a(t) + k,$$

onde $k = \int_b^a \|\alpha'(\xi)\| d\xi \in \mathbb{R}$. Em particular

$$s'_b(t) = s'_a(t), \forall t \in I.$$

Por esta razão, omitiremos o ponto de partida da função s na maior parte dos resultados seguintes. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|, \forall t \in I$$

e como estamos a assumir que α é regular em I , concluímos que s é de classe $C^\infty(I)$. Para $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I$, chamamos *comprimento de arco* entre os pontos t_1 e t_2 ao número

$$s(\alpha[t_1, t_2]) = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Definição 1.1.6. Dizemos que a curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se o parâmetro $t \in I$ é, a menos de constante, igual a $s(t)$, isto é,

$$s(t) = t + c, c \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.1.1. Uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por comprimento de arco se, e só se,

$$\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1.$$

Demonstração: Se α está parametrizada pelo comprimento de arco, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $s(t) = t + c$. Portanto,

$$s'(t) = 1 = \|\alpha'(t)\|, \forall t \in I.$$

Reciprocamente, se $\|\alpha'(t)\| = 1$

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t - a,$$

e, portanto, α está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Proposição 1.1.2. Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada, $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α e $t_1, t_2 \in J$. Então, o comprimento de arco de α entre $h(t_1)$ e $h(t_2)$ é igual ao comprimento de arco de β entre t_1 e t_2 onde h é a *mudança de parâmetro* associada à reparametrização β .

Demonstração: Tendo em conta que $\beta = \alpha \circ h$, o comprimento de arco de β entre t_1 e t_2 é igual a

$$\begin{aligned} s(\beta[t_1, t_2]) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\beta'(\xi)\| d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(h(\xi))h'(\xi)\| d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(h(\xi))\| |h'(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Se $h'(t) > 0 \quad \forall t \in J \subseteq \mathbb{R}$, isto é, h é crescente, temos

$$s(\beta[t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(h(\xi))\| |h'(\xi)| d\xi = \int_{h(t_1)}^{h(t_2)} \|\alpha'(u)\| du = s(\alpha[h(t_1), h(t_2)]).$$

Se $h'(t) < 0 \quad \forall t \in J \subseteq \mathbb{R}$, isto é, h é decrescente, teremos

$$\begin{aligned} s(\beta[t_1, t_2]) &= - \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(h(\xi))\| |h'(\xi)| d\xi \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \|\alpha'(h(\xi))\| |h'(\xi)| d\xi \\ &= \int_{h(t_2)}^{h(t_1)} \|\alpha'(u)\| du = s(\alpha[h(t_2), h(t_1)]). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.1.1. Toda curva regular parametrizada $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser reparametrizada por comprimento de arco. Mais concretamente, existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}, 0 \in J$ e uma bijeção $h: J \rightarrow I$ suave, de modo que a curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ satisfaça $\|\beta'(s)\| = 1$.

Demonstração: Como α é regular, a função comprimento de arco, $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi, a \in I$, satisfaz $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Logo a função s é invertível com inversa diferenciável. Seja $J = s(\alpha(I))$. Vamos mostrar que a curva β definida em J por

$$\beta(u) = (\alpha \circ s^{-1})(u)$$

está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito, atendendo ao Teorema da Função Inversa, vem

$$s^{-1}'(u) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))} = \frac{1}{\|\alpha'((s^{-1}(u)))\|}.$$

Uma vez que $\beta(u) = (\alpha \circ s^{-1})(u)$, temos que $\beta'(u) = (\alpha'(s^{-1}(u))s^{-1}'(u))$, pelo que

$$\|\beta'(u)\| = \|(\alpha'(s^{-1}(u))s^{-1}'(u))\| = 1.$$

Como queríamos demonstrar. ■

1.2 Curvatura

Dada uma curva no plano, vamos definir o conceito de curvatura como o número real não negativo que mede a variação do ângulo das retas tangentes à curva em relação a uma reta tangente fixa. Para tal, considerando uma curva parametrizada por comprimento de arco, α , o seu vetor tangente $\alpha'(s)$ é unitário, portanto, pode ser escrito da forma $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Portanto a segunda derivada será $\alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$. Logo, a norma da segunda derivada, $|\theta'(s)|$ dá-nos a taxa de variação do ângulo referido. Essa ideia pode ser generalizada para o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

Definição 1.2.1. Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Chamamos *curvatura* de α em $s \in I$ ao número real não negativo

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Se a curva α não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura de α é a curvatura de uma reparametrização β de α pelo comprimento de arco no ponto correspondente.

É importante observar que a definição de curvatura não depende da parametrização da curva. Para cada valor do parâmetro s vamos definir três vetores unitários e ortogonais, $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$, que formam uma base ortonormada

$$\{t(s), n(s), b(s)\}.$$

Esse triedro, dado nessa forma, é chamado *Triedro de Frenet*.

Definição 1.2.2. Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que $k(s) \neq 0$. Ao vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

chamamos *vetor normal* a α em s . A *reta normal* a α em $s_0 \in I$ é a reta que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e tem a direção do vetor normal $n(s_0)$.

Denotando $t(s) = \alpha'(s)$, teremos $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{t'(s)}{k(s)}$, o que implica $t'(s) = k(s)n(s)$. O plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$ é chamado *plano osculador*. O vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ é normal ao plano osculador e chama-se *vetor binormal* em s . Como o vetor $b(s)$ é unitário, a norma da sua derivada, $\|b'(s)\|$, indica quão rapidamente a curva se afasta, numa vizinhança de s , do plano osculador em s .

Na figura seguinte, ilustra-se o triedro de Frenet.

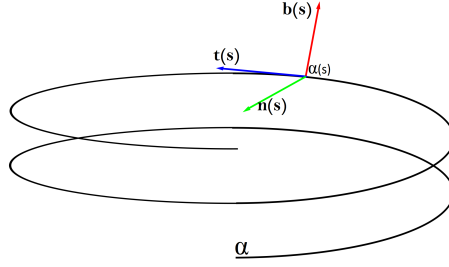


Figura 1.4: Triedro de Frenet ao longo da hélice circular.

A seguir, vamos calcular a derivada de $b(s)$. Sendo $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$, temos: $\langle b'(s), b(s) \rangle + \langle b(s), b'(s) \rangle = 0 \implies \langle b'(s), b(s) \rangle = 0$, então, $b'(s) \perp b(s)$. Por outro lado, $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ implica que

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = k(s) \underbrace{n(s) \wedge n(s)}_{=0} + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s),$$

isto é, $b'(s) \perp t(s)$. Resulta que o vetor $b'(s)$ é colinear com $n(s)$ e pode ser escrito

$$b'(s) = \tau(s)n(s).$$

Definição 1.2.3. Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado *torção* de α em s .

Observe que alguns autores escrevem $-\tau(s)$ ao invés de $\tau(s)$.

Na prática, a torção é calculada pela fórmula: $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$, pois, $n(s)$ é unitário. Se, para todo $s \in I$, α está contida num plano, isto é, se for uma curva plana, então o plano da curva coincide com o plano osculador e, conseqüentemente, $\tau \equiv 0$. Reciprocamente, se $\tau \equiv 0$, com $k \neq 0$, temos que $b(s) = b_0$, ou seja, $b(s)$ é constante. Desta forma, $\alpha(s)$ está contida no plano normal a b_0 .

Como ficou visto, as derivadas de $t(s)$ e $b(s)$, respetivamente, $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b'(s) = \tau(s)n(s)$, fornecem a curvatura e a torção da curva. Essas entidades geométricas informam sobre o comportamento da curva α em uma vizinhança de s .

Quando se quer estudar outras características geométricas, torna-se necessário estudar a variação de $n(s)$. Assim, como $n(s) = b(s) \wedge t(s)$, temos:

$$\begin{aligned} n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\ &= \tau(s)n(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge k(s)n(s) \\ &= -\tau(s)t(s) \wedge n(s) - k(s)n(s) \wedge b(s) \\ &= -\tau b(s) - k(s)t(s), \end{aligned}$$

obtendo novamente a curvatura e a torção.

Portanto, as derivadas dos vetores do triedro de Frenet são:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases}$$

que podem ser representadas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

Suprimimos, por comodidade, o parâmetro s .

Estas derivadas são chamadas *fórmulas de Frenet*.

O próximo resultado fornece a expressão que nos permite calcular a curvatura de uma curva no espaço, não necessariamente parametrizada por comprimento de arco.

Proposição 1.2.1. Seja $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada, não necessariamente pelo comprimento de arco. Então, a curvatura de α é dada por

$$k(t) = \frac{\|\alpha(t)' \wedge \alpha(t)''\|}{\|\alpha(t)'\|^3}.$$

Demonstração: Como α é regular, podemos reparametrizar α pelo comprimento de arco. Seja β essa reparametrização. Temos por construção, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$. Derivando em relação a t ambos os membros desta igualdade obtemos:

$$\beta'(s(t))s'(t) = \alpha'(t).$$

Derivando novamente,

$$\beta''(s(t))s'^2(t) + \beta'(s(t))s''(t) = \alpha''(t).$$

Façamos agora o produto vetorial de $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$. Temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \beta'(s(t))s'(t) \wedge (\beta''(s(t))s'^2(t) + \beta'(s) s''(t)) \\ &= \beta'(s(t))s'(t) \wedge \beta''(s(t))s'^2(t) + \beta'(s(t))s'(t) \wedge \beta'(s(t))s''(t) \\ &= s'^3(t)\{\beta'(s) \wedge \beta''(s)\} + s'(t)s''(t) \underbrace{\{\beta'(s(t)) \wedge \beta'(s(t))\}}_{=0, \text{prop. prod. vetorial}} \\ &= s'^3(t)\{\beta'(s) \wedge \beta''(s)\} \end{aligned}$$

Fazendo o módulo e aplicando outra vez propriedades do produto vetorial, teremos

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = |s'^3(t)| \|\beta'(s(t)) \wedge \beta''(s(t))\| = |s'^3(t)| \|\beta'(s(t))\| \|\beta''(s(t))\| \sin \gamma,$$

sendo γ o ângulo formado pelos vetores $\beta'(s)$ e $\beta''(s)$. Dado que β é uma reparametrização por comprimento de arco da curva α , vale o produto interno $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$. Derivando, obtemos

$$\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0.$$

Isto é, $\beta'(s) \perp \beta''(s)$. Aplicando esta relação acima, vem

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = |s'^3(t)| \|\beta'(s)\| \|\beta''(s)\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Mas, $\|\beta'(s)\| = 1$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, o que resulta em

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = |s'^3(t)| \|\beta''(s)\|. \quad (1.1)$$

Agora, atentemos para o seguinte: pelas condições dadas, consideramos a função comprimento de arco $s = s(t)$ medido a partir de algum $t_0 \in I$, dada pela expressão $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$. Temos que $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \iff s'^3(t) = \|\alpha'(t)\|^3$. Sabemos que a curvatura de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é igual à norma da sua aceleração; assim, a curvatura da curva $\beta(s)$ é dada por $k(s) = \|\beta''(s)\|$. Substituindo em (1.1), temos

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \|\alpha'^3(t)\| k(s).$$

Finalmente, como por definição $k(t) = k(s)$,

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'^3(t)\|}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 2

Noções Elementares sobre Superfícies

2.1 Noção intuitiva de superfícies no mundo físico

Antes de estudarmos formalmente as superfícies, vamos fazer uma incursão intuitiva na vida prática para observarmos os objectos físicos que nos dão a ideia dos objetos matemáticos que chamamos de superfícies [10].

- Tome uma folha de papel qualquer, coloque-a sobre uma mesa. Observará que tanto a folha de papel quanto a mesa dão a ideia de superfície;
- No quotidiano encontramos um grande número de objetos que nos dão a ideia de superfície: câmaras de ar dos pneus de carros, vasos decorativos, bolas de festas infantis, bolas de futebol, chapéus de palhaços, canos utilizados na construção. Observando todos esses objetos do mundo material, deduz-se que eles podem ser agrupados em classes de superfícies com as mesmas propriedades e estruturas. Uma fábrica de vasos, por exemplo, para produzir uma quantidade enorme destes objetos de modo que sejam idênticos, deve conhecer as características e propriedades comuns entre eles. O mesmo serve para a fábrica de bolas de pingue-pongue, de bolas de futebol e mesmo de automóveis.

2.2 Conceito de superfície regular

Neste trabalho, o nosso interesse recai para superfícies em \mathbb{R}^3 . Sem fugir da noção intuitiva apresentada acima, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida por meio de pedaços de planos, deformando-os e colando-os uns aos outros, tais que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções. Procedendo desta forma, será possível falar-se em plano tangente nos pontos desta figura. Mais ainda, será possível definir um conjunto, em certo sentido, bidimensional, suave que permita estender as noções usuais de cálculo a um tal conjunto. Isso permite aplicar as técnicas de cálculo diferencial para estudar as propriedades geométricas locais de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Para o efeito, falaremos sobre superfície regular e, depois, introduziremos o conceito de superfície parametrizada de modo análogo ao de curvas. Assumiremos que temos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 e consideraremos uma função

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis (u, v) que variam em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Deste modo, para cada par $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . Denotaremos por S o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u, v)$ e nos restringiremos ao estudo de superfícies que em cada ponto é possível determinar um plano tangente.

Definição 2.2.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$ existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X_p: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que sejam satisfeitas as três condições seguintes:

1. X_p é de classe $C^\infty(U)$. Isso significa que se escrevermos

$$X_p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;

2. A aplicação X_p é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, ou seja, X possui uma inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua;

3. Para todo $q = (u, v) \in U$, a derivada de X em q , $d(X_p)_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetiva.

Às variáveis (u, v) chamamos os parâmetros da superfície e à aplicação X_p chamamos parametrização de S no ponto p . A condição 1 permite-nos fazer geometria diferencial na superfície S . A condição 2 garante a injetividade, impondo que a aplicação X seja um homeomorfismo, e exclui a possibilidade de haver auto-interseções em superfícies regulares. Isso é necessário se queremos garantir a existência de um plano tangente em um ponto p de S . Na condição 3, as derivadas parciais de X calculadas em $q \in (u, v)$, $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ que denotaremos, respectivamente, por X_u e X_v , que são os vetores coluna da matriz jacobiana, são linearmente independentes. Esta condição exclui a possibilidade de haver pontos singulares e garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S . Omitiremos o índice da parametrização sempre que esteja explícito o ponto em questão. Se a aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de S em $p = X(u_0, v_0)$, então as curvas

$$u \mapsto X(u, v_0), \quad v \mapsto X(u_0, v)$$

são chamadas curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) cujos vetores tangentes são, respectivamente $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Exemplo 2.2.1. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular. Vamos mostrar que é possível definir, para cada ponto $p \in S^2$, uma parametrização satisfazendo as três condições da definição.

Seja $X_1: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função definida por $X_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right)$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u^2 + v^2 < 1\}$. Podemos observar que a imagem da aplicação X_1 é a parte aberta de S^2 acima do plano xy . Portanto, X_1 é uma parametrização da esfera S^2 . A condição $u^2 + v^2 < 1$ permite que a função $\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$ tenha derivadas parciais contínuas de qualquer ordem; portanto, a condição 1 está satisfeita. Considerando qualquer ponto $(x, y, z) \in X_1(U) \subset S^2$, com

$$X_1(U) = \{(x, y, z) \in S^2: x^2 + y^2 < 1, z > 0\} \subset S^2$$

e fazendo $X_1^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$, teremos (u, v) bem definido de maneira única por $u = x$ e $v = y$. Assim, X_1 é bijetiva e X_1^{-1} é a restrição da projeção contínua de $X_1(U) \subseteq S^2$ em U . A segunda condição está satisfeita.

Quanto à terceira condição, basta verificar que

$$X_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}}\right)$$

e

$$X_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}}\right).$$

são vetores linearmente independentes.

Definindo $X_2: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), (u, v) \in U,$$

verificamos que X_2 é uma parametrização e a união $X_1(U) \cup X_2(U)$ cobre a esfera menos o equador $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

Utilizando os planos xOz e zOy , definimos as restantes parametrizações que, juntamente com X_1 e X_2 , cobrem toda a esfera:

$$X_3(u, v) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$$

$$X_5(u, v) = (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v), X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v).$$

Mostramos, portanto, que a esfera S^2 é uma superfície regular.

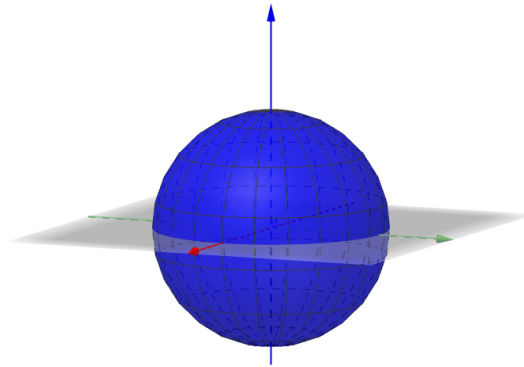


Figura 2.1: Esfera.

2.2.1 Conceito de superfície parametrizada regular

O conceito de superfície parametrizada regular em \mathbb{R}^3 vai ser apresentado de modo análogo ao de curvas. Consideraremos um sistema de coordenadas x, y, z em \mathbb{R}^3 e uma função

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

de duas variáveis u, v que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Nesse caso, para cada par $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . Como a nossa intenção é estudar as propriedades locais das superfícies, isto é, as propriedades que se obtêm na vizinhança de um ponto, é suficiente considerarmos superfícies parametrizadas regulares. A vantagem destas superfícies é que, mesmo quando são regulares, podem ter traços com auto-interseções. Queremos aplicar as técnicas de cálculo diferencial ao estudo deste tipo de superfícies, por isso, vamos ter em conta a diferenciabilidade de X e vamos restringir-nos ao estudo de superfícies que admitam um plano tangente em cada ponto.

Definição 2.2.2. Uma *superfície parametrizada* $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $X(U)$ é chamado de *traço de X* . Dizemos que X é regular se a derivada, $dX: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetiva para todo $q \in U$. Um ponto p onde dX_p não é injetiva é chamado um *ponto singular* de X .

Com a proposição a seguir, pretendemos mostrar que podemos expandir os conceitos e propriedades locais da Geometria Diferencial a superfícies parametrizadas regulares, como havíamos dito anteriormente.

Proposição 2.2.1. Sejam $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q \in U$. Então existe uma vizinhança V do ponto q em U tal que $X(V)$ é uma superfície regular.

Demonstração:

Escrevendo

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

pela condição de regularidade, podemos supor que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, onde $(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)})(q)$ representa o jacobiano de X . Defina a aplicação $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\det(dF_q) = (\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)})(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças W_1 de q e W_2 de $F(q)$, tais que $F: W_1 \rightarrow W_2$ é um difeomorfismo. Seja $V = W_1 \cap U$ e observe que a restrição $F|V = X|V$. Nessas condições, $X(V)$ é difeomorfo a V e, portanto, uma superfície regular. ■

Exemplo 2.2.2. (*Superfície parametrizada*)

Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular do espaço \mathbb{R}^3 . Definindo

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R},$$

obtemos uma superfície parametrizada chamada *superfície tangente* de α . Suponhamos que a curvatura de α , $k(t)$, não se anula no intervalo I e restrinja o domínio de X a $U = \{(t, v) \in I \times \mathbb{R}; v \neq 0\}$. Então,

$$X_t = \alpha'(t) + v\alpha''(t) \text{ e } X_v = \alpha'(t),$$

logo,

$$\begin{aligned} X_t \wedge X_v &= \underbrace{\alpha'(t) \wedge \alpha'(t)}_{=0} + v\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \\ &= -\alpha'(t) \wedge v\alpha''(t) \neq 0, \quad (t, v) \in U, \end{aligned}$$

visto que, para todo t , a curvatura de α (cf. proposição 2.2.1 do capítulo 2),

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'^3(t)\|}$$

não se anula. Assim, os vetores X_t e X_v são linearmente independentes e, portanto, $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular, cujo traço consiste em duas componentes conexas, tendo como fronteira comum o conjunto $\alpha(I)$.

No último capítulo deste trabalho, estudaremos com mais detalhe esse tipo de superfície e perceberemos que quando $v = 0$ ela tem pontos singulares numa curva especial contida na superfície.

2.3 Plano Tangente

A condição 3 na definição de superfície regular garante que, para cada ponto p da superfície, o conjunto dos vetores tangentes às curvas coordenadas de S , passando por p definem um plano, $T_p S = \{dX(e_1), dX(e_2)\}$, que designamos por *plano tangente*. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S . Considerando u e v como funções diferenciáveis de um parâmetro $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtemos uma curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, cujo traço está contido em S . Queremos mostrar que qualquer vetor tangente à superfície, isto é, no plano gerado por X_u e X_v , é o vetor velocidade de alguma curva contida na superfície. Assim, um vetor tangente à superfície num ponto $p \in S$ é o vetor tangente a $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Definição 2.3.1. Se $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de uma superfície regular S , dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente à superfície S* num ponto $p = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. O *plano tangente* a S em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em (u_0, v_0) e denotaremos por $T_p S$, onde $p = (u_0, v_0)$.

Pela definição, os vetores coordenados X_u e X_v são vetores tangentes a S em (u_0, v_0) , já que são tangentes às curvas coordenadas da superfície S na parametrização X . Os conceitos de vetor tangente e plano tangente são definidos num ponto (u_0, v_0) do domínio da parametrização X da superfície e não no ponto $p = X(u_0, v_0)$ já que a superfície parametrizada pode ter auto-interseções.

Proposição 2.3.1. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $p \in S$ e $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S em $p = X(q)$, $q = (u_0, v_0) \in U$. Então, o plano tangente, $T_p S$, é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Demonstração: Se $w \in T_p S$ então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Temos que:

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) = \left. \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0) \end{aligned}$$

Ou seja, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v no ponto $p = (u_0, v_0)$. Reciprocamente, suponhamos que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. De facto, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Na base $\{X_u(q), X_v(q)\}$, o vetor w tem coordenadas $(u'(t_0), v'(t_0))$, sendo $(u(t), v(t))$ a expressão de uma curva na parametrização X cujo vetor velocidade no instante $t = 0$ é w .

Por definição de superfície parametrizada regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes.

Segue da proposição (2.3.1) que T_pS é o plano de \mathbb{R}^3 gerado por X_u e X_v .

Capítulo 3

Primeira Forma Fundamental. Métricas sobre superfícies

Neste capítulo, vamos estudar uma estrutura geométrica associada a uma superfície designada primeira forma fundamental, a qual é obtida restringindo o produto interno do espaço tridimensional ao espaço tangente à superfície [7, 8]. Trata-se de uma forma quadrática que nos permite estudar algumas propriedades sobre teoria local das superfícies, mais concretamente, determinar comprimento de curvas contidas em superfícies, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões de superfícies.

Sejam $p \in S$ e $v_1, v_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então, $\langle v_1, v_2 \rangle_p$ é definido como o produto interno dos vetores v_1 e v_2 de \mathbb{R}^3 . Esse produto é uma forma bilinear simétrica, pois é válido que $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle v_2, v_1 \rangle_p$ com $\langle v_1, v_2 \rangle_p$ linear em v_1 e v_2 . Mais, a esse produto corresponde uma forma quadrática $I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0.$$

Definição 3.0.1. A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida pela expressão acima é denominada *primeira forma fundamental* da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Se considerarmos uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $q = (u_0, v_0) \in U$, então, um vetor tangente $v \in T_p S$ escreve-se da forma $v = aX_u(p) + bX_v(p)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, a primeira forma fundamental é dada por

$$I_p(v) = \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle$$

Usando a notação

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle$$

teremos:

$$I_p = a^2 E + 2ab F + b^2 G.$$

Repare que os cálculos apresentados foram feitos num ponto fixado, $q = (u_0, v_0) \in U$. Variando $q = (u, v)$, teremos as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, chamadas *coeficientes da primeira forma fundamental*.

Exemplo 3.0.1. Seja o elipsóide dado pela parametrização

$$X(u, v) = (a \sen u \cos v, b \sen u \sen v, c \cos u) \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \neq 0.$$

Consideremos w um vetor tangente ao elipsóide num ponto $X(u, v)$, na base $\{X_u, X_v\}$ definido por

$$w = \omega_1 X_u + \omega_2 X_v$$

A primeira forma fundamental para esta superfície parametrizada é dada por

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= \langle \omega, \omega \rangle = \langle \omega_1 X_u + \omega_2 X_v, \omega_1 X_u + \omega_2 X_v \rangle \\
&= \omega_1^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2\omega_1 \omega_2 \langle X_u, X_v \rangle + \omega_2^2 \langle X_v, X_v \rangle \\
&= \omega_1^2 E + 2\omega_1 \omega_2 F + \omega_2^2 G,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

em que E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Assim, calculando os vetores coordenados

$$\begin{aligned}
X_u &= (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u) \\
X_v &= (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0)
\end{aligned}$$

Temos então os coeficientes

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = -a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v + b^2 \sin u \cos u \sin v \cos v \\
&= (b^2 - a^2) \sin u \cos u \sin v \cos v \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \cos^2 v \\
&= \sin^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).
\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com (3.1):

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= \omega_1^2 (a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u) + \\
&+ 2\omega_1 \omega_2 ((b^2 - a^2) \sin u \cos u \sin v \cos v) + \\
&+ \omega_2^2 (\sin^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.0.2. Seja o parabolóide hiperbólico dado pela parametrização

$$X(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2) \quad a, b, c \in \mathbb{R}: a, b, c \neq 0.$$

Os vetores coordenados são

$$\begin{aligned}
X_u &= (a \cosh v, b \sinh v, 2u) \\
X_v &= (au \sinh v, bu \cosh v, 0)
\end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2 \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = a^2 u \sinh v \cosh v + b^2 u \sinh v \cosh v = (a^2 + b^2)u \sinh v \cosh v \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 u^2 \sinh^2 v + b^2 u^2 \cosh^2 v.
\end{aligned}$$

Assim, por (3.1), temos:

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= \omega_1^2 (a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2) + \\
&+ 2\omega_1 \omega_2 ((a^2 + b^2)u \sinh v \cosh v) + \\
&+ \omega_2^2 (a^2 u^2 \sinh^2 v + b^2 u^2 \cosh^2 v).
\end{aligned}$$

3.1 Comprimentos

As interseções entre superfícies geram, em geral, curvas sobre elas. Como exemplo, podemos observar no que acontece quando fazemos interseções entre um plano e uma superfície esférica unitária: obtemos circunferências. Outras curvas podem ser obtidas fazendo-se interseções entre o plano e outras superfícies. O conhecimento da primeira forma fundamental permite-nos medir comprimentos de curvas contidas em superfícies sem a necessidade de fazermos menção do espaço ambiente em que a superfície se encontra.

Tendo em conta a definição (1.1.5), se tivermos uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$, dada uma curva diferenciável contida na superfície, definida por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$ o comprimento de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{p(t)}(\alpha'(t))} dt$$

Escrevendo $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$, temos:

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{p(t)}(\alpha'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle u'(t)X_u + v'(t)X_v, u'(t)X_u + v'(t)X_v \rangle} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u'^2(t)E + 2u'(t)v'(t)F + v'^2(t)G} dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Exemplo 3.1.1. Seja a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log \cos v + u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \frac{-\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ fixos e consideremos as curvas $\alpha_1(t) = X(u_1, t)$ e $\alpha_2(t) = X(u_2, t)$ com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Vamos mostrar que, para todo $t_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, o comprimento de $\beta(s) = X(s, t_0)$, $s \in [u_1, u_2]$ que une os pontos $\alpha_1(t_0)$ a $\alpha_2(t_0)$ é constante, ou seja, não depende de t_0 .

Começemos por calcular os coeficientes da primeira forma fundamental. Temos

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos v, \sin v, 1) \\ X_v &= (-u \sin v, u \cos v, -\operatorname{tg} v) \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (\cos v, \sin v, 1) \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (-u \sin v, u \cos v, -\operatorname{tg} v) \rangle = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v - \operatorname{tg} v \\ &= -\operatorname{tg} v \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle (-u \sin v, u \cos v, -\operatorname{tg} v), (-u \sin v, u \cos v, -\operatorname{tg} v) \rangle = u^2 + \operatorname{tg}^2 v \end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco da curva $\beta_{t_0}(s)$ no intervalo $[u_1, u_2]$ é dado por:

$$\begin{aligned} L_{t_0} &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v)u'^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)v'^2} dt \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v)} dt = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2}(u_2 - u_1), \end{aligned}$$

que não depende de t_0 .

Exemplo 3.1.2. Seja o cilindro vertical parametrizado por

$$X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}, \quad r > 0 \text{ fixo.}$$

Temos:

$$X_u = (-r \sin u, r \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = 1.$$

Consideremos a curva $X(u(t), v_0)$ contida no cilindro, com $u(t) = t$, $0 < t < 2\pi$ e $v(t) = v_0$ fixo. Assim, $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$. Logo, o comprimento da curva é dada por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{u'^2(t)E + 2u'(t)v'(t)F + v'^2(t)G} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{E} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$

que é o comprimento do círculo contido no cilindro circular. Se fizermos variar v num intervalo $[a, b]$ e fixarmos $u = u_0$, isto é: $v(t) = t$, $a < t < b$ e $u(t) = u_0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, teremos: $v'(t) = 1$ e $u'(t) = 0$, e portanto,

$$L = \int_a^b \sqrt{G} dt = t \Big|_a^b = b - a$$

é o comprimento da curva que representa o segmento de reta contido no cilindro, entre $z = a$ e $z = b$.

3.2 Ângulos

Duas curvas contidas em determinada superfície, quando se intersectam num ponto, formam um ângulo que é determinado por meio dos vetores tangentes a essas curvas. O objetivo desta secção é mostrar que, dada uma superfície parametrizada, podemos calcular o ângulo entre as curvas coordenadas contidas na superfície.

A definição seguinte fornece a expressão para calcular o ângulo formado por dois vectores (ver[1]).

Definição 3.2.1. Seja E um espaço vectorial real, onde se definiu um produto interno. Dados dois vectores $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, chamamos *ângulo entre \vec{x} e \vec{y}* , ao valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Representando o ângulo de \vec{x} e \vec{y} por $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$, podemos, portanto, escrever

$$\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Dados dois vectores não-nulos w_1 e w_2 , tangentes a uma superfície X no ponto $p = (u, v)$, com $w_1 = X_u(u_0, v_0)$ e $w_2 = X_v(u_0, v_0)$, então, o ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, formado pelos dois vectores é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|} \quad (3.3)$$

Queremos expressar essa fórmula em termos da primeira forma fundamental. Observe que $w_1 + w_2$ é outro vetor tangente a X no ponto p . A primeira forma fundamental aplicada a $w_1 + w_2$ é

$$I_p(w_1 + w_2) = \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + \|w_2\|^2. \quad (3.4)$$

Aos vetores w_1 e w_2 , aplicamos a primeira forma fundamental e obtemos:

$$I_p(w_1) = \|w_1\|^2 \quad (3.5)$$

$$I_p(w_2) = \|w_2\|^2 \quad (3.6)$$

De (3.4), (3.5) e (3.6), temos que

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2} [I_p(w_1 + w_2) - (I_p(w_1) + I_p(w_2))] \quad (3.7)$$

$$\|w_1\| \|w_2\| = \sqrt{I_p(w_1) I_p(w_2)}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.3), temos, finalmente

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{[I_p(w_1 + w_2) - (I_p(w_1) + I_p(w_2))]}{2\sqrt{I_p(w_1) I_p(w_2)}}. \\ \theta &= \angle(w_1, w_2) = \arccos \frac{[I_p(w_1 + w_2) - (I_p(w_1) + I_p(w_2))]}{2\sqrt{I_p(w_1) I_p(w_2)}} \end{aligned}$$

Se X é uma superfície regular parametrizada e $\alpha(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\beta(s) = X(u_2(s), v_2(s))$ são duas curvas tais que $(u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(s_0), v_2(s_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(s_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(s_0)\|}$$

Isto é, num ponto de interseção entre as duas curvas, α e β , em X , o ângulo entre elas é dado pelo ângulo entre os seus vetores velocidade, α' e β' , respetivamente.

Vamos usar este conceito para mostrar que as curvas coordenadas são ortogonais se, e somente se, o coeficiente F da primeira forma fundamental for nulo.

Proposição 3.2.1. As curvas coordenadas de uma superfície parametrizada X intersectam-se ortogonalmente num ponto se, e somente se, o coeficiente F da primeira forma fundamental, na parametrização considerada, for nulo no ponto considerado .

Demonstração:

Consideremos $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada e $p = (u_0, v_0) \in U$ um ponto fixo. As curvas $X(u, v_0)$ e $X(u_0, v)$ são as curvas coordenadas de X no ponto p . Assim, $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas sobre a superfície no ponto considerado. Logo,

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}$$

Daqui, $\cos \theta = 0 \Leftrightarrow F(u_0, v_0) = 0$. Como $0 \leq \theta \leq \pi$, $\cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Portanto, provamos que $F(u_0, v_0) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. X , nestas condições, diz-se uma parametrização ortogonal no ponto (u_0, v_0) . ■

Exemplo 3.2.1. Consideremos a superfície regular parametrizada

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular $s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$. Os vetores coordenados são :

$$\begin{aligned} X_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ X_v &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \end{aligned}$$

As curvas coordenadas num ponto fixo (u_0, v_0) são, respectivamente, a circunferência \mathbb{S}^1 , parametrizada por $X(u, v_0) = (\cos u, \sin u, v_0)$ e a reta vertical r , dada pela parametrização $X(u_0, v) = (\cos u_0, \sin u_0, v)$. Como $F(u_0, v_0) = 0$, estas curvas são ortogonais.

3.3 Áreas

O conhecimento da primeira forma fundamental é também útil para calcular áreas de regiões limitadas contidas em parametrização de superfícies. O seguinte lema será útil [2].

Lema 3.3.1. Tem-se

$$\|u \wedge v\| = \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2} = \|u\| \|v\| \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo entre u e v .

Demonstração: Pondo

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\|u \wedge v\|^2 = (bc' - b'c)^2 + (ac' - a'c)^2 + (ab' - a'b)^2$$

e

$$\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

Desenvolvendo estes quadrados e simplificando, vemos que as duas quantidades são iguais. Quanto

à segunda parte, como $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$, tem-se

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Concluimos, da igualdade $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$, que o comprimento de $u \wedge v$ é igual à área do paralelogramo definido por u e v . ■

Para estabelecermos a fórmula do cálculo de área de uma região limitada de uma superfície por meio da primeira forma fundamental, vamos antes apresentar algumas definições importantes (ver [8]).

Definição 3.3.1. Um *domínio regular de uma superfície* S é um subconjunto aberto e conexo de S , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular, excepto em um número finito de pontos.

Definição 3.3.2. Uma *região* de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região é limitada se está contida em alguma bola de \mathbb{R}^3 .

Consideraremos regiões limitadas R contidas numa vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, isto é, R é a imagem de uma região limitada $Q \subset U$ por uma parametrização X . Assim, a função $\|X_u \wedge X_v\|$, definida em U , representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores X_u e X_v .

Definição 3.3.3. Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| du dv, \quad Q = X^{-1}(R),$$

chama-se *área da região* R .

Pelo lema (3.3.1), temos que

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2}.$$

Escrevendo em função dos coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental, da parametrização X , temos

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| du dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (3.9)$$

Vamos ver que na expressão (3.9) o integral não depende da parametrização X . Isso pode ser provado usando o teorema da mudança de variáveis para integrais múltiplos: Se considerarmos outra parametrização $\bar{X}: \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ contendo a região R e definirmos $\bar{Q} = \bar{X}^{-1}(R)$, sendo $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ o Jacobiano da mudança de coordenadas $h = X^{-1} \circ \bar{X}$. Teremos então:

$$\iint_{\bar{Q}} \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\| d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} \|X_u \wedge X_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| d\bar{u}d\bar{v} = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| dudv.$$

Exemplo 3.3.1. Vamos mostrar que a área, A , de uma região limitada R da superfície $z = f(x, y)$

é

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

onde Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

Consideremos a aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ com U o domínio de $f(x, y)$ e R a região contida na parametrização $X(U)$. A área da região R é dada por

$$A(R) = \iint_Q \|X_x \wedge X_y\| dx dy, \quad Q = X^{-1}(R).$$

Os vetores tangentes num ponto arbitrário da superfície são $X_x = (1, 0, f_x)$ e $X_y = (0, 1, f_y)$. O produto vetorial $X_x \wedge X_y = (-f_x, -f_y, 1)$, de onde, $\|X_x \wedge X_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Portanto, a área da região R é dada por

$$A(R) = \iint_Q \|X_x \wedge X_y\| dx dy = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

onde $Q = X^{-1}(R)$.

Definição 3.3.4. Uma *superfície de revolução* é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma reta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução* ou *de rotação*.

O teorema a seguir permite calcular áreas em superfícies de revolução.

Teorema 3.3.1. (*Teorema de Pappus*) ([8])

Seja S uma superfície de revolução e C a sua curva geratriz. Seja s o comprimento de arco de C e denotemos por $\rho = \rho(s)$ a distância do ponto correspondente a s em C ao eixo de rotação. Então

$$A(S) = 2\pi \int_0^l \rho(s) ds,$$

onde l é o comprimento da curva C .

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que C está no plano xz e oz é o eixo de rotação da superfície de revolução. Começemos por definir a parametrização por comprimento de arco da curva C da forma

$$\alpha(s) = (x(s), 0, z(s)), \quad \forall s \in I \subset \mathbb{R}.$$

Então,

$$X(\theta, s) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)), \quad s \in I, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

é uma parametrização da superfície de revolução S .

Os vetores tangentes à superfície no ponto (θ, s) são:

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-x(s) \sin \theta, x(s) \cos \theta, 0) \\ X_s &= (x'(s) \cos \theta, x'(s) \sin \theta, z'(s)). \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = x^2(s) \\ F &= \langle X_\theta, X_s \rangle = 0 \\ G &= \langle X_s, X_s \rangle = 1 \quad \text{uma vez que } x'^2(s) + z'^2(s) = 1, \text{ pois } \|\alpha'(s)\| = 1. \end{aligned}$$

Temos que $EG - F^2 = x^2(s)$. Assim, a área da superfície S é dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_Q \|X_\theta \wedge X_s\| d\theta ds \\ &= \iint_Q \|\sqrt{EG - F^2}\| d\theta ds \\ &= \iint_Q \sqrt{x^2(s)} d\theta ds. \end{aligned}$$

Como a geratriz, C , está contida no plano xz , então a distância do ponto correspondente ao eixo de rotação é

$$\rho(s) = \|x(s)\| = \sqrt{x^2(s)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho(s) d\theta ds \\ &= \int_0^l \rho(s) \theta \Big|_0^{2\pi} ds \\ &= 2\pi \int_0^l \rho(s) ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Vamos aplicar este teorema para calcular a área duma superfície de revolução.

Exemplo 3.3.2. Queremos calcular a área de um toro de revolução dado pela parametrização

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), (u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < a$$

Para obter a curva geratriz do toro de revolução, fazemos a interseção dessa superfície com o plano xz , onde fixámos $v = 0$. A curva resultante é o círculo de raio r e centro no ponto $(a, 0)$ contido no plano xz , dado pela parametrização

$$\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi, r > 0 \tag{3.11}$$

o vetor tangente a α é $\alpha'(u) = (-r \sin u, 0, r \cos u)$ e $\|\alpha'(u)\| = r$. O comprimento de arco é

$$s(u) = \int_0^u \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^u r d\xi = ru.$$

Para reparametrizarmos a curva pelo comprimento de arco, fazemos $u(s) = \frac{s}{r}$.

Então $\alpha(s) = \left(a + r \cos \frac{s}{r}, 0, r \operatorname{sen} \frac{s}{r}\right)$, $0 < s < 2\pi r$, é uma reparametrização por comprimento de arco do círculo (3.11).

Estamos em condições de aplicar o teorema (3.3.1) para o cálculo da área do toro.

Assim, $\rho(s) = x(s) = a + r \cos \frac{s}{r}$. Aplicando a fórmula (3.10), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^l \rho(s) ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \rho(s) ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \left(a + r \cos \frac{s}{r}\right) ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \left(a + r r \frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}\right) ds \\ &= 2\pi \left(as + r^2 \operatorname{sen} \frac{s}{r} \right) \Big|_0^{2\pi r} \\ &= 2\pi(2a\pi r) \\ &= 4\pi^2 ar. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Aplicação Normal de Gauss e Segunda Forma Fundamental

Quando se estudam curvas regulares no plano e no espaço, uma característica geométrica considerada de grande importância é a sua curvatura [7, 8]. Estudar a curvatura de curvas implica estudar a variação de retas tangentes em cada ponto da curva regular parametrizada. Essa ideia estende-se para superfícies regulares que corresponde a medir o quão rápido uma superfície S se afasta do seu plano tangente, $T_p S$, em uma vizinhança $p \in S$. Sendo difícil derivar um plano tangente, o que se faz é medir a taxa de variação de um campo normal unitário N na vizinhança de p , dada por uma aplicação linear no espaço tangente $T_p S$, auto-adjunta. O estudo dessa aplicação permite obter várias propriedades locais da superfície em torno da vizinhança do ponto considerado.

Definição 4.0.1. Dizemos que uma superfície S é *orientável* se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo em p . À família nessas condições chamamos uma orientação de S e S é dita orientada. Se a escolha de uma tal família não for possível, a superfície é dita *não-orientável*. Se a superfície regular S é orientada, uma parametrização (local) é compatível com a orientação de S se, juntando X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .

Exemplo 4.0.1. Uma superfície dada pelo gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável.

Exemplo 4.0.2. Todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.

Definição 4.0.2. Sejam uma superfície parametrizada, $X(u, v)$, e um ponto $p = (u, v)$. Dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é *normal* a X em p se é ortogonal ao plano tangente de X em p , isto é, se é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em p .

Dada uma parametrização $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S definimos para cada ponto $p \in X(U)$ um vetor normal e unitário, dado pela regra:

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|}, \quad X(q) = p.$$

Obtemos assim uma aplicação diferenciável $N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, a cada ponto $p \in X(U)$ associa um vetor normal unitário $N(p)$.

Definição 4.0.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . À aplicação

$$\begin{aligned} N: S &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto N(p), \end{aligned}$$

com valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

chamamos *aplicação de Gauss* da superfície S orientável.

É importante referir que nem todas as superfícies admitem um campo diferenciável de vetores unitários definidos sobre toda superfície. Por exemplo na faixa de Möbius não se pode definir esse campo. Podemos justificar intuitivamente esse facto percorrendo uma vez o círculo médio da figura: depois de uma volta, o campo normal unitário N retornaria como $-N$, o que contradiz a sua continuidade. Isso acontece porque, valendo-nos outra vez da intuição, podemos verificar que, sobre a faixa de Möbius, não se pode fazer uma escolha consistente do que seria um "lado", pois, movendo-se sobre a superfície, podemos passar de uma maneira contínua de um "lado" para o outro sem sair da superfície. Diremos, portanto, que uma superfície é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda superfície; mais, a escolha desse campo, aqui denominado N , é chamada uma orientação da superfície S . (ver [8]).

A aplicação de Gauss é diferenciável e a derivada de N , dN_p , no ponto $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_N(p)S^2$; mas T_pS e $T_N(p)S^2$ são o mesmo espaço vetorial, pelo que dN_p pode ser vista como um endomorfismo, isto é, uma aplicação linear de T_pS nele próprio. De facto, como $N(p)$ é um vetor unitário normal a T_pS , então $T_pS = \langle N(p) \rangle^\perp$. E temos também:

$$T_{N(p)}S^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, N(p) \rangle = 0\} = \langle N(p) \rangle^\perp.$$

A aplicação linear $dN_p: T_pS \rightarrow T_pS$ é definida do seguinte modo: dada uma curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 , o que restringe o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor do espaço tangente T_pS e mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$; portanto a derivada do vetor normal, dN_p mede o quanto N se afasta de N_p numa vizinhança de p .

Proposição 4.0.1. A derivada $dN_p: T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração: Para a demonstração da proposição, basta verificar que, para uma base $\{e_1, e_2\}$ do espaço tangente T_pS , o produto interno $\langle dN_p(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, dN_p(e_2) \rangle$. Consideremos $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada do espaço tangente T_pS . Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, teremos:

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

e, portanto

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(u'(0)X_u + v'(0)X_v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t)v(t)) \right|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que a derivada dN_p é auto-adjunta, basta mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Para o efeito, vamos considerar as igualdades $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$. Derivando estas expressões com respeito a v e a u , respetivamente, obteremos:

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle$$

e

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, \Leftrightarrow \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle.$$

Para qualquer parametrização da superfície, vale, pelo Teorema de Schwarz, $X_{uv} = X_{vu}$, de onde decorre que $\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle$ e, por transitividade,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

Como pretendíamos. ■

Teorema 4.0.1. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão dois e $A: V \rightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são vetores próprios, e λ_1, λ_2 são valores próprios de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respetivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ sobre o círculo unitário de V .*

Demonstração: (Ver [8], apêndice do capítulo 3).

À aplicação linear $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$, por ser auto-adjunta, podemos associar uma forma quadrática Q em $T_p S$, dada por $Q(w) = \langle dN_p(w), w \rangle$, com $w \in T_p S$.

Definição 4.0.4. A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$, é chamada a *segunda forma fundamental* de S em p .

Definição 4.0.5. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a *curvatura normal* de $C \subset S$ em p .

Geometricamente, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação N de S em p .

O facto de a aplicação $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ ser auto-adjunta, implica, da Álgebra Linear, que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ do espaço tangente, $T_p S$, tal que:

$$\begin{cases} -dN_p(e_1) = k_1 e_1 \\ -dN_p(e_2) = k_2 e_2 \end{cases}$$

que pode ser escrita matricialmente assim:

$$dN_p = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}$$

na base $\{e_1, e_2\}$.

Nessas condições, os vetores ortonormados e_1 e e_2 são os vetores próprios de $-dN_p$ e os escalares k_1 e k_2 são seus valores próprios. Mais, k_1 e k_2 são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário do espaço tangente, ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p .

Vamos agora dar uma interpretação geométrica da segunda forma fundamental considerando uma curva contida na superfície, parametrizada por comprimento de arco. Usando os conceitos análogos ao estudo de curvas no espaço, obteremos um resultado interessante para esta aplicação linear.

Consideremos uma curva regular $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Sem perda de generalidade, consideremos um ponto $\alpha(t_0) \in S$ e o vetor tangente à curva α dado por $\alpha'(t_0)$. A segunda forma fundamental no ponto $\alpha(t_0)$ é dada por:

$$II_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)) = -\langle dN_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle = -\langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle$$

Como $\langle N(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle = 0$, derivando, temos:

$$\langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = -\langle N(\alpha(t_0)), \alpha''(t_0) \rangle,$$

Logo, a forma quadrática $II_{\alpha(t_0)}$ fica:

$$II_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)) = -\langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = \langle (N \circ \alpha)(t_0), \alpha''(t_0) \rangle$$

Supondo que a curva $\alpha(t)$ está parametrizada por comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(t)\| = 1$, $t \in I$, então,

$$II_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)) = \langle N(\alpha(t_0)), \vec{k}(t_0) \rangle = \langle N, kn \rangle,$$

onde $\vec{k}(t_0) = kn$, com $k = \|\alpha''(t_0)\|$, é o vetor curvatura da curva α , define a componente normal do vetor $\vec{k}(t_0)$ no espaço. Portanto, geometricamente, a segunda forma fundamental $II_{\alpha(t_0)}$ em um vetor tangente unitário $\alpha'(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}S$ é igual à curvatura normal de uma curva regular que passa por $\alpha(t_0)$.

4.1 Curvaturas

Definição 4.1.1. Seja S uma superfície regular parametrizada. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , da superfície S , são chamados *curvaturas principais em p* ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos vetores próprios e_1 e e_2 são chamadas *direções principais em p* .

Definição 4.1.2. Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo $p \in S$ a reta tangente a C é uma direção principal em p , então dizemos que C é uma *linha de curvatura de S* .

Essa definição motiva a seguinte proposição.

Proposição 4.1.1 (Olinde Rodrigues.). Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura de S é que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C , onde $N(t) = N(\alpha(t))$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t . Nesse caso, a curvatura principal na direção do vetor tangente $\alpha'(t)$ é $-\lambda(t)$.

Demonstração: Se $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura, então $\alpha'(t)$ está contido em uma direção principal, vetor próprio de dN e assim, para alguma função λ de t , temos que

$$N'(t) = dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Reciprocamente, se $dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$, então $\alpha'(t)$ é um vetor próprio de dN , pelo que $\alpha'(t)$ está contido numa direção principal, segue que $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura. ■

É de grande importância conhecer as curvaturas principais em p , pois, elas permitem calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção dada do espaço tangente T_pS , como veremos adiante.

Consideremos um vetor unitário v em T_pS e uma base ortonormada $\{e_1, e_2\}$ de T_pS . Podemos

escrever $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, sendo θ o ângulo entre e_1 e v na orientação de $T_p S$. A curvatura normal k_n na direção do vetor v é dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A última expressão é conhecida classicamente como *Fórmula de Euler* e é simplesmente a expressão da segunda fórmula fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Queremos agora chegar ao conceito de um outro tipo de curvatura. Para o efeito, vamos lembrar algumas noções de Álgebra Linear:

Sejam $\varphi: E \rightarrow E$ uma aplicação linear definida num espaço vetorial de dimensão 2 e uma base $\{e_1, e_2\}$ de E . Então: $\det(\varphi) = \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}$, e $\text{tr}(\varphi) = \phi_{11} + \phi_{22}$. Onde (ϕ_{ij}) é a matriz de φ na base $\{e_1, e_2\}$. Estes números não dependem da base escolhida e estão, portanto, associados à aplicação linear φ .

Definição 4.1.3. Seja $p \in S$ e seja $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ a derivada da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado *curvatura Gaussiana* K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado *curvatura média* H de S em p . Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever:

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A curvatura Gaussiana permite estudar várias propriedades das superfícies. Por exemplo, classificar pontos em uma vizinhança de um ponto da superfície, como se pode constatar por meio da definição a seguir.

Definição 4.1.4. Um ponto p de uma superfície é chamado

1. Elíptico, se $K(p) > 0 \iff$ as curvaturas principais, k_1, k_2 , são do mesmo sinal.
2. Hiperbólico, se $K(p) < 0 \iff$ as curvaturas principais, k_1, k_2 , são de sinais opostos.
3. Parabólico, se $K(p) = 0$, com $dN_p \neq 0 \iff$ uma das curvaturas principais, k_1 , ou k_2 , é nula.
4. Planar, se $K(p) = 0$ e $dN_p = 0 \iff$ ambas as curvaturas principais, k_1 e k_2 , são nulas.

4.1.1 Curvatura de Gauss em coordenadas

Nesta secção, vamos apresentar a segunda forma fundamental e a derivada da aplicação de Gauss em um sistema de coordenadas locais. Consideraremos que todas as parametrizações $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ são compatíveis com a orientação N de S , isto é, que em $X(U)$,

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em $p \in S$ de uma superfície S . Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Simplificaremos a notação, convencionando que todas as funções seguintes têm seus valores calculados no ponto p . O vetor tangente à curva $\alpha(t)$ em p é dado por $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e a derivada de N na direcção deste vetor é

$$dN(\alpha') = N_u u' + N_v v'. \quad (4.1)$$

Derivando $\langle N, N \rangle = 1$ com respeito a u e a v , teremos $\langle N_u, N \rangle = 0$ e $\langle N_v, N \rangle = 0$. Logo, N_u e N_v também pertencem a $T_p S$ e podem ser escritos como combinação linear de X_u e X_v :

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad (4.2)$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), teremos

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v.$$

Matricialmente, na base $\{X_u, X_v\}$, podemos escrever

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Procuraremos obter, a seguir, os coeficientes da segunda forma fundamental.

A expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle.$$

Como $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$, pelo facto de a derivada da aplicação de Gauss ser auto-adjunta, então

$$II_p(\alpha') = -[\langle N_u, X_u \rangle u'^2 + \langle N_v, X_u \rangle u'v' + \langle N_u, X_v \rangle u'v' + \langle N_v, X_v \rangle v'^2].$$

Vamos denotar, nessa expressão:

$$\begin{aligned} -\langle N_u, X_u \rangle &= e \\ -\langle N_v, X_u \rangle &= -\langle N_u, X_v \rangle = f \\ -\langle N_v, X_v \rangle &= g. \end{aligned}$$

temos:

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2.$$

Onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental. Vamos obter agora os valores a_{ij} em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental. A partir das equações (4.2) e (4.3) obtemos:

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Sendo E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$. As relações acima podem ser expressas na seguinte forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Fazendo alguns cálculos, encontra-se:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = D \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Onde $\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ é a matriz adjunta de $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e

$$D = \frac{1}{EG - F^2}$$

é o determinante da sua inversa.

Substituindo essa nova relação acima, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix}$$

Portanto, atendendo a que $D = \frac{1}{EG - F^2}$, os a_{ij} são :

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental, vamos proceder da seguinte forma:

Como N é simultaneamente ortogonal a X_u e a X_v , consideremos as igualdades $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$. Derivando ambas expressões com respeito às variáveis u e v :

$$\begin{aligned} \langle N, X_u \rangle_u &= \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \\ \langle N, X_u \rangle_v &= \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ \langle N, X_v \rangle_v &= \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Onde estamos a usar a notação $\langle N, X_u \rangle_u$ para a derivada parcial da expressão com respeito a u e $\langle N, X_v \rangle_v$ a derivada parcial com respeito a v .

Das equações acima obtidas, vem:

$$\langle N_u, X_u \rangle = -\langle N, X_{uu} \rangle, \quad \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle, \quad \langle N_v, X_v \rangle = -\langle N, X_{vv} \rangle.$$

Assim, podemos calcular os coeficientes e , f e g da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \\
f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} \\
g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

Usámos a notação

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{\langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle &= (X_u, X_v, X_{uu}), \\
\langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle &= (X_u, X_v, X_{uv}), \\
\langle X_u \wedge X_v, X_{vv} \rangle &= (X_u, X_v, X_{vv}).
\end{aligned}$$

A partir da representação matricial de dN , pela definição de curvatura de Gauss, é imediato que

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Quanto à curvatura média, sabendo que dN tem os valores próprios $-k_1, -k_2$, então, k_1 e k_2 satisfazem a equação

$$dN(w) = -kw = -kI(w), \text{ para algum } w \in T_pS, w \neq 0,$$

onde I é a aplicação identidade. Resulta que a aplicação linear $dN + kI$ é não invertível. Logo, o seu determinante é nulo, ou seja:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

o mesmo que

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

Essa equação quadrática tem raízes k_1 e k_2 , o que nos leva a concluir que $a_{11} + a_{22} = -(k_1 + k_2)$, isso implica que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

sendo

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e, portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

onde a Curvatura Gaussiana $K = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Exemplo 4.1.1. Calculemos a curvatura Gaussiana dos pontos do toro, cobertos pela parametri-

zação

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$$0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi.$$

O cálculo de e, f, g implica o conhecimento de N e, por conseguinte, dos vetores coordenados X_u e X_v e suas derivadas com respeito a u e v .

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\ X_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \\ X_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u) \\ X_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Com estes valores, calculamos os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2.$$

Como $\|X_u \wedge X_v\|^2 = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2$, substituindo o membro direito dessa igualdade pelos coeficientes da primeira forma fundamental, implica que $\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$. Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}}, X_{uu} \right\rangle = \frac{r^2(a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r \\ f &= \frac{\langle X_u, X_v, X_{uv} \rangle}{r(a + r \cos u)} = 0 \\ g &= \frac{\langle X_u, X_v, X_{vv} \rangle}{r(a + r \cos u)} = \cos u(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Com esses dados, calculamos finalmente a curvatura de Gauss:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Quando u assume os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ nos paralelos, a curvatura K é nula ao longo desses paralelos; os pontos desses paralelos são parabólicos. Na região do toro dada pela condição $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, K é negativa (note que $r > 0$ e $a > 0$); os pontos dessa região são, portanto, hiperbólicos. Na região dada por $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$, a curvatura Gaussiana é positiva e os pontos são elípticos.

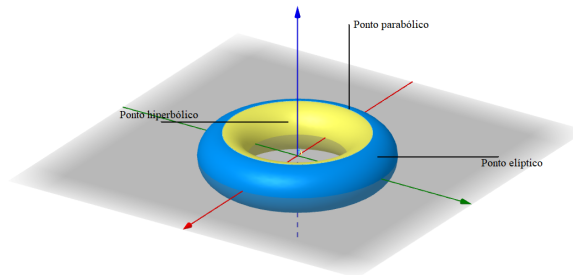


Figura 4.1: Classificação dos pontos do toro.

Exemplo 4.1.2. Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ o plano xy e seja $X: U \rightarrow P$ uma parametrização de P dada por

$$X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$$

onde

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Temos:

$$X_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad X_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = \langle X_\rho, X_\rho \rangle = 1, \quad F = \langle X_\rho, X_\theta \rangle = 0, \quad G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \rho^2$$

Temos também:

$$X_{\rho\rho} = (0, 0, 0), \quad X_{\rho\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad X_{\theta\theta} = (-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta, 0)$$

$$N(\rho, \theta) = \frac{X_\rho \wedge X_\theta}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(0, 0, \rho)}{\rho} = (0, 0, 1)$$

Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$e = \langle N, X_{\rho\rho} \rangle = 0, \quad f = \langle N, X_{\rho\theta} \rangle = 0, \quad g = \langle N, X_{\theta\theta} \rangle = 0$$

Assim,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{\rho^2} = 0$$

e todo ponto do plano é planar. Como $dN(\rho, \theta) = 0 \forall (\rho, \theta) \in U$, então, as curvaturas principais, k_1 e k_2 , são ambas nulas e assim, a curvatura média $H = 0$.

Capítulo 5

Superfícies regradas

Existem várias classes especiais de superfícies que podem tornar-se interessantes por si mesmas ou cujo estudo exhibe belos exemplos do poder e das limitações dos métodos diferenciais aplicados em geometria. Entre as várias classes, podemos citar as superfícies de revolução, superfícies paralelas, superfícies mínimas e superfícies regradas [8]. Neste estudo, apresentaremos alguns exemplos e propriedades interessantes das superfícies regradas e uma classificação parcial de uma subclasse, as superfícies regradas desenvolvíveis [5]. Como exemplos de superfícies regradas temos o cilindro, o cone, a superfície tangente, o hiperbolóide de uma folha, o parabolóide hiperbólico, o helicóide e a faixa de Möbius.

Definição 5.0.1. Uma *família (diferenciável) a 1-parâmetro* de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada t de um intervalo aberto de \mathbb{R} um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3, w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in I$, a reta $L_t = \alpha(t) + vw(t)$, que passa por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$ é chamada a reta da família $\{\alpha(t), w(t)\}$ em t .

Definição 5.0.2. Uma *superfície regrada* é uma superfície gerada por uma reta movendo-se ao longo de uma curva α , mais precisamente, uma superfície regrada é a superfície parametrizada por $X: I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, I, J abertos de \mathbb{R} , definida por

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t),$$

onde $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $w: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ são aplicações diferenciáveis. Dizemos, nestas condições, que a superfície regrada é gerada pela família a um parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$

Os vetores tangentes coordenados são dados por:

$$\begin{aligned} X_t(t, v) &= \alpha'(t) + vw'(t) \\ X_v(t, v) &= w(t) \end{aligned}$$

As retas $L_t = \alpha(t) + vw(t)$ são chamadas as *geratrizes* e a curva $\alpha(t)$ é uma *diretriz* da superfície X . Admite-se a possibilidade de que a superfície X tenha pontos singulares, isto é, pontos (t_0, v_0) tais que $X_t(t_0, v_0) \wedge X_v(t_0, v_0) = 0$, isso possibilita-nos incluir as superfícies tangentes (que também podem ter auto-intersecções) e cones.

5.1 Exemplos de superfícies regradas parametrizadas

Exemplo 5.1.1. (Cilindro Generalizado)

Um Cilindro generalizado é uma superfície regrada gerada por uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}, t \in I$, onde $\alpha(t)$ está contida em um plano π e $w(t)$ é uma direcção fixa em \mathbb{R}^3 não paralela à π .

Uma parametrização para o cilindro pode ser dada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + vr,$$

com $w(t) = r$, onde $r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é um vetor fixo não paralelo a π .

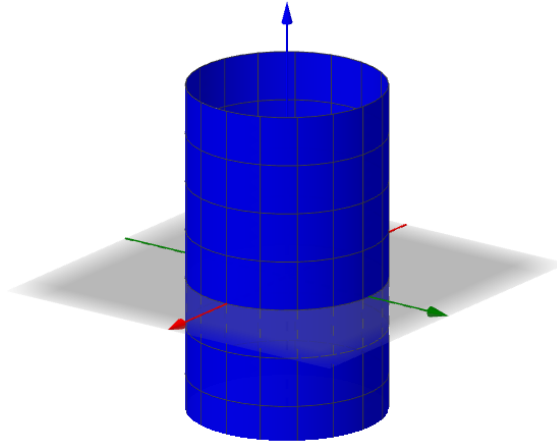


Figura 5.1: Cilindro generalizado.

É habitual considerar-se o cilindro dado com a circunferência como directriz, tal como apresentámos na figura acima. No caso do cilindro generalizado, a directriz pode não ser uma circunferência, pode ser qualquer curva fechada. Mais, não é obrigatório que a directriz seja uma curva fechada, é suficiente considerar-se α uma curva plana e o campo de vetores $w(t) = r$ não paralelo ao plano da curva α . Além disso, o campo de vetores não precisa ser obrigatoriamente ortogonal ao plano da curva directriz, α .

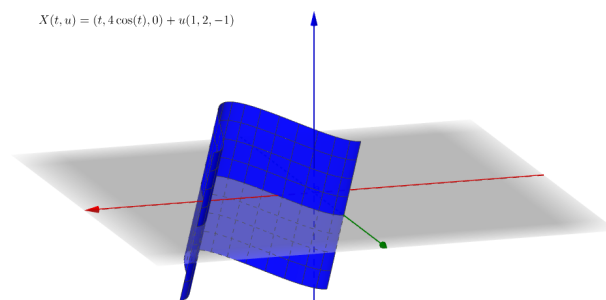


Figura 5.2: Cilindro generalizado.

Exemplo 5.1.2. (Cone Generalizado)

Um cone generalizado é uma superfície regrada gerada por uma família $\{\alpha(t), w(t)\}, t \in I$, em que $\alpha(t)$ está contida em um plano π e todas as geratrizes L_t passam por um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ não

pertencente ao plano π . O ponto p chama-se vértice do cone. Como p pertence a todas as geratrizes L_t , então, para cada $t \in I$, existe $v_0 = v_0(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$p = \alpha(t) + v_0 w(t) \implies \alpha(t) = p - v_0 w(t).$$

Assim, uma parametrização para o cone generalizado é dada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + v w(t) = p - v_0 w(t) + v w(t) = p + (v - v_0) w(t).$$

Fazendo $u(v) = (v - v_0)$, obtemos outra parametrização do cone generalizado, dada por:

$$X(t, u) = p + u(v) w(t),$$

onde p é o vértice do cone.

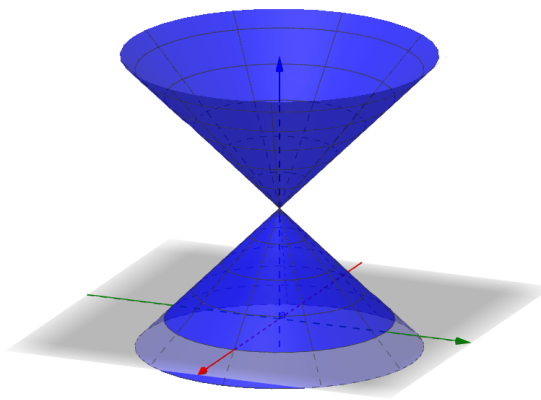


Figura 5.3: Cone generalizado.

Como se trata de cone generalizado, a curva fechada pode não ser uma circunferência. Além disso, a curva pode não ser fechada.

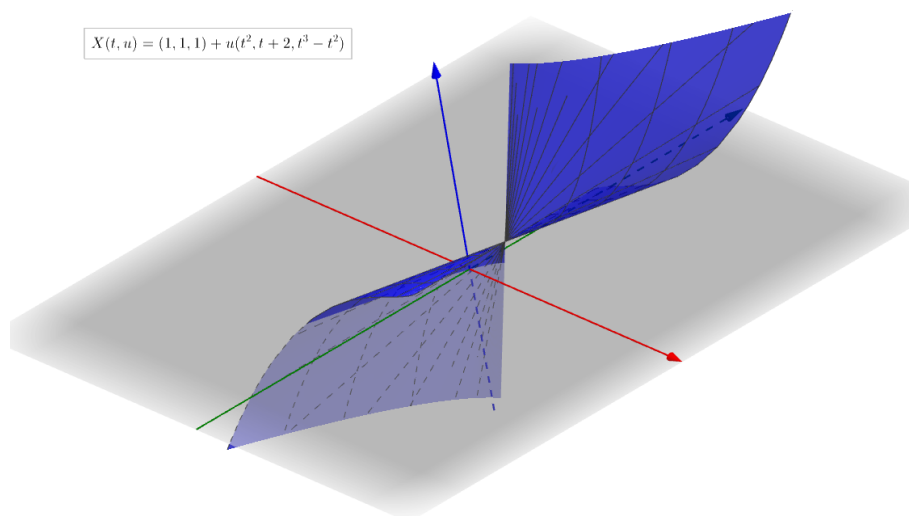


Figura 5.4: Cone generalizado.

Exemplo 5.1.3. (Hiperbolóide de uma folha)

Sejam \mathbb{S}^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano Oxy e $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de $x^2 + y^2 = 1$ pelo comprimento de arco. Para cada $s \in (0, 2\pi)$, considere $w(s) = \alpha'(s) + e_3$ onde e_3 é um vetor unitário do eixo z . A superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(s), w(s)\}$ é um hiperbolóide de uma folha. De facto, dado $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$, $0 < s < 2\pi$ uma parametrização pelo comprimento de arco de \mathbb{S}^1 , temos que $\alpha'(s) = (-\sin(s), \cos(s), 0)$ e $w(s) = \alpha'(s) + e_3 = (-\sin(s), \cos(s), 0) + (0, 0, 1) = (-\sin(s), \cos(s), 1)$. Logo,

$$X(s, v) = \alpha(s) + vw(s) = (\cos(s) - v \sin(s), \sin(s) + v \cos(s), v)$$

É fácil observar que as coordenadas $x(s, v), y(s, v), z(s, v)$ de $X(s, v)$ verificam a equação do hiperbolóide $x^2(s, v) + y^2(s, v) - z^2(s, v) = 1$, para todo $(s, v) \in I \times \mathbb{R}$. Portanto, o traço de $X(s, v)$ é um hiperbolóide de uma folha, como desejado.

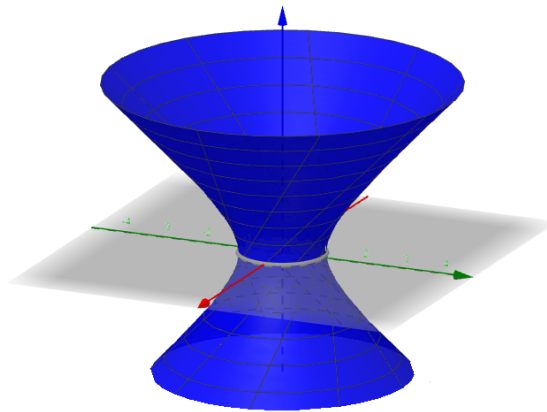


Figura 5.5: Hiperbolóide de uma folha.

Em geral, podemos ter superfícies regradas parametrizadas com mais de uma família de geratrizes. Isso motiva-nos a apresentar a seguinte definição.

Definição 5.1.1. Uma superfície regrada diz-se *duplamente regrada* se for parametrizada por duas famílias de geratrizes distintas.

Voltando ao caso do hiperbolóide de uma folha, constatamos que é uma superfície duplamente regrada. Considerando $w(s) = -\alpha'(s) + e_3$ teremos a superfície regrada

$$\bar{X}(s, v) = \alpha(s) + vw(s) = (\cos(s) + v \sin(s), \sin(s) - v \cos(s), v),$$

cujos traço também satisfaz $x^2(s, v) + y^2(s, v) - z^2(s, v) = 1$. Esse facto mostra que o hiperbolóide de uma folha tem duas famílias de geratrizes.

Exemplo 5.1.4. (Helicóide)

O helicóide é uma superfície regrada gerada por uma família $\{\alpha(t), w(t)\}$, em que α é a hélice parametrizada por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

e

$$w(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), t \in \mathbb{R},$$

ou seja, é a superfície formada por todas as retas paralelas ao plano Oxy que unem cada ponto do eixo z com o ponto da hélice situado à mesma altura.

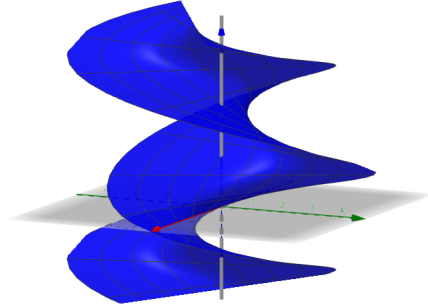


Figura 5.6: Helicóide.

Assim, uma parametrização para o helicóide é dada por:

$$\begin{aligned} X(t, v) &= \alpha(t) + vw(t) = (\cos(t), \sin(t), t) + v(\cos(t), \sin(t), 0) \\ &= ((1+v)\cos(t), (1+v)\sin(t), t), (t, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1.5. (Parabolóide hiperbólico) Pretendemos mostrar, nesse exemplo, que o parabolóide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

é uma superfície regrada. Fazendo uma mudança de variáveis, podemos representar o parabolóide S num sistema de coordenadas ortogonais (u, v, w) de modo que a equação seja dada por $w = kuv, k \neq 0$. Mais precisamente, trocando o sistema de coordenadas (x, y, z) por (bx, ay, z) e fazendo uma rotação desse novo sistema de coordenadas por um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos, em torno do eixo z , no sentido horário, obteremos:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bx \\ ay \\ z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}bx + \frac{\sqrt{2}}{2}ay \\ v = -\frac{\sqrt{2}}{2}bx + \frac{\sqrt{2}}{2}ay \\ w = z \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações em ordem a x , y e z temos:

$$x = \frac{u-v}{b\sqrt{2}}, \quad y = \frac{u+v}{a\sqrt{2}}, \quad \text{e } z = w.$$

Substituindo estes valores na equação inicial do parabolóide, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, teremos para o novo sistema de coordenadas ortogonais: $w = \frac{-2}{a^2b^2}uv \implies w = kuv, k \neq 0$, onde $k = \frac{-2}{a^2b^2}$. Mostráramos assim que todo parabolóide hiperbólico $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, em que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pode ser representado

num sistema de coordenadas ortogonais (x', y', z') pela equação $z' = kx'y', k \neq 0$.

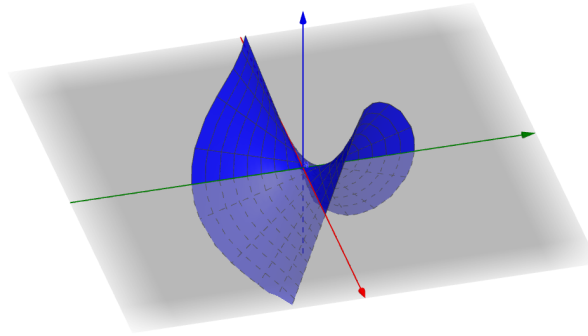


Figura 5.7: Parabolóide hiperbólico.

Vamos mostrar que o parabolóide hiperbólico é uma superfície regrada gerada por uma família a 1-parâmetro $\{\alpha(t), w(t)\}$. Para o efeito, observamos que as retas $y = \frac{z}{tk}, x = t$, para cada $t \neq 0$ pertencem ao parabolóide. Considerando a intersecção desta família de retas com o plano $z = 0$, obtemos a curva $\alpha(t) = (t, 0, 0)$. Tomando esta curva como diretriz e os vetores unitários paralelos às retas $y = \frac{z}{tk}, x = t$, obtemos a família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, dada por

$$\alpha(t) = (t, 0, 0) \text{ e } w(t) = \frac{(0, 1, kt)}{\sqrt{1 + k^2 t^2}} \quad (5.1)$$

que gera a superfície regrada

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \left(t, \frac{v}{\sqrt{1 + k^2 t^2}}, \frac{vkt}{\sqrt{1 + k^2 t^2}} \right), t, v \in \mathbb{R}$$

cujos traços coincidem com o parabolóide S .

Definição 5.1.2. (Superfície tangente)

Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. A superfície

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), (t, v) \in I \times \mathbb{R},$$

é a superfície regrada gerada pela família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), \alpha'(t)\}$, denominada *superfície tangente* da curva $\alpha(t)$.

Exemplo 5.1.6. Vamos obter a superfície tangente da hélice parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

O vetor tangente a esta curva é $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \neq (0, 0, 0), 0 < t < 2\pi$; $\alpha(t)$ é regular, e temos então a superfície tangente da hélice dada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t) = (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, t + v), (t, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.1.7. (Faixa de Möbius)

A faixa de Möbius é uma superfície regrada gerada por uma família $\{\alpha(t), w(t)\}$, em que α é a

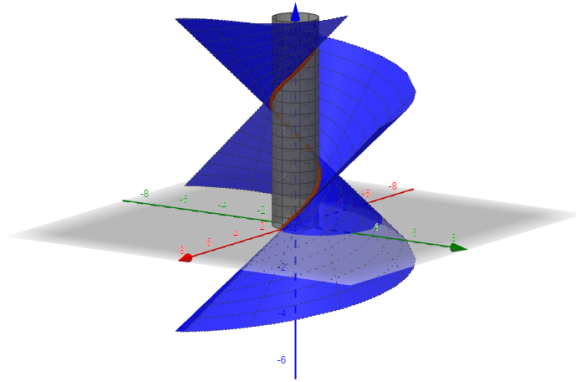


Figura 5.8: Superfície tangente da hélice.

circunferência dada por

$$\alpha(t) = (3 \operatorname{sen}(t), 3 \operatorname{cos}(t), 0), \quad 0 < t < 2\pi$$

e $w(t)$ é o vetor definido por

$$w(t) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{cos}(t), \operatorname{cos}\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

Assim, a faixa de Möbius é parametrizada por

$$\begin{aligned} X(t, v) &= \alpha(t) + vw(t) \\ &= (3 \operatorname{sen}(t), 3 \operatorname{cos}(t), 0) + v \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(t), -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{cos}(t), \operatorname{cos}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ &= \left(\left(3 - v \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \operatorname{sen}(t), \left(3 - v \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \operatorname{cos}(t), v \operatorname{cos}\left(\frac{t}{2}\right) \right), \quad 0 < t < 2\pi, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

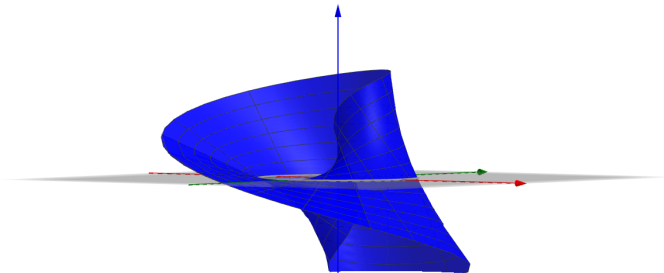


Figura 5.9: Faixa de Möbius.

5.2 Curva de estrição

Faremos o estudo de algumas propriedades das superfícies regradas.

Definição 5.2.1. Uma superfície regrada parametrizada por $X(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$ é dita *não-cilíndrica* se $w'(t) \neq \vec{0}$, ou seja, se $w'(t)$ não é constante em I .

Queremos mostrar, com o estudo a seguir, que, pelo menos, para superfícies regradas que satisfazem uma certa condição razoável, as singularidades de uma tal superfície (caso existam) concentram-se ao longo de uma curva desta superfície.

Lema 5.2.1. *Seja $\tilde{X}: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\tilde{X}(t, v) = \alpha(t) + v\gamma(t)$, uma parametrização de uma superfície regrada não-cilíndrica. Então, \tilde{X} possui uma reparametrização da forma*

$$X(t, v) = \beta(t) + vw(t),$$

onde $\|w(t)\| \equiv 1$ e $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$.

Demonstração: Por definição, a função diferenciável γ não se anula em I . O versor de $\gamma(t)$, $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ dá a mesma direção e sentido de γ . Deste modo, podemos definir uma reparametrização, $\tilde{\tilde{X}}$, de \tilde{X} , dada por

$$\tilde{\tilde{X}}(t, v) = \tilde{X}\left(t, \frac{v}{\|\gamma(t)\|}\right) = \alpha(t) + v\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Nestas condições, $\tilde{\tilde{X}}$ tem o mesmo traço de \tilde{X} . Fazendo $w(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$, podemos escrever

$$\tilde{\tilde{X}} = \alpha(t) + vw(t).$$

Por construção, $\|w(t)\| = 1$, segue que $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$. Queremos obter uma curva parametrizada β , contida no traço da superfície regrada $\tilde{\tilde{X}}$, de modo que $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Assim, teremos

$$\beta(t) = \alpha(t) + \mu(t)w(t), \quad (5.2)$$

para alguma função real $\mu(t)$.

Supondo a existência de tal curva β , temos que:

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \mu'(t)w(t) + \mu(t)w'(t). \quad (5.3)$$

Fazendo o produto interno da equação (5.3) com $w'(t)$, teremos:

$$0 = \langle \beta'(t), w'(t) \rangle = \langle \alpha'(t), w'(t) \rangle + \underbrace{\mu'(t)\langle w(t), w'(t) \rangle}_{=0} + \mu(t)\langle w'(t), w'(t) \rangle. \quad (5.4)$$

Como a superfície regrada é não-cilíndrica, $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$ e, em consequência disso, também $w'(t) \neq \vec{0}$, uma vez que $w(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$.

De (5.4), $\mu = \mu(t)$ fica definida por

$$\mu(t) = -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} = -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2}. \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.2), definimos $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{X}$, por

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} w(t),$$

obtendo uma curva parametrizada, contida na superfície, que satisfaz a condição

$$\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0.$$

Definindo, por fim,

$$\begin{aligned} X(t, v) &= \tilde{X}(t, \mu(t) + v) \\ &= \alpha(t) + (\mu(t) + v) w(t) \\ &= \underbrace{\alpha(t) + \mu(t)w(t)}_{=\beta(t)} + vw(t) \\ &= \beta(t) + vw(t) \end{aligned}$$

obtemos uma reparametrização de \tilde{X} e, conseqüentemente, uma reparametrização de \tilde{X} , satisfazendo as condições pretendidas. ■

Definição 5.2.2. Seja X uma superfície regrada não-cilíndrica dada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t).$$

A curva

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} w(t)$$

é chamada *curva (ou linha) de estrição* da superfície regrada X , e os pontos dessa curva são chamados *pontos centrais da superfície regrada*.

Proposição 5.2.1. A curva de estrição, $\beta(t)$, da superfície não-cilíndrica X não depende da escolha da diretriz α dessa superfície.

Demonstração: Seja $\bar{\alpha}$ uma outra diretriz da superfície regrada, isto é, vamos supor que para todo $(t, v) \in I \times J$, vale

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \bar{\alpha}(t) + sw(t), \quad (5.6)$$

para alguma função $s = s(v)$.

Temos assim

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} w(t)$$

e

$$\bar{\beta}(t) = \bar{\alpha}(t) - \frac{\langle \bar{\alpha}'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} w(t),$$

as curvas de estrição correspondentes às diretrizes $\alpha(t)$ e $\bar{\alpha}(t)$, respetivamente. Resulta que

$$\beta(t) - \bar{\beta}(t) = \alpha(t) - \bar{\alpha}(t) + \frac{\langle \bar{\alpha}'(t) - \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} w(t). \quad (5.7)$$

Temos também, de (5.6), que

$$\alpha(t) - \bar{\alpha}(t) = (s - v)w(t).$$

Substituindo essa expressão em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned}\beta(t) - \bar{\beta}(t) &= \left[(s-v) + \frac{\langle (v-s)w'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} \right] w(t) \\ &= \left[(s-v) + \frac{(v-s)\|w'(t)\|^2}{\|w'(t)\|^2} \right] w(t) \\ &= [(s-v) + (v-s)] w(t) = \vec{0}.\end{aligned}$$

o que implica $\beta(t) = \bar{\beta}(t)$, para todo $t \in I$, como queríamos demonstrar. ■

5.2.1 Exemplos de curvas de estrição de algumas superfícies regradas

Exemplo 5.2.1. (Curva de estrição do cone generalizado)

Queremos obter a curva de estrição $\beta(t)$ do cone generalizado parametrizado por

$$X(t, v) = p + vw(t).$$

A diretriz desse cone é um ponto, $\alpha(t) = p$, logo, $\alpha'(t) = \vec{0}$. Temos que

$$\mu(t) = -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} = -\frac{\langle \vec{0}, w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} = 0.$$

Logo,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \mu(t)w(t) = p + 0w(t) = p \tag{5.8}$$

para todo $t \in I$. Portanto, a curva de estrição do cone generalizado é uma curva degenerada em um ponto, que é o seu vértice.

Exemplo 5.2.2. (Curva de estrição do hiperbolóide de uma folha)

Consideremos o hiperbolóide de uma folha dado por

$$X(s, v) = (\cos(s) - v \operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(s) + v \cos(s), v)$$

gerado pela diretriz $\alpha(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s), 0)$ e pelo vetor $w(s) = (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 1)$, $s \in (0, 2\pi)$. É fácil verificar que $\alpha(s)$ é uma curva contida no hiperbolóide dado pela parametrização X . Consideremos $x(s)^2 + y(s)^2 - z(s)^2 = 1$, a equação do hiperbolóide de uma folha. Com efeito, de $\alpha(s)$, fazendo $x(s) = \cos(s)$, $y(s) = \operatorname{sen}(s)$ e $z(s) = 0$, teremos:

$$x(s)^2 + y(s)^2 - z(s)^2 = \cos(s)^2 + \operatorname{sen}(s)^2 = 1,$$

pelo que, $\alpha(s)$ é a curva plana cujo traço é a circunferência unitária \mathbb{S}^1 , no plano $z = 0$, e satisfaz a equação do hiperbolóide de uma folha. Fazendo

$$\langle \alpha'(s), w'(s) \rangle = \langle (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 0), (-\cos(s), -\operatorname{sen}(s), 0) \rangle = 0, \quad 0 < s < 2\pi.$$

Também,

$$\|w'(s)\|^2 = \langle (-\cos(s), -\operatorname{sen}(s), 0), (-\cos(s), -\operatorname{sen}(s), 0) \rangle = 1$$

Logo,

$$\mu(t) = \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} = 0$$

e, portanto, a curva de estrição

$$\beta(s) = \alpha(s) + \underbrace{\mu(s)w(s)}_{=0} = \alpha(s).$$

Assim, a curva de estrição β do hiperbolóide de uma folha é a própria diretriz α , ou seja, é a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$.

Exemplo 5.2.3. (Curva de estrição do helicóide)

Seja o helicóide S dado pela parametrização

$$X(t, v) = ((1 + v) \cos t, (1 + v) \operatorname{sen} t, t), (t, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Já vimos que é gerado pelas curvas $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $w(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Temos, $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$ e $w'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} \\ &= -\frac{\langle (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1), (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \rangle}{1} \\ &= -(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Temos então que a curva de estrição do helicóide é dada por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha(t) + \mu(t)w(t) \\ &= \alpha(t) - w(t) \\ &= (\cos t - \cos t, \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t, t - 0) \\ &= (0, 0, t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A curva de estrição do helicóide dado acima é o eixo z . Podemos então reparametrizar o helicóide usando como curva diretriz a sua curva de estrição:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, v) &= (0, 0, t) + v(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \\ &= (v \cos t, v \operatorname{sen} t, t), (t, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Exemplo 5.2.4. (Curva de estrição do parabolóide hiperbólico)

Ja vimos, em (5.1), que o parabolóide hiperbólico é uma superfície regrada gerada pela família

$$\alpha(t) = (t, 0, 0) \text{ e } w(t) = \frac{(0, 1, kt)}{\sqrt{1 + k^2 t^2}}.$$

A curva $\alpha(t)$ está contida no parabolóide e verifica $\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle = 0, \forall t \in I$. Nesse caso,

$$\mu(t) = -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2} = 0$$

e a curva de estrição $\beta(t)$ é dada por

$$\beta(t) = \alpha(t) + \underbrace{\mu(t)w(t)}_{=0} = \alpha(t)$$

que coincide com a própria diretriz $\alpha(t) = (t, 0, 0)$, ou seja, a curva de estrição do parabolóide hiperbólico é o eixo x .

Exemplo 5.2.5. (Curva de estrição de uma superfície tangente)

Vamos mostrar que a curva de estrição de uma superfície tangente de uma curva é a própria curva. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva parametrizada regular. Consideremos a superfície tangente à curva α , dada pela parametrização

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha(s)$ está parametrizada por comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$. Temos que as geratrizes têm a direção do vetor

$$w(s) = \alpha'(s) \implies w'(s) = \alpha''(s).$$

Como $\alpha'(s)$ é unitário, resulta que $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0, \forall s \in I$. Logo,

$$\mu(s) = -\frac{\langle \alpha'(s), w'(s) \rangle}{\|w'(s)\|^2} = -\frac{\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle}{\|\alpha''(s)\|^2} = 0.$$

Portanto, a curva de estrição

$$\beta(s) = \alpha(s) + \underbrace{\mu(s)w(s)}_{=0, pois \mu(s)=0} = \alpha(s) \tag{5.9}$$

Concluimos assim que a curva de estrição de uma superfície tangente de uma curva coincide com a própria curva.

5.3 Curvatura Gaussiana de Superfícies regradas

Teorema 5.3.1. *Em pontos regulares, a curvatura Gaussiana K de uma superfície regrada não-cilíndrica satisfaz $K \leq 0$ e é zero apenas ao longo das geratrizes que intersectam a curva de estrição em um ponto singular.*

Demonstração: Considere a superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, regrada não-cilíndrica, dada pela parametrização

$$X(t, u) = \beta(t) + uw(t), (t, u) \in I \times J, \tag{5.10}$$

onde $\beta(t)$ é a sua curva de estrição, $w'(t) \neq \vec{0}$ e $\|w(t)\| = 1$, para todo $t \in I$. Calculando os vetores tangentes coordenados, teremos:

$$\begin{aligned} X_t(t, u) &= \beta'(t) + uw'(t) \text{ e } X_u = w(t) \\ X_t(t, u) \wedge X_u(t, u) &= \beta'(t) \wedge w(t) + uw'(t) \wedge w(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como o vetor $w(t)$ é unitário, temos, por derivação com respeito a t que

$$\langle w'(t), w(t) \rangle = 0. \tag{5.12}$$

Por outro lado, a diretriz $\beta(t)$ é a curva de estrição da superfície, portanto,

$$\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0. \quad (5.13)$$

Pela propriedade do produto vetorial, o vetor $\beta'(t) \wedge w(t)$ é perpendicular a $\beta'(t)$ e a $w(t)$; igualmente, de (5.12) e (5.13) o vetor $w'(t)$ é perpendicular a $\beta'(t)$ e a $w(t)$, logo

$$\beta'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w'(t), \quad (5.14)$$

para alguma função real $\lambda(t)$.

Substituindo (5.14) em (5.11), teremos:

$$X_t(t, u) \wedge X_u(t, u) = \lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t),$$

e, consequentemente:

$$\begin{aligned} \|X_t(t, u) \wedge X_u(t, u)\|^2 &= \|\lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t)\|^2 \\ &= \langle \lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t), \lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t) \rangle \\ &= \langle \lambda(t)w'(t), \lambda(t)w'(t) \rangle + \langle \lambda(t)w'(t), uw'(t) \wedge w(t) \rangle \\ &\quad + \langle uw'(t) \wedge w(t), \lambda(t)w'(t) \rangle + \langle uw'(t) \wedge w(t), uw'(t) \wedge w(t) \rangle \\ &= \lambda^2(t)\langle w'(t), w'(t) \rangle + 2\lambda(t)u\langle w'(t), w'(t) \wedge w(t) \rangle + \\ &\quad + u^2\langle w'(t) \wedge w(t), w'(t) \wedge w(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Considerando, em (5.15), que

- $\langle w'(t), w'(t) \rangle = \|w'(t)\|^2$
- $\langle w'(t), w'(t) \wedge w(t) \rangle = 0$ (Propriedade do produto vetorial)
- $\langle w'(t) \wedge w(t), w'(t) \wedge w(t) \rangle = \|w'(t)\|^2\|w(t)\|^2 - \langle w'(t), w(t) \rangle^2 = \|w'(t)\|^2$, pois $\|w(t)\| = 1 \implies \langle w'(t), w(t) \rangle = 0$.

Assim,

$$\|X_t(t, u) \wedge X_u(t, u)\|^2 = \lambda^2(t)\|w'(t)\|^2 + u^2\|w'(t)\|^2 = (\lambda^2(t) + u^2)\|w'(t)\|^2. \quad (5.16)$$

Fixando $(t_0, u_0) \in I \times J$, os pontos singulares da superfície X são aqueles tais que $X_t(t_0, u_0) \wedge X_u(t_0, u_0) = \vec{0}$, o mesmo que $\|X_t(t_0, u_0) \wedge X_u(t_0, u_0)\| = 0$. Comparando esta igualdade com (5.16), tendo em conta que $w'(t) \neq 0, \forall t \in I$, teremos:

$$\begin{aligned} \|X_t(t_0, u_0) \wedge X_u(t_0, u_0)\| = 0 &\implies (\lambda^2(t_0) + u^2)\|w'(t_0)\|^2 = 0 \\ &\iff \lambda^2(t_0) + u^2 = 0 \iff \lambda(t_0) = u = 0 \end{aligned}$$

Quando $u = 0$, os pontos da superfície situam-se ao longo da sua curva de estrição, $\beta(t)$, e eles serão singulares se, e somente se, $\lambda(t_0) = 0$, ou seja, os pontos singulares situam-se ao longo da curva de estrição da superfície.

A seguir, vamos calcular a curvatura de Gauss da superfície regrada da superfície (5.10) nos seus pontos não-singulares.

O campo normal é dado por

$$\begin{aligned} N(t, u) &= \frac{X_t(t, u) \wedge X_u(t, u)}{\|X_t(t, u) \wedge X_u(t, u)\|} \\ &= \frac{\lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t)}{\sqrt{\lambda^2(t) + u^2}\|w'(t)\|} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} X_{tu}(t, u) &= w'(t) \\ X_{tt}(t, u) &= \beta''(t) + uw''(t) \\ X_{uu}(t, u) &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo dos coeficientes e, f, g da segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle N(t, u), X_{tt}(t, u) \rangle = \frac{\langle \lambda(t)w'(t) + uw'(t), \beta''(t) + uw''(t) \rangle}{\sqrt{\lambda^2(t) + u^2}\|w'(t)\|} \\ f &= \langle N(t, u), X_{tu}(t, u) \rangle = \frac{\langle w'(t), \lambda(t)w'(t) + uw'(t) \wedge w(t) \rangle}{\sqrt{\lambda^2(t) + u^2}\|w'(t)\|} \\ &= \frac{\lambda(t)\|w'(t)\|}{\sqrt{\lambda^2(t) + u^2}} \\ g &= \langle N(t, u), X_{uu}(t, u) \rangle = \langle N(t, u), \vec{0} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Consideremos ainda a igualdade

$$\|X_t(t, u) \wedge X_u(t, u)\|^2 = \langle X_t(t, u), X_t(t, u) \rangle \langle X_u(t, u), X_u(t, u) \rangle - \langle X_t(t, u), X_u(t, u) \rangle^2 = EG - F^2,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Portanto, a curvatura de Gauss, K , é dada por

$$K(t, u) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{\lambda^2(t)\|w'(t)\|^2}{\lambda^2(t) + u^2}}{(\lambda^2(t) + u^2)\|w'(t)\|^2} = -\frac{\lambda^2(t)}{(\lambda^2(t) + u^2)^2} \leq 0 \quad (5.18)$$

Se a curvatura de Gauss num ponto $X(t_0, u_0)$ da geratriz for nula, ela será nula em todos pontos dessa geratriz. É fácil verificar que $K(t_0, u) = 0$ implica, necessariamente, $\lambda(t_0) = 0$. Com efeito, fixando $t_0 \in I$, obtemos a geratriz $L_{t_0}(u) = X(t_0, u) = \beta(t_0) + uw(t_0)$, $u \in J$. Assim, $X(t_0, u)$ são todos os pontos da geratriz L_{t_0} com $\lambda(t_0) = 0$, independentemente da variável u , o que nos permite concluir que todos os pontos desta geratriz possuem Curvatura de Gauss nula. Em particular, a geratriz intersecta a curva de estrição no ponto singular $X(t_0, u)$, com $u = 0$. ■

Fazendo o produto interno de (5.14) com $w'(t)$, teremos $\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle = \langle \lambda(t)w'(t), w'(t) \rangle$, de onde:

$$\lambda(t) = \frac{\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2}, \forall t \in I.$$

Definição 5.3.1. Seja $X: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $X(t, u) = \beta(t) + uw(t)$, uma parametrização de uma superfície regrada não-cilíndrica, onde $\beta(t)$ é a sua curva de estrição. A função $\lambda = \lambda(t)$, definida por

$$\lambda(t) = \frac{\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle}{\|w'(t)\|^2}, \forall t \in I \quad (5.19)$$

é chamada *parâmetro de distribuição* de X .

5.4 Interpretação geométrica da curva de estrição

Nesta secção, vamos mostrar que a curva de estrição é o lugar geométrico dos pontos da superfície regrada não-cilíndrica, onde o módulo da curvatura Gaussiana, $K(t, u)$, assume o seu valor máximo para cada ponto t fixado do intervalo I . Para o efeito, vamos usar a equação

$$K(t, u) = -\frac{\lambda^2(t)}{(\lambda^2(t) + u^2)^2}$$

obtida no teorema (5.3.1).

Como os pontos de uma geratriz são os pontos regulares da superfície, com excepção possivelmente ao ponto central, então fixando $t_0 \in I$, teremos $L_{t_0} = \beta(t_0) + uw(t_0)$, e:

$$K(t_0, u) = -\frac{\lambda^2(t_0)}{(\lambda^2(t_0) + u^2)^2} \Rightarrow |K(t_0, u)| = \left| -\frac{\lambda^2(t_0)}{(\lambda^2(t_0) + u^2)^2} \right| = \left(\frac{\lambda(t_0)}{\lambda^2(t_0) + u^2} \right)^2.$$

Se tivermos $\lambda(t_0) \neq 0$, a função $|K(t_0, u)|$ é contínua sobre a geratriz L_{t_0} e assume o seu valor máximo quando o seu denominador é mínimo. Com efeito, o seu denominador, $(\lambda^2(t_0) + u^2)^2$, é mínimo no ponto em que $u = 0$, isto é, no ponto central, $\beta(t_0)$ da superfície regrada não-cilíndrica. Portanto, a curva de estrição de uma superfície regrada não-cilíndrica é o lugar geométrico dos pontos onde as funções módulo da curvatura Gaussiana, $|K(t, u)|$, assumem seus valores máximos. Por outro lado, considerando os pontos sobre a geratriz L_{t_0} que são simétricos em relação ao ponto central, $\beta(t_0)$, ou seja, os pontos, $X(t_0, -u)$ e $X(t_0, u)$, $u \neq 0$, temos que:

$$K(t_0, -u) = -\frac{\lambda^2(t_0)}{(\lambda^2(t_0) + (-u)^2)^2} = -\frac{\lambda^2(t_0)}{(\lambda^2(t_0) + u^2)^2} = K(t_0, u),$$

isto é, a curvatura de Gauss, K , de uma superfície regrada não-cilíndrica assume os mesmos valores em pontos sobre uma geratriz fixada que são simétricos em relação ao ponto central, $\beta(t_0)$. Daqui decorre a justificação da designação "central" para os pontos da curva de estrição.

Exemplo 5.4.1. No exemplo (5.2.2) vimos que o hiperbolóide de uma folha dado pela parametrização

$$X(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v), \forall (s, v) \in I \times \mathbb{R},$$

tem como curva de estrição a circunferência unitária no plano $z = 0$ parametrizada por $\beta(s) = (\cos s, \sin s, 0)$, sendo $w(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$. Fixado $s = \frac{\pi}{2}$ obtemos a geratriz

$$L_{\frac{\pi}{2}}(v) = X\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (-v, 1, v) = (0, 1, 0) + v(-1, 0, 1).$$

Os pontos $X\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = (-1, 1, 1)$ e $X\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) = (1, 1, -1)$, pertencentes a esta geratriz, são simétricos em relação ao ponto central $X\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 1, 0)$. Derivando β e w obtemos

$$\beta'(s) = (-\sin s, \cos s, 0) \text{ e } w'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

e portanto $\beta'(s) \wedge w(s) = (\cos s, \sin s, 0)$. Logo,

$$\langle \beta'(s) \wedge w(s), w'(s) \rangle = \langle (\cos s, \sin s, 0), (-\cos s, -\sin s, 0) \rangle = -1$$

Assim, o parâmetro de distribuição da superfície X é

$$\lambda(s) = \frac{\langle \beta'(s) \wedge w(s), w'(s) \rangle}{\|w'(s)\|^2} = \frac{-1}{1} = -1, \quad 0 < s < 2\pi.$$

Já observámos, no Teorema (5.3.1), que as singularidades de uma superfície regrada não-cilíndrica situam-se sobre a sua curva de estrição e ocorrem se, e somente se, a sua função parâmetro de distribuição, $\lambda(s)$, for nula. No caso do hiperbolóide de uma folha, $\lambda(s) \equiv -1$, o que permite concluir que esta superfície não possui pontos singulares. Calculemos agora a curvatura em função do parâmetro de distribuição.

$$K(s, v) = -\frac{\lambda^2(s)}{(\lambda^2(s) + v^2)} = \frac{-1}{(1 + v^2)}, \quad \forall (s, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Assim, nos pontos acima considerados, $X(\frac{\pi}{2}, -1)$ e $X(\frac{\pi}{2}, 1)$, simétricos em relação ao ponto central, $X(\frac{\pi}{2}, 0)$, temos:

$$K(\frac{\pi}{2}, -1) = -\frac{1}{4} = K(\frac{\pi}{2}, 1).$$

Com este exemplo, mostrámos que a curvatura de Gauss tem os mesmos valores nos pontos $(\frac{\pi}{2}, -1)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$ da geratriz $L_{\frac{\pi}{2}}(v)$, que são simétricos em relação ao ponto central, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, situado na curva de estrição do hiperbolóide de uma folha. Mais, é fácil verificar que o módulo da curvatura de Gauss é máximo no ponto central $X(\frac{\pi}{2}, 0)$ sobre a geratriz $L_{\frac{\pi}{2}}(v)$:

$$K(\frac{\pi}{2}, 0) = -1 \implies |K(\frac{\pi}{2}, 0)| = 1.$$

5.5 Superfícies regradas desenvolvíveis

Definição 5.5.1. Seja $X(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$ uma superfície regrada, não necessariamente não-cilíndrica, gerada pela família a 1-parâmetro $\{\alpha(t), w(t)\}$, com $\|w(t)\| = 1$. Dizemos que a superfície X é desenvolvível se $(w(t), w'(t), \alpha'(t)) \equiv 0$.

A proposição seguinte permite-nos dar uma interpretação geométrica das superfícies regradas desenvolvíveis.

Proposição 5.5.1. Se uma superfície regrada é desenvolvível então a sua curvatura Gaussiana, K , é identicamente nula em todos os pontos regulares.

Demonstração: Seja $X(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$ uma superfície regrada desenvolvível, ou seja, $(w, w', \alpha') \equiv 0$. Nos pontos regulares da superfície X , temos:

$$\begin{aligned}
X_t(t, v) &= \alpha'(t) + vw'(t) \\
X_v(t, v) &= w(t) \\
X_t(t, v) \wedge X_v(t, v) &= \alpha'(t) \wedge w(t) + vw'(t) \wedge w(t) \\
X_{tt}(t, v) &= \alpha''(t) + vw''(t) \\
X_{vv}(t, v) &= \vec{0} \\
X_{tv}(t, v) &= w'(t)
\end{aligned}$$

O campo unitário normal à superfície é dado por

$$N(t, v) = \frac{X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|}$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental, e , f , e g são:

$$\begin{aligned}
e(t, v) &= \langle X_{tt}(t, v), N(t, v) \rangle = \left\langle \alpha''(t) + vw''(t), \frac{\alpha'(t) \wedge w(t) + vw'(t) \wedge w(t)}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \right\rangle \\
f(t, v) &= \langle X_{tv}(t, v), N(t, v) \rangle = \left\langle w'(t), \frac{\alpha'(t) \wedge w(t) + vw'(t) \wedge w(t)}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \right\rangle \\
g(t, v) &= \langle X_{vv}(t, v), N(t, v) \rangle = \langle \vec{0}, N(t, v) \rangle = 0
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão de f , teremos:

$$\begin{aligned}
f(t, v) &= \langle X_{tv}(t, v), N(t, v) \rangle = \left\langle w'(t), \frac{\alpha'(t) \wedge w(t) + vw'(t) \wedge w(t)}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \langle w'(t), \alpha'(t) \wedge w(t) \rangle \\
&= \frac{1}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \langle \alpha'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle \\
&= \frac{1}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \langle \alpha'(t), w(t), w'(t) \rangle \\
&= \frac{1}{\|X_t(t, v) \wedge X_v(t, v)\|} \underbrace{\langle \alpha'(t), w(t), w'(t) \rangle}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Os coeficientes f e g da segunda forma fundamental são nulos em todos os pontos regulares de X e, portanto, como a curvatura de Gauss é dada por

$$K(t, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(t, v),$$

concluimos que $K = 0$ em todos os pontos regulares. ■

Como exemplo de superfícies desenvolvíveis temos os cilindros generalizados, cones e as superfícies tangentes, como ficará demonstrado mais adiante. Para alguns resultados a seguir, precisaremos do seguinte lema de álgebra linear.

Lema 5.5.1. *Se $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são não-nulos e ortogonais dois a dois, então são linearmente independentes.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0.$$

Fazendo o produto interno por $v_j, j = 1, \dots, k$ na equação acima obtemos

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k, v_j \rangle = \langle 0, v_j \rangle = 0.$$

Tendo em conta a ortogonalidade dos vetores, desenvolvendo o lado esquerdo da equação vem

$$a_j \langle v_j, v_j \rangle = a_j \|v_j\|^2 = 0.$$

Como os vetores $v_j, j = 1, \dots, k$ são não nulos, concluímos que $a_j = 0, j = 1, \dots, k$. ■

Vamos agora associar três superfícies regradas associadas a uma curva α com curvatura positiva e as condições para que sejam desenvolvíveis [3, 9], tendo em conta a definição de superfície regrada desenvolvível apresentada em (5.5.1). São elas:

1. *Superfície tangente*, já vista em (5.1.2), parametrizada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R},$$

onde $\alpha'(s)$ é o vetor tangente unitário à curva diretriz, $\alpha(s)$.

2. *Superfície normal principal* parametrizada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + vn(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R},$$

onde $n(s)$ é o vetor unitário normal à curva $\alpha(s)$

3. *Superfície binormal*, parametrizada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + vb(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R},$$

onde $b(s)$ é o vetor unitário binormal à curva $\alpha(s)$.

Assim, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 5.5.2. A superfície tangente é sempre uma superfície desenvolvível. A superfície normal principal e a superfície binormal são superfícies desenvolvíveis se e somente se a curva correspondente é plana.

Demonstração:

1. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco e consideremos a superfície tangente

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Como $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)$ é perpendicular a $\alpha'(s)$, vem $(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'(s)) = 0$. Portanto, X é desenvolvível.

2. Para a superfície normal principal, temos que

$$\begin{aligned}
(\alpha'(s), w(s), w'(s)) &= (\alpha'(s), n(s), n'(s)) \\
&= (\alpha'(s), n(s), -k(s)t(s) - \tau(s)b(s)) \\
&= (\alpha'(s), n(s), -\tau(s)b(s)).
\end{aligned}$$

Como os vetores $t(s) = \alpha'(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ são linearmente independentes, este produto interno só se anula quando $\tau(s) = 0$, isto é, quando a curva é plana. Reciprocamente, se a curva $\alpha(s)$ é plana, a normal principal, $n(s)$, pertence ao plano da curva e assim a superfície normal é um plano, que é uma superfície desenvolvível.

3. Sobre a superfície binormal, temos:

$$(\alpha'(s), w(s), w'(s)) = (\alpha'(s), b(s), b'(s)) = (\alpha'(s), b(s), \tau(s)n(s)).$$

Novamente, este determinante só é nulo se $\tau(s) = 0$, isto é, quando a curva, $\alpha(s)$, é plana. Reciprocamente, se $\alpha(s)$ é uma curva plana, então, o vetor binormal, $b(s)$ é constante e, portanto, $b'(s) = 0$. Nesse caso, resulta que $(\alpha'(s), b(s), b'(s))$ será nulo. Portanto, nessas condições, a superfície será desenvolvível. ■

Exemplo 5.5.1. Consideremos a curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, definida por

$$\alpha(s) = (0, \cos s, \sin s), 0 < s < 2\pi,$$

cujo traço é a circunferência unitária contida no plano yz . A curva tem curvatura constante e igual 1. O vetor tangente a essa curva é dado por $\alpha'(s) = (0, -\sin s, \cos s) \implies \alpha''(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$. O vetor normal é dado por $n(s) = (0, -\cos s, -\sin s) \implies n'(s) = (0, \sin s, -\cos s)$. O vetor binormal é dado por $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s) = (1, 0, 0) \implies b'(s) = (0, 0, 0)$. Assim, podemos parametrizar as seguintes superfícies.

1. Superfície tangente

$$\begin{aligned}
X(s, v) &= \alpha(s) + v\alpha'(s) \\
&= (0, \cos s, \sin s) + v(0, -\sin s, \cos s) \\
&= (0, \cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s),
\end{aligned}$$

é uma superfície desenvolvível, pois, é trivial que o produto $(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'(s)) = 0$.

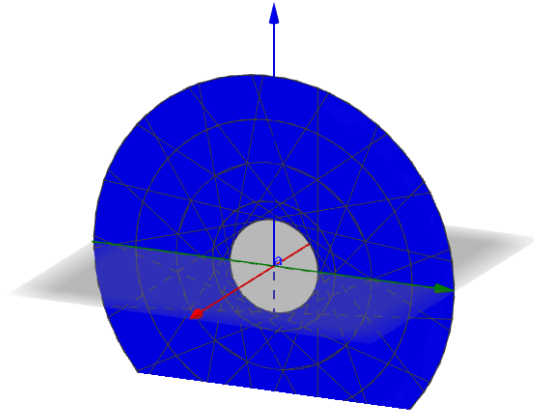


Figura 5.10: Superfície tangente da circunferência.

2. Superfície normal principal

$$\begin{aligned}
 X(s, v) &= \alpha(s) + vn(s) \\
 &= (0, \cos s, \operatorname{sen} s) + v(0, -\cos s, -\operatorname{sen} s) \\
 &= (0, (1 - v) \cos s, (1 - v) \operatorname{sen} s).
 \end{aligned}$$

Temos que $\langle n(s), n'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, -\operatorname{sen} s, \cos s) \rangle = 0$, pelo que a superfície assim parametrizada é desenvolvível.

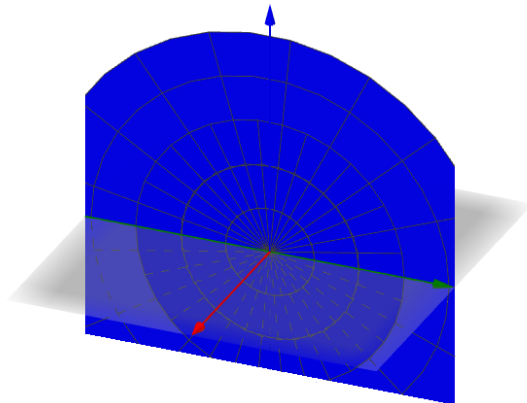


Figura 5.11: Superfície normal principal da circunferência.

3. Superfície binormal

$$\begin{aligned} X(s, v) &= \alpha(s) + vb(s) \\ &= (0, \cos s, \operatorname{sen} s) + v(1, 0, 0) \\ &= (v, \cos s, \operatorname{sen} s), \end{aligned}$$

é uma superfície desenvolvível, porque

$$\begin{aligned} (b(s), b'(s), \alpha'(s)) &= \langle (0, 0, 0), (0, -\operatorname{sen} s, \cos s) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

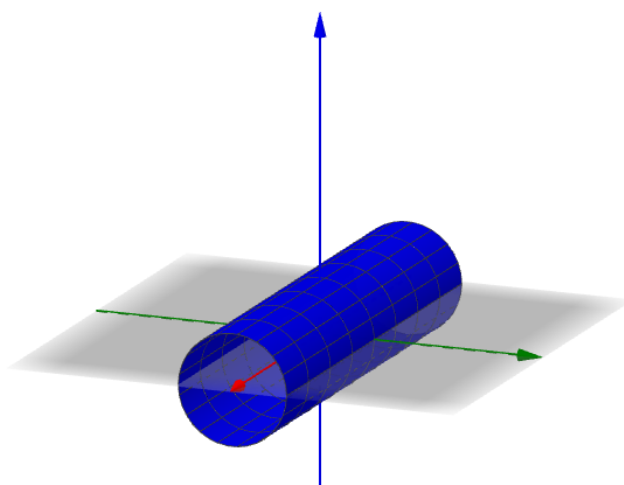


Figura 5.12: Superfície binormal da circunferência (cilindro).

Conforme demonstrado na proposição (5.5.2), podemos ilustrar com estes exemplos que a superfície tangente é desenvolvível, a superfície normal principal e a superfície binormal são desenvolvíveis desde que a curva diretriz seja plana. Em particular, com a curva parametrizada considerada vimos que a superfície tangente e a superfície normal da circunferência são partes de planos, a superfície binormal da circunferência é um cilindro.

No exemplo seguinte, pretendemos ilustrar de forma particular o resultado demonstrado na proposição (5.5.2), fazendo alguns cálculos. Veremos que ao considerarmos a curva diretriz não contida num plano, a superfície tangente é outra vez uma superfície regrada desenvolvível, mas a superfície normal principal e a superfície binormal não serão desenvolvíveis.

Exemplo 5.5.2. Consideremos a curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\alpha(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Então $\alpha'(t) = (1, -\operatorname{sen} t, \cos t)$ e $\alpha''(t) = (0, -\cos t, -\operatorname{sen} t) = n(t) \implies n'(t) = (0, \operatorname{sen} t, -\cos t)$.

Assim, o vetor binormal será dado por $b(t) = (1, \operatorname{sen} t, -\operatorname{coss} t) \implies b'(t) = (0, \operatorname{coss} t, \operatorname{sent} t)$. Logo, temos

1. Superfície tangente

$$\begin{aligned} X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t) &= (t, \operatorname{coss} t, \operatorname{sent} t) + v(1, -\operatorname{sent} t, \operatorname{coss} t) \\ &= (t + v, \operatorname{coss} t - v \operatorname{sent} t, \operatorname{sent} t + v \operatorname{coss} t), (t, v) \in I \times J. \end{aligned}$$

Daqui, temos que

$$\begin{aligned} (w(t), w'(t), \alpha'(t)) &= (\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'(t)) \\ &= ((1, -\operatorname{sent} t, \operatorname{coss} t), (0, -\operatorname{coss} t, -\operatorname{sent} t), (1, -\operatorname{sent} t, \operatorname{coss} t)) = 0, \forall t \in I, \end{aligned}$$

sendo X , por definição, uma superfície regrada desenvolvível.

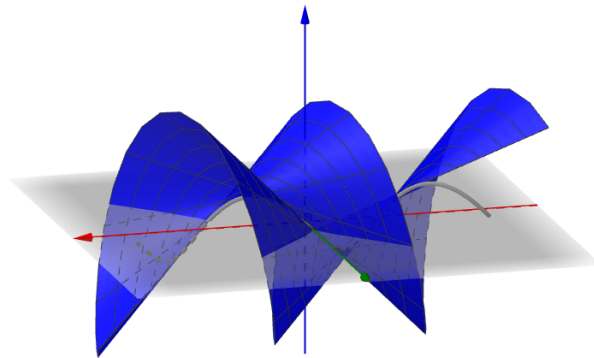


Figura 5.13: Superfície tangente da hélice.

2. Superfície normal principal

$$\begin{aligned} X(t, v) = \alpha(t) + vn(t) &= (t, \operatorname{coss} t, \operatorname{sent} t) + v(0, -\operatorname{coss} t, -\operatorname{sent} t) \\ &= (t, (1 - v) \operatorname{coss} t, (1 - v) \operatorname{sent} t), (t, v) \in I \times J. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} (w(t), w'(t), \alpha'(t)) &= (n(t), n'(t), \alpha'(t)) \\ &= ((0, -\operatorname{coss} t, -\operatorname{sent} t), (0, \operatorname{sent} t, -\operatorname{coss} t), (1, -\operatorname{sent} t, \operatorname{coss} t)) \\ &= \langle (1, 0, 0), (1, -\operatorname{sent} t, \operatorname{coss} t) \rangle = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a superfície normal principal desta curva é não-desenvolvível.

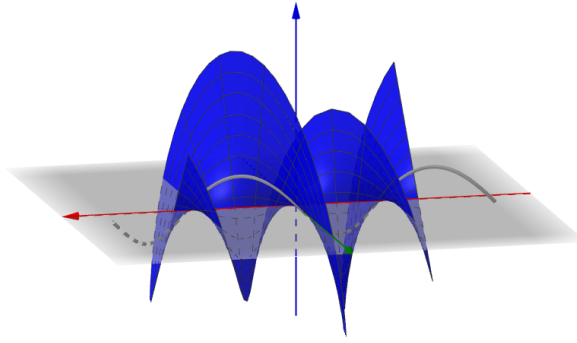


Figura 5.14: Superfície normal principal da hélice.

3. Superfície binormal

$$\begin{aligned}
 X(t, v) = \alpha(t) + vb(t) &= (t, \cos t, \operatorname{sen} t) + v(1, \operatorname{sen} t, -\cos t) \\
 &= (t + v, \cos t + v \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - v \cos t), (t, v) \in I \times J.
 \end{aligned}$$

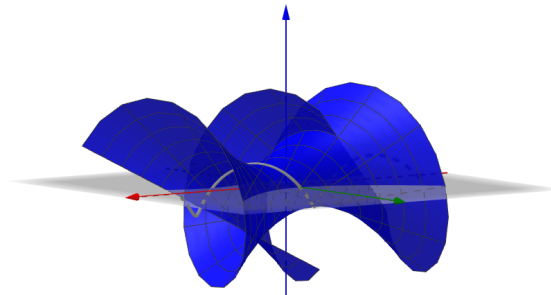


Figura 5.15: Superfície binormal da hélice.

Fazendo os cálculos,

$$\begin{aligned}
 (w(t), w'(t), \alpha'(t)) &= (b(t), b'(t), \alpha'(t)) \\
 &= ((1, \operatorname{sen} t, -\cos t), (0, \cos t, \operatorname{sen} t), (1, -\operatorname{sen} t, \cos t)) \\
 &= \langle (1, -\operatorname{sen} t, \cos t), (1, -\operatorname{sen} t, \cos t) \rangle = 2 \neq 0,
 \end{aligned}$$

portanto, superfície binormal da hélice é não-desenvolvível.

Neste exemplo, podemos constatar que a superfície tangente da hélice é uma superfície regrada desenvolvível. As superfícies normal principal e binormal da hélice são não-desenvolvíveis, em conformidade com a proposição (5.5.2).

Para o próximo exemplo, precisamos da definição seguinte.

Definição 5.5.2. Seja p um ponto de uma superfície regular S . Chamamos *direção assintótica de S em p* à direção de um vetor do espaço tangente, $T_p S$, para a qual a curvatura normal nessa direção seja nula. Dizemos que uma curva regular e conexa, C é *assintótica de S* se para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.

Exemplo 5.5.3. Consideremos uma superfície regular S e uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, $\alpha(s)$, contida em S . Suponhamos que $\alpha(s)$ não é tangente a uma direção assintótica, ou seja, o vetor $\alpha'(s)$ não é uma direção assintótica, isto é,

$$k_n(s) = II(\alpha'(s)) = -\langle dN(\alpha'(s)), \alpha'(s) \rangle \neq 0.$$

Assim $N'(s) = dN(\alpha'(s)) \neq \vec{0}$ e podemos então parametrizar uma superfície regrada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + v \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}, \quad (s, v) \in I \times J, \quad (5.20)$$

onde $N(s)$ é o vetor normal unitário a S restrito à curva $\alpha(s)$. A superfície assim parametrizada é chamada *envoltória da família de planos tangentes à S ao longo da curva $\alpha(s)$* .

Vamos mostrar que $X(s, v)$ é uma superfície desenvolvível, que é regular numa vizinhança de $v = 0$ e que é tangente à superfície S ao longo de α . Mostremos que X é desenvolvível. A superfície X é gerada pela família a 1-parâmetro $\{\alpha(s), w(s)\}$, com $w(s) = \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}$, $\forall s \in I$. Temos

$$\begin{aligned} \langle w(s), w'(s), \alpha'(s) \rangle &= \langle w(s) \wedge w'(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \left\langle \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} \wedge \left(\frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} \right)', \alpha'(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|N'(s)\|^2} \langle (N(s) \wedge N'(s)) \wedge (N(s) \wedge N''(s)), \alpha'(s) \rangle \end{aligned}$$

Usando a propriedade do duplo produto externo, $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z} = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle w(s), w'(s), \alpha'(s) \rangle &= -\frac{1}{\|N'(s)\|^2} \langle N'(s), N(s) \wedge N''(s) \rangle \underbrace{\langle N(s), \alpha'(s) \rangle}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos portanto que X é uma superfície desenvolvível.

Vamos mostrar agora que X é regular numa vizinhança de $v = 0$ e é tangente a S ao longo da curva α .

$$X_s(s, 0) = \alpha'(s) \text{ e } X_v(s, 0) = \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X_s(s, 0) \wedge X_v(s, 0) &= \alpha'(s) \wedge \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} \\
&= \frac{1}{\|N'(s)\|} \left[\langle \alpha'(s), N'(s) \rangle N(s) - \underbrace{\langle \alpha'(s), N(s) \rangle}_{=0} N'(s) \right] \\
&= \langle \alpha'(s), N'(s) \rangle \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \\
&= -k_n(s) \frac{N(s)}{\|N'(s)\|}
\end{aligned}$$

onde $k_n(s)$ é a curvatura normal de $\alpha(s)$. Como estamos a supor que $k_n(s)$ é não nula, temos que X é regular numa vizinhança de $v = 0$.

Por definição, o vetor normal em $v = 0$ é dado por

$$X_s(s, 0) \wedge X_v(s, 0) = -k_n \frac{N(s)}{\|N'(s)\|}.$$

Isto é, o vetor normal de X em $X(s, 0)$ é paralelo ao vetor normal unitário $N(s)$ de S restrito à curva $\alpha(s) = X(s, 0)$, ou seja, a superfície X é tangente a S ao longo de $v = 0$.

Por último, pretendemos obter uma interpretação geométrica para a superfície regradada X . Para o efeito, consideremos a família $\{T_{\alpha(s)}S\}$ de planos tangentes à superfície S ao longo da curva $\alpha(s)$. Se $\Delta s \in \mathbb{R}$ for pequeno, dois planos $T_{\alpha(s)}S$ e $T_{\alpha(s)+\Delta s}S$ da família intersectam-se ao longo de uma reta paralela ao vetor

$$\frac{N(s) \wedge N(s + \Delta s)}{\Delta s}.$$

Se fizermos Δs tender para zero, esta reta aproxima-se de uma posição limite paralela ao vetor

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s) \wedge N(s + \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} N(s) \wedge \frac{(N(s + \Delta s) - N(s))}{\Delta s} = N(s) \wedge N'(s).$$

Isto significa, intuitivamente, que a direcção das geratrizes de X ,

$$L_s = \alpha(s) + v \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|},$$

são as posições limites da intersecção de planos vizinhos da família $\{T_{\alpha(s)}S\}$.

Vamos mostrar, como exemplo, que se α é uma parametrização de um paralelo da esfera, \mathbb{S}^2 , então a envoltória de planos tangentes de \mathbb{S}^2 ao longo de α é um cilindro, se o paralelo for um equador, ou um cone, se o paralelo não for um equador.

Seja \mathbb{S}^2 a esfera unitária parametrizada por

$$X(s, v) = (\cos s \cos v, \sin s \cos v, \sin v), \quad 0 < s < 2\pi, \quad 0 < v < \pi.$$

Vamos considerar dois casos:

a) Fixando $v = \frac{\pi}{2}$, obtemos a curva $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$. Este paralelo é o equador da esfera \mathbb{S}^2 . O vetor tangente a $\alpha(s)$ é $\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ e vetor normal restrito à curva é $N(s) = N(s, \frac{\pi}{2}) = (\cos s, \sin s, 0)$. Derivando, obtemos $N'(s) = N'(s, \frac{\pi}{2}) = (-\sin s, \cos s, 0) = \alpha'(s)$. Assim,

$$N(s) \wedge N'(s) = (0, 0, 1).$$

Podemos então parametrizar a envoltória dos planos tangentes a \mathbb{S}^2 ao longo de $\alpha(s)$ por

$$X(s, v) = (\cos s, \sin s, 0) + v(0, 0, 1), \quad (s, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Observando que o vetor $(0, 0, 1)$ é fixo e não paralelo ao plano que contém a curva $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$, concluímos que a envoltória dos planos tangentes ao equador é um cilindro.

b) Fixando $v = \frac{\pi}{4}$ obtemos outro paralelo, que não é o equador, parametrizado por

$$\alpha(s) = X(s, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos s, \sin s, 1).$$

Temos $\alpha'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin s, \cos s, 0)$ e o vetor unitário normal à curva é $N(s) = \alpha(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos s, \sin s, 1)$.

A derivada é $N'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin s, \cos s, 0)$ e portanto $\|N'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Desta forma

$$\frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos s, -\sin s, 1).$$

Portanto, a envoltória dos planos tangentes a \mathbb{S}^2 ao longo do paralelo $\alpha(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos s, \sin s, 1)$ é parametrizada por

$$\begin{aligned} X(s, v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\cos s, \sin s, 1) + v(\cos s, \sin s, -1)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos s + v \sin s, \sin s + v \cos s, 1 - v) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} ((1 + v) \cos s, (1 + v) \sin s, 1 - v) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Vamos verificar que a parametrização (5.21) define um cone. Pela definição apresentada em (5.1.2), basta provar que todas as geratrizes $L_s = ((1 + v) \cos s, (1 + v) \sin s, 1 - v)$ da envoltória interseccionam-se num ponto $P \in \mathbb{R}^3$ não pertencente ao plano $z = 1$ que contém a curva $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 1)$. Fixando $s = 0$ e $s = \frac{\pi}{2}$ obtemos as geratrizes

$$L_0 = (1 + v, 0, 1 - v), \quad L_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1 + v, 1 - v).$$

É simples verificar que estas duas retas se interseccionam no ponto $(0, 0, 2)$. Portanto este ponto será o vértice do cone. Resta-nos verificar que todas as geratrizes se interseccionam neste ponto, confirmando então que $(0, 0, 2)$ é de facto o vértice do cone. Assim, vamos provar que $P = (0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ verifica as equações de todas as geratrizes, L_s . Fazemos $L_s = (0, 0, 2)$, temos

$$((1 + v) \cos s, (1 + v) \sin s, 1 - v) = (0, 0, 2),$$

formando o sistema,

$$\begin{cases} (1 + v) \cos s = 0 \\ (1 + v) \sin s = 0 \\ 1 - v = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ v = -1 \end{cases} \quad \text{Portanto, } P(0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3 \text{ é o ponto de interseção de}$$

todas as geratrizes de (5.21) e não pertence ao plano que contém a curva $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 1)$, o que permite concluir que a envoltória parametrizada por (5.21) é um cone, como pretendíamos.

5.5.1 Classificação parcial das superfícies regradas desenvolvíveis

Com base em [5, 8], apresentamos o resultado seguinte, o principal deste trabalho, para uma classificação parcial das superfícies regradas desenvolvíveis.

Teorema 5.5.1. *Seja $X(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$, $(t, v) \in I \times J$ uma superfície regrada desenvolvível gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$, com $\|w(t)\| = 1, \forall t \in I$. Então:*

a) *Se $w'(t) = \vec{0}, \forall t \in I$, a superfície regrada é um cilindro generalizado;*

b) *Se $w'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$, considerando a sua curva de estrição, β , temos:*

b.1) *Se $\beta'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in I$, então X é a superfície tangente de sua curva de estrição;*

b.2) *Se $\beta'(t) = \vec{0}, \forall t \in I$, então X é um cone generalizado.*

Demonstração:

- (a) Se $w'(t) = \vec{0}$ em I então o vetor $w(t)$ é constante para todo $t \in I$ e, portanto, a superfície regrada é um cilindro generalizado, gerado pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$, de acordo com o exemplo (5.1.1).
- (b₁) Considerando o facto de a superfície regrada X ser desenvolvível, temos, por definição, que $\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle = 0, \forall t \in I$. Como estamos a assumir que $\|w(t)\| = 1$, os vetores $w'(t)$ e $w(t)$ são ortogonais. Sendo β a curva de estrição da superfície X , $\beta'(t)$ e $w'(t)$ também são ortogonais. Logo, o vetor $\beta' \wedge w$ é colinear com w' , ou seja, existe uma função real λ tal que $\beta' \wedge w = \lambda w'$. Assim

$$0 = (\beta', w, w') = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = \langle \lambda w', w' \rangle = \lambda \|w'\|^2 = 0,$$

uma vez que X é desenvolvível. Logo, $\lambda = 0$ e portanto

$$\beta' \wedge w = 0.$$

Ou seja, β' e w são colineares. Podemos assim considerar uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(t)\beta'(t) = w(t), \forall t \in I.$$

Nestas condições, podemos reescrever X ,

$$X(t, v) = \beta(t) + vf(t)\beta'(t), \quad (t, v) \in I \times J \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (5.22)$$

Portanto, pela definição (5.1.2), a superfície regrada será a superfície tangente da curva de estrição $\beta(t)$.

Observemos ainda, usando a expressão (5.19), que a função parâmetro de distribuição desta superfície é dada por

$$\lambda(t) = \frac{(\beta'(t), w(t), w'(t))}{\|w'(t)\|^2}, \forall t \in I,$$

onde a notação $(\beta'(t), w(t), w'(t))$ é o mesmo que $\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle$. Como X é desenvolvível, segue que $(\beta'(t), w(t), w'(t)) = 0 \forall t \in I$. Logo,

$$\lambda(t) = \frac{(\beta'(t), w(t), w'(t))}{\|w'(t)\|^2} = 0, \forall t \in I. \quad (5.23)$$

Portanto, pelo teorema (5.3.1), a curva de estrição de uma superfície desenvolvível é o lugar geométrico dos seus pontos singulares.

- (b₂) Se $\beta'(t) = \vec{0}$, $\forall t \in I$, então, β é constante em I . Assim, $X(t, u) = p + uw(t)$ e, portanto, a superfície X é um cone generalizado (ver exemplo 5.1.2).

■

É importante ressaltar que este teorema permite-nos classificar "parcialmente" e não todas as superfícies desenvolvíveis. Por exemplo, se o conjunto dos zeros da função w' tem um ponto de acumulação, então a superfície regrada desenvolvível gerada pela família $\{\beta(t), w(t)\}$ não está classificada pelo teorema acima. O mesmo acontece quando o conjunto dos zeros de β' admite pontos de acumulação. No entanto, podemos afirmar que longe destes pontos de acumulação, uma superfície regrada desenvolvível é, como ficou provado pelo teorema, uma união de pedaços de cilindros, cones ou superfícies tangentes (ver [3]).

Considerações finais

Neste trabalho, estudámos algumas propriedades elementares das superfícies parametrizadas, com destaque para as superfícies regradas parametrizadas e sua subclasse, as superfícies regradas desenvolvíveis. Procurámos mostrar alguns exemplos de superfícies regradas e estudámos também uma curva especial, chamada curva de estrição, com a qual podemos reparametrizar as superfícies regradas que são não-cilíndricas, sem alterar o seu traço. Mostrámos que toda a superfície regradada tem sempre, nos seus pontos regulares, a curvatura de Gauss não positiva e, ao longo das geratrizes que intersectam os pontos singulares da superfície regradada, a curvatura é identicamente nula. Em particular, mostrámos que as superfícies regradas desenvolvíveis têm, em geral, pontos singulares situados na sua curva de estrição e, como esta curva intersecta todas as suas geratrizes, a curvatura Gaussiana é identicamente nula nos seus pontos regulares. Estudámos três tipos de superfícies associadas a uma curva regular com curvatura não nula, nomeadamente, a superfície tangente, a superfície normal principal e a superfície binormal. Concluímos que a superfície tangente é sempre desenvolvível, a superfície normal principal e a superfície binormal são desenvolvíveis se, e só se, a curva diretriz é plana. Em particular, mostrámos que a superfície tangente de uma hélice é desenvolvível e a superfície binormal de uma circunferência é o cilindro. Apresentámos uma abordagem dos conceitos que fosse didaticamente simples e facilmente compreensível, com exemplos elucidativos. Finalmente, apresentámos um teorema de classificação parcial que estabelece as propriedades para que uma superfície regradada desenvolvível seja um cilindro, uma superfície tangente ou um cone. Justificámos o termo "parcial", pois excluímos o facto de os zeros das funções envolvidas no teorema da classificação serem pontos de acumulação.

Bibliografia

- [1] A. Monteiro e I. Matos, *Vectores: Cadernos de Matemática 7*, Edições Orion, 2017. 20
- [2] A. P. Santana e J. F. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, Lisboa, 2010. 22
- [3] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover Publicatios, Inc., New york, 1991. 2, 54, 64
- [4] E. L. Lima. *Curso de Análise, vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1989.
- [5] F. A. Oliveira e D. M. Almeida, *Superfícies Regradas*, Revista Eletrônica Paulista de Matemática. ISSN2316-9664. pp 52-74. Volume 8, dez. 2016. 2, 37, 63
- [6] J. Picado, *Apontamentos de Geometria Diferencial*, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2006. 3
- [7] K. Tenenblat, *Introdução à Geometria Diferencial*, 2^a ed., Blucher, São Paulo, 2008. 17, 27
- [8] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005. 2, 3, 17, 23, 24, 27, 28, 29, 37, 63
- [9] M. V. Flôres, *Hélices, Curvas de Bertrand e Superfícies Regradas*, Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências Naturais e Exatas: Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2012. 2, 54
- [10] W. De Maio e A. Chiumo, *Geometrias. Geometrias Analítica e Vetorial: Euclidianas e Não-euclidianas. Fundamentos de Matemática*, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 2008. 11

