



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Controlo da Posição e da Atitude de um Quadrotor por Referências Programáveis

Carlos Miguel Nóbrega Velosa

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Aeronáutica
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Junho de 2011

“Everything should be made as simple as possible but not simpler”

Albert Einstein

Agradecimentos

As minhas primeiras palavras de agradecimento têm que ser obrigatoriamente dirigidas aos meus pais, pois sem o amor, carinho e o apoio incondicional não seria capaz de alcançar todos os meus objectivos e os meus sonhos. Além de todo o apoio, pela paciência e pela absoluta crença nas minhas capacidades de realizar este trabalho. Agradeço também pelas palavras sábias que me disseram e pelo ensinamento de um grande sentido de responsabilidade desde a mais tenra idade. Por todos estes motivos é que me orgulho deles, pois fizeram de mim o Homem que sou.

Gostaria de aproveitar esta oportunidade para agradecer ao Professor Doutor Kouamana Bousson, meu orientador ao longo desta dissertação, pela generosidade em compartilhar a sua competência científica, com as suas críticas e com as suas correcções. Mas também, pelo entusiasmo e incentivo que me proporcionou ao longo da realização deste trabalho, permitindo-me mirar no Mestre que ele é. Agradeço igualmente a sua disponibilidade, a sua atenção e os seus preciosos ensinamentos ao longo deste mestrado, sem os quais este trabalho não se teria realizado.

Gostaria de agradecer também à Nathalie pela sua presença constante na minha vida, pela sua dedicação e alegria que tornou menos densos os momentos de maior cansaço ao longo deste percurso académico.

Agradeço ao meu irmão, que apesar de não participar de forma activa, esteve sempre presente nos momentos difíceis com palavras amigas e boa disposição de forma a encorajar-me independentemente dos quilómetros que nos separam.

De seguida não posso deixar de agradecer aos meus amigos, que sempre me acompanharam nos bons e maus momentos desta minha vida académica, acreditando sempre na minha capacidade de evoluir e atingir os meus objectivos.

Resumo

Um Quadrotor é uma aeronave com quatro rotores com algumas características dos helicópteros convencionais tais como a capacidade de pairar no ar. Contrariamente aos helicópteros e aos aviões, é uma aeronave capaz de se movimentar de um sítio para outro sem que tenha necessariamente uma determinada atitude como os aviões. É uma aeronave controlável dentro do seu domínio operacional, sem nenhuma margem de estabilidade estática, e exige portanto que a sua atitude seja constantemente controlada. Esta característica que a difere das outras aeronaves requer que o Quadrotor tenha pelo menos um controlador de atitude, caso contrário é quase impossível controlá-lo directamente por um operador.

Assim, vários métodos de controlo modernos são apresentados nesta dissertação para a estabilização da posição e da atitude em referências programáveis. São eles o controlador *LQR* (*Linear-Quadratic-Regulator*), o controlador de *Y. Elkrief*, o controlador de *Bar-Shalom*, e o controlador de *Batz-Kleinman*. Um controlador a quatro dimensões designado por *Gramiano* é também implementado permitindo que o Quadrotor mude de um estado para outro num período temporal bem definido.

Tendo em conta que um Quadrotor tem um consumo energético consideravelmente elevado devido aos seus quatro motores, é feita uma optimização da autonomia de voo para o tornar mais eficiente.

O controlo da posição e da atitude é feito pelo controlador de *Batz-Kleinman* com uma trajectória definida por *waypoints*, o que permite que o Quadrotor cumpra uma determinada missão autonomamente. Quanto ao controlo da atitude, este é feito pelo controlador clássico *LQR*, pelo controlador de *Elkrief*, pelo de *Bar-Shalom*, pelo de *Batz-Kleinman* e pelo *Gramiano*.

De modo a obter o estado do Quadrotor o mais “limpo” possível, isto é, sem ruído, um estimador de *Kalman* contínuo é implementado recorrendo à aproximação do espaço dual.

Por fim, são apresentadas simulações em MatLab® do controlo da posição e sobretudo da atitude, é apresentada a resposta do estimador de *Kalman*, é feita uma conversão dos sinais de controlo para PWM (*Pulse-Width Modulation*) em C++ baseando-se na plataforma *Arduino Mega*, e termina com uma comparação entre os vários controladores.

Palavras-chave

Quadrotor, Controlo Óptimo, *LQR*, *Y. Elkrief*, *Bar-Shalom*, *Batz-Kleinman*, *Gramiano*, Estimador, Filtro de *Kalman*.

Abstract

A Quadrotor is an aircraft with four rotors with some characteristics of conventional helicopters such as the ability to hover. Contrary to helicopters and airplanes, it is an aircraft capable of moving from one place to another without necessarily having a certain attitude like airplanes. It is a controllable aircraft within its operational domain with no margin of static stability, and as a consequence it requires its attitude to be constantly controlled. This feature that differs from other aircraft requires that the Quadrotor has at least one attitude controller, otherwise it is almost impossible to control it directly by an operator.

So, several methods of modern control are presented in this thesis to stabilize the position and the attitude in scheduled references. They are the *LQR (Linear-Quadratic-Regulator)* controller, the *Y. Elkrief* controller, the *Bar-Shalom* controller, and the *Batz-Kleinman* controller. A four dimension controller called *Gramian* is also implemented allowing the Quadrotor change from one state to another in a well-defined time period.

Given that the Quadrotor has a pretty high energy consumption due to its four engines, it is made an optimization of flight endurance to make it more efficient.

The control of the position and attitude is made by the *Batz-Kleinman* controller with a path defined by waypoints, which allows the Quadrotor fulfill a specific mission autonomously. As to attitude control, it is made by the classical *LQR* controller, by the *Elkrief* controller, by the *Bar-Shalom* controller, by the *Batz-Kleinman* controller, and by the *Gramian* controller.

To obtain the status of the Quadrotor as “clean” as possible, ie without noise, a continuous *Kalman* estimator is implemented using the dual space approach.

Finally, simulations of position and particularly of attitude control are presented using MatLab®, it is presented the *Kalman* estimator response, it is made a conversion of control signals to PWM (*Pulse-Width Modulation*) in C++ based on *Arduino Mega* platform, and ends with a comparison between several controllers.

Keywords

Quadrotor, Optimal Control, *LQR*, *Y. Elkrief*, *Bar-Shalom*, *Batz-Kleinman*, *Gramian*, Estimator, *Kalman* Filter.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Palavras-chave	vii
Abstract	ix
Keywords	ix
Índice	xi
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Lista de Acrónimos	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Definição e Propósito dos Quadrotors	1
1.2 Como operam os Quadrotors	2
1.3 A Evolução Histórica dos Quadrotors	3
1.4 Motivação	6
1.5 Contribuição desta Dissertação	8
1.6 Estrutura da Dissertação	9
2 Revisão Bibliográfica	11
2.1 Projectos na Literatura	11
2.2 Síntese	17
3 Modelação Matemática do Problema	19
3.1 Modelação da Dinâmica	19
3.2 Modelação da Cinemática	23
3.2.1 Ângulos de Euler	23
3.2.2 Método dos Quaterniões	25
3.3 Modelação do Sistema Propulsivo (Motor + Hélice)	28
3.3.1 Formulação Matemática do Conjunto	30
3.3.2 Determinação da Tracção e do Momento Experimentalmente	33
3.4 Massa e Momentos de Inércia	34
4 Metodologias de Controlo	37
4.1 Introdução	37
4.2 Controlo pelo Método <i>LQR</i> (<i>Linear-Quadratic-Regulator</i>)	37

4.2.1	Lei do Controlo	37
4.2.2	Linearização do Sistema	39
4.2.3	Determinação das Matrizes de Ponderação Q e R	41
4.2.3.1	Regra de <i>Bryson</i>	41
4.2.3.2	Método da Atribuição dos Pólos	42
4.3	Controlo pelo Método de <i>Y. Elkrief</i> e pelo de <i>Bar-Shalom</i>	45
4.3.1	Lei do Controlo de <i>Elkrief</i>	45
4.3.2	Lei do Controlo de <i>Bar-Shalom</i>	46
4.4	Controlo pelo Método de <i>Batz-Kleinman</i>	47
4.4.1	Lei do Controlo de <i>Batz-Kleinman</i>	47
4.5	Controlo pelo Método <i>Gramiano</i>	47
4.5.1	Lei do Controlo por Matriz <i>Gramiana</i>	48
5	Estimador (Filtro de <i>Kalman</i>)	51
5.1	Introdução	51
5.2	Linearização do Sistema	52
5.3	Análise do Sistema / Condições de Convergência	53
5.3.1	Atingibilidade	54
5.3.2	Controlabilidade	54
5.3.3	Observabilidade	54
5.4	Formulação Matemática do Filtro	55
5.5	Implementação do Filtro de <i>Kalman</i> em MatLab	58
5.6	Implementação do Estimador de <i>Kalman</i> numa Plataforma Digital	60
5.7	Estimador (Não necessariamente de <i>Kalman</i>)	61
6	Simulação e Discussão dos Resultados	65
6.1	Controlo da Posição e da Atitude (<i>Batz-Kleinman</i>)	65
6.1.1	Estados de Referência	65
6.1.2	Linearização do Sistema	67
6.1.3	Controlabilidade e Observabilidade	67
6.1.4	Ganhos do Sistema	67
6.1.5	Algoritmo de <i>Butcher</i> - Resolução das Equações Diferenciais	68
6.1.6	Resposta do Sistema - Posição e Atitude	69
6.2	Controlo da Atitude	71
6.2.1	Estados de Referência	72
6.2.2	Linearização do Sistema	73
6.2.3	Controlabilidade e Observabilidade	74
6.2.4	Controlador <i>LQR</i>	75
6.2.5	Controlador de <i>Elkrief</i>	78
6.2.6	Controlador de <i>Bar-Shalom</i>	81

6.2.7 Controlador de <i>Batz-Kleinman</i>	87
6.2.8 Controlador <i>Gramiano</i>	89
6.3 Estimador de <i>Kalman</i>	91
6.4 Conversão dos Sinais de Controlo em PWM	94
7 Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros	97
7.1 Conclusão	97
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	98
Referências Bibliográficas	101
Anexos	105
A - Cálculos Auxiliares (Capítulo III)	107
B.1 - Matrizes A e B para Posição e Atitude (Capítulo VI)	113
B.2 - Ganhos de <i>Batz-Kleinman</i> para Posição e Atitude (Capítulo VI)	117
C - Artigo: <i>Control of the Attitude of a Quadrotor by Scheduled References</i>	119

Lista de Figuras

Figura 1.1.1 - Quadrotor típico	1
Figura 1.2.1 - Ângulos de Euler: ϕ , θ e ψ - Rolamento, arfagem e guinada, respectivamente	2
Figura 1.2.2 - Ilustração dos vários movimentos do Quadrotor	3
Figura 1.3.1 - Modelo 3D do giroplano número 1	4
Figura 1.3.2 - Giroplano número 1 em 1907	4
Figura 1.3.3 - A Oemichen número 2, de 1922	4
Figura 1.3.4 - Quadrotor projectado por Bothezad e Ivan Jerome. Foto tirada na descolagem durante o primeiro voo em Outubro, 1922	5
Figura 1.3.5 - Quadrotor <i>Convertawings Model A</i>	5
Figura 1.3.6 - V-22 Ospray	6
Figura 1.3.7 - Conceito da <i>Bell quad-tiltrotor</i>	6
Figura 1.3.8 - Skycar: À esquerda - em modo carro; À direita - durante um voo de testes	6
Figura 1.4.1 - Ambulância retida num engarrafamento no Rio de Janeiro, Brasil	7
Figura 2.1.1 - <i>Mesicopter</i> - Tecnologia MEMS	11
Figura 2.1.2 - <i>Draganflyer</i> - Plataforma comercial	11
Figura 2.1.3 - Quadrotor <i>OS4</i> - Instituto Federal de Tecnologia Suíço	12
Figura 2.1.4 - Quadrotor - <i>Oakland University</i>	13
Figura 2.1.5 - <i>X-4 FlyerMark II</i> - Universidade Nacional da Austrália	14
Figura 2.1.6 - Plataforma <i>ALIV</i>	14
Figura 2.1.7 - Simulação do controlo do <i>ALIV</i> no <i>FlightGear</i>	14
Figura 2.1.8 - Estimação da posição e da atitude de um Quadrotor recorrendo a câmeras de filmar	15
Figura 2.1.9 - Quadrotors do projecto <i>STARMAC II</i> - Universidade de <i>Stanford</i>	16
Figura 3.1.1 - Sistema de eixos do referencial inercial fixo R_{NED} (<i>North-East-Down</i>)	19
Figura 3.1.2 - Referenciais R_{NED} e R_{ABC}	19
Figura 3.1.3 - Forças actuantes no Quadrotor	21
Figura 3.3.1 - Diagrama de conexões do ESC	29
Figura 3.3.2 - Microcontrolador <i>Arduino Mega</i> - Plataforma digital de baixo custo usada para converter os sinais de controlo u_i em sinais <i>PWM</i>	30
Figura 3.3.3 - Funcionamento genérico de um motor eléctrico de corrente contínua	30
Figura 3.3.4 - Curvas características dos coeficientes de tracção e de potência em função da razão de avanço, J , e do ângulo de incidência das pás. Na imagem superior - coeficiente de tracção, C_t , Na imagem inferior - coeficiente de potência, C_p .	31
Figura 3.4.1 - Geometria simétrica do Quadrotor	35

Figura 4.2.1 - Sequência de procedimentos necessários para o projecto de um controlador <i>LQR</i>	39
Figura 4.2.2 - Simetria dos valores próprios de H , $\lambda(H)$, relativamente ao eixo imaginário	44
Figura 4.5.1 - Trajectória definida por <i>waypoints</i> e respectivos instantes a serem alcançados	48
Figura 5.4.1 - Representação do ruído branco no domínio da frequência	56
Figura 5.4.2 - Distribuição Gaussiana (ou Normal) do ruído	56
Figura 5.4.3 - Forma de onda de um ruído branco com distribuição Gaussiana	56
Figura 5.5.1 - Diagrama de blocos do filtro de <i>Kalman</i> discreto, (estimador de <i>Kalman</i>)	60
Figura 6.1 - Posição do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 0.8$	69
Figura 6.2 - Velocidades lineares do C.G do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 0.8$	69
Figura 6.3 - Atitude do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 0.8$	69
Figura 6.4 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 0.8$	69
Figura 6.5 - Tensões aplicadas a cada motor. $\tau = 0.8$	69
Figura 6.6 - Posição do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 2.0$	70
Figura 6.7 - Velocidades lineares do C.G do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 2.0$	70
Figura 6.8 - Atitude do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 2.0$	70
Figura 6.9 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 2.0$	70
Figura 6.10 - Tensões aplicadas a cada motor. $\tau = 2.0$	70
Figura 6.11 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador <i>LQR</i>	77
Figura 6.12 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador <i>LQR</i>	77
Figura 6.13 - Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador <i>LQR</i>	77
Figura 6.14 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de <i>Elkrief</i>	80
Figura 6.15 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de <i>Elkrief</i>	80
Figura 6.16 - Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador de <i>Elkrief</i>	80
Figura 6.17 - Ilustração das 4 baterias que alimentam os motores individualmente	82
Figura 6.18 - Índice de penalização das variáveis de controlo em função das respectivas tensões das baterias	82
Figura 6.19 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de <i>Elkrief & Bar-Shalom</i>	85
Figura 6.20 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de <i>Elkrief & Bar-Shalom</i>	85
Figura 6.21 - Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador de <i>Elkrief & Bar-Shalom</i>	85

Figura 6.22 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de <i>Batz-Kleinman</i> com $\tau = 0.25$	88
Figura 6.23 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de <i>Batz-Kleinman</i> com $\tau = 0.25$	88
Figura 6.24 - Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador <i>Batz-Kleinman</i> com $\tau = 0.25$	88
Figura 6.25 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador <i>Gramiano</i>	90
Figura 6.26 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador <i>Gramiano</i>	90
Figura 6.27 - Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador <i>Gramiano</i>	90
Figura 6.28 - Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Ângulos de rolamento, ϕ , arfagem, θ , e guinada, ψ , exactos; com ruído; e estimados	93
Figura 6.29 - Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Velocidade angular segundo x' - P; segundo y' - Q; e segundo z' - R, exactas; com ruído; e estimadas.	93
Figura 6.30 - Correspondência entre a tensão média e a largura do impulso do sinal PWM.	94

Lista de Tabelas

Tabela 3.3.1 - Características do motor AXI 2212-12	30
Tabela 3.3.2 - Características de hélice APCE 9' x 4.5'	32

Lista de Acrónimos

C.G	-	Centro Gravítico
CD	-	<i>Compact Disc</i>
DOF	-	<i>Degrees Of Freedom</i>
EEPROM	-	<i>Electrically-Erasable Programmable Read-Only Memory</i>
ESC	-	<i>Electronic Speed Controller</i>
FAA	-	<i>Federal Aviation Administration</i>
GPS	-	<i>Global Positioning System</i>
IMU	-	<i>Inertial Measurement Unit</i>
Li-Po	-	<i>Lithium-Polymer</i>
LQ	-	<i>Linear-Quadratic</i>
LQR	-	<i>Linear-Quadratic-Regulator</i>
MEMS	-	<i>Micro ElectroMechanical Systems</i>
MIMO	-	<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i>
NASA	-	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PC	-	<i>Personal Computer</i>
PD	-	<i>Proportional-Derivative</i>
PID	-	<i>Proportional-Integral-Derivative</i>
PWM	-	<i>Pulse-Width Modulation</i>
SMC	-	<i>Sliding Mode Control</i>
UAV	-	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
VTOL	-	<i>Vertical Take-Off and Landing</i>

Lista de Símbolos

Símbolo	Domínio	Unidade	Descrição
ε	\mathbb{R}	rad	Ângulo de rotação do quaternião
θ	\mathbb{R}	rad	Ângulo de arfagem
$\dot{\theta}$	\mathbb{R}	rad/s	Taxa de arfagem
λ	$\mathbb{C}^{n \times 1}$	-	Designação de valores próprios, (n estados)
μ	\mathbb{R}	-	Média do ruído
v	\mathbb{R}^q	-	Ruído dos sensores, (q saídas)
ρ	\mathbb{R}	kg/m ³	Massa específica do ar
σ^2	\mathbb{R}	-	Variância do ruído
ϕ	\mathbb{R}	rad	Ângulo de rolamento
$\dot{\phi}$	\mathbb{R}	rad/s	Taxa de rolamento
ψ	\mathbb{R}	rad	Ângulo de guinada
$\dot{\psi}$	\mathbb{R}	rad/s	Taxa de guinada
ω	\mathbb{R}	rad/s	Velocidade de rotação do motor
ω	\mathbb{R}^3	rad/s	Vector das velocidades angulares, $\omega = [P \ Q \ R]$
A	$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	Matriz de estado, (n estados)
\hat{A}	$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	Matriz de realimentação em malha fechada, (n estados)
A^k	$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	Matriz de estado do filtro de <i>Kalman</i> , (n estados)
B	$\mathbb{R}^{n \times p}$	-	Matriz de controlo ou de entrada, (n estados, p entradas)
B^k	$\mathbb{R}^{n \times p}$	-	Matriz de controlo do filtro de <i>Kalman</i> , (n estados, p entradas)
C	$\mathbb{R}^{q \times n}$	-	Matriz de saída, (n estados, q saídas)
c_i	\mathbb{R}	-	Factor que relaciona a tracção em função da tensão aplicada em cada motor, (i = 1,...,4)
C_p	\mathbb{R}	-	Coefficiente de potência da hélice
C_t	\mathbb{R}	-	Coefficiente de tracção da hélice
D	$\mathbb{R}^{q \times p}$	-	<i>Feedforward matrix</i> , (q saídas, p entradas)
d_{cg}	\mathbb{R}	m	Distância do eixo de cada motor ao G.G do Quadrotor
D_p	\mathbb{R}	m	Diâmetro da hélice
F_g	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$	N	Força gravítica
F_i	\mathbb{R}	N	Força/Tracção produzida por cada motor, (i = 1,...,4)
F_{net}	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$	N	Força resultante exercida no Quadrotor, $F_{net} = [F_x \ F_y \ F_z]$
F_p	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$	N	Força/Tracção total produzida pelos 4 motores, $F_p = [F_{px} \ F_{py} \ F_{pz}]$

F_{px}, F_{py}, F_{pz}	\mathbb{R}	N	Forças actuantes segundo as direcções x, y e z
g	\mathbb{R}	m/s^2	Aceleração gravítica, ($g = 9.81 m/s^2$)
H	$\mathbb{R}^{2n \times 2n}$	-	Matriz Hamiltoniana, (n estados)
I	$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	Matriz Identidade, (n estados)
I	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	$kg.m^2$	Tensor de inércia do Quadrotor
I_{11}, I_{22}, I_{33}	\mathbb{R}	$kg.m^2$	Elementos do tensor de inércia do Quadrotor relativamente aos eixos x' , y' e z' , respectivamente
J_{LQR}	\mathbb{R}	-	Função de custo do <i>LQR</i>
J	\mathbb{R}	-	Razão de avanço da hélice
K	$\mathbb{R}^{p \times q}$	-	Matriz de ganho do <i>LQR</i> , (p entradas, q saídas)
K_{MF}	\mathbb{R}	-	Constante que relaciona o momento com a tracção do sistema propulsivo (motor + hélice)
K_v	\mathbb{R}	rpm/V	Velocidade do eixo do motor em rotações por minuto por cada Volt
L	$\mathbb{R}^{p \times q}$	-	Matriz de ganho de <i>Batz-Kleinman</i> , (p entradas, q saídas)
m	\mathbb{R}_+	kg	Massa total do Quadrotor
M_c	$\mathbb{R}^{n \times np}$	-	Matriz de controlabilidade, (n estados, p entradas)
M_{net}	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$	N.m	Momentos actuantes no Quadrotor, $M_{net} = [M_x M_y M_z]$
M_o	$\mathbb{R}^{nq \times n}$	-	Matriz de observabilidade, (n estados, q saídas)
M_T	\mathbb{R}	N.m	Momento/Binário do motor
M_x, M_y, M_z	\mathbb{R}	N.m	Momentos actuantes no Quadrotor segundo os eixos x' , y' e z' , respectivamente
P	\mathbb{R}	rad/s	Velocidade angular do Quadrotor segundo o eixo x'
Q	\mathbb{R}	rad/s	Velocidade angular do Quadrotor segundo o eixo y'
Q	$\mathbb{R}_{0+}^{n \times n}$	-	Matriz de ponderação do estado - <i>LQR</i> , (n estados)
Q	$\mathbb{R}^{4 \times 1}$	-	Vector dos quaterniões, $q = [q_0 q_1 q_2 q_3]$
q_i	\mathbb{R}_{0+}	-	Elementos diagonais da matriz Q, ($i = 1, \dots, 4$)
R	\mathbb{R}	rad/s	Velocidade angular do Quadrotor segundo o eixo z'
R	$\mathbb{R}_+^{p \times p}$	-	Matriz de ponderação do controlo - <i>LQR</i> , $r_i's > 0$, (p entradas)
R_{ABC}	\mathbb{R}^3	-	Referencial local, móvel, preso ao C.G do Quadrotor, (<i>Aircraft-Body-Centered</i>)
R_{NED}	\mathbb{R}^3	-	Referencial inercial, fixo na Terra, (<i>North-East-Down</i>)
S_E	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	-	Matriz de rotação (também conhecida por matriz dos cossenos directores)
t	\mathbb{R}_{0+}	s	Tempo
T	\mathbb{R}_{0+}	s	Período do sinal que constitui a modulação PWM
T	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	-	Matriz que relaciona as velocidades angulares do Quadrotor com as taxas de variação dos ângulos de Euler
t_0	\mathbb{R}_{0+}	s	Instante inicial, ($t_0 = 0$ segundos)
T_{OFF}	\mathbb{R}_{0+}	s	Tempo a "0" da modulação PWM

T_{ON}	\mathbb{R}_{0+}	s	Largura do impulso da modulação PWM - “Tempo a 1”
t_s	\mathbb{R}_+	s	Taxa de amostragem
u	$\mathbb{R}^{p \times 1}$	-	Vector de controlo ou de entrada, (p entradas)
U	\mathbb{R}	m/s	Velocidade linear do C.G do Quadrotor segundo o x’
$u_{i,max}$	\mathbb{R}	V	Tensão máxima que pode se aplicada a cada motor
u_{eq}	$\mathbb{R}^{p \times 1}$	-	Vector de controlo de referência - vector que faz com que a tracção total do Quadrotor seja igual ao seu peso total, (p entradas)
V	\mathbb{R}	m/s	Velocidade linear do C.G do Quadrotor segundo o y’
V_{0i}	\mathbb{R}	V	Tensão para qual o eixo do motor começa a girar
V_i	\mathbb{R}	V	Tensão aplicada a cada motor, (i = 1,...,4)
V_T	\mathbb{R}^3	m/s	Vector das velocidades lineares, $V_T = [U \ V \ W]$
W	\mathbb{R}	m/s	Velocidade linear do C.G do Quadrotor segundo o z’
x	$\mathbb{R}^{n \times 1}$	-	Vector de estado, (n estados)
X	\mathbb{R}	m	Posição do C.G segundo x
x_0	$\mathbb{R}^{n \times 1}$	-	Vector de estado inicial - após uma perturbação a x_{eq}
$x_{i,max}$	\mathbb{R}	-	Valor máximo que cada variável de estado pode ter
x_{eq}	$\mathbb{R}^{n \times 1}$	-	Vector de estado de referência/equilíbrio
y	\mathbb{R}^q	-	Vector de saída, (q saídas)
Y	\mathbb{R}	m	Posição do C.G segundo y
Z	\mathbb{R}	m	Posição do C.G segundo z
w	\mathbb{R}^n	-	Ruído do processo, (n estados)

Capítulo I - Introdução

1.1. Definição e Propósito dos Quadrotors

Um Quadrotor, vulgarmente conhecido por um helicóptero com quatro motores, é uma aeronave cuja força de sustentação é produzida por quatro rotores, normalmente montados numa configuração em cruz. É um veículo completamente diferente quando comparado com um helicóptero, devido principalmente, à forma como ambos são controlados. Os helicópteros são capazes de alterar o ângulo de ataque das pás, enquanto que os Quadrotors não. A figura (1.1.1) ilustra um Quadrotor típico.



Figura 1.1.1. Quadrotor típico.¹

Actualmente, os Quadrotors são desenvolvidos tendo em conta três áreas principais: Militar, Transporte (quer de bens, quer de pessoas), e UAV's (*Unmanned Aerial Vehicles*), [1]. Os UAV's classificam-se em dois grandes grupos: mais pesados que o ar, e mais leves que o ar. Estes dois grupos dividem-se posteriormente em subgrupos que classificam a aeronave de acordo com a motorização, tipo de descolagem, entre outros parâmetros. UAV's com a capacidade de descolar e aterrar verticalmente (VTOL - *Vertical Take-Off and Landing*) como é o caso dos Quadrotors, têm algumas vantagens relativamente às aeronaves de asas fixas. Podem-se mover em qualquer direcção, são capazes de pairar, e de voar a baixas velocidades. Além disto, permitem também um pouso em quase todos os terrenos ao invés das aeronaves convencionais que requerem uma pista preparada para a aterragem e a descolagem.

Dadas estas características, os Quadrotors podem ser usados na vigilância e inspecção, exploração de construções, missões inacessíveis ou em ambientes perigosos (ex: exploração de outros planetas), meteorologia, e mesmo até na ajuda de missões de salvamento em que a fácil manipulação de um UAV por um operador sem horas de treino é primordial.

Por outro lado, os Quadrotors têm um papel importantíssimo nas áreas de investigação como na engenharia do controlo, onde se utilizam Quadrotors como plataformas para testar novas técnicas e algoritmos de controlo.

¹ <http://www.statusq.org/archives/2008/11/>

1.2. Como Operam os Quadrotors

Cada rotor do Quadrotor é responsável por uma determinada tracção, por um determinado binário em torno do seu centro de rotação e, menos conveniente, por uma força de resistência oposta à direcção do voo da aeronave. Idealmente, seria óptimo que os quatro sistemas propulsivos fossem todos iguais, contudo, tal não acontece. De facto, os sistemas propulsivos são divididos em dois pares: dois propulsores montados numa configuração “puxa”, e dois montados numa configuração “empurra”, trabalhando em contra-rotação, (duas hélices giram num sentido e outras duas noutra). Como consequência, o momento resultante anula-se se todas as hélices girarem com a mesma velocidade angular, permitindo assim que o Quadrotor permaneça em equilíbrio em torno do seu centro de gravidade.

A orientação (atitude) em torno do seu centro de massa é definida por engenheiros aeronáuticos normalmente através de três parâmetros dinâmicos conhecidos por ângulos de Euler: o ângulo de rolamento, ϕ , o de arfagem, θ , e o de guinada, ψ , (*roll, pitch and yaw*). Estes parâmetros são muito úteis pois as forças usadas para controlar o Quadrotor actuam em torno do centro de massa, causando rolamento, arfagem e guinada.

Variações do ângulo de arfagem, θ , são induzidas alterando a velocidade de rotação dos motores 1 e 3 (ver figura 1.2.1), resultando num movimento de translação longitudinal para a frente e para trás. Se fizermos esta mesma acção para os motores 2 e 4, podemos produzir uma variação no ângulo de rolamento, ϕ , obtendo assim translação lateral para a esquerda e para a direita. A guinada, ψ , é conseguida desequilibrando os momentos aerodinâmicos aos pares: 1 e 3, 2 e 4, de modo a que um par produza mais tracção que outro, mas mantendo a tracção total constante.

Portanto, provocando alterações nestes ângulos, estamos aptos a manobrar o Quadrotor em qualquer direcção como apresentado na figura (1.2.2).

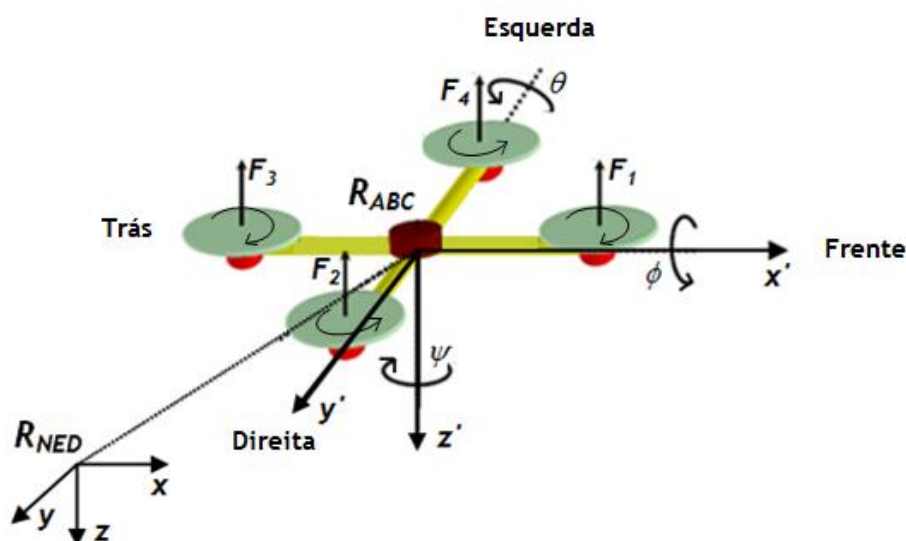


Figura 1.2.1. Ângulos de Euler: ϕ, θ e ψ - Rolamento, arfagem e guinada, respectivamente.²

² <http://med.ee.nd.edu/MED13/papers/T23-035-634.pdf> , [adaptado]

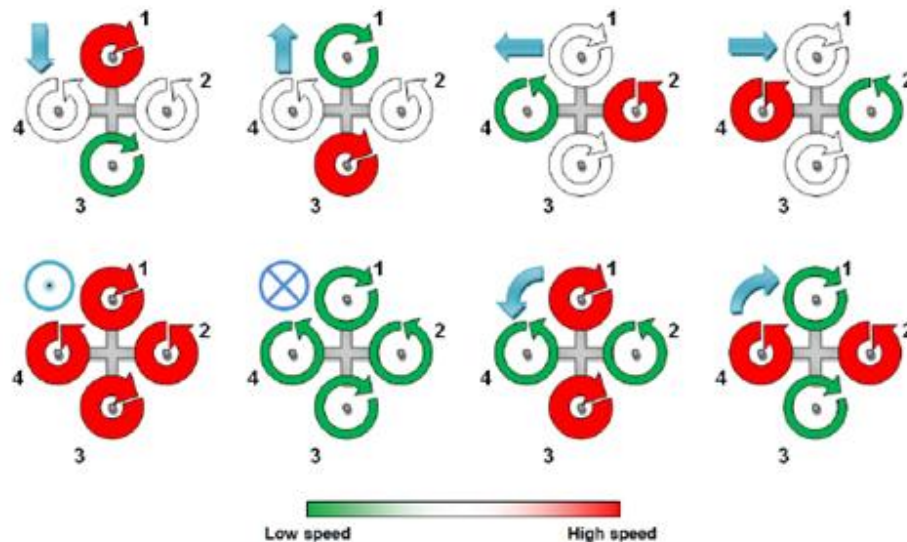


Figura 1.2.2. Ilustração dos vários movimentos do Quadrotor.³

1.3. A Evolução Histórica dos Quadrotors

A história começa no século XX, quando Charles Richet, um cientista acadêmico francês, construiu um helicóptero pequeno não pilotável, [2]. Embora sua tentativa não fosse um sucesso, Louis Bréguet, um dos estudantes de Richet, foi inspirado pelo exemplo do seu professor. Mais tarde, em 1906, Louis e seu irmão, Jacques Bréguet, começaram a construir o primeiro Quadrotor. Louis fez alguns testes com perfis aerodinâmicos, certificando-se que tinha pelo menos alguns conhecimentos dos requisitos necessários para realizar um voo vertical.

Em 1907 tinham terminado a construção da aeronave, a qual foi baptizada de giroplano Bréguet-Richet número 1, figuras (1.3.1) e (1.3.2). Um Quadrotor com hélices de 8.1 metros de diâmetro, pesando 578 kg (2 pilotos incluídos) e somente com um motor de combustão interna de 50 hp (37.3 kW), que fazia o drive dos rotores através de polias e correias de transmissão. Com certeza que nessa altura não faziam ideia como é que o iam controlar, pois o problema principal era garantir que a aeronave pudesse voar na vertical. A primeira tentativa deste voo foi entre Agosto e Setembro de 1907, com testemunhas afirmando que o Quadrotor levantou 1.5 m por poucos momentos, aterrando imediatamente logo depois disso. Essas mesmas testemunhas também mencionaram que a aeronave estava estabilizada, e talvez levantou com a assistência de um homem em terra.

Desencorajados pela falta de sucesso do giroplano número 1, Bréguet e seu mentor continuaram suas perseguições à construção de máquinas de voo vertical. Posteriormente, também se dedicaram temporariamente ao desenvolvimento de aeronaves de asas fixas, área onde se tornaram muito bem sucedidos, Louis nunca abandonou a sua paixão pelas aeronaves

³ <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.87.1375&rep=rep1&type=pdf> , [adaptado]

de voo vertical, e em 1932 tornou-se um dos pioneiros no desenvolvimento de helicópteros, [2].



Figura 1.3.1. Modelo 3D do giroplano nº 1.⁴



Figura 1.3.2. Giroplano nº1 em 1907.⁵

Etienne Oemichen, outro engenheiro, também começou a experimentar projectos de asas rotativas em 1920. Projectou num total 6 máquinas de descolagem vertical diferentes. O primeiro modelo falhou na descolagem, mas Oemichen era uma pessoa determinada e então decidiu acrescentar um balão cheio de hidrogénio para fornecer sustentação e estabilidade.

A sua segunda aeronave, a Oemichen número 2, figura (1.3.3), tinha quatro rotores e oito hélices, suportadas por uma estrutura em tubos de aço. Cinco das hélices estavam dedicadas a estabilizar a máquina lateralmente, outra para a direcção e duas para propulsão para a frente. Embora muito rudimentar, esta máquina realizava voos com um grau considerável de estabilidade e controlabilidade, tendo feito mais de mil testes de voo em meados dessa década. Era mesmo possível manter a aeronave alguns minutos nos ar. A 14 de Maio, a aeronave manteve-se no ar catorze minutos e voou mais de uma milha náutica. Contudo, Oemichen não estava satisfeito com os resultados pobres na altitude, e as máquinas seguintes tinham simplesmente um rotor principal e dois rotores anti-torque. ($1.852 \text{ km} / 14 \text{ min} \approx 7.9 \text{ km/h}$).

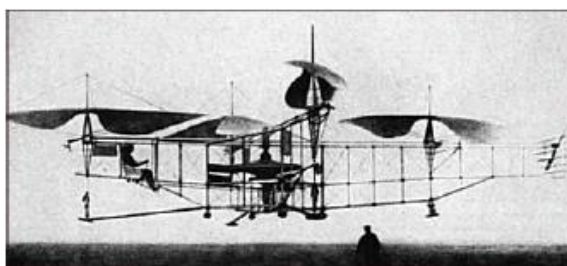


Figura 1.3.3. A Oemichen número 2, de 1922.⁶

O exército americano também tinha interesse em máquinas de descolagem vertical. Em 1921, George de Bothezat e Ivan Jerome foram contratados para desenvolver uma para os *US Army Corps*. O resultado foi uma estrutura de 1678 kg, com braços de 9 m e 4 rotores com 6

⁴ <http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/breguet.html>

⁵ <http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/breguet.html>

⁶ <http://pt.wikilingue.com/es/Helic%C3%B3ptero>

pás de 8.1 m, figura (1.3.4). O contrato do exército exigia que a máquina ficasse suspensa no ar a 100 m de altitude mas o melhor que conseguiram foi de 5 m.

No fim do projecto, Bothezad demonstrou que o veículo podia ser bastante estável. No entanto era fraco a nível estrutural, não reagia muito bem aos comandos de voo, e entre outros problemas técnicos.



Figura 1.3.4. Quadrotor projectado por Bothezad e Ivan Jerome. Foto tirada na descolagem durante o primeiro voo em Outubro, 1922.⁷

Mais tarde, em 1956, o protótipo de um Quadrotor chamado “*Convertawings Model A*”, ver figura (1.3.5), foi projectado simultaneamente para uso militar e uso civil. Era controlado variando a tracção entre os rotores e o seu voo foi um sucesso mesmo em voo para a frente. O projecto terminou principalmente devido à falta da procura deste tipo de aeronave.



Figura 1.3.5. Quadrotor *Convertawings Model A*.⁸

Recentemente tem havido um aumento no interesse do projecto de Quadrotors. A *Bell* conjuntamente com a *Boeing* estão a trabalhar num *quad-tiltrotor* que visa superar o V-22 Ospray, ver figura (1.3.6), Terá capacidade de transportar mais carga útil, voar a alta velocidade, e necessitará de muito pouco espaço para a descolagem e para a aterragem (VTOL).

Muitos dos seus sistemas vêm directamente do V-22 à excepção do número de motores. A estrutura contendo uma asa de envergadura maior nos rotores traseiros trás alguns

⁷ http://www.aviastar.org/helicopters_eng/bothezat.php

⁸ http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings.php

melhoramentos, e como consequência, o objectivo do *Bell quad-tiltrotor*, ver figura (1.3.7), é ter um desempenho melhor e ser mais económico no combustível, [3].



Figura 1.3.6. V-22 Ospray.⁹



Figura 1.3.7. Conceito da *Bell quad-tiltrotor*.¹⁰

Um outro projecto recente e famoso é o *Moller Skycar*, ver figura (1.3.8), um protótipo de um “carro voador pessoal”. O *Skycar* tem quatro *ducted-fans*, permitindo uma operação em segurança e eficiente a baixas velocidades. Foi um alvo de muitas críticas, porque as únicas demonstrações em voo eram testes a pairar com o *Skycar* amarrado a um guindaste, [4]. O seu inventor, Paul Moller já tinha tentado vender o carro voador em leilão, mas sem sucesso.

Hoje em dia, foca o seu trabalho num modelo posterior ao *Skycar*, o “*M200G Volantor*”, um *hovercraft* em forma de pires que usa 8 fans controladas por um computador, e é capaz de pairar até 3 m acima do solo. Esta limitação de altitude é imposta pelo computador de bordo, que declarada pela legislação da FAA (*Federal Aviation Administration*), qualquer veículo que vôo acima dos 3 m é regulamentado como sendo uma aeronave, [5].



Figura 1.3.8. *Skycar*: À esquerda - em modo carro; À direita - durante um voo de testes.¹¹

1.4. Motivação

Em situações onde a vida das pessoas está em perigo, existe regularmente necessidade de transportar feridos ou doentes para um hospital, ou para um outro lugar capaz de prestar os cuidados médicos necessários. Muitas vezes, quando uma ambulância não pode chegar rapidamente ao sítio de emergência, aeronaves de assistência médica são normalmente

⁹ <http://zerosix.wordpress.com/2007/10/06/v22-in-search-and-rescue-mode-arizona-not-iraq/>

¹⁰ <http://sistemadearmas.sites.uol.com.br/ca/aco01tilt.html>

¹¹ <http://www.symscape.com/blog/flying-car-contenders>

usadas como alternativa, um uso que foi provado ser uma medida bastante valiosa. O primeiro registo deste tipo de acção leva-nos até 1870, quando durante a guerra Franco-Prussiana, 160 soldados franceses foram transportados de balão de ar quente para França, [6].

Desde aí, o conceito de assistência médica com a ajuda de aeronaves tem-se envolvido imenso quer em perspectivas militares quer em civis. Hoje em dia, helicópteros e aviões estão muito bem equipados (ex. de alguns equipamentos que têm a bordo: ventiladores, monitores de electrocardiograma, desfibrilador, etc.), permitindo o tratamento de imediato em casos críticos, evitando em muitos casos a morte antes da chegada ao hospital. Estas aeronaves têm grandes propósitos, especialmente no que diz respeito a áreas remotas, isoladas, e inabitáveis.

No entanto, e acerca das suas funções práticas em cidades desenvolvidas? Certamente existe uma grande concentração de facilidades médicas dentro das grandes cidades, mas por outro lado, existem outros factores a considerar como o congestionamento do trânsito, ver figura (1.4.1).



Figura 1.4.1. Ambulância retida num engarrafamento no Rio de Janeiro, Brasil.¹²

Este factor causa uma viagem rápida de ambulância transformar-se num autêntico pesadelo, demorando horas até alcançar o destino, já para não falar do risco de acidente onde a tripulação e o paciente podem-se ferir gravemente. Podemos com certeza usar helicópteros, mas as suas dimensões são seriamente obstáculos devido ao grande diâmetro das pás rotativas, que podem colidir contra uma árvore ou um poste de electricidade.

E se pudéssemos arranjar uma aeronave com as mesmas características que um helicóptero, mas em tamanho pequeno? Uma possível resposta a esta pergunta é o uso de um veículo Quadrotor, cujas vantagens são apresentadas de seguida:

- Não há necessidade de engrenagens entre o motor e o rotor.
- Não requer passo variável das pás para alterar o ângulo de ataque do Quadrotor.
- Não requer inclinação no rotor.

¹² <http://saudefloripa33pj.wordpress.com/2011/04/18/falta-de-educacao-no-transito-ameaca-vidas>

- 4 motores pequenos em vez de um grande rotor, resultando em menos energia cinética acumulada e portanto menos estragos em caso de acidente.
- Complexidade mecânica mínima.
- Quadrotors não requerem tanta manutenção comparativamente aos helicópteros e aos aviões.
- Simplificação mecânica do rotor.
- Aumento da carga útil.
- Redução dos efeitos giroscópios.

Embora existam alguns inconvenientes como o aumento do peso total da aeronave e o aumento do consumo de energia, estes podem ser reduzidos graças às fontes de energia mais eficientes e à investigação na engenharia dos materiais.

Uma outra motivação para investigação na área do controlo de Quadrotors surge pelo desafio de projectar controladores, recentes e sofisticados, que superam limitações dos controladores actuais, com vista a contribuir de alguma forma para o desenvolvimento dos Quadrotors e da sua operação em segurança.

1.5. Contribuição desta Dissertação

Um Quadrotor pode ser guiado de duas maneiras: ou autonomamente ou pilotado por um operador (remoto ou local). Tratando-se de uma aeronave com 4 rotores montados nas extremidades de uma estrutura em forma de cruz, é uma aeronave extremamente difícil de estabilizar, pelo menos sem a ajuda de um controlador da atitude.

Como se pode entender muito facilmente, se um helicóptero convencional, que só tem um rotor principal e um rotor de cauda, já é difícil de o manter em voo pairado actuando-o somente por comandos mecânicos, um Quadrotor ainda o é mais difícil, porque à mínima perturbação, há necessidade de corrigir instantaneamente a sua atitude.

Nos casos em que os Quadrotors são manobrados por um operador, tem de existir no mínimo um estabilizador de atitude, onde as atitudes do Quadrotor são alcançadas com a ajuda do controlador de bordo. O operador limita-se simplesmente a indicar as referências desejadas.

Dadas estas considerações, o controlo quer da posição quer da atitude de um Quadrotor requer que algumas matérias sejam estudadas, implementadas e analisadas. Assim, os tópicos desenvolvidos ao longo desta dissertação são apresentados de seguida:

- Modelação da dinâmica da posição e da atitude de um Quadrotor.
- Modelação de um motor sem escovas (*brushless*) como um sistema linear, controlado por sinais PWM (*Pulse Width Modulation*) recorrendo a um microcontrolador *Arduino*.

- Projecto de um estimador (filtro de *Kalman*) que permite a fusão dos dados dos sensores provenientes da unidade inercial de medida (acelerómetros e giroscópios) e possibilita consequentemente uma estimativa fiável da sua atitude.
- Implementação de controladores MIMO (*Multiple-input and Multiple-output*) modernos, com aplicação em Quadrotors, (controladores: *LQR*, *Y. Elkrief*, *Bar-Shalom* e *Batz-Kleinman*).
- Implementação de um controlador capaz de guiar o Quadrotor de um estado para outro num tempo específico, (controlador *Gramiano*).

1.6. Estrutura da Dissertação

No capítulo I, *Introdução*, é anunciada uma breve descrição do que é um Quadrotor, das suas principais aplicações, e do seu funcionamento. De seguida é apresentada a evolução história dos Quadrotors desde o início do século XX até à actualidade, seguindo-se das motivações que me levaram a escolher os Quadrotors para investigar na área de controlo de sistemas. No tópico seguinte é apresentada a contribuição dos temas desenvolvidos para o controlo dos Quadrotors, e por fim a maneira de como esta dissertação está estruturada.

Seguindo-se para o capítulo II, *Revisão Bibliográfica*, são apresentados alguns projectos encontrados na literatura relacionados com o controlo de Quadrotors, onde são referidas as metodologias de controlo utilizadas e as dificuldades encontradas no que diz respeito à estabilização da atitude do Quadrotor. No fim do capítulo é feita uma síntese do estado da arte e é definida a abordagem tomada para superar as limitações dos projectos encontrados na literatura.

O capítulo III, *Modelação Matemática do Problema*, foca no modelo do Quadrotor. Os referenciais utilizados são definidos seguindo-se uma análise da dinâmica e da cinemática da aeronave. É descrita a forma como a força gerada por um sistema propulsivo (motor + hélice) é obtida em função da tensão eléctrica aplicada, e por fim é apresentado o cálculo dos momentos de inércia da aeronave. É neste capítulo que é feita a dedução das equações dinâmicas que governam a atitude e a posição do Quadrotor.

No capítulo IV, *Metodologias de Controlo*, é feita uma linearização do sistema porque as equações que governam a atitude e a posição do Quadrotor não são lineares, e são apresentadas leis de controlo de controladores do tipo MIMO (*Multiple-input and Multiple-output*): *LQR*, *Y. Elkrief & Bar-Shalom*, *Batz-Kleinman*, e o *Gramiano*.

Segue-se o capítulo V, *Estimador (Filtro de Kalman)*, com a formulação matemática de um estimador (filtro de *Kalman*) - um estimador discreto no tempo, e um estimador contínuo no tempo - com vista a estimar o valor exacto das variáveis de estado (eliminação do ruído dos sensores) e também com vista a estimar as variáveis para as quais não têm sensores para as medir. O estimador discreto é formulado pelo método clássico de *Kalman*, e o estimador

contínuo formulado recorrendo ao espaço dual de *Kalman*. É também apresentado as equações de um estimador discreto para o microcontrolador *Arduino*.

No capítulo VI, *Simulação e Discussão dos Resultados*, iniciam-se as simulações, começando pelo controlo por referências programáveis (*waypoints*) da posição e da atitude do Quadrotor (piloto automático) para verificar que há controlo total sobre todos os estados do sistema. De seguida são apresentadas um conjunto de simulações do controlo por referências programáveis da atitude do Quadrotor com os controladores: *LQR*, *Y. Elkrief*, *Bar-Shalom*, *Batz-Kleinman* e com o controlador *Gramiano*, com vista a escolher o mais adequado consoante o tipo de missão. Por fim, é apresentada a simulação de um estimador de *Kalman* contínuo para estimar a atitude do Quadrotor (filtragem dos erros dos sensores que medem a sua atitude).

Esta dissertação termina no capítulo VII com as conclusões finais e com algumas sugestões para eventuais trabalhos futuros.

Capítulo II - Revisão Bibliográfica

2.1. Projectos na Literatura

Actualmente existem muitos estudos diferentes na literatura sobre Quadrotors, envolvendo estes materiais, plataformas, e controladores diversificados.

Devido aos imensos melhoramentos das técnicas de manufactura e à inovação de materiais metalúrgicos, puderam-se fabricar sensores mais precisos e mais pequenos. A tecnologia MEMS (*Micro ElectroMechanical Systems*) permite actualmente a produção de componentes de máquinas mecânicas com tamanhos na escala dos micrómetros como por exemplo rodas dentadas, [7]. Recorrendo a esta tecnologia, podem ser produzidos acelerómetros, giroscópios e magnetómetros muito pequenos e conseqüentemente unidades de medida inerciais pequenas, [8, 9, 10]. Como resultado desta melhoria tecnológica surgem Quadrotors minúsculos como o *Mesicopter*, ver figura (2.1.1), [11].

Relativamente às plataformas, é comum os engenheiros recorrerem a Quadrotors comerciais fabricados pela *RC Toys* como por exemplo ao *Draganflyer*, ver figura (2.1.2), para testarem as suas técnicas de controlo.

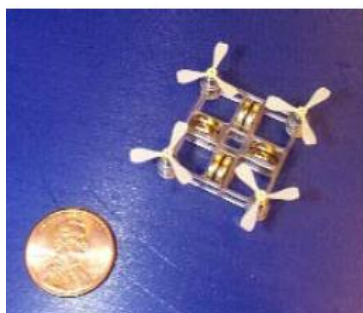


Figura 2.1.1. *Mesicopter* - Tecnologia MEMS.¹³



Figura 2.1.2. *Draganflyer* - Plataforma comercial.¹⁴

No Instituto Federal de Tecnologia Suíço foram testados os controladores PID (*Proportional-Integral-Derivative*) e LQ (*Linear-Quadratic*) para o controlo da atitude (rolamento, arfagem, e guinada) de um Quadrotor designado por *OS4*, ver figura (2.1.3). A aproximação clássica PID tinha por base a dinâmica do veículo simplificada e o LQ um modelo mais completo. Várias simulações e ensaios experimentais foram feitos para validar os sistemas de controlo.

Os resultados mostraram que o controlador LQ foi considerado apenas como razoável e não o espectável pela positiva, devido ao facto da dinâmica dos actuadores não ser introduzida no modelo matemático. Por outro lado, revelou ser problemático por ser difícil encontrar a matriz de ponderação (matriz Q) que satisfizesse o controlo da estabilidade.

¹³ <http://adg.stanford.edu/mesicopter/imageArchive/>

¹⁴ <http://www.rctoys.com/RC-Toys-and-parts/DF-VTI/RC-HELICOPTERS.html>

No que diz respeito ao controlo da atitude na presença de pequenas perturbações, os resultados obtidos pelo PID eram mais favoráveis, quando comparados com o LQ, devido à tolerância deste método para modelos com incertezas, [12].

Foi também desenvolvida uma ferramenta computacional para simular a dinâmica da aeronave OS4 em MatLab® tirando partido do Simulink®. O software permite testar várias técnicas de controlo e vários tipos de filtros inserindo as características dos sensores. O ambiente de simulação é utilizado especificamente para testar a aproximação e o desvio de obstáculos recorrendo a sensores de ultra-sons, [13].

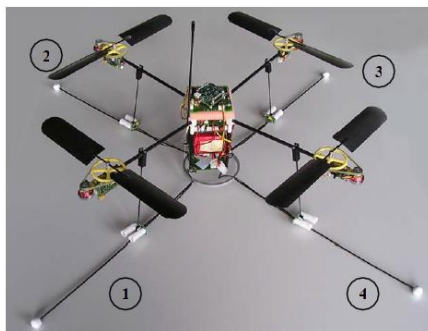


Figura 2.1.3. Quadrotor OS4 - Instituto Federal de Tecnologia Suíço, [13].

Numa investigação feita na Universidade da Califórnia (*UC Berkeley*) com o intuito de controlar um Quadrotor de modo a que traçasse uma trajectória desejada através da introdução de *waypoints*, foi implementado um controlador PD (*Proportional-Derivative*) para controlar a posição e um PID para controlar a rotação segundo o eixo vertical da aeronave - ângulo de guinada.

O modelo dinâmico do Quadrotor foi obtido linearizando as equações não-lineares do movimento. O comportamento do sistema foi analisado em simulações numa primeira fase sem a presença de incertezas e numa fase posterior com a introdução de incertezas e perturbações como rajadas de vento.

Os resultados mostraram que o controlo linear é adequado e tem um bom desempenho quando as condições são perfeitas. Quando são introduzidas incertezas como perturbações atmosféricas ou saturação dos actuadores o sistema deixa de responder adequadamente, [14].

Numa Universidade da Turquia (*TOBB Economics and Technology University*), o controlo por modos deslizantes SMC (*Sliding Mode Control*), técnica de controlo esta conhecida pela sua robustez sob o efeito de perturbações e invariância durante o regime deslizamento, foi testado num Quadrotor disponível no mercado para controlar a posição e a atitude a baixas altitudes.

O investigador formulou um modelo dinâmico completo considerando o sistema como não-linear e com as variáveis de estado fortemente acopladas. As hipóteses assumidas incluíam sinais de controlo não saturados, perturbações climáticas desprezáveis, e actuação razoavelmente rápida em campo.

Simulações mostraram que o controlo por modos deslizantes estabilizou o sistema na trajectória desejada e com sinais de controlo limitados, [15].

As competições de estudantes são uma outra forma de promover o desenvolvimento de Quadrotors. Na 6ª Competição Anual de Sistemas Aéreos Não Tripulados¹⁵, um Quadrotor projectado por uma universidade dos Estados Unidos (*Oakland University*), ver figura (2.1.4), incorporava a bordo um GPS (*Global Positioning System*) para obter as coordenadas da aeronave e dois processadores que, com o controlo da posição e da atitude, tornavam a navegação autónoma possibilitando traçar uma trajectória e ao mesmo tempo trocar informação com uma estação terrestre.

O controlo era feito por 4 controladores PID: um para o controlo da arfagem; um para o controlo do rolamento; um para o controlo da guinada; e outro para o controlo da força propulsiva, e os seus ganhos foram determinados experimentalmente.

No início da competição e imediatamente após a descolagem o Quadrotor teve algumas dificuldades em estabilizar devido a perturbações provocadas pelo vento mas no entanto o controlador portou-se extremamente bem e foi capaz de estabilizar o sistema, [16].



Figura 2.1.4. Quadrotor - *Oakland University*, [16].

Na Universidade Nacional da Austrália, um Quadrotor intitulado de *X-4 FlyerMark II*, ver figura (2.1.5), foi projectado de raiz com uma estrutura robusta de 4kg e aviónica personalizada. O Quadrotor tinha pás aeroelásticas, passo variável, e um mecanismo no rotor que permitia o ajuste do batimento das pás.

O controlo da posição e da atitude era implementado em MatLab/Simulink® com PID's (um para cada motor), o modelo era não-linear, e tinha em consideração na sua dinâmica pás aeroelásticas, passo variável, e o compensador de ajuste do batimento das pás.

Simulações demonstraram que uma configuração com os rotores invertidos era benéfica para a estabilidade do Quadrotor e resultados experimentais mostraram que o passo variável introduzia efeitos de estabilidade significativos e que o compensador era capaz de controlar a atitude a baixas rotações, [17].

¹⁵ <http://65.210.16.57/studentcomp2010/default.html>

Seis anos mais tarde, uma análise da dinâmica da atitude pelos mesmos autores permitiu um melhoramento do projecto mecânico melhorando a rejeição de perturbações e aumentando a sensibilidade do controlador. Os modos predominantes de rolamento e de arfagem eram estabilizados individualmente e o desempenho da plataforma foi estimado recorrendo ao modelo das entradas perturbadas, [18].

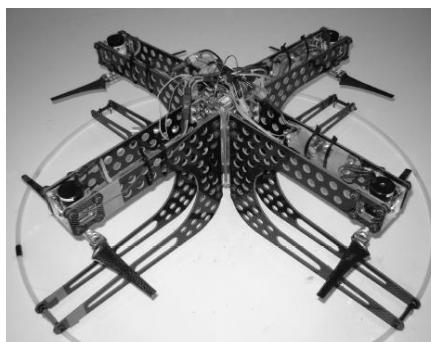


Figura 2.1.5. X-4 FlyerMark II - Universidade Nacional da Austrália, [18].

Num estudo desenvolvido no Instituto Superior Técnico foram testadas as capacidades de um Quadrotor autónomo designado por ALIV (*Autonomous Locomotion Individual Vehicle*), ver figura (2.1.6).

Um controlador *LQR* (*Linear-Quadratic-Regulator*), com as matrizes de ponderação determinadas pela regra de *Bryson*, foi implementado em MatLab/Simulink® para estabilizar a aeronave e um filtro de *Kalman* foi usado para estimar o estado do Quadrotor através da modelação de sensores reais.

O controlar em Simulink® foi acoplado posteriormente ao simulador de voo *FlightGear* permitindo a simulação em tempo real do sistema, ver figura (2.1.7). Um *joystick* e uma câmara de simulação a bordo ajudavam no controlo da posição, possibilitando que o utilizador dirigisse o Quadrotor para um determinado alvo, o qual após alcançado seguia autonomamente um objecto com velocidades moderadas.

Simulações mostraram que o controlo pelo método *LQR* era capaz de estabilizar o sistema de uma forma razoável fazendo com que o Quadrotor cumprisse as suas missões, [19].



Figura 2.1.6. Plataforma ALIV, [19].



Figura 2.1.7. Simulação do controlo do ALIV no *FlightGear*, [19].

Na Universidade da Pensilvânia, o controlo da posição e da atitude de um Quadrotor autónomo foi simulado em MatLab/Simulink® por dois métodos diferentes: primeiro pelo método da Linearização por Realimentação dos Estados; e de seguida pelo método *Backstepping Control* que consiste em criar uma lei de controlo tendo em conta uma estrutura em cascata da dinâmica do sistema.

Uma única câmara de filmar colocada no solo era utilizada para estimar a altitude e a rotação do Quadrotor segundo o eixo vertical (ângulo de guinada) através de etiquetas coloridas colocadas em pontos estratégicos, ver figura (2.1.8).

Após comparação dos resultados, o *Backstepping Control* funcionava melhor que a Linearização por Realimentação dos Estados, e experiências revelaram que o Quadrotor não conseguiria ser completamente autónomo recorrendo somente a uma câmara, [20].

Um ano mais tarde, os mesmos autores melhoraram o projecto incorporando mais uma câmara. Agora com uma câmara a bordo do Quadrotor e outra fixa no solo, desenvolveram um algoritmo para estimar a posição e a atitude. O algoritmo foi comparado com outros algoritmos de estimação da posição e da atitude recorrendo a visão artificial e provou ser mais eficiente especialmente quando havia erros no plano da imagem.

O *Backstepping Control* foi usado para estabilizar o sistema e revelou ser capaz de o estabilizar razoavelmente bem mesmo quando havia erros nos estados estimados, [21].

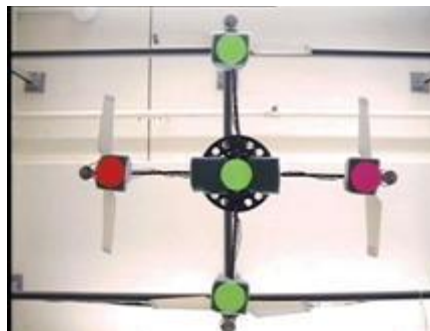


Figura 2.1.8. Estimação da posição e da atitude de um Quadrotor recorrendo a câmeras de filmar, [21].

A visão artificial provou ser uma ferramenta engenhosa para estimar a atitude e a posição de um Quadrotor. Numa outra investigação, com a perspectiva de expandir o controlo individual de um Quadrotor para o controlo cooperativo de vários Quadrotors, um algoritmo foi desenvolvido com o intuito de estimar os 6 graus de liberdade essenciais para a operação de um Quadrotor na proximidade de outros e na proximidade de plataformas de aterragem. O algoritmo recorria a padrões *moiré* e o controlo da posição e da atitude era feito com controladores PID.

Os resultados mostraram a capacidade do controlador fazer com que o Quadrotor permanecesse em voo pairado utilizando somente visão artificial para estimar a posição e a atitude, [22].

Um grupo de investigadores da Universidade de *Stanford* desenvolveu um projecto com vista a demonstrar as capacidades de controlo e de vigilância em ambiente real com um

conjunto de Quadrotors. O projecto, apelidado por *Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi-Agent Control (STARMAC)*, propunha a demonstrar numa primeira fase o controlo de vários Quadrotors em simultâneo traçando uma trajetória definida por waypoints.

Os objectivos passaram inicialmente pelo domínio dos conceitos de voo e para tal foi utilizado o modelo comercial *Draganflyer IV*, ver figura (2.1.9). Este revelou ter uma dinâmica muito instável e muito rápida que o tornava extremamente difícil de pilotar.

Projectaram então um controlador para estabilizar a posição e a atitude cujo estado de cada Quadrotor era definido pela fusão de dados provenientes de três giroscópios, de três acelerómetros, de três magnetómetros e de um GPS. Os estados eram filtrados por um filtro de *Kalman* a fim de eliminar o ruído introduzido pelos sensores.

O modelo dinâmico do Quadrotor era não-linear e a atitude era estabilizada pelo método *LQR* com a matriz de ponderação do estado ajustada de modo a que os desvios angulares fossem penalizados mais que os desvios das respectivas taxas. A estabilização do sistema nas situações em que não-linearidades tinham de ser consideradas, como o controlo da altitude e a estabilização do sistema na origem na presença de incertezas, foi conseguida com a implementação de um controlador por modos deslizantes *SMC*, [23].



Figura 2.1.9. Quadrotors do projecto *STARMAC II* - Universidade de *Stanford*, [23].

Numa outra investigação, três efeitos aerodinâmicos foram analisados tendo em consideração a velocidade com que o Quadrotor se desloca, o ângulo de ataque, e a influência da estrutura no escoamento induzido pelas hélices.

O primeiro efeito estudado foi a forma como a tracção total varia não só com a potência fornecida motores mas também com a velocidade do escoamento sobre o veículo e com o ângulo de ataque.

O segundo fenómeno foi o batimento das pás como resultado da diferença de velocidades relativas nas pás que avançam e nas pás que recuam. Esta diferença de velocidades afectava o controlo da atitude e da posição por induzir momentos de rolamento e de arfagem no rotor como também uma deflexão no vector da tracção produzida.

Por último, foi investigado o fenómeno da interferência causada pelos elementos estruturais do Quadrotor no fluxo de ar induzido pelas hélices. Esta interferência era responsável por uma tracção instável tornando difícil a estabilização da atitude.

Os problemas causados por estes efeitos aerodinâmicos foram revelados com a ajuda dos Quadrotors do projecto *STARMAC II*. Os resultados provaram que modelos e técnicas de controlo já existentes são inadequadas para o seguimento preciso de uma trajectória a altas velocidades e em ambientes não controlados, [24].

2.2. Síntese

Na literatura são encontrados vários tipos de controladores para a estabilização quer da posição quer da atitude de Quadrotors. Os que mais se destacam são nomeadamente os controladores clássicos PID, os controladores LQ e *LQR*, o controlo por modos deslizantes SMC, o controlo por Linearização da Realimentação dos Estados, e o *Backstepping Control*.

A atitude dos Quadrotors é obtida frequentemente recorrendo a IMU's (*Inertial Measurement Unit*) e a estimadores como o filtro de *Kalman*. Nalguns projectos foram desenvolvidas técnicas de visão artificial para estimar a atitude. A posição é na maioria dos projectos obtida conjugando os dados provenientes da IMU (giroscópios e acelerómetros) com as coordenadas fornecidas por um GPS.

Relativamente às metodologias de controlo, a maioria dos controladores quer da atitude quer da posição apresentam algumas limitações como restrições impostas pelos próprios métodos de controlo ou a não completa modelação do sistema dinâmico.

Embora em quase todos os controladores encontrados para Quadrotors haja a preocupação com a saturação dos actuadores, em nenhum dos projectos há preocupação com a energia requerida para estabilizar o sistema à excepção do controlo pelo método *LQR*. Mesmo assim, no controlo por este método, as matrizes de ponderação do estado e do controlo são escolhidas ou simplesmente pela regra de *Bryson* ou então numa fase posterior ajustadas pelo programador de modo a que o sistema tenha o comportamento desejado. Este é um processo trabalhoso que muitas vezes é determinado por tentativa e erro.

Existe a necessidade de procurar novos métodos de controlo para Quadrotors de modo a que o controlo seja mais eficiente que os controlos actuais e que requeiram um custo de controlo menor. Por outro lado, também não é encontrado na literatura Quadrotors com controladores que tenham em conta a 4ª dimensão, o tempo. Isto é, suponhamos que numa determinada missão do Quadrotor, ele tivesse de se deslocar de um *waypoint* para um outro *waypoint* num determinado tempo. Este é um problema que nenhum dos controladores encontrados na literatura para Quadrotors resolve. Existe também problemas que têm de ser resolvidos como aumentar a autonomia de um Quadrotor equilibrando a energia das baterias que alimentam os quatro motores, (sem colocar baterias com mais capacidade).

Surge ainda uma pergunta que não é respondida nos artigos encontrados e que se resume ao seguinte: Será que o Quadrotor consegue voar com apenas três motores?

Proponho então solucionar nesta dissertação todos os problemas acima mencionados com métodos de controlo inovadores e responder também à questão do voo somente com três motores.

Capítulo III - Modelação Matemática do Problema

3.1. Modelação da Dinâmica

O modelo dinâmico do Quadrotor é deduzido tendo por base dois referenciais. O primeiro referencial é considerado um referencial inercial e fixo, ligado à superfície terrestre, onde os dois primeiros eixos, x e y , são tangentes ao meridiano e ao paralelo respectivamente, cujo o eixo x é direccionado para Norte e o eixo y direccionado para Este. O terceiro eixo, z , é direccionado para o centro da Terra. A este referencial atribui-se a designação de R_{NED} (*North-East-Down*), ver figura (3.1.1).

O segundo referencial é um referencial local, móvel, ligado ao corpo rígido do Quadrotor, com origem no centro de gravidade, cujo o eixo z' é direccionado para baixo, o eixo x' para a frente, e o eixo y' para a direita, ver figura (3.1.2). A este referencial móvel atribui-se a designação de R_{ABC} (*Aircraft-Body-Centered*).

Desta forma, quando o Quadrotor estiver estabilizado, ambos os referenciais possuem as direcções z e z' a apontarem para o centro da Terra, ver figura (3.1.2).

- Referencial R_{NED} (*North-East-Down*), $R_{NED} = [x, y, z]$
- Referencial R_{ABC} (*Aircraft-Body-Centered*), $R_{ABC} = [x', y', z']$

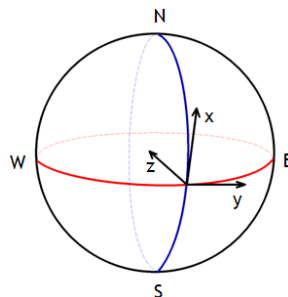


Figura 3.1.1. Sistema de eixos do referencial inercial fixo R_{NED} (*North-East-Down*).

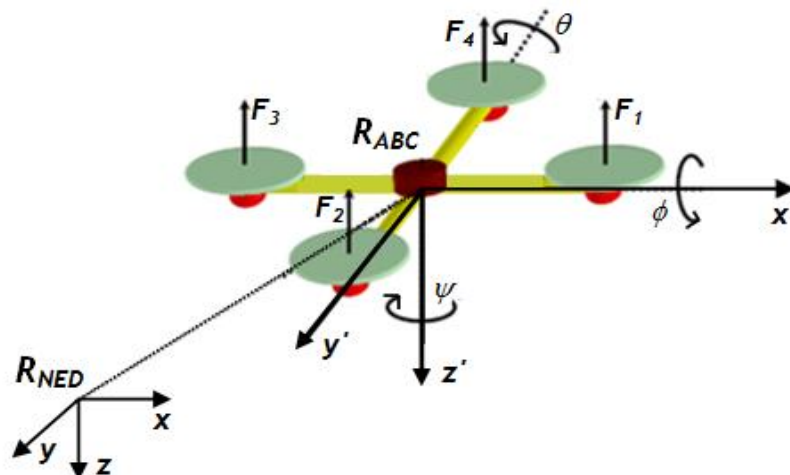


Figura 3.1.2. Referenciais R_{NED} e R_{ABC} .

Na teoria do controlo, o conhecimento do comportamento dinâmico de um dado sistema pode ser adquirido através dos seus estados. Para o sistema em questão (Quadrotor), a atitude em torno dos 3 eixos de rotação, x , y e z , é conhecida por 6 estados: os 3 ângulos de Euler $[\phi \theta \psi]$ (rolamento, arfagem e guinada respectivamente), e as 3 velocidades angulares $[P Q R]$, velocidades estas também conhecidas por taxas angulares.

Os 6 estados anteriores descrevem a atitude do Quadrotor. Se quisermos controlar também a sua posição, outros 6 estados são necessários: a posição do centro gravítico (C.G) $[X Y Z]$, e as velocidades lineares $[U V W]$, velocidades estas relativas ao referencial móvel, R_{ABC} .

Em suma, são 12 estados no total que descrevem os 6 graus de liberdade do Quadrotor. A dedução das equações que descrevem a orientação do referencial móvel, R_{ABC} , em relação ao referencial fixo, R_{NED} , é conseguida a partir da matriz de rotação (3.2), designada na matemática por matriz dos cossenos directores. Esta matriz é resultado do produto de 3 matrizes de rotação, $R(\phi)$, $R(\theta)$ e $R(\psi)$, (3.1), em que cada uma delas representa a rotação do referencial móvel, R_{ABC} , em torno de cada um dos eixos do referencial fixo, R_{NED} , [26].

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$S_B^E = R(\psi) \cdot R(\theta) \cdot R(\phi) \Leftrightarrow S_B^E = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A matriz S_B^E é a matriz de rotação global que permite transpor um vector no sistema de coordenadas R_{ABC} (*Body*) para o sistema de coordenadas R_{NED} (*Euler*). Designe-se por S_E a matriz inversa da matriz S_B^E , ou seja, que S_E , (3.3), represente a matriz rotação de R_{NED} para R_{ABC} , $S_E = (S_B^E)^{-1} = (S_B^E)^T$.

$$S_E = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

O modelo matemático é baseado nas equações do movimento newtoniano, e portanto como referencial de trabalho, é considerado o referencial móvel R_{ABC} porque as unidades sensoriais (acelerómetros e giroscópios) são colocadas neste mesmo referencial.

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

A 2ª lei de Newton aplicável a um corpo rígido permite obter as equações da dinâmica do Quadrotor, expressas no referencial local R_{ABC} , (3.4 - 3.5),

$$F_{net} = \frac{d}{dt}[mV_T]_B + \omega \times [mV_T]_B \quad (3.4)$$

$$M_{net} = \frac{d}{dt}[I\omega]_B + \omega \times [I\omega]_B \quad (3.5)$$

em que V_T representa o vector das velocidades lineares ($U V W$), ω o vector das velocidades angulares ($P Q R$), e I a matriz de inércia do Quadrotor.

A 2ª lei de Newton incorpora na sua forma mais completa termos extra como a força de Coriolis e outras forças como por exemplo o arrasto provocado por forças de pressão (força de resistência). Estas forças deveriam ser adicionados mas no entanto não são incorporadas no processo da modelação para manter o modelo matemático simplificado.

Assim, considerando que a força por acção da gravidade é uma constante, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, no referencial inercial, R_{NED} , e que pode ser expressa no referencial local, R_{ABC} , através da transformação de Euler (3.6):

$$F_g = mS_E[0 \ 0 \ g]^T = mg[-\sin\theta \ \cos\theta\sin\phi \ \cos\theta\cos\phi]^T_B \quad (3.6)$$

e que a força total exercida no Quadrotor, F_{net} , é igual à soma vectorial da força gravítica, F_g , com a força propulsiva total gerada pela rotação de cada um dos rotores, $F_p = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, ver figura (3.1.3), tem-se (3.7):

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{F}_p \quad (3.7)$$

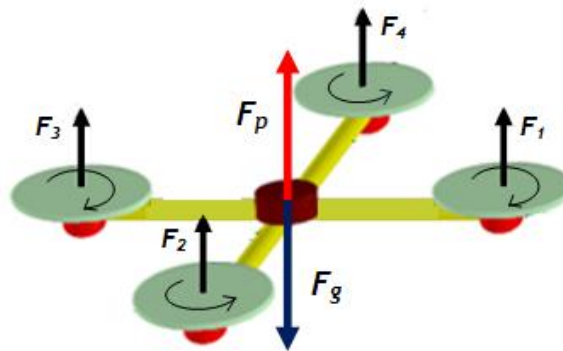


Figura 3.1.3. Forças actuaentes no Quadrotor.

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

Combinando as equações (3.4), (3.6) e (3.7), o vector das acelerações lineares que actua no Quadrotor é (3.8):

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde $[F_{px} F_{py} F_{pz}]$ representam as componentes da força propulsiva resultante, F_p , segundo os eixos x' , y' e z' respectivamente.

Se, se assumir que o Quadrotor está numa situação de voo pairado, as forças actuantes são unicamente na direcção do eixo dos zz , correspondendo à situação onde os 4 propulsores tentam superar a força gravítica para manter o Quadrotor estável a uma dada altitude, (3.9):

$$\begin{cases} F_{px} = 0 \\ F_{py} = 0 \\ F_{pz} = -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{cases} \quad (3.9)$$

Note-se que o sinal de menos em F_{pz} significa que a força propulsiva actua para cima, correspondendo ao sentido descendente do eixo dos zz .

Trabalhando agora a 2ª lei de Newton para a rotação, o tensor de inércia, I , na equação (3.5), é dado por (3.10):

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Assumindo que o Quadrotor é um corpo rígido com massa, m , constante (motores eléctricos, o que implica que não haja variação de massa devido à variação da massa de combustível) e que os seus eixos estão alinhados com os eixos principais de inércia, o tensor de inércia, I , simplifica e resulta numa matriz diagonal contendo simplesmente os momentos principais de inércia, (3.11):

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Juntando as equações (3.11) e (3.5), obtém-se o sistema (3.12):

$$M_{net} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

que consequentemente resulta no sistema de equações (3.14) após divisão de todos os termos do sistema (3.13) por $[I_{11} \ I_{22} \ I_{33}]^T$:

$$M_{net} = \begin{bmatrix} I_{11}\dot{P} \\ I_{22}\dot{Q} \\ I_{33}\dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})QR \\ (I_{11} - I_{33})RP \\ (I_{22} - I_{11})PQ \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x/I_{11} \\ M_y/I_{22} \\ M_z/I_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})QR/I_{11} \\ (I_{11} - I_{33})RP/I_{22} \\ (I_{22} - I_{11})PQ/I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Nas equações (3.14), os momentos actuantes no Quadrotor são funções das forças produzidas por cada motor, F_1, F_2, F_3, F_4 , e das respectivas distâncias ao C.G. Os momentos segundo cada um dos eixos são indicados por (3.15 - 3.17),

$$M_x = (F_4 - F_2)d_{cg} \quad (3.15)$$

$$M_y = (F_1 - F_3)d_{cg} \quad (3.16)$$

$$M_z = (F_2 + F_4 - F_1 - F_3)K_{MF} \quad (3.17)$$

onde d_{cg} é a distância de cada rotor ao C.G do Quadrotor e K_{MF} uma constante que relaciona o momento gerado com a tracção produzida, ver secção (3.3).

3.2. Modelação da Cinemática

3.2.1. Ângulos de Euler

Nesta secção, estuda-se a cinemática do Quadrotor. A primeira fase da análise da cinemática consiste em derivar a posição para obter a velocidade. Considere-se o vector \vec{r} , (3.18), que indica a posição da origem do referencial R_{ABC} relativamente ao referencial R_{NED} .

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (3.18)$$

Se derivarmos cada uma das componentes de \vec{r} obtém-se a velocidade instantânea do referencial R_{ABC} em relação ao referencial R_{NED} , (3.19).

$$\dot{\vec{r}} = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k} \quad (3.19)$$

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

Tome-se em atenção que as velocidades $[\dot{X} \dot{Y} \dot{Z}]^T$ são provenientes da posição do referencial R_{ABC} relativo ao R_{NED} , e portanto não correspondem às velocidades lineares $[U V W]^T$ segundo os eixos do referencial local, R_{ABC} , mas sim às velocidades lineares do *C. G.* do Quadrotor segundo os eixos do referencial inercial, R_{NED} .

As componentes da velocidade linear do Quadrotor, $[U V W]^T$, segundo os eixos do referencial móvel, R_{ABC} , podem ser obtidas por integração das acelerações fornecidas pelos acelerómetros instalados no Quadrotor, e relacionam-se com as velocidades $[\dot{X} \dot{Y} \dot{Z}]^T$ através da expressão (3.20):

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = S_E \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Aqui, podemos tirar partido da ortogonalidade da matriz S_E , o que significa que a sua inversa é igual à sua transposta, (3.21):

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = S_E^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi U + (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi) V + (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) W \\ C_\theta S_\psi U + (C_\phi C_\psi + S_\phi S_\theta S_\psi) V + (S_\theta C_\phi S_\psi - S_\phi C_\psi) W \\ -S_\theta U + S_\phi C_\theta V + C_\theta C_\phi W \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A trajectória de voo do Quadrotor em termos de coordenadas, $[X Y Z]$, pode ser obtida por integração das equações (3.22). A concepção desta integração necessita que os ângulos de Euler, $[\phi \theta \psi]$, que são função do tempo, sejam conhecidos.

As taxas de Euler, $[\dot{\phi} \dot{\theta} \dot{\psi}]$, dependem das velocidades angulares, $[P Q R]$. Para estabelecer esta relação, a igualdade (3.23) tem de ser satisfeita:

$$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} \quad (3.23)$$

Faça-se a distinção de que embora possa transparecer pela equação (3.23) que as taxas de Euler, $[\dot{\phi} \dot{\theta} \dot{\psi}]$, sejam iguais às velocidades angulares, $[P Q R]$, segundo cada eixo do referencial móvel R_{ABC} , na verdade não são. Se um objecto sólido (ex: disco) estiver a rodar a uma velocidade constante, a sua velocidade angular $\vec{\omega}$ é constante, porém as taxas de Euler variam porque dependem dos ângulos instantâneos entre o referencial do corpo e o referencial inercial do sistema (ex: ângulos entre R_{ABC} e R_{NED}).

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

A matriz de transformação que permite transformar as taxas de Euler, $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]$, segundo o referencial R_{NED} nas velocidades angulares $[P \ Q \ R]$ segundo o referencial R_{ABC} é obtida através de uma sequência de 3 rotações sucessivas como apresentado na equação (3.24),

$$\vec{\omega} = R(\psi)R(\theta)R(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R(\theta)R(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

resultando em (3.25):

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Se resolvermos as equações (3.25) em ordem às taxas de Euler, $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]$, obtém-se 3 das 6 equações diferenciais desejadas que governam a atitude do Quadrotor, (3.26), [26]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A matriz T na equação (3.26) é dada pela equação (3.27) e relaciona o vector das velocidades angulares do Quadrotor, $\vec{\omega} = [P \ Q \ R]^T$, com a taxa de variação temporal dos ângulos de Euler, $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]$.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.2.2. Método dos Quaterniões

Na prática, poderá surgir um problema quando se recorre aos ângulos de Euler, $[\phi \ \theta \ \psi]$, descritos na secção (3.2.1), devido ao facto de que para $\theta = 90^\circ$, o ângulo de rolamento, ϕ , perde o seu significado. Isto acontece porque observando a matriz (3.27), verifica-se que quando $\theta = 90^\circ$ a sua tangente dá infinito e conseqüentemente $\dot{\phi}$ dá também infinito, o que seria um absurdo visto que $\dot{\phi}$ representa uma taxa de Euler.

Por outras palavras, se a aeronave picar até 90 graus, o eixo de rolamento da aeronave, x' , torna-se paralelo ao eixo de guinada, z , e deixa de haver eixos disponíveis para fornecer rotação de guinada, (perde-se um grau de liberdade). Este fenómeno é designado em inglês por *gimbal lock*. Em simulações onde manobras complexas como por exemplo *loopings* completos têm de ser feitos, o método dos ângulos de Euler não é aceitável.

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

Para superar este problema, um método muito conhecido designado por método dos quaterniões pode ser utilizado. Quaterniões são elementos de um vector num espaço de 4 dimensões que oferecem uma notação matemática que permite a representação de rotações de objectos a 3 dimensões. Os Quaterniões evitam o problema da perda de graus de liberdade (*glimbal lock*), e ao mesmo tempo são numericamente mais eficientes e estáveis quando comparados as matrizes de rotação tradicionais, (ex: matriz de rotação S_E , (3.3)), [26].

A rotação pelo método dos quaterniões é apresentada por (3.28):

$$q = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon/2) \\ \sin(\varepsilon/2) n_1 \\ \sin(\varepsilon/2) n_2 \\ \sin(\varepsilon/2) n_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde q representa a rotação de um ângulo ε em torno do vector unitário $[n_1 \ n_2 \ n_3]^T$.

A derivada temporal da equação (3.28) é fornecida pela equação diferencial (3.29), [26]:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Omega_q q + \gamma q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -P & -Q & -R \\ P & 0 & R & -Q \\ Q & -R & 0 & -P \\ R & Q & -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\gamma = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

Por razões práticas, a inicialização das equações diferenciais (3.29) requer que os quaterniões iniciais, q_0, q_1, q_2 e q_3 , sejam expressos em termos de ângulos de Euler. Expressando os quaterniões em função dos ângulos de Euler resulta (3.30), [26]:

$$\begin{cases} q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Se quisermos extrapolar os ângulos de Euler, $[\phi \ \theta \ \psi]$, da equação diferencial (3.29), podemos fazê-lo através de passos intermédios, relacionando os elementos da matriz de rotação S_E , (3.3), com os elementos da matriz de rotação dos quaterniões, S_q , (3.31).

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

$$S_q = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A matriz de rotação S_q , (3.31), é equivalente à matriz de rotação S_E , (3.3). Posto isto, os ângulos de Euler, $[\phi \ \theta \ \psi]$, são calculados por (3.32), [26]:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) \\ \arcsin(-2(q_1q_3 - q_0q_2)) \\ \arctan\left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Em analogia à equação (3.21), as velocidades absolutas, $[\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]$, são obtidas recorrendo à matriz de rotação S_q , (3.33):

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = S_q^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

As acelerações lineares do Quadrotor segundo o referencial local R_{ABC} , $[\dot{U} \ \dot{V} \ \dot{W}]$, são conseguidas combinando as equações da dinâmica (3.4), (3.7) e (3.34), que após resolução em ordem às mesmas obtém-se (3.35).

$$F_g = mS_q[0 \ 0 \ g]^T = mg[2(q_1q_3 - q_0q_2) \ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \ (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)]_B^T \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Fazendo um levantamento das equações diferenciais que governam a atitude e a posição do Quadrotor, as 12 equações, ou 13 quando recorrendo ao método dos quatérnios, deduzidas anteriormente, são apresentadas de seguida:

- Para a atitude, as 6 equações em termos de ângulos de Euler são (3.36):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi \\ Q \cos \phi - R \sin \phi \\ Q \sin \phi / \cos \theta + R \cos \phi / \cos \theta \\ M_x / I_{11} - RQ(I_{33} - I_{22}) / I_{11} \\ M_y / I_{22} - QP(I_{11} - I_{33}) / I_{22} \\ M_z / I_{33} - PQ(I_{22} - I_{11}) / I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A dedução pormenorizada das equações e matrizes apresentadas nesta secção podem ser consultadas ao longo do anexo A.

- Para a atitude e posição, as 12 equações em termos de ângulos de Euler são (3.37):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\theta}C_{\psi}U + (S_{\phi}S_{\theta}C_{\psi} - C_{\phi}S_{\psi})V + (C_{\phi}S_{\theta}C_{\psi} + S_{\phi}S_{\psi})W \\ C_{\theta}S_{\psi}U + (C_{\phi}C_{\psi} + S_{\phi}S_{\theta}S_{\psi})V + (S_{\theta}C_{\phi}S_{\psi} - S_{\phi}C_{\psi})W \\ -S_{\theta}U + S_{\phi}C_{\theta}V + C_{\theta}C_{\phi}W \\ F_{px}/m - g\sin\theta - QW + RV \\ F_{py}/m + g\cos\theta\sin\phi - RU + PW \\ F_{pz}/m + g\cos\theta\cos\phi - PV + QU \\ P + Q\tan\theta\sin\phi + R\tan\theta\cos\phi \\ Q\cos\phi - R\sin\phi \\ Q\sin\phi/\cos\theta + R\cos\phi/\cos\theta \\ M_x/I_{11} - RQ(I_{33} - I_{22})/I_{11} \\ M_y/I_{22} - QP(I_{11} - I_{33})/I_{22} \\ M_z/I_{33} - PQ(I_{22} - I_{11})/I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

- Para a atitude e posição, as 13 equações em termos de quatérnios são (3.38):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)U + 2(q_1q_2 - q_0q_3)V + 2(q_1q_3 + q_0q_2)W \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3)U + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)V + 2(q_2q_3 - q_0q_1)W \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2)U + 2(q_2q_3 + q_0q_1)V + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)W \\ F_{px}/m + 2g(q_1q_3 - q_0q_2) - QW + RV \\ F_{py}/m + 2g(q_2q_3 + q_0q_1) - RU + PW \\ F_{pz}/m + g(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - PV + QU \\ (1/2)(-Pq_1 - Qq_2 - Rq_3) + \gamma q_0 \\ (1/2)(Pq_0 + Rq_2 - Qq_3) + \gamma q_1 \\ (1/2)(Qq_0 - Rq_1 - Pq_3) + \gamma q_2 \\ (1/2)(Rq_0 + Qq_1 - Pq_2) + \gamma q_3 \\ M_x/I_{11} - RQ(I_{33} - I_{22})/I_{11} \\ M_y/I_{22} - QP(I_{11} - I_{33})/I_{22} \\ M_z/I_{33} - PQ(I_{22} - I_{11})/I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.3. Modelação do Sistema Propulsivo (Motor + Hélice)

As equações (3.37) e (3.38) requerem as forças actuantes no Quadrotor, F_{px} , F_{py} e F_{pz} , segundo as respectivas direcções x' , y' e z' . Pressupondo que perturbações exteriores como por exemplo rajadas de vento são desprezadas, as únicas forças actuantes são as forças geradas pelo sistema propulsivo do Quadrotor, F_1 , F_2 , F_3 e F_4 .

O conjunto motor + hélice torna-se assim essencial para a aeronave por ser este o responsável pela produção da força de tracção que permite elevar o Quadrotor. Sendo o sistema propulsivo de extrema importância, esta secção destina-se ao modelo dinâmico do sistema.

A escolha do conjunto motor + hélice mais apropriado para o sistema requer que muitas variáveis sejam consideradas. A tracção é uma função de muitos parâmetros tais como o

diâmetro da hélice, D_p , o coeficiente de tracção, C_t , a massa específica do ar, ρ , e a relação existente entre a rotação do motor e a sua tensão aplicada, K_v [rpm/V].

A modelação do sistema propulsivo requer especial cuidado porque embora os 4 motores sejam “iguais”, na realidade cada motor tem um comportamento dinâmico diferente. Esta não similaridade requer uma modelação mais precisa dos motores, um processo que muitas vezes começa por estabelecer uma relação entre a tensão de alimentação do motor, V , e a velocidade de rotação correspondente, ω .

Isto obviamente para os motores eléctricos como é o caso em aqui estudado. O facto de os motores serem eléctricos são uma escolha excelente, tornando o modelo do sistema (Quadrotor) o mais simplificado possível, pela simples razão de que como não necessita combustível, o centro de gravidade, $C.G.$, do Quadrotor não se altera. Repare-se que se o $C.G$ se alterasse o modelo matemático do sistema teria de ser mais robusto.

Os motores escolhidos são do tipo *Brushless* (sem escovas) devido ao seu óptimo performance. Recorrendo a controladores electrónicos de velocidade muito utilizados no aeromodelismo ESC (*Electronic Speed Controller*), a velocidade de rotação do motor pode ser controlada variando a tensão média aplicada aos seus terminais.

Estes controladores têm o mesmo protocolo de funcionamento que os servomotores, e são controlados através de uma modulação por largura de impulsos PWM (*Pulse-Width Modulation*), ver figura (3.3.1). A amplitude do sinal é de $5V$, a frequência de $50 Hz$, correspondente a um período de $20 ms$, e a largura dos impulsos varia entre $1 ms$ e $2 ms$. A velocidade de rotação do motor aumenta com o aumento da largura do impulso, com a restrição de que a largura dos impulsos tem de obedecer aos limites estabelecidos.

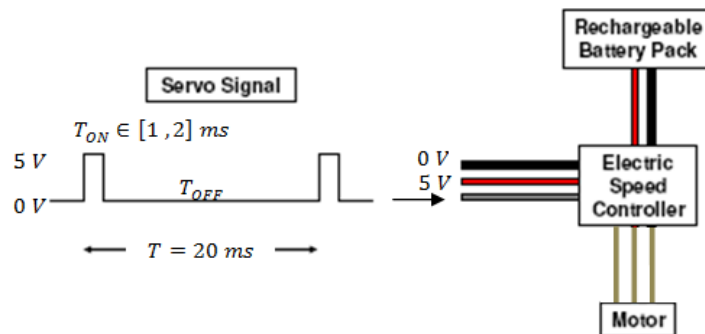


Figura 3.3.1. Diagrama de conexões do ESC.

Uma vez que o controlador do Quadrotor fornecerá os sinais de controlo a aplicar a cada motor individualmente, $u = [u_1 u_2 u_3 u_4]$, cada sinal, u_i , pode ser facilmente convertido em PWM recorrendo como por exemplo a um microcontrolador de baixo custo chamado *Arduino*, ver figura (3.3.2). Este microcontrolador é programado em C/C++ e a modulação pode ser feita muito facilmente porque o microcontrolador possui saídas dedicadas a sinais PWM e funções predefinidas pelo compilador que permitem escolher o período do sinal, T , e a largura do impulso, T_{ON} , em μs .

A correspondência entre os sinais de controlo, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]$, e a largura dos impulsos é feita numa rotina cujos limites da tensão são mapeados para os limites da largura dos impulsos correspondentes, $[0, 5]V \rightarrow [1, 2]ms$.

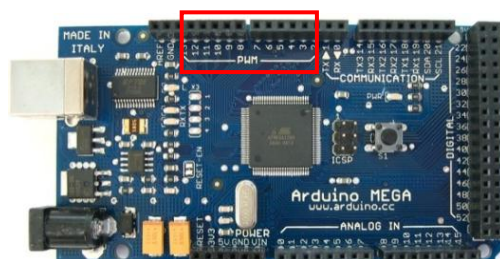


Figura 3.3.2. Microcontrolador *Arduino Mega* - Plataforma de baixo custo usada para converter os sinais de controlo u_i em sinais PWM.

3.3.1. Formulação Matemática do Conjunto

Nesta etapa, o interesse é calcular a força, F_p , e o momento, M_T , gerado por um dado conjunto motor + hélice em função da tensão aplicada ao motor, V , e relacionar com a rotação da hélice, ω . Para tal, assume-se o andamento característico de um motor em termos de rotação por tensão aplicada. Este andamento engloba: uma *zona morta* cuja velocidade de rotação é nula, $\omega = 0$, (motor parado); e uma rotação limite (*saturação*) que impede que a velocidade de rotação do motor exceda essa rotação máxima, ver figura (3.3.3).

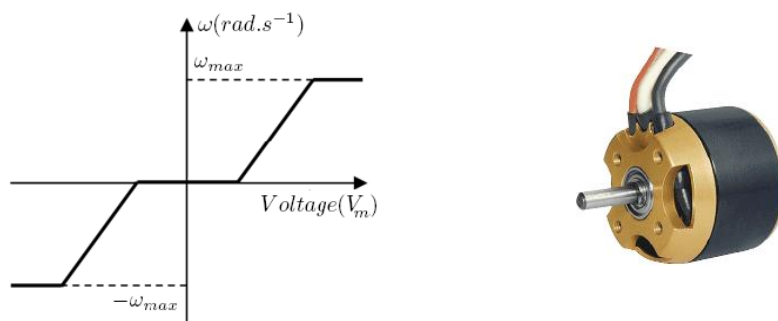


Figura 3.3.3. Funcionamento genérico de um motor eléctrico de corrente contínua.

Suponha-se que o motor sem escovas (*brushless*) escolhido tem as seguintes características, tabela (3.3.1):

Tabela 3.3.1. Características do motor AXI 2212-12.

RPM/V	2000
Tensão de entrada [V]	9-12
RPM máximo	6000
P_{out} [W]	28
P_{in} [W]	56

Com base na tabela (3.3.1) e na figura (3.3.3), a gama de funcionamento do motor, isto é, a relação existente entre a tensão aplicada, V , e a rotação gerada, ω , caracteriza-se por (3.39):

$$\begin{cases} \omega = 0 & , \quad |V| \leq V_0 \\ \omega = K_v(V - V_0) = 2000(V - 9) & , \quad |V| > V_0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Uma hélice pode ser modelada através de três dos seus parâmetros característicos, C_t , C_p , e r , [28]. Os dois primeiros são o coeficiente de tracção e de potência respectivamente, podendo estes serem obtidos experimentalmente ou consultados em gráficos característicos das hélices consoante o valor das velocidades envolvidas, ver figura (3.3.4), e o último parâmetro é o comprimento da pá da hélice.

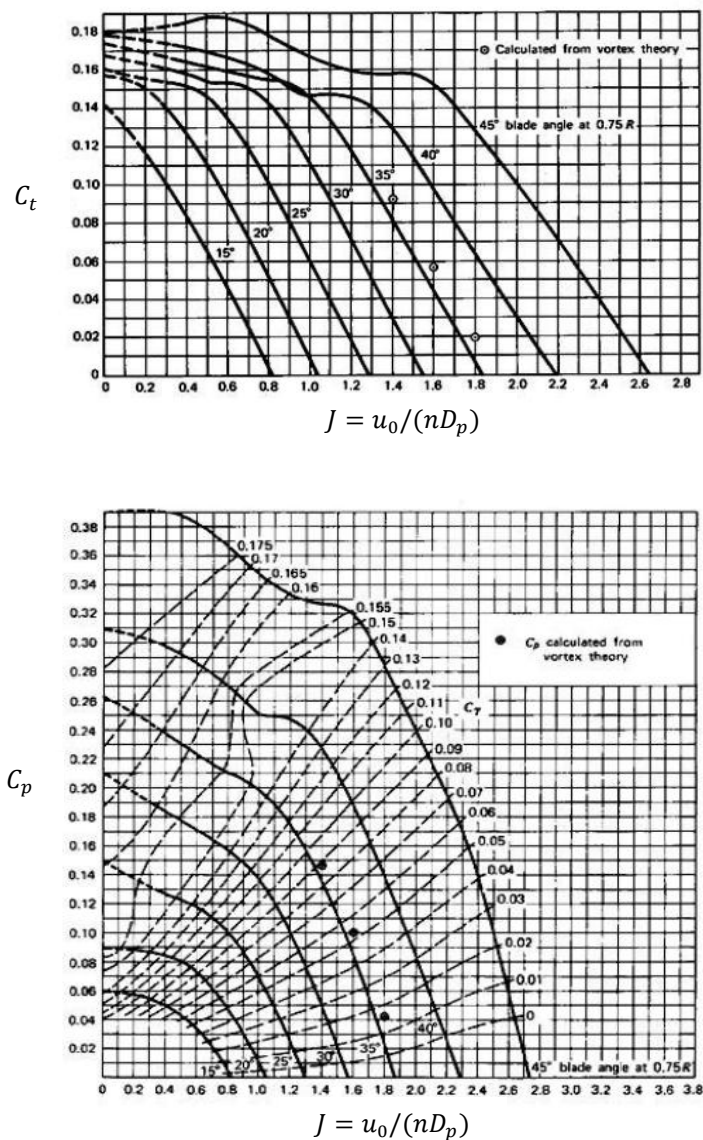


Figura 3.3.4. Curvas características dos coeficientes de tracção e de potência em função da razão de avanço, J , e do ângulo de incidência das pás. Na imagem superior - coeficiente de tracção, C_t . Na imagem inferior - coeficiente de potência, C_p .

Como se pode ver nas figuras indicadas por (3.3.4), nem o coeficiente de tracção, C_t , nem de o coeficiente de potência, C_p , são valores constantes. Ambos são funções da razão de avanço, J , que é definida por $J = u_0/(nD_p)$, [28], onde u_0 refere-se à velocidade de voo da aeronave (segundo z' do R_{ABC}), n à velocidade de rotação em [rot/s], e D_p ao diâmetro da hélice. No entanto, observando as curvas características dos coeficientes C_t e C_p repara-se que quando a velocidade de voo da aeronave, u_0 , é muito baixa (ex. voo pairado a uma dada altitude), a razão de avanço, J , é quase zero e os dois coeficientes podem ser aproximados como constantes.

No desenvolvimento deste projecto assumi por hipótese que o Quadrotor não faz voo de translação a alta velocidade e por conseguinte assumi os coeficientes C_t e C_p constantes.

Suponha-se que a hélice escolhida é a hélice APCE 9' x 4.5', cujas características apresentam-se na tabela (3.3.2).

Tabela 3.3.2. Características da hélice APCE 9'x4.5'.

Raio da Hélice [m]	0.1229
Coefficiente de Tracção, C_t	0.1047
Coefficiente de Potência, C_p	0.0374

Com base nesta informação do motor e da hélice, o modelo matemático característico do conjunto motor + hélice é dado pelas expressões (3.40), [28], obtendo-se a relação da força, F_p , e do momento gerado, M_T , em função da velocidade de rotação, ω :

$$F_p = \frac{4\rho r^4 C_t}{\pi^2} \omega^2 \quad (3.40)$$

$$M_T = \frac{4\rho r^5 C_p}{\pi^3} \omega^2$$

onde ρ representa a massa específica do ar, r o raio da hélice, C_t e C_p os coeficientes de tracção e de potência, respectivamente, e ω a velocidade de rotação do veio do motor em rad/s.

Dividindo M_T por F_p obtém-se uma relação do momento resultante em função da força propulsiva, $M_T = f(F_p)$, (3.41):

$$K_{MF} = \frac{r \times C_p}{\pi \times C_t} \quad M_T = K_{MF} F_p \quad (3.41)$$

Combinando-se as expressões (3.39) e (3.40), escreve-se as expressões que relacionam a tracção, F_p , e o momento, M_T , geradas por um motor em função da diferença de potencial

aplicada aos seus terminais, ΔV . Para a zona de funcionamento do motor tem-se então as equações (3.42 - 3.43):

$$F_p = \frac{4\rho r^4 C_t}{\pi^2} [K_v(V - V_0)]^2 \quad (3.42)$$

$$M_T = \frac{4\rho r^5 C_p}{\pi^3} [K_v(V - V_0)]^2 \quad (3.43)$$

Como se pode ver pelas equações (3.42 - 3.43), tanto a força propulsiva, F_p , como o binário, M_T , variam com o quadrado da tensão aplicada ao motor, V^2 . Pelo facto do modelo dinâmico do sistema propulsivo não ser linear, leva a que se tenha de fazer uma linearização porque os controladores que controlam a posição e atitude do Quadrotor (*LQR, Elkrif, Bar-Shalom, Batz-Kleinman, Gramiano*) exigem que as equações sejam lineares.

Devido ao facto de não existirem motores completamente iguais (mesmo que tenham as mesmas referências e características), é necessário obter as equações para cada um dos conjuntos motor + hélice, ($i = 1, \dots, 4$). Para tal, podem ser efectuados testes de bancada por forma a determinar a tensão para qual cada motor i começa a girar, V_0 , e arranjar uma relação entre todas as tensões, V_i , de modo a que todos os motores tenham a mesma velocidade de rotação, ω .

3.3.2. Determinação da Tracção e do Momento Experimentalmente

As equações (3.42) e (3.43), deduzidas tendo por base um modelo teórico, são essenciais para saber a tracção e o momento em função da tensão aplicada a cada motor. No entanto, a relação entre a tensão aplicada a cada motor, V_i , a força gerada, F_p , e o respectivo momento, M_T , pode ser escrita de uma forma aproximada, recorrendo a testes em laboratório. O ensaio experimental consiste em utilizar uma balança de alta resolução e registar a tracção obtida, F_p , à medida que a tensão de alimentação do motor, V_i , aumenta.

Realce-se que, como visto na secção anterior (3.3.1), a tracção, F_p , varia com o quadrado da tensão, V^2 , pelo que aumentando a tensão linearmente com um determinado passo, dV , a força de tracção crescerá com V^2 , e não linearmente. Torna-se portanto necessário recorrer a uma linearização das equações de modo a permitir implementação dos controladores do Quadrotor, (*LQR, Elkrif, Bar-Shalom, Batz-Kleinman, Gramiano*).

O processo da linearização pode ser simplificado para o sistema propulsivo recorrendo ao Excel® para obter uma equação linear para cada motor através de linhas de tendência traçadas pelo método dos mínimos quadrados.

Posto isto, obter-se-á equações da forma (3.44), onde c_i e V_{0i} com ($i = 1, \dots, 4$) são constantes, e g a aceleração gravítica que multiplicada pela massa (medida pela balança) resulta na força, F_i . A tensão aplicada ao ESC está compreendida entre $V \in [0, 5] \text{ Volt}$.

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= (c_1 V_1 - V_{01}) \times g \\ F_2 &= (c_2 V_2 - V_{02}) \times g \\ F_3 &= (c_3 V_3 - V_{03}) \times g \\ F_4 &= (c_4 V_4 - V_{04}) \times g \end{aligned} \right\} \text{ para } V > V_{0,i} \quad (3.44)$$

Estamos aptos agora a escrever a força propulsiva total, F_z , e os momentos provocados segundo cada um dos eixos, x' , y' e z' , em função dos sinais de controlo aplicados a cada motor. A tracção total que impulsiona o Quadrotor na vertical é apresentada pela equação (3.45),

$$F_z = -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \quad (3.45)$$

e os momentos são calculados de uma forma aproximada pelas equações (3.46):

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= (F_4 - F_2) d_{cg} \\ M_y &= (F_1 - F_3) d_{cg} \\ M_z &= (F_2 + F_4 - F_1 - F_3) K_{MF} \end{aligned} \right. \quad (3.46)$$

Por convenção inicial, os motores 1 e 3 giram no sentido horário e os motores 2 e 4 giram no sentido anti-horário, ver figura (3.1.3). Os sinais das equações (3.46) resultam da análise da figura (3.1.2) cujos momentos são positivos nos sentidos ascendentes dos respectivos eixos. A constante K_{MF} é determinada pela equação (3.41) e resulta num valor de $K_{MF} = 0.014$ para a hélice APCE 9' x 4.5'.

Uma vez que estes momentos, M_x , M_y e M_z , são aqui determinados de uma forma aproximada, o que simplifica os testes de ensaio (só são efectuadas medidas da força de tracção), numa fase de testes de um Quadrotor real, a constante K_{MF} poderá ser ajustada ligeiramente de modo a estabilizar a atitude do Quadrotor segundo z , impedindo-o de girar segundo o eixo dos zz .

3.4. Massa e Momentos de Inércia

A distribuição geométrica das massas numa aeronave é de extrema importância porque afecta toda a dinâmica do sistema. Depois da construção de um Quadrotor, é hora de avaliar algumas das suas características mais importantes como os momentos de inércia e a massa total da aeronave. Estes parâmetros inerciais podem ser determinados com o auxílio de um software de projecto assistido por computador, como por exemplo pelo Catia® ou SolidWorks®.

Por se tratar de um Quadrotor e devido à sua geometria simétrica em forma de cruz, ver figura (3.4.1), os efeitos causados pelo equipamento a bordo e pela própria estrutura em si podem ser desprezados, resultando numa matriz de inércia, I , simplesmente com valores na diagonal principal. Esta simplificação facilita bastante o cálculo dos momentos de inércia do

Quadrotor, englobando somente para o cálculo a massa dos motores, $m_{m1}, m_{m2}, m_{m3}, m_{m4}$, e a suas posições relativas ao C.G., ver figura (3.4.1).

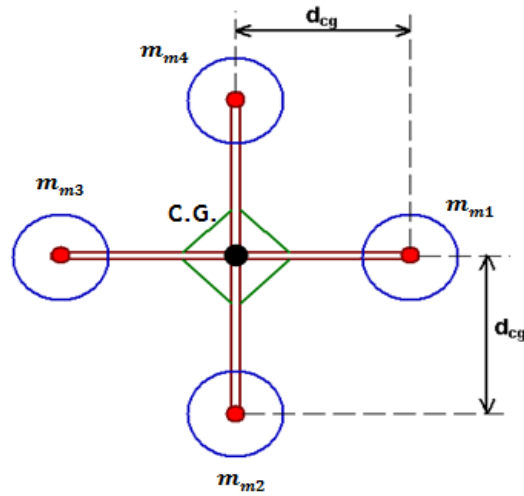


Figura 3.4.1. Geometria simétrica do Quadrotor.

Considere-se as seguintes designações para a massa dos motores e para as suas localizações respectivas na estrutura em cruz.

- m_m – massa do motor
- l_x – comprimento do motor na direcção do eixo x
- l_y – comprimento do motor na direcção do eixo y
- l_z – comprimento do motor na direcção do eixo z
- d_{cg} – distância de cada motor ao C.G

Para o momento de inércia I_{xx} obtém-se (3.47):

$$\begin{aligned}
 I_{x1} = I_{x3} &= \frac{1}{12} m_m (l_y^2 + l_z^2) \\
 I_{x2} = I_{x4} &= \frac{1}{12} m_m (l_y^2 + l_z^2) + m_m d_{cg}^2 \\
 I_{11} = I_{xx} &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Para o momento de inércia I_{yy} obtém-se (3.48):

$$\begin{aligned}
 I_{y1} = I_{y3} &= \frac{1}{12} m_m (l_x^2 + l_z^2) + m_m d_{cg}^2 \\
 I_{y2} = I_{y4} &= \frac{1}{12} m_m (l_x^2 + l_z^2) \\
 I_{22} = I_{yy} &= I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Para o momento de inércia I_{zz} obtém-se (3.49):

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \frac{1}{12} m_m (l_x^2 + l_y^2) + m_m d_{cg}^2 \\ I_{z2} &= I_{z3} = I_{z4} = I_{z1} \\ I_{z3} &= I_{zz} = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} + I_{z4} = 4I_{z1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Uma vez que os controladores analisados ao longo desta dissertação são testados computacionalmente recorrendo a simulações em MatLab[®], considerei os momentos de inércia e a massa total de Quadrotor comercialmente conhecido. O Quadrotor escolhido foi o *Draganflyer SAVS* fabricado pela *RC-Toys*.

Os seus parâmetros inerciais, I e m , são indicados por (3.50 e 3.52), [29].

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0081 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0162 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \quad (3.50)$$

Sendo o Quadrotor simétrico relativamente aos 3 eixos, x' , y' , e z' , verifica-se pelo teorema dos eixos perpendiculares a relação (3.51).

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}/2 \quad (3.51)$$

A massa total do Quadrotor é de, (3.52):

$$m = 0.540 \text{ kg} \quad (3.52)$$

e a distância do eixo de cada motor ao *C.G* é de, (3.53) :

$$d_{cg} = 0.38 \text{ m} \quad (3.53)$$

Capítulo IV - Metodologias de Controlo

4.1. Introdução

A modelação matemática do problema (capítulo III) permitiu-nos obter as equações dinâmicas que governam a atitude e a posição do Quadrotor, equações (3.36) e (3.37 - 3.38). Com as equações dinâmicas do modelo estamos aptos a avançar para o projecto do controlador que estabilizará a atitude e/ou a posição do Quadrotor.

Neste capítulo são apresentadas várias metodologias de controlo: Controlo *LQR* (*Linear-Quadratic-Regulator*) [30]; Controlo pelo método de *Y. Elkrief* [32]; Controlo pelo método de *Bar-Shalom* [32]; Controlo pelo método de *Batz-Kleinman* [32]; e Controlo por matriz *Gramiana* [30], em que o objectivo de cada uma é obter a lei de controlo que permite forçar o sistema a estabilizar num dado estado de referência.

4.2. Controlo pelo Método *LQR* - (*Linear-Quadratic-Regulator*)

O Regulador Quadrático Linear (*LQR*) baseia-se na teoria do controlo óptimo, cujo o objectivo é encontrar um controlador que tenha o melhor desempenho possível tendo em conta um determinado critério de optimização.

O método *LQR* consiste num controlador que requer a menor quantidade de energia do sinal de controlo para a levar a saída do sistema a zero, ou seja, estabilizar o sistema. O critério de optimização é a energia do sinal de controlo.

4.2.1. Lei do Controlo

Considere-se um sistema linear contínuo no tempo descrito pela equação (4.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.1)$$

com a seguinte designação:

x : Vector de estado, $x \in \mathbb{R}^n$

y : Vector de saída do sistema, $y \in \mathbb{R}^q$

u : Vector de controlo, $u \in \mathbb{R}^p$

A : Matriz de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

B : Matriz de controlo (ou matriz de entrada), $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

C : Matriz de saída, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$

D : *Feedforward matrix*, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, - (matriz que relaciona a forma como o vector de controlo, u , influencia directamente a saída do sistema, y)

Para o sistema descrito pela equação (4.1), a ideia base para obter a lei do controlo, é resolver um problema de optimização que minimize a função de custo J dada pela equação (4.2):

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.2)$$

cujas matrizes Q e R designam, respectivamente, as matrizes de ponderação do estado e do controlo, e representam, respectivamente, a importância de cada variável de estado, x_i , e a importância de cada variável de controlo do sistema, u_i .

Para que o custo necessário para estabilizar o sistema seja positivo ou no mínimo nulo, $J \geq 0$, ambas as matrizes Q e R têm de ser simétricas ($Q = Q^T$ e $R = R^T$), a matriz Q positivamente semi-definida ($Q \geq 0$), e a matriz R positivamente definida ($R > 0$).

A lei do controlo do sistema em malha fechada (sistema realimentado) que minimiza a função de custo (4.2) tem a forma $u = -Kx$ com a matriz K , correspondente à matriz de ganhos do sistema, dada por (4.3), [30]:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4.3)$$

Na equação (4.3), a matriz P é determinada resolvendo a equação algébrica de *Riccati* (4.4):

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.4)$$

cuja solução única é uma matriz simétrica e positivamente definida, $P = P^T$ e $P > 0$.

Uma vez obtida a matriz P , a lei do controlo para o controlador *LQR* é dada pela equação (4.5), [30]:

$$u = -Kx \quad (4.5)$$

As matrizes A e B são obtidas através da linearização do sistema em torno de um ponto de referência (x_{eq} e u_{eq}). As equações utilizadas para a linearização são as equações da dinâmica de voo do Quadrotor deduzidas no capítulo III, equações (3.36) ou (3.37). A linearização do sistema é feita na secção (4.2.2).

No controlo óptimo cuja função de custo é quadrática como é o caso do controlador *LQR*, equação (4.2), a selecção da matriz de ponderação do estado, Q , e da matriz de ponderação do controlo, R , é baseada normalmente em procedimentos iterativos recorrendo à experiência e à compreensão física dos problemas envolvidos.

Para encontrar as matrizes Q e R adequadas que fornecem um equilíbrio entre a resposta das variáveis de estado e o esforço para as controlar, satisfazendo ao mesmo tempo determinados requisitos de desempenho e sujeito a restrições impostas, a resposta transitória do sistema em malha fechada é analisada, e normalmente as matrizes Q e R são depois reajustadas em função daquilo que o projectista pretende.

Devido à relação indirecta e não linear entre as matrizes de ponderação, Q e R , e os valores próprios do sistema em malha fechada, torna-se difícil determinar as matrizes adequadas. Existem por isso regras e métodos para construção das matrizes Q e R . Na secção (4.2.3) as matrizes Q e R são determinadas pela *Regra de Bryson* e pelo *Método da Atribuição dos Pólos*.

A figura (4.2.1) apresenta a seqüência de procedimentos necessários para o projecto de um controlador LQR para o Quadrotor.

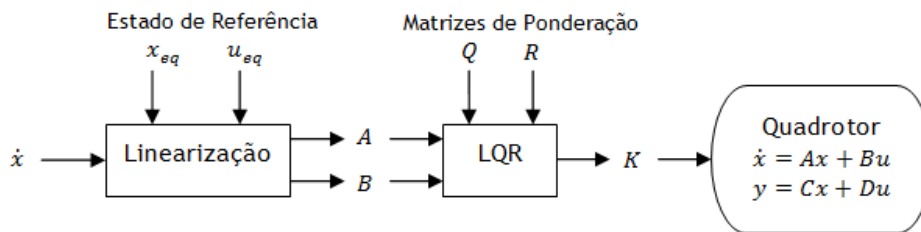


Figura 4.2.1. Seqüência de procedimentos necessários para o projecto de um controlador LQR .

4.2.2. Linearização do Sistema

O controlador LQR requer que as equações da dinâmica de voo do Quadrotor sejam linearizadas, (equações (3.36) para a atitude, e (3.37) para a posição e atitude). A linearização consiste em encontrar as matrizes A , B , C e D que transformam o sistema (4.6) no sistema (4.7):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases} \quad (4.7)$$

No sistema (4.7), as matrizes A , B , C e D são conseguidas recorrendo à expansão de Taylor de primeira ordem das equações (4.6) em torno de um ponto de operação. A linearização das equações (4.6) em torno do ponto de equilíbrio (x_{eq}, u_{eq}) é dado por (4.8), [30]:

$$\begin{cases} \dot{x} \approx f(x_{eq}, u_{eq}) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}(x - x_{eq}) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}(u - u_{eq}) \\ y \approx h(x_{eq}, u_{eq}) + \frac{\partial h(x,u)}{\partial x}(x - x_{eq}) + \frac{\partial h(x,u)}{\partial u}(u - u_{eq}) \end{cases} \quad (4.8)$$

Se assumirmos que as perturbações em torno do ponto de equilíbrio (x_{eq}, u_{eq}) são muito pequenas, pode-se considerar que as diferenças $(x - x_{eq})$ e $(u - u_{eq})$ são quase nulas, e verifica-se conseqüentemente as relações (4.9):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow f(x_{eq}, u_{eq}) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow h(x_{eq}, u_{eq}) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Obtém-se então para o ponto de equilíbrio (x_{eq}, u_{eq}) o sistema (4.10):

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} (x - x_{eq}) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} (u - u_{eq}) \\ y = \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} (x - x_{eq}) + \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} (u - u_{eq}) \end{cases} \quad (4.10)$$

cujas derivadas direccionais/parciais $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$, $\partial h/\partial x$ e $\partial h/\partial u$ correspondem às matrizes A , B , C e D , respectivamente, como indicado em (4.11) e (4.12):

$$A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \quad , \quad B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \quad (4.11)$$

$$C = \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} \quad , \quad D = \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \quad (4.12)$$

Para o controlo da atitude e da posição do Quadrotor, (12 equações), assume-se que a matriz D é nula porque a saída do sistema, y , não é afectada directamente pela entrada, u , e considera-se que a matriz C é igual à matriz identidade para que a saída seja igual ao estado, $y = x$. Posto isto, calcula-se somente as matrizes A e B que compõem a equação de estado, \dot{x} , através dos jacobianos indicados em (4.13):

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{12}} \end{bmatrix}_{x=x_{eq}; u=u_{eq}} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial u_4} \end{bmatrix}_{x=x_{eq}; u=u_{eq}} \quad (4.13)$$

Em programação, as derivadas parciais que compõem as matrizes A e B são calculadas recorrendo à definição de derivada num ponto. O ponto em questão é ponto de equilíbrio (x_{eq}, u_{eq}) . A definição de derivada num ponto é referida na equação (4.14), cujo valor de h é um valor a tender para zero como por exemplo $h = 10^{-5}$.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (4.14)$$

O sistema (4.10) é representado usualmente pelo sistema genérico (4.15):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases} \quad (4.15)$$

com $\tilde{x} = x - x_{eq}$ e $\tilde{u} = u - u_{eq}$.

4.2.3. Determinação das Matrizes de Ponderação Q e R

As matrizes Q e R são matrizes de penalização do estado e do controlo, respectivamente. Quer isto dizer que, através destas matrizes, o programador/projectista do controlador pode alterar os seus elementos, de modo a que a resposta do sistema tenha o comportamento desejado. Por exemplo, se o projectista quiser alterar a forma de como uma determinada variável de estado, x_i , se comporta, isto é, se tem ou não uma resposta suave, se estabiliza rapidamente ou lentamente, se tem sobre-amortecimento ou sub-amortecimento, etc., pode fazê-lo alterando o elemento da matriz Q correspondente à variável x_i .

Nesta secção são apresentadas duas formas de calcular as matrizes de ponderação Q e R . Uma é chamada de *Regra de Bryson* [30], e outra chamada de *Método da Atribuição dos Pólos* [31].

4.2.3.1. Regra de Bryson

A regra sugerida por *Bryson* para o cálculo das matrizes de ponderação Q e R tem por objectivo encontrar as matrizes Q e R que minimizam a função de custo (4.16):

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.16)$$

Segundo a regra de *Bryson*, as matrizes Q e R são compostas somente pelas suas diagonais principais, e cada elemento é igual ao inverso do valor máximo de cada variável ao quadrado, como indicado em (4.17), [30]:

$$Q = \text{diag} \left(\left[\frac{1}{x_{1,max}^2} \quad \frac{1}{x_{2,max}^2} \quad \dots \quad \frac{1}{x_{n,max}^2} \right] \right) \quad , \quad R = \text{diag} \left(\left[\frac{1}{u_{1,max}^2} \quad \frac{1}{u_{2,max}^2} \quad \dots \quad \frac{1}{u_{p,max}^2} \right] \right) \quad (4.17)$$

Assim sendo, para o vector de estado de dimensão n , $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, e para o vector de controlo de dimensão p , $u = [u_1, \dots, u_p]^T$, as matrizes $Q: [n \times n]$ e $R: [p \times p]$ que minimizam a função de custo J , equação (4.16), tomam a forma matricial (4.18), [30]:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/x_{1,max}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x_{2,max}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_{n,max}^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1/u_{1,max}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/u_{2,max}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/u_{p,max}^2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

A regra de *Bryson* serve para obter resultados numa primeira fase do projecto do controlador. Muitas vezes, as respostas obtidas do sistema não são satisfatórias e o projectista tem de reajustar as matrizes Q e R de modo a obter respostas aceitáveis, um processo iterativo e que muitas vezes não é fácil.

Um método que permite o cálculo com rigor das matrizes de ponderação, Q e R , que minimizam a função de custo (4.16) e que fazem consequentemente com que a resposta do sistema seja óptima, é o método da atribuição dos pólos abordado na secção seguinte.

4.2.3.2. Método da Atribuição dos Pólos

Encontrar um equilíbrio entre as variáveis de estado, x_i 's, e as variáveis de controlo, u_i 's, que minimizam a função de custo J , equação (4.16), e ao mesmo tempo contabilizá-las para a efectividade do controlador, não é tarefa fácil.

O método da atribuição de pólos soluciona este problema através do cálculo das matrizes de ponderação, Q e R , a partir de valores próprios (pólos) especificados. É um método que permite encontrar a matriz Q que faz com que a resposta do sistema seja óptima, [31].

No projecto de um controlador *LQR*, as matrizes Q e R têm de ser simétricas, a matriz Q positivamente semi-definida, e a matriz R positivamente definida, (4.19):

$$\begin{aligned} Q &= Q^T \quad \text{e} \quad Q \geq 0 \\ R &= R^T \quad \text{e} \quad R > 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Isto implica que os elementos da matriz Q sejam todos maiores ou iguais a zero, $q_i \geq 0$, e que todos os elementos da matriz R sejam maiores que zero, $r_i > 0$. Com Q e R definidas da forma (4.19), pode-se afirmar acerca dos valores próprios, λ_i 's, que:

$$\begin{aligned} \lambda_i(Q) &\geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ \lambda_i(R) &> 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.20)$$

e que:

$$\begin{aligned} \forall x \quad , \quad x^T Q x \geq 0 \\ \forall u \neq 0 \quad , \quad u^T R u > 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observando a função de custo J , equação (4.16), verifica-se que a influência da matriz R na função é da forma $u^T R u$, e portanto conclui-se que quanto maior são os elementos da matriz R , menor é a magnitude das variáveis de controlo u_i 's. Como a matriz R penaliza só o vector de controlo, u , há flexibilidade na sua escolha, podendo R ter quaisquer valores desde que todos os seus elementos sejam maiores do que zero, $r_i > 0$.

O facto de escolher R por um método seja ele qual for, a sua escolha provoca somente a alteração da magnitude das variáveis de controlo. O pretendido é otimizar a resposta do sistema, e a resposta do sistema é otimizada encontrando a matriz Q que minimiza a função de custo (4.16).

O cálculo da matriz Q consiste em resolver o problema de optimização (4.22), [31]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \end{cases} \quad (4.22)$$

cujo o objectivo é minimizar a função de custo J sabendo que o sistema evolui do modo indicado pela equação diferencial $\dot{x} = Ax + Bu$.

Segundo o princípio do máximo de *Lev Pontriagin*, senhor o qual se deve o controlo moderno nos últimos anos, este problema quando associado ao *LQR*, dá origem à matriz *Hamiltoniana* H , de dimensão $[2n \times 2n]$, apresentada em (4.23), [31]:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Os valores próprios de H , $\lambda(H)$, dividem-se em dois grupos como apresentado em (4.24): um grupo em que a parte real dos valores próprios é negativa - *Grupo I*; e um grupo em que a parte real é positiva - *Grupo II*, [31].

$$\begin{aligned} \text{Grupo I: } \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad \text{com} \quad Re(\lambda_i) < 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ \text{Grupo II: } \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n} \quad \text{com} \quad Re(\lambda_k) > 0 \quad , \quad k = n + 1, \dots, 2n \end{aligned} \quad (4.24)$$

O facto dos valores próprios, $\lambda(H)$, estarem divididos em dois grupos, implica que haja uma distribuição simétrica relativamente ao eixo imaginário quando representados no plano complexo, ver figura (4.2.2).

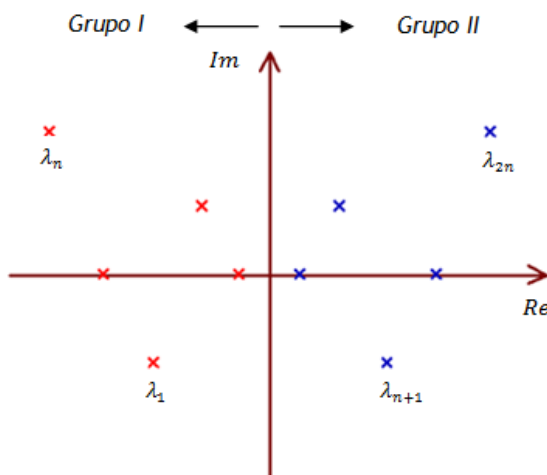


Figura 4.2.2. Simetria dos valores próprios de H , $\lambda(H)$, relativamente ao eixo imaginário.

O objectivo do método da atribuição dos pólos consiste em encontrar Q de tal modo que os valores próprios da matriz H do grupo I (pólos no semi-plano esquerdo da figura (4.2.2)) coincidam com os valores próprios da matriz de realimentação do sistema em malha fechada, equação (4.24), [31]:

$$\lambda_{[\text{grupo I}]}(H) = \lambda(\hat{A}) \quad (4.25)$$

A matriz de realimentação do sistema em malha fechada, \hat{A} , é calculada por $\hat{A} = A - BK$ com $K = R^{-1}B^T P$, equação (4.26).

$$\hat{A} = A - BR^{-1}B^T P \quad (4.26)$$

e os seus valores próprios, $\lambda(\hat{A})$, são da forma (4.27):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 \pm i\omega_1 \quad \text{com} \quad \text{Re}(\lambda_1) = \mu_1 < 0 \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \mu_n \pm i\omega_n \quad \text{com} \quad \text{Re}(\lambda_n) = \mu_n < 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Encontrar Q que faz com que ambos os valores próprios coincidam, equação (4.25), torna-se num problema de resolver as equações (4.28), [31]:

$$\forall i \quad , \quad \det(\lambda_i I - H(q)) = 0 \quad (4.28)$$

A matriz H depende dos elementos da matriz Q , e Q é composta pela matriz diagonal (4.29), [31]:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A determinação da matriz Q óptima torna-se então em encontrar o vector $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ que satisfaz as igualdades (4.28). A sua obtenção consiste em resolver o conjunto de n equações (4.30):

$$f_i(q) = \det(\lambda_i I - H(q)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ f_2(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(q_1, \dots, q_n) = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

A matriz Q é conhecida a partir do momento em que o sistema (4.30) é resolvido, pois as suas incógnitas são os elementos q_i 's que, elevados ao quadrado, constituem a diagonal principal da matriz Q .

O sistema de equações (4.30) pode ser resolvido por qualquer método que tenha garantia de convergência generalizada como por exemplo pelo método de *Gauss-Newton*.

Tenha-se em atenção que não pode ser resolvido por um método que não tenha garantia de convergência generalizada porque a estimativa inicial teria de estar próxima da solução, coisa que neste caso não se sabe à priori se a estimativa inicial estará muito perto ou não.

Alternativamente, o sistema (4.30) também pode ser tratado como um problema de optimização, considerando para o efeito a função de custo, (também conhecida por função objectivo), (4.31):

$$J(q) = \sum_{i=1}^n (f_i(q))^2 \quad (4.31)$$

4.3. Controlo pelo Método de *Y. Elkrief* e pelo de *Bar-Shalom*

4.3.1. Lei do Controlo de *Elkrief*

O controlo pelo método de *Elkrief* [32] permite controlar qualquer sistema controlável com um gasto de energia menor do que quando controlado por um controlador *LQR*. É capaz de estabilizar qualquer sistema linear da forma (4.32) independentemente dos valores próprios da matriz de estado e tem por base o maior valor próprio em valor absoluto.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.32)$$

A sua lei de controlo é obtida escolhendo um valor para λ^* que satisfaça a equação (4.33), [32]:

$$\lambda^* > \max \{ \bar{\mu}(A), \underline{\mu}(A) \} \quad (4.33)$$

com:

$$\bar{\mu}(A) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad ; \quad \underline{\mu}(A) = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

De seguida, procede-se ao cálculo da matriz de realimentação do sistema em malha fechada, \hat{A} , da forma indicada pela equação (4.34):

$$\hat{A} = -(A + \lambda^* I) \quad (4.34)$$

a qual permite encontrar a solução (matriz P) da equação de *Lyapunov* (4.35):

$$\hat{A}P + P\hat{A}^T = -BB^T \quad (4.35)$$

Obtida a matriz P , a lei de controlo pelo método de *Elkrief* é dada pela equação (4.36), [32]:

$$u = -B^T P^{-1} x \quad (4.36)$$

4.3.2. Lei do Controlo de *Bar-Shalom*

A lei do controlo de *Elkrief*, $u = -B^T P^{-1} x$, minimiza a energia gasta pelo vector de controlo, u , que estabiliza o sistema (4.32) em torno do estado de referência, x_{eq} . Contudo, não permite jogar com as magnitudes do vector de controlo, isto é, desbalancear a magnitude das variáveis de controlo individualmente e fazer com que o sistema continue a estabilizar à mesma, [32].

Partindo do princípio que cada motor no Quadrotor é alimentado cada um com uma bateria, o controlo pelo método de *Bar-Shalom* tem interesse para o controlo da atitude e da posição, na medida em que poder-se-á otimizar a autonomia das baterias. Isto porque existe uma correspondência entre as variáveis do vector de controlo, $u = [u_1, \dots, u_4]^T$, e as tensões aplicadas a cada motor, V_1, V_2, V_3 e V_4 . O facto da magnitude de cada variável de controlo, u_i , poder ser alterada individualmente, torna possível controlar o nível da tensão das baterias de modo a que todas tenham a mesma tensão em cada instante.

Segundo *Bar-Shalom*, a lei de controlo é calculada por (4.37), [32]:

$$u = -MB^T P^{-1} x \quad (4.37)$$

com a matriz de amortecimento, M , da forma (4.38):

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

O valor de cada elemento, m_i , da matriz M está compreendido no intervalo ($0 < m_i \leq 1$), e cada elemento está associado ao elemento correspondente do vector de controlo, $u = [u_1, \dots, u_p]^T$, ($m_1 \rightarrow u_1, m_2 \rightarrow u_2, \dots, m_p \rightarrow u_p$).

4.4. Controlo pelo Método de *Batz-Kleinman*

Um outro método de controlo que permite controlar o sistema linear (4.32) e ao mesmo tempo actuar sobre a magnitude das variáveis de controlo é o método de *Batz-Kleinman* [32].

4.4.1. Lei do Controlo de *Batz-Kleinman*

Segundo *Batz-Kleinman*, a lei do controlo é dada pela equação (4.39), [32]:

$$u = -Lx \quad (4.39)$$

A matriz de ganho da realimentação do sistema em malha fechada, L , é calculada por (4.40), [32]:

$$L = B^T P(\tau)^{-1} \quad (4.40)$$

com a matriz P é dada pelo integral (4.41):

$$P(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-At} B \cdot B^T e^{-A^T t} \cdot dt \quad (4.41)$$

O limite superior do integral, τ , pode assumir qualquer valor, desde que seja maior do que zero, $\tau > 0$.

O integral da função matricial a integrar, equação (4.41), tem de ser resolvido utilizando um método próprio e adequado para integração de funções matriciais. No entanto, a integração pode ser resolvida de forma aproximada por um método de integração numérica como por exemplo pelo *método de Simpson composto*.

Lembre-se que, fazer a exponencial de uma matriz, $(-At)$, é diferente do que fazer a exponencial somente de um valor. Em MatLab®, a exponencial da matriz pode ser obtida utilizando a função $expm(\dots)$. Fazer $expm(-At)$ é diferente de fazer $exp(-At)$.

4.5. Controlo pelo Método *Gramiano*

As metodologias de controlo apresentadas nas secções (4.2 - 4.4) permitem estabilizar um sistema linear em torno de um estado de referência. E se quisermos, para além da estabilidade, controlar também o instante em que o sistema estabiliza? Isto é, indicar ao

controlador para o sistema estabilizar num instante pré-definido? O controlo por matriz *Gramiana* permite obrigar o sistema a atingir um dado estado de referência num dado instante.

Este tipo de controlador tem muita utilidade nos mísseis que têm como objectivo atingir o alvo (estado de referência) num instante específico, isto é, nem mais nem menos um segundo. Com este tipo de controlo, o projectista pode fazer com que o sistema passe por referências indicadas em instantes definidos.

Aplicando o controlo por matriz *Gramiana* ao Quadrotor, consegue-se fazer com que o Quadrotor vá de um *waypoint* (estado de referência $x_0(t_0)$) para um outro *waypoint* (estado de referência $x_1(t_1)$) num tempo específico [30], o que torna este método muito útil se quisermos implementar, numa fase posterior ao controlador, um sistema de navegação autónomo.

4.5.1. Lei do Controlo por Matriz *Gramiana*

A lei do controlo que dirige o sistema (4.42) do estado $x_0 = x(t_0)$ para o estado $x_1 = x(t_1)$ no tempo estabelecido t_1 com que $t_1 > t_0$, ver figura (4.5.1), é dada pela equação (4.43), [30]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.42}$$

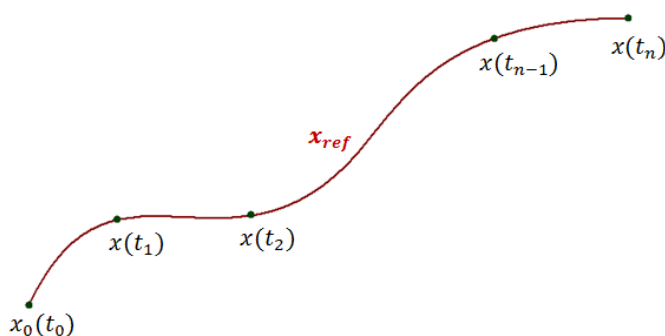


Figura 4.5.1. Trajectória definida por *waypoints* e respectivos instantes a serem alcançados.

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)}. P_c(t_1)^{-1}. (e^{A(t_1-t_0)}x_0 - x_1) \tag{4.43}$$

com a matriz $P_c(t)$ calculada por (4.44):

$$P_c(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B. B^T e^{A^T(t-\tau)}. d\tau \tag{4.44}$$

No caso do sistema ter que passar por vários estados de referência em tempo real, $x_0(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_n)$, como por exemplo o Quadrotor ir passando de *waypoint* em *waypoint*, nesta situação em que o instante final (t do próximo estado de referência) não é

conhecido com antecedência, a matriz $P_c(t)$ pode ser integrada à medida que o novo instante vai sendo dado. Para o efeito, utiliza-se a equação diferencial (4.45):

$$\dot{P}_c(t, \tau) = f(A, B, t, \tau) \quad (4.45)$$

Capítulo V - Estimador (Filtro de *Kalman*)

5.1. Introdução

O filtro de *Kalman* é um filtro recursivo¹⁶ criado em 1960 pelo engenheiro *Rudolf Emil Kalman*, que é capaz de estimar os estados de um sistema linear a partir de leituras corrompidas por ruído, (ex: ruído na leitura de sensores).

A palavra recursiva neste contexto quer dizer que, ao contrário de certos conceitos de processamento de dados, o filtro de *Kalman* não precisa que toda a informação anterior seja armazenada em memória e reprocessada todas as vezes que uma nova medida é tirada. Isto torna-o vantajoso na sua implementação prática porque muitas vezes as plataformas programáveis (ex: *Arduino*) têm restrições de memória.

Independentemente da conotação típica de um filtro como uma “caixa preta” contendo redes eléctricas, na maioria das aplicações práticas o filtro de *Kalman* é um programa de computador implementado num processador central. Como tal, incorpora inerentemente amostras de medições discretas ao invés de medições contínuas no tempo.

Muitas vezes, as variáveis de interesse que descrevem o estado de um sistema não podem ser medidas correctamente, e portanto há necessidade arranjar meios de estimar essas variáveis a partir de outras variáveis disponíveis, isto é, às vezes nem todos os estados estão disponíveis e há necessidade de os estimar para descrever o problema. A dedução torna-se assim problemática devido ao facto do sistema ser orientado por variáveis que não as próprias para o processo, mas sim por variáveis estimadas a partir de relações entre várias variáveis de estado.

Por outro lado, as medidas das saídas são conhecidas com algum grau de incerteza, e além disso, qualquer medida vai se degradando com algum grau de ruído e com algumas imprecisões dos instrumentos de medição (ex: sensores). Posto isto, uma solução é implementar um de estimador (filtro de *Kalman*) para extrair informação válida do sinal ruidoso e/ou degradado.

Uma outra aplicação do filtro de *Kalman* é também a medida de uma determinada grandeza através de medições de vários sensores, cada um com a sua dinâmica própria e com erros característicos, que fornecem informação sobre uma determinada variável. O desejado é combinar as leituras de todos os sensores de uma forma metodológica e óptima, e obter o valor dessa grandeza com mais exactidão (mais próxima da real possível), (ex: medição da temperatura de uma sala acoplando a informação de vários sensores). O filtro de *Kalman* combina os dados fornecidos pelos vários sensores no instante actual com o conhecimento do sistema no estado anterior, e gera um estado estimado das variáveis desejadas de tal forma que o erro seja minimizado estatisticamente.

¹⁶ Filtro que usa uma ou mais das suas saídas como entradas.

Em resumo, o algoritmo do filtro de *Kalman* agrupa toda a informação que lhe possa ser fornecido e, independentemente da precisão dessa informação, estima o valor actual e mais exacto possível das variáveis de interesse, recorrendo a:

- Conhecimento do sistema (estado anterior)
- Dispositivos de medição da dinâmica (sensores)
- Descrição estatística dos ruídos do sistema (ruído Gaussiano por hipótese)
- Erros dos sensores (matriz de covariância do ruído dos sensores)
- Incertezas na dinâmica do modelo (matriz de covariância do ruído do modelo/processo)
- Alguma informação disponível sobre as condições iniciais das variáveis de interesse

O ruído é considerado devido a perturbações como por exemplo imprecisões nos sensores e também devido ao facto de alguns termos do modelo não-linear terem sido desprezados durante a linearização do sistema, (na expansão em séries de Taylor de 1º ordem, ver equação (4.8)).

Posto isto, dado que o esperado é obter medições dos sensores (acelerómetros e giroscópios) com ruído e existir também um ruído associado ao próprio sistema, este capítulo tem por objectivo o projecto de um estimador (filtro de *Kalman*) para estimar o número máximo de variáveis de estado a partir da leitura somente dos sensores disponíveis.

5.2. Linearização do Sistema

As equações que descrevem a dinâmica do sistema, (equações deduzidas no capítulo III), não são lineares. Nesta situação é comum linearizar as equações em torno de um ponto de operação porque um sistema linearizado facilita a formulação do filtro de *Kalman* e dos controladores que controlam a posição e da atitude do Quadrotor.

Tomemos como estado de referência/equilíbrio para o processo da linearização o vector de estado, x_{eq} , apresentado em (5.1), que ilustra o Quadrotor em voo estabilizado e paralelamente ao solo.

$$x_{eq} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.1)$$

A linearização do sistema requer também o vector de controlo no estado de equilíbrio, u_{eq} . Este vector corresponde às tensões, V_1, V_2, V_3 e V_4 , que quando aplicadas aos respectivos motores, fazem com que o Quadrotor estabilize no estado de referência, x_{eq} , pré-estabelecido. Estas tensões, $[V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T = u_{eq}$, são calculadas de modo a que a força propulsiva total seja igual à força gravítica, $F_p = F_g$.

Dado que cada força, F_i , produzida por cada um dos motores em função da sua tensão elétrica aplicada, V_i , é dada, em kg , por (5.2), (ver secção 3.3.2):

$$F_i = (c_i V_i - V_{0i}) \times g \quad (5.2)$$

e que, as constantes c_i e V_{0i} , que são determinadas experimentalmente, sejam consideradas iguais a (5.3):

$$c_i = 0.398 \quad , \quad V_{0i} = 1.00 \quad (5.3)$$

a tensão, V_i , que faz com que a força propulsiva total, F_p , seja igual à massa total do Quadrotor, $F_{p,[kg]} = m$, é calculada pela expressão (5.4), onde a força propulsiva total, F_p , em kg , é repartida por cada um dos 4 rotores, $F_i = m/4$.

$$(c_i V_i - V_{0i}) = m/4 \quad \Leftrightarrow \quad 0.398 V_i - 1.00 = 0.540/4 \quad (5.4)$$

Efectuando o cálculo em ordem a V_i , o vector de controlo de referência, u_{eq} , resulta em (5.5):

$$u_{eq} = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]^T = \begin{bmatrix} 2.852 \\ 2.852 \\ 2.852 \\ 2.852 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

5.3. Análise do Sistema / Condições de Convergência

A convergência do filtro de *Kalman* depende de algumas propriedades do sistema. Convergência significa que os erros das variáveis estimadas tentam tender para zero. Significa isto, por outras palavras, que os valores das variáveis estimadas tendem para os seus valores exactos.

A variância de uma variável ruidosa permanece limitada se o ruído não “empurrar” o valor dessa variável para fora de limites pré-estabelecidos. É precisamente o que acontece quando o sistema é estável. Se a variância ultrapassar os limites quando essa variável é afectada por ruído, o sistema deixa de ser estável. (Importante para as matrizes de covariância Q_k e R_k).

Posto isto, algumas propriedades como: atingibilidade, controlabilidade, e observabilidade, têm de ser analisadas para que haja garantia de que o filtro será convergente, [33].

5.3.1. Atingibilidade

Por definição, a atingibilidade diz-nos se é possível encontrar uma sequência de controlo, $u(t)$, tal, que um determinado estado arbitrário, x_1 , possa ser alcançado num tempo finito, a partir de qualquer estado inicial, x_0 .

Existem vários métodos que permitem averiguar se um sistema é ou não atingível, dependendo da singularidade da matriz de estado do sistema, (matriz A). Esta propriedade da matriz de estado indica se a matriz é ou não invertível, e pode ser analisada através do cálculo do determinante.

Relativamente à matriz de estado, A , para o controlo da atitude do Quadrotor, verifica-se que o determinante é nulo, $\det(A) = 0$, indicando que A não tem inversa, e logo, que A é singular, o que nos diz imediatamente que o sistema não é atingível.

5.3.2. Controlabilidade

A controlabilidade de um sistema diz-nos se é possível encontrar uma sequência de controlo, $u(t)$, tal que o estado de referência, x_{eq} , possa ser alcançado num tempo finito a partir de qualquer estado inicial, x_0 , na vizinhança de x_{eq} .

No caso de matrizes singulares, um sistema é controlável se existir um valor i , tal que a matriz elevada a esse valor iguale a zero, $A^i = 0$. Posto isto, verifica-se que a atitude do Quadrotor é completamente controlável, cumprindo-se esta igualdade para $i = 4$, $A^4 = 0$.

Um outro método que permite verificar a controlabilidade de um sistema é através da matriz de controlabilidade indicada por (5.6):

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \rightarrow \text{matriz } n \times np \quad (5.6)$$

onde p representa o número de variáveis de controlo do sistema, e n o número de variáveis de estado.

Com a matriz de controlabilidade, M_c , descrita pela equação (5.6), o sistema é completamente controlável se a ordem da matriz for igual ao número de variáveis de estado, isto é, se $\text{rank}(M_c) = n$. Recorrendo a uma função disponível pelo MatLab®, (5.7), verifica-se que a atitude do Quadrotor é completamente controlável, $\text{rank}(M_c) = 6 = n$, $x = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]$.

$$M_c = \text{ctrb}(A, B) \quad (5.7)$$

5.3.3. Observabilidade

A observabilidade de um sistema diz-nos se é possível estimar o seu estado, $x(t)$, a partir somente da observação das suas saídas, $y(t)$. Um sistema é completamente observável se o estado, $x(t)$, puder ser calculado a partir da saída, $y(t)$, num tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_f$.

Esta propriedade do sistema pode ser verificada através da ordem da matriz de observabilidade (5.8), em que C representa a matriz de saída, n o número de variáveis de estado, e q o número de variáveis de saída do sistema.

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz } nq \times n \quad (5.8)$$

A matriz (5.8) também pode ser obtida recorrendo à função equivalente em MatLab®, (5.9):

$$M_o = \text{obsv}(A, C) \quad (5.9)$$

Um sistema observável trás um interesse acrescido no que diz respeito à instrumentação, na medida em que a partir de um número restrito de variáveis de estado, (ex: x_1, x_2, x_3), é possível estimar outras variáveis de estado distintas, (ex: x_4, x_5, x_6), o que permite reduzir o número de sensores necessários para a obtenção do estado do sistema.

Confirmadas as três propriedades (atingibilidade, controlabilidade e observabilidade), essencias para que o filtro de *Kalman* seja convergente, estamos aptos a avançar para a sua formulação matemática. Note-se que o sistema não precisa de ser atingível mas precisa de ser completamente controlável e observável.

5.4. Formulação Matemática do Filtro

A formulação matemática do filtro de *Kalman* requer que sejam impostas três condições: a) linearizar o sistema, b) assumir que o ruído é branco, e c) assumir que o ruído tem uma distribuição Gaussiana.

a) *Linearizar o Sistema*

O modelo do sistema tem de ser linear. Muito regularmente, mesmo na presença de não linearidades, é comum considerar uma aproximação linearizando o sistema em torno do ponto de operação, dado que é mais fácil trabalhar com sistemas lineares.

b) *Assumir que o Ruído é Branco*

A hipótese de considerar ruído branco significa que o ruído tem a mesma potência em toda a gama de frequências, ver figura (5.4.1), o que simplifica a matemática envolvida no filtro.

c) Assumir que o Ruído tem uma Densidade Gaussiana

Se considerarmos que o ruído tem densidade Gaussiana, existem tipicamente duas propriedades estatísticas que são facilmente determináveis e que caracterizam um sinal ruidoso, a média, μ , e a variância, σ^2 . Por esta razão, assume-se que o ruído é Gaussiano e por conseguinte o processo de filtragem é simplificado do ponto de vista matemático.

A figura (5.4.2) apresenta a distribuição de um sinal ruidoso de densidade gaussiana. O eixo da abcissas representa a amplitude do sinal, em [volt], e o eixo das ordenadas a probabilidade dessa tensão ocorrer ao longo do tempo.

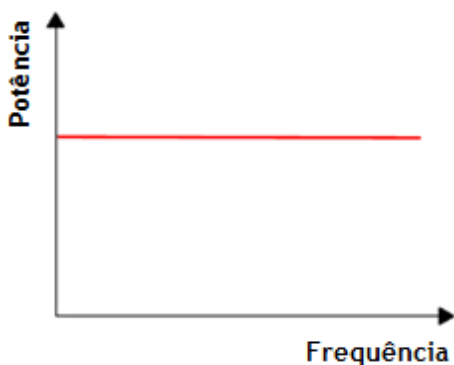


Figura 5.4.1. Representação do ruído branco no domínio da frequência.

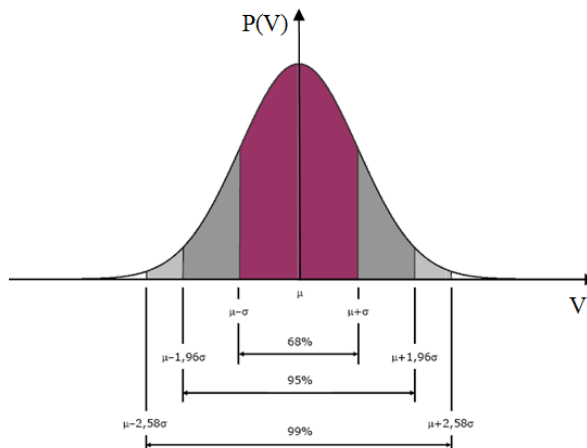


Figura 5.4.2. Distribuição Gaussiana (ou Normal) do ruído.

A figura (5.4.3) mostra a forma de onda de um ruído branco com distribuição Gaussiana.

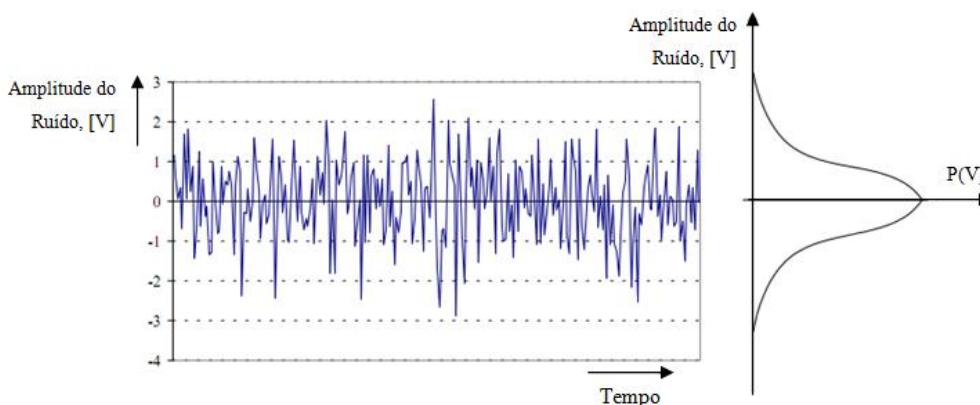


Figura 5.4.3 Forma de onda de um ruído branco com distribuição Gaussiana.

A figura (5.4.3) ilustra a forma de onda do ruído que o filtro de *Kalman* admite. É um ruído constituído por várias frequências, tem uma média, μ , e uma variância, σ^2 , e a sua potência varia de igual forma em todas as frequências ao longo do tempo. (A potência do ruído pode variar ao longo do tempo mas varia da mesma maneira em todas as frequências).

Apresentados os conceitos que o filtro de *Kalman* pressupõe por hipóteses, estamos aptos a avançar para a sua formulação matemática. Começando pela forma de estados linearizada e continua do tempo de um sistema, (5.10):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw & (\text{equação do estado}) \\ y = Cx + Du + Hw + v & (\text{equação da saída/medida}) \end{cases} \quad (5.10)$$

As variáveis estocásticas v e w que representam, respectivamente, o ruído que afecta as medições dos sensores (ruído dos sensores) e o ruído do processo (ruído que afecta toda a aeronave), são caracterizadas pelas suas respectivas matrizes de covariância R_k , (5.11), e Q_k , (5.12).

$$R_k = E\{vv^T\} \quad (5.11)$$

$$Q_k = E\{ww^T\} \quad (5.12)$$

A matriz de covariância do ruído do processo, Q_k , e a matriz de covariância do ruído dos sensores, R_k , mudam a cada medição efectuada, consoante as perturbações que afectam o sistema e os dados dos sensores, ao longo do tempo.

Segundo o orientador (Prof. Doutor Kouamana Bousson), a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) tem um departamento dedicado único e exclusivamente à determinação das matrizes de covariância, Q_k e R_k , dos estimadores (ex: filtro de *Kalman*) implementados nas suas aeronaves. Pela sua complexidade e por não ser de relevância no âmbito desta dissertação, as matrizes de covariância, Q_k e R_k , são consideradas constantes ao longo do tempo para simplificar a formulação do filtro.

A solução óptima do filtro de *Kalman* discreto é dada por (5.13), [33]:

$$\begin{cases} \hat{x}(n) = A^k \hat{x}(n-1) + B^k [u(n) \ y(n)]^T \\ \hat{y}(n) = C^k \hat{x}(n-1) + D^k [u(n) \ y(n)]^T \end{cases} \quad (5.13)$$

onde as matrizes A^k , B^k , C^k e D^k provêm da discretização do sistema contínuo, e são calculadas por (5.14 - 5-17), [33]:

$$A^k = I - LC \quad (5.14)$$

$$B^k = [-LD \ L] \quad (5.15)$$

$$C^k = C(I - LC) \quad (5.16)$$

$$D^k = [(I - CL)D \ CL] \quad (5.17)$$

A matriz de ganho do filtro, L , actualiza o estado do sistema a cada instante, $\hat{x}(n)$, recorrendo à saída actual, $y(n)$, ao controlo actual, $u(n)$, e ao estado anterior, $\hat{x}(n-1)$, como descrito pela equação (5.13). Reescrevendo a equação (5.13) de uma maneira diferente obtém-se a equação dos estados estimados (5.18).

$$\hat{x}(n) = \hat{x}(n-1) + L(y(n) - C\hat{x}(n-1) - Du(n)) \quad (5.18)$$

A equação que permite estimar as variáveis de estado a cada passo, (5.18), requer a matriz de ganho do filtro, L . Esta matriz de ganho é calculada de modo a que o erro do estado e o erro da saída, e_x e e_y , respectivamente, sejam minimizados.

Estes erros calculam-se da forma (5.19) e (5.20) e são minimizados quando o estado estimado, \hat{x} , minimiza a covariância do erro apresentado na equação (5.21).

$$e_x = x - \hat{x} = C(x - \hat{x}) + v \quad (5.19)$$

$$e_y = y - \hat{y} = (A - LC)(x - \hat{x}) + Gw - Lv \quad (5.20)$$

$$\bar{P} = E\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\} \quad (5.21)$$

A minimização do erro \bar{P} , equação (5.21), é obtida resolvendo a equação algébrica de *Riccati* simplificada (5.22), cujo seu mínimo é igual à matriz de ganho L , [33].

$$L = \bar{P}C^T(C\bar{P}C^T + R_k)^{-1} \quad (5.22)$$

5.5. Implementação do Filtro de *Kalman* em MatLab

A implementação do filtro de *Kalman* em MatLab® requer as matrizes do espaço de estados, A, B, C e D , e as matrizes de covariância do ruído do processo e do ruído dos sensores, Q_k e R_k , respectivamente.

Dadas as matrizes, A, B, C e D , pela linearização do sistema, elimina-se todos os estados não controláveis ou não observáveis recorrendo à função em MatLab® (5.23), [35]:

$$sysm = minreal(ss(A, B, C, D)) \quad (5.23)$$

e obtém-se novas matrizes A, B, C e D com variáveis de estado somente completamente controláveis e observáveis.

Através destas novas matrizes, A, B, C e D , obtém-se a forma do espaço de estados, (sys), com a função (5.24), [35]:

$$sys = ss(A, [B \ G], C, [D \ H]) \quad (5.24)$$

com as matrizes G e H definidas da forma (5.25) e (5.26):

$$G = eye(6, 6) \quad (5.25)$$

$$H = zeros(6, 6) \quad (5.26)$$

A matriz G é uma matriz $[n \times n_{obs}]$, em que n representa o número de variáveis de estado totais do sistema e n_{obs} o número de variáveis observáveis, é definida pela matriz identidade por não se saber a forma como o ruído do processo, w , influencia na equação de estado do sistema, ver equação (5.10).

A matriz H é uma matriz $[q \times n_{obs}]$, em que q representa o número de saídas do sistema, e é definida como nula porque assume-se que o ruído do processo, w , não afecta a saída do sistema, y , ver equação (5.10). Somente o ruído dos sensores, v , é que afecta.

A matriz de saída do sistema, C , é uma matriz $[q \times n]$, em que q é o número de saídas dos sistema, é definida pela matriz identidade, por hipótese de que a saída do sistema é igual ao estado, $y = x$.

A matriz D , (*feedforward matrix*) é uma matriz $[q \times p]$, em que q é o número de saídas e p o número de entradas, é assumida como nula porque a saída, y , do sistema em causa não é realimentada pelo vector de controlo, u .

Para as matrizes de covariância do ruído que afecta o processo e do ruído que afecta os sensores, Q_k e R_k respectivamente, assume-se que são iguais e de valores muito pequenos porque não se conhece os seus valores reais, exemplo (5.27 e 5.28):

$$Q_k = 10^{-4} \times I(6) \quad (5.27)$$

$$R_k = 10^{-4} \times I(6) \quad (5.28)$$

A matriz de covariância do ruído do processo, Q_k , tem dimensão $[6 \times 6]$ porque o sistema que estamos a trabalhar (atitude do Quadrotor) tem somente 6 estados controláveis e observáveis.

A matriz de covariância do ruído dos sensores, R_k , tem também dimensão $[6 \times 6]$ porque só é possível medir 6 saídas: 3 velocidades angulares em torno de cada eixo do Quadrotor, P, Q e R , e os 3 respectivos ângulos de Euler, ϕ, θ e ψ .

O projecto de um estimador pode ser de dois tipo: ou o estimador é contínuo no tempo, ou então é discretizado no tempo. Como o filtro de *Kalman* tem de ser implementado numa plataforma digital, (ex: microcontrolador *Arduino*), a opção adequada é escolher o filtro discreto no tempo, o que implica que se tenha de definir um parâmetro muito importante, a taxa de amostragem, t_s . Esta taxa depende da frequência a que o sinal é discretizado, e aqui é considerada igual a $t_s = 0.001$ segundos, ($f_{amostragem} = 1$ kHz).

O filtro de *Kalman* discreto no tempo é obtido em MatLab® com a função apresentada em (5.29):

$$Kest = kalmd(sys, Q_k, R_k, t_s) \quad (5.29)$$

cujo resultado, K_{est} , contém as matrizes essenciais, A^k , B^k , C^k e D^k , para a implementação do filtro, [35].

Na figura (5.5.1) é apresentada um diagrama de blocos do filtro de *Kalman* para auxiliar a compreensão física do que é o estimador.

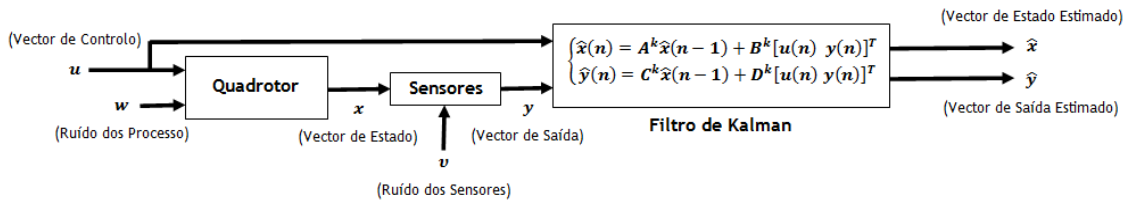


Figura 5.5.1. Diagrama de blocos do filtro de *Kalman* discreto, (estimador de *Kalman*).

5.6. Implementação do Estimador de *Kalman* numa Plataforma Digital

A implementação do estimador de *Kalman* (equações 5.13 ou 5.18) numa plataforma digital (ex: *Arduino*) pode ser simplificada utilizando para o efeito a equação dos estados estimados (5.30) [33], a qual requer somente as matrizes A^k e B^k para estimar as 6 variáveis de estado que definem a atitude do Quadrotor, $[\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]$.

$$\hat{x}(k) = A^k \hat{x}(k-1) + B^k u(k) \quad (5.30)$$

Na equação (5.30), os estados estimados a cada instante k , $\hat{x}(k)$, são calculados recorrendo às entradas actuais, $u(k)$, e aos estados estimados no instante anterior $k-1$, $\hat{x}(k-1)$. Cada instante (passo) é definido pela letra k e não pela letra t , para não induzir em erro do filtro ser contínuo. A equação (5.30) refere-se ao filtro discreto.

A inicialização do algoritmo do filtro, equação (5.30), requer o vector de estado estimado inicial, $\hat{x}(k=0)$. Se assumirmos o Quadrotor nivelado e a apontar para Norte, o vector de estado inicial, $\hat{x}(0)$, é dado por (5.31) :

$$\hat{x}_0(0) = [\phi_0 \ \theta_0 \ \psi_0 \ P_0 \ Q_0 \ R_0]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.31)$$

Depois de inicializado o algoritmo de *Kalman*, o vector de estado estimado, $\hat{x}(k)$, é utilizado para realimentar o controlador *LQR* cuja lei de controlo é dada por $u = -Kx$, (capítulo IV).

5.7. Estimador (Não necessariamente de *Kalman*)

Um estimador é chamado por estimador de *Kalman* somente quando associado ao controlador *LQR*. Para outro controlador sem ser o *LQR*, como por exemplo o controlador de *Batz-Kleinman*, ou o de *Elkrief*, o estimador deixa de ser chamado filtro de *Kalman* e passa a ser chamado simplesmente por estimador, [34].

Um estimador pode ser formulado recorrendo ao espaço dual do sistema. O espaço dual é um espaço virtual, que não representa o sistema fisicamente, mas que o permite controlar a custo zero, (não gasta energia para controlar o sistema como no espaço primal), o que o torna uma mais-valia para a obtenção da equação do estimador.

Transportando o sistema para o espaço dual, a matriz de estado, A , representa-se por A^d e é obtida pela sua conjugada e pela transposta como indicado na equação (5.32):

$$A^d = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)} \quad (5.32)$$

Se a matriz A for composta apenas por elementos reais, como é o caso da matriz de estado do Quadrotor, a sua matriz dual, A^d , pode ser obtida simplesmente pela transposta, $A^d = A^T$.

Um sistema no espaço primal, equação (5.33), transportado para o espaço dual toma a forma (5.34), [34]:

Espaço Primal (Espaço Físico Real):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (5.33)$$

Espaço Dual (Espaço Virtual):

$$\begin{cases} \dot{z} = A^d z + C^d v \\ w = B^d z + D^d v \end{cases} \quad (5.34)$$

Para o sistema em causa (atitude do Quadrotor), as matrizes A, B, C e D são todas reais, e portanto do sistema (5.34) pode tomar a forma (5.35):

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T v \\ w = B^T z + D^T v \end{cases} \quad (5.35)$$

Uma conclusão muito importante que advém do teorema da dualidade é a relação existente entre o espaço primal e o espaço dual: “*Um sistema controlável no espaço primal corresponde a um sistema observável no espaço dual, e um sistema controlável no espaço dual corresponde a um sistema observável no espaço primal*”, [34].

Tome-se em atenção que o teorema da dualidade de *Kalman* não quer dizer que um sistema controlável é um sistema observável, nem que um sistema observável é controlável. O que quer dizer é que há uma correspondência de um espaço para outro.

A resposta de como implementar um estimador está no teorema da dualidade de *Kalman*: Recorre-se ao espaço dual e implementa-se um controlador. Ao implementar um controlador no espaço dual, estamos automaticamente a implementar um estimador no espaço primal, [34]. Este é um caminho que permite implementar um estimador de uma forma muito mais fácil que o método clássico apresentado no início deste capítulo.

Espaço Primal (Real)		Espaço Dual (Virtual)
(Σ) controlável	\Leftrightarrow	(Σ^d) observável
(Σ) observável	\Leftrightarrow	(Σ^d) controlável

O erro do vector de estado, e_x , é dado pela diferença entre o vector de estado exacto, x , e o vector de estado estimado, \hat{x} , ($e_x = x - \hat{x}$). A derivada do erro, \dot{e}_x , traduz-se pela equação dinâmica (5.36):

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) = Ae_x \quad (5.36)$$

O erro do vector de saída estimado, e_y , relaciona-se com o erro do vector de estado estimado, e_x , pela matriz de saída, C , equação (5.37).

$$e_y = Ce_x \quad (5.37)$$

O objectivo é fazer com que o erro do vector de estado, e_x , tenda para zero para que o vector de estado estimado, \hat{x} , tenda para o vector de estado exacto, x . Se o erro e_x for nulo, o estado estimado será igual ao estado exacto, ($e_x = x - \hat{x}$).

A equação dinâmica que descreve o erro, (5.36), depende somente da A e de e_x , não havendo, desta forma, maneira de o controlar. Se quisermos controlar o erro e fazê-lo tender para zero, $e_x \rightarrow 0$, recorreremos à dualidade de *Kalman*, e aqui podemos controlar.

As equações (5.36) e (5.37) compõem os erros de modelo no espaço primal. As suas equações correspondentes no espaço dual são (5.38), [34]:

$$\begin{cases} \dot{e}_x^d = A^d e_x^d + C^d v \\ e_y^d = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

cujo vector v representa o vector de controlo do erro no espaço dual.

A correspondência linear entre o espaço primal e o espaço dual implica que o erro primal, e_x , estabiliza em zero se, e só se, o erro dual, e_x^d , estabilizar também em zero. Este erro dual, e_x^d , é forçado a estabilizar em zero encontrando a matriz de ganho de um controlador em malha fechada para o sistema (5.38), com lei de controlo igual a $v = -L^d e_x^d$, [34].

Na teoria dos controladores *LQR*, a matriz L^d calcula-se da forma (5.39):

$$L^d = R^{-1}CP \quad (5.39)$$

cuja matriz P é solução da equação de *Riccati* (5.40):

$$AP + PA^d - PC^dR^{-1}CP + Q = 0 \quad (5.40)$$

em que a matriz Q é positivamente semi-definida, $Q \geq 0$, e a matriz R positivamente definida, $R > 0$.

A equação do erro no espaço dual é dada por (5.41), [34]:

$$\dot{e}_x^d = (A^d - C^dL^d)e_x^d = (A - LC)^d e_x^d \quad (5.41)$$

e a sua equação correspondente no espaço primal é (5.42):

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x \quad (5.42)$$

Recorrendo à definição do erro, ($e_x = x - \hat{x}$), a equação (5.42) resulta em (5.43):

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - L(y - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} - L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

e fazendo a substituição $\dot{x} = Ax$ na equação (5.43), obtém-se a equação do observador, contínuo no tempo, que permite estimar o vector de estado do sistema, equação (5.44), [34].

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \quad (5.44)$$

A matriz de ganho, L , na equação (5.44), pode ser obtida de várias maneiras, dependendo do tipo de controlador escolhido. Se L for obtida pelo controlador *LQR* ($L = K$), o estimador chamar-se-á estimador de *Kalman*, se L for obtida por outro controlador (ex: *Elkrief*, *Batz-Kleinman*, etc), o estimador chamar-se-á simplesmente estimador.

Capítulo VI - Simulação e Discussão dos Resultados

Neste capítulo são apresentadas simulações do controlo por referências programáveis da posição e da atitude (12 estados) do Quadrotor pelo controlador de *Batz-Kleinman* [32]. Seguidamente são apresentadas simulações com ênfase no controlo da atitude (6 estados) pelos controladores: *LQR* [30], *Elkrief* [32], *Bar-Shalom* [32], *Batz-Kleinman*, e *Gramiano* [30].

Em todas as simulações, parte-se do princípio que o Quadrotor não faz manobras acrobáticas, e por conseguinte as equações utilizadas quer na simulação do controlo da posição e da atitude quer somente no controlo da atitude são expressas em termos de ângulos de Euler e não em termos de quatérnions.

Posteriormente, é apresentada a simulação de um estimador de *Kalman* com o intuito de estimar a atitude do Quadrotor. Para efeitos de simulação é adicionado ruído gaussiano às saídas do sistema para imitar os erros introduzidos pelos sensores (acelerómetros e giroscópios). O estimador de *Kalman* filtra esse ruído e fornece valores mais fiáveis das variáveis de estado correspondentes à atitude, ϕ, θ, ψ e P, Q, R .

Por fim é indicada a forma como as variáveis de controlo, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ são convertidas em sinais PWM, sinais estes aplicados aos ESC's de cada motor.

6.1. Controlo da Posição e da Atitude (*Batz-Kleinman*)

Nesta secção é apresentada a simulação do controlo da posição e da atitude do Quadrotor. O controlador escolhido para simulação é o controlador de *Batz-Kleinman* por permitir um ajuste da forma como o sistema estabiliza (mais rapidamente ou mais lentamente) e também por permitir actuar sobre a magnitude das variáveis de controlo. Este ajuste é feito através de um parâmetro designado por τ .

6.1.1. Estados de Referência

O controlo é por referências programáveis, o que significa que o operador indica os estados de referência, $x_{eq}'s$, para os quais o Quadrotor estabiliza, (piloto automático).

Considere para efeitos de simulação 4 intervalos de tempo distanciados de 5 segundos cada um. Entre 0 e 5 segundos o sistema tem o estado $x_{eq,1}$, entre 5 e 10 segundos tem o estado $x_{eq,2}$, e assim sucessivamente terminando a simulação ao fim de 20 segundos com o estado $x_{eq,4}$.

Considere ainda uma perturbação inicial de 10% do primeiro estado de referência, isto é, a simulação inicia-se com $x_0 = x_{eq,1} + 0.10x_{eq,1}$.

Nas equações (6.1-6.4) são apresentados os vectores de estado de referência, $x_{eq}'s$, considerados na simulação do controlo da posição e da atitude.

Segundo a disposição dos eixos do Quadrotor em que x' aponta para a frente, y' para a direita e z' para baixo, ver figura (3.1.2), as referências consideradas na simulação correspondem a: inicialmente o Quadrotor está pairado a 1 metro de altitude; ao fim de 5 segundos desloca-se para a frente 1 metro mantendo a mesma altitude; passados 10 segundos desloca-se para a direita 1 metro mantendo a altitude e o deslocamento longitudinal anterior; e passados 15 segundos eleva a sua altitude para 3 metros mantendo ambos os deslocamentos anteriores.

$$x_{eq,1} = [X Y Z \phi \theta \psi U V W P Q R]^T = [0 \ 0 \ (-1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t \in [0, 5[\text{ s} \quad (6.1)$$

$$x_{eq,2} = [X Y Z \phi \theta \psi U V W P Q R]^T = [1 \ 0 \ (-1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t \in [5, 10[\text{ s} \quad (6.2)$$

$$x_{eq,3} = [X Y Z \phi \theta \psi U V W P Q R]^T = [1 \ 1 \ (-1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t \in [10, 15[\text{ s} \quad (6.3)$$

$$x_{eq,4} = [X Y Z \phi \theta \psi U V W P Q R]^T = [1 \ 1 \ (-3) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad t \in [15, 20] \text{ s} \quad (6.4)$$

Os vectores de controlo de referência, $u_{eq}'s$, são obtidos igualando a zero as equações que governam a posição e a atitude do Quadrotor, equações (3.37). A resolução do sistema de equações (3.37) é conseguida do mesmo modo que resolve um problema de optimização. O MatLab[®] possui uma função que permite optimizar um conjunto de equações não-lineares como as equações (3.37) que se chama *lsqnonlin(...)*.

Nas equações (6.5-6.8) seguem-se os vectores de controlo de referência, $u_{eq}'s$, a aplicar ao sistema de modo a que o sistema estabilize nos estados de referência indicados em (6.1-6.4).

$$u_{eq,1} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [0, 5[\text{ s} \quad (6.5)$$

$$u_{eq,2} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [5, 10[\text{ s} \quad (6.6)$$

$$u_{eq,3} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [10, 15[\text{ s} \quad (6.7)$$

$$u_{eq,4} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [15, 20] \text{ s} \quad (6.8)$$

Note-se que todos os vectores de controlo de referência, $u_{eq}'s$, são iguais. São iguais porque, tratando-se do controlo da posição e da atitude, as únicas variáveis de estado que podem ser alteradas são as variáveis correspondentes à posição do Quadrotor (coordenadas X , Y e Z). Como se pode compreender, não se pode impor uma determinada atitude ao Quadrotor diferente de zero ($\phi \neq 0$ ou $\theta \neq 0$) sem que a sua posição varie.

Em qualquer estado de referência indicado de (6.1) a (6.4), a atitude do Quadrotor corresponde sempre à situação em que o Quadrotor está paralelo ao solo independentemente da sua posição, ou seja, à situação em que $\phi = \theta = \psi = 0$. Para esta situação, o vector de controlo, $u_{eq} = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]^T$, corresponde às tensões aplicadas aos motores de modo a que a força total produzida pelos 4 motores seja igual ao peso total do Quadrotor, $F_p = mg$. Estas

ensões correspondem a 2.852 Volt para cada motor como comprovado nas equações (5.2-5.5).

6.1.2. Linearização do Sistema

As equações que governam a posição e a atitude do Quadrotor, equações (3.37), não são lineares. Uma vez que o controlador de *Batz-Kleinman* apresentado no capítulo IV aplica-se a sistemas lineares, torna-se necessário linearizar o sistema em torno dos estados de equilíbrio/referência.

A linearização consiste em obter as matrizes A e B calculadas da forma indicada por (4.13) e são calculadas para cada ponto de referência $x_{eq,i}$ e $u_{eq,i}$. Por questões de estética da dissertação, estas matrizes encontram-se no anexo B.1.

6.1.3. Controlabilidade e Observabilidade

Feita a linearização do sistema, isto é, depois de obtidas as matrizes de estado e de controlo, A e B , respectivamente, é feita uma análise para averiguar se o sistema, composto pelas 12 equações, (3.37), é completamente controlável e observável.

Os conceitos de controlabilidade e de observabilidade são apresentados no capítulo V (secções 5.3.2 e 5.3.3) e a sua análise resume-se a verificar se a ordem da matriz de controlabilidade, M_c , e a ordem da matriz de observabilidade, M_o , são iguais ao número de variáveis do vector de estado, n .

A matriz de controlabilidade, M_c , e a matriz de observabilidade, M_o , são obtidas em MatLab® recorrendo às funções $ctrb(A,B)$ e $obsv(A,C)$, respectivamente, como indicado nas equações (6.9) e (6.10). Na equação (6.10), considera-se que a saída do sistema é igual ao seu estado, isto é, $y = x$, e por conseguinte a matriz de saída, C , é igual à matriz identidade, $C = eye(12)$.

Devido às suas enormes dimensões, as matrizes M_c e M_o não são mostradas nesta secção. Contudo podem ser vistas executando o programa *main_BatzKleinman_sem_quat* gravado no CD.

Verifica-se que a ordem de ambas as matrizes M_c e M_o é igual à dimensão do vector de estado, n , indicando que a posição e a atitude do Quadrotor são completamente controláveis e observáveis, equações (6.9) e (6.10).

$$rank(M_c) = rank([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = rank(ctrb(A,B)) = 12 = n \quad (6.9)$$

$$rank(M_o) = rank([C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T) = rank(obsv(A,C)) = 12 = n \quad (6.10)$$

6.1.4. Ganhos do Sistema

A matriz de ganho do sistema em malha fechada pelo método de *Batz-Kleinman*, L , é dada pela expressão (6.12) como mencionado no capítulo IV, cujo limite superior do integral (6.13), τ , pode assumir qualquer valor, desde que seja maior do que zero, $\tau > 0$. Quanto

menor for τ , maior é a magnitude do controlo e o sistema estabiliza mais rápido. O mesmo também ocorre ao contrário, quanto maior for τ , menor é a magnitude do controlo e a resposta do sistema é mais suave.

A matriz de ganho, L , é apresentada no anexo B.2 para $\tau = 0.8$ e para $\tau = 2.0$ para cada um dos pontos de equilíbrio/referência $x_{eq,i}$ e $u_{eq,i}$.

Tendo a matriz de ganho, L , o vector de controlo, u , é calculado da forma (6.11).

$$u = u_{eq} - L(x - x_{eq}) \quad (6.11)$$

com:

$$L = B^T P(\tau)^{-1} \quad (6.12)$$

em que:

$$P(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-At} B \cdot B^T e^{-A^T t} \cdot dt \quad (6.13)$$

6.1.5. Algoritmo de *Butcher* - Resolução das Equações Diferenciais

As equações diferenciais linearizadas (6.14) ou mesmo as equações não-lineares, (3.37) da dinâmica de voo do Quadrotor precisam de ser resolvidas. É necessário calcular o próximo estado, x_{k+1} , recorrendo ao estado e ao controlo no instante anterior, x_k e u_k .

Em todas as simulações efectuadas ao longo desta dissertação, as equações diferenciais que governam a posição e atitude do Quadrotor são resolvidas pelo algoritmo de *Butcher* descrito pela equação (6.15), [36].

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \quad (6.14)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (6.15)$$

com:

$$k_1 = dt \cdot f(x_k, u_k)$$

$$k_2 = dt \cdot f(x_k + k_1/4, u_k)$$

$$k_3 = dt \cdot f(x_k + k_1/8 + k_2/8, u_k)$$

$$k_4 = dt \cdot f(x_k - k_2/2 + k_3, u_k)$$

$$k_5 = dt \cdot f(x_k + 3k_1/16 + 9k_4/16, u_k)$$

$$k_6 = dt \cdot f(x_k - 3k_1/7 + 2k_2/7 + 12k_3/7 - 12k_4/7 + 8k_5/7, u_k)$$

As variáveis k_i 's (com $i = 1, \dots, 6$) alimentam o algoritmo e são calculadas em cada instante pelo produto do passo de simulação, dt , pelo resultado da função $f(x, u) = Ax + Bu$. O passo de simulação considerado em todas as simulações é de $dt = 0.005$ segundos, e a simulação é feita em intervalos sucessivos de 5 segundos cada um, tendo a duração total de simulação de 20 segundos, (1000 pontos por intervalo).

6.1.6. Resposta do Sistema - Posição e Atitude

Executando o programa *main_BatzKleinman_sem_quat* gravado no CD obtém-se a simulação do controlo da posição e da atitude do Quadrotor. A resposta do sistema apresenta-se nas figuras (6.1) a (6.4) para $\tau = 0.8$ e nas figuras (6.6) a (6.9) para $\tau = 2.0$. As figuras (6.5) e (6.10) mostram os sinais de controlo a aplicar aos motores de modo a obter as respostas respectivamente com $\tau = 0.8$ e com $\tau = 2.0$.

Posição e Atitude - *Batz-Kleinman* com $\tau = 0.8$:

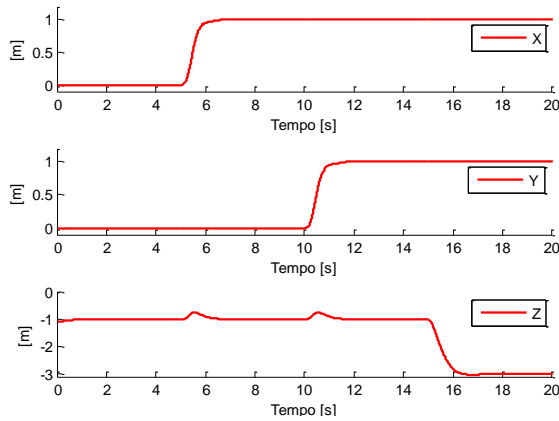


Fig. 6.1. Posição do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 0.8$.

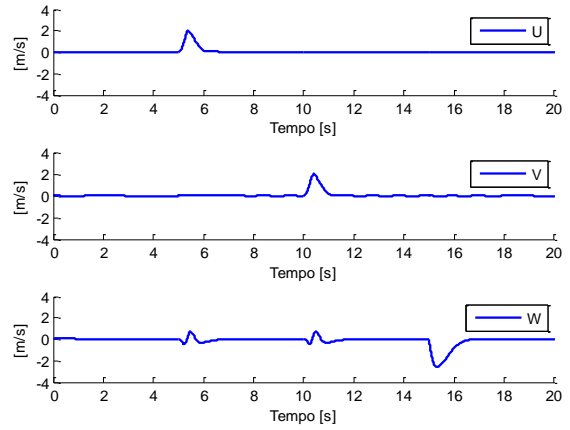


Fig. 6.2. Velocidades lineares do C.G do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 0.8$.

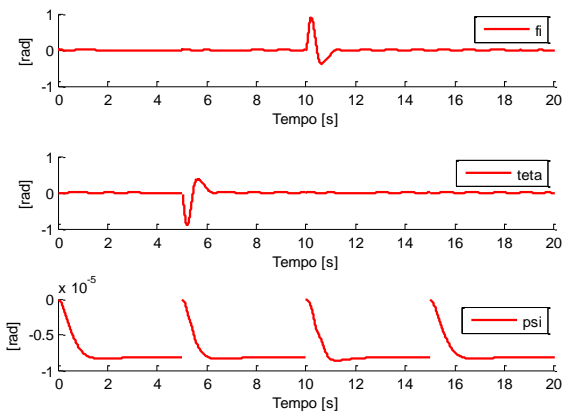


Fig. 6.3. Atitude do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 0.8$.

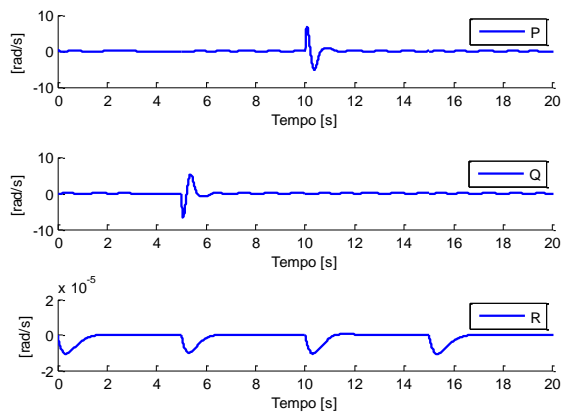


Fig. 6.4. Velocidades angulares do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 0.8$.

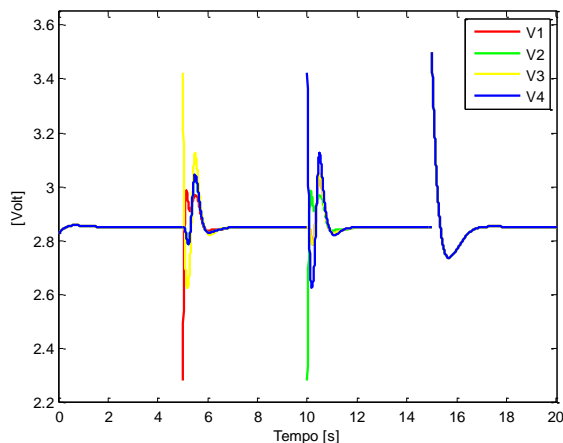


Fig. 6.5. Tensões aplicadas a cada motor. $\tau = 0.8$.

Posição e Atitude - Batz-Kleinman com $\tau = 2.0$:

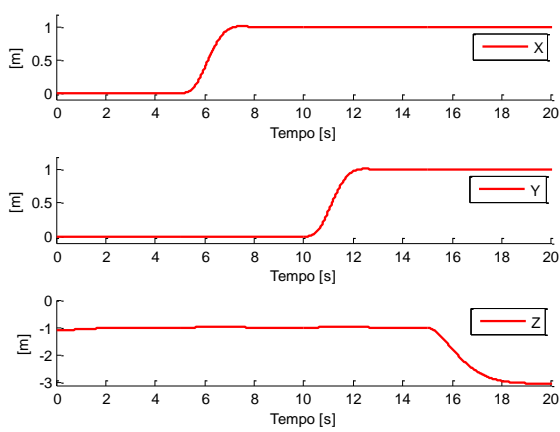


Fig. 6.6. Posição do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 2.0$.

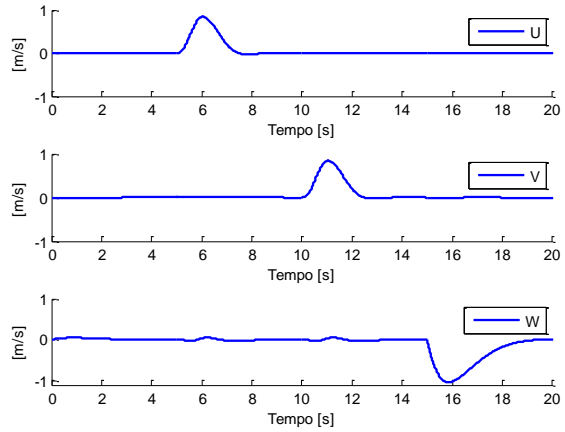


Fig. 6.7. Velocidades lineares do C.G do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 2.0$.

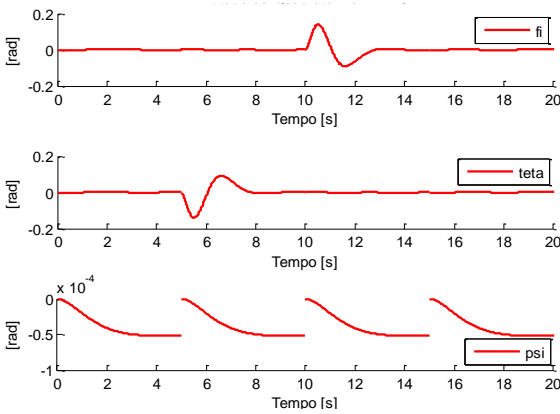


Fig. 6.8. Atitude do Quadrotor no R_{NED} . $\tau = 2.0$.

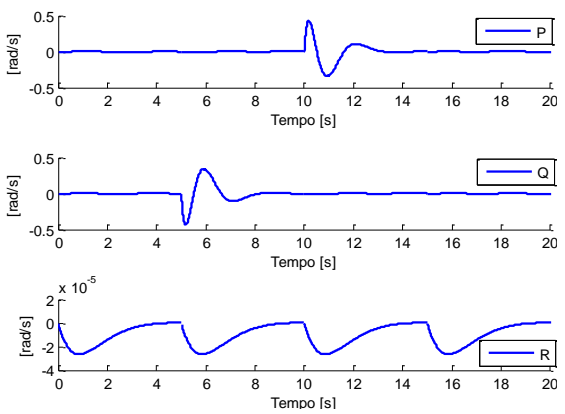


Fig. 6.9. Velocidades angulares do Quadrotor segundo R_{ABC} . $\tau = 2.0$.

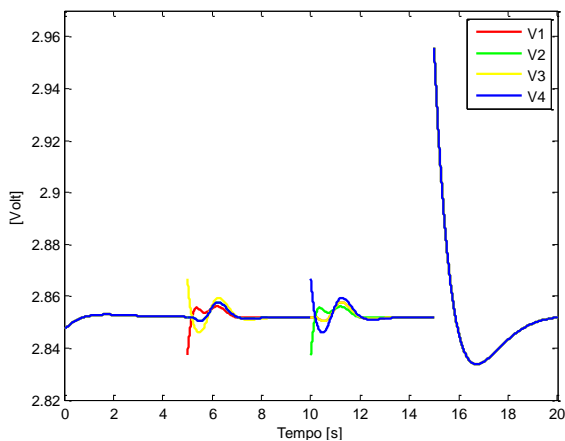


Fig. 6.10. Tensões aplicadas a cada motor. $\tau = 2.0$.

Fazendo uma comparação entre a resposta do sistema com $\tau = 0.8$ (figuras 6.1 a 6.4) e com $\tau = 2.0$ (figuras 6.6 a 6.9), verifica-se que a velocidade de resposta aumenta com a diminuição da constante τ , isto é, o sistema estabiliza mais rapidamente para valores de τ menores. Por outro lado, quanto menor é τ , maior é a magnitude das tensões aplicadas aos

motores. Interpretando fisicamente, a lógica que está por detrás é que se queremos que o sistema estabilize mais rápido temos de lhe fornecer mais energia. O contrário também sucede para valores de τ maiores. O sistema estabiliza mais lentamente e a resposta do sistema é mais suave o que implica consequentemente que a magnitude das variáveis de controlo seja menor.

Um aspecto importante a considerar relativamente a τ é que, uma vez que quanto menor é o seu valor maior a velocidade de resposta do sistema, existe um valor mínimo atribuível a τ para além do valor mínimo de zero. Para as referências utilizadas nesta simulação (ver equações 6.1 a 6.4), o valor de τ mínimo admissível é de $\tau = 0.6$. Para valores entre $\tau =]0, 0.5]$ o controlador deixa de ter capacidade de estabilizar o sistema. O valor de $\tau = 0.6$ foi detectado por tentativa e análise da resposta do sistema.

Note-se que com $\tau = 0.8$, o deslocamento longitudinal para a frente (segundo x) de 1 m demora cerca de $(6.5 - 5) = 1.5 \text{ seg}$, ver figura (6.1), enquanto que com $\tau = 2.0$, o mesmo deslocamento é feito num período mais alargado de $(8 - 5) = 3 \text{ seg}$, ver figura (6.6). O mesmo se passa para o deslocamento lateral e para o deslocamento vertical. Com $\tau = 0.8$, o deslocamento lateral para a direita (segundo y) é feito em cerca de $(11.5 - 10) = 1.5 \text{ seg}$, e o deslocamento vertical (segundo z) de 2 m para cima é feito em cerca de $(17 - 15) = 2 \text{ seg}$, ver figura (6.1). Com $\tau = 2.0$, os mesmos deslocamentos decorrem aproximadamente em $(13 - 10) = 3 \text{ seg}$ segundo y , e $(19 - 15) = 4 \text{ seg}$ segundo z , ver figura (6.6).

Repare-se relativamente à posição do Quadrotor para $\tau = 0.8$, ver figura (6.1), cada vez que o Quadrotor se desloca longitudinalmente (segundo x) ou lateralmente (segundo y), há uma pequena variação da sua altitude decaindo cerca de 25 cm. Este decaimento deve-se ao facto de que como o sistema tem tendência a estabilizar muito rapidamente, a partir do instante em que o Quadrotor se inclina para um dos lados, $\phi \neq 0$ ou $\theta \neq 0$, a força propulsiva total, F_p , decompõe-se em dois vectores: um que aponta para cima, F_{pz} , e outro que aponta para o lado da inclinação, F_{py} ou F_{px} , respectivamente. Como o controlador tem de manter a altitude constante, aumenta as tensões de todos os motores para compensar esta ligeira perda de altitude, ver figura (6.5). Já com $\tau = 2.0$, a resposta do sistema é mais suave e esta perda de altitude praticamente já não se faz sentir.

Atentando para a figura (6.3) nota-se que cada vez que há uma alteração da tensão dos motores, isto é, de 5 em 5 segundos, há uma alteração minúscula do ângulo de guinada, ψ , na ordem dos 10^{-5} devida ao momento aerodinâmico das hélices. É o mesmo princípio que faz com que o Quadrotor gire em torno do eixo z .

6.2. Controlo da Atitude

Esta secção enfoca no controlo por referências programáveis da atitude do Quadrotor (6 equações). São indicados os estados de referência, $x_{eq}'s$, é feita uma linearização do sistema para cada estado de referência, a controlabilidade e a observabilidade são analisadas, e

seguidamente são apresentadas simulações do controlo da atitude por diferentes metodologias de controlo: *LQR*, *Elkrief*, *Bar-Shalom*, *Batz-Kleinman* e *Gramiano*.

6.2.1. Estados de Referência

Para a simulação do controlo da atitude considere 4 intervalos temporais distanciados de 5 segundos cada um. Entre 0 e 5 segundos o Quadrotor tem a atitude, $x_{eq,1}$, entre 5 e 10 segundos tem a atitude, $x_{eq,2}$, e assim sucessivamente até que a simulação termina ao fim de 20 segundos com o estado $x_{eq,4}$. Nas equações (6.16-6.19) referem-se os vectores de estado de referência, $x_{eq}'s$, considerados para a simulação do controlo da atitude durante um período de 20 segundos.

À semelhança do controlo da posição e da atitude, considere uma perturbação inicial de 10% do primeiro estado de referência, isto é, a simulação inicia-se com $x_0 = x_{eq,1} + 0.10x_{eq,1}$.

Segundo a disposição dos eixos do referencial móvel preso ao C.G. do Quadrotor, R_{ABC} , cujo eixo x' aponta para frente, y' para a direita e z' para baixo, ver figura (3.1.2), os estados de referência, $x_{eq}'s$, escolhidos para a simulação correspondem às seguintes situações de voo: entre 0 e 5 segundos o Quadrotor inclina-se para a frente com um ângulo de arfagem de cerca de -6 graus; entre 5 e 10 segundos faz uma rotação à direita de aproximadamente 6 graus mantendo a sua orientação paralela ao solo; entre 10 e 15 segundos faz uma volta coordenada à esquerda no sentido reverso (inclinando-se para trás); e entre 15 e 20 segundos inclina-se simplesmente para a esquerda com um ângulo de rolamento de cerca de -6 graus.

$$x_{eq,1} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0 \ (-0.1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad , \quad t \in [0, 5[\text{ s} \quad (6.16)$$

$$x_{eq,2} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad , \quad t \in [5, 10[\text{ s} \quad (6.17)$$

$$x_{eq,3} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0.1 \ 0.1 \ (-0.1) \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad , \quad t \in [10, 15[\text{ s} \quad (6.18)$$

$$x_{eq,4} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [-0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad , \quad t \in [15, 20] \text{ s} \quad (6.19)$$

À semelhança do controlo da posição e da atitude, os vectores de controlo de referência, $u_{eq}'s$, são obtidos igualando a zero as equações que governam a atitude do Quadrotor, equações (3.36). A resolução do sistema de equações (3.36) é conseguida recorrendo à função disponível em MatLab® para resolução de equações não-lineares: *lsqnonlin(...)*.

Por outro lado, analisando as equações (3.36), (3.44) e (3.46) verifica-se que as variáveis de controlo, $u_i's$, podem assumir quaisquer valores desde que sejam todas iguais, obviamente respeitando os limites de tensão máximos e mínimos que podem ser aplicados aos motores, isto é, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 \in [0, 5]$.

Isto deve-se ao facto de que, desde que as tensões sejam todas iguais, as forças produzidas por cada motor, F_1, F_2, F_3 e F_4 , são todas iguais, ver equação (3.44), levando por conseguinte a que os momentos resultantes em torno do C.G, M_x, M_y e M_z sejam nulos, ver

equação (3.46). Isto implica que as derivadas das velocidades angulares, \dot{P} , \dot{Q} e \dot{R} sejam nulas e que as derivadas dos ângulos de Euler, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, sejam também nulas pelo facto de que no equilíbrio todas as velocidades angulares, P , Q e R são nulas, ver equações (3.36).

Posto isto, são apresentados nas equações (6.20-6.23) quatro possíveis vectores de controlo de referência, $u_{eq,i}$'s, que podem ser aplicados ao sistema de modo a que o Quadrotor estabilize nos estados de referência indicados em (6.16-6.19).

$$u_{eq,1} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [0, 5[\text{ s} \quad (6.20)$$

$$u_{eq,2} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [5, 10[\text{ s} \quad (6.21)$$

$$u_{eq,3} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [10, 15[\text{ s} \quad (6.22)$$

$$u_{eq,4} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T, \quad t \in [15, 20] \text{ s} \quad (6.23)$$

6.2.2. Linearização do Sistema

As equações que governam a atitude do Quadrotor, equações (3.36), não são lineares. Uma vez que qualquer uma das metodologias de controlo enunciadas no capítulo IV aplicam-se a sistemas lineares, torna-se necessário linearizar o sistema em torno dos estados de equilíbrio/referência.

A linearização consiste em obter as matrizes A e B calculadas da forma indicada por (4.13). Nas equações (6.24-6.27) apresentam-se as matrizes A e B para cada ponto de referência $x_{eq,i}$ e $u_{eq,i}$.

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.1003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = 100. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = 100. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0100 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9950 & -0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1003 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9950 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0998 & 0.9950 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

6.2.3. Controlabilidade e Observabilidade

Feita a linearização do sistema, isto é, depois de obtidas as matrizes de estado e de controlo, A e B , respectivamente, é feita uma análise para averiguar se o sistema constituído pelas equações (3.36) é completamente controlável e observável.

A análise da controlabilidade e da observabilidade resume-se a verificar se a ordem da matriz de controlabilidade, M_c , e se a ordem da matriz de observabilidade, M_o , é igual ao número de variáveis do vector de estado, n .

Considera-se que a saída do sistema é igual ao seu estado, $y = x$, e por conseguinte a matriz de saída, C , é igual à matriz identidade, $C = eye(6)$.

Devido às suas enormes dimensões, as matrizes M_c e M_o não são mostradas nesta secção. Contudo, podem ser vistas executando qualquer um dos programas relativos ao controlo somente da atitude como por exemplo o programa *main_LQR* gravado no CD.

Verifica-se que a ordem de ambas as matrizes M_c e M_o é igual à dimensão do vector de estado, n , indicando que a atitude do Quadrotor é completamente controlável e observável, equações (6.28) e (6.29) respectivamente.

$$rank(M_c) = rank([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = rank(ctrb(A,B)) = 6 = n \quad (6.28)$$

$$rank(M_o) = rank([C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T) = rank(obsv(A,C)) = 6 = n \quad (6.29)$$

6.2.4. Controlador LQR

A lei do controlo pelo método LQR é dada pela expressão (6.30) em que a matriz de ganho do sistema em malha fechada, $K = R^{-1}B^T P$, é calculada encontrando a única solução da equação de Riccati, matriz P , ver equação (4.4). A matriz K é obtida nesta secção utilizando uma função disponível no MatLab® própria para problemas de LQR que se chama $K = lqr(A, B, Q, R)$. Esta função devolve a matriz de ganho, K , e requer como argumentos as matrizes A e B obtidas na fase da linearização, ver secção (6.2.2), e as matrizes de ponderação do estado e do controlo, Q e R , respectivamente.

$$u = u_{eq} - K(x - x_{eq}) \quad (6.30)$$

Na simulação do controlo da atitude pelo método LQR, a matriz de ponderação do controlo, R , é determinada pela regra de Bryson, ver subsecção (4.2.3.1), e matriz de ponderação do estado, Q , é determinada pelo método da atribuição dos pólos, ver subsecção (4.2.3.2). A matriz R é igual para todos os estados de referência, x_{eq} 's, e a matriz Q é calculada para cada uma das referências. No entanto, a alteração da matriz A entre cada uma das referências é minúscula (porque as referências são muito próximos), e portanto Q é praticamente igual para todas as referências.

Nas equações (6.31) apresentam-se as matrizes Q e R . A matriz Q é calculada tendo por base os valores próprios especificados (6.32), ver equação (4.27), e R assumindo que a tensão máxima aplicável a cada motor é de 5 Volt, ver equação (4.18).

$$R = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} ; \quad Q_{\text{optima}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6211 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\lambda_{\text{especificados}} = \begin{bmatrix} -0.5294 \\ -1649.1 \\ -1649.1 \\ -42.961 \\ -0.1250 \\ -0.5294 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Nas equações (6.33) a (6.36) seguem-se as matrizes de ganho do sistema em malha fechada, K , para cada estado de referência, $x_{eq,i}$.

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0.1368 & 3.5355 & -2.4963 & 0.0001 & 4.5037 & -2.5738 \\ -3.6670 & 0 & 2.3028 & -4.5038 & 0 & 2.5783 \\ 0.1368 & -3.5355 & -2.4963 & 0.0001 & -4.5037 & -2.5738 \\ 3.3934 & 0 & 2.6897 & 4.5036 & 0 & 2.5783 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3.5355 & -2.4950 & 0 & 4.5037 & -2.5731 \\ -3.5355 & 0 & 2.4950 & -4.5037 & 0 & 2.5731 \\ 0 & -3.5355 & -2.4950 & 0 & -4.5037 & -2.5731 \\ 3.5355 & 0 & 2.4950 & 4.5037 & 0 & 2.5731 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

$$K = \begin{bmatrix} -0.1185 & 3.7673 & -2.1315 & -0.0001 & 4.5037 & -2.5737 \\ -3.3941 & -0.2511 & 2.6771 & -4.5036 & 0 & 2.5693 \\ -0.1537 & -3.2685 & -2.8361 & -0.0001 & -4.5037 & -2.5739 \\ 3.6663 & -0.2477 & 2.2905 & 4.5038 & 0 & 2.5783 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3.2683 & -2.8405 & 0 & 4.5037 & -2.5731 \\ -3.5355 & 0.2496 & 2.4875 & -4.5037 & 0 & 2.5731 \\ 0 & -3.7675 & -2.1345 & 0 & -4.5037 & -2.5731 \\ 3.5355 & 0.2496 & 2.4875 & 4.5037 & 0 & 2.5731 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Nas figuras (6.11-6.13) mostra-se a simulação do controlo da atitude do Quadrotor pelo método *LQR*. O programa a executar encontra-se no CD e chama-se *main_LQR*. A figura (6.11) representa a atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler, ϕ , θ e ψ - rolamento, arfagem e guinada respectivamente; a figura (6.12) representa as velocidades angulares, P , Q e R , em torno dos eixos do referencial móvel - segundo x' , y' e z' respectivamente; e por fim, a figura (6.13) representa as tensões a aplicar a cada um dos motores para controlar a atitude. O índice da variável V , i , com $i = 1, \dots, 4$, corresponde ao número do motor, isto é, V_1 corresponde à tensão a aplicar, depois de convertida em PWM, ao ESC do motor da frente (motor 1), V_3 a tensão a aplicar ao ESC do motor de trás (motor 3), V_2 a tensão a aplicar ao motor do lado direito (motor 2), e V_4 a tensão a aplicar ao ESC do motor do lado esquerdo (motor 4), ver figura (3.1.2).

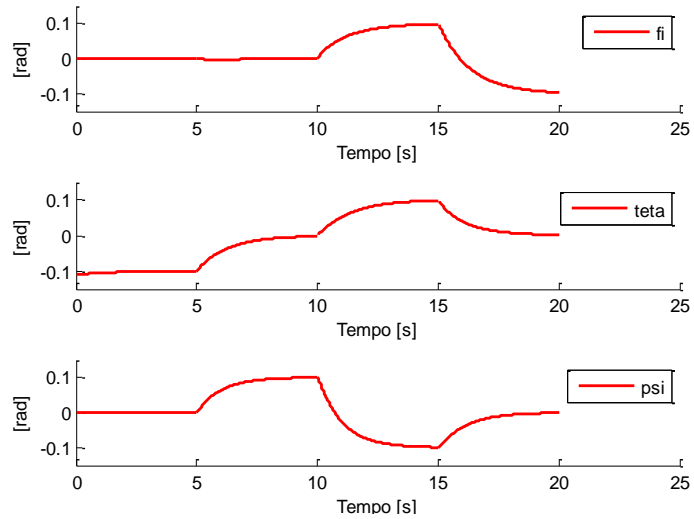


Fig. 6.11. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador LQR.

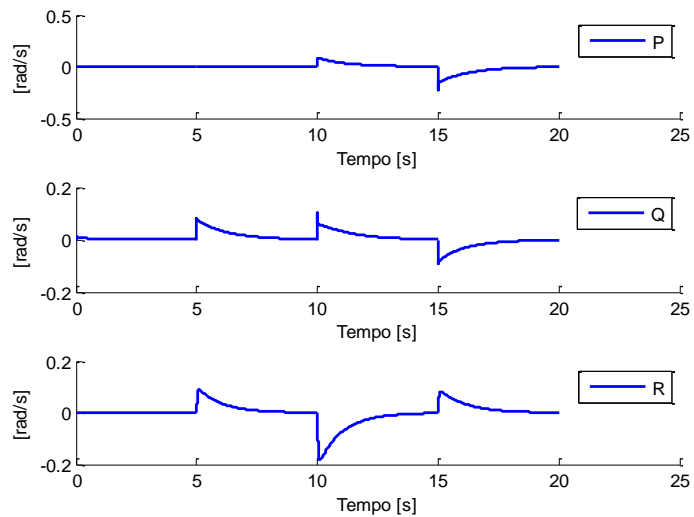


Fig. 6.12. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador LQR.

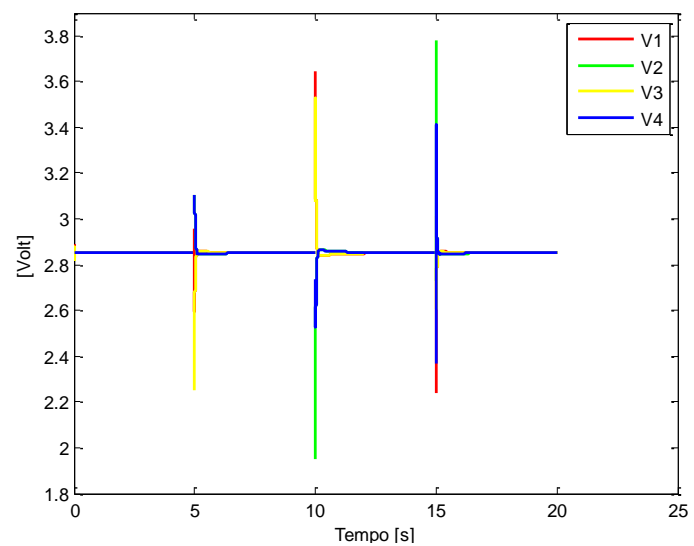


Fig. 6.13. Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador LQR.

O controlo da atitude pelo método *LQR* possibilita uma resposta suave. No entanto a velocidade de resposta do sistema é baixa quando comparada com os restantes controladores de *Elkrief* e de *Batz-Kleinman*. Observe-se que, por exemplo, a mudança do ângulo de rolamento, ϕ , de 0 para 0.1 rad demora cerca de $(14 - 10) = 4 \text{ seg}$. O mesmo ocorre para os ângulos de arfagem, θ , e de guinada, ψ , demorando cerca de 4 segundos entre cada uma das variações dos respectivos ângulos, ver figura (6.11).

Devido à geometria simétrica do Quadrotor, as magnitudes das variáveis de controlo variam inversamente nos motores opostos para alterações dos ângulos de arfagem e de rolamento, isto é, quando V_1 aumenta, V_3 diminui e vice-versa, e quando V_2 aumenta, V_4 diminui e vice-versa, respectivamente. Para alterações do ângulo de guinada as magnitudes das variáveis de controlo variam directamente nos motores opostos e inversamente nos motores adjacentes, isto é, quando V_1 e V_3 aumentam, V_2 e V_4 diminuem e vice-versa. Contudo, a magnitude de todas as variáveis de controlo, V_1, V_2, V_3 e V_4 , são respeitadas ao intervalo $[0, 5] V$, tensões extremas aplicáveis aos ESC's.

Na figura (6.11) observa-se que para $t = 5 \text{ seg}$ a alteração simultânea do ângulo de arfagem, θ , e do ângulo de guinada, ψ , é conseguida do seguinte modo: V_2 e V_4 aumentam e V_1 e V_3 diminuem para provocar a alteração do ângulo de guinada; e ao mesmo tempo V_1 é maior que V_3 para provocar a alteração do ângulo de arfagem, ver figura (6.13). O mesmo se passa para $t = 10 \text{ seg}$: V_1 e V_3 aumentam e V_2 e V_4 diminuem para alterar o ângulo de guinada; V_1 é maior que V_3 para alterar o ângulo de arfagem; e V_4 é maior que V_2 para alterar o ângulo de rolamento, ver figura (6.13).

Como se pode compreender, as tensões dos motores variam somente de cada vez que há uma mudança do estado de referência, o que acontece a cada 5 segundos como estipulado na simulação. No tempo restante todas as tensões mantêm-se a $2.852 V$, tensão a qual faz com que o Quadrotor fique estabilizado paralelamente ao solo.

Relativamente às velocidades angulares do Quadrotor, P , Q e R , segundo os eixos do referencial local, x' , y' e z' , respectivamente, estas são positivas para alterações positivas dos ângulos ϕ, θ e ψ correspondentes e vice-versa, e são tanto maiores em módulo quanto maiores forem as alterações dos ângulos correspondentes. Tal verifica-se para $t = 10 \text{ seg}$ na velocidade angular segundo z' , R , cuja variação do ângulo de guinada, ψ , é de $(0.1 + 0.1) = 0.2 \text{ rad}$, ver figuras (6.12) e (6.13). O mesmo acontece para variações negativas dos ângulos ϕ , θ e ψ . Quando a variação do ângulo é negativa a velocidade angular correspondente também é negativa por convenção do sistema de eixos utilizado, ver figura (3.1.2).

6.2.5. Controlador de *Elkrief*

A lei do controlo pelo método de *Elkrief* é dada pela expressão (6.37) com a matriz de ganhos do sistema em malha fechada, K , calculada da forma (6.38). A solução da equação de *Lyapunov*, matriz P , ver equação (4.35), é obtida usando a função disponível no MatLab® $P = \text{lyap}(\hat{A}, Q)$ cuja matriz de realimentação do sistema em malha fechada, \hat{A} , é calculada

por $\hat{A} = -(A + \lambda^*I)$, ver equação (4.34). O valor de λ^* escolhido para a simulação é igual ao máximo dos μ 's: $\bar{\mu}(A)$ ou $\underline{\mu}(A)$, ver equação (4.33), mais um, isto é, $\lambda^* = \max(\bar{\mu}(A), \underline{\mu}(A)) + 1$. Os valores de λ^* estão indicados abaixo juntamente com as matrizes de ganhos do sistema. Tratando-se do controlo da atitude (6 equações), a matriz identidade tem dimensão $[6 \times 6]$, $I = eye(6)$. A matriz Q , argumento da função $lyap(\hat{A}, Q)$, é igual a: $Q = -BB^T$.

$$u = u_{eq} - K(x - x_{eq}) \quad (6.37)$$

$$K = -B^T P^{-1} \quad (6.38)$$

Nas equações (6.39) a (6.42) seguem-se as matrizes de ganhos do sistema para cada estado de referência.

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1} \rightarrow \lambda^* = 2.105$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.0484 & -1.3071 & 0 & 0.0230 & -0.6240 \\ -0.0484 & 0 & 1.3023 & -0.0230 & 0 & 0.6240 \\ 0 & -0.0484 & -1.3071 & 0 & -0.0230 & -0.6240 \\ 0.0484 & 0 & 1.3119 & 0.0230 & 0 & 0.6240 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2} \rightarrow \lambda^* = 2.000$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.0438 & -1.1855 & 0 & 0.0218 & -0.5927 \\ -0.0438 & 0 & 1.1855 & -0.0218 & 0 & 0.5927 \\ 0 & -0.0438 & -1.1855 & 0 & -0.0218 & -0.5927 \\ 0.0438 & 0 & 1.1855 & 0.0218 & 0 & 0.5927 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3} \rightarrow \lambda^* = 2.200$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.1957 & -1.4145 & 0 & 0.0240 & -0.6519 \\ -0.0528 & -0.1432 & 1.4250 & -0.0240 & 0 & 0.6519 \\ 0 & 0.0906 & -1.4250 & 0 & -0.0240 & -0.6519 \\ 0.0528 & -0.1432 & 1.4144 & 0.0240 & 0 & 0.6519 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4} \rightarrow \lambda^* = 2.095$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -0.0822 & -1.2989 & 0 & 0.0229 & -0.6208 \\ -0.0479 & 0.1298 & 1.2941 & -0.0229 & 0 & 0.6208 \\ 0 & -0.1775 & -1.2893 & 0 & -0.0229 & -0.6208 \\ 0.0479 & 0.1298 & 1.2941 & 0.0229 & 0 & 0.6208 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Executando o programa gravado no CD com o nome *main_Elkrief* obtém-se a resposta do sistema referente ao controlo da atitude do Quadrotor pela metodologia de *Elkrief*, ver figuras (6.14-6.16).

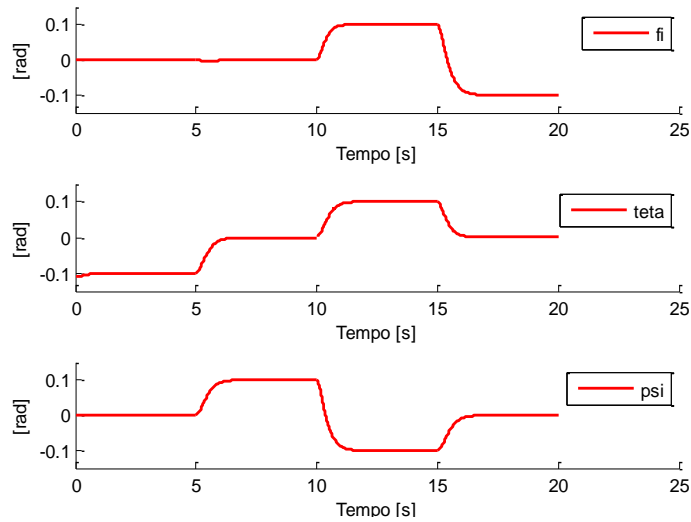


Fig. 6.14. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de *Elkrief*.

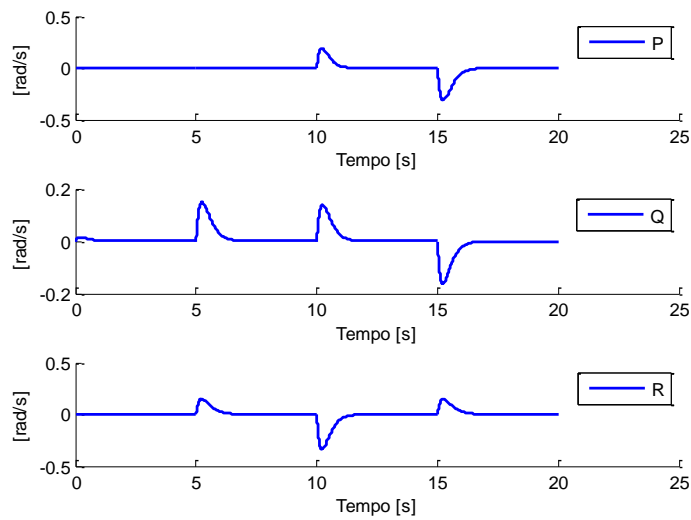


Fig. 6.15. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de *Elkrief*.

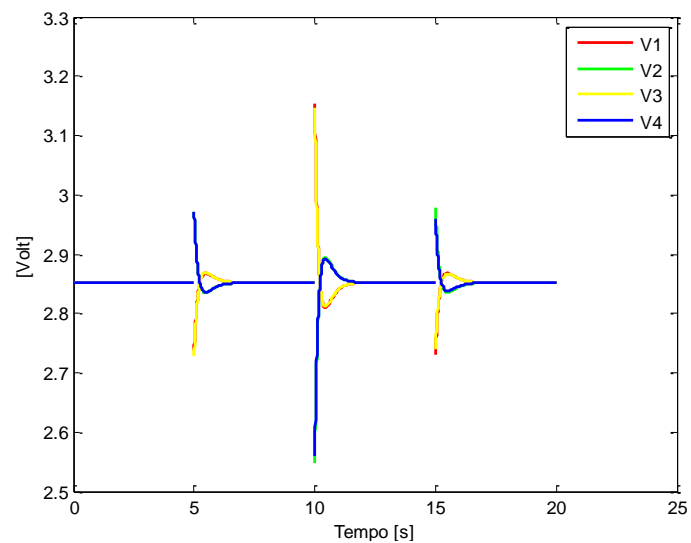


Fig. 6.16. Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador de *Elkrief*.

Comparativamente ao *LQR*, o controlo pelo método de *Elkrief* apresenta sem dúvida um controlo mais suave e muito mais eficiente. A resposta do sistema é muito mais rápida que a resposta pelo *LQR* (cerca de 4 vezes) e a magnitude das variáveis de controlo é menor. Observe-se que, por exemplo, a mudança do ângulo de rolamento, ϕ , de 0 para 0.1 *rad* dá-se em apenas $(11 - 10) = 1 \text{ seg}$ contrariamente aos 4 segundos demorados pelo *LQR*, e a magnitude máxima do controlo por *Elkrief* é de $V_1 = 3.15 \text{ V}$ enquanto que pelo controlo *LQR* é de $V_2 = 3.8 \text{ V}$. Repare-se que as magnitudes das variáveis de controlo, V_1, V_2, V_3, V_4 , são inferiores no controlo por *Elkrief* do que no controlo por *LQR*, comparar figura (6.16) e (6.13) para $t = 5; 10; 15$.

O controlador de *Elkrief* ultrapassa de longe pela positiva as expectativas quando comparado com o controlador *LQR*. A resposta é suave, o sistema estabiliza mais rápido e requer menos energia para o estabilizar.

Um outro factor também muito importante, pelo menos a nível computacional, é que enquanto que o *LQR* necessita das matrizes de ponderação Q e R , cuja matriz Q tem de ser calculada para todos os estados de referência, o controlo pelo método de *Elkrief* não requer matrizes de ponderação. Isto leva a que o vector de controlo possa ser obtido mais rapidamente quando calculado em tempo real durante o voo.

6.2.6. Controlador de *Bar-Shalom*

O controlo pelo método de *Bar-Shalom* permite otimizar a autonomia do Quadrotor recorrendo à monitorização do nível da tensão em todas as baterias. A lei de controlo entra em conta com uma matriz de amortecimento que permite penalizar as variáveis de controlo individualmente.

Pressupõe-se que o Quadrotor é equipado com 4 baterias: uma para cada motor, e que cada bateria é constituída por 3 células *Li - Po* (*Lithium-Polymer*). Com 3 células, cada bateria tem uma tensão de: 11.1V (3 células \times 3.7V). Para que se possa obter a máxima durabilidade destas baterias há que ter um cuidado especial na medida em que não devem descarregar até que a tensão seja inferior a uma tensão estabelecida por célula de 3.3V. Isto é, se a tensão descer abaixo de 3.3V a bateria deteriora-se com o tempo.

Num sistema de alimentação constituído por 4 baterias (*packs* de 3 células cada uma), é natural que uma delas se descarregue mais rapidamente do que outras. Face a esta situação torna-se interessante otimizar a autonomia total de voo. Tal é conseguido equilibrando a energia de todas as baterias ao longo do tempo, isto é, forçando a que a carga das baterias seja igual em todas elas em cada instante. Este equilíbrio é conseguido consumindo menos energia das baterias com menos carga e mais energia das restantes com mais carga.

A solução proposta é fazer com que as tensões das baterias V_1, V_2, V_3, V_4 , ver figura (6.17), sejam sempre iguais ao longo do tempo durante descarga, não permitindo obviamente que desçam abaixo dos 9.9V, (3.3 \times 3 células).

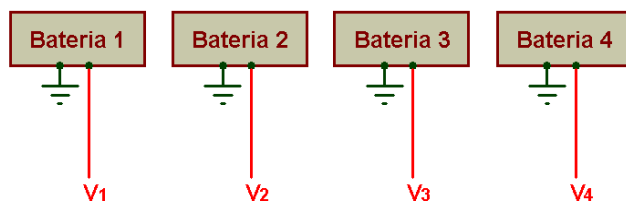


Fig. 6.17. Ilustração das 4 baterias que alimentam os motores individualmente.

Se este procedimento de manter as tensões das baterias iguais ao longo do tempo não existisse o Quadrotor deixaria de voar a partir do momento em que uma das baterias descesse abaixo dos 9.9V. Isto porque a electrónica do próprio ESC incorpora um pequeno circuito de detecção de nível que impede que a tensão da bateria desça durante a sua descarga abaixo da tensão mínima de 9.9 V.

O equilíbrio entre as tensões das baterias, isto é, $(V_1 = V_2 = V_3 = V_4)$, é obtido multiplicando uma matriz de amortecimento, M_k , que é calculada em cada instante no decorrer do tempo, ver equação (6.43), pela lei do controlo do sistema. Deste modo, a energia pedida às baterias com mais carga é pedida com mais peso e a energia pedida às baterias com menos carga é pedida com menos peso.

$$M_k = M(t_k) = \begin{bmatrix} m_1(t_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(t_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3(t_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4(t_k) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Considere para a forma como variáveis de controlo são penalizadas que os elementos, m_i 's, da matriz de amortecimento, M_k , são calculados tendo por base uma função tangente hiperbólica, equação (6.44), com $\alpha > 0$ e escolhida de modo a que curva (figura 6.18) comece a decair a partir da tensão máxima da bateria.

$$m_i(t_k) = \tanh(\alpha \times V_i(t_k)) \quad (6.44)$$

Estando as tensões das baterias compreendidas entre $V_1, V_2, V_3, V_4 \in [9.9, 11.1]$ Volt, a curva (figura 6.18) começa a decair a partir dos 11.1 V, (baterias Li-Po de 3 células cada). Considerei o valor de α igual a três, $\alpha = 3$.

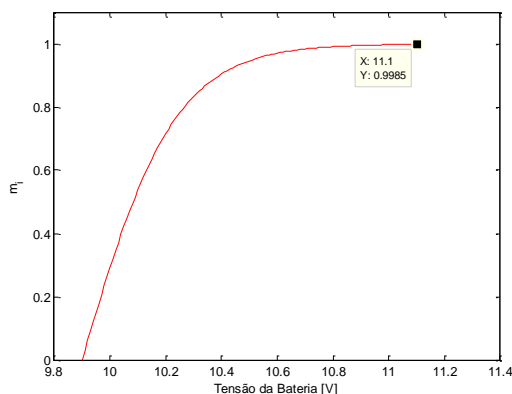


Fig. 6.18. Índice de penalização das variáveis de controlo em função das respectivas tensões das baterias.

Repare-se na curva apresentada na figura (6.18) que o valor de m_i é igual 1 enquanto a bateria estiver totalmente carregada (ou descarregada ligeiramente) e vai diminuindo até 0 segundo uma função tangente hiperbólica à medida que a tensão da bateria diminui. Deste modo, enquanto as baterias estiverem com muita carga os m_i 's são 1's e conseqüentemente não penalizam a magnitude dos sinais de controlo u_i 's. À medida que uma bateria com índice i se descarrega mais rapidamente, a magnitude do sinal do controlo proveniente dessa bateria é menor.

Assim, no caso de uma bateria ter por exemplo somente 50% de carga e as restantes três 100%, a magnitude do sinal de controlo a aplicar ao motor alimentado pela bateria com 50% de carga é menor, garantindo desta forma que a tensão não seja superior à tensão disponível pela bateria em cada instante.

Por outras palavras, a penalização individualmente das variáveis de controlo obriga a que todas as baterias se descarreguem ao mesmo tempo.

Na equação (6.45) é apresentada a lei de controlo pelo método de *Elkrief & Bar-Shalom*, isto é, a lei de controlo base é a de lei de *Elkrief* que multiplicada pela matriz de amortecimento M resulta na lei de *Bar-Shalom*.

$$u = u_{eq} - MB^T P^{-1}(x - x_{eq}) \quad (6.45)$$

A matriz de amortecimento, M , considerada para efeitos de simulação é a matriz apresentada em (6.46).

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Nas equações (6.47) a (6.50) seguem-se as matrizes de ganho do sistema em malha fechada, $K = MB^T P^{-1}$, para cada estado de referência. A matriz P é obtida resolvendo a equação de *Lyapunov* (4.35).

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.0484 & -1.3071 & 0 & 0.0229 & -0.6240 \\ -0.0387 & 0 & 1.0418 & -0.0184 & 0 & 0.4992 \\ 0 & -0.0290 & -0.7843 & 0 & -0.0138 & -0.3744 \\ 0.0484 & 0 & 1.3119 & 0.0230 & 0 & 0.6240 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.0437 & -1.1855 & 0 & 0.0218 & -0.5927 \\ -0.0349 & 0 & 0.9484 & -0.0175 & 0 & 0.4742 \\ 0 & -0.0262 & -0.7113 & 0 & -0.0131 & -0.3556 \\ 0.0437 & 0 & 1.1855 & 0.0218 & 0 & 0.5927 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.1957 & -1.4145 & 0 & 0.0240 & -0.6519 \\ -0.0423 & -0.1145 & 1.1400 & -0.0192 & 0 & 0.5215 \\ 0 & 0.0544 & -0.8550 & 0 & -0.0144 & -0.3911 \\ 0.0528 & -0.1432 & 1.4144 & 0.0240 & 0 & 0.6519 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -0.0822 & -1.2989 & 0 & 0.0229 & -0.6208 \\ -0.0383 & 0.1039 & 1.0353 & -0.0183 & 0 & 0.4967 \\ 0 & -0.1065 & -0.7736 & 0 & -0.0137 & -0.3725 \\ 0.0479 & 0.1298 & 1.2941 & 0.0229 & 0 & 0.6208 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Executando o programa *main_BarShalom* que se encontra no CD obtém-se a simulação do controlo da atitude do Quadrotor pelo método de *Bar-Shalom*. A resposta do sistema apresentada-se nas figuras (6.19) a (6.21).

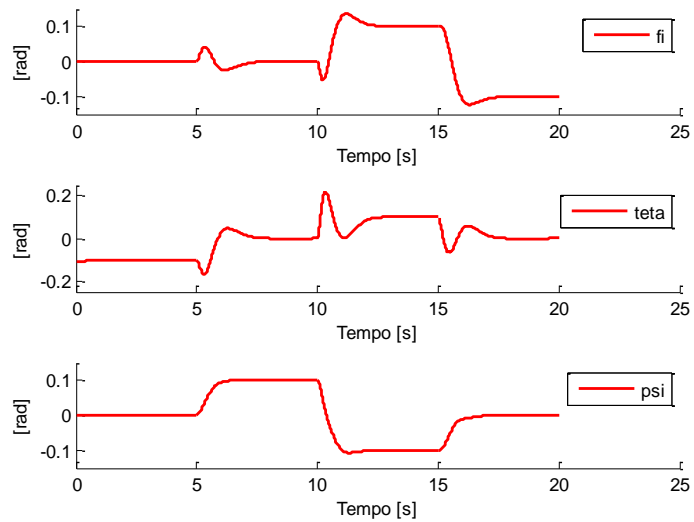


Fig. 6.19. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de *Elkrief & Bar-Shalom*.

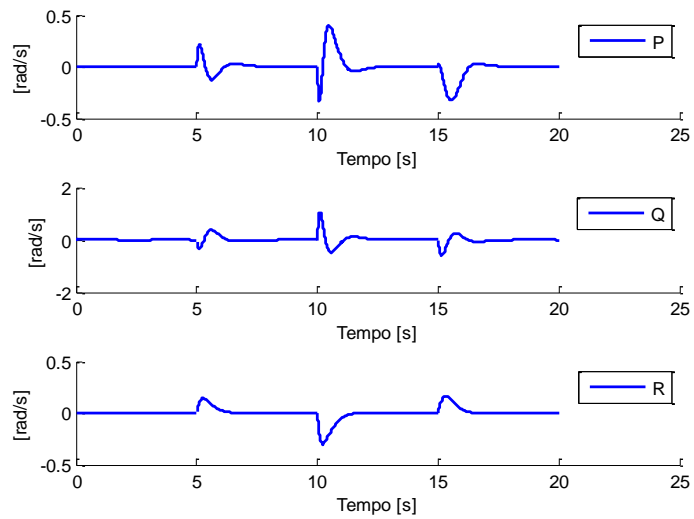


Fig. 6.20. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de *Elkrief & Bar-Shalom*.

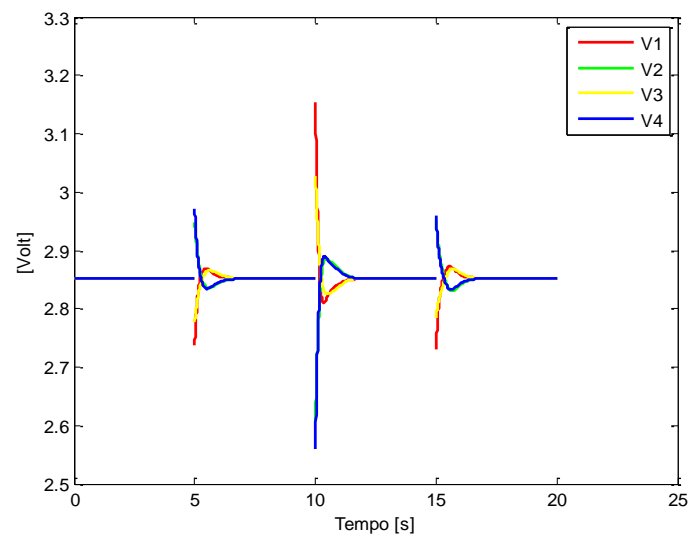


Fig. 6.21. Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador de *Elkrief & Bar-Shalom*.

As figuras (6.19) a (6.21) mostram a resposta do sistema pelo controlador de *Bar-Shalom* associado ao controlador de *Elkrief*. A simulação ilustra o caso em que: 2 das baterias estão à carga máxima, (bat.1 e bat.4); uma com 80%, (bat.2); e outra com apenas 60%, (bat.3).

Repare-se que devido à penalização individual das variáveis de controlo, as tensões aplicadas a cada motor são ligeiramente diferentes umas das outras nas mudanças de referência, ver figura (6.21). Por outro lado, e devido também a esta penalização, as variáveis de estado comportam-se de maneira diferente: ocorre *overshoot* (ultrapassagem do valor de referência) sempre que há mudança de estado, notando-se principalmente no ângulo de rolamento, ϕ , e no ângulo de arfagem, θ .

De qualquer modo, tome-se em atenção que nesta simulação uma das baterias está somente com 60% de carga e outras duas com 100%. No controlo em tempo real da atitude do Quadrotor esta situação nunca poderia acontecer pois a matriz de amortecimento de *Bar-Shalom*, M , é calculada para cada instante.

Com a penalização das variáveis de controlo surge uma pergunta pertinente: se uma bateria estiver completamente descarregada será que o Quadrotor consegue voar? Isto é, será que o Quadrotor consegue voar só com 3 motores?

Simulando o controlo da atitude pelo método de *Elkrief & Bar-Shalom* e considerando somente um dos elementos da matriz M igual a zero, como por exemplo: $m_1 = 0$ e os restantes m_i 's iguais a 1's, verifica-se que o Quadrotor ainda consegue voar. A atitude é estabilizada ao fim de algum tempo mas no entanto a mudança de referências é feita com muita instabilidade.

Tomando em conta que esta secção foca na comparação do controlo da atitude por diferentes metodologias, questões como esta podem ser analisadas executando o programa que se encontra no CD com o nome *main_BarShalom* e alterando a matriz de amortecimento de *Bar-Shalom*.

6.2.7. Controlador de *Batz-Kleinman*

A lei de controlo segundo *Batz-Kleinman* é dada pela expressão (6.51) com a matriz de ganho do sistema em malha fechada, L , calculada da forma (6.52). Na equação (6.52) a matriz P é calculada da forma indicada na equação (6.53).

$$u = u_{eq} - L(x - x_{eq}) \quad (6.51)$$

$$L = B^T P(\tau)^{-1} \quad (6.52)$$

$$P(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-At} B \cdot B^T e^{-A^T t} \cdot dt \quad (6.53)$$

Para $\tau = 0.25$ as matrizes de ganho do sistema, L , para cada estado de equilíbrio são (6.54-6.57):

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.2620 & -7.0769 & 0 & 0.0437 & -1.1854 \\ -0.2620 & 0 & 7.0508 & -0.0437 & 0 & 1.1854 \\ 0 & -0.2620 & -7.0769 & 0 & -0.0437 & -1.1854 \\ 0.2620 & 0 & 7.1030 & 0.0437 & 0 & 1.1854 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.2620 & -7.1124 & 0 & 0.0437 & -1.1854 \\ -0.2620 & 0 & 7.1124 & -0.0437 & 0 & 1.1854 \\ 0 & -0.2620 & -7.1124 & 0 & -0.0437 & -1.1854 \\ 0.2620 & 0 & 7.1124 & 0.0437 & 0 & 1.1854 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.9708 & -7.0155 & 0 & 0.0437 & -1.1854 \\ -0.2620 & -0.7101 & 7.0677 & -0.0437 & 0 & 1.1854 \\ 0 & 0.4493 & -7.0676 & 0 & -0.0437 & -1.1854 \\ 0.2620 & -0.7101 & 7.0154 & 0.0437 & 0 & 1.1854 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -0.4493 & -7.1030 & 0 & 0.0437 & -1.1854 \\ -0.2620 & 0.7101 & 7.0769 & -0.0437 & 0 & 1.1854 \\ 0 & -0.9708 & -7.0507 & 0 & -0.0437 & -1.1854 \\ 0.2620 & 0.7101 & 7.0769 & 0.0437 & 0 & 1.1854 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Executando o programa *main_BatzKleinman* gravado no CD obtém-se a resposta do sistema apresentada nas figuras (6.22) a (6.24).

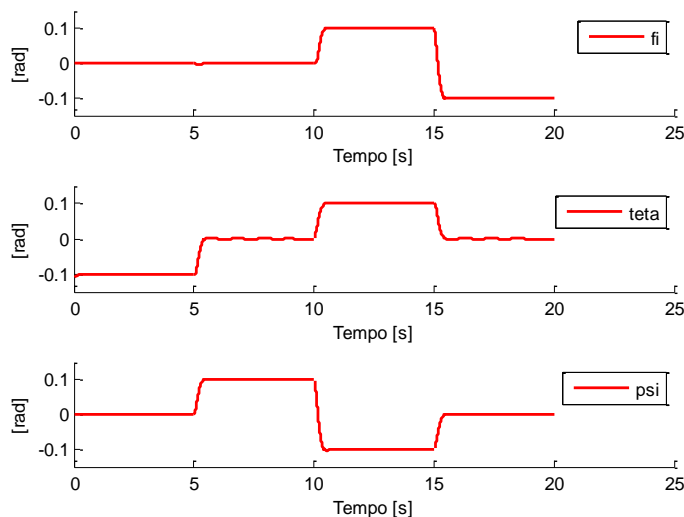


Fig. 6.22. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador de *Batz-Kleinman* com $\tau = 0.25$.

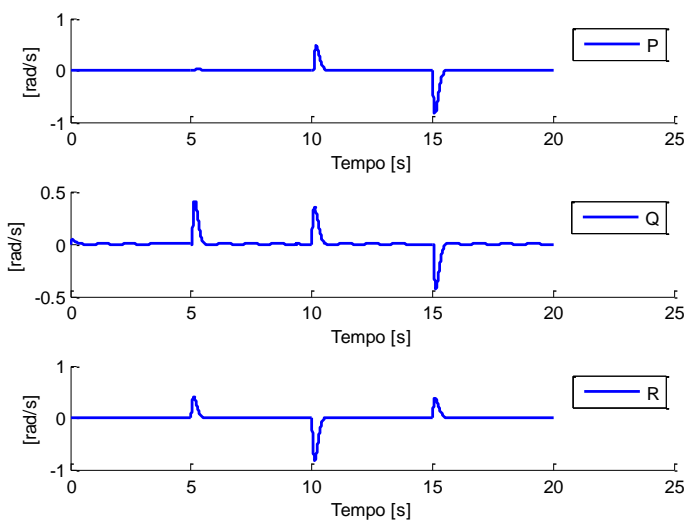


Fig. 6.23. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador de *Batz-Kleinman* com $\tau = 0.25$.

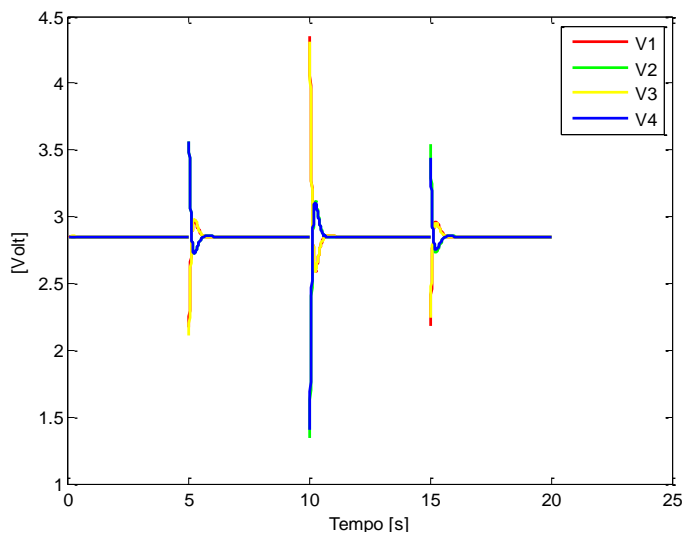


Fig. 6.24. Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador *Batz-Kleinman* com $\tau = 0.25$.

Como já comentado no controlo da posição e da atitude na secção (6.1.6), o controlo pelo método de *Batz-Kleinman* permite actuar sobre a magnitude das variáveis de controlo forçando o sistema a estabilizar mais rapidamente ou mais lentamente. Na simulação do controlo da atitude com $\tau = 0.25$, ver figuras (6.22-6.24), observa-se que a resposta do sistema é muito rápida quando comparada com a resposta obtida pelos controladores de *Elkrief*, *Bar-Shalom*, e *LQR*. Repare-se que a mudança do ângulo de rolamento, ϕ , de 0 para 0.1 rad dá-se em menos de meio segundo, ($\approx 10.5 - 10$) ≈ 0.5 seg e praticamente não ocorre *overshoot*, ver figura (6.22). Quanto maior é o valor da constante τ , menor é a magnitude das variáveis de controlo e consequentemente a resposta do sistema é mais suave.

Repare-se que existem umas flutuações pequeníssimas principalmente no ângulo de arfagem, θ , devido ao facto do sistema estabilizar muito rápido. Aumentando τ estas flutuações deixam de existir.

Fazendo uma comparação entre o controlo pelo método de *Batz-Kleinman* e o controlo pelo método de *Elkrief* para uma resposta do sistema idêntica, a energia requerida pelo controlador de *Batz-Kleinman* é superior à energia requerida pelo de *Elkrief*, isto é, a magnitude das variáveis de controlo é maior.

Este controlador seria óptimo para uma missão em que o Quadrotor por exemplo com uma câmara de filmar a bordo tivesse que seguir por exemplo um ciclista ou um carro de rali. Pois, como a atitude é estabilizada muito rapidamente e sem ultrapassar os valores de referência a imagem gravada ou transmitida pela câmara estaria sem vibrações. Repare-se que as flutuações notáveis nas figuras (6.22) e (6.23) são pequeníssimas. Aumentando τ para 0.5 as flutuações já deixam de existir.

6.2.8. Controlador Gramiano

O controlo por matriz Gramiana permite “levar” o sistema de um estado de referência, $x_{eq,0}$, para um outro estado de referência, $x_{eq,1}$, num intervalo temporal pré-estabelecido t_1 . O controlo por referências programáveis é assim feito sucessivamente para todos os estados de referência, $x_{eq,i}$'s, considerando os respectivos instantes em que são alcançados.

A sua lei de controlo é dada pela expressão (6.58) cuja matriz $P_c(t)$ é calculada pela expressão (6.59).

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot P_c(t_1)^{-1} \cdot (e^{A(t_1-t_0)} x_0 - x_1) \quad (6.58)$$

$$P_c(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \cdot B^T e^{A^T(t-\tau)} \cdot d\tau \quad (6.59)$$

A resposta do sistema é apresentada nas figuras (6.25) a (6.27). As figuras (6.25) e (6.26) mostram, respectivamente, a atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler, ϕ , θ e ψ , e as velocidades angulares, P , Q e R , em torno de cada eixo do referencial móvel R_{ABC} . Na figura (6.27) é mostrada as tensões eléctricas, V_1, V_2, V_3, V_4 , a aplicar aos ESC's dos motores de modo a que o Quadrotor se comporte da forma mostrada nas equações (6.25) e (6.26).

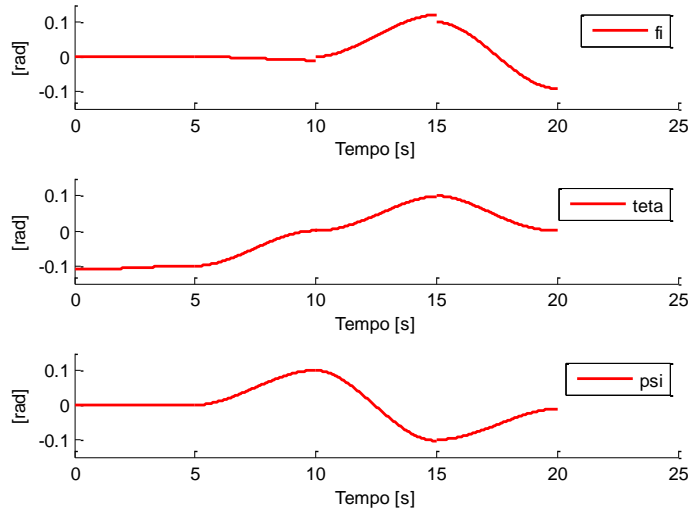


Fig. 6.25. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Controlador *Gramiano*.

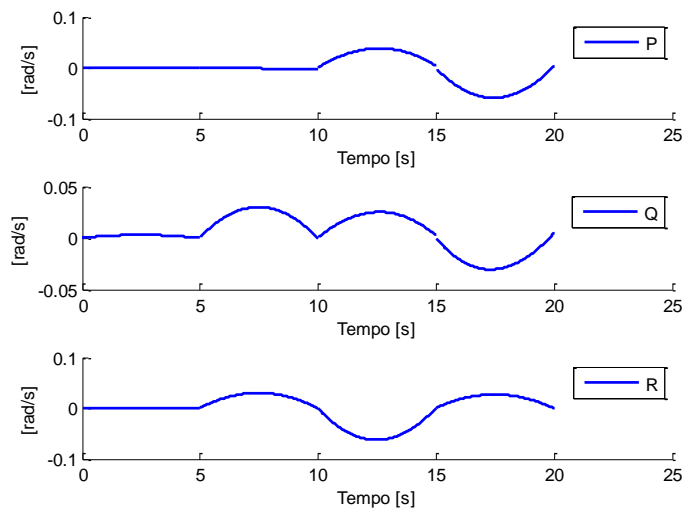


Fig. 6.26. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Controlador *Gramiano*.

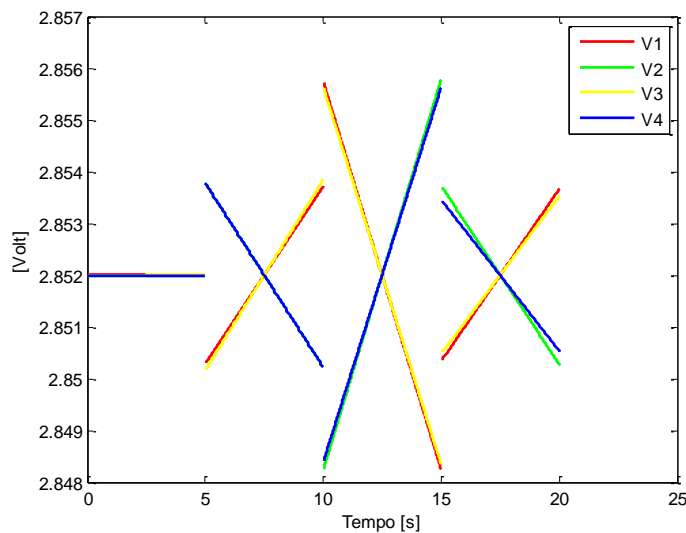


Fig. 6.27. Tensões aplicadas aos ESC's de cada motor para controlar a atitude. Controlador *Gramiano*.

Em situações em que o tempo é primordial como por exemplo o transporte de vítimas para um centro hospitalar, a variável tempo muitas vezes vale ouro. Suponha-se que uma vítima de um acidente está com um problema gravíssimo e tem no máximo meia hora de vida se nada for feito a tempo para a salvar. Os controladores de *Elkrief*, de *Batz-Kleinman* e *LQR* não têm a preocupação com a variável tempo. Fazem simplesmente com que o Quadrotor estabilize nas referências programadas sem se preocupar com o tempo que decorre até à estabilização.

O controlo pelo método *Gramiano* resolve este problema entrando com a quarta dimensão no cálculo do vector de controlo, a variável tempo. É um controlo que permite forçar o sistema a atingir um estado de referência num instante definido. Esta é a grande vantagem do controlo por matriz *Gramiana*.

No caso do transporte da vítima para o hospital, um tripulante a bordo com formação específica poderia indicar ao piloto automático para atingir a referência referente à localização do hospital por exemplo em 20 minutos e assim a vítima já poderia sobreviver, (no caso do controlo da posição e da atitude).

Observe-se na figura (6.25) e (6.26) que a única preocupação do controlador é fazer com que o sistema passe pelas referências indicadas nos respectivos instantes. Para $t_1 = 5 \text{ seg}$ o Quadrotor atinge a referência $x_{eq,1} = [0 \ (-0.1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; para $t_2 = 10 \text{ seg}$ passa pela referência $x_{eq,2} = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; para $t_3 = 15 \text{ seg}$ passa pela referência $x_{eq,3} = [0.1 \ 0.1 \ (-0.1) \ 0 \ 0 \ 0]^T$; e para $t_4 = 20 \text{ seg}$ atinge a referência $x_{eq,4} = [-0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Uma conclusão retirada por análise da figura (6.27) é que a variação da magnitude das variáveis controlo, u_i 's, na mudança de referências é minúscula. Embora pareça que há uma alteração grande, tome-se em atenção à escala vertical do gráfico. Um outro reparo a fazer é que as variáveis de controlo, u_i 's, passam pelas variáveis de controlo de referência, $u_{eq,i}$'s, exactamente a metade do tempo entre a mudança de referências. São todas coincidentes para $t = 7.5$; 12.5 e 17.5 seg em 2.852 V .

6.3. Estimador de Kalman

Nesta secção é apresentada a simulação do estimador de *Kalman* contínuo no tempo com base na dualidade de Klamman. O objectivo é estimar o valor exacto das variáveis de estado, x_i 's. A equação que permite estimar as variáveis de estado, \hat{x}_i 's, é deduzida na secção (5.7) do capítulo V e resume-se à equação (6.60):

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \quad (6.60)$$

A matriz de ganho, L , na equação (6.60) pode ser obtida de várias maneiras dependendo do tipo de controlador escolhido no espaço dual. Se L for obtida pelo controlador *LQR*, ($L = K$), o estimador chama-se estimador de *Kalman*, se L for obtida por outro controlador (ex: *Elkrief*, *Batz-Kleinman*, etc), o estimador chama-se simplesmente estimador.

Na simulação em causa a matriz de ganho, L , é obtida pelo controlador LQR utilizando a função do MatLab® $L = lqr(A', C', Q_k, R_k)'$. A matriz de saída, C , tem dimensão $[6 \times 6]$ partindo do princípio que todas as variáveis de saída são medidas.

As matrizes de covariância do ruído do processo e do ruído dos sensores, Q_k e R_k , respectivamente, são consideradas na simulação iguais a (6.61):

$$\begin{aligned} Q_k &= 10^{-4} \times I(6, 6) \\ R_k &= 10^{-4} \times I(6, 6) \end{aligned} \tag{6.61}$$

As variáveis de estado exactas, x_i 's, são obtidas com o controlador LQR com a matriz de ponderação do controlo, R , calculada pela regra de *Bryson* e com a matriz de ponderação do estado, Q , calculada pelo método da atribuição dos pólos com os pólos especificados em (6.32).

As variáveis de saída com ruído, y_i 's, (variáveis obtidas por sensores), são obtidas adicionando ruído às variáveis de estado exactas, x_i 's. Para efeitos de simulação considere que o ruído introduzido pelos sensores é ruído branco e gaussiano com uma amplitude média de 0.05 e que é introduzido à mesma taxa com que o novo estado, x_{i+1} , é calculado.

Nas figuras (6.28) e (6.29) apresenta-se a simulação do estimador de *Kalman* com a atitude do Quadrotor estimada, \hat{x}_i 's: os 3 ângulos de Euler $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ na figura (6.28); e as 3 velocidades angulares $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ na figura (6.29). Cada gráfico apresenta uma variável de estado exacta, x_i , a variável correspondente à saída com ruído, y_i , e a respectiva variável de estado estimada, \hat{x}_i .

As referências utilizadas são as mesmas referências do controlo da atitude, equações (6.16-6.19), à excepção de que a simulação decorre-se durante um período de 40 segundos trocando de referência a cada 10 segundos.

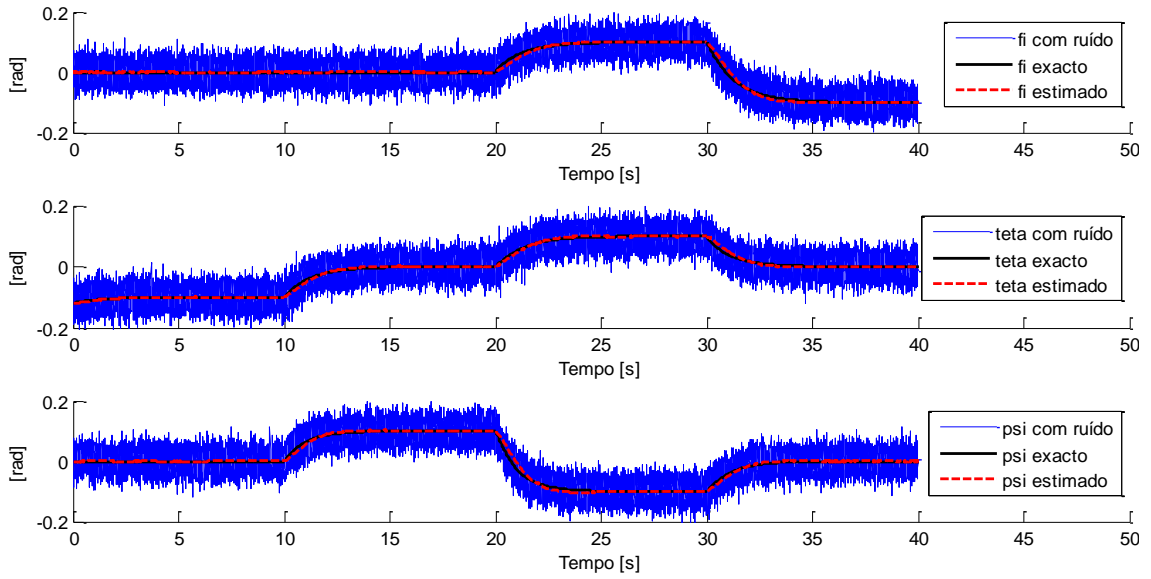


Fig. 6.28. Atitude do Quadrotor em termos de ângulos de Euler segundo o referencial inercial fixo, R_{NED} . Ângulos de rolamento, ϕ , arfagem, θ , e guinada, ψ , exactos; com ruído; e estimados.

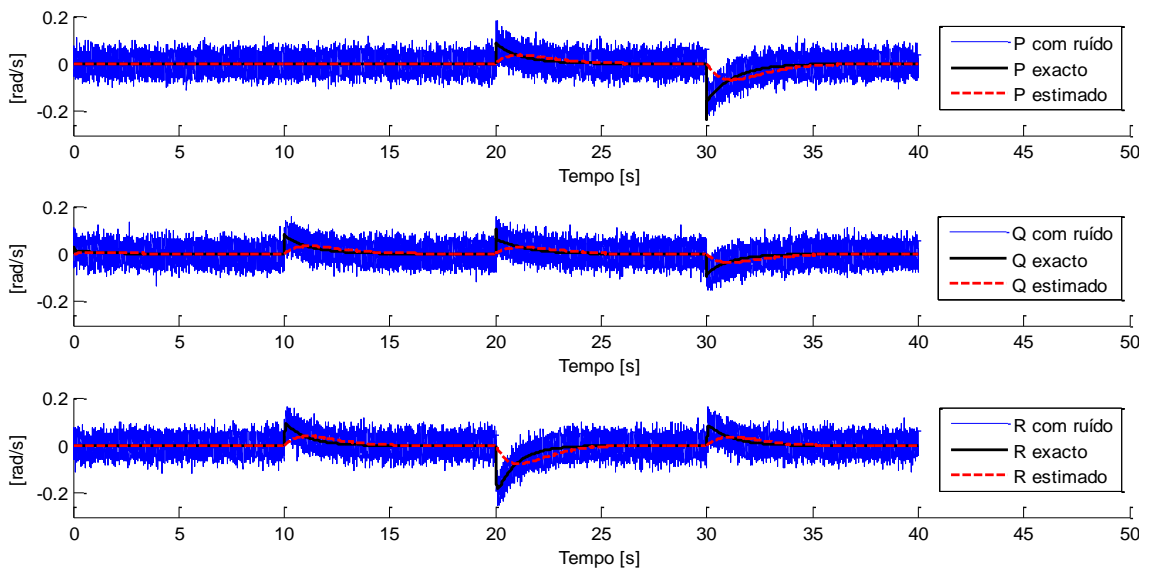


Fig. 6.29. Velocidades angulares do Quadrotor segundo o referencial móvel, R_{ABC} . Velocidade angular segundo x' - P ; segundo y' - Q ; e segundo z' - R , exactas; com ruído; e estimadas.

Pode-se averiguar pelas figuras (6.28) e (6.29) que o filtro de *Kalman* proporciona uma boa filtragem das variáveis ruidosas y_i 's. Repare-se que o ruído introduzido pelos acelerómetros e pelos giroscópios é facilmente eliminado e obtém-se as variáveis de estado estimadas, $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$, praticamente iguais às variáveis de estado exactas, $\phi, \theta, \psi, P, Q, R$.

Os ângulos de Euler estimados $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ estão a um desvio mínimo dos valores exactos, ϕ, θ, ψ , ver figura (6.28), e as velocidades angulares estimadas, $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$, pode-se dizer que também estão muito próximas dos seus valores exactos, P, Q, R . Tal só não acontece para P, Q, R na mudança de referência, isto é, a cada 10 segundos, porque o estimador de *Kalman* recorre ao estado anterior para estimar o estado actual. De qualquer modo repare-se que

passado logo algum tempo, P, Q, R já são estimadas com exactidão. Portanto, desde que a resposta do sistema seja suave, todas as variáveis são estimadas com uma boa exactidão.

6.4. Conversão dos Sinais de Controlo em PWM

As variáveis de controlo, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]^T$, dos controladores apresentados quer para o controlo somente da atitude (*LQR, Elkrif & Bar-Shalom, Batz-Kleinman e Gramiano*) quer para o controlo da posição e da atitude (*Batz-Kleinman*), estão compreendidas entre 0 e 5. Estes valores correspondem às tensões que quando aplicadas aos 4 motores fazem com que o Quadrotor estabilize nas referências programadas.

Todos os controladores apresentados nesta dissertação incorporam um limitador que limita as variáveis de controlo, isto é, se o valor de alguma variável de controlo, u_i , for superior a 5, o valor dessa variável, u_i , é limitado a 5, pois é a tensão máxima que pode ser aplicada ao respectivo ESC. Do mesmo modo, se alguma variável de controlo, u_i , for inferior a 0, valor correspondente à tensão mínima aplicada ao ESC, o valor dessa variável, u_i , é limitado a 0.

Sendo a velocidade de rotação dos motores controlada por ESC's, os sinais de entrada têm de obedecer a um protocolo. Os sinais de entrada dos ESC's são sinais PWM (*Pulse Width Modulation*) e portanto há necessidade de converter os sinais de controlo, u_i 's, provenientes do controlador em sinais PWM. Esta conversão é feita em C++ no microcontrolador (*Arduino Mega*), ver figura (3.3.2).

As matrizes de ganho para todas as referências programadas, K_i ou L_i , são gravadas na memória EEPROM do *Arduino*, e posteriormente é efectuado o cálculo das variáveis de controlo, u_i 's, em função das variáveis de estado, x_i 's = y_i 's. As variáveis de estado são as variáveis estimadas pelo estimador de *Kalman*. Após o cálculo dos sinais de controlo, u_i 's, para cada instante, a conversão em sinais PWM é feita com uma correspondência da tensão mínima (0 Volt) com a largura mínima dos impulsos (1000 μs) e da tensão máxima (5 Volt) com a largura máxima dos impulsos (2000 μs), ver figura (6.30).

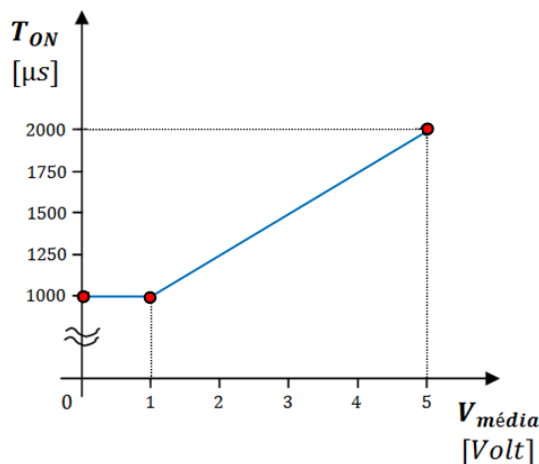


Fig. 6.30. Correspondência entre a tensão média e a largura do impulso do sinal PWM.

A partir da figura (6.30) escreve-se as equações das rectas que relacionam a largura dos impulsos, T_{ON} , com tensão proveniente dos controladores para cada ESC, equações (6.62).

$$\begin{cases} T_{ON} = 1000 & , & 0 \leq V_{média} \leq 1 \\ T_{ON} = 250V + 750 & , & 1 < V_{média} \leq 5 \end{cases} \quad (6.62)$$

A conversão das tensões, V_1, V_2, V_3, V_4 , em sinais PWM é feita em C++ para o microcontrolador *Arduino Mega* utilizando o compilador *Arduino 0022*. Este compilador encontra-se no CD e inclui numa das suas bibliotecas uma função chamada *map(...)* que permite fazer a correspondência directa entre os limites da tensão e os limites da largura dos impulsos, isto é: $[0, 5] \mapsto [1000, 2000]$. O programa em C++ encontra-se no CD com o nome *Conversao_PWM*.

Capítulo VII - Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros

7.1. Conclusão

Na presente dissertação é apresentado o projecto de controladores da posição e da atitude de um Quadrotor convencional por referências programáveis e a simulação de um estimador pelo método de *Kalman* no domínio contínuo recorrendo ao espaço dual para estimar a sua atitude. No que diz respeito à simulação do controlo do Quadrotor, os resultados apresentados focam sobretudo no controlo da atitude por deixar em aberto a possibilidade de implementar um sistema de navegação autónomo em trabalhos posteriores.

Relativamente ao controlo da posição e da atitude pelo controlador de *Batz-Kleinman*, verifica-se que a velocidade de resposta do sistema aumenta com a diminuição da constante τ , isto é, o sistema estabiliza mais rápido para valores de τ inferiores. Um outro aspecto é que quanto menor for τ , maior é a magnitude das tensões aplicadas aos motores. Interpretando fisicamente, a lógica que está por detrás é que se queremos que o sistema estabilize mais rapidamente temos de lhe fornecer mais energia.

No que diz respeito ao controlo da atitude, o controlo pelo método de *Elkrief* é aquele que revela ser mais eficiente por apresentar uma resposta do sistema mais suave e por ser aquele que requer menos energia das variáveis de controlo para estabilizar o sistema, quando comparado com o controlador *LQR* ou com o de *Batz-Kleinman* para uma resposta do sistema idêntica. Por outro lado, o controlador de *Elkrief* será em princípio o mais adequado para controlar o Quadrotor devido à fácil obtenção da matriz de ganho. Isto porque na maioria das aplicações o ganho do sistema tem de ser calculado em tempo real e o controlo por este método trás vantagens nesse sentido por não necessitar nem de matrizes de ponderação, nem de resolver equações de *Riccati*, nem de resolver integrais para obter a matriz de ganho, mas sim de resolver apenas uma equação de *Lyapunov* que é muito mais fácil de resolver.

No entanto, se o Quadrotor requerer na sua missão que a atitude estabilize o mais rápido possível, o controlador de *Batz-Kleinman* com um valor de τ baixo será o mais apropriado, mesmo sabendo que necessitará de mais energia para estabilizar o sistema.

Numa missão onde seja necessário controlar a atitude (ou também a posição) do Quadrotor em períodos temporais bem definidos, o controlador *Gramiano* é o exigido por ser o único que permite guiar o Quadrotor de um estado para outro num espaço de tempo especificado.

O controlo da atitude pelo método de *Bar-Shalom* revelou ser de extrema importância consoante o tipo de missão da aeronave. Se a missão for a de fazer um voo de curta duração para pura diversão do piloto ou para tirar por exemplo fotografias a um determinado sítio, em princípio não haverá tanta preocupação com a energia das baterias. Contudo, numa missão de salvamento como a referida no capítulo I (*Introdução*), a energia das baterias já se torna de

extrema importância. Suponha-se que o Quadrotor teria de transportar várias vítimas de um acidente para o hospital mais próximo. Pressupondo que o Quadrotor seja pequeno e que tenha capacidade de transportar apenas uma pessoa deitada de cada vez (mais tripulação obviamente), acontece que no primeiro transporte a energia das baterias até permaneceria mais ou menos igual em todas elas. No entanto, no segundo ou terceiro transporte a energia das baterias já não estaria balanceada o que poderia forçar o Quadrotor a ter que aterrar de emergência no caso de uma das baterias estar muito mais descarregada que as outras. Numa situação onde o Ser Humano corre perigo de vida e o tempo é essencial para a sua sobrevivência, uma aterragem destas seria inadmissível. Com a penalização individual das variáveis de controlo através da matriz de amortecimento de *Bar-Shalom* é possível escolher de que bateria é consumida mais energia e assim a autonomia de voo poderá aumentar.

Aproveitando o controlador de *Bar-Shalom*, uma simulação efectuada colocando um dos elementos da matriz de amortecimento a zero e os restantes a uns, (uma das variáveis de controlo sempre nula), permitiu analisar se o Quadrotor seria capaz de estabilizar a atitude só com três motores. A simulação mostrou que o controlador (*Elkrief & Bar-Shalom*) consegue estabilizar a atitude mas no entanto a mudança de referências é feita com muita instabilidade.

Relativamente à obtenção da atitude do Quadrotor, uma simulação mostra que o filtro de *Kalman* contínuo proporciona uma boa filtragem das variáveis de saída medidas. O ruído introduzido por exemplo por acelerómetros e giroscópios é facilmente eliminado obtendo-se as variáveis de estado estimadas, $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}, \hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$, praticamente iguais às variáveis de estado exactas, $\phi, \theta, \psi, P, Q, R$.

7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Gostaria que no futuro, e numa primeira fase, se fizesse uma validação experimental do controlo da atitude do Quadrotor. Um protótipo poderá ser construído de raiz com electrónica e sistemas propulsivos personalizados e os momentos de inércia obtidos recorrendo à ajuda de um modelo desenhado em CATIA®. Para a validação do controlo da atitude poderá ser utilizada uma unidade inercial de medida (IMU) de 6 DOF, comerciável por exemplo pela *Sparkfun Electronics*, para obter as velocidades angulares em torno do C.G do Quadrotor e os respectivos ângulos de Euler necessários para o controlo da atitude. Em alternativa poderá ser adquirido um Quadrotor fabricado pela *RC Toys* (ex. *Dragonflyer*) e adaptado consoante a natureza do projecto.

Gostaria que fosse validado também o sistema de navegação autónomo (controlo da posição e da atitude) incorporando um GPS para obter conjuntamente com os dados da IMU as coordenadas e as velocidades lineares do C.G do Quadrotor necessárias para o controlo da posição. Aproveitando o GPS, a posição do Quadrotor poderá ser transmitida e visualizada numa estação terrestre. Um possível software para a visualização da posição sobre um mapa poderá ser o *OziExplorer* ou o *UI-View32*. A comunicação de dados entre o Quadrotor e a

estação poderá ser feita recorrendo a uma solução de baixo custo utilizando para tal um pequeno transmissor fabricado pela *Byonics* e um rádio-portátil (ex. *Yaesu VX-2R*) para a recepção do sinal. O sinal recebido poderá ser injectado no PC pela placa de som e assim com a utilização dos conversores analógico-digitais da placa não será necessário adquirir um receptor próprio.

Um tema interessante que também poderá ser abordado é a formulação de um modelo matemático para determinar a perturbação máxima admissível por cada controlador e a sua posterior validação utilizando por exemplo o simulador de voo *FlightGear*.

Numa fase posterior, gostaria que se desenvolvesse um sistema de comunicação entre vários Quadrotors de modo a que, através de um controlo cooperativo, um conjunto de Quadrotors conseguisse por exemplo vigiar de uma determinada área com objectos em movimento (ex. bola num estádio de futebol). Um sistema que através da comunicação de dados e do controlo cooperativo, os Quadrotors cobrissem todo o estádio de futebol de modo a que o que estivesse mais perto da bola se deslocasse preferencialmente.

Referências Bibliográficas

- [1] WWW <<http://en.wikipedia.org/wiki/Quadrotor>>, *Consultado em Novembro de 2010*.
- [2] Leishman, J.G: “The Breguet-Richet Quad-Rotor Helicopter of 1907”, *Vertiflite*, Vol.47(3), pp.58-60, 2001.
- [3] WWW <<http://www.nationmaster.com/encyclopedia/Quadrotor>>, *Consultado em Novembro de 2010*.
- [4] WWW <http://en.wikipedia.org/wiki/Moller_Skycar_M400>, *Consultado em Novembro de 2010*.
- [5] WWW <http://en.wikipedia.org/wiki/M200G_Volantor>, *Consultado em Novembro de 2010*.
- [6] WWW <<http://www.accessmylibrary.com/search?q=air-medical-transport-taking>>, *Consultado em Novembro de 2010*.
- [7] WWW <www.mems.sandia.gov>, *Consultado em Dezembro de 2010*.
- [8] WWW <www.memsic.com>, *Consultado em Dezembro de 2010*.
- [9] WWW <www.siliconsensing.com>, *Consultado em Dezembro de 2010*.
- [10] WWW <www.parallax.com>, *Consultado em Dezembro de 2010*.
- [11] Altuğ, E: “Vision based control of unmanned aerial vehicles with applications to an autonomous four rotor helicopter, Quadrotor”, *Tese de Doutorado, GRASP Laboratory, Universidade da Pensilvânia, Filadélfia*, 2003.
- [12] Bouabdallah, S., Noth, A. & Siegwart, R: “PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor”, In *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2004*, Vol.4, pp.2451-2456, 2004.
- [13] Bouabdallah, S., Becker, M., Perrot, V. & Siegwart, R: “Toward Obstacle Avoidance on Quadrotors”, In *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME*, 2007.
- [14] Miller, K: “Path Tracking Control for Quadrotor Helicopters”, *Computing & Control Engineering Journal*, pp.1-13, 2008.

Referências Bibliográficas

- [15] Efe, M.O: “Robust Low Altitude Behavior Control of a Quadrotor Rotorcraft through Sliding Modes”, *Mediterranean Conference on Control & Automation, MED '0*, pp.1-6, 2007.
- [16] AbouSleiman, R., Korff, D., Gjioni, E. & Yang, H.C: “The Oakland University Unmanned Aerial Quadrotor System for the 2008 AUVSI UAS Student Competition”, WWW <http://pma263webdev.bowheadsupport.com/studentcomp2010/journal/journal2008/Oakland_Uni_Pax_2008.pdf>, Consultado em Fevereiro de 2011.
- [17] Pounds, P., Mahony, R., Gresham, J., Corke, P. & Roberts, J: “Towards Dynamically-Favourable Quad-Rotor Aerial Robots”, *In Proceedings of Australasian Conference on Robotics and Automation, ACRA 2004*, 2004.
- [18] Pounds, P., Mahony, R. & Corke, P: “Modelling and Control of a Large Quadrotor Robot”, *Control Engineering Practice*, Vol.18(7), pp.691-699, 2010.
- [19] Costa, S.E: “Controlo e Simulação de um Quadrirotor Convencional”, *Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa*, 2009.
- [20] Altug, E., Ostrowski, J.P. & Mahony, R: “Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback”, *In Proceedings of Robotics and Automation, ICRA '02, IEEE International Conference on*, Vol.1, pp.72-77, 2002.
- [21] Altug, E., Ostrowski, J.P. & Taylor, C.J: “Quadrotor Control Using Dual Camera Visual Feedback”, *In Proceedings of Robotics and Automation, ICRA '03, IEEE International Conference on*, Vol.3, pp.4294-4299, 2003.
- [22] Tournier, G.P., Valenti, M., How, J.P. & Feron, E: “Estimation and Control of a Quadrotor Vehicle using Monocular Vision and Moirè Patterns”, *In AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Keystone, Colorado*, pp.21-24, 2006.
- [23] Hoffmann, G., Rajnarayan, D.G., Waslander, S.L., Dostal, D., Jang, J.S. & Tomlin, C.J: “The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control (STARMAC)”, *Digital Avionics Systems Conference, DASC 04, The 23rd*, Vol.2, pp.12.E.4-1 - 12.E.4-10, 2004.
- [24] Hoffmann, G.M., Huang, H., Waslander, S.L. & Tomlin, C.J: “Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment”, *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, South Carolina*, pp.1-20, 2007.
- [25] WWW <<http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>>, Consultado em Março de 2011.

- [26] Peter, H.Z: “Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics”, *2nd Edition, AIAA Education Series, ISBN-10:1-56347-875-7, 2007.*
- [27] WWW
 <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quaternions_and_spatial_rotation&oldid=296655109>, *Consultado em Março de 2011.*
- [28] McCormick, B. W: “Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics”, *2nd Edition, John Wiley & Sons, Ltd, ISBN: 0-47157-506-2, 1994.*
- [29] WWW <<http://www.rctoys.com/RC-Toys-and-parts/DF-SAVS/RC-HELICOPTERS.html>>, *Consultado em Abril 2011.*
- [30] Anderson, B.D. & Moore, J.B: “Linear Optimal Control”, *Prentice-Hall, ISBN-13: 9780135368701, 1989.*
- [31] Luo, J. & Lan, C.E: “Determination of Weighting Matrices of a Linear Quadratic Regulator”, *In AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18(6), pp.1462-1463, 1995.*
- [32] Bousson, K., Elkrief, Y. & Bar-Shalom, D: “Nonlinear Optimal Torque Control of PMSM Systems with Application to Minimum Fuel Attitude Stabilization”, *International Review of Electrical Engineering, Vol.6(4), 2011.*
- [33] Franklin, G.F., Workman, M.L. & Powell, D: “Digital Control of Dynamics Systems”, *Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, ISBN: 978-0-9791226-1-3, 1997.*
- [34] Bousson, K: “Apontamentos da Cadeira de Sistemas de Controlo de Voo”, *Departamento de Ciências Aeroespaciais, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2010.*
- [35] WWW <<http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/ref/kalman.html>>, *Consultado em Abril de 2011.*
- [36] Park, J.Y, David, J., Murugesan, K. & Sekar, S: “Optimal control of time-varying singular systems using the RK-Butcher algorithm”, *International Journal of Computer Mathematics, Vol.82(5), pp.617-627, 2005.*

Referências Bibliográficas

Anexos

Anexo A - Cálculos Auxiliares (Capítulo III)

Neste anexo são apresentados com detalhe todos os passos envolvidos na obtenção das equações que definem a dinâmica e cinemática do Quadrotor.

Dedução da matriz de rotação global entre os referenciais:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação do referencial local, R_{ABC} , para o referencial inercial, R_{NED} :

$$S_B^E = R(\psi) \cdot R(\theta) \cdot R(\phi) \Leftrightarrow S_B^E = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação do referencial inercial, R_{NED} , para o referencial local, R_{ABC} :

$$S_E = (S_B^E)^{-1} = (S_B^E)^T \Leftrightarrow S_E = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}$$

Dinâmica:

Equação das forças actantes no Quadrotor:

$$F_{net} = \frac{d}{dt} [mV_T]_B + \omega \times [mV_T]_B$$

Dado que a massa, m , é constante e que $\omega = [P \ Q \ R]^T$ e $V_T = [U \ V \ W]^T$, vem:

Produto externo:

$$[P \ Q \ R]^T \times [U \ V \ W]^T = \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix}$$

Força gravítica no referencial local, R_{ABC} :

$$F_g = mS_E [0 \ 0 \ g]^T$$

$$F_g = m \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$F_g = mg [-\sin\theta \ \cos\theta \sin\phi \ \cos\theta \cos\phi]^T_B$$

Resultante das forças que actuam no Quadrotor:

$$F_{net} = F_g + F_p$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix}$$

Dividindo todos os termos por m , vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} = \frac{F_{px}}{m} - g\sin\theta - QW + RV$$

$$\dot{V} = \frac{F_{py}}{m} + g\cos\theta\sin\phi - RU + PW$$

$$\dot{W} = \frac{F_{pz}}{m} + g\cos\theta\cos\phi - PV + QU$$

Equação dos momentos actuantes no Quadrotor:

$$M_{net} = \frac{d}{dt}[I\omega]_B + \omega \times [I\omega]_B$$

Assumindo que o Quadrotor é um corpo rígido com massa constante (motores eléctricos) e com os eixos alinhados com os eixos principais de inércia, o tensor de inércia é simplificado a:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Produto externo:

$$\omega \times [I\omega] = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})RQ \\ (I_{11} - I_{33})QP \\ (I_{22} - I_{11})PQ \end{bmatrix}$$

$$M_{net} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})RQ \\ (I_{11} - I_{33})QP \\ (I_{22} - I_{11})PQ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}\dot{P} \\ I_{22}\dot{Q} \\ I_{33}\dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})RQ \\ (I_{11} - I_{33})QP \\ (I_{22} - I_{11})PQ \end{bmatrix}$$

Dividindo todos os termos do sistema anterior por $[I_{11} \ I_{22} \ I_{33}]^T$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x/I_{11} \\ M_y/I_{22} \\ M_z/I_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I_{33} - I_{22})QR/I_{11} \\ (I_{11} - I_{33})RP/I_{22} \\ (I_{22} - I_{11})PQ/I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\dot{P} = \frac{M_x}{I_{11}} - \frac{(I_{33} - I_{22})}{I_{11}} RQ$$

$$\dot{Q} = \frac{M_y}{I_{22}} - \frac{(I_{11} - I_{33})}{I_{22}} QP$$

$$\dot{R} = \frac{M_z}{I_{33}} - \frac{(I_{22} - I_{11})}{I_{33}} PQ$$

Cinemática para a Posição:

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = S_E \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = S_E^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi U + (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi)V + (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi)W \\ C_\theta S_\psi U + (C_\phi C_\psi + S_\phi S_\theta S_\psi)V + (S_\theta C_\phi S_\psi - S_\phi C_\psi)W \\ -S_\theta U + S_\phi C_\theta V + C_\theta C_\phi W \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = C_\theta C_\psi U + (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi)V + (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi)W$$

$$\dot{Y} = C_\theta S_\psi U + (C_\phi C_\psi + S_\phi S_\theta S_\psi)V + (S_\theta C_\phi S_\psi - S_\phi C_\psi)W$$

$$\dot{Z} = -S_\theta U + S_\phi C_\theta V + C_\theta C_\phi W$$

Cinemática para os ângulos de Euler:

$$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}$$

$$\vec{\omega} = R(\phi)R(\theta)R(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R(\phi)R(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\phi} = P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = Q \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + R \frac{\cos \phi}{\cos \theta}$$

Equações diferenciais que constituem o modelo matemático do sistema pelo método dos quaterniões:

Vector de estado do sistema:

$$x = [X \ Y \ Z \ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ U \ V \ W \ P \ Q \ R]^T$$

Os quaterniões iniciais, q_0, q_1, q_2 e q_3 são determinados por:

$$\begin{cases} q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{cases}$$

A taxa de variação das variáveis de estado X, Y e Z , em termos de quaterniões são apresentadas na capítulo III e são dadas por:

Taxas de variação da posição do Quadrotor no referencial inercial, R_{NED} :

$$\dot{X} = (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)U + 2(q_1q_2 - q_0q_3)V + 2(q_1q_3 + q_0q_2)W$$

$$\dot{Y} = 2(q_1q_2 + q_0q_3)U + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)V + 2(q_2q_3 - q_0q_1)W$$

$$\dot{Z} = 2(q_1q_3 - q_0q_2)U + 2(q_2q_3 + q_0q_1)V + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)W$$

Taxas de variação dos quaterniões correspondentes à atitude do Quadrotor no referencial inercial, R_{NED} :

$$\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(-Pq_1 - Qq_2 - Rq_3) + \gamma q_0$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(Pq_0 + Rq_2 - Qq_3) + \gamma q_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(Qq_0 - Rq_1 - Pq_3) + \gamma q_2$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(Rq_0 + Qq_1 - Pq_2) + \gamma q_3$$

Os ângulos de Euler, ϕ, θ e ψ , são obtidos a partir dos quaterniões, q_i 's, por:

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) \\ \theta &= \arcsin(-2(q_1q_3 - q_0q_2)) \\ \psi &= \arctan\left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)\end{aligned}$$

Taxas de variação das velocidades lineares do Quadrotor segundo as direcções dos eixos do referencial móvel, R_{ABC} :

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{F_{px}}{m} + 2g(q_1q_3 - q_0q_2) - QW + RV \\ \dot{V} &= \frac{F_{py}}{m} + 2g(q_2q_3 + q_0q_1) - RU + PW \\ \dot{W} &= \frac{F_{pz}}{m} + g(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - PV + QU\end{aligned}$$

Taxas de variação das velocidades angulares do Quadrotor em torno dos eixos do referencial móvel, R_{ABC} :

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{M_x}{I_{11}} - \frac{(I_{33} - I_{22})}{I_{11}} RQ \\ \dot{Q} &= \frac{M_y}{I_{22}} - \frac{(I_{11} - I_{33})}{I_{22}} QP \\ \dot{R} &= \frac{M_z}{I_{33}} - \frac{(I_{22} - I_{11})}{I_{33}} PQ\end{aligned}$$

Anexo B.1 - Matrizes A e B para Posição e Atitude (Capítulo VI)

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

A =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	9.809999999836501	-9.809999999836501	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

1.0000000000000000	0	0	0	0	0
0	1.0000000000000000	0	0	0	0
0	0	1.0000000000000000	0	0	0
0	0	0	1.0000000000000000	0	0
0	0	0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	0	0	1.0000000000000000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

B =

1.0e+002 *

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.072297218327577	-0.072297218324024	-0.072297218327577	-0.072297218327577
0	-1.831529530904871	0	1.831529530956955
1.831529530956955	0	-1.831529530956955	0
-0.033738701886049	0.033738701885282	-0.033738701886049	0.033738701886049

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

B =

1.0e+002 *

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.072297218327577	-0.072297218324024	-0.072297218327577	-0.072297218327577
0	-1.831529530904871	0	1.831529530956955
1.831529530956955	0	-1.831529530956955	0
-0.033738701886049	0.033738701885282	-0.033738701886049	0.033738701886049

Anexos

A =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	9.809999999836501	-9.809999999836501	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

1.0000000000000000	0	0	0	0	0	0
0	1.0000000000000000	0	0	0	0	0
0	0	1.0000000000000000	0	0	0	0
0	0	0	1.0000000000000000	0	0	0
0	0	0	0	1.0000000000000000	0	0
0	0	0	0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	0	0	0	1.0000000000000000
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

A =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	9.809999999836501	-9.809999999836501	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

1.0000000000000000	0	0	0	0	0	0
0	1.0000000000000000	0	0	0	0	0
0	0	1.0000000000000000	0	0	0	0
0	0	0	1.0000000000000000	0	0	0
0	0	0	0	1.0000000000000000	0	0
0	0	0	0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	0	0	0	1.0000000000000000
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

B =

1.0e+002 *

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.072297218327577	-0.072297218324024	-0.072297218327577	-0.072297218327577
1.831529530956955	-1.831529530904871	0	1.831529530956955
1.831529530956955	0	-1.831529530956955	0
-0.033738701886049	0.033738701885282	-0.033738701886049	0.033738701886049

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

A =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	9.809999999836501	-9.809999999836501	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

1.0000000000000000	0	0	0	0	0
0	1.0000000000000000	0	0	0	0
0	0	1.0000000000000000	0	0	0
0	0	0	1.0000000000000000	0	0
0	0	0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	0	0	1.0000000000000000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

B =

1.0e+002 *

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.072297218327577	-0.072297218324024	-0.072297218327577	-0.072297218327577
0	-1.831529530904871	0	1.831529530956955
1.831529530956955	0	-1.831529530956955	0
-0.033738701886049	0.033738701885282	-0.033738701886049	0.033738701886049

Anexo B.2 - Ganhos de *Batz-Kleinman* para Posição e Atitude (Capítulo VI)

Com $\tau = 0.8$:

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	0.511832908731918	-0.694630634912075
0	-0.570621519920188	-0.324160962970116	-0.511832908735429	0	0.694630634939019
0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	-0.511832908731918	-0.694630634912075
0	0.570621519936415	-0.324160962960898	0.511832908748336	0	0.694630634919266

Columns 7 through 12

-0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	0.054597341802202	-0.370482031229100
0	-0.260864294898852	-0.172891614579525	-0.054597341802840	0	0.370482031243471
0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	-0.054597341802202	-0.370482031229100
0	0.260864294906270	-0.172891614574609	0.054597341803514	0	0.370482031232935

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	0.511832908731918	-0.694630634912075
0	-0.570621519920188	-0.324160962970116	-0.511832908735429	0	0.694630634939019
0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	-0.511832908731918	-0.694630634912075
0	0.570621519936415	-0.324160962960898	0.511832908748336	0	0.694630634919266

Columns 7 through 12

-0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	0.054597341802202	-0.370482031229100
0	-0.260864294898852	-0.172891614579525	-0.054597341802840	0	0.370482031243471
0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	-0.054597341802202	-0.370482031229100
0	0.260864294906270	-0.172891614574609	0.054597341803514	0	0.370482031232935

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	0.511832908731918	-0.694630634912075
0	-0.570621519920188	-0.324160962970116	-0.511832908735429	0	0.694630634939019
0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	-0.511832908731918	-0.694630634912075
0	0.570621519936415	-0.324160962960898	0.511832908748336	0	0.694630634919266

Columns 7 through 12

-0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	0.054597341802202	-0.370482031229100
0	-0.260864294898852	-0.172891614579525	-0.054597341802840	0	0.370482031243471
0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	-0.054597341802202	-0.370482031229100
0	0.260864294906270	-0.172891614574609	0.054597341803514	0	0.370482031232935

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	0.511832908731918	-0.694630634912075
0	-0.570621519920188	-0.324160962970116	-0.511832908735429	0	0.694630634939019
0.570621519916280	-0.000000000000000	-0.324160962961820	-0.000000000000169	-0.511832908731918	-0.694630634912075
0	0.570621519936415	-0.324160962960898	0.511832908748336	0	0.694630634919266

Columns 7 through 12

-0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	0.054597341802202	-0.370482031229100
0	-0.260864294898852	-0.172891614579525	-0.054597341802840	0	0.370482031243471
0.260864294897232	-0.000000000000000	-0.172891614575101	-0.000000000000090	-0.054597341802202	-0.370482031229100
0	0.260864294906270	-0.172891614574609	0.054597341803514	0	0.370482031232935

Com $\tau = 2.0$:

Para $x_{eq,1}$ e $u_{eq,1}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	0.081893265397294	-0.111140901585932
0	-0.014607910909925	-0.051865754075218	-0.081893265397519	0	0.111140901590243
0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	-0.081893265397294	-0.111140901585932
0	0.014607910910340	-0.051865754073743	0.081893265399584	0	0.111140901587082

Columns 7 through 12

-0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	0.021838936720916	-0.148192812491640
0	-0.016695314873492	-0.069156645831810	-0.021838936721106	0	0.148192812497388
0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	-0.021838936720916	-0.148192812491640
0	0.016695314873967	-0.069156645829843	0.021838936721375	0	0.148192812493174

Para $x_{eq,2}$ e $u_{eq,2}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	0.081893265397294	-0.111140901585932
0	-0.014607910909925	-0.051865754075218	-0.081893265397519	0	0.111140901590243
0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	-0.081893265397294	-0.111140901585932
0	0.014607910910340	-0.051865754073743	0.081893265399584	0	0.111140901587082

Columns 7 through 12

-0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	0.021838936720916	-0.148192812491640
0	-0.016695314873492	-0.069156645831810	-0.021838936721106	0	0.148192812497388
0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	-0.021838936720916	-0.148192812491640
0	0.016695314873967	-0.069156645829843	0.021838936721375	0	0.148192812493174

Para $x_{eq,3}$ e $u_{eq,3}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	0.081893265397294	-0.111140901585932
0	-0.014607910909925	-0.051865754075218	-0.081893265397519	0	0.111140901590243
0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	-0.081893265397294	-0.111140901585932
0	0.014607910910340	-0.051865754073743	0.081893265399584	0	0.111140901587082

Columns 7 through 12

-0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	0.021838936720916	-0.148192812491640
0	-0.016695314873492	-0.069156645831810	-0.021838936721106	0	0.148192812497388
0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	-0.021838936720916	-0.148192812491640
0	0.016695314873967	-0.069156645829843	0.021838936721375	0	0.148192812493174

Para $x_{eq,4}$ e $u_{eq,4}$:

L =

Columns 1 through 6

-0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	0.081893265397294	-0.111140901585932
0	-0.014607910909925	-0.051865754075218	-0.081893265397519	0	0.111140901590243
0.014607910909900	0.000000000000000	-0.051865754073891	-0.000000000000027	-0.081893265397294	-0.111140901585932
0	0.014607910910340	-0.051865754073743	0.081893265399584	0	0.111140901587082

Columns 7 through 12

-0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	0.021838936720916	-0.148192812491640
0	-0.016695314873492	-0.069156645831810	-0.021838936721106	0	0.148192812497388
0.016695314873468	0.000000000000000	-0.069156645830040	-0.000000000000036	-0.021838936720916	-0.148192812491640
0	0.016695314873967	-0.069156645829843	0.021838936721375	0	0.148192812493174

Submitted to:

WSEAS Transactions on Systems and Control, 2011

Velosa, C. & Bousson, K: “Control of the Attitude of a Quadrotor by Scheduled References”, *Submitted to WSEAS Transactions on Systems and Control*, June 2011.

Control of the Attitude of a Quadrotor by Scheduled References

Carlos Velosa¹, Kouamana Bousson²

Avionics and Control Laboratory, Department of Aerospace Sciences

University of Beira Interior, Covilhã, Portugal

Abstract

A quadrotor is an aircraft with four rotors with some characteristics of conventional helicopters such as the ability to hover. It is a controllable aircraft, with no margin of static stability, and as a consequence it requires its attitude to be constantly controlled. In this paper are presented several methods of modern control to stabilize the attitude in programmable references: the LQR (Linear-Quadratic-Regulator) controller, the Y. Elkrief controller, and the Batz-Kleinman controller. A four dimension controller called Gramian is also implemented allowing the quadrotor change from one state to another in a well-defined time period. The results shown that the Elkrief controller is the most efficient to control the attitude because it presents a smoother response and it is the one that requires less energy stabilize the system. For another side, it is the method that allows a computation of the gain matrix by the easy way, which makes it convenient when the gain must be calculated in real time.

Keywords: Quadrotor, Optimal Control, LQR, Y. Elkrief controller, Batz-Kleinman controller, Gramian controller

List of Symbols

Symbol	Domain	Unit	Description
ϕ	\mathbb{R}	rad	Roll angle
θ	\mathbb{R}	rad	Pitch angle, (except $\theta = \pi/2$)
ψ	\mathbb{R}	rad	Yaw angle
A	$\mathbb{R}^{n \times n}$	-	State matrix, (n states)
B	$\mathbb{R}^{n \times p}$	-	Control matrix, (n states, p inputs)
C	$\mathbb{R}^{q \times n}$	-	Output matrix, (q outputs, n states)
F_i	\mathbb{R}	N	Force produced by each motor, ($i = 1, \dots, 4$)
g	\mathbb{R}	m/s ²	Gravitational acceleration, (constant value of 9.81 m/s ²)
H	$\mathbb{R}^{2n \times 2n}$	-	Hamiltonian matrix, (n states)
I_{11}, I_{22}, I_{33}	\mathbb{R}	kg.m ²	Elements of a motor's inertia tensor respectively to x', y' and z' axes
K	$\mathbb{R}^{p \times q}$	-	Gain matrix, (p inputs, q outputs)
L	$\mathbb{R}^{p \times q}$	-	Batz-Kleinman gain matrix, (p inputs, q outputs)
M_x, M_y, M_z	\mathbb{R}	N.m	Moments acting on the quadrotor respectively to x', y' and z' axes
P	\mathbb{R}	rad/s	Angular speed around the x' axis of the quadrotor
Q	\mathbb{R}	rad/s	Angular speed around the y' axis of the quadrotor
R	\mathbb{R}	rad/s	Angular speed around the z' axis of the quadrotor
u_{ref}	-	-	Reference control vector whose total thrust is equal to quadrotor's weight
V_i	\mathbb{R}	V	Voltages applied to each motor ($i = 1, \dots, 4$), $V_i \in [0,5]V$
x_{ref}	-	-	Reference state vector; system at an equilibrium point

1. Introduction

A quadrotor, commonly known as a four-engine helicopter, is an aircraft whose thrust force is generated by four rotors usually mounted in cross configuration, hence its name.

2. Problem Statement

A quadrotor is an entirely different vehicle when compared with a helicopter, mainly due to the way both are controlled. Helicopters are able to change the angle of attack of its blades, quadrotors cannot.

¹ Aeronautical Engineering Student in the Department of Aerospace Sciences at University of Beira Interior

² Research Professor in the Department of Aerospace Sciences at University of Beira Interior

In figure (2.1) it is shown a typical quadrotor with representation of Euler angles around each axis.

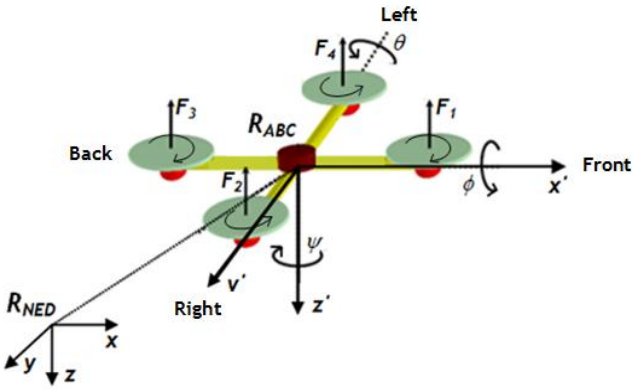


Fig. 2.1. Pitch, roll, and yaw rotations of a common quadrotor.

Each rotor in a quadrotor is responsible for a certain amount of thrust and torque about its centre of rotation, as well as for a drag force opposite to the rotorcraft's direction of flight. The quadrotor's propellers are not all alike. In fact, they are divided in two pairs, two pusher and two puller blades that work in a contra-rotation, see figure (2.1). As a consequence, the resulting net torque can be null if all propellers turn with the same angular velocity, thus allowing for the aircraft to remain still around its centre of gravity.

In order to define an aircraft's orientation (or attitude) around its centre of mass, aeronautical engineers usually define three dynamics parameters, the angles of pitch, roll and yaw as shown in figure (2.1) by letters θ , ϕ and ψ , respectively. This is very useful because the forces used to control the aircraft act around its centre of mass, causing it to pitch, roll or yaw.

Changes in the pitch angle are induced by contrary variation of speeds in propellers 1 and 3 (see figure 2.1), resulting in forward or backwards translation. If we do this same action for propellers 2 and 4, we can produce a change in the roll angle and we will get lateral translation. Yaw is induced by mismatching the balance in aerodynamic torques, ie, by offsetting the cumulative thrust between the counter-rotating blade pairs. So, by changing these three angles in a quadrotor we are able to make it manoeuvre in any direction as shown in figure (2.2).

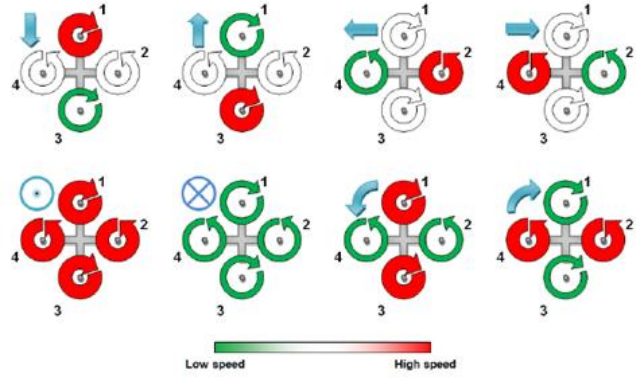


Fig. 2.2. Illustration of the various movements of a quadrotor.

3. Attitude Control

Unlike conventional aircraft such as airplanes and helicopters, it is essential and necessarily that quadrotors have an attitude controller to stabilize the platform. This is due to the fact that quadrotors have no margin of static stability.

Although this type of aircraft has no margin of static stability, the system is completely controllable and observable, (it is verified in section 3.3), and therefore we can design a controller to stabilize the system.

With no attitude controller it would be almost impossible control the quadrotor by a Human. For this reason it is essential a controller to stabilize the attitude. Thus, the pilot merely indicates the references (Euler angles ϕ , θ , ψ) and the controller stabilizes the quadrotor on those references.

3.1. Dynamics of the Quadrotor

For the attitude control, the flight dynamics equations that govern the attitude of the quadrotor and form the state vector, in terms of Euler angles are (3.1), [1].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi \\ Q \cos \phi - R \sin \phi \\ Q \sin \phi / \cos \theta + R \cos \phi / \cos \theta \\ M_x / I_{11} - RQ(I_{33} - I_{22}) / I_{11} \\ M_y / I_{22} - QP(I_{11} - I_{33}) / I_{22} \\ M_z / I_{33} - PQ(I_{22} - I_{11}) / I_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

where the moments M_x , M_y , and M_z in equations (3.1) around the of centre of gravity of the quadrotor are related

with forces F_1, F_2, F_3 and F_4 (see figure 2.1) and in turn related with the control variables $u = [V_1 V_2 V_3 V_4]^T$ as shown in equations (3.2) and (3.3).

$$\begin{cases} M_x = (F_4 - F_2)d_{cg} \\ M_y = (F_1 - F_3)d_{cg} \\ M_z = (F_2 + F_4 - F_1 - F_3)K_{MF} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} F_1 = (c_1 V_1 - V_{01})g \\ F_2 = (c_2 V_2 - V_{02})g \\ F_3 = (c_3 V_3 - V_{03})g \\ F_4 = (c_4 V_4 - V_{04})g \end{cases} \quad (3.3)$$

The distance between the axis of each motor and the centre of mass of the quadrotor is represented by d_{cg} and it was considered equal to $d_{cg} = 38 \text{ cm}$.

The constant K_{MF} represents a relation between the net torque and the total thrust produced. Here, it is considered equal to $K_{MF} = 0.014$.

Constants c_i and V_{0i} , with $(i = 1, \dots, 4)$, are determined experimentally and for the simulation they were considered equal to $c_i = 0.398$ and $V_{0i} = 1.0$.

The tensor of inertia of the quadrotor was considered equal to (3.4).

$$\begin{aligned} I &= \text{diag}(I_{11} \ I_{22} \ I_{33}) \\ &= \text{diag}(0.0081 \ 0.0081 \ 0.0162) \text{ kg.m}^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2. Linearization of the System

The linearization of the system allows us get the state and control matrices, A and B , respectively. These matrices are calculated by Jacobians $A = \partial f / \partial x$ and $B = \partial f / \partial u$.

It was chosen four references for the simulation of the attitude control. So, every 5 seconds the quadrotor has a different attitude. The references chosen and the corresponding linearized system matrices are presented from equations (3.5) to (3.20).

For the reference $x_{ref,1}$:

$$x_{ref,1} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0 \ -0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.5)$$

$$u_{ref,1} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T \quad (3.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.1003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

For the reference $x_{ref,2}$:

$$x_{ref,2} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.9)$$

$$u_{ref,2} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T \quad (3.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

For the reference $x_{ref,3}$:

$$x_{ref,3} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.13)$$

$$u_{ref,3} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T \quad (3.14)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0100 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9950 & -0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1003 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

For the reference $x_{ref,4}$:

$$x_{ref,4} = [\phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T = [-0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.17)$$

$$u_{ref,4} = [2.852 \ 2.852 \ 2.852 \ 2.852]^T \quad (3.18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9950 & 0.0998 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0998 & 0.9950 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$B = 100 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8317 & 0 & 1.8317 \\ 1.8317 & 0 & -1.8317 & 0 \\ -0.0337 & 0.0337 & -0.0337 & 0.0337 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

The reference control vector, u_{ref} , is constituted by the electric voltages that when applied to the electric motors produces the thrust force equal to the total weight of the quadrotor.

We can see that the control variables, u_i 's, can take any values since they have the same value, obviously within the maximum and minimum limits of voltage that can be applied to each motor, ie, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 \in [0,5]$ Volt.

3.3. Controllability and Observability

Before proceeding to the design of the controllers, an analysis of controllability and observability of the system has to be done to verify if we can design the controller for the system in cause.

A system is totally controllable if and only if the rank of the controllability matrix, M_c , (3.21) is equal to the number of variables of the state vector, n .

$$\begin{aligned} rank(M_c) &= rank([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) \\ &= rank(ctrb(A, B)) = 6 = n \end{aligned} \quad (3.21)$$

A system is totally observable when the rank of the observability matrix, M_o , (3.22) is equal to number of variables of the state vector, n .

$$\begin{aligned} rank(M_o) &= rank([C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T) \\ &= rank(obsv(A, C)) = 6 = n \end{aligned} \quad (3.22)$$

As we can verify by equations (3.21) and (3.22) the attitude of the quadrotor is completely controllable and observable.

3.4. LQR Method

For a continuous-time linear system (3.23):

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \quad (3.23)$$

with a quadratic cost function, J , defined as (3.24):

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.24)$$

the feedback control law that minimizes the value of the cost is (3.25):

$$u = u_{ref} - K(x - x_{ref}) \quad (3.25)$$

where K is given by (3.26):

$$K = R^{-1} B^T P \quad (3.26)$$

and P is found by solving the continuous time algebraic Riccati equation (3.27), [2]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.27)$$

3.4.1. Matrices Q and R - Pole Assignment Method

In the Riccati equation (3.27), weight matrices Q and R are needed. These matrices, and mainly matrix Q , are calculated rigorously in order to make the control more efficient.

Pole assignment method allows this computation allowing the calculation of matrix Q basing on eigenvalues imposed on the system by the designer, [3].

Here, eigenvalues of the system (3.23) are calculated from the closed loop feedback matrix, \hat{A} , (3.28), where matrix K is calculated by (3.26) with matrices Q and R determined by Bryson Rule, (3.29 – 3.30):

$$\hat{A} = A - BK \quad (3.28)$$

$$Q = diag \left(\left[\frac{1}{x_{1,max}^2} \quad \frac{1}{x_{2,max}^2} \quad \dots \quad \frac{1}{x_{n,max}^2} \right] \right) \quad (3.29)$$

$$R = diag \left(\left[\frac{1}{u_{1,max}^2} \quad \frac{1}{u_{2,max}^2} \quad \dots \quad \frac{1}{u_{p,max}^2} \right] \right) \quad (3.30)$$

The index n indicates the dimension of the state vector x , and p the dimension of the control vector u .

To calculate the matrix Q using the pole assignment method we need the matrix H called *Hamiltonian* matrix. It is given by (3.31) and its eigenvalues, $\lambda_i(H)$, are divided into two groups having the form presented in (3.32), [3].

$$H(q) = \begin{bmatrix} & A^T & & -BR^{-1}B^T \\ \begin{bmatrix} q_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4^2 \end{bmatrix} & & & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Group I: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ with $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$

Group II: $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ with $Re(\lambda_k) > 0, k = n + 1, \dots, 2n$ (3.32)

The method of allocation of poles aims to determine Q so that eigenvalues of *Group I* of the *Hamiltonian* matrix H match with the eigenvalues previously specified by the designer of the controller so that the quadrotor has certain qualities of flight, [3]. Then the equation (3.33) must be fulfilled.

$$\lambda(H)_{group I} = \lambda_{specified} \quad (3.33)$$

The matrix Q is constituted by the diagonal presented in (3.34):

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

The elements q_i 's of the matrix Q are computed by forcing the relation (3.35), [3].

$$\forall i, \det(\lambda_i I - H(q)) = 0 \quad (3.35)$$

Thus, the problem to find the matrix Q becomes a problem of optimization where we have to calculate q_i 's values that satisfy the six equations (3.36), ($i = 6 = n$):

$$f_i(q) = \det(\lambda_i I - H(q)) = 0 \quad (3.36)$$

So, at this point, what we have to do to find Q is minimize the function J indicated in equation (3.37):

$$J(q) = \sum_{i=1}^n (f_i(q))^2 \quad (3.37)$$

Relatively to matrix R , we can see by cost function (3.24) that its weight is the form $u^T R u$, where we can conclude that when the elements of matrix R are higher, lower is the cost to stabilize the system, ie, the magnitude of the control variables is lower. Therefore, there is flexibility in choosing the elements of matrix R , where they can have any values since they are larger than zero, $r_i' > 0$.

Thus, matrix R can be simply computed by the *Bryson Rule* as shown in (3.30), where the maximum magnitude of each variable of control is 5, corresponding to the maximum voltage that we can apply to each motor (through ESC – Electronic Speed Controller). Thus, the matrix R takes the form (3.38).

$$R = \text{diag} \left(\frac{1}{5^2} \quad \frac{1}{5^2} \quad \frac{1}{5^2} \quad \frac{1}{5^2} \right) \quad (3.38)$$

3.5. Elkrief Method

For a continuous-time linear system (3.39):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.39)$$

the feedback control law proposed by *Y. Elkrief* is (3.40):

$$u = u_{ref} - K(x - x_{ref}) \quad (3.40)$$

where K is given by (3.41):

$$K = B^T P^{-1} \quad (3.41)$$

whose matrix P is obtained by solving the *Lyapunov* equation (3.42):

$$\hat{A}P + P\hat{A}^T = -BB^T \quad (3.42)$$

The feedback closed-loop matrix \hat{A} is calculated as indicated by the equation (3.43), [4]:

$$\hat{A} = -(A + \lambda^* I) \quad (3.43)$$

by choosing a value for λ^* that satisfies the equation (3.44):

$$\lambda^* > \max \left\{ \bar{\mu}(A), \underline{\mu}(A) \right\} \quad (3.44)$$

with:

$$\bar{\mu}(A) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} ; \quad \underline{\mu}(A) = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad (3.45)$$

3.6. Batz-Kleinman Method

For a continuous-time linear system (3.46):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.46)$$

the feedback control law proposed by *Batz-Kleinman* is (3.47):

$$u = u_{ref} - L(x - x_{ref}) \quad (3.47)$$

where L is given by (3.48):

$$L = B^T P(\tau)^{-1} \quad (3.48)$$

whose matrix P is given by integral (3.49) with the constant τ arbitrary but greater than zero, $\tau > 0$, [4].

$$P(\tau) = \int_0^\tau e^{-At} B \cdot B^T e^{-A^T t} \cdot dt \quad (3.49)$$

Relatively to the constant τ we can say that the larger is τ , lower is the magnitude of the control.

3.7. Gramian Method

The control technique using the Gramian matrix allows the design of a controller that drives the system from t_0 with the state $x_0 = x(t_0)$ to reach the state $x_1 = x(t_1)$ within the allotted time t_1 (with $t_1 > t_0$) as we can see in figure (3.1).

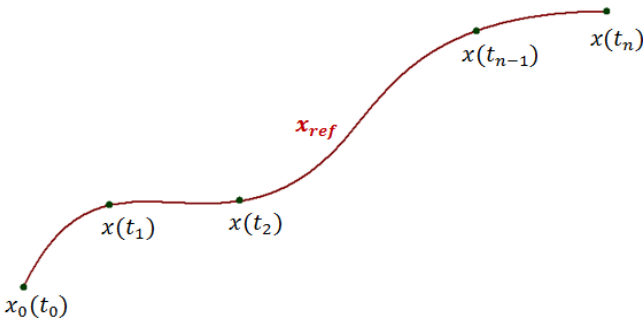


Fig. 3.1. Path defined by waypoints and respective accurate instants to be reached.

With the Gramian control method, the system can be driven from one state x_0 for another state x_1 in a specified time, and so on.

For a continuous-time linear system (3.50) with the initial state (3.51):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.50)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.51)$$

the feedback control law given by Gramian method that drives the system for state $x_1(t_1)$ is (3.52):

$$u(t) = u_{ref} - B^T e^{A^T(t_1-t)} \cdot P_c(t_1)^{-1} \cdot (e^{A(t_1-t_0)} x_0 - x_1) \quad (3.52)$$

where P_c is given by the integral (3.53), [4]:

$$P_c(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \cdot B^T e^{A^T(t-\tau)} \cdot d\tau \quad (3.53)$$

4. Simulations

For the attitude control, differential equations (3.1) have to be solved to simulate the model. They were solved here by using the *Butcher* algorithm and as initial condition it was considered a disturbance of 10% as shown in (4.1):

$$x_0 = x_{ref,1} + 0.10x_{ref,1} \quad (4.1)$$

4.1. LQR Controller

Given that the changes of matrix A between each reference are minuscule because the references are very close, the matrix Q is consequently nearly equal for all references. The matrix Q was calculated by the pole assignment method based on the specified eigenvalues (4.2) and it is equal to (4.3):

$$\lambda(\hat{A}) = \begin{bmatrix} -0.5294 \\ -1649.1 \\ -1649.1 \\ -42.961 \\ -0.1250 \\ -0.5294 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$Q_{\text{optimum}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

With the weight matrices Q and R (equations 4.3 and 3.38, respectively), and the matrices A and B for each reference state, the gain matrices calculated by equation (3.26) are presented below:

For state $x_{ref,1}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0.13 & 3.53 & -2.49 & 0.00 & 4.50 & -2.57 \\ -3.66 & 0 & 2.30 & -4.50 & 0 & 2.57 \\ 0.13 & -3.53 & -2.49 & 0.00 & -4.50 & -2.57 \\ 3.39 & 0 & 2.68 & 4.50 & 0 & 2.57 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

For state $x_{ref,2}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3.53 & -2.49 & 0 & 4.50 & -2.57 \\ -3.53 & 0 & 2.49 & -4.50 & 0 & 2.57 \\ 0 & -3.53 & -2.49 & 0 & -4.50 & -2.57 \\ 3.53 & 0 & 2.49 & 4.50 & 0 & 2.57 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

For state $x_{ref,3}$:

$$K = \begin{bmatrix} -0.11 & 3.76 & -2.13 & -0.00 & 4.50 & -2.57 \\ -3.39 & -0.25 & 2.67 & -4.50 & 0 & 2.56 \\ -0.15 & -3.26 & -2.83 & -0.00 & -4.50 & -2.57 \\ 3.66 & -0.24 & 2.29 & 4.50 & 0 & 2.57 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

For state $x_{ref,4}$:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3.26 & -2.84 & 0 & 4.50 & -2.57 \\ -3.53 & 0.24 & 2.48 & -4.50 & 0 & 2.57 \\ 0 & -3.76 & -2.13 & 0 & -4.50 & -2.57 \\ 3.53 & 0.24 & 2.48 & 4.50 & 0 & 2.57 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Attitude stabilization through LQR method is shown in figures (4.1) and (4.2) and the control vector $u(t)$ needed to obtain the response of the system represented in figures (4.1) and (4.2) is shown in figure (4.3). Each control variable represents the electric voltage applied to each motor by the order represented in figure (2.1), ie, V_1 corresponds to motor 1 and so on.

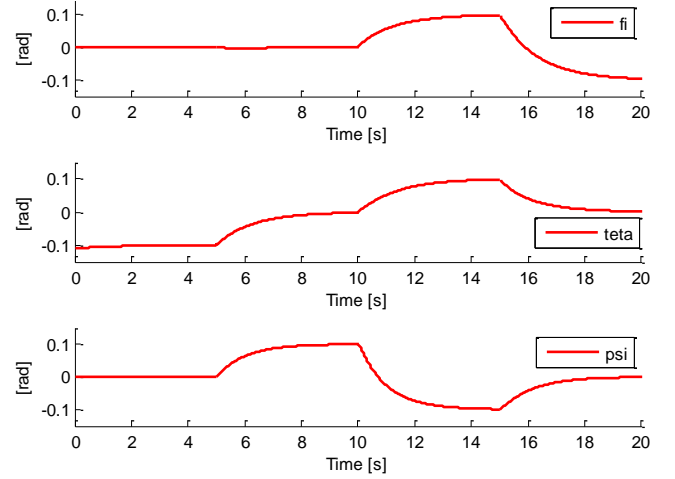


Fig. 4.1. Quadrotor's attitude: roll, pitch and yaw (ϕ, θ, ψ) angles according to the axes x, y, z respectively.

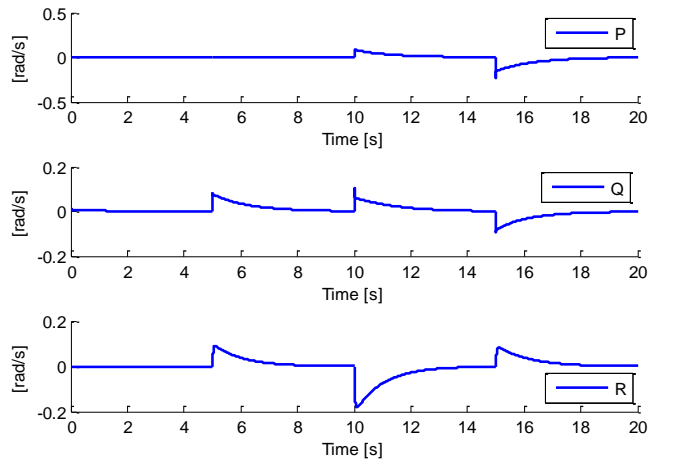


Fig. 4.2. Angular velocities (P, Q, R) of the quadrotor according to the axes x', y', z' respectively.

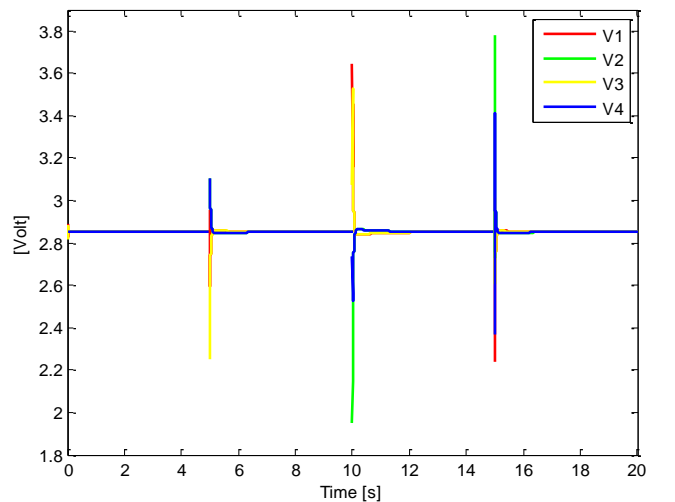


Fig. 4.3. Voltages applied to each motor to stabilize the attitude of the quadrotor.

4.2. Elkrif Controller

The value of λ^* chosen for the simulation is equal to the maximum of μ 's: $\bar{\mu}(A)$ or $\underline{\mu}(A)$, see equation (3.45), plus one, ie, $\lambda^* = \max(\bar{\mu}(A), \underline{\mu}(A)) + 1$.

The values of λ^* are listed below along with the gain matrix of the system for each state of reference.

For state $x_{ref,1} \rightarrow \lambda^* = 2.105$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.04 & -1.30 & 0 & 0.02 & -0.62 \\ -0.04 & 0 & 1.30 & -0.02 & 0 & 0.62 \\ 0 & -0.04 & -1.30 & 0 & -0.02 & -0.62 \\ 0.04 & 0 & 1.31 & 0.02 & 0 & 0.62 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

For state $x_{ref,2} \rightarrow \lambda^* = 2.000$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.04 & -1.18 & 0 & 0.02 & -0.59 \\ -0.04 & 0 & 1.18 & -0.02 & 0 & 0.59 \\ 0 & -0.04 & -1.18 & 0 & -0.02 & -0.59 \\ 0.04 & 0 & 1.18 & 0.02 & 0 & 0.59 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

For state $x_{ref,3} \rightarrow \lambda^* = 2.200$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.19 & -1.41 & 0 & 0.02 & -0.65 \\ -0.05 & -0.14 & 1.42 & -0.02 & 0 & 0.65 \\ 0 & 0.09 & -1.42 & 0 & -0.02 & -0.65 \\ 0.05 & -0.14 & 1.41 & 0.02 & 0 & 0.65 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

For state $x_{ref,4} \rightarrow \lambda^* = 2.095$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -0.08 & -1.29 & 0 & 0.02 & -0.62 \\ -0.04 & 0.12 & 1.29 & -0.02 & 0 & 0.62 \\ 0 & -0.17 & -1.28 & 0 & -0.02 & -0.62 \\ 0.04 & 0.12 & 1.29 & 0.02 & 0 & 0.62 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

The response of the system is shown in figures (4.4) and (4.5). In figure (4.6) it is shown the control vector $u(t)$ corresponding to the voltages applied to the motors to stabilize the system.

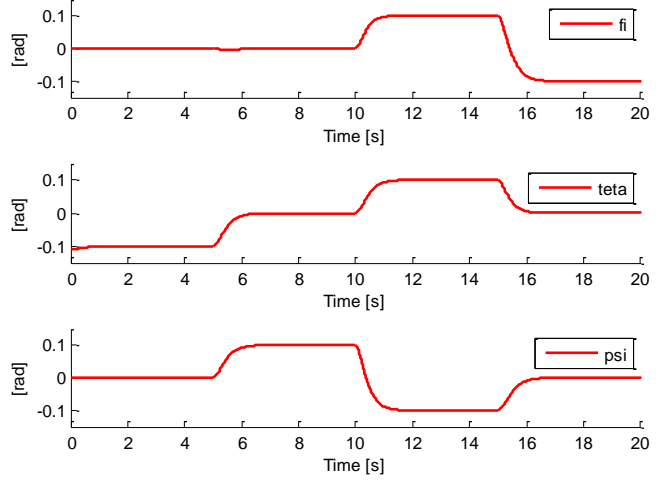


Fig. 4.4. Quadrotor's attitude: roll, pitch and yaw (ϕ, θ, ψ) angles according to the axes x, y, z respectively.

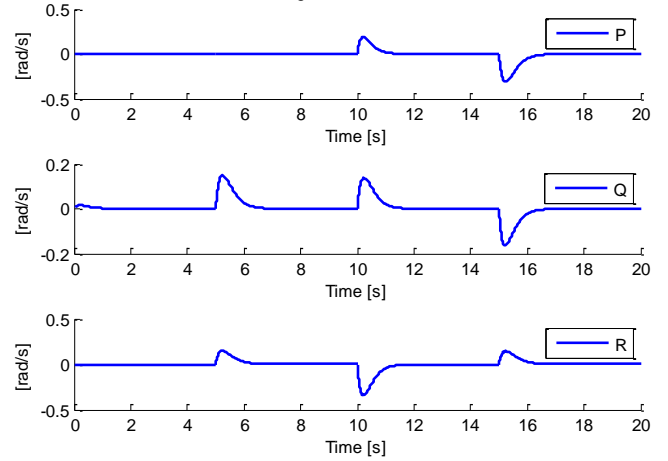


Fig. 4.5. Angular velocities (P, Q, R) of the quadrotor according to the axes x', y', z' respectively.

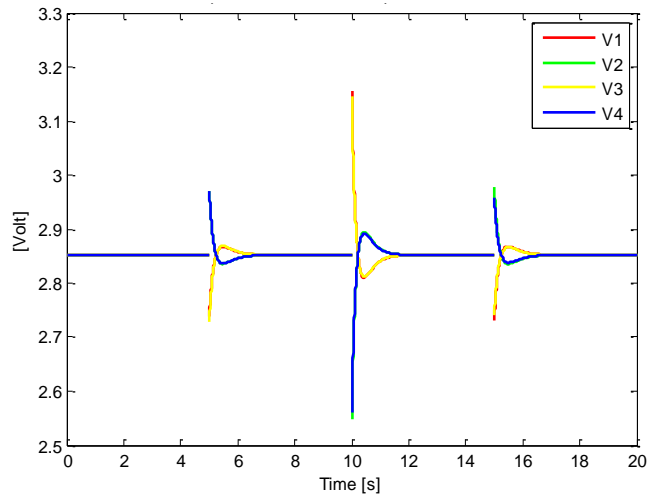


Fig. 4.6. Voltages applied to each motor to stabilize the attitude of the quadrotor.

4.3. Batz-Kleinman Controller

The Batz-Kleinman controller needs a value for the constant τ as mentioned in section (3.6). For the simulation present here it was considered equal to $\tau = 0.25$.

The gain matrices for each reference are presented below in equations (4.12) to (4.15):

For state $x_{ref,1}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.26 & -7.07 & 0 & 0.04 & -1.18 \\ -0.26 & 0 & 7.05 & -0.04 & 0 & 1.18 \\ 0 & -0.26 & -7.07 & 0 & -0.04 & -1.18 \\ 0.26 & 0 & 7.10 & 0.04 & 0 & 1.18 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

For state $x_{ref,2}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.26 & -7.11 & 0 & 0.04 & -1.18 \\ -0.26 & 0 & 7.11 & -0.04 & 0 & 1.18 \\ 0 & -0.26 & -7.11 & 0 & -0.04 & -1.18 \\ 0.26 & 0 & 7.11 & 0.04 & 0 & 1.18 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

For state $x_{ref,3}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.97 & -7.01 & 0 & 0.04 & -1.18 \\ -0.26 & -0.71 & 7.06 & -0.04 & 0 & 1.18 \\ 0 & 0.44 & -7.06 & 0 & -0.04 & -1.18 \\ 0.26 & -0.71 & 7.01 & 0.04 & 0 & 1.18 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

For state $x_{ref,4}$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -0.44 & -7.10 & 0 & 0.04 & -1.18 \\ -0.26 & 0.71 & 7.07 & -0.04 & 0 & 1.18 \\ 0 & -0.97 & -7.05 & 0 & -0.04 & -1.18 \\ 0.26 & 0.71 & 7.07 & 0.04 & 0 & 1.18 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

The control of the attitude of the quadrotor by the Batz-Kleinman method is shown in figures (4.7) and (4.8) and the vector control over time is shown in figure (4.9).

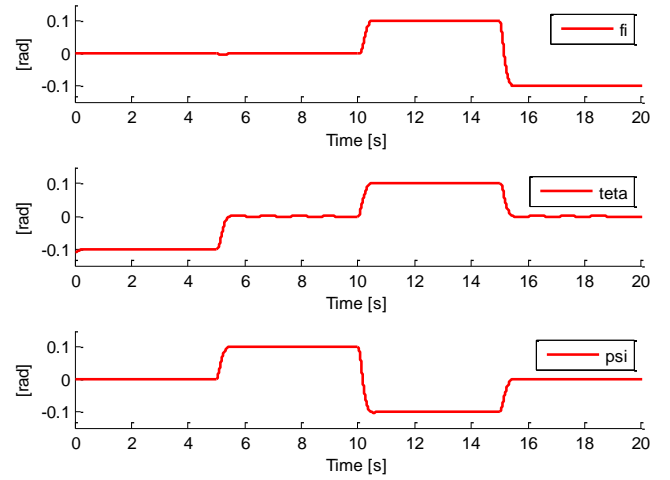


Fig. 4.7. Quadrotor's attitude: roll, pitch and yaw (ϕ, θ, ψ) angles according to the axes x, y, z respectively.

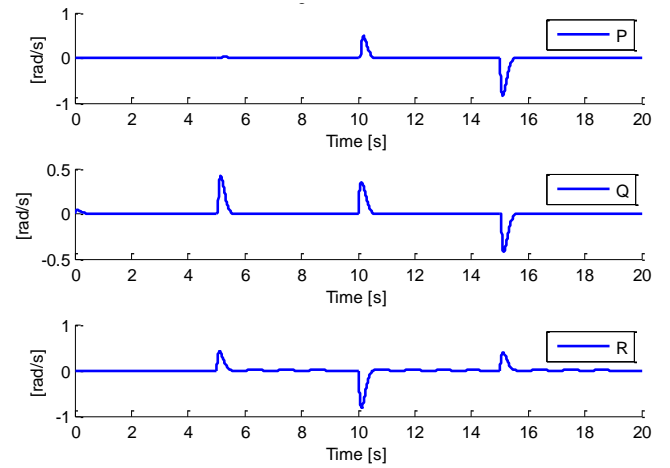


Fig. 4.8. Angular velocities (P, Q, R) of the quadrotor according to the axes x', y', z' respectively.

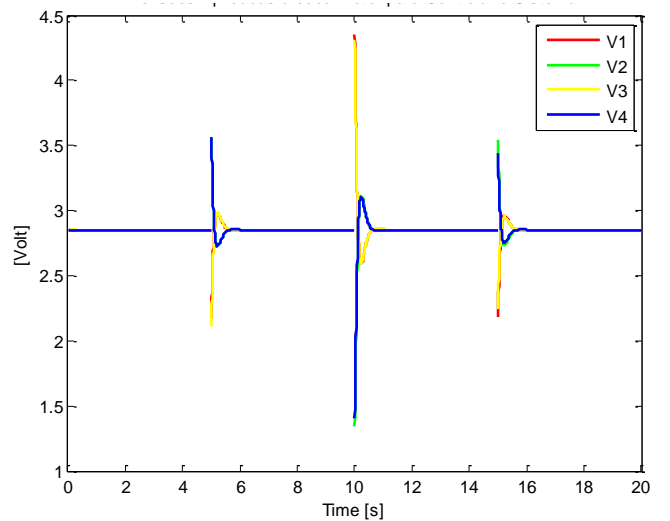


Fig. 4.9. Voltages applied to each motor to stabilize the attitude of the quadrotor.

4.4. Gramian Controller

For the control of attitude of the quadrotor by the Gramian method it was considered as initial state x_0 a disturbance of 10% of the reference state $x_{ref,1}$ as shown in equation (4.16).

The reference $x_{ref,i}$ that the system has to pass there in a precisely time changes every 5 seconds.

$$x_0(t_0) = x_{ref,1} + 0.10x_{ref,1} \quad (4.16)$$

The response of the system is shown in figures (4.10) and (4.11) and in figure (4.12) it is shown the control vector $u(t)$ needed to drive the system from waypoint to waypoint.

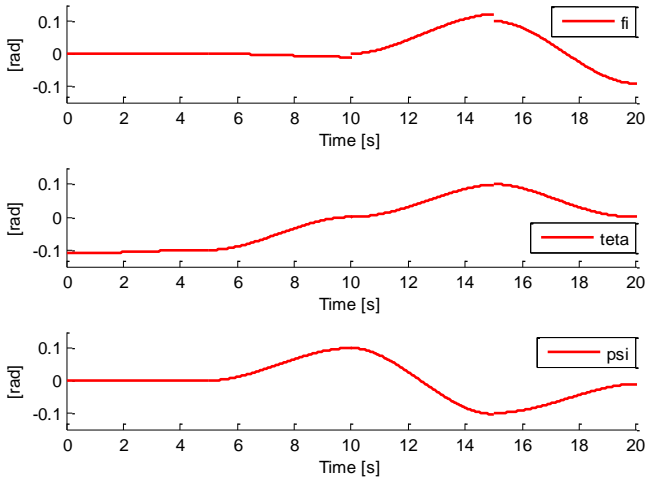


Fig. 4.10. Quadrotor's attitude: roll, pitch and yaw (ϕ, θ, ψ) angles according to the axes x, y, z respectively.

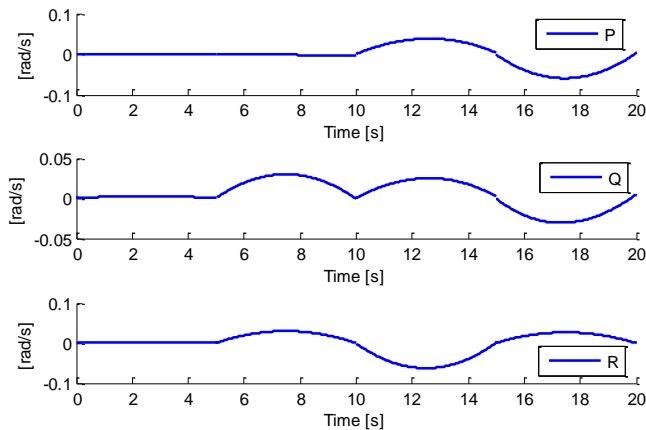


Fig. 4.11. Angular velocities (P, Q, R) of the quadrotor according to the axes x', y', z' respectively.

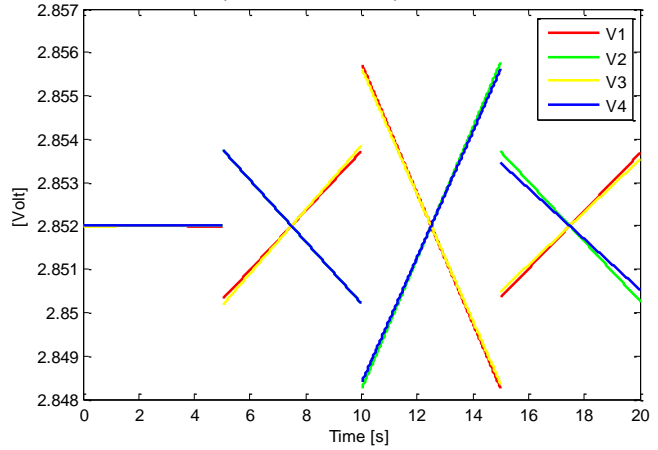


Fig. 4.12. Voltages applied to each motor to stabilize the attitude of the quadrotor.

5. Conclusions

The control by the Elkrif method is the one that revealed to be more efficient because it presents a smoother system response and because it is the one that requires less energy of variables of control to stabilize the system, when compared with the LQR or with the Batz-Kleinman controller to an identical system response. On the other hand, the Elkrif controller is in principle the most suitable to control the quadrotor due to the easy way to obtain the gain matrix. This because in most applications the gain of the system must be calculated in real time and the control by this method brings advantages in that direction because it doesn't require nor weighting matrices, nor to solve *Riccati* equations and not have to solve integrals to obtain the gain matrix.

However, if the quadrotor requires in its mission that the attitude stabilizes as soon as possible, the Batz-Kleinman controller with a low value of τ is the most appropriate, even though it requires more energy to stabilize the system.

On a mission where is necessary to control the attitude (or also the position) of the quadrotor in a well-defined periods, the Gramian controller is required because it is the one that can guide the quadrotor from one state to another within a specified time.

6. References

[1] Peter, H.Z: “Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics”, 2nd Edition, *AIAA Education Series*, ISBN-10: 1-56347-875-7, 2007.

[2] Anderson, B.D, & Moore, J.B: “Linear Optimal Control”, *Prentice-Hall*, ISBN-13: 9780135368701, 1989.

[3] Luo, J. & Lan, C.E: “Determination of Weighting Matrices of a Linear Quadratic Regulator”, *In AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol.18(6), pp.1462-1463, 1995.

[4] Bousson, K., Elkrief, Y., & Bar-Shalom, D: “Nonlinear Optimal Torque Control of PMSM Systems with Application to Minimum Fuel Attitude Stabilization”, *International Review of Electrical Engineering*, Vol.6(4), 2011.

