



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Ciências

**Plano Projetivo e Construções com Régua  
Versão final após defesa**

**Calunga Florentino Manuel**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Matemática Para Professores**  
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

**Covilhã, julho de 2018**

# Plano Projetivo e Construções com Régua

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais Diogo Augusto Manuel (in memória) e Catarina João Florentino por tudo que fizeram e têm feito por mim. À minha esposa e meus filhos pela paciência e coragem suportando a minha ausência durante a formação.

# Plano Projetivo e Construções com Régua

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e cuidado que tem me dado, à Universidade da Beira interior por me receber, à Direção da Escola Superior Pedagógica do Kuanza Norte por ter aceite a minha petição.

A todos os professores da Universidade da Beira Interior, em especial ao Dr. Rui Miguel Nobre Martins Pacheco, o meu muito obrigado. Agradeço ainda à minha esposa pelo conselho e companheirismo na minha vida académica e profissional.

Aos meus irmãos Agostinho, Teresa, Domingas, Esperança e Conceição Florentino Manuel, o meu muito obrigado pelo apoio que têm dado a mim e que de certa forma tem contribuído bastante na superação de várias dificuldades.

Aos meus colegas do curso de Matemática para Professores em especial ao Augusto Veríssimo, Hermenegildo Simão, Calvino Capoco, o meu muito obrigado pela ajuda e confraternização ao longo do tempo que tivemos, espero que seja assim para sempre.

Aos meus amigos em especial ao Domingos Pedro Arsénio, Domingos Manuel João e Rufino Gomes, o meu muito obrigado pelo vosso apoio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que essa formação fosse um feito, o meu muito obrigado.

# Plano Projetivo e Construções com Régua

### Resumo

Este trabalho, foi elaborado como pré requisito para a obtenção do grau de mestre, no âmbito do curso de mestrado em Matemática para Professores. Pretendemos desenvolver o tema “Plano Projetivo e Construções com Régua” com o intuito último de despertar o interesse de estudantes e professores da área da Matemática, no sentido de promover esta subárea da Geometria com muita importância do ponto de vista da história, investigação e aplicações da Matemática. Descrevemos a matemática do plano projetivo: pontos, retas, coordenadas homogêneas, transformações projetivas, o Teorema Fundamental do Plano Projetivo, o princípio da dualidade, os teoremas de Desargues, Pappus, Pascal e seus duais, formas bilineares e cónicas. Apresentamos ainda a resolução de alguns problemas relacionados sobre construções com régua não-graduada que envolvem aplicações dos teoremas estudados.

**Palavras-chave:** Plano Projetivo, Coordenadas Homogêneas, Transformações Projetivas, Razão Cruzada, Cónicas, Construções com Régua.

# Plano Projetivo e Construções com Régua

### Abstract

This work was elaborated as a prerequisite for obtaining the master's degree, within the framework of the master's degree in Mathematics for Teachers. We intend to develop the theme "Projective Plan and Constructions with Ruler" with the ultimate purpose of attracting the interest of students and teachers to this subarea of Geometry, which has a great importance from the point of view of history, in research and applications of Mathematics. We describe the mathematics of the projective plane: points, lines, homogeneous coordinates, projective transformations, the Fundamental Theorem of the Projective Plane, the principle of duality, the theorems of Desargues, Pappus, Pascal and their dual, bilinear and conic forms. We also present the resolution of some problems related to constructions with a non-graded rule that involve applications of the theorems previously studied.

**Keywords:** Projective Plane, Homogeneous Coordinates, Projective Transformations, Cross Ratio, Conics, Constructions with Ruler.

# Plano Projetivo e Construções com Régua

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Plano Projetivo <math>\mathbb{P}^2</math></b>	<b>3</b>
1.1 Pontos, retas e planos projetivos . . . . .	4
1.1.1 Definições básicas . . . . .	4
1.1.2 Pontos no infinito . . . . .	5
1.1.3 Coordenadas homogêneas . . . . .	5
1.2 Relações de incidência . . . . .	6
1.2.1 Exercícios resolvidos . . . . .	7
1.3 Transformações Projetivas . . . . .	9
1.4 Teorema Fundamental do Plano Projetivo . . . . .	13
1.4.1 Teorema de Desargues . . . . .	16
1.4.2 Teorema de Pappus . . . . .	20
1.5 Princípio da Dualidade no Plano Projetivo . . . . .	23
1.6 Pontos Harmônicos Conjugados . . . . .	27
1.6.1 Conjunto Quadrangular . . . . .	27
1.6.2 Conjunto harmónico e conjugados harmónicos . . . . .	30
1.7 Razão Cruzada . . . . .	33
1.7.1 Razão cruzada para quadrângulo completo . . . . .	39
<b>2 Quádricas e Cónicas Projetivas</b>	<b>43</b>
2.1 Formas Quádricas . . . . .	43
2.2 Cónicas . . . . .	47
2.3 Polaridades . . . . .	48
2.4 Teorema dos cinco pontos . . . . .	51
2.5 Teorema de Pascal e de Brianchon . . . . .	52
2.5.1 Teorema de Pascal . . . . .	52
2.5.2 Teorema de Brianchon . . . . .	55
<b>3 Aplicações e Construções com Régua</b>	<b>59</b>
3.1 Problemas Resolvidos . . . . .	59
<b>Considerações Finais</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>71</b>

# Plano Projetivo e Construções com Régua

## Lista de Figuras

1.1	Representação do espaço no plano da tela. . . . .	3
1.2	Representação do ponto de fuga (Imagem retirada da internet). . . . .	4
1.3	Transformação projetiva $\tau : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U')$ representada pela projeção $T$ . . . . .	13
1.4	Triângulos perspectivos por um ponto e por uma reta. . . . .	19
1.5	Representação do Teorema de Desargues. . . . .	19
1.6	Três pontos $P$ , $Q$ e $R$ colineares. . . . .	20
1.7	Representação do Teorema de Pappus. . . . .	22
1.8	Representação do Teorema de Pappus com o ponto $Q$ no infinito. . . . .	23
1.9	Representação do Teorema de Pappus com o ponto $C'$ no infinito. . . . .	24
1.10	Figuras duais. . . . .	24
1.11	Figuras Auto-duais. . . . .	25
1.12	Dual do Teorema de Desargues . . . . .	26
1.13	Dual do Teorema de Pappus . . . . .	26
1.14	Triângulo diagonal $A = QR \cap PS$ , $B = RS \cap PQ$ e $C = SQ \cap PR$ . . . . .	27
1.15	Quadrângulo completo $PQRS$ e os <i>pontos diagonais</i> $A, B$ e $C$ . . . . .	28
1.16	Quadrilátero completo $pqrs$ e triângulo diagonal $abc$ . . . . .	28
1.17	Conjunto Quadrangular com seis pontos colineares $H, I, J, K, L, M$ . . . . .	29
1.18	Conjunto Quadrangular com cinco pontos colineares $H, I, J, K$ e $C$ . . . . .	29
1.19	Conjunto Quadrangular com quatro pontos colineares $H, A, K$ e $C$ . . . . .	29
1.20	Determinação do ponto $F$ do conjunto quadrangular pelos pontos $A, B, C, D$ e $E$ . . . . .	30
1.21	Conjugado Harmónico $H(AB, CD)$ . . . . .	31
1.22	Conjugada Harmónica das retas $a, b, c$ e $d$ , $H(ab, cd)$ . . . . .	31
1.23	Conjugado Harmónico $H(AB, CD)$ com $C$ o ponto médio de $AB$ . . . . .	32
1.24	Conjugado Harmónico $H(AB, CD)$ construído a partir do triângulo $PQR$ . . . . .	33
1.25	Projecção do ponto $O$ nas retas $\ell$ e $\ell'$ . . . . .	34
1.26	Triângulo $ABC$ com altura $h$ . . . . .	35
1.27	Variação do ponto $O$ a $P$ . . . . .	37
1.28	Razão cruzada de quatro pontos projetivos. . . . .	37
1.29	Quadrilátero completo com vértices em $R, D, Q$ e $C$ . . . . .	40
1.30	Transformação do quadrilátero em paralelogramo. . . . .	40
1.31	Razão cruzada com $R$ no infinito. . . . .	41

## Plano Projetivo e Construções com Régua

2.1	Interseção do cone com plano da tela em duas posições distintas: elipse e parábola. . . . .	47
2.2	Reta auto-conjugada em relação a $B$ . . . . .	51
2.3	Teorema de Pascal na Elipse. . . . .	54
2.4	Teorema de Pascal na Hipérbole. . . . .	55
2.5	Teorema de Brianchon. . . . .	56
2.6	Teorema de Maclaurin. . . . .	56
2.7	Teorema dual de Maclaurin. . . . .	57
3.1	Ilustração do problema 3.1.1. . . . .	59
3.2	Solução do problema . . . . .	60
3.3	Ponto $P$ exterior às retas $\ell$ e $m$ . . . . .	60
3.4	Reta por um ponto de interseção inacessível. . . . .	61
3.5	Representação da recta $XP$ . . . . .	61
3.6	Ilustração do problema 3.1.3. . . . .	62
3.7	Reta paralela por um ponto dado. . . . .	62
3.8	Ilustração do problema 3.1.4. . . . .	63
3.9	$AP \cap BP' = C$ . . . . .	63
3.10	Quadrângulo completo $ABCD$ . . . . .	64
3.11	Quadrângulo completo $A'B'C'D'$ perspectivo pela reta $p$ . . . . .	64
3.12	Interseção de uma reta com outra inacessível. . . . .	64
3.13	Ilustração do problema 3.1.5. . . . .	65
3.14	Pontos $A$ , $O$ e $B$ da circunferência. . . . .	65
3.15	Três paralelas incidentes nos pontos $A$ , $O$ e $B$ . . . . .	66
3.16	Retas que passam em $C$ e $D$ paralelas à reta $a$ . . . . .	66
3.17	Reta $s$ perpendicular a $a$ . . . . .	67
3.18	Ilustração do problema 3.1.6. . . . .	67
3.19	Hipérbole tangente em $AB$ no ponto $A$ . . . . .	68

## Lista de Tabelas

1.1	Expressões duais entre ponto e reta. . . . .	24
-----	--	----

# Plano Projetivo e Construções com Régua

### Introdução

O trabalho que me proponho apresentar é subordinado ao título “**Plano Projetivo e Construções com Régua**” e visa explorar os principais elementos da Geometria Projetiva com maior realce ao Plano Projetivo, é dele que apresentamos alguns teoremas principais e suas demonstrações.

Desenvolvemos este tema com o intuito último de despertar o interesse de estudantes e professores da área da Matemática, no sentido de promover esta subárea da Geometria com muita importância do ponto de vista da história, investigação e aplicações da Matemática. Vários resultados da Geometria Projetiva podem ainda ser explorados no ensino pré-universitário no quadro das construções com régua não-graduada.

Descrevemos a matemática do plano projetivo: pontos, retas, coordenadas homogêneas, transformações projetivas, o Teorema Fundamental do Plano Projetivo, o princípio da dualidade, os teoremas de Desargues, Pappus, Pascal e seus duais, formas bilineares e cónicas. Apresentamos ainda a resolução de alguns problemas relacionados com construções com régua não-graduada que envolvem aplicações dos teoremas estudados.

Espera-se ainda que este trabalho possa ser útil àqueles professores de Matemática que queiram aprofundar os seus conhecimentos sobre a geometria projetiva. Nele, poderão encontrar os principais resultados da geometria projetiva devidamente demonstrados, constituindo assim uma base sólida para a futura elaboração de atividades no contexto do ensino da geometria. Por exemplo, o Teorema Desargues tem grande potencial em problemas que envolvem construções com régua não-graduada.

### Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em três capítulos.

- No primeiro capítulo constam essencialmente os conceitos fundamentais do plano projetivo, ou seja, a descrição matemática de alguns elementos constituintes do plano projetivo como, pontos, retas e planos projetivos, relações de incidências, teorema fundamental do plano projetivo, princípio da dualidade, pontos harmónicos conjugados e razão cruzada nos planos euclidiano e projetivo.
- O segundo capítulo trata de quádricas e cónicas projetivas, destacando a noção de polaridade e os teoremas de Pascal e Brianchon.

- O terceiro capítulo faz referência as aplicações e construções com régua, onde resolveu-se vários problemas projetivos relacionados aos conteúdos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

### Enquadramento Bibliográfico

A elaboração deste trabalho foi fortemente baseada nos dois primeiros capítulos do trabalho de Nigel Hitchin [5] intitulado “Projective Geometry”. Enquanto Hitchin trata do espaço projetivo em dimensão arbitrária, neste trabalho nos limitamos ao plano projetivo.

H. S. M. Coxeter [3], na sua obra “Projective Geometry”, trata do plano projetivo numa versão axiomática, ou seja, faz uma construção axiomática do plano projetivo e seus elementos. Neste trabalho seguimos uma versão diferente, fizemos uma abordagem analítica do plano projetivo que parte de um modelo fixado: o plano projetivo como conjunto das retas no espaço que passam pela origem. Mas de qualquer modo, este livro foi importante na subsecção Conjunto Quadrangular.

O livro “Geometry Revisited” de H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer [2] também contribuiu significativamente neste trabalho, sobretudo, na secção relacionada ao Princípio da Dualidade.

O livro de Jayme Souza [8] intitulado “Elementos de Geometria Projetiva” serviu essencialmente para extrair alguns dos problemas do Capítulo 3.

A nossa discussão sobre a razão cruzada no plano Euclidiano baseia-se na que é apresentada na obra de C. S. Ogilvy [6] intitulada “Excursions in Geometry”.

O livro de J. P. Ryan [7] intitulado “Euclidean and Non-Euclidean Geometry” foi importante porque serviu de base na abordagem analítica das polaridades, já que também apresenta as cónicas como formas bilineares simétricas.

M. J. Greenberg [4] com a sua obra “Euclidean and Non-Euclidean Geometry: Development and History” auxiliou-nos na abordagem da subsecção relacionada ao Conjunto Harmónico e Conjugados Harmónicos, dando-nos suporte para determinar o conjugado harmónico de um ponto qualquer em relação a dois.

Por último, o livro de A. A. Barros e P. F. A. Andrade [1] com o título “Introdução à Geometria Projetiva” foi útil porque serviu de base na demonstração do Teorema dos Cinco Pontos.

# Capítulo 1

## Plano Projetivo $\mathbb{P}^2$

Neste capítulo vamos apresentar sucintamente o plano projetivo e descrever os elementos básicos que o constituem, de forma a percebermos da sua importância na geometria projetiva.

A origem da geometria projetiva, e do plano projetivo em particular, encontra-se na técnica da perspectiva desenvolvida no período do renascimento. A ideia central da técnica da perspectiva para representar o espaço tridimensional numa tela é a seguinte. O observador encontra-se num ponto  $O$ . Imaginamos a tela como um plano  $\alpha$  que não passa por  $O$ . Um ponto  $P$  no espaço define com o ponto de observação uma recta  $\ell$ . Se esta recta não for paralela ao plano, ela vai intersectar  $\alpha$  num ponto  $P'$ , que será a representação do ponto  $P$  na tela. Repare-se que qualquer outro ponto no espaço que esteja sobre a recta é representado por esse mesmo ponto  $P'$ . O plano projetivo é precisamente o conjunto de todas as retas que passam por um ponto de observação.

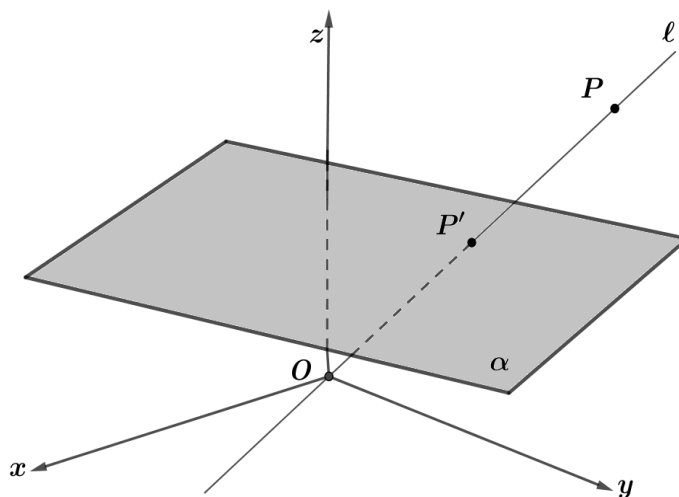


Figura 1.1: Representação do espaço no plano da tela.

Importa ainda ressaltar que, para um observador situado no ponto  $O$ , duas retas paralelas entre si que não sejam paralelas ao plano da tela e nem passem por  $O$  são representadas no plano da tela por duas retas que se intersectam num ponto - o *ponto de fuga*.

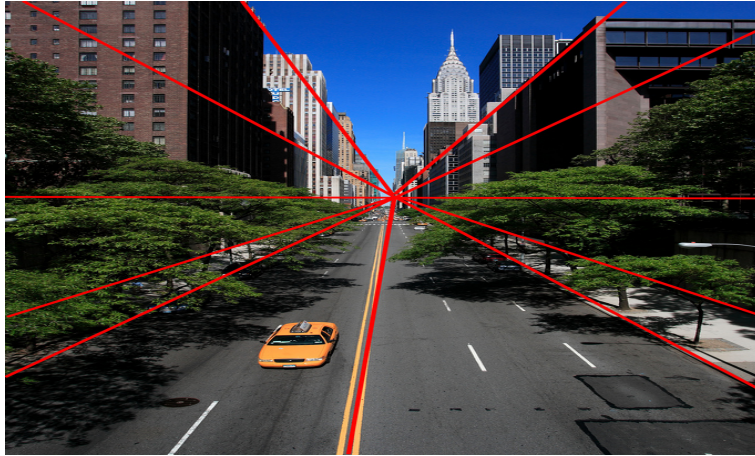


Figura 1.2: Representação do ponto de fuga (Imagem retirada da internet).

No que se segue, vamos descrever matematicamente o plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  e os elementos que o constituem. Apresentaremos as suas definições básicas e as principais propriedades de incidência.

## 1.1 Pontos, retas e planos projetivos

### 1.1.1 Definições básicas

Consideremos em  $\mathbb{R}^3$  o sistema usual de coordenadas com origem em  $O$ .

**Definição 1.1.1.** O plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  é o conjunto de todas as retas em  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem.

Devemos ter algum cuidado com a terminologia utilizada. Efetivamente, um “ponto” no plano projetivo é uma reta em  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem e não deve ser confundido com um ponto no espaço nem com o ponto que o representa no plano da tela. Assim, para evitar este conflito de termos, designaremos por *ponto projetivo* qualquer elemento de  $\mathbb{P}^2$ , a menos que seja claro o contexto em que se está a trabalhar.

O conjunto de todas as retas que passam pela origem e estão sobre um mesmo plano designa-se por *reta projetiva*. De seguida, formalizamos estas definições em termos de espaços vetoriais (o que lhes irá conferir unidade e, além disso, permite que estes conceitos sejam facilmente generalizados para dimensões superiores).

Um plano  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  que passe pela origem  $O$  tem uma estrutura natural de subespaço vetorial bidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Com efeito, podemos identificar cada ponto  $X$  de  $\mathcal{P}$  com o vetor  $\vec{OX}$  do subespaço vetorial

$$U_{\mathcal{P}} = \{\vec{OX} \in \mathbb{R}^3 : X \in \mathcal{P}\}.$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Da mesma forma, qualquer reta  $\ell$  que passe pela origem corresponde a um subespaço vetorial unidimensional  $U_\ell$ .

Dado um subespaço vetorial bidimensional  $U = U_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{R}^3$ , a reta projetiva correspondente é denotada por  $\mathbb{P}(U)$ . Do mesmo modo, dado um subespaço vetorial unidimensional  $U = U_\ell$ , o ponto projetivo correspondente é denotado por  $\mathbb{P}(U)$ .

### 1.1.2 Pontos no infinito

Seja  $\alpha$  um plano de  $\mathbb{R}^3$  que não passe pela origem. Pensemos em  $\alpha$  como o plano da tela. A cada ponto  $P \in \alpha$  associamos a reta  $OP$ . Deste modo, podemos identificar  $\alpha$  como um subconjunto de  $\mathbb{P}^2$ , que também denotamos por  $\alpha$ . Um ponto no espaço que defina com  $O$  uma recta paralela a  $\alpha$  não tem nenhum representante na tela. Assim, tomando como referência o plano  $\alpha$ , os elementos do subconjunto  $\mathbb{P}^2 \setminus \alpha$  são chamados *pontos no infinito*. O conjunto destes pontos é a reta projetiva  $\mathbb{P}(U)$ , onde  $U$  é o subespaço vetorial bidimensional que gera  $\alpha$ . Temos então

$$\mathbb{P}^2 = \alpha \cup \mathbb{P}(U). \quad (1.1)$$

### 1.1.3 Coordenadas homogêneas

Consideremos um ponto  $X \neq O$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Denotemos por  $[X] = [x : y : z]$  o ponto projetivo de  $\mathbb{P}^2$  que representa a reta  $OX$ . Diz-se que  $x, y, z$  são *coordenadas homogêneas* de  $OX \in \mathbb{P}^2$  relativas à base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} [x : y : z] &= [x' : y' : z'] \text{ se, e só se, existe um real } t \neq 0 \text{ tal que} \\ (x, y, z) &= t(x', y', z'). \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas homogêneas de um ponto de  $\mathbb{P}^2$ , também designadas por coordenadas de Plücker, estão bem definidas a menos de um fator de proporcionalidade diferente de zero.

Vamos de seguida descrever a decomposição (1.1) em termos de coordenadas homogêneas em relação ao plano horizontal  $\alpha$  de equação  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \alpha & (1.2) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, 1) \end{aligned}$$

Cada ponto  $(x, y, 1) \in \alpha$  determina um único ponto em  $\mathbb{P}^2$ , o ponto de coordenadas  $[x : y : 1]$ . O subespaço vetorial que gera  $\alpha$  é dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

Assim

$$\mathbb{P}^2 = \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2 : (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\} \cup \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : z = 0\}.$$

## 1.2 Relações de incidência

Dado um vetor  $\mathbf{u}$  não nulo de  $\mathbb{R}^3$ , denotamos por  $[\mathbf{u}]$  o ponto projetivo que corresponde à reta gerada por  $\mathbf{u}$  que passa pela origem.

**Observação 1.2.1.** Dadas duas retas distintas passando pela origem, existe um único plano que contém ambas. Esse plano passa também pela origem. Assim, por dois pontos projetivos distintos passa uma e uma só recta projetiva.

Por outro lado, uma vez que quaisquer dois planos que passam pela origem intersectam-se numa reta que passa pela origem, quaisquer duas retas projetivas têm um e um só ponto projetivo em comum.

As demonstrações formais que apresentamos de seguida são úteis para generalizar estes resultados para dimensões superiores.

**Proposição 1.1.** Por dois pontos distintos do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ , passa uma única reta projetiva  $\mathbb{P}$ .

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $Y$  dois pontos distintos de  $\mathbb{P}^2$ . Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores representativos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são linearmente independentes; caso contrário,  $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ , com  $\lambda \neq 0$ , e

$$X = [\mathbf{u}] = [\lambda\mathbf{v}] = [\mathbf{v}] = Y.$$

Assim, a reta projetiva  $\mathbb{P}(U)$  passa pelos dois pontos projetivos  $X$  e  $Y$ , onde  $U$  é o subespaço vetorial bidimensional gerado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Suponha-se que  $\mathbb{P}(U')$  também passa por  $X$  e  $Y$ . Então,  $\mathbf{u} \in U'$  e  $\mathbf{v} \in U'$ ; e, portanto, o espaço gerado por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (ou seja  $U$ ) é um subespaço de  $U'$ . Mas  $U$  e  $U'$  são bidimensionais, então  $U = U'$ . Logo existe uma só reta projetiva que passa por  $X$  e  $Y$ .  $\square$

**Proposição 1.2.** Duas retas projetivas distintas de  $\mathbb{P}^2$  intersectam-se num único ponto projetivo.

*Demonstração.* Sejam  $U_1$  e  $U_2$  subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^3$ , bidimensionais e distintos entre si, e sejam  $\mathbb{P}(U_1)$  e  $\mathbb{P}(U_2)$  as duas retas projetivas correspondentes. Agora, a partir da álgebra linear elementar, temos:

$$3 \geq \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Assim,

$$3 \geq 2 + 2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

logo  $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$ . Mas como  $U_1$  e  $U_2$  são bidimensionais,

$$\dim(U_1 \cap U_2) \leq 2,$$

com a igualdade a valer se, e somente se,  $U_1 = U_2$ . Como as retas são distintas, a igualdade não ocorre e, portanto, tem-se  $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ . Uma vez que  $U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{R}^3$  é unidimensional, concluimos que a interseção das retas  $\mathbb{P}(U_1)$  e  $\mathbb{P}(U_2)$  é o ponto projetivo  $\mathbb{P}(U_1 \cap U_2)$ .  $\square$

Dados dois pontos projetivos  $X$  e  $X'$ , denota-se por  $XX'$  a única reta projetiva que passa em ambos. Dadas duas retas projetivas  $\ell$  e  $\ell'$ , denotamos por  $\ell\ell'$  o único ponto projetivo incidente com ambas.

### 1.2.1 Exercícios resolvidos

1. Determinar a equação da reta projetiva que contém os seguintes pontos projetivos  $[1 : 2 : 3]$  e  $[3 : 0 : -2]$ .
2. Determinar se os pontos projetivos são ou não colineares:
  - a)  $[1 : -1 : 0]$   $[1 : 0 : -1]$  e  $[2 : -1 : -1]$
  - b)  $[1 : 0 : 1]$   $[0 : 1 : 2]$  e  $[1 : 2 : 3]$
3. Determinar o ponto projetivo de interseção das seguintes retas projetivas:
  - a)  $x - 2y + z = 0$  e  $x - y - z = 0$
  - b)  $x + 2y + 5z = 0$  e  $3x - y + z = 0$
4. Mostrar que em  $\mathbb{P}^2$  tem quatro retas projetivas que satisfazem a seguinte propriedade: Não existe nenhum ponto projetivo que esteja em três dessas retas.

Antes de respondermos estas questões, vamos justificar a razão pela qual levaramos a solucioná-las por meio de determinantes. Uma reta no plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  corresponde a um plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa na origem. Consideremos dois pontos projetivos distintos  $P_1$  e  $P_2$  com coordenadas homogêneas  $[x_1 : y_1 : z_1]$  e  $[x_2 : y_2 : z_2]$ , respectivamente. Em  $\mathbb{R}^3$ , os pontos  $O = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  determinam o plano com equação

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 0,$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

com  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  um ponto genérico contido nesse plano.

**Solução das questões anteriores:**

1. Para determinar a equação da reta projetiva que contém dois pontos projetivos, podemos proceder pela resolução do determinante. Sendo assim, temos:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 9y + 0 - 6z - 0 + 2y = 0 \Leftrightarrow -4x + 11y - 6z = 0.$$

2. Três pontos  $A = [a_1 : a_2 : a_3]$ ,  $B = [b_1 : b_2 : b_3]$  e  $C = [c_1 : c_2 : c_3]$  são colineares se e somente se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 0,$$

sendo assim, temos:

a)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0 + 0 + 2) - (0 + 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Logo, os pontos projetivos são colineares.

b)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3 + 0 + 0) - (1 + 0 + 4) = 0 \Leftrightarrow -2 \neq 0.$$

Logo, os pontos projetivos não são colineares.

3. Para determinar o ponto projetivo de interseção entre duas retas projetivas, podemos seguir ao mesmo método para resolução de equação por determinantes. Por exemplo, dadas as retas projetivas representadas pelos planos  $a_1x + b_1y + c_1z = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ , o ponto projetivo de interseção é a reta que passa pela origem que é simultaneamente ortogonal aos vetores  $\mathbf{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ . Ou seja, é a reta gerada pelo vetor:

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Então, o ponto projetivo correspondente tem coordenadas homogêneas

$$[b_1c_2 - b_2c_1 : a_2c_1 - a_1c_2 : a_1b_2 - a_2b_1].$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Assim sendo, temos:

a)

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [2 + 1 : 1 + 1 : -1 + 2] = [3 : 2 : 1]$$

b)

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = [6 + 5 : 15 - 3 : -1 - 6] = [11 : 12 : -7]$$

4. *Demonstração.* Basta considerar as seguintes retas projetivas:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e  $x + y + z = 0$ . Se fizermos a intersecção destas retas três a três, vemos que não se intersectam em nenhum outro ponto excepto a origem.  $\square$

Terminada a secção relacionada à descrição matemática do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  e dos elementos que o constituem, vamos seguidamente apresentar as transformações no plano projetivo.

### 1.3 Transformações Projetivas

Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vectoriais reais. Recordamos que uma transformação  $T : V \rightarrow W$  é dita *transformação linear* de  $V$  em  $W$  se possui as seguintes propriedades:

1.  $T(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{u})$ ,  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ ;
2.  $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.3.1.** Consideremos a transformação  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y, z) = (x, y)$ . Dados  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{u} = (y_1, y_2, y_3)$  em  $\mathbb{R}^3$ , temos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Para todo  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$  em  $\mathbb{R}^3$  e todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale também

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}\lambda) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= \lambda(x_1, x_2) \\ &= \lambda f(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Logo  $f$  é uma transformação linear.

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear. Suponha-se que  $T$  é um *isomorfismo*, isto é,  $T$  admite uma transformação linear inversa. Neste caso, se  $U$  é um subespaço vetorial unidimensional de  $\mathbb{R}^3$ , a sua imagem  $T(U)$  é também um subespaço vetorial unidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Podemos assim definir a transformação

$$\tau_T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

por

$$\tau_T(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(T(U))$$

para cada subespaço vetorial unidimensional  $U$ . Se  $U = [\mathbf{u}]$ , então podemos escrever também

$$\tau_T([\mathbf{u}]) = [T(\mathbf{u})].$$

**Definição 1.3.2.** Uma *transformação projetiva* de  $\mathbb{P}^2$  é uma transformação da forma  $\tau_T$ , com  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma transformação linear invertível .

Ressalta-se que se  $\lambda \neq 0$ , então  $\lambda T$  e  $T$  definem a mesma transformação projetiva, uma vez que

$$[(\lambda T)(\mathbf{v})] = [\lambda(T(\mathbf{v}))] = [T(\mathbf{v})].$$

O inverso também é verdadeiro. Com efeito, suponha-se que  $T$  e  $T'$  definem a mesma transformação projetiva  $\tau$ . Tomando uma base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  para  $\mathbb{R}^3$ , então, uma vez que

$$\tau([\mathbf{v}_i]) = [T'(\mathbf{v}_i)] = [T(\mathbf{v}_i)]$$

para  $i = \{1, 2, 3\}$ , temos

$$T'(\mathbf{v}_i) = \lambda_i T(\mathbf{v}_i),$$

para alguns escalares  $\lambda_i \neq 0$ . Por outro lado, temos também

$$\tau([\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i]) = [T'(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i)] = [T(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i)],$$

logo

$$T'(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i) = \lambda T(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i),$$

para algum  $\lambda \neq 0$ . Mas então

$$\sum_{i=1}^3 \lambda T(\mathbf{v}_i) = \lambda T(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i) = T'(\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^3 T'(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i T(\mathbf{v}_i)$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Visto que  $T$  é invertível,  $T(\mathbf{v}_i)$  são linearmente independentes, então isso implica que  $\lambda_i = \lambda$ . Logo,  $T'(\mathbf{v}_i) = \lambda T(\mathbf{v}_i)$  e, portanto,  $T' = \lambda T$  como se vê em ([5], p. 9).

**Observação 1.3.3.** Se uma transformação projetiva é dada por  $\tau = \tau_M$ , a sua inversa é dada por  $\tau^{-1} = \tau_{M^{-1}} = \tau_{\text{Adj}(M)}$ , uma vez que

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M)}{\det(M)}.$$

**Exemplo 1.3.4.** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  pode ser escrita na forma de matriz

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos como um observador na origem representa esta transformação no plano  $\alpha$  da tela, que supomos ser  $z = 1$ . Dito de outra forma, dado um ponto projetivo  $\ell = [x : y : 1]$ , vejamos quais são as coordenadas homogêneas de  $\tau_T(\ell)$ .

Identificamos o plano  $\alpha$  com  $\mathbb{R}^2$  através de (1.2). Assim,  $(x, y, 1)$  corresponde ao vetor  $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . No plano da tela,  $T$  corresponde à transformação  $\zeta$  dada por

$$T(\mathbf{v}, 1) = (A\mathbf{v} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + d),$$

onde

$$\mathbf{v} \mapsto \frac{1}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + d} (A\mathbf{v} + \mathbf{c}) \quad (1.3)$$

onde  $A$  é a matriz  $2 \times 2$  com entradas  $a_{ij}$ ; além disso,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  e  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ . Podemos provar que qualquer transformação do tipo (1.3) é uma composição de uma *translação* com uma *transformação linear invertível* e uma *inversão*. Para tal, consideremos as seguintes transformações:

- a translação  $T_{\mathbf{h}}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \mathbf{h}$ , onde  $\mathbf{h} = A^{-1}\mathbf{c}$ ;
- a inversão  $I_{\mathbf{u}, \alpha}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \alpha}$ , onde  $\mathbf{u} = (A^T)^{-1}\mathbf{b}$  e  $\alpha = d - (A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ;
- a transformação linear invertível dada pela matriz  $A$ .

É importante lembrar que transposta de uma matriz  $A$  tem as seguintes propriedades:

1.  $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{w}$ , para quaisquer  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ ;
2.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

Então

$$\begin{aligned}
 \zeta(\mathbf{v}) &= I_{\mathbf{u},\alpha} \circ A \circ T_{\mathbf{h}}(\mathbf{v}) \\
 &= I_{\mathbf{u},\alpha} \circ A(\mathbf{v} + \mathbf{h}) \\
 &= I_{\mathbf{u},\alpha}(A\mathbf{v} + A\mathbf{h}) \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + A\mathbf{h}}{\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} + A\mathbf{h}) + \alpha} \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + \mathbf{c}}{(A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot (A\mathbf{v} + \mathbf{c}) + d - (A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + \mathbf{c}}{(A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot A\mathbf{v} + (A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + d - (A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + \mathbf{c}}{(A^T)^{-1}\mathbf{b} \cdot A\mathbf{v} + d} \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot (A^{-1}A\mathbf{v}) + d} \\
 &= \frac{A\mathbf{v} + \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + d}
 \end{aligned}$$

Vamos ver outro exemplo importante através dos seguinte exercício.

**Exemplo 1.3.5.** Um exemplo mais geométrico de uma transformação projetiva é tomar duas retas projetivas  $\mathbb{P}(U)$  e  $\mathbb{P}(U')$ , sendo  $U$  e  $U'$  dois planos de  $\mathbb{R}^3$  pela origem. Consideremos ainda um ponto projetivo  $[\mathbf{w}] \in \mathbb{P}^2$  não contido em nenhuma das retas projetivas anteriores. Para cada ponto projetivo  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}(U)$ , a única reta projetiva por  $[\mathbf{w}]$  e  $[\mathbf{x}]$  intersecta  $\mathbb{P}(U')$  num único ponto projetivo  $[\mathbf{x}'] = \tau([\mathbf{x}])$ . Vamos ver de seguida que a transformação

$$\tau : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U')$$

assim definida é uma transformação projetiva, no seguinte sentido: existe um isomorfismo  $T : U \rightarrow U'$  tal que  $\tau([\mathbf{v}]) = [T(\mathbf{v})]$ .

Como  $W = [\mathbf{w}]$  não está em  $\mathbb{P}(U')$ , isso significa que

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus U'.$$

Assim,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  pode ser expresso unicamente como  $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{x}'$ , com  $\mathbf{x}' \in U'$ . A reta projetiva que une  $[\mathbf{w}]$  a  $[\mathbf{x}]$  é definida pelo subespaço vetorial bidimensional de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{x}$ , e assim  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{w}$  é um vector representativo para  $\tau([\mathbf{x}])$ . Em termos de álgebra linear, a aplicação  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  é apenas a restrição a  $U$  da projecção linear  $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow U'$  relativamente à decomposição  $\mathbb{R}^3 = W \oplus U'$ . Tal restrição, que denotamos por  $T : U \rightarrow U'$ , é um isomorfismo. Logo  $\tau$  é uma transformação projetiva.

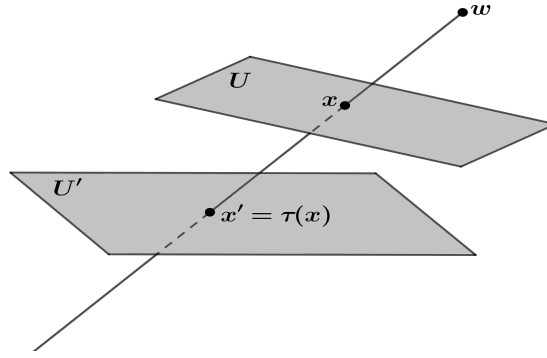


Figura 1.3: Transformação projetiva  $\tau : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U')$  representada pela projeção  $T$ .

## 1.4 Teorema Fundamental do Plano Projetivo

Uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão  $n$  é determinada pela sua acção em  $n$  vetores linearmente independentes. Um resultado semelhante é válido no plano projetivo.

**Definição 1.4.1.** Quatro pontos em  $\mathbb{P}^2$  são ditos estar em *posição geral* se quaisquer três desses pontos tiverem vetores representativos em  $\mathbb{R}^3$  linearmente independentes.

**Exemplo 1.4.2.** Consideremos os quatro pontos projetivos  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 0 : 1]$  e  $[1 : 1 : 1]$ . Estão em posição geral porque quaisquer três deles são representados por vetores linearmente independentes.

No plano projetivo, bastam quatro pontos em *posição geral* para determinar uma transformação projetiva.

**Teorema 1.4.3 (Teorema Fundamental do Plano Projetivo).** *Se  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  e  $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$  são conjuntos de pontos projetivos em  $\mathbb{P}^2$  em posição geral, então existe uma única transformação projetiva*

$$\tau : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2,$$

tal que  $\tau(X_i) = Y_i$ , com  $1 \leq i \leq 4$ .

*Demonstração.* Primeiramente seleccionamos os vetores representativos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$  para os pontos projetivos  $X_1, X_2, X_3, X_4$  em  $\mathbb{P}^2$ , respectivamente. Como estão em posição geral, os primeiros três vetores são linearmente independentes, assim eles formam uma base de  $\mathbb{R}^3$  e existem escalares  $\lambda_i$  tais que

$$\mathbf{v}_4 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (1.4)$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , então (1.4) fornece uma relação linear entre um subconjunto de três vetores, o que não é possível pela definição de posição geral, então deduzimos que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i$ . Isso significa que cada  $\lambda_i \mathbf{v}_i$  também é um vector representativo para  $X_i$ , logo (1.4) diz-nos que poderíamos escolher vetores representativos  $\mathbf{v}_i$  tais que

$$\mathbf{v}_4 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i \quad (1.5)$$

Além disso, fixado  $\mathbf{v}_4$ , estes  $\mathbf{v}_i$  são únicos, já que

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{v}_i$$

implica que  $\mu_i = 1$ , uma vez que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  são linearmente independentes.

Agora fazendo o mesmo para os pontos  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \mathbb{P}^2$ , podemos escolher vetores representativos tais que

$$\mathbf{w}_4 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i. \quad (1.6)$$

Já que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  são linearmente independentes, eles formam uma base de  $\mathbb{R}^3$ , logo existe uma única transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$  para  $1 \leq i \leq 3$ . Como  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  são linearmente independentes,  $T$  é invertível. Assim, de (1.5) e (1.6) temos

$$T(\mathbf{v}_4) = \sum_{i=1}^3 T(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_4,$$

logo  $T$  define uma transformação projetiva  $\tau$  tal que  $\tau(X_i) = Y_i$  para cada  $1 \leq i \leq 4$ . Para mostrar a unicidade, suponhamos que  $T'$  define outra transformação projetiva  $\tau'$  com a mesma propriedade. Então,  $T'(\mathbf{v}_i) = \mu_i \mathbf{w}_i$  e

$$\mu_4 \mathbf{w}_4 = T'(\mathbf{v}_4) = \sum_{i=1}^3 T'(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{w}_i.$$

Mas pela unicidade da representação (1.6), devemos ter  $\frac{\mu_i}{\mu_4} = 1$ , de modo que  $T'(\mathbf{v}_i) = \mu_4 T(\mathbf{v}_i)$  e  $\tau' = \tau$ . □

**Observação 1.4.4.** No plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  consideremos quatro pontos  $A, B, C, D$  em posição geral. As transformações projetivas de  $\mathbb{P}^2$  formam um grupo sob a operação de composição. Por outro lado, qualquer permutação dos pontos  $A, B, C, D$  define uma única transformação projetiva, pelo teorema 1.4.3. Por exemplo, a permutação  $A, C, D, B$  define a transformação projetiva que leva  $A$  em  $A$ ,  $B$  em  $C$ ,

## Plano Projetivo e Construções com Régua

$C$  em  $D$  e  $D$  em  $B$ . Vemos então que o grupo de transformações projetivas de  $\mathbb{P}^2$  contém sempre uma cópia do grupo simétrico  $S_4$ .

**Exemplo 1.4.5.** Determinar a transformação projetiva  $\sigma$  que leva os pontos projetivos

$$A = [1 : 0 : 1], B = [-2 : 1 : 1], C = [0 : 1 : 2], D = [1 : 1 : 2]$$

em

$$A' = [-2 : 1 : 0], B' = [0 : 3 : 1], C' = [1 : 3 : 2], D' = [1 : 1 : 4],$$

respectivamente.

Começamos assim por determinar a transformação projetiva  $\tau$  que leva o quadrângulo de referência no primeiro conjunto de quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$ . Para isso, determinemos a matriz associada a esta transformação, que será da forma:

$$M = \begin{bmatrix} a & -2b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & b & 2c \end{bmatrix},$$

uma vez que essa matriz leva os pontos  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  e  $[0 : 0 : 1]$  do triângulo de referência nos pontos  $A, B$  e  $C$ . Para que se transforme o ponto  $[1 : 1 : 1]$  no ponto  $D = [1 : 1 : 2]$ , temos:

$$\begin{bmatrix} a & -2b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & b & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} a - 2b & = 1 \\ b + c & = 1 \\ a + b + 2c & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = -1 \\ b & = -1 \\ c & = 2 \end{cases}.$$

Assim sendo, a matriz associada a essa transformação projetiva é

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Procedemos do mesmo modo para determinar a matriz associada à transformação projetiva  $\tau'$  que leva o quadrângulo de referência nos pontos  $A', B', C'$  e  $D'$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 & c \\ a & 3b & 3c \\ 0 & b & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2a + c & = 1 \\ a + 3b + 3c & = 1 \\ b + 2c & = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = \frac{8}{5} \\ b & = \frac{-22}{5} \\ c & = \frac{21}{5} \end{cases}.$$

Neste caso, a matriz associada à esta transformação projetiva é

$$\begin{bmatrix} \frac{-16}{5} & 0 & \frac{21}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{-66}{5} & \frac{63}{5} \\ 0 & \frac{-22}{5} & \frac{42}{5} \end{bmatrix}$$

Podemos então considerar  $\tau' = \tau_{M'}$ , com

$$M' = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 21 \\ 8 & -66 & 63 \\ 0 & -22 & 42 \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 1.4.3 temos que  $\sigma = \tau' \circ \tau^{-1}$ . Além disso,  $\sigma = \tau_N$ , com  $N = M' \text{Adj}(M)$ . Assim sendo, uma vez que

$$\text{Adj}(M) = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz associada a  $\tau^{-1}$ , temos:

$$N = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 21 \\ 8 & -66 & 63 \\ 0 & -22 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 65 & -43 \\ 53 & 11 & -37 \\ 2 & -38 & -2 \end{bmatrix}.$$

#### 1.4.1 Teorema de Desargues

Como um exemplo do uso da noção de *posição geral*, apresentamos um teorema clássico chamado teorema de Desargues. De fato, Desargues (1591-1661) é geralmente considerado como fundador da geometria projetiva. As provas que apresentamos a seguir referenciam o método de escolha de vetores representativos de  $\mathbb{P}^2$  e o uso de coordenadas homogêneas.

**Teorema 1.4.6 (Desargues).** *Sejam  $A, B, C, A', B', C'$  pontos distintos de um plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ , de modo que as retas  $AA', BB', CC'$  sejam distintas e concorrentes em  $I$ . Então, os três pontos de interseção  $P = BC \cap B'C', Q = AB \cap A'B', R = CA \cap C'A'$  são colineares.*

*Demonstração.* Seja  $I$  o ponto comum de interseção das três retas  $AA', BB', CC'$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Uma vez que  $I, A, A'$  encontram-se numa reta projetiva e são distintos, eles estão em posição geral, de modo que em (1.5) escolhemos vetores representativos  $i, a, a'$ , tal que

$$i = a + a'.$$

Estes são vetores de um subespaço bidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Da mesma forma, temos vetores representativos  $b, b'$  para  $B, B'$  e  $c, c'$  para  $C, C'$  com

$$i = b + b', \quad i = c + c'.$$

Segue-se que  $i = a + a' = b + b'$  e, portanto, podemos definir um vetor  $p$  por

$$p = a - b = b' - a'$$

e, de forma análoga, vetores  $q$  e  $r$  por

$$q = b - c = c' - b', \quad r = c - a = a' - c'.$$

Mas então

$$p + q + r = a - b + b - c + c - a = 0.$$

Assim,  $p, q, r$  são linearmente dependentes e estão num mesmo subespaço bidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Logo, os pontos representados por  $p, q, r$  são colineares. Neste contexto, como  $p = a - b$ ,  $p$  está no espaço bidimensional gerado por  $a$  e  $b$ . Então,  $[p]$  está na reta  $AB$ . Como  $p$  também é igual a  $b' - a'$ ,  $[p]$  está na reta  $A'B'$  e, portanto,  $[p]$  representa o ponto projetivo  $P = AB \cap A'B'$ . Do mesmo modo, vemos que  $Q = [q]$  e  $R = [r]$ . Estes são os três pontos colineares procurados.  $\square$

De seguida, vamos apresentar outra demonstração do mesmo teorema, usando coordenadas homogêneas e uma transformação projetiva adequada.

*Demonstração.* Pelo **Teorema Fundamental do Plano Projetivo**, existe uma transformação projetiva que leva qualquer conjunto de quatro pontos em posição geral no quadrângulo de referência  $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]$ . Uma vez que as transformações projetivas preservam as relações de incidência, podemos então assumir que

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1], \quad I = [1 : 1 : 1].$$

A equação da reta projetiva  $AB$  é  $z = 0$ . Uma vez que a reta  $AA'$  incide em  $I$ , o ponto projetivo  $A'$  incide na reta projetiva  $IA$ , que tem como equação  $y = z$ . Ou

## Plano Projetivo e Construções com Régua

seja, o ponto  $A'$  tem coordenadas homogéneas da forma

$$[a : b : b] = \left[\frac{a}{b} : 1 : 1\right] = [p : 1 : 1], \text{ para } p = \frac{a}{b}, b \neq 0 \text{ e } a \neq b.$$

Se  $b = 0$ , então  $A' = [1 : 0 : 0]$ , ou seja,  $A = A'$ , o que contraria a condição do teorema que obriga a que os dois triângulos não tenham vértices em comum. Se  $a = b$ , então  $A' = [1 : 1 : 1]$ , ou seja,  $A' = I$ , pelo que  $a \neq b$  e portanto,  $p \neq 1$ .

Da mesma forma,  $B'$  incide na reta  $IB$ , que tem equação  $x = z$ . O ponto  $B'$  tem coordenadas homogéneas da forma

$$[c : d : c] = \left[1 : \frac{d}{c} : 1\right] = [1 : q : 1], \text{ para } q = \frac{d}{c}, c \neq 0 \text{ e } d \neq c.$$

A reta  $A'B'$  tem então como equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - q)x + (1 - p)y + (pq - 1)z = 0.$$

Como  $P = AB \cap A'B'$ , então

$$\begin{cases} z = 0 \\ (1 - q)x + (1 - p)y + (pq - 1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{1 - q}{p - 1}x \end{cases}$$

Logo,

$$P = \left[x : \frac{1 - q}{p - 1}x : 0\right] = [p - 1 : 1 - q : 0].$$

Do mesmo modo obtemos que  $Q = [1 - p : 0 : r - 1]$ , com  $r \neq 1$  e  $R = [0 : q - 1 : 1 - r]$ , com  $q \neq 1$ . Verificamos agora que os pontos  $P, Q$  e  $R$  são colineares:

$$\begin{vmatrix} p - 1 & 1 - q & 0 \\ 1 - p & 0 & r - 1 \\ 0 & q - 1 & 1 - r \end{vmatrix} = -(p - 1)(q - 1)(r - 1) - (1 - r)(1 - p)(1 - q) = 0.$$

Logo,  $P, Q$  e  $R$  são colineares. □

Vamos ver de seguida como o Teorema de Desargues pode ser representado quando fixado um plano da tela. Começamos por supor o caso em que os pontos projetivos  $A, B, C, A', B', C'$  e  $I$  correspondem a pontos na tela, que os denotaremos pelas mesmas letras. Dizemos nesta situação que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são perspetivos a partir do ponto  $I$  se as retas  $AA', BB', CC'$  forem concorrentes no ponto. Dizemos também que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são perspetivos a partir de uma reta se os pontos  $P = BC \cap B'C'$ ,  $Q = AB \cap A'B'$  e  $R = AC \cap A'C'$  forem colineares.

## Plano Projetivo e Construções com Régua

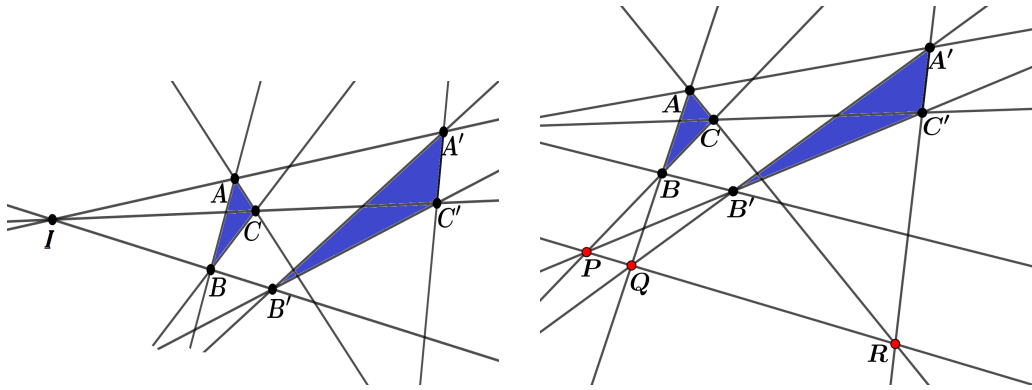


Figura 1.4: Triângulos perspetivos por um ponto e por uma reta.

Consideremos dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  tais que os lados correspondentes não sejam paralelos. O que o Teorema de Desargues afirma neste caso, é que se os triângulo  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são perspetivos a partir de um ponto, então eles são perspetivos a partir de uma reta.

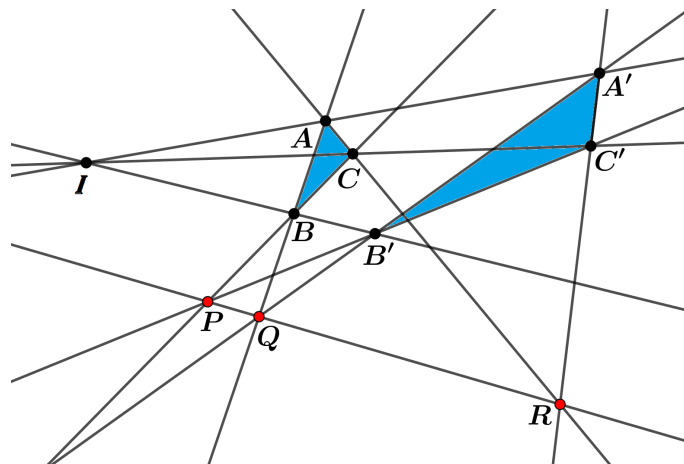


Figura 1.5: Representação do Teorema de Desargues.

Agora, vamos considerar o caso em que os pontos  $A$  e  $A'$  estão no infinito e o observador não consegue vê-los, ou seja, a reta projetiva  $AA'$  não tem representação no plano da tela. Neste sentido, as retas  $BB'$  e  $CC'$  são paralelas. Tomemos duas retas paralelas  $s_1$  e  $s_2$ , uma por  $B$  e outra por  $C$ , respectivamente (pensamos em  $A$  como o ponto no infinito de interseção destas retas). Analogamente, com direção diferente do par de retas paralelas anterior, tomemos duas retas paralelas  $p_1$  e  $p_2$ , uma por  $B'$  e outra por  $C'$  (pensamos em  $A'$  como o ponto no infinito de interseção destas retas).

Traçamos então as retas  $BC$  e  $B'C'$  que intersectam-se no ponto  $R$ . Seguidamente consideremos os pontos de interseção  $P = s_1 \cap p_1$  e  $Q = s_2 \cap p_2$ . Neste contexto, o Teorema de Desargues afirma que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.

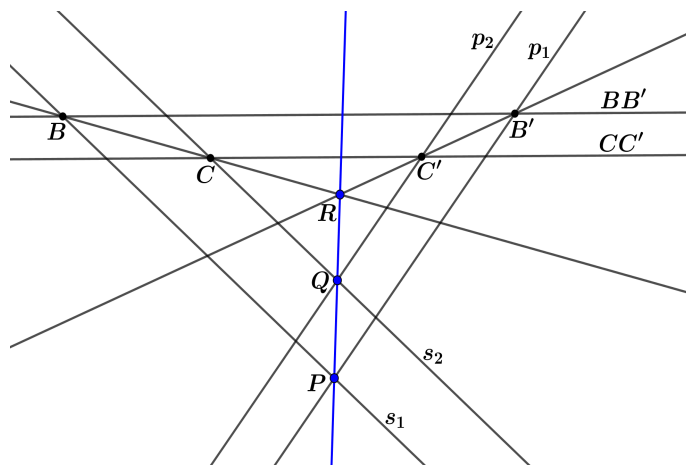


Figura 1.6: Três pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  colineares.

**Observação 1.4.7.** A partir do Teorema de Desargues, deduzimos dois resultados diferentes para o plano Euclidiano. Mais geralmente, qualquer resultado válido para o plano projetivo dá origem a vários resultados para o plano Euclidiano, bastando para tal variar a posição relativa do plano da tela. Percebemos deste modo, o carácter unificador da Geometria Projetiva.

#### 1.4.2 Teorema de Pappus

Outro teorema importante da geometria projetiva é o Teorema de Pappus. Muito provavelmente, Pappus de Alexandria (290-350) estava a pensar num resultado para o plano euclidiano, mas o seu teorema pode ser enunciado no quadro do plano projetivo, uma vez que apenas envolve colinearidade e não questões sobre ângulos e comprimentos. A demonstração que apresentamos faz mais uma vez uso do Teorema Fundamental do Plano Projetivo:

**Teorema 1.4.8 (Pappus).** *Num plano projetivo, consideremos  $A, B, C$  três pontos distintos incidentes com uma reta  $\ell$ , e  $A', B', C'$  outros três pontos distintos incidentes com outra reta  $\ell'$ , e todos eles distintos do ponto de interseção  $I$  das retas  $\ell$  e  $\ell'$ . Então os pontos de interseção  $P = AB' \cap A'B$ ,  $Q = BC' \cap B'C$  e  $R = AC' \cap A'C$  são colineares.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, nós podemos assumir que  $A, B, C', B'$  estão em posição geral. Caso contrário, dois dos três pontos requeridos coincidem,

## Plano Projetivo e Construções com Régua

então a conclusão é trivial. Pelo Teorema 1.4.3, podemos então assumir que

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad A' = [0 : 0 : 1] \quad \text{e} \quad B' = [1 : 1 : 1].$$

Denotamos um ponto genérico de  $\mathbb{R}^3$  por  $(x, y, z)$ . A reta  $AB'$  é definida pela equação  $y = z$  e a reta  $A'B$  pela equação  $x = 0$ . Então

$$P = AB' \cap A'B = [0 : y : y] = [0 : 1 : 1].$$

O ponto  $C'$  incide na reta projetiva  $A'B'$  de equação  $x = y$ . Então,  $C'$  tem coordenadas homogêneas da forma

$$C' = [a : a : b] = [1 : 1 : \frac{b}{a}] = [1 : 1 : p], \quad \text{com } p = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0 \quad \text{e} \quad b \neq a$$

Se  $a = 0$ , então  $C' = [0 : 0 : 1]$ , ou seja,  $A' = C'$ , o que contraria as condições do teorema. Se  $b = a$ , então  $C' = [1 : 1 : 1]$ , ou seja,  $B' = C'$  que, do mesmo modo, contraria as condições do teorema. Pelo que,  $a \neq 0$  e  $b \neq a$ , ou seja,  $p \neq 1$ .

Do mesmo modo,  $C$  incide na reta projetiva  $AB$  de equação  $z = 0$ . Então,  $C$  tem coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$C = [c : d : 0] = [\frac{c}{d} : 1 : 0] = [q : 1 : 0], \quad \text{como } q = \frac{c}{d}, \quad d \neq 0 \quad \text{e} \quad c \neq d.$$

Se  $d = 0$ , então  $C = [1 : 0 : 0]$ , ou seja,  $A = C$ , o que contraria as condições do teorema. Se  $c = d$ , então  $C = [1 : 1 : 0]$ , então  $C$  incide simultaneamente em  $A'B'$  e em  $AB$ , ou seja, os pontos  $A, C, A', C'$  não estão em posição geral, pelo que o resultado do teorema é trivial.

A reta  $AC'$  é definida por:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -py + z = 0$$

e a reta  $A'C$  é definida por:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ q & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + qy = 0.$$

Assim, as coordenadas de  $Q = A'C \cap AC'$  resolvem o sistema

$$\begin{cases} -py + z = 0 \\ -x + qy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = py \\ x = qy \end{cases}$$

Logo

$$Q = [qy : y : py] = [q : 1 : p].$$

A reta  $CB'$  é definida por:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - qy + (q - 1)z = 0$$

e a reta  $C'B$  é definida por:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow px - z = 0.$$

Assim, as coordenadas de  $R = CB' \cap C'B$  resolvem o sistema:

$$\begin{cases} x - qy + (q - 1)z = 0 \\ px - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+pq-p}{q}x \\ z = px \end{cases}$$

Logo,

$$R = [x : \frac{1+pq-p}{q}x : px] = [q : 1 + pq - p : pq].$$

Finalmente, verificamos que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ q & 1 & p \\ q & 1 + pq - p & pq \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 + pq - pq^2 + q + pq^2 - pq - q = 0.$$

□

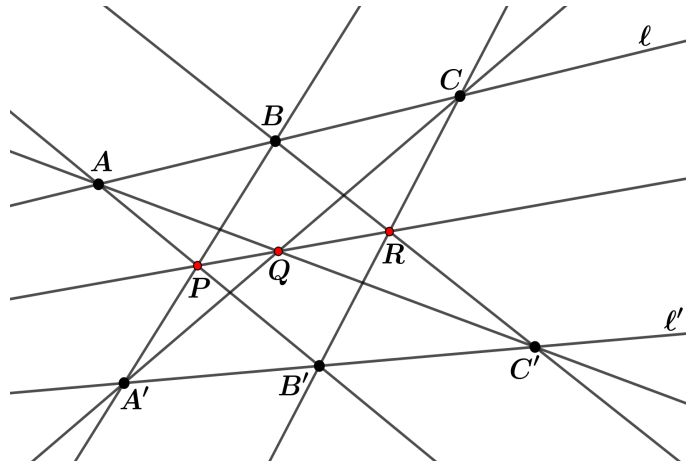


Figura 1.7: Representação do Teorema de Pappus.

## Plano Projetivo e Construções com Régua

No que se segue, vamos apresentar duas consequências para o plano Euclidiano do Teorema de Pappus, tomando duas posições distintas para o plano da tela.

No primeiro caso, supomos que a interseção das retas  $BC'$  com  $B'C$  ( $BC' \cap B'C = Q$ ) é um ponto no infinito e que todos os outros pontos envolvidos no enunciado do Teorema de Pappus têm representação no plano da tela. Neste plano, vamos considerar três pontos  $A, B, C$  distintos e incidentes numa reta  $\ell$ ; e outros três pontos  $A', B', C'$  também distintos e incidentes em outra reta  $\ell'$ . Se as retas  $BC'$  e  $B'C$  forem paralelas, então, a reta  $PR$ , com  $P = AB' \cap A'B$  e  $R = AC' \cap A'C$ , é paralela às retas  $BC'$  e  $B'C$ .

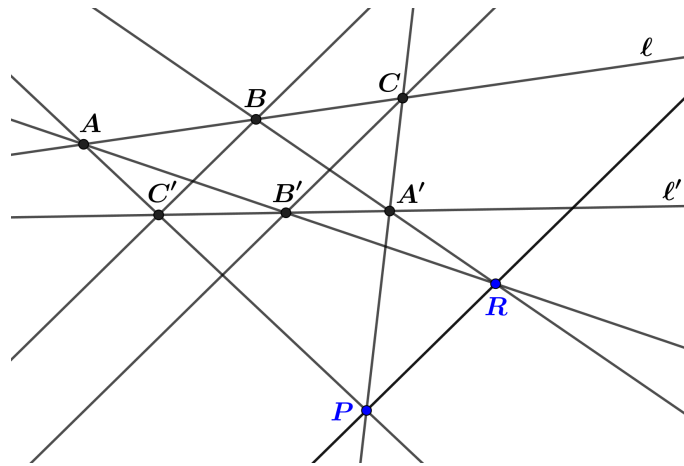


Figura 1.8: Representação do Teorema de Pappus com o ponto  $Q$  no infinito.

No segundo caso, supomos que  $C'$  é o único ponto no infinito. Ou seja, consideremos três pontos  $A, B, C$  distintos incidentes numa reta  $\ell$  e outros dois pontos  $A', B'$  distintos, com  $A', B'$  incidentes com outra reta  $\ell'$  (pensamos em  $C'$  como sendo o ponto no infinito definido por esta reta). Como  $C'$  é um ponto no infinito, as retas  $AC'$  e  $BC'$  são paralelas à reta  $\ell'$ , então os pontos de interseção  $P = AB' \cap A'B$ ,  $Q = AC' \cap A'C$  e  $R = BC' \cap B'C$  são colineares (figura 1.9).

### 1.5 Princípio da Dualidade no Plano Projetivo

Nesta parte do trabalho vamos apresentar o Princípio da Dualidade na Geometria Projetiva e os duais dos Teoremas de Desargues e Pappus.

Uma particularidade importante da Geometria Projetiva, designada por *Princípio da Dualidade*, é a possibilidade de trocar “pontos” por “retas” sem perder a validade

## Plano Projetivo e Construções com Régua

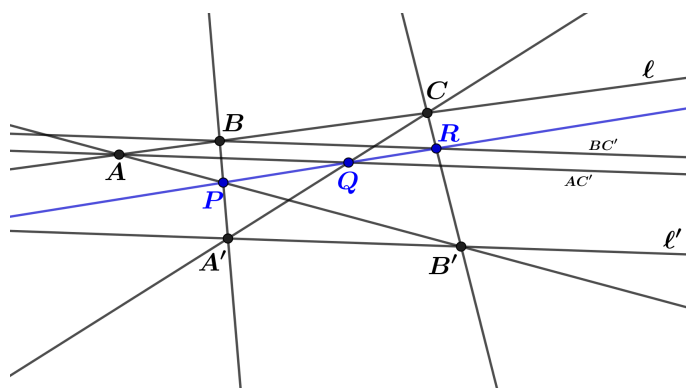


Figura 1.9: Representação do Teorema de Pappus com o ponto  $C'$  no infinito.

de proposições e teoremas. Por exemplo, na geometria projetiva, assim como na euclidiana, dizemos que dois pontos quaisquer determinam uma reta. Dualizando este resultado podemos dizer que duas retas quaisquer determinam um ponto, o que sabemos ser válido na Geometria Projetiva, mas não na geometria euclidiana.

Para preservarmos o sentido dos enunciados duais, alguns dos outros elementos linguísticos também necessitam de ser alterados quando os vocábulos ponto e reta são trocados entre si, de acordo com a tabela seguinte (como se pode ver em [2], p. 135):

Ponto	Reta
Está sobre	Passa por
Reta por dois pontos	Intersecção de duas retas
Concorrentes	Colineares
Vértice	Lado
Quadrângulo	Quadrilátero
Tangente	Ponto de contacto
Polo	Polar

Tabela 1.1: Expressões duais entre ponto e reta.

A título de exemplo, a figura dual de três pontos distintos incidentes sobre uma mesma reta corresponde a três retas que concorrem em um único ponto.

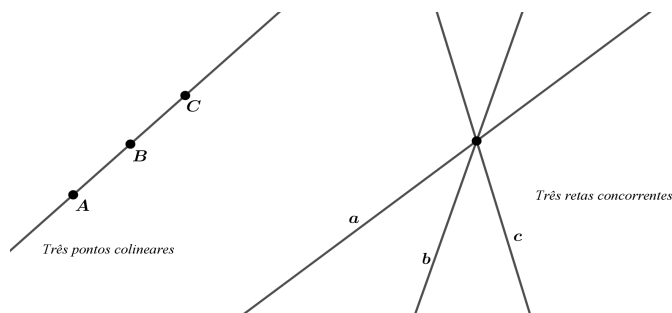


Figura 1.10: Figuras duais.

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Três pontos não colineares e as retas que as unem podem ser dualizadas por três retas não incidentes num mesmo ponto e os pontos determinados pela sua intersecção duas a duas. Deste modo, verifica-se que o dual de um triângulo é também um triângulo e, assim, diz-se que esta figura geométrica é uma figura *auto-dual*.

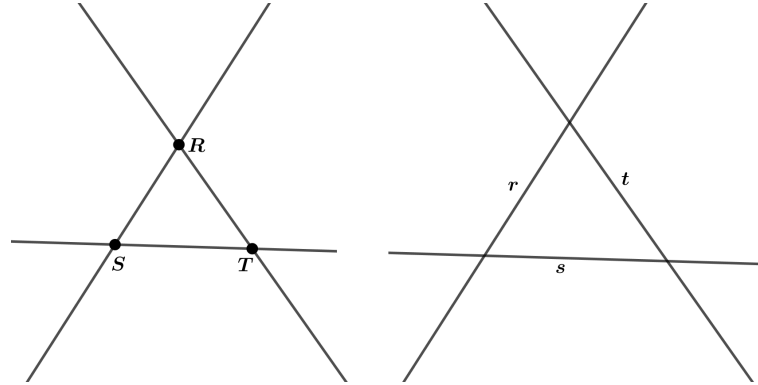


Figura 1.11: Figuras Auto-duais.

Vamos de seguida formalizar e justificar a validade deste princípio. Consideremos em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno usual. Podemos definir uma correspondência bijetiva  $\xi$  entre pontos projetivos e retas projetivas do seguinte modo. Para cada  $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2$ , seja  $\mathbf{v}^\perp$  o subespaço bidimensional dos vetores perpendiculares a  $\mathbf{v}$  e definimos  $\xi([\mathbf{v}])$  como sendo a reta projetiva associada ao subespaço vetorial  $\mathbf{v}^\perp$ , isto é:

$$\begin{aligned} \xi : \{\text{pontos projetivos}\} &\rightarrow \{\text{retas projetivas}\} \\ \xi([\mathbf{v}]) &= \mathbb{P}(\mathbf{v}^\perp) \end{aligned}$$

Esta correspondência preserva as relações de incidência no sentido seguinte:

**Proposição 1.3.** Dados pontos projetivos  $X_1$  e  $X_2$ , seja  $X_1X_2$  a reta projetiva por eles definida. Então

$$\xi(X_1) \cap \xi(X_2) = \xi^{-1}(X_1X_2).$$

*Demonstração.* Se  $X_1 = [\mathbf{v}_1]$  e  $X_2 = [\mathbf{v}_2]$ , então o ponto projetivo

$$\xi(X_1) \cap \xi(X_2) = [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] = \xi^{-1}(X_1X_2).$$

□

Quando o princípio da dualidade é aplicado aos teoremas da Geometria Projetiva, surgem as formas duais destes mesmos teoremas, que não necessitam de uma demonstração diferente em relação ao original, excepto a dualização passo a passo da sua demonstração. Assim, o princípio da dualidade economiza demonstrações e possibilita o acesso a novos resultados. Vejamos dois exemplos.

**Teorema 1.5.1 (Dual de Desargues).** *Sejam  $a, b, c$  e  $a', b', c'$  retas distintas num plano projetivo, de modo que os pontos  $A = a \cap a'$ ,  $B = b \cap b'$  e  $C = c \cap c'$  sejam distintos e colineares. Então, as retas constituídas por  $\{a \cap b, a' \cap b'\}$ ,  $\{a \cap c, a' \cap c'\}$  e  $\{b \cap c, b' \cap c'\}$  são concorrentes num único ponto  $P$ .*

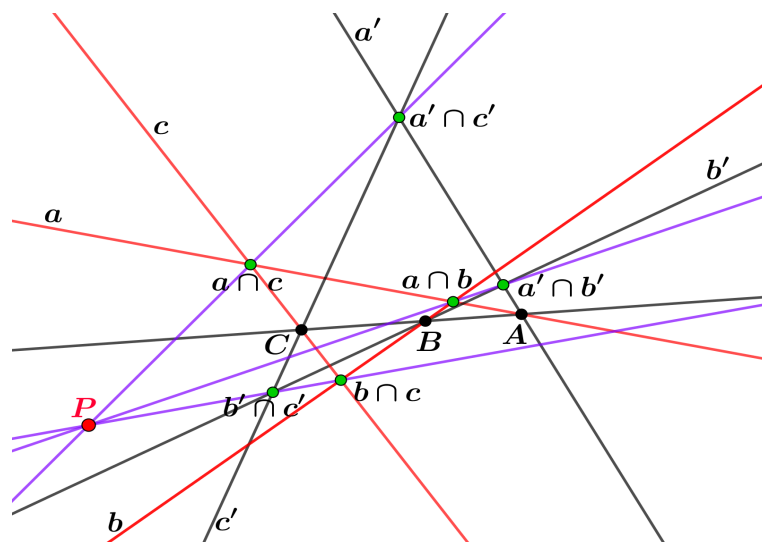


Figura 1.12: Dual do Teorema de Desargues

**Teorema 1.5.2 (Dual de Pappus).** *Sejam três retas  $a, b$  e  $c$  incidentes com mesmo ponto  $A$  e  $a', b'$  e  $c'$  outras três retas incidentes com um outro ponto  $A'$  no plano projetivo. Então as retas  $\{a \cap b', a' \cap b\}$ ,  $\{a \cap c', a' \cap c\}$  e  $\{b' \cap c, b \cap c'\}$  são incidentes com o mesmo ponto  $P$ .*

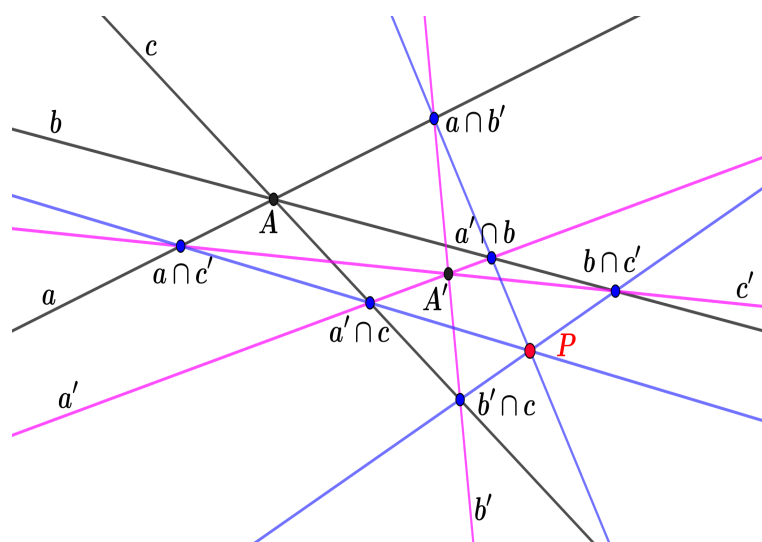


Figura 1.13: Dual do Teorema de Pappus

## 1.6 Pontos Harmônicos Conjugados

Na secção anterior, vimos que se numa proposição qualquer sobre incidência de pontos e retas trocamos os termos “ponto” e “reta”, obtemos uma proposição equivalente à dada. Para definição de pontos harmônicos conjugados, necessita-se duma configuração do plano projetivo denominada de *quadrângulo*.

### 1.6.1 Conjunto Quadrangular

Antes de falarmos de conjunto quadrangular, vamos apresentar o conceito de quadrângulo completo que através dele permite determinar um conjunto quadrangular. O *quadrângulo completo* associado a quatro pontos  $P, Q, R, S$  em posição geral, designados por *vértices*, é a figura constituída pelas seis retas definidas por esses pontos dois a dois, os lados do quadrângulo, e os respetivos pontos de interseção. Dois lados designam-se *opostos* quando não têm vértices em comum. Os pontos de interseção dos lados opostos de um quadrângulo são designados por *pontos diagonais*, que por sua vez, são os vértices do *triângulo diagonal* de um quadrângulo completo.

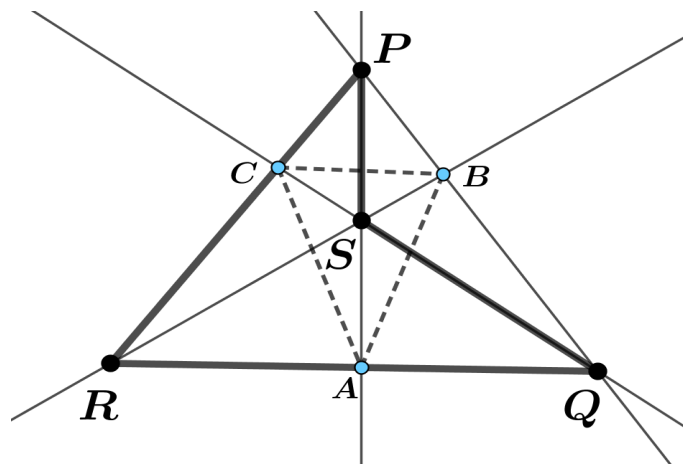


Figura 1.14: Triângulo diagonal  $A = QR \cap PS$ ,  $B = RS \cap PQ$  e  $C = SQ \cap PR$ .

Na figura 1.15, temos um quadrângulo completo  $PQRS$  com os seus pontos diagonais  $A, B$  e  $C$ ; e podemos ainda identificar os seus lados opostos que são: o lado  $QR$  oposto ao lado  $PS$ , o lado  $SQ$  oposto à  $PR$  e por último, o lado  $RS$  oposto à  $PQ$ .

Dualizando um quadrângulo completo nos fornece um quadrilátero completo que é uma figura formada por quatro retas (lados)  $p, q, r$  e  $s$ , não havendo três concorrentes e pelos seis pontos (vértices) de interseção  $qr, qs, qp, ps, pr$  e  $rs$ . As retas definidas pelos vértices opostos,  $a, b$  e  $c$ , são as diagonais do quadrilátero e são os lados do triângulo diagonal como mostra a figura 1.16.

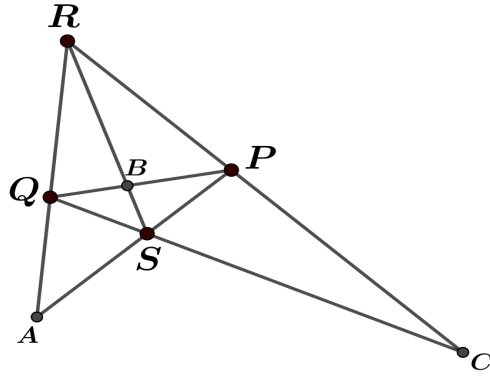


Figura 1.15: Quadrângulo completo  $PQRS$  e os pontos diagonais  $A, B$  e  $C$ .

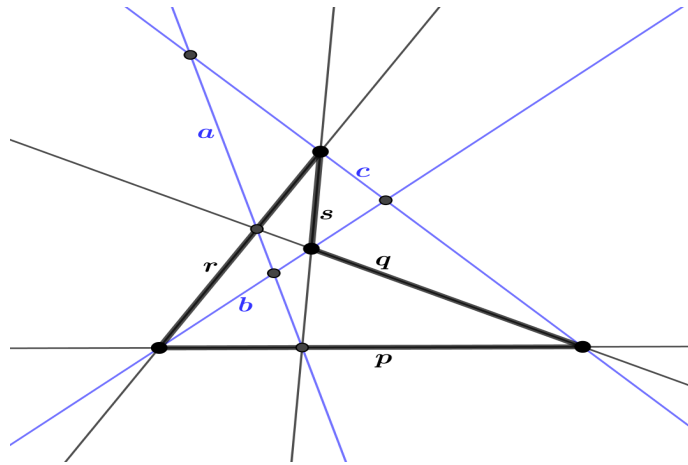


Figura 1.16: Quadrilátero completo  $pqrs$  e triângulo diagonal  $abc$ .

As retas  $a, b$  e  $c$  são formadas pelas seguintes interseções:

$$a = (q \cap r)(p \cap s), \quad b = (q \cap s)(p \cap r), \quad c = (q \cap p)(r \cap s).$$

Dado um quadrângulo completo  $PQRS$  e uma reta  $\ell$ , o conjunto quadrangular por eles definido é o conjunto dos pontos dados pela interseção de  $\ell$  com as seis retas do quadrângulo completo. O conjunto quadrangular terá no máximo seis pontos colineares. Se a reta  $\ell$  cruzar com um ou dois pontos diagonais, então o conjunto quadrangular será formado por cinco ou quatro pontos colineares, respectivamente (figuras 1.17, 1.18 e 1.19).

## Plano Projetivo e Construções com Régua

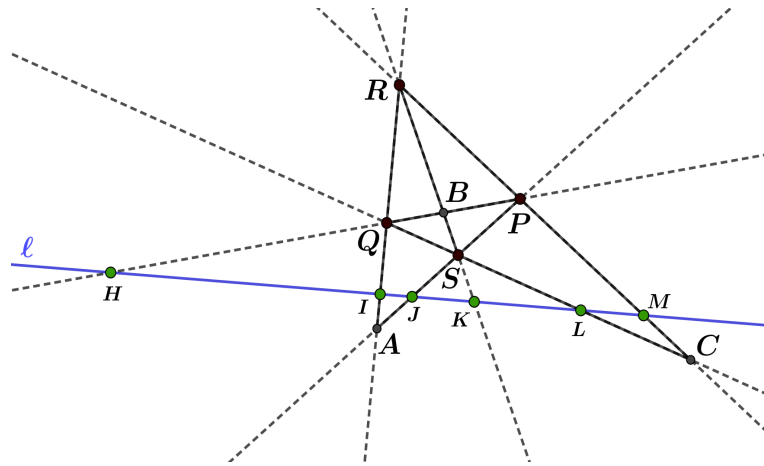


Figura 1.17: Conjunto Quadrangular com seis pontos colineares  $H, I, J, K, L, M$ .

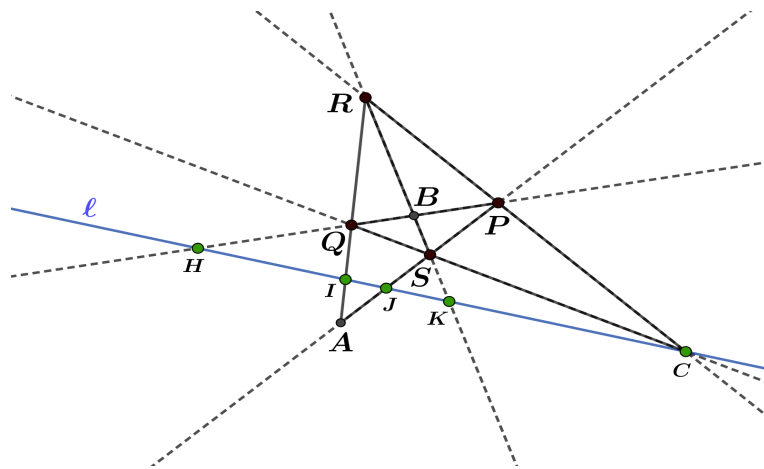


Figura 1.18: Conjunto Quadrangular com cinco pontos colineares  $H, I, J, K$  e  $C$ .

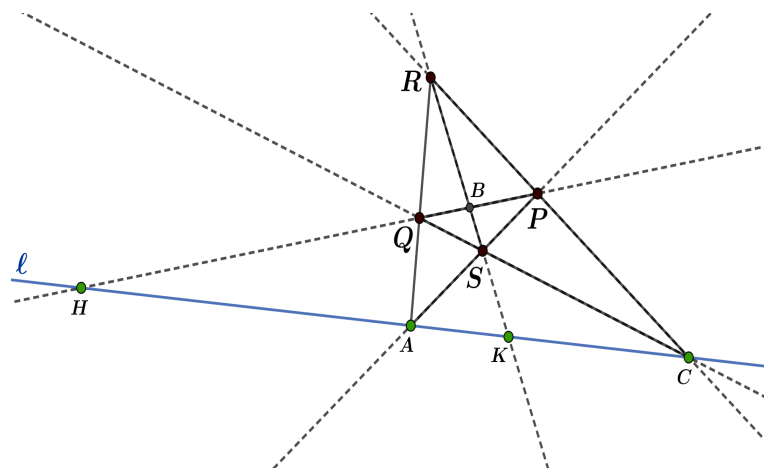


Figura 1.19: Conjunto Quadrangular com quatro pontos colineares  $H, A, K$  e  $C$ .

Na figura 1.17, os pontos  $H, I, J, K, L, M$  formam o conjunto quadrangular e podemos usar a notação  $Q(JKL, IHM)$  ou a notação  $(JI)(KH)(LM)$ .

Quaisquer cinco pontos colineares  $H, I, J, K, L$  pertencem sempre a um conjunto quadrangular. Com efeito, basta construir um triângulo  $SQR$  onde os lados  $RS, SQ, QR$

passam, respectivamente, pelos pontos  $K, L, I$ ; agora fazemos  $P = HQ \cap JS$  e  $M = \ell \cap PR$ . Caso tivéssemos escolhido um triângulo  $SQR$  diferente, ainda assim o ponto  $M$  seria o mesmo, como afirma o seguinte teorema:

**Teorema 1.6.1.** *Cada ponto de um conjunto quadrangular é determinado unicamente pelos restantes.*

*Demonstração.* Queremos mostrar que o ponto  $F$  é determinado exclusivamente pelos pontos  $A, B, C, D, E$  (Figura 1.20). Para tal, consideremos um quadrângulo  $P'Q'R'S'$ , onde cinco dos seus lados passam pelos cinco pontos  $A, B, C, D, E$  de  $\ell$ . Note que os triângulos  $PRS$  e  $P'R'S'$  são perspectivos por  $\ell$ . Portanto, pelo dual do Teorema de Desargues, eles são perspectivos a partir de um ponto  $O$ ; assim,  $O = RR' \cap SS' \cap PP'$ . De forma análoga, os triângulos  $QRS$  e  $Q'R'S'$  também são perspectivos por  $O$ . (Em outras palavras,  $PQRS$  e  $P'Q'R'S'$  são quadrângulos perspectivos.) Pelo Teorema de Desargues, os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$ , que são perspectivos a partir do ponto  $O$ , também são perspectivos a partir da reta  $DE = \ell$ ; logo, os lados  $PQ$  e  $P'Q'$  intersectam  $\ell$  no mesmo ponto  $F$ . Isto implica que  $PQ \cap \ell = P'Q' \cap \ell = F$  (como se vê em [3], p. 21).  $\square$

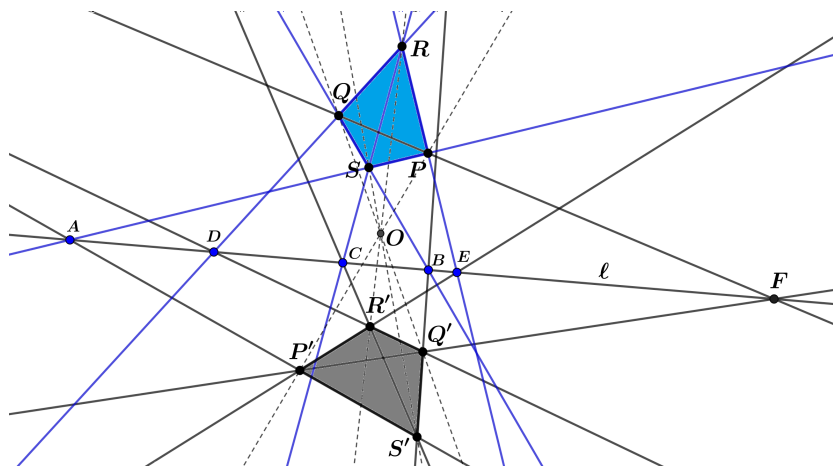


Figura 1.20: Determinação do ponto  $F$  do conjunto quadrangular pelos pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ .

### 1.6.2 Conjunto harmónico e conjugados harmónicos

A seguir, vamos apresentar as definições ou conceitos relacionados ao *conjunto harmónico* e *conjugado harmónico*, e posteriormente apresentar um modelo a seguir para determinação do conjugado harmónico.

**Definição 1.6.2.** Quatro pontos colineares  $A, B, C$  e  $D$  formam um *conjunto harmónico*, se existir um quadrângulo completo tal que dois lados opostos incidem com

## Plano Projetivo e Construções com Régua

$A$  e outros dois lados opostos incidem com  $B$ , enquanto que os restantes lados passam por  $C$  e  $D$  respectivamente. Se estes pontos formam um conjunto harmónico, então  $C$  e  $D$  dizem-se *conjugados harmónicos* com respeito a  $A$  e  $B$ , e denotamos por  $H(AB, CD)$ .

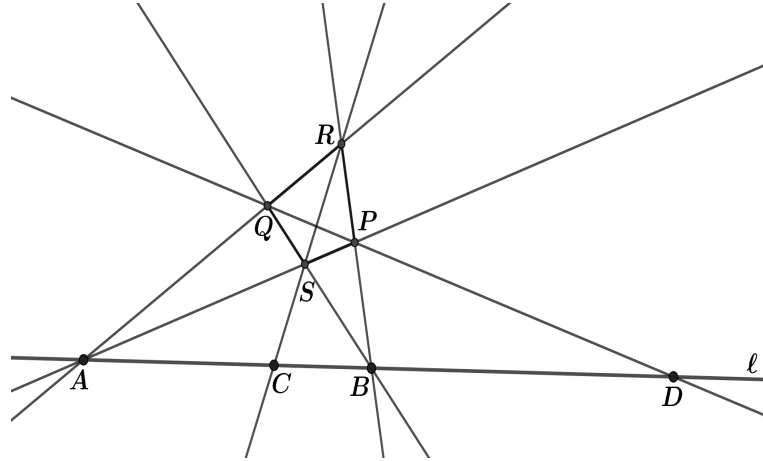


Figura 1.21: Conjugado Harmónico  $H(AB, CD)$ .

Tem-se naturalmente a definição dual para retas:

**Definição 1.6.3.** Quatro retas  $a, b, c$  e  $d$ , concorrentes num mesmo ponto, formam um conjunto harmónico se existir um quadrilátero tal que dois vértices opostos incidem com  $a$ , outros dois com  $b$  e os restantes vértices incidem com  $c$  e  $d$ , respectivamente. Diz-se que as retas  $c$  e  $d$  são conjugadas harmónicas relativamente ao par de retas  $a$  e  $b$  e escreve-se  $H(ab, cd)$ .

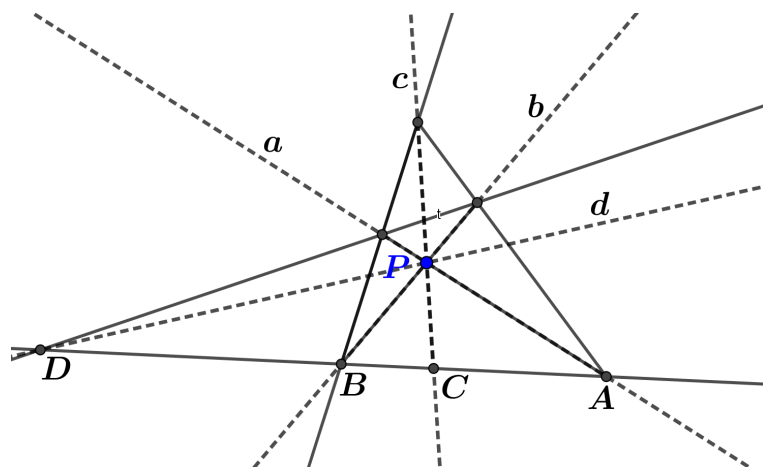


Figura 1.22: Conjugada Harmónica das retas  $a, b, c$  e  $d$ ,  $H(ab, cd)$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Apresentamos a seguir, um possível guião que se deve à Greenberg ([4], p. 264), para determinação do conjugado harmónico de um ponto  $C$  em relação a dois pontos  $A$  e  $B$  ( $C$  está entre  $A$  e  $B$ ). Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos colineares, de acordo com a figura 1.21, para determinar o ponto  $D$ , conjugado harmónico de  $C$  em relação a  $A$  e  $B$ , seguimos as seguintes instruções:

1. Determinar dois pontos  $R$  e  $S$  colineares com  $C$ , não incidentes com a reta  $AB$ ;
2. Traçar as retas  $AS, AR, BS$  e  $BR$ ;
3. Determinar o ponto  $P = AS \cap BR$ ;
4. Determinar o ponto  $Q = AR \cap BS$ ;
5. Traçar a reta  $PQ$ ;
6. Determinar o ponto  $D = PQ \cap AB$ .

O ponto  $D$  é conjugado harmónico de  $C$  em relação a  $A$  e  $B$ .

Em particular, se  $C$  for o ponto médio do segmento  $AB$ , o conjugado harmónico  $D$  será um ponto no infinito conforme a figura seguinte. Assim, a reta  $PQ$  que contém  $D$  é paralela à reta  $AB$ .

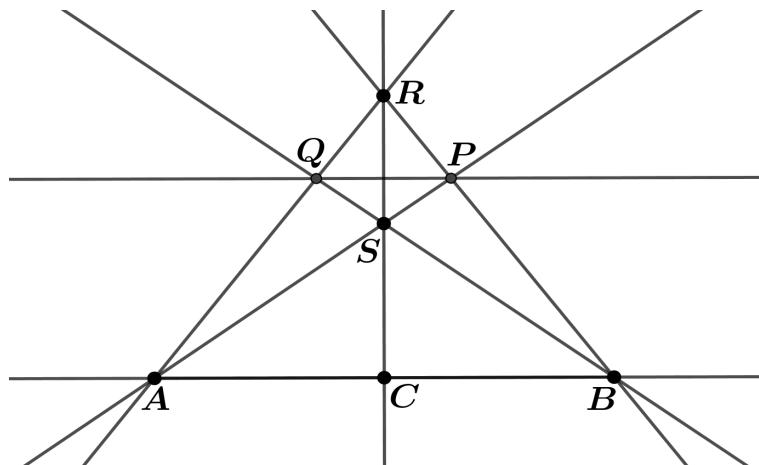


Figura 1.23: Conjugado Harmónico  $H(AB, CD)$  com  $C$  o ponto médio de  $AB$ .

A par da construção de Greenberg, apresentamos outro roteiro que podemos seguir para a construção do conjugado harmónico  $D$  de um ponto  $C$  em relação a um par  $AB$ . Sendo assim, dados três pontos  $A, B$  e  $C$  colineares:

1. Traçamos um triângulo qualquer  $PQR$  cujo lados  $QR, RP, PQ$  passam por  $A, B$  e  $C$ , respectivamente;

## Plano Projetivo e Construções com Régua

2. Determinamos assim um quadrângulo completo  $PQRS$  sendo  $S = AP \cap BQ$  conforme a figura seguinte;
3. Finalmente, basta tomar  $D = RS \cap AB$ . Logo,  $D$  é conjugado harmónico de  $C$  em relação à  $AB$ .

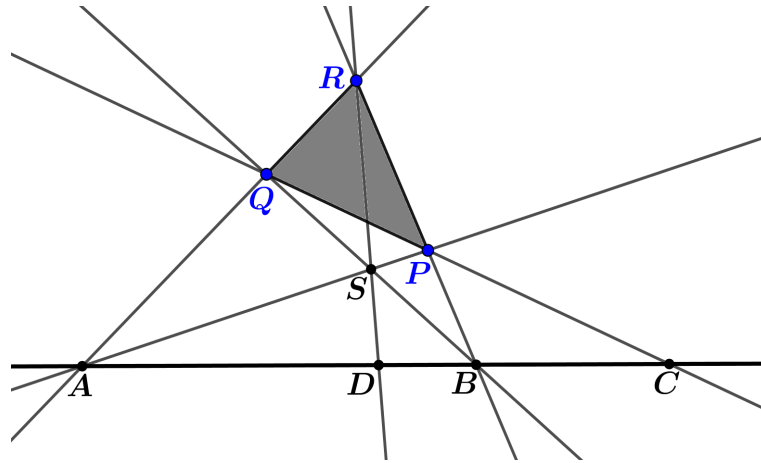


Figura 1.24: Conjugado Harmónico  $H(AB, CD)$  construído a partir do triângulo  $PQR$ .

Terminada a secção relacionada aos Pontos Harmónicos Conjugados, onde destacamos os conceitos sobre Conjuntos Quadrangulares, Quadrângulo e Quadrilátero Completo e com maior realce o Conjugado Harmónico para quatro pontos colineares e o seu dual. Assim, estamos em condições para descrevermos a secção relacionada à Razão Cruzada.

### 1.7 Razão Cruzada

Nesta secção, vamos abordar o conceito de razão cruzada no plano projetivo. A razão cruzada é um invariante muito importante para transformações projetivas.

**Observação 1.7.1.** Nesta secção, as junções de duas letras maiúsculas (ex.  $AC$ ) denotam também a distância orientada entre os respetivos pontos e representam um número real. Por outro lado, a notação  $|XY|$  identifica a medida (não negativa) de um segmento.

**Definição 1.7.2.** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  quatro pontos distintos incidentes numa reta orientada  $\ell$  do plano euclidiano. Nesta ordem, a *razão cruzada* de  $AB$  em relação a  $CD$  representada por  $R(AB, CD)$  é definida por

$$R(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

onde estamos a considerar distâncias orientadas.

Importa ressaltar que esta definição é independente da orientação escolhida para a reta incidente nos pontos  $A, B, C$  e  $D$ , uma vez que trocando a orientação da reta, todos os sinais das distâncias orientadas dos segmentos são trocados, o que mantém o sinal da razão cruzada.

Por outro lado, a razão cruzada de quatro pontos depende da ordem pela qual os descrevemos, isto é,

$$R(AB, CD) \neq R(AB, DC)$$

Neste sentido, existe uma relação entre estes números reais que representam as razões cruzadas dos quatro pontos mencionados, como se verificam nas seguintes propriedades:

1.  $R(AB, CD) = R(BA, DC) = R(DC, BA) = R(CD, AB) = x$
2.  $R(AB, DC) = R(BA, CD) = R(CD, BA) = R(DC, AB) = \frac{1}{x}$
3.  $R(AC, BD) = R(CA, DB) = R(DB, CA) = R(BD, AC) = 1 - x$
4.  $R(AC, DB) = R(CA, BD) = R(BD, CA) = R(DB, AC) = \frac{1}{1-x}$
5.  $R(AD, CB) = R(DA, BC) = R(BC, DA) = R(CB, AD) = \frac{x}{x-1}$
6.  $R(AD, BC) = R(DA, CB) = R(CB, DA) = R(BC, AD) = \frac{x-1}{x}$

Consideremos quatro retas concorrentes num ponto  $O$  e seja  $\ell$  uma outra reta que intersecta as quatro primeiras em quatro pontos distintos. Vamos ver de seguida que a razão cruzada destes quatro pontos não depende da reta  $\ell$ . Por este motivo, podemos considerar a definição da razão cruzada como um número associado a quatro retas concorrentes num ponto.

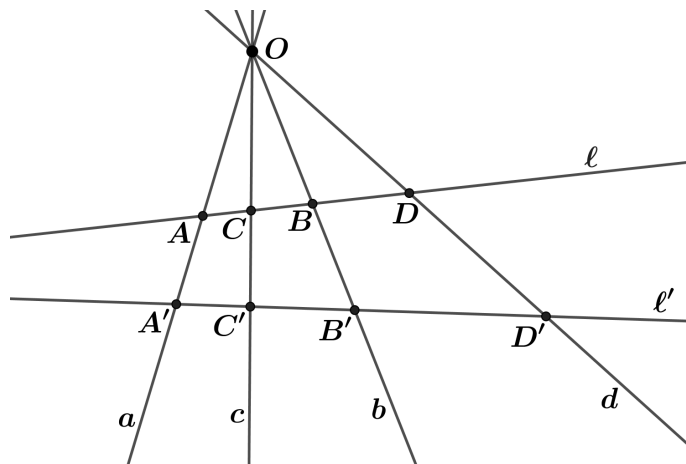


Figura 1.25: Projecção do ponto  $O$  nas retas  $\ell$  e  $\ell'$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

**Teorema 1.7.3.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  quatro retas concorrentes num ponto  $O$ . Para as retas  $\ell$  e  $\ell'$  que não contêm  $O$ , denotamos por  $A, B, C$  e  $D$  as intersecções  $a, b, c$  e  $d$  com  $\ell$  e  $A', B', C'$  e  $D'$  com  $\ell'$  respectivamente. Então*

$$R(AB, CD) = R(A'B', C'D').$$

*Demonstração.* Para demonstrarmos este teorema, devemos recordar alguns resultados sobre triângulos.

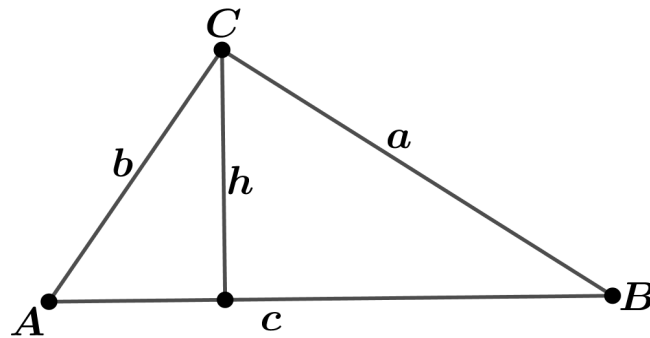


Figura 1.26: Triângulo  $ABC$  com altura  $h$ .

Em relação a figura 1.26, temos:

$$\sin A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin A$$

$$\sin B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin B$$

Como a altura  $h$  é a mesma, então

$$b \sin A = a \sin B$$

ou seja,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

Procedemos do mesmo jeito em relação aos outros pares de vértices para obter a lei dos senos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Quaisquer quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  numa reta  $\ell$ , determinam a razão cruzada

$$\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}}.$$

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Neste contexto, pretendemos saber se essa relação é preservada quando os pontos são projetados para outra reta a partir de um ponto  $O$ . Em função da figura 1.25, vamos aplicar a lei dos senos. Assim sendo, temos:

$$\frac{\sin(AOC)}{AC} = \frac{\sin(ACO)}{AO} \Rightarrow AC \sin(ACO) = AO \sin(AOC) \Rightarrow AC = \frac{AO \sin(AOC)}{\sin(ACO)}$$

$$\frac{\sin(BOC)}{BC} = \frac{\sin(BCO)}{BO} \Rightarrow BC \sin(BCO) = BO \sin(BOC) \Rightarrow BC = \frac{BO \sin(BOC)}{\sin(BCO)}$$

Como os senos de ângulos suplementares são iguais, temos  $\sin(ACO) = \sin(BCO)$ .

Então,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{AO \sin(AOC)}{\sin(ACO)}}{\frac{BO \sin(BOC)}{\sin(BCO)}} = \frac{AO \sin(AOC)}{BO \sin(BOC)}.$$

Fazendo novamente teremos

$$\frac{\sin(AOD)}{AD} = \frac{\sin(ADO)}{AO} \Rightarrow AD \sin(ADO) = AO \sin(AOD) \Rightarrow AD = \frac{AO \sin(AOD)}{\sin(ADO)}$$

$$\frac{\sin(BOD)}{BD} = \frac{\sin(BDO)}{BO} \Rightarrow BD \sin(BDO) = BO \sin(BOD) \Rightarrow BD = \frac{BO \sin(BOD)}{\sin(BDO)}.$$

Como os ângulos  $ADO$  e  $BDO$  são iguais, os seus senos também são iguais. Assim sendo, temos:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{AO \sin(AOD)}{\sin(ADO)}}{\frac{BO \sin(BOD)}{\sin(BDO)}} = \frac{AO \sin(AOD)}{BO \sin(BOD)}$$

e finalmente

$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{AO \sin(AOC)}{BO \sin(BOC)} \div \frac{AO \sin(AOD)}{BO \sin(BOD)}$$

onde

$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(AOC)}{\sin(BOC)} \div \frac{\sin(AOD)}{\sin(BOD)}.$$

Na última igualdade só intervêm os ângulos em  $O$ . Se fizéssemos todo o procedimento usando os pontos pré-definidos na outra transversal  $\ell'$ , tudo iria exatamente da mesma forma e deveríamos terminar com:

$$\frac{A'C'}{B'C'} \div \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{\sin(A'OC')}{\sin(B'OC')} \div \frac{\sin(A'OD')}{\sin(B'OD')}$$

que significa que a razão cruzada é invariante numa projecção. □

Podemos notar que, se movermos  $O$  para uma nova posição  $P$  sem tocar em  $A, B, C$  e  $D$ , não haverá nenhuma alteração na demonstração. Portanto, mesmo que os ângulos individuais sejam alterados, a razão cruzada de seus senos não é alterada como mostra a figura 1.27.

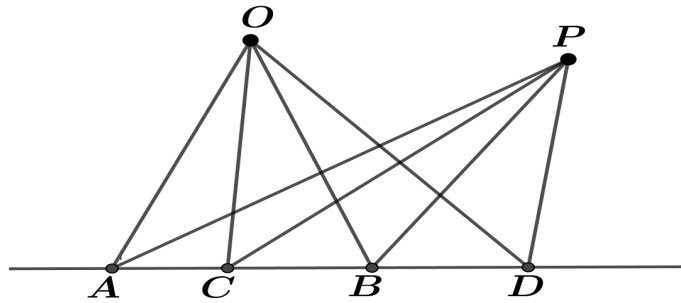


Figura 1.27: Variação do ponto  $O$  a  $P$ .

Acabamos de fazer uma abordagem sobre a razão cruzada no plano euclidiano. Vimos que a razão cruzada pode ser associada a quatro retas concorrentes num ponto. Isto sugere que a razão cruzada pode jogar um papel importante no quadro geometria projetiva. De facto, temos a seguinte definição invariante de razão cruzada.

**Definição 1.7.4.** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  quatro pontos colineares e distintos do plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  e sejam  $a, b, c$  e  $d$  vetores em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $A = [a], B = [b], C = [c]$  e  $D = [d]$ . Suponhamos que  $C = [\alpha a + \beta b]$  e  $D = [\gamma a + \delta b]$ . Definimos a razão cruzada de  $A, B, C$  e  $D$  como sendo o escalar:

$$\tilde{R}(AB, CD) = \frac{\beta}{\alpha} \div \frac{\delta}{\gamma} \quad (1.7)$$

Desta forma, podemos relacionar as duas definições da razão cruzada do seguinte modo. Consideremos quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  incidentes numa reta projetiva  $\ell$  e fixemos um plano de tela  $\mathcal{P}$ . Suponhamos que  $A = [a], B = [b], C = [c]$  e  $D = [d]$ , com  $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ . Seja  $\vec{u}$  um vetor diretor da reta em  $\mathcal{P}$  definida por  $\ell$ .

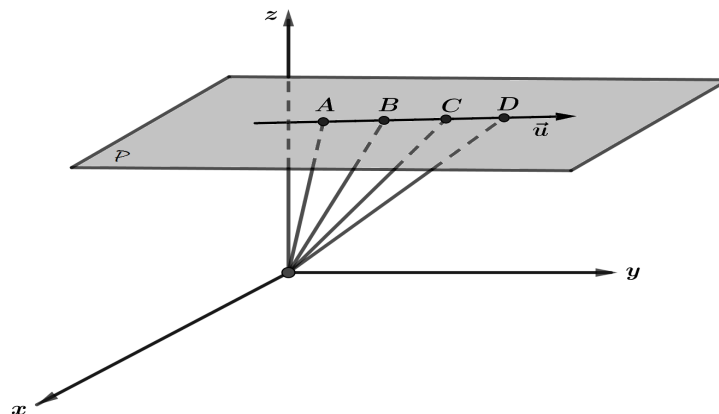


Figura 1.28: Razão cruzada de quatro pontos projetivos.

Temos

$$c = a + (ac)\vec{u} = b + (bc)\vec{u} \quad (1.8)$$

e

$$d = a + (ad)\vec{u} = b + (bd)\vec{u}. \quad (1.9)$$

De (1.8), isolamos o vector  $\vec{u}$  para posteriormente encontrarmos os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$a + (ac)\vec{u} = b + (bc)\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{b-a}{ac-bc}$$

Assim, substituindo em (1.8) teremos:

$$c = a + ac\left(\frac{b-a}{ac-bc}\right) \Leftrightarrow c = \left(1 - \frac{ac}{ac-bc}\right)a + \left(\frac{ac}{ac-bc}\right)b$$

Logo

$$\alpha = 1 - \frac{ac}{ac-bc}, \quad \beta = \frac{ac}{ac-bc}.$$

Fazendo o mesmo procedimento para (1.9), teremos

$$d = \left(1 - \frac{ad}{ac-bc}\right)a + \left(\frac{ad}{ac-bc}\right)b.$$

Logo

$$\gamma = 1 - \frac{ad}{ac-bc}, \quad \delta = \frac{ad}{ac-bc}.$$

Por último, substituindo os parâmetros  $\alpha, \beta, \delta$  e  $\gamma$  em (1.7) teremos

$$\begin{aligned} \tilde{R}(AB, CD) &= \frac{\frac{ac}{ac-bc}}{1 - \frac{ac}{ac-bc}} \times \frac{1 - \frac{ad}{ac-bc}}{\frac{ad}{ac-bc}} = \frac{ac}{1 - \frac{ac}{ac-bc}} \times \frac{1 - \frac{ad}{ac-bc}}{ad} \\ &= \frac{ac}{\frac{ac-bc-ac}{ac-bc}} \times \frac{\frac{ac-bc-ad}{ac-bc}}{ad} = \frac{ac(ac-bc-ad)}{ad(ac-bc-ac)} \\ &= \frac{ac}{ad} \times \frac{c-a-(c-b)-(d-a)}{-bc} = \frac{ac}{ad} \times \frac{b-d}{-bc} \\ &= \frac{ac}{ad} \times \frac{bd}{bc} = \frac{ac}{bc} \times \frac{bd}{ad} \\ &= \frac{ac}{bc} \div \frac{ad}{bd} = R(ab, cd) \end{aligned}$$

Concluimos então que as duas definições coincidem, isto é,  $\tilde{R}(AB, CD) = R(ab, cd)$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

**Exemplo 1.7.5.** Consideremos os pontos  $A = [0 : 1 : 1]$ ,  $B = [1 : 0 : -2]$ ,  $C = [1 : 1 : -1]$  e  $D = [1 : 2 : 0]$  colineares e calculemos a razão cruzada  $(AB, CD)$ . Observe-se que estes pontos projetivos são colineares. De facto, temos

$$(1, 1, -1) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, -2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

e

$$(1, 2, -0) = \gamma(0, 1, 1) + \delta(1, 0, -2) \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$R(AB, CD) = \frac{\beta}{\alpha} \div \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{1} \div \frac{1}{2} = 2.$$

A razão cruzada  $R$  no plano euclidiano precisa de ser estendida ao caso em que um dos pontos está no infinito de forma a coincidir com a razão cruzada  $\tilde{R}$  no plano projetivo. Por exemplo, se o ponto  $A$  estiver no infinito, a razão cruzada será dada da seguinte forma

$$R(AB, CD) = \frac{BD}{BC}.$$

De forma análoga, defini-se a razão cruzada  $R$  quando algum dos outros pontos está no infinito.

**Observação 1.7.6.** A razão cruzada é um invariante para transformações projetivas. Com efeito, se  $\sigma_T$  for uma transformação projetiva, temos

$$\sigma_T(A) = [T(a)], \quad \sigma_T(B) = [T(b)]$$

e por linearidade de  $T$ ,

$$\sigma_T(C) = [\alpha T(a) + \beta T(b)], \quad \sigma_T(D) = [\gamma T(a) + \delta T(b)].$$

Logo,

$$\tilde{R}(AB, CD) = \tilde{R}(\sigma_T(A)\sigma_T(B), \sigma_T(C)\sigma_T(D)).$$

### 1.7.1 Razão cruzada para quadrângulo completo

Se a razão cruzada  $R(AB, CD)$  for  $-1$ , a divisão é chamada de *harmónica*. Isso quer dizer que  $C$  e  $D$  são pontos inversos com respeito à circunferência cujo diâmetro é  $AB$  (ver, por exemplo, [6], p. 101). Em particular, se  $C$  é ponto médio de  $AB$ , o seu inverso é o ponto no infinito. Vendo de outra forma, se tivermos

$$R(AB, CD) = -1,$$

e  $C$  for o ponto médio de  $AB$ , então

$$\frac{BD}{AD} = 1,$$

o que só faz sentido se  $D$  for um ponto no infinito ou  $A = B$ .

Consideremos então um quadrilátero completo com vértices em  $R, D, Q$  e  $C$ . Seja  $A, S, B$  e  $P$  o conjunto quadrangular correspondente.

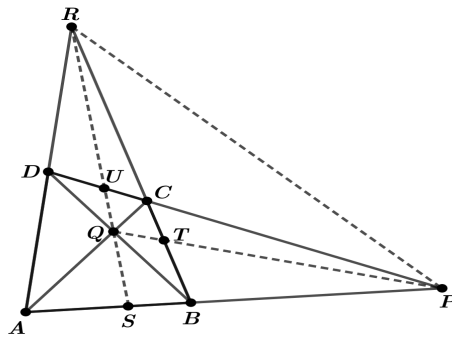


Figura 1.29: Quadrilátero completo com vértices em  $R, D, Q$  e  $C$ .

Pelo teorema fundamental do plano projetivo, podemos transformar esta figura, por meio de uma transformação projetiva, de forma a que a representação de  $A, B, C$  e  $D$  no plano da tela seja um paralelogramo.

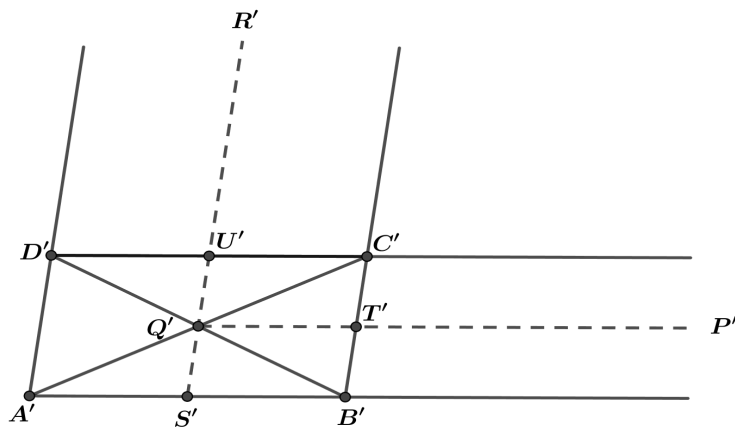


Figura 1.30: Transformação do quadrilátero em paralelogramo.



## Plano Projetivo e Construções com Régua

Dividindo ambos os membros por  $\frac{BP}{AP}$ , temos

$$R(AB, SP) = \frac{BS}{AS} \div \frac{BP}{AP} = -1.$$

## Capítulo 2

### Quádricas e Cónicas Projetivas

Nesta parte do trabalho, apresentaremos aspectos relacionados com as cónicas, como as polaridades e alguns teoremas. Apresentaremos o conceito de cónica como uma forma bilinear simétrica não degenerada em  $\mathbb{R}^3$ .

#### 2.1 Formas Quádricas

A geometria projetiva das quádricas é a versão geométrica da parte da álgebra linear que trata das formas bilineares simétricas – a generalização do produto interno de vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.1.1.** Uma *forma bilinear simétrica* num espaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$  sobre um corpo  $F$  é uma aplicação  $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow F$  tal que

1.  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  (simetria);
2.  $B(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \lambda_1 B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2 B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$  (linearidade na primeira entrada).

A forma é dita *não degenerada* se  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$  para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  implica que  $\mathbf{v} = 0$ .

**Observação 2.1.2.** Das condições 1. e 2., tiramos que também temos linearidade na segunda entrada:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2) &= B(\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) = \lambda_1 B(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}) + \lambda_2 B(\mathbf{w}_2, \mathbf{v}) \\ &= \lambda_1 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \lambda_2 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

Se tomarmos uma base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , então podemos escrever  $\mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{w} = \sum_i y_i \mathbf{v}_i$  com  $i = \{1, 2, 3\}$ , logo

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) x_i y_j.$$

Assim, a forma bilinear  $B$  é determinada exclusivamente pela matriz simétrica  $\tilde{B} = (\beta_{ij}) = (B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))$ . A forma bilinear é não degenerada se e somente se a matriz  $\tilde{B} = (\beta_{ij})$  é não singular.

O conjunto de todas as formas bilineares simétricas tem uma estrutura de espaço vetorial:

## Plano Projetivo e Construções com Régua

1.  $(B + C)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + C(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  (soma);
2.  $(\lambda B)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  (multiplicação por um escalar).

Este espaço vetorial é isomórfico ao espaço de matrizes  $3 \times 3$  simétricas, que tem dimensão 6.

Se tomarmos uma base diferente, digamos

$$\mathbf{w}_i = \sum_j P_{ji} \mathbf{v}_j,$$

então

$$B(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = B\left(\sum_k P_{ki} \mathbf{v}_k, \sum_\ell P_{\ell j} \mathbf{v}_\ell\right) = \sum_{k,\ell} P_{ki} B(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_\ell) P_{\ell j}.$$

Logo, se relativamente à base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  a forma bilinear  $B$  é representada pela matriz  $\tilde{B}$  com entradas  $\beta_{ij} = B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ , então, relativamente à nova base  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ ,  $B$  é representada pela matriz

$$\tilde{B}' = P^T \tilde{B} P,$$

com  $P = (P_{ij})$ .

Defina-se a *forma quádrica*  $Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ . Uma vez que

$$B(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + 2B(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

temos

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(Q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{w})).$$

Por conseguinte, qualquer forma quádrica determina, através desta fórmula, uma forma bilinear simétrica.

**Teorema 2.1.3.** *Seja  $B$  uma forma quádrica em  $\mathbb{R}^3$ . Então, existe uma base para a qual*

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=j}^q x_j^2,$$

com  $v = \sum_i x_i \mathbf{v}_i$  e  $p + q \leq 3$ . Se  $B$  for não degenerada, então  $p + q = 3$ .

*Demonstração.* Começamos por escrever

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Se os termos  $\beta_{ij}$  são todos nulos, a forma bilinear  $B$  também é nula, e o resultado segue trivialmente, com  $p = q = 0$ .

Suponha-se que, para os elementos diagonais,  $\beta_{ii} = 0$  para qualquer  $i = 1, 2, 3$ , mas  $\beta_{ij} \neq 0$ , para algum par  $i \neq j$ . Sem perda de generalidade,  $i = 1$  e  $j = 2$ . Neste

## Plano Projetivo e Construções com Régua

caso, fazemos a seguinte mudança de base:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3.$$

Se  $\mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{v}_i$ , então  $\mathbf{v} = \sum_i y_i \mathbf{w}_i$ , com

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad y_3 = x_3. \quad (2.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j = 2\beta_{12} x_1 x_2 + 2\beta_{13} x_1 x_3 + 2\beta_{23} x_2 x_3 \\ &= 2\beta_{12} (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2\beta_{13} (y_1 + y_2)y_3 + 2\beta_{23} (y_1 - y_2)y_3 \\ &= 2\beta_{12} y_1^2 - 2\beta_{12} y_2^2 + 2\beta_{13} (y_1 + y_2)y_3 + 2\beta_{23} (y_1 - y_2)y_3. \end{aligned}$$

Então, relativamente à nova base, temos  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} \beta'_{ij} y_i y_j$ , com  $\beta'_{11} = 2\beta_{12} \neq 0$ . Podemos então assumir, mais uma vez sem perda de generalidade, que existe um termo diagonal não nulo, por exemplo  $\beta_{11} \neq 0$ . Consideramos uma nova base  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  definida por

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\beta_{11}} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w}_2 = -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_3 = -\frac{\beta_{13}}{\beta_{11}} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3.$$

A matriz mudança de base é dada por

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} & -\frac{\beta_{13}}{\beta_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{\beta_{13}}{\beta_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que, se  $\mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{v}_i$ , então  $\mathbf{v} = \sum_i y_i \mathbf{w}_i$ , com

$$y_i = \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \beta_{i3} x_3, \quad (2.2)$$

para  $i = 1, 2, 3$ .

Por outro lado,

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix},$$

de onde concluímos que

$$\tilde{B}' = P^T \tilde{B} P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta_{12}}{\beta_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{-\beta_{13}}{\beta_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & \frac{-\beta_{12}}{\beta_{11}} & \frac{-\beta_{13}}{\beta_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\tilde{B}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_{11}} & 0 \\ 0 & \tilde{B}_1 \end{bmatrix}$$

onde  $\tilde{B}_1$  é uma matriz simétrica  $2 \times 2$ .

Podemos de seguida proceder de forma análoga de modo a diagonalizar a matriz simétrica  $\tilde{B}_1$ . Em relação a esta nova base (que denotaremos também por  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ ), se  $\mathbf{v}$  tiver coeficientes  $y_1, y_2, y_3$ , então

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m c_i y_i^2.$$

Finalmente, pomos  $\tilde{\mathbf{w}}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\sqrt{|c_i|}}$  para obtermos o resultado do teorema.  $\square$

**Exemplo 2.1.4.** Considere a seguinte forma quádrlica em  $\mathbb{R}^3$ :

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1.$$

Uma vez que os termos diagonais  $\beta_{ii}$  são todos nulos, fazemos a mudança (2.1),

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

para obter

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = y_1^2 - y_2^2 + 2x_3 y_1.$$

Ficamos assim com uma representação de  $B$  que tem termos não nulos na diagonal.

Completamos de seguida o quadrado:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (y_1 + x_3)^2 - y_2^2 - x_3^2.$$

Vemos assim que, para a mudança  $z_1 = y_1 + x_3, z_2 = y_2, z_3 = x_3$ , vamos ter

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

## 2.2 Cónicas

**Definição 2.2.1.** Uma *cónica* num plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  é o conjunto de pontos cujos vetores representativos satisfazem  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  onde  $B$  é uma forma bilinear simétrica não degenerada em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma forma bilinear simétrica. Note-se que a bilinearidade de  $B$  significa que  $B(\lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  de modo que o conjunto de pontos  $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2$  tal que  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  está bem definido. Além disso, claramente  $B$  e  $\lambda B$  definem a mesma cónica.

**Exemplo 2.2.2.** Consideremos a forma bilinear  $B$  representada pela matriz

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto dos pontos  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  para os quais  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  é a superfície de equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , que define um cone em  $\mathbb{R}^3$  com vértice na origem. A cónica correspondente é então dada por

$$\mathcal{C} = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2 : B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0\},$$

isto é, cada geratriz do cone corresponde a um ponto projetivo em  $\mathcal{C}$ .

Mais geralmente, consideremos uma cónica  $\mathcal{C}$  não vazia em  $\mathbb{P}^2$  e consideremos a interseção com o plano da tela definido por  $z = 1$ . Esta interseção, tem equação

$$\beta_{11}x^2 + 2\beta_{12}xy + \beta_{22}y^2 + 2\beta_{01}x + 2\beta_{02}y + \beta_{00} = 0.$$

Esta é a equação geral de uma *secção cónica*, a representação da cónica  $\mathcal{C}$  no plano da tela. Conforme a posição relativa do plano da tela em relação ao cone associado a  $\mathcal{C}$ , uma secção cónica pode ser uma elipse, parábola ou hipérbole.

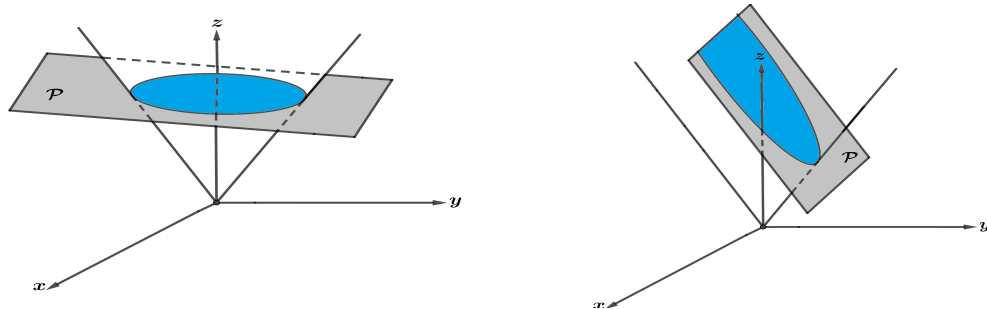


Figura 2.1: Interseção do cone com plano da tela em duas posições distintas: elipse e parábola.

**Exemplo 2.2.3.** Considere-se a cónica definida pela matriz (2.3)(em relação à base canónica) e seja  $x = 1$  o plano que intersecta o cone correspondente, que tem equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Formando um sistema de duas equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + y^2 - z^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - z^2 = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

A secção cónica é então uma hipérbole no plano  $x = 1$  com equação  $y^2 - z^2 = -1$ .

Usando a mesma cónica definida pela matriz (2.3) e fazendo o mesmo procedimento para os planos  $y = 1$  e  $z = 1$  teremos as secções cónicas  $x^2 - z^2 = -1$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , respectivamente.

## 2.3 Polaridades

Utilizámos uma forma bilinear simétrica  $B$  não degenerada em  $\mathbb{R}^3$  para definir uma cónica em  $\mathbb{P}^2$ . Essas formas também definem uma noção de ortogonalidade. De seguida, interpretamos geometricamente esta noção.

Dado um subespaço  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , podemos definir o seu *subespaço ortogonal*  $U^\perp$  por

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Note-se que, ao contrário do produto interno euclidiano,  $U$  e  $U^\perp$  podem cruzar-se de forma não trivial. Por exemplo, se  $U$  é gerado por um vetor  $\mathbf{v}$  tal que  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ , então  $\mathbf{v}$  é ortogonal a si mesmo. Mais uma vez,  $U^\perp$  não depende se consideramos  $B$  ou  $\lambda B$ , com  $\lambda \neq 0$ .

**Lema 2.1.** *Os subespaços ortogonais possuem as seguintes propriedades:*

1.  $U = (U^\perp)^\perp$
2. Se  $U_1 \subseteq U_2$ , então  $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$
3.  $\dim U^\perp + \dim U = 3$ .

**Definição 2.3.1.** Se  $X \in \mathbb{P}^2$  é representado pelo subespaço unidimensional  $U$ , então o *polar* de  $X$  é a reta projetiva  $\mathbb{P}(U^\perp) \subset \mathbb{P}^2$ .

Uma forma bilinear simétrica não degenerada  $B$  é também designada por *polaridade*. Se  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ , dizemos que  $[\mathbf{v}]$  e  $[\mathbf{w}]$  são *conjugados*. Para um determinado  $\mathbf{w}$ , o conjunto

$$\{[\mathbf{v}] : B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}$$

é uma reta projetiva designada por *reta polar* de  $[\mathbf{w}]$ . Chamamos a  $[\mathbf{w}]$  o *polo* da reta em relação a  $B$  (ver em [7], p. 34).

## Plano Projetivo e Construções com Régua

**Exemplo 2.3.2.** Seja  $\tilde{B}$  a matriz definida por (2.3), que corresponde ao cone  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Seja  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$  e  $U = [\mathbf{u}]$ . Então, temos

$$U^\perp = \{\mathbf{v} = (x, y, z) : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} : x = 0\}.$$

Logo, a reta polar de  $[\mathbf{u}]$  é dada por

$$\mathbb{P}(U^\perp) = \{[x : y : z] : x = 0\}.$$

Algumas polaridades têm pontos auto-conjugados. Neste caso, o conjunto de pontos auto-conjugados é precisamente a cónica definida por  $B$ . Outras polaridades não possuem pontos auto-conjugados. Por exemplo, tomando

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

onde  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{w} = (y_1, y_2, y_3)$ . Então,  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  se e somente se  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ , o que é equivalente a  $\mathbf{v} = 0$ . A razão pela qual  $\tilde{B}$  não possui pontos auto-conjugados se traduz no facto de nenhuma reta ser perpendicular a si mesma no espaço euclidiano.

Uma polaridade também induz uma relação entre as retas projetivas de  $\mathbb{P}^2$ . Diz-se que duas retas são *conjugadas* se o polo de uma se encontra na outra. Uma reta que passa pelo seu próprio polo é designada por *reta auto-conjugada*.

**Exemplo 2.3.3.** Seja  $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$  um vetor do *tipo luz* (isto é,  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ) em relação a  $\mathbf{B}$  dada por (2.3):  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 - 1 = 0$ . Então

$$U^\perp = \{\mathbf{v} : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} = (x, y, z) : y - z = 0\}.$$

**Teorema 2.3.4.** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos de  $\mathbb{P}^2$  com as respetivas retas polares  $p$  e  $q$ . Então,  $P$  está em  $q$  se e somente se  $Q$  estiver em  $p$ .*

*Demonstração.* Seja  $P = [\mathbf{x}]$  e  $Q = [\mathbf{y}]$ . Então,  $P$  está em  $q$  se e somente se  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Por simetria, esta é também a condição de  $Q$  para estar em  $p$ .  $\square$

**Teorema 2.3.5.** *Uma reta auto-conjugada contém um e um só ponto auto-conjugado (que é o seu polo).*

*Demonstração.* Seja  $p$  uma reta auto-conjugada e  $P = [\mathbf{x}] \in p$  o seu polo. Esta reta é o conjunto dos pontos  $[\mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$ , com  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos,

## Plano Projetivo e Construções com Régua

para algum vetor  $\mathbf{y}$  não-nulo e não colinear com  $\mathbf{x}$ . Ou seja,  $p$  é a união dos pontos  $[\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$  e  $[\mathbf{y}]$ .

Temos  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  e

$$0 = B(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \lambda B(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

para qualquer  $\lambda$ , e portanto  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Observe-se que  $[\mathbf{y}] \in p$  não pode ser auto-conjugado, uma vez que nesse caso teríamos

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \quad B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad B(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0.$$

Pelo Lema 2.1, tal só é possível se  $\mathbf{y}$  for colinear com  $\mathbf{x}$ , o que é uma contradição.

Suponha-se que  $[\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$  é outro ponto auto-conjugado (com  $\lambda \neq 0$ ), então

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) &= B(x, x) + 2\lambda B(x, y) + \lambda^2 B(y, y) \\ &= \lambda^2 B(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Logo teríamos também  $B(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ , o que já vimos ser impossível. Então  $P = [\mathbf{x}]$  é o único ponto auto-conjugado em  $p$ . □

Como consequência imediata do teorema anterior, temos o seguinte:

**Teorema 2.3.6.** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos auto-conjugados de  $\mathbb{P}^2$ . Então,  $PQ$  não pode ser uma reta auto-conjugada.*

Além disso, o recíproco do Teorema 2.3.5 é também válido:

**Teorema 2.3.7.** *Se uma reta contém exatamente um ponto auto-conjugado, então ela é uma reta auto-conjugada.*

*Demonstração.* Seja  $p$  uma reta com um único ponto auto-conjugado, digamos  $P = [\mathbf{x}]$ . Esta reta é a união dos pontos  $[\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$  e  $[\mathbf{y}]$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  e

$$B(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \lambda(2B(x, y) + \lambda B(y, y)). \quad (2.4)$$

Necessariamente, temos  $B(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \neq 0$  (se  $B(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ , então  $[\mathbf{y}] \in p$  seria outro ponto auto-conjugado), logo a expressão (2.4) anula-se quando  $\lambda = 0$  ou

$$\lambda = -2 \frac{B(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{B(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Como  $p$  contém um único ponto auto-conjugado, temos  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Além disso,

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \lambda B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

ou seja,  $p$  é a reta polar de  $P = [\mathbf{x}] \in p$ , o que significa que  $p$  é auto-conjugada. □

## Plano Projetivo e Construções com Régua

**Definição 2.3.8.** Seja  $B$  uma polaridade que define uma cónica  $\mathcal{C}$ . Uma reta que é auto-conjugada em relação a  $B$  é chamada de *tangente* à cónica  $\mathcal{C}$ . O polo desta reta é chamado de *ponto de contacto*  $P = [\mathbf{x}]$ .

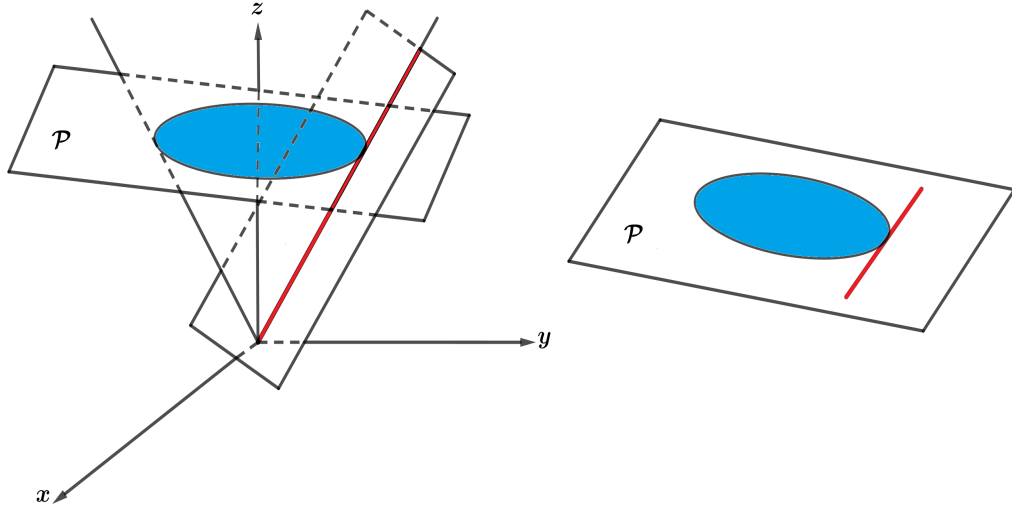


Figura 2.2: Reta auto-conjugada em relação a  $B$ .

**Teorema 2.3.9.** *Uma reta intersecta uma cónica no máximo dois pontos.*

*Demonstração.* Seja  $p$  uma reta que intersecta a cónica associada a  $B$  em dois pontos  $[\mathbf{x}]$  e  $[\mathbf{y}]$  distintos. Então  $p$  é o conjunto dos pontos da forma  $X = [\mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$ , com  $\mu$  e  $\lambda$  não simultaneamente nulos. Se  $[\mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}]$  é um ponto da cónica, então

$$0 = B(\mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = 2\lambda\mu B(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Logo  $\lambda = 0$  (caso em que  $X = [\mathbf{x}]$ ),  $\mu = 0$  (caso em que  $X = [\mathbf{y}]$ ) ou  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  (o que é impossível). Concluimos então que  $p$  tem no máximo dois pontos sobre a cónica.  $\square$

**Definição 2.3.10.** Uma reta que intersecta uma cónica em duas vezes é chamada de secante.

## 2.4 Teorema dos cinco pontos

**Teorema 2.4.1 (Teorema dos cinco pontos).** *Dados cinco pontos tais que três quaisquer destes não sejam colineares, existe uma única cónica que passa por todos eles.*

## Plano Projetivo e Construções com Régua

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  e  $\mathbf{v}_5$  pontos projetivos, sob condição de três não serem colineares. Sem perda de generalidade, podemos supor, fazendo uso de uma transformação projetiva conveniente, que esses pontos têm coordenadas homogêneas  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 0 : 1]$ ,  $[1 : 1 : 1]$  e  $[x : y : 1]$ , respectivamente. Queremos encontrar uma matriz simétrica não singular  $\tilde{B}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{bmatrix}$$

tal que  $B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 0$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Como  $\tilde{B}$  é não singular, algumas das suas entradas são não nulas. Podemos assumir que  $\gamma = 1$ .

Assim, obtemos um sistema de cinco equações, nas cinco incógnitas  $\alpha, \beta, a, b$  e  $c$ , dadas por

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha x_i^2 + \beta y_i^2 + z_i^2 + 2ax_iy_i + 2bx_iz_i + 2cy_iz_i = 0, \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

O determinante da matriz deste sistema é dado por

$$\det \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 2x_1y_1 & 2x_1z_1 & 2y_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 2x_2y_2 & 2x_2z_2 & 2y_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & 2x_3y_3 & 2x_3z_3 & 2y_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & 2x_4y_4 & 2x_4z_4 & 2y_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & 2x_5y_5 & 2x_5z_5 & 2y_5z_5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & 2xy & 2x & 2y \end{bmatrix} = 2y - 2x = 2(y - x).$$

Se  $x = y$ , então  $(x, y, 1) = x(1, 1, 1) + (1 - x)(0, 0, 1)$ , e isto significa que os pontos projetivos  $[x : y : 1]$ ,  $[1 : 1 : 1]$  e  $[0 : 0 : 1]$  são colineares, contrariamente à hipótese do teorema. Assim temos  $y \neq x$ , pelo que o sistema é possível e determinado, ou seja, existe uma única matriz nas condições pretendidas, o que equivale a dizer que existe uma única cónica a passar pelos cinco pontos.  $\square$

## 2.5 Teorema de Pascal e de Brianchon

### 2.5.1 Teorema de Pascal

Nesta secção, vamos apresentar dois resultados famosos: o Teorema de Pascal e o seu dual, o Teorema de Brianchon.

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Começamos pelo Teorema de Pascal. A demonstração apresentada é baseada no artigo de Stefanović e Milošević ([9], p. 621).

**Teorema 2.5.1 (Teorema do Hexágono de Pascal).** *Sejam  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  pontos distintos de uma cónica  $\mathcal{C}$ . Então, os pontos*

$$P = A_1A_2 \cap A_4A_5, \quad Q = A_2A_3 \cap A_5A_6, \quad R = A_3A_4 \cap A_6A_1$$

*são colineares.*

*Demonstração.* É suficiente provar que os vetores

$$\mathbf{u} = (A_1 \times A_2) \times (A_4 \times A_5), \quad \mathbf{v} = (A_2 \times A_3) \times (A_5 \times A_6), \quad \mathbf{w} = (A_3 \times A_4) \times (A_6 \times A_1)$$

são linearmente dependentes, ou seja, que o determinante de  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  é igual zero, uma vez que  $P = [\mathbf{u}]$ ,  $Q = [\mathbf{v}]$  e  $R = [\mathbf{w}]$ .

Recordando algumas propriedades do produto externo  $\times$  e do produto misto  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] := (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ , que vão nos ajudar a compreender a demonstração, temos:

1.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]$ ;
2.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$ ;
3.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ;
4.  $[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]$  (trilinearidade);
5.  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}$ .

Obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [A_1, A_4, A_5]A_2 - [A_2, A_4, A_5]A_1 \\ \mathbf{v} &= [A_2, A_3, A_6]A_5 - [A_2, A_3, A_5]A_6 \\ \mathbf{w} &= [A_3, A_6, A_1]A_4 - [A_4, A_6, A_1]A_3.\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades enunciadas, é possível ver que

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] &= [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_6][A_3, A_6, A_1][A_2, A_5, A_4] \\
 &\quad - [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_6][A_4, A_6, A_1][A_2, A_5, A_3] \\
 &\quad - [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_3, A_6, A_1][A_2, A_6, A_4] \\
 &\quad + [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_4, A_6, A_1][A_2, A_6, A_3] \\
 &\quad - [A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A_6][A_3, A_6, A_1][A_1, A_5, A_4] \\
 &\quad + [A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A_6][A_4, A_6, A_1][A_1, A_5, A_3] \\
 &\quad + [A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_3, A_6, A_1][A_1, A_6, A_4] \\
 &\quad - [A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_4, A_6, A_1][A_1, A_6, A_3].
 \end{aligned}$$

Seis dos oito termos nesta expressão se cancelam: primeiro se cancela com o quinto, o segundo com o sétimo e o quarto termo com o oitavo, apenas restando o terceiro e o sexto. A condição  $[u, v, w] = 0$  é então equivalente à igualdade

$$[A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A_6][A_4, A_6, A_1][A_1, A_5, A_3] = [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_3, A_6, A_1][A_2, A_6, A_4]. \quad (2.5)$$

Para provarmos que (2.5) vale, substituímos  $A_6$  pelo ponto geral  $A = (x, y, z)$  e teremos:

$$[A_2, A_4, A_5][A_2, A_3, A][A_4, A, A_1][A_1, A_5, A_3] = [A_1, A_4, A_5][A_2, A_3, A_5][A_3, A, A_1][A_2, A, A_4]. \quad (2.6)$$

Desta forma obtemos uma equação em  $x, y, z$  de segundo grau (no máximo), cujas soluções incluem os pontos  $A \in \{A_1, \dots, A_5\}$ . Então, a equação (2.6) pode ser reduzida para  $0 = 0$  ou é a equação de uma secção cónica  $\mathcal{C}_1$  que contém  $\{A_1, \dots, A_5\}$ . No segundo caso, pelo Teorema dos cinco pontos, temos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$  e (2.5) é uma consequência de  $A_6 \in \mathcal{C}$ .  $\square$

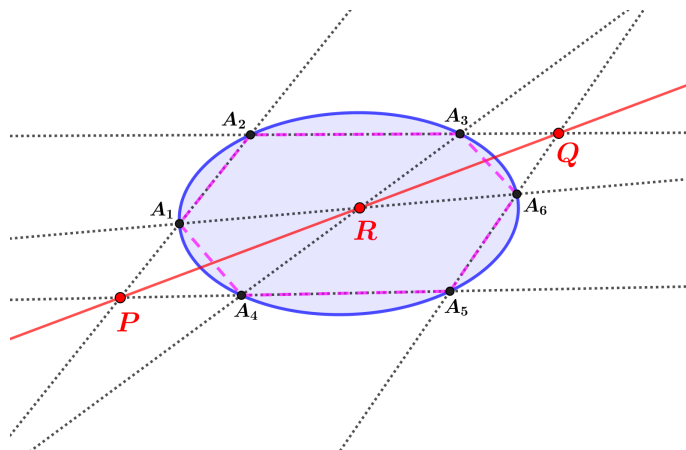


Figura 2.3: Teorema de Pascal na Elipse.

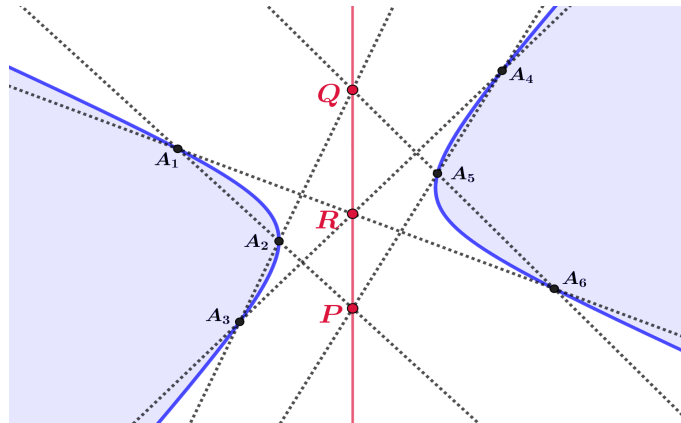


Figura 2.4: Teorema de Pascal na Hipérbole.

### 2.5.2 Teorema de Brianchon

Para o Teorema de Brianchon não será necessário a sua demonstração, pois ele é o dual do Teorema de Pascal. Já falámos neste trabalho que o princípio da dualidade é sempre válido na Geometria Projetiva. Isto implica que em todo enunciado as palavras ponto e reta podem ser trocadas com as devidas adaptações, dando origem a novos resultados.

**Teorema 2.5.2 (Teorema de Brianchon).** *Num hexágono circunscrito numa cónica não degenerada, as três diagonais são concorrentes num mesmo ponto.*

Para compreender melhor a dualização do Teorema de Pascal, começamos por um conjunto de seis pontos distintos sobre cónica  $\mathcal{C}$ . Dualizando, encontramos seis retas tangentes (as retas polares dos pontos) à cónica nos seis pontos considerados. Estas seis retas, ao intersectarem-se, dão origem a um hexágono circunscrito à cónica. Assim, a primeira parte do teorema dual trará um hexágono circunscrito a uma cónica.

Do Teorema de Pascal temos que os três pontos de intersecção dos pares de lados opostos são colineares. Dualizando, encontramos as três retas definidas pelos três pares de vértices (pontos) opostos do hexágono, que são concorrentes num ponto  $P$ , conforme ilustrado na figura 2.5.

Dos teoremas já mencionados neste capítulo (Pascal e Brianchon), deduzem-se dois teoremas que adiante vamos mencionar e que servirão de base para resolução de alguns problemas.

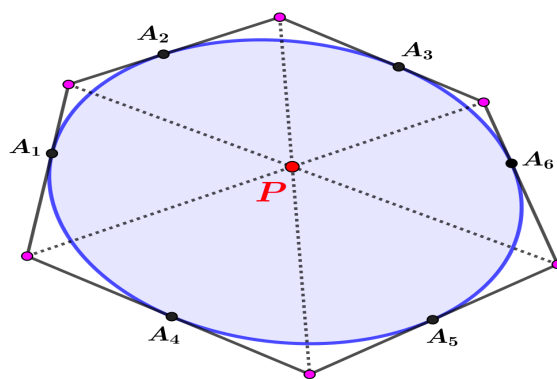


Figura 2.5: Teorema de Brianchon.

**Teorema 2.5.3 (Teorema de Maclaurin).** *Num quadrângulo inscrito numa cónica, os lados opostos e as tangentes em vértices opostos determinam pontos situados sobre a mesma reta.*

*Demonstração.* É um caso particular do Teorema de Pascal, quando, entre os seis pontos  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), temos  $A_1 = A_2$  e  $A_3 = A_4$ , por exemplo. Neste caso degenerado as retas  $A_1A_2$  e  $A_3A_4$  serão as retas tangentes à cónica nos pontos  $A_1 = A_2$  e  $A_3 = A_4$ , respetivamente.  $\square$

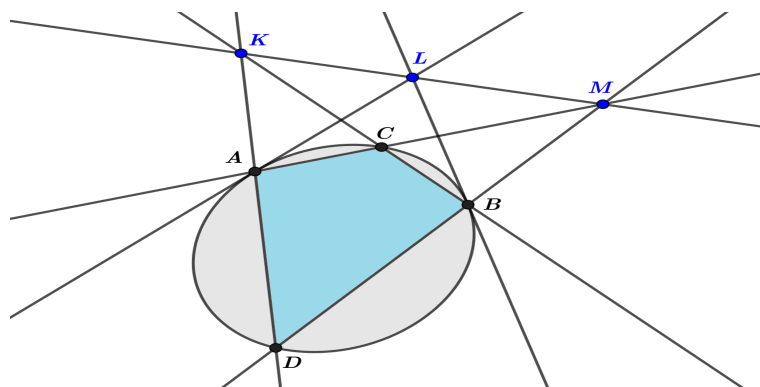


Figura 2.6: Teorema de Maclaurin.

Dualizando, obtemos o seguinte.

**Teorema 2.5.4 (Teorema dual de Maclaurin).** *Num quadrilátero circunscrito numa cónica, os vértices opostos e os pontos de contacto dos lados opostos determinam retas concorrentes num ponto.*

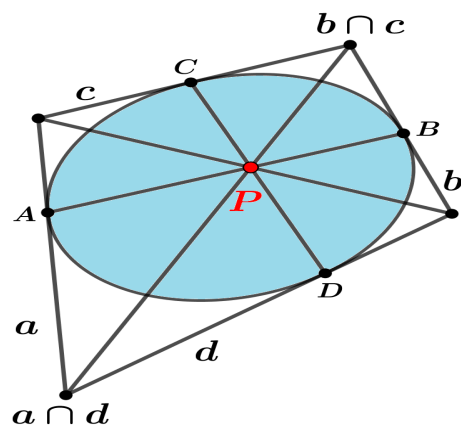


Figura 2.7: Teorema dual de Maclaurin.



## Capítulo 3

### Aplicações e Construções com Régua

Neste capítulo, reservado às aplicações e construções com régua, vamos apresentar alguns problemas resolvidos relacionados aos conteúdos que foram desenvolvidos nos capítulos anteriores.

#### 3.1 Problemas Resolvidos

**Problema 3.1.1.** Uma vala de irrigação em linha reta e estreita, leva água a partir de um tanque de armazenamento que está no meio de um campo. O dono quer escavar uma vala similar no outro lado do tanque, diametralmente oposta, mas o tanque é muito grande, o que impossibilita a visualização ao seu redor e por cima. O dono não tem equipamentos topográficos ou de levantamento, mas ouviu que você conhece algo sobre geometria e pede que o ajude a construir a vala conforme a figura seguinte.

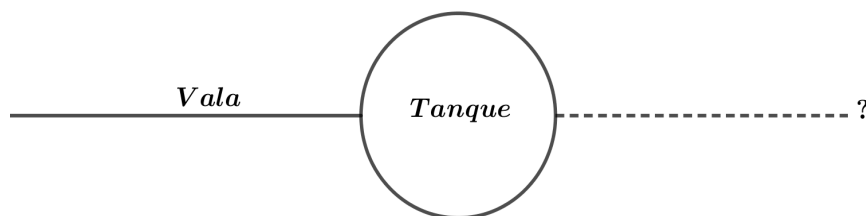


Figura 3.1: Ilustração do problema 3.1.1.

Como você o ajudaria a resolver este problema com apenas algumas estacas de marcação?

*Resolução.* Posicionar as estacas em quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  sobre a vala e selecionar dois pontos  $C$  e  $D$  localizados aproximadamente como mostra a figura 3.2. Agora, encontrar o ponto  $R$  alinhando visualmente  $AD$  e  $BC$ . Da mesma forma, encontrar o ponto  $Q$  de intersecção de  $AC$  com  $BD$ , o que, do ponto de vista prático, exige um processo de tentativa e erro até fixar os alinhamentos aproximadamente corretos. Os pontos  $Q$  e  $R$  vão permitir colocar  $S$  sobre a vala.

## Plano Projetivo e Construções com Régua

Em seguida, fixa-se uma estaca num ponto  $E$  e coloca-se  $F$  sobre a reta  $BE$ . Encontramos  $G$  como interseção das retas de visão  $AE$  e  $SF$ . O ponto  $H$  é a interseção de  $BG$  com  $AF$ . E assim, tem-se  $X$  ao prolongar  $DC$  e  $HE$  simultaneamente. O conjugado harmónico de  $S$  em relação a  $AB$  é algum ponto  $P$  na linha reta que estamos a tentar construir. Mas  $DC$  e  $HE$  passam por  $P$ . Portanto,  $P = X$ , e o problema está quase resolvido. Basta repetir todo o mesmo procedimento com novos pontos  $A, B, C$  e  $D$  para obter um segundo ponto  $Y$ , e a linha reta determinada por  $X$  e  $Y$  é a marca para a vala pretendida.

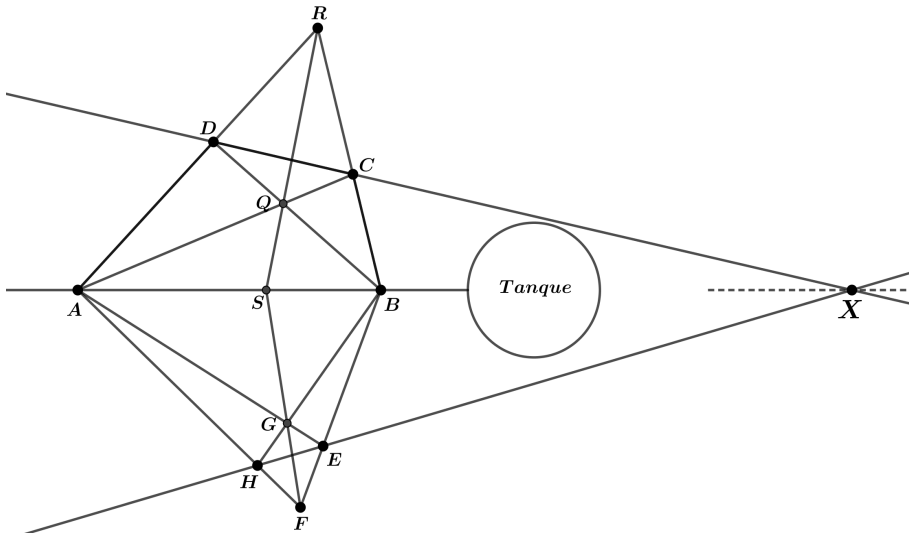


Figura 3.2: Solução do problema

□

**Problema 3.1.2.** Duas retas  $\ell$  e  $m$  estão desenhadas numa folha, mas não temos o ponto de interseção  $X$  entre elas. Dado um ponto  $P$  exterior a ambas, como traçar a reta  $XP$ , apenas com régua não graduada?

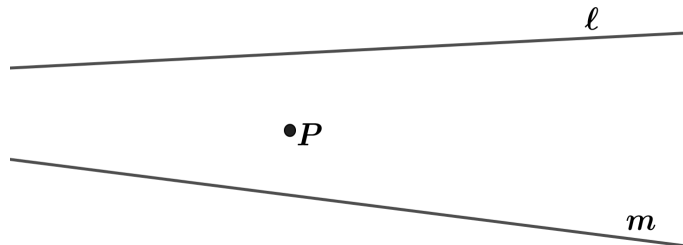


Figura 3.3: Ponto  $P$  exterior às retas  $\ell$  e  $m$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

*Resolução.* Basta seguir o seguinte procedimento:

1. Considere um triângulo  $\triangle QPR$  com  $Q \in \ell$  e  $R \in m$ ;
2. Traçar uma reta distinta  $s$  de  $\ell$  e  $m$ ;
3. Construir um segundo triângulo perspetivo com o triângulo  $\triangle QPR$  a partir da reta  $s$ ;

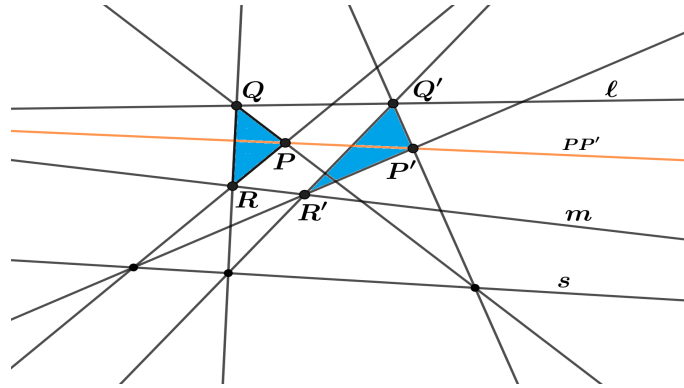


Figura 3.4: Reta por um ponto de interseção inacessível.

4. Pelo teorema de Desargues, os triângulos são também perspetivos a partir de um ponto, a reta  $PP'$  passa por  $X$ .

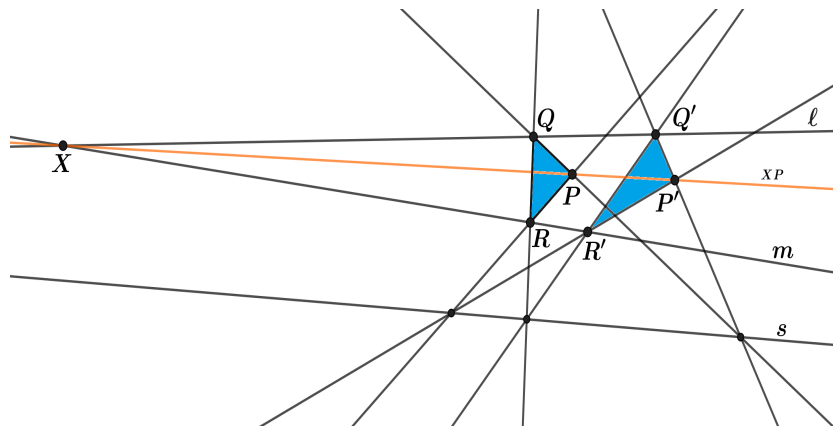


Figura 3.5: Representação da recta  $XP$ .

□

**Problema 3.1.3.** Dada uma reta  $a$  e sobre ela um segmento  $AB$  com o ponto médio  $C$ , construir, servindo-se apenas da régua, a paralela conduzida por um ponto qualquer  $P$  à reta  $a$ .

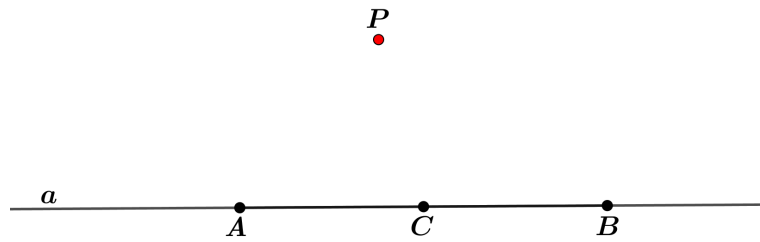


Figura 3.6: Ilustração do problema 3.1.3.

*Resolução.* Para solucionar este problema, procedemos da seguinte maneira:

1. Traçamos as retas  $AP$  e  $BP$ ;
2. Traçamos uma reta a partir de  $C$  que intersecta as retas  $AP$  e  $BP$  nos pontos  $E$  e  $D$ , respectivamente;
3. Traçar as retas  $AD$  e  $BE$  e marcar o ponto  $F$  de interseção entre ambas;
4. Por fim, traçar a reta  $PF$ , conforme a figura seguinte.

A reta  $PF$  é paralela à reta  $a$  uma vez que vai passar no harmónico conjugado  $X$  de  $C$  relativamente a  $A$  e  $B$ . O ponto  $X$  é um ponto no infinito, uma vez que o ponto  $C$  é o ponto médio de  $AB$ .

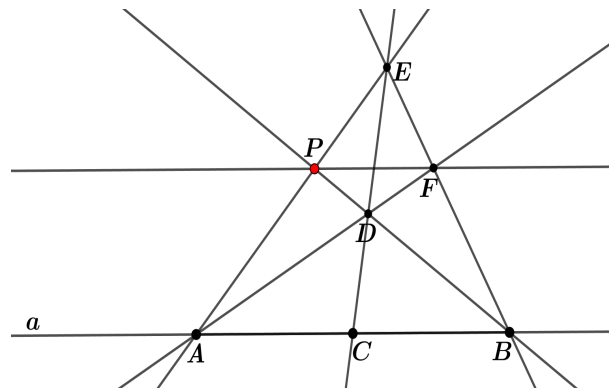


Figura 3.7: Reta paralela por um ponto dado.

□

**Problema 3.1.4.** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  e uma reta  $p$ , determinar a interseção de  $p$  com  $AB$ , sem traçar  $AB$  (podemos supor que tal é impossível devido à presença de algum obstáculo).

## Plano Projetivo e Construções com Régua

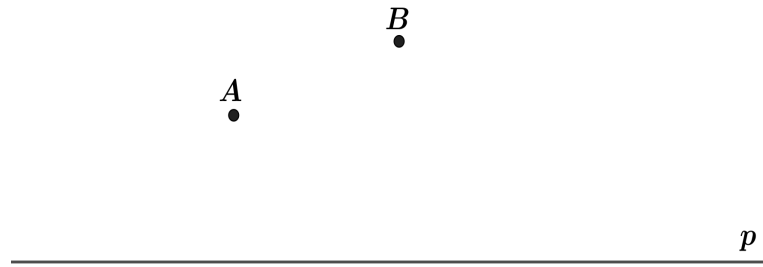


Figura 3.8: Ilustração do problema 3.1.4.

*Resolução.* Para resolver este problema, recorreremos ao conceito de quadrângulo completo, ou seja, com as condições dadas vamos construir dois quadrângulos perspectivos a partir da reta  $p$ . Assim sendo, começamos por traçar uma reta que passa por  $A$  e intersesta  $p$  num ponto  $P$ . Da mesma forma procedemos para  $B$  para marcar um ponto  $P'$  em  $p$ . Definimos  $AP \cap BP' = C$  como mostra a figura seguinte.

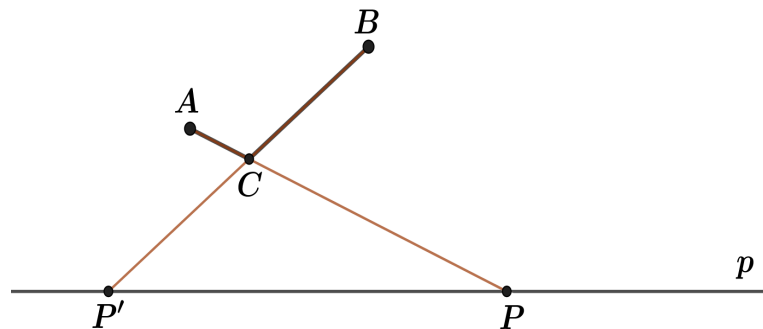


Figura 3.9:  $AP \cap BP' = C$ .

A seguir, traçamos as retas  $AP'$  e  $BP$ , que, por sua vez, intersestam-se em  $D$ . Depois, traçamos a reta  $DC$  que intersesta  $p$  em  $E$ . Neste contexto, temos um quadrângulo completo  $ABCD$  com os seus pontos diagonais  $P$ ,  $E$  e  $P'$  (figura 3.10).

A seguir, vamos construir um outro quadrângulo  $A'B'C'D'$  perspectivo a partir da reta  $p$ . Seleccionamos um ponto arbitrário  $C'$  exterior a  $p$  e traçamos as retas  $PC'$ ,  $EC'$  e  $P'C'$ . Por  $P'$ , traçamos uma reta que intersecta  $EC'$  e  $PC'$  em  $D'$  e  $A'$ ,

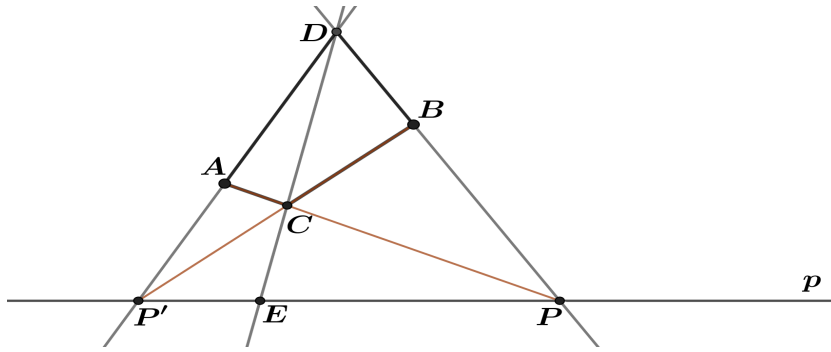


Figura 3.10: Quadrângulo completo  $ABCD$ .

respectivamente. Depois, traçamos a reta  $PD'$ , que intersecta  $P'C'$  em  $B'$ , como mostra a figura seguinte.

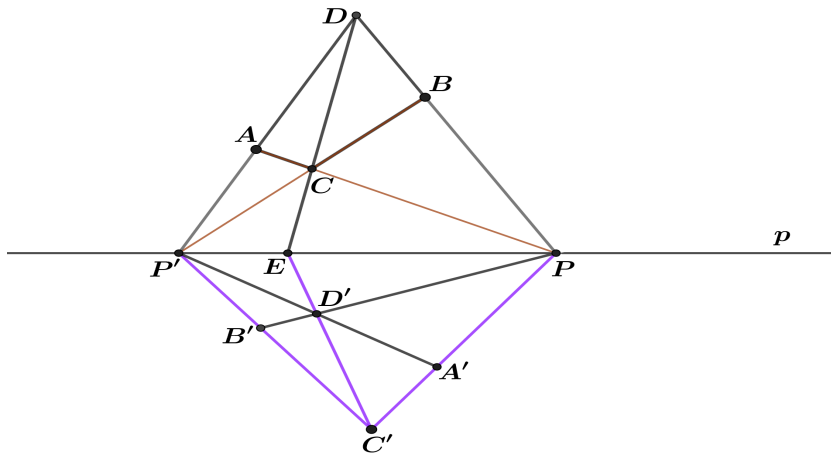


Figura 3.11: Quadrângulo completo  $A'B'C'D'$  perspetivo pela reta  $p$ .

Por fim, traçamos a reta  $A'B'$ , que vai intersectar  $p$  em  $X$ , o harmónico conjugado de  $E$  relativamente a  $P$  e  $P'$ , que por sua vez é exactamente o ponto de intersecção de  $AB$  com a reta  $p$ .

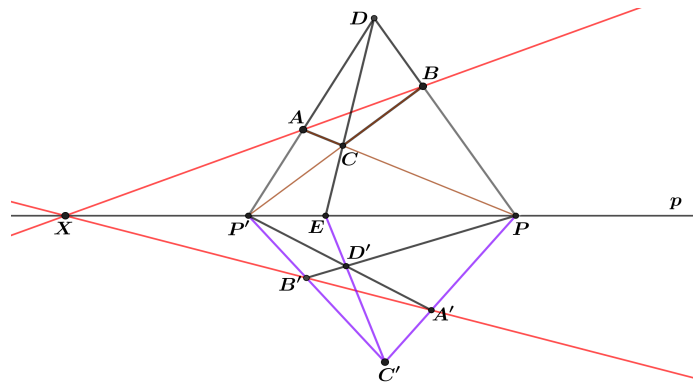


Figura 3.12: Intersecção de uma reta com outra inacessível.

□

**Problema 3.1.5.** Dada uma circunferência e o seu centro, construir apenas com régua, uma perpendicular a uma reta dada  $a$ , por um ponto dado  $S$ .

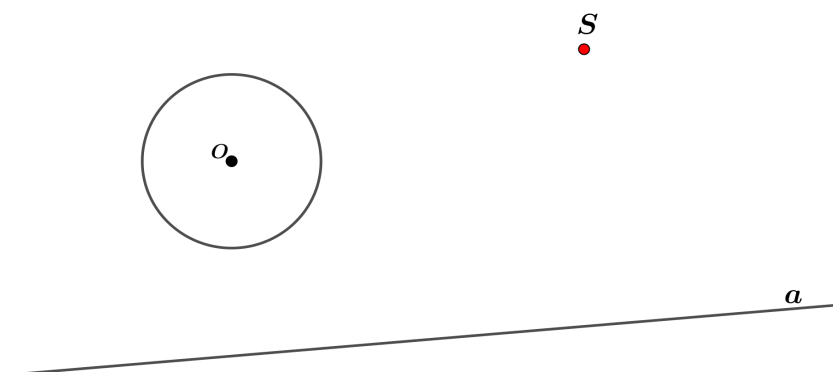


Figura 3.13: Ilustração do problema 3.1.5.

*Resolução.* Para resolver este problema, vamos ter em conta os seguintes passos:

1. Traçamos uma reta qualquer que passa pelo centro  $O$  da circunferência e marcamos os pontos  $A$  e  $B$  originados pela interseção da reta com a circunferência, como vemos na figura seguinte.

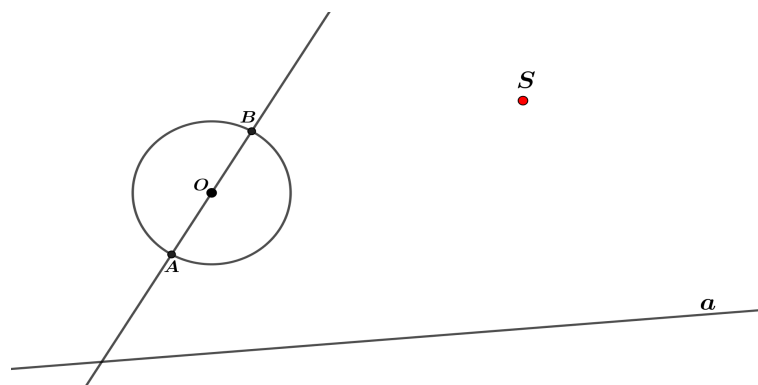


Figura 3.14: Pontos  $A$ ,  $O$  e  $B$  da circunferência.

2. Traçamos uma outra reta qualquer que passa pelo centro  $O$  da circunferência e marcamos os pontos  $C$  e  $D$  originados pela interseção da reta com a circunferência;

3. Traçamos duas paralelas a  $CD$  passando pelos pontos  $A$  e  $B$ , usando o procedimento do problema 3.1.3 (o centro  $O$  é o ponto médio de  $CD$ ), e marcamos os pontos de interseção  $P$ ,  $Q$  e  $R$  com a reta  $a$ ;

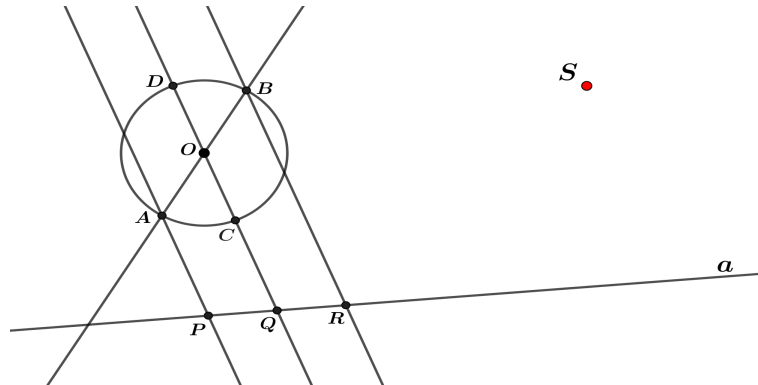


Figura 3.15: Três paralelas incidentes nos pontos  $A$ ,  $O$  e  $B$ .

4. A seguir, traçamos as retas que passam em  $C$ ,  $O$  e  $D$  paralelas à reta  $a$ , usando mais uma vez o procedimento do problema 3.1.3 (o centro  $Q$  é o ponto médio de  $PR$ ), e marcamos os pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente, originados pela interseção de ambas com a circunferência;
5. Depois, traçamos a reta  $CF$  e marcamos o ponto médio do segmento  $\overline{CF}$  originado pela interseção da reta paralela a  $a$  que passa no centro  $O$  da circunferência e por  $CF$ ;

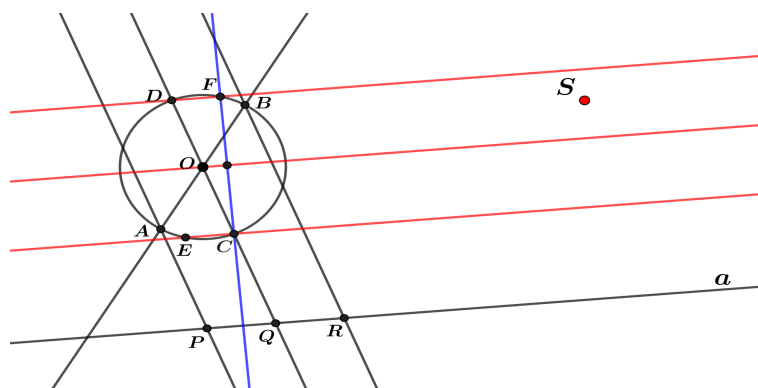


Figura 3.16: Retas que passam em  $C$  e  $D$  paralelas à reta  $a$ .

6. Por fim, usando o problema 3.1.3, traçamos a reta paralela a  $CF$  por  $S$ .

## Plano Projetivo e Construções com Régua

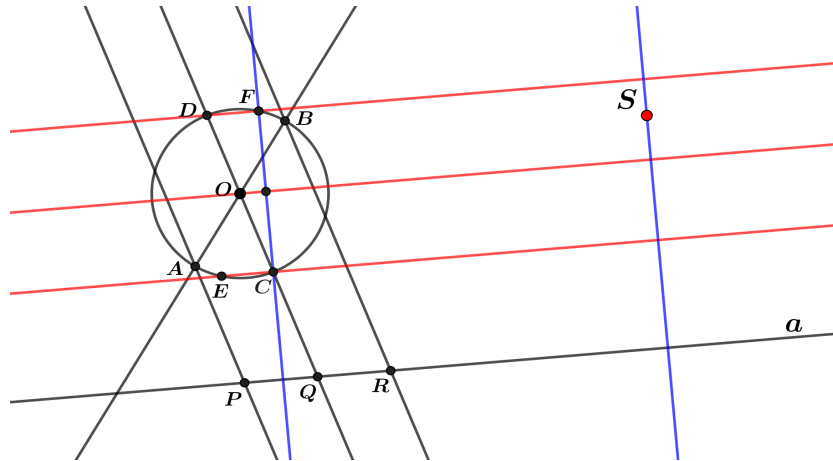


Figura 3.17: Reta  $s$  perpendicular a  $a$ .

Uma vez que  $CF$  é perpendicular a  $a$ , a reta construída é também perpendicular a  $a$ . □

**Problema 3.1.6.** Desenhar um quadrado  $RSTO$  de quatro centímetros de lado. Considerar a hipérbole que tem por assíntotas as retas  $SO$  e  $RO$  e é tangente à reta  $RS$ .

Determinar o ponto de tangência de  $RS$ .

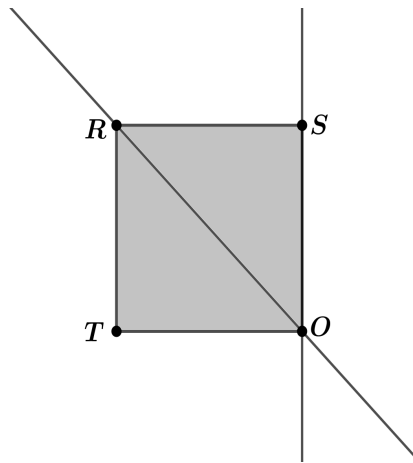


Figura 3.18: Ilustração do problema 3.1.6.

*Solução.* Primeiramente identificamos o ponto  $O$  como o centro de simetria da hipérbole e construímos outro quadrado semelhante  $OT'R'S'$  (deixamos como exercício a descrição do procedimento a seguir para traçar este quadrado só com régua não graduada). Denotamos:

$$a = RS, \quad b = R'S', \quad c = SS', \quad d = RR',$$

e comparemos com a figura 2.7.

Os pontos  $C$  e  $D$  de tangência entre  $c$  e  $d$ , respectivamente, com a hipérbole são pontos no infinito, uma vez que estas são suas assíntotas. Por outro lado, sendo  $A$  e  $B$  os pontos de tangência de  $a$  e  $b$ , respectivamente, com a hipérbole, observe-se que os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  são colineares (porque uma hipérbole é uma figura simétrica em relação ao seu centro).

O ponto  $P$  está sobre a reta no infinito  $CD$  e, pelo teorema dual de Maclaurin, a reta  $AB$  e a reta que passa por  $a \cap d$  e  $b \cap c$  intersectam a reta  $CD$  no ponto no infinito  $P$ . Isto significa que essas duas retas são paralelas. Assim, para marcar o ponto de tangência, basta traçar a reta  $p$  paralela a  $RS'$  por  $O$ : o ponto de tangência é então a interseção  $p$  com  $a$ .

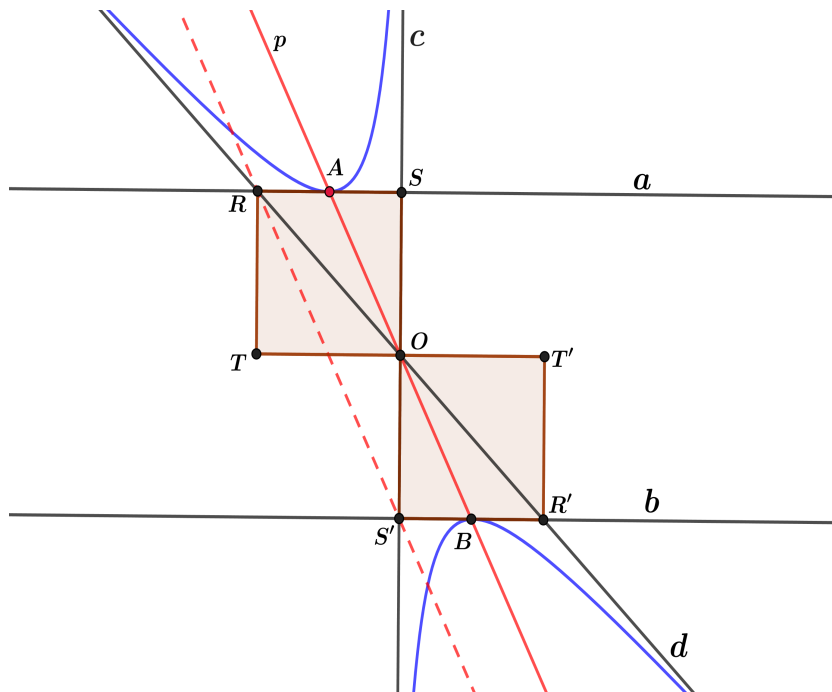


Figura 3.19: Hipérbole tangente em  $AB$  no ponto  $A$ .

□

### Considerações Finais

Depois de longa caminhada de pesquisa, fixamos algumas ideias fundamentais da geometria projetiva:

A origem da geometria projetiva, e do plano projetivo em particular, encontra-se na técnica da perspectiva desenvolvida no período do renascimento, e que consiste em representar o espaço tridimensional numa tela.

Constatou-se que para um observador situado num ponto  $O$ , duas retas paralelas entre si e que não sejam paralelas ao plano da tela nem passem por  $O$ , são representadas no plano da tela por duas retas que se intersectam num ponto. Deste modo, o plano projetivo resolve o carácter assimétrico do plano euclidiano.

Ao usarmos a terminologia “ponto” no plano projetivo é necessário ter cuidado. É importante distinguir um ponto no plano projetivo de um outro ponto no espaço ou do seu representante no plano da tela.

Em geometria projetiva, as transformações fundamentais são aquelas que preservam a incidência entre pontos e retas, isto é, as transformações projetivas.

As coordenadas homogêneas do plano projetivo permitem um tratamento analítico da geometria projetiva.

O teorema fundamental do plano projetivo é importante porque permite transformar certas configurações gerais em outras mais simples de trabalhar. Por exemplo, dados quatro pontos em posição geral, existe uma transformação projetiva que os leva para o quadrângulo de referência. Tal permitiu-nos provar vários teoremas.

Neste trabalho, o teorema de Desargues foi demonstrado de duas maneiras, uma através do método de escolha de vetores representativos de  $\mathbb{P}^2$  e a outra pelo uso de coordenadas homogêneas e uma transformação projetiva adequada, esta última, também usou-se para a demonstração do teorema de Pappus.

A partir dos teoremas de Desargues e Pappus, deduziram-se diferentes resultados para o plano euclidiano. O que significa que, geralmente, qualquer resultado válido para o plano projetivo dá origem a vários resultados para o plano euclidiano, bastando para tal variar a posição do plano da tela.

Constatou-se que o princípio da dualidade é importante na medida em que, quando aplicado aos teoremas da geometria projetiva, economiza demonstrações e possibilita o acesso a novos resultados.

Relacionou-se a razão cruzada de quatro pontos no plano euclidiano com a razão cruzada no plano projetivo. Constatou-se que a razão cruzada de quatro pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  colineares é invariante para transformações projetivas.

A Álgebra Linear desempenha um papel fundamental na geometria projetiva: por exemplo, as transformações projetivas são representadas por transformações lineares

## Plano Projetivo e Construções com Régua

em  $\mathbb{R}^3$ ; as cónicas são representadas por matrizes simétricas  $3 \times 3$ .

No capítulo que referencia aplicações e construções com régua, resolveu-se vários problemas relacionados aos teoremas enunciados e demonstrados ao longo do trabalho.

Como projeto futuro, pretendemos elaborar uma proposta de aplicação dos resultados principais no plano projetivo para o ensino pré-universitário. No entanto, existe grande potencial de aplicabilidade no quadro das construções com régua não graduada: por exemplo, nas construções que têm por base o teorema de Desargues e as suas versões euclidianas.

## Bibliografia

- [1] Barros, A. A., & Andrade P. F. A. (2010). *Introdução à Geometria Projetiva*. Rio de Janeiro: SBM. Disponível em <https://www.passeidireto.com/arquivo/5802568/introducao-a-geometria-projetiva---placido-e-abdenago>. 2
- [2] Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Toronto and New York: The Mathematical Association of America. Obtido em 2018 de [http://www.aproged.pt/biblioteca/geometryrevisited\\_coxetergreitzer.pdf](http://www.aproged.pt/biblioteca/geometryrevisited_coxetergreitzer.pdf). 2, 24
- [3] 2, 30
- Coxeter, H. S. M. (1974). *Projective Geometry*. New York: Springer Verlag.
- [4] Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: Marvin Jay Greenberg. 2, 32
- [5] Hitchin, N. (2003). *Projective Geometry*. Obtido em 2018 de <https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/hitchinnotes.html>. 2, 11
- [6] Ogilvy, C. S. (1969). *Excursions in Geometry*. New York: Oxford University Press. 2, 39
- [7] Ryan, J. P. (1999). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. An Analytic Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Souza, J. R. De.(Sem Ano). *Elementos de Geometria Projectiva*. Porto: Porto Editora. 2, 48
- [9] Stefanović, N., & Milošević, M. (2010). A very simple proof of Pascal's hexagon theorem and some applications. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 120(5), 619-629. 2