

# Universidade da Beira Interior



## Controlo Óptimo Suave de Sistemas com Referências Variáveis

---

Dissertação de Mestrado elaborada por:

**Apolo Emanuel Andrade Martins**

Sob a orientação de Professor Doutor Kouamana Bousson

Departamento de Ciências Aeroespaciais  
Unidade de Ciências da Engenharia  
Universidade da Beira Interior

Covilhã, Agosto 2009



# Universidade da Beira Interior



## Controlo Óptimo Suave de Sistemas com Referências Variáveis

---

Dissertação de Mestrado elaborada por:

**Apolo Emanuel Andrade Martins**

Sob a orientação de Professor Doutor Kouamana Bousson

Departamento de Ciências Aeroespaciais  
Unidade de Ciências da Engenharia  
Universidade da Beira Interior

Covilhã, Agosto 2009

# Índice Geral

Índice Geral .....	i
Índice de Figuras .....	iii
Nomenclatura.....	v
Agradecimentos .....	vii
Resumo.....	viii
Abstract .....	ix
1. Introdução .....	1
2. Regulação de sistemas com referências variáveis .....	3
2.1. Regulador Linear Quadrático (LQR) .....	3
2.1.1. Método do LQR .....	4
2.2. Linearização por Realimentação .....	5
2.2.1. Sistemas SISO .....	6
2.2.2. Sistemas MIMO .....	9
3. Controlo suave no âmbito da regulação variável.....	12
4. Aplicação I: Controlo de taxas angulares de uma aeronave .....	17
4.1. Exposição do sistema em estudo .....	17
4.2. Implementação das equações diferenciais a ser resolvidas .....	19
4.3. Implementação do algoritmo iterativo .....	20
4.4. Simulações desenvolvidas com o LQR.....	20
4.5. Simulações desenvolvidas com Linearização por Realimentação.....	25
4.6. Comparação entre o LQR e a Linearização por Realimentação .....	30
5. Aplicação II: Regulação de Turbinas Eólicas .....	32
5.1. Apresentar os diferentes modos de produção de electricidade numa aeronave .....	32
5.1.1. Geradores AC operados pelos motores .....	32
5.1.2. APU (Auxiliary Power Units) .....	33
5.1.3. Fonte/Potência Externa.....	34
5.1.4 Turbinas RAT .....	34

5.2. Qual é o interesse da energia eólica? .....	37
5.3. Indústria eólica em Portugal .....	39
5.4. Qual o interesse das turbinas eólicas com velocidade variável .....	43
5.5. Modelo da Turbina Eólica.....	44
5.5.1. Modelo de Vento.....	47
5.5.2. Equações lineares.....	49
5.6. Simulações realizadas para o modelo da turbina eólica .....	50
6. Conclusão .....	56
Bibliografia .....	58
Anexos.....	60
A1. Dados do UAV SkyGuardian.....	61
A2. Modelo de Vento .....	62
A3. Sistema Eólico .....	63

# Índice de Figuras

Figura 3.1: Exemplos de comportamentos de sistemas com diferentes tipos de amortecimento.	13
Figura 3.2: Comportamento dos valores de observação $y_1$ .	15
Figura 3.3: Comportamento dos valores de observação $y_2$ .	15
Figura 4.4: Gráfico ilustrativo do comportamento das taxas de variação angular.	21
Figura 4.5: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.	22
Figura 4.6: Gráficos ilustrativos do comportamento das taxas de variação angular.	23
Figura 4.7: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.	24
Figura 4.8: Gráficos ilustrativos do comportamento das acelerações sofridas pelas taxas angulares.	24
Figura 4.9: Gráfico ilustrativo do comportamento das taxas angulares.	27
Figura 4.10: Gráfico ilustrativo do comportamento dos controlos.	28
Figura 4.11: Gráficos ilustrativos do comportamento das taxas angulares.	29
Figura 4.12: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.	29
Figura 4.13: Gráficos comparativos entre o LQR a) e a Linearização por Realimentação b)....	31
Figura 5.14: Gerador AC do motor turbo-hélice Ivchenko AI-20M que equipa os Ilyushin IL-18.	33
Figura 5.15: APU de um Boeing 737 com respectivas legendas dos componentes [12].	33
Figura 5.16: GPU da Hobart com potência de 90kVA.	34
Figura 5.17: - a) - RAT de um F-105 Thunderchief; - b) - RAT de um Boeing 757 [13].	35
Figura 5.18: Imagem de uma RAT e uma possível localização (na asa) [14].	36
Figura 5.19: Esquema da rede de abastecimento de energia de emergência numa aeronave [14].	36
Figura 5.20: Esquematização do sistema de recuperação de energia da aeronave [14].	36
Figura 5.21: Gráfico da produção de uma turbina eólica de pequenas proporções, para aplicações domésticas [15].	37
Figura 5.22: Evolução do tamanho e da potência nominal das turbinas eólicas ao longo dos anos [16].	38
Figura 5.23: Potência eólica instalada [17].	38
Figura 5.24: Esquematização do complexo industrial da Enercon em Viana do Castelo.	39
Figura 5.25: Capacidade acumulada até Junho de 2008 [18].	40
Figura 5.26: Potência por distritos e regiões autónomas até Junho de 2008 [18].	41
Figura 5.27: Quotas de mercado - a) - e potência total - b) - dos vários fabricantes até Junho de 2008 (parques ligados à rede+construção+adjudicados) [18].	41
Figura 5.28: Quotas de mercado - a) - e potência total - b) - dos vários promotores até Junho de 2008 (parques ligados à rede+construção+adjudicados) [18].	42
Figura 5.29: Número total de máquinas por categoria [18].	42
Figura 5.30: Esquema eléctrico de um gerador com velocidade variável que usa um conversor de frequência para o controlo da frequência da geração eléctrica [16].	43
Figura 5.31: Gráfico $C_p$ vs TSR (Tip Speed Ratio).	44
Figura 5.32: Esquematização do fluxo de vento através duma secção A dum cilindro imaginário [16].	45
Figura 5.33: Gráfico da variação do coeficiente de potência em função de $\lambda$ para diferentes valores do parâmetro $\beta$ .	46

Figura 5.34: Esquema da dinâmica envolvida na geração de energia numa turbina eólica [21].	46
Figura 5.35: Espectro de Van der Hoven [22].	48
Figura 5.36: Comportamento dos estados através da Linearização por Realimentação.	53
Figura 5.37: Comportamento dos controlos através da Linearização por Realimentação.	53
Figura 5.38: Ilustração do comportamento do controlo suave comparado com a linearização por realimentação.	54
Figura 5.39: Ilustração do comportamento dos estados em termos de aceleração e velocidade obtida através do controlo suave.	55

# Nomenclatura

$x$ :	vector de estados
$u$ :	vector de controlo
$y$ :	vector de observações
$K$ :	ganho estático
$\omega_n$ :	frequência natural
$\zeta$ :	coeficiente de amortecimento
$\tau$ :	constante de tempo do sistema amortecido
$I_{xx}$ :	momento de inércia relativo ao eixo x
$I_{yy}$ :	momento de inércia relativo ao eixo y
$I_{zz}$ :	momento de inércia relativo ao eixo z
$I_{xy}$ :	momento de inércia relativo ao plano xy
$I_{xz}$ :	momento de inércia relativo ao plano xz
$I_{yz}$ :	momento de inércia relativo ao plano yz
$J$ :	matriz de inércia
$p$ :	taxa de rolamento
$q$ :	taxa de arfagem
$r$ :	taxa de guinada
$\omega$ :	vector de taxas de variação angular
$S$ :	matriz de taxas de variação angular
$\Gamma$ :	momento de rolamento
$M$ :	momento de arfagem
$N$ :	momento de guinada
$u_\Omega$ :	vector de momentos angulares
$Q$ :	pressão dinâmica
$S_f$ :	área da superfície da asa
$b$ :	envergadura da asa
$c$ :	corda da asa
$C_l$ :	coeficiente de momento de rolamento
$C_m$ :	coeficiente de momento de arfagem
$C_n$ :	coeficiente de momento de guinada
$C_{l\beta}$ :	coeficiente de momento de rolamento devido a derrapagem
$C_{lp}$ :	coeficiente de momento de rolamento devido ao momento de rolamento
$C_{lr}$ :	coeficiente de momento de rolamento devido ao momento de guinada
$C_{l\delta a}$ :	coeficiente de momento de rolamento do aileron
$C_{l\delta r}$ :	coeficiente de momento de rolamento do leme de direcção
$C_{m0}$ :	coeficiente de momento de arfagem para sustentação nula
$C_{m\alpha}$ :	coeficiente de momento de arfagem devido ao ângulo de ataque
$C_{m\dot{\alpha}}$ :	coeficiente de momento de arfagem devido à variação do ângulo de ataque
$C_{mq}$ :	coeficiente de momento de arfagem devido ao momento de arfagem
$C_{m\delta e}$ :	coeficiente de momento de arfagem do leme de profundidade
$C_{n\beta}$ :	coeficiente de momento de guinada devido a derrapagem
$C_{np}$ :	coeficiente de momento de guinada devido ao momento de rolamento
$C_{nr}$ :	coeficiente de momento de guinada devido ao momento de guinada
$C_{n\delta a}$ :	coeficiente de momento de guinada do aileron
$C_{n\delta r}$ :	coeficiente de momento de guinada do leme de direcção

$\alpha$ :	ângulo de ataque
$\beta$ :	ângulo de derrapagem (aeronave) ou passo (sistema eólico)
$\dot{\alpha}$ :	variação do ângulo de ataque
$\delta_a$ :	posição dos ailerons
$\delta_e$ :	posição do leme de profundidade
$\delta_r$ :	posição do leme de direcção
$h$ :	passo temporal
$x_{ref}$ :	referência de funcionamento
$E$ :	energia cinética
$m$ :	massa da aeronave (aeronave) ou massa de ar (sistema eólico)
$v$ :	velocidade da aeronave (aeronave) ou velocidade do vento (sistema eólico)
$P$ :	potência
$\rho$ :	massa volúmica do ar
$A$ :	área de varrimento do rotor
$DP$ :	densidade de potência
$P_a$ :	potência aerodinâmica
$R$ :	raio do rotor da turbina
$C_p(\lambda, \beta)$ :	coeficiente de potência
$\lambda$ :	rácio de velocidade das pontas das pás
$\omega_r$ :	velocidade angular do rotor
$T_a$ :	torque aerodinâmico
$C_q(\lambda, \beta)$ :	coeficiente de torque
$T_{ls}$ :	torque no veio de baixa velocidade
$T_{hs}$ :	torque no veio de alta velocidade
$T_{em}$ :	torque electromagnético do gerador
$K_r$ :	coeficiente de amortecimento do rotor
$K_{ls}$ :	coeficiente de amortecimento do veio de baixa velocidade
$K_g$ :	coeficiente de amortecimento do gerador
$B_{ls}$ :	coeficiente de rigidez do veio de baixa velocidade
$J_r$ :	momento de inércia do rotor
$J_g$ :	momento de inércia do gerador
$\omega_g$ :	velocidade angular do gerador
$\theta_r$ :	deslocamento angular do lado do rotor
$\theta_{ls}$ :	deslocamento angular do lado da caixa multiplicadora
$n_g$ :	rácio da caixa multiplicadora
$T_g$ :	torque do gerador
$T_\beta$ :	constante de tempo relativa à variação do passo
$T_v$ :	constante de tempo do vento
$m_v(t)$ :	ruído branco gaussiano
$L$ :	amplitude da turbulência
$v_m$ :	velocidade média do vento
$v_t$ :	velocidade turbulenta do vento
$\sigma_m$ :	desvio padrão de $m_v(t)$
$d$ :	diâmetro do veio da turbina
$f_T$ :	coeficiente de fricção do eixo na extremidade do rotor
$f_G$ :	coeficiente de fricção do eixo na extremidade do gerador

## **Agradecimentos**

Agradeço ao Professor Doutor Kouamana Bousson por toda a disponibilidade dispensada, pela compreensão e conhecimentos transmitidos e pelo ambiente de boa disposição que proporcionou durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a toda minha família pela força e motivação transmitidos ao longo deste último ano e por todo o conforto transmitido nas situações menos boas.

Agradeço à minha namorada, Catarina Ferreira, por sempre ter estado ao meu lado, pela compreensão relativamente aos momentos de minha ausência para a realização deste trabalho e por todo o apoio prestado.

Agradeço a todos os colegas de curso e amigos que de alguma forma tenham contribuído para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos o meu muito obrigado!!

## Resumo

Os sistemas aeroespaciais têm um comportamento não linear, bem como alguns sistemas industriais. Neste trabalho propõe-se um método de controlo suave para impor uma dinâmica desejada às respostas dos sistemas não lineares. O interesse disso é diminuir as cargas aplicadas nos actuadores dos respectivos sistemas, de modo a reduzir os seus gastos energéticos. Os sistemas em estudo neste trabalho são referentes ao UAV SkyGuardian e ao sistema eólico Vestas V29 225kW. No fim comparam-se os resultados dos dois métodos em que o método de controlo suave se revela mais apropriado.

## **Abstract**

Most aerospace systems have a nonlinear behavior as so as some industrial systems. At this Thesis is proposed a smooth control method to impose a required dynamic to the nonlinear system's responses. The objective of that is to reduce actuator stresses en such a way to reduce their energy consumption. The analyzed systems refer to UAV SkyGuardian and to the Vestas v29 225kW wind turbine. In the end the result of both methods is compared to notify on which of them the smooth control method is more appropriated.

# 1. Introdução

Com as actuais alterações climáticas tem havido um agravamento nas condições de voo a que são sujeitas as aeronaves sendo necessários controlos mais sensíveis e precisos para manter as mesmas estáveis durante o voo. Devido à grande quantidade de gases com efeito de estufa emitida para a atmosfera, tem sido crescente a procura por formas de gerar energia sem prejudicar o meio ambiente [1], as energias renováveis. Destas formas de energia, a Eólica tem vindo a conquistar grande popularidade, muito em parte devido a ser uma forma de produção de energia relativamente barata e que consegue atingir níveis consideráveis de produção. Outra vantagem da energia eólica é que havendo necessidade de dismantelar um parque eólico, essa tarefa é de fácil execução e não deixa marcas significativas a nível paisagístico, uma vez que apenas as fundações das torres ficarão no terreno e podem ser cobertas de forma a ficarem escondidas.

O desenvolvimento deste trabalho de Dissertação de Mestrado tem como tema, “Controlo óptimo suave de sistemas com referências variáveis”. A essência do trabalho a ser realizado baseia-se no estudo do controlo de sistemas através da interligação de dois blocos diferentes.

Serão estudados dois sistemas: um aeronáutico e outro eólico. No primeiro caso será exposto o sistema, proceder-se-á à sua modelação para que este possa ser “trabalhado” no sentido de desenvolver os controladores necessários. O primeiro método de controlo a ser testado será o Regulador Linear Quadrático (LQR<sup>1</sup>), cujo desenvolvimento já é bem conhecido por aqueles que trabalham neste campo. Para controlar um sistema seriam necessários vários controladores deste tipo. O segundo método a utilizar será a Linearização por Realimentação (LR<sup>2</sup>), estudada primeiramente por Alberto Isidori [2] nos anos 80 na Universidade de Roma, “La Sapienza”. O método consiste num modelo matemático que lineariza um sistema não linear através da realimentação de estados. Utilizando a LR, seria necessário apenas um controlador para controlar todo o sistema.

O primeiro sistema consiste em aplicar o LQR e a LR a um sistema aeronáutico com o objectivo de controlar as taxas angulares desse mesmo sistema. Esta optimização visa acelerar a resposta do sistema a perturbações e torna-lo mais eficaz. Para isso, cada um dos controladores, LQR e LR, estará interligado com um controlo de segunda ordem.

O segundo sistema consiste em aplicar a LR a uma turbina eólica de velocidade variável regulada pelo passo, sendo este sistema descrito por expressões altamente não lineares. Neste caso será necessário definir um modelo de vento a ser aplicado ao sistema sendo, em seguida, aplicada a LR para regular os controlos desejados de forma a optimizar o desempenho da máquina. O objectivo desta optimização visa atingir um valor máximo de energia produzida e simultaneamente o menor esforço mecânico possível, garantindo assim o menor desgaste dos componentes da turbina.

---

<sup>1</sup> Em inglês: Liner Quadratic Regulator (LQR)

<sup>2</sup> Linearização por Realimentação (LR)

Relativamente a este sistema, também teremos o controlo de segunda ordem interligado com a LR, como no primeiro caso.

## 2. Regulação de sistemas com referências variáveis

Os sistemas mais simples são geralmente controlados para apenas uma referência. Como o zero absoluto é uma referência natural, “assumimos *que o objectivo do controlo não se limita a conduzir os estados até zero, mas também a seguir uma referência não nula*” [3]. Os sistemas mais complexos, como sistemas aeronáuticos e vários sistemas industriais necessitam de referências variáveis. Neste trabalho serão apresentados e analisados dois métodos clássicos de regulação de sistemas com referências variáveis. O primeiro método consiste na aplicação do LQR e o segundo envolve a Linearização por Realimentação (Feedback Linearization).

### 2.1. Regulador Linear Quadrático (LQR)

O objectivo de um regulador LQR é gerar um controlo óptimo que permita operar um determinado sistema com custos mínimos. O desenvolvimento deste tipo de reguladores esta relacionado com a existência, na década de 60, de programas de pesquisa realizados maioritariamente nos Estados Unidos da América e na ex-URSS. Grande parte desses programas estava relacionada com projectos espaciais, como a optimização da manobrabilidade de foguetes com consumo mínimo de combustível, que poderiam ser facilmente formulados. Neste campo, os Engenheiros Aeronáuticos tiveram particular sucesso. Outros engenheiros de controlo tentaram utilizar o LQR em aplicações industriais do dia-a-dia, mas devido à escassez de modelos de precisão e, também, o pressuposto da existência de perturbações nem sempre era relevante para os engenheiros praticantes. Daí advém a consequência de que os projectos LQR nem sempre eram robustos o suficiente para serem usados na pratica [4].

A noção de optimização está fortemente interligada com a concepção de sistemas com várias entradas e várias saídas (MIMO<sup>3</sup>). A realimentação de sistemas é o método mais usado para optimizar os mesmos, sendo que o LQR é uma técnica de concepção muito conhecida e que gera ganhos de realimentação práticos. Em alguns casos as variáveis a estabilizar não são os estados mas sim as saídas.

As propriedades de um regulador que controle alguma máquina ou processo obtêm-se através de um algoritmo matemático que minimiza uma função de custo com factores de peso introduzidos pelo engenheiro ou operador. Esta função é geralmente definida como o somatório de desvios medidos relativamente aos valores desejados. Como resultado, o algoritmo devolve-nos as propriedades do regulador que permitem minimizar os desvios, como desvios na altitude no caso de uma aeronave, ou desvios na temperatura de processo no caso de um reactor nuclear.

Basicamente, o LQR realiza todos os cálculos necessários para a optimização do controlador retirando essa tarefa ao Engenheiro de Sistemas ou operador. Contudo, este continua a ser necessário para introduzir os factores de peso e comparar os resultados obtidos com os objectivos traçados. Desta forma, o ajuste dos controladores continua a ser um processo iterativo onde o Engenheiro aprecia os controladores óptimos através de simulações e ajusta os pesos para obter um controlador que vá mais ao encontro dos objectivos especificados.

---

<sup>3</sup> Em inglês: Multiple Input, Multiple Output (MIMO)

O LQR é uma forma automatizada para calcular o controlador por realimentação de estados desejado para um determinado sistema. A limitação deste método reside na dificuldade em encontrar os factores de peso adequados para sistemas com referências variáveis.

### 2.1.1. Método do LQR

Num projecto de um LQR, interessa escolher o vector de controlo  $u(t)$  para que um critério de desempenho ( $J$ ) seja minimizado, sabendo que este ultimo é definido por:

$$J(u) = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \tag{2.1}$$

Onde  $L(x, u)$  é uma função quadrática de  $x$  e  $u$ .

Nos LQR's o interesse é parametrizar o vector de controlo como função linear do vector de estado:

$$u = -Kx \tag{2.2}$$

Onde  $K$  é uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas ( $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ), ou seja, a equação (2.2) pode ser escrita sob a forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \end{bmatrix}$$

O dimensionamento de um controlador LQR resume-se a determinar uma matriz  $K$  de modo a minimizar o critério de desempenho  $J$  quando o controlo for escolhido segundo a equação (2.2).

Esta forma de realimentação dos estados nos controlos, representada pela expressão (2.2), é a mais usual nos LQR's. Se não houver um vector de estados perfeitamente definido pode-se substituir o mesmo pelo vector de observações, como foi estudado por Engwerda e Weeren [5]. Esta situação aplica-se frequentemente em jogos diferenciais, por exemplo o caso de um míssil e do respectivo alvo. Neste caso o objectivo do alvo é aumentar a distância relativamente ao míssil e o objectivo do míssil é precisamente o oposto. Para o conseguir, o míssil recorre ao seu vector de observações (correspondente ao alvo) para realimentar o controlo.

A expressão de  $L(x, u)$  da equação (2.1) pode ser escrita como:

$$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u \quad (2.3)$$

Onde  $Q$  é uma matriz simétrica e positivamente semi-definida, e  $R$  é positivamente definida.

Para os casos em estudo no presente trabalho, esta matriz  $Q$  é constante ao longo do tempo, mas pode não o ser como no caso estudado por Tavallaei e Tousei [6]. Nesse caso a matriz  $Q$  foi substituída pelo termo  $t^k M$ , onde  $k > 0$  e  $M$  é uma matriz positivamente semi-definida.

Substituindo a equação (2.3) no critério de desempenho:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.4)$$

Substituindo a expressão (2.2) na equação (2.4):

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T (Q + K^T R K) x) dt \quad (2.5)$$

A equação de estados do sistema com malha fechada é dada por  $\dot{x} = (A - BK)x$ . Em seguida queremos achar uma função de Lyapunov  $V$  para este sistema sob a forma  $V(x) = x^T P x$ , sendo  $P$  uma matriz simétrica positivamente definida. A derivada no tempo desta função de Lyapunov deve ser oposta à função a ser integrada na equação (2.5).

Resolvendo a derivada podemos tirar a matriz  $K$ , sendo esta dada por:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.6)$$

Substituindo na equação (2.2) temos:

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (2.7)$$

A matriz  $P$  da equação (2.7) deve satisfazer a seguinte equação de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.8)$$

## 2.2. Linearização por Realimentação

O interesse da Linearização por Realimentação é que permite não só estabilizar sistemas em especificados pontos de equilíbrio, mas também seguir especificadas trajetórias de referência no espaço de observações. Resumindo, a linearização por realimentação permite controlar um sistema não só no espaço de estados, mas também no espaço de observações, seja este sistema linear ou não linear, embora este método tenha mais aplicações em controlo de sistemas não lineares com referências variáveis.

### 2.2.1. Sistemas SISO<sup>4</sup>

Uma grande parte dos sistemas de controlo não lineares pode ser forçado a um comportamento linear nas entradas e saídas, através da realimentação dos controlos.

Consideremos um sistema SISO definido por,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f, g, h$  diferenciáveis.

Como podemos observar em (2.9), a saída  $y$  não depende explicitamente do controlo  $u$ . Para que isso aconteça devemos diferenciar a equação de saída. Diferenciando  $y$  em função do tempo obtemos,

$$\dot{y} = L_f h + L_g h u\tag{2.10}$$

Aqui,  $L_f h$  e  $L_g h$  são as derivadas de Lie de  $h$  com respeito a  $f$  e  $g$ , respectivamente.

**Definição 1** (derivada de Lie)[7]:

Seja  $\lambda: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função diferenciável e  $f$  um campo vectorial, ambos definidos num subconjunto aberto  $\mathbb{U}$  de  $\mathfrak{R}^n$ . A derivada de Lie de  $\lambda$  ao longo de  $f$  é dada pelo produto interno

$$\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial x}, f(x) \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x)\tag{2.11}$$

A derivada de Lie de  $\lambda$  ao longo de  $f$  é, geralmente, representada como  $L_f \lambda(x)$ , tal que:

$$L_f \lambda(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)\tag{2.12}$$

A saída  $y$  depende de  $u$  se e só se  $(L_g h)(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ , sendo que neste caso o sistema tem grau relativo 1. Então a lei de controlo de forma  $\alpha(x) + \beta(x)v$ , torna o sistema explicitamente dependente do controlo. As funções  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  que caracterizam o controlo são definidas num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Por razões óbvias,  $\beta(x)$  é assumida como uma função não nula para todo o  $x$  deste subconjunto. A função  $v$  vai regular o sistema. Podemos dar um exemplo:

Um sistema dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + cu\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> Em inglês: Single Input, Single Output (SISO)

Suponhamos que queremos regular o sistema em torno na origem  $[x_1 \ x_2] = [0 \ 0]$  e o controlo que torna o sistema linear é,

$$u = (a/c)\sin(x_1) + v/c$$

Onde  $\alpha(x) = (a/c)\sin(x_1)$  e  $\beta(x) = 1/c$

Substituindo esta equação no sistema original o sistema torna-se linear e fica,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v\end{aligned}$$

Como sabemos escolher uma função  $v$  que regule o sistema, essa função pode ser dada por:

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2$$

Onde, segundo Khalil [7], a matriz  $[k_1 \ k_2]$  é dada pela ultima linha da matriz  $k = A + BK$ , sendo  $K$  a matriz de ganho obtida pelo LQR .

Dada a explicação relativa à realimentação do controlo e observando a expressão (2.10), este pode ser dado por:

$$u = \frac{1}{L_g h} (-L_f h + v)$$

Com este controlo, o modelo do sistema fica:

$$\dot{y} = v. \tag{2.13}$$

No caso de  $L_g h(x) = 0$ , diferenciamos (2.10) para obter:

$$\dot{y} = L_f^2 h + (L_g L_f h)u \tag{2.14}$$

Em (2.14),  $L_f^2 h = L_f(L_f h)$  e  $L_g L_f h = L_g(L_f h)$ . Se  $L_g L_f h \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ , o sistema tem grau relativo 2 e , como anteriormente, o controlo pode ser dado pela seguinte lei,

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} (-L_f h + v)$$

Com este controlo, o modelo do sistema fica:

$$\dot{y} = v.$$

De uma forma mais generalizada, se  $\gamma$  é o menor numero inteiro tal que  $L_g L_f^i h = 0$  para  $i = 0, \dots, \gamma - 2$  e  $L_g L_f^{\gamma-1} h(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ , então o controlo fica,

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\gamma-1} h} (-L_f^\gamma h + v) \quad (2.15)$$

Com este controlo, o modelo do sistema torna-se:

$$y^{(\gamma)} = v. \quad (2.16)$$

**Definição 2** (grau relativo de um sistema SISO)[2]:

Um sistema SISO não linear tem um grau relativo  $\gamma$  num ponto  $x^0$  se:

- i.  $L_g L_f^k h(x) = 0$  para todos os  $x$ 's numa vizinhança de  $x^0$  e para todo o  $k < \gamma - 1$ .
- ii.  $L_g L_f^{\gamma-1} h(x^0) \neq 0$ .

Desta forma, podemos dizer que o grau relativo do sistema corresponde ao numero de vezes que é necessário derivar a sua saída para que nela apareça o controlo explicitamente.

### **Exemplo:**

Consideremos o sistema dado por,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\zeta(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Seja a equação de saída dada por,

$$y = h(x) = x_1$$

Neste caso,

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e,

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\zeta(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} = x_2$$

Além disso,

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, verificamos que o sistema tem grau relativo 2 para qualquer  $x^0$ .

### 2.2.2. Sistemas MIMO

A teoria complica-se um pouco se  $L_g L_f^{Y-1} h = 0$  para alguns valores de  $x$ . Este caso não é, aqui, considerado. No caso de sistemas MIMO, consideramos o p-input, p-output (sistema não linear) na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + \cdots + g_p(x)u_p \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aqui,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  e  $f, g_i, h_j$  são assumidas diferenciáveis. Diferenciamos as saídas  $y_j$  em função do tempo para obter:

$$\dot{y}_j = L_f h_j + \sum_{i=1}^p (L_{g_i} h_j) u_i \quad (2.18)$$

Em (2.18)  $L_f h_j$  é a derivada de Lie de  $h_j$  respectivamente a  $f$ , com semelhança a  $L_{g_i} h_j$ . De notar que se cada  $(L_{g_i} h_j)(x) = 0$ , o controlo não aparece em (2.18). Definindo  $\gamma_j$  como o menor numero inteiro tal que pelo menos um dos controlos aparece em  $y_j^{(\gamma_j)}$ , isto é,

$$y_j^{(\gamma_j)} = L_f^{\gamma_j} h_j + \sum_{i=1}^p L_{g_i} (L_f^{\gamma_j-1} h_j) u_i \quad (2.19)$$

com pelo menos uma  $L_{g_i} (L_f^{\gamma_j-1} h_j) \neq 0 \forall x$ .

Definindo uma matriz  $A(x)$   $p \times p$ :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} (L_f^{\gamma_1-1} h_1) & \cdots & L_{g_p} (L_f^{\gamma_1-1} h_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} (L_f^{\gamma_p-1} h_p) & \cdots & L_{g_p} (L_f^{\gamma_p-1} h_p) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Assim, a equação (2.19) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(\gamma_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\gamma_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p \end{bmatrix} + A(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Se  $A(x) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  for limitada e não singular, o controlo realimentado é dado por,

$$u = -A(x)^{-1} \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p \end{bmatrix} + A(x)^{-1} v \quad (2.22)$$

Com este controlo, o modelo do sistema fica:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(\gamma_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(\gamma_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

**Definição 3** (grau relativo de um sistema MIMO) [8]:

Um sistema MIMO não linear tem grau relativo (vector  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ ) num ponto  $x^0$  se:

- i.  $L_{g_i} L_f^{\gamma_j - 1} h_j(x) = 0$  para todo  $1 \leq j \leq p$ , para todo  $1 \leq i \leq p$ , e para todo o  $x$  numa vizinhança de  $x^0$ .
- ii. A matriz  $A(x)$   $p \times p$ , definida anteriormente, é não singular em  $x = x^0$ .

Verifica-se de imediato a inclusão da definição 2 nesta. No que respeita a valores em concreto, é de notar que cada valor inteiro  $\gamma_j$  está associado ao  $j$ -ésimo valor de saída do sistema.

**Exemplo:**

Consideremos o sistema dado por,

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + g_3(x)u_3 = x + \frac{1}{2x}u_1 + \frac{1}{3x}u_2 + 2x^2u_3$$

Sejam as equações de saída dadas por,

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = x^2 \\ y_2 &= h_2(x) = x^3 \\ y_3 &= h_3(x) = 2x^2 \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} L_f h_1(x) &= 2x \\ L_f h_2(x) &= 3x^2 \\ L_f h_3(x) &= 4x \end{aligned}$$

e,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 4x^2 \\ 3/2 & 1 & 6x^4 \\ 8x^3 & 4/3 & 8x^2 \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação (2.22),

$$u = - \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 4x^2 \\ 3/2 & 1 & 6x^4 \\ 8x^3 & 4/3 & 8x^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x \\ 3x^2 \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 4x^2 \\ 3/2 & 1 & 6x^4 \\ 8x^3 & 4/3 & 8x^2 \end{bmatrix}^{-1} v$$

O sistema tem grau relativo 1 uma vez que existe  $L_{g_i}(L_f^{\gamma-1}h_j) \neq 0 \forall x$  para um valor de  $\gamma = 1$ .

Uma vez atingida a linearização, qualquer objectivo de controlo que se siga, como correspondências de modelos, colocação de pólos, rastreio, pode ser facilmente conseguido. A lei da realimentação (2.22) refere-se a controlo linear por realimentação.

Se  $A(x)$ , definida em (2.20) for singular, ainda podemos obter uma linearização usando a realimentação dinâmica, também conhecida como Inversão Dinâmica. O desenvolvimento pode ser feito usando integradores antes de qualquer uma das entradas [2].

Apesar de ser uma técnica muito usada para o controlo de sistemas não lineares, tem também as suas limitações pois o número de elementos do vector de saída tem, em geral, para que a linearização por realimentação seja aplicável, de ser igual ao número de elementos do vector de entrada, isto é, o sistema terá de ter obrigatoriamente o mesmo número de entradas e saídas.

A regulação variável, o tema central do presente trabalho, consiste em conduzir um dado sistema de uma referência para outra qualquer. Essa mudança, feita através de um controlador sem suavização, é altamente brusca e pode danificar a longo prazo os actuadores mecânicos do sistema devido a um aumento de torque repentino.

O interesse deste capítulo é introduzir a suavização no sistema desejado para que este se comporte de forma harmoniosa. Isto fará com que o aumento de torque seja progressivo poupando grandes esforços aos actuadores. Não só é uma melhoria em termos de longevidade de qualquer actuator, mas também o é relativamente à segurança do próprio sistema.

Este tipo de controlo também foi estudado por Gutman [9], tendo o seu estudo incidido na aplicação do método directamente aos controlos do sistema. A expressão obtida foi:

$$\frac{du}{dt} = B^{-1} \left[ -\frac{\partial f^{aT}}{\partial x^a} A - \frac{\partial f^{bT}}{\partial x^a} p^b + \frac{\partial f_0^T}{\partial x^a} - \frac{\partial A}{\partial x} f(x, u) \frac{\partial A}{\partial p^b} S(x, p^b, u) \right] \doteq F(x, p^b, u)$$

A aplicação proposta por Gutman tem a grande limitação de ser extremamente complexa do ponto de vista matemático, tornando os cálculos muito morosos.

No presente trabalho, a suavização dos controlos surgiu como consequência da suavização das observações, uma vez que estas foram realimentadas para os controlos.

### 3. Controlo suave no âmbito da regulação variável

O presente trabalho visa demonstrar a dinâmica de um sistema com referências variáveis através de um sistema de segunda ordem.

Um sistema de segunda ordem pode ser definido pela equação diferencial:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{y}(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (3.1)$$

onde,

$K > 0$  representa o ganho estático

$\omega_n > 0$  representa a frequência natural

$\zeta > 0$  representa o coeficiente de amortecimento (reduzido)

Aplicando a Transformada de Laplace a esta equação diferencial (3.1) e supondo que  $y(0) = 0$  e  $u(0) = 0$  obtém-se:

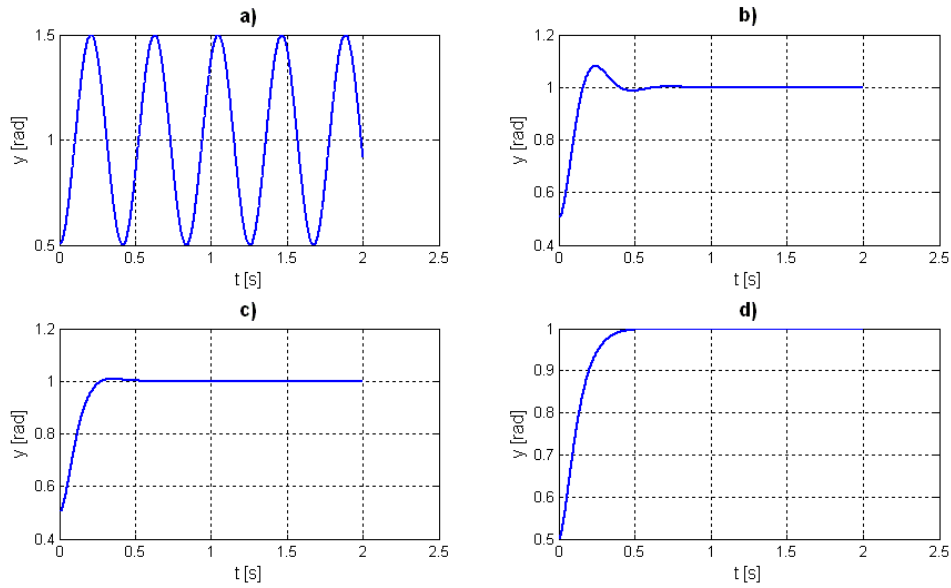
$$Y(s)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = K\omega_n^2 U(s) \quad (3.2)$$

Partindo da expressão (3.2), obtém-se a Função de Transferência do sistema:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.3)$$

Este tipo de sistema pode ser classificado em 4 tipos relativamente ao amortecimento a que está sujeito:

- 1) Sistema sem amortecimento (Figura 3.1 a)),  $\zeta = 0$ ;
- 2) Sistema subamortecido com oscilações (Figura 3.1 b)),  $0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- 3) Sistema subamortecido sem oscilações (Figura 3.1 c)),  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \zeta < 1$ ;
- 4) Sistema criticamente amortecido (Figura 3.1 d)),  $\zeta = 1$ ;
- 5) Sistema sobreamortecido,  $\zeta > 1$ . Este tipo de sistema comporta-se como um sistema criticamente amortecido, demorando mais ou menos tempo a convergir consoante o coeficiente de amortecimento é maior ou menor, respectivamente.



**Figura 3.1:** Exemplos de comportamentos de sistemas com diferentes tipos de amortecimento.

No caso de um sistema com amortecimento, existe uma constante de tempo que depende do amortecimento e da frequência natural, sendo dada por:

$$\tau = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (3.4)$$

Se o sistema apresentado for subamortecido, podemos ainda calcular uma panóplia de parâmetros exposta de seguida, todos eles dependentes do amortecimento e da frequência natural:

Tempo de subida, dado por:

$$\begin{cases} T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \arctan\left(\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + \pi \right] \\ T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \arccos \zeta) \end{cases} \quad (3.5)$$

Tempo ate ao pico, dado por:

$$T_{pico} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.6)$$

Tempo de acomodação para  $\varepsilon\%$  de erro, dado por:

$$T_{ac} = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right) \quad (3.7)$$

Período próprio, dado por:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.8)$$

Frequência própria, dado por:

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.9)$$

Percentagem de sobre-elevação (overshoot), dado por:

$$D = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (3.10)$$

Pode-se ainda representar a expressão (3.1), de uma forma simplificada, como:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \left(y_f - \frac{2\zeta}{\omega_n} y_2 - y\right) \end{cases} \quad (3.11)$$

onde  $y_1 \equiv y$  e  $y_f$  corresponde ao valor para o qual é desejável que o sistema estabilize.

Há, também, a necessidade de definir que para o instante inicial se tem:

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_0 \\ y_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

### Exemplo:

Seja um sistema, na forma (3.11) definido pelos seguintes dados:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 15 \text{ rad/s} \\ \zeta &= 1,2 \\ y_1(t_0) &= 0,5 \\ y_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Se este sistema for simulado para as referências

$$\begin{aligned} y_f &= 2 \text{ para } t \leq 1,5 \\ y_f &= -1 \text{ para } t > 1,5 \end{aligned}$$

com um tempo de simulação de três segundos e um passo de um milésimo de segundo, os resultados obtidos são os ilustrados nas Figura 3.2 e Figura 3.3.

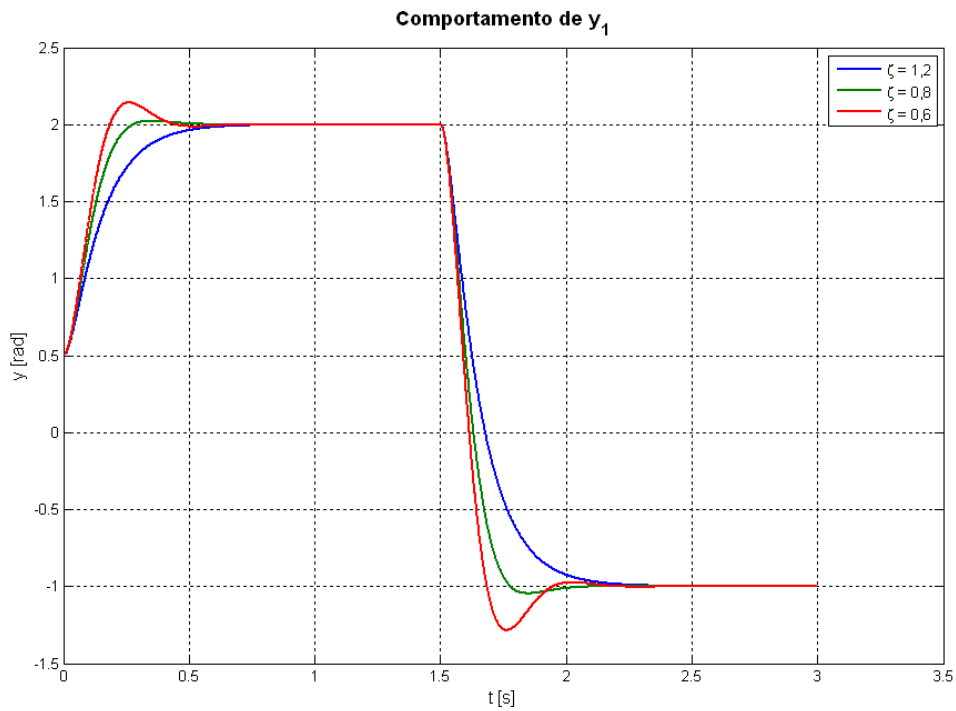


Figura 3.2: Comportamento dos valores de observação  $y_1$ .

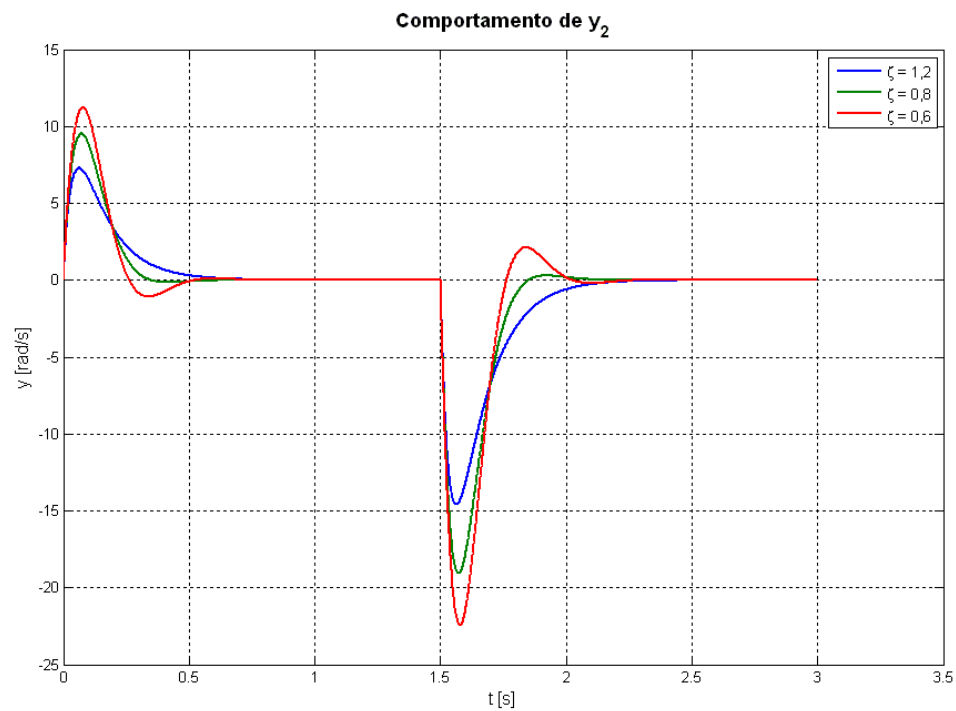


Figura 3.3: Comportamento dos valores de observação  $y_2$ .

O objectivo deste controlo, no âmbito deste trabalho, é fornecer uma referência de trajectória, ou seja, deve funcionar como um controlo orientador. Por sua vez, esta trajectória deve convergir para a referência de funcionamento, fornecida pelo controlo operador. No presente trabalho serão efectuadas simulações com dois tipos de controlos

operadores, o LQR e a Linearização por Realimentação. Resumindo, o controlo de segunda ordem força o sistema através de uma referência de trajectória ate uma referência de funcionamento fornecida pelo controlo operador.

O encadeamento deste processo inicia-se no controlo operador seguindo para o controlo orientador e posteriormente para o controlador. O controlador fornece toda a informação processada para os actuadores de forma a estes executarem a ordem recebida e alterarem os estados do sistema. A nova situação do sistema é realimentada para o operador, e reinicia-se o ciclo descrito.

## 4. Aplicação I: Controlo de taxas angulares de uma aeronave

Esta aplicação tem como interesse a visualização do comportamento das taxas angulares de uma aeronave utilizando referências variáveis. Os métodos que serão aplicados serão o LQR, à semelhança do apresentado por Bousson e Quintiães [10] para o controlo de um satélite, e a Linearização por Realimentação, expostos nos subcapítulos 2.1 e 2.2, respectivamente.

### 4.1. Exposição do sistema em estudo

Para a realização do estudo do comportamento de atitude de uma aeronave é dado um sistema, sobre o qual se efectuou uma simplificação.

Sejam:

$J$ , a matriz de inércia da aeronave em estudo:

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$\omega$ , o vector de taxas de variação angular:

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$S$ , a matriz de taxas de variação angular:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

$u_{\Omega}$ , o vector de momentos angulares:

$$u_{\Omega} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

$\Gamma$ , o momento de rolamento:

$$\Gamma = C_l * Q * S_f * b$$

M, o momento de arfagem:

$$M = C_m * Q * S_f * b$$

N, o momento de guinada:

$$N = C_n * Q * S_f * b$$

onde  $S_f$  representa a área da superfície da asa.

O modelo é dado pela expressão (4.1), que será simplificada em seguida:

$$\dot{\omega} = J^{-1}(-S * J * \omega + u_{\Omega}) \quad (4.1)$$

Consiredemos:

$C_l$ , o coeficiente de momento de rolamento:

$$C_l = C_{l\beta} \beta + \frac{b}{2V} (C_{lp} p + C_{lr} r) + C_{l\delta_a} \delta_a + C_{l\delta_r} \delta_r$$

$C_m$ , o coeficiente de momento de arfagem:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + \frac{c}{2V} (C_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{mq} q) + C_{m\delta_e} \delta_e$$

$C_n$ , o coeficiente de momento de guinada:

$$C_n = C_{n\beta} \beta + \frac{b}{2V} (C_{np} p + C_{nr} r) + C_{n\delta_a} \delta_a + C_{n\delta_r} \delta_r$$

O vector de controlo é:

$$u_c = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

Dos coeficientes anteriores podemos tirar 3 matrizes distintas.

A matriz  $C_t$ , que não é multiplicada nem pelo vector de taxas de variação angular, nem pelo vector de controlo:

$$C_t = \begin{bmatrix} C_{l\beta} \beta \\ C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha \\ C_{n\beta} \beta \end{bmatrix}$$

A matriz  $C_\omega$ , que é multiplicada pelo vector de taxas de variação angular:

$$C_\omega = \begin{bmatrix} \frac{b}{2V} C_{lp} & 0 & \frac{b}{2V} C_{lr} \\ 0 & \frac{c}{2V} C_{mq} & 0 \\ \frac{b}{2V} C_{np} & 0 & \frac{b}{2V} C_{nr} \end{bmatrix}$$

A matriz  $C_u$ , que é multiplicada pelo vector de controlo:

$$C_u = \begin{bmatrix} C_{l\delta_a} & 0 & C_{l\delta_r} \\ 0 & C_{m\delta_e} & 0 \\ C_{n\delta_a} & 0 & C_{n\delta_r} \end{bmatrix}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c}{2V} C_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, obtemos a expressão do vector de momentos angulares:

$$u_\Omega = Q * S_f * b * (C_t + C_a + C_\omega * \omega + C_u * u_c) \quad (4.2)$$

Substituindo a expressão (4.2) na expressão (4.1), obtemos um modelo final para o vector de taxas de variação angular:

$$\dot{\omega} = J^{-1} * Q * S_f * b * (C_t + C_a) + (J^{-1} * (-S) * J + J^{-1} * Q * S_f * b * C_\omega) * \omega + J^{-1} * Q * S_f * b * C_u * u_c \quad (4.3)$$

onde  $A = (J^{-1} * (-S) * J + J^{-1} * Q * S_f * b * C_\omega)$  e  $B = J^{-1} * Q * S_f * b * C_u$ .

Se quisermos colocar o modelo na forma  $\dot{\omega} = f(\omega) + G(\omega) * u_c$ , basta considerar:

$$f(\omega) = J^{-1} * Q * S_f * b * (C_t + C_a) - J^{-1} (S * J - Q * S_f * b * C_\omega) * \omega$$

$$G(\omega) = J^{-1} * Q * S_f * b * C_u$$

Desta forma chegamos a uma forma simplificada do modelo da aeronave em estudo, podendo prosseguir com o projecto do LQR que permitirá estabilizá-la.

## 4.2. Implementação das equações diferenciais a ser resolvidas

Nesta fase procede-se à realimentação do sistema adicionando a equação (2.2) à função que contem as equações diferenciais. O modelo fica, então:

$$\begin{aligned} u &= -Kx \\ \dot{x} &= Ax + Bu \end{aligned}$$

Onde  $K$  corresponde à matriz de ganho do controlador LQR.

Desta forma, passamos a ter um sistema apenas dependente de  $x$ , uma vez que o controlo  $u$  é reescrito em função de  $x$ .

### 4.3. Implementação do algoritmo iterativo

O método iterativo utilizado na simulação de  $x$  foi o algoritmo de RK-Butcher [11], cujas equações são:

$$\begin{cases} k_1 = h * f(x_k) \\ k_2 = h * f(x_k + k_1/4) \\ k_3 = h * f(x_k + k_1/8 + k_2/8) \\ k_4 = h * f(x_k - k_2/2 + k_3) \\ k_5 = h * f(x_k + 3 * k_1/16 + 9 * k_4/16) \\ k_6 = h * f(x_k + (-3 * k_1 + 2 * k_2 + 12 * k_3 - 12 * k_4 + 8 * k_5)/7) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$x_{k+1} = x_k + (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)/90 \quad (4.5)$$

A função da equação (4.5) é simular os valores de  $x$  ao longo de um determinado tempo, a componente  $h$  representa o passo, isto é, o intervalo de tempo entre iterações e  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  e  $k_6$  são constantes calculadas através do sistema de malha fechada.

### 4.4. Simulações desenvolvidas com o LQR

#### Simulação 1:

Na simulação 1 será analisado o sistema simplificado (4.3) para apenas uma referência.

O passo escolhido foi 0,0001 segundos e a simulação foi feita para um tempo de 2,5 segundos.

Matrizes  $Q$  e  $R$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

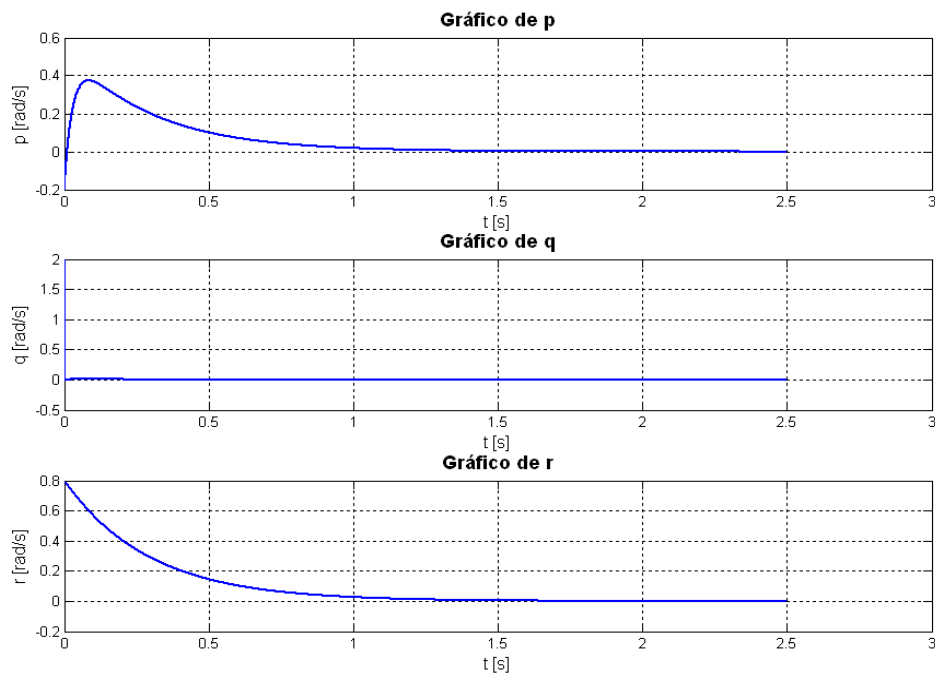
A referência escolhida foi:

$$x_{ref} = [0 \ 0 \ 0]'$$

O ponto inicial escolhido foi:

$$x = [-0.2 \ 2 \ 0.8]'$$

Correndo o programa criado para calcular  $x$  obtemos os gráficos da Figura 4.4 e Figura 4.5 onde apenas se representa o comportamento do LQR.



**Figura 4.4:** Gráfico ilustrativo do comportamento das taxas de variação angular.

Nos gráficos da Figura 4.4 observa-se o comportamento das taxas de variação angular desde o seu ponto inicial até atingir o equilíbrio. As taxas de rolamento e guinada estabilizam em aproximadamente 1,5 segundos. A taxa de arfagem tem um comportamento significativamente mais acelerado, estabilizando em aproximadamente meio segundo.

À semelhança dos gráficos da Figura 4.4, na Figura 4.5 podemos verificar que os ailerons e o leme de direcção estabilizam em cerca de 1,5 segundos. No caso do leme de profundidade, tem-se a percepção de que este estabiliza de imediato. Isto demonstra que a arfagem é controlada essencialmente pelos ailerons e pelo leme de direcção.

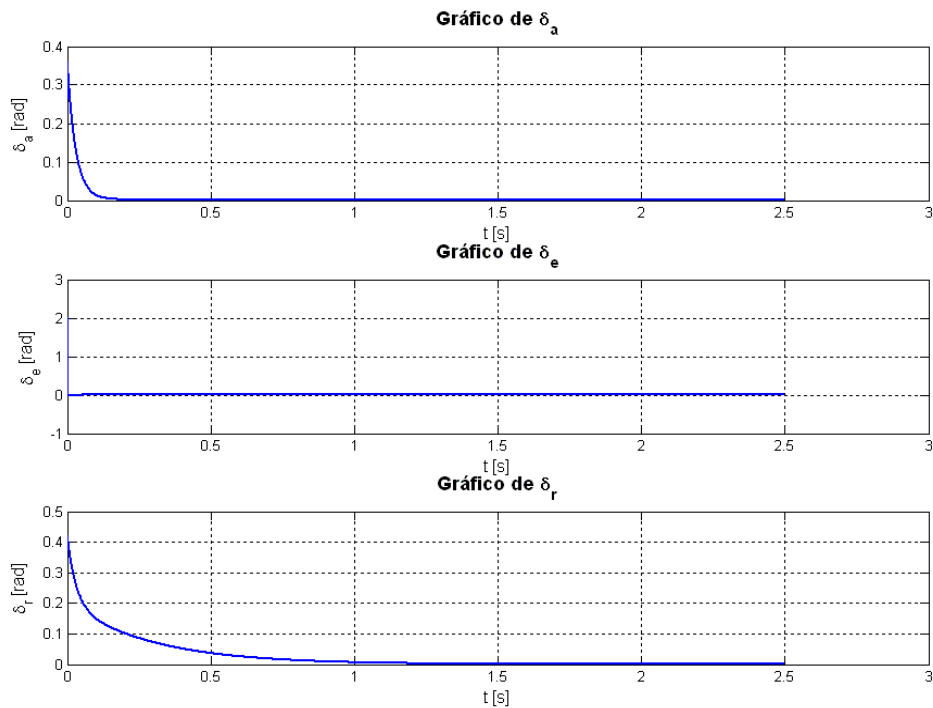


Figura 4.5: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.

### Simulação 2:

No exemplo 2 será simulado o sistema simplificado (4.2) simultaneamente com o modelo de controlo suave criado no capítulo 3 e descrito pela expressão (3.11) para três referências distintas.

O passo escolhido foi 0,0001 segundos e a simulação foi feita para um tempo de 5 segundos, sendo que este passo se deve ao facto de que para passos maiores o sistema não consegue convergir e para passos menores os cálculos são extremamente demorados. O aumento do tempo de simulação justifica-se unicamente para dar tempo ao sistema de atingir cada uma das referências.

Matrizes Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

As referências escolhidas foram:

$x_{ref} = [0 \ 0 \ 0]'$  para  $t < 1,5$ ;  
 $x_{ref} = [0.8 \ -0.4 \ 0.9]'$  para  $1,5 \leq t < 3,5$ ;  
 $x_{ref} = [-0.2 \ -0.0 \ 0.1]'$  para  $t \geq 3,5$ .

O ponto inicial escolhido foi:

$$x = [-0.2 \ 2 \ 0.8]'$$

Correndo o programa criado para calcular  $x$  obtemos os gráficos da Figura 4.6, onde são sobrepostos os traçados do comportamento do LQR e do Controlo Suave, e da Figura 4.7, representativos do comportamento dos controlos.

Nos gráficos da Figura 4.6 observa-se o comportamento das taxas de variação angular desde o seu ponto inicial e passando por cada uma das referencias. Para o LQR, as taxas de rolamento e guinada estabilizam em aproximadamente 1 segundo para cada uma das referências. A taxa de arfagem tem um comportamento ligeiramente mais acelerado, estabilizando em aproximadamente meio segundo para a primeira e última referência e demorando cerca de 1 segundo para atingir a segunda referência. Observando o traçado do Controlo Suave, podemos verificar que a mudança de referência é efectuada de forma menos brusca, como era desejado. As taxas de rolamento e guinada, através deste controlo estabilizam mais rapidamente, em aproximadamente metade do tempo do LQR. Já a taxa de arfagem responde mais lentamente. Isto deve-se aos valores impostos para o amortecimento e para a frequência natural. Basicamente este controlo serve para forçar o LQR a ter o comportamento que o engenheiro projectista pretender.

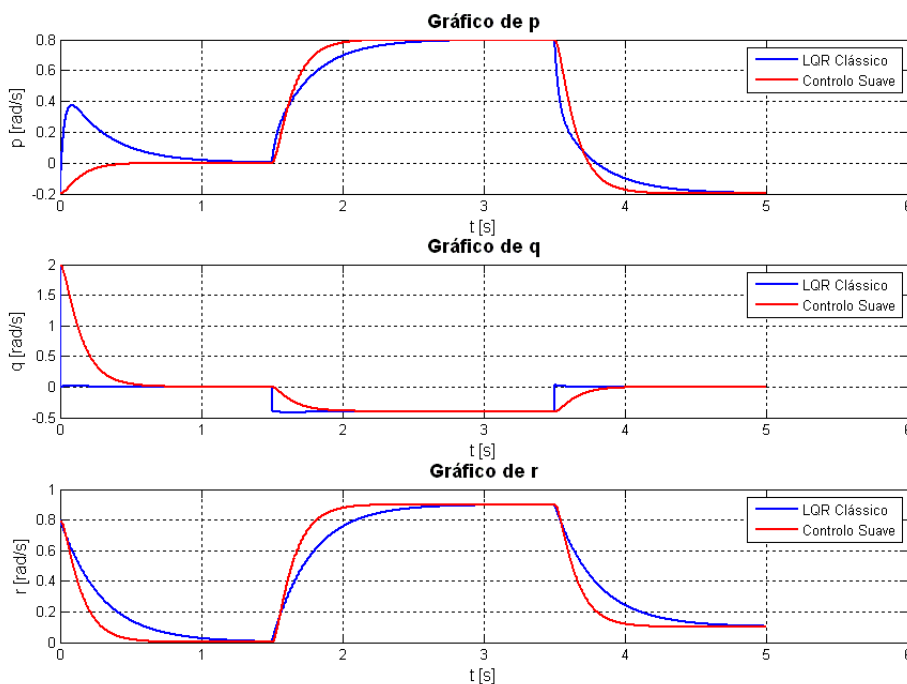


Figura 4.6: Gráficos ilustrativos do comportamento das taxas de variação angular.

Relativamente aos gráficos da Figura 4.7, verifica-se que os ailerons e o leme de direcção estabilizam em aproximadamente 1 segundo para cada uma das referências. No caso do leme de profundidade, este tem apenas ligeiros picos nos instantes em que a aeronave sofre as perturbações, estabilizando de imediato. Isto leva-nos novamente à conclusão de que se consegue controlar a arfagem com o método proposto usando

apenas os ailerons e o leme de direcção. De notar que os controlos estabilizam todos em zero, como seria de esperar. Os controlos apenas actuam para mudar a atitude da aeronave.

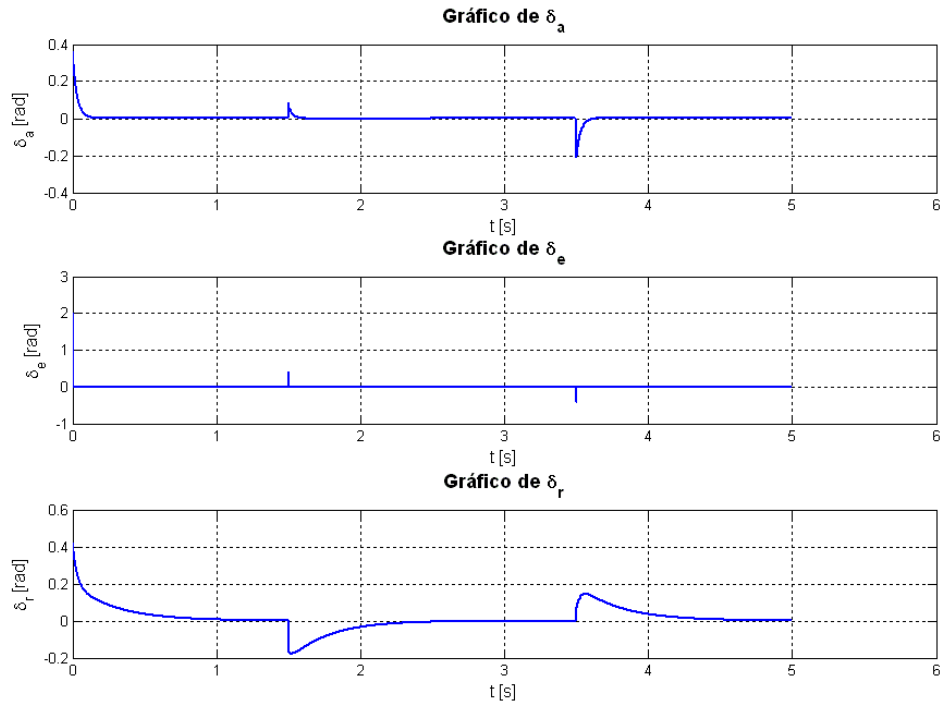


Figura 4.7: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.

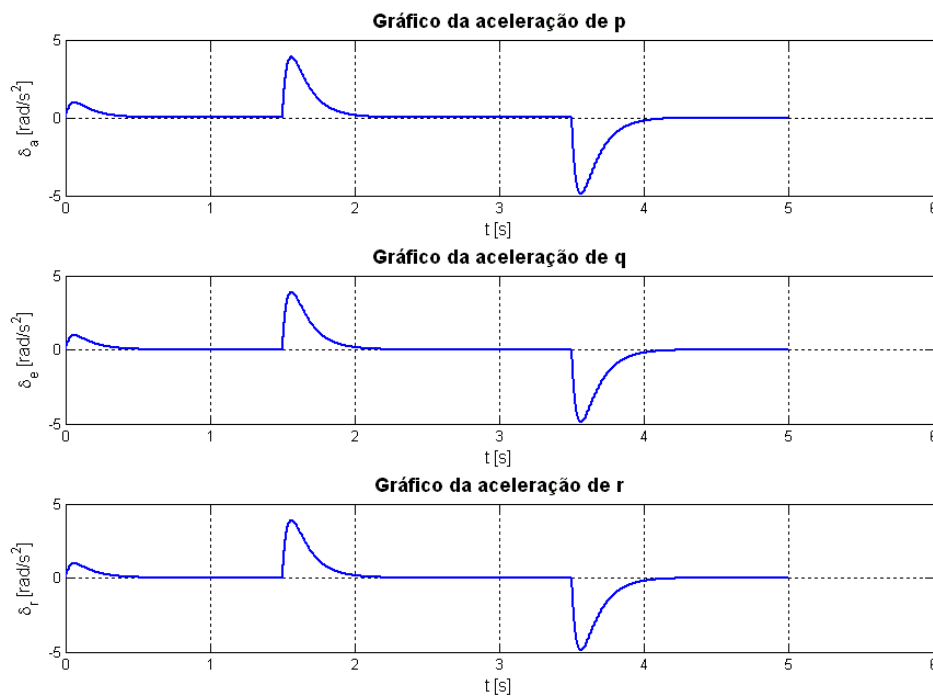


Figura 4.8: Gráficos ilustrativos do comportamento das acelerações sofridas pelas taxas angulares.

Na Figura 4.8 apresentam-se os gráficos que nos ilustram a aceleração sofrida por cada taxa, segundo o controlo suave. De notar que a aceleração se anula nos instantes em que as taxas atingem as respectivas referências, como seria de esperar.

Analizados os dois exemplos, podemos concluir que a aeronave está perfeitamente controlada com um LQR, uma vez que em ambos os casos a mesma respondeu favoravelmente às perturbações impostas e estabilizou nos valores que lhe foram impostos. Pode-se concluir, também, que o controlo suave é eficaz, tendo desempenhado a sua função como era desejado.

#### 4.5. Simulações desenvolvidas com Linearização por Realimentação

Vejamos a aplicação cujo sistema é descrito, segundo a expressão (2.9), como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$\text{com } f(x) = J^{-1} * Q * S_f * b * (C_t + C_a) - J^{-1}(S * J - Q * S_f * b * C_\omega) * \omega = \begin{bmatrix} -2,2834 + 0,0145pq - 0,9318qr - 15675p + 5004r \\ 16,6616 - 0,0216p^2 + 0,0216r^2 + 0,8628pr - 4606q \\ -0,5936 + 0,3510pq - 0,0145qr - 1615p - 1459r \end{bmatrix}$$

$$g(x) = J^{-1} * Q * S_f * b * C_u = \begin{bmatrix} 25,5 & 0 & 15,9 \\ 0 & -4965,2 & 0 \\ -1,8 & 0 & -2,3 \end{bmatrix} = B$$

$$\text{e } h(x) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Aplicando a derivada de lie, dada pela expressão (4), ao sistema, obtemos:

$$L_f h = \begin{bmatrix} -2,2834 + 0,0145pq - 0,9318qr - 15675p + 5004r \\ 16,6616 - 0,0216p^2 + 0,0216r^2 + 0,8628pr - 4606q \\ -0,5936 + 0,3510pq - 0,0145qr - 1615p - 1459r \end{bmatrix}, \text{ isto porque}$$

$$\frac{\partial p}{\partial p} = 1, \frac{\partial q}{\partial q} = 1 \text{ e } \frac{\partial r}{\partial r} = 1.$$

Para a obtenção da matriz  $A(x)$ , seguimos a expressão (2.20). Uma vez que a derivada anterior foi efectuada para  $\gamma = 1$ , e tendo em conta que cada elemento é dado por  $\sum_{i=1}^p L_{g_i}(L_f^{\gamma-1} h_j)u_i$  (proveniente da expressão (2.19)), a matriz obtida é dada por:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_1) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_1) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_1) \\ \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_2) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_2) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_2) \\ \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_3) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_3) & \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_3) \end{bmatrix}$$

Uma vez que esta matriz ficaria muito extensa, optou-se por escrever a forma simplificada de cada elemento em seguida:

$$\begin{aligned} a_{1,1}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_1) = -54,1415 - 0,00004p + 0,00001r + 0,3449pq - 22,0942qr \\ a_{1,2}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_1) = 11337 + 77831000p - 24848000r - 72,2143pq + 4627qr \\ a_{1,3}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_1) = -31,0636 - 213250p + 68082r + 0,1979pq - 12,6765qr \\ a_{2,1}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_2) = 395,0675 - 0,5124p^2 + 0,5124r^2 - 109210q + 20,4575pr \\ a_{2,2}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_2) = -82729 + 107,2985p^2 - 107,2985r^2 + 22870000q - 4284pr \\ a_{2,3}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_2) = 226,6688 - 0,2940p^2 + 0,2940r^2 - 62661q + 11,7374pr \\ a_{3,1}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,1}}(L_f^{\gamma-1} h_3) = -14,0743 - 38293p + 34601r + 8,3259pq - 0,3449qr \\ a_{3,2}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,2}}(L_f^{\gamma-1} h_3) = 2947,2 + 8018800p - 7245700r - 1744pq + 72,2183qr \\ a_{3,3}(x) &= \sum_{i=1}^3 L_{g_{i,3}}(L_f^{\gamma-1} h_3) = -8,0751 - 21971p - 19852r + 4,7769pq - 0,1979qr \end{aligned}$$

Assim sendo, temos o controlo dado pela expressão (2.22).

$$u = -A(x)^{-1} \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p \end{bmatrix} + A(x)^{-1} v$$

Efectuou-se duas simulações, uma a tender para apenas uma referência e outra a tender para três referências em intervalos de tempo diferentes, ambas utilizando o algoritmo iterativo de butcher.

Para ambos os casos, o ponto inicial escolhido foi:

$$x = [-0.2 \ 2 \ 0.8]'$$

### Simulação 1:

No primeiro caso, o tempo final de simulação foi de 0,03 segundos com um passo de 0,0001.

Os resultados obtidos podem ser visualizados nos gráficos das Figura 4.9 e Figura 4.10.

A referência escolhida foi:

$$x_{ref}=[0 \ 0 \ 0]'$$

Como se pode verificar através da observação da Figura 4.9, todos os estados convergem para a referência escolhida, sendo que a taxa de rolamento ( $p$ ) e a taxa de guinada ( $r$ ) convergem em aproximadamente 0,02 segundos e a taxa de arfagem converge um pouco mais rápido, tal como no LQR, estabilizando em aproximadamente 0,01 segundos.

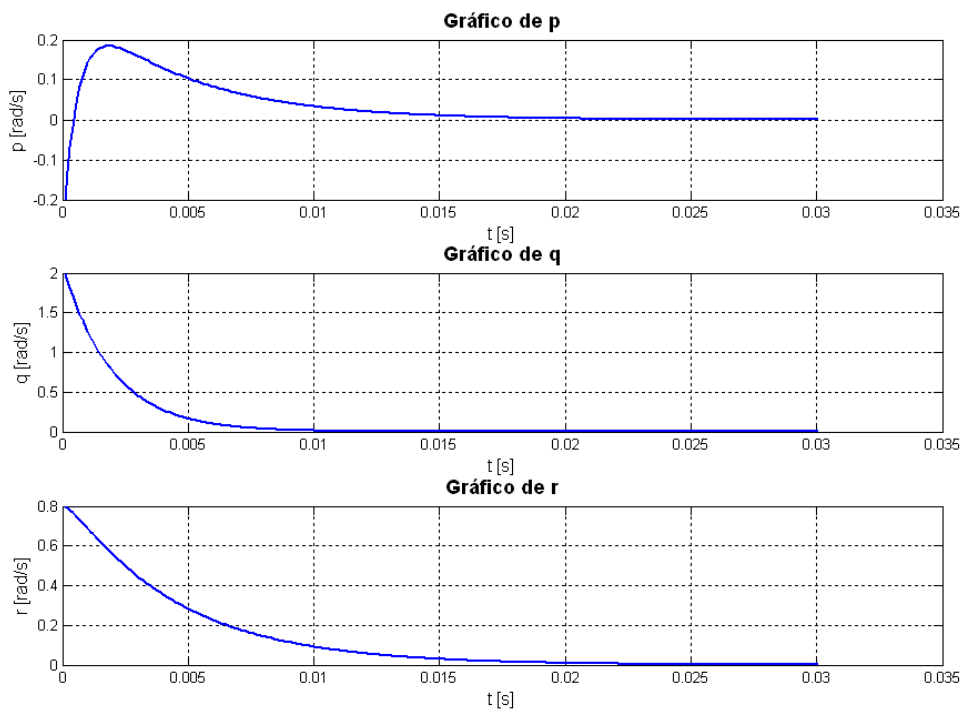


Figura 4.9: Gráfico ilustrativo do comportamento das taxas angulares.

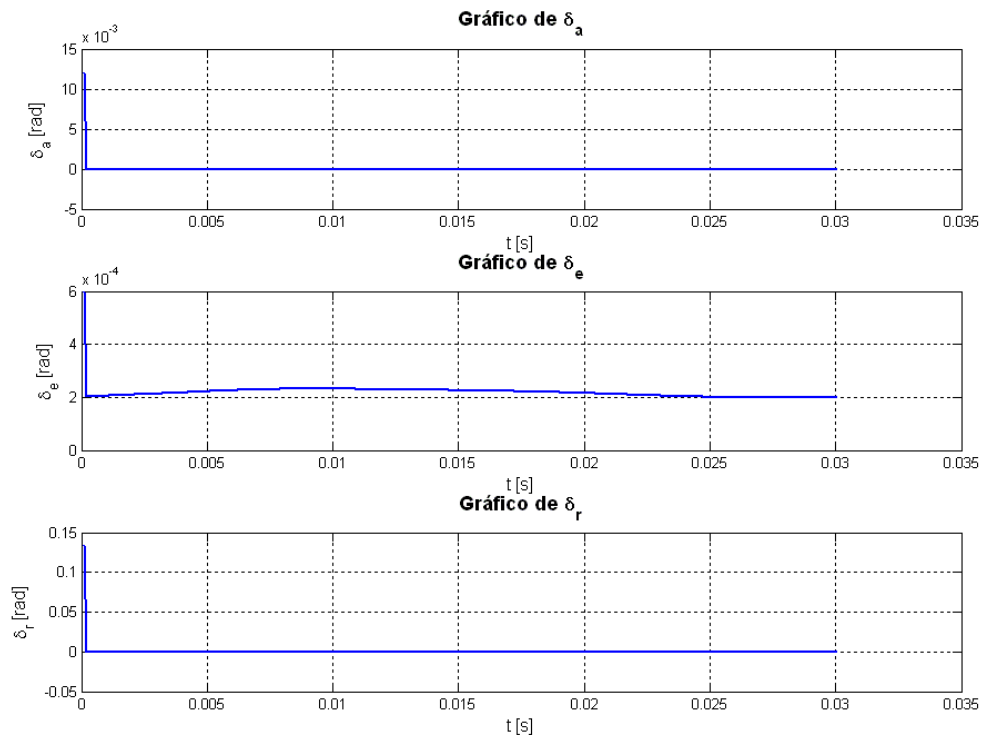


Figura 4.10: Gráfico ilustrativo do comportamento dos controlos.

O controlo do leme de profundidade ( $\delta_e$ ) estabiliza sofrendo uma pequena perturbação, que se pode desprezar pela pequena amplitude da mesma. Os ailerons ( $\delta_a$ ) e o leme de direcção ( $\delta_r$ ) estabilizam quase de imediato, sem sofrer perturbações.

### Simulação 2:

Passando agora à segunda simulação, o tempo de simulação considerado foi de 5 segundos e com um passo de 0,0001. O tempo foi aumentado para que o sistema tivesse tempo de estabilizar completamente em cada referência, sendo que nesta segunda simulação se sobrepõe ao gráfico da linearização por realimentação o do controlo suave, à semelhança do procedimento levado a cabo no LQR.

Os resultados obtidos podem ser observados nas Figura 4.11 e Figura 4.12.

As referências escolhidas foram as seguintes:

$$\begin{aligned} x_{ref} &= [0 \ 0 \ 0]' \text{ para } t < 1,5; \\ x_{ref} &= [0.8 \ -0.4 \ 0.9]' \text{ para } 1,5 \leq t < 3,5; \\ x_{ref} &= [-0.2 \ -0.0 \ 0.1]' \text{ para } t \geq 3,5. \end{aligned}$$

Na Figura 4.11 pode-se observar a reacção das taxas angulares. Através da Linearização por Realimentação o comportamento observado é semelhante ao da Figura 4.9. No caso do Controlo Suave as taxas estabilizam em cerca de meio segundo, sendo que têm o comportamento que era esperado. O objectivo deste controlo é forçar o comportamento dos estados a ter um desempenho mais suave mas que convirja para as referências estabelecidas.

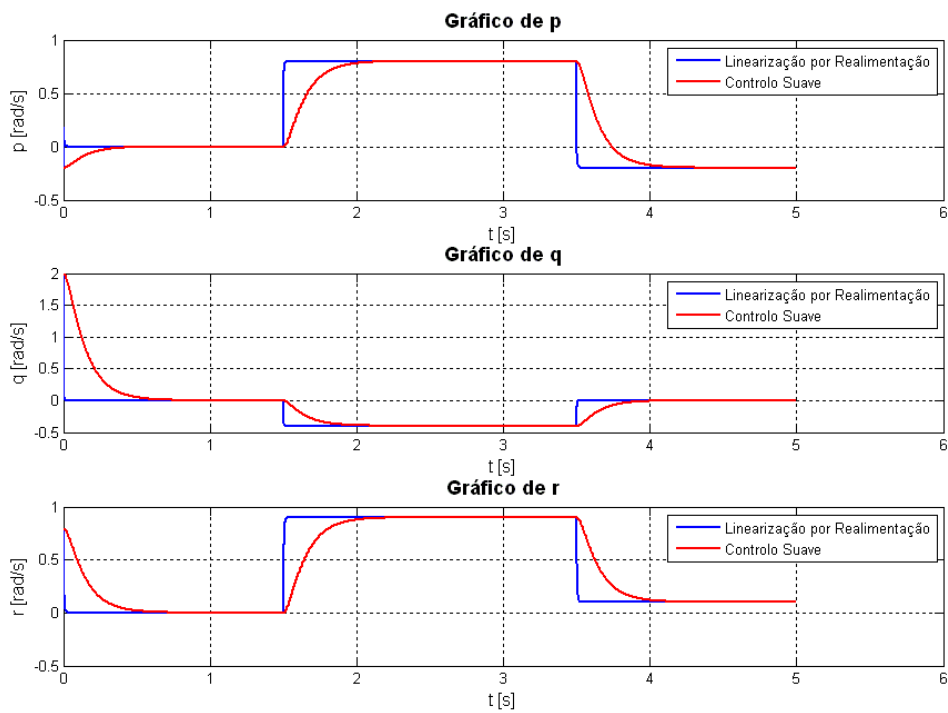


Figura 4.11: Gráficos ilustrativos do comportamento das taxas angulares.

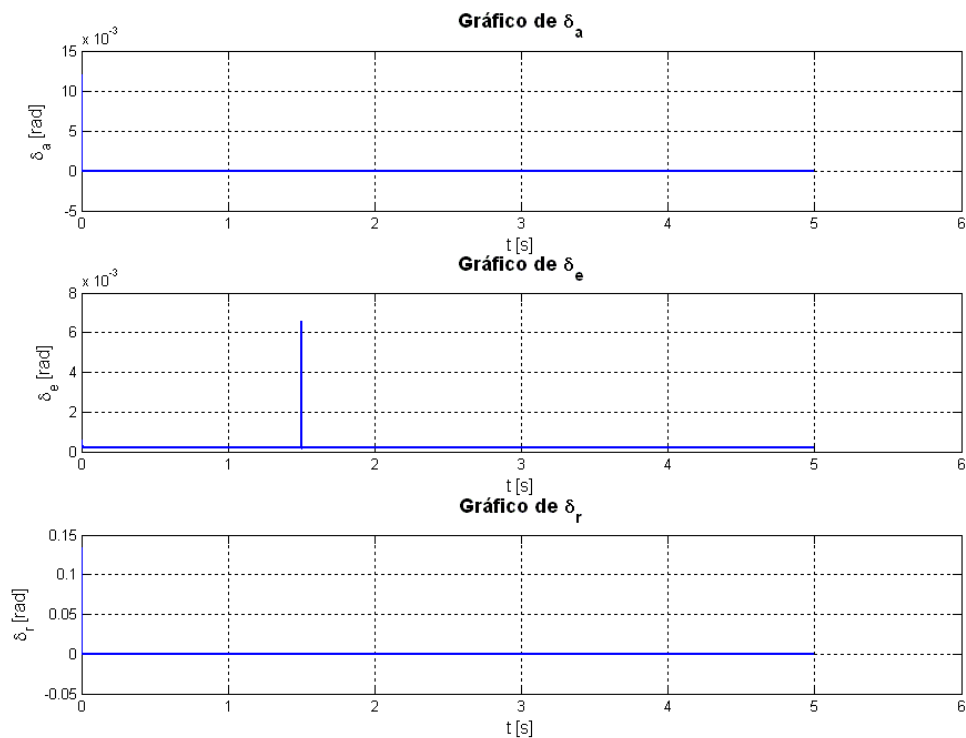


Figura 4.12: Gráficos ilustrativos do comportamento dos controlos.

No caso dos controlos, podemos comprovar que estes estabilizam, através da observação dos gráficos. Em todos os controlos aparecem picos com valores bastante irreais aquando da mudança de referência.

Relativamente às acelerações das taxas angulares, uma vez que o modelo do controlo suave é o mesmo para o LQR e para a Linearização por Realimentação, os gráficos da Figura 4.8 servem, também, para ilustrar este modelo.

#### 4.6. Comparação entre o LQR e a Linearização por Realimentação

Esta comparação é feita apenas para proporcionar uma melhor visualização das diferenças entre o LQR e a Linearização por Realimentação e para validar a acção do Controlo Suave, tal como é desejável que este actue.

Na Figura 4.13 é ilustrado um gráfico onde se pode comparar o comportamento do LQR comparativamente à Linearização por Realimentação. Ambos os gráficos são traçados para as mesmas referências e para os mesmos intervalos de tempo.

Referências escolhidas:

$$\begin{aligned}x_{ref} &= [0 \ 0 \ 0]' \text{ para } t < 1,5; \\x_{ref} &= [0.8 \ -0.4 \ 0.9]' \text{ para } 1,5 \leq t < 3,5; \\x_{ref} &= [-0.2 \ -0.0 \ 0.1]' \text{ para } t \geq 3,5.\end{aligned}$$

Na figura 10 a) está representado o gráfico para o LQR e na figura 10 b) o gráfico para a Linearização por Realimentação. O interesse desta figura é demonstrar a diferença entre o comportamento destes dois métodos e verificar que o Controlo Suave reage exactamente da mesma forma para os dois métodos. Isto significa que se consegue efectivamente forçar um sistema com referências múltiplas a ter o comportamento desejado através da acoplagem de um sistema de segunda ordem ao sistema primário.

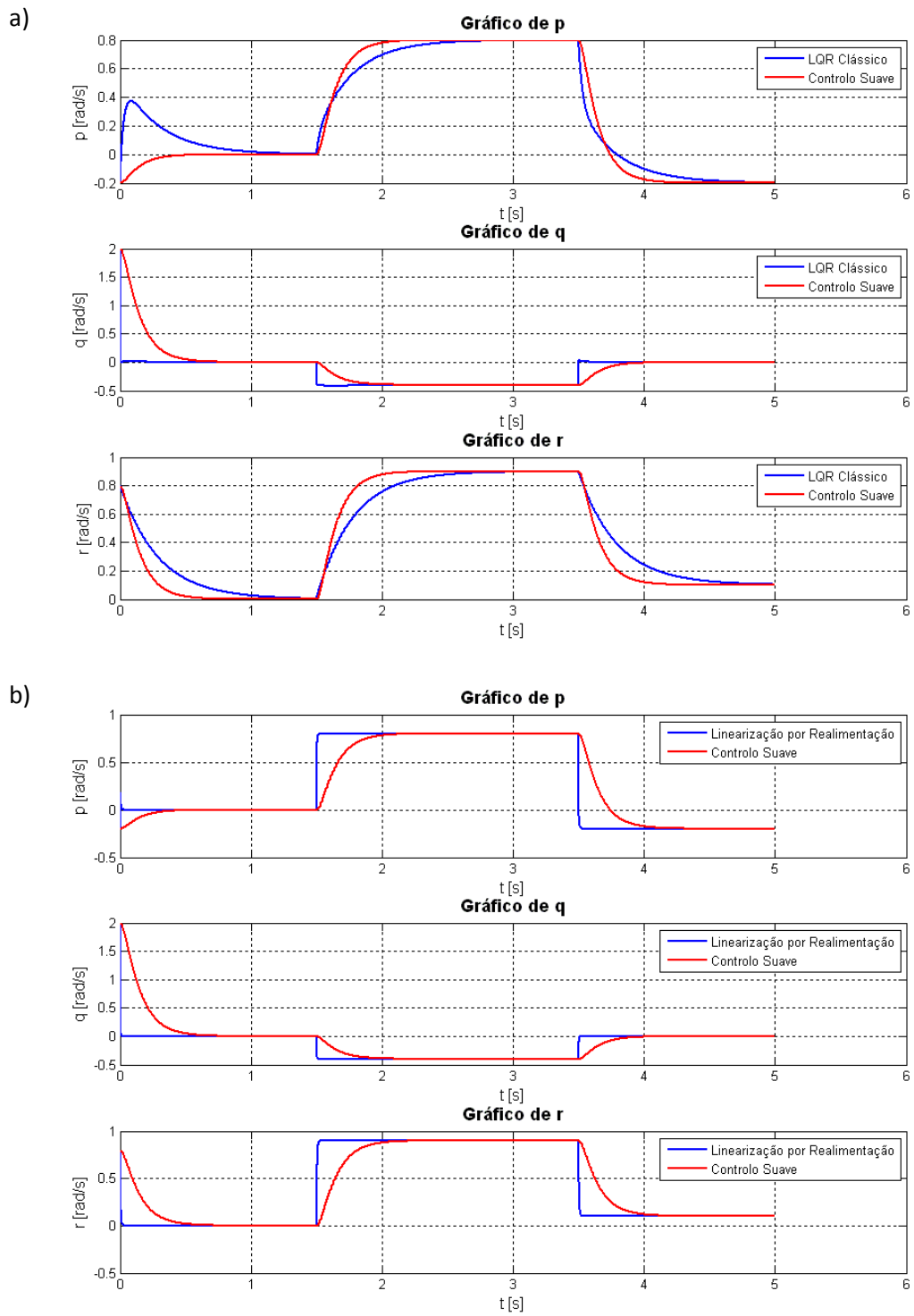


Figura 4.13: Gráficos comparativos entre o LQR a) e a Linearização por Realimentação b).

## 5. Aplicação II: Regulação de Turbinas Eólicas

### 5.1. Apresentar os diferentes modos de produção de electricidade numa aeronave

A electricidade numa aeronave serve para alimentar serviços dos passageiros, instrumentos de voo e os sistemas essenciais. Nos serviços dos passageiros podemos incluir os sistemas de entretenimento, iluminação ou a preparação de alimentos e bebidas, por exemplo. Os sistemas essenciais já são elementos mais críticos, para os quais nunca pode faltar electricidade sob pena de o voo ficar comprometido sendo eles os motores, pressurização ou comunicações, por exemplo.

Os sistemas eléctricos de aeronaves operam com várias tensões em corrente alternada (AC) ou contínua (DC). DC para aeronaves ligeiras e AC para aeronaves de porte maior (comerciais e militares).

No entanto, a maioria das aeronaves utilizam:

- 115 ou 200 VAC @ 400 Hz [60 VAC @ 360-800Hz];
- 14 ou 28 VDC (ou 270 VDC);
- 26 VAC nalgumas aeronaves para iluminação (luz).

VDC pode vir a ser convertida em VAC para operar sistemas específicos (na mesma aeronave).

#### 5.1.1. Geradores AC operados pelos motores

Cada motor numa aeronave opera um gerador AC (Figura 5.14). A electricidade produzida por estes geradores é utilizada em condições normais do voo para fornecer corrente à aeronave inteira. Utiliza-se o sistema TRU (Transformer Rectifier Units) para transformar a corrente alternada em corrente contínua, por exemplo os 115 VAC, 400Hz para 28 VDC. Neste caso:

- Um transformador é utilizado para baixar a tensão de 115 volts para 28 volts, até este ponto os 28 volts ainda são AC;
- Para alterar a corrente de AC para DC utiliza-se um rectificador.

Estes geradores também podem funcionar como motores de arranque para as respectivas turbinas fazendo rodar o veio do compressor/turbina. Quando funcionam realmente como geradores são accionados pela turbina. Em solo são arrefecidos por ventiladores incorporados e em voo são arrefecidos simplesmente pela deslocação de ar. Cada gerador tem uma unidade GCU (generator control unit) que serve para controlar os modos de funcionamento do gerador, regula-lo e detectar falhas.

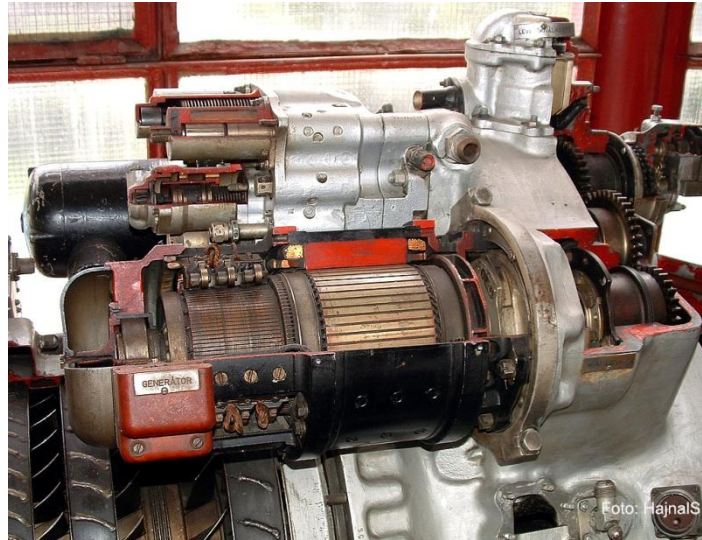


Figura 5.14: Gerador AC do motor turbo-hélice Ivchenko AI-20M que equipa os Ilyushin IL-18.

### 5.1.2. APU (Auxiliary Power Units)

A maioria das aeronaves comerciais, de transporte de passageiros e carga, já vêm equipadas com APU's (Figura 5.15). Estas unidades fornecem energia eléctrica à aeronave quando os geradores dos motores principais não estão a funcionar ou quando não há energia externa disponível. A potência gerada pela APU fornece uma tensão constante a frequência constante. A APU é independente relativamente à rotação dos motores, a maioria destas unidades utilizam uma turbina (de tamanho reduzido) para accionar o gerador. O combustível consumido por esta turbina é o mesmo que consomem as turbinas de propulsão da aeronave, querosene de aviação. A turbina também fornece ar comprimido para climatização e arranque pneumático dos motores. Isto torna a aeronave independente de unidades de potência externa para este mesmo efeito.

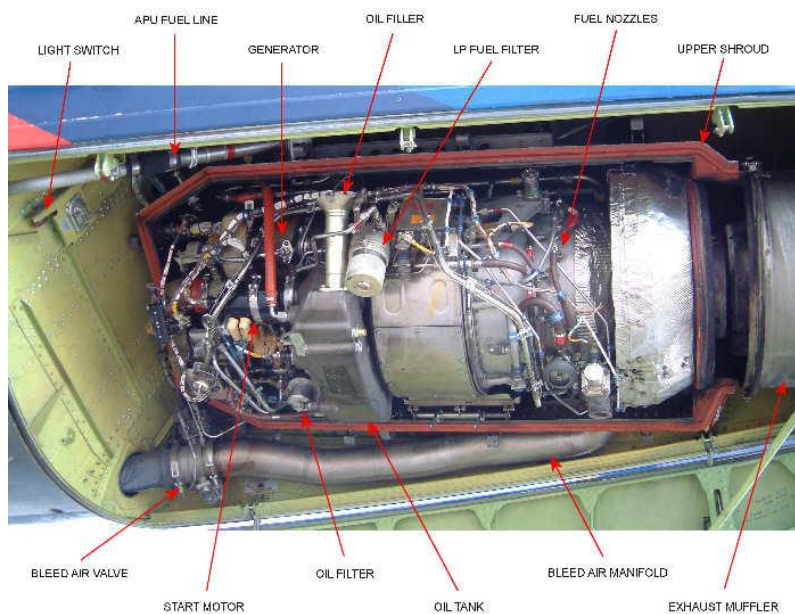


Figura 5.15: APU de um Boeing 737 com respectivas legendas dos componentes [12].

### 5.1.3. Fonte/Potência Externa

As GPU's (Ground Power Unit) são dispositivos utilizados em aeroportos para fornecer energia eléctrica às aeronaves sem haver a necessidade de estas terem as suas APU's ligadas. Também são utilizadas em situações como o caso de as autoridades aeroportuárias não permitirem o uso das APU's instaladas nas aeronaves enquanto estas estão nos seus lugares de estacionamento ou no caso da companhia que opera a aeronave querer poupar combustível.

A forma mais comum de GPU's é um pequeno veículo ou atrelado com um gerador diesel, apesar de também existirem unidades a gasolina. Existem, também, modelos totalmente eléctricos que são desligados da rede eléctrica local. Neste caso podem existir dois tipos sendo o primeiro de corrente continua a 28V e o segundo de corrente alternada.

As unidades AC funcionam com uma frequência de 400Hz e as potências podem ser de 60kVA, 90kVA (este é o modelo mais popular), 120kVA e 140kVA porque cada aeronave tem requisitos de potência diferentes. Quanto maior a aeronave, maior a potência requerida. A GPU pode ter potência a mais mas nunca inferior à requerida pela aeronave, por exemplo:

- A aeronave requer 60kVA, então pode ser utilizada uma GPU de 90kVA, mas o contrário já não é possível.



Figura 5.16: GPU da Hobart com potência de 90kVA.

### 5.1.4 Turbinas RAT<sup>5</sup>

Uma turbina RAT (Figura 5.17) é uma pequena hélice ligada a uma bomba hidráulica ou gerador eléctrico e é usada como fonte de energia de emergência para a aeronave. Em caso de perda dos motores principais e da APU, a RAT vai alimentar os sistemas essenciais (controles de voo, sistemas hidráulicos e instrumentos de voo críticos). Algumas RAT's apenas produzem potência hidráulica que será posteriormente utilizada para alimentar geradores eléctricos.

---

<sup>5</sup> Em Inglês: Ram Air Turbine (RAT)

A potência gerada pela RAT provém do escoamento criado em torno da aeronave pela sua velocidade logo, se a velocidade diminuir a RAT produz menos energia. Em condições normais a RAT encontra-se alojada na fuselagem ou na asa, sendo baixada automaticamente em caso de emergência. Entre o abaixamento da RAT e a perda de energia são usadas baterias.

As RAT's são comuns em aeronaves militares, onde a perda total de energia é mais provável. A primeira aeronave comercial dotada deste equipamento foi o Vickers VC-10 a partir dos anos 60, sendo que a partir desta data a maioria das aeronaves comerciais têm RAT's. A RAT do Airbus A380 é a maior do mundo com 1,63m de diâmetro mas o mais comum é terem 80cm. Uma RAT convencional de uma aeronave comercial deve ser capaz de produzir, dependendo do gerador, entre 5 a 70kW.



Figura 5.17: - a) - RAT de um F-105 Thunderchief; - b) - RAT de um Boeing 757 [13].

Em conclusão podemos considerar que as funções do sistema eléctrico de uma aeronave são as seguintes:

- Gerar potência eléctrica;
- Regular essa mesma potência;
- Proteger o sistema eléctrico;
- Distribuir a potência eléctrica por toda a aeronave.

#### **5.1.4.1. Descrever o sistema RAT numa aeronave**

As RAT's (Figura 5.18) existem na maioria das aeronaves comerciais e militares actuais. São dispositivos que têm um funcionamento semelhante a uma turbina eólica industrial, mas em muito menor escala. Encontram-se alojadas em compartimentos nas asas ou na fuselagem e são accionadas em caso de emergência (falha de energia). Em algumas aeronaves accionam uma bomba hidráulica que abastece um gerador eléctrico com potência inferior a 10kVA. No caso do A380 a RAT acciona um alternador eléctrico [13].

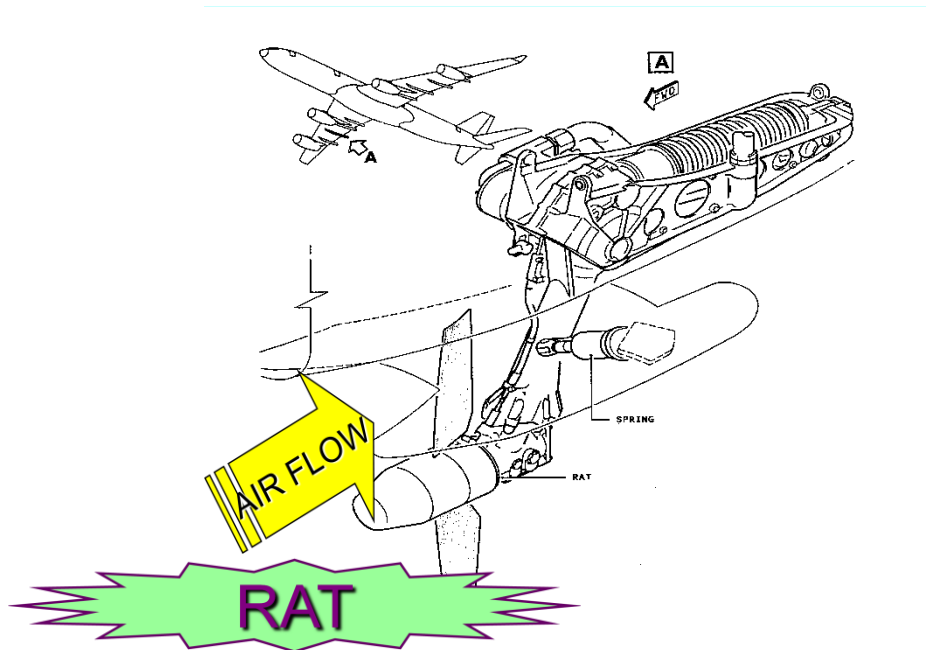


Figura 5.18: Imagem de uma RAT e uma possível localização (na asa) [14].

A rede de emergência de uma aeronave pode ser utilizada com a RAT como fonte de energia ou com baterias como fontes de energia, sendo estas abastecidas pela RAT (Figura 5.19).

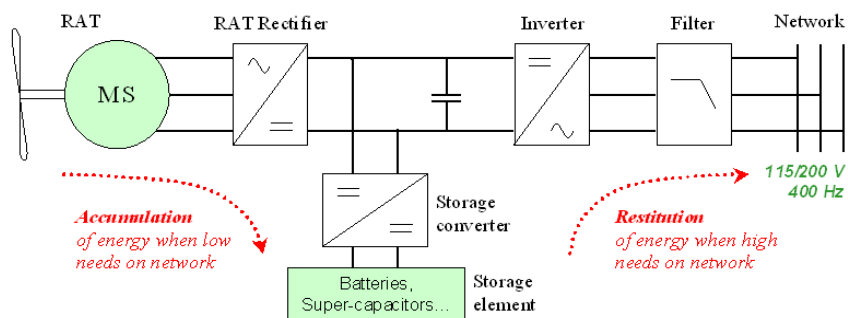


Figura 5.19: Esquema da rede de abastecimento de energia de emergência numa aeronave [14].

A recuperação de energia para os actuadores eléctricos e hidráulicos é feita normalmente através da rede de corrente alternada ou através das baterias no sistema de corrente contínua.

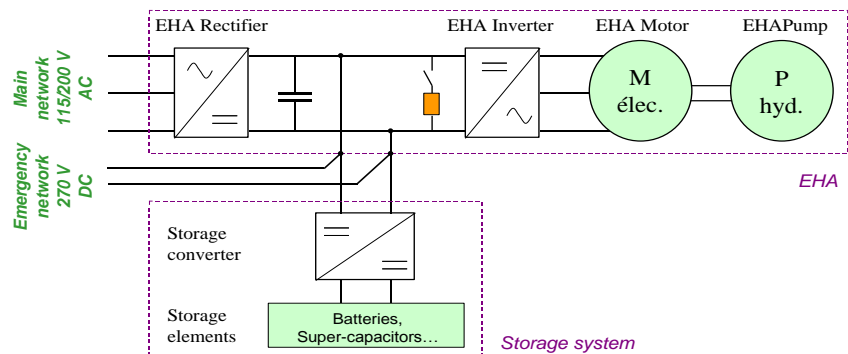


Figura 5.20: Esquemática do sistema de recuperação de energia da aeronave [14].

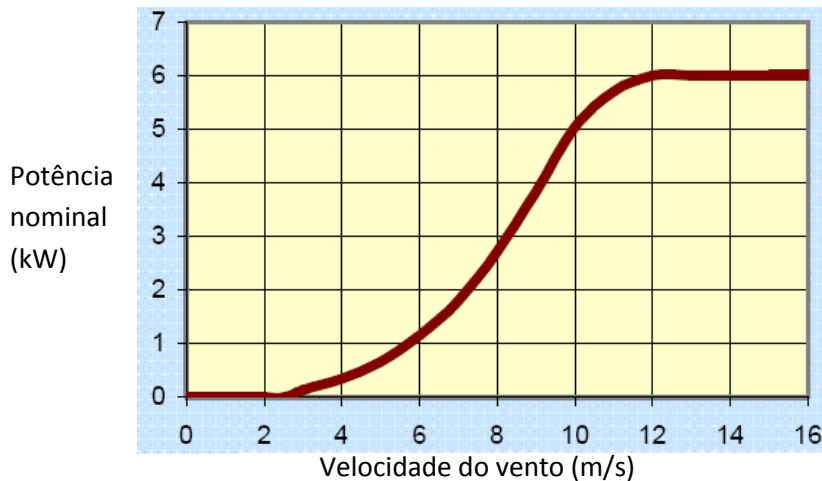


Figura 5.21: Gráfico da produção de uma turbina eólica de pequenas proporções, para aplicações domésticas [15].

Na Figura 5.21 podemos observar o gráfico de produção de energia em função do vento para uma turbina eólica doméstica. No caso das RAT a curva será semelhante, mas as velocidades e as potências geradas serão bastante mais elevadas. O grande desafio neste tipo de turbinas (RAT) é o arrefecimento, dado que têm um tamanho muito reduzido e geram potências muito elevadas, o que consequentemente gera mais calor.

Nos modelos antigos de RAT's, que geravam potências baixas, o gerador era colocado na traseira da turbina de modo a aproveitar o escoamento em torno da aeronave. Contudo, com a necessidade de arrefecimento a aumentar cerca de 5 vezes, este método deixou de ser suficiente para manter a temperatura do gerador a níveis normais. Nos últimos anos os fabricantes de aeronaves encomendaram geradores selados para proteger os seus componentes internos e circuitos eléctricos das condições ambientais. Este tipo de gerador agrava ainda mais o problema do seu arrefecimento uma vez que o escoamento não chega ao seu interior. O gerador da RAT do Boeing 777 tem alhetas no revestimento exterior mas este apenas produz 7,5kW a 4000RPM. Serão necessários novos geradores para RAT's, que produzam cerca de 50kW a 12000RPM usando uma caixa de velocidades entre a turbina RAT e o seu gerador. O aumento desmesurado do calor gerado torna essencial o fornecimento de sistemas de arrefecimento eficazes.

## 5.2. Qual é o interesse da energia eólica?

O factor principal que levou à procura de energias renováveis foi a protecção do meio ambiente (explicar mais este ponto, com exemplos, em comparação outros sistemas de produção de energia eléctrica). O problema deste tipo de energias era o seu elevado custo, sendo por isso que se desenvolveram vários esforços para reduzir esse custo. No caso das turbinas eólicas isto resultou numa evolução constante da potência nominal das turbinas, como podemos ver na Figura 5.22.

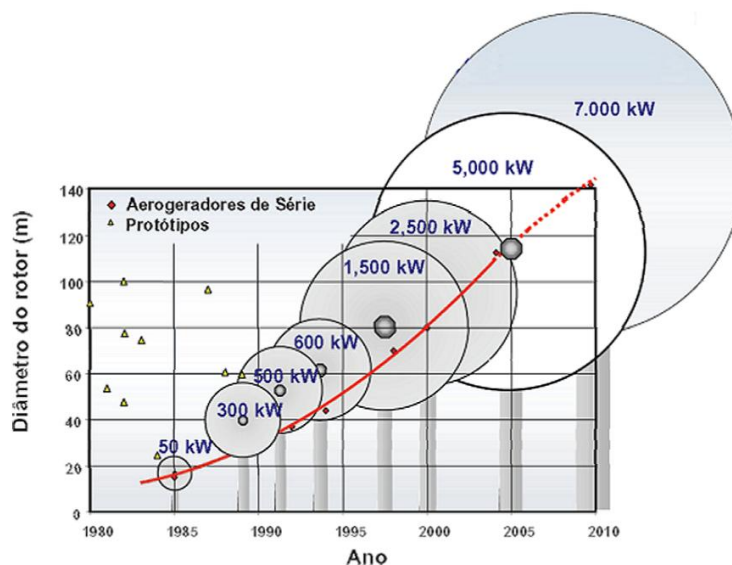


Figura 5.22: Evolução do tamanho e da potência nominal das turbinas eólicas ao longo dos anos [16].

O mercado da energia eólica é, actualmente, a fonte de energias renováveis em maior expansão em todo o mundo, sendo de esperar que assim continue nos anos vindouros. No final do ano de 2003 a capacidade instalada mundialmente era cerca de 40000MW, o dobro da capacidade em 1999, podendo exceder os 95000MW no final de 2008 [17]. Podemos ter uma melhor percepção destas estatísticas através da Figura 5.23.

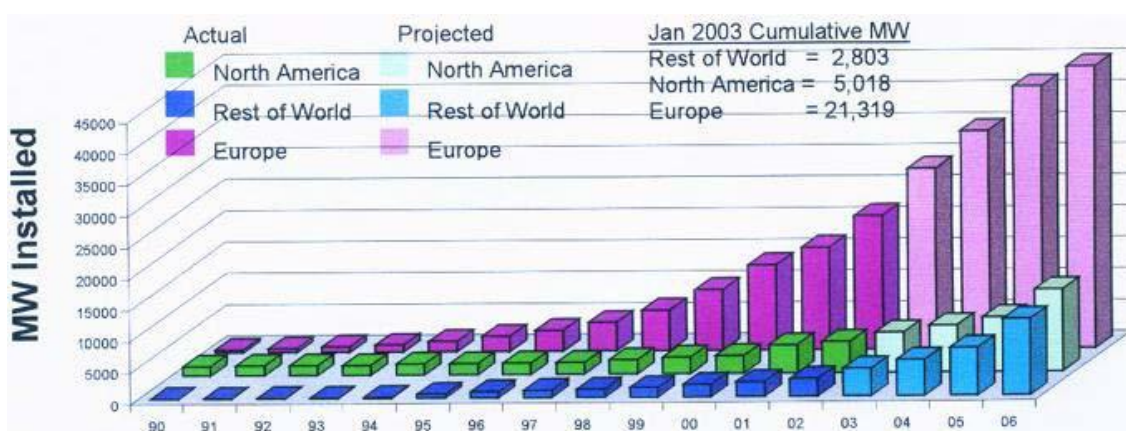


Figura 5.23: Potencia eólica instalada [17].

Outro motivo impulsionador do crescimento da energia eólica foi os incentivos oferecidos por governos e autoridades locais para a construção de parques eólicos. A produção de energia subsidiada é privilegiada relativamente a incentivos de investimento em empresas privadas. Sendo que os governos em muitos países estão a apoiar programas de exportação que cativam empresas de tecnologia eólica para o desenvolvimento dos mesmos países.

As grandes vantagens da energia eólica são o facto de se integrar numa nova filosofia em que as energias renováveis ganham terreno às energias produzidas a partir de combustíveis fósseis, sendo portanto consideradas como uma alternativa. Por outro lado é um tipo de energia de certa forma ilimitada, isto porque existe sempre vento, mas nunca se pode garantir a ocorrência do mesmo todos os dias e no mesmo local. É um factor, que apesar dos estudos realizados antes da instalação de um parque eólico, tem

uma aleatoriedade relativamente elevada. Nos estudos realizados para a construção de um parque eólico inclui-se estudos a nível topográfico e estudos dos ventos nessa região para otimizar o rendimento do parque e viabilizar o investimento que aí vai ser feito.

### 5.3. Indústria eólica em Portugal

O investimento estrangeiro tem vindo de uma forma normal, projecto a projecto, em função das oportunidades de negócio e, hoje cada vez mais, associado a empresas nacionais. Estas é que têm de servir de motor de arranque para os investimentos industriais de vulto como acontece agora com a EDP e a Enercon, alemã. A Enercon, líder em Portugal com 40% do mercado, é o sócio tecnológico do consórcio Eólicas de Portugal, grupo liderado pela EDP e que inclui três dos quatro principais promotores de eólicas - a Generg (parceria entre as fundações Oriente, Luso-Americana e Gulbenkian), a SIIF (participada do Grupo francês EDF), além da Enernova (EDP). A Finerge (do grupo Endesa) e a Térmica Portuguesa (Grupo Sonae e Endesa), também integram o agrupamento. O projecto Eólicas de Portugal envolve a criação de um cluster de base industrial que fornecerá as centrais dos cinco promotores associados e será a garantia de que elas terão mais de 75% de incorporação nacional. O critério que mais pesa (45%) na hierarquização dos candidatos é o do parceiro tecnológico. O complexo de Viana do Castelo, com perto de 30 mil metros quadrados de área coberta (figura 13) em terrenos cedidos pelos estaleiros navais, é uma parte (40 milhões de euros) do investimento de mil milhões, associado a toda a operação eólica.

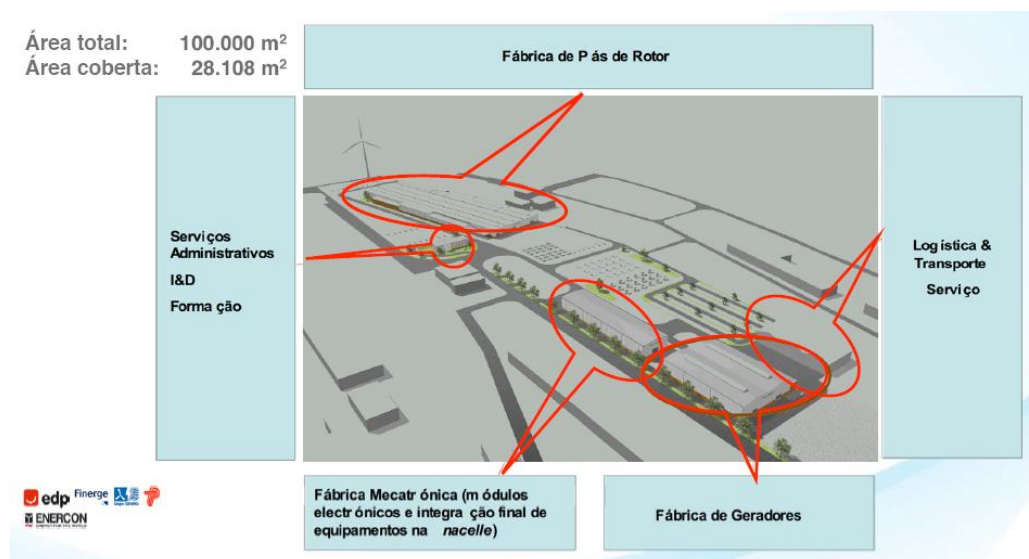


Figura 5.24: Esquemática do complexo industrial da Enercon em Viana do Castelo.

O consórcio Ventinveste, S.A., formado a 22 de Agosto de 2007, liderado pela Galp Power e vencedor da fase B do concurso para atribuição de uma nova potência eólica de 400MW, vai criar 1 327 novos postos de trabalho com o seu *cluster* industrial para o sector. Mais do que o mesmo consórcio tinha previsto criar na proposta apresentada para a fase A do concurso (1250 empregos) na qual estava em causa a atribuição de uma potência de 1000 MW. Fase da qual saiu vencedor o consórcio Eólicas de Portugal, liderado pela EDP e que já foi referido na página anterior. O

investimento global, em parques e unidades fabris, a realizar agora pelo grupo Ventineste é superior a 526 milhões de euros. Um valor também acima do previsto para esta fase, já que o grupo tinha orçamentado um investimento de apenas 500 milhões, como se pode verificar em informação disponível no *site* da Galp. Daquele montante, cerca de 460 milhões destina-se à construção dos parques eólicos e 66,3 milhões é o investimento previsto para o *cluster* industrial. Tudo isto porque entre a proposta inicial que apresentou para a fase B e fase de negociação para a qual foi apurado juntamente com o grupo Novas Energias Ibéricas, liderado pela Iberdrola, a Ventineste da qual fazem parte também a Martifer, Repower, Efacec e Enersis decidiu melhorar substancialmente o projecto industrial. Se não melhorassem a proposta poderiam não ter saído vencedores e a procura de equipamentos para parques eólicos está a crescer a tal ritmo que justifica o investimento. Mais de 60% da produção das 19 unidades industriais que compõem o *cluster* da Ventineste destinam-se à exportação. As unidades vão localizar-se nos distritos de Aveiro, Viseu e Porto.

Na Figura 5.25 poderemos ver um gráfico ilustrativo da variação da potência eólica acumulada desde o ano de 1996 até 2008.

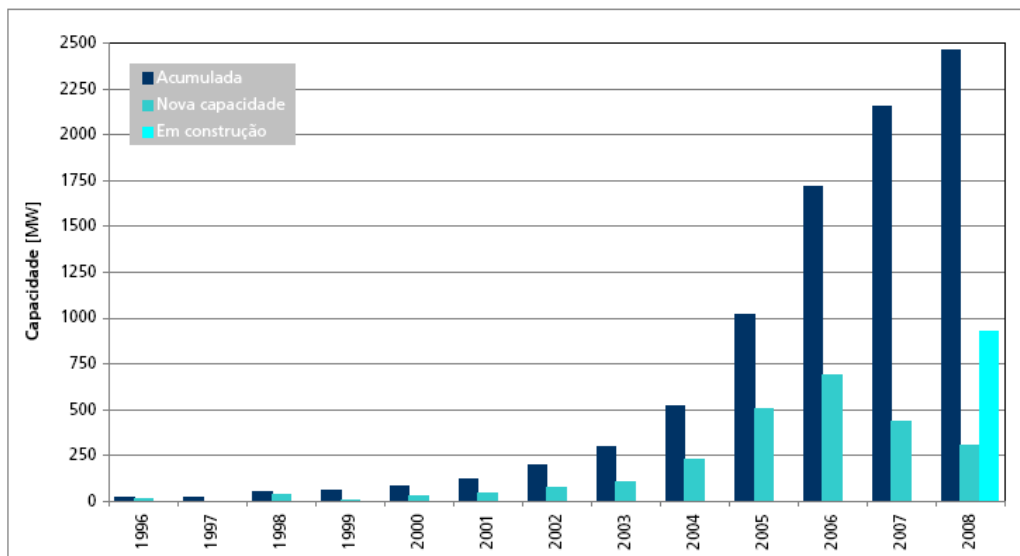


Figura 5.25: Capacidade acumulada até Junho de 2008 [18].

Na Figura 5.26 temos um gráfico que ilustra a potência instalada e em construção em cada distrito e região autónoma do país, enquanto na Figura 5.27 podemos ver gráficos com a percentagem de mercado de cada fabricante – a) – e a respectiva potência total – b).

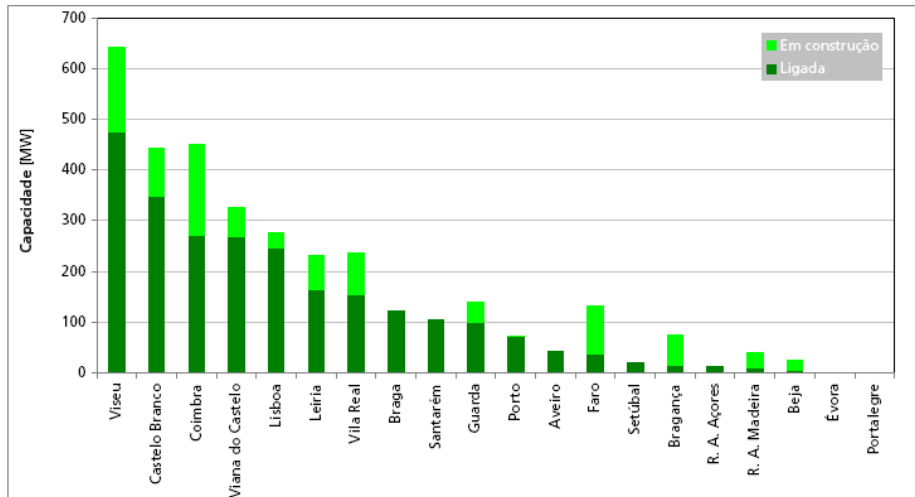


Figura 5.26: Potência por distritos e regiões autónomas até Junho de 2008 [18].

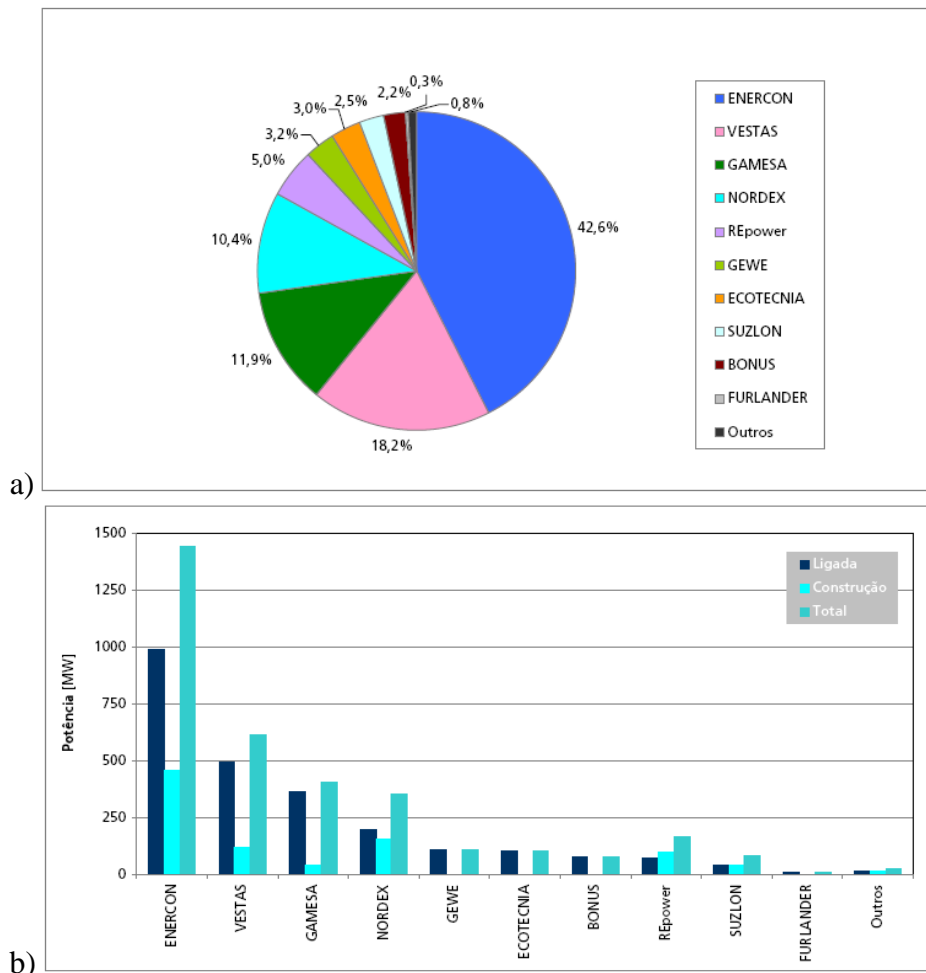


Figura 5.27: Quotas de mercado - a) - e potência total - b) - dos vários fabricantes até Junho de 2008 (parques ligados à rede+construção+adjudicados) [18].

Na Figura 5.28 podemos ver dois gráficos em tudo semelhantes aos da Figura 5.27 mas desta vez referentes aos principais promotores e na Figura 5.29 podemos ver o número de aerogeradores instalados por categoria de potência.

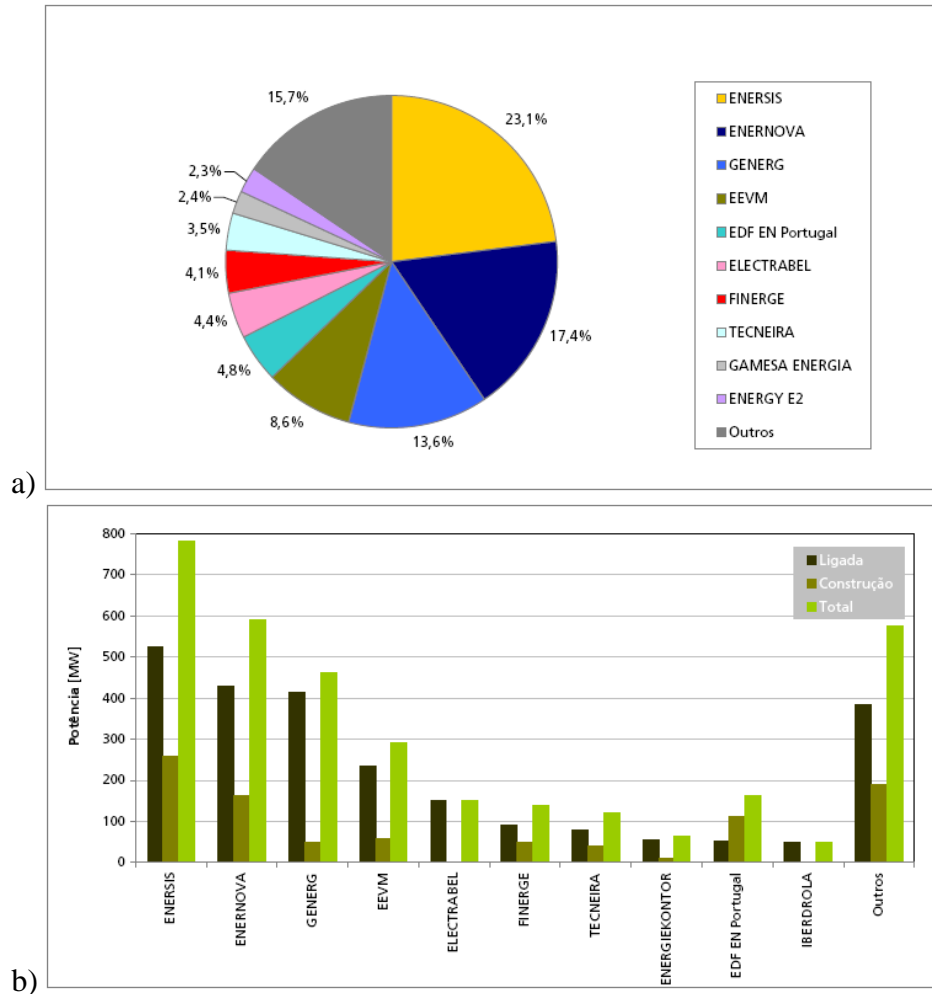


Figura 5.28: Quotas de mercado - a) - e potência total - b) - dos vários promotores até Junho de 2008 (parques ligados à rede+construção+adjudicados) [18].

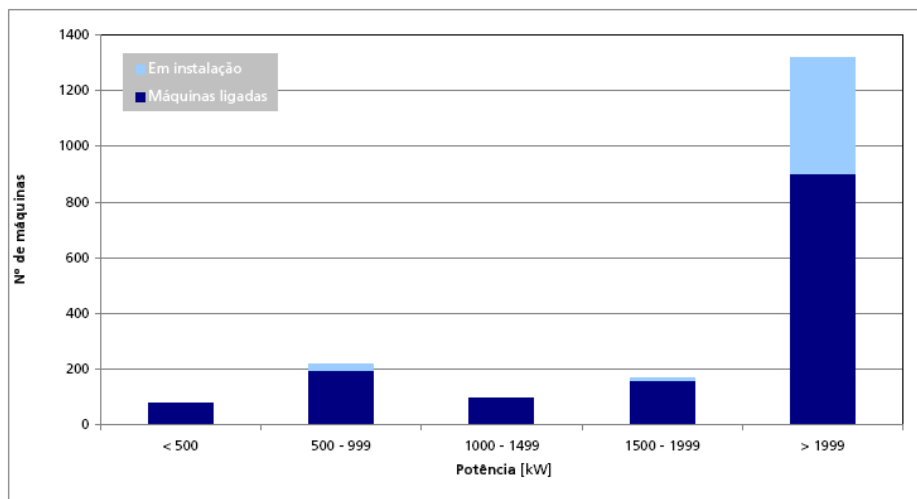


Figura 5.29: Número total de máquinas por categoria [18].

## 5.4. Qual o interesse das turbinas eólicas com velocidade variável

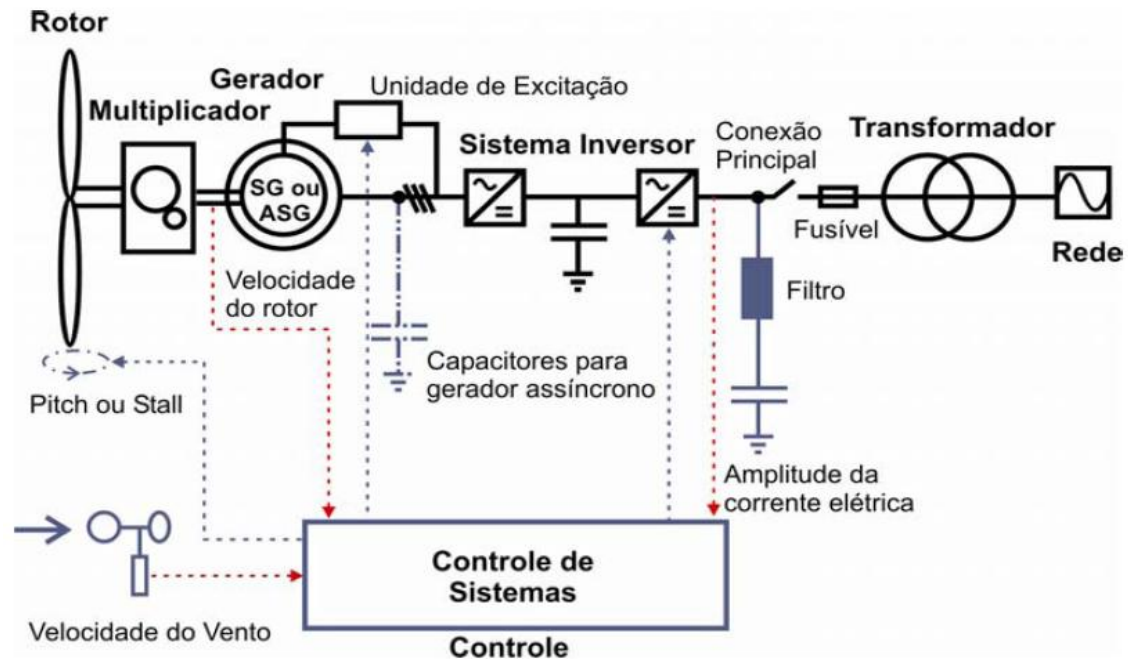


Figura 5.30: Esquema eléctrico de um gerador com velocidade variável que usa um conversor de frequência para o controlo da frequência da geração eléctrica [16].

Consoante a velocidade do vento varia, a velocidade de rotação da turbina deveria acompanhar esta variação. Isto é possível através das turbinas eólicas de velocidade variável. Na Figura 5.30 vemos alguns dos principais componentes de uma turbina de velocidade variável e a forma como interagem.

As turbinas eólicas devem trabalhar a um coeficiente de potência máximo. Sendo assim, para velocidades de vento inferiores à de geração de potência nominal, a turbina vai operar com  $C_p$  máximo e conforme a rotação varia o ângulo de passo também varia de modo a manter o ângulo óptimo. Conforme a velocidade aumenta a potência gerada também aumenta e sendo atingida a potência máxima da turbina o passo é ajustado para diminuir a potência aerodinâmica. Neste caso a turbina passa a funcionar com uma eficiência menor. Com estas capacidades, a potência mecânica transmitida ao gerador é controlada pelo controlo do passo. Assumindo que isto pode ser feito instantaneamente, a aceleração e desaceleração podem ser anuladas e a velocidade mantida constante controlando a potência aerodinâmica de forma a ser igual à potência eléctrica. Na Figura 5.31 podemos ver a variação do coeficiente de potência para diferentes ângulos de passo.

A ligação ao sistema eléctrico é feita por meio de um conversor de frequência electrónico, formada por um conjunto rectificador/inversor. A tensão produzida pelo gerador síncrono é rectificadora e a corrente contínua resultante é invertida, com o controlo da frequência de saída sendo feito electronicamente através dos tiristores. Como a frequência produzida pelo gerador depende de sua rotação, esta será variável em função da variação da rotação da turbina eólica. Entretanto, por meio do conversor, a frequência da energia eléctrica fornecida pelo aerogerador será constante e sincronizada com o sistema eléctrico.

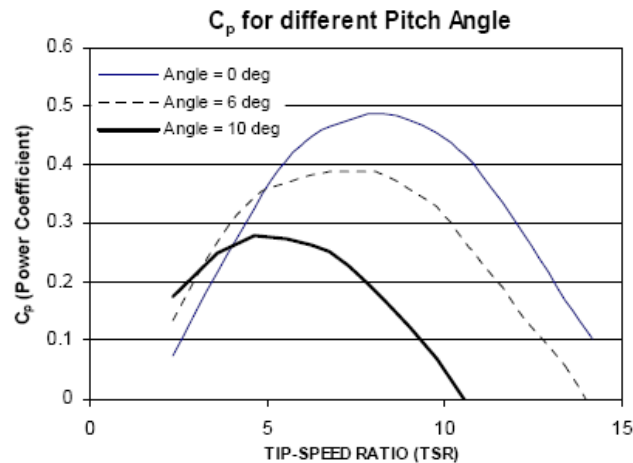


Figura 5.31: Gráfico  $C_p$  vs TSR (Tip Speed Ratio).

Quando são usados geradores assíncronos, ou de indução, é necessário prover energia reactiva para a excitação do gerador, que pode ser feita por auto-excitação usando-se condensadores adequadamente dimensionados, de forma similar ao caso do aerogerador com velocidade constante. Neste caso, deve-se observar que os condensadores seja conectados antes do rectificador, uma vez que a conversora de frequência faz isolamento galvânico no sistema, não permitindo a absorção de energia reactiva externa, seja do sistema eléctrico ou de condensadores.

Outra alternativa é o uso de geradores assíncronos duplamente alimentado, isto é, com dois enrolamentos que apresentam velocidades síncronas diferentes. O uso do enrolamento do rotor associado a uma resistência variável, em série, permite o controlo da velocidade do gerador pela variação do escorregamento, mantendo a frequência eléctrica do gerador no valor definido pelo sistema eléctrico ao qual o aerogerador está ligado.

A ideia básica do aerogerador com velocidade variável é o desacoplamento da velocidade de rotação e, conseqüentemente, do rotor da turbina, da frequência eléctrica da rede. O rotor pode funcionar com velocidade variável [19, 20] ajustada à situação real da velocidade do vento, garantindo um desempenho aerodinâmico maximizado. Uma vantagem é a redução das flutuações de carga mecânica. As desvantagens são os altos esforços de construção e a geração de harmónicos, associados ao conversor de frequência, que podem ser reduzidos significativamente com o uso de filtros que, por sua vez, aumentam os custos.

## 5.5. Modelo da Turbina Eólica

Tudo o que se movimenta tem energia cinética acumulada, seja um objecto sólido ou fluido. Sendo o vento, um fluido (ar) em movimento podemos provar que este contém uma certa quantidade de energia cinética. A energia cinética de uma massa ( $m$ ) de ar a velocidade ( $v$ ) é dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.1)$$

Considerando esta energia perpendicular a uma secção transversal de um cilindro imaginário (Figura 5.32), obtemos a expressão que nos dá a potência gerada pelo vento que passa na secção A:

$$P = \frac{1}{2} \rho A v^3 \quad (5.2)$$

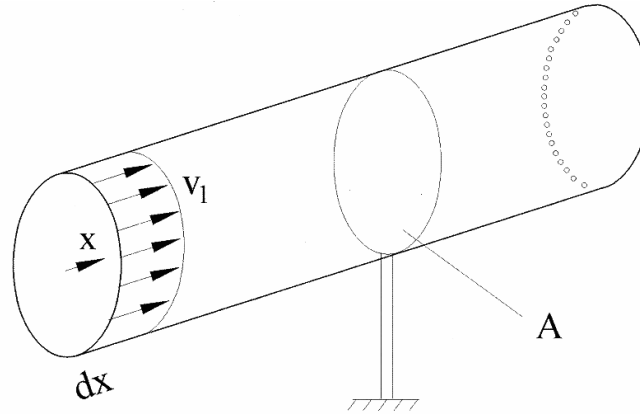


Figura 5.32: Esquemática do fluxo de vento através duma secção A dum cilindro imaginário [16].

Definindo a expressão anterior por unidade de área obtemos a densidade de potencia (ou fluxo de potencia):

$$DP = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho v^3 \quad (5.3)$$

Esta potência, captada por uma turbina eólica, é designada por potência aerodinâmica e é dada por:

$$P_a = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 C_p(\lambda, \beta) v^3 \quad (5.4)$$

Com:  $\lambda = \frac{\omega_r R}{v}$

O rotor da turbina é movimentado por uma força denominada torque aerodinâmico ( $T_a$ ) e que podemos calcular através de uma das expressões seguintes:

$$T_a = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 \frac{v^3}{\omega_r} C_p(\lambda, \beta) \quad (5.5)$$

Ou,

$$T_a = \frac{P_a}{\omega_r} = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 C_q(\lambda, \beta) v^2 \quad (5.6)$$

Onde  $C_q(\lambda, \beta)$  corresponde ao coeficiente de torque, dado por:

$$C_q(\lambda, \beta) = \frac{C_p(\lambda, \beta)}{\lambda}$$

O cálculo do coeficiente de potência requer conhecimentos apurados de aerodinâmica e os métodos computacionais são extremamente complexos. Assim,

desenvolveram-se aproximações numéricas. No caso de turbinas eólicas é utilizada a seguinte:

$$C_p(\lambda, \beta) = 0,22 \left( \frac{116}{\lambda_i} - 0,4\beta - 5 \right) e^{\frac{-12,5}{\lambda_i}} \tag{5.7}$$

Onde:  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda + 0,008\beta} - \frac{0,035}{\beta^3 + 1}$

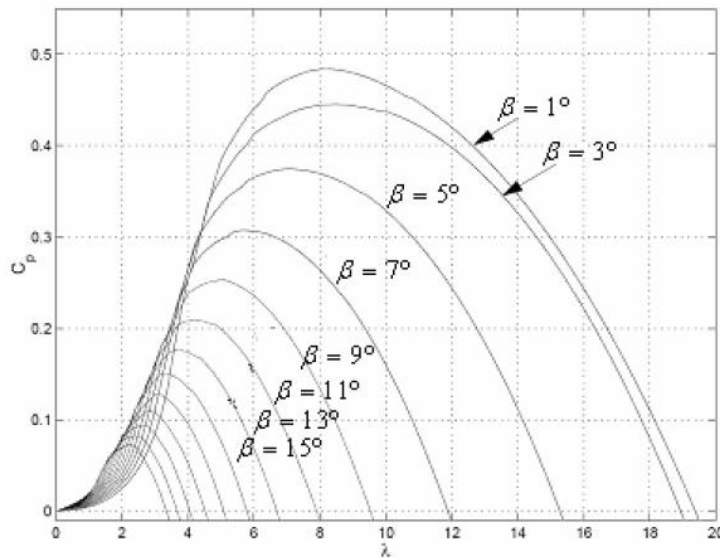


Figura 5.33: Gráfico da variação do coeficiente de potência em função de  $\lambda$  para diferentes valores do parâmetro  $\beta$ .

Na Figura 5.34 podemos observar o funcionamento de uma turbina eólica com as principais forças aplicadas e respectivos sentidos das mesmas, momentos de inércia e coeficientes de amortecimento e rigidez.

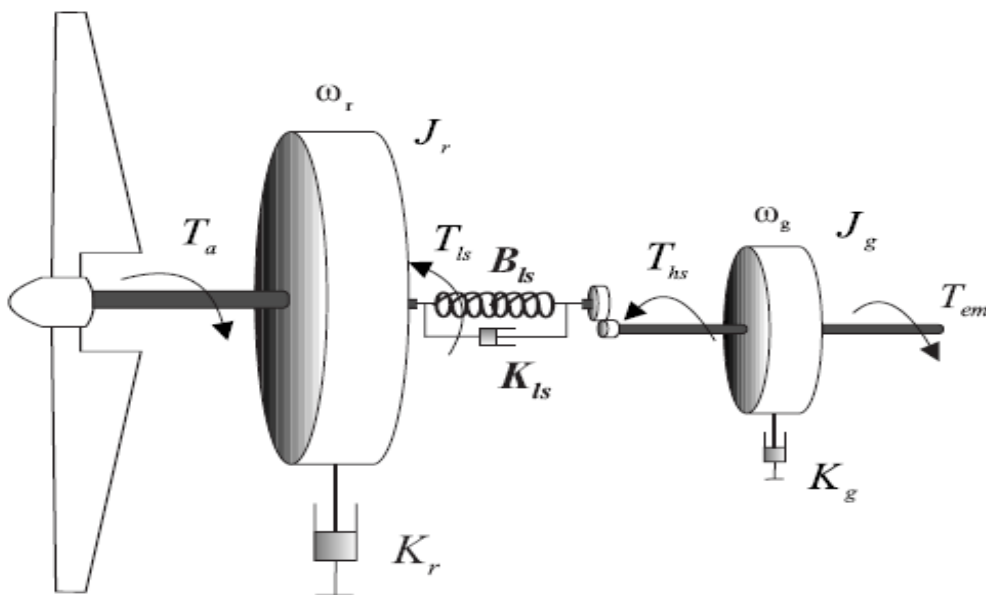


Figura 5.34: Esquema da dinâmica envolvida na geração de energia numa turbina eólica [21].

Podemos caracterizar a dinâmica do rotor através da seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$J_r \dot{\omega}_r = T_a - T_{ls} - K_r \omega_r \quad (5.8)$$

O subsistema mecânico que liga o rotor da turbina ao gerador é descrito por um veio que sofre torção e fricção devido a  $\omega_r$  ser diferente de  $\omega_{ls}$ . Assim, este subsistema é modelado por dois modelos inerciais ligados por uma mola e um amortecedor. Deste modo, podemos descrever o subsistema através da seguinte equação:

$$T_{ls} = B_{ls}(\theta_r - \theta_{ls}) + K_{ls}(\omega_r - \omega_{ls}) \quad (5.9)$$

O gerador é accionado pelo torque do veio de alta velocidade e travado pelo torque electromagnético [21]. Também podemos caracterizar esta dinâmica através de uma equação diferencial de primeira ordem:

$$J_g \dot{\omega}_g = T_{hs} - K_g \omega_g - T_{em} \quad (5.10)$$

A rotação é aumentada na caixa multiplicadora através de um sistema de engrenagens criando um rácio ( $n_g$ ) para obter a velocidade angular do gerador enquanto o torque do veio de baixa velocidade é aumentado.

$$n_g = \frac{T_{ls}}{T_{hs}} = \frac{\omega_{hs}}{\omega_{ls}} \quad (5.11)$$

$$n_g^2 J_g \dot{\omega}_{ls} = T_{hs} - n_g^2 K_g \omega_{ls} - n_g T_{em} \quad (5.12)$$

Se considerarmos o veio de baixa velocidade perfeitamente rígido pode-se assumir  $\omega_r = \omega_{ls}$  [21], logo:

$$J_t \dot{\omega}_r = T_a - K_t \omega_r - T_g \quad (5.13)$$

Onde:

$$\begin{aligned} J_t &= J_r + n_g^2 J_g \\ K_t &= K_r + n_g^2 K_g \\ T_g &= n_g T_{em} \end{aligned}$$

### 5.5.1. Modelo de Vento

Para se poder estudar a potência produzida por uma turbina eólica, é necessário conhecer as condições do vento. O vento tem propriedades conhecidas, num determinado ponto fixo do espaço, na sua gama de frequências, conhecida como espectro de Van der Hoven (Figura 5.35).

Duas componentes principais aparecem neste espectro; uma componente que varia lentamente com o tempo, que representa um valor sazonal,  $v_m(t)$ , periódico da velocidade do vento e uma componente turbulenta  $v_t(t)$  [22].

Von Karman propõe um modelo do espectro de potencia da componente turbulenta  $\Phi_v(\omega)$ :

$$\Phi_v(\omega) = \frac{K}{(1+(T_v\omega)^2)^{5/6}} \quad (5.14)$$

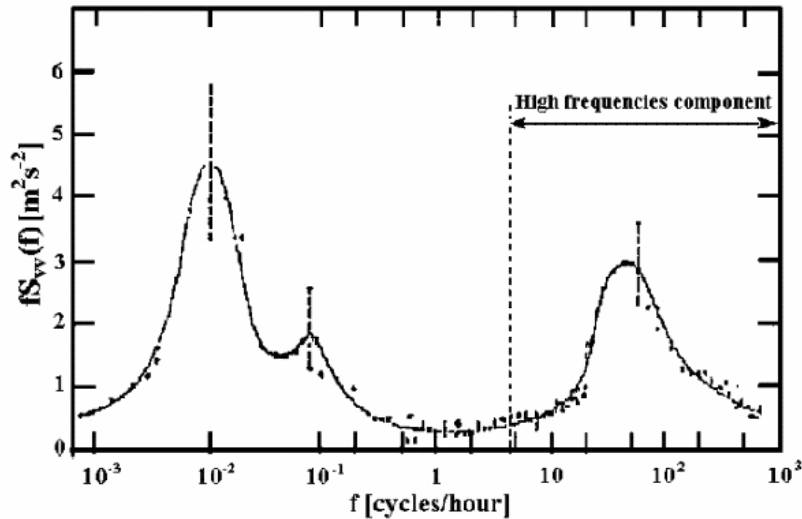


Figura 5.35: Espectro de Van der Hoven [22].

É empregue um modelo linear da componente turbulenta,  $v_t(t)$ , composto por um filtro de primeira ordem perturbado por um ruído branco gaussiano,  $m_v(t)$  [23].

**Nota:** O ruído branco gaussiano caracteriza-se por ter frequência média nula, isto é, em pequenos intervalos de tempo é relevante, mas em grandes intervalos de tempo torna-se irrelevante.

$$\dot{v}_t = -\frac{1}{T_v} v_t(t) + m_v(t) \quad (5.15)$$

O espectro de portencia correspondente a este modelo linear é:

$$\Phi_v(\omega) = \frac{K}{(1+(T_v\omega)^2)} \quad (5.16)$$

representando uma aproximação aceitável de (5.14).

A constante de tempo,  $T_v$ , de (5.15) e o desvio padrão de  $m_v(t)$ ,  $\sigma_m$ , dependem da velocidade media do vento,  $v_m(t)$ :

$$T_v = \frac{L}{v_m}$$

$$\sigma_m = K_{\sigma,v} v_m$$

onde a amplitude da turbulência ( $L$ ) e o parâmetro  $K_{\sigma,v}$  são próprios do local de instalação da turbina [22].

### 5.5.2. Equações lineares

A interligação dos modelos dos vários subsistemas da turbina origina um sistema altamente não-linear. Para a concepção dos controlos, o modelo pode ser linearizado em torno de um ponto de funcionamento  $S_{op} = \{x_{op}, u_{op}\}$ , linearizando a expressão do torque aerodinâmico.

$$\Delta T_a = \gamma_{\omega,op} \Delta \omega_T + \gamma_{v,op} \Delta v + \gamma_{\beta,op} \Delta \beta \quad (5.17)$$

O operador  $\Delta$  representa os desvios dos valores em torno do ponto de linearização  $S_{op}$  e os coeficientes  $\gamma_{\omega,op}$ ,  $\gamma_{v,op}$  e  $\gamma_{\beta,op}$  são definidos como:

$$\gamma_{\omega,op} = \left( \frac{\partial T_a}{\partial \omega_T} \right)_{S_{op}} = -\frac{1}{2} \rho \pi R^2 \frac{v^3}{\omega_T^2} C_p(\lambda, \beta)$$

Multiplicando o numerador e denominador de  $\gamma_{\omega,op}$  por  $\omega_T R^3$ , obtém-se a expressão final, (5.18):

$$\gamma_{\omega,op} = -\frac{1}{2} \rho \pi R^5 \frac{C_p(\lambda, \beta)}{\lambda^3} \omega_T \quad (5.18)$$

$$\gamma_{v,op} = \left( \frac{\partial T_a}{\partial v} \right)_{S_{op}} = \frac{3}{2} \rho \pi R^2 \frac{v^2}{\omega_T} C_p(\lambda, \beta)$$

Multiplicando o numerador e denominador de  $\gamma_{v,op}$  por  $\omega_T R^2$ , obtém-se a expressão final, (5.19):

$$\gamma_{v,op} = \frac{3}{2} \rho \pi R^4 \frac{C_p(\lambda, \beta)}{\lambda^2} \omega_T \quad (5.19)$$

$$\gamma_{\beta,op} = \left( \frac{\partial T_a}{\partial \beta} \right)_{S_{op}} = 0 \quad (5.20)$$

Assim, o modelo linearizado do sistema global, válido apenas em torno de um ponto de funcionamento, fica:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T) & 0 & -\frac{1}{J_T} & \frac{1}{J_T}\gamma_{\beta,op} & \frac{1}{J_T}\gamma_{v,op} \\ 0 & \frac{1}{J_G}f_G & \frac{1}{J_G} & 0 & 0 \\ d + \frac{k_\omega}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T) & -d - \frac{k_\omega}{J_G}f_G & \frac{k_\omega}{J_T} - \frac{k_\omega}{J_G} & \frac{k}{J_T}\gamma_{\beta,op} & \frac{k_v}{J_T}\gamma_{v,op} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_v} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_G} & 0 \\ \frac{k_\omega}{J_G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\beta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_G \\ \beta_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} m_v(t) \quad (21)$$

sendo  $x = [\Delta\omega_T \quad \Delta\omega_G \quad \Delta T_D \quad \Delta\beta \quad \Delta v_t]^T$ .  $J_T$  e  $J_G$  são os momentos de inércia da turbina e do gerador, respectivamente.  $f_T$  e  $f_G$  são os coeficientes de fricção do eixo nas extremidades, respectivamente, do rotor e do gerador.

As constantes  $k_\omega$  e  $k_v$  são dadas por:

$$k_\omega = -\frac{1}{2}\rho\pi R^5 \frac{C_p(\lambda,\beta)}{\lambda^3}$$

$$k_v = \frac{3}{2}\rho\pi R^4 \frac{C_p(\lambda,\beta)}{\lambda^2}$$

provenientes, respectivamente, de (5.18) e (5.19). Considerando a deflexão torsional provocada no eixo da turbina como pequena, podemos admitir  $\omega_T \cong \omega_G$ .

## 5.6. Simulações realizadas para o modelo da turbina eólica

Para este sistema apenas se estudará a situação em que o modelo do controlo operador é o modelo de Linearização por Realimentação [2].

Temos o sistema definido como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

onde,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T) & 0 & -\frac{1}{J_T} & \frac{1}{J_T}\gamma_{\beta,op} & \frac{1}{J_T}\gamma_{v,op} \\ 0 & \frac{1}{J_G}f_G & \frac{1}{J_G} & 0 & 0 \\ d + \frac{k_\omega}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T) & -d - \frac{k_\omega}{J_G}f_G & \frac{k_\omega}{J_T} - \frac{k_\omega}{J_G} & \frac{k}{J_T}\gamma_{\beta,op} & \frac{k_v}{J_T}\gamma_{v,op} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_v} \end{bmatrix} x$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_G} & 0 \\ \frac{k_\omega}{J_G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\beta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} T_G \\ \beta_{ref} \end{bmatrix}$$

Como o objectivo principal de controlo deste sistema é controlar a velocidade angular da turbina,  $\omega_t$ , e o passo,  $\beta$ , de forma a otimizar a produção de energia. Sendo assim, considera-se  $\omega_g$ ,  $T_D$  e  $v_t$  constantes e o sistema acaba por ficar dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_t \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T) & \frac{1}{J_T}\gamma_{\beta,op} \\ 0 & -\frac{1}{T_\beta} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\beta} \end{bmatrix} u \quad (5.22)$$

onde  $x = [\omega_t \quad \beta]^T$ ,  $u$  mantém-se igual e  $h(x) = x$ .

Uma vez que a primeira linha da matriz de controlo é nula, esse controlo não estaria funcional. Para que tal não aconteça é necessário aplicar as derivadas de Lie ao sistema.

Aplicando as derivadas de Lie ao sistema, obtém-se:

$$L_f h = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_T}(\gamma_{\omega,op} - f_T)\omega_t + \frac{1}{J_T}\gamma_{\beta,op}\beta \\ -\frac{1}{T_\beta}\beta \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 L_{g_{i,1}}(L_f^{y-1} h_1) & \sum_{i=1}^2 L_{g_{i,2}}(L_f^{y-1} h_1) \\ \sum_{i=1}^2 L_{g_{i,2}}(L_f^{y-1} h_2) & \sum_{i=1}^2 L_{g_{i,2}}(L_f^{y-1} h_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_T T_\beta} (\gamma_{\omega,op} - f_T) \omega_t + \frac{1}{J_T T_\beta} \gamma_{\beta,op} \beta \\ 0 & -\frac{1}{T_\beta^2} \beta \end{bmatrix}$$

dado que com estas derivadas o sistema não convergiu calculou-se as derivadas de 2ª ordem, obtendo:

$$L_f^2 h = \begin{bmatrix} \left[ \frac{1}{J_T} (\gamma_{\omega,op} - f_T) \right]^2 \omega_t + \frac{1}{J_T^2} (\gamma_{\omega,op} - f_T) \gamma_{\beta,op} \beta \\ -\frac{1}{T_\beta^2} \beta \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_\beta} \left[ \frac{1}{J_T} (\gamma_{\omega,op} - f_T) \right]^3 \omega_t + \frac{1}{T_\beta} \left[ \frac{1}{J_T} (\gamma_{\omega,op} - f_T) \right]^2 \gamma_{\beta,op} \beta \\ 0 & -\frac{1}{T_\beta^3} \beta \end{bmatrix}$$

Desta forma o controlo do sistema passará a ser dado pela expressão (2.22), como explicado no subcapítulo 2.2.2..

Para este sistema foram efectuadas duas simulações.

### Simulação 1:

Para este caso foi feita a simulação para um tempo de 15 segundos sendo que a cada 5 segundos a referência de funcionamento do sistema foi alterada.

O passo de simulação utilizado foi 0,001 segundos e o algoritmo foi o de Butcher, descrito no subcapítulo 4.3..

As referências de funcionamento são:

$$\begin{aligned} \text{xref} &= [0 \ 0]' \text{ para } t < 5; \\ \text{xref} &= [0.8 \ -0.4]' \text{ para } 5 \leq t < 10; \\ \text{xref} &= [-0.2 \ -0.0]' \text{ para } t \geq 10. \end{aligned}$$

Os resultados obtidos para esta simulação podem ser observados nas Figura 5.36 e Figura 5.37.

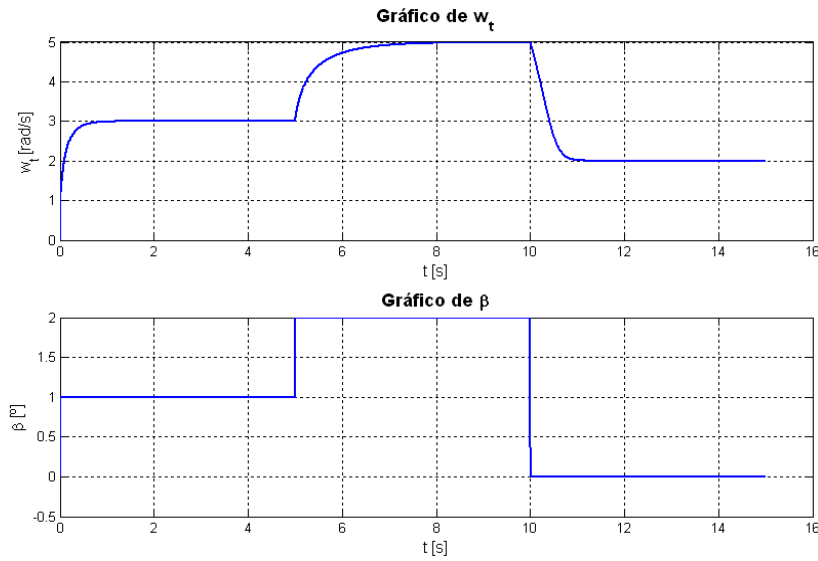


Figura 5.36: Comportamento dos estados através da Linearização por Realimentação.

Observando a Figura 5.36 pode-se verificar que o ângulo de passo se modifica de imediato, sendo que a velocidade do rotor já demora mais algum tempo a reagir. Esta grande diferença deve-se ao facto de que o passo está apenas relacionado com o seu actuador. Já a velocidade do rotor, além de estar relacionada com o ângulo de passo, também está sujeita a forças de inércia que impedem uma resposta mais célere.

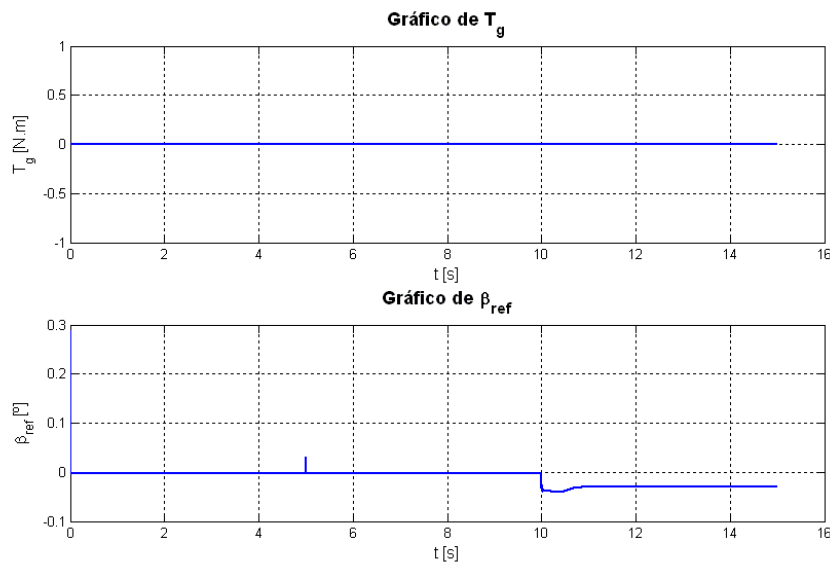


Figura 5.37: Comportamento dos controlos através da Linearização por Realimentação.

Relativamente à Figura 5.37, pode-se dizer que os controlos praticamente que não são perturbados. Isto porque o torque do gerador não tem influencia nestes estados e o passo responde de imediato, logo é natural que o seu controlo não sofra perturbações significativas.

## Simulação 2:

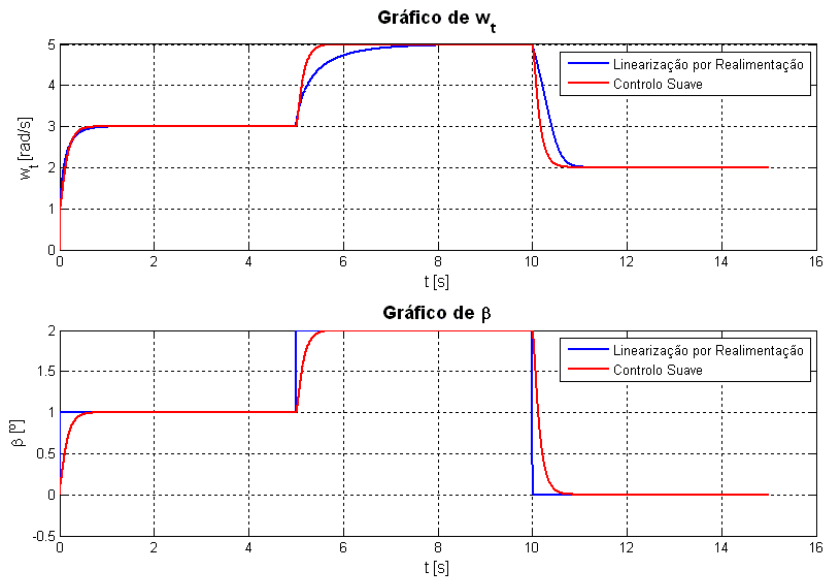
Esta simulação foi feita exactamente da mesma forma que a primeira, sendo que apenas foi acrescentada a componente do modelo suave exposta no capítulo 3 e descrita pela expressão (3.11), que deverá fornecer uma referência de trajectória ao sistema.

O tempo de simulação manteve-se, bem como o passo, o algoritmo e as referências.

As referências de funcionamento são:

$$\begin{aligned} x_{ref} &= [0 \ 0]' \text{ para } t < 5; \\ x_{ref} &= [0.8 \ -0.4]' \text{ para } 5 \leq t < 10; \\ x_{ref} &= [-0.2 \ -0.0]' \text{ para } t \geq 10. \end{aligned}$$

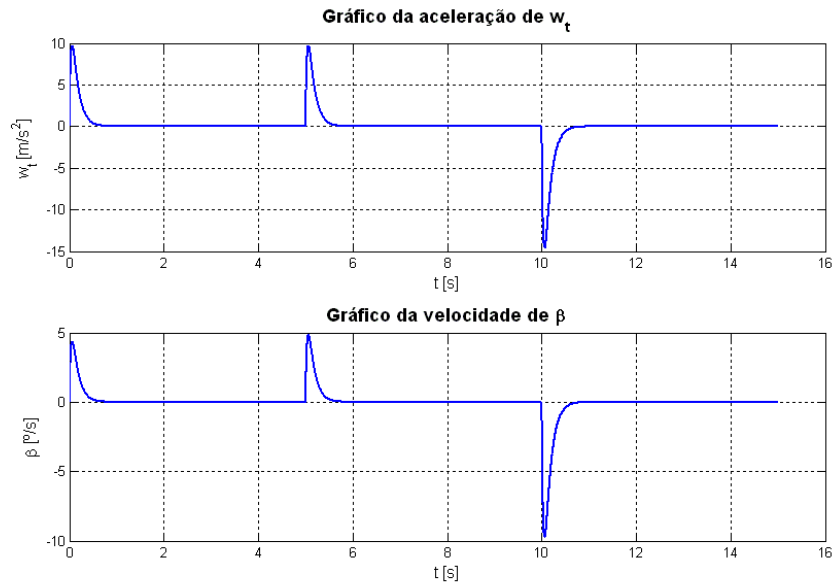
Nas Figura 5.38 e Figura 5.39 pode-se observar os resultados obtidos para esta simulação.



**Figura 5.38: Ilustração do comportamento do controlo suave comparado com a linearização por realimentação.**

Na Figura 5.38 observa-se que o controlo suave faz a velocidade angular convergir ligeiramente mais depressa, e o passo bastante mais lentamente. Ambas as variáveis convergem em sintonia uma com a outra. Sendo pouco visível, o arranque do controlo suave, para cada mudança de referência deve ser semelhante aos verificados nas simulações desenvolvidas no capítulo 4, onde este arranca com uma tendência horizontal contrariamente ao controlo operador.

Relativamente a esta simulação não se apresenta nenhum gráfico referente aos controlos, uma vez que estes são iguais aos da Figura 5.37 e estar-se-ia a fazer uma repetição das explicações já dadas nesse mesmo gráfico.



**Figura 5.39: Ilustração do comportamento dos estados em termos de aceleração e velocidade obtida através do controlo suave.**

Na Figura 5.39 observa-se a aceleração que o controlo suave confere à velocidade angular do rotor, cada vez que se muda a referência. Por outro lado, observa-se a velocidade de variação do passo. Tudo funciona correctamente uma vez que os sinais são positivos quando a referência aumenta e negativos quando a mesma diminui.

Tanto a aceleração como a velocidade ilustradas na Figura 5.39 convergem em sintonia, uma com a outra e também com os estados do controlo suave, da Figura 5.38, como era de esperar.

## 6. Conclusão

Este trabalho tinha como objectivo elaborar um método de controlo para sistemas com referências variáveis e com dois tipos de controlo diferentes, um controlo operador e um orientador. As funções de cada um destes controladores são distintas, mas no funcionamento do sistema, agem conjuntamente.

O controlo orientador baseia-se no controlo através duma equação diferencial de segunda ordem. Este controlo deve indicar o percurso a percorrer pelo sistema, isto é, deve fornecer uma referência de trajectória. Um dos interesses deste controlo reside no facto de tornar a resposta do sistema suave no momento da mudança de referência, facto que não sucede com o LQR ou a Linearização por Realimentação, onde a resposta às mesmas mudanças pode ser abrupta.

No caso do controlo operador, foram usados os métodos do LQR e da Linearização por Realimentação. Estes controlos têm a função de executar as referências para as quais o sistema deve convergir, ou seja, deve executar as referências de funcionamento do sistema e as referências de trajectória geradas pelo controlo de segunda ordem.

Os sistemas estudados nesta dissertação referiam-se ao controlo das taxas angulares de uma aeronave, neste caso o UAV SkyGuardian, e também ao estudo do funcionamento de uma turbina eólica, uma Vestas v29 225kW. No primeiro caso estudou-se o uso dos dois controlos operadores, no segundo estudou-se apenas a Linearização por Realimentação como controlo operador.

No caso do uso do LQR como controlo operador da aeronave, verifica-se que o controlo desempenha a sua função sem problemas necessitando, para 3 referências distintas de apenas 1,5 segundo para convergir em cada uma. O controlo orientador fornece uma trajectória suave ao sistema e ainda consegue convergir em menos de metade do tempo, como se pode verificar através da observação dos gráficos da Figura 4.6. Pode-se considerar isso um excelente resultado. Usando a Linearização por Realimentação para a aeronave, os estados convergem para cada uma das referências em apenas centésimas de segundo (ver Figura 4.9), mas o controlo suave tem o mesmo tempo de convergência que no caso do LQR. Isto deve-se ao facto de que este controlo força a trajectória do sistema, como já foi descrito. Sendo assim, a trajectória será a mesma independentemente do controlo operador, que executa a referência de funcionamento. Em ambos os casos, cada um dos estados converge exactamente ao mesmo tempo que os outros estados. Pode-se observar esta igualdade de trajectórias na Figura 4.13.

Na Figura 4.8 estão representados os gráficos que mostram o comportamento das acelerações angulares. Estas acelerações nada mais são do que as derivadas das taxas angulares e são calculadas pelo controlo de segunda ordem. Sendo assim, têm sinal igual ao da variação das taxas e anula-se quando estas convergem.

Relativamente ao sistema eólico, considerou-se o torque do veio da turbina constante, assim como a velocidade do vento e a velocidade angular do gerador. Neste caso Procurou-se controlar a velocidade angular do rotor e o ângulo de passo. Usando a Linearização por Realimentação para fornecer as referências de funcionamento, a velocidade angular convergiu de forma significativamente mais lenta que o ângulo de passo. Este facto justifica-se facilmente porque o sistema de variação do passo apenas se movimenta havendo uma ordem para tal. O sistema que regula a velocidade angular da

turbina tem que contar com grandes forças de inércia que contrariam a acção do sistema, tornando a resposta mais lenta. Quando se faz a introdução do controlo suave, este faz com que o passo convirja mais lentamente e a velocidade angular, mais rapidamente, sendo, ainda, que o fazem no mesmo espaço de tempo, tal como acontece com os estados da aeronave (ver Figura 5.38). Na Figura 5.39 está representado o gráfico das derivadas dos estados, tal como na Figura 4.8. Neste caso, como os estados eram uma velocidade e um ângulo, temos representado a aceleração e a velocidade respectivas. Novamente se observa que estes gráficos se anulam quando os estados convergem.

Em síntese, este estudo permite fazer a associação de 2 sistemas em paralelo, sendo que o controlo suave assume extrema importância no sentido em que exige muito menos esforço por parte dos actuadores aquando de uma alteração de referência. Desta forma consegue-se poupar imenso desgaste nos mesmos, na estrutura do sistema e permite, no caso de uma aeronave por exemplo, evitar grandes turbulências quando esta sofrer perturbações.

## Bibliografia

- [1] Barata, J., Modelling of Biofuel Droplets Dispersion and Evaporation, *Renewable Energy*, Vol. 33, 2008, pp. 769-779.
- [2] Sastry, S. S., Isidori, A., Adaptive Control of Linearizable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 11, November 1989, pp. 1123-1131.
- [3] Tan, H., Shu, S., Lin, F., An Optimal Control Approach to Robust Tracking of Linear Systems, *International Journal of Control*, Vol. 82, No. 3, March 2009, pp. 525-540.
- [4] Skogestad, S., Postlethwaite, I., *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Chichester (1996), John Wiley & Sons Ltd.
- [5] Engwerda, J., Weeren, A., A Result on Output Feedback Linear Quadratic Control, *Automatica*, Vol. 44, 2008, pp. 265-271
- [6] Tavallaei, M. A., Tousi, B., Closed Form Solution to an Optimal Control Problem by Orthogonal Polynomial Expansion, *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 1, No. 2, 2008, pp. 104-109
- [7] Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*, 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey (1996)
- [8] Byrnes, C. I., Isidori, A., Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 10, October 1991, pp. 1122-1137
- [9] Ioslovich, I., Gutman, P., On Smooth Optimal Control Determination, *Automatica*, Vol. 40, 2004, pp. 2175-2180
- [10] Bousson, K., Quintiães, M. S.S., An Optimal Linearization Approach to Spacecraft Attitude Stabilization, *International Review of Aerospace Engineering (I.RE.ASE.)*, Vol. 1, No. 6, December, 2008, pp. 503-511
- [11] Park, J. Y., Evans, D. J., Murugesan, K., Sekar, S., Murugesan, V., Optimal Control of Singular Systems Using the RK-Butcher Algorithm, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 81, No. 2, February, 2004, pp. 239-249
- [12] <http://www.b737.org.uk/apu.htm#Components> (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [13] [http://en.wikipedia.org/wiki/Ram\\_air\\_turbine](http://en.wikipedia.org/wiki/Ram_air_turbine) (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [14] [http://www.bibsciences.org/bibsup/j3ea/full\\_HS/vol4\\_HS1/1/trans/j3ea2005601.ppt](http://www.bibsciences.org/bibsup/j3ea/full_HS/vol4_HS1/1/trans/j3ea2005601.ppt) (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [15] [http://www.allsmallwindturbines.com/files/Scirocco\\_Engels.pdf](http://www.allsmallwindturbines.com/files/Scirocco_Engels.pdf) (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [16] [http://www.cresesb.cepel.br/index.php?link=http%3A//www.cresesb.cepel.br/tttutor/eolica/tutorial\\_eolica.htm](http://www.cresesb.cepel.br/index.php?link=http%3A//www.cresesb.cepel.br/tttutor/eolica/tutorial_eolica.htm) (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [17] Amirat, Y., Benbouzid, M. E. H., Bensaker, B., Wamkeue, R., Generators for Wind Energy Conversion Systems: State of the Art and Coming Attractions, *Journal of Electrical Systems*, Vol. 3, NO. 1, 2007, pp. 26-38
- [18] [http://www.inegi.pt/publicacoes/outras/Parques\\_EC3%3Blicos\\_em\\_Portugal\\_JJ\\_u08.pdf](http://www.inegi.pt/publicacoes/outras/Parques_EC3%3Blicos_em_Portugal_JJ_u08.pdf) (ultima visita em Janeiro de 2009)
- [19] Bianchi, F. D., Mantz, R. J., Christiansen, C. F., Gain Scheduling Control of Variable-Speed Wind Energy Conversion Systems Using Quasi-LPV Models, *Control Engineering Practice*, No. 13, 2005, pp. 247-255
- [20] Vivas, C., Castaño, F., Khamlichi, A., Bezzazi, M., Rubio, F. R., On the Robust Adaptive Control of Wind Turbines Without Wind Speed Measurements,

- Controlo 2008: 8<sup>th</sup> Portuguese Conference on Automatic Control*, July, 2008, pp. 536-541
- [21] Boukhezzar, B., Siguerdidjane, H., Nonlinear Control Variable Speed Wind Turbines without Wind Speed Measurement, *Proceedings of the 44<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, December, 2005, pp. 3456-3461
- [22] Lescher, F., Zhao, J. Y., Borne, P., Robust Gain Scheduling Controller for Pitch Regulated Variable Speed Wind Turbine, *Studies in Informatics and Control*, Vol. 14, No. 4, December, 2005, pp. 299-315
- [23] Lescher, F., Zhao, J. Y., Martinez, A., LQG Multiple Control of a Variable Speed Pitch Regulated Wind Turbine, *17<sup>th</sup> IMACS World Congress*, Paris, France, 2005

## **Anexos**

## A1. Dados do UAV SkyGuardian

Tabela 1: Dados do SkyGuardian utilizados neste trabalho.

PARÂMETRO	VALOR
$I_{xx}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	7,432
$I_{yy}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	3,702
$I_{zz}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	10,626
$I_{xy}$ [kg.m <sup>2</sup> ], $I_{yz}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	0
$I_{xz}$ [kg.m <sup>2</sup> ]	0,08
$C_{m0}$	0,0392
$C_{m\alpha}$	-0,2367
$C_{m\delta e}$	-5,5262
$C_{mq}$	-0,8544
$C_{m\dot{\alpha}}$	-2,1104
$C_{l\beta}$	-0,0583
$C_{lr}$	0,1731
$C_{lp}$	-0,5399
$C_{l\delta a}$	0,0570
$C_{l\delta r}$	0,0355
$C_{n\beta}$	-0,0211
$C_{nr}$	-0,0738
$C_{nr}$	0,0211
$C_{n\delta a}$	-0,0063
$C_{n\delta r}$	-0,0076
$\dot{\alpha}$ [rad/s]	0
$\alpha$ [rad]	0,0873
$\beta$ [rad]	0,0873
$H$ [m]	2000
$V$ [m/s]	30
$M$ [kg]	25
$C$ [m]	0,40
$B$ [m]	4,32
$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9,81
$S_f$ [m <sup>2</sup> ]	1,70

Os dados constantes da Tabela 1 são provenientes do relatório do Projecto I realizado no ano lectivo 2002/2003 na Universidade da Beira Interior sob orientação do Professor Pedro V. Gamboa.

## A2. Modelo de Vento

Os valores de velocidade utilizados para a criação deste modelo, referem-se ao mês de Julho. Retirou-se os valores dos 20 primeiros dias e fez-se cálculos para intervalos de 5 dias, tendo sido utilizado aquele que apresentou o menor desvio padrão, por ser o intervalo onde a média tem maior significado.

**Tabela 2: Valores de velocidade do vento utilizados no modelo de vento.**

Dia	Velocidade Média [m/s]	Velocidade Turbulenta [m/s]
11	1,9444	6,3889
12	1,3889	6,3889
13	2,7778	6,9444
14	1,1111	5
15	1,3889	5,2778

**Tabela 3: Valores finais obtidos para o modelo de vento.**

	Velocidade Média	Velocidade Turbulenta
Valor Médio	1,7222	6
Desvio Padrão	0,6632	0,8240
$K_{\sigma,v}$	0,3851	0,1373
L	-	1,9444
$T_v$	-	0,3241

A fonte dos dados utilizados no Modelo de Vento foi:

<http://www.wunderground.com/weatherstation/WXDailyHistory.asp?ID=IILHAVOG2&graphspan=month&month=7&day=14&year=2009>

Dados recolhidos na estação meteorológica da Gafanha da Nazaré, Ílhavo, localizada a 33 pés de altitude, ao que corresponde uma massa volúmica do ar de  $1,224\text{kg/m}^3$ .

### A3. Sistema Eólico

O sistema estudado corresponde a uma Turbina da Vestas, modelo v29 225kW, cujos dados foram fornecidos pela Supelec em Paris.

**Tabela 4: Dados do sistema eólico utilizados neste trabalho.**

<b>PARÂMETRO</b>	<b>VALOR</b>
P [kW]	225
Altura da Nacelle [m]	45
A [m <sup>2</sup> ]	661
R [m]	14,5
K <sub>r</sub>	1,11
K <sub>Is</sub>	1,16
K <sub>g</sub>	1,3
B <sub>Is</sub>	5,7
J <sub>r</sub> [kg.m <sup>2</sup> ]	90000
J <sub>g</sub> [kg.m <sup>2</sup> ]	10
T <sub>β</sub> [segundos]	0,18
f <sub>T</sub>	0,12
f <sub>G</sub>	0,09
D [m]	0,7