



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Ciências

# Ordens de Bruhat em algumas classes de matrizes

Domingos Salomão

Tese para obtenção do Grau de Doutor em  
**Matemática e Aplicações**  
(3<sup>o</sup> ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Henrique José Freitas da Cruz  
Co-orientadora: Prof. Doutora Maria do Rosário Silva Franco Fernandes

Covilhã, janeiro de 2021



## Agradecimentos

A conclusão deste projeto de doutoramento implicou uma longa e sacrificante jornada, que só foi possível devido ao apoio incondicional de pessoas e instituições que, quer direta ou indiretamente estiveram envolvidas, as quais quero expressar os meus sinceros agradecimentos.

Ao Professor Doutor Henrique Cruz pela sábia e brilhante orientação; obrigado por esclarecer tantas dúvidas e ser tão atencioso e paciente. Expresso ainda a minha gratidão por todas as oportunidades de aprendizagem que me tem proporcionado nos últimos tempos.

À Professora Doutora Rosário Fernandes pela prestimosa orientação deste trabalho; o seu incentivo, os seus ensinamentos enfim, sua colaboração, foram imensamente valiosos para consumação deste projeto.

A todos Professores do CMA da UBI.

Às instituições que direta ou indiretamente contribuíram para o êxito deste trabalho.

Aos colegas pelos incentivos nos momentos difíceis.

À minha esposa pelo apoio, incentivo, carinho e muita fé nas horas difíceis; obrigado por ser atenciosa e por entender a minha ausência em diferentes momentos.



À  
minha MãE  
pelo  
sacrifício . . .



## Resumo

Uma relação de ordem é uma relação binária que pretende captar o sentido intuitivo de conceitos usados no nosso dia à dia como, por exemplo, o “maior”, o “menor”, o “primeiro” ou o “último”. Trata-se de um conceito também preponderante na compreensão de muitos tópicos da Matemática, mormente na Teoria de Conjuntos. Ao longo dos tempos foram definidos muitos tipos de relações de ordem em diferentes conjuntos. Neste trabalho empreendemos um estudo sobre as ordens de Bruhat em classes de matrizes- $(0,1)$ , matrizes cujas entradas são apenas zeros e uns, e em quadrados latinos. As ordens de Bruhat são assim designadas em homenagem ao Matemático Francês Francois Bruhat (1929-2007). A ordem de Bruhat é uma relação de ordem parcial definida em grupos de Coxeter. Sendo o grupo simétrico um caso particular de um grupo de Coxeter, e podendo os elementos deste grupo ser representados por matrizes, as matrizes de permutação, em 2004 Richard A. Brualdi e Suk-Geun Hwang estenderam a ordem de Bruhat das classes de matrizes de permutação para certas classes de matrizes- $(0,1)$  habitualmente representadas por  $\mathcal{A}(R, S)$ . Estas classes, também elas bastante estudadas desde os anos cinquenta do século passado, são constituídas por matrizes cuja as somas das entradas de cada linha dá origem ao vetor  $R$  e as somas das entradas de cada coluna dá origem ao vetor  $S$ . O artigo de Brualdi e Hwang abriu assim um novo campo de investigação, e nos últimos 15 anos são já bastantes as publicações que, não só abordam os diversos aspetos destes novos conjuntos parcialmente ordenados, como estendem a ordem de Bruhat para novas classes de objetos para além das matrizes- $(0,1)$ . Esta dissertação pretende continuar o trabalho iniciado por estes autores e contribuir para a resolução de alguns problemas relacionados com a ordem de Bruhat. Assim, no primeiro capítulo, apresentámos as noções básicas sobre os assuntos subjacentes aos temas abordados nesta dissertação. No segundo capítulo começámos por apresentar a ordem de Bruhat, primeiro em  $S_n$  e depois nas classes  $\mathcal{A}(R, S)$ . É bem conhecido que a ordem de Bruhat em  $S_n$  pode ser definida de dois modos diferentes. Porém, ao fazer a extensão da ordem de Bruhat de  $S_n$  para  $\mathcal{A}(R, S)$ , estas duas formas de definir a ordem de Bruhat em  $S_n$  dão origem a duas relações de ordem distintas em  $\mathcal{A}(R, S)$ : a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária. Entre as contribuições por nós obtidas destacamos coincidência das ordens de Bruhat e de Bruhat Secundária nas classes  $\mathcal{A}(R, S)$  em que  $R = (2, 2, \dots, 2)$  ou  $R = (1, 1, \dots, 1)$ . Também neste capítulo iremos responder a uma questão, colocada por M. Ghebleh em [20]. Este autor, na sequência do seu trabalho sobre a construção de cadeias de comprimento máximo em certas classes  $\mathcal{A}(R, S)$ , com a ordem de Bruhat, pretendia saber se a ordem de Bruhat em  $\mathcal{A}(R, S)$  era ou não monótona relativamente o número de inversões de uma matriz. Daremos uma resposta afirmativa a esta questão. Terminamos este capítulo com o estudo, ainda preliminar, de uma variante da ordem de Bruhat Secundária. O estudo desta relação de ordem parcial foi proposto por R. A. Brualdi e L. Deaett em 2007. No terceiro e último capítulo definimos e estudámos a ordem de Bruhat numa nova classes o objetos: os quadrados latinos de ordem  $n$ . Focámos o nosso estudo na caracterização da relação de cobertura e na contagem e construção de elementos minimais.

Palavras Chave: Ordem de Bruhat, Ordem de Bruhat Secundária, matrizes-(0,1), elementos minimais, quadrados latinos.

## Abstract

An order relation is a binary relation that aims to capture the intuitive sense of concepts used in our daily lives as the largest and the smallest the first and the last. It is a concept that is also predominant in the understanding of many topics of mathematics, especially in the Set-Theory. Over time many types of order relations have been defined in different sets. In this paper we undertake a study of Bruhat orders in classes of  $(0,1)$ -matrices, matrices whose entries are only zeros and ones, and in Latin squares. Bruhat orders are named after the French Mathematician Francois Bruhat (1929-2007). Bruhat order is a partial order relationship defined in Coxeter groups. Since the symmetric group is a particular case of a Coxeter group, and the elements of this group can be represented by matrices, the permutation matrices, in 2004 Richard A. Brualdi and Suk-Geun Hwang extended the Bruhat order of the permutation matrix classes to matrix classes of  $(0,1)$ -matrices usually represented by  $\mathcal{A}(R, S)$ . These classes, also widely studied since the 1950s, are made up of matrices whose sums of entries for each row give rise the vector  $R$ , and sums of entries for each column give rise the vector  $S$ . Brualdi and Hwang's article has thus opened a new field of investigation, and in the last fifteen years many publications have not only addressed the various aspects of these new partially ordered sets, but have extended Bruhat order to new classes of objects beyond the  $(0,1)$ -matrices. This dissertation intends to continue the work started by these authors and to contribute to solve some problems related to Bruhat order. Thus, in the first chapter, we presented the basics on the subjects that underlie the topics covered in this dissertation. In the second chapter we started by presenting Bruhat order, first in  $S_n$  and then in the  $\mathcal{A}(R, S)$  classes. It is well known that the Bruhat order in  $S_n$  can be defined in two different ways. However, by extending Bruhat order from  $S_n$  to  $\mathcal{A}(R, S)$ , these two ways of setting Bruhat order to  $S_n$  give rise to two distinct order relations in  $\mathcal{A}(R, S)$ : The Bruhat order and the Secondary Bruhat order. Among the contributions obtained by us we highlight the coincidence of Bruhat and Secondary Bruhat orders in  $\mathcal{A}(R, S)$  where  $R = (2, 2, \dots, 2)$  or  $R = (1, 1, \dots, 1)$ . Also in this chapter we will answer a question posed by M. Ghebleh in [20]. This author, following his work on constructing maximum length chains in certain classes  $\mathcal{A}(R, S)$ , with Bruhat order, wanted to know if Bruhat order in  $\mathcal{A}(R, S)$  was or was not monotonous relative to the number of inversions of a matrix. We will give an affirmative answer to this question. We end this chapter with the still preliminary study of a variant of the Secondary Bruhat order. The study of this partial order relationship was proposed by R. Brualdi and L. Deaett in 2007. In the third and last chapter we defined and studied Bruhat order in a new class of objects: the Latin squares of order  $n$ . We focused our study on the characterization of the covering relation and on counting and construction of minimal elements.

Keywords: Bruhat order, Secondary Bruhat order ,  $(0, 1)$ -matrices, Minimal Elements, Latin Squares.



## Delaração

Versão definitiva tese defendida por Domingos Salomão a 4 de dezembro de 2020 na Universidade da Beira Interior sendo o júri constituído pela Doutora Deolinda Isabel da Conceição Mendes, professora associada das Universidade da Beira Interior, Doutora Olga Maria da Silva Azenhas, professora auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Susana Margarida Figueiredo de Sousa Borges Furtado, professora auxiliar da Faculdade de Economia da Universidade do Porto, Doutor Henrique José Freitas da Cruz, professor auxiliar da Universidade Beira Interior e Doutor Ricardo Nuno Fonseca de Campos Pereira Mamede, professor auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Conceitos elementares . . . . .	1
1.1.1	Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	1
1.1.2	Partições . . . . .	5
1.1.3	Grupo simétrico . . . . .	6
1.2	A classe $\mathcal{A}(R, S)$ . . . . .	7
1.2.1	O Teorema de Gale-Ryser . . . . .	8
1.2.2	O Teorema dos intercâmbios de Ryser . . . . .	9
1.3	Quadrados Latinos . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Ordem de Bruhat em <math>\mathcal{A}(R, S)</math></b>	<b>11</b>
2.1	A ordem de Bruhat em $S_n$ . . . . .	12
2.2	De $S_n$ para $\mathcal{A}(R, S)$ . . . . .	16
2.2.1	A ordem de Bruhat em $\mathcal{A}(R, S)$ . . . . .	16
2.3	A ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária . . . . .	18
2.3.1	A classe $\mathcal{A}(n, 3)$ . . . . .	18
2.3.2	A classe $\mathcal{A}(R, S)$ com $R = (2^m)$ ou $R = (1^m)$ . . . . .	21
2.4	Inversões e a questão de M. Ghebleh . . . . .	32
2.4.1	Os intercâmbios- $(b)$ . . . . .	33
2.4.2	Resposta à questão colocada por M. Ghebleh . . . . .	34
2.5	Uma variante da ordem de Bruhat Secundária . . . . .	42
2.5.1	Generalidades sobre $\preceq_{B'}$ . . . . .	42
2.5.2	Matrizes de $\mathcal{A}(n, 2)$ que são minimais para $\preceq_{B'}$ . . . . .	44
2.6	Conclusões e trabalhos futuros . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Quadrados Latinos</b>	<b>49</b>
3.1	A relação de cobertura . . . . .	49
3.2	Quadrados latinos minimais . . . . .	54
3.3	Classes de quadrados latinos com elemento mínimo . . . . .	55
3.4	Construção de quadrados latinos minimais . . . . .	60
3.4.1	Quadrados latinos minimais de ordem $n$ quando $n$ é par . . .	60
3.4.2	Quadrados latinos minimais de ordem $n$ quando $n$ é ímpar, $n = 2^k - 1$ , e $k$ é superior a 1 . . . . .	61
3.5	Conclusões e trabalhos futuros . . . . .	64
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Tendo esta dissertação como principal objetivo contribuir para o estudo e compreensão de certas relações de ordem parcial definidas em classes de matrizes binárias e em quadrados latinos, achamos importante um primeiro capítulo não só com as notações mas também com os resultados elementares relacionados com os conceitos a explorar ao longo do trabalho. Assim, nesta secção iremos introduzir as noções diretamente relacionadas com conjuntos parcialmente ordenados e com quadrados latinos.

### 1.1 Conceitos elementares

#### 1.1.1 Conjuntos parcialmente ordenados

Uma das noções fundamentais nesta dissertação é o conceito de ordem. O que se entende por uma ordem, isto é, o que se pretende dizer quando se afirma que um objeto “é menor” que outro? o que se entende por um conjunto ordenado? Nesta secção procuraremos dar respostas a estas e a outras questões, essenciais ao longo de todo o trabalho.

Seja  $A$  um conjunto não vazio. Chamamos *relação binária* definida em  $A$  a qualquer subconjunto de  $A \times A$ , o produto cartesiano do conjunto  $A$  por ele próprio.

**Definição 1.1.** Chamamos *relação de ordem parcial definida no conjunto  $A$* , a uma relação binária  $R \subseteq A \times A$  com as seguintes propriedades:

1. *reflexividade*:  $\forall_{a \in A} : (a, a) \in R$ ;
2. *antissimetria*:  $\forall_{a, b \in A} : [(a, b) \in R \text{ e } (b, a) \in R \Rightarrow a = b]$ ;
3. *transitividade*:  $\forall_{a, b, c \in A} : [(a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R]$ .

Se, adicionalmente, a relação  $R$  satisfizer a propriedade:

$$\text{dicotómica: } \forall_{a, b \in A} : [(a, b) \in R \text{ ou } (b, a) \in R],$$

diz-se que  $R$  é uma *relação de ordem total*. Por exemplo, seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais e seja  $\mathbb{R}_0^+$  o subconjunto de  $\mathbb{R}$  dos números reais não negativos. Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , a relação  $R$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$(a, b) \in R, \text{ se, e só se, } b - a \in \mathbb{R}_0^+.$$

é uma relação de ordem total definida em  $\mathbb{R}$ , como facilmente se verifica por simples cálculos. Esta relação é conhecida por relação de ordem usual em  $\mathbb{R}$ .

Uma relação de ordem parcial definida no conjunto  $A$  é habitualmente representada pelos símbolos  $\preceq$  ou  $\leq$ . Usamos os mesmos símbolos para representar uma relação de ordem total. Assim, dado um conjunto  $A$  e uma relação de ordem parcial (ou uma relação de ordem total)  $R$  definida em  $A$ :

- se  $(a, b) \in R$  escrevemos  $a \preceq b$  ou  $a \leq b$  conforme a notação utilizada;
- se  $a, b \in A$  são tais que  $(a, b) \notin R$  e  $(b, a) \notin R$  então dizemos que  $a$  e  $b$  são elementos *incomparáveis* pela relação  $R$ ;
- se  $a, b \in A$  e  $a \preceq b$  ou  $a \leq b$ , mas  $a \neq b$  escrevemos  $a \prec b$  ou  $a < b$  conforme a notação utilizada;
- se  $a, b \in A$  mas  $(a, b) \notin R$ , escrevemos  $a \not\prec b$  ou  $a \not< b$  conforme a notação utilizada.

Com as devidas adaptações, será esta a notação usada ao longo de todo o trabalho.

Por exemplo, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , a relação de ordem usual em  $\mathbb{R}$  definir-se-ia por

$$a \leq b \text{ se, e só se, } b - a \in \mathbb{R}_0^+.$$

Nesta relação, se  $a < b$ , ao longo desta tese escrevemos também uma das seguintes afirmações:

- $a$  é menor que  $b$ ;
- $a$  é inferior a  $b$ ;
- $b$  é superior a  $a$ ;
- $b$  é maior que  $a$ .

Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par  $(A, \preceq)$  onde  $\preceq$  é uma relação de ordem parcial definida no conjunto  $A$ . Analogamente, chamamos *conjunto totalmente ordenado* a um par  $(A, \preceq)$  onde  $\preceq$  é uma relação de ordem total definida em  $A$ .

De seguida apresentaremos algumas relações de ordem parcial e de ordem total, definidas nos conjuntos respetivos, usadas inúmeras vezes ao longo do texto:

**Definição 1.2.** [2] *Sejam  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  e  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$  duas sequências de inteiros não negativos com a mesma soma e ordenados por ordem não crescente. Diz-se que a sequência  $\Psi$  é majorada pela sequência  $\Pi$ , e escrevemos  $\Psi \preceq_M \Pi$ , se, e só se,  $n \leq m$  e*

$$\sum_{l=1}^t \psi_l \leq \sum_{l=1}^t \pi_l, \quad t = 1, \dots, n,$$

sendo este  $\leq$  a relação de ordem usual definida em  $\mathbb{R}$ .

A relação da definição anterior, em geral, não é uma relação de ordem total. Por exemplo as sequências  $\Pi = (4, 3, 1)$  e  $\Psi = (5, 1, 1, 1)$  são de inteiros não negativos com a mesma soma e ordenados por ordem não crescente, mas  $\Pi$  não é majorada por  $\Psi$ , nem  $\Psi$  é majorada por  $\Pi$ .

Uma relação de ordem total também usada bastantes vezes neste texto é a relação de ordem lexicográfica.

**Definição 1.3.** *Sejam  $(A_i, \preceq_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , conjuntos totalmente ordenados. A relação de ordem lexicográfica é uma relação de ordem total definida em  $A_1 \times \dots \times A_n$ , o produto cartesiano de  $A_1, \dots, A_n$ , do seguinte modo: Dados  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  e  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  em  $A_1 \times \dots \times A_n$ , dizemos que a sequência  $\Psi$  precede a sequência  $\Pi$  pela relação de ordem lexicográfica se, e só se,*

1.  $\psi = \pi$ , ou
2.  $\psi_1 \prec_1 \pi_1$ , ou
3. existe um inteiro  $k$  tal que  $\psi_j = \pi_j$  para todo  $j = 1, \dots, k-1$  e  $\psi_k \prec_k \pi_k$ .

Outra relação de ordem parcial que usaremos diversas vezes está definida em  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ , isto é, no conjunto das matrizes com  $m$  linhas e  $n$  colunas com entradas no conjunto dos números reais. Esta relação de ordem parcial, denotada pelo símbolo  $\leq$  é definida do seguinte modo:

Dadas duas matrizes  $A = [a_{i,j}]$  e  $B = [b_{i,j}]$  de  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,

$$A \leq B \text{ se, e só se, } a_{i,j} \leq b_{i,j}, \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ e todo } j = 1, \dots, n,$$

em que os elementos das matrizes são comparados pela ordem usual definida em  $\mathbb{R}$ . Todo o conjunto parcialmente ordenado pode ser representado graficamente através do que chamamos o *diagrama de Hasse*. Para introduzir este conceito precisamos da seguinte definição:

**Definição 1.4.** *Seja  $(A, \preceq)$  um conjunto parcialmente ordenado e sejam  $a, b \in A$ . Dizemos que  $a$  é coberto por  $b$  ou que  $b$  cobre  $a$ , se  $a \prec b$  e não existe nenhum elemento  $c \in A$  tal que  $a \prec c \prec b$ .*

Seja  $(A, \preceq)$  um conjunto parcialmente ordenado. É possível representar  $(A, \preceq)$  através de um diagrama, conhecido por diagrama de Hasse, construído do seguinte modo:

1. A cada elemento  $x \in A$  associamos um ponto  $p(x)$  do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ ;
2. Se  $x \prec y$  então o ponto  $p(x)$  tem a segunda coordenada inferior à segunda coordenada de  $p(y)$ ;
3. Se  $x$  é coberto por  $y$  unimos os pontos  $p(x)$  e  $p(y)$  por um segmento de recta denotado por  $l(x, y)$ ;
4. Supondo que se verifica a condição anterior, se  $z \in A$  é tal que  $z \neq x$  e  $z \neq y$  então  $p(z)$  não pertence ao segmento de recta  $l(x, y)$ .

**Exemplo 1.1.** *Consideremos as seguintes sequências de inteiros positivos com soma igual a 6:*

$$(5, 1), (4, 2), (3, 3), (4, 1, 1), (3, 2, 1).$$

*No conjunto  $\mathcal{S}$  formado por estas sequências consideremos definida a relação  $\preceq_M$  da definição 1.2. O diagrama de Hasse de  $(\mathcal{S}, \preceq_M)$  é*

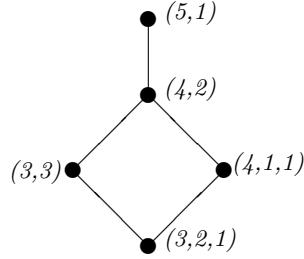


Figura 1.

Para terminar esta secção vamos apresentar alguns elementos relevantes que um conjunto parcialmente ordenado pode ter.

**Definição 1.5.** *Seja  $(A, \preceq)$  um conjunto parcialmente ordenado.*

- *Dizemos que um elemento  $m \in A$  é elemento mínimo de  $(A, \preceq)$  se*

$$m \preceq x, \text{ para todo } x \in A.$$

- *Dizemos que um elemento  $M \in A$  é elemento máximo de  $(A, \preceq)$  se*

$$x \preceq M, \text{ para todo } x \in A.$$

*Se existir algum destes elementos, ele é único.*

**Exemplo 1.2.** *O conjunto  $\mathbb{N}$ , isto é o conjunto dos números naturais, com a relação de ordem usual tem elemento mínimo, 1, mas não tem máximo. Quanto aos conjuntos  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{R}$ , o conjunto dos inteiros relativos e o conjunto dos números reais, com a relação de ordem usual nos respectivos conjuntos, não têm nem elemento máximo nem elemento mínimo.*

Terminamos esta secção com as noções de elemento maximal e elemento minimal de um conjunto parcialmente ordenado.

**Definição 1.6.** *Seja  $(A, \preceq)$  um conjunto parcialmente ordenado.*

- *Dizemos que  $a \in A$  é elemento minimal de  $A$  se não existir  $s \in A$  tal que  $s \prec a$ .*
- *Dizemos que  $b \in A$  é elemento maximal de  $A$  se não existir  $z \in A$  tal que  $b \prec z$ .*

Observemos que todo o elemento máximo (elemento mínimo) de um conjunto parcialmente ordenado e também elemento maximal (elemento minimal). A afirmação recíproca não é válida. No entanto, se  $(A, \preceq)$  é um conjuntos parcialmente ordenado finito então  $(A, \preceq)$  tem pelo menos um elemento maximal e um elemento minimal (ver [13]).

### 1.1.2 Partições

Muitos dos vetores de números reais que vamos usar ao longo deste trabalho são na realidade partições de um dado inteiro. Nesta secção vamos introduzir esse conceito de partição. Seguiremos essencialmente o primeiro capítulo de [23] embora [2] também seja uma boa referência.

**Definição 1.7.** *Sejam  $R = (r_1, \dots, r_n)$  uma sequência de  $n$  números reais ordenados por ordem não crescente e*

$$m = \sum_{i=1}^n r_i.$$

*Dizemos que  $R$  é uma partição de  $m$  se as entradas de  $R$  são números inteiros positivos.*

**Exemplo 1.3.** *As partições do inteiro 4 são  $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$  e  $(1, 1, 1, 1)$ .*

Os inteiros que compõem uma partição chamam-se *partes* da partição e o número de partes de uma partição chama-se o *comprimento* dessa partição.

Neste trabalho usamos uma notação que torna mais curta a escrita de uma partição. Seja  $R = (r_1, \dots, r_n)$  uma partição de um dado inteiro  $m$ . Sejam  $g_1 > \dots > g_l$  inteiros positivos tais que  $\{r_1, \dots, r_m\} = \{g_1, \dots, g_l\}$ . Então também podemos escrever

$$R = (g_1^{i_1}, \dots, g_l^{i_l}),$$

onde, para todo  $j = 1 \dots, l$ ,  $i_j$  indica o número de vezes que o inteiro  $g_j$  aparece na partição  $R$ .

**Exemplo 1.4.** *A partição  $(5, 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1)$  de 21 também pode ser representada por*

$$(5^2, 4, 3, 1^4).$$

Partindo de uma partição  $R$  de um certo inteiro, podemos construir outra partição do mesmo inteiro, chamada a *partição conjugada* de  $R$  e denotada por  $R^*$ .

**Definição 1.8.** *Seja  $R = (r_1, \dots, r_n)$  uma partição do inteiro  $m$ . A partição conjugada de  $R$  é a partição de  $m$  denotado por  $R^* = (r_1^*, \dots, r_l^*)$ , onde  $r_j^*$  é igual ao número de elementos do conjunto*

$$\{i : 1 \leq i \leq n, r_i \geq j\}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Da definição anterior concluímos que o comprimento da partição conjugada de uma partição  $R = (r_1, \dots, r_n)$  de  $m$  é  $r_1$  e dado um inteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq r_1$ ,

$$\sum_{j=1}^k r_j^* = \sum_{j=1}^n \min\{r_j, k\},$$

onde  $\min\{r_j, k\}$  representa o elemento mínimo do conjunto  $\{r_j, k\}$ .

### 1.1.3 Grupo simétrico

Seja  $n$  um inteiro positivo. O grupo simétrico de grau  $n$ , que denotamos por  $S_n$ , é o grupo constituído por todas as aplicações bijetivas do conjunto  $\{1, \dots, n\}$  nele próprio com a composição de funções. Estas aplicações bijetivas são designadas por *permutações*.

Existem várias formas de representar uma permutação. As permutações podem ser representadas através de uma tabela com duas linhas, sendo que a primeira linha indica os objetos e a segunda as respetivas imagens.

**Exemplo 1.5.** *Seja  $\tau$  o elemento de  $S_4$  dado por  $\tau(1) = 4$ ,  $\tau(2) = 3$ ,  $\tau(3) = 2$  e  $\tau(4) = 1$ . Então*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que a primeira linha é sempre igual, é habitual omitir os objetos e escrever apenas a segunda linha. Assim representamos a permutação do exemplo anterior apenas por

$$\tau = 4 \ 3 \ 2 \ 1.$$

Será esta a notação habitualmente utilizada para representar uma permutação. Assim, um elemento  $\tau \in S_n$  será representado pela sequência

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n,$$

onde  $\tau(i) = \tau_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Os elementos de  $S_n$  isto é, as permutações de grau  $n$ , podem ainda ser representadas por meio de matrizes, as chamadas *matrizes de permutação*. Dado  $\sigma \in S_n$ , a matriz de permutação de  $\sigma$  é a matriz  $P = [p_{i,j}]$  de ordem  $n$ , onde  $p_{i,j} = 1$  se e só se  $\sigma(i) = j$  e  $p_{i,j} = 0$  caso contrário.

Ao longo desta dissertação vamos, muitas vezes, focar-nos em submatrizes de uma dada matriz. Dada uma matriz  $A$  do tipo  $m$  por  $n$ , a submatriz de  $A$  indexada pelas linhas  $i_1, \dots, i_p$  e colunas  $j_1, \dots, j_s$  é representada por

$$A[\{i_1, \dots, i_p\}; \{j_1, \dots, j_s\}],$$

sendo  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$  e  $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ .

Uma submatriz principal de  $A$  é uma submatriz da forma  $A[\{1, \dots, p\}; \{1, \dots, q\}]$ ,  $1 \leq p < m$  e  $1 \leq q < n$ . Denotamos por  $L_n$  a matriz anti-identidade de ordem  $n$ , isto é a matriz de permutação de  $n \ n - 1 \ \dots \ 1$ . Esta matriz tem na posição  $(i, j)$  o elemento 1 se  $j = n + 1 - i$  e 0 caso contrário. Por  $I_n$  denotamos a matriz identidade de ordem  $n$ .

Terminamos esta subsecção com um exemplo dos conceitos apresentados:

**Exemplo 1.6.** *A matriz de permutação do elemento  $\tau$  de  $S_4$  dado no exemplo 1.5 é a matriz*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$P[\{1, 2\}; \{3, 4\}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 A classe $\mathcal{A}(R, S)$

Esta dissertação tem como um dos seus principais objetivos a apresentação de novos resultados que contribuam para um melhor entendimento de uma relação de ordem parcial, que será definida no capítulo seguinte, e que está definida em classes de matrizes cujas entradas são apenas zeros e uns. Assim, para um melhor entendimento, parece-nos importante que este trabalho contenha uma resenha dos principais resultados já estabelecidos para estas classes de matrizes. É o que faremos nesta secção, seguindo essencialmente [2].

Seja  $A = [a_{i,j}]$  uma matriz do tipo  $m$  por  $n$ , cujas entradas são números reais não negativos. Para cada  $i = 1, \dots, m$  seja

$$r_i = a_{i,1} + \dots + a_{i,n},$$

e para cada  $j = 1, \dots, n$  seja

$$s_j = a_{1,j} + \dots + a_{m,j}.$$

À sequência

$$R = (r_1, \dots, r_m),$$

damos o nome de *sequência das somas das linhas* de  $A$ , e à sequência

$$S = (s_1, \dots, s_n),$$

damos o nome de *sequência das somas das colunas* de  $A$ . Obviamente

$$r_1 + \dots + r_m = s_1 + \dots + s_n. \quad (1.1)$$

Denotamos por  $\mathcal{A}(R, S)$  a classe<sup>1</sup> de todas as matrizes cujas entradas são apenas 0's e 1's, matrizes  $(0, 1)$ , cuja sequência das somas das linhas é igual a  $R$  e a sequência das somas das colunas é igual a  $S$ . No caso particular de  $R = (k, \dots, k) = (k^n)$ , a classe  $\mathcal{A}(R, R)$  é denotada por  $\mathcal{A}(n, k)$ . Observemos que a classe de todas as matrizes de permutação de ordem  $n$  formam a classe  $\mathcal{A}(n, 1)$ . A classe  $\mathcal{A}(n, n)$  tem um único elemento denotado por  $J_n$ . Portanto  $J_n$  é uma matriz de ordem  $n$  cujas entradas são todas iguais a 1.

Não existe perda de generalidade em assumir que  $R$  e  $S$  são sequências não crescentes. De facto, dadas duas matrizes de permutação  $P$  e  $Q$  de ordens  $m$  e  $n$  respetivamente, muitas das propriedades de  $\mathcal{A}(R, S)$  permanecem válidas em  $\mathcal{A}(PR, SQ) = \{PAQ : A \in \mathcal{A}(R, S)\}$  e vice versa (ver [2], página 45). Também podemos assumir que para todo o  $i = 1, \dots, m$  e todo o  $j = 1, \dots, n$ ,  $r_i$  e  $s_j$  são maiores que zero, pois caso contrário a matriz teria linhas ou colunas nulas. Assim, daqui em diante assumimos que

---

<sup>1</sup>Segundo [2], deve-se a Ryser o uso do termo classe em vez de conjunto. Usaremos esta nomenclatura.

$$0 < r_m \leq \dots \leq r_1 \leq n \text{ e } 0 < s_n \leq \dots \leq s_1 \leq m.$$

Note-se que, uma vez que estamos a trabalhar com matrizes-(0,1),  $R$  e  $S$  são partições de um dado inteiro.

Relativamente a estas classes de matrizes, muitas questões se colocam. As repostas a algumas destas questões é o objetivo das subsecções seguintes.

### 1.2.1 O Teorema de Gale-Ryser

Sejam então  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições de um mesmo inteiro. Uma questão que naturalmente se coloca é a de saber em que condições a classe  $\mathcal{A}(R, S)$  é não vazia. Em alguns casos é fácil responder a esta questão. Por exemplo, seja  $R^*$  a partição conjugada de  $R$ . Então, a classe  $\mathcal{A}(R, R^*)$  é não vazia, contendo apenas uma única matriz; a matriz cujas entradas não nulas, isto é iguais a 1, encontram-se todas nas posições iniciais de cada linha. Uma condição necessária para que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$  pode também ser facilmente determinada usando a relação de majoração. De facto, seja  $A \in \mathcal{A}(R, S)$ . Consideremos a matriz  $A$  particionada

$$A = [B_1 | B_2],$$

onde  $B_1$  é do tipo  $m$  por  $l$  e  $1 \leq l < n$ . Porque o número de 1's das primeiras  $l$  colunas da matriz que se obtém de  $A$  deslocando os 1's de cada linha para as suas posições iniciais é maior ou igual ao número de 1's de  $B_1$ , e porque

$$\sum_{i=1}^l r_i^* = \sum_{i=1}^m \min\{r_i, l\},$$

concluimos que

$$\sum_{i=1}^l s_i \leq \sum_{i=1}^l r_i^*, \quad l = 1, \dots, n-1,$$

isto é,

$$S \preceq_M R^*.$$

Gale e Ryser, de forma independente, demonstraram que esta condição é igualmente uma condição suficiente para que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ . Ambos os autores, partindo do único elemento de  $\mathcal{A}(R, R^*)$ , apresentaram algoritmos para a construção de uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ . Os dois algoritmos diferem muito pouco um do outro, (ver [2] página 46), de modo que o algoritmo seguinte é conhecido por *Algoritmo de Gale-Ryser para a construção de uma matriz em  $\mathcal{A}(R, S)$* :

**Algoritmo:**

1. Consideremos a matriz  $\bar{A}_n$  do tipo  $m$  por  $n$  cujas entradas iguais a 1 ocupam as posições iniciais de cada linha, isto é,

$$\bar{A}_n = [A_n | \tilde{A}_0],$$

onde  $A_n$  é o único elemento de  $\mathcal{A}(R, R^*)$  e  $\tilde{A}_0$  é a matriz vazia.

2. Para cada  $k = n, n - 1, \dots, 1$ ,

Mudar  $s_k$  1's de  $A_k$  localizados em colunas o mais possível à direita e em linhas com maior número de 1's, mas em caso de igualdade dar preferências às linhas de maior índice (situadas mais abaixo), obtendo

$$[A_{k-1} | \tilde{A}_{n-k+1}],$$

e repetindo o processo com  $A_{k-1}$ .

3. Apresentamos  $\tilde{A}_n$ .

Ambos os autores provaram que se  $S \preceq_M R^*$  então o algoritmo produz de facto uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ , provando assim que a condição  $S \preceq_M R^*$  é uma condição suficiente para que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ . Podemos assim enunciar o seguinte teorema, conhecido na literatura por Teorema de Gale-Ryser:

**Teorema 1.1.** [2], [18] [24] *Sejam  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo. A classe  $\mathcal{A}(R, S)$  é não vazia se e só se  $S \preceq_M R^*$ .*

### 1.2.2 O Teorema dos intercâmbios de Ryser

Outro teorema, este devido a Ryser e provado em [24], é um dos teoremas mais importantes no estudo de uma classe  $\mathcal{A}(R, S)$ . Seja então  $A \in \mathcal{A}(R, S)$ . Nesta secção vamos prestar atenção às submatrizes de  $A$  do tipo 2 por 2 da forma:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chamamos *intercâmbio* à transformação que substitui uma submatriz da forma  $L_2$  noutra igual a  $I_2$  e vice versa. Assim, dados  $p, q \in \{1, \dots, m\}$ ,  $p < q$  e  $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k < l$  tais que

$$A[\{p, q\}; \{k, l\}] = L_2,$$

se  $B$  é a matriz que se obtém de  $A$  substituindo esta submatriz por  $I_2$ , então dizemos que  $B$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$ . Analogamente, se

$$A[\{p, q\}; \{k, l\}] = I_2,$$

e se  $B$  é a matriz que se obtém de  $A$  substituindo esta submatriz por  $L_2$ , então dizemos que  $B$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio  $I_2 \rightarrow L_2$ .

Em ambos os casos, como  $A \in \mathcal{A}(R, S)$  temos também que  $B \in \mathcal{A}(R, S)$ . Podemos então enunciar o próximo resultado conhecido por Teorema dos intercâmbios de Ryser.

**Teorema 1.2.** [24] *Sejam  $A, D \in \mathcal{A}(R, S)$ . Então a matriz  $D$  pode ser obtida da matriz  $A$  por um número finito de intercâmbios.*

### 1.3 Quadrados Latinos

Outro dos objetivos desta dissertação é o estudo de uma relação de ordem parcial, que será definida no capítulo 3, na classe dos quadrados latinos de ordem  $n$ . Nesta secção vamos apresentar as noções básicas relacionadas com este conceito seguindo essencialmente [8].

**Definição 1.9.** *Um quadrado latino de ordem  $n$  é uma tabela com  $n$  linhas e  $n$  colunas, cujas entradas são todas preenchidas com  $n$  símbolos tal que cada símbolo aparece apenas uma vez em cada linha e cada coluna.*

Para este texto usamos como símbolos para preencher a tabela os inteiros de  $1, \dots, n$ . Os quadrados latinos têm uma longa história e as suas aplicações podem ser encontradas em várias áreas do saber. Por exemplo, a tabela de multiplicação de um grupo finito ou a tabela de multiplicação de um quase grupo é um quadrado latino. O famoso puzzle Japonês Sudoku é um quadrado latino de nove por nove com algumas restrições. Para mais aplicações dos quadrados latinos ver, por exemplo, [22].

A noção de quadrado latino está intimamente relacionada com o conceito de permutação, e portanto, com as matrizes de permutação. De facto, seja  $A$  um quadrado latino de ordem  $n$  e seja  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Denotando por  $P_i$  a matriz de zeros e uns, também de ordem  $n$ , cujas entradas iguais a 1 são as mesmas entradas de  $A$  ocupadas pelo inteiro  $i$ , concluímos que  $P_i$  é uma matriz de permutação. Podemos então concluir que existem matrizes de permutação  $P_1, \dots, P_n$  tais que

$$J_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n,$$

e

$$A = 1P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n.$$

Reciprocamente, se  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são  $n$  matrizes de permutação de ordem  $n$  tais que  $P_1 + P_2 + \dots + P_n = J_n$ , então  $1P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n$  é um quadrado latino de ordem  $n$ . Isto implica que se  $A = [a_{i,j}]$  é um quadrado latino de ordem  $n$  e se  $g \in \{1, \dots, n\}$  então existe um único elemento de  $S_n$ ,  $\sigma_g$ , tal que  $a_{i\sigma_g(i)} = g$  para  $i = 1, \dots, n$ . Neste caso dizemos que o inteiro  $g$  está associado à permutação  $\sigma_g$ .

**Exemplo 1.7.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

então o inteiro 3 está associado com a permutação  $\rho_3 = 3241 \in S_4$ .

## Capítulo 2

### Ordem de Bruhat em $\mathcal{A}(R, S)$

Um dos problemas selecionados para as olimpíadas internacionais da matemática de 2006 que decorreram na Eslovénia, foi o seguinte:

*Seja  $\mathcal{A}$  um bolo quadrado que se encontra dividido em  $n^2$  quadrados, ou seja, em cada fila da divisão deste bolo temos  $n$  quadrados. Em alguns desses quadrados foi colocado um morango de modo que cada fila do bolo  $\mathcal{A}$  contém um único morango. As filas de quadrados que temos no bolo  $\mathcal{A}$  e que são filas horizontais são também chamadas de linhas; as filas verticais são também chamadas de colunas. Seja  $\mathcal{B}$  um outro bolo com as mesmas características do bolo  $\mathcal{A}$  mas com outra disposição dos morangos.*

*Suponhamos que o número de morangos que estão em qualquer retângulo contíguo ao canto superior esquerdo no bolo  $\mathcal{B}$  é menor ou igual do que o número de morangos que estão no mesmo retângulo mas no bolo  $\mathcal{A}$ .*

*Mostre que a disposição de morangos no bolo  $\mathcal{A}$  pode ser obtida da disposição de morangos do bolo  $\mathcal{B}$  efetuando um número finito de intercâmbios definidos como se segue:*

*Para efetuar um intercâmbio começamos por selecionar quatro quadrados do bolo, posicionados exatamente em duas linhas e em duas colunas, com apenas dois morangos: um destes morangos está situado no quadrado mais à direita na linha de cima e o outro morango no quadrado mais à esquerda da linha de baixo. Um intercâmbio consiste em mover estes dois morangos para os outros dois quadrados.*

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.1.** *Seja  $n = 4$ . Representemos o bolo  $\mathcal{A}$  por uma matriz de zeros e uns, em que os quadrados com morangos serão as entradas da matriz iguais a 1 e os quadrados sem morangos serão as entradas da matriz iguais a 0. Assim, suponhamos que o nosso bolo  $\mathcal{A}$  é representado pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Suponhamos que a representação do bolo  $\mathcal{B}$  é dada pela matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se comprova que o número de uns que estão em qualquer retângulo contíguo ao canto superior esquerdo da matriz  $B$  é menor ou igual do que o número de uns que estão no mesmo retângulo mas na matriz  $A$ .

Se pensarmos na submatriz de  $B$ ,

$$B[\{1, 4\}; \{1, 4\}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = L_2,$$

e se substituirmos esta submatriz de  $B$  por  $I_2$  obtemos a matriz  $A$ . Então, a disposição de morangos no nosso bolo  $\mathcal{A}$  obtém-se da disposição do bolo  $\mathcal{B}$  efetuando um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$ .

Este problema corresponde a uma relação de ordem parcial definida no grupo simétrico de grau  $n$ ,  $S_n$ , conhecida por *ordem de Bruhat*. Na secção seguinte vamos explorar a ordem de Bruhat em  $S_n$ , antes de partir para as suas generalizações.

## 2.1 A ordem de Bruhat em $S_n$

Nesta secção vamos definir e estudar a ordem de Bruhat em  $S_n$  e apresentar as suas principais propriedades. A forma como o faremos é análoga à de [2].

**Definição 2.1.** *Seja  $n$  um inteiro positivo, seja  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$  um elemento de  $S_n$  e sejam  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dizemos que o par  $(i, j)$  é uma inversão de  $\sigma$  se  $i < j$  e  $\sigma_j < \sigma_i$ . O número de inversões de  $\sigma$  é denotado por  $l(\sigma)$ .*

Note que o símbolo  $<$  que surge na definição anterior é da relação de ordem usual em  $\mathbb{R}$ ,  $\leq$ .

**Exemplo 2.2.** *Consideremos a permutação  $\sigma = 2314$  de  $S_4$ . Neste caso,*

$$1 < 3 \text{ e } \sigma_3 = 1 < \sigma_1 = 2,$$

$$2 < 3 \text{ e } \sigma_3 = 1 < \sigma_2 = 3.$$

Portanto,  $(1, 3)$  e  $(2, 3)$  são as inversões de  $\sigma$ . Logo,  $l(\sigma) = 2$ .

Podemos então definir uma relação de ordem parcial em  $S_n$  chamada de ordem de Bruhat e que se representa por  $\preceq_B$ . Sejam  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$  e  $\tau = \tau_1\tau_2\dots\tau_n$  dois elementos de  $S_n$ . Dizemos que  $\sigma$  precede  $\tau$  pela ordem de Bruhat, e escrevemos  $\sigma \preceq_B \tau$ , se, e só se,  $\sigma = \tau$  ou  $\sigma$  pode ser obtido de  $\tau$  por uma sequencia de transformações com a seguinte forma:

$$a_1a_2\dots a_i\dots a_j\dots a_n$$

é substituído por

$$a_1a_2\dots a_j\dots a_i\dots a_n$$

onde  $i < j$  e  $a_j < a_i$  ( $(i, j)$  é uma inversão).

Estas transformações reduzem o número de inversões da permutação.

Por outras palavras, diz-se que  $\sigma$  precede  $\tau$  pela ordem de Bruhat sempre que seja possível obter  $\sigma$  a partir de  $\tau$  aplicando sucessivamente a transformação anterior de modo a ir eliminando inversões.

**Exemplo 2.3.** Seja  $\tau \in S_5$ , tal que  $\tau = 3\ 5\ 1\ 2\ 4$ . Verifica-se que para  $i = 2$  e  $j = 5$ ,  $2 < 5$  e tem-se que  $\tau_5 = 4 < \tau_2 = 5$ . Ocorre portanto, uma inversão. Eliminando esta inversão obtemos a permutação  $\sigma = 3\ 4\ 1\ 2\ 5$ , e portanto

$$\sigma \preceq_B \tau.$$

Na figura seguinte encontramos o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado  $(S_3, \preceq_B)$ :

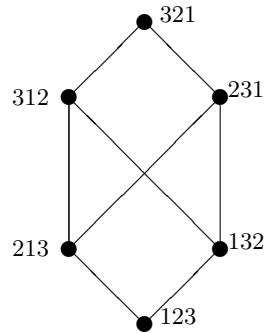


Figura 2.

Em [1] ou em [25] o leitor poderá encontrar o diagrama de Hasse de  $(S_4, \preceq_B)$ . Uma relação importante no estudo de uma relação de ordem parcial é a relação de cobertura. O próximo resultado caracteriza a relação de cobertura em  $S_n$  pela ordem de Bruhat:

**Lema 2.1.** *Sejam  $\sigma, \tau \in S_n$ . Então  $\sigma$  é coberto por  $\tau$  pela ordem de Bruhat em  $S_n$  se e só se  $\sigma$  é obtido de  $\tau$  eliminando uma inversão  $(i, j)$  de  $\tau$ , e não existe nenhum  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i < k < j$  tal que  $\tau_j < \tau_k < \tau_i$ .*

**Demonstração:** Se  $\sigma$  é obtido de  $\tau$  por eliminação da inversão  $(i, j)$ , onde  $(i, j)$  é uma inversão de  $\tau$  satisfazendo as condições indicadas no enunciado então  $l(\tau) = l(\sigma) + 1$  logo  $\tau$  cobre  $\sigma$ .

Suponhamos agora que  $\sigma$  é obtido de  $\tau$  eliminando, em  $\tau$ , uma inversão  $(i, j)$ . Suponhamos que existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $i < k < j$  e  $\tau_j < \tau_k < \tau_i$ , e seja  $\pi$  o elemento de  $S_n$  obtido de  $\tau$  por eliminação da inversão  $(i, k)$ . Então, para obtermos  $\sigma$  partindo de  $\pi$  teremos que eliminar as inversões  $(k, j)$  e depois  $(i, k)$ . Donde,

$$\sigma \prec_B \pi \prec_B \tau,$$

logo  $\tau$  não cobre  $\sigma$ . □

Sejam  $\sigma$  e  $\tau$  dois elementos de  $S_n$  e sejam  $P$  e  $Q$  as respectivas matrizes de permutação. Dizemos

$$P \preceq_B Q \text{ se e só se } \sigma \preceq_B \tau.$$

Seja  $\sigma \in S_n$  e seja  $P$  a respectiva matriz de permutação. Uma inversão  $(i, j)$  de  $\sigma$  corresponde, na representação matricial de  $\sigma$ , a uma submatriz  $L_2$ , isto é,

$$P[\{i, j\}; \{\sigma_j, \sigma_i\}] = L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eliminar esta inversão significa transformar esta submatriz  $L_2$  em

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outras palavras, eliminar uma inversão em  $\sigma$  equivale a fazer um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  em  $P$ . Assim, dadas duas matrizes de permutação  $P$  e  $Q$ , podemos também dizer que  $P \preceq_B Q$  se e só se a matriz  $P$  pode ser obtida de  $Q$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ , e estes correspondem à eliminação de inversões nas permutações respetivas (ver também [4]).

No entanto, existe outra forma de comparar matrizes de permutação pela ordem de Bruhat.

**Definição 2.2.** *Seja  $A = [a_{i,j}]$  uma qualquer matriz do tipo  $m$  por  $n$  com entradas reais. Denotamos por  $\Sigma_A$  a matriz do tipo  $m$  por  $n$ , cuja entrada  $(r, s)$  é dada por*

$$\sigma_{r,s}(A) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{i,j}, \quad 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (2.1)$$

Relembrando o problema proposto no início deste capítulo, se associarmos a cada bolo uma matriz de zeros e uns,  $A$  e  $B$ , em que os zeros designam os quadrados do bolo sem morangos e os uns os quadrados com morangos, a afirmação

“*Suponhamos que o número de morangos que estão em qualquer retângulo contíguo ao canto superior esquerdo no bolo  $\mathcal{B}$  é menor ou igual do que o número de morangos que estão no mesmo retângulo mas no bolo  $\mathcal{A}$* ”,

significa que ao construir as matrizes  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_B$  verificamos que  $\Sigma_B \leq \Sigma_A$  entrada por entrada.

O seguinte teorema responde ao problema colocado no início deste capítulo.

**Teorema 2.1.** [4],[25] *Sejam  $P$  e  $Q$  duas matrizes de permutação correspondentes a dois elementos de  $S_n$ . Então  $P \preceq_B Q$  se e só se  $\Sigma_Q \leq \Sigma_P$  entrada por entrada.*

**Demonstração:** A necessidade da condição resulta facilmente da definição de  $\preceq_B$  e do facto de dadas duas matrizes de permutação  $P_1$  e  $Q_1$  de ordem  $n$ , se  $P_1$  se obtiver de  $Q_1$  pelo intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  que substitui  $Q_1[\{p, l\}; \{f, g\}] = L_2$  por  $I_2$ , então

$$\sigma_{i,j}(P_1) = \begin{cases} \sigma_{i,j}(Q_1) + 1 & \text{se } p \leq i < l \text{ e } f \leq j < g \\ \sigma_{i,j}(Q_1) & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e portanto,  $\Sigma_Q \leq \Sigma_P$  entrada por entrada.

Reciprocamente sejam  $P = [p_{i,j}]$  e  $Q = [q_{i,j}]$  duas matrizes de permutação. Admitamos que  $P \neq Q$  e que

$$\sigma_{i,j}(Q) \leq \sigma_{i,j}(P), \quad (2.2)$$

para todo  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ .

Seja  $(u, v)$  o menor par, pela relação de ordem lexicográfica, para o qual  $p_{u,v} \neq q_{u,v}$ . Então  $p_{i,j} = q_{i,j}$  se  $i < u$  ou se  $i = u$  e  $j < v$ . Por (2.2),  $p_{u,v} = 1$  e  $q_{u,v} = 0$  e portanto,

$$\sigma_{u,v}(Q) < \sigma_{u,v}(P).$$

Seja  $(r, s) \in \{u+1, \dots, m\} \times \{v+1, \dots, n\}$  tal que  $r+s$  é maximal entre todos os pares  $(k, l) \in \{u+1, \dots, m\} \times \{v+1, \dots, n\}$  para os quais

$$\sigma_{i,j}(Q) < \sigma_{i,j}(P),$$

para todo  $i = u, \dots, k-1$  e todo  $j = v, \dots, l-1$ .

Admitamos que a matriz

$$P[\{u+1, \dots, r\}; \{v+1, \dots, s\}],$$

é a matriz nula.

Atendendo à maximalidade de  $r+s$  concluímos que existe um inteiro  $i$ ,  $u \leq i < r$ , e um inteiro  $j$ ,  $v \leq j < s$ , tais que

$$\sigma_{i,s}(P) = \sigma_{i,s}(Q) \quad \text{e} \quad \sigma_{r,j}(P) = \sigma_{r,j}(Q).$$

Mas então,

$$\begin{aligned} \sigma_{r,s}(P) &= \sigma_{i,s}(P) + \sigma_{r,j}(P) - \sigma_{i,j}(P) \\ &< \sigma_{i,s}(Q) + \sigma_{r,j}(Q) - \sigma_{i,j}(Q) \\ &= \sigma_{r,s}(Q). \end{aligned}$$

Atendendo a (2.2), chegamos a uma contradição. Então existe uma posição  $(k, l)$  tal que  $u+1 \leq k \leq r$  e  $v+1 \leq l \leq s$  e  $p_{k,l} = 1$ . Podemos escolher  $k$  e  $l$  de modo que  $k+l$  seja minimal. Deste modo,  $p_{i,j} = 0$  para todo  $i$ ,  $u+1 \leq i \leq k$  e para todo  $j$ ,  $v+1 \leq j \leq l$ . Então as entradas de  $P[\{u, \dots, k\}, \{v, \dots, l\}]$  são todas nulas com exceção das entradas  $(u, v)$  e  $(k, l)$ . Seja  $P'$  a matriz obtida de  $P$  pelo intercâmbio  $I_2 \rightarrow L_2$  em  $P[\{u, k\}, \{v, l\}]$ . Então  $P \prec_B P' \preceq_B Q$ . Se necessário, ou seja, se  $P' \prec_B Q$ , substituindo  $P$  por  $P'$  repetimos o argumento anterior.  $\square$

**Exemplo 2.4.** *Sejam  $\sigma, \tau \in S_5$ , tais que  $\sigma = 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 5$  e  $\tau = 3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4$ .*

*Seja  $Q$  a matriz de permutação correspondente à permutação  $\tau$ . Então,*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

*Seja  $P$  a matriz de permutação correspondente à permutação  $\sigma$ . Então,*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que, entrada por entrada tem-se  $\Sigma_Q \leq \Sigma_P$ , e então  $P \preceq_B Q$ .

## 2.2 De $S_n$ para $\mathcal{A}(R, S)$

Nesta secção vamos debruçar-nos sobre a generalização da ordem de Bruhat definida em  $S_n$ , ou seja, nas matrizes de permutação, para outras classes de matrizes de zeros e uns.

### 2.2.1 A ordem de Bruhat em $\mathcal{A}(R, S)$

Em [7], Brualdi e Hwang generalizaram a ordem de Bruhat definida em  $S_n$ , ou seja, na classe  $\mathcal{A}(n, 1)$ , para as classes  $\mathcal{A}(R, S)$ , em que  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  são duas partições do mesmo inteiro positivo. Atendendo aos resultados estabelecidos na secção 2.1, a ordem de Bruhat em  $\mathcal{A}(n, 1)$  pode ser definida de dois modos distintos: através de uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ , ou através da comparação das entradas das matrizes  $\Sigma$ .

A forma como Brualdi e Hwang generalizaram a ordem de Bruhat foi através deste segundo modo, isto é, através da comparação das entradas das matrizes  $\Sigma$ . Assim, dadas duas matrizes  $A = [a_{i,j}]$  e  $D = [d_{i,j}]$  de  $\mathcal{A}(R, S)$ , e construindo a matriz  $\Sigma_A = [\sigma_{i,j}(A)]$ , onde

$$\sigma_{i,j}(A) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j a_{k,l},$$

e a matriz  $\Sigma_D = [\sigma_{i,j}(D)]$  de modo análogo, dizemos que  $A$  precede  $D$  pela ordem de Bruhat, e escrevemos  $A \preceq_B D$ , se, e só se,  $\Sigma_D \leq \Sigma_A$ , entrada por entrada. No entanto ao longo deste artigo está de algum modo presente uma outra relação, ainda que não definida explicitamente. Esta ambiguidade só foi totalmente resolvida no artigo de Brualdi e Deaett, [4], de 2007, onde uma outra relação de ordem parcial de  $\mathcal{A}(R, S)$  foi definida, e a que foi dado o nome de *ordem de Bruhat Secundária*. Assim, dadas as matrizes  $A, D \in \mathcal{A}(R, S)$  dizemos que  $D$  precede  $A$  pela ordem de Bruhat Secundária, e escrevemos  $D \preceq_{\hat{B}} A$  se, e só se,  $A = D$  ou se  $D$  pode ser obtido de  $A$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ .

Assim, atendendo a estas definições, concluímos, do Teorema 2.1, que em  $\mathcal{A}(n, 1)$  a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem. Brualdi e Daeatt também provaram que a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária são coincidentes na classe  $\mathcal{A}(n, 2)$ . No entanto os mesmos autores mostraram que o mesmo não acontece na classe  $\mathcal{A}(6, 3)$ , como veremos em seguida.

Não é de modo nenhum evidente que a relação  $\preceq_{\hat{B}}$  seja uma relação antissimétrica e portanto uma relação de ordem parcial. Contudo é facilmente verificável que se  $D \preceq_{\hat{B}} A$ , então  $D \preceq_B A$ . De facto, prova-se que

**Lema 2.2.** [12] *Seja  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}(R, S)$ . Sejam  $p, f, g$  e  $l$  inteiros com  $1 \leq p < l \leq m$  e  $1 \leq f < g \leq n$ , tal que*

$$A[\{p, l\}; \{f, g\}] = L_2.$$

*Seja  $A' = [a'_{i,j}]$  a matriz obtida pelo intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  que substitui  $A[\{p, l\}; \{f, g\}] = L_2$  por  $I_2$ . Então*

$$\sigma_{i,j}(A') = \begin{cases} \sigma_{i,j}(A) + 1 & \text{se } p \leq i < l \text{ e } f \leq j < g \\ \sigma_{i,j}(A) & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e portanto  $A' \prec_B A$ .

□

Com este lema presente torna-se fácil provar não só que  $\preceq_{\hat{B}}$  é antissimétrica e consequentemente uma relação de ordem parcial, assim como que a ordem de Bruhat é um refinamento da ordem de Bruhat Secundária.

Com vista a provar que em  $\mathcal{A}(6, 3)$  as duas relações de ordem parcial não coincidem os autores começaram por caracterizar a relação de cobertura para a ordem de Bruhat Secundária. Relembre-se que dado um conjunto parcialmente ordenado  $(X, \preceq)$ , e dados  $a, b \in X$ , dizemos que  $b$  cobre  $a$  se  $a \prec b$  e não existe nenhum elemento  $c \in X$  tal que  $a \prec c \prec b$ .

**Teorema 2.2.** [4] *Seja  $A$  uma matriz que pertence a  $\mathcal{A}(R, S)$ . Sejam  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$  e sejam  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  onde  $1 \leq k < l \leq n$  tais que  $A[\{i, j\}, \{k, l\}] = L_2$ . Seja  $A' = [a'_{ij}]$  a matriz obtida de  $A$  pelo intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  que substitui a submatriz de  $A$ ,  $A[\{i, j\} | \{k, l\}] = L_2$  por  $I_2$ . Então  $A$  cobre  $A'$  no conjunto  $\mathcal{A}(R, S)$  pela ordem de Bruhat Secundária, se e só se*

1.  $a_{p,k} = a_{p,l}$  para todo  $p$ ,  $i < p < j$ ,
2.  $a_{i,q} = a_{j,q}$  para todo  $q$ ,  $k < q < l$ ,
3. Se  $a_{p,k} = 0$  e  $a_{i,q} = 0$  então  $a_{p,q} = 0$ , para quaisquer  $p$  e  $q$  tais que  $i < p < j$  e  $k < q < l$ , e
4. Se  $a_{p,k} = 1$  e  $a_{i,q} = 1$  então  $a_{p,q} = 1$ , para quaisquer  $p$  e  $q$  tais que  $i < p < j$  e  $k < q < l$ .

Em [4], um exemplo envolvendo três matrizes de  $\mathcal{A}(6, 3)$  mostra que a ordem de Bruhat Secundária e a ordem de Bruhat não coincidem nesta classe. A seguir apresentamos o exemplo a que nos referimos:

**Exemplo 2.5.** [4] *Consideremos as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

e

$$\Sigma_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas das três matrizes verificamos que

$$\Sigma_C < \Sigma_D < \Sigma_A,$$

e portanto,

$$A \prec_B D \prec_B C.$$

Usando o Teorema 2.2 concluímos também que  $C$  cobre  $A$  e  $C$  cobre  $D$  pela ordem de Bruhat Secundária. Isto implica que  $D$  e  $A$  são incomparáveis por esta relação de ordem parcial.

Esta observação coloca a questão de saber em que classes as duas relações de ordem parcial coincidem. Este foi um dos problemas que nós abordámos nesta dissertação. A nossa contribuição para este problema é o objetivo da secção seguinte.

## 2.3 A ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária

Neste secção retomamos a questão sobre as classes de matrizes de zeros e uns em que as duas relações de ordem parcial atrás definidas coincidem. Vamos descrever algumas partições  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  de um mesmo inteiro para as quais, na classe  $\mathcal{A}(R, S)$ , a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem. Antes porém vamos prestar atenção às classes da forma  $\mathcal{A}(n, 3)$ . Vamos provar que para os valores de  $n$  tais que  $6 \leq n$ , as duas relações de ordem parcial não coincidem; porém o mesmo não acontece para  $n = 3, 4$  e  $5$  onde elas são coincidentes.

### 2.3.1 A classe $\mathcal{A}(n, 3)$

O próximo resultado permite mostrar que as duas relações de ordem parcial são coincidentes em  $\mathcal{A}(n, 3)$  quando  $n \in \{4, 5\}$ . De notar que a classe  $\mathcal{A}(3, 3)$  só tem a matriz  $J_3$  pelo que as duas relações de ordem parcial são coincidentes em  $\mathcal{A}(3, 3)$ .

**Proposição 2.1.** [14] *Sejam  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo tais que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ . Sejam  $U = (n - r_m, \dots, n - r_1)$  e  $Q = (m - s_n, \dots, m - s_1)$ . Se a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem em  $\mathcal{A}(R, S)$ , então essas duas relações de ordem parcial também coincidem em  $\mathcal{A}(U, Q)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $C$  matrizes pertencentes à classe  $\mathcal{A}(U, Q)$ . Sabemos que se  $A \prec_{\widehat{B}} C$ , então  $A \prec_B C$ . Suponhamos que  $A \prec_B C$ . Então, para quaisquer  $(r, c) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma_{r,c}(C) \leq \sigma_{r,c}(A)$ , e existe  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  tal que  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$ .

Sejam  $D = [d_{i,j}] = L_m(J - A)L_n$  e  $E = L_m(J - C)L_n$ , onde  $L_n$  é a matriz de permutação de ordem  $n$  correspondente à permutação  $n \ n-1 \ \dots \ 2 \ 1$ ,  $L_m$  é definido de modo análogo e  $J$  é a matriz do tipo  $m$  por  $n$  cujas entradas são todas iguais a 1. Se  $(p, q) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , então

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}(D) &= \sum_{g=1}^p \sum_{h=1}^q d_{g,h} \\ &= pq - \sum_{g=m-p+1}^m \sum_{h=n-q+1}^n a_{g,h} \\ &= pq - (r_{m-p+1} + \dots + r_m) + s_1 + \dots + s_{n-q} - \sigma_{m-p,n-q}(A) \\ &\leq pq - (r_{m-p+1} + \dots + r_m) + s_1 + \dots + s_{n-q} - \sigma_{m-p,n-q}(C) \\ &= \sigma_{p,q}(E). \end{aligned}$$

Como  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$ , temos que  $\sigma_{m-i,n-j}(D) < \sigma_{m-i,n-j}(E)$  e por isso  $E \prec_B D$ . Usando o facto de que  $D, E \in \mathcal{A}(R, S)$  e a hipótese temos  $E \prec_{\widehat{B}} D$ . Consequentemente,  $D$  pode ser transformado em  $E$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ . Se  $P \in \mathcal{A}(U, Q)$  e  $P[\{a, b\}, \{c, d\}] = L_2$ , então

$$(L_m P L_n) [\{m - b + 1, m - a + 1\}, \{n - d + 1, n - c + 1\}] = L_2.$$

Isto implica que

$$(J - L_m P L_n) [\{m - b + 1, m - a + 1\}, \{n - d + 1, n - c + 1\}] = I_2.$$

Portanto,  $C$  pode ser transformado em  $A$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ . Assim,  $A \prec_{\widehat{B}} C$ .  $\square$

Usando este resultado e o facto de que as duas relações de ordem parcial coincidirem nas classes  $\mathcal{A}(4, 1)$ ,  $\mathcal{A}(5, 2)$  (recorde-se que as duas relações de ordem parcial coincidem nas classes  $\mathcal{A}(n, 1)$ ,  $\mathcal{A}(n, 2)$ , qualquer que seja o inteiro positivo  $n$ ), concluimos o próximo resultado.

**Corolário 2.1.** [14] *A ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem nas classes  $\mathcal{A}(3, 3)$ ,  $\mathcal{A}(4, 3)$ ,  $\mathcal{A}(5, 3)$ .*

Usando o exemplo 2.5 mostraremos que as duas relações de ordem parcial não coincidem em  $\mathcal{A}(n, 3)$ , para  $7 \leq n$ .

Sejam  $A, C$  e  $D$  as matrizes descritas no exemplo 2.5.

Sejam

$$X_A = A[\{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\}], \quad X_C = C[\{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\}]$$

e

$$X_D = D[\{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\}].$$

**Caso 1:**  $\mathcal{A}(7, 3)$ .

Se

$$V_7 = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & X_V & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

com  $V \in \{A, C, D\}$  então, usando argumentos análogos aos do exemplo 2.5, concluimos que

$$A_7 \prec_B D_7 \prec_B C_7.$$

Mas  $D_7$  e  $A_7$  são incomparáveis pela ordem de Bruhat Secundária.

**Caso 2:**  $\mathcal{A}(8, 3)$ .

Se

$$V_8 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & X_V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

com  $V \in \{A, C, D\}$  então, usando argumentos análogos aos do exemplo 2.5 concluimos que

$$A_8 \prec_B D_8 \prec_B C_8.$$

Mas  $D_8$  e  $A_8$  são incomparáveis pela ordem de Bruhat Secundária.

**Caso 3:**  $\mathcal{A}(n, 3)$ , com  $9 \leq n$ .

Se

$$V_n = \left[ \begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline 0 & G \end{array} \right],$$

com  $V \in \{A, C, D\}$  e  $G \in \mathcal{A}(n - 6, 3)$  então, usando argumentos análogos aos do exemplo 2.5 concluimos que

$$A_n \prec_B D_n \prec_B C_n.$$

Mas  $D_n$  e  $A_n$  são incomparáveis pela ordem de Bruhat Secundária.

2.3.2 A classe  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $R = (2^m)$  ou  $R = (1^m)$

Nesta secção vamos mostrar que a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem nas classes  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $R = (1^m)$  ou  $R = (2^m)$ .

Os próximos dois lemas permitir-nos-ão identificar submatrizes  $I_2$  numa matriz  $A$  coberta por uma matriz  $C$ , pela ordem de Bruhat, onde  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  e  $R = (2^m)$ .

**Lema 2.3.** [4] *Sejam  $A$  e  $C$  matrizes de uma classe  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , sejam  $i$  e  $j$  inteiros com  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$ . Sejam  $s$  e  $t$  com  $(s, t)$  lexicograficamente maximal tal que*

$$\text{se } (r, c) \in \{i, \dots, s-1\} \times \{j, \dots, t-1\} \Rightarrow \sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

*Então, existe  $(i_0, j_0) \in \{i+1, \dots, s\} \times \{j+1, \dots, t\}$  tal que  $a_{i_0, j_0} = 1$ .*

□

Em [5], o Lema 4.3 de [4] foi generalizado de matrizes de uma classe da forma  $\mathcal{A}(n, k)$  para matrizes de uma classe  $\mathcal{A}(R, S)$  e resultou no lema seguinte.

**Lema 2.4.** [5] *Sejam  $A$  e  $C$  matrizes de uma classe  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , e sejam  $i$  e  $j$  inteiros com  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$ . Sejam  $s$  e  $t$  inteiros com  $(s, t)$  lexicograficamente minimal tal que*

$$\text{Se } (r, c) \in \{s+1, \dots, i\} \times \{t+1, \dots, j\} \Rightarrow \sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

*Então, existe  $(i_0, j_0) \in \{s+1, \dots, i\} \times \{t+1, \dots, j\}$  tal que  $a_{i_0, j_0} = 1$ .*

□

Os lemas atrás enunciados serão utilizados para provar que  $A \preceq_{\widehat{B}} C$  quando  $A$  é coberto por  $C$  pela ordem de Bruhat, onde  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  e  $R = (2^m)$ . O objectivo destes lemas é o de localizar uma submatriz  $I_2$  de  $A$  tal que:

- Se temos uma posição  $(i, j)$  na matriz  $A$  tal que  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$  e  $a_{i,j} = 1$ , então vamos usar o Lema 2.3 para concluir que existe  $(i_0, j_0) \in \{i+1, \dots, m\} \times \{j+1, \dots, n\}$  com  $a_{i_0, j_0} = 1$ , e para quaisquer

$$(r, c) \in \{i, \dots, i_0-1\} \times \{j, \dots, j_0-1\} \text{ temos } \sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

- Se temos uma posição  $(i, j)$  na matriz  $A$  tal que  $\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,j}(C)$ ,  $a_{i,j} = 1$  e  $\sigma_{i-1, j-1}(C) < \sigma_{i-1, j-1}(A)$  então vamos usar o Lema 2.4 para dizer que existe  $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, i-1\} \times \{1, \dots, j-1\}$  com  $a_{i_0, j_0} = 1$  e para quaisquer

$$(r, c) \in \{i_0, \dots, i-1\} \times \{j_0, \dots, j-1\} \text{ temos } \sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Proposição 2.2.** [14] *Sejam  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  tais que  $C$  cobre  $A$  pela ordem de Bruhat. Sejam  $p, f, g$  e  $l$ , inteiros com  $1 \leq p < l \leq m$  e  $1 \leq f < g \leq n$ , tais que*

$$A[\{p, l\}; \{f, g\}] = I_2,$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{p, \dots, l-1\} \times \{f, \dots, g-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Então  $A \preceq_{\widehat{B}} C$ .

**Demonstração:** O intercâmbio  $I_2 \rightarrow L_2$  que substitui  $A[\{p, l\}; \{f, g\}] = I_2$  por  $L_2$  resulta numa matriz  $D$  tal que  $A \preceq_{\widehat{B}} D$ . Pelo Lema 2.2, para quaisquer  $(r, c) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(D) = \begin{cases} \sigma_{r,c}(A) - 1 & \text{se } (r, c) \in \{p, \dots, l-1\} \times \{f, \dots, g-1\} \\ \sigma_{r,c}(A) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Visto que

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

para quaisquer  $(r, c) \in \{p, \dots, l-1\} \times \{f, \dots, g-1\}$ , e  $A \prec_B C$  concluímos que  $A \prec_B D \preceq_B C$ . Usando o facto que  $C$  cobre  $A$  pela ordem de Bruhat temos que  $D = C$ , e então  $A \preceq_{\widehat{B}} C$ .  $\square$

**Proposição 2.3.** [14] *Sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  matrizes pertencentes a  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , e sejam  $i$  e  $j$  inteiros com  $1 < i$ ,  $1 < j$ ,  $c_{i,j} \leq a_{i,j}$ ,*

$$\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,j}(C) \text{ e } \sigma_{i-1,j}(C) < \sigma_{i-1,j}(A).$$

Então  $\sigma_{i-1,j-1}(C) < \sigma_{i-1,j-1}(A)$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $\sigma_{i-1,j-1}(A) = \sigma_{i-1,j-1}(C)$ . Uma vez que

$$\sigma_{i,j}(A) = a_{i,j} + \sigma_{i-1,j}(A) + \sigma_{i,j-1}(A) - \sigma_{i-1,j-1}(A),$$

e

$$\sigma_{i,j}(C) = c_{i,j} + \sigma_{i-1,j}(C) + \sigma_{i,j-1}(C) - \sigma_{i-1,j-1}(C),$$

temos, usando as hipóteses,

$$0 \leq (\sigma_{i-1,j}(C) - \sigma_{i-1,j}(A)) + (\sigma_{i,j-1}(C) - \sigma_{i,j-1}(A)).$$

Como  $\sigma_{i-1,j}(C) < \sigma_{i-1,j}(A)$  concluímos que  $\sigma_{i,j-1}(A) < \sigma_{i,j-1}(C)$ , o que é impossível pois  $A \prec_B C$ . Por isso  $\sigma_{i-1,j-1}(C) < \sigma_{i-1,j-1}(A)$ .  $\square$

De modo análogo obtemos a demonstração do próximo resultado.

**Proposição 2.4.** [14] *Sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  matrizes pertencentes a  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , e sejam  $i$  e  $j$  inteiros com  $1 < i$ ,  $1 < j$ ,  $c_{i,j} \leq a_{i,j}$ ,*

$$\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,j}(C) \text{ e } \sigma_{i,j-1}(C) < \sigma_{i,j-1}(A).$$

Então  $\sigma_{i-1,j-1}(C) < \sigma_{i-1,j-1}(A)$ .  $\square$

**Proposição 2.5.** [14] *Sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  matrizes pertencentes a  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , e sejam  $i$  e  $j$  inteiros, com  $1 < i$ , e tais que  $c_{i,j} \leq a_{i,j}$ ,*

$$\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,j}(C) \quad e \quad \sigma_{i-1,j}(C) < \sigma_{i-1,j}(A).$$

Então  $1 < j$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $j = 1$ . Como  $\sigma_{i-1,j}(C) < \sigma_{i-1,j}(A)$  temos que

$$\sigma_{i,j}(C) = c_{i,j} + \sigma_{i-1,j}(C) \leq a_{i,j} + \sigma_{i-1,j}(C) < a_{i,j} + \sigma_{i-1,j}(A) = \sigma_{i,j}(A).$$

Consequentemente,

$$\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A),$$

o que contradiz uma das hipóteses. Portanto  $1 < j$ . □

Com uma demonstração análoga obtemos o resultado seguinte.

**Proposição 2.6.** [14] *Sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  matrizes pertencentes a  $\mathcal{A}(R, S)$  com  $A \prec_B C$ , e sejam  $i$  e  $j$  inteiros, com  $1 < j$ , e tais que  $c_{i,j} \leq a_{i,j}$ ,*

$$\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,j}(C) \quad e \quad \sigma_{i,j-1}(C) < \sigma_{i,j-1}(A).$$

Então  $1 < i$ . □

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado principal desta secção.

**Teorema 2.3.** [14] *Sejam  $R = (2^m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo tais que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ . Então a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem na classe  $\mathcal{A}(R, S)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $C$  duas matrizes da classe  $\mathcal{A}(R, S)$ . Sabemos que se  $A \prec_{\widehat{B}} C$  então  $A \prec_B C$ . Portanto precisamos provar que se  $A \prec_B C$  então  $A \prec_{\widehat{B}} C$ . Uma vez que basta mostrar esta implicação quando  $C$  cobre  $A$ , vamos então assumir que  $C$  cobre  $A$  para a ordem de Bruhat.

A demonstração será dividida em vários casos alguns dos quais se dividem em vários subcasos. Em cada um deles vamos determinar inteiros  $p, f, g$  e  $l$ , com  $1 \leq p < l \leq m$ ,  $1 \leq f < g \leq n$ , tais que

$$A[\{p, l\}; \{f, g\}] = I_2,$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{p, \dots, l-1\} \times \{f, \dots, g-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Nestas condições, usando a proposição 2.2 concluímos que  $A \prec_{\widehat{B}} C$ , como pretendido.

Como  $A \prec_B C$ , existe uma posição  $(i, j)$  tal que  $a_{i,j} = 1$  e  $\sigma_{i,j}(C) < \sigma_{i,j}(A)$  (a primeira posição, pela relação de ordem lexicográfica, onde  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_C$  diferem

satisfaz esta condição). Escolhemos uma posição  $(i, j)$  nestas condições, de modo que  $i + j$  seja o maior possível.

Aplicando o Lema 2.3, concluímos que existe um par  $(i_0, j_0) \in \{i + 1, \dots, m\} \times \{j + 1, \dots, n\}$  tal que  $a_{i_0, j_0} = 1$ , e para quaisquer  $(r, c) \in \{i, \dots, i_0 - 1\} \times \{j, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Escolhemos uma posição  $(i_0, j_0)$  nas condições anteriores com  $i_0 + j_0$  o menor possível. Consideremos três casos:

**Caso 1 :**  $a_{i_0, j} = a_{i, j_0} = 0$ .

Então

$$A[\{i, i_0\}; \{j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i, \dots, i_0 - 1\} \times \{j, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Caso 2 :**  $a_{i_0, j} = 1$ .

Uma vez que  $i < i_0$  e  $a_{i_0, j} = 1$ , pela condição de maximalidade de  $i + j$ , sabemos que  $\sigma_{i_0, j}(A) = \sigma_{i_0, j}(C)$ . Também sabemos que  $\sigma_{i_0-1, j}(C) < \sigma_{i_0-1, j}(A)$  e  $a_{i_0, j} = 1$ . Portanto  $c_{i_0, j} \leq a_{i_0, j}$  e como  $1 \leq i < i_0$ , pelas proposições 2.5 e 2.3 temos que  $1 < j$ , e  $\sigma_{i_0-1, j-1}(C) < \sigma_{i_0-1, j-1}(A)$ .

Aplicando o Lema 2.4, existe um par  $(i_1, j_1) \in \{1, \dots, i_0 - 1\} \times \{1, \dots, j - 1\}$  tal que  $a_{i_1, j_1} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Escolhemos uma posição  $(i_1, j_1)$  com  $i_1 + j_1$  tão grande quanto possível. Agora temos três subcasos.

**Subcaso 2.1 :**  $i_1 = i$ .

Então

$$A[\{i, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & * \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo  $*$  uma entrada desconhecida.

Visto que cada linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1 temos que  $a_{i, j_0} = 0$  e  $a_{i_0, j_1} = 0$ . Portanto  $A[\{i, i_0\}; \{j_1, j_0\}] = I_2$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 2.2 :**  $i < i_1$ .

Então

$$A[\{i, i_1, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 1 & * & * \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Visto que cada linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1 temos que  $a_{i_0, j_1} = 0$ .

Se  $a_{i_1, j} = 0$ , então  $A[\{i_1, i_0\}; \{j_1, j\}] = I_2$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_1, j} = 1$ , então

$$A[\{i, i_1, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Consequentemente,  $a_{i_1, j_0} = 0$  e  $A[\{i_1, i_0\}; \{j_1, j_0\}] = I_2$ . Visto que para quaisquer  $(r, c) \in \{i, \dots, i_0 - 1\} \times \{j, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

concluimos que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 2.3 :**  $i_1 < i$ .

Então

$$A[\{i_1, i, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Visto que cada linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1, temos que  $a_{i_0, j_1} = 0$ . Vamos considerar três subcasos.

**Subcaso 2.3.1 :**  $a_{i_1, j} = 0$ .

Então  $A[\{i_1, i_0\}; \{j_1, j\}] = I_2$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 2.3.2 :**  $a_{i_1, j} = 1$  e  $\sigma_{i_1, j}(C) < \sigma_{i_1, j}(A)$ .

Então

$$A[\{i_1, i, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & * \\ * & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Aplicando o Lema 2.3, existe um par  $(i_2, j_2) \in \{i_1 + 1, \dots, m\} \times \{j + 1, \dots, n\}$  tal que  $a_{i_2, j_2} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_2 - 1\} \times \{j, \dots, j_2 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Como  $\sigma_{i_0,j}(A) = \sigma_{i_0,j}(C)$ , concluímos que  $i_2 \leq i_0$ . Já identificámos as duas posições na linha  $i_1$  de  $A$  ocupadas por 1's;  $(i_1, j_1)$  e  $(i_1, j)$ . Então  $a_{i_1, j_2} = 0$ .

Se  $a_{i_2, j} = 0$  então  $i_2 \neq i_0$  e

$$A[\{i_1, i_2, i_0\}; \{j_1, j, j_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Portanto  $A[\{i_1, i_2\}; \{j, j_2\}] = I_2$ , e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_2 - 1\} \times \{j, \dots, j_2 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_2, j} = 1$  então  $a_{i_2, j_1} = 0$  e

$$A[\{i_1, i_2\}; \{j_1, j, j_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto  $A[\{i_1, i_2\}; \{j_1, j_2\}] = I_2$ . Uma vez que  $i_2 \leq i_0$ , para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i - 1\} \times \{j_1, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_2 - 1\} \times \{j, \dots, j_2 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Assim, concluímos que para todo  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_2 - 1\} \times \{j_1, \dots, j_2 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 2.3.3 :**  $a_{i_1, j} = 1$  e  $\sigma_{i_1, j}(A) = \sigma_{i_1, j}(C)$ .

Então

$$A[\{i_1, i, i_0\}; \{j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & * \\ * & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Como  $1 < j$  e  $\sigma_{i_1, j-1}(C) < \sigma_{i_1, j-1}(A)$ , pela proposição 2.6, temos que  $1 < i_1$ , e pela proposição 2.3 temos que  $\sigma_{i_1-1, j-1}(C) < \sigma_{i_1-1, j-1}(A)$ .

Aplicando o Lema 2.4, existe um par  $(i_3, j_3) \in \{1, \dots, i_1 - 1\} \times \{1, \dots, j - 1\}$  tal que  $a_{i_3, j_3} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_3, \dots, i_1 - 1\} \times \{j_3, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Então

$$A[\{i_3, i_1, i, i_0\}; \{j_3, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Se  $a_{i_3,j} = 0$  e  $j_1 \leq j_3$  então

$$A[\{i_3, i_1, i, i_0\}; \{j_1, j_3, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & * \\ 1 & * & 1 & * \\ * & * & 1 & * \\ * & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Portanto

$$A[\{i_3, i_0\}; \{j_3, j\}] = I_2,$$

e uma vez que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_1, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_1, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_3, \dots, i_1 - 1\} \times \{j_3, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

concluimos que para todo  $(r, c) \in \{i_3, \dots, i_0 - 1\} \times \{j_3, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_3,j} = 0$  e  $j_3 < j_1$ , então

$$A[\{i_3, i_1, i, i_0\}; \{j_3, j_1, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & 1 & * \\ * & * & 1 & * \\ 0 & * & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Consequentemente

$$A[\{i_3, i_1\}; \{j_3, j\}] = I_2,$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_3, \dots, i_1 - 1\} \times \{j_3, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_3,j} = 1$  e  $\sigma_{i_3,j}(C) < \sigma_{i_3,j}(A)$ , então

$$A[\{i_3, i_1, i, i_0\}; \{j_3, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & * \\ * & 1 & * \\ * & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida. Assim vamos argumentar como fizemos no subcaso 2.3.2, com as linhas  $i_3, i, i_0$  e as colunas  $j_3, j, j_0$ .

Se  $a_{i_3,j} = 1$  e  $\sigma_{i_3,j}(A) = \sigma_{i_3,j}(C)$ , então vamos repetir este *Subcaso* 2.3.3, com as linhas  $i_3, i, i_0$  e as colunas  $j_3, j, j_0$ . Este processo termina porque o número de linhas  $A$  é finito.

**Caso 3 :**  $a_{i,j_0} = 1$  e  $a_{i_0,j} = 0$ .

Uma vez que  $j < j_0$  e  $a_{i,j_0} = 1$ , pela condição de maximalidade de  $i + j$ , sabemos que  $\sigma_{i,j_0}(A) = \sigma_{i,j_0}(C)$ . Também sabemos que  $\sigma_{i,j_0-1}(C) < \sigma_{i,j_0-1}(A)$  e  $c_{i,j_0} \leq a_{i,j_0}$  pois  $a_{i,j_0} = 1$ . Assim, pela proposições 2.6 e 2.3 temos  $1 < i$  e  $\sigma_{i-1,j_0-1}(C) < \sigma_{i-1,j_0-1}(A)$ . Aplicando o Lema 2.4, existe um par  $(i_4, j_4) \in \{1, \dots, i-1\} \times \{1, \dots, j_0-1\}$  tal que  $a_{i_4, j_4} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Consideremos agora três subcasos:

**Subcaso 3.1** :  $j_4 = j$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida. Este subcaso será ainda dividido em mais três subcasos:

**Subcaso 3.1.1** :  $a_{i_4, j_0} = 0$ .

Então  $A[\{i_4, i_0\}; \{j, j_0\}] = I_2$ . Usando o facto de que para qualquer par  $(r, c) \in \{i, \dots, i_0-1\} \times \{j, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e como para qualquer par  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

concluimos que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_0-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 3.1.2** :  $a_{i_4, j_0} = 1$  e  $\sigma_{i_4, j_0}(C) < \sigma_{i_4, j_0}(A)$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema 2.3, existe um par  $(i_5, j_5) \in \{i_4+1, \dots, m\} \times \{j_0+1, \dots, n\}$  tal que  $a_{i_5, j_5} = 1$  e para qualquer par  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_5-1\} \times \{j_0, \dots, j_5-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Suponhamos que  $i < i_5$ . então  $\sigma_{i, j_0}(C) < \sigma_{i, j_0}(A)$ . Como  $j < j_0$ , usando a condição de maximalidade de  $i + j$  obtemos uma contradição. Assim sendo  $i_5 \leq i$ . Visto que qualquer linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1 temos que  $a_{i_5, j_4} = 0$  e portanto  $i_5 < i$ . Além disso,  $a_{i_5, j_4} = 0$  ou  $a_{i_5, j} = 0$ .

Se  $a_{i_5, j_4} = 0$  então

$$A[\{i_4, i_5\}; \{j_4, j_0, j_5\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Consequentemente  $A[\{i_4, i_5\}; \{j_4, j_5\}] = I_2$ . Como para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_5-1\} \times \{j_0, \dots, j_5-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

concluimos que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_5-1\} \times \{j_4, \dots, j_5-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_5, j_4} = 1$  então  $a_{i_5, j_0} = 0$  e

$$A[\{i_4, i_5\}; \{j_4, j_0, j_5\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente  $A[\{i_4, i_5\}; \{j_0, j_5\}] = I_2$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_5-1\} \times \{j_0, \dots, j_5-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 3.1.3 :**  $a_{i_4, j_0} = 1$  e  $\sigma_{i_4, j_0}(A) = \sigma_{i_4, j_0}(C)$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $1 < j_0$ ,  $c_{i_4, j_0} \leq a_{i_4, j_0}$  e  $\sigma_{i_4, j_0-1}(C) < \sigma_{i_4, j_0-1}(A)$ , pela proposição 2.6 temos  $1 < i_4$ . Usando a proposição 2.3 concluimos que  $\sigma_{i_4-1, j_0-1}(C) < \sigma_{i_4-1, j_0-1}(A)$ .

Aplicando o Lema 2.4, existe um par  $(i_6, j_6) \in \{1, \dots, i_4-1\} \times \{1, \dots, j_0-1\}$  tal que  $a_{i_6, j_6} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_6, \dots, i_4-1\} \times \{j_6, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Consideremos três subcasos:

**Subcaso 3.1.3.1 :**  $j_6 = j$ . Argumentamos como no caso 3.1.

**Subcaso 3.1.3.2 :**  $j < j_6$ . Argumentamos como no caso 3.2.

**Subcaso 3.1.3.3 :**  $j_6 < j$ . Argumentamos como no caso 3.3.

Este processo termina porque o número de linhas de  $A$  é finito.

**Subcaso 3.2 :**  $j < j_4$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_4, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Visto que qualquer linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1 temos que  $a_{i, j_4} = 0$ . Consideremos três subcasos:

**Subcaso 3.2.1 :**  $a_{i_4, j_0} = 0$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_4, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Consequentemente  $A[\{i_4, i\}; \{j_4, j_0\}] = I_2$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 3.2.2 :**  $a_{i_4, j_0} = 1$  e  $\sigma_{i_4, j_0}(C) < \sigma_{i_4, j_0}(A)$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_4, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Aplicando o Lema 2.3, existe um par  $(i_7, j_7) \in \{i_4+1, \dots, m\} \times \{j_0+1, \dots, n\}$  tal que  $a_{i_7, j_7} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_7-1\} \times \{j_0, \dots, j_7-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Suponhamos que  $i < i_7$ . Então  $\sigma_{i, j_0}(C) < \sigma_{i, j_0}(A)$ . Usando a condição de maximalidade de  $i+j$  obtemos uma contradição. Assim sendo  $i_7 \leq i$ .

Visto que qualquer linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1, temos que  $a_{i_4, j_7} = 0$  e portanto  $i_7 < i$ . Além disso,  $a_{i_7, j_4} = 0$  ou  $a_{i_7, j} = 0$ .

Se  $a_{i_7, j_4} = 0$ , então

$$A[\{i_4, i_7\}; \{j_4, j_0, j_7\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Consequentemente  $A[\{i_4, i_7\}; \{j_4, j_7\}] = I_2$ .

Uma vez que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i-1\} \times \{j_4, \dots, j_0-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_7-1\} \times \{j_0, \dots, j_7-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A),$$

concluimos que para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_7-1\} \times \{j_4, \dots, j_7-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_7, j_4} = 1$  então  $a_{i_7, j_0} = 0$  e

$$A[\{i_4, i_7\}; \{j_4, j_0, j_7\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente  $A[\{i_4, i_7\}; \{j_0, j_7\}] = I_2$ , e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i_7-1\} \times \{j_0, \dots, j_7-1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

**Subcaso 3.2.3 :**  $a_{i_4, j_0} = 1$  e  $\sigma_{i_4, j_0}(A) = \sigma_{i_4, j_0}(C)$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j, j_4, j_0\}] = \begin{bmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Como  $1 < j_0$  e  $\sigma_{i_4, j_0-1}(C) < \sigma_{i_4, j_0-1}(A)$ , pela proposição 2.6 temos que  $1 < i_4$ .

Usando a proposição 2.3, obtemos que  $\sigma_{i_4-1, j_0-1}(C) < \sigma_{i_4-1, j_0-1}(A)$ .

Aplicando o Lema 2.4, existe um par  $(i_8, j_8) \in \{1, \dots, i_4 - 1\} \times \{1, \dots, j_0 - 1\}$  tal que  $a_{i_8, j_8} = 1$  e para quaisquer  $(r, c) \in \{i_8, \dots, i_4 - 1\} \times \{j_8, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Consideremos agora três subcasos.

**Subcaso 3.2.3.1 :**  $j_8 = j$ . Argumentamos como no caso 3.1.

**Subcaso 3.2.3.2 :**  $j < j_8$ . Argumentamos como no caso 3.2.

**Subcaso 3.2.3.3 :**  $j_8 < j$ . Argumentamos como no caso 3.3.

Este processo termina porque o número de linhas de  $A$  é finito.

*Subcaso 3.3 :*  $j_4 < j$ .

Então

$$A[\{i_4, i, i_0\}; \{j_4, j, j_0\}] = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & 1 \\ * & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $*$  denota uma entrada desconhecida.

Visto que qualquer linha de  $A$  contém exatamente duas entradas iguais a 1 temos que  $a_{i, j_4} = 0$ . Além disso,  $a_{i_4, j} = 0$  ou  $a_{i_4, j_0} = 0$ .

Se  $a_{i_4, j} = 0$ , então  $A[\{i_4, i\}; \{j_4, j\}] = I_2$  e para qualquer par  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i - 1\} \times \{j_4, \dots, j - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

Se  $a_{i_4, j_0} = 0$ , então  $A[\{i_4, i\}; \{j_4, j_0\}] = I_2$  e para qualquer par  $(r, c) \in \{i_4, \dots, i - 1\} \times \{j_4, \dots, j_0 - 1\}$ ,

$$\sigma_{r,c}(C) < \sigma_{r,c}(A).$$

□

**Corolário 2.2.** [14] *Seja  $R = (1^m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo tais que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ . Então a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária coincidem na classe  $\mathcal{A}(R, S)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  tais que  $A \preceq_B C$ . Seja  $D$  a matriz do tipo  $m$  por  $n + 1$  tal que a primeira coluna tem todas as entradas iguais a 1 e removendo a primeira coluna obtemos a matriz  $A$ . De modo análogo, seja  $E$  a matriz do tipo

$m$  por  $n + 1$  tal que a primeira coluna tem todas as entradas iguais a 1 e removendo a primeira coluna obtemos a matriz  $C$ . Então a matriz  $D$  e a matriz  $E$  são matrizes pertencentes a  $\mathcal{A}(U, V)$  com  $U = (2^m)$  e  $V = (m, s_1, \dots, s_n)$ . Visto que  $A \preceq_B C$  obtemos que  $D \preceq_B E$ . Pelo Teorema anterior  $D \preceq_{\widehat{B}} E$ . Como as primeiras colunas de  $D$  e de  $E$  têm todas as entradas iguais a 1 concluímos que  $A \preceq_{\widehat{B}} C$ .  $\square$

## 2.4 Inversões e a questão de M. Ghebleh

Nesta secção vamos dar uma resposta a uma questão colocada por M. Ghebleh em [19]. Nesse artigo o autor introduziu o conceito de inversão numa matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ . Este conceito generaliza, para matrizes de  $\mathcal{A}(R, S)$ , o conceito de inversão numa matriz de permutação. Nesta secção  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  são duas partições do mesmo inteiro positivo.

**Definição 2.3.** *Uma inversão em  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{A}(R, S)$  consiste em dois elementos  $a_{i,j} = a_{k,l} = 1$  tais que  $(i - k)(j - l) < 0$ .*

O número total de inversões em  $A$  será denotado por  $\nu(A)$ .

**Exemplo 2.6.** *Consideremos a matriz*

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}((3, 2, 2), (2, 2, 2, 1)).$$

*As inversões em  $A$  são:*

$a_{1,3} = a_{2,2} = 1$ ,  $a_{1,3} = a_{3,1} = 1$ ,  $a_{1,3} = a_{3,2} = 1$ ,  $a_{1,4} = a_{2,2} = 1$ ,  $a_{1,4} = a_{2,3} = 1$ ,  $a_{1,4} = a_{3,1} = 1$ ,  $a_{1,4} = a_{3,2} = 1$ ,  $a_{2,2} = a_{3,1} = 1$ ,  $a_{2,3} = a_{3,1} = 1$  e  $a_{2,3} = a_{3,2} = 1$ . Portanto,  $\nu(A) = 10$

Nesse artigo de 2014, M. Ghebleh provou que a ordem de Bruhat Secundária é monótona em relação ao número de inversões, isto é,

**Proposição 2.7.** [19] *Se  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  e  $A \prec_{\widehat{B}} C$  então  $\nu(A) < \nu(C)$ .*

No mesmo artigo, [19], M. Ghebleh colocou ainda a seguinte questão:

**Questão:** Se  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  são tais que  $A \prec_B C$ , será que  $\nu(A) < \nu(C)$ ?

Nesta secção mostraremos que a resposta a esta questão é afirmativa. Assim, o Teorema principal desta secção é o seguinte:

**Teorema 2.4.** [16] *Sejam  $A, C \in \mathcal{A}(R, S)$  tais que  $A \prec_B C$ . Então  $\nu(A) < \nu(C)$ .*

Para provar este Teorema necessitamos de generalizar a noção de intercâmbio de uma matriz de zeros e uns para uma matriz com entradas reais. Isso será feito na subsecção 2.4.1. Note-se que esta generalização já pode ser encontrada em [3]. A demonstração do Teorema 2.4 será feita na subsecção 2.4.2.

### 2.4.1 Os intercâmbios-( $b$ )

Nesta subsecção apresentamos a definição de intercâmbio numa matriz com entradas reais e alguns resultados importantes para a secção seguinte.

**Definição 2.4.** *Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz real do tipo  $m$  por  $n$ , com  $m$  e  $n$  inteiros superiores a 1 e seja  $b$  um número real. Sejam  $1 \leq k < l \leq m$ ,  $1 \leq p < r \leq n$  inteiros e seja  $E_{\{k,l;p,r\}}^{(b)} = [e_{ij}]$  a matriz real do tipo  $m$  por  $n$ , com todas entradas iguais a zero, exceto*

$$E_{\{k,l;p,r\}}^{(b)}[\{k, l\}; \{p, r\}] = \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix}.$$

*Diz-se que a matriz real  $D$  do tipo  $m$  por  $n$  é obtida da matriz  $A$  por um intercâmbio-( $b$ ), na submatriz  $A[\{k, l\}; \{p, r\}]$  se*

$$D - A = E_{\{k,l;p,r\}}^{(b)}.$$

Da Definição 2.4 tem-se:

- Quando a localização do intercâmbio-( $b$ ) não é importante ou é óbvia, omitimos a submatriz onde este ocorre.
- Algumas vezes omitimos o número real  $b$  e apenas escrevemos o intercâmbio.

**Observações 2.1.** 1. *Pela Definição 2.4 a matriz  $D$  é obtida de  $A$  substituindo a submatriz*

$$A[\{k, l\}; \{p, r\}] = \begin{bmatrix} a_{k,p} & a_{k,r} \\ a_{l,p} & a_{l,r} \end{bmatrix}$$

*pela*

$$D[\{k, l\}; \{p, r\}] = \begin{bmatrix} a_{k,p} - b & a_{k,r} + b \\ a_{l,p} + b & a_{l,r} - b \end{bmatrix}.$$

2. *Se  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio, então as duas matrizes têm a mesma seqüência das somas das linhas e a mesma seqüência das somas das colunas.*

**Exemplo 2.7.** *Consideremos as matrizes com entradas reais*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 9 \\ 1 & -5 & \frac{3}{4} \\ \sqrt{2} & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 9 \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{3}{4} \\ \sqrt{2} & -1 & 4 \\ \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

*Como*

$$D - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

*então  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio-( $\frac{1}{2}$ ).*

Se  $D$  é uma matriz real obtida de  $A$  por um intercâmbio-(0) então  $D = A$ . Se  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  então também podemos dizer que  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio-( $-1$ ). Porem a afirmação recíproca não é válida.

**Exemplo 2.8.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$C - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $C$  e  $D$  são obtidas de  $A$  por um intercâmbio- $(-1)$ . No entanto,  $C$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  e  $D$  não verifica isso.

Se  $A$  e  $D$  são matrizes- $(0, 1)$  com a mesma sequência das somas das linhas e a mesma sequência das somas das colunas e tal que  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio  $I_2 \rightarrow L_2$ , então podemos dizer que  $D$  é obtida de  $A$  por um intercâmbio- $(1)$ .

Dado um número real  $b$ , é fácil relacionar duas matrizes pela ordem Bruhat quando uma é obtida da outra por um intercâmbio- $(b)$ . A proposição seguinte não é mais do que uma generalização do Lema 2.2 às matrizes reais.

**Proposição 2.8.** [16] *Sejam  $A$  uma matriz real do tipo  $m$  por  $n$ ,  $b$  um número real e,  $1 \leq k < l \leq n$ ,  $1 \leq p < r \leq n$  inteiros. Seja  $D$  uma matriz real obtida de  $A$  pelo intercâmbio- $(b)$  na submatriz  $A[\{k, l\}; \{p, r\}]$ . Seja  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ . Então*

$$\sigma_{i,j}(D) = \begin{cases} \sigma_{i,j}(A) - b & \text{se } (i, j) \in \{k, \dots, l-1\} \times \{p, \dots, r-1\} \\ \sigma_{i,j}(A) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Observações 2.2.** *Seja  $D$  uma matriz obtida de uma matriz real  $A$  por um intercâmbio- $(b)$ .*

- Se  $0 < b$ , então  $A \prec_B D$ .
- Se  $b < 0$ , então  $D \prec_B A$ .

Usando as últimas observações obtemos o próximo resultado.

**Proposição 2.9.** [16] *Sejam  $A$  e  $D$  duas matrizes reais com a mesma sequência das somas das linhas e a mesma sequência das somas das colunas. Se  $D$  é obtida de  $A$  por uma sequência de intercâmbios não negativos então  $A \preceq_B D$ .*

#### 2.4.2 Resposta à questão colocada por M. Ghebleh

Nesta subsecção vamos demonstrar o Teorema 2.4, dando assim uma resposta afirmativa à questão colocada por M. Ghebleh. Com esse objetivo em mente, vamos começar por definir, no conjunto das matrizes reais, uma função que quando restrita a  $\mathcal{A}(R, S)$  nos dá o número total de inversões da matriz.

**Definição 2.5.** [16] *Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz real do tipo  $m$  por  $n$ ,  $m > 1$ . Denotamos por  $\xi(A)$  o número real*

$$\xi(A) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=2}^n (\sigma_{m,j-1}(A) - \sigma_{i,j-1}(A))a_{i,j}.$$

**Exemplo 2.9.** *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Então*

$$\begin{aligned} \xi(A) &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=2}^3 (\sigma_{2,j-1}(A) - \sigma_{i,j-1}(A))a_{i,j} \\ &= (\sigma_{2,1}(A) - \sigma_{1,1}(A))a_{1,2} + (\sigma_{2,2}(A) - \sigma_{1,2}(A))a_{1,3} \\ &= (1 - 1)2 + (2 - 3)\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Lema 2.5.** [16] *Seja  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}(R, S)$ . Então  $\xi(A) = \nu(A)$ .*

**Demonstração:** *Seja  $(p, q) \in \{1, \dots, m\} \times \{2, \dots, n\}$  tal que  $a_{p,q} = 1$ . Pela definição,*

$$(\sigma_{m,q-1}(A) - \sigma_{p,q-1}(A))a_{p,q},$$

*conta o número total de 1's em  $A[\{p+1, \dots, m\}; \{1, \dots, q-1\}]$ , ou seja, conta o número de 1's localizados no canto inferior esquerdo da entrada  $(p, q)$ . Portanto,  $(\sigma_{m,q-1}(A) - \sigma_{p,q-1}(A))a_{p,q}$ , é menor ou igual ao número de inversões que contém a posição  $(p, q)$ . Logo  $\xi(A) \leq \nu(A)$ . Seja  $(k, l) \in \{1, \dots, p-1\} \times \{q+1, \dots, n\}$  tal que  $a_{k,l} = 1$ . Como  $(\sigma_{m,l-1}(A) - \sigma_{k,l-1}(A))a_{k,l}$  conta o número de 1's localizados no canto inferior esquerdo da entrada  $a_{k,l}$  então conta a inversão formada por posições  $(p, q)$  e  $(k, l)$ . Portanto, todas as inversões que contém a posição  $(p, q)$  são contadas em  $\xi(A)$ . Então  $\nu(A) \leq \xi(A)$ , donde se conclui o pretendido.  $\square$*

**Exemplo 2.10.** *Consideremos a matriz*

$$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}((3, 2, 2), (2, 2, 2, 1))$$

*do exemplo 2.6.*

*Neste caso,*

$$\xi(A) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^4 (\sigma_{3,j-1}(A) - \sigma_{i,j-1}(A))a_{i,j}.$$

*No cálculo de  $\xi(A)$  basta considerar as entradas não nulas de  $A$ . Assim,*

$$\begin{aligned} \xi(A) &= (\sigma_{3,2}(A) - \sigma_{1,2}(A))a_{1,3} + (\sigma_{3,3}(A) - \sigma_{1,3}(A))a_{1,4} + (\sigma_{3,1}(A) - \sigma_{2,1}(A))a_{2,2} + \\ &\quad + (\sigma_{3,2}(A) - \sigma_{2,2}(A))a_{2,3} = (4 - 1)1 + (6 - 2)1 + (2 - 1)1 + (4 - 2)1 \\ &= 10, \end{aligned}$$

*como tínhamos obtido no exemplo 2.6.*

**Lema 2.6.** [16] *Sejam  $A = [a_{i,j}]$  uma matriz real do tipo  $m$  por  $n$  e  $b$  um número real. Sejam  $k, p, r$  inteiros positivos, com  $1 \leq k \leq m-1$ ,  $1 \leq p < r \leq n$ . Seja  $D$  a matriz obtida de  $A$  pelo intercâmbio- $(b)$  na submatriz  $A[\{k, k+1\}; \{p, r\}]$ . Sejam  $x = \sum_{j=p+1}^r a_{k,j}$  e  $y = \sum_{j=p}^{r-1} a_{k+1,j}$ . Então*

$$\xi(D) = \xi(A) + (x + y + b)b.$$

**Demonstração:** Por definição temos

$$\xi(D) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=2}^n (\sigma_{m,j-1}(D) - \sigma_{i,j-1}(D))d_{ij}.$$

Para simplificar a demonstração vamos considerar

$$\sigma_{i,0}(D) = \sigma_{i,0}(A) = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Seja  $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ . Se  $i < k$  ou se  $k+1 < i$  então, para todo  $j = 1, \dots, n$ ,

$$(\sigma_{m,j-1}(A) - \sigma_{i,j-1}(A))a_{i,j} = (\sigma_{m,j-1}(D) - \sigma_{i,j-1}(D))d_{i,j}.$$

Do mesmo modo, se  $i = k$  e se  $j < p$  ou  $j > r$  então

$$(\sigma_{m,j-1}(A) - \sigma_{i,j-1}(A))a_{i,j} = (\sigma_{m,j-1}(D) - \sigma_{i,j-1}(D))d_{i,j}.$$

Chegamos à mesma conclusão se  $i = k+1$  e se  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p, r\}$ .

Consideremos agora a entrada  $(k, p)$  de  $D$ . Então

$$(\sigma_{m,p-1}(D) - \sigma_{i,p-1}(D))d_{k,p} = (\sigma_{m,p-1}(A) - \sigma_{k,p-1}(A))a_{k,p} - (\sigma_{m,p-1}(A) - \sigma_{k,p-1}(A))b.$$

Para qualquer  $j = p+1, \dots, r-1$ ,

$$(\sigma_{m,j-1}(D) - \sigma_{k,j-1}(D))d_{k,j} = (\sigma_{m,j-1}(A) - \sigma_{k,j-1}(A) + b)a_{k,j},$$

e

$$\begin{aligned} (\sigma_{m,r-1}(D) - \sigma_{k,r-1}(D))d_{k,r} &= (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k,r-1}(A) + b)(a_{k,r} + b) \\ &= (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k,r-1}(A))a_{k,r} + a_{k,r}b + b^2 + \\ &\quad (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k,r-1}(A))b. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=p+1}^r (\sigma_{m,j-1}(D) - \sigma_{k,j-1}(D))d_{k,j} = \sum_{j=p+1}^r (\sigma_{m,j-1}(A) - \sigma_{k,j-1}(A))a_{k,j} + xb + b^2 + (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k,r-1}(A))b.$$

Atendendo que

$$(\sigma_{m,p-1}(D) - \sigma_{k+1,p-1}(D))d_{k+1,p} = (\sigma_{m,p-1}(A) - \sigma_{k+1,p-1}(A))(a_{k+1,p} + b),$$

e que

$$(\sigma_{m,r-1}(D) - \sigma_{k+1,r-1}(D))d_{k+1,r} = (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k+1,r-1}(A))(a_{k+1,r} - b),$$

e como

$$yb = (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k,r-1}(A))b - (\sigma_{m,p-1}(A) - \sigma_{k,p-1}(A))b + (\sigma_{m,p-1}(A) - \sigma_{k+1,p-1}(A))b - (\sigma_{m,r-1}(A) - \sigma_{k+1,r-1}(A))b,$$

concluimos a demonstração.  $\square$

**Observação 2.1.** *A partir da proposição anterior, concluimos que, se  $A$  é uma matriz real,  $0 \leq x$ ,  $0 \leq y$  e  $0 < b$  então  $\xi(A) < \xi(D)$ .*

**Definição 2.6.** *Sejam  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo tais que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$  e sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  duas matrizes de  $\mathcal{A}(R, S)$ . Seja  $k$  um inteiro positivo com  $1 \leq k \leq m$ . Denotamos por  $\mathcal{M}(k, C, A)$  a matriz  $D = [d_{i,j}]$ , do tipo  $m$  por  $n$ , tal que*

- Se  $k = 1$  então  $D = A$ ;
- Se  $k = m$  então  $D = C$ ;
- Se  $1 < k < m$  então, para todo  $1 \leq j \leq n$ ,

$$d_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{se } i < k \\ s_j - \left( \sum_{z=1}^{k-1} c_{z,j} + \sum_{z=k+1}^m a_{z,j} \right) & \text{se } i = k \\ a_{i,j} & \text{se } k < i \end{cases}.$$

**Observações 2.3.** *Nas condições da definição anterior, se  $1 < k < m$  e se  $D$  é a matriz  $\mathcal{M}(k, C, A)$  então:*

- Se  $1 \leq i < k$  então a  $i$ -ésima linha de  $D$  é igual à  $i$ -ésima linha de  $C$ ;
- Se  $k < i \leq m$  então a  $i$ -ésima linha de  $D$  é igual à  $i$ -ésima linha de  $A$ ;
- As entradas da linha  $k$  de  $D$  somam

$$\sum_{j=1}^n \left( s_j - \left( \sum_{z=1}^{k-1} c_{z,j} + \sum_{z=k+1}^m a_{z,j} \right) \right) = \sum_{j=1}^n s_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m r_i = r_k;$$

- Para  $1 \leq j \leq n$ , as entradas da coluna  $j$  de  $D$  somam

$$\sum_{z=1}^{k-1} c_{z,j} + s_j - \left( \sum_{z=1}^{k-1} c_{z,j} + \sum_{z=k+1}^m a_{z,j} \right) + \sum_{z=k+1}^m a_{z,j} = s_j.$$

**Observação 2.2.** *Atendendo à observação anterior, se  $k$  é o menor inteiro para o qual a linha  $k$  de  $A$  é diferente da linha  $k$  de  $C$  temos que  $\mathcal{M}(k, C, A) = A$ .*

O seguinte resultado, de demonstração simples, será utilizado diversas vezes na demonstração do Teorema 2.4. Para evitar a sua repetição ao longo da demonstração colocamo-lo em separado.

**Proposição 2.10.** [16] *Sejam  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo tais que  $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$  e sejam  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$  matrizes de  $\mathcal{A}(R, S)$ . Seja  $k$  um inteiro positivo com  $1 \leq k \leq m$  e seja  $D = [d_{i,j}]$  a matriz  $\mathcal{M}(k, C, A)$ . Então, para  $1 \leq j \leq n$ ,*

$$\sigma_{i,j}(D) = \begin{cases} \sigma_{i,j}(C) & \text{se } i < k \\ \sigma_{i,j}(A) & \text{se } k \leq i \end{cases} .$$

**Demonstração do Teorema 2.4:** Sejam  $S = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$ . Seja  $k$  o menor inteiro tal que  $1 \leq k \leq m-1$  e a linha  $k$  de  $A$  é diferente da linha  $k$  de  $C$ . Seja  $D = [d_{i,j}]$  a matriz  $\mathcal{M}(k, C, A)$  e seja  $E = [e_{i,j}]$  a matriz  $\mathcal{M}(k+1, C, A)$ . Portanto, para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$d_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{se } i < k \\ s_j - \left( \sum_{z=1}^{k-1} c_{z,j} + \sum_{z=k+1}^m a_{z,j} \right) & \text{se } i = k \\ a_{i,j} & \text{se } k < i \end{cases} ,$$

e

$$e_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{se } i < k+1 \\ s_j - \left( \sum_{z=1}^k c_{z,j} + \sum_{z=k+2}^m a_{z,j} \right) & \text{se } i = k+1 \\ a_{i,j} & \text{se } k+1 < i \end{cases} .$$

Pela Proposição 2.10, obtém-se que  $D \prec_B E \preceq_B C$ . Uma vez que  $k$  é o menor inteiro tal que a linha  $k$  de  $A$  é diferente da linha  $k$  de  $C$  concluímos, atendendo à observação 2.2, que  $D = A$ .

Seja  $v$  o menor inteiro tal que  $e_{k,v} \neq d_{k,v}$ . Como  $D \prec_B E$  concluímos que  $e_{k,v} < d_{k,v}$ . Seja  $l$  o maior inteiro tal que  $d_{k,l} \neq e_{k,l}$  (este inteiro existe porque a soma das entradas da linha  $k$  de  $D$  é igual a soma das entradas da linha  $k$  de  $E$ ). Como  $D \prec_B E$  e  $d_{i,j} = e_{i,j}$ , para  $1 \leq i < k$  e  $1 \leq j \leq n$ , concluímos que

$$0 \leq \sigma_{k,j}(D - E) = \begin{cases} \sum_{z=v}^j (d_{k,z} - e_{k,z}) & \text{se } v \leq j < l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

logo  $d_{k,l} < e_{k,l}$ .

Seja  $p = l - v$ . Para  $1 \leq t \leq p+1$ , seja

$$b_t = d_{k,v+t-1} - e_{k,v+t-1}.$$

**Afirmção 1:** As seguintes afirmações são verdadeiras:

- $0 < b_1$ ;
- $\sum_{z=1}^{p+1} b_z = 0$ ;
- Para  $1 < t < p$ ,  $0 \leq \sum_{z=1}^t b_z$ ;
- $0 < \sum_{z=1}^p b_z$ .

*Demonstração.* Visto que  $b_1 = d_{k,v} - e_{k,v}$  e  $e_{k,v} < d_{k,v}$  então  $0 < b_1$ . Por outro lado, para  $1 < t \leq p+1$ ,

$$\sum_{z=1}^t b_z = \sum_{z=1}^t (d_{k,v+z-1} - e_{k,v+z-1}) = \sigma_{k,v+t-1}(D - E).$$

Como  $d_{k,l} < e_{k,l}$  concluímos facilmente cada uma das afirmações.  $\square$

Para  $1 \leq t \leq p$ , seja

$$g_t = \sum_{z=t}^p d_{k,v+z} + \sum_{z=1}^t b_z + \sum_{z=t-1}^{p-1} d_{k+1,v+z}.$$

**Afirmação 2:** Tem-se:

- Se  $1 \leq t \leq p$ , então

$$0 \leq e_{k,l} \leq g_t = \sum_{z=t}^p e_{k,v+z} + \sum_{z=t-1}^{p-1} d_{k+1,v+z}.$$

- Se  $1 \leq t \leq p-1$ , então

$$g_{t+1} \leq g_{t+1} + e_{k,v+t} + d_{k+1,v+t-1} = g_t.$$

*Demonstração.* Visto que

$$\sum_{z=1}^t b_z = \sum_{z=1}^t (d_{k,v+z-1} - e_{k,v+z-1}),$$

tem-se

$$g_t = \sum_{z=0}^p d_{k,v+z} - \sum_{z=0}^{t-1} e_{k,v+z} + \sum_{z=t-1}^{p-1} d_{k+1,v+z}.$$

Como

$$\sum_{z=0}^p (d_{k,v+z} - e_{k,v+z}) = 0,$$

vem

$$g_t = \sum_{z=t}^p e_{k,v+z} + \sum_{z=t-1}^{p-1} d_{k+1,v+z}.$$

Usando o facto de que a linha  $k$  de  $E$  e a linha  $(k+1)$  de  $D$  são constituídas por zeros e uns, conclui-se que  $0 \leq e_{k,l} \leq g_t$ , para  $1 \leq t \leq p$ . Além disso, se  $1 \leq t \leq p-1$  então  $g_{t+1} \leq g_{t+1} + e_{k,v+t} + d_{k+1,v+t-1} = g_t$ .  $\square$

**Afirmação 3:** Para todo o inteiro  $t$ ,  $1 \leq t \leq p$ , existe um inteiro  $w_t$ ,  $1 \leq w_t \leq t$ , tal que

$$0 \leq g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) \leq \sum_{z=1}^t g_z b_z.$$

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução sobre  $t$ . Se  $t = 1$ , pelas afirmações 1 e 2 obtém-se  $0 \leq b_1 g_1$ . Seja  $t$  é um inteiro tal que  $1 \leq t \leq p - 1$ . Suponhamos, por hipótese de indução, que existe um inteiro  $w_t$ ,  $1 \leq w_t \leq t$  tal que

$$0 \leq g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) \leq \sum_{z=1}^t g_z b_z.$$

Vamos mostrar que existe um inteiro  $w_{t+1}$ ,  $1 \leq w_{t+1} \leq t + 1$ , tal que

$$0 \leq g_{w_{t+1}} \left( \sum_{z=1}^{t+1} b_z \right) \leq \sum_{z=1}^{t+1} g_z b_z.$$

Vamos considerar dois casos:

- $0 \leq b_{t+1}$ . Pela afirmação 2 sabemos que

$$0 \leq g_{t+1} \leq g_t \leq \dots \leq g_1.$$

Assim, usando a hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_{t+1} \left( \sum_{z=1}^{t+1} b_z \right) \\ &= g_{t+1} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) + g_{t+1} b_{t+1} \\ &\leq g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) + g_{t+1} b_{t+1} \\ &\leq \sum_{z=1}^{t+1} g_z b_z. \end{aligned}$$

- $b_{t+1} < 0$ . Usando a hipótese de indução, sabemos que existe um inteiro  $w_t$ ,  $1 \leq w_t \leq t$  tal que

$$g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) + g_{t+1} b_{t+1} \leq \sum_{z=1}^{t+1} g_z b_z.$$

Como  $b_{t+1} < 0$  e  $g_{t+1} \leq g_{w_t}$  vem

$$b_{t+1} g_{w_t} \leq b_{t+1} g_{t+1}.$$

Segue-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^{t+1} b_z \right) \\ &= g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) + g_{w_t} b_{t+1} \\ &\leq g_{w_t} \left( \sum_{z=1}^t b_z \right) + g_{t+1} b_{t+1} \\ &\leq \sum_{z=1}^{t+1} g_z b_z. \end{aligned}$$

Portanto conclui-se a afirmação. □

**Afirmação 4:** As afirmações seguintes são verdadeiras:

- Se  $1 < t \leq p$ , então  $0 < g_t$ ;
- $0 < \sum_{t=1}^p g_t b_t$ .

*Demonstração.* Pela afirmação 2, se  $1 \leq t \leq p$  então

$$e_{k,l} \leq g_t = \sum_{z=t}^p e_{k,v+z} + \sum_{z=t-1}^{p-1} d_{k+1,v+z}.$$

Atendendo a que  $D = A$ , pois  $k$  é o menor inteiro para o qual a linha  $k$  de  $A$  é diferente da linha  $k$  de  $C$ , usando o facto de que  $d_{k,l} < e_{k,l}$  e que as entradas da linha  $k$  de  $E$  e  $D$  serem apenas zeros e uns, conclui-se que  $e_{k,l} = 1$ . Portanto  $0 < g_t$ . Usando a afirmação 1 tem-se que  $0 < b_1 + \dots + b_p$ . Pela afirmação 3, o resultado segue.  $\square$

Denota-se por  $X_0$  a matriz  $D$  e para  $1 \leq i \leq p$ , seja  $X_i$  a matriz que se obtém de  $X_{i-1}$  pelo intercâmbio- $(b_i)$  na submatriz

$$X_{i-1}[\{k, k+1\}; \{v+i-1, l\}].$$

Visto que  $\sum_{z=0}^p (d_{k,v+z} - e_{k,v+z}) = 0$ , então  $X_p$  é igual à matriz  $E$ .

Pelo Lema 2.6,

$$\xi(E) = \xi(D) + \sum_{t=1}^p g_t b_t.$$

Pela afirmação 3 conclui-se que

$$\xi(D) \leq \xi(E).$$

Uma vez que  $D = A$ , pela afirmação 4 e pelo Lema 2.5 vem

$$\nu(A) = \xi(D) < \xi(E).$$

Se  $E = C$  obtemos o resultado. Suponhamos que  $E \neq C$ . Seja  $f$  o menor inteiro tal que as linhas  $f$  de  $E$  e de  $C$  são diferentes. De notar que  $k < f$ . Seja  $H = [h_{ij}]$  a matriz  $\mathcal{M}(f+1, C, A)$ . Portanto  $H$  é uma do tipo  $m$  por  $n$  tal que para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$h_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{se } i < f+1 \\ s_j - (\sum_{z=1}^f c_{z,j} + \sum_{z=f+2}^m a_{z,j}) & \text{se } i = f+1 \\ a_{i,j} & \text{se } f+1 < i \end{cases}.$$

Pela proposição 2.10, obtém-se  $E \prec_B H \preceq_B C$ . Repetindo o processo com  $E$  em vez de  $D$  e  $H$  em vez de  $E$ , e a atendendo que a linha  $f$  de  $H$  e a linha  $f+1$  de  $E$  são constituídas apenas por zeros e uns, podemos provar afirmações análogas às afirmações 1,2 e 3 demonstradas anteriormente (note que afirmação 4 não é válida para a matriz  $E$  uma vez que  $E = \mathcal{M}(k+1, C, A)$  e  $k$  é o menor inteiro para o qual linha  $k$  de  $A$  e a linha  $k$  de  $C$  são distintas). Concluimos assim que  $\xi(E) \leq \xi(H)$ . Pelo Lema 2.5 obtém-se

$$\nu(A) = \xi(A) < \xi(E) \leq \xi(H).$$

Se  $H = C$ , usando o Lema 2.5 concluimos a demonstração. Se  $H \neq C$ , consideramos o menor inteiro  $g$  tal que a linha  $g$  de  $H$  é diferente da linha  $g$  de  $C$  e repetimos o

argumento. Note-se que  $f < g$ . O argumento é repetido até que se obtenha a matriz  $C$  (note-se que o número de linha é finito), e o resultado segue.  $\square$

A afirmação recíproca do Teorema 2.4 não é válida. De facto, existem matrizes incomparáveis pela ordem Bruhat e que têm o número total de inversões diferentes, como se comprova no exemplo seguinte:

**Exemplo 2.11.** *consideremos duas matrizes minimais para ordem de Bruhat em  $\mathcal{A}(7, 3)$ , (ver [7]);*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,  $A$  e  $C$  são matrizes incomparáveis pela ordem  $\preceq_B$ , e no entanto  $\nu(A) = 20$  e  $\nu(C) = 23$ .

## 2.5 Uma variante da ordem de Bruhat Secundária

Brualdi e Deaett no artigo que publicaram em 2007, [4], propuseram seis questões relacionadas com a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária. No âmbito do presente texto seleccionámos a terceira questão, na qual os autores propõem o estudo de uma variante da ordem de Bruhat Secundária em  $\mathcal{A}(R, S)$ , que denotamos por  $\preceq_{B'}$ , e que é definida do seguinte modo: dadas duas matrizes  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(R, S)$ ,  $A_1 \preceq_{B'} A_2$  se e só se  $A_1 = A_2$  ou  $A_2$  pode ser transformado em  $A_1$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$ , onde  $L_2$  é uma submatriz formada em duas linhas consecutivas.

Nesta secção iremos apresentar algumas das conclusões a que chegámos, depois de um estudo ainda preliminar sobre esta relação de ordem parcial.

### 2.5.1 Generalidades sobre $\preceq_{B'}$

O principal objetivo desta secção é o de mostrar que, em geral, a ordem de Bruhat Secundária,  $\preceq_{\widehat{B}}$ , e a sua variante,  $\preceq_{B'}$ , não coincidem nas classes da forma  $\mathcal{A}(R, S)$ . Atendendo às definições envolvidas é fácil concluir que dadas duas matrizes  $A, D \in \mathcal{A}(R, S)$ , se  $A \preceq_{B'} D$  então  $A \preceq_{\widehat{B}} D$  e portanto  $\preceq_{B'}$  é de facto uma relação de ordem parcial. Surge naturalmente a questão de saber se estas duas relações de ordem parcial coincidem em alguma classe de matrizes. Para responder a esta questão, comecemos com a seguinte proposição:

**Proposição 2.11.** *Seja  $D$  uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ , sejam  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  e  $k, l \in \{1, \dots, n\}$ . Suponhamos que  $i + 1 < j$  e que*

$$D[\{i, j\}; \{k, l\}] = L_2.$$

*Seja  $A$  a matriz obtida de  $D$  pelo intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuado na submatriz  $D[\{i, j\}; \{k, l\}]$ . Suponhamos ainda que  $D$  cobre  $A$  por meio de  $\preceq_{\widehat{B}}$ . Então  $A$  e  $D$  são elementos incomparáveis do conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{A}(R, S), \preceq_{B'})$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $A \preceq_{B'} D$ . Então, partindo de  $D$  é possível chegar a  $A$  por uma sequência de intercâmbios  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuados em linhas consecutivas. Assim existe pelo menos uma matriz  $D' \in \mathcal{A}(R, S)$  tal que

$$A \prec_{B'} D' \prec_{B'} D.$$

Então  $A \prec_{\widehat{B}} D' \prec_{\widehat{B}} D$  o que é impossível.  $\square$

É fácil verificar que  $\preceq_{B'}$  e  $\preceq_{\widehat{B}}$  coincidem em  $\mathcal{A}(2, 1)$ . Consideremos agora os seguintes elementos de  $\mathcal{A}(3, 1)$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,  $Q \preceq_{\widehat{B}} P$  uma vez que a matriz  $Q$  resulta da matriz  $P$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuado na submatriz  $P[\{1, 3\}; \{1, 2\}]$ . Mais, podemos também concluir que  $P$  cobre  $Q$  por meio de  $\preceq_{\widehat{B}}$ , pois a submatriz  $P[\{1, 3\}; \{1, 2\}]$  satisfaz as condições do Teorema 2.2. Assim, atendendo à proposição anterior, concluimos que  $P$  e  $Q$  são elementos incomparáveis do conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{A}(3, 1), \preceq_{B'})$ .

Assim, considerando as matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} P & O \\ O & I_{n-3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{n-3} \end{bmatrix},$$

onde  $O$  representa a matriz nula do tipo adequado, concluimos que as relações de ordem parcial  $\preceq_{B'}$  e  $\preceq_{\widehat{B}}$  não coincidem nas classes  $\mathcal{A}(n, 1)$ , para todo  $n$ ,  $3 \leq n$ .

Vejamos o que acontece nas classes da forma  $\mathcal{A}(n, 2)$ . Consideremos as seguintes matrizes de  $\mathcal{A}(3, 2)$ .

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,  $A_1 \preceq_{\widehat{B}} D_1$  uma vez que a matriz  $A_1$  resulta da matriz  $D_1$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuado na submatriz  $D_1[\{1, 3\}; \{1, 2\}]$ . Mais, podemos também concluir que  $D_1$  cobre  $A_1$  por meio de  $\preceq_{\widehat{B}}$ , pois a submatriz  $D_1[\{1, 3\}; \{1, 2\}]$  satisfaz as condições do Teorema 2.2. Assim, atendendo à proposição anterior, concluimos que  $D_1$  e  $A_1$  são elementos incomparáveis do conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{A}(3, 2), \preceq_{B'})$ .

Consideremos agora as seguintes matrizes de  $\mathcal{A}(4, 2)$ ,

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,  $A_2 \preceq_{\widehat{B}} D_2$  uma vez que a matriz  $A_2$  resulta da matriz  $D_2$  por um intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuado na submatriz  $D_2[\{1, 3\}; \{1, 2\}]$ . Mais, podemos também concluir que  $D_2$  cobre  $A_2$  por meio de  $\preceq_{\widehat{B}}$ . Assim, atendendo à proposição anterior, concluimos que  $D_2$  e  $A_2$  são elementos incomparáveis do conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{A}(4, 2), \preceq_{B'})$ .

Agora considerando as matrizes

$$D'_i = \begin{bmatrix} D_i & O & O & \dots & O \\ O & J_2 & O & \dots & O \\ O & O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & J_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A'_i = \begin{bmatrix} A_i & O & O & \dots & O \\ O & J_2 & O & \dots & O \\ O & O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & J_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

concluimos que as relações de ordem parcial  $\preceq_{B'}$  e  $\preceq_{\hat{B}}$  não coincidem nas classes  $\mathcal{A}(n, 2)$ , para todo  $n$ ,  $3 \leq n$ .

A proposição seguinte, cuja demonstração é consequência imediata do Teorema 2.2, caracteriza a relação cobertura para esta relação de ordem parcial.

**Proposição 2.12.** *Seja  $D = [d_{i,j}]$  uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ , seja  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  e sejam  $k, l \in \{1, \dots, n\}$ . Suponhamos que*

$$D[\{i, i+1\}; \{k, l\}] = L_2,$$

e seja  $A$  a matriz obtida de  $D$  pelo intercâmbio  $L_2 \rightarrow I_2$  efetuado nesta submatriz. Então  $D$  cobre  $A$  se e só se para todo  $j = k+1, \dots, l-1$ ,  $d_{i,j} = d_{i+1,j}$ .

### 2.5.2 Matrizes de $\mathcal{A}(n, 2)$ que são minimais para $\preceq_{B'}$

Brualdi e Hwang caracterizaram em [7] as matrizes minimais de  $\mathcal{A}(n, 2)$  e  $\mathcal{A}(n, 3)$  para a ordem de Bruhat.

**Teorema 2.5.** [7] *Seja  $n$  um inteiro superior a 1. Uma matriz  $A$  de  $\mathcal{A}(n, 2)$  é minimal para a ordem de Bruhat se e só se  $A$  é soma direta de matrizes*

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesta secção vamos caracterizar as matrizes minimais de  $\mathcal{A}(n, 2)$  para  $\preceq_{B'}$ . Começamos com o seguinte lema, o qual é válido não só na classe  $\mathcal{A}(n, 2)$  mas em qualquer classe  $\mathcal{A}(R, S)$ , com  $R = (r_1, \dots, r_m)$  e  $S = (s_1, \dots, s_n)$  duas partições do mesmo inteiro positivo. Por este motivo este lema será utilizado diversas vezes ao longo desta secção.

**Lema 2.7.** *Seja  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}(R, S)$  tal que  $A$  é minimal para  $\preceq_{B'}$ . Então, qualquer submatriz principal de  $A$  tem soma das linhas por ordem não crescente.*

**Demonstração:** Seja  $A = [a_{i,j}]$  uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$  que é minimal para  $\preceq_{B'}$ . Admitamos que existe uma submatriz principal de  $A$  na qual existem dois inteiros  $i$  e  $j$  tais que na submatriz  $M_j = A[\{i, i+1\}; \{1, \dots, j\}]$  temos

$$\sum_{t=1}^j a_{i,t} < \sum_{t=1}^j a_{i+1,t}.$$

Seja  $j_0$  o menor inteiro tal que  $M_{j_0}$  tem essa propriedade. Então  $a_{i,j_0} = 0$  e  $a_{i+1,j_0} = 1$ . Como  $r_{i+1} \leq r_i$  existe um inteiro  $k$ ,  $j_0 < k$ , tal que  $a_{i,k} = 1$  e  $a_{i+1,k} = 0$ . Segue-se que  $A[\{i, i+1\}; \{j_0, k\}] = L_2$ , o que é impossível.  $\square$

Desta proposição concluimos facilmente que

**Corolário 2.3.** *Seja  $A \in \mathcal{A}(R, S)$  tal que  $A$  é minimal para  $\preceq_{B'}$ , então a primeira coluna de  $A$  é  $[1 \dots 1 0 \dots 0]^T$ .*

Em primeiro lugar observemos que se  $A$  é uma matriz minimal para  $\preceq_{\hat{B}}$ , então também é minimal para  $\preceq_{B'}$ . De facto, se  $A$  não fosse minimal para  $\preceq_{B'}$  existiria uma matriz  $C$  tal que  $C \prec_{B'} A$  o que implicaria que  $C \prec_{\hat{B}} A$  e então  $A$  não seria minimal para  $\preceq_{\hat{B}}$ . Concluimos assim que as matrizes de  $\mathcal{A}(R, S)$  que são minimais para  $\preceq_{\hat{B}}$ , isto é as matrizes de  $\mathcal{A}(R, S)$  que não possuem nenhuma submatriz igual a  $L_2$ , são também minimais para  $\preceq_{B'}$ . No entanto, como veremos, para além destas existem outras matrizes de  $\mathcal{A}(n, 2)$  minimais para  $\preceq_{B'}$ , embora já não o sejam para  $\preceq_{\hat{B}}$ .

Seja  $m$  um inteiro positivo ímpar e seja  $t = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ , isto é,  $t$  é o menor inteiro que excede  $\frac{m}{2}$ . Denotamos por  $V_m$  a matriz de  $\mathcal{A}(m, 2)$  onde

$$V_m[\{1, \dots, m\}; \{1, \dots, t-1\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

a coluna  $t$  de  $V_m$  é

$$[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T,$$

e

$$V_m[\{1, \dots, m\}; \{t+1, \dots, m\}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz  $V_m$  é uma matriz de ordem  $m$ , para  $m$  ímpar, dada por:

$$V_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, para  $m = 5$ ,

$$V_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e se  $m = 7$ ,

$$V_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quando  $m = 3$ ,

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = F_3.$$

**Proposição 2.13.** *Seja  $A \in \mathcal{A}(n, 2)$ . Então  $A$  é minimal para  $\preceq_{B'}$  se e só se  $A$  é uma soma direta de matrizes  $J_2$  e  $V_m$  com  $m$  ímpar.*

**Demonstração:** A demonstração é feita por indução sobre  $n$ . Seja  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}(n, 2)$  tal que  $A$  é minimal para  $\preceq_{B'}$ . Pelo corolário anterior temos  $a_{1,1} = a_{2,1} = 1$  e portanto  $a_{i,1} = 0$  para  $i$  superior a 2. Se  $n = 2, 3$  ou  $4$  o resultado sai facilmente usando o Lema 2.7 e porque  $A$  não pode ter uma submatriz igual a  $L_2$  em linhas consecutivas.

Seja  $n$  superior a 4. Suponhamos que o resultado é valido nas classes  $\mathcal{A}(m, 2)$ , para  $m < n$ .

Suponhamos que  $a_{1,2} = 1$ . Se  $a_{2,2} = 1$ , então  $A = J_2 \oplus A'$  e o resultado segue da hipótese de indução.

Se  $a_{2,2} = 0$ , pelo Lema 2.7 vem  $a_{3,2} = 1$ . Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

em que  $*$  designam entradas desconhecidas. Vamos provar que  $a_{2,3} = 1$ . Suponhamos que  $a_{2,3} = 0$  e seja  $j$  o inteiro superior a 3 tal que  $a_{2,j} = 1$ . Se  $a_{3,j} = 0$ , então  $A[\{2, 3\}; \{2, j\}] = L_2$  o que é impossível. Então  $a_{3,j} = 1$ , e como  $a_{4,3} = 1$  (Lema 2.7) e  $a_{4,j} = 0$  porque  $a_{2,j} = a_{3,j} = 1$  e  $A \in \mathcal{A}(n, 2)$  concluímos que  $A[\{3, 4\}; \{3, j\}] = L_2$ . Impossível. Então  $a_{2,3} = 1$ . Como  $a_{3,2} = 1$  vem que  $a_{3,3} = 1$  pois, caso contrário,  $A[\{2, 3\}; \{2, 3\}] = L_2$ , o que sabemos ser impossível. Segue-se  $A = V_3 \oplus A'$  e por hipótese de indução sai o pretendido.

Suponhamos que  $a_{1,2} = 0$ . Pelo Lema 2.7 vem  $a_{3,2} = a_{4,2} = 1$ . Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

em que  $*$  designam entradas desconhecidas.

Seja  $j$  o inteiro superior a 2 tal que  $a_{1,j} = 1$ . Pelo Lema 2.7 temos que se  $k$  é o inteiro tal que  $a_{2,k} = 1$  com  $k$  superior a 1, então  $j \leq k$ . Porém, não se pode ter  $k = j$  porque se isto se verificasse,  $a_{3,j} = a_{4,j} = 0$  e teríamos  $A[\{2, 3\}; \{2, j\}] = L_2$ , o que é impossível. Então  $j < k$ . Pelo Lema 2.7,  $a_{3,j} = 0 = a_{4,j}$ .

O Lema 2.7 permite concluir que

$$A[\{1, 2, \dots, 2(j-1)\}; \{1, \dots, j-1\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$A[\{1, 2, \dots, 2(j-1)\}; \{j\}] = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T.$$

Ainda pelo Lema 2.7 temos que  $a_{2j-1,j} = 1$ .

Vejamos como é a submatriz

$$A[\{1, \dots, 2(j-1)\}; \{j+1, \dots, 2j-1\}].$$

Como  $a_{1,1} = a_{1,j} = 1$  a primeira linha desta submatriz é nula. Seja  $k$  o menor inteiro tal que  $a_{k,j+1} = 1$ . Suponhamos que  $k$  é superior a 2. Se  $k \leq 2j-1$  então  $a_{k,l} = 0$  para todo  $l$  superior a  $j+1$ . Como  $a_{k-1,j+1} = 0$  existe um  $s$  superior a  $j+1$  tal que  $a_{k-1,s} = 1$ . Daqui sai que

$$A[\{k-1, k\}; \{j+1, s\}] = L_2,$$

o que é impossível.

Se  $k$  for superior a  $2j-1$  então, pelo Lema 2.7,  $k = 2j$ . Na linha  $2j-2$  existe um  $s$  superior a  $j$  tal que  $a_{2j-2,s} = 1$ . Então  $a_{2j-1,s} = 1$  caso contrário existiria uma submatriz  $L_2$  em  $A$ . Segue-se  $a_{2j,s} = 0$  do qual resulta que

$$A[\{2j-1, 2j\}; \{j+1, s\}] = L_2,$$

o que é impossível.

Então,  $k = 2$ , isto é  $a_{2,j+1} = 1$ . De modo análogo  $a_{3,j+1} = 1$  e concluímos que  $A = V_m \oplus A'$  onde  $m = 2j-1$ . Por hipótese de indução sai o pretendido.  $\square$

**Exemplo 2.12.** *Uma matriz minimal em  $\mathcal{A}(7, 2)$  para  $\preceq_{B'}$  é, por exemplo, a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J_2 \oplus V_5$$

## 2.6 Conclusões e trabalhos futuros

Neste capítulo apresentámos e explorámos a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária numa classe  $\mathcal{A}(R, S)$ . Estas relações são ambas extensões da clássica ordem Bruhat de  $S_n$ . Porém, estas duas relações de ordem parcial não coincidem, em geral, numa classe  $\mathcal{A}(R, S)$ . As classes onde estas duas relações de ordem parcial são coincidentes foi um dos temas explorados neste capítulo. Mostrámos que em classes  $\mathcal{A}(R, S)$ , onde  $R$  é uma partição da forma  $(2^m)$  ou  $(1^m)$ , as duas relações de ordem parcial coincidem. Outro problema abordado neste capítulo foi a questão colocada por M. Ghaleb em [20], sobre a relação entre a ordem de Bruhat e o número de inversões de uma matriz de  $\mathcal{A}(R, S)$ . O autor provou que a ordem de Bruhat Secundária de  $\mathcal{A}(R, S)$  era monótona relativamente ao número de inversões de uma matriz, e pôs a questão se o mesmo era válido para a ordem de Bruhat. Responderemos afirmativamente a esta questão. Por fim apresentámos algumas conclusões sobre uma variante da ordem de Bruhat Secundária cujo o estudo foi sugerido por Brualdi e Deaett no artigo de 2007, [4]. Claro que muitos problemas ficaram por resolver. De facto, Brualdi e Deaett, no mesmo artigo anteriormente mencionado, apresentaram cerca de seis questões envolvendo a ordem de Bruhat e a ordem de Bruhat Secundária numa classe  $\mathcal{A}(R, S)$ , a maioria das quais continua ainda hoje sem solução. Pretendemos abordar algumas destas questões no futuro, assim como continuar o nosso estudo sobre a variante a ordem de Bruhat Secundária, estudando a sua restrição a algumas classes de matrizes simétricas.

# Capítulo 3

## A ordem de Bruhat na classe dos quadrados latinos

Nos últimos anos vários autores definiram a ordem de Bruhat noutras classes de matrizes, como por exemplo, nas classes de matrizes de sinal alternado, [9], nas classes de matrizes duplamente estocásticas, [3], nas classes de matrizes-(0, 1) simétricas, [12] e nas classes de matrizes-(0, 1) simétricas com traço zero, [5] e [17].

Neste sentido, o principal objetivo deste capítulo é o de investigar a ordem de Bruhat numa nova classe de matrizes: os quadrados latinos de ordem  $n$ . A ordem de Bruhat na classe dos quadrados latinos de ordem  $n$  é definida de modo análogo ao que tem sido feito noutras classes de matrizes. Assim, se  $A$  e  $C$  são quadrados latinos de ordem  $n$ , então dizemos que  $A$  precede  $C$  pela ordem de Bruhat, e escrevemos  $A \preceq_B C$  se, e só se,  $\Sigma_C \leq \Sigma_A$ , entrada por entrada, onde as matrizes  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_C$  são definidas de modo análogo ao que fizemos para as matrizes-(0, 1).

Este capítulo é iniciado com o estudo da relação de cobertura da ordem de Bruhat na classe dos quadrados latinos de ordem  $n$ . De seguida focamos a nossa atenção nos elementos minimais, e provamos que a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  com  $n \notin \{2, 4\}$  tem, pelos menos, dois elementos minimais. Apresentamos ainda um processo de construção de alguns quadrados latinos minimais para esta ordem.

### 3.1 A relação de cobertura

Visto que os quadrados latinos de ordem  $n$  estão relacionados com as matrizes de permutação, vamos começar por rever a relação de cobertura da ordem de Bruhat nas classes de matrizes de permutação. Sejam  $P$  e  $Q$  matrizes de permutação de ordem  $n$  correspondentes às permutações

$$\pi = \pi_1 \dots \pi_{i-1} \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} \pi_j \pi_{j+1} \dots \pi_n$$

e

$$\tau = \tau_1 \dots \tau_{i-1} \tau_i \tau_{i+1} \dots \tau_{j-1} \tau_j \tau_{i+1} \dots \tau_n,$$

respetivamente, onde  $\tau_k = \pi_k$  sempre que  $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ ,  $\tau_i = \pi_j$ ,  $\tau_j = \pi_i$  e  $(i, j)$  é uma inversão de  $\pi$ . Então  $P$  cobre  $Q$  pela ordem de Bruhat se, e só se,

$$P[\{i, j\}, \{\pi_j, \pi_i\}] = L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$P[\{i+1, \dots, j-1\}, \{\pi_j+1, \dots, \pi_i-1\}]$  é uma matriz nula e as correspondentes submatrizes em  $Q$  são  $I_2$  e a matriz nula.

A relação de cobertura da ordem de Bruhat nas classes de quadrados latinos é mais complicada. Antes de alguns resultados sobre este assunto, vamos considerar um exemplo.

**Exemplo 3.1.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*dois quadrados latinos de ordem 4.*

*Portanto*

$$A = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

*e*

$$C = 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Temos que*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cobre} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*e*

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cobre} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Note-se que  $P_1$  e  $P_2$  aparecem na decomposição de  $C$  associado aos inteiros 1 e 2, respectivamente, e  $Q_1$  e  $Q_2$  aparecem na decomposição de  $A$  associado aos inteiros 1 e 2 respectivamente. Embora  $1 < 2$ , se considerarmos o quadrado latino*

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

*então,  $C \prec_B D \prec_B A$ .*

*De facto,*

$$\Sigma_C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 10 \\ 6 & 10 & 15 & 20 \\ 9 & 17 & 24 & 30 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 10 \\ 5 & 10 & 14 & 20 \\ 9 & 17 & 23 & 30 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix} \quad e \quad \Sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 5 & 10 & 14 & 20 \\ 8 & 17 & 23 & 30 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}.$$

Portanto, entrada por entrada temos

$$\Sigma_A \leq \Sigma_D \leq \Sigma_C.$$

□

**Proposição 3.1.** [15] *Sejam  $A$  e  $C$  quadrados latinos de ordem  $n$ . Sejam  $p, v, l, t$  inteiros com  $1 \leq p < v \leq n$  e  $1 \leq l < t \leq n$ . Se*

$$(C - A)[\{p, v\}; \{l, t\}] = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix},$$

com  $a \in \mathbb{N}$  e as outras entradas de  $(C - A)$  são preenchidas por zeros, então  $C \preceq_B A$ .

**Demonstração:** Usando a hipótese tem-se

$$\sigma_{r,s}(C - A) = \begin{cases} a & \text{se } (r, s) \in \{p, \dots, v-1\} \times \{l, \dots, t-1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como  $\sigma_{r,s}(C - A) = \sigma_{r,s}(C) - \sigma_{r,s}(A)$ , então  $C \preceq_B A$ . □

**Observação 3.1.** *Se  $A$  e  $C$  são quadrados latinos de ordem  $n$  tais que  $\sigma_{r,s}(A) = \sigma_{r,s}(C)$  para quaisquer  $(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  então  $A = C$ .*

**Teorema 3.1.** [15] *Sejam  $A$  e  $C$  quadrados latinos de ordem  $n$ . Sejam  $p, v, l$ , e  $t$  inteiros com  $1 \leq p < v \leq p+2 \leq n$  e  $1 \leq l < t \leq l+2 \leq n$ . Se*

$$(C - A)[\{p, v\}; \{l, t\}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e as outras entradas de  $(C - A)$  são preenchidas por zeros, então  $A$  cobre  $C$  pela ordem de Bruhat.

**Demonstração:** Usando a Proposição 3.1,  $C \preceq_B A$ . Seja  $D = [d_{i,j}]$  um quadrado latino de ordem  $n$  tal que  $C \preceq_B D \preceq_B A$ , então  $\sigma_{r,s}(C - D)$  e  $\sigma_{r,s}(D - A)$  são inteiros não negativos, para quaisquer  $(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ . Além disso, como  $\sigma_{r,s}(D - A) + \sigma_{r,s}(C - D) = \sigma_{r,s}(C - A)$ , concluímos que

$$\sigma_{r,s}(D - A) + \sigma_{r,s}(C - D) = \begin{cases} 1 & \text{se } (r, s) \in \{p, \dots, v-1\} \times \{l, \dots, t-1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conseqüentemente,  $\sigma_{r,s}(D - A) = \sigma_{r,s}(C - D) = 0$  se  $(r, s) \notin \{p, \dots, v-1\} \times \{l, \dots, t-1\}$ .

Se  $v = p+1$  e  $t = l+1$ , pela observação 3.1  $D = A$  ou  $C = D$ . Conseqüentemente  $A$  cobre  $C$ .

Se  $v = p+1$  e  $t = l+2$ , então  $\sigma_{r,s}(C - A) \neq 0$  se, e só se,  $(r, s) = (p, l)$  ou  $(r, s) = (p, l+1)$ . Seja  $A = [a_{i,j}]$  e  $C = [c_{i,j}]$ .

Usando a observação 3.1, podemos supor que  $\sigma_{p,l}(C - D) = 0$  e  $\sigma_{p,l+1}(C - D) = 1$ . O caso  $\sigma_{p,l}(C - D) = 1$  e  $\sigma_{p,l+1}(C - D) = 0$  é análogo. Então

$$c_{p,l} = d_{p,l}, \quad c_{p,l+1} = d_{p,l+1} + 1, \quad a_{p,l} = d_{p,l+1} - 1, \quad a_{p,l+1} = d_{p,l+1} + 1.$$

Uma vez que  $\sigma_{p,l+2}(C - D) = 0 = \sigma_{p,l+2}(D - A)$  concluimos

$$c_{p,l+2} = d_{p,l+2} - 1 \quad \text{e} \quad a_{p,l+2} = d_{p,l+2}.$$

Porque  $A, C$  e  $D$  são quadrados latinos, então

$$\{a_{p,l}, a_{p,l+1}, a_{p,l+2}\} = \{c_{p,l}, c_{p,l+1}, c_{p,l+2}\} = \{d_{p,l}, d_{p,l+1}, d_{p,l+2}\}.$$

Isto implica que

$$\{a_{p,l}, a_{p,l+1}, a_{p,l+2}\} = \{a_{p,l} + 1, a_{p,l+1}, a_{p,l+2} - 1\} = \{a_{p,l} + 1, a_{p,l+1} - 1, a_{p,l+2}\}.$$

Por isso  $a_{p,l+2} = a_{p,l} + 1 = a_{p,l+1}$ . Isto é impossível. Portanto  $A$  cobre  $C$ .

De modo análogo obtemos que  $A$  cobre  $C$  se  $v = p + 2$  e  $t = l + 1$ .

Se  $v = p + 2$  e  $t = l + 2$  então  $\sigma_{r,s}(C - A) \neq 0$  se e só se  $(r, s) \in \{p, p + 1\} \times \{l, l + 1\}$ .

Suponhamos que  $\sigma_{p,l}(C - D) = 1$ . Usando a Proposição 3.1,  $\sigma_{p,l+1}(C - D) = 1$  e  $\sigma_{p+1,l}(C - D) = 1$ . Então

$$c_{p,l} = d_{p,l} + 1, \quad c_{p,l+1} = d_{p,l+1}, \quad c_{p+1,l} = d_{p+1,l}.$$

Pela observação 3.1 podemos assumir que  $\sigma_{p+1,l+1}(C - D) = 0$ . Então

$$c_{p+1,l+1} = d_{p+1,l+1} - 1.$$

Visto que  $\sigma_{p,l+2}(C - D) = \sigma_{p+1,l+2}(C - D) = \sigma_{p+2,l}(C - D) = \sigma_{p+2,l+1}(C - D) = \sigma_{p+2,l+2}(C - D) = 0$  vem

$$c_{p,l+2} = d_{p,l+2} - 1, \quad c_{p+1,l+2} = d_{p+1,l+2} + 1, \quad c_{p+2,l} = d_{p+2,l} - 1, \quad c_{p+2,l+1} = d_{p+2,l+1} + 1,$$

e

$$c_{p+2,l+2} = d_{p+2,l+2}.$$

Usando argumentos similares obtemos,

$$a_{p+2,l} = d_{p+2,l}, \quad a_{p+2,l+1} = d_{p+2,l+1} + 1, \quad a_{p+2,l+2} = d_{p+2,l+2} - 1.$$

Visto que  $A, C$  e  $D$  são quadrados latinos, então

$$\{a_{p+2,l}, a_{p+2,l+1}, a_{p+2,l+2}\} = \{c_{p+2,l}, c_{p+2,l+1}, c_{p+2,l+2}\}$$

e

$$\{a_{p+2,l}, a_{p+2,l+1}, a_{p+2,l+2}\} = \{d_{p+2,l}, d_{p+2,l+1}, d_{p+2,l+2}\}.$$

Isto implica que

$$\{a_{p+2,l}, a_{p+2,l+1}, a_{p+2,l+2}\} = \{a_{p+2,l} - 1, a_{p+2,l+1}, a_{p+2,l+2} + 1\}$$

e

$$\{a_{p+2,l}, a_{p+2,l+1}, a_{p+2,l+2}\} = \{a_{p+2,l}, a_{p+2,l+1} - 1, a_{p+2,l+2} + 1\}$$

Por isso,  $a_{p+2,l+2} = a_{p+2,l} - 1 = a_{p+2,l+1} - 1$ . Isto é impossível. Portanto  $\sigma_{p+1,l+1}(C - D) = 1$  e  $D = A$ .

Consequentemente  $A$  cobre  $C$ . □

O recíproco do teorema não é válido.

**Exemplo 3.2.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

*quadrados latinos de ordem 3.*

*Apesar de*

$$C - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*por simples cálculos obtemos que  $A$  cobre  $C$ .*

Nos próximos resultados usaremos a decomposição de quadrados latinos em soma de matrizes de permutação.

**Proposição 3.2.** [15] *Sejam  $A$  e  $C$  quadrados latinos de ordem  $n$  tais que*

$$(C - A) = (\alpha - \beta)(P_i - P_j).$$

*com  $P_i, P_j$  matrizes de permutação e  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ , então*

1. *Se  $P_i \prec_B P_j$  e  $\beta < \alpha$  então  $C \prec_B A$ ;*
2. *Se  $P_i \prec_B P_j$  e  $\alpha < \beta$  então  $A \prec_B C$ ;*
3. *Se  $P_i$  e  $P_j$  são incomparáveis então  $C$  e  $A$  também são incomparáveis.*

**Demonstração:**

1. Usando a hipótese,  $0 \leq \sigma_{r,s}(P_i - P_j)$  para quaisquer  $(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ . Se  $\beta < \alpha$ , então  $0 \leq \sigma_{r,s}((\alpha - \beta)(P_i - P_j))$  para todo  $(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ . Portanto  $C \prec_B A$ .
2. A demonstração é similar à do ponto 1.
3. Se  $P_i \not\prec_B P_j$ , então existem pares  $(r, s), (p, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  tais que  $0 < \sigma_{r,s}(P_i - P_j)$  e  $\sigma_{p,l}(P_i - P_j) < 0$ .

Portanto  $\sigma_{r,s}((\alpha - \beta)(P_i - P_j))$  e  $\sigma_{p,l}((\alpha - \beta)(P_i - P_j))$  têm sinais diferentes. Então  $C$  e  $A$  são incomparáveis. □

**Proposição 3.3.** [15] *Sejam  $A$  e  $C$  quadrados latinos de ordem  $n$  tal que  $C = \sum_{i=1}^n iP_i$  e  $A = \sum_{i=1}^n iT_i$ , com  $P_i$  e  $T_i$  matrizes de permutação,  $i = 1, \dots, n$ . Se  $P_i \preceq_B T_i$  para  $i = 2, \dots, n$ , então,  $C \preceq_B A$ .*

**Demonstração:** Uma vez que  $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n T_i = J_n$ , então,  $P_1 = J_n - \sum_{i=2}^n iP_i$  e  $T_1 = J_n - \sum_{i=2}^n iT_i$ , consequentemente  $C - A = \sum_{i=2}^n (i - 1)(P_i - T_i)$ . Como  $P_i \preceq_B T_i$  para  $i = 2, \dots, n$ , então,  $0 \leq \sigma_{r,s}(C - A)$  para quaisquer  $(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ . Portanto  $C \preceq_B A$ . □

## 3.2 Quadrados latinos minimais

Nesta secção vamos apresentar alguns resultados que usaremos nas próximas secções. Além disso descrevemos dois processos para obtenção de matrizes minimais para a ordem de Bruhat a partir de elementos minimais já conhecidos.

**Observação 3.2.** *Seja  $A$  um quadrado latino de ordem  $n$ . Então*

- $\sigma_{n,r}(A) = \sigma_{r,n}(A) = r \frac{(n+1)n}{2}$ , para  $r = 1, \dots, n$ .
- $\sigma_{n,n}(A) = \frac{n^2(n+1)}{2}$ .

Como já mencionámos, sendo  $s$  um inteiro positivo, denotamos por  $L_s$  a matriz anti-identidade de ordem  $s$ . Esta matriz tem na posição  $(i, j)$  o elemento 1 se  $j = s + 1 - i$  e 0 caso contrário.

**Definição 3.1.** *Seja  $A$  uma matriz do tipo  $m$  por  $n$ . Chamamos matriz reversa de  $A = [a_{i,j}]$  denotada por  $A^R$  à matriz  $L_m A L_n$ .*

**Observação 3.3.** •  $(A^R)^R = A$ ;

- A entrada  $(i, j)$  de  $A^R$  é igual a  $\sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n (L_m)_{i,k} a_{k,s} (L_n)_{s,j} = a_{m+1-i, n+1-j}$ ;
- A entrada  $(1, 1)$  de  $(A^R)$  é igual a  $a_{m,n}$ .

**Proposição 3.4.** [15] *Seja  $A = [a_{i,j}]$  uma matriz do tipo  $m$  por  $n$ . Seja  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Então*

$$\sigma_{i,j}(A^R) = \sigma_{m,n}(A) - \sigma_{m-i,n}(A) - \sigma_{m,n-j}(A) + \sigma_{m-i,n-j}(A).$$

**Demonstração:** Pela definição,

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(A^R) &= \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^j a_{m+1-l, n+1-k} = \sum_{t=m+1-i}^m \sum_{p=n+1-j}^n a_{t,p} \\ &= \sum_{t=1}^m \sum_{p=1}^n a_{t,p} - \sum_{t=1}^m \sum_{p=1}^{n-j} a_{t,p} - \sum_{t=1}^{m-i} \sum_{p=1}^n a_{t,p} + \sum_{t=1}^{m-i} \sum_{p=1}^{n-j} a_{t,p} \\ &= \sigma_{m,n}(A) - \sigma_{m-i,n}(A) - \sigma_{m,n-j}(A) + \sigma_{m-i,n-j}(A). \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.5.** *Seja  $A$  um quadrado latino de ordem  $n$ . Se  $A$  é uma matriz minimal pela ordem de Bruhat,  $\preceq_B$ , então  $A^R$  é também uma matriz minimal para  $\preceq_B$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $A^R$  não é uma matriz minimal para  $\preceq_B$ . Então existe um quadrado latino de ordem  $n$ ,  $D$ , tal que  $D \neq A^R$  e  $D \preceq_B A^R$ . Por isso existem  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  com  $\sigma_{i,j}(A^R) < \sigma_{i,j}(D)$ . Pela proposição 3.4 vem

$$\begin{aligned} \sigma_{n,n}(A) - \sigma_{n-i,n}(A) - \sigma_{n,n-j}(A) + \sigma_{n-i,n-j}(A) &< \\ \sigma_{i,j}(D) = \sigma_{i,j}((D^R)^R) = \sigma_{nn}(D^R) - \sigma_{n-i,n}(D^R) - \sigma_{n,n-j}(D^R) + \sigma_{n-i,n-j}(D^R). \end{aligned}$$

Pela observação 3.2 temos que

$\sigma_{n,n}(D^R) = \sigma_{n,n}(A)$ ,  $\sigma_{n-i,n}(D^R) = \sigma_{n-i,n}(A)$ , e  $\sigma_{n,n-j}(D^R) = \sigma_{n,n-j}(A)$ .  
Portanto

$$\sigma_{n-i,n-j}(A) < \sigma_{n-i,n-j}(D^R).$$

Isto é impossível, porque  $A$  é minimal.  $\square$

Sejam  $A$  uma matriz do tipo  $m$  por  $n$  e  $A^T$  a matriz transposta de  $A$ . É fácil verificar que

$$\sigma_{i,j}(A^T) = \sigma_{j,i}(A), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{e} \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Em geral não é possível comparar  $A$  e  $A^T$  por meio de  $\preceq_B$  a menos que  $n = m$ .

**Proposição 3.6.** [15] *Seja  $A$  uma matriz minimal, pela ordem de Bruhat,  $\preceq_B$ , num conjunto  $S$  de matrizes de ordem  $n$ . Então, se  $A^T \in S$ ,  $A^T$  é uma matriz minimal para  $\preceq_B$  em  $S$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $A^T$  não é uma matriz minimal para  $\preceq_B$  em  $S$ . Então existe  $C \in S$  tal que  $C \neq A^T$  e  $C \preceq_B A^T$ . Isto implica que existem  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , com  $\sigma_{i,j}(A^T) < \sigma_{i,j}(C)$ . Como  $\sigma_{i,j}(C) = \sigma_{j,i}(C^T)$  e  $\sigma_{i,j}(A^T) = \sigma_{j,i}(A)$  concluímos que  $\sigma_{j,i}(A) < \sigma_{j,i}(C^T)$ . Isto é impossível porque  $A$  é minimal.  $\square$

### 3.3 Classes de quadrados latinos com elemento mínimo

Nesta secção estudaremos os possíveis inteiros  $n$  para os quais a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  possui uma única matriz minimal para a ordem de Bruhat.

Se  $n = 1$ , então a classe de quadrados latinos de ordem 1 tem uma única matriz, a matriz

$$[1].$$

Consequentemente, existe uma única matriz minimal para ordem de Bruhat.

Se  $n = 2$ , então a classe de quadrado latinos de ordem 2 tem duas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por simples cálculos obtemos o diagrama de Hasse.



Portanto,  $A_2$  é a única matriz minimal para esta classe.

Se  $n = 3$ , então a classe de quadrados latinos de ordem 3 tem doze matrizes:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C_6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C_7 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C_8 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C_{10} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por simples cálculos obtemos o diagrama Hasse.

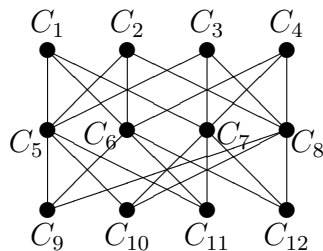


Figura 3.

Então, existem quatro matrizes minimais para a ordem de Bruhat.

Se  $n = 4$  podemos provar o resultado seguinte.

**Proposição 3.7.** [15] *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

é a única matriz minimal para a ordem de Bruhat na classe de quadrados latinos de ordem 4.

**Demonstração:** Suponhamos que existe um quadrado latino de ordem 4,  $C = [c_{i,j}]$ , tal que  $C \prec_B A$  ou  $A$  e  $C$  são incomparáveis por meio de  $\preceq_B$ . Então, existem inteiros  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tais que  $\sigma_{i,j}(A) < \sigma_{i,j}(C)$ . Uma vez que o vetor  $(4, 3, 2, 1)$  aparece na primeira linha e na primeira coluna de  $A$ , o vetor  $(3, 4, 1, 2)$  concluímos que o par  $(i, j)$  é

$$(2, 3) \text{ ou } (3, 2) \text{ ou } (3, 3).$$

Suponhamos que  $(i, j) = (2, 3)$ . Então  $\sigma_{2,3}(A) = 17 < \sigma_{2,3}(C)$  e portanto,  $18 \leq \sigma_{2,3}(C)$ . Suponhamos que  $\sigma_{2,3}(C) = 18$ . Uma vez que  $C$  é um quadrado latino de ordem 4, pela observação 3.2,  $c_{1,4} = c_{2,4} = 1$ , o que é impossível. Portanto  $(i, j) \neq (2, 3)$ .

Usando argumentos similares provamos que  $(i, j) \neq (3, 2)$  e  $(i, j) \neq (3, 3)$ . Consequentemente, obtemos o resultado.  $\square$

De seguida iremos mostrar que se  $n$  é maior que 4, então não existe nenhuma classe de quadrados latinos de ordem  $n$  que tenha um único elemento minimal para a ordem de Bruhat.

**Proposição 3.8.** [15] *Se  $n$  é um inteiro positivo ímpar e  $n \neq 1$ , então a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  tem pelo menos dois elementos minimais para a ordem de Bruhat.*

**Demonstração:** Suponhamos que existe um inteiro positivo ímpar  $n$ ,  $n \neq 1$ , tal que a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  tem um único elemento minimal para a ordem de Bruhat. Pela proposição 3.6, se  $A$  é elemento minimal para  $\preceq_B$ , então  $A^T$  é também um elemento minimal para  $\preceq_B$ . Por isso, se a classe de quadrados latinos tem um único elemento minimal  $A$  concluímos que  $A = A^T$ , isto é  $A$  é uma matriz simétrica. Portanto, se  $g$  é um inteiro,  $1 \leq g \leq n$ , e a entrada  $(i, j)$  de  $A$  tem o elemento  $g$ , então a entrada  $(j, i)$  de  $A$  tem também o elemento  $g$ . Consequentemente, se  $\rho_g$  é uma permutação associada com  $g$  em  $A$ , então  $\rho_g$  é produto de transposições disjuntas.

Sendo  $n$  ímpar, então existe um inteiro  $k$  tal que  $\rho_g(k) = k$ . Isto implica que todos os inteiros entre 1 e  $n$  aparecem na diagonal principal de  $A$ . Além disso cada inteiro entre 1 e  $n$  aparece apenas uma vez na diagonal principal de  $A$  porque  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ . Por outro lado, pela proposição 3.5,  $L_n A L_n$  é minimal para a ordem de Bruhat. Deste modo  $L_n A L_n = A$ . Mas a entrada  $(1, 1)$  de  $L_n A L_n$  é a entrada  $(n, n)$  de  $A$ . Então  $A$  tem pelo menos dois elementos iguais na diagonal principal. Isto é impossível, e o resultado segue.  $\square$

**Teorema 3.2.** [15] *Seja  $n$  um inteiro positivo par, e sejam  $A, C, E, F$  quadrados latinos minimais de ordem  $\frac{n}{2}$  para a ordem de Bruhat. Então a matriz*

$$D = \left[ \begin{array}{c|c} A + \frac{n}{2} J_{\frac{n}{2}} & C \\ \hline E & F + \frac{n}{2} J_{\frac{n}{2}} \end{array} \right],$$

*é um quadrado latino de ordem  $n$ , minimal para a ordem de Bruhat.*

**Demonstração:** Seja  $P$  um quadrado latino de ordem  $n$  tal que  $P \preceq_B D$  e

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline P_3 & P_4 \end{array} \right],$$

sendo  $P_1, P_2, P_3, P_4$  matrizes de ordem  $\frac{n}{2}$ .

Como  $A$  é um quadrado latino de ordem  $\frac{n}{2}$  vem  $A + \frac{n}{2} J_{\frac{n}{2}}$  tem todas as entradas no conjunto  $\{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$ , não havendo dois inteiros iguais na mesma linha ou coluna. Então,

$$\sigma_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(P) \leq \sigma_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(D).$$

Mas  $P \preceq_B D$  e consequentemente  $\sigma_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(D) = \sigma_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(P)$ . Isto implica que em cada linha e em cada coluna de  $P_1$  aparece o inteiro  $l$  com  $\frac{n}{2} + 1 \leq l \leq n$  e portanto,  $P_1 - \frac{n}{2} J_{\frac{n}{2}}$  é quadrado latino de ordem  $\frac{n}{2}$ . Como  $P \preceq_B D$  e  $A$  é minimal para a ordem de Bruhat, então

$$\sigma_{i,j}(P_1 - \frac{n}{2} J_{\frac{n}{2}}) \leq \sigma_{i,j}(A), \quad \text{para quaisquer } i, j \in \left\{1, \dots, \frac{n}{2}\right\}.$$

Por isso

$$\sigma_{i,j}(P) = \sigma_{i,j}(P_1) \leq \sigma_{i,j}(A + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}) = \sigma_{i,j}(D), \text{ para quaisquer } i, j \in \left\{1, \dots, \frac{n}{2}\right\}.$$

Porque  $P \preceq_B D$ , concluímos que  $A + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}} = P_1$ . Mas isto implica que  $P_2$  é um quadrado latino de ordem  $\frac{n}{2}$ . Como  $C$  é minimal para a ordem de Bruhat,

$$\sigma_{i,j}(P_2) \leq \sigma_{i,j}(C), \text{ para quaisquer } i, j \in \left\{1, \dots, \frac{n}{2}\right\}.$$

Se  $l \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$  e  $k \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, p\}$ , então

$$\sigma_{l,k}(P) = \sigma_{l,\frac{n}{2}}(P_1) + \sigma_{l,k-\frac{n}{2}}(P_2) \leq \sigma_{l,\frac{n}{2}}(A + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}) + \sigma_{l,k-\frac{n}{2}}(C) = \sigma_{l,k}(D).$$

Atendendo a que  $P \preceq_B D$  concluímos que  $C = P_2$ . De forma análoga concluiríamos que  $E = P_3$ . Das igualdades que obtivemos vem que  $P_4 - \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}$  é um quadrado latino de ordem  $\frac{n}{2}$ . Como  $F$  é minimal para a ordem de Bruhat, então

$$\sigma_{i,j}(P_4 - \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}) \leq \sigma_{i,j}(F), \text{ para quaisquer } i, j \in \left\{1, \dots, \frac{p}{2}\right\}.$$

Mas então, para quaisquer  $h, v \in \{\frac{n}{2}, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{h,v}(P) &= \sigma_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(P_1) + \sigma_{\frac{n}{2},v-\frac{n}{2}}(P_2) + \sigma_{h-\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(P_3) + \sigma_{h-\frac{n}{2},v-\frac{n}{2}}(P_4) \\ &\leq \sigma_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(A + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}) + \sigma_{\frac{n}{2},v-\frac{n}{2}}(C) + \sigma_{h-\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(E) + \sigma_{h-\frac{n}{2},v-\frac{n}{2}}(F + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}}) \\ &= \sigma_{h,v}(D). \end{aligned}$$

Porque  $P \preceq_B D$  e usando as igualdades anteriores, concluímos que  $F + \frac{n}{2}J_{\frac{n}{2}} = P_4$ . Consequentemente,  $D = P$  e portanto  $D$  é elemento minimal.  $\square$

**Corolário 3.1.** [15] *Sejam  $n$  e  $k$  dois inteiros positivos com  $n = 2^k$ . Existe um quadrado latino de ordem  $n$  que é minimal para a ordem de Bruhat e cuja última linha é  $[1 \dots n]$ , a última coluna é  $[1 \dots n]^T$ , e todas as entradas da diagonal principal são iguais a  $n$ .*

**Demonstração:** O resultado é verdadeiro se  $n = 2$  ou se  $n = 4$ . Seja  $k \geq 2$  e assumimos que o resultado é válido para  $n = 2^k$ . Agora vamos provar que o resultado também é válido para  $n = 2^{k+1}$ . Seja  $A_0$  um quadrado latino minimal de ordem  $2^k$ , nas condições do enunciado, e seja

$$A_1 = A_0 + 2^k J_{2^k}.$$

Então,  $A_1$  é um quadrado latino nos inteiros  $2^k + 1, \dots, 2^{k+1}$ , com  $2^{k+1}$  na diagonal principal. A última linha de  $A_1$  é  $[2^k + 1 \dots 2^{k+1}]$  e a última coluna é  $[2^k + 1 \dots 2^{k+1}]^T$ . Seja

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_0 \\ A_0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

Então  $A$  é um quadrado latino de inteiros  $1, \dots, 2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1}$ .

A última linha de  $A$  é

$$[1 \dots 2^k \ 2^k + 1 \dots 2^{k+1}]$$

e a última coluna de é

$$[1 \dots 2^k \ 2^k + 1 \dots 2^{k+1}]^T,$$

e todas as entradas da diagonal principal de  $A$  são iguais a  $2^{k+1}$ .

Pelo Teorema 3.2,  $A$  é minimal para a ordem de Bruhat, e a demonstração está completa.  $\square$

**Proposição 3.9.** [15] *A classe de quadrados latinos de ordem 8 tem, pelo menos, dois elementos minimais para a ordem de Bruhat.*

**Demonstração:** Pela proposição 3.7 a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

é um quadrado latino de ordem 4 minimal para a ordem de Bruhat. Então usando o último teorema concluímos que a matriz

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} A + 4J_4 & A \\ \hline A & A + 4J_4 \end{array} \right]$$

é minimal para a ordem de Bruhat. Seja

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Então  $H$  é um quadrado latino de ordem 8. Como  $41 = \sigma_{2,3}(P) < \sigma_{2,3}(H) = 42$ , concluímos que existe um quadrado latino de ordem 8,  $K$ , minimal para a ordem de Bruhat, tal que  $K \preceq_B H$  e  $K$  é incomparável com  $P$  pela ordem de Bruhat. Por isso, o resultado segue.  $\square$

**Proposição 3.10.** [15] *Seja  $n$  um inteiro positivo par,  $n \neq 2$  e  $n \neq 4$ . Então a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  tem, pelo menos, dois elementos minimais para a ordem de Bruhat.*

**Demonstração:** Seja  $n$  um inteiro positivo par,  $n \neq 2$  e  $n \neq 4$ . Então existem inteiros positivos  $k$  e  $u$  tal que  $n = 2^k \cdot u$ , onde  $u$  é um inteiro ímpar,  $1 \leq k$  e  $3 \leq u$  ou  $3 \leq k$  se  $u = 1$ . Portanto temos dois casos:

**Caso 1:** Se  $3 \leq u$  pela proposição 3.8 existem, pelo menos, dois quadrados latinos de ordem  $u$  distintos,  $V$  e  $X$ , os quais são minimais para a ordem de Bruhat. Pelo Teorema 3.2 concluímos que

$$Q_1 = \left[ \begin{array}{c|c} V + uJ_u & V \\ \hline V & V + uJ_u \end{array} \right] \quad \text{e} \quad R_1 = \left[ \begin{array}{c|c} X + uJ_u & X \\ \hline X & X + uJ_u \end{array} \right],$$

são dois quadrados latinos minimais de ordem  $2u$  para a ordem de Bruhat. Se  $k = 1$  temos o resultado. Se  $k$  é superior a 1 repetimos o processo com  $Q_1$  e  $R_1$ , e obtemos dois quadrados latinos de ordem  $2^2u$  distintos,  $Q_2$  e  $R_2$ , os quais são minimais para a ordem de Bruhat (de notar que o bloco no canto superior direito de  $Q_2$  é  $V$  e o mesmo bloco em  $R_2$  é  $X$ ). Novamente, se  $k = 2$  o resultado segue. Se  $k$  é superior a 2 repetimos este processo até que obtermos dois quadrados latinos de ordem  $n$ .

**Caso 2:** Se  $u = 1$ , então  $k$  é superior a 2 pela proposição 3.9, existem pelo menos dois quadrados latinos minimais de ordem 8, para a ordem de Bruhat. Se  $n = 2^3$ , então o resultado segue. Caso contrário usamos a mesma ideia do caso 1 até obtermos as matrizes desejadas.  $\square$

Terminamos esta secção com um resultado que resume o estudo efetuado.

**Teorema 3.3.** [15] *Seja  $n$  um inteiro positivo. Então a classe de quadrados latinos de ordem  $n$  tem um único elemento minimal para a ordem de Bruhat se e só se  $n = 1, 2$  ou  $4$ .*

### 3.4 Construção de quadrados latinos minimais

Visto que a demonstração da proposição 3.10 forneceu um processo para a construção de quadrados latinos minimais de ordem  $n$ , para a ordem de Bruhat, quando  $n$  é um inteiro positivo par, então apenas precisamos obter um processo quando  $n$  é ímpar. Nesta secção vamos descrever como construir um quadrado latino minimal de ordem  $n$ , para a ordem de Bruhat, quando  $n$  é um inteiro positivo ímpar da forma  $n = 2^k - 1$ , com  $k$  superior a 1. Antes porém, vamos descrever o processo discutido na proposição 3.10:

#### 3.4.1 Quadrados latinos minimais de ordem $n$ quando $n$ é par

Seja  $n = 2^k \cdot u$ , onde  $u$  é um inteiro positivo ímpar e  $k$  é um inteiro positivo. Seja  $V$  um quadrado latino minimal de ordem  $u$ , para a ordem de Bruhat.

1. Seja  $p = u$  e  $A = V$ .

2. Seja

$$G = \left[ \begin{array}{c|c} A + pJ_p & A \\ \hline A & A + pJ_p \end{array} \right].$$

3. Se  $n = 2p$  o processo termina. Caso contrário voltamos para passo 1 com  $2p$  ao invés de  $u$  e  $G$  ao invés de  $V$ .

Este processo permite construir um quadrado latino de ordem  $n$  o qual é minimal para a ordem de Bruhat (veja-se o Teorema 3.2).

**Exemplo 3.3.** *Seja  $n = 12 = 2^2 \times 3$ . Pretendemos construir um quadrado latino minimal de ordem 12. A matriz*

$$C_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



**Proposição 3.11.** [15] *Nas condições anteriores, a matriz*

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} T & Z \\ \hline W & G \end{array} \right],$$

*é um quadrado latino de ordem  $n$ , minimal para a ordem de Bruhat.*

**Demonstração** Seja  $s = 2^{k-1}$ ,  $v = 2^{k-1} - 1$ . Em primeiro lugar vamos provar que este processo produz um quadrado latino. Como  $Z$  é obtido de  $Y$  removendo a última linha,  $W$  é obtido de  $Y$  removendo a última coluna e  $T = X + sJ_v$ , não existem inteiros repetidos em cada uma das primeiras  $v = 2^{k-1} - 1$  linhas de  $A$  e nas primeiras  $s = 2^{k-1}$  colunas de  $A$ .

Tendo em conta que  $Y$  é um quadrado latino de ordem  $s$ , minimal para a ordem de Bruhat, e nas condições do corolário 3.1 (a última linha e a última coluna de  $Y$  são  $[1 \dots 2^{k-1}]$  e  $[1 \dots 2^{k-1}]^T$  respetivamente e as entradas da diagonal principal são todas iguais a  $2^{k-1}$ ), então a matriz  $G$  tem na linha e na coluna  $i$  os inteiros  $i, s+1, \dots, n$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Então a matriz  $A$  é um quadrado latino de inteiros  $1, \dots, n = 2^k - 1$ .

Seja  $D$  um quadrado latino de ordem  $n = 2^k - 1$  e admitamos que  $D \preceq_B A$ . Vamos escrever

$$D = [d_{i,j}] = \left[ \begin{array}{cc} D_0 & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{array} \right],$$

onde  $D_0$  é uma submatriz de  $D$  do tipo  $v$  por  $v$ . Como  $D \preceq_B A$ , então

$$\sigma_{i,j}(A) \leq \sigma_{i,j}(D), \quad \text{para quaisquer } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Temos que  $2^{k-1} + 1 = s + 1 \leq d_{i,j}$ , para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, 2^{k-1} - 1\}$ . De contrário teríamos

$$\sigma_{v,v}(D) < \sigma_{v,v}(A),$$

o que é impossível porque  $D \preceq_B A$ .

Sendo  $D$  um quadrado latino, então  $D_0 - sJ_v$  é um quadrado latino de ordem  $v$ .

Usando o facto que

$$\sigma_{i,j}(T) = \sigma_{i,j}(A) \leq \sigma_{i,j}(D) = \sigma_{i,j}(D_0), \quad i, j \in \{1, \dots, v\},$$

vem

$$\sigma_{i,j}(X) \leq \sigma_{i,j}(D_0 - sJ_v) \quad i, j \in \{1, \dots, v\}.$$

Então  $D_0 - sJ_v \preceq_B X$ , e como  $X$  é um quadrado latino minimal de ordem  $v$  concluímos que  $X = D_0 - sJ_v$ , logo  $D_0 = T$ .

Por isso  $D_1$  é uma matriz do tipo  $v$  por  $s$  cujas entradas estão no conjunto  $\{1, \dots, s\}$ . Porque  $D$  é um quadrado latino, não há dois inteiros iguais na mesma linha ou na mesma coluna de  $D_1$ . Admitamos que  $D_1 \neq Z$ , e seja  $i \in \{1, \dots, v\}$  e  $j \in \{v+1, \dots, n\}$ .

Então

$$\sigma_{i,j}(D) = \sigma_{i,v}(D_0) + \sigma_{i,j'}(D_1),$$

onde  $j' = j - v$ .

De modo análogo

$$\sigma_{i,j}(A) = \sigma_{i,v}(T) + \sigma_{i,j'}(Z),$$

e porque  $T = D_0$  e  $D \preceq_B A$ , temos que

$$\sigma_{i,j'}(Z) \leq \sigma_{i,j'}(D_1),$$

para quaisquer  $i \in \{1, \dots, v\}$  e  $j' \in \{1, \dots, s\}$ . Como  $D_1 \neq Z$  seja  $(i, j')$  o menor par pela ordem lexicográfica que satisfaz a desigualdade  $\sigma_{i,j'}(Z) < \sigma_{i,j'}(D_1)$ .

Seja  $D'_1$  a matriz obtida de  $D_1$  pela junção de uma linha, a  $(s+1)$ -ésima linha, onde a  $i$ -ésima posição desta nova linha é o inteiro de  $\{1, \dots, s\}$  o qual não está na  $i$ -ésima coluna de  $D_1$ .

Então  $D'_1$  é um quadrado latino de inteiros  $\{1, \dots, s\}$ , e tendo em mente a observação 3.1 concluímos que  $D'_1 \prec_B Y$ . Impossível porque  $Y$  é um quadrado latino minimal. Então  $D_1 = Z$ . De forma análoga temos que  $W = D_2$ . Para completar a demonstração apenas precisamos mostrar que  $G = D_3$ . Visto que  $D_1 = Z$ ,  $W = D_2$  e tendo em mente que  $Z$  e  $W$  foram construídas a partir de  $Y$ , e porque  $D$  é um quadrado latino concluímos que a entrada  $(i, i)$  de  $D_3$  tem o inteiro  $i$ , para  $i = 1, \dots, s$  e as outras entradas de  $D_3$  são preenchidas com os inteiros  $s+1, \dots, 2s-1$ . Portanto  $D_3$  e  $G$  são quadrados latinos com o mesmo conjunto de inteiros. Além disso  $D_3 \preceq_B G$ . Porque  $D$  é um quadrado latino não há deste modo dois inteiros iguais na mesma linha ou na mesma coluna de  $D_3$ . Por isso existe um único quadrado latino  $V$  de inteiros  $2^{k-1}, \dots, n$  tal que se substituirmos a entrada  $(i, i)$  de  $V$  por  $i$ , para  $i = 1, \dots, 2^{k-1}$  obtemos  $D_3$ . Visto que  $Y$  é minimal então  $Y \preceq_B (V - vJ_s)$ .

Consequentemente  $G = D_3$  e  $D = A$ . Então  $A$  é minimal.  $\square$

**Exemplo 3.4.** *Seja  $n = 7 = 2^3 - 1 = 2^2 + (2^2 - 1) = 3 + 2^2$ .*

*A matriz*

$$X = C_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*é um elemento minimal da classe dos quadrados latinos de ordem 3, pela ordem de Bruhat. (ver subsecção 3.3)*

*Pela proposição 6.1,*

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*é o elemento mínimo da classe de quadrados latinos de ordem 4, pela ordem de Bruhat.*

*Usando o processo descrito anteriormente, vamos considerar*

$$T = X + 4J_3 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

*e obtemos um dos elementos minimais para a classe de quadrados latinos de ordem 7.*

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{array} \right]$$

**Observação 3.4.** *A partir de um quadrado latino minimal podemos facilmente construir um quadrado latino maximal, para a ordem de Bruhat. De facto se  $A = [a_{i,j}]$  é um quadrado latino minimal de ordem  $n$ , para a ordem de Bruhat, então o quadrado latino  $A' = [n - a_{i,j} + 1]$  é um quadrado latino maximal para esta ordem.*

*Por isso*

$$A' = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

*é o único quadrado latino maximal de ordem 4.*

### 3.5 Conclusões e trabalhos futuros

Neste capítulo apresentámos alguns resultados sobre a ordem de Bruhat definida na classe dos quadrados latinos de ordem  $n$ . Focámos a nossa atenção na relação de cobertura e nos elementos minimais deste conjunto parcialmente ordenado. Mostrámos que se  $n \notin \{1, 2, 4\}$  a classe dos quadrados latinos de ordem  $n$ , com a ordem de Bruhat, tem pelo menos dois elementos minimais. Apresentámos ainda um algoritmo para a construção de quadrados latinos minimais quando  $n$  é um número par ou um número ímpar da forma  $2^k - 1$ ,  $k > 1$ . De futuro pretendemos continuar o estudo a ordem de Bruhat em dos quadrados latinos de ordem  $n$ , estudando a restrição desta relação de ordem parcial a uma classe de quadrados latinos isotópicos.

## Bibliografia

- [1] A. Bjorner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, Graduate text in Mathematics, vol 231, Springer (2005), DOI <https://doi.org/10.1007/3-540-27596-7>. 13
- [2] R.A. Brualdi, Combinatorial Matrix Classes, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 108: Cambridge University Press, Cambridge (2006), DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511721182>. 2, 5, 7, 8, 9, 12
- [3] R.A. Brualdi, G. Dahl and Eliseu Fritscher, Doubly stochastic matrices and the Bruhat order, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 66 (141) (2016) 681-700, doi:10.1007/s10587-016-0286-6. 32, 49
- [4] R.A. Brualdi and L. Deaett, More on the Bruhat order for  $(0,1)$ -matrices, *Linear algebra and its Applications*, 421 (2007), 219-232, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.03.034>. 14, 16, 17, 21, 42, 48
- [5] R.A. Brualdi, R. Fernandes and S. Furtado, On the Bruhat order of labeled graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 258 (2019) 49-64 <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.10.039>. 21, 49
- [6] R.A. Brualdi and E. Fritscher, Bruhat order of tournaments, *Linear Algebra and its Applications*, 458 (2014) 261-279, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.004>.
- [7] R.A. Brualdi and S. G. Hwang, A Bruhat order for the class of  $(0,1)$ -matrices with row sum vector  $R$  and column sum vector  $S$ , *Electronic Journal of Linear Algebra*, 12 (2004) 6-16, DOI: 10.13001/1081-3810.1141. 16, 42, 44
- [8] R.A. Brualdi and H.J. Ryser, Combinatorial matrix theory, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 39: Cambridge University Press, Cambridge, (1991), DOI: <https://doi.org/10.2307/3619468>. 10
- [9] R.A. Brualdi and M.W.Schroeder, Alternating sign matrices and their Bruhat order, *Discrete Mathematics*, 340, Issue 8 (2017) 1996-2019, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.10.010>. 49
- [10] A. Conflitti, C.M. Fonseca and R. Mamede, The maximal lenght of a chain in the Bruhat order for a class of binary matrices, *Linear algebra and its Applications*, 436 (2012), 753-757, DOI: 10.1016/j.laa.2011.07.043.
- [11] A. Conflitti, C.M. Fonseca and R. Mamede, On the largest size of an antichain in the Bruhat order for  $\mathcal{A}(2k, k)$ , *Order*, 30 (2013), 255-260, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11083-011-9241-1>.
- [12] H.F. da Cruz, R. Fernandes and S. Furtado, Minimal matrices in the Bruhat order for symmetric  $(0,1)$ -matrices, *Linear Algebra Appl.*, 530 (2017), 160-184, DOI: 10.1016/j.laa.2017.05.014. 16, 49
- [13] B. A. Davey and H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, (2002), DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809088>. 4

- [14] R. Fernandes, H.F. da Cruz and D. Salomão, Classes of  $(0, 1)$ -matrices where the Bruhat Order and the Secondary Bruhat Order Coincide, aceite para publicação em *Order*, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11083-019-09500-8>. 19, 21, 22, 23, 31
- [15] R. Fernandes, H.F. da Cruz and D. Salomão, Latin Squares and their Bruhat Order, aceite para publicação em *Contributions to Discrete Mathematics* 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62
- [16] R. Fernandes, H.F. da Cruz and D. Salomão, On a conjecture concerning the Bruhat Order, submetido. 32, 34, 35, 36, 38
- [17] R. Fernandes and Susana Furtado, Extremal matrices for the Bruhat-graph order, aceite para publicação em *Linear and Multilinear Algebra*. 49
- [18] D. Gale, A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 1073-1082. 9
- [19] M. Ghebleh, On maximum chains in the Bruhat order of  $\mathcal{A}(n, 2)$ , *Linear algebra and its Applications*, 446 (2014), 377-387, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.01.002>. 32
- [20] M. Ghebleh, Antichains on  $(0, 1)$ -matrices through inversions, *Linear algebra and its Applications*, 458 (2014), 503-511, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.021>. vii, ix, 48
- [21] R. Horn and C. Johnson, Matrix Analysis, *Cambridge University Press*, (1985).
- [22] A. Donald Keedwell and József Dénes, Latin Squares and their Applications, 2nd Edition *Academic Press Inc.* , (2015). 10
- [23] R. Merris, Multilinear Algebra, Gordon and Breach Science Publishers, 1997. 5
- [24] H.J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Can. J. Math.*, 9 (1957), 371-377. 9
- [25] Y. Zao, On the Bruhat order of the symmetric group and its shellability, <http://web.mit.edu/yufeiz/www/papers/bruhat.pdf>. 13, 14