

**Genericidade L^p de espectro trivial em sistemas diferenciais lineares
cinéticos**

Dinis Ventura Gonçalves Amaro

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática e Aplicações
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Mário Júlio Pereira Bessa da Costa

Co-orientador: Prof. Doutor Helder Soares Vilarinho

Júri:

Prof. Doutor Mário Júlio Pereira Bessa da Costa

Prof. Doutor João Carlos Martinho Lopes Dias

Prof. Doutor Maria Joana Costa Cruz Oliveira Torres

Prof. Doutor Miguel Ângelo de Sousa Mendes

Prof. Doutor Gastão Henrique Gonçalves Bettencourt

13 de Setembro 2021

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus queridos pais "Amaro e Maria Rosa", que muito cedo faleceram, sem que tivessem usufruído o suficiente do seu amor paternal, os seus sacrifícios e ensinamentos estão presentes na minha mente.

Agradecimentos

A Deus pai todo-poderoso que nunca me abandonou nos momentos mais felizes e difíceis da minha vida;

Aos meus orientadores Professor Doutor Mário Bessa e o Professor Doutor Helder Vilarinho, pela orientação científica e disponibilidade que manifestaram, ao longo deste trabalho;

Aos meus pais Amaro e Maria Rosa, pelo constante incentivo ao estudo e por me conduzirem até à escola, onde fiquei a saber que era possível aprender a contar, a ler e a escrever;

À minha esposa Cândida e aos meus filhos Josué e Rafael que me encorajaram nos momentos de maior solidão;

Aos meus irmãos, cunhados, sobrinhos, amigos e colegas que incondicionalmente me ouviram, criticaram, sugeriram e acarinharam, desde o início deste trabalho.

Resumo

Dado um fluxo ergódico $\varphi^t: M \rightarrow M$ definido numa variedade M fechada, estudamos a família de equações diferenciais homogêneas lineares de segunda ordem

$$\ddot{x} + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x} + \beta(\varphi^t(\omega))x = 0,$$

onde os parâmetros α, β evoluem ao longo da órbita de $\omega \in M$ pelo fluxo φ^t . Demonstramos que, para uma escolha genérica dos parâmetros α e β , em que *genérica* significa segunda categoria de Baire em relação a uma topologia semelhante a L^p , o espectro de Lyapunov é trivial. Além disso, neste contexto obtemos a densidade de espectro de Lyapunov simples.

Palavras-chave

Cociclos Lineares; Sistemas Diferenciais Lineares; Teorema Ergódico Multiplicativo; Expoentes de Lyapunov.

Abstract

Given an ergodic flow $\varphi^t : M \rightarrow M$ defined on a closed manifold M we study the family of second order linear homogeneous differential equations

$$\ddot{x} + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x} + \beta(\varphi^t(\omega))x = 0$$

where the parameters α, β evolve along the φ^t -orbit of $\omega \in M$. We prove that for a generic choice of parameters α and β , where generic means a Baire second category with respect to an L^p -like topology, the Lyapunov spectrum is trivial. Moreover, we also obtain the denseness of simple Lyapunov spectrum in this context.

Keywords

Linear cocycles; Linear differential systems; Multiplicative ergodic theorem; Lyapunov exponents.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. Motivação	6
2.1. Sistemas diferenciais lineares de segunda ordem autônomos	6
2.1.1. Valores próprios reais	13
2.1.2. Valores próprios complexos	15
2.1.3. Pêndulo simples amortecido	18
2.2. Sistemas diferenciais lineares de segunda ordem não-autônomos	20
Capítulo 3. Sistemas diferenciais lineares cinéticos	25
3.1. Ciclos lineares	25
3.2. Expoentes de Lyapunov e teorema de Oseledets	30
3.3. Topologia	31
Capítulo 4. Prevalência do espectro trivial	35
4.1. Mistura de direções de Oseledets	38
4.1.1. Perturbações cinéticas	38
4.1.2. Fluxos especiais	39
4.1.3. Misturando direções de Oseledets	40
4.2. Semi-continuidade superior para o principal expoente de Lyapunov	46
4.3. Genericidade do espectro trivial	51

Capítulo 5. Densidade do espectro simples	54
5.1. Simplicidade do espectro de Lyapunov	54
5.1.1. A demanda por expoentes de Lyapunov positivos	54
5.1.2. Resultado principal e ideia da prova	55
5.2. Perturbações cinéticas	57
5.3. O espectro simples é denso	60
Bibliografia	67

Lista de Figuras

2.1 Valores próprios reais distintos.	14
2.2 Valores próprios reais distintos com um deles igual a zero ou ambos iguais a zero.	14
2.3 Nós impróprios.	15
2.4 Nós singulares.	15
2.5 Centros ($a = 0$).	16
2.6 Focos estáveis ($a < 0$).	16
2.7 Focos instáveis ($a > 0$).	16
2.8 Retrato de fase para o problema de valor inicial.	17
2.9 Retrato de fase para $\alpha(t) = \ln(t)$, $t > 0$ e $\beta(t) = \exp(t)$.	22
2.10 Retrato de fase para $\alpha(t) = \ln(t^2 - 1)$, $-1 < t < 1$ e $\beta(t) = \cos(t^2 - 1)$.	22
2.11 Retrato de fase para $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = \exp(t)$.	23
2.12 Retrato de fase para $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = -\exp(t)$.	23
2.13 Retrato de fase para $\alpha(t) = \exp(t)$, $\beta(t) = 0$.	24

CAPÍTULO 1

Introdução

Os fenómenos físicos na natureza são tão antigos quanto a própria natureza. Físicos e matemáticos observaram que muitos desses fenómenos poderiam ser descritos em termos de equações matemáticas, como por exemplo *o movimento harmónico simples* que serve como inspiração para este trabalho. A visão dinâmica destes fenómenos pretende entender a sua evolução e estabilidade ao longo do tempo. Como exemplo, uma questão fundamental para a humanidade é saber se o sistema solar é ou não estável. Este estudo dos sistemas dinâmicos é relativamente recente e teve como pioneiros Poincaré e Lyapunov no final do século XIX. Eles apresentaram uma abordagem substancialmente diferente da clássica abordagem analítica de como estudar as equações diferenciais, um método conhecido hoje como a *teoria qualitativa das equações diferenciais*.

De facto, era sabido desde a primeira metade do século XIX, nomeadamente pela Teoria de Liouville, que existem restrições sérias quando tentamos aplicar métodos analíticos para integrar a maioria das funções (ver e.g. [40]). Esses resultados podem ser visto como uma espécie de *Teoria Diferencial de Galois* e representam um obstáculo profundo na solução explícita de equações diferenciais. Temos essencialmente duas formas para contornar esse facto inevitável: por um lado, foram desenvolvidos poderosos métodos numéricos para aproximar as soluções e, por outro lado, como foi já observado, emergiu uma teoria qualitativa de equações diferenciais dos trabalhos seminais de Poincaré e Lyapunov. Estaremos interessados em seguir esta última abordagem fazendo uso da teoria dos *expoentes de Lyapunov*, que são uma das principais ferramentas usadas para estudar a estabilidade da solução de uma equação diferencial. Esta teoria surgiu na tese de doutoramento de Lyapunov em 1892, onde ele apresentou pela primeira vez a definição formal de estabilidade (e instabilidade) que, em suma, diz que uma dada trajetória é estável se, para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir um $\delta > 0$ tal que todas as outras trajetórias começando em uma

vizinhança δ dada permanecem no máximo a uma distância ε . Ele também introduziu a chamada estabilidade assintótica, embora sem usar esse termo, para se referir a casos em que perturbações suficientemente pequenas acabam por não causar impacto no comportamento assintótico. Além disso, para a estabilidade das soluções, ele apresentou dois métodos: o primeiro método lida com o estudo perturbativo das soluções, introduzindo o *número característico* λ , que hoje é chamado de *expoente de Lyapunov*; o segundo método, ou método direto, diz respeito à estabilidade de uma solução usando o que hoje é chamada como *função de Lyapunov*.

Com o estudo realizado nesta Tese pretendemos compreender o comportamento assintótico das soluções de uma família de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, com coeficientes de regularidade variando no tempo e admitindo perturbações. Concretamente, pretendemos descrever o seu espectro de Lyapunov sob condições genéricas desses mesmos coeficientes de regularidade. Serão consideradas famílias deste tipo de equações indexadas num fluxo que deixa invariante a medida de volume em uma variedade M compacta, conexa e sem bordo. Mais especificamente, assumiremos que a medida volume é ergódica para esse fluxo. Tivemos como motivação em primeira instância uma família de equações diferenciais de segunda ordem que descrevem o movimento do pêndulo simples amortecido livre de forças externas, do tipo

$$\ddot{x}(t) + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x}(t) + \beta(\varphi^t(\omega))x(t) = 0, \quad (1.0.1)$$

onde α e β são funções dependendo de $\omega \in M$ evoluindo ao longo de um fluxo $\varphi^t: M \rightarrow M$, com $t \in \mathbb{R}$. Claramente, se α e β são primeiras integrais relacionadas com φ^t (isto é, constantes ao longo das órbitas φ^t) a equação (1.0.1) é facilmente resolvida por métodos elementares de um primeiro curso sobre equações diferenciais. Quando os parâmetros variam no tempo é difícil obter soluções explícitas. Este é o caso quando a *força de atrito* α e a *frequência do oscilador* β variam com o tempo.

As equações diferenciais do tipo (1.0.1) estão presentes em imensos contextos, como a física do estado sólido, a estabilidade estrutural, a propagação de onda em uma dimensão, a estabilidade de máquinas elétricas síncronas, a astronomia, a dinâmica de fluídos, a teoria de controle, a física de laser e reações químicas, entre outras. Recentemente surgem também em áreas como a biologia e sociologia.

De facto, certos processos podem ser monitorizados por sinais elétricos nas células neurais e na dinâmica populacional.

Arnold, Papanicolaou e Wihstutz, em [8], estudaram a estabilidade de um oscilador aleatório e, com uma abordagem um pouco diferente, em [29] os autores dedicaram o seu estudo ao problema da estabilidade quase certa do oscilador harmónico aleatório com um coeficiente impulsivo. Em [13] é tratado um caso similar ao estudado nesta tese, mas com coeficientes ao longo de órbitas periódicas fechadas e foi demonstrado que pequenas perturbações C^0 nos parâmetros permitem concluir que soluções instáveis são precisamente as selas uniformemente hiperbólicas.

No presente trabalho pretendemos desenvolver uma teoria perturbativa com uma topologia mais grosseira, ou seja, permitindo perturbações nos coeficientes α e β numa topologia do tipo L^p em parâmetros evoluindo ao longo de órbitas não periódicas.

Fixando a *posição e momento* $(x(0), \dot{x}(0))$ pretendemos estudar o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$ do par ordenado $(x(t), \dot{x}(t))$ através de uma taxa de crescimento exponencial assintótica dada pelo expoente *Lyapunov*. A literatura sobre o assunto com nuances mais ou menos semelhantes é extensa (ver [7, 6, 34, 29, 13] e as referências nele contidas).

O ponto de vista L^p sobre sistemas diferenciais lineares mais gerais foi estudado em [15], depois de Arnold-Cong [5] e Arbieto-Bochi [2]. Em [15] foi provado, em primeiro lugar, que a classe de sistemas diferenciais lineares *acessíveis* (também denominado por *twisting* na literatura), uma classe ampla que inclui os cociclos que evoluem em $GL(d, \mathbb{R})$, $SL(d, \mathbb{R})$ e $Sp(d, \mathbb{R})$, têm um espectro de Lyapunov trivial para um L^p -genérico de escolhas. Ao considerarmos a norma C^0 no espaço de equações diferenciais com coeficientes constantes equipadas com esta topologia é sabido, desde o trabalho de Millionshchikov no final dos anos 60, que o comportamento genérico muda (ver [36]). Um tratamento completo no caso C^0 foi feito em [12, 13] após a abordagem em tempo discreto feita em [16, 17]. A questão de saber o comportamento assintótico C^0 -genérico de sistemas diferenciais lineares oriundos de equações como (1.0.1) é muito interessante e objeto de trabalho futuro.

Quando pretendermos alterar todos os expoentes de Lyapunov de modo a que se tornem iguais (busca de espectro trivial), a ideia *naïve* é distribuir as taxas de

expansão/contração igualmente por todas as direções. Isso pode ser feito rodando as direções de Oseledets de uma maneira conveniente para que, no final, essas taxas estejam igualmente distribuídas. De facto, rodar de maneira sistemática é uma ideia crucial que foi desenvolvida em certos contextos da literatura soviética dos anos 1970 (ver [38]). A principal dificuldade quando se lida com sistemas diferenciais lineares oriundos de equações do tipo (1.0.1) é que rotações no sentido estrito não são geralmente admissíveis. Portanto, uma vez que a família de fluxos que iremos usar é muito mais rígida do que as que evoluem em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ como em [15], deverá ser considerada uma nova abordagem perturbativa. Isto é de alguma forma semelhante ao que foi considerado quando a *uniformidade da hiperbolicidade* foi relaxada para *decomposição dominada*, onde o foco principal é a ação no espaço projetivo. A novidade é a estrutura perturbativa que nos permite inserir um efeito rotacional no espaço projetivo.

Desta forma, um dos principais resultados desta tese (Teorema 4.2) pode ser resumido da seguinte maneira:

Para uma escolha genérica L^p nos coeficientes α, β em (1.0.1) e para quase todas as equações diferenciais que consideramos, é completamente irrelevante a posição e momento $(x(0), \dot{x}(0))$ que escolhemos como condições iniciais, uma vez que o comportamento exponencial assintótico das suas soluções é indistinguível.

Uma questão que se levanta de imediato é saber se esta escolha genérica dos parâmetros pode ser generalizada para uma escolha num aberto e denso. Usando argumentos perturbativos inspirados na prova do Teorema 4.2, juntamente com novas perturbações de uma natureza totalmente distinta, conseguimos responder negativamente a esta questão, provando um resultado (Teorema 5.1) que poderia ser enunciado de um modo geral como:

Para uma escolha L^p densa nos coeficientes α, β em (1.0.1) e para quase todas as equações diferenciais que consideramos, é completamente irrelevante a posição e momento $(x(0), \dot{x}(0))$ que escolhemos como condições iniciais, uma vez que o comportamento exponencial

assintótico das soluções é sempre dominado por dois comportamentos distintos.

Essa tese está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos o estudo dos sistemas diferenciais lineares de segunda ordem autônomos e não-autônomos, de modo a motivar o caro leitor. No Capítulo 3 apresentamos algumas definições fundamentais para compreensão das temáticas abordadas nesta tese. No Capítulo 4 tratamos da prevalência do espectro trivial, onde na Secção §4.1 desenvolvemos a perturbação e construímos fluxos especiais. Na Secção §4.2 apresentamos a semi-continuidade superior para o principal expoente de Lyapunov e, por último na Secção §4.3 demonstramos a genericidade do espectro trivial. No Capítulo 5 tratamos da densidade do espectro simples.

CAPÍTULO 2

Motivação

2.1. Sistemas diferenciais lineares de segunda ordem autónomos

Uma *equação diferencial linear de segunda ordem* tem a forma

$$m(t)\ddot{x}(t) + \alpha(t)\dot{x}(t) + \beta(t)x(t) = \gamma(t),$$

onde m , α , β e γ são funções reais contínuas e $t \in \mathbb{R}$. Equações desse tipo descrevem vários fenómenos que correm na natureza, como por exemplo o movimento de uma mola ou de pequenas oscilações do pêndulo amortecido.

Nesta secção estudamos o caso onde $\gamma(t) = 0$ e este tipo de equação designamos por *equações diferenciais lineares homogéneas de segunda ordem*. Assim, uma equação deste tipo é escrita da seguinte forma,

$$m(t)\ddot{x}(t) + \alpha(t)\dot{x}(t) + \beta(t)x(t) = 0. \quad (2.1.1)$$

Em geral não é fácil calcular as soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem mesmo com os métodos já conhecidos, mas torna-se mais fácil se α e β forem funções constantes e, sem perda de generalidade considerarmos $m = 1$, resultando em

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0. \quad (2.1.2)$$

A equação (2.1.2), fazendo $y = \dot{x}$, pode ser reescrita como um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y \end{cases}. \quad (2.1.3)$$

Qualquer equação diferencial homogénea de segunda ordem do tipo (2.1.2) pode ser escrita de maneira semelhante a (2.1.3). Deste modo, a equação (2.1.2) pode ser

escrita na forma matricial como:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X = AX, \quad (2.1.4)$$

onde $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})^T$ é um vector de \mathbb{R}^2 ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

é uma matriz 2×2 e

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = (x(t), \dot{x}(t))^T.$$

A equação (2.1.4) é uma equação diferencial linear em que a matriz A não varia com a variável independente tempo t . Designamos este tipo de equação diferencial linear por *autónoma*. Caso contrário a equação diz-se *não-autónoma*. Pela natureza do problema, privilegiaremos o espaço \mathbb{R}^2 como espaço de fase, ainda que muitos dos conceitos que são aqui tratados podem ser facilmente generalizados.

DEFINIÇÃO 2.1. Dado $X_0 \in \mathbb{R}^2$ o problema do valor inicial

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

consiste em determinar uma solução $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da equação (2.1.4) tal que $X(0) = X_0$. A condição $X(0) = X_0$ é chamada de condição inicial do problema (2.1.6).

PROPOSIÇÃO 2.1. Consideremos um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então para $X_0 \in \mathbb{R}^2$ dado, o problema de valor inicial da equação diferencial (2.1.4) com a condição inicial $X(0) = X_0$ admite uma única solução dada por

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad (2.1.7)$$

que satisfaz

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s, X_0) ds,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $X(t) = e^{tA}X_0$, então

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}e^{tA}X_0 = Ae^{tA}X_0 = AX(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $e^{At}X_0$ é uma solução da equação diferencial. Além disso, $X(0) = IdX_0 = X_0$, onde Id é a matriz identidade. Assim $X(t) = e^{At}X_0$ é uma solução do problema do valor inicial. Para ver que essa é a única solução, seja $X(t)$ qualquer solução do problema do valor inicial e defina-se

$$Y(t) = e^{-At}X(t).$$

De facto, como $X(t)$ é uma solução do problema do valor inicial ,

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -Ae^{-At}X(t) + e^{-At}\dot{X}(t) \\ &= -Ae^{-At}X(t) + Ae^{-At}X(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$ uma vez que e^{-At} e A comutam. Assim, $Y(t)$ é constante. Para $t = 0$ temos que $Y(0) = X_0$ e, portanto, qualquer solução do problema do valor inicial de (2.1.4) é dada por $X(t) = e^{At}Y(t) = e^{At}X_0$. \square

A matriz e^{tA} é a *matriz fundamental* da equação diferencial (2.1.4). Portanto, as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes podem resolver-se com o auxílio da álgebra linear, em termos de funções elementares.

A interpretação geométrica das soluções da equação diferencial (2.1.4), oferece um conjunto de conhecimentos gerais e profundos das características qualitativas das mesmas. A equação (2.1.4) define um campo vetorial $X \rightarrow (X, \dot{X})$ em \mathbb{R}^2 associado à equação diferencial (2.1.4). Aqui a primeira componente da função é o ponto inicial e a segunda componente é o vetor neste ponto inicial. Uma solução $(t, X_0) \rightarrow X(t)$, ou seja, (2.1.7) de (2.1.4) possui a propriedade que o seu vetor tangente em cada tempo t é dado por

$$(X(t), \dot{X}(t)) = (X(t), AX(t)),$$

em outras palavras, se $X \in \mathbb{R}^2$ estiver na órbita desta solução, então a linha tangente para a órbita em X é gerada pelo vetor (X, AX) , (ver [20]).

DEFINIÇÃO 2.2. *Definimos por retrato de fase ao conjunto das órbitas da equação (2.1.4) contínuas em $t \in \mathbb{R}$, com a indicação do sentido do movimento.*

DEFINIÇÃO 2.3. Um vetor não nulo v diz-se vetor próprio de uma matriz A se

$$Av = \lambda v \quad (2.1.8)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e a λ chamamos valor próprio da matriz A .

TEOREMA 2.1. Se v é um vetor próprio da matriz A com um valor próprio associado λ , então $X(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução do sistema $\dot{X} = AX$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam dados A , v e λ , tais que

$$Av = \lambda v.$$

Então,

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}v = A(e^{\lambda t}v) = AX(t).$$

□

Podemos reescrever a equação (2.1.8) na forma

$$(A - \lambda Id)v = 0, \quad (2.1.9)$$

onde $A - \lambda Id$ é uma matriz 2×2 com entradas envolvendo a variável λ , Id representa a *matriz identidade* e zero denota o vetor nulo $(0, 0)$. O sistema de equações (2.1.9) tem soluções não nulas, se e somente se $\det(A - \lambda Id) = 0$. Esta equação é uma equação do segundo grau em λ , cujas raízes são fáceis de serem determinadas.

À equação $\det(A - \lambda Id) = 0$ de λ , chamamos *equação característica* e a $\det(A - \lambda Id)$ de *polinómio característico*. Assim, ao determinarmos as raízes da equação característica obtemos os correspondentes valores próprios e estes, por sua vez, geram os vetores próprios associado a cada um deles.

Ao considerarmos a matriz (2.1.5)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

temos

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\beta & -\alpha - \lambda \end{pmatrix}.$$

Então a equação característica é dada por

$$\det(A - \lambda Id) = -\lambda(-\alpha - \lambda) - (-\beta) = 0.$$

Simplificando, obtemos

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0. \quad (2.1.10)$$

O *determinante* da matriz A é $\det A = \beta$, o *traço* da matriz A é dado por

$$\text{Tr}A = 0 + (-\alpha) = -\alpha$$

e definimos o *discriminante* como:

$$\Delta = (\text{Tr}A)^2 - 4 \det A,$$

ou seja,

$$\Delta = \alpha^2 - 4\beta.$$

Assim, os valores próprios que satisfazem a equação (2.1.10), são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr}A \pm \sqrt{(\text{Tr}A)^2 - 4 \det A})$$

ou seja,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\alpha \pm \sqrt{\Delta}).$$

Uma vez determinados os valores próprios, podemos resolver a equação (2.1.9), isto é

$$(A - \lambda Id) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para determinarmos os vetores próprios associados.

Voltemos agora ao caso geral, onde a matriz $A_{2 \times 2}$ é qualquer.

DEFINIÇÃO 2.4. *Uma função $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(t, X) \rightarrow \Phi(t, X)$ chamamos de fluxo se $\Phi(0, X) = Id$ e $\Phi(t + s, X) = \Phi(t, \Phi(s, X))$ sempre que ambos os lados da equação são definidos.*

O fluxo associado à solução da equação diferencial linear (2.1.4) com a condição inicial $X(0) = X_0$ é $\Phi(t, X_0) = \Phi_A(t) = e^{At}X_0$.

TEOREMA 2.2. *Se A tem um par de valores próprios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ associados aos vetores próprios v_1 e v_2 , então a solução geral do sistema diferencial linear $\dot{X} = AX$ é dado por*

$$\Phi(t, c) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

onde $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que temos dois valores próprios reais distintos λ_1 e λ_2 com os vetores próprios v_1 e v_2 . Então, v_1 e v_2 são linearmente independentes. Assim, v_1 e v_2 formam uma base de \mathbb{R}^2 , portanto, dado qualquer ponto $Z_0 \in \mathbb{R}^2$, podemos determinar um par único de números reais a e b para os quais:

$$av_1 + bv_2 = Z_0$$

Agora, consideramos a função $Z(t) = aX_1(t) + bX_2(t)$ onde $X_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i$ ($i = 1, 2$) são as soluções linearmente independentes. Afirmamos que $Z(t)$ é uma solução de (2.1.4). Para isso, calculamos:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= a\dot{X}_1(t) + b\dot{X}_2(t) \\ &= aAX_1(t) + bAX_2(t) \\ &= A(aX_1(t) + bX_2(t)) \\ &= AZ(t) \end{aligned}$$

Portanto, demonstramos que $\dot{Z}(t) = AZ(t)$, então $Z(t)$ é uma solução. Além disso, $Z(t)$ é uma solução que satisfaz $Z(0) = Z_0$. Finalmente, afirmamos que $Z(t)$ é a solução única de (2.1.4) que satisfaz $Z(0) = Z_0$. Suponhamos que $Y(t)$ é outra solução com $Y(0) = Z_0$. Então, podemos escrever

$$Y(t) = c(t)v_1 + d(t)v_2$$

com $c(0) = a$, $d(0) = b$. Consequentemente,

$$AY(t) = \dot{Y}(t) = \dot{c}(t)v_1 + \dot{d}(t)v_2.$$

Mas,

$$\begin{aligned} AY(t) &= Ac(t)v_1 + Ad(t)v_2 \\ &= \lambda_1 c(t)v_1 + \lambda_2 d(t)v_2. \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \lambda_1 c(t) \\ \dot{d}(t) &= \lambda_2 d(t) \end{aligned}$$

com $c(0) = a$, $d(0) = b$. Segue-se que

$$c(t) = ae^{\lambda_1 t}, \quad d(t) = be^{\lambda_2 t}$$

de modo que $Y(t)$ é de facto igual a $Z(t)$.

Em seguida ao considerarmos ainda a equação $\dot{X} = AX$, mas agora com o polinómio característico $\lambda^2 + b^2 = 0$, com os valores próprios imaginários $\pm ib$ e, sem nos preocuparmos com os vetores complexos resultantes, procedemos analogamente como no caso anterior para determinarmos o vetor próprio correspondente a $\lambda = ib$. Ao partirmos $X(t)$ em parte real e imaginária, temos

$$X(t) = X_{Re}(t) + iX_{Im}(t).$$

Vemos que, tanto $X_{Re}(t)$ quanto $X_{Im}(t)$ são soluções do sistema $\dot{X} = AX$. Para vermos que isso é verdade, basta verificarmos que

$$\begin{aligned} X_{Re}(t) + iX_{Im}(t) &= \dot{X}(t) \\ &= AX(t) \\ &= A(X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)) \\ &= AX_{Re}(t) + iAX_{Im}(t). \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias desta equação resulta em $\dot{X}_{Re} = AX_{Re}$ e $\dot{X}_{Im} = AX_{Im}$, o que mostra que ambas são de facto soluções de $\dot{X} = AX$. A combinação linear dessas soluções é,

$$X(t) = c_1 X_{Re}(t) + c_2 X_{Im}(t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e fornecem uma solução para qualquer problema de valor inicial. Afirmamos que, esta é a solução geral da equação $\dot{X} = AX$ para valores próprios complexos. Para provarmos que essas soluções são únicas, supomos que não seja esse o caso. E consideramos

$$Y(t) = (u(t), v(t))$$

como outra solução. Consideramos a função complexa

$$f(t) = (u(t) + iv(t))e^{ibt}.$$

Diferenciamos essa expressão e usamos o facto de que $Y(t)$ é uma solução desta equação, isto resulta em $\dot{f}(t) = 0$. Logo, $u(t) + iv(t)$ é uma constante complexa, multiplicada por e^{-ibt} e, isto segue diretamente de que $Y(t)$ é uma combinação linear de $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$. Observamos que cada uma dessas soluções é uma função

periódica com período $2\pi/b$. Na verdade, o retrato de fase mostra que todas as soluções que estão em círculos centrados na origem. Esses círculos são percorridos no sentido horário se $b > 0$ e sentido anti-horário se $b < 0$, este tipo de sistema é chamado de *centro*. \square

O fluxo (na base $\{v_1, v_2\}$) para solução geral de um sistema $\dot{X} = AX$ na forma matricial é:

$$\Phi(t, c) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Sejam λ_1, λ_2 os valores próprios de A qualquer, então A é diagonalizável se existem matrizes P (matriz invertível, cujas colunas consistem em vetores próprios de A) e B , tais que $A = P^{-1}BP$, ou equivalente $B = PAP^{-1}$, onde a matriz B tem uma das seguintes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

De seguida apresentamos a análise qualitativa do comportamento das trajetórias dos retratos de fase da equação $\dot{X} = AX$, de uma forma resumida:

2.1.1. Valores próprios reais.

I. Valores próprios reais distintos

(i) Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e ambas diferentes de zero, a matriz correspondente é

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

o seu fluxo é

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

e obtemos os retratos de fases representados na Figura 2.1.

(ii) Para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$ e $\Delta > 0$ a matriz é

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad (k \in \mathbb{R})$$

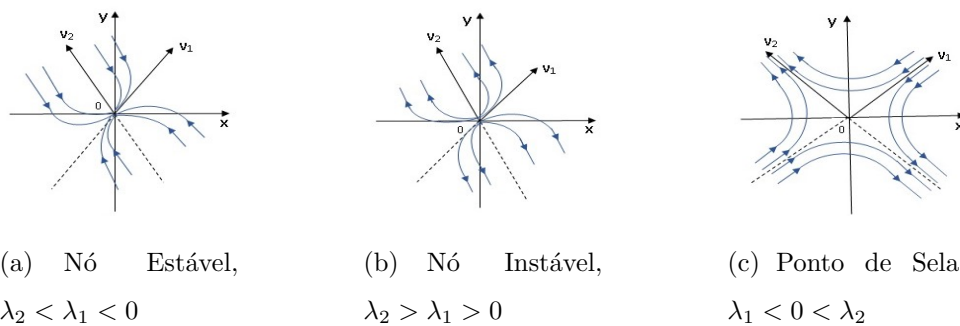


FIGURA 2.1. Valores próprios reais distintos.

é singular, isto é, o determinante é zero e o seu fluxo é

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se } k \neq 0 \quad \text{ou} \quad \Phi_B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se } k = 0,$$

respectivamente, e obtemos os retratos de fases representados na Figura 2.2.

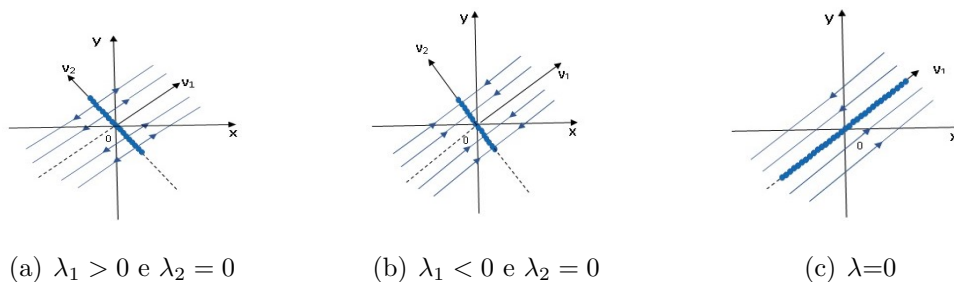


FIGURA 2.2. Valores próprios reais distintos com um deles igual a zero ou ambos iguais a zero.

II. Valores próprios reais iguais

- (i) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, o núcleo de $A - \lambda Id$ é bidimensional. Em outras palavras, λ tem vetores próprios v_1, v_2 linearmente independentes e, a matriz correspondente é

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

o seu fluxo é

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

e obtemos os retratos de fases representados na Figura 2.3.

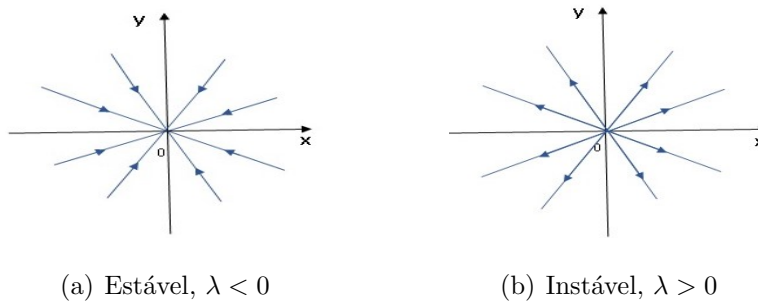


FIGURA 2.3. Nós impróprios.

(ii) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda e \Delta = 0$ o núcleo de $A - \lambda Id = k$ é unidimensional. Isto significa que λ tem um único vetor próprio v_1 e, a matriz correspondente é

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

o seu fluxo é

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

e obtemos os retratos de fases representados na Figura 2.4

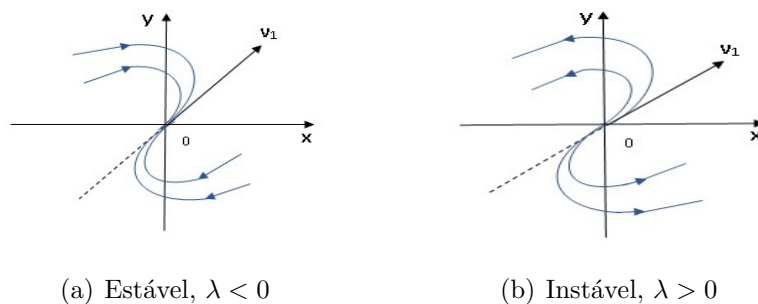


FIGURA 2.4. Nós singulares.

2.1.2. Valores próprios complexos. Para

$$\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, a matriz correspondente é

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

e o seu fluxo é dado por

$$\Phi_B(t) = e^{at} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Obteremos os retratos de fases representados nas (Figura 2.5), (Figura 2.6) e (Figura 2.7).

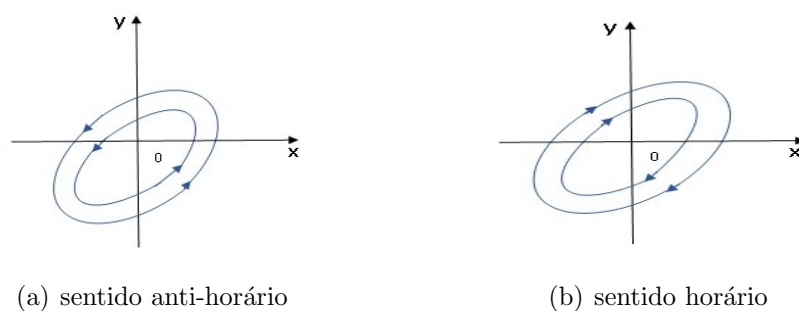


FIGURA 2.5. Centros ($a = 0$).

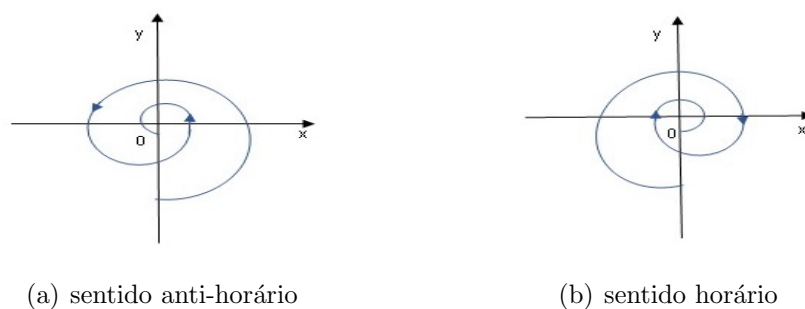


FIGURA 2.6. Focos estáveis ($a < 0$).

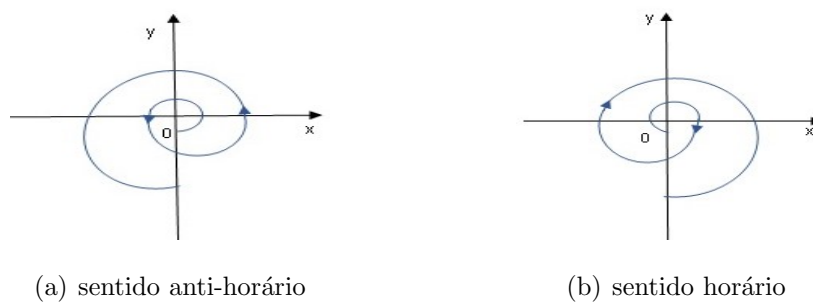


FIGURA 2.7. Focos instáveis ($a > 0$).

EXEMPLO 2.1. *Considere a solução do problema de valor inicial*

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.$$

Fazendo $y = \dot{x}$ e

$$X = X(t) = (x(t), y(t))^T = (x(t), \dot{x}(t))^T,$$

temos

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \quad e \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sabendo que a matriz fundamental do sistema é dada por,

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 3e^{3t} - 3e^{-t} & 3e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

e, para $t = 0$ temos

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Como $\Phi(t) = \Phi(t)\Phi(0)$, então

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 3e^{3t} - 3e^{-t} & 3e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ 9e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

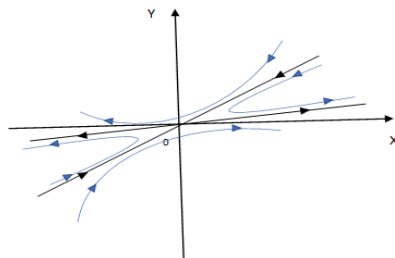


FIGURA 2.8. Retrato de fase para o problema de valor inicial.

2.1.3. Pêndulo simples amortecido. Em seguida, vamos estudar a equação diferencial (2.1.2) relacionada com um sistema mecânico muito especial, *o pêndulo simples*.

DEFINIÇÃO 2.5. *Um pêndulo simples consiste numa esfera de massa m presa a um fio de comprimento L e, quando libertado a partir de um ângulo θ com a vertical, ocorre um balanço para a esquerda e para direita ou vice-versa com um período T .*

Se considerarmos $\alpha = 0$ em (2.1.2), isto significa que o *pêndulo* pára de oscilar. Logo, dizemos que o *pêndulo* é *intacto*, caso contrário temos um *pêndulo amortecido*. Este é um exemplo de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem autónoma com coeficientes constantes, onde m é a massa (que assumimos unitária em (2.1.1)), α é a constante de amortecimento, β é a rigidez (ou comprimento) do fio, $x(t)$ é a posição e $\dot{x}(t)$ é o momento.

Para compreensão do comportamento das soluções do *pêndulo simples amortecido*, consideramos a equação diferencial de segunda ordem (2.1.2). Agora, considerando a equação (2.1.10) temos:

I. *Valores próprios distintos* ($\alpha^2 - 4\beta > 0$, para $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ ou $\alpha > -2\sqrt{\beta}$)

Consideramos a equação das pequenas oscilações do pêndulo sujeito a um grande amortecimento [9], isto é, o sistema (2.1.4) com $\alpha^2 - 4\beta > 0$. Esta condição equivale dizer que a matriz A tem dois valores próprios reais distintos λ_1 e λ_2 com vetores próprios associados v_1 e v_2 . Assim, as trajetórias de fase do sistema (2.1.2) correspondem ao comportamento de pontos nodais estáveis, instáveis e o ponto de sela, como podemos constatar na Figura 2.1 (a), (b) e (c) respectivamente. Um pêndulo fortemente amortecido passa no máximo uma vez pelo ponto de equilíbrio e deixa de oscilar. Em particular, o ponto de sela para $t \rightarrow +\infty$ o pêndulo aproxima-se assintoticamente da posição de equilíbrio se, e somente se, a sua velocidade inicial $\dot{x}(t)$ for igual à sua posição inicial $x(t)$ com o sinal trocado, sendo as duas trajetórias possíveis as bissetrizes do segundo e quarto quadrantes. Nos demais casos, o pêndulo ou passará pela posição de equilíbrio com velocidade não nula, ou começará num certo instante a afastar-se desta sem nunca tê-la atingido e, as respectivas trajetórias de fase são hipérbolas (ver [9]) e a posição $x(t)$ decresce lentamente para zero.

II. *Valores próprios iguais* ($\alpha^2 - 4\beta = 0$, para $\alpha = 2\sqrt{\beta}$ ou $\alpha = -2\sqrt{\beta}$)

Começamos por dizer que, no caso em que consideramos há amortecimento crítico, existe um único valor próprio real. Essa situação conduz a dois tipos diferentes de ponto de equilíbrio. Se a matriz for diagonal, os valores na sua diagonal serão necessariamente iguais os valores próprios e qualquer vetor do espaço de fase é um vetor próprio da matriz A . Isso implica que todas as órbitas do sistema serão retas que se afastam da origem, quando o seu valor próprio é positivo e as órbitas aproximam-se da origem se o valor próprio é negativo. As suas órbitas descrevem trajetórias como as da (Figura 2.3). O ponto de equilíbrio designa-se por *nó impróprio, estável ou instável*, dependendo do sinal do valor próprio. A segunda situação possível ocorre se a matriz não for diagonal, resultando na existência de um único vetor próprio e o ponto de equilíbrio é designado de *nó singular* (Figura 2.4). Existe apenas uma direção no espaço de fase em que o estado inicial evolui em linha reta, todas as outras órbitas do sistema acumulam-se nessa direção. Se o valor próprio for negativo, o nó singular é *estável* e se o valor próprio for positivo será um nó singular *instável*. Para $\alpha = \pm 2\sqrt{\beta}$ as órbitas decrescem rapidamente aproximando-se de $x(t) = 0$ e para algumas condições iniciais pode mesmo trocar de sinal antes mesmo de se aproximar de zero.

III. *Valores próprios imaginários* ($\alpha^2 - 4\beta < 0$, para $\alpha < 2\sqrt{\beta}$ ou $\alpha < -2\sqrt{\beta}$)

Consideramos o movimento harmónico fracamente amortecido ou das pequenas oscilações, que também pode ser descrito pelo sistema (2.1.4) e a matriz A tem valores próprios complexos $a \pm ib$ com $b \neq 0$. As trajetórias de fase do pêndulo fracamente amortecido são espirais [9], cujas suas trajetórias movem-se no sentido horário, similarmente a pontos focais estáveis (Figura 2.6 (b)) e instáveis (Figura 2.7 (b)). E o sistema deixa de oscilar quando $\alpha < \pm 2\sqrt{\beta}$, isto quer dizer que, as órbitas oscilam com uma amplitude que decresce rapidamente e na ausência de amortecimento, isto é, $\alpha = 0$ teremos elipses, ou seja, rotações elípticas em torno da origem no sentido horário (ver Figura 2.5 (b)).

2.2. Sistemas diferenciais lineares de segunda ordem não-autônomos

DEFINIÇÃO 2.6. *Definimos a equação diferencial não-autônoma*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.2.1)$$

onde $A(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua e $A(t) \in M_{2 \times 2}$ para $t \in \mathbb{R}$.

No caso mais geral de um sistema n -dimensional, a equação (2.2.1) tem n soluções linearmente independentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$ que designamos por *sistema fundamental* de soluções e é uma base no espaço das suas soluções [45]. Uma matriz $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, cujas colunas são os vetores de uma base de soluções que designamos por *matriz fundamental*. Essa matriz é uma solução da equação matricial

$$\dot{X} = A(t)X \quad \text{ou} \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X. \quad (2.2.2)$$

O determinante da matriz fundamental é dado pela fórmula de Ostrogradsky-Jacobi-Liouville, para $A(t)$ contínuo é a seguinte:

$$\det X(t) = \exp \left(\int_0^t \text{Tr} A(t) dt \right). \quad (2.2.3)$$

Agora, seja $X(t)$ uma matriz fundamental da equação (2.2.2). Para cada vector $c \in \mathbb{R}^n$, o produto $X(t)c$ é uma combinação linear das colunas de $X(t)$ com $c = (c_1, \dots, c_n)$. Temos que $X(t)c$ é uma solução fundamental da equação diferencial linear (2.2.1).

Ao estudarmos a estabilidade das soluções $X(t)$ da equação diferencial (2.2.1) sob pequenas perturbações das condições iniciais, consideramos o sistema linear de equações diferenciais conhecido como o sistema de equações variacionais.

DEFINIÇÃO 2.7. *Definimos como equação variacional ao longo da solução $X(t)$ a equação*

$$\dot{U} = A(t)U. \quad (2.2.4)$$

Assim, a simples continuidade de $A(t)$ garante a existência de soluções, mas, para unicidade de soluções, a continuidade não é suficiente, onde precisamos também da diferenciabilidade em relação aos valores iniciais, isto é, pelo problema do valor inicial da equação (2.2.2), com $X(0) = X_0$, tem uma solução única que é definida para todo

$t \in \mathbb{R}$. Este sistema satisfaz o princípio da linearidade e o significado desta equação é que o sistema diferencial linear (2.2.1) pode ser visto como solução do problema de estabilidade sob pequenas perturbações da função do lado direito da equação (2.2.4), reduzindo assim o estudo da estabilidade sob pequenas perturbações da condição inicial para o estudo da estabilidade sob pequenas perturbações da equação (2.2.4) do lado direito.

DEFINIÇÃO 2.8. *Seja X_0 um ponto de equilíbrio do campo $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dizemos que X_0 é um ponto de equilíbrio estável de A se, dada qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de X_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de X_0 , tal que $W \subseteq U$ e $\Phi(t, X) \in U$, quaisquer que sejam $X \in W$ e $t > 0$. E dizemos que X_0 é um ponto de equilíbrio instável se X_0 não é um ponto de equilíbrio estável.*

DEFINIÇÃO 2.9. *Seja X_0 um ponto de equilíbrio do campo $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dizemos que X_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de A se, dada qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de X_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de X_0 , tal que $W \subseteq U$,*

- $\Phi(t, X) \in U$, quaisquer que sejam $X \in W$ e $t > 0$ e,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, X) = X_0$, com qualquer $X \in W$.

Para cada $X_0 \in \mathbb{R}^2$ existe uma solução global única $X(t)$ da equação (2.2.4) que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$ e é fácil verificar que, para a equação (2.2.4) uma dada solução é estável (respectivamente assintoticamente estável, instável) se e somente se todas as soluções forem estáveis (respectivamente assintoticamente estáveis, instáveis) e, por isso, precisamos apenas considerar a solução trivial $X(t) = 0$ ([11]).

Considerando agora o sistema diferencial linear

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(t) & -\alpha(t) \end{pmatrix} X(t), \quad (2.2.5)$$

para $t \in \mathbb{R}$ e tendo em conta as suas condições iniciais, apresentamos um ensaio com três possíveis casos dos retratos de fase deste sistema quando os seus coeficientes α e β variam com o tempo. Com este ensaio, não queremos estabelecer qualquer

resultado, mas sim ilustrar possíveis comportamentos do sistema (2.2.5) com diferentes $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, como um primeiro contacto com sistemas diferenciais lineares de segunda ordem não-autónomos. Por exemplo:

- i. Se $\alpha(t) = \ln(t)$, para $t > 0$ e $\beta(t) = \exp(t)$, funções, as órbitas do seu retrato de fase serão espirais no sentido horário, a amplitude das órbitas decresce rapidamente quando $t \rightarrow +\infty$, (ver Figura 2.9). O sistema será assintoticamente estável;

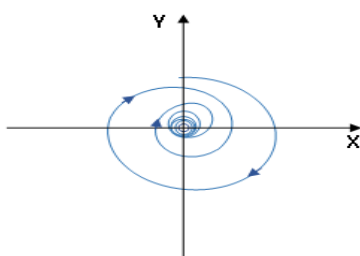


FIGURA 2.9. Retrato de fase para $\alpha(t) = \ln(t)$, $t > 0$ e $\beta(t) = \exp(t)$.

Ainda um segundo exemplo, para $\alpha(t) = \log(t^2 - 1)$ e $\beta = \cos(t^2 - 1)$, obtemos o seguinte retrato de fase:

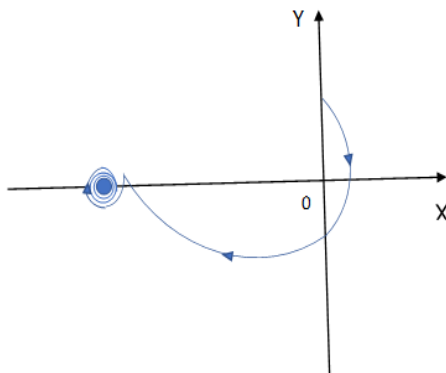


FIGURA 2.10. Retrato de fase para $\alpha(t) = \ln(t^2 - 1)$, $-1 < t < 1$ e $\beta(t) = \cos(t^2 - 1)$.

- ii. Se $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = \exp(t)$ é uma função em t e as órbitas do sistema comportam-se essencialmente como espirais, que algumas vezes se interseçam entre si, fazendo parecer como elipses em torno da origem no sentido horário,

isto é, o amortecimento é fraco, visto que para qualquer que seja $\beta(t) > 0$ o sistema será assintoticamente estável.

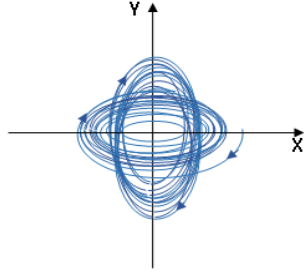


FIGURA 2.11. Retrato de fase para $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = \exp(t)$.

No caso de $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = -\exp(t)$, as órbitas comportam-se como curvas que crescem quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema será assintoticamente estável.

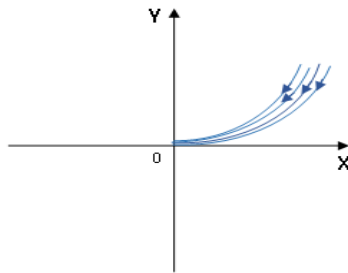


FIGURA 2.12. Retrato de fase para $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = -\exp(t)$.

- iii. Se $\alpha(t) \neq 0$ é uma função de $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(t) = 0$. Para $\alpha(t) = \exp(t)$, função positiva em $t \in \mathbb{R}$, as órbitas comportam-se como curvas que decrescem quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as órbitas afastam-se da origem e o sistema será assintoticamente instável. E para $\alpha(t) = -\exp(t)$ uma função negativa em $t \in \mathbb{R}$ e, as órbitas comportam-se como curvas que crescem quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as órbitas afastam-se da origem comportando-se similarmente à (Figura 2.12), que é assintoticamente estável.

Portanto, acabamos de verificar o que dizíamos no começo desta secção que estudar o comportamento assintótico das soluções do sistema (2.2.5) com exatidão é muito difícil usando os seus valores próprios, então iremos recorrer ao Teorema de Oseledets que nos garante as ferramentas necessárias para analisarmos o comportamento espectral deste tipo de sistema, como veremos na Secção 3.2.

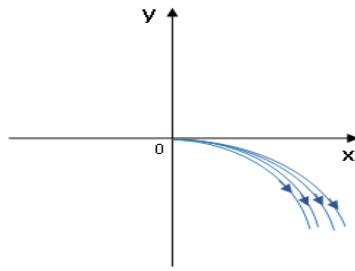


FIGURA 2.13. Retrato de fase para $\alpha(t) = \exp(t)$, $\beta(t) = 0$.

CAPÍTULO 3

Sistemas diferenciais lineares cinéticos

Nesta secção apresentamos algumas definições que serão úteis para o desenvolvimento desse trabalho de forma pragmática. Discutimos os expoentes de Lyapunov, o teorema de Oseledets e a topologia que serve de base para esta investigação.

No caso autónomo (ver §2.1), o estudo de sistemas como (2.1.4) resume-se à álgebra linear associada à matriz A . Um caso substancialmente mais complicado prende-se com a existência de uma dependência temporal dos parâmetros α, β em (2.2.1) (caso não-autónomo, ver §2.2). Neste caso, um sistema diferencial cinético com coeficientes variando no tempo, como um caso ‘geral’ de (2.2.2), exhibe um comportamento caótico em alguns casos e é difícil a determinação de uma solução explícita. Para além disso, a introdução de perturbações nos parâmetros, modeladas por uma dinâmica auxiliar, torna pertinente o uso de uma abordagem mais geral, com recurso à Teoria Ergódica, para compreender os comportamentos possíveis nestes casos. Um exemplo clássico é a resolução de Sinai para o problema de Lagrange para os pêndulos acoplados; ver [23, Exemplo 7.18].

3.1. Cociclos lineares

Seja (M, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, onde M é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, \mathcal{M} a σ -álgebra de Borel de M e μ é uma medida de probabilidade.

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um sistema dinâmico métrico (ou fluxo) no sentido de que é uma aplicação mensurável e*

(1) $\varphi^t: M \rightarrow M$ dado por $\varphi^t(\omega) = \varphi(t, \omega)$ preserva a medida μ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é

$$\mu(\varphi^{-t}(B)) = \mu(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{M}; \quad (3.1.1)$$

(2) $\varphi^0 = Id_M$ e $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

O símbolo 'o' significa composição e canonicamente define uma ação à esquerda do semigrupo de homeomorfismos de M no espaço M , isto é, $(\varphi^t \circ \varphi^s)(\omega) = \varphi^t(\varphi^s(\omega))$ ([3]).

A invariância de uma medida μ desempenha um papel importante na teoria dos sistemas dinâmicos e na teoria ergódica. E a teoria ergódica estuda o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica, descrevendo as propriedades que são válidas para quase toda a órbita do sistema.

Salvo indicação em contrário, consideremos no que se segue que o fluxo é ergódico no sentido usual que não existem conjuntos invariantes, exceto conjuntos com medida nula ou total.

Como exemplo podemos considerar um fluxo no toro \mathbb{T}^2 definido por $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Neste caso, o fluxo associado será $\varphi^t(x, y) = (t + x, \alpha t + y)$. A medida de Lebesgue é invariante e ergódica para este fluxo.

Designaremos por $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra de Borel de um espaço topológico X e $GL(2, \mathbb{R})$ o grupo linear geral formado pelas matrizes invertíveis 2×2 com entradas reais.

DEFINIÇÃO 3.2. *Um cociclo linear (em tempo contínuo) sobre φ é uma aplicação*

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow GL(2, \mathbb{R}),$$

que é $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}/\mathcal{B}(GL(2, \mathbb{R})))$ -mensurável e satisfaz as igualdades de Chapman-Kolmogorov:

- (1) $\Phi(0, \omega) = Id$ para todo $\omega \in M$;
- (2) $\Phi(t + s, \omega) = \Phi(t, \varphi^s(\omega)) \circ \Phi(s, \omega)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in M$.

Vamos assumir que $t \rightarrow \Phi(t, \omega)$ é contínuo para todo $\omega \in M$. Veremos que esta propriedade é satisfeita nos casos que iremos considerar. Lembramos que se $\omega \rightarrow \Phi(t, \omega)$ é mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$ e $t \rightarrow \Phi(t, \omega)$ é contínuo para todo $\omega \in M$ isto implica que Φ é mensurável no espaço de medida do produto.

Ao imaginarmos uma movimentação do cociclo em $\mathbb{R} \times M$ vemos que, enquanto ω é deslocado pelo sistema dinâmico φ em tempo s para o ponto $\varphi^s(\omega)$ no espaço de base M , o cociclo $\Phi(s, \omega)$ move o ponto (vetor) v na sua própria fibra (\mathbb{R}_ω^2) sobre M

até o ponto (vetor) $\Phi(s, \omega)v$ em $\mathbb{R}_{\varphi^s(\omega)}^2$, mantendo as propriedades do cociclo. Em particular, podemos ter como modelo o produto cruzado definido para $t \in \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \Phi(t): M \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \times \mathbb{R}^2 \\ (\omega, v) &\mapsto (\varphi^t(\omega), \Phi(t, \omega)v). \end{aligned}$$

Uma vez mais, tomaremos como referência para o espaço de fase o espaço Euclidiano bi-dimensional, tendo em vista os propósitos deste trabalho. Os conceitos aqui introduzidos poderão ser naturalmente estendidos para outros espaços mais gerais. Definimos \mathcal{F} como o conjunto de cociclos lineares (em tempo contínuo) sobre um fluxo φ .

Consideremos como motivação a equação diferencial linear não-autónoma de segunda ordem, que generaliza o movimento do oscilador harmónico amortecido ou pequenas oscilações do pêndulo amortecido, ao longo da órbita $(\varphi^t(\omega))_{t \in \mathbb{R}}$, com $\omega \in M$ descrito por:

$$\ddot{x}(t) + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x}(t) + \beta(\varphi^t(\omega))x(t) = 0. \quad (3.1.2)$$

Seja $K \subset M_{2 \times 2}$ o conjunto das matrizes reais 2×2 do tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e denotamos por \mathcal{K} o conjunto das aplicações mensuráveis $A : M \rightarrow K$. Consideramos as aplicações mensuráveis $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ e a equação diferencial aleatória (3.1.2), comumente denominada *Random Differential Equation*. A designação aleatória advém do facto de a solução depender da escolha de ω que segue uma distribuição de probabilidade dada por μ . Uma vez fixado ω podemos encarar a equação como sendo determinística. Uma das dificuldades habituais é conciliar mensuravelmente todas as soluções individuais determinísticas num mesmo sistema. Considerando a mudança das variáveis momento $y(t) = \dot{x}(t)$, podemos reescrever (3.1.2) como

$$\dot{X} = A(\varphi^t(\omega))X, \quad (3.1.3)$$

onde $X = X(t) = (x(t), y(t))^T = (x(t), \dot{x}(t))^T$ e $A \in \mathcal{K}$ é dado por

$$A(\varphi^t(\omega)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(\varphi^t(\omega)) & -\alpha(\varphi^t(\omega)) \end{pmatrix}.$$

Considerando a equação diferencial linear matricial autónoma associada a (3.1.3)

$$\dot{U} = A(\varphi^t(\omega))U \quad (3.1.4)$$

com solução Φ_A , satisfazendo $\Phi_A^0 = Id$, a solução $X(t)$ de (3.1.3) que satisfaz $X(0) = v$ verifica $X(t) = \Phi_A(t, \omega)v$. De facto, considerando as derivadas em ordem a t , temos

$$\dot{X}(t) = \dot{\Phi}_A(t, \omega)v = A(\varphi^t(\omega))\Phi_A(t, \omega)v = A(\varphi^t(\omega))X(t) = \dot{X}(t).$$

Segue-se de [3, Thm. 2.2.8] (ver também Exemplo 2.2.8 nesta referência) que se $A \in L^1(\mu)$, isto é, $\int_M \|A\| d\mu < \infty$, (3.1.4) gera um único (*indistinguível*) cociclo linear Φ_A que satisfaz

$$\Phi_A(t, \omega) = Id + \int_0^t A(\varphi^s(\omega))\Phi_A(s, \omega)ds. \quad (3.1.5)$$

A solução $\Phi_A(t, \omega)$ definida em (3.1.5) é chamada de *solução de Carathéodory* ou *solução fraca*. Dada uma condição inicial $X(0) = v \in \mathbb{R}^2$, dizemos que $t \mapsto \Phi_A(t, \omega)v$ resolve ou é uma solução de (3.1.4), ou que (3.1.4) gera Φ_A . Note-se que $\Phi_A(0, \omega)v = v$ para todo $\omega \in M$ e $v \in \mathbb{R}^2$. Se a solução é diferenciável no tempo (isto é, com respeito a t) então Φ_A é chamada de *solução clássica* de (3.1.4) se satisfaz

$$\frac{d}{dt}\Phi_A(t, \omega)v = A(\varphi^t(\omega))\Phi_A(t, \omega)v.$$

A diferenciabilidade de $\Phi_A(t, \omega)$ relativamente ao tempo t permite aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $A(\varphi^s(\omega))\Phi_A(s, \omega)$ em (3.1.5), o que nem sempre pode ser feito. Temos também que $t \rightarrow \Phi_A(t, \omega)v$ é contínuo para todo ω e v . Observe que $\Phi_A(t, \omega)$ é a solução da *equação linear variacional* ou *equação das primeiras variações* (3.1.4). Se (3.1.3) tiver condição inicial $X(0) = v$, então $\Phi_A(0, \omega)v = v$ e $X(t) = \Phi_A(t, \omega)v$.

Seja \mathcal{F}_{IC} o subconjunto de cociclos lineares em tempo contínuo $\Phi \in \mathcal{F}$ que satisfazem a seguinte condição (C) de integrabilidade (I)

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu), \quad (3.1.6)$$

onde $f^+ = \max\{0, f\}$. Finalmente, denotamos por \mathcal{F}_{IC}^K o subconjunto de cociclos cinéticos de \mathcal{F}_{IC} dos elementos Φ que podem ser escritos como

$$\Phi(t, \omega) = \begin{pmatrix} a(t, \omega) & b(t, \omega) \\ c(t, \omega) & d(t, \omega) \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{cases} a(t, \omega) = 1 + \int_0^t c(s, \omega) ds \\ b(t, \omega) = \int_0^t d(s, \omega) ds \end{cases}.$$

Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ é derivável em relação a t , então podemos definir

$$A(\omega) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, \omega) \right|_{t=0} \quad (3.1.7)$$

e, ao longo da órbita $\varphi^t(\omega)$,

$$A(\varphi^t(\omega)) = \left. \frac{d}{ds} \Phi(s, \omega) \right|_{s=t} [\Phi(t, \omega)]^{-1}.$$

Neste caso $A(\varphi^t(\omega)) \in K$ para todo t e ω .

OBSERVAÇÃO 3.1.

- (1) Para qualquer solução $\Phi_A \in \mathcal{F}_{IC}$ de (3.1.4) dada por (3.1.5), com $A \in \mathcal{K}$, temos $\Phi_A \in \mathcal{F}_{IC}^K$;
- (2) Se $A \in L^1(\mu)$ então $\Phi_A \in \mathcal{F}_{IC}$. Além disso, para todo $t \geq 0$ temos

$$\int_M \log^+ \|\Phi_A(t, \omega)\| d\mu \leq t \|A\|_1.$$

De facto, consideremos ω no conjunto mensurável φ^t -invariante tal que $t \rightarrow A(\varphi^t(\omega))$ é localmente integrável. Por (3.1.5) obtemos

$$\|\Phi_A(t, \omega)\| \leq 1 + \int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\| \|\Phi_A(s, \omega)\| ds.$$

Pela desigualdade de Grönwall (ver [3]) temos

$$\|\Phi_A(t, \omega)\| \leq \exp \left(\int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\| ds \right),$$

isto é, para todo $t \geq 0$

$$\log^+ \|\Phi_A(t, \omega)\| \leq \int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\| ds.$$

Portanto,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi_A(t, \omega)\| \leq \int_0^1 \|A(\varphi^s(\omega))\| ds =: \psi(\omega).$$

Pelo [3, Lema 2.2.5] concluímos que $\psi(\omega) \in L^1(\mu)$, pelo que $\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi_A(t, \omega)\| \in L^1(\mu)$. Similarmemente, também temos $\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi_A(t, \omega)^{-1}\| \in L^1(\mu)$ e, portanto $\Phi_A \in \mathcal{F}_{IC}$. Pelo teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \log^+ \|\Phi_A(t, \omega)\| d\mu(\omega) &\leq \int_M \int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\| ds d\mu(\omega) \\ &= \int_0^t \int_M \|A(\varphi^s(\omega))\| d\mu(\omega) ds \\ &= t\|A\|_1; \end{aligned}$$

(3) Pelos itens anteriores, se $A \in \mathcal{K} \cap L^1(\mu)$ então $\Phi_A \in \mathcal{F}_{IC}^K$.

3.2. Expoentes de Lyapunov e teorema de Oseledets

A teoria da estabilidade para estudar os sistemas lineares autónomos (2.1.4) não é o método mais adequado para estudar as soluções do sistema diferencial linear (3.1.3), pois os valores próprios de $\Phi(t, \omega)$ pouco ou nada permitem concluir sobre o comportamento assintótico das soluções das equações diferenciais como (3.1.3), ou seja, sobre as propriedades espectrais das soluções (3.1.5). Lyapunov, ciente desse problema, desenvolveu a teoria dos expoentes característicos, que hoje têm seu nome, 'expoentes de Lyapunov', e que descrevem o comportamento espectrais de soluções. Além disso, quantificam a sensibilidade às condições iniciais, medindo o afastamento exponencial no tempo de trajetórias vizinhas a partir de uma trajetória de referência. Os expoentes de Lyapunov estão associados a um cociclo sobre um sistema dinâmico e, se existir um positivo, certas trajetórias inicialmente próximas no espaço de fase afastam-se exponencialmente rápido no tempo. De certo modo, os expoentes de Lyapunov inferem sobre o comportamento do sistema, porque pequenas alterações no estado inicial serão ampliadas a uma taxa dada pelo maior expoente de Lyapunov. Em resumo, este objeto tem em linha de conta a relação entre trajetórias próximas, sendo que a análise da própria órbita não é suficiente para determinar o expoente de Lyapunov.

DEFINIÇÃO 3.3. *O expoente de Lyapunov em $\omega \in M$ na direção $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ para $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ é*

$$\lambda(\Phi, \omega, v) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \omega)v\|$$

sempre que o limite existe.

Quando nos referimos aos expoentes de Lyapunov, devemos ter em conta o *teorema ergódico multiplicativo* também conhecido como *teorema de Oseledets*, que fornece informações sobre a estrutura dinâmica de um cociclo.

TEOREMA 3.1. (*Oseledets [39]*) *Consideremos $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$. Para μ -q.t.p. (ler μ -quase todo ponto) $\omega \in M$ existe uma decomposição $\mathbb{R}^2 = E_\omega^1 \oplus E_\omega^2$ que é Φ -invariante, isto é, $\Phi(t, \omega)E_\omega^i = E_{\varphi^t(\omega)}^i$, $i = 1, 2$, chamada de decomposição de Oseledets, e números reais $\lambda_1(\Phi, \omega) \geq \lambda_2(\Phi, \omega)$, chamados expoentes de Lyapunov, tais que:*

$$\lambda_i(\Phi, \omega) = \lambda(\Phi, \omega, v^i) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \omega)v^i\|,$$

para qualquer $v^i \in E_\omega^i \setminus \{\vec{0}\}$ e $i = 1, 2$. Além disso, o ângulo formado pelos subespaços E_ω^1 e E_ω^2 tem crescimento subexponencial ao longo da órbita:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \sin(\angle(E_{\varphi^t(\omega)}^1, E_{\varphi^t(\omega)}^2)) = 0.$$

Chamamos *espectro de Lyapunov* ao conjunto $\{\lambda_1(\Phi, \omega), \lambda_2(\Phi, \omega)\}$ e *subespaços de Oseledets* aos subespaços E_ω^1, E_ω^2 .

O espectro de Lyapunov de um sistema dinâmico bidimensional fornece uma descrição da sua dinâmica e os seus sinais definem direções de estabilidade ou instabilidade, consoante os expoentes são negativos ou positivos, respetivamente.

Se o fluxo φ^t é ergódico, os expoentes de Lyapunov são constantes para μ -q.t.p. $\omega \in M$. Neste caso designaremos-los como $\lambda_1(\Phi)$ e $\lambda_2(\Phi)$, com $\lambda_1(\Phi) \geq \lambda_2(\Phi)$. Dizemos que Φ tem *espectro de Lyapunov singular* ou *espectro de Lyapunov trivial* se para μ -q.t.p. $\omega \in M$, $\lambda_1(\Phi, \omega) = \lambda_2(\Phi, \omega)$. Dizemos que Φ tem *espectro (Lyapunov) simples* se para μ -q.t.p. $\omega \in M$, temos $\lambda_1(\Phi) > \lambda_2(\Phi)$. Para obter detalhes sobre esses resultados em sistemas diferenciais lineares, ver em [3] (em particular, Exemplo 3.4.15). Veja também [30].

Para mais considerações sobre os Expoentes de Lyapunov ver [43].

3.3. Topologia

Para compararmos dois fluxos é habitual considerar-se a distância entre os fluxos quando o tempo t varia no intervalo $[0, 1]$. A escolha deste intervalo pode ser generalizada para qualquer conjunto compacto de \mathbb{R} . Consideraremos a *topologia da convergência uniforme* em conjuntos compactos, sendo que os conjuntos compactos

considerados são $[0, 1]$ e M , precisamente os conjuntos onde a variável de tempo t e a variável espacial ω evoluem respectivamente.

Dados $1 \leq p < \infty$ e $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{IC}$ definimos

$$\sigma_p^\pm(\Phi, \Psi) := \left(\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \|(\Phi(t, \omega))^{\pm 1} - (\Psi(t, \omega))^{\pm 1}\|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}},$$

sempre que a integral é finita, e

$$\sigma_p(\Phi, \Psi) := \begin{cases} \sigma_p^+(\Phi, \Psi) + \sigma_p^-(\Phi, \Psi), \\ \infty \text{ se alguma das integrais acima não existe.} \end{cases}$$

Note-se que podemos ter $\sigma_p(\Phi, \Psi) = \infty$. Para contornar esta situação, definimos uma métrica em \mathcal{F}_{IC} dada por

$$\rho_p(\Phi, \Psi) := \begin{cases} \frac{\sigma_p(\Phi, \Psi)}{1 + \sigma_p(\Phi, \Psi)}, & \text{se } \sigma_p(\Phi, \Psi) < \infty \\ 1, & \text{se } \sigma_p(\Phi, \Psi) = \infty \end{cases}.$$

Uma versão desta métrica para uma topologia do tipo L^∞ para cociclos lineares em tempo discreto foi dada em [4], onde há também uma versão para tempo contínuo. Uma versão de uma topologia do género L^p , como a que consideramos aqui, foi introduzida em [5] para cociclos lineares em tempo discreto.

Por argumentos semelhantes a [4] e [5], temos o seguinte:

PROPOSIÇÃO 3.1. *Para todo $1 \leq p < \infty$,*

- (i) $(\mathcal{F}_{IC}, \rho_p)$ é um espaço métrico completo e, portanto, um espaço de Baire;
- (ii) Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ então para qualquer $\Psi \in \mathcal{F}$, com $\rho_p(\Phi, \Psi) < 1$, temos $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}$;
- (iii) Para todo $p \leq q < \infty$ temos $\sigma_p^\pm(\Phi, \Psi) \leq \sigma_q^\pm(\Phi, \Psi)$ e conseqüentemente $\rho_p(\Phi, \Psi) \leq \rho_q(\Phi, \Psi)$. Assim, a topologia gerada por ρ_q é mais fina que a topologia gerada por ρ_p .

Em seguida demonstraremos que o subespaço dos cociclos lineares cinéticos é um espaço de Baire.

LEMA 3.1. *Para todo $1 \leq p < \infty$, $(\mathcal{F}_{IC}^K, \rho_p)$ é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. De (iii) na Proposição 3.1 é suficiente provar para $p = 1$, isto é, dada qualquer sucessão $(\Phi_n)_n$ em \mathcal{F}_{IC}^K , com $\Phi_n \xrightarrow{\rho_1} \Phi^*$, para algum $\Phi^* \in \mathcal{F}_{IC}$, devemos ter $\Phi^* \in \mathcal{F}_{IC}^K$. Seja $(\Phi_n)_n$ uma sucessão convergente para Φ^* relativamente

à métrica ρ_1 . Queremos provar que $\Phi^* \in \mathcal{F}_{IC}^K$. Por (ii) na Proposição 3.1 temos que $\Phi^* \in \mathcal{F}_{IC}$ resta provar que

$$\Phi^*(t, \omega) = \begin{pmatrix} a^*(t, \omega) & b^*(t, \omega) \\ c^*(t, \omega) & d^*(t, \omega) \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{cases} a^*(t, \omega) = 1 + \int_0^t c^*(s, \omega) ds \\ b^*(t, \omega) = \int_0^t d^*(s, \omega) ds \end{cases}.$$

Se $\Phi_n \xrightarrow{\rho_1} \Phi^*$ isso implica que $\Phi_n \xrightarrow{\sigma_1^+} \Phi^*$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} |a^*(t, \omega) - a_n(t, \omega)| d\mu(\omega) = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} |c^*(t, \omega) - c_n(t, \omega)| d\mu(\omega) = 0. \quad (3.3.1)$$

Como $(\Phi_n)_n \in \mathcal{F}_{IC}^K$, temos

$$\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| a_n(t, \omega) - \left(1 + \int_0^t c_n(s, \omega) ds \right) \right| d\mu(\omega) = 0$$

para todo o n . Fazendo

$$\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| a^*(t, \omega) - \left(1 + \int_0^t c^*(s, \omega) ds \right) \right| d\mu(\omega) \leq \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} \quad (3.3.2)$$

com

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} |a^*(t, \omega) - a_n(t, \omega)| d\mu(\omega) \\ \text{(II)} &= \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| a_n(t, \omega) - \left(1 + \int_0^t c_n(s, \omega) ds \right) \right| d\mu(\omega) \\ \text{(III)} &= \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t |c_n(s, \omega) - c^*(s, \omega)| ds \right| d\mu(\omega), \end{aligned}$$

temos (II)=0. Aplicando o limite em (III) com $n \rightarrow \infty$, temos por (3.3.1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t c_n(s, \omega) - c^*(s, \omega) ds \right| d\mu(\omega) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \int_0^1 |c_n(s, \omega) - c^*(s, \omega)| ds d\mu(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_M |c_n(s, \omega) - c^*(s, \omega)| d\mu(\omega) ds \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_M \sup_{0 \leq s \leq 1} |c_n(s, \omega) - c^*(s, \omega)| d\mu(\omega) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando agora o limite em (3.3.2) com $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| a^*(t, \omega) - \left(1 + \int_0^t c^*(s, \omega) ds \right) \right| d\mu(\omega) = 0$$

o que implica que para quase todo o ω e todo t temos

$$a^*(t, \omega) = 1 + \int_0^t c^*(s, \omega) ds.$$

Similarmente obtemos $b^*(t, \omega) = \int_0^t d^*(s, \omega) ds$. □

Como para todo o $1 \leq p < \infty$, o espaço métrico $(\mathcal{F}_{IC}, \rho_p)$ é completo e $\mathcal{F}_{IC}^K \subset \mathcal{F}_{IC}$ é ρ_p -fechado, concluimos o seguinte:

COROLÁRIO 3.1. *Para todos os $1 \leq p < \infty$, $(\mathcal{F}_{IC}^K, \rho_p)$ é um espaço métrico completo e, portanto, é um espaço de Baire.*

CAPÍTULO 4

Prevalência do espectro trivial

Determinar o comportamento assintótico de uma equação do tipo (3.1.2) é um problema que se pode revelar extremamente complicado, pois o facto de os parâmetros α e β não serem constantes dificulta consideravelmente esta análise. Para além da dependência deles relativamente ao tempo, incorporamos ainda um ruído modelado por uma dinâmica auxiliar φ , o que alarga consideravelmente o horizonte de possibilidades.

Uma forma de contornar este problema é permitir uma perturbação nos parâmetros que conduza a um comportamento assintótico que seja o mais simples possível (espectro de Lyapunov trivial). As perturbações podem ser feitas em diferentes níveis, cabendo à topologia considerada aferir a sua precisão na comparação de diferentes sistemas.

O cenário de estudo da equação (3.1.2) será transportado para linguagem de cociclos lineares, tal como descrito na Secção 3.1. Consideraremos a topologia definida na Secção 3.3 para cociclos lineares cinéticos.

Podemos colocar algumas perguntas no que respeita ao espectro de Lyapunov dos cociclos lineares cinéticos:

1. Temos espectro trivial num aberto/denso/residual de cociclos lineares cinéticos relativo a esta topologia?
2. Se considerarmos uma topologia mais forte, como a topologia uniforme, os resultados são semelhantes?
3. Se fixarmos os parâmetros e perturbarmos a dinâmica determinística da base do cociclo, os resultados são semelhantes?
4. O que podemos concluir se perturbarmos simultaneamente os parâmetros e a dinâmica determinística da base do cociclo?

Nesta secção iremos dar uma contribuição para a resposta à primeira questão, demonstrando que existe um residual de cociclos lineares cinéticos onde o espectro

de Lyapunov é trivial. No último capítulo veremos que a resposta sobre a abertura do espectro trivial é negativa, mostrando a existência de um conjunto denso destes cociclos com espectro simples. Assumiremos que o ruído é inerente ao sistema e não está à nossa disposição para ser alterado, pelo que não será feita nenhuma perturbação na base do cociclo, ou seja, no fluxo φ . Deste modo, não nos debruçaremos sobre as três últimas questões.

A estratégia para demonstrarmos que o espectro de Lyapunov é trivial num conjunto genérico de cociclos lineares cinéticos, relativamente à topologia do tipo L^p gerada pela métrica ρ_p , $1 \leq p < \infty$, que torna este espaço de cociclos num espaço métrico completo, passa pela combinação de vários ingredientes dos quais destacamos os dois seguintes: por um lado a construção de perturbações adequadas de um cociclo linear cinético, de modo a que um cociclo cinético próximo (na métrica ρ_p) a um cociclo dado tenha um decréscimo no integral do maior expoente de Lyapunov e, por outro lado, a conjugação desta possibilidade de diminuir o integral do expoente de Lyapunov com uma pequena perturbação com a semicontinuidade superior desta quantidade quando variamos o cociclo e a sua continuidade em cociclos com espectro trivial, que irá permitir concluir que temos espectro trivial nos pontos (cociclos) de continuidade de uma função semicontínua superiormente e, portanto, num conjunto genérico de cociclos.

Uma dificuldade desta estratégia reside no facto das perturbações serem feitas no conjunto restrito dos cociclos lineares cinéticos, o que limita os cociclos que temos à disposição e restringe significativamente a nossa capacidade de perturbar um cociclo. Para podermos diminuir o maior expoente de Lyapunov de um cociclo cinético, precisamos de construir uma perturbação adequada que, em algum momento, misture as direcções de Oseledets do cociclo original, nomeadamente que *envie* a direcção de maior crescimento na direcção restante. O facto dos cociclos lineares cinéticos não incluírem os cociclos lineares habituais que produzem rotações no espaço de fase (na fibra) obriga a uma estratégia diferente quando comparada com a que foi usada, por exemplo, nos trabalhos [16, 17, 15].

A topologia que consideramos, do tipo L^p , não é sensível a perturbações pontuais ou em segmentos de uma órbita. A ideia será usar perturbações com norma limitada numa caixa de fluxo. Deste modo, podemos controlar a proximidade do cociclo

perturbado com o original controlando a medida da caixa de fluxo que suporta a perturbação. Para além disso, podemos obter os nossos resultados sobre a alteração do maior expoente de Lyapunov efetuando a perturbação apenas uma vez, com uma perturbação *grande* (mas de norma limitada) numa caixa de fluxo adequada, algo que não é exequível numa topologia do tipo C^0 . Para evitarmos sobreposições nas perturbações teremos de codificar o fluxo de base φ através de um fluxo especial num Castelo de Kakutani (como em [1]), nomeadamente através de uma codificação bivalente apresentada por Rudolph (ver [41]), que deverá ser construído com altura suficiente para efetuarmos as perturbações desejadas e estimar com uma certa precisão os valores dos expoentes de Lyapunov.

Recordemos que um conjunto \mathcal{R} é *residual* se existir uma família enumerável de abertos e densos $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \mathcal{R}$. Dizemos que uma propriedade é *genérica* num conjunto se for válida num subconjunto residual. Estes conjuntos assumem um carácter especial neste contexto atendendo à seguinte versão de um resultado clássico.

TEOREMA 4.1. *(Teorema da Categoria de Baire) Num espaço métrico completo, uma intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos é densa.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [31, Teorema A.1.22]. □

Estamos agora em condições de enunciar o resultado principal deste capítulo, que estabelece a genericidade do espectro trivial entre cociclos lineares cinéticos:

TEOREMA 4.2. *Seja $\varphi^t : M \rightarrow M$ ergódica. Existe um subconjunto ρ_p -residual $\mathcal{R} \in \mathcal{F}_{IC}^K$, $1 \leq p < \infty$, tal que todo $\Psi \in \mathcal{R}$ tem espectro de Lyapunov trivial.*

Para a demonstração deste resultado construímos uma perturbação adequada aos nossos propósitos que será usada num cociclo sobre um fluxo especial. Por fim, tratamos da questão da continuidade do (integral do) maior expoente de Lyapunov que nos conduzirá à conclusão da demonstração.

4.1. Mistura de direções de Oseledets

Nesta secção construímos a ferramenta fundamental de perturbação que nos permite trocar as direções de Oseledets. Para um cociclo linear cinético $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ construímos uma perturbação $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, próximo de Φ que nos permitirá, grosso modo, enviar qualquer direção u numa qualquer direção v ao longo da órbita $\varphi^t(\omega)$ para cada $\omega \in M$. Recordemos que o objetivo é analisar o comportamento assintótico da solução e não a obtenção de uma solução explícita.

4.1.1. Perturbações cinéticas. Nesta secção descrevemos a maneira como as perturbações são realizadas.

Seja $\Phi \in \mathcal{F}$ e $\omega \in M$ com órbita não periódica. Vamos considerar uma perturbação $\Psi_\omega = \Psi_{\omega, T, \tau} \in \mathcal{F}$ de Φ ao longo da órbita positiva de ω (começando em $\varphi^T(\omega)$, para algum $T > 0$) e dentro de um intervalo de comprimento adequado $\tau > 0$. Fixemos $T > 0$ e $\tau > 0$. Seja $\tilde{\omega} = \varphi^T(\omega)$ e consideramos $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ definido pelo menos em $\varphi^{[0, \tau]}(\tilde{\omega}) = \{\varphi^s(\tilde{\omega}) : s \in [0, \tau]\}$ e definimos a perturbação $\Psi_\omega \in \mathcal{F}$ de Φ suportada em $\varphi^{[0, \tau]}(\tilde{\omega})$, em que $\Psi_\omega(t, \varphi^s(\omega))$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi(t, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t \leq T \\ \tilde{\Phi}(t+s-T, \tilde{\omega}) \cdot \Phi(T-s, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t \leq T+\tau \\ \Phi(t+s-\tau-T, \varphi^\tau(\tilde{\omega})) \cdot \tilde{\Phi}(\tau, \tilde{\omega}) \cdot \Phi(T-s, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t > T+\tau \\ \tilde{\Phi}(t, \varphi^{s-T}(\tilde{\omega})) & \text{se } s \in [T, T+\tau] \text{ e } s+t \leq T+\tau \\ \Phi(t-T-\tau+s, \varphi^\tau(\tilde{\omega})) \cdot \tilde{\Phi}(T+\tau-s, \varphi^{s-T}(\tilde{\omega})) & \text{se } s \in [T, T+\tau] \text{ e } s+t > T+\tau \\ \Phi(t, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \geq T+\tau \text{ e todo } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

Observe que para todo $s \in [0, \tau]$ temos

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi_\omega(t, \varphi^s(\tilde{\omega})) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t, \varphi^s(\tilde{\omega})) \right|_{t=0},$$

isto é, os geradores infinitesimais de Ψ_ω e $\tilde{\Phi}$ coincidem em $\varphi^{[0, \tau]}(\tilde{\omega})$ e, quando Φ é diferenciável com respeito a t obtemos para todo o $0 \leq s < T$ ou $s > T + \tau$,

$$\left. \frac{d}{dt} \Psi_\omega(t, \varphi^s(\omega)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, \varphi^s(\omega)) \right|_{t=0},$$

isto é, os geradores infinitesimais de Ψ_ω e Φ coincidem fora de $\varphi^{[0, \tau]}(\tilde{\omega})$.

O próximo resultado é bastante simples, mas de grande importância na sequência da demonstração.

LEMA 4.1. *Dados $\omega \in M$, $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, existem $\gamma \neq 0$, $\tau_\omega \in [0, \pi[$ e uma perturbação $\Psi_\omega = \Psi_{\omega, 0, \tau_\omega} \in \mathcal{F}_{IC}^K$ de Φ suportada em $\varphi^{[0, \tau_\omega]}(\omega)$ tal que $\|\Psi_\omega(\varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq 1$ para todo $0 \leq t \leq \tau_\omega$ e $\Psi_\omega(\tau_\omega, \omega)u = \gamma\Phi(\tau_\omega, \omega)v$.*

DEMONSTRAÇÃO. Assumimos que $u \neq \gamma'v$ para todo $\gamma' \neq 0$. Seja $0 < \tau < \pi$ o menor ângulo medido no sentido horário entre as direções definidas pelos vetores u e v , e definimos $R \in \mathcal{K}$ dado por

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

para todo $\omega \in M$. Isto gera um cociclo linear cinético dado por:

$$\Phi_R(t, \omega) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

tal que $\Phi_R(\tau, \omega)u = \gamma v$, para algum $\gamma \neq 0$ e $\tau \in]0, \pi[$.

Agora, definimos a perturbação Ψ_ω de Φ suportada em $\varphi^{[0, \tau_\omega]}(\omega)$ seguindo a construção em (4.1.1), considerando $\tilde{\Phi}$ como Φ_R . \square

Podemos definir uma perturbação Ψ de um dado $\Phi \in \mathcal{F}$ para uma caixa de fluxo $\varphi^{[0, \tau]}(B) = \{\varphi^t(\omega) : \omega \in B, t \in [0, \tau_\omega]\}$, com $B \subseteq M$, e $\tau_\omega \geq 0$ considerando $\Psi(t, \omega) = \Psi_\omega(t, \omega)$ para todo $\omega \in B$, onde $\Psi_\omega = \Psi_{\omega, 0, \tau_\omega}$, é a perturbação de Φ suportada em $\varphi^{[0, \tau]}(\omega)$ dado por (4.1.1). Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ então também temos $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$.

4.1.2. Fluxos especiais. Começamos por lembrar o teorema de Ambrose-Kakutani (ver [1]) que diz que qualquer fluxo ergódico aperiódico é isomorfo a algum fluxo especial com uma determinada função teto, através de uma transformação ergódica invertível num espaço de medida. Com este teorema desenvolvemos um argumento usando um castelo de Kakutani, em que o ser aperiódico é crucial, pois precisamos de *torres grandes* no castelo para desenvolver o argumento.

Segundo [44], a vantagem dessa estratégia é que, em muitos casos, o sistema induzido pode ser construído de modo a ter melhores propriedades globais que o sistema original, o que torna a sua análise mais simples e, por outro lado, a partir

das propriedades do sistema induzido é possível obter conclusões interessantes a respeito do sistema original.

Consideremos um espaço de medida $(\Sigma, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$, uma aplicação $\mathcal{T}: \Sigma \rightarrow \Sigma$ que preserva a medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ e uma *função de teto* $h: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$. Também definimos H como a altura necessária para realizar a perturbação, com $h(\omega) \geq H > 0$, para todo $\omega \in \Sigma$, e que satisfaz a condição de integrabilidade

$$\int_{\Sigma} h(\omega) d\tilde{\mu}(\omega) < \infty.$$

Definimos também o espaço $M_h \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}_+$ por

$$M_h = \{(\omega, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t \leq h(\omega)\},$$

com a identificação entre os pares $(\omega, h(\omega))$ e $(\mathcal{T}(\omega), 0)$. O semifluxo definido em M_h por

$$S^s(\omega, r) = (\mathcal{T}^n(\omega), r + s - \sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega))),$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$ é definido univocamente por

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega)) \leq r + s < \sum_{i=0}^n h(\mathcal{T}^i(\omega)),$$

é chamado de *semifluxo de suspensão*. Se \mathcal{T} é invertível, então $(S^t)_t$ é um fluxo. Além disso, se ℓ denota a medida de Lebesgue unidimensional, a medida $\mu = (\tilde{\mu} \times \ell) / \int h d\tilde{\mu}$ definida em M_h por

$$\int g d\mu = \frac{1}{\int h d\tilde{\mu}} \int \left(\int_0^{h(\omega)} g(\omega, t) dt \right) d\tilde{\mu}(\omega), \quad \forall g \in C^0(M_h)$$

é uma medida de probabilidade e é invariante pelo semifluxo de suspensão $(S^t)_t$. Com esta representação, o quádruplo $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$ é chamado de *fluxo especial* induzido pelo (semi)fluxo (S_t) em M_h .

4.1.3. Misturando direções de Oseledets. O próximo resultado será crucial para a demonstração da Proposição 4.1.

LEMA 4.2. *Para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, $\Phi \in \mathcal{F}_C$ sobre um fluxo especial descrito pelo quádruplo $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$ dotado com a medida produto $\tilde{\mu} \times \ell$ e $B_0 \subseteq \Sigma$ com $\tilde{\mu}(B_0) >$*

0, existe um conjunto mensurável $\tilde{B} \subset B_0$ com $\tilde{\mu}(\tilde{B}) > 0$ tal que para qualquer perturbação $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}$ de Φ suportada numa caixa de fluxo

$$\mathcal{S} := \varphi^{[a,b]}(\tilde{B}) = \{\varphi^t(\varphi^{a(\omega)}(\omega)) : \omega \in \tilde{B}, t \in [0, b(\omega)]\},$$

onde $0 \leq a_0 \leq a(\omega) < b(\omega) \leq b_0 \leq h(\omega)$ para todo $\omega \in \tilde{B}$, com $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e $a, b: M \rightarrow [0, +\infty[$ funções mensuráveis, e satisfazendo $\|\Psi_\omega(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq 1$ para todo $\omega \in \tilde{B}$, $t \in [a(\omega), b(\omega)]$ e $s \in [0, b(\omega) - t]$, temos $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere $\varepsilon' = \varepsilon/(1 - \varepsilon)$. Para um dado $\tilde{B} \subseteq \Sigma$ construímos $\mathcal{B} = \cup_{t \in [-1, 0]} \varphi^t(\mathcal{S})$. Temos $\mu(\mathcal{B}) \leq (1 + b_0 - a_0) \times \tilde{\mu}(\tilde{B})$. Uma vez que $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ é possível obter $\tilde{B} \subseteq \Sigma$ e $L > 0$ tal que, para todo $\omega \in \mathcal{B}$ temos

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \leq L,$$

ou seja,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \leq e^L.$$

Definindo

$$\zeta = \left(\int_{\mathcal{B}} |2e^L|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}},$$

podemos usar argumentos elementares de Teoria da Medida (ver, por exemplo, [35, Teorema 1.3]) de modo que, se necessário, considerando $\tilde{B} \subseteq \Sigma$ com uma $\tilde{\mu}$ -medida positiva mais pequena, temos $\zeta < \varepsilon'/2$. Lembremos que para todo $\omega \in \mathcal{B}$ temos

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Psi(t, \omega)^{\pm 1}\| \leq \max\{1, e^L\} \leq e^L. \text{ Consequentemente}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^\pm(\Phi, \Psi) &= \left(\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \Psi(t, \omega)^{\pm 1}\| \right\|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{B}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \Psi(t, \omega)^{\pm 1}\| \right\|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{B}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| + \|\Psi(t, \omega)^{\pm 1}\| \right\|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{B}} |2e^L|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon'/2. \end{aligned}$$

Isso implica que $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$, como era desejado. \square

PROPOSIÇÃO 4.1. *Dados $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ e $\varepsilon, \delta > 0$, existe uma perturbação $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ de Φ tal que $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$ e*

$$\lambda_1(\Psi) \leq \frac{\lambda_1(\Phi) + \lambda_2(\Phi)}{2} + \delta. \quad (4.1.2)$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ e $\varepsilon, \delta > 0$. Assumimos que Φ possui espectro simples, caso contrário a conclusão é trivial. Vamos realizar perturbações suportadas num segmento de comprimento máximo π (cf. Lema 4.1) em pontos ω de um subconjunto com medida positiva. As perturbações serão realizadas em $\varphi^{N_0/2}(\omega)$, aproximadamente, onde N_0 é grande o suficiente para observarmos as propriedades assintóticas do teorema de Oseledets, com uma precisão η , a partir de ω e de $\varphi^\tau(\omega)$, para um certo $\tau \in [N_0/2, \pi + N_0/2]$. Para evitar situações desagradáveis de sobreposição de perturbações, codificamos φ por um fluxo especial $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$ com uma função de teto finita. Como o fluxo é ergódico, uma aplicação simples do teorema da representação bivalente de Rudolph (ver [41]), permite-nos considerar um fluxo especial S^t com base $\Sigma \subset M$ e uma função de teto $h: \Sigma \rightarrow \{N_0 + \pi, N_0 + 4\}$, para algum N_0 grande. Recordamos que, por um lado, o teorema de Rudolph fornece uma função em escada com degraus arbitrariamente grandes e irracionalmente independentes e, por outro lado, precisamos *ver* o expoente de Lyapunov no tempo $N_0/2$ (com precisão η), realizar uma perturbação num intervalo de tempo que será menor que π e, finalmente, *ver* novamente o expoente Lyapunov (com precisão η) antes do retorno à base. Desta forma, evitamos sobreposições das perturbações e nas estimativas para os expoentes de Lyapunov. Além disso, temos uma decomposição de $\mu = \tilde{\mu} \times \ell$, onde $\tilde{\mu}$ é uma medida em Σ tal que ℓ é a medida de Lebesgue unidimensional (relacionada com o tempo do fluxo) e a função de retorno S^h é $\tilde{\mu}$ -invariante. Por abuso de notação, continuaremos a denotar o fluxo especial por φ^t .

Pelo Teorema de Oseledets, a menos de algum rearranjo do castelo $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$, dado $\eta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq N_0$) e um subconjunto $\tilde{B} \subseteq \Sigma$, com $\tilde{\mu}(\tilde{B}) > 0$, tal que para cada $\omega \in \tilde{B}$ temos

$$\left| \lambda_i - \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \omega)|_{E_i}\| \right| < \eta/2 < \eta, \quad (4.1.3)$$

para $i = 1, 2$ e $t > N$. Observemos que, a partir da propriedade de cociclo, para $\omega \in \tilde{B}$ e $N' > N$, considerando $\omega' = \varphi^{N'}(\omega)$, também temos

$$\left| \lambda_i - \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \omega')|_{E_i}\| \right| < \eta \quad (4.1.4)$$

para todo $t > N$. Para cada $\omega \in \tilde{B}$, seja $\Psi_\omega = \Psi_{\omega, N/2, \tau_\omega}$ a perturbação dada pelo Lema 4.1 suportada em $\varphi^{[N/2, \tau_\omega + N/2]}(\omega)$, tal que para algum $0 \leq \tau_\omega \leq \pi$ temos:

$$\Phi(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) E_{\varphi^{N/2}(\omega)}^1 = E_{\varphi^{\tau_\omega + N/2}(\omega)}^2.$$

Construimos agora uma perturbação global Ψ de Φ suportada na caixa de fluxo

$$\mathcal{S} := \varphi^{[N/2, \tau + N/2]}(\tilde{B}) = \{\varphi^t(\varphi^{N/2}(\omega)) : \omega \in \tilde{B}, t \in [0, \tau_\omega]\},$$

considerando $\Psi(t, \omega) = \Psi_\omega(t, \omega)$ para todo o $\omega \in \tilde{B}$. Considerando um subconjunto de \tilde{B} , se necessário, pelo Lema 4.2 podemos considerar \tilde{B} tal que $\rho_1(\Phi, \Psi) < \varepsilon$.

Veremos que podemos escolher um N grande dependendo de η (dependendo de δ), tal que para todo o $\omega \in \tilde{B}$, temos

$$\lambda_1(\Psi, \omega) \leq \frac{\lambda_1(\Phi, \omega) + \lambda_2(\Phi, \omega)}{2} + \delta. \quad (4.1.5)$$

Note-se que como $\tilde{\mu}(\tilde{B}) > 0$, isto implica que (4.1.5) vale para todo o ω em um subconjunto $B \subseteq M_h$ com $\mu(B) > 0$ e, como estamos a assumir que o fluxo φ^t é μ -ergódico, temos

$$\lambda_1(\Psi) \leq \frac{\lambda_1(\Phi) + \lambda_2(\Phi)}{2} + \delta$$

como desejado. Vamos explicar agora o efeito da mistura das direções de Oseledets na diminuição do maior expoente de Lyapunov. Tomamos $\omega \in \tilde{B}$ com as direções de Oseledets E_ω^1, E_ω^2 e $N > 0$ suficientemente grande para se ter (4.1.3) e também (4.1.4) para $\omega' = \varphi^{\frac{N}{2} + \tau_\omega}(\omega)$, ou seja

$$\Phi\left(\frac{N}{2}, \omega\right) \cdot v_\omega^1 \approx e^{\frac{\lambda_1}{2}N}, \Phi\left(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega\right) \cdot v_\omega^2 \approx e^{\frac{\lambda_2}{2}N}, \quad (4.1.6)$$

e

$$\Phi(N/2 - \tau_\omega, \omega') \cdot v_{\omega'}^1 \approx e^{\lambda_1(\frac{N}{2} - \tau_\omega)}, \Phi\left(\frac{N}{2}, \omega'\right) \cdot v_{\omega'}^2 \approx e^{\lambda_2(\frac{N}{2} - \tau_\omega)}, \quad (4.1.7)$$

onde $\lambda_1 = \lambda_1(\Phi, \omega)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(\Phi, \omega)$ são os expoentes Lyapunov de Φ , $v_\omega^i \in E_\omega^i$ e $v_{\omega'}^i \in E_{\omega'}^i$ são vetores unitários, e \approx significa η -próximo como em (4.1.3) e (4.1.4).

Note-se que, para todo o $\omega \in \tilde{B}$, temos:

$$\Psi(N, \omega) = \Phi\left(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega'\right) \cdot \Phi_R(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) \cdot \Phi(N/2, \omega). \quad (4.1.8)$$

Assim, para todo o $\omega \in \tilde{B}$ podemos decompor a ação da aplicação $\Psi(N, \omega)$ em três partes:

- Começemos pela primeira parte (entre ω e $\varphi^{N/2}(\omega)$) e pela terceira parte (entre ω' e $\varphi^N(\omega)$). Usando a base induzida pelas direções de Oseledets em relação à decomposição $E^1 \oplus E^2$, podemos escrever

$$\Phi\left(\frac{N}{2}, \omega\right) = \begin{pmatrix} \phi_1(\frac{N}{2}, \omega) & 0 \\ 0 & \phi_4(\frac{N}{2}, \omega) \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi\left(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega'\right) = \begin{pmatrix} \phi_1(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega') & 0 \\ 0 & \phi_4(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega') \end{pmatrix}.$$

Usando (4.1.6) e (4.1.7), obtemos que $\Phi(\frac{N}{2}, \omega)$ é um operador que pode ser representado aproximadamente (*i.e.*, com $|\phi_1 - e^{\frac{\lambda_1}{2}N}| < \eta$ e $|\phi_4 - e^{\frac{\lambda_2}{2}N}| < \eta$) pela matriz

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\lambda_1}{2}N} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\lambda_2}{2}N} \end{pmatrix}, \quad (4.1.9)$$

escrito como de costume na base de Oseledets $\{E_\omega^1, E_\omega^2\}$. Similarmente, $\Phi(\frac{N}{2} - \tau_\omega, \omega')$ pode ser representado aproximadamente (com $|\phi_1 - e^{\lambda_1(N/2 - \tau_\omega)}| < \eta$ e $|\phi_4 - e^{\lambda_2(N/2 - \tau_\omega)}| < \eta$) pela matriz

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(N/2 - \tau_\omega)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(N/2 - \tau_\omega)} \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

na base de Oseledets $\{E_{\omega'}^1, E_{\omega'}^2\}$.

- Relativamente à segunda parte (entre $\varphi^{N/2}(\omega)$ e ω'), tendo em consideração a base induzida pelas direções de Oseledets, com respeito à decomposição $E_{\varphi^{N/2}(\omega)}^1 \oplus E_{\varphi^{N/2}(\omega)}^2$, pode ser reescrita como:

$$\Phi_R(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) = \begin{pmatrix} \phi_{R,1}(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) & \phi_{R,2}(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) \\ \phi_{R,3}(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) & \phi_{R,4}(\tau_\omega, \varphi^{N/2}(\omega)) \end{pmatrix}. \quad (4.1.11)$$

Com a mistura de direções de Oseledets causada durante a segunda parte, o maior crescimento para $\Phi(N, \omega)$ (fornecido por $e^{\lambda_1 N}$) nunca pode ser alcançado pela perturbação $\Psi(N, \omega)$. De facto, as entradas de $\Psi(N, \omega)$ são limitadas por:

$$\max\left\{e^{\frac{\lambda_2}{2}N}e^{\lambda_1(N/2-\tau\omega)}, e^{\frac{\lambda_1}{2}N}e^{\lambda_2(N/2-\tau\omega)}, e^{\frac{\lambda_2}{2}N}e^{\lambda_2(N/2-\tau\omega)}\right\} \times \max_{i=1,\dots,4}\{|\phi_{R,i}(\tau\omega, \varphi^{N/2}(\omega))|\}.$$

Estimemos agora $\frac{1}{N} \log \|\Psi(N, \omega)\|$. Por (4.1.8) sabemos que $\Psi(N, \omega)$ é a composição das matrizes (4.1.10), (4.1.11) e (4.1.9). Por uma questão de simplicidade de apresentação, estimamos $\|\Psi(N, \omega)\|$ usando essas três matrizes que estão na base de Oseledets. No entanto, como o ângulo entre as fibras de Oseledets apresenta uma diminuição subexponencial como no Teorema 3.1, estimar $\|\Psi(N, \omega)\|$ considerando a base canónica apenas aumenta os detalhes técnicos, que evitamos no que se segue. Levando isso em consideração, temos:

$$\|\Psi(N, \omega)\| \leq \max\left\{e^{N\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\lambda_1\tau\omega}, e^{N\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\lambda_2\tau\omega}\right\}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{N} \log \|\Psi(N, \omega)\| \leq \max\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1\tau\omega}{N}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_2\tau\omega}{N}\right\}.$$

Finalmente, tendo N suficientemente grande obtemos:

$$\frac{1}{N} \log \|\Psi(N, \omega)\| \leq \frac{\lambda_1(\Phi, \omega) + \lambda_2(\Phi, \omega)}{2} + \delta.$$

Temos assim:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Psi, \omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t, \omega)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Psi(n, \omega)\| \\ &= \inf_n \frac{1}{n} \log \|\Psi(n, \omega)\| \leq \frac{1}{N} \log \|\Psi(N, \omega)\| \\ &\leq \frac{\lambda_1(\Phi, \omega) + \lambda_2(\Phi, \omega)}{2} + \delta \end{aligned}$$

e (4.1.5) está provado. Claramente, obtemos uma diminuição no expoente Lyapunov, no sentido que $\lambda_1(\Psi) \leq \lambda_1(\Phi)$, uma diferença que se acentua na presença de um espectro simples. \square

4.2. Semi-continuidade superior para o principal expoente de Lyapunov

A estabilidade dos expoentes de Lyapunov é um tema de grande interesse na Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Num contexto semelhante ao que é aqui desenvolvido, Arbieto e Bochi ([2]) demonstraram que os expoentes de Lyapunov variam com semicontinuidade superior em topologias do tipo L^p , para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, em função do cociclo. Recordemos o espaço métrico completo $(\mathcal{F}_{IC}, \rho_p)$, $1 \leq p < \infty$. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \mathcal{F}_{IC} &\longrightarrow [0, \infty) \\ \Phi &\longmapsto \int_M \lambda_1(\Phi, \omega) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

A função \mathcal{L} é semicontínua superior se para todo $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}$ satisfazendo $\rho_p(\Psi, \Phi) < \delta$ tem-se $\mathcal{L}(\Psi) < \mathcal{L}(\Phi) + \varepsilon$.

Nesta subsecção inteira, não assumimos que o fluxo φ^t é ergódico. Note-se que, sob a hipótese ergódica sobre o fluxo φ^t , temos $\mathcal{L}(\Phi) = \lambda_1(\Phi)$. Para provar que \mathcal{L} é semicontínua superior quando \mathcal{F}_{IC} está munido com a métrica ρ_p definida em §3.3, apresentamos um resultado preliminar que nos permite controlar diferentes cociclos cinéticos. No que se segue usamos a mesma notação para a norma L^1 das soluções introduzidas em §3.3 mas agora para as aplicações $\Phi(t, \cdot) : M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ com $t \in \mathbb{R}$, ou seja, para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$\|\Phi(t, \omega)\|_1 := \int_M \|\Phi(t, \omega)\| d\mu(\omega).$$

LEMA 4.3. *Para todo o $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in M$ e $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{IC}$, temos:*

$$\log^+ \|\Psi(t, \omega)\| \leq \log^+ \|\Phi(t, \omega)\| + \|\Psi(t, \omega) - \Phi(t, \omega)\|.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue diretamente da desigualdade triangular

$$\|\Psi(t, \omega)\| \leq \|\Phi(t, \omega)\| + \|\Psi(t, \omega) - \Phi(t, \omega)\|.$$

e o facto de que $\log^+(x + y) \leq \log^+(x) + y$ para todo o $x, y > 0$. \square

Denotemos por $L^1(\mu)$ o espaço usual das funções $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ que são integráveis ($\int_M |f| d\mu < \infty$).

LEMA 4.4. *Seja $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$. Para todo o $\eta > 0$ existe $K > 0$, tal que, para todo o $h \in L^1(\mu)$ com $h \geq 0$ e $\|h - f\|_1 < \eta$, temos:*

$$\int_{h>K} h d\mu(\omega) < 2\eta \quad e \quad \mu(h > K) < \frac{2\eta}{K}.$$

DEMONSTRAÇÃO. [2, Lema 5]. □

O próximo resultado é baseado em [2, Teorema 2].

PROPOSIÇÃO 4.2. *Para todo o $1 \leq p < \infty$, a função \mathcal{L} é semicontínua superiormente relativamente à topologia induzida por ρ_p em \mathcal{F}_{IC} .*

DEMONSTRAÇÃO. Pretendemos mostrar que para todo o $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho_p(\Phi, \Psi) < \delta$ implica $\mathcal{L}(\Psi) < \mathcal{L}(\Phi) + \varepsilon$.

Sejam $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ e $\varepsilon > 0$. Assumimos primeiro que para μ -quase todo $\omega \in M$

$$\lambda_1(\Phi, \omega) \geq 0. \tag{4.2.1}$$

Pelo teorema ergódico subaditivo, sabemos que o limite

$$\lambda_1(\Phi, \omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \omega)\|$$

é válido num conjunto com medida total e também em L^1 . Portanto, usando (4.2.1), obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_M \log^- \|\Phi(t, \omega)\| d\mu(\omega) = 0,$$

onde $f^- := \min\{f, 0\}$. Note-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_M \log \|\Phi(t, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \|\Phi(n, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_M \log \|\Phi(n, \omega)\| d\mu(\omega) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

pelo que é possível encontrar $T \in \mathbb{N}$ suficiente grande para se ter

$$\frac{1}{T} \int_M \log^- \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) > -\varepsilon \quad e \quad \frac{1}{T} \int_M \log \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) < \mathcal{L}(\Phi) + \varepsilon$$

e, portanto, como $f = f^- + f^+$,

$$\frac{1}{T} \int_M \log^+ \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \leq \mathcal{L}(\Phi) + 2\varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Consideremos $K > 0$ que será definido posteriormente. Definimos $\eta = \varepsilon/(T+1)$ e $\delta = \delta'/(1+\delta')$, em que

$$\delta' = \min \left\{ \eta, \frac{\varepsilon T}{(T+1)e^{KT}} \right\}. \quad (4.2.4)$$

Para quaisquer Φ e Ψ que satisfaçam $\rho_p(\Phi, \Psi) < \delta$, temos $\rho_1(\Phi, \Psi) < \delta$ e

$$\|\Psi(t, \omega) - \Phi(t, \omega)\|_1 < \delta',$$

para todo $0 \leq t \leq 1$. Sejam

$$f = \log^+ \|\Phi(1, \omega)\| \quad \text{e} \quad g = \log^+ \|\Psi(1, \omega)\|.$$

Pelo Lema 4.3, $\|g - f\|_1 \leq \|\Psi(1, \omega) - \Phi(1, \omega)\|_1 < \delta' \leq \eta$. Agora usamos o Lema 4.4 com $h = f$ e $h = g$, o que nos dá o correspondente $K > 0$ (dependendo de η e Φ). Seja

$$E_f = \{f \leq K\} \quad \text{e} \quad E_g = \{g \leq K\}.$$

Então,

$$\int_{E_h^c} h \, d\mu(\omega) < 2\eta \quad \text{e} \quad \mu(E_h^c) < \frac{2\eta}{K}, \quad \text{para} \quad h = f, g.$$

Consideremos o seguinte conjunto

$$G = \bigcap_{i=0}^T \varphi^{-i}(E_f \cap E_g).$$

Deste modo, G^c tem medida pequena, no sentido em que

$$\begin{aligned} \mu(G^c) &\leq \sum_{i=0}^T \mu(\varphi^{-i}(E_f \cup E_g)^c) \\ &\leq (T+1)\mu(E_f \cup E_g)^c \\ &\leq (T+1)\frac{4\eta}{K} \\ &= \frac{4\varepsilon}{K}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Vamos estimar um limite superior para a expressão

$$\frac{1}{T} \int_M \log^+ \|\Psi(T, \omega)\| \, d\mu(\omega) = \text{(I)} + \text{(II)},$$

onde

$$\text{(I)} = \frac{1}{T} \int_{G^c} \log^+ \|\Psi(T, \omega)\| \, d\mu(\omega) \quad \text{e} \quad \text{(II)} = \frac{1}{T} \int_G \log^+ \|\Phi(T, \omega)\| \, d\mu(\omega).$$

Para a primeira parte (I), recordemos que, para qualquer $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$, $\omega \in M$ e $T \in \mathbb{R}$, temos:

$$\Phi(T, \omega) = \Phi(1, \varphi^{T-1}(\omega)) \cdots \Phi(1, \varphi^1(\omega))\Phi(1, \omega).$$

Portanto,

$$(I) \leq \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \int_{\varphi^i(G^c)} \log^+ \|\Psi(1, \omega)\| d\mu(\omega).$$

Para cada $i = 0, \dots, T-1$, temos, pelo Lema 4.4 e pela desigualdade (4.2.5),

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^i(G^c)} g d\mu(\omega) &= \int_{E_g^c} g d\mu(\omega) + \int_{E_g \cap \varphi^i(G^c)} g d\mu(\omega) \\ &< 2\eta + K\mu(E_g \cap \varphi^i(G^c)) \\ &\leq 2\varepsilon + K\mu(G^c) \\ &\leq 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$(I) \leq 6\varepsilon. \quad (4.2.6)$$

A seguir, estimamos a segunda parte (II). Usando o Lema 4.3 e (4.2.3), temos:

$$\begin{aligned} (II) &\leq \frac{1}{T} \int_G \log^+ \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) + \frac{1}{T} \int_G \|\Psi(T, \omega) - \Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \mathcal{L}(\Phi) + 2\varepsilon + \frac{1}{T} \int_G \|\Psi(T, \omega) - \Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Para estimar o integral no lado direito, procedemos da seguinte maneira. Sejam $\omega \in G$ e $1 \leq i \leq T$. Usando as propriedades do cociclo, temos para $i = 1, \dots, T$:

$$\begin{aligned} \|\Psi(i+1, \omega) - \Phi(i+1, \omega)\| &\leq \|\Psi(1, \varphi^i(\omega))\Psi(i, \omega) - \Phi(1, \varphi^i(\omega))\Phi(i, \omega)\| \\ &\leq \|\Psi(1, \varphi^i(\omega))\Psi(i, \omega) - \Psi(1, \varphi^i(\omega))\Phi(i, \omega)\| + \\ &\quad + \|\Psi(1, \varphi^i(\omega))\Phi(i, \omega) - \Phi(1, \varphi^i(\omega))\Phi(i, \omega)\| \\ &\leq \|\Psi(1, \varphi^i(\omega))\| \|\Psi(i, \omega) - \Phi(i, \omega)\| + \\ &\quad + \|\Psi(1, \varphi^i(\omega)) - \Phi(1, \varphi^i(\omega))\| \|\Phi(i, \omega)\| \\ &\leq e^K \|\Psi(i, \omega) - \Phi(i, \omega)\| + e^{Ki} \|\Psi(1, \varphi^i(\omega)) - \Phi(1, \varphi^i(\omega))\|. \end{aligned}$$

Integrando sobre G e usando a desigualdade $\|\Psi(1, \omega) - \Phi(1, \omega)\|_1 < \delta'$,

$$\int_G \|\Psi(i+1, \omega) - \Phi(i+1, \omega)\| d\mu(\omega) \leq e^K \int_G \|\Psi(i, \omega) - \Phi(i, \omega)\| d\mu(\omega) + e^{Ki} \delta'.$$

Por indução, obtemos

$$\int_G \|\Psi(i, \omega) - \Phi(i, \omega)\| d\mu(\omega) \leq (i+1)e^{Ki} \delta', \quad \forall i = 1, \dots, T.$$

Em particular, se tomarmos $i = T$, temos

$$\int_G \|\Psi(T, \omega) - \Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \leq (T+1)e^{K(T)} \delta'. \quad (4.2.8)$$

Finalmente, a partir de (4.2.7) obtemos

$$(II) = \frac{1}{T} \int_G \log^+ \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \leq \mathcal{L}(\Phi) + 3\varepsilon. \quad (4.2.9)$$

Para completar a demonstração neste caso, tendo em consideração (4.2.6) e (4.2.9) concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Psi) &\leq \frac{1}{T} \int_M \log \|\Psi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{1}{T} \int_M \log^+ \|\Psi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{1}{T} \left(\int_G \log^+ \|\Phi(T, \omega)\| d\mu(\omega) + \int_{G^c} \log^+ \|\Psi(T, \omega)\| d\mu(\omega) \right) \\ &\leq (\mathcal{L}(\Phi) + 3\varepsilon) + 6\varepsilon \\ &\leq \mathcal{L}(\Phi) + 9\varepsilon. \end{aligned}$$

O resultado segue facilmente agora considerando $9\varepsilon = \delta$.

Vamos provar agora o caso geral. Novamente, consideremos $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ e $\varepsilon > 0$. Para cada $\alpha > 0$ definimos o conjunto φ^t -invariante $L_\alpha = \{\omega \in M : \lambda_1(\Phi, \omega) < -\alpha\}$. Considere α suficientemente grande para que

$$\int_{L_\alpha} \log^+ \|\Phi(1, \omega)\| d\mu(\omega) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{L_\alpha} \lambda_1(\Phi, \omega) d\mu(\omega) > -\varepsilon. \quad (4.2.10)$$

Consideremos o operador linear em \mathbb{R}^2 dado por $e^\alpha \Phi(t, \omega)$, para todo o t e ω . Definimos seu *maior expoente de Lyapunov* por

$$\lambda_1(e^\alpha \Phi, \omega) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log^+ \|e^\alpha \Phi(t, \omega)\|.$$

Observemos que $\lambda_1(e^\alpha \Phi, \omega) = \lambda_1(\Phi, \omega) + \alpha$ e, se $\omega \in L_\alpha^C$, temos $\lambda_1(e^\alpha \Phi, \omega) \geq 0$.

Definimos agora

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}: \mathcal{F}_{IC} &\longrightarrow [0, \infty) \\ \Phi &\longmapsto \int_M \lambda_1(e^\alpha \Phi, \omega) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Procedendo de maneira semelhante aos cálculos anteriores para \mathcal{L} , temos que $\tilde{\mathcal{L}}$ é semicontínuo superiormente se restringirmos $e^\alpha\Phi(t, \omega)$ a $\omega \in L_\alpha^c$. De facto, observemos também que para todo o $\delta' > 0$ existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\|e^\alpha\Psi(t, \omega) - e^\alpha\Phi(t, \omega)\|_1 < \delta'$ para todo o $0 \leq t \leq 1$, sempre que $\rho_1(\Phi, \Psi) < \delta$ e, neste caso, temos

$$\int_{L_\alpha^c} \lambda_1(e^\alpha\Psi, \omega) d\mu(\omega) \leq \int_{L_\alpha^c} \lambda_1(e^\alpha\Phi, \omega) d\mu(\omega) + \varepsilon,$$

ou seja,

$$\int_{L_\alpha^c} \lambda_1(\Psi, \omega) d\mu(\omega) \leq \int_{L_\alpha^c} \lambda_1(\Phi, \omega) d\mu(\omega) + \varepsilon. \quad (4.2.11)$$

Por outro lado, como L_α é invariante, pelo Lema 4.3 e (4.2.10), se $\rho_p(\Phi, \Psi) < \delta < \varepsilon$ isto implica que $\|\Psi(t, \omega) - \Phi(t, \omega)\|_1 < \delta$ para todo o $t \in [0, 1]$, e temos

$$\begin{aligned} \int_{L_\alpha} \lambda_1(\Psi, \omega) d\mu(\omega) &= \inf_n \frac{1}{n} \int_{L_\alpha} \log^+ \|\Psi(n, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \int_{L_\alpha} \log^+ \|\Psi(1, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \int_{L_\alpha} \log^+ \|\Phi(1, \omega)\| d\mu(\omega) + \int_{L_\alpha} \|\Psi(1, \omega) - \Phi(1, \omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq 2\varepsilon \\ &\leq \int_{L_\alpha} \lambda_1(\Phi, \omega) d\mu(\omega) + 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

A prova para este caso geral segue agora de (4.2.11) e (4.2.12). \square

4.3. Genericidade do espectro trivial

Nesta secção demonstraremos o Teorema 4.2. A estratégia usada para um resultado similar para cociclos C^0 dotados da norma C^0 (ou cociclos essencialmente limitados dotados da norma L^∞) desenvolvida em [16, 17, 12, 13] para *diminuir* os expoentes de Lyapunov não pode ser usada no nosso contexto. De facto, a norma L^p captura informação numa vizinhança de um segmento de órbita, ao contrário da norma C^0 , e não do próprio segmento de órbita. Por esse motivo, devemos seguir uma abordagem diferente.

Lembramos que, como estamos assumir que φ^t é ergódico, os expoentes de Lyapunov de um dado $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}$ são constantes em μ -quase toda parte e são denotados

por $\lambda_1(\Phi) \geq \lambda_2(\Phi)$. Definimos a *função salto*, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \mathcal{F}_{IC} &\longrightarrow [0, \infty) \\ \Phi &\longmapsto \frac{\lambda_1(\Phi) - \lambda_2(\Phi)}{2}. \end{aligned}$$

O próximo resultado é uma consequência direta da Proposição 4.1 e é crucial para obter a demonstração do Teorema 4.2.

LEMA 4.5. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ e $\varepsilon, \delta > 0$. Existe $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ com $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$ tal que*

$$\mathcal{L}(\Psi) < \delta - \mathcal{J}(\Phi) + \mathcal{L}(\Phi). \quad (4.3.1)$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo ponto (iii) na Proposição 3.1 e pela Proposição 4.1 existe $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ com $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$ tal que

$$\mathcal{L}(\Psi) < \frac{\lambda_1(\Phi) + \lambda_2(\Phi)}{2} + \delta = \delta - \mathcal{J}(\Phi) + \mathcal{L}(\Phi).$$

□

TEOREMA 4.3. *Seja $1 \leq p < \infty$ e consideremos o espaço métrico completo $(\mathcal{F}_{IC}^K, \rho_p)$. Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ é um ponto de continuidade de \mathcal{L} então $\mathcal{J}(\Phi) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos uma sucessão de cociclos lineares cinéticos $\Phi_n \in \mathcal{F}_{IC}^K$ convergindo para $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, na métrica ρ_p . Como Φ é um ponto de continuidade, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\Phi_n) = \mathcal{L}(\Phi)$. Pelo Lema 4.5, dado $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\delta > 0$, existe $\Psi_n \in \mathcal{F}_{IC}^K$, com $\rho_p(\Phi_n, \Psi_n) < \varepsilon_n$, tal que

$$\mathcal{L}(\Psi_n) < \delta - \mathcal{J}(\Phi_n) + \mathcal{L}(\Phi_n).$$

Considerando os limites em n , obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\Psi_n) < \delta - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\Phi_n) + \mathcal{L}(\Phi).$$

Como Φ é um ponto de continuidade de \mathcal{L} , obtemos que $\mathcal{J}(\Phi_n) = 0$ para todo n suficientemente grande e portanto, $\mathcal{J}(\Phi) = 0$, ou seja $\lambda_1(\Phi) = \lambda_2(\Phi)$, como pretendíamos demonstrar. □

Estamos agora em condições de concluir a demonstração do Teorema 4.2.

DEMONSTRAÇÃO. (do Teorema 4.2) É sabido que o conjunto de pontos de continuidade de uma função semicontínua superiormente é um subconjunto residual. Portanto, pelo Teorema 4.3 existe um subconjunto ρ_p -residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}_{IC}^K$ tal que se $\Phi \in \mathcal{R}$, então $\mathcal{J}(\Phi) = 0$, ou seja, $\lambda_1(\Phi) = \lambda_2(\Phi)$. \square

Densidade do espectro simples

5.1. Simplicidade do espectro de Lyapunov

5.1.1. A demanda por expoentes de Lyapunov positivos. Um expoente de Lyapunov positivo (ou negativo) fornece-nos uma taxa exponencial de divergência (ou convergência) média de duas trajetórias vizinhas, enquanto que um expoente de Lyapunov nulo fornece-nos a total ausência de qualquer tipo de comportamento exponencial. A teoria de Pesin (ver e.g. [11]) garante uma teoria de variedades estável/instável na presença de expoentes de Lyapunov diferentes de zero. Essas ferramentas geométricas são a base da maioria dos resultados centrais em sistemas dinâmicos hoje em dia. Consequentemente, não há dúvida de que a detecção de expoentes de Lyapunov diferentes de zero é uma questão de extrema importância na dinâmica, uma questão que remonta ao final dos anos sessenta e ao trabalho de Millionshchikov [36]. No início dos anos oitenta, Cornelis e Wojtkowski [22], e Ledrappier [33] obtiveram critérios para a positividade dos expoentes de Lyapunov e na década de noventa Knill [32] e Nerurkar [37] provaram que expoentes de Lyapunov não nulos são fenómenos densos do ponto de vista C^0 para certos cociclos. No final dos anos noventa, Arnold e Cong [5] provaram a densidade L^p dos expoentes de Lyapunov positivos e sua técnica foi estendida em [15]. O uso de métodos *à la Moser* baseados nos conceitos de número de rotação permitiu que Fabbri e Johnson obtivessem abundância de expoentes de Lyapunov positivos para sistemas diferenciais lineares que evoluem em $SL(2, \mathbb{R})$ e com uma translação no toro como dinâmica de base (ver [25, 26, 27] e também o trabalho com Zampogni [28]). Claramente, encontrar um expoente de Lyapunov positivo em $SL(2, \mathbb{R})$ imediatamente permite obter um expoente de Lyapunov negativo e, portanto, a simplicidade do espectro de Lyapunov (ou seja, todos os expoentes de Lyapunov são diferentes).

Vários resultados sobre a positividade de expoentes de Lyapunov foram estabelecidos nos últimos quinze anos e trouxeram novas abordagens diferentes [18,

19, 21, 42, 24, 14, 46]. Como um exemplo paradigmático, lembramos [10] onde Avila obteve abundância de espectro simples no caso bidimensional e para várias topologias.

5.1.2. Resultado principal e ideia da prova. Uma vez mais, recordamos que o nosso foco principal são os cociclos que satisfazem as condições de integrabilidade de um gerador cinético de tempo contínuo, induzidos por equações do tipo (3.1.2). Fixando a *posição* e o momento $(x(0), \dot{x}(0))$ nesta equação, pretendemos estudar o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$ do par $(x(t), \dot{x}(t))$ nomeadamente, a taxa de crescimento exponencial dada pelos *expoentes de Lyapunov*. No presente trabalho pretendemos responder à seguinte questão:

É possível perturbar os coeficientes α e β na equação (3.1.2), numa topologia do tipo L^p , por forma a obter dois expoentes de Lyapunov distintos?

O enunciado preciso será apresentado no Teorema 5.1.

Como vimos anteriormente, determinar o comportamento assintótico de uma equação do tipo (3.1.2) é um problema que se pode revelar extremamente complicado, nomeadamente quando os parâmetros α e β não são constantes.

Neste capítulo iremos responder parcialmente à primeira questão destacada na introdução do capítulo anterior, demonstrando que no espaço dos cociclos cinéticos \mathcal{F}_{IC}^K munido com a topologia gerada pela métrica ρ_p , com $1 \leq p < \infty$, existe um subconjunto denso relativamente a esta topologia onde o espectro de Lyapunov de cada cociclo nesse conjunto é simples, isto é, tem os dois expoentes de Lyapunov distintos. Deste modo, apesar de no capítulo anterior demonstrarmos que existe um residual neste conjunto com espectro trivial, esta propriedade não prevalece em abertos relativamente a esta topologia.

Adoptando a estratégia para demonstrar o espectro trivial podemos dizer que, para cada cociclo cinético satisfazendo a condição de integrabilidade existe um outro cociclo cinético, arbitrariamente próximo, com espectro simples parte das ideias de [5] onde os autores obtiveram um resultado semelhante para o caso em tempo discreto e para cociclos mais gerais. No entanto, o contexto de tempo contínuo e a restrição a uma família muito particular de cociclos, como a que estamos a

considerar nesta tese, trazem diversas dificuldades que não têm semelhanças nos trabalhos anteriores.

De modo resumido, assumindo que a dinâmica auxiliar φ^t é ergódica em relação à medida de referência μ em M , a estratégia passa por considerar duas zonas de perturbação com medida positiva em M : uma primeira zona, definida por uma caixa de fluxo, onde perturbaremos o cociclo original com uma rotação, de modo a criar uma direção invariante que poderemos controlar e uma segunda zona, numa caixa de fluxo mais *estreita* concatenada na primeira, onde faremos uma outra perturbação deste novo cociclo, de modo a expandir vetores ao longo da direção anteriormente fixada. Estes procedimentos provocarão neste último cociclo a existência de um expoente de Lyapunov diferente dos expoentes de Lyapunov do cociclo anterior (que assumimos iguais). Para garantir que o novo cociclo não tem expoentes diferentes do anterior mas iguais entre si, criamos um desequilíbrio nos volumes das zonas de perturbação para que, com recurso ao Teorema Ergódico Multiplicativo, se garanta o desejado espectro simples. O argumento que nos permite contornar este problema é usar uma consequência do teorema de Oseledets que garante que a soma dos expoentes de Lyapunov de um cociclo Φ é igual a $\int \log |\det(\Phi(1, \omega))| d\mu$. Portanto, encontramos uma forma de controlar a mudança do expoente de Lyapunov do sistema perturbado. Em trabalhos anteriores [5, 15] as perturbações do cociclo original Φ eram composições do tipo $\Phi \circ \Psi$ onde Ψ é escolhido cuidadosamente e verifica $\det \Psi(t, \omega) = 1$. A invariância de $\Phi \mapsto \int \log |\det \Phi(1, \omega)| d\mu$ garante um controle dos Lyapunov expoentes, uma vez que $\int \log |\det \Phi(1, \omega)| d\mu = \int \log |\det(\Phi \circ \Psi)(1, \omega)| d\mu$. No entanto, as perturbações na nossa classe são uma tarefa mais difícil de realizar. Por exemplo, não é claro como perturbações da forma $\Phi \circ \Psi$ como antes podem ser feitas. Consequentemente, optamos por evitarmos este tipo de perturbações usando uma abordagem um pouco diferente dos trabalhos anteriores [5, 15].

Para evitarmos sobreposições nas perturbações iremos codificar o fluxo de base por intermédio de um fluxo especial num Castelo de Kakutani (como em [1]). Por outro lado, para estimar a proximidade do cociclo perturbado com o original usamos também um controlo sobre a medida das duas caixas de fluxo que suportam as perturbações.

De referir que, para além das dificuldades inerentes ao contexto de tempo contínuo, realizar estas perturbações de rotação e dilatação não são triviais, pois não temos ao dispor os habituais mecanismos como os que existem no contexto em tempo discreto para cociclos que evoluem em $GL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{R})$, $Sp(2, \mathbb{R})$ ou, mais geralmente, cociclos que satisfazem as condições *accessibility* (também reconhecida como *twisting*) e *saddle-conservative* (conhecida ainda por *pinching*), que garantem a realização destes processos de modo menos exigente, como, por exemplo, em [2, 5, 16, 17, 15]. Um outro aspeto a salientar é que, dada a natureza dos cociclos cinéticos, a tarefa de realizar estes procedimentos de modo conservativo revela-se mais complicada, em particular a propriedade de *saddle-conservative/pinching*. Desta forma, para contornar esta dificuldade adicional, a abordagem nesta tese a este procedimento segue uma linha *não-conservativa* um pouco diferente da estratégia usada em resultados anteriores.

Neste capítulo demonstramos o Teorema 5.1 sobre a existência de um ρ_p -denso de cociclos cinéticos em \mathcal{F}_{IC}^K , $1 \leq p < \infty$, exibindo espectro simples.

TEOREMA 5.1. *Seja $\varphi^t : M \rightarrow M$ ergódica. Para qualquer $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, $1 \leq p < \infty$ e $\varepsilon > 0$, existe $\Psi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ exibindo espectro de Lyapunov simples, com $\rho_p(\Phi, \Psi) < \varepsilon$.*

5.2. Perturbações cinéticas

Nesta secção vamos descrever como realizar perturbações de cociclos cinéticos que permitem efetuar rotações (*accessibility/twisting*) e dilatações numa direção privilegiada, um pouco mais fracas que as propriedades *saddle-conservativity/pinching*, uma vez que não são conservativas.

Consideremos $\Phi \in \mathcal{F}$ e $\omega \in M$ um ponto não periódico. Por uma questão de comodidade vamos recuperar o procedimento para realizar perturbações introduzido no capítulo anterior. Vamos definir a perturbação $\Psi_\omega = \hat{\Phi}_\omega \in \mathcal{F}$ de Φ suportada num segmento de órbita positivo, começamos em $\varphi^T(\omega)$, para algum $T \geq 0$ com comprimento igual a 1. Isto poderia ser feito considerando qualquer segmento de comprimento finito com início em qualquer ponto futuro da órbita, mas o que apresentamos é suficiente para os nossos propósitos.

Consideremos $\tilde{\Phi}: \mathbb{R} \times M \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ definido pelo menos em $[0, 1] \times \varphi^{[T, T+1]}(\omega)$, onde

$$\varphi^{[T, T+1]}(\omega) = \{\varphi^s(\varphi^T(\omega)) : s \in [0, 1]\}.$$

Definimos a *perturbação* $\hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}} \in \mathcal{F}$ de Φ por $\tilde{\Phi}$ suportada em $\varphi^{[T, T+1]}(\omega)$ como sendo $\hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}}(t, \varphi^s(\omega))$ dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi(t, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t \leq T \\ \tilde{\Phi}(t+s-T, \varphi^t(\omega)) \cdot \Phi(T-s, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t \leq T+1 \\ \Phi(t+s-1-T, \varphi^1(\varphi^t(\omega))) \cdot \tilde{\Phi}(1, \varphi^t(\omega)) \cdot \Phi(T-s, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \in [0, T] \text{ e } s+t > T+1 \\ \tilde{\Phi}(t, \varphi^{s-T}(\varphi^t(\omega))) & \text{se } s \in [T, T+1] \text{ e } s+t \leq T+1 \\ \Phi(t-T-1+s, \varphi^1(\varphi^t(\omega))) \cdot \tilde{\Phi}(T+1-s, \varphi^{s-T}(\varphi^t(\omega))) & \text{se } s \in [T, T+1] \text{ e } s+t > T+1 \\ \Phi(t, \varphi^s(\omega)) & \text{se } s \geq T+1 \text{ e todo } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

Observe que para todo $s \in [0, 1]$

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}}(t, \varphi^s(\varphi^T(\omega))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t, \varphi^s(\varphi^T(\omega))) \right|_{t=0},$$

isto é, os geradores infinitesimais de $\hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}}$ e $\tilde{\Phi}$ coincidem em $\varphi^{[T, T+1]}(\omega)$ e, quando Φ é diferenciável com respeito a t , obtemos para todos $0 \leq s < T$ ou $s > T+1$,

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}}(t, \varphi^s(\omega)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \Phi(t, \varphi^s(\omega)) \right|_{t=0},$$

isto é, os geradores infinitesimais de $\hat{\Phi}_{\omega, T, \tilde{\Phi}}$ e Φ coincidem fora de $\varphi^{[T, T+1]}(\omega)$.

A estratégia para obter o espectro de Lyapunov simples sob pequenas perturbações baseia-se em duas ideias fundamentais: *rodar* e *esticar* direções de Oseledets. Como foi dito, em algumas situações, essas propriedades são mencionadas como *twisting* e *pinching*, respectivamente. No entanto, precisamos garantir que somos capazes de fazer isso no mundo dos cociclos cinéticos. Vamos começar com a rotação.

LEMA 5.1. *Existe $K_R > 0$ tal que dados $\omega \in M$, vectores $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\Phi \in \mathcal{F}$, existe uma perturbação $\bar{\Phi}_{u,v} \in \mathcal{F}$ de Φ suportada em $\mathcal{O} = \varphi^{[0,1]}(\omega)$ tal que se $U = \text{span}(u)$ e $V = \text{span}(v)$ temos $\bar{\Phi}_{u,v}(1, \omega)U = V$. Além disso, $\det \bar{\Phi}_{u,v}(s, \varphi^t(\omega)) = 1$ e $\|\bar{\Phi}_{u,v}(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq K_R$, $t \in [0, 1]$ e $s \in [0, 1-t]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Definimos $R \in \mathcal{K}$ dado por

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix},$$

para todo $\omega \in M$ e algum $a > 0$ a ser escolhido posteriormente. Isto gera um cociclo dado por

$$\Phi_R(t, \omega) = \begin{pmatrix} \cos(at) & \frac{1}{a} \sin(at) \\ -a \sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

Podemos escolher $a = a(u, v) > 0$ tal que $\Phi_R(1, \omega)u = \kappa v$, para algum $\kappa \in \mathbb{R}$. Definimos agora a perturbação $\bar{\Phi}_{u,v} = \hat{\Phi}_{\omega,0,\Phi_R}$ de Φ por Φ_R suportada em \mathcal{O} seguindo a construção em (5.2.1), considerando aí $\tilde{\Phi}$ como Φ_R . Claramente, temos $\det \bar{\Phi}_{u,v}(s, \varphi^t(\omega)) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$ e $s \in [0, 1 - t]$ e, além disso, podemos considerar $K_R > 0$ de tal modo que neste caso temos $\|\bar{\Phi}_{u,v}(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq K_R$. \square

OBSERVAÇÃO 5.1. *Podemos estender as perturbações anteriores de um segmento de órbita para uma caixa de fluxo $\varphi^{[0,1]}(B) = \{\varphi^t(\omega) : \omega \in B, t \in [0, 1]\}$ sem auto-interseções, com $B \subseteq M$, e todo o par de vectores unitários $u(\omega), v(\omega)$ definidos para todo $\omega \in B$. Para fazer isso, definimos a perturbação $\hat{\Phi}_R$ de $\Phi \in \mathcal{F}$ por $\bar{\Phi}_{u,v}$ suportada em uma caixa de fluxo $\varphi^{[0,1]}(B)$, considerando $\hat{\Phi}_R(t, \omega) = \hat{\Phi}_{\omega,0,\bar{\Phi}_{u(\omega'),v(\omega')}}(t, \omega)$, onde $\omega' = \varphi^{-k(\omega)}(\omega) \in B$ e $k(\omega) = \inf_{t \geq 0} \{t : \varphi^{-t}(\omega) \in B\}$, para ser a perturbação de Φ por $\bar{\Phi}_{u(\omega'),v(\omega')}$ suportada em $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ dada por (5.2.1). Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ então também temos $\hat{\Phi}_R \in \mathcal{F}_{IC}^K$.*

Vamos agora explicar como *esticar* vetores no ambiente cinético. De agora em diante, fixemos o vetor $v = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

LEMA 5.2. *Dado $\Phi \in \mathcal{F}$, $\gamma > 0$ e $\omega \in \Omega$ existe uma perturbação $\bar{\Phi}_\gamma \in \mathcal{F}$ de Φ suportada em $\mathcal{O} = \varphi^{[0,1]}(\omega)$ satisfazendo $\bar{\Phi}_\gamma(1, \omega)\kappa v = \gamma \Phi(1, \omega)\kappa v$, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$, e para todo $t \in [0, 1]$ e $s \in [0, 1 - t]$ temos $\det \bar{\Phi}_\gamma(s, \varphi^t(\omega)) = \gamma \det \Phi(s, \varphi^t(\omega))$ e $\|\bar{\Phi}_\gamma(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq (1 + \gamma)\|\Phi(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Phi(t, \omega)$ podemos escrever como

$$\Phi(t, \omega) = \begin{pmatrix} a(t, \omega) & b(t, \omega) \\ c(t, \omega) & d(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^t c(s, \omega) ds & \int_0^t d(s, \omega) ds \\ c(t, \omega) & d(t, \omega) \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\bar{\Phi}_\gamma(t, \omega) = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^t c(s, \omega) ds & \int_0^t \theta(s) d(s, \omega) ds \\ c(t, \omega) & \theta(t) d(t, \omega) \end{pmatrix},$$

onde $\theta(t)$ satisfaz $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = \gamma$ e para cada $\kappa \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ $z \in M$ temos que

$$\bar{\Phi}_\gamma(t, z) \kappa v = \gamma^t \Phi(t, z) \kappa v.$$

Além disso, $\det \bar{\Phi}_\gamma(t, z) = \gamma^t \det \Phi(t, z)$ e $\|\bar{\Phi}_\gamma(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq (1 + \gamma) \|\Phi(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\|$ para $t \geq 0$ e $z \in M$. Definimos agora uma perturbação $\bar{\Phi}_\gamma = \bar{\Phi}_{\omega, 0, \bar{\Phi}_\gamma}$ de Φ por $\bar{\Phi}_\gamma$ suportada em $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ seguindo a construção em (5.2.1), considerando $\tilde{\Phi}$ como $\bar{\Phi}_\gamma$. \square

Observe que mais do que esticar em uma direção conveniente dada pelo vetor v , também estamos interessados em seguir o rasto do vetor v pela dinâmica original Φ .

OBSERVAÇÃO 5.2. *Dado $\Phi \in \mathcal{F}$ e $\gamma > 0$ podemos construir uma perturbação $\hat{\Phi}_S$ de Φ suportada em uma caixa de fluxo $\varphi^{[0,1]}(B)$ definida por $\hat{\Phi}_S(t, \omega) = \Phi_{\omega', 0, \bar{\Phi}_\gamma}(t, \omega)$, com $\varphi^{-k(\omega)}(\omega) = \omega'$, onde $\bar{\Phi}_{\omega', 0, \bar{\Phi}_\gamma}$ é uma perturbação de Φ por $\bar{\Phi}_\gamma$ suportada em $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ como em (5.2.1). Se $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$ então também temos $\hat{\Phi}_S \in \mathcal{F}_{IC}^K$.*

LEMA 5.3. *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\sup_{0 \leq t \leq 1} \log^+ \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$;
- (ii) Para qualquer $b > 0$, $\sup_{0 \leq t \leq b} \log^+ \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$.

DEMONSTRAÇÃO. Claramente (ii) implica (i). O inverso segue das propriedades do cociclo. \square

5.3. O espectro simples é denso

Nesta secção provaremos a densidade do espectro simples tal como enunciado no Teorema 5.1.

DEMONSTRAÇÃO. (do Teorema 5.1) Sejam $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, $1 \leq p < \infty$ e $\varepsilon > 0$ dados. Assumimos que Φ tem um único expoente de Lyapunov λ_Φ . Consideramos o fluxo especial $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$ descrito na §4.1.2, com uma função de teto $h > 10$. Escrevemos

$$f^\pm(\omega) = \log^+ \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\|.$$

Como $\Phi \in \mathcal{F}_{IC}^K$, por (3.1.6) e pelo Lema 5.3 com $b = 4$, temos

$$\sup_{0 \leq t \leq 4} f^\pm(\omega) \in L^1(\mu).$$

Isto implica que existe um $r \in [0, 4]$ tal que, escrevendo $\hat{\Sigma} = \varphi^r(\Sigma)$, temos

$$\int_{\hat{\Sigma}} f^\pm(\omega) d\hat{\mu}(\omega) < \infty.$$

Em vista disso, existem $K_\Phi > 1$ e $\hat{V} \subseteq \hat{\Sigma}$ com $\hat{\mu}(\hat{V}) > 0$ tal que para todo $\omega \in \hat{V}$ e $t \in [0, 4]$ temos

$$\|\Phi(t, \omega)^{\pm 1}\| \leq \sqrt{K_\Phi},$$

o que implica que, devido à propriedade do cociclo, para todo $\omega \in \hat{V}$, $t \in [0, 4]$ e $s \in [0, 4 - t]$ temos

$$\|\Phi(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq K_\Phi.$$

Consideremos $\hat{U} \subset \hat{V}$ satisfazendo $0 < \hat{\mu}(\hat{U}) < \hat{\mu}(\hat{V})$. Para $i \in \{0, 1\}$ definimos a caixa de fluxo $\mathcal{V}_i = \varphi^{[i, i+1]}(\hat{V})$ e definimos ainda $\mathcal{V}_2 = \varphi^{[2, 3]}(\hat{U})$. Observemos que $\mu(\mathcal{V}_2) < \mu(\mathcal{V}_1)$. Para $i = 0, 1, 2$ definimos $\hat{V}_i = \varphi^i(\hat{V})$, com $\hat{V}_0 = \hat{V}$. Pela escolha de $\hat{\Sigma}$ e da altura da função de teto h , para $i = 0, 1$ temos $\varphi^1(\mathcal{V}_i) \cap \mathcal{V}_{i+1} = \hat{V}_{i+1}$ e $\varphi^1(\mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$. Vamos realizar perturbações de tempo 1 suportadas em \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 e, com isto, evitamos a sobreposição dos procedimentos. Recordemos que K_R e $v = (0, 1)$ como no Lema 5.1. Se necessário, podemos escolher \hat{V} menor tal que

$$\max\{2 \times 2^{\frac{1}{p}} K_\Phi (K_\Phi + K_R) \mu(\mathcal{V}_1)^{\frac{1}{p}}, 8K_R \hat{\mu}(\mathcal{V}_1)^{\frac{1}{p}} + 8K_R^2 \hat{\mu}(\mathcal{V}_2)^{\frac{1}{p}}\} < \varepsilon/2.$$

Definimos $k(\omega) = \inf_{t \geq 0} \{t : \varphi^{-t}(\omega) \in \hat{V}_2\}$ e o seguinte campo de vetores que consiste na imagem normalizada do vetor v pelo cociclo Φ :

$$g(\omega) := \begin{cases} v, & \text{se } \omega \in \hat{V}_2, \\ \frac{\Phi(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v}{\|\Phi(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v\|}, & \text{se } \omega \notin \hat{V}_2. \end{cases}$$

e seja $E(\omega) = \text{span}\{g(\omega)\}$. Seja $\hat{\Phi}_R$ uma perturbação de Φ suportada na caixa de fluxo \mathcal{V}_1 como no Lema 5.1 e na Observação 5.1, tal que para todo $\omega \in \hat{V}_1$ temos $\hat{\Phi}_R(1, \omega)g(\omega) = \kappa v$ para algum $\kappa \in \mathbb{R}$.

Veremos agora que $\rho_p(\Phi, \hat{\Phi}_R) < \varepsilon/2$. Recordemos que

$$\sigma_p^\pm(\Phi, \hat{\Phi}_R) = \left(\int_M \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Temos

$$\int_{M \setminus (\mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu = 0,$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}_0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V})} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V})} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|(\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\Phi(1-r, \omega))^{\pm 1} \\ & \quad - (\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\Phi(1-r, \omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V})} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1} \\ & \quad - \Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \|\Phi(1-r, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V})} \sup_{1-r \leq t \leq 1} (\|\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\| + \|\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|)^p \\ & \quad \cdot \|\Phi(1-r, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq (K_\Phi + K_R)^p K_\Phi^p \mu(\mathcal{V}_0) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}_1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|(\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\Phi(1-r, \omega))^{\pm 1} - \\ & \quad - (\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\Phi_R(1-r, \omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \\ & \quad \cdot \|\Phi(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1} - \Phi_R(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \\ & \quad \cdot (\|\Phi(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\| + \|\Phi_R(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|)^p d\hat{\mu} dr \\ &\leq K_\Phi^p (K_\Phi + K_R)^p \mu(\mathcal{V}_1). \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos consideramos nas integrais acima que $t \geq 1 - r$. Se não for o caso, o integrando também pode ser estimado superiormente apenas por $(K_\Phi + K_R)^p$ e o resultado segue da mesma maneira. Assim, temos

$$\sigma_p^\pm(\Phi, \hat{\Phi}_R) \leq 2^{\frac{1}{p}} K_\Phi (K_\Phi + K_R) \hat{\mu}(\hat{V})$$

e

$$\begin{aligned} \rho_p(\Phi, \hat{\Phi}_R) &\leq \sigma_p^+(\Phi, \hat{\Phi}_R) + \sigma_p^-(\Phi, \hat{\Phi}_R) \\ &\leq 2 \times 2^{\frac{1}{p}} K_\Phi (K_\Phi + K_R) \hat{\mu}(\hat{V})^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Se o espectro de Lyapunov $\hat{\Phi}_R$ for simples, então o resultado está demonstrado. Vamos supor que este espectro é trivial com um único expoente de Lyapunov λ_R de multiplicidade 2.

Seja $\gamma \in (1, 2)$ arbitrário e considere-o para construir uma perturbação $\hat{\Phi}_S$ de $\hat{\Phi}_R$ suportada na caixa de fluxo \mathcal{V}_2 , como no Lema 5.2 e na Observação 5.2. Recordemos que $\hat{\Phi}_S \in \mathcal{F}_{IC}^K$ e para todo $\omega \in \hat{V}_2$ temos $\hat{\Phi}_S(1, \omega)\kappa v = \gamma \Phi(1, \omega)\kappa v$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$. Além disso, para todo $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 1 - r]$, $s \in [0, 1 - r - t]$ e $\omega \in \varphi^r(\hat{V}_2)$ temos

$$\det \hat{\Phi}_S(s, \varphi^t(\omega)) = \gamma \det \Phi(s, \varphi^t(\omega))$$

e

$$\|\hat{\Phi}_S(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\| \leq (1 + \gamma) \|\Phi(s, \varphi^t(\omega))^{\pm 1}\|.$$

Para todo $\omega \in M$ e $t \geq 0$ temos

$$\hat{\Phi}_R(t, \omega)(E(\omega)) = E(\varphi^t(\omega)) \quad \text{e} \quad \hat{\Phi}_S(t, \omega)(E(\omega)) = E(\varphi^t(\omega)).$$

Sejam $\lambda_S^1 \geq \lambda_S^2$ os expoentes de Lyapunov de $\hat{\Phi}_S$. Pelo teorema ergódico multiplicativo,

$$2\lambda_R = \int \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu \quad \text{e} \quad \lambda_S^1 + \lambda_S^2 = \int \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu. \quad (5.3.1)$$

Veremos que $\lambda_S^1 \neq \lambda_S^2$ e, portanto, $\hat{\Phi}_S$ tem espectro simples. Primeiro veremos que para uma direção adequada (fornecida por $g(\omega)$) temos que os expoentes de Lyapunov $\lambda_S(\omega; g(\omega)) = \lambda(\hat{\Phi}_S, \omega, g(\omega))$ e $\lambda_R(\omega; g(\omega)) = \lambda(\hat{\Phi}_R, \omega, g(\omega))$ estão relacionados por

$$\lambda_S(\omega; g(\omega)) = \lambda_R(\omega; g(\omega)) + \mu(\mathcal{V}_2) \log \gamma. \quad (5.3.2)$$

Mais adiante, veremos que

$$\int \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu = (\mu(\mathcal{V}_1) + \mu(\mathcal{V}_2)) \log \gamma + \int \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu, \quad (5.3.3)$$

levando a uma contradição se $\lambda_S^1 = \lambda_S^2$. De fato, se $\lambda_S^1 = \lambda_S^2$, por (5.3.2) devemos ter

$$\lambda_S^1 + \lambda_S^2 = 2\lambda_R + 2\mu(\mathcal{V}_2) \log \gamma,$$

o que não é possível devido a (5.3.1) e (5.3.3) e que $\mu(\mathcal{V}_2) < \mu(\mathcal{V}_1)$.

Vamos começar com (5.3.2). Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, temos

$$\begin{aligned} \lambda_S(\omega; g(\omega)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\hat{\Phi}_S(t, \omega)g(\omega)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\gamma^{\int_0^t \chi_{\mathcal{V}_2}(\varphi^s(\omega)) ds} \hat{\Phi}_R(t, \omega)g(\omega)\| \\ &= \lambda_R(\omega; g(\omega)) + \mu(\mathcal{V}_2) \log \gamma. \end{aligned}$$

Agora, vamos demonstrar (5.3.3). Observemos que

$$\int_{M \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu = \int_{M \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)} \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu. \quad (5.3.4)$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_1} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log |\det(\hat{\Phi}_S(r, \varphi^{1-r}(\omega))\hat{\Phi}_R(1-r, \omega))| d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log \gamma + \log |\det(\Phi(r, \varphi^{1-r}(\omega)))| d\hat{\mu} dr \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_1} \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log |\det(\Phi(r, \varphi^{1-r}(\omega))\hat{\Phi}_R(1-r, \omega))| d\hat{\mu} dr \\ &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_1)} \log |\det(\Phi(r, \varphi^{1-r}(\omega)))| d\hat{\mu} dr \end{aligned}$$

e assim

$$\int_{\mathcal{V}_1} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu = \mu(\mathcal{V}_1) \log \gamma + \int_{\mathcal{V}_1} \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu. \quad (5.3.5)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}_2} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\mu &= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_2)} \log |\det(\hat{\Phi}_S(1, \omega))| d\hat{\mu} dr \\
&= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_2)} \log |\det(\hat{\Phi}_R(r, \varphi^{1-r}(\omega)) \hat{\Phi}_S(1-r, \omega))| d\hat{\mu} dr \\
&= \mu(\mathcal{V}_2) \log \gamma + \int_{V_2} \log |\det(\Phi(1, \omega))| d\hat{\mu} dr \quad (5.3.6)
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathcal{V}_2} \log |\det(\hat{\Phi}_R(1, \omega))| d\mu = \int_{\hat{V}_2} \log |\det(\Phi(1, \omega))| d\hat{\mu} dr.$$

Por (5.3.4), (5.3.5) e (5.3.6) concluimos (5.3.3).

Vamos demonstrar agora que $\rho_p(\hat{\Phi}_R, \hat{\Phi}_S) < \varepsilon/2$ e assim $\rho_p(\Phi, \hat{\Phi}_S) < \varepsilon$. Observe-mos que

$$\int_{M \setminus (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\hat{\Phi}_S(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}_1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\hat{\Phi}_S(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu \\
&= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|\hat{\Phi}_S(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|(\hat{\Phi}_S(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega)) \hat{\Phi}_R(1-r, \omega))^{\pm 1} - \\
&\quad - (\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega)) \Phi_R(1-r, \omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{1-r \leq t \leq 1} \|\hat{\Phi}_S(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1} - \Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \cdot \\
&\quad \cdot \|\Phi_R(1-r, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{V}_1)} \sup_{1-r \leq t \leq 1} (\|\hat{\Phi}_S(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\| + \|\hat{\Phi}_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|)^p \cdot \\
&\quad \cdot \|\Phi_R(1-r, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq ((1+\gamma)K_R + K_R)^p K_R^p \mu(\mathcal{V}_1) \\
&< 4^p K_R^p \mu(\mathcal{V}_1).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}_2} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\mu \\
&= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_2)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\hat{\Phi}_S(t, \omega)^{\pm 1} - \hat{\Phi}_R(t, \omega)^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&= \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_2)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|(\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\hat{\Phi}_S(1-r, \omega))^{\pm 1} - \\
&\quad - (\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))\Phi_R(1-r, \omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_2)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \cdot \\
&\quad \cdot \|\hat{\Phi}_S(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1} - \Phi_R(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq \int_0^1 \int_{\varphi^r(\hat{\mathcal{V}}_2)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi_R(t-1+r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|^p \cdot \\
&\quad \cdot (\|\hat{\Phi}_S(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\| + \|\Phi_R(r, \varphi^{1-r}(\omega))^{\pm 1}\|)^p d\hat{\mu} dr \\
&\leq K_R^p((1+\gamma)K_R + K_R)^p \mu(\mathcal{V}_2) \\
&< 4^p K_R^{2p} \mu(\mathcal{V}_2)
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\rho_p(\hat{\Phi}_S, \hat{\Phi}_R) &\leq \sigma_p^+(\hat{\Phi}_S, \hat{\Phi}_R) + \sigma_p^-(\hat{\Phi}_S, \hat{\Phi}_R) \\
&\leq 8K_R \hat{\mu}(\mathcal{V}_1)^{\frac{1}{p}} + 8K_R^2 \hat{\mu}(\mathcal{V}_2)^{\frac{1}{p}} \\
&< \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

□

Bibliografia

- [1] W. Ambrose, S. Kakutani, *Structure and continuity of measure preserving transformations*, Duke Math. J., 9: (1942), 25–42.
- [2] A. Arbieto, J. Bochi, *L^p -generic cocycles have one-point Lyapunov spectrum*, Stochastics and Dynamics 3 (2003) 73–81. Corrigendum. *ibid*, 3 (2003) 419–420.
- [3] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1998.
- [4] L. Arnold, N. Cong, *Generic properties of Lyapunov exponents*, Random Comput. Dynam. 2(3-4) (1994) 335–345.
- [5] L. Arnold, N. Cong, *On the simplicity of the Lyapunov spectrum of products of random matrices*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 17 (1997) 1005–1025.
- [6] L. Arnold, H. Crauel, J.-P. Eckmann, editors *Lyapunov Exponents*. Proceedings, Oberwolfach 1990, volume 1486 of Springer Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1991).
- [7] L. Arnold, V. Wihstutz, editors, *Lyapunov Exponents*. Proceedings, Bremen 1984, volume 1186 of Springer Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1986).
- [8] L. Arnold, G. Papanicolaou and V. Wihstutz, *Asymptotic Analysis of the Lyapunov Exponent and Rotation Number of the Random Oscillator and Applications*, SIAM J. APPL. MATH. Vol. 46, No. 3, June (1986).
- [9] V.I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir Moscovo, (1985).
- [10] A. Avila, *Density of positive Lyapunov exponents for $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles*, J. Amer. Math. Soc. 24 (4) (2011) 999–1014.
- [11] L. Barreira, Ya. Pesin, *Introduction to Smooth Ergodic Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 148, American Mathematical Society, (2013).
- [12] M. Bessa, *Dynamics of generic 2-dimensional linear differential systems*, J. Differential Equations 228 (2) (2006) 685–706.
- [13] M. Bessa, *Perturbations of Mathieu equations with parametric excitation of large period* Advances in Dynamical Systems and Applications, 7, 1, (2012) 17–30.
- [14] M. Bessa, J. Bochi, M. Cambrinha, C. Matheus, P. Varandas and D. Xu, *Positivity of the Top Lyapunov Exponent for Cocycles on Semisimple Lie Groups over Hyperbolic Bases*, Bull Braz Math Soc, New Series (2018) 49:73–87.

- [15] M. Bessa, H. Vilarinho, *Fine properties of L^p -cocycles which allows abundance of simple and trivial spectrum*. Journal of Differential Equations, 256, 7 (2014) 2337–2367.
- [16] J. Bochi, *Genericity of zero Lyapunov exponents*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 22 (2002) 1667–1696.
- [17] J. Bochi, M. Viana, *The Lyapunov exponents of generic volume-preserving and symplectic maps*, Ann. of Math. 161 (3) (2005) 1423–1485.
- [18] C. Bonatti, X. Gómez-Mont, M. Viana, *Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20, 579–624 (2003).
- [19] C. Bonatti, M. Viana, *Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 24, 1295–1330 (2004).
- [20] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, New York (2006).
- [21] N. D. Cong, *A generic bounded linear cocycle has simple Lyapunov spectrum*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2005), 25, 1775–1797.
- [22] E. Cornelis, M. Wojtkowski, *A criterion for the positivity of the Liapunov characteristic exponent*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 4 (1984) 527–539.
- [23] C. I. Doering, A. O. Lopes, *Equações diferenciais ordinárias*, 6.ed. Rio de Janeiro, IMPA (2016).
- [24] Duarte, P., Klein, S., *Positive Lyapunov exponents for higher dimensional quasiperiodic cocycles*. Commun. Math. Phys. 332(1), 189219 (2014).
- [25] R. Fabbri, *Genericity of hyperbolicity in linear differential systems of dimension two*, (Italian) Boll. Unione Mat. Ital., Sez. A, Mat. Soc. Cult. 8 (1) Suppl. (1998) 109–111.
- [26] R. Fabbri, R. Johnson, *Genericity of exponential dichotomy for two-dimensional differential systems*, Ann. Mat. Pura Appl. IV. Ser. 178 (2000) 175–193.
- [27] R. Fabbri, R. Johnson, *On the Lyapounov exponent of certain $SL(2, \mathbb{R})$ -valued cocycles*, Differ. Equ. Dyn. Syst. 7 (3) (1999) 349–370.
- [28] R. Fabbri, R. Johnson, L. Zampogni, *On the Lyapunov exponent of certain $SL(2, \mathbb{R})$ -valued cocycles II*, Differ. Equ. Dyn. Syst. 18 (1-2) (2010) 135–161.
- [29] X. Feng, K. Loparo, *Almost sure instability of the random harmonic oscillator*, SIAM J. Appl. Math. 50, 3, (1990) 744–759.
- [30] R. Johnson, K. Palmer, G. Sell, *Ergodic properties of linear dynamical systems*, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987) 1–33.
- [31] A. Katok, B. Hasselblat, *A moderna teoria de sistemas dinâmicos*, Fundação Calouste Gulbenkian, (1999).
- [32] O. Knill, *Positive Lyapunov exponents for a dense set of bounded measurable $SL(2, R)$ cocycles*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 12 (2) (1992) 319–331.

- [33] F. Ledrappier: *Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices*. In: Arnold, L., Wihstutz, V. (eds.) *Lyapunov Exponents* (Bremen, 1984). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1886, pp. 5673, Springer, New York (1986).
- [34] A. Leizarowitz, *On the Lyapunov exponent of a harmonic oscillator driven by a finite-state Markov process*, SIAM J. Appl. Math., 49, 2, (1989) 404–419.
- [35] R. Mañé, *Introdução à Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1983).
- [36] V. M. Millionshchikov, *Systems with integral separateness which are dense in the set of all linear systems of differential equations*, Differential Equations 5 (1969) 850–852.
- [37] M. Nerurkar, *Positive exponents for a dense set of continuous cocycles which arise as solutions to strongly accessible linear differential systems*, Contemp. Math. Ser. AMS 215 (1998) 265–278.
- [38] V. L. Novikov, *Almost reducible systems with almost periodic coefficients*, Mat. Zametki 16 (1974) 789–799.
- [39] V. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Transl. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197–231.
- [40] J.F. Ritt, *Integration in Finite Terms*, Columbia University Press, New York (1948).
- [41] D. Rudolph, *A Two-Valued Step Coding for Ergodic Flows*, Math. Z. 150 (1976) 201–220.
- [42] M. Viana, *Almost all cocycles over any hyperbolic system have nonvanishing Lyapunov exponents*, Ann. of Math. 167 (2) (2008) 643–680.
- [43] M. Viana, *Lectures on Lyapunov exponents*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 145. Cambridge University Press, Cambridge, (2014).
- [44] M. Viana, and K. Oliveira, *Foundations of Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (2016).
- [45] L. Ya Adrianova, *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, American Mathematical Society, USA, (1995).
- [46] D. Xu, *Density of positive Lyapunov exponents for symplectic cocycles*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) (2017).