



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Faculdade de Engenharia

# **Análise e Controlo Robusto de Modos de Funcionamento Caóticos em Sistemas Aeroespaciais**

**Carlos Miguel Nóbrega Velosa**

Tese para Obtenção do Grau de Doutor em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**Covilhã, julho de 2016**

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

A investigação apresentada nesta tese decorreu na Unidade de Investigação LAETA-UBI/AeroG (Laboratório Associado de Energia, Transportes e Aeronáutica), foi realizada integralmente no Laboratório de Controlo e Aviónica do Departamento de Ciências Aeroespaciais (DCA) da Universidade da Beira Interior (UBI), Covilhã - Portugal, e submetida a avaliação numa sessão de defesa pública.



**AeroG**



A presente investigação foi suportada financeiramente pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), com uma Bolsa individual de Doutoramento (BD), de referência SFRH/BD/77798/2011, no âmbito do programa QREN/POPH - Tipologia 4.1 - Formação Avançada, participado pelo Fundo Social Europeu (FSE) e por fundos nacionais do Ministério da Educação e Ciência (MEC).

## **FCT** Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA



(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Agradecimentos

Esta tese de doutoramento é fruto de uma jornada de trabalho árduo e muita dedicação ao longo de um período de três anos e meio. No decorrer deste percurso tive, naturalmente, o privilégio de contar com a confiança e com o apoio de algumas pessoas e instituições, e portanto, é com uma enorme satisfação e orgulho que aproveito esta oportunidade para agradecer formalmente a todos os que contribuíram positivamente para que mais uma etapa importante da minha vida profissional se concretizasse.

Em primeiro lugar, agradeço ao Professor Doutor Kouamana Bousson, orientador científico desta tese, que acreditou desde início nas minhas capacidades e me convidou a integrar o mais elevado grau académico concedido em engenharia aeronáutica, com um tema de extrema relevância, pouco explorado na literatura e de grande interesse na atualidade. A sua sabedoria, experiência, entusiasmo e rigor científico marcaram definitivamente a forma de como passei a encarar a investigação, em particular, o gosto que adquiri pelo controlo de sistemas dinâmicos, e conduziram-me, de certa forma, a mirar no verdadeiro doutor e cientista que ele é. Obrigado pelos preciosos ensinamentos, pelo conhecimento transferido pessoa a pessoa que muito dificilmente se consegue encontrar através de livros, pelas sugestões e críticas construtivas, e pela forma sábia com que orientou esta tese. Obrigado igualmente por ter depositado total confiança na maneira de como trabalho e por me ter permitido escolher, dentro do tema obviamente, e sem sobrepor os seus interesses profissionais, o meu próprio caminho e desenvolver este trabalho com completa autonomia. Por um outro lado, agradeço pela disponibilidade, pelas palavras companheiras e de motivação transmitidas nos momentos de maior tensão, e apenas quando realmente necessárias, pois não tenho quaisquer dúvidas que esta abordagem me ajudou a tornar mais forte e que contribuiu efetivamente para o meu crescimento tanto a nível profissional como pessoal.

Seguidamente, um especial agradecimento é dirigido à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), pelo financiamento de uma Bolsa Individual de Doutoramento, com referência SFRH/BD/77798/2011, sem a qual, dadas as circunstâncias, a natureza e a dimensão do trabalho em causa, teria comprometido tal oportunidade de formação avançada, uma vez que possivelmente teria enveredado por um outro caminho.

Segue-se um agradecimento estimável ao Departamento de Ciências Aeroespaciais (DCA) da Universidade da Beira Interior (UBI), e em particular, à Unidade de Investigação LAETA-UBI/AeroG (Laboratório Associado de Energia, Transportes e Aeronáutica), por me ter acolhido, apoiado, fornecido todo o material indispensável à realização deste trabalho, bem como por me ter proporcionado uma atmosfera de trabalho excelente.

Um especial agradecimento dirige-se à Nathalie Nogueira de Andrade, pela sua presença constante ao longo deste percurso académico, pela paciência demonstrada, pela cumplicidade, pela inspiração e alegria que ajudaram a tornar menos densos os momentos de maior cansaço e de tensão, bem como pelo incentivo constante e motivação que ajudaram a reforçar a minha vontade e determinação. Decerto que não é algo que se possa escrever no papel, mas sim que se possa partilhar ao longo da vida. No entanto ... obrigado!

Por último, tendo consciência que o companheirismo, a amizade e a convivência são igualmente importantes ao longo de qualquer jornada, expresso o meu agradecimento a todos os colegas, em particular ao Christian Rodrigues e ao Luís Costa, que me acompanharam ao longo de toda esta caminhada, proporcionando discussões relevantes e intelectuais tanto na área de engenharia como de carácter geral, bem como diversos momentos de divertimento e descontração nas boas e nas menos boas ocasiões.

A todas as pessoas e instituições que contribuíram ... o meu sincero obrigado!

# Resumo

O movimento caótico é um tipo de movimento complexo, irregular e imprevisível semelhante ao aleatório que é altamente sensível às condições iniciais e à variação de parâmetros, e que resulta da sobreposição de um número infinito de órbitas periódicas instáveis produzidas por um sistema não-linear determinístico. O caos pode ser desejável ou não dependendo da aplicação. Contudo, um comportamento incerto e desconhecido não é certamente desejado em problemas de engenharia, e nesse sentido, ser capaz de detetar de forma automática transições inesperadas de um movimento regular para caótico torna-se uma tarefa crucial, especialmente em aplicações críticas como em sistemas aeroespaciais e aeronáuticos.

Por outro lado, dado que qualquer sistema não-linear pode vir a exibir um comportamento caótico mesmo que tenha sido projetado para operar num regime bem regular (através de uma ligeira variação de parâmetros ou se o sistema estiver sob o efeito de perturbações externas de características específicas), um sistema de controlo adequado para suprimir eventuais movimentos caóticos tem de garantir robustez contra incertezas paramétricas e perturbações. Além disso, em aplicações altamente exigentes como em sistemas aeroespaciais/aeronáuticos, um sistema de controlo tem de lidar não só com restrições de magnitude nas entradas do sistema mas também com restrições nas taxas devido às limitações físicas dos atuadores, caso contrário o sistema controlado pode-se tornar instável levando possivelmente a um cenário catastrófico.

A presente tese contribui com duas conquistas principais: primeiramente, com um novo algoritmo de deteção de caos em tempo-real e eficaz mesmo na presença de níveis consideráveis de ruído nas medições; e em segundo lugar, com várias extensões de técnicas de controlo linear modernas para o controlo e sincronização de saída robusta de sistemas caóticos contínuos no tempo (sistemas não-lineares por natureza) sujeitos a restrições nas magnitudes e nas taxas dos atuadores.

A ideia-chave por detrás do novo detetor de caos reside no facto de que uma única componente de uma trajetória caótica tende a exibir um número infinito de máximos locais em diferentes intervalos temporais. O facto de que o ruído nas medições não pode ser evitado em sistemas reais torna o problema ainda mais desafiante e este é ultrapassado engenhosamente com recurso a um sistema auxiliar que atua como redutor de ruído. De seguida, recorrendo a um conjunto de operações matemáticas simples é estabelecido um parâmetro que caracteriza o tipo de movimento com base num determinado limiar.

A estratégia de resolução do problema de controlo robusto com restrições no controlo consiste, numa primeira fase, em decompor o sistema não-linear numa parte linear

estabilizável mais uma parte não-linear restante. Seguidamente, com a ajuda de um sistema auxiliar, os sinais de referência são gerados em simultâneo com estes termos não-lineares e leis de controlo são projetadas para estabilizar um sistema aumentado resultante. O sistema aumentado é estabilizado através da sua parte linear e os sinais de referência são vistos juntamente com os termos não-lineares como uma única perturbação limitada. Numa primeira abordagem, é considerado restrições simétricas nas magnitudes e nas taxas dos atuadores e estas são impostas por um operador diferencial funcional. Numa segunda abordagem, as restrições são impostas de forma diferente para se conseguir restrições assimétricas nas magnitudes. A terceira abordagem lida com restrições simétricas e a lei de controlo é projetada com base na teoria do controlo  $H_\infty$  para garantir, de forma concreta, robustez contra incertezas paramétricas. Uma última abordagem é ainda apresentada, permitindo o controlo/sincronização sem o conhecimento do modelo de referência. Nesta em particular, o sistema aumentado é composto de uma maneira diferente, compreendendo o sistema propriamente dito e o integral do erro da saída, e o controlo robusto é alcançado em duas fases: primeiro, com um controlo baseado numa generalização de uma função de Lyapunov; e de seguida com um Regulador Linear Quadrático (LQR) com um grau de estabilidade especificado.

Simulações numéricas são efetuadas em MATLAB® para validar a eficácia e a robustez das técnicas apresentadas. O detetor de caos e as técnicas de controlo são aplicados a um sistema caótico clássico (sistema de Lorenz) e a sistemas aeroespaciais/aeronáuticos de relevância (movimento de atitude de um veículo espacial; movimento de atitude de um veículo espacial numa órbita elítica; dinâmica de um giróstato eletromecânico; posição de um veículo espacial no problema restrito de três corpos; sistema aeroelástico). Por fim, é apresentado um caso de síntese onde o detetor é aplicado acoplado a um dos controladores para atestar a eficácia de ambos em simultâneo, suprimindo eventuais movimentos de atitude caóticos num veículo espacial induzidos por torques perturbadores existentes no espaço.

No que diz respeito ao detetor de caos, os resultados mostram que a distinção é bastante clara e que a deteção em tempo-real é eficaz mesmo quando os sinais medidos estão corrompidos com Relações de Sinal-Ruído consideravelmente baixas. O detetor proposto é de fácil implementação e bastante eficiente do ponto de vista computacional, contrariamente a outras ferramentas de deteção de caos.

Relativamente ao controlo, os resultados mostram que as abordagens propostas são realmente eficazes. O controlo/sincronização de saída é alcançado com sucesso, garantindo robustez contra incertezas e sem exceder as restrições de entrada. As leis de controlo são estáticas, facilmente implementáveis e não exigem grandes esforços computacionais dado que os parâmetros dos controladores são todos calculados *offline*. Além do mais, as soluções apresentadas contribuem efetivamente para as mais avançadas técnicas de controlo abertas à

comunidade, na medida que têm em consideração restrições nas magnitudes e nas taxas do controlo, opostamente a outras técnicas de controlo que não consideram qualquer tipo de restrições e que são requeridas particularmente em sistemas aeroespaciais.

## **Palavras-Chave**

Sistemas Caóticos, Detecção de Caos, Controlo Robusto, Sincronização de Saída, Restrições nos Atuadores, Veículo Espacial, Movimento de Atitude, Giróstato, Sistema Aeroelástico.

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Abstract

The chaotic motion is a complex, irregular and unpredictable random-like type of motion highly sensitive to initial conditions and to parameter changes, which results from a superposition of an infinite number of unstable periodic orbits produced by a deterministic nonlinear system. Chaos may be desirable or not depending on the application. However, an unknown and uncertain behaviour is surely not desired in engineering problems, and in that sense, be able to detect in an automatic way unexpected transitions from a regular- to a chaotic- motion becomes a crucial task, particularly in critical applications such as in aerospace and aeronautical systems.

On the other hand, since any nonlinear system may come to exhibit a chaotic behaviour even it has been designed to operate in a well regular regime (through a slight variation of the parameters or if the system is under the effect of external disturbances with specific characteristics), a proper control system to suppress eventual chaotic motions must ensure robustness against parametric uncertainties and disturbances. In addition, in highly demanding applications such as in aerospace/aeronautical systems, a control system must deal not only with magnitude input constraints but also with rate input constraints due to the physical limitations of the actuators, otherwise the controlled system may become unstable leading possibly to a catastrophic scenario.

The present thesis contributes with two main achievements: firstly with a new algorithm of chaos detection in real time and effective even in the presence of considerable levels of measurement noise; and secondly with several extensions of modern linear control techniques for robust output control and synchronization of continuous-time chaotic systems (nonlinear systems by nature) subject to magnitude and rate actuator constraints.

The key idea behind the new chaos detector lies in the fact that a single component of a chaotic trajectory tends to exhibit an infinite number of local maxima at different time-instants. The fact that measurement noise cannot be avoided in real-world systems makes the problem even more challenging and is ingeniously overcome by using an auxiliary system acting as a denoiser. Then, resorting to a simple set of mathematical operations it is established a parameter that characterizes the type of motion based on a specified threshold.

The strategy to solve the robust and constrained control problem consists, in a first stage, in decomposing the nonlinear system into a stabilizable linear part plus a remaining nonlinear part. Then, with the help of an auxiliary system, the desired reference signals, that is, the signals intended to be tracked, are generated simultaneously with these nonlinear terms and control laws are designed to stabilize a resulting augmented system. The augmented system is

stabilized through and only through its linear part and the reference signals are seen together with the nonlinear terms as a unique and bounded disturbance. In a first approach, it is considered symmetric constraints on magnitudes and rates and these are imposed by a functional differential operator. In a second approach, the constraints are enforced in a different way to achieve asymmetric constraints on magnitudes. The third approach deals with symmetric constraints and the control law is designed based on the  $H_\infty$  control theory to ensure, in concrete way, robustness against parametric uncertainties. One last approach is yet presented, allowing a control/synchronization without knowledge of the reference model. In this in particular, the augmented system is composed in a different way, comprising the system itself and the integral of the output error, and the robust control is achieved in two steps: first, with a control based on a generalization of the Lyapunov function; and then with a Linear-Quadratic Regulator (LQR) with a prescribed degree of stability.

Numerical simulations are performed in MATLAB® to validate the effectiveness and robustness of the proposed techniques. The chaos detector and the control techniques are applied to a classic chaotic system (Lorenz system) and to relevant aerospace/aeronautical systems (attitude motion of a spacecraft; attitude motion of a spacecraft in an elliptical orbit; dynamic of an electromechanical gyrostator; position of a spacecraft in a restricted three-body problem; aeroelastic system). Lastly, it is presented a synthesis case where the detector is applied together with one of the controllers to attest the effectiveness of both, whose purpose is to suppress eventual chaotic attitude motions in a spacecraft induced by perturbing torques existing in space.

With respect to the chaos detector, the results show that the distinction is very clear and that the detection, in real time, is effective even when the measured signals are corrupted with considerably low Signal-to-Noise Ratios. The proposed detector is easily-implementable and quite efficient from the computational point of view, as opposed to other chaos detection tools.

As regards to the control, the results show that the proposed approaches are truly effective. The output control/synchronization is successfully achieved guaranteeing robustness against uncertainties and without exceeding the input constraints. The control laws are static, easily-implementable and do not require much computational effort since the controller(s) parameters are all computed offline. Furthermore, the current solutions contribute effectively for the most advanced control techniques open to community, insofar as they take into account both magnitude and rate actuator constraints, as opposed to other control techniques which do not consider any kind of constraints and that are particularly required in aerospace systems.

# Keywords

Chaotic Systems, Chaos Detection, Robust Control, Output Synchronization, Actuator Constraints, Spacecraft, Attitude Motion, Gyrostat, Aeroelastic System.

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Índice

Agradecimentos .....	v
Resumo .....	vii
Palavras-Chave .....	ix
Abstract .....	xi
Keywords .....	xiii
Índice .....	xv
Lista de Figuras.....	xix
Lista de Tabelas .....	xxv
Lista de Acrónimos .....	xxvii
Lista de Símbolos.....	xxix
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1. Enquadramento .....	1
1.1.1. O que é um sistema caótico? .....	1
1.1.2. Uma breve história sobre a teoria do caos .....	3
1.1.3. Onde pode surgir o comportamento caótico? .....	9
1.1.4. Os mecanismos que levam ao caos .....	11
1.2. Motivações.....	13
1.3. Objetivos da Investigação .....	15
1.4. Estrutura da Tese .....	16
<b>2. Métodos de Análise e de Controlo de Caos .....</b>	<b>19</b>
2.1. Análise / Detecção de Caos.....	19
2.1.1. Análise da Evolução Temporal e do Espaço de Fases.....	19
2.1.2. Secções de Poincaré.....	19
2.1.3. Diagramas de Bifurcações .....	20
2.1.4. Expoentes de Lyapunov .....	21
2.1.5. Análise Espectral .....	22
2.1.6. Função de Autocorrelação.....	23
2.1.7. Função de Melnikov.....	23
2.1.8. Análise de Trajetórias Vagantes.....	25
2.1.9. Análise através de Injeção de Ruído.....	25
2.1.10. Teste 0-1 .....	26
2.1.11. Teste de Três Estados (3ST) .....	27
2.2. Problemática dos Métodos de Detecção de Caos .....	28
2.3. Métodos de Controlo / Sincronização de Caos .....	28
2.3.1. Método OGY (Linearização do Mapa de Poincaré) .....	28

2.3.2. Método de Pyragas (Realimentação Atrasada).....	29
2.3.3. Linearização por Realimentação .....	30
2.3.4. <i>Backstepping Control</i> .....	31
2.3.5. Controlo Robusto .....	31
2.3.6. Controlo Adaptativo .....	32
2.3.7. Controlo Preditivo .....	33
2.3.8. Controlo com base em LMI's .....	33
2.3.9. Controlo Difuso (Lógica <i>Fuzzy</i> ) .....	34
2.3.10. Controlo Ótimo .....	34
2.4. Problemática dos Métodos de Controlo de Caos.....	35
<b>3. Detecção Robusta de Caos em Tempo-Real.....</b>	<b>37</b>
<b>4. Controlo Robusto de Sistemas Caóticos com Restrições nos Atuadores .....</b>	<b>43</b>
4.1. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores .....	43
4.2. Controlo de Saída com Restrições Assimétricas nas Magnitudes e Simétricas nas Taxas dos Atuadores .....	47
4.3. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores Tendo em Conta de Forma Explícita Incertezas Paramétricas no Modelo.....	53
4.4. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores sem Conhecimento Prévio do Modelo de Referência.....	58
4.4.1. Controlo de Korobov .....	63
4.4.2. LQR com Grau de Estabilidade Especificado .....	67
<b>5. Validação e Discussão das Técnicas Propostas.....</b>	<b>69</b>
5.1. Aplicação do Algoritmo de Detecção de Caos .....	69
5.1.1. Aplicação 1: Sistema em Forma de Borboleta tipo Lorenz (Sistema Clássico) .....	69
5.1.2. Aplicação 2: Atitude de um Veículo Espacial Rígido e Magnético numa Órbita Elítica .....	71
5.1.3. Aplicação 3: Dinâmica de um Giróstato Eletromecânico .....	74
5.1.4. Discussão do Algoritmo de Detecção de Caos .....	76
5.1.5. Análise da Complexidade Computacional do Algoritmo de Detecção.....	78
5.2. Aplicação das Técnicas de Controlo .....	79
5.2.1. Aplicação 1: Sistema de Lorenz (Sistema Clássico).....	79
5.2.2. Aplicação 2: Atitude de um Veículo Espacial .....	100
5.2.3. Aplicação 3: Posição de um Veículo Espacial (PCR3BP).....	109
5.2.4. Aplicação 4: Sistema Aeroelástico (Asa de um Avião).....	117
5.3. Aplicação do Algoritmo de Detecção + Controlo.....	137

5.3.1. Aplicação 1: Atitude de um Veículo Espacial .....	137
<b>6. Conclusões e Sugestões para Futuras Investigações .....</b>	<b>147</b>
6.1. Conclusões.....	147
6.2. Sugestões para Futuras Investigações .....	150
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>153</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>165</b>
Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias.....	165
A.1. Método de Runge-Kutta .....	165
A.2. Método de Runge-Kutta-Butcher .....	165
Anexo B - Diferenciação e Integração Numérica .....	166
B.1. Diferenciação Numérica.....	166
B.2. Integração Numérica .....	167
Anexo C - Resolução das Equações de Regulação .....	168
Anexo D - Resolução da Equação de Riccati do Tipo $H_\infty$ .....	169
Anexo E - Glossário .....	169

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Lista de Figuras

Figura 1.1. Evolução de uma variável de estado de um sistema caótico ao longo do tempo,  $x(t)$ . Duas trajetórias,  $x^*(t)$  e  $x^{**}(t)$ , que se iniciem muito próximas,  $x^*(0) \approx x^{**}(0)$ , acabam por se separar exponencialmente findo algum tempo devido às não-linearidades do sistema. .1

Figura 1.2. Uma das possíveis trajetórias de um corpo de massa infinitesimal sob a influência gravítica de outros dois de maior massa, a qual evidencia o caráter complexo e altamente imprevisível da sua posição num problema de apenas três corpos. ....4

Figura 1.3. Atrator de Lorenz projetado no plano  $(x, z)$ , cuja forma geométrica aparenta as asas de uma borboleta. ....5

Figura 1.4. Diagrama de bifurcações do mapa logístico. ....7

Figura 1.5. Esboço de um diagrama de bifurcações. A razão entre as distâncias entre sucessivas bifurcações é constante e igual à constante de Feigenbaum:  $\delta \cong 4.669$ . ....8

Figura 1.6. Vista em perspectiva ilustrando a convergência geométrica da razão entre distâncias de sucessivas eólicas igualmente distribuídas numa dada direção.<sup>2</sup> ....8

Figura 1.7. Folha de um feto - exemplo de um fractal natural.<sup>3</sup> ....9

Figura 1.8. Triângulo de Sierpinski - exemplo de um fractal gerado computacionalmente.<sup>4</sup> ....9

Figura 3.1. Determinação da janela de observação: instantes para os quais  $z_2$  apresenta máximos locais (maximizantes do sinal  $z_2$ ). .... 38

Figura 3.2. Representação dos  $\Delta t_m$  por ordem ascendente - gráfico superior; e representação dos  $\Delta(\Delta t_m)$  (linha preta/sólida) e  $\Delta(\Delta t_m)$  com picos isolados removidos (linha vermelha/tracejada) - gráfico inferior. .... 39

Figura 5.1. Atrator caótico para  $g = 3.9$ . .... 70

Figura 5.2. Diagrama de bifurcações da variável  $x_1$ . .... 70

Figura 5.3. Detecção de caos no sistema com atrator em forma de borboleta (tipo Lorenz). .. 71

Figura 5.4. Movimento periódico para  $\alpha = 0.336$ . .... 72

Figura 5.5. Movimento caótico para  $\alpha = 0.337$ . .... 72

Figura 5.6. Detecção de caos no movimento de atitude de um veículo espacial rígido e magnético numa órbita elítica. .... 73

Figura 5.7. Movimento periódico para  $f = 13.6$ . .... 75

Figura 5.8. Atrator caótico para  $f = 12.9$ . .... 75

Figura 5.9. Detecção de caos na dinâmica de um giróstato eletromecânico.....	76
Figura 5.10. Espaço de fases do sistema de Chua ( <i>double-scroll attractor</i> ). .....	80
Figura 5.11. Espaço de fases do sistema de Lorenz (atrator com aparência de uma borboleta). .....	80
Figura 5.12. Evolução temporal dos parâmetros do sistema de Lorenz. O comportamento resultante é regular para $t \in [0, 50[$ s e caótico para $t \in ]60, 120]$ s. A transição ocorre entre $t \in [50, 60]$ s. ....	84
Figura 5.13. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas. ....	84
Figura 5.14. Evolução temporal do erro da saída: $e_y = y_B - y_A$ . ....	85
Figura 5.15. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ u\ _\infty \leq 200$ . 85	
Figura 5.16. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ \dot{u}\ _\infty \leq 500$ . ....	86
Figura 5.17. Norma infinito do vetor de controlo: $\ u\ _\infty \leq 200$ . ....	86
Figura 5.18. Norma infinito da taxa do vetor de controlo: $\ \dot{u}\ _\infty \leq 500$ . ....	87
Figura 5.19. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua considerando que ambos os sistemas são sujeitos a ruído. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas. ....	88
Figura 5.20. Evolução temporal do erro da saída: $e_y = y_B - y_A$ . (considerando ruído). ....	88
Figura 5.21. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ u\ _\infty \leq 200$ . (considerando ruído). ....	89
Figura 5.22. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ \dot{u}\ _\infty \leq 500$ . (considerando ruído). ....	89
Figura 5.23. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas. A 1ª linha vertical preta/tracejada indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a 2ª o instante em que se dá a comutação para o LQR. ....	93
Figura 5.24. Evolução temporal do erro da saída: $e_y = y_B - y_A$ . ....	93
Figura 5.25. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ u\ _\infty \leq 250$ . 94	
Figura 5.26. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ \dot{u}\ _\infty \leq 2000$ . ....	94
Figura 5.27. Evolução temporal do integral do erro da saída. ....	95
Figura 5.28. Função de controlabilidade de Korobov explicitamente em função do tempo. ..	95
Figura 5.29. Parâmetros de Lorenz perturbados com 10% de ruído (WGN) em torno dos valores nominais. ....	97

Figura 5.30. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas. (Parâmetros de Lorenz perturbados). .....	97
Figura 5.31. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ u\ _{\infty} \leq 250$ . (Parâmetros de Lorenz perturbados). .....	98
Figura 5.32. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz: $\ \dot{u}\ _{\infty} \leq 2000$ . (Parâmetros de Lorenz perturbados). .....	98
Figura 5.33. Sistemas de coordenadas e representação da atitude de um veículo espacial rígido com ângulos de Euler.....	100
Figura 5.34. Atrator do tipo Lorenz: espaço de fases das velocidades angulares do veículo não-controlado, $u = 0$ . .....	106
Figura 5.35. Atitude do veículo espacial em termos de ângulos de Euler segundo os eixos $x'$ , $y'$ , $z'$ .....	106
Figura 5.36. Velocidades angulares do veículo espacial segundo os eixos $x$ , $y$ , $z$ . .....	107
Figura 5.37. Torques de controlo aplicados ao veículo segundo os eixos $x$ , $y$ , $z$ : $-200 \leq U_x \leq 150$ , $-150 \leq U_y \leq 150$ , $-150 \leq U_z \leq 200$ . .....	107
Figura 5.38. Taxas dos torques de controlo aplicados ao veículo: $ \dot{U}_x  \leq 3000$ , $ \dot{U}_y  \leq 2500$ , $ \dot{U}_z  \leq 2000$ . .....	108
Figura 5.39. Geometria do Problema Restrito de Três Corpos Plano e Circular (PCR3BP) com grandezas normalizadas. ....	110
Figura 5.40. Posição normalizada do veículo espacial no sistema Terra-Lua-Veículo. A trajetória azul/tracejada refere-se à posição do veículo sem controlo e a vermelha/sólida à posição com o controlo ativado. (plano de fase $(x, y)$ ). .....	114
Figura 5.41. Velocidade normalizada do veículo espacial no sistema Terra-Lua-Veículo. A trajetória azul/tracejada refere-se à velocidade do veículo sem controlo e a vermelha/sólida à velocidade com o controlo ativado. (plano de fase $(u, v)$ ).....	114
Figura 5.42. Posição normalizada do veículo espacial ao longo do tempo. ....	115
Figura 5.43. Velocidade normalizada do veículo espacial ao longo do tempo. ....	115
Figura 5.44. Acelerações de controlo normalizadas do veículo segundo as direções $x$ , $y$ na vizinhança do instante em que o controlo é ligado: $-0.3 \leq a_x \leq 1.8$ , $-2.0 \leq a_y \leq 0.2$ . .....	116
Figura 5.45. <i>Jerks</i> de controlo normalizados do veículo segundo as direções $x$ , $y$ na vizinhança do instante em que o controlo é ligado: $ \dot{a}_x  \leq 180$ , $ \dot{a}_y  \leq 200$ . .....	116
Figura 5.46. Sistema Aeroelástico com 2 DOF (graus de liberdade). ....	118

Figura 5.47. Evolução do deslocamento vertical do eixo elástico e do ângulo de arfagem ao longo do tempo, $h$ e $\alpha$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico. ....	124
Figura 5.48. Evolução da taxa do deslocamento vertical do eixo elástico e do ângulo de arfagem ao longo do tempo, $\dot{h}$ e $\dot{\alpha}$ , respetivamente. ....	125
Figura 5.49. Deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\beta$ e $\gamma$ , respetivamente: $-25 \leq \beta, \gamma \leq 25$ .....	125
Figura 5.50. Velocidade das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ , respetivamente: $-1000 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 1000$ . ....	126
Figura 5.51. Funções auxiliares: $g_\eta \equiv \ \Gamma w + B_{1,0}^+ \Pi r\ _\infty \leq 25$ e $g_v \equiv \ \Gamma S w + \Gamma r + B_{1,0}^+ \Pi \dot{r}\ _\infty \leq 1000$ . ....	126
Figura 5.52. Evolução do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo, $\alpha$ e $h$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico. A 1ª linha vertical vermelha/tracejada indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a 2ª o instante em que se dá a comutação para o LQR. ....	131
Figura 5.53. Evolução da taxa do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo, $\dot{\alpha}$ e $\dot{h}$ , respetivamente. ....	132
Figura 5.54. Deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\beta$ e $\gamma$ , respetivamente: $-20 \leq \beta, \gamma \leq 20$ .....	132
Figura 5.55. Velocidade das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ , respetivamente: $-180 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 180$ . ....	133
Figura 5.56. Plano de fase $(\alpha, \dot{\alpha})$ do sistema aeroelástico. ....	133
Figura 5.57. Plano de fase $(h, \dot{h})$ do sistema aeroelástico.....	134
Figura 5.58. Velocidade do escoamento livre perturbada, $V \in [8.4, 18.4]$ . ....	134
Figura 5.59. Evolução do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo, $\alpha$ e $h$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico. (com a velocidade do escoamento livre perturbada). ....	135
Figura 5.60. Evolução da taxa do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo, $\dot{\alpha}$ e $\dot{h}$ , respetivamente. (com a velocidade do escoamento livre perturbada). ....	135
Figura 5.61. Deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\beta$ e $\gamma$ , respetivamente: $-20 \leq \beta, \gamma \leq 20$ . (com a velocidade do escoamento livre perturbada). ....	136

Figura 5.62. Velocidade das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo, $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ , respetivamente: $-180 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 180$ . (com a velocidade do escoamento livre perturbada). .....	136
Figura 5.63. Detecção e controlo da atitude caótica emergente num veículo espacial devido ao efeito de uma perturbação externa. ....	142
Figura 5.64. Torques de controlo aplicados ao veículo segundo os eixos $x, y, z$ : $-200 \leq U_x \leq 150, -150 \leq U_y \leq 150, -150 \leq U_z \leq 200$ . ....	143
Figura 5.65. Taxas dos torques de controlo aplicados ao veículo: $ \dot{U}_x  \leq 3000,  \dot{U}_y  \leq 2500,  \dot{U}_z  \leq 2000$ . ....	143
Figura 5.66. Sinais efetivamente utilizados no processo de deteção, $z_1$ e $z_2$ , sendo o caos detetado com base em $z_2$ . ....	144
Figura 5.67. Velocidades angulares do veículo espacial segundo os eixos $x, y, z$ . ....	144
Figura 5.68. Atitude do veículo espacial em termos de ângulos de Euler segundo os eixos $x', y', z'$ . ....	145

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Lista de Tabelas

Tabela 5.1. Parâmetros do sistema Terra-Lua.....	112
Tabela 5.2. Parâmetros do sistema aeroelástico.....	121

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Lista de Acrónimos

3ST	-	<i>Three-State Test</i>
A.C.	-	<i>Aerodynamic Center</i>
AeroG	-	<i>Aeronautics and Astronautics Research Center</i>
AmpOp	-	Amplificador Operacional
ARE	-	<i>Algebraic Riccati Equation</i>
AWGN	-	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BD	-	Bolsa de Doutorado
C.G.	-	<i>Center of Gravity</i>
DCA	-	Departamento de Ciências Aeroespaciais
DOF	-	<i>Degrees Of Freedom</i>
E.A.	-	<i>Elastic Axis</i>
FCT	-	Fundação para a Ciência e a Tecnologia
FIFO	-	<i>First-In, First-Out</i>
FSE	-	Fundo Social Europeu
KAM	-	<i>Kolmogorov-Arnold-Moser</i> (teorema KAM)
LAETA	-	Laboratório Associado de Energia, Transportes e Aeronáutica
LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LQG	-	<i>Linear-Quadratic Gaussian</i>
LQR	-	<i>Linear-Quadratic Regulator</i>
LTR	-	<i>Loop Transfer Recovery</i>
M.I.T.	-	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
MEC	-	Ministério da Educação e Ciência
MHC	-	<i>Moving Horizon Control</i>
MIMO	-	<i>Multiple-Inputs, Multiple-Outputs</i>
MPC	-	<i>Model Predictive Control</i>
MRAC	-	<i>Model Reference Adaptive Control</i>
NDI	-	<i>Nonlinear Dynamic Inversion (Control)</i>

NLRA	-	<i>Nonlinear Learning Rate Adaptation</i>
ODE	-	<i>Ordinary Differential Equation</i>
P.I.	-	<i>Proportional-Integral (Control)</i>
PCR3BP	-	<i>Planar Circular Restricted Three-Body Problem</i>
QFT	-	<i>Quantitative Feedback Theory</i>
RHC	-	<i>Receding Horizon Control</i>
RK	-	Runge-Kutta - Método de Resolução Numérica de ODE's
SMC	-	<i>Sliding Mode Control</i>
SNR	-	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
STR	-	<i>Self-Tuning Regulator</i>
UBI	-	Universidade da Beira Interior
UPO	-	<i>Unstable Periodic Orbit</i>
WGN	-	<i>White Gaussian Noise</i>

# Lista de Símbolos

Símbolo	Domínio	Unidade	Descrição
$\Theta_\alpha$	$\mathbb{R}_+$	–	Função de controlabilidade para um determinado $\alpha$
$\Theta_\alpha^0$	$\mathbb{R}_+$	–	Valor da função de controlabilidade para o estado inicial $x_a^0$ , para um determinado $\alpha$
$\alpha_0$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	–	Função linear de $l$ , $\alpha_0 = 2l + 1$
$\dot{\beta}$	$\mathbb{R}$	rad/s	Taxa da deflexão da superfície de controlo do bordo de fuga
$\beta_c$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Chua
$\dot{\gamma}$	$\mathbb{R}$	rad/s	Taxa da deflexão da superfície de controlo do bordo de ataque
$\varepsilon_Q, \varepsilon_R$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Fatores de ponderação da matrizes $Q$ e $R$ , respetivamente, $Q = \varepsilon_Q \cdot Q$ , $R = \varepsilon_R \cdot R$ , $\varepsilon_Q, \varepsilon_R > 0$
$\theta_0$	$\mathbb{R}^q$	–	Vetor dos parâmetros nominais $\theta$ , $q$ parâmetros
$\theta_A$	$\mathbb{R}^{r_A}$	–	Vetor de parâmetros do sistema de referência, $n_{r_A}$ parâmetros
$\theta_B$	$\mathbb{R}^{r_B}$	–	Vetor de parâmetros do sistema controlado, $n_{r_B}$ parâmetros
$\theta_r$	$\mathbb{R}^{p_r}$	–	Vetor de parâmetros do sistema de referência, $p_r$ parâmetros
$\theta_{ref}$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de arfagem de referência no qual é suposto o veículo espacial estabilizar
$\nu_0$	$\mathbb{R}_+$	rad	Refere-se à anomalia verdadeira inicial
$\nu_f$	$\mathbb{R}_+$	rad	Refere-se à anomalia verdadeira final
$\rho_{ij}$	$[-1, 1]$	–	Coefficiente de correlação de Pearson entre $i$ e $j$
$\sigma_m$	$\mathbb{R}_+$	–	Desvio padrão do ruído das medições (WGN de média zero e desvio padrão $\sigma_m$ )
$\sigma_n$	$\mathbb{R}_+$	–	Desvio padrão do ruído adicionado ao sinal observado $y_{obs}$ (WGN de média zero e desvio padrão $\sigma_n$ )
$\sigma_p$	$\mathbb{R}_+$	–	Desvio padrão do ruído do processo (WGN de média zero e desvio padrão $\sigma_p$ )
$\psi_{ref}$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de guinada de referência no qual é suposto o veículo espacial estabilizar
$\omega_r$	$\mathbb{R}$	rad/s	Projeção da velocidade angular do giróstato no eixo $x, y$ ou $z$ para o qual foi concebido
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	$\mathbb{R}$	rad/s	Velocidades angulares do giróstato ou do veículo espacial segundo os eixos $x, y, z$ , respetivamente
$\phi_{ref}$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de rolamento de referência no qual é suposto o veículo espacial estabilizar
$\Gamma$	$\mathbb{R}^{m \times s}$	–	Matriz solução das equações de regulação

$\Pi$	$\mathbb{R}^{n \times s}$	–	Matriz solução das equações de regulação
$\Sigma$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz de covariância dos parâmetros do sistema de Lorenz
$\Delta$	$\mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}$	–	Matriz das incertezas paramétricas do sistema a controlar, $n$ estados, $p$ saídas, $m$ controlos/entradas
$\alpha$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Chua
$\beta$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Lorenz
$\gamma$	$\mathbb{R}_+$	–	Escalar que representa o grau de estabilidade especificado do LQR, $\gamma \geq 0$
$\gamma$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Parâmetro relacionado com as incertezas paramétricas do modelo, $\ \Delta\ _\infty \leq 1/\gamma$ , $\gamma > 0$
$\gamma$	$\mathbb{R}_+$	rad <sup>-1</sup>	Coefficiente de amortecimento do ângulo de libração
$\gamma$	$\mathbb{R}$	rad	Deflexão da superfície de controlo do bordo de ataque do sistema aeroelástico
$\gamma$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Chua
$\delta$	$\mathbb{R}_+$	–	Denota a norma máxima do erro da saída, $\ y - y_r\  \leq \delta$ , $\delta \geq 0$
$\delta t$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Passo de integração/resolução das ODEs correspondente ao incremento da variável independente
$\delta v$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	rad	Passo de integração/resolução de ODEs, correspondente ao incremento da anomalia verdadeira
$\varepsilon$	$\mathbb{R}_+$	–	Valor máximo da norma do erro da saída, $\ y - y_r\  \leq \varepsilon$ , $\varepsilon \geq 0$
$\varepsilon$	$\mathbb{R}_+$	–	Parâmetro de ponderação associado à matriz $Q_\varepsilon$ , $Q_\varepsilon = \varepsilon \cdot I$
$\varepsilon$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Tolerância com base na qual ocorre a comutação do controlo de Korobov para o LQR, $0 < \varepsilon \ll 1$
$\eta$	$\mathbb{R}_+$	–	Limite de saturação da amplitude dos atuadores/controlo, $\ u\ _\infty \leq \eta$ , $\eta \geq 0$
$\theta$	$\mathbb{R}^p$	–	Vetor de parâmetros do sistema controlado, $p$ parâmetros
$\theta$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de arfagem, segundo o eixo $y'$ do referencial inercial (um dos ângulos de Euler)
$\kappa$	$\mathbb{R}_+$	–	Parâmetro relacionado com os momentos principais de inércia do veículo espacial
$\lambda$	$\mathbb{R}$	–	Índice de periodicidade do Teste de Três Estados: $\lambda = 0 \Rightarrow$ periódico; $\lambda < 0 \Rightarrow$ quasiperiódico; $\lambda > 0 \Rightarrow$ caótico
$\lambda$	$\mathbb{C}^n$	–	Valores próprios de uma matriz de dimensão $n \times n$ , $n$ valores próprios
$\mu$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Parâmetro essencial ao operador diferencial funcional $\sigma_{\eta, \nu}(\cdot)$
$\mu$	$[0, 1]$	–	Parâmetro mássico do problema restrito de três

			corpos (Terra-Lua-Veículo Espacial), $\mu = m_M/m^*$
$\nu$	$\mathbb{R}_+$	–	Limite de saturação da taxa dos atuadores/controlo, $\ \dot{u}\ _\infty \leq \nu$ , $\nu \geq 0$
$\nu$	$[0, 2\pi[$	rad	Anomalia verdadeira, isto é, o ângulo definido entre o perigeu e o veículo espacial, medido no plano orbital, no sentido do movimento de translação
$\rho$	$\mathbb{R}_+$	kg/m <sup>3</sup>	Massa específica do ar
$\rho$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Lorenz
$\sigma$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Lorenz
$\tau$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Instante para o qual o erro da saída dá-se como estabilizado no sentido de Lyapunov, $\tau > t_0$
$\psi$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de guinada, segundo o eixo do $z'$ do referencial inercial (um dos ângulos de Euler)
$\omega$	$[0, 2\pi[$	rad	Argumento do perigeu, isto é, o ângulo definido entre o nodo ascendente e o perigeu, medido no plano orbital, no sentido do movimento de translação
$\omega$	$\mathbb{R}^3$	rad/s	Vetor das velocidades angulares do veículo espacial, $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$
$\omega$	$\mathbb{R}$	rad/s	Velocidade angular normalizada do referencial baricêntrico
$\phi$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de libração no plano orbital
$\phi$	$\mathbb{R}$	rad	Ângulo de rolamento, segundo o eixo $x'$ do referencial inercial (um dos ângulos de Euler)
$\dot{u}_{i,max}$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–/s	Taxa de variação máxima da variável de controlo $u_i$ , $ \dot{u}_i  \leq \dot{u}_{i,max}$ , $i = 1, \dots, m$
$h_1, h_2, h_3$	$\mathbb{R}_+$	kg.m <sup>2</sup> /s	Momentos angulares dos rotores do giróstato, localizados nos eixos $x, y, z$ , respetivamente
$A_0$	$\mathbb{R}^{n \times n}$	–	Matriz de estado do sistema controlado correspondente aos parâmetros nominais $\theta_0$ , $n$ estados
$A_0$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz usada no controlo de Korobov, $n_a$ estados
$A_A$	$\mathbb{R}^{n_A \times n_A}$	–	Matriz de estado do sistema de referência, $n_A$ estados
$A_B$	$\mathbb{R}^{n_B \times n_B}$	–	Matriz de estado do sistema controlado, $n_B$ estados
$A_a$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz de estado do sistema aumentado, $n_a$ estados, $n_a = n + m$
$A_{ef}$	$\mathbb{R}_+$	–	Amplitude eficaz do sinal observado $y_{obs}$
$A_r$	$\mathbb{R}^{n_r \times n_r}$	–	Matriz de estado do sistema de referência, $n_r$ estados
$B_0$	$\mathbb{R}^{n_a \times m}$	–	Matriz usada no controlo de Korobov, $n_a$ estados, $m$ controlos/entradas
$B_{1,0}$	$\mathbb{R}^{n \times m}$	–	Matriz de controlo/entrada do sistema controlado correspondente aos parâmetros

			nominais $\theta_0$ , $n$ estados, $m$ controlos/entradas
$B_1$	$\mathbb{R}^{n \times m}$	–	Matriz de controlo, $n$ estados, $m$ controlos/entradas
$B_2$	$\mathbb{R}^{n \times s}$	–	Matriz de entrada das perturbações externas, $n$ estados, $s$ entradas, $s = n + n_r$
$B_3$	$\mathbb{R}^{n \times (n+p)}$	–	Matriz de entrada das incertezas paramétricas, $n$ estados, $n + p$ entradas, $p$ saídas
$B_a$	$\mathbb{R}^{n_a \times m}$	–	Matriz de controlo do sistema aumentado, $n_a$ estados, $m$ controlos/entradas, $n_a = n + m$
$C_{1,0}$	$\mathbb{R}^{p \times n}$	–	Matriz de saída do sistema controlado, correspondente aos parâmetros nominais $\theta_0$ , $p$ saídas, $n$ estados
$C_1$	$\mathbb{R}^{p \times n}$	–	Matriz de saída do sistema controlado, $p$ saídas, $n$ estados
$C_2$	$\mathbb{R}^{(n+m) \times n}$	–	Matriz de saída referente às saídas de desempenho $z$ , $n$ estados, $m$ controlos/entradas
$C_A$	$\mathbb{R}^{p \times n_A}$	–	Matriz de saída do sistema de referência, $p$ saídas, $n_A$ estados
$C_B$	$\mathbb{R}^{p \times n_B}$	–	Matriz de saída do sistema controlado, $p$ saídas, $n_B$ estados
$C_a$	$\mathbb{R}^{q \times n_a}$	–	Matriz de saída do sistema aumentado, $q$ saídas, $n_a$ estados
$C_e$	$\mathbb{R}^{p \times n_B}$	–	Matriz de saída do sistema controlado, $C_e = C_B$
$C_{l\alpha}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de sustentação por unidade de ângulo de ataque, $\partial l / \partial \alpha$
$C_{l\beta}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de sustentação por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de fuga, $\partial l / \partial \beta$
$C_{l\gamma}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de sustentação por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de ataque, $\partial l / \partial \gamma$
$C_{m\alpha}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento por unidade de ângulo de ataque, $\partial m / \partial \alpha$
$C_{m\alpha-eff}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento efetivo devido ao ângulo de ataque
$C_{m\beta}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de fuga, $\partial m / \partial \beta$
$C_{m\beta-eff}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento efetivo devido à deflexão da superfície de controlo do bordo de fuga
$C_{m\gamma}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de ataque, $\partial m / \partial \gamma$
$C_{m\gamma-eff}$	$\mathbb{R}$	–	Coefficiente de momento efetivo devido à deflexão da superfície de controlo do bordo de ataque
$C_r$	$\mathbb{R}^{q \times n_r}$	–	Matriz de saída do sistema de referência, $q$

			saídas, $n_r$ estados
$D_{12}$	$\mathbb{R}^{p \times s}$	–	Matriz de saída do exossistema, $p$ saídas, $s$ estados, $s = n + n_r$
$D_{13}$	$\mathbb{R}^{p \times (n+p)}$	–	Matriz de saída das incertezas paramétricas, $p$ saídas, $n$ estados
$D_{21}$	$\mathbb{R}^{(n+m) \times m}$	–	Matriz de passagem direta referente às saídas de desempenho $z$ , $n + m$ saídas, $n$ estados, $m$ controlos
$D_{ew}$	$\mathbb{R}^{p \times s}$	–	Matriz de saída do exossistema, $p$ saídas, $s$ estados
$E_w$	$\mathbb{R}^{n_B \times s}$	–	Matriz de entrada das perturbações externas, $n_B$ estados, $s$ entradas, $s = n_A + n_B$
$F_\infty$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz requerida no controlo de Korobov, $F_\infty = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_\alpha(\cdot)$ , $n_a = n + s$ , $n$ estados, $s$ saídas
$F_\alpha$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz positivamente definida ( $x_a^T F_\alpha x_a > 0, \forall x_a \neq 0$ ), requerida no controlo de Korobov, $F_\alpha \equiv F_\alpha(1)$ , $n_a = n + s$ , $n$ estados, $s$ saídas
$G^*$	$\mathbb{R}_+$	$\text{Nm}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constante gravitacional universal normalizada
$I_1, I_2, I_3$	$\mathbb{R}_+$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momentos principais de inércia do giróstato em relação aos eixos $x, y, z$ , respetivamente
$I_{cam}$	$\mathbb{R}_+$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inércia do <i>pitch cam</i>
$I_{cg-wing}$	$\mathbb{R}_+$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inércia da secção da asa em relação ao centro gravítico
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	$\mathbb{R}_+$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momentos principais de inércia do veículo espacial em relação aos eixos $x, y, z$ , respetivamente
$I_\alpha$	$\mathbb{R}_+$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inércia
$K_T$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$	Constante de torque do motor de controlo do giróstato
$K_a, K_b$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	$\text{V}/\text{rad}/\text{s}$	Parâmetros relacionados com a força eletromotriz e contraeletromotriz do motor de controlo do giróstato, respetivamente
$L_1$	$\mathbb{R}^2$	–	Ponto de Lagrange localizado entre a Terra e a Lua, colinear com o eixo $x$ do referencial baricêntrico, $L_1(x, y)$
$L_i$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	–	Rácio entre o tempo médio de execução do algoritmo $i$ e o tempo médio de execução do código teste, $L_i = T_i/T_0$ , $i = 1, 2$
$M_a$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz do torque aerodinâmico
$M_a$	$\mathbb{R}_+$	–	Denota o número de Mach
$M_c$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a \times m}$	–	Matriz de controlabilidade, $n_a$ estados, $m$ controlos/entradas
$M_e$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz do torque eletromagnético
$M_g$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz do torque gravitacional
$M_m$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz do torque devido ao impacto de micrometeoritos

$M_s$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz do torque devido à radiação solar
$M_x, M_y, M_z$	$\mathbb{R}$	N.m	Torques perturbadores do veículo espacial segundo os eixos $x, y, z$ , respetivamente
$R_{bi-estado}$	$\{0, \dots\}$	–	Parâmetro binário que indica um comportamento caótico ou não-caótico com base no limiar $\gamma$ : $R_{bi-estado} = "0" \Rightarrow$ regular; $R_{bi-estado} = "1" \Rightarrow$ caótico
$R_j$	$\mathbb{R}^{m \times m}$	–	Matrizes requeridas no controlo de Korobov, $j = 0, \dots, n_1$ , $m$ controlos/entradas
$T_0$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Denota o tempo médio de execução de um código teste composto por um conjunto de operações simples
$T_i$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Denota o tempo médio de execução do algoritmo $i$ , $i = 1, 2$
$U_x, U_y, U_z$	$\mathbb{R}$	N.m	Torques de controlo do veículo espacial segundo os eixos $x, y, z$ , respetivamente
$V_F$	$\mathbb{R}_+$	m/s	Velocidade crítica de <i>flutter</i> (do escoamento não perturbado)
$a_x, a_y, a_z$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetros adimensionais relacionados com os momentos principais de inércia $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$
$b_j$	$\mathbb{R}^{n_a}$	–	Denota a $j$ -ésima coluna da matriz $B_a$ , $n_a$ estados
$c_h$	$\mathbb{R}_+$	kg/s	Coefficiente de amortecimento do deslocamento vertical do eixo elástico
$c_i$	$\mathbb{R}^{n_a}$	–	Vetores associados ao controlo de Korobov que satisfazem determinadas relações, $i = 1, \dots, m$ , $n_a = n + s$ , $n$ estados, $s$ saídas, $m$ controlos/entradas
$c_\alpha$	$\mathbb{R}_+$	kg.m <sup>2</sup> /s	Coefficiente de amortecimento do ângulo de arfagem
$d_0, d_1$	$\mathbb{R}_+$	–	Parâmetros relacionados com as restrições do controlo, $d_0 = \eta$ , $d_1 = \nu$ , $d_0, d_1 \geq 0$
$e_y$	$\mathbb{R}^p$	–	Vetor do erro da saída, entre as saídas do sistema controlado e as saídas de referência, $e_y = y_B - y_A$ , $p$ saídas
$f_{h,\alpha}$	$\mathbb{R}_+$	Hz	Denota as frequências de oscilação do deslocamento vertical do eixo elástico, $h$ , e da torção em torno do eixo elástico, $\alpha$ .
$f_s$	$\mathbb{R}_+$	Hz	Frequência de amostragem do sinal observado $y_{obs}$ , $f_s = 1/dt$ , $f_s$ constante
$f_s$	$\mathbb{R}_+$	Hz	Frequência a que os ruídos do processo e de medição são adicionados (WGN de médias zero e desvios padrões $\sigma_p, \sigma_m$ , respetivamente)
$k_h$	$\mathbb{R}_+$	N/m	Coefficiente de rigidez da mola do deslocamento vertical do eixo elástico
$k_\alpha$	$\mathbb{R}_+$	Nm/rad	Coefficiente de rigidez da mola da arfagem
$l^*$	$\mathbb{R}_+$	m	Distância média entre a Terra e a Lua
$m^*$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa total da Terra + Lua, $m^* = m_E + m_M$

$m_E$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa da Terra
$m_M$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa da Lua
$m_T$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa total do sistema aeroelástico (asa + eixo + suporte de apoio)
$m_W$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa total da asa (asa + eixo)
$m_{ij}$	$\mathbb{R}$	–	Denota o elemento $ij$ da matriz $M$ , $i$ -ésima linha, $j$ -ésima coluna
$m_{wing}$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa da asa
$q_i$	$\mathbb{R}$	–	Elementos do vetor dos quaterniões, $i = 0, \dots, 3$
$r_E$	$\mathbb{R}_+$	m	Distância entre o veículo espacial e a Terra
$r_M$	$\mathbb{R}_+$	m	Distância entre o veículo espacial e a Lua
$t_{u_{on}}$	$\mathbb{R}_+$	s	Instante a partir do qual o controlo é ligado
$t^*$	$\mathbb{R}_+$	s	Tempo característico, definido de forma que a constante de gravitação universal normalizada $G^*$ seja 1
$t_0$	$\mathbb{R}_+$	s	Refere-se ao instante inicial
$t_f$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Refere-se ao instante final
$t_i$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Instantes em que o sinal analisado apresenta máximos (maximizantes do sinal $z_2$ ), $i = 1, \dots, N$
$\dot{u}$	$\mathbb{R}^m$	–/s	Denota a derivada temporal do vetor $u$ , $\dot{u} = du/dt$ , $m$ controlos/entradas
$\ddot{u}$	$\mathbb{R}^m$	–/s <sup>2</sup>	Denota a segunda derivada temporal do vetor $u$ , $\ddot{u} = d^2u/dt^2$ , $m$ controlos/entradas
$u_{0,i}$	$\mathbb{R}$	–	Denota a $i$ -ésima componente do vetor $u_0$ , $i = 1, \dots, m$
$u_0$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor auxiliar que contém os limites simétricos de $u_s$ , $u_0 = u_{max} - u_c$
$u_0$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de controlo inicial, $m$ controlos/entradas
$u_c$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor central entre os limites de saturação máximos e mínimos, $u_c = (u_{max} - u_{min})/2$
$u_{i,max}$	$\mathbb{R}$	–	Limite de saturação máximo da variável de controlo $u_i$ , $u_i \leq u_{i,max}$ , $i = 1, \dots, m$
$u_{i,min}$	$\mathbb{R}$	–	Limite de saturação mínimo da variável de controlo $u_i$ , $u_i \geq u_{i,min}$ , $i = 1, \dots, m$
$u_i$	$\mathbb{R}$	–	Denota a $i$ -ésima componente do vetor $u$ , $i = 1, \dots, m$
$u_{max}$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor dos limites de saturação máximos do controlo, $m$ controlos/entradas
$u_{min}$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor dos limites de saturação mínimos do controlo, $m$ controlos/entradas
$u_{s,0}$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de controlo $u_s$ inicial, $u_{s,0} = u_s(t_0)$
$u_s$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de controlo auxiliar que satisfaz restrições simétricas
$u_\varepsilon$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de controlo virtual, sem restrições, no qual o controlador é projetado

$\dot{x}$	$\mathbb{R}^n$	$-/s$	Taxa de variação do vetor $x$ por unidade de tempo, $\dot{x} = dx/dt$ , $n$ estados
$\tilde{x}$	$\mathbb{R}^n$	–	Representa uma solução do sistema perturbado $\dot{x} = f(x, t) + h(x, t)$
$x_*$	$\mathbb{R}^n$	–	Vetor de estado/ponto no qual o sistema controlado é linearizado por uma linearização clássica/jacobiana
$x_{0,A}$	$\mathbb{R}^{n_A}$	–	Vetor de estado inicial do sistema de referência, $n_A$ estados
$x_{0,B}$	$\mathbb{R}^{n_B}$	–	Vetor de estado inicial do sistema controlado, $n_B$ estados
$x_0$	$\mathbb{R}^n$	–	Vetor de estado inicial, $x_0 = x(t_0)$ , $n$ estados
$x_A$	$\mathbb{R}^{n_A}$	–	Vetor de estado do sistema de referência, $n_A$ estados
$x_B$	$\mathbb{R}^{n_B}$	–	Vetor de estado do sistema controlado, $n_B$ estados
$x_B^*$	$\mathbb{R}^{n_B}$	–	Vetor de estado específico do sistema controlado, tal que quando linearizado neste ponto resulta numa matriz de estado $A_B$ estável
$x_E$	$\mathbb{R}$	m	Coordenada $x$ ao centro da Terra no referencial baricêntrico
$x_M$	$\mathbb{R}$	m	Coordenada $x$ ao centro da Lua no referencial baricêntrico
$x_a$	$\mathbb{R}^{n_a}$	–	Vetor de estado do sistema aumentado, $n_a$ estados, $n_a = n + m$
$x_a$	$\mathbb{R}$	–	Distância adimensional entre o centro gravítico e o eixo neutro/elástico
$x_a^0$	$\mathbb{R}^{n_a}$	–	Vetor de estado inicial do sistema aumentado, $n_a$ estados, $n_a = n + s$
$x_{r,0}$	$\mathbb{R}^{n_r}$	–	Vetor de estado inicial do sistema de referência, $n_r$ estados
$x_r$	$\mathbb{R}^{n_r}$	–	Vetor de estado do sistema de referência, $n_r$ estados
$x_r^*$	$\mathbb{R}^{n_r}$	–	Vetor de estado/ponto no qual o sistema de referência é linearizado por uma linearização clássica/jacobiana
$x_\mu$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de estado correspondente ao controlo aplicado efetivamente ao sistema, $m$ controlos/entradas
$y_A$	$\mathbb{R}^p$	–	Vetor de saída do sistema de referência, $p$ saídas
$y_B$	$\mathbb{R}^p$	–	Vetor de saída do sistema controlado, $p$ saídas
$y_E$	$\mathbb{R}$	m	Coordenada $y$ ao centro da Terra no referencial baricêntrico
$y_M$	$\mathbb{R}$	m	Coordenada $y$ ao centro da Lua no referencial baricêntrico
$y_{obs}$	$\mathbb{R}$	–	Única saída observável/mensurável, que por sua vez é também entrada do sistema auxiliar da deteção

$y_r$	$\mathbb{R}^p$	–	Vetor de saída do sistema de referência, $p$ saídas
$\Delta t_n$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Distâncias temporais entre máximos consecutivos do sinal analisado $z_2$ , $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , $t_{n+1} > t_n$
$h$	$\mathbb{R}$	m	Deslocamento vertical do eixo elástico do sistema aeroelástico, positivo no sentido descendente
$\Delta T$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Tempo de execução do algoritmo de detecção para uma dada janela de observação, de $N$ pontos
$A$	$\mathbb{R}^{n \times n}$	–	Matriz de estado do sistema controlado, $n$ estados
$B$	$\mathbb{R}^{n \times m}$	–	Matriz de controlo, $n$ estados, $m$ controlos/entradas
$C$	$\mathbb{R}^{q \times n}$	–	Matriz de saída do sistema controlado, $q$ saídas, $n$ estados
$D$	$\mathbb{R}^{q \times s}$	–	Matriz de saída do exossistema, $q$ saídas, $s$ estados
$E$	$\mathbb{R}^{n_a \times s}$	–	Matriz de entrada das perturbações externas e dos sinais de referência, $n_a$ estados, $s$ entradas, $n_a = n + m$ , $s = n_a + n_r$
$G$	$\mathbb{R}_+$	$\text{Nm}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constante de gravitação universal
$I$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz identidade, de dimensão $n_a \times n_a$
$I$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Matriz de inércia do veículo espacial
$J$	$\mathbb{R}$	–	Função de custo / Índice de desempenho do LQR
$K$	$\{0, 1\}$	–	Parâmetro que indica o tipo de dinâmica no Teste 0-1: $K = 0 \Rightarrow$ regular; $K = 1 \Rightarrow$ caótica
$L$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz requerida no controlo de Korobov, $n_a = n + s$ , $n$ estados, $s$ saídas
$L$	$\mathbb{R}^{m \times m}$	–	Matriz que envolve todos os limites de saturação do controlo, $m$ controlos/entradas
$L$	$\mathbb{R}_+$	H	Indutância do motor de controlo do giróstato
$L$	$\mathbb{R}$	N	Força de sustentação, aplicada no centro aerodinâmico da asa
$M$	$\mathbb{R}^3$	–	Vetor dos valores médios dos parâmetros do sistema de Lorenz
$M$	$\mathbb{R}^{m \times m}$	–	Matriz triangular superior, usada no controlo de Korobov, $m$ controlos/entradas
$M$	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	–	Matriz dos torques de perturbação total
$M$	$\mathbb{R}$	N.m	Momento de arfagem, aplicado em torno do centro aerodinâmico da asa
$N$	$\mathbb{Z}_+$	–	Comprimento/tamanho da janela de observação deslizante, $N$ pontos
$NL$	$\mathbb{R}_+$	%	Limite de Ruído (detecção de caos através de injeção de ruído)
$P, P_\varepsilon$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz simétrica e positivamente definida, $P = P^T$ , $P > 0$ , solução de uma Equação Algébrica de Riccati, $n_a$ estados

$Q, Q_\varepsilon$	$\mathbb{R}^{n_a \times n_a}$	–	Matriz simétrica e positivamente semidefinida, $Q = Q^T$ , $Q \geq 0$ , de ponderação do estado, $n_a$ estados
$R$	$\mathbb{R}_+$	–	Parâmetro do novo detetor que indica o tipo de comportamento: $R > \gamma \Rightarrow$ caótico; $R \leq \gamma \Rightarrow$ regular, $\gamma > 0$ (pequeno, ex.: $\gamma = 1$ )
$R$	$\mathbb{R}^{m \times m}$	–	Matriz simétrica e positivamente definida, $R = R^T$ , $R > 0$ , de ponderação do controlo, $m$ controlos/entradas
$R$	$\mathbb{R}_+$	$\Omega$	Resistência do motor de controlo do giróstato
$S$	$\mathbb{R}^{s \times s}$	–	Matriz de estado do exossistema, $s$ estados, $s = n_A + n_B$
$S$	$\mathbb{R}_+^3$	–	Vetor dos desvios padrões dos parâmetros do sistema de Lorenz
$V$	$\mathbb{R}_+$	m/s	Velocidade do escoamento não perturbado
$a$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Chua
$a$	$\mathbb{R}$	–	Distância adimensional a partir do ponto intermédio da corda até à posição do eixo elástico
$b$	$\mathbb{R}$	–	Parâmetro do sistema de Chua
$b$	$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$	–	Vetor de controlo/entrada (sistema auxiliar usado na deteção)
$b$	$\mathbb{R}_+$	kg.m <sup>2</sup> .rad/s	Coefficiente de amortecimento do giróstato
$b$	$\mathbb{R}_+$	m	Metade da corda da secção da asa, $b = c/2$
$c$	$\mathbb{R}^q$	–	Vetor de saída, $q$ saídas
$d$	$\mathbb{R}^{n+p}$	–	Vetor das incertezas paramétricas, $n$ estados, $p$ saídas
$d$	$\mathbb{R}^{n_a}$	–	Vetor das perturbações externas do sistema aumentado, $n_a$ estados, $n_a = n + s$
$dt$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	s	Taxa de amostragem do sinal medido $y_{obs}$ , $dt$ constante
$e$	$\mathbb{R}^p$	–	Erro entre a saída real do sistema e a saída de referência, $e = y - y_r$ , $p$ saídas
$e$	$\mathbb{R}_+$	–	Excentricidade da órbita
$i$	$\mathbb{R}$	A	Corrente elétrica do motor de controlo do giróstato
$k$	$\mathbb{Z}_+$	–	Denota o número de $\Delta t$ 's diferentes existentes entre maximizantes do sinal observado/analísado
$l$	$\mathbb{N}$	–	Denota a ordem da derivada do controlo $u$ , $l = 1$ para restrições na magnitude e na taxa, $u, \dot{u}$
$m$	$\mathbb{R}_+$	kg	Massa do veículo espacial/satélite
$q$	$\mathbb{R}^s$	–	Integral do erro da saída, $s$ saídas
$q$	$\mathbb{H}, \mathbb{R}^4$	–	Vetor dos quaterniões
$r$	$\mathbb{R}^s$	–	Vetor inerente ao exossistema, $s = n_A + n_B$
$s$	$\mathbb{R}_+$	m	Envergadura da asa

$t$	$\mathbb{R}_+$	$s$	Denota o tempo
$u$	$\mathbb{R}^m$	–	Vetor de controlo, $m$ controlos/entradas
$w$	$\mathbb{R}$	–	Ruído branco gaussiano de média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma$ , $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$
$w$	$\mathbb{R}^s$	–	Vetor de estado do exossistema, $s$ estados, $s = n_A + n_B$
$x$	$\mathbb{R}^n$	–	Vetor de estado do sistema controlado, $n$ estados
$x$	$\mathbb{R}$	$m$	Posição do veículo espacial segundo $x$ no referencial baricêntrico
$y$	$\mathbb{R}^q$	–	Vetor de saída do sistema controlado, $q$ saídas
$y$	$\mathbb{R}$	$m$	Posição do veículo espacial segundo $y$ no referencial baricêntrico
$z$	$\mathbb{R}^2$	–	Vetor de estado do sistema auxiliar, 2 estados
$z$	$\mathbb{R}^{n+m}$	–	Vetor de saída de desempenho, destinado a ser influenciado de uma forma desejada, $n + m$ saídas
$\sigma_h(\cdot)$	–	–	Denota a função saturação, de limite $h$
$\sigma_{\eta, \nu}(\cdot)$	–	–	Operador diferencial funcional utilizado para impor restrições no controlo
$\dot{\varphi}(\cdot)$	–	–	Denota a derivada temporal da função vetorial $\varphi(\cdot)$
$\varphi_A(\cdot)$	–	–	Função vetorial que representa os termos não-lineares do sistema de referência
$\varphi_B(\cdot)$	–	–	Função vetorial que representa os termos não-lineares do sistema controlado
$\varphi_a(\cdot)$	–	–	Função vetorial que representa os termos não-lineares do sistema aumentado
$\varphi_r(\cdot)$	–	–	Função vetorial que representa os termos não-lineares do sistema de referência
$\theta(\cdot)$	–	–	Função de controlabilidade: uma função de Lyapunov generalizada
$\theta(\cdot)$	–	–	Função de controlabilidade explícita
$d(\cdot)$	–	–	Função vetorial limitada e mensurável no sentido de Lebesgue
$f(\cdot), f_r(\cdot)$	–	–	Funções vetoriais não-lineares suaves
$f_A(\cdot), f_B(\cdot)$	–	–	Funções vetoriais não-lineares suaves
$\text{sat}_{u_0}(\cdot)$	–	–	Denota a função saturação, de limite $u_0$
$\text{sgn}(\cdot)$	–	–	Denota a função sinal
$\text{diag}(\cdot)$	–	–	Denota uma matriz diagonal
$\text{Re}[\cdot]$	–	–	Designa a parte real de um número complexo
$\text{rank}(\cdot)$	–	–	Denota a ordem de uma matriz

$\ \cdot\ _\infty$	–	–	Denota a norma infinito
$\ \cdot\ $	–	–	Denota a norma euclidiana
$I_s \otimes A$	–	–	Denota o produto de Kronecker entre as matrizes $I_s$ e $A$ .
$\langle a, b \rangle$	–	–	Denota o produto escalar entre os vetores $a$ e $b$
$B^+$	–	–	Denota a matriz pseudo-inversa da matriz $B$
$B^{-1}$	–	–	Denota a matriz inversa da matriz $B$
$B^T$	–	–	Denota a matriz transposta da matriz $B$
$0_{m \times n}$	$\mathbb{R}^{m \times n}$	–	Denota uma matriz nula, de dimensão $m \times n$ , $m$ linhas, $n$ colunas
$I_n$	$\mathbb{R}^{n \times n}$	–	Denota uma matriz identidade, de dimensão $n \times n$

**Observação:**

Embora existam alguns símbolos que representam mais do que uma grandeza, estes foram deixados intencionalmente assim por uma questão de conveniência, uma vez que o símbolo em questão é utilizado comumente na literatura para descrever a respectiva grandeza. A não mudança de símbolo, de modo a torná-los todos diferentes, tem por objetivo facilitar a interpretação quer para a um leitor já familiarizado com a nomenclatura corrente, quer para um leitor não tão perito na matéria mas que pretenda complementar com outra informação. De qualquer forma, todas as grandezas/parâmetros encontram-se devidamente enunciados ao longo do documento, junto das respectivas expressões.

# Capítulo 1

## 1. Introdução

### 1.1. Enquadramento

#### 1.1.1. O que é um sistema caótico?

Um sistema caótico é um sistema dinâmico não-linear determinístico, cuja evolução ao longo do tempo, apesar de ser governada por leis dinâmicas bem definidas e na maior parte das vezes até mesmo com uma estrutura relativamente simples, é altamente sensível às condições iniciais. Duas trajetórias que se iniciem muito próximas uma da outra, acabam por se divergir exponencialmente decorrido algum tempo, como ilustra a Figura (1.1), tempo este que é na realidade bastante curto. O fenómeno tem sido assim associado a um tão designado *efeito borboleta* (Lorenz, 1995), retratando o facto de que uma pequena perturbação induzida pelo bater das asas de uma borboleta num dado local do planeta, pode chegar a provocar, ou então impedir, um furacão alguns dias depois num outro local do planeta completamente afastado do local de onde ocorreu a perturbação. É, deste modo, teoricamente impossível determinar as condições iniciais que originam uma certa trajetória, ainda que seja usada uma precisão infinita.

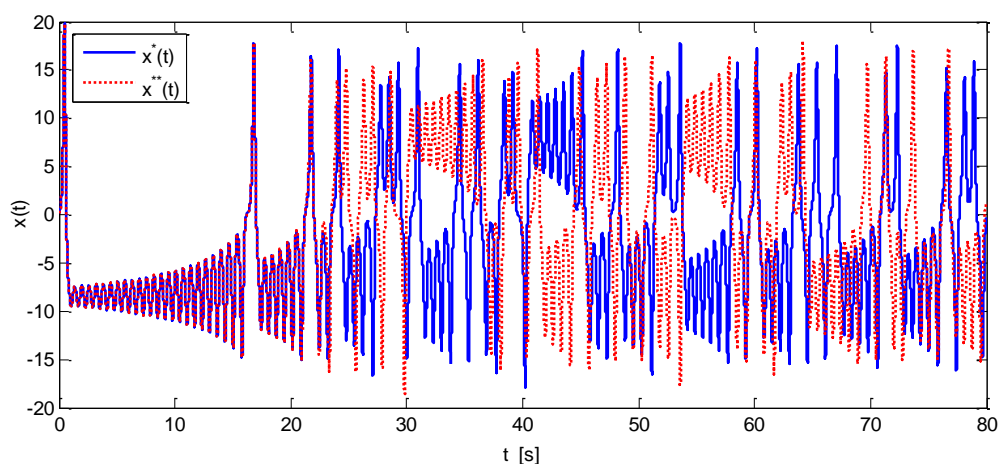


Figura 1.1. Evolução de uma variável de estado de um sistema caótico ao longo do tempo,  $x(t)$ . Duas trajetórias,  $x^*(t)$  e  $x^{**}(t)$ , que se iniciem muito próximas,  $x^*(0) \approx x^{**}(0)$ , acabam por se separar exponencialmente findo algum tempo devido às não-linearidades do sistema.

As trajetórias geradas por um sistema caótico não são periódicas, não são quasiperiódicas, e não seguem portanto qualquer tipo de padrão. O comportamento é assim caracterizado como sendo extremamente complexo, irregular, e tão imprevisível que pode mesmo até parecer

aleatório, mas que resulta da sobreposição de um número infinito de movimentos periódicos instáveis (Boccaletti, Grebogi, Lai, Mancini, & Maza, 2000; Moon, 1992). Todavia, um sistema caótico é governado inteiramente, ou pelo menos em parte, por equações dinâmicas determinísticas, ao invés dos processos puramente estocásticos que podem ser descritos apenas através de propriedades estatísticas. O facto de um movimento caótico se tornar imprevisível, mas apenas a partir de um instante específico, ainda que muito curto, é uma característica que distingue o caos também de um movimento verdadeiramente estocástico, dado que este é imprevisível em qualquer instante.

Além deste tipo de sistemas apresentar alta sensibilidade às condições iniciais, apresenta também uma sensibilidade crítica aos parâmetros que é determinante no tipo de comportamento exibido. Isto é, um sistema pode estar a operar num regime bem regular, mas à mínima alteração de um dos parâmetros (ex.: ligeira variação induzida por uma diferença de temperatura) pode passar a exibir um comportamento caótico, apresentando desta forma uma dinâmica totalmente diferente da pretendida.

Uma outra característica de um sistema caótico é que este apresenta no seu espaço de fases um objeto geométrico de *estrutura fractal*, designado por *atrator estranho*, ou também por *atrator caótico* (Ruelle & Takens, 1971), em que por definição as trajetórias são confinadas a uma região limitada, nunca repetem o mesmo caminho e todas as trajetórias na sua vizinhança são atraídas por ele. O facto de a trajetória nunca repetir o mesmo caminho duas vezes e o espaço de fases ser limitado faz com que, dado tempo suficiente, a trajetória acabe por voltar mais cedo ou mais tarde arbitrariamente próximo de qualquer ponto no espaço de fases. O espaço de fases torna-se assim denso em órbitas periódicas recorrentes que voltam portanto à vizinhança umas das outras com o decorrer do tempo.

Um sistema caótico é um sistema que detém a propriedade dinâmica da ergodicidade. Tal significa que, quando iniciado a partir de diversas condições iniciais, a média de um dos seus sinais ao longo do tempo, isto é, de uma determinada componente da trajetória, coincide com a média de todos os sinais caóticos com origem nas diferentes condições iniciais, correspondentes à mesma componente da trajetória, para um determinado instante, qualquer que seja esse instante desde que para um número de sinais o suficientemente grande. Ou seja, a média temporal coincide com a média do conjunto.

Embora numa definição mais clássica o caos seja caracterizado essencialmente por ser extremamente sensível às condições iniciais, não basta que um sistema apresente sensibilidade às condições iniciais para que seja considerado como caótico. É necessário também que o sistema detenha a propriedade matemática da *transitividade/mistura topológica* para que o caos se possa manifestar. A título de contraexemplo, um sistema dinâmico que duplique simplesmente a cada iteração o seu estado anterior, apresenta

trajetórias que acabam por se separar com o decorrer das iterações, mas que no entanto não são caóticas uma vez que o sistema não é topologicamente transitivo. Trata-se, na verdade, de um comportamento extremamente simples, onde a trajetória tende para  $\pm\infty$ , desde que iniciado em qualquer condição inicial diferente da origem. Num sistema transitivo, o sistema evolui de tal forma que uma dada região do espaço de fases acaba por se sobrepor com uma outra qualquer região tal como acontece por exemplo na mistura de fluidos coloridos.

Uma outra característica interessante do caos é extraída no domínio da frequência. Um sinal caótico é caracterizado por ter um espectro de frequência contínuo, de banda larga, no entanto limitado, e esta característica é o que o distingue de sinais periódicos, quasiperiódicos, e estocásticos. Note-se que, se por um lado a existência de muitas frequências o distingue de sinais periódicos, já que estes apresentam frequências bem definidas, um espectro limitado distingue-o de sinais estocásticos pelo facto destes apresentarem frequências distribuídas ao longo de todo o espectro.

Dadas estas características, um sistema caótico é assim definido como sendo um sistema dinâmico, contínuo ou discreto no tempo (mapa), que detém um conjunto de características, sumariadas de seguida, em vez de uma definição geral, até porque não existe uma definição matemática universalmente aceite do que é o comportamento caótico:

#### **Características dos sistemas caóticos (determinísticos):**

- 1) Determinístico;
- 2) Não-linear;
- 3) Altamente sensível às condições iniciais;
- 4) Altamente sensível à variação de parâmetros;
- 5) Espaço de fases limitado;
- 6) Associado a uma estrutura fractal / Atrator estranho;
- 7) Imprevisibilidade da trajetória para além de um período de tempo bastante curto;
- 8) Densidade de órbitas periódicas / Recorrência;
- 9) Ergodicidade;
- 10) Mistura topológica;
- 11) Espectro de frequência contínuo, de banda larga, porém limitado.

### **1.1.2. Uma breve história sobre a teoria do caos**

As contribuições revolucionárias de Isaac Newton para o cálculo diferencial e integral, as suas três leis do movimento que alicerçaram a mecânica clássica, e a sua importante teoria da gravitação universal, levaram uma grande parte dos cientistas da sua época, século XVII, a acreditarem fortemente na capacidade da ciência fazer previsões. Sucessos de previsão na

área da astronomia, como o regresso do cometa, hoje conhecido pelo sobrenome do matemático e astrónomo inglês que determinou a sua órbita, Edmond Halley, e a descoberta do planeta Neptuno, previsto matematicamente pelo matemático e astrónomo francês Urbain Le Verrier, e posteriormente observado pelo astrónomo alemão Johann Galle, viriam reforçar essa convicção (O'Connor & Robertson, 2000, 2014).

Até finais do século XIX, acreditava-se fortemente no determinismo, e portanto, na capacidade de revelar quer o passado quer o futuro de um sistema tendo em conta somente o conhecimento do seu estado atual. Tal confiança levou o matemático, físico e astrónomo francês Pierre Laplace a afirmar o raciocínio absolutamente determinista apresentado de seguida (Laplace, 1996):

*“Podemos considerar o estado presente do Universo como o efeito do seu passado e a causa do seu futuro. Se um intelecto, num determinado momento, conhecesse todas as forças que atuam na Natureza e a posição de todos os corpos que a constituem, e além disso, fosse o suficientemente amplo para poder analisar toda essa informação, então conseguiria cingir numa única fórmula o movimento dos maiores corpos do Universo e os dos mais pequenos átomos. Para esse intelecto nada seria incerto e tanto o futuro como o passado estariam perante si.”*

No final do século XIX, Henri Poincaré, um matemático e físico francês, ao tentar resolver o problema de três corpos da mecânica celeste, o qual consiste no estudo do movimento destes em interação mútua devido aos respetivos campos gravíticos, deparou-se com a complexidade do movimento apresentado por um corpo de massa desprezável em relação a outros dois. Constatou que, contrariamente ao que inicialmente pensara, o movimento era irregular e essencialmente imprevisível (Alligood, Sauer, & Yorke, 1996). Embora o termo caos ainda não fosse utilizado nessa época, o movimento exibido era caótico como o que se ilustra na Figura (1.2):

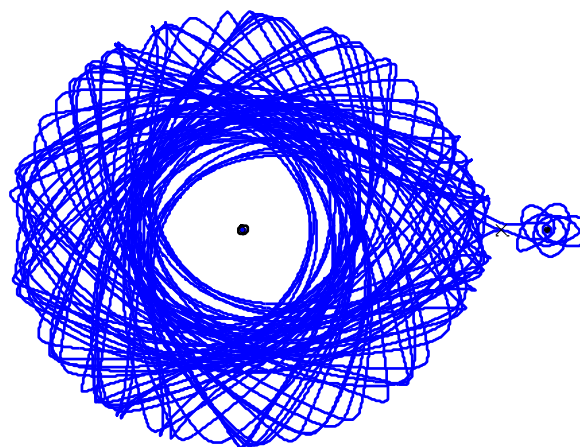


Figura 1.2. Uma das possíveis trajetórias de um corpo de massa infinitesimal sob a influência gravítica de outros dois de maior massa, a qual evidencia o caráter complexo e altamente imprevisível da sua posição num problema de apenas três corpos.

A conclusão a que Poincaré chegou ao estudar o problema restrito de três corpos estava na verdade bastante próxima da caracterização do movimento caótico. Todavia, a matemática e as ferramentas necessárias para estudar o comportamento caótico ainda não existiam na época e por outro lado não existiam computadores que permitissem representar visualmente o caos. No entanto, Poincaré já tinha deduzido intuitivamente os ingredientes essenciais para que o caos se pudesse manifestar: a *não-linearidade* e a *realimentação/recursividade*.

Já no século XX, em particular na década de 60, as ideias de Poincaré reaparecem no M.I.T. (*Massachusetts Institute of Technology*) pela mão do matemático e meteorologista norte-americano Edward Lorenz, e a confiança na capacidade da ciência fazer previsão entra inesperadamente em decadência. Numa longa série de simulações computacionais, com o intuito de efetuar previsões meteorológicas, Lorenz, recorrendo a um modelo simplificado de três equações, decidiu um dia recomeçar os seus cálculos no computador que dispunha, um Royal McBee LPG-30, a partir de um valor impresso anteriormente, e continuar o processamento computacional a partir desse ponto. Porém, os valores por ele inseridos tinham um número de dígitos inferior ao padrão da máquina e reparou que, decorridas apenas algumas iterações, a série que obtinha não coincidia com a anterior (Lorenz, 1963). O simples facto de ter suprimido alguns dígitos nas condições iniciais provocara um enorme desvio nos resultados. Descobriu assim, acidentalmente, que o seu modelo era altamente dependente das condições iniciais, o qual veio a apelidar mais tarde o dito fenómeno pelo tão afamado: *efeito borboleta* (Lorenz, 1995); metáfora a qual devido à aparência do atrator estranho do modelo no plano  $(x, z)$  se tornou bastante popular e frequentemente utilizada para se referir ao caos, ver Figura (1.3).

### **Efeito Borboleta**

*“A batida das asas de uma borboleta no Tóquio pode desencadear, ou então impedir, um furacão em Nova Iorque?”*

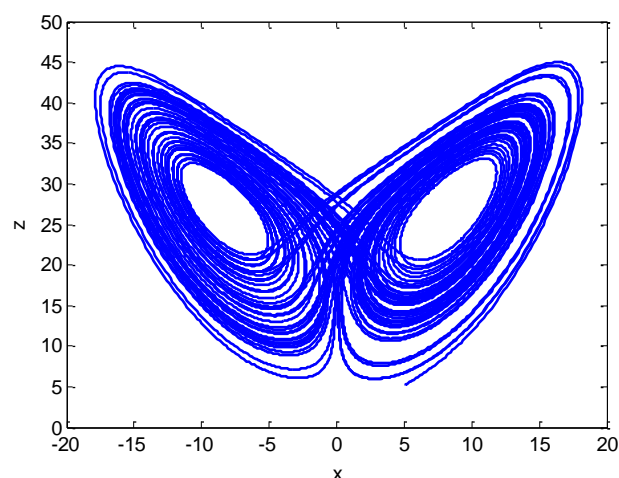


Figura 1.3. Atrator de Lorenz projetado no plano  $(x, z)$ , cuja forma geométrica aparenta as asas de uma borboleta.

Lorenz contribuiu desta forma com uma descoberta relevante e vem a ser considerado posteriormente como pai da teoria do caos. Na década de 80, James Gleick, um historiador norte-americano altamente especializado em ciência, dá ao mundo a conhecer o mesmo efeito de uma forma semelhante, ainda que não tão vastamente conhecido, o seguinte ditado popular (Gleick, 1987):

*“Por falta de um prego, perdeu-se uma ferradura,  
Por falta de uma ferradura, perdeu-se um cavalo,  
Por falta de um cavalo, perdeu-se um cavaleiro,  
Por falta de um cavaleiro, perdeu-se uma batalha,  
Por falta de uma batalha, perdeu-se o reino.”*

Tanto o *efeito borboleta* introduzido por Lorenz como ditado popular enunciado por Gleick vieram ilustrar perfeitamente o facto de que a mais pequeníssima incerteza nas condições iniciais leva um sistema caótico a apresentar soluções completamente diferentes. Dada esta característica e uma vez que qualquer instrumento de medida (ex.: termómetro, barómetro, relógio, etc.) possui indiscutivelmente erros associados, por mais pequenos que sejam, os sistemas caóticos tornam-se assim imprevisíveis a médio-longo prazo. A curto prazo, é possível prever ainda com algum nível de segurança, tal como acontece por exemplo na meteorologia, mas apenas num intervalo tão curto, correspondente a alguns múltiplos do inverso o *expoente de Lyapunov característico*<sup>1</sup> (Fitzpatrick, 2011).

Aquilo que Lorenz descobriu sobre o caos com base na meteorologia, o físico australiano Robert May complementa com base na ecologia, ao descobrir de certa forma que o caos apresenta uma sensibilidade crítica à variação de parâmetros (May, 1976). Em meados dos anos 70, criou um modelo com vista a calcular a variação da taxa de nascimento de insetos em função da quantidade de comida disponível - o célebre *mapa logístico* - e reparou que a sua evolução ao longo de cada geração apresentava ora um comportamento periódico ora um comportamento caótico, dependendo do valor do único parâmetro do seu modelo. Descobriu que para um certo valor do parâmetro,  $\mu$ , o sistema exibia um ponto de convergência,  $x^*$ , que aumentando-o passava a exibir dois, posteriormente quatro, e assim sucessivamente em potências de dois, até que comportamento se tornava caótico. Contribuiu assim para a descoberta de um conceito importante utilizado na análise de sistemas caóticos - o *diagrama de bifurcações* - o qual revela os pontos de convergência do sistema em função do valor de um dos parâmetros e permite detetar os valores desse parâmetro para os quais ocorrem duplicação do período. A Figura (1.4) mostra um *diagrama de bifurcações*, onde são visíveis as sucessivas duplicações do período até originar o caos.

---

<sup>1</sup> O *expoente de Lyapunov característico* é um indicador que mede a taxa média de divergência (ou de convergência) exponencial de duas trajetórias vizinhas. É designado por  $\lambda_1$  e serve para caracterizar o tipo de movimento, inclusive detetar caos num sistema.

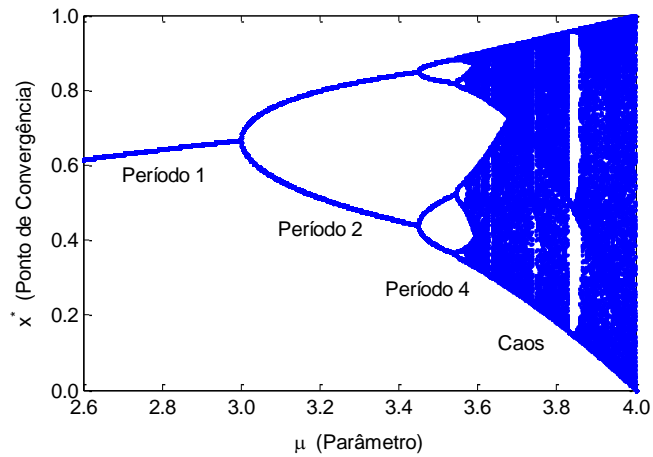


Figura 1.4. Diagrama de bifurcações do mapa logístico.

Inspirados pelo trabalho de Lorenz, os matemáticos norte-americanos James Yorke e Tien-Yien Li publicam em 1975 um artigo onde a palavra ‘caos’ surge pela primeira vez na literatura científica. Na referida publicação, intitulada “*Period Three Implies Chaos*”, Li e Yorke (T.-Y. Li & Yorke, 1975) provaram que se um sistema discreto unidimensional possui órbitas periódicas de período três então é porque existem órbitas periódicas de todos os períodos. Na verdade, a conclusão a que chegaram tinha já sido descoberta anteriormente pelo matemático ucraniano Sharkovskii, mas de uma forma generalizada (Sharkovskii, 1964). Todavia, o caos originado pela existência de uma órbita periódica de período três veio a ser denominado por: *caos no sentido de Li-Yorke* (Aulbach & Kieninger, 2001).

No final da década de 70, Mitchell Feigenbaum, um físico norte-americano, demonstra que uma das formas da ordem evoluir até originar o caos dá-se através de sucessivas duplicações do período, e descobre, revolucionariamente, que a razão entre as sucessivas bifurcações ocorrentes durante o período de transição é constante (Feigenbaum, 1978). Isto é, que a distância entre as sucessivas bifurcações é cada vez menor, convergindo geometricamente entre elas tal como acontece, por exemplo, com as distâncias entre eólicas distribuídas igualmente na mesma direção vistas em perspectiva, ver Figuras (1.5) e (1.6). Tal razão, entre valores do parâmetro para o qual ocorrem bifurcações dando origem à duplicação do período, ficou conhecida como constante de Feigenbaum,  $\delta$ , e é igual a:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}}, \quad \delta \cong 4.669 \quad (1.1)$$

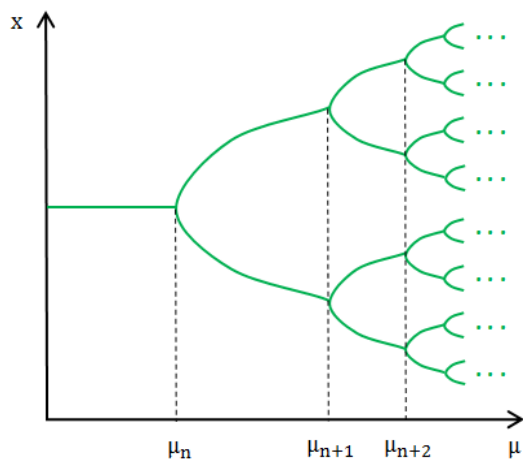


Figura 1.5. Esboço de um diagrama de bifurcações. A razão entre as distâncias entre sucessivas bifurcações é constante e igual à constante de Feigenbaum:  $\delta \cong 4.669$ .



Figura 1.6. Vista em perspectiva ilustrando a convergência geométrica da razão entre distâncias de sucessivas eólicas igualmente distribuídas numa dada direção.<sup>2</sup>

O seu trabalho era tão revolucionário, que várias tentativas de publicação durante a década de 70 foram constantemente recusadas, e só em 1978 é que a sua extraordinária descoberta foi finalmente aceite, tornando-se umas das descobertas mais relevantes em toda a teoria do caos (O'Connor & Robertson, 2009).

Ainda no final da mesma década, o matemático polaco Benoit Mandelbrot, pioneiro da matemática dos fractais, descobre que muitas das formas que constituem o mundo natural possuem uma base organizada, apesar de aparentarem por vezes formas irregulares ou até mesmo caóticas. Os fractais são formas geométricas abstratas, com padrões complexos que se repetem infinitamente mesmo que o espaço ocupado seja limitado, em que cada uma das suas partes é constituída por uma imagem de si própria. Constituem assim imagens belas com propriedades conhecidas como *autossemelhança*, *invariância de escala* e *detalhe infinito*. Na natureza, estes encontram-se por exemplo em: fetos, brócolos, flocos de neve, nuvens, ramificações pulmonares, crateras, relâmpagos; ou podem também ser gerados computacionalmente, obtendo-se os tão conhecidos: *conjunto de Mandelbrot*, *conjunto de Julia*, *conjunto de Cantor*, *pirâmide de Sierpinski*, *curva de Koch*, *esponja de Menger*, entre outros (Mandelbrot, 1982). Nas Figuras (1.7) e (1.8) ilustram-se respetivamente um fractal natural e um fractal gerado computacionalmente.

<sup>2</sup> <http://hypescience.com/wp-content/uploads/2010/05/eolica.jpg>



Figura 1.7. Folha de um feto - exemplo de um fractal natural.<sup>3</sup>

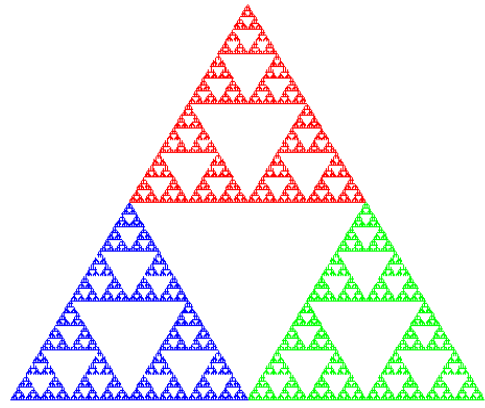


Figura 1.8. Triângulo de Sierpinski - exemplo de um fractal gerado computacionalmente.<sup>4</sup>

Mandelbrot mostrou também que a classe de sistemas caóticos dissipativos exhibe no seu espaço de fases um objeto de estrutura fractal e que a presença de tal objeto, de dimensão não inteira, implica a existência de um atrator estranho (Moon, 1992). A geometria dos fractais encontra-se intimamente ligada à ciência do caos, e veio demonstrar que existe alguma ordem no comportamento dinâmico de sistemas caóticos ao passo que antes o seu movimento era caracterizado como irregular, aleatório, imprevisível ou simplesmente caótico.

Outros cientistas de renome, como por exemplo Smale (ferradura de Smale), Takens (teorema de imersão de Takens), Hopf (teoria das bifurcações), Kolmogorov-Arnold-Moser (teorema KAM), Lyapunov (expoentes de Lyapunov), entre outros, dedicaram-se também ao estudo do caos, contribuindo com trabalhos do mesmo modo importantes. Porém, a literatura especializada aponta os cientistas nesta subsecção citados, Poincaré, Lorenz, Mandelbrot, May, Li-Yorke e Feigenbaum como os que mais se destacaram e portanto os que deram origem à teoria do caos.

### 1.1.3. Onde pode surgir o comportamento caótico?

O comportamento caótico pode surgir em sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares como por exemplo em sistemas mecânicos (ex.: pêndulo duplo, suspensão de veículos automóveis), em sistemas aeroelásticos (ex.: asas de aeronaves, rotores de helicópteros), em sistemas aeroespaciais (ex.: atitude de satélites, posição de veículos espaciais), em eletrônica (ex.: circuito de Chua-Matsumoto, oscilador de Colpitts, circuitos com junções Josephson), em ótica não-linear (ex.: lasers adaptados para comunicações seguras), em dinâmica de fluidos (ex.: convecção de Rayleigh-Bénard), em química (ex.: reação de

<sup>3</sup> <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm>

<sup>4</sup> <http://euclid.trentu.ca/math/courses/course-list4.html>

Belousov-Zhabotinsky), em biologia (ex.: batimentos cardíacos, modelos populacionais), entre outros, sendo que neste tipo de sistemas o comportamento pode ser regular ou caótico, dependendo dos valores dos parâmetros. Isto é, um dado circuito eletrônico pode ser projetado para oscilar numa determinada frequência, através da escolha apropriada dos parâmetros (definidos por resistências, condensadores, bobinas, ...), e ser aplicado por exemplo num gerador de sinais, ou então, projetado para exibir uma oscilação caótica e ser aplicado por exemplo num sistema de radiocomunicação segura atuando neste caso como 'frequência' portadora. Existem no entanto outros sistemas que por natureza são já caóticos, como é o caso de fenómenos meteorológicos, de variações no mercado financeiro, do movimento de placas tectónicas, do sistema solar, entre outros (Boccaletti et al., 2000; Chua, Wu, Huang, & Zhong, 1993; Ditto, Spano, & Lindner, 1995; Ferreira, de Paula, & Savi, 2011; Fradkov & Evans, 2005; Marian Gidea & Deppe, 2006; Gou, Wang, & Xie, 2008; G. H. Li, Zhou, & Yang, 2007; Litak, Borowiec, Friswell, & Przystupa, 2009; Y. Liu & Liqun, 2013; May, 1976; Moon, 1992; Nikitina, 2011; Schuster, 1999; Tang & Dowell, 1992; Wang, Chen, & Yau, 2013).

Um sistema dinâmico que seja não-linear pode estar a operar num regime bem regular e passar subitamente a exibir vibrações caóticas. Tal pode acontecer, por um lado, devido à alteração dos valores dos parâmetros, ou por outro, devido a perturbações externas com determinadas características, nomeadamente, perturbações oscilatórias de baixa amplitude. Esta última razão é a que leva por exemplo o movimento de atitude de um satélite que possua elementos magnéticos e que orbite numa órbita próxima do plano equatorial a se tornar altamente complexo. Acontece que, devido ao campo magnético terrestre e à posição do satélite relativamente à Terra, surgem termos oscilatórios de baixa amplitude nas equações dinâmicas da atitude, tornando-a caótica (Cheng & Liu, 1999; Y. Liu & Liqun, 2013). É ainda possível que nalguns casos o caos venha a se manifestar devido a restrições dos atuadores. Ocorre que os sinais de controlo ao estarem limitados podem ser vistos como sinais externos que satisfazem certas características que podem causar instabilidades estruturais e levar o sistema a alterar o seu comportamento (Demenkov, 2008; Mesquita, Rempel, & Kienitz, 2008; Yau & Chen, 2007).

Como também já mencionado, o comportamento caótico pode surgir apenas em sistemas não-lineares. É teoricamente impossível que um sistema linear (de dimensão finita) venha a exibir vibrações caóticas uma vez que um sistema linear é um em que se uma variação numa dada variável e num dado instante inicial produz uma variação na mesma ou noutra variável num instante posterior, uma variação  $n$  vezes maior no mesmo instante inicial produz uma variação  $n$  vezes maior no mesmo instante posterior. O caos é induzido por natureza pelas não-linearidades de um sistema porque só desta forma é que uma variação observada num dado instante não é proporcional à variação no instante inicial. A não-linearidade, juntamente com a recursividade, porque o estado do sistema tem de depender também do

estado anterior, são portanto os dois ingredientes essenciais para que o caos se possa manifestar.

O comportamento caótico pode surgir em sistemas discretos de uma, de duas ou de qualquer dimensão. Já em sistemas contínuos, o mesmo não é verdade. O *Teorema de Poincaré-Bendixon* garante que para sistemas contínuos invariantes no tempo, isto é, sistemas que não dependem explicitamente da variável tempo, as vibrações caóticas só são possíveis em sistemas de três ou mais variáveis de estado (Villate, 2007). Sistemas variantes no tempo, isto é, sistemas que dependem não só das variáveis de estados mas também do tempo de forma explícita, podem ser transformados em sistemas invariantes no tempo por acréscimo de uma variável de estado. Acontece assim que o caos pode ocorrer também em sistemas contínuos de segunda ordem, desde que estes sejam variantes no tempo. Caso contrário, o teorema garante que num sistema de segunda ordem invariante no tempo, todas as soluções são limitadas e classificam-se em três tipos: I) soluções que terminam num ponto; II) soluções que terminam num ciclo limite; III) soluções que se fecham sobre si próprias (ciclos limite).

#### 1.1.4. Os mecanismos que levam ao caos

Quando o caos surge devido à variação dos parâmetros do sistema, a transição para o caos está naturalmente associada a bifurcações locais ou a bifurcações globais, que ocorrem como consequência da variação dos parâmetros, e portanto pode ser originada de várias formas. A *duplicação do período*, a *quasiperiodicidade*, a *crise* e a *intermitência* são os mecanismos conhecidos, e bem compreendidos uma vez que se podem comprovar analiticamente, numericamente ou experimentalmente (M. Gidea & Niculescu, 2002; Moon, 1992; Nayfeh & Balachandran, 1995; Ott, 1993).

Na *duplicação do período*, o caos é originado por uma duplicação sucessiva do período à medida que um parâmetro do sistema varia gradualmente num dado sentido. Neste cenário, uma solução periódica de período 1 evolui para uma solução periódica de período 2, seguidamente para uma solução de período 4, e assim sucessivamente em potências de 2 até que ao fim de um número infinito de bifurcações a solução torna-se caótica. Todavia, o ruído está sempre presente na prática e este faz com que algumas das bifurcações superiores sejam suprimidas (ex.: bifurcação de período 32 para 64; de 64 para 128). A transição para o caos ocorre assim após um número finito de bifurcações.

No mecanismo da *quasiperiodicidade*, a transição ocorre de um movimento quasiperiódico, isto é, de um movimento que contém dois ou mais períodos incomensuráveis, para um movimento caótico à medida que um parâmetro é variado. Aqui, são três os cenários possíveis: I) cenário de *Ruelle-Takens-Newhouse*; II) *Destruição do Toro*; III) *Duplicação do*

*Toro*. No primeiro cenário, o caos é originado por *bifurcações de Hopf* sucessivas, onde um dado estado de equilíbrio evolui para um movimento periódico, seguidamente para um movimento quasiperiódico de período 2, posteriormente para um movimento quasiperiódico de período 3, até que a partir deste último em particular pode surgir o caos em bifurcações seguintes. Isto é, não quer dizer que o caos vá surgir na bifurcação seguinte, porque é possível ter oscilações quasiperiódicas de mais períodos, mas sim que pode surgir apenas a partir de um movimento quasiperiódico de período 3. No segundo cenário, é a destruição de um toro que origina o caos. Um movimento quasiperiódico de período 2, que forma um toro numa dada *secção de Poincaré*, é iniciado após a ocorrência de uma *bifurcação de Hopf secundária supercrítica*, sendo posteriormente deformado e destruído à medida que o parâmetro é variado além do ponto de bifurcação. No terceiro e último cenário, é um movimento quasiperiódico de período 2, originado por uma *bifurcação de Hopf secundária supercrítica*, que seguido de uma cascata de *bifurcações por duplicação do período* dá origem a uma duplicação sucessiva do toro que no final da cadeia leva ao caos.

Na *crise*, cujo mecanismo descreve alterações qualitativas repentinas num comportamento já caótico à medida que um parâmetro varia em torno de um valor crítico, a alteração do comportamento ocorre devido à colisão do atrator caótico com soluções periódicas instáveis ou pontos sela. Aqui, dependendo da natureza da descontinuidade induzida no atrator, a *crise* classifica-se em três tipos: I) o atrator caótico é destruído/criado subitamente; II) o tamanho do atrator aumenta/diminui subitamente; III) dois ou mais atratores fundem-se, dando origem a um único atrator caótico, ou este separa-se, originando vários atratores caóticos, ocorrendo este frequentemente em sistemas com simetrias.

A *intermitência* descreve uma alteração entre dois comportamentos qualitativamente diferentes, onde longos intervalos de tempo de um movimento regular são interrompidos por curtos intervalos de tempo de movimento irregular, que ocorrem em intervalos de tempo imprevisíveis, e enquanto o parâmetro do sistema mantém-se constante na proximidade de um valor crítico. A *intermitência* ocorre devido a bifurcações locais e classifica-se, de acordo com o tipo de bifurcação, essencialmente em três tipos: tipo I, II e III; associados respetivamente a *bifurcação sela-nó*, *bifurcação de Hopf subcrítica* e *bifurcação de duplicação do período subcrítica*. Um quarto tipo, designado por *intermitência on-off*, é ainda identificado, podendo ser visto na verdade como uma variante do tipo III, onde o movimento alterna entre longos períodos de um movimento quiescente (quase estático) e pequenos 'estouros' caóticos (*bursts*). A *intermitência* pode ocorrer também devido a uma *crise*, no caso em que a trajetória, atraída por um atrator caótico, cruza a bacia de atração de um segundo atrator caótico, é posteriormente atraída por este, até que somente passado algum tempo (ou iterações) é que volta a cruzar novamente a bacia de atração do primeiro e vai alternando assim sucessivamente entre dois atratores caóticos diferentes. Esta intermitência é designada usualmente como *intermitência induzida pela crise*.

## 1.2. Motivações

O estudo de sistemas dinâmicos é uma área já com um forte *know-how* na comunidade científica e é utilizado inevitavelmente na modelação e resolução de problemas de engenharia. Contudo, a classe de sistemas dinâmicos caóticos, que se ergueu recentemente, é um tema ainda com muito por explorar, e embora tenha havido nos últimos anos um esforço tremendo por parte da comunidade no sentido de fazer progressos, existem certos problemas que ainda se encontram por resolver. Nomeadamente, no que diz respeito à deteção automática de dinâmicas caóticas e ao controlo deste tipo de sistemas tomando em consideração restrições nos atuadores.

Existem, decerto, várias ferramentas que permitem analisar e detetar a presença de movimentos caóticos em sistemas dinâmicos, no entanto, a maioria destas ferramentas tornam-se apenas úteis quando aplicadas *offline*. Por outro lado, as técnicas existentes baseiam-se ou no modelo matemático do sistema ou em séries temporais livres de ruído para caracterizar o tipo de comportamento. De entre várias extensões para conseguir uma deteção a partir de séries corrompidas com ruído, algumas revelam-se eficazes, mas no entanto apenas para níveis de ruído bastante baixos, ainda que aplicadas *offline*, e sem garantias que não possam vir a falhar.

No que se refere ao controlo, é certo que qualquer controlador tem de lidar inevitavelmente com restrições nos atuadores independentemente do sistema exibir um comportamento regular ou caótico. As tensões/correntes elétricas que podem ser aplicadas a um circuito elétrico são limitadas, as amplitudes das superfícies de controlo de uma aeronave são limitadas, a tração de um motor é limitada, etc. Estes são alguns exemplos de restrições nos atuadores que devem ser considerados no projeto de um controlador. Por outro lado, existem aplicações em que não só as magnitudes dos atuadores têm um papel importante mas também as suas taxas: o *slew-rate* de um amplificador operacional é limitado; a capacidade de resposta de um pneumático é limitada; válvulas e bombas têm vazões máximas; etc., que devem também ser consideradas. Caso contrário, as saturações dos atuadores podem levar a uma degradação do desempenho do sistema ou mesmo até a um cenário catastrófico no caso extremo. A título de exemplo, foi o que aconteceu em 1992 relativamente a sistemas de controlo de voo. Um desastre ocorreu com um protótipo do avião F-22 Raptor devido a oscilações induzidas pelo piloto causadas parcialmente pela saturação das taxas das superfícies de controlo que por sua vez induziram efeitos de atraso/retardo na malha de controlo. Em 1993, um acidente de aviação semelhante ocorreu com o JAS 39 Gripen onde saturações tiveram novamente um papel crítico (Murray, 1999). Foi relatado que saturações nos atuadores foram também responsáveis como um dos vários infortúnios que conduziram ao desastre nuclear de Chernobyl de 1986, onde limitações de taxas agravaram uma situação já perigosa (Stein, 2003).

Contudo, embora existam várias técnicas que permitam controlar sistemas não-lineares, inclusive quando a dinâmica é caótica, as saturações nos atuadores raramente são consideradas de princípio na formulação do problema, dada a complexidade acrescida que trazem ao problema de controle. A abordagem intuitiva, muitas vezes empregue, consiste na projeção do controlador não assumindo qualquer tipo de restrições de entrada e na adição à posteriori de um bloco de saturação para limitar os sinais de controle. Contudo, apesar de funcional, é uma abordagem em que o desempenho não é o melhor e que pode mesmo até levar o sistema à instabilidade. Para aplicações mais exigentes e críticas, em que as variações dos sinais de controle têm também de ser consideradas, como é o caso de sistemas aeroespaciais/aeronáuticos (ex.: veículos espaciais, satélites, aviões, helicópteros, etc.), poucas são as técnicas abertas à comunidade, e as poucas que se podem encontrar aplicam-se, à melhor pesquisa efetuada pelo autor, apenas a sistemas lineares.

Ora, sendo a maioria dos sistemas físicos reais não-linear por natureza, e tendo a prática comprovado que estes podem vir a exibir comportamentos caóticos mesmo que tenham sido projetados para operar em regimes bem regulares, torna-se extremamente necessário arranjar forma de detetar a ocorrência de caos em tempo-real, e de agir de imediato, controlando o sistema, uma vez que um movimento caótico indesejado pode levar a cenários catastróficos. Além do mais, a deteção deve ocorrer através de sinais observáveis, porque embora os modelos dinâmicos possam ser conhecidos, estes contêm quase sempre incertezas que na maior parte das vezes são desconhecidas. É um problema que torna-se assim ainda mais complexo, na medida em que o detetor tem de conseguir distinguir corretamente a existência de caos ou não mesmo na presença de ruído, inevitável em qualquer medição. No que toca ao controle, torna-se necessário arranjar soluções que garantam robustez contra incertezas e perturbações dadas as características dos sistemas caóticos, principalmente a alta sensibilidade que apresenta à variação de parâmetros e às condições iniciais, mas que tenham em consideração as restrições dos atuadores, não só nas magnitudes mas também nas suas taxas.

Posto isto, nada melhor que duas tarefas importantes e desafiadoras, relacionadas com um tema ainda em exploração e com bastante interesse na atualidade, como estas para servir de inspiração e estimular o desenvolvimento deste trabalho, e contribuir de alguma forma com avanços úteis na resolução de problemas de engenharia, em particular, na área do controle de sistemas dinâmicos.

### 1.3. Objetivos da Investigação

A investigação levada a cabo nesta tese tem como principais objetivos os seguintes:

- ✓ Propor um algoritmo de deteção automática de caos através da análise dos sinais de saída de um sistema dinâmico. O método a elaborar deve ser, por conseguinte, capaz de detetar a ocorrência inesperada de movimentos caóticos em tempo-real, isto de modo a que permita desencadear uma ação de controlo de imediato e tornar o funcionamento do sistema novamente regular, e garantir que a deteção ocorre de forma eficaz mesmo quando os sinais a analisar se encontram corrompidos com ruído dado que o ruído é inevitável em qualquer medição, por mais que seja reduzido. Este novo detetor tem por objetivo permitir uma deteção de caos eficaz em sistemas reais e críticos como os aeroespaciais, e que as ferramentas existentes até então, pelo melhor conhecimento do autor, ainda não o permitiam.
- ✓ Elaborar métodos de controlo para sistemas caóticos tendo em conta restrições nos atuadores. Os métodos a elaborar devem garantir robustez contra incertezas no modelo (incertezas paramétricas e/ou perturbações externas), uma vez que estes sistemas são extremamente sensíveis às variações de parâmetros e às condições iniciais, ou, na verdade, à variação da trajetória em qualquer ponto, e as restrições no controlo devem ser consideradas de raiz não só nas magnitudes mas também nas taxas de modo a que os métodos possam ser aplicados efetivamente a sistemas altamente exigentes. Além do mais, o controlo deve ser exclusivamente de saída, e não de todos os estados, para tornar a área de aplicabilidade mais vasta. Estes métodos vêm permitir o controlo e a sincronização robusta de sistemas caóticos clássicos (ex.: Lorenz, Rössler, Chen, etc.), mas também de sistemas não-lineares suscetíveis de exibir comportamentos caóticos como acontece em sistemas aeroespaciais, com restrições nos atuadores, e que os métodos atuais, pelo melhor conhecimento do autor até à data, não permitem.
- ✓ Implementar os algoritmos e métodos propostos através de simulações numéricas, quer em sistemas caóticos clássicos e já bem explorados na literatura, quer em sistemas reais da indústria aeroespacial e aeronáutica, a fim de validar a eficácia e robustez dos métodos gastando o mínimo de recursos financeiros.
- ✓ Especificar as funcionalidades e as limitações do detetor e dos métodos de controlo.
- ✓ Disseminar os avanços conquistados com esta investigação na comunidade científica especializada, através da publicação de capítulos em livros e de artigos em revistas de circulação internacional com arbitragem científica.

## 1.4. Estrutura da Tese

A tese encontra-se dividida em duas partes fundamentais e ambas contributivas para o avanço das fronteiras do conhecimento científico: a primeira parte lida com a detecção robusta de comportamentos caóticos em sistemas dinâmicos, onde é apresentada um novo algoritmo, formulado de raiz, para a detecção de modos caóticos em tempo-real; e a segunda parte, com o controlo robusto de sistemas caóticos contínuos no tempo, e onde são apresentadas várias abordagens para o controlo e sincronização de saída desta classe de sistemas. A tese encontra-se organizada por conseguinte em seis capítulos e faz acompanhar de cinco anexos, descritos a seguir:

No capítulo um, *Introdução*, começa-se por apresentar um enquadramento, onde é dado a conhecer o que é um sistema caótico, quais são as suas principais características, uma breve história sobre a teoria do caos, em que tipo de sistemas e em que circunstâncias pode ocorrer o comportamento caótico, e por fim, com os mecanismos que levam o caos a se manifestar. Nos tópicos seguintes, expõem-se as motivações que levaram à realização desta investigação, definem-se os objetivos e o capítulo finaliza com a forma de como a tese está estruturada.

Seguindo-se para o capítulo dois, *Métodos de Análise e de Controlo de Caos*, capítulo este que se encontra repartido em duas partes: uma referente à detecção; e uma referente ao controlo, apresentam-se as ferramentas mais avançadas e atuais de análise e detecção de caos, assim como de controlo e sincronização deste tipo de comportamento, encontradas na literatura à melhor pesquisa efetuada pelo autor. Aqui, descrevem-se resumidamente cada uma das técnicas, expõem-se as razões pelas quais podem eventualmente vir a falhar, e identificam-se as limitações que apresentam em comum por forma a estabelecer os requisitos dos métodos elaborados.

No capítulo três, *Deteção Robusta de Caos em Tempo-Real*, prossegue-se à elaboração de um algoritmo de detecção de movimentos caóticos em tempo-real, a partir da observação de uma única saída do sistema assumindo que esta se encontra corrompida com ruído, nomeadamente com ruído branco gaussiano. É dada a conhecer a ideia chave por detrás da detecção, uma explicação detalhada sobre cada uma das fases constituintes, apresenta-se o algoritmo de forma sumariada, na forma de pseudocódigo, e o capítulo termina com comentários acerca das condições de exequibilidade do algoritmo proposto.

Avançando-se para o capítulo quatro, *Controlo Robusto de Sistemas Caóticos com Restrições nos Atuadores*, aborda-se o problema de controlo robusto de sistemas não-lineares suscetíveis de virem a exibir comportamentos caóticos, tendo como premissa que os sinais de controlo têm de cumprir restrições previamente especificadas nas magnitudes e também nas taxas. Este capítulo subdivide-se essencialmente em quatro partes, onde se

apresentam extensões de técnicas de controlo linear modernas para alcançar o controlo robusto deste tipo de sistemas, não-lineares por natureza. Na primeira parte, o controlo é concebido tendo por base restrições simétricas nas magnitudes e nas taxas, na segunda parte, as restrições são impostas de forma diferente para se conseguir restrições assimétricas nas magnitudes, na terceira e na quarta parte, as restrições são ambas simétricas, sendo que na terceira as incertezas paramétricas do modelo são consideradas de forma explícita, e na quarta o conhecimento do modelo matemático que gera os sinais de referência não é exigido. Além do mais, o controlo refere-se exclusivamente ao controlo de saída (e não de todos os estados), aumentando assim a sua área de aplicabilidade.

O capítulo cinco, *Validação e Discussão das Técnicas Propostas*, lida com a validação do novo detetor de caos e das abordagens de controlo. Simulações numéricas são efetuadas individualmente para cada uma das técnicas, a fim de atestar a sua eficácia e robustez, considerando para o efeito ruídos nas medições, incertezas paramétricas e perturbações externas. Neste capítulo, cada um dos casos de simulação apresentados é seguido de uma discussão acerca dos respetivos resultados. No que diz respeito à deteção, é ainda apresentada uma análise da complexidade computacional do algoritmo, onde a sua eficiência é avaliada do ponto de vista computacional. No final do capítulo, é apresentado um caso de síntese, em que a deteção é interligada ao controlo, com o intuito de mostrar a supressão de dinâmicas caóticas num sistema aeroespacial sob o efeito de perturbações.

Por último, a tese termina no capítulo seis, *Conclusões e Sugestões para Futuras Investigações*, com umas considerações finais, com as principais conclusões relativas às abordagens propostas realçando os aspetos mais poderosos que cada uma apresenta, com a identificação das respetivas limitações, e com sugestões, quer de possíveis extensões aos métodos apresentados, quer de novas direções de investigação no prosseguimento do trabalho nesta tese alcançado.

Em *Anexo*, encontram-se os métodos de resolução numérica de equações diferenciais utilizados nas simulações efetuadas - (Anexo A), métodos de diferenciação e Integração numérica - (Anexo B), métodos de resolução de equações específicas requeridas por algumas das técnicas de controlo - (Anexos C e D), e um glossário, maioritariamente de termos caóticos, mas também de termos relacionados com controlo de sistemas e que são fulcrais para o bom entendimento do documento - (Anexo E).

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

## Capítulo 2

### 2. Métodos de Análise e de Controlo de Caos

#### 2.1. Análise / Detecção de Caos

##### 2.1.1. Análise da Evolução Temporal e do Espaço de Fases

Usualmente, a primeira pista que indica que um dado sistema exhibe um comportamento caótico é dada através da observação da amplitude das saídas do sistema (ou estados disponíveis) ao longo do tempo e através da representação das suas coordenadas num ou mais gráficos, isto é, analisando o *espaço de fases* ou *planos de fase* do sistema. Esta observação é conseguida recorrendo por exemplo a um osciloscópio, e contrariamente ao que acontece quando o sistema exhibe um comportamento regular, onde é evidente um ponto de equilíbrio, uma órbita periódica ou uma órbita quasiperiódica, o movimento observado não revela qualquer periodicidade ou padrões que se repitam, e nalguns casos a trajetória alterna entre estados de equilíbrio, oscilando por instantes em torno de cada um desses estados.

O movimento caótico é assim associado a uma *estrutura fractal* e existe quando o *espaço de fases* apresenta o tão chamado *atrator estranho*. Contudo, tanto a análise dos sinais ao longo do tempo como a análise do *espaço de fases* são meramente indicativos. Uma inspeção visual não é suficiente para caracterizar a dinâmica do sistema. Note-se por exemplo que o movimento pode possuir mais do que um período principal como é o caso do movimento caótico, e nesse caso, distinguir um movimento quasiperiódico de muitos períodos de um movimento caótico não é tão fácil quanto parece senão mesmo até impossível. Além disso, mesmo quando se analisa um movimento de um só período é necessário ter alguma precaução porque o período pode ser longo o que pode complicar o processo de reconhecimento de padrões. Note-se também que o facto do *espaço de fases* exhibir um *atrator estranho* não implica necessariamente a presença de caos uma vez que nem todos os *atratores estranhos* são caóticos (C., Ott, Pelikan, & Yorke, 1984; Zhu & Liu, 1997).

##### 2.1.2. Secções de Poincaré

As *secções de Poincaré* são uma ferramenta clássica muito útil quando se trata de avaliar o comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos contínuos no tempo. O procedimento consiste em criar uma ou mais secções, cada uma geralmente transversa ao fluxo num dado ponto, e na análise visual da intersecção das órbitas com cada uma destas secções no espaço de fases. Desta forma, um sistema contínuo no tempo descrito por  $n$  variáveis de estado é

transformado num sistema discreto no tempo de  $n - 1$  variáveis o que torna clara a percepção da sua dinâmica. Uma órbita de período um é assim caracterizada numa dada secção de Poincaré por um único ponto, uma órbita de período dois por dois pontos, e assim sucessivamente até surgir uma nuvem de pontos, situação a qual indica um movimento caótico.

As *secções de Poincaré* permitem distinguir vibrações periódicas, quasiperiódicas, e caóticas, porém, são apenas úteis para a análise de sistemas de baixa dimensão (até três variáveis de estado). Para sistemas com dimensão superior a técnica apresenta como principal desvantagem o facto que a sua interpretação torna-se cada vez mais complexa à medida que a dimensão aumenta, uma vez que é necessário considerar várias secções para facilitar a caracterização do comportamento. O ruído nas medições inevitável em quase todos os sistemas físicos reais é um outro impasse e cujas *secções de Poincaré* são bastante sensíveis. Influenciado pelo ruído, cada órbita pode ser ligeiramente desviada no instante exato em que atravessa a secção causando o aparecimento de inúmeros pontos, induzindo erradamente na presença de caos quando na verdade o movimento pode ser periódico. Técnicas de redução de ruído devem ser assim aplicadas a fim de minimizar os efeitos do ruído, e se as suas características forem conhecidas o projetista pode considerar pequenas nuvens de pontos como pontos individuais. No entanto, embora esta estratégia simplifique a análise, apenas é útil no caso de vibrações (multi)periódicas e quando os períodos estão suficientemente afastados uns dos outros. Adicionalmente note-se também que o fluxo pode não ter uma *secção de Poincaré* global, porque teria de ser transversal a todas as órbitas possíveis, e nesse sentido é preciso ter algum cuidado ao tirar conclusões porque uma escolha inapropriada da secção pode causar o aparecimento de poucos pontos quando na verdade poderão existir muitos mais.

### 2.1.3. Diagramas de Bifurcações

O comportamento caótico pode ser originado por diferentes vias. *Duplicação do período*, *destruição do toro*, e *intermitência* são as três mais comuns, e para muitos sistemas, a *duplicação do período* é uma via muito comum (M. Gidea & Niculescu, 2002; Marek & Schreiber, 1995; Moon, 1992; Nayfeh & Balachandran, 1995; Ott, 1993). Nesta em particular, o período aumenta em potências de dois à medida que um dos parâmetros aumenta (ou então diminui), e como resultado, o movimento é dito ser (multi)periódico quando o sistema exhibe um número finito de estados e caótico quando exhibe um número infinito de estados. O *diagrama de bifurcações* é uma ferramenta gráfica com base neste princípio que permite determinar para que valores de parâmetros ocorre o comportamento caótico e o procedimento consiste em analisar o movimento (após o regime transiente) variando um dos parâmetros de cada vez, mantendo todos os restantes inalterados.

O *diagrama de bifurcações* torna-se numa ferramenta muito útil para analisar sistemas não-lineares na medida em que mostram a dinâmica global em função dos parâmetros. Contudo, é uma análise que tem de ser realizada *offline*, que requer o conhecimento exato das equações matemáticas do sistema, e que depende da acuidade visual humana para determinar o tipo de comportamento dinâmico. Por outro lado, os *diagramas de bifurcações* preveem somente o caos originado por *duplicações do período* ou o caos originado devido a variações nos parâmetros. O caos induzido devido ao efeito de perturbações externas não pode ser previsto.

#### 2.1.4. Expoentes de Lyapunov

Para além de ausência de um comportamento regular, os sistemas caóticos são caracterizados essencialmente pela extrema sensibilidade às condições iniciais que apresenta: duas trajetórias iniciadas muito próximas uma da outra acabam por se afastar ao longo do tempo até perderem qualquer tipo de correlação entre si. Com base neste atributo, os *expoentes de Lyapunov* são números que caracterizam a taxa de divergência/convergência exponencial de trajetórias vizinhas, e portanto, números que caracterizam qualitativamente e quantitativamente a dinâmica de um sistema. A existência de um atrator caótico é então declarada se o sistema apresentar pelo menos um *expoente de Lyapunov* positivo (Wolf, Swift, Swinney, & Vastano, 1985). Nalguns casos particulares podem existir dois ou mais *expoentes de Lyapunov* positivos e o sistema é dito ser *hiper-caótico* (Y. Li, Tang, & Chen, 2005), no entanto, a existência de pelo menos um expoente positivo é a condição para declarar uma dinâmica caótica. O *maior expoente de Lyapunov*, também conhecido como *expoente de Lyapunov característico* ou como *expoente de Lyapunov dominante*, é assim o número mais importante. Está relacionado com o *horizonte de previsibilidade* (Fitzpatrick, 2011), e se por um lado permite distinguir um sinal caótico de um sinal regular, permite distinguir, por outro, um processo puramente determinístico de um processo estocástico, dado que este último é caracterizado por um *expoente de Lyapunov* positivo mas infinito (Kantz & Schreiber, 2004).

Todo o *espectro de expoentes de Lyapunov* pode ser facilmente calculado através do método direto, que recorre a um espaço tangente (sistema linearizado) ao longo de uma dada trajetória fiducial, mas as equações diferenciais do sistema têm que ser conhecidas com exatidão. Note-se, porém, que na maioria das aplicações reais o modelo do sistema não é conhecido na totalidade e nalguns casos nem todas as variáveis de estado podem ser medidas. Em tais casos os expoentes têm de ser estimados a partir de séries temporais, e para esse fim, os trabalhos de Brown, Eckmann, Kantz, Rosenstein, Sano, Wolf, e respetivos colaboradores (Brown, Bryant, & Abarbanel, 1991; Eckmann, Kamphorst, Ruelle, & Ciiliberto, 1986; Kantz, 1994; Rosenstein, Collins, & Luca, 1993; Sano & Sawada, 1985; Wolf et al., 1985) são os mais relevantes no que diz respeito à estimação, principalmente, do *maior expoente de Lyapunov*.

A detecção de caos pelo *maior expoente de Lyapunov* é umas das técnicas mais exploradas na literatura. Tem sido aplicada para detetar caos quer a partir do modelo do sistema quer a partir de uma única série temporal, quer em sistemas dissipativos como em sistemas conservativos, e quer em sistemas suaves como em sistemas não-suaves (Kunze & Küpper, 1997; Kunze, 2000; Moon, 1992; Skokos, 2010). Contudo, o método não é robusto o suficiente e pode falhar em certas circunstâncias. Devido à presença inevitável de ruído nos sistemas reais acontece que o maior expoente pode resultar num valor positivo, indicando a presença de caos, quando na verdade o comportamento exibido é regular. Por outro lado, quando o expoente é estimado a partir de séries temporais, é requerida numa primeira fase uma reconstrução do espaço de fases, a qual é possível de acordo com o *Teorema de Imersão de Takens* (Takens, 1981), mas os parâmetros inerentes a essa reconstrução podem não ser os ótimos porque são também afetados por o ruído das medições. Segue-se daí que o espaço de fases reconstruído pode não ser o suficientemente equivalente ao espaço de fases gerado pelo sistema real, e nesta condição o *maior expoente de Lyapunov* caracteriza uma dinâmica que na verdade não é a real. Técnicas de filtragem podem ser obviamente aplicadas a fim de reduzir os efeitos do ruído, mas existem também outros inconvenientes, entre os quais se destacam, o esforço computacional razoavelmente elevado exigido e o facto que requer uma série temporal com um número de amostras suficientemente grande.

### 2.1.5. Análise Espectral

Dado que um sistema dinâmico pode ser descrito quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência, torna-se muitas vezes vantajoso transformar um sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência a fim de extrair informações úteis acerca do sinal. É o caso por exemplo quando o objetivo consiste em identificar as frequências dominantes e as suas respectivas potências. Relativamente a um sinal caótico, acontece que, contrariamente a um sinal periódico, ou multiperódico, em que uma *análise espectral* revela frequências bem definidas, um sinal caótico é caracterizado por ter um *espectro de frequência* contínuo, de banda larga, no entanto limitado (Kantz & Schreiber, 2004; Marek & Schreiber, 1995; Moon, 1992). Se, por um lado, a existência de muitas frequências é uma característica que distingue um sinal caótico de um sinal periódico, o facto de o espectro ser limitado permite distinguir também um sinal caótico de um sinal estocástico dado que este último apresenta frequências distribuídas ao longo de todo o espectro.

Se a série temporal em análise for puramente determinística, isto é, se não for sujeita a qualquer tipo de ruído e as respetivas equações que a geram não contiverem qualquer termo estocástico, a detecção de caos através da observação do *espectro de frequência* é relativamente simples. Contudo, quando a série temporal está corrompida com ruído, que é o que acontece quase sempre na prática, a detecção de caos recorrendo a uma *análise espectral*

pode falhar porque torna-se difícil distinguir um sinal caótico de um não-caótico dado que a *Transformada de Fourier* exibe frequências em todo o espectro devido ao ruído.

Por causa das razões acima mencionadas, técnicas de filtragem devem ser aplicadas antes da utilização desta ferramenta a fim de minimizar os efeitos do ruído. Contudo, quando utilizada a *análise espectral* para detetar caos, tem de ser utilizada com algum cuidado porque mesmo que o sinal seja 'limpo' pode acontecer que a distinção entre um sinal quasiperiódico de muitos períodos e um sinal caótico não seja tão clara devido à existência de várias frequências muito próximas umas das outras. Por outro lado, a *análise espectral* é apropriada para deteção de caos a partir de séries temporais, mas é apenas para séries geradas por sistemas de baixa dimensão (de um a três graus de liberdade). O observador pode concluir que as saídas com vários harmónicos implicam vibrações caóticas mas o sistema em análise pode ter mais graus de liberdade que aqueles que o observador tem conhecimento (Moon, 1992).

### 2.1.6. Função de Autocorrelação

Para os casos em que a distinção entre um sinal caótico e um sinal quasiperiódico de muitos períodos próximos uns dos outros não é tão clara, a *função de autocorrelação* é uma ferramenta muito útil (Kantz & Schreiber, 2004; Moon, 1992). Relacionada com a *Transformada de Fourier*, permite distinguir um sinal periódico de um sinal caótico ou estocástico. Quando a série temporal é periódica no tempo, a *função de autocorrelação*, que relaciona a série temporal com a mesma série temporal desfasada no tempo, é periódica no desfasamento temporal. Quando a série temporal é gerada por um sistema caótico determinístico a *função de autocorrelação* decai exponencialmente para zero à medida que o desfasamento aumenta. Se a série temporal for estocástica, a *função de autocorrelação* tende para zero à medida que o desfasamento aumenta mas com uma taxa de decaimento que depende das propriedades do processo. Em ambos os casos em que a função tende para zero tal acontece somente após um dado desfasamento que corresponde ao *horizonte de previsibilidade* e que está relacionado o *maior expoente de Lyapunov* (Moon, 1992).

A *função de autocorrelação* permite distinguir um sinal periódico de um caótico ou de um estocástico. No entanto, a ferramenta não é poderosa o suficiente para distinguir um sinal caótico de um sinal estocástico dado que em ambos os casos a função tende para zero.

### 2.1.7. Função de Melnikov

A análise de Melnikov é uma ferramenta analítica utilizada em muitos casos para prever a ocorrência de dinâmicas caóticas em sistemas não-lineares quando sujeitos a pequenas perturbações periódicas no tempo. Na sua forma clássica, o método foi desenvolvido para sistemas bidimensionais (um grau de liberdade), suaves e variantes no tempo, assumindo o

conhecimento de um órbita homoclínica associada a um ponto sela do sistema não-perturbado. A presença de caos é então declarada se a *função de Melnikov*, uma função relacionada com a distância entre as variedades estável e instável em *secções de Poincaré* do espaço de fases, apresentar pelo menos um zero simples. Um zero simples significa que a função iguala a zero mas a sua derivada não, e quando tal acontece, as variedades estável e instável interseitam-se transversalmente dando origem a um emaranhado homoclínico que de acordo com o *Teorema Homoclínico de Smale-Birkhoff* implica a ocorrência de um comportamento caótico (Melnikov, 1963; Perko, 2006).

Embora o método tenha sido derivado assumindo o conhecimento de uma órbita homoclínica, a *função de Melnikov* também pode ser avaliada ao longo de uma órbita heteroclínica e a ocorrência de caos detetada da mesma maneira (Bertozi, 1988). Extensões do método foram também efetuadas, e embora não muito divulgado na literatura, um dos trabalhos mais interessantes é o de Gruendler (Gruendler, 1985), consistindo numa generalização da *função de Melnikov* para sistemas com vários graus de liberdade.

As abordagens analíticas são sem dúvida mais poderosas que as numéricas e nesse sentido os métodos com base na teoria de Melnikov são bastante confiáveis. Por outro lado, os métodos de Melnikov podem ser utilizados para detetar caos em sistemas fortemente não-lineares e em sistemas com características arbitrárias (ex.: descontinuidades causadas por fricção), o que não é permitido por muitos outros métodos. No entanto, os métodos não são ideais e por conseguinte apresentam alguns inconvenientes de relevância (Awrejcewicz & Holicke, 2007; Lenci & Rega, 2004, 2005): 1) são aplicáveis exclusivamente a sistemas caracterizados por um espaço de fases específico, nomeadamente, à classe de sistemas que apresenta na sua forma não-perturbada pelo menos uma órbita homoclínica/heteroclínica associada a um ponto sela; 2) devido à limitação anterior, apenas podem prever o tão chamado caos homoclínico/heteroclínico; 3) para perturbações periódicas genéricas a deteção pode falhar porque, por hipótese, a perturbação tem que ser pequena; 4) o sistema não-perturbado deve ser integrável, isto é, deve admitir uma solução algébrica, o que nalguns casos não é possível ou então a solução pode ser muito difícil de obter; 5) estão associados a cálculos algébricos complicados cuja complexidade aumenta com o número de graus de liberdade; 6) não são métodos exatos, mas sim aproximativos, que recorrem a um pequeno parâmetro; e 7) são imprecisos no que diz respeito a bifurcações homoclínicas/heteroclínicas quando o sistema é sujeito a baixas ou a altas frequências de excitação.

Além disso, lembre-se que os métodos baseados em Melnikov são analíticos e requerem portanto o conhecimento exato do modelo do sistema bem como o conhecimento exato das perturbações, e nesse sentido não são apropriados de todo para a deteção de caos em aplicações reais, dado que as equações dinâmicas são conhecidas muitas vezes apenas com um certo grau de exatidão, e, por outro lado também, porque as perturbações são quase sempre desconhecidas embora que as suas características o sejam.

### 2.1.8. Análise de Trajetórias Vagantes

Quando um sistema determinístico não-linear exibe um comportamento caótico, o movimento da trajetória alterna em torno de vários estados de equilíbrio. É assim caracterizado por imprevisibilidade a médio e a longo termo e por sensibilidade crítica às condições iniciais. Com base neste princípio, Awrejcewicz e Dzyubak (Awrejcewicz & Dzyubak, 2005) propuseram um método numérico para traçar os domínios de caoticidade e de regularidade de qualquer sistema não-linear governado por equações diferenciais ordinárias. Intitulado por *análise de trajetórias vagantes*, compara o erro a cada passo entre duas trajetórias iniciadas em condições iniciais muito próximas com um dado limiar e essa comparação/teste permite determinar as regiões de caoticidade em função dos parâmetros do sistema.

O método tem sido aplicado para analisar e quantificar movimentos regulares e caóticos quer em sistemas suaves quer em sistemas não-suaves e tem sido provado que é mais simples e rápido do ponto de vista computacional que os célebres *expoentes de Lyapunov* (pelo menos quando calculados pelo algoritmo clássico de Wolf (Awrejcewicz & Holicke, 2007; Wolf et al., 1985). Contudo, a *análise de trajetórias vagantes* requer o conhecimento das equações dinâmicas, porque só assim podem ser integradas partindo de duas condições iniciais, e nesse sentido o método apresenta um grande inconveniente: não pode ser utilizado para detetar caos a partir de séries temporais. Por outro lado, mesmo que o modelo do sistema seja conhecido, é bem sabido que qualquer sistema real é sujeito quase sempre a incertezas desconhecidas que podem alterar consideravelmente o seu comportamento. Acontece que, devido a essas incertezas, as trajetórias obtidas por integração do modelo podem não descrever com exatidão a verdadeira dinâmica, e por conseguinte, levando, erradamente, à conclusão que o movimento é caótico quando na realidade pode não o ser.

### 2.1.9. Análise através de Injeção de Ruído

O método proposto por Poon e Barahona (C. S. Poon & Barahona, 2001) permite detetar caos a partir de séries temporais mesmo quando a série sob análise é curta e/ou está corrompida com ruído de medição, e nesse sentido o seu trabalho destaca-se entre todas as outras técnicas numéricas. Designado por *análise por injeção de ruído (noise titration)*, o método consiste em adicionar sucessivamente pequenas quantidade de ruído (ruído branco, colorido, gaussiano ou até mesmo não-gaussiano) à série temporal até que a não-linearidade de um dado modelo de Volterra autorregressivo seja completamente destruída. Posteriormente, a máxima quantidade de ruído necessária para destruir tal não-linearidade, conhecida por *limite de ruído* ( $NL \geq 0$ ), está relacionada diretamente com o *maior expoente de Lyapunov*, e indica se a série temporal é ou não caótica. Um nível  $NL > 0$  é a condição suficiente para declarar a presença de caos.

O método é considerado superior ao dos *expoentes de Lyapunov* (C. Poon, Li, & Wu, 2010; Vandeput, Verheyden, Aubert, & Huffel, 2008) uma vez que o seu indicador quantifica uma

grandeza que resulta da medida da sensibilidade às condições iniciais (que é quantificada pelo *maior expoente de Lyapunov*) juntamente com a medida da degradação do sinal devido ao ruído. Pode-se até mesmo dizer que o *limite de ruído* substitui o *maior expoente de Lyapunov* no caso de sinais sem ruído.

À primeira vista, a *análise por injeção de ruído* parece ser uma abordagem ideal para detetar caos. Contudo, tem sido reportado vários casos onde na verdade a deteção falha (Gao, Hu, Mao, & Tung, 2012). Uma das razões pelas quais o método não é infalível deve-se a um dos inconvenientes principais do modelo de Volterra. Como bem sabido, o modelo é adequado para a identificação de sistemas fracamente não-lineares mas no entanto o movimento caótico pode ser governado também por dinâmicas fortemente não-lineares. Por outro lado, relativamente à deteção nos moldes pretendidos, lembre-se que este método exige a adição sucessiva de pequenas quantidades de ruído e este procedimento torna o processo de deteção demoroso, obviamente não desejado.

### 2.1.10. Teste 0-1

Gottwald e Melbourne (Gottwald & Melbourne, 2004, 2009) desenvolveram um método original e interessante para detetar caos a partir de séries temporais que funciona eficazmente mesmo na presença de baixos níveis de ruído nas medições. Designado por *Teste 0-1*, é um teste binário que distingue entre sinais caóticos de sinais não-caóticos com base numa medida da taxa de crescimento assintótica da distância média quadrática entre duas funções. Essas funções são tais que exibem no plano um movimento difusivo (como o movimento Browniano) quando a dinâmica subjacente é caótica e um movimento não-difusivo quando a dinâmica é regular (periódica, multi-periódica). Por conseguinte, a distância média quadrática é uma função limitada no tempo no caso de uma dinâmica regular e uma função que varia linearmente com o tempo no caso de uma dinâmica caótica. Como resultado, a taxa de crescimento assintótica da distância média quadrática,  $K$ , assume dois valores:  $K = 0$  para uma dinâmica regular; e  $K = 1$  para uma dinâmica caótica.

A teoria por detrás do *Teste 0-1* é de facto interessante e trás vários pontos favoráveis face a outras ferramentas de deteção. O teste é aplicável a uma única série temporal, pelo que não requer as equações matemáticas do sistema; não requer qualquer ajuda visual no processo de decisão, o que significa que o caos pode ser detetado automaticamente; e permite uma deteção *online* se o tamanho da janela de observação não for muito grande, isto é, se o tempo do cálculo de  $K$  para cada janela não for muito grande. Contudo, embora o *Teste 0-1* aparente ser o ideal para a deteção nos moldes pretendidos, existem alguns inconvenientes que requerem algum cuidado. O *Teste 0-1* é formulado sob a hipótese que os sinais em análise têm de ser determinísticos, e nesse sentido só é capaz de detetar o tão chamado caos determinístico. É por esta razão que o nível de ruído das medições não pode ser muito grande. Sinais estocásticos são identificados como sendo caóticos quando na

verdade não o são. Esta torna-se assim numa das principais desvantagens. Dado que o ruído é inevitável em qualquer sinal medido (ex.: WGN), o teste indicaria um comportamento caótico para uma entrada constante (ex.: origem, estado de equilíbrio), quando na verdade deveria indicar um comportamento regular. Este é um caso simples em que o teste claramente falharia.

Filtros juntamente com suavizadores poderiam ser obviamente aplicados para ultrapassar o problema, mas o teste falha também por uma outra razão. A difusidade apresentada no plano é observada para uma grande classe de sistemas caóticos mas no entanto existem sistemas determinísticos, mas não-caóticos, que podem resultar nessa tal difusidade, indicando um comportamento caótico quando na verdade pode não ser o caso. Um outro ponto que merece ainda um cuidado especial está relacionado com possíveis fenómenos de sobreposição de amostragem do sinal (*oversampling*). O *Teste 0-1* pode falhar se a frequência de amostragem não for a apropriada o que pode ser problemático se a dinâmica não for conhecida, isto é, se se trata de uma dinâmica rápida ou lenta.

### 2.1.11. Teste de Três Estados (3ST)

Bastante recentemente, Fouda e seus colaboradores (Fouda, Effa, Kom, & Ali, 2013) formularam um método de deteção de caos capaz de distinguir claramente entre movimentos caóticos, periódicos e quasiperiódicos. Intitulado por *Teste de Três Estados (Three-State Test - 3ST)*, o método baseia-se numa função,  $\sigma_{LS}(\cdot)$ , que mede a habilidade de um sistema dinâmico gerar novos padrões à medida que o tempo passa. Posteriormente, um parâmetro denominado por *índice de periodicidade* -  $\lambda$ , caracteriza com base nesta função o tipo de movimento:  $\lambda = 0$  especifica um movimento periódico;  $\lambda < 0$  um movimento quasiperiódico; e por último,  $\lambda > 0$  um movimento caótico.

Contrariamente ao *Teste 0-1*, que consegue distinguir apenas sinais caóticos de sinais não-caóticos, o *3ST* é claramente mais eficiente do ponto de vista computacional e nesse sentido seria um teste excelente para uma deteção em tempo-real. No entanto, dado que o nosso objetivo consiste em detetar caos em aplicações reais, o *3ST* pode vir falhar devido aos efeitos do ruído. Tal como qualquer outro método de deteção de caos, o *3ST* é altamente sensível a pequenas variações na entrada, e portanto é eficaz apenas se o nível de ruído for o suficientemente pequeno. Um outro inconveniente deste teste está relacionado com o tamanho da janela de observação. Se o número de amostras não for suficientemente representativo o teste tende a confundir movimentos quasiperiódicos com caos fraco. Por último, e também importante, mesmo que sejam aplicados filtros para reduzir o nível de ruído, o teste é aplicável somente a sistemas discretos pelo que ainda requer extensões para sistemas contínuos.

## 2.2. Problemática dos Métodos de Detecção de Caos

Além das técnicas acima mencionadas, abordagens com base em diferentes conceitos de deteção têm sido também explorados para detetar a presença de modos caóticos em sistemas dinâmicos (Djurović, Rubežić, & Sejdić, 2013; Djurović & Rubežić, 2008; Fraser, 1996; Gençay, 1996; McDonough, Noonan, & Hall, 1995). No entanto, o autor tem notado que os métodos propostos até à data, à melhor pesquisa realizada, apresentam claramente algumas desvantagens em comum que os impedem de ser aplicados para detetar caos em tempo-real e na presença de ruído. Ocorre então que, nalgumas aplicações altamente exigentes como acontece por exemplo no campo aeroespacial e aeronáutico, a presença de caos tem de ser detetada satisfazendo os seguintes requisitos:

- 1) o caos tem de ser detetado de forma automática;
- 2) o caos tem de ser detetado a partir de séries temporais porque o modelo exato do sistema pode não ser conhecido com exatidão e/ou podem existir perturbações de propriedades desconhecidas;
- 3) o caos deve ser detetado preferencialmente a partir de séries curtas de modo a que a deteção seja alcançada o mais rápido quanto possível a fim de desencadear uma ação de controlo;
- 4) o detetor tem que ser forçosamente robusto em relação a ruídos de medição dado que estes não podem ser evitados, por mais que sejam reduzidos;
- 5) o algoritmo de deteção não deve ser ‘pesado’ nem demoroso do ponto de vista computacional dado que é desejável uma deteção em tempo-real / *online*.

## 2.3. Métodos de Controlo / Sincronização de Caos

### 2.3.1. Método OGY (Linearização do Mapa de Poincaré)

Ott, Grebogi e Yorke (Ott, Grebogi, & Yorke, 1990) foram os primeiros a formular um método para controlar explicitamente sistemas dinâmicos caóticos. O método surgiu em 1990, e embora viesse mais tarde a ser demonstrado que a técnica, apelidada de OGY em honra aos seus autores, era uma aplicação particular do *método da alocação dos pólos* (Nayfeh & Balachandran, 1995), acabou por originar várias variantes do método original devido à sua elegância e características. Enquanto que as técnicas de controlo clássicas consistem basicamente em estabilizar um sistema num dado ponto de equilíbrio através do fornecimento de energia para alterar o comportamento dinâmico, obviamente a um custo do controlo não-nulo, a beleza da técnica OGY prende-se com o facto de ser capaz de estabilizar uma *Órbita Periódica Instável* (UPO) no seio de infinitas órbitas deste tipo, a um custo do

controlo que, devido à natureza do método e uma das características dos sistemas caóticos - a *recorrência* - é, pelo menos teoricamente, praticamente nulo. Os pontos-chave do método consistem em recorrer ao modelo discreto do sistema com base na linearização do mapa de Poincaré para projetar um controlador e em recorrer à propriedade da *recorrência* dos sistemas caóticos para atuar o controlo somente nos instantes em que a trajetória revisita a vizinhança do estado ou da órbita desejada.

Diferentes autores confirmaram a eficácia do *método OGY*, sendo que este apresenta vários pontos favoráveis, nomeadamente, o baixo esforço computacional relativo à sua implementação; a independência do controlador em relação às equações dinâmicas que governam o sistema; a utilização de pequenas perturbações de modo a não alterar a estrutura do sistema; e a possibilidade de estabilizar o sistema em órbitas diferentes com sinais de controlo da mesma ordem de grandeza (Otani & Jones, 1997).

Porém, uma convergência lenta é muitas vezes reportada (Fradkov & Evans, 2005), sendo que no entanto este é o preço de atingir uma estabilização não local de um sistema não-linear com um controlo pequeno. Tereshko, Femat e Solis-Perales (Femat & Solis-Perales, 2008; Tereshko, 2011) põem ainda em causa a sua eficácia mencionando que se a dinâmica for muito rápida o controlador não consegue acompanhar e que a abordagem não é robusta contra incertezas devido à sensibilidade aos parâmetros e ao ruído. Por outro lado, o método apresenta dificuldade na estabilização de órbitas de período elevado; requer que um parâmetro do sistema seja acessível para que o método possa ser aplicado; apenas as órbitas periódicas instáveis imersas no atrator podem ser estabilizadas; e apresenta dificuldade em controlar sistemas altamente instáveis porque se a trajetória se afastar bastante da referência as pequenas perturbações já não conseguem ser eficazes (Otani & Jones, 1997). Por último, o método não tem em consideração qualquer tipo de restrição nos atuadores, ainda que o esforço do controlo seja mínimo.

### **2.3.2. Método de Pyragas (Realimentação Atrasada)**

Em 1992, Pyragas (Pyragas, 1992) propôs um método de controlo contínuo no tempo para a estabilização de órbitas periódicas instáveis (UPOs) imersas num atrator caótico. A sua abordagem, baseada numa realimentação linear com atraso, tornou-se bastante popular e deu origem a várias extensões do método original, por não requerer as equações dinâmicas que governam o movimento do sistema. O sinal de controlo é formulado a partir de uma única série temporal (ex.: uma das saídas do sistema), e é proporcional à diferença entre o estado atual do sistema e o seu estado algum tempo antes, onde o atraso entre ambos os estados corresponde ao período da UPO desejada.

A *realimentação com atraso* é bastante atrativa pelo facto do sistema sincronizar o seu próprio comportamento sem sequer requerer o modelo do sistema, nem a localização da órbita periódica a estabilizar. Dado que nalguns sistemas o modelo dinâmico que descreve o

movimento é bastante complexo ou então pode não ser conhecido na totalidade (ex.: devido a perturbações desconhecidas), esta é uma grande vantagem da técnica em causa. Outros pontos a favor que o método apresenta é o facto de a sua implementação não requerer grande esforço computacional nem cálculos à priori e de ser robusto para alguns sistemas mesmo na presença de um ruído considerável (Pyragas & Tamaševičius, 1993).

No entanto, contrariamente aos métodos baseados no OGY, onde trajetória é direcionada para uma UPO predefinida, o *controlo por realimentação atrasada* não distingue diferentes órbitas periódicas do mesmo período (porque exige apenas o período da UPO e não UPO em si) e portanto não leva necessariamente à estabilização numa órbita desejada. Por outro lado, o método é eficaz na estabilização de UPOs de baixos períodos mas pode falhar na estabilização de UPOs de altos períodos ou de órbitas altamente instáveis (Tereshko, 2011). A sensibilidade ao parâmetro *atraso* é um outro inconveniente, pois o seu valor tem de ser exatamente igual ao período da UPO desejada (Andrievskii & Fradkov, 2003). Caso contrário, o controlador tentará estabilizar o sistema numa órbita que pode não ser periódica, deixando de certa forma de fazer sentido. Tem-se portanto que o sistema pode ser controlado para se sincronizar com ele próprio mas que não pode ser controlado para seguir uma trajetória de referência especificada pelo projetista e que restrições no controlo não são tomadas em conta.

### 2.3.3. Linearização por Realimentação

Uma das técnicas mais comuns para controlar sistemas não-lineares é através da *linearização por realimentação*. A abordagem é também conhecida como *linearização exata* que se obtém pela *inversão dinâmica não-linear (NDI)* (Enns, Bugajski, Hendrick, & Stein, 1994; Kolesnikov, 2005; Ostroff & Bacon, 2002), e o objetivo consiste numa primeira fase em formular uma lei de controlo de modo a que o sistema em malha fechada seja linear. Tal transformação do sistema originalmente não-linear num linear pode ser feita de forma total ou parcial, no sentido em que se a linearização ocorre entre *entrada-estado* ou *entrada-saída* respetivamente. Numa segunda fase, o projeto do controlador é completado recorrendo às técnicas poderosas e bem conhecidas do controlo linear (ex.: *método da alocação dos polos*, *LQR*, etc).

A *linearização por realimentação* é uma técnica que requer o modelo matemático exato do sistema dinâmico e como consequência não garante robustez face a incertezas do modelo e face a perturbações externas (Jarzebowska, 2012; Papageorgiou & Glover, 2004). Dado que na maioria dos sistemas físicos reais os modelos contém parâmetros que são conhecidos apenas com algum grau de exatidão (ex.: parâmetros geométricos, parâmetros de inércia, parâmetros de fricção, entre outros), tal abordagem de controlo muitas vezes acaba na prática por não ser bem-sucedida. A título de exemplo, aplicar esta estratégia num sistema de controlo de voo de uma aeronave não seria adequado porque, para além exigir a dinâmica

completa e exata do sistema, é bem sabido que é muito difícil identificar com exatidão os coeficientes aerodinâmicos porque são funções não-lineares de várias grandezas físicas.

Embora a técnica tenha sido utilizada também para controlar sistemas caóticos (Fradkov & Evans, 2005; Liqun & Yanzhu, 1998; Shi & Zhu, 2007), não garante que o controlo seja eficaz precisamente porque é sensível à alteração de parâmetros. Um bom caso em que o método falharia seria no controlo do circuito de Chua, onde os parâmetros do modelo são grandezas de componentes eletrónicos que facilmente se alteram com a temperatura.

#### **2.3.4. Backstepping Control**

Uma outra técnica marcante para o controlo de sistemas não-lineares emergiu nos anos 90. Designada por *backstepping*, recorre ao cálculo de leis de controlo virtuais em passos intermédios que por sua vez num último passo possibilitam o cálculo da lei de controlo real. A técnica baseia-se numa função de *Lyapunov* e pode ser interpretada como a adição de um integrador após cada passo (cascata de integradores).

Contrariamente à *linearização por realimentação*, onde as não-linearidades são eliminadas por completo, o *backstepping* oferece mais flexibilidade em lidar com não-linearidades no sentido em que a estabilidade global pode ser alcançada evitando que ‘não-linearidades úteis’ sejam eliminadas (Jarzebowska, 2012). O método apresenta como principais desvantagens a dificuldade em encontrar a função de *Lyapunov* e sensibilidade à variação de parâmetros.

A técnica já foi utilizada com sucesso por vários autores quer para o controlo quer para a sincronização de sistemas caóticos (Idowu, Vincent, & Njah, 2008; Kareem, Vincent, Laoye, & Akinola, 2008; Yassen, 2006). No entanto, apesar do controlo ter sido bem-sucedido, a abordagem foi testada somente através de simulações considerando os modelos ‘limpos’.

#### **2.3.5. Controlo Robusto**

No controlo não-linear baseado puramente no modelo como é o caso da *linearização por realimentação*, a lei de controlo é formulada com base num modelo nominal do sistema físico. Consequentemente, quando o sistema controlado contém incertezas na dinâmica ou quando é sujeito a perturbações, o controlador deixa de ser eficaz precisamente porque é projetado assumindo que o modelo é exato e que não sofre variações. Tendo em conta que incertezas estão quase sempre presentes na maioria dos sistemas dinâmicos (ex.: incertezas nos parâmetros, ruído nos sensores, dinâmicas não modeladas, flutuações indesejadas nos atuadores), o *controlo robusto*, cuja lei de controlo é projetada considerando não só o modelo nominal mas também algumas incertezas, é uma ferramenta que se revela por essa razão bastante eficaz na prática.

Vários métodos de *controle robusto* têm sido utilizados para controlar sistemas não-lineares:  $H_\infty$ ,  $H_2/H_\infty$ , *síntese- $\mu$* , *SMC*, *LQG/LTR*, *QFT*, sendo o  $H_\infty$  o mais popular. Doyle e seus colaboradores (Doyle, Glover, Khargonekar, & Francis, 1989) sintetizam o  $H_\infty$  na forma de espaço de estados cujo ganho do controlador é obtido através da resolução de duas equações de Riccati.

O *controle robusto* tem sido utilizado também para a estabilização e sincronização de sistemas caóticos. Xu e Yang (Xu & Yang, 2009) usaram a técnica  $H_\infty$  para sincronizar sistemas caóticos do tipo pêndulo. Huang e Feng (H. Huang & Feng, 2008) recorreram à mesma técnica para o sincronismo de sistemas do tipo *Lur'e*. Bousson e Antunes (Bousson & Antunes, 2010) elaboraram um método de *controle robusto* para a sincronização dos sinais de saída do circuito de Chua com padrões especificados de sinais regulares. Contudo, as técnicas robustas apresentam limitações quando utilizadas para controlar sistemas com saturação dos atuadores.

### 2.3.6. Controle Adaptativo

O *controle adaptativo* é uma técnica excelente para lidar com sistemas sujeitos a incertezas ou cujos parâmetros variam no tempo. Opostamente ao *controle robusto*, que garante que se as incertezas estiverem dentro dos limites pré-especificados a lei de controle não precisa de ser alterada, o *controle adaptativo* não requer informação à priori dos limites dos parâmetros e das incertezas e a lei de controle é alterada constantemente ao longo do tempo. O controle de voo de um avião pode ser visto como um exemplo típico onde é adequado utilizar o *controle adaptativo*. Dado que a massa diminui à medida que o avião voa devido ao consumo de combustível, ter uma lei de controle que se adapte a essa alteração é um ponto a favor para obter controle satisfatório (Jarzebowska, 2012).

Existem várias técnicas de *controle adaptativo*: *escalonamento de ganhos*, *controle por modelo de referência* (MRAC), *reguladores autoajustáveis* (STR), *controle dual*, entre outros, e a maioria baseia-se na estimação de parâmetros em tempo-real (Astrom & Bjorn, 1994).

Recentemente, Bousson (Bousson, 2007) formulou uma técnica de estimação de parâmetros variantes no tempo com aplicação ao seguimento de trajetórias. Apelidado de NLRA (*Nonlinear Learning Rate Adaptation*), o procedimento de estimação é em tempo-real e não requer informação estocástica sobre o modelo nem das matrizes de covariância do ruído, contrariamente aos métodos de estimação estocásticos (ex.: filtros de Kalman). Do ponto de vista computacional a abordagem é prática, de rápida implementação e capaz de estimar os parâmetros (que podem ser variáveis de controle) fiavelmente mesmo na presença de ruído.

Contudo, lidar com incertezas num modelo não é tarefa fácil, e por essa razão as técnicas de *controle adaptativas* apresentam uma desvantagem: a estrutura dos parâmetros do modelo tem de ser conhecida. Tal requisito leva a que suas aplicações sejam limitadas para o controle de sistemas caóticos. Por exemplo, ainda não foi mostrado que dois osciladores com

estruturas bastante diferentes podem ser sincronizados através deste tipo de controlo (Femat & Solis-Perales, 2008). Ainda assim, a técnica tem sido empregue para controlar sistemas caóticos (Alstrom, Marzocca, Bollt, & Ahmadi, 2010; Ayati & K-Sedigh, 2008; Guo & Liu, 2011; Koofigar, Sheikholeslam, & Hosseinnia, 2011), mas, mais uma vez, sem considerar restrições nos atuadores.

### 2.3.7. Controlo Preditivo

O *controlo preditivo (MPC)*, conhecido também como *controlo por recuo do horizonte (RHC)* ou como *controlo com horizonte deslizante (MHC)*, é uma das metodologias mais avançadas e bem-sucedidas de controlo de sistemas dinâmicos (Bhattacharya, Balas, Kaya, & Packard, 2002). O seu princípio consiste na resolução sucessiva em tempo-real de um problema de controlo ótimo de horizonte finito, com base nas medições ou estimativas dos estados atuais do sistema. A grande vantagem do *controlo preditivo* reside na possibilidade de incluir diversas restrições no critério de otimização como por exemplo limitar as saídas do sistema, os seus estados, os sinais de controlo, as variações desses sinais, entre outras.

O *controlo preditivo* tem sido utilizado extensivamente no controlo de processos industriais por ser um dos poucos métodos que permitem considerar, de forma explícita, restrições no controlador. À primeira vista, o MPC parece ser a melhor técnica para alcançar o objetivo proposto relativamente ao controlo. No entanto, embora tenha sido também utilizado para estabilizar órbitas periódicas instáveis (UPO) e sincronizar sistemas caóticos (Ahn, Lee, & Song, 2012; Mohammadbagheri & Yaghoobi, 2011; Polyak, 2005), os modelos em questão são livres de ruído e o controlo pode falhar. Por outro lado, a sua aplicação a sistemas com dinâmicas rápidas torna-se cada vez mais desafiadora à medida do quanto mais rápida é a dinâmica, porque o tempo de resolução do problema de otimização entre cada amostra torna-se num requisito que pode estar na ordem dos milissegundos ou até mesmo dos microssegundos, o que para dinâmicas rápidas pode exigir grande poder de cálculo.

### 2.3.8. Controlo com base em LMI's

Técnicas de controlo avançadas com base em LMI's (*Linear Matrix Inequalities*) são abordagens interessantes que têm sido também utilizadas para controlar sistemas caóticos (Deng & Xu, 2010; Pai & Yau, 2010; Tanaka, Ikeda, & Wang, 1998; Yu, Zhong, Li, Yu, & Liao, 2007). As LMI's permitem calcular o ganho do controlador de forma a que o sistema controlado satisfaça certos requisitos de desempenho. Isso inclui a possibilidade de considerar condições de estabilidade, condições para uma taxa de decaimento específica, condições para reduzir o efeito das perturbações nas saídas (rejeição de perturbações), restrições nas saídas, e também restrições nas entradas. É uma abordagem eficaz, mas que requer ao mesmo tempo um cuidado especial, bem como alguma experiência por parte do projetista,

porque alguns parâmetros devem ser relaxados a fim de se obter um controlo admissível. Ao utilizar *toolboxes* para resolver as LMI's, as variáveis de decisão são otimizadas pelos algoritmos de resolução e às vezes é necessário relaxar alguns parâmetros de modo a que o sistema responda de forma desejada. Quando utilizada para controlar sistemas caóticos sujeitos a restrições nos controlos, pode acontecer que a saturação ocorra tão facilmente caso a trajetória se encontre longe o suficiente da trajetória de referência, quando na verdade não seria necessária, o que pode levar à instabilidade do sistema em malha fechada.

### 2.3.9. Controlo Difuso (Lógica Fuzzy)

A *lógica difusa* é uma ferramenta poderosa e que se destaca sobretudo pelo facto de ser adequada quando os sistemas a controlar são não-lineares, complexos, incertos, ou não se apresentam numa forma bem definida/modelada (Tanaka & Wang, 2001). De entre várias técnicas de *controlo difuso*, a abordagem de Takagi-Sugeno (T-S), em que a dinâmica local em diferentes regiões do espaço de estados é representada por sistemas lineares de acordo com um conjunto de regras do tipo *IF-THEN* e a dinâmica global por uma mistura destes modelos lineares, tem sido das mais amplamente aceites e utilizadas na conceção deste tipo de controlo. Na verdade, os modelos T-S são aproximadores universais de qualquer sistema não-linear suave (Tanaka & Wang, 2001), e portanto, grande parte dos sistemas não-lineares podem ser representados com alto grau de exatidão recorrendo a um modelo T-S.

Todavia, embora o *controlo difuso* tenha sido utilizado no controlo e sincronização de sistemas caóticos (Boukabou & Mansouri, 2012; Poursamad & Davaie-Markazi, 2009; Tanaka & Wang, 2001; Wu, Shi, Su, & Chu, 2014; Yan, Zheng, & Xue, 2014), surgem algumas desvantagens, nomeadamente, o tempo de computação do controlo, que se pode tornar longo devido a operações complexas no processo da fuzificação e principalmente da desfuzificação, a dificuldade em definir o número de regras necessárias para obter um bom desempenho, e o facto de não existir um método sistemático de transformar o conhecimento/experiência humana em forma de regras. Digamos que não é a metodologia em si que leva ao sucesso mas sim a experiência e as ideias inteligentes que o projetista usa para alcançar um controlo de alto desempenho. Por outro lado, quando utilizado para controlar sistemas caóticos, as limitações dos atuadores raramente são consideradas e embora possam ser introduzidas recorrendo a LMI's, o controlo acaba por requerer uma grande experiência por parte do projetista.

### 2.3.10. Controlo Ótimo

Técnicas de controlo com base no princípio do máximo/mínimo de Pontryagin permitem encontrar soluções ótimas, e por essa razão o *controlo ótimo*, técnica que recorre a este princípio, é uma das técnicas mais utilizadas em aplicações reais devido às características que

apresenta. No *controle ótimo*, os parâmetros do controlador são dimensionados de forma a minimizar uma dada função de custo (índice de desempenho), que inclui termos como o erro da trajetória, o erro do estado final, o tempo até alcançar o estado final, o esforço do controle, entre outros, e a saturação do controle também pode ser considerada. Apesar da teoria se encontrar bem estabelecida no que diz respeito principalmente ao controle de sistemas lineares (ex.: LQR, *Bang-Bang Control*) (Anderson & Moore, 2007; Naidu, 2002), o *controle ótimo* tem sido também utilizado para controlar e sincronizar sistemas caóticos (não-lineares por natureza) através de uma manipulação matemática do modelo (Merat, Abbaszadeh Chekan, Salarieh, & Alasty, 2014; Rafikov & Balthazar, 2008; Tong, Zhang, & Sun, 2006; Zhang & Tang, 2012).

Todavia, as restrições nas variáveis de controle raramente são consideradas, e quando o são, são apenas na magnitude. É certo que um problema de *controle ótimo* pode ser resolvido à base de LMI's, sendo que neste caso as restrições nas taxas do controle podem também ser incluídas transformando as variáveis de controle em variáveis de saída e recorrendo a um conjunto de LMI's adicionais para limitar, não só as entradas, mas também as saídas. Seria uma possível abordagem, mas que no entanto, aumenta significativamente a dimensão do modelo, a complexidade de resolução e conseqüentemente o esforço computacional. Por um outro lado, e mais problemático, mesmo que o problema fosse resolvido recorrendo a LMI's, seria necessário um cuidado especial porque o ganho é dimensionado tendo em conta o erro inicial (introduzido através de LMI's) e se este for desconhecido pode acontecer que o desempenho ou não seja o melhor (caso o erro real seja menor que o erro assumido), o que não é assim tão grave dependendo da aplicação, ou então que o sistema controlado se torne mesmo até instável (caso o erro real seja maior que o erro assumido). Obviamente que o erro pode ser calculado no instante em que o controle é ativado, mas neste caso o ganho teria de ser calculado *online* o que exigiria um processamento bastante rápido principalmente para sistemas com dinâmicas rápidas.

## 2.4. Problemática dos Métodos de Controle de Caos

Várias técnicas de controle têm sido utilizadas para controlar e sincronizar sistemas caóticos. Contudo, esta classe de sistemas dinâmicos em particular requer uma atenção especial devido às suas características. Essencialmente, devido à sua alta sensibilidade às condições iniciais e à alta sensibilidade à variação de parâmetros. O seu controle tem de ser portanto robusto relativamente a incertezas nos parâmetros para que seja efetivamente eficaz. Por outro lado, embora o caos tenha sido controlado pelas técnicas acima referidas, não existe praticamente nenhum trabalho aberto à comunidade científica relativamente ao controle de sistemas caóticos que tenha em consideração restrições nos atuadores. Uma das abordagens mais comuns para lidar com restrições nos atuadores consiste em projetar o controlador sem considerar quaisquer restrições de entrada e em adicionar posteriormente um bloco de

saturação à saída do controlador seguido de técnicas de *anti-windup* (Hippe, 2006). Contudo, é uma abordagem que não é de todo a melhor porque introduz não-linearidades adicionais no sistema, degrada o seu desempenho, e nalguns casos pode mesmo até levar o sistema em malha fechada à instabilidade. Nesse sentido, e dado que, na prática, todos os sistemas de controlo têm de lidar com a saturação dos atuadores, não só na magnitude mas como também nas taxas, há então a necessidade de formular novas abordagens de controlo a fim de colmatar esta lacuna. Assim sendo, o controlo de sistemas que possam vir a exibir comportamentos caóticos deve ter em conta os seguintes requisitos:

- 1) o controlo tem de ser robusto contra incertezas paramétricas e perturbações externas dada a sensibilidade crítica à variação de parâmetros e a sensibilidade às condições iniciais que os sistemas caóticos apresentam;
- 2) o controlo tem de ter em conta restrições quer nas magnitudes dos atuadores quer nas suas taxas, dado que qualquer atuador tem as suas limitações físicas;
- 3) o método de controlo deve ser de fácil implementação e eficiente do ponto de vista computacional, de modo a que não exija muito conhecimento por parte do projetista e que possa ser implementado em plataformas de baixo custo;
- 4) o controlo deve ser preferencialmente de saída, e não de toda a trajetória (todos os estados), a fim de aumentar a área de aplicabilidade do controlo.

## Capítulo 3

### 3. Deteção Robusta de Caos em Tempo-Real

Considere-se um sistema dinâmico contínuo no tempo governado por um conjunto de equações diferenciais e assuma-se que apenas uma das suas saídas está disponível para medição. Isto é, um sistema descrito pelo seguinte modelo matemático:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) + g(x, t) \\ y &= h(x, u, t) \\ y_{obs}[n] &= c^T y[n] + w[n] \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de estado,  $y \in \mathbb{R}^q$  o vetor de saída,  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controlo,  $f, g, h$  três funções vetoriais não-lineares,  $t$  o tempo e  $\dot{x} \equiv dx/dt$ . A terceira equação,  $y_{obs} \in \mathbb{R}$ , denota a única saída observável do sistema, que é medida com uma dada frequência de amostragem constante,  $f_s$ , e tem em conta Ruído Branco Gaussiano Aditivo (AWGN),  $w$ , representando o ruído introduzido inevitavelmente pelo sensor de medição ou resultante de um dado algoritmo de fusão de dados.  $c \in \mathbb{R}^q$  denota o vetor de saída. Na primeira equação,  $g$  pode ser desconhecida, representa possíveis dinâmicas não modeladas, incertezas nos parâmetros e/ou perturbações externas variantes no tempo.

Dado que o modelo (3.1) é descrito por funções não-lineares, o sistema pode exibir, como bem sabido: pontos fixos (estados de equilíbrio); movimentos periódicos; movimentos quasiperiódicos; ou movimentos caóticos, dependendo dos valores dos parâmetros e de eventuais perturbações externas se estas tiverem determinadas características (frequência e amplitude). O movimento caótico pode ser desejável ou não dependendo da aplicação. Contudo, para a maioria dos sistemas dinâmicos, o comportamento caótico não é desejado porque pode levar a cenários catastróficos. Por conseguinte, o problema a ser resolvido consiste na formulação de um detetor automático capaz de detetar a ocorrência de modos caóticos em tempo-real assumindo que  $y_{obs}$  é a única informação disponível e que esta está corrompida com ruído dos sensores.

Considere-se um sistema linear, contínuo, invariante no tempo, e estável, descrito como se segue,  $\dot{z} = Az + by_{obs}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y_{obs} \quad (3.2)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^2$  denota o vetor de estado,  $y_{obs} \in \mathbb{R}$  a variável de controlo e que corresponde ao sinal a ser analisado,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  uma matriz de estado de Hurwitz (matriz estável), isto é, uma matriz cujos todos os seus valores próprios tenham partes reais negativas,  $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$ ,  $i = 1, 2$ , e  $b \in \mathbb{R}^2$  o vetor de controlo, com  $b \neq 0$ .

Seja a equação (3.2) resolvida por um método apropriado (ex.: Euler, Runge-Kutta, ...) passo-a-passo à medida que cada nova medição  $y_{obs}(n)$  se encontra disponível, isto é, com um passo  $\delta t$  igual a  $1/f_s$ . Considere-se de seguida uma janela de observação deslizante, de comprimento  $N$  pontos, compreendendo os instantes  $t_1, t_2, \dots, t_N$  para os quais  $z_2$  apresenta máximos locais, onde o  $t_i$  mais antigo é descartado de cada vez que um novo máximo é encontrado e o novo  $t_j$  é introduzido com base numa filosofia FIFO (*First-In, First-Out*). Calcule-se agora os  $\Delta t$ 's,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , entre cada dois máximos locais consecutivos e obtenha-se uma série temporal composta por  $N - 1$  pontos. Na ausência de ruído, existirá um número finito,  $k$ , de  $\Delta t$ 's repetidos no caso de uma série regular, independentemente de quantos períodos tenha o sinal, e um número 'infinito',  $k$ , de diferentes  $\Delta t$ 's no caso de uma série caótica. Esta é a ideia chave por detrás do novo detetor de caos. O caos é caracterizado por um movimento altamente imprevisível que apresenta inúmeros máximos locais em diferentes instantes temporais. A Figura (3.1) mostra a janela de observação para um sinal  $z_2(t)$ .

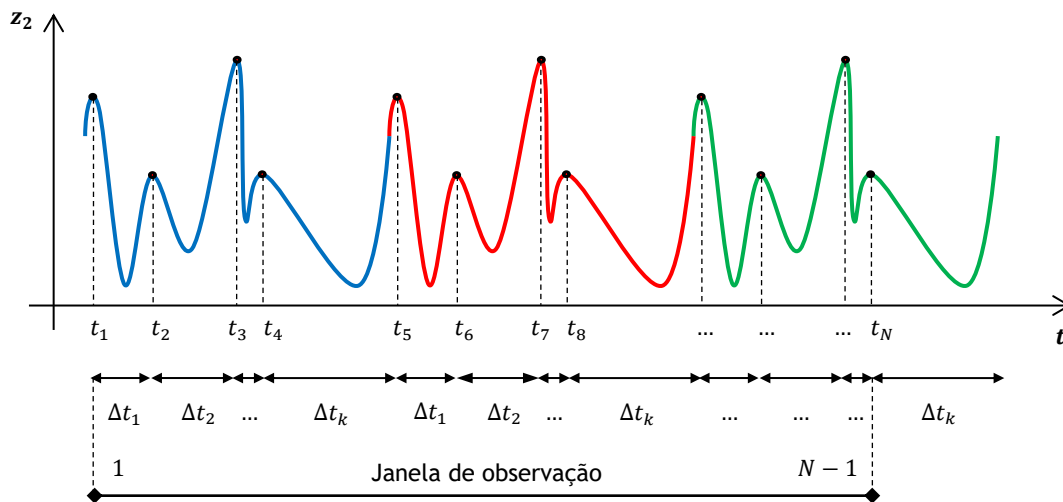


Figura 3.1. Determinação da janela de observação: instantes para os quais  $z_2$  apresenta máximos locais (maximizantes do sinal  $z_2$ ).

O próximo passo consiste em ordenar os  $\Delta t$ 's por ordem ascendente. Isto resulta uma série temporal em forma de degraus ( $k$  finito) como representado no gráfico superior da Figura (3.2) para o caso de um sinal regular  $z_2$ , e uma série temporal com a aparência de uma função exponencial ( $k$  'infinito') para o caso de um sinal caótico  $z_2$ . Posteriormente, calculando os  $\Delta(\Delta t)$ 's,  $\Delta(\Delta t)_n = \Delta t_{n+1} - \Delta t_n$ , obtém-se uma série temporal de  $N - 2$  pontos contendo as variações entre os diferentes degraus, ou, por outras palavras, a derivada

numérica dessa série temporal. Ocorre que existirá  $k - 1$  degraus diferentes em que  $k$  é um número finito para um sinal  $z_2$  regular e um número ‘infinito’ (ou pelo menos muito grande) para um sinal caótico  $z_2$ . É importante realçar que o número de degraus diferentes depende exclusivamente da complexidade de  $z_2$  dado que não existe qualquer tipo de relação com o tamanho da janela de observação. Quanto mais imprevisível for a trajetória, mais degraus diferentes existirão. O último passo consiste em descartar os picos isolados, isto é, os pontos cujos pontos imediatamente antes e depois são ambos zero. A Figura (3.2) ilustra todo o processo para o caso de um sinal  $z_2$ .

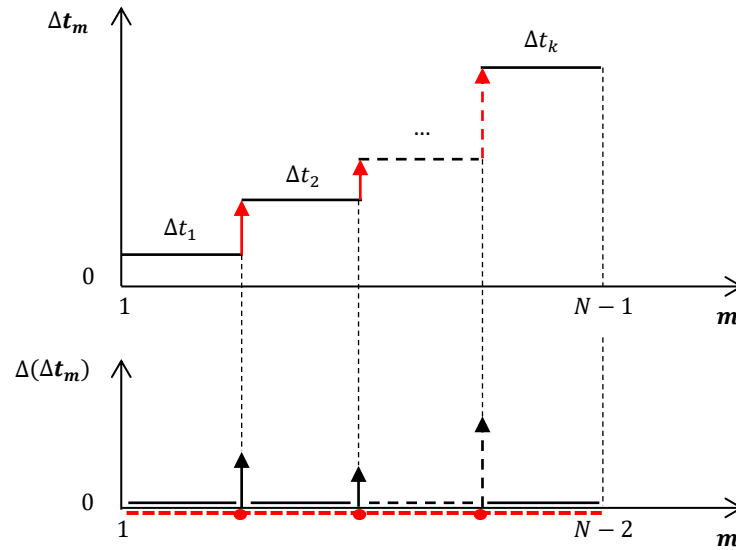


Figura 3.2. Representação dos  $\Delta t_m$  por ordem ascendente - gráfico superior; e representação dos  $\Delta(\Delta t_m)$  (linha preta/sólida) e  $\Delta(\Delta t_m)$  com picos isolados removidos (linha vermelha/tracejada) - gráfico inferior.

Efetuada este procedimento para cada janela de observação, o caos é distinguido facilmente do movimento regular. A série temporal resultante (ou o vetor resultante, computacionalmente falando) é um vetor nulo se  $z_2$  for um sinal regular, e é um vetor em que a maioria dos seus pontos estão acima da linha do zero se  $z_2$  for um sinal caótico. A fim de detetar automaticamente esta diferença sem recorrer ao auxílio de ajudas visuais, defina-se o seguinte rácio:

$$R = \frac{n^\circ \text{ de pontos maiores do que zero}}{n^\circ \text{ de pontos iguais a zero}} \quad (3.3)$$

Deste modo, o movimento regular (periódico / multiperíodico) é caracterizado por um rácio  $R = 0$ , e o movimento caótico por um rácio  $R \gg 0$ , - quando  $z_2$  é um sinal ‘limpo’. Na presença de ruído,  $w \neq 0$ , ocorre que  $R$  é ligeiramente maior que zero. A deteção efetua-se portanto com base num dado limiar (pequeno)  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , sendo, obviamente, que quanto maior a potência do ruído, maior deve ser o  $\gamma$ .

Por uma questão de conveniência, apresenta-se de seguida, de uma forma sumariada, o algoritmo de deteção proposto:

**Algoritmo do Novo Detetor de Caos (Velosa & Bousson, 2015b):**

- 1) considerar uma janela de observação de  $N$  pontos e inicializá-la com zeros;
- 2) inicializar o rácio  $R$  com zero,  $R(0) = 0$ ;
- 3) definir um limiar  $\gamma > 0$  ( $\gamma$  pequeno, ex.:  $\gamma = 1$ );
  
- 4) obter  $y_{obs}(n)$  com um dado período de amostragem  $1/f_s$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ;
- 5) resolver  $\dot{z} = Az + by_{obs}$  passo-a-passo com um passo  $\delta t = 1/f_s$ ;
- 6) se  $z_2(n-1)$  for um máximo local:
  - atualizar a janela de observação com o respetivo maximizante  $t_n$ ;
  - calcular os  $\Delta t$ 's entre os máximos locais,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ;
  - ordenar os  $\Delta t$ 's por ordem ascendente;
  - calcular os  $\Delta(\Delta t)$ 's,  $\Delta(\Delta t)_n = \Delta t_{n+1} - \Delta t_n$ ;
  - descartar os pontos cujos valores imediatamente antes e depois são ambos zero;
  - calcular o rácio  $R(n)$  pela expressão (3.3);caso contrário:
  - manter o rácio anterior,  $R(n) = R(n-1)$ ;
- 7) se  $R(n) > \gamma$ 
  - “comportamento caótico”**
  - $R_{bi-estado}(n) = verdadeiro$ ;
  - caso contrário:
    - “comportamento regular”**
    - $R_{bi-estado}(n) = falso$ ;
- 8) ir para o passo (4);

Note-se que o algoritmo proposto é sempre exequível a não ser que o tempo de computação entre os passos (4) e (7),  $\Delta T$ , exceda o tempo decorrido entre sucessivas medições  $y_{obs}(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , isto é, o período de amostragem definido por  $1/f_s$ . Desta forma,  $\Delta T < 1/f_s$  é a única condição de exequibilidade para permitir uma deteção em tempo-real. Uma outra observação que vale a pena mencionar encontra-se no passo (6). Dada a necessidade de encontrar os máximos locais de  $z_2$ , o algoritmo tem de ser aplicado considerando um atraso de uma medição  $y_{obs}(n)$  dado que são necessários três pontos para determinar se o ponto intermédio é ou não um máximo local. No entanto, isto não é problemático de forma alguma uma vez que um único ponto não tem qualquer efeito no processo de decisão do tipo de comportamento.

Na ausência de ruído,  $w = 0$ , a ideia por detrás do detetor poderia ser aplicada diretamente a uma janela de observação contendo os instantes  $t_1, \dots, t_N$  para os quais  $y_{obs}$  exibe máximos locais. No entanto, quando  $y_{obs}$  está contaminado com ruído,  $w \neq 0$ , a deteção deixaria de ser eficaz porque WGN apresenta máximos aleatórios em amostras aleatórias. O óbvio seria a introdução de técnicas de redução de ruído como por exemplo filtros de Kalman dado que são aplicáveis em tempo-real. Contudo, esta solução não garantiria uma deteção 100% certa porque a dinâmica subjacente aos sistemas caóticos não é localizada nem no domínio do tempo nem no domínio da frequência (Jafari, Hashemi Golpayegani, & Jafari, 2012; Kostelich & Schreiber, 1993). É por isso que a equação (3.2) desempenha um papel importante. Sendo um sistema linear e  $A$  uma matriz estável,  $z_2$  não tem necessariamente a forma de onda de  $y_{obs}$  mas herda a sua dinâmica essencial atuando portanto como um ‘reduzidor de ruído’. Um sinal ruidoso  $y_{obs}$  com uma dada SNR produz um sinal ruidoso  $z_2$  com uma SNR substancialmente mais baixa.

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

## Capítulo 4

### 4. Controlo Robusto de Sistemas Caóticos com Restrições nos Atuadores

#### 4.1. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores

Considere-se o problema de sincronização de saída de dois sistemas não-lineares contínuos e invariantes no tempo governados por equações diferenciais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Sistema de Referência:} \quad \dot{x}_A &= f_A(x_A, \theta_A) \\ y_A &= C_A x_A \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema a Controlar:} \quad \dot{x}_B &= f_B(x_B, \theta_B) + Bu \\ y_B &= C_B x_B \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que  $x_A \in \mathbb{R}^{n_A}$ ,  $x_B \in \mathbb{R}^{n_B}$  representam os vetores de estado,  $\theta_A \in \mathbb{R}^{r_A}$ ,  $\theta_B \in \mathbb{R}^{r_B}$  os vetores de parâmetros,  $y_A, y_B \in \mathbb{R}^p$  as saídas de cada sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controlo do sistema controlado,  $C_A \in \mathbb{R}^{p \times n_A}$ ,  $C_B \in \mathbb{R}^{p \times n_B}$  as matrizes de saída,  $B \in \mathbb{R}^{n_B \times m}$  a matriz de controlo,  $f_A, f_B$  duas funções não-lineares suaves, e  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

É bem sabido que os sistemas não-lineares da forma (4.1) e (4.2) podem exibir movimentos regulares (ex.: pontos de equilíbrio, órbitas periódicas, órbitas quasiperiódicas) ou movimentos caóticos dependendo dos valores dos parâmetros. Exemplos de tais sistemas são os bem conhecidos sistemas de Lorenz, Chua, Rössler, Chen, Genesio-Tesi, Couillet, entre outros. Sistemas mecânicos e aeroespaciais também podem vir a exibir movimentos caóticos se forem sujeitos a perturbações externas com determinadas características.

A grande maioria das técnicas de controlo utilizadas para sincronizar sistemas da forma (4.1) e (4.2) consideram que os vetores de parâmetros  $\theta_A$  e  $\theta_B$  são mantidos constantes e que não há restrições no controlo (Fradkov & Evans, 2005; Idowu et al., 2008; Jarzebowska, 2012; Shi & Zhu, 2007; Zhang & Tang, 2012). Contudo, na prática, os parâmetros de ambos os sistemas são sujeitos inevitavelmente a ligeiras variações devido a causas externas que forçam qualquer um dos sistemas a exibir comportamentos completamente diferentes dos desejados.

A título de exemplo, considere-se o circuito de Chua cujos parâmetros são definidos por resistências, condensadores e bobinas. Se os parâmetros forem escolhidos de modo a que o sistema exiba um comportamento caótico, por exemplo para ser aplicado numa comunicação segura, pode acontecer que comportamento deixe de ser caótico porque os sistemas caóticos são extremamente sensíveis a variações nos parâmetros e fatores como temperatura, humidade e idade induzem variações nos valores dos componentes.

Além disso, os sistemas físicos do mundo real têm de lidar obrigatoriamente com restrições nos atuadores. O método clássico para limitar a magnitude do controlo consiste na adição de um bloco de saturação à saída do controlador e num compensador à posteriori para impedir fenómenos como o *controller windup* e/ou o *plant windup*. Apesar de ser uma solução viável, esta abordagem não é a melhor porque introduz não-linearidades adicionais no sistema e o seu desempenho não é o melhor. Por outro lado, devido a restrições físicas mecânicas ou elétricas, algumas aplicações requerem não só restrições na magnitude dos atuadores como também nas suas taxas.

O problema a resolver consiste na sincronização da saída do sistema controlado,  $y_B$ , com a saída do sistema de referência,  $y_A$ , com o controlo,  $u$ , sujeito a restrições na magnitude e na taxa, e assumindo que os vetores de parâmetros,  $\theta_A$  e  $\theta_B$ , podem variar ligeiramente ao longo do tempo  $t$ . Matematicamente falando, o objetivo consiste em encontrar  $u(t)$  de modo a que as seguintes condições sejam satisfeitas:

**Problema a Resolver:**

Encontrar o controlo  $u(t)$  tal que:

$$\|e_y(t)\| = \|y_B(t) - y_A(t)\| \leq \delta \quad (4.3)$$

$$\|u(t)\|_\infty \leq \eta \quad , \quad \|\dot{u}(t)\|_\infty \leq \nu \quad (4.4)$$

$$\theta_A \equiv \theta_A(t) \quad , \quad \theta_B \equiv \theta_B(t) \quad (4.5)$$

para qualquer  $t \geq \tau$ , em que  $\tau > t_{u_{on}}$ , designando  $t_{u_{on}}$  o instante em que o controlo é ativado. Na desigualdade (4.3),  $\|\cdot\|$  representa uma norma apropriada e  $\delta \geq 0$  deve ser o mais pequeno quanto possível para uma sincronização adequada. Os parâmetros  $\eta \geq 0$  e  $\nu \geq 0$  denotam respetivamente os limites de saturação da amplitude e da taxa dos atuadores.

**Abordagem Proposta (Velosa & Bousson, 2015d):**

Considere-se um sistema contínuo e invariante no tempo dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\sigma_{\eta,\nu}(u) + E_w w \\ \dot{w} &= Sw + r \\ e &= C_e x + D_{ew} w \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde a primeira equação descreve o sistema a controlar, com estado  $x \in \mathbb{R}^n$ , controle  $u \in \mathbb{R}^m$ , e sujeito ao efeito de uma perturbação que é representada pelo termo  $E_w w$ . A terceira equação define o erro  $e \in \mathbb{R}^p$  entre a saída real do sistema,  $C_e x$ , e o sinal de referência,  $-D_{ew} w$ , o qual é exigido que a saída o siga. A segunda equação descreve um sistema invariante no tempo, comumente designado por exossistema, com estado  $w \in \mathbb{R}^s$ , e que modela a classe de perturbações e sinais de referência tidos em consideração.

Na primeira equação,  $\sigma_{\eta,\nu}$  denota um operador que é usado para garantir que o controle efetivamente aplicado ao sistema,  $\sigma_{\eta,\nu}(u)$ , satisfaz as restrições de amplitude e de taxa da forma apresentada em (4.4). Seja  $\sigma_{\eta,\nu}$  definido pelo operador diferencial funcional (4.7):

$$\sigma_{\eta,\nu}(u) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu \quad (4.7)$$

em que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= \sigma_\nu \left( \mu (\sigma_\eta(u) - x_\mu) \right) \\ x_\mu(t_0) &= \sigma_\eta(u(t_0)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

e  $\sigma_h$  é uma função de saturação, de limite  $h$ , definida por:

$$\sigma_h(s) = \text{sgn}(s) \cdot \min\{|s|, h\} \quad (4.9)$$

**Teorema (4.1):**

*O problema de regulação de saída através da realimentação de estados para o sistema (4.6) pode ser resolvido se as seguintes condições se verificarem (Saberri, Stoorvogel, & Sannuti, 2011):*

- i) o par  $(A, B)$  é estabilizável e  $A$  tem todos os seus valores próprios com partes reais não positivas.*
- ii) existem duas matrizes,  $\Pi$  e  $\Gamma$ , tais que são soluções das tão chamadas equações de regulação:*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + E_w \\ 0 &= C_e\Pi + D_{ew} \end{aligned} \quad (4.10)$$

*Nestas condições, a família de leis de realimentação linear e estática de estados dada por:*

$$u = -B^T P_\varepsilon x + (B^T P_\varepsilon \Pi + \Gamma)w + \tilde{r} \quad (4.11)$$

onde  $P_\varepsilon$  é uma matriz simétrica e positivamente definida,  $P_\varepsilon = P_\varepsilon^T$ ,  $P > 0$ , definida pela Equação Algébrica de Riccati (4.12), com uma matriz de ponderação,  $Q_\varepsilon$ , simétrica e positivamente semidefinida,  $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^T$ ,  $Q_\varepsilon \geq 0$ :

$$A^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A - P_\varepsilon B B^T P_\varepsilon + Q_\varepsilon = 0 \quad (4.12)$$

e  $\tilde{r}$  dado por:

$$\tilde{r} = B^+ \Pi r \quad (4.13)$$

em que  $B^+$  denota a matriz pseudo-inversa de  $B$ , direciona o erro de saída  $e(t)$  do sistema (4.6) para a origem à medida que  $t \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Uma das possíveis formas de resolução das equações de regulação (4.10) encontra-se no Anexo C - Resolução das Equações de Regulação.

Decompondo o sistema (4.1) sob a forma de uma parte linear e uma parte restante não-linear, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= A_A x_A + \varphi_A(x_A) \\ y_A &= C_A x_A \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que  $A_A x_A$  representa os termos lineares de  $f_A(x_A, \theta_A)$  e  $\varphi_A(x_A) \equiv d_A$  os termos não-lineares que podem ser vistos como perturbações. A matriz  $A_A$  tem dimensão  $A_A \in \mathbb{R}^{n_A \times n_A}$  e o vetor de parâmetros  $\theta_A$  foi ocultado para simplificar a terminologia.

O sistema (4.2) pode ser transformado também na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear. Mas aqui, é feito de uma forma diferente porque a matriz  $A_B$  tem de ter todos os seus valores próprios com partes reais não positivas. Então,  $f_B(x_B, \theta_B)$  é linearizado em torno de um ponto específico  $x_B^*$  de tal modo que a matriz Jacobiana resultante  $A_B$  tenha todos os seus valores próprios com parte reais não positivas. Aplicando o operador  $\sigma_{\eta, \nu}$  ao vetor de controlo  $u$ , o sistema (4.2) pode ser escrito portanto como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= A_B x_B + \varphi_B(x_B) + B \sigma_{\eta, \nu}(u) \\ y_B &= C_B x_B \end{aligned} \quad (4.15)$$

com:

$$A_B = \left. \frac{\partial f_B}{\partial x_B} \right|_{x_B = x_B^*}, \quad A_B \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B} \quad (4.16)$$

onde  $x_B^*$  é escolhido de modo a que:

$$\text{Re}[\lambda_i(A_B)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_B \quad (4.17)$$

e:

$$\varphi_B(x_B) = f_B(x_B) - A_B x_B \equiv d_B \quad (4.18)$$

Após as transformações (4.14) e (4.15), o sistema controlado pode ser escrito como requerido em (4.6), onde  $\dot{x}_A$  e  $\dot{d}_B$  são agrupados para formar o exossistema aumentado  $\dot{w}$ . O exossistema gera assim as perturbações do sistema controlado,  $d_B \equiv \varphi_B(x_B)$ , na verdade os termos não-lineares, e as variáveis de estado do sistema de referência,  $x_A$ . Daqui, pode-se escrever o sistema controlado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= A_B x_B + B \sigma_{\eta, \nu}(u) + E_w w \\ \dot{w} &= S w + r \\ y_B &= C_B x_B \\ e &= C_e x_B + D_{ew} w = y_B - y_A \end{aligned} \quad (4.19)$$

com o exossistema dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{d}_B \\ \dot{x}_A \end{bmatrix}}_{\dot{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n_B \times n_B} & 0_{n_B \times n_A} \\ 0_{n_A \times n_B} & A_A \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} d_B \\ x_A \end{bmatrix}}_w + \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{d}_B \\ d_A \end{bmatrix}}_r \quad (4.20)$$

onde:

$$\dot{d}_B = \frac{\partial f_B}{\partial x_B} \cdot f_B(x) - A_B \cdot f_B(x) \quad , \quad d_A \equiv \varphi_A(x_A) \quad (4.21)$$

e a matrizes  $E_w$ ,  $C_e$  e  $D_{ew}$  escolhidas de modo a que  $E_w w = d_B$ ,  $C_e x_B = y_B$  e  $D_{ew} w = -y_A$ . Observado (4.19), a matriz  $C_e$  é obviamente igual a  $C_B$  e as matrizes  $E_w$  e  $D_{ew}$  são dadas por:

$$E_w = \begin{bmatrix} I_{n_B} & 0_{n_B \times n_A} \end{bmatrix} \quad , \quad E_w \in \mathbb{R}^{n_B \times s} \quad (4.22)$$

$$D_{ew} = \begin{bmatrix} 0_{p \times n_B} & -C_A \end{bmatrix} \quad , \quad D_{ew} \in \mathbb{R}^{p \times s} \quad (4.23)$$

onde a dimensão  $s$  é igual a  $s = n_B + n_A$ .

## 4.2. Controlo de Saída com Restrições Assimétricas nas Magnitudes e Simétricas nas Taxas dos Atuadores

Considere-se o problema de controlo de saída no domínio do tempo de um sistema não-linear invariante no tempo descrito por equações dinâmicas da forma (4.24). Sejam as saídas de referência, destinadas a serem seguidas pelas saídas deste sistema controlado, geradas por um sistema não-linear descrito similarmente por equações diferenciais da forma (4.25):

$$\begin{aligned} \text{Sistema a Controlar:} \quad & \dot{x} = f(x, \theta) + Bu \\ & y = Cx \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema de Referência:} \quad & \dot{x}_r = f_r(x_r, \theta_r) \\ & y_r = C_r x_r \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  representam os vetores de estado,  $\theta \in \mathbb{R}^p$ ,  $\theta_r \in \mathbb{R}^{p_r}$  os vetores de parâmetros,  $y, y_r \in \mathbb{R}^q$  as saídas de cada sistema (vetores com a mesma dimensão),  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controlo,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{q \times n_r}$  as matrizes de saída,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada,  $f, f_r$  duas funções não-lineares, e  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

Várias são as técnicas de controlo disponíveis para lidar com o problema de controlo de saída, baseando-se a maioria delas na dinâmica do erro (J. Huang, 2004; Maggiore & Passino, 2005; Yan et al., 2014). Contudo, quando se trata de aplicações de controlo reais em que as restrições dos atuadores têm de ser tomadas em conta, poucas são as técnicas que se podem encontrar na literatura para lidar com tal problema. É bem sabido que qualquer sistema físico do mundo real é sujeito a restrições nos atuadores, e portanto, o projeto de uma técnica de controlo apropriada tem de considerar desde raiz saturações do controlo, caso contrário as limitações dos atuadores podem levar a uma degradação do desempenho do sistema ou mesmo a um desastre no pior dos casos.

A maioria das aplicações requer restrições somente na magnitude do controlo. A título de exemplo, a gama de amplitude operacional das superfícies de controlo de uma aeronave é limitada, a tração de foguetão é limitada, a velocidade de um motor elétrico é limitada, as tensões/correntes que podem ser aplicadas a num circuito elétrico são limitadas, e assim por diante. Para tais casos, uma estratégia típica consiste em adicionar um bloco de saturação à saída do controlador e recorrer a técnicas *anti-windup* para impedir o *controller-* e/ou o *plant-windup*. No entanto, apesar de ser uma solução que funciona, a abordagem não é a melhor porque introduz não-linearidades extra no sistema e o desempenho resultante não é o melhor.

Algumas aplicações mais específicas, e com ênfase em especial para os sistemas aeroespaciais e aeronáuticos, requerem restrições não só nas magnitudes do controlo mas também nas suas taxas. Pois, é bem sabido que a capacidade de resposta de um pneumático é limitada, que válvulas e bombas têm vazões máximas, que a velocidade de resposta de um amplificador operacional (*slew-rate*) é limitada, e assim por diante.

Quando se trata do controlo tendo em conta restrições quer na magnitude quer na taxa do controlo, e, além disso, aplicado a sistemas não-lineares (à parte das não-linearidades devido à saturação dos atuadores), muito poucas publicações se encontram disponíveis na literatura para resolver o problema.

A subsecção anterior apresenta uma abordagem para lidar com o controlo de sistemas não-lineares sujeitos a restrições na magnitude e na taxa dos atuadores, especificamente para a classe de sistemas caóticos. Contudo, as restrições consideradas são da forma  $\|u(t)\|_\infty \leq \eta$  e  $\|\dot{u}(t)\|_\infty \leq \nu$ , com  $\eta \geq 0$  e  $\nu \geq 0$  denotando os limites de saturação, isto é, as restrições são simétricas em relação à origem. Embora esta abordagem cubra uma vasta gama de aplicações, existem algumas aplicações mais exigentes que requerem ainda um controlo limitado, mas, assimétrico relativamente à origem. Note-se que, por exemplo, a deflexão de uma superfície de controlo de uma aeronave pode estar compreendida entre  $[-25, 35]^\circ$  (assimétrico) em vez de  $[-30, 30]^\circ$  (simétrico) como na maioria das aeronaves. Os torques de controlo num veículo espacial em torno de um dado eixo pode ser, por exemplo, 200 Nm no sentido dos ponteiros do relógio e apenas 100 Nm no sentido contrário. Estas são restrições assimétricas que podem ser impostas devido a limitações mecânicas ou elétricas, ou que podem surgir até inesperadamente, por exemplo, devido à acumulação de gelo na asa de um avião ou em caso de falha de um dos propulsores de controlo da atitude do veículo espacial.

O problema a resolver resume-se a encontrar um controlo limitado, na magnitude e na taxa, de modo a que as saídas do sistema (4.24),  $y(t)$ , sigam as saídas do sistema (4.25),  $y_r(t)$ , mesmo que os parâmetros não sejam conhecidos com exatidão, e além disso com restrições assimétricas na magnitude. Matematicamente, o objetivo consiste em encontrar  $u(t)$  de tal modo que as condições (4.26) e (4.27) se satisfaçam:

**Problema a Resolver:**

Encontrar o controlo  $u(t)$  tal que:

$$\|e_y(t)\| = \|y(t) - y_r(t)\| \leq \delta \quad (4.26)$$

para qualquer  $t \geq \tau$ , em que  $\tau > t_{u_{on}}$ , e, obrigatoriamente, tal que:

$$\begin{aligned} u_{i,min} \leq u_i(t) \leq u_{i,max} \\ |\dot{u}_i(t)| \leq \dot{u}_{i,max} \end{aligned} \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (4.27)$$

a partir do instante em que o controlo é ligado,  $t \geq t_{u_{on}}$ . O parâmetro  $\delta$  na desigualdade (4.26) denota a norma do erro máximo da saída e deve ser o mais pequeno quanto possível para um bom seguimento (*tracking*).

**Abordagem Proposta (Velosa & Bousson, 2015c):**

Os sistemas não-lineares (4.24) e (4.25) podem ser decompostos intencionalmente na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear como indicado em (4.28) e (4.29)

respetivamente, em que  $Ax$  e  $A_r x_r$  representam os termos lineares e  $\varphi(x)$  e  $\varphi_r(x_r)$  os termos não-lineares:

$$\begin{aligned} \text{Sistema a Controlar:} \quad & \dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x) \\ & y = Cx \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema de Referência:} \quad & \dot{x}_r = A_r x_r + \varphi_r(x_r) \\ & y_r = C_r x_r \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considere-se que as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  são obtidas através da linearização clássica em torno de estados específicos,  $x^*$  e  $x_r^*$ , com  $x^*$  escolhido de modo a que  $\text{Re}[\lambda_i(A)] \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e que as funções  $\varphi(x)$  e  $\varphi_r(x_r)$  são definidas pelos termos restantes que constituem a dinâmica global de cada sistema correspondente. Isto é:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}, \quad \varphi(x) = f(x) - Ax \quad (4.30)$$

$$A_r = \left. \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \right|_{x_r=x_r^*}, \quad \varphi_r(x_r) = f_r(x_r) - A_r x_r \quad (4.31)$$

Os sistemas (4.28) e (4.29) estão escritos sem os vetores de parâmetros  $\theta \in \mathbb{R}^p$  e  $\theta_r \in \mathbb{R}^{p_r}$  para propósitos de simplificação da terminologia ao longo capítulo. No entanto, esteja-se ciente que os parâmetros continuam implicitamente em cada sistema quer nas matrizes  $A$  e  $A_r$  quer nas funções  $\varphi$  e  $\varphi_r$ .

Considere-se agora um sistema aumentado compreendendo o sistema a ser controlado  $\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x)$  e um sistema auxiliar, relacionado exclusivamente com o vetor de controlo, governado pela equação diferencial  $\dot{u}_s = -Lu_s + L \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon)$ . Esta última equação resulta de uma generalização do trabalho efetuado por Hippe (Hippe, 2006) para lidar com sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (sistemas MIMO) sujeitos a restrições no controlo/entradas, e é fundamental para impor, num só passo, ambas as restrições, nas magnitudes e nas taxas. As restrições nas magnitudes são impostas através da função de saturação  $\text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon)$  dada por (4.32), e as restrições nas taxas são impostas através da própria equação diferencial  $\dot{u}_s$  se a matriz  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  envolver todos os limites de saturação como descrito em (4.33):

$$\text{sat}_{u_0,i}(u_i) = \begin{cases} u_{0,i} & , \quad u_i > u_{0,i} \\ u_i & , \quad -u_{0,i} \leq u_i \leq u_{0,i} \\ -u_{0,i} & , \quad u_i < -u_{0,i} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.32)$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_{max,1}/u_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{u}_{max,2}/u_{0,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{u}_{max,m}/u_{0,m} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.33)$$

Seja o vetor de controlo efetivo,  $u \in \mathbb{R}^m$ , calculado como  $u = u_s + u_c$  em que  $u_c \in \mathbb{R}^m$  denota o vetor central entre os limites de saturação máximos e mínimos  $u_{max} = [u_{1,max}, \dots, u_{m,max}]^T$ ,  $u_{min} = [u_{1,min}, \dots, u_{m,min}]^T$ , isto é,  $u_c = (u_{max} + u_{min})/2$ .  $u_0 = [u_{0,1}, \dots, u_{0,m}]^T \in \mathbb{R}^m$  denota um vetor auxiliar que contém os limites simétricos de  $u_s(t) \in \mathbb{R}^m$  e é dado pela distância entre o vetor dos limites superiores  $u_{max}$  (ou dos limites inferiores  $u_{min}$ ) e o vetor central  $u_c$ , isto é,  $u_0 = u_{max} - u_c$ .  $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$  denota o controlo virtual e é com base nele que o controlador é projetado para estabilizar o sistema aumentado satisfazendo restrições assimétricas como especificado em (4.27). O sistema aumentado resultante tem a seguinte forma:  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \varphi_a(x_a)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{m \times n} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ L \end{bmatrix} \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \begin{bmatrix} B u_c + \varphi(x) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde  $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$  denota o vetor de estado aumentado,  $A_a \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  a matriz de estado aumentada,  $B_a \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$  a matriz de entrada aumentada,  $\varphi_a \in \mathbb{R}^{n_a}$  uma função não-linear que de agora em diante será considerada como uma perturbação para o sistema aumentado (4.34), e  $n_a = n + m$ .

Considere-se agora um sistema contínuo e invariante no tempo composto por três equações definidas abaixo como adotado na secção anterior:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + Ew \\ \dot{w} &= Sw + r \\ e &= C_a x_a + Dw \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde a primeira equação descreve o sistema aumentado (4.34) com o termo perturbativo  $\varphi_a$  obtido agora através de  $Ew$ , a segunda equação, designada por exossistema, descreve um sistema auxiliar com estado  $w \in \mathbb{R}^s$ ,  $s = n_a + n_r$ , que modela a perturbação  $\varphi_a$  e os sinais de referência a serem seguidos  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ , e a terceira equação define o erro  $e \in \mathbb{R}^q$  entre as saídas reais do sistema  $C_a x_a = y$  e as saídas de referência  $Dw = -y_r$ , também geradas pelo exossistema.

Sejam as matrizes  $C_a \in \mathbb{R}^{q \times n_a}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{q \times s}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n_a \times s}$  dadas por  $C_a = [C \ 0_{q \times m}]$ ,  $D = [0_{q \times n_a} \ -C_r]$ ,  $E = [I_{n_a} \ 0_{n_a \times n_r}]$ , e o exossistema  $\dot{w}$  descrito como se segue:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n_a \times n_a} & 0_{n_a \times n_r} \\ 0_{n_r \times n_a} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(\partial f / \partial x \cdot f(x) - A \cdot f(x))^T & 0_{1 \times m}]^T \\ \varphi_r(x_r) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

**Teorema (4.2):**

O problema de regulação de saída através da realimentação de estados para o sistema (4.35) tem solução se e somente se as seguintes condições se verificarem (Saber et al., 2011):

- i) o par  $(A_a, B_a)$  é estabilizável e  $A_a$  tem todos os seus valores próprios com partes reais não positivas.
- ii) existem duas matrizes,  $\Pi$  e  $\Gamma$ , tais que são soluções das tão chamadas equações de regulação:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A_a \Pi + B_a \Gamma + E \\ 0 &= C_a \Pi + D \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nestas condições, a família de leis de realimentação linear e estática de estados dada por:

$$u_\varepsilon = -R^{-1} B_a^T P_\varepsilon x_a + (R^{-1} B_a^T P_\varepsilon \Pi + \Gamma) w + \tilde{r} \quad (4.38)$$

onde  $P_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  é uma matriz simétrica e positivamente definida,  $P_\varepsilon = P_\varepsilon^T$ ,  $P_\varepsilon > 0$ , solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE):

$$(A_a + \gamma I)^T P_\varepsilon + P_\varepsilon (A_a + \gamma I) - P_\varepsilon B_a R^{-1} B_a^T P_\varepsilon + Q_\varepsilon = 0 \quad (4.39)$$

em que  $Q_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são duas matrizes de penalização, ambas simétricas,  $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^T$ ,  $R = R^T$ ,  $Q_\varepsilon$  positivamente semidefinida,  $Q_\varepsilon \geq 0$ ,  $R$  positivamente definida,  $R > 0$ ,  $I \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  uma matriz identidade,  $\gamma \geq 0$  um número escalar que representa um grau de estabilidade especificado, e  $\tilde{r} = B_a^+ \Pi r$  onde  $B_a^+$  denota a matriz pseudo-inversa de  $B_a$ , direciona o erro  $e(t)$  do sistema (4.35) para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Uma das possíveis formas de resolver as equações de regulação (4.37) recorre a uma vetorização de matrizes e encontra-se no Anexo C - Resolução das Equações de Regulação.

Em suma, calculando o controlo virtual  $u_\varepsilon(t)$  pela lei (4.38) e inicializando o sistema aumentado (4.34) com  $x(t_0) = x_0$  e  $u_s(t_0) = -u_c$ , a variável auxiliar  $u_s(t)$  satisfaz as restrições de magnitude e de taxa  $-u_{0,i} \leq u_{s,i}(t) \leq u_{0,i}$ ,  $|\dot{u}_{s,i}(t)| \leq \dot{u}_{s,i,max}$ , e consequentemente o controlo efetivo  $u(t)$  satisfaz  $u_{i,min} \leq u_i(t) \leq u_{i,max}$ ,  $|\dot{u}_i(t)| \leq \dot{u}_{i,max}$ , com  $i = 1, \dots, m$ . Se não for necessário aplicar nenhum controlo ao sistema (4.35), o controlo virtual  $u_\varepsilon(t) = -u_c$  deve ser mantido. Desta forma,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_s(t) = -u_c$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ .

Para finalizar esta secção, apresenta-se de seguida uma forma direta de calcular as derivadas/taxas do vetor de controlo efetivo,  $\dot{u}(t)$ . Ao invés de as calcular através de métodos numéricos, como por exemplo pelo método das diferenças finitas centradas, elas podem ser obtidas facilmente através da derivada temporal de  $u = u_s + u_c$ , no que resulta:

$$\dot{u} = \dot{u}_s + \dot{u}_c = -Lu_s + L\text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) \quad (4.40)$$

### 4.3. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores Tendo em Conta de Forma Explícita Incertezas Paramétricas no Modelo

Considere-se o problema de regulação de saída robusta de um sistema não-linear contínuo e invariante no tempo com incertezas paramétricas descrito por (4.41):

$$\begin{aligned} \text{Sistema a Controlar:} \quad & \dot{x} = f(x, \theta) + B(\theta)u \\ & y = C(\theta)x \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema de Referência:} \quad & \dot{x}_r = f_r(x_r) \\ & y_r = C_r x_r \end{aligned} \quad (4.42)$$

cujo o objetivo consiste em encontrar um controlo admissível sujeito a restrições na magnitude e na taxa de modo a que as suas saídas sigam os sinais de referência gerados por um dado sistema (4.42).

Nas equações (4.41) e (4.42),  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  denotam os vetores de estado,  $y, y_r \in \mathbb{R}^p$  os vetores de saída,  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controlo,  $\theta \in \mathbb{R}^q$  o vetor de parâmetros que é conhecido apenas com um dado grau de exatidão,  $C(\theta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$  as matrizes de saída,  $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de controlo,  $f, f_r$  duas funções não-lineares suaves, e  $\dot{x} \equiv dx/dt$ . Escrevendo o problema com as formalidades matemáticas, o objetivo resume-se ao seguinte:

#### Problema a Resolver:

Encontrar o controlo  $u(t)$  de tal modo que as condições (4.43) e (4.44) se verifiquem para qualquer  $t \geq \tau$ ,  $\tau > t_0$ , sabendo à partida que os parâmetros do sistema (4.41) podem assumir quaisquer valores dentro dos limites especificados em (4.45):

$$\|e_y\| = \|y(t) - y_r(t)\| \leq \varepsilon \quad (4.43)$$

$$\|u(t)\|_\infty \leq \eta \quad , \quad \|\dot{u}(t)\|_\infty \leq \nu \quad (4.44)$$

$$\theta_i \in [\theta_{i,min} , \theta_{i,max}] \quad , \quad i = 1, \dots, q \quad (4.45)$$

Na desigualdade (4.43),  $\|\cdot\|$  denota uma norma apropriada e  $\varepsilon \geq 0$  deve ser o mais pequeno quanto possível para uma regulação adequada. Os parâmetros  $\eta \geq 0$  e  $\nu \geq 0$  denotam respetivamente as restrições da magnitude e da taxa a que os atuadores são sujeitos.

#### Abordagem Proposta (Velosa & Bousson, 2015a):

Considere-se um sistema contínuo e invariante no tempo dado como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_0)x + B_1(\theta_0)\sigma_{\eta,\nu}(u) + B_2w + B_3d \\ \dot{w} &= Sw + r \\ y &= C_1(\theta_0)x + D_{13}d \\ e &= C_1(\theta_0)x + D_{12}w \\ z &= C_2x + D_{21}\sigma_{\eta,\nu}(u) \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde a primeira equação descreve o sistema a controlar, de estado  $x \in \mathbb{R}^n$ , controlo  $u \in \mathbb{R}^m$ , e sujeito ao efeito de perturbações externas e incertezas paramétricas representadas respetivamente por  $B_2w$  e  $B_3d$ . O vetor  $\theta_0$  denota o valor nominal do vetor de parâmetros  $\theta$ . A terceira equação refere-se à saída real do sistema  $y \in \mathbb{R}^p$ , que é também afetada por incertezas paramétricas representadas por  $D_{13}d$ . A quarta equação define o erro  $e \in \mathbb{R}^p$  entre a saída do sistema  $C_1(\theta_0)x$  e o sinal de referência  $-D_{12}w$  o qual a saída do sistema deve seguir. A segunda equação descreve um exossistema, de estado  $w \in \mathbb{R}^s$ , que modela simultaneamente a classe de perturbações do sistema e os sinais de referência tomados em consideração. A última equação,  $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ , representa as saídas de desempenho destinadas a serem influenciadas de uma forma desejada.

Daqui por diante, as notações  $A(\theta_0) \equiv A_0$ ,  $B_1(\theta_0) \equiv B_{1,0}$  e  $C_1(\theta_0) \equiv C_{1,0}$  correspondem às matrizes obtidas com o vetor de parâmetros nominais,  $\theta_0$ , assumido igual ao ponto médio do intervalo descrito em (4.45).

Sejam as restrições do controlo apresentadas em (4.44) impostas por um operador diferencial funcional da forma  $\sigma_{\eta,\nu}(u) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu$ , com  $x_\mu$  descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= \sigma_\nu \left( \mu (\sigma_\eta(u) - x_\mu) \right) \\ x_\mu(t_0) &= \sigma_\eta(u(t_0)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

em que  $\sigma_h(\cdot)$  denota uma função de saturação, de limite  $h$ , definida por:

$$\sigma_h(s) = \text{sgn}(s) \cdot \min\{|s|, h\} \quad (4.48)$$

As incertezas paramétricas do sistema (4.46) podem ser expressas como uma realimentação das saídas de desempenho através de uma seleção apropriada das matrizes  $C_2$  e  $D_{21}$ . Isto é,  $d = \Delta \cdot z$ , com:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_1 \\ \Delta C_1 & 0_{p \times m} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

onde:

$$\begin{aligned} \|\Delta A\| &= \|A(\theta) - A(\theta_0)\| \leq a \\ \|\Delta B_1\| &= \|B_1(\theta) - B_1(\theta_0)\| \leq b \\ \|\Delta C_1\| &= \|C_1(\theta) - C_1(\theta_0)\| \leq c \end{aligned} \quad (4.50)$$

e pode ser mostrado facilmente que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , onde  $\gamma$  é determinado de acordo com a expressão (Bernhard, 2002):

$$\gamma = \left( \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - (2bc)^2}}{2}} \right)^{-1} \quad (4.51)$$

**Teorema (4.3):**

*O problema de regulação de saída robusta através da realimentação de estados para o sistema (4.46) pode ser resolvido se as seguintes condições se verificarem (Bernhard, 2002; Saberi et al., 2011):*

- i) o par  $(A_0, B_{1,0})$  é controlável e  $A_0$  tem todos os seus valores próprios com partes reais não positivas.*
- ii)  $D_{21}^T D_{21}$  é invertível e  $D_{21}^T C_2 = 0$ .*
- iii) o par  $(C_2, A_0)$  não tem modos não-observáveis no eixo imaginário.*
- iv) existem duas matrizes,  $\Pi$  e  $\Gamma$ , tais que:*

*a) são solução das equações de regulação:*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A_0 \Pi + B_{1,0} \Gamma + B_2 \\ 0 &= C_{1,0} \Pi + D_{12} \end{aligned} \quad (4.52)$$

b) para um dado  $\xi > 0$  e  $T \geq 0$ , satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\Gamma w + B_{1,0}^+ \Pi r\|_{\infty, T} &\leq \eta - \xi \\ \|\Gamma S w + \Gamma r + B_{1,0}^+ \Pi \dot{r}\|_{\infty, T} &\leq \nu - \xi \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nestas condições, a família de leis de realimentação linear e estática de estados dada por:

$$u = -B_{1,0}^T P x + (B_{1,0}^T P \Pi + \Gamma) w + B_{1,0}^+ \Pi r \quad (4.54)$$

onde  $B_{1,0}^+$  denota a matriz pseudo-inversa de  $B_{1,0}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica e positivamente definida ( $P = P^T$ ,  $P > 0$ ), solução, se existir, da seguinte Equação Algébrica de Riccati (ARE):

$$A_0^T P + P A_0 - P B_{1,0} B_{1,0}^T P + \gamma^{-2} P B_3 B_3^T P + C_2^T C_2 = 0 \quad (4.55)$$

tal que a matriz  $A_0 - B_{1,0} B_{1,0}^T P + \gamma^{-2} B_3 B_3^T P$  é estável, isto é, todos os seus valores próprios têm partes reais negativas, direciona o erro de saída  $e(t)$  do sistema (4.46) para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , e garante que matriz de transferência em malha fechada de  $d$  para  $z$  satisfaz  $\|T_{z,d}\|_{\infty} < \gamma$ , pelo teorema do pequeno ganho (Zames, 1981).

Uma forma de resolver as equações de regulação (4.52) e a equação de Riccati (4.55) encontra-se no Anexo C - Resolução das Equações de Regulação e no Anexo D - Resolução das Equações de Riccati do tipo  $H_{\infty}$ , respetivamente.

Sejam as matrizes  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $C_2$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  dadas por:

$$\begin{aligned} B_2 &= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_r} \end{bmatrix} \quad , \quad B_3 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix} \\ D_{13} &= \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \quad , \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & -C_r \end{bmatrix} \\ D_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Decompondo agora as funções não-lineares dos sistemas (4.41) e (4.42) na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear de modo a que a parte linear de (4.41) seja estável, na verdade, de modo que a matriz de estado resultante não tenha valores próprios com partes reais positivas, determinada com os parâmetros nominais, isto é:

$$\begin{aligned}
f(x, \theta_0) &= A_0 x + \varphi(x, \theta_0) \\
f_r(x_r) &= A_r x_r + \varphi_r(x_r)
\end{aligned}
\tag{4.57}$$

$$A_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}, \quad A_r = \left. \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \right|_{x_r=x_r^*}
\tag{4.58}$$

com  $x^*$  escolhido de tal modo que:

$$\text{Re}[\lambda_i(A_0)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, n
\tag{4.59}$$

e com  $\varphi$  e  $\varphi_r$  reescritos da forma:

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \theta_0) &= f(x, \theta_0) - A_0 x \\
\varphi_r(x_r) &= f_r(x_r) - A_r x_r
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

Note-se que a primeira equação de (4.46) descreve um sistema linear perturbado: na ausência de incertezas, representa o modelo nominal; e na presença de incertezas, representa todos os possíveis modelos melhores que o ‘pior’ modelo tomado em consideração, isto é, o modelo para a máxima incerteza admissível. Dado que o sistema controlado é descrito por uma função não-linear  $f(x, \theta) = A(\theta)x + \varphi(x, \theta)$ , quando escrito sob a forma de um modelo nominal mais os termos incertos restantes, seria  $f(x, \theta) = A_0 x + \varphi_0(x) + \Delta A x + \Delta \varphi(x)$ . Contudo, determinados sistemas, e em particular a maioria dos sistemas caóticos, têm os seus parâmetros somente nos termos lineares do modelo, e nesta condição a expressão anterior simplifica para  $f(x, \theta) = A_0 x + \varphi(x) + \Delta A x$ . Os sistemas de Lorenz, Chen, Lu, entre outros, são exemplos de sistemas caóticos bem conhecidos nos quais todos os parâmetros aparecem exclusivamente nos termos lineares. Para tais sistemas, a incerteza  $\Delta A x$  pode ser facilmente caracterizada pelo termo  $B_3 d$  de acordo com (4.49).

A manipulação acima permite-nos escrever o exossistema de (4.46) na sua forma exata,  $\dot{w} = S w + r$ , gerando assim a parte não-linear do sistema controlado,  $\varphi \equiv \varphi(x, \theta_0)$ , e o vetor de estado de referência,  $x_r$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n_r} \\ 0_{n_r \times n} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(x) \\ \varphi_r(x_r) \end{bmatrix}
\tag{4.61}$$

onde:

$$\dot{\varphi}(x) = \left( \frac{\partial f(x, \theta_0)}{\partial x} - A_0 \right) f(x, \theta_0)
\tag{4.62}$$

## 4.4. Controlo de Saída com Restrições Simétricas nas Magnitudes e nas Taxas dos Atuadores sem Conhecimento Prévio do Modelo de Referência

Considere-se o problema de controlo de saída de um sistema não-linear contínuo e invariante no tempo. Seja esse sistema descrito por equações diferenciais da forma (4.63) e os sinais de referência, a serem seguidos, gerados pelo sistema de referência (4.64):

$$\begin{aligned} \text{Sistema a Controlar:} \quad & \dot{x} = f(x, \theta) + Bu \\ & y = Cx \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} \text{Sistema de Referência:} \quad & \dot{x}_r = f_r(x_r, \theta_r) \\ & y_r = C_r x_r \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  representam os vetores de estado,  $\theta \in \mathbb{R}^p$ ,  $\theta_r \in \mathbb{R}^{p_r}$  os vetores de parâmetros,  $y, y_r \in \mathbb{R}^s$  as saídas de cada sistema (vetores com a mesma dimensão) onde  $y_r$  são os sinais de referência a serem seguidos,  $u \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controlo,  $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{s \times n_r}$  as matrizes de saída,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada,  $f, f_r$  duas funções não-lineares suaves, e  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

Para a classe de sistemas caóticos, um sistema não-linear da forma (4.63) pode exibir um movimento regular (ex.: pontos de equilíbrio, órbitas periódicas, órbitas multiperiódicas) ou um movimento caótico, dependendo dos valores dos parâmetros. Os sistemas de Lorenz, Chua, Rössler, Chen, Genesio-Tesi e Couillet são exemplos bem conhecidos disso. Por outro lado, mesmo que os parâmetros tenham sido escolhidos para despoletar um comportamento regular, pode ser provado através de uma análise de Melnikov que a trajetória de qualquer sistema não-linear pode-se tornar caótica se o sistema for sujeito a perturbações externas com determinadas características. O caos por ser desejado ou não dependendo da aplicação, mas uma mudança de comportamento inesperada já não é desejável de modo algum.

A maioria das abordagens de controlo para controlar sistemas da forma (4.63) de modo a que as suas saídas sigam certos sinais de referência considera que os parâmetros são mantidos constantes (Fradkov & Evans, 2005; Idowu et al., 2008; Jarzebowska, 2012; Shi & Zhu, 2007; Zhang & Tang, 2012). No entanto, em aplicações reais, os parâmetros podem sofrer inevitavelmente ligeiras variações devido a causas externas que podem, por sua vez, forçar o sistema a exibir um comportamento diferente do pretendido. A título de exemplo, considere-se o célebre circuito de Chua, cujos parâmetros são definidos por componentes eletrónicos (resistências, condensadores e bobinas). Se os parâmetros forem escolhidos de modo a que o

sistema exiba uma oscilação caótica, por exemplo para ser aplicado num sistema de comunicação seguro, é possível que a oscilação deixe de ser caótica porque os sistemas caóticos são extremamente sensíveis a variações nos parâmetros, e fatores como a temperatura, humidade e idade induzem variações nos valores dos componentes.

Por outro lado, sistemas físicos do mundo real têm de lidar necessariamente com restrições nos atuadores. A abordagem clássica para limitar a magnitude do controlo consiste em adicionar um bloco de saturação à saída do controlador e recorrer a técnicas de *anti-windup* para impedir tanto o *controller-* como o *plant- windup*. No entanto, apesar de ser uma solução viável, a abordagem não é a melhor porque introduz não-linearidades adicionais no sistema e o desempenho resultante não é o melhor. Além disso, devido a restrições elétricas/mecânicas, algumas aplicações requerem não só restrições nas magnitudes como também restrições nas taxas.

O problema a resolver consiste em forçar as saídas do sistema (4.63) a seguirem sinais de referência limitados mesmo que os parâmetros do sistema não sejam conhecidos com exatidão, considerando que o controlo é sujeito a restrições simultaneamente na magnitude e na taxa. Matematicamente, o objetivo consiste em encontrar  $u(t)$  tal que se verifique as condições (4.65) e (4.66):

**Problema a Resolver:**

Assumindo que  $\|y_r(t)\| < \infty$ , encontrar  $u(t)$  de modo a que:

$$\|e_y(t)\| = \|y(t) - y_r(t)\| \leq \delta \tag{4.65}$$

para qualquer  $t \geq \tau$ , em que  $\tau > t_{u_{on}}$ , e:

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \eta \quad , \quad \|\dot{u}(t)\|_{\infty} \leq \nu \tag{4.66}$$

a partir do instante em que o controlo é ligado,  $t \geq t_{u_{on}}$ .

Na desigualdade (4.65),  $\|\cdot\|$  representa uma norma apropriada e  $\delta \geq 0$  deve ser o mais pequeno quanto possível para um bom seguimento (*tracking*). Os parâmetros  $\eta \geq 0$  e  $\nu \geq 0$  denotam respetivamente os limites de saturação da amplitude e da taxa de vetor de controlo.

**Abordagem Proposta (Bousson & Velosa, 2014):**

Considere-se um sistema dinâmico da forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + h(x, t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{4.67}$$

onde  $f(0, t) = 0$  para todo o  $t$ ,  $f$  é continuamente diferenciável em  $t$  e nas componentes de  $x$  para  $x$  perto da origem, e  $h$  uma perturbação limitada continuamente diferenciável com respeito às componentes de  $x$  e mensurável no sentido de Lebesgue com respeito a  $t$ .

**Definição (4.1):** Estabilidade no Sentido de Lyapunov

O sistema (4.67) na sua forma não perturbada, isto é, com  $h = 0$ , é dito ser estável no sentido de Lyapunov com respeito ao equilíbrio  $x_e = 0$ , se para qualquer  $\varepsilon > 0$  e para qualquer instante inicial  $t_0 \geq 0$ , existe uma constante positiva  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \text{ para todo o } t \geq t_0 \quad (4.68)$$

**Definição (4.2):** Estabilidade Assintótica

O sistema (4.67) na sua forma não perturbada, isto é, com  $h = 0$ , é dito ser assintoticamente estável em torno do seu equilíbrio  $x_e = 0$ , se for estável no sentido de Lyapunov, e, além disso, existir uma constante positiva  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.69)$$

**Definição (4.3):** Estabilidade Uniforme

O sistema (4.67) na sua forma não perturbada, isto é, com  $h = 0$ , é dito ser uniformemente estável em torno do seu equilíbrio  $x_e = 0$ , se for estável (assintoticamente ou no sentido de Lyapunov) com a constante  $\delta$  independente de  $t_0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

**Definição (4.4):** Estabilidade sob o Efeito de Perturbações Persistentes

O sistema (4.67) na sua forma perturbada, isto é, com  $h \neq 0$ , é dito ser estável sob o efeito de perturbações persistentes (ou, alternativamente, totalmente estável) em torno do seu equilíbrio  $x_e = 0$ , se dada uma tolerância  $\varepsilon > 0$  existir duas constantes positivas,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \|\tilde{x}(t_0)\| < \delta_1 \\ \|h(\tilde{x}, t)\| < \delta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \|\tilde{x}(t)\| < \varepsilon, \text{ para todo o } t \geq t_0 \quad (4.70)$$

onde  $\tilde{x}(t)$  denota a solução do sistema perturbado.

**Teorema (4.4) - Teorema de Malkin:**

Se o sistema (4.67) na sua forma não perturbada for uniformemente e assintoticamente estável em torno do seu equilíbrio  $x_e = 0$ , então o sistema é estável sob o efeito de

*perturbações persistentes. Nomeadamente, o sistema perturbado permanece estável no sentido de Lyapunov (G. Chen, 2004; Hoppensteadt, 2000).*

Os sistemas caóticos têm, por natureza, uma estrutura analítica relativamente simples. Isto é, as equações diferenciais são constituídas principalmente por termos lineares e por alguns termos não-lineares. Nesse sentido, o sistema controlado (4.63) pode ser decomposto na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear como se segue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \varphi(x) + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{4.71}$$

onde, por sua vez,  $Ax + Bu$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , pode ser visto como um sistema linear e  $\varphi(x)$  como perturbações para este sistema. O vetor de parâmetros  $\theta$  foi ocultado para simplificar a terminologia mas os parâmetros continuam implicitamente na matriz  $A$  e/ou em  $\varphi$ .

#### **Observação:**

Para sistemas não-lineares em que a parte linear  $Ax$  não existe de uma forma explícita,  $f(x, \theta)$  em (4.63) por ser escrita da mesma forma que (4.71) linearizando o sistema em torno de um estado específico  $x^*$  e escrevendo os termos restantes como:  $\varphi(x) = f(x) - Ax$ . Tipicamente, a origem  $x^* = 0$  pode ser adotado como o ponto de linearização. Contudo, é necessário ter alguma precaução. Existem alguns sistemas não-lineares específicos que são controláveis na origem mas que quando linearizados em torno desse mesmo ponto deixam de ser controláveis. É o caso dos sistemas subatuados. Nestes sistemas em particular, o ponto  $x^*$  deve ser escolhido de modo a que o sistema linearizado continue controlável. Alternativamente, é possível optar por uma linearização ótima em vez da linearização clássica (matriz Jacobiana), pois, com uma linearização ótima a característica da controlabilidade não se perde durante o processo de linearização (Bousson & Quintiães, 2008).

Defina-se o vetor  $q \in \mathbb{R}^s$  como o integral do erro da saída:

$$q = \int_{t_0}^t (y - y_r) dt\tag{4.72}$$

Seja  $\sigma_{\eta, \nu}$  um operador utilizado para garantir que o controlo efetivo aplicado ao sistema,  $\sigma_{\eta, \nu}(u)$ , satisfaz restrições de amplitude e de taxa da forma (4.66). Seja esse operador dado pela equação (4.73) (Saber et al., 2011):

$$\sigma_{\eta,\nu}(u) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu \quad (4.73)$$

onde:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= \sigma_\nu \left( \mu (\sigma_\eta(u) - x_\mu) \right) \\ x_\mu(t_0) &= \sigma_\eta(u(t_0)) \end{aligned} \quad (4.74)$$

e  $\sigma_h$  é uma função de saturação de limite  $h$ , definida por:

$$\sigma_h(r) = \text{sgn}(r) \cdot \min\{|r|, h\} \quad (4.75)$$

Considere-se agora um sistema aumentado composto por (4.71) e pela derivada temporal da equação (4.72). Juntamente com o operador (4.73-4.75), resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times s} \\ C & 0_{s \times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{s \times m} \end{bmatrix} \sigma_{\eta,\nu}(u) + \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ -y_r(t) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

podendo ser escrito, portanto, da forma:

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \sigma_{\eta,\nu}(u) + d(x_a, t) \quad (4.77)$$

com  $x_a \in \mathbb{R}^{n+s}$  denotando o vetor de estado aumentado,  $A_a \in \mathbb{R}^{(n+s) \times (n+s)}$  a matriz de estado aumentada,  $B_a \in \mathbb{R}^{(n+s) \times m}$  matriz de controlo aumentada, e  $d \in \mathbb{R}^{n+s}$  o vetor das perturbações externas.

Nesta etapa, o problema de sincronização, ou de controlo, de saída com restrições (4.65-4.66) foi transformado num problema de regulação da forma (4.77), cujo objetivo consiste em encontrar o controlo  $u(t)$  tal que  $(\dot{x}, \dot{q}) = (0, 0)$ . Note-se que isto implica por sua vez que  $y(t) = y_r(t)$ .

Uma das características dos sistemas caóticos é que as suas trajetórias no espaço de fases são limitadas. Se considerarmos que os sinais de referência a serem seguidos são também limitados, todas as componentes do vetor das perturbações,  $d(x_a, t)$ , permanecem consequentemente limitados. Assumindo que  $d$  é uma função vetorial contínua no tempo, e que na verdade é, tem-se, por definição (função contínua e limitada), que  $d$  é mensurável no sentido de Lebesgue em relação a  $t$ . Portanto, um controlador robusto pode ser projetado para estabilizar assintoticamente o sistema não-perturbado (4.77), isto é, com  $d = 0$ , porque o sistema perturbado (com perturbações persistentes) permanece estável no sentido de Lyapunov, (teorema (4.4)). Note-se que se um sistema invariante no tempo, que é o caso do sistema não-perturbado (4.77), for projetado para ser assintoticamente estável, o sistema

será assintoticamente e uniformemente estável porque um sistema invariante no tempo tem a restrição  $\delta$  independente de  $t_0$ .

A abordagem de controlo robusta proposta nesta secção para estabilizar o sistema (4.77) é apresentada nas seguintes subsecções e divide-se em duas partes: um controlo baseado na técnica de Korobov e Skoryk (Korobov & Skoryk, 2002) e um controlo através de uma das extensões do LQR - o LQR com um grau de estabilidade especificado (Naidu, 2002). Em ambos os casos, é assumido que o sistema aumentado (4.77) é controlável, ou, por outras palavras, que o par  $(A_a, B_a)$  é controlável o que implica que a ordem da matriz de controlabilidade,  $M_c$ , é igual à ordem do sistema (4.77):

$$M_c = [B_a \quad A_a B_a \quad A_a^2 B_a \quad \dots \quad A_a^{n_a-1} B_a] = n_a = n + s \quad (4.78)$$

#### 4.4.1. Controlo de Korobov

Korobov e Skoryk (Korobov & Skoryk, 2002) desenvolveram uma lei de controlo baseada numa função de controlabilidade (uma generalização da função de Lyapunov) que direciona, sob certas condições, a trajetória de sistemas lineares da forma  $\dot{x} = Ax + Bu$  para a origem. A técnica tem em consideração restrições no controlo que podem ser escolhidas até uma dada ordem, isto é, restrições em  $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots$ , mas a trajetória tem de começar necessariamente no interior de uma pequena vizinhança da origem para que as restrições no controlo sejam satisfeitas. No entanto, as hipóteses assumidas por Korobov e Skoryk permite-nos perceber que a trajetória controlada é direcionada à mesma para a origem mesmo que o ponto inicial não se tenha iniciado nesse domínio de atração e mesmo que o modelo seja perturbado. Perturbações limitadas e mensuráveis no sentido de Lebesgue são admissíveis. O inconveniente que daí advém é que os limites de saturação do controlo já não são satisfeitos.

Dado que a trajetória pode estar muito longe da referência quando o controlo é ligado, sozinha, esta técnica é não poderosa o suficiente para assegurar um controlo limitado. Por essa razão, considerou-se o operador (4.73-4.75),  $\sigma_{\eta,\nu}(u)$ , já está incluído no sistema aumentado (4.77), para garantir efetivamente que o controlo é limitado.

Considere-se o sistema aumentado (4.77). Seja o controlo fictício,  $u$ , calculado pela lei de controlo (4.79) (Korobov & Skoryk, 2002):

$$u = -M^{-1} B_0^T \left( \frac{1}{2} F_\alpha(\theta) L + L A_a \right) x_a \quad (4.79)$$

cuja forma de encontrar as matrizes  $M, B_0, F_\alpha(\theta)$  e  $L$  resume-se abaixo:

### Matriz $M$ :

A matriz  $M$  na lei de controlo (4.79) é uma matriz triangular superior, de dimensão  $m \times m$ , cujos elementos da diagonal principal são  $m_{ii} = 1$ , e os restantes definidos como  $m_{ij} = c_i^T A_a^{n_i-1} b_j$  para  $j > i$ . No cálculo de cada elemento  $m_{ij}$ , o vetor  $b_j$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $B_a \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$ , os valores de  $n_i$  são escolhidos de modo a que satisfaçam a condição (4.80):

$$\left( n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^m n_i = n_a \right) \quad (4.80)$$

e cada vetor  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é escolhido de modo a que seja ortogonal a todos os vetores linearmente independentes (4.81), à exceção do vetor  $A_a^{n_i-1} b_i$ , e de forma a que o produto escalar  $\langle c_i, A_a^{n_i-1} b_i \rangle = 1$  seja satisfeito.

$$\begin{aligned} & b_1, A_a b_1, \dots, A_a^{n_1-1} b_1 \\ & b_2, A_a b_2, \dots, A_a^{n_2-1} b_2 \\ & \quad \vdots \\ & b_m, A_a b_m, \dots, A_a^{n_m-1} b_m \end{aligned} \quad (4.81)$$

### Matriz $L$ :

Na expressão (4.79), a matriz  $L$ , de dimensão  $n_a \times n_a$ , é definida por (4.82):

$$L = [c_1, A_a^T c_1, \dots, (A_a^T)^{n_1-1} c_1, \dots, c_m, A_a^T c_m, \dots, (A_a^T)^{n_m-1} c_m]^T \quad (4.82)$$

### Matriz $B_0$ :

A matriz  $B_0$  requerida na expressão (4.79) é uma matriz, de dimensão  $n_a \times m$ , com elementos  $(B_0)_{s_i, i} = 1$ , em que cada índice  $s_i$  é definido como  $s_i = \sum_{k=1}^i n_k$  com  $i = 1, \dots, m$ , e todos os restantes elementos nulos.

### Matriz $A_0$ :

A matriz  $A_0$  é uma matriz, de dimensão  $n_a \times n_a$ , definida como  $A_0 = \text{diag}(A_{01}, \dots, A_{0m})$ , em que cada  $A_{0i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  é uma matriz cujos elementos da diagonal superior são 1's e todos os restantes são 0's.

### Matriz $F_\alpha(\theta)$ :

A matriz  $F_\alpha(\theta)$  é determinada pela matriz inversa da expressão (4.83), com um valor de  $\alpha$  inteiro qualquer, desde que  $\alpha \geq \alpha_0$  em que  $\alpha_0 = 2l + 1$ . Aqui,  $l$  representa a ordem da

derivada do controlo e considera-se  $l = 1$  para restrições na magnitude e na taxa.  $F_\alpha$  tem dimensão  $n_a \times n_a$ .

$$F_\alpha^{-1}(\theta) = \int_0^{\alpha\theta^{1/\alpha}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\theta^{1/\alpha}}\right)^\alpha \cdot e^{-A_0 t} \cdot B_0 \cdot B_0^T \cdot e^{-A_0^T t} \cdot dt \quad (4.83)$$

Alternativamente,  $F_\alpha(\theta)$  pode ser obtida pela expressão (4.84), onde as matrizes  $D(\theta)$  e  $H^\alpha$  são determinadas pelas expressões (4.85) e (4.86), respetivamente:

$$F_\alpha(\theta) = D(\theta)F_\alpha D(\theta) \quad (4.84)$$

$$D(\theta) = \text{diag}(D_1(\theta), \dots, D_m(\theta)) \quad , \quad D_i(\theta) = \text{diag}\left(\theta^{\frac{-(2n_i - 2k + 1)}{2\alpha}}\right)_{k=1}^{n_i} \quad (4.85)$$

$$H^\alpha = \text{diag}(H_1^\alpha, \dots, H_m^\alpha) \quad , \quad H_i^\alpha = \text{diag}\left(-\frac{2n_i - 2k + 1}{2\alpha}\right)_{k=1}^{n_i} \quad (4.86)$$

e  $F_\alpha \equiv F_\alpha(1)$  é uma matriz positivamente definida,  $F_\alpha > 0$ , isto é,  $x_a^T F_\alpha x_a > 0$  para qualquer  $x_a \neq 0$ , que satisfaz a igualdade (4.87):

$$F_\alpha A_1 + A_1^T F_\alpha = -F_\alpha + F_\alpha H^\alpha + H^\alpha F_\alpha \quad (4.87)$$

com:  $A_1 = A_0 - (1/2)B_0 B_0^T F_\alpha$ .

#### Função de Controlabilidade $\Theta(x_a)$ :

A função de controlabilidade,  $\theta \equiv \Theta_\alpha(x_a)$ , é a base por detrás da formulação da estratégia de controlo, e é definida, para qualquer  $x_a \neq 0$ , pela expressão (4.88):

$$2a_0\theta = \langle L^T F_\alpha(\theta) L x_a, x_a \rangle \quad (4.88)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar, e a sua única solução,  $\theta$ , é uma função escalar que satisfaz as seguintes condições:

- ✓  $\theta(0) = 0$
- ✓  $\theta(x_a) > 0$  para todo  $x_a \neq 0$
- ✓  $\theta(x_a)$  é contínua em todo o  $x_a$ , e continuamente diferenciável em qualquer  $x_a$  exceto na origem.

$$\checkmark \sum_{i=1}^{n_a} \frac{\partial \Theta(x_a)}{\partial x_{a,i}} f_i(x_a, u(x_a)) \leq -\Psi(\Theta(x_a)) \quad , \quad \Psi > 0$$

Na equação (4.88),  $a_0$  é um número escalar escolhido dentro do intervalo (4.89):

$$0 < a_0 \leq \bar{a}_0 = \min_{0 \leq k \leq l} \frac{d_k^2}{2 \|F_\infty^{-1}\| \eta_k^2} \quad (4.89)$$

onde a matriz  $F_\infty^{-1}$ , de dimensão  $n_a \times n_a$ , é calculada pelo integral (4.90):

$$F_\infty^{-1} \equiv \int_0^\infty e^{-t} e^{-A_0 t} B_0 B_0^T e^{-A_0^T t} dt \quad (4.90)$$

e  $\eta_k$  definido pelas expressões (4.91-4.93), com  $l = 1$ ,  $d_0 = \eta$  e  $d_1 = v$ :

$$\eta_k = \|M^{-1}\| \left( \sum_{j=0}^{m_k} \|R_j\| \omega_{k-j} + \delta_k \|B_0^T L A_a L^{-1} A_0^k\| \right) \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} R_j &= -B_0^T L A_a L^{-1} A_0^{j-1} B_0 \quad , \quad j = 1, \dots, n_1 \\ R_0 &= I \quad , \quad I \text{ da dimensão de } R_j \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \omega_k &\equiv \omega_0 \prod_{j=1}^k \left( \frac{n_1 + j - 1}{\alpha_0} + 1 + \omega_0 \right) \quad , \quad k = 1, 2, \dots \\ \omega_0 &\equiv \frac{1}{2} \|F_{\alpha_0}\| \end{aligned} \quad (4.93)$$

Na expressão (4.91),  $m_k = \min\{k, n_1\}$  e  $\delta_k = 1$  se  $k < n_1$  e  $\delta_k = 0$  se  $k \geq n_1$ . Em (4.92),  $I$  denota uma matriz identidade da dimensão de  $R_j$ , e em (4.93),  $F_{\alpha_0} \equiv F_\alpha(1)$  calculada para  $\alpha_0$ .

Dada uma condição inicial  $x_a^0$ , a função de controlabilidade  $\Theta_\alpha(x_a)$  requerida pelo controlo  $u(x_a)$  pode ser calculada ao longo da trajetória  $x_a(t)$ , com início em  $x_a^0$ , pela expressão (4.88). Contudo, na prática, a solução  $\Theta$  que satisfaz a relação (4.88) é obtida numericamente, e como consequência, o processo de cálculo ao longo de toda a trajetória pode-se tornar demorado. No entanto, prova-se (Korobov & Skoryk, 2002) que a função de controlabilidade é igual a  $\hat{\theta}_\alpha(t) = -\theta_\alpha^{1-1/\alpha}$  se a condição inicial for igual a  $\theta_\alpha^0 = \theta_\alpha^0$ . Deste modo, a expressão (4.88) é resolvida apenas uma única vez,  $2a_0\theta - \langle L^T F_\alpha(\theta) L x_a^0, x_a^0 \rangle = 0$ , e uma vez obtida a solução  $\theta_\alpha^0 = \theta_\alpha(x_a(0))$ ,  $\hat{\theta}_\alpha$  pode ser determinada ao mesmo tempo que o sistema (4.77) é integrado, diminuindo assim o tempo de cálculo, e  $F_\alpha(\theta)$  substituído por  $F_\alpha(\theta(t))$  no cálculo do controlo.

A lei de controlo (4.79) é capaz de direcionar a trajetória do sistema (4.77) para o seu estado de equilíbrio, mas, no entanto, não é capaz de manter a trajetória nesse mesmo estado uma vez alcançado. Isto é, se o equilíbrio for a origem, a trajetória é direcionada até atingir um ponto imediatamente antes. Esta é a razão pela qual é necessário efetuar uma comutação para um outro controlador quando a trajetória se aproxima o suficientemente do estado de equilíbrio. Como critério para essa comutação, defina-se uma tolerância,  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , e efetue-se a comutação assim que a função de controlabilidade (função estritamente decrescente no tempo) atinja essa tolerância,  $\theta(t) \leq \varepsilon$ . Note-se que à medida que  $\theta(t)$  se aproxima de zero a trajetória controlada aproxima-se da trajetória de referência. Alternativamente, a comutação pode também ocorrer assim que a norma do erro da saída se torne inferior a uma dada tolerância,  $\|y(t) - y_r(t)\| \leq \varepsilon$ .

#### 4.4.2. LQR com Grau de Estabilidade Especificado

Para um sistema linear invariante no tempo da forma  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a u$  com condição inicial  $x_a(t_0) = x_a^0$  e sem restrição de tempo final, é bem sabido da teoria de controlo ótimo que a lei de controlo que direciona a trajetória para a origem minimizando o índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} e^{2\gamma t} (x_a^T Q x_a + u^T R u) dt \quad , \quad \gamma \geq 0 \quad (4.94)$$

é dada por (4.95) (Naidu, 2002):

$$u = -R^{-1} B_a^T P x_a \quad (4.95)$$

onde  $P \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  é uma matriz simétrica e positivamente definida,  $P = P^T$ ,  $P > 0$ , solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE):

$$P(A_a + \gamma I) + (A_a + \gamma I)^T P - P B_a R^{-1} B_a^T P + Q = 0 \quad (4.96)$$

em que  $Q \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são duas matrizes de ponderação, sendo  $Q$  simétrica e positivamente semidefinida,  $Q = Q^T$ ,  $Q \geq 0$ , e  $R$  simétrica e positivamente definida,  $R = R^T$ ,  $R > 0$ , e  $\gamma \geq 0$  um número escalar que representa o grau de estabilidade especificado.

Relativamente ao sistema a ser controlado, sistema (4.77), seja o controlo fictício  $u$  calculado pela lei de controlo (4.95) a partir do instante em que a trajetória  $x_a(t)$  se encontra próxima do estado de equilíbrio. Nesta condição, ambas as trajetórias  $y(t)$  e  $y_r(t)$  estão próximas uma da outra, e, como resultado, o esforço do controlo exigido para manter o erro da saída

pequeno não é muito grande. O maior esforço ocorre quando o erro é grande mas para essa situação o controle de Korobov encarrega-se de diminuir o erro.

A robustez do LQR é assegurada pelo parâmetro  $\gamma$ . Uma vez que todas as componentes do vetor das perturbações,  $d(x_a, t)$ , são limitadas e mensuráveis no sentido de Lebesgue,  $\gamma \geq 0$  pode ser escolhido de modo a que o controlador suporte tal perturbação, dado que  $\gamma$  causa um deslocamento dos valores próprios da matriz de realimentação fechada,  $\bar{A}_a = A_a - B_a R^{-1} B_a^T P$ , para a esquerda, na direção do eixo real.

Note-se que a partir do instante em que o LQR é ativado, o controle efetivamente aplicado ao sistema (4.77),  $\sigma_{\eta, \nu}(u)$ , não satura, e nesse sentido pode-se dizer que o controle é ótimo no sentido em que minimiza o índice de desempenho (4.94).

# Capítulo 5

## 5. Validação e Discussão das Técnicas Propostas

### 5.1. Aplicação do Algoritmo de Detecção de Caos

Esta secção lida com a validação do detetor de caos proposto no capítulo (3). Simulações numéricas são efetuadas em MATLAB<sup>®</sup> utilizando três aplicações: primeiramente, um sistema com atrator em forma de borboleta semelhante ao bem conhecido sistema de Lorenz (sistema clássico); e seguidamente, dois sistemas aeroespaciais - o movimento de atitude de um veículo espacial rígido e magnético numa órbita elítica, e o movimento de atitude de giróstato eletromecânico. A transição entre o comportamento regular e o comportamento caótico ocorre através de uma variação dos parâmetros dos sistemas, representando possíveis incertezas paramétricas. Ruído Gaussiano Branco (WGN) é adicionado às saídas observáveis para provar que o detetor é de facto robusto em relação a este tipo de ruído.

#### 5.1.1. Aplicação 1: Sistema em Forma de Borboleta tipo Lorenz (Sistema Clássico)

Considere-se um sistema não-linear tridimensional, contínuo e invariante no tempo, com dinâmica descrita pelas seguintes equações diferenciais (C. Liu, 2009):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1 + x_2x_3) \\ \dot{x}_2 &= bx_2 - hx_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= kx_2 - gx_3\end{aligned}\tag{5.1}$$

em que  $x_1, x_2, x_3$  denotam as variáveis de estado e  $a, b, h, k, g$  os parâmetros do sistema. O sistema (5.1) exhibe trajetórias periódicas, quasiperiódicas, ou caóticas, dependendo dos valores dos parâmetros. Para  $a = h = k = 1.0$ ,  $b = 2.5$ , e  $g = 3.9$ , o sistema exhibe um atrator transversal em forma de borboleta similar ao bem conhecido atrator de Lorenz como mostra a Figura (5.1). Aumentando  $g$  continuamente dentro do intervalo  $g \in [3.0, 4.0]$ , mantendo todos os outros parâmetros inalterados, ocorrem sucessivas duplicações do período que levam o comportamento regular ao comportamento caótico como revela o diagrama de bifurcações da primeira variável de estado,  $x_1$ , ver Figura (5.2).

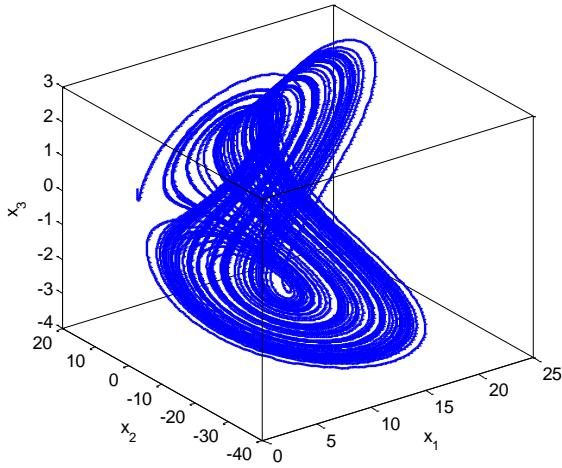


Figura 5.1. Atrator caótico para  $g = 3.9$ .

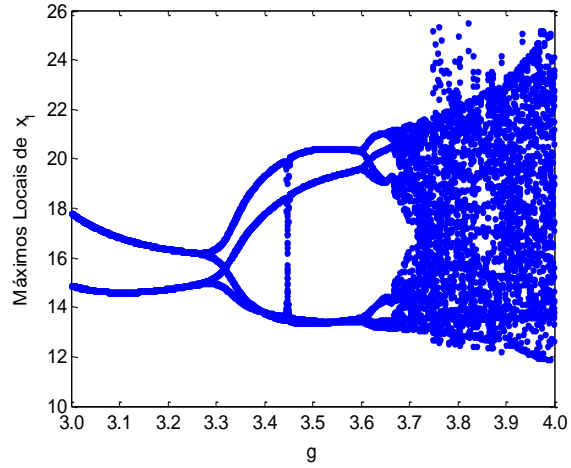


Figura 5.2. Diagrama de bifurcações da variável  $x_1$ .

### Simulação 1:

Para efeitos de simulação, a equação (5.1) foi resolvida pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 1000$  s, com um passo de  $\delta t = 0.005$  s, e partindo da condição inicial  $x_0 = [x_1, x_2, x_3]_0^T = [1, 1, 1]^T$ . A primeira variável de estado,  $x_1$ , é tomada como sendo a saída observável e é com base nela que o detetor classifica o tipo de movimento. As medições,  $y_{obs}(n) = x_1(n) + w(n)$ , são efetuadas com um período de amostragem de  $dt = 1/f_s = 0.01$  s considerando uma relação de sinal-ruído de  $SNR = 14$  dB, isto é, uma relação de 5:1,  $SNR_{[dB]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n)$ . A janela de observação tem um comprimento de  $N = 50$  pontos e a equação  $\dot{z}$  a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{obs} \quad , \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

onde  $A$  é uma matriz estável com valores próprios  $\lambda = (-0.5, -0.5)$ . O limiar de decisão entre o comportamento regular e caótico foi definido em  $\gamma = 5$ .

A Figura (5.3) apresenta os resultados. O primeiro gráfico representa a variação do parâmetro  $g$  ao longo do tempo - o parâmetro usado para despoletar diferentes tipos de comportamento; o segundo gráfico representa a saída do sistema  $y = x_1$ ; o terceiro gráfico representa o sinal medido,  $y_{obs}(n) = x_1(n) + w(n)$ ; e o último gráfico representa a saída do detetor:  $R$  dado pela expressão (3.3); e  $R_{bi-estado}$  indicando um comportamento caótico ou não-caótico com base no limiar  $\gamma$ .

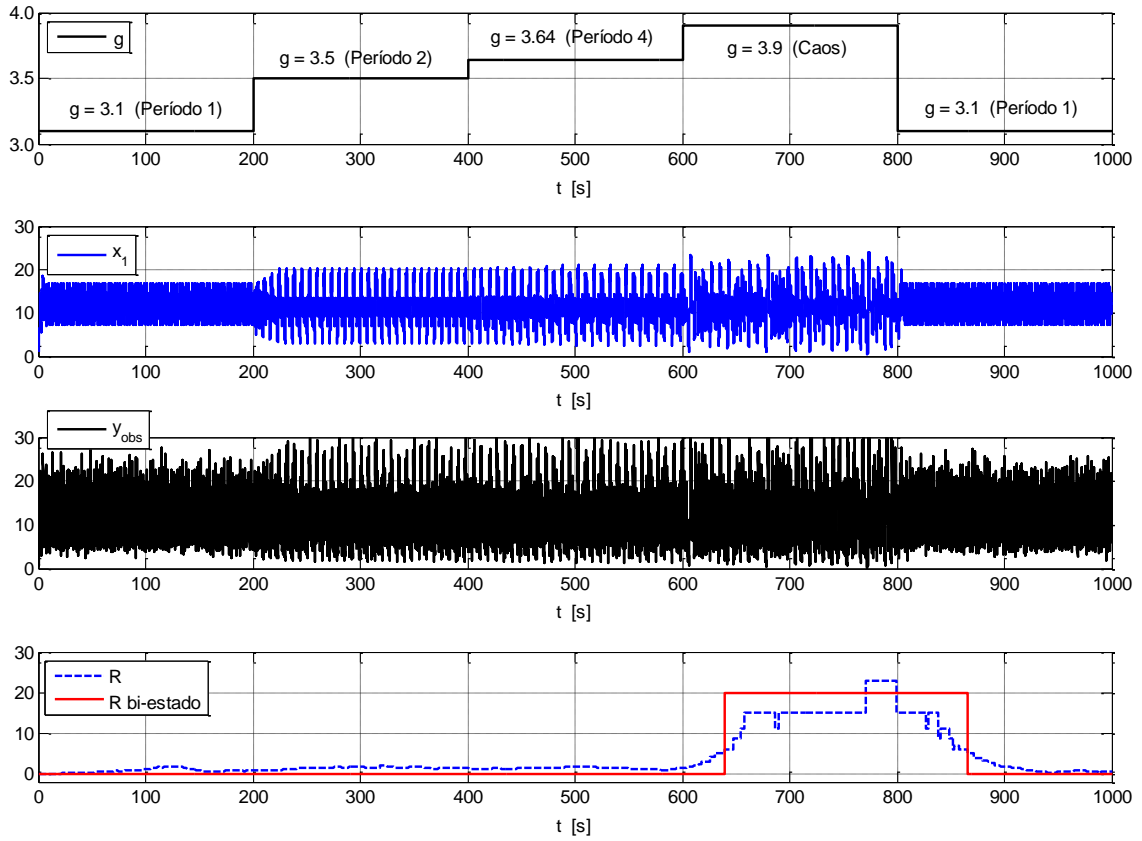


Figura 5.3. Detecção de caos no sistema com atrator em forma de borboleta (tipo Lorenz).

### 5.1.2. Aplicação 2: Atitude de um Veículo Espacial Rígido e Magnético numa Órbita Elítica

A atitude de um veículo espacial rígido e magnético com amortecimento interno movendo-se numa órbita elítica sujeito ao campo gravitacional e magnético da Terra pode ser descrita pelas equações (Y. Liu & Chen, 2003; Y. Liu & Liqun, 2013):

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dv} &= x_2 \\
 \frac{dx_2}{dv} &= \frac{2e \sin x_3}{1 + e \cos x_3} (1 + x_2) - \frac{\kappa \sin 2x_1}{1 + e \cos x_3} - \frac{\gamma}{(1 + e \cos x_3)^2} x_2 + \dots \\
 &\quad \dots + \alpha \frac{3 \cos(x_1 - x_3 - \omega) - \cos(x_1 + x_3 + \omega)}{1 + e \cos x_3} \\
 \frac{dx_3}{dv} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

onde  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = d\phi/dv$ ,  $x_3 = v$ , em que  $\phi$  denota o ângulo de libração no plano orbital,  $v$  a anomalia verdadeira do veículo espacial, isto é, o ângulo entre o perigeu e o veículo, medido no plano da órbita,  $\omega$  o argumento do perigeu, isto é, o ângulo entre o nodo ascendente e o

perigeu,  $e$  a excentricidade da órbita,  $\kappa$  um parâmetro relacionado com os momentos principais de inércia, que descreve portanto a assimetria do veículo,  $\gamma$  o coeficiente de amortecimento, e  $\alpha$  um parâmetro magnético que descreve a força da interação magnética entre o campo magnético terrestre e o momento magnético do veículo. Os ângulos  $\nu$ ,  $\phi$ ,  $\omega$  são expressos em radianos.

O sistema (5.3) exibe um comportamento regular para os valores de parâmetros apresentados em (i) e um comportamento caótico para os parâmetros em (ii). Uma variação minúscula no parâmetro magnético,  $\delta\alpha = 0.001$ , é suficiente para desencadear um movimento imprevisível que é uma das principais características dos sistemas caóticos: a alta sensibilidade à variação de parâmetros. O espaço de fases, ou mais precisamente, o plano de fase  $(x_1, x_2)$  porque o sistema original é ‘variante no tempo’ (i.e., depende explicitamente da variável independente  $\nu = x_3$ ) e não há interesse em representar a terceira variável  $x_3$ , é mostrado na Figura (5.4) para a condição de um movimento regular/periódico e na Figura (5.5) para a condição de um movimento caótico.

- (i)  $e = 0.2, \kappa = 1.0, \gamma = 0.1, \omega = 60.\pi/180, \alpha = 0.336$  (comportamento regular)
- (ii)  $e = 0.2, \kappa = 1.0, \gamma = 0.1, \omega = 60.\pi/180, \alpha = 0.337$  (comportamento caótico)

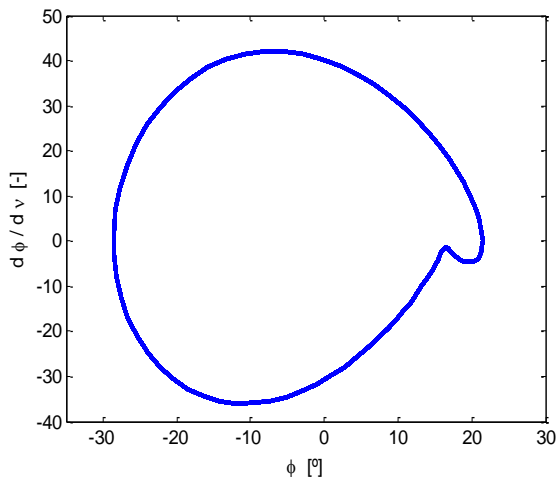


Figura 5.4. Movimento periódico para  $\alpha = 0.336$ .

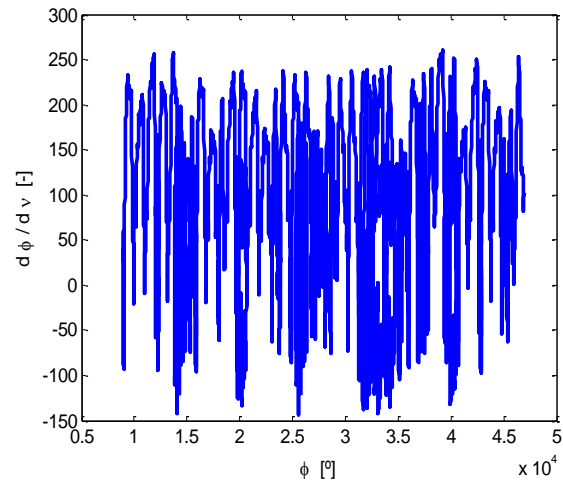


Figura 5.5. Movimento caótico para  $\alpha = 0.337$ .

### Simulação 1:

Nesta aplicação, a equação (5.3) é resolvida pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $\nu_0 = 0$  e  $\nu_f = 2\pi.1000$  rad (o veículo percorre 1000 voltas no plano orbital), com um passo de  $\delta\nu = 2\pi/200$  rad, e partindo da condição inicial  $x_0 = [\phi, d\phi/d\nu, \nu]_0^T = [0, 0, 0]^T$ . A saída observável tida em consideração é a segunda variável de estado  $x_2 = d\phi/d\nu$ , as medições  $y_{obs}(n) = x_2(n) + w(n)$  são efetuadas a uma taxa de amostragem de  $d\nu = 2\pi/100$  rad, e o nível de ruído é tal que  $SNR = 10$  dB ( $\cong$

3:1),  $SNR_{[dB]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n)$ . A janela de observação tem um comprimento de  $N = 50$  pontos e a equação  $\dot{z}$  a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{obs} \quad , \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde  $A$  é uma matriz estável com valores próprios  $\lambda = (-1, -1)$ . O limiar de decisão entre o comportamento regular e o caótico foi definido em  $\gamma = 1$ .

A Figura (5.6) apresenta os resultados. O primeiro gráfico representa a variação do parâmetro magnético,  $\alpha$ , ao longo da posição do veículo espacial na órbita - o parâmetro usado para alternar entre o comportamento regular e o caótico; o segundo gráfico representa a saída do sistema,  $y = d\phi/dv$ ; o terceiro gráfico representa o sinal medido,  $y_{obs}(n) = d\phi/dv(n) + w(n)$ ; e o último gráfico representa a saída do detetor:  $R$  dado pela expressão (3.3); e  $R_{bi-estado}$  indicando um comportamento caótico ou não-caótico com base no limiar  $\gamma$ .

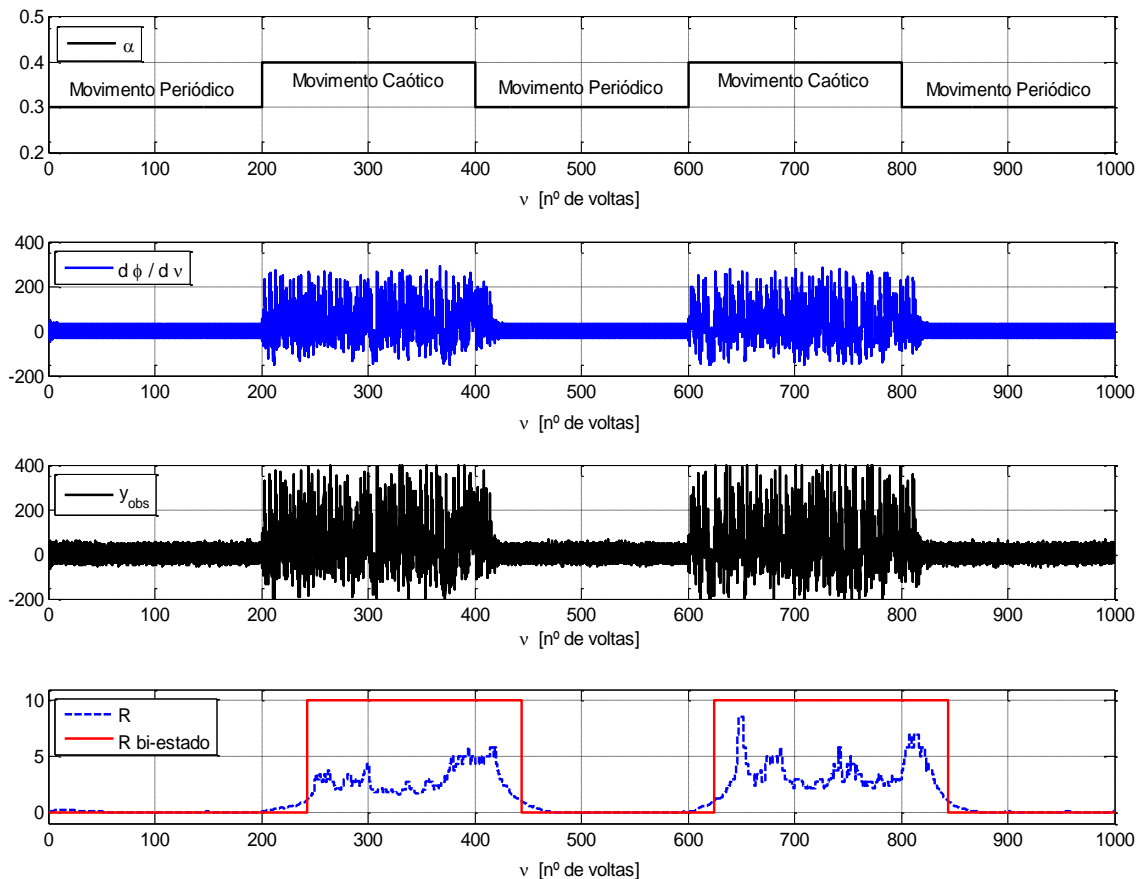


Figura 5.6. Detecção de caos no movimento de atitude de um veículo espacial rígido e magnético numa órbita elítica.

### 5.1.3. Aplicação 3: Dinâmica de um Giróstato Eletromecânico

Um giróstato eletromecânico é um sistema não-linear variante no tempo de quarta ordem com bastante interesse no campo aeroespacial. Um giróstato consiste em três rotores ortogonais uns aos outros, alinhados com os eixos principais de inércia do corpo (ex.: satélite, veículo espacial, etc.) que permitem controlar o movimento de atitude através da variação do torque produzido por um motor de controlo. O modelo dinâmico de um giróstato eletromecânico por ser expresso como (Cai, Zhou, & Zhang, 2011; Ge & Lin, 2003):

$$\dot{x} = (A + A_1(t))x + \varphi(x, t) \quad (5.5)$$

com:

$$A = \begin{bmatrix} -k_1/I_1 & -h_3/I_1 & h_2/I_1 & 0 \\ h_3/I_2 & -k_3/I_2 & -h_1/I_2 & 0 \\ -h_2/I_3 & h_1/I_3 & -(b + k_5)/I_3 & K_T/I_3 \\ 0 & 0 & -(K_a + K_b)/L & -R/L \end{bmatrix}$$

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & -h_3/I_1 \cdot f \cos(\omega t) & 0 & 0 \\ h_3/I_2 \cdot f \cos(\omega t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\varphi(x, t) = \begin{bmatrix} (I_2 - I_3)/I_1 \cdot x_2 x_3 + k_2/I_1 \cdot (\omega_r^3 - x_1^3) + k_1/I_1 \cdot \omega_r \\ (I_3 - I_1)/I_2 \cdot x_1 x_3 + k_4/I_2 \cdot (\omega_r^3 - x_2^3) + k_3/I_2 \cdot \omega_r \\ (I_1 - I_2)/I_3 \cdot x_1 x_2 + k_6/I_3 \cdot (\omega_r^3 - x_3^3) + k_5/I_3 \cdot \omega_r + h_3/I_3 \cdot f \omega \sin(\omega t) \\ K_a/L \cdot \omega_r \end{bmatrix}$$

e  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, i]^T$ , onde  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  denotam as velocidades angulares do giróstato nos eixos  $x, y, z$ , respetivamente, e  $i$  a corrente elétrica do motor de controlo.  $I_1, I_2, I_3$  representam os momentos principais de inércia do giróstato,  $h_1, h_2, h_3$  os momentos angulares dos rotores - localizados nos eixos  $x, y, z$ , respetivamente,  $\omega_r$  a projeção da velocidade angular do giróstato no eixo  $x, y, z$  para o qual foi projetada (eixo  $z$  no caso do modelo em questão), e  $b$  o coeficiente de amortecimento.  $K_T, L, R$  denotam respetivamente a constante de torque, a indutância, e a resistência do motor de controlo.  $K_a, K_b$  são dois parâmetros relacionados respetivamente com força eletromotriz e contraeletromotriz do motor de controlo. O momento angular do terceiro rotor,  $h_3$ , é sujeito a uma perturbação periódica no tempo da forma  $h_3 \cdot f \cdot \cos(\omega t)$ , e portanto,  $f$  e  $\omega$  representam respetivamente a amplitude e a frequência de excitação. As velocidades angulares  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  são expressas em rad/s e a corrente em A (Amperes).

O sistema (5.5) exibe um comportamento regular para os valores de parâmetros apresentados abaixo juntamente com a condição (i) e um comportamento caótico com a condição (ii). Uma variação na amplitude da perturbação de  $h_3$  é suficiente para desencadear uma dinâmica caótica. Os respectivos espaços de fases, ou concretamente os espaços de fases  $(x_4, x_1, x_2)$ , são mostrados nas Figuras (5.7) e (5.8).

$$I_1 = I_2 = 500, \quad I_3 = 1000, \quad h_1 = h_2 = 200, \quad h_3 = 250, \quad k_i = 1 \quad (i = 1, \dots, 6)$$

$$K_T = 300, \quad K_a = 50, \quad K_b = 1.3, \quad L = 2, \quad R = 100, \quad \omega_r = 0, \quad \omega = 1, \quad b = 200$$

(i)  $f = 13.6$  (comportamento regular) , (ii)  $f = 12.9$  (comportamento caótico)

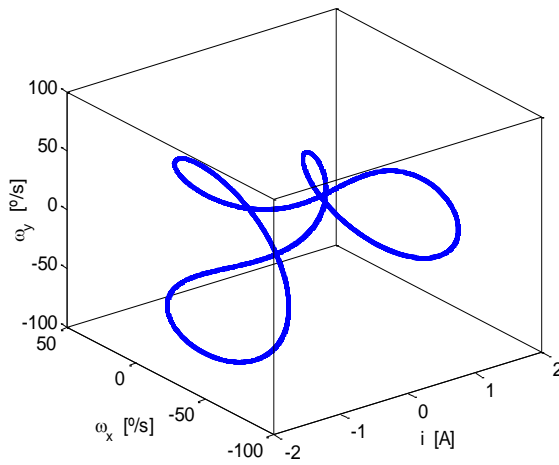


Figura 5.7. Movimento periódico para  $f = 13.6$ .

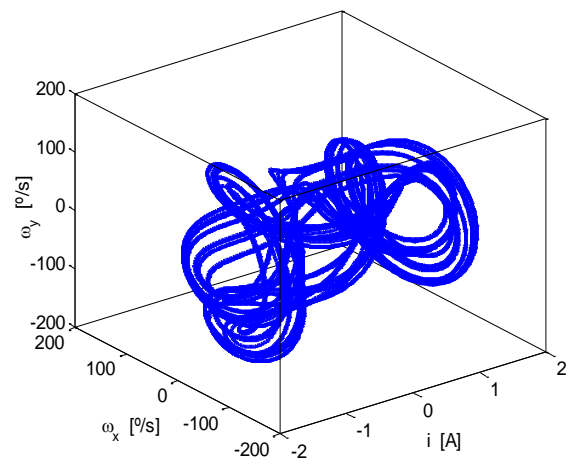


Figura 5.8. Atrator caótico para  $f = 12.9$ .

### Simulação 1:

Nesta aplicação, a equação (5.5) é resolvida pelo método de RK-Butcher (ver *Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's*) para sistemas variantes no tempo (dependentes explicitamente de  $t$ ) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 1800$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo da condição inicial  $x_0 = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, i]_0^T = [0, 0, 0, 0]^T$ . A saída observável tomada em consideração é a primeira variável de estado,  $x_1 = \omega_x$ , as medições  $y_{obs}(n) = x_1(n) + w(n)$  são efetuadas com um período de amostragem de  $dt = 1/f_s = 0.01$  s, e o nível de degradação com WGN é de  $SNR = 10$  dB ( $\cong 3:1$ ),  $SNR_{[dB]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n)$ . A janela de observação tem comprimento  $N = 50$  pontos e a equação  $\dot{z}$  a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{obs} \quad , \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde  $A$  é uma matriz estável com valores próprios  $\lambda = (-1, -1)$ , e o limiar de decisão entre o comportamento regular e o caótico definido em  $\gamma = 1$ .

A Figura (5.9) mostra os resultados após descartar o regime transiente inicial (300 s). O primeiro gráfico representa a variação ao longo do tempo do parâmetro  $f$  - o parâmetro usado para alternar entre o comportamento regular e o caótico; o segundo gráfico representa a saída do sistema,  $y = \omega_x$ ; o terceiro gráfico representa o sinal medido,  $y_{obs}(n) = \omega_x(n) + w(n)$ ; e o último gráfico representa a saída do detetor:  $R$  dado pela equação (3.3); e  $R_{bi-estado}$  indicando um comportamento caótico ou não caótico com base no limiar  $\gamma$ .

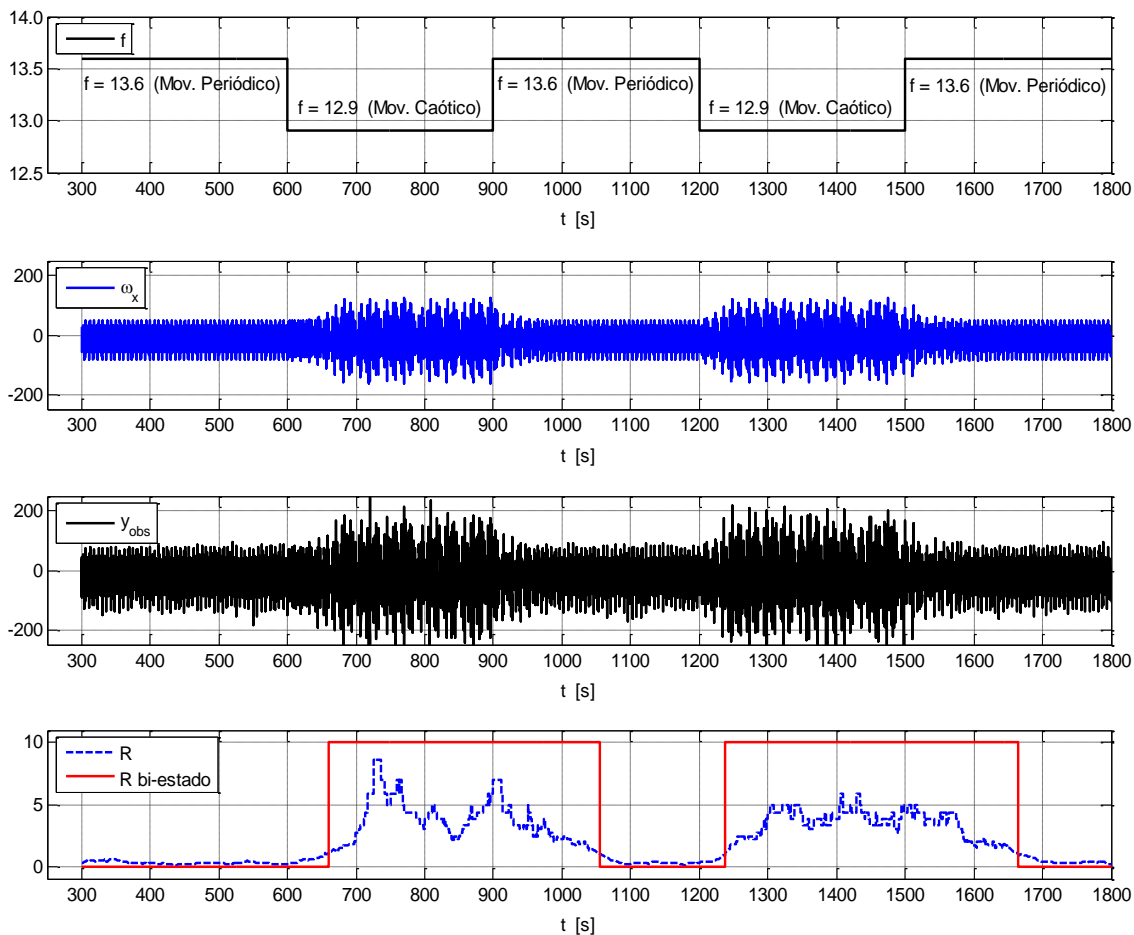


Figura 5.9. Detecção de caos na dinâmica de um giróstato eletromecânico.

#### 5.1.4. Discussão do Algoritmo de Detecção de Caos

Os resultados comprovam que a dinâmica caótica é detetada efetivamente em todas as três aplicações a partir de uma única série temporal corrompida com WGN. Obviamente, existe um pequeno atraso entre cada transição - do comportamento regular para o caótico, e vice-versa - ver Figuras (5.3), (5.6) e (5.9), mas que é perfeitamente normal e aceitável dado que, como qualquer outro método de detecção, é necessário uma amostra significativa do sinal para caracterizar o tipo de movimento.

Intuitivamente, quanto maior o comprimento da janela de observação,  $N$ , maior é o atraso na detecção, e nesse sentido o detetor proposto funciona eficazmente com uma janela

bastante pequena, de apenas  $N = 50$  pontos, independentemente de uma dinâmica rápida ou lenta. Por outro lado, à medida que a potência do ruído aumenta, isto é, para menores  $\text{SNR}_{[\text{dB}]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n)$ , maior tem de ser a janela para neutralizar os efeitos do ruído. Existe, portanto, um compromisso entre o comprimento da janela de observação  $N$ , a SNR do sinal medido  $y_{obs}$ , e o atraso observado na deteção. Ainda assim, lembre-se que ocorre sempre entre cada transição um regime transitório cujo movimento não é regular nem caótico, e portanto os atrasos observados nas Figuras (5.3), (5.6) e (5.9) podem ser considerados na verdade como sendo bastante curtos.

Um outro ponto que vale a pena mencionar está relacionado com o valor de  $R$ . De acordo com a descrição do algoritmo, onde para um sinal limpo ( $w = 0$ ),  $R = 0$  caracteriza um comportamento regular e  $R \gg 0$  um comportamento caótico, é evidente que quanto mais caótico é o sinal  $y_{obs}$  maior é o valor de  $R$ , e o mesmo se aplica para um sinal corrompido, ( $w \neq 0$ ). Apesar de não apresentado aqui, por não ser de grande relevância para este capítulo, simulações foram também realizadas tomando como entrada um sinal de um atrator caótico (sistema de Rössler 3D (Rössler, 1976)) e um sinal de um atrator hipercaótico (sistema de Rössler 4D (Rössler, 1979)), onde comprovam que  $R$  é de facto maior.

Os resultados mostram também que a distinção entre o comportamento regular e o comportamento caótico é extremamente clara. Como apresentado na Figura (5.3), o comportamento caótico,  $R > \gamma$ , é indicado somente quando o sinal medido,  $y_{obs}$ , é de facto caótico. As transições entre diferentes comportamentos periódicos (período 1  $\rightarrow$  período 2  $\rightarrow$  período 4) são identificadas como sendo comportamentos regulares,  $R \leq \gamma$ , como desejado. Ocorre naturalmente uma pequena variação no parâmetro  $R$ , mas que não é suficiente para ultrapassar o limiar especificado  $\gamma$  dado o número de pontos da janela de observação.

No que diz respeito ao valor do limiar  $\gamma$ , sabe-se que para um sinal 'limpo',  $y_{obs}$ , o valor de  $R$  é praticamente nulo no caso de uma entrada regular e muito maior do que zero no caso de uma entrada caótica,  $R \approx 0$  e  $R \gg 0$ , respetivamente, de modo que o limiar pode ser definido, por exemplo, em  $\gamma = 0.1$ . No entanto, à medida que a SNR diminui, o limiar  $\gamma$  deve ser aumentado para ultrapassar os efeitos induzidos pelo ruído. De acordo com simulações realizadas, um limiar definido em  $\gamma = 1$  é apropriado e produz resultados notáveis para SNR's relativamente baixas.

O único ponto do algoritmo proposto que poderá exigir algum cuidado especial consiste na frequência da aquisição do sinal,  $f_s = 1/dt$ . Se  $f_s$  for demasiado baixa, os  $\Delta t$ 's ordenados por ordem ascendente (degraus da Figura (3.2)) aparecem em grande número, indicando, erradamente, a presença de um movimento caótico quando na verdade poderá ser um movimento (multi)periódico. Por isso, uma seleção apropriada da frequência de amostragem é necessária para garantir que pelo menos a dinâmica essencial do sinal medido,  $y_{obs}$ , é capturada. Não obstante, tal já era de esperar, e na verdade, pode mesmo até ser visto como um ponto a favor do detetor. Repare-se que quanto maior a frequência de amostragem,  $f_s$ , melhor é a deteção no sentido em que  $R$  se aproxima ainda mais, ou então se afasta, da linha

do zero, e desta forma não há necessidade de se preocupar com possíveis fenómenos de sobreamostragem do sinal, opostamente a outras técnicas de deteção.

### 5.1.5. Análise da Complexidade Computacional do Algoritmo de Deteção

Dado que um dos principais objetivos do detetor proposto é a deteção em tempo-real de modos caóticos, torna-se interessante avaliar a sua complexidade em termos computacionais. Para tal, a complexidade do algoritmo é comparada com a complexidade do *Teste 0-1* formulado por Gottwald e Melbourne (Gottwald & Melbourne, 2004) - um teste, digamos, em pé de igualdade com o detetor proposto na medida em que o caos pode ser detetado a partir de uma única série temporal. Seguindo a referência (Suganthan et al., 2005), a complexidade computacional de um algoritmo é teorizada pelo rácio:  $L_i = T_i/T_0$ , onde  $T_i$  denota o tempo médio de execução do algoritmo  $i$  e  $T_0$  o tempo médio de execução de um *Código Teste* composto por um dado conjunto de operações simples:

```
Código Teste:            $x = 5.55;$  (double)
                        for  $i = 1:1000000$ 
                             $x = x + x;$     $x = x * x;$     $x = x / x;$ 
                             $x = \text{sqrt}(x);$   $x = \text{exp}(x);$   $x = \text{ln}(x);$ 
                        end
```

Recorrendo a esta definição, o *Teste 0-1* (com  $c \in [\pi/5, 4\pi/5]$ ,  $N_c = 100$  e  $K$  calculado pelo método da correlação, ver (Gottwald & Melbourne, 2009) para detalhes) e o algoritmo formulado nesta tese apresentam complexidades respetivamente de  $L_1 \cong 3.2$  e  $L_2 \cong 1.3 \times 10^{-3}$ , correspondendo respetivamente aos tempos médios de execução  $T_1 \cong 498$  ms e  $T_2 \cong 0.203$  ms e a um tempo médio de execução do *Código Teste* no computador utilizado para o efeito de  $T_0 \cong 154$  ms. O sinal em análise é uma série temporal de comprimento  $N = 1000$  pontos obtida por discretização com uma frequência de amostragem  $f_s = 10$  Hz ( $dt = 0.1$  s) da primeira variável de estado do sistema (5.1),  $x_1$ , e os tempos médios de execução  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  foram calculados executando cada algoritmo 100 vezes. Quando comparado com o *Teste 0-1*, o detetor proposto exige claramente um menor esforço computacional. Tal é devido ao facto de que enquanto o *Teste 0-1* requer o cálculo de vários integrais e multiplicações para obter um sinal de entrada transformado, o algoritmo proposto requer apenas o cálculo de operações simples uma vez que a equação (3.2) pode ser resolvida à medida que cada nova medição se encontra disponível.

## 5.2. Aplicação das Técnicas de Controlo

Esta secção lida com a validação das técnicas de controlo apresentadas no capítulo (4). Simulações numéricas são efetuadas em MATLAB<sup>®</sup> considerando para o efeito quatro aplicações: em primeiro lugar, o sistema de Lorenz (sistema clássico), onde é empregue os métodos de controlo descritos na secção (4.1) e (4.4); em segundo lugar, duas aplicações aeroespaciais: a atitude de um veículo espacial e a posição de um veículo espacial num problema restrito de três corpos, onde são empregues o controlo descrito na secção (4.2); e por último, uma aplicação aeronáutica, onde são empregues os métodos de controlo descritos nas secções (4.3) e (4.4). Consoante o método utilizado na respetiva aplicação, é considerado incertezas paramétricas e/ou ruídos a fim de confirmar a robustez.

### 5.2.1. Aplicação 1: Sistema de Lorenz (Sistema Clássico)

Nesta subsecção apresenta-se simulações numéricas para validar as abordagens de controlo propostas nas secções (4.1) e (4.4). O objetivo consiste na sincronização da saída do sistema de Lorenz (sistema controlado) com a saída do sistema de Chua (sistema de referência) tendo em consideração restrições no controlo, incertezas paramétricas no modelo controlado, e ruídos do processo e de medição/sensores em ambos os sistemas.

O sistema de Chua é um oscilador não-linear descrito, na sua forma normalizada, pelo seguinte conjunto de equações diferenciais (Parlitz, 1993):

Sistema de Referência: Chua

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)) \\ \Sigma_A: \quad \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta_c x_2 - \gamma x_3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)[|x + 1| - |x - 1|]$$

Os parâmetros do sistema (5.8) são  $\alpha$ ,  $\beta_c$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $b$ , e para os valores apresentados de seguida o sistema exhibe um comportamento caótico:

$$\alpha = 15.6 \quad , \quad \beta_c = 25.58 \quad , \quad \gamma = 0 \quad , \quad a = -8/7 \quad , \quad b = -5/7$$

Considere-se que a variável de estado  $x_1$  é a única saída do sistema (5.8), isto é:

$$y_A = x_1 = C_A x_A \quad \Rightarrow \quad C_A = [1 \ 0 \ 0] \quad (5.9)$$

O sistema de Lorenz é governado pelo conjunto de equações diferenciais (5.10) (Lorenz, 1963), onde  $u_1, u_2, u_3$  são três variáveis de controle adicionais para se ter poder de controle sobre o sistema.

Sistema a Controlar: Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) & + u_1 \\ \Sigma_B: \quad \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 & + u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 & + u_3 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para os valores de parâmetros apresentados abaixo o sistema de Lorenz exibe um comportamento caótico, e quando se tem  $\rho < 1$  o sistema converge para a origem, pois apresenta um ponto de equilíbrio.

$$\sigma = 10 \quad , \quad \rho = 28 \quad , \quad \beta = 8/3$$

Considere-se que a variável de estado  $x_1$  é a única saída do sistema (5.10), isto é:

$$y_B = x_1 = C_B x_B \quad \Rightarrow \quad C_B = [1 \ 0 \ 0] \tag{5.11}$$

Os atratores caóticos nos seus espaços de fases para os respectivos parâmetros são os mostrados nas Figuras (5.10) e (5.11), respetivamente. O clássico *double-scroll attractor* no que diz respeito ao sistema de Chua e o célebre atrator de Lorenz que devido à sua aparência é associado muitas vezes a uma borboleta.

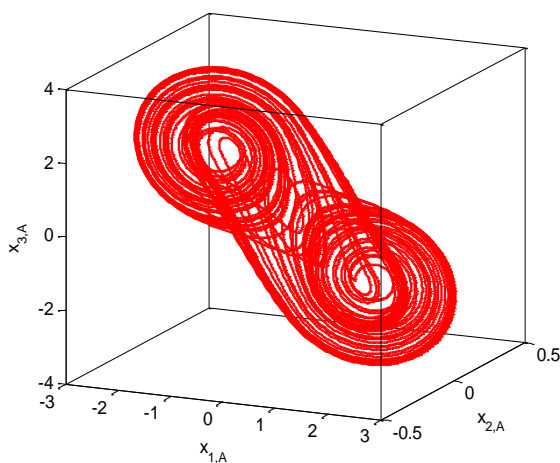


Figura 5.10. Espaço de fases do sistema de Chua (*double-scroll attractor*).

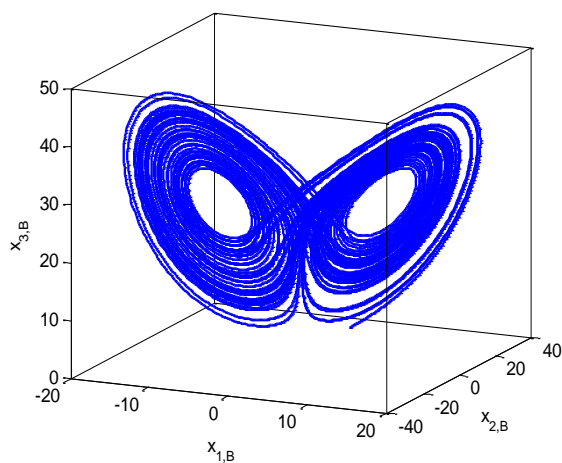


Figura 5.11. Espaço de fases do sistema de Lorenz (atrator com aparência de uma borboleta).

**Aplicação do controlo da secção (4.1):**

Decompondo-se o sistema (5.8) numa parte linear + uma parte não-linear obtém-se o sistema de Chua na forma apresentada de seguida:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{x}_A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta_c & -\gamma \end{bmatrix}}_{A_A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{d_A} \quad (5.12)$$

Transformando-se o sistema de Lorenz (5.10) na forma (4.15 - 4.18), as matrizes  $A_B$  e  $B$  resultam:

$$A_B = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{bmatrix}_{x_B = x_B^*} \quad (5.13)$$

$$B = \frac{\partial f_B}{\partial u} = I_3 \quad (5.14)$$

Escolhendo-se o ponto  $x_B^* = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [0 \ 0 \ 28]^T$ ,  $A_B$  tem todos os seus valores próprios com partes reais negativas, (5.15), e o par  $(A_B, B)$  é estabilizável,  $\text{rank}(M_c) = 3 = n_B$ , como requerido na primeira condição do teorema (4.1), (secção (4.1)).

$$\lambda(A_B) \cong (-10.0, -1.0, -2.67) \quad (5.15)$$

$$M_c = [B \ A_B B \ A_B^2 B \ \dots \ A_B^{n_B-1} B] \quad (5.16)$$

Uma vez que os sistemas de Chua e de Lorenz encontram-se ambos na forma de uma parte linear + termos não-lineares, por sua vez vistos como perturbações, o sistema (4.19) pode ser escrito com as restantes matrizes,  $E_w$  e  $D_{ew}$ , dadas por:

$$E_w = [I_3 \ 0_{3 \times 3}] \quad , \quad D_{ew} = [0_{1 \times 3} \ -C_A] \quad (5.17)$$

Resolvendo as equações de regulação (5.18), ver *Anexo C - Resolução das Equações de Regulação* para detalhes, com as matrizes  $C_e$  e  $S$  dadas por (5.19), as suas soluções,  $\Pi$  e  $\Gamma$ , são iguais a:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A_B \Pi + B \Gamma + E_w \\ 0 &= C_e \Pi + D_{ew} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$C_e = C_B = [1 \ 0 \ 0] \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & A_A \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\Pi \cong \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.07 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 1.03 & -0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\Gamma \cong \begin{bmatrix} -0.01 & -0.07 & 0.00 & -0.42 & 0.16 & 0.10 \\ -0.07 & -1.00 & 0.00 & 0.41 & -0.02 & 1.02 \\ 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Escolhendo uma matriz de ponderação simétrica e positivamente definida,  $Q_\varepsilon$ , da forma  $Q_\varepsilon = \varepsilon \cdot I$ ,  $\varepsilon > 0$ , com  $\varepsilon = 10^4$ , a solução da equação algébrica de Riccati (4.12) é:

$$Q_\varepsilon = 10^4 \cdot I_3 \quad (5.22)$$

$$P_\varepsilon \cong \begin{bmatrix} 90.40 & 4.50 & 0.00 \\ 4.50 & 99.35 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 97.37 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

### Simulação 1:

Para efeitos de simulação, considere-se que a saída do sistema de referência,  $y_A$ , é caótica para todo o  $t$ , e que a saída do sistema controlado,  $y_B$ , é sujeita a uma mudança de comportamento no decorrer do tempo. É considerado inicialmente um movimento regular ( $\theta_B$  regular) e de seguida uma evolução para o caos ( $\theta_B$  caótico) passado algum tempo provocada pela variação de parâmetros  $\theta_B(t) = [\sigma(t) \ \rho(t) \ \beta(t)]^T$  descrita em (5.24). As equações diferenciais ordinárias (4.19) juntamente com equação (4.8) tomando para o efeito  $\mu = 10^6$  foram resolvidas pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 120$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.25). As restrições do controlo,  $\eta$  e  $\nu$ , magnitude e taxa respetivamente, são as especificadas em (5.26):

#### Variação dos parâmetros do sistema de Lorenz:

$$\sigma = \begin{cases} 15 & , \quad 0 \leq t < 50 \\ -0.5t + 40 & , \quad 50 \leq t \leq 60 \\ 10 & , \quad 60 < t \leq 120 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0.8 & , \quad 0 \leq t < 50 \\ 2.72t - 135.2 & , \quad 50 \leq t \leq 60 \\ 28 & , \quad 60 < t \leq 120 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\beta = \begin{cases} 8/4 & , \quad 0 \leq t < 50 \\ 0.0667t - 1.333 & , \quad 50 \leq t \leq 60 \\ 8/3 & , \quad 60 < t \leq 120 \end{cases}$$

Condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_{0,A} &= [0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T \\ x_{0,B} &= [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T \\ u_0 &= [0.0 \ 0.0 \ 0.0]^T \end{aligned} \quad (5.25)$$

Parâmetros do controlador:

$$\|u\|_\infty \leq 200 = \eta \quad , \quad \|\dot{u}\|_\infty \leq 500 = \nu \quad , \quad \varepsilon = 10^4 \quad (5.26)$$

O controlo,  $u$ , é ativado antes de ocorrer a transição entre o movimento regular para o movimento caótico, no instante  $t_{u_{on}} = 30$  s. Deste modo, o cenário estudado é um cuja sincronização de saída é alcançada e mantém-se mesmo quando o sistema de Lorenz torna-se caótico.

Na Figura (5.12), os parâmetros do sistema de Lorenz, descritos ao longo do tempo por (5.24), são apresentados. A Figura (5.13) mostra as variáveis de estado de ambos os sistemas, Lorenz e Chua, em que o primeiro gráfico representa também a saída de cada um destes sistemas. O erro da saída,  $e_y = y_B - y_A$ , é mostrado na Figura (5.14). As magnitudes e as taxas das variáveis de controlo são mostradas nas Figuras (5.15) e (5.16), respetivamente, e as suas normas infinito nas Figuras (5.17) e (5.18), respetivamente. As taxas/derivadas das variáveis de controlo foram calculadas numericamente pelo método das diferenças finitas centradas, (ver Anexo B.1 - *Diferenciação Numérica*).

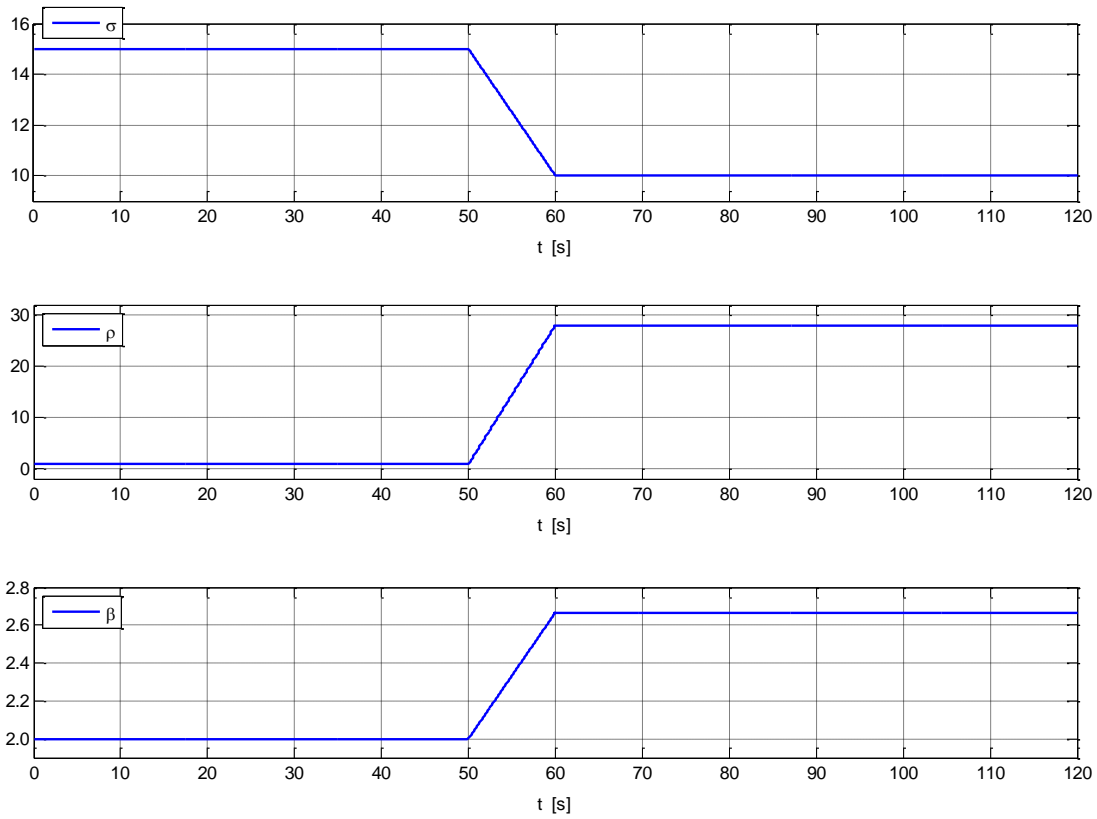


Figura 5.12. Evolução temporal dos parâmetros do sistema de Lorenz. O comportamento resultante é regular para  $t \in [0, 50[$  s e caótico para  $t \in [60, 120]$  s. A transição ocorre entre  $t \in [50, 60]$  s.

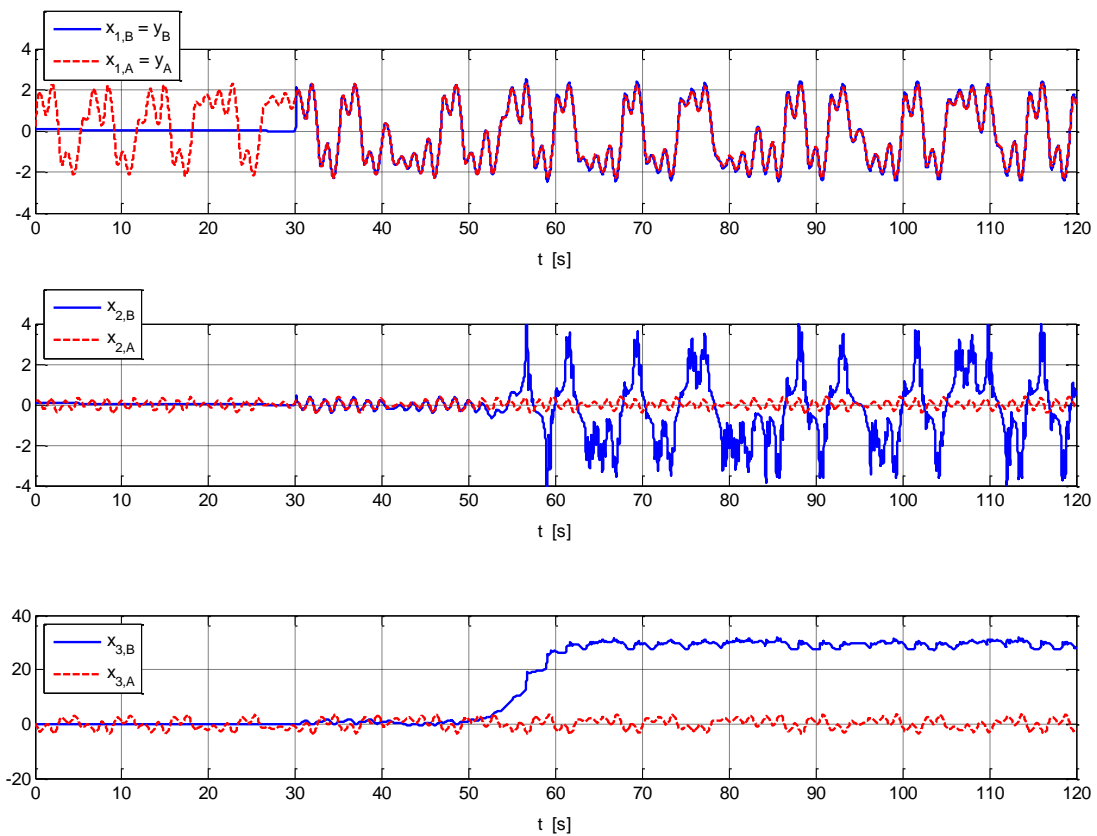


Figura 5.13. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas.

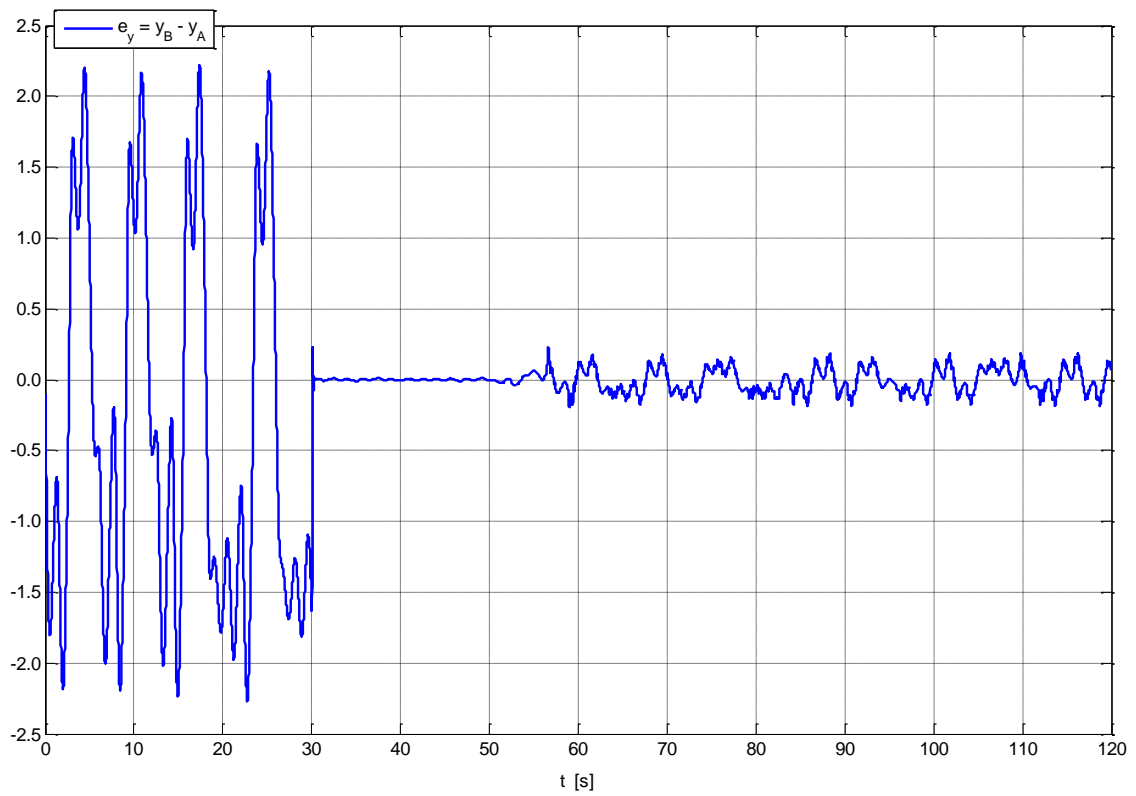


Figura 5.14. Evolução temporal do erro da saída:  $e_y = y_B - y_A$ .

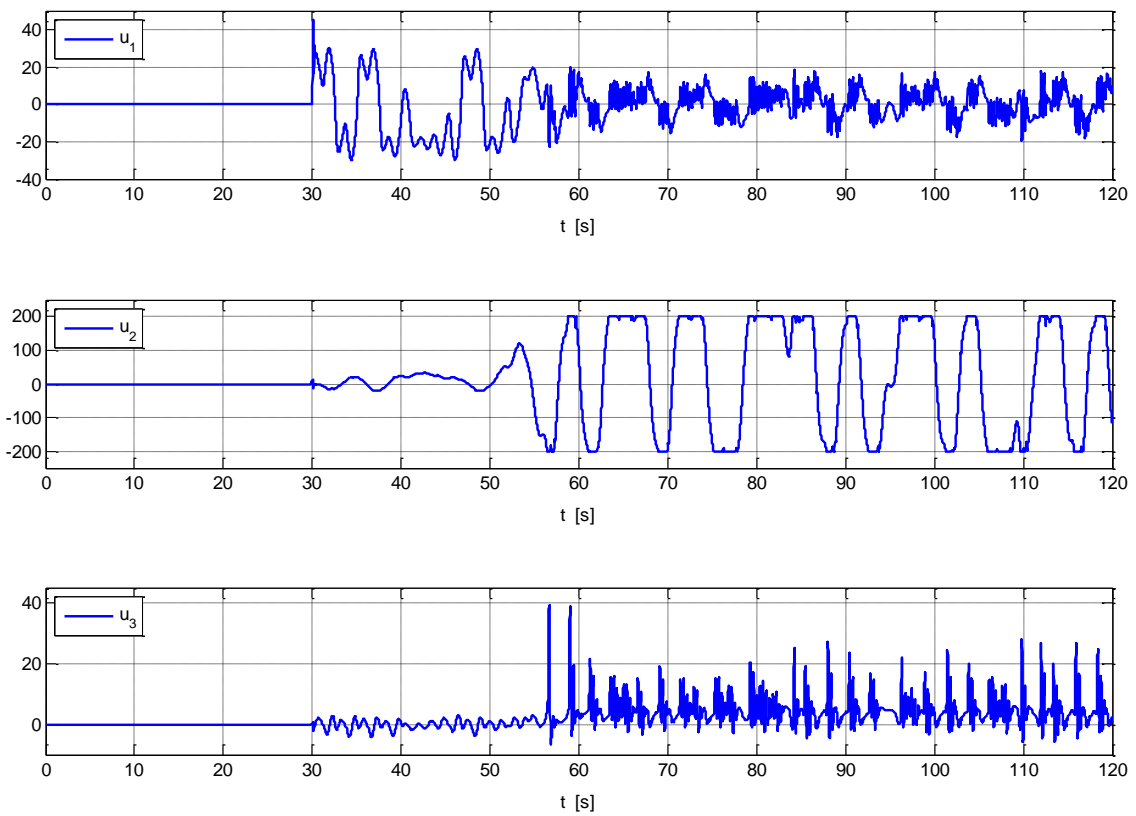


Figura 5.15. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|u\|_\infty \leq 200$ .

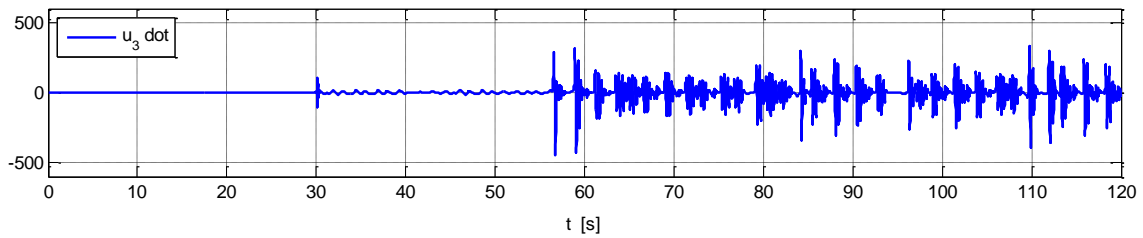
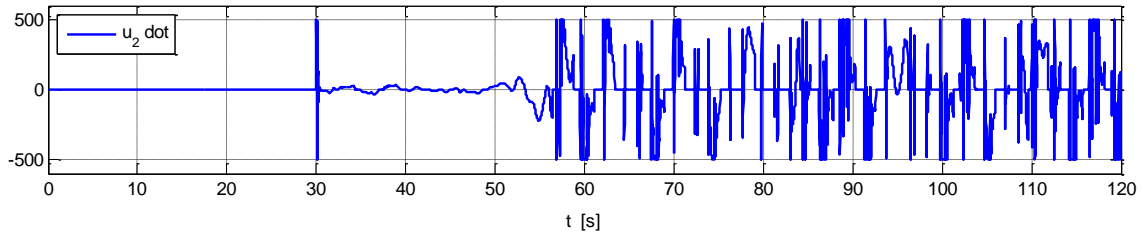
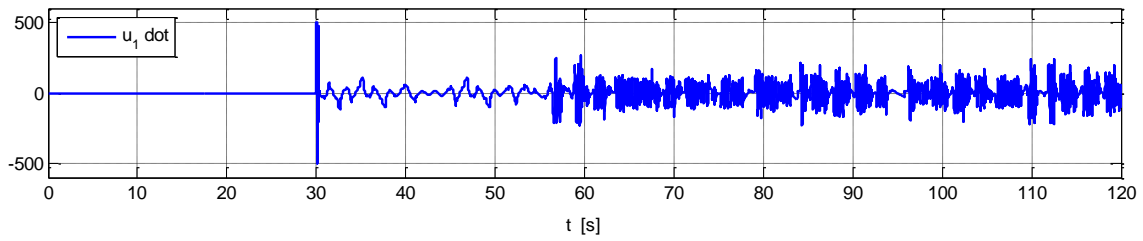


Figura 5.16. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|\dot{u}\|_\infty \leq 500$ .

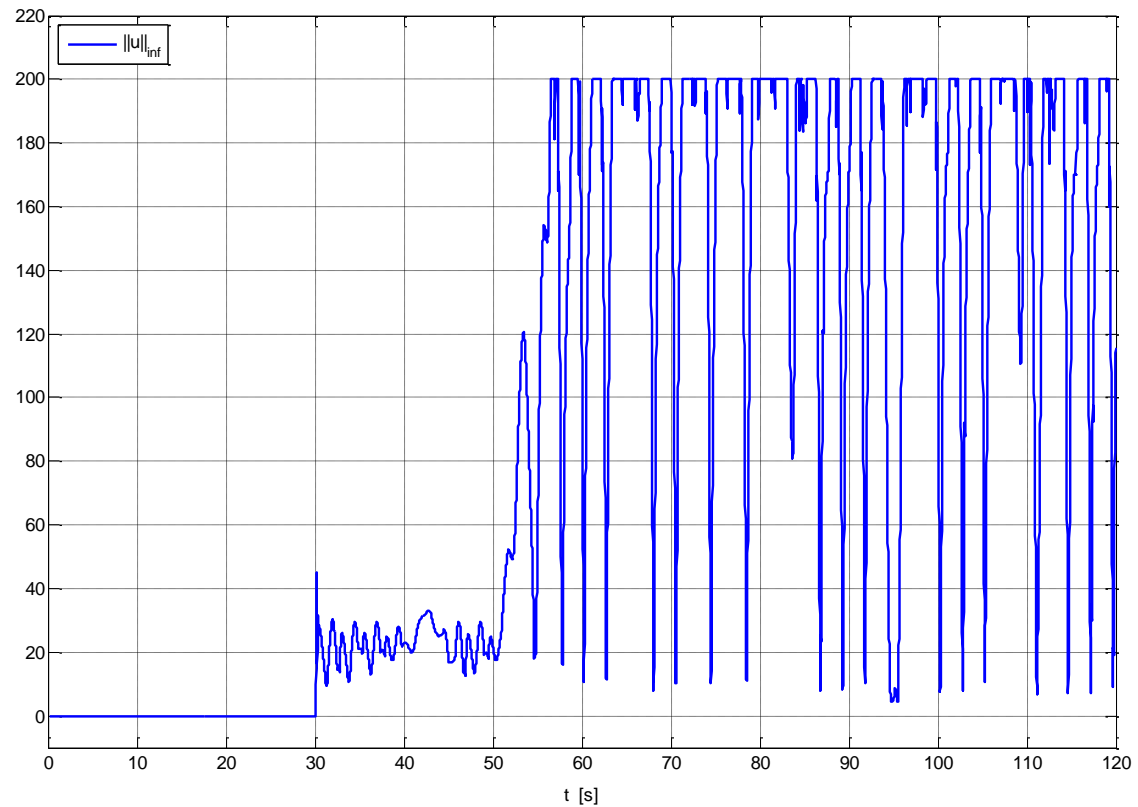


Figura 5.17. Norma infinito do vetor de controlo:  $\|u\|_\infty \leq 200$ .

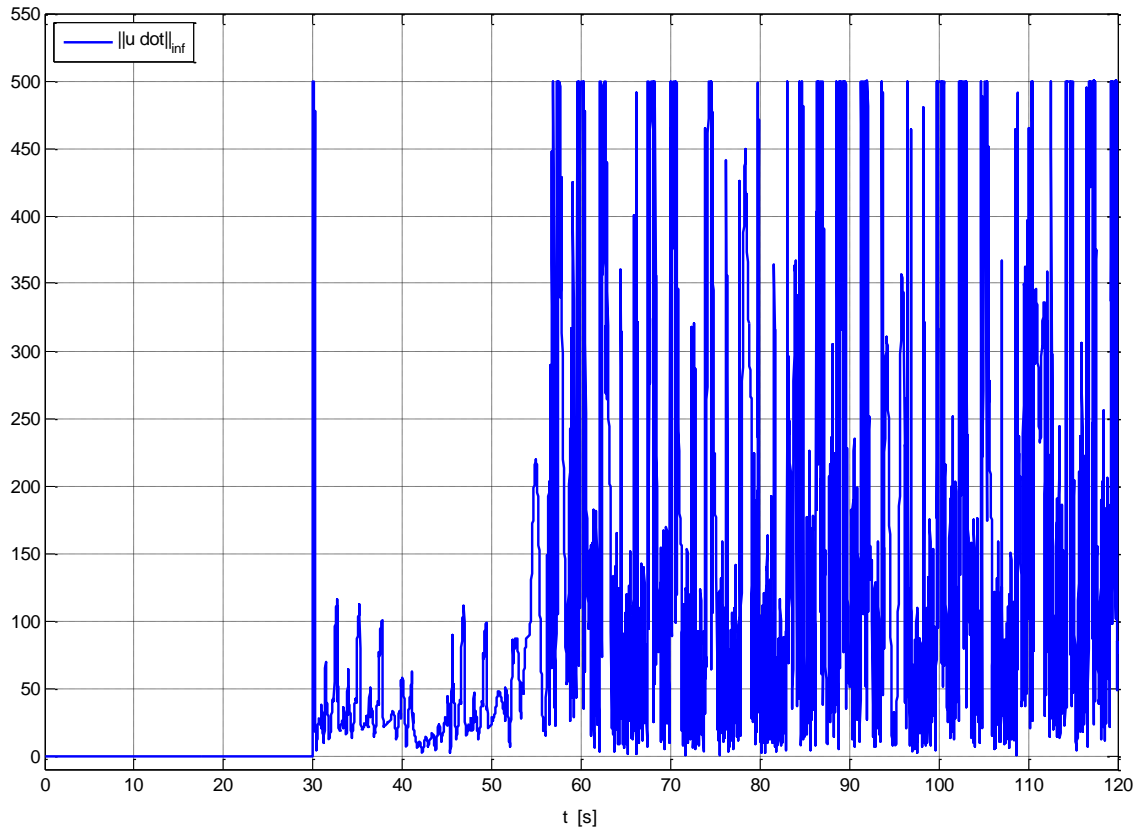


Figura 5.18. Norma infinito da taxa do vetor de controle:  $\|\dot{u}\|_{\infty} \leq 500$ .

### Simulação 2:

Simulações foram também realizadas tomando em conta ruídos nos processos e ruídos nas medições a fim de analisar a robustez do método contra perturbações. Para tal, foram adicionados ruídos brancos Gaussianos (WGN), de médias zero e desvios padrões  $\sigma_p = 10^{-2}$  e  $\sigma_m = 5 \times 10^{-3}$ , no que diz respeito ao processo e às medições/sensores, respetivamente, em ambos os sistemas, isto é, no sistema controlado (Lorenz) e no sistema de referência (Chua), a uma frequência de  $f_s = 100$  Hz.

A Figura (5.19) mostra as variáveis de estado dos sistemas de Lorenz e de Chua considerando os ruídos nos processos e nas medições. O primeiro gráfico denota também a saída de cada sistema, mostrando portanto a sincronização exclusivamente da saída. A Figura (5.20) representa o erro da saída e as Figuras (5.21) e (5.22) as magnitudes e as taxas das variáveis de controlo, respetivamente.

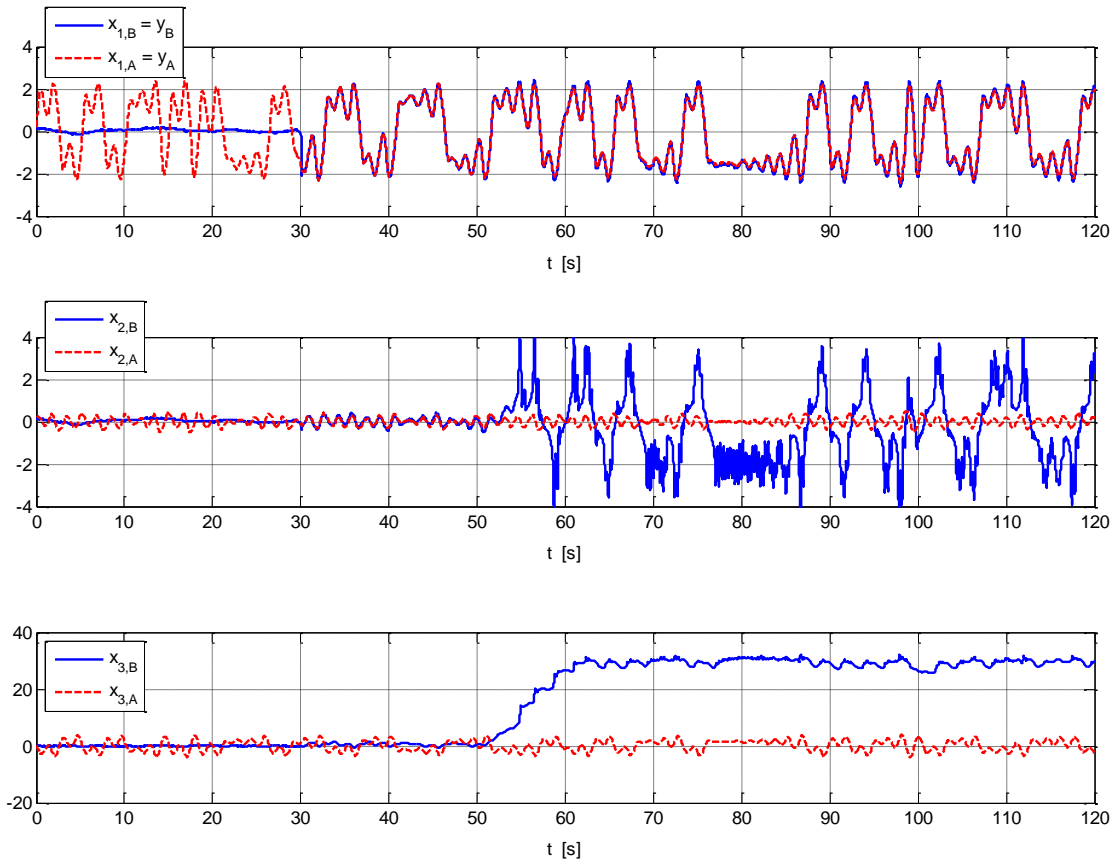


Figura 5.19. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua considerando que ambos os sistemas são sujeitos a ruído. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas.

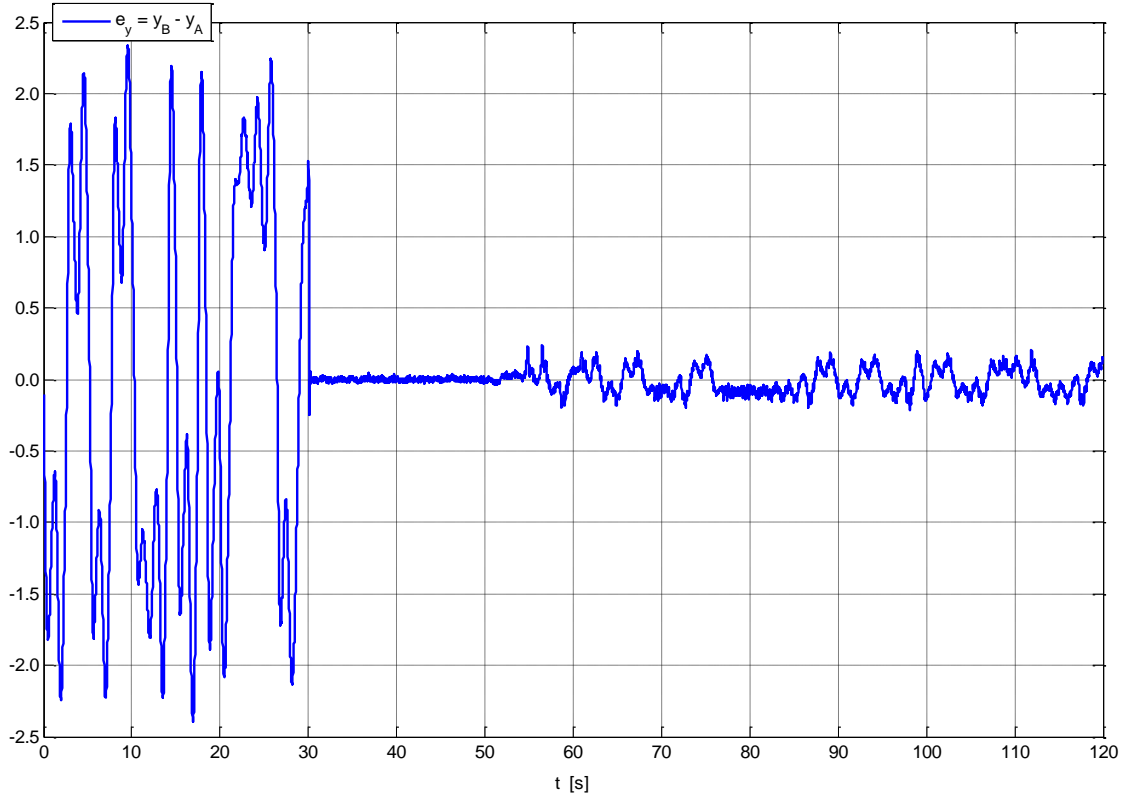


Figura 5.20. Evolução temporal do erro da saída:  $e_y = y_B - y_A$ . (considerando ruído).

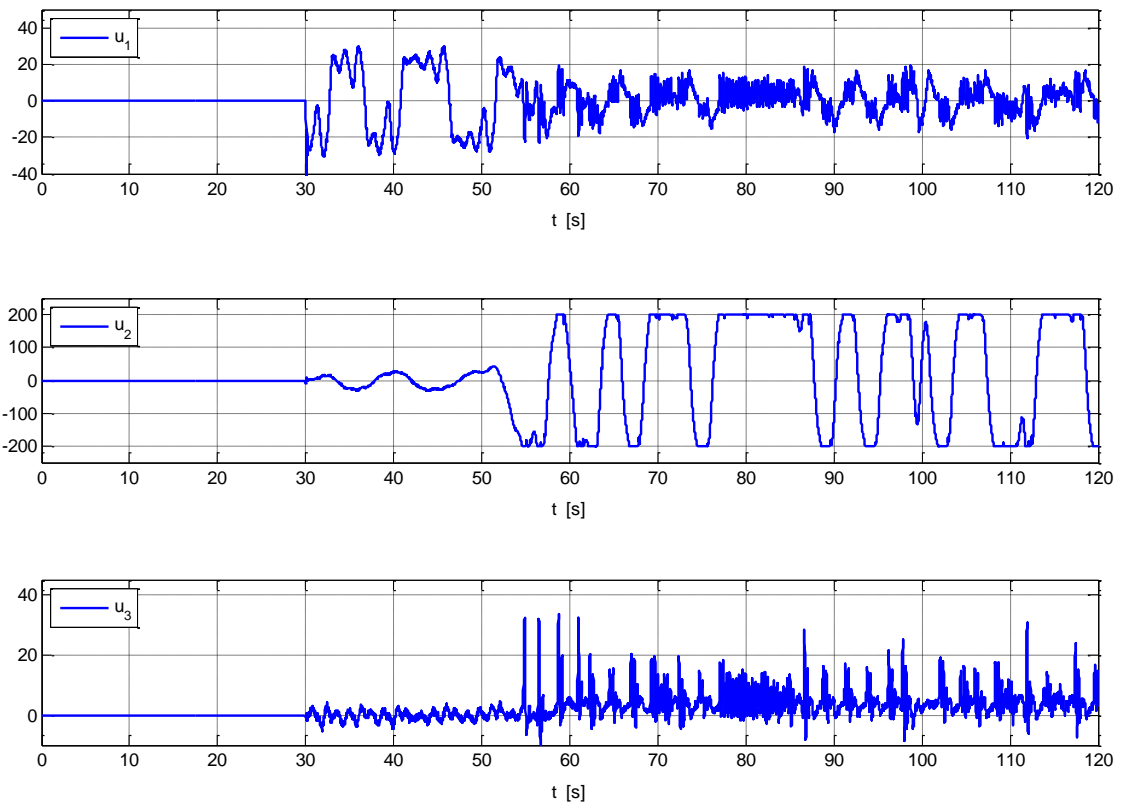


Figura 5.21. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|u\|_\infty \leq 200$ . (considerando ruído).

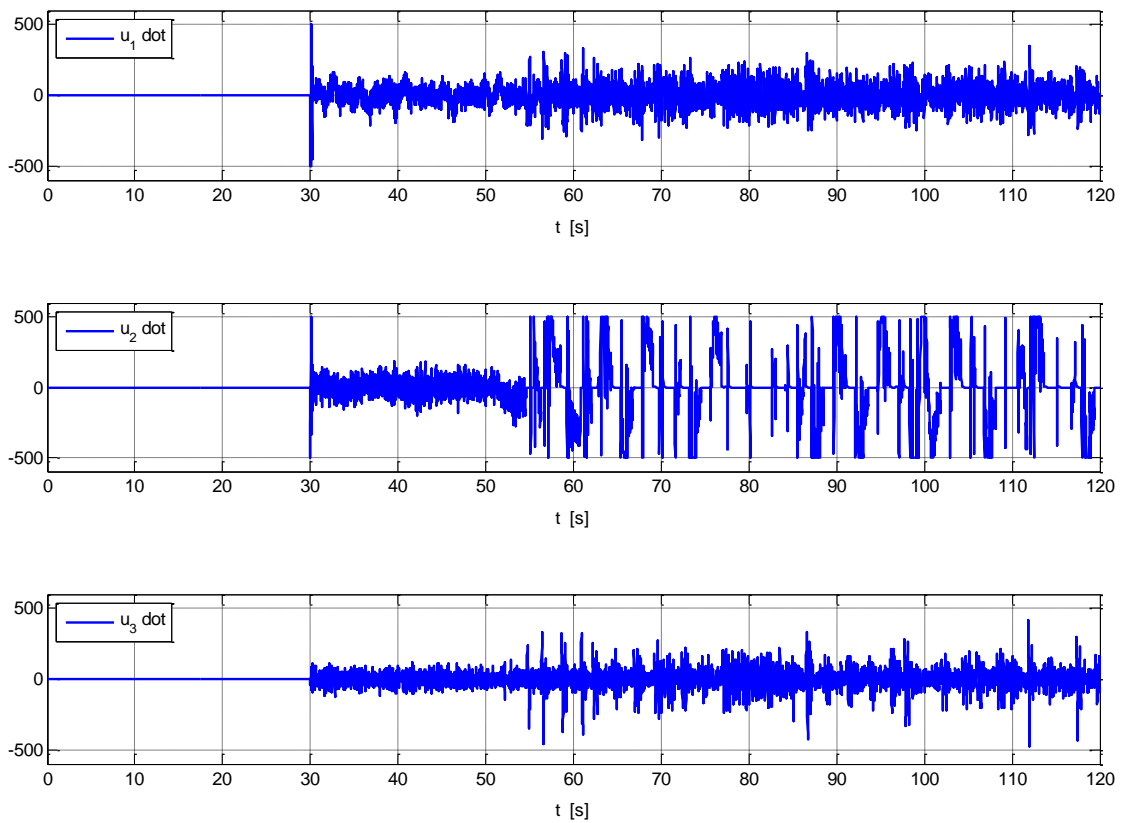


Figura 5.22. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|\dot{u}\|_\infty \leq 500$ . (considerando ruído).

#### Discussão relativa ao controlo da secção (4.1):

Como se pode verificar pela análise das Figuras (5.14) e (5.20), quando o controlo,  $u$ , é ligado, no instante  $t_{u_{on}} = 30$  s, o erro da saída,  $e_y = y_B - y_A$ , torna-se muito próximo de zero como desejado. É de salientar, contudo, uma ligeira variação na ordem de grandeza do erro quando o comportamento do sistema controlado (sistema de Lorenz) transita de regular para caótico, isto é, a partir do instante  $t = 50$  s. Não obstante, o erro permanece pequeno, e tal acontece devido à alteração dos parâmetros do sistema, já que a partir deste instante a lei de controlo está a atuar num sistema cujos parâmetros são diferentes para os quais o controlador foi projetado.

Analisando as magnitudes e as taxas das variáveis de controlo, Figuras (5.15) e (5.21) e (5.16) e (5.22), respetivamente, tem-se que as restrições do controlo são ambas satisfeitas,  $\|u\|_\infty \leq 200$  e  $\|\dot{u}\|_\infty \leq 500$ , o que prova que a abordagem de controlo apresentada é de facto eficaz. Poder-se-á notar que existe uma tendência para surgir alguns picos na magnitude do controlo quando o controlo é ativado, como se pode verificar no primeiro gráfico da Figura (5.15). Este fenómeno ocorre porque, no instante em que o controlo é ligado, a trajetória do sistema controlado encontra-se longe da trajetória de referência. Uma vez que esta se aproxima da de referência, a magnitude do controlo começa a diminuir. Todavia, o projetista poderá optar pela aplicação de um filtro, como por exemplo o célebre filtro de Savitzky-Golay (Savitzky & Golay, 1964), na lei de controlo (4.11) a fim de suavizar os sinais de controlo, caso a aplicação assim o exija.

Repare-se que o facto dos termos não-lineares dos sistemas caóticos de Lorenz e Chua serem incorporados/modelados nas perturbações do processo (sistema a controlar) faz com que esta abordagem garanta uma robustez adicional à robustez contra parâmetros incertos, no sentido em que tanto o sistema a controlar como o de referência podem conter ruídos nos processos já que estes ruídos são vistos juntamente com os termos não-lineares como uma única perturbação. As Figuras (5.19) e (5.20) comprovam esta robustez.

Repare-se também que o controlo é ativado decorrido apenas algum tempo do início da simulação, num instante em que as ‘condições iniciais’ de ambos os sistemas são totalmente diferentes, o que nos permite afirmar que a sincronização de saída é alcançada com êxito mesmo que ambos os sistemas tenham partido de condições iniciais completamente diferentes.

Um dos parâmetros da lei de controlo aplicada,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , ver expressões (4.11-4.12) e (5.22), permite que projetista possa encontrar um compromisso entre a ordem de grandeza do erro da saída e o esforço do controlo aplicado. Isto porque  $\varepsilon$  encontra-se relacionado diretamente com a matriz de ponderação necessária à resolução da equação algébrica de Riccati (4.12),  $Q_\varepsilon = \varepsilon.I$ . Embora  $Q_\varepsilon$  não seja uma matriz de penalização direta do controlo, tem-se que o erro da saída torna-se menor à medida que o valor de  $\varepsilon$  torna-se maior e que por sua vez torna o esforço do controlo maior.

#### Aplicação do controlo da secção (4.4):

Considere-se agora a validação da abordagem de controlo proposta na secção (4.4). Numa primeira simulação, os parâmetros de ambos os sistemas são definidos em valores nominais que os levam a exibir movimentos caóticos, e a metodologia de controlo proposta na secção (4.4) é aplicada para validar a sua eficácia quando os sinais a seguir são caóticos. Numa segunda simulação, os parâmetros do sistema de Lorenz são variados ao longo do tempo com o intuito de verificar a robustez do controlo contra incertezas paramétricas. Neste caso, os parâmetros do sistema de Chua são mantidos inalterados, uma vez que o que o controlador requer são os sinais de referência e não o modelo que os geram.

Decompondo o sistema de Lorenz na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

onde, se considerarmos duas variáveis de controlo,  $u_1$  na primeira equação de estado e  $u_2$  na terceira, a trajetória do sistema de Lorenz torna-se controlável e o respetivo sistema pode ser escrito como:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x) \quad (5.28)$$

com:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.29)$$

Escrevendo-se o sistema de Lorenz juntamente com o integral do erro da sua saída e aplicando-se o operador  $\sigma_{\eta,v}(u)$  para garantir um controlo limitado, tem-se o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{3 \times 1} \\ C & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \sigma_{\eta,v}(u) + \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ -y_A(t) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

que toma a forma (4.77), isto é,  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \sigma_{\eta,v}(u) + d(x_a, t)$ , e está em ordem de ser controlado com as leis de controlo (4.79) e (4.95).

Note-se que tanto o sistema de Lorenz como o de Chua são ambos caóticos e portanto tem-se que o termo  $d(x_a, t)$  é uma perturbação limitada e mensurável no sentido de Lebesgue em relação a  $t$ , como assumido em (4.67). Por outro lado, o sistema (5.30) pode ser

perfeitamente controlado dado que o par  $(A_a, B_a)$  é controlável, isto é, que a ordem da matriz de controlabilidade é igual à sua dimensão,  $\text{rank}(M_c) = 4 = n_a = n + s$ .

Para efeitos de simulação, as equações diferenciais ordinárias dos sistemas (4.74), (5.8) e (5.30) foram resolvidas através do método de RK-Butcher (ver *Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's*) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 60$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.31). Em (4.74), o valor do parâmetro requerido foi definido em  $\mu = 100$ . Os parâmetros do controlador de Korobov e do LQR são os apresentados em (5.32), e a comutação de um controlador para o outro ocorre quando a função de controlabilidade é  $\theta(t) \leq \varepsilon = 10^{-3}$ . As restrições dos atuadores são as apresentados em (5.33). Para garantir que tanto o sistema de Lorenz como o de Chua encontram-se já num regime completamente caótico, o controlo,  $u$ , é ligado em  $t_{u_{on}} = 30$  s, um instante no qual o período transiente já decorreu.

#### Condições iniciais:

$$x_0 = [0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T, \quad x_{r,0} = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T, \quad u_0 = [0 \ 0]^T, \quad q_0 = 0 \quad (5.31)$$

#### Parâmetros do controladores:

$$\begin{aligned} \text{Korobov:} \quad & l = 1, \quad \alpha = 10, \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 1 \\ \text{LQR:} \quad & Q = I_4, \quad R = I_2, \quad \gamma = 0.5 \end{aligned} \quad (5.32)$$

#### Restrições dos atuadores:

$$\|u\|_\infty \leq 250 = \eta, \quad \|\dot{u}\|_\infty \leq 2000 = \nu \quad (5.33)$$

#### **Simulação 1:**

Na simulação que se segue os parâmetros de ambos os sistemas são mantidos inalterados. A Figura (5.23) mostra a evolução temporal das variáveis de estado e das saídas de cada sistema. A primeira linha vertical preta a tracejado indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a segunda linha o instante o qual ocorre a comutação para o LQR. O erro da saída,  $e_y = y - y_r = y_B - y_A$ , é mostrado na Figura (5.24). As magnitudes e as taxas das variáveis de controlo são apresentadas nas Figuras (5.25) e (5.26), respetivamente. As taxas/derivadas das variáveis de controlo foram calculadas numericamente pelo método das diferenças finitas centradas (ver *Anexo B.1 - Diferenciação Numérica*). A Figura (5.27) mostra o integral do erro da saída,  $q$ , e a Figura (5.28) a função de controlabilidade do controlo de Korobov.

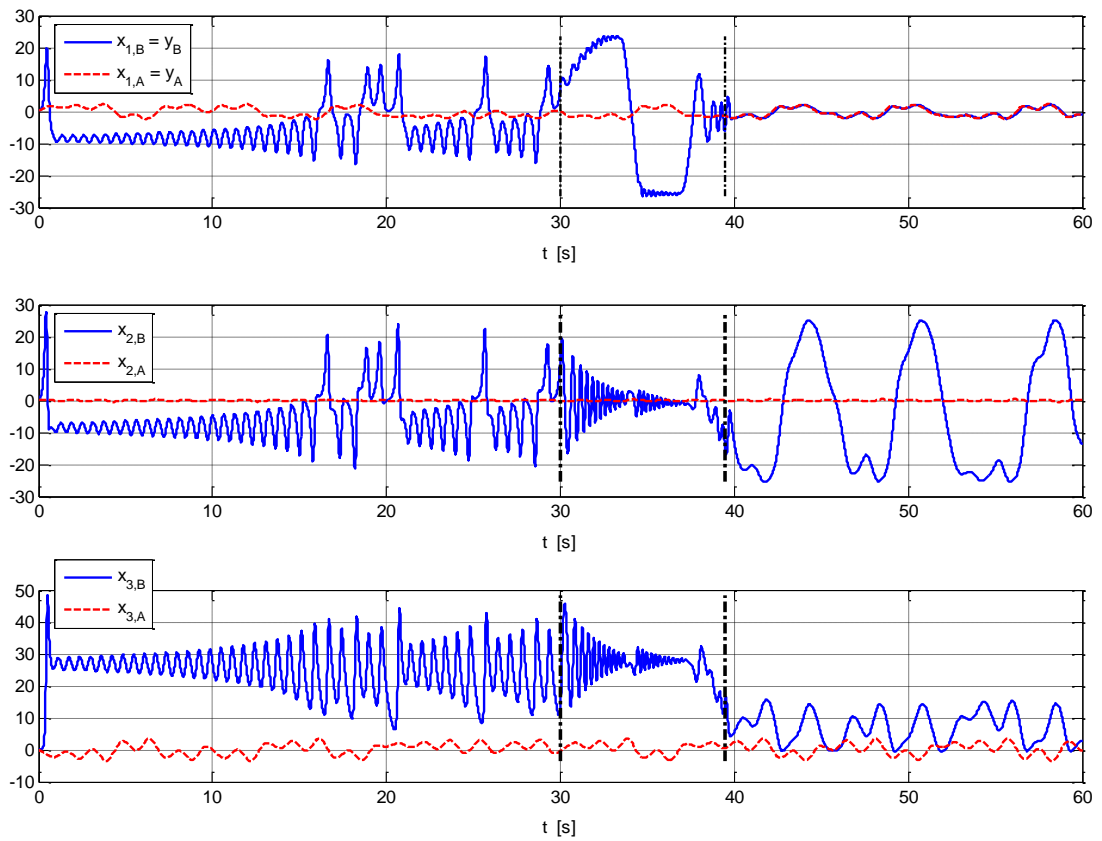


Figura 5.23. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respetivas saídas. A 1ª linha vertical preta/tracejada indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a 2ª o instante em que se dá a comutação para o LQR.

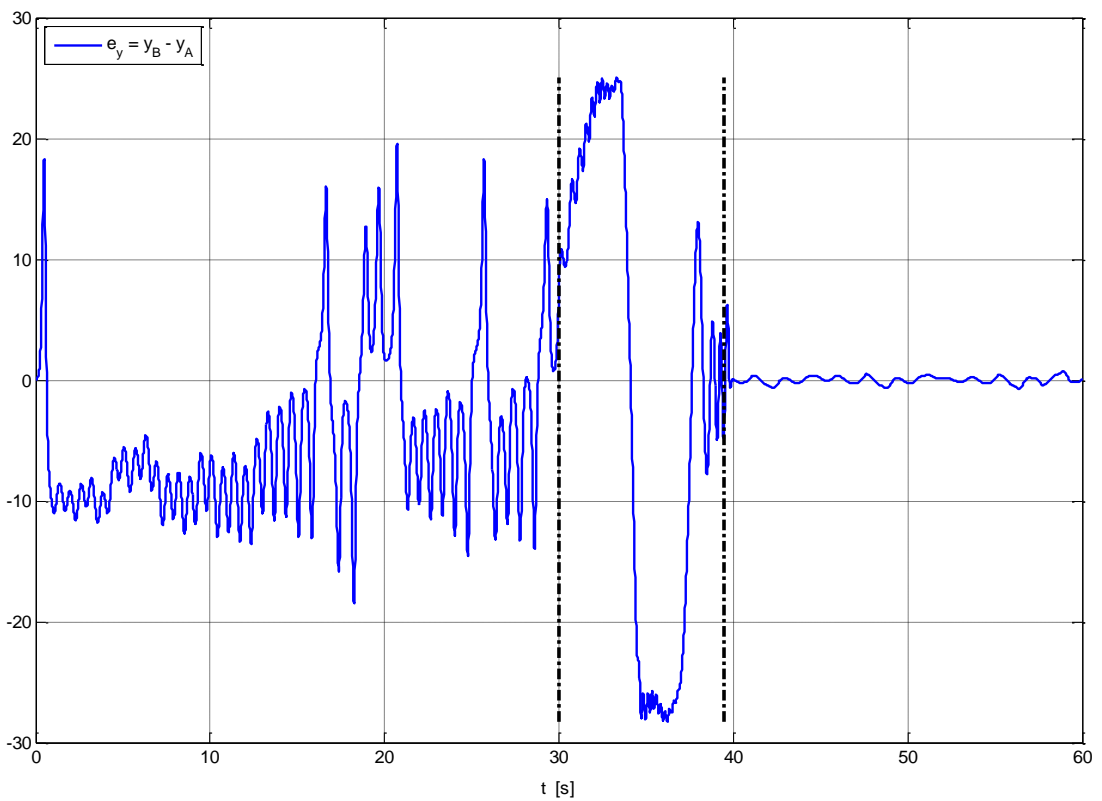


Figura 5.24. Evolução temporal do erro da saída:  $e_y = y_B - y_A$ .

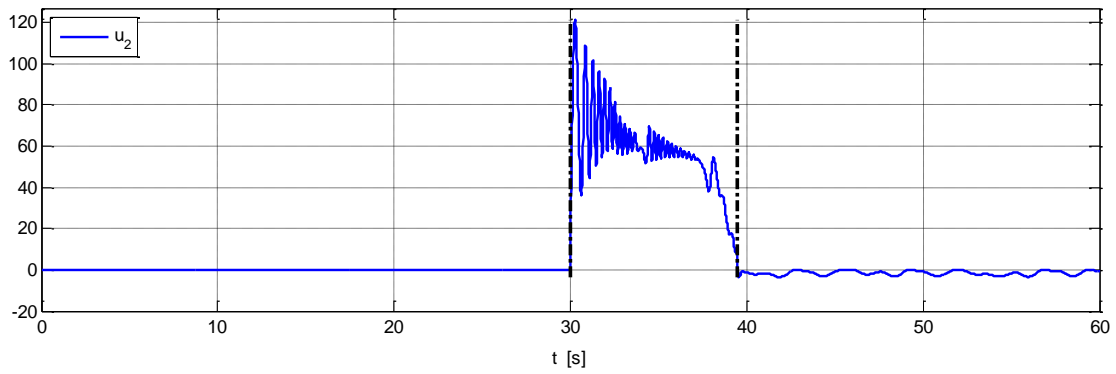
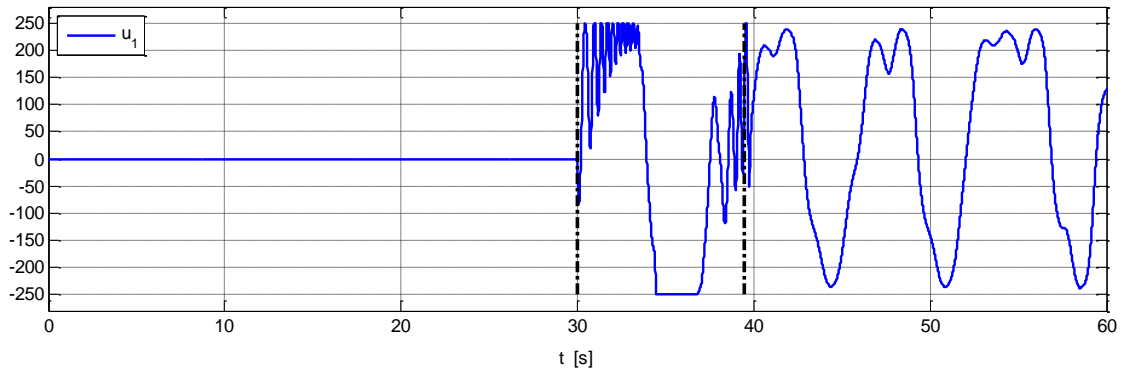


Figura 5.25. Magnitudes dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|u\|_{\infty} \leq 250$ .

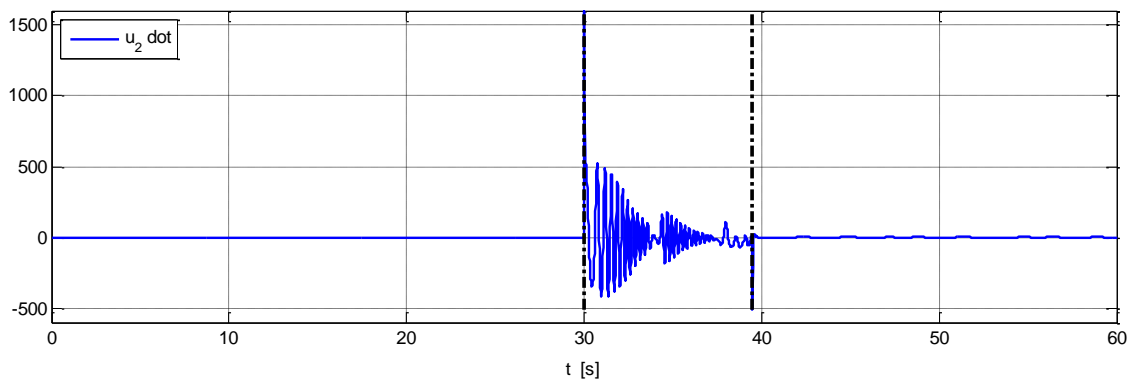
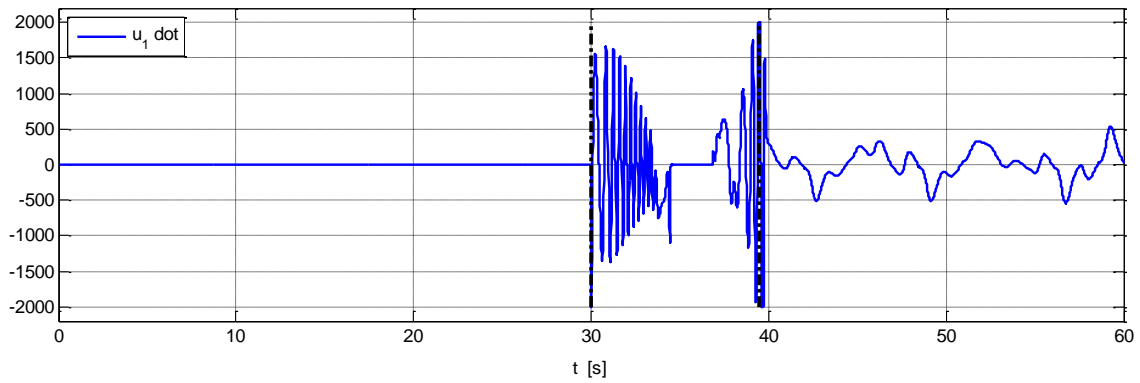


Figura 5.26. Taxas dos sinais de controlo aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|\dot{u}\|_{\infty} \leq 2000$ .

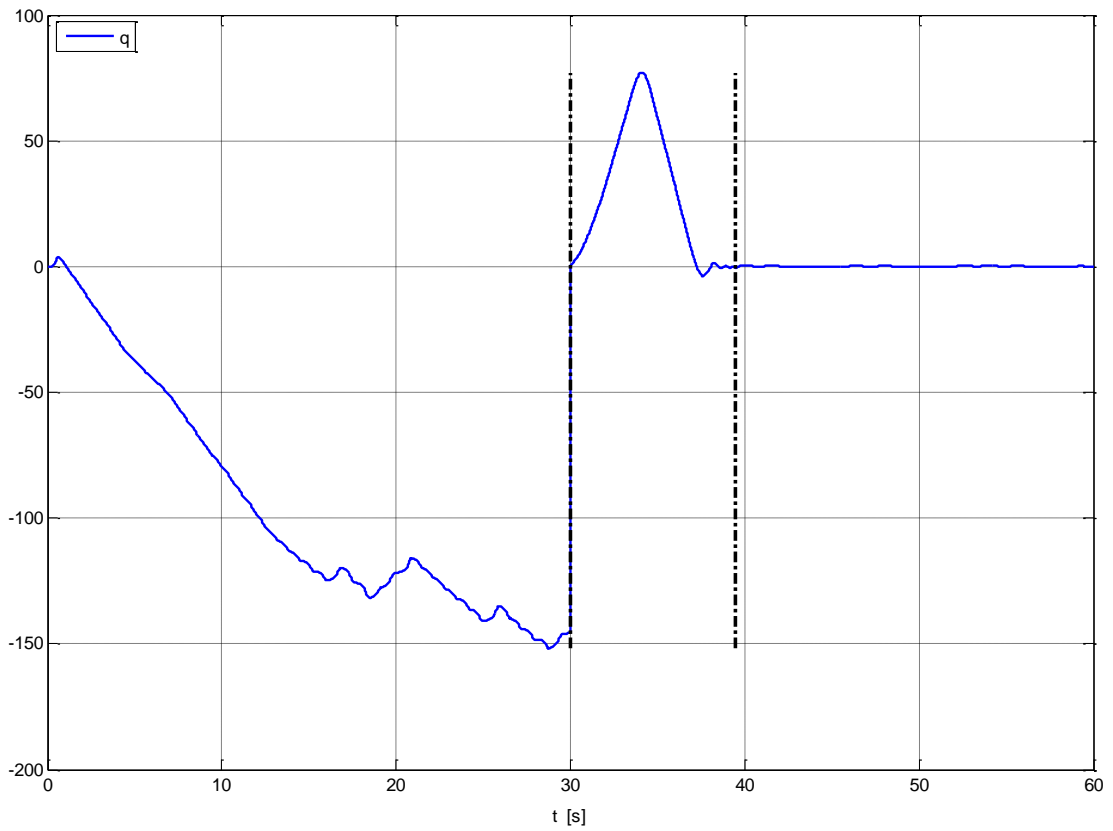


Figura 5.27. Evolução temporal do integral do erro da saída.

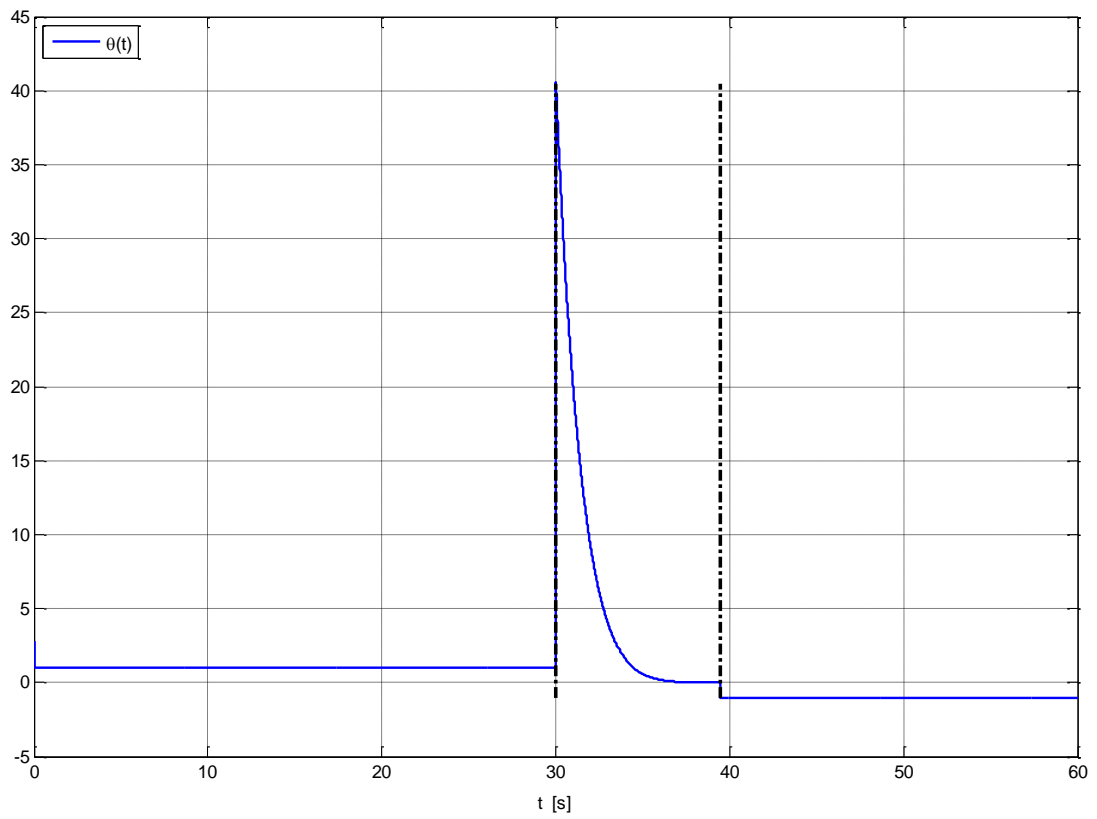


Figura 5.28. Função de controlabilidade de Korobov explicitamente em função do tempo.

## Simulação 2:

Nesta simulação os parâmetros do sistema de Lorenz são alterados ligeiramente ao longo do tempo para demonstrar a robustez relativamente a parâmetros incertos. Considera-se que os parâmetros são conhecidos dentro de intervalos especificados que é o que acontece quase sempre na maioria das aplicações reais. Considerando que cada parâmetro pode sofrer uma alteração em torno do respetivo valor nominal em 10%, tem-se que  $\sigma \in [9, 11]$ ,  $\rho \in [25.2, 30.8]$  e  $\beta \in [2.4, 2.9]$ . Seja o vetor de parâmetros,  $M = [\sigma \ \rho \ \beta]^T$ , perturbado de acordo com uma distribuição normal multivariada, com os seus valores nominais como médias, e com matriz de covariância calculada de modo a que cada parâmetro pertença ao seu respetivo intervalo com 99.73% de confiança. ( $\mu_i \pm 3\sigma_i$ , em que  $\mu_i$  denota o valor médio de cada parâmetro e  $\sigma_i$  o respetivo desvio padrão). Os coeficientes de correlação assumidos entre cada dois parâmetros são os apresentados em (5.35).

Vetor dos parâmetros médios e vetor dos respetivos desvios padrões:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma \\ \rho \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 28 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.93 \\ 0.09 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Coefficientes de correlação de Pearson:

$$\rho_{12} = 0.7, \quad \rho_{13} = 0.8, \quad \rho_{23} = 0.9 \quad (5.35)$$

Matriz de covariância:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ * & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ * & * & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \cong 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 11.11 & 21.78 & 2.37 \\ * & 87.11 & 7.47 \\ * & * & 0.79 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

A Figura (5.29) mostra a evolução temporal dos parâmetros de Lorenz perturbados. A Figura (5.30) mostra as variáveis de estado dos sistemas de Lorenz e de Chua, a Figura (5.31) as magnitudes das variáveis de controlo e a Figura (5.32) as suas respetivas taxas.

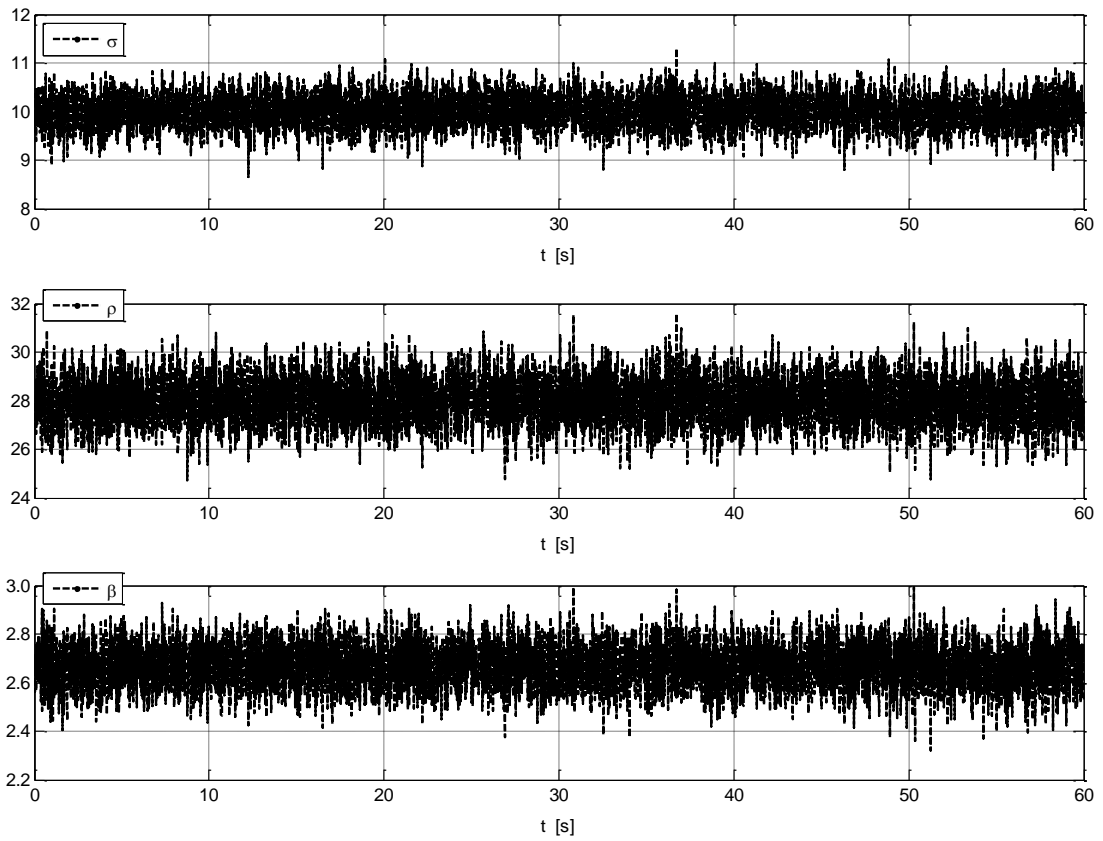


Figura 5.29. Parâmetros de Lorenz perturbados com 10% de ruído (WGN) em torno dos valores nominais.

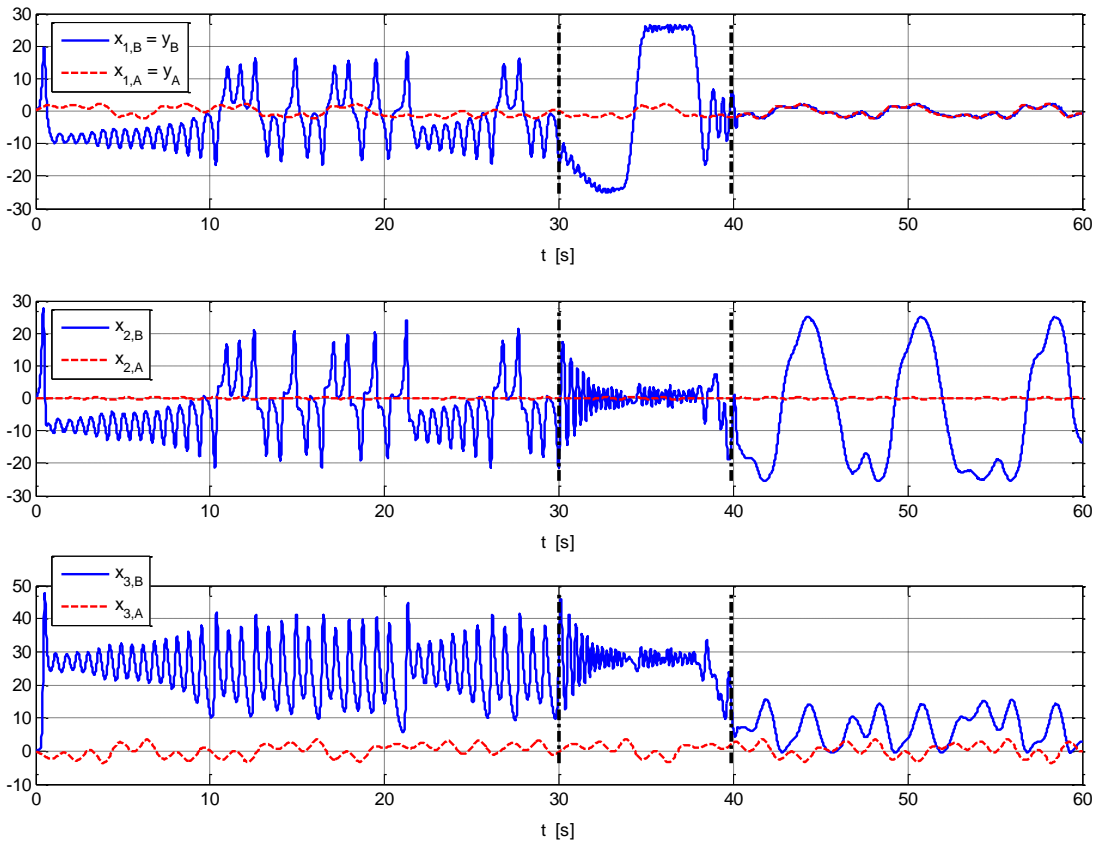


Figura 5.30. Evolução temporal das variáveis de estado do sistema de Lorenz e de Chua. O primeiro gráfico representa também as respectivas saídas. (Parâmetros de Lorenz perturbados).

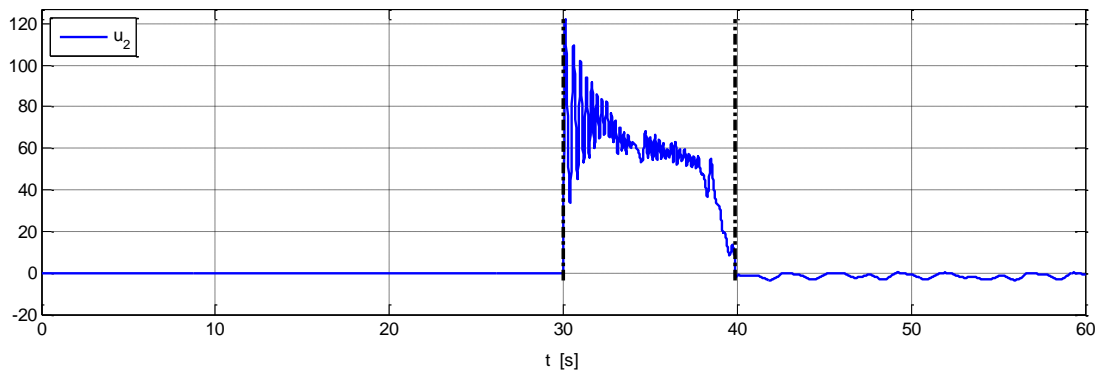
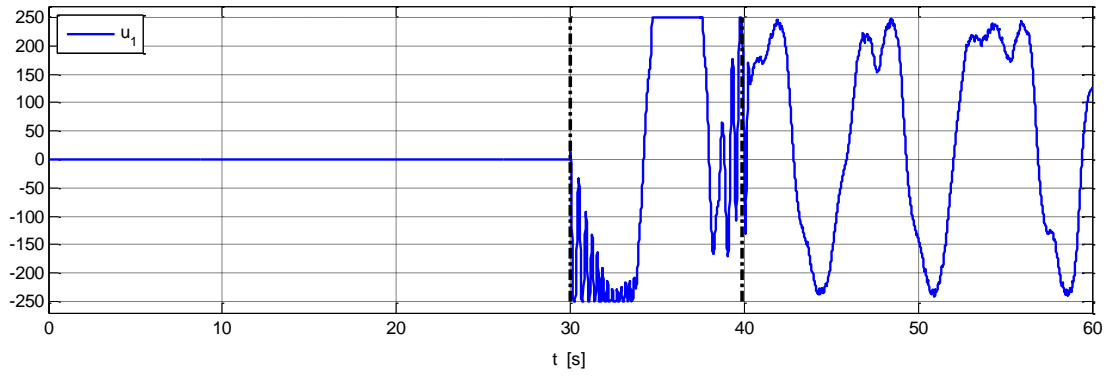


Figura 5.31. Magnitudes dos sinais de controle aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|u\|_\infty \leq 250$ . (Parâmetros de Lorenz perturbados).

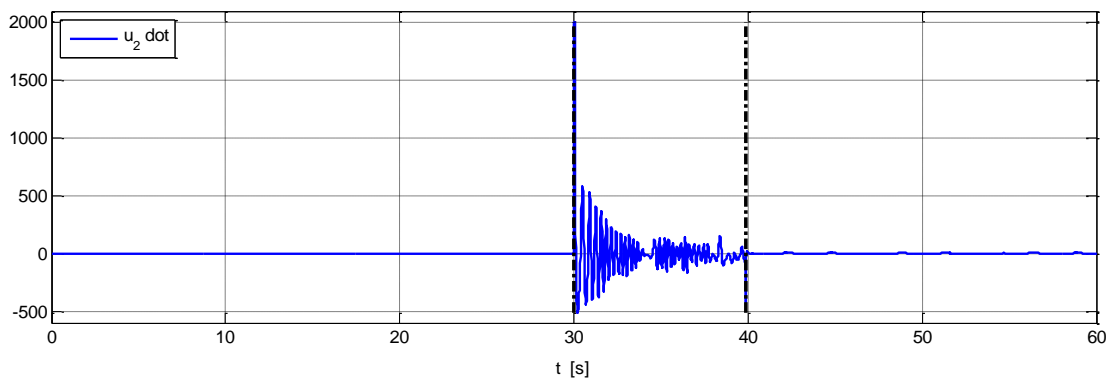
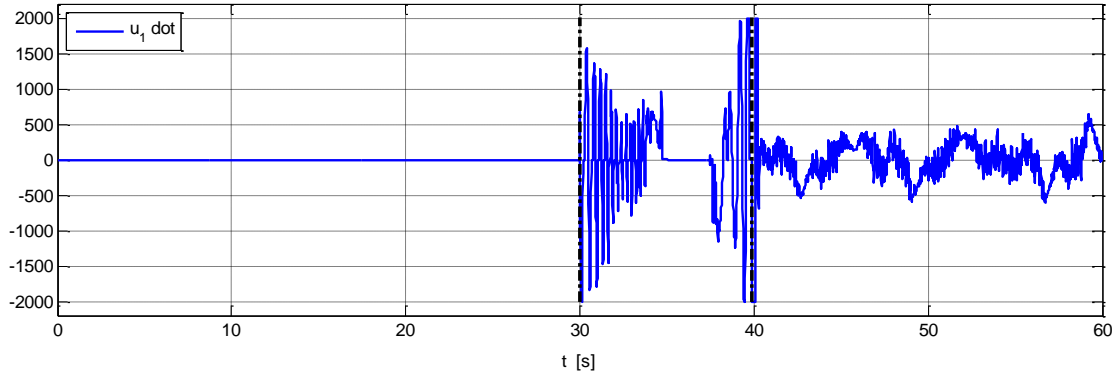


Figura 5.32. Taxas dos sinais de controle aplicados ao sistema de Lorenz:  $\|\dot{u}\|_\infty \leq 2000$ . (Parâmetros de Lorenz perturbados).

#### Discussão relativa ao controlo da secção (4.4):

Como se pode verificar pela análise dos resultados, estes comprovam que o erro da saída permanece estável no sentido de Lyapunov decorrido algum tempo do instante em que o controlo é ligado,  $\|e_y(t)\| = \|y(t) - y_r(t)\| \leq \delta$ ,  $t \geq \tau > t_{u_{on}} = 30$  s, (com  $\delta > 0$ , pequeno), e que as restrições impostas nas magnitudes e nas taxas do controlo são efetivamente cumpridas,  $\|u(t)\|_\infty \leq 250$ ,  $\|\dot{u}(t)\|_\infty \leq 2000$ , como proposto da secção (4.4), mesmo que os parâmetros dos sistemas, neste caso em particular os parâmetros do sistema controlado - sistema de Lorenz, sejam perturbados com ruídos,  $\theta = \theta_B = M + w(t)$ , - ver Figuras (5.23) a (5.26) e (5.29) a (5.32).

Note-se que os parâmetros do sistema de referência - sistema de Chua,  $\theta_r = \theta_A$ , podem sofrer quaisquer alterações ao longo tempo,  $\theta_r = \theta_r(t)$ , ou mesmo até o próprio modelo,  $\dot{x}_r = \dot{x}_A = f_r(x_r, \theta_r) + d_r(t)$ , porque a abordagem de controlo é independente do modelo de referência, necessitando apenas dos sinais de referência a serem seguidos ao longo do tempo,  $y_r(t) = y_A(t)$ .

A Figura (5.28) mostra a função de controlabilidade de Korobov em função explicitamente do tempo,  $\theta(t) = \theta_\alpha(x_\alpha(t))$ , realçando o facto que é uma função positiva, contínua, continuamente diferenciável e estritamente decrescente. Repare-se que esta função encontra-se definida apenas no intervalo temporal no qual o controlo com base em Korobov está ligado, ou seja, no intervalo  $t \in [30, 39.5[$  s. Nos intervalos  $t \in [0, 30[$  s e  $t \in [39.5, 60]$  s, cujo o controlo encontra-se desligado,  $u(t) = 0$ , e ligado com o LQR com um grau de estabilidade especificado,  $u(t)$ , respetivamente,  $\theta(t)$  tem atribuído os valores de +1 e -1, respetivamente, no entanto, apenas com fins de programação e de apresentação de resultados.

Um dos parâmetros do controlador, nomeadamente do controlo de Korobov,  $\alpha$ , permite, interessantemente, alterar o grau de suavidade do controlo através da escolha apropriada do seu valor, com  $\alpha \geq \alpha_0$ . O grau de suavidade do controlo,  $u \equiv u_\alpha(x_\alpha)$ , regido pela lei (4.79), aumenta com o aumento de  $\alpha$ , e em contrapartida faz com que o tempo do movimento,  $T_\alpha(x_{\alpha,0}) = \alpha \theta_\alpha^{1/\alpha}(x_{\alpha,0})$  (Korobov & Skoryk, 2002), isto é, o tempo que decorre até a trajetória alcançar o ponto imediatamente antes da referência, aumente. Note-se que este parâmetro permite, por conseguinte, ao projetista estabelecer um compromisso entre o tempo do movimento,  $T_\alpha(x_{\alpha,0})$ , e a ordem de grandeza do esforço do controlo, em particular das taxas, já que ao tornar o controlo mais suave as taxas do controlo diminuem, isto é,  $\|\dot{u}\|_\infty \leq \nu$  diminui. No caso específico em que  $\alpha = \infty$ , o controlo torna-se o mais suave possível, sendo que a função de controlabilidade,  $\theta_\infty(x_\alpha)$ , corresponde à função de Lyapunov,  $V(x_\alpha)$ , para o sistema aumentado não perturbado,  $\dot{x}_\alpha = A_\alpha x_\alpha + B_\alpha \sigma_{\eta,\nu}(u)$ , com controlo  $u \equiv u_\infty(x_\alpha)$ , ou seja,  $\theta_\infty(x_\alpha) = V(x_\alpha)$ .

Repare-se também que, embora não mostrado através de simulações nesta subsecção para não a tornar demasiado extensa, a abordagem de controlo pode ser também aplicada com êxito caso o sistema controlado seja sujeito a perturbações externas, para além das

incertezas nos parâmetros, dadas as fortes condições de estabilidade que o controle de Korobov detém (Korobov & Skoryk, 2002) e a robustez do LQR com grau de estabilidade especificado (Naidu, 2002), que podem ser, em qualquer um dos casos, comprovadas analiticamente através de uma análise formal de estabilidade pelo célebre método de Lyapunov.

### 5.2.2. Aplicação 2: Atitude de um Veículo Espacial

A atitude de um veículo espacial refere-se à orientação angular de um sistema de coordenadas fixo no veículo relativamente a um referencial externo. Assumindo que o veículo espacial não contém quaisquer partes móveis nem estruturas flexíveis, a sua dinâmica pode ser modelada como a de um corpo rígido que se roda livremente no espaço. A atitude de um corpo rígido pode ser descrita de várias formas (matriz dos cossenos diretores, ângulos de Euler, quaterniões, parâmetros de Rodrigues, parâmetros de Cayley-Klein, parâmetros de Tsiotras-Longuski, etc.) (Shuster, 1993; Tsiotras & Longuski, 1995). A forma mais comum é recorrendo aos célebres ângulos de Euler, que consiste num conjunto de equações cinemáticas que relacionam os ângulos da atitude com as velocidades angulares do veículo em torno de cada eixo, e num outro conjunto de equações dinâmicas que descreve a evolução dessas velocidades angulares. Os ângulos de Euler são definidos em relação a um referencial inercial pelo ângulo de rolamento  $\phi$ , pelo ângulo de arfagem  $\theta$ , e pelo ângulo de guinada  $\psi$ , e com o referencial do corpo posicionado no centro de massa do veículo. Por convenção, o eixo do  $x$  é posicionado na direção axial do veículo apontando no sentido do movimento, o eixo do  $y$  aponta para a direita, e o eixo do  $z$  para baixo, como ilustrado na Figura (5.33):

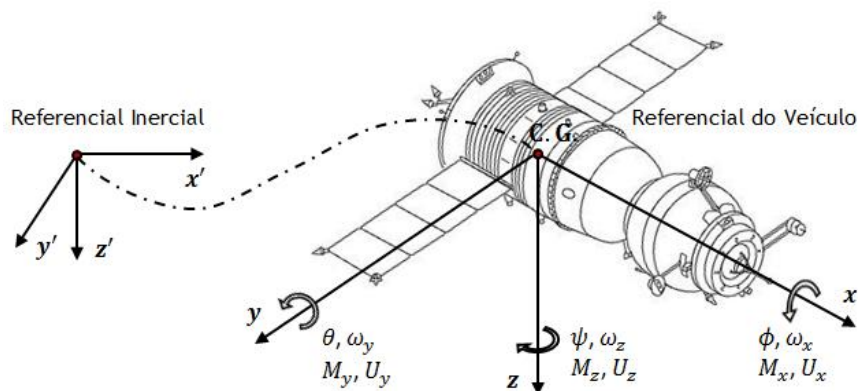


Figura 5.33. Sistemas de coordenadas e representação da atitude de um veículo espacial rígido com ângulos de Euler.

Os ângulos de Euler são convenientes quando se trata da ‘visualização da atitude’. No entanto, quando se trata da integração numérica das equações diferenciais que governam a orientação do veículo espacial, ocorrem algumas singularidades caso um dos ângulos

(dependendo da sequência de rotação entre os referenciais para obtenção da matriz de rotação geral) seja igual  $\pm 90^\circ$ . A título de exemplo, se o ângulo de arfagem for igual a  $\theta = 90^\circ$ , o eixo de rolamento  $x$  torna-se paralelo ao eixo de guinada  $z'$  e deixa de haver eixos disponíveis para a rotação de guinada. Perde-se um grau de liberdade - o tão chamado *gimbal lock*. Para ultrapassar estas singularidades, os quaterniões, que são elementos de um vetor num espaço a quatro dimensões e que permitem definir a rotação de um corpo rígido num espaço a três dimensões, devem ser empregues para descrever computacionalmente a atitude do veículo, e os ângulos de Euler devem ser usados meramente para visualização do estado em que se encontra o veículo.

A atitude de um veículo espacial rígido descrito em termos de quaterniões em relação a um referencial inercial é (Tewari, 2011; Zipfel, 2007):

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= a_x \omega_y \omega_z + M_x/I_{xx} + U_x/I_{xx} \\ \dot{\omega}_y &= a_y \omega_x \omega_z + M_y/I_{yy} + U_y/I_{yy} \\ \dot{\omega}_z &= a_z \omega_x \omega_y + M_z/I_{zz} + U_z/I_{zz}\end{aligned}\tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= (1/2)(-\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3) + k\gamma q_0 \\ \dot{q}_1 &= (1/2)(\omega_x q_0 + \omega_z q_2 - \omega_y q_3) + k\gamma q_1 \\ \dot{q}_2 &= (1/2)(\omega_y q_0 - \omega_z q_1 - \omega_x q_3) + k\gamma q_2 \\ \dot{q}_3 &= (1/2)(\omega_z q_0 + \omega_y q_1 - \omega_x q_2) + k\gamma q_3\end{aligned}$$

onde  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  denotam os momentos principais de inércia,  $a_x = (I_{yy} - I_{zz})/I_{xx}$ ,  $a_y = (I_{zz} - I_{xx})/I_{yy}$ ,  $a_z = (I_{xx} - I_{yy})/I_{zz}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  três torques perturbadores existentes no espaço que podem alterar consideravelmente a atitude do veículo espacial,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  três troques de controlo, e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  as velocidades angulares em relação aos eixos do veículo  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respetivamente.

No segundo conjunto das equações diferenciais (5.37),  $k\gamma q_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , são termos adicionais que garantem que a norma unitária do vetor rotação (quaternião) mantém-se mesmo na presença de erros de arredondamento originados durante a integração numérica. Um método comprovado para manter a norma unitária deste vetor consiste em escolher  $k \cdot \delta t \leq 1$ , em que  $\delta t$  representa o passo de integração, e em calcular  $\gamma$  como  $\gamma = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$  (Zipfel, 2007).

Uma vez obtidos os quaterniões por integração numérica de (5.37), os resultados são facilmente convertidos para quantidades físicas palpáveis à medida que o veículo roda no espaço. Essas grandezas são os ângulos de Euler e calculam-se, a cada passo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\phi &= \arctan(2(q_2q_3 + q_0q_1)/(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)) \\
\theta &= \arcsin(-2(q_1q_3 - q_0q_2)) \\
\psi &= \arctan(2(q_1q_2 + q_0q_3)/(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2))
\end{aligned}
\tag{5.38}$$

A primeira e a terceira equação de (5.38) apresentam singularidades em  $\phi = \pm 90^\circ$  e  $\psi = \pm 90^\circ$ , respetivamente. No entanto, não é problemático dado que as equações (5.38) são meramente resultados de saída calculados *offline* para criar uma imagem da atitude do veículo espacial e portanto podem ser contornadas facilmente programando em torno das singularidades. O importante é que não ocorra singularidades dentro das equações diferenciais.

A inicialização das equações diferenciais (5.37) requer os quaterniões iniciais  $q_0(0)$ ,  $q_1(0)$ ,  $q_2(0)$ ,  $q_3(0)$ , que estão obviamente relacionadas com a atitude inicial do veículo espacial, descrita em termos dos ângulos de Euler iniciais  $\phi(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $\psi(0)$ . A relação entre quaterniões e ângulos de Euler é dada pela expressão (5.39):

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2) \\
q_1 &= \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) - \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) \\
q_2 &= \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) \\
q_3 &= \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) - \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2)
\end{aligned}
\tag{5.39}$$

Se não houvesse torques a atuarem no veículo, o padrão de rotações existente inicialmente manter-se-ia indefinidamente ao longo do tempo. Porém, a experiência mostra que, dependendo das características da órbita e do veículo espacial, vários tipos de torques perturbadores estão presentes no espaço e que estes podem alterar consideravelmente a atitude do veículo. O torque de perturbação total é, tipicamente, mínimo, mas a sua permanência e periodicidade afetam o movimento de atitude de uma forma indesejada, e, inclusivamente, podem forçar o veículo a exibir um movimento de rotação caótico, ou mesmo até hiper-caótico, se a matriz dos torques perturbadores satisfizer certas condições (Kong, Zhou, & Zou, 2006).

As principais causas que dão origem a torques perturbadores são, entre outras, devido a: (1) *efeitos aerodinâmicos*; (2) *indução eletromagnética*; (3) *pressão devido à radiação solar*; (4) *gradiente de gravidade*; e, (5) *micrometeoritos* (Bousson, 2004; Gerlach, 1965; Kong et al., 2006; Ruitter, Damaren, & Forbes, 2013). Os torques aerodinâmicos surgem devido à atmosfera residual da Terra e são mais significativos próximos da Terra; os torques eletromagnéticos surgem devido à interação entre o campo magnético do veículo e o campo magnético terrestre; os torques devidos à radiação solar surgem devido à radiação eletromagnética e às partículas emitidas para fora do Sol; os torques devido aos gradientes de gravidade surgem por causa de pequenas diferenças na atração gravitacional de uma ponta do

veículo para a outra; torques devido ao impacto de micrometeoritos surgem em regiões como, por exemplo, perto dos anéis de Saturno, perto das cinturas de asteroides de Marte e de Júpiter, e todos estes torques perturbadores têm relações com as velocidades angulares,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , e com os ângulos de atitude,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ .

Reescrevendo as três primeiras equações de (5.37) na notação vetorial e considerando os torques perturbadores  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  relacionados linearmente com as velocidades angulares do veículo  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ , isto é,  $\dot{\omega} = [a_x\omega_y\omega_z \ a_y\omega_x\omega_z \ a_z\omega_x\omega_y]^T + I^{-1}M\omega + I^{-1}u$ , em que  $I = \text{diag}(I_{xx} \ I_{yy} \ I_{zz})$  denota a matriz de inércia,  $u = [U_x \ U_y \ U_z]^T$  o vetor dos torques de controlo, e  $M$  a matriz dos torques perturbadores total, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x\omega_y\omega_z \\ a_y\omega_x\omega_z \\ a_z\omega_x\omega_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{x1}/I_x & m_{x2}/I_x & m_{x3}/I_x \\ m_{y1}/I_y & m_{y2}/I_y & m_{y3}/I_y \\ m_{z1}/I_z & m_{z2}/I_z & m_{z3}/I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

A matriz dos torques perturbadores totais depende das próprias características do veículo espacial bem como das características da sua órbita/trajetória e é dada por  $M = M_a + M_e + M_s + M_g + M_m + \dots$ , onde  $M_a$  denota a matriz do torque aerodinâmico,  $M_e$  a matriz do torque eletromagnético,  $M_s$  a matriz do torque devido à radiação solar,  $M_g$  a matriz do torque gravitacional,  $M_m$  a matriz do torque devido aos meteoritos, e ... matrizes de torque adicionais.

Note-se que se tomarmos  $I_{xx} = 2I_{yy} = 2I_{zz} \Rightarrow (a_x, a_y, a_z) = (0, -1, 1)$ , que é uma prática comum no projeto de um veículo espacial simétrico em relação ao eixo axial para estabilizar o movimento de rotação em torno do eixo do  $x$ , e tomarmos a matriz dos torques perturbadores totais,  $M$ , tal que:

$$I^{-1}M = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

pode ser demonstrado facilmente que o sistema (5.40) na sua forma perturbada e não-controlada torna-se absolutamente igual ao sistema de Lorenz generalizado (5.42), que exhibe um atrator caótico no seu espaço de fases e tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo,  $\lambda = (0.90, 0, -14.57)$  (Lorenz, 1963).

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

### Aplicação do controlo da secção (4.2):

Uma vez que a técnica proposta na secção (4.2) requer que as saídas do sistema estejam escritas na forma de combinações lineares das variáveis de estado,  $y = Cx$ , e as saídas desejadas são, pelo contrário, funções não-lineares das variáveis de estado (ângulos de atitude  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  são funções não-lineares dos quaterniões), pode-se considerar, na fase de projeto do controlador, que os quaterniões são as saídas reais do sistema, e calcular-se as saídas de referência à parte através dos ângulos de atitude de referência como indicado em (5.39). Isto é, considerar que  $y = q = C[\omega \ q]^T \Rightarrow C = [0_{4 \times 3} \ I_4] \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$ . Observando o sistema (5.40), a matriz de controlo é  $B = I^{-1}$ .

O sistema aumentado como requerido em (4.34),  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \varphi_a(x_a)$ , vem da forma (5.43), e se calcularmos  $A$ , por exemplo, no ponto  $x^* = [\omega^* \ q^*]^T$  com  $\omega^* = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z] = [30 \ 30 \ 30]^\circ/s$  e  $q^* = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$  de tal modo que  $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)^\circ$ , o sistema pode ser perfeitamente controlado pela técnica proposta na secção (4.2), isto é, com a lei de controlo (4.38), dado que o par  $(A_a, B_a)$  é estabilizável,  $\text{rank}(M_c) = 10 = n_a$ , e  $A_a$  tem todos os seus valores próprios com partes reais não positivas. Neste caso em particular, o ponto  $x^*$  não pode ser a origem porque neste ponto o sistema aumentado resultante não é estabilizável.

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{3 \times 7} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7 \times 3} \\ L \end{bmatrix} \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \begin{bmatrix} B u_c + \varphi(x) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 10} & 0_{10 \times 4} \\ 0_{4 \times 10} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(\partial f / \partial x \cdot f(x) - A \cdot f(x))^T, \ 0_{1 \times 3}]^T \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Considere-se que o objetivo do controlo consiste em estabilizar a atitude do veículo espacial em torno da origem  $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)^\circ$  quando este é perturbado de acordo com a perturbação (5.41). As saídas de referência a serem seguidas são então constantes e iguais a  $y_r(t) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Considerando um sistema de referência quadridimensional dado por  $\dot{x}_r = A_r x_r + \varphi_r(x_r)$  como requerido em (4.29), as saídas de referência  $y_r = C_r x_r$  são facilmente obtidas colocando  $A_r = 0_{4 \times 4}$  e  $\varphi_r(x_r) = 0_{4 \times 1}$ ,  $C_r = I_4$  e inicializando-o com  $x_{r,0} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Desta forma, tem-se que  $y_r(t) = x_r(t) = x_{r,0}$  uma vez que  $\dot{x}_r = 0$ .

### Simulação 1:

Nesta aplicação, os sistemas aumentados (5.43) e (5.44) são resolvidos em simultâneo pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$

e  $t_f = 15$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.45). Para estas condições iniciais e para os momentos de inércia  $(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) = (40, 20, 20)$  kg.m<sup>2</sup>, que representa por exemplo um microssatélite (para  $m < 100$  kg, o momento de inércia normalmente não é maior que 20 kg.m<sup>2</sup> (Yang & Sun, 2002)), a atitude do veículo não-controlado é caótica e as suas velocidades angulares, governadas pelo primeiro conjunto de equações diferenciais (5.37), exibem um atrator do tipo Lorenz no seu espaço de fases como mostrado na Figura (5.34). O parâmetro  $k$  requerido em (5.37) foi definido como  $k = 1/\delta t$ , os parâmetros assumidos para o controlador são os apresentados em (5.46), e as restrições assumidas para os controlos (torques e taxas) em (5.47).

Condições iniciais:

$$x_0 = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, q_0, q_1, q_2, q_3]^T, \text{ com: } \begin{aligned} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= (10, 10, 10) \text{ }^\circ/\text{s} \\ (q_0, q_1, q_2, q_3) &\text{ tais que: } (\phi, \theta, \psi) = (30, 45, 30) \text{ }^\circ \end{aligned}$$

$$x_{r,0} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T, \text{ tais que: } (\phi_r, \theta_r, \psi_r) = (0, 0, 0) \text{ }^\circ \quad (5.45)$$

$$u_{s,0} = -u_c, \quad \varphi_{a,0} = \begin{bmatrix} Bu_c + \varphi(x_0) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

Parâmetros do controlador:

$$\varepsilon = 100, \quad \gamma = 0.4, \quad R = I_3, \quad Q = \varepsilon \cdot I_{10} \quad (5.46)$$

Restrições dos atuadores:

$$\begin{aligned} -200 \leq u_1 \leq 150 & \quad |\dot{u}_1| \leq 3000 \\ -150 \leq u_2 \leq 150 & \quad , \quad |\dot{u}_2| \leq 2500 \\ -150 \leq u_3 \leq 200 & \quad |\dot{u}_3| \leq 2000 \end{aligned} \quad (5.47)$$

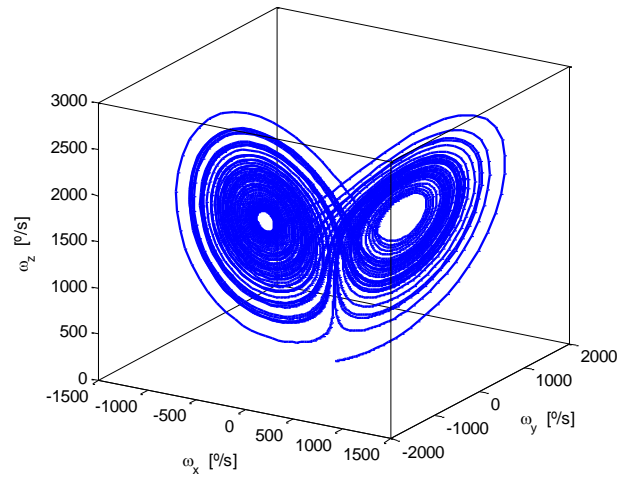


Figura 5.34. Atrator do tipo Lorenz: espaço de fases das velocidades angulares do veículo não-controlado,  $u = 0$ .

As Figuras (5.35) e (5.36) representam a atitude do veículo espacial, descrita em termos de ângulos de Euler. A Figura (5.35) mostra a evolução ao longo do tempo dos ângulos eulerianos  $(\phi, \theta, \psi)$  juntamente com os ângulos de referência  $(\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref})$ , e a Figura (5.36) as velocidades angulares do veículo,  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , relativamente aos eixos do corpo/veículo  $x, y, z$ , respetivamente. Os torques de controlo aplicados em cada eixo para estabilizar o veículo em torno da origem são mostrados na Figura (5.37) e as respetivas taxas na Figura (5.38). O controlo é ativado a partir do instante inicial,  $t_{uon} = 0$  s.

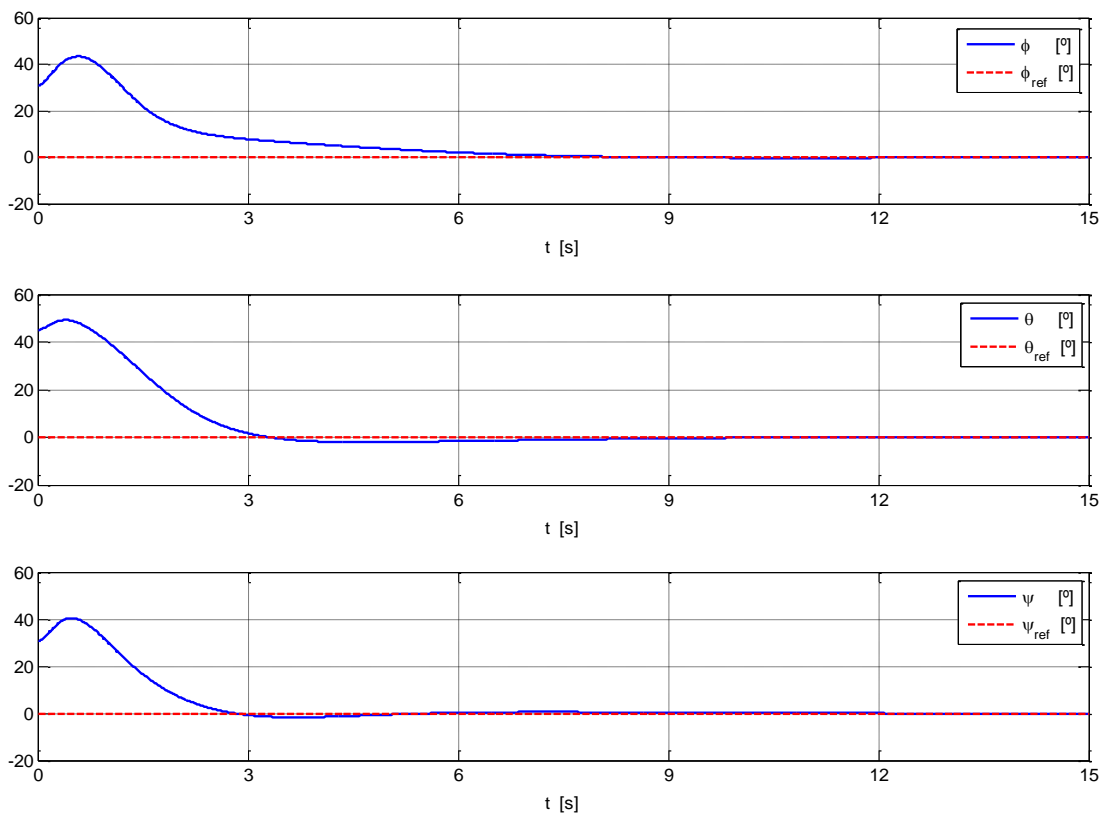


Figura 5.35. Atitude do veículo espacial em termos de ângulos de Euler segundo os eixos  $x', y', z'$ .

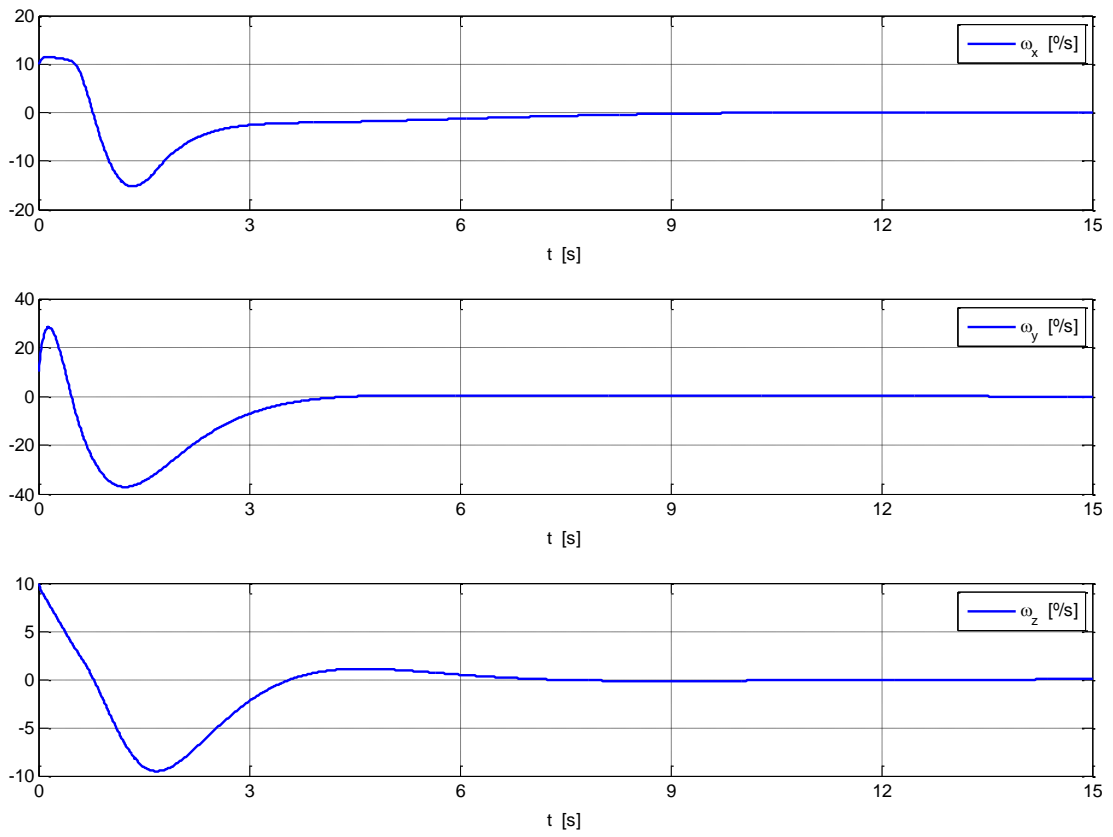


Figura 5.36. Velocidades angulares do veículo espacial segundo os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

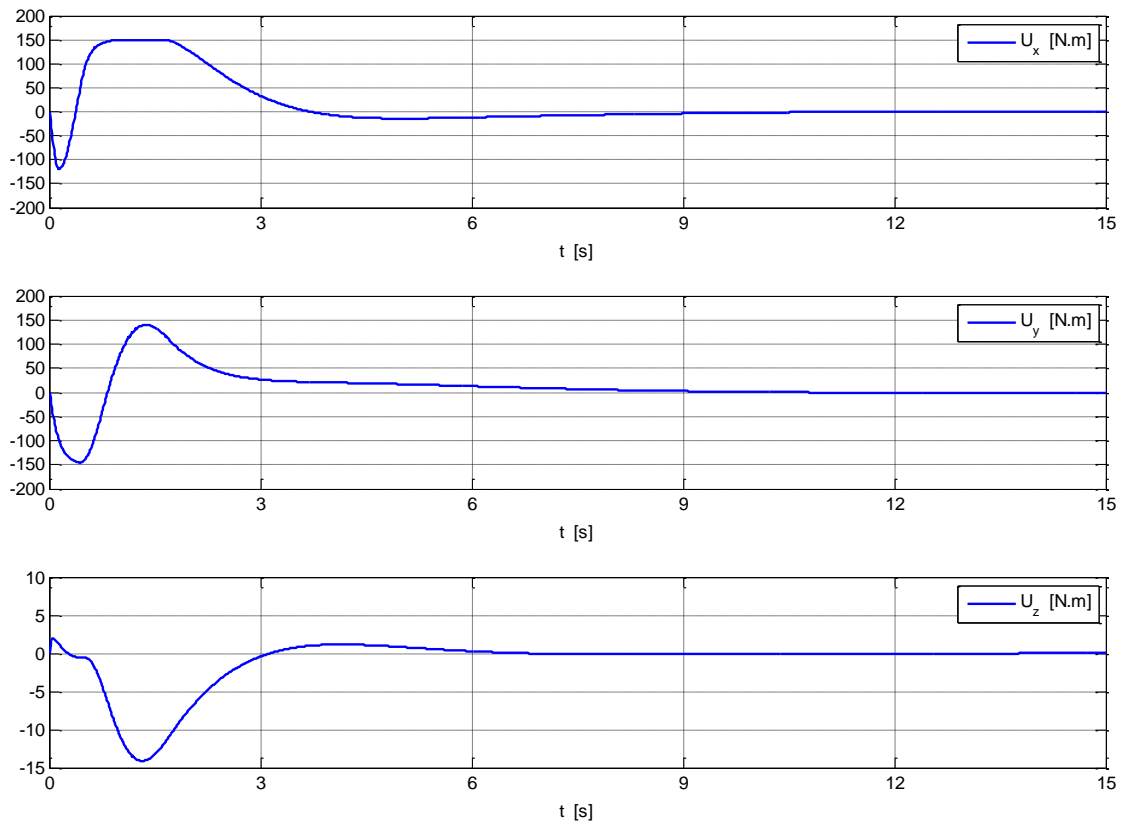


Figura 5.37. Torques de controle aplicados ao veículo segundo os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :  
 $-200 \leq U_x \leq 150$ ,  $-150 \leq U_y \leq 150$ ,  $-150 \leq U_z \leq 200$ .

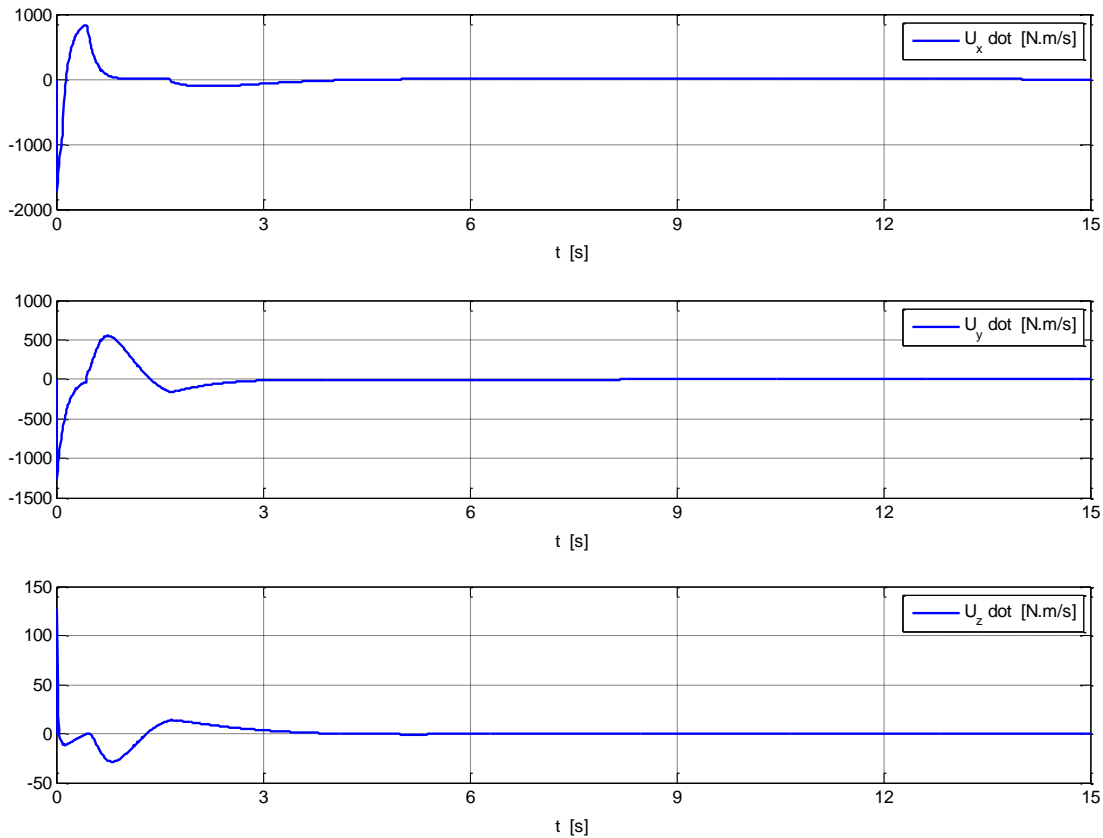


Figura 5.38. Taxas dos torques de controlo aplicados ao veículo:  $|\dot{U}_x| \leq 3000$ ,  $|\dot{U}_y| \leq 2500$ ,  $|\dot{U}_z| \leq 2000$ .

#### Discussão relativa ao controlo da secção (4.2):

Os resultados confirmam a eficácia e a robustez da técnica proposta. A atitude do veículo espacial é estabilizada em torno da origem,  $(\phi, \theta, \psi) = (\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}) = (0, 0, 0)^\circ \Rightarrow (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, 0)^\circ/s$ , mesmo na presença de torques perturbadores, que, na ausência de controlo,  $u = 0$ , desencadeariam uma dinâmica de atitude caótica. O erro da saída é mantido estável no sentido de Lyapunov,  $\|e_y(t)\| \leq \delta$ , e que na verdade até é mesmo assintoticamente estável,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_y(t)\| = 0$ , dada a natureza da relação entre os torques perturbadores e as velocidades angulares do veículo, isto é,  $M\omega$ , e as restrições impostas nas magnitudes e nas taxas dos atuadores, do tipo assimétricas (nas magnitudes), são efetivamente cumpridas,  $-200 \leq u_1 \leq 150$ ,  $-150 \leq u_2 \leq 150$ ,  $-150 \leq u_3 \leq 200$ , e  $|\dot{u}_1| \leq 3000$ ,  $|\dot{u}_2| \leq 2500$ ,  $|\dot{u}_3| \leq 2000$ , ver Figuras (5.35) a (5.38).

Um dos parâmetros do controlador,  $\varepsilon$ , permite que o projetista possa encontrar um compromisso entre a ordem de grandeza do erro da saída e o esforço do controlo. Quanto maior o valor de  $\varepsilon$ , menor é o erro da saída  $e_y$ , e consequentemente, maior o esforço do controlo efetivo  $u$ . Um outro parâmetro,  $\gamma$ , permite deslocar os valores próprios da matriz em realimentação fechada para a esquerda na direção do eixo real no plano complexo. Este parâmetro ajuda a garantir que a matriz de realimentação fechada do sistema aumentado é de facto estável. No entanto, é preciso ter em atenção que, dependendo dos valores de  $\varepsilon$  e  $\gamma$ ,

a solução da Equação Algébrica de Riccati (4.39), ou seja,  $P_e$ , poderá não existir, ou então não ser única. Por outro lado, se estes parâmetros forem muito grandes, o sistema controlado poderá não ser estável porque o esforço do controlo terá que ser, naturalmente, maior, mas este tem que satisfazer, simultaneamente, as restrições das magnitudes e das taxas impostas pelos atuadores. Para ajudar a contornar o problema, um outro parâmetro - uma matriz diagonal de ponderação,  $R$ , - pode ser ajustada de modo a que a equação de Riccati tenha uma única solução e/ou de modo também a que o esforço do controlo seja menor. Quanto maior os elementos desta matriz diagonal,  $R$ , menor as magnitudes das variáveis de controlo.

A abordagem apresentada na secção (4.2) vem aumentar o campo de aplicação perante as outras técnicas de controlo, já que existem algumas aplicações/sistemas altamente exigentes, como o caso de sistemas no campo aeroespacial, que requerem restrições de controlo assimétricas (relativamente à origem), ao invés de simétricas, e nesse sentido a secção (4.2) contribui com uma solução engenhosa. Note-se, no entanto, que a abordagem pode ser também aplicada com êxito a sistemas que requeiram restrições de entrada simétricas uma vez que restrições simétricas constituem um caso particular de assimétricas.

### 5.2.3. Aplicação 3: Posição de um Veículo Espacial (PCR3BP)

O problema restrito de três corpos refere-se a um sistema gravitacional compreendendo três corpos, em que um dos corpos, assumido de massa desprezável em relação a cada um dos outros dois, move-se no espaço envolvente devido às forças gravitacionais exercidas pelos dois corpos primários. Do ponto de vista do projeto de missões espaciais, o problema é de extrema relevância, sendo estudado muitas vezes quando se trata, por exemplo, da transferência orbital de um veículo espacial entre um planeta e uma lua. É bem sabido que embora o movimento dos dois corpos primários seja conhecido, o movimento do terceiro corpo já não o é, e não pode ser previsto a não ser numericamente dado que o problema não tem uma solução analítica geral (Diacu, 1996). Por outro lado, ocorre um fenómeno interessante: para algumas condições iniciais, que na verdade correspondem a alguns pontos da trajetória, a trajetória do veículo torna-se caótica. Alguns investigadores têm recorrido então à alta sensibilidade das condições iniciais para realizar manobras orbitais a um gasto mínimo de combustível, que tem sido reportado como sendo mais baixo do que o combustível requerido pela transferência clássica de Hohmann (Boltt & Meiss, 1995; Macau & Grebogi, 2006).

Seguindo as referências (Koon, Lo, Marsden, & Ross, 2001; Mingotti, Topputo, & Bernelli-Zazzera, 2009), a dinâmica essencial do sistema tridimensional Terra-Lua-Veículo pode ser capturada por um modelo bidimensional, dado que as excentricidades orbitais médias da Terra e da Lua são 0.017 e 0.055, respetivamente, e que a inclinação da órbita da Lua relativamente à órbita da Terra é de  $5.15^\circ$  (valores baixos). Um modelo bidimensional

*standard* do problema restrito de três corpos é obtido considerando um referencial baricêntrico, rotativo no sentido contrário dos ponteiros do relógio, com velocidade angular,  $\omega$ , normalizada a 1, com a distância entre a Terra e a Lua,  $l^*$ , e a soma das suas massas,  $m^* = m_E + m_M$ , normalizadas também a 1, e com o tempo característico,  $t^*$ , definido de forma a que a constante gravitacional universal adimensionalizada,  $G^*$ , seja igualmente 1, isto é, com  $t^* = (l^{*3}/(Gm^*))^{1/2}$ . Neste referencial, a Terra e a Lua têm massas  $m_E = 1 - \mu$  e  $m_M = \mu$ , respetivamente, e estão localizadas respetivamente em  $(x_E, y_E) = (-\mu, 0)$  e  $(x_M, y_M) = (1 - \mu, 0)$ , como ilustrado na Figura (5.39). O parâmetro  $\mu \in [0, 1]$  representa o rácio de massa do problema restrito de três corpos e é dado por  $\mu = m_M/m^*$ .

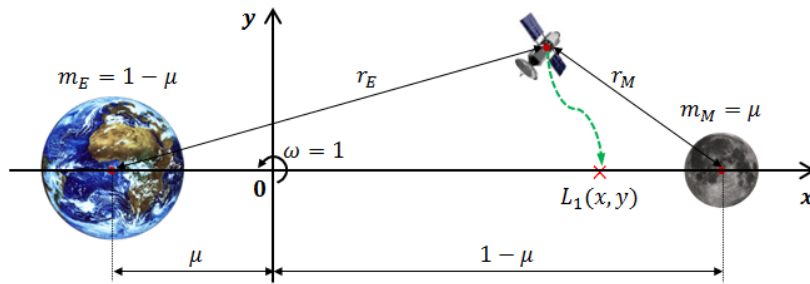


Figura 5.39. Geometria do Problema Restrito de Três Corpos Plano e Circular (PCR3BP) com grandezas normalizadas.

O modelo matemático do sistema Terra-Lua-Veículo Espacial, com unidades adimensionais, é descrito por (Caillau, Daoud, & Gergaud, 2012; No, Lee, Jeon, Lee, & Kim, 2012):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{1-\mu}{r_E^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_M^3}(x-1+\mu) \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \frac{1-\mu}{r_E^3}y - \frac{\mu}{r_M^3}y\end{aligned}\tag{5.48}$$

onde  $(x, y)$ ,  $(\dot{x}, \dot{y})$ ,  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  denota a posição, a velocidade e a aceleração do veículo espacial, respetivamente, e  $r_E$ ,  $r_M$  as distâncias entre o veículo e a Terra e a Lua, respetivamente,  $r_E = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ ,  $r_M = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$ .

Considerando a transformação de variáveis:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = \dot{x}$ ,  $x_4 = \dot{y}$ , o sistema (5.48) reduz à forma de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_4 - \frac{1-\mu}{r_E^3}(x_1+\mu) - \frac{\mu}{r_M^3}(x_1-1+\mu) + u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_2 - 2x_3 - \frac{1-\mu}{r_E^3}x_2 - \frac{\mu}{r_M^3}x_2 + u_2\end{aligned}\tag{5.49}$$

que, por sua vez, pode ser escrito como  $\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x)$  com  $\varphi(x) = f(x) - Ax$  e  $A = \partial f / \partial x$ . Nas últimas duas equações do sistema (5.49),  $u_1$  e  $u_2$  são duas variáveis de controlo adicionais correspondendo às acelerações de controlo do veículo espacial na direção de  $x$  e  $y$ , respetivamente. A matriz de controlo resultante,  $B$ , é:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2} \quad (5.50)$$

O sistema (5.49) tem cinco pontos de equilíbrio, designados tipicamente na mecânica orbital como os cinco pontos de libração ou pontos de Lagrange, e as suas localizações são encontradas resolvendo o sistema (5.49) na sua forma não-controlada, isto é, com  $u = 0$ ,  $\dot{x} = f(x, u) = 0$ . Três dos pontos são colineares com o eixo  $x$  e os dois restantes localizados de tal modo que formam triângulos equiláteros simétricos com os corpos principais.

#### Aplicação do controlo da secção (4.2):

Seguidamente, usar-se-á a abordagem de controlo proposta na secção (4.2) para efetuar uma manobra orbital considerando o sistema Terra-Lua-Veículo Espacial. O objetivo consiste em direcionar o veículo para um dos pontos lagrangianos, partindo do pressuposto que o veículo encontra-se num movimento caótico. Considere-se para este efeito o ponto  $L_1(x, y)$ , que se encontra localizado entre a Terra e a Lua em  $L_1(0.8369, 0)$ .

Dado que  $x_3 = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{x}_2$ , considere-se que  $x_1$  e  $x_2$  são as saídas do sistema (5.49). A matriz de saída resultante,  $C$ , é:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \quad (5.51)$$

O sistema aumentado requerido em (4.34),  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \varphi_a(x_a)$ , vem na forma (5.52), e se  $A$  for calculada no ponto  $x^* = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0.8369, 0, 0, 0]^T$ , o sistema pode ser perfeitamente controlado através da técnica proposta na secção (4.2), isto é, pela lei de controlo (4.38), dado que o par  $(A_a, B_a)$  é estabilizável,  $\text{rank}(M_c) = 6 = n_a$ , e  $A_a$  tem todos os seus valores próprios com partes reais não positivas.

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{2 \times 4} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ L \end{bmatrix} \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \begin{bmatrix} Bu_c + \varphi(x) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(\partial f / \partial x \cdot f(x) - A \cdot f(x))^T, 0_{1 \times 2}]^T \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Sendo  $L_1$  o destino final do veículo espacial, as saídas de referência a serem seguidas são constantes e iguais a  $y_r(t) = [x_1, x_2]^T = [0.8369, 0]^T$ . Considerando um sistema de referência bidimensional dado por  $\dot{x}_r = A_r x_r + \varphi_r(x_r)$  como requerido em (4.29), as saídas de referência  $y_r = C_r x_r$  podem ser facilmente obtidas colocando  $A_r = 0_{2 \times 2}$  e  $\varphi_r(x_r) = 0_{2 \times 1}$ ,  $C_r = I_2$ , e inicializando com  $x_{r,0} = [x_1, x_2]^T = [0.8369, 0]^T$ . Desta forma,  $\dot{x}_r = 0$  e conseqüentemente  $y_r(t) = x_r(t) = x_{r,0}$ .

### Simulação 1:

No que se segue, os sistemas aumentados (5.52) e (5.53) são resolvidos em simultâneo pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 180$  tu, com um passo de  $\delta t = 0.002$  tu, e partindo das condições iniciais (5.54). Para estas condições iniciais e para os parâmetros do sistema Terra-Lua especificados na Tabela (5.1), a trajetória do veículo não-controlado é caótica no espaço. O controlo é então ativado em  $t_{uon} = 150$  tu para redirecionar o veículo para o ponto de Lagrange  $L_1$ . Os parâmetros assumidos para o controlador são os apresentados em (5.55) e a restrições dos controlos (acelerações e jerks) em (5.56). Note-se que o tempo é adimensional e, portanto, apresentado em tu (*time units*). O cálculo do tempo-real requer que  $t$  seja multiplicado por  $t^*$ ,  $1 \text{ tu} = 4.342$  dias, e o mesmo tem de ser feito para as distâncias, velocidades e acelerações adimensionais,  $1 \text{ du} = 384400 \text{ km}$ ,  $1 \text{ vu} = \text{du/tu}$  e  $1 \text{ acu} = \text{du/tu}^2$ .

Tabela 5.1. Parâmetros do sistema Terra-Lua.

Parâmetro		Valor
Massa da Terra:	$m_E$	$5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$
Massa da Lua:	$m_M$	$7.346 \times 10^{22} \text{ kg}$
Parâmetro mássico:	$\mu$	0.01215
Distância média Terra-Lua:	$l^*$	384400 km
Tempo característico:	$t^*$	$3.752 \times 10^5 \text{ s}$ , 4.342 dias
Constante gravitacional:	$G$	$6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

Condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_0 = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T &= [0.8369, 0, -0.0976, 0]^T, \quad x_{r,0} = [x_1, x_2]^T = [0.8369, 0]^T \\ u_{s,0} &= -u_c, \quad \varphi_{a,0} = \begin{bmatrix} Bu_c + \varphi(x_0) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Parâmetros do controlador:

$$\varepsilon = 1.0, \quad \gamma = 1.5, \quad R = I_2, \quad Q = \varepsilon \cdot I_6 \quad (5.55)$$

Restrições dos atuadores:

$$\begin{aligned} -0.3 \leq u_1 \leq 1.8, \quad |\dot{u}_1| \leq 180 \\ -2.0 \leq u_2 \leq 0.2, \quad |\dot{u}_2| \leq 200 \end{aligned} \quad (5.56)$$

As Figuras (5.40) e (5.41) mostram respectivamente a posição e a velocidade do veículo em planos de fases separados, e as Figuras (5.42) e (5.43) as respectivas evoluções ao longo do tempo. As acelerações de controlo e as respectivas taxas (*jerks*) requeridas em cada direção do referencial baricêntrico rotativo para direcionar o veículo para o ponto de libertação  $L_1$  são mostradas na Figuras (5.44) e (5.45), respectivamente. As linhas azuis/tracejadas indicam o comportamento do veículo antes do controlo ser ativado, e as linhas vermelhas/sólidas o comportamento com o controlo ativado,  $t \geq t_{u_{on}} = 150 \text{ tu}$ , e todos os gráficos são apresentados em unidades dimensionais. As Figuras (5.40) e (5.42) representam também as saídas do sistema - a posição do veículo espacial.

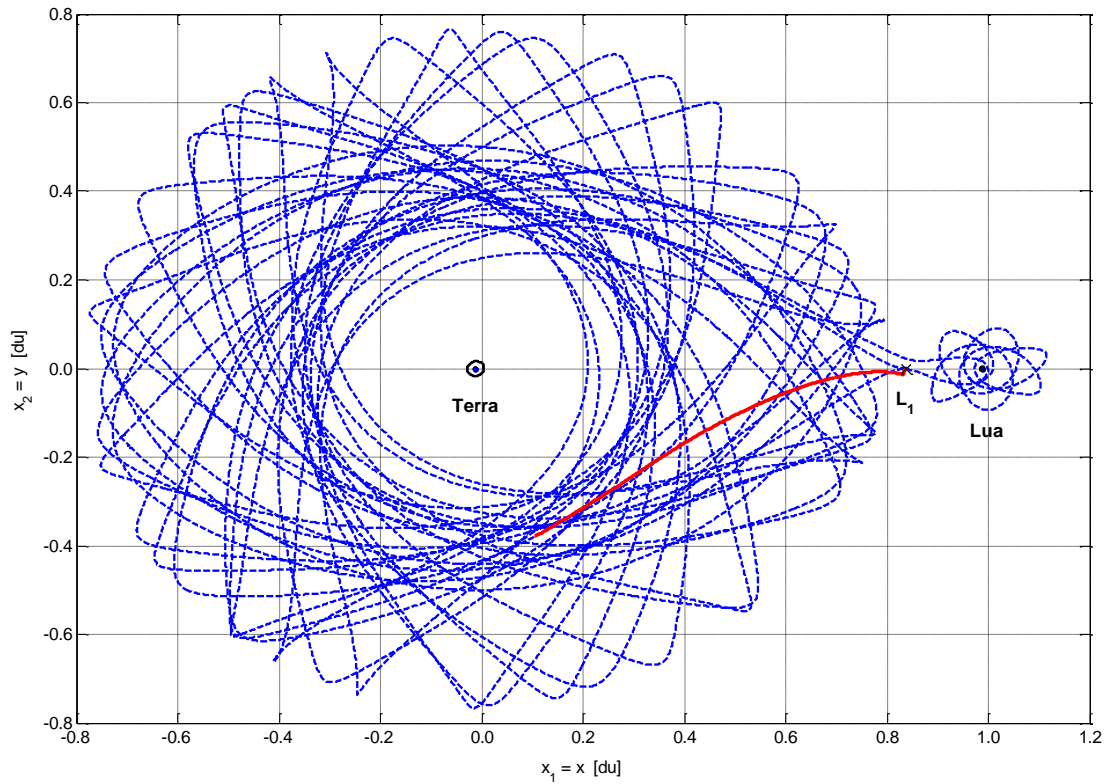


Figura 5.40. Posição normalizada do veículo espacial no sistema Terra-Lua-Veículo. A trajetória azul/tracejada refere-se à posição do veículo sem controle e a vermelha/sólida à posição com o controle ativado. (plano de fase  $(x, y)$ ).

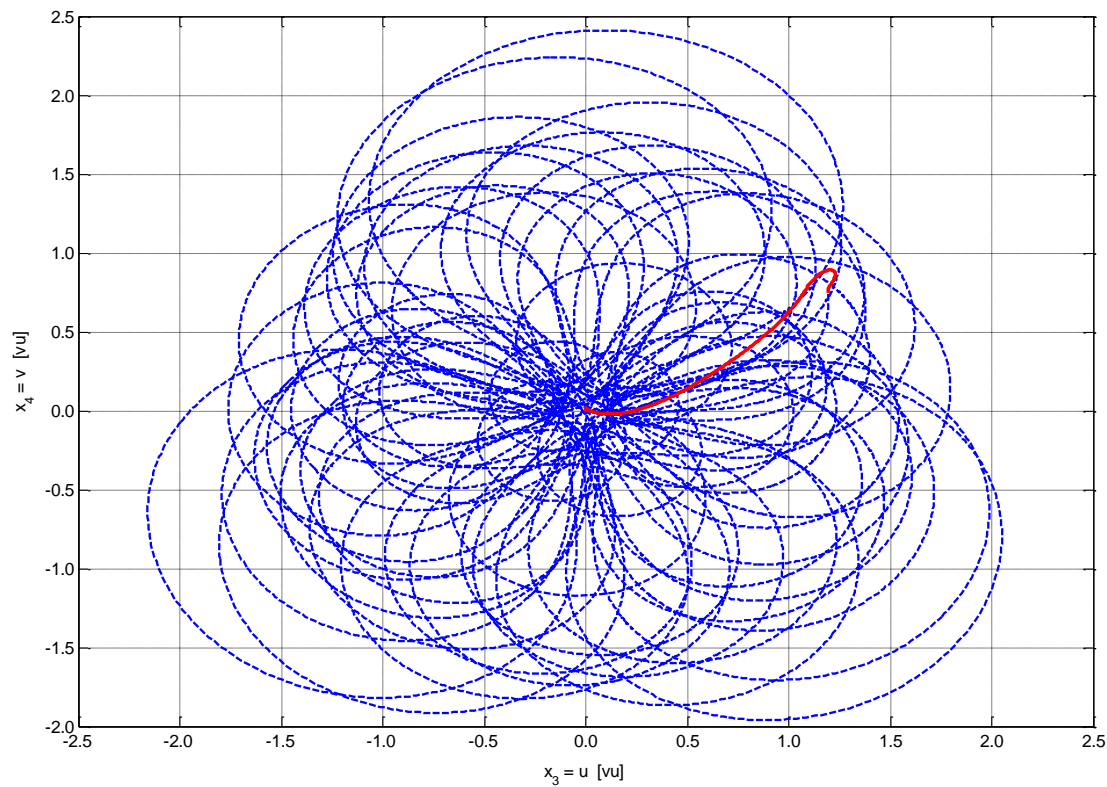


Figura 5.41. Velocidade normalizada do veículo espacial no sistema Terra-Lua-Veículo. A trajetória azul/tracejada refere-se à velocidade do veículo sem controle e a vermelha/sólida à velocidade com o controle ativado. (plano de fase  $(u, v)$ ).

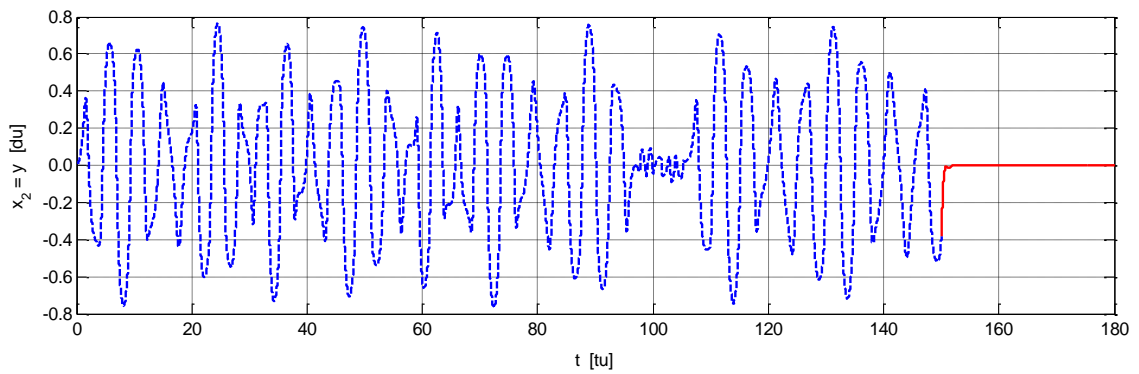
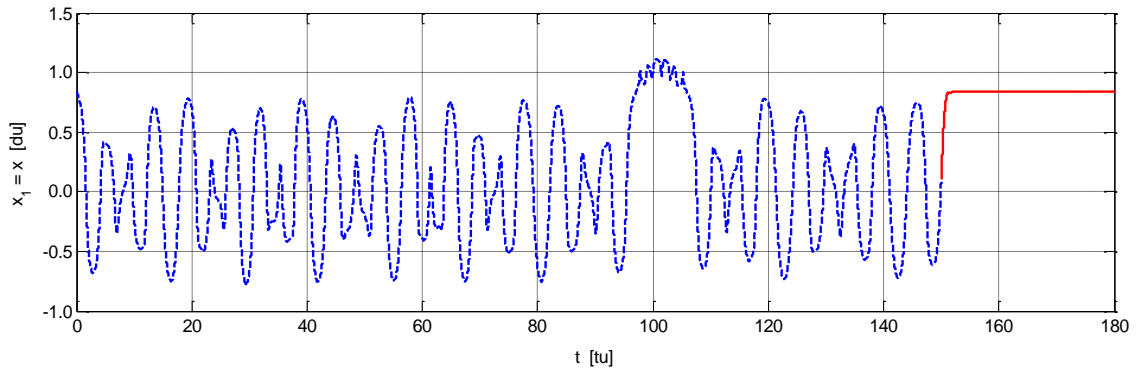


Figura 5.42. Posição normalizada do veículo espacial ao longo do tempo.

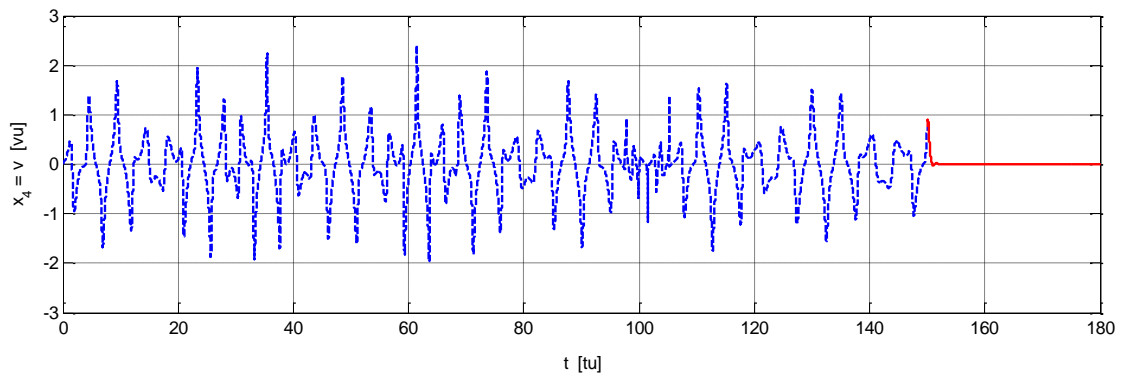
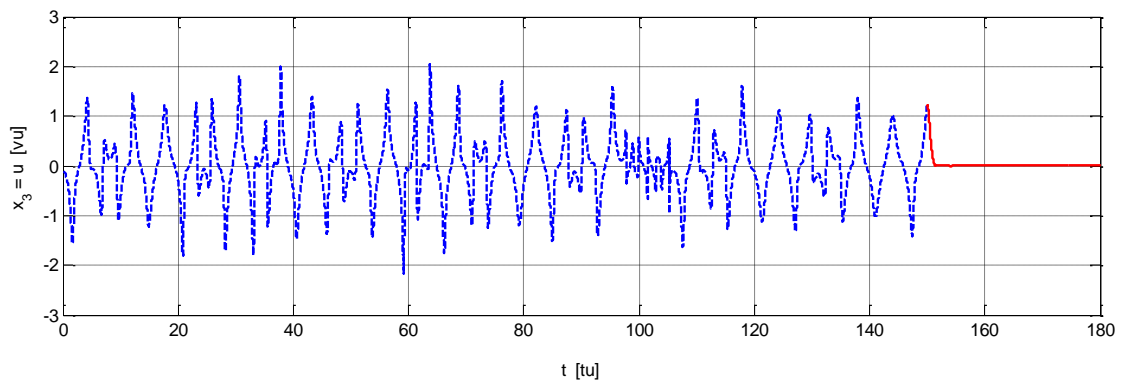


Figura 5.43. Velocidade normalizada do veículo espacial ao longo do tempo.

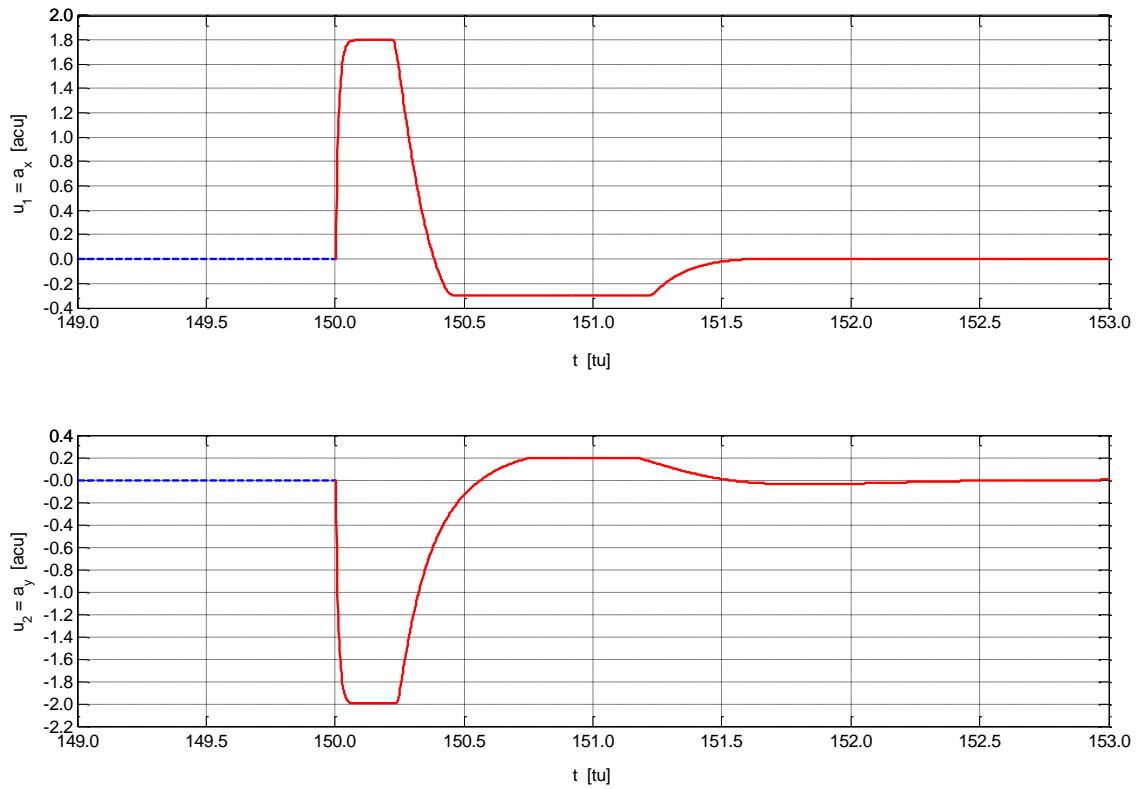


Figura 5.44. Acelerações de controlo normalizadas do veículo segundo as direções  $x$ ,  $y$  na vizinhança do instante em que o controlo é ligado:  $-0.3 \leq a_x \leq 1.8$ ,  $-2.0 \leq a_y \leq 0.2$ .

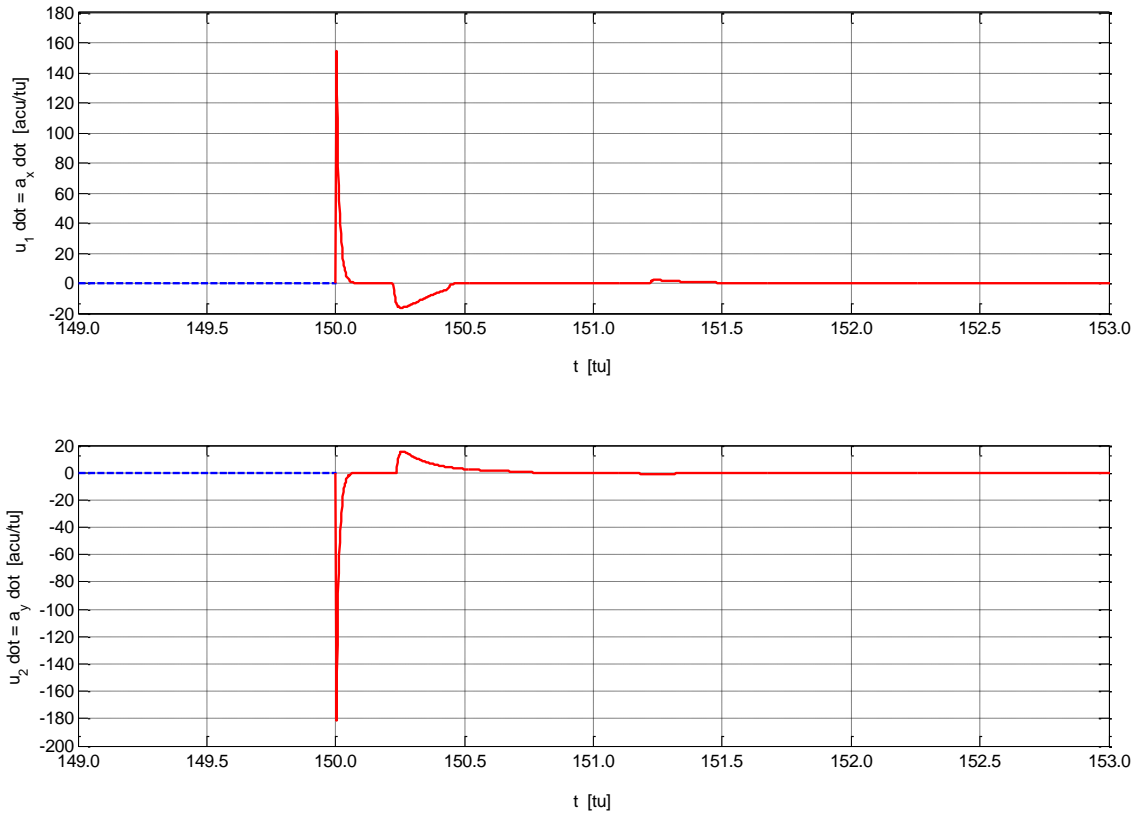


Figura 5.45. Jerks de controlo normalizados do veículo segundo as direções  $x$ ,  $y$  na vizinhança do instante em que o controlo é ligado:  $|\dot{a}_x| \leq 180$ ,  $|\dot{a}_y| \leq 200$ .

#### Discussão relativa ao controlo da secção (4.2):

Os resultados comprovam mais uma vez que o controlo formulado na secção (4.2) é capaz de direcionar o erro da saída de um sistema não-linear com dinâmica caótica para a origem cumprindo as restrições impostas no controlo. O veículo espacial é direcionado para o ponto de Lagrange  $L_1(x, y) = L_1(0.8369, 0)$ , sem exceder em qualquer instante as acelerações de controlo efetivas, consideradas assimétricas,  $-0.3 \leq u_1(t) \leq 1.8$ ,  $-2.0 \leq u_2(t) \leq 0.2$  [acu], bem como os respetivos *jerks*, considerados simétricos,  $|\dot{u}_1(t)| \leq 180$ ,  $|\dot{u}_2(t)| \leq 200$  [acu/tu], mantendo posteriormente a sua posição  $(x, y)$  estável no sentido de Lyapunov,  $\|e_y(t)\| = \|[x \ y]^T - [x_r \ y_r]^T\| \leq \delta$ , ou na verdade até mesmo assintoticamente estável,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_y(t)\| = 0$ , dado que o modelo não é sujeito a perturbações persistentes, ver Figuras (5.40) a (5.45).

Como já mencionado na aplicação anterior, os parâmetros do controlador  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  e  $R$  podem ser ajustados por forma a achar um compromisso entre a ordem de grandeza do erro da saída, o esforço do controlo, o tempo de assentamento (já que ao diminuir o esforço do controlo o tempo de assentamento aumenta), e o próprio grau de robustez do controlador.

Simulações foram também realizadas partindo de diferentes condições iniciais,  $x_0$ , com diferentes passos de simulação,  $\delta t$ , para diferentes instantes de ativação do controlo,  $t_{uon}$ , para diferentes limites de saturação,  $u_{i,min}$ ,  $u_{i,max}$ ,  $\dot{u}_{i,max}$ ,  $i = 1, 2$ , e para diferentes valores dos parâmetros  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  e  $R$ , e em qualquer dos casos o controlo revelou-se eficaz.

Tenha-se em atenção, no entanto, que apesar do tempo de assentamento ser relativamente curto, aproximadamente  $1.5 t_u \cong 6.5$  dias, e portanto aliciar à aplicação do método nesta aplicação em particular, a presente simulação tem simplesmente por objetivo mostrar que o controlo é eficaz. Pois, numa manobra orbital real, esta deve ser planeada pormenorizadamente de modo a aproveitar ao máximo os campos gravitacionais e a aplicar o controlo de forma inteligente, ativando-o somente em instantes específicos, a fim de gastar o mínimo de combustível possível.

#### 5.2.4. Aplicação 4: Sistema Aeroelástico (Asa de um Avião)

No campo aeronáutico, um sistema aeroelástico refere-se a um sistema de uma aeronave que inclui uma asa ou uma cauda, em que a interação da estrutura elástica com a inércia e as forças aerodinâmicas pode causar fenómenos complicados devido aos efeitos não-lineares da estrutura. É bem sabido que a partir de uma velocidade específica/crítica de voo ocorre uma oscilação ciclo limite, designada vulgarmente por *flutter*. O fenómeno surge quer em escoamento subsónico quer em escoamento supersónico, e sob condições específicas pode degenerar ao caos (Alstrom et al., 2010; Bousson, 2010; F. Chen, Zhou, & Chen, 2011; Ramesh & Narayanan, 2001; Wang et al., 2013; Zhao & Yang, 1990; Zheng & Yang, 2008). Por outro lado, se o sistema aeroelástico controlado for sujeito a restrições nos atuadores, o que acontece na realidade, podem surgir também instabilidades estruturais no sistema (Demenkov, 2008). Uma vez que tanto oscilações ciclo limite como possíveis oscilações

caóticas são fenômenos perigosos que podem levar eventualmente a falhas estruturais por fadiga do material e conseqüentemente a desastres aéreos, é necessário encontrar um controlo robusto que suprima efetivamente estes movimentos indesejados durante o voo. Além disso, o controlador tem de lidar obrigatoriamente com restrições nos atuadores, dado que as amplitudes e as velocidades com que as superfícies de controlo podem operar são limitadas, quer devido a limitações mecânicas, elétricas, aerodinâmicas, ou mesmo por questões de segurança ou de conforto dos passageiros.

Nesta subsecção aplica-se as técnicas de controlo propostas nas secções (4.3) e (4.4) para suprimir efetivamente movimentos indesejados num sistema aeroelástico. Seguindo as referências (Chen, Peng, & Yau, 2012; Demenkov, 2008; Platanitis & Strganac, 2004; Wang et al., 2013), o modelo da estrutura de uma asa, com dois graus de liberdade, inclui uma mola linear orientada ao longo do deslocamento vertical do eixo elástico, uma mola rotacional ao longo do ângulo de arfagem, amortecedores correspondentes, e a uma dada velocidade do escoamento livre a asa oscila ao longo da direção do deslocamento vertical do eixo elástico e roda no ângulo de arfagem em torno do eixo elástico. Isto é, a asa flete e torce simultaneamente em torno do eixo elástico. O controlo de ambos os movimentos é feito através de duas superfícies de controlo: uma no bordo de ataque e outra no bordo de fuga. A Figura (5.46) ilustra o respetivo sistema aeroelástico de dois graus de liberdade.

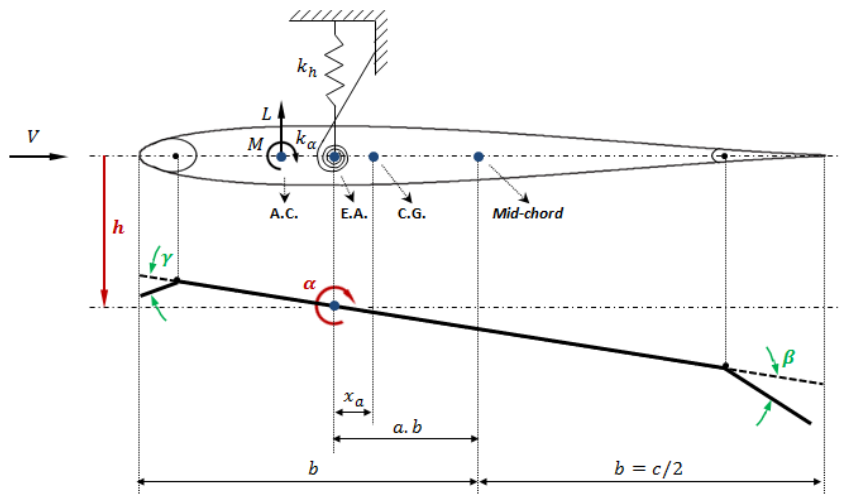


Figura 5.46. Sistema Aeroelástico com 2 DOF (graus de liberdade).

O modelo matemático do sistema aeroelástico apresentado na Figura (5.46) é (Chen et al., 2012; Demenkov, 2008; Platanitis & Strganac, 2004; Wang et al., 2013):

$$\begin{bmatrix} m_T & m_w x_a b \\ m_w x_a b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

onde o deslocamento vertical do eixo elástico (*plunge displacement*),  $h$ , e o ângulo de arfagem,  $\alpha$ , são as variáveis a serem controladas, e  $\gamma$  e  $\beta$  os ângulos de deflexão das superfícies de controlo do bordo de ataque e do bordo de fuga, respetivamente.

Os termos aerodinâmicos  $L$  e  $M$ , força de sustentação e momento de arfagem, respetivamente, podem ser modelados, para um cenário de voo subsónico,  $M_\alpha < 1$ , e oscilação de baixa frequência,  $f_{h,\alpha} < 20$  Hz, incluindo a superfície de controlo do bordo de ataque e do bordo de fuga, pelas tão conhecidas funções de Theodorsen (5.58):

$$L = \rho V^2 b C_{l\alpha} s \left[ \alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] + \rho V^2 b C_{l\beta} s \beta + \rho V^2 b C_{l\gamma} s \gamma \quad (5.58)$$

$$M = \rho V^2 b^2 C_{m\alpha-eff} s \left[ \alpha + \frac{\dot{h}}{V} + \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{V} \right] + \rho V^2 b^2 C_{m\beta-eff} s \beta + \rho V^2 b^2 C_{m\gamma-eff} s \gamma$$

em que  $\rho$  designa a massa específica do ar,  $V$  a velocidade do escoamento livre (escoamento não perturbado),  $b$  metade da corda da secção da asa (geometria retangular),  $s$  a envergadura da asa,  $a$  a distância adimensional a partir do ponto intermédio da corda até à posição do eixo elástico,  $C_{l\alpha}$  e  $C_{m\alpha}$  os coeficientes de sustentação e de momento por unidade de ângulo de ataque, respetivamente,  $C_{l\beta}$  e  $C_{m\beta}$  os coeficientes de sustentação e de momento por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de fuga, respetivamente,  $C_{l\gamma}$  e  $C_{m\gamma}$  os coeficientes de sustentação e de momento por unidade de ângulo defletido da superfície de controlo do bordo de ataque, respetivamente, e  $C_{m\alpha-eff}$ ,  $C_{m\beta-eff}$ ,  $C_{m\gamma-eff}$  os coeficientes de momento efetivos devido ao ângulo de ataque e à deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e do bordo de ataque respetivamente em torno do eixo elástico, definidos como:

$$\begin{aligned} C_{m\alpha-eff} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) C_{l\alpha} + 2C_{m\alpha} \\ C_{m\beta-eff} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) C_{l\beta} + 2C_{m\beta} \\ C_{m\gamma-eff} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) C_{l\gamma} + 2C_{m\gamma} \end{aligned} \quad (5.59)$$

No sistema (5.57),  $m_T$  representa a massa total do sistema (asa + eixo + suporte de apoio),  $m_W$  a massa total da asa (asa + eixo),  $x_\alpha$  a distância adimensional entre o centro gravítico e o eixo elástico,  $I_\alpha = I_{cam} + I_{cg-wing} + m_{wing} r_{cg}^2$  o momento total de inércia em torno do eixo elástico, onde  $I_{cam}$  designa o momento de inércia do *pitch cam*,  $I_{cg-wing}$  o momento de inércia da asa em relação do centro gravítico,  $m_{wing}$  a massa da asa, e  $r_{cg} = b x_\alpha$ ,  $c_h$  e  $c_\alpha$  os coeficientes de amortecimento do deslocamento vertical do eixo elástico e do ângulo de arfagem, respetivamente, e  $k_h$  e  $k_\alpha(\alpha)$  os coeficientes de rigidez da mola do deslocamento vertical do eixo elástico e da mola de arfagem, respetivamente.

**Aplicação do controlo da secção (4.3):**

Denotando o vetor de estado por  $x = [h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T$ , o vetor de saída por  $y = [h \ \alpha]^T$  e o vetor de controlo por  $u = [\beta \ \gamma]^T$ , o modelo dinâmico (5.57) pode ser expresso como (Demenkov, 2008):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5.60}$$

com:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -F^{-1}C_\alpha(\alpha) & -F^{-1}G \end{bmatrix} x\tag{5.61}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ -F^{-1}L \end{bmatrix}, \quad C = [I_2 \ 0_2]$$

em que:

$$F = \begin{bmatrix} m_T & m_w x_a b \\ m_w x_a b & I_\alpha \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -\rho V^2 b s C_{l\beta} & -\rho V^2 b s C_{l\gamma} \\ \rho V^2 b^2 s C_{m\beta-eff} & \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma-eff} \end{bmatrix}\tag{5.62}$$

$$G = \begin{bmatrix} c_h + \rho V b s C_{l\alpha} & \rho V b^2 s C_{l\alpha} (1/2 - a) \\ -\rho V b^2 s C_{m\alpha-eff} & c_\alpha - \rho V b^3 s C_{m\alpha-eff} (1/2 - a) \end{bmatrix}$$

$$C_\alpha(\alpha) = \begin{bmatrix} k_h & \rho V^2 b s C_{l\alpha} \\ 0 & k_\alpha(\alpha) - \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha-eff} \end{bmatrix}$$

e:

$$k_\alpha(\alpha) = k_1 + k_2 \alpha + k_3 \alpha^2$$

$$x_a = -(0.0998 + a), \quad r_{cg} = b x_a\tag{5.63}$$

$$I_\alpha = I_{cam} + I_{cg-wing} + m_{wing} r_{cg}^2$$

O deslocamento vertical do eixo elástico  $h$  e os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  são expressos em metros e radianos, respetivamente. Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela (5.2). Considere-se que as derivadas de estabilidade e de controlo são estimadas, e portanto, que

são conhecidas apenas com um dado grau de exatidão. Seja essa incerteza de 10% em torno dos valores nominais  $\theta_0$ , isto é,  $\theta \in [0.90\theta_0, 1.10\theta_0]$  onde  $\theta = [C_{l\alpha} \ C_{m\alpha} \ C_{l\beta} \ C_{m\beta} \ C_{ly} \ C_{m\gamma}]^T$ .

Tabela 5.2. Parâmetros do sistema aeroelástico.

Parâmetro	Valor	Tolerância
$\rho$	1.225 kg/m <sup>3</sup>	–
$a$	–0.6719	–
$b$	0.1905 m	–
$s$	0.5945 m	–
$k_h$	2844 N/m	–
$k_1$	12.77 Nm/rad	–
$k_2$	53.47 Nm/rad <sup>2</sup>	–
$k_3$	1003 Nm/rad <sup>3</sup>	–
$c_h$	27.43 kg/s	–
$c_\alpha$	0.0360 kg. m <sup>2</sup> /s	–
$m_{wing}$	4.340 kg	–
$m_W$	5.230 kg	–
$m_T$	15.57 kg	–
$I_{cam}$	0.04697 kg. m <sup>2</sup>	–
$I_{cg-wing}$	0.04342 kg. m <sup>2</sup>	–
$C_{l\alpha}$	6.757	±10%
$C_{m\alpha}$	0	±10%
$C_{l\beta}$	3.774	±10%
$C_{m\beta}$	–0.6719	±10%
$C_{ly}$	–0.1566	±10%
$C_{m\gamma}$	–0.1005	±10%

Note-se que todos os parâmetros assumidos como incertos encontram-se somente nos termos lineares do modelo (5.60 - 5.63), pelo que o método proposto na secção (4.3) pode ser perfeitamente aplicado. Isto é, as incertezas do modelo refletem-se apenas nos termos lineares  $\Delta Ax + \Delta Bu$  quando se reescreve o modelo na forma de um sistema linear mais perturbações, e não também em  $\Delta\varphi(x)$ , dado que a única não-linearidade do modelo encontra-se na matriz  $C_\alpha(\alpha)$ , especificamente na função  $k_\alpha(\alpha)$ , que por sua vez não contém qualquer parâmetro incerto.

Decompondo  $f(x)$  como indicado em (4.57-4.58) considerando para o efeito o estado  $x^* = [0, 10.\pi/180, 0, 0]^T$ , tem-se:

$$A_0 \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1 & 26.2 & -2.9 & -0.2 \\ 859.9 & -1011.3 & 8.7 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A_0) \cong \begin{cases} -0.195 + 32.247i \\ -0.195 - 32.247i \\ -1.352 + 13.593i \\ -1.352 - 13.593i \end{cases}$$

(5.64)

$$B_{1,0} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4.225 & -0.544 \\ 49.74 & 8.013 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}([B_{1,0} \ A_0 B_{1,0} \ A_0^2 B_{1,0} \ \dots \ A_0^{n-1} B_{1,0}]) = 4 = n$$

e, portanto, o par  $(A_0, B_{1,0})$  é controlável (primeira condição do teorema (4.3) satisfeita - secção (4.3)). Para as matrizes  $B_2, B_3, D_{13}, D_{12}, D_{21}, C_2$  especificadas em (4.56), a segunda e a terceira condição do teorema (4.3) são igualmente cumpridas:

$$D_{21}^T D_{21} = [0_{m \times n} \ I_m] \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} = I_m = I_m^{-1}$$

$$D_{21}^T C_2 = [0_{m \times n} \ I_m] \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} = 0_{m \times n}$$

(5.65)

$$\text{rank}([C_2 \ C_2 A_0 \ C_2 A_0^2 \ C_2 A_0^{n-1}]^T) = 4 = n$$

Resolvendo as equações de regulação (4.52), obtém-se:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.66)

$$\Gamma \cong \begin{bmatrix} -0.302 & -0.025 & -0.132 & -0.009 & 20.48 & 5.588 \\ 2.960 & 0.127 & 0.816 & -0.069 & -234.5 & 91.53 \end{bmatrix}$$

Calculando  $\gamma$  para a máxima incerteza admissível de acordo com (4.49 - 4.51),  $\theta = 1.10\theta_0$ , obtém-se  $\gamma = 0.1978$ , e a solução da equação algébrica de Riccati (4.55) é:

$$P \cong \begin{bmatrix} 15.38 & -14.10 & 0.163 & 0.040 \\ * & 13.67 & -0.192 & -0.005 \\ * & * & 0.019 & -0.013 \\ * & * & * & 0.013 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

onde dois parâmetros de ponderação adicionais foram tomados em consideração para ajudar a encontrar a matriz simétrica e positivamente definida,  $P = P^T, P > 0$ , iguais a  $\varepsilon_Q = 10^{-2}$  e  $\varepsilon_R = 10^4$ ,  $\varepsilon_Q, \varepsilon_R > 0$ , isto é, as matrizes  $Q$  e  $R$  definidas como  $Q = \varepsilon_Q \cdot Q$  e  $R = \varepsilon_R \cdot R$  (ver Anexo D - Resolução da Equação de Riccati do tipo  $H_\infty$  para detalhes).

Dado que o objetivo do controlo nesta aplicação em particular consiste em direcionar as saídas para a origem, um sistema de referência de dimensão dois, partindo da condição inicial nula,  $x_r(0) = [0 \ 0]^T$ , torna-se adequado para gerar as saídas desejadas  $y_r = [h \ \alpha]^T = [0 \ 0]^T$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + \varphi_r(x_r) \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned} \quad (5.68)$$

com:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_r(x_r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

### Simulação 1:

Para efeitos de simulação, as equações diferenciais dos sistemas (4.46) e (4.47) foram resolvidas em simultâneo pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 12$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.70). Na expressão (4.47),  $\mu$  foi definido em  $\mu = 100$ . A velocidade do escoamento livre foi definida em  $V = 13.40$  m/s e corresponde a uma velocidade 25% acima da velocidade de *flutter* prevista numericamente,  $V_F = [10.72, 10.73]$  m/s. O controlo é ligado em  $t_{u_{on}} = 6$  s, um instante no qual o sistema aeroelástico já se encontra numa oscilação ciclo limite. As amplitudes e velocidades das superfícies de controlo são limitadas a  $\beta, \gamma \in [-25, 25]^\circ$  e  $\dot{\beta}, \dot{\gamma} \in [-1000, 1000]^\circ/\text{s}$ , ver (5.71).

### Condições iniciais:

$$\begin{aligned}
x_0 &= [0.02 \quad 5.\pi/180 \quad 0.00 \quad 0.\pi/180]^T \\
x_{r,0} &= [0.00 \quad 0.\pi/180]^T \\
\varphi_0 &= f(x_0, \theta_0) - A_0 x_0 \\
x_{\mu,0} &= \sigma_\eta([0.\pi/180 \quad 0.\pi/180]^T)
\end{aligned}
\tag{5.70}$$

Restrições dos atuadores:

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &\leq 25.\pi/180 = \eta \\
\|\dot{u}\|_\infty &\leq 1000.\pi/180 = \nu
\end{aligned}
\tag{5.71}$$

Os resultados apresentam-se nas Figuras (5.47) a (5.50). As Figuras (5.47) e (5.48) mostram a evolução ao longo do tempo das variáveis de estado  $x = [h \quad \alpha \quad \dot{h} \quad \dot{\alpha}]^T$ , cujas duas primeiras representam também as saídas do sistema. A magnitude das variáveis de controlo, na verdade, os ângulos de deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e do bordo de ataque,  $u = [\beta \quad \gamma]^T$  são mostradas na Figura (5.49) e as suas respectivas taxas  $\dot{u} = [\dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$  na Figura (5.50). As unidades de  $h$  e de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  estão apresentadas respetivamente em centímetros e em graus para melhor interpretação física dos resultados. A Figura (5.51) mostra  $\|\Gamma w + B_{1,0}^+ \Pi r\|_\infty \equiv g_\eta$  e  $\|\Gamma S w + \Gamma r + B_{1,0}^+ \Pi \dot{r}\|_\infty \equiv g_\nu$  para verificar que a condição (iv-b) do teorema (4.3), (secção (4.3)), é cumprida.

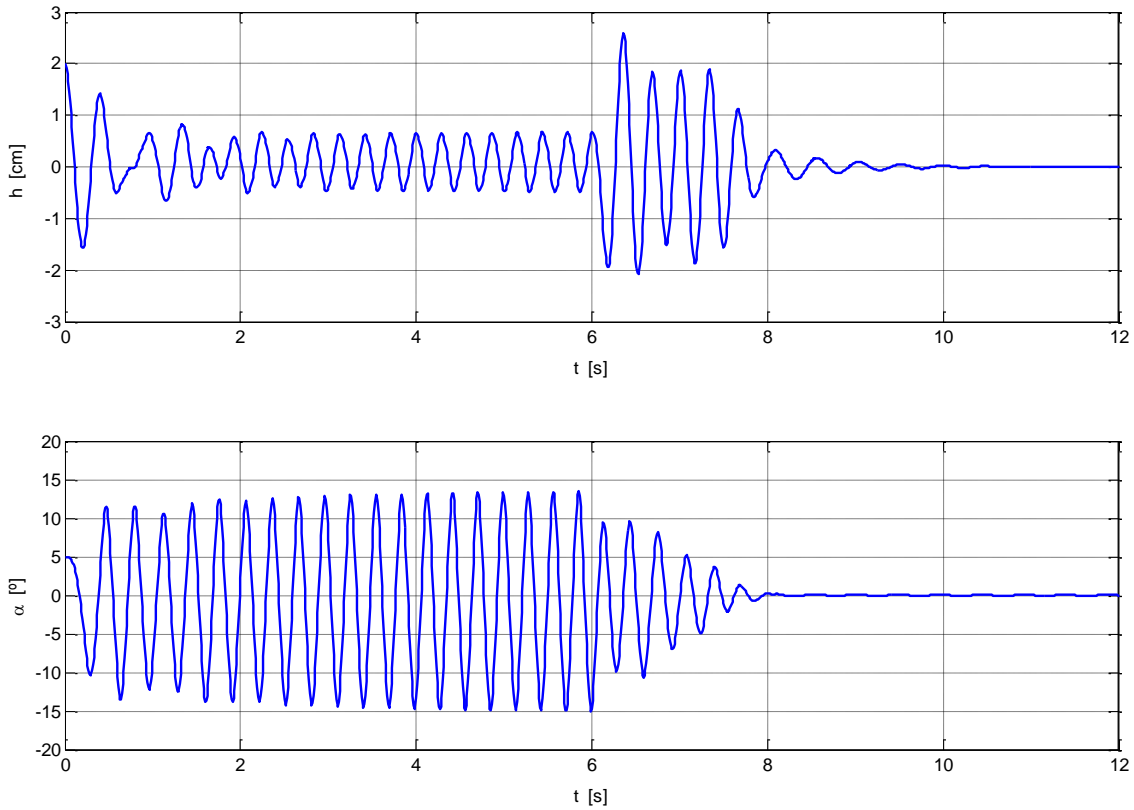


Figura 5.47. Evolução do deslocamento vertical do eixo elástico e do ângulo de arfagem ao longo do tempo,  $h$  e  $\alpha$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico.

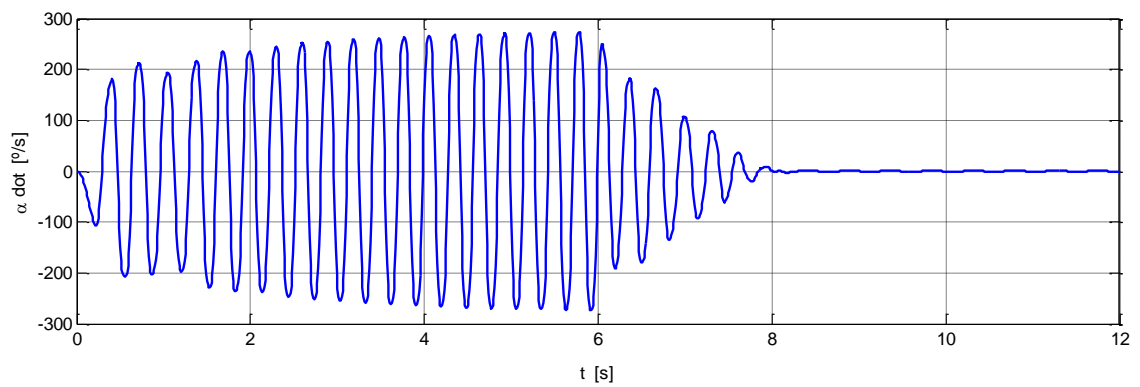
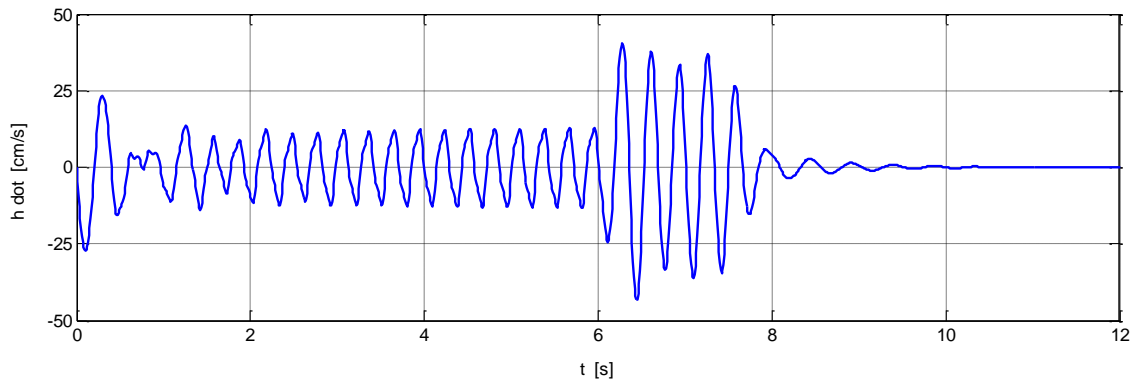


Figura 5.48. Evolução da taxa do deslocamento vertical do eixo elástico e do ângulo de arfagem ao longo do tempo,  $\dot{h}$  e  $\dot{\alpha}$ , respetivamente.

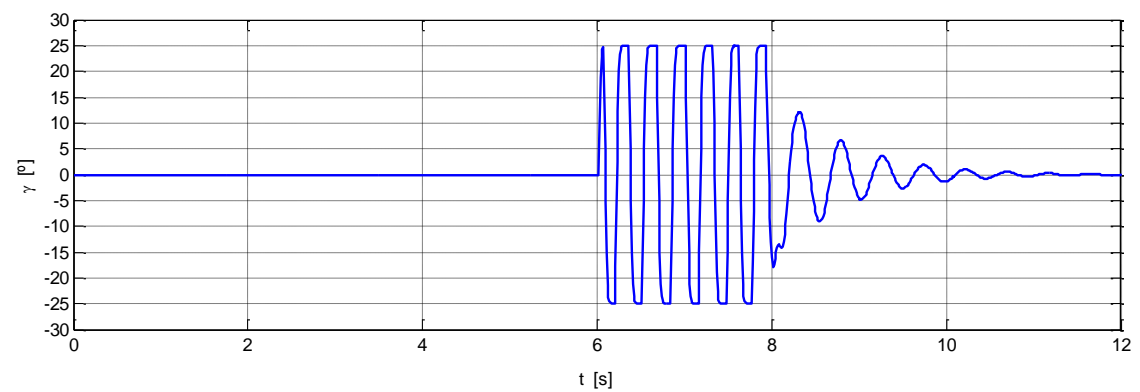
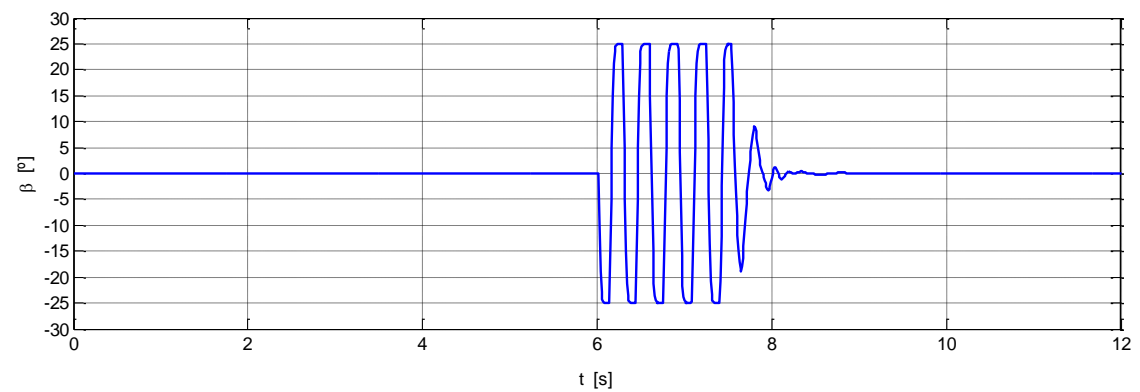


Figura 5.49. Deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\beta$  e  $\gamma$ , respetivamente:  $-25 \leq \beta, \gamma \leq 25$ .

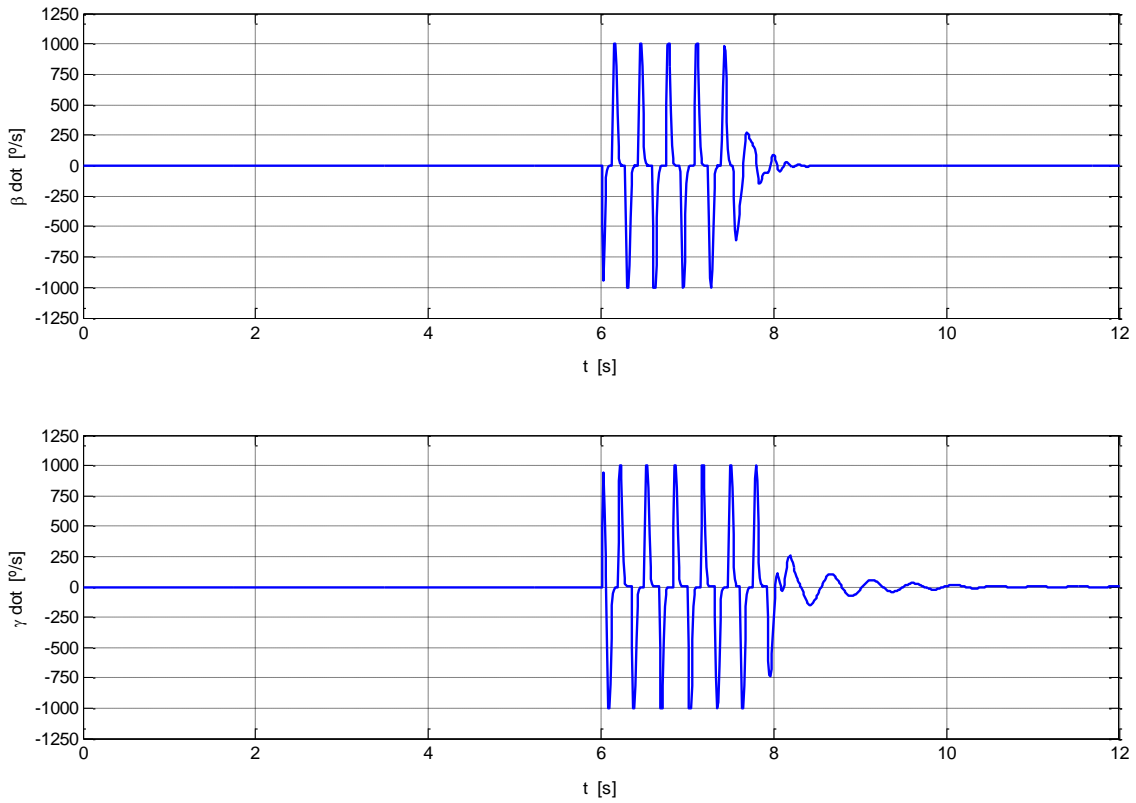


Figura 5.50. Velocidade das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ , respetivamente:  $-1000 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 1000$ .

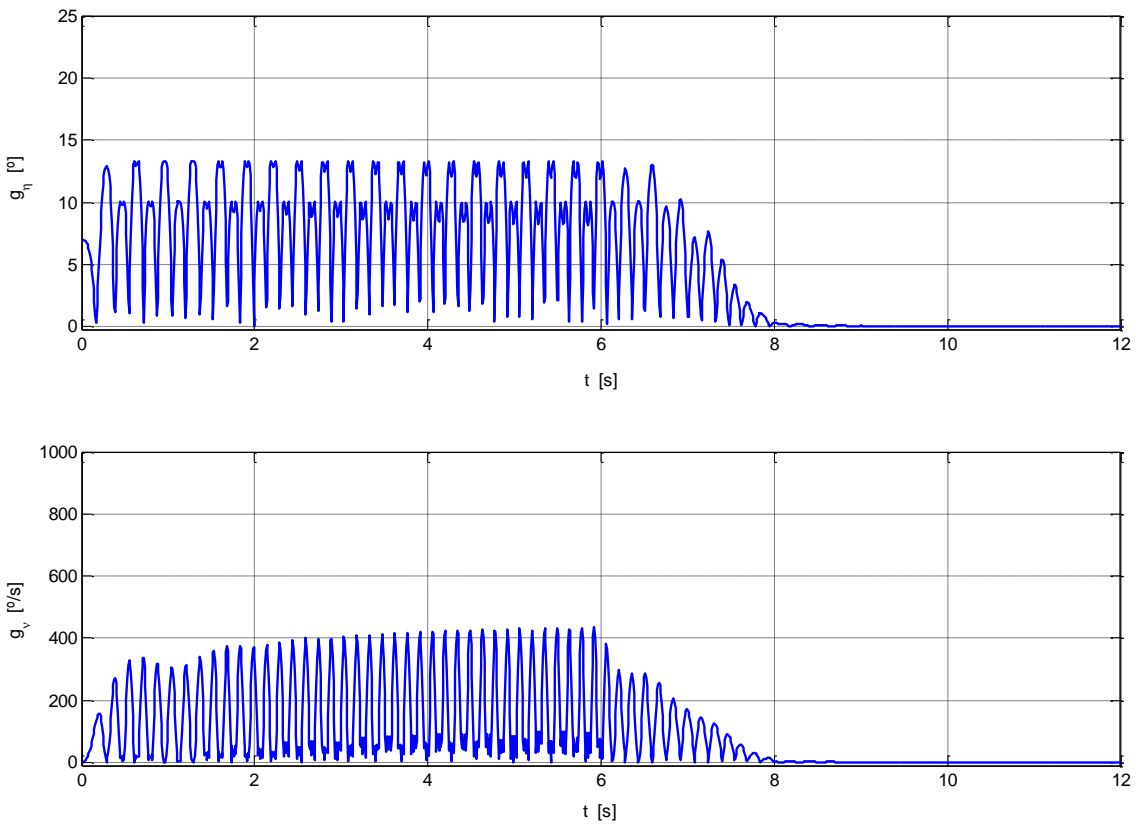


Figura 5.51. Funções auxiliares:  $g_\eta \equiv \|\Gamma w + B_{1,0}^+ \Pi r\|_\infty \leq 25$  e  $g_\nu \equiv \|\Gamma S w + \Gamma r + B_{1,0}^+ \Pi \dot{r}\|_\infty \leq 1000$ .

### Discussão relativa ao controlo da secção (4.3):

As simulações numéricas comprovam que a abordagem proposta direciona efetivamente o erro da saída para a origem,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0$ , garantindo que os limites de saturação do controlo são cumpridos,  $\|u(t)\|_{\infty} \leq 25.\pi/180$ ,  $\|\dot{u}(t)\|_{\infty} \leq 1000.\pi/180$ , como mostra as Figuras (5.47), (5.49) e (5.50), respetivamente. Além do mais, os sinais de referência são alcançados dentro de um tempo de assentamento relativamente reduzido, aproximadamente 4 s, tendo em conta que as variáveis de controlo são sujeitas as restrições simultaneamente nas magnitudes e nas taxas.

Simulações foram também efetuadas para diferentes valores dos parâmetros dentro dos intervalos especificados,  $\theta \in [0.90\theta_0, 1.10\theta_0]$ , partindo de diferentes condições iniciais,  $x_0$ , para diferentes passos de simulação,  $\delta t$ , para diferentes limites de saturação do controlo,  $\eta$  e  $\nu$ , e em todos os casos o controlo foi alcançado com êxito.

No que diz respeito ainda à robustez contra incertezas nos parâmetros, note-se que o critério invocado para garantir robustez é bastante forte, isto é, o teorema do pequeno ganho, e portanto, tem-se que a lei de controlo aplicada pode, na realidade, controlar as saídas do sistema mesmo que as incertezas estejam para além das especificadas, ou pelo menos para incertezas ligeiramente maiores como bem conhecido na teoria do controlo robusto.

Analisando a Figura (5.47), verifica-se que contrariamente ao que acontece com o ângulo de ataque,  $\alpha$ , onde este é gradualmente atenuado a partir do instante em que o controlo é ligado,  $t_{uon} = 6$  s, o deslocamento vertical do eixo elástico,  $h$ , aumenta antes de começar a diminuir. Tal significa que numa aplicação crítica como o sistema aeroelástico é preciso ter alguma precaução aquando da aplicação do método porque o aumento excessivo do deslocamento vertical do eixo elástico,  $h$ , pode levar a falhas estruturais. Todavia, o efeito indesejado em causa pode ser facilmente evitado através da imposição de restrições também na saída do sistema.

Um outro ponto que merece também atenção é o facto que a solução da equação algébrica de Riccati (4.55),  $P$ , deve garantir que a matriz  $\tilde{A} \equiv A_0 - B_{1,0}B_{1,0}^T P + \gamma^{-2} B_3 B_3^T P$  seja estável, como indicado no teorema (4.3), (secção (4.3)), e tal facto, pode restringir a incerteza máxima admissível. Porém, uma dada solução,  $P$ , é também admissível desde que os dois primeiros termos de  $\tilde{A}$  não tenham quaisquer valores próprios com partes reais positivas, isto é, desde que  $\text{Re}[\lambda_i(A_0 - B_{1,0}B_{1,0}^T P)] \leq 0$ . Simulações foram efetuadas considerando incertezas nos parâmetros de  $\pm 20\%$ , ou seja,  $\theta = 1.20\theta_0 \vee \theta = 0.80\theta_0$ , condição em que resulta  $\gamma = 0.0989$ , que não satisfaz, por conseguinte,  $\text{Re}[\lambda_i(\tilde{A})] \leq 0$ , mas que verifica, por sua vez,  $\text{Re}[\lambda_i(A_0 - B_{1,0}B_{1,0}^T P)] \leq 0$ , e as vibrações foram igualmente suprimidas.

#### Aplicação do controlo da secção (4.4):

Defina-se agora as variáveis de estado:  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \dot{\alpha}$ ,  $x_3 = h$ ,  $x_4 = \dot{h}$ . O sistema (5.57) pode ser expresso também na seguinte forma (Chen et al., 2012; Wang et al., 2013):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= c_{\alpha 1}x_1 + c_{anon1}x_1^3 + c_{\dot{\alpha}1}x_2 + c_{h1}x_3 + c_{\dot{h}1}x_4 + c_{\beta 1}\beta + c_{\gamma 1}\gamma \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= c_{\alpha 2}x_1 + c_{anon2}x_1^3 + c_{\dot{\alpha}2}x_2 + c_{h2}x_3 + c_{\dot{h}2}x_4 + c_{\beta 2}\beta + c_{\gamma 2}\gamma
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

que por sua vez pode ser escrito na forma de uma parte linear mais uma parte não-linear:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x):$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{\alpha 1} & c_{\dot{\alpha}1} & c_{h1} & c_{\dot{h}1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_{\alpha 2} & c_{\dot{\alpha}2} & c_{h2} & c_{\dot{h}2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{\beta 1} & c_{\gamma 1} \\ 0 & 0 \\ c_{\beta 2} & c_{\gamma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{anon1}x_1^3 \\ 0 \\ c_{anon2}x_1^3 \end{bmatrix} \tag{5.73}$$

com os coeficientes  $c_{(\ )}$  definidos como:

$$c_1 = \rho V^2 b s \quad , \quad c_2 = \rho V^2 b^2 s \quad , \quad D = m_T I_\alpha - (m_W x_a b)^2$$

$$c_{\alpha 1} = (m_T c_2 C_{m\alpha-eff} + m_W x_a b c_1 C_{l\alpha} - m_T k_1) / D$$

$$c_{anon1} = -m_T k_3 / D$$

$$c_{\dot{\alpha}1} = \left\{ \left[ (m_T c_2 C_{m\alpha-eff} + m_W x_a b c_1 C_{l\alpha}) \left( \frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{V} \right] - m_T c_\alpha \right\} / D$$

$$c_{h1} = m_W x_a b k_h / D$$

$$c_{\dot{h}1} = \left( \frac{m_T c_2 C_{m\alpha-eff} + m_W x_a b c_1 C_{l\alpha}}{V} + m_W x_a b c_h \right) / D$$

$$c_{\beta 1} = (m_T c_2 C_{m\beta-eff} + m_W x_a b c_1 C_{l\beta}) / D$$

$$c_{\gamma 1} = (m_T c_2 C_{m\gamma-eff} + m_W x_a b c_1 C_{l\gamma}) / D$$

$$c_{\alpha 2} = -(c_2 m_W x_a b C_{m\alpha-ef} + c_1 I_\alpha C_{l\alpha} - m_W x_a b k_1) / D$$

$$c_{\alpha n\alpha 2} = m_W x_a b k_3 / D$$

$$c_{\dot{\alpha} 2} = -\left\{ \left[ (c_2 m_W x_a b C_{m\alpha-ef} + c_1 I_\alpha C_{l\alpha}) \left( \frac{1}{2} - a \right) \frac{b}{V} \right] - m_W x_a b c_\alpha \right\} / D$$

$$c_{h2} = -k_h I_\alpha / D$$

$$c_{\dot{h}2} = -\left( \frac{c_2 m_W x_a b C_{m\alpha-ef} + c_1 I_\alpha C_{l\alpha}}{V} + c_h I_\alpha \right) / D$$

$$c_{\beta 2} = -(c_2 m_W x_a b C_{m\beta-ef} + c_1 I_\alpha C_{l\beta}) / D$$

$$c_{\gamma 2} = -(c_2 m_W x_a b C_{m\gamma-ef} + c_1 I_\alpha C_{l\gamma}) / D \quad (5.74)$$

e com o coeficiente de rigidez da arfagem,  $k_\alpha(\alpha)$ , definido pelo seguinte polinómio:

$$k_\alpha(\alpha) = k_1 + k_3 \alpha^2 \quad (5.75)$$

Dado que o objetivo na presente aplicação consiste em suprimir vibrações indesejadas sempre que estas ocorram (ciclos limite ou oscilações caóticas), em termos de controlo o objetivo pode ser simplificado a encontrar o controlo  $u = [\beta \ \gamma]^T$  que força as variáveis de estado  $x_1$  e  $x_3$  a serem zero em vez de forçar toda a trajetória do sistema (5.73) a dirigir-se para a origem. Note-se que  $x_2 = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{x}_3$ , pelo que dada a natureza destas relações a trajetória total é direcionada para a origem uma vez que  $d(\text{cts})/dt = 0$ .

Sendo  $x_1$  e  $x_3$  as saídas do sistema (5.73), a matriz de saída,  $C$ , resulta:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = Cx \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \quad (5.76)$$

e os sinais de referência a serem seguidos neste caso em particular são constantes,  $y_r(t) = [0 \ 0]^T$ . Formando o sistema aumentado como requerido em (4.76), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{4 \times 2} \\ C & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \sigma_{\eta, \nu}(u) + \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ -y_r(t) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

onde este se encontra agora na forma de um sistema linear perturbado,  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \sigma_{\eta, \nu}(u) + d(x_a, t)$ , e pode ser perfeitamente controlado pela estratégia de controlo proposta na secção (4.4), isto é, com a lei de controlo (4.79) seguidamente da (4.95), dado que o termo perturbativo,  $d(x_a, t)$ , é limitado e o par  $(A_a, B_a)$  é controlável,  $\text{rank}(M_c) = 6 = n_a = n + s$ .

De seguida, apresenta-se dois casos de simulação em que o sistema aeroelástico encontra-se já numa oscilação ciclo limite (a secção da asa movendo-se continuamente para cima e para baixo e rodando simultaneamente em torno do eixo elástico) e o controlo é ativado para suprimir este tipo de movimento indesejado. Para isso, o sistema aumentado (5.77) é resolvido juntamente com a equação (4.74) pelo método de RK-Butcher (ver *Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's*) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 25$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.78). Os parâmetros do sistema aeroelástico são os especificados na Tabela (5.2) e o parâmetro requerido em (4.74) é  $\mu = 100$ . O integral que determina a matriz  $F_\alpha^{-1}(\theta)$  na equação (4.83) foi calculado numericamente pela Regra de Simpson Composta, ver *Anexo B.2 - Integração Numérica*. O controlo é ligado em  $t_{u_{on}} = 10$  s, um instante em que o sistema se encontra já numa oscilação ciclo limite, e a comutação do controlador de Korobov para o LQR ocorre quando a função de controlabilidade satisfaz  $\theta(t) \leq \varepsilon = 10^{-2.6}$ . Os parâmetros de ambos os controladores apresentam-se em (5.79). Relativamente às restrições dos atuadores, considera-se que cada superfície de controlo, do bordo de ataque e do bordo de fuga, podem ter uma deflexão máxima de  $20^\circ$ ,  $\gamma, \beta \in [-20, 20]^\circ$ , e que a velocidade máxima a que cada superfície pode atuar é de  $180^\circ/\text{s}$ ,  $\dot{\gamma}, \dot{\beta} \in [-180, 180]^\circ/\text{s}$ .

Condições iniciais:

$$x_0 = [10.\pi/180 \ 0 \ 0.02 \ 0]^T \quad , \quad u_0 = [0 \ 0]^T \quad , \quad q_0 = [0 \ 0]^T \quad (5.78)$$

Parâmetros dos controladores:

$$\begin{aligned} \text{Korobov:} \quad & l = 1 \quad , \quad \alpha = 4 \quad , \quad n_1 = 5 \quad , \quad n_2 = 1 \\ \text{LQR:} \quad & Q = I_6 \quad , \quad R = I_2 \times 10^3 \quad , \quad \gamma = 0.5 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Restrições dos atuadores:

$$\|u\|_\infty \leq 20.\pi/180 = \eta \quad , \quad \|\dot{u}\|_\infty \leq 180.\pi/180 = \nu \quad (5.80)$$

### Simulação 1:

Nesta primeira simulação, a velocidade do escoamento livre,  $V$ , é assumida constante e selecionada de modo a desencadear o fenómeno de *flutter* (oscilação ciclo limite),  $V = 1.25V_F = 13.40$  m/s, em que  $V_F = 10.72$  m/s. Nas Figuras (5.52) e (5.53) mostra-se a evolução ao longo do tempo das variáveis de estado do sistema aeroelástico. A Figura (5.52) representa as variáveis de estado que são também as saídas do sistema,  $\alpha$  e  $h$ , e a Figura (5.53) as respetivas taxas,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{h}$ . A primeira linha vertical vermelha/tracejada indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a segunda linha o instante em que o controlo é comutado para o LQR. As Figuras (5.54) e (5.55) mostram respetivamente as amplitudes e as taxas das superfícies de controlo dos bordos de ataque e de fuga. As Figuras (5.56) e (5.57) mostram respetivamente os planos de fase  $(\alpha, \dot{\alpha})$  e  $(h, \dot{h})$ .

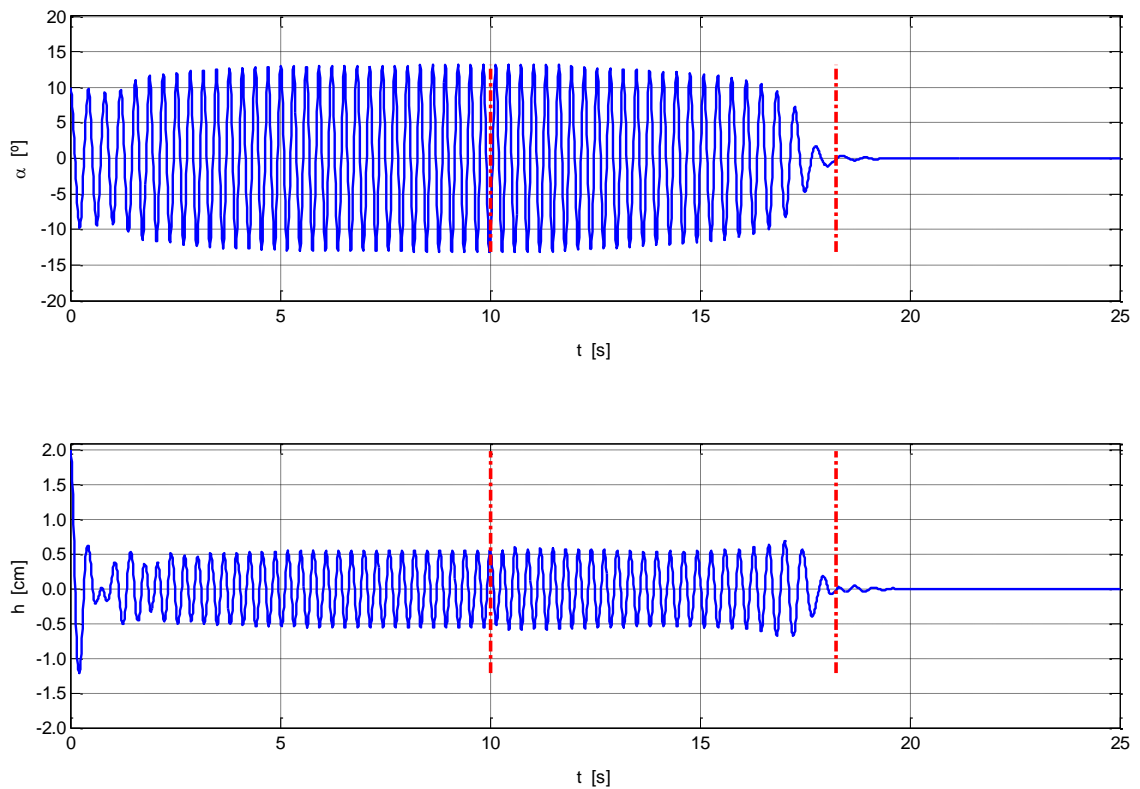


Figura 5.52. Evolução do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo,  $\alpha$  e  $h$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico. A 1ª linha vertical vermelha/tracejada indica o instante em que o controlo de Korobov é ligado e a 2ª o instante em que se dá a comutação para o LQR.

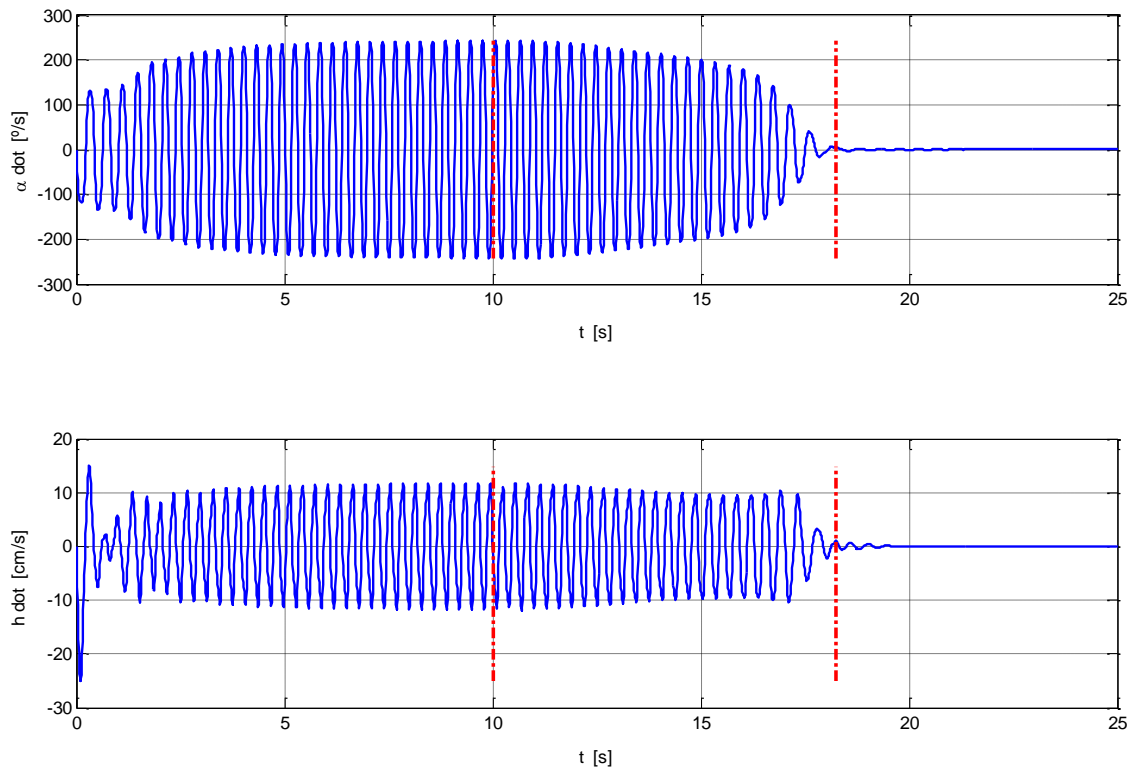


Figura 5.53. Evolução da taxa do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{h}$ , respetivamente.

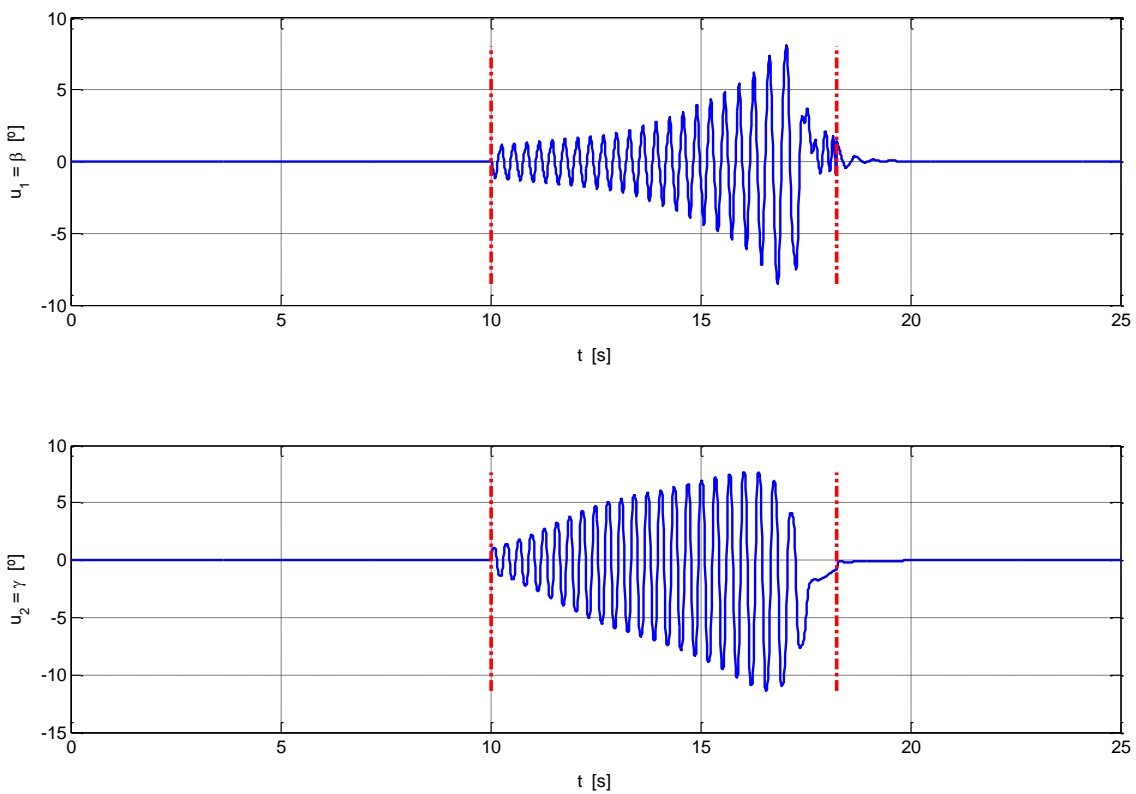


Figura 5.54. Deflexão das superfícies de controlo do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\beta$  e  $\gamma$ , respetivamente:  $-20 \leq \beta, \gamma \leq 20$ .

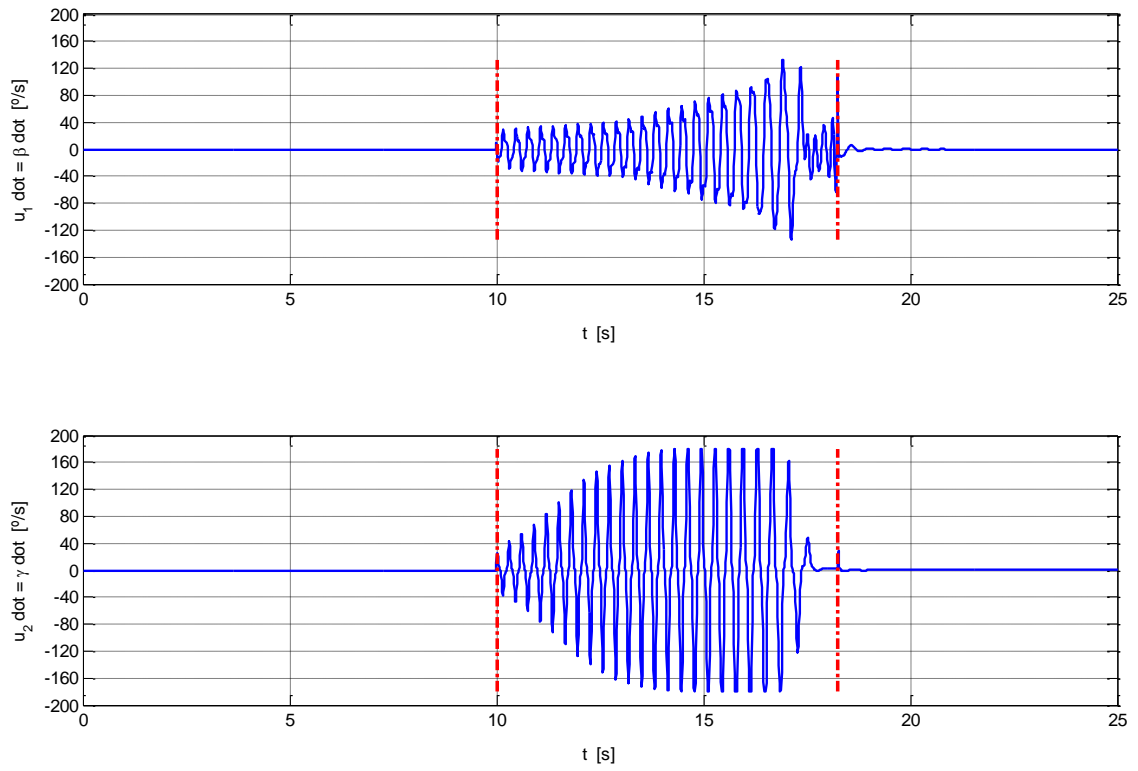


Figura 5.55. Velocidade das superfícies de controle do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ , respetivamente:  $-180 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 180$ .

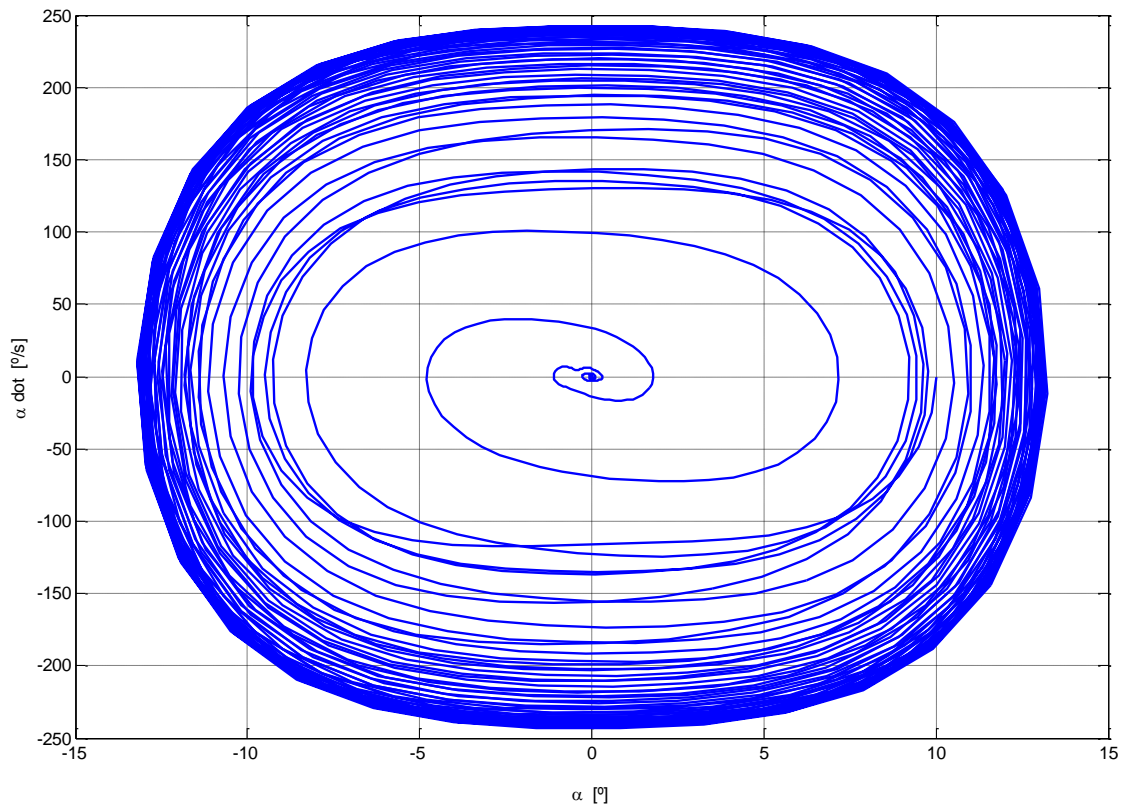


Figura 5.56. Plano de fase  $(\alpha, \dot{\alpha})$  do sistema aeroelástico.

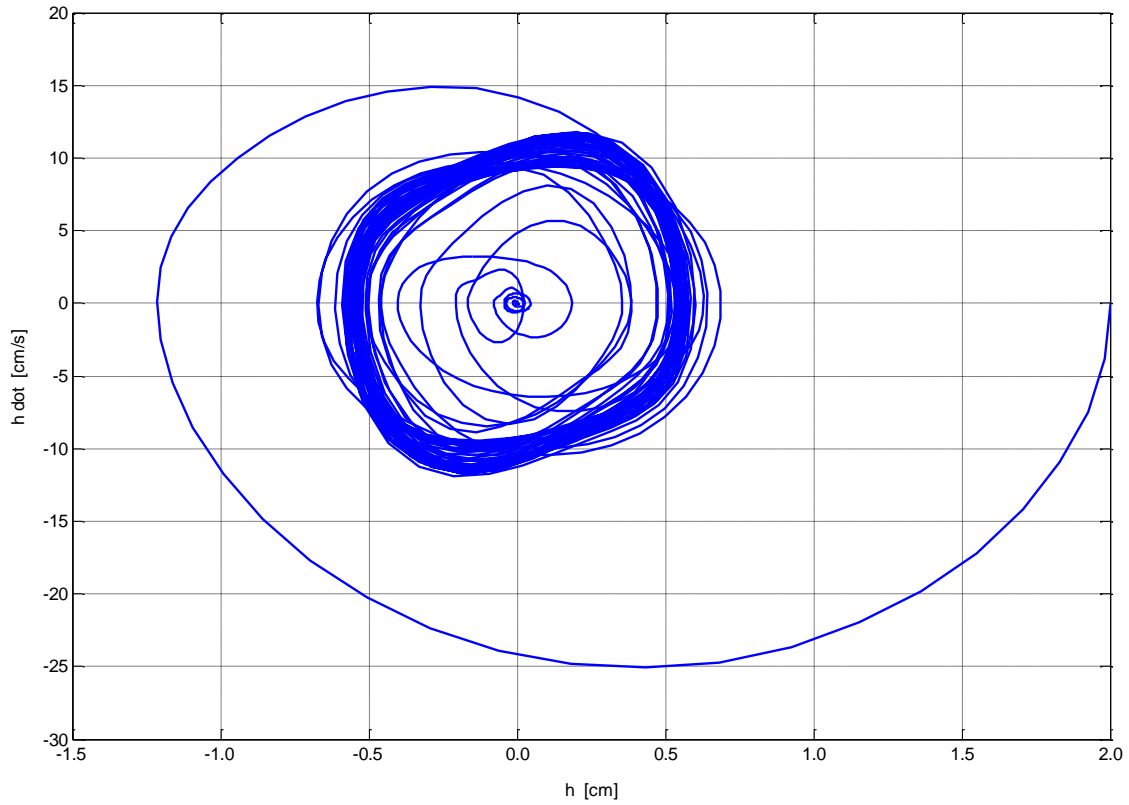


Figura 5.57. Plano de fase  $(h, \dot{h})$  do sistema aeroelástico.

### Simulação 2:

Para validar a robustez contra incertezas nos parâmetros considera-se na simulação seguinte uma alteração da velocidade do escoamento livre ao longo do tempo,  $V$ , de acordo com a função (5.81), Figura (5.58). Os resultados apresentam-se nas Figuras (5.59) a (5.62).

$$V = 13.40 + 5 \sin(2\pi \times 0.2t) \quad (5.81)$$

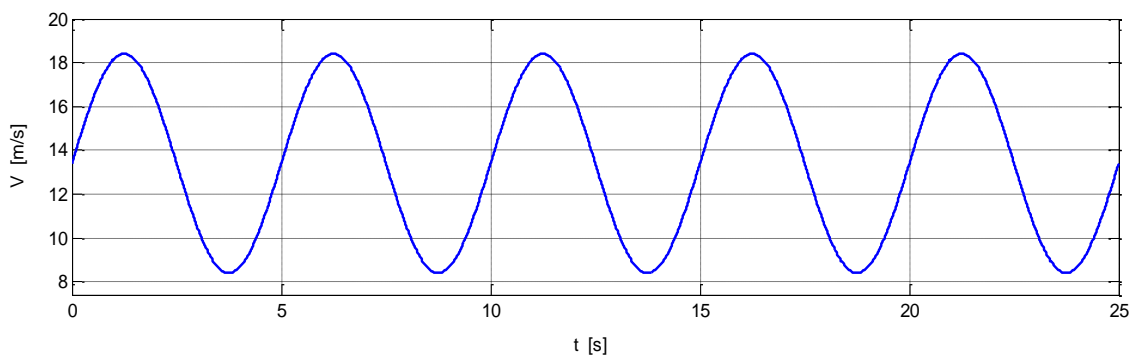


Figura 5.58. Velocidade do escoamento livre perturbada,  $V \in [8.4, 18.4]$ .

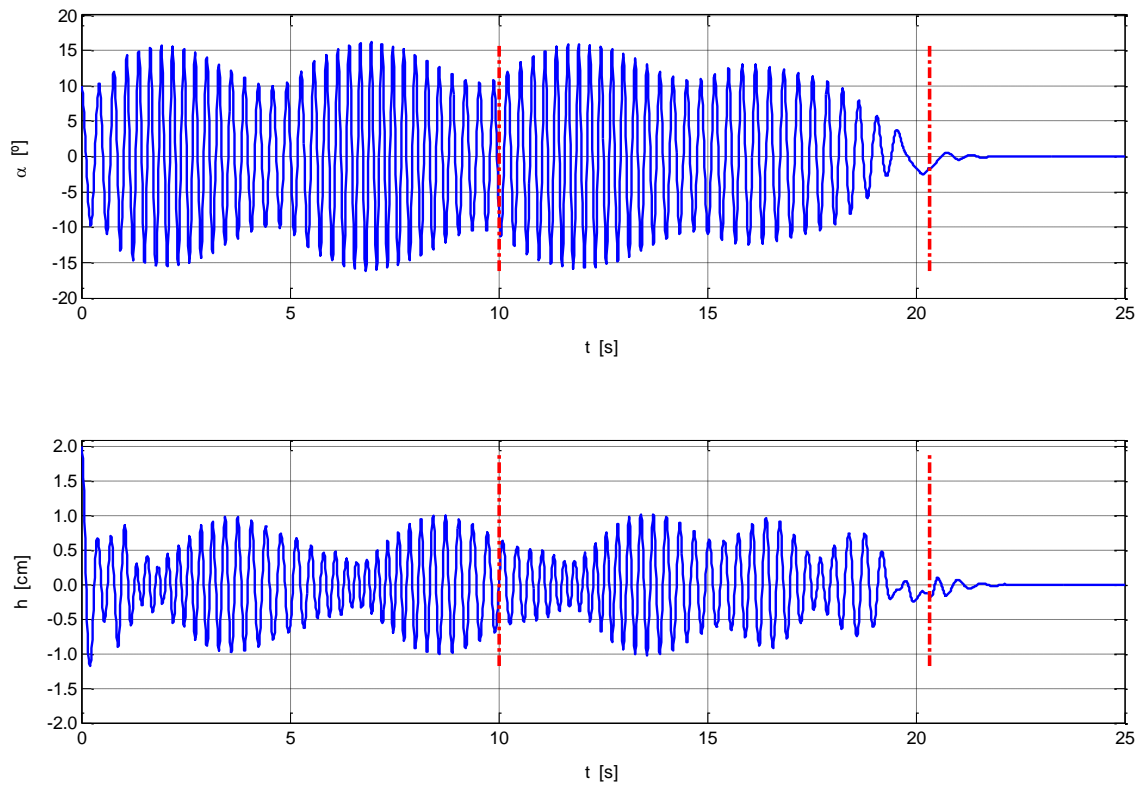


Figura 5.59. Evolução do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo,  $\alpha$  e  $h$ , respetivamente. Estas variáveis de estado são também as saídas do sistema aeroelástico. (com a velocidade do escoamento livre perturbada).

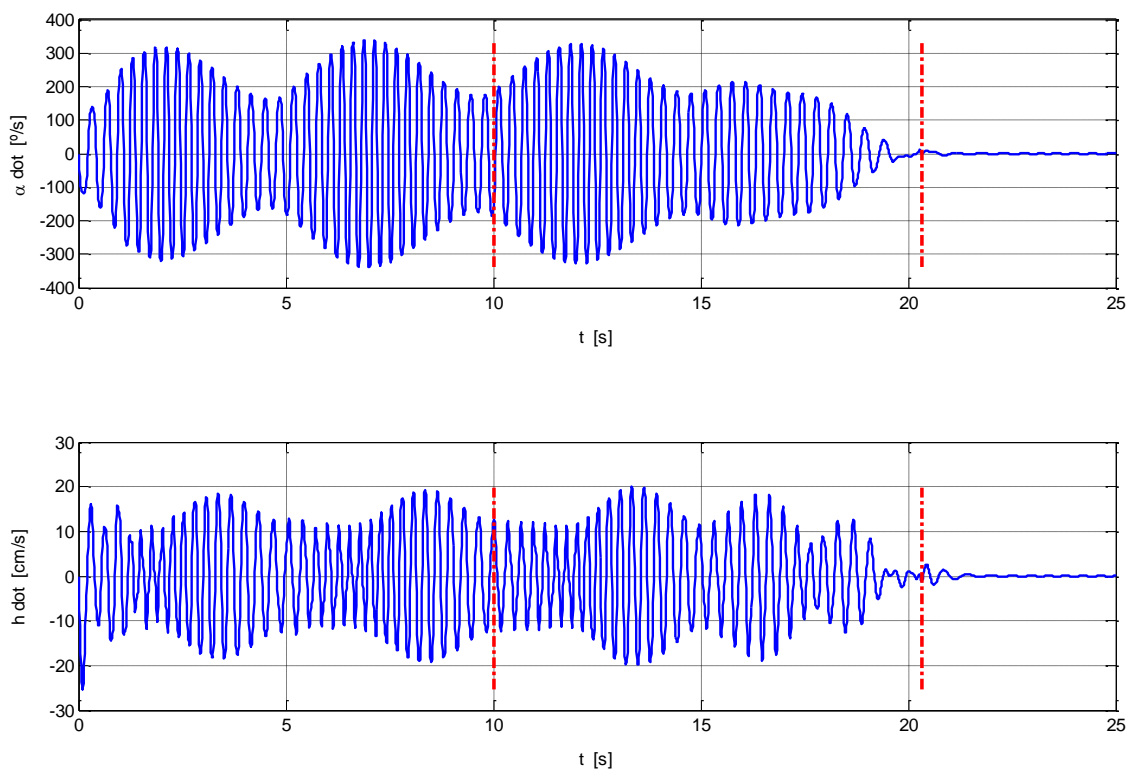


Figura 5.60. Evolução da taxa do ângulo de arfagem e do deslocamento vertical do eixo elástico ao longo do tempo,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{h}$ , respetivamente. (com a velocidade do escoamento livre perturbada).

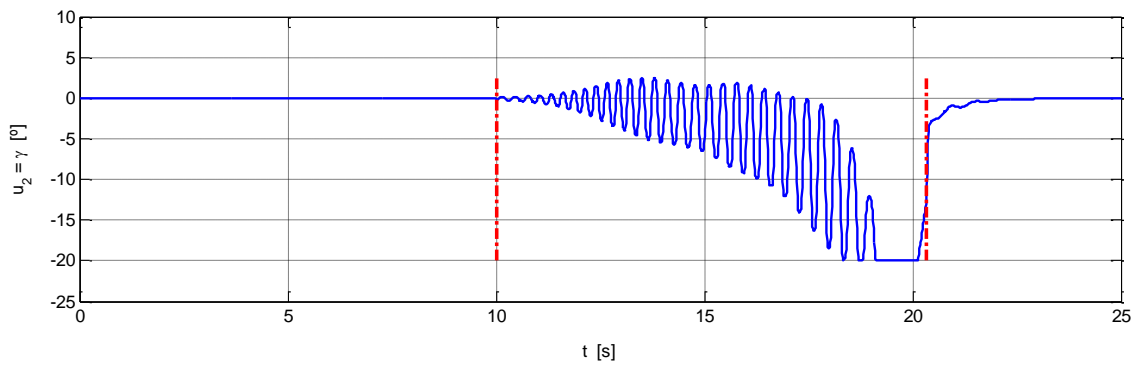


Figura 5.61. Deflexão das superfícies de controle do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\beta$  e  $\gamma$ , respetivamente:  $-20 \leq \beta, \gamma \leq 20$ . (com a velocidade do escoamento livre perturbada).

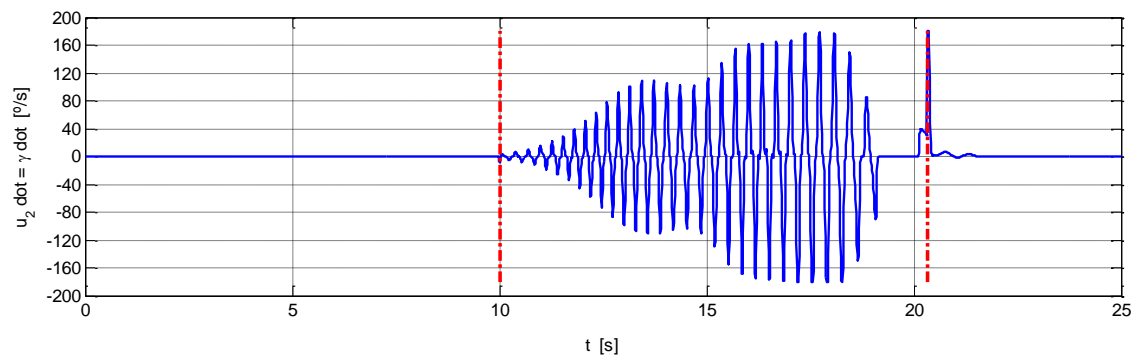
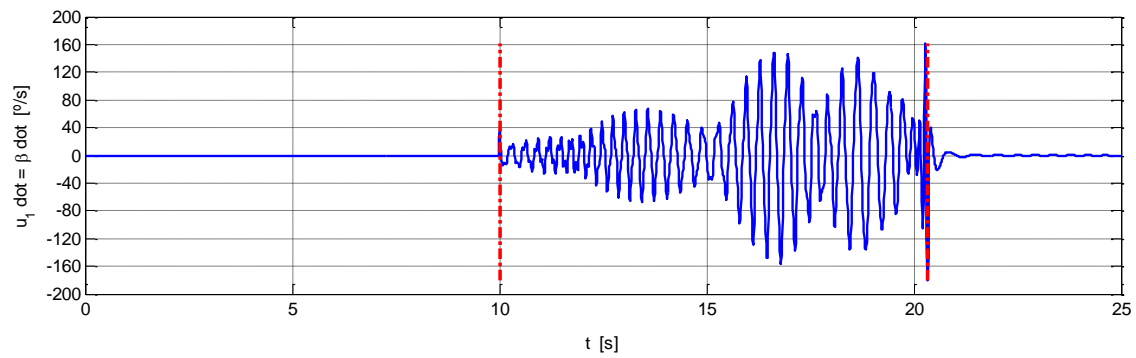


Figura 5.62. Velocidade das superfícies de controle do bordo de fuga e de ataque ao longo do tempo,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\gamma}$ , respetivamente:  $-180 \leq \dot{\beta}, \dot{\gamma} \leq 180$ . (com a velocidade do escoamento livre perturbada).

#### Discussão relativa ao controlo da secção (4.4):

Os resultados confirmam que o erro da saída permanece estável no sentido de Lyapunov,  $\|e_y(t)\| \leq \delta$ , o que na verdade chega mesmo a ser assintoticamente estável,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_y(t)\| = 0$ , dada a natureza dos sinais de referência,  $y = [\alpha \ h]^T = [0 \ 0]^T$ , e que as restrições do controlo não são excedidas em nenhum instante,  $\|u(t)\|_\infty \leq 20.\pi/180$ ,  $\|\dot{u}(t)\|_\infty \leq 180.\pi/180$ , mesmo que os parâmetros do sistema, neste caso em particular apenas a velocidade do escoamento livre,  $V$ , seja perturbada,  $V = V(t)$ , ver Figuras (5.58-5.62).

Poder-se-á reparar que o tempo decorrido entre o instante em que o controlo de Korobov é ligado (primeira linha vertical vermelha/tracejada) até ao instante em que a estabilização é alcançada ( $x = [\alpha \ \dot{\alpha} \ h \ \dot{h}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ) é relativamente grande (aproximadamente 8.3 s na primeira simulação - ver Figura (5.52), e 10.3 s na segunda - ver Figura (5.59)), tendo em conta o tipo de aplicação crítica em questão, pois, qualquer oscilação deve ser suprimida o mais rapidamente possível porque pode levar à destruição da estrutura da asa por fadiga do material. Contudo, tenha-se em atenção que se trata simplesmente de uma simulação, em que o controlo é ligado propositadamente depois do sistema se encontrar numa oscilação ciclo limite, com o intuito de verificar a eficácia e a robustez do método quando a condição inicial se encontra afastada da origem. Pois, na prática, o controlo é ligado desde início por uma questão de segurança, isto é, a partir do momento em que o sistema se encontra no estado de equilíbrio,  $x = [\alpha \ \dot{\alpha} \ h \ \dot{h}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , e portanto qualquer movimento induzido por perturbações externas é suprimido de imediato.

### 5.3. Aplicação do Algoritmo de Deteção + Controlo

Nesta secção, o algoritmo de deteção de caos é acoplado a um dos métodos de controlo com o intuito de demonstrar o funcionamento de ambos em simultâneo. Considera-se para o efeito o modelo da atitude do veículo espacial descrito na subsecção (5.2.2), e emprega-se o algoritmo de deteção, formulado no capítulo (3), juntamente com o método de controlo descrito na secção (4.2).

#### 5.3.1. Aplicação 1: Atitude de um Veículo Espacial

Considere-se o modelo da atitude do veículo espacial descrito na subsecção (5.2.2) - um sistema não-linear da forma  $\dot{x} = f(x, \theta) + Bu$  com  $\dot{x} = [\dot{\omega} \ \dot{q}]^T$  - cujas equações dinâmicas reescrevem-se de seguida por uma questão de conveniência:

$$\dot{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \omega_y \omega_z \\ a_y \omega_x \omega_z \\ a_z \omega_x \omega_y \end{bmatrix} + I^{-1} M \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + I^{-1} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + k(1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)) \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan(2(q_2q_3 + q_0q_1)/(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)) \\ \theta &= \arcsin(-2(q_1q_3 - q_0q_2)) \\ \psi &= \arctan(2(q_1q_2 + q_0q_3)/(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)) \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2) \\ q_1 &= \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) - \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) \\ q_2 &= \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) \\ q_3 &= \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) - \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2) \end{aligned} \quad (5.85)$$

Seja o objetivo do controlo estabilizar a atitude do veículo em torno da origem,  $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)^\circ$ , quando este é sujeito a uma perturbação, representada na equação (5.82) pelo termo  $I^{-1}M\omega$ . Seja, por conseguinte, a saída do sistema (5.82-5.83) dada por  $y = q = C[\omega \ q]^T$ . Dado que a atitude de referência é constante, tem-se, pelo conjunto de equações (5.85), que os sinais de referência são  $y_r(t) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Adotando um sistema de referência como requerido em (4.29), i.e.,  $\dot{x}_r = A_r x_r + \varphi_r(x_r)$ , as suas saídas,  $y_r = C_r x_r$ , e portanto os sinais de referência, são facilmente obtidos atribuindo-se  $A_r = 0_{4 \times 4}$ ,  $\varphi_r(x_r) = 0_{4 \times 1}$ ,  $C_r = I_4$ , e partindo-se da condição inicial  $x_{r,0} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , uma vez que  $\dot{x}_r = 0 \Rightarrow y_r(t) = x_r(t) = x_{r,0}$ .

Escrevendo-se o sistema aumentado,  $\dot{x}_a = A_a x_a + B_a \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \varphi_a(x_a)$ , e o exossistema,  $\dot{w} = S w + r$ , como requerido respetivamente em (4.34) e (4.36), tem-se:

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{3 \times 7} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7 \times 3} \\ L \end{bmatrix} \text{sat}_{u_0}(u_\varepsilon) + \begin{bmatrix} B u_c + \varphi(x) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 10} & 0_{10 \times 4} \\ 0_{4 \times 10} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [( \partial f / \partial x \cdot f(x) - A \cdot f(x) )^T, \ 0_{1 \times 3} ]^T \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

em que:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}, \quad \varphi(x) = f(x) - Ax, \quad B = \begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_{max,1}/u_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{u}_{max,2}/u_{0,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{u}_{max,m}/u_{0,m} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (5.89)$$

$$\text{sat}_{u_{0,i}}(u_i) = \begin{cases} u_{0,i} & , \quad u_i > u_{0,i} \\ u_i & , \quad -u_{0,i} \leq u_i \leq u_{0,i} \\ -u_{0,i} & , \quad u_i < -u_{0,i} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (5.90)$$

e:

$$u_{max} = \begin{bmatrix} u_{1,max} \\ \vdots \\ u_{m,max} \end{bmatrix}, \quad u_{min} = \begin{bmatrix} u_{1,min} \\ \vdots \\ u_{m,min} \end{bmatrix}, \quad u_c = \frac{u_{max} + u_{min}}{2}, \quad u_0 = u_{max} - u_c \quad (5.91)$$

Considere-se, no que diz respeito à deteção, um sistema auxiliar da forma,  $\dot{z} = Az + by_{obs}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{obs} \quad (5.92)$$

cuja matriz  $A$  é uma matriz estável com valores próprios  $\lambda = (-0.5, -0.5)$ , e portanto, com todos os valores próprios com partes reais negativas como requerido em (3.2),  $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$ ,  $i = 1, 2$ . (Note-se que esta matriz  $A$  não é a mesma que a matriz  $A$  descrita em (5.88)).

### Simulação 1:

Para efeitos de simulação, os sistemas (5.86), (5.87) e (5.92) são resolvidos em simultâneo pelo método de RK-Butcher (ver Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de ODE's) entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 1200$  s, com um passo de  $\delta t = 0.01$  s, e partindo das condições iniciais especificadas em (5.94). A única variável considerada mensurável é a primeira variável de estado,  $x_1 = \omega_x$ , as medições,  $y_{obs}(n) = x_1(n) + w(n)$ , são efetuadas com um período de amostragem  $dt = 1/f_s = \delta t = 0.01$  s, e o nível de degradação do sinal medido com WGN é de  $\text{SNR} = 10$  dB ( $\cong 3:1$ ),  $\text{SNR}_{[\text{dB}]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n)$ . A janela de observação requerida na deteção tem comprimento  $N = 200$  pontos e o limiar de decisão entre o comportamento regular e o comportamento caótico foi definido em  $\gamma = 1$ .

Os momentos principais de inércia do veículo tomados em consideração são  $(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) = (40, 20, 20)$  kg.m<sup>2</sup>, no que resulta  $(a_x, a_y, a_z) = (0, -1, 1)$ , e o parâmetro  $k$ , requerido na equação (5.83), definido em  $k = 1/\delta t$ . A matriz  $A$  é obtida por linearização do sistema (5.82-5.83) na sua forma não perturbada, i.e., com  $I^{-1}M = 0$ , para o estado  $x^* = [\omega^* \ q^*]^T$ , com

$\omega^* = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z] = [30 \ 30 \ 30]^\circ/\text{s}$  e  $q^* = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$  tal que  $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)^\circ$ . Como limitações do controlo, são consideradas as restrições apresentadas em (5.96). Com  $A$  determinada neste ponto,  $x^*$ , as matrizes resultantes do sistema (5.86),  $A_a$  e  $B_a$ , garantem que o sistema (5.82-5.83) pode ser controlado com abordagem proposta na secção (4.2), i.e., com o controlo virtual  $u_\varepsilon = -R^{-1}B_a^T P_\varepsilon x_a + (R^{-1}B_a^T P_\varepsilon \Pi + \Gamma)w + B_a^+ \Pi r$  e o controlo efetivo  $u = u_s + u_c$ , dado que o par  $(A_a, B_a)$  é estabilizável,  $\text{rank}(M_c) = 10 = n_a$ ,  $A_a$  apresenta todos os seus valores próprios com partes reais não positivas, ver (5.93), e as matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$ , soluções das equações de regulação (4.37), com  $D = [0_{4 \times 10} \ -C_r]$ ,  $E = [I_{10} \ 0_{10 \times 4}]$ ,  $C_a = [C \ 0_{4 \times 3}]$  e  $C = [0_{4 \times 3} \ I_4]$ , existem.

Os parâmetros definidos para o controlador,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $R$ ,  $Q_\varepsilon$ , apresentam-se em (5.95), os quais garantem que a equação de Riccati  $(A_a + \gamma I)^T P_\varepsilon + P_\varepsilon (A_a + \gamma I) - P_\varepsilon B_a R^{-1} B_a^T P_\varepsilon + Q_\varepsilon = 0$  tem solução,  $P_\varepsilon$ , tal que  $P_\varepsilon = P_\varepsilon^T$  e  $P_\varepsilon > 0$ .

Dado que o intuito passa por comprovar não só a deteção mas também o controlo e a sua robustez, o controlo é ativado apenas quando é detetado uma atitude caótica, permanecendo sempre ligado a partir desse instante independentemente do tipo de comportamento. A perturbação  $I^{-1}M\omega$  é ativada entre  $t = 400$  e  $t = 800$  s com a matriz das perturbações  $I^{-1}M$  definida em (5.97). Desta forma, a simulação retrata o caso em que a atitude do veículo torna-se caótica devido à perturbação  $I^{-1}M\omega$  e em que o controlo é ativado imediatamente logo que detetado o caos, suprimindo portanto este tipo movimento indesejado enquanto o sistema ainda se encontra sob o efeito da perturbação.

Uma pequena perturbação adicional,  $[0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , e apenas pontual, i.e., ativada unicamente no instante exato em que a perturbação propriamente dita é ativada,  $t = 400$  s, foi ainda considerada na equação (5.82),  $\dot{\omega}$ . Isto porque uma vez que a perturbação é dependente de  $\omega$ ,  $(I^{-1}M\omega)$ , ocorre que no instante em que a perturbação é ativada tem-se que  $\omega = [0 \ 0 \ 0]^T$  e  $u = [0 \ 0 \ 0]^T$  e portanto que a dinâmica não evolui dado que  $\dot{\omega} = 0$ . Contudo, esta perturbação pontual é necessária apenas devido às condições iniciais escolhidas e por se tratar de uma simulação computacional, já que na prática as velocidades angulares nunca são exatamente nulas (ruídos).

$$\lambda(A_a) = \begin{pmatrix} 0 + 0.2618i \\ 0 - 0.2618i \\ 0 + 0.4534i \\ 0 - 0.4534i \\ 0 + 0.5236i \\ 0 - 0.5236i \\ 0 \\ -8.5714 \\ -8.3333 \\ -5.7143 \end{pmatrix}, \quad \text{Re}[\lambda_i(A_a)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, 10 \quad (5.93)$$

Condições iniciais:

$$x_0 = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \text{ com: } (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, 0)^\circ/\text{s}$$

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) \text{ tais que: } (\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)^\circ$$

$$x_{r,0} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \text{ tais que: } (\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}) = (0, 0, 0)^\circ \quad (5.94)$$

$$u_{s,0} = -u_c, \quad \varphi_{a,0} = \begin{bmatrix} Bu_c + \varphi(x_0) \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parâmetros do controlador:

$$\varepsilon = 500, \quad \gamma = 0.5, \quad R = I_3, \quad Q_\varepsilon = \varepsilon \cdot I_{10} \quad (5.95)$$

Restrições dos atuadores:

$$\begin{aligned} -200 \leq u_1 \leq 150 & \quad |\dot{u}_1| \leq 3000 \\ -150 \leq u_2 \leq 150 & \quad , \quad |\dot{u}_2| \leq 2500 \\ -150 \leq u_3 \leq 200 & \quad |\dot{u}_3| \leq 2000 \end{aligned} \quad (5.96)$$

Matriz das Perturbações:

$$I^{-1}M = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix} \times 0.2, \quad 400 \leq t \leq 800 \text{ s} \quad (5.97)$$

Os resultados da presente simulação apresentam-se nas Figuras (5.63-5.68). A Figura (5.63) representa a deteção e o controlo, onde o primeiro gráfico indica o estado da perturbação, i.e.,  $I^{-1}M\omega$  ativada - 1 ou desativada - 0, em que o segundo gráfico representa a única variável medida,  $\omega_x$ , o terceiro gráfico a variável efetivamente medida,  $y_{obs}(n) = \omega_x(n) + w(n)$ , e o último gráfico a saída do detetor:  $R$  calculado pela expressão (3.3); e  $R_{bi-estado}$ , indicando que a atitude do veículo é regular ou caótica com base no limiar  $\gamma = 1$ . O controlo é acionado uma vez detetada a presença de caos.

As Figuras (5.64) e (5.65) representam, respetivamente, as magnitudes das variáveis de controlo,  $[u_1 \ u_2 \ u_3]^T = [U_x \ U_y \ U_z]^T$ , e as suas taxas/derivadas,  $[\dot{u}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{u}_3]^T = [\dot{U}_x \ \dot{U}_y \ \dot{U}_z]^T$ , calculadas com base em (4.40), i.e.,  $\dot{u} = -Lu_s + Lsat_{u_0}(u_\varepsilon)$ . A Figura (5.66) representa as variáveis auxiliares utilizadas no algoritmo de deteção,  $z_1$  e  $z_2$ , cujo o tipo de comportamento

é caracterizado com base no sinal  $z_2$ . As Figuras (5.67) e (5.68) representam, respetivamente, as velocidades angulares do veículo,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , em torno dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respetivamente, e a sua atitude em termos de ângulos de Euler,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , em torno dos eixos  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , respetivamente. Embora os ângulos de Euler e as velocidades angulares sejam expressos em radianos e radianos/s, respetivamente, no que diz respeito a cálculos, estes são apresentados nos gráficos em graus e em graus/s, respetivamente, para uma melhor interpretação física dos resultados.

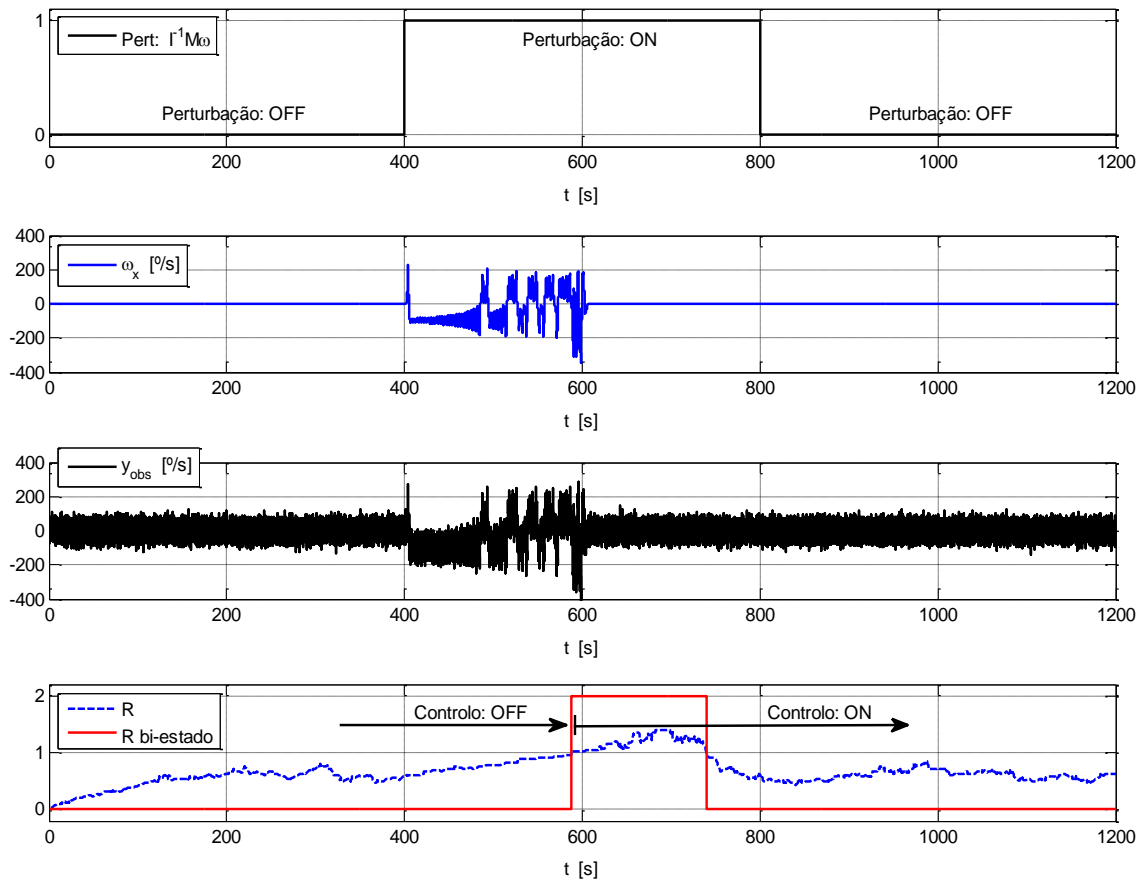


Figura 5.63. Detecção e controlo da atitude caótica emergente num veículo espacial devido ao efeito de uma perturbação externa.

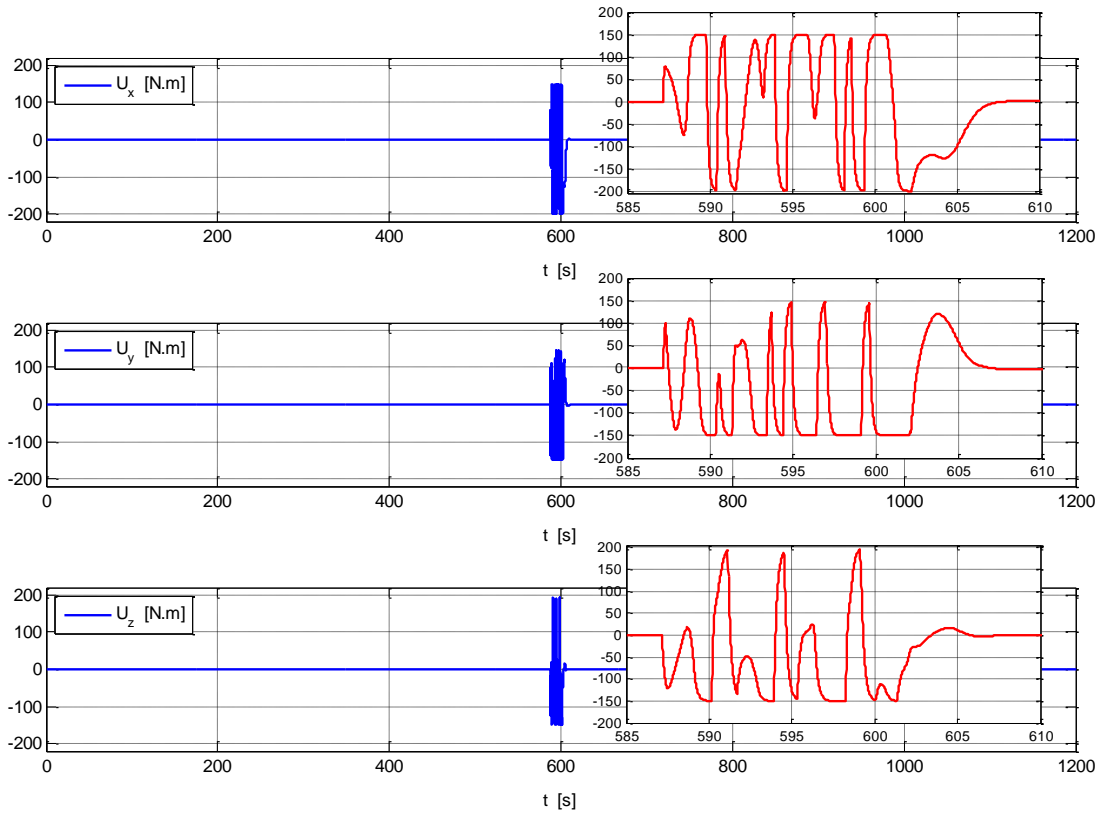


Figura 5.64. Torques de controlo aplicados ao veiculo segundo os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :  
 $-200 \leq U_x \leq 150$ ,  $-150 \leq U_y \leq 150$ ,  $-150 \leq U_z \leq 200$ .

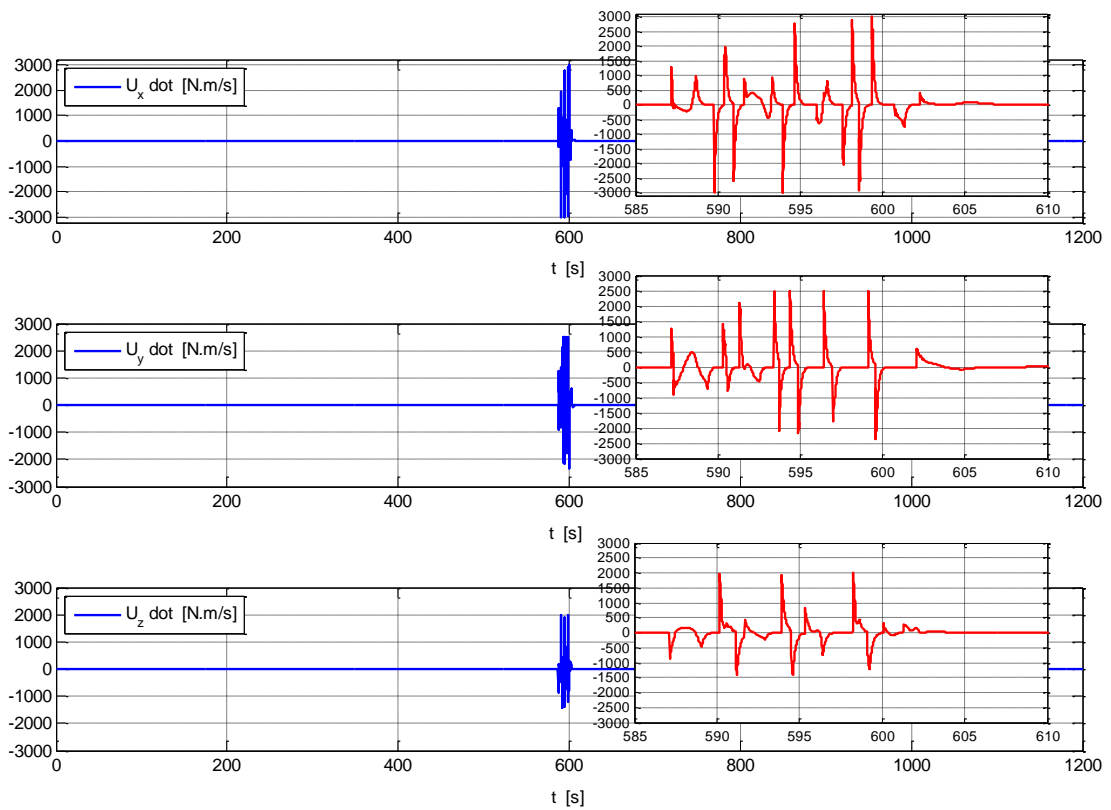


Figura 5.65. Taxas dos torques de controlo aplicados ao veiculo:  $|\dot{U}_x| \leq 3000$ ,  $|\dot{U}_y| \leq 2500$ ,  $|\dot{U}_z| \leq 2000$ .

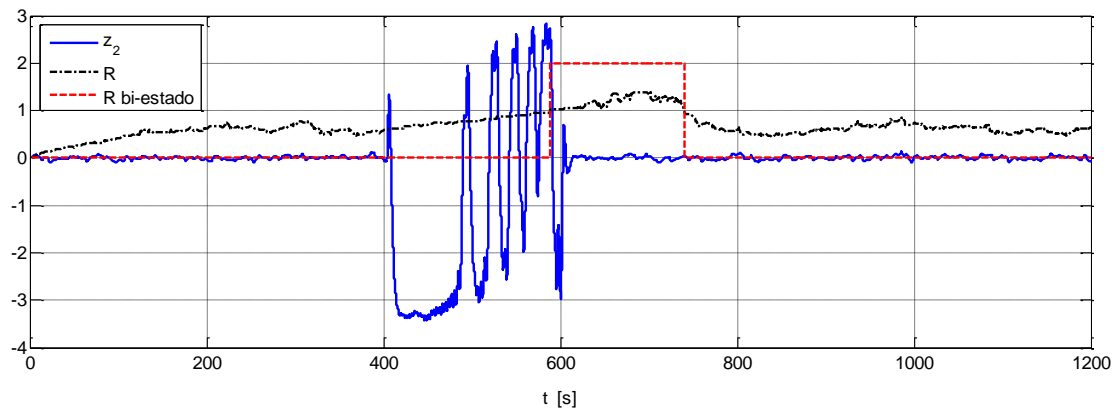
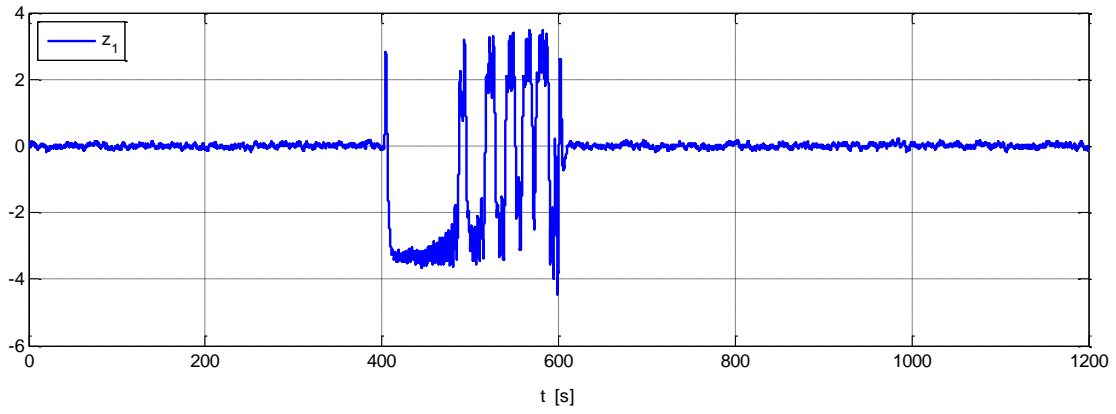


Figura 5.66. Sinais efetivamente utilizados no processo de detecção,  $z_1$  e  $z_2$ , sendo o caos detetado com base em  $z_2$ .

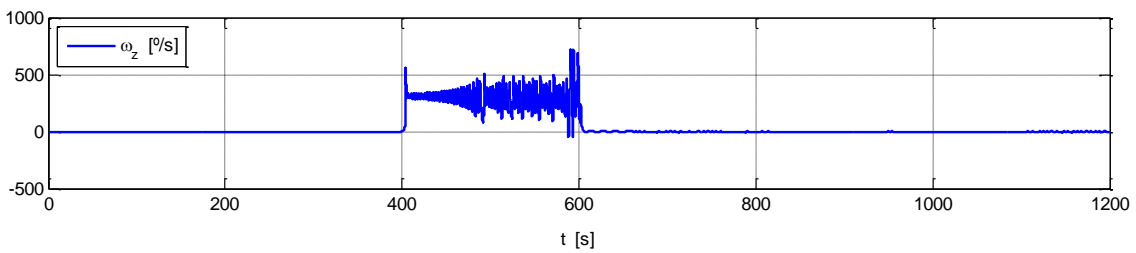
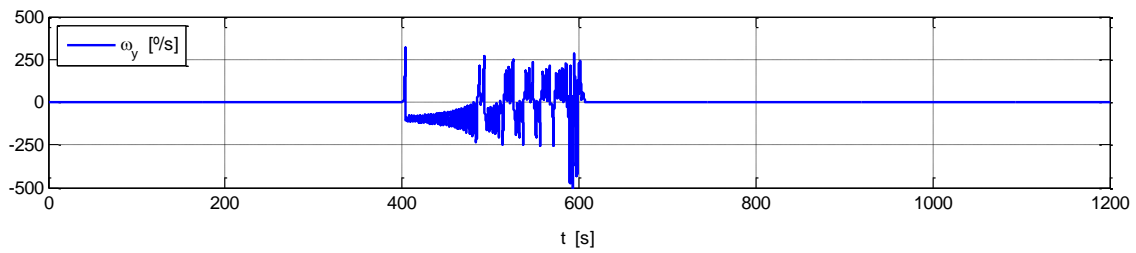
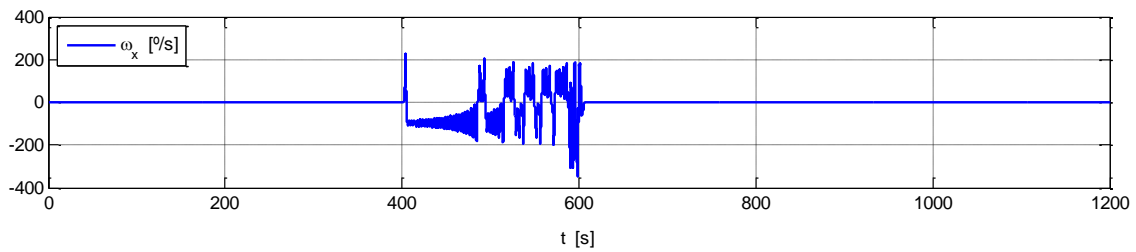


Figura 5.67. Velocidades angulares do veículo espacial segundo os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

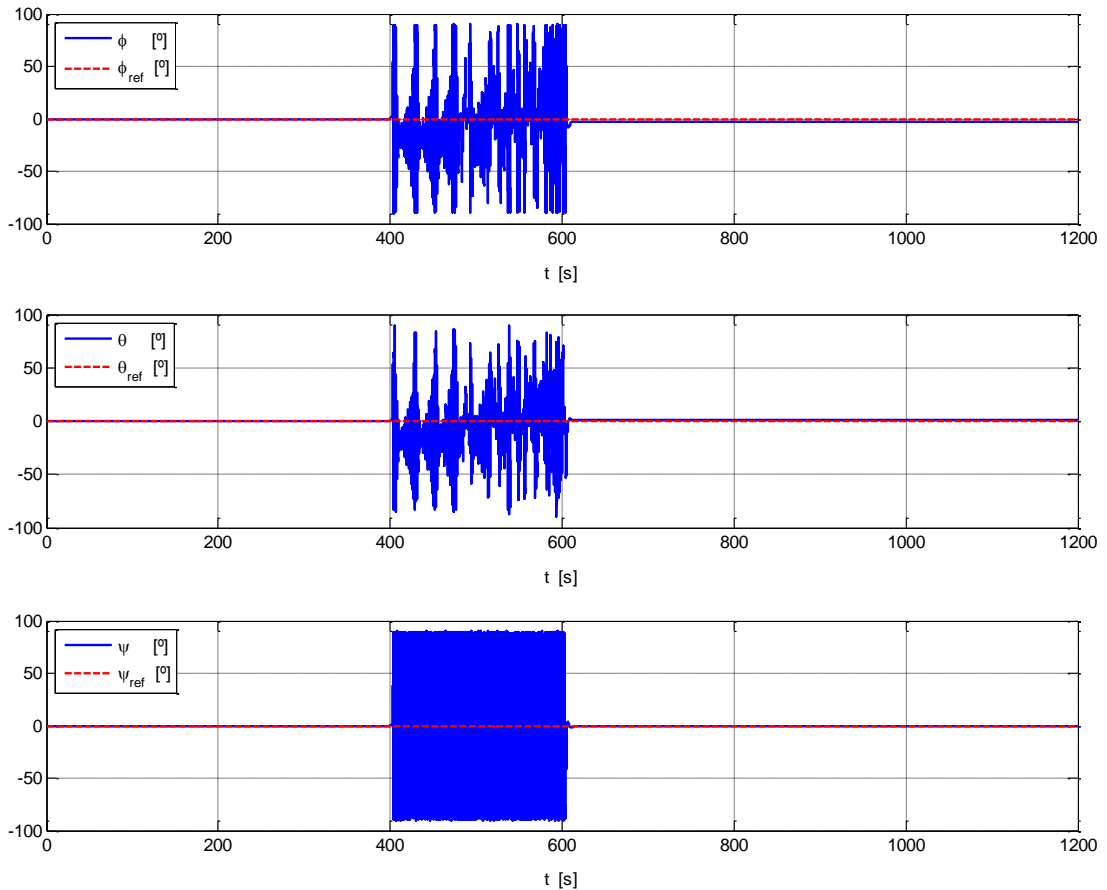


Figura 5.68. Atitude do veículo espacial em termos de ângulos de Euler segundo os eixos  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

**Discussão relativa à detecção + controle:**

Os resultados mostram a detecção de forma automática de um movimento de atitude caótico num sistema aeroespacial tendo em conta que os sinais medidos encontram-se contaminados com ruído e a supressão deste tipo movimento (naturalmente indesejado porque é provocado por torques perturbadores inevitáveis no espaço) praticamente de imediato cumprindo as restrições impostas no controlo, ver Figuras (5.63) a (5.65), (5.67) e (5.68).

Da análise da Figura (5.63) poder-se-á questionar à primeira vista se não seria benéfico recorrer a um preditor por forma a antever o comportamento caótico, e, por conseguinte, ativar o controlo antes do caos sequer se manifestar. A resposta a esta pergunta é evidentemente que não! Relembre-se que qualquer sinal caótico é por natureza altamente imprevisível, e portanto, é teoricamente impossível prever a sua trajetória. Naturalmente que é possível prever a um curto espaço de tempo, no entanto, relembre-se também que existe sempre um regime transiente entre cada mudança de comportamento, seja de regular para regular (ex.: estado de equilíbrio  $\leftrightarrow$  oscilação periódica, duplicação do período), ou de regular para caótico, e vice-versa, e nesse caso o controlo seria ativado porque ter-se-ia detetado uma mudança de comportamento qualquer, e não porque o caos teria efetivamente se manifestado.

A Figura (5.66) realça a importância do sistema auxiliar (5.92) no que diz respeito à detecção, onde se verifica que a relação sinal-ruído do sinal  $z_1$  é reduzida substancialmente quando comparada com a do sinal medido,  $y_{obs}$ , e que esta é reduzida por sua vez ainda mais no sinal  $z_2$  - o sinal verdadeiramente analisado pelo algoritmo de detecção - e que apesar de este não possuir exatamente a forma de onda de  $y_{obs}$ , herda as suas características dinâmicas, contribuindo desta forma para que o caos seja detetado com êxito em sinais altamente corrompidos com ruído. Repare-se no terceiro gráfico da Figura (5.63). O sinal medido,  $y_{obs}$ , está altamente contaminado com ruído, apresentando um valor médio nulo por exemplo em  $t \in [600, 1200]$  s,  $\bar{y}_{obs} = 0$ , e portanto fazendo com que  $y_{obs}$  seja simplesmente WGN, e no entanto o detetor indica um movimento regular como se de um sinal ‘limpo’ se tratasse. Esta apresenta-se como uma das particularidades do novo detetor, já que puro WGN é facilmente reconhecido como um comportamento não caótico, contrariamente a outros métodos de detecção que falham quase sempre na presença deste tipo de ruído.

O desvio padrão do ruído,  $\sigma_n$ , foi calculado com base na SNR pré-estabelecida,  $SNR_{[dB]} = 20 \log(A_{ef}/\sigma_n) = 10$  dB, e na amplitude eficaz de  $\omega_x$ ,  $A_{ef}$ , no regime em que  $\omega_x$  apresenta o comportamento caótico, isto é, com a perturbação *ON* e com o controlo *OFF*, já que na ausência da perturbação tem-se  $\omega_x = 0$ .

Relativamente à Figura (5.68), esta tem por objetivo mostrar que o controlo, embora sujeito às restrições, força as ‘saídas do sistema’ a seguirem as saídas de referência,  $(\phi, \theta, \psi) = (\phi_{ref}, \theta_{ref}, \psi_{ref}) = (0, 0, 0)^\circ$ . No período de  $t = 400$  a  $t = 600$  s, aproximadamente, os ângulos de Euler,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , não ultrapassam os  $\pm 90^\circ$  porque, embora sejam as saídas que permitem ‘visualizar’ a atitude do veículo, não são as saídas reais do sistema e são determinadas por funções que têm como contradomínios  $]-90, 90[^\circ$  (arctan) e  $[-90, 90]^\circ$  (arcsin), ver equações (5.84). Obviamente que neste intervalo os resultados podem ser apresentados de outra forma, modificando-os em termos de programação de modo a se obter ângulos fora dos respetivos contradomínios (ex.:  $450^\circ$ ,  $540^\circ$ ,  $630^\circ$ , ângulos congruentes de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ , respetivamente). No entanto, o importante a extrair desta figura é que a atitude do veículo é de facto estabilizada na atitude de referência assim que o controlo é ligado.

# Capítulo 6

## 6. Conclusões e Sugestões para Futuras Investigações

### 6.1. Conclusões

A presente tese encontra-se dividida em duas partes fundamentais e contribui com dois avanços significativos no que diz respeito à deteção e ao controlo de sistemas dinâmicos contínuos no tempo suscetíveis de exibir movimentos caóticos. A primeira parte aborda o problema de deteção de caos em tempo-real, e a segunda, o problema de controlo e sincronização robusta deste tipo de sistemas tendo em conta restrições simultaneamente nas magnitudes e nas taxas dos atuadores. Os métodos propostos vêm solucionar tais problemas, cujas técnicas mais avançadas da atualidade apresentam claramente desvantagens, sendo por vezes até mesmo ineficazes, e nas quais suas resoluções são de extrema importância uma vez que tratando-se de problemas reais estes podem surgir em sistemas altamente críticos como em sistemas aeroespaciais.

No que diz respeito à deteção, um novo algoritmo, projetado de raiz, para detetar dinâmicas caóticas em tempo-real, a partir de uma única série temporal, e na presença de níveis de ruído consideravelmente elevados, é proposto.

O princípio da deteção tem como alicerce uma das principais características dos sistemas caóticos: qualquer trajetória caótica, independentemente da sua condição inicial, torna-se altamente imprevisível decorrido um período de tempo bastante curto. Ocorre que cada uma das componentes da trajetória - o sinal medido, por hipótese - é um sinal 'aparentemente' aleatório, que exhibe inúmeros máximos locais em diferentes intervalos temporais. Fundamentado nesta premissa, é estabelecido uma janela de observação deslizante, compreendendo os maximizantes dos respetivos máximos, e, após uma simples manipulação da informação, um parâmetro específica de entre dois tipos de dinâmica: um movimento regular (estado de equilíbrio, movimento periódico, movimento multiperódico); ou um movimento caótico. O processo de decisão é baseado num dado limiar por forma a tolerar um determinado nível de ruído, sendo que um valor do parâmetro igual ou inferior ao limiar indica um movimento regular e um valor superior um movimento caótico. Tratando-se de um algoritmo projetado para ser aplicado em sistemas reais, o facto do ruído sempre presente nas medições que influenciaria naturalmente o resultado da deteção não poder ser evitado apropriadamente, ainda que com recurso a filtros dada a natureza do comportamento

caótico, é superado engenhosamente recorrendo a um sistema auxiliar que transforma o sinal medido num outro sinal - o sinal verdadeiramente analisado - e que contém as mesmas características do sinal original mas com um nível de ruído substancialmente mais baixo. É desta forma que o detetor é capaz de detetar eficazmente a presença de caos em sinais com níveis de ruído consideravelmente elevados.

Simulações numéricas são efetuadas para validar a eficácia do algoritmo utilizando para o efeito três aplicações/sistemas: um sistema clássico, que apresenta no seu espaço de fases um atrator em forma de borboleta similar ao célebre sistema de Lorenz; o movimento da atitude de um veículo espacial rígido e magnético numa órbita elíptica; e a dinâmica de um giróstato eletromecânico. Em ambas as aplicações, é considerado ruído branco gaussiano aditivo nos respetivos sinais medidos/observados, a fim de comprovar e avaliar a robustez do algoritmo de deteção.

Os resultados mostram que a distinção entre os dois tipos de comportamento é bem clara. O comportamento caótico é identificado quando, e somente quando, a dinâmica subjacente é de facto caótica, e não quando ocorre por exemplo uma simples mudança de comportamento, como uma variação da frequência de oscilação ou uma bifurcação. No que diz respeito ao ruído, a deteção é efetuada com sucesso mesmo até com níveis de degradação do sinal na ordem dos 10 dB, uma relação entre a potência do sinal e a potência do ruído de aproximadamente 3:1, respetivamente, o que é mais do que suficiente para a maioria das aplicações ao nível de engenharia.

Os aspetos mais poderosos do detetor prendem-se com o facto de este não requerer o modelo matemático do sistema, nem a estimação de todas as variáveis de estado ou reconstrução do espaço de fases, isto é, o conhecimento de toda a trajetória, porque a deteção é independente da natureza dos dados. O algoritmo é aplicado simplesmente a uma única série temporal, e por isso não existe qualquer restrição relativamente à dimensão do sistema em questão. Uma outra vantagem está relacionada com o comprimento da janela de observação. A deteção é efetuada com êxito mesmo com uma janela de observação bastante pequena, de apenas 50 pontos. Por outro lado, dado que o detetor é baseado nos máximos locais do sinal, não há necessidade de se preocupar com a frequência de amostragem do sinal, independentemente de se tratar de uma dinâmica rápida ou lenta, contrariamente a outras técnicas de deteção que exigem um cuidado especial para evitar possíveis fenómenos de sobreamostragem. Por fim, a baixa complexidade do algoritmo é uma outra grande vantagem, e é o que o torna definitivamente apropriado para uma deteção em tempo-real. O algoritmo é bastante eficiente do ponto de vista computacional, quer em termos de esforços de programação, quer em termos de tempo de computação.

No que diz respeito ao controlo, quatro abordagens de controlo, todas elas com variações entre si, são propostas para alcançar um controlo robusto de sistemas não-lineares suscetíveis de exibir modos de funcionamento caóticos sujeitos a restrições nos atuadores. As quatro abordagens são formuladas tendo por hipótese que o controlo é exclusivamente de saída e

que as restrições no controle são não só nas magnitudes mas também nas taxas. Deste modo, as contribuições vêm preencher, por um lado, a lacuna existente no que diz respeito ao controle de sistemas caóticos sujeitos a restrições nos atuadores, e por outro, aumentar área de aplicabilidade dos métodos, já que o controle é feito exclusivamente de saída e não de toda a trajetória/estados.

Naturalmente que o controle de saída robusto com restrições nos atuadores poderia ser conseguido também através de outras técnicas de controle avançadas como por exemplo através de desigualdades matriciais lineares. Contudo, dependendo da aplicação, e no caso de desigualdades matriciais lineares, poderá exigir não só fortes conhecimentos em teoria de controle como também uma experiência considerável de prática, porque muito frequentemente alguns parâmetros do controlador têm que ser necessariamente relaxados para alcançar um controle admissível. Por outro lado, técnicas com base em desigualdades matriciais lineares recorrem a *toolboxes* numéricas para determinar iterativamente os ganhos do controlador e tem-se que essas *toolboxes* poderão não se encontrar disponíveis em qualquer *software*. O controle com restrições poderia ser conseguido também através de um controle preditivo. Contudo, note-se que a dinâmica de um sistema caótico muitas vezes é rápida, e nesse sentido o sistema de controle requereria um microprocessador com um poder de cálculo relativamente elevado para poder resolver problemas de otimização rapidamente entre sucessivas amostras. Outras técnicas com base em funções de Lyapunov juntamente com estratégias de *anti-windup* poderiam ser também projetadas para conceber um controle com restrições nos atuadores, no entanto, como bem sabido as funções de Lyapunov são formuladas especificamente para um dado sistema, são complicadas de obter na maioria dos casos, e requerem uma boa preparação matemática para provar a estabilidade do sistema em malha fechada. Neste sentido, as abordagens apresentadas destacam-se por serem elegantes e altamente sistemáticas. Se um engenheiro quiser estabilizar um sistema não-linear que exiba um comportamento caótico num dado estado de referência ou forçar as suas saídas a seguirem sinais de referência especificados, seguir os passos descritos em cada uma das abordagens é tudo o que é preciso para alcançar o objetivo mesmo sem requerer muita experiência em teoria de controle.

A primeira metodologia aborda o controle de saída sujeito a restrições simétricas nas magnitudes e nas taxas do controle. Numa segunda abordagem são feitas modificações de modo a garantir um controle com restrições assimétricas nas magnitudes e simétricas nas taxas. Numa terceira são feitas novamente modificações a fim de considerar, de forma explícita, incertezas nos parâmetros do sistema a controlar. E numa última abordagem o controle é conseguido por uma outra estratégia que não necessita do modelo matemático que gera os sinais de referência.

Simulações numéricas são realizadas para validar a eficácia e a robustez de cada uma das abordagens considerando para o efeito sistemas clássicos bem estudados na teoria do caos e sistemas reais da indústria aeroespacial. Numa primeira validação, o objetivo consiste em sincronizar as saídas do sistema de Lorenz com as saídas do sistema de Chua, ambas caóticas,

considerando restrições nas magnitudes e nas taxas do controlo, ruídos nas medições, nos processos, e variações nos parâmetros do sistema controlado (Lorenz). Numa segunda validação, o objetivo consiste em suprimir movimentos de atitude caóticos num veículo espacial que surgem devido a torques perturbadores inevitáveis no espaço considerando que os torques de controlo e as respetivas taxas são limitadas, e em realizar uma manobra orbital, que consiste em direcionar um veículo espacial sob influência dos campos gravíticos da Terra e da Lua para um dos pontos de Lagrange do sistema, considerando que as acelerações e os respetivos *jerks* de controlo são limitados. Numa terceira validação, o objetivo consiste em suprimir eventuais movimentos caóticos num sistema aeroelástico (asa de um avião), considerando que os parâmetros do sistema (derivadas de estabilidade e de controlo) são conhecidos com incertezas, e que as amplitudes e as velocidades com que as superfícies de controlo podem operar são limitadas. Uma última simulação tem por objetivo mostrar a deteção em tempo-real de um movimento de atitude caótico num veículo espacial e a sua estabilização numa atitude de referência considerando torques e taxas de controlo limitadas.

As grandes vantagens das soluções encontradas residem no facto que estas aplicam-se a sistemas não-lineares que podem vir a exibir dinâmicas altamente complexas, que oferecem robustez contra ruídos, perturbações externas e incertezas nos parâmetros, e que o controlo tem em consideração as saturações dos atuadores, não só nas magnitudes, mas também nas taxas. Além do mais, as abordagens não exigem grandes esforços computacionais porque as leis de controlo são estáticas, todos os parâmetros são calculados *offline*, e por conseguinte, podem ser implementadas em plataformas de baixo custo.

As soluções encontradas vêm então contribuir para as mais avançadas técnicas de controlo abertas à comunidade na medida em que consideram restrições simultaneamente nas magnitudes e nas taxas do controlo, opostamente a outras técnicas do controlo que não consideram qualquer tipo de restrições e que são requeridas particularmente em sistemas aeroespaciais.

## 6.2. Sugestões para Futuras Investigações

No que diz respeito à deteção de caos, embora o objetivo tenha sido alcançado na sua totalidade, isto é, tenha-se elaborado um algoritmo capaz de detetar comportamentos caóticos em tempo-real e na presença de ruídos de medição, surgiram, entretanto, algumas ideias que poderão ser trabalhadas futuramente a fim de melhorar ainda mais a capacidade de deteção do detetor. Numa primeira fase, seria interessante efetuar um estudo profundo para perceber se é possível estabelecer uma relação entre o nível de ruído - assumindo que este é conhecido - e o limiar de deteção, de modo a melhorar, isto é, diminuir, a relação sinal-ruído admissível pelo detetor. A introdução de um filtro não-linear a montante do detetor seria uma outra possibilidade, que poderia melhorar naturalmente a relação sinal-ruído do detetor. Contudo, tal não é direto, porque as técnicas de filtragem convencionais em

tempo-real não são apropriadas para dinâmicas caóticas, e portanto, sugeria-se, numa segunda fase, a elaboração de novas técnicas de redução de ruído com aplicação em tempo-real a dinâmicas caóticas. Uma terceira ideia, que na verdade está já a ser desenvolvida pelo autor, consiste numa extensão do conceito de deteção proposto para sistemas discretos no tempo (mapas). Numa última fase, seria interessante também efetuar uma análise formal da complexidade do algoritmo propriamente dita, isto é, em termos de operações, e comparar com outros métodos de deteção, ainda que estes não permitam uma deteção em tempo-real.

No que toca ao controlo robusto de sistemas caóticos, as abordagens propostas lidam, especificamente, com o controlo e sincronização de saída desta classe de sistemas, assumindo que os sistemas em questão são sujeitos a restrições simultaneamente nas magnitudes e nas taxas do controlo. No entanto, embora os objetivos tenham sido atingidos com sucesso, existem algumas ideias interessantes, que ainda não estão resolvidas, pelo menos à melhor pesquisa efetuada pelo autor, e que poderão ser desenvolvidas. Note-se que nas abordagens propostas, os atuadores podem saturar! Porém, é bem sabido que os sistemas caóticos são extremamente sensíveis às condições iniciais, e nesse sentido, acredita-se que será possível direcionar a trajetória de um sistema caótico para um dado ponto no espaço de fases através de ‘pequenas quantidades de controlo’, sem que os limites de saturação sejam sequer alcançados. Assim, fica aqui um problema pertinente, o qual gostaria que viesse a ser alvo de futuras investigações: como controlar (ou sincronizar) as saídas de sistemas caóticos, sem sequer saturar os atuadores?

Um outro ponto que poderá também ser desenvolvido com base nas técnicas apresentadas nesta tese está relacionado com o tipo das restrições consideradas no controlo. Embora as restrições do controlo sejam não só nas magnitudes mas também nas suas taxas, de modo a abranger os sistemas mais exigentes em termos das limitações dos atuadores, as restrições são, à exceção do controlo da secção (4.2), simétricas (relativamente à origem) ambas nas magnitudes e nas taxas. Repare-se então que, embora estas abordagens sejam aplicáveis a uma grande classe de sistemas sujeitos a restrições nos atuadores, existem, no entanto, determinadas aplicações muito específicas que podem exigir restrições no controlo assimétricas, não só nas magnitudes mas também nas taxas.

Outras extensões são também possíveis, como por exemplo, considerar a hipótese de uma realimentação da saída, incluindo ruídos, em vez de uma realimentação de todos os estados, por forma assegurar uma robustez também contra ruídos de medição, e não simplesmente em relação às perturbações e às incertezas paramétricas do modelo. Especificamente no âmbito do controlo da secção (4.3), surge também a ideia de expandir o respetivo método no que diz respeito aos parâmetros associados a incertezas, já que, por hipótese, estes parâmetros estão nos termos lineares do sistema. Embora a abordagem abranja uma vasta gama de aplicações, poderá, de certa forma, ser expandida para os sistemas cujos parâmetros incertos possam figurar também nos termos não-lineares, e nesse sentido, tornar a abordagem mais generalista aumentando ainda mais a sua área de aplicabilidade.

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

## Referências Bibliográficas

- Ahn, C. K., Lee, C. D., & Song, M. K. (2012). Receding Horizon Chaos Synchronization Method. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 6(3), 529-534.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. (T. F. Banchoff, K. Devlin, G. Gonnet, J. Marsden, & S. Wagon, Eds.). New York: Springer-Verlag, Inc.
- Alstrom, B., Marzocca, P., Bollt, E., & Ahmadi, G. (2010). Controlling Chaotic Motions of a Nonlinear Aeroelastic System Using Adaptive Control Augmented with Time Delay. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference* (pp. 1-14). Toronto, Ontario Canada.
- Anderson, B. D. O., & Moore, J. B. (2007). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods* (12th ed.). Dover Publications.
- Andrievskii, B. R., & Fradkov, A. L. (2003). Control of Chaos: Methods and Applications. *Automation and Remote Control (Translated from Automatika I Telemekhanika)*, 64(5), 673-713.
- Astrom, K. J., & Bjorn, W. (1994). *Adaptive Control* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Aulbach, B., & Kieninger, B. (2001). On Three Definitions of Chaos. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1(1), 23-37.
- Awrejcewicz, J., & Dzyubak, L. (2005). Quantifying Smooth and Nonsmooth Regular and Chaotic Dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(6), 2041-2055.
- Awrejcewicz, J., & Holicke, M. M. (2007). *Smooth and Nonsmooth High Dimensional Chaos and the Melnikov-Type Methods*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Ayati, S. M., & K-Sedigh, A. (2008). Adaptive Control of Nonlinear in Parameters Chaotic Systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 8(2), 123-135.
- Bernhard, P. (2002). Survey of Linear Quadratic Robust Control. *Macroeconomic Dynamics*, 6, 19-39.
- Bertozzi, A. L. (1988). Heteroclinic Orbits and Chaotic Dynamics in Planar Fluid Flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(6), 1271-1294.
- Bhattacharya, R., Balas, G. J., Kaya, M. A., & Packard, A. (2002). Nonlinear Receding Horizon Control of an F-16 Aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(5), 924-931.
- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y. C., Mancini, H., & Maza, D. (2000). The Control of Chaos: Theory and Applications. *Physics Reports*, 329(3), 103-197.
- Bollt, E. M., & Meiss, J. D. (1995). Targeting Chaotic Orbits to the Moon through Recurrence. *Physics Letters A*, 204(5-6), 373-378.
- Boukabou, A., & Mansouri, N. (2012). T-S Fuzzy Control of Uncertain Chaotic Vibration. *Shock and Vibration*, 19(3), 379-389.
- Bousson, K. (2004). Viable Feedback Space Trajectory Control. In *Proceedings of the International Council for Astronautical Sciences (ICAS-2004)* (August 29 - September 3, Paper reference ICAS 2004-7.1.4). Yokohama, Japan.

- Bousson, K. (2007). Time-Varying Parameter Estimation with Application to Trajectory Tracking. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, 79(4), 406-413.
- Bousson, K. (2010). Optimal Robust Control of Aeroelastic System Vibrations. *Vibromechanika. Journal of Vibroengineering*, 12(1), 13-25.
- Bousson, K., & Antunes, S. C. R. (2010). Optimal Feedback Control Approach to Pattern Signal Generation with Chua-Matsumoto's Chaotic Oscillator. *International Review of Electrical Engineering (IREE)*, 5(1), 304-310.
- Bousson, K., & Quintiães, M. S. S. (2008). An Optimal Linearization Approach to Spacecraft Attitude Stabilization. *International Review of Aerospace Engineering (IREASE)*, 1(6), 503-511.
- Bousson, K., & Velosa, C. M. N. (2014). Robust Control and Synchronization of Chaotic Systems with Actuator Constraints. In P. Vasant (Ed.), *Handbook of Research on Artificial Intelligence Techniques and Algorithms* (pp. 1-43). IGI Global.
- Brown, R., Bryant, P., & Abarbanel, H. D. I. (1991). Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from a Observed Time Series. *Physical Review A*, 43(6), 2787-2806.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9th ed.). Boston: Brooks/Cole.
- Ott, E., Pelikan, S., & Yorke, J. A. (1984). Strange Attractors that are not Chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 13(1-2), 261-268.
- Cai, L., Zhou, J., & Zhang, H. (2011). Chaos Synchronization of Electro-Mechanical Gyrostat Systems via Time-Delay Feedback Control. In *2011 Fourth International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications (IWCFTA)* (pp. 268-272). Hangzhou: IEEE.
- Caillau, J.-B., Daoud, B., & Gergaud, J. (2012). Minimum Fuel Control of the Planar Circular Restricted Three-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 114(1-2), 137-150.
- Chen, C. L., Peng, C. C., & Yau, H. T. (2012). High-order Sliding Mode Controller with Backstepping Design for Aeroelastic Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(4), 1813-1823.
- Chen, F., Zhou, L., & Chen, Y. (2011). Bifurcation and Chaos of an Airfoil with Cubic Nonlinearity in Incompressible Flow. *Science China Technological Sciences*, 54(8), 1954-1965.
- Chen, G. (2004). Stability of Nonlinear Systems. In *Encyclopedia of RF and Microwave Engineering*. New York: Wiley.
- Cheng, G., & Liu, Y. Z. (1999). Chaotic Motion of a Magnetic Rigid Satellite in an Orbit near the Equatorial Plane of the Earth. *Journal "Technische Mechanik,"* 19(2), 197-201.
- Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., & Zhong, G.-Q. (1993). A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos - Part I: Routes to Chaos. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 732-744.
- Demenkov, M. (2008). Structural Instability Induced by Actuator Constraints in Controlled Aeroelastic System. In *Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*. Saint Petersburg, Russia.

- Deng, L., & Xu, J. (2010). Control and Synchronization for Uncertain Chaotic Systems with LMI Approach. In *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)* (pp. 1695-1700). Xuzhou: IEEE.
- Diacu, F. (1996). The Solution of the n-Body Problem. *The Mathematical Intelligencer*, 18(3), 66-70.
- Ditto, W. L., Spano, M. L., & Lindner, J. F. (1995). Techniques for the Control of Chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 86(1-2), 198-211.
- Djurović, I., & Rubežić, V. (2008). Chaos Detection in Chaotic Systems with Large Number of Components in Spectral Domain. *Signal Processing*, 88(9), 2357-2362.
- Djurović, I., Rubežić, V., & Sejdić, E. (2013). A Scaling Exponent-based Detector of Chaos in Oscillatory Circuits. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 242(1), 67-73.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., & Francis, B. A. (1989). State-space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 831-847.
- Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., & Ciliberto, S. (1986). Lyapunov Exponents from Time Series. *Physical Review A*, 34(6), 4971-4979.
- Enns, D., Bugajski, D., Hendrick, R., & Stein, G. (1994). Dynamic Inversion: An Evolving Methodology for Flight Control Design. *International Journal of Control*, 59(1), 71-91.
- Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1), 25-52.
- Femat, R., & Solis-Perales, G. (2008). *Robust Synchronization of Chaotic Systems via Feedback (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*. (M. Thoma & M. Morari, Eds.) (1st ed.). Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
- Ferreira, B. B., de Paula, A. S., & Savi, M. A. (2011). Chaos Control Applied to Heart Rhythm Dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(8), 587-599.
- Fitzpatrick, R. (2011). *Newtonian Dynamics* (4th ed.). Austin: Lulu.
- Fong, C. F. C. M., De Kee, D., & Kaloni, P. N. (2003). *Advanced Mathematics for Engineering and Science*. Science. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Fouda, J. S. A. E., Effa, J. Y., Kom, M., & Ali, M. (2013). The Three-state Test for Chaos Detection in Discrete Maps. *Applied Soft Computing*, 13(12), 4731-4737.
- Fradkov, A. L., & Evans, R. J. (2005). Control of Chaos: Methods and Applications in Engineering. *Annual Reviews in Control*, 29(1), 33-56.
- Fraser, A. M. (1996). Chaos and Detection. *Physical Review E*, 53(5), 4514-4523.
- Gao, J., Hu, J., Mao, X., & Tung, W. (2012). Detecting Low-Dimensional Chaos by the "Noise Titration" Technique: Possible Problems and Remedies. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(3), 213-223.
- Ge, Z.-M., & Lin, T.-N. (2003). Chaos, Chaos Control and Synchronization of Electro-Mechanical Gyrostat System. *Journal of Sound and Vibration*, 259(3), 585-603.
- Gençay, R. (1996). A Statistical Framework for Testing Chaotic Dynamics via Lyapunov Exponents. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 89(3-4), 261-266.

- Gerlach, O. H. (1965). Attitude Stabilization and Control of Earth Satellites. *Space Science Reviews*, 4(4), 541-582.
- Gidea, M., & Deppe, F. (2006). Chaotic Orbits in a Restricted Three-Body Problem: Numerical Experiments and Heuristics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 11(2), 161-171.
- Gidea, M., & Niculescu, C. P. (2002). *Chaotic Dynamical Systems: An Introduction*. Craiova; Universitaria Press.
- Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a New Science* (1st ed.). United States of America: Viking Penguin Inc.
- Gottwald, G. A., & Melbourne, I. (2004). A New Test for Chaos in Deterministic Systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 460(2042), 603-611.
- Gottwald, G. A., & Melbourne, I. (2009). On the Implementation of the 0-1 Test for Chaos. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8(1), 129-145.
- Gou, X.-F., Wang, X., & Xie, J.-L. (2008). Chaos Controlling Problems for Circuit Systems with Josephson Junction. *Journal of Physics: Conference Series*, 96, 012053 (7 pages).
- Gruendler, J. (1985). The Existence of Homoclinic Orbits and The Method Melnikov for Systems in  $R^n$ . *SIAM*, 16(5), 907-931.
- Guo, W., & Liu, D. (2011). Adaptive Control of Chaos in Chua's Circuit. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, 620946 (14 pages).
- Hippe, P. (2006). *Windup In Control: Its Effects and Their Prevention*. Springer.
- Hoppensteadt, F. C. (2000). *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*. (J. E. Marsden & L. Sirovich, Eds.), *Differential Equations* (2nd ed.). Springer-Verlag New York, Inc.
- Huang, H., & Feng, G. (2008). Robust H<sub>∞</sub> Synchronization of Chaotic Lur'e Systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18, 033113 (10 pages).
- Huang, J. (2004). *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Philadelphia: Siam.
- Idowu, B. A., Vincent, U. E., & Njah, A. N. (2008). Control and Synchronization of Chaos in Nonlinear Gyros via Backstepping Design. *International Journal of Nonlinear Science*, 5(1), 11-19.
- Jafari, S., Hashemi Golpayegani, S. M. R., & Jafari, A. H. (2012). A Novel Noise Reduction Method Based on Geometrical Properties of Continuous Chaotic Signals. *Scientia Iranica*, 19(6), 1837-1842.
- Jarzebowska, E. (2012). *Model-Based Tracking Control of Nonlinear Systems* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC.
- Kantz, H. (1994). A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series. *Physics Letters A*, 185(1), 77-87.
- Kantz, H., & Schreiber, T. (2004). *Nonlinear Time Series Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Kareem, S. O., Vincent, U. E., Laoye, J. A., & Akinola, T. A. (2008). Chaos Control of the Autonomous Van Der Pol Mathieu Equation For Dust-Charge Fluctuation In Dusty Plasma Using Back-Stepping Control. *Acta Physica Polonica B*, 39(8), 1817-1824.

- Kolesnikov, E. (2005). NDI-Based Flight Control Law Design. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (pp. 1-13). San Francisco, California.
- Kong, L.-Y., Zhou, F. Q., & Zou, J. (2006). The Control of Chaotic Attitude Motion of a Perturbed Spacecraft. In *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference* (pp. 166-170). Harbin, Heilongjiang.
- Koofigar, H. R., Sheikholeslam, F., & Hosseinnia, S. (2011). Robust Adaptive Synchronization for a General Class of Uncertain Chaotic Systems with Application to Chua's Circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 21, 043134 (9 pages).
- Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., & Ross, S. D. (2001). Low Energy Transfer to the Moon. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81(1-2), 63-73.
- Korobov, V. I., & Skoryk, V. O. (2002). Synthesis of Restricted Inertial Controls for Systems with Multivariate Control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 275(1), 84-107.
- Kostelich, E., & Schreiber, T. (1993). Noise Reduction in Chaotic Time-Series Data: A Survey of Common Methods. *Physical Review. E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 48(3), 1752-1763.
- Kunze, M. (2000). *Non-Smooth Dynamical Systems (Lecture Notes in Mathematics)*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Kunze, M., & Küpper, T. (1997). Qualitative Bifurcation Analysis of a Non-Smooth Friction-Oscillator Model. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP)*, 48(1), 87-101.
- Laplace, P. S. (1996). *A Philosophical Essay on Probabilities - Translated from the Sixth Edition by Truscott F. W. and Emory, F. L.* (6th ed.). New York: Dover Publications, Inc.
- Lenci, S., & Rega, G. (2004). Higher-Order Melnikov Functions for Single-DOF Mechanical Oscillators: Theoretical Treatment and Applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2004(2), 145-168.
- Lenci, S., & Rega, G. (2005). Heteroclinic Bifurcations and Optimal Control in the Nonlinear Rocking Dynamics of Generic and Slender Rigid Blocks. *International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC)*, 15(6), 1901-1918.
- Li, G. H., Zhou, S. P., & Yang, K. (2007). Controlling Chaos in Colpitts Oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 33(2), 582-587.
- Li, T.-Y., & Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985-992.
- Li, Y., Tang, W. K. S., & Chen, G. (2005). Hyperchaos Evolved from the Generalized Lorenz Equation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 33(4), 235-251.
- Liqun, C., & Yanzhu, L. (1998). Control of the Lorenz Chaos by the Exact Linearization. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 19(1), 67-73.
- Litak, G., Borowiec, M., Friswell, M. I., & Przystupa, W. (2009). Chaotic Response of a Quarter Car Model Forced by a Road Profile with a Stochastic Component. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(5), 2448-2456.
- Liu, C. (2009). A Novel Chaotic Attractor. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1037-1045.

- Liu, Y., & Chen, L. (2003). Chaotic Attitude Motion of a Magnetic Rigid Spacecraft in an Elliptic Orbit and its Control. *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, 19(1), 71-78.
- Liu, Y., & Liqun, C. (2013). *Chaos in Attitude Dynamics of Spacecraft*. Springer.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141.
- Lorenz, E. N. (1995). *The Essence of Chaos*. puente.lawr.ucdavis.edu. London: UCL Press Limited, University College London.
- Macau, E. E. N., & Grebogi, C. (2006). Control of Chaos and its Relevancy to Spacecraft Steering. *Philosophical Transactions. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 364(1846), 2463-2481.
- Maggiore, M., & Passino, K. M. (2005). Output Feedback Tracking: A Separation Principle Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1), 111-117.
- Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature* (1st ed.). New York: W.H.Freeman & Co Ltd.
- Marek, M., & Schreiber, I. (1995). *Chaotic Behavior of Deterministic Dissipative Systems*. Cambridge University Press.
- May, R. (1976). Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. *Nature Publishing Group*, 261(5560), 459-467.
- Mcdonough, P. V., Noonan, J. P., & Hall, G. R. (1995). A New Chaos Detector. *Computers & Electrical Engineering*, 21(6), 417-431.
- Melnikov, V. K. (1963). On the Stability of the Center for Time-Periodic Perturbations. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 12, 1-57.
- Merat, K., Abbaszadeh Chekan, J., Salarieh, H., & Alasty, A. (2014). Linear Optimal Control of Continuous Time Chaotic Systems. *ISA Transactions*, 53(4), 1209-1215.
- Mesquita, A., Rempel, E. L., & Kienitz, K. H. (2008). Bifurcation Analysis of Attitude Control Systems with Switching-Constrained Actuators. *Nonlinear Dynamics*, 51(1-2), 207-216.
- Mingotti, G., Topputo, F., & Bernelli-Zazzera, F. (2009). Low-energy, Low-thrust Transfers to the Moon. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 105(1-3), 61-74.
- Mohammadbagheri, A., & Yaghoobi, M. (2011). Lorenz-Type Chaotic Attitude Control of Satellite through Predictive Control. In *Third International Conference on Computational Intelligence Modelling Simulation (2011)* (pp. 147-152). Langkawi.
- Moon, F. C. (1992). *Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers* (1st ed.). Birkach: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Murray, R. M. (1999). *Geometric Approaches to Control in the Presence of Magnitude and Rate Saturations*. Technical Report 99-001. The Astrom Symposium on Control.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems* (1st ed.). CRC Press.
- Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computacional, and Experimental Methods* (1st ed.). John Wiley & Sons.
- Nikitina, N. V. (2011). Estimating the Chaos Boundaries of a Double Pendulum. *International Applied Mechanics*, 47(5), 600-606.

- No, T.-S., Lee, J.-M., Jeon, G.-E., Lee, D.-R., & Kim, G.-H. (2012). A Study on Earth-Moon Transfer Orbit Design. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 13(1), 106-116.
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2000). Biography of Edmond Halley. Retrieved May 4, 2015, from <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Halley.html>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2009). Biography of Feigenbaum. Retrieved May 6, 2015, from <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feigenbaum.html>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2014). Biography of Urbain Le Verrier. Retrieved June 4, 2015, from [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Le\\_Verrier.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Le_Verrier.html)
- Ostroff, A. J., & Bacon, B. J. (2002). Enhanced NDI Strategies for Reconfigurable Flight Control. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002* (pp. 3631-3636). IEEE.
- Otani, M., & Jones, A. J. (1997). *Guiding Chaotic Orbits: Research Report*.
- Ott, E. (1993). *Chaos in Dynamical Systems* (1st ed.). Cambridge University Press.
- Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. A. (1990). Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 64(11), 1196-1199.
- Pai, N.-S., & Yau, H.-T. (2010). Robust Exponential Converge Controller Design for a Unified Chaotic System with Structured Uncertainties via LMI. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2010, 948590 (10 pages).
- Papageorgiou, C., & Glover, K. (2004). Robustness Analysis of Nonlinear Dynamic Inversion Control Laws with Application to Flight Control. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. CDC*. (pp. 3485-3490). Paradise Island, Bahamas.
- Park, J. Y., Evans, D. J., Murugesan, K., & Sekar, S. (2005). Optimal Control of Time-Varying Singular Systems Using the RK-Butcher Algorithm. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(5), 617-627.
- Parlitz, U. (1993). Lyapunov Exponents from Chua's Circuit. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 3(2), 507-523.
- Perko, L. (2006). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd ed.). Springer.
- Platanitis, G., & Strganac, T. W. (2004). Control of a Nonlinear Wing Section Using Leading- and Trailing-Edge Surfaces. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(1), 52-58.
- Polyak, B. T. (2005). Stabilizing Chaos with Predictive Control. *Automation and Remote Control*, 66(11), 1791-1804.
- Poon, C., Li, C., & Wu, G. (2010). A Unified Theory of Chaos Linking Nonlinear Dynamics and Statistical Physics. *Eprint arXiv:1004.1427 [nlin.CD]*, (April), 1-13.
- Poon, C. S., & Barahona, M. (2001). Titration of Chaos with Added Noise. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 98(13), 7107-7112.
- Poursamad, A., & Davaie-Markazi, A. H. (2009). Robust Adaptive Fuzzy Control of Unknown Chaotic Systems. *Applied Soft Computing*, 9(3), 970-976.
- Pyragas, K. (1992). Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback. *Physics Letters A*, 170(6), 421-428.

- Pyragas, K., & Tamaševičius, A. (1993). Experimental Control of Chaos by Delayed Self-Controlling Feedback. *Physical Review A*, 180(1-2), 99-102.
- Rafikov, M., & Balthazar, J. M. (2008). On Control and Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Systems via Linear Feedback Control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(7), 1246-1255.
- Ramesh, M., & Narayanan, S. (2001). Controlling Chaotic Motions in a Two-Dimensional Airfoil Using Time-Delayed Feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5), 1037-1049.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J., & Luca, C. J. De. (1993). A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 65(1-2), 117-134.
- Rössler, O. E. (1976). An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398.
- Rössler, O. E. (1979). An Equation for Hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2-3), 155-157.
- Ruelle, D., & Takens, F. (1971). On the Nature of Turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20(3), 167-192.
- Ruiter, A. H., Damaren, C., & Forbes, J. R. (2013). *Spacecraft Dynamics and Control: An Introduction* (1st ed.). Wiley.
- Saberi, A., Stoorvogel, A. A., & Sannuti, P. (2011). *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. Springer; Reprint of the original 1st ed.
- Sano, M., & Sawada, Y. (1985). Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 55(10), 1082-1085.
- Savitzky, A., & Golay, M. J. E. (1964). Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures. *Analytical Chemistry*, 36(8), 1627-1639.
- Schuster, H. G. (1999). *Handbook of Chaos Control* (1st ed.). Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH.
- Sharkovskii, A. N. (1964). Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematical Journal*, 16, 61-71.
- Shi, X., & Zhu, Q. (2007). An Exact Linearization Feedback Control of CHEN Equation. *International Journal of Nonlinear Science*, 3(1), 58-62.
- Shuster, M. D. (1993). A Survey of Attitude Representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4), 439-517.
- Skokos, C. (2010). The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation. In J. J. Souchay & R. Dvorak (Eds.), *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets (Lecture Notes in Physics)* (Vol. 790, pp. 63-135). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Stein, G. (2003). Respect the Unstable. *Control Systems, IEEE*, 23(4), 12-25.
- Suganthan, P. N., Hansen, N., Liang, J. J., Deb, K., Chen, Y.-P., Auger, A., & Tiwari, S. (2005). *Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization. Technical Report*.
- Takens, F. (1981). Detecting Strange Attractors in Turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence*, 898(1), 366-381.

- Tanaka, K., Ikeda, T., & Wang, H. O. (1998). A Unified Approach to Controlling Chaos via an LMI-based Fuzzy Control System Design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(10), 1021-1040.
- Tanaka, K., & Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach* (1st ed.). Wiley-Interscience.
- Tang, D. M., & Dowell, E. H. (1992). Chaotic Stall Response of Helicopter Rotor in Forward Flight. *Journal of Fluids and Structures*, 6(3), 311-335.
- Tereshko, V. (2011). Control and Identification of Chaotic Systems by Altering the Oscillation Energy. In E. Tlelo-Cuautle (Ed.), *Chaotic Systems*. InTech.
- Tewari, A. (2011). *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (1st ed.). Wiley.
- Tong, C.-F., Zhang, H., & Sun, Y.-X. (2006). Optimal Control for a Class of Chaos Synchronization with Input Constraint. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference* (pp. 5282-5287). Minneapolis, Minnesota: IEEE.
- Tsiotras, P., & Longuski, J. M. (1995). A New Parameterization of the Attitude Kinematics. *Journal of the Astronautical Sciences*, 43(3), 243-262.
- Vandeput, S., Verheyden, B., Aubert, A. E., & Huffel, S. V. (2008). Numerical Noise Titration Analysis of Heart Rate Variability in a Healthy Population. In *5th Conference of the European Study Group on Cardiovascular Oscillations* (pp. 1-4). Parma, Italy.
- Velosa, C. M. N., & Bousson, K. (2015a). Robust Output Regulation of Uncertain Chaotic Systems with Input Magnitude and Rate Constraints. *Acta Mechanica et Automatica*, 9(4), 252-258.
- Velosa, C. M. N., & Bousson, K. (2015b). Robust Real-Time Chaos Detection from Measurement Data. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 10(79), 735-751.
- Velosa, C. M. N., & Bousson, K. (2015c). Suppression of Chaotic Modes in Spacecraft with Asymmetric Actuator Constraints. Submitted to the *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* (20 pages).
- Velosa, C. M. N., & Bousson, K. (2015d). Synchronization of Chaotic Systems with Bounded Controls. *International Review of Automatic Control (IREACO)*, 8(6), 386-395.
- Villate, J. E. (2007). *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Máxima*. (versão 1.2.).
- Wang, C.-C., Chen, C.-L., & Yau, H.-T. (2013). Bifurcation and Chaotic Analysis of Aeroelastic Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 9(2), 021004 (13 pages).
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285-317.
- Wu, Z.-G., Shi, P., Su, H., & Chu, J. (2014). Sampled-Data Fuzzy Control of Chaotic Systems Based on a T-S Fuzzy Model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(1), 153-163.
- Xu, S., & Yang, Y. (2009). Robust H<sub>∞</sub> Synchronization of Chaotic Pendulum-like Systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference* (pp. 644-649). Shanghai: IEEE.
- Yan, M., Zheng, X., & Xue, Z. (2014). ILMI Approach to Static Output Feedback Fuzzy Control for Synchronization of Hyperchaotic Systems via T-S Models. *The Open Cybernetics & Systemics Journal*, 8, 309-315.

- Yang, C.-D., & Sun, Y.-P. (2002). Mixed  $H_2/H_\infty$  State-Feedback Design for Microsatellite Attitude Control. *Control Engineering Practice*, 10(9), 951-970.
- Yassen, M. T. (2006). Chaos Control of Chaotic Dynamical Systems using Backstepping Design. *Chaos*, 27(2), 537-548.
- Yau, H.-T., & Chen, C.-L. (2007). Chaos Control of Lorenz Systems using Adaptive Controller with Input Saturation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(5), 1567-1574.
- Yu, Y., Zhong, Q., Li, K., Yu, J., & Liao, X. (2007). An LMI-based Fuzzy Control Method of Chaotic Systems. In *International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS)* (pp. 891-895). Kokura: IEEE.
- Zames, G. (1981). Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2), 301-320.
- Zhang, J., & Tang, W. (2012). Optimal Control for a Class of Chaotic Systems. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 859542 (20 pages).
- Zhao, L. C., & Yang, Z. C. (1990). Chaotic Motions of an Airfoil with Non-linear Stiffness in Incompressible Flow. *Journal of Sound and Vibration*, 138(2), 245-254.
- Zheng, G., & Yang, Y. (2008). Chaotic motions and limit cycle flutter of two-dimensional wing in supersonic flow. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 21(5), 441-448.
- Zhu, Z., & Liu, Z. (1997). Strange Nonchaotic Attractors of Chua's Circuit with Quasiperiodic Excitation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(1), 227-238.
- Zipfel, P. H. (2007). *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics* (2nd ed.). American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA).

# ANEXOS

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)

# Anexos

## Anexo A - Métodos Numéricos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

### A.1. Método de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta de 4º e 5º ordem são os mais utilizados na integração das equações diferenciais que descrevem o movimento de sistemas dinâmicos, devido à sua simplicidade e exatidão que apresentam face ao esforço computacional exigido. O método mais comum é o de 4º ordem, usualmente designado por *RK4*, *método clássico de Runge-Kutta*, ou simplesmente por *método de Runge-Kutta*. É um método de passo simples, e que requer apenas 4 cálculos da função por passo, como descrito de seguida:

Considere-se o seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

Conhecendo-se as condições iniciais  $(t_0, x_0)$ , a solução da equação/sistema ao longo do tempo  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ , é obtida, de uma forma aproximada, por (Fong, De Kee, & Kaloni, 2003):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

em que as variáveis  $k_i$ 's são dadas por:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\ k_2 &= h \cdot f(t_n + h/2, x_n + k_1/2) \\ k_3 &= h \cdot f(t_n + h/2, x_n + k_2/2) \\ k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3) \end{aligned}$$

e o instante ao longo do tempo, para qual cada ponto  $x_{n+1}$  é calculado, é dado por  $t_{n+1} = t_n + h$ , em que  $h$  designa o passo de integração, e deve ter um valor bastante pequeno (ex.:  $h = 10^{-2}$ ).

### A.2. Método de Runge-Kutta-Butcher

O método RK-Butcher, derivado do método de Runge-Kutta, é um método de resolução de equações diferenciais considerado comumente de 6º ordem por se assemelhar aos métodos de 6º ordem, isto é, requer o cálculo de 6 funções  $(k_1, \dots, k_6)$  para determinar o estado

seguinte  $x_{n+1}$ . Contudo, a sua ordem de trabalho é, na prática, muito próxima de cinco, sendo na realidade um método de 5º ordem. Ainda assim, apesar de ser de 5º ordem, Park e seus colaboradores (Park, Evans, Murugesan, & Sekar, 2005) num estudo comparativo entre vários métodos (*RK-Butcher*, *RK-Fehlberg*, *RK-Merson*, *RK-média aritmética (RKAM)*, e outros), comprovam que o método de *RK-Butcher* é o que apresenta resultados mais precisos quando comparados com as soluções exatas.

Dado um sistema de equações diferenciais ordinárias (ODE's) da forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad ; \quad x(t_0) = x_0$$

a solução do sistema ao longo do tempo é obtida, de uma forma aproximada, por (Park et al., 2005):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

em que as funções  $k_i$ 's são dadas por:

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(t_n + h/4, x_n + k_1/4)$$

$$k_3 = h \cdot f(t_n + h/4, x_n + k_1/8 + k_2/8)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_n + h/2, x_n - k_2/2 + k_3)$$

$$k_5 = h \cdot f(t_n + 3h/4, x_n + 3k_1/16 + 9k_4/16)$$

$$k_6 = h \cdot f(t_n + h, x_n - 3k_1/7 + 2k_2/7 + 12k_3/7 - 12k_4/7 + 8k_5/7)$$

O passo de integração é definido por  $h$ , deve ter um valor bastante pequeno (ex.:  $h = 10^{-2}$ ), e os instantes ao longo do tempo para o qual cada ponto  $x_{n+1}$  é calculado é dado por  $t_{n+1} = t_n + h$ .

## Anexo B - Diferenciação e Integração Numérica

### B.1. Diferenciação Numérica

#### Aproximação da Primeira Derivada:

A definição de derivada de uma função  $f$  num ponto  $x$  é (Burden & Faires, 2010):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta fórmula dá-nos um caminho óbvio de calcular o valor aproximado de  $f'(x)$ : calcule-se simplesmente a derivada pela fórmula das diferenças finitas progressivas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou de uma forma, digamos, simétrica, através da fórmula das diferenças finitas centradas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

com um valor de  $h$  bastante pequeno (ex.:  $h = 10^{-5}$ ).

#### Aproximação da Segunda Derivada:

Se a primeira derivada existir, a segunda derivada pode ser calculada, do mesmo modo, como (Burden & Faires, 2010):

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

ou então, de uma forma simétrica, como:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

## **B.2. Integração Numérica**

#### Regra de Simpson Composta:

O integral de uma função  $f(x)$  entre os respetivos limites de integração  $a$  e  $b$ , pode ser obtido numericamente, de uma forma aproximada, pela Regra de Simpson Composta. A abordagem consiste em dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos (com  $N$  par, número ímpar de pontos) e aplicar a Regra de Simpson Simples entre cada intervalo. A expressão resultante é definida por (Burden & Faires, 2010):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + f(b) \right]$$

em que  $h = (b - a)/N$  e  $x_i = a + ih$  com  $i = 0, 1, \dots, N$ . Quanto maior for o número de subintervalos,  $N$ , mais exato será o valor do integral, e, em contrapartida, maior será o esforço computacional.

## Anexo C - Resolução das Equações de Regulação

O seguinte sistema, cuja primeira equação é uma equação de Sylvester, é conhecido como equações de regulação lineares, ou também como equações de Francis, e a sua resolução é essencial para terminar algumas leis de controlo apresentadas nesta tese:

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B_1\Gamma + B_2 \\ 0 &= C_1\Pi + D_{12}\end{aligned}$$

Seja  $\text{vec}: \mathbb{R}^{l \times c} \rightarrow \mathbb{R}^{lc \times 1}$  uma função matricial tal que, para qualquer matriz  $X \in \mathbb{R}^{l \times c}$ :

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_c \end{bmatrix}$$

onde, para  $i = 1, \dots, c$ ,  $X_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $X$ . Aplicando esta transformação a todos os termos, resulta:

$$\begin{aligned}\text{vec}(\Pi S) - \text{vec}(A\Pi) - \text{vec}(B_1\Gamma) &= \text{vec}(B_2) \\ \text{vec}(C_1\Pi) &= \text{vec}(-D_{12})\end{aligned}$$

Assumindo as dimensões:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ; as matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$  têm, respetivamente, dimensões  $n \times s$  e  $m \times s$ .

Através de umas preposições que podem ser encontradas nas referências (J. Huang, 2004; Saberi et al., 2011), as equações acima podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}(S^T \otimes I_n)\text{vec}(\Pi) - (I_s \otimes A)\text{vec}(\Pi) - (I_s \otimes B_1)\text{vec}(\Gamma) &= \text{vec}(B_2) \\ (I_s \otimes C_1)\text{vec}(\Pi) &= \text{vec}(-D_{12})\end{aligned}$$

onde  $I_s \otimes A$  denota o produto de Kronecker entre as matrizes  $I_s$  e  $A$ .

Através da seguinte manipulação matemática:

$$\begin{aligned} \overbrace{(S^T \otimes I_n - I_s \otimes A)}^{A_*} \text{vec}(\Pi) - \overbrace{(I_s \otimes B)}^{B_*} \text{vec}(\Gamma) &= \text{vec}(B_2) \\ \underbrace{(I_s \otimes C_1)}_{C_*} \text{vec}(\Pi) &= \text{vec}(-D_{12}) \end{aligned}$$

estas equações podem ser transformadas num sistema algébrico linear padrão, da forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_* & -B_* \\ C_* & 0_{sp \times sm} \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \text{vec}(\Pi) \\ \text{vec}(\Gamma) \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{vec}(B_2) \\ \text{vec}(-D_{12}) \end{bmatrix}}_b$$

e as matrizes  $\Pi$  e  $\Gamma$  formadas depois de calculado o vetor  $z = H^{-1}b$ .

## Anexo D - Resolução da Equação de Riccati do Tipo $H_\infty$

A equação algébrica de Riccati contínua no tempo:

$$A^T P + PA - PB_1 B_1^T P + \gamma^{-2} P B_3 B_3^T P + Q = 0$$

pode ser reescrita, após uma manipulação matemática, como:

$$A^T P + PA - P \underbrace{\begin{bmatrix} B_3 & B_1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -\gamma^2 I_{n+q} & 0_{(n+q) \times m} \\ 0_{m \times (n+q)} & I_m \end{bmatrix}}_R^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} B_3^T \\ B_1^T \end{bmatrix}}_{B^T} P + Q = 0$$

onde  $I$  e  $0$  denotam respetivamente matrizes identidade e matrizes nulas.

A sua única solução,  $P = P^T$ ,  $P > 0$ , pode ser facilmente calculada, se existir, pela seguinte função disponibilizada em MATLAB<sup>®</sup>:  $P = \text{care}(A, B, Q, R)$ .

## Anexo E - Glossário

**Atrator Estranho / Caótico** - refere-se a um conjunto atrator no espaço de fases no qual o movimento das trajetórias é caótico. É um atrator que não é um ponto de equilíbrio, nem um ciclo limite, nem um atrator quasiperiódico, e a sua dimensão é fractal.

**Bifurcação** - designa a alteração do tipo de movimento quando um parâmetro ou um conjunto de parâmetros do sistema dinâmico é alterado. Por exemplo, quando um sistema passa de

um estado de equilíbrio para dois estados de equilíbrio à medida que um dos parâmetros aumenta/diminui.

**Caótico** - representa o tipo de movimento que é sensível a alterações nas condições iniciais; um movimento para o qual trajetórias que começam com condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente; um movimento que resulta num expoente de Lyapunov positivo.

**Ciclo Limite** - um atrator que é periódico no tempo, i.e., que os ciclos tornam-se periódicos através de uma sequência ordenada de estados.

**Controlabilidade** - diz-nos se é possível transferir, através de um controlo externo contínuo por partes,  $u(t)$ , a trajetória de um sistema,  $x(t)$ , de um estado inicial qualquer,  $x_0$ , para um estado final qualquer,  $x_f$ , num intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_f$ . O tempo finito é motivado por razões práticas, assim como o controlo contínuo por partes, que exclui a hipótese deste poder ser arbitrariamente grande num dado instante.

**Determinístico** - refere-se a um sistema dinâmico cujas equações do movimento, os parâmetros e as condições iniciais são bem conhecidas e que não são estocásticas. Um sistema determinístico pode exibir movimentos que aparentam ser aleatórios como é o caso dos sistemas caóticos.

**Espaço de Fases** - em sistemas dinâmicos governados por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, é um espaço cujas coordenadas são as variáveis de estado ou apenas algumas componentes do vetor de estado.

**Estabilizabilidade** - diz-nos se é possível transferir, através de um controlo externo contínuo por partes,  $u(t)$ , a trajetória de um sistema,  $x(t)$ , de um estado inicial qualquer,  $x_0$ , para a sua origem,  $x_f = 0$ , num intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_f$ . A estabilizabilidade é um conceito de controlabilidade mas no entanto mais fraco.

**Expoente de Lyapunov Característico** - também conhecido como *expoente de Lyapunov dominante* e por *maior expoente de Lyapunov*, designa, como o próprio nome indica, o maior dos expoentes de Lyapunov. Representado comumente por  $\lambda_1$ , é o mais importante de todos os expoentes, sendo que permite caracterizar o tipo de movimento e inclusive detetar a presença de caos.

**Expoentes de Lyapunov** - indicadores que medem a taxa média de divergência/convergência exponencial ao longo do tempo de duas trajetórias adjacentes no espaço de fases com condições iniciais diferentes. Um expoente de Lyapunov positivo indica a existência de um movimento caótico.

**Flutter** - é um fenómeno que ocorre devido à interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais numa estrutura sólida elástica (ex.: asa de uma aeronave). As forças aerodinâmicas afetam o modo de vibração natural da estrutura, induzindo uma vibração autorealimentada, com aumentos bruscos de amplitude e potencialmente destrutiva. Em

sistemas não-lineares, o *flutter* é normalmente interpretado como uma oscilação ciclo limite, e no caso de uma asa de uma aeronave, resulta muitas vezes de um movimento combinado de flexão e torção da asa.

**Fractal** - é uma forma geométrica abstrata, com padrões complexos que se repetem infinitamente mesmo que o espaço ocupado seja limitado, em que cada uma das suas partes é constituída por uma imagem de si própria. Constituem assim imagens belas com propriedades conhecidas como autossimilaridade, invariância de escala e detalhe infinito. Formam um conjunto de pontos num espaço de dimensão  $n$  que tem uma dimensão fractal não inteira inferior a  $n$ .

**Função de Melnikov** - uma medida da distância entre as variedades estável e instável associadas a um ponto sela numa dada secção de Poincaré. Segundo a teoria de Melnikov, quando as duas variedades se intersectam transversalmente a função apresenta um zero simples indicando a existência de caos.

**Hipercaos** - um sistema dinâmico onde o espaço de fases é esticado em duas ou mais direções; um movimento que resulta em dois ou mais expoentes de *Lyapunov* positivos.

**Horizonte de Previsibilidade** - tempo característico até o qual é possível prever a trajetória do sistema caótico. O *horizonte de previsibilidade* é, para uma trajetória caótica, bastante reduzido - e por isso é que não se consegue prever a meteorologia com precisão para além de apenas alguns dias - e está relacionado com o *maior expoente de Lyapunov*,  $t_h \sim 1/\lambda_1 \cdot \ln(a/e_0)$ . Aqui,  $\lambda_1$  denota o *maior expoente de Lyapunov*;  $e_0$  o erro inicial entre o estado estimado e o verdadeiro; e  $a$  uma tolerância, na qual a estimativa é considerada aceitável. Repare-se na dependência logarítmica de  $e_0$ . Significa que, na prática, não importa o quanto esforço que se faça para reduzir o erro inicial, pois a trajetória torna-se imprevisível para além de alguns múltiplos de  $1/\lambda_1$ .

**Intermitência** - um tipo de movimento caótico no qual longos intervalos de tempo de um movimento regular são seguidos de curtos intervalos tempo de um movimento do tipo aleatório.

**Movimento Browniano** - um movimento aleatório, contínuo, e não diferenciável, que descreve o movimento efetuado por uma partícula suspensa num fluido, resultante da sua colisão com as moléculas do meio envolvente.

**Órbita / Trajetória** - uma sequência de pontos do sistema no seu espaço de fases.

**Órbita Heteroclínica** - uma órbita num mapa que ocorre quando a variedade estável e a variedade instável de pontos sela diferentes se intersectam.

**Órbita Homoclínica** - uma órbita num mapa que ocorre quando a variedade estável e a variedade instável de um ponto sela se intersectam.

**Plano de Fases** - em sistemas dinâmicos governados por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, é uma representação no plano de duas das variáveis de estado do sistema.

**Ponto de Equilíbrio / Ponto Fixo** - para um sistema dinâmico contínuo, é um ponto no espaço de fases para o qual a solução do sistema tende à medida que o regime transiente decai ( $t \rightarrow \infty$ ). Para um sistema discreto (mapa), é o um ponto para o qual o sistema converge à medida que o mapa é iterado.

**Ponto Sela** - na teoria geométrica das equações diferenciais, é um ponto de equilíbrio com valores próprios reais em que pelo menos um dos valores próprios é positivo e outro é negativo; um ponto, normalmente num espaço tridimensional, que atrai numa dimensão e repele noutra.

**Quasiperiódico** - um tipo de movimento exibido por um sistema dinâmico que contém um número finito de frequências incomensuráveis. Numa secção de Poincaré, este tipo de movimento é caracterizado por uma curva fechada, e assim o é, no caso de duas frequências, porque o número rotacional,  $R = \omega_2/\omega_1$ , onde  $\omega_i$  denota a frequência, é irracional (ex.:  $\sqrt{2}$ ;  $\pi$ ).

**Secção de Poincaré** - uma sequência de pontos no espaço de fases gerada pela interseção do fluxo de um sistema contínuo com uma dada superfície/secção.

**Sistema Caótico** - um sistema dinâmico determinístico não-linear que pode exibir um comportamento caótico ou não dependendo dos valores dos parâmetros. Quando conhecido é naturalmente introduzido com os parâmetros que fazem desencadear um movimento caótico (ex.: sistema de Lorenz; Rössler; Chen; Lu; Ueda, Chua; Duffing; Van der Pol; Couillet; Genesio-Tesi). Podem ser sistemas contínuos no tempo, como estes mencionados, ou então sistemas discretos no tempo (ex.: mapa logístico; mapa em tenda; Hénon; Lozi; Ikeda).

**Sistema do tipo Lur'e** - um sistema dinâmico que se encontra escrito na forma de uma parte linear mais uma não-linearidade que depende exclusivamente das saídas mensuráveis, i.e., um sistema da forma:  $\dot{x} = Ax + \varphi(y)$ ,  $y = Cx$ .

**Sistema Subatuado** - um sistema dinâmico que tem menos variáveis de controlo (menos atuadores) do que graus de liberdade.

**Slew-rate (AmpOp)** - designa a taxa de variação máxima da tensão de saída por unidade de tempo de um Amplificador Operacional (AmpOp).

**Trajectoria Fiducial** - uma trajetória de referência, cuja condição inicial é o centro de uma hipersfera (esfera de dimensão  $n$ ). Quando associada à determinação dos expoentes de Lyapunov, é a trajetória pela qual todas as trajetórias iniciadas na sua vizinhança têm como referência para avaliar o tipo de divergência/convergência entre trajetórias.

**Transitividade / Mistura Topológica** - Matematicamente, uma função  $f$  é transitiva num intervalo  $I$ , se dados quaisquer dois subintervalos  $U_1$  e  $U_2$  em  $I$ , existir um ponto  $x_0 \in U_1$  e um  $n > 0$  inteiro tal que  $f^n(x_0) \in U_2$ . Esta propriedade é, de certa forma, equivalente à existência de órbitas periódicas densas em  $I$ , dado que uma órbita densa acaba por visitar qualquer subintervalo aberto em  $I$ . O conceito de ‘mistura’ corresponde à intuição padrão como por exemplo o da mistura de fluidos coloridos.

**Variedade** - um subespaço do espaço de fases para o qual trajetórias com condições iniciais nesse subespaço permaneçam sempre nessa mesma variedade/subespaço sob a ação de equações diferenciais ou de equações de diferenças. Uma variedade pode representar uma curva ou superfície diferenciável consoante a dimensão da variedade. Uma *variedade estável* e uma *variedade instável* associadas a um ponto sela de um sistema não-linear caracterizam conjuntos inerentes a esse ponto sela, tal que o fluxo iniciado em pontos pertencentes a esses conjuntos aproxima-se assintoticamente desse ponto, à medida que  $t \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ , respetivamente.

**Windup (Controller Windup)** - é um fenómeno que ocorre quando um controlador contém uma parte integral (ex.: P.I.) e que é causado pela interação da ação integral com a saturação dos atuadores. Degrada o desempenho do sistema, pode, no caso extremo, levar o sistema controlado à instabilidade, e surge porque se, nalguma circunstância, o erro - definido pela diferença do estado atual e o estado de equilíbrio - for grande (o qual pode ser originado por uma perturbação mais forte), a parte integral acumula esse erro, e como resultado os atuadores mantêm-se saturados mesmo que a trajetória esteja muito próxima do equilíbrio. Por conseguinte, a trajetória é afastada novamente do estado desejado mantendo consequentemente os atuadores saturados.

**Windup (Plant Windup)** - é um fenómeno que ocorre mesmo que o controlador não contenha uma parte integral. Designado por *plant windup* para se diferenciar de *controller windup*, surge quando os atuadores saturam num controlo que é efetuado por uma realimentação de estados simplesmente estática, e está relacionado com os valores próprios do sistema controlado. A saturação dos atuadores pode causar um comportamento oscilatório ou até mesmo instável, e tal acontece porque os estados não conseguem ser direcionados o suficientemente rápido para os seus valores desejados devido à restrição dos sinais de controlo.

(Página Deixada Intencionalmente em Branco)