

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR



**MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ÓPTIMA PARA O
CONTROLO DE SISTEMAS DE AERONAVES**

MARTA SOFIA DE SÁ QUINTIÃES

COVILHÃ

2008

MARTA SOFIA DE SÁ QUINTIÃES

**MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ÓPTIMA PARA O
CONTROLO DE SISTEMAS DE AERONAVES**

DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA AERONÁUTICA APRESENTADA À UNIVERSIDADE DA BEIRA
INTERIOR

TESE REALIZADA SOB ORIENTAÇÃO DO PROFESSOR DOUTOR
KOUAMANA BOUSSON

Índice

1.	Introdução.....	9
1.1.	Introdução	9
1.2.	Revisão Bibliográfica.....	10
1.2.1.	Linearização por expansão em séries de Taylor.....	11
1.2.2.	Linearização Óptima.....	12
1.2.3.	Linearização Formal	17
1.2.4.	Linearização Estocástica.....	20
1.2.5.	Linearização Universal	23
1.2.6.	Linearização por Feedback.....	25
2.	Problemática da Linearização.....	29
2.1.	Método de Linearização Óptima.....	30
2.2.	Método de Densificação do Domínio (Curvas de Densificação).....	31
3.	Estabilidade (Estabilidade Estática e Estabilidade Dinâmica)	34
3.1.	Estabilidade no sentido de Lyapunov	36
3.1.1.	Estabilidade Assimptótica	36
3.1.2.	Estabilidade Não - Assimptótica (Estabilidade simples).....	37
4.	Controlabilidade e Observabilidade	38
4.1.	Teorema da Dualidade de Kalman.....	39
4.2.	Controlo	40
4.2.1.	LQR – Linear Quadratic Regulator	41
4.3.	Domínio de Atracção	43
5.	Simulação	45
6.	Aplicações	47
6.1.	Modelo da aeronave F-8 Crusader Fighter	47
6.2.	Sistema de um Pêndulo Rotativo Invertido (Rotary Inverted Pendulum (RIP) System).....	55
6.3.	Modelo de um satélite.....	74
7.	Conclusões.....	95
8.	Referências	100

Índice de figuras

Figura 1. Curva de densificação com $\mu = 3$	33
Figura 2. Curva de densificação com $\mu = 6$	33
Figura 3. Estabilidade estática positiva (estaticamente estável)	34
Figura 4. Estabilidade estática negativa (estaticamente instável)	35
Figura 5. Estabilidade estática neutra	35
Figura 6. Dinamicamente estável	35
Figura 7. Estabilidade dinâmica neutra	35
Figura 8. Dinamicamente instável	36
Figura 9. Representação dos controlos primários e dos eixos que relacionam os ângulos de manobra	48
Figura 10. Representação das forças actuantes num perfil de asa e de cauda	49
Figura 11. Resultados de simulação obtidos para ambos os métodos de linearização quando presentes à perturbação acima indicada: linearização óptima (—), linearização clássica (--)	52
Figura 12. Resultados de simulação obtidos para ambos os métodos de linearização: linearização óptima (—), linearização clássica (--)	53
Figura 13. Resultados obtidos para a máxima perturbação suportada pelo sistema, quando linearizado pelo método de linearização óptima	54
Figura 14. Resultados obtidos para o método de linearização clássica, quando o modelo é sujeito à perturbação anterior	54
Figura 15. Vista esquemática do sistema do pêndulo rotativo invertido	56
Figura 16. Sistema do pêndulo rotativo invertido construído no Laboratório de Robótica da Universidade de Tabriz	58
Figura 17. Comparação de resultados entre o método de linearização óptima (—) e o método de linearização clássica (--)	63
Figura 18. Comparação de resultados entre o método de linearização óptima (—) e o método de linearização clássica (--)	64
Figura 19. Resultados obtidos para a máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado pelo método de linearização clássica	65
Figura 20. Resultados obtidos para o método de linearização óptima com a máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado pelo método de linearização clássica	66
Figura 21. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado classicamente: linearização óptima (—) e linearização clássica (--)	67
Figura 22. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado classicamente: linearização óptima (—) e linearização clássica (--)	68

Figura 23. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação imposta por sistema linearizado classicamente: linearização ótima (–) e linearização clássica (–) 69

Figura 24. Resultados para máxima perturbação suportada pelo sistema quando linearizado pelo método de linearização ótima 70

Figura 25. Resultados obtidos para a perturbação (6.16) mas simulando com o método de linearização clássica 71

Figura 26. Comportamento do sistema quando sujeito à perturbação (6.17) e utilizando o método de linearização ótima 72

Figura 27. Comportamento do sistema quando sujeito à perturbação (6.17) e utilizando o método de linearização clássica 73

Figura 28. Imagem de um satélite de comunicações..... 74

Figura 29. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização ótima (–) e linearização clássica (–) 82

Figura 30. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 1$ e $x_0 = [0.02 \ 0.008 \ 0.002 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5]^T$: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 83

Figura 31. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 1$ e $x_0 = [0.02 \ 0.008 \ 0.002 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5]^T$: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 83

Figura 32. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização ótima (–) e linearização clássica (–) 84

Figura 33. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 0.5$ e $x_0 = [0.02 \ 0.008 \ 0.002 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5]^T$: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 85

Figura 34. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 0.5$ e $x_0 = [0.02 \ 0.008 \ 0.002 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5]^T$: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 86

Figura 35. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização ótima (–) e linearização clássica (–) 87

Figura 36. Resposta dos controlos às situações impostas anteriormente: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 87

Figura 37. Resposta dos controlos às situações impostas anteriormente: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 88

Figura 38. Resultados obtidos apenas para o método de linearização ótima 89

Figura 39. Resultados obtidos apenas para o método de linearização ótima: u_1 (–), u_2 (–) e u_3 (···) 90

Figura 40. Resultados obtidos para o método de linearização clássica e para um estado suficientemente afastado do equilíbrio 91

Figura 41. Resultados obtidos para o modelo do satélite utilizando o método de linearização ótima e um novo estado suficientemente afastado do equilíbrio 92

Figura 42. Resultados obtidos para o método de linearização clássica: u_1 (—), u_2 (--) e u_3 (···) 93

Figura 43. Resultados obtidos para o método de linearização ótima: u_1 (—), u_2 (--) e u_3 (···) 93

Resumo

Todos os veículos aéreos possuem uma dinâmica de voo não linear e é sabido que a teoria de controlo é mais explorada no caso dos sistemas lineares. Como tal, na presença de um sistema não linear torna-se vital, em geral, linearizá-lo para estudar o comportamento do mesmo. É sobre a problemática de linearização que este trabalho de dissertação incide. Foi proposto um novo método de linearização óptima que procura o modelo linear, o mais próximo possível do sistema não linear considerado. Enquanto os métodos de linearização existentes não garantem a validade do modelo linearizado em determinados domínios de estados e de controlos, o método proposto tem como objectivo a viabilidade do modelo linear obtido em domínios previamente escolhidos pelo utilizador.

De modo a validar o método de linearização óptima aqui apresentado, aplicámo-lo a três sistemas dinâmicos distintos e concluímos sobre os mesmos. Os sistemas aos quais aplicamos o método são, respectivamente, ao modelo não linear dinâmico da aeronave F-8 Crusader Fighter, ao modelo de um pêndulo rotativo invertido e ao modelo não linear de um satélite.

1. Introdução

1.1. Introdução

Na teoria de controlo clássica a análise era feita no domínio da frequência, permitindo apenas um bom estudo sobre o comportamento de sistemas SISO (única entrada para uma única saída). Pelo contrário, a teoria de controlo moderna utiliza uma representação em espaço de estado, no domínio do tempo. Esta representação permitiu o avanço no desenvolvimento do estudo de sistemas MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas), sistemas, estes, que estão presentes na maioria dos casos práticos. Ambos os sistemas lineares e não lineares podem ser representados em espaço de estado, no entanto, os sistemas não lineares carecem, em geral, de ser linearizados, resultando num sistema linear, que melhor traduza o comportamento do sistema não linear inicial na vizinhança dos pontos de equilíbrio, que depois será representado em espaço de estado. O interesse da linearização, seja qual for o método usado, é poder utilizar as ferramentas de controlo linear, que são já muito bem elaboradas, enquanto o controlo puramente não linear requer um processamento mais pesado para qual a tecnologia actual, às vezes, se torna limitada. É sobre os sistemas não lineares que vamos dar mais importância, uma vez que todos os veículos aéreos têm uma dinâmica de voo não linear.

Mas de facto, o que é um sistema não linear? Consideremos o sistema de controlo dinâmico descrito na forma,

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

Onde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa o vector de estado, $u \in \mathfrak{R}^m$ representa o vector de controlo e $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ representa uma função. O sistema cujo modelo está definido pela equação (1.1) é dito não linear quando a função f for não linear.

Para estudar o comportamento destes sistemas, nestas situações, temos, em geral, que os linearizar através do método mais adequado, dependendo da aplicação prática do sistema em questão. Este método de linearização deve fornecer um sistema linear, o

mais semelhante possível do sistema não linear, em termos de informação acerca do mesmo. Devemos ter sempre em conta que, ao linearizar um sistema não linear, estamos a perder qualquer tipo de informação sobre o comportamento real do sistema original. Para que esta perda de informação seja minimizada é necessário ter conhecimento prático do sistema não linear e aplicar um método de linearização adequado. O presente trabalho de dissertação pretende apresentar um método tal que leva a perdas mínimas de informação sobre o sistema não linear de base.

Para uma determinada lei de controlo $u(x)$ e um ponto inicial x no espaço de estado, podemos pensar na solução de $x(t)$ da equação (1.1), como uma função que transfere o estado inicial, no tempo zero, para qualquer outro estado, no tempo t [1]. O estudo, aqui presente, sobre sistemas de controlo não lineares é focado num método de linearização óptimo, que resultará num sistema linear cujo comportamento deverá ser o mais próximo possível do sistema real, não linear, e que nos proporcionará concluir sobre o mesmo com base no estudo da estabilidade, controlabilidade e observabilidade. Será utilizado um controlador óptimo, projectado através do método dos reguladores lineares quadráticos, que é muito dependente da informação que os estados transportam, acerca do sistema. Nota-se aqui que, quanto melhor for a informação do sistema implícita nas variáveis de estado, melhor será a tradução dessa informação para o controlador. É muito importante a relação entre uma determinada lei de controlo e a região do espaço de estado que pode ser transferida para uma outra região, através da lei de controlo. Note que o facto de poder estabilizar um sistema implica a controlabilidade do mesmo; contudo, para um sistema ser controlável não precisa ser necessariamente estável sem controlo, tal como controlabilidade não necessita que o sistema seja mantido no estado desejado [1].

1.2. Revisão Bibliográfica

A maior parte dos métodos de linearização existentes, para a dinâmica de voo não linear, são baseados numa aproximação de primeira ordem do modelo, na vizinhança de um dado ponto de equilíbrio ou referência. O modelo linear resultante aproxima o

modelo não linear tendo em conta variações relativamente pequenas de estados e de controlos em torno do ponto de referência. No entanto, o domínio, onde este modelo linearizado é válido, não é conhecido com precisão.

Os veículos aéreos têm uma dinâmica não linear e é sabido que os sistemas lineares são mais fáceis de tratar que os sistemas não lineares pois a sua teoria é mais antiga e madura, sendo também mais explorada. No entanto, sabe-se também, segundo Lyapunov, da teoria dos sistemas dinâmicos, que, qualquer sistema dinâmico não linear tem uma dinâmica quase linear na vizinhança dos seus pontos de equilíbrio. Aleksandr Lyapunov (1857 – 1918) desenvolveu, a partir de 1898, uma teoria rigorosa sobre a estabilidade de sistemas e as funções com o seu nome, funções de Lyapunov, provam a estabilidade de um certo ponto fixo num sistema dinâmico.

Existem vários métodos de linearização como sendo o mais conhecido e mais simples o método de linearização por expansão em série de Taylor, mas também, linearização estocástica, universal, por feedback, linearização ótima e linearização formal.

A linearização ótima e a linearização formal diferem dos outros métodos de linearização principalmente porque o domínio de cálculo pode ser definido pelo utilizador, isto é, o domínio de validade do problema é conhecido.

1.2.1. Linearização por expansão em séries de Taylor

Uma das aproximações mais práticas é a linearização através da expansão da série de Taylor, truncada na primeira ordem. Apesar de este método ser bastante prático, a sua implementação está limitada a regiões pequenas ou a sistemas lineares, pois o sistema linear resultante descreve o sistema não linear apenas para variações suficientemente pequenas, de estados e de controlos, em relação a uma dada referência ou ponto de equilíbrio.

Toda a função diferenciável pode ser escrita sob a forma de uma soma de polinómios.

Seja $f \in C^\infty$ (classe C^∞) num domínio D , isto é, f admite derivadas contínuas de qualquer ordem. Chama-se polinómio de Taylor de grau n da função f no ponto $a \in D$, ao polinómio,

$$P_a^n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1.1)$$

Aumentando o grau do polinómio obtemos uma aproximação cada vez mais sofisticada. No entanto, a linearização de Taylor requer que a função não linear seja diferenciável no ponto de referência e a ordem da expansão considerada é igual a um ($n=1$).

1.2.2. Linearização Óptima

A linearização óptima aproxima um sistema de funções não lineares pelo melhor modelo linear em torno de uma região específica de estados e de controlos. Este método encontra a melhor aproximação linear de uma dada função não linear. É, deste modo, um método de linearização que trabalha em torno de um domínio definido, exacto, de estados e controlos e é aplicável a funções integráveis no sentido de Lebesgue. Sendo o integral de Lebesgue uma generalização do conceito de integral de Riemann, apresentando, no entanto, vantagens sobretudo em relação aos limites.

A linearização óptima pelos mínimos quadrados é uma ferramenta apropriada para obter a melhor aproximação linear de uma função não linear em torno de uma região específica de estados e de controlos. Zhao [2] trabalhou a linearização óptima como um problema de optimização dos mínimos quadrados, no espaço de funções. Este método aplica-se a qualquer função contínua e resulta num método de linearização numérico baseado na integração múltipla [2]. Consideremos um sistema não linear descrito por uma equação diferencial ordinária,

$$\dot{X} = F(X, U) \quad (1.2)$$

Onde X representa o vector de estado ($n \times 1$), U representa o vector de controlo ($m \times 1$) e $F(X, U)$ é contínua em X e em U . Seja (X_e, U_e) um ponto de equilíbrio e seja a condição $F(X_e, U_e) = 0$ tida em conta. A linearização óptima determina as matrizes constantes $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ que minimizam,

$$I = \|F(X_e + x, U_e + u) - Ax - Bu\| \quad (1.3)$$

Onde $x = X - X_e$, $u = U - U_e$, $x \in D_x$ e $u \in D_u$, tendo em conta que D_x e D_u são regiões de interesse para estados e controlos.

Como resultado, obtém-se o modelo linear: $\dot{x} = Ax + Bu + g(x, u)$, em que $g(x, u)$ é referente ao erro. Neste caso, podemos chamar linearização estática pois este método aproxima a própria função não linear numa função linear. Por outro lado, a linearização óptima dinâmica encontra o sistema linear que melhor aproxima a resposta de um sistema não linear de acordo com condições específicas.

A linearização óptima pelos mínimos quadrados encontra as matrizes constantes A e B que minimizam,

$$I(A, B) = \|F(X_e + x, U_e + u) - Ax - Bu\|_2^2 \\ \triangleq \iint_{D_u D_x} [F - Ax - Bu]^T \cdot [F - Ax - Bu] dx du \quad (1.4)$$

Tendo em conta que D_x e D_u contêm os vectores zero. A solução da equação acima, se existir, é única. E a solução existe se a matriz $\int_{D_z} zz^T dz$ não for singular. A única solução

da linearização óptima dos mínimos quadrados é, $P = \left(\int_{D_z} F(Ze + z) z^T dz \right) \left(\int_{D_z} zz^T dz \right)^{-1}$

[2].

Quando estabilizamos um sistema não linear em torno de uma condição de equilíbrio, podemos determinar o domínio de estados e controlos causados por perturbações nas condições iniciais. Depois é só aplicar a linearização óptima em torno desses controlos. Este método, contudo, apresenta uma grande limitação que é o facto de se tratar de integrações múltiplas. É fácil perceber que, se o domínio de integração for grande, a dimensão do cálculo exigido deixa de ser simples. Bousson [3] apresenta, por sua vez, um método de linearização óptima baseada no domínio da densificação que, em vez de envolver integrações múltiplas envolve amostragem do domínio de interesse, obtendo assim uma linearização com dimensões elevadas muito mais fáceis de tratar. Enquanto Zhao [2] faz uma aproximação no espaço de funções, pelo menos contínuas, o método de Bousson [3] requer aproximações no espaço de parâmetros, o que permite lidar com funções que podem ser mesmo descontínuas.

No método de Bousson [3], é considerado um modelo de controlo não linear descrito por um sistema diferencial, na forma,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.5)$$

Onde $x \in D_x \subset \mathfrak{R}^n$ (vector de estado) , $u \in D_u \subset \mathfrak{R}^m$ (vector de controlo) e f é uma função não linear com validade em $D_x \times D_u$ [3].

Em primeiro lugar é necessário encontrar as matrizes A e B que minimizam a função J definida por,

$$J(A, B) = \|f(x_e + x, u_e + u) - Ax - Bu\|^2 \quad (1.6)$$

Para $x \in D_x$ e $u \in D_u$, (x_e, u_e) torna-se um ponto de equilíbrio no espaço de estado – controlo, em que,

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0 \quad (1.7)$$

A linearização óptima é, na verdade, um problema de aproximação óptima, no sentido em que se procura a melhor aproximação linear de um modelo não linear. Além disso, o problema da aproximação é estabelecido no espaço de funções ou de parâmetros e recorrendo a uma computação multidimensional integral ou não. Esta aproximação reúne algumas características. Primeiro, a função f pode ser descontínua e em segundo lugar, o problema da aproximação é estabelecido mais no espaço de parâmetros do que no espaço de funções. No entanto, encontramos os elementos a_{ij} e b_{kl} das matrizes A e B , respectivamente, tal que, para um dado número fixo S de pontos em $D = D_x \times D_u$, a seguinte soma seja minimizada,

$$J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nm}) = \sum_{(x_s, u_s) \in S} \|f(x_e + x_s, u_e + u_s) - Ax_s - Bu_s\|^2 \quad (1.8)$$

$$\Leftrightarrow J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nm}) = \sum_{s=1}^N \|f(x_e + x_s, u_e + u_s) - Ax_s - Bu_s\|^2$$

Seja,

$$y = f(x_e + x, u_e + u) \text{ para cada } (x, u) \in D \quad (1.9)$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \text{ e } C = [A \quad B]$$

Para a resolução do problema, expresso nas equações acima, é necessário apresentá-lo como um problema de regressão linear múltipla, baseado na relação,

$$y = C.z \quad (1.10)$$

Onde z é o vector de entrada, y é o vector de saída e C representa um parâmetro matricial desconhecido, que deve ser estimado. A partir da teoria da regressão linear múltipla, a solução do problema baseado na relação linear (1.10) é dado por,

$$C = \left(\sum_{s=1}^N y_s \cdot z_s^T \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^N z_s \cdot z_s^T \right)^{-1} \quad (1.11)$$

Os vectores z_s são determinados pelo método de densificação que resumimos a seguir [4].

A densificação consiste em “encher” o domínio de estados e de controlos pela curva de uma função de tal forma que todos os pontos do domínio estejam relativamente perto desta curva. A densificação considera um domínio $D \subseteq \mathfrak{R}^r$ e um intervalo real $J = [a, b]$. Assim, uma função $h: J \rightarrow D$ é dita como sendo uma curva densa de taxa α em D , se,

$$\forall x \in D, \exists t \in J : \|h(t) - x\| \leq \alpha \quad (1.12)$$

É considerada a densificação do domínio D numa região em forma de caixa (hiper-rectângulo). Deste modo, torna-se fundamental saber como se constrói uma curva densa de taxa α numa caixa [4]. Considere-se uma função f continuamente definida em $[0, 1]^d$ e a seguinte curva $g(t)$,

$$g(t) \begin{cases} \varphi_1(t) = t \\ \dots \\ \varphi_i(t) = n \cdot \varphi_{i-1}(t) - [n \cdot \varphi_{i-1}(t)] \end{cases}, t \in [0, 1], 1 \leq i \leq d \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow g(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots, \varphi_d(t)) \quad (1.13.1)$$

Onde a dimensão d é dada por, $\Delta t_{\text{máx}} = \frac{1}{k^{d-2}}$.

Também o parâmetro n é definido em função da precisão ε .

De acordo com o método de densificação, a função inicial h pode ser, agora, definida por,

$$h: J \xrightarrow{g} J^n \xrightarrow{\omega} B$$

Onde $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e o intervalo passa a ser definido por $J = [0, 1]$.

$y_i = (b_i - a_i)x_i + a_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ e a função h passa a ser,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= (b_1 - a_1)\varphi_1(t) + a_1 \\ (\dots) & \\ h_i(t) &= (b_i - a_i)\varphi_i(t) + a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{1.14}$$

O problema da linearização [3] é estabelecido como um problema de regressão linear múltipla usando uma amostra de pontos como entradas e variações não lineares como saídas [3]. No método de densificação apresentado, o número de pontos, dentro do intervalo, é um parâmetro escolhido [4].

1.2.3. Linearização Formal

Existem ainda outros métodos de linearização. Hitoshi Takata tem, ao longo dos anos, tratado especialmente do método de linearização formal. Começou por tratar o problema da linearização formal desenvolvendo um método onde aumentava as variáveis de estado para sistemas não lineares [5]. Este método de linearização formal transforma um sistema não linear num sistema linear estendido, de tal modo que o sistema linear resultante é de certo modo equivalente, ou até considerado óptimo, relativamente ao sistema original. É introduzida uma sequência de funções linearmente independentes, e o sistema não linear dado é transformado numa série de equações dinâmicas [5]. Uma destas equações pode ser observada como sendo a equação dinâmica resultante, no espaço da função, transposta pelas funções linearmente independentes. Deste modo, a equação não linear dada é convertida numa equação linear estendida. Infelizmente, para este método, apenas é possível introduzir um número exacto de funções linearmente independentes para sistemas especiais. O mesmo autor tentou mais tarde desenvolver o método de linearização formal. Propôs um método de linearização formal computacional usando a interpolação cúbica de Hermite [6]. Neste método é introduzida uma função linearizadora que consiste nas variáveis de estado, nos seus quadrados e nos

seus cubos e a dimensão desta função é determinada automaticamente pelo número original de variáveis de estado. Depois, cada termo não linear é aproximado pela interpolação cúbica de Hermite e linearizado com respeito á função linearizadora [6]. O problema da linearização formal é considerado para o caso de um sistema escalar e para um sistema multidimensional.

Para um sistema escalar, seja o sistema não linear dado por,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , x(0) = x_0 \quad (1.15)$$

Onde $f \in C^1$ é uma função não linear. Seja também a função linearizadora dada por:

$$\phi(x) = [x, x^2, x^3]^T \quad (1.16)$$

Diferenciamos esta função em relação a t e aproximamos cada elemento, resultante dessa diferenciação, pela interpolação cúbica de Hermite. O domínio é dividido em subdomínios de modo apropriado tendo em conta a não linearidade da função $f(x)$.

No caso dos sistemas multidimensionais, vamos considerar o sistema não linear dado por,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , x(0) = x_0 \quad (1.17)$$

Onde $f = [f_1, \dots, f_n]^T \in C^n$ é uma função vector não linear. Neste caso, a função linearizadora é dada por,

$$\phi(x) = [T_{(100\dots 0)}(x), T_{(200\dots 0)}(x), T_{(300\dots 0)}(x), T_{(010\dots 0)}(x), T_{(110\dots 0)}(x), \dots, T_{(r_1 r_2 \dots r_n)}(x), \dots, T_{(333\dots 3)}(x)]^T \quad (1.18)$$

Onde $T_{(r_1 r_2 \dots r_n)}(x) = \prod_{k=1}^n x_k^{r_k}$, $r_k = 0, 1, 2, 3$ ($r_1 + \dots + r_n \neq 0$).

Similarmente aos sistemas escalares, a função linearizadora é diferenciada em t e aproximamos cada elemento pela interpolação cúbica de Hermite.

Este método de linearização formal é aplicável a sistemas não lineares práticos e têm uma implementação simples [6].

Foi também considerado o método de linearização formal que transforma um dado sistema não linear num sistema linear através de interpolação de Chebyshev [7]. Esta linearização é, segundo o autor, mais exacta e mais fácil de implementar. Assim como no método anterior, a banda de erro mostra que a exactidão desta aproximação aumenta com o aumento da ordem dos polinómios de Chebyshev [7]. É necessário recorrer a uma computação numérica, devido à não linearidade dos sistemas (descritos por equações diferenciais não lineares).

Vamos assumir que o sistema não linear é dado por,

$$\sum_1: \dot{x} = f(x(t)) \quad , \quad x(0) = x_0 \in D \quad (1.19)$$

Onde o domínio é definido à partida por, $D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n$ ($m_i \in R$ refere-se ao meio do domínio e $p_i > 0$ refere-se a metade do domínio). O domínio básico dos polinómios de Chebyshev é $D_0 = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ e x sofre uma transformação por $y = P^{-1}(x - m)$.

Os polinómios de Chebyshev $\{T_r(\cdot)\}$ são definidos por,

$$T_r(y_i) = \cos(r \cdot \cos^{-1} y_i) \quad , \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.20)$$

A linearização formal usando os polinómios de Chebyshev foi ainda mais explorada pois foi introduzida a variável tempo [8]. Trata-se de um problema geral de sistemas

não lineares que variam no tempo. O sistema não linear variável no tempo é transformado num sistema linear variável no tempo, através da interpolação de Chebyshev nas variáveis de estado e usando a expansão de Laguerre para a variável tempo [8]. Ficou provado que, à medida que a ordem dos polinómios de Chebyshev e Laguerre aumenta, mais exacto se torna o algoritmo descrito.

Consideremos o seguinte sistema não linear variável no tempo:

$$\sum_1: \dot{x} = f(x(t)) \quad , \quad x(0) = x_0 \in D \quad (1.21)$$

Onde o domínio é determinado como no método anterior, mas considerando o domínio no tempo como $D = [0, \infty)$.

Os polinómios de Chebyshev $\{T_r(\cdot)\}$ são definidos por,

$$T_r(y_i) \equiv \frac{(-2)^r \cdot r!}{(2r)!} (1 - y_i^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^r}{dy_i^r} (1 - y_i^2)^{r - \frac{1}{2}} \quad (1.22)$$

E, tendo em conta que foram introduzidos os polinómios de Laguerre, estes são definidos por,

$$L_r(t) \equiv e^t \frac{d^r}{dt^r} (t^r \cdot e^{-t}) \quad , \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.23)$$

Os resultados provaram o elevado grau de precisão deste método de linearização formal.

1.2.4. Linearização Estocástica

O método de linearização estocástica, ou estatística, envolve o desenvolvimento de fórmulas necessárias para computar as entradas aleatórias que descrevem funções para entradas e saídas múltiplas não lineares [9]. Em geral, este processo envolve avaliações de integrais múltiplos mas, em certos casos (classes) de não linearidades, estas

avaliações dos integrais múltiplos podem ser desprezadas (desconsideradas) e os cálculos simplificam bastante. O principal objectivo deste método é, uma vez mais, encontrar funções lineares que representam a melhor aproximação das funções não lineares estocásticas.

Consideremos uma função não linear dada por,

$$f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

Onde n e m representam números inteiros positivos.

Seja ξ um vector de ordem n , de variáveis aleatórias com média dada por $\bar{\xi} = E$ e a matriz de co-variância dada por $P := E(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^T$. Seja também $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ a média nula parte aleatória de ξ .

A linearização estatística é utilizada para encontrar as matrizes de ganho equivalentes \bar{N}_f e \tilde{N}_f que dependem de $\bar{\xi}$ e $\tilde{\xi}$, de tamanho $m \times n$, para aproximar a função não linear f , de tal modo que o erro de aproximação de média quadrada seja minimizado,

$$J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f) := E[f(\xi) - \bar{N}_f \bar{\xi} - \tilde{N}_f \tilde{\xi}]^T [f(\xi) - \bar{N}_f \bar{\xi} - \tilde{N}_f \tilde{\xi}] \quad (1.24)$$

As matrizes resultantes \bar{N}_f e \tilde{N}_f são chamadas de matrizes de ganho estatístico óptimas. Para a equação de estado geral $\dot{x} = f(x, u)$, o processo de linearização lida com equações de estado lineares,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{N}_f \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ \dot{\tilde{x}} &= \tilde{N}_f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Onde,

$$x = \bar{x} + \tilde{x}, u = \bar{u} + \tilde{u}, \bar{N}_f = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{N}_f = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \end{bmatrix}.$$

Note que o valor esperado em (1.24) é igual à soma dos valores esperados dos m termos quadrados individuais e onde cada termo da soma apenas depende de uma linha particular das matrizes \bar{N}_f e \tilde{N}_f [9]. E assim, o problema da minimização da equação (1.24) é resolvido reduzindo, simplesmente, m .

Consideremos, sem perda de generalidade, $m = 1$. As matrizes \bar{N}_f e \tilde{N}_f resultantes são matrizes linha. Para $m = 1$, o erro aproximado da média quadrada é,

$$J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f) = E[f(\xi) - \bar{N}_f \bar{\xi} - \tilde{N}_f \tilde{\xi}]^2 \quad (1.26)$$

A condição necessária para $J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f)$ ser mínimo é,

$$D_1 J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f) = \theta_{1 \times n} \quad (1.27)$$

$$D_2 J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f) = \theta_{1 \times n} \quad (1.28)$$

Onde $D_i J(\bar{N}_f, \tilde{N}_f)$ são as derivadas de J em relação à i -ésima variável de (\bar{N}_f, \tilde{N}_f) e θ representa a matriz zero de dimensão apropriada.

Da equação (1.27), a óptima matriz \bar{N}_f deve satisfazer,

$$2\bar{N}_f \bar{\xi} \bar{\xi}^T - 2Ef(\xi) \bar{\xi}^T = \theta_{1 \times n} \quad (1.29)$$

Claramente, se \bar{N}_f satisfaz,

$$\bar{\xi}^T \bar{N}_f^T = Ef(\xi) \quad (1.30)$$

A solução da equação (1.30) existe e em geral não é única. Assim, a solução absoluta mínima da equação (1.30) pode ser construída para $\bar{\xi} \neq \theta_{1 \times n}$, através de,

$$\bar{N}_f = \frac{\bar{\xi}^T E f(\xi)}{\bar{\xi}^T \bar{\xi}} \quad (1.31)$$

Do mesmo modo, da equação (1.28) a matriz \tilde{N}_f ótima deve satisfazer,

$$2\tilde{N}_f E(\tilde{\xi} \tilde{\xi}^T) - 2E[\tilde{\xi} f(\xi)] = 0 \quad (1.32)$$

Como a matriz da co-variância $P := E(\tilde{\xi} \tilde{\xi}^T)$ é positivamente definida e não singular, a única solução é dada por,

$$\tilde{N}_f = E[\tilde{\xi} f(\xi)] P^{-1} \quad (1.33)$$

Então, as equações (1.31) e (1.33) representam as formulas para o calculo das funções de entrada aleatórias. Para várias saídas não lineares, cada saída é considerada separadamente. Note que, para avaliar $E f(\xi)$ e $E[\tilde{\xi} f(\xi)]$ presentes nas equações (1.31) e (1.33) é necessário ter conhecimento da distribuição de probabilidade da variável aleatória ξ [9].

1.2.5. Linearização Universal

O conceito de linearização universal é fortemente associado aos filtros de Kalman Extendidos [10, 11]. O filtro de Kalman é frequentemente usado para combinar dados obtidos de diferentes sensores numa estimativa estatisticamente ótima. Deste modo, o filtro de Kalman é capaz de encontrar a melhor estimativa baseada na correcção de cada medida individual.

Esta técnica de linearização é apenas aplicável se as variações, para além do ponto nominal de operação ou trajectória, forem suficientemente pequenas. Pode ser aplicado ao monitoramento de um alvo [10, 11]. Deste modo, o monitoramento é melhor representado em coordenadas cartesianas, a dinâmica do alvo é linear e as medidas associadas são não lineares. Seja a dinâmica do alvo e medidas modeladas por,

$$z = h(x) + v \quad (1.34)$$

Onde o estado do alvo x e o processo de ruído estão em coordenadas cartesianas, mas a medida z e o ruído adicional v estão representadas nas coordenadas do sensor. Os modelos das medidas são não lineares, pelo que se torna fundamental lineariza-los.

Este método de linearização (linearização universal) é por vezes chamado de *pseudo linearização universal*, pois na verdade é baseada numa representação pseudo linear da função não linear [12]. Nesta aproximação assume-se que a função de medida não linear $h(x)$ pode ser reescrita na seguinte forma pseudo linear [12],

$$h(x) = h(\bar{x}) + G(z, \bar{x})(x - \bar{x}), \quad \forall x, \bar{x} \quad (1.35)$$

Onde $G(z, \bar{x})$ representa uma determinada função matricial e $z = h(x)$ é a medida ideal. O modelo da medição pseudo linear correspondente é,

$$z = G(z, \bar{x})x + d(z, \bar{x}) + v \quad (1.36)$$

Onde,

$$d(z, \bar{x}) = h(\bar{x}) - G(z, \bar{x})\bar{x} \quad (1.36.1)$$

A título de exemplo, consideremos $z = h(x) = x^3$.

Como,

$$\begin{aligned} x^3 - \bar{x}^3 &= (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2)(x - \bar{x}) \\ &= (z^{2/3} + z^{1/3}\bar{x} + \bar{x}^2)(x - \bar{x}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Temos,

$$G(z, \bar{x}) = z^{2/3} + z^{1/3}\bar{x} + \bar{x}^2.$$

Claramente nem todas as funções não lineares podem ser escritas na forma de linearização universal dada pela equação (1.35) e as que podem são chamadas de modificáveis, como as funções invertíveis. E para estes casos, podemos reescrever $h(x)$ na seguinte forma pseudo linear,

$$h(x) = h(\bar{x}) + H(x, \bar{x})(x - \bar{x}), \quad \forall x, \bar{x} \quad (1.38)$$

1.2.6. Linearização por Feedback

O método de linearização por feedback é bastante especial pois a sua aplicação é em particular para o controlo [13]. É, portanto, um dos mais importantes métodos para o controlo não linear [13]. Basicamente, o principal objectivo é achar (escolher) um valor de u (controlo) de modo que o sistema realimentado seja linear. Vamos considerar o sistema não linear na forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + cu \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para podermos tornar o sistema linear, vamos supor que queremos regular o sistema em torno na origem $[x_1, x_2] = [0, 0]$ e o controlo que torna o sistema linear é,

$$u = (a/c)\sin(x_1) + v/c \quad (1.39.1)$$

É fácil perceber que substituindo esta equação no sistema original (1.24), o sistema torna-se linear e fica,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v\end{aligned}\tag{1.40}$$

Podíamos tentar encontrar o valor mais apropriado de u (que torna o sistema linear) por iterações, mas sabemos á partida como escolher v de modo a regular o sistema, ou seja,

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2\tag{1.41}$$

Um sistema com uma entrada e uma saída, com utilidade para o controlo, segue as seguintes equações de estado e de saída,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.42}$$

Onde $x \in R^n$ é um vector, u representa uma entrada escalar e y uma saída escalar. Supondo que $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções diferenciáveis, é introduzida a noção de grau relativo. Vemos, nas equações anteriores que a saída y não depende explicitamente de u . Para saber quando a entrada aparece explicitamente na equação de saída, é necessário diferenciar a equação de saída o número de vezes que for preciso. O número de vezes que é preciso diferenciar a equação de saída, corresponde ao grau relativo [11].

Considerando a definição das derivadas de Lie, seja [13]: $\lambda : R^n \rightarrow R$ uma função diferenciável e f um vector campo, ambos pertencentes a um subconjunto U pertencente a R^n . A derivada de Lie de λ juntamente com f é dada por

$$\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial x}, f(x) \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) \text{ e é normalmente denominada por } L_f \lambda.$$

Então, para cada $x \in U$,

$$L_f \lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)\tag{1.43}$$

Diferenciando $L_f \lambda$ novamente, mas agora ao longo do vector campo g , obtemos,

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial(L_f \lambda)}{\partial x} g(x) \quad (1.44)$$

Note-se que esta diferenciação pode ser feita várias vezes ao longo do mesmo vector campo. O exemplo a seguir demonstra a simplicidade das definições apresentadas anteriormente no método de linearização por feedback. Vamos considerar a equação,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + e(1-x_1^2)x_2 + u \quad , e > 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Se a saída for $y = x_1$, as suas derivadas são dadas por,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + e(1-x_1^2)x_2 + u \quad , e > 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Daqui percebemos que o sistema tem um grau relativo igual a dois ($r = 2$) em R^2 .

Em termos das derivadas de Lie temos,

$$\begin{aligned} L_g L_f^0 h &= \frac{\partial h}{\partial x} g = [1, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ L_f h &= \frac{\partial h}{\partial x} f = [1, 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + e(1-x_1^2)x_2 \end{bmatrix} = x_2 \\ L_g L_f h &= \frac{\partial(x_2)}{\partial x} g = [1, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Apesar de ser uma técnica muito usada para o controlo de sistemas não lineares, tem também as suas limitações pois o número de componentes do vector de saída tem, para

que a linearização por realimentação seja aplicável, que ser igual ao número de componentes do vector de entrada, isto é, o sistema terá que ter obrigatoriamente o mesmo número de entradas e de saídas.

2. Problemática da Linearização

Na prática, todos os sistemas são não lineares, embora a teoria dos sistemas lineares seja muito mais madura e sofisticada. Da mesma forma acontece com os veículos aéreos, que têm uma dinâmica de voo não linear. Assim, para estudar o comportamento destes sistemas é necessário linearizar o modelo não linear e obter assim um sistema linear que caracterize o sistema original, não linear. Em teoria de sistemas dinâmicos, qualquer sistema dinâmico não linear possui uma dinâmica quase linear na vizinhança dos seus pontos de equilíbrio (Lyapunov). Existem vários métodos de linearização, sendo o mais antigo e explorado o método de linearização de Taylor ou linearização pela matriz Jacobiana, também chamado de linearização clássica. No entanto, estes métodos são baseados numa aproximação de primeira ordem do modelo, na vizinhança de uma dada referência ou ponto de equilíbrio. É óbvio que qualquer método de linearização está associado a uma perda de informação sobre o sistema e dependendo do método utilizado esta perda pode ser bastante significativa resultando numa má interpretação do modelo representativo do sistema.

O método de linearização ótima é aquele que permite obter uma perda de informação menor, neste contexto, isto é, determina a melhor aproximação linear de uma função não linear em torno de uma região específica de estados e de controlos. A linearização ótima é, assim, um método de linearização que trabalha em torno de uma região definida, exacta, de estados e controlos e é aplicável a funções contínuas.

O método de linearização ótima apresentado neste trabalho, no ponto seguinte, é, na realidade, uma evolução do método proposto por Bousson [3]. A metodologia do método segue a mesma apresentada por Bousson [3], mas difere no método de densificação do domínio. Este novo método de densificação do domínio é apresentado em detalhe no seguinte ponto.

2.1. Método de Linearização Ótima

Propomos, neste ponto, um método de linearização óptima que encontra a melhor aproximação de um modelo não linear através de um linear que melhor traduz o seu comportamento, onde o domínio de estado e de controlo é controlado pelo utilizador.

Consideremos um modelo de controlo de voo não linear, descrito por uma equação diferencial, na forma,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

Onde $x \in D_x \subset \mathfrak{R}^n$ é o vector de estado, $u \in D_u \subset \mathfrak{R}^m$ representa o vector de controlo e f uma função diferencial não linear de domínio $D_x \times D_u$.

Este método de aproximação é estabelecido no espaço da função recorrendo a uma computação multidimensional integral e está associado a um problema de identificação de parâmetros matriciais [3]. Deste modo, é necessário encontrar as matrizes A e B que minimizam a função de custo J , definida por,

$$J(A, B) = \|f(x_e + x, u_e + u) - Ax - Bu\|^2 \quad (2.2)$$

Onde (x_e, u_e) representa um ponto de equilíbrio tal que, $\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0$.

Note-se que esta aproximação reúne algumas características/limitações:

1. A função f deve ser descontínua;
2. O problema da aproximação é estabelecido mais sobre o parâmetro espaço do que sobre a função espaço. No entanto, encontramos os elementos a_{ij} e b_{kl} das matrizes A e B , respectivamente, para um dado número fixo, S , de pontos no

domínio de estados e controlos $D = D_x \times D_u$, de modo que a seguinte soma seja minimizada,

$$J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nm}) = \sum_{(x_s, u_s) \in S} \|f(x_e + x_s, u_e + u_s) - Ax_s - Bu_s\|^2 \quad (2.3)$$

Este número fixo de pontos, S , é determinado através do método de densificação do domínio que será apresentado a seguir e pode ser imposto pelo utilizador. Considerando este número de pontos como sendo N , então, a equação anterior fica,

$$J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{nm}) = \sum_{s=1}^N \|f(x_e + x_s, u_e + u_s) - Ax_s - Bu_s\|^2 \quad (2.4)$$

Consideramos as mudanças de variáveis apresentadas em (1.9).

De forma a resolver este problema, expresso nas equações anteriores, ele deve ser estabelecido como um problema de regressão linear múltipla, de acordo com a relação representada na equação (1.10).

Através da teoria da regressão linear múltipla, a solução do problema imposto pela relação linear anterior é dada pela equação (1.11).

A seguir apresentamos o método de densificação do domínio mais adequado para este método de linearização ótima.

2.2. Método de Densificação do Domínio (Curvas de Densificação)

É através deste método de densificação do domínio que conseguimos controlar o domínio do problema. Construímos uma espécie de caixa que contem várias curvas, as curvas de densificação. Sobre estas curvas, escolhemos um número de pontos adequados com o benefício de reduzir este número utilizando o método de linearização ótima sem, no entanto, prejudicar os resultados em termos de precisão [4].

Definição 1 [4]. Consideremos uma caixa (ou hiper-rectângulo) $B = \prod_{i=1}^r [a_i, b_i] \subset \mathfrak{R}^n$ e um intervalo real $J = [a, b]$. Então, a função $h : J \rightarrow B$ é dita como sendo uma curva densa α (α -dense curve) em B , se,

$$\forall x \in B, \exists t \in J : \|h(t) - x\| \leq \alpha \quad (2.5)$$

Note-se que $\| \cdot \|$ representa a norma Euclideana em \mathfrak{R}^n .

Vamos considerar então a função $h : J = [0, 1] \rightarrow B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, definida como:

$$\forall \theta \in J, h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta))$$

Com,

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(b_1 - a_1)}{2} \cos(\alpha_1 \theta) + \frac{(a_1 + b_1)}{2}, \\ h_2 &= \frac{(b_2 - a_2)}{2} \cos(\alpha_2 \theta) + \frac{(a_2 + b_2)}{2}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ h_n &= \frac{(b_n - a_n)}{2} \cos(\alpha_n \theta) + \frac{(a_n + b_n)}{2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde,

$$\alpha_n = \mu^{n-1} 2^n \pi \quad (2.7)$$

Com $\mu > 0$, e verificando a seguinte equação,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{4\mu} M \pi = d \quad (2.8)$$

Note-se que $M = \max_{i=1,\dots,n} \{(b_i - a_i)\}$ e d representa a maior distância entre os pontos.

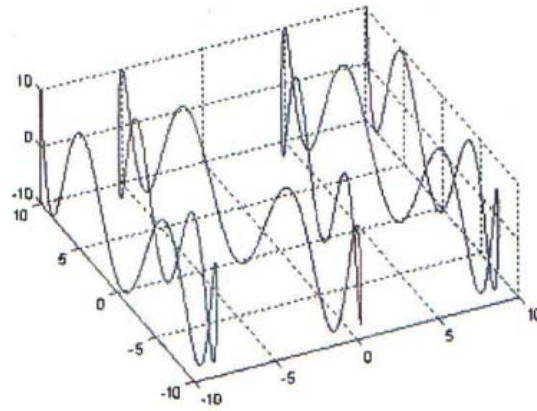


Figura 1. Curva de densificação com $\mu = 3$.

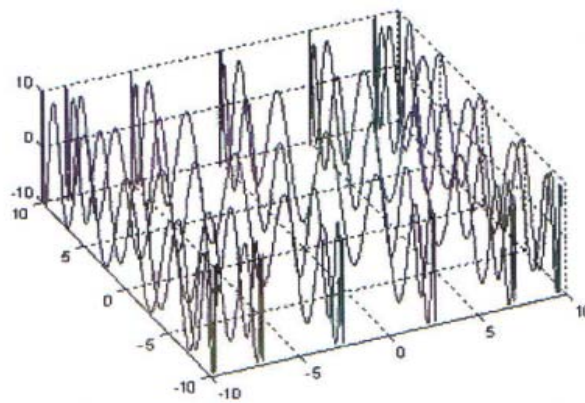


Figura 2. Curva de densificação com $\mu = 6$.

3. Estabilidade (Estabilidade Estática e Estabilidade Dinâmica)

No sentido de valorizar o método de linearização apresentado, vamos aplica-lo a vários modelos dinâmicos observando depois a sua estabilidade em torno de um determinado ponto ou estado de equilíbrio. Consideremos um sistema (Σ) descrito pela equação diferencial,

$$(\Sigma): \dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

Então, x_e é um estado de equilíbrio do sistema correspondente ao modelo anterior se existir u_e tal que $f(x_e, u_e) = 0$, isto é, se $\dot{x}_e \equiv 0$. Isto significa que as variáveis permanecem constantes, não sofrem nenhuma alteração.

Segundo o princípio da estabilidade estática temos que assumir que o sistema está inicialmente em equilíbrio, isto é, há equilíbrio. Um sistema diz-se estaticamente estável se, perante pequenas perturbações em torno (na vizinhança) de um determinado estado de equilíbrio, o sistema regressar para o seu estado de equilíbrio inicial. Pelo contrário, se ao impor uma perturbação ao sistema este for incapaz de regressar ao estado de equilíbrio inicial, então, o sistema diz-se estaticamente instável. Quando qualquer ponto representar um ponto de equilíbrio do sistema estamos perante estabilidade neutra.



Figura 3. Estabilidade estática positiva (estaticamente estável).



Figura 4. Estabilidade estática negativa (estaticamente instável).



Figura 5. Estabilidade estática neutra.

Na estabilidade dinâmica, o sistema não necessita estar, inicialmente, no equilíbrio. O sistema diz-se dinamicamente estável se, ao perturbar o sistema fora das condições de equilíbrio, este se estabilizar num estado de equilíbrio, que pode ser distinto do estado de equilíbrio inicial.

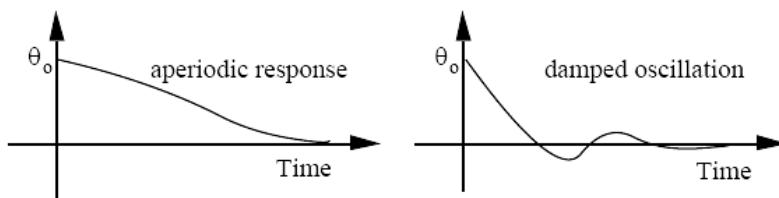


Figura 6. Dinamicamente estável.

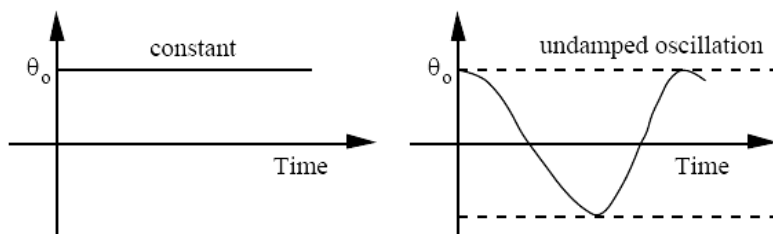


Figura 7. Estabilidade dinâmica neutra.

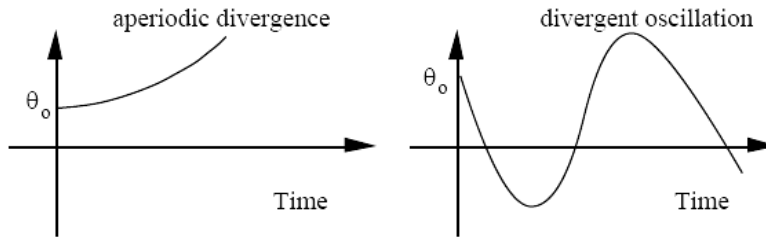


Figura 8. Dinamicamente instável.

3.1. Estabilidade no sentido de Lyapunov

Segundo Lyapunov qualquer sistema dinâmico não linear tem um comportamento quase linear na vizinhança dos seus pontos de equilíbrio.

Chamamos $S(x_0, t_0, t)$ à solução (comportamento) da equação diferencial apresentada acima, que se inicie em $x_0 \equiv x(t_0)$, onde t_0 representa o tempo inicial (em geral igual a zero).

O sistema (Σ) apresentado acima é dito estável no sentido de Lyapunov em torno do seu ponto de equilíbrio x_e se, sofrendo uma perturbação, o sistema voltar à posição de equilíbrio ou a uma posição na sua vizinhança.

3.1.1. Estabilidade Assintótica

O sistema (Σ) diz-se assintoticamente estável se ele for estável (estabilidade simples) e se $\exists \eta > 0$ e uma função $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ contínua e com $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$ tal que, para qualquer x_0 que satisfaça $\|x_0 - x_e\| \leq \eta$, haja $\|S(x_0, t_0, t) - x_e\| \leq \gamma(t) \cdot \|x_0 - x_e\|$ para qualquer $t \geq t_0$. Na estabilidade assintótica não há garantia de que o sistema volte ao ponto de equilíbrio num tempo finito. No entanto, é garantido que o sistema volta ao ponto de equilíbrio num tempo infinito.

3.1.2. Estabilidade Não - Assimptótica (Estabilidade simples)

Para que o mesmo sistema tenha estabilidade não – assimptótica é necessário que exista uma função $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ contínua e com $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) \leq \varepsilon$, onde ε representa uma margem de estabilidade em relação ao ponto de equilíbrio. Isto significa que, a curva representativa do comportamento do sistema não tende necessariamente para zero (ponto de equilíbrio), mas fica dentro da margem de estabilidade ε , para sempre.

Dado um sistema não linear, o primeiro passo a seguir no estudo do seu comportamento, é encontrar as condições de estabilidade do sistema e lineariza-lo em torno dessas condições, obtendo assim um modelo linear. Como já foi mencionado, linearização significa qualquer tipo de “perda de informação” acerca do modelo inicial não linear. Para quantificar estas “perdas” podemos aplicar ao sistema em estudo uma perturbação e analisar o modelo quanto à controlabilidade e observabilidade do sistema. Deste modo, ao aplicar a qualquer modelo o método de linearização clássica e o método de linearização ótima, podemos observar os resultados e comparar as matrizes de estado e de controlo obtidas. Através destas matrizes já é possível observar as simplificações que acompanham qualquer método de linearização e verificar que uma linearização menos sofisticada acaba por traduzir de forma errada o comportamento de um sistema. É necessário mencionar que nenhum método de linearização fornece informações extra a qualquer sistema. Dependendo do método de linearização utilizado, ele pode sim, traduzir de uma forma ótima o comportamento real do modelo não linear que deu origem ao problema.

4. Controlabilidade e Observabilidade

Consideremos um sistema representado em espaço de estados:

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{(a)} \\ y = Cx + Du & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.1)$$

(a): modelo da dinâmica do próprio sistema (equações de estado);

(b): modelo das medidas realizadas ou a realizar sobre o sistema (equações de observação).

O sistema, (Σ) , é de estado controlável se é possível conduzi-lo sempre de um dado estado inicial x_i para um estado final qualquer x_f , dentro do espaço de estado. A matriz de controlabilidade é representada por,

$$\Delta = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.2)$$

O sistema é controlável se e somente se, Δ tem n colunas linearmente independentes ($\text{rank}(\Delta) = n$). Note-se que se o número de colunas linearmente independentes da matriz de controlabilidade for igual à dimensão da matriz de estado, então o sistema é controlável.

(Σ) é de observação controlável se for possível conduzir o sistema de uma observação qualquer y_i para uma outra qualquer y_f , dentro do espaço de observações. A matriz de controlabilidade de observação é dada por,

$$\Gamma = [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D] \quad (4.3)$$

O sistema tem observações controláveis se e somente se $rank(\Gamma) = n$. Se é possível conhecer as saídas (observações) do sistema, então podemos considerar $C = I$ (matriz identidade) e se $D = 0$, então,

$\Delta = \Gamma$ (Matriz de controlabilidade é igual à matriz de observabilidade)

O espaço de observação é nada mais nada menos que um espaço de consequências (de tudo o que acontece no espaço de estados).

A matriz de observabilidade é dada por,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

O sistema (Σ) é observável se e somente se $rank(\Theta) = m$, onde m representa o número de linhas da matriz C . O mesmo sistema diz-se completamente observável se e somente se $rank(\Theta) = n$, onde n se refere à dimensão da matriz A .

4.1. Teorema da Dualidade de Kalman

Considere o sistema apresentado acima, como estando no seu espaço primal. O mesmo sistema num espaço dual é representado por,

$$(\Sigma^*) \begin{cases} \dot{z} = A^* z + C^* v \\ w = B^* z + D^* v \end{cases} \quad (4.5)$$

Onde:

z : função de estado;

v : função de controlo;

w : função de observação.

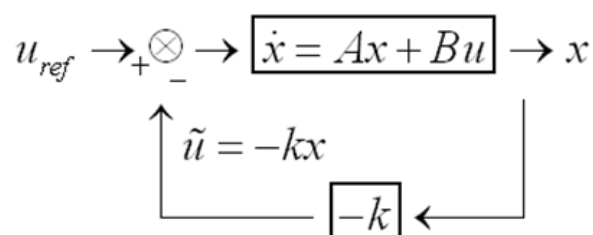
Assim, o teorema da dualidade de Kalman diz que,

- (1) (Σ) controlável $\Rightarrow (\Sigma^*)$ é observável
 - (2) (Σ) observável $\Rightarrow (\Sigma^*)$ é controlável
- (4.6)

Isto significa que, todo o sistema controlável no seu estado primal será observável no correspondente estado dual. Do mesmo modo, qualquer sistema observável no estado primal é controlável no estado dual.

4.2. Controlo

O sistema descrito anteriormente pode ser apresentado sob a forma de diagramas de blocos, como vamos apresentar abaixo. A principal ideia é linearizar o sistema não linear em torno de condições de operação de referência, isto é, de um determinado estado de equilíbrio, projectar um controlador para o sistema linear resultante e de seguida aplicar o mesmo controlo ao sistema não linear. O objectivo é mostrar de que forma actua o controlo introduzido num sistema quando forçamos uma perturbação neste e desejamos controlá-lo e estabilizá-lo em torno do seu estado de equilíbrio inicial o mais rápido possível.



O sistema inicial $\dot{x} = Ax + Bu$ (sem aumento de estabilidade) quando realimentado por $\tilde{u} = -kx$, passa a ser,

$$\dot{x} = Ax - Bkx = (A - Bk)x \text{ (com aumento de estabilidade)} \quad (4.7)$$

A matriz de ganho k deve ser tal que a matriz aumentada $\hat{A} = A - Bk$ seja uma matriz de Hurwitz (M é uma matriz de Hurwitz se todos os valores próprios da matriz tiverem partes reais negativas). Note-se que, para que haja consistência nos cálculos matemáticos, a matriz de ganho deverá ter tantas linhas como o número de colunas da matriz de controlo.

Existem vários métodos para encontrar a matriz de ganho k . Nas aplicações que apresentamos nos pontos seguintes, utilizamos o método dos reguladores lineares quadráticos (LQR – Linear Quadratic Regulator). Este método torna-se bastante atractivo uma vez que a sua utilização é possível mesmo que a matriz de controlabilidade não seja quadrada, o que o torna viável na utilização de variados modelos.

4.2.1. LQR – Linear Quadratic Regulator

Neste método, para estabilizar o sistema, devemos encontrar o vector de controlo óptimo u que minimize o seguinte critério [1],

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (4.8)$$

Onde,

Q : matriz positivamente definida ou semi-definida hermitiana ou real e simétrica;

R : matriz positivamente definida hermitiana ou real e simétrica.

Note-se que o vector u não sofre restrições e as matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e do gasto de energia.

Com o aumento de estabilidade, o sistema fica,

$$\dot{x} = Ax - Bkx = (A - Bk)x \quad (4.9)$$

Tendo em conta a função de custo J e considerando uma função de Lyapunov associada ao sistema sob a forma $V(x) = x^T Px$, temos,

$$x^T (Q + k^T Rk)x = -\frac{d}{dt}(x^T Px) \quad (4.10)$$

Então,

$$x^T (Q + k^T Rk)x = -\dot{x}^T Px - x^T P\dot{x} = -x^T [(A - Bk)^T P + P(A - Bk)]x \quad (4.11)$$

E deste modo, é necessário que a matriz de ganho k satisfaça a seguinte equação de Lyapunov,

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T Rk) \quad (4.12)$$

E a solução desta equação é,

$$k = R^{-1} B^T P \quad (4.13)$$

Como $u = -kx$, então temos,

$$u = -R^{-1} B^T Px \quad (4.14)$$

Deste modo obtemos uma matriz de ganho óptima proporcionando uma lei de controlo óptima. Note-se que a matriz P presente nas equações anteriores deve satisfazer a equação de Riccati,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.15)$$

Note-se que é possível escolher os pesos das matrizes Q e R , isto é, seleccionar os valores próprios para o controlo do sistema, não havendo, porém, uma relação geral que relacione as duas matrizes.

4.3. Domínio de Atracção

Dado o sistema de controlo descrito na equação (2.1) com restrições relativamente ao controlo ($u \in \mathcal{U}$, com $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{R}^n$ sendo as restrições relativas ao controlo), o estado resultante da perturbação dado por $\mathcal{X} = \{x \mid g(x) = 0\}$. O estado inicial tal que, $x(t)$ aproxima assintoticamente o alvo (estado resultante da perturbação) como $t \rightarrow \infty$ é chamado de domínio de atracção [1]. Esta é uma ferramenta muito útil para o controlo de sistemas e este domínio pode ser calculado ou aproximado quando comparamos leis de controlo. Trata-se de um método muito útil especialmente para o cálculo do domínio de atracção em sistemas unidimensionais e bidimensionais. Para sistemas de ordem superior a dois esta mesma aproximação pode ser usada apenas como ferramenta de indicação do domínio de atracção. Existem, no entanto, outros métodos de execução mais simples para estes casos, como por exemplo através de funções de Lyapunov. Especificamente para sistemas não lineares e de forma a obter o domínio de atracção, devemos ter em conta o sistema cujo domínio queremos encontrar e como tal, saber quais as restrições aplicadas ao controlo. Usando o método de LQR, devemos projectar um controlador, resultante da realimentação, da forma $u = -kx$ definindo as matrizes R e Q como sendo matrizes identidade. O método de LQR devolve, então, a matriz de ganho k e como tal podemos saber os valores próprios de $A - Bk$. De modo a acomodar as fronteiras do controlo, devemos repor a lei de controlo ($u = -kx$)

saturando as variáveis de estado. Por fim, podemos encontrar o domínio de atracção, em torno do controlo LQR saturado, integrando desde “trás” até pontos muito próximos dos pontos de equilíbrio obtidos quando mantemos o controlo sem saturação.

5. Simulação

Na resolução da maioria dos sistemas não lineares somos incapazes de encontrar uma expressão algébrica como solução. As soluções devem ser, na maioria dos casos, geradas através de métodos numéricos e técnicas de integração numéricas para calcular e representar trajectórias para o sistema. As equações diferenciais ordinárias têm a forma geral,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (5.1)$$

Esta é uma equação ordinária pois só possui uma variável independente, x .

Existem vários métodos para a resolução numérica de equações diferenciais numéricas. Neste trabalho de dissertação utilizamos o método de Runge – Kutta de 4ª ordem. Considere o sistema de equações diferenciais dado por,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (5.2)$$

Onde $f(x, t)$ e a solução $x(t)$ são vectores de ordem n assumidos como sendo contínuas e tendo derivadas parciais de qualquer ordem contínuas. A ideia básica, que está por detrás dos algoritmos de Runge – Kutta, é expandir $x(t)$ e $f[x(t), t]$ em séries de Taylor e depois usar os resultados para construir um algoritmo de integração numérica que tem em conta a curvatura da trajectória $x(t)$ [1].

Considere o método de Runge – Kutta de 4ª ordem,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.3)$$

Onde, para $x = x(t)$,

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x, t) \\k_2 &= f\left(x + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\k_3 &= f\left(x + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\k_4 &= f(x + k_3 \Delta t, t + \Delta t)\end{aligned}\tag{5.4}$$

O passo de integração Δt pode ser positivo ou negativo se corresponde a uma integração posterior ou anterior, respectivamente.

6. Aplicações

De modo a validar o método de linearização apresentado, vamos aplica-lo a vários modelos dinâmicos e analisar resultados. Como se trata de um método de linearização, vamos constantemente comparar o método de linearização ótima com o método clássico de linearização (linearização por expansão de séries de Taylor).

6.1. Modelo da aeronave F-8 Crusader Fighter

Trata-se de um modelo não linear cujas equações que representam a dinâmica da aeronave são [14, 15]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.877x_1 + x_3 - 0.215u - 0.088x_1x_3 + 0.47x_1^2 - 0.019x_2^2 \\ \quad - x_1^2x_3 + 3.846x_1^3 + 0.28ux_1^2 + 0.47u^2x_1 + 0.63u^3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -4.208x_1 - 0.396x_3 - 20.967u - 0.47x_1^2 - 3.564x_1^3 + 6.265ux_1^2 \\ \quad + 46u^2x_1 + 61.4u^3 \end{cases} \quad (6.1)$$

Onde x_1 é o ângulo de ataque (em radianos), x_2 representa o ângulo de arfagem (em radianos), x_3 representa a taxa de arfagem (em radianos por segundo) e u representa a entrada do controlo.

Note-se que o ângulo de ataque é o ângulo que a componente horizontal da velocidade V_∞ faz com a linha da corda. A atitude da aeronave é definida pelos três ângulos de Euler,

θ : ângulo de arfagem;

ψ : ângulo de guinada;

ϕ : ângulo de rolamento.

As taxas de manobra (angulares) são as derivadas dos ângulos de atitude na referência ligada à aeronave,

p : taxa de rolamento;

q : taxa de arfagem;

r : taxa de guinada.

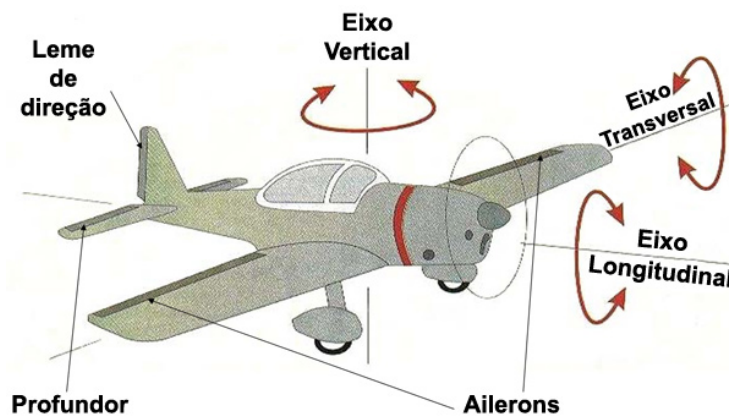


Figura 9. Representação dos controlos primários e dos eixos que relacionam os ângulos de manobra.

Analisando as equações da dinâmica de voo desta aeronave, podemos reparar que se trata de um sistema não linear, com três variáveis de estado e um controlo. Para estudar o comportamento deste sistema no equilíbrio, temos que linearizar o modelo original e de seguida controlar o sistema linear. Por fim, controlamos o modelo não linear e através de métodos numéricos podemos observar o comportamento do sistema inicial, no equilíbrio. As condições de equilíbrio foram assumidas como sendo nulas,

$$x_e = \begin{bmatrix} \alpha_e \\ \theta_e \\ q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e = [0]$$

O controlo, neste caso, é o actuador do profundor pois é este que controla o movimento de arfagem da aeronave. O elevador é um dispositivo articulado preso a uma superfície fixa chamada de estabilizador horizontal. Juntos (profundor ou elevador e estabilizador horizontal) formam um aerofólio único onde o elevador é apenas a parte que altera a curvatura (perfil) deste aerofólio. A deflexão do profundor controla a estabilidade estática longitudinal e também esta deve ser tida em linha de conta. A estabilidade estática longitudinal de uma aeronave é estudada relativamente ao momento de arfagem referente ao *c.g.* (M), ou ao coeficiente do momento de arfagem ($c_m = M / Q S b$, onde Q representa a pressão dinâmica, S é a área em planta da asa e b representa a envergadura) e ao ângulo de ataque. Note-se que, tal como as equações da dinâmica de voo indicam, todas as variáveis de estado dependem da variável de controlo, pois todas elas controlam a estabilidade estática longitudinal da aeronave. A análise da estabilidade estática longitudinal está directamente relacionada com o ângulo de ataque, como já dissemos anteriormente. Por outras palavras, quando se altera o ângulo de ataque de uma aeronave a partir do equilíbrio, num voo longitudinal, é desejável que a aeronave volte para o seu ângulo de ataque de equilíbrio. A aeronave tem, neste caso, estabilidade estática longitudinal.

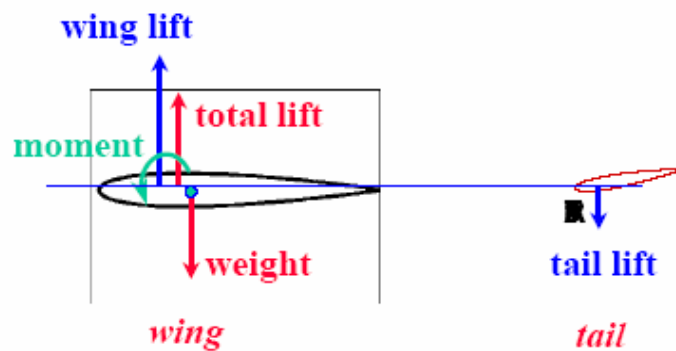


Figura 10. Representação das forças actuantes num perfil de asa e de cauda.

É fácil perceber que, para uma aeronave estaticamente estável e com comandos livres, como o aumento do ângulo de ataque, a partir do equilíbrio, induz um momento de arfagem negativo (isto é, a aeronave tende a picar) que força a aeronave a voltar para o seu ângulo de ataque de equilíbrio. Da mesma maneira notamos que, para uma aeronave

estaticamente estável e com comandos livres, a diminuição do ângulo de ataque, a partir do equilíbrio, induz um momento de arfagem positivo (isto é, o nariz da aeronave sobe) que força a aeronave a voltar para o seu ângulo de ataque de equilíbrio.

Quando linearizamos o modelo não linear, em torno das condições de equilíbrio assumidas anteriormente e utilizando ambos os métodos de linearização (clássica e óptima), o sistema resultante é controlável, observável, completamente observável e observável pelo teorema de Kalman. De seguida introduzimos uma perturbação no estado inicial de modo a observar até que ponto os diferentes métodos de linearização são capazes de fornecer informação sobre o modelo não linear original. Devemos ter em conta que se trata de uma aeronave caça, bastante manobrável e como tal, graficamente será mais difícil encontrar diferenças entre os modelos linearizados pelos dois métodos, o que indica que necessitamos recorrer mais à teoria de sistemas. Por outro lado, é necessário ter sensibilidade para os valores que são impostos nas variáveis de estado, uma vez que, por exemplo, esta aeronave entra em perda (*stall*) para um ângulo de ataque, α , igual a $0.41rad$ [14].

Relembremos que o sistema não linear é dado pela equação representada em (2.1) e seja o sistema resultante da linearização dado pela equação (4.1.a)). Para os cálculos iniciais o principal objectivo é encontrar os parâmetros matriciais que compõem a equação do modelo linearizado, representado em espaço de estados. Assim sendo, as matrizes de estado e de controlo obtidas quando linearizamos o sistema pelo método clássico (expansão em séries de Taylor), são,

$$A = \begin{bmatrix} -0.8770 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ -4.2080 & 0 & -0.3960 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2150 \\ 0 \\ -20.9670 \end{bmatrix}$$

E a matriz de estado tem os seguintes valores próprios,

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -0.6365 + 2.0372i$$

$$\lambda_3 = -0.6365 - 2.0372i$$

Quando linearizamos o modelo não linear, pelo método de linearização ótima apresentado no ponto 2, obtemos,

$$A = \begin{bmatrix} -0.8659 & -0.0510 & 1.0009 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -3.1236 & -4.9684 & -0.3094 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2154 \\ 0.0000 \\ -21.0097 \end{bmatrix}$$

E a matriz de estado, do modelo linearizado pelo método de linearização ótima, tem os seguintes valores próprios,

$$\lambda_1 = -0.5164$$

$$\lambda_2 = -0.3294 + 2.8132i$$

$$\lambda_3 = -0.3294 - 2.8132i$$

Observando os valores próprios das matrizes de estado obtidas através da utilização dos dois métodos de linearização distintos, podemos tirar algumas conclusões. Os valores próprios da matriz de estado obtida para o modelo linear, linearizado pelo método de linearização ótima, possuem, todos, partes reais negativas, indicando que se trata de uma matriz de Hurwitz, matriz esta que, como dissemos na secção relativa ao controlo, possui características ótimas para o controlo. Isto, de facto, não acontece no caso do modelo linear obtido com o método clássico de linearização. Pela teoria de sistemas, este facto deixa também antever que o domínio de atracção, quando aplicamos o método de linearização ótima, será maior do que no outro caso.

O próximo passo é introduzir uma perturbação no equilíbrio e observar de que modo, aplicando um controlador de realimentação resultante do método de LQR, o sistema estabiliza. Seja,

$$x_{final_pert} = x_0 + x_{pert} \quad (6.2)$$

E, como $x_0 = x_e$, então,

$$x_{final_pert} = x_{pert} \quad (6.3)$$

Consideremos a perturbação imposta ao sistema: $x_{final_pert} = [0.4 \quad 0.425 \quad 0.0015]^T$. Note que esta perturbação corresponde exactamente a perturbar em 22.92° o ângulo de ataque, 24.35° de perturbação no ângulo de arfagem e $0.09^\circ/s$ na taxa de arfagem. Depois de encontrar o controlo no modelo linear, aplicamos o mesmo ao modelo não linear e simulamos os resultados. Note que, para simular os modelos presentes neste trabalho, criamos um algoritmo e implementamos o mesmo no programa MATLAB. Forçando o sistema a esta perturbação e aplicando o método dos reguladores lineares quadráticos para o controlo, podemos observar os resultados obtidos e comentar sobre a estabilidade do sistema.

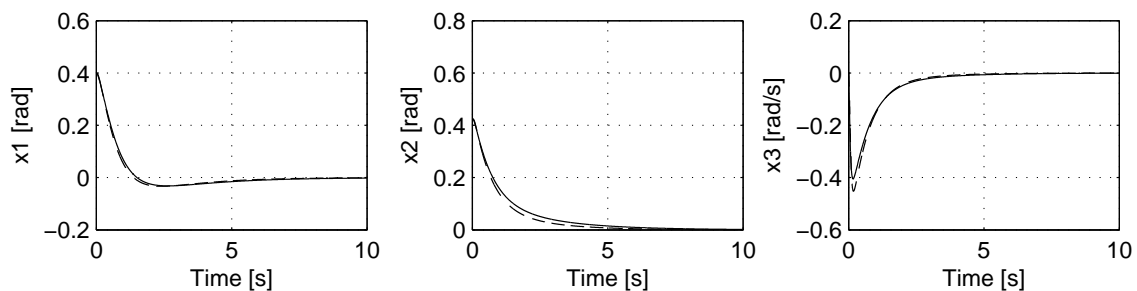


Figura 11. Resultados de simulação obtidos para ambos os métodos de linearização quando presentes à perturbação acima indicada: linearização óptima (—), linearização clássica (--).

Como somos capazes de observar, os resultados obtidos para ambos os casos são bastante idênticos o que indica a coerência do novo método de linearização presente

neste trabalho. Vamos apresentar ainda outras perturbações e concluir mais pormenorizadamente após os gráficos. Tentando procurar a perturbação máxima que o modelo linearizado classicamente pode suportar, encontramos uma adequada: $x_{final_pert} = [0.41 \quad 0.412 \quad 0.051]^T$. Esta perturbação corresponde a forçar o ângulo de ataque até ao valor de *stall* (23.49°), 23.61° no ângulo de arfagem e $2.92^\circ/s$ na taxa de arfagem. Outras perturbações máximas (para a linearização clássica) poderiam ser obtidas, se relacionássemos de outra maneira as perturbações impostas nas variáveis de estado. Para estes valores, os modelos linearizados pelos distintos métodos de linearização têm o seguinte comportamento:

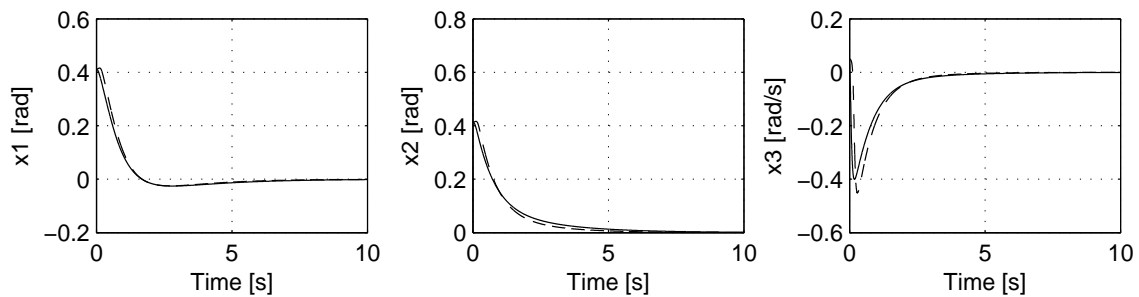


Figura 12. Resultados de simulação obtidos para ambos os métodos de linearização: linearização óptima (—), linearização clássica (--).

Para além do comportamento dos dois continuar a ser muito semelhante, assemelha-se também aos resultados obtidos para o caso da primeira perturbação imposta. Talvez isto aconteça devido ao facto de se tratar de uma aeronave muito manobrável e pelo facto de possuir uma gama de valores, que se podem variar, relativamente baixa.

Por último, e mais uma vez por tentativa, fomos procurar a máxima perturbação que o modelo linearizado pelo método de linearização óptima pode suportar. Várias conjugações entre as variáveis de estado podem ser encontradas pelo que, não existe apenas uma gama de valores que corresponda a uma perturbação máxima. Assim, e pela mesma ordem de ideias, perturbamos o ângulo de ataque até ao máximo valor real admitido, isto é, até ao valor de *stall*. A perturbação imposta foi a seguinte: $x_{final_pert} = [0.41 \quad 0.472 \quad 0.051]^T$. Apenas aumentamos o ângulo de arfagem que corresponde agora a ter 27.04° , mais 3.43° do que no caso anterior. Para o caso da linearização óptima, o sistema comporta-se da seguinte forma,

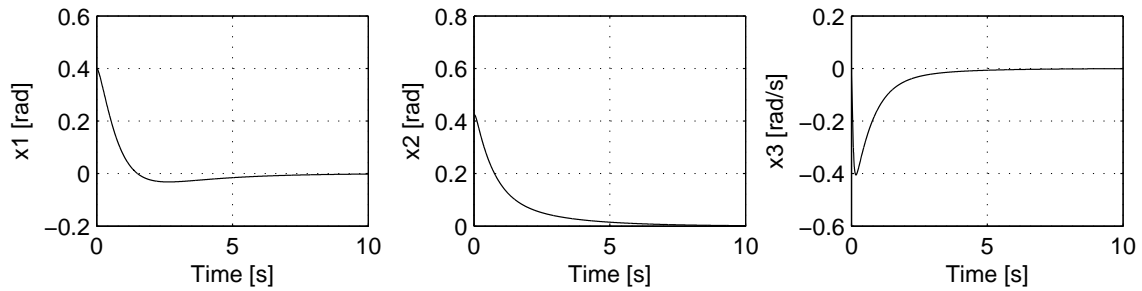


Figura 13. Resultados obtidos para a máxima perturbação suportada pelo sistema, quando linearizado pelo método de linearização óptima.

Note-se que a perturbação imposta pertence ainda ao domínio de atracção uma vez que este é capaz de retornar ao equilíbrio quando perturbado desta forma. O mesmo não acontece quando impomos esta mesma perturbação ao modelo linearizado pelo método clássico, como podemos ver a seguir,

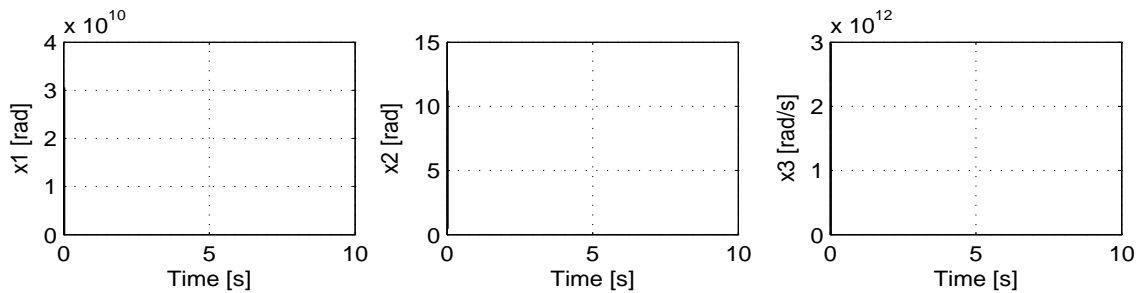


Figura 14. Resultados obtidos para o método de linearização clássica, quando o modelo é sujeito à perturbação anterior.

É visível que, apesar do modelo linearizado pelo método clássico ser controlável, seria necessário aplicar um método para o controlo bastante mais sofisticado, neste caso. Esse gasto extra é completamente desnecessário se utilizarmos o método de linearização óptima, pois perante a mesma perturbação o sistema consegue voltar às condições de equilíbrio, utilizando também o mesmo método para o controlo.

Outras conclusões gerais podem ser tiradas, fruto da simulação do sistema dado pelas equações gerais (6.1). Apesar de obtermos resultantes muito idênticos nas duas primeiras perturbações impostas, para os modelos linearizados pelos distintos métodos de linearização, já vimos que, a matriz de estado obtida no caso do sistema linearizado

pelo novo método possui todos os valores próprios com partes reais negativas, indicando que se trata de uma matriz óptima para o controlo. Já vimos também que no caso do modelo linearizado pelo método baseado na expansão em séries de Taylor tal não acontece. Por outro lado, e esta é a mais forte vantagem pois é ela que nos permite chegar a todas as outras vantagens obtidas ao aplicar o método de linearização óptima presente neste trabalho, é o facto de a qualquer momento podermos modificar o domínio de estados e controlos. Por outras palavras, dependendo da natureza da perturbação que impomos no equilíbrio, o domínio pode ser alterado e/ou adequado de forma a obter a melhor resposta. Outros parâmetros podem ser alterados no processo de busca da melhor resposta do sistema quando este é perturbado em relação ao equilíbrio, como a taxa de densificação das curvas de densificação e o número de pontos (amostra) que retiramos do domínio. Outro ponto a favor da utilização deste método é o domínio de atracção. Este domínio representa o afastamento máximo que se pode impor no equilíbrio, de modo que essa perturbação permita que o sistema volte ao estado inicial (de equilíbrio). Pudemos reparar, pelos gráficos, que o domínio de atracção é menor quando o sistema é linearizado pelo método de linearização clássica do que quando utilizamos o método óptimo.

6.2. Sistema de um Pêndulo Rotativo Invertido (Rotary Inverted Pendulum (RIP) System)

O sistema consiste num braço rotativo e num pêndulo onde o braço rotativo é actuado por um motor (Motor DC, Mitsubishi, 18V, com uma razão de engrenagem de 13:1). O controlo deste sistema é precisamente o motor que faz actuar o braço rotativo. O objectivo é fazer balançar o pêndulo na sua posição invertida, consoante mostra a figura que esquematiza o sistema [16],

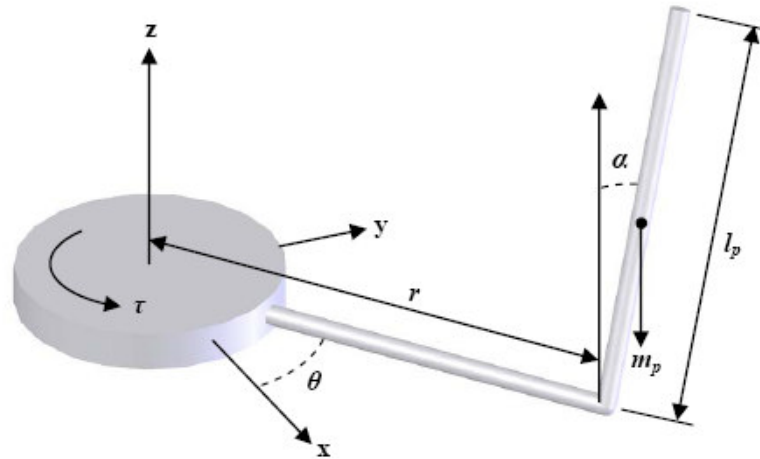


Figura 15. Vista esquemática do sistema do pêndulo rotativo invertido.

Onde,

u - Input do motor;

l_p - Comprimento do pêndulo;

m_p - Massa do pêndulo;

α - Ângulo do pêndulo;

r - Comprimento do braço;

θ - Ângulo do braço;

J_b - Momento de inércia de massa efectiva.

O plano do pêndulo é ortogonal ao braço radial (formam um ângulo recto). O sistema do pêndulo invertido tem aplicações muito práticas no controlo de veículos aeroespaciais, sendo mesmo uma plataforma de teste para avaliar vários algoritmos de controlo. Algumas dessas aplicações podem ser o braço mecânico da estação espacial ou até mesmo a dinâmica de um foguete que, juntamente com os movimentos de rotação e translação da Terra, necessita estabilizar no equilíbrio a cada momento na sua posição, ou seja, na posição vertical, tal como o pêndulo.

A dinâmica do pêndulo rotativo invertido é governada pelas equações,

$$\begin{cases} (A + B \sin^2 \alpha) \ddot{\theta} + (C \cos \alpha) \ddot{\alpha} - (C \sin \alpha) (\dot{\alpha})^2 + \\ \quad (2B \sin \alpha \cos \alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} + F \dot{\theta} + G \cdot \text{sign}(\dot{\theta}) + H \cdot \theta = I \cdot u \\ B \ddot{\alpha} + (C \cos \alpha) \ddot{\theta} - (B \sin \alpha \cos \alpha) (\dot{\theta})^2 - D \sin \alpha + E \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Onde,

$$\begin{aligned} A &= m_p r^2 + J_b \\ B &= \frac{1}{3} m_p l_p^2 \\ C &= \frac{1}{2} m_p r l_p \\ D &= \frac{1}{2} m_p g l_p \end{aligned} \quad (6.5)$$

Note que A e B nada têm a ver, neste caso, com as matrizes de estado e de controlo, respectivamente, de uma representação do sistema em espaço de estados. Assim como C, D, E, F, G, H e I , são parâmetros do modelo não linear, medidos através de um sistema construído e testado no Laboratório de Robótica da Universidade de Tabriz (Irão), cujo valor é apresentado mais tarde. Este sistema é, então, composto por um motor actuador e dois codificadores (E40s-Autonics, com resolução 1024PPR) para medir os ângulos do braço e do pêndulo. Exterior a este sistema existe um decodificador para ler os ângulos (PCI-6602) ligado a um computador PC P3-750 MHz. Este mecanismo é apresentado a seguir,



Figura 16. Sistema do pêndulo rotativo invertido construído no Laboratório de Robótica da Universidade de Tabriz.

Considerando $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, o modelo não linear representado nas equações (3.4) pode ser representado em espaço de estados, na forma,

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u \quad (6.6)$$

Note que o modelo é severamente não linear e as matrizes F e G são dependentes do estado, sendo,

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda x_2 \\ -\frac{C^2}{2}(x_2^2) \sin 2x_1 + BC(x_2 x_4) \cos x_1 \sin 2x_1 + CFx_4 \cos x_1 + \\ CG \cos x_1 \text{sign}(x_4) + CHx_3 \cos x_1 + \frac{B}{2}(A + B \sin^2 x_1)(\sin 2x_1)x_4^2 + \\ D(A + B \sin^2 x_1) \sin x_1 - Ex_2(A + B \sin^2 x_1) \\ \lambda x_4 \\ BC \sin x_1(x_2^2) - B^2(x_2 x_4) \sin 2x_1 - BFx_4 - BG \text{sign}(x_4) - BHx_3 + \\ CEx_2 \cos x_1 - \frac{BC}{2} \cos x_1 (\sin 2x_1)x_4^2 - \frac{CD}{2}(\sin 2x_1) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$G(x) = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ -CI \cos x_1 \\ 0 \\ BI \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Onde,

$$\lambda = BA + (B \sin x_1)^2 - (C \cos x_1)^2 \quad (6.9)$$

Os parâmetros do modelo não linear do sistema foram identificados pelo método do algoritmo genético (GA – Genetic Algorithm) e são [16, 17],

Tabela 1: Parâmetros do sistema do pêndulo rotativo invertido

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
A	3.29	F	14.283
B	0.1252	G	1.4286
C	0.2369	H	1.72
D	6.052	I	141.32
E	0.0132	W	0.0012

Substituindo (6.7), (6.8) e (6.9) em (6.6) e colocando na forma de equações diferenciais, obtemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot x_2 + \frac{1}{\lambda} \cdot 0 \cdot u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(-\frac{C^2}{2} (x_2^2) \sin 2x_1 + BC(x_2 x_4) \cos x_1 \sin 2x_1 + CFx_4 \cos x_1 + \right. \\ \quad \left. CG \cos x_1 \text{sign}(x_4) + CHx_3 \cos x_1 + \frac{B}{2} (A + B \sin^2 x_1) (\sin 2x_1) x_4^2 + \right. \\ \quad \left. D(A + B \sin^2 x_1) \sin x_1 - Ex_2 (A + B \sin^2 x_1) \right) + \frac{1}{\lambda} (-CI \cos x_1) \cdot u \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot x_4 + \frac{1}{\lambda} \cdot 0 \cdot u \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(BC \sin x_1 (x_2^2) - B^2 (x_2 x_4) \sin 2x_1 - BFx_4 - BG \text{sign}(x_4) - BHx_3 + \right. \\ \quad \left. CE x_2 \cos x_1 - \frac{BC}{2} \cos x_1 (\sin 2x_1) x_4^2 - \frac{CD}{2} (\sin 2x_1) \right) + \frac{1}{\lambda} (BI) u \end{array} \right. \quad (6.10)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(-\frac{C^2}{2} (x_2^2) \sin 2x_1 + BC(x_2 x_4) \cos x_1 \sin 2x_1 + CFx_4 \cos x_1 + \right. \\ \quad \left. CG \cos x_1 \text{sign}(x_4) + CHx_3 \cos x_1 + \frac{B}{2} (A + B \sin^2 x_1) (\sin 2x_1) x_4^2 + \right. \\ \quad \left. D(A + B \sin^2 x_1) \sin x_1 - Ex_2 (A + B \sin^2 x_1) \right) + \frac{1}{\lambda} (-CI \cos x_1) u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(BC \sin x_1 (x_2^2) - B^2 (x_2 x_4) \sin 2x_1 - BFx_4 - BG \text{sign}(x_4) - BHx_3 + \right. \\ \quad \left. CEx_2 \cos x_1 - \frac{BC}{2} \cos x_1 (\sin 2x_1) x_4^2 - \frac{CD}{2} (\sin 2x_1) \right) + \frac{1}{\lambda} (BI) u \end{cases} \quad (6.11)$$

Como podemos reparar, através das equações que representam a dinâmica do pêndulo rotativo invertido, trata-se de um modelo repleto de não linearidades. Para estudar o comportamento deste sistema é necessário lineariza-lo, obtendo um modelo linear que melhor traduza o modelo original não linear.

Para encontrar as condições de equilíbrio devemos igualar as derivadas a zero e resolver o sistema de equações (6.11) de modo a encontrar o respectivo equilíbrio do sistema. Todos os parâmetros são conhecidos e portanto ficamos com 4 equações para 4 incógnitas, das quais duas são automaticamente conhecidas. No entanto, assumimos as condições de equilíbrio nulas,

$$x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } u_e = [0].$$

O modelo dinâmico deste sistema foi implementado, uma vez mais, no programa auxiliar MATLAB, onde o testamos quanto à estabilidade, controlabilidade e observabilidade, após aplicação dos métodos de linearização clássica e óptima. Note que o objectivo principal é encontrar um modelo linear que melhor traduza o modelo não linear que lhe deu origem, sendo, o seu comportamento, testado mais tarde. Como o estado de equilíbrio foi assumido, vamos sujeitar o sistema a perturbações neste estado

e analisar a capacidade de estabilidade do sistema após ter sido perturbado. O método de controlo utilizado é, uma vez mais também, o método dos reguladores lineares quadráticos, LQR, já apresentado anteriormente. Note que, o facto de estudar o sistema quanto à controlabilidade e observabilidade e analisar a sua estabilidade, ajuda a concluir acerca do método de linearização utilizado. Chamamos à atenção mais uma vez de que, nenhum método de linearização “acrescenta” dados relativos a um qualquer sistema. Como o próprio nome indica, linearização leva a simplificação, simplificação esta que pode levar a perdas maiores ou menores acerca do sistema em questão, dependendo do método de linearização adoptado.

O sistema pode ser representado em espaço de estados de acordo com,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (6.12)$$

O objectivo é encontrar as matrizes A e B resultantes do modelo linearizado. As matrizes C e D foram assumidas como sendo, respectivamente, igual à matriz identidade (pois as saídas são ou podem ser medidas) e igual a zero.

As matrizes de estado e de controlo obtidas pelo método de linearização clássica são dadas por,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 55.9636 & -0.1221 & 1.1453 & 960.7422 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.0297 & 0.0088 & -0.6053 & -507.7455 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -94.0978 \\ 0 \\ 49.7300 \end{bmatrix}$$

E no caso da linearização óptima, obtemos,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 50.7042 & -3.5896 & -0.9016 & 28.9398 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -3.1216 & 0.0055 & -0.3108 & -17.3734 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -88.9062 \\ 0.0000 \\ 48.9747 \end{bmatrix}$$

Após linearização ambos os sistemas resultantes são controláveis, observáveis, completamente observáveis e observáveis pelo teorema de Kalman.

O próximo passo é forçar o sistema a perturbações no estado de equilíbrio e observar o comportamento do mesmo, comparando os dois métodos de linearização. O estado é composto por,

$$x_{pert} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [\alpha \quad \dot{\alpha} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (6.13)$$

Note que a perturbação imposta ao estado seria dada por,

$$x_{final_pert} = x_0 + x_{pert} \quad (6.14)$$

E no entanto, como consideramos as condições de equilíbrio nulas, fica,

$$x_{final_pert} = x_{pert} \quad (6.15)$$

Assim, vamos impor a seguinte perturbação ao sistema,

$$x_{pert} = [0.25 \quad 0.01 \quad 0.25 \quad 0.01]^T$$

Simulando o controlo do sistema (método dos reguladores lineares quadráticos) para esta perturbação obtemos,

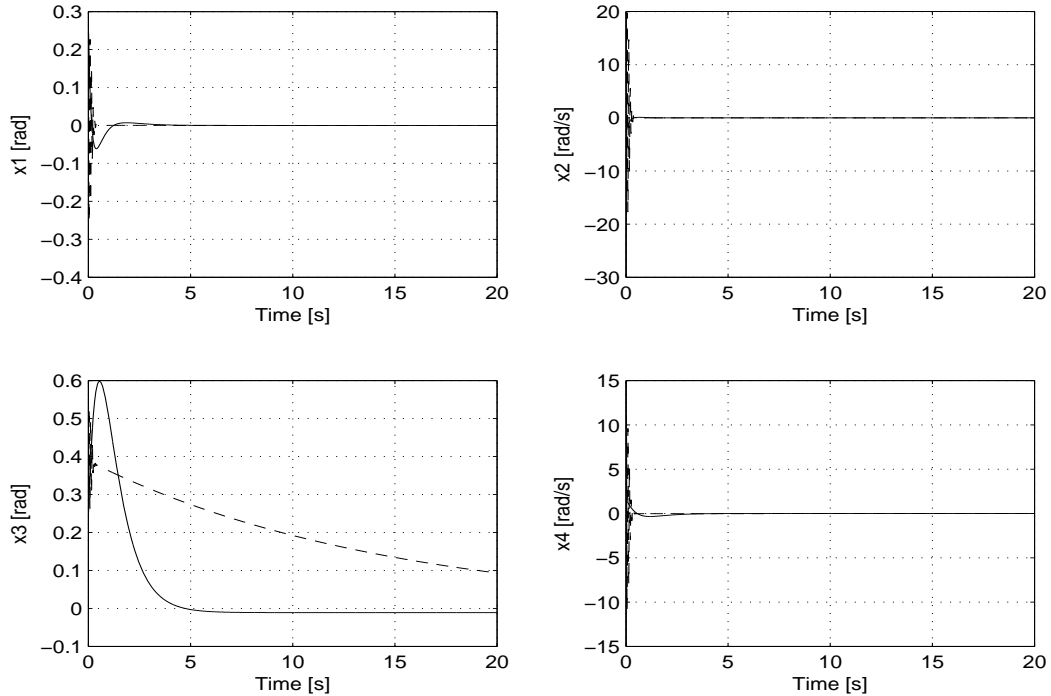


Figura 17. Comparação de resultados entre o método de linearização ótima (—) e o método de linearização clássica (--).

Note-se que, como sempre, o modelo que é utilizado na simulação é o modelo não linear. Este novo estado corresponde a uma perturbação de 0.25 rad (14,32°) em ambos os ângulos a uma velocidade de 0.01 rad/s (0.0954 rpm). Como podemos observar, para ambos os métodos de linearização o sistema estabiliza rapidamente com esta velocidade imposta. No caso da perturbação imposta no ângulo do pêndulo, o sistema estabiliza igualmente rápido, aproximadamente dois segundos para o método de linearização clássica e quatro segundos para o método de linearização ótima. E para a perturbação imposta no ângulo do braço, o sistema estabiliza muito rapidamente quando usamos o método de linearização ótima ao sistema (aproximadamente cinco segundos) enquanto que, ao linearizar o sistema de forma clássica, o sistema estabiliza cerca vinte segundos mais tarde.

Consideremos outra perturbação no equilíbrio do sistema,

$$x_{pert} = [0.15 \quad 0.05 \quad 0.25 \quad 0.05]^T$$

Neste caso interessou-nos aumentar a velocidade imposta ao sistema e deste modo, para que este método de controlo funcionasse (nos dois métodos de linearização) foi necessário baixar o desvio angular relativamente ao equilíbrio. Assim, introduzimos uma perturbação no ângulo do pêndulo de apenas 0.15 rad (8.59°) e aumentamos as velocidades do braço e do pêndulo para 0.05 rad/s (0.4775 rpm). Os resultados obtidos para os dois métodos de linearização são apresentados em forma de comparação,

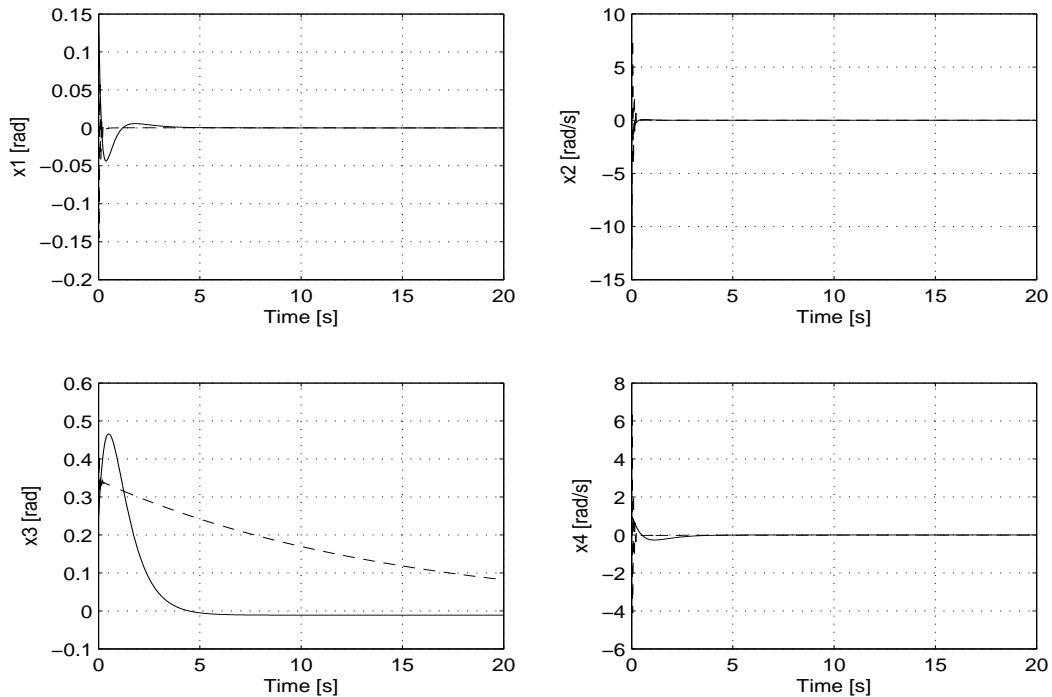


Figura 18. Comparação de resultados entre o método de linearização óptima (—) e o método de linearização clássica (--).

Neste caso as conclusões são muito semelhantes à situação imposta anteriormente. Para ambos os métodos de linearização do modelo, impondo esta perturbação nos ângulos e nas velocidades, o sistema acaba por estabilizar num tempo muito curto. Também neste caso, a perturbação imposta no ângulo da armação, $\theta = x_3$, é mais fácil de estabilizar quando linearizamos o modelo pelo método óptimo. Por outro lado, utilizando o velho

método de linearização são muitos mais os segundos gastos até à estabilização do sistema. Utilizar, portanto, o método de linearização ótima a este sistema é favorável, dado que o domínio do problema é conhecido. Por outro lado, é muito importante reparar que as oscilações, que o sistema linearizado pelo método clássico até à sua estabilização, possuem maiores picos de oscilação, e mais repetidos.

Para concluir de uma melhor forma sobre a importância da utilização do método de linearização ótima, apresentado no ponto 2 deste trabalho, simulamos o programa até encontrar a perturbação máxima que o modelo classicamente linearizado consegue suportar com este método de controlo. Esta perturbação máxima é,

$$x_{pert} = [0.25 \quad 0.025 \quad 0.25 \quad 0.025]^T$$

Este novo estado corresponde a ter uma perturbação em ambos os ângulos de 0.25 rad (14.32°) e a ter uma velocidade angular de 0.2387 rpm no braço e no pêndulo. Os resultados obtidos para os métodos de linearização clássica são,

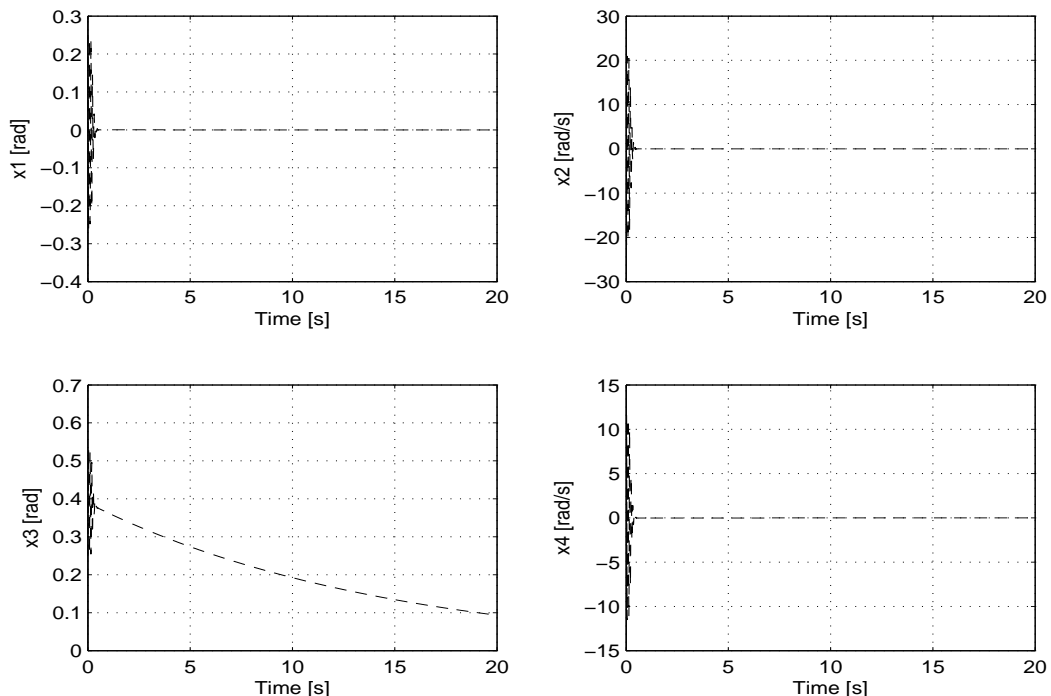


Figura 19. Resultados obtidos para a máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado pelo método de linearização clássica.

Para todas as perturbações impostas no estado de equilíbrio, o sistema permanece controlável, observável, completamente observável e observável pelo teorema de Kalman.

Para a mesma perturbação imposta ao sistema linearizado pelo método de linearização óptima, obtemos,

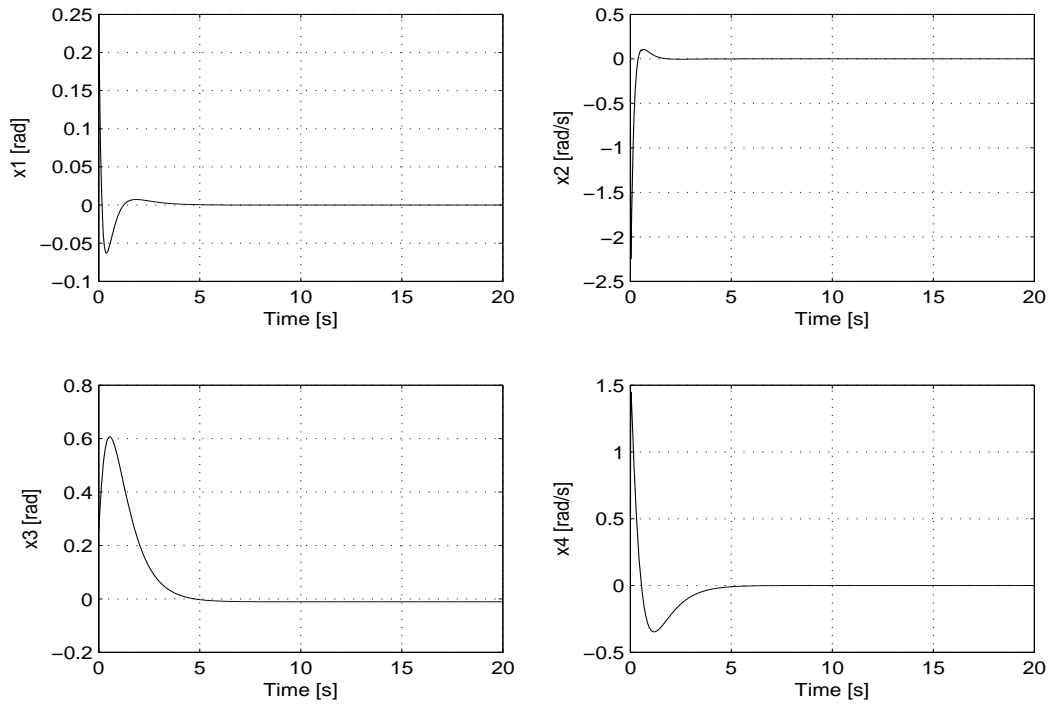


Figura 20. Resultados obtidos para o método de linearização óptima com a máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado pelo método de linearização clássica.

Se repararmos com atenção na escala dos dois gráficos anteriores ficamos com a noção da diferença de amplitude de oscilação logo nos segundos iniciais a que o sistema é sujeito à perturbação. Em jeito de comparação e introduzindo as duas respostas no mesmo gráfico, temos,

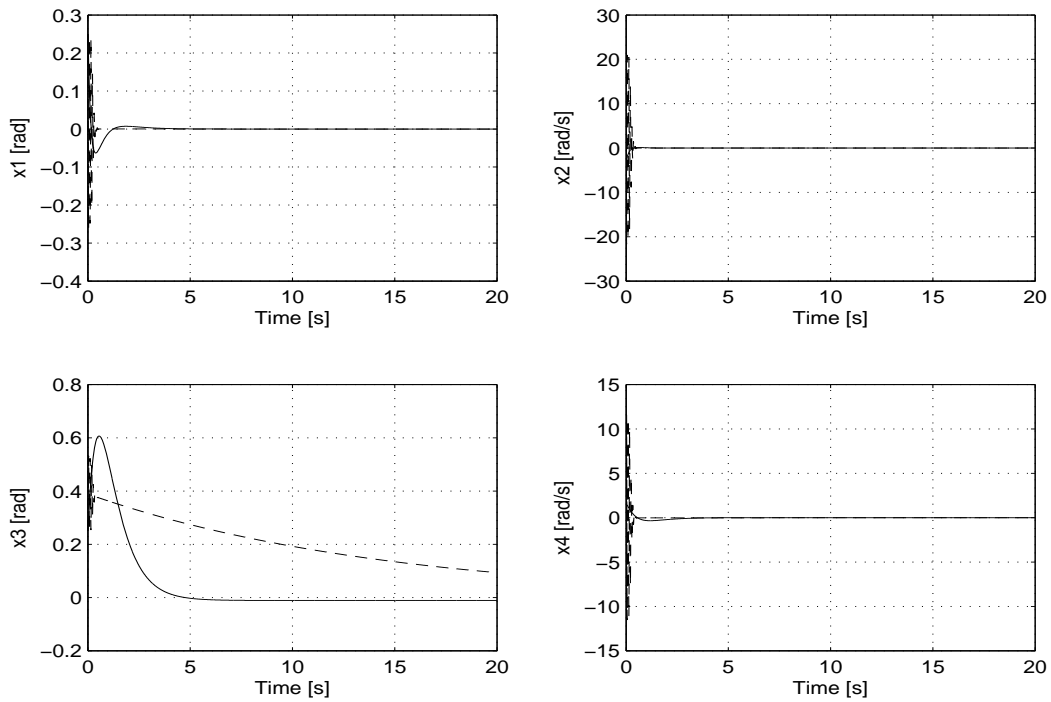


Figura 21. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado classicamente: linearização ótima (—) e linearização clássica (--).

São visíveis as respostas do sistema que evidenciam claramente que o método de linearização ótima implica uma menor perda de informação aquando da linearização e como tal, mais informação sobre o sistema inicial é resguardada, tornando possível obter melhores resultados.

Por outro lado, o sistema consegue ainda aguentar outras perturbações máximas. Se reduzirmos o afastamento máximo, relativamente ao equilíbrio, dos ângulos, podemos aumentar a velocidade do braço e do pêndulo. São várias as combinações possíveis entre ângulos e velocidades máximas. Vamos apresentar uma outra perturbação máxima, por parte do modelo linearizado pelo método clássico. Seja,

$$x_{pert} = [0.1 \quad 0.43 \quad 0.1 \quad 0.43]^T$$

Esta perturbação corresponde a ter um afastamento máximo de 5.73° nos ângulos α e θ a uma velocidade de 4.1062 rpm. Simulando o programa com esta perturbação, obtemos, para os dois métodos de linearização,

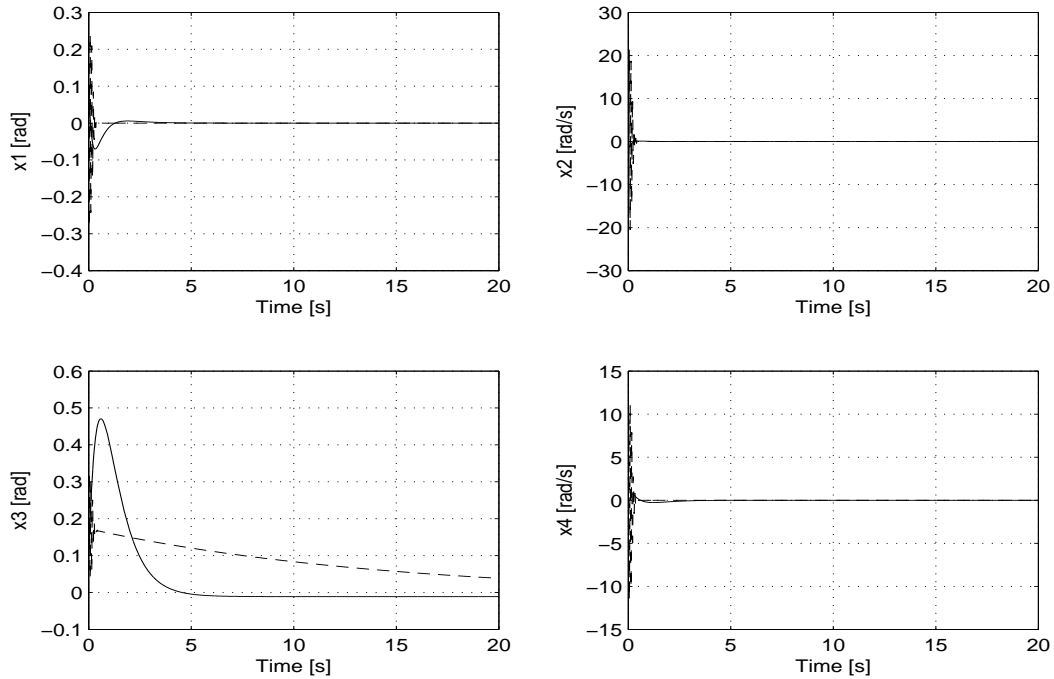


Figura 22. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação suportada pelo sistema linearizado classicamente: linearização óptima (—) e linearização clássica (--).

Todas as variáveis de estado conseguem voltar à sua condição de equilíbrio, quando são sujeitas a uma perturbação, isto se utilizarmos o método de linearização óptima ao modelo não linear. É nos cinco segundos iniciais que se dão as alterações mais significativas nas respostas, vamos, por isso, simular até os cinco segundos apenas, como se pode ver a seguir,

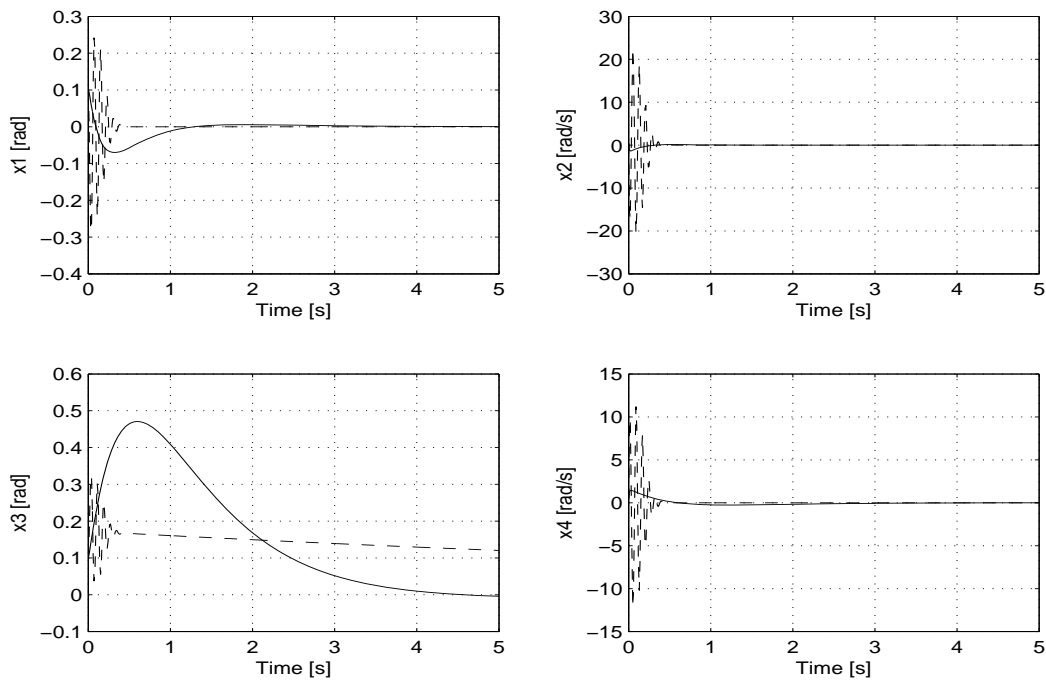


Figura 23. Comparação de resultados para ambos os métodos de linearização, para máxima perturbação imposta por sistema linearizado classicamente: linearização óptima (—) e linearização clássica (--).

Podemos observar mais ao pormenor, nesta ultima figura, que o sistema linearizado pelo novo método apresenta uma variação muito mais suave, inicialmente, que quando utilizamos o método de linearização clássica, isto é, o sistema é sujeito a menos oscilações e de menor amplitude, o que, dependendo do material utilizado no mecanismo físico, pode resultar num menor gasto do material. Para além disso, salvo no caso do ângulo pêndulo, com o método de linearização óptima, o sistema têm um melhor comportamento, estabilizando mais cedo.

Vamos ainda forçar o sistema a perturbações mais elevadas. Consideremos o novo estado,

$$x_{pert} = 1.2 \times [0.987 \quad 0.1 \quad 0.987 \quad 0.1]^T = [1.1844 \quad 0.12 \quad 1.1844 \quad 0.12]^T \quad (6.16)$$

Graficamente obtemos,

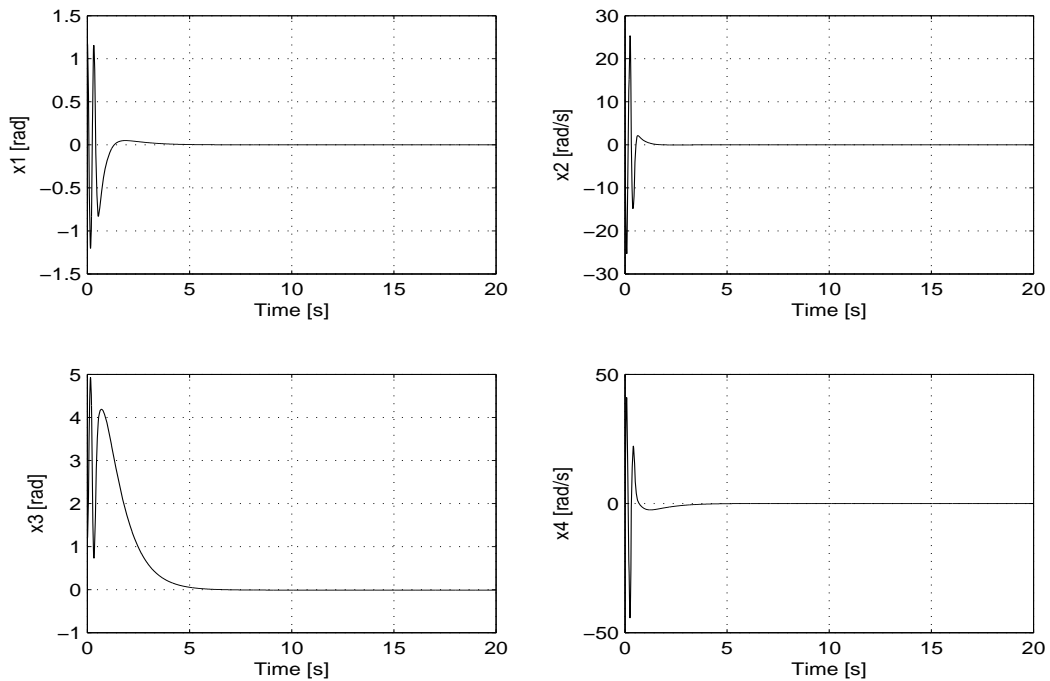


Figura 24. Resultados para máxima perturbação suportada pelo sistema quando linearizado pelo método de linearização óptima.

Em relação às respostas do modelo não linear, linearizado pelo método óptimo, dadas anteriormente, vemos que para esta perturbação mais elevada, também as oscilações nos segundos iniciais são mais elevadas. Contudo, todas as variáveis encontram a estabilização antes dos cinco segundos.

E, no caso da linearização clássica,

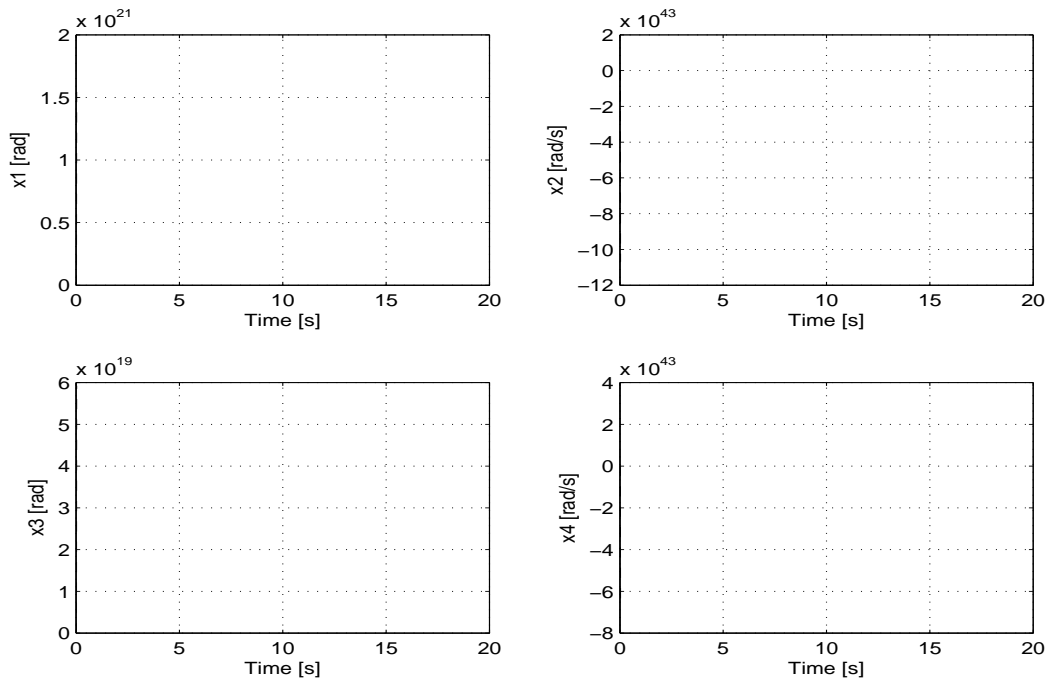


Figura 25. Resultados obtidos para a perturbação (6.16) mas simulando com o método de linearização clássica.

A perturbação imposta em (6.16) corresponde a ter exactamente uma perturbação de 67.86°, referente aos ângulos, a uma velocidade de 1.1459 rpm. Note-se que o afastamento dos ângulos relativamente ao equilíbrio é bastante grande e, como podemos reparar nas figuras acima, só quando utilizamos o método de linearização óptima ao modelo não linear é que o sistema consegue responder a esta perturbação. Para afastamentos tão elevados e utilizando o método de linearização clássica não conseguimos controlar, com o método dos reguladores lineares quadráticos, o sistema de forma eficaz.

Vamos agora aumentar a velocidade imposta no braço e no pêndulo e reduzir a amplitude dos ângulos. Seja,

$$x_{pert} = 1.2 \times [0.9 \ 1.8 \ 0.9 \ 1.8]^T = [1.08 \ 2.16 \ 1.08 \ 2.16]^T \quad (6.17)$$

Que corresponde exactamente a ter um afastamento máximo de 61.88° nos ângulos e uma velocidade máxima imposta de 20.63 rpm. Note que, mesmo para este novo estado,

o sistema continua a ser controlável e observável. Graficamente, e simulando apenas para os primeiros cinco segundos, obtemos:

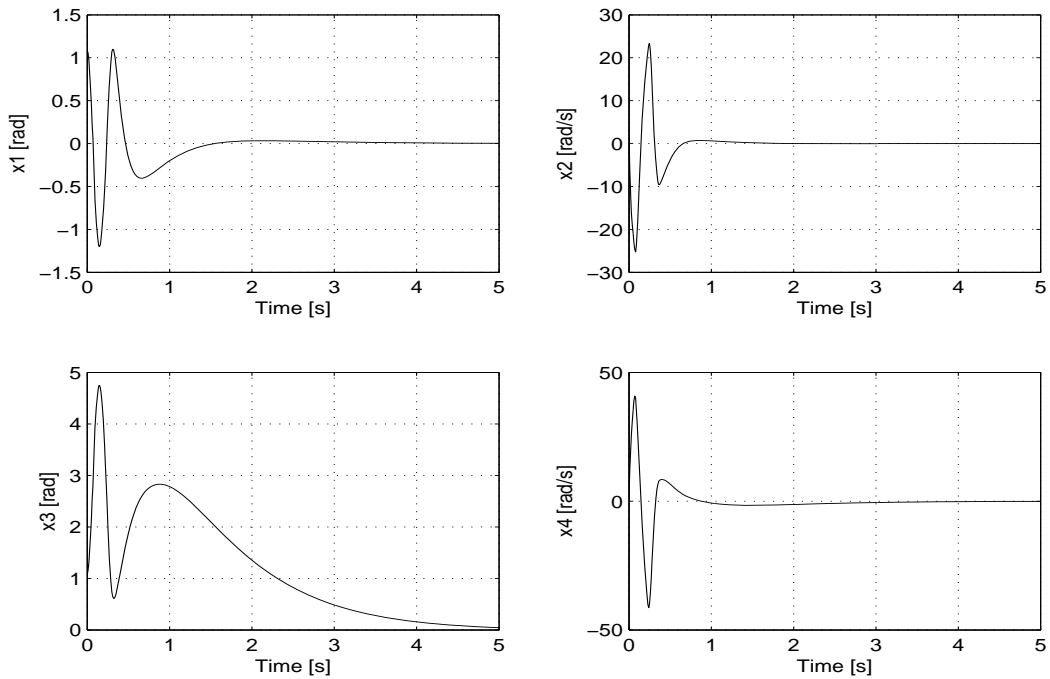


Figura 26. Comportamento do sistema quando sujeito à perturbação (6.17) e utilizando o método de linearização óptima.

Tanto a velocidade do braço rotativo como a velocidade do pêndulo estabilizam no equilíbrio aproximadamente dois a três segundos depois de imposta a perturbação. Nos ângulos a estabilização é mais morosa, mas aos cinco segundos, já ambos estão no equilíbrio.

E, aplicando o método de linearização clássica, obtemos,

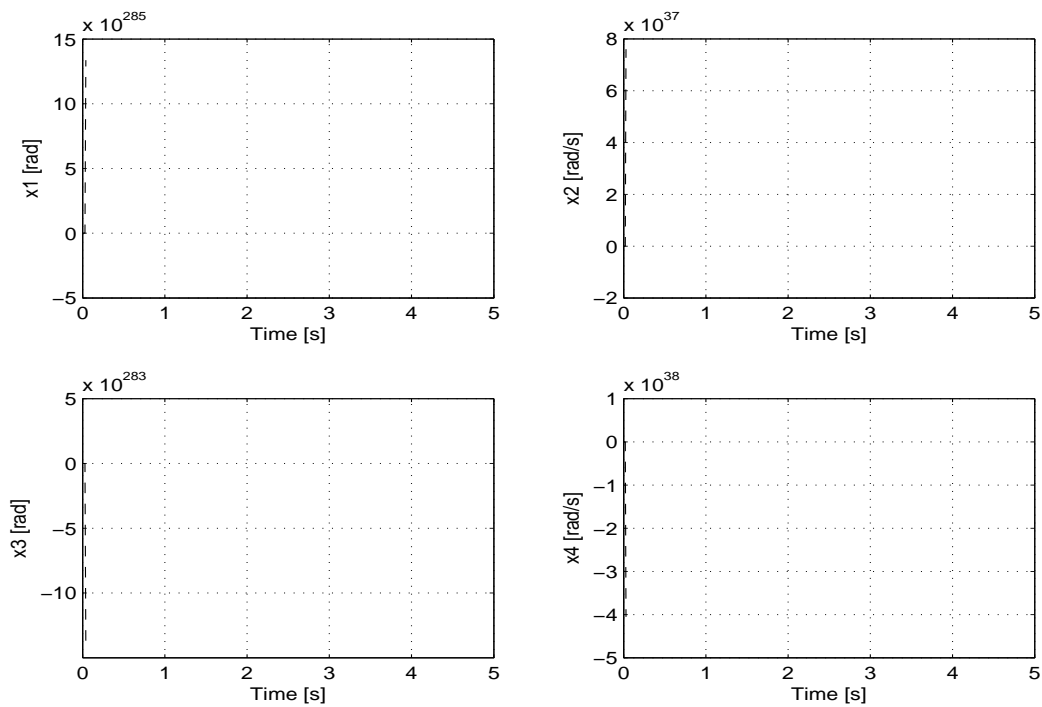


Figura 27. Comportamento do sistema quando sujeito à perturbação (6.17) e utilizando o método de linearização clássica.

Como podemos ver, quando o modelo não linear é linearizado pelo método de linearização clássica perde informação de tal ordem que, para a perturbação imposta em (6.17), apesar de o sistema ser controlável e observável, com o método dos reguladores lineares quadráticos já não é possível obter um controlo eficaz. É por isso, muito vantajoso utilizar o método de linearização ótima também a este sistema. Se por um lado, sabemos o domínio do problema, por outro, quando este é imposto a perturbações elevadas é possível controlar e o sistema estabiliza no equilíbrio, ou muito perto deste, antes dos cinco segundos, para todos os casos (ângulos e velocidades). Também neste sistema o domínio de atracção é bastante maior quando utilizamos o método de linearização ótima ao modelo não linear, o que possibilita uma maior mobilidade do braço rotativo e do pêndulo, podendo as aplicações deste mecanismo serem facilmente utilizadas em muitas aplicações, de forma viável.

6.3. Modelo de um satélite

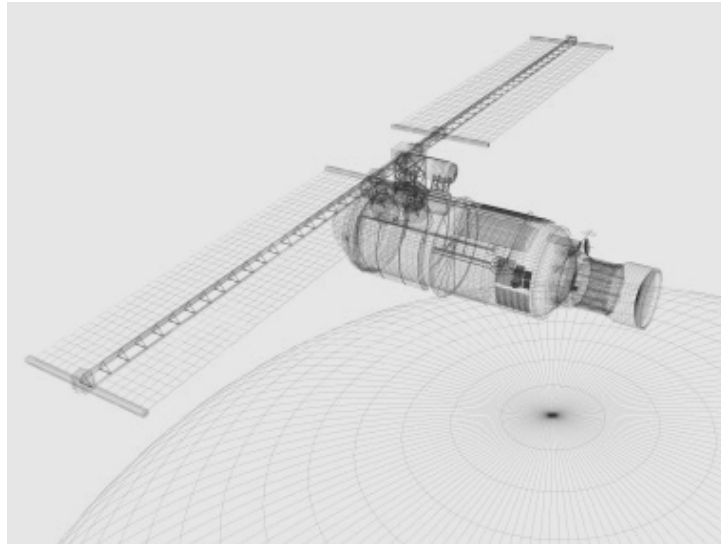


Figura 28. Imagem de um satélite de comunicações.

Consideremos o modelo de voo de um satélite com um vector de velocidades angulares $\omega = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^T$, numa referência inercial F_i . Sejam, na mesma referência, θ, ϕ e ψ os ângulos de Euler. Assim, as equações da dinâmica da atitude do satélite, em relação a mesma referência inercial F_i , são [18],

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_1 &= a_1 \omega_2 \omega_3 + u_1 \\
 \dot{\omega}_2 &= a_2 \omega_1 \omega_3 + u_2 \\
 \dot{\omega}_3 &= a_3 \omega_1 \omega_2 + \alpha u_3 \\
 \dot{\theta} &= (\omega_1 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) \tan \phi + \omega_2 \\
 \dot{\phi} &= (\omega_1 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) \\
 \dot{\psi} &= -(\omega_1 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) / \cos \phi
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Com,

$$a_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad a_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad a_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3} \quad (6.19)$$

Onde J_1, J_2 e J_3 representam os momentos de inércia do satélite e os seus valores são, respectivamente, $J_1 = 86.35 \text{kg.m}^2$, $J_2 = 85.15 \text{kg.m}^2$ and $J_3 = 114.10 \text{kg.m}^2$.

Note-se que $u = (u_1 u_2 u_3)^T$ representa um vector tal que $u_i = \tau_i / J_i$, $i = 1, 2, 3$ e τ_i representa os torques.

Analisando as equações da dinâmica de atitude do satélite, podemos concluir que o modelo é altamente não linear e como tal, para estudar o seu comportamento, temos que linearizar este modelo em torno do seu ponto de equilíbrio. Assim sendo, o primeiro passo é encontrar as condições de equilíbrio correspondentes às velocidades angulares nulas, para $\alpha > 0$. Tendo em conta que vários valores presentes nas equações da dinâmica do satélite são, à partida, desconhecidos, vamos assumi-los como sendo iguais a zero,

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas equações da dinâmica de atitude do satélite encontramos as condições de equilíbrio,

$$x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } u_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com as condições de equilíbrio estamos em condições de linearizar o modelo em torno das mesmas. O objectivo é aplicar o método de linearização clássica e o método de linearização óptima ao modelo não linear e comparar os resultados. Vamos linearizar o modelo para vários valores de α ($\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1$) e deste modo obter as matrizes de estado e de controlo que compõem o sistema em espaço de estados.

Assim sendo, para $\alpha = 1$ e utilizando o método de linearização óptima, as matrizes A e B , são,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.0046 & 0.0000 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0007 \\ -0.0004 & -0.0007 & 0.0012 & -0.0022 & -0.0002 & 0.0004 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.1327 & 1.0099 & -0.0091 & -0.0085 & 0.0460 & -0.0438 \\ 0.6882 & 0.0184 & 0.0024 & 0.0191 & -0.0183 & 0.0096 \\ 0.0494 & -0.0318 & 1.1633 & -0.0833 & 0.0312 & 0.0208 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0058 & 0.0016 & -0.0164 \\ 0.0004 & 1.0111 & 0.0100 \\ -0.0003 & 0.0003 & 0.9994 \\ -0.0905 & -0.0351 & 0.0944 \\ -0.0283 & -0.0365 & -0.0686 \\ -0.1001 & -0.0679 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

E, para o mesmo valor de α , usando o método de linearização clássica, as mesmas matrizes ficam,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É necessário ter em conta que α aparece, nas equações da dinâmica de atitude do satélite, relacionado com u_3 , sendo este um controlo primário. E assim, é importante ter sensibilidade para os resultados associados aos diferentes valores de α .

Para $\alpha = 1$ é fácil perceber que não estamos perante nenhuma falha no actuador para o eixo u_3 , no entanto, aplicando um valor menor a α , estamos a aplicar uma percentagem de falha neste controlo. Com $\alpha = 0.5$ estamos a assumir uma falha de 50% no actuador para o eixo u_3 , para $\alpha = 0.1$ temos uma falha de 90% do actuador e por fim admitimos um valor nulo para α e analisamos o comportamento do sistema, utilizando ambos os métodos de linearização.

Consideremos $\alpha = 0.5$. As matrizes de controlo A e B , obtidas através do método de linearização óptima são,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.0046 & 0.0000 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0007 \\ -0.0004 & -0.0007 & 0.0012 & -0.0022 & -0.0002 & 0.0004 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.1327 & 1.0099 & -0.0091 & -0.0085 & 0.0460 & -0.0438 \\ 0.6882 & 0.0184 & 0.0024 & 0.0191 & -0.0183 & 0.0096 \\ 0.0494 & -0.0318 & 1.1633 & -0.0833 & 0.0312 & 0.0208 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0058 & 0.0016 & -0.0164 \\ 0.0078 & 1.0111 & 0.0100 \\ -0.0003 & 0.0003 & 0.4994 \\ -0.0905 & -0.0351 & 0.0944 \\ -0.0283 & -0.0365 & -0.0686 \\ -0.1001 & -0.0679 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

E, com a linearização clássica, obtemos,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que, alterando o valor de α , apenas estamos a influenciar o valor do elemento 3x3 da matriz B , para ambos os métodos.

Considerando agora o caso em que $\alpha = 0.1$, as matrizes de estado e controlo são, respectivamente, e considerando a linearização óptima,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.0046 & 0.0000 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0007 \\ -0.0004 & -0.0007 & 0.0012 & -0.0022 & -0.0002 & 0.0004 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.1327 & 1.0099 & -0.0091 & -0.0085 & 0.0460 & -0.0438 \\ 0.6882 & 0.0184 & 0.0024 & 0.0191 & -0.0183 & 0.0096 \\ 0.0494 & -0.0318 & 1.1633 & -0.0833 & 0.0312 & 0.0208 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0058 & 0.0016 & -0.0164 \\ 0.0078 & 1.0111 & 0.0100 \\ -0.0003 & 0.0003 & 0.0994 \\ -0.0905 & -0.0351 & 0.0944 \\ -0.0283 & -0.0365 & -0.0686 \\ -0.1001 & -0.0679 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de linearização clássica, obtemos,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesta fase já podemos analisar as matrizes obtidas pelos distintos métodos de linearização e reparamos que com o método de linearização clássica, as matrizes de estado e de controlo são bastante mais simples do que aquelas que são obtidas com a linearização óptima, o que já indica algum erro por parte do método clássico, pela simplificação extrema, que pode levar a uma perda de informação importante sobre o sistema.

Faltam apenas apresentar as matrizes obtidas com ambos os métodos de linearização para o caso em que $\alpha = 0$. Sejam as matrizes de estado e de controlo obtidas pelo método de linearização óptima, dadas por,

$$A = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.0046 & 0.0000 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0007 \\ -0.0004 & -0.0007 & 0.0012 & -0.0022 & -0.0002 & 0.0004 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.1327 & 1.0099 & -0.0091 & -0.0085 & 0.0460 & -0.0438 \\ 0.6882 & 0.0184 & 0.0024 & 0.0191 & -0.0183 & 0.0096 \\ 0.0494 & -0.0318 & 1.1633 & -0.0833 & 0.0312 & 0.0208 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0058 & 0.0016 & -0.0164 \\ 0.0078 & 1.0111 & 0.0100 \\ -0.0003 & 0.0003 & -0.0006 \\ -0.0905 & -0.0351 & 0.0944 \\ -0.0283 & -0.0365 & -0.0686 \\ -0.1001 & -0.0679 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

E, utilizando a linearização clássica, obtemos,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para perceber melhor ainda a dimensão da utilidade do novo método que apresentamos, o método de linearização óptima, vamos considerar um estado fora do equilíbrio e tentar controlar o sistema recorrendo então ao método apresentado, LQR. O estado fora do equilíbrio tem os seguintes valores,

$$\omega_1(0) = 0.02rad / s;$$

$$\omega_2(0) = 0.008rad / s;$$

$$\omega_3(0) = 0.002rad / s;$$

$$\theta(0) = 0.2rad;$$

$$\phi(0) = 0.4rad;$$

$$\psi(0) = 0.5rad.$$

Ou seja,

$$x_0 = [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T$$

Assim, para $\alpha = 1$, os resultados obtidos do controlo são, para os dois métodos de linearização,

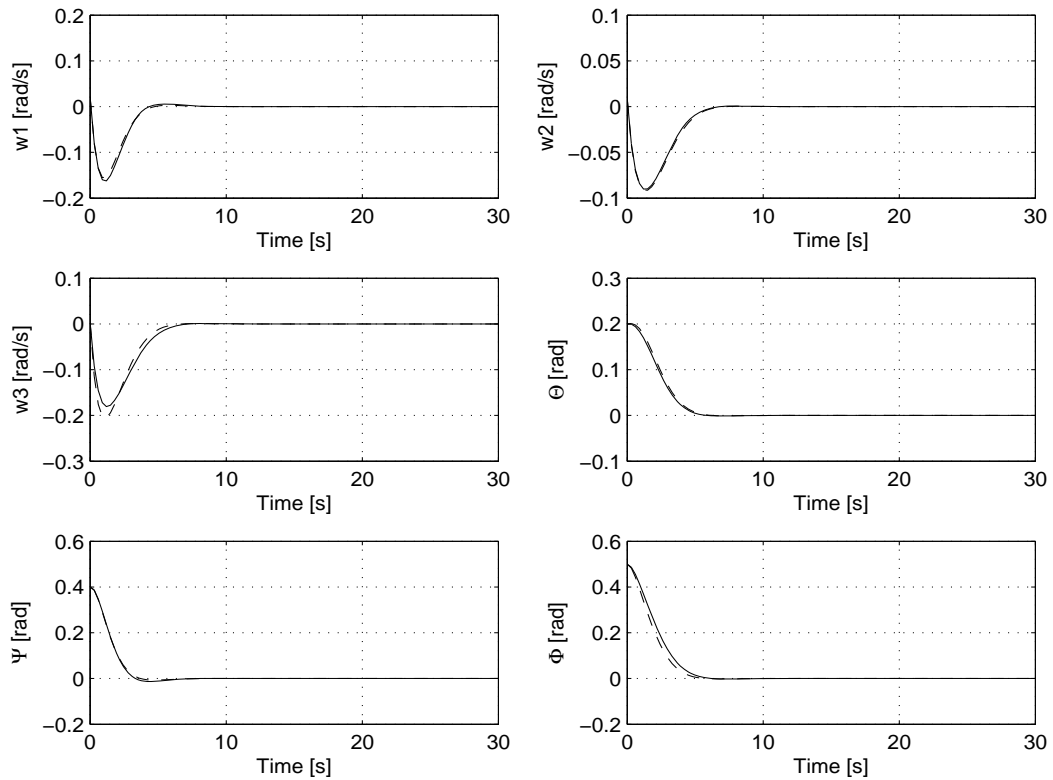


Figura 29. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização óptima (—) e linearização clássica (---).

Podemos observar que tanto as linhas a cheio como as linhas a tracejado têm o mesmo comportamento, isto é, para este caso os dois métodos de linearização apresentam praticamente os mesmos resultados. Por outro lado, podemos concluir que, quando sujeito a uma perturbação, o sistema volta ao estado de equilíbrio por volta dos seis, sete segundos, tal como a acção dos controlos. Podemos observar também o comportamento destes controlos, associados aos torques por $u_i = \tau_i / J_i$, $i = 1, 2, 3$. Para o caso do modelo linearizado classicamente, obtemos

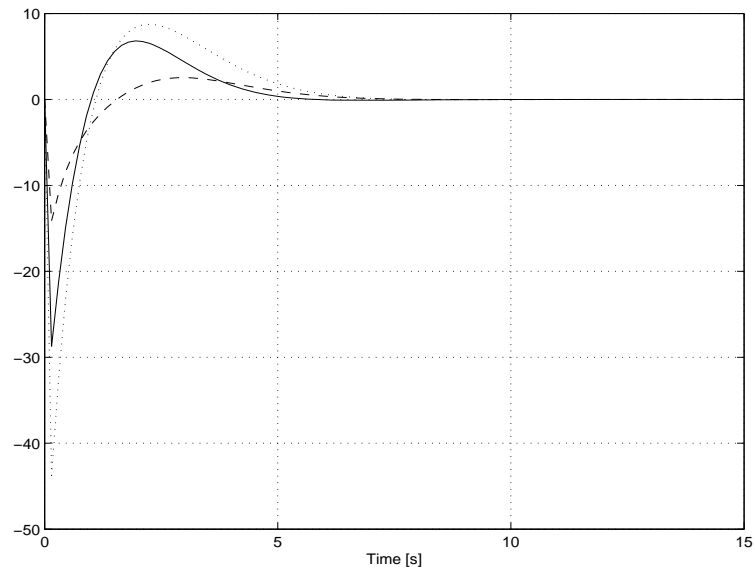


Figura 30. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 1$ e

$$x_0 = [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T : u_1 (-), u_2 (--) \text{ e } u_3 (\cdots).$$

E, quando utilizamos o método de linearização óptima, obtemos,

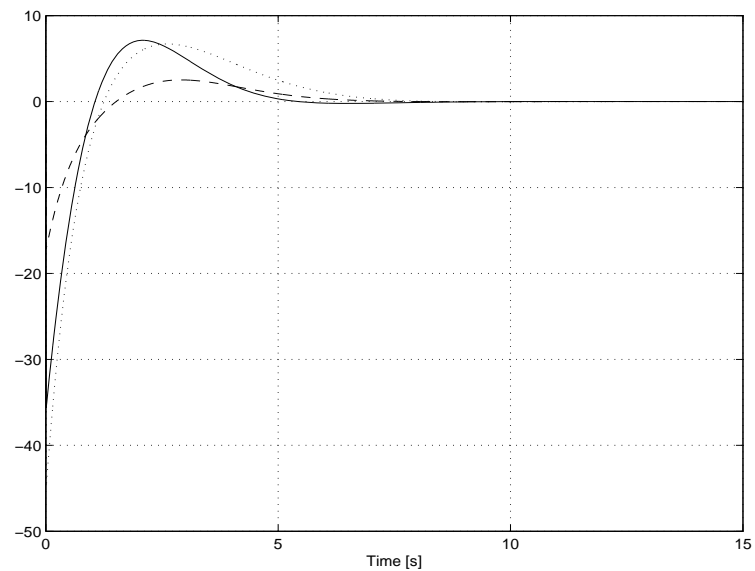


Figura 31. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 1$ e

$$x_0 = [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T : u_1 (-), u_2 (--) \text{ e } u_3 (\cdots).$$

No entanto, para obter os mesmos resultados, o controlo associado ao valor de α necessitou de uma maior amplitude, no modelo linearizado pelo método clássico. Houve, portanto, um gasto maior.

Para $\alpha = 0.5$ os resultados obtidos são,

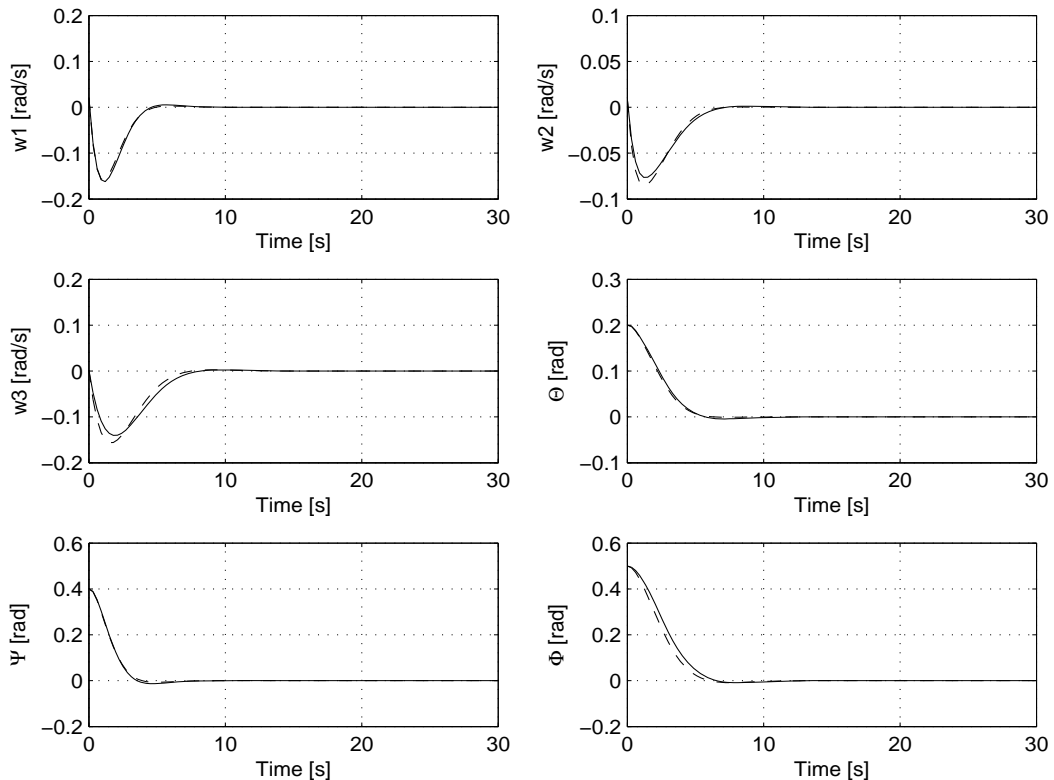


Figura 32. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização óptima (—) e linearização clássica (---).

Ao analisar estes gráficos as conclusões que retiramos são muito semelhantes às anteriores. Com estes resultados já estamos habilitados a fazer algumas conclusões. Relembremos que na linearização clássica não sabemos o domínio do problema, isto é, o modelo é linearizado num domínio que é desconhecido. Pelo contrario, na linearização óptima podemos controlar o domínio e assim sendo, ao encontrar, para os casos de $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.5$, soluções muito semelhantes, ficamos a ter conhecimento do domínio de linearização. Neste ponto, o método de linearização óptima vem completar o método de linearização clássica. Note-se que, o facto de estes resultados serem muito

semelhantes acresce ainda outra conclusão que valida também o método de linearização óptima, ou seja, os resultados provam que a linearização óptima está de acordo com a linearização clássica, isto é, os dois métodos são coerentes.

E, para este caso, os controlos apresentam a seguinte resposta, no caso do modelo linearizado pelo método clássico,

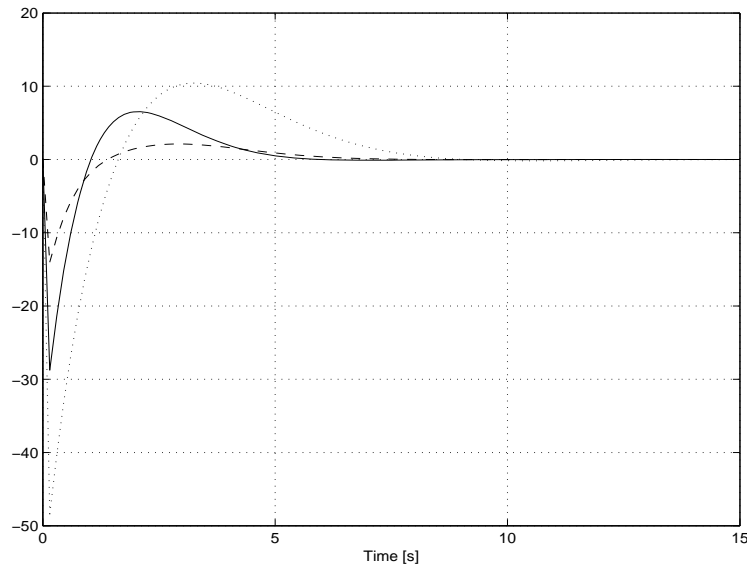


Figura 33. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 0.5$ e

$$x_0 = [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T : u_1 (-), u_2 (-\cdot) \text{ e } u_3 (\cdots).$$

Repare-se que, relativamente ao valor de α interior, quando impomos uma determinada falha na actuação do controlo primário, o mesmo necessita de um maior esforço para alcançar a estabilidade.

Para o modelo linearizado através do método de linearização óptima, aqui apresentado, obtemos,

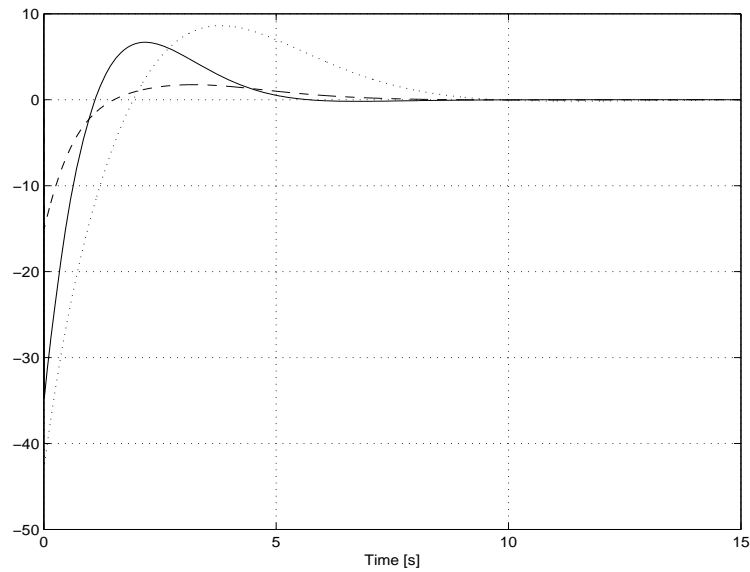


Figura 34. Resposta dos controlos relativamente às condições impostas acima, $\alpha = 0.5$ e

$$x_0 = [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T : u_1 (-), u_2 (--) \text{ e } u_3 (\cdots).$$

Repare-se que aqui retiramos as mesmas conclusões que no caso anterior. Embora os controlos u_1 e u_2 tenham um comportamento muito semelhante em ambos os casos, o controlo u_3 está agora associado a uma falha de 50%, implicando um maior esforço no controlo e este esforço é mais acentuado quando aplicamos o método de linearização clássica ao modelo não linear.

Para $\alpha = 0.1$ e continuando na mesma linha de actuação, obtemos,

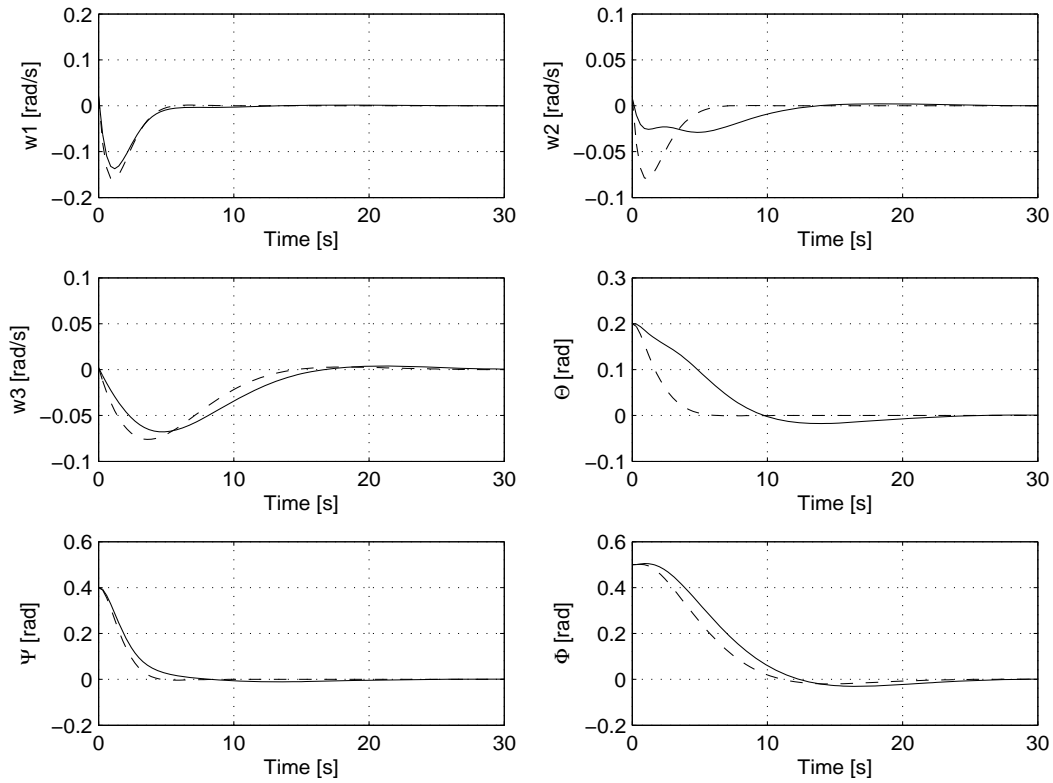


Figura 35. Resultados obtidos para os dois métodos de linearização: linearização óptima (—) e linearização clássica (--).

Para a mesma perturbação imposta ao sistema, $\alpha = 0.1$ e usando o método de linearização clássica ao modelo não linear, os controles têm a seguinte resposta,

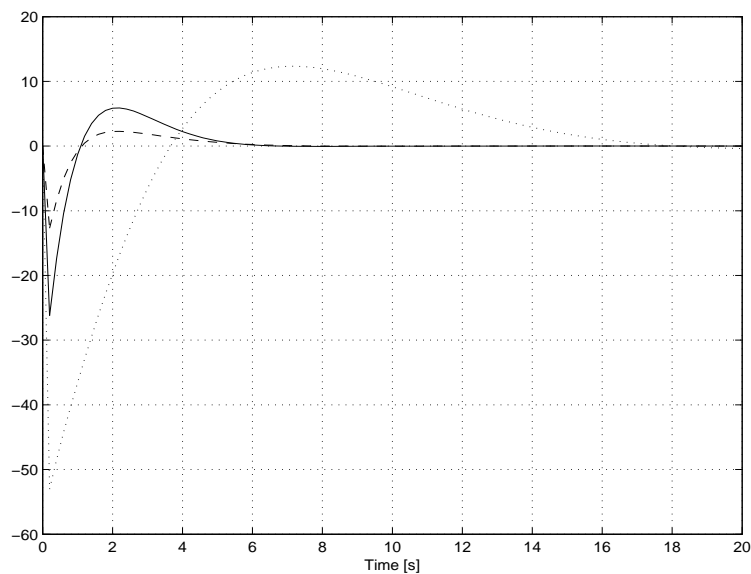


Figura 36. Resposta dos controles às situações impostas anteriormente: u_1 (—), u_2 (--) e u_3 (····).

Linearizando o modelo não linear pelo método de linearização óptima, obtemos,

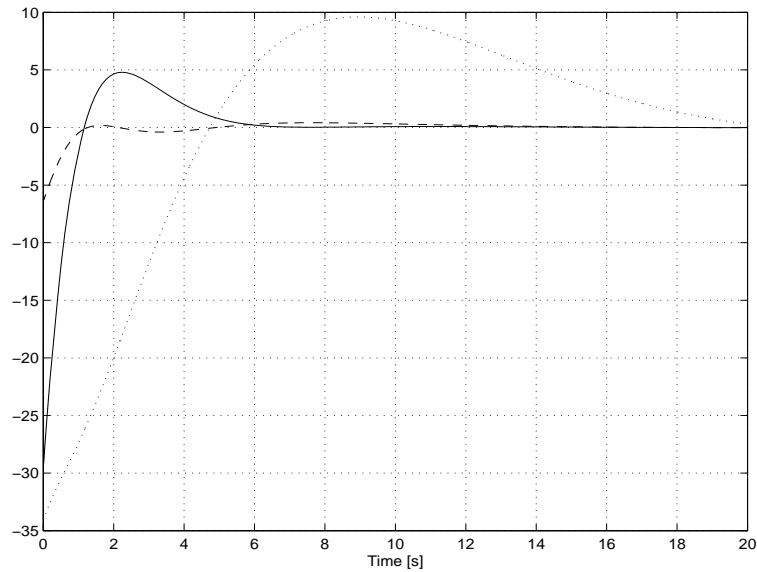


Figura 37. Resposta dos controlos às situações impostas anteriormente: u_1 (—), u_2 (···) e u_3 (···).

Apesar de, neste caso, o sistema estabilizar mais cedo, quando linearizado pelo método clássico, é necessário um maior esforço por parte dos controlos para que o sistema estabilize da mesma maneira. Por outro lado, sabemos que, se alterarmos as dimensões da “caixa” do domínio, obteríamos melhores resultados com o método de linearização óptima e é neste ponto que encontramos a principal vantagem deste método: é possível alterar o domínio de estados e de controlos de modo a encontrar melhores resultados.

E finalmente, para $\alpha = 0$, temos,

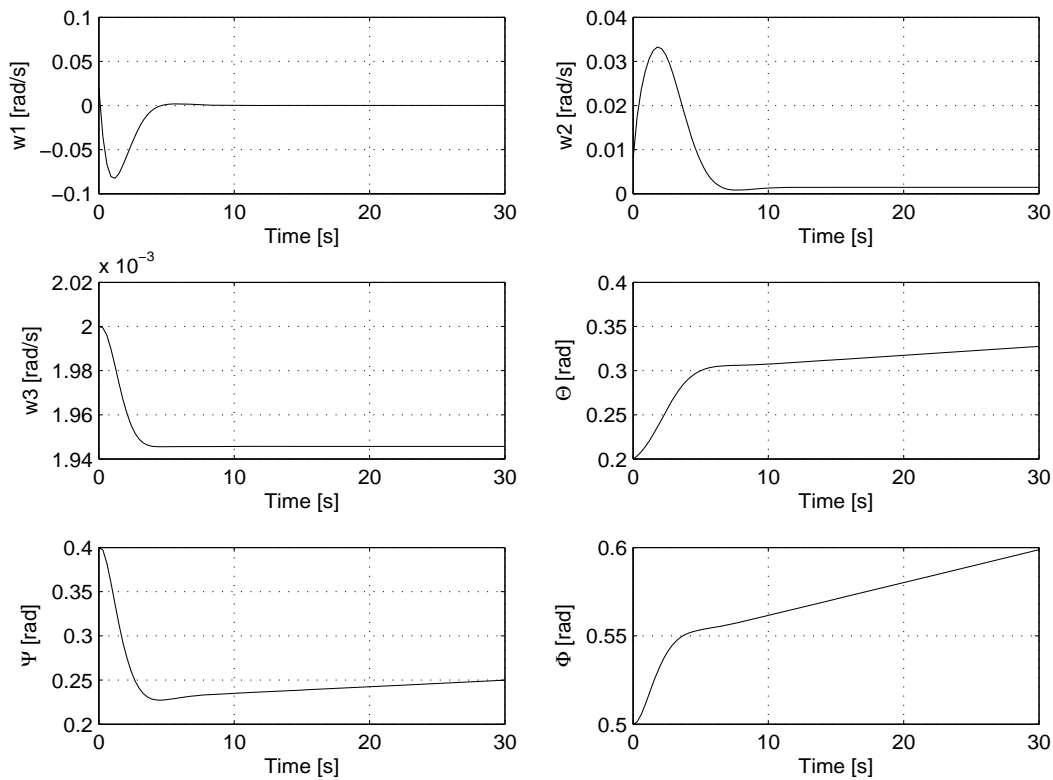


Figura 38. Resultados obtidos apenas para o método de linearização óptima.

É para $\alpha = 0$, isto é, para um valor de α nulo que implica uma falha completa no actuador para o eixo u_3 , que notamos a maior diferença nos resultados. Relembremos que a teoria nos diz que qualquer sistema nas mesmas condições que o modelo dinâmico do satélite é controlável [20], com apenas dois dos controlos. É neste ponto que a linearização clássica falha, uma vez que para o valor de α nulo e aplicando este método de linearização, o sistema fica incontrolável. Tal não acontece quando utilizamos o método de linearização óptima, onde o sistema continua a ser controlável. Este resultado indesejável, no caso da linearização clássica aplicado ao modelo não linear, pode ser explicado pelo facto deste método estar acompanhado de perdas de informação importantes acerca do modelo inicial que traduz a dinâmica do satélite. Portanto, o método de linearização óptima permite continuar a ter um modelo controlável e o método utilizado para o controlo, LQR, obtém para o caso das velocidades w_1 e w_2 um controlo óptimo. Este controlo torna-se mais complicado para as taxas e para a velocidade w_3 , o que, utilizando um outro método mais adequado, poderia ser mais eficiente.

A figura seguinte mostra a resposta dos controlos quando impomos uma falha completa a um controlo, neste caso a u_3 .

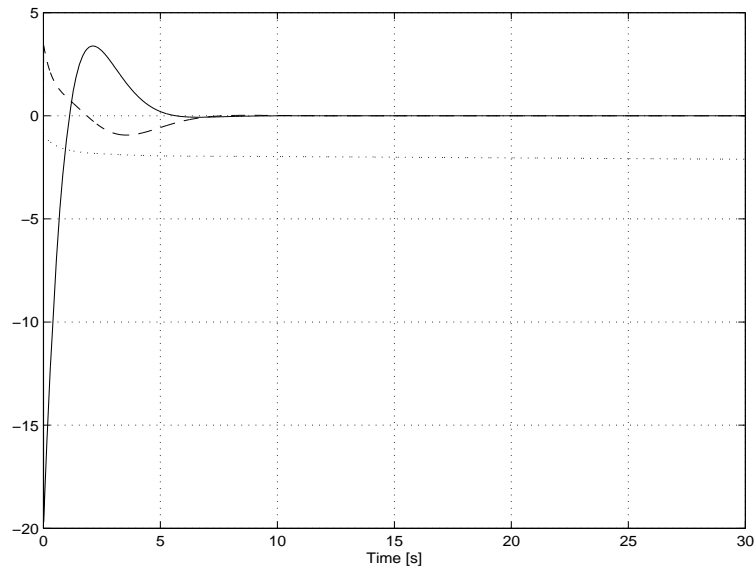


Figura 39. Resultados obtidos apenas para o método de linearização óptima: u_1 (—), u_2 (-·-) e u_3 (···).

Os controlos estabilizam rapidamente sem mesmo conseguirem estabilizar os estados. Não significa que não haja controlo, mas sim que o método dos reguladores lineares quadráticos não é o melhor método para o controlo, no caso de o sistema ter que lidar com uma falha completa no actuador para u_3 . Note que, já Crouch havia demonstrado [20] que para $\alpha = 0$ nenhum controlo contínuo consegue controlar. Logo, como o método dos reguladores lineares quadráticos é um controlo contínuo, então, estes resultados já eram esperados para este caso.

De modo a encontrar mais argumentos que justifiquem a defesa do método de linearização óptima, testamos ainda outras situações. Consideramos um valor de α igual à unidade ($\alpha = 1$) e utilizamos o mesmo método para o controlo, isto é, o método dos reguladores lineares quadráticos. A perturbação imposta no estado de equilíbrio anteriormente era $x_0 = [0.02 \ 0.008 \ 0.002 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5]^T$. Afastamos esta perturbação até obter o afastamento a partir do qual já não há controlo, para o caso do

método de linearização óptima aplicado ao modelo não linear. O afastamento máximo, para o qual o sistema ainda é controlável, é,

$$x_0 = 3.895 \times [0.02 \quad 0.008 \quad 0.002 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]^T$$

Para as condições apresentadas acima e para o método de linearização clássica, obtemos,

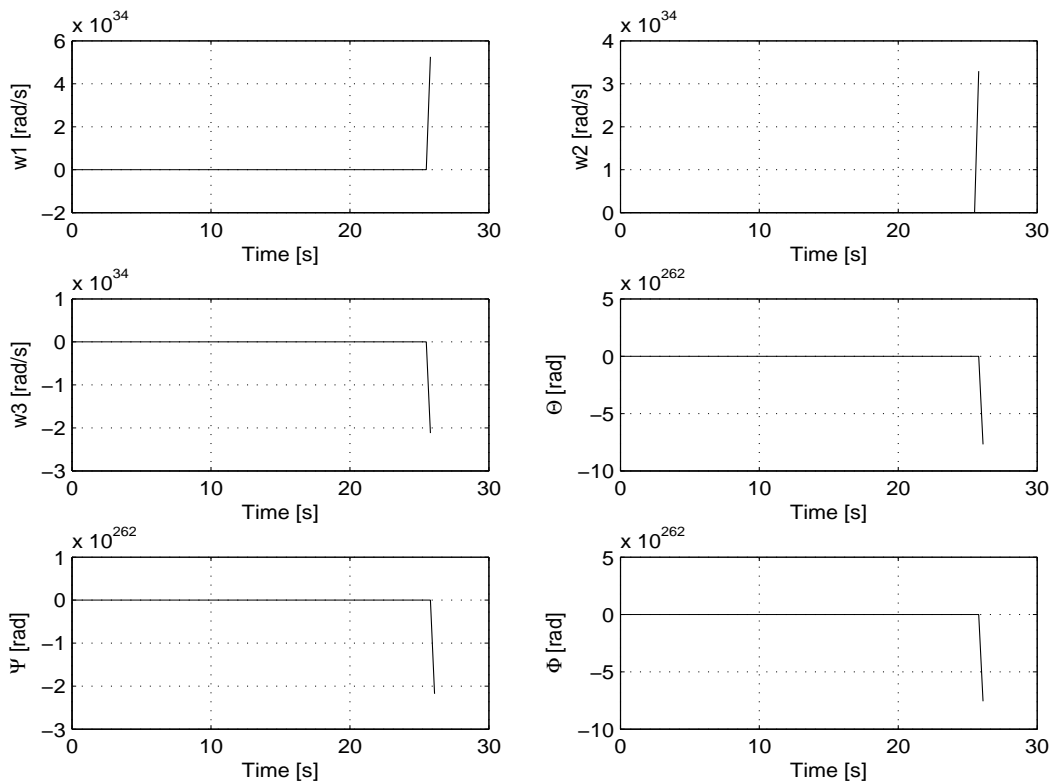


Figura 40. Resultados obtidos para o método de linearização clássica e para um estado suficientemente afastado do equilíbrio.

Ou seja, desta figura concluímos que, quando linearizamos o modelo não linear com o método de expansão em séries de Taylor, e aplicando esta perturbação o sistema continua a ser controlável mas não com o método dos reguladores quadráticos. Já havia sido mencionado que o método dos reguladores lineares quadráticos é, para além do método mais utilizado para o controlo, o menos dispendioso sem no entanto prejudicar a sua fiabilidade.

Utilizando o método de linearização óptima, obtemos,

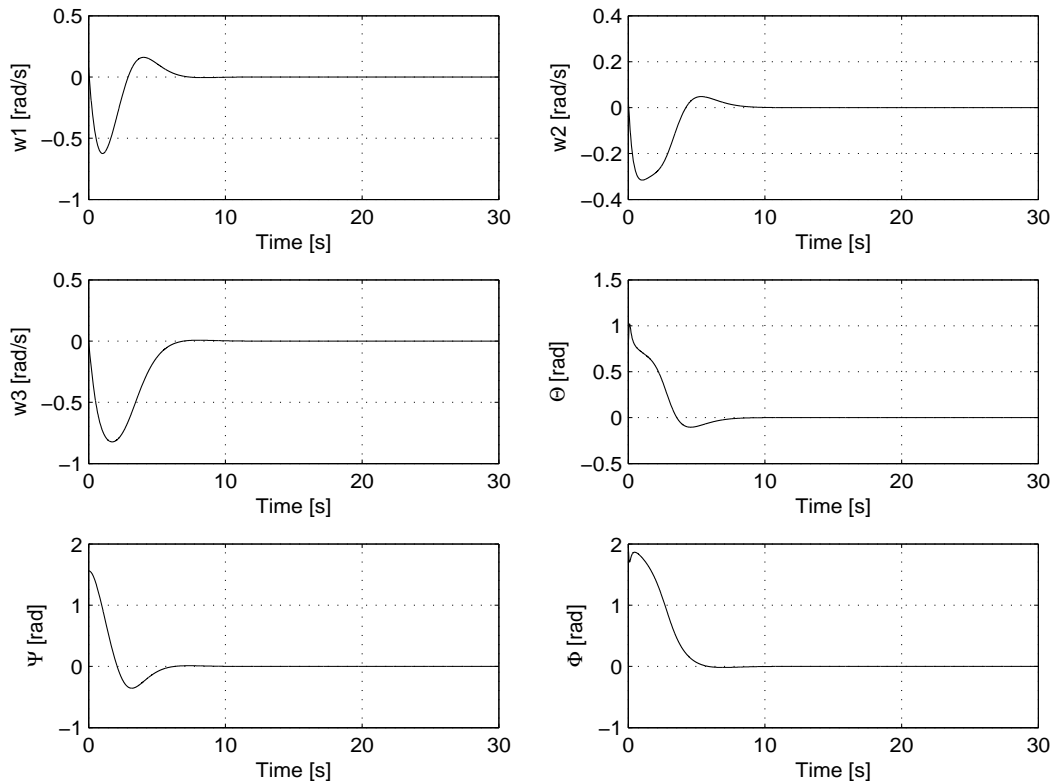


Figura 41. Resultados obtidos para o modelo do satélite utilizando o método de linearização óptima e um novo estado suficientemente afastado do equilíbrio.

Observando as figuras vemos claramente que para esta situação imposta, o método de linearização clássica deixa de funcionar, ou melhor, utilizando este método, o sistema não pode ser controlado pelo método de LQR e como tal, a sua estabilização fica comprometida. Pelo contrário, utilizando o método de linearização óptima, o sistema permanece controlável e a sua estabilização acontece de forma óptima, onde todas as variáveis encontram a estabilidade por volta dos seis ou oito segundos.

Para esta nova perturbação imposta, vamos observar nas figuras seguintes o comportamento dos controlos.

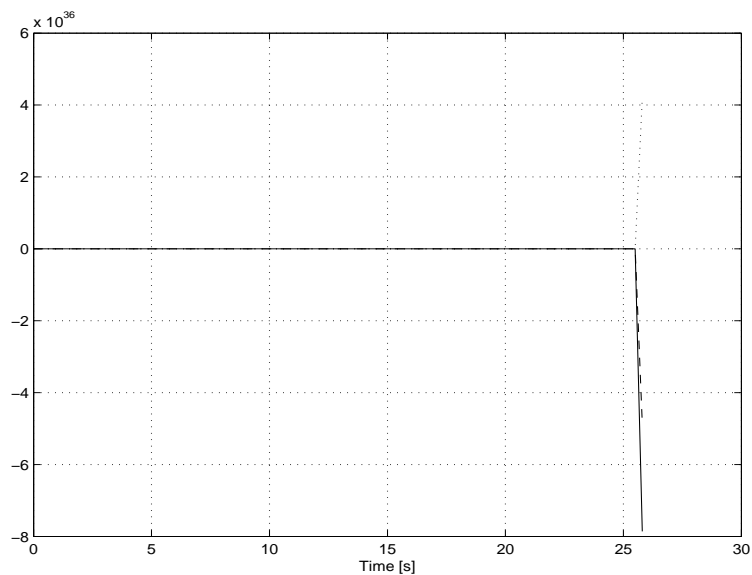


Figura 42. Resultados obtidos para o método de linearização clássica: u_1 (—), u_2 (--) e u_3 (···).

Tal como seria de esperar, quando aplicamos o método de linearização clássica ao modelo não linear, como a simplificação imposta nas matrizes de estado e controlo é bastante grande, essa simplificação vai-se manifestar no projecto do controlador. Como tal, o controlador de LQR fica incapaz de actuar num sistema com estas condições, facto que é visível na figura anterior.

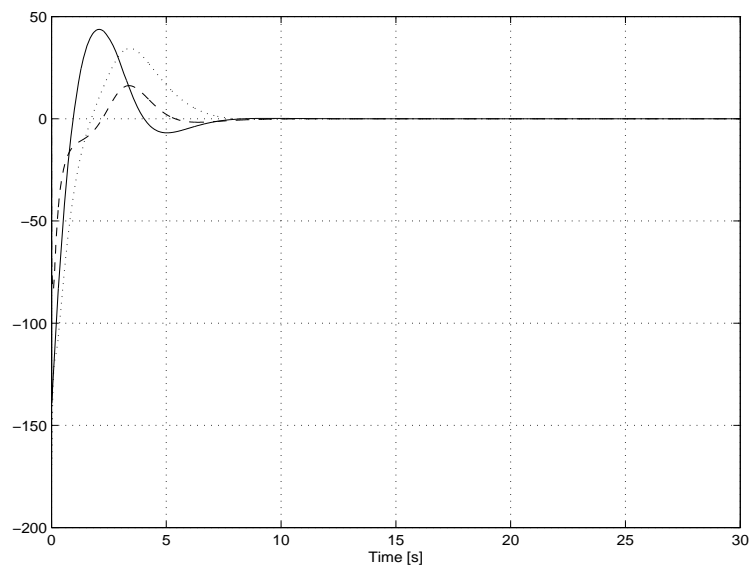


Figura 43. Resultados obtidos para o método de linearização óptima: u_1 (—), u_2 (--) e u_3 (···).

Pelo contrário, o controlador LQR projectado com os dados recebidos do modelo linearizado pelo método de linearização óptima consegue impor uma estabilidade nas variáveis de estado perturbadas, de modo a que estas regressem ao equilíbrio, e os controlos, por seu lado, também estabilizam. Se observarmos a legenda das figuras, vemos também que este afastamento máximo suportado pelo sistema (quando o modelo é optimamente linearizado) implica uma maior acção ou esforço por parte dos controlos para que o sistema alcance a estabilidade.

Podemos ainda, devido a esta aplicação, concluir sobre o domínio de atracção do sistema. É mais visível nesta última aplicação que o domínio de atracção, quando utilizamos o método de linearização óptima ao modelo não linear, é bastante superior ao domínio de atracção de um sistema cujo modelo não linear é linearizado pelo método clássico.

7. Conclusões

Um novo método de linearização foi apresentado e testado em distintas aplicações a fim de provar a sua consistência, credibilidade e anotar sobretudo as vantagens inerentes à sua aplicação futura em modelos dinâmicos não lineares. Este novo método de linearização foi, então, aplicado ao modelo dinâmico de voo da aeronave F-8 Crusader Fighter [14], ao modelo dinâmico de um pêndulo rotativo invertido [16] e por fim, ao modelo dinâmico de um satélite [18]. Ao longo do trabalho foram apontadas as vantagens do método consoante as respostas obtidas por cada sistema e comentadas as suas aplicações. Vamos apresentar aqui as vantagens gerais resultantes da aplicação do método de linearização óptima aos modelos não lineares que governam as dinâmicas dos sistemas apresentados. Note-se que apesar de existirem vários métodos de linearização, cada um sendo mais aplicado a uma determinada aplicação, neste trabalho foram comparados os resultados obtidos através dos modelos não linearizados, quando linearizados pelo método de linearização clássica e pelo método de linearização óptima. Como tal, as conclusões terão que ter em conta também a comparação entre estes dois métodos tendo noção, no entanto, de que, sabendo as limitações dos restantes métodos existentes, outras comparações podem ser tomadas à posteriori.

O modelo não linear da aeronave F-8 é composto por três variáveis de estado e uma variável de controlo que são o ângulo de ataque da aeronave, o ângulo de arfagem, a taxa de arfagem e o actuador do *profundor ou elevador* (controlo primário), respectivamente. Este sistema é fortemente não linear pelo que, para estudar o seu comportamento foi necessário linearizá-lo e utilizar uma representação em espaço de estados a fim de projectar um controlo óptimo que foi depois aplicado ao sistema original não linear, sistema, este, que foi usado na simulação. Apesar de, graficamente, não conseguirmos obter diferenças significativas aquando da aplicação dos diferentes métodos de linearização, uma análise mais severa à teoria de sistemas revela onde se encontram as maiores diferenças. Uma das vantagens mais significativas é o facto do domínio de linearização ser conhecido no método de linearização óptima. Já tínhamos referido, e é mostrado na descrição do método, que este novo método vem

acompanhado pela definição de uma “caixa” que define o domínio. É nesta caixa de domínio, definida pelo utilizador, que são definidas as curvas de densificação de onde são escolhidos um determinado número de pontos que serão utilizados no processo de linearização. É, portanto, totalmente livre a escolha de vários parâmetros neste novo método. O facto de, graficamente, os resultados serem muito semelhantes, isto é, de as respostas serem praticamente iguais para os distintos métodos, significa que o método de linearização óptima é coerente com o método de linearização clássica, o que contribui para a credibilidade na utilização do novo método. Apesar de apenas conseguirmos ter uma aproximação do domínio de atracção, foi possível reparar, graficamente, que quando utilizamos o método de linearização óptima ao modelo não linear o domínio de atracção, isto é, o domínio de estados até os quais é possível afastar os mesmos relativamente ao equilíbrio de modo que essas mesmas variáveis de estado regressem ao estado de equilíbrio inicial, é maior. Ficamos então, com uma maior margem para perturbar o sistema sem comprometer a sua estabilização e controlabilidade. Por outro lado, e analisando a teoria de sistemas, ao procurar os valores próprios da matriz de estado encontramos todos os valores próprios com partes reais negativas, no caso da linearização óptima, o que não acontece quando utilizamos o método de linearização clássica. Este facto indica que a matriz de estado obtida pelo método de linearização óptima é uma matriz de Hurwitz que se diz ser óptima para o controlo. Falta referir um ponto importante nesta aplicação. Se alterássemos o domínio do problema, associado ao método de linearização óptima, apesar de deixarmos de ter uma matriz de estado de Hurwitz, obteríamos uma estabilização claramente mais rápida. De acordo com os objectivos desejados a dimensão da caixa de domínio pode ser, então, alterada a qualquer momento.

A segunda aplicação foi feita a um sistema dinâmico de um pêndulo rotativo invertido. Este sistema tem, na área aeronáutica e espacial, grandes aplicações práticas pois a sua dinâmica é muito semelhante à dinâmica de um foguete ou mesmo à dinâmica do braço mecânico da Estação Espacial Internacional (ISS). Representa, portanto, um sistema cujo desenvolvimento e exploração é bastante importante. Aplicando os dois métodos de linearização ao modelo não linear que descreve este sistema, podemos tirar conclusões óbvias, principalmente através da observação dos gráficos que traduzem as respostas do sistema a determinadas perturbações impostas. Várias conclusões podem ser retiradas dos gráficos que traduzem as respostas do sistema quando são sujeitos a

algumas perturbações. Para todas as perturbações impostas, o ângulo do braço rotativo, representado por x_3 , estabiliza muito mais rápido quando utilizamos o método de linearização ótima. Por outro lado, nos segundos iniciais à perturbação, o sistema responde de uma forma bastante suave (menor amplitude e menos oscilações) com o método ótimo do que quando o método de linearização clássica é utilizado. Quanto ao domínio de atracção, o método de linearização ótima representa enormes vantagens. Podemos reparar que, quando utilizamos o método de linearização clássica ao modelo não linear, a máxima perturbação que os ângulos podem suportar é de 14.32° e quando aumentamos a velocidade do braço rotativo e do pêndulo os ângulos apenas podem sofrer um afastamento de 5.73° . Note-se que esta situação ocorre para um controlador projectado através do método dos reguladores quadráticos. Por outro lado, quando o modelo não linearizado é linearizado pelo método de linearização ótima, o sistema consegue suportar afastamentos nos ângulos de 67.86° com uma velocidade angular mais baixa. Aumentando esta velocidade angular, conseguimos manter um afastamento igualmente satisfatório dos ângulos do pêndulo e do braço rotativo, 61.88° . Encontramos neste ponto uma diferença significativa entre os dois métodos, na medida em que o afastamento permitido pelo método de linearização ótima é bastante maior e como tal permite uma maior amplitude de aplicações práticas. Por outro lado, quando simulamos o modelo pudemos ver a acção do controlo. Mais uma vez, quando o modelo é linearizado pelo método clássico, o controlo sofre um maior esforço para obter os mesmos resultados do modelo linearizado optimamente. Nesta aplicação continuamos a saber o domínio de linearização e este foi escolhido de acordo a obter os resultados mais desejáveis.

Quando aplicamos os dois métodos de linearização ao sistema dinâmico do satélite, outras conclusões podem ser retiradas das quais algumas bastante importantes para o avanço da teoria sobre controlo. O modelo dinâmico não linear do satélite é composto por seis variáveis de estado (w_1, w_2 e w_3 que representam as componentes da velocidade angular e θ, ϕ e ψ representam os ângulos de Euler: ângulo de arfagem, ângulo de rolamento e ângulo de guinada, respectivamente) e três variáveis de controlo (u_1, u_2 e u_3 que representam os controlos primários). Depois de assumidas as condições de equilíbrio, o modelo não linear foi linearizado em torno destas mesmas condições tendo em conta diferentes valores de α : $\alpha = 1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0$. Como α está

directamente associado a um dos controlos, u_3 , analisamos a influência dos diferentes valores de α sobre o controlo e estabilidade do satélite em geral. Assim, para $\alpha = 1$ e para uma perturbação imposta ($w_1 = 0.19rpm$, $w_2 = 0.08rpm$, $w_3 = 0.02rpm$, $\theta = 11.46^\circ$, $\phi = 22.92^\circ$, $\psi = 28.65^\circ$), podemos ver, a partir dos gráficos obtidos, que as respostas resultantes da aplicação dos dois métodos de linearização estão sobrepostas o que significa que obtivemos respostas muito semelhantes. Este resultado mostra que, tendo todos os controlos a funcionar a 100%, os dois métodos de linearização óptima dispõem resultados semelhantes, mostrando assim a coerência existente entre os dois métodos. Por outro lado e analisando as respostas dos controlos vemos que, para obter os mesmos resultados, o controlo u_3 necessitou de um pouco mais de esforço, isto é, a resposta teve uma maior amplitude, quando utilizamos o método de linearização clássica ao modelo não linear. Quando aplicamos uma falha de 50% no actuador para o eixo u_3 o sistema comporta-se da mesma maneira. Apesar de obter resultados práticos muito semelhantes, é necessário um esforço superior no controlo u_3 . Dependendo do material utilizado no mecanismo físico, esta amplitude de oscilação pode indicar um gasto superior de material. Quando impomos uma falha de 90% no controlo, isto é, impomos $\alpha = 0.1$, embora o sistema estabilize mais tarde quando o sistema é linearizado pelo método de linearização óptima, há várias situações que devemos analisar. Em primeiro lugar, para esta situação poderíamos alterar a dimensão da caixa de domínio alcançando, assim, melhores resultados. Por outro lado, apesar de o sistema estabilizar mais tarde quando o modelo não linear é linearizado através do método óptimo, as oscilações são mais suaves, tendo uma amplitude mais baixa, incluindo para os controlos (sobretudo o controlo u_3). É no caso de uma falha completa do controlo que concluímos algo de novo. A teoria de sistemas diz-nos que, no caso de falha de um controlo, o sistema dinâmico pode ser controlável com apenas os restantes dois controlos primários [20]. É neste ponto que a linearização clássica falha completamente, pois quando $\alpha = 0$ e forçando a mesma perturbação no equilíbrio apresentada anteriormente, a simulação retorna um sistema incontrolável. É devido a falhas de informação muito importantes, falhas estas associadas à linearização, que este facto acontece. Tal não acontece quando linearizamos o modelo não linear pelo método de linearização óptima, onde o sistema continua controlável, de acordo com os trabalhos teóricos desenvolvidos por Crouch [20], embora o método LQR não seja o mais adequado para este caso, necessitando o

sistema de um método mais rebuscado para estabilizá-lo. Por fim, e avaliando o domínio de atracção deste sistema quando sujeito a um afastamento (mudança) de estado, é notável que o afastamento máximo permitido pelo sistema, de modo que este volte ao equilíbrio, é bastante superior quando utilizamos o método de linearização ótima. Para um valor de α igual à unidade, a perturbação imposta foi igual a 3.895 vezes a perturbação anterior ($w_1 = 0.74rpm$, $w_2 = 0.31rpm$, $w_3 = 0.08rpm$, $\theta = 44.64^\circ$, $\phi = 89.27^\circ$, $\psi = 111.59^\circ$) e pudemos reparar que, apesar de o sistema ser controlável e observável quando utilizamos o método clássico de linearização, o controlo projectado com os dados recebidos pelo modelo linearizado pelo mesmo método não é capaz de estabilizar o sistema. Por outro lado, a informação transmitida pelas variáveis de estado do modelo linearizado pelo método de linearização ótima é suficiente para que o sistema seja controlado pelo método dos reguladores quadráticos. É visível nos resultados obtidos (figura 41) que o sistema quando sujeito a esta perturbação alcança a estabilidade num tempo muito breve, mas com um esforço superior por parte dos controlos do que, quando sujeito à primeira perturbação imposta.

Em resumo, as vantagens gerais da utilização do método de linearização ótima, presente neste trabalho de dissertação, foram muito bem descritas e comprovadas pela sua utilização em três sistemas dinâmicos com aplicações muito práticas na indústria aeronáutica e aeroespacial.

8. Referências

- [1] Vincent, T. L., Grantham, W. F., *Nonlinear and Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1997.
- [2] Zhao, Y., “Least Squares Optimal Linearization”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.17, No.5, September – October 1994, pp. 990-997.
- [3] Bousson, K., Silva, J.M.A., Cardoso, A.S., “Optimal Linearization of Nonlinear Control Models”, *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2006, Paper N° AIAA 2006-642.
- [4] Bousson, K., Correia, S. D., “Optimization algorithm based on densification and canonical descent”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 191 (2006), pp. 269-279.
- [5] Takata, H., “Transformation of a Nonlinear System into an Augmented Linear System”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.AC-24, No.5, October 1979, pp. 736-741.
- [6] Narikiyo, K., Takata, H., “A Formal Linearization Method by the Cubic Hermite Interpolation for Nonlinear Systems”, *Proceedings for the IEEE 35th Conference on Decision and Control*, December 1996, pp. 90-91.
- [7] Komatsu, K., Takata, H., “A formal Linearization by the Chebyshev Interpolation and Its Applications”, *Proceedings of the IEEE 35th Conference on Decision and Control*, December 1996, pp. 70-75.
- [8] Takata, H., Komatsu, K., Sano, H., “Formal Linearization of Nonlinear Time – Varying Dynamic System Using Chebyshev and Laguerre Polynomials”, *Unpublished manuscript*, 2005.
- [9] Lin, C., Cheng, V., “Statistical Linearization for Multi-Input/Multi-Output Nonlinearities”, *Journal of Guidance*, Vol.14, No.6, 1991, pp.1315-1318.
- [10] Pachter, M., Chandler, P.R., “Universal Linearization Concept for Extended Kalman Filters”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.29, No.3, July 1993, pp. 946-962.
- [11] Longbin, M., et al. “Utilization of the Universal Linearization in Target Tracking”, *Proceedings for the IEEE National Aerospace and Electronics Conference, NAECON*, Vol.2, July 1997, pp. 941-945.

- [12] Li, X.R., Jilkov, V.P., “A Survey of Maneuvering Target Tracking – Part III: Measurement Models”, *Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, July – August 2001.
- [13] Isidori, A., *Nonlinear Control Systems*, Springer 3rd Edition, 1995.
- [14] Desrochers, A. A., Al-Jaar, R. Y., “Nonlinear Model Simplification in Flight Control System Design”, *Journal of Guidance*, Vol.7, No.6, November – December 1984, pp. 684-689.
- [15] Çimen, T., Banks, S. P., “Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria”, *Systems & Control Letters*, Vol.53, 2004, pp. 327-346.
- [16] Hassanzadeh, I., Mobayen, S., Harifi, A., “Input – Output Feedback Linearization Cascade Controller Using Genetic Algorithm for Rotary Inverted Pendulum System”, *American Journal of Applied Sciences*, Vol.5, No.10, 2008, pp. 1322-1328.
- [17] Yavin, I., “Control of a Rotary Inverted Pendulum”, *Applied Mathematics Letters*, Vol.12, 1999, pp. 131-134.
- [18] Alamir, M., Boyer, F., “Fast generation of attractive trajectories for an under-actuated satellite – Application to feedback control design”, *Optimization and Engineering*, Vol. 4, 2003, pp. 215-230.
- [19] Krishnan, H., Reyhanoglu, M., McClamroch, H., “Attitude Stabilization of a Rigid Spacecraft Using Two Control Torques: A Nonlinear Control Approach Based on The Spacecraft Attitude Dynamics”, *Automatica*, Vol.30, No.6, 1994, pp.1023-1027.
- [20] Crouch, P. E., “Spacecraft Attitude Control and Stabilization: Applications of Geometric Control Theory to Rigid Body Models”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.29, No.4, April 1984, pp. 321-331.