



# **Filtragem de Kalman Estendida para Transferências Orbitais Interplanetárias**

**José Diogo de Vila Carrito**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(mestrado integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**outubro de 2023**



## **Declaração de Integridade**

Eu, José Diogo de Vila Carrito, que abaixo assino, estudante com o número de inscrição 26801 de/o Engenharia Aeronáutica da Faculdade de Engenharia, declaro ter desenvolvido o presente trabalho e elaborado o presente texto em total consonância com o **Código de Integridades da Universidade da Beira Interior**.

Mais concretamente afirmo não ter incorrido em qualquer das variedades de Fraude Académica, e que aqui declaro conhecer, que em particular atendi à exigida referência de frases, extratos, imagens e outras formas de trabalho intelectual, e assumindo assim na íntegra as responsabilidades da autoria.

Universidade da Beira Interior, Covilhã 06 / 10 / 2023





Onde estiveres, mãe, obrigado!



# **Agradecimentos**

Gostaria de expressar a minha gratidão a todos os colegas e amigos que, de uma forma ou de outra me ensinaram e fizeram parte do meu percurso acadêmico. Não posso deixar de agradecer a todos os Professores por compartilharem as suas lições.

Um sincero obrigado ao Rui Oliveira pela ajuda e tempo disponibilizado.

Ao Professor Doutor Kouamana Bousson, desejo manifestar a minha gratidão pela orientação, conselhos e sobretudo pela paciência.

À minha família, em particular, à minha irmã, ao meu irmão e ao meu pai, que foram a minha base e desempenharam um papel fundamental no meu sucesso, e que sem eles teria sido impossível.



# Resumo

O problema da filtragem ou estimação de estado consiste na determinação das variáveis de estado do sistema com base em informações limitadas das medições. O filtro de Kalman é uma das ferramentas mais conhecidas para a estimação de estado.

Nesta dissertação foi feito o estudo e implementação com sucesso do filtro de Kalman estendido para estimar o estado de cinco missões espaciais interplanetárias. Para todas as missões, os erros das posições e velocidades estimadas foram inferiores aos valores aceitáveis de erro. Pretendia-se também determinar o impacto do ruído no filtro de Kalman e verificou-se que desvios de posição e velocidade estimados pelo EKF com medições ruidosas eram significativamente maiores do que os erros associados a medições não ruidosas, embora com magnitudes aceitáveis. Observou-se que, em situações em que o erro de medição é negligenciável, a estimação do estado pode aproximar-se consideravelmente do valor real. Tentativas para encontrar matrizes de covariância mais apropriadas revelaram que esses valores impactam significativamente os dados estimados, independentemente da presença de ruído nas medições.

## Palavras-chave

Filtro de Kalman Estendido; Estimação Não-Linear; Estimador Ótimo; Trajetórias Interplanetárias; Transferência Orbital.



# **Abstract**

The problem of filtering or state estimation involves determining the state variables of the system based on limited information from measurements. The Kalman filter is one of the most well-known tools for state estimation.

In this dissertation, the study and successful implementation of the extended Kalman filter were conducted to estimate the state of five interplanetary space missions. For all missions, the errors of the estimated positions and velocities were lower than acceptable error values. The goal was also to determine the impact of noise on the Kalman filter, and it was found that deviations in position and velocity estimated by the EKF with noisy measurements were significantly larger than errors associated with non-noisy measurements, even though with acceptable magnitudes. It was observed that in situations where measurement error is negligible, the state estimation can closely approach the true value. Attempts to find more appropriate covariance matrices revealed that these values significantly impact the estimated data, regardless of the presence of noise in the measurements.

# **Keywords**

Extended Kalman Filter; Nonlinear Estimation; Optimal Estimator; Interplanetary Trajectories; Orbital Transfer.



# Índice

Declaração de Integridade . . . . .	iii
Dedicatória . . . . .	v
Agradecimentos . . . . .	vii
Resumo . . . . .	ix
Abstract . . . . .	xi
Índice . . . . .	xiii
Lista de Figuras . . . . .	xv
Lista de Tabelas . . . . .	xix
Nomenclatura . . . . .	xxi
Lista de Acrónimos . . . . .	xxv

## Capítulo 1

<b>Introdução</b> . . . . .	1
1.1 Motivação e visão geral do problema . . . . .	1
1.1.1 Missões espaciais interplanetárias . . . . .	3
1.2 Objetivos de pesquisa . . . . .	5
1.3 Estrutura da dissertação . . . . .	5

## Capítulo 2

<b>Revisão bibliográfica e Metodologia</b> . . . . .	7
2.1 Transferência orbital interplanetária . . . . .	7
2.1.1 Problema de dois corpos e equação do movimento relativo . . . . .	7
2.1.2 Trajetórias interplanetárias e <i>Rendezvous</i> . . . . .	8
2.2 Conceitos de Probabilidades e Estatística . . . . .	11
2.2.1 Variável Aleatória . . . . .	11
2.2.2 Esperança Matemática . . . . .	12
2.2.3 Desvio Padrão, Variância e Covariância . . . . .	12
2.2.4 Distribuição Normal . . . . .	13
2.3 Filtragem de Kalman Não-Linear . . . . .	14
2.3.1 Filtro de Kalman . . . . .	15
2.3.2 Filtro de Kalman Estendido . . . . .	18

## **Capítulo 3**

<b>Simulação e Resultados</b> . . . . .	23
3.1 Simulação . . . . .	23
3.2 Resultados . . . . .	26
3.2.1 Voyager 1 . . . . .	26
3.2.2 Voyager 2 . . . . .	29
3.2.3 Mars Odyssey . . . . .	33
3.2.4 Mars Science Laboratory . . . . .	36
3.2.5 Mars2020 . . . . .	39
3.3 Análise de resultados . . . . .	42

## **Capítulo 4**

<b>Conclusão</b> . . . . .	45
----------------------------	----

<b>Referências</b> . . . . .	47
------------------------------	----

## **Apêndices**

Apêndice A – Trajetórias verdadeiras das missões estudadas . . . . .	49
--	----

## **Anexos**

Anexo A – Algoritmo de Butcher para simulação de sistemas dinâmicos . . . . .	51
---	----

# Lista de Figuras

## Capítulo 2

Figura 1	Transferência de Hohmann de um planeta numa órbita circular interior para um planeta numa órbita circular exterior . . . . .	9
Figura 2	Representação geral da função densidade de probabilidade normal . . . . .	14
Figura 3	Representação geral da função da distribuição de probabilidade normal com média $\mu \pm 3\sigma$ . . . . .	14

## Capítulo 3

Figura 4	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 1 . . . . .	26
Figura 5	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 1 . . . . .	27
Figura 6	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 1 . . . . .	27
Figura 7	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 1 . . . . .	28
Figura 8	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Voyager 1 . . . . .	29
Figura 9	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Voyager 1 . . . . .	29
Figura 10	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 2 . . . . .	30
Figura 11	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 2 . . . . .	30
Figura 12	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 2 . . . . .	31
Figura 13	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 2 . . . . .	31
Figura 14	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Voyager 2 . . . . .	32
Figura 15	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Voyager 2 . . . . .	32
Figura 16	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Odyssey . . . . .	33

Figura 17	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Odyssey . . . . .	33
Figura 18	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Odyssey . . .	34
Figura 19	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Odyssey . . . . .	34
Figura 20	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars Odyssey . . .	35
Figura 21	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars Odyssey . . .	35
Figura 22	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Science Laboratory . .	36
Figura 23	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Science Laboratory . . . . .	36
Figura 24	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Science Laboratory . . . . .	37
Figura 25	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Science Laboratory . . . . .	37
Figura 26	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars Science Laboratory . . . . .	38
Figura 27	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars Science Laboratory . . . . .	38
Figura 28	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars2020 . . . . .	39
Figura 29	Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mar2020 .	39
Figura 30	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mar2020 . . . . .	40
Figura 31	Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars2020 . . . . .	40
Figura 32	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars2020 . . . . .	41
Figura 33	Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars2020 . . . . .	41

## Apêndices

A	Figura 34	Representação gráfica bidimensional das trajetórias verdadeiras das missões Voyager 1 e Voyager 2 até ao <i>flyby</i> de Voyager 2 por Neptuno . . . . .	49
A	Figura 35	Representação gráfica tridimensional das trajetórias verdadeiras das missões Voyager 1 e Voyager 2 até ao limite do Sistema Solar . . . . .	49
A	Figura 36	Representação gráfica tridimensional da trajetória verdadeira da missão Mars Odyssey . . . . .	50
A	Figura 37	Representação gráfica tridimensional da trajetória verdadeira da missão Mars Science Laboratory . . . . .	50
A	Figura 38	Representação gráfica tridimensional da trajetória verdadeira da missão Mars2020 . . . . .	50



# Lista de Tabelas

## Capítulo 2

Tabela 1	Algoritmo do Filtro de Kalman . . . . .	17
Tabela 2	Algoritmo do Filtro de Kalman Estendido . . . . .	20

## Capítulo 3

Tabela 3	Erros máximos assumidos para cada missão . . . . .	23
Tabela 4	Fatores de multiplicação das matrizes de covariância . . . . .	25
Tabela 5	Valores obtidos dos desvios máximos e médios da posição para todas as missões . . . . .	42
Tabela 6	Valores obtidos dos desvios máximos e médios da velocidade para todas as missões . . . . .	42



# Nomenclatura

## Secção 2.1 Transferência orbital interplanetária

$G$	Constante gravitacional	$m^3/(kg \cdot s^2)$
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vetores unitários nas direções $x, y, z$ , respetivamente	—
$m_1,$	Massa de um corpo 1	$kg$
$m_2$	Massa de um corpo 2	$kg$
$\mathbf{r}$	Vetor de posição relativa	$km$
$r$	Norma do vetor de posição relativa	$km$
$\dot{\mathbf{r}}$	Primeira derivada do vetor posição em relação ao tempo   Velocidade relativa	$km/s$
$\ddot{\mathbf{r}}$	Segunda derivada do vetor posição em relação ao tempo   Aceleração relativa	$km/s^2$
$r_1$	Raio da órbita 1	$km$
$r_2$	Raio da órbita 2	$km$
$r_a$	Raio do <i>apoapsis</i> da órbita de transferência	$km$
$r_p$	Raio do <i>periapsis</i> da órbita de transferência	$km$
$T_2$	Período da órbita 2	$s$
$T_1$	Período da órbita 1	$s$
$T_{syn}$	Período sinódico	—
$v_1$	Velocidade na órbita circular 1	$km/s$
$v_2$	Velocidade na órbita circular 2	$km/s$
$v_A$	Velocidade no ponto A	$km/s$
$v_D$	Velocidade no ponto D	$km/s$
$X$	Vetor de estado	—
$\dot{X}$	Derivada em ordem ao tempo do vetor de estado	—
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas em espaço tridimensional	$km$
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Primeira derivada de cada coordenada em relação ao tempo   Componentes da velocidade relativa	$km/s$
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$	Segunda derivada de cada coordenada em relação ao tempo   Componentes da aceleração relativa	$km/s^2$
$\Delta v^{(A)}$	Delta-v no ponto A   Impulso de velocidade no ponto A	$km/s$
$\Delta v^{(D)}$	Delta-v no ponto D   Impulso de velocidade no ponto D	$km/s$
$dX/dt$	Derivada parcial de $X$ em relação ao tempo	—
$\mu$	Parâmetro gravitacional	$km^3/s^2$
$\mu_{Sol}$	Parâmetro gravitacional do Sol	$km^3/s^2$

## Secção 2.2 Conceitos de Probabilidades e Estatística

$X, Y$	Variáveis aleatórias	—
$s$	Elemento de um espaço amostral	—
$S$	Espaço amostral	—
$x$	Número real	—
$n$	Número de elementos	—
$F$	Função de distribuição	—
$f$	Função densidade	—
$P(\ )$	Probabilidade de	—
$a$	Limite inferior do integral	—
$b$	Limite superior do integral	—
$\mu_X$	Média de $X$   Esperança matemática de $X$	—
$\mu_Y$	Média de $Y$	—
$E[ \ ]$	Esperança matemática   Média	—
$\sigma_X$	Desvio padrão de $X$	—
$\sigma$	Desvio padrão	—
$\sigma_X^2$	Variância de $X$	—
$\sigma^2$	Variância	—
$var()$	Variância	—
$cov[ \ ]$	Covariância	—
$X \sim N( \ )$	Distribuição normal de $X$	—

## Secção 2.3 Filtragem de Kalman Não-Linear

$X$	Vetor de estado do sistema	—
$\dot{X}$	Primeira derivada em ordem ao tempo do vetor de estado	—
$Y$	Vetor de medição/observação/saídas	—
$f( \ )$	Função ou vetor de funções do sistema dinâmico	—
$h( \ )$	Função ou vetor de funções das medições do sistema	—
$t$	Tempo	$s$
$u$	Vetor de entradas de controlo	—
$A$	Matriz de transição de estado	—
$B$	Matriz de controlo	—
$C$	Matriz de medição/observação	—
$w$	Vetor de ruído branco relacionado com o estado	—
$v$	Vetor de ruído branco relacionado com as medições	—

$P(\cdot) \sim N$	Distribuição de probabilidade normal/gaussiana	—
$Q$	Matriz de covariância associada ao ruído $w$	—
$R$	Matriz de covariância associada ao ruído $v$	—
$e$	Estimativas do erro	—
$e$	Número Neperiano (usado apenas na equação (33))	—
$P$	Matriz de covariância do erro	—
$K$	Matriz de ganho do filtro de Kalman	—
$I$	Matriz identidade	—
$D$	Matriz de distribuição do ruído	—

### Secção 3.1 Simulação

$r^*$	Posição com ruído	$km$
$\dot{r}^*$	Velocidade com ruído	$km/s$
$\varepsilon$	Erro máximo assumido para a posição ou a velocidade	—
$\sigma_r$	Desvio padrão da posição	$km$
$\sigma_v$	Desvio padrão da velocidade	$km/s$

### Subscritos, sobrescritos e acentos

$_0$	Inicial   Anterior a $k$ quando $k = 1$	—
$_{k-1}$	No instante de tempo anterior a $k$	—
$_k$	No instante de tempo $k$	—
$_i$	Elemento $i$ de um vetor   Linha $i$ de uma matriz	—
$_j$	Elemento $j$ de um vetor   Coluna $j$ de uma matriz	—
$-$	Previsão   <i>a priori</i>	—
$^T$	Transposta	—
$\hat{\phantom{x}}$	Estimação	—
$\sim$	Aproximação	—



# Lista de Acrónimos

AEKF	<i>Adaptive Extended Kalman Filter</i>   Filtro de Kalman Estendido Adaptativo
EDL	<i>Entry, Descent and Landing</i>   Entrada, Descida e Aterragem
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>   Filtro de Kalman Estendido
ESA	<i>European Space Agency</i>   Agência Espacial Europeia
JPL	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
KF	<i>Kalman Filter</i>   Filtro de Kalman
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>   Órbita Terrestre Baixa
MO	<i>Mars Odyssey</i>
MSL	<i>Mars Science Laboratory</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
TCM	<i>Trajectory Correction Manoeuvre</i>   Manobra de Correção de Trajetória



# Capítulo 1

## Introdução

A exploração do espaço tem as suas origens na observação do céu noturno e dos astros. Culturas antigas observavam os movimentos dos planetas, estrelas e outros corpos celestes, e sistemas de calendário foram desenvolvidos com base nesses padrões astronômicos. No entanto, a exploração espacial moderna começou a desenvolver-se com constantes avanços científicos e tecnológicos.

A Revolução Científica dos séculos XVI a XVIII trouxe uma compreensão mais profunda da astronomia e da física. Através da utilização dos seus telescópios, Galileu Galilei observou as luas de Júpiter e as suas observações forneceram evidências para a teoria heliocêntrica defendida por Nicolau Copérnico [1]. Johannes Kepler trabalhou para descrever matematicamente o movimento dos planetas. Ele formulou as três leis do movimento planetário que descrevem as órbitas elípticas dos planetas à volta do Sol. Essas leis são fundamentais para calcular as trajetórias de veículos espaciais na exploração do espaço. Mais tarde Isaac Newton formulou as leis do movimento e da gravitação universal que são essenciais para o projeto e funcionamento de veículos espaciais bem como para a compreensão da interação gravitacional de corpos celestes.

Durante o século XX com o claro avanço tecnológico foi permitida a exploração física do espaço. O lançamento do primeiro satélite artificial, *Sputnik 1*, pela União Soviética em 1957, marcou o início da corrida espacial e a partir daí a exploração espacial progrediu rapidamente numa tentativa de demonstrar a superioridade tecnológica e política por parte dos Estados Unidos da América e da União Soviética. Desde a Guerra Fria, já várias agências espaciais realizaram inúmeras missões com os mais variados objetivos, com missões tripuladas e não tripuladas enviadas para a Lua, Marte, e muitos outros.

### 1.1 Motivação e Visão geral do problema

A exploração espacial desperta o interesse por uma combinação de razões. Enquanto no passado recente era a demonstração do poder político e tecnológico que dominava o interesse da conquista do espaço, atualmente a procura por conhecimento científico, avanço tecnológico, exploração de recursos, curiosidade humana e aspirações de expansão para além do nosso planeta, são as principais razões para que diferentes agências espaciais cooperem internacionalmente e façam com que o céu não seja o limite.

No centro de cada missão espacial bem sucedida está a capacidade de navegar e controlar o veículo espacial com precisão. As trajetórias complexas, as manobras e imprevistos do espaço tornam essencial a implementação de sistemas de navegação e controle altamente precisos. Pequenos desvios da trajetória podem ter consequências significativas, comprometendo potencialmente o sucesso da missão e até colocando em risco a segurança do veículo espacial e, caso seja uma missão tripulada, da tripulação. Mas para que a navegação seja feita com precisão, ter o conhecimento do comportamento do veículo espacial em cada momento é fundamental, isto é, saber a sua posição, velocidade, aceleração ou orientação (atitude). Na área aeroespacial estes são os parâmetros que descrevem o movimento do veículo e são denominados por estado do veículo (ou do sistema) [2].

As informações de uma aeronave espacial são recolhidas através da telemetria a bordo e transmitidas pelo sistema de comunicação do veículo. Na Terra há estações de recepção equipadas com antenas capazes de captar os sinais emitidos. Um inconveniente é que devido a incertezas e perturbações, bem como erros e imprecisões associadas aos instrumentos dos sistemas, a leitura do estado do sistema tem valores desviados dos valores reais. Estes dados recebidos com ruído (observações do sistema) devem ser processados/filtrados para se obterem os valores mais próximos dos reais. É aqui que entra o problema e tema da minha dissertação.

A estimação de estado é um processo fundamental em sistemas de engenharia, no qual um sistema dinâmico é observado através das suas saídas para determinar o estado atual do sistema, mesmo quando as informações sobre o estado não estão disponíveis diretamente, estão incompletas ou são ruidosas. Por outras palavras, o problema da filtragem ou estimação de estado é o processo de determinar as variáveis de estado do sistema com base nas informações limitadas das medições.

Uma das ferramentas mais conhecidas para a estimação de estado é o filtro de Kalman (KF – *Kalman Filter*). Este método é uma técnica de estimação estatística que é amplamente utilizada para estimar o estado (atual) de sistemas dinâmicos a partir de medições ruidosas, em que são considerados também os modelos dinâmicos do sistema e as entradas de controle. O desenvolvimento e as primeiras aplicações do filtro de Kalman aconteceram durante a Guerra Fria e este foi usado pela primeira vez em navegação nos anos sessenta no projeto Apolo, em que era requerida a estimativa de trajetórias de uma aeronave espacial na ida e volta à Lua. Desde o início da exploração física do espaço que o filtro de Kalman tem sido utilizado e continua a ser a base na teoria da estimação e controle nos tempos atuais [3].

### 1.1.1 Missões espaciais interplanetárias

Após uma pesquisa de missões realizadas no passado, foram escolhidas cinco tentando cobrir uma maior variedade de objetivos de missão, época em que cada missão foi efetuada, bem como trajetórias e manobras usadas e também a inspiração que cada missão me transmitia pessoalmente.

#### 1.1.1.1 Voyager 1 e Voyager 2 (*space probes*) [4]

As sondas espaciais Voyager foram ambas lançadas em 1977, com um intervalo de duas semanas. Contraditoriamente, Voyager 2 foi lançada primeiro, mas Voyager 1 tinha uma trajetória mais rápida e mais curta. Tinham como objetivo inicial a recolha de imagens detalhadas e dados para o estudo de Júpiter, Saturno, os seus anéis e as luas dos dois planetas. Foram projetadas para durar cinco anos e para aproveitar um alinhamento raro dos planetas exteriores que acontece a aproximadamente cada 175 anos. Este alinhamento permite que um veículo espacial numa determinada trajetória, ao fazer um *flyby* a um planeta, use a técnica “*gravity assist*” para aumentar a sua velocidade e “balançar” de um planeta para outro sem a necessidade de um grande sistema de propulsão. A trajetória da Voyager 1 foi desenhada para aproveitar a gravidade de Júpiter e Saturno e sair “para cima” do plano eclíptico a uma velocidade de aproximadamente 16,48 *km/s*. A trajetória da Voyager 2 foi escolhida de forma que após as aproximações e assistências gravíticas de Júpiter e Saturno, a sonda tivesse a opção de continuar em direção a um futuro *flyby* a Úrano e, depois, Neptuno. Após a passagem por Neptuno, ao contrário de Voyager 1, esta seguiu “para baixo” do plano eclíptico a uma velocidade de aproximadamente 14,89 *km/s*. As duas sondas já estão atualmente fora do Sistema Solar, em espaço interestelar, mas continuam com alguns instrumentos em funcionamento e a enviar dados para a Terra.

Entre muitas descobertas, as sondas espaciais permitiram a observação mais próxima dos planetas Júpiter, Saturno, Úrano e Neptuno. A Grande Mancha Vermelha de Júpiter revelou-se como sendo uma complexa tempestade a mover-se em sentido anti-horário. Foram observados pela primeira vez vulcões ativos para além da Terra no satélite natural de Júpiter, Io. As sondas tornaram-se os primeiros objetos criados pelo Homem a sair do Sistema Solar.

Uma curiosidade acerca desta missão é que ambas as sondas transportam um “*Golden Record*”. Um disco de fonógrafo com o objetivo de apresentar a Humanidade e a cultura da Terra a potenciais civilizações extraterrestres que as possam encontrar, com saudações em vários idiomas, sons da Terra, música, imagens e a localização do nosso planeta [5].

### 1.1.1.2 Mars Odyssey (*orbiter*) [6]

A missão espacial Mars Odyssey, lançada em Abril de 2001, tinha como principal objetivo o estudo do meio ambiente de Marte em órbita. Foi projetada para recolher uma série de dados científicos acerca do seu clima, geologia, detecção de evidências de água e gelo abaixo da superfície, e radiação. A aeronave espacial foi capturada pela gravidade de Marte 201 dias pós o seu lançamento e durante uns meses seguintes foi-se aproximando gradualmente de Marte usando uma técnica chamada “*aerobraking*” para reduzir o raio da sua órbita. Esta manobra de usar a fricção da atmosfera do planeta permitiu reduzir a quantidade necessária de combustível a ser transportado, que de outra forma teria de ser queimado para reduzir a sua velocidade na inserção da órbita final.

O satélite continua operacional 22 anos após o seu lançamento e continua a enviar dados para a Terra. Um dos seus instrumentos confirmou a presença de água no estado sólido abaixo da superfície, crucial para uma possível exploração humana no futuro.

### 1.1.1.3 Mars Science Laboratory (*rover*) [7]

A aeronave espacial da missão Mars Science Laboratory (MSL) teve o seu lançamento no final de Novembro de 2011 e aterrou com sucesso 254 dias depois, no início do mês de agosto do ano seguinte. O veículo carregava um laboratório móvel, o *rover Curiosity*, com um *payload* 10 vezes maior que os seus antepassados (*Sojourner* da missão Mars Pathfinder e *Spirit* e *Opportunity* da missão Mars Exploration Rovers) e tinha como principal objetivo procurar evidências de condições favoráveis à existência de vida microbial.

Num momento da fase de entrada, descida e aterragem (EDL – *Entry, Descent and Landing*) o veículo desacelerou a sua descida com o familiar paraquedas e depois com foguetes de retropropulsão. Já mais próximo do solo, o estágio superior do veículo atuou como uma grua e desceu o *rover* até ao chão através de cabos. Esta missão foi a primeira onde esta técnica de “*sky crane*” foi usada, onde foram feitas perfurações em rochas e solo de Marte e onde foi determinada a idade de uma rocha num planeta. Foi confirmado ter havido condições favoráveis à vida no planeta.

### 1.1.1.4 Mars 2020 (*rover + helicopter*) [8]

A missão Mars 2020 foi lançada no final de Julho de 2020 e chegou com sucesso em Fevereiro do ano seguinte, 204 dias depois do lançamento. A fase de EDL foi semelhante à da missão MSL. Esta missão transportou o quinto *rover* da história da NASA, *Perseverance*, e o primeiro helicóptero, *Ingenuity*. Tinha como objetivos principais a procura da existência de vida microbial no passado do planeta, estudar novamente o clima e geologia do planeta com instrumentos mais avançados, recolher amostras de rochas que possam ser enviadas

para a Terra em futuras missões da NASA a serem planeadas juntamente com a Agência Espacial Europeia (ESA – *European Space Agency*), entre outras. O helicóptero tinha como função apenas um voo experimental e foi a primeira aeronave a tentar um voo controlado fora da Terra, tarefa que atingiu com sucesso. Os dois veículos continuam operacionais.

A partir de [9] foram tirados os dados da posição e velocidade de cada uma das missões selecionadas, bem como a posição (ao longo do tempo para completar uma órbita completa) de cada planeta envolvido em cada missão. Usando o *Matlab* foram traçados os gráficos das trajetórias de cada missão (ver Apêndice A).

## 1.2 Objetivos de pesquisa

Esta dissertação tem como objetivo principal a implementação do filtro de Kalman Estendido (EKF – *Extended Kalman Filter*) para as trajetórias das cinco missões mencionadas na secção anterior. Pretendem-se comparar os dados estimados pelo filtro com medições em que nos dados é feita a introdução de ruído e com medições sem introdução de ruído e analisar o impacto que este tem na estimação do estado. Pretende-se avaliar o desempenho do EKF comparando as trajetórias estimadas com as trajetórias verdadeiras das missões espaciais e quantificar a precisão das estimativas em relação aos valores verdadeiros.

Pretende-se chegar ao final do trabalho e responder a algumas questões como: Como funciona o filtro de Kalman estendido? Como lida o EKF com a não-linearidade das trajetórias espaciais? Quais são as suas vantagens e limitações e como podem essas limitações ser mitigadas?

## 1.3 Estrutura da dissertação

A dissertação está dividida em quatro capítulos e estão organizados da seguinte forma:

- Capítulo 1 – neste capítulo faço uma pequena introdução das origens da exploração do espaço sideral. Falo da importância que tem a precisão dos dados e do porquê de explorar o espaço. Apresento as missões espaciais cujas trajetórias foram usadas para concluir os objetivos de pesquisa. E termino por apresentar os objetivos e estrutura da dissertação.
- Capítulo 2 – é feita uma apresentação dos conteúdos teóricos envolvidos no tema da dissertação. Começo por falar em métodos de transferência orbital interplanetária e no problema de dois corpos e equações do movimento do sistema, seguindo-se um subcapítulo de conceitos de probabilidades e estatística relacionado com o filtro de Kalman. Finalmente é apresentado o filtro de Kalman clássico, que apesar de não

ter sido implementado, conta como uma introdução teórica necessária para a compreensão do seguinte: o filtro de Kalman estendido.

- Capítulo 3 – é feita a simulação do algoritmo do filtro estudado e apresentam-se os resultados para as cinco missões. É comparado o comportamento do EKF com dados limpos e com dados ruidoso. Apresentam-se tabelas comparativas com os valores do desvio da posição e da velocidade estimados em relação à posição e velocidade verdadeira. São apresentados os gráficos do desvio ao longo do tempo para cada missão e as trajetórias construídas com os dados estimados e os dados verdadeiros.
- Capítulo 4 – tiram-se as conclusões e são resumidas as respostas às questões dos objetivos de pesquisa.

## Capítulo 2

### Revisão bibliográfica e Metodologia

Neste capítulo é feita uma introdução de conceitos teóricos relacionados com o tema da dissertação. Está dividido em três partes, sendo a primeira dedicada às trajetórias interplanetárias, modelos e equações básicas para a transferência orbital. Na segunda parte, são introduzidos conceitos de probabilidades e estatística relacionados com o filtro de Kalman. E por último, são apresentados os filtros de Kalman clássico e estendido.

#### 2.1 Transferência orbital interplanetária

O planeamento de uma missão interplanetária é um tema muito complexo. Uma aeronave é lançada da superfície da Terra e entra numa órbita à volta do planeta, normalmente baixa (LEO – *Low Earth Orbit*). Inicia a fase de partida numa órbita hiperbólica em relação à Terra a uma velocidade de escape para conseguir escapar à gravidade. Entra numa fase de *cruise* numa órbita elíptica em relação ao Sol sofrendo algumas manobras de correção da trajetória (TCM – *Trajectory Correction Manoeuvre*) e chega novamente numa trajetória hiperbólica relativamente ao planeta.

Uma vez que o tema principal é a filtragem de Kalman e já possuía as coordenadas cartesianas das trajetórias das missões vou simplificar apresentando aspetos básicos do planeamento de missões interplanetárias.

##### 2.1.1 Problema de dois corpos e equação do movimento relativo

O movimento de um corpo de massa  $m_2$  em relação a outro de massa  $m_1$  é dado pela equação diferencial de segunda ordem não-linear [10, 11, 12, 13]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (1)$$

Onde,

$\mu = G(m_1 + m_2)$  é o parâmetro gravitacional que é simplificado para  $\mu = Gm_1$ , assumindo que  $m_1 \gg m_2$ .  $G = 6,6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  é a constante gravitacional.

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a norma do vetor da posição relativa  $\mathbf{r}$ .

Num referencial cartesiano não-rotacional ligado a  $m_1$ , as equações das componentes da aceleração relativa são:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x \quad (2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3}y \quad (3)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}z \quad (4)$$

O vetor de estado  $X = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$ , com posição relativa  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$  e velocidade relativa  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$ , fica

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Da derivada em ordem ao tempo do vetor de estado  $\frac{dX}{dt}$ , resulta

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Onde as três últimas componentes de  $\dot{X}$  são dadas pelas equações (2), (3) e (4).

### 2.1.2 Trajetórias interplanetárias e Rendezvous

O planeamento de trajetórias orbitais é um processo complexo e preciso que envolve múltiplos requerimentos e restrições das missões. Uma vez que os planetas (envolvidos na dissertação) se encontram em órbitas relativamente próximas ao plano eclíptico vou introduzir o método mais simplista de transferência orbital interplanetária, a transferência de Hohmann.

2.1.2.1 Transferência de Hohmann Interplanetária [10]

A transferência de Hohmann é uma manobra de transferência orbital entre duas órbitas coplanares com o mesmo foco e é caracterizada por ser a manobra de dois impulsos energeticamente mais eficiente. Na Figura 1 podemos ver esta transferência entre as órbitas circulares 1 e 2. A órbita de transferência (a verde) é tangente às órbitas 1 e 2 nos pontos D e A, respectivamente, que se encontram na linha de apse, linha numa órbita que liga o *periapsis* ao *apoapsis* (ponto mais próximo e ponto mais afastado do foco da órbita, respetivamente. Neste caso, periélio e afélio por ser o Sol o foco das órbitas).

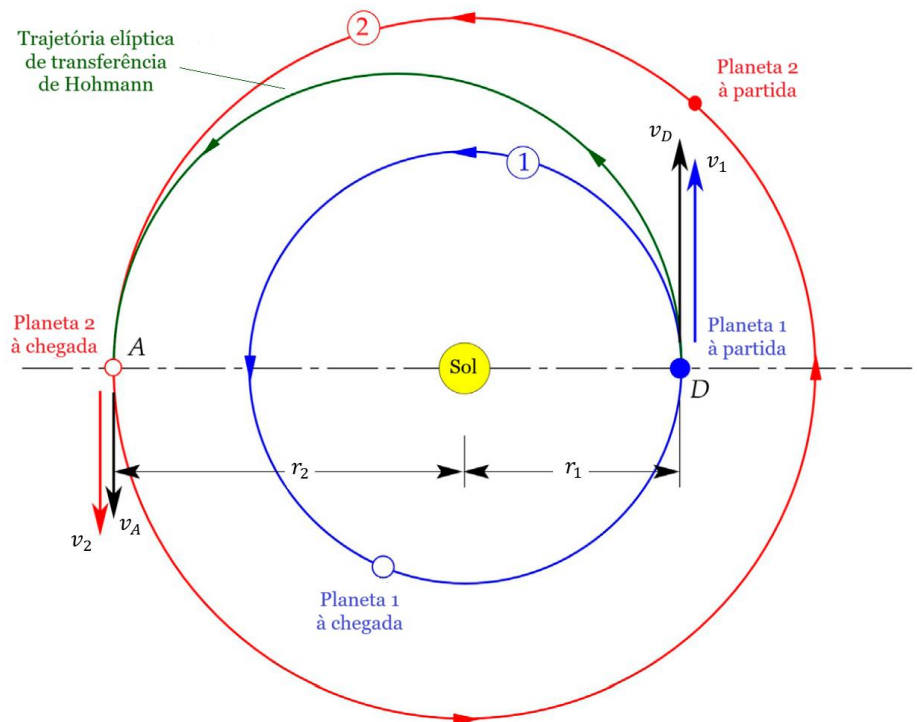


Figura 1 – Transferência de Hohmann de um planeta numa órbita circular interior para um planeta numa órbita circular exterior [adaptada de 10].

Um corpo que se encontre na órbita 1 a uma velocidade  $v_1$  sofre um incremento de velocidade  $\Delta v^{(D)}$  no mesmo sentido do movimento e tangente à órbita no ponto D, passando para uma órbita elíptica com maior energia. Fazendo apenas metade da órbita elíptica, ou seja, metade do seu período, ao chegar ao ponto A o corpo volta a sofrer outro impulso,  $\Delta v^{(A)}$ , no mesmo sentido do movimento, para entrar na órbita circular 2 com velocidade  $v_2$ . Sem este impulso, o corpo manter-se-ia na órbita elíptica e regressaria ao ponto D. Os raios de *periapsis*  $r_p$  e *apoapsis*  $r_a$  da órbita de transferência são iguais aos raios das órbitas 1 e 2, respetivamente.

A velocidade na órbita 1 no ponto D é igual à velocidade em qualquer ponto na órbita por ser circular e é dada por

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_1}} \quad (7)$$

No *periapsis* na órbita de transferência a velocidade é dada por

$$v_D = \sqrt{2\mu_{Sol}} \sqrt{\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (8)$$

O impulso da aeronave espacial para passar da órbita 1 para a órbita 2, normalmente denominado delta-v, é a diferença entre as velocidades na órbita de transferência e na órbita inicial no ponto D,

$$\Delta v^{(D)} = v_D - v_1 \quad (9)$$

Quando o veículo chega ao ponto A, este possui a velocidade mais baixa na órbita de transferência e regressaria ao ponto de partida D. Dessa forma é necessário um novo impulso, desta vez igual à diferença entre a velocidade na órbita final e na órbita de transferência no ponto A,

$$\Delta v^{(A)} = v_2 - v_A \quad (10)$$

Com a velocidade no *apoapsis* na órbita de transferência dada por

$$v_A = \sqrt{2\mu_{Sol}} \sqrt{\frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \quad (11)$$

E a velocidade na órbita 2 no ponto A dada por

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_2}} \quad (12)$$

Esta transferência pode ser efetuada também no sentido inverso, da órbita exterior para a interior, com a diferença apenas no sentido dos impulsos nos pontos A e D. Os delta-v dados por (9) e (10) teriam o mesmo valor, mas sinal negativo.

### 2.1.2.2 *Rendezvous*

A posição dos planetas na sua órbita muda continuamente. Uma aeronave espacial numa trajetória Terra-Marte, para além de intercepar a órbita de Marte, tem de fazer o *rendezvous* com o planeta, isto é, aproximar-se de forma controlada. No momento de injeção, a

aeronave espacial desloca-se não em direção à posição atual do planeta, mas sim à posição em que o planeta se irá encontrar na sua órbita no momento de inserção.

Dois planetas à volta do Sol têm períodos siderais  $T_1$  e  $T_2$ , isto é, o tempo que os planetas demoram para completar uma órbita completa. Ao tempo que um objeto celestial demora para regressar à mesma posição relativamente a outro é chamado período sinódico  $T_{syn}$ .

$$T_{syn} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} \quad (13)$$

O período sinódico de Marte em relação à Terra é de 2,13 anos. Há um intervalo de tempo no qual pode ocorrer o lançamento para que a energia da trajetória de um planeta para o outro seja minimizada. Falhar este intervalo de lançamento implica um aumento significativo da quantidade de combustível necessária ou mesmo a impossibilidade da missão. No caso de falha deste intervalo numa missão Terra-Marte, as condições só seriam favoráveis novamente após 2,13 anos.

## 2.2 Conceitos de Probabilidades e Estatística

Em muitas situações o estado de um sistema não pode ser medido diretamente, nesse sentido tem de ser estimado. O filtro de Kalman lida com sistemas probabilísticos (ou estocásticos) onde o seu estado é imprevisível. Nesta secção é feita uma apresentação de alguns conceitos relacionados com a estimação de estados. De forma a resumir a dissertação, não são referidas as inúmeras propriedades das definições e é recomendada a consulta das referências [14, 15, 16].

### 2.2.1 Variável Aleatória

Uma variável aleatória  $X$  é uma função que associa um número real  $x$  a cada elemento  $s$  de um espaço amostral  $S$ . Por outras palavras, é uma função que atribui um número a cada resultado possível de uma experiência aleatória.

$$X(s) = x \quad (14)$$

Pode ser do tipo discreto se o conjunto de valores possíveis for finito ou infinito numerável, ou seja, quando representa dados contáveis (exemplo: número de defeitos numa amostra de  $n$  elementos) ou do tipo contínuo se os valores possíveis pertencerem a um intervalo ou de um conjunto de intervalos, ou seja, quando representa dados medidos (exemplo: temperaturas, tempo, distâncias, ...).

### 2.2.1.1 Distribuições de Probabilidade Discretas

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta  $X$  é uma descrição da verosimilhança associada aos valores possíveis de  $X$ . A sua função de distribuição  $F$  é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (15)$$

A função de probabilidade  $f$  de  $X$  é uma função que associa a cada valor  $x$  a probabilidade do acontecimento de  $X$  e representa-se por

$$f(x) = P(X = x) \quad (16)$$

### 2.2.1.2 Distribuições de Probabilidades Contínuas

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua  $X$  é uma função tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (17)$$

A probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir exatamente qualquer um dos seus valores, isto é,  $f(x) = P(X = x)$ , é igual a zero.

### 2.2.2 Esperança Matemática

A esperança matemática, também chamada valor esperado, valor médio ou, simplesmente, média, é uma medida de localização central à volta do qual os dados se distribuem.

A variável aleatória discreta  $X$  apresenta um valor médio constante dado por

$$\mu_X = E[X] = \sum_x x f(x) \quad (18)$$

Se a variável aleatória  $X$  for contínua, a média é dada por

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (19)$$

### 2.2.3 Desvio Padrão, Variância e Covariância

A variância e o desvio padrão são medidas de variabilidade que, ao contrário da esperança matemática, nos indicam a dispersão dos dados.

A variância de uma variável aleatória discreta  $X$  é um valor constante dado por

$$\sigma_X^2 = var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_x (x - \mu_X)^2 f(x) \quad (20)$$

Se a variável aleatória  $X$  for contínua, a variância é dada por

$$\sigma_X^2 = var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \quad (21)$$

O desvio padrão de  $X$  indica a proximidade dos dados à volta da média. Quanto menor for o valor do desvio padrão, maior é a proximidade dos dados em relação ao valor médio. Este é dado pela constante

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} \quad (22)$$

A covariância de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é uma medida da associação linear entre elas. Para duas variáveis aleatórias discretas é um valor constante dado por

$$\begin{aligned} cov[X, Y] &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \sum_x \sum_y (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f_{XY}(x, y) \end{aligned} \quad (23)$$

Se as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  forem contínuas, a covariância é dada por

$$\begin{aligned} cov[X, Y] &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} [(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (24)$$

O sinal da covariância indica se as duas variáveis aleatórias tendem a variar no mesmo sentido ou sentido oposto. O sinal positivo indica que estas variam no mesmo sentido e sinal negativo indica que variam em sentido oposto. Quanto estas são independentes, o valor da covariância é zero.

#### 2.2.4 Distribuição Normal

A distribuição normal, também chamada distribuição de Gauss ou Gaussiana, é uma distribuição contínua adequada para representar fenómenos com características relacionadas com medições. A distribuição normal de uma variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  representa-se por

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (25)$$

A sua função densidade de probabilidade tem a forma de sino conforme representada na Figura 2. e é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (26)$$

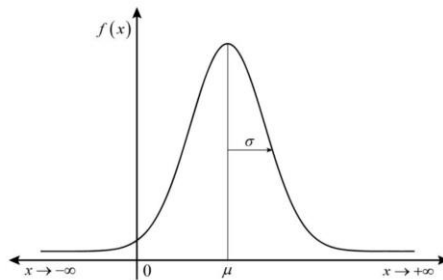


Figura 2 – Representação geral da função densidade de probabilidade normal [2].

A probabilidade de um acontecimento de  $X$  ser maior do que  $\mu - \sigma$  e inferior a  $\mu + \sigma$  é de 0,68. Essa probabilidade aumenta para aproximadamente 0,95 se  $X$  estiver compreendido entre  $\mu \pm 2\sigma$ . Conforme visto na Figura 3, uma diferença de três vezes o desvio padrão em relação ao valor médio faz com que o acontecimento de  $X$  seja quase certo, isto é,

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

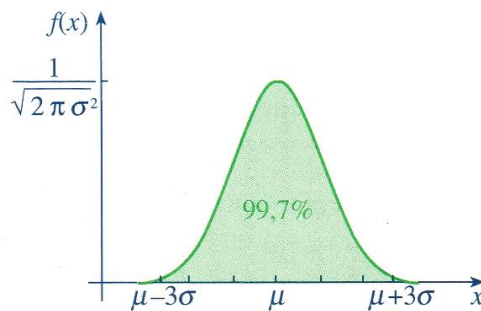


Figura 3 – Representação geral da função da distribuição de probabilidade normal com média  $\mu \pm 3\sigma$  [14].

### 2.3 Filtragem de Kalman Não-Linear

O filtro de Kalman, com o nome do seu criador Rudolf E. Kálmán, é uma ferramenta fundamental no domínio de estimação de variáveis de estado de um sistema dinâmico a partir de medições ruidosas. Este método é conhecido pela sua capacidade de combinar previsões de um modelo matemático de um sistema com medições em tempo real, levando a estimativas ótimas do estado verdadeiro mesmo na presença de incertezas. O objetivo deste subcapítulo é aprofundar os princípios e a mecânica do filtro de Kalman e de uma das suas vertentes aplicada no próximo capítulo.

### 2.3.1 Filtro de Kalman

Um sistema dinâmico no domínio do tempo é dado através de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que representam a taxa de variação do sistema [2, 16, 17],

$$\dot{X} = f(X, u) + Dw \quad (27)$$

$$Y = h(X, u) + v \quad (28)$$

Um sistema dinâmico, linear e estocástico, é representado, em tempo contínuo, através de

$$\dot{X} = AX + Bu + Dw \quad (29)$$

$$Y = CX + v \quad (30)$$

O mesmo sistema, em tempo discreto, é dado por [2, 16]

$$X_k = A_d X_{k-1} + B_d u_{k-1} + D_d w_{k-1} \quad (31)$$

$$Y_k = C X_k + v_k \quad (32)$$

Na aplicação de um filtro de Kalman num sistema de tempo discreto, torna-se necessária a discretização do modelo dinâmico contínuo no tempo representado pela matriz de transição, isto devido à natureza das medições e entradas de controlo obtidos em intervalos de tempo. O processo de discretização é a aproximação numérica do estado do sistema contínuo no tempo em pequenos intervalos no tempo.

$$A_d = e^{A \cdot dt} \quad (33)$$

$$A_d \approx I + A \cdot dt + \frac{(A \cdot dt)^2}{2!} + \dots + \frac{(A \cdot dt)^N}{N!} \quad (34)$$

Onde  $I$  é a matriz identidade,  $dt$  o passo de discretização e  $N$  assume um valor que satisfaça a seguinte condição

$$\left\| \frac{(A \cdot dt)^N}{N!} \right\|_F < \epsilon \quad (35)$$

$\epsilon$  é a precisão desejada e nesta dissertação assumiu um valor de  $1 \times 10^{-4}$ . A equação (35) é a norma de Frobenius e é definida como sendo a raiz quadrada da soma do quadrado de todos os elementos da matriz. Para uma matriz  $M$ ,

$$\|M\|_F < \sqrt{\sum_{i,j} m_{ij}^2} \quad (36)$$

No *Matlab*, a matriz de transição do sistema discretizada pode ser determinada usando a função *expm* no lugar do número Neperiano  $e$  na expressão analítica de  $A_d$ , equação (33).

Para as matrizes  $B$  e  $D$  a discretização assume uma expansão em série semelhante à equação (34), isto é

$$B_d = \left( I \cdot dt + \frac{A dt^2}{2!} + \frac{A^2 dt^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} dt^N}{N!} \right) B \quad (37)$$

$$D_d = \left( I \cdot dt + \frac{A dt^2}{2!} + \frac{A^2 dt^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} dt^N}{N!} \right) D \quad (38)$$

Voltando às equações do sistema (31) e (32),

- $X_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do sistema, no instante  $k$ .  $X_{k-1}$  é o mesmo vetor, mas no instante anterior a  $k$ .
- $Y_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de medição/observação (ou de saídas) do sistema, no instante  $k$ .
- $u_{k-1} \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de (entradas de) controlo do sistema, no instante  $k - 1$ .
- $A_d$  é a matriz de transição de estado do sistema discretizada. É uma matriz quadrada de dimensão  $n \times n$  e relaciona o estado do sistema no instante anterior com o estado do sistema no instante atual, isto é,  $X_{k-1}$  com  $X_k$ , e é assumida constante.
- $B_d$  é a matriz de controlo do sistema em tempo discreto. É uma matriz de dimensão  $n \times r$  e relaciona as entradas de controlo do sistema com o estado do sistema e é assumida constante.
- $C$  é a matriz de medição/observação do sistema. É uma matriz de dimensão  $m \times n$  e relaciona o estado do sistema com as medições do sistema, e é assumida constante.
- $D_d$  é a matriz de distribuição do ruído [18] do sistema no tempo discreto. Tem  $n$  linhas e o número de colunas é igual ao número de elementos de  $w$ .
- $w_{k-1}$  e  $v_k$  são vetores de variáveis aleatórias e estão relacionadas com o estado do sistema e com as suas medições, respetivamente. São independentes entre si e representam o ruído que é assumido branco e gaussiano.

Um ruído  $\xi$  branco tem as seguintes propriedades:

- $\mu_\xi = E[\xi] = 0$
- $E[\xi \xi^T] = \sigma_\xi^2 I$
- $E[\xi(t) \xi^T(t + dt)] = 0 \quad \forall \quad dt \neq 0$

Um ruído branco é, portanto, um erro ou uma perturbação aleatória de média nula e não correlacionado ao longo do tempo [2].

$$P(w) \sim N(0, Q) \quad (39)$$

$$P(v) \sim N(0, R) \quad (40)$$

$Q$  e  $R$  são matrizes de covariância do ruído e, na prática, são assumidas constantes. Estas matrizes indicam a dispersão do ruído. Grandes valores na diagonal indicam grande dispersão do ruído e penalizam a previsão da estimativa do estado ou as medições.

Sabendo o estado anterior ao instante  $k$  e tendo conhecimento da medição  $Y_k$  no instante  $k$ , definem-se:  $\hat{X}_k^-$  como sendo o estado estimado *a priori* e  $\hat{X}_k$  como sendo o estado estimado *a posteriori*, ambos pertencentes ao espaço de resultados  $\mathbb{R}^n$ . Assim sendo, os erros estimados *a priori* e *a posteriori* ficam definidos como

$$e_k^- \equiv X_k - \hat{X}_k^- \quad (41)$$

$$e_k \equiv X_k - \hat{X}_k \quad (42)$$

Então as matrizes de covariância do erro *a priori* e *a posteriori* são definidas como sendo os valores esperados dos erros estimados *a priori* e *a posteriori* multiplicados pelos seus valores transpostos

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (43)$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (44)$$

Na Tabela 1. está o algoritmo completo do filtro de Kalman clássico/linear. Inicia-se a aplicação do algoritmo, assumindo valores iniciais do vetor de estado  $X_0$  e matriz de covariância do erro  $P_0$ .

Tabela 1 – Algoritmo do Filtro de Kalman.

Inicialização	
	$\hat{X}_{k-1} = X_0 \quad (45)$
	$P_{k-1} = P_0 \quad (46)$
Previsão	Equações <i>time update</i>
	$\hat{X}_k^- = A_d \hat{X}_{k-1} + B_d u_{k-1} \quad (47)$
	$P_k^- = A_d P_{k-1} A_d^T + D_d Q D_d^T \quad (48)$
Correção	Equações <i>measurement update</i>
	$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} \quad (49)$
	$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Y_k - C \hat{X}_k^-) \quad (50)$
	$P_k = (I - K_k C) P_k^- \quad (51)$

### Equações de previsão

- (47) –  $\hat{X}_k^-$  é a estimativa do vetor de estado *a priori*;  $\hat{X}_{k-1}$  é a estimativa do vetor de estado no instante anterior a  $k$ ;  $A_d$  é a matriz de transição de estado discretizada,  $B_d$  é a matriz de controlo discretizada e  $u_{k-1}$  é o vetor de controlo em  $k - 1$ .
- (48) –  $P_k^-$  é a matriz de covariância do erro *a priori* no instante  $k$ ;  $P_{k-1}$  é a matriz de covariância do erro no instante anterior a  $k$ ;  $A_d$  é a matriz de transição de estado do sistema em tempo discreto e  $A_d^T$  a sua transposta.  $Q$  é a matriz de covariância

### Equações de correção

- (49) – A matriz  $K_k$  de dimensão  $n \times m$  é o ganho do filtro de Kalman.  $C$  é a matriz de medição do sistema e  $C^T$  a sua matriz transposta;  $R$  é a matriz de covariância do ruído do vetor de medição, conforme (34).
- (50) – o termo  $C\hat{X}_k^-$  é a medição prevista. A diferença entre a medição e a medição prevista, isto é,  $(Y_k - C\hat{X}_k^-)$  é chamada de residual e se esta diferença for igual a zero significa que a medição e a previsão são iguais. O estado estimado *a posteriori*  $\hat{X}_k$  é uma combinação linear do estado estimado *a priori*  $\hat{X}_k^-$  com a multiplicação do residual pelo ganho do filtro de Kalman  $K_k$ .
- (51) –  $P_k$  é a matriz de covariância do erro de estimativa *a posteriori* no instante  $k$ ;  $I$  é a matriz identidade da mesma dimensão de  $P_k$ ; Os restantes elementos continuam com as suas legendas anteriores.

De notar que o ganho do filtro de Kalman  $K_k$  funciona como uma balança que vai influenciar a estimação do estado do sistema através da equação (49) conforme a variação de  $R$  e  $P_k^-$ . Quanto menor for o ruído das medições, maior é o peso das medições na estimativa do estado do sistema e menor é o peso da previsão da medição  $C\hat{X}_k^-$ , ou seja, maior é o ganho do filtro. Por outro lado, quanto menor for o erro da estimativa, mais confiável é a estimativa do estado *a priori* e menor é o peso das medições na estimativa do estado do sistema, o que corresponde a um ganho do filtro menor.

### 2.3.2 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman possui várias vertentes. O filtro de Kalman estendido é uma extensão do filtro de Kalman clássico, projetado para lidar com sistemas não-lineares. Este considera uma linearização local através do uso de derivadas parciais do sistema e das medições. Um

sistema dinâmico, não-linear e estocástico, é representado, em tempo discreto, através de [2, 16, 19, 20]:

$$X_k = f(X_{k-1}, u_{k-1}) + D_d w_{k-1} \quad (52)$$

$$Y_k = h(X_k) + v_k \quad (53)$$

Tal como no filtro anterior, na equação (52),  $X$  é o vetor de estado no instante  $k$ ;  $f(\cdot)$  é a função ou vetor de funções não-lineares que descreve o sistema com o estado do sistema e as entradas de controlo do sistema  $u$  no instante anterior a  $k$ ;  $w$  representa o ruído, que segundo as hipóteses do filtro de Kalman, é assumido branco com distribuição normal/gaussiana com média zero e covariância dado pela matriz  $Q$ , conforme a equação (39). Na equação (53),  $Y_k$  representa o vetor de medição;  $h(\cdot)$  é a função ou vetor de funções não-lineares das medições.  $v$  é o ruído, que tal como na equação de estado, é assumido branco com distribuição normal/gaussiana com média zero e covariância dado pela matriz  $R$ , conforme a equação (40). Os subscritos  $k - 1$  em ambas as equações indicam o instante anterior a  $k$ .

Neste algoritmo é feita uma linearização das equações de estado e de medições. As equações que linearizam a sua estimativa assumem a forma

$$X_k = \tilde{X}_k + A_{d_k}(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + D_d w_{k-1} \quad (54)$$

$$Y_k = \tilde{Y}_k + C_k(X_k - \tilde{X}_k) + v_k \quad (55)$$

O EKF funciona da mesma forma do KF, no sentido previsão-correção e a maior parte dos elementos das equações têm a mesma definição dos elementos das equações do KF, no entanto tem algumas diferenças. As matrizes  $A_{d_k}$  e  $C_k$ , são matrizes jacobianas.  $D_{d_k}$  é também uma matriz jacobiana que relaciona as funções do estado do sistema com o ruído do sistema. Isto é,

$$A_{d[i,j]_k} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial X_{[j]}}(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (56)$$

$$D_{d[i,j]_k} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (57)$$

$$C_{[i,j]_k} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial X_{[j]}}(\tilde{X}_k) \quad (58)$$

Das equações do sistema (54) e (55),  $\tilde{X}_k$  e  $\tilde{Y}_k$  são aproximações de  $X_k$  e  $Y_k$ , respetivamente, onde não há conhecimento dos valores do ruído em cada instante. Estas aproximações são dadas por

$$\tilde{X}_k = f(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (59)$$

$$\tilde{Y}_k = h(\tilde{X}_k) \quad (60)$$

Na Tabela 2. está o algoritmo completo do Filtro de Kalman Estendido. Tal como no filtro clássico, inicia-se a aplicação do algoritmo, assumindo valores iniciais do vetor de estado  $X_0$  e matriz de covariância do erro  $P_0$ .

Tabela 2 – Algoritmo do Filtro de Kalman Estendido.

Inicialização	
$\hat{X}_{k-1} = X_0$	Vetor de estado inicial (assumido)
$P_{k-1} = P_0$	Matriz de covariância do erro inicial (assumido)
Previsão	Equações <i>time update</i>
$\hat{X}_k^- = f(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1})$	Previsão da estimativa do vetor de estado
$P_k^- = A_{d_k} P_{k-1} A_{d_k}^T + D_{d_k} Q_{k-1} D_{d_k}^T$	Previsão da matriz de covariância do erro
Correção	Equações <i>measurement update</i>
$K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1}$	Ganho do filtro de Kalman
$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Y_k - h(\hat{X}_k^-))$	Atualização da estimativa do vetor de estado
$P_k = (I - K_k C_k) P_k^-$	Atualização da matriz de covariância do erro

### 2.3.2.1 Limitações do Filtro de Kalman Estendido [2]

Embora o filtro de Kalman estendido seja uma poderosa extensão do filtro de Kalman clássico projetado para sistemas dinâmicas não-lineares, este possui várias limitações.

O EKF funciona assumindo que o sistema é aproximadamente linear localmente e quando o sistema é altamente não-linear, a estimação pode ser imprecisa, principalmente à volta dos pontos de linearização e resulta num comportamento instável e divergente dos resultados estimados.

Apesar da simplicidade de implementação, o ajuste das matrizes de covariância do ruído e do erro é complicado e requer experiência do utilizador. Os valores destas matrizes alteram

significativamente o valor dos dados estimados e o mesmo se verifica no valor do estado inicial também assumido. Chegar a estes resultados iniciais para o EKF convergir rapidamente e fornecer estimativas precisas pode ser desafiador.

O EKF assume que o ruído do sistema é branco e segue uma distribuição gaussiana. Caso isto não se verifique o filtro não obtém os melhores resultados. A estimativa aproxima-se do estado verdadeiro, mas não minimiza a diferença para o estado verdadeira.

A utilização do EKF pode ser computacionalmente intensiva na computação das matrizes jacobianas. Isso pode ser uma limitação em sistemas de tempo real ou com recursos computacionais limitados.



## Capítulo 3

### Simulação e Resultados

Esta secção tem como objetivo a aplicação do filtro de Kalman para as cinco missões mencionadas na introdução da dissertação.

#### 3.1 Simulação

Uma vez que na utilização do filtro de Kalman o ruído é assumido branco e gaussiano, após a obtenção das coordenadas cartesianas e da velocidade para cada missão [9] com o centro do Sol como origem do referencial foi injetado ruído nos dados usando a função *randn* do *Matlab*.

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \sigma_r \text{randn}(\text{size}(\mathbf{r})) \quad (61)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{r}} + \sigma_v \text{randn}(\text{size}(\dot{\mathbf{r}})) \quad (62)$$

Considerando o erro máximo para a posição e para a velocidade os valores assumidos da Tabela 3., o desvio padrão  $\sigma$  para a posição e para a velocidade é dado por

$$\varepsilon = 5\sigma \quad (63)$$

Tabela 3 – Erros máximos assumidos para cada missão.

	V1 e V2	MO	MSL e M2020
Erro máximo aceitável da posição $\varepsilon_p$	10 km	1 km	0,2 km
Erro máximo aceitável da velocidade $\varepsilon_v$	0,08 km/s		0,05 km/s

Foi implementado o filtro de Kalman estendido com algoritmos na Tabela 2. O vetor de funções do meu sistema dado por

$$f(x) = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]^T \quad (64)$$

As três últimas componentes de (64) dadas por (2), (3) e (4) e já com a norma da posição relativa substituída e com a adição do ruído do sistema ficam

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} x + w_1 \quad (65)$$

$$\dot{y} = -\frac{\mu}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} y + w_2 \quad (66)$$

$$\dot{z} = -\frac{\mu}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} z + w_3 \quad (67)$$

E o parâmetro gravitacional  $\mu$  igual ao parâmetro gravitacional do Sol  $\mu_{Sol}$

$$\mu_{Sol} = 1,327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$$

A matriz de medição/observação do sistema  $C$  com origem em (58) é a matriz que define como as variáveis de estado contribuem para as medições.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz  $C$  é a matriz que multiplicada pelo vetor de estado  $X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ , torna o vetor de medições  $Y = CX + v = [x \ y \ z]^T + [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ . A matriz de distribuição do ruído  $D$ , que relaciona as funções do estado do sistema com o ruído do sistema, tem os seus elementos determinados a partir da equação (57) e resulta das derivadas parciais das equações do sistema (64) em ordem aos elementos do ruído.

$$\begin{aligned} D_{4,1} &= \frac{\partial f_4}{\partial w_1} = 1 \\ D_{5,2} &= \frac{\partial f_5}{\partial w_2} = 1 \\ D_{6,3} &= \frac{\partial f_6}{\partial w_3} = 1 \end{aligned} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, os restantes elementos da matriz têm resultado nulo.

Estas matrizes são constantes para a dissertação e  $D$  foi discretizada com um passo de discretização  $dt = 1/\text{duração da missão}$ , onde a *duração da missão* é o número de passos  $k$  desde o início da missão em  $t_0$  até à chegada  $t_{final}$ , ou equivalente para as missões Voyager em que foram usados para a simulação dos filtros dados até à passagem da Voyager 2 por Neptuno.

As matrizes iniciais de covariância do erro  $P_0$  e do ruído do sistema e das medições  $Q$  e  $R$ , respetivamente, são dadas por

$$Q = \lambda_q \times I_{3 \times 3} \quad (68)$$

$$R = \lambda_r \times I_{3 \times 3} \quad (69)$$

$$P_0 = \lambda_p \times I_{6 \times 6} \quad (70)$$

Onde  $\lambda$  é um fator de multiplicação assumido diferente (ou não) para cada matriz e cada missão e  $I$  a matriz identidade, com dimensão  $3 \times 3$  para  $Q$  e  $R$  e dimensão  $6 \times 6$  para  $P_0$ . Através de tentativa e erro foram encontrados os fatores de multiplicação que faziam com que os desvios de posição/velocidade fossem inferiores aos máximos aceitáveis considerados na Tabela 3.

Tabela 4 – Fatores de multiplicação das matrizes de covariância.

Missão	
V1 / V2	$\lambda_q = 1 \times 10^{20}$
	$\lambda_r = 1 \times 10^{-3}$
	$\lambda_p = 1 \times 10^{20}$
MO / MSL / M2020	$\lambda_q = 1 \times 10^{30}$
	$\lambda_r = 1 \times 10^5$
	$\lambda_p = 1 \times 10^{20}$

Uma vez que estado do sistema é descrito por equações diferenciais de primeira ordem contínuas no tempo, é necessário fazer a discretização logo na primeira equação no algoritmo, no conjunto de equações *time update*, na estimativa do vetor de estado estimado. Para isso foi usado o algoritmo de Butcher disponibilizado no Anexo A.

Após a estimativa do vetor de estado do sistema foi determinado o desvio dos dados filtrados/estimados em relação aos dados de referência originais.

$$\varepsilon_{p_k} = \sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^2 + (y_k - \hat{y}_k)^2 + (z_k - \hat{z}_k)^2} \quad (71)$$

$$\varepsilon_{v_k} = |v_k - \hat{v}_k| \quad (72)$$

Com as velocidades determinadas através da posição original e estimada da seguinte forma

$$v_k = \sqrt{\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2 + \left(\frac{z_{k+1} - z_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2} \quad (73)$$

$$\hat{v}_k = \sqrt{\left(\frac{\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2 + \left(\frac{\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2 + \left(\frac{\hat{z}_{k+1} - \hat{z}_k}{t_{k+1} - t_k}\right)^2} \quad (74)$$

O resultado do denominador é o tempo (em segundos) do intervalo de  $k$  para  $k + 1$ , é constante em cada passo e para todas as missões e é igual a  $24h$ .

## 3.2 Resultados

Nesta secção são apresentados os resultados da simulação para as cinco missões e para duas situações do vetor de medição  $Y_k$ . Para cada missão, foi feita uma simulação em que as medições do algoritmo do EKF eram os dados limpos, isto é, dados originais sem a introdução de ruído, e com os dados ruidosos.

### 3.2.1 Voyager 1

Os resultados obtidos da simulação para a missão Voyager 1 são os visíveis nas Figuras 4, 5, 6 e 7.



Figura 4 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 1.

A Figura 4 é a representação do desvio da posição estimada pelo EKF com os dados ruidosos a vermelho e com os dados limpos a azul em relação à posição verdadeira ao longo da missão, desde a injeção até aproximadamente à passagem de Voyager 2 por Neptuno. É possível ver que o desvio da posição estimada com os dados ruidosos atinge valores máximos de cerca de  $8,5\text{ km}$ , e um valor médio, visto na mesma figura como a linha horizontal da mesma cor, de pouco mais do que  $3\text{ km}$ . De simulação para simulação estes valores variam ligeiramente sem haver nenhuma alteração do código de implementação nem nas variáveis de entrada. Isto deve-se ao uso da função *randn*, já referida anteriormente, que insere o ruído em  $Y_k$  de forma aleatória.

Devido à ordem de grandeza do desvio da posição estimada dos dados com ruído em relação aos dados sem ruído, na Figura 4 a azul só é possível ver uma linha horizontal com o valor do desvio de 0 km. Na realidade esse valor não é zero, mas é muito próximo e pode ser visto com maior exatidão na Figura 5.

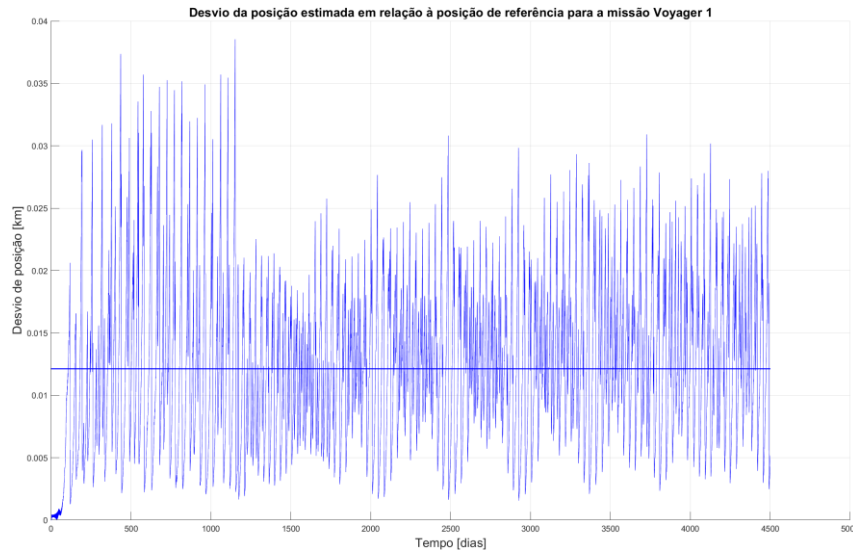


Figura 5 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 1.

É possível ver, na Figura 5, que o desvio máximo para os dados sem ruído é de aproximadamente 40 m. A linha horizontal é o valor médio do desvio e para este caso é de cerca de 12 m. Apesar de a diferença entre e os dados sem ruído e os dados com ruído sem considerável, os resultados do filtro para os dados sem ruído apresentam uma maior instabilidade.

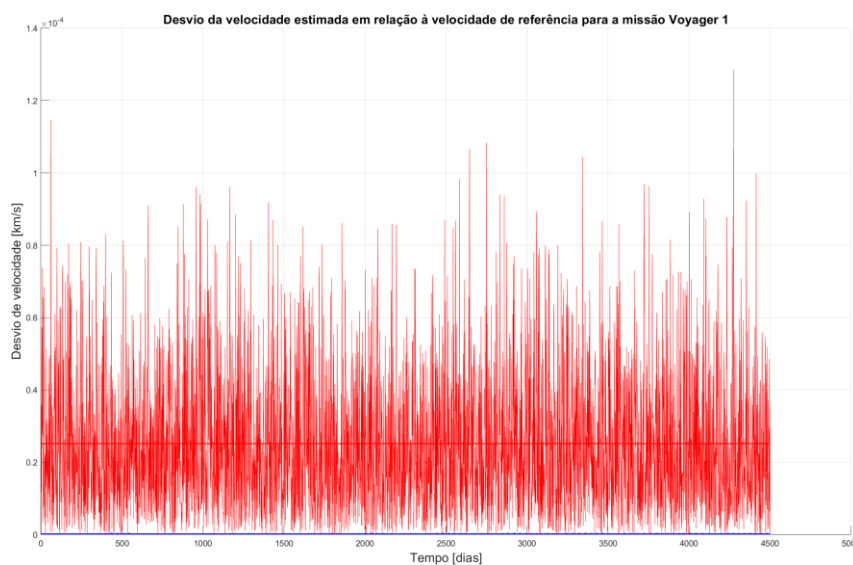


Figura 6 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 1.

Para o desvio da velocidade os gráficos têm formas semelhantes, mas ordens de grandeza diferentes. Da Figura 6. é notável o desvio máximo de cerca de  $0,13 \text{ m/s}$  ( $1,3 \times 10^{-4} \text{ km/s}$ ) e um desvio médio de pouco menos de  $0,3 \times 10^{-4} \text{ km/s}$ , isto é,  $3 \text{ cm/s}$ , para os dados com ruído.

Para os dados sem ruído, mais facilmente analisáveis da Figura 7. encontra-se um valor máximo de cerca de  $6,5 \times 10^{-7} \text{ km/s}$  e um valor médio a próximo dos  $2 \times 10^{-7} \text{ km/s}$ . Também aqui é possível verificar uma maior instabilidade no EKF.

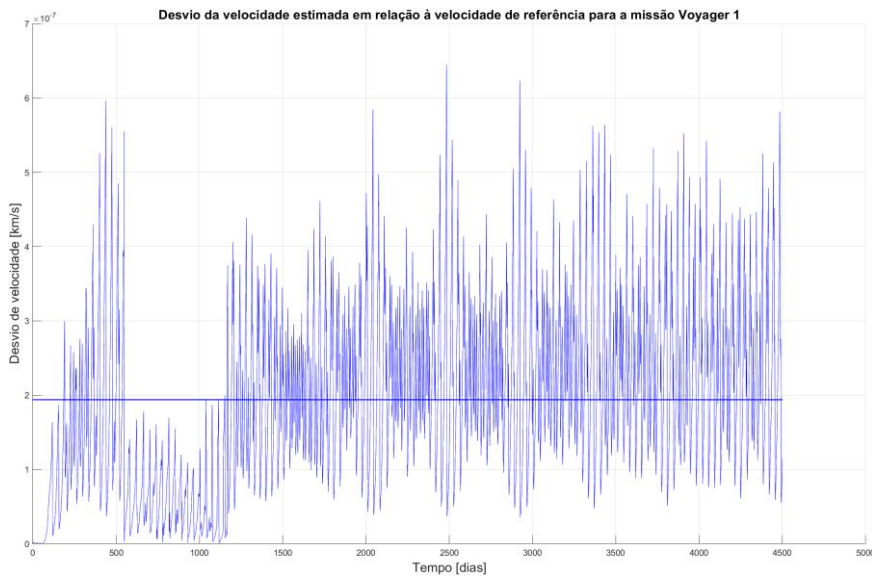


Figura 7 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 1.

Nas Figuras 8 e 9 está uma representação gráfica bidimensional da trajetória estimada para os casos sem ruído e com ruído, respetivamente, bem como as órbitas dos planetas envolvidos. As linhas a tracejado são órbitas dos planetas Terra, Júpiter, Saturno, Úrano e Neptuno, do interior para o exterior. Na Figura 8, a trajetória da sonda espacial está representada a azul e na Figura 9 a vermelho. Para além da cor, não há diferenças entre as duas a esta escala, pois como observado pelos gráficos do desvio desta missão, o desvio máximo da posição verdadeira é de cerca de  $9 \text{ km}$ .

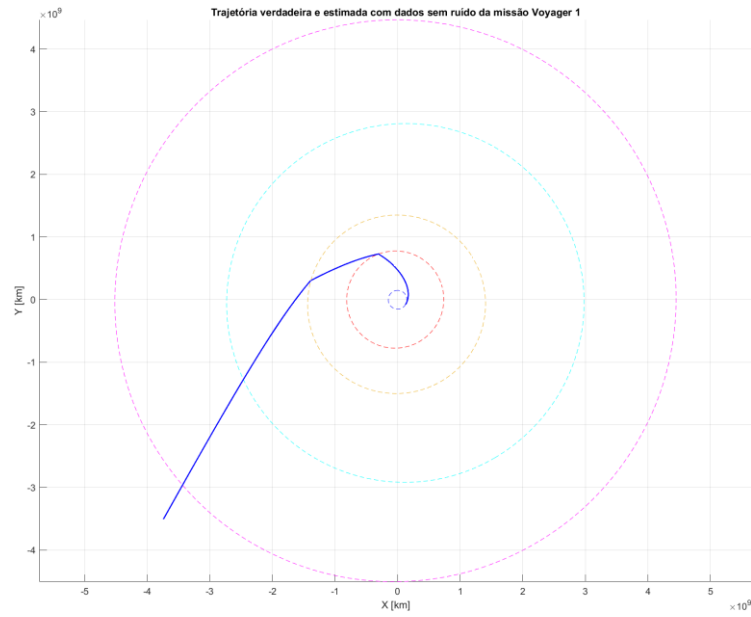


Figura 8 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Voyager 1.

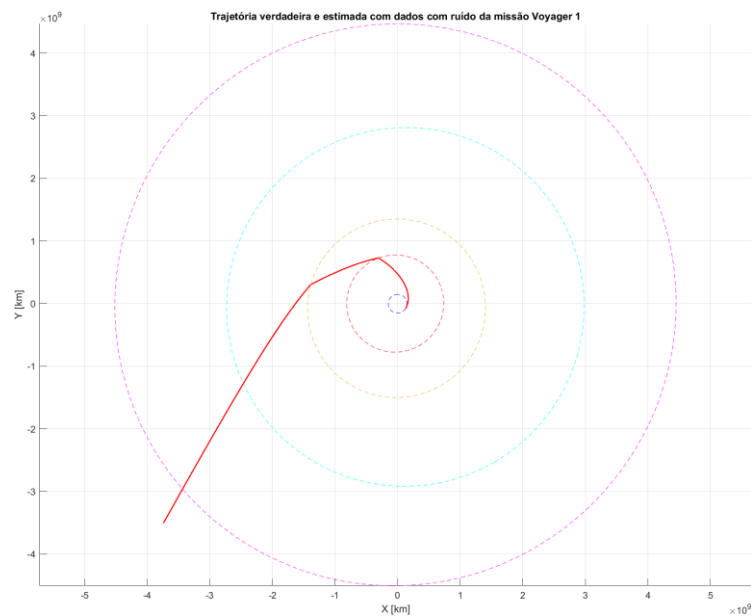


Figura 9 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Voyager 1.

### 3.2.2 Voyager 2

Para a segunda sonda espacial, os resultados gráficos da simulação encontram-se da Figura 10 à Figura 13.

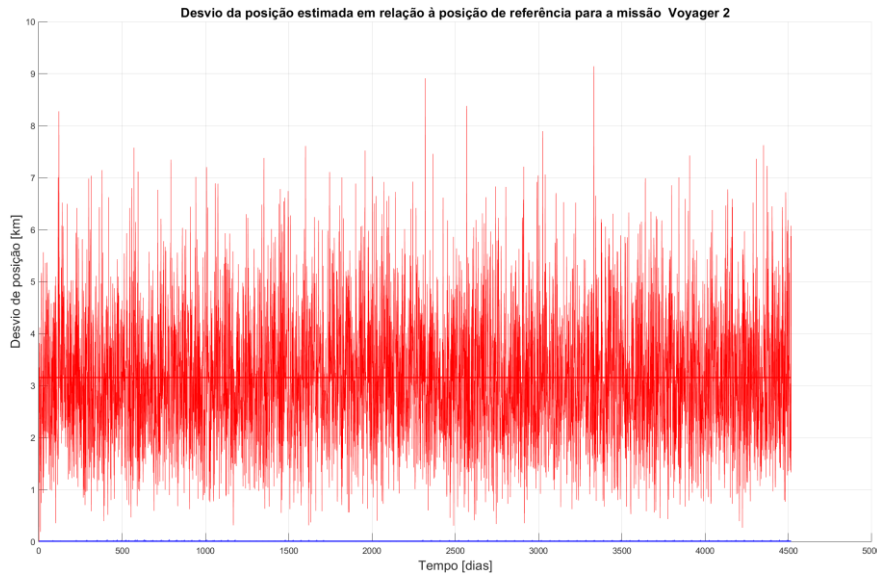


Figura 10 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 2.

A Figura 10 mostra que o erro máximo de posição para os dados estimados com introdução de ruído é de pouco mais de 9 km. O valor médio do erro para esta missão é também de cerca de 3 km. Novamente a diferença de valores do desvio entre o estado estimado com dados com ruído e dados sem ruído é tão elevada, que o desvio da posição para os dados sem ruído aparece no gráfico como uma linha horizontal de valor zero.

Representando apenas o desvio de posição dos dados estimados sem ruído ao longo da missão, é possível visualizar na Figura 11 um valor máximo do erro da posição de pouco mais do que 40 m. O valor médio do erro ronda os 10 m e novamente para esta escala, é notável a instabilidade do filtro.

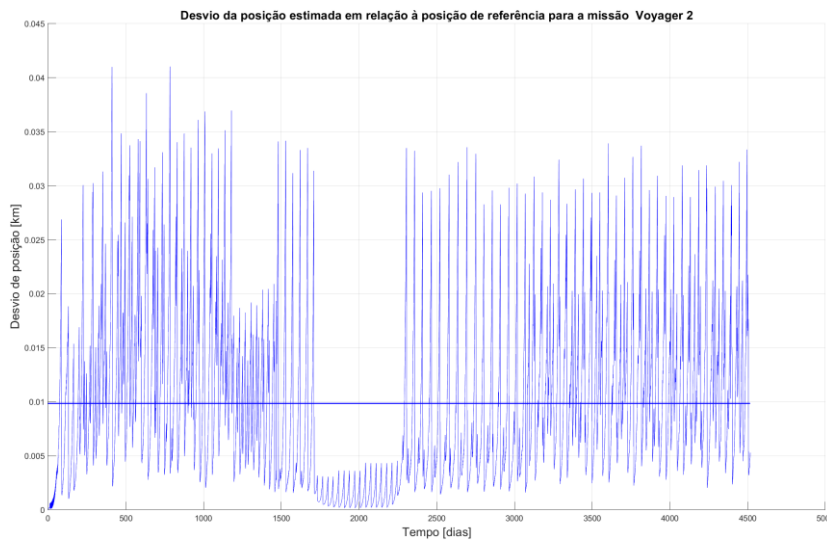


Figura 11 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 2.

Na Figura 12 está representado o erro da velocidade estimada em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído e dados sem ruído ao longo do tempo. Apresenta um desvio de velocidade inferior a  $1,4 \times 10^{-4} \text{ km/s}$  que é igual a  $14 \text{ cm/s}$ . Os valores do erro de velocidade andam à volta de pouco mais de  $2 \text{ cm/s}$ .

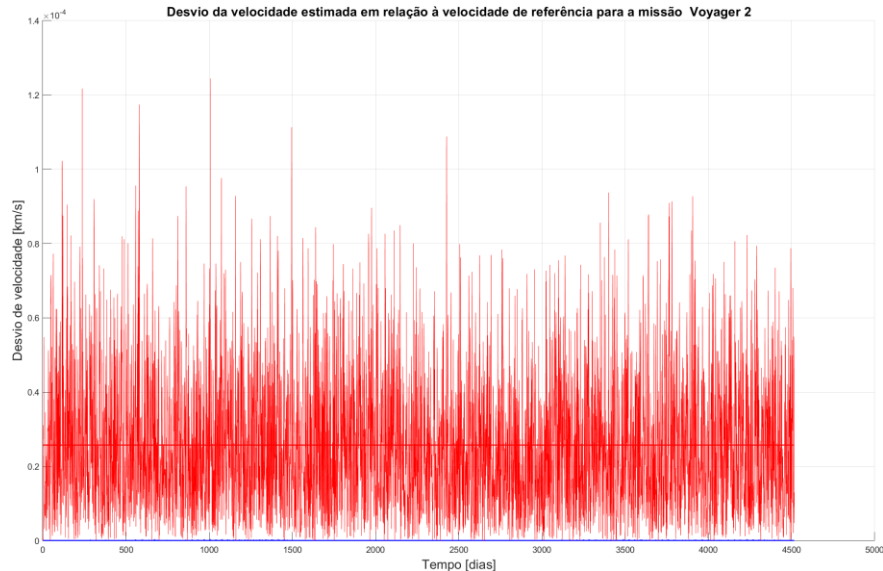


Figura 12 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Voyager 2.

Representando novamente o desvio de velocidade ao longo do tempo da missão por não ser visível na figura anterior, na Figura 13 é possível ver um desvio de velocidade inferior a  $0,45 \text{ mm/s}$ . O valor do erro médio da velocidade é de cerca de  $0,1 \text{ mm/s}$ . A esta escala é possível ver novamente a instabilidade do filtro estendido.

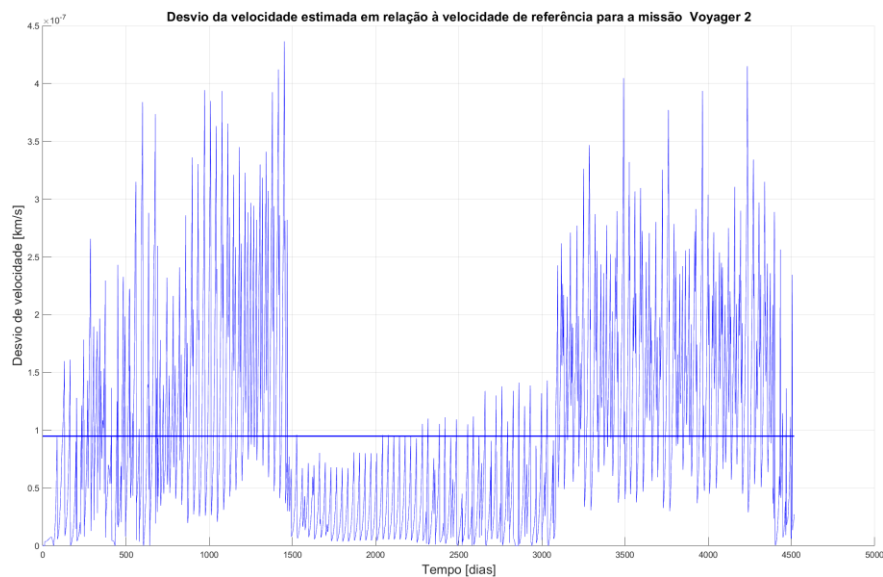


Figura 13 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Voyager 2.

Nas Figuras 14 e 15 estão representadas as trajetórias reconstruídas a partir dos dados estimados pelo filtro com os dados sem ruído e com ruído, respectivamente. Estão representadas também as órbitas dos planetas envolvidos e é possível observar a curvatura resultante das assistências gravíticas dos planetas.

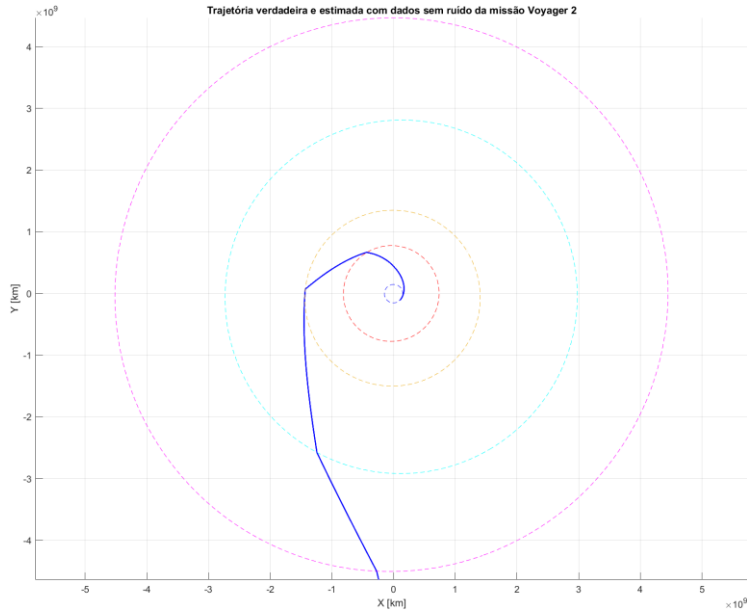


Figura 14 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Voyager 2.



Figura 15 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Voyager 2.

### 3.2.3 Mars Odyssey

Da Figura 16 à 19 estão representados os resultados da aplicação do filtro de Kalman estendido para a primeira das missões a Marte estudadas.

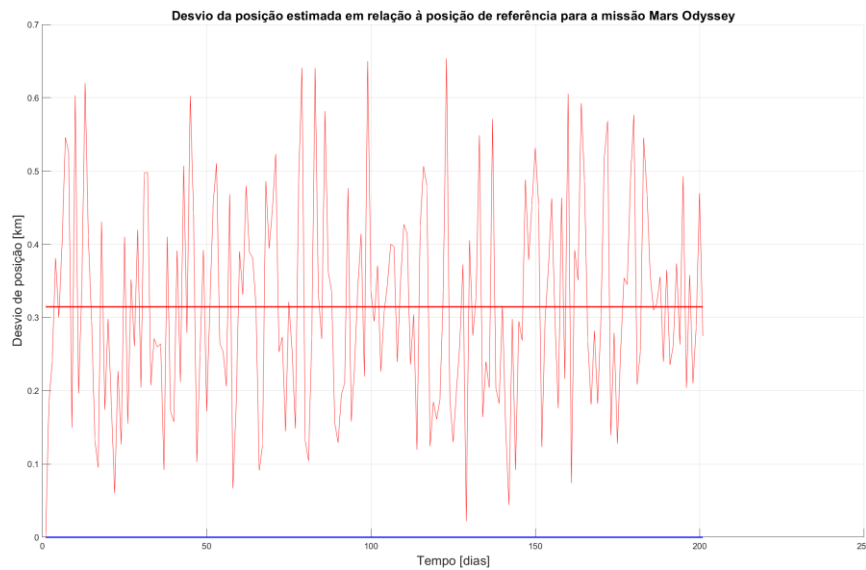


Figura 16 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Odyssey.

Na Figura 16 nota-se o valor máximo do desvio da posição estimada de cerca de  $0,65 \text{ km}$  e o erro médio da posição ronda os  $300 \text{ m}$  para os dados ruidosos.

Para os dados sem ruído, a o desvio médio da posição estimada em relação à posição original, visível na Figura 17, é muito próximo de zero, e apresenta um pico máximo na fase inicial da missão com um valor na ordem de grandeza de  $10^{-9} \text{ km}$ .

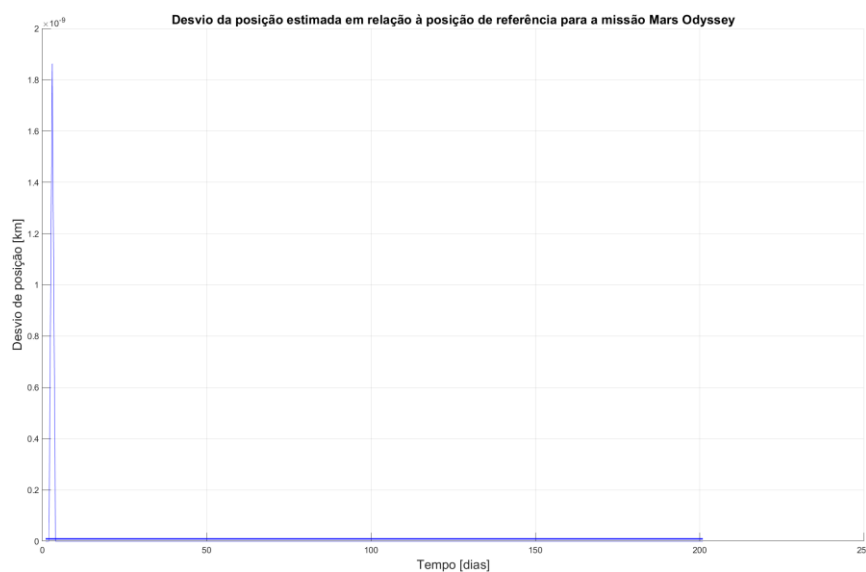


Figura 17 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Odyssey.

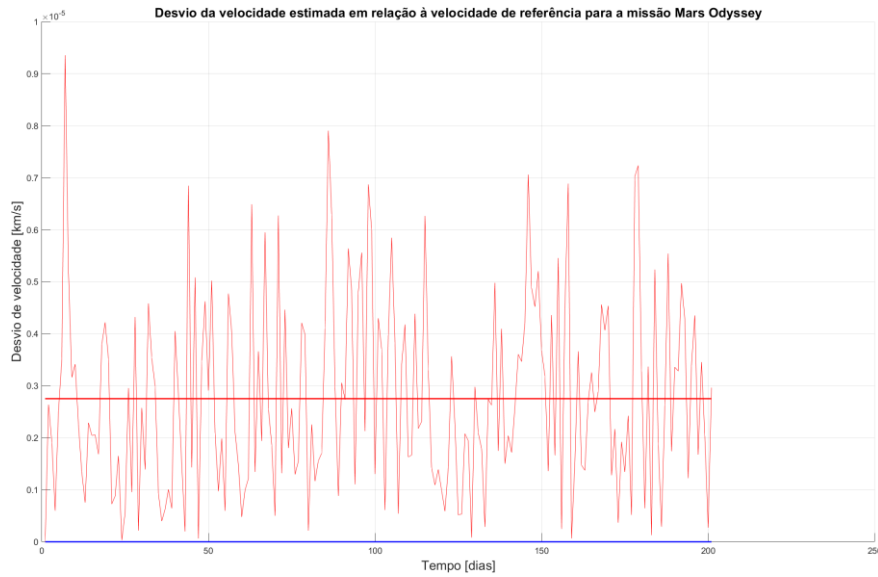


Figura 18 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Odyssey.

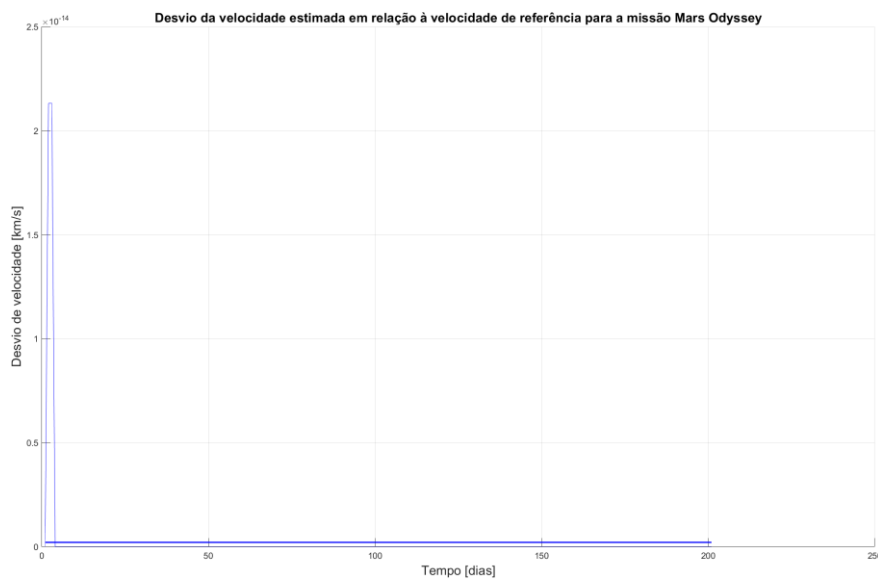


Figura 19 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Odyssey.

Para o desvio de velocidade dos dados estimados com ruído, a Figura 18 mostra valores muito baixos na ordem dos  $cm/s$ .

Novamente para os dados sem ruído, existe um pico no desvio de velocidade estimada na fase inicial da missão, mas sendo com unidades muito baixas e próximas de zero, como é possível ver na Figura 19.

De igual forma das missões anteriores, foram traçadas as trajetórias da missão Mars Odyssey com os dados estimados pelo filtro. Essas trajetórias são vistas na Figuras 20 e 21.

Estão também representadas as órbitas da Terra (linha tracejada a azul) e de Marte (linha tracejada a vermelho). A linha tracejada a preto é a linha de apse da órbita da Terra e no centro a laranja está representado o Sol a uma escala de 10 vezes superior ao tamanho real. A esta escala é possível ver quatro pontos pretos em cada figura: dois na órbita da Terra e dois na órbita de Marte. Estes pontos representam a Terra e Marte, nos momentos de injeção e de inserção e estão a uma escala de trezentas vezes o tamanho real de cada planeta.

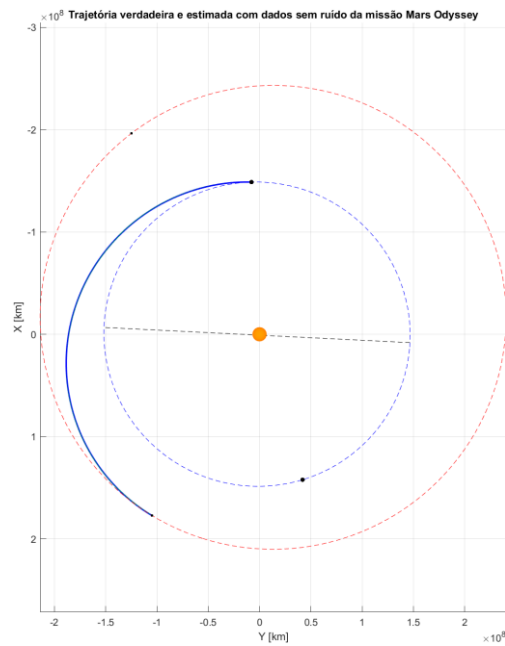


Figura 20 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars Odyssey.

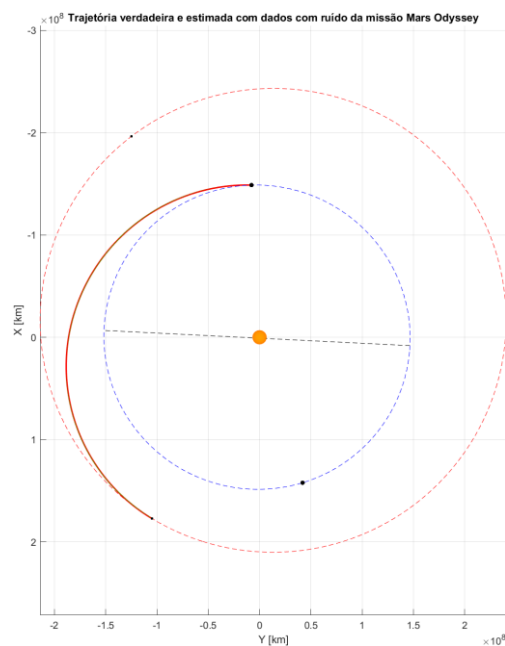


Figura 21 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars Odyssey.

### 3.2.4 Mars Science Laboratory

Os erros de posição e velocidade estimados com ruído e sem ruído estão representados da Figura 22 à 25.

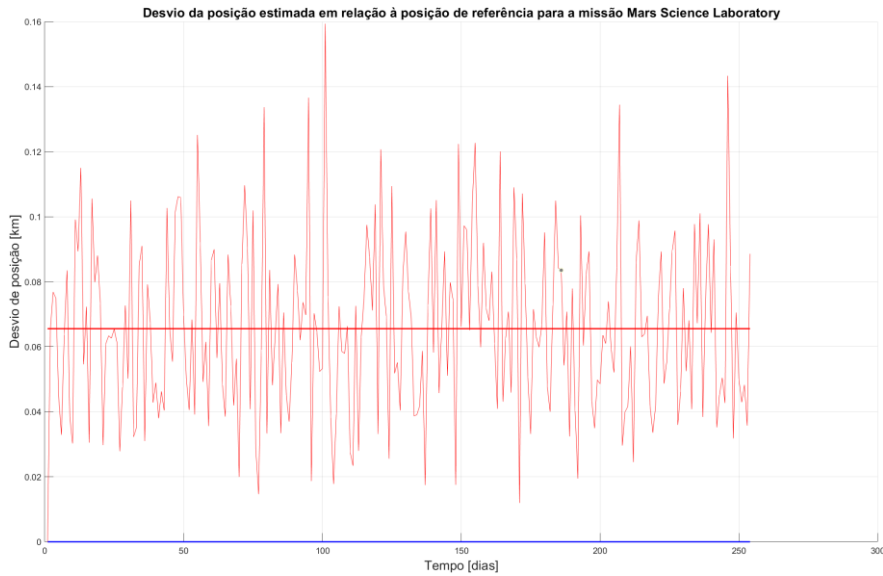


Figura 22 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Science Laboratory.

Na Figura 22 encontra-se um valor máximo do erro da posição de 160 m para os dados estimados a partir de dados ruidosos e todos os outros valores andam à volta de um valor inferior a 80 m.

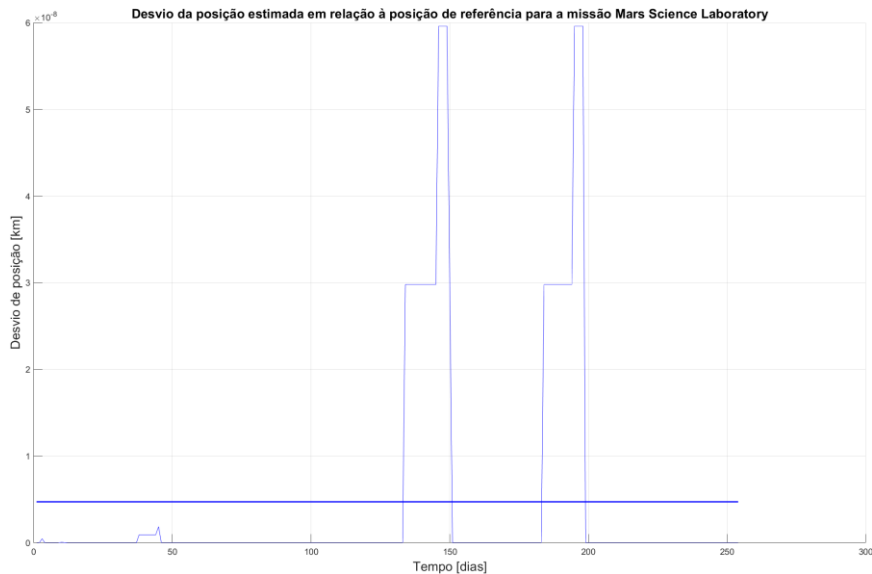


Figura 23 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Science Laboratory.

O erro da posição estimada a partir de dados sem ruído apresenta valores muito inferiores e na ordem de  $10^{-8} \text{ km}$  como é visível na Figura 23.

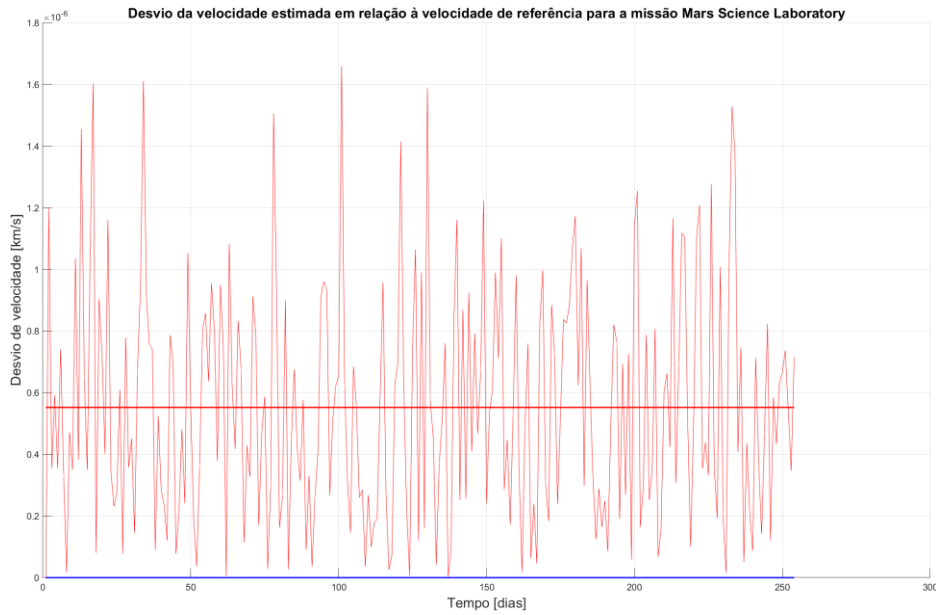


Figura 24 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars Science Laboratory.

Relativamente ao desvio de velocidade estimada a partir de dados ruidosos para esta missão, a ordem dos valores é semelhante à missão anterior e é de alguns  $mm/s$ , como se pode ver na Figura 24.

Na Figura 25, para o erro da velocidade relativamente à velocidade de referência é ainda mais baixa e mesmo sendo instável e apresentando uns picos, estes têm valores na ordem de  $10^{-13} km$ .

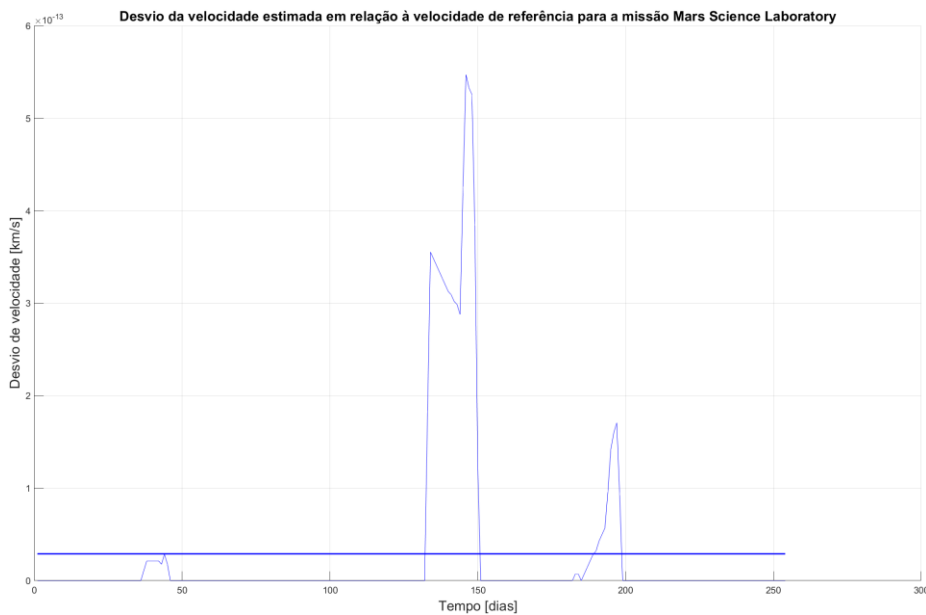


Figura 25 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars Science Laboratory.

Na Figura 26 está representada a trajetória de transferência estimada pelo EKF com os dados de medição sem ruído sobreposta à trajetória verdadeira.

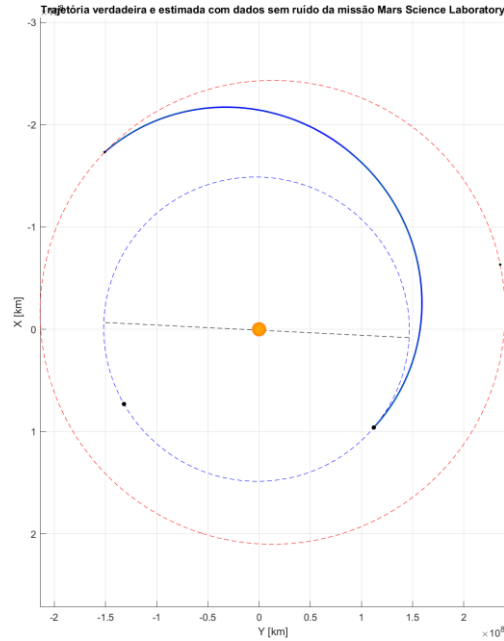


Figura 26 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars Science Laboratory.

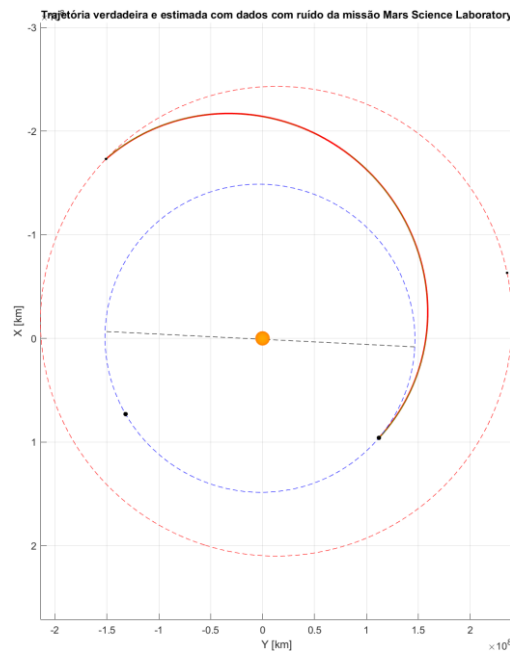


Figura 27 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars Science Laboratory.

Na Figura 27 a trajetória é desenhada utilizando a devolução das componentes da posição do vetor de estado com os dados ruidosos. A curva está sobreposta à trajetória verdadeira e não é possível ver o desvio a esta escala.

### 3.2.5 Mars2020

Os resultados gráficos da simulação da última missão estão nas Figuras 28, 29, 30 e 31.

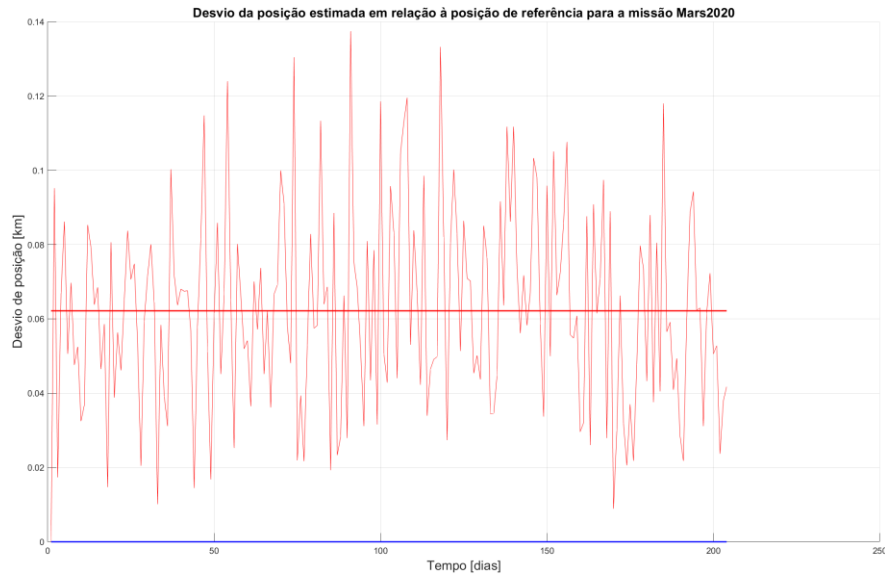


Figura 28 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mars2020.

Os desvios da posição estimada em relação à posição verdadeira para a missão de 2020 podem ser vistos para os dados com ruído na Figura 28 e lê-se um valor máximo do erro inferior a 140 m e de um valor médio de pouco mais de 60 m.

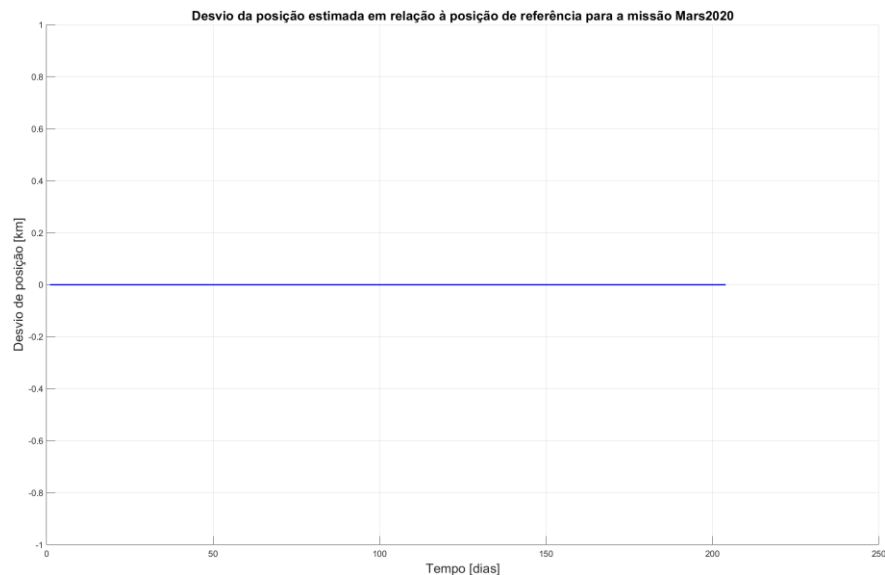


Figura 29 – Desvio da posição estimada com EKF em relação à posição verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mar2020.

Em todos os gráficos em que o desvio da posição estimada para os dados limpos era representado juntamente com os dados ruidosos apresentava um valor nulo, tal eram os seus valores inferiores relativamente aos outros. No entanto, para esta missão o desvio

estimado com os dados limpos apresenta valores nulos em relação à posição verdadeira, tal como pode ser visto na Figura 29, indicando que são “iguais” aos originais.

Na Figura 30 está representado o erro da velocidade estimada em relação à velocidade verdadeira e apresenta máximos próximos de  $1,6 \times 10^{-6} \text{ km/s}$  e um valor médio próximo de  $0,5 \times 10^{-6} \text{ km/s}$ .

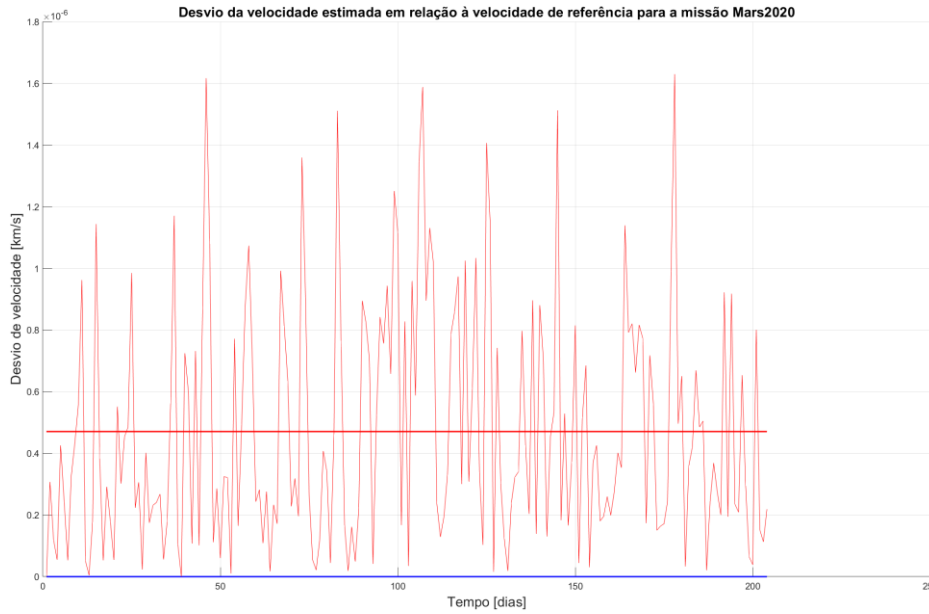


Figura 30 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados com ruído (a vermelho) e os dados sem ruído (a azul) para a missão Mar2020.

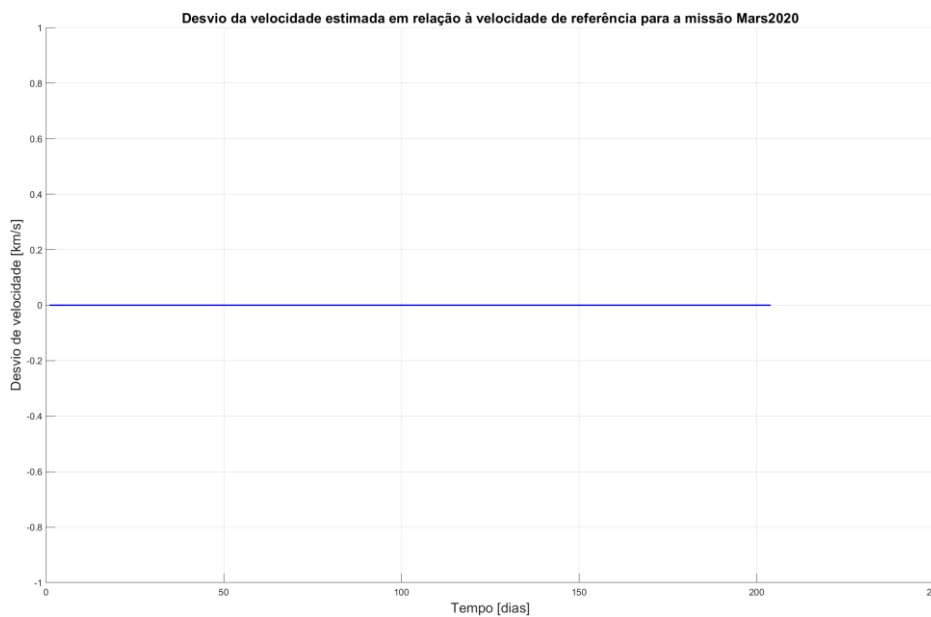


Figura 31 – Desvio da velocidade estimada com EKF em relação à velocidade verdadeira para os dados sem ruído para a missão Mars2020.

Para o erro da velocidade estimada para os dados sem ruído, o resultado foi o mesmo dos desvios de posição desta mesma missão, isto é, igual a  $0 \text{ km/s}$ .

A trajetória desta missão está representada nas Figuras 32 e 33, através dos dados estimados pelo EKF com medições sem ruído e com medições com ruído, respectivamente.

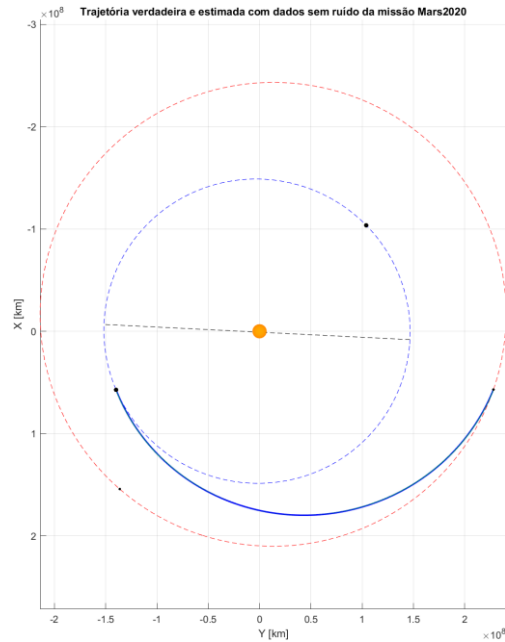


Figura 32 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados sem ruído da missão Mars2020.

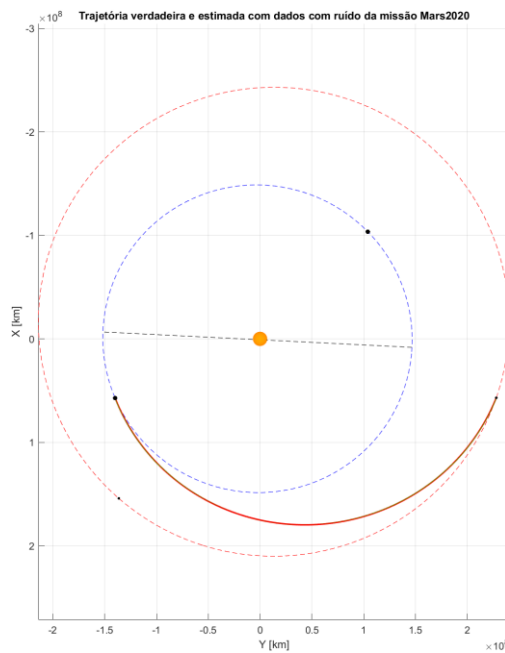


Figura 33 – Representação gráfica bidimensional da trajetória verdadeira e estimada com dados com ruído da missão Mars2020.

### 3.3 Análise de resultados

Após a simulação de todas as missões, os valores dos desvios máximos e médios da posição e da velocidade para os dados com e sem ruído foram registados na Tabela 6. e Tabela 7., respetivamente. Devido à falta de espaço para colocar mais texto nas tabelas, foram colocadas linhas a sombreado para representar os dados com ruído e sem sombreado para representar os dados sem ruído.

Tabela 5 – Valores obtidos dos desvios máximos e médios da posição para todas as missões.

	V1	V2	MO	MSL	M2020
$\varepsilon_{p_{m\acute{a}x}}$ (km)	0,039	0,041	$1,86 \times 10^{-9}$	$5,96 \times 10^{-8}$	0
	8,390	9,144	0,654	0,159	0,137
$\varepsilon_{m\acute{a}x_{cr}}/\varepsilon_{m\acute{a}x_{sr}}$	$\approx 218$	$\approx 223$	$\approx 4 \times 10^8$	$\approx 3 \times 10^6$	–
$\varepsilon_{p_{m\acute{e}d}}$ (km)	0,012	0,010	$9,27 \times 10^{-12}$	$4,73 \times 10^{-9}$	0
	3,148	3,159	0,315	0,066	0,062
$\varepsilon_{m\acute{e}d_{cr}}/\varepsilon_{m\acute{e}d_{sr}}$	$\approx 259$	$\approx 321$	$\approx 3 \times 10^{10}$	$\approx 1 \times 10^7$	–

Na Tabela 5. encontram-se os valores arredondados dos desvios máximos de posição  $\varepsilon_{p_{m\acute{a}x}}$  e os valores dos desvios médios de posição  $\varepsilon_{p_{m\acute{e}d}}$  em relação à posição verdadeira. Encontra-se também a relação entre os desvios máximos de posição para os dados com ruído (*cr*) e sem ruído (*sr*) e a relação entre os desvios médios.

Tabela 6 – Valores obtidos dos desvios máximos e médios da velocidade para todas as missões.

	V1	V2	MO	MSL	M2020
$\varepsilon_{v_{m\acute{a}x}}$ (km/s)	$6,45 \times 10^{-7}$	$4,36 \times 10^{-7}$	$2,13 \times 10^{-14}$	$5,47 \times 10^{-13}$	0
	$1,29 \times 10^{-4}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$9,36 \times 10^{-6}$	$1,66 \times 10^{-6}$	$1,63 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_{m\acute{a}x_{cr}}/\varepsilon_{m\acute{a}x_{sr}}$	$\approx 199$	$\approx 285$	$\approx 4 \times 10^8$	$\approx 3 \times 10^6$	–
$\varepsilon_{v_{m\acute{e}d}}$ (km/s)	$1,94 \times 10^{-7}$	$9,49 \times 10^{-8}$	$2,12 \times 10^{-16}$	$2,90 \times 10^{-14}$	0
	$2,51 \times 10^{-5}$	$2,58 \times 10^{-5}$	$2,75 \times 10^{-6}$	$5,52 \times 10^{-7}$	$4,71 \times 10^{-7}$
$\varepsilon_{m\acute{e}d_{cr}}/\varepsilon_{m\acute{e}d_{sr}}$	$\approx 130$	$\approx 272$	$\approx 1 \times 10^{10}$	$\approx 2 \times 10^7$	–

Na Tabela 6. encontram-se os valores arredondados dos desvios máximos e médios de velocidade  $\varepsilon_{v_{m\acute{a}x}}$  e  $\varepsilon_{v_{m\acute{e}d}}$  em relação à velocidade verdadeira e a relação entre os desvios máximos de velocidade para os dados com ruído e sem ruído, bem como a relação entre os desvios médios da velocidade para os dois dados.

Em todas as missões é possível verificar que os resultados do filtro com os dados sem ruído são superiores aos resultados do filtro com os dados com ruído, isto é, os erros estimados pelo EKF com as medições sem ruído são muito inferiores aos erros estimados pelo EKF

com as medições ruidosas, o que seria de esperar. Nota-se uma diferença considerável na relação entre os erros estimados com os dados ruidosos e os dados limpos de missão para missão. Nas duas missões Voyager essa relação é de entre uma e três centenas, enquanto que nas missões a Marte essa relação é no mínimo de milhões de vezes superior. Isto pode ser um indicativo da não-linearidade do sistema, na medida em que as manobras de assistência gravítica e manobras de correção não estão incluídas no modelo do sistema.

No entanto para os dados sem ruído, o desvio é diferente de zero, isto pode ser devido à utilização das matrizes de covariância do ruído. Por outro lado, assumo que nos dados verdadeiros estão incluídas manobras de correção na trajetória das missões, e no passo de previsão do filtro de Kalman onde é feita a discretização e determinado o estado estimado *a priori* é utilizada a equação do problema de dois corpos que é uma aproximação da realidade e que pode levar a pequenos desvios e descontinuidades.

É possível notar com maior clareza nas figuras dos desvios dos dados estimados sem ruído (todas as figuras com os dados sem ruído apenas) que há mais instabilidade, isto possivelmente devido ao comportamento habitual do EKF altamente não-lineares [2] e às matrizes de covariância assumidas. Através da experiência na tentativa de encontrar as matrizes de covariância do ruído e erro inicial mais apropriadas, o valor destas matrizes altera significativamente o valor dos dados estimados, independentemente de as medições serem ou não ruidosas. No entanto, com as matrizes de covariância assumidas na simulação, este filtro satisfaz as condições de os desvios de posição e velocidade estimados serem inferiores aos máximos considerados aceitáveis da Tabela 3.



## Capítulo 4

### Conclusão

Esta dissertação tinha como objetivo principal a implementação de um filtro de Kalman estendido para estimar trajetórias de cinco missões espaciais interplanetárias, objetivo que foi concluído com sucesso. Todas as missões apresentaram valores estimados de desvio de posição e inferiores ao erro considerado aceitável.

Com este trabalho verificou-se a forma como o ruído influencia os resultados estimados. Os desvios de posição e velocidade estimados pelo EKF com medições ruidosas eram muito superiores aos erros de posição e velocidade estimados pelo EKF quando as medições não eram ruidosas. Quando o erro de medição for muito pequeno ou negligenciável, o resultado da estimação do estado pode ser muito próximo do valor real do estado.

Foi possível verificar que a escolha de matrizes iniciais tem um grande impacto nos resultados estimados pelo filtro. De forma a mitigar esta limitação, seria interessante expandir este trabalho para uma filtragem adaptativa (AEKF - *Adaptive Extended Kalman Filter*) e atualizar as matrizes de covariância do ruído a cada passo.



## Referências

- [1] H. Mark, “The Impact of Our Enterprise in Space,” *Technology in Society*, vol. 1, pp. 43-53, 1979.
- [2] M. d. F. Coelho, “Filtragem Não Linear Adaptativa e Seguimento Radar Ótimo de Veículos Aeroespaciais,” Tese de Doutorado, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2022.
- [3] M. S. Grewal, and A. P. Andrews, “Applications of Kalman Filtering in Aerospace: 1960 to the Present,” *IEEE Control Systems*, vol. 30, no. 3, pp. 69-78, 2010. DOI: 10.1109/MCS.2010.936465
- [4] NASA – JPL, “NASA Facts: Voyager Mission to the Outer Planets” [Online]. Disponível em: [https://www2.jpl.nasa.gov/news/fact\\_sheets/voyager.pdf](https://www2.jpl.nasa.gov/news/fact_sheets/voyager.pdf). Último acesso: 24/08/2023
- [5] NASA – JPL, “Voyager: What are the contents of the Golden Record?” [Online]. Disponível em: <https://voyager.jpl.nasa.gov/golden-record/whats-on-the-record/>. Último acesso: 27/08/2023
- [6] NASA – JPL, “NASA Facts: 2001 Mars Odyssey” [Online]. Disponível em: <https://mars.nasa.gov/odyssey/files/odyssey/Odyssey0302>. Último acesso: 24/08/2023
- [7] NASA – JPL, “NASA Facts: Mars Science Laboratory/Curiosity” [Online]. Disponível em: [https://mars.nasa.gov/internal\\_resources/824](https://mars.nasa.gov/internal_resources/824). Último acesso: 24/08/2023
- [8] NASA – JPL, “Mars 2020 Perseverance Launch Press Kit” [Online]. Disponível em: [https://www.jpl.nasa.gov/news/press\\_kits/mars\\_2020/launch](https://www.jpl.nasa.gov/news/press_kits/mars_2020/launch). Último acesso: 24/08/2023
- [9] NASA – JPL, “Horizons System Web Interface” [Online]. Disponível em: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons>. Último acesso: 24/08/2023
- [10] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 4<sup>th</sup> Edition, Butterworth-Heinemann – Elsevier, Oxford, UK, 2020.
- [11] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 4<sup>th</sup> Edition, Microcosm Press, Hawthorne, CA, 2013.
- [12] K. F. Wakker, “Fundamentals of Astrodynamics”, Faculty of Aerospace Engineering Delft University of Technology, The Netherlands, 2015.
- [13] V. R. Bond, M. C. Allman, *Modern Astrodynamics: Fundamentals and Perturbation Methods*, Princeton University Press, USA, 1996.

- 
- [14] A. C. Pedrosa, S. M. Gama, *Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística*, 3<sup>a</sup> Edição, Porto Editora, Porto, Portugal, 2016.
- [15] R. Walpole, R. Myers, S. Myers, K. Ye, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9<sup>th</sup> Edition, Pearson Education, Boston, USA, 2007.
- [16] G. Welsh, G. Bishop, “An Introduction to the Kalman Filter,” University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, Chapel Hill, 2001.
- [17] R. Kleinbauer, “Kalman Filtering Implementation with Matlab,” Universität Stuttgart, Helsinki, Finland, 2004.
- [18] V. Capuano, F. Basile, C. Botteron, P. A. Farine, “GNSS-based Orbital Filter for Earth Moon Transfer Orbits,” *The Journal of Navigation*, 69, 2016, 745-764.
- [19] M. d. F. Coelho, K. Bousson, K. Ahmed, “An Improved Extended Kalman Filter for Radar Tracking of Satellite Trajectories,” *Designs*, 5, 54, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/designs5030054>
- [20] S. Akhlaghi, Z. Huang, N. Zhou, “Adaptive Adjustment of Noise Covariance in Kalman Filter for Dynamic State Estimation,” *IEEE Power & Energy General Meeting*, 2017. DOI: 10.1109/PESGM.2017.8273755
- [21] K. Bousson, “Algoritmo de Butcher para simulação de sistemas dinâmicos,” Aulas da Unidade Curricular de Dinâmica e Controlo de Voo, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2014.

# Apêndice A | Trajetórias verdadeiras das missões estudadas



Figura 34 – Representação gráfica bidimensional das trajetórias verdadeiras das missões Voyager 1 e Voyager 2 até ao *flyby* de Voyager 2 por Neptuno.

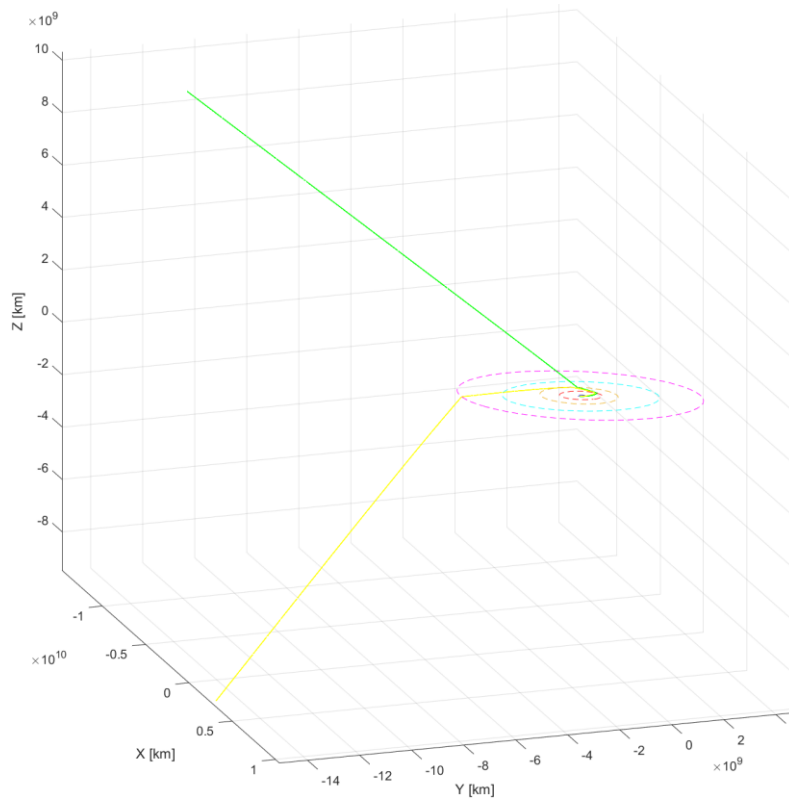


Figura 35 – Representação gráfica tridimensional das trajetórias verdadeiras das missões Voyager 1 e Voyager 2 até ao limite do Sistema Solar.

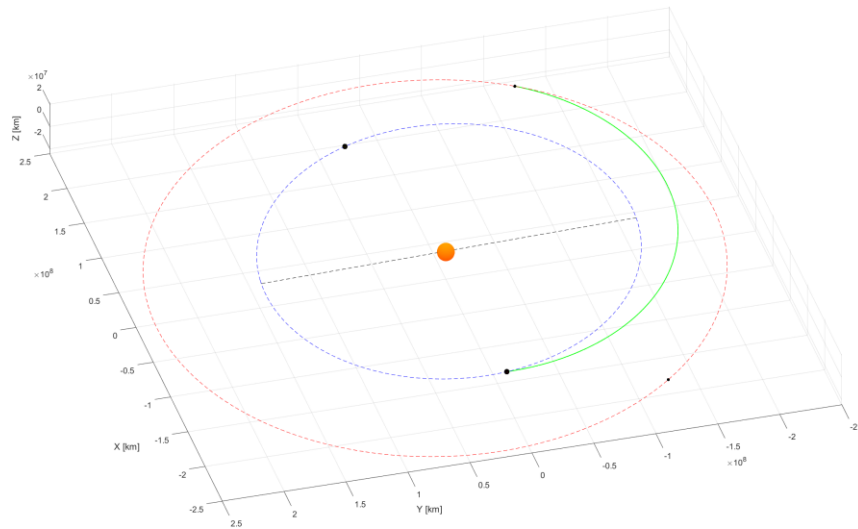


Figura 36 – Representação gráfica tridimensional da trajetória da missão Mars Odyssey.

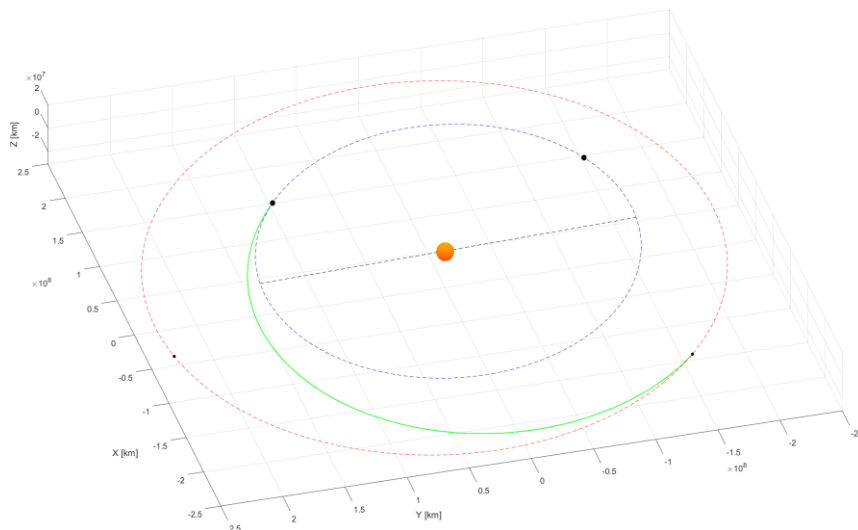


Figura 37 – Representação gráfica tridimensional da trajetória da missão Mars Science Laboratory.

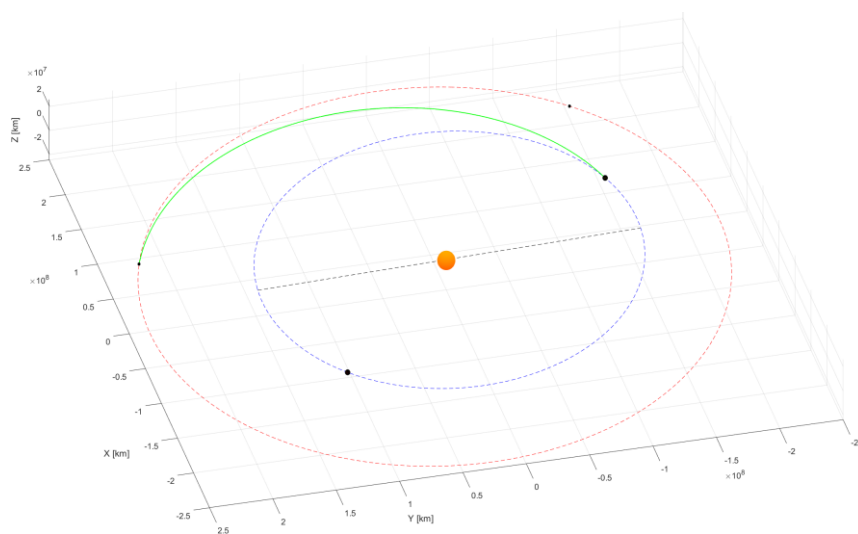


Figura 38 – Representação gráfica tridimensional da trajetória verdadeira da missão Mars2020.

# Anexo A

## Algoritmo de Butcher para simulação de sistemas dinâmicos [21]

*Tema: Algoritmo de Butcher para a simulação de sistemas dinâmicos*

O modelo de um sistema é descrito por :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado e  $u \in \mathfrak{R}^m$  o vetor dependente do tempo.

**Notações:**

$$x_k \equiv x(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t_k = t_{k-1} + dt : \text{o tempo no } k^\circ \text{ passo};$$

$$u_k \equiv u(t_k);$$

$dt$  : o passo da simulação.

**Algoritmo de Butcher:**

Assumindo  $x_0$  dado, os estados do sistema em  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  são determinados por:

Em cada ciclo calcular:

$$k_1 = dt \cdot f(x_k, u_k),$$

$$k_2 = dt \cdot f(x_k + k_1/4, u_k),$$

$$k_3 = dt \cdot f(x_k + k_1/8 + k_2/8, u_k),$$

$$k_4 = dt \cdot f(x_k - k_2/2 + k_3, u_k),$$

$$k_5 = dt \cdot f(x_k + 3k_1/16 + 9k_4/16, u_k),$$

$$k_6 = dt \cdot f(x_k - 3k_1/7 + 2k_2/7 + 12k_3/7 - 12k_4/7 + 8k_5/7, u_k).$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$