



# **Interceção de Alvos em Situações Incertas pelos Princípios de Controlo Ótimo**

(Versão Corrigida Após Defesa)

**Carlos Alberto Ferreira Pinto Silva**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeronáutica**  
Mestrado Integrado

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**Novembro de 2021**



# Agradecimentos

Antes de tudo, quero agradecer aos meus pais e à minha irmã: Fátima, Alberto e Susana; que fizeram sempre todos os possíveis para me ajudar no meu caminho até aqui. Foi a educação que me deram e o vosso amor incansável que me permitiu alargar os meus horizontes. Foram, são e serão sempre o meu porto seguro que me dá tranquilidade e segurança em todas as novas etapas da minha vida.

Ao Professor Doutor Kouamana Bousson, por todo o conhecimento e sabedoria que partilhou comigo e pela enorme ajuda que me permitiu enfrentar este desafio. Quero também agradecer a confiança e boa disposição, que fizeram que o trabalho fosse um pouco mais fácil.

Aos meus amigos e parceiros do laboratório Illya, Adriana e Francisca, por toda a ajuda e dicas, e em especial por me ajudarem a manter a mente sã quando as coisas corriam menos bem.

Aos meus amigos que me acompanharam até agora, com menção honrosa à Topdown, WAT e PTN, por todo o apoio e por me ajudarem a descomprimir quando o trabalho já me enevoava a cabeça.



## **Resumo**

A presente dissertação visa a análise do problema de orientação de mísseis interceptores pela abordagem dos princípios de controlo ótimo de sistemas dinâmicos. As medições de posição são incertas, devido à falta de dados ou a erros a estes associados, especialmente quando se trata de alvos que se movem a velocidades elevadas. É necessário também garantir que o controlo do interceptor é efetuado de forma célere, eficaz e dentro dos seus constrangimentos de manobrabilidade. Para a estimação de posições foi estudado um algoritmo de filtragem de Kalman adaptativa com base na inovação, aplicando-o a trajetórias que podem ser altamente ruidosas. Quanto ao controlo, escolheram-se princípios de controlo integral multivariável com base na abordagem de controlo LQR, que foram aplicados ao modelo de um interceptor face a vários tipos de trajetória. Em ambos os casos os resultados obtidos mostraram-se interessantes no que diz respeito aos requisitos de interceção. O filtro de Kalman adaptativo mostrou-se capaz de reduzir significativamente o efeito dos erros do sistema, apresentando uma trajetória mais próxima à real. A flexibilidade de implementação graças à adaptabilidade do filtro é outro ponto a seu favor. O controlador LQR adaptado conseguiu interceção o alvo com sucesso para os vários casos estudados, notando-se uma ligeira alteração no desempenho na aproximação ao alvo quando este executa manobras. O controlador apresentou uma robustez adequada, mantendo as manobras do interceptor dentro de parâmetros predefinidos. Os resultados das simulações mostraram que o filtro de Kalman adaptativo é uma ferramenta viável na estimação de posições em sistemas mesmo em casos de incertezas de medição e do modelo, bem como de perturbações no ambiente. De forma similar o controlador LQR adaptado mostra-se capaz de guiar um interceptor de forma rápida e eficaz, apresentando também boas qualidades de robustez. A utilidade do método foi também verificada e apresenta-se como uma possível combinação a utilizar para a interceção de potenciais ameaças.

## **Palavras-chave**

Interceção por míssil, Filtragem de Kalman adaptativa, Controlo ótimo, Controlador LQR, Defesa territorial



# **Abstract**

This dissertation aims to study the problem of missile interceptor guidance following the principles of optimal control of dynamic systems. Position measurements are uncertain due to missing data or associated errors, especially when dealing with high-speed targets. It is also necessary to guarantee that the interceptor control is achieved quickly and effectively, within the manoeuvrability constraints. An adaptive innovation based Kalman filtering algorithm was studied to tackle the estimation problem, applying the algorithm to trajectories that may be highly noisy. For the control problem, Multivariate integral control principles based on the LQR control approach were chosen and applied to the model of an interceptor faced with various target flight paths. On both cases the obtained results were found to be interesting with respect to interception requirements. The adaptive Kalman filter proved capable of significantly reducing the effects of system errors, displaying a trajectory that was closer to the real one. The filter also showed great implementation flexibility due to its adaptability. The extended LQR controller was able to successfully intercept the target for all the studied cases, with a slight change in performance when the target is manoeuvring. The controller showed an adequate robustness while maintaining the interceptor manoeuvres within the predefined parameters. The simulation results showed that the adaptive Kalman filter was a viable tool in systems position estimation even in case of model and measurement uncertainties and environmental disturbances. In a similar fashion, the LQR controller proved itself capable of guiding an interceptor quickly and effectively while showing good robustness. The usefulness of the method was also verified and presented as a possible combination to be used for potential threat interception.

## **Keywords**

Missile interception, Adaptive Kalman filtering, Optimal control, LQR controller, Territorial defence



# Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Fundamentos da orientação de mísseis	3
1.2.1	Métodos de orientação de mísseis táticos	3
1.2.1.1	<i>Homing guidance</i>	3
1.2.1.2	Orientação por referência de controlo	6
1.2.1.3	<i>Beam-rider</i>	7
1.2.1.4	Orientação de comandos para a linha de visão	8
1.2.2	Métodos de navegação e o problema da interceção	8
1.2.2.1	Perseguição pura	10
1.2.2.2	Perseguição adiantada	11
1.2.2.3	Trajectoria de colisão adiantada	11
1.2.2.4	Navegação proporcional	12
1.2.3	Fases de voo	13
1.2.3.1	Fases de voo de um míssil tático	13
1.2.3.2	Fases de voo de um míssil balístico	14
1.3	Limitações dos métodos descritos	16
1.4	Objetivos da dissertação	16
1.5	Conteúdo	17
2	Estimação da posição do alvo	18
2.1	Filtragem de Kalman-Bucy Linear	18

Conteúdo	Conteúdo
2.2 Observabilidade e controlabilidade _____	20
2.3 Filtragem de Kalman adaptativa _____	22
2.3.1 Estimação adaptativa com base em inovação _____	23
3 Interceção baseada nos princípios do controlo ótimo _____	25
3.1 Sistemas referenciais _____	27
3.2 Modelação do sistema _____	28
3.3 Controlador LQR para perseguição _____	29
4 Simulações e resultados _____	32
4.1 Filtro de Kalman Adaptativo _____	32
4.2 Controlo _____	37
5 Conclusão _____	48
Referências _____	51
Apêndice _____	55



# Lista de figuras

## Capítulo 1

Figura 1. 1: Esquema simplificado de um loop de orientação [1] _____	2
Figura 1. 2: Classificação de vários tipos de mísseis [5] _____	3
Figura 1. 3: <i>Homing</i> ativo [10] _____	4
Figura 1. 4: <i>Homing</i> semiativo [10] _____	5
Figura 1. 5: <i>Homing</i> passivo [10] _____	5
Figura 1. 6: Esquematização de um sistema de orientação por referência de controle _	6
Figura 1. 7: Orientação por comandos [12]. _____	7
Figura 1. 8: Perseguição adiantada [13] _____	11
Figura 1. 9: Trajetória de colisão adiantada [5] _____	12
Figura 1. 10: Esquema de uma interceção [13] _____	13
Figura 1. 11: Fases de voo de um míssil tático SAM [14] (adaptado) _____	13
Figura 1. 12: Fases de voo de um míssil balístico intercontinental [17] _____	15

## Capítulo 3

Figura 3. 1: Diagrama de blocos de um sistema de controlo: a) sistema de malha aberta; b) sistema de realimentação [27] .....	26
Figura 3. 2: Representação visual da diferença entre latitude geocêntrica e latitude geodética [29] .....	27
Figura 3. 3: Representação do sistema referencial geocêntrico WGS84 ECEF (Earth-Centred – Earth-fixed) [31] .....	27
Figura 3. 4: Representação simples do princípio da sobreposição que se verifica num sistema linear.....	28

## Capítulo 4

Figura 4. 1: Comparação entre trajetória com perturbações e trajetória filtrada .....	34
Figura 4. 2: Detalhe da comparação entre trajetória com perturbações e trajetória filtrada .....	34
Figura 4. 3: Representação ampliada do comportamento da latitude real, perturbada e filtrada em função do tempo. ....	35
Figura 4. 4: Representação ampliada do comportamento da longitude real, perturbada e filtrada em função do tempo. ....	36
Figura 4. 5: Representação ampliada do comportamento da altitude real, perturbada e filtrada em função do tempo. ....	36
Figura 4. 6: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com a condição inicial do míssil $x_0 = 35001000020000000T$ e $v = 1200 \text{ km/h}$ e b) da distância ao alvo em função do tempo. ....	41
Figura 4. 7: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com a condição inicial do míssil $x_0 = 80001000025000000T$ e $v = 1200 \text{ km/h}$ e b) da distância ao alvo em função do tempo. ....	42
Figura 4. 8: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com a condição inicial do míssil $x_0 = 35001000020000000T$ e $v = 1500 \text{ km/h}$ e b) da distância ao alvo em função do tempo. ....	43
Figura 4. 9: Representação gráfica a) tridimensional, b) vista lateral da representação tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com oscilação lateral do alvo e condição inicial $x_0 = 35001000020000000T$ e $v = 1200 \text{ km/h}$ e c) da distância ao alvo em função do tempo e c) da distância ao alvo em função do tempo. ....	44
Figura 4. 10: Representação gráfica a) tridimensional, b) vista lateral da representação tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com oscilação lateral e vertical do alvo e condição inicial $x_0 = 35001000020000000T$ e $v = 1200 \text{ km/h}$ e c) da distância ao alvo em função do tempo e c) da distância ao alvo em função do tempo. ....	45
Figura 4. 11: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo após filtragem, com condição inicial $x_0 = 35001000020000000T$ e $v = 1200 \text{ m/s}$ e b) da distância ao alvo em função do tempo. ....	46



# **Lista de tabelas**

## **Capítulo 1**

Tabela 1. 1: Métodos de navegação associados a cada tipo de orientação.....	9
---	---



## Lista de acrónimos

<b>AAM</b>	<i>Air-to-Air Missile</i>
<b>ASM</b>	<i>Air-to-Surface Missile</i>
<b>CADV</b>	<i>Comandos automáticos do voo</i>
<b>CLOS</b>	<i>Command to Line Of Sight</i>
<b>ECI</b>	<i>Eart Centred Inertial</i>
<b>FBW</b>	<i>Fly-By-Wire</i>
<b>IAE</b>	<i>Innovation-based Adaptive Estimation</i>
<b>IMU</b>	<i>Inertial Measurement Unit</i>
<b>LOS</b>	<i>Line Of Sight</i>
<b>LQR</b>	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
<b>MBIC</b>	<i>Míssil Balístico Intercontinental</i>
<b>MIMO</b>	<i>Multiple Input - Multiple Output</i>
<b>MMAE</b>	<i>Multiple-Model-based Adaptive Estimation</i>
<b>PI</b>	<i>Proportional Integral</i>
<b>SAM</b>	<i>Surface-to-Air Missile</i>
<b>SISO</b>	<i>Single Input - Single Output</i>
<b>SSM</b>	<i>Surface-to-Surface Missile</i>
<b>TCAS</b>	<i>Traffic collision avoidance system</i>



# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

O ser humano pratica as leis da navegação já há muito tempo. Uma das aplicações mais notórias dessa prática é o ato de pirataria marítima, em que os marinheiros utilizavam uma regra agora apelidada de ‘navegação proporcional’ ou ‘rota de colisão’, ou mesmo até a perseguição de uma presa por parte de um predador.

A guerra foi sempre um dos maiores impulsionadores da tecnologia durante a história da Humanidade. A orientação não é exceção, sendo o armamento uma das principais aplicações da teoria da orientação.

Desde os primórdios do uso de mísseis guiados, durante a segunda guerra mundial, esta tecnologia tem evoluído de forma constante e desenfreada. Desde então esta tecnologia atingiu proporções gigantescas, com o aparecimento de mísseis cruzeiro, mísseis táticos e estratégicos. A proliferação da posse de mísseis balísticos táticos que, associados a ogivas capazes de destruição em massa, levantam a preocupação com a possibilidade de um ataque desse tipo e a defesa contra o mesmo. Com vários países na posse de mísseis e ogivas desta natureza, levanta-se a questão: como é possível evitar a aniquilação de uma população às mãos deste tipo de tecnologia? Neste trabalho explora-se uma das respostas a esta questão, que consiste na intercepção e incapacitação destas ameaças, impedindo que provoquem a destruição para a qual foram criadas. Isto é feito com recurso a um míssil que intercepta a ameaça durante o seu voo, a uma distância o mais segura possível para a população geral.

A tarefa de um míssil é, na sua essência, extremamente simples: atingir o seu alvo. De forma a atingir esse objetivo, num primeiro passo, obtém-se a posição do alvo com precisão com recurso a sensores e métodos de filtragem. Daí o sistema de interseção irá calcular a orientação que o míssil terá de seguir e enviar essa informação ao piloto automático. Recebida esta informação, o piloto automático enviará os comandos para os sistemas de controlo (propulsivo, aerodinâmico) para serem executados de modo que a missão seja cumprida.

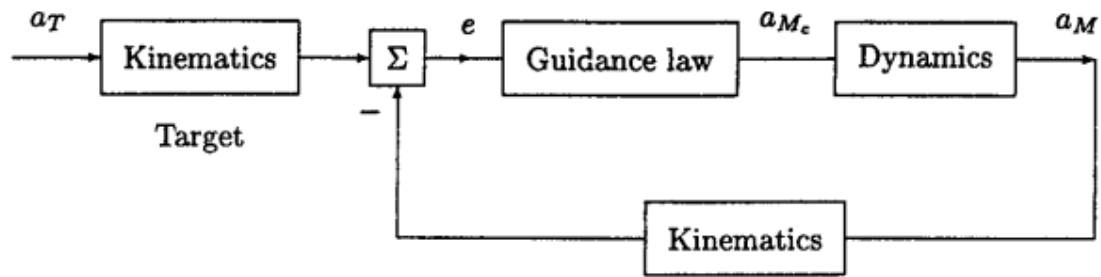


Figura 1. 1: Esquema simplificado de um loop de orientação [1]

Assim sendo, este trabalho tem como um dos objetivos analisar a filtragem de dados e estimação da posição do interceptor e do alvo. Para este efeito, analisar-se-á a análise de um filtro de Kalman adaptativo. Este filtro apresenta uma elevada adaptabilidade em situações em que a geometria e dinâmica das trajetórias se mantêm em constante mutação, sendo mais apelativo para sistemas com requisitos de precisão elevados.

O segundo objetivo recai sobre a metodologia da orientação de um míssil tático. Opta-se aqui por estudar um controlador LQR PI (Proporcional + Integral) que assenta na teoria de controlo ótimo e na sua robustez.

Esta dissertação surge também na continuidade de trabalhos já realizados no departamento sobre a estimação de estados [2] [3] e o controlo de sistemas [4].

Concluindo, a motivação para a realização deste trabalho surge da contemporaneidade do tema, tendo em conta as ameaças que surgem com o desenvolvimento tecnológico e bélico, bem como da aplicação de técnicas e algoritmos mais avançados a mecanismos de elevada complexidade.

## 1.2 Fundamentos da orientação de mísseis

Num míssil guiado o sistema de orientação calcula o caminho que o míssil tem de seguir para chegar ao seu alvo. Podemos dividir os mísseis em várias categorias, sendo que uma das classificações mais restritivas os divide em duas categorias: mísseis táticos, ou guiados; mísseis estratégicos, ou não guiados [5]. Podem também separar-se com base no ponto de lançamento e na zona física que contém o alvo, dividindo-se assim em: mísseis Terra-Terra, Surface-to-Surface missile (SSM); mísseis Ar-Ar, Air-to-Air Missile (AAM); mísseis Terra-Ar, Surface-to-Air Missile (SAM); mísseis Ar-Terra, Air-to-Surface Missile (ASM) [6] [7]. Abaixo encontra-se uma figura que apresenta uma possível classificação mais extensa dos mísseis quanto ao método de orientação utilizado.

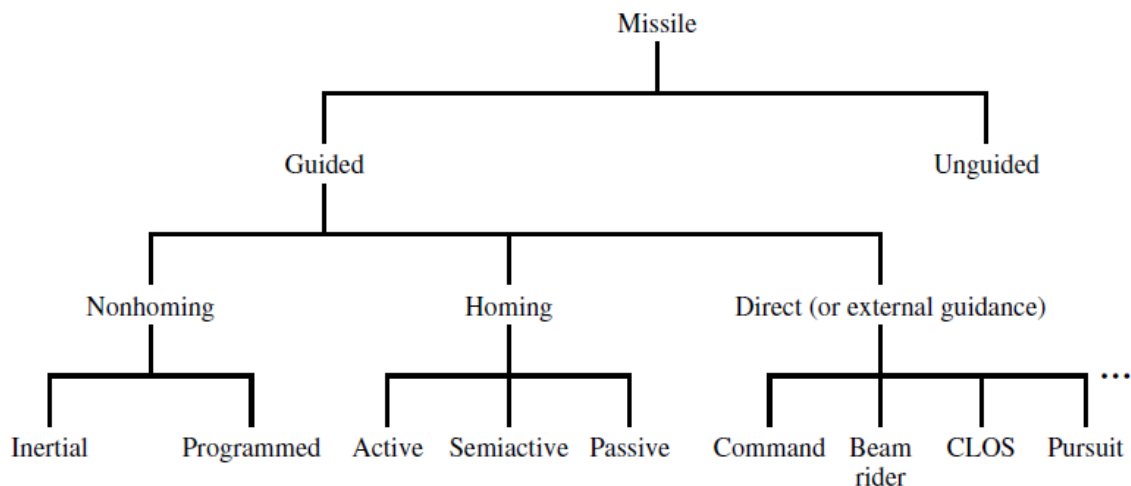


Figura 1. 2: Classificação de vários tipos de mísseis [5]

### 1.2.1 Métodos de orientação de mísseis táticos

Podemos ver na figura anterior que dentro dos mísseis táticos podemos encontrar várias formas de orientação do míssil [8]. Neste capítulo apresenta-se uma descrição do funcionamento dos métodos mais comuns.

#### 1.2.1.1 *Homing guidance*

A orientação *Homing* é especialmente útil em mísseis de operação autónoma, que requer que o seguimento do movimento do alvo seja feito pelo intercetor. O sistema de orientação identifica, seleciona e segue o alvo através energia emitida pelo próprio, tal como o som, radiação, ou o ondas de radar refletidas pelo alvo. Obtendo a posição do

alvo, o intercetor envia comandos para as superfícies de controlo para se dirigir até ele. Este tipo de orientação pode ser utilizado durante todo o voo do míssil e não só na fase terminal, particularmente em mísseis de curto alcance [5]. Como a precisão da localização aumenta à medida que o míssil se aproxima do alvo, a probabilidade de sucesso é em grande parte independente da distância entre o local de lançamento e o alvo [9]. De um modo geral este tipo de sistemas divide-se em três categorias, de acordo com a fonte do sinal iluminante: *Homing* ativo, *Homing* semiativo e *Homing* Passivo.

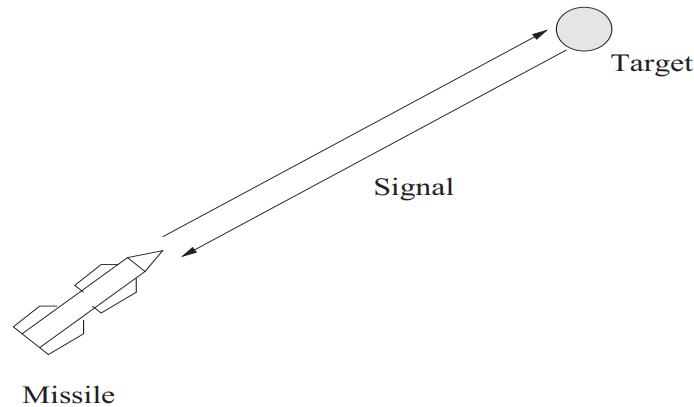


Figura 1. 3: *Homing* ativo [10]

Estamos perante um caso de *Homing* ativo quando o míssil intercetor emite o sinal que ilumina o alvo. Todos os sistemas necessários para a identificação e perseguição (antena transmissora e recetora, processador de sinal e computador de orientação) estão contidos no míssil.

Este tipo de orientação tem a vantagem de que o míssil pode ser lançado e, sem receber quaisquer instruções/comandos do exterior, atingir o alvo, sendo assim um sistema completamente autónomo em que se aplica a filosofia de *launch-and-leave*. Outra vantagem deste sistema é que à medida que o míssil se aproxima do alvo a precisão da deteção aumenta. Este facto acarreta também algumas consequências, entre eles um custo e peso adicionais por consequência do uso de um sistema mais complexo e uma mais fácil deteção, pois a radiação emitida pelo próprio míssil poderá revelar a sua presença.

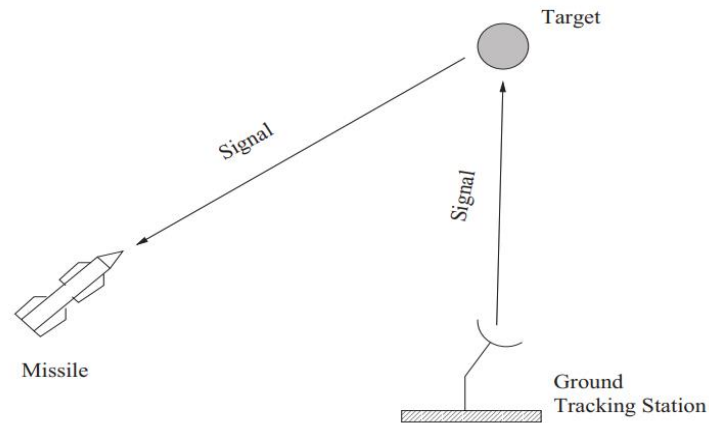


Figura 1. 4: *Homing* semiativo [10]

Quando o intercetor seleciona e persegue um alvo que está a refletir energia proveniente de uma fonte externa diz-se que o sistema é de *Homing* semiativo. A fonte externa de energia (radar) ilumina o alvo, essa energia é refletida pelo alvo e captada por um recetor colocado geralmente no nariz do míssil para ser depois passar pelo processador de sinal e pelo computador de orientação. A utilização deste sistema permite a orientação do míssil em alcances muito superiores e com menos limitações externas na sua aplicação. A necessidade de uma fonte externa ativa a iluminar continuamente o alvo implica que este sistema te uma menor autonomia do que o anteriormente descrito.

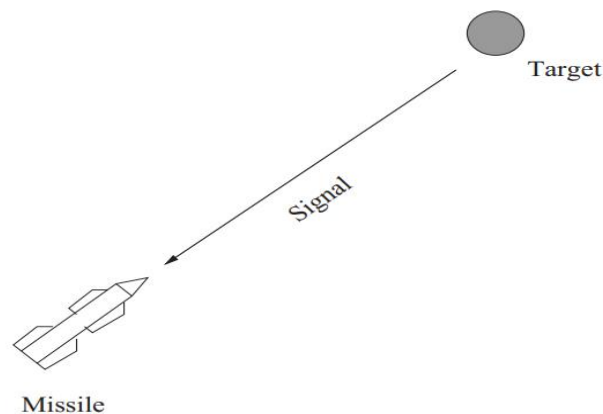


Figura 1. 5: *Homing* passivo [10]

Um sistema de *Homing* passivo funciona sem que haja uma emissão ativa por parte do sistema de orientação. O intercetor deteta o alvo através de energia emitida naturalmente pelo próprio, desde calor, luz ou som. Num sistema deste tipo o alvo funciona como um isco. O sistema de orientação está contido dentro do míssil e é composto pela antena

recetora, processador de sinal e computador de orientação. Este sistema tem as vantagens de ter uma maior simplicidade e menor custo, mas é limitado pela sensibilidade dos sensores, e pela quantidade de radiação emitida pelo alvo.

#### 1.2.1.2 Orientação por referência de controle

Nos casos vistos anteriormente, é o próprio míssil interceptador que gera os seus comandos para executar a sua missão. No tipo de orientação apresentado nesta secção, esses comandos são gerados a partir de uma referência de controle de orientação que provém de uma fonte externa ao míssil.

O sistema de rastreamento observa a posição e velocidade do interceptador e do alvo. Com esta informação, o controlador para a orientação calcula a trajetória que o interceptador terá de seguir para chegar ao alvo, sendo essa informação enviada para o interceptador. Antes de entrar no bloco de controlo, esta informação tem ainda que passar por um bloco de evasão à colisão que analisa a área do confronto quanto ao terreno e à presença de obstáculos. A informação obtida quanto à trajetória adequada é então transformada em comandos que serão executados pelas superfícies de controlo. A figura 1.6 representa esquematicamente o funcionamento deste sistema.

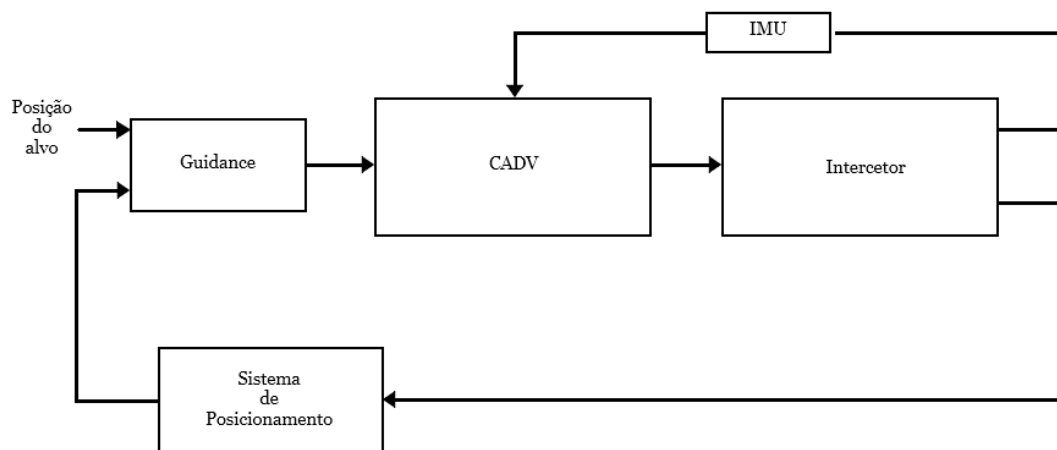


Figura 1. 6: Esquematização de um sistema de orientação por referência de controle

Este tipo de orientação sofre com os erros de rastreamento a longo alcance, e por isso é em grande parte utilizado em mísseis de curto alcance com a orientação até ao alvo.

Para que a orientação seja eficaz é necessário que haja uma transmissão de dados a uma taxa elevada, o que pode permitir que o alvo se aperceba da operação do sistema de rastreamento e execute manobras de evasão.

A utilização dos sensores e computadores de orientação numa estação de lançamento reduzem o custo do armamento em relação à *homing guidance*, em que cada míssil leva o seu sistema de seguimento que é destruído no cumprimento da sua missão [11].

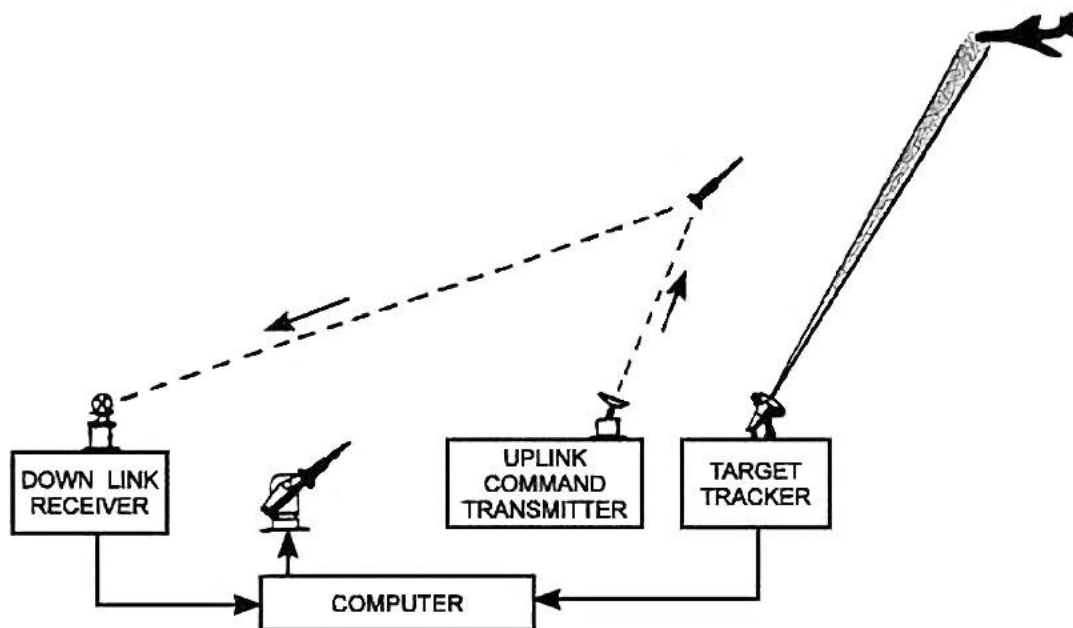


Figura 1. 7: Orientação por comandos [12].

### 1.2.1.3 *Beam-rider*

Num sistema de orientação *beam-rider* o alvo é iluminado por um sistema de radar ou laser através de um feixe de radiação eletromagnética. O míssil possui uma antena que aponta para trás para detetar o feixe de radiação e permitir ao míssil segui-lo. Os sistemas de orientação do míssil vão gerar e enviar os comandos adequados para as superfícies de controlo de modo a manter o míssil no centro do feixe. Esse feixe pode estar apontado diretamente para o alvo, ou para uma posição prevista pré-calculada por um computador.

Devido ao facto de que todo o equipamento de orientação faz parte do míssil, uma das vantagens deste sistema é a possibilidade de lançar um número elevado de mísseis que

sigam o mesmo feixe de seguimento. Por outro lado, esse feixe tem de ser suficientemente estreito para garantir a interceção o que pode dificultar o seguimento do alvo, especialmente se este recorrer a manobras evasivas. Este tipo de sistemas também sofre com erros significativos quando os alvos estão a distâncias elevadas, pelo que é tipicamente utilizado em curto alcance.

#### 1.2.1.4 **Orientação de comandos para a linha de visão**

Este tipo de orientação (CLOS – Command to Line Of Sight) é um caso particular da orientação por comandos em que os comandos enviados ao míssil tentam aproximar ao máximo a sua trajetória da linha de visão que une o alvo e o sistema de seguimento (LOS). A CLOS resulta do acréscimo de um termo, correspondente à aceleração do feixe, adicionado à aceleração calculada pelas equações de *beam-rider*. A inclusão prévia da aceleração do feixe permite melhorar significativamente o desempenho da orientação. A orientação CLOS é maioritariamente utilizada em missões de defesa aérea de curto alcance ou sistemas antitanque.

### 1.2.2 **Métodos de navegação e o problema da interceção**

De um modo geral, o rumo do míssil é função da posição e velocidade do alvo, assumindo que o movimento do alvo se mantém constante entre cada medição. Nesta secção descrevem-se algumas das regras mais normalmente utilizadas em conjunto com os métodos de orientação referidos anteriormente. Na tabela 1.1 apresentam-se os possíveis regras de interceção que podem ser associados aos diferentes métodos de orientação.

Tabela 1. 1: Métodos de navegação associados a cada tipo de orientação

<b>Tipo de orientação</b>	<b>Método de navegação</b>
<b><i>Homing</i> ativo</b>	Navegação proporcional Perseguição pura Perseguição desviada
<b><i>Homing</i> semiativo</b>	Navegação proporcional Perseguição pura Perseguição desviada
<b><i>Homing</i> passivo</b>	Navegação proporcional Perseguição pura Perseguição desviada
<b>Comandos</b>	Qualquer método
<b><i>Beam rider</i> (ou CLOS)</b>	Linha de visão Programada

Antes de aprofundar cada método de navegação é necessário formular o problema da interceção em que estes se baseiam. Considerem-se as seguintes equações de movimento do míssil [5]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = a_v \mathbf{1}_v + a_L \mathbf{1}_L + g \quad (1.2)$$

Nestas equações  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ , e  $\mathbf{a}$  são a posição, velocidade e aceleração do míssil. Os vetores  $\mathbf{1}_v$  e  $\mathbf{1}_L$  são vetores unitários na direção da velocidade e sustentação, respetivamente. A aceleração gravitacional é representada por  $g$ . Analogamente surgem as equações do movimento do alvo:

$$\frac{d\mathbf{r}_T}{dt} = \mathbf{v}_T \quad (1.3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt} = \mathbf{a}_T = a_v \mathbf{1}_v + a_L \mathbf{1}_L \quad (1.4)$$

$$\text{com } a_L = \omega_v |\mathbf{v}_T| \quad (1.5)$$

Sendo  $\omega_v$  a velocidade angular do vetor velocidade e  $v_T$  o a velocidade instantânea do alvo.

Partindo destas equações, a cinemática de uma perseguição baseia-se na seguinte relação:

$$\frac{dR}{dt} = V_I \cos(\lambda) + V_T \cos(\pi - \alpha) = V_I \cos(\lambda) - V_T \cos(\alpha) \quad (1.6)$$

Ou, selecionando o intercetor como ponto de referência:

$$R \left( \frac{d\lambda}{dt} \right) = V_I \sin(\lambda) - V_T \sin(\pi - \alpha) = V_I \sin(\lambda) - V_T \sin(\alpha) \quad (1.7)$$

Os vários tipos de trajetórias referidos de seguida resultam de manter constante um dos parâmetros destas equações.

#### 1.2.2.1 Perseguição pura

Em perseguição pura o míssil intercetor está a voar sempre diretamente em direção ao alvo, mantendo o seu rumo sempre na linha de visão entre o si e o alvo. Este tipo de perseguição é pouco eficaz contra alvos em movimento devido pois o míssil tende a acabar a perseguição atrás do alvo, o que leva à necessidade de manobras difíceis para concluir a missão. Para além disso, para que a missão possa ser sucedida é imperativo que a velocidade do míssil seja consideravelmente superior à do alvo.

Este movimento caracteriza-se pela seguinte relação:

$$\frac{dR}{dt} = V_M - V_T \sin(\theta) \quad (1.8)$$

$$R \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = -V_T \cos(\theta) \quad (1.9)$$

Sendo:  $R$  a distância ao alvo;  $\theta$  a orientação da linha de visão para o alvo;  $V_M$  a velocidade do intercetor e  $V_T$  a velocidade do alvo.

O uso de perseguição pura contra alvos evasivos traz consigo diversas dificuldades pois estes obrigam a que o míssil execute manobras rápidas e apertadas quando tem a menor

manobrabilidade. A perseguição pura pode ser uma boa escolha em situações como em mísseis ASM, em que os alvos podem até ser estáticos ou contra uma aeronave que voe na direção do lançador. A implementação simples e baixa sensibilidade a ruído são algumas das mais valias desta regra. [5; 11; 4]

### 1.2.2.2 Perseguição adiantada

Nesta abordagem o míssil não persegue o alvo diretamente, mas sim um ponto ligeiramente à frente do alvo, numa tentativa de prever ligeiramente a sua posição seguinte. Assim sendo, ainda que sofrendo as mesmas dificuldades associadas a manobras complicadas durante a fase terminal, a perseguição desviada tende a ser mais eficiente e interceptar o alvo mais rapidamente do que a perseguição pura.

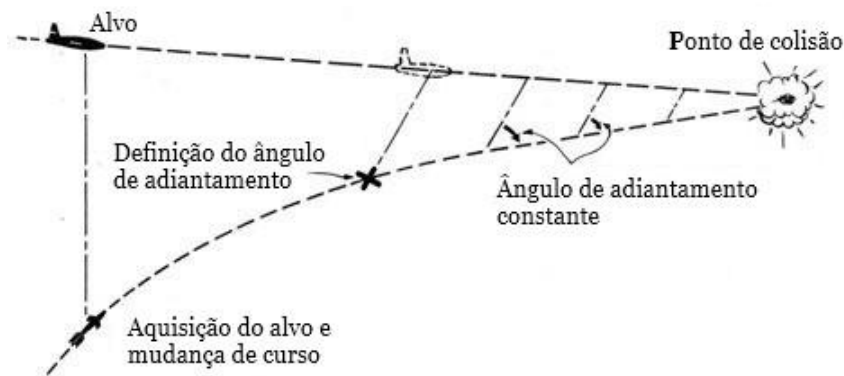


Figura 1. 8: Perseguição adiantada [13]

### 1.2.2.3 Trajetória de colisão adiantada

A colisão lead é uma extensão da perseguição *lead*, baseada em apontar o míssil para o ponto em que se daria a colisão, caso o alvo se mantivesse numa linha reta sem aceleração. Esta trajetória é mais eficiente, mas mais limitada, pois requer o mínimo de esforço de controlo enquanto também necessita que o alvo siga uma trajetória constante com acelerações mínimas.

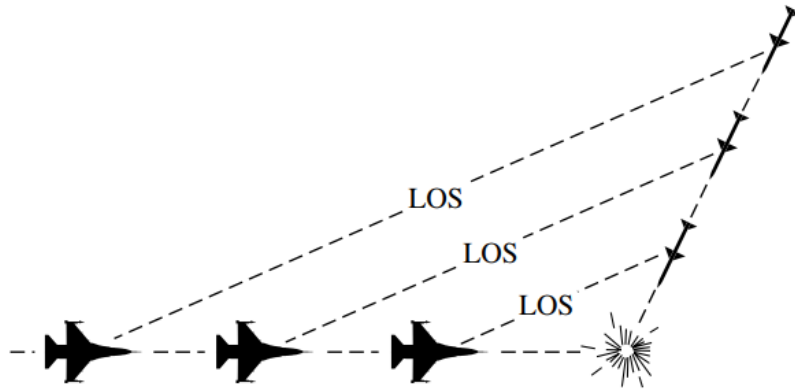


Figura 1. 9: Trajetória de colisão adiantada [5]

#### 1.2.2.4 Navegação proporcional

Navegação proporcional é um método em que a aceleração do míssil é proporcional à velocidade da linha de visão (LOS) [14]. Isto é alcançado com base no princípio de que dois veículos que se aproximam com velocidade relativa constante durante a sua deslocação vão, eventualmente, colidir.

Quando o alvo se move sem fazer manobras, o míssil vai seguir uma trajetória com velocidade constante até que os dois se cruzem. Se o alvo executar alguma manobra, variando a LOS, o sistema de navegação irá calcular a velocidade de rotação da LOS e a aceleração necessária para anular essa alteração.

A relação entre a aceleração do míssil, a velocidade de aproximação e a variação da LOS pode exprimir-se da seguinte forma:

$$n_c = N'V_c\lambda' \quad (1.10)$$

Onde:

$n_c$ : aceleração normal ou lateral [m/sec<sup>2</sup>]

$N'$ : Razão de navegação efetiva (ganho de navegação)

$V_c$ : Velocidade de aproximação [m/sec]

$\lambda'$ : razão de LOS [rad/sec]

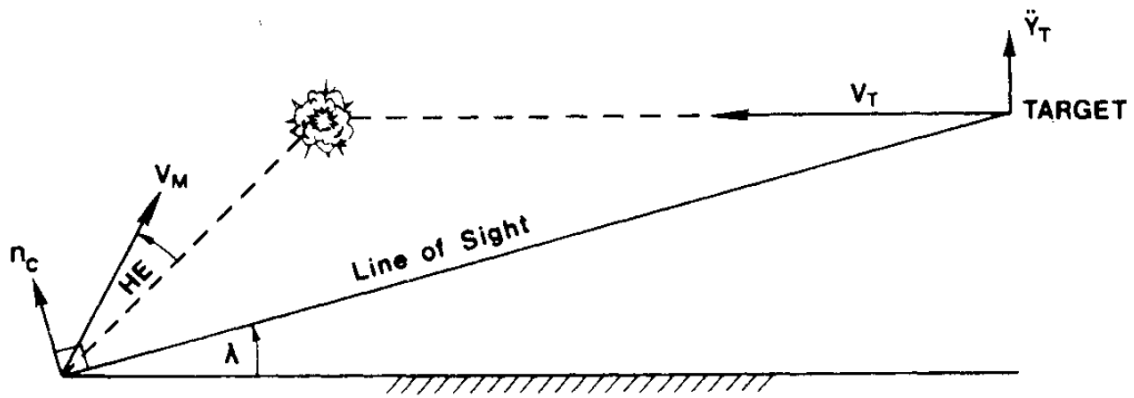


Figura 1. 10: Esquema de uma interceção [14]

A navegação proporcional é das mais conhecidas e usadas graças à simplicidade do conceito e da sua implementação, atraindo muita atenção na literatura e funcionando muitas vezes como um padrão para novas leis de orientação de mísseis [6]. No entanto, como este método utiliza a razão da LOS, mas não a sua aceleração, o seu desempenho sofre quando é aplicado a alvos com elevada manobrabilidade.

### 1.2.3 Fases de voo

#### 1.2.3.1 Fases de voo de um míssil tático

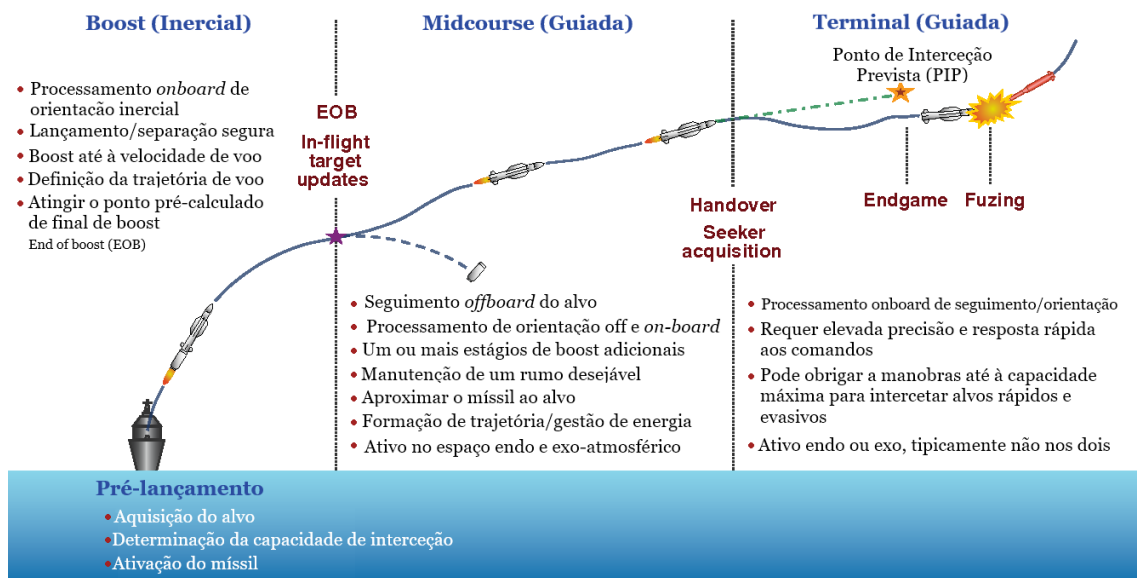


Figura 1. 11: Fases de voo de um míssil tático SAM [15] (adaptado)

O voo de um míssil tático SAM divide-se de um modo geral em três fases, sendo elas conhecidas como fase de impulsão (boost phase), fase de percurso intermédio (midcourse phase) e fase terminal (terminal phase).

A fase de impulsão é relativamente curta, durando até que o motor de propulsão queima o combustível. Esta fase tem o objetivo de levar o míssil até uma posição em que ele possa seguir o alvo ou receber os sinais de orientação externos, com uma velocidade suficiente e direcionada aproximadamente para o alvo. Nos casos em que a fase de impulsão é guiada, esta orientação segue, tipicamente, os princípios de navegação inercial.

A fase de percurso intermédio segue-se à de impulsão e é tipicamente a mais longa quer em duração e distância percorrida. Durante esta fase a trajetória do míssil é constantemente avaliada e alterada de modo a seguir a uma regra geométrica previamente definida, até que se encontre próximo o suficiente do alvo para passar à fase terminal.

Na fase terminal é decidido o desfecho da missão, logo é imperativo que a precisão seja alta e o tempo de resposta mínimo. Com uma duração na ordem das dezenas de segundos, o míssil tem de executar as manobras finais para conseguir cumprir a missão. O sucesso da missão não depende obrigatoriamente da colisão entre o míssil e o alvo. Normalmente o míssil explode a sua ogiva quando passa próximo do alvo, de modo que pode dizer-se que o desempenho da missão depende de quão perto o míssil consegue passar do alvo. [16]

### **1.2.3.2 Fases de voo de um míssil balístico**

A trajetória balística de um MBIC é tipicamente dividida em 3 fases: fase de impulsão (boost phase), fase de percurso intermédio (midcourse phase) e fase terminal (terminal phase).

O objetivo desta primeira fase da missão é a de acelerar o míssil até que este entre numa trajetória balística com a velocidade que permita atingir o seu alvo. Esta fase termina normalmente ainda dentro da atmosfera, tendo uma duração média de 3 a 5 minutos. Esta é uma das fases em que a deteção é mais fácil devido à pluma emitida pelo sistema propulsivo do booster. [17]

A fase de percurso intermédio é a fase mais longa do voo do míssil intercontinental, com uma duração de até 20 minutos. Após ser conduzido à órbita desejada durante a fase de

impulsão, o míssil segue uma trajetória sub-orbital, sem qualquer mecanismo presente para o direcionar. Esta fase será a de mais fácil interseção graças ao maior intervalo de tempo e ao movimento mais previsível. Após atingir o apogeu da sua trajetória, e já na fase de descida, dá-se a separação da carga útil (ogivas e/ou engodos) para que possa cumprir o seu objetivo.

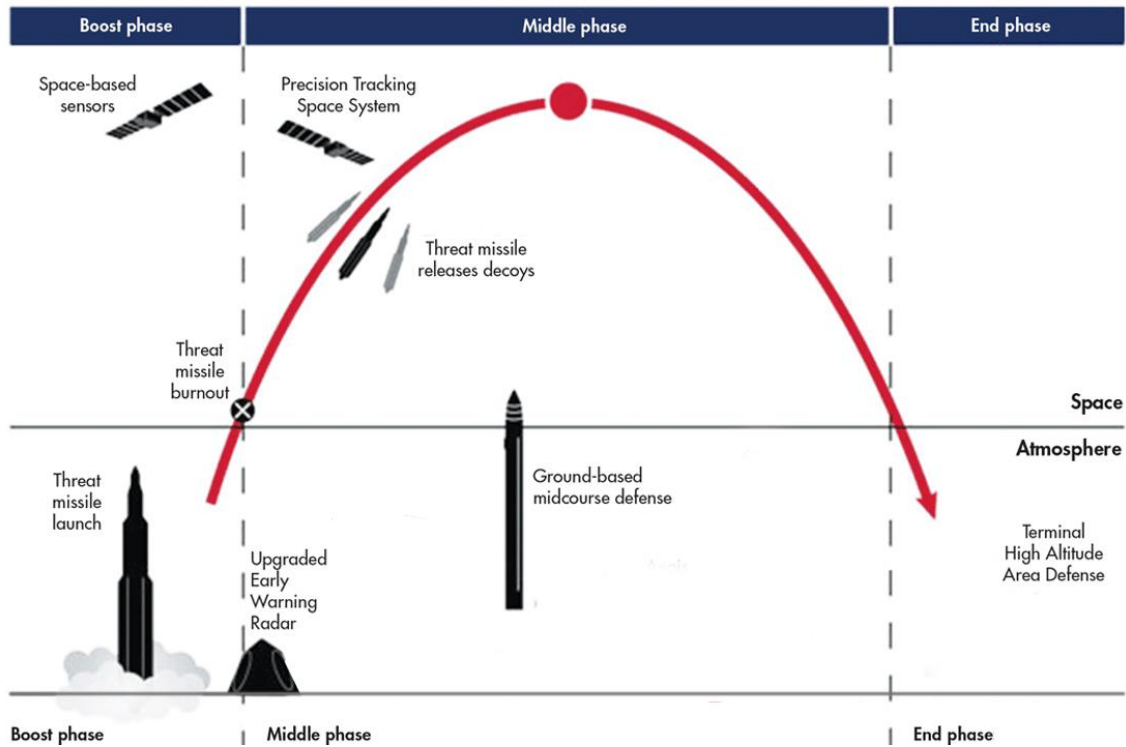


Figura 1. 12: Fases de voo de um míssil balístico intercontinental [18]

A fase terminal caracteriza a parte da missão desde a reentrada da carga útil na atmosfera até à ativação da ogiva. Convencionalmente a carga útil segue uma trajetória balística de queda livre. A ativação da ogiva pode dar-se por impacto no solo ou por uma explosão no ar, dependendo do mecanismo de "rastilho".

A curta duração da missão implica um desafio dos sistemas de defesa de interceptar o alvo com a maior rapidez possível.

### **1.3 Limitações dos métodos descritos**

Todos os sistemas de intercepção teleguiada utilizam, de alguma forma, a navegação proporcional como lei de orientação [5]. Apesar do bom desempenho deste método de orientação face a alvos pouco ágeis, incapazes de manobras significativas, o mesmo não se verifica quando os alvos são capazes de executar manobras evasivas. Neste caso, seria necessário recalcular o valor do ganho de navegação  $N$  referido na equação 1, tendo em conta o tipo de manobra do alvo. Não existe uma forma analítica de calcular esse ganho, sendo necessário recorrer a métodos numéricos ou ao conhecimento empírico, o que seria indesejável no terreno. Isto porque, no primeiro caso, estaríamos a aumentar significativamente os requisitos computacionais, que devem ser utilizados o mais eficientemente possível. A velocidade e elevada dinâmica que se verificam nestes encontros inviabilizam a alteração manual desse ganho com base no conhecimento empírico. Outro problema é que em situações em que as medições obtidas pelos sensores são significativamente ruidosas, existe um risco mais acentuado de que um intercetor guiado através de regras de navegação proporcional não consiga intercetar o alvo. Uma das respostas a este problema é desenvolver o controlador recorrendo à teoria do controlo ótimo, que será estudada posteriormente neste trabalho.

### **1.4 Objetivos da dissertação**

A possibilidade de uma ameaça à sobrevivência de populações inteiras é um enorme problema e surge como motivação por detrás da realização deste trabalho. Para que um sistema de defesa contra uma ameaça deste tipo seja eficaz, este tem que ser capaz de identificar, localizar e intercetar a rápida e eficazmente. Tendo isto em conta, esta dissertação tem como objetivos:

Modelação e implementação de um sistema capaz de localizar, seguir e intercetar um determinado alvo quando as medições da sua trajetória são significativamente ruidosas.

Modelação e análise do problema de perseguição com aplicação de conceitos da teoria do controlo ótimo.

Implementação de um controlador LQR estendido para aplicação em trajetórias, com base na teoria de controlo ótimo e aplicado a um míssil intercetor, verificando o seu comportamento e desempenho.

Implementação e verificação do desempenho de um filtro de Kalman adaptativo na estimação e filtragem da trajetória real de um alvo sujeita a erros de medição.

Verificação da aplicabilidade simultânea dos dois algoritmos desenvolvidos através da análise do comportamento do controlador LQR aplicado a um míssil interceptador que segue um alvo cuja trajetória foi filtrada pelo filtro de Kalman adaptativo, quando o sistema está sujeito a perturbações.

## **1.5 Conteúdo**

Esta dissertação divide-se em vários capítulos a fim de assegurar uma boa compreensão.

O capítulo 1 consiste numa breve introdução ao tema. Em primeiro lugar apresentam-se os argumentos que se estabelecem como motivação para a escolha do tema, seguindo-se uma revisão bibliográfica em que se expõem os fundamentos úteis da orientação de mísseis. Apresentam-se também algumas limitações dos métodos descritos, bem como os objetivos da dissertação.

O capítulo 2 dedica-se à localização da ameaça, descrevendo o funcionamento da filtragem de Kalman-Bucy, os conceitos de observabilidade e controlabilidade e apresentando-se o conceito do filtro de Kalman adaptativo estudado neste trabalho.

O capítulo 3 refere-se à interseção do alvo. Neste capítulo dá-se uma breve descrição dos sistemas referenciais que servem como base para a modelação de sistemas físicos exposta de seguida. Por último descrevem-se os princípios do controlador LQR e do problema de controlo ótimo.

O capítulo 4 contém as simulações e resultados obtidos. Aqui apresentam-se as considerações tomadas no estudo, bem como os resultados e conclusões deles obtidas.

O capítulo 5 expõe as conclusões principais obtidas da realização desta dissertação, seguidas de sugestões para possíveis trabalhos futuros a serem realizados nesta área.

## 2 Estimação da posição do alvo

O controlo eficaz do intercetor está dependente do conhecimento da posição mais atual do alvo. Para maximizar a probabilidade de interceção é necessário identificar, localizar e seguir o alvo de um modo o mais exato possível.

A utilização de sensores nos diversos sistemas de localização não está isenta de problemas. As medições obtidas por esses sensores surgem associadas a ruídos, incertezas e erros que limitam a precisão do sistema [19]. De modo a mitigar o efeito desses ruídos e aumentar a probabilidade de sucesso de missão, é implementado um filtro ou estimador. Opta-se aqui pelo uso de um filtro de Kalman adaptativo. Esta escolha é motivada pela elevada precisão e robustez que apresenta contra mudanças súbitas de movimento do alvo ou dos erros de medição. [20]

### 2.1 Filtragem de Kalman-Bucy Linear

Em aplicações de sistemas dinâmicos a presença de ruídos e incertezas nos modelos e medições é extremamente frequente. Em aplicações como a estudada neste trabalho, em que o conhecimento da posição do alvo é um fator de extrema importância, é necessário obter uma estimativa o mais próxima da realidade possível.

Existem diversos algoritmos matemáticos com a função de estimar variáveis de um sistema estocástico, sendo o filtro de Kalman o mais amplamente usado. Este filtro permite calcular as estimativas sem o conhecimento prévio da distribuição dos valores de ruído ou das matrizes de covariância. Este método é então capaz de prever as matrizes de covariância, sem que estas tenham significado probabilístico e que seja robusto ao ponto de anular ruídos. [2]

O modelo base de um sistema controlado assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu + \Gamma\xi \\ Y = Cx + Du + \eta \end{cases} \quad (2.1)$$

Grande parte do voo de um míssil balístico é passado, essencialmente, em queda livre. Assim sendo, é considerado um sistema linear não controlado do tipo:

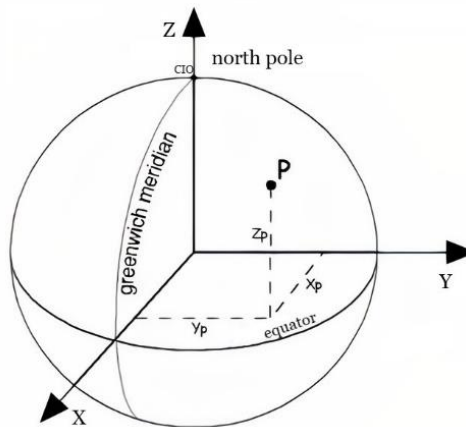
$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + \Gamma\xi \\ Y = Cx + \eta \end{cases} \quad (2.2)$$

Neste caso, sendo o sistema não controlado, a aceleração do alvo é considerada um ruído. Contrariamente, como se pode ver no capítulo 3, quando se trata de um sistema controlado, a aceleração é representada no próprio vetor de controlo.

O modelo utilizado neste trabalho para representar a dinâmica da trajetória do alvo é o seguinte:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Este modelo baseia-se num sistema de coordenadas geocêntrico, como o apresentado a seguir.



Sendo as matrizes de covariância Q e R, respetivamente:

$$Q = E(\xi\xi^T) \quad (2.4)$$

$$R = E(\eta\eta^T) \quad (2.5)$$

Os vetores  $\xi$  e  $\eta$  correspondem aos erros ou ruídos de modelo e observação. Estes ruídos assumem-se como ruídos brancos com distribuições Gaussianas, ou seja, respetivamente, que os seus valores são descorrelacionados ao longo do tempo e as suas médias são nulas. Ambos  $\xi$  e  $\eta$  são vetores compostos por variáveis aleatórias. O vetor de estado  $X$  é conhecido e o vetor de observação  $Y$  é conhecido.

A computação moderna não é um processo contínuo, sendo que todas as ações se processam dentro de um número finito de passos discretos [21]. Assim sendo, para simular o comportamento de um sistema real, revela-se a necessidade de discretização

do modelo do sistema. Para essa discretização é necessário escolher-se o intervalo de tempo entre cada cálculo (passo),  $h$ , para que depois se possam definir as novas matrizes que representam a evolução do sistema dentro desse intervalo de tempo. Assim sendo, o modelo discretizado de um sistema linear apresenta a seguinte forma:

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_d X_k + B_d u_k + \Gamma_d \xi_k \\ Y_k = C_d X_k + \eta_k \end{cases} \quad (2.6)$$

As matrizes discretizadas são obtidas através das seguintes expressões:

$$A_d = e^{Ah} \quad (2.7)$$

$$A_d \approx I + Ah + \frac{(Ah)^2}{2} + \dots + \frac{(Ah)^N}{N!} \quad (2.8)$$

$$B_d = \left( Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} h^N}{N!} \right) B \quad (2.9)$$

$$\Gamma_d = \left( Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} h^N}{N!} \right) \Gamma \quad (2.10)$$

Com  $N$  tal que:

$$\left\| \frac{(Ah)^N}{N!} \right\|_F < \epsilon \quad (2.11)$$

Sendo  $\epsilon$  a precisão desejada e o índice  $F$  indica que a norma é uma norma de Frobenius. Quando os sistemas deste tipo não são diferenciais a discretização não tem efeito sobre as observações, e como tal

$$C_k = C \quad (2.12)$$

## 2.2 Observabilidade e controlabilidade

A estimação do estado de um sistema através dos valores do seu vetor de saída requer o cumprimento de duas condições necessárias e suficientes, sendo elas a observabilidade

e controlabilidade do sistema [3]. Quando um sistema se diz controlável é possível, dentro de um intervalo de tempo finito, forçar esse sistema a atingir um qualquer estado partindo de outro qualquer estado inicial [2]. Um sistema pode também ser de saída/observação controlável, quando é possível conduzir o sistema de uma observação qualquer  $y_i$  para outra qualquer  $y_f$ , dentro do espaço de observações e num prazo finito. Quanto á observabilidade um sistema diz-se observável se os valores do vetor de observação nos tempos  $t^*, t^* + \Delta t, \dots, t^* + n\Delta t$  (sendo  $\Delta t$  o passo de observação) permitem ter uma estimativa fiável do valor do vetor de estado no tempo  $t^*$  [22].

Uma das formas para verificar a controlabilidade e observabilidade de um sistema como o referido em 2.1 foi desenvolvida por Kalman e será exposta de seguida.

O primeiro passo na verificação da controlabilidade através da caracterização de Kalman passa por construir a matriz de controlabilidade de estado  $\Delta$  através das matrizes  $A$  e  $B$ , sendo  $n$  a dimensão da matriz  $A$ :

$$\Delta = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.13)$$

O sistema é controlável se a característica da matriz de controlabilidade for igual a  $n$ :

$$caract(\Delta) = n \quad (2.14)$$

Para a controlabilidade de observação constrói-se a matriz de controlabilidade de observação  $\theta$  a partir das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$\theta = [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B] \quad (2.15)$$

O sistema é de observação controlável se a característica da matriz de controlabilidade de observação for igual a  $n$ :

$$caract(\theta) = n \quad (2.16)$$

Note-se que se a matriz  $C$  for igual à identidade ( $C = I$ ) e a matriz  $D$  for nula ( $D = 0$ ), a controlabilidade de estado é equivalente à controlabilidade de observação.

Quanto à observabilidade procede-se de modo análogo, contruindo a matriz de observabilidade  $\theta$  a partir das matrizes  $A$  e  $C$ :

$$\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

O sistema diz-se observável se a característica da matriz de observabilidade for igual a  $n$ :

$$\text{caract}(\theta) = n \quad (2.18)$$

As condições e verificações expostas neste capítulo também se aplicam aos sistemas de interceção referidos posteriormente no capítulo 3.

### 2.3 Filtragem de Kalman adaptativa

A qualidade das estimações obtidas pelo filtro de Kalman é muito dependente da informação conhecida *a priori* sobre os ruídos de processamento e de atualização das medições [23]. Este modo fixo de filtragem torna-se um problema num cenário como o tratado neste trabalho, devido à informação limitada *a priori* e à possibilidade de alteração frequente do meio da estimação.

Para além deste problema, surge também outro, na dependência da escolha dos valores para as matrizes de covariância e de transição. Valores de  $Q$  e/ou  $R$  demasiado baixos podem levar a uma estimação tendenciosa, piorando significativamente o desempenho do filtro. Por outro lado, valores de  $Q$  e/ou  $R$  demasiado altos podem levar a um fenómeno de divergência, o que anula por completo a utilidade do filtro [23] [24].

A utilidade da filtragem de Kalman-Bucy na estimação de estados e incertezas foi já estudada em [3] e [2], tal como o desempenho da filtragem de Kalman adaptativa na reconstrução de trajetórias em [25].

É importante ter em conta também que, em situações de perseguição, o alvo tende a dificultar o seguimento e interceção tanto quanto possível. Um alvo ágil que se desloque a elevada velocidade, por si só, não é de seguimento fácil. Aliando este facto à sua trajetória dinâmica e ao ruído que se sobrepõe, torna-se necessário atualizar frequentemente as matrizes  $Q$  e  $R$  para que o sistema de localização consiga obter a posição do alvo com a exatidão necessária. O estudo realizado neste trabalho procura

avaliar a capacidade da filtragem de Kalman adaptativa auxiliar o seguimento dum alvo com estas características.

A abordagem adaptativa ataca estas dificuldades através da utilização de uma sequência de inovação, que funciona como um processo de aprendizagem do filtro. Desta forma reduz-se a necessidade do conhecimento perfeito da informação *a priori*, visto que as matrizes de covariância vão sendo adaptadas de acordo com os últimos valores obtidos. Esta constante mutação está também em sintonia com a aplicação do filtro em sistemas e ambientes dinâmicos, graças à sua capacidade de adaptação a mudanças abruptas [26].

Dentro da filtragem de Kalman adaptativa existem duas abordagens, sendo elas a estimação adaptativa com base em múltiplos modelos (MMAE – *Multiple-Model-based Adaptive Estimation*) e a estimação adaptativa com base em inovação (IAE – *Innovation-based Adaptive Estimation*) [23]. Opta-se neste trabalho por utilizar a abordagem IAE.

A sequência de inovação no instante  $k$ ,  $v_k$ , é a base para o algoritmo do filtro de Kalman adaptativo em ambas as abordagens MMAE e IAE. Esta sequência consiste da diferença entre a medição efetuada pelos sensores  $z_k$  e o valor estimado  $z_k^{(-)}$ , ou seja:

$$v_k = z_k - z_k^{(-)} \quad (2.19)$$

Para obter o valor de  $z_k^{(-)}$  projeta-se o valor estimado do estado do sistema  $\hat{X}_k^{(-)}$  no espaço das medições através da matriz de projeto de medições  $H_k$ , ou seja:

$$z_k^{(-)} = H_k \hat{X}_k^{(-)} \quad (2.20)$$

### 2.3.1 Estimação adaptativa com base em inovação

Segundo a abordagem IAE, a adaptabilidade do filtro de Kalman provém do recálculo das matrizes de covariância  $Q_k$  e  $R_k$  de acordo com a evolução das medições ao longo do tempo. Em cada passo a atualização das matrizes é feita da seguinte forma:

$$\hat{R}_k = \hat{C}_k - H_k P_{k^{(-)}} H_k^T \quad (2.21)$$

$$\hat{Q}_k = K_k \hat{C}_{v_k} K_k^T \quad (2.22)$$

Sendo  $P_{k(-)}$  a matriz de covariância do estado prevista e  $K_k$  a matriz de ganho. A matriz de inovação V-C no instante  $k$ ,  $\hat{C}_{v_k}$ , pode ser obtida a partir da sequência de inovação da equação X calculando uma média dentro de uma janela de estimação de tamanho  $N$ , tal como:

$$\hat{C}_{v_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=j_0}^k v_j v_j^T \quad (2.23)$$

Com o primeiro instante da janela de estimação,  $j_0$ , definido como,

$$j_0 = k - N + 1 \quad (2.24)$$

e sendo  $N$  calculado com recurso ao número de variáveis a estimar em cada instante  $L$ , ou seja:

$$N = \frac{L(L + 1)}{2} \quad (2.25)$$

### 3 Interceção baseada nos princípios do controlo ótimo

O controlo por realimentação (*feedback*) é o mecanismo básico através do qual um sistema consegue manter o equilíbrio. Este capítulo dedica-se ao enquadramento do controlo e modelação de sistemas físicos na interseção de mísseis balísticos.

A teoria de controlo clássica era baseada no estudo de sistemas bastante simples, normalmente apenas com uma entrada e uma saída (SISO – *Single Input-Single output*) e técnicas de controlo como o local de raízes (*Root Locus*) ou resposta em frequência através da utilização das transformadas de Laplace. Os sistemas reais são normalmente constituídos por vários parâmetros distribuídos e como tal o desenvolvimento tecnológico e científico tem vindo a aumentar a necessidade de modelos cada vez mais complexos. Assim sendo, a teoria de controlo moderna assenta no estudo de controladores com várias entradas e saídas (MIMO – *Multiple Input-Multiple output*) [27]. Para além destes modelos diferentes, existem também filosofias diferentes de controlo: controlo de malha aberta e controlo por realimentação (*feedback*). Quando o controlador depende apenas de uma condição inicial e do tempo, sem ser influenciado pelo estado, estamos perante um caso de controlo de malha aberta. Este tipo de controlo é relativamente simples, mas incapaz de lidar com perturbações inesperadas. Por outro lado, no controlo por realimentação, o próprio controlador deteta mudanças no estado e gera controlos de modo a cumprir o seu objetivo.

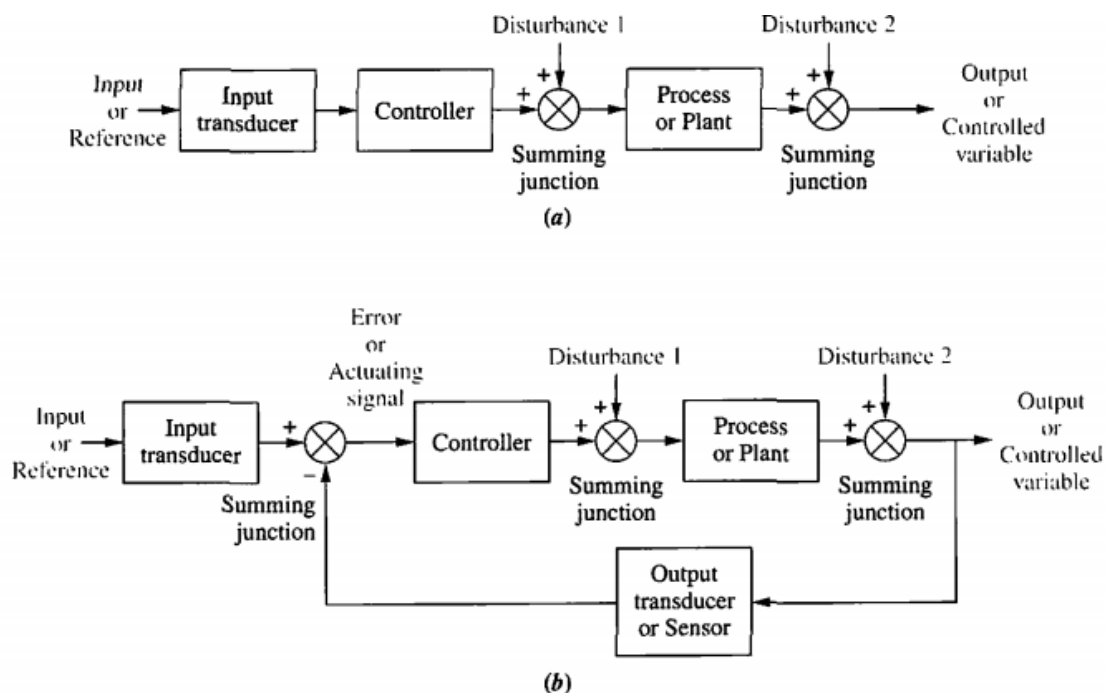


Figura 3. 1: Diagrama de blocos de um sistema de controlo: a) sistema de malha aberta; b) sistema de realimentação [28]

Um sistema real é extremamente complexo, pelo que os seus modelos devem recorrer ao uso de descrições aproximadas dos vários processos presentes. Desta necessidade surge o conceito de robustez de um controlador. Quando aplicado ao sistema real, um controlador robusto deve comportar-se essencialmente como previsto no modelo nominal (aproximado). [29]

Existem várias maneiras de projetar um controlador para que este cumpra o mesmo objetivo. A teoria de controlo ótimo tem vindo a ser desenvolvida para lidar com esse problema. Esta teoria assenta na maximização de um critério de desempenho que mede o desempenho do controlador de acordo com as especificações nele impostas. Previamente desenvolveram-se trabalhos que estudaram controladores LQR clássicos e determinísticos [3], bem como controladores  $H_\infty$ /LTR [4]. Neste trabalho opta-se pela implementação de um controlador LQR adaptado para perseguição, escolha motivada pelo bom desempenho que revela aliado a uma fácil implementação e análise.

O controlador LQR considerado neste trabalho é invariante no tempo e contínuo, sendo que se procederá a uma discretização do sistema para o seu tratamento no software MATLAB.

### 3.1 Sistemas referenciais

Um sistema de interseção requer a localização exata do alvo e do intercetor para poder cumprir a sua missão de um modo satisfatório. A existência de sistemas referenciais não ambíguos é fundamental para que essa localização se processe sem problemas. Num sistema referencial são definidas constantes, parâmetros e modelos que servem de base para a representação matemática de quantidades físicas e geométricas.

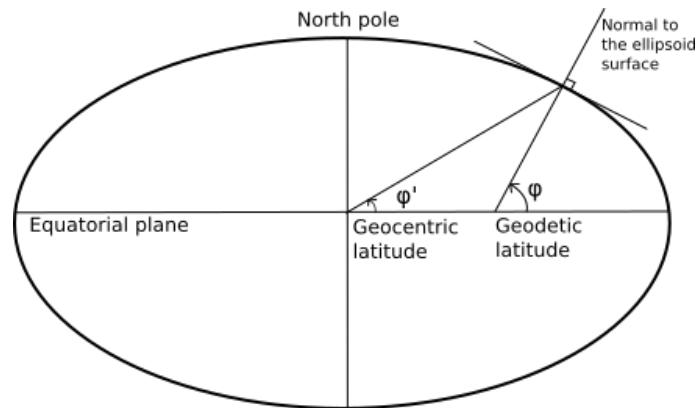


Figura 3. 2: Representação visual da diferença entre latitude geocêntrica e latitude geodética [30]

De entre os diversos referenciais existentes [31] é comum, em navegação, a utilização de referenciais geocêntricos e geodéticos. Um referencial geocêntrico representa as várias coordenadas (cartesianas ou angulares), tal como o nome indica, em relação ao centro da Terra. No caso do referencial geodético, as coordenadas são medidas em relação ao plano normal à superfície do elipsoide.

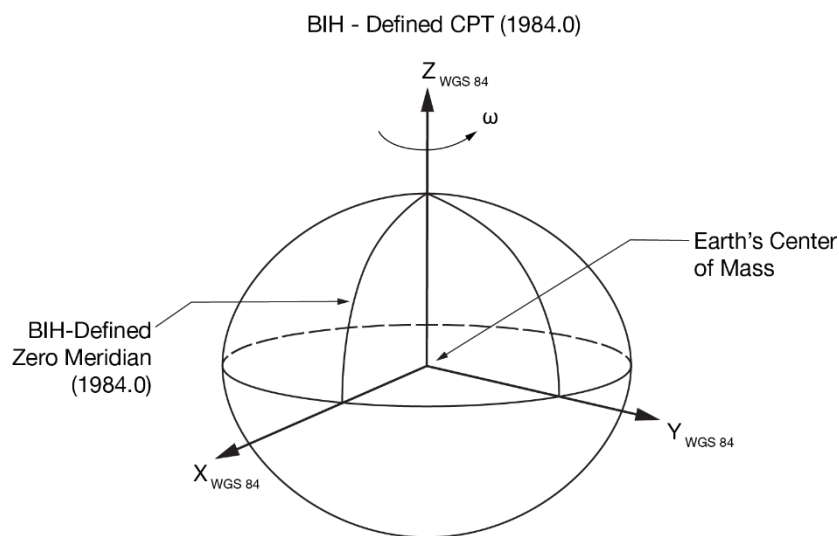


Figura 3. 3: Representação do sistema referencial geocêntrico WGS84 ECEF (Earth-Centred – Earth-fixed) [32]

Neste trabalho opta-se por utilizar o sistema geocêntrico devido a dois fatores principais. Em primeiro lugar por uma questão de continuidade e consistência, visto que as efemérides dos satélites são estimadas num sistema referencial geocêntrico [33]. Em segundo, por uma simples questão de facilidade de interpretação dos dados.

### 3.2 Modelação do sistema

Os problemas físicos de controlo são modelados através do uso de sistemas. Neste trabalho consideram-se três tipos de classificações de sistemas, sendo elas: linearidade, variação e continuidade no tempo.

Em termos de linearidade os sistemas podem ser classificados como lineares ou não lineares. Um sistema linear é modelado através de equações lineares e obedece ao princípio da sobreposição de efeitos, ou seja, a resposta do sistema face a uma determinada entrada não é afetada pela presença simultânea de outras entradas [34], tal como demonstrado na figura 3.4. Já nos sistemas não lineares isto não se verifica, podendo verificar-se que os estes sistemas criam novas frequências em regime permanente.

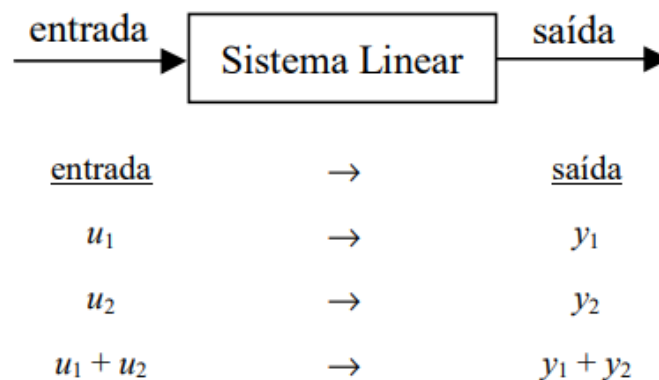


Figura 3. 4: Representação simples do princípio da sobreposição que se verifica num sistema linear

Um modelo não linear é capaz de descrever ou prever fenómenos dinâmicos que só ocorrem na presença de não linearidades, sendo então capaz de uma modelação muito mais completa. Apesar disso, essa modelação é muitas das vezes feita com recurso a modelos lineares. Isto acontece devido ao grande desenvolvimento das ferramentas lineares de análise e de síntese e ao facto de que grande parte dos fenómenos físicos

podem ser descritos aproximadamente por comportamentos lineares, pelo menos em torno de certos pontos de operação. Nos casos em que não existe uma solução analítica fechada, o que é bastante comum em sistemas não lineares, é sempre possível obter soluções numéricas, ainda que com uma diminuição da precisão.

Um sistema pode ser classificado quanto à variação no tempo como variante ou invariante. Num sistema invariante no tempo o sinal de saída é  $y(t)$ , independentemente de quando aplicamos um sinal de entrada  $x(t)$ , ou seja, as condições dinâmicas do sistema não mudam com o passar do tempo. Um sistema invariante no tempo existe apenas como um conceito. Como tal, considera-se na prática que sistemas cuja variação no tempo é muito lenta são sistemas invariantes no tempo. Sistemas variantes são todos aqueles em que um ou mais dos seus coeficientes muda ao longo do tempo [35].

Por último, em relação à continuidade no tempo podemos classificar os sistemas como contínuos, discretos ou discretizados. Um sistema de tempo contínuo é um sistema que tem como domínio e contradomínio sinais definidos numa faixa de valores contínua no tempo. Contrariamente, sistemas de tempo discretos têm sinais definidos para determinados instantes de tempo. Os sistemas discretizados surgem da discretização de sistemas contínuos [35].

### 3.3 Controlador LQR para perseguição

O controlo ótimo tem como objetivo a estabilização do estado de um sistema, bem como o controlo da saída do mesmo. Para este efeito procura-se um controlador que seja capaz de maximizar ou minimizar um determinado critério de desempenho, surgindo daqui o problema de otimização fundamental. Assim sendo, pretende-se encontrar as soluções  $u$  que satisfaçam certas condições [36], ou seja:

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J(x(t), u(t)) \\ \text{sujeito a: } \dot{x}(t) = Ax + Bu \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nesta dissertação opta-se por deixar esta otimização ao encargo do LQR, devido à facilidade de implementação e análise do mesmo, visto que é uma área bastante estudada e analisada dentro do controlo ótimo.

O sistema a analisar é representado pelo espaço de estados apresentado a seguir, sendo a as equações referentes ao estado e à saída do sistema, respetivamente.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_r r(t) \quad (3.2)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.3)$$

Onde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [C_p \quad 0], \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$x(t) = [x_p^T(t), x_e^T(t)]^T \quad (3.4)$$

$$x_{e(t)} = \int_0^t [y(t) - r(t)] dt \quad (3.5)$$

$x(t) \in \mathfrak{R}^m$  representa o estado do sistema

$x_p(t) \in \mathfrak{R}^{m_p}$  representa o estado da planta do sistema

$x_{e(t)} \in \mathfrak{R}^n$  representa o estado do integrador

$y(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa a saída do sistema

$u(t) \in \mathfrak{R}^q, q \geq n$  representa a entrada de controlo do sistema

$r(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa a entrada de referência do sistema

$A \in \mathfrak{R}^{m \times m}, B \in \mathfrak{R}^{m \times q}, C \in \mathfrak{R}^{n \times m}, A_p \in \mathfrak{R}^{m_p \times m_p}, B_p \in \mathfrak{R}^{m_p \times q}, C_p \in \mathfrak{R}^{n \times m_p}$

Na análise do sistema de controlo multivariável proporcional e integral (PI) estamos interessados em obter a matriz de ganho de feedback  $F$ , da seguinte forma:

$$F = [F_1 \quad F_2] \quad (3.6)$$

Para esse efeito coloca-se o seguinte problema auxiliar: Determinar a matriz de feedback ótima para uma lei de feedback de controlo, expressa da seguinte forma:

$$u(t) = -Fx(t) = -F_1x_p(t) - F_2x_e(t) \quad (3.7)$$

Posto isto, a matriz de feedback ótima é obtida de modo a minimizar o seguinte índice de desempenho quadrático:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.8)$$

Onde  $Q$  é a matriz de pesagem do estado e  $R$  é a matriz de pesagem do controlo.

De modo a garantir a existência de uma regra de controlo ótima desta forma existem duas condições suficientes e necessárias. Estas condições surgem relacionadas com a utilização da equação de Riccati. A primeira é que o par  $(A, B)$  tem de ser completamente controlável. A segunda é que o par  $(A, M)$ , em que  $M^T M = Q$ , tem que ser completamente observável [37], de acordo com as verificações referidas no subcapítulo 2.2. Nesta condição esconde-se uma outra, que afirma que a matriz  $Q$  deve ser sempre maior ou igual a zero e também fatorizável. Estando estas condições satisfeitas, a matriz de feedback ótima é dada por

$$F = R^{-1}B^T P \quad (3.9)$$

Onde  $P = P^T$  e  $P$  é a única solução positiva definida da equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (3.10)$$

## 4 Simulações e resultados

### 4.1 Filtro de Kalman Adaptativo

O vetor de estado do sistema  $X$  é composto pela posição e velocidade do alvo no espaço tridimensional. O vetor de observação  $Y$  é composto pelas posições do alvo no mesmo espaço.

$$X = [x_a \quad y_a \quad z_a \quad \dot{x}_a \quad \dot{y}_a \quad \dot{z}_a]^T \quad (4.1)$$

$$Y = [x_a \quad y_a \quad z_a]^T \quad (4.2)$$

O vetor de ruído  $\xi$  é composto pelos erros de medição da posição em cada dimensão e também pelo *jerk*, que equivale à derivada da aceleração. O vetor  $\xi$  apresenta a seguinte forma:

$$\xi = [w_x \quad w_y \quad w_z \quad j_x \quad j_y \quad j_z]^T \quad (4.3)$$

Os ruídos  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$  são ruídos brancos com uma distribuição normal, definidos do seguinte modo:

$$w_x, w_y, w_z \approx N(0, 5) \quad (4.4)$$

O *jerk* pode ser representado por um ruído estatístico com uma função de densidade de probabilidade idêntica a uma distribuição gaussiana. Assim sendo, o *jerk* pode ser tratado como um ruído gaussiano.

De acordo com o modelo discretizado do sistema as matrizes  $A_k$ ,  $C_k$  e  $\Gamma_k$  correspondem respetivamente ao estado, ao observador e ao ruído de medição. Definiram-se as matrizes  $A_k$  e  $C_k$  como referido no subcapítulo 2.3, enquanto que a matriz  $\Gamma$  é definida de acordo com [38]. Estas matrizes são definidas de seguida.

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ainda que o filtro de Kalman adaptativo calcule as matrizes  $Q$  e  $R$  a cada passo, é necessário definir um valor inicial para as matrizes  $Q$ ,  $R$  e  $P$  para ser possível iniciar o processo de filtragem. Assim sendo, as matrizes iniciais  $Q_0$ ,  $R_0$  e  $P_0$  foram definidas da seguinte forma:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A filtragem de Kalman adaptativa recorre a um número predeterminado de pontos para executar a sua função. Esse facto torna necessária a inicialização do filtro com recurso à filtragem de Kalman-Bucy até serem obtidos os pontos necessários para efetuar o cálculo recorrente.

As figuras apresentadas de seguida servem para evidenciar a capacidade do filtro de Kalman adaptativo na estimação de trajetórias. A dimensão da trajetória completa em comparação com as perturbações das posições torna difícil a análise do desempenho do

filtro através da figura 4.1, apresentando-se então a figura 4.2 que se trata de uma aproximação do gráfico presente na primeira figura.

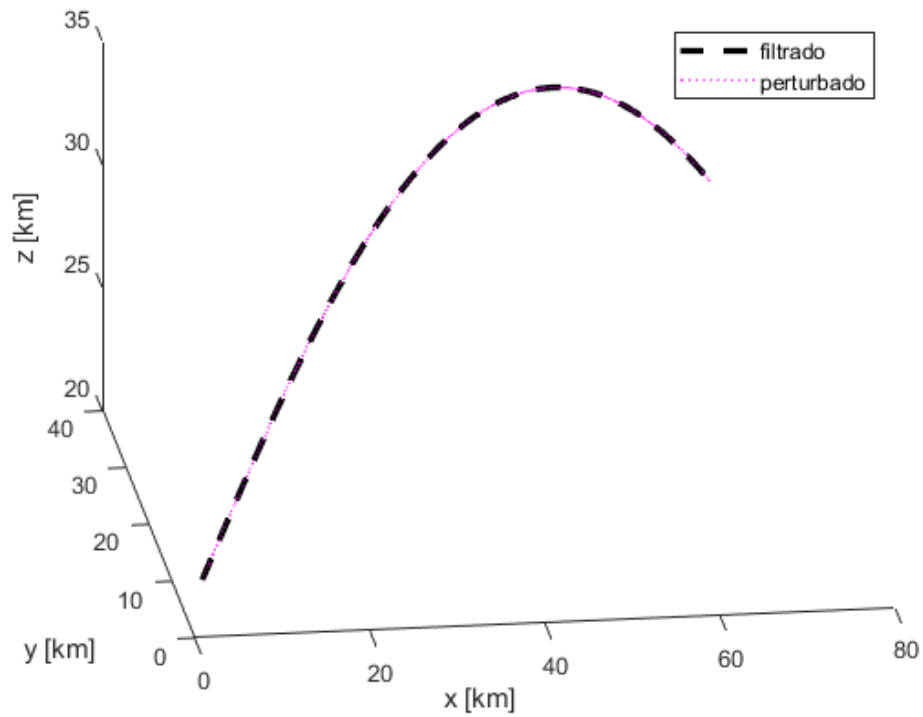


Figura 4. 1: Comparação entre trajetória com perturbações e trajetória filtrada

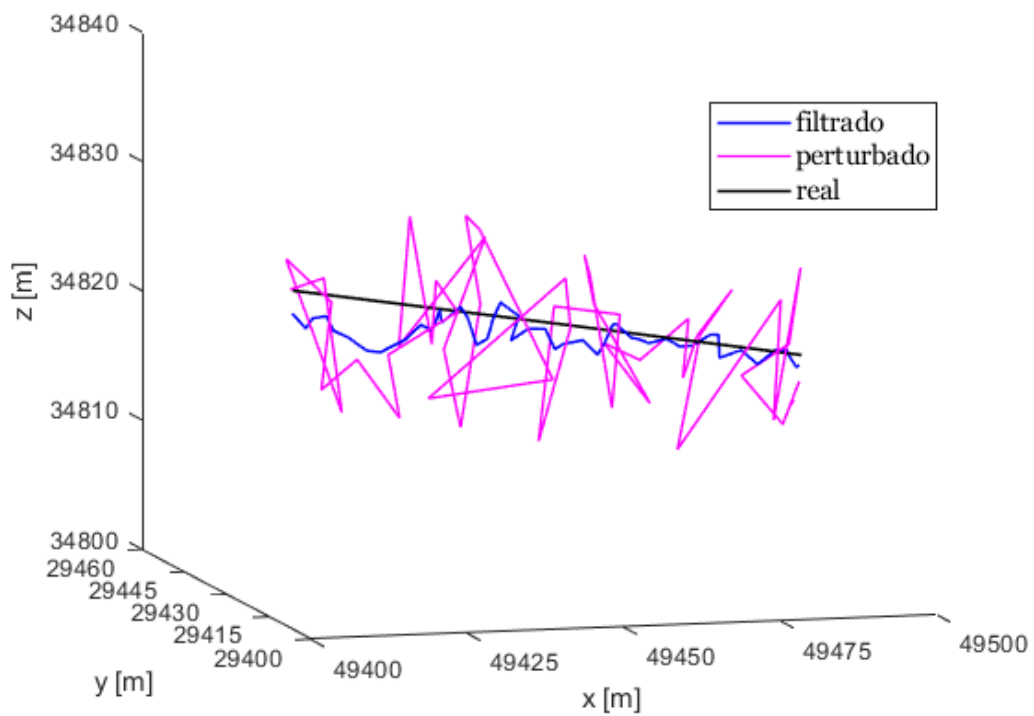


Figura 4. 2: Detalhe da comparação entre trajetória com perturbações e trajetória filtrada

A representação de movimentos tão erráticos em três dimensões pode tornar difícil a percepção do comportamento destas trajetórias, apresentando-se então as figuras 4.3, 4.4 e 4.5 como forma de esclarecimento. O comportamento da trajetória obtida pela ação do filtro apresenta valores mais próximos à trajetória real do alvo e oscilações muito inferiores à trajetória perturbada. Isto leva a que a trajetória filtrada tenha uma aparência mais “limpa” e consiga representar mais precisamente o movimento do alvo, reduzindo o impacto dos possíveis erros de medição.

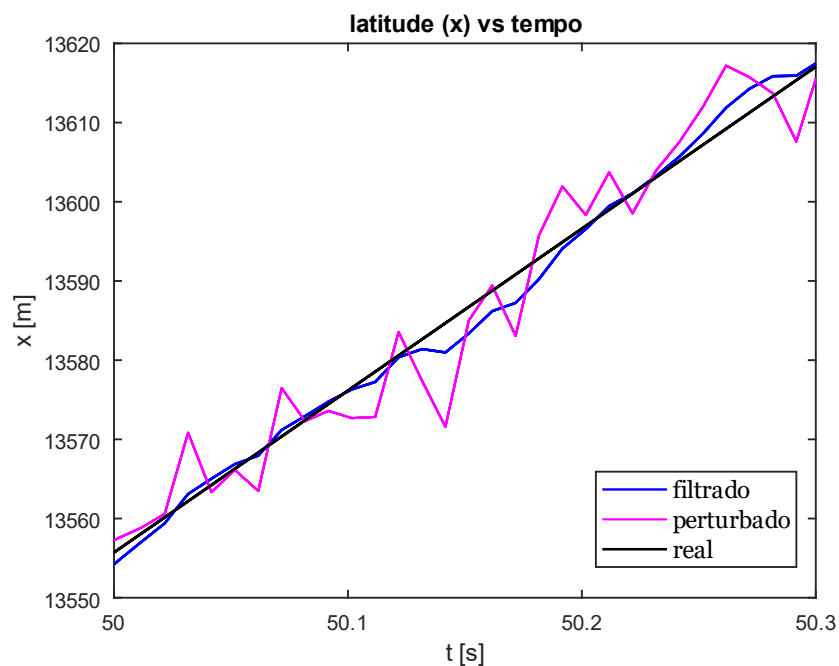


Figura 4. 3: Representação ampliada do comportamento da latitude real, perturbada e filtrada em função do tempo.

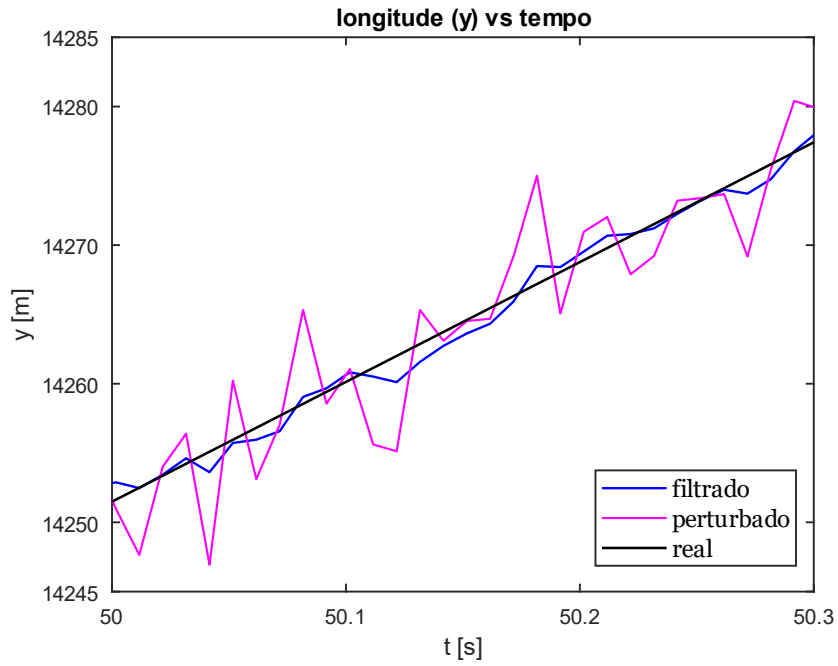


Figura 4. 4: Representação ampliada do comportamento da longitude real, perturbada e filtrada em função do tempo.

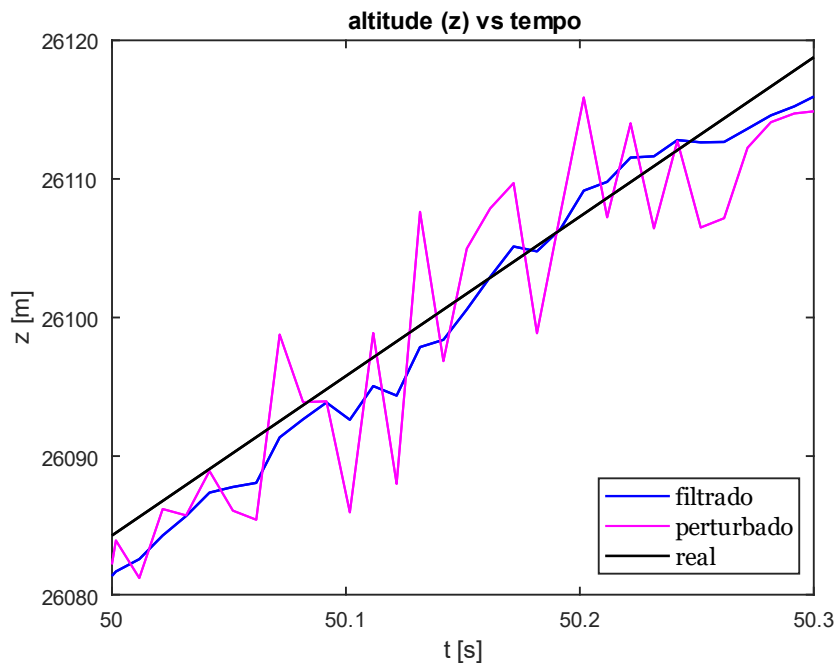


Figura 4. 5: Representação ampliada do comportamento da altitude real, perturbada e filtrada em função do tempo.

Os resultados mostram que o filtro de Kalman adaptativo é capaz de mitigar o efeito de erros de medição significativos. Assim, evidencia-se como um método adequado de

filtragem e estimação de trajetórias para a localização precisa de potenciais ameaças à segurança da população geral.

## 4.2 Controle

No controlador LQR, o movimento do míssil foi descrito por um sistema aumentado em que o vetor de estado  $x$  é composto pelo vetor de estado da planta  $x_p$  e o vetor de estado do integrador  $x_e$ . O vetor de estado da planta é composto pela posição e velocidade do interceptador, enquanto o vetor de estado do integrador é composto pelo integral da diferença de posição entre o alvo e o interceptador. A saída controlada  $y$  do sistema é composta pela posição do interceptador, a entrada de controle  $u$  é composta pela aceleração aplicada ao interceptador e a entrada de referência  $r$  é composta pela posição do alvo.

$$x_p = [p_x \ p_y \ p_z \ v_x \ v_y \ v_z] \quad (4.11)$$

$$y = [p_x \ p_y \ p_z]^T \quad (4.12)$$

$$u = [a_x \ a_y \ a_z]^T \quad (4.13)$$

$$r = [p_x \ p_y \ p_z]^T \quad (4.14)$$

As matrizes  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  e por conseguinte  $A$ ,  $B$  e  $C$  foram definidas de acordo com o modelo do sistema, tomando a seguinte forma:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

De acordo com o subcapítulo 2.1, obtiveram-se as seguintes matrizes do modelo discretizado:

$$A_{pd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$B_{pd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

As matrizes  $Q$  e  $R$  foram obtidas experimentalmente. Os valores foram obtidos tendo em consideração que quanto mais elevados forem os valores da matriz  $Q$ , maior será o peso do estado do alvo, ou seja, o controlador gera esforços de controlo maior para levar o estado de encontro ao objetivo. Por outro lado, valores mais elevados da matriz  $R$  levam a uma diminuição do custo do controlo do sistema, ou seja, o controlador tende a computar menores esforços de controlo. Os valores apresentados para estas matrizes foram atribuídos com o objetivo de proporcionar um controlo robusto evitando esforços

de controlo exagerados e, por sua vez, a execução de manobras que obriguem o intercetor a entrar em perda.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Antes de continuar é necessário assegurar a controlabilidade do par  $(A, B)$ , bem como a observabilidade do par  $(A, M)$ , como definido previamente no subcapítulo 4.2. Para tal utiliza-se o comando *rank* do programa MATLAB® da seguinte forma,

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A, B)) = n = 9 \quad (4.25)$$

$$\text{rank}(\text{obsv}(A, M)) = n = 9 \quad (4.26)$$

A matriz de ganho de realimentação ótimo é então obtida através do comando *lqr* $(A, B, Q, R)$  do programa MATLAB®.

Com o intuito de esclarecer tudo o que foi dito anteriormente, apresentam-se os resultados obtidos sob a forma de trajetórias tridimensionais, que podem ser observadas nas figuras expostas a seguir. Impuseram-se as seguintes condições em todas as simulações: o intercetor começa a perseguição na origem do referencial e a duração da simulação é de 300 segundos. Numa tentativa de garantir a veracidade dos resultados obtidos, limitaram-se os valores de aceleração do míssil intercetor a  $40g$ . Na maior parte dos casos o alvo descreve as várias trajetórias com uma velocidade  $v = 1200 \text{ km/h}$ , sendo a exceção a figura 4.8 em que a velocidade do alvo é  $v = 1500 \text{ km/h}$ . As figuras 4.6, 4.8, 4.9 e 4.10 foram obtidas utilizando as seguintes condições iniciais para o alvo:  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , diferindo assim a figura 4.7 que apresenta as condições iniciais:  $x_0 = [8000 \ 10000 \ 25000 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Foi também analisado o desempenho do controlador face a diferentes tipos de trajetória: nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8 o alvo descreve uma trajetória aproximadamente parabólica; na figura 4.9 a trajetória do alvo acresce de uma oscilação lateral periódica; na figura 4.10 a trajetória do alvo apresenta oscilações laterais e verticais periódicas.

Apesar da duração da simulação ser constante em todos os casos, os resultados apresentados mostram o desenrolar de cada simulação até ao momento em que a distância entre o alvo e o intercetor é mínima. Sendo assim, os intervalos de tempo decorridos em cada situação foram: na figura 4.6, 22.68 segundos; na figura 4.7, 22.31 segundos; na figura 4.8, 28.61 segundos; na figura 4.9, 22.49 segundos; na figura 4.10, 20.67 segundos; na figura 4.11, 22.70 segundos.

Para cada caso difere também a distância mínima que o intercetor consegue garantir entre si e o alvo. Para cada caso apresentado a distância mínima ao alvo foi: na figura 4.6, 249 metros; na figura 4.7, 255 metros; na figura 4.8, 294 metros; na figura 4.9, 351 metros; na figura 4.10, 366 metros; na figura 4.11, 246 metros.

Da análise dos gráficos é possível observar as características de uma perseguição pura, em que o intercetor segue o alvo diretamente em todo o instante. O controlador consegue seguir o alvo com sucesso, ainda que apresente sempre um ligeiro atraso. Isto não é surpreendente devido à velocidade elevadíssima do alvo bem como a própria modelação do sistema aliada a um controlador com um custo moderado. A posição, velocidade e aceleração do intercetor são tratadas na forma cartesiana com o centro do referencial no ponto de lançamento, enquanto que, normalmente, as limitações ao movimento do míssil são tratadas em termos longitudinais e laterais, sendo míssil o centro do referencial. Este facto torna difícil a aplicação exata dos limites das acelerações longitudinais e laterais, resultando na necessidade de um compromisso.

A observação das figuras 4.6 e 4.7 tornam aparente que a condição inicial do alvo afeta ligeiramente a trajetória inicial de aproximação até ao ponto em que o perseguidor se coloca atrás da ameaça, tendo que responder à distância diferente que terá que percorrer para se dar a interceção. Alterar a posição inicial do alvo também não surtiu um efeito considerável quer na duração da missão, quer na distância mínima ao alvo. Ainda assim, curiosamente, a duração foi menor no caso em que o alvo estava a uma distância inicial superior. Isto pode dever-se a maiores esforços de controlo iniciais provocados pela maior diferença entre as posições do alvo e intercetor.

Quanto à velocidade do alvo nota-se, da observação das figuras 4.6 e 4.8, que esta também tem um impacto ligeiro no tipo de trajetória tomada pelo intercetor, contrariamente à sua posição inicial. Apesar deste facto, esta aparenta ser a condição inicial que maior influência tem no tempo que o intercetor demora a conseguir realizar a interceção. Esta diferença não é surpreendente visto que o controlador tem como referência a posição atual do alvo, mas não a sua velocidade. Como seria de esperar o alvo consegue percorrer uma distância superior graças à maior velocidade.

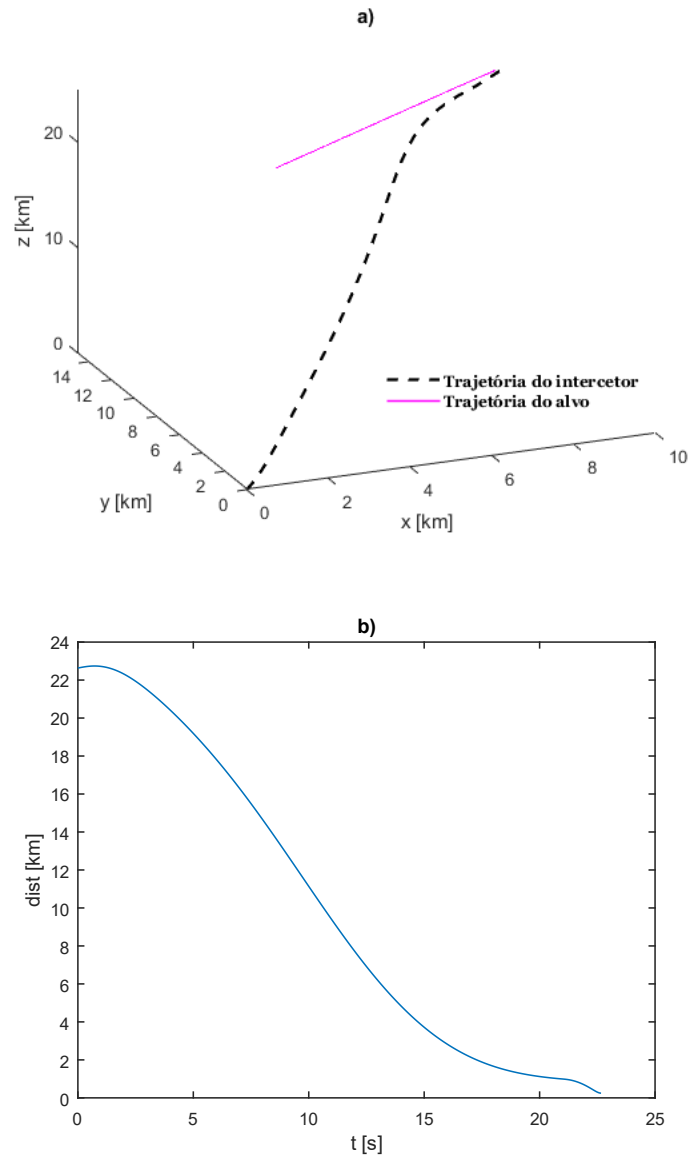


Figura 4. 6: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do interceptor e do alvo com a condição inicial do míssil  $x_o = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1200 \text{ km/h}$  e b) da distância ao alvo em função do tempo.

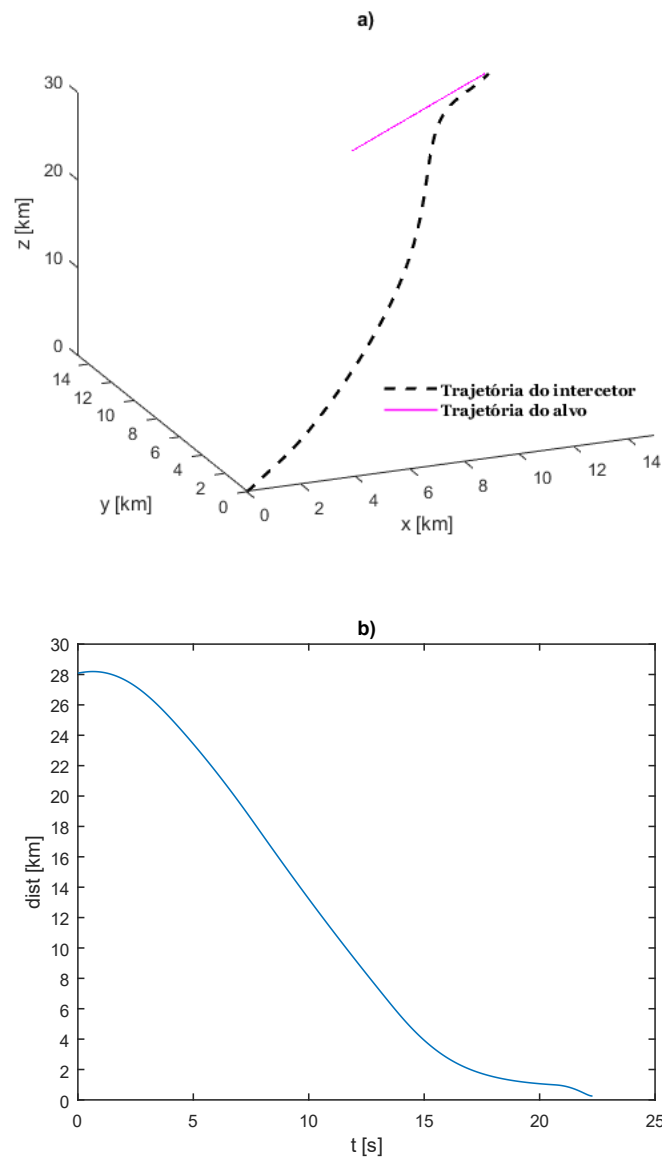


Figura 4. 7: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do interceptor e do alvo com a condição inicial do míssil  $x_0 = [8000 \ 10000 \ 25000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1200 \text{ km/h}$  e b) da distância ao alvo em função do tempo.

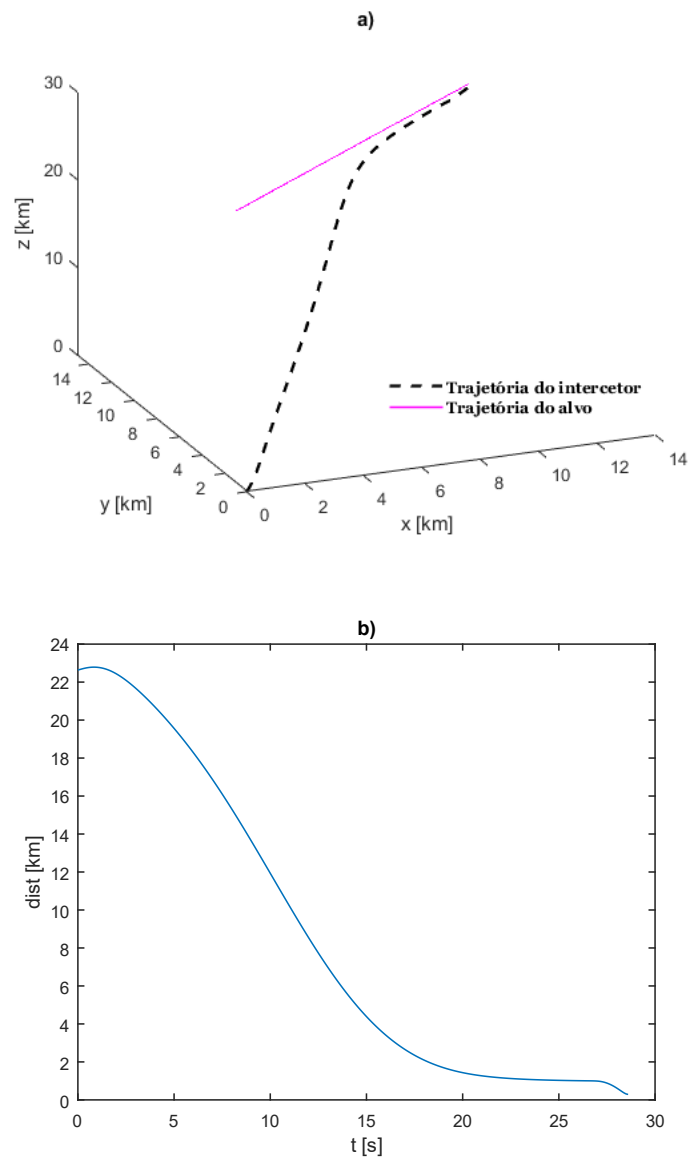


Figura 4. 8: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do intercetor e do alvo com a condição inicial do míssil  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1500 \text{ km/h}$  e b) da distância ao alvo em função do tempo.

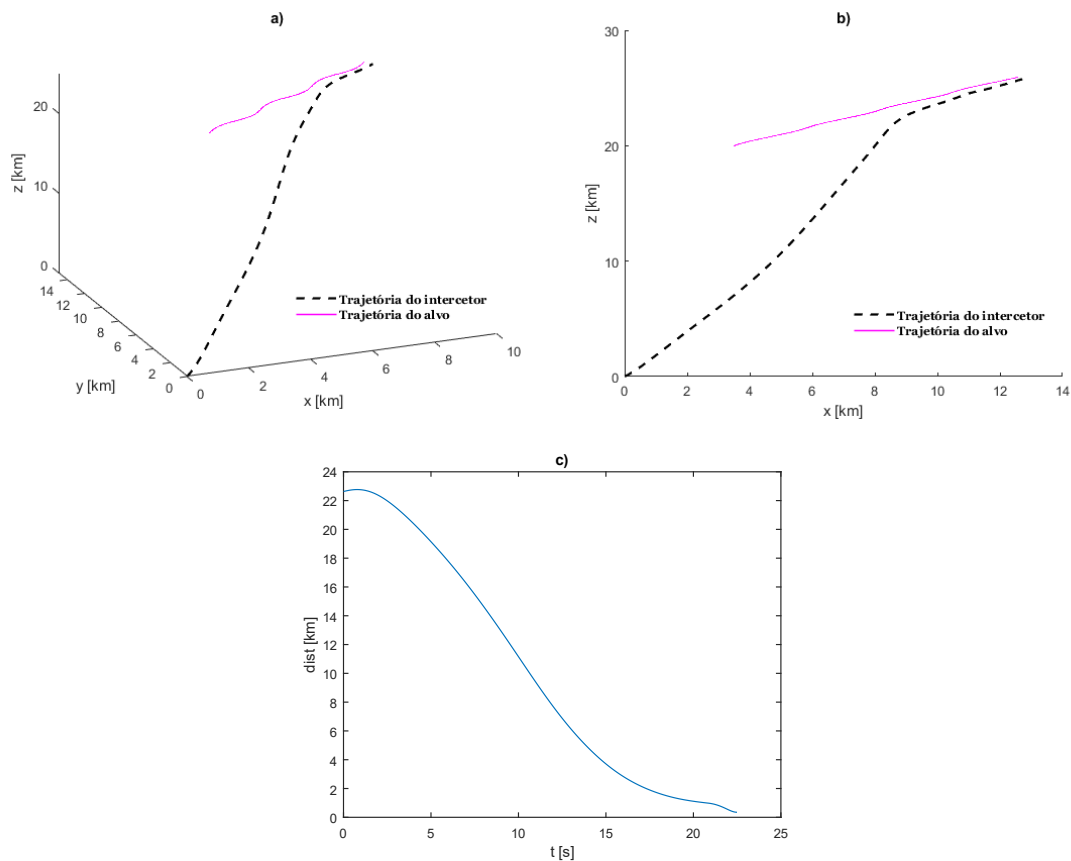


Figura 4. 9: Representação gráfica a) tridimensional, b) vista lateral da representação tridimensional das trajetórias do interceptor e do alvo com oscilação lateral do alvo e condição inicial  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1200 \text{ km/h}$  e c) da distância ao alvo em função do tempo e c) da distância ao alvo em função do tempo.

As figuras 4.9 e 4.10 permitem observar que possíveis manobras do alvo não se traduzem obrigatoriamente em trajetórias diferentes tomadas por parte do interceptor. Estas situações também não apresentam consequências notáveis na duração da missão. É na distância mínima ao alvo que se nota o impacto destas manobras, sendo que o interceptor não consegue aproximar-se tanto do alvo. Este resultado seria espectável, visto que as constantes alterações ao rumo do alvo tornam difícil que o interceptor se alinhe com o mesmo e que consiga reagir prontamente ao seu movimento mais errático. Ainda assim estas distâncias apresentam-se dentro de uma faixa de valores aceitáveis.

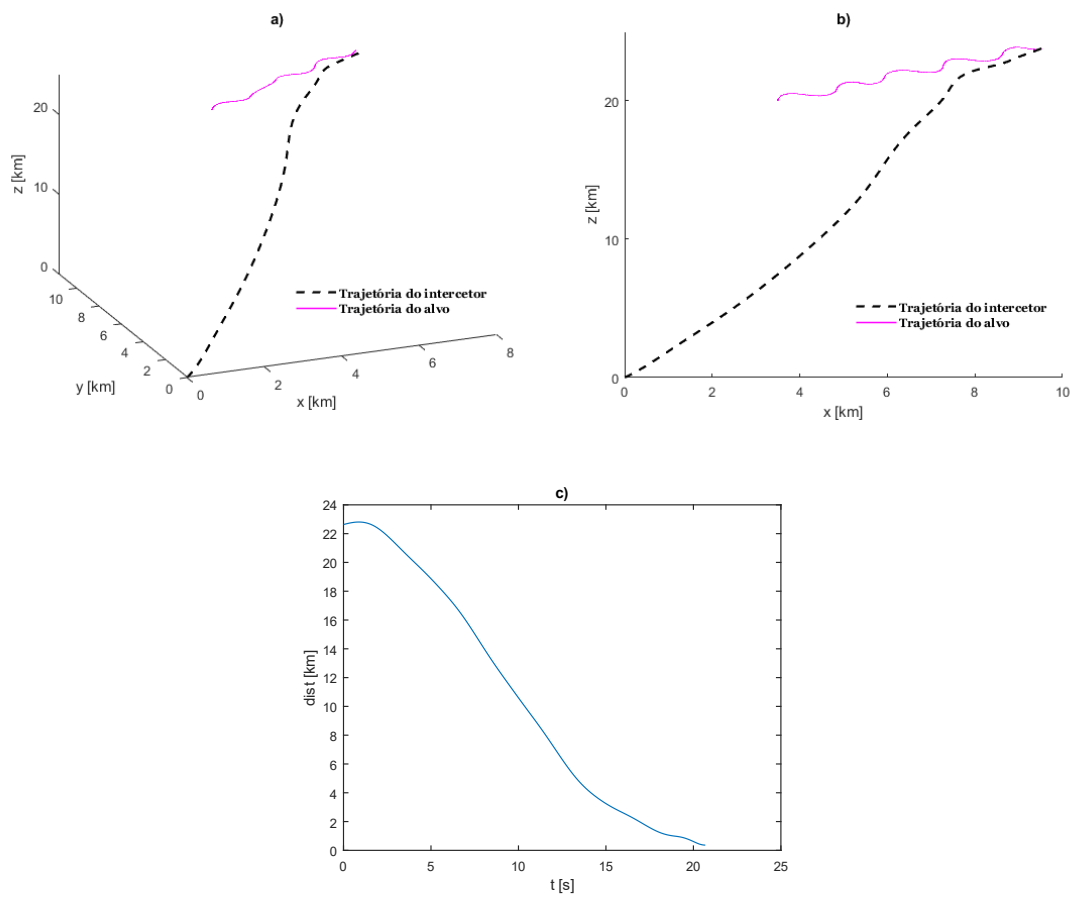


Figura 4. 10: Representação gráfica a) tridimensional, b) vista lateral da representação tridimensional das trajetórias do interceptor e do alvo com oscilação lateral e vertical do alvo e condição inicial  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1200 \text{ km/h}$  e c) da distância ao alvo em função do tempo e c) da distância ao alvo em função do tempo.

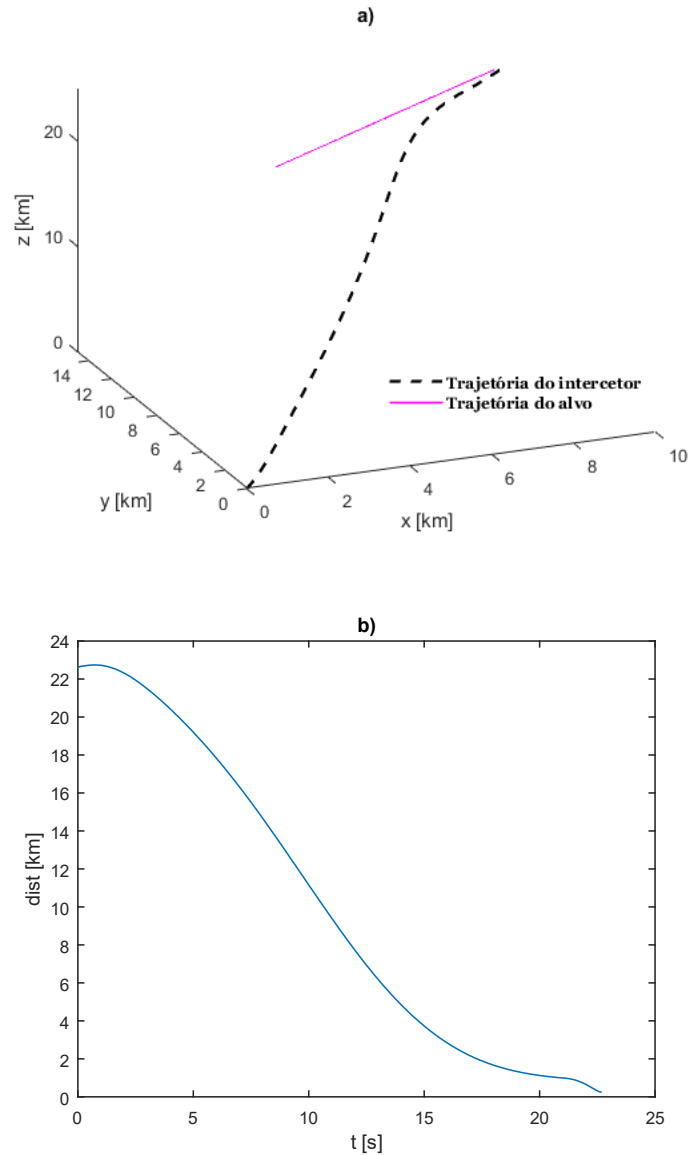


Figura 4. 11: Representação gráfica a) tridimensional das trajetórias do interceptor e do alvo após filtragem, com condição inicial  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $v = 1200 \text{ m/s}$  e b) da distância ao alvo em função do tempo.

Os algoritmos de filtragem e controlo desenvolvidos neste trabalho têm como objetivo serem usados em conjunto num sistema de interceção. Para verificar que tal é possível apresenta-se a figura 4.11. Nesta figura está representado o comportamento do controlador LQR quando persegue um alvo cuja trajetória foi estimada pelo filtro de Kalman adaptativo desenvolvido neste trabalho. Pode verificar-se que a trajetória do interceptor é semelhante à dos casos em que a trajetória do alvo não sofreu perturbações, o que seria de esperar já que o filtro faz um bom trabalho em aproximar a trajetória perturbada da real e o controlador LQR é bastante robusto.

Em suma, o controlador LQR PI apresenta uma robustez e desempenho satisfatórios numa aproximação inicial ao alvo, sendo capaz de gerar trajetórias que seguem o alvo mesmo em situações em que este execute manobras. Ainda assim, apresenta ainda algumas fragilidades, sendo a mais evidente a dificuldade ligeiramente maior em diminuir a distância ao alvo quando este executa manobras. Assim sendo este controlador mostra-se adequado para a aproximação inicial ao alvo, mas com algumas dificuldades em provocar a interceção direta entre os dois corpos. Apesar disso, em muitos dos casos a interceção final é executada por um outro controlador mais otimizado para curtas distâncias. Como a inutilização de uma ameaça não requer obrigatoriamente o impacto entre o alvo e o interceptor o controlador cumpre a sua função, apresentando um desempenho desejável.

## 5 Conclusão

Os objetivos desta dissertação foram a modelação e análise do problema de perseguição através da implementação e verificação de algoritmos de controlo LQR e filtragem de Kalman tendo em conta os princípios de controlo ótimo de sistemas dinâmicos: O filtro de Kalman adaptativo surge como possível solução ao problema da localização e estimação da trajetória do alvo. O controlador LQR adaptado é estudado como possível solução para o problema da perseguição e interceção. Ambos os algoritmos contribuem para o sucesso da missão quando aplicados em sistemas que se encontram sob o efeito de ruídos significativos.

Para a localização exata da ameaça foi estudado um algoritmo de filtragem de Kalman adaptativa baseado em inovação. Este algoritmo foi implementado com o objetivo de combater o impacto de incertezas e erros na medição de valores posicionais, erros esses que podem ameaçar a precisão do sistema e, conseqüentemente, a segurança da população geral.

De modo a analisar o algoritmo de filtragem implementado a situações o mais próximas possível da realidade, este foi aplicado a uma trajetória balística à qual foi posteriormente adicionado ruído branco em quantidades consideráveis para um processo desta natureza. Para combater o facto de que se desconhecem quais serão as incertezas que afetarão um determinado sistema, que estas foram simuladas neste trabalho com recurso a um conhecimento empírico acerca da precisão de sensores de rastreamentos reais. Desta forma foi possível observar o resultado da aplicação do filtro através da observação das diferenças entre a trajetória real, perturbada pelo ruído e, por último, filtrada. Após a análise dos resultados, que se demonstraram bastante positivos, é possível concluir que a filtragem de Kalman adaptativa é uma abordagem viável para a implementação neste tipo de sistemas.

Com todos os bons indícios apresentados pelo filtro implementado, devem-se referir também algumas características limitantes. A inexistência de uma gama de valores prévios que permitam a mutação do filtro na fase de inicialização obriga à utilização de um filtro de Kalman-Bucy para “arrancar” o processo de filtragem. Assim sendo um sistema que utilize a filtragem de Kalman adaptativa vê-se obrigado a incluir também um ciclo de filtragem de Kalman-Bucy.

Quanto à perseguição, estudou-se o comportamento de um míssil intercetor orientado com base na perseguição direta sob os comandos gerados por um controlador LQR

proporcional e integral (PI) baseado na teoria do controlo ótimo. Este estudo foi efetuado sobre trajetórias sem perturbações e também após passagem pelo filtro de Kalman adaptativo, por forma a validar o uso simultâneo dos dois algoritmos desenvolvidos. O controlador apresentou resultados positivos em todas as situações avaliadas, sendo capaz de se aproximar do alvo num espaço de tempo relativamente curto e garantindo distâncias mínimas aceitáveis. Quando o alvo executa manobras o intercetor deixa de conseguir aproximar-se tanto ao alvo, sendo que se nota que o intercetor apresenta dificuldades na reação a essas manobras quando se encontra perto do alvo. O comportamento do controlador quando aplicado a um alvo cuja trajetória foi filtrada não apresenta indícios de pior desempenho, resultado esse favorável à implementação conjunta destes dois sistemas.

Apesar dos bons indícios verificados na análise do controlador, é evidente que em nenhum dos casos se dá a colisão entre o alvo e o intercetor. Assim sendo, dependendo das capacidades do intercetor a que possa ser aplicado, este controlador pode ser utilizado como um método de controlo na aproximação inicial a um alvo com as características apresentadas neste trabalho, onde o controlador apresenta bons resultados, complementando-se a sua utilização com um controlador de perseguição adequado para a fase final da interceção. Pode também ser utilizado este controlador apenas, mas só caso o intercetor seja capaz de executar a missão com sucesso com distâncias mínimas como as obtidas neste estudo. Outra possível condicionante do desempenho é o facto de que as matrizes  $Q$  e  $R$  são determinadas através da experiência do projetista, podendo ser um fator limitante do desempenho do controlador.

Os temas abordados nesta dissertação englobam uma grande diversidade de conceitos, pelo que existem várias possibilidades de trabalhos futuros dentro deste contexto.

Mesmo que a interceção de mísseis seja o foco da presente dissertação, é importante notar que os algoritmos apresentados podem perfeitamente ser utilizados para outras finalidades. O trabalho efetuado mantém-se válido para todas as situações em que se pretenda que um corpo siga ou persiga um outro. Um exemplo de outra possível utilização deste sistema é como módulo de piloto automático para garantir o abastecimento em voo.

Dentro do controlo seria interessante estudar o comportamento de um míssil sujeito a um controlador no qual foi implementado um processo de otimização das matrizes de pesagem. Para esse fim poderia ser estudado um controlador projetado através de um processo iterativo similar ao referido em [39] contrariamente ao estudado nesta dissertação, em que as matrizes de pesagem foram determinadas experimentalmente.

Outra proposta consiste na análise do impacto que a escolha de lei de orientação tem na trajetória do míssil interceptor. Poder-se-ia, por exemplo, estudar o desempenho de um míssil orientado segundo as leis de perseguição desviada ou orientação por três pontos. No que toca à filtragem e estimação, o desenvolvimento de estudos que incidam sobre outros filtros seria uma mais-valia para o trabalho até agora realizado. Uma das possibilidades seria a implementação de um filtro *Alpha-Beta-Gamma* como estimador.

## Referências

1. Schneydor, N. A. *Missile Guidance and Pursuit*. s.l. : Woodhead Publishing, 1998. p. 2.
2. Maia, N. *Estimação de Incertezas em Modelos Dinâmicos Pelo Método de Filtragem de Kalman-Bucy*. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. 2009. pp. 15, 21.
3. Costa, M. *Orientação de mísseis interceptores com base no método dos Reguladores Quadráticos Lineares (LQR) com estimação de trajetórias*. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. 2017. pp. 9, 10, 25.
4. Costa, A. R. *Guidance of interceptor missiles based on Robust Control*. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. 2018.
5. Siouris, G. M. *Missile Guidance and Control Systems*. 1. s.l. : Springer-Verlag New York, 2004. pp. 5-6, 155-167, 182-186.
6. Yanushevsky, R. *Modern Missile Guidance*. s.l. : CRC Press, 2007. pp. 1-3.
7. Nielsen, J. *Missile Aerodynamics*. s.l. : McGraw-Hill, 1988. p. 2.
8. Perh, D. *A Study Into Advanced Guidance Laws Using Advanced Computational Methods*. Dissertação de Mestrado. National University of Singapore. 2007. pp. 4-6.
9. James, D. A. *Radar Homing Guidance for Tactical Missiles*. 1. s.l. : Macmillan Publishers Limited, 1986. p. 3.
10. Ghose, D. Aerospace Engineering - Guidance of Missiles - NPTEL. *NPTEL*. [Online] [Cited: 04 1, 2021.] Capítulo 4, pp 44-46. <https://nptel.ac.in/courses/101/108/101108054/>.
11. Rizvi, S. Integrated CLOS and PN Guidance for Increased Effectiveness of Surface to Air Missiles. *5th International Workshop on Numerical Modelling in Aerospace Sciences, NMAS 2017*. 2017, pp. 142, 143.
12. Types of Guidance. *Integrated Publishing*. [Online] [Cited: 05 23, 2021.] <https://www.tpub.com/fcv2/11.htm>.

## Referências

13. Introduction to rocket and guided missile fire control. *San Francisco Maritime National Park Association*. [Online] [Cited: 06 22, 2021.] <https://maritime.org/doc/firecontrol/partj.htm>.
14. Nesline, F. W. and Zarchan, P. A New Look at Classical vs Modern Homing Missile Guidance. *Journal of Guidance and Control*. 1981, Vol. 4, 1, pp. 78-79.
15. Palumbo, N. F., Blauwkamp, R. A. and Lloyd, J. M. Basic Principles of Homing Guidance. *Johns Hopkins Apl Technical Digest*. 2010, Vol. 29, pp. 25-41.
16. Guidance and Control. *Federation of American Scientists*. [Online] [Cited: 4 1, 2021.] <https://fas.org/man/dod-101/navy/docs/fun/part15.htm>.
17. Air Power Development Centre. Three stages of the Inter-Continental Ballistic Missile (ICBM) Flight. *Pathfinder*. 2018, #305.
18. The 3 Major Phases of Effective Missile Defense Systems. *Microwaves & RF*. [Online] [Cited: 05 22, 2021.] <https://www.mwrf.com/markets/defense/article/21848658/the-3-major-phases-of-effective-missile-defense-systems>.
19. Sun, F. and Zhang, H. Application of a New Adaptive Kalman Filtering Algorithm in Initial Alignment of INS. *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. 2011, p. 2312.
20. Hu, C., et al. Adaptive Kalman Filtering for Vehicle Navigation. *Journal of Global Positioning Systems*. 2003, Vol. 2, 1, pp. 42-47.
21. MacLennan, B. J. *Continuous Computation: Taking Massive Parallelism Seriously*. Department of Computer Science, University of Tennessee. Knoxville : s.n., 1989. Relatório técnico.
22. Bousson, K. *Análise da dinâmica do voo*. Universidade da Beira Interior. 2021. Apontamentos de aula.
23. Mohamed, A. and Schwarz, K. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. *Journal of Geodesy* 73. 1999, pp. 193-203.
24. Xia, Q., et al. Adaptive fading Kalman filter with an application. *Automatica*. 1994, Vol. 30, 8, pp. 1333-1338.
25. Martins, M. *Filtragem de Kalman Adaptativa e Robusta para a Reconstrução de Trajetórias*. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. 2020.

## Referências

26. Huang, T., et al. An Integrated Adaptive Kalman Filter for High-Speed UAVs. *Applied Sciences*. 2019, Vol. 9, 9, p. 2.
27. Silva, S. *Projeto de Controladores Robustos Para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares*. Universidade Estadual Paulista. 2005. p. 4, Tese de Mestrado. pp. 4.
28. Nise, N. S. *Control Systems Engineering*. 6<sup>a</sup>. s.l. : Wiley, 2010. p. 8.
29. Goodwin, G. C., Graebe, S. F. and Salgado, M. E. *Control System Design*. 2000. pp. 42-44.
30. Geocentric Latitude. *PROJ*. [Online] [Cited: 05 05, 2021.] <https://proj.org/operations/conversions/geoc.html>.
31. Soler, T. and Hothem, L. D. Coordinate Systems Used in Geodesy: Basic Definitions and Concepts. *Journal of Surveying Engineering*. 1988, Vol. 114, 2, pp. 84-97.
32. The WGS84 ECEF Coordinate System. *Novatel*. [Online] [Cited: 06 21, 2021.] [https://docs.novatel.com/OEM7/Content/Logs/BESTXYZ.htm#Figure\\_WGS84ECEF\\_CoordinateSystem](https://docs.novatel.com/OEM7/Content/Logs/BESTXYZ.htm#Figure_WGS84ECEF_CoordinateSystem).
33. Drewes, H. Reference Systems, Reference Frames, and the Geodetic Datum. *Sideris M.G. (eds) Observing our Changing Earth. International Association of Geodesy Symposia*. 2009, Vol. 133.
34. Zuben, F. *Caracterização de Sistemas Lineares e Técnicas de Linearização*. s.l. : Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Apontamentos de aula. pp. 2, 5.
35. de Souza, F. *Sistemas*. s.l. : Universidade da Beira Interior, Apontamentos de aula. pp. 9-11 17-18.
36. Siouris, G. M. *An engineering approach to Optimal Control and Estimation Theory*. s.l. : Wiley-Interscience, 1996. pp. 219-294.
37. Friedland, B. *Control System Design - An Introduction to Space-State Methods*. s.l. : McGraw-Hill, 1986. pp. 337-347.
38. Bar-Shalom, Y. and Chen, H. Multisensor track-to-track association for tracks with dependent errors. *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. 2004, pp. 2674-2679.

## Referências

39. Frangos, C. and Yavin, Y. Design Methodology for Linear Optimal Control Systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 1992, Vol. 15, 5, pp. 1302-1304.

# Apêndice

## Linear Quadratic Regulator Based Optimal Missile Guidance (Preliminary Version)

Carlos A. F. P. Silva, K. Bousson

**Abstract** – This work focuses on studying the viability of two algorithms: one for target position estimation and the second for interceptor control. Regarding the position estimation an adaptive Kalman filtering algorithm was studied, applying it on a noisy trajectory and comparing the filtered output with the real trajectory. On the side of control, the focus fell on a LQR controller algorithm adapted for pursuit, based on optimal control theory, applied to an interceptor model facing different trajectory types. The adaptive Kalman filter was capable of significantly reducing the effects of system errors and noise. The adapted LQR control was able to intercept the target following different trajectory paths. One example is also presented showing both the algorithms working simultaneously, showing no signs of interference between the two. The adaptive Kalman filter and the adapted LQR controller appear to be viable solutions to the problems of estimation and control, respectively, and are presented as a possible combination to be deployed in threat interception.

**Keywords:** Missile interception, Adaptive Kalman Filtering, Optimal control, LQR controller, Territorial Defense

### I. Introduction

The development of armament and weapons beckons the question of how one can defend himself against an oncoming threat? A defense system must be able to detect, locate, track, and intercept all threats that target its range of action. Detection, location and tracking all face a common problem in the fact that sensors are not perfectly accurate, and their measurements come associated with uncertainties and errors [1]. Usually, this difficulty is tackled by employing an estimator, that will attempt to mitigate the effect of noise to arrive at a more accurate output. In this paper, the estimator studied is an adaptive Kalman filtering algorithm, chosen due to its high precision and robustness when applied to highly dynamic systems [2]. Regarding the problem of control, the system must be able to generate controls that will lead the interceptor towards the target in an efficient and quick manner. For this, a pursuit adapted version of the widely studied LQR controller algorithm was chosen, mostly due to its good performance along with ease of its implementation and analysis. Optimal guidance theory and LQR control are important tools studied for the purpose of design and improvement of guidance algorithms [3] [4]. This work also comes as an update and stems from a continuation of the study done in [5]. The remainder of the paper obeys the following outline: Section II is dedicated to target tracking and describes the general workings of a adaptive Kalman filtering. Section III focuses on the basic core concepts of the LQR controller based on optimal control theory used in this work. In Sec. IV the main results from the estimator and controller

simulations are presented and interpreted. The main conclusions drawn from this work and suggestions for future works are the subject of Sec. V.

### II. TARGET POSITION ESTIMATION

In this section the principles of Kalman-Bucy filtering and adaptive Kalman filtering are briefly summarized.

Linear Kalman-Bucy estimation

The base model of a controlled system is as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma\xi \\ y = Cx + Du + \eta \end{cases} \quad (1)$$

Since the greater part of the flight of a ballistic missile is passed in free fall, an uncontrolled linear system is considered:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Gamma\xi \\ y = Cx + \eta \end{cases} \quad (2)$$

With the following model, based on a geocentric coordinate system, representing the dynamics of the target's trajectory:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

The quality of the estimations made by the Kalman filter is highly dependent on the *a priori* information regarding the processing and measurement noises. The values of the  $Q$  and  $R$  matrices are also crucial towards the performance of the filter. If one is not careful, values of  $Q$  and/or  $R$  that are too small at the beginning of the process will result in a biased solution. On the other hand, if these values are too large the result would be filter divergence and a longer estimation transition for the filter [7] [8].

The covariance matrices  $Q$  and  $R$  are, respectively:

$$Q = E(\xi\xi^T) \quad (4)$$

$$R = E(\eta\eta^T) \quad (5)$$

The vectors  $\eta$  and  $\mu$  are, respectively, the representation of the model and measurement noises. These noises are assumed as white Gaussian noises, which means that they are zero-mean noises whose values are uncorrelated over time. Both  $\xi$  and  $\mu$  are vectors composed by random variables. The state vector  $x$  is known, while the output vector  $y$  is unknown.

Modern computation is not a continuous process, with every action being processed within a finite number of discrete steps [6]. As such, to simulate the behavior of a real system, the discretization of the system model is necessary. For that discretization, the elapsed time between each calculation  $h$  (step) must be determined, so that new matrices that represent the evolution of the system within that step can be defined. The discretized model of a linear system is:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + \Gamma_d \xi_k \\ y_k = C_d x_k + \eta_k \end{cases}$$

Where  $x_k$  is the value of  $x$  at the instant  $k$ ,  $u_k$  is the value of  $u$  at the instant  $k$ , and so on.

With the discretized matrices being obtained by:

$$\begin{aligned} A_d &\approx I + Ah + \frac{(Ah)^2}{2!} + \dots + \frac{(Ah)^N}{N!} \\ B_d &= \left( Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} h^N}{N!} \right) B \\ \Gamma_d &= \left( Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{N-1} h^N}{N!} \right) \Gamma \end{aligned}$$

With  $N$  calculated using the Frobenius norm, such that:

$$\left\| \frac{(Ah)^N}{N!} \right\|_F < \epsilon$$

With  $\epsilon$  being the desired precision. If systems of this kind are non-differential, the discretization process has no effect over the measurements, and so:

$$C_d = C_k = C$$

The adaptive approach studied here tackles the difficulties faced by the traditional Kalman Filter with the aid of an innovation sequence. By constantly recalculating the covariance matrices according to the latest measurements, the need for *a priori* information is reduced. This is one of the reasons that makes this type of estimation suited for dynamic environments [9].

From the two main forms of adaptive Kalman filtering, namely MMAE (Multiple-Model-based Adaptive Estimation) and IAE (Innovation-based Adaptive Estimation), this work is focused on the IAE variant.

Both approaches to adaptive Kalman filtering, while differing in their implementation, share the basic concept of utilizing the innovation sequence  $v_k$  at epoch  $k$ . This sequence consists in the difference between the real measurement  $y_k$ , received by the filter and its predicted value  $y_k^{(-)}$ :

$$v_k = y_k - y_k^{(-)}$$

The predicted measurement is computed by projecting the filter predicted states  $x_k^{(-)}$  onto the measurement space through the measurement design matrix  $H_k$  as follows:

$$H_k = C$$

$$y_k^{(-)} = C x_k^{(-)}$$

According to IAE, the adaptability of the Kalman filter comes from the recalculation of the covariance matrices  $Q_k$  and  $R_k$ . At each step, the matrix update is done according to:

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= C_{v_k} - C P_{k^{(-)}} C^T \\ \hat{Q}_k &= K_k C_{v_k} K_k^T \end{aligned}$$

With  $P_{k^{(-)}}$  being the predicted covariance of state matrix and  $K_k$  being the predicted covariance of gain matrix. With the innovation sequence known, the innovation V-C matrix at epoch  $k$ ,  $C_{v_k}$ , can be computed by averaging inside a moving estimation window of size  $N$ , as

$$C_{v_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=j_0}^k v_j v_j^T$$

With the first epoch inside the estimation window being



The noises  $w_x$ ,  $w_y$  and  $w_z$  are white noises that follow a gaussian distribution with mean zero and variance 5, such as:

$$w_x, w_y, w_z \approx N(0, 5)$$

The jerk can be represented by a statistical noise with a probability density function identical to a gaussian distribution. With that, the jerk can be treated as a gaussian noise.

The matrices  $A_d$ ,  $C_d$  and  $\Gamma_d$  represent the state, measurement and measurement noise in the discretized system as given by:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

With the discretized system step  $h = 0.01s$

The initial values of the  $Q$ ,  $R$  and  $P$  matrices that allowed the initialization of the filter were defined as:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

The adaptive Kalman filtering algorithm requires a predetermined number of points to be known so that it may calculate the innovation sequence. Because of this, the estimation is started through a Kalman-Bucy estimation algorithm. When the number of points that enable the recurring calculations to occur are obtained, the adaptive estimation begins.

This algorithm was applied to a target following a ballistic trajectory and a filtered trajectory was obtained. Fig. 2 shows the full path of both the measured (noisy) and filtered trajectories. The difference between the trajectories is highlighted in Fig 3a, 3b and 3c, where the trajectories are shown over a short timeframe in each dimension (x, y and z, respectively).

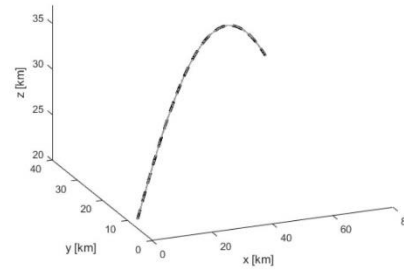
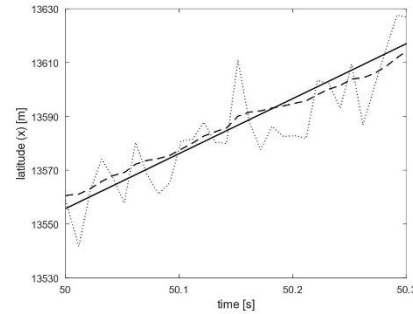


Fig. 2. The measured noisy (gray line) and filtered (dashed black line) trajectories over the duration of the full simulation, 300s.

(a)



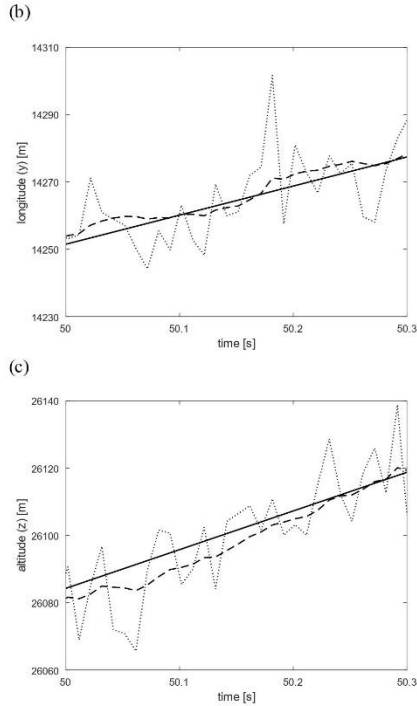


Fig. 3. Behaviour of the real (solid line), noisy (dotted line) and filtered (dashed line) trajectories over a limited time frame split between a) latitude, b) longitude and c) altitude.

The flight path obtained from the filter shows exhibits fewer and smaller oscillations than the noisy trajectory, with a far cleaner appearance and behaving much more similarly to the real trajectory. It more precisely portrays the target movement by reducing the impact of possible measurement errors.

**Control**

In the LQR controller, the interceptor movement was modelled with an augmented system where:

$$\begin{aligned}
 x_p &= [p_x \quad p_y \quad p_z \quad v_x \quad v_y \quad v_z] \\
 y &= [p_x \quad p_y \quad p_z]^T \\
 u &= [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \\
 r &= [p_x \quad p_y \quad p_z]^T \\
 A_p &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The discretized model matrices were then obtained:

$$A_{p_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{p_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

The matrices  $Q$  and  $R$  were obtained experimentally. Their values were obtained considering that the higher the values in  $Q$ , the bigger the target state's weight will be, meaning that larger control commands are generated to bring the state to equilibrium. On the other hand, higher values of  $R$  lead to a lower control "cost". This means that the controller tends to generate smaller and smoother control efforts. These values were chosen with the goal of providing robust control while avoiding exaggerated control efforts and maneuvers outside of the interceptor's capabilities.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

The optimal feedback gain matrix was then obtained through the MATLAB® command  $lqr(A,B,Q,R)$ . The following figures show the evolution of the system from the interceptor launch up to the moment of interception. Interception may not necessarily mean collision, instead meaning achieving a distance to the target that is small enough to guarantee its neutralization.

second part of both figures the evolution of the distance to the target over time can be evaluated.

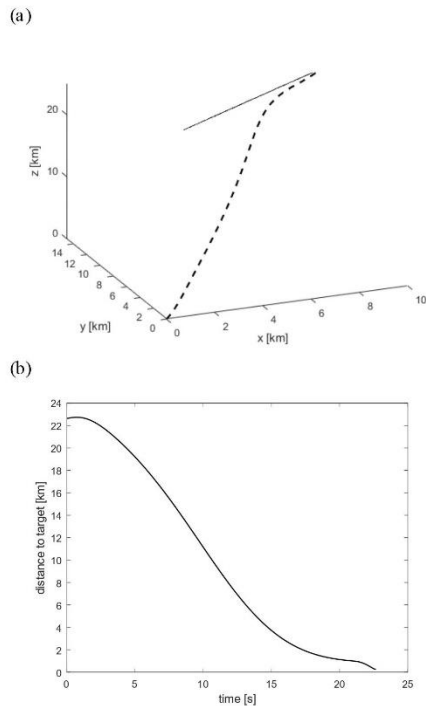


Fig. 4. a) Three-dimensional representation of the interceptor and target trajectories and b) evolution of distance to target over time for a system with initial condition  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  and target following a ballistic trajectory with velocity  $v = 1200 \text{ km/h}$

In both figures, the first part shows the three-dimensional flight paths of both the interceptor and the target. On the

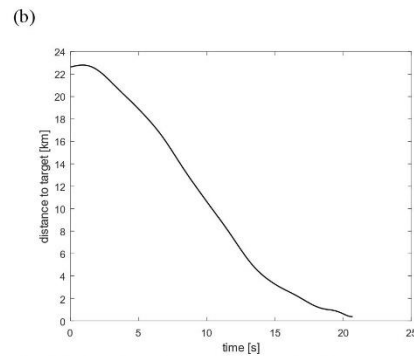
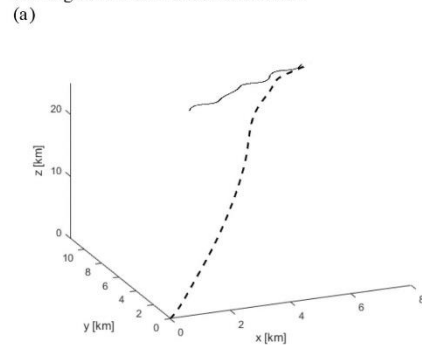
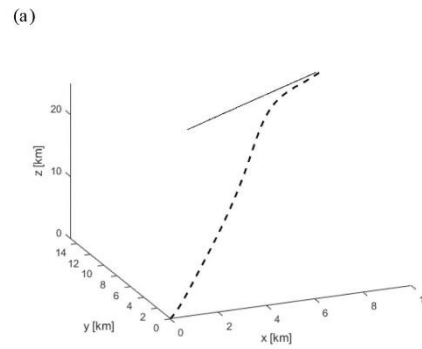


Fig. 5. a) Three-dimensional representation of the interceptor and target trajectories and b) evolution of distance to target over time for a system with initial condition  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  and target following a ballistic trajectory with vertical and horizontal oscillations and velocity  $v = 1200 \text{ km/h}$



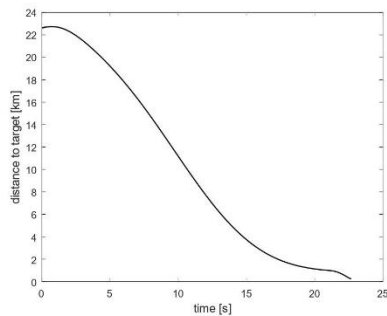


Fig. 6. Three-dimensional representation of the interceptor and target trajectories and b) evolution of distance to target over time, for a system with both the estimation and control algorithms applied, with initial condition  $x_0 = [3500 \ 10000 \ 20000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  and target following a ballistic trajectory with velocity  $v = 1200 \text{ km/h}$

In many cases, a successful interception does not require direct impact between the interceptor and target, with the interceptor needing only to trigger the warhead close enough to the target to guarantee its neutralization [13]. The minimum distance to the target that the interceptor was able to achieve differs for each of these cases. For the case shown: in Fig. 4, the minimum distance was 249 meters after 22.68 seconds; in Fig. 5 the minimum distance was 366 meters after 20.67 seconds; in Fig. 6 the minimum distance was 246 meters after 22.70 seconds.

From the observation of the figures, it is possible to notice the pure pursuit nature of the interceptor flight path, which directly follows the target at all times. The slight delay in the approximation and the inability to directly collide with the target can be attributed to the very high speed of the target as well as the system modeling coupled with a controller with a low control “cost”.

Comparing the three figures one can also see that the target maneuvers don't necessarily force the interceptor to follow significantly different flight paths nor greatly impact the duration of the mission. The shorter duration of the interception in Fig. 5 can be explained by the fact that towards the end of the interception the target was closer to the interceptor launch point than it would be while following a purely ballistic trajectory. The big difference appears in the minimum distance. The more erratic movement of the target make it so that the interceptor cannot easily align itself with the target, which leads to a more difficult approach. That being considered, all the values presented are considered acceptable.

This controller is meant to be used in conjunction with an estimator. Fig. 6 shows the behavior of the LQR controller where the target trajectory was estimated by the adaptive Kalman filter studied in this work. The estimator does not seem to hinder the controller, with the obtained interceptor trajectory being similar in every way to the one presented in Fig. 4. This is to be expected, as the estimator does a solid job of approximating the noisy trajectory to the real one and the LQR controller is quite robust.

## V. Conclusion

The results obtained in this study indicate that the adaptive Kalman filtering and LQR control are suited for estimation of trajectories and control of interceptors, respectively. It is also worth noting that the adaptive Kalman filtering algorithm requires that the estimation be started using a Kalman-Bucy estimator until enough points are available to calculate the innovation sequence. It would be interesting to study the effect of the covariance matrices Q and R in the performance of both algorithms, and even see if an automated design algorithm for this calculation has a significant impact. Other guidance laws other than the pure pursuit used in this paper could be studied. It could also be worth studying the implementation of this LQR controller coupled with a close-range interception algorithm and its impact on the ability of the interceptor to directly impact the target.

## Acknowledgements

This research work was conducted in the Laboratory of Avionics and Control of the University of the Beira Interior, Covilhã, Portugal, and supported by the Aeronautics and Astronautics Research Group (AeroG) of the Associated Laboratory for Energy, Transports, and Aeronautics (LAETA).

## REFERENCES

- [1]. Sun, Feng and Zhang, HongQi. Application of a New Adaptive Kalman Filtering Algorithm in Initial Alignment of INS. *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. 2011, p. 2312.
- [2]. Hu, Congwei, et al. Adaptive Kalman Filtering for Vehicle Navigation. 2003, Vol. 2, 1, pp.42-47.
- [3]. *Optimal intercept guidance for short-range tactical missiles*. Cottrel, Ronald G. 7, 1971 : AIAA Journal, Vol. 9, pp. 1414-1415.
- [4]. Weiss, Martin and Shima, Tal. Linear Quadratic Optimal Control based Missile Guidance Law with Obstacle Avoidance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2018, Vol. 55, 1, pp. 205-214.
- [5]. Costa, A. R. *Guidance of interceptor missiles based on Robust Control*. Master's Thesis. Universidade da Beira Interior, Covilhã. 2018.
- [6]. MacLennan, B. J. *Continuous Computation: Taking Massive Parallelism Seriously*. Department of Computer Science, University of Tennessee. Knoxville: s.n., 1989.
- [7]. Mohamed, A. and Schwarz, K. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. *Journal of Geodesy* 73. 1999, pp. 193-203.
- [8]. Xia, Qijun, et al. Adaptive fading Kalman filter with an application. 1994, Vol. 30, 8, pp. 1333-1338.
- [9]. Huang, Tiantian, et al. An Integrated Adaptive Kalman Filter for High-Speed UAVs. *Applied Sciences*. 2019, Vol. 9, p. 2.
- [10]. Siouris, George M. *An engineering approach to Optimal Control and Estimation Theory*. s.l. : Wiley-Interscience, 1996. pp. 219-294.
- [11]. Frangos, C. and Yavin, Y. Design Methodology for Linear Optimal Control Systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 1992, Vol. 15, 5, pp. 1302-1304.
- [12]. Friedland, Bernard. *Control System Design - An Introduction to Space-State Methods*. s.l. : McGraw-Hill, 1986. pp. 337-347.
- [13]. Siouris, George M. *Missile Guidance and Control Systems*. 1. s.l. : Springer-Verlag New York, 2004. pp. 5-6, 155-167, 182-186.

*Carlos A. F. P. Silva, K. Bousson*

## **Authors' information**

Address:  
Laboratory of Avionics and Control  
Department of Aerospace Sciences  
Faculty of Engineering  
University of Beira Interior  
6201-001 Covilhã