



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Departamento de Matemática

Dinâmica de funções contínuas na reta

João Carlos Teodoro Brás

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário**
2º ciclo de estudos

Orientador: Prof. Doutor Mário Bessa

Covilhã, Outubro de 2013

Dinâmica de funções contínuas na reta

Dedicatória

Ao meu pai.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Mário Bessa, a total disponibilidade, a paciência, a ajuda e o enorme contributo científico, que permitiram a realização desta dissertação de mestrado.

À Professora Doutora Isabel Cunha, pelo papel que desempenhou na minha vida académica, pelo apoio, pelo incentivo constante, pela alegria que transmite a lecionar, que fizeram com que sempre acreditasse que este dia chegaria.

À minha amiga, colega, Professora Doutora Lídia Cleto, que me fez perceber a beleza dos números, e me fascinou quando assistia às suas aulas, pela sua amizade e companheirismo quando lecionei ao seu lado.

À minha namorada, Cristina, à minha família e aos meus amigos, por toda a ajuda, paciência, incentivo, apoio e carinho que sempre me dispensaram ao longo da realização do trabalho, em que pouca atenção lhes pude prestar.

Resumo

Pretendemos neste trabalho determinar a riqueza dinâmica que se obtém das funções contínuas na reta com determinados pontos periódicos. É apresentado um teorema que afirma que funções contínuas na reta com pontos periódicos de período três têm pontos periódicos de qualquer período. Seguidamente, apresentamos uma generalização deste resultado - *O Teorema de Sharkovsky* - que fornece uma ordenação dos inteiros em que a existência de um ponto periódico de um certo período p para uma função contínua na reta garante a existência de qualquer período q desde que a ordem desse período q seja maior do que a ordem de p . Finalmente, são apresentadas formas de reciprocidade do *Teorema de Sharkovsky*.

Palavras-chave

Sistemas dinâmicos, iteração, função contínua e ponto periódico.

Abstract

Our goal in this work is to determine the richness of dynamics obtained from continuous functions in the real line with periodic points of a certain period. It will be presented a theorem that states that continuous functions on the real line with periodic points of period three have periodic points of any period. After that we generalize this result - *Sharkovsky's Theorem* - which provides an order of integers in which the existence of a periodic point of a certain period p to a continuous function on the real line guarantees the existence of any period q since the order of this period q is greater than of the order p . Finally, it will be presented some ways of reciprocity of the *Sharkovsky's Theorem*.

Keywords

Dynamical systems, iteration, continuous function and periodic point.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Teoria do Caos – Contextualização histórica	1
2	Definições básicas	5
3	Diagrama de Teia de Aranha	7
3.1	Análise gráfica	7
4	Preliminares da análise na reta	11
5	Período três implica o caos	15
6	Teorema de Sharkovsky	21
6.1	Ordem de Sharkovsky	21
6.2	Teorema de Sharkovsky	21
6.3	Consequências	21
7	Exemplos	25
7.1	Período 4 implica período 2	25
7.2	Período 4 implica período 8? (parte I)	28
7.3	Período 4 implica período 8? (parte II)	31
8	O recíproco do teorema de Sharkovsky	33
9	Outros exemplos	41
9.1	Período $2^n \times 3$ implica período $2^{n-1} \times k$?	41
9.2	Período 6 implica períodos ímpares?	42
10	Conclusão	45
	Bibliografia	47

Lista de Figuras

2.1	Os pontos fixos de $f(x) = x^2 - 2$ são o -1 e o 2.	6
3.1	Diagramas de <i>teia de aranha</i> ou <i>escada</i> ao redor dos pontos fixos -1 e 2 respectivamente.	8
3.2	Diagramas de <i>teia de aranha</i> ao redor do ponto fixo da função $\cos(x)$	8
3.3	Diagramas de <i>teia de aranha</i> ao redor do ponto fixo da função $\cos(x)$	9
4.1	$g(x) = -f(x)$	11
4.2	$g(x) = f(x) - d$	12
4.3	O supremo c de Φ	12
4.4	Função $f(x)$	13
5.1	Ciclo de período 2 da função $f(x)$	15
5.2	A dinâmica de $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$	16
5.3	Se $f(I) \supset J$ então existe pelo menos um ponto fixo (A).	16
5.4	A imagem de $I' \subset I$ é J	17
5.5	$a \mapsto b \mapsto c \mapsto a \mapsto \dots$	17
5.6	$f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$	18
5.7	Como $f(I_1) \supset I_1, \exists A_1 \subset I_1: f(A_1) = I_1$	18
5.8	$\exists A_2 \subset A_1 \subset I_1: f(A_2) = A_1$	19
5.9	$\exists A_{n-1} \subset I_0: f(A_{n-1}) = A_{n-2}$	19
5.10	$\exists A_n \subset I_1: f(A_n) = A_{n-1}$	20
7.1	25
7.2	25
7.3	26
7.4	26
7.5	27
7.6	27
7.7	28
7.8	28
7.9	29
7.10	29
7.11	30
7.12	A construção da função F : <i>o dobro de f</i>	31
7.13	A função $g(x) = x$	32
7.14	A função G definida como o dobro de g	32
7.15	A função \tilde{G} definida como o dobro de G	32
8.1	A função $f: [1, 5] \rightarrow [1, 5]$	33
8.2	A função $f: [1, 7] \rightarrow [1, 7]$	35
8.3	A função $g: [1, 13] \rightarrow [1, 13]$	36
8.4	A função $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ tal que $f(x) = -x + 3$	37
8.5	A função $f: [1, 4] \rightarrow [1, 4]$	38
8.6	A função <i>dobro g</i> : $[1, 10] \rightarrow [1, 10]$	39

9.1	A função $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$	41
9.2	A função <i>dobro</i> $g : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$	42
9.3	A função $f : [0, 5] \rightarrow [0, 5]$	42
9.4	A função $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$	43

Capítulo 1

Introdução

1.1 Teoria do Caos – Contextualização histórica

O núcleo desta dissertação é um resultado sobre a presença de comportamento caótico sob certas condições topológicas e dinâmicas para aplicações unidimensionais. Nesse sentido vamos fazer uma incursão breve acerca da teoria caótica de sistemas dinâmicos.

É perfeitamente natural que um modelo que descreva o comportamento meteorológico leve em conta parâmetros como, por exemplo, a humidade ou a pressão atmosférica entre outros. Para introduzirmos no modelo esses fatores utilizamos instrumentos de medida que avaliam numericamente, e com um certo grau de precisão, os mesmos parâmetros. Por mais precisos que sejamos a introdução do erro é inevitável. A questão que surge é em que medida é que os erros acumulados poderão afetar o *output* do nosso modelo pois uma pequena imprecisão nessas medidas pode ser o acender de um rastilho que leva ao caos. As atuais previsões meteorológicas são consideradas caóticas ou altamente sensíveis a pequenas perturbações nas condições iniciais, pois perturbações muito ligeiras nos parâmetros atmosféricos avaliados podem evoluir para eventos significativos com o passar do tempo. A previsão meteorológica a longo prazo é dominada por estes efeitos caóticos, e seria necessário que os cientistas possuíssem instrumentos de medição com um grau de precisão enormíssimo para que se conseguisse providenciar uma previsão a longo prazo com grande exactidão.

No início da década de 1960, Edward Lorenz, considerado o criador da teoria do caos, estudou vários padrões meteorológicos, e chegou à conclusão que nem sempre eles mudam como inicialmente previsto (ver,[Lor63]). Ele obtinha padrões climáticos divergentes quando alterava somente alguns valores iniciais das variáveis consideradas. A ténue dependência das condições iniciais, ficou conhecida popularmente pelo *Efeito Borboleta*.

Assim que o conceito de *caos* se tornou uma peça fundamental na consideração das previsões climáticas, as ideias de prognóstico sofreram alterações drásticas. Um exemplo típico é o facto de se ter feito um esforço para medir a emissão de dióxido de carbono na atmosfera, para se concluir (ou não) acerca dos seus efeitos no aumento da temperatura global, e na previsão da mesma, a longo prazo.

Durante vários séculos acreditou-se que as órbitas dos planetas simulavam com exactidão o comportamento de um relógio, isto é, o facto de ser estável e previsível. Ora, sabemos que o clima da terra é influenciado pela variação da sua órbita, pela intensidade da radiação solar, entre outros factores. Sabe-se agora também, que a influência gravitacional de outros planetas faz com que uma órbita particular se altere com o tempo.

Isto para referir que mesmo que todos os parâmetros terrestres intervenientes nos efeitos climáticos fossem medidos e conhecidos, haveria sempre que dar importância à natureza caótica do nosso sistema solar. Do ponto de vista da metodologia científica, a observação de um fenómeno exige atenção minuciosa aos seus detalhes. A variação e evolução de um certo fenómeno ao longo do tempo é considerado um sistema dinâmico.

São inúmeros os matemáticos que durante os últimos cinquenta anos, estudaram o comportamento aleatório de sistemas dinâmicos determinísticos, ou por outras palavras, sistemas caóticos que é o

nome adotado para agrupar este tipo de sistemas.

Foi em 1975 que nasceu uma nova terminologia matemática: o Caos. Tien-Yien Li e James A. Yorke publicaram um artigo na revista científica “American Mathematical Monthly” intitulado *Period three implies chaos* [LY75], e usaram pela primeira vez a palavra caos para definir matematicamente a sensível dependência das condições iniciais de um sistema e também a natureza incerta do comportamento da dinâmica resultante. Contudo Yorke afirmou que “(. . .) *os primeiros a compreender na totalidade a dinâmica caótica de uma função de um intervalo em si mesmo*(. . .)” foram Robert May e George Oster. Efetivamente o primeiro artigo onde se utilizou a palavra caos foi em *Biological Populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles and chaos* (ver [M⁺74]), escrito por May, publicado na revista “Science” em 1974, cerca de um ano antes do artigo de Li e Yorke.

De qualquer maneira, a publicação [LY75] é uma das mais citadas na matemática e física, e revelou-se de enorme importância no estudo do caos. Nela encontramos a prova de um resultado surpreendente: se uma função f contínua na reta tem um ponto de período três (i.e. $f(f(f(x))) = x$, $f(x) \neq x$ e $f(f(x)) \neq x$), então f tem pontos de qualquer período.

A natureza da afirmação de Yorke sobre o trabalho de May veio a mostrar-se falsa pouco tempo depois uma vez que Yorke desconhecia um trabalho desenvolvido uma década antes na antiga União Soviética.

Em 1964, foi publicado um artigo na revista “Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal” intitulado *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself* (ver [Sha64]) de onze páginas, escrito por Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, que revelou ser algo rigoroso e perfeitamente fundamentado, dez anos antes do trabalho de Yorke, que é na verdade um caso particular da publicação de Sharkovsky. Este trabalho ficou conhecido pelo *Teorema de Sharkovsky*. Consta que o artigo tinha sido enviado para apreciação para a revista em 1962, quando o jovem Oleksandr tinha apenas 25 anos.

São várias as razões pelas quais este resultado não se tornou conhecido imediatamente, tendo sido ignorado pela comunidade matemática durante mais de quinze anos, aparecendo apenas para conhecimento geral na segunda metade dos anos 70. O facto de o artigo estar escrito em russo e ter sido publicado num jornal matemático soviético é uma delas. Relembre-se que na altura imperava no mundo a Guerra Fria, e a comunicação era muito difícil, particularmente no que diz respeito a resultados matemáticos, era quase nulo o acesso do ocidente às descobertas científicas da antiga União Soviética. Outro facto que podemos apontar como causa é que no início dos anos 60 o tema não seria muito popular no meio académico. Por fim, deve-se salientar o facto da demonstração utilizada por Sharkovsky ser muito complexa, pouco atraente e com métodos que não eram de todo simples.

Voltando ao artigo [LY75] de Li e Yorke, foi por causa dele que o trabalho de Sharkovsky ganhou importância. Através de um convite para participar numa conferência em Berlim de Leste, no final dos anos 70, Li, Yorke e Sharkovsky, conheceram-se e apesar de não haver nenhuma língua em comum, chegou-se ao consenso de reconhecer o grandioso trabalho do ucraniano. Desde então muitos matemáticos viraram a sua atenção para os resultados do teorema. Muito por causa de diversos artigos no final dos anos 70, e também da realização de inúmeras conferências relacionadas com caos e fenómenos interativos. Alguns deles desenvolveram demonstrações mais simples e curtas, outros investigaram a possibilidade de alargar os resultados para estruturas mais complexas. As demonstrações foram baseadas no elementar teorema do valor intermédio e no início dos anos 1980, pelo menos três demonstrações do teorema foram publicadas e são consideradas a prova moderna do mesmo. Uma delas foi desenvolvida por Block, Guckenheimer, Misiurewicz e Yorke [BGM⁺80], e é aquela que serviu para a demonstração do teorema nesta dissertação, como veremos

Dinâmica de funções contínuas na reta

mais à frente. Outra das demonstrações foi apresentada por Burkart [Bur82] e por fim falamos da demonstração apresentada por Ho e Morris [HM81].

Para além destas publicações, gostaríamos de dar relevo a duas delas, pela forma simples que abordaram o Teorema de Sharkovsky, que apareceram já no século XXI. Em 2004, Bau-Sen Du publicou *A simple proof of Sharkovsky's theorem* [Du04] e em 2007 Keith Burns e Boris Hasselblatt apresentaram o artigo *The Sharkovsky theorem: a natural direct proof* [BH11].

Capítulo 2

Definições básicas

Vamos considerar funções na reta real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Em geral assumimos que f é contínua.

Definição 2.1 (Iteração). *Iteração significa um processo de repetição. Iterar uma função significa avaliar a função mais de um vez, compondo a função sobre ela mesma. Se tivermos a função f , $f^2(x)$ é a segunda iteração de f , $f^3(x)$ é a terceira iteração de f , \dots , $f^n(x)$ é a n -ésima iteração de f , ou seja, a n -ésima composição de f sobre ela mesma.*

Definição 2.2 (Órbita). *Chamamos órbita à sequência de pontos*

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

em que

$$x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),$$

$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0),$$

\dots

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0),$$

para um dado $x_0 \in \mathbb{R}$. Ao ponto x_0 chamamos a semente da órbita.

Exemplo 1. *Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 2$. A órbita de x_0 é*

$$2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, \dots$$

já que

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2^2 = 4$$

$$x_2 = 4^2 = 16$$

$$x_3 = 16^2 = 256$$

$$x_4 = 256^2 = 65536$$

$$x_5 = 65536^2 = 4294967296$$

\dots

Um dos mais importantes tipos de órbitas que podemos considerar é o ponto fixo. Outro tipo de órbita importante é a órbita periódica ou ciclo do qual o ponto fixo é um caso particular. Iremos descrever de seguida cada um deles.

Definição 2.3 (Ponto fixo). *Chamamos ponto fixo ao ponto x_0 que satisfaça $x_0 = f(x_0)$. Podemos dizer ainda que a órbita de um ponto fixo é a sequência $x_0, x_0, x_0, x_0, x_0, \dots$, pois $f^2(x_0) =$*

$f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, ou seja, $f^n(x_0) = x_0$.

Podemos encontrar todos os pontos fixos de uma função resolvendo a equação $f(x) = x$. Outra maneira de os encontrar é geometricamente, olhando para a intersecção do gráfico de uma função com a bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$.

Exemplo 2. Seja $f(x) = x^2 - 2$. As soluções da equação $x^2 - 2 = x$, -1 e 2 , são pontos fixos da função $f(x)$. Podemos observar graficamente o mesmo na Figura 2.1.

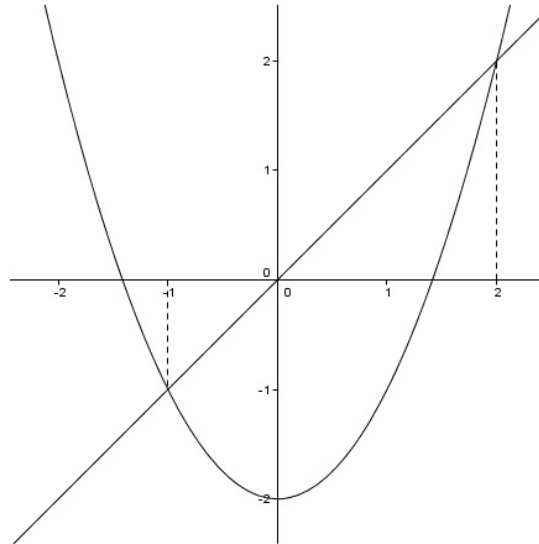


Figura 2.1: Os pontos fixos de $f(x) = x^2 - 2$ são o -1 e o 2 .

Definição 2.4 (Ponto periódico). Chamamos ponto periódico ao ponto x_0 que satisfaça $f^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$. O menor n para o qual $f^n(x_0) = x_0$ é designado por período de x_0 .

Definição 2.5 (Ciclo de período n ou órbita periódica). Chamamos ciclo a uma órbita que se repete a ela própria a cada n iterações.

Exemplo 3. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 0$$

A órbita de 0 é

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

Então dizemos que 0 pertence a um 2-ciclo, ou a um ciclo de período 2 para $f(x)$.

Nota 2.6. Se x_0 tem período k , então x_0 é também um ponto fixo de f^{2k} , pois

$$f^{2k}(x_0) = f^k(f^k(x_0)) = f^k(x_0) = x_0.$$

Podemos generalizar dizendo que x_0 é um ponto fixo de f^{nk} , ou seja, x_0 tem período nk para algum $n \in \mathbb{N}$.

Nota 2.7. Se x_0 se encontrar numa órbita de período k , então todos os pontos da órbita de x_0 têm também período k . Na realidade essa órbita é invariante por f .

Capítulo 3

Diagrama de Teia de Aranha

O processo de encontrar pontos periódicos não é tão simples quanto parece. Existem, contudo, alguns procedimentos que nos permitem encontrar vários tipos de órbitas e o seu comportamento, executando um processo geométrico bastante intuitivo.

3.1 Análise gráfica

Depois de representarmos graficamente uma função f , podemos utilizar um processo geométrico que nos ajudará a determinar a dinâmica de f . Para visualizarmos a órbita do ponto x_0 , precisamos de desenhar a reta $y = x$. Como vimos anteriormente, os pontos de interseção dessa reta com o gráfico da função em questão dá-nos os pontos fixos de f . Começaremos o processo no ponto (x_0, x_0) , ou seja, sobre a reta $y = x$. Deste ponto, traçamos uma reta vertical paralela ao eixo das ordenadas que intersectará o gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. De seguida, traçamos uma reta horizontal paralela ao eixo das abcissas desde o ponto anterior, até intersectarmos a reta $y = x$. A intersecção é o ponto $(f(x_0), f(x_0))$. Novamente, se traçarmos uma reta vertical, intersectamos o gráfico de f em $(f(x_0), f^2(x_0))$, e de seguida traçamos uma reta horizontal até à diagonal $y = x$ e obtemos o ponto de intersecção $(f^2(x_0), f^2(x_0))$. Repetindo o procedimento sucessivamente, obtemos uma imagem da órbita de x_0 . Podemos obter uma sequência de segmentos de reta que produzem uma *teia de aranha* ou uma *escada*.

Note-se que obtemos a órbita de x_0 se olharmos para as abcissas dos pontos de intersecção das rectas horizontais descritas anteriormente com a reta $y = x$:

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0) \dots$$

Exemplo 4. *Nas figuras seguintes, utilizando o processo anterior, a análise do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2$ mostra que para um ponto x_0 dado, podemos observar que as suas órbitas caminham para os pontos de intersecção da reta $y = x$ com o gráfico da função f , e como já vimos anteriormente, este ponto é um ponto fixo de f (ver Figura 3.1)*

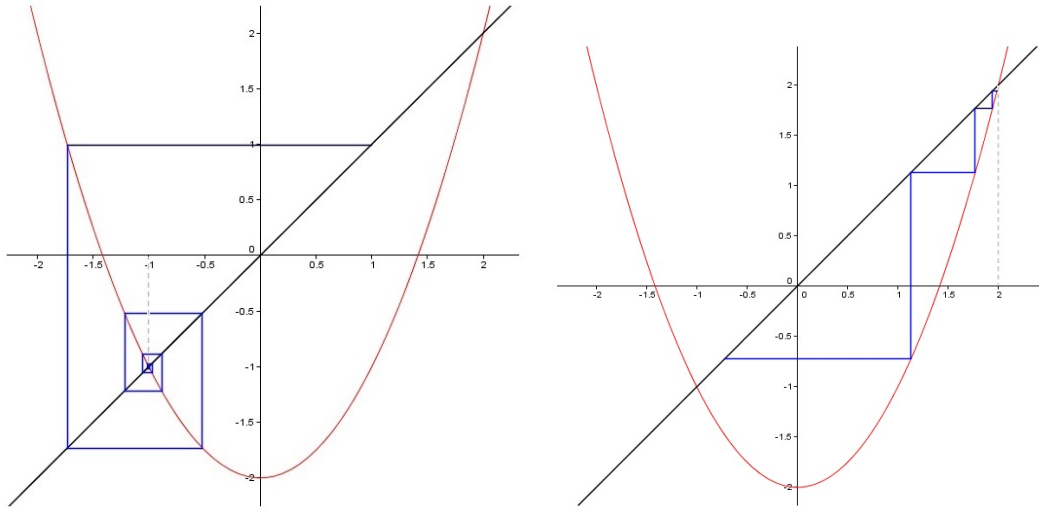


Figura 3.1: Diagramas de *teia de aranha* ou *escada* ao redor dos pontos fixos -1 e 2 respetivamente.

Exemplo 5. Consideremos a função $f(x) = \cos(x)$. Certamente que já reparou que, escolhendo o valor 1 por exemplo, quando carrega na tecla `cos` de uma máquina de calcular repetidamente tende a equilibrar num valor aproximadamente $0,73908\dots$. Esse é na verdade o ponto fixo da função $\cos(x)$ (ver Figura 3.2).

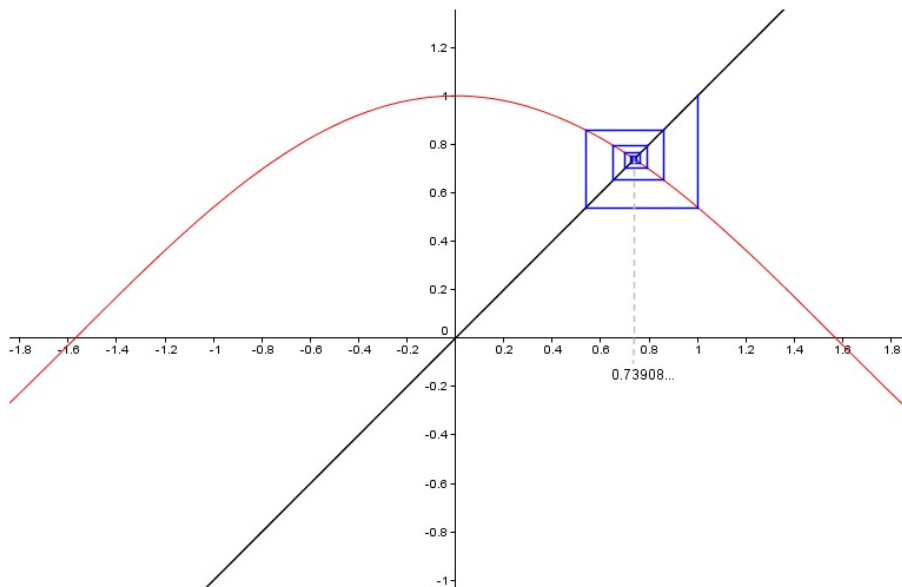


Figura 3.2: Diagramas de *teia de aranha* ao redor do ponto fixo da função $\cos(x)$.

Qualquer que seja o número perto de 1 que se escolha para semente, ao fim de algumas iterações, a calculadora irá sempre devolver o valor aproximado $0,73908\dots$. Neste caso dizemos que este ponto fixo é atrator (ver Figura 3.3).

Dinâmica de funções contínuas na reta

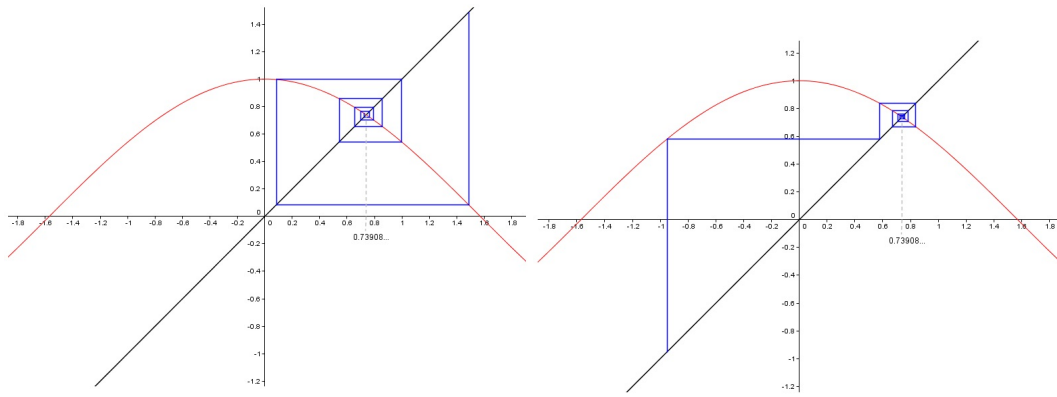


Figura 3.3: Diagramas de *teia de aranha* ao redor do ponto fixo da função $\cos(x)$.

Capítulo 4

Preliminares da análise na reta

Para encontrar órbitas mais facilmente e rapidamente, podemos utilizar alguns resultados que nos serão extremamente úteis nessa tarefa. Abordaremos em primeiro lugar um resultado simples, mas importante na nossa tarefa. O teorema seguinte foi importante também na demonstração do Teorema de Sharkovsky, como referimos anteriormente.

Teorema 4.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função contínua, e seja d tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(b) \leq d \leq f(a)$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Antes de demonstrarmos o teorema, iremos explicar certas simplificações. Iremos considerar o caso especial onde $f(a) < f(b)$, pois no caso em que $f(a) > f(b)$ a demonstração é análoga. De facto, se $f(b) < f(a)$ então (ver Figura 4.1):

- Considerando a função simétrica de f i.e. $g(x) = -f(x)$ temos $g(a) < g(b)$.

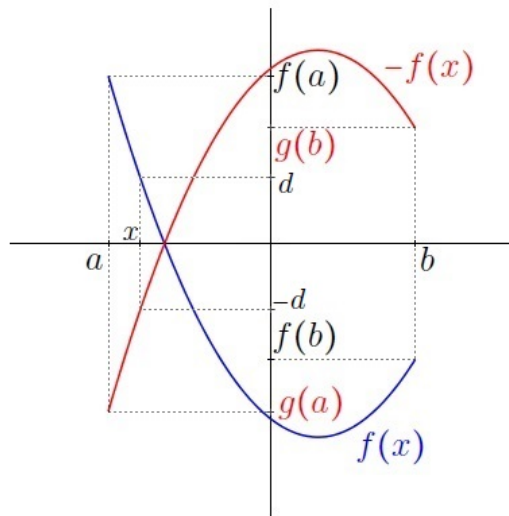


Figura 4.1: $g(x) = -f(x)$.

Para um α tal que $f(b) < d < f(a)$ temos que $-f(a) < -d < -f(b)$, ou seja, $g(a) < -d < g(b)$. Mas neste caso, podemos aplicar o teorema do valor intermediário para encontrar um c tal que $a < c < b$ para que $g(c) = -d$, isto é, $-f(c) = -d$, ou seja, $f(c) = d$. logo, podemos assumir que $f(a) < f(b)$.

Vamos considerar também o caso especial em que $d = 0$, ou seja, pelo que vimos no caso anterior $f(a) < 0 < f(b)$ (ver Figura 4.2).

- Para $d \neq 0$, vamos considerar, por exemplo, a função $g(x) = f(x) - d$. Aplicando o teorema para encontrar um c tal que $a < c < b$ para que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) - d = 0$, isto é, $f(c) = d$.

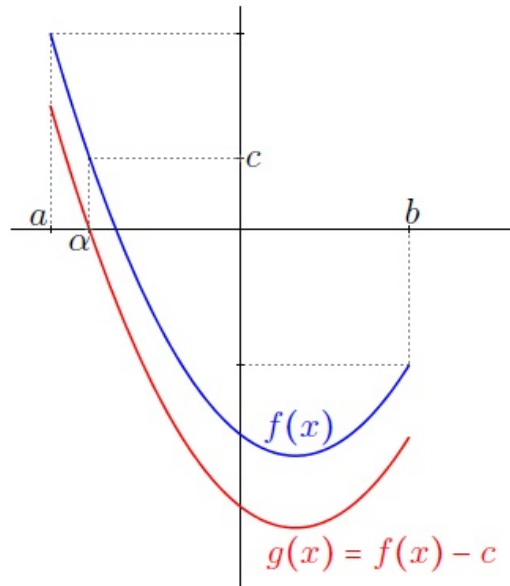


Figura 4.2: $g(x) = f(x) - d$.

Demonstração. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, em que $f(a) < 0 < f(b)$. Seja $\Phi = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Então $f(a) < 0$, logo $a \in \Phi$ ou seja $\Phi \neq \emptyset$. Assim podemos afirmar que Φ é limitado superiormente por b . Logo tem um supremo c (ver Figura 4.3).

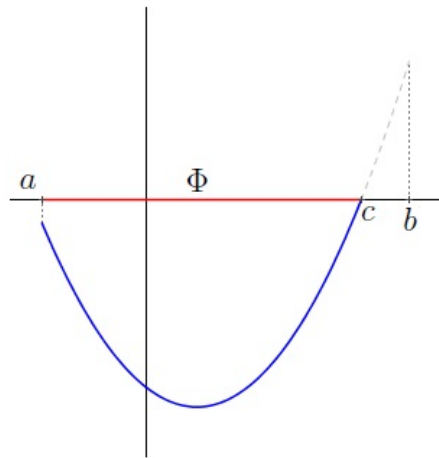


Figura 4.3: O supremo c de Φ .

Existem três hipóteses para c : $f(c) > 0$, $f(c) < 0$ ou $f(c) = 0$. Demonstraremos que as duas primeiras conduzem a uma contradição, pelo que ficamos com $f(c) = 0$, como pretendido.

$f(c) > 0$: Suponhamos que $f(c) > 0$. Temos que $f(b) > 0$, logo $c \neq b$, e $c \in [a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ sempre que $|x - c| < \delta$. Escolha-se $\varepsilon = f(c)$, então $|f(x) - f(c)| < f(c)$, ou seja, $f(x) > f(c) - f(c) = 0$. Ou seja, $f(x) > 0$ para $x \in [c - \delta, c + \delta]$. Isto obriga a que $c - \delta$ seja um limite superior de Φ , pois não existe nenhum ponto no intervalo $[c - \delta, c]$ para $f(x) > 0$, que se encontre em Φ , e c é o supremo de Φ . Para além disso, temos também que $c - \delta$ seja um limite superior mas menor que c , ou seja $c - \delta < c$ o que implica que $\delta < 0$, o que é uma contradição.

$f(c) < 0$: Suponhamos que $f(c) < 0$. Como f é contínua em $[a, b]$, qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe

Dinâmica de funções contínuas na reta

$\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < -f(c)$ sempre que $|x - c| < \delta$. Então $f(x) < f(c) - f(c) = 0$ para $x \in [c - \delta, c + \delta]$. Como $x = c + \frac{\delta}{2}$ está contido no intervalo $[c - \delta, c + \delta]$, temos que $f(x) < 0$, então deve estar contido em Φ . Mas isso significa que excede o limite superior c do conjunto Φ , pelo que chegamos a uma contradição.

Logo $f(c) = 0$ e o teorema está demonstrado. □

Por outras palavras, podemos afirmar que o teorema do valor intermédio nos diz que podemos variar continuamente o valor de x entre a e b , que os valores de $f(x) = c$ também variam de $f(a)$ a $f(b)$.

Teorema 4.2 (Ponto fixo). *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então f tem um ponto fixo em $[a, b]$.*

Demonstração. Suponhamos que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$. A função $g(x) = f(x) - x$ é contínua pois é a diferença de funções contínuas. Além disso, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo teorema do valor intermédio aplicado a g , existe um $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $f(c) - c = 0$. Logo $f(c) = c$ e existe um ponto fixo c para f no intervalo $[a, b]$. □

Temos que realçar algumas propriedades. Em primeiro lugar, duas das principais hipóteses do Teorema 4.2 são o facto de f ser contínua e o facto de f estar definida do intervalo $[a, b]$ para ele próprio. Se estas premissas não se verificarem, poderá resultar numa função sem pontos fixos.

Para além disso, o intervalo $[a, b]$ terá que ser fechado. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ definida no intervalo $]0, \frac{1}{2}[$ para ele próprio, é contínua, mas não possui pontos fixos neste intervalo aberto, pois o ponto fixo 0 está fora do intervalo.

Outra particularidade do Teorema 4.2 é que ele assegura a existência de um ponto fixo em $[a, b]$, mas poderão existir muitos mais.

Por fim, há que dizer que o teorema em si não nos dá um método para encontrar um ponto fixo. Mas na verdade, a certeza que ele existe é suficiente para o que pretendemos mostrar.

A existência de um ponto fixo de uma função é geralmente visível pela observação do seu gráfico, como vimos anteriormente, mas a existência de um ponto periódico de período n não é tão fácil encontrar, mesmo se n é um número inteiro mais próximo de 0. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.3. *Consideremos a função f ,*

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

cujo gráfico é esboçado na Figura 4.4

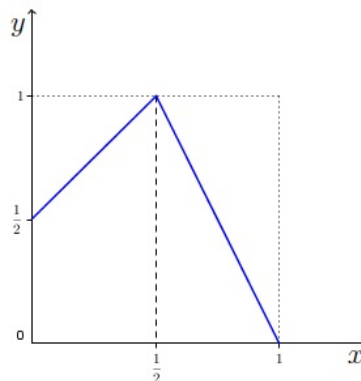


Figura 4.4: Função $f(x)$.

Dinâmica de funções contínuas na reta

Como podemos observar, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f^2(0) = f(\frac{1}{2}) = 1$ e $f^3(0) = f^2(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$. Isto significa que 0 é um ponto periódico de período 3 da função f .

Mas a questão verdadeiramente interessante é saber se também tem um ponto periódico de período 5, ou mesmo de período 7, ou talvez saber se terá um ponto periódico de período 9, mas não tem um de período 11. Enfim, estas questões são difíceis de responder apenas olhando para o gráfico de uma função. Para assegurar que conseguimos responder, necessitamos de efectuar uma análise mais aprofundada sobre o assunto.

Capítulo 5

Período três implica o caos

Vamos começar por falar de um teorema, que é uma consequência directa do Teorema de Sharkovsky (Teorema 6.1), ou um seu corolário, por assim dizer. Li e Yorke [LY75] afirmam que se existir uma órbita de período 3, então existem órbitas de todos os períodos.

Teorema 5.1 ([LY75]). *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Suponhamos que f tem um ponto periódico de período 3. Então f também tem pontos periódicos de todos os outros períodos.*

Notemos que é muito fácil considerar exemplos de funções descontínuas onde o resultado anterior é falso. Tomemos por exemplo a função f na reta real definida da forma (ver Figura 5.1)

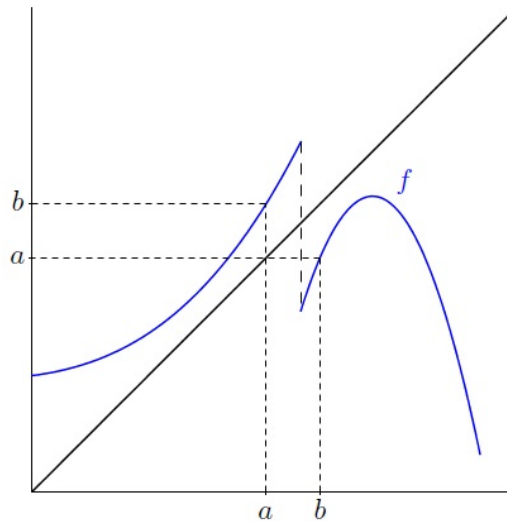


Figura 5.1: Ciclo de período 2 da função $f(x)$.

Como podemos observar, a função f é descontínua, e conseguimos encontrar um ciclo de período 2, mas nenhum ponto fixo, ou seja, nenhum ponto de período 1. Além do mais este teorema é típico de dimensão um.

Se consideramos uma esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e a aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que é definida pela rotação de $\frac{2\pi}{3}$ com o eixo dos zz então temos dois pontos fixos (o polo norte $(0, 0, 1)$ e o polo sul $(0, 0, -1)$) e todos os pontos da esfera são periódicos de período 3 (ver Figura 5.2).

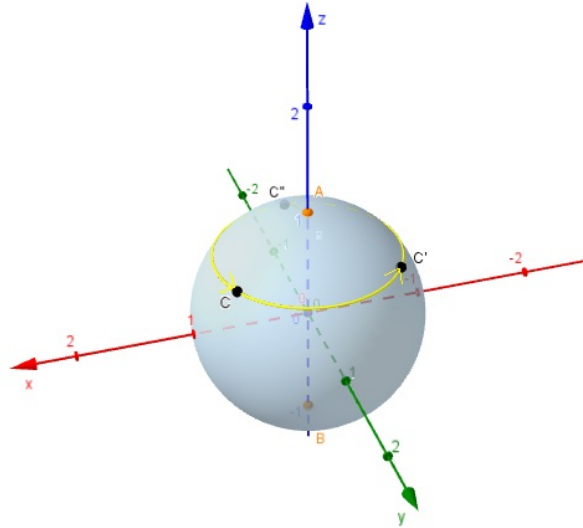


Figura 5.2: A dinâmica de $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Antes de prosseguirmos com a demonstração deste resultado, observemos duas importantes notas.

Nota 5.2. *Suponhamos que $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ são intervalos fechados e $I \subset J$. Se $f(I) \supset J$, então f tem um ponto fixo em I (ver Figura 5.3).*

Para verificarmos que isto acontece, temos de olhar para o teorema do valor intermédio. Como $I \subset J$, o gráfico de f tem de cruzar a diagonal sobre I , ou seja, existe a garantia de pelo menos um ponto fixo.

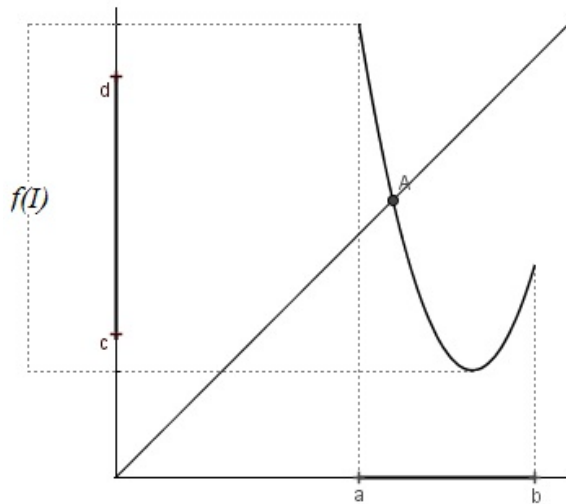


Figura 5.3: Se $f(I) \supset J$ então existe pelo menos um ponto fixo (A).

Nota 5.3. *Suponhamos agora que I e J são dois intervalos fechados e $f(I) \supset J$. Então existe um sub-intervalo $I' \subset I$ tal que $f(I') = J$ (ver Figura 5.4).*

Estamos apenas a dizer que a imagem de I' é J , e não estamos a dizer que implica directamente que f é injetiva. Também não estamos a assumir aqui que $I \subset J$, como na nota anterior.

Demonstração. (do Teorema 5.1) Suponhamos que f tem um ciclo de período 3 dado por

$$a \mapsto b \mapsto c \mapsto a \mapsto b \mapsto \dots$$

Dinâmica de funções contínuas na reta

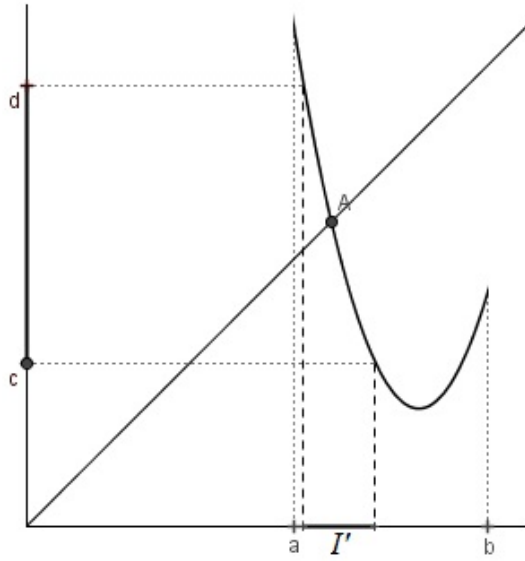


Figura 5.4: A imagem de $I' \subset I$ é J .

Sem perda de generalidade consideramos que a é o ponto mais à esquerda na órbita. Então, ou $a < b < c$ ou $a < c < b$. Vamos considerar o primeiro caso, pois no segundo a interpretação é a mesma (ver Figura 5.5).

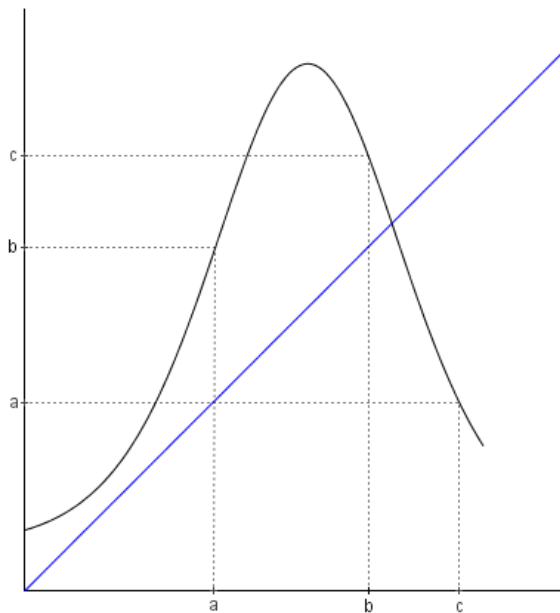


Figura 5.5: $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a \mapsto \dots$

Suponhamos que f é contínua. Seja $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [b, c]$. Como $f(a) = b$ e $f(b) = c$, temos que $f(I_0) \supset I_1$. Por outro lado, como $f(c) = a$, então $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$, como podemos observar na Figura 5.6.

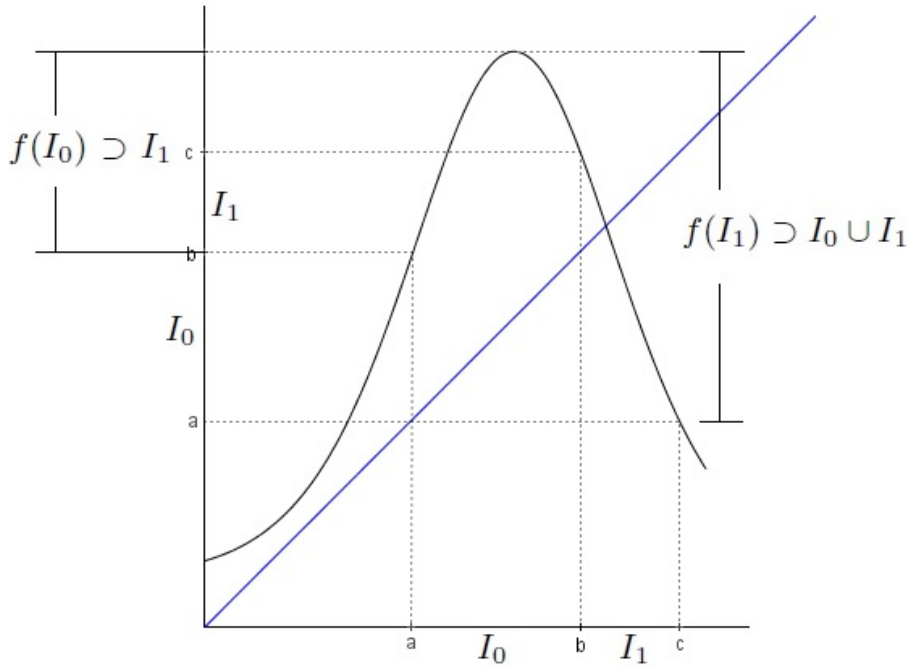


Figura 5.6: $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$

Iremos considerar de seguida um ciclo de período $n > 3$. Para encontrar um ponto periódico de período n , recorreremos à Nota 5.3, e iremos iterá-la n vezes. É certo que $f(I_1) \supset I_1$, logo existe um sub-intervalo fechado $A_1 \subset I_1$ tal que $f(A_1) = I_1$ (ver Figura 5.7). Pela Nota 5.3, como $A_1 \subset I_1$ e $f(A_1) = I_1 \supset A_1$, existe $A_2 \subset A_1$ tal que $f(A_2) = A_1$. Logo $A_2 \subset A_1 \subset I_1$ e $f^2(A_2) = I_1$ (ver Figura 5.8).

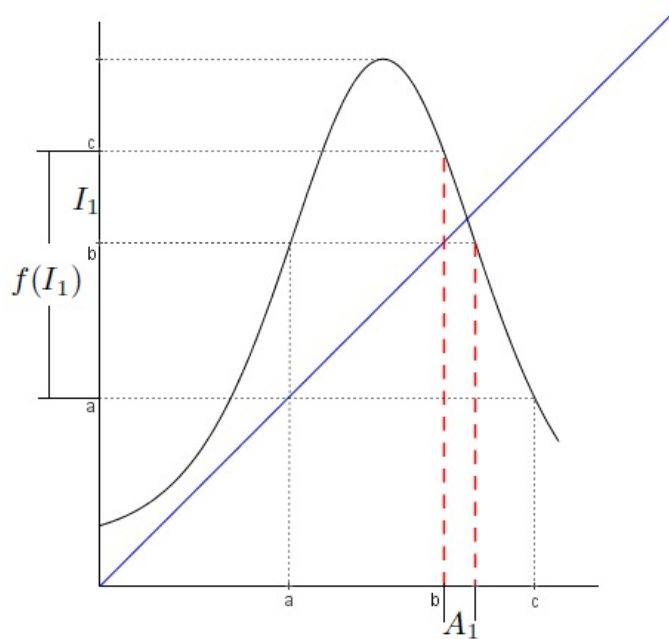


Figura 5.7: Como $f(I_1) \supset I_1$, $\exists A_1 \subset I_1 : f(A_1) = I_1$.

Dinâmica de funções contínuas na reta

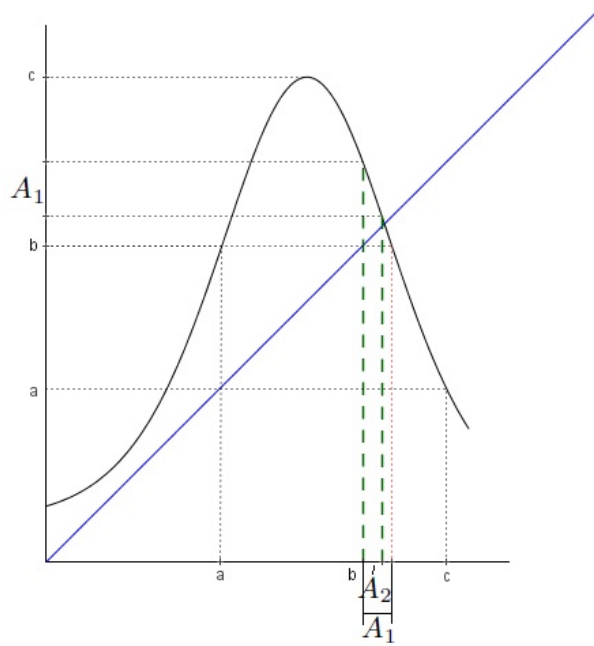


Figura 5.8: $\exists A_2 \subset A_1 \subset I_1 : f(A_2) = A_1$

Tendo por base o procedimento anterior, iremos iterá-lo $n - 2$ vezes, chegando à seguinte sequência de intervalos:

$$A_{n-2} \subset A_{n-3} \subset \dots \subset A_2 \subset A_1 \subset I_1$$

em que $f(A_i) = A_{i-1}$ para $i = 2, \dots, n - 2$ e $f(A_1) = I_1$. Daqui podemos dizer também que $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$ e $A_{n-2} \subset I_1$.

Como $f(I_0) \supset I_1 \supset A_{n-2}$, existe também um sub-intervalo fechado $A_{n-1} \subset I_0$ tal que $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$, como podemos observar na Figura 5.9.

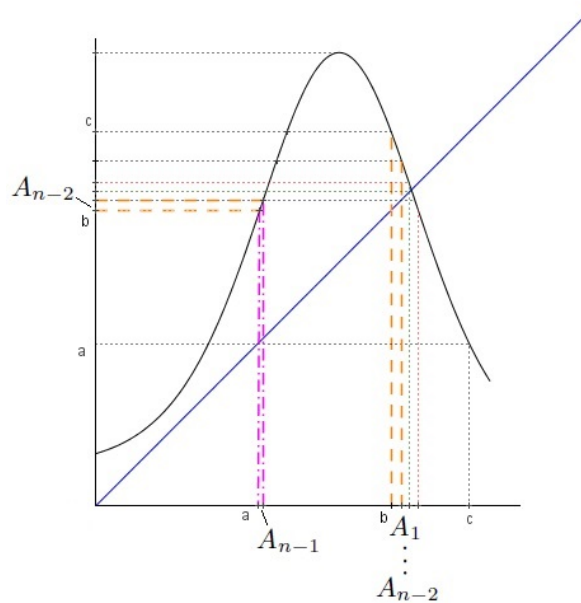


Figura 5.9: $\exists A_{n-1} \subset I_0 : f(A_{n-1}) = A_{n-2}$

Já que $A_{n-1} \subset I_0 \subset f(I_1)$, existe outro sub-intervalo fechado $A_n \subset I_1$ tal que $f(A_n) = A_{n-1}$ (ver Figura 5.10).

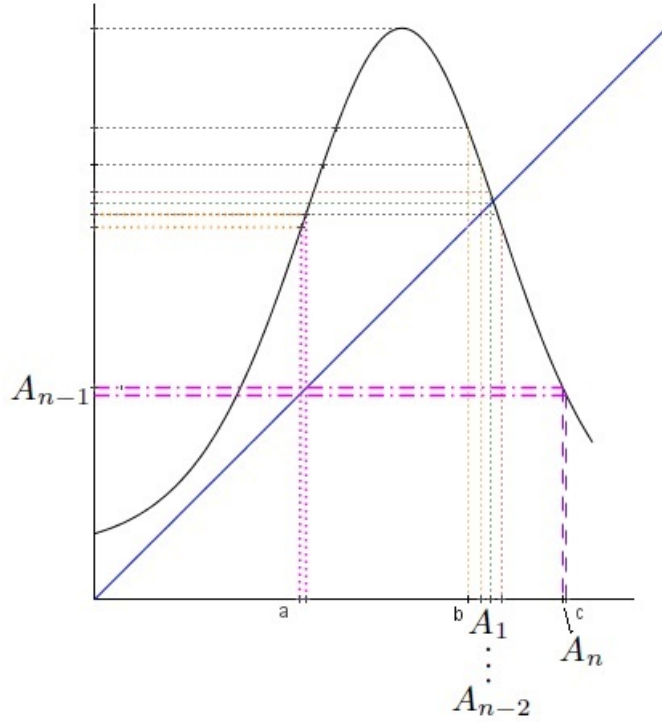


Figura 5.10: $\exists A_n \subset I_1 : f(A_n) = A_{n-1}$

Finalmente, chegamos a:

$$A_n \xrightarrow{f} A_{n-1} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{f} I_1,$$

com $f(A_i) = A_{i-1}$ tal que $f^n(A_n) = I_1$. Mas $A_n \subset I_1$, então pela Nota 5.2, existe um ponto $x_0 \in A_n$ que é fixo. Logo dizemos que x_0 tem período n . Isto acontece pois temos que $f(x_0) \in A_{n-1} \subset I_0$, mas $f^i(x_0) \in I_1$ para $i = 2, \dots, n$. Ou seja, a primeira iteração de x_0 está em I_0 , mas todas as outras estão em I_1 . E isto quer dizer que x_0 tem período $\geq n$, logo x_0 tem período n .

Para finalizar a prova do teorema, resta-nos falar de quando $n = 1$ e $n = 2$. No primeiro caso ficamos com o facto de $f(I_1) \supset I_1$, logo existe um ponto fixo em I_1 . Por fim, no caso em que $n = 2$ ficamos com $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_1) \supset I_0$. Ora, utilizando o método anterior, isto significa que existe um ciclo de período 2 que vai alternando entre I_0 e I_1 . \square

Capítulo 6

Teorema de Sharkovsky

6.1 Ordem de Sharkovsky

A ordenação típica dos números naturais é a sua ordenação por ordem crescente ou seja:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Sharkovsky reordenou o conjunto \mathbb{N} de outra forma, para servir de base a um dos seus teoremas, criando uma ordem bizarra de números naturais:

$$\underbrace{3, 5, 7, 9, \dots}_{\text{ímpares}}, \underbrace{3 \cdot 2, 5 \cdot 2, 7 \cdot 2, 9 \cdot 2, \dots}_{\text{dobro de ímpares}}, \underbrace{3 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^2, 7 \cdot 2^2, 9 \cdot 2^2, \dots, \dots}_{\text{quádruplo de ímpares}}, \underbrace{2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 1}_{\text{potências de 2}}$$

Ele primeiro considera todos os números ímpares, começando no 3 e de forma crescente. De seguida a sequência é continuada multiplicando cada número ímpar anteriormente considerado por 2, posteriormente por 2^2 , e assim sucessivamente. Por fim, a ordem acaba com todas as potências inteiras não negativas de 2, de maneira decrescente, até ao 1 ($2^0 = 1$). À sequência

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 3 \cdot 2 \triangleleft 5 \cdot 2 \triangleleft 7 \cdot 2 \triangleleft 9 \cdot 2 \triangleleft \dots \triangleleft 3 \cdot 2^2 \triangleleft 5 \cdot 2^2 \triangleleft 7 \cdot 2^2 \triangleleft 9 \cdot 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2^4 \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^1 \triangleleft 1$$

chamamos a Ordem de Sharkovsky. De notar que a relação $a \triangleleft b$ indica que a precede b na ordem. Esta reordenação dos números naturais servirá de base para a aplicação do seu teorema, como veremos mais à frente.

6.2 Teorema de Sharkovsky

Teorema 6.1 (Teorema de Sharkovsky). *Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e seja p um ponto periódico de f de período n . Se $n \triangleleft m$ (na ordem de Sharkovsky), então f tem também um ponto periódico q , de período m .*

O que este teorema refere é que para qualquer função contínua, com um período específico, ela tem também período(s) “menor(es)”, seguindo a ordem apresentada anteriormente. Por exemplo, sendo 3 o maior período na ordem de Sharkovski, implica que a função tenha todos os outros períodos. De facto, esta consequência é a formulação do teorema apresentado por Li e Yorke (Teorema 5.1). Se um função tem pontos periódicos de período 5, ela não tem necessariamente pontos periódicos de período 3, mas tem pontos de período 7, e assim sucessivamente. Grosso modo, o Teorema de Sharkovsky mostra para funções contínuas quais períodos implicam outros períodos.

6.3 Consequências

Devemos dar nota de algumas consequências do teorema, antes de avançarmos para a sua prova.

Se uma função f tem um ponto periódico com período diferente de uma potência de 2, então f tem infinitos pontos periódicos. Reciprocamente, se f tem somente um conjunto de pontos periódicos finito, então eles têm de ter necessariamente períodos de uma potência de 2.

O teorema anterior diz-nos também que o 3 é o maior período na ordem de Sharkovski e o facto de isso implicar a existência de todos os outros períodos.

Demonstração. (do Teorema 6.1)

Esta demonstração decorre das duas notas que falámos anteriormente (Nota 5.2 e Nota 5.3), que usámos na prova do Teorema 5.1. Teremos de mostrar vários casos para conseguir atingir a prova do teorema, e foi desenvolvida utilizando como base a demonstração de Block, Guckenheimer, Misiurewicz e Young (ver [BGMY80]), utilizando algumas indicações de publicações de Devaney (ver [Dev03] e [Dev92]).

Teremos que introduzir uma nova notação, para dois intervalos fechados I_1 e I_2 , e escrevemos $I_1 \rightarrow I_2$ se $f(I_1)$ contém I_2 , i.e. $f(I_1) \supset I_2$. Para além da notação anterior, devemos introduzir um resultado:

Se existe uma sucessão de intervalos $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$, então f^n tem um ponto fixo em I_1 .

Caso n ímpar:

Suponhamos que f tem um ponto periódico x de período n ímpar e $n > 1$. Suponhamos também que não existem pontos periódicos de período ímpar menores que n . Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ os pontos da órbita de x onde f permuta o elemento x_i . Temos que $f(x_n) < x_n$. Seja i o maior número inteiro tal que $f(x_i) > x_i$. Seja $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$.

Como $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, temos que $f(x_{i+1}) \leq x_i$ e assim temos que $f(I_1) \supset I_1$. Logo $I_1 \rightarrow I_1$.

Como x não tem período 2, não podemos ter que $f(x_{i+1}) = x_i$ e $f(x_i) = x_{i+1}$, logo $f(I_1)$ contém pelo menos algum outro intervalo $I_2 = [x_j, x_{j+1}]$. Então $I_1 \rightarrow I_2$.

Escolhamos agora os intervalos I_3, \dots, I_k tais que $f(I_j) \supset I_{j+1}$. Como n é ímpar, existem mais x_i 's de um lado de I_1 que do outro, logo alguns x_i 's devem mudar de lado mediante a iteração de f , e outros não. Assim sendo, $f(I_k) \supset I_1$, para algum k . Então

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1.$$

Consideremos o menor k que verifica a sequência anterior, ou seja, $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ é o caminho mais pequeno de I_1 a I_1 , com a exceção óbvia $I_1 \rightarrow I_1$.

Se $k < n - 1$, então uma das sequências $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ ou $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ dá-nos um ponto fixo de f^m com m ímpar e $m < k$. Este ponto deve ter período menor que k , pois $I_1 \cap I_2$ é um ponto, e este ponto tem período maior que m . Portanto, $k = n - 1$.

Como k é o menor inteiro que funciona, não podemos ter $I_1 \rightarrow I_j$ para qualquer $j > l + 1$.

A demonstração do caso em que n é ímpar é deduzida do seguinte: períodos maiores que n são dados por ciclos da forma $I_1 \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$ e os períodos pares menores são dados por ciclos da forma $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}, I_{n-1} \rightarrow I_{n-4} \rightarrow I_{n-3} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ e assim sucessivamente.

Caso n par:

A função f deve ter um ponto periódico de período 2. Isto acontece pois podemos garantir através dos resultados anteriores que alguns x_i 's mudam de lado sobre f , e outros x_i 's não o fazem. Se isto não acontece, então todos os x_i 's mudam de lado e então

$$f[x_1, x_i] \supset [x_{i+1}, x_n] \text{ e } f[x_{i+1}, x_n] \supset [x_1, x_i].$$

Dinâmica de funções contínuas na reta

Mas acontece que o que constatámos anteriormente dá-nos um ponto periódico de período 2 em $[x_1, x_n]$.

Caso em que $n = 2^m$:

Se f tem um ponto periódico de período 2^m , então f tem período 2^ℓ para cada $\ell < m$: Suponhamos que f tem período 2^m , $m > 0$. Seja $k = 2^\ell$, $\ell < m$. Seja $g = f^{\frac{k}{2}}$. Então

$$\begin{aligned} f^{2^m}(x_1) = x_1, \text{ para algum } x_1 &\Rightarrow f^{2^{\ell-1} \cdot 2^{m-\ell+1}}(x_1) = x_1 \\ &\Rightarrow f^{2^\ell \cdot 2^{-1} \cdot 2^{m-\ell+1}}(x_1) = x_1 \\ &\Rightarrow f^{k \cdot 2^{-1} \cdot 2^{m-\ell+1}}(x_1) = x_1 \\ &\Rightarrow (f^{\frac{k}{2}})^{2^{m-\ell+1}}(x_1) = x_1 \\ &\Rightarrow g^{2^{m-\ell+1}}(x_1) = x_1 \end{aligned}$$

Como $2^{m-\ell+1} > 2$, temos que g tem um ponto periódico de período 2, ou seja, $g^2(x_2) = x_2$, para algum x_2 . Isto implica que

$$(f^{\frac{k}{2}})^2(x_2) = x_2 \Rightarrow f^k(x_2) = x_2 \Rightarrow f^{2^\ell}(x_2) = x_2,$$

ou seja, f tem período 2^ℓ , e assim chegamos ao pretendido.

Caso em que $n = 2^m p$, p ímpar:

Suponhamos que f tem um ponto periódico com período $2^m p$ com p ímpar, e $m \geq 1$. Então f^{2^m} tem um ponto periódico com período p . Se olharmos para a demonstração deste teorema, concretamente para o caso em que p é ímpar, sabemos que f^{2^m} tem pontos periódicos com período $2^a q$ para todos os números naturais ímpares q e todos os números a tais que $q > p$ ou $a \geq 1$. Então f tem pontos periódicos de período $2^a q$ para todos os números naturais ímpares q e todos os números a tais que $q > p$ ou $a > m$. Logo f deve ter um ponto periódico de período 2^{m+1} , e pelo caso ($n = 2^m$) anterior, f tem também pontos periódicos de período 2^a para $0 \leq a \leq m$. \square

Capítulo 7

Exemplos

7.1 Período 4 implica período 2

Na ordem de Sharkovsky temos $4 \triangleleft 2$. Vamos mostrar diretamente como se obtém pontos periódicos de período 2 a partir de órbitas de período 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Seja dada uma órbita de período constituída por $x, f(x), f^2(x), f^3(x)$. Além disso consideremos que $x_0 = \min\{x, f(x), f^2(x), f^3(x)\}$. Existem seis casos a analisar.

1º caso $x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < f^3(x_0)$.

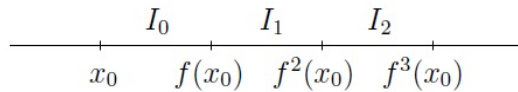
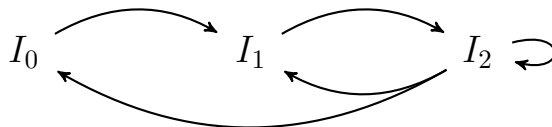


Figura 7.1

Temos que $f(I_0) \supset I_1$, $f(I_1) \supset I_2$ e $f(I_2) \supset I_0 \cup I_1 \cup I_2$. O grafo que representa a situação é o seguinte:



Como $f(I_1) \supset I_2$, então $f(f(I_1)) \supset f(I_2)$, isto é, $f^2(I_1) \supset f(I_2) \supset I_1$. Seja \tilde{I}_1 um intervalo fechado tal que $\tilde{I}_1 \subset I_1$ e $f(\tilde{I}_1) = I_2$. Seja \tilde{I}_2 um intervalo fechado tal que $\tilde{I}_2 \subset I_1$ e $f(\tilde{I}_2) = \tilde{I}_1$. Assim $f^2(\tilde{I}_2) = f(f(\tilde{I}_2)) = f(\tilde{I}_1) = I_2 \supset \tilde{I}_2$. Consequentemente, f tem pelo menos um ponto periódico em \tilde{I}_2 . Mas como $f(\tilde{I}_2) = \tilde{I}_1$ e $\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2 = \emptyset$, vem que f não tem nenhum ponto fixo em \tilde{I}_2 . Logo f tem um ponto periódico de período 2.

2º caso $x_0 < f(x_0) < f^3(x_0) < f^2(x_0)$.

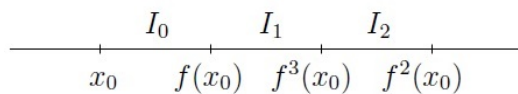
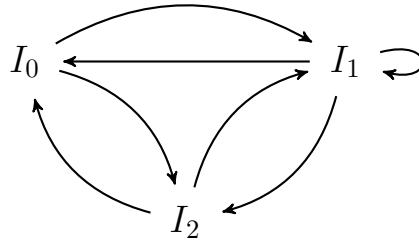


Figura 7.2

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Seguindo o mesmo raciocínio que seguimos no 1º caso, ficamos, por exemplo, com $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Logo f tem um ponto periódico de período 2.

3º caso $x_0 < f^2(x_0) < f(x_0) < f^3(x_0)$.

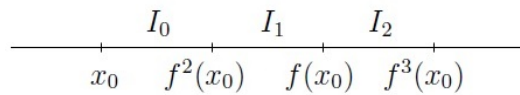
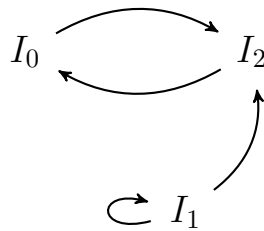


Figura 7.3

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Basta tomarmos $I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0$. Logo f tem um ponto periódico de período 2.

4º caso $x_0 < f^2(x_0) < f^3(x_0) < f(x_0)$.

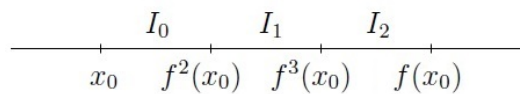
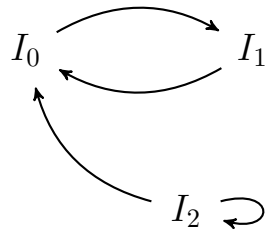


Figura 7.4

O grafo que representa a situação é o seguinte:

Dinâmica de funções contínuas na reta



Para este caso podemos considerar $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Logo f tem um ponto periódico de período 2.

5º caso $x_0 < f^3(x_0) < f(x_0) < f^2(x_0)$.

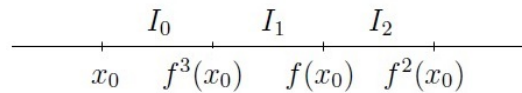
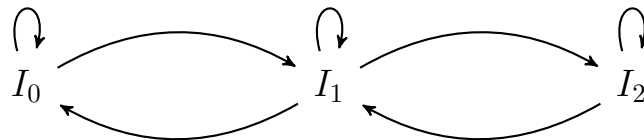


Figura 7.5

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Tomemos por exemplo $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Logo f tem um ponto periódico de período 2.

6º caso $x_0 < f^3(x_0) < f^2(x_0) < f(x_0)$.

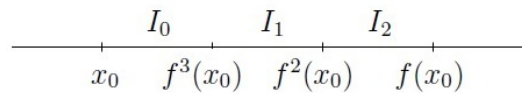
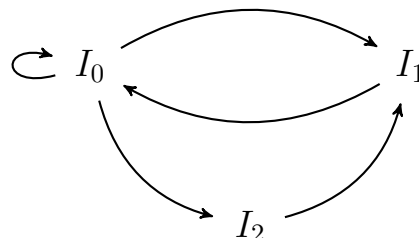


Figura 7.6

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Consideremos agora $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Logo f tem um ponto periódico de período 2.

Neste e nos casos anteriores, como já vimos no 1º caso, temos que $f^2(I_j) \supset I_j$, daí vem que f^2 tem um ponto fixo em I_j . Como $f(I_j) = I_k, k \neq j$, temos que o ponto fixo de f^2 não é ponto fixo de f , logo é um ponto periódico de período 2.

7.2 Período 4 implica período 8? (parte I)

Na ordem de Sharkovsky temos $8 \triangleleft 4$, mas será que é possível afirmar que a existência de pontos periódicos de período 4 garante a existência de pontos periódicos de período 8? Vejamos que a resposta é negativa. Os diferentes casos apresentados anteriormente, servirão de base para os que iremos tratar agora, com algumas diferenças. Neste exemplo, teremos que encontrar uma sequência de 9 intervalos, que estejam em relação no diagrama, e que nos permitam chegar ao pretendido.

1º caso $x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < f^3(x_0)$.

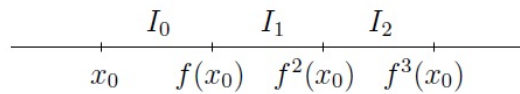
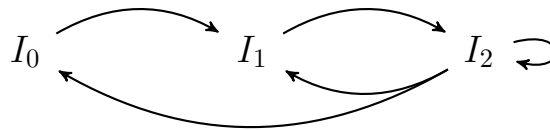


Figura 7.7

Relembramos qual o grafo que representa a situação:



Consideremos a seguinte sequência:

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0$$

$f^8(I_0) \supset I_0$ e I_0 não aparece mais nenhuma vez na sequência anterior, o que nos dá garantia suficiente para afirmarmos que f tem um ponto periódico de período 8.

Conseguimos arranjar uma sequência do mesmo tipo nos casos seguintes:

2º caso $x_0 < f(x_0) < f^3(x_0) < f^2(x_0)$.

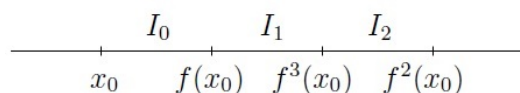
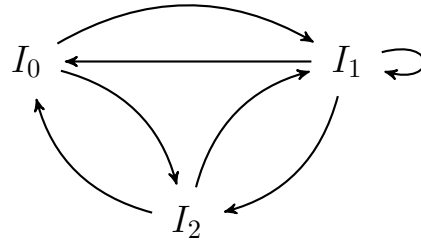


Figura 7.8

O grafo que representa a situação é o seguinte:

Dinâmica de funções contínuas na reta



Consideremos a seguinte sequência:

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$$

5º caso $x_0 < f^3(x_0) < f(x_0) < f^2(x_0)$.

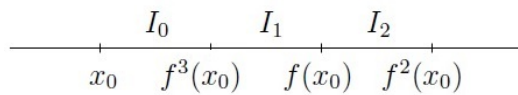
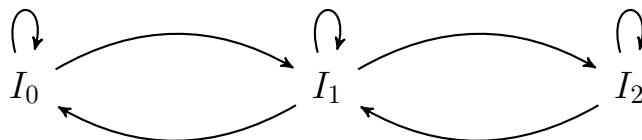


Figura 7.9

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Consideremos a seguinte sequência:

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$$

6º caso $x_0 < f^3(x_0) < f^2(x_0) < f(x_0)$.

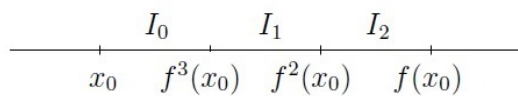
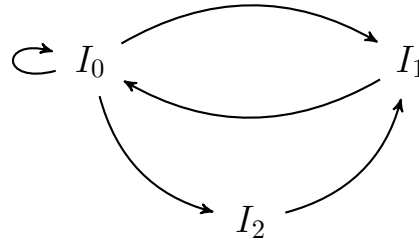


Figura 7.10

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Consideremos a seguinte sequência:

$$I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2$$

Como referimos, nos casos quatro casos anteriores, existe garantia de um ponto periódico de período 8.

3º caso $x_0 < f^2(x_0) < f(x_0) < f^3(x_0)$.

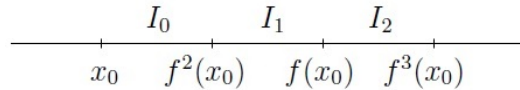
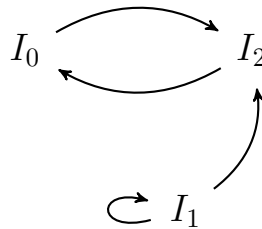


Figura 7.11

O grafo que representa a situação é o seguinte:



Se partirmos de I_1 , teríamos

$$I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

e nestas condições não podemos afirmar que existe um ponto periódico de período 8, pois poderá ter período 4, 2 ou 1.

Se partirmos de I_0 ou I_2 ficamos com as seguintes sequências:

$$I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0$$

$$I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2 \rightarrow I_0 \rightarrow I_2$$

e novamente aqui não temos garantia de ter período 8. O 4º caso é análogo a este.

Nos casos em que $x_0 < x_2 < x_1 < x_3$ ou $x_0 < x_2 < x_3 < x_1$ não conseguimos encontrar nenhuma órbita de período 8.

7.3 Período 4 implica período 8? (parte II)

Como acabamos de ver a existência de pontos periódicos de período 4 não garante a existência de pontos periódicos de período 8. Contudo será que podemos afirmar que poderão *não existir mesmo* pontos periódicos de período 8? Vejamos que a resposta é afirmativa. Seja $f : [0, 3] \mapsto [0, 3]$ uma função contínua. Vamos considerar a função $F : [0, 3] \mapsto [0, 3]$, que designaremos por *o dobro de f*. Para construirmos a função F , teremos que dividir o intervalo $[0, 3]$ em três partes iguais, comprimir a função f e colocá-la numa zona de tal forma que fique definida no intervalo $[0, 1] \times [2, 3]$. Por fim traçaremos dois segmentos de reta, o primeiro que une os pontos $(1, F(1))$ e $(2, 0)$ e o segundo a unir os pontos $(2, 0)$ e $(3, 1)$. Podemos ver como F é construída com o seguinte exemplo:

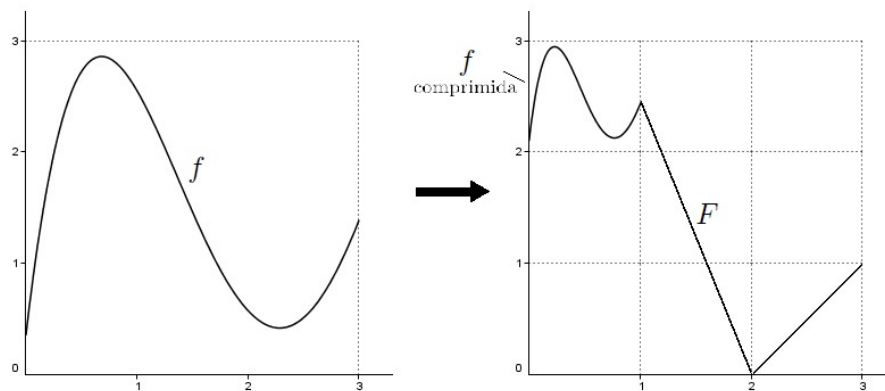


Figura 7.12: A construção da função F : o dobro de f .

Como podemos observar, $F([0, 1]) \subset [2, 3]$ e $F([2, 3]) = [0, 1]$. Isso leva a que um ponto em $[0, 1]$ ou $[2, 3]$ vá saltando de um intervalo para o outro.

Uma vez que a função F em $[2, 3] \times [0, 1]$ é *linear*, calcular $F^2(x)$ de um ponto x do intervalo $[0, 1]$ corresponde a calcular $F(x)$ e depois ir em direção à diagonal principal do quadrado $[0, 1] \times [2, 3]$. Quer dizer que o que se passava na função f em $[0, 3]$, passa-se o mesmo na função F em $[0, 1]$, mas no final do dobro das iterações. Ou seja, a função F em $[0, 1]$ tem os mesmos pontos periódicos que a função f tem no intervalo $[0, 3]$, mas com o dobro dos períodos, e são os únicos. Por outras palavras, se x é periódico de período n da função f em $[0, 3]$, então os pontos $\frac{x}{3}$ e $F(\frac{x}{3})$ são pontos periódicos de período $2n$ da função F nos intervalos $[0, 1]$ e $[2, 3]$, respectivamente.

Além disso, no intervalo $[1, 2]$ a função F tem um ponto fixo atrator. Então

$$\forall x \in [1, 2] \setminus \{\text{ponto fixo}\} \exists n \in \mathbb{N} : F^n(x) \in [0, 1] \cup [2, 3]$$

logo não temos mais pontos periódicos em $[1, 2]$.

Com este procedimento, podemos resolver o problema proposto.

Seja $g : [0, 3] \mapsto [0, 3]$ uma função contínua tal que $g(x) = x$.

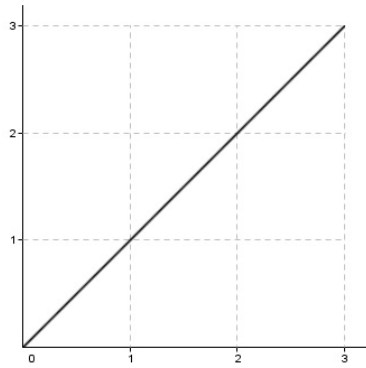


Figura 7.13: A função $g(x) = x$.

Esta função apenas tem pontos fixos, ou seja, pontos periódicos de período 1. Definiremos o dobro da função g como G . Assim sendo, a função G terá apenas pontos periódicos de período 2 em $[0, 1] \cup [2, 3]$, e um ponto fixo $x = \frac{3}{2}$.

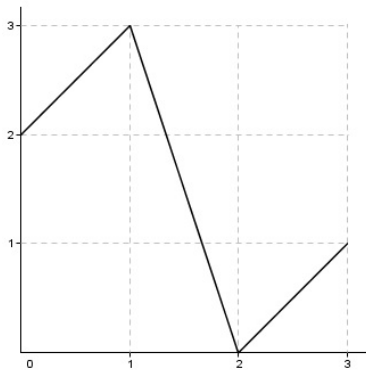


Figura 7.14: A função G definida como o dobro de g .

Dobrando agora a função G , e designando-a como \tilde{G} , verificamos que terá pontos de período 4 em $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \cup [2, \frac{7}{3}] \cup [\frac{8}{3}, 3]$, dois pontos de período 2 $x = \frac{1}{2} \wedge x = \frac{5}{2}$ e um novo ponto fixo.

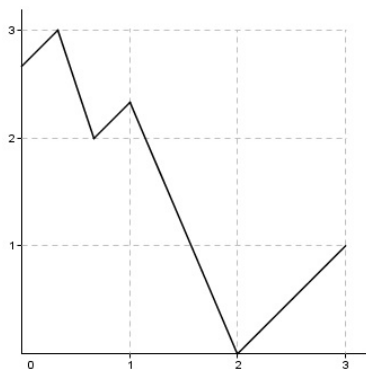


Figura 7.15: A função \tilde{G} definida como o dobro de G .

Temos assim uma função \tilde{G} que tem pontos periódicos de período 4, e que não tem pontos periódicos de período 8.

Capítulo 8

O recíproco do teorema de Sharkovsky

O matemático Saber Elaydi publicou em 1996 o artigo *On a Converse of Sharkovsky's Theorem* [Ela96], onde apresenta uma demonstração do recíproco do teorema de Sharkovsky, com o objetivo de apresentar alguns contra-exemplos do mesmo.

Teorema 8.1 (O recíproco do Teorema de Sharkovsky). *Para algum número inteiro positivo r , existe uma função contínua $f_r : I_r \rightarrow I_r$ no intervalo I_r tal que f_r tem pontos de período r , mas não possui pontos de período s para todos os inteiros positivos s que precedem r na ordem de Sharkovsky, ou seja, $s \triangleleft \dots \triangleleft r$.*

Demonstração. Para demonstrar o teorema teremos que considerar três casos:

- i. Períodos ímpares;
 - ii. Períodos da forma $2^n \cdot p$, em que p é um número natural ímpar;
 - iii. Períodos que são potências de 2.
- (a) Consideremos uma função que tem pontos de período 5. Iremos mostrar que a mesma função não tem pontos de período 3.

Vamos definir uma função $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$ e $f(5) = 1$, e suponhamos que em todos os intervalos $[n, n + 1]$ ($n = 1, 2, 3, 4$), a função é linear. Podemos observar graficamente a função na Figura 8.1.

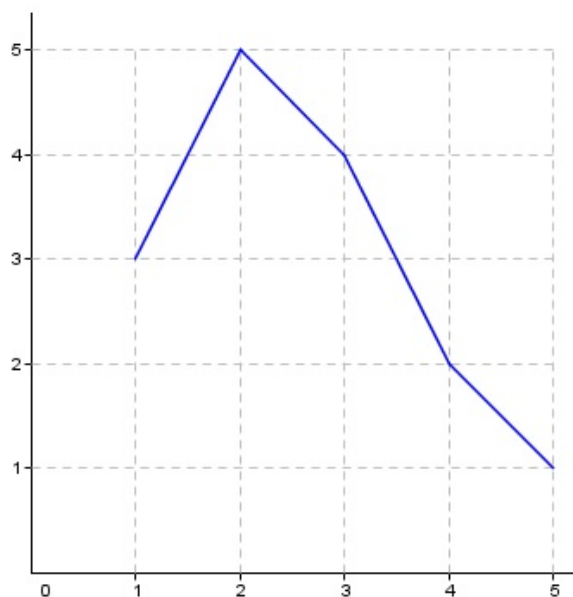


Figura 8.1: A função $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$.

Como podemos observar, nenhum dos pontos 1, 2, 3, 4 ou 5 é periódico de período 3, apenas pertencem a um ciclo de período 5. Podemos observar também que

$$f^3([1, 2]) = f^2(f[1, 2]) = f(f(f([1, 2]))) = f(f([3, 5])) = f([1, 4]) = [2, 5];$$

$$f^3([2, 3]) = f^2(f[2, 3]) = f(f(f([2, 3]))) = f(f([4, 5])) = f([1, 2]) = [3, 5];$$

$$f^3([4, 5]) = f^2(f[4, 5]) = f(f(f([4, 5]))) = f(f([1, 2])) = f([3, 5]) = [1, 4].$$

Logo, f^3 não tem pontos fixos nos intervalos $[1, 2]$, $[2, 3]$ e $[4, 5]$. Quanto ao intervalo $[3, 4]$,

$$f^3([3, 4]) = f^2(f[3, 4]) = f(f(f([3, 4]))) = f(f([2, 4])) = f([2, 5]) = [1, 5].$$

Então existem pontos $a, b \in [3, 4]$ tais que $f^3(a) = 3$, $f^3(b) = 4$. Vamos definir uma função $h : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - f^3(x)$. Então $h(a) \geq 0$ e $h(b) \leq 0$. Assim, pelo teorema do valor intermédio, existe um ponto $p \in [3, 4]$ em que $h(p) = 0$ ou $f^3(p) = p$. Vamos mostrar que esse ponto p é único e é um ponto fixo de f .

Temos que $f(p) \in [2, 4]$, assim se $f^2(p) \in [2, 3]$, então $f^2(p) \in [4, 5]$ e conseqüentemente $p = f^3(p) \in [1, 2]$, o que é falso.

Se $f(p) \in [3, 4]$ então $f^2(p) \in [2, 4]$. Novamente se $f^2(p) \in [2, 3]$, temos que $p = f^3(p) \in [4, 5]$, o que também é falso. Assim p , $f(p)$ e $f^2(p)$ pertencem todos ao intervalo $[3, 4]$.

A função f é definida por $f(x) = 10 - 2x$ no intervalo $[3, 4]$, e tem um único ponto fixo $x' = \frac{10}{3}$. Além disso no mesmo intervalo a função $f^3(x) = 30 - 8x$, tem um único ponto fixo $x' = \frac{10}{3}$. Então $p = x' = \frac{10}{3}$, e conseqüentemente f não tem pontos de período 3.

- (b) Podemos agora fazer uma generalização da construção anterior, para conseguirmos produzir funções contínuas que tenham pontos de período $(2n + 1)$ mas não tenham pontos de período $(2n - 1)$.

Seja $f : [1, 2n + 1] \rightarrow [1, 2n + 1]$ definida da seguinte forma:

$$f(1) = n + 1$$

$$f(2) = 2n + 1$$

$$f(3) = 2n$$

$$f(4) = 2n - 1$$

...

$$f(n) = n + 3$$

$$f(n + 1) = n + 2$$

$$f(n + 2) = n$$

$$f(n + 3) = n - 1$$

...

$$f(2n + 1) = 1$$

Todos os inteiros no intervalo $[1, 2n + 1]$ tem período $2n + 1$. A órbita do ponto 1 é dado

Dinâmica de funções contínuas na reta

pela sequência

$$1 \rightarrow n+1 \rightarrow n \rightarrow n+2 \rightarrow n-1 \rightarrow n+3 \rightarrow n-2 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 2n+1.$$

Para além do ponto 1, existem duas sequências de comprimento n . Uma crescente $(n+2, n+3, \dots, 2n+1)$ e uma decrescente $(n+1, n, \dots, 2)$. Falta-nos mostrar que não existem pontos de período $2n-1$ no intervalo $[1, 2n+1]$.

Comecemos com o intervalo $[1, 2]$. Após iterarmos a função nesse intervalo dá-nos a seguinte sequência:

$$[1, 2] \rightarrow [n+1, 2n+1] \rightarrow [1, n+2] \rightarrow [n, 2n+1] \rightarrow [1, n+3] \rightarrow [n-1, 2n+1] \rightarrow \dots \rightarrow [1, 2n] \rightarrow [2, 2n+1].$$

Com isto vemos que $f^{2n-1}([1, 2]) \cap [1, 2] = \emptyset$. Assim, o intervalo $[1, 2]$ não tem pontos de período $2n-1$.

Consequentemente, podemos mostrar que todos os intervalos $[j, j+1]$, com a exceção do intervalo $[n+1, n+2]$, têm o mesmo comportamento que o intervalo $[1, 2]$. Mais concretamente, conseguimos mostrar que existe uma iteração do intervalo $[j, j+1]$ que é precisamente o intervalo $[1, 2]$. Como o intervalo $[1, 2]$ não tem pontos de período $2n-1$, o mesmo se verifica no intervalo $[j, j+1]$.

Quanto ao intervalo $[n+1, n+2]$, temos que $f([n+1, n+2]) = [n, n+2]$. Assim, temos que considerar dois casos para $x \in [n+1, n+2]$:

- **Caso 1:** $f^k(x) \in [n+1, n+2]$ para todo o $k \in \mathbb{Z}^+$. Como $|f'| > 1$ no intervalo $[n+1, n+2]$, vem que x é um ponto fixo de f .
- **Caso 2:** $f^k(x) \notin [n+1, n+2]$ para algum inteiro positivo k . Então $f^k(x) \in [n, n+1]$ e como vimos anteriormente, x está no intervalo $[1, 2]$.

Em qualquer dos casos, temos que x não pode ter período $2n-1$. Verifiquemos isso com o seguinte exemplo em que $n=3$ (ver Figura 8.2).

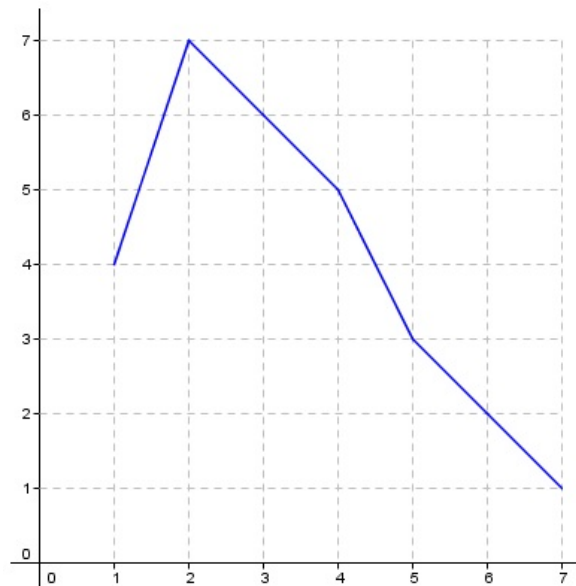


Figura 8.2: A função $f : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$.

Como podemos observar, no intervalo $[1, 4] \cup [5, 7]$ todos os pontos têm período 7. A exceção

é o intervalo $]4, 5[$, pois tem um ponto fixo da função. A órbita do ponto 1 é 1, 4, 5, 3, 6, 2, 7, 1, ... Vamos verificar se temos pontos de período 5. Temos uma sequência crescente (5,6,7) e uma decrescente (4,3,2). Após 5 iterações do intervalo $[1, 2]$, $f^7([1, 2]) = [2, 7]$, logo $[2, 7] \cap [1, 2] = \emptyset$. Assim, o intervalo $[1, 2]$ não tem pontos de período 5. O mesmo se verifica para os intervalos $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[5, 6]$, $[6, 7]$, como vimos anteriormente.

Resta-nos verificar como se comporta a função f no intervalo $[4, 5]$. $f([4, 5]) = [3, 5]$, mas como vimos, ou o ponto fixo x está em $[4, 5]$, ou em $[1, 2]$. Em qualquer dos casos, x não pode ter período 5.

ii. Períodos da forma $2^n \cdot p$, em que p é um número natural ímpar;

Vamos verificar agora o que acontece com funções que tenham pontos periódicos de período $2^k \cdot (2n+1)$ mas não tenham pontos periódicos de período $2^k \cdot (2n-1)$. Começemos por verificar isso com um exemplo concreto. Vamos ver que se uma função tiver período 10 (i.e. 2×5) não tem período 6 (i.e. 2×3).

Consideremos a função $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ que foi considerada no caso $i(a)$ anterior, e vamos definir a função $g : [1, 13] \rightarrow [1, 13]$ da forma

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 8 & 1 \leq x \leq 5 \\ x - 8 & 9 \leq x \leq 13 \end{cases},$$

e para o intervalo $]5, 9[$ unimos os pontos (5,9) e (9,1) com um segmento de reta. Vejamos como fica graficamente na Figura 8.3.

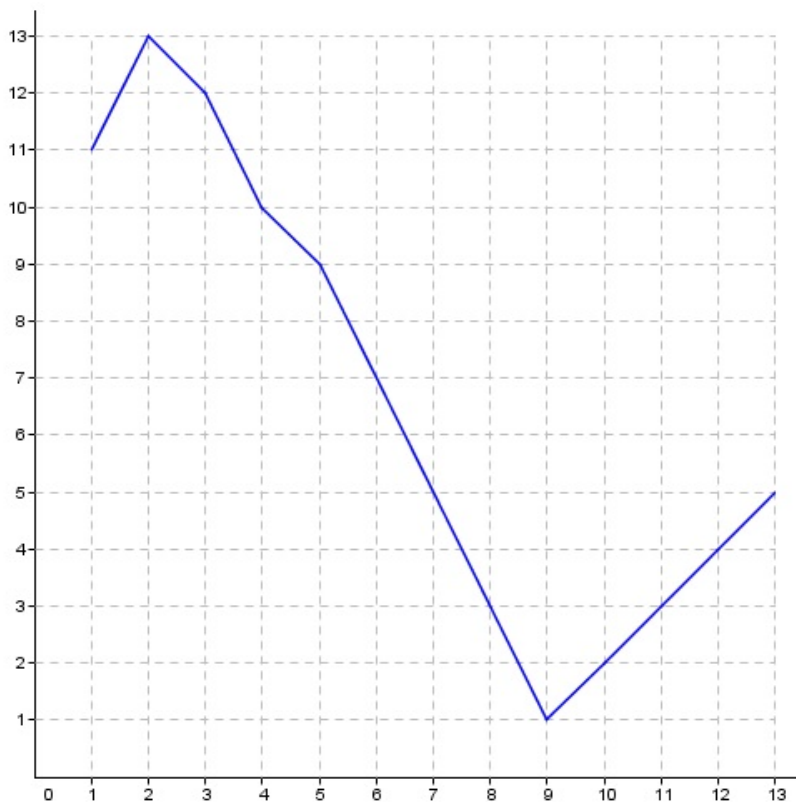


Figura 8.3: A função $g : [1, 13] \rightarrow [1, 13]$.

Chamamos à função g o *dobro de f*. Os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13 não têm

Dinâmica de funções contínuas na reta

período 6, pois todos pertencem a ciclos de período 10. No intervalo $[1, 5]$, $g([1, 5]) = [9, 13]$ e $g^2(x) = f(x)$. Como vimos, f não tem pontos de período 3. Então, isso implica que g não tenha pontos de período 6 no intervalo $[1, 5]$. Como $g([9, 13]) = [1, 5]$, a função g também não tem pontos periódicos de período 6 no intervalo $[9, 13]$.

Temos de nos debruçar agora no intervalo $[5, 9]$. Como $g^6([5, 9]) = [4, 10]$, utilizando o que já falámos no caso $i(a)$, vem que g^6 tem um ponto fixo $p \in]5, 9[$. Para qualquer $n \in [1, 5]$, $g^n(p) \notin]5, 9[$, então $g^{n+r}(p) \in [1, 5] \cup [9, 13]$ para todo $r > 0$. Isto implica que $g^6(p) \neq p$, que é uma contradição. Então $p, g(p), \dots, g^5(p) \in]5, 9[$. Efetuando alguns cálculos, e com algumas iterações, consegue-se mostrar que o único ponto fixo de g, g^2, \dots, g^6 é $p = \frac{19}{3}$. Então, chegamos ao pretendido, g não tem pontos periódicos de período 6.

Para generalizarmos o caso anterior, vamos considerar a função $f : [1, 1+h] \rightarrow [1, 1+h]$ com pontos periódicos de período $2n+1$, mas sem pontos periódicos de período $2n-1$. Iremos definir de seguida a função *dobro de f*:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 2h & 1 \leq x \leq 1+h \\ x - 2h & 1+2h \leq x \leq 1+3h \end{cases},$$

e por linearidade para $x \in]1+h, 1+2h[$. A repetição do processo anterior irá dar-nos iterações com pontos periódicos de período $2^k \cdot (2n+1)$ mas sem pontos periódicos de período $2^k \cdot (2n-1)$, $k = 2, 3, 4, \dots$. O exemplo que considerámos era o caso em que $h = 4$.

iii. Períodos que são potências de 2.

(a) Vamos mostrar que uma função que tenha pontos periódicos de período 2, mas não tem pontos periódicos de período $2^2 = 4$.

Consideremos a função $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ definida por $f(x) = -x + 3$ (ver Figura 8.4).

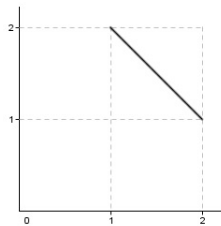


Figura 8.4: A função $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ tal que $f(x) = -x + 3$.

Todos os pontos no intervalo $[1, 2]$, à exceção do ponto fixo $\frac{3}{2}$, têm período 2. Logo, é claro que no mesmo intervalo, não existem pontos periódicos de período $2^2 = 4$.

(b) Vamos agora mostrar que uma função que tenha pontos periódicos de período 2^2 , mas não tem pontos periódicos de período 2^3 . Seja $f : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$ definida da seguinte forma: $f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 2, f(4) = 1$, e em cada intervalo $[n, n+1]$ supomos que f é linear (ver Figura 8.5).

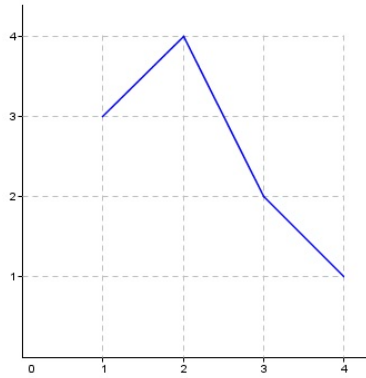


Figura 8.5: A função $f : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$.

Como $f([1, 2]) = [3, 4]$, $f([3, 4]) = [1, 2]$ e f é linear em $[1, 2]$ e $[3, 4]$. Ou seja, $f^2([1, 2]) = [1, 2]$ e $f^2([3, 4]) = [3, 4]$. Podemos ver também que f^2 é crescente e f^4 é decrescente. Então $f^4(x) = x$ para todo o $x \in [1, 2] \cup [3, 4]$.

Então todo o ponto no intervalo $[1, 2]$ tem período 4 à exceção do ponto $\frac{3}{2}$, que tem período 2.

No intervalo $[3, 4]$ todo o ponto tem período 4 à exceção do ponto $\frac{7}{2}$, que tem período 2.

Resta-nos analisar o que se passa no intervalo $[2, 3]$. Como $f([2, 3]) = [2, 4]$, os pontos do intervalo $[2, 3]$ saem para fora do mesmo intervalo após muitas iterações, ou ficam no intervalo $[2, 3]$ para todas as iterações. Se um ponto $x \in [2, 3]$, e $f^k(x) \in [1, 2] \cup [3, 4]$, para algum $k \in \mathbb{Z}^+$, então a órbita de x irá ser atraída para um ciclo de período 4 ou de período 2. Por outro lado, se a órbita de $x \in [2, 3]$ é um subconjunto do intervalo $[2, 3]$, então $f^n(x) = f_2^n(x)$, em que $f_2(x)$ é definida por $f_2(x) = -2x + 8$. Mas $f_2^8(x) = 256x - 680$ tem como ponto fixo $x = \frac{8}{3}$, que é um ponto fixo de f . Então f não tem pontos periódicos de período $2^3 = 8$, ou mesmo outros períodos que o precedem na ordem de Sharkovsky.

- (c) Para definirmos funções que sejam uma generalização dos casos anteriores, ou seja, que tenham pontos periódicos de período 2^n mas não pontos periódicos de período 2^{n+1} , utilizamos a função *dobro g* que definimos no caso (ii.). Começaremos com a função f anterior, que tem pontos periódicos de período 2^2 , mas não tem pontos de período 2^3 . A função *dobro g* : $[1, 10] \rightarrow [1, 10]$, e é definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 6 & 1 \leq x \leq 4 \\ x - 6 & 7 \leq x \leq 10 \end{cases},$$

e com linearidade para $x \in]4, 7[$.

Dinâmica de funções contínuas na reta

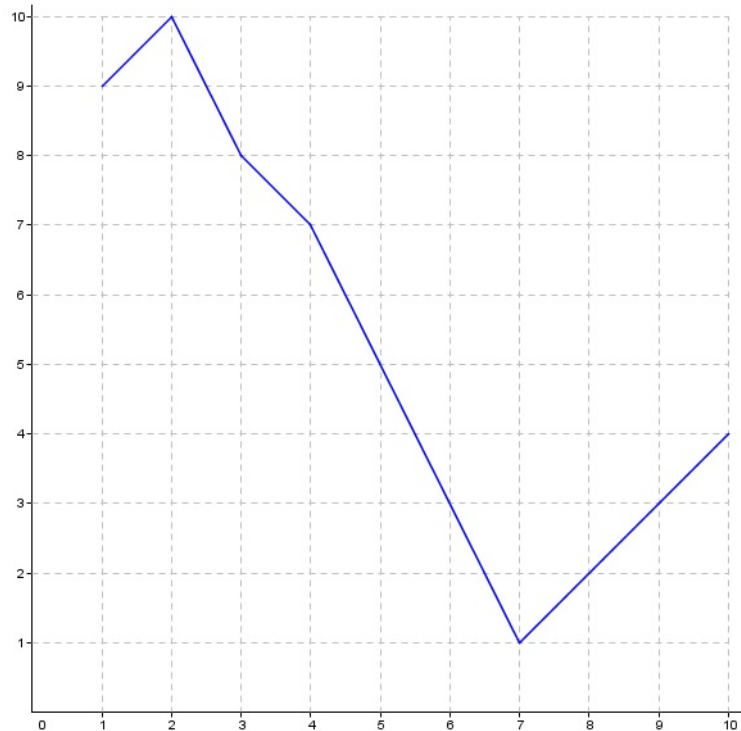


Figura 8.6: A função *dobro* $g : [1, 10] \rightarrow [1, 10]$.

Então a função g tem pontos periódicos de período 2^3 mas não tem pontos periódicos de período 2^4 . Esta maneira de definir a função *dobro* pode ser aplicado indefinidamente para conseguirmos encontrar funções que tenham pontos periódicos de período 2^n mas não tenha pontos periódicos de período 2^{n+1} .

Logo, provámos os três casos, e consequentemente o recíproco do teorema de Sharkovsky. \square

Existem ainda algumas questões que poderíamos abordar. Entre outros exemplos, abordaremos no capítulo seguinte a questão em que tendo pontos periódicos de período $2^n \times 3$ teremos pontos periódicos de período $2^{n-1} \times k$, em que k é um número ímpar.

Capítulo 9

Outros exemplos

9.1 Período $2^n \times 3$ implica período $2^{n-1} \times k$?

Se voltarmos ao procedimento em que se define a função *dobro*, que falámos no caso (ii.) do capítulo anterior, podemos responder à questão. Vamos definir em primeiro lugar uma função f que tenha pontos periódicos de período 2×3 mas não tenha pontos periódicos de período ímpar. Seja $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ em que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ e em cada intervalo $[n, n+1]$ assumimos que f é linear.

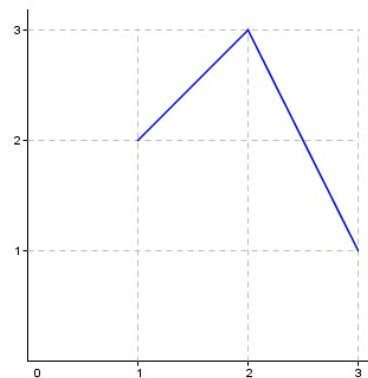


Figura 9.1: A função $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$.

Conseguimos verificar de imediato que os pontos 1, 2 e 3 têm período 3. Vamos construir agora a função *dobro* de f . Seja $g : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 4 & 1 \leq x \leq 3 \\ x - 4 & 5 \leq x \leq 7 \end{cases},$$

e com linearidade para $x \in]3, 5[$.

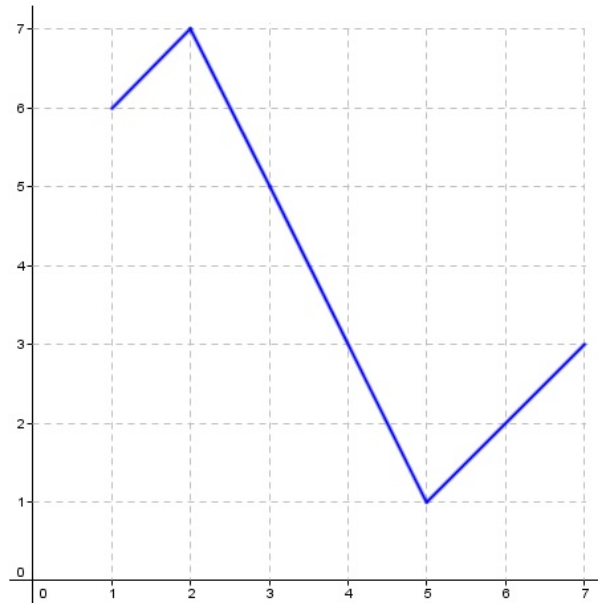


Figura 9.2: A função *dobro* $g : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$.

A função g tem pontos periódicos de período 2×3 mas não tem pontos periódicos de período ímpar.

Com a repetição deste processo, iríamos obter funções contínuas que têm pontos periódicos de período $2^n \times 3$, mas sem pontos periódicos de período $2^{n-1} \times k$, em que k é um número ímpar.

9.2 Período 6 implica períodos ímpares?

Vamos considerar a função $f : [0, 5] \rightarrow [0, 5]$, definida por $f(0) = 4$, $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 0$, $f(4) = 1$ e $f(5) = 2$.

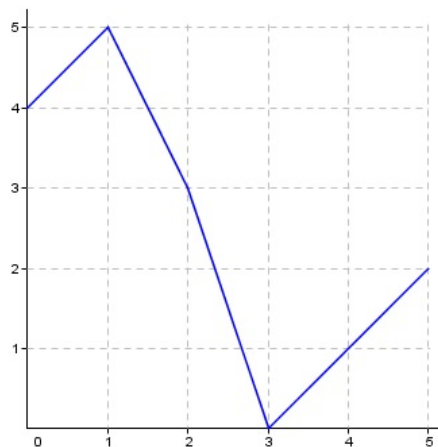


Figura 9.3: A função $f : [0, 5] \rightarrow [0, 5]$.

Observando o gráfico da função, conseguimos facilmente ver que tem um ciclo de período 6, que é $0, 4, 1, 5, 2, 3, 0, \dots$. Daqui, poderíamos afirmar que tendo período 6 (2×3), pelo teorema de Sharkovsky, tem pontos periódicos de todos os períodos pares. Se continuarmos a observar o gráfico, torna-se difícil encontrar pontos periódicos de período ímpar.

Dinâmica de funções contínuas na reta

Vamos tentar encontrar pontos periódicos de período 3, por exemplo. Como

$$f^3([0, 1]) = [3, 5]$$

$$f^3([1, 2]) = [3, 5]$$

$$f^3([3, 5]) = [0, 2],$$

não existem pontos periódicos de período 3 nestes intervalos. Resta-nos verificar no intervalo $[2, 3]$. Mas nesse intervalo, o único ponto periódico que existe tem período 1, que é o ponto fixo de f . Então f não tem pontos periódicos de período 3.

Vamos verificar agora se conseguimos encontrar pontos periódicos de período 5. Como

$$f^5([0, 1]) = [3, 5]$$

$$f^5([1, 2]) = [3, 5]$$

$$f^5([3, 5]) = [0, 2],$$

e no intervalo $[2, 3]$ apenas existe o ponto fixo de f , não existem pontos periódicos de período 5. Na verdade, não existem pontos periódicos de período ímpar pois

$$f^{2n+1}([0, 1]) = [3, 5]$$

$$f^{2n+1}([1, 2]) = [3, 5]$$

$$f^{2n+1}([3, 5]) = [0, 2],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção do período 1.

Uma maneira diferente de abordar o problema seria utilizando uma função f e de seguida *dobrando-a*. Seja f definida da seguinte forma:

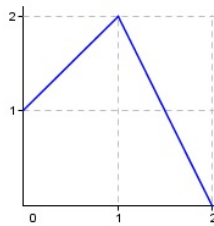


Figura 9.4: A função $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$.

A função f tem período 3. Conseguimos ver isso através da órbita $0, 1, 2, 0, \dots$. Então, pelo teorema de Sharkovsky, f tem garantidamente pontos periódicos de todos os períodos. De seguida, consideremos a função g , o *dobro* de f , para que possamos reproduzir o gráfico da figura 9.3. Como o período de cada órbita é *dobrado*, como já vimos anteriormente, g tem pelo menos uma órbita de período 2×3 , e por 6.1, tem todos os pontos periódicos de período par que se seguem a ordem de Sharkovsky, e nenhum ponto periódico de período ímpar, excepto o 1.

Capítulo 10

Conclusão

Neste trabalho estudamos funções contínuas na reta real e a relação que podemos estabelecer entre a existência de pontos periódicos de determinados períodos. Um ponto essencial se salienta: com hipóteses bastante simples podemos concluir resultados verdadeiramente surpreendentes. Pretendemos assim apresentar uma introdução à teoria dos sistemas dinâmicos com resultados relativamente recentes e com impacto relevante na área. O caminho seguinte seria considerar funções contínuas na reta real cuja dinâmica produz conjuntos de Cantor que são bastante ricos do ponto de vista topológico. Estes exemplos têm uma tradução via dinâmica simbólica onde o estudo dos pontos periódicos é feito de uma forma bastante simplificada. Outra possibilidade de estudo subsequente muito interessante seria considerar funções diferenciáveis como é o caso da função quadrática $f(x) = 1 - ax^2$ com $a > 0$ e estudar a sua dinâmica e interface com a teoria da medida.

Bibliografia

- [BGM^Y80] Louis Block, John Guckenheimer, Michal Misiurewicz, and Lai Sang Young. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. In *Global theory of dynamical systems*, pages 18–34. Springer, 1980. 2, 22
- [BH11] Keith Burns and Boris Hasselblatt. The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244, 2011. 3
- [Bur82] Uhlend Burkart. Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 32(1):57–68, 1982. 3
- [Dev92] Robert L Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems*. Westview Press, 1992. 22
- [Dev03] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition*. Westview Pr (Short Disc), March 2003. Available from: <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/0813340853>. 22
- [Du04] Bau-Sen Du. A simple proof of sharkovsky’s theorem. *The American Mathematical Monthly*, 111(7):595–599, 2004. 3
- [Ela96] Saber Elaydi. On a converse of sharkovsky’s theorem. *The American mathematical monthly*, 103(5):386–392, 1996. 33
- [HM81] Chung Wu Ho and Charles Morris. Graph theoretic proof of sharkovsky’s theorem on the periodic points of continuous functions. *Pacific J. Math.*, 96(2):361–370, 1981. 3
- [Lor63] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963. 1
- [LY75] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975. 2, 15
- [M⁺74] Robert M May et al. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186(4164):645–647, 1974. 2
- [Sha64] Alexander N. Sharkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, 16:61–71, 1964. 2