UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Um Método de Ensino com Tarefas para Mediar Significados em Matemática

Ensino de parâmetros em funções no 11.º ano de escolaridade

Magda Cristina Nunes Pereira

Tese para obtenção do Grau de Doutor em

Didática da Matemática

(3.º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

Covilhã, fevereiro de 2016

à RITA e à SARA

a quem dedico este trabalho!

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva, pela sapiência com que orientou esta investigação, pelo incessante incentivo ao aprofundamento e à melhoria, pela contínua dedicação, pelo acompanhamento manifestado em todas as fases deste estudo, o que determinou a sua conclusão.

À Universidade da Beira Interior pelas possibilidades que me proporcionou de participação em seminários, o que contribuiu para a minha aprendizagem ao longo deste estudo.

Aos meus colegas e aos professores do curso que, ao longo dos seminários, encontros, comunicações e conferências contribuíram de modo crítico e construtivo para a consolidação deste estudo.

Aos alunos que participaram nesta investigação, pela empatia e pela honestidade de pensamentos. À escola, em particular ao diretor, pelo apoio e disponibilidade.

Aos meus pais, pelo amor, pela proteção e pelo apoio que continuamente me dedicam, o que foi fundamental em todas as fases deste estudo.

Ao Daniel, que anseia ver-me mais disponível, pelo afeto, incentivo e encorajamento que muito contribuiu para a conclusão deste trabalho.

Ao João Pedro, pelo encorajamento, pela total disponibilidade e pelo apoio, que foi essencial para a concretização deste trabalho.

À Anita, pela paz que me transmitiu nos momentos mais difíceis.

Ao Óscar, à Teresinha, ao Pedro Rafael e à Sónia, pelo seu sorriso.

Aos meus amigos e colegas, em particular ao Joaquim, pelo incentivo, pela confiança, compreensão, apoio e tolerância, o que determinou a conclusão deste trabalho.

Aos muitos familiares e amigos pelas palavras de amizade que me ajudaram nesta caminhada.

Resumo

Este estudo tem como objetivo promover e conduzir a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos na aprendizagem da matemática, concretamente na aprendizagem dos parâmetros em funções em alunos do 11.º ano de escolaridade. Parte-se de um método de ensino construído para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos matemáticos genéricos e estruturados. Pretendemos responder às seguintes questões: I) *Como é que o método de ensino construído funciona como um mediador da atividade do professor?* II) *Como é que as tarefas matemáticas elaboradas e implementadas com base no método de ensino construído funcionam como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos?*

O método elaborado integra três níveis de ensino e quatro graus de significados. Os três níveis foram construídos sob um crescendo de independência e estrutura algébrica em concordância com os fundamentos teóricos do estudo. No 1.º nível o aluno atribui significado e representa em múltiplos registos de representação, num contexto aritmético em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) são concretizados. No 2.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou no 1.ºnível e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente não são concretizadas e o(s) parâmetro(s) é(são) concretizado(s). No 3.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou nos 1.º e 2.º níveis e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) não são concretizados. As tarefas da proposta pedagógica deste estudo foram construídas de acordo com a estrutura do método.

Para a construção dos graus de significados do método foi considerada a atividade sígnica dos alunos sob as etapas de primeiridade, secundidade e terceiridade definidas por Peirce (1978) (associadas aos signos ícone, índice e símbolo e ao raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo) e a mediação semiótica do professor, associada ao conceito de ciclo didático, definido por Bussi e Mariotti (2008). Em cada um dos três níveis (N1, N2, N3), o aluno constrói significados de grau um, dois e três (S1, S2, S3). Pode construir ainda significados de grau zero (S0), em resultado da construção de significados que não se enquadram no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática (erros, imprecisões/incorreções).

A metodologia de investigação usada é qualitativa. A investigadora é a professora do estudo. O método de ensino foi implementado em sala de aula com alunos do 11.ºano, no ano letivo 2010/2011. Os dados foram recolhidos aquando do estudo do tema *Funções*. Os alunos trabalharam em grupos. A recolha dos dados foi feita através de gravações áudio, de transcrições e de registos da investigadora. As gravações áudio e as transcrições foram usadas nas entrevistas realizadas. As entrevistas foram gravadas e posteriormente transcritas. Para dar resposta às questões de investigação, foram identificadas unidades de análise resultantes das intervenções escritas e orais que os alunos e a professora investigadora realizaram, durante as aulas em que o método foi implementado. Foram selecionadas sete unidades de análise: '*A vedação do jardim*', '*O passeio das amigas*', '*Funções: composta e inversa*', '*A caixa de volume máximo*', '*O triângulo inscrito numa circunferência*', '*Parâmetros em funções racionais*' e '*Parâmetros, funções e geometria*'. Sobre estas unidades de análise fizeram-se três tipos de análise: a de primeira ordem, a de segunda ordem e a de terceira ordem. A de primeira ordem é uma compilação do que se observou e registou. Para a análise de segunda ordem selecionaram-se os dados mais representativos de cada unidade de análise que foram analisados segundo as dimensões, categorias e subcategorias. A análise de terceira ordem baseia-se numa leitura transversal dos sete grandes blocos obtidos na análise de segunda ordem, permitindo colocar questões e relacioná-las, de onde resultaram as respostas às questões do estudo.

Como conclusões do estudo, salienta-se que a professora teve no método construído um referente diretamente associado àquilo que ela, em cada momento, quis ver trabalhado pelos alunos, conduzindo-os de forma sequencial e encadeada até que a sua intenção fosse alcançada. Neste método, essa intenção definiu-se por cada um dos três graus de significado

em cada nível e tinha como meta atingir o significado de grau 3 no nível 3, que correspondeu ao que se pretendia na última questão das tarefas. Renovando-se o ciclo em cada novo episódio de mediação. O método resultou nas tarefas construídas sob três níveis, que conduziram os alunos desde contextos algébricos concretos até contextos algébricos genéricos. Em cada episódio de mediação, a professora identificou o grau de significado em que o aluno se encontrava e o significado de grau 3 que se intencionava que o aluno significasse. A mediação decorreu de três formas distintas, tendo havido, no mesmo nível ou entre os vários níveis: I) Construção de significados entre os alunos; II) Construção de significados de grau 3, a partir de significados de grau 0, de grau 1 e de grau 2; III) Construção de um novo significado de grau 3 que sintetizasse os significados de grau 3 já construídos. Foi a construção de um novo significado de grau 3 que sintetizou os significados de grau 3 já construídos que promoveu a criação de significados de grau 1 no episódio de mediação seguinte. A ocorrência de S0 gerou mediações da professora que conduziram os significados dos alunos a recapitulações e sínteses que promoveram a aprendizagem do conceito de parâmetro em funções.

Quanto às tarefas matemáticas apresentadas aos alunos, elas foram estruturadas com uma questão inicial onde o enunciado não tinha valores concretos e apelava à concretização dos alunos. As questões que constituíam cada tarefa obedeceram a uma determinada ordem: por três níveis algébricos, desde contextos concretos até contextos genéricos, o que promoveu nos alunos uma certa forma de raciocinar (desde o concreto até ao genérico). O que ocorreu na implementação do método de ensino foi que, no 1.º nível foram os alunos quem definiu o(s) valor(es) concreto(s) a experimentar. No 1.º nível, o reforço do estímulo à experimentação de diferentes valores concretos foi feito pelo professor. Contudo, após alguns raciocínios construtivos efetuados, os alunos iniciaram a generalização e construíram-na nos níveis seguintes (no 2.º e no 3.º nível). No 3.º nível ocorreram significados que estruturaram e sintetizaram os anteriores. Isto deu origem a significados que, na fase final das tarefas, facilitaram e tornaram naturais as *sínteses* que estruturaram os principais significados construídos no fim da última questão da tarefa.

As tarefas, com esta estruturação, complementadas com a mediação da professora, permitiram uma aprendizagem do conceito de parâmetro. Nos 1.º e 2.º níveis, os alunos fixaram o seu valor e, em consequência dessa concretização, compreenderam que a concretização do parâmetro condiciona os valores das variáveis. Essa compreensão estendeu-se a contextos em que o parâmetro é genérico, ou seja ao 3.º nível. Este raciocínio dedutivo mostrou a compreensão do conceito de parâmetro como *algo que pode determinar o intervalo de variação de alguma variável*. A interpretação que foi dada a uma letra $(x, y, p, \dots)$ no 1.º nível do método foi semelhante à que usualmente os alunos fazem para uma incógnita quando resolvem uma equação. Desta interpretação foi possível inferir que o significado de parâmetro que os alunos experimentaram foi: *parâmetro é algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto*. Esta sequência de significados promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, enquanto variável de uma função e enquanto parâmetro, na transformação e conversão de representações em registos gráficos, algébricos, esquemáticos e em linguagem natural. No final do estudo, os alunos evidenciaram uma compreensão do conceito de parâmetro em funções e dos conceitos de variável, de constante e de incógnita. O estudo termina com algumas sugestões para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Mediação pelo método de ensino; Mediação pelas tarefas; Significados matemáticos construídos pelos alunos; Parâmetro em funções.

Abstract

This study aims to promote and lead the construction of meanings and mathematical reasoning of the students in learning mathematics, more specifically in learning of parameters in functions of 11th grade students. Starting from a teaching method constructed to mediate the mathematical meanings of students - from concrete mathematical contexts to generic and structured mathematical contexts. We intend to answer to the following questions: I) *How does the constructed teaching method works as a mediator of teacher activity?* II) *How do the designed and implemented mathematical tasks based on the constructed teaching method work as artifacts of semiotic mediation of students' mathematical meanings?*

The elaborated method includes three levels of teaching and four degrees of meanings. The three levels were constructed under a growing independence and algebraic structure in accordance with the theoretical foundations of the study. In the 1st level the student assigns meaning and represents in multiple registers of representation, in an arithmetic context in which the dependent and independent variables and the parameter/s is/are achieved. In the 2nd level the student works with the meanings and the representations with which s/he has worked in the 1st level and constructs new meanings and new representations in multiple registers of representation, in an algebraic context in which the dependent and independent variables are not achieved and the parameter/s is/are achieved. In the 3rd level the student works with meanings and representations with which s/he has already worked in the 1st and 2nd levels and constructs new meanings and new representations in multiple registers of representation, in an algebraic context in which the dependent and independent variables and the parameter/s are not achieved. The tasks of the pedagogical proposal of this study were constructed according to the structure of the method.

In order to elaborate the construction of the degrees of meanings of the method it was considered the signic activity of students in steps of firstness, secondness and thirdness defined by Peirce (1978) (associated with the signs icon, index and symbol and abductive reasoning, inductive and deductive) and the semiotic teacher mediation, associated with the concept of educational cycle, defined by Bussi and Mariotti (2008). In each of the three levels (N1, N2, N3), the student constructs meanings of degree one, two and three (S1, S2, S3). S/he can still constructs meanings of degree zero (S0), as a result of the construction of meanings that does not fit in the system of evidences and truths defined in mathematics itself (errors, imprecisions/inaccuracies).

The used research methodology is qualitative. The researcher is the teacher of the study. The teaching method was implemented in the classroom with 11th grade students, in academic year 2010/2011. The data were collected when the subject *Functions* was approached. The students worked in groups. Data was collected through audio recordings, transcripts and records gathered by the researcher. The audio recordings and the transcripts were used in the interviews. The interviews were recorded and transcribed later. To answer to the research questions, analysis units were identified as a result of the written and oral interventions that students and the researcher performed during the classes where the method was implemented. Seven units of analysis were selected: '*The garden's fence*', '*The friends' tour*', '*Functions: composed and inverse*', '*The box of maximum volume*', '*The triangle inscribed in a circumference*', '*Parameters in rational functions*' and '*Parameters, functions and geometry*'. These units of analysis were subjected to three types of analysis: of first, second and third orders. The analysis of first order is a compilation of what has been observed and recorded. For the analysis of second order it was selected the most representative data of each unit of analysis which were analyzed according to the dimensions, categories and subcategories created. The analysis of the third order is based on a cross-reading of the seven large blocks obtained in the second order analysis, allowing to make questions and relate them. From this, it was obtained the answers to the questions of the study.

As conclusions of the study, it is noted that the teacher had on constructed method a referent directly associated to what she, at any time, wanted to see worked by students, leading them sequentially to this intention. In this method, this intention is defined by each

of the three degrees of meaning in each level and had as goal the meaning of degree 3 at level 3, which corresponded to what was intended in the latest question of the tasks. Renewing the cycle at each new episode of mediation. The method resulted in the tasks constructed on the three levels that led the students from specific to generic algebraic contexts. In each episode of mediation, the teacher identified the degree of meaning in which the student was and the meaning of the degree 3 that is expected to be attributed by the student. Mediation occurred in three different ways, both in the same level and among the various levels: I) Construction of meanings among students; II) Construction of meanings of degree 3, starting from meanings of degree 0, degree 1 and degree 2; III) Construction of a new meaning of degree 3 that synthesized the meanings of degree 3 already constructed. It was the construction of a new meaning of degree 3 that synthesizes the meanings of degree 3 already constructed that promoted the creation of meanings of degree 1 in the next episode of mediation. The occurrence of S0 generated mediations of the teacher who led the students to recaps and synthesizes the meanings which promoted the learning of the concept of parameter in functions.

Regarding the mathematical tasks presented to the students, they were produced in a way in which the initial question of the enunciation didn't contain concrete values, prompting for student's concretization. The questions composing each task obeyed to a specific order: with three algebraic levels, from concrete to generic contexts, which promoted in the student's a specific reasoning (concrete to the generic). During the implementation of the teaching method, for the 1st level, the students were the ones who defined the concrete value/s to use. At this level, the teacher reinforced the stimulus to use different concrete values. However, after some constructive reasoning being made, the students begun the generalization and continued towards the next levels (2nd and 3rd levels). At 3rd level, some meanings structured and synthesized the previous ones. This allowed the arise of meanings that, at the final stage of the tasks, favored and made natural the synthesis supporting the main meanings constructed at the end of the last question of the task.

The tasks, with the presented structure, complemented with the teacher mediation, allowed for an apprenticeship of the concept of parameter. At 1st and 2nd levels, the students have set their value, and consequently, they understood that the achievement of the parameter determines the values of variables. This understanding was extended to contexts in which the parameter is generic, *i.e.* the 3rd level. This deductive reasoning showed the understanding of the concept of parameter as *something that can determine the variation interval of some variable*. The interpretation that was given to a *letter* $(x, y, p, \dots)$ in the 1st level of the method was similar to the one that students usually use in an incognita when they solve an equation. From this interpretation it was possible to infer that the meaning of parameter that students experienced was: *the parameter is something that can be defined and allows to solve mathematical problems when a specific value is assigned to it*. This sequence of meanings promoted the understanding of the notion of letter while it is maintained as incognita, *i.e.* while variable of a function and parameter, in processing and conversion of graphic representations registers, algebraic, schematics and in natural language. At the end of the study, students showed an understanding of the concept of parameter in functions and of the concepts of variable, constant and incognita. The study concludes with some suggestions for future work.

Keywords: Mediation by the teaching method; Mediation by the tasks; Mathematical meanings constructed by students; Parameter in functions.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Extratos

Índice de Tabelas

1. O problema do estudo

Neste capítulo começamos por contextualizar o *MÉTODO DE ENSINO COM TAREFAS PARA MEDIAR SIGNIFICADOS EM MATEMÁTICA aplicado ao ENSINO DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES* e por definir o problema do estudo.

1.1. Introdução

Ensinar os alunos a construírem significados matemáticos nas várias fases do seu raciocínio, especificamente na álgebra e no ensino dos parâmetros em funções, foi a razão fundamental para a realização desta tese.

Investigar as perceções matemáticas dos alunos, a consciencialização e a interpretação das aprendizagens dos alunos, norteia, ao longo desta tese, a atuação da autora que é em simultâneo professora e investigadora.

O objetivo primordial deste estudo é estudar como é que os significados dos alunos podem evoluir gradualmente para significados matemáticos genéricos, concretamente algébricos, na vivência de experiências com sentido, tais como, as vivências matemáticas experimentadas com tipos de tarefas elaboradas segundo um método de ensino construído, aplicado aos parâmetros em funções, que inclui estratégias de mediação de significados matemáticos.

Pretende-se que os alunos construam significados através da resolução das tarefas matemáticas propostas pela professora e o façam de modo individual e de modo coletivo. Intenciona-se que os alunos ao trabalharem em pares ou em pequenos grupos, interajam socialmente, façam acompanhar as suas perceções e consciencializações individuais por representações matemáticas orais e escritas, e as partilhem através de palavras, ações e registos escritos. Espera-se que estas representações, por sua vez, originem novas perceções e consciencializações individuais, partilhadas no grupo por novas representações matemáticas orais e escritas e novas ações e, inerentemente, novos significados algébricos. E assim por diante gerando-se um ciclo de aprendizagem crescente.

À professora deste estudo é-lhe requerido o papel de usar estratégias didáticas específicas que promovam a passagem de significados, do contexto das tarefas em que os parâmetros em funções estão a ser percecionados e consciencializados pelos alunos para o contexto matemático algébrico pretendido. Porém, para que o processo de atribuição de significado dê origem a algo através do qual os alunos possam conhecer mais, implicando-se na aprendizagem, é fundamental que tais contextos intencionalmente construídos, e que resultam do método de ensino em causa, desempenhem um duplo papel. Primeiro, as tarefas e as estratégias devem ser propostas e usadas intencionalmente pela professora como um meio para que os alunos realizem uma tarefa matemática específica e, complementarmente, como um instrumento que permita à professora mediar a aprendizagem dos alunos, conduzindo-os aos significados matemáticos que ela pretende ensinar.

1.2. Definição do problema

A aula de matemática é um espaço de aprendizagem conjunta, que visa a realização social e cognitiva de cada membro que a constitui – professor e alunos –, em que cada um deve ser respeitado e deve respeitar as ideias, os valores e as formas de expressão dos outros, bem como as suas modificações e transformações. A aula de matemática é um espaço de partilha e de implicação pessoal e, nela, pretendemos que os alunos adquiram a convicção de que pode haver sucesso criando relações matemáticas que expressem informação útil para resolver problemas, reconhecendo o significado de cada conjetura, de cada resolução, de cada solução e de cada reflexão – construindo, assim, conhecimento matemático. Importa frisar que, aquilo que os alunos transmitem numa solução de um problema e as questões que eles colocam a si próprios sobre essa solução decorrem da experiência anterior das aulas de Matemática (Evans & Sawm, 2015) e das experiências que têm da resolução doutros problemas (Tirosh, Tsamir, Leverson, Tabach, & Barkai, 2015).

O ensino na aula de matemática deve centrar-se no aluno, exigindo do professor: i) ter conhecimento prévio dos alunos, pois um fator importante que influencia a aprendizagem é o que o aluno já sabe, cabendo ao professor a função de ensiná-lo em conformidade; ii) gerir com métodos adequados as aprendizagens e as dificuldades dos alunos – atendendo a que, de um modo geral, as dificuldades manifestam-se com erros na sala de aula, sendo por isso fundamental que o professor seja capaz de perceber as conceções subjacentes que causam os erros, diagnosticando-os, bem como as suas causas, e depois disso, ter um plano para lidar com as dificuldades; iii) desenvolver capacidades nos alunos, como, por exemplo, de raciocínio, de observação, de comunicação, de classificação, de estabelecimento de conexões, entre outras; iv) fornecer um *feedback* eficaz ao aluno, mostrando-lhe o que sabe e onde tem bom e mau desempenho; v) criar um ambiente de sala de aula comunicativo, onde se abra o caminho para a liberdade de expressão, ajudando o professor a ter uma visão global do ensino e uma melhor perceção das dificuldades dos alunos; e vi) integrar a avaliação formativa no processo de ensino, pois este tipo de avaliação pode aumentar a velocidade de aprendizagem dos alunos, dando-lhe um *feedback* do que sabem e não sabem de modo mais eficaz (Bingolbali & Bingolbali, 2015).

No que refere concretamente à aprendizagem da álgebra, parte da estrutura algébrica e dos significados podem ser construídos a partir da experiência dos alunos com contextos operacionais aritméticos (Gravemeijer, 2005), realçando os aspetos estratégicos e intuitivos (NCTM, 2000), e conduzindo o aluno à construção de expressões algébricas mais genéricas e estruturadas (Sfard, 2008). A comunicação em matemática não pode ser reduzida à linguagem técnica (Steinbring, 2006), mas antes, à condução do aluno na construção e comunicação do seu próprio raciocínio (Bussi & Mariotti, 2008), onde, muitas vezes, os signos e a atividade sígnica (Peirce, 1978) geram dificuldades na aprendizagem (Rojano, 2002; Sfard & Linchevski, 1994).

No que concerne especificamente às funções, usamos uma tabela, um gráfico ou um problema em linguagem natural para as representarmos e trabalhamos por meio de tratamentos algébricos, como a factorização, a substituição, a determinação de valores, como os zeros, os máximos/mínimos, entre outros procedimentos (Ursini & Trigueros, 2004). Um *parâmetro* numa função é, por sua vez, um objeto matemático que, quando substituído por valores numéricos, identifica cada um dos elementos de uma determinada função ou família de funções. Numa função, um parâmetro pode ser representado por uma letra (por exemplo) que assume diferentes significados, dependendo do contexto algébrico em que se insere (Arcavi, 2006; Pereira & Saraiva, 2008; Ursini & Trigueros, 2004).

Os signos têm extrema importância na razão e na comunicação do ser humano (Peirce, 1978). A comunicação em matemática depende de um uso intensivo de diferentes signos, tais como letras, diagramas, termos, expressões, notações, registos orais, gestuais e escritos, algoritmos, procedimentos, operações (D'Amore, 2006; Radford, 2006), bem como da sua representação em múltiplos registos de representação (Duval, 1995, 2006). Na atividade sígnica, a experiência algébrica dos alunos com tarefas de natureza aberta é crucial – elas permitem-lhes compreender cada experiência e considerá-la como preparação para um trabalho algébrico profundo. Quando, na resolução de uma tarefa matemática, se extrapolam os dados iniciais e se tornam explícitos novos desconhecidos, que passam a ser novos objetivos da tarefa, desencadeia-se um novo conjunto de estratégias que relaciona esses desconhecidos entre si por meio de condições e procedimentos algébricos que se podem aplicar a famílias de problemas similares (Filloy, Puig, & Rojano, 2007); evoluindo-se gradualmente em generalização, até à criação de modelos formais independentes dos dados da tarefa inicial (Gravemeijer, 2005), adquirindo-se uma noção estrutural dos mesmos. Quando este processo é mediado pelo professor, através da promoção de raciocínios que levam o aluno a focalizar-se em aspetos particulares da tarefa, a recorrer a experiências matemáticas anteriores, a elaborar sínteses do raciocínio (Bussi & Mariotti, 2008; Sfard, 2008), facilitam-se os próprios processos cognitivos envolvidos, tais como o processo de aprendizagem e de resolução de problemas.

Neste estudo assumimos que os raciocínios matemáticos geram signos comunicáveis através de representações matemáticas. Estas, por sua vez, geram sucessivamente novos raciocínios e signos. A este processo designamos por significados matemáticos. Centralizamo-nos neste estudo em três grandes tipos de raciocínios (abdutivo, indutivo e dedutivo) associados à representação de três grandes tipos de signos semióticos (ícone, índice e símbolo). Desenvolveremos estes conceitos ao longo do trabalho.

Neste estudo, acreditamos que implementar na aula tarefas intencionalmente construídas e selecionadas, assumindo o papel de um artefacto, e cuja resolução envolve o recurso a outros artefactos (como os tecnológicos) e à mediação semiótica do professor, pode promover a construção de significados matemáticos dos alunos e a própria eficiência das estratégias didáticas usadas. As tarefas matemáticas elaboradas e selecionadas pelo professor ocupam, neste contexto, um lugar central na atividade matemática do aluno. A tarefa é mais do que um problema impresso numa folha de proposta de trabalho, num livro didático, ela inclui a introdução à atividade do aluno e o fornecimento subsequente de sugestões, dúvidas e adaptações feitas pelos alunos e pelo professor. Ou seja, a tarefa inclui a forma como é mediada e adaptada em sala de aula às necessidades que a aprendizagem dos alunos requer (Swan, 2011). O professor atua didaticamente como um *orquestrador da atividade matemática do aluno* em que as próprias tarefas matemáticas medeiam tal atividade (Rezat & Sträßer, 2012).

Este estudo tem como objetivo promover e conduzir a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos na aprendizagem da matemática, concretamente na aprendizagem dos parâmetros em funções em alunos do 11.ºano de escolaridade.

Nesta conjuntura, e partindo de um método de ensino construído para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos matemáticos genéricos e estruturados, pretendemos responder às seguintes questões:

> Questão 1: Como é que o método de ensino construído funciona como um mediador da atividade do professor?
>
> Questão2: Como é que as tarefas matemáticas elaboradas e implementadas com base no método de ensino construído funcionam como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos?

Para atingir este objetivo e responder a estas questões, construímos e implementámos um método para ensinar matemática que aplicámos com tarefas matemáticas específicas aos parâmetros em funções em alunos do 11.º ano de escolaridade, como mostraremos nos capítulos que se seguem.

1.3. Glossário

Abdução	Raciocínio baseado na intuição que sugere criação de hipóteses explicativas através do qual novas hipóteses são propostas como candidatas explicativas da circunstância ou dos significados.
Artefacto	Objeto que tem a função de promover a construção de significados, tal como um algoritmo, a calculadora gráfica, uma determinada função da calculadora gráfica, uma ficha de trabalho, material manipulável, software didático, entre outros.
Ciclo didático	Atividade de mediação semiótica de significados promovida pelo professor, que pode incluir artefactos, com o intuito de promover a construção de uma sequência de significados nos alunos, quer sob um modo de produção individual, quer sob um modo de produção coletiva.
Conversão de representações	Manipulação de signos entre dois ou mais registos de representação que inclui a mudança da forma pela qual um objeto é representado, como por exemplo a conversão de uma expressão algébrica para a sua representação gráfica.
Dedução	Raciocínio através do qual se infere uma conclusão a partir de leis gerais e de condições que explicam as circunstâncias ou os significados e os sintetizam.
Ícone	Signo com qualquer característica que o assemelhe ao seu objeto, que representa o objeto por similaridade, que possui as mesmas características que o objeto e mantém o significado mesmo que o objeto desapareça - uma fotografia (por exemplo).
Índice	Signo que indica outra coisa com a qual está ligado (não necessariamente por semelhança), mas por contiguidade (proximidade) - como uma marca ou uma impressão digital (por exemplo).
Indução	Raciocínio através do qual se testa uma hipótese e se infere uma conclusão por construção de significados, a partir do particular para leis gerais.
Interpretante	É a cognição produzida numa mente.
Mediação Semiótica na aula de Matemática	Processo que envolve alguém que medeia o conteúdo matemático (usualmente o professor), envolve as circunstâncias e os meios em que tal processo ocorre (por exemplo a sala de aula e os artefactos) e alguém que está sujeito à mediação (usualmente o aluno).
Objeto	Qualquer entidade à qual nos referimos, ou da qual falamos. Objeto matemático é tudo o que se denota e tudo a que se atribui significado, quando construímos, comunicamos e aprendemos matemática, tal como: a linguagem (termos, expressões, notações, registos orais, gestuais e escritos), um conceito, uma ação (algoritmo, procedimento, operação), um argumento (dedução, indução, validação), entre outros.
Parâmetro em funções	Objeto matemático que, quando substituído por valores numéricos, identifica cada um dos elementos de uma determinada função ou família de funções. Numa função, um parâmetro pode ser representado por uma letra que assume diferentes significados, dependendo do contexto algébrico em que se insere.
Primeiridade	Primeira fase do pensamento determinada pela intenção, pela impressão inicial do fenómeno representado por sensações, emoções e sentimentos em que o mundo exterior é estímulo do interior.
Representações	Meio através do qual se comunicam e estudam objetos matemáticos como os conceitos, as propriedades, as estruturas, as relações.
Representamen	Signo passível de ser interpretado do mesmo modo por qualquer interpretante.
Secundidade	Segunda fase do pensamento determinada pela ação e reação da mente, quando ela

	é confrontada com o que recebe e reage instintivamente a tudo.
Semiótica	Ciência que estuda os modos como aprendemos qualquer coisa.
Significado em matemática	Atividade sígnica que resulta de conexões entre a ideia matemática em discussão e entre as representações, em que as ideias matemáticas formam conexões com as ideias já existentes, atendendo aos aspetos pessoais do conhecimento intrínsecos a cada indivíduo.
Signo	É tudo o que determina uma coisa, é algo que alguém usa para comunicar alguma coisa a alguém.
Símbolo	Signo que resulta da associação e da síntese de ideias produzidas pela razão, numa associação de ideias produzidas por uma convenção, ou numa espécie de coisas e não uma coisa singular - a cor verde como símbolo da esperança (por exemplo).
Tarefa matemática	É um conjunto de questões que requer a atribuição de significado matemático para um determinado fim e que inclui a introdução à atividade do aluno e o fornecimento subsequente de sugestões, dúvidas e adaptações feitas pelos alunos e pelo professor.
Terceiridade	Fase do pensamento em que a mente sintetiza o que lhe foi apresentado e interpreta o mundo através da união de vários signos para se servir deles na interação com outras mentes e com o mundo.
Tratamento de representações	Manipulação de signos dentro de um registo de representação, como o aritmético por exemplo, quando simplificamos a expressão aritmética que resulta da substituição das variáveis dependente, independente e do parâmetro por valores aritméticos concretos na expressão da função inicial considerada.

2. Revisão de literatura

No presente capítulo apresentamos e discutimos a teoria essencial que norteou o estudo, em particular a construção do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, nos seguintes tópicos: o signo e o *representamen*; as categorias dos signos: primeiridade, secundidade e terceiridade; os significados matemáticos; a mediação semiótica de significados matemáticos; as representações matemáticas; os signos e o raciocínio algébrico; da aritmética à álgebra; e, os parâmetros em funções.

2.1. O signo e o *representamen*

A Semiótica é uma ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, tem por objetivo investigar os modos de constituição de todo e qualquer fenómeno como fenómeno de produção de significação e de sentido (Santaella, 2002). Nela, os signos são essenciais.

Charles Peirce (1837-1914) apresentou nos seus escritos diversas definições diferentes de *signo*, umas mais detalhadas, outras mais sintéticas tal como a seguinte: um signo é uma relação conjunta com a coisa denotada e com o pensamento (Peirce, 1978, p.143). Fazendo uso da linguagem corrente do dia-a-dia, um signo, no pensamento de Peirce (1978), pode ser entendido como o conteúdo de uma ideia. Isto é, quando uma pessoa "agarra" a ideia de outra pessoa, dizemos que o pensamento dessas duas pessoas é semelhante nesse instante, ainda que esse instante seja efémero. Se esse pensamento for semelhante dá origem à partilha do mesmo conteúdo, ou seja, do mesmo signo. Porém, se no instante seguinte, tal conteúdo gerar um novo conteúdo em cada uma dessas pessoas, esses conteúdos podem ser diferentes, dando origem a novos e diferentes signos. Mas, se, novamente, em algum instante, esse conteúdo do pensamento for o mesmo, essas duas pessoas voltam a partilhar o mesmo signo. E assim sucessivamente. Portanto, um signo é algo que acontece para alguém por alguma coisa em algum aspeto ou por qualquer motivo. Ele aporta-se a alguém, isto é, cria na mente desse alguém um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido (Peirce, 1978, p.121). A esse novo signo, que o primeiro signo cria nesse alguém, Peirce designa *interpretante* do primeiro signo.

Qualquer coisa que substitui uma outra coisa para algum intérprete é um signo. Não há interpretação sem signo, pois toda a interpretação é, por sua vez, signo. Podemos inferir que, para Pierce, um signo funciona como uma ferramenta do pensamento. *Não há pensamento sem signos*. Esta foi também a perspetiva de signo que alguns pensadores, uns anteriores e outros contemporâneos a Peirce, já haviam defendido no seu tempo. Segundo Fidalgo (1995), já no século XVIII, o lógico-matemático Bolzano (1781-1848) definiu signo como um objeto do qual nos servimos para pensar numa característica ou qualidade que, ao darmo-nos conta dela, nos leva a inferir uma outra qualidade ou uma outra coisa (p.27). Para o filósofo alemão Franz Brentano (1838-1917), também segundo a interpretação de Fidalgo (1995), os signos servem de instrumentos à própria reflexão e devem ter características de modo a preservarem os nossos pensamentos. Brentano especifica que os signos têm de ter uma duração suficiente no pensamento de alguém, têm de ser facilmente reconhecidos e não provocarem confusão na mente em que tais signos ocorrem (p.29).

Ou seja, um signo é tudo o que determina uma coisa (pelo seu interpretante) para se referir a algo (ao seu objeto), tomando assim o lugar desse algo, isto é, tomando deste modo o lugar do seu objeto. Para Peirce um signo pode, assim, ser caracterizado por uma relação *triádica* do tipo *signo(S)/objeto(O)/interpretante(I)*, onde o interpretante é a cognição produzida numa mente e o objeto é qualquer entidade à qual nos referimos, ou da qual falamos. Um signo não é uma entidade fechada em si mesma, ou seja, toda a cognição dá origem a um signo, que, por sua vez, se posiciona numa nova relação *triádica* com um outro interpretante – que é uma outra cognição, produzida pela mesma mente, ou produzida por outra mente –, e assim sucessivamente. Quer o signo, quer a relação triádica à qual ele pertence não são arbitrários. Eles são interdependentes, pois o signo forma-se com base na interpretação sobre um objeto, originando a tríade *(S, O, I)*. (Peirce, Houser, Kloesel, & Project, 1998).

Há sempre uma mistura de signos que é constitutiva de todo o pensamento. Portanto, para compreender os raciocínios que são aplicados nos métodos científicos é necessário estudar os tipos de signos, as suas misturas e o modo como os signos crescem e evoluem (Santaella, 2001). Peirce (1978) defendeu que a característica fundamental de todo o conhecimento científico está no facto de que todas as conclusões em todas as ciências devem basear-se em evidências – a teoria científica interpreta a evidência. Uma evidência é tudo aquilo que pode ser usado para definir se uma determinada afirmação é verdadeira ou falsa. Para aquele autor uma evidência científica é o conjunto de elementos usados para suportar a confirmação ou a negação de uma determinada hipótese científica, dentro de fundamentos próprios dessa ciência.

Os fundamentos de toda a ciência devem ser públicos e submetidos à crítica da comunidade científica, porque nenhuma teoria científica é infalível, pois toda a teoria científica faz-se pela interpretação de evidências. E, por isso, conclusões, evidências e teorias devem ser revistas e corrigidas, seja porque novos métodos e instrumentos produzem evidências melhores, seja porque a teoria baseada em evidências entra em conflito com outras teorias fundamentadas noutras evidências. Para Peirce, todo o conhecimento está fundamentado em evidências e estas por sua vez estão suportadas por dados (Peirce et al., 1998). Os dados em si mesmos não são evidências, eles devem ser interpretados para se tornarem evidências. Esta temática da evidência científica conduz-nos à noção de verdade – o que é *a verdade?*

Peirce (1978) define a verdade como uma opinião que pode gerar concordância por todos os que a investigam. Ou seja, a verdade é a concordância de uma afirmação abstrata com o limite ideal a tender para a certeza dada pelas investigações científicas sobre essa afirmação (Moore & Robin, 1994, p.31). Nesta perspetiva, Peirce usa os termos *signo* e *representamen*, distinguindo-os. Para fazermos tal distinção, destacamos mais uma definição de signo, de entre as múltiplas definições que Peirce apresenta: signo é tudo o que comunica uma noção definida de um objeto numa determinada perspetiva que nos é familiar (Peirce, 1978, p.117). A partir dessa ideia familiar, cada um de nós faz o melhor que pode para analisar o que é essencial para o *signo* e comum a qualquer outro interpretante, ao que Peirce define como um *representamen*, sendo este procedimento válido a tudo o que a esta análise do *signo* se aplica.

Por ser um signo, um *representamen* é o sujeito de uma relação triádica *(R, O, I)*, na qual *O é o seu objeto* e *I o seu interpretante*. Em ciência, o signo só é *representamem* se puder ser representado por qualquer inteligência científica e se puder receber o mesmo significado por outro interpretante. Um signo é *representamem* se permitir que se faça ciência e se permitir que se infira sobre o que é necessariamente verdade numa inteligência científica, para que assim se possa argumentar nessa ciência, com qualquer finalidade. Isto é, para que desses *representamen* se represente alguma verdade nessa ciência. Por isso, se cada um de nós, dentro de uma determinada ciência, ao analisar um signo, comete um erro, ou tem um pensamento não representável, a tríade *(S, O, I)* contém um signo que não é *representamen*. Isto por não permitir que com tal signo se infira uma verdade nessa ciência, não permitindo que com ele se possa gerar argumentação nessa ciência, pois a parte daquilo que dissermos associada a esse signo será falsa ou incapaz de ser representada nessa ciência. E, nesse caso, numa cadeia de signos pode haver um ou vários signos que não são *representamen*.

De facto, todos os signos comunicam ideias que podem ser distintas para cada mente humana. Já com os *representamen* não é assim, porque todo o *representamen* é um signo que carrega consigo a possibilidade de ser interpretável do mesmo modo por qualquer interpretante (Peirce, 1978, p.117). Fazendo novamente uso da linguagem corrente do dia-a-dia, um *representamen* é o conteúdo de uma ideia que carrega consigo a capacidade de ser "agarrado" por várias pessoas, num mesmo instante, do mesmo modo – e é o carregar esta capacidade, ou seja, é este potencial, que caracteriza o *representamen*. Porém, se essas pessoas partilham o mesmo signo, nesse instante e nessa circunstância, sendo que tal signo foi assim partilhado por elas de modo não ocasional, mas sim propositada e de modo previsto e não fortuito, esse pensamento é semelhante, constituído pelo(s) mesmo(s) signo(s) e, nesse caso, tal, ou tais, signo(s) são *representamen*. Em consequência, podemos concluir que todo o *representamen* é um signo, mas nem todo o signo é um *representamen*.

Daqui inferimos o carácter universal de um signo que é em simultâneo *representamen*, pois integra, para um mesmo objeto, uma relação triádica que carrega o potencial de se manter, no mesmo instante e nas mesmas circunstâncias, com qualquer outro interpretante. Em ciência, e no nosso caso particular na matemática, existem verdades que geram a concordância por todos os que a investigam e constroem, o mesmo é dizer que, e corroborando Peirce, a verdade em matemática é a concordância de afirmações que tendem para certezas dadas pelas investigações sobre essas afirmações matemáticas. E, quando se ensina e aprende matemática, acreditamos que a semiótica fornece uma linguagem geral aplicável aos seus signos específicos.

Em consequência, cremos que a semiótica nos permite fazer inferências ao nível dos métodos de ensino da matemática, concretamente da álgebra, e no nosso caso específico dos parâmetros em funções. No nosso método de ensino, a análise sígnica permitir-nos-á inferir o modo de pensamento dos alunos aquando das suas aprendizagens, no qual se impõe a compreensão pelo professor dos signos que se enquadram no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática, bem como a sua distinção daqueles em que em tal sistema não se enquadram. Esta tipologia de atividade sígnica fundamentou a diferenciação e caracterização dos vários graus de significados que definimos no método que apresentamos neste estudo.

2.2. As classes dos signos: a primeiridade, a secundidade e a terceiridade

Pierce (1978) considerou a semiótica como a lógica num sentido amplo, por se encontrar em todos os setores do pensamento e da atividade humana. A semiótica, para Peirce, assenta nas mais antigas questões filosóficas: como é que se dá a apreensão e a compreensão do mundo pelo ser humano? Como é que a multiplicidade e diversidade infinitas do universo são convertidas em realidades inteligíveis? A semiótica estuda os modos como aprendemos qualquer coisa que aparece na nossa mente, qualquer coisa de qualquer tipo, algo simples como um cheiro, um ruído, uma imagem, ou algo mais complexo como um conceito abstrato, uma lembrança de um tempo vivido, ou tudo o que se apresente à nossa mente em qualquer momento.

Em semiótica, Peirce definiu *fenómeno* como sendo a totalidade coletiva dos signos que, de alguma maneira e nalgum sentido, está presente numa mente, quer corresponda a qualquer coisa real, ou não (Peirce, 1978, p.67). Toda a investigação de Peirce se baseou numa conceção triádica dos fenómenos, pois, para ele, toda a perceção dos fenómenos se faz sob três categorias universais – primeiridade, secundidade e terceiridade. A primeiridade é a impressão inicial do fenómeno representado por sensações, emoções e sentimentos em que o mundo exterior é estímulo do interior. A secundidade baseia-se na ação e reação da mente, quando ela é confrontada com o que recebe e reage instintivamente a tudo. A terceiridade é quando a mente sintetiza o que lhe foi apresentado e interpreta o mundo através da união de vários signos para se servir deles na interação com outras mentes e com o mundo. Tal como para definir signo, Peirce também usou uma enorme quantidade de definições e descrições para definir as três categorias dos fenómenos. Encontramos hoje, nos seus escritos, múltiplas narrações e descrições, umas mais detalhadas e com exemplos que intentam contextualizar, outras mais abstratas e genéricas e outras mais sintéticas e concisas – primeiridade *é a categoria do sentimento e da qualidade*, secundidade *é a categoria da experiência, da luta e do fazer* e a terceiridade *é a categoria do pensamento e da lei* (Peirce, 1978).

De acordo com Peirce (1978), ao referirmo-nos à primeiridade estamos a referir-nos à consciência imediata tal qual é, ou seja, à qualidade da consciência imediata *in totum*, invisível, não analisável, frágil e inocente. É tudo aquilo que está na nossa mente no instante presente. É, portanto, tudo aquilo que dá sabor, tom, tonalidade à nossa consciência imediata, mas também é, na interpretação de Santaella (2002), tudo aquilo que se oculta ao nosso pensamento, porque para pensar precisamos de parar no tempo, deixando nesse instante em que o fazemos de capturar a imediaticidade. Primeiridade é, pelo que o próprio nome indica, a primeira apreensão das coisas e, por isso mesmo, constitui-se por uma finíssima película de mediação entre nós e os fenómenos.

A primeiridade integra os signos que são ícones. Um ícone é, para Peirce (1978), um quase-signo, porque aparece como simples qualidade de algo, dependente apenas da fase de primeiridade, pois funciona como algo a que se dá contemplação e que tem um alto poder de sugestão, que depende grandemente dos nossos sentidos, que representa apenas uma forma, um sentimento (visual, sonoro, tátil, visceral, …). Um diagrama num livro ao qual não se dá interpretação, está ali naquele lugar, naquele instante e provoca uma perceção imediata a quem o vê. Ou, um som que provoca um sentimento imediato a quem o ouve. Por se caracterizar como qualidade, um ícone tem condições de ser substituído por qualquer coisa a que a ele se assemelhe. Essa é uma das razões por que as qualidades têm tantas semelhanças e pelas quais os ícones são capazes de produzir nas nossas mentes as mais imponderáveis relações de comparação.

Peirce (1978) associou à primeiridade o pensamento abdutivo, que caracterizou como o instinto humano para acertar na verdade das coisas, como a comunicação subliminar das mensagens. A abdução produz, segundo aquele autor, um certo tipo de emoção que surge como um relâmpago, é meramente sugestiva e não necessita de razões. É instintiva e sugere que alguma coisa *pode ser*. De acordo com Peirce é o raciocínio abdutivo que norteia a criatividade e sem ele não há ampliação do conhecimento. Ele é sempre o primeiro a ocorrer no pensamento e é ele que determina a criação de uma hipótese na procura da solução de um problema.

A secundidade caracteriza-se pela reação e é a nossa consciência em reação com o mundo, que, nas palavras de Santaella (2002), é a categoria dos fenómenos na qual tropeçamos continuamente na nossa existência quotidiana. A secundidade é a qualidade do existir, do agir, do reagir e interagir, é o concreto e o material de dizer o mundo. É um processo de mediação interpretativa entre nós e os fenómenos e que dá à experiência o seu carácter factual, de luta e de confronto. Trata-se da ação e reação, sem o governo da camada mediadora da intencionalidade, razão ou lei.

A secundidade integra os signos que são índices. Um índice é um signo porque indica uma coisa com a qual ele está ligado. Por exemplo, um girassol é um índice porque, ao movimentar-se, gira na direção do sol, apontando-nos para o lugar do sol no céu. A estrela polar é um índice porque nos indica em que direção está o norte (Peirce, 1978, p.154). Um índice real, concreto e singular é sempre um ponto que irradia para múltiplas direções. Mas, um signo só funciona como índice quando uma mente interpretadora estabelece a conexão com uma dessas direções. E nesta perspetiva o índice é sempre dual porque presume uma ligação, uma constatação de uma relação entre existentes (que pressupõe a secundidade). Todo o índice é constituído de ícones. O índice é um signo pelo seu carácter físico e existencial e que aponta para outra coisa para além dele, o seu objeto, do qual ele é parte. Por exemplo, o girassol é um ícone se o virmos em si mesmo, mas se o interpretarmos como um indicador da posição do sol no céu ele é um índice. Porém, o girassol não pode ser um índice sem que seja um ícone, pois para ser índice, e indicar algo mais para além de si próprio, ele é ícone existindo primeiro em si mesmo.

Peirce associou à secundidade o pensamento indutivo, que caracterizou como o procedimento de testar experimentalmente uma hipótese. A indução pode indicar o valor de uma relação partindo do singular, do que é restrito, para uma lei geral, como por exemplo "eu vi 1000 cisnes brancos neste lago, logo todos os cisnes deste lago são brancos", mas também pode explicar uma relação particular da lei geral, um raciocínio por analogia, ou quando fazemos previsões a partir de casos particulares.

A terceiridade caracteriza-se pela inteligibilidade, ou pensamento em signos, através da qual pensamos, representamos e interpretamos o mundo. Diante de qualquer fenómeno, isto é, para conhecer e compreender qualquer coisa, a consciência produz um signo, ou seja, um pensamento como mediação irrecusável entre nós e os fenómenos. Por exemplo, o azul simples e límpido do céu de um dia de verão é a primeiridade. O céu como lugar e tempo, aqui e agora, onde se encarna o azul, é a secundidade. A síntese intelectual, a elaboração cognitiva, do azul no céu, ou do azul do céu, é a terceiridade.

A terceiridade integra os signos que são símbolos. Quando o signo é uma lei em relação ao seu objeto esse signo é um símbolo. Um signo que é um símbolo não representa o seu objeto em virtude do seu carácter de qualidade, nem por manter uma relação com o seu objeto, mas porque se extrai do seu poder de representação um pacto coletivo, uma convenção, uma lei que determina que aquele signo – o símbolo – representa o seu objeto. Deste modo, o objeto de uma palavra não é uma coisa que existe, mas é uma ideia abstrata, é uma lei armazenada na programação linguística dos nossos cérebros. É por força da mediação dessa lei que a palavra *mulher* pode representar qualquer mulher independentemente da singularidade de cada mulher em particular. É por isso que as frases que enunciamos são todas compostas por índices (que funcionam como indicadores de tempo, lugares, coisas singulares a fim de nos darem indicações), caso contrário, as frases não teriam qualquer poder de referência. Os símbolos crescem, irradiam, expandem mas eles transportam consigo ícones e índices, o que antevê a terceiridade. Um símbolo não indica uma coisa em particular, ele denota um tipo de coisa. Um símbolo é ele mesmo um tipo de coisa e não uma coisa singular (Peirce, 1978, p.165).

Peirce associou à terceiridade o pensamento dedutivo, o qual depende de premissas verdadeiras para produzir conclusões verdadeiras. Na dedução, o raciocínio examina o estado de coisas colocado nas premissas e investiga-as. De acordo com Peirce, a dedução depende da nossa autoconfiança na nossa própria capacidade de analisar o significado dos signos nos quais ou pelos quais pensamos, partindo de uma lei geral deduzimos o singular, por exemplo "todos os homens são mortais, logo eu sou mortal". O raciocínio dedutivo é o raciocínio da análise e da síntese. Contudo, a construção de leis gerais para a explicação de um fenómeno numa ciência pressupõe, para além do raciocínio dedutivo, o raciocínio abdutivo usado essencialmente numa primeira fase de criação e de construção de hipóteses e o raciocínio indutivo usado comummente para generalizar a partir de casos particulares e para testar raciocínios dentro da própria lei geral.

Para Peirce (1978, p.138-142), os signos são divisíveis em tipos e em relações:

i) Relação de um signo com ele mesmo consiste: i1) numa simples qualidade com a qual se perceciona um objeto [que Peirce designou qualisigno], como, por exemplo, a cor vermelha; i2) numa existência real, como algo que ocorre aqui e agora [que Peirce designou sinsigno]; ou, i3) numa lei geral, numa regra ou numa convenção [que Peirce designou legisigno], que pode ser um conceito na mente de um ser humano, mas também pode ser um hábito que regula comportamentos convencionais;

ii) Relação de um signo com o seu objeto, consiste: ii1) no facto de o signo ter qualquer característica que o assemelhe ao seu objeto, que representa o objeto por similaridade, possui as mesmas características que o objeto e mantém o significado mesmo que o objeto desapareça [que Peirce designou ícone], por exemplo uma fotografia; ou, ii2) numa relação existencial com o seu objeto, indica outra coisa com a qual está ligado (não necessariamente por semelhança), mas por contiguidade (proximidade) [que Peirce designou índice], como uma marca ou uma impressão digital; ou, ii3) numa associação de ideias produzidas pela razão, numa associação de ideias produzidas por uma convenção, ou numa espécie de coisas e não uma coisa singular [que Peirce designou símbolo], por exemplo, a cor verde como símbolo da esperança;

iii) Relação do signo com o seu interpretante, que consiste: iii1) num raciocínio abdutivo no qual há um instinto de suposição que determina uma possibilidade qualitativa ou uma ação espontânea [que Peirce designou rhema], por exemplo um grito espontâneo; ou, iii2) num signo de fazer algo, uma proposição ou um enunciado que pode ser denotado como verdadeiro ou falso, num raciocínio indutivo no qual é determinada a operacionalidade de uma relação [que Peirce designou decisigno]; ou, iii3) num raciocínio dedutivo no qual a razão associa e faz interdepender premissas verdadeiras para produzir conclusões verdadeiras [que Peirce designou argumento].

Peirce detalhou classes de signos (Peirce 1978, p.184), que se obtêm das possíveis relações entre os tipos de signos e as três categorias universais – primeiridade, secundidade e terceiridade.

Tabela 2.1: Tabela extraída de Peirce, 1978, p.240

		Primeiridade	Secundidade	Terceiridade
i)	***Representamen***	Qualisigno	Sinsigno	Legisigno
ii)	**Objeto**	Ícone	Índice	Símbolo
iii)	**Interpretante**	Rhema	Decisigno	Argumento

Neste estudo, na relação triádica *(S, O, I)*, na qual *O* é *o objeto* e *I é o interpretante*, interessa-nos estudar: i) a relação de um signo com ele mesmo (enquanto *representamen* de cada uma das três categorias, *primeiridade*, *secundidade* e *terceiridade*) - assumimos que signo é *algo* (expresso através de uma representação num determinado registo de representações) que alguém usa (professor ou aluno), para explicar ou comunicar algum raciocínio matemático a alguém; ii) a relação do signo com o seu objeto - enquanto *ícone (signo que serve para comunicar algo durante um raciocínio matemático abdutivo)*, *índice (signo que serve para comunicar algo durante um raciocínio matemático indutivo) e símbolo (signo que serve para comunicar algo durante um raciocínio matemático dedutivo)*; e iii) a relação do signo com o seu interpretante, ou seja o próprio *raciocínio matemático abdutivo*, *indutivo* e *dedutivo* construído pelo aluno.

Tais relações funcionam neste estudo como uma espécie de *lente* que nos permite analisar e perceber uma parte da multiplicidade de significados que os alunos constroem quando aprendem parâmetros em funções, bem como o respetivo trabalho de mediação de tais significados pelo professor.

2.3. Os significados matemáticos

Por um lado, somos no mundo e estamos no mundo; mas, por outro lado, o nosso acesso sensível ao mundo é sempre mediatizado por uma crosta sígnica que, embora nos forneça o meio de compreender, transformar e programar o mundo, ao mesmo tempo usurpa de nós uma existência direta, imediata, palpável, corpo a corpo e sensual com o sensível (Santaella, 2002). Eis aqui o que Santaella designa por *fusão entre a nossa miséria e a nossa grandeza de condição humana, como seres simbólicos*. E por isto é que o significado de um pensamento é outro pensamento que se desloca e se esquiva incessantemente. Por exemplo, para esclarecermos o significado de qualquer palavra temos de recorrer a uma outra palavra que, de algum modo, possa substituir a anterior, na busca contínua que fazemos em atribuir significado à primeira. Todo o pensamento se dá em signos e todo o signo é continuação de um outro signo. A atividade sígnica envolve ideias interdependentes desenvolvidas em vários domínios, como por exemplo na matemática. Podemos identificar o pensamento como um sistema de ideias (Fidalgo, 1995), ou seja, podemos afirmar que "o pensamento é um sistema ordenado de ideias" (p.51).

Segundo Fidalgo (1995), Frege (1848-1925), que foi o principal criador da lógica matemática e trabalhou na fronteira entre a filosofia e a matemática, mostrou que é impossível apreender o significado de uma frase sem reconhecer as condições da sua verdade. Só em conjunto e enquanto elementos de uma mesma teoria é possível explicar as noções de verdade e de significado. Fidalgo refere que Frege enfatiza que o significado é objetivo. O significado consiste na forma como o objeto é dado, por exemplo "a estrela da manhã" não significa o mesmo que "a estrela da noite", pois por estrela da manhã entende-se (significa-se) o último astro a desaparecer no céu com a aurora, e por estrela da noite entende-se (significa-se) o primeiro astro a aparecer ao entardecer, mas ambas as expressões referem o mesmo objeto, o planeta Vénus. Frege refere também que, nem sempre a um significado corresponde uma referência real, por exemplo, a expressão "o corpo mais afastado da terra" tem certamente um significado, mas é questionável se essa expressão se refere a algum objeto que realmente exista.

De modo condensado podemos dizer que apreender, compreender e interpretar é traduzir um pensamento em outro, num movimento ininterrupto, porque só podemos pensar um pensamento inserindo-o continuamente noutro. É por isto que Peirce definiu a relação triádica S/O/I de qualquer signo e afirmou que o signo é fundamentalmente um processo de mediação e abre, portanto, para uma dimensão de infinitude (Fidalgo, 1995, p.17).

As questões do ensino e da aprendizagem da matemática são fenómenos complexos que, para ocorrerem, também é necessária uma relação triádica entre o saber, o professor e o aluno, sem nos reduzirmos exclusivamente a um dos três (D'Amore, 2007). O significado em matemática é obtido através de conexões entre a ideia matemática em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo, em que as ideias matemáticas formam conexões não apenas com as ideias já existentes mas, também, com os aspetos pessoais do conhecimento intrínsecos a cada indivíduo (Bishop & Goffree, 1986). Assim, para compreender um conceito matemático é essencial que se proceda à sua exploração, bem como ao relacionamento, ordenamento e classificação de todas as formas distintas associadas à representação desse mesmo conceito.

Por sua vez, classificar, relacionar e ordenar são processos que servem de base para muitos outros. Por vezes, classificações que parecem, à partida, incorretas não o são. Trata-se de formas distintas de agrupar segundo características diferentes que, consequentemente, originam classificações diferentes (Ponte & Serrazina, 2000). Estes raciocínios, quando fomentados pelos professores criam nos alunos capacidades essenciais para que estes criem significados.

Radford (2006) idealizou a *teoria da objetivação* na qual interatuam processos cujo objetivo é mostrar algo (um objeto) a alguém. Tais processos consistem em formas que se usam com a finalidade de tornar explícita uma intenção e de levar a cabo uma ação a que Radford designou por *meios semióticos de objetivação*, por mediarem e materializarem o pensamento. Porém, neste contexto, surge o problema do facto de o pensamento não ser diretamente observável, ou seja, o facto de o pensamento ser invisível. Radford considera que na *mediação de significados* intervêm os gestos, os movimentos, a perceção, a linguagem, a interação, bem como a natureza e as formas de conhecer os objetos matemáticos (Radford, 2006).

Vygotsky (1896 – 1934) desenvolveu o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que define a distância entre o *nível de desenvolvimento real*, determinado pela capacidade de resolver um problema sem ajuda, e o *nível de desenvolvimento potencial*, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um mediador (o professor, quando pensamos na sala de aula). Trata-se de uma série de informações que o aluno tem potencialidade de aprender mas ainda não completou o processo de aprendizagem (Vygotsky, 1981). Contudo, o indivíduo não pode atribuir um novo significado sem algum conhecimento anterior cognitivamente relacionado com tal significado, a fim de que o novo significado conecte com o conhecimento que já existe e o que já existe suporte a nova informação (Bussi & Mariotti, 2008).

A atribuição de significado depende da reconstrução interna que é feita através de operações externas (Vygotsky, 1978), um processo a que este autor designa por *internalização*. Nesta perspetiva, *aprender interdepende de ensinar* – o discurso que o professor usa na sala de aula, o modo como conduz as discussões com, e entre, os alunos, determinam o modo como cada aluno constrói os seus significados durante um raciocínio, especificamente os significados durante um raciocínio matemático. O processo de internalização tem dois aspetos fundamentais: é essencialmente social e é dirigido por processos semióticos (Vygotsky, 1978, p.162) - pois depende da comunicação que, por sua vez, envolve a produção e a interpretação de signos. Nesta perspetiva importa determo-nos no facto de que a nossa mente retém signos interligados, construídos em contextos de interação com o meio que nos envolve com os outros, e não retém apenas signos de caráter icónico. De facto, *"o cérebro retém uma memória daquilo que aconteceu durante uma interação, e a interação inclui de forma relevante o nosso próprio passado, … . O facto de aprendermos por interatividade, e não por recetividade passiva, é o segredo da memória … , a razão pela qual muitas vezes recordamos contextos e não apenas coisas isoladas."* (Damásio, 2010, p.171).

A motivação para a atividade de aprendizagem deve ter uma finalidade, isto é, as operações e ações vinculadas à atividade devem possuir uma finalidade relacionada com a vida do indivíduo que está a aprender (Spinillo, 2006), em função das suas interações sociais e das suas condições de vida. Assim, as ações não têm finalidades em si mesmas e a sua finalidade é uma aprendizagem que tenha significado, a qual Vigotsky descreve como aprendizagens relacionadas com a vida (Spinillo, 2006, pp. 190-221). Os alunos constroem significados pessoais que estão profundamente relacionados com o uso real que fazem dos mesmos (Bussi & Mariotti, 2008). Neste processo, a mente cria mapas (Damásio, 2010) que ocorrem frequentemente num contexto de ação, "*construídos quando interagimos com objetos, como, por exemplo, uma pessoa, uma máquina, um local, do exterior do cérebro em direção ao seu interior*" (p.90), em que a interação assume uma elevada relevância. Damásio (2010) refere que o cérebro humano mapeia todos os objetos que se encontram no seu exterior e todas as relações assumidas por objetos e ações, no tempo e no espaço e tem a capacidade de representar aspetos da estrutura de coisas e acontecimentos, onde se incluem todas as ações levadas a cabo pelo nosso corpo. *"O cérebro humano é um cartógrafo nato"* (Damásio, 2010, p.90), em que ação e mapas fazem parte de um ciclo interminável.

Na sala de aula de matemática, o papel do professor consiste em fazer com que os significados pessoais dos alunos evoluam gradualmente para significados matemáticos (Bussi & Mariotti, 2008). De acordo com estas autoras, esta atividade sígnica do aluno é gerada na sua mente por meio de *ferramentas psicológicas*. Nesta perspetiva, quando o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares de uma tarefa está a despertar no aluno a necessidade de construir analogias a raciocínios e experiências matemáticas anteriores. Por outro lado, quando o professor admite ou refuta hipóteses que vão sendo construídas pelos alunos está a incentivar o aluno para que ele continue a atribuir significados matemáticos que o permitam construir estratégias para desenvolver ou testar tais hipóteses. E, quando o professor promove e faz sínteses ao longo do raciocínio dos alunos está com isto a usar intencionalmente processos que conduzem os significados pessoais do aluno aos significados matemáticos. Tais processos promovem a atividade mental do aluno que ocorre através dessas *ferramentas psicológicas*. E, por sua vez, tais processos usados pelo professor tornam-se meios de promover a aproximação do conhecimento dos alunos aos conhecimentos matemáticos, aquando da realização de uma tarefa. Estes processos podem ser acompanhados por instrumentos como as tarefas matemáticas, pela calculadora gráfica ou outro software intencionalmente proposto pelo professor na aula de matemática, que Rabardel designa por *artefactos* (Hillman, 2014). Tais artefactos são *instrumentos de mediação semiótica*. Para Rabardel a produção de um signo depende do uso de um artefacto. Tal signo, por sua vez, pode ser espontâneo ou explicitamente requerido por tarefas específicas propostas pelo professor (Mariotti, 2009). Em qualquer dos casos, a principal característica dos signos é a sua estreita ligação com as ações que decorrem do uso do artefacto (Mariotti, 2009, p.430).

Um signo auxilia a construção de um significado durante a resolução de uma tarefa, tal como a construção de uma analogia durante um raciocínio indutivo, ou o uso da memória na construção de um raciocínio abdutivo. Por sua vez, um artefacto acompanha a tarefa tendo a função de promover a construção de significados, tal como um algoritmo, ou uma determinada função da calculadora gráfica.

Assumiremos neste estudo, e concordantemente com Peirce, que toda a atividade sígnica é por si só um signo e, consequentemente, por tal atividade se identificar nalgum momento ou nalguma perspetiva com o seu signo, consideraremos os conceitos de signo e significado como interdependentes. De acordo com D'Amore (2007), Bishop e Goffree (1986), Ponte e Serrazina (2000), Bussi e Mariotti (2008) e Mariotti (2009), neste trabalho consideramos que a atribuição de significados, individuais e coletivos através do uso de artefactos – como as tarefas propostas pelo professor aos alunos em sala de aula, é fundamental para a aprendizagem.

2.4. A mediação semiótica de significados matemáticos

Atualmente tem sido profundamente discutido o conceito de *mediação de significados*. O termo *mediação* deriva do termo *mediar*, que se refere a um processo que envolve 1) alguém que medeia, isto é, *um mediador*; 2) alguma coisa que está a ser mediada, isto é, *um conteúdo* que está a ser promovido; 3) alguém ou algo que está sujeito à mediação e para quem a mediação provoca alguma alteração, isto é, *o mediado*; 4) as circunstâncias da mediação, ou seja, a) os meios da mediação, *a modalidade* e b) *o local* em que a mediação ocorre. (Bussi & Mariotti, 2008).

Os signos e os artefactos acompanham a tarefa e deles depende a mediação semiótica do professor. De acordo com Mariotti (2009), quando o processo de mediação semiótica é desencadeado na sala de aula, alunos e professor podem estar envolvidos, assumindo um objetivo comum orientado para a matemática, emergidos numa cultura social (p.430) própria da sala de aula. Neste processo, o professor desempenha uma função crucial, pois é-lhe requerida a função de *mediador cultural,* que delineia estratégias de modo a construir uma ponte entre as perspetivas individuais e sociais dos alunos (Mariotti, 2009, p.430). No processo de mediação semiótica, Bussi e Mariotti (2008) distinguem três categorias de signos: 1) *Signos artefacto*, que se referem ao contexto em que o artefacto é usado e nascem da atividade com o artefacto, dão origem a significados pessoais estreitamente relacionados com a experiência do sujeito; 2) *Signos pivot*, que se referem a ações específicas que promovem a passagem do contexto do artefacto para o contexto matemático; e, 3) *Signos matemáticos*, que se referem a contextos matemáticos e estão relacionados com significados matemáticos, como, por exemplo, as proposições, as definições, as demonstrações.

Por um lado Bussi e Mariotti (2008) distinguem *signos artefacto*, *signos pivot* e *signos matemáticos*. Por outro lado, Peirce categoriza os signos em *signos ícones*, *signos índices* e *signos símbolo*, associados, respetivamente, ao raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo. Na construção do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções deste estudo, consideramos que a categorização de signo de Bussi e Mariotti (2008), alicerçada em Vygotsky, enriquece a categorização de Peirce, pois realça a vertente social e cultural, bem como o papel fundamental da interação, na construção de signos pelos alunos e na respetiva mediação pelo professor.

Apesar da construção da mente consciente e da construção fisiológica de signos numa mente consciente ser um processo neurológico complexo, que imerge na neurociência e que, por isso, não constitui objeto deste estudo, não deixam de ser curiosas as analogias que podemos tecer entre as três categorias universais de Peirce e de signos de Bussi e Mariotti e as três fases que Damásio (2010) apresenta para a construção do "eu consciente" [1.ªfase) *proto-eu*, fase caracterizada por sentimentos espontâneos do corpo (sentimentos primordiais); 2.ªfase) *eu nuclear*, fase caracterizada por uma modificação do proto-eu através de uma interação entre o organismo e um objeto exterior; e 3.ªfase) *eu autobiográfico*, fase caracterizada por pulsos do eu nuclear que ficam momentaneamente ligados num padrão coerente de larga escala] (p.229).

Neste estudo, consideramos que o processo de mediação semiótica de significados assume uma função determinante no ensino-aprendizagem do conceito de parâmetro em funções, em que o professor é o mediador que promove significados matemáticos a partir de significados pessoais dos alunos, sob as três categorias universais do pensamento definidas por Peirce. Assumimos que ao professor cabe a função de mediar o raciocínio dos alunos desde a primeiridade até à terceiridade. Importa referir que, segundo Peirce, na primeiridade ocorre o raciocínio abdutivo que é o responsável pela criação de um signo, a partir dos sentidos e do juízo percetivo. Para Peirce, o juízo percetivo é a fonte do conhecimento (Serra, 1996) e embora os juízos percetivos sejam particulares, singulares de cada sujeito, eles não deixam de envolver a generalidade, possibilitando assim a dedução de proposições gerais, pelo raciocínio a que Peirce chama abdução (p.8) – toda a abdução envolve um ato de interpretação, de atribuição de significado, que não tem nem o rigor formal da dedução nem o caráter de confirmação experimental da indução (p.18).

A atividade sígnica dos alunos ocorre quer sob *um modo de produção individual de signos*, quer *sob um modo de produção coletiva de signos* (Mariotti, 2009, p.431). O papel do professor é, portanto, fundamental, e não incidental - cabe ao professor promover a construção de uma sequência de significados. A esta sequência Bussi e Mariotti (2008) chamam *ciclo didático*. Sob esta perspetiva, a estrutura de uma sequência de ensino pode ser delineada como um ciclo onde diferentes tipologias de atividades têm lugar, almejando desenvolver as componentes de um processo semiótico completo. Este ciclo inicia-se geralmente quando os alunos são confrontados com tarefas a serem realizadas, ou seja, com o *artefacto*. E é nesta fase que, neste estudo, acreditamos que ocorre a abdução, a apreensão imediata que gera atividade sígnica no aluno, que cabe ao professor a função de mediar. Após a atividade com o artefacto, o processo de atribuição de significados prossegue, segundo Bussi e Mariotti (2008), com a produção individual de signos pelos alunos, seguida da produção coletiva. Contudo, as autoras frisam que, estas fases não ocorrem necessariamente de modo sequencial, elas podem misturar-se e alternar-se. Porém, formam um ciclo interminável no qual se centra a função de mediação semiótica do professor e no qual se sustenta o processo de ensino-aprendizagem.

Os signos relacionados com o uso do artefacto, de modo individual e de modo coletivo, formam-se porque os alunos, ao trabalharem em pares ou em pequenos grupos, interagem socialmente, fazendo acompanhar os seus raciocínios por palavras, esboços e gestos, dando origem a novas palavras, novos esboços, novos gestos e, inerentemente, novos signos. E assim por diante gerando-se um ciclo. Por outro lado, em tal ciclo, e de acordo com aquelas autoras, os alunos estão individualmente envolvidos em diferentes atividades semióticas, principalmente nas produções escritas. Por exemplo, se depois de usarem o artefacto, os alunos forem convidados a escrever relatórios individuais nos quais conste a sua experiência e a sua reflexão, incluindo dúvidas e questões levantadas, eles envolvem-se individualmente em processos semióticos, ou seja, envolvem-se na produção de signos relacionados com o artefacto. E, embora o intercâmbio social durante as atividades com o artefacto, ou as discussões coletivas que decorram desse intercâmbio, envolvam semiótica, este tipo de atividade no aluno é diferente, na medida em que requer uma contribuição pessoal. Quando confrontado com a produção individual de significados, como acontece num texto escrito individual, ou num teste de avaliação, o aluno produz de modo individual sinais gráficos, que, pela sua natureza, começam a separar-se da contingência da ação desse aluno quando situado em grupo (Bussi & Mariotti, 2008).

Para que, na primeira fase do processo de significação, a imediaticidade sígnica do raciocínio do aluno (enquanto interpretante) dê origem a algo através do qual ele possa conhecer mais, implicando-se em atividade sígnica e progressivamente em significado, o ponto fulcral da mediação do professor é, de acordo com Bussi e Mariotti (2008), o duplo papel desempenhado pelo artefacto semiótico. Segundo estas autoras, para que o artefacto possa ser plenamente explorado, ele deve ser usado como um *meio de realizar algo* e, complementarmente, como um *instrumento de mediação semiótica* para alcançar um objetivo didático. No que refere ao uso do artefacto sob as duas vertentes expostas por Bussi e Mariotti (2008), importa destacar a relevância da escolha e da construção de uma tarefa, pois pretende-se que esta funcione como instrumento facilitador da criação de significados, ou seja, como bom artefacto.

Neste contexto, as tarefas matemáticas selecionadas pelo professor parecem ocupar, assim, um lugar central na atividade matemática do aluno. Rezat e Sträßer (2012) adaptaram o clássico triângulo didático *professor-aluno-matemática* e definiram o *tetraedro didático* em que os vértices são *professor-aluno-matemática-tarefa*.

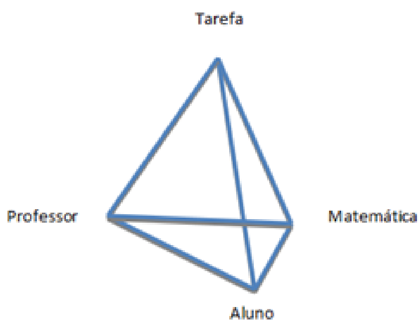


Figura 2.1: Tetraedro socio-didático, Rezat e Sträßer (2012).

Esta nova conceção de relações didáticas sugere que as ligações representadas pelos lados do triângulo didático inicial indiciam em si mediação semiótica. Cada face triangular do tetraedro mostra uma perspetiva particular do papel das tarefas no ensino-aprendizagem da matemática. O papel didático do professor, descrito por estes autores como um *orquestrador da atividade matemática do aluno* é representado pelo triângulo *professor-tarefa-alunos*. O triângulo *alunos-tarefa-matemática* apresenta a tarefa como mediadora da atividade matemática dos alunos. O triângulo *professor-tarefa-matemática* descreve a atividade de mediação semiótica do professor em torno da tarefa. O triângulo didático original *professor-aluno-matemática* constitui a base do modelo de ensino-aprendizagem da matemática. A estrutura tetraédrica representa a complexidade do ensino e da aprendizagem em sala de aula e proporciona-nos uma reflexão sobre o papel didático que as tarefas podem assumir. (Rezat & Sträßer, 2012). De facto, a face triangular *alunos-tarefa-matemática* apresenta-nos uma nova perspetiva das tarefas - vistas como artefactos de mediação semiótica. Estas podem desempenhar, por si, um papel mediador no ensino e na aprendizagem da matemática. Tais artefactos podem ser livros didáticos de matemática, tecnologias digitais, fichas de trabalho, bem como a própria linguagem (Clarke, Strømskag, Johnson, Bikner-Ahsbahs, & Gardner, 2014).

É reconhecido que, a resolução de problemas, de tarefas de investigação e de exploração podem funcionar como meios promotores dos processos de significar. Por um lado, no âmbito da resolução de problemas, Pólya (2008) desenvolveu princípios heurísticos com a finalidade de auxiliar os alunos a desenvolverem capacidades imprescindíveis para a resolução de uma determinada situação, ou compreensão de uma dada demonstração. A heurística de Pólya alicerça-se em processos fundamentais de análise, exploração, verificação e reflexão (Polya, 2008). Por outro lado, a atividade de investigação matemática desenvolve capacidades como: analisar, explorar, verificar, refletir, refutar, experimentar e demonstrar. A implementação de investigações matemáticas na sala de aula permite criar uma continuidade evolutiva na heurística de Pólya (Pereira & Saraiva, 2005). Acrescem ainda atividades matemáticas como modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjeturar e provar, que são, segundo Schoenfeld (1985), atividades com verdadeiro sentido matemático, ou seja, aquilo que a matemática realmente é (Ponte & Serrazina, 2000; Schoenfeld, 1985).

Na exploração de situações do mundo real através de construções visuais e algébricas, que contêm aspetos importantes e úteis para o processo de criação matemática (Costa, 2002), a tecnologia assume um papel fundamental, especificamente a calculadora gráfica e o uso de programas computacionais de modelação. Tais instrumentos podem ser entendidos como artefactos de mediação semiótica compreendidos na face triangular *alunos-tarefa-matemática* do *tetraedro didático* definido por Rezat e Sträßer (2012). De facto os alunos, com base nesses artefactos, podem analisar mais exemplos ou formas de representação num ou em vários registos de representação semiótica, formular e explorar conjeturas de forma mais rápida e fácil do que é possível realizar manualmente. O poder da representação gráfica e da tecnologia possibilitam o acesso a modelos visuais que são poderosos artefactos: a tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações e explorações dos alunos, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspetivas (NCTM, 2000).

Planificar atividades didáticas, que visem fazer emergir significados, constitui a base sobre a qual o professor organiza a evolução da aprendizagem dos alunos – pretendendo-se que os significados pessoais do aluno evoluam gradualmente para significados matemáticos.

Chapman (2013) definiu o conceito *conhecimento matemático da tarefa*. Este conhecimento do professor refere-se à capacidade para selecionar e desenvolver tarefas que promovam nos alunos a compreensão dos conceitos matemáticos, captando o seu interesse e a sua curiosidade e otimizando o potencial de aprendizagem de tais tarefas. Este conhecimento do professor refere-se a aspetos particulares, tais como: i) compreender a natureza da tarefa que *vale a pena* – por exemplo, aquelas que podem ser resolvidas de várias maneiras e que apelam ao uso de múltiplas representações, que permitem conectar várias ideias matemáticas importantes e que requerem dos alunos justificações, interpretações e conjeturas; ii) capacidade de identificar, selecionar e criar tarefas matematicamente ricas em conteúdo e que, pedagogicamente, proporcionem aprendizagem matemática significativa para o aluno – por exemplo, tarefas com interesse pessoal para os alunos, às quais os alunos atribuam significado; iii) conhecer o nível de exigência cognitiva da tarefa, porque é necessário que esta se adeque à capacidade de compreensão dos alunos; iv) conhecer as várias formas de promover aprendizagem nos alunos com uma determinada tarefa, pois todos os alunos são diferentes uns dos outros e aprendem matemática de forma diferente uns dos outros; v) compreender como é que o professor pode influenciar o aluno a dar sentido à matemática aplicada na resolução da tarefa; e, vi) quais os aspetos da tarefa que permitem organizar e orquestrar o trabalho dos alunos – como por exemplo *o que perguntar para desafiar os alunos, como apoiar os alunos sem pensar por eles e sem eliminar o desafio* (Chapman, 2013).

A mediação subjacente ao conceito de *ciclo didático* tem, para Mariotti (2009), padrões de intervenção do professor, que se agrupam em dois pares de categorias. Ao primeiro Mariotti (2009) chamou *Questionamento para voltar atrás na tarefa e Focalização num certo aspeto do uso do artefacto*, *"Ask to go back* and *Focalize on certain aspects of the use of the artifact"* (p.434). Neste padrão de intervenção, o professor questiona os alunos levando-os a construir, realmente ou fazendo uso apenas da mente, a experiência que tiveram com o artefacto. O objetivo é reconstruir o contexto do artefacto e fazer emergir significados que decorrem dessa reconstrução. Segundo Mariotti (2009), esta atividade resulta usualmente na produção (ou no reemergir) de *signos artefacto*, que se revela fundamental para o início (ou para o reinício) do desenvolvimento de novos signos. (Mariotti, 2009, p.435).

Ao segundo par, aquando da mediação de significados dos alunos, Mariotti (2009) chamou *Questionamento para uma síntese e Fornecer uma síntese*, *"Ask for a synthesis* and *Provide a synthesis"* (p.434). Este padrão de intervenção complementa o padrão anterior. Aqui, o professor foca a sua atenção para aspetos particulares da experiência dos alunos (passada ou presente). O professor atua de modo mais explícito ou menos explícito, fazendo uso de gestos e expressões, reforçando e realizando uma determinada operação que destaque e delimite uma parte da experiência dos alunos. Frequentemente, ao seguir uma intervenção do tipo ‘voltar à tarefa’, enfatizar certos significados (já construídos e partilhados na turma) e selecionar aspetos de tais significados, o professor promove o desenvolvimento de *signos matemáticos* bem como a ligação entre eles, que constitui o objetivo desta fase da intervenção do professor (Mariotti, 2009, p.437).

Neste estudo, no método de ensino aplicado aos parâmetros em funções construído, a proposta pedagógica foi delineada de acordo com três níveis algébricos previstos intencionalmente (N1, N2 e N3), em cada um dos quais o professor pretende promover significados matemáticos nos alunos – que categorizamos sob quatro graus (significados de grau0, grau1, grau2 e grau3), de acordo com critérios que detalharemos no capítulo seguinte. Na criação destes significados, o professor atua como mediador, com instrumentos de mediação semiótica intencionais, nas diferentes fases do raciocínio do aluno – tais como o uso e a promoção de analogias e de sínteses, bem como a focalização do raciocínio do aluno para aspetos particulares de uma determinada tarefa ou raciocínio. Com tal modo de agir, o professor intenciona desenvolver as componentes de um processo semiótico que se considera completo quando, na atividade sígnica construída do trabalho com cada artefacto, o aluno desenvolve significados de grau 3. Neste trabalho consideramos como artefactos todas as tarefas que integram a proposta pedagógica, bem como todos os instrumentos usados pelo professor e pelos alunos – tal como a calculadora gráfica, o material manipulável, entre outros – usado durante a atividade sígnica dos alunos.

De acordo com Schoenfeld (2007), Ponte e Serrazina (2000), Pereira e Saraiva (2005), consideramos ainda que, através da tentativa de resolução, ou demonstração, de uma determinada investigação surgem novas investigações e alarga-se o conhecimento, desenvolvendo-se o pensamento matemático, especificamente o pensamento algébrico. É este tipo de pensamento, fomentado por atividades que estimulam continuamente o processo de significação, como as intervenções requeridas ao professor durante a mediação semiótica de significados no ciclo didático de Bussi e Mariotti, que se espera ver desenvolvido nos alunos ao longo deste estudo. Na construção e implementação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções consideramos o conceito de mediação semiótica definido por Bussi e Mariotti, associado à atividade sígnica dos alunos sob três níveis e graus de significados.

A necessidade que a investigadora sentiu em categorizar os significados que os alunos dão ao parâmetro em cada uma das diferentes fases da sua aprendizagem, conduziu esta investigação até à diferenciação dos significados dos alunos nos quatro graus que detalharemos posteriormente. O modo como os alunos usam os artefactos, atribuem significados, apreendem, compreendem e interpretam, carregado de riqueza de conteúdo, constituiu a raiz da construção do nosso método de ensino aplicado aos parâmetros em funções que à frente descreveremos.

2.5. As representações matemáticas

O homem só conhece o mundo porque de alguma forma o representa e só interpreta essa representação numa outra representação, a que Peirce chama interpretante da primeira. Daí que o signo seja qualquer coisa que acontece para alguém acerca de algo, nalgum aspeto ou por qualquer motivo, criando na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido (Peirce, 1978, p.215) – sendo que, em ciência, tal ciclo conduz à verdade dependendo dos signos que são *representamen*. Sob este propósito, já no século XVIII, Kant (1724-1804) defendeu que em ciência *a verdade é a conformidade entre a representação com o seu objeto*. Porém, em qualquer circunstância, um signo é sempre qualquer coisa que para se conhecer é necessário representar (Santaella, 2002). A representação que uma pessoa faz de um objeto é a representação dessa pessoa e pode ser diferente das representações que outras pessoas fazem do mesmo objeto (Fidalgo,1995, p.32). Ao representarmos, melhoramos em nós mesmos a própria capacidade de representar a tal ponto que, quando defendemos uma ideia, sentimos que ela é nossa e esse sentimento de apropriação gera gosto e um sentido de identidade com e pela própria representação. Sob esta forte perspetiva criadora de identidade, John Dewey (1859-1952) defendeu que o processo de educação engloba vertentes intrínsecas ao próprio indivíduo como a construção e gestão dos seus próprios significados associadas ao meio e à sociedade a que pertence, onde a experiência assume um papel preponderante na educação do indivíduo - aprender é reconstruir com base na experiência, convertendo a informação num bem intelectual (Dewey, 2007).

Sendo a semiótica uma das áreas do saber na qual se estuda o modo de dar significado a tudo o que nos rodeia, quando pensamos e sentimos, quando damos significado a algo, a esse significado atribui-se uma representação. O signo só é signo se carregar o poder de representar, porque o signo não é o objeto. O signo apenas está no lugar do objeto. Por isso o signo só representa o objeto de um certo modo, numa certa capacidade, numa certa perspetiva, num certo momento. Por exemplo, a palavra laranja, pode significar uma fruta, mas também pode significar uma cor, pode significar o pôr-do-sol, pode significar energia, calor, fogo. Ora, assim, o signo só pode representar o seu objeto para o seu intérprete, porque representa o objeto na mente desse intérprete e essa representação está relacionada com o objeto pela mediação do signo. Portanto, o significado de um signo é outro signo – seja este uma imagem mental ou qualquer coisa física, seja essa qualquer coisa uma ação, um gesto, uma palavra, a manifestação de um sentimento (de alegria, de medo, de raiva, …) ou o próprio sentimento. Porque "essa coisa" seja lá o que ela for, que é criada na mente pelo signo, é, por si, um outro signo.

A comunicação estabelece-se através de representações e os objetos que se estudam são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem dar significado a diferentes situações. Portanto, para o ensino da matemática em geral é necessário considerarmos diferentes formas de representação do mesmo objeto matemático. Importando, por isso, perceber os diferentes significados que os alunos atribuem em diferentes fases do seu pensamento matemático, concretamente o algébrico, como nas fases de primeiridade, secundidade e terceiridade definidas por Peirce.

Para D'Amore (2006), um objeto matemático é tudo o que se denota e tudo a que se atribui significado, quando construímos, comunicamos e aprendemos matemática, tal como: a linguagem (termos, expressões, notações, registos orais, gestuais e escritos), um conceito, uma ação (algoritmo, procedimento, operação), um argumento (dedução, indução, validação), entre outros. Para aquele autor os objetos matemáticos interagem uns com os outros, estabelecendo uma dependência representacional, ou seja, um deles é colocado no lugar do outro, ou é usado por outro – ao que este autor designa por objetos em função semiótica (D'Amore, 2006). Para Duval (1995), a matemática é um domínio do saber em que podem ser usadas diferentes formas de representação semiótica. Afirma, ainda, que os problemas relativos à aprendizagem da matemática estão associados à multiplicidade dos diferentes sistemas de representação semiótica utilizados, e afirma que grande parte da dificuldade está em passar de um tipo de representação para outro. Para aquele autor há dois tipos de representações: as semióticas e as não semióticas. Estas últimas representam significados mentais caracterizados por ideias ou crenças que uma pessoa tem acerca de um objeto ou de uma situação; são representações inconscientes, caracterizadas pela execução automática de uma tarefa, pelos significados que se atribuem sem pensamento, ou sem consciência. Consideramos que, às representações não semióticas pertencem também as representações que, apesar de orientarem de modo eficaz o pensamento, constroem-se de modo não consciencializado pela mente e por isso não carregam consigo o potencial de serem representáveis – de facto, *"o cérebro cria mapas, informa-se a si próprio. A informação contida nos mapas pode ser usada de forma não-consciente, …"* (Damásio, 2010, p.89).

Neste estudo, e sob a perspetiva de Duval, inferimos que, por um lado, os signos que não carregam consigo a faculdade de serem representáveis, por pertencerem ao pensamento inconsciente do indivíduo, originam representações não semióticas. Por outro lado, e sob a perspetiva semiótica de Peirce, aos signos que não carregam consigo o potencial de serem representáveis, e que, por meio deles, não é possível inferir verdades numa inteligência científica, nem nenhum argumento nessa ciência, designamos por signos que *não são representamen*.

Também neste estudo, e corroborando Peirce, consideramos que, por um lado, as representações semióticas representam o objeto por meio do signo que se tem em mente e no qual se está a pensar. Por outro lado, e concordantemente com Duval, consideramos que as representações semióticas são conscientes do sujeito e o seu papel fundamental é muito específico porque elas são relativas a um sistema particular de signos representáveis em registos de representação distintos, tais como: linguagem formal, linguagem natural, escrita algébrica, gráficos cartesianos, figuras de um objeto matemático e outros tipos de representações para um mesmo objeto representado (Duval, 1995). Esta perspetiva de representação e de registo de representação semiótica apresentada por Duval é importante no modelo de ensino deste estudo. De facto, os significados que os alunos atribuem ao parâmetro em funções, quer dentro do mesmo registo de representação semiótica, quer entre dois ou mais registos de representação semiótica (linguagem formal, natural, …), podem ser diferentes de aluno para aluno, ou até diferentes para o mesmo aluno, por conseguinte, serem causa de conflito na sua aprendizagem e, por tal, constituírem objeto de análise do presente estudo.

Segundo Fidalgo (1995), já Brentano no século XIX tratara a temática da convertibilidade entre representações, ao fazer referência ao facto de certas representações assinalarem outras apesar de serem diferentes, justificando que é assim que, ao vermos de cima o tampo de uma mesa redonda dizemos que a mesa é redonda, e não mudamos de juízo quando a vemos de lado. À relação entre duas representações, pela qual uma assinala a outra, Brentano designa-a de convertibilidade, reiterando que o que cabe a uma representação cabe à outra e o que se associa a uma representação associa-se à outra (p.38). Ainda segundo Fidalgo (1995), também Husserl (1859-1938) se referiu às representações que são mediadas por outras, designando-as por representações simbólicas ou impróprias, por se tratarem de representações cujo conteúdo não é imediatamente dado à consciência, caracterizando-as como representações indiretas dadas apenas através de signos. Ou seja, as representações impróprias são, para Husserl, mediadas por signos (p.41). Para além do exemplo do tampo da mesa de Brentano, Husserl refere que quando descrevemos um objeto temos frequentemente tendência em substituir a representação direta (a que Husserl chama representação própria ou real) pela representação imprópria. É que, as características da representação imprópria permitem o reconhecimento posterior do objeto, podendo, desse modo, os juízos feitos com base nas representações impróprias (ou simbólicas) aplicarem-se ao próprio objeto. Por exemplo, afirmar que um edifício está muito bem situado é um juízo que assenta apenas na caracterização simbólica do edifício (Fidalgo, 1995, p.42).

Neste estudo, e sob a perspetiva semiótica de Peirce, consideramos que todo o signo que é um *representamen* carrega consigo o potencial de ser representável num sistema de verdades matemáticas. Corroborando Duval (2006), as representações permitem representar, tratar e converter objetos matemáticos. *Representar* ocorre num registo de representação específico, tal como num registo de representação simbólica, num registo de representação em linguagem natural, num registo de representação gráfica, num registo de representação esquemática, entre outros. *Tratar* ocorre através da manipulação de signos dentro do mesmo registo de representação, tal como, por exemplo, a simplificação algébrica de uma expressão, entre outros modos de tratamento. *Converter* uma representação é mudar a forma pela qual um objeto é representado; podemos converter significados entre dois ou mais registos de representação, por exemplo a conversão de uma expressão algébrica para a sua representação gráfica. Para aquele autor, a atividade matemática só começa quando se inicia o confronto de significados entre, pelo menos, dois registos de representação sobre o mesmo objeto matemático (Duval, 2006). Contudo, ao refletirmos acerca da aprendizagem dos objetos matemáticos podemos confrontar-nos com um paradoxo associado ao facto do objeto matemático não se poder identificar com nenhuma das suas representações, pois cada uma delas é apenas uma representação de um dos seus múltiplos significados. E, ainda que, como interpretantes, possamos formar um amplo e completo conjunto de significados e consequentes representações associadas a um mesmo objeto matemático, esses conjuntos não se identificam com o objeto, apenas o podem representar sob múltiplas características. Então, é somente através das representações semióticas que é possível fazer uma atividade sobre os objetos matemáticos. E, deste modo, surge a questão: Como é que os alunos em fase de aprendizagem conseguem não confundir os objetos matemáticos com as suas representações, se eles só podem ter relação com o objeto matemático através de tais representações? E, inversamente, como podem os alunos adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações, se ainda não têm uma aprendizagem conceptual dos objetos representados? Este paradoxo epistemológico foi debatido não apenas por Duval, mas também tem vindo a ser discutido sob o seguinte modo: Como chegamos a conhecer os objetos matemáticos, dado que só temos acesso a eles através de representações que nós mesmos construímos deles? (Radford, 2000, 2006).

No ensino e na aprendizagem da matemática, concretamente na álgebra, a conversão de representações não é, geralmente, um processo fácil e a sua construção pelo aluno exige, de um modo recorrente e desde tenra idade, a mediação do professor. Em torno do paradoxo epistemológico debatido por Duval têm sido realizados, um pouco por todo o mundo, muitos estudos sobre o modo como se ensina e se aprende matemática e concretamente álgebra. Em Portugal, a compreensão do conceito de função, por exemplo, tem sido tema de interessantes estudos (Andrade & Saraiva, 2012; Matos & Ponte, 2008; Pais & Saraiva, 2011; J. Ponte, Matos, & Branco, 2009; Saraiva, Teixeira, & Andrade, 2010). Alguns dos seus resultados indicam que a coordenação que os alunos fazem entre os vários registos de representação de uma função e de funções diferentes permite-lhes alcançar diversas perspetivas de uma função. Alguns estudos indicam que a coordenação entre os vários registos de representação semiótica (linguagem natural; linguagem algébrica; tabelar e gráfica) constitui uma forma de os alunos deixarem de confundir o objeto matemático função com a sua representação (Andrade & Saraiva, 2012). Saliente-se que as representações não constituem dados ou premissas da qual se parte quando se aprende matemática, elas ajudam-nos a chegar a algumas certezas acerca de uma situação quando estamos a investigar (Usiskin, Andersen, & Zotto, 2010).

O conceito de símbolo em álgebra pode analisar-se sob várias perspetivas, como a de Peirce (que apresentámos anteriormente) e, de modo complementar, estudar-se no ensino e na aprendizagem da álgebra (Center for Science, Board, & Council, 1998; Edwards & Trust, 1990; Stacey, Chick, & Kendal, 2004; Sutherland & Bell, 2000; Ursini & Trigueros, 2004; Usiskin et al., 2010). Neste estudo, quer na construção do método de ensino, quer na análise dos significados dos alunos quando estes aprendem parâmetros em funções, assumimos a perspetiva de Peirce no que refere ao conceito de símbolo (como um signo que antevê a terceiridade). Complementarmente, e corroborando Duval, consideramos que a análise às representações, ao tratamento e à conversão entre representações semióticas torna compreensível a atividade matemática dos alunos durante a sua aprendizagem.

2.6. Os signos e o raciocínio algébrico

Alguns autores apresentam a álgebra como aritmética generalizada, ou como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, ou como o estudo de relações entre quantidades, ou, ainda, como o estudo de estruturas (Usiskin, 1988). Sob estas perspetivas e recorrendo aos conceitos de representação, tratamento e conversão semiótica definidos por Duval, podemos inferir as seguintes interpretações: i) a álgebra pode ser considerada como aritmética generalizada, por exemplo, ao atribuirmos significado quando convertemos simbolicamente propriedades entre registos de representação semiótica – tal como a propriedade comutativa da adição representada num registo de representação aritmético por $3 + 5 = 5 + 3$ pode ser representada algebricamente por $a + b = b + a$; ii) a álgebra pode ser considerada como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, por exemplo, ao atribuirmos significado quando convertemos um problema representado num registo de representação em linguagem natural para um registo de representação em linguagem algébrica – tal como "quando adicionamos 3 ao produto de 5 por um número e obtemos 40, de que número se trata?" pode ser representado algebricamente pela seguinte equação $3 + 5x = 40$; iii) a álgebra pode ser considerada como o estudo de relações funcionais, por exemplo, na relação de proporcionalidade direta entre a área de um retângulo (representada num registo de representação simbólica por A) e o seu comprimento ou a sua largura (representadas num registo de representação simbólica respetivamente por C e por L) pode ser representada algebricamente por $A = C \times L$; e, iv) a álgebra pode ser considerada como o estudo de estruturas pelas representações associadas ao estudo de grupos, espaços vetoriais, entre outras estruturas algébricas.

Em cada uma destas perspetivas da álgebra, quando representamos significados sob um crescendo de generalização e formalização, emerge o pensamento algébrico. Este envolve não apenas a manipulação de expressões e resolução de equações, mas também as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas (Kaput, 2000). Por isso, neste estudo, consideramos que a vertente algébrica da aritmética generalizada e o pensamento funcional (ou seja, o pensamento requerido no estudo das funções) são duas vertentes essenciais do pensamento algébrico. De facto, a *aritmética generalizada* [baseada no caráter potencialmente algébrico da aritmética, pois é a partir da estrutura da aritmética que se podem construir os aspetos sintáticos da álgebra] e o *pensamento funcional* [que inclui o estudo das funções, das relações, das variações e (co)variação, da conceção da letra enquanto variável] assumem-se como duas vertentes essenciais do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005). Este tipo de pensamento inclui a generalização e o raciocínio, expressos em sistemas de símbolos organizados. Inferindo-se assim que, os dois grandes aspetos do pensamento algébrico são: i) a generalização e a sua extensão gradual em sistemas de símbolos convencionais e ii) o raciocínio e a ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados (Kaput, Carraher, & Blanton, 2008). De acordo com estes autores, o primeiro aspeto refere-se ao *pensamento representacional* que ocorre nos processos mentais pelos quais um indivíduo cria significados num sistema de representação. O segundo aspeto refere-se ao *pensamento simbólico* que está associado ao modo como o indivíduo compreende e usa um sistema de símbolos e as respetivas regras de uso.

Recorrendo ao conceito de pensamento algébrico que apresentámos e aos conceitos de *representação, tratamento* e *conversão* semiótica definidos por Duval (2006), podemos afirmar também que as duas vertentes essenciais da álgebra referidas atrás (a aritmética generalizada e o pensamento funcional) englobam todos os significados e respetivas representações semióticas efetuadas num, entre dois, ou entre vários registos de representação semiótica. Tratamos representações ao efetuarmos cálculos dentro do registo, como o aritmético por exemplo, quando simplificamos a expressão aritmética que resulta da substituição das variáveis dependente, independente e do parâmetro por valores aritméticos concretos na expressão da função inicial considerada. Convertemos representações ao darmos significado a um problema de indução matemática e o representamos sob a forma de um sistema de símbolos que temos de organizar e que resulta numa estrutura algébrica.

Há autores, como Arcavi (2006), que fazem emergir do pensamento algébrico a noção de sentido do símbolo. Aquele autor considera que no pensamento algébrico deve incluir-se o sentido do símbolo, que define como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006). Nas expressões algébricas, os símbolos podem ser designados, interpretados e usados de várias formas e em múltiplos contextos (Hart & Team, 1981), veja-se o caso de: i) letra avaliada, ii) letra não considerada, iii) letra considerada como objeto, iv) letra considerada como incógnita, v) letra considerada como número generalizado e vi) letra considerada como variável. Recorrendo ao conceito de representação semiótica definido por Duval (2006) e retomando os conceitos de ícone, índice e símbolo, de abdução, indução e dedução associados às fases de primeiridade, secundidade e terceiridade de Peirce (1978), vamos discutir as seis interpretações da letra apresentadas.

Letra avaliada, por que, por exemplo, se atribui significado ao converter a letra de um registo de representação algébrica para um registo de representação aritmética – tal como o significado da expressão $2a+1$, converter-se-á em 7 ao concretizar a letra a pelo valor aritmético 3. Nesta situação a letra a assume-se como um ícone, no decurso de um raciocínio abdutivo, enquanto, por exemplo, não consideramos as implicações matemáticas que decorrem, no contexto em que nos encontramos, da substituição da letra a pelo número 3. E enquanto não procedemos à operação matemática que fará resultar o valor 7, quer a letra a, quer o número 3, quer a própria expressão $2a+1$ são ícones. Estes ícones substituem-se primeiramente, como resultado de um primeiro impulso, num raciocínio abdutivo, ou substituem qualquer coisa no imediato, não importa o quê, apenas se representam mutuamente ou representam um objeto a que se refere a expressão $2a+1$ pela troca direta da letra *a* pelo número *3*. Porém, quando após essa troca a expressão $2a+1$ resultar representada por $2\times3+1$ e se, nesse instante/situação, o interpretante der um significado de relação aos ícones 2 e 3, multiplicando-os e obtendo o significado referente à representação $2\times3+1$, quer a letra *a*, quer a expressão $2a$ passam a ser índices, em resultado deste raciocínio indutivo do interpretante. Tais ícones passam a ser índices por deixarem a imediaticidade que os caracterizava como primeiros/imediatos na etapa anterior e passarem a ter, numa segunda fase, o caráter representativo da existência de um signo que prescreve e indicia uma relação, neste caso a relação de multiplicação. Contudo os ícones e índices que até aqui significámos não afirmam nada, pois o número 7 é o que representará, numa terceira fase, o resultado, ou melhor, o valor da ação da letra *a* quando substituída em $2a+1$ pelo valor 3. E quando tal significação é assim conseguida, largamos a fase da secundidade e entramos na terceira fase, a que Peirce designou por terceiridade, por darmos significado às relações inerentes da substituição que foi feita, a tal ponto que, o valor 7 antevê, engloba e legitima os significados que lhe antecederam. Tal raciocínio sintético decorre do raciocínio dedutivo do interpretante ao sintetizar e legitimar, fundamentando a sua argumentação em símbolos. E quando esta significação é conseguida, quer a letra *a*, quer a expressão $2a+1$, quer o número 7 são símbolos.

Na interpretação de *letra não considerada*, por que, por exemplo, se atribui significado ao efetuar transformações dentro do mesmo registo de representação, sem alterar o significado da letra, tal como, por exemplo, se $a+b=1$ então $a+b+4=5$, também encontramos ícones e abdução, índices e indução, e símbolos e dedução. A expressão $a+b=1$ assume-se num raciocínio abdutivo como um ícone enquanto não consideramos as implicações matemáticas que decorrem da substituição da expressão $a+b$ pelo valor 1. Porém, quando na expressão $a+b+4$ o interpretante der um significado de relação aos ícones $a+b$ e 1, um significado de igualdade por exemplo, e obtiver o significado referente à representação $a+b+4=1+4$, quer a expressão $a+b+4$, quer a expressão $1+4$, quer a expressão $a+b+4=1+4$ passam a ser índices e tal significado ocorreu em resultado desse raciocínio indutivo do interpretante. Tais ícones passam a ser índices por deixarem a imediaticidade que os caracterizava na fase abdutiva do raciocínio e passarem a ter, numa segunda fase, o caráter representativo da existência de um signo que indicia uma relação, neste caso a relação de igualdade. Contudo os ícones e índices que até aqui significámos passam a significar, numa terceira fase, o resultado, isto é, passam a declarar o valor da ação feita sobre a expressão. E quando tal é conseguido, largamos a fase da secundidade e entramos na terceiridade, por darmos significado às relações inerentes da substituição que foi feita, a tal ponto que, o valor 5 antevê, engloba e legitima os significados que lhe antecederam sob raciocínio dedutivo do interpretante. E quando esta significação é conseguida, quer a expressão $a+b=1$ quer a expressão $a+b+4=5$ são símbolos.

De modo análogo conseguimos identificar e descrever as três fases de Peirce nas restantes interpretações que Küchemann dá à letra. Para além da letra avaliada e da letra não considerada, Küchemann diferenciou também a letra como objeto, como incógnita, como número generalizado e como variável. *Letra como objeto*, por que, à semelhança da *álgebra como o estudo de relações entre quantidades* referida por Usiskin (1988), na relação entre a área de um retângulo, o seu comprimento e a sua largura (representadas num registo de representação simbólica respetivamente por A, C e por L) ser representada algebricamente por $A = C \times L$. Enquanto o interpretante não der significado à operação de multiplicação que fará resultar o significado de A como área de um dado retângulo, quer as letras A, L e C, quer a própria expressão $A = C \times L$ são ícones e o raciocínio do interpretante é abdutivo. Estes ícones substituem-se primeiramente ou substituem qualquer coisa no imediato, apenas representam a largura, o comprimento e a área do retângulo, mas não representam mais nada para além dessa *etiqueta*. Porém, quando após a significação icónica dada pelo interpretante através de abdução resultar o significado da área de um retângulo enquanto relação entre o seu comprimento e a sua largura, nesse instante/situação, o interpretante dá um significado de relação aos ícones C e L, multiplicando-os, antevendo o significado referente à representação $C \times L$. Nessa fase, quer a letras C e L, quer a expressão $C \times L$ passam a ser índices em resultado desse raciocínio indutivo do interpretante, por deixarem a imediaticidade que os caracterizava como primeiros/imediatos na etapa anterior e passarem a ter o caráter representativo da existência de um signo que prescreve uma relação, neste caso a relação de multiplicação das dimensões comprimento e largura de um retângulo. Posteriormente, entramos na fase de terceiridade quando damos significado à relação de multiplicação que foi feita, a tal ponto que, o significado de A antevê, engloba e legitima todos os significados anteriores, num raciocínio sintético do interpretante - o raciocínio dedutivo. E quando esta significação é conseguida, quer a letra A, quer as letras C e L, quer a expressão $C \times L$, quer a expressão $A = C \text{ x } L$ são símbolos.

Letra considerada como incógnita por que, por exemplo, se atribui significado à letra como um valor desconhecido que pode ser determinado, como ocorre com a incógnita x na equação $x + 5 = 7$. A equação $x + 5 = 7$ assume-se como um ícone enquanto não consideramos as implicações matemáticas que decorrem da equivalência e da determinação do valor x. Porém, quando na equação $x + 5 = 7$ o interpretante der um significado de igualdade aos ícones $x + 5$ e 7, e obtiver o significado da igualdade $2 + 5 = 7$, por exemplo, a equação $x + 5 = 7$ passa a ser um índice por deixar a imediaticidade que a caracterizava na etapa anterior e passa a ter, numa segunda fase, o caráter representativo da existência de um signo que indicia uma relação, neste caso a relação de inferência de que a substituição de x pelo valor 2 conduz a uma igualdade numérica, em que o raciocínio abdutivo inicial do interpretante passa a ser indutivo. O mesmo é válido se, por exemplo, o interpretante sentir necessidade de neutralizar o ícone 5 provocando uma relação subtrativa entre ícones $x + 5$

e 5 e dando-lhes significado na equação inicial, antevendo o significado do sinal = como um equilíbrio entre os membros da equação. E se na equação $x + 5 = 7$ o sinal = era um ícone fruto do raciocínio abdutivo imediato, a significação $x + 5 - 5 = 7 - 5$ antevê a secundidade caracterizada pelo significado do sinal = como um equilíbrio entre os membros da equação, sob um raciocínio indutivo do interpretante. Por outro lado, a mesma significação $x + 5 - 5 = 7 - 5$ também antevê a secundidade caracterizada pelo significado *elemento neutro da adição*, significado criado para isolar a incógnita x num dos membros da equação. Contudo os ícones e índices que até aqui significámos passam a estruturar, numa terceira fase, o valor de todas as ações feitas sobre a equação, sob um raciocínio dedutivo do interpretante. E quando tal é conseguido, o interpretante larga a fase da secundidade e entra na terceiridade, por dar significado às relações inerentes da substituição da incógnita *x* pelo valor 2, ou da ação propositada de anulamento do valor 5 que isola *x* num dos membros da equação, ou doutra qualquer ação provocada na equação, ou da conjunção de todas as ações, a tal ponto que, o valor 2 antevê, engloba e legitima os significados que lhe antecederam. E quando esta significação é conseguida, quer a equação $x + 5 = 7$, quer o sinal =, quer a equação $x + 5 - 5 = 7 - 5$ são símbolos, em resultado do raciocínio dedutivo do interpretante.

Letra considerada como número generalizado, por que, por exemplo, se atribui significado à letra quando a substituímos por vários valores e consequentemente procedemos a sucessivas conversões de um registo de representação algébrica para um registo de representação aritmética, como acontece à letra *n* na sucessão dos números naturais pares representada pelo termo geral $u_n = 2n$. Enquanto não dermos significado a n que fará resultar o significado de u_n como a sucessão de números naturais, neste caso sucessão de números pares, quer as letras u e n, quer a própria expressão $u_n = 2n$ são ícones que resultam do raciocínio abdutivo imediato do interpretante. Porém, quando após a significação icónica resultar o significado de $2n$ como 2×1, ou 2×2, ou 2×3, ou $2 \times \textit{qualquer número natural}$ sob um raciocínio indutivo do interpretante, nesse instante, o interpretante dá um significado de relação ao ícone $2n$ antevendo o significado de n como gerador de termos da sucessão de números naturais que se obtém da substituição de tal n por sucessivos valores naturais. Nessa fase, quer n, quer $2n$, quer $u_n = 2n$ passam a ser índices, por deixarem a imediaticidade que os caracterizava na etapa anterior. Posteriormente, entramos na fase de terceiridade quando damos significado à relação que existe entre a expressão $u_n = 2n$ e os sucessivos valores naturais pares que se obtêm. E quando esta significação sintética é conseguida, quer n quer $2n$, quer $u_n = 2n$ passam a ser símbolos, em resultado da dedução do interpretante ao significar sinteticamente a expressão $u_n = 2n$.

Letra considerada como variável, por que, por exemplo, se atribui significado à letra quando esta representa um conjunto de valores e consequentemente procedemos a múltiplas conversões de um registo de representação algébrica para um registo de representação aritmética, como, por exemplo, $A=\{1,3,5,7\}$. Enquanto não dermos significado a *A* e à própria representação $A=\{...\}$que fará resultar o significado de *A* como um conjunto de valores, quer a letra *A*, quer o sinal =, quer a própria expressão $A=\{1,3,5,7\}$ são ícones que resultam da imediaticidade do interprertante, ou seja do raciocínio abdutivo do interpretante. Porém, quando depois dessa abdução, resultar o significado de A como um conjunto de valores por que através dos quais podemos concretizar uma das variáveis de uma função definida nesse conjunto *A* (por exemplo), nesse instante, o interpretante dá um significado de relação ao ícone *A*, em resultado de um raciocínio indutivo. Nessa fase, quer *A*, quer $\{1,3,5,7\}$, quer $A=\{1,3,5,7\}$ passam a ser índices, por deixarem a imediaticidade que os caracterizava na etapa anterior. Posteriormente, entramos na fase de terceiridade quando atribuímos significado à relação que existe entre o conjunto de valores da variável dependente em consequência da substituição da variável independente por cada um dos valores do conjunto *A*, por exemplo na função $y=2x, x\in A$. E quando essa significação é assim conseguida, quer *A*, quer$\{1,3,5,7\}$, quer $A=\{1,3,5,7\}$ passam a ser símbolos em resultado da dedução feita pelo interpretante.

Para o desenvolvimento da investigação em Educação Matemática importam as características dos sistemas matemáticos de significados que se assumem na própria investigação, bem como a sua relação porque não há significados isolados. Há autores que referem que a cultura pode ser definida como o conjunto de costumes, rituais, crenças, ferramentas, designados por *elementos culturais* (Steinbring, 2006*)*, que interatuam em sistemas simbólicos que servem para transmitirmos as nossas ideias uns aos outros, e para transmitirmos os nossos conhecimentos a futuras gerações. Na verdade, não existiria comunicação sem a utilização de signos. A matemática é, por sua vez, um tipo específico de conhecimento, que se comunica com símbolos matemáticos que se usam através da tomada de consciência sobre '*quando fazer o quê*' e '*como fazê-lo*'.

Por sua vez, raciocinar é uma operação lógica, discursiva e mental em que o intelecto humano utiliza mecanismos de comparação, substituição e abstração para fazer inferências. A perspetiva que cada um tem sobre o que é o raciocínio matemático varia bastante. Para uns, ele é o raciocínio axiomático da dedução lógica e da inferência formal, como para Pitágoras, Descartes, Russell e Hilbert, por exemplo. Para outros, o raciocínio matemático assinala uma vasta capacidade geométrica e quantitativa que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, ambos rigorosos e sugestivos (Gibbs & Steen, 1999).

Neste estudo, e corroborando Peirce, as três modalidades de raciocínio inerentes às três categorias universais daquele autor – primeiridade, secundidade e terceiridade – nos quais fundamentamos a análise do conhecimento dos alunos quando aprendem o conceito de parâmetros em funções, são: i) o raciocínio abdutivo, através do qual novas hipóteses são propostas como candidatas explicativas da circunstância ou dos significado – trata-se de uma espécie de intuição que sugere hipóteses explicativas e procede passo a passo para chegar a uma conclusão; ii) o raciocínio indutivo, através do qual se testa uma hipótese que pode (ou não) corroborar uma lei geral e se testam raciocínios que compõem essa lei geral; e, iii) o raciocínio dedutivo, através do qual se infere uma conclusão a partir de leis gerais e das condições que especificam as circunstâncias ou os significados a serem explicados e sintetizados, quer decorram da generalização por indução, ou de outro modo de sistematizar. Frisamos ainda que, e também corroborando Peirce, o raciocínio abdutivo permite a expansão do conhecimento na medida em que, através dele, novas hipóteses podem ser criadas, residindo aí, de acordo com aquele autor, a essência da criatividade em ciência.

Nesta conjuntura, os signos e os significados algébricos assumem uma importância extrema, quer para a aprendizagem, quer para o ensino. A comunicação e a interação constituem dois tipos de sistemas ligados um ao outro numa relação mútua, que se impulsionam e impulsionam o próprio desenvolvimento da consciência. Neste estudo pretendemos promover a construção de significados dos alunos durante a aprendizagem da matemática, concretamente durante a aprendizagem de parâmetros em funções. Para tal, partimos de um método de ensino que construímos para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos matemáticos genéricos e estruturados, fazendo uso de tarefas matemáticas elaboradas e implementadas com base nesse método de ensino e que pretendem funcionar como artefactos de mediação semiótica dos significados matemáticos dos alunos. No nosso método de ensino consideramos a interação que ocorre do uso de três grandes tipos de signos – ícones, índices e símbolos – associados a três grandes tipos de raciocínios – abdução, indução e dedução. E é sob esta visão que, neste estudo, nos referimos aos significados algébricos, como resultado da atividade sígnica em contextos algébricos específicos.

Considerámos, na construção da proposta pedagógica do nosso método, e também na análise dos dados, as várias perspetivas da álgebra, como as indicadas por Usiskin e as várias interpretações distintas da letra enquanto símbolo algébrico, como as referidas por Küchemann. Para a definição dos três níveis do nosso método de ensino atendemos às duas principais vertentes do pensamento algébrico identificadas por Kaput. E, para a identificação e descrição dos diferentes graus de significados dos alunos, assumimos as categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade, bem como, e respetivamente, o raciocínio abdutivo e os signos ícones, o raciocínio indutivo e os signos índices, e o raciocínio dedutivo (associado à síntese e ou à generalização obtida por indução) e o símbolo, definidos por Peirce.

2.7. Da aritmética à álgebra

O pensamento matemático desenvolve-se de modo diferente em cada fase da nossa evolução, desde que somos crianças até sermos adultos (Tall, 2013). Há razões pelas quais os conceitos matemáticos que fazem sentido num contexto podem tornar-se problemáticos noutros. Segundo aquele autor, a experiência de uma criança quando trabalha um número inteiro em aritmética, por exemplo, afeta sucessivamente o entendimento posterior de frações, números negativos, álgebra, bem como a introdução de definições e demonstrações. No que refere ao raciocínio inerente à construção de conceitos, alguns autores trabalharam modelos nos quais estudaram métodos de acordo com os quais se desenvolve o raciocínio dos alunos. Lima e Tall (2008), por exemplo, referem que a atividade matemática é um processo baseado na perceção humana, na ação e reflexão e na evolução do simbolismo, processo que os autores designam por personificação conceptual. Neste processo, incluem-se as imagens/representações mentais e as conexões internas estabelecidas na mente de cada aluno durante o percurso crescente de simbolização, frisando que a compreensão é uma ferramenta essencial no caminho percorrido até chegar a um conceito matemático exprimido simbolicamente (Lima & Tall, 2008). Ainda segundo estes autores, no decurso da atividade matemática as ações são dinâmicas e são simbolizadas de modo a que os símbolos possam ser usados em dois sentidos, como conceito e como processo. Nesta visão sobressai a pertinência do processo na atividade matemática. Por sua vez, Tall e Vinner (1981) referem a noção de *concept image* (imagem do conceito). Trata-se da estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (Tall & Vinner, 1981). Para estes autores, há que promover nos alunos experiências ricas de modo a que eles sejam capazes de formar um conceito mais coerente. Isto não é tão fácil como parece, pois envolve um balanço entre a variedade de exemplos e de não exemplos necessários para ganhar uma imagem coerente e a complexidade que pode aumentar a exigência cognitiva para níveis não compreendidos pelos alunos (Andrade & Saraiva, 2012).

Fazendo referência ao caso particular de parâmetros em funções, se analisarmos as representações semióticas que, à partida, estão implícitas no tratamento algébrico das expressões $y=3x+\frac{2a}{x}, a\in IR, x\in IR\setminus\{0\}$ e $y=\frac{3x^2+2a}{x}, a\in IR, x\in IR\setminus\{0\}$, bem como na sua conversão, é de extrema relevância a diversidade e a riqueza de significados que é possível o aluno construir. Pese embora neste caso as expressões algébricas serem equivalentes (pois decorrem uma da outra em resultado de transformações algébricas dentro do mesmo registo de representação), atribuir significado ao quociente de uma família de funções quadráticas $y=3x^2+2a$ pela função linear $y=x$ requer significados algebricamente diferentes de atribuir significado à soma da função linear $y=3x$ pelo quociente entre uma família de funções constantes $y=2a$ e a função linear $y=x$. Neste estudo, aquando da análise dos dados faremos inferências associadas aos conceitos de conversão e tratamento de representações definidos por Duval.

Gravemeijer (2005), no trabalho com alunos no início da escolaridade, definiu níveis sucessivos da atividade matemática – de referência, genérica e formal. No primeiro, o aluno atribui significados a situações concretas, atua na situação específica do problema que lhe é proposto e cria um modelo para aplicar e resolver o problema com que é confrontado. No nível da atividade genérica, o aluno trabalha com as relações matemáticas que estão envolvidas no problema, cria um modelo para resolver esse problema, mas aplica-o (ou consegue aplicá-lo) a outros problemas análogos. No nível da atividade formal a atividade matemática do aluno torna-se independente da criação de um modelo que requeira aplicação, o aluno não necessita de recorrer a modelos, ou a problemas análogos que já resolveu. Estes níveis sucessivos de atividade matemática dos alunos são sintetizados por aquele autor em dois modelos: model/*of* (modelo/de) – modelo de uma dada situação concreta; e, *model/for* (modelo/para) – modelo para uma situação genérica (Gravemeijer, 2005). A transição de um modelo para o outro ocorre com uma mudança de pensar em modelar contextos de situações concretas para pensar num contexto de relações matemáticas. E distinguiu, nestes dois modelos, quatro níveis de atividade: 1.º) situacional, no qual cada interpretação e solução depende da compreensão de como atuar em contexto específico; 2.º) referencial, onde existe a criação de um modelo/de, que se refere à atividade de descrever procedimentos aplicáveis à situação específica; 3.º) geral, onde existe a criação de um modelo/para, que se pode aplicar a outras situações e no qual se trabalha com relações matemáticas; e 4.º) formal, no qual a atividade matemática não depende da criação ou adaptação de um modelo/para (Gravemeijer, 2005). Este autor defende que a compreensão dos alunos vai aumentando e os modelos vão evoluindo com base na modelação de situações reais da Matemática Realística (Freudenthal, 1986)[1]. Posteriormente, a atividade geral emerge nos alunos quando há uma perceção das relações matemáticas envolvidas na situação. Em seguida, a razão perde a dependência com a situação específica trabalhada, e o papel dos modelos muda gradualmente dando lugar à formalização com vida própria e independente dos níveis que a antecedem.

Neste estudo, considerámos o pensamento de Gravemeijer para a construção dos sucessivos níveis de ensino do nosso método e para estudarmos a sucessiva transição no

[1] Freudenthal (1905-1990) contribuiu com uma riqueza de ideias e ferramentas conceituais para o desenvolvimento da educação matemática - em contextos, fenomenologia didática, reinvenção guiada, matematização, constituição de objetos mentais, desenvolvimento do pensamento reflexivo, níveis nos processos de aprendizagem, desenvolvimento da atitude de um matemático e assim por diante (Freudenthal & Streefland, 1993).

pensamento algébrico requerido pelo aluno na aprendizagem de parâmetros em funções, de contextos concretos para contextos genéricos.

Em 1992, Sfard definiu *operacional concept* (conceção operacional) e *structural concept* (conceção estrutural) (Sfard, 2008; Sfard & Linchevski, 1994; Sfard & McClain, 2002) como estádios da aprendizagem. Na conceção operacional um conceito matemático, tal como o conceito de função (por exemplo), é considerado como um procedimento, como um resultado ou como um processo. No caso da aprendizagem do conceito de função, Sfard caracterizou a primeira fase da conceção operacional, que designou por *fase de interiorização,* pelas manipulações algébricas efetuadas que são acompanhadas por representações mentais; e a segunda fase da conceção operacional, que esta autora designou por *fase da condensação*, como sendo caracterizada pela investigação que o aluno faz entre relações algébricas e gráficas (por exemplo) dessa dada função.

Para esta autora, na conceção estrutural, um conceito é considerado como válido por si só, sem necessidade de aplicação para ser válido, onde o conceito tem a sua própria validade e existência. A conceção estrutural é, para Sfard, a terceira fase da aprendizagem, a que a autora chama *fase da reificação*, em que o aluno compreende as múltiplas representações que podem estar associadas a uma função (por exemplo) e compreende essa função como um objeto matemático com validade e existência próprias (Sfard & Linchevski, 1994). Na conceção estrutural, as noções matemáticas são estudadas como se se referissem a objetos reais, como estruturas que podem ser manipuladas segundo certas regras e combinadas em estruturas mais complexas (Sfard & Linchevski, 1994).

Contudo, Sfard (1994) refere que, uma vez reificado, um conceito pode servir de base à formação de conceitos de nível superior e permitir que um novo ciclo se inicie. No que refere às dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de função, Sfard refere que estas relacionam-se com a associação do conceito a apenas uma das suas formas de representação. Muitas vezes a representação algébrica é identificada com uma fórmula cuja funcionalidade se prende apenas a processos de cálculo, em que uma mudança na variável independente implica necessariamente uma mudança na variável dependente. Sfard acrescenta ainda que, embora a conceção estrutural seja difícil de atingir, ela deve ser estimulada sob dois pressupostos didáticos: i) os novos conceitos não devem ser introduzidos aos alunos em termos estruturais; e, ii) a conceção estrutural deve ser exigida apenas quando se torna indispensavelmente necessária.

Neste estudo, à semelhança do que considerámos do pensamento de Gravemeijer para a construção dos sucessivos níveis de ensino do nosso modelo, também considerámos o pensamento de Sfard na transição do pensamento algébrico de contextos operacionais, para contextos abstratos que implicam pensamentos estruturados.

Filloy, Puig e Rojano (2007), no âmbito da resolução de problemas aritmético-analíticos, definem um sistema de significados matemáticos (*MSS, Mathematical Sign System*) no qual desenvolvem métodos de resolução, tais como: i) o método das sucessivas inferências analíticas (*MSAI*), determinado pela estrutura lógica numérica inerente ao problema, que se identifica com o método analítico clássico de resolução de problemas, constituído por inferências lógicas de atuação e transformação que encaminham para a solução; e o ii) método analítico de sucessivas explorações (*AMSE*), determinado por sucessivas explorações de dados particulares relacionados com os dados do problema e das quais resulta a sua solução. Segundo estes autores, ambos os métodos, *MSAI* e *AMSE*, contribuem para a competência da utilização do iii) método cartesiano (*CM*), que consiste na abordagem algébrica usual da resolução de problemas. No método cartesiano, alguns elementos desconhecidos que constam no enunciado do problema são representados através de expressões com significado num sistema de significados matemáticos mais abstrato; por sua vez, o enunciado é traduzido através de uma série de relações desse sistema mais abstrato que encaminham para um ou vários enunciados, cuja descodificação implica uma regressão desse sistema para o sistema de significados original, produzindo a solução do problema (Filloy *et al.*, 2007). O desenvolvimento da competência do uso do método cartesiano implica, segundo os mesmos autores, sucessivas capacidades: 1.º) perceber a questão principal do problema, bem como o significado de cada desconhecido; 2.º) tornar os desconhecidos implícitos em desconhecidos explícitos; 3.º) criar novos desconhecidos, baseados na situação do problema, com os quais se podem criar e desenvolver um conjunto de estratégias em ação; 4.º) representar relações entre os vários desconhecidos; 5.º) identificar representações de relações de modo a encontrar elementos comuns entre uma ou mais dessas relações; 6.º) representar essas identificações através de uma equação ou expressão funcional; e, 7.º) usar procedimentos algébricos para resolver equações como forma de determinar o desconhecido do problema em causa. Neste estudo, na análise dos dados que se recolhem ao longo da implementação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções faremos inferências que reportam para os métodos de resolução de problemas apresentados.

Os três níveis do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções deste estudo foram construídos atendendo aos modelos de Gravemeijer, Sfard, Filloy, Puig e Rojano. Assim, para a construção do primeiro nível do modelo foi considerada a atividade referencial de Gravemeijer, na qual se presume uma atividade matemática do aluno num nível situacional, de atuação num contexto específico bem como a criação de um modelo aplicável a uma situação específica (modelo/de). Ainda para a construção do primeiro nível do método deste estudo foi também considerada a 1.ª fase da conceção operacional de Sfard – fase de interiorização, em que o aluno trabalha com manipulações algébricas acompanhadas de representações mentais, efetuadas, por exemplo, em torno de uma dada função envolvendo parâmetros. Também foram consideradas para a construção do primeiro nível as 1.ª e 2.ª etapas do método cartesiano de Filloy, Puig e Rojano, nas quais se pressupõe respetivamente que, o aluno perceba a questão principal do problema e que torne os desconhecidos implícitos em desconhecidos explícitos.

Para a construção do segundo nível do método foi considerada a atividade geral de Gravemeijer, na qual se presume que o aluno trabalhe com as relações matemáticas envolvidas e crie um modelo que se pode aplicar a outras situações, trabalhando-o matematicamente (modelo/para). Ainda para a construção do segundo nível do modelo deste estudo foi também considerada a 2.ª fase da conceção operacional de Sfard – fase da condensação, em que o aluno investiga relações, algébricas e gráficas (por exemplo) existentes na função envolvendo parâmetros. Também foram consideradas para a construção do segundo nível as 3.ª e 4.ª etapas do método cartesiano de Filloy, Puig e Rojano, nas quais se pressupõe, respetivamente, que o aluno crie novos desconhecidos e represente relações entre os vários desconhecidos.

Para a construção do terceiro nível do método foi considerada a atividade formal de Gravemeijer, na qual se presume que a atividade matemática do aluno se torne independente da criação ou da adaptação de um modelo. Ainda para a construção do terceiro nível do método deste estudo foi também considerada a conceção estrutural de Sfard – fase da reificação, em que o aluno compreende as representações que uma dada função com parâmetro(s) pode assumir, passando de uma a outra e entendendo-a como um objeto matemático com identidade própria, deixando de confundir o conceito com uma das suas representações. Também foram consideradas para a construção do terceiro nível as 5.ª, 6.ª e 7.ª etapas do método cartesiano de Filloy, Puig e Rojano, nas quais se pressupõe respetivamente que, o aluno identifique representações de relações de modo a encontrar elementos comuns entre elas, o aluno represente essas identificações e o aluno use procedimentos algébricos para situações.

Segundo Gagatsis, Mousoulides e Elia (2006), a aprendizagem do conceito de função sob múltiplos modos de representação, compreendendo processos de tratamento (que envolvem transformações de representações no mesmo registo em que foram formadas) e processos de conversão (que envolvem transformações de representações com mudança de registo, em que a totalidade ou uma parte de um significado da representação inicial é conservada, sem mudar os objetos denotados) levanta dificuldades dos alunos. Os alunos do ensino secundário e universitário manifestam dificuldades na conversão entre representações[2] - donde decorre o fenómeno de compartimentalização[3] do pensamento – pelo facto de fazerem uma aprendizagem compartimentada das representações da mesma função e manifestarem muitas dificuldades em conectar tais representações. Os resultados apresentados por aqueles autores mostram que os alunos optam mais facilmente pela representação algébrica (mesmo em

[2] Segundo Duval, a conversão de representações é considerado um processo fundamental para a compreensão matemática e na resolução de problemas.

[3] *Compartimentalization* – num estudo descrito por Gagatsis, Elia & Mousoulides em Relime Número Especial de 2006, onde os autores referem também processos que designam de *de-compartimentalization* (Gagatsis, Mousoulides, & Elia, 2006).

situações em que a representação gráfica se apresentaria mais eficiente), têm melhor desempenho em converter representações verbais em representações gráficas ou simbólicas, do que vice-versa, deixando evidente que a passagem da representação gráfica para a representação algébrica é mais difícil para os alunos do que a passagem da representação gráfica para a verbal.

À semelhança do que afirmámos para os resultados do estudo de Sfard, também aqui se coloca uma questão análoga – de facto, constituiria um interessante objeto de estudo de uma possível investigação, compreender como, ao longo da década decorrida após o estudo Gagatsis e Mousoulides (2006) e numa fase em que as tecnologias são ampla e vulgarmente usadas na de aula de matemática, este resultado apresentado evoluiu. Embora esta questão não constitua objeto de estudo da presente investigação, é relevante compreender o uso que os alunos fazem dos artefactos inerentes à tecnologia, nomeadamente à calculadora gráfica, e como é que os alunos constroem significados matemáticos fazendo uso de tais artefactos.

Muitas das representações algébricas são apresentadas aos alunos como declarações generalizadas das operações realizadas na aritmética (Kieran, 2006), pela qual os valores numéricos são substituídos nas expressões algébricas para conduzirem a resultados de valores específicos. Desta forma, as expressões algébricas são vistas apenas como expressões que têm um valor numérico instantâneo após a concretização do(s) signo(s) algébrico(s) por valor(es) numérico(s) (Rojano, 2002). Sob esta perspetiva, muitos autores afirmam que uma das grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra está precisamente na não compreensão da sua faceta estrutural. Os alunos continuam a usar os signos algébricos como faziam na aritmética e tratam-nos como tendo um papel e um significado idênticos ao do contexto aritmético sem considerações de aspetos estruturais, que não podem ser ignorados ao nível algébrico (Berrincha & Saraiva, 2009; Nobre, Amado, Carreira, & Ponte, 2011; Pais & Saraiva, 2011; Pereira & Saraiva, 2008; Saraiva & Teixeira, 2009).

Sem uma compreensão desta mudança de papéis de alguns signos algébricos que lhes são familiares, os alunos não serão capazes de fazer, efetivamente, a transição do pensamento aritmético para o algébrico. Estas dificuldades são frequentes não apenas em alunos do ensino básico, mas também em alunos do ensino secundário.

No nosso método de ensino, os três níveis foram construídos sob um crescendo de independência e estrutura algébrica em concordância com as teorias de Sfard e de Gravemeijer. A proposta pedagógica deste estudo foi construída sob os modelos definidos por Gravemeijer e sob a transição de um para o outro (modelo/de --> modelo/para). Na análise dos dados deste estudo são feitas inferências que reportam para a teoria de Tall e para os métodos de resolução de problemas apresentados por Filloy, Puig e Rojano.

O crescendo de independência e de estrutura algébrica previsto no método de ensino deste estudo também se deduz das três categorias universais definidas por Peirce – primeiridade, secundidade e terceiridade e dos conceitos inerentes ao uso de um artefacto no âmbito do ciclo didático que Bussi e Mariotti apresentam e que descrevemos anteriormente no ponto da mediação semiótica de significados matemáticos.

Nas categorias definidas por Peirce (primeiridade, secundidade e terceiridade), no que refere à relação do signo com o *representamen*, destacamos respetivamente o signo de qualidade, de existência e de síntese. No que refere à relação do signo com o seu objeto, destacamos respetivamente o signo ícone, o signo índice e o signo símbolo. E, no que refere à relação do signo com o interpretante, destacamos respetivamente o raciocínio abdutivo, o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo (sintético ou que decorre de uma generalização por indução).

Do pensamento de Mariotti, destacamos os conceitos de artefacto, de mediação semiótica e de ciclo didático, dos quais se frisa o tipo de intervenção do professor aquando da construção de significados dos alunos face ao uso de um artefacto, bem como o tipo de atividade dos alunos – individual ou coletiva – durante a construção de significados matemáticos. Importa também sublinhar que todas as tarefas da proposta pedagógica foram construídas de acordo com os três níveis sequenciais do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções que à frente detalharemos.

2.8. Os parâmetros em funções

O conceito de função é considerado como um dos conceitos base da matemática por ter múltiplas interpretações e representações associadas, como o de número, o de variável, o de coordenadas e o de gráfico de uma função (Sajka, 2003). E, por inerência, o mesmo acontece com o conceito de parâmetro. O conceito de função tem uma natureza dual, porque pode ser entendido essencialmente de duas formas diferentes (Sfard, 1991): i) estruturalmente (como um objeto), onde a função é apresentada como um conjunto de pares ordenados (Kuratowski & Mostowski, 1966); e ii) operacionalmente (como um processo), onde uma função é um processo computacional ou é um método bem definido para chegar de um sistema a outro. Na sala de aula, a aprendizagem deste processo só é conseguida se forem considerados os fatores que distinguem a aprendizagem dos símbolos da sua memorização (Skemp, 2012).

Uma função pode ser representada por uma tabela, por um gráfico ou em linguagem natural e pode ser interpretada pela variação dada por expressões analíticas, por tabelas e gráficos. Pode ser manipulada, por exemplo, através de tratamentos algébricos como a factorização, a substituição, a determinação de valores como o(s) zero(s), os máximo(s)/mínimo(s), entre outros valores (Ursini & Trigueros, 2004). Na perspetiva destes autores, uma generalização de 1ª ordem é a que resulta da generalização que envolve apenas números, como, por exemplo, o termo geral de uma sequência numérica, $2n$, ou o método geral de calcular a área de um quadrado de lado l, l^2, ou, ainda, uma equação com coeficientes numéricos, como $2x + 3 = 0$. Para Ursini e Trigueros (2004), um *parâmetro* é um número generalizado que é usado numa composição de generalizações, ou seja, numa generalização após uma generalização precedente – designada, por eles, por generalização de segunda ordem que decorre de uma generalização de primeira ordem – como, por exemplo, na construção da família de funções racionais do tipo:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},\ a, b, c \in IR,\ d \in IR \setminus \{0\},\ ou\ a, b, d \in IR,\ c \in IR \setminus \{0\}, \text{ com } a, b, c, d \text{ parâmetros. (1)}$$

Nesta perspetiva, na representação algébrica da família de funções racionais dada em (1) podemos proceder ao tratamento dos parâmetros, fixando-os num ou entre valores e convertendo a representação algébrica (1) numa representação gráfica associada, ou noutro registo de representação. Ou seja, se tratarmos a representação algébrica da família de funções dada em (1) e fixarmos os parâmetros *a, b, c, d* em, por exemplo, $a = d = 0,\ b \in [-5, 5] \wedge c = 1$ obtemos $y = \frac{b}{x}$ (2). Consequentemente, podemos converter a representação algébrica (2) para o seguinte registo de representação gráfica:

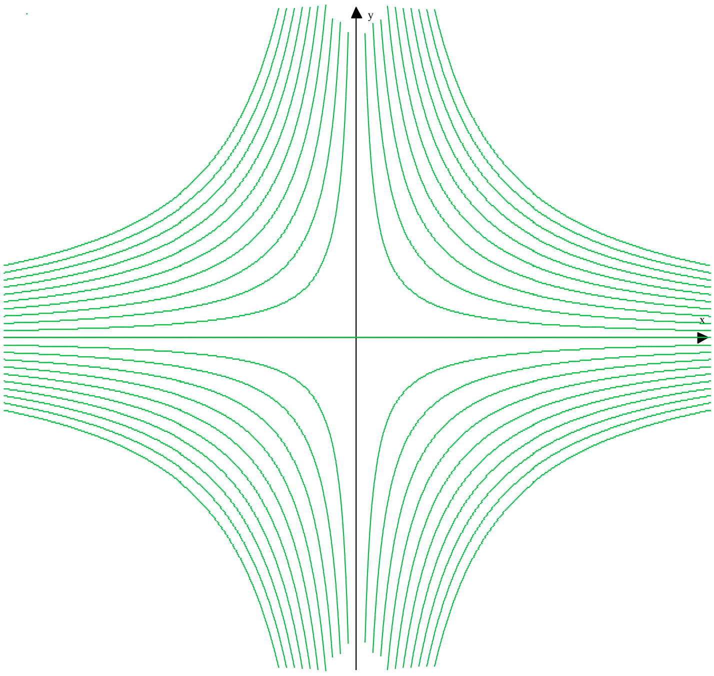


Figura 2.2: Representação gráfica da expressão algébrica (2).

Contudo, se optarmos por tratar a representação gráfica, podemos obter, dentro do mesmo registo de representação, uma nova representação gráfica. Por exemplo, se na representação gráfica anterior aplicarmos uma translação associada ao vetor (1,0) e em seguida um produto associado à representação gráfica da função linear de declive 1, obtemos uma nova representação gráfica, dentro do mesmo registo de representações:

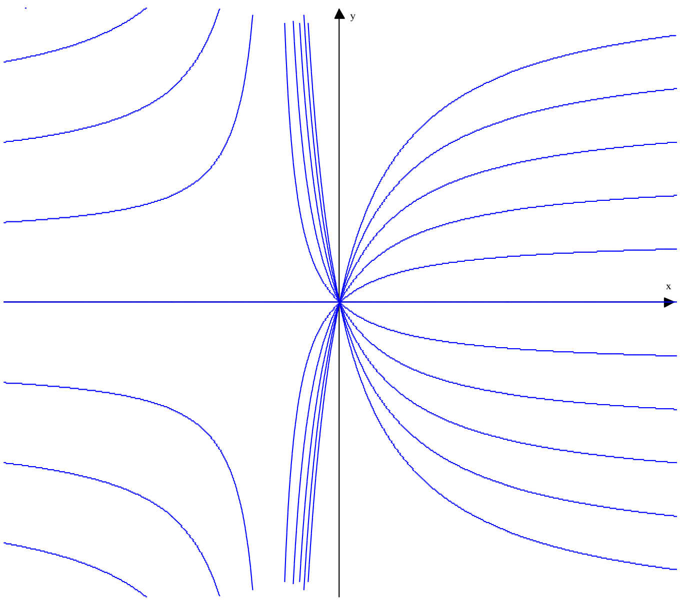


Figura 2.3: Representação do tratamento gráfico da Figura 2.2.

Deste modo, se considerarmos tal família de funções racionais dada pelo quociente de duas famílias de funções afim ou lineares, representada simbolicamente por (1), obtemos diferentes famílias de funções quando fixamos o valor do(s) parâmetro(s) num valor ou num intervalo de valores e, consequentemente, atribuímos significados ao representarmos tais famílias de funções de modo algébrico, de modo gráfico, de modo tabelar, esquemático, usando linguagem natural, ou outro modo de representar.

Segundo o NCTM (2000), os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e, analisar a variação em diversos contextos (NCTM, 2000) – desenvolvendo a sua capacidade de interpretar e usar com criatividade os objetos matemáticos, na descrição, interpretação e resolução de situações, quer através da escolha dos signos algébricos adequados a cada situação, quer na sua manipulação e conversão (Carthy, 2013; NCTM, 2000). Em todos estes processos, e de modo concordante com Duval (2006), as representações semióticas resultam dos significados atribuídos de modo consciente na interpretação, no tratamento e na conversão de representações usadas no trabalho com parâmetros numa função. Esta atividade do aluno pode ser feita em vários contextos, tais como: puramente sígnicos, ou ligados à realidade, ou à semi-realidade (Alro & Skovsmose, 2006). Nestes, a qualidade do diálogo em sala de aula assume uma função determinante (Giménez, Santos, & Ponte, 2004), quer seja na resolução de problemas ou em tarefas de exploração e investigação matemática (Pereira & Saraiva, 2005; Ponte, 2007).

Sob esta perspetiva, Trigueros e Ursini (2003)[4] classificam o trabalho com variáveis numa função como a capacidade de: i) reconhecer as correspondências relacionadas entre as incógnitas independentemente das representações utilizadas (tabelas, gráficos, expressões analíticas, problemas verbais); ii) determinar o valor da variável dependente pelo valor dado à variável independente; iii) determinar o(s) valor(es) da variável independente dado o valor da dependente; iv) reconhecer a variação comum das variáveis envolvidas numa relação, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas); v) determinar o intervalo de variação dado o intervalo de variação da outra; vi) traduzir uma relação funcional através de uma tabela, de um gráfico, de uma expressão analítica, baseado na análise de um problema (Trigueros & Ursini, 2003). Complementarmente, estes autores realçam a importância do contexto onde surgem os parâmetros, o qual assume uma função relevante na atribuição de significado(s) ao próprio parâmetro, pois cada significado pode ser alterado dentro do mesmo problema. Dão como exemplo a seguinte situação: “Quando é que

[4] No que refere ao uso e significado da letra inserida num contexto algébrico, Trigueros e Ursini (2003) desenvolveram o método 3UV (3 usos da variável): variável considerada como incógnita, como um número generalizado e variável em relação funcional.

a equação do segundo grau $3x^2+px+7=0$ tem uma única solução?". O parâmetro *p*, que na equação dada representa um número geral, passará a desempenhar o papel de incógnita, pois, para responder à questão obtemos a seguinte equação $p^2-4\times3\times7=0$, cuja incógnita é *p*.

Encontramos com frequência a definição de parâmetro em matemática associada à ideia de letra distinta da variável, que, numa expressão matemática, pode ser substituída ou substituir um valor ou um conjunto de valores numéricos que pode(m) ser fixado(s) arbitrariamente. No âmbito da álgebra, podemos considerar um parâmetro como uma grandeza mensurável que permite apresentar, de forma mais simples, as características principais de um conjunto, em particular da expressão algébrica em que se insere e desse modo permitir avaliar uma situação ou compreender um fenómeno em detalhe.

Neste estudo, sobre o tema das funções ensinado no 11.ºano de escolaridade, assumimos que um *parâmetro* é um objeto matemático que, quando substituído por valores numéricos, identifica cada um dos elementos de uma determinada função ou família de funções. Numa função, um parâmetro pode ser representado por uma letra que assume diferentes significados, dependendo do contexto algébrico em que se insere (Arcavi, 2006; Pereira & Saraiva, 2008).

Para a construção dos três níveis do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções considerámos a definição de parâmetro apresentada por Ursini e Trigueros, dado que, no primeiro nível do método presume-se que o aluno não trabalha com generalizações, pois na família de funções apresentada quer o(s) parâmetro(s), quer as variáveis dependente e independente são concretizadas por valores concretos. No segundo nível do método de ensino deste estudo ocorre uma generalização de primeira ordem (de acordo com a conceção de Ursini e Trigueros), pois intenciona-se que o aluno trabalhe num contexto em que as variáveis dependente e independente da função são genéricas, ou seja, ocorre uma generalização de primeira ordem face ao primeiro nível, e em que o(s) parâmetro(s) é(são) concretizado(s) por valores aritméticos.

No terceiro nível do método de ensino deste estudo ocorre uma generalização de segunda ordem (de acordo com a conceção de Ursini e Trigueros), pois intenciona-se que o aluno trabalhe sobre a generalização que ocorreu no segundo nível. Aqui, neste nível, intenciona-se que o aluno trabalhe num contexto totalmente algébrico do parâmetro e das variáveis, no qual, quer as variáveis dependente e independente, quer o(s) parâmetro(s), são genéricos.

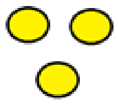
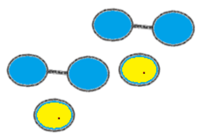
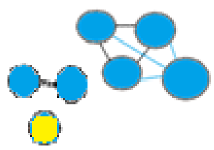
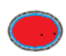
3. O método de ensino aplicado aos parâmetros em funções

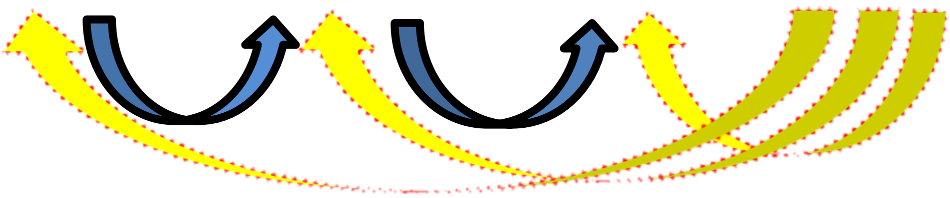
Com o objetivo de responder ao problema definido no capítulo I e a par da revisão de literatura que apresentámos no capítulo II, construímos o método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, que descreveremos no presente capítulo. Este método integra três níveis de ensino e quatro graus de significados que pretendem funcionar quer como contextos de ensino para toda a atuação didática do professor, quer como contextos que promovem a construção e a compreensão de sistemas organizados de signos algébricos nos raciocínios dos alunos no decurso da sua aprendizagem quando trabalham com parâmetros em funções.

3.1. Os quatro graus de significados do método

Para a construção dos graus de significados do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções foi considerada a atividade sígnica dos alunos sob as etapas de primeiridade, secundidade e terceiridade definidas por Peirce (associadas, aos signos ícone, índice e símbolo e ao raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo) e a mediação semiótica do professor, associada ao conceito de ciclo didático, definido por Bussi e Mariotti. Em cada um dos três níveis (N1, N2, N3) que se definirão à frente, o aluno constrói significados de grau um, dois, três e zero (S1, S2, S3, S0) caracterizados pela seguinte atividade sígnica:

Tabela 3.1: Graus de significados, S0, S1, S2, S3 definidos no método de ensino

Significados de Grau 1	**Significados de Grau 2**	**Significados de Grau 3**	**Significados de Grau 0**
Significados construídos pelo aluno, em cada um dos níveis N1, N2, N3, na PRIMEIRIDADE.	**Significados construídos pelo aluno, em cada um dos níveis N1, N2, N3, na SECUNDIDADE.**	**Significados construídos pelo aluno, em cada um dos níveis N1, N2, N3, na TERCEIRIDADE.**	**Significados construídos pelo aluno, em cada um dos níveis N1, N2, N3, que não se enquadram no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática**
Ícones em raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3.	**Índices em raciocínios indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3.**	**Símbolos em raciocínios dedutivos, construídos em N1, N2, N3.**	**Signos que *não são representamen*.**
			
S1	**S2**	**S3**	**S0**



MEDIAÇÃO SEMIÓTICA DO PROFESSOR: *CICLO DIDÁTICO*

3.2. Os três níveis de ensino do método

No método que construímos, *aplicado ao ensino de parâmetros em funções*, consideramos que os significados dos alunos organizam-se em três níveis e quatro graus. Os três níveis foram construídos sob um crescendo de independência e estrutura algébrica em concordância com os fundamentos teóricos expostos. No 1.º nível o aluno atribui significado e representa em múltiplos registos de representação, num contexto aritmético em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) são concretizados por valores numéricos concretos, por um conjunto de valores numéricos ou por um intervalo de valores numéricos. No 2.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou no 1.ºnível e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente não são concretizadas numericamente e o(s) parâmetro(s) são concretizado(s) por valores numéricos concretos, por um conjunto de valores numéricos ou por um intervalo de valores numéricos. No 3.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou nos 1.º e 2.º níveis e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) não são concretizados numericamente. No 3.º nível, o trabalho do aluno torna-se independente das situações específicas concretas com que trabalhou nos 1.º e 2.º níveis; o aluno significa e representa, quer com base nos significados que já construiu, quer com os novos significados e novas representações. As tarefas propostas aos alunos, apresentadas em anexo, foram construídas de acordo com esta estrutura.

A atividade sígnica que ocorre na transição entre cada um dos níveis do método, bem como a que ocorre em cada nível, é mediada semioticamente pelo professor, sob um *ciclo didático* (conceito desenvolvido Bussi e Mariotti, descrito no capítulo 2) que se inicia através instrumentos de mediação semiótica que promovem a construção de significados nos alunos, tais como as tarefas matemáticas elaboradas com a estrutura do método de ensino, a calculadora gráfica, analogias e sínteses usadas pela professora, entre outros. A construção de significados matemáticos é inerente às tarefas propostas pelo professor, bem como ao tipo de atividade dos alunos – individual ou coletiva.

No âmbito da revisão de literatura apresentada, consideramos que o primeiro nível está contido no segundo e, por sua vez, o terceiro contém o primeiro e o segundo. Uma possível representação esquemática dos três níveis método de ensino aplicado aos parâmetros em funções pode ser a seguinte:

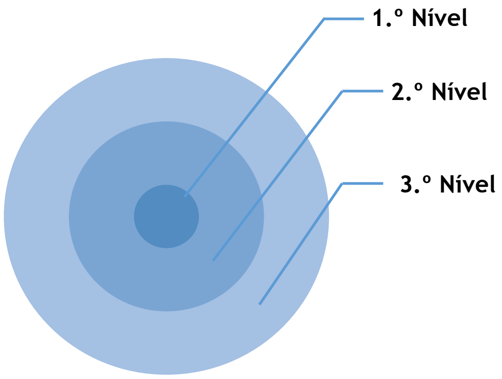


Figura 3.1: Representação esquemática dos três níveis do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções.

Sucintamente, cada um dos níveis do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções caracteriza-se pelo seguinte contexto algébrico:

Tabela 3.2: Síntese dos níveis do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções

1.ºnível: **N1**	**2.ºnível:** **N2**	**3.ºnível:** **N3**
O aluno constrói significados entre as correspondências das variáveis (dependente e independente), fixando ou concretizando numericamente o(s) parâmetro(s) e as variáveis.	O aluno constrói significados da variação das variáveis e do(s) parâmetro(s) envolvidos na(s) função(ões), para valores fixos ou numéricos do(s) parâmetro(s) e valores não concretizados das variáveis dependente e independente.	O aluno constrói significados, transforma e converte representações do(s) parâmetro(s) envolvidos na(s) função(ões), para valores não concretizados do(s) parâmetro(s) e das variáveis dependente e independente.
Produção individual e coletiva de significados através do uso de artefactos, nomeadamente das tarefas, em cada um dos níveis N1, N2 e N3.		

3.3. Os três níveis e os quatro graus de significados do método

Do cruzamento dos três níveis de ensino N1, N2, N3 com os quatro graus de significados S0, S1, S2, S3, referentes quer aos signos que *não são representamen*, quer às categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade – categorias nas quais os alunos usam e o professor medeia signos ícones em raciocínios abdutivos, signos índices em raciocínios indutivos e signos símbolos em raciocínios dedutivos, respetivamente – obtêm-se doze tipologias de significados. Dessas doze tipologias, representaremos nove por N1S1, N1S2, N1S3, N2S1, N2S3, N2S3, N3S1, N3S2, N3S3. As restantes três tipologias, do total das doze, são as que se obtêm se considerarmos os signos que, não sendo *representamen*, por não se enquadrarem no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática, podem ocorrer na atividade sígnica dos alunos em cada um dos três níveis de ensino. Tais signos, que designamos por significados de grau zero, representá-los-emos, sempre que ocorram, por N1S0, N2S0 e N3S0 em cada um dos níveis N1, N2 e N3, respetivamente.

Apresentaremos de seguida uma síntese que relaciona as classificações distintas dos significados dos alunos quando trabalham parâmetros em funções e a mediação semiótica do professor. Contudo, antes dessa síntese, imaginemos uma aula onde o professor pretende ensinar os alunos a construírem um modelo matemático que lhes permita maximizar a área de um triângulo inscrito numa circunferência em função dos seus lados menores. E para tal, propõe o seguinte enunciado aos alunos:

"Considera um triângulo inscrito numa circunferência cujo diâmetro é um dos seus lados. Constrói um modelo matemático que nos permita maximizar a área desse triângulo em função de um dos seus lados menores."

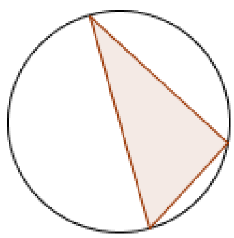


Figura 3.2: A representação esquemática da tarefa *O triângulo inscrito numa circunferência*

1. **Começa por considerar um valor concreto para o diâmetro da circunferência:**

1.1. **Usando um software de geometria dinâmica ou alguma propriedade dos triângulos que conheças, começa por explorar a situação determinando relações possíveis entre os lados do triângulo e explica-as por meio de cálculos, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-as por meio de linguagem natural.**

1.2. **Define uma estratégia que nos permita relacionar as dimensões dos dois lados menores do triângulo com a medida do diâmetro da circunferência considerado.**

1.3. **Considerando os dois lados menores do triângulo, constrói um modelo matemático que nos permita calcular a medida de um desses dois lados, em função da medida do outro.**

1.4. **Constrói um modelo matemático que nos permita calcular a área do triângulo, em função da medida de um dos dois lados menores do triângulo.**

1.5. **Determina as dimensões do triângulo de modo a que a sua área seja máxima? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).**

2. **Considera agora <u>um valor qualquer para o diâmetro da circunferência</u>. Seja d esse valor:**

2.1. **Define uma estratégia que nos permita relacionar as dimensões dos dois lados menores do triângulo com a medida do diâmetro da circunferência considerado.**

2.2. **Considerando os dois lados menores do triângulo, constrói um modelo matemático que nos permita calcular a medida de um desses dois lados, em função da medida do outro.**

2.3. **Constrói um modelo matemático que nos permita calcular a área do triângulo, em função da medida de um dos seus lados menores.**

O que o professor pretende nesta tarefa é ensinar os alunos a definir um modelo matemático que permita maximizar a área de um triângulo inscrito numa circunferência em função de um dos seus lados menores, sendo um dos lados o diâmetro da circunferência. Para tal, e no âmbito do primeiro nível do método de ensino, começa por pedir aos alunos que atribuam um valor concreto para o diâmetro da circunferência e comecem por explorar a situação determinando valores possíveis para os lados do triângulo, por meio de cálculos, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural. Na tarefa, o enunciado é constituído por um texto em linguagem natural e acompanhado do desenho da circunferência com o respetivo triângulo inscrito, sem dados concretos. Com tal forma de apresentar o enunciado, o professor pretende promover nos alunos a construção de significados de grau 1, ou seja, pretende que os alunos comecem por raciocinar de modo abdutivo, conjeturando hipóteses de resolução e façam acompanhar esse raciocínio com representações escritas. Suponhamos que o aluno começa por fixar o valor do diâmetro da circunferência em 5 cm, e que, fazendo uso de algum software ou recorrendo a material de desenho, faz variar a base e a altura do triângulo entre alguns valores, registando-os, como por exemplo, *"para o diâmetro da circunferência 5* cm, *obtemos os lados do triângulo 3* cm *e 4* cm*; entre outros"*. Nesta situação, o aluno está a raciocinar de modo abdutivo, pois inicia uma estratégia de resolução, fazendo uso de um ou de vários artefactos, como o material de desenho e ou o software, que lhe permitem representar o significado descrito. Este significado assim representado resulta da imediaticidade do pensamento, que decorre da atividade do aluno com signos ícones e, por isso, é, neste método de ensino, designado por significado de grau 1. Assim, nesta fase da resolução da tarefa, se o aluno responder da forma indicada ao contactar com a primeira questão do enunciado, dizemos que o aluno construiu um significado de grau 1 do primeiro nível do método de ensino, ou seja N1S1.

A questão 1.2 do enunciado, conduz o aluno à construção de uma estratégia que lhe permite relacionar os dois lados menores do triângulo (base e altura) com a medida do diâmetro da circunferência considerado. Nesta segunda fase, suponhamos que o aluno testa os valores determinados e constrói, sob um raciocínio indutivo, uma relação entre o diâmetro e os lados do triângulo, como por exemplo: *"como um dos lados do triângulo é o diâmetro da circunferência então os valores dos lados 3, 4 e 5 satisfazem a relação pitagórica porque este triângulo é retângulo, assim também como os triângulos com as medidas dos lados que determinámos na questão anterior"*. Neste caso, o aluno está, numa segunda fase do seu pensamento, imergido uma atividade com signos índices, pois relaciona os significados de grau 1 construídos na alínea anterior, com os novos significados construídos na alínea 1.2, dando origem a significados de grau 2, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, ainda num contexto aritmético, designamos por N1S2. Pretende-se que a tarefa continue a funcionar como um artefacto pois é a questão 1.2 que conduz os alunos à construção de significados de grau 2, em sequência dos significados de grau 1 por eles construídos na alínea anterior.

As questões 1.3 e 1.4 do enunciado conduzem o aluno à construção de estratégias que lhe permitem relacionar a medida de um dos dois lados menores do triângulo em função da medida do outro, para o valor fixo do diâmetro, e, posteriormente, deduzir alguma relação para a área do triângulo, em função da medida de um desses lados. Este raciocínio requer do aluno um novo raciocínio, que ocorre numa terceira fase, fruto de um raciocínio dedutivo, que é um pensamento de síntese, de sistematização dos pensamentos anteriores. Por exemplo, suponhamos que o aluno, em resposta às questões 1.3 e 1.4 conclui que *"com o diâmetro 5* cm*, se os dois lados do triângulo forem iguais, o triângulo é isósceles, o valor da medida de cada um dos seus lados é igual a* $\sqrt{12{,}5}$ *e a sua área é metade de* $12{,}5$*"*. Neste caso, o aluno está, numa terceira fase do seu pensamento, numa atividade com signos símbolos, pois relaciona os significados de grau 1 e 2 construídos nas alíneas anteriores, com os novos significados construídos nas alíneas 1.3 e 1.4., dando origem a significados de grau 3, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, ainda num contexto aritmético, designamos por N1S3. Pretende-se que a tarefa continue a funcionar como artefacto pois são as questões 1.3 e 1.4 que conduzem os alunos à construção de significados de grau 3, em sequência dos significados de grau 1 e 2 por eles construídos nas alíneas anteriores.

Posteriormente, na questão 1.5, é pedido aos alunos que construam uma função para a área do triângulo dependendo dos seus lados menores e que em seguida a maximizem. Esta questão insere-se no segundo nível do método de ensino, porque o professor pretende que os alunos maximizem a função (cuja variável dependente é a área e a variável independente extrai-se da relação pitagórica existente entre as dimensões dos dois lados menores do triângulo), com um valor fixo para o parâmetro (neste caso o diâmetro). Suponhamos que o aluno começa por fixar o valor do diâmetro da circunferência em 5 cm e faz variar a base e a altura do triângulo desprendido de valores concretos, ou seja, no segundo nível do método de ensino onde apenas o valor do parâmetro é concretizado. Suponhamos que o aluno regista o seguinte significado: *"para o diâmetro da circunferência 5, obtemos os lados do triângulo x e b, que podem ser por exemplo 3* cm *e 4* cm". Nesta situação, o aluno está a raciocinar de modo abdutivo, pois inicia uma estratégia de resolução com signos ícones e por isso é, neste método de ensino, designado por significado de grau 1. Assim, nesta fase da resolução da tarefa, se o aluno começar por representar um raciocínio da forma indicada ao contactar com a questão 1.5 do enunciado, dizemos que o aluno construiu um significado de grau 1 do segundo nível do método de ensino, ou seja, N2S1.

Posteriormente, suponhamos que o aluno representa um raciocínio como o seguinte: *"se o diâmetro da circunferência for 5, então os lados do triângulo x e b , que podem assumir valores do intervalo $]0,5[$, satisfazem a relação pitagórica da seguinte forma $b=\sqrt{100-x^2}$ e $x=\sqrt{100-b^2}$"*. Neste caso, o aluno está, numa segunda fase do seu pensamento, numa atividade com signos índices, pois relaciona os significados de grau 1 construídos anteriormente, com os novos significados agora construídos, dando origem a significados de grau 2, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, num contexto em que apenas o parâmetro é concreto, designamos por N2S2.

Posteriormente, suponhamos que, para o valor fixo do diâmetro, o aluno deduz que "*se o diâmetro da circunferência for 5* cm*, então os lados do triângulo podem ser definidos por x e $\sqrt{100-x^2}$, ou seja, a área é dada em função de x por $A(x)=\frac{x.\sqrt{x^2-100}}{2}$, em que $x \in]0,5[$ e para determinar o valor máximo que a área pode assumir, basta determinar o máximo da função $A(x)$"*. Este raciocínio requer do aluno um novo pensamento, que ocorre numa terceira fase, fruto de um raciocínio dedutivo, que é um pensamento de síntese, de sistematização dos pensamentos anteriores. Neste caso, o aluno está numa atividade com signos símbolos, pois relaciona os significados de grau 1 e 2 construídos anteriormente, com os novos significados, dando origem a significados de grau 3, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, designamos por N2S3. Pretende-se que a tarefa continue a funcionar como artefacto pois é a questão 1.5 que conduz os alunos à construção de significados de grau 3, em sequência dos significados de grau 1 e 2 por eles construídos anteriormente.

Por último, no terceiro nível do método de ensino, o professor pretende que os alunos considerem um valor qualquer para o diâmetro da circunferência, e que seja *d* esse valor, e definam uma estratégia que lhes permita relacionar as dimensões do triângulo (base e altura) com a medida do diâmetro *d*. Construam, em seguida, um modelo matemático que lhes permita calcular a medida de um lado do triângulo, dependendo da medida do outro e um modelo matemático que lhes permita calcular a área do triângulo, dependendo da medida de um dos seus lados. Suponhamos que o aluno regista o seguinte: "para o diâmetro d da circunferência, obtemos os lados do triângulo x e b pertencentes ao intervalo $]0, d[$". Nesta situação, o aluno está a raciocinar de modo abdutivo, pois inicia uma resolução com signos ícones e por isso é, neste método de ensino, designado de significado de grau 1. Assim, nesta fase da resolução da tarefa, se o aluno começar por representar um raciocínio da forma indicada ao contactar com a questão 2.1 do enunciado, dizemos que o aluno construiu um significado de grau 1 do terceiro nível do método de ensino, ou seja N3S1.

Suponhamos que, em seguida, o aluno representa um raciocínio como o seguinte: "se o diâmetro da circunferência for d, então os lados do triângulo x e b satisfazem a relação pitagórica $d^2 = b^2 + x^2$ e se o triângulo for isósceles então obtemos a função linear $d(x) = \sqrt{2}x,\ x \in]0, d[$ ". Neste caso, o aluno está, numa segunda fase do seu pensamento, numa atividade com signos índices, pois relaciona os significados de grau 1 construídos anteriormente, com os novos significados agora construídos, dando origem a significados de grau 2, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, num contexto em que não há valores concretos, designamos por N3S2.

Posteriormente, suponhamos que, para o diâmetro d, o aluno deduz que "se o diâmetro da circunferência for d, então os lados do triângulo podem ser definidos por x e $\sqrt{d^2 - x^2}$, ou seja, a área é dada em função de x por $A(x) = \frac{x.\sqrt{x^2-d^2}}{2}$, em que $x \in]0, d[$ e para determinar o valor máximo que a área pode assumir, basta determinar o máximo da função $A(x)$, para cada valor d". Este raciocínio requer do aluno um novo pensamento, que ocorre numa terceira fase, fruto de um raciocínio dedutivo, que é um pensamento de síntese, de sistematização dos pensamentos anteriores. Neste caso, o aluno está numa atividade com signos símbolos, pois relaciona os significados de grau 1 e 2 construídos anteriormente, com os novos significados, dando origem a significados de grau 3, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, designamos por N3S3. A tarefa continua a funcionar como artefacto pois é a última questão que conduz os alunos à construção de significados de grau 3, em sequência dos significados de grau 1 e 2 por eles construídos anteriormente.

Porém, se nesta cadeia de significados, nalgum instante o aluno ao querer atribuir algum significado o faz baseado nalgum signo que não se enquadra no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática, por não ser um *representamen*, então ocorre um significado de grau zero. Nesse caso, o professor, enquanto mediador dos significados dos alunos, usa condições necessárias de induções, generalizações de induções ou de deduções, focalizando o raciocínio do aluno para aspetos particulares, promovendo sínteses e fazendo sínteses, levando o aluno a construir significados de grau 1, grau 2 e grau 3, do nível de ensino em que tal significado ocorreu.

Independentemente desta ou de outra situação de ensino e aprendizagem concreta, os alunos manifestam muitas dificuldades quando trabalham com parâmetros. O modo como se relacionam essas dificuldades, bem como a mediação que o professor faz de tais significados, aquando das discussões e interações que tem com os alunos nas aulas, o tipo de tarefa que requer do aluno em cada momento bem como a atividade matemática que o professor intenciona com cada questão dessa tarefa, constituem-se referenciais pertinentes no ensino e na aprendizagem do aluno – e são estes os argumentos que suportaram a construção do presente método de ensino de parâmetros em funções.

Tabela 3.3: Síntese do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções.

Mediação Semiótica do professor com o intuito de que o aluno alcance o significado N3S3 **CICLO DIDÁTICO**	Atividade que antevê, engloba, legitima e sintetiza relações matemáticas.	***Significados de Grau 3*** ***S3***	**N1S3**	**N2S3**	**N3S3**
	Atividade que induz/prescreve a representação de uma relação matemática.	***Significados de Grau 2*** **S2**	**N1S2**	**N2S2**	**N3S2**
	Atividade de criação, resultante de um primeiro impulso gerador de uma hipótese ou estratégia matemática.	***Significados de Grau 1*** **S1**	**N1S1**	**N2S1**	**N3S1**
	Imprecisões ou incorreções matemáticas.	***Significados de Grau 0*** **S0**	**N1S0**	**N2S0**	**N3S0**
	PRODUÇÃO INDIVIDUAL E COLETIVA DE SIGNIFICADOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE TAREFAS CONSTRUÍDAS SOB OS NÍVEIS DO MÉTODO		**1.º Nível: *(N1)***	**2.ºNível: *(N2)***	**3.º Nível: *(N3)***
			O aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, em **contextos concretos das variáveis dependente e independente e do(s) parâmetro(s).**	O aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, em **contextos algébricos genéricos das variáveis dependente e independente e contextos concretos do(s) parâmetro(s).**	O aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, em **contextos algébricos genéricos das variáveis dependente e independente e do(s) parâmetro(s).**

3.4. A confiabilidade do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções

Muitos autores definem modos e formas de avaliar e refinar os seus próprios modelos, métodos e teorias (Tirosh & Tsamir, 2004), visando a proficiência matemática dos alunos (Schoenfeld, 2007), a definição do que significa saber matemática, bem como a relação entre educação matemática, senso comum e a própria matemática (Kilpatrick, 2005; Lester, 2010).

A forma como os alunos constroem, simbolizam, modelam e trabalham com ferramentas matemáticas, bem como o significado que dão a tais atividades (Gravemeijer, 2002), também tem constituído objeto de investigação em educação matemática. A comunicação e a interação na sala de aula (Alrø & Skovsmose, 2004; Steinbring, 2006), a compreensão dos processos matemáticos e do raciocínio dos alunos, atendendo ao contexto cultural e social (Lerman, 1994) têm também sido temáticas contemporâneas no campo da investigação. As questões sociais como a justiça e a equidade têm tido na aprendizagem da matemática (Atweh, Forgasz, & Nebres, 2013) um papel de relevo. Há ainda autores preocupados com a questão do autoconceito dos próprios investigadores matemáticos e as respetivas práticas de ensino (Burton, 2004; Ponte, 1992).

No que refere à construção e avaliação de métodos e modelos em educação matemática, Costa (2005) construiu um modelo teórico para o pensamento visual-espacial e a partir dele compreender o desenvolvimento de tal pensamento, identificando modos de pensamento visual-espacial e processos associados. Esta autora construiu questões específicas sobre as quais (re)avaliou e refinou o seu próprio modelo, baseando-se nos oito critérios apresentados por Shoenfeld (2002), resultando em implicações positivas para a investigação em ensino da Geometria (Costa, 2005). No nosso estudo, a construção do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções é baseada nos oito critérios e cinco passos, referidos por Shoenfeld (2002), que apresentamos nos parágrafos seguintes. Neste estudo procuramos ainda acautelar cinco cuidados essenciais que, também de acordo com Shoenfeld (2002), garantem às investigações em educação matemática confiabilidade, generalidade e importância.

Shoenfeld refere que, em educação matemática, na concetualização de uma teoria, ou de um modelo/método, é necessário ter em consideração cinco cuidados essenciais: i) não compartimentar a investigação e percebê-la como parte integrante das demais investigações em educação matemática e das demais áreas do saber (como por exemplo, percebê-la na antropologia, ou em estudos que organizam o comportamento); ii) não incorrer em superficialidade, quer na informação, quer nos métodos usados da investigação – a alta qualidade da investigação começa quando há um conhecimento profundo e focado da área examinada; iii) conduzir a investigação em contextos que interessam, e não apenas em laboratório, tornando-se relevante o conceito tradicional de investigar e depois aplicar a um contexto; iv) saber onde é que estamos e o que é que pensamos, bem como saber o que é que o outro investigador pensa e considera, porque dependendo dos investigadores assim existem várias perspetivas teóricas que influem no que cada investigador vê e como conduz a sua investigação – os métodos não são usados no abstrato, qualquer método de pesquisa é um filtro pelo qual um fenómeno é clarificado, distorcido ou obscurecido, sendo determinante a premissa teórica do investigador; v) é fundamental, quer para a investigação em particular, quer para o saber em geral, perceber de forma profunda tudo quanto se relaciona com o fenómeno em estudo na investigação – perceber em cada momento da investigação o que é verdade, não verdade e porquê (Schoenfeld, 2002).

Este autor defende ainda que um ponto essencial que deve caracterizar qualquer modelo é a sua eficiência na representação fiel de situações reais, bem como a passagem de *uma* situação real para *a* situação real. Segundo Schoenfeld, esta passagem faz-se de acordo com cinco processos analíticos.

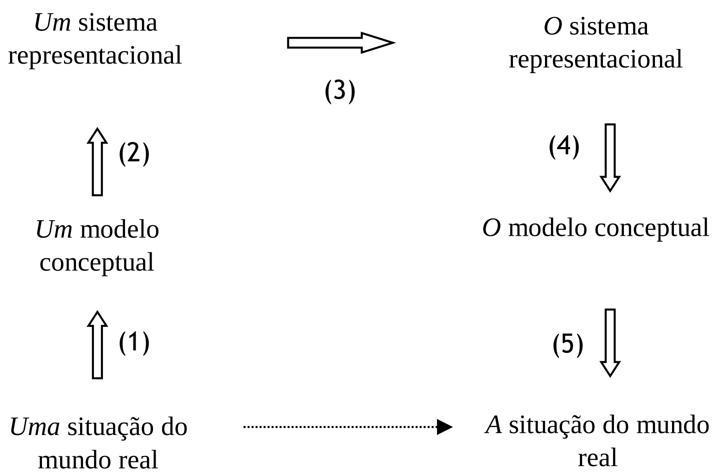


Figura 3.3: A representação esquemática dos processos analíticos na construção de um modelo teórico (de Schoenfeld, 2002).

Desenvolvendo:

(1) A passagem de *uma situação do mundo real* para *um modelo conceptual* prende-se com o facto de os investigadores verem no mundo real, não objetos, mas funções complexas resultantes das suas crenças e conhecimentos. O que a cada investigador interessa, bem como as perspetivas sobre as quais investiga, podem elas próprias ser objeto de análise sob várias perspetivas (Schoenfeld, 2002).

Neste estudo, o processo analítico (1) abrange todos os princípios didáticos assumidos pela professora-investigadora, apresentados e discutidos no capítulo 2, e que se relacionam com as dificuldades manifestadas pelos alunos, a teoria analisada e a prática profissional experimentada.

(2) A passagem de *um modelo concetual* para *um sistema representacional* prende-se com os dados e com a representação de tais dados no modelo – será que a

informação, como está representada no modelo, reflete a importância de tais dados no modelo concetual? Os dados recolhidos numa observação refletem o enfoque de cada observador. Os constructos no modelo concetual podem estar bem ou mal definidos e a forma como a informação está representada pode, ou não, corresponder a esses constructos (Schoenfeld, 2002).

Neste estudo, interferem, no processo analítico (2), os fundamentos teóricos em que assentam os constructos do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, no âmbito da álgebra, da didática da matemática, da construção e da mediação semiótica de significados matemáticos.

(3) A passagem de *um sistema representacional* para *o sistema representacional* prende-se com as seguintes questões: que conclusões podem ser inferidas do sistema conceptual (da teoria ou do teórico) usando a informação representada? Será que existem dados suficientes para permitir um julgamento sólido da teoria construída (ou do método teórico construído)? Será que outro investigador retiraria as mesmas conclusões usando os mesmos dados com o mesmo método? (Schoenfeld, 2002).

No método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, o processo analítico (3) engloba a metodologia de investigação definida (no capítulo 3) e implementada com base na proposta pedagógica definida para este estudo.

(4) A passagem *do sistema representacional* para *o modelo concetual* prende-se com a seguinte questão: os resultados que advêm do sistema representacional têm significado no modelo concetual? (Schoenfeld, 2002).

O processo analítico (4) define-se pela análise do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, com base nos dados recolhidos (capítulo 4).

(5) A passagem *do modelo concetual* para *a situação do mundo real* prende-se com a seguinte questão: como é que as relações entre os dados no modelo concetual correspondem à situação original? (Schoenfeld, 2002).

O processo analítico (5) define-se pelos resultados da implementação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções (capítulo 5).

Os oito critérios de Schoenfeld (2002) que assumimos para a avaliação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções constam de: i) o *poder descritivo*, que designa a capacidade das teorias, modelos e métodos, apreenderem aquilo que acontece de modo fiel aos fenómenos que se pretendem descrever; ii) o *poder interpretativo,* que designa o grau de explicação acerca de como as coisas funcionam e do porquê funcionarem; iii) o *campo de ação,* especifica aquilo que a teoria, modelo ou método faz e não faz; iv) o *poder preditivo,* identifica as restrições ou afirmações do que é possível fazer com a teoria (ou modelo), bem como o que não é possível fazer; v) o *rigor e especificidade*, relacionam-se com a definição dos constructos e com a relação como esses constructos estão definidos (como a definição clara de fundamentos teóricos); vi) a *falsicabilidade*, relaciona-se com o questionamento e o teste do que é feito ao próprio método de questões não tautológicas; vii) a *replicabilidade, generabilidade e credibilidade,* relacionam-se com o rigor, clareza e especificidade com que o método é construído de modo a que, qualquer outro investigador, seguindo as orientações (fases, níveis, etapas) da teoria (ou método), o possam (re)aplicar; viii) a *triangulação*, que consiste em procurar vastas fontes de informação sobre o fenómeno que se pretende estudar com a teoria (ou método) e analisar de que modo é que tais fontes de informação interatuam conjuntamente na descrição da mensagem que se pretende transmitir.

Sob estes oito critérios redefinimos as questões que se seguem, visando criar critérios de confiabilidade para implementar o método de ensino aplicado aos parâmetros em funções.

(I) Poder Descritivo:

- Os níveis e os graus de significados do método de ensino deste estudo permitem descrever o raciocínio dos alunos, a mediação do professor e as tarefas que integram a proposta pedagógica do estudo?
    - Os três níveis e os quatro graus de significados do método permitirão categorizar doze tipos de significados construídos pelos alunos e mediados pelo professor (capítulo 3), tornando possível a apreensão daquilo que acontece ao longo da implementação da proposta pedagógica que se pretende descrever.

(II) Poder Interpretativo:

- O método de ensino aplicado aos parâmetros em funções deste estudo permite explicar como funciona o raciocínio algébrico dos alunos, a mediação do professor e das tarefas como artefactos quando os alunos aprendem matemática, concretamente quando aprendem parâmetros em funções?
    - As vinte e quatro subcategorias de análise de dados, que se obtêm do cruzamento das duas dimensões de análise com os doze tipos de significados definidos no método, descritas no capítulo 4, permitirão descrever como os significados matemáticos são construídos pelos alunos, se relacionam, interligam e como são semioticamente mediados pelo professor, desde a

concretização em contextos aritméticos até à generalização em contextos algébricos.

(III) Campo de Ação:

- Qual é o âmbito didático deste estudo?

    - Neste estudo examinar-se-ão e analisar-se-ão os signos construídos pelos alunos (ícone, índice e símbolo) e o raciocínio usado (abdutivo, indutivo e dedutivo), através do uso de artefactos em três tipos de contextos de parâmetros em funções considerados nas tarefas que integram a proposta pedagógica (variáveis e parâmetros concretizados por valores numéricos; variáveis genéricas e parâmetro concretizados numericamente; e, variáveis e parâmetro não concretizados numericamente). Complementarmente, estudar-se-á a mediação semiótica do professor, sob um ciclo didático que integra a promoção e o uso de analogias, sínteses e focalização do raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo dos alunos para determinados aspetos que conduzam, respetivamente, à construção de ícones, índices e símbolos.

(IV) Poder Preditivo:

- O que é que o método deste estudo permite prever e não prever?

    - Neste estudo, os signos construídos pelos alunos (ícone, índice e símbolo), o raciocínio usado (abdutivo, indutivo e dedutivo), os contextos matemáticos (aritmético e algébrico) e a mediação semiótica (ciclo didático) são conceitos abrangentes da didática da matemática. Como tal, obedecendo à classificação dos contextos matemáticos em níveis e à dos significados em graus, é possível aplicar este método noutro âmbito do ensino da matemática, para além dos parâmetros em funções.

(V) Rigor e Especificidade:

- O método foi construído sob fundamentos teóricos definidos e com especificidade?

    - Todos os constructos do método e o modo de formação desses constructos estão definidos sob os fundamentos teóricos apresentados ao longo dos capítulos 2 e 3.

(VI) Falsicabilidade:

- O método responde a questões não tautológicas formuladas para serem empiricamente testadas?
    - O método de ensino construído neste estudo visa dar resposta às questões do problema deste estudo, definida no capítulo 1.

(VII) Replicabilidade, generabilidade e credibilidade:

- O método de ensino aplicado aos parâmetros em funções é replicável, generalizável e credível?
    - O método de ensino aplicado aos parâmetros em funções foi construído com o intuito de que, qualquer outro investigador, seguindo as orientações (níveis, graus de significado, dimensões, categorias subcategorias de análise de dados) o possa aplicar.

(VIII) Triangulação:

- As fontes teóricas usadas para a construção e implementação do método interatuam conjuntamente na descrição da mensagem que se pretende transmitir?
    - As fontes teóricas foram usadas conjuntamente na descrição da construção do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, ao longo dos capítulos 2 e 3, com o intuito de descrever como é que o método de ensino funciona como um mediador da atividade do professor e como é que as tarefas construídas com base no método funcionam como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos.

Estas oito questões e os cinco cuidados essenciais descritos atrás nortearam a construção do método de ensino por forma a garantir confiabilidade ao estudo.

4. Metodologia do Estudo

Neste capítulo descrevemos a metodologia deste estudo, na qual definimos o modo de recolha dos dados, bem como as dimensões, as categorias e as subcategorias de análise dos dados recolhidos.

4.1. O enquadramento metodológico do estudo

A procura da clarificação e otimização das metodologias usadas em educação matemática tem conduzido ao uso efetivo de modelos emergentes na investigação em Educação Matemática (Kelly & Lesh, 2012), bem como à extração de certas potencialidades que alguns métodos de investigação apresentam, como, por exemplo, os estudos de caso, (Ponte, 1992, 2006). A imprevisibilidade, a unicidade e a complexidade de cada fenómeno educacional norteia a investigação qualitativa. Neste tipo de investigação, os dados observados estão fortemente relacionados com a curiosidade e a atividade interpretativa do investigador. Este facto conduz a um conhecimento simultaneamente imediato e contínuo, por ser consequência do interesse momentâneo do investigador e ao mesmo tempo inserir-se num conjunto dinâmico de pensamentos acumulados. Em cada investigação de natureza qualitativa interpretativa existem naturalmente enraizados fatores de cariz social, implicitamente marcados pela realidade dos interesses e princípios de cada época, das competições e ambições específicas da sociedade e do tempo em que cada estudo ocorre. Este tipo de fatores influenciam o investigador qualitativo e consequentemente o percurso da sua investigação. A visão que cada investigador tem do mundo que o rodeia, os requisitos e condições de que parte, os fundamentos teóricos em que se baseia para compreender e explicar o seu trabalho vão influenciá-lo na definição do problema e na orientação do seu pensamento no decurso do estudo. Nesta perspetiva, de acordo com Bogdan e Biklen (1991), torna-se pertinente o facto de os dados carregarem o peso de qualquer interpretação e, por este motivo, o investigador tem de confrontar continuamente as suas opiniões com os dados que recolhe – estabelecendo a distância correta quer de preocupações pessoais quer do conhecimento prévio que tem de certas situações que o podem influenciar tendencialmente nas suas interpretações. Porém, o facto de o investigador desenvolver estudos no seu ambiente permite-lhe usufruir da oportunidade de aprender a ser suficientemente capaz de não transferir a sua personalidade, nem se deixar influenciar por colegas ou pelo próprio ambiente que o circunda – tal como o que é exigido ao professor quando este é em simultâneo o investigador, dentro das suas aulas e com os seus alunos.

A investigação qualitativa interpretativa em educação matemática caracteriza-se pelo ambiente natural que constitui fonte direta de recolha de dados. Neste estudo, o ambiente natural de recolha de dados é a aula de matemática, em que a professora é em simultâneo a investigadora. Caracteriza-se também pelo facto dos resultados serem apresentados de modo descritivo, contendo sempre que possível citações e ilustrações que substanciam a apresentação, em que o caminho percorrido durante o processo é mais rico do que os resultados a que o investigador qualitativo possa chegar. Neste tipo de investigação a indução é o método de análise mais usado, não constituindo objetivo único a confirmação de hipóteses, mas antes a exploração do percurso. Os significados que cada sujeito dá à investigação em curso são de igual modo relevantes para o investigador qualitativo. Existe também uma preocupação pertinente em qualquer tipo de investigação – a ética. No que refere aos investigadores qualitativos, e devido ao facto dos sujeitos das suas investigações serem humanos, é necessário atender a algumas normas que protejam os sujeitos da investigação contra quaisquer danos, Segundo Bogdan e Biklen (1991), tais normas são: a voluntariedade com que os sujeitos aderem à investigação e, consequentemente, o conhecimento prévio que o sujeito tem de ter do estudo, bem como as obrigações e os riscos que ele envolve; e a mediação do investigador dos prejuízos e dos benefícios, sendo que os benefícios devem exceder os prejuízos que advenham aos sujeitos que participam no estudo. Segundo aqueles autores, a estas normas devem agregar-se alguns princípios que devem ser diretamente respeitados pelo investigador, tais como: a proteção da identidade dos indivíduos, o anonimato das suas declarações e registos, caso seja da vontade dos mesmos; o respeito e a lealdade do investigador para com cada sujeito do estudo, a fim de maximizar a sua colaboração na investigação; a negociação e a autorização da divulgação de dados e de posteriores resultados; e a veracidade absoluta na divulgação dos dados e dos resultados. Neste estudo são preservadas as normas de ética e respeitados os princípios de proteção da identidade, quer na recolha quer na análise dos dados.

De acordo com o referido, neste estudo a metodologia de investigação usada é qualitativa (Bogdan & Biklen, 2007; Yin, 2003). O método de ensino foi implementado em sala de aula numa turma com doze alunos do ensino secundário, do 11.ºano, em que sete desses doze alunos eram internos à disciplina e frequentavam as aulas de forma assídua. Os dados foram recolhidos com esses sete alunos internos desde o final de fevereiro de 2011 até ao início de maio de 2011, aquando do estudo do tema *Funções*. Foram constituídos, dentro da turma, três grupos, dois grupos com dois alunos e um grupo com três alunos. Foram recolhidos dados dos três grupos. A entrevista final foi feita a um dos grupos com dois alunos. A escolha deste grupo deveu-se à aptidão e à maior consciência e maior capacidade de comunicação dos próprios pensamentos dos alunos deste grupo.

4.2. A recolha dos dados

O presente estudo tem como missiva conhecer, compreender e explicar os fenómenos que constituem o problema com particularidades e com sujeitos específicos, com características, comportamentos e reações próprias. A recolha de dados foi feita através de gravações áudio, de transcrições e de registos da investigadora. As gravações áudio e as transcrições foram usadas nas entrevistas realizadas. Todas as entrevistas foram gravadas e posteriormente transcritas. As iniciais realizaram-se no início da implementação da proposta pedagógica, no final de fevereiro de 2011, tendo-se como base tarefas que usualmente constam dos manuais escolares e de questões dos exames nacionais. As tarefas das entrevistas não foram construídas sob o método de ensino aplicado aos parâmetros em funções. Esta opção foi feita intencionalmente na metodologia deste estudo e tem como propósito compreender os significados matemáticos que os alunos constroem quando trabalham em contextos que envolvem parâmetros em funções, em tarefas usuais dos manuais escolares e dos exames nacionais, bem como o modo como a professora medeia o raciocínio matemático dos alunos nesses contextos. Tendo em conta os objetivos do estudo, a fundamentação teórica e a análise de 1.ªordem, as tarefas das entrevistas iniciais foram selecionadas do manual ALEPH[10] (Carvalho e Silva et al., 2010). Este manual não foi o adotado pela escola. A entrevista final foi realizada em junho de 2011, no final do ano letivo e baseou-se numa tarefa construída apenas sob o terceiro nível do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções. Esta opção foi feita intencionalmente na metodologia deste estudo e tem como propósito compreender os significados matemáticos que os alunos constroem quando trabalham em contextos que envolvem parâmetros em funções, bem como o modo como a professora medeia o raciocínio matemático dos alunos após a implementação do estudo. Quer nas entrevistas quer nas aulas a professora investigadora promove o diálogo, a abertura e a confiança entre os alunos, para que houvesse partilha de significados e de raciocínios.

Foram feitos registos escritos para registar diálogos entre os alunos e entre os alunos e a professora. Os diálogos foram recolhidos pela professora investigadora durante as aulas de resolução e discussão das tarefas de investigação e após estas aulas – nas quais foram feitos problemas e exercícios do manual dos alunos. Ao longo da implementação do método, nomeadamente no decurso da resolução das tarefas, os alunos da turma trabalharam em grupos formados livremente entre os alunos, consoante as afinidades entre os colegas da turma, à semelhança das restantes aulas de matemática não abrangidas por este estudo. No decurso do trabalho em grupo, os alunos ouvem-se uns aos outros, discutem, colocam questões, partilham estratégias entre si, argumentam, criticam, e posteriormente partilham as resoluções e soluções com toda a turma, em discussão coletiva.

A professora investigadora anotou no seu diário de registos descrições dos alunos (tal como alguns modos de estar e agir nos grupos de trabalho), reconstruções de diálogos (citações de interesse transcritas, sempre que possível, à letra), descrição do ambiente vivido em cada aula (como por exemplo a localização dos alunos e o material a que recorrem), descrição da atividade de cada grupo de trabalho, alguns diálogos ocorridos nas aulas entre a professora investigadora o os alunos, bem como algumas reflexões da professora investigadora.

As tarefas foram construídas de raiz e uma tarefa foi adaptada de Itens/Teste Intermédio 10ºano, GAVE 2010. Seis tarefas foram implementadas em aulas de 90 minutos (90 minutos para a resolução e discussão heurística na turma) e uma tarefa foi a base das entrevistas finais. Foram ainda recolhidos dados das resoluções dos alunos, relativas à questão do teste intermédio do 11.ºano do dia 24 de maio de 2011, que envolveu parâmetros em funções. Durante as aulas de resolução das tarefas cada grupo de trabalho elabora um relatório que tem por objetivo explicar todos os passos, opções, esquemas, conjeturas, estratégias, resoluções e soluções que foram feitas pelos alunos no decurso da resolução de cada tarefa. Os alunos são continuamente incentivados pela professora investigadora a fazerem tais registos nos seus relatórios de resolução, usando uma linguagem clara e objetiva, quer linguagem natural, quer linguagem matemática – os alunos também são incentivados para que façam constar nos relatórios todas as hesitações, dúvidas e erros cometidos.

Tendo em conta os objetivos do estudo, a fundamentação teórica e a análise de primeira ordem, criámos duas dimensões, doze categorias e vinte e quatro subcategorias de análise. As categorias obtêm-se do cruzamento dos três níveis de aprendizagem com os quatro graus de significados.

4.3. A análise dos dados

Para dar resposta às questões de investigação, foram identificadas unidades de análise resultantes das intervenções escritas e orais que os alunos e a professora investigadora realizaram, durante as aulas em que o método de ensino foi implementado. Foram selecionadas sete unidades de análise: *'A vedação do jardim', 'O passeio das amigas', 'Funções: composta e inversa', 'A caixa de volume máximo', 'O triângulo inscrito numa circunferência'*, 'Parâmetros em funções racionais' e 'Parâmetros, funções e geometria'. O critério utilizado para esta seleção foi o facto destas tarefas terem sido construídas sob o método de ensino criado, à exceção da última tarefa que foi construída apenas sob o 3.ºnível do método. Sobre estas unidades de análise fizeram-se três tipos de análise: a de primeira ordem, a de segunda ordem e a de terceira ordem.

A análise de primeira ordem é uma compilação do que se observou e registou, o que inclui os registos escritos pelos alunos, a transcrição das gravações das aulas e das entrevistas e os registos da professora investigadora. Esta fez ainda uma seleção dos momentos que considerou mais relevantes para o estudo.

Para a análise de segunda ordem selecionaram-se os dados mais representativos de cada unidade de análise que foram analisados segundo as dimensões, categorias e subcategorias. Obtiveram-se sete grandes blocos, tantos quantos as unidades de análise. Foi feita ainda alguma problematização.

A análise de terceira ordem baseia-se numa leitura transversal dos sete grandes blocos obtidos na análise de segunda ordem, permitindo colocar questões e relacioná-las, de onde resultaram as respostas às questões do estudo.

4.3.1. As dimensões, as categorias e as subcategorias de análise

A análise dos dados recolhidos é feita sob duas dimensões visando responder às questões do problema do estudo. A primeira dimensão (D1): mediação semiótica do professor; e, a segunda dimensão (D2): representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções.

A primeira dimensão será analisada segundo: i) o questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos; e, ii) o questionamento para sínteses e a realização de sínteses. Em i) investigar-se-ão os episódios em que os alunos constroem, ou reconstroem, significados que decorrem da resolução das tarefas e dos significados que decorrer da mediação da professora, seguindo uma intervenção do tipo 'voltar atrás' e recuperar aspetos particulares já trabalhados em experiências matemáticas anteriores (quer trabalhados individualmente, quer em grupo) e selecionando aspetos relevantes de tais significados. Em ii) investigar-se-ão os episódios, que complementam i), em que a professora foca a sua atenção para aspetos da experiência matemática dos alunos promovendo a sua capacidade de estrutura de significados e capacidade de síntese. Com a primeira dimensão pretende-se identificar a forma como o método de ensino funcionou como mediador da atividade do professor.

A segunda dimensão de análise será feita segundo: i) a interpretação do enunciado; ii) o parâmetro e a variável dependente e independente; iii) o parâmetro e a incógnita; iv) o parâmetro na transformação de representações; e, v) o parâmetro na conversão entre registos de representação. Com ela pretende-se identificar a forma como as tarefas matemáticas funcionaram como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos.

Foram construídas doze categorias que coincidem com as tipologias de significados do método N1S0, N1S1, N1S2, N1S3, N2S0, N2S1, N2S2, N2S3, N3S0, N3S1, N3S2 e N3S3 e que se obtêm do cruzamento dos três níveis de ensino N1, N2, N3 do método com os graus de significados S0, S1, S2 e S3 do seguinte modo:

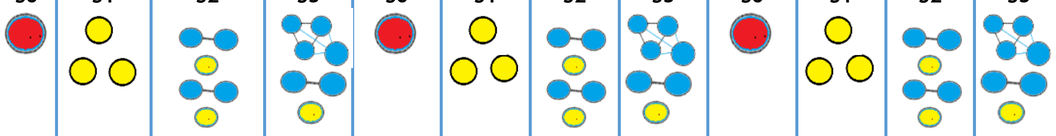
Tabela 4.1: As categorias de análise dos dados

S3	N1S3	N2S3	N3S3
S2	N1S2	N2S2	N3S2
S1	N1S1	N2S1	N3S1
S0	N1S0	N2S0	N3S0
	N1	***N2***	***N3***

Posteriormente para a análise das representações dos significados construídos pelos alunos e da mediação semiótica da professora investigadora deste estudo, criámos subcategorias, que se obtêm do cruzamento de cada categoria com cada dimensão de análise definida do seguinte modo:

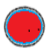
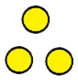
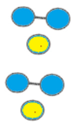
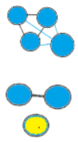
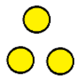
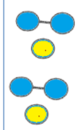
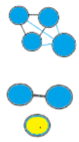
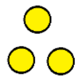
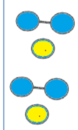
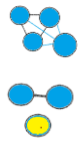
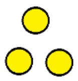
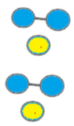
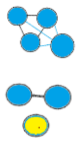
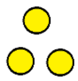
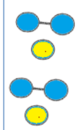
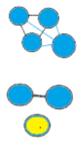
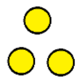
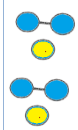
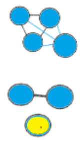
Tabela 4.2: O modo de construção das subcategorias de análise dos dados

CATEGORIA DE ANÁLISE	N1				N2				N3			
	S0	S1	S2	S3	S0	S1	S2	S3	S0	S1	S2	S3
DIMENSÃO DE ANÁLISE												



Dando origem às vinte e quatro subcategorias seguintes:

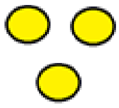
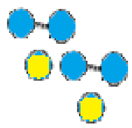
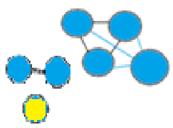
Tabela 4.3: As subcategorias de análise dos dados

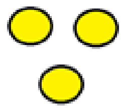
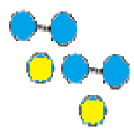
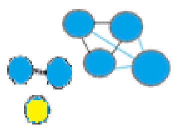
SUBCATEGORIAS DE ANÁLISE DOS DADOS DO ESTUDO												
CATEGORIAS POR DIMENSÃO DE ANÁLISE	N1				N2				N3			
	S0	S1	S2	S3	S0	S1	S2	S3	S0	S1	S2	S3
Dimensão 1: Mediação semiótica do professor	N1S0D1	N1S1D1	N1S2D1	N1S3D1	N2S0D1	N2S1D1	N2S2D1	N2S3D1	N3S0D1	N3S1D1	N3S2D1	N3S3D1
												
Dimensão 2: Representação, transformação e conversão de significados dos alunos	N1S0D2	N1S1D2	N1S2D2	N1S3D2	N2S0D2	N2S1D2	N2S2D2	N2S3D2	N3S0D2	N3S1D2	N3S2D2	N3S3D2
												

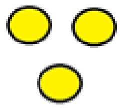
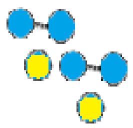
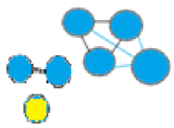
4.3.2. Os descritores das dimensões, das categorias e das subcategorias de análise

Os descritores das vinte e quatro subcategorias de análise de dados, formadas a partir do cruzamento das doze categorias com as duas dimensões de análise, são os seguintes:

Tabela 4.4: Os descritores das dimensões e das categorias de análise

NÍVEL (N)	CONTEXTO	CATEGORIAS (NS)	SUBCATEGORIAS (NSD)	
			DIMENSÃO 1: Mediação do Professor	DIMENSÃO 2: Parâmetros em funções
N1: 1.ºNível	As variáveis (dependente e independente) e o(s) parâmetro(s) da família de funções são concretizados por valores numéricos [conjunto(s) de valores numéricos, discreto ou contínuo].	N1S1 *Representamen* da primeiridade 	**N1S1D1** No 1.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares do enunciado da tarefa, promove analogias a raciocínios e experiências anteriores e sintetiza a admissão e a refutação das hipóteses que vão sendo construídas.	**N1S1D2** No 1.ºnível do método, o aluno interpreta o enunciado de uma tarefa e atribui significados usando ícones em raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, constrói hipóteses sem o carater experimental da indução e sem o rigor formal da dedução.
		N1S2 *Representamen* da secundidade 	**N1S2D1** No 1.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares de analogias a raciocínios e experiências anteriores, em condições necessárias de raciocínios, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N1S2D2** No 1.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função através de uma analogia ou de uma implicação necessária usando ícones em raciocínios abdutivos e índices em raciocínios indutivos.
		N1S3 *Representamen* da terceiridade 	**N1S3D1** No 1.ºnível do método, o professor faz generalizações de induções matemáticas e de deduções, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N1S3D2** No 1.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, usando símbolos em raciocínios dedutivos. Ou através de uma generalização que obteve de raciocínios indutivos e abdutivos.
		N1S0  Signos não semióticos	**N1S0D1** No 1.ºnível do método, o professor usa analogias, condições necessárias de induções, generalizações de induções ou deduções. Focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares, promove sínteses e faz sínteses em resposta a significados N1S0 dos alunos.	**N1S0D2** No 1.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função fazendo uso de signos que *não são representamen*, por não se enquadrarem no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática.

NÍVEL (N)	CONTEXTO	CATEGORIAS (NS)	SUBCATEGORIAS (NSD)	
			DIMENSÃO 1: Mediação do Professor	DIMENSÃO 2: Parâmetros em funções
N2: 2.ºNível	As variáveis (dependente e independente) não são concretizadas numericamente e o(s) parâmetro(s) (é)são concretizado(s) por valores numéricos [conjunto(s) de valores numéricos, discreto ou contínuo].	**N2S1** *Representamen* da primeiridade 	**N2S1D1** No 2.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares do enunciado da tarefa, promove analogias a raciocínios e experiências anteriores e sintetiza a admissão e a refutação das hipóteses que vão sendo construídas.	**N2S1D2** No 2.ºnível do método, o aluno interpreta o enunciado de uma tarefa e atribui significados usando ícones em raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, constrói hipóteses sem o carater experimental da indução e sem o rigor formal da dedução.
		N2S2 *Representamen* da secundidade 	**N2S2D1** No 2.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares de analogias a raciocínios e experiências anteriores, em condições necessárias de raciocínios, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N2S2D2** No 2.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função através de uma analogia ou de uma implicação necessária usando ícones em raciocínios abdutivos e índices em raciocínios indutivos.
		N2S3 *Representamen* da terceiridade 	**N2S3D1** No 2.ºnível do método, o professor faz generalizações de induções matemáticas e de deduções, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N2S3D2** No 2.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, usando símbolos em raciocínios dedutivos. Ou através de uma generalização que obteve de raciocínios indutivos e abdutivos.
		N2S0  Signos não semióticos	**N2S0D1** No 2.ºnível do método, o professor usa analogias, condições necessárias de induções, generalizações de induções ou deduções. Focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares, promove sínteses e faz sínteses em resposta a significados N2S0 dos alunos.	**N2S0D2** No 2.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função fazendo uso de signos que *não são representamen*, por não se enquadrarem no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática.

NÍVEL (N)	CONTEXTO	CATEGORIAS (NS)	SUBCATEGORIAS (NSD)	
			DIMENSÃO 1: Mediação do Professor	DIMENSÃO 2: Parâmetros em funções
N3: **3.ºNível**	**As variáveis (dependente e independente) e o(s) parâmetro(s) da família de funções não são concretizados por valores numéricos.**	**N3S1** *Representamen* da primeiridade 	**N3S1D1** No 3.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares do enunciado da tarefa, promove analogias a raciocínios e experiências anteriores e sintetiza a admissão e a refutação das hipóteses que vão sendo construídas.	**N3S1D2** No 3.ºnível do método, o aluno interpreta o enunciado de uma tarefa e atribui significados usando ícones em raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, constrói hipóteses sem o carater experimental da indução e sem o rigor formal da dedução.
		N3S2 *Representamen* da secundidade 	**N3S2D1** No 3.ºnível do método, o professor focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares de analogias a raciocínios e experiências anteriores, em condições necessárias de raciocínios, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N3S2D2** No 3.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função através de uma analogia ou de uma implicação necessária usando ícones em raciocínios abdutivos e índices em raciocínios indutivos.
		N3S3 *Representamen* da terceiridade 	**N3S3D1** No 3.ºnível do método, o professor faz generalizações de induções matemáticas e de deduções, promove sínteses e faz sínteses dos raciocínios.	**N3S3D2** No 3.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função, usando símbolos em raciocínios dedutivos. Ou através de uma generalização que obteve de raciocínios indutivos e abdutivos.
		N3S0  Signos não semióticos	**N3S0D1** No 3.ºnível do método, o professor usa analogias, condições necessárias de induções, generalizações de induções ou deduções. Focaliza o raciocínio do aluno para aspetos particulares, promove sínteses e faz sínteses em resposta a significados N3S0 dos alunos.	**N3S0D2** No 3.ºnível do método, o aluno transforma e converte representações de parâmetros numa função fazendo uso de signos que *não são representamen*, por não se enquadrarem no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática.

4.4. A proposta pedagógica e as tarefas para a implementação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções

Neste ponto descrevemos a proposta pedagógica que serviu de base à implementação do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções e à recolha dos dados da investigação.

A planificação do tema Funções foi feita pela professora investigadora com a finalidade de estudar e escolher as aulas e os momentos indicados para proceder à realização de cada uma das tarefas. De acordo com Chapman (2013), as tarefas foram construídas de modo a que: i) pudessem ser resolvidas pelos alunos de várias maneiras, apelando ao uso de múltiplas representações; permitissem conectar vários conceitos algébricos relevantes e exijam dos alunos justificações, interpretações e conjeturas; ii) fossem ricas em conteúdo, proporcionassem aprendizagem algébrica significativa e, face às quais, os alunos atribuíssem significado; e, iii) fossem adequadas à capacidade de compreensão dos alunos. Para tal, à professora investigadora foi-lhe requerido: i) conhecer as várias formas de promover aprendizagem nos alunos com cada tarefa, pois todos os alunos da turma são diferentes, aprendem matemática de forma diferente e têm níveis de desempenho matemático diferente; ii) compreender, na fase de seleção e elaboração da tarefa, como é que, enquanto professora, pode influenciar o aluno a dar sentido à matemática aplicada na resolução da tarefa; e, iii) quais os aspetos da tarefa que permitem organizar e orquestrar o trabalho dos alunos – como, por exemplo, *o que perguntar para desafiar os alunos*, *como apoiar os alunos sem pensar por eles e sem eliminar cada desafio*.

As tarefas construídas de raiz para a proposta pedagógica deste estudo foram construídas de modo concordante com os três níveis definidos no método de ensino aplicado ao caso dos parâmetros em funções. As tarefas adaptadas para as entrevistas iniciais e para a entrevista final não preveem na sua construção os três níveis do método de ensino deste estudo (pela intencionalidade metodológica já explicada no ponto 4.2), o mesmo sucede com a tarefa extraída do teste intermédio.

Em todas as tarefas da proposta pedagógica, o enunciado das questões é genérico, descreve e contextualiza a situação. De um modo geral, não há valores numéricos no enunciado. O enunciado é frequentemente acompanhado de um esquema que tem o intuito de desencadear a construção de signos. Numa primeira fase, signos ícones, ou seja, representações que evidenciam atividade matemática por imediaticidade que ajudam o aluno a contextualizar a situação, o aluno constrói representações que decorrem de algum raciocínio abdutivo com o qual intenciona uma ação, ou uma hipótese da situação que lhe é exposta. Na(s) primeira(s) questão(ões), relativas ao 1.ºnível, propõe-se aos alunos que concretizem numericamente o(s) valor(es), usualmente o(s) valor(es) do(s) parâmetro(s) e das variáveis. Este pedido de concretização tem o propósito de promover no aluno algum raciocínio indutivo, que lhe permita concretizar passo a passo a estratégia que intencionou na fase anterior, usando representações que traduzem tal ação matemática. Ou seja, representações que são em si signos índices porque mostram a implementação da estratégia intencionada pelo aluno. Ainda no 1.ºnível pretende-se que o aluno sistematize e sintetize as representações que foi construindo e o faça por meio de algum raciocínio dedutivo – tais representações assim construídas constituem em si um signo símbolo (porque sintetiza/condensa os signos e os raciocínios anteriores).

Em seguida, as questões são formuladas de modo a propor aos alunos que representem, transformem e convertam as representações que eles próprios vão construindo na resolução da tarefa, mas não concretizando numericamente a variável dependente nem a independente, ou seja, questões referentes ao 2.ºnível. Neste 2.ºnível também se pretende que o aluno represente o que o ajuda a compreender cada passo dado na sua resolução, decorrendo tal compreensão de algum raciocínio abdutivo acompanhado de representações que são em si signos ícones. Também no 2.º nível pretende-se que o aluno construa e interligue representações e raciocínios, decorrendo tal atividade matemática de algum raciocínio indutivo e fazendo uso de representações que são em si signos índices. Complementarmente também se pretende no 2.º nível que o aluno sistematize e sintetize e o faça através de algum raciocínio dedutivo e construindo representações que são em si signos símbolos.

Na(s) última(s) questão(ões) das tarefas, no 3.º nível, propõe-se aos alunos que trabalhem na situação com valores não concretizados numericamente das variáveis dependente e independente e do(s) parâmetro(s). Também no 3.º nível se pretende que o aluno construa uma hipótese de resolução, uma intenção e represente tal intenção – é uma atividade matemática do aluno que decorre de algum raciocínio abdutivo fazendo uso de representações que são signos ícones. Em seguida, pretende-se que o aluno implemente essa ação e a represente – tal atividade matemática do aluno decorre de algum raciocínio indutivo acompanhada de representações que são em si signos índices. E, complementarmente, sintetize tais ações e tais raciocínios e os represente – esta atividade matemática decorre de algum raciocínio dedutivo e é acompanhada de representações que são por si signos símbolos.

Os enunciados das tarefas estão no capítulo dos anexos. Em cada alínea de cada tarefa é pedido aos alunos que expliquem detalhadamente e de modo explícito todos os seus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessitem realizar, expressões simbólicas e gráficos que construam (quer usando a calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático usado para resolver a questão).

A tarefa ***"A vedação do Jardim"*** (Anexo 3) é uma situação semirreal que envolve a maximização de perímetros e áreas em funções racionais. Na primeira questão propõe-se aos alunos que concretizem o valor para a área do jardim. Nesta primeira fase pretende-se que os alunos comecem por trabalhar com o parâmetro e com as variáveis dependente e independente concretas, ou seja no 1.º nível do método, e, sob um raciocínio abdutivo, comecem por fixar um valor numérico para a área do jardim atribuindo algum significado ao esquema que acompanha o enunciado (figura 4.1) e que, tal significado, lhes permita definir um caminho de atuação sobre a situação que têm para resolver (ou seja, atribuam significados de grau 1). Por exemplo, se os alunos começarem por considerar que a área do jardim é 150 m^2 e a partir dessa concretização questionem o seguinte *"se a área do jardim for 150 m^2 que valores é que podem ter a largura e o comprimento?"*, estão, nesse instante, ao raciocinar abdutivamente, no primeiro nível do método, e, ao representarem tal raciocínio, por meio de palavras (ou por meio doutro modo de representação), estão a usar signos ícones. A tal atividade sígnica, ou seja, ao conjunto desses raciocínios e dessas representações, chamamos significados de grau 1.

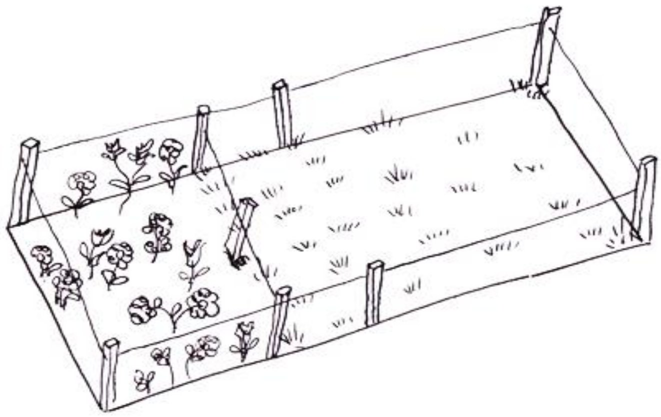


Figura 4.1: A representação esquemática da tarefa *A vedação do jardim*

Posteriormente quando concretizam a estratégia que definiram (ou seja, quando, por exemplo, experimentam valores para a largura e para o comprimento de modo a qua a área seja 150) estão a raciocinar indutivamente e as representações que constroem (orais ou escritas) são signos índices. Ao conjunto desses raciocínios e dessas representações, chamamos significados de grau 2. Posteriormente, quando sintetizam as relações que construíram com as dimensões do jardim (largura, comprimento e área) e o fazem usando representações como por exemplo "se o jardim for um quadrado então o valor do comprimento é igual ao da largura e é igual a $\sqrt{150}$", estão nesse instante a raciocinar dedutivamente no 1.º nível do método e a representar tais raciocínios por meio de signos símbolos. Ao professor é requerida a função de, em cada fase do raciocínio dos alunos, mediar, de forma a conduzir o aluno à construção de significados de grau 3, quer usando questões focalizadas em algum aspeto particular do raciocino dos alunos, quer promovendo sínteses e conduzindo o aluno à retoma de significados construídos em experiências matemáticas anteriores.

Em seguida, sob o 2.º nível do método (em que os alunos trabalham com as variáveis dependente e independente e com o parâmetro concreto), é pedido aos alunos que construam um modelo matemático que lhes permita determinar o valor da medida do comprimento do arame gasto na vedação em função da largura e do comprimento do jardim. Depois pede-se que determinem as dimensões do jardim de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação. Primeiramente, pretende-se que os alunos construam uma intenção de atuação usando um raciocínio abdutivo e que a explicitem por meio de uma representação que constitui um signo ícone (ou seja, atribuam significados de grau 1), como o que acontece se construírem a representação "suponhamos que o comprimento total do arame é *c*, supusemos na alínea anterior que a área é 150, se designarmos por *x* a largura do jardim e por *y* o comprimento, podemos construir uma expressão para o valor do comprimento total de arame gasto". Numa segunda fase, pretende-se que implementem a estratégia que definiram e construam passo a passo relações matemáticas que resultem do raciocínio indutivo construído e que sejam representadas por meio de signos índices (significados de grau 2), tal como o que acontece se os alunos construírem o seguinte: "$c = 2y + 3x$, em que x representa o valor da largura e y representa o valor do comprimento". Depois pede-se aos alunos que determinem as dimensões do jardim de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação, pretende-se que os alunos estruturem os significados construídos e que os sintetizem matematicamente (ou seja, significados de grau 3), tal como acontece se os alunos determinarem o mínimo da função $c = 2\left(\frac{150}{x}\right) + 3x,\ para\ um\ jardim\ com\ \text{área}\ 150\ \mathrm{m}^2,$ $em\ que\ x\ representa\ o\ valor\ da\ largura\ e\ c\ representa\ o\ comprimento\ total\ de\ arame\ gasto.$

Por último, sob o 3.º nível do método (em que os alunos trabalham com as variáveis dependente e independente e com valores genéricos do parâmetro), pede-se que considerem que o jardim tem a m^2 de área e determinem a expressão algébrica que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim, de modo a que se gaste o mínimo de arame possível na construção da vedação. De modo análogo, quando os alunos constroem uma estratégia de resolução estão a raciocinar de modo abdutivo e, ao representarem tal raciocínio, usam signos ícones. A este conjunto de signos e de representações designamos neste método por significados de grau 1, como por exemplo, quando os alunos constroem o seguinte: "… nesta questão temos de construir também uma expressão para o comprimento de arame gasto na vedação, mas agora, considerando a área a ". Num segundo momento do 3.º nível pretende-se que os alunos implementem a estratégia definida, relacionando cada significado construído com o anterior, representando tais raciocínios indutivos por meio de signos índices como, por exemplo, o seguinte: " Se a área for $a\,\mathrm{m}^2$, o comprimento do jardim será dado pela expressão $\frac{a}{x}$, considerando que x representa a largura". E posteriormente, pretende-se que os alunos sintetizem os significados construídos (em significados de grau 3), por meio de raciocínios dedutivos representados através de signos como, por exemplo, o seguinte: "A expressão $c = \frac{2a}{x} + 3x$ representa o comprimento de arame gasto para a vedação de um jardim com $a\,\mathrm{m}^2$ de área e com $x\,\mathrm{m}$ de largura".

A tarefa ***“O passeio das amigas”*** (Anexo 4) foi adaptada de Itens/Teste Intermédio 10.ºano, GAVE 2010 para a proposta pedagógica do estudo. Esta tarefa envolve parâmetros em funções afim e linear, num contexto semirreal. Esta tarefa envolve duas amigas que iniciam um passeio de bicicleta, em que cada uma parte da vila em que habita e se dirige à vila da amiga existindo apenas uma estrada que une as duas vilas, que distam entre si 18 km. Sem que seja dada qualquer expressão algébrica, admite-se que f e g são as funções que dão, em quilómetros, a distância percorrida por cada uma das amigas, t minutos depois de terem iniciado o passeio. Inicialmente, e sob o 1.ºnível do método de ensino, é pedido aos alunos que escolham, explicando a sua escolha, entre as quatro representações gráficas que se seguem, qual é a que representa graficamente a situação.

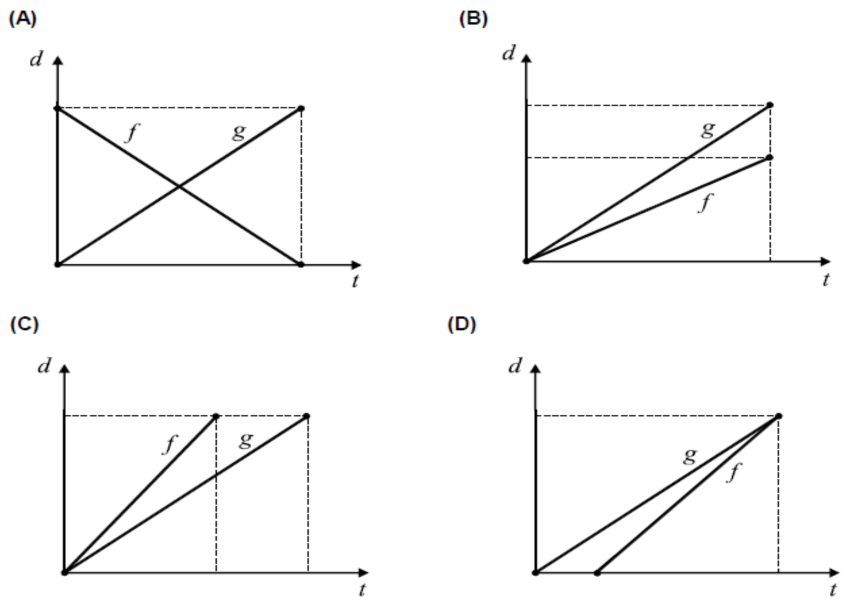


Figura 4.2: As representações gráficas da tarefa *O passeio das amigas*

O que o professor pretende com esta questão é que os alunos recuperem do 10.ºano, significados estruturados à data da resolução e da correção do teste intermédio, e que, agora, à luz deste método de ensino, sejam considerados como significados de grau 3 no contexto do teste intermédio do 10.ºano. Pretende-se que tais significados funcionem agora, no 11.ºano e no momento da resolução desta tarefa, como significados de grau 1 do 1.ºnível do método, que impulsionem a estratégia de resolução das questões seguintes e que promovam a construção de raciocínios abdutivos para a resolução das questões 2, 3 e 4. Nas questões desta tarefa, a questão 1 corresponde ao 1.ºnível do método, as questões 2.1 e 2.2 correspondem ao 2.º nível do método e as questões 3 e 4 correspondem ao 3.ºnível do método. Contudo, a alínea 3.3 apresenta uma sugestão que (re)conduz os alunos desde a concretização até à generalização, ou seja, desde o 1.ºnível até ao 3.º nível do método.

Assim, na questão 1, referente ao 1.ºnível do método, pede-se aos alunos que admitam que uma das amigas se deslocou a uma velocidade constante de 5 km/h e que admitam ainda que a outra amiga também se deslocou a uma velocidade constante, mas que demorou mais 54 minutos. Seguidamente é pedido aos alunos que determinem a velocidade desta amiga que demorou mais tempo e a distância a que cada uma estava das suas vilas quando se cruzaram no caminho. Constituem-se como significados de grau 1 do 1.ºnível do método signos ícones, que representam raciocínios abdutivos que vão nortear os raciocínios seguintes, registos tais como o seguinte: " … as duas amigas percorrem a mesma distância em sentidos contrários e com velocidades diferentes. Por isso temos de tentar perceber qual o gráfico que nos relaciona estes indicadores.". Posteriormente, constituem-se como significados de grau 2 do 1.ºnível, signos índices que representam raciocínios indutivos, ou seja, que interligam os raciocínios abdutivos anteriores, respostas dos alunos como as seguintes: i) " … a distância percorrida pelas duas amigas é a mesma por isso o gráfico B não pode representar a situação", ou, ii) " … como se tratam de situações que podem ser traduzidas por funções representadas num gráfico da distância (que se inicia em 0) em função do tempo (que também se inicia em 0), as duas semirretas que representam as respetivas funções têm de partir da origem do referencial, o que não ocorre nos gráficos A e D". Complementarmente, constituem-se como exemplos de significados de grau 3 do 1.ºnível do método, signos símbolos que representam raciocínios dedutivos, que estruturam, sistematizam e complementam os significados anteriores, i) e ii), como por exemplo, o seguinte: " … por isso o gráfico C traduz que ambas as amigas percorrem a mesma distância mas em tempos diferentes, pois ambas as semirretas partem da origem do referencial e têm declives diferentes, ou seja o gráfico traduz que as duas amigas chegam ao destino, percorrendo a mesma distância em tempos diferentes".

No 2.ºnível do método, constituem-se como significados de grau 1, raciocínios abdutivos representados por signos como, por exemplo, o seguinte: "Se a Francisca demora 1 hora a percorrer 5 km, então temos de determinar quanto tempo demora a Francisca a percorrer 18 km e depois juntar 54 minutos para sabermos quanto tempo demora a Gabriela". Constituem-se como significados de grau 2, algumas concretizações dos significados de grau 1, como por exemplo: "…então $x = \frac{18}{5} = 3{,}6$ é o tempo que a Francisca demora". E, posteriormente, constituem-se como significados de grau 3 deste nível, raciocínios dedutivos representados por signos símbolos, que estruturam e sintetizam os anteriores, como por exemplo: "A Francisca demora $3{,}6\,h$, ou seja, $3\,horas\ e\ 36\,minutos$. Logo, a Gabriela demora $3\,horas + 36\,minutos + 54\,minutos$, ou seja demora $4\,horas\ e\ 30\,minutos\ a\ percorrer\ 18\,km$. A velocidade da Gabriela é a distância percorrida sobre o tempo gasto a percorrer essa distância, isto é, como ela demora $4{,}5\,horas$, então a sua velocidade é $\frac{18}{4{,}5} = 4\,km/h$".

No 3.ºnível do método, na questão 3, é pedido aos alunos que admitam que uma das amigas se deslocou a uma velocidade constante de *r* km/h e que a outra amiga também se deslocou a uma velocidade constante, mas demorou mais *m* minutos. Seguidamente é pedido aos alunos que determinem a expressão algébrica que representa o tempo que uma das amigas demora, em função de *r* e de *m* e pede-se que os alunos designem essa função por t_g e testem tal função com os valores concretos que admitiram anteriormente. Por último, pede-se aos alunos que esbocem no mesmo referencial o gráfico das funções que obtiveram no passo anterior, explicando o que acontece à função *t* à medida que a velocidade da amiga aumenta ou diminui. De modo análogo, o professor pretende com esta questão que os alunos construam significados gradualmente estruturados, desde contextos concretos, até contextos genérico. Assim, constituem-se como exemplo de significados de grau 1 do 3.º nível do método, representações que traduzem raciocínios abdutivos, que mostram estratégias que os alunos intencionam concretizar, hipóteses de resolução, possíveis caminhos a seguir na resolução, e por isso, constituem-se como signos ícones, como por exemplo: "Numa hora a Francisca percorre *r* km, como a Gabriela demora mais *m* minutos, temos de determinar a função que representa o tempo que a Gabriela demora a partir da função que representa o tempo que a Francisca demora". Constituem-se como exemplo de significados de grau 2 do 3.º nível do método, representações que traduzem raciocínios indutivos, que mostram estratégias concretizadas, mostram a implementação de caminhos de resolução que foram intencionados em significados anteriores, e por isso, constituem-se como signos índices, como por exemplo: "A Gabriela demora mais *m* minutos do que a Francisca, por isso, como o tempo que representa o que a Francisca demora em horas é $\frac{18}{r}$, convertemos *m* em horas e obtemos a seguinte expressão $\frac{18}{r}+\frac{m}{60}$ ". E posteriormente, significados de grau 2 como este, ao evoluírem para significados síntese, que estruturam os significados até aí construídos, dão origem a significados de grau 3, como o seguinte exemplo que pode explicitar essa estruturação: "… à medida que a velocidade r da Francisca aumenta, o tempo $\frac{18}{r}+\frac{m}{60}$ que a Gabriela demora diminui.".

A tarefa ***"Funções: composta e inversa"*** (Anexo 5) é uma tarefa que envolve funções linear, afim e racional. Esta tarefa engloba apenas questões referentes ao 2.º nível (alíneas das questão 1) e ao 3.º nível do método (alíneas da questão 2 e 3). Inicialmente, e sob um 2.º nível, é pedido aos alunos que considerem duas funções reais *f* e *h*, uma afim outra linear, dadas no enunciado por duas expressões algébricas. É pedido aos alunos que caracterizem uma função $g(x)$ de modo que *h* e *g* sejam funções permutáveis e, em seguida, caracterizem $g(x)$ de modo que *f* e *g* sejam funções permutáveis. Nas questões do 2.º nível do método de ensino, pretende-se que os alunos comecem por experimentar definir a função *g(x)* e, ao atribuírem significados como por exemplo "vamos experimentar representar *h(x)* e *f(x)* graficamente para sabermos que tipo de função poderá ser *g(x)*" estão a raciocinar de forma abdutiva, pois definem um caminho de resolução e por isso, significados como este classificamo-los de grau 1, do 2.ºnível. Posteriormente, se este significado evoluir para um significado mais estruturado, em que os alunos estudam e relacionam o domínio e as representações gráficas das funções, o significado de grau 1 evolui para um significado de grau 2. Posteriormente, se significados de grau 2 como este, evoluírem para significados síntese, que estruturam os significados até aí construídos, constituem-se significados de grau 3, tais como "as funções g e h são permutáveis porque $g \circ h = h \circ g$ pois possuem igual domínio e igual expressão analítica". O mesmo acontece nas questões 2 e 3 da tarefa, nas quais o professor pretende que o aluno demostre um conjunto de propriedades associadas à composição de funções. Como tal, é pedido aos alunos que considerem uma função p definida por $p(x) = ax + b$, $a, b, x \in IR$ e mostrem que duas funções constantes distintas não são permutáveis e em seguida mostrem que duas funções lineares são sempre permutáveis. Depois, os alunos são questionados se duas funções representadas graficamente por retas paralelas com declive igual a 1 são ou não permutáveis e se duas funções representadas graficamente por retas não paralelas são ou não permutáveis, sendo-lhes pedido que argumentem as suas respostas. Nesta série de questões pretende-se que os alunos construam primeiramente conjeturas (significados de grau 1), implementem-nas (significados de grau 2) e posteriormente sintetizem-nas (significados de grau 3). Por último é pedido os alunos que definam uma função $g(x)$ de modo que p e g sejam funções permutáveis e mostrem que qualquer função afim é permutável com a sua inversa.

A tarefa ***"A caixa de volume máximo"*** (Anexo 6) é uma tarefa real que envolve parâmetros em funções irracionais. Nesta tarefa pretende-se construir uma caixa com base num pedaço de cartão quadrado, tal como se mostra na figura:

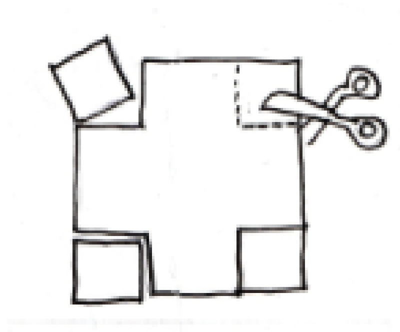


Figura 4.3: A representação esquemática da tarefa *A caixa de volume máximo*

Para tal, cortam-se aos quatro cantos do cartão quadrados iguais. O que o professor pretende nesta tarefa é que os alunos definam um modelo matemático que permita maximizar o volume da caixa, dependendo do lado do quadrado cortado. Para tal, começa por pedir aos alunos que atribuam um valor concreto para o lado do cartão e que definam uma estratégia que lhes permita relacionar as dimensões da caixa (largura, comprimento e altura) com o seu volume, ou seja que construam significados de grau 1, no 1.º nível do método – é sugerido aos alunos que comecem por explorar a situação concretizando valores possíveis para o lado do quadrado cortado, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural. E quando os alunos relacionam tais esquemas constroem significados que designamos por significados de grau 2 do 1.ºnível, por traduzirem o raciocínio de relação, de construção, dos significados construídos anteriormente. E posteriormente, por exemplo, quando os alunos fazem afirmações como a seguinte "se o cartão tiver 20 cm de lado e cortarmos cantos quadrados com 5 cm de lado, obtemos uma caixa com 500 cm^3 de volume" os alunos constroem significados que designamos por significados de grau 3, por sintetizarem e estruturarem os significados até aí construídos.

Posteriormente, quando os alunos trabalham com um lado do quadrado cortado igual a x e constroem a função que lhes permite determinar o volume da caixa, para um determinado valor concreto do lado do quadrado inicial, os alunos estão a trabalhar no 2.ºnível do método de ensino, com o parâmetro concreto. E se, por exemplo, conjeturarem acerca das possibilidades para o valor do volume quando cortam quadrados nos cantos com dimensões concretas, os alunos estão nesse instante a construir significados de grau 1 do 2.ºnível do método. Posteriormente, ao construírem alguma função associada e estudarem a sua monotonia, por exemplo, estão nesse momento a construir significados de grau 2. E ao relacionarem tal monotonia da função com o valor máximo constroem significados de grau 3.

Por último, quando é pedido aos alunos que construam um modelo matemático que lhes permita calcular o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado e que determinem as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo, considerando que o cartão tem *p* cm de lado, o que o professor pretende é que os alunos trabalhem no 3.º nível do método. Analogamente, neste nível pretende-se que os alunos também comecem por conjeturar possibilidades de resolução (significados de grau 1), implementem tais conjeturas (significados de grau 2) e concluam/sintetizem/estruturem resultados associados às possibilidades de corte dos cantos do cartão de modo a que o volume da caixa resulte máximo.

A tarefa ***"O triângulo inscrito numa circunferência"*** (Anexo 7) - tarefa detalhada no ponto 3.3 do capítulo 3 – que envolve parâmetros em funções irracionais. Nesta tarefa pretende-se construir um triângulo inscrito numa circunferência cujo diâmetro é um dos seus lados.

A tarefa ***"Parâmetros em funções racionais"*** está dividida em três partes (Parte 1, Parte 2 e Parte 3, cujo enunciado está respetivamente nos Anexo 8, Anexo 9 e Anexo 10). Na Parte 1 são dadas as funções reais de variável real $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com c e d não cumulativamente nulos. Pede-se aos alunos que estudem, sob o 1.º nível do método, as funções $f(x)$, $g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$, considerando, respetivamente, $a = c = 0 \ \wedge \ b = 1 \ \wedge \ d = \frac{1}{2}$; $a = -2 \ \wedge \ c = 1 \ \wedge \ b = d = 0$; $a = d = 2 \wedge b = 1 \wedge c = 0$; $a = 2 \wedge b = 1 \wedge c = d = 0$; $a = 3 \wedge b = 1 \wedge c = 2 \wedge d = 0$; $a = -3 \wedge b = 1 \wedge c = 2 \wedge d = -1$; $c = 0 \wedge a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; e, $d = 0 \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na Parte 2 parte-se da representação gráfica da função real de variável real $f(x) = \frac{1}{x}$ e é pedido aos alunos que construam a representação gráfica da função $g(x) = a + \frac{b}{x+d}$, fazendo concretizações sucessivas dos parâmetros a, b, c, d à semelhança do que ocorreu na parte 1 e explicando de forma detalhada e explícita todos os raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares, expressões simbólicas e gráficos. Por último é pedido aos alunos que, partindo da representação gráfica da função real de variável real $f(x) = \frac{1}{x}$ expliquem como constroem a representação gráfica da função $g(x) = a + \frac{b}{x+d}$. Na Parte 3 são dados no enunciado alguns os gráficos que se seguem e que representam uma família de funções que se obtêm de $h(x) = a + \frac{b}{x+d}$ através variação de um dos parâmetros a, b, d num intervalo de números reais e da substituição dos restantes por valores reais numéricos.

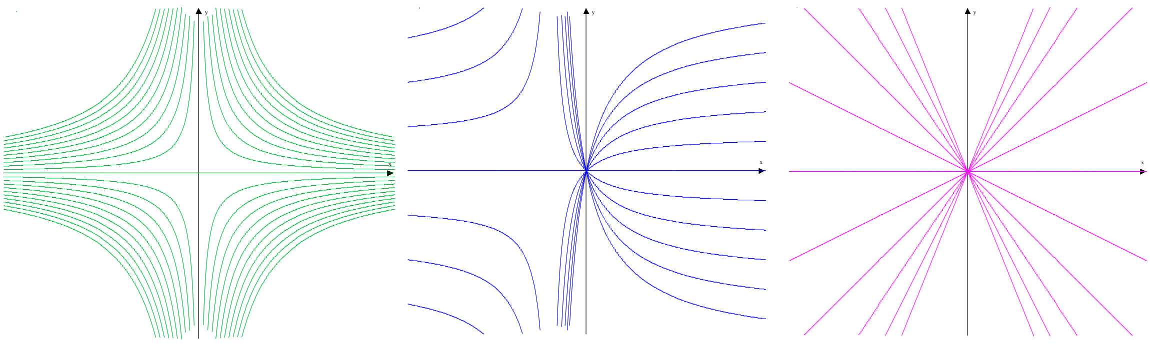


Figura 4.4: As representações gráficas da tarefa *Parâmetros em funções racionais*

Pede-se aos alunos que associem a cada gráfico uma expressão algébrica e expliquem de forma detalhada e explícita todos os raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessitem realizar, expressões simbólicas e gráficos que construam. Tal como em todas as tarefas, o que se pretende é que os alunos atribuam significados, com base na experiência que adquirem ao trabalharem situações concretas (significados de grau 1 do 1.ºnível) e que tais significados evoluam, gradualmente, e se estruturem e sintetizem (ou seja, evoluam para significados de grau 2 e 3), quer do 2.º nível, quer do 3.º nível do método.

Na tarefa ***"Parâmetros, funções e geometria"*** (Anexo 12) constitui a entrevista final e envolve parâmetros em funções racionais, irracionais e maximização de volumes. No enunciado desta tarefa está representado o cilindro seguinte, de altura h e raio da base r, em que A e B são os centros das bases do cilindro.

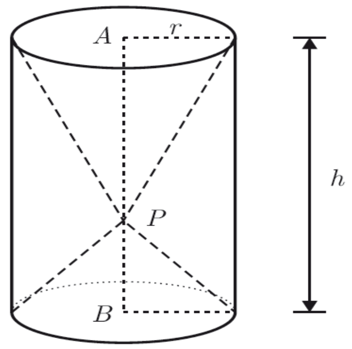


Figura 4.5: O cilindro da tarefa *Parâmetros, funções e geometria*

É pedido aos alunos que considerem que um ponto P se desloca ao longo do segmento [AB], nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B. Cada posição do ponto P determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P e cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Esta tarefa integra apenas questões do 3.º nível do método de ensino, pois prevê que os alunos trabalhem com as variáveis e com o parâmetro genérico. Pretende-se inicialmente que os alunos mostrem que a soma dos volumes dos dois cones é constante, isto é, que não depende da posição do ponto *P*. Sugere-se que os alunos comecem por designar por *a* a altura de um dos cones (esta alínea foi adaptada de TI Matemática A, 10.ºano, GAVE, 6/5/2011). Em seguida pretende-se que os alunos determinem para que valores do raio do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor da altura *h* e para que valores da altura do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor do raio. Em seguida, pede-se aos alunos para suporem que vão embalar o cilindro, de volume *v*, numa caixa paralelepipédica, como tal, e para minimizar o gasto de papel, é pedido que determinem as dimensões do cilindro para que a área total da caixa seja mínima. Por último, é pedido aos alunos que construam um enunciado equivalente ao dado, seguindo de uma série de questões (como as anteriores ou outras), envolvendo outros sólidos (por exemplo, paralelepípedos e pirâmides, cubos, esferas, …). Tal como em todas as tarefas, pretende-se que os alunos desenvolvam a sua atividade sígnica ao longo dos três dos níveis do método de ensino, de forma mediada semioticamente pela professora. E que, em cada um dos três níveis, os alunos construam significados matemáticos desde o grau 1 até ao grau 3, quer de modo individual, quer de modo coletivo.

A tabela seguinte sintetiza o período de tempo em que decorreu o estudo, bem como o que ocorreu nesse período de tempo quer nas aulas com tarefas descritas atrás, nas quais ocorreu a grande maioria da recolha de dados, quer nas aulas antes e depois das tarefas. A tabela que se segue sintetiza assim a sequência das tarefas que integram a proposta pedagógica, o tema matemático em que cada tarefa se insere, bem como o tipo de tarefa (problema, exercício, investigação) e os contextos temporais do estudo (o que ocorreu nesses contextos, a data em que as tarefas foram implementadas, o modo como foram resolvidas e discutidas nas aulas). As tarefas cuja sua implementação proporcionou a grande maioria dos dados recolhidos neste estudo, estão distinguidas na tabela que se segue com cor diferente.

Tabela 4.5: Síntese da proposta pedagógica

TAREFA	CONTEXTO DIDÁTICO	DATA DE IMPLEMENTAÇÃO
Tarefa n.º18, pág.62 e tarefa n.º33, pág.66, do livro ALEPH[10], vol.2. **(Carvalho e Silva *et al.*, 2010).**	Tarefas que envolvem parâmetros em funções quadráticas. A função quadrática foi estudado pelos alunos do estudo no 10.ºano de escolaridade. O enunciado destas tarefas é dado em contextos puramente algébricos e em problemas semirreais, sob registos de representação algébrica, gráfica e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 1*)***	Entrevista inicial ao grupo_I, parte_A e pré-entrevista ao grupo_II, parte_A, no dia 3 de fevereiro de 2011.
Tarefa n.º4 e tarefa n.º6, pág.123, do livro ALEPH[10], vol.2. **(Carvalho e Silva *et al.*, 2010).**		Entrevista inicial ao grupo_II, parte_B, no dia 10 de fevereiro de 2011.
Tarefa n.º4, pág.103 e tarefa n.º4, pág.123, do livro ALEPH[10], vol.2. **(Carvalho e Silva *et al.*, 2010).**		Entrevista inicial ao grupo_I, parte_B, no dia 14 de fevereiro de 2011.
Tarefa n.º16, pág.28 do livro Matemática A 11.ºano, Funções II, vol.2. **(Neves *et al.*, 2009).**	Tarefa que envolve parâmetros numa função racional. O enunciado é dado em contexto de problema semirreal, sob registos de representação algébrica e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 2*)***	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 21 de fevereiro de 2011.
Tarefa "A vedação do jardim".	**Tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica do estudo. Esta tarefa envolve maximização de perímetros e áreas em funções racionais, num contexto semirreal, dado sob registos de representação esquemática e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 3*)***	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 22 de fevereiro de 2011.

Tarefa "O passeio das amigas".	**Tarefa** adaptada de Itens/Teste Intermédio 10ºano, GAVE 2010 para a proposta pedagógica do estudo. Esta tarefa envolve parâmetros em funções afim e linear, em contexto semirreal, sob registos de representação gráfica e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 4)**	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 24 de fevereiro de 2011.
Tarefas e do livro Matemática A 11.ºano, Funções II, vol.2. (Neves *et al*., 2009).	Tarefas que envolvem parâmetros em funções racionais, irracionais, taxam média de variação e derivadas de funções.	Tarefas abertas, problemas e exercícios resolvidos por toda a turma e discutidos com a mediação da professora, nas aulas de matemática.
Tarefa "Funções: composta e inversa".	Trata-se de uma **tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica. Esta tarefa envolve parâmetros em funções linear, afim e racional. O enunciado é dado em contexto puramente algébrico, sob registos de representação algébrica e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 5)**	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 22 de março de 2011.
Tarefas e do livro Matemática A 11.ºano, Funções II, vol.2. (Neves *et al*., 2009).	Tarefas que envolvem parâmetros em funções racionais, irracionais, taxa média de variação e derivadas de funções.	Tarefas abertas, problemas e exercícios resolvidos por toda a turma e discutidos com a mediação da professora, nas aulas de matemática.
Tarefa "A caixa de volume máximo".	Trata-se de uma **tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica. Esta tarefa envolve parâmetros em funções racionais e maximização de volumes. O enunciado é dado em contexto semirreal, sob registos de representação esquemática e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 6)**	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 28 de abril de 2011.
Tarefa "O triângulo inscrito numa circunferência".	Trata-se de uma **tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica do estudo. Esta tarefa envolve parâmetros em funções irracionais. O enunciado é dado em contexto semirreal, sob registos de representação geométrica e em linguagem natural. ***(ver* ANEXO 7)**	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 2 de maio de 2011.
Tarefa "Parâmetros em funções racionais".	Trata-se de uma **tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica do estudo. Esta tarefa envolve parâmetros em funções racionais. O enunciado é dado em contexto	Tarefa resolvida por toda a turma e discutida com a mediação da professora, na aula de matemática do dia 3 de maio de 2011.

	puramente algébrico. *(ver* **ANEXO 8, 9 e 10***)*	
Tarefas e do livro Matemática A 11.ºano, Funções II, vol.2. **(Neves et al., 2009).**	Tarefas que envolvem parâmetros em funções racionais, irracionais, taxa média de variação e derivadas de funções.	Tarefas abertas, problemas e exercícios resolvidos por toda a turma e discutidos com a mediação da professora, nas aulas de matemática.
Questão 4.3 do teste intermédio de Matemática A do 11.ºano, de 24 de maio de 2011.	Esta tarefa é um problema que envolve operações com funções racionais e polinomiais. O enunciado é dado em contexto puramente algébrico. *(ver* ANEXO 11*)*	Tarefa resolvida pelos alunos no teste intermédio do 11.ºano de matemática, do dia 24 de maio de 2011 e discutida no grupo turma, com mediação pela professora no dia 31 de maio de 2011.
Tarefa "Parâmetros, funções e geometria".	Trata-se de uma **tarefa** construída de raiz para a proposta pedagógica do estudo, em que uma das alíneas foi adaptada de Teste Intermédio de Matemática A, 10.ºano, GAVE, 6/5/2011 Esta tarefa envolve parâmetros em funções racionais, irracionais e maximização de volumes. O enunciado é dado em contexto semirreal, sob registos de representação geométrica e em linguagem natural. *(ver* ANEXO 12*)*	Entrevista final aos grupo_I e ao grupo_II, no dia 7 de junho de 2011.

5. O método em ação

A análise dos dados centrou-se pormenorizadamente nas sete unidades de análise selecionadas: *A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*. Após a análise de primeira ordem, que constou da compilação dos dados, fez-se a análise de segunda ordem. Nela foram distribuídos os dados pelas duas dimensões, doze categorias e vinte e quatro subcategorias, de acordo com o problema do estudo, com o enquadramento teórico e o próprio trabalho empírico desenvolvido.

Neste capítulo apresenta-se a análise de segunda ordem referente às unidades de análise *"A vedação do jardim"* (primeira tarefa do estudo), *"A caixa de volume máximo"* (quarta tarefa do estudo) e *"Parâmetros, funções e geometria"* (sétima tarefa do estudo). Para a investigadora, tal apresentação será suficiente para enquadrar e compreender o todo, quer na análise de terceira ordem, quer nas próprias conclusões do estudo. Esta opção também foi motivada pela diminuição da extensão da tese, tornando-a de mais fácil leitura.

A análise de segunda ordem será feita sob as duas dimensões: i) a mediação semiótica do professor; e ii) a representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções.

5.1. A vedação do jardim

5.1.1. A mediação semiótica do professor

A mediação semiótica do professor será analisada segundo: i) o questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos; e ii) o questionamento para sínteses e a realização de sínteses.

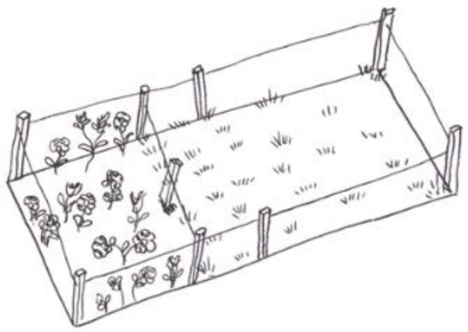
5.1.1.1. O questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos

Antes dos alunos iniciarem a resolução da tarefa a professora leu, para toda a turma e em voz alta, as recomendações iniciais, como as que estão apresentadas no extrato 5.1.

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Extrato 5.1: Focalização do raciocínio dos alunos para aspetos particulares do enunciado comuns a todas as tarefas: Significados N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1

De modo idêntico, leu o enunciado apresentado no extrato 5.2, que foi apresentado aos alunos de modo a que eles o considerassem em todas as fases da resolução da tarefa (ver extrato 5.3).



"Pretendemos construir uma cerca com um fio de arame para vedar um pequeno jardim retangular com uma determinada área, dividido em dois canteiros também vedados entre si por fio de arame. Que modelo matemático nos permite minimizar a quantidade de arame gasto, dependendo da largura, ou do comprimento, do jardim?"

1. Começa por considerar um valor concreto para a área do jardim:

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões do jardim (largura e comprimento) com a sua área – começa por explorar a situação usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-a por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um modelo matemático que permita calcular o valor da medida do comprimento do arame gasto (que podes designar por c) em função da largura e do comprimento do jardim.

1.3. Quais deverão ser as dimensões do jardim de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora que o jardim tem a m^2 de área. Qual é a expressão algébrica que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim."

Extrato 5.2: Enunciado que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: Significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, do enunciado da tarefa *"A vedação do jardim"*

Trata-se de um enunciado sem valores concretos e que apela à experimentação dos alunos. E a professora, ao salientar esse facto, incentivou os alunos ao livre uso de esquemas, tabelas e linguagem natural e à relação entre tais representações. Por isso trata-se de um signo que pertence aos níveis 1, 2 e 3 do método (N1, N2, N3), que tem o intuito de promover o raciocínio abdutivo (S1), indutivo (S2) e dedutivo (S3) dos alunos, tal como mostra o extrato 5.3, e que consta do enunciado da tarefa (classificado, por tal, como D1).

(…)

Miguel: Mas este enunciado não tem valores!

Professora: Olhem para o esquema e tentem perceber o que acontece com valores concretos.

Marco: Mas como é que fazemos?

Professora: Fazem como diz no enunciado, a sublinhado "Começa por considerar um valor concreto para a área do jardim".

Miguel: Mas que valores concreto? 10? 100? 1000?

Professora: Sim. O que quiserem e acharem ajustado à situação.

Marco: Pois. Mas, depois como é que fazemos?

Professora: Explorem o esquema do enunciado e façam essa exploração como quiserem. Experimentem o que acontece com vários valores. Experimentem o que acontece aos valores que obtêm em consequência do valor concreto que fixam. Experimentem sem medo. Acima de tudo, sem medo. Olhem para a recomendação que está no retângulo: "Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas." E isto pode e deve ser feito sempre ao longo de toda a resolução, em todas as alíneas.

Extrato 5.3: Mediação semiótica da professora de significados matemáticos de grau 1 dos alunos do grupo 3, na tarefa *"A vedação do jardim*

Na fase de exploração do enunciado, a mediação da professora foi fundamental para que o desenho/esquema que acompanha o enunciado se transformasse num signo promotor do raciocínio abdutivo dos alunos, tal como mostra o extrato 5.4.

(…)

Marco: Sim, pois, mas o que é que é para resolver afinal?

Professora: Têm que responder a todas as alíneas e pela ordem em que aparecem. A primeira é "Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões do jardim …". Mas o objetivo da tarefa é o que vem no início, em destaque e vem acompanhado pelo desenho, que, como podem constatar, está tosco e sem valores. É esse sempre o vosso princípio e o vosso fim. Ou seja, sempre que estiverem perdidos, voltem ao início, leiam e explorem este enunciado outra vez, e outra vez, tantas as vezes quantas forem necessárias.

Marco: Podemos experimentar fazer o desenho mas com tamanhos diferentes?

Professora: Sim podem, com as dimensões que quiserem.

Marco: Com as dimensões que quisermos? Então pode ser um quadrado?

Professora: Pode.

Marco: E também pode ser um retângulo com a largura muito mais pequena do que o comprimento?

Professora: Pode. Pode ter as dimensões que vocês quiserem que tenha.

(…)

Extrato 5.4: Focalização do raciocínio dos alunos para aspetos particulares do enunciado: Significado N1S1D1, aos alunos do grupo 3.

A representação da figura 5.1 é um signo construído pelos alunos, em resultado da mediação semiótica da professora, e portanto classificado na dimensão 1 do estudo (D1), da questão 1.1 da tarefa (por isso pertencente ao nível 1 do método de ensino, N1), no qual é requerido aos alunos que concretizem quer o parâmetro quer as variáveis.

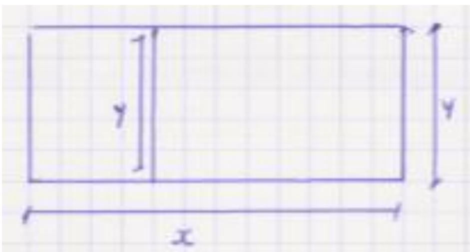


Figura 5.1: Signo ícone resultante do raciocínio abdutivo dos alunos do grupo 3 em resultado da mediação semiótica da professora (N1S1D1), na questão 1.1 da tarefa *"A vedação do jardim"*

(…)

Marco: Então, se podemos dar as dimensões que quisermos, o comprimento pode ser *x* e a largura pode ser *y*?

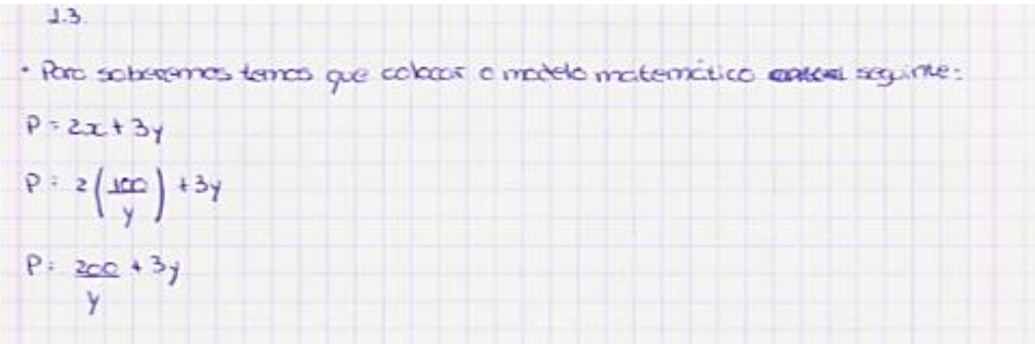
Professora: Sim pode.

(…)

Extrato 5.5: Mediação semiótica da professora do raciocínio dos alunos do grupo 3: significado N1S1D1.

Este signo é a representação de um raciocínio abdutivo porque os alunos (neste caso, os do grupo 3) iniciam uma estratégia de resolução. Este início de resolução é comunicado através de um signo que, por se tratar da representação de uma decisão tomada no início da resolução, define uma estratégia, um início de algo que lhes vai permitir começar a resolver a questão. Constitui, em si, um signo ícone, na qual as letras x e y funcionam como rótulos para designar o comprimento e a largura do jardim, respetivamente, e marcam assim o início dos raciocínios que se seguiram.

A representação da figura 5.2 é um signo construído pelas alunas do grupo 2, também por intermédio da mediação semiótica da professora, tal como explicita o extrato 5.6.


1.3

• Para sabermos temos que colocar o modelo matemático seguinte:

$P = 2x + 3y$

$P = 2\left(\frac{100}{y}\right) + 3y$

$P = \frac{200}{y} + 3y$

Figura 5.2: Signo índice resultante do raciocínio indutivo das alunas do grupo 2, através da mediação semiótica da professora, N2S2D1, na tarefa *"A vedação do jardim"*

Nesta questão 1.3 é requerido aos alunos que concretizem o parâmetro (o parâmetro foi a área concretizada com o valor 100 no caso das alunas do grupo 2) e trabalhem com as variáveis dependente e independente (neste caso, o perímetro P e o comprimento y, respetivamente variáveis dependente e independente). O signo representado na resolução da questão 1.3 é a representação de um raciocínio indutivo (ver figura 5.2). Isto, porque as alunas o constroem, passo a passo, e numa segunda fase (pois a primeira foi a definição da estratégia que foi feita de modo análogo à representada na figura 5.1) constroem a expressão algébrica que lhes permitirá definir a função que posteriormente explorarão na calculadora gráfica por forma a determinarem o valor do comprimento do jardim. E, consequentemente, o valor da largura, de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação. Este raciocínio indutivo foi mediado pela professora nos três grupos de trabalho, quer através de intervenções análogas às dos extratos 5.4 e 5.5, como através de intervenções como a do extrato 5.6. E, portanto, foi classificado na dimensão 1 do estudo (D1), da questão intermédia da tarefa, questão 1.3, por isso pertencente ao nível 2 do método de ensino (N2).

(…)

Íris: Na questão 1.3, para usarmos a calculadora gráfica, temos de construir uma função?

Professora: Sim.

Íris: Pois, sim, mas qual função? E como?

Sílvia: O que é que queremos?

Professora: Exatamente Íris, o que é que queremos? Voltem ao enunciado genérico, o que é que diz? Diz que, queremos um modelo matemático que nos permita minimizar a quantidade de arame gasto. E de que é que estamos a falar quando falamos de quantidade de arame gasto para vedar o jardim como mostra o desenho?

Sílvia: À volta do jardim!

Professora: Sim, à volta do jardim.

Sílvia: É o perímetro!

Professora (sorriu)**:** Sim, e mais?

Íris: Não é só o perímetro! Temos de somar ao perímetro o valor da largura. "Valor" que neste caso é y.

(…)

Extrato 5.6: Signo índice resultante do raciocínio indutivo das alunas do grupo 2, através da mediação semiótica da professora, N2S2D1, na tarefa *"A vedação do jardim"*

Ao construírem a representação da figura 5.2, as alunas estavam numa segunda fase do seu pensamento, imergidas numa atividade com signos que designamos por índices, o que lhes permitiu transformar a expressão algébrica tal como a figura mostra. Foram os significados de grau 1 construídos numa primeira fase (quer os de grau 1 construídos neste nível, quer os de grau 1 construídos no nível anterior), conjugados com os novos significados requeridos para a construção da transformação algébrica, que deram origem aos significados de grau 2, que a ocorrerem nesta fase da resolução da tarefa, ainda num contexto com o parâmetro concreto, que designamos por N2S2. Um exemplo de um significado de grau 1 construído neste nível por estas alunas, e que determinou a construção da expressão algébrica representada na figura 5.2 e classificada como um significado de grau 2, é a frase inicial também representada na figura 5.2, em que as alunas afirmam como vão proceder e escrevem essa intenção com o signo ícone *"para sabermos, temos que colocar o modelo matemático seguinte"*. Este ícone, que mostra a intenção de uma estratégia de ação, transformou-se num signo índice durante uma discussão entre as alunas e a professora, como mostra o extrato 5.7. Nesta discussão, a professora seguiu uma intervenção do tipo *'voltar à representação feita pelas alunas'* de modo a que estas recuperassem o significado que já tinham trabalhado ao resolverem a questão da tarefa, e, ao selecionar este aspeto que à professora pareceu relevante, as alunas acabaram por construir significados de grau 2, como a seguir se mostra:

(…)

Professora: O que é que vocês querem dizer com *"para sabermos, temos que colocar o modelo matemático seguinte"*?

Íris: Temos de chegar a uma função que dê para colocar na calculadora gráfica.

Professora: Para quê?

Íris: Para sabermos o y mínimo.

Professora: E têm que construir a função?

Íris: Sim, porque não podemos pôr o retângulo na máquina! Quero dizer, não podemos por as duas variáveis (comprimento e largura) na máquina, por isso é que tivemos que construir a função.

Professora: E ao construírem a função o que é que tiveram de fazer à expressão?

Íris: O que é que tivemos que fazer como?

Sílvia: Então tivemos que nos livrar do x .

Professora: "Livrar"?

Sílvia: É uma maneira de dizer … Para construir a função tivemos que substituir o x por $\frac{100}{y}$, porque a área era 100.

Íris: Pois foi.

(…)

Extrato 5.7: Mediação semiótica da professora, N2S2D1, de significados matemáticos de grau 2, na questão 1.3, das alunas do grupo 2, na tarefa *"A vedação do jardim"*

O significado da aluna *"Para construir a função tivemos que substituir o x por $\frac{100}{y}$, porque a área era 100"*, representado num registo oral, constituiu-se como significado de grau 2 formalizado matematicamente quando a aluna afirma "*substituir o x por $\frac{100}{y}$*" e em seguida justifica a substituição matemática com a afirmação "*porque a área era 100*". Este significado de grau 2 evoluiu do significado de grau 1 do nível anterior *'o valor 100 atribuído à área do jardim'* e do significado de grau 1 do presente nível *"para sabermos, temos que colocar o modelo matemático seguinte"*. Foi este tipo de significados construídos na questão 1.1 e na questão 1.2 que conduziu os alunos à construção de significados de grau 2 e posteriormente de grau 3 na questão 1.3 e em todas as restantes questões da tarefa, porque o que aconteceu na questão 1.3 relativamente ao encadeamento de significados ocorreu nas restantes questões da tarefa.

Em determinados aspetos particulares dos raciocínios dos alunos, ocorreram erros matemáticos. Por exemplo, na definição dos intervalos das variáveis dependente e independente, alguns alunos introduziram na janela de visualização da calculadora gráfica intervalos para a variável dependente entre -100 e 100, tal como mostra a representação que a seguir se apresenta.

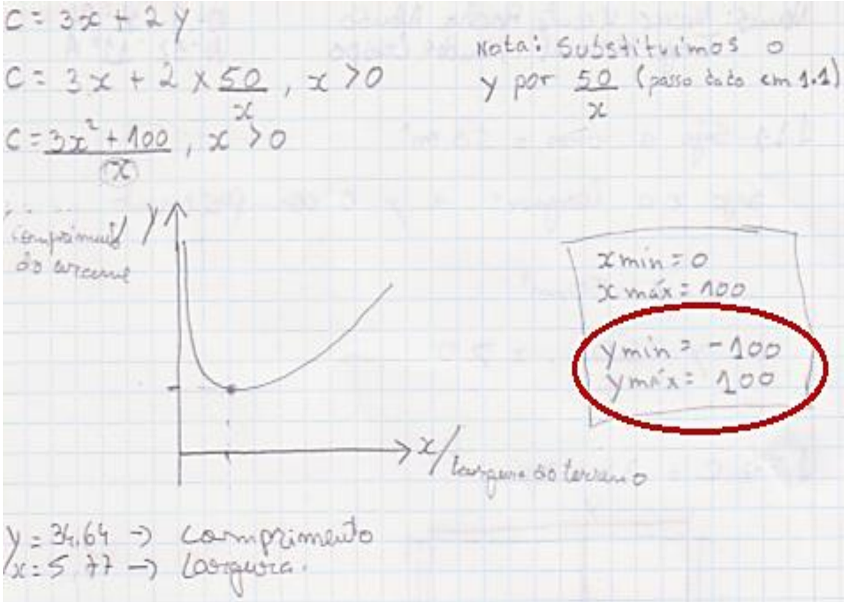


Figura 5.3: Signo não semiótico que ocorreu no decurso de um raciocínio dedutivo do 2.ºnível, na resolução da questão 1.3 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 3, e que foi mediado pela professora N2S0D1

Como a variável dependente representa o comprimento do arame, não pode assumir valores negativos e o valor -100 não é um valor razoável para o raciocínio em causa. Este significado foi classificado *significado de grau 0.*

A seguinte discussão evidencia a ocorrência de um significado de grau 0:

(…)

Professora: Como é que vocês escolheram os valores que inseriram na janela de visualização da calculadora gráfica?

Marco: Então pusemos o *x* a variar entre 0 e 100 e o y a variar entre -100 e 100.

Professora: Mas por que é que escolheram o 0, o 100 e o -100?

Miguel: Pusemos valores ao acaso. Mas o 100 foi porque está na função, então experimentámos a ver o que dava.

Professora: E esses valores, 0, 100 e -100, que significado têm nesta situação?

Miguel: Hum, pois, nem pensámos nisso, se calhar não têm.

Marco: O valor -100 não faz sentido porque o comprimento do arame não pode ser negativo.

Professora: Pois.

(…)

Extrato 5.8: Mediação semiótica da professora de significados matemáticos, N2S0D1, face a significados não semióticos dos alunos, na tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 3

No grupo 3, nas resoluções das questões 1.2 e 1.3, a representação gráfica resultou de uma conversão correta da representação algébrica durante um raciocínio indutivo. Porém a representação algébrica não resultou correta pois teve origem em significados de grau 0 referentes à interpretação da expressão da função que representa o perímetro do jardim, como o exemplo que a seguir se mostra e que foi extraído da folha de respostas elaborada por um aluno do grupo 3, que, perante a dificuldade que o grupo estava a apresentar em resolver a tarefa, decidiu escrever sozinho a *'resolução errada'* (como ele lhe chamou):

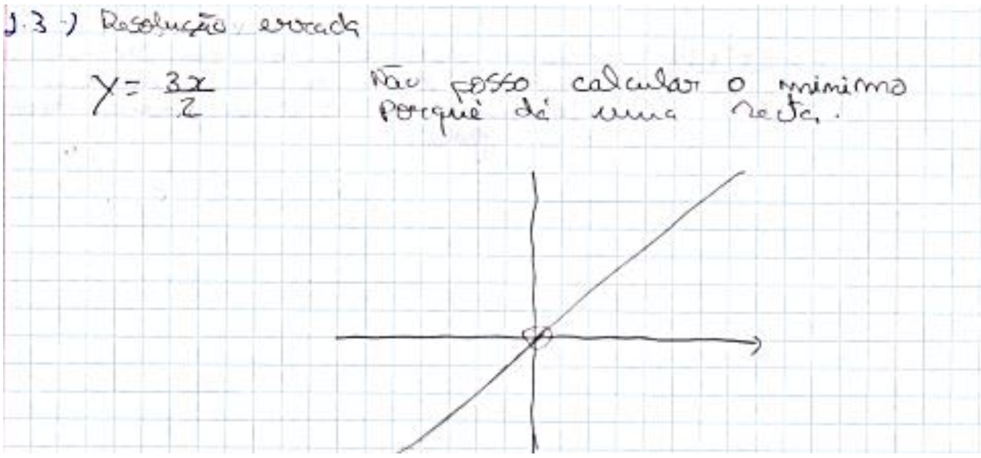


Figura 5.4: Significado N2S0D1 mediado pela professora face ao signo não semiótico que ocorreu num raciocínio indutivo de um aluno do grupo 3, na resolução da questão 1.3 da tarefa *"A vedação do jardim"*

Com os alunos do grupo 3, concretamente com o aluno que apresentou a resposta representada na figura 5.4, a professora pediu-lhe que retomasse a expressão com o valor que inicialmente no grupo tinham concretizado para a área, que neste caso era 50, apontando para a folha de respostas e focalizando atenção dos alunos desse grupo para a parte da resolução representada na figura 5.5:

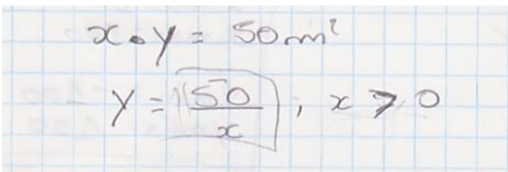


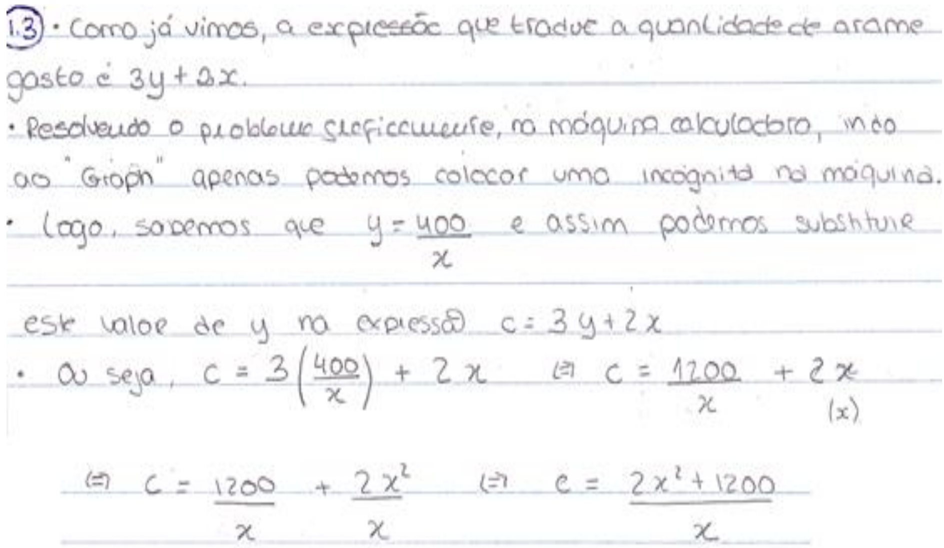
Figura 5.5: Mediação semiótica da professora de significados matemáticos, N2S2D1, com base em raciocínios indutivos representado por signos índices na resolução da questão 1 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 3

Nesta mediação da professora, Eva e Lúcia, do grupo 1, intervieram relativamente ao trabalho desenvolvido pelos colegas do seguinte modo:

> **(…)**
>
> **Professora:** … olha para aqui, retoma as expressões que vocês aqui no grupo construíram com o valor 50. Vamos reconstruir os raciocínios. Pode ser?

Lúcia: Pois a mim também já me aconteceu o mesmo que a ele, eu às vezes também tinha dúvidas em perceber bem o que significam as letras, mas se pensar como fizemos nesta tarefa, torna-se mais fácil. Aconteceu-me o mesmo para saber o significado da letra a, mas como me lembrei do valor que tínhamos dado, que no nosso caso era 400, foi mais fácil.

Eva: Vocês deram o valor 50, não foi? Agora, vocês têm que fazer as contas para tirar da expressão $x \cdot y = 50$, o x ou o y., como nós fizemos para o valor 400, olha aqui como nós fizemos:



1.3) • Como já vimos, a expressão que traduz a quantidade de arame gasto é $3y+2x$.

• Resolvendo o problema graficamente, na máquina calculadora, indo ao "Graph" apenas podemos colocar uma incognita na máquina.

• Logo, sabemos que $y=\frac{400}{x}$ e assim podemos substituir este valor de y na expressão $c=3y+2x$

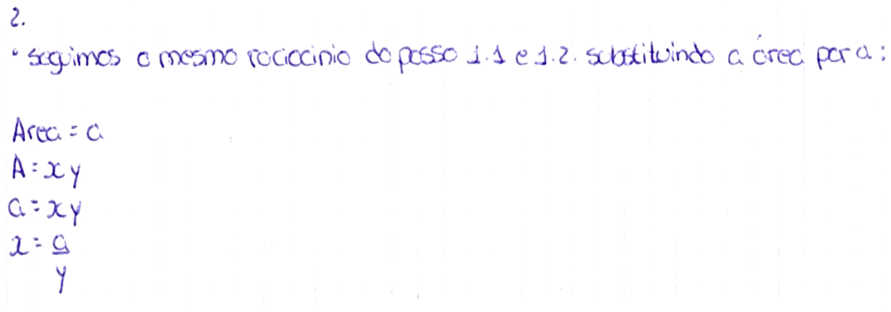
• Ou seja, $c=3\left(\frac{400}{x}\right)+2x \Leftrightarrow c=\frac{1200}{x}+2x$ (x)

$\Leftrightarrow c=\frac{1200}{x}+\frac{2x^2}{x} \Leftrightarrow c=\frac{2x^2+1200}{x}$

Figura 5.6: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos, das alunas do grupo 1

Eva: Nós resolvemos graficamente na calculadora. Mas precisamos ter em atenção uma coisa, como na calculadora só podemos colocar a função com uma variável tivemos que resolver $y = \frac{400}{x}$ e substituirmos esta expressão na outra do comprimento o arame. E depois foi fácil.

Íris (do grupo 2): Pois, nós considerámos o valor da área 100 e também fizemos como a Eva e a Lúcia e obtivemos um gráfico e depois foi fácil retirar o valor do mínimo. E assim, na questão seguinte, tudo fez mais sentido, e já foi fácil resolver a questão porque fizemos assim:



2.

• Seguimos o mesmo raciocinio do passo 1.1 e 1.2. substituindo a área por a:

Area $= a$

$A = xy$

$a = xy$

$x = \frac{a}{y}$

Figura 5.7: Raciocínio indutivo representado por signos índices, das alunas do grupo 2

Professora: Muito bem.

Extrato 5.9: Mediação semiótica da professora, N2S2D1, e dos alunos da turma de significados matemáticos, na construção de raciocínios indutivos dos alunos do grupo3

Desta interação, os alunos do grupo 3 construíram a representação da figura 5.8, fruto do raciocínio indutivo que resultou da discussão atrás, aberta a toda a turma, ocorrida entre a professora e as alunas dos grupos 1 e 2:

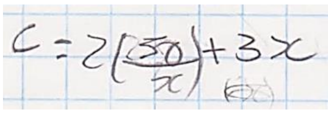


Figura 5.8: Raciocínio indutivo do grupo 3, na questão 1.3 da tarefa *"A vedação do jardim"*

Síntese: A professora começou por ler, para toda a turma e em voz alta, as recomendações iniciais e o enunciado da tarefa. O enunciado não tem valores concretos e a professora apelou à experimentação dos alunos. Complementarmente a este apelo, a professora pediu aos alunos que usassem livremente esquemas, tabelas e linguagem natural, bem como, relacionassem todas essas representações. Este procedimento da professora constituiu um signo que pertence aos níveis 1, 2 e 3 do método (N1, N2, N3), que teve o intuito de promover o raciocínio abdutivo (S1), indutivo (S2) e dedutivo (S3) dos alunos. No 1.ºnível do método, aquando da exploração do enunciado, a professora mediou a interpretação que os alunos fizeram do desenho/esquema que acompanha o enunciado. Com esta mediação a professora mostrou ter o intuito de promover o raciocínio abdutivo dos alunos. Os alunos construíram representações que marcaram o assumir de uma estratégia de resolução. Este início de resolução foi comunicado através de signos, que, por se tratarem da representação de uma decisão tomada no início da resolução, definiram algo que lhes permitiu começar a resolver a questão. Disto é exemplo o uso das letras x e y que o grupo 3 apresenta para designar o comprimento e a largura do jardim, respetivamente, usadas no início da resolução da tarefa como rótulos.

Na questão referente ao 2.ºnível é requerido aos alunos que concretizem o parâmetro (a área do jardim) e trabalhem com as variáveis dependente e independente (comprimento e largura do jardim). Nesta fase os alunos construíram, passo a passo, a expressão algébrica que lhes permitiu transformar e definir a função que posteriormente exploraram na calculadora gráfica por forma a determinarem o valor do comprimento e a largura do jardim, de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação. Este raciocínio dos alunos foi classificado como indutivo e foi mediado pela professora nos três grupos de trabalho, através de intervenções orais da mesma. Os significados de grau 1 que os alunos construíram na questão 1.1 (referente ao 1.ºnível) e nas questões 1.2 e 1.3 (referentes ao 2.º nível), conjugados com os novos significados construídos na transformação algébrica da função, deram origem aos significados de grau 2 do 2.º nível do método. Posteriormente, os significados de grau 2 deram origem a significados de grau 3. Por exemplo, um significado de grau 1 que mostrou a intenção de uma estratégia de ação dos alunos foi *"para sabermos,* *temos que colocar o modelo matemático seguinte*". Com a mediação da professora as alunas do grupo 2 '*voltaram à representação feita*' e construíram o significado de grau 2 "*para construir a função tivemos que substituir o* x *por* $\frac{100}{y}$, *porque a área era* 100", e posteriormente construíram o significado de grau 3 que foi a expressão do comprimento do arame em função da largura do jardim.

Em determinados aspetos particulares dos raciocínios dos alunos, ocorreram erros matemáticos de duas naturezas distintas: i) erros matemáticos que não condicionaram o decurso da resolução da tarefa (como a definição da janela de visualização da calculadora gráfica para intervalos da variável dependente não razoáveis no contexto da situação, tais como os valores -100 e 100, que ocorreram no grupo 3); e ii) erros matemáticos que condicionaram o decurso da resolução da tarefa (como a representação gráfica de um aluno do grupo 3, que resultou de uma conversão correta da representação algébrica, mas que, por sua vez, não tinha resultado correta da interpretação que foi dada à expressão da função que representava o perímetro do jardim). Os *significados de grau* 0 do tipo i) parecem ter sido construídos ao acaso, sem consciência dos alunos e foram rapidamente mediados através de curtas intervenções da professora. Os *significados de grau 0* do tipo ii) foram consciencializados pelos alunos e requereram uma mediação mais profunda da professora. Ao longo da resolução da tarefa, perante a ocorrência de significados de grau 0, quer perante os que não condicionaram a resolução da tarefa, quer perante os que condicionaram a resolução da tarefa, a professora adotou a estratégia '*do questionamento e do voltar atrás nos raciocínios*', de modo a que tais significados convergissem para significados de grau 1, 2 ou 3.

As representações construídas pelos alunos que decorrem da resolução da tarefa com a mediação da professora constituíram-se, em si, signos ícones, índices e símbolos, em resultado dos raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos pelos alunos. Este conjunto de signos e raciocínios deu origem a significados S1, S2 e S3 em cada um dos níveis de ensino N1, N2, N3.

5.1.1.2. O questionamento para sínteses e a realização de sínteses

As representações que se seguem exemplificam a construção de significados dos alunos na questão 2 (figura 5.10) baseada na construção de significados na resolução da questão 1.3 (figura 5.9):

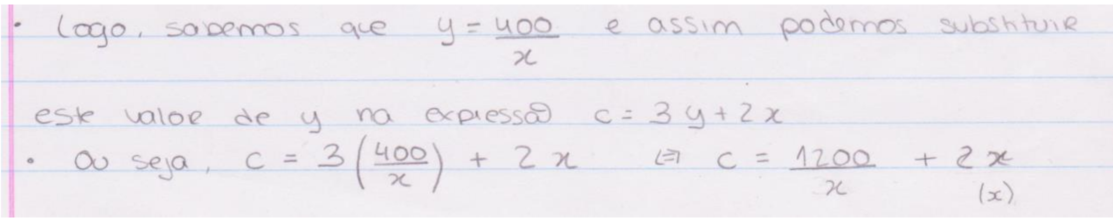


Figura 5.9: A mediação da tarefa, N2S2D1, na construção de um signo índice resultante do raciocínio indutivo das alunas do grupo 1, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*

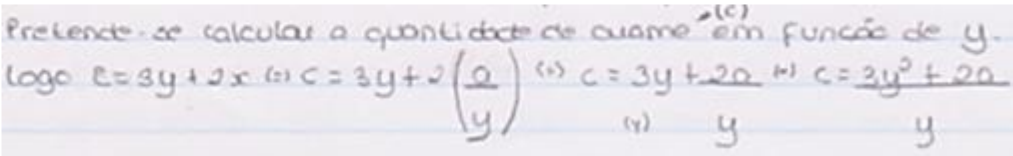
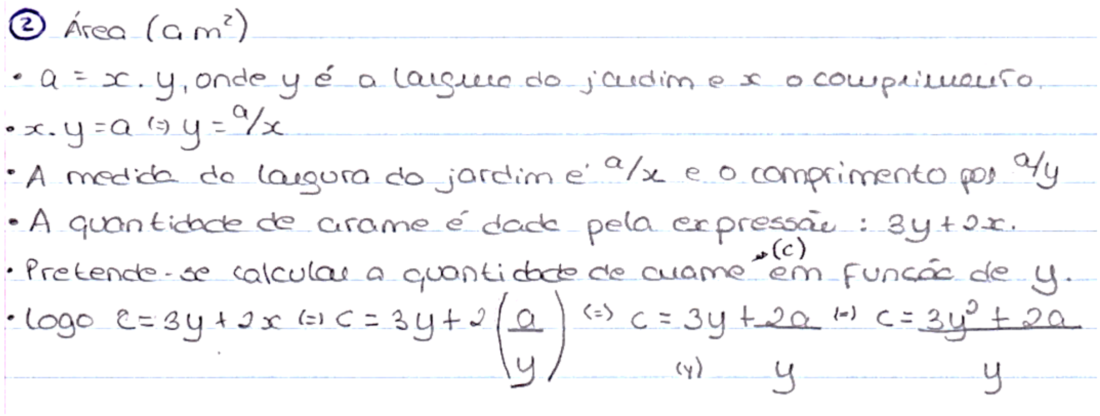


Figura 5.10: A mediação da tarefa, N3S2D1, na construção de um signo índice resultante do raciocínio indutivo das alunas do grupo 1, na questão 2, da tarefa *"A vedação do jardim"*

As representações das figuras 5.9 e 5.10, analisadas só por si, são signos índices construídos pelas alunas, mas, por resultarem da forma como estão construídas as questões do enunciado, são significados da primeira dimensão (D1). No 2.º nível é requerido aos alunos que trabalhem com o parâmetro e com as variáveis dependente e independente procedendo à concretização do parâmetro. No 3.º nível é requerido aos alunos que trabalhem com o parâmetro e com as variáveis dependente e independente sem procederem à concretização do parâmetro. Neste caso, o parâmetro era a área, inicialmente considerada 400 e na questão 2 considerada com um valor genérico designado por a. O comprimento da vedação C e o comprimento do jardim y eram, respetivamente, as variáveis dependente e independente. Estes signos que constituem as figuras 5.9 e 5.10 são as representações de raciocínios indutivos do nível 2 e 3 do método porque os alunos (neste caso, as alunas do grupo 1) constroem, em consequência dos significados já construídos e trabalhados anteriormente, a expressão algébrica que lhes permite definir a função por forma à determinação do valor do comprimento do jardim, e consequentemente à determinação do valor da largura, de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação em causa, inicialmente com área 400 e posteriormente com área a.

A representação da figura 5.11 explicita um raciocínio dedutivo do nível 3 do método, porque os alunos (neste caso, as alunas do grupo 1) constroem, em consequência dos significados já construídos e trabalhados anteriormente, a expressão algébrica que lhes permite definir a função por forma à determinação do valor genérico do comprimento e da largura do jardim, de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação em causa, assumindo a área um valor genérico representado por a. Por isso, a representação da figura 5.11 é um signo símbolo.



② Área ($a\,m^2$)

• $a = x \cdot y$, onde y é a largura do jardim e x o comprimento.

• $x \cdot y = a \Leftrightarrow y = a/x$

• A medida da largura do jardim é a/x e o comprimento por a/y

• A quantidade de arame é dada pela expressão: $3y + 2x$.

• Pretende-se calcular a quantidade de arame (c) em função de y.

• logo $C = 3y + 2x \Leftrightarrow C = 3y + 2\left(\frac{a}{y}\right) \Leftrightarrow C = 3y + \frac{2a}{y} \underset{(y)}{\Leftrightarrow} C = \frac{3y^2 + 2a}{y}$

Figura 5.11: A mediação da tarefa, N3S3D1, signo símbolo resultante do raciocínio dedutivo das alunas do grupo 1, na questão 2 da tarefa *"A vedação do jardim"*

O signo representado na figura 5.10 distingue-se do signo representado na figura 5.11, porque, na figura 5.10 o signo índice construído pelas alunas resulta da substituição do valor 100 pelo valor genérico a, sucedido por transformações algébricas que também constituem em si signos índices, mas que conjuntamente dão origem ao signo índice da figura 5.10 e por ainda não ter mais signos que sintetizem e estruturem os antecedentes de modo a que haja completude na resposta, constituem-se significados de grau 2. No caso do signo representado na figura 5.11, que sucedeu o representado na figura 5.10, além da substituição pelo valor genérico a, as alunas mostram estar numa fase posterior do seu pensamento. No raciocínio geral representado na figura 5.11, as alunas relacionam os significados de grau 1 e 2 construídos nas alíneas anteriores e na própria alínea, com os novos significados construídos, dando, por isso, origem a significados de grau 3. De facto, o significado de grau 1 "$\acute{A}rea\ (a\mathrm{m}^2),\ a = xy$", onde x é a largura e y é o comprimento, que é um signo que nos mostra como as alunas começaram a pensar. E, a expressão $C = \frac{3y^2+2a}{y}$, construída dedutivamente, mostra como obtêm e usam para tal signos índices que interligados resultam no signo símbolo representado na figura 5.11. Tais signos índices funcionam como *pontes* para o pensamento das alunas e são representados por: "*… a quantidade de arame gasto é dada pela expressão …*" e "*…pretende-se calcular a quantidade de arame C em função de y*". Tais signos índices estão conjugados e interligados de modo a que, no seu todo, sintetizem e estruturem o raciocínio dedutivo resultante (que é a representação toda da figura 5.11).

O encadeamento e a ordem como as questões são apresentadas na tarefa (ver extrato 5.11), de acordo com o método de ensino e com a mediação da professora (ver extrato 5.10), promoveu nos alunos a construção sucessiva de significados e raciocínios que se sumariam na resposta à questão 2 (ver figuras 5.12 e 5.13). Por este tipo de raciocínios induzimos que as questões da tarefa, conjuntamente com a mediação da professora (ver extrato 5.10), promoveram raciocínios síntese que resultam do encadeamento de significados. Porque na questão 2 as alunas revisitaram e desenvolveram os raciocínios que construíram na questão 1.3.

(...)

Professora: Escrevam por favor todos os raciocínios na resolução de cada questão.

Eva: No fim das questões nós estamos a pôr as conclusões. Pode ser assim? Ou temos que explicar mais alguma coisa?

Íris: No fim nós também pomos. E no meio também.

Professora (risos)**:** Pois. Podem explicar o raciocínio usando a linguagem algébrica e em linguagem natural, por exemplo. Registem também a síntese do que fizeram na calculadora.

(...)

Extrato 5.10: Mediação semiótica da professora para promover a elaboração de sínteses nos alunos

"1. Começa por considerar um valor concreto para a área do jardim:

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões do jardim (largura e comprimento) com a sua área – começa por explorar a situação usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-a por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um modelo matemático que permita calcular o valor da medida do comprimento do arame gasto (que podes designar por *c*) em função da largura e do comprimento do jardim.

1.3. Quais deverão ser as dimensões do jardim de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora que o jardim tem $a\,\mathrm{m}^2$ de área. Qual é a expressão algébrica que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim."

Extrato 5.11: Enunciado que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: Significado N3S1D1, N3S2D1, N3S3D1, *do enunciado da tarefa "A vedação do jardim"*

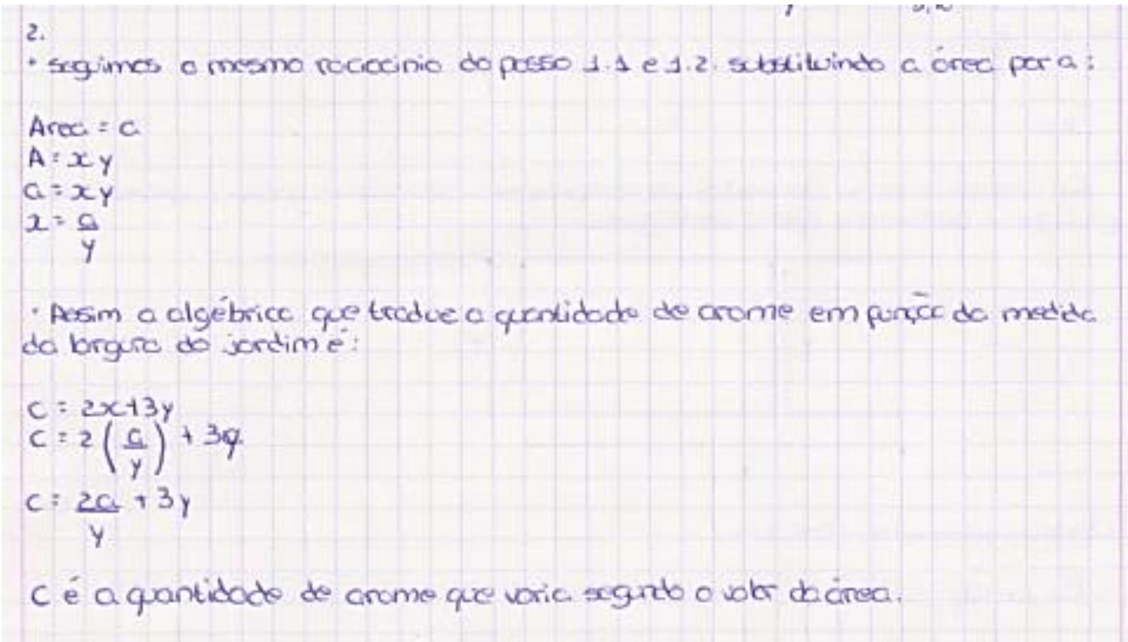


Figura 5.12: A mediação da tarefa no raciocínio dedutivo representado por signos símbolos (N3S3D1) pelas alunas do grupo 2 na tarefa *"A vedação do jardim"*

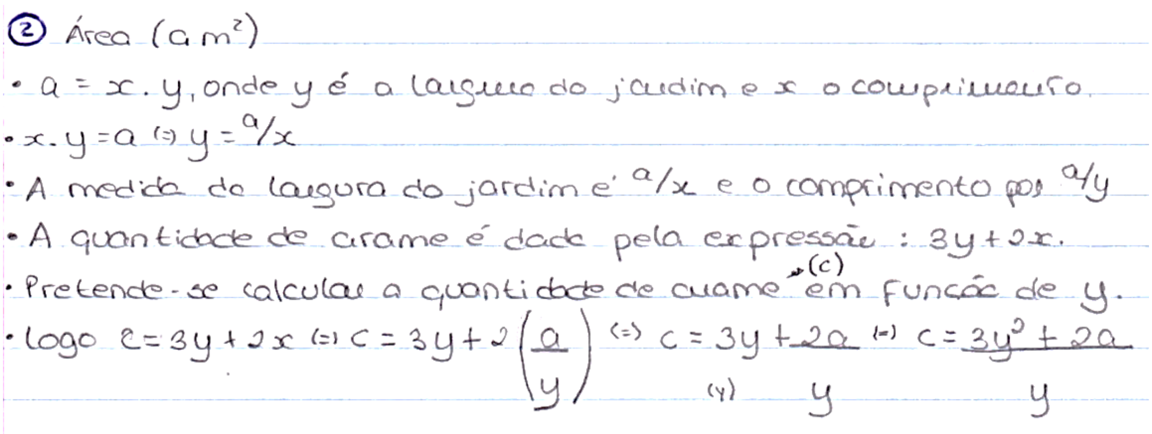


Figura 5.13: A mediação da tarefa N3S3D1, no raciocínio dedutivo representado por signos símbolos pelas alunas do grupo 1, na questão 3 da tarefa *"A vedação do jardim"*

As resoluções apresentadas nas figuras 5.12 e 5.13 evidenciam uma sequência de significados e raciocínios que se estrutura na resolução da última questão da tarefa, através de significados de grau 3, ou seja, signos símbolos que sintetizam raciocínios dedutivos que são estruturadores dos outros significados anteriormente construídos. Em todas as questões da tarefa os três grupos procederam em conformidade com o que a professora pediu, exceto o grupo 3 na questão 2, que se recusou a tentar resolver a questão, tal como explicita o seguinte extrato:

(…)

Professora: Escrevam por favor todos os raciocínios.

Miguel (durante a resolução da questão 1.3, figura 5.4): Está bem, então aqui eu vou chamar a este raciocínio *"resolução errada"*.

Professora: Isso mesmo.

Miguel: E digo porquê. Vou escrever *"não posso calcular o mínimo porque dá uma reta"*.

Professora: E fazes bem em escrever exatamente o que pensaste. Mas agora, olha para aqui, retoma as expressões que vocês aqui no grupo construíram com o valor 50. Vamos reconstruir os raciocínios. Pode ser?

(…)

Professora: Vamos lá tentar perceber o que é pedido na questão 2.

Marco: Isso é que era bom! Eu não gosto de trabalhar só com letras. Isto não tem valores!

Tiago: Já fizemos muito. Fizemos tudo até à pergunta 1.3.

Professora: Pois. E vocês? Sílvia, Íris, Eva e Lúcia? Estão a escrever tudo na folha de respostas?

Eva: Sim.

Íris: Nós também.

(…)

Extrato 5.12: Mediação semiótica da professora para promover a elaboração de sínteses, do grupo 3

Síntese: A última questão da tarefa foi a que mais se proporcionou à construção de sínteses dos significados até aí construídos. O enunciado da última questão da tarefa que prevê um contexto algébrico com todos os valores da função e do parâmetro genéricos, ou seja, do terceiro nível do método, promove a construção de raciocínios dedutivos, que são, por si, estruturadores e sintetizadores dos significados construídos ao longo da tarefa. Disto são exemplos as representações que mostram dedutivamente como os alunos construíram a expressão $\frac{2a}{y} + 3y$ que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim, e, na qual, os alunos fazem referência a significados que recuperam das alíneas anteriores.

No decurso da resolução da tarefa, o questionamento para a elaboração de sínteses foi feito quer através das questões do enunciado (principalmente das últimas questões de cada tarefa), quer através dos alunos ao longo da resolução das tarefas (principalmente quando fizeram referência aos raciocínios que tinham construído nas alíneas anteriores), quer através da mediação da professora. Esta mediação evidenciou-se fortemente na fase final de cada questão em que a professora pedia aos alunos para apresentarem a resposta, fazendo uma síntese dos principais raciocínios que haviam feito até ao momento, exceto o grupo 3 que não fez a questão 2, pois alegaram que se tratava de uma questão muito difícil e face à qual não conseguiam atribuir nenhum significado.

5.1.2. A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções

A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções é analisada segundo: i) a interpretação do enunciado; ii) o parâmetro e as variáveis dependente e independente; iii) o parâmetro e a incógnita; iv) o parâmetro na transformação de representações; e v) o parâmetro na conversão entre registos de representação.

5.1.2.1. A interpretação do enunciado

Na interpretação do enunciado, os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução. Esta significação ocorre após o contacto com o enunciado e são estes raciocínios que, por serem os primeiros, geram a hipótese de resolução. Por isso são designados por raciocínios abdutivos. Disto são exemplos as figuras 5.14 e 5.15, que foram identificadas como pertencendo ao primeiro nível do método (N1) devido ao contexto matemático em que ocorreram, com o parâmetro concreto e com variáveis fixas num intervalo de valores.

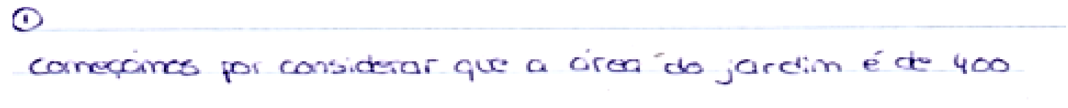


Figura 5.14: Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: Significado N1S1D2, na questão 1 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

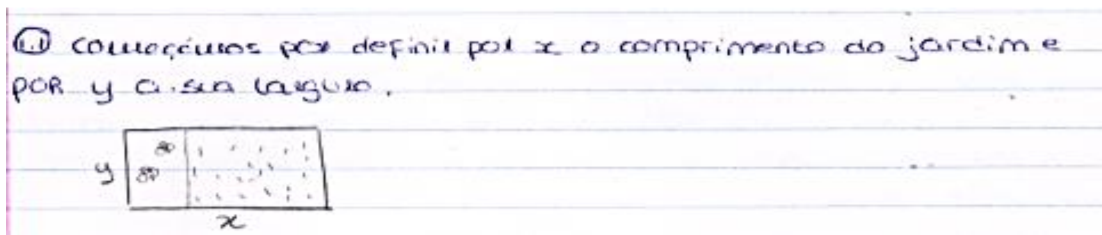
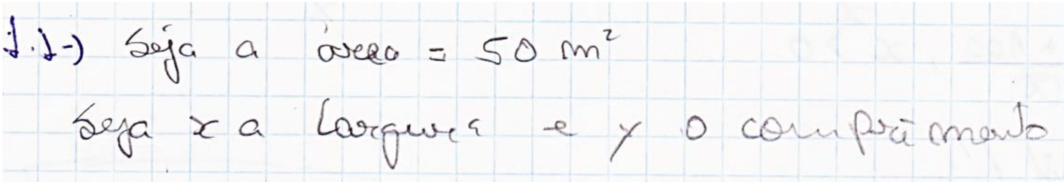


Figura 5.15: Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: Significado N1S1D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo *1*

Na resolução da tarefa, na exploração do esquema inicial e na questão que o acompanha, os alunos tendem a usar as letras como rótulos para a designação de algo e para iniciarem alguma estratégia que desenvolvem no decurso da resolução, tal como mostra a figura 5.16:



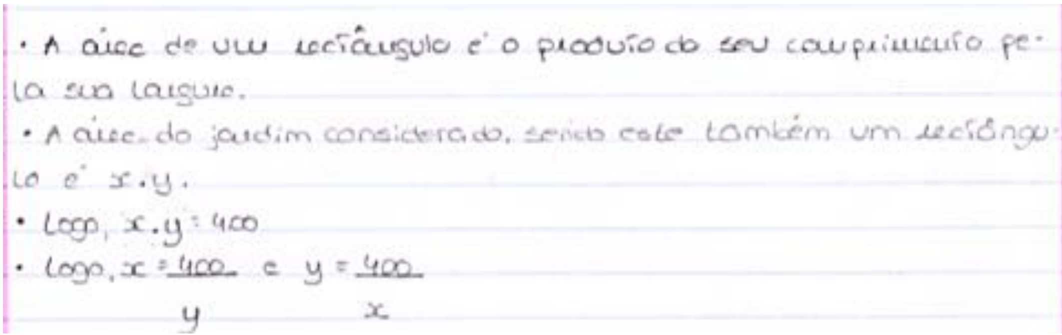
1.1-) Seja a área $= 50\ m^2$

Seja x a largura e y o comprimento

Figura 5.16: Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: Significado N1S1D2, da questão 1.1 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo *3*

Os alunos, ao afirmarem *"seja a área = 50* m^2*"*, *"seja x a largura e y o comprimento"*, mostram que raciocinaram, de modo abdutivo, porque iniciam um caminho de resolução ao interpretarem o enunciado e mostram tal interpretação através da representação que constroem (significados de grau 1).

Na primeira questão da tarefa, apesar dos alunos relacionarem o comprimento com a largura do jardim, o que era pedido no enunciado (que era "define uma estratégia") não foi, em certos casos, precedido de experimentação. E nesses casos, os alunos fizeram depender a sua resposta do valor concreto que atribuíram à área do jardim, como mostra a resolução da figura 5.17.



• A área de um rectângulo é o produto do seu comprimento pe-
la sua largura.
• A área do jardim considerado, sendo este também um rectângu-
lo é $x.y$.
• Logo, $x.y = 400$
• Logo, $x = \frac{400}{y}$ e $y = \frac{400}{x}$

Figura 5.17: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Na resolução da figura 5.17, as alunas respondem ao que é pedido na alínea e por isso o significado que constroem é classificado como sendo de grau 3. As alunas, não completam as suas representações com significados genéricos para o valor da área, porque tal não era pedido no enunciado, mas evidenciam a compreensão da situação para o exemplo do valor concreto atribuído, pois afirmam " … *a área do jardim considerada … é …*" e transformam a expressão da proporcionalidade inversa do comprimento do jardim e da sua largura para a área fixa no valor 400, tal como mostra a resolução.

Porém, nos grupos em que houve maior experimentação na resolução desta questão, fruto da mediação de significados entre os alunos e a professora, proporcionou-se a generalização do que era pedido na primeira questão. Ou seja, no início da resolução da questão 1.1 o trabalho iniciou-se no nível 1 do método, mas com a interação dos alunos com a professora e da professora com os alunos evoluiu-se para um contexto totalmente genérico, mesmo na primeira questão da tarefa. Tal experimentação traduz-se inicialmente por raciocínios indutivos representados pela concretização do valor da largura e do comprimento do jardim, como por exemplo:

(…)

Professora: O que acontece se a área for 120 m^2? E se for 100? E se for 50?

Íris: Se a área for 120, podemos ter, por exemplo, um jardim com 12 metros de comprimento e 10 de largura.

Sílvia: Pois, e se for 100, podemos ter, por exemplo, um jardim quadrado com 10 metros de lado.

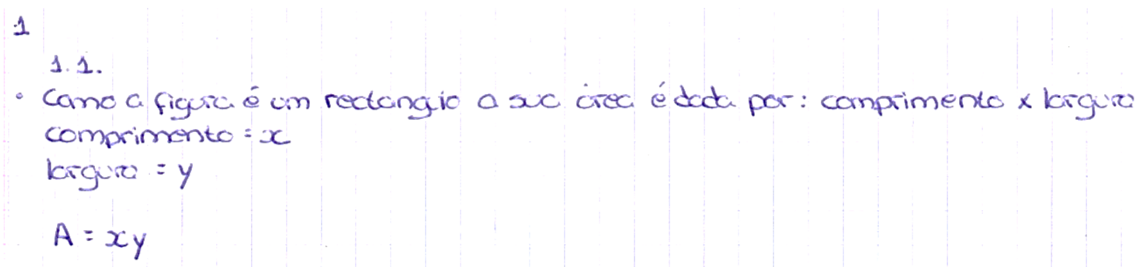
Íris: E se for outra área qualquer?

Professora: Então, nesse caso, podemos construir um jardim de muitas dimensões, dependendo dessa "outra área qualquer"

(…)

Extrato 5.13: Mediação semiótica de significados matemáticos entre alunos, na construção de raciocínios indutivos, do grupo 2

Tais raciocínios indutivos foram sucedidos por raciocínios que traduzem uma síntese de significados, por isso classificámos de dedutivos, tais como os que são traduzidos na seguinte afirmação: "Como a figura é um retângulo a sua área é dada por $comprimento \times largura$. $Comprimento\!: x, largura\!: y, Área = xy$" (ver figura 5.18).


1

1.1.

• Como a figura é um rectangulo a sua área é dada por: comprimento x largura

comprimento = x

largura = y

$A = xy$

Figura 5.18: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: significado N1S3D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 2

Síntese: Na interpretação do enunciado, no primeiro nível do método (N1) devido ao contexto matemático em que ocorreu, com o parâmetro concreto e com variáveis fixas num intervalo de valores, os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução. Esta significação ocorre após o contacto com o enunciado e são estes raciocínios que, por serem os primeiros, geram a hipótese de resolução (raciocínios abdutivos).

Na primeira questão da tarefa, apesar dos alunos relacionarem o comprimento com a largura do jardim, o que era pedido no enunciado (era “define uma estratégia”) não foi, em certos casos, precedido de experimentação. E nestes casos, os alunos fizeram depender a sua resposta do valor concreto que atribuíram à área. Se, no enunciado da tarefa, tivesse sido pedido aos alunos para relacionarem os valores da largura e do comprimento do jardim, experimentando vários valores para a área, ter-se-iam registado mais significados construídos no 1.º nível, sem ter sido necessária a mediação da professora para esse efeito. De facto, nos grupos em que houve maior experimentação na resolução da primeira questão, fruto da mediação de significados entre os alunos e a professora, proporcionou-se a generalização em linguagem natural do que era pedido na primeira questão. Na resolução da tarefa, na exploração do esquema inicial e na questão que o acompanha, os alunos tendem a usar as letras como rótulos para a designação de algo e para iniciarem alguma estratégia que desenvolvem no decurso da resolução. Na resolução das questões os raciocínios indutivos (que originam S2) foram sucedidos por raciocínios que traduzem uma síntese de significados (S3).

5.1.2.2. O parâmetro e as variáveis dependente e independente

No que refere ao parâmetro e às variáveis dependente e independente, no grupo 1, as alunas basearam-se no que já sabiam acerca da área de um retângulo e, através da partilha de raciocínios encadeados, como os representados nas figuras 5.19 e 5.20, constroem as expressões que lhes permitem representar algebricamente o comprimento em função da largura e a largura em função do comprimento.

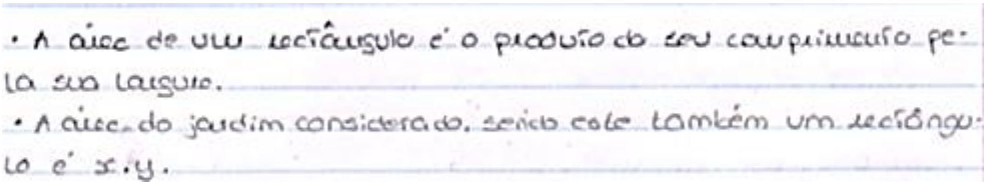

• A área de um rectângulo é o produto do seu comprimento pe-
la sua largura.
• A área do jardim considerado, sendo este também um rectângu-
lo é $x.y$.

Figura 5.19: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

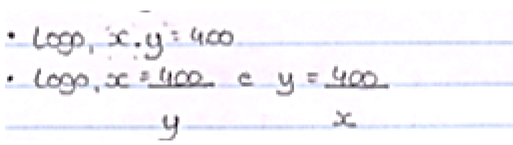

• Logo, $x.y = 400$
• Logo, $x = \frac{400}{y}$ e $y = \frac{400}{x}$

Figura 5.20: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

A figura 5.21 explicita o significado de grau 3 que resulta do encadeamento de significados de grau 2, representa o raciocínio dedutivo das alunas, que lhes permitiu construir algebricamente o comprimento em função da largura e a largura em função do comprimento, num jardim retangular de área 400.

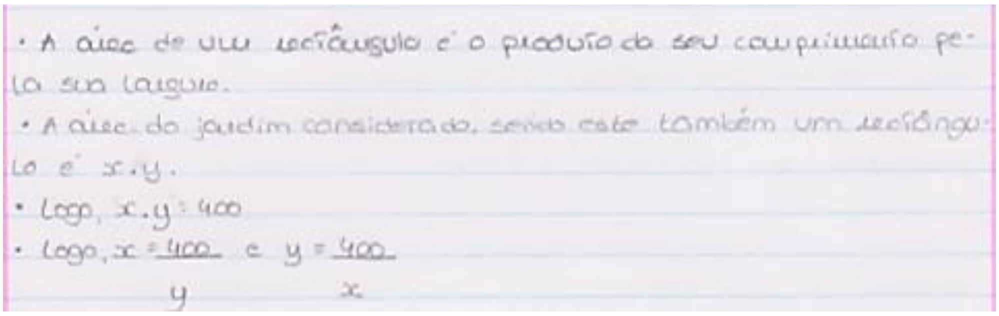
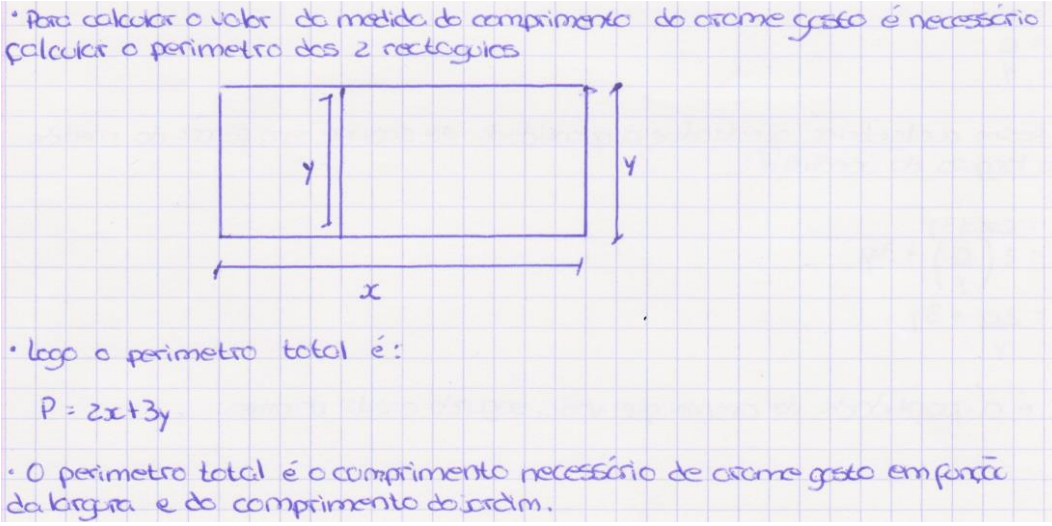

• A área de um rectângulo é o produto do seu comprimento pe-
la sua largura.
• A área do jardim considerado, sendo este também um rectângu-
lo é $x.y$.
• Logo, $x.y = 400$
• Logo, $x = \frac{400}{y}$ e $y = \frac{400}{x}$

Figura 5.21: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Nas representações que se seguem, construídas pelos grupos 2 e 3, os alunos completam a representação com significados que, em conjunto e em complementaridade, evidenciam a compreensão da situação para quaisquer valores do comprimento e da largura, tal como mostra a figura 5.22:


• Para calcular o valor da medida do comprimento do arame gasto é necessário calcular o perímetro dos 2 rectângulos

• logo o perímetro total é:

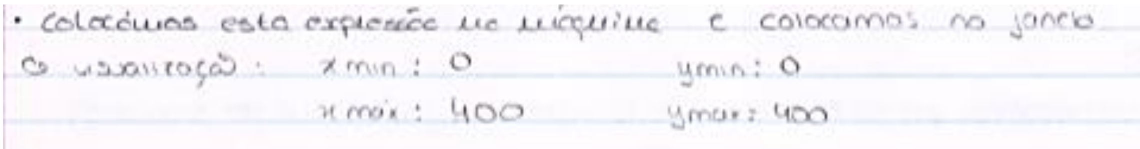
$P = 2x+3y$

• O perímetro total é o comprimento necessário de arame gasto em função da largura e do comprimento do jardim.

Figura 5.22: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.2 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 2

Por se tratar de um signo construído pelos alunos que revela completude relativamente à questão referente ao 2.ºnível que é feita no enunciado, foi classificado por N2S3D2.

No que refere ao uso da calculadora gráfica, no 2.º nível, que prevê o uso do parâmetro concretizado com valores, as alunas constroem raciocínios indutivos, em torno da função que introduziram na calculadora, tal como mostra a figura 5.23.


• Colocámos esta expressão na máquina e colocamos na janela de visualização: $x$min: 0 $y$min: 0

$x$max: 400 $y$max: 400

Figura 5.23: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.3 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Esta representação vem acompanhada de outras representações que são em si signos índices e que em complementaridade vão originar signos símbolo, pois relacionam significados que conduzem e constroem, de forma indutiva, a resolução da questão, tal como a justificação *"o valor de x_{min} e de y_{min} é 0 porque se trata de um problema aplicado ao real"* e *"não há comprimentos de valor negativo"*, relativa aos valores mínimos que selecionaram na máquina para *x* e para *y* (ver figura 5.24).

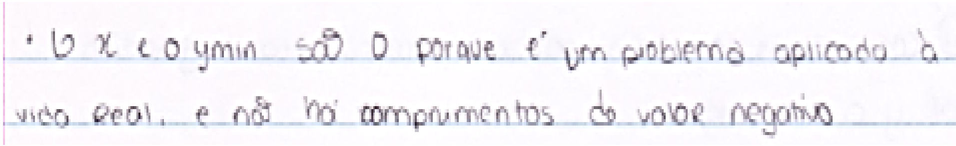

• O x e o ymin são 0 porque é um problema aplicado à vida real, e não há comprimentos de valor negativo

Figura 5.24: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

De igual modo, as alunas atribuem significados, também no âmbito de raciocínios indutivos, aos valores máximos que as variáveis, dependente e independente, podem assumir, justificando o raciocínio que fazem através de afirmações como a seguinte: "*o valor de* $x_{máx}$ *e de* $y_{máx}$ *é 400 porque a área do jardim é 400* m^2 *e o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor*" (ver figura 5.25).

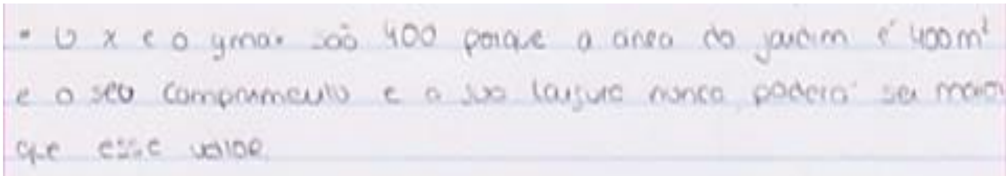
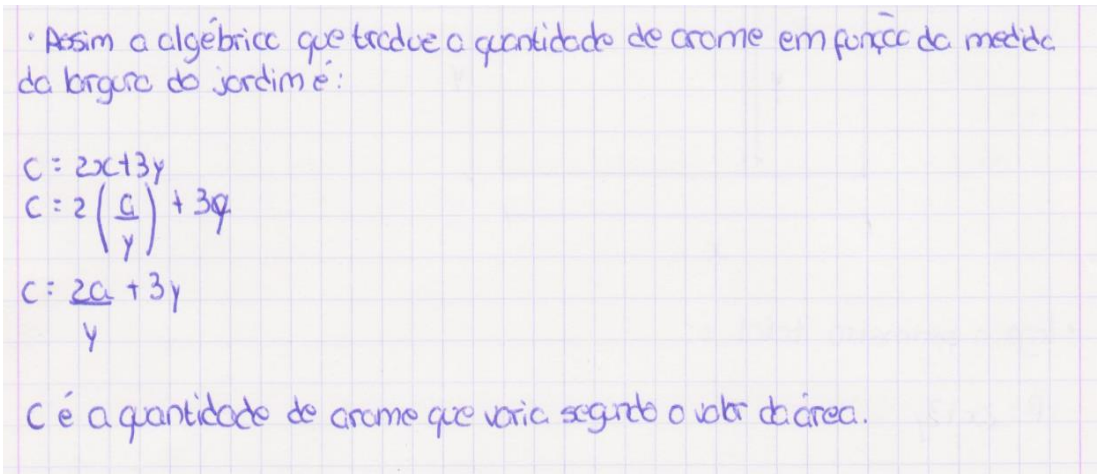

• O x e o ymax são 400 porque a área do jardim é 400 m² e o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor

Figura 5.25: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Na resolução da questão 2, os significados construídos com base em conceitos conhecidos, como o da área de um retângulo e o de equações literais, foram usados para os alunos transformarem representações algébricas em contextos em que o parâmetro é usado de forma genérica (no nível 3 do método), como explicita a seguinte resolução:


• Assim a algébrica que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim é:

$C = 2x+3y$

$C = 2\left(\frac{a}{y}\right) + 3y$

$C = \frac{2a}{y} + 3y$

C é a quantidade de arame que varia segundo o valor da área.

Figura 5.26: Raciocínio dedutivo representado por um signo símbolo: Significado N3S3D2, na questão 2, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 2

Síntese: No que refere ao parâmetro e às variáveis dependente e independente os alunos basearam-se no que já sabiam acerca da área de um retângulo e, através da partilha de raciocínios encadeados, constroem as expressões que lhes permitem representar algebricamente o comprimento em função da largura e a largura em função do comprimento. Nas representações em que os alunos constroem significados de grau 3 há completude nas respostas, porque os alunos completam a representação com significados que, em conjunto e em complementaridade, evidenciam a compreensão da situação para quaisquer valores do comprimento e da largura.

No que refere ao uso da calculadora gráfica, no segundo nível, que prevê o uso do parâmetro concretizado com valores, os alunos construíram raciocínios indutivos, em torno da função que introduziram na calculadora. As representações na calculadora são acompanhadas de outras representações que são em si signos índices e que em complementaridade vão originar signos símbolo, pois relacionam significados que conduzem e constroem de forma indutiva a resolução da questão, tal como a justificação *"o valor de x_{min} e de y_{min} é 0 porque se trata de um problema aplicado ao real"* e *"não há comprimentos de valor negativo"*, *"o valor de $x_{máx}$ e de $y_{máx}$ é 400 porque a área do jardim é 400* m^2 *e o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor"*.

Na questão 1.1 foram usadas pelos alunos as variáveis dependente e independente de uma função de proporcionalidade inversa, aquando da construção das expressões que permitem representar algebricamente o comprimento em função da largura e a largura em função do comprimento, num jardim retangular de área concreta. No que refere à questão 1.2 e 1.3, bem como à questão 2 da tarefa, o parâmetro e as variáveis estiveram envolvidos no raciocínio dos alunos essencialmente em raciocínios indutivos (S2) e dedutivos (S3). Estes significados foram construídos com base em conceitos conhecidos, como o da área de um retângulo e o de equações literais (que constituem os raciocínios abdutivos que lhe dão origem), para os alunos transformarem as representações algébricas, quer em contextos que envolvem o parâmetro concreto (nível 2 do método), como em contextos em que o parâmetro é usado de forma genérica (no nível 3 do método).

5.1.2.3. O parâmetro e a incógnita

No que refere ao parâmetro e à incógnita, a figura 5.27 explicita que os alunos (neste caso os do grupo 2) calculam o valor que *x* assume nas circunstâncias que eles próprios definiram, ou seja, para o valor concreto do parâmetro (no caso da questão 1.1 os alunos atribuíram um valor concreto à área do jardim). Após essa concretização, atribuem um novo significado matemático à expressão, considerando-a como uma equação literal que resolvem em ordem a uma das incógnitas. Esta sequência de significados, construídos passo a passo, constitui-se como um signo índice e traduz um raciocínio construtivo/indutivo.

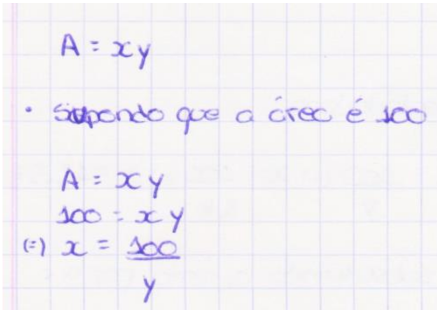
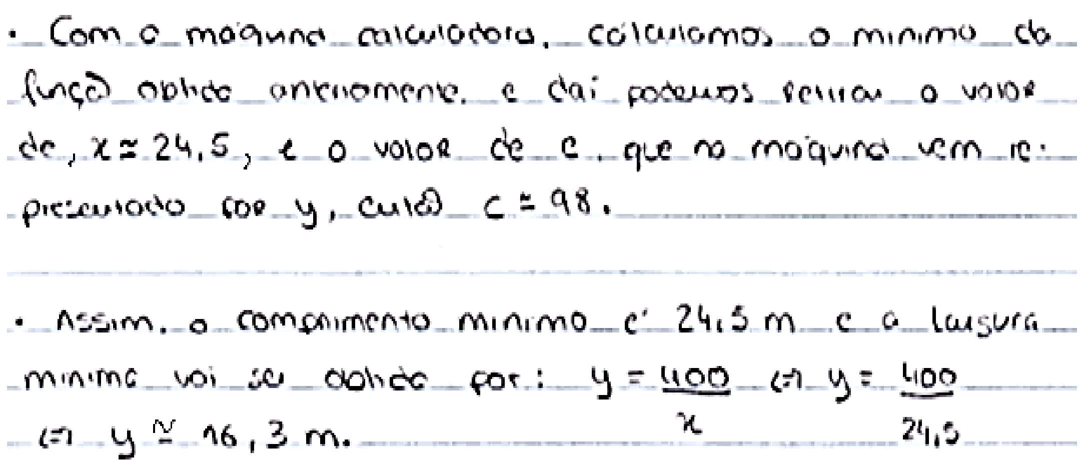


Figura 5.27: Raciocínio indutivo representado por um signo índice: Significado N1S2D2, na questão 1.1, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 2

Essa equação literal (construída como o apresentado na figura 5.27) na questão 1.1 é interpretada pelos alunos, na questão 1.2, como uma função, na qual cada uma das incógnitas dessa equação literal passa a ser interpretada como variável dependente ou variável independente de uma função de proporcionalidade inversa.

Em afirmações como: " … com a máquina calculadora calculámos o mínimo da função obtida anteriormente e daí podemos retirar o valor de x, ou seja $x \approx 24{,}5$ e o valor de c, que na máquina vem representado por y, então $c \approx 98$. Assim o comprimento mínimo é $24{,}5\ \text{m}$ e a largura mínima vai ser obtida por $y = \frac{400}{x} <=> y = \frac{400}{24{,}5} <=> y \approx 16{,}3\ \text{m}$ "(ver figura 5.28), verifica-se que os significados que são atribuídos inicialmente evoluem para significados posteriores e mais estruturados (significados de grau 3) na resolução da questão 1.3, aquando do estudo das dimensões do jardim que minimizam o comprimento de arame necessário para fazer a vedação.


• Com a máquina calculadora, calculamos o mínimo da função obtida anteriormente e daí podemos retirar o valor de, $x \approx 24{,}5$, e o valor de c, que na máquina vem representado por y, então $c \approx 98$.

• Assim, o comprimento mínimo é 24,5 m e a largura mínima vai ser obtida por: $y = \frac{400}{x} \Leftrightarrow y = \frac{400}{24{,}5} \Leftrightarrow y \simeq 16{,}3$ m.

Figura 5.28: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

As representações construídas como a da figura 5.28 *"…calculamos o mínimo e daí podemos determinar o valor de x"*, ou *"… o comprimento mínimo é … e a largura mínima vai ser obtida por …"* evidenciam um raciocínio dedutivo com base numa cadeia de significados construídos, percetível através do encadeamento de signos envolvidos na resposta dos alunos. Frise-se também que estes signos símbolo além de traduzirem uma dedução de significados vêm ainda acompanhados pela respetiva transformação algébrica que reforça ainda mais a estrutura de significados que os alunos possuem nesta argumentação matemática.

Síntese: No que refere ao parâmetro e à incógnita, os alunos calcularam o valor que *x* assume para o valor concreto do parâmetro. Após essa concretização, atribuem um novo significado matemático à expressão, considerando-a como uma equação literal que resolvem em ordem a uma das incógnitas. Este tipo de sequência de significados, construídos passo a passo, constitui-se como um signo índice e traduz um raciocínio construtivo/indutivo.

As equações literais que os alunos constroem são interpretadas como uma função, na qual cada uma das incógnitas passa a ser interpretada como variável dependente ou independente de uma função de proporcionalidade inversa.

Os significados que são atribuídos inicialmente, aquando do estudo das dimensões do jardim que minimizam o comprimento de arame necessário para fazer a vedação, como: " … *com a máquina calculadora calculámos o mínimo da função obtida anteriormente e daí podemos retirar o valor de* $x, ou\, seja\, x \approx 24{,}5$ *e o valor de* c, *que na máquina vem representado por* y, *então* $c \approx 98$. *Assim o comprimento mínimo é* $24{,}5\, m$ *e a largura mínima vai ser obtida por* $y = \frac{400}{x} <=> y = \frac{400}{24{,}5} <=> y \approx 16{,}3\, m$ ", constatam a evolução de significados de grau 1 para significados posteriores e mais estruturados (significados de grau 3).

Os alunos construíram representações que evidenciam um raciocínio dedutivo com base numa cadeia de significados. Estes signos símbolo além de traduzirem uma dedução de significados vêm ainda acompanhados pela respetiva representação algébrica que reforça ainda mais a estrutura de significados que os alunos possuem na argumentação matemática. Nas questões 1.1, 1.2 e 1.3, os significados estão claramente interligados e conjugados por forma a constituírem uma síntese da situação. Esta síntese serviu como ponto de partida para a generalização que foi posteriormente iniciada nos raciocínios do terceiro nível do método.

5.1.2.4. O parâmetro na transformação de representações

Afirmações como as seguintes: *"o comprimento de todo o arame gasto é o perímetro do retângulo (pois é a soma de todos os lados)"*, *"o fio que separa os dois canteiros é igual à largura do jardim"* mostram como os alunos relacionam, sucessivamente, cada significado com outro, construindo uma cadeia de significados sob um raciocínio indutivo. Todos os grupos apresentaram resoluções equivalentes à que se apresenta na representação da figura 5.29:

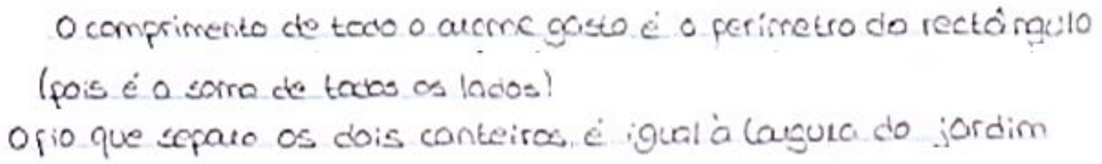

O comprimento de todo o arame gasto é o perímetro do rectângulo
(pois é a soma de todos os lados)
O fio que separa os dois canteiros é igual à largura do jardim

Figura 5.29: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.2, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

No que refere à primeira questão, o grupo 1 apresentou à turma a sua resolução, com o valor concretizado para a área igual a 400 m^2. A resolução do grupo 1, apresentada na figura 5.30 foi classificada como um significado de grau 3, porque é, em si, um signo símbolo por traduzir o raciocínio dedutivo das alunas na resolução desta questão, aquando da exploração da função construída na calculadora gráfica. As afirmações *"o x e o y mínimo são 0 porque é um problema ligado ao real e não há comprimentos de valor negativo"* e *"o x e o y máximo são 400 porque a área do jardim é 400 m^2 e o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor"* são em si signos símbolo, que resultam da transformação de significados, na qual as alunas mostram o encadeamento dos vários signos índices e ícones que construíram. O encadeamento do signo índice *"o x e o y máximo são 400 porque a área do jardim é 400 m^2"* com o signo índice *"o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor"* dá origem ao signo símbolo explicitado na figura 5.30 – apesar da ocorrência do significado de grau 0 "*o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor*", porque bastaria que a largura fosse menor que 1 m^2 para que o comprimento resultasse maior que 400 m^2. O mesmo acontece com a última frase da resolução destas alunas que mostra a síntese de significados que foram sendo atribuídos ao longo da resolução. Durante o raciocínio das alunas, frases como " … *assim o comprimento é … e a largura vai ser obtida por …*" e "*para conferir o resultado …*" mostram um grande domínio dos significados previamente transformados e representados na resolução, o que lhes permite estruturar e sintetizar signos símbolo nas suas resoluções por forma a representarem eficazmente o raciocínio dedutivo que fizeram (ver figura 5.30).

• Colocámos esta expressão na máquina e colocamos na janela de visualização: $x$min: 0 ymin: 0

$x$máx: 400 ymax: 400

• O x e o ymin são 0 porque é um problema aplicado à vida real, e não há comprimentos de valor negativo

• O x e o ymax são 400 porque a área do jardim é $400 m^2$ e o seu comprimento e a sua largura nunca poderá ser maior que esse valor.

• Com a máquina calculadora, calculamos o mínimo da função obtida anteriormente e daí podemos retirar o valor de $x \simeq 24.5$ e o valor de c que na máquina vem representado por y, então $c \simeq 98$.

• Assim, o comprimento mínimo é 24,5 m e a largura mínima vai ser obtida por: $y = \frac{400}{x} \Leftrightarrow y = \frac{400}{24,5}$ $\Leftrightarrow y = 16,3$ m.

• Para conferir o resultado, o produto do comprimento pela largura terá que ser igual a 400 (a área).

• $24.5 \times 16,3 \simeq 400$ (u.a).

Figura 5.30: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolo: significado N2S3D2, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

As alunas do grupo 2, durante a resolução da questão 2 da tarefa, após fazerem verificações com valores concretos e transformarem algebricamente a expressão com valores genéricos, tiveram o seguinte diálogo, em torno do significado da letra que representa o parâmetro.

> **Lúcia:** Penso primeiro com números e assim sei sempre o que significa a letra *a*. A letra *a* é como se fosse um número qualquer. Mas fazendo como fizemos neste problema já sei o que *a* quer dizer.
>
> **Eva:** Pois, quando nos perdermos com as letras pensamos no raciocínio que fizemos com números.

Extrato 5.14: Mediação semiótica de significados entre as alunas do grupo 1, na questão 2 da tarefa *"A vedação do jardim"*

Esta abordagem de parâmetro foi partilhada com os restantes alunos da turma na discussão dos resultados da tarefa e resultou da experiência matemática que as alunas tiveram na resolução das questões 1.1, 1.2 e 1.3.

Síntese: No que refere ao parâmetro na transformação de representações, os alunos construíram uma cadeia de significados sob raciocínios indutivos e dedutivos que resultam da transformação de significados. Um exemplo de uma cadeia de significados de grau 2 é: *"o comprimento de todo o arame gasto é o perímetro do retângulo (pois é a soma de todos os lados)"*; *"o fio que separa os dois canteiros é igual à largura do jardim"*. Um exemplo de uma cadeia de significados de grau 3 é: *"o x e o y mínimo são 0 porque é um problema ligado ao real e não há comprimentos de valor negativo"* e *"o x e o y máximo são 400 porque a área do jardim é 400 m^2 e o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor"* – apesar da imprecisão "*o seu comprimento e a sua largura nunca poderão ser maiores que esse valor*".

Os alunos, após fazerem verificações com valores concretos e transformarem algebricamente a expressão com valores genéricos, tiram a seguinte ilação em relação ao significado da letra que representa o parâmetro: *"a letra a é como se fosse um número qualquer"*.

5.1.2.5. O parâmetro na conversão entre registos de representação

As alunas do grupo 1 começam por representar a situação em linguagem natural, tal como explicita a figura 5.31, onde afirmam: *"o comprimento de todo o arame gasto é o perímetro do retângulo considerado sendo este perímetro dado pela expressão $2y + 2x$ (pois é a soma de todos os lados) adicionado ao comprimento do fio que separa os dois canteiros (sendo esta medida igual à largura do jardim, ou seja y)"*.

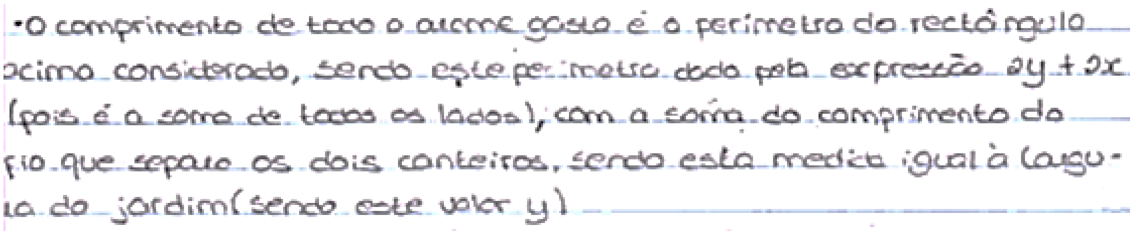

•O comprimento de todo o arame gasto é o perímetro do rectângulo
acima considerado, sendo este perímetro dado pela expressão $2y+2x$
(pois é a soma de todos os lados), com a soma do comprimento do
fio que separa os dois canteiros, sendo esta medida igual à largu-
ra do jardim (sendo este valor y)

Figura 5.31: Raciocínio indutivo representado por signos índices: significado N2S2D2, na questão 1.2, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Depois, o mesmo grupo de alunas converte essas representações para linguagem algébrica, como explicita a figura 5.32, construindo o seguinte significado: *"o valor da medida do comprimento do arame gasto* (c) *terá a expressão* $c = 2y + 2x + y \ <=> \ c = 3y + 2x$ " (ver figura 5.32).

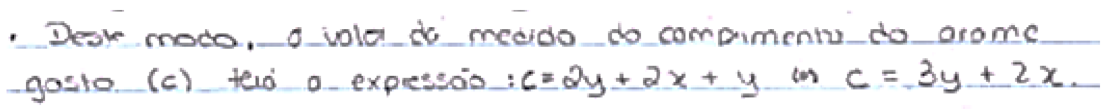

• Deste modo, o valor da medida do comprimento do arame
gasto (c) terá a expressão: $c=2y+2x+y \Leftrightarrow c=3y+2x$.

Figura 5.32: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.2, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Na questão 1.2, resoluções como as apresentadas nas figuras 5.31 e 5.32 foram comuns em todos os grupos de alunos. Ou seja, os alunos construíram significados num registo de representação em linguagem natural e num registo algébrico. Depois, fazem uso da calculadora gráfica para converterem representações algébricas em gráficas. As alunas do grupo 1, por exemplo, constroem sob um raciocínio dedutivo a função com apenas uma variável independente, ao substituírem na expressão do comprimento uma outra expressão, de modo a fazerem uso da calculadora para posteriormente obterem o valor do extremo dessa função. Esta interligação intencional de significados, como se pode perceber pela representação da figura 5.33, mostra uma ampla compreensão da situação que era pedida na questão 1.3 – e por isso este significado é agora classificado como sendo de grau 3.

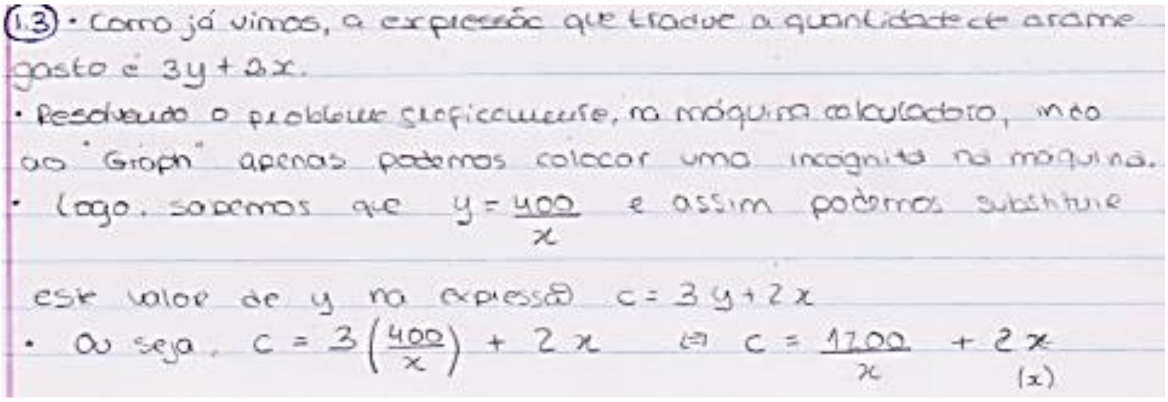


Figura 5.33: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.3, da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 1

Os alunos do grupo 3, tal como mostra a figura 5.34, usam vários registos de representação para atribuírem significados matemáticos nas várias fases da resolução da questão 1.3. Primeiro, recuperam a expressão algébrica $c = 3x + 2y$ que construíram na questão 1.2. Depois, através da substituição de uma das variáveis, ou seja através da substituição de y por $\frac{50}{x}$, significado que também é recuperado da primeira questão da tarefa, constroem a expressão algébrica da função que representa o comprimento de arame gasto para vedar o jardim em função do valor da sua largura, ou seja constroem a expressão $c = \frac{3x^2+100}{x}, x > 0$. A seguir, fazendo uso da calculadora gráfica, representam a função e escolhem um intervalo de valores da abcissa adequado, por forma a deixarem evidente o ponto em que a função tem o valor mínimo.

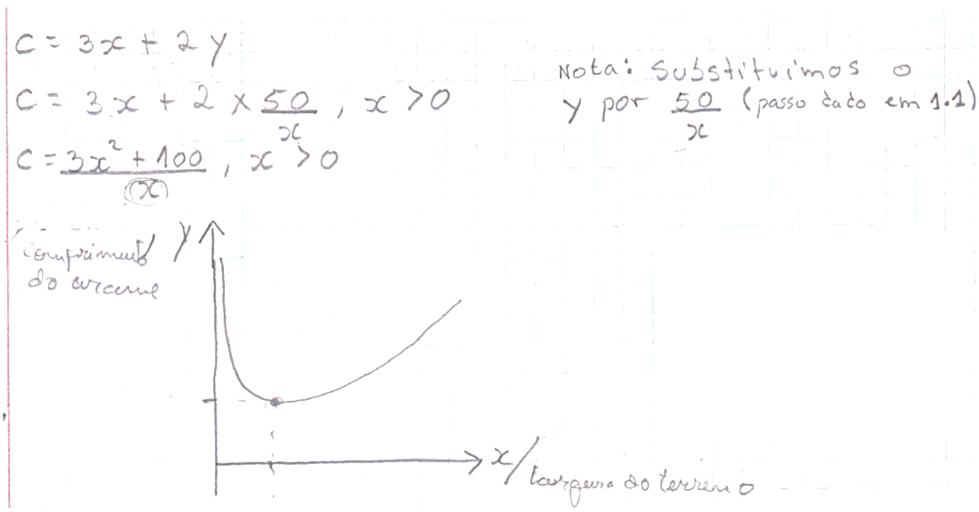


Figura 5.34: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na questão 1.3 da tarefa *"A vedação do jardim"*, do grupo 3

Síntese: Todos os grupos de alunos construíram significados em vários registos de representação. Em linguagem natural, como por exemplo: "*o comprimento de todo o arame* *gasto é o perímetro do retângulo considerado com o valor do comprimento do fio que separa os dois canteiros*". Depois, convertem essas representações para linguagem algébrica, tal como: "o valor da medida do comprimento do arame gasto (c) terá a expressão $c = 2y + 2x + y <=> c = 3y + 2x$ ". Posteriormente, constroem a função com apenas uma variável independente e usam a calculadora gráfica para obterem o valor do extremo dessa função, escolhendo um intervalo de valores da abcissa adequado, por forma a deixarem evidente o ponto em que a função tem o valor mínimo. Esta interligação intencional de significados, mostra uma ampla compreensão da situação – e é por isso que foram classificados como significados de grau 3.

A sequência das questões da tarefa despertou nos alunos a necessidade de atribuírem significados em vários registos de representação como modo de fundamentarem e contextualizarem os seus raciocínios.

5.2. A caixa de volume máximo

Na análise que se segue é feita a descrição dos dados mais representativos conjuntamente com a classificação dos respetivos significados referentes à tarefa *"A caixa de volume máximo"*, que foi a quarta tarefa implementada.

5.2.1. A mediação semiótica do professor

A mediação semiótica é analisada segundo: i) o questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos; e ii) o questionamento para sínteses e a realização de sínteses.

5.2.1.1. O questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos

Antes dos alunos iniciarem a resolução da tarefa "*A caixa de volume máximo*" a professora leu, para toda a turma e em voz alta, o enunciado genérico (ver extrato 5.17) e as recomendações que apelam ao aluno para detalhar explicitamente todos os raciocínios que constrói (tal como mostra o extrato 5.15).

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Extrato 5.15: Focalização do raciocínio dos alunos para aspetos particulares do enunciado comuns a todas as tarefas: Significados N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1

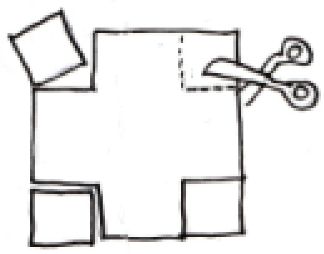
Por explicitar *"Em cada alínea da tarefa que se segue …"*, esta recomendação tem o intuito de ser considerada pelos alunos em todas as fases da resolução da tarefa, por isso trata-se de um signo que pertence aos níveis 1, 2 e 3 do método (N1, N2, N3), que pretende promover o raciocínio abdutivo (S1), indutivo (S2) e dedutivo (S3) dos alunos, por isso pertence à primeira dimensão (D1).

Nesta tarefa, os alunos não questionaram a professora acerca do esquema sem valores no enunciado, dado que, a não existência de valores concretos, já não constituiu novidade por já terem resolvido tarefas com enunciados deste género.

Por outro lado, em relação ao enunciado do extrato 5.15, a professora frisou no início da aula de resolução da tarefa que (ver extrato 5.16):

> **Professora:** Mais uma vez, o enunciado da tarefa não tem valores concretos, por isso vocês devem experimentar os valores que entenderem ser adequados à situação. E devem justificar sempre os vossos raciocínios. Não esqueçam também que devem (re)visitar o esquema sempre que entenderem, quer seja no início, no meio ou no fim da tarefa. Devem também ter sempre presente ao longo da vossa resolução, a questão central que acompanha o esquema do cartão.

Extrato 5.16: Mediação semiótica da professora que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: Significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*



"Pretendemos construir uma caixa e dispomos de um pedaço de cartão quadrado. Para tal, cortamos aos quatro cantos do cartão quadrados iguais. Que modelo matemático nos permite maximizar o volume da caixa, dependendo do lado do quadrado cortado?"

"1. Começa por atribuir um <u>valor concreto para o lado</u> do cartão.

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões da caixa (largura, comprimento e altura) com o seu volume – começa por explorar a situação concretizando valores possíveis para o lado do quadrado cortado, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um o modelo matemático que nos permita calcular o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?

1.3. Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora que o cartão tem p cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?"

Extrato 5.17: Enunciado que pretende promover raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos nos alunos e respetivas representações: Significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

A construção de cada uma das representações, das figuras 5.35 e 5.36, ocorreu no grupo 1, por intermédio da mediação semiótica da professora, em fases distintas da resolução da tarefa. No início da resolução da questão 1.2 da tarefa, as alunas chamaram a professora e ocorreu a seguinte discussão:

> **Eva:** Professora, nós considerámos que o cartão tem 12 cm de lado. E experimentámos calcular o volume da caixa se os quadrados dos cantos tiverem 2 cm de lado.
>
> **Professora:** Sim.
>
> **Lúcia:** E depois experimentámos se tivesse 10 cm de lado.
>
> **Eva:** E também fizemos com outros valores, mas se tiver 12 cm, percebemos que o corte não pode ter 6cm, senão deixamos de ter caixa.
>
> **Professora:** Sim, muito bem. E então?
>
> **Eva:** Então se o lado do quadrado cortado for *x*, esse *x* não pode ser um número qualquer.
>
> **Professora:** Pois não. Então vamos com calma. Primeiro, construam um esquema que mostre o que vocês acabaram de dizer. Depois vão ver que, com o esquema, é-vos mais fácil construir as restrições que a Eva começou a dizer que havia.

Extrato 5.18: Mediação semiótica da professora que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: Significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

E em continuidade desta discussão, as alunas construíram signos, que, no momento em que ocorrem, constituem-se respetivamente signos ícones e signos índices em continuidade da estratégia de resolução iniciada na discussão. A primeira figura antes de ser um signo índice, foi um signo ícone no momento em que as alunas construíram a seguinte representação (ver figura 5.35):

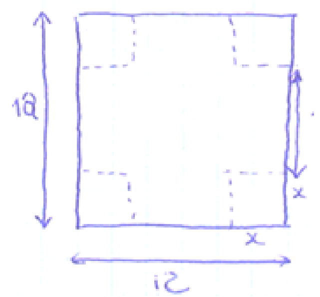


Figura 5.35: Mediação semiótica da professora na construção de um signo ícone, N1S1D1, na resolução da questão 1.1 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, no grupo 1

Após a construção do esquema representado na figura 5.35, a professora interveio, retomando a discussão que a antecedeu (ver extrato 5.19).

> **Professora:** Então e agora?
>
> **Eva:** Agora *x* tem de ser menor do que 6.

Professora: Sim, muito bem. E porquê?

Eva: Então, se o lado do quadrado cortado for *x*, esse *x* não pode ser metade do valor do lado, porque se for não temos caixa.

Professora: Pois não. Então e como é que isso se escreve em linguagem simbólica?

Eva: Pois, isso é que eu lhe estava a perguntar a si.

Professora: Então, quando mede o lado do cartão?

Eva: Mede 12 cm.

Professora: Quanto mede o lado de cada quadrado cortado?

Eva: Mede *x* cm.

Professora: x cm em cada um dos cantos.

Eva: Já sei! Como a cada lado correspondem dois cantos, então é $12 - 2x$.

Professora: Sim, e o que é que representa $12 - 2x$?

Eva: O que 'representa', como?

Professora: A que dimensão da caixa corresponde essa expressão? À altura?

Eva: Não, ao lado da base, que também é um quadrado.

Lúcia: A altura da caixa é *x* cm.

Extrato 5.19: Mediação semiótica da professora na construção de signos índices das alunas do grupo1: Significado N1S2D1, na resolução da questão 1.1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

Neste instante da discussão, a representação da figura 5.35 passou a ser um signo índice, quando as alunas relacionaram o valor 12 com x , ou seja, quando atribuíram um novo significado relacionado ao lado do quadrado com os cantos cortados e atribuíram significado à expressão $12 - 2x$, construindo a seguinte representação:

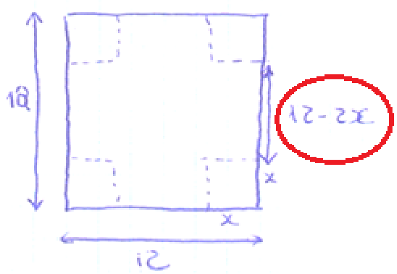


Figura 5.36: Signo índice construído pelas alunas do grupo 1, na resolução da questão 1.1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, no decurso da mediação semiótica da professora: significado N1S2D1.

Este signo índice, representado na figura 5.36, foi recuperado pelas alunas na resolução da última questão da tarefa. Os significados de grau 2 dos níveis 1 e 2 foram estendidos ao valor genérico *p* (na questão 2). E este raciocínio é representado através de um signo que, por interligar os significados que foram construídos atrás, constitui um signo índice. Nesta representação as letras *x* e *p* para além de funcionarem como rótulos para designar o valor do lado do quadrado cortado e o valor do lado do cartão, são relacionadas entre si pela expressão $p - 2x$. É esta relação que transforma o signo ícone inicial no signo índice representado na figura 5.37.

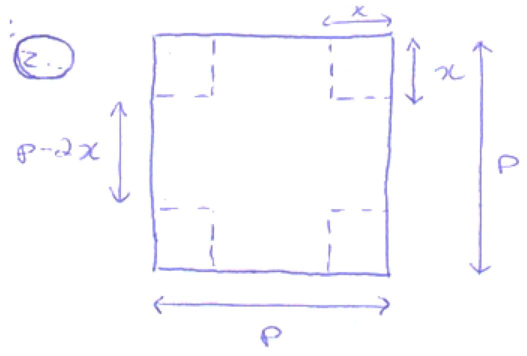


Figura 5.37: Signo índice construído pelas alunas do grupo 1, na resolução da questão 2, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, em resultado da mediação semiótica da professora: significado N3S2D1.

A resolução que a seguir se apresenta, na qual as alunas justificam detalhadamente como chegam à expressão $\frac{p}{6}$ para o valor do lado dos quadrados cortados no cartão com lado p, de modo a que a caixa tenha volume máximo, evidencia a importância de voltar atrás aos raciocínios já construídos para definir procedimentos posteriores na resolução. O questionamento para voltar atrás e a focalização em aspetos particulares do raciocínio foi feito, por vezes, pelos próprios alunos que sentiram a necessidade de justificar os procedimentos e as estratégias que assumiam com os significados que tinham construído na resolução de questões anteriores. Na resolução apresentada na figura 5.38, as alunas referem que, nas questões iniciais da tarefa, o valor do lado do canto cortado era x cm, e, como o valor para o lado do cartão que concretizaram era 12 cm, resultou a função $y = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ para a representação do volume da caixa, da qual determinaram o maximizante que era a sexta parte de 12 cm, ou seja, que era 2 cm. Nesta resolução, que resultou da interação entre as alunas, na fase final da resolução da tarefa, as alunas afirmaram que experimentaram vários valores como forma de testarem o resultado $\frac{p}{6}$. E comunicam todos estes raciocínios, usando um registo de representação em linguagem natural, de forma muito clara e estruturada, ou seja, através de um signo símbolo que é a representação que se segue:

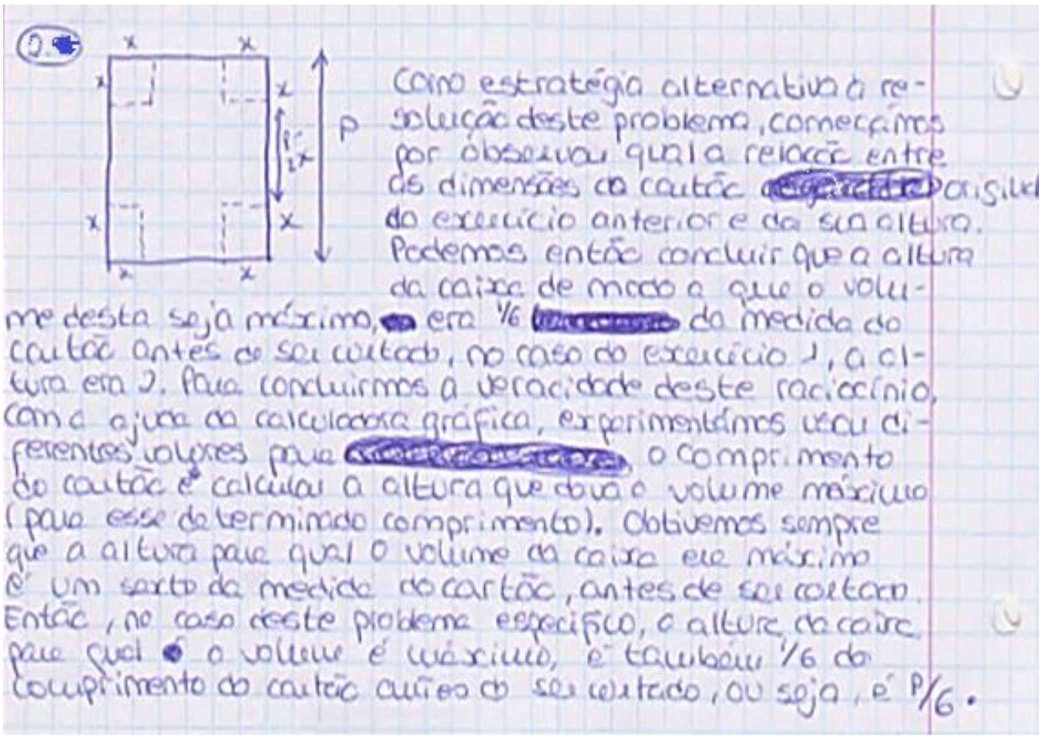


Figura 5.38: Raciocínio dedutivo, mediado entre as alunas do grupo 1, representado por signo símbolo: significado N3S3D1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

A natureza da tarefa que, por ser aberta, por não ter valores concretos iniciais e por promover a construção de significados encadeados nos alunos, promoveu a construção e a interação de significados no grupo. O que aconteceu com o grupo 1, aconteceu com os outros dois grupos. Nos três grupos verificou-se que, na primeira questão são os alunos quem define o valor concreto a experimentar. Por incentivo da professora (tal como mostra o excerto 5.16) todos os grupos, na questão 1.1, experimentaram concretizar o lado do cartão com mais do que um valor. Verificaram-se, em todos os grupos, diálogos mediadores semelhantes aos dos extratos 5.18 e 5.19. E registou-se que, após os alunos terem atribuído significados de grau 2 e 3 na questão inicial da tarefa, facilmente generalizam esse valor para um outro valor qualquer, concreto ou genérico.

Síntese: Antes dos alunos iniciarem a resolução da tarefa a professora leu, para toda a turma e em voz alta, o enunciado genérico e as recomendações que apelam ao aluno para detalhar explicitamente todos os raciocínios que constrói. Esta recomendação tem o intuito de ser considerada pelos alunos em todas as fases da resolução da tarefa, por isso trata-se de um signo que pertence aos níveis 1, 2 e 3 do método (N1, N2, N3), que pretende promover o raciocínio abdutivo (S1), indutivo (S2) e dedutivo (S3) dos alunos. Nesta tarefa, os alunos não questionaram a professora acerca do esquema sem valores no enunciado, porque esse facto, já não constituiu novidade.

O questionamento para voltar atrás e a focalização em aspetos particulares do raciocínio foi feito, por vezes, pelos próprios alunos que sentiram a necessidade de justificar os procedimentos e as estratégias que assumiam com os significados que tinham construído na resolução de questões anteriores. Outras vezes, foi feito pela professora, que mediou os significados dos alunos durante a resolução da tarefa.

Nos três grupos verificou-se que, na primeira questão são os alunos quem define os valores concretos a experimentar. Registou-se que, após os alunos terem atribuído significados de grau 2 e 3 na questão inicial da tarefa, facilmente generalizam esse valor para um outro valor qualquer, concreto ou genérico, e facilmente recuperam e estendem esses significados na questão final da tarefa. Como por exemplo, as alunas do grupo 1 referem que, nas questões iniciais da tarefa, o valor do lado do canto cortado era x cm, e, como o valor para o lado do cartão que concretizaram era 12 cm, resultou a função $y = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ para a representação do volume da caixa, da qual determinaram o maximizante que era a sexta parte de 12 cm, ou seja, que era 2 cm. Nesta resolução, que resultou da interação entre as alunas, na fase final da resolução da tarefa, as alunas afirmam que experimentaram vários valores como forma de testarem o resultado $\frac{p}{6}$. E comunicam todos estes raciocínios, usando um registo de representação em linguagem natural, de forma muito clara e estruturada, ou seja, através de um signo símbolo.

Os significados construídos pelos alunos, ao longo das questões da tarefa e fruto da interação entre os alunos no grupo com a professora, resultaram numa sequência de significados encadeados uns nos outros, porque os alunos justificam os resultados genéricos a que chegam na questão 2 com sistemáticas concretizações que atribuíram na questão 1.

As representações construídas pelos alunos que decorrem da resolução da tarefa constituem, em si, signos ícones, índices e símbolos, em resultado dos raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos pelos alunos. O conjunto de signos e raciocínios construídos pelos alunos, com a mediação semiótica da professora, deu origem a significados S1, S2 e S3 em cada um dos níveis de ensino N1, N2, N3.

5.2.1.2. O questionamento para sínteses e a realização de sínteses

Tal como se pode constatar nas resoluções das figuras 5.39 e 5.40, os alunos desenvolvem a sua atividade sígnica em torno da liberdade que lhes é dada no enunciado, construindo significados matemáticos encadeados e sucessivos, e, por isso, estruturados e sintetizadores, optando por estratégias de resolução diversas.

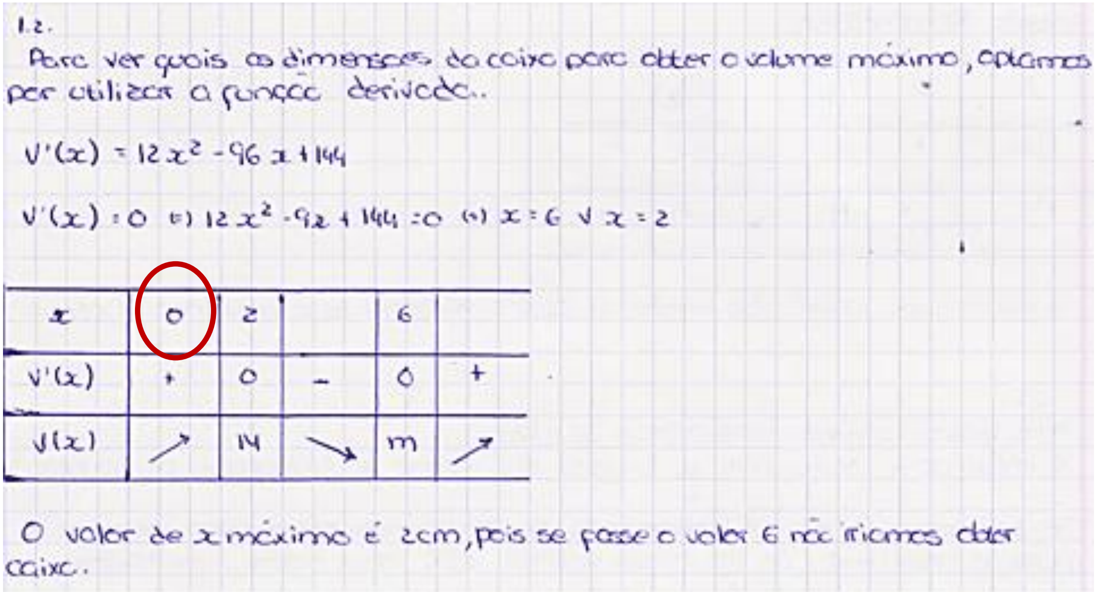


Figura 5.39: A construção de significados desde S1 até S3, na resolução das questões 1.2 e 1.3 (N2) da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, dos alunos do grupo 2

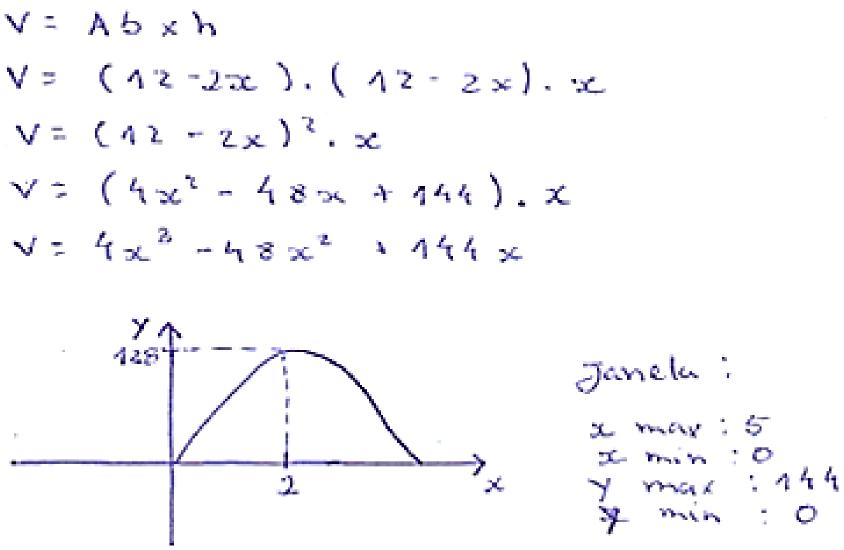


Figura 5.40: A construção de significados desde S1 até S3, na resolução das questões 1.2 e 1.3 (N2), da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, dos alunos do grupo 3

Na resolução apresentada na figura 5.39, o grupo 2 optou por resolver analiticamente a questão, derivando a função que representa o volume da caixa e construindo a tabela de variação da monotonia de tal função, através da respetiva variação do sinal. Este grupo de alunas chamou a professora, aquando da conclusão que apresentam, *"o valor do x máximo é 2, pois se fosse 6 não iríamos obter caixa"*, e decorreu a seguinte discussão:

> **Sílvia:** Nós também demos o mesmo valor, 12 cm para o lado do cartão, como a Eva e a Lúcia.
>
> **Professora:** Sim. E o que é que concluem?
>
> **Sílvia:** Concluímos que não é preciso fazer tantas contas para saber que a caixa tem volume zero se o lado do quadrado cortado for 6!
>
> **Professora** $_{\text{(risos)}}$**:** Ai sim? Expliquem lá!
>
> **Sílvia:** O valor $x = 6$ é um *zero da primeira derivada da função* que representa o volume. Mas isso nós já sabíamos desde o princípio! Se o lado fosse 6 não teríamos caixa!
>
> **Professora:** Já sabiam e agora com os cálculos algébricos confirmam. Agora podem dar um significado mais estruturado à vossa hipótese. Agora conseguem perceber com mais clareza o papel que desempenha o estudo da função que representa o volume da caixa e constatam a vossa hipótese inicial. Ou melhor, demonstraram matematicamente a vossa hipótese.

Extrato 5.20: Mediação semiótica da professora na construção de signos símbolos das alunas do grupo2: Significado N1S2D1, na síntese da questão 1.3, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

Com a mediação apresentada no extrato 5.20, a professora quis conduzir as alunas do grupo 2 à compreensão de que, a escrita algébrica é uma forma de comunicar resultados, de demonstração de hipóteses matemáticas e de validar conjeturas.

Por sua vez, o grupo 3 optou por resolver a questão graficamente, extraindo o valor do volume máximo e o respetivo valor do lado do quadrado cortado, como resultado da utilização da calculadora gráfica. Ou seja, através da calculadora gráfica os alunos do grupo 3 obtiveram a seguinte representação:

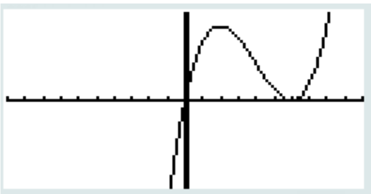


Figura 5.41: Mediação semiótica da calculadora gráfica, N2S2D1, através da representação gráfica da função $4x^3 - 48x^2 + 144x$, na resolução da questão 1.3 da tarefa "A caixa de volume máximo", do grupo 3

A exploração da função na calculadora gráfica, quer através do uso do cursor de movimentação da janela de visualização, quer através da determinação do valor do maximizante e do respetivo valor do máximo, permitiu-lhes definir uma janela de visualização coerente com o volume da caixa em causa, fixando a janela para valores da variável independente entre 0 e 5, e para valores da variável dependente entre 0 e 144, obtendo o seguinte excerto de gráfico:

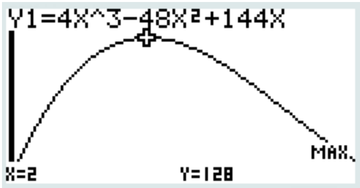


Figura 5.42: Mediação semiótica da calculadora gráfica, N2S2D1, através da representação gráfica da função $4x^3 - 48x^2 + 144x$, na resolução da questão 1.3, na tarefa "A caixa de volume máximo", do grupo 3

Estas explorações na calculadora gráfica (significados de grau 2 por serem resultados de raciocínios construtivos e por isso indutivos), representadas através de signos como os das figuras 5.41 e 5.42, mediaram o raciocínio dos alunos do grupo 3, conduzindo-os a significados de grau 3 na questão seguinte. Tal é explicitado pelo signo símbolo da figura 5.43, construído por estes alunos na questão 2 (ou seja, na questão do nível 3 do método). Os alunos definem a variável independente num intervalo de valores que integra o parâmetro p, atribuindo-lhe um significado que revela estruturação do raciocínio quando afirmam que o domínio da função é o intervalo aberto $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ e acrescentam que *'não pode ser zero porque não haveria medidas e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque se se cortar metade do cartão não dá para fazer a caixa'*. Estes resultados foram discutidos na aula, entre os vários grupos, foram sintetizadas as várias resoluções e ocorreram algumas discussões mediadas pela professora, como as que se seguem relativas ao nível 3 do método (ou seja, referente à discussão da última questão):

Professora: Expliquem-me como é que, na última questão, chegaram ao intervalo $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ para o valor que o corte nos cantos do cartão pode assumir?

Marco: Não foi difícil porque nas alíneas anteriores já tínhamos experimentado o que é que acontecia à caixa quando o valor do lado era 12, 20, etc. E percebemos que não pode ser zero porque se fosse não construíamos caixa porque não teria altura.

Miguel: Pois, e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque, se se cortar metade do cartão, não dá para fazer a caixa. Por exemplo, se o lado do cartão for 12 cm, não podemos cortar 6 cm.

Professora: Muito bem. E o esquema do enunciado ajudou-vos?

Miguel: Sim, claro que sim. Eu sem esquema não conseguia perceber bem o enunciado e o que é que podíamos experimentar com o cartão.

(…)

Professora: E como é que derivaram a função $4x^3 - 4x^2p + p^2x$?

Marco: Quando estávamos a resolver essa questão eu pensava que não iríamos ser capazes de resolver com p e x tudo misturado. Mas não foi difícil, porque nessa função o p é como se fosse um número e portanto basta pensarmos como pensamos para um número qualquer como o 2 ou o 3. E pensando assim não foi difícil.

Extrato 5.21: Mediação semiótica de significados entre a professora e os alunas do grupo 3, na tarefa *"A caixa de volume máximo"*

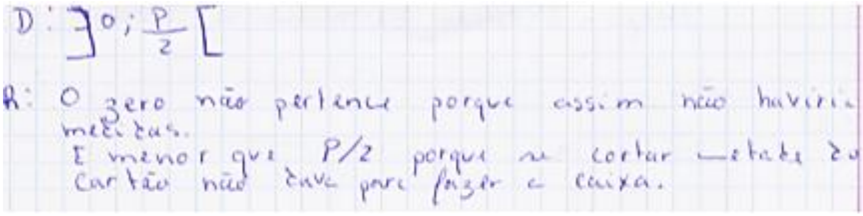


Figura 5.43: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolo: significado N3S3D1 discutido após a resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 3

No extrato 5.21 e nas representações das figuras 5.44 e 5.45, os alunos do grupo 3 e do grupo 2 mostram como maximizam o volume da caixa e determinam o maximizante $\frac{p}{6}$, apresentando uma síntese algébrica dos seus raciocínios, que constitui, por isso, um signo símbolo, face à última questão da tarefa (extrato 5.22), apesar da imprecisão das tabelas das figuras.

"2. Considera que o cartão tem p cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?"

Extrato 5.22: Enunciado que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: *significado N3S1D1,N3S2D1, N3S3D1, do enunciado da tarefa "A caixa de volume máximo"*

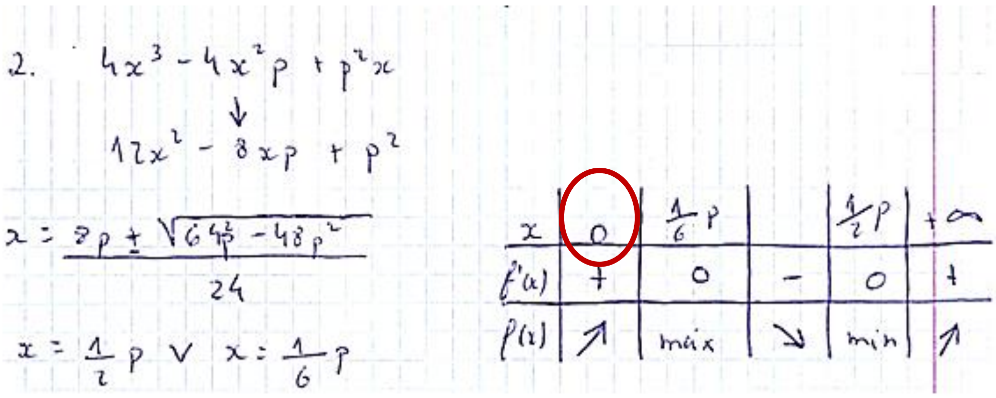
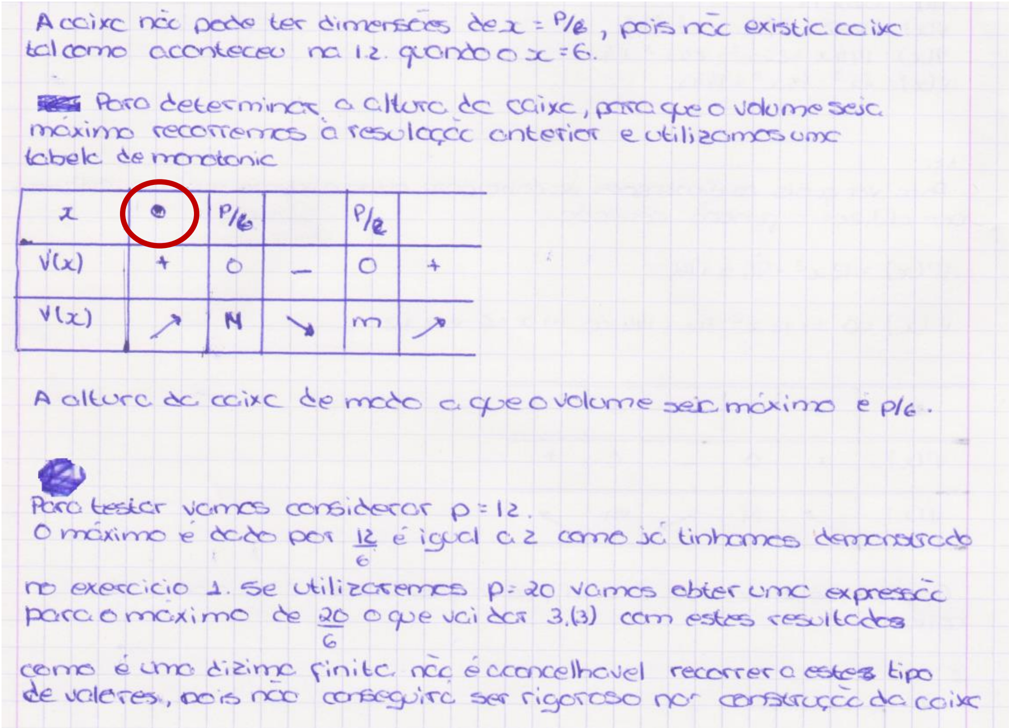


Figura 5.44: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: *síntese da tarefa "A caixa de volume máximo", do grupo 3*



A caixa não pode ter dimensões de $x = p/2$, pois não existia caixa tal como aconteceu na 1.2. quando o $x = 6$.

Para determinar a altura da caixa, para que o volume seja máximo recorremos à resolução anterior e utilizamos uma tabela de monotonia

x	0	$p/6$		$p/2$	
$V'(x)$	+	0	−	0	+
$V(x)$	↗	M	↘	m	↗

A altura da caixa de modo a que o volume seja máximo é $p/6$.

Para testar vamos considerar $p = 12$.
O máximo é dado por $\frac{12}{6}$ é igual a 2 como já tínhamos demonstrado no exercício 1. Se utilizarmos $p = 20$ vamos obter uma expressão para o máximo de $\frac{20}{6}$ o que vai dar 3,(3) com estes resultados como é uma dízima finita não é aconselhável recorrer a estes tipo de valores, pois não conseguirá ser rigoroso na construção da caixa

Figura 5.45: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: *síntese da tarefa "A caixa de volume máximo", do grupo 2*

As alunas do grupo 2, no fim da resolução, verificam o resultado que obtiveram com o valor genérico p e fazem essa verificação com o valor que inicialmente consideraram, que era 12. Retomam as alíneas anteriores como forma de atribuírem significados de síntese (ou seja significados de grau 3) no raciocínio dedutivo que fazem no final da sua resolução. Classificamos tal raciocínio por dedutivos porque as alunas fazem afirmações do género '*Para testar vamos considerar …*' e porque depois de obterem o resultado $\frac{p}{6}$ deduzem o significado de grau 2 '*o máximo é dado por* $\frac{20}{6}$' e deduzem também o significado de grau 2 '*se utilizássemos* $p = 20$ *iríamos obter uma expressão para o máximo de* $\frac{20}{6}$*, o que vai resultar* $3,(3)$ *e como é uma dízima infinita não é aconselhável pois dificultaria a construção da caixa*'. As alunas para além de usarem significados de grau 2 já construídos das alíneas anteriores, estruturam tais significados de grau 2 para validarem o significado de grau 3 a que chegam (que neste caso é a resolução com o parâmetro p genérico). E esta estruturação, ao aparecer no final da resolução, evidencia o raciocínio dedutivo das alunas e a interligação dos significados de grau 2. Se, ao invés deste raciocínio de teste com valores concretos aparecer no final da resolução como modo de testar e evidenciar resultados, aparecesse no início como estratégia para induzir algum tipo de generalização, este raciocínio seria considerado indutivo e os significados de grau 2 evidenciariam a construção para a generalização.

Síntese: Os alunos desenvolvem a sua atividade sígnica em torno da liberdade que lhes é dada no enunciado. Isto deve-se à natureza aberta das tarefas, construindo significados matemáticos encadeados e sucessivos, e, por isso, estruturados e sintetizadores e optando por estratégias de resolução diversas. Com a mediação, a professora conduziu os alunos à compreensão de que, a escrita algébrica é uma forma de comunicar resultados, de demonstrar hipóteses matemáticas e de validar conjeturas.

Alguns alunos optam por resolver a questão graficamente, extraindo o valor do volume máximo e o respetivo valor do lado do quadrado cortado, como resultado da utilização da calculadora gráfica. A exploração da função na calculadora gráfica, quer através do uso do cursor de movimentação da janela de visualização, quer através da determinação do valor do maximizante e do respetivo valor do máximo, permitiu-lhes definir uma janela de visualização coerente com o volume da caixa em causa. As explorações na calculadora gráfica mediaram o raciocínio dos alunos, quer em raciocínios feitos no nível 2, quer em raciocínios feitos no nível 3.

Na última questão os alunos verificam o resultado que obtiveram com o valor genérico p e fazem essa verificação com o valor que inicialmente consideraram. Retomam as alíneas anteriores como forma de atribuírem significados de síntese (ou seja significados de grau 3). As seguintes afirmações são um exemplo disso: '*Para testar vamos considerar …*' e depois de obterem o resultado $\frac{p}{6}$ deduzem o significado de grau 2 '*o máximo é dado por* $\frac{12}{6}$' e deduzem também o significado de grau 2 '*se utilizássemos* $p = 20$ *iríamos obter uma expressão para o máximo de* $\frac{20}{6}$*, o que vai resultar* $3,(3)$ *e como é uma dízima infinita não é aconselhável pois dificultaria a construção da caixa*'.

No nível 3, os alunos definem a variável independente num intervalo de valores que integra o parâmetro p, atribuindo-lhe um significado que revela estruturação do raciocínio quando afirmam que o domínio da função é o intervalo aberto $\left]0,\frac{p}{2}\right[$ e acrescentam que 'não pode ser zero porque não haveria medidas e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque se se cortar metade do cartão não dá para fazer a caixa'. Os resultados foram discutidos na aula, entre os vários grupos, foram sintetizadas as várias resoluções e ocorreram algumas discussões mediadas pela professora com o intuito de construir sínteses de estratégias usadas.

No decurso da resolução da tarefa, o questionamento para a elaboração de sínteses foi feito quer através das questões do enunciado (principalmente das últimas questões de cada tarefa), quer através dos alunos ao longo da resolução das tarefas (principalmente quando fizeram referência aos raciocínios que tinham construído nas alíneas anteriores), quer através da mediação da professora, nomeadamente na fase final da questão em que ela pedia aos alunos para apresentarem a resposta, fazendo uma síntese dos principais raciocínios que haviam feito até ao momento. A (re)visita dos alunos à questão inicial que acompanha o enunciado geral foi um procedimento importante para que os alunos (re)definissem os seus raciocínios durante a resolução de cada uma das alíneas da tarefa por forma a caminharem para a resolução da última questão – dado que a última questão é a que pretende promover mais raciocínios sintéticos e estruturantes de todos os outros raciocínios anteriores.

5.2.2. A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções

A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções é analisada segundo: i) a interpretação do enunciado; ii) o parâmetro e as variáveis dependente e independente; iii) o parâmetro e a incógnita; iv) o parâmetro na transformação de representações; e v) o parâmetro na conversão entre registos de representação.

5.2.2.1. A interpretação do enunciado

A figura 5.46 mostra que os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução. Esta significação ocorreu após o contacto com o enunciado e são estes raciocínios que, por serem os primeiros, geram a hipótese de resolução. Por isso são designados raciocínios abdutivos. Os alunos iniciam uma intenção, um caminho de resolução, em que a letra *x* e a concretização do valor para o lado do quadrado cortado num dos cantos do cartão são signos ícones.

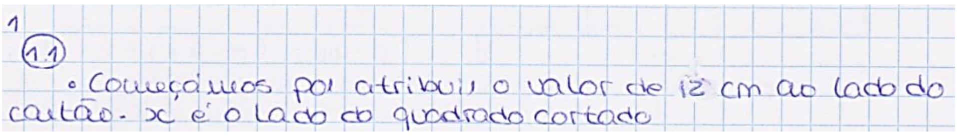
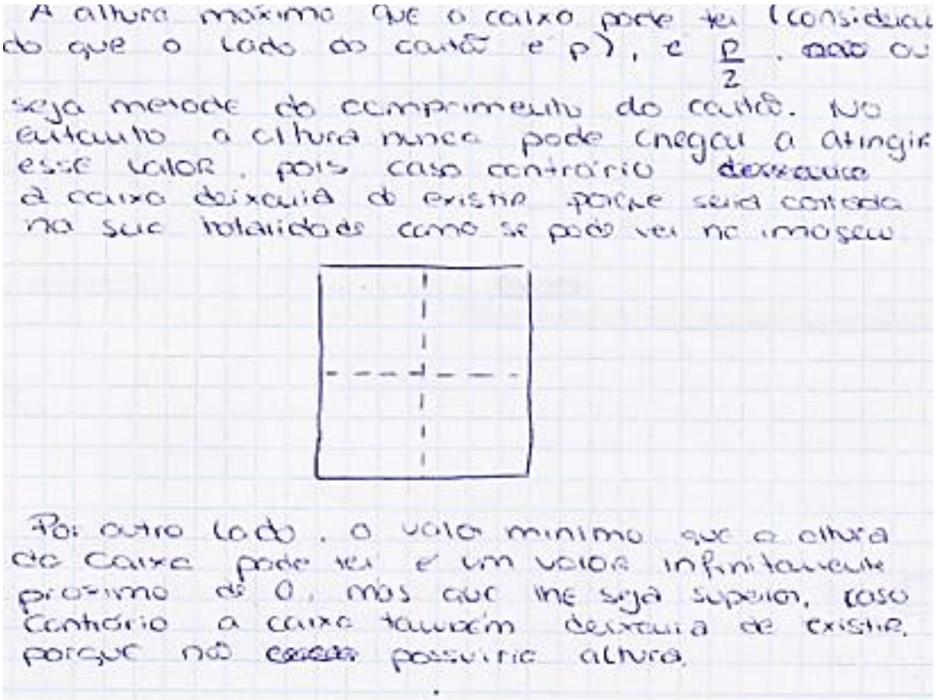

1
1.1
• Começámos por atribuir o valor de 12 cm ao lado do cartão. x é o lado do quadrado cortado

Figura 5.46: Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: significado N1S1D2, na questão 1.1, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1.

A este tipo de signos e raciocínios classificamos por significados de grau 1, porque pertencem ao primeiro nível do método devido ao contexto matemático em que ocorreram – com o parâmetro concreto e as variáveis fixas num intervalo de valores – e foram classificados como pertencendo à dimensão 2 (D2), por se tratarem de significados construídos pelos alunos.

Há ainda aspetos relativos à interpretação do enunciado que importa referenciar e que ocorreram na resolução de questões posteriores à primeira e se referem à compreensão do conceito de parâmetro em funções através da exploração de outras vertentes do enunciado, concretamente através da (re)exploração do esquema que acompanha o enunciado, como é o caso da (re)exploração do esquema que as alunas do grupo 1 fazem na resolução da última questão da tarefa (ver figura 5.47). Nesta resolução, as alunas mostram que compreendem a variação do parâmetro (altura da caixa), entre $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ para um cartão com $p\,\mathrm{cm}$ de lado. E explicam o raciocínio dedutivo que fazem, em linguagem natural e através da representação esquemática, quando afirmam "*… a altura da caixa nunca pode ser* $\frac{p}{2}\,\mathrm{cm}$ *porque a caixa deixaria de existir, pois seria cortada na sua totalidade*" e apresentam um esquema com a situação hipotética na qual colocam um corte de $\frac{p}{2}$ cm. Complementarmente, referem-se ao ínfimo do intervalo como "um valor *infinitamente próximo de 0, mas que seja superior a 0, pois caso contrário a caixa também deixaria de existir porque não possuiria altura*". Este raciocínio, que classificamos de dedutivo e cuja representação classificamos como um significado de grau 3 do terceiro nível do método (N3), mostra a compreensão do conceito de parâmetro a variar num intervalo de valores e que não pode assumir nenhum dos dois extremos desse intervalo, pois a situação em causa (a construção da caixa) deixaria de ter significado. Nesta exploração, o esquema inicial, sem dados concretos, foi usado pelas alunas deste grupo de trabalho para a compreensão da variação do parâmetro (neste caso a altura da caixa) num intervalo de valores genéricos. A resolução em causa é a seguinte:


A altura máxima que a caixa pode ter (considerando que o lado do cartão é p), é $\frac{p}{2}$, ou seja metade do comprimento do cartão. No entanto a altura nunca pode chegar a atingir esse valor, pois caso contrário a caixa deixaria de existir porque seria cortada na sua totalidade como se pode ver na imagem

Por outro lado, o valor mínimo que a altura da caixa pode ter é um valor infinitamente próximo de 0, mas que lhe seja superior, caso contrário a caixa também deixaria de existir, porque não possuiria altura.

Figura 5.47: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: significado N3S3D2, da questão 2, da tarefa "*A caixa de volume máximo*", do grupo 1

Síntese: Os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução. Esta significação ocorre após o contacto com o enunciado e são estes raciocínios que, por serem os primeiros, geram a hipótese de resolução. Por isso são designados raciocínios abdutivos. Os alunos mostram tal hipótese através da representação que constroem em que a letra *x* e concretização do valor para o lado do quadrado cortado num dos cantos do cartão são signos ícones. A este tipo de signos e raciocínios classificamos de significados de grau 1, porque pertencem ao primeiro nível do método devido ao contexto matemático em que ocorreram, com o parâmetro concreto e as variáveis fixas num intervalo de valores, e foram classificados como pertencendo à dimensão 2 (D2), por se tratarem de significados construídos pelos alunos.

No que refere à compreensão do conceito de parâmetro em funções os alunos (re)exploram o enunciado e mostram que compreendem a variação do parâmetro (altura da caixa), entre $\left]0,\frac{p}{2}\right[$ para um cartão com $p\,\mathrm{cm}$ de lado. Explicam o raciocínio dedutivo que fazem, em linguagem natural e através da representação esquemática, quando afirmam "*… a altura da caixa nunca pode ser* $\frac{p}{2}\,\mathrm{cm}$ *porque a caixa deixaria de existir, pois seria cortada na sua totalidade*" e apresentam um esquema com a situação hipotética na qual colocam um corte de $\frac{p}{2}\,\mathrm{cm}$. Complementarmente, referem que o valor mínimo que a altura pode ter é um valor "*infinitamente próximo de 0, mas que seja superior a 0, pois caso contrário a caixa também deixaria de existir porque não possuiria altura*". Este raciocínio, que é classificado de dedutivo e cuja representação é classificada como um signo de grau 3 do terceiro nível do método (N3), mostra a compreensão do conceito de parâmetro a variar num intervalo de valores, não podendo assumir nenhum dos dois extremos desse intervalo, pois a situação em causa (a construção da caixa) deixaria de ter significado. Nesta exploração, o esquema inicial, sem dados concretos, foi um artefacto de mediação semiótica de significados matemáticos usado pelas alunas deste grupo de trabalho que promoveu a compreensão da variação do parâmetro (neste caso a altura da caixa) num intervalo de valores genéricos.

5.2.2.2. O parâmetro e as variáveis dependente e independente

No que refere ao parâmetro e às variáveis dependente e independente, nos níveis N1 e N3 do método, ou seja, nas primeira e última questão da tarefa, os alunos, primeiro (em N1), atribuem um valor concreto ao parâmetro e depois identificam-no com uma letra, x, p ou outra, tal como mostra a figura 5.48:

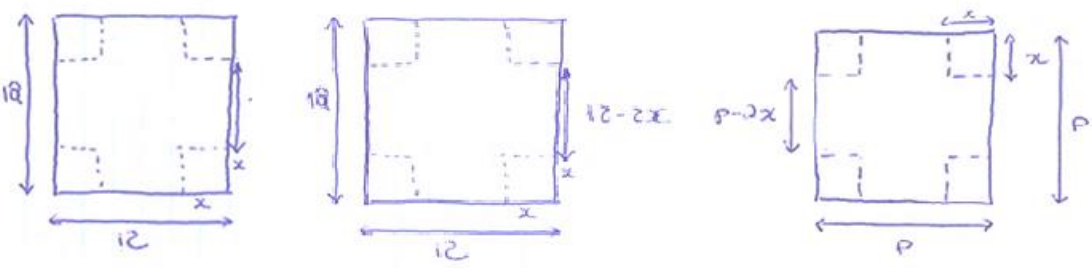


Figura 5.48: Signos índices construídos pelas alunas do grupo 1, na resolução da questão 1.1 (as duas primeiras construções) e na resolução da questão 2 (a última construção), da tarefa *"A caixa de volume máximo"*.

No 1.ºnível do método, os alunos, ao fixarem o valor do lado do cartão em 12 cm e ao obterem a condição $12 - 2x$, que define o valor da variável x entre 0 e 6, compreenderam que a concretização do valor do lado do cartão em 12 cm condicionou o valor da variável x. Do mesmo modo, no 3.º nível do método, a designação de p cm (para o lado do cartão) originou a condição $p - 2x$, que define o valor da variável x entre 0 e $\frac{p}{2}$. Esta compreensão está explicita nas resoluções dos alunos, como exemplifica o raciocínio apresentado no extrato 5.23.

> **(…)**
>
> **Marco:** Não foi difícil perceber o intervalo $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ que obtivemos porque nas alíneas anteriores já tínhamos experimentado o que é que acontecia à caixa quando o valor do lado era 12, 20, etc. E percebemos que não pode ser zero porque se fosse zero não construíamos caixa porque não teria altura.
>
> **Miguel:** Pois, e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque, se se cortar metade do cartão, não dá para fazer a caixa. Por exemplo, se o lado do cartão for 12 cm, não podemos cortar 6 cm.

Extrato 5.23: Construção do significado de parâmetro como *algo que pode determinar o resultado de alguma variável*, pelos alunos do grupo 3, na resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*

Registaram-se ainda situações em que os alunos constroem representações nas questões 1.2 e 1.3 (N2) e na questão 2 (N3), de modo a comunicar quais os valores mínimos e máximos que as variáveis, dependente e independente, podem assumir, na situação trabalhada, justificando o raciocínio que fazem através de representações esquemáticas das figuras 5.49 e 5.50. Estas figuras são signos construídos pelos alunos, nas questões 1.3 e 2 da tarefa (por isso pertencentes respetivamente ao nível 2 (N2) e ao nível 3 (N3) do método de ensino). No nível 2 é requerido aos alunos que concretizem apenas o parâmetro e trabalhem com as variáveis e no nível 3 é requerido aos alunos que não concretizem nem o parâmetro nem as variáveis.

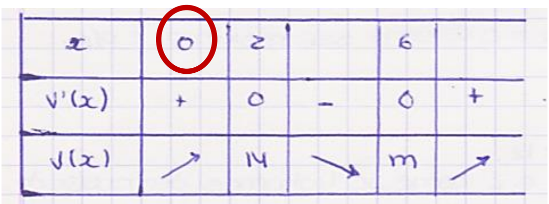


Figura 5.49: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N2S2D2, na resolução da questão 1.3 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 2

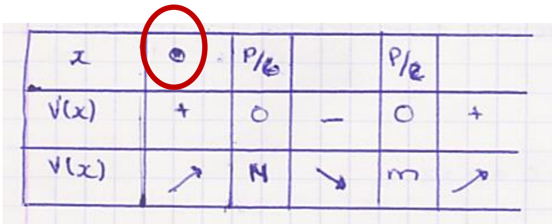


Figura 5.50: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N3S2D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 2

Nestas resoluções, o grupo 2 optou por resolver analiticamente a questão, derivando a função que representa o volume da caixa e construindo a tabela de variação da monotonia de tal função, através da respetiva variação do sinal. Posteriormente, atribuiu significado ao maximizante $\frac{p}{6}$, ao minimizante $\frac{p}{2}$, ao sinal da função derivada genérica dentro e fora do intervalo compreendido entre o minimizante e o maximizante, bem como à respetiva monotonia da função que representa o volume de uma caixa de cartão, formada a partir de um quadrado de cartão com lado p. Estas duas resoluções em conjunto formam um raciocínio indutivo, por traduzirem a generalização que é feita da questão 1.3 para a questão 2 da tarefa.

Síntese: Registaram-se, quer na primeira, quer na última questão da tarefa, situações em que os alunos, primeiro, atribuem um valor concreto ao parâmetro e depois identificam-no com uma letra, x, p ou outra. No 1.ºnível do método, os alunos, ao fixarem o valor do lado do cartão em 12 cm e ao obterem a condição $12 - 2x$, que define o valor da variável x entre 0 e 6, compreenderam que a concretização do valor do lado do cartão em 12 cm condicionou o valor da variável x . Do mesmo modo, no 3.º nível do método, a designação de p cm (para o lado do cartão) originou a condição $p - 2x$, que define o valor da variável x entre 0 e $\frac{p}{2}$.

Registaram-se ainda situações em que os alunos constroem representações nas questões 1.2 e 1.3 (N2) e na questão 2 (N3), de modo a comunicar quais os valores mínimos e máximos que as variáveis, dependente e independente podem assumir, na situação trabalhada. No nível 2 é requerido aos alunos que concretizem apenas o parâmetro e trabalhem com as variáveis e no nível 3 é requerido aos alunos que não concretizem nem o parâmetro nem as variáveis.

Um grupo de alunos optou por resolver analiticamente a questão, derivando a função que representa o volume da caixa e construindo a tabela de variação da monotonia de tal função, através da respetiva variação do sinal. Posteriormente, atribuiu significado ao maximizante $\frac{p}{6}$, ao minimizante $\frac{p}{2}$, ao sinal da função derivada genérica dentro e fora do intervalo compreendido entre o minimizante e o maximizante, bem como à respetiva monotonia da função que representa o volume de uma caixa de cartão formada a partir de um quadrado de cartão com lado p. Estas duas resoluções consecutivas formam um raciocínio indutivo, por traduzirem a generalização que é feita da questão 1.3 para a questão 2 da tarefa.

A possibilidade que é dada aos alunos, que resulta da estrutura da tarefa, de prolongarem os raciocínios que eles próprios vão construindo de umas alíneas para as outras promoveu a compreensão do conceito de variável e de parâmetro numa função durante a resolução da tarefa.

Os alunos experimentaram ao longo da resolução das questões desta tarefa, nomeadamente das questões que se referem ao nível 1 e ao nível 3 o *parâmetro como algo que pode determinar o intervalo de variação de alguma variável*.

5.2.2.3. O parâmetro e a incógnita

No que refere ao parâmetro e à incógnita, os três grupos calcularam o valor que *o lado do cartão* assume nas circunstâncias que eles próprios definiram, ou seja, para o valor concreto do parâmetro, e relacionam-no com o respetivo valor do volume.

No nível N1 do método, os alunos, ao atribuírem um valor concreto ao parâmetro, identificam-no com um valor e posteriormente com uma letra, x, p ou outra, que tem um valor concreto definido, como explicita a figura 5.51:

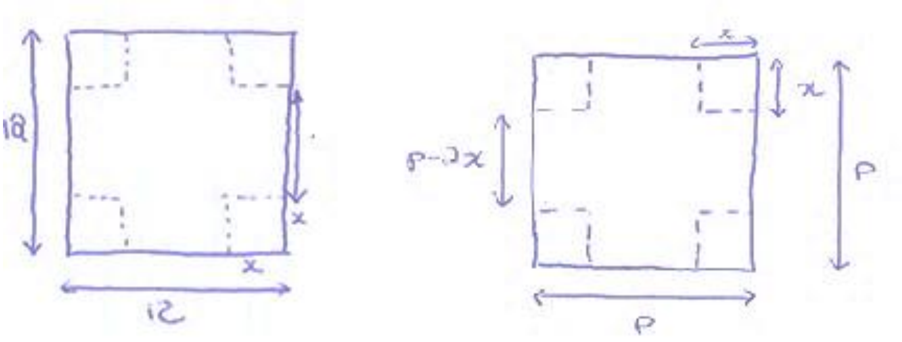
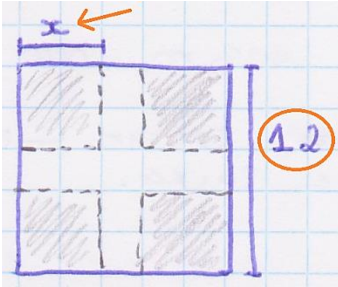


Figura 5.51: Signos índices construídos pelas alunas do grupo 1, na resolução da questão 1.1 e na resolução da questão 2, respetivamente, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*.

Esta interpretação de parâmetro resulta da representação que é dada no 1.ºnível do método, que é semelhante à que usualmente os alunos fazem para uma incógnita quando resolvem uma equação. Pois, por um lado, a escrita algébrica é a mesma, isto é, $p = 12$ (por exemplo); por outro lado, quando se fixa algo desconhecido num valor concreto, como aconteceu com o lado da caixa (por exemplo), resolve-se o problema e constrói-se a caixa e determina-se o seu consequente volume – o que não é possível fazer-se sem que o desconhecido se torne conhecido/definido/determinado, o mesmo acontece com a determinação da incógnita na resolução de um problema ou de uma equação. Este significado que alguns alunos deram fica explícito nas observações que ocorreram durante a resolução da questão 1.2 da tarefa, tal como explicita o extrato 5.24.

(…)

Marco: ... queremos é determinar este *x* aqui, com o lado do cartão fixo e igual a 12 cm. E queremos que esta caixa tenha o maior volume possível. As contas que fizermos com cartões com outras dimensões serão parecidas. Vamos ter de construir uma função para o volume e depois ir à máquina para calcular o máximo.



Extrato 5.24: Construção do significado de parâmetro como *algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto*, na resolução da questão 1.1 da tarefa "A caixa de volume máximo", do grupo 3

No N3 do método, ou seja na questão 2 da tarefa, registam-se episódios em que os alunos trabalharam com as variáveis e com o parâmetro não concretizados (ou seja, com o valor do lado do cartão não concretizado numericamente) e em seguida derivam em ordem à variável x, tal como se mostra na figura 5.52.

$$4x^3 - 4x^2p + p^2x$$
$$\downarrow$$
$$12x^2 - 8xp + p^2$$

Figura 5.52: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N3S2D2, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 3

Depois, registam-se episódios em que os alunos calculam os zeros dessa função derivada obtida, envolvendo o parâmetro p. Tal, revela uma clara compreensão da letra enquanto variável, enquanto parâmetro e enquanto incógnita, como se mostra na resolução da figura 5.53.

$$V'(x) = 12x^2 + p^2 - 8xp$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + p^2 - 8xp = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{+8p \pm \sqrt{(-8p)^2 - 4(12 \times p^2)}}{2 \times 12} \Leftrightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{64p^2 - 48}}{24}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{16p^2}}{24} \Leftrightarrow x = \frac{8p \pm 4p}{24} \Leftrightarrow x = \frac{12p}{24} \vee x = \frac{4p}{24}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{p}{2} \vee x = \frac{p}{6}$$

Figura 5.53: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N3S3D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 3

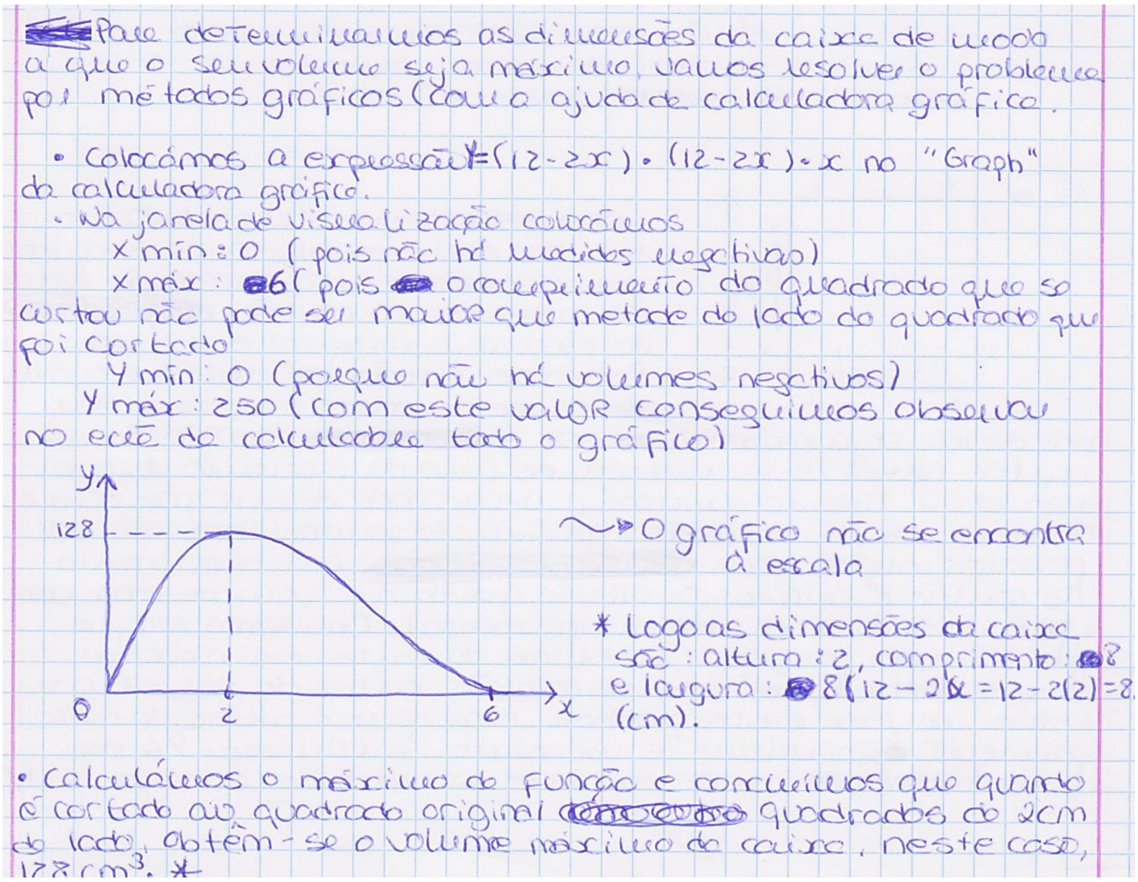
Síntese: No que refere ao parâmetro e à incógnita, os três grupos começaram por atribuir um valor concreto ao parâmetro e posteriormente com uma letra, x, p ou outra. Esta interpretação de parâmetro resultou da representação que foi dada no 1.ºnível do método, que foi semelhante à que usualmente os alunos fazem para uma incógnita quando resolvem uma equação. Pois, por um lado, a escrita algébrica é a mesma, isto é, $p = 12$ (por exemplo); por outro lado, quando se fixa algo desconhecido num valor concreto, como aconteceu com o lado da caixa (por exemplo), resolve-se o problema e constrói-se a caixa e determina-se o seu consequente volume – o que não é possível fazer-se sem que o desconhecido se torne conhecido/definido/determinado, o mesmo acontece com a determinação da incógnita na resolução de um problema ou de uma equação.

No N3 do método, ou seja na questão 2 da tarefa, registam-se episódios em que os alunos trabalharam com as variáveis e com o parâmetro não concretizados (ou seja, com o valor do lado do cartão não concretizado numericamente) e em seguida derivam em ordem à variável x. Depois, registam-se episódios em que os alunos calculam os zeros dessa função derivada obtida, envolvendo o parâmetro p.

A exploração que os alunos fizeram ao longo da resolução da tarefa promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, de letra enquanto variável de uma função e de letra enquanto parâmetro. Os alunos experimentaram o *parâmetro como algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto*.

5.2.2.4. O parâmetro na transformação de representações

A resolução da figura 5.54 os alunos começam por estudar a situação com o valor do lado do cartão fixo em 12 cm. Constroem a expressão que lhes permite determinar o volume e exploram-na na calculadora gráfica, detalhando todos os raciocínios que fazem. Depois representam por escrito a estratégia que seguiram e justificam os passos da estratégia com significados que classificámos de grau 3 do segundo nível do método (N2), por traduzirem um raciocínio dedutivo, sintético, como o que a seguir apresentamos:



Para determinarmos as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo, vamos resolver o problema por métodos gráficos (com a ajuda da calculadora gráfica.

• Colocámos a expressão $Y=(12-2x)\cdot(12-2x)\cdot x$ no "Graph" da calculadora gráfica.

• Na janela de visualização colocámos

X min: 0 (pois não há medidas negativas)

X máx: 6 (pois o comprimento do quadrado que se cortou não pode ser maior que metade do lado do quadrado que foi cortado

Y min: 0 (porque não há volumes negativos)

Y máx: 250 (com este valor conseguimos observar no ecrã da calculadora todo o gráfico)

y, 128, 0, 2, 6, x

O gráfico não se encontra à escala

* Logo as dimensões da caixa são: altura: 2, comprimento: 8 e largura: 8 ($12-2x = 12-2(2) = 8$) (cm).

• Calculámos o máximo da função e concluímos que quando é cortado ao quadrado original quadrados de 2cm de lado, obtém-se o volume máximo da caixa, neste caso, $128\ cm^3$. *

Figura 5.54: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na questão 1.3 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1

Nesta representação as afirmações *"$Xmin$: 0 (pois não há medidas negativas)",." $Xmáx$: 6 (pois o comprimento do quadrado que se cortou não pode ser maior que metade do lado do quadrado que foi cortado)", "$Ymin$: 0 (porque não há volumes negativos)"* e *"$Ymáx$: 250 (pois com este valor conseguimos observar no ecrã da calculadora todo o gráfico"* constituem significados que conjuntamente formam uma estrutura e são genéricos, tal como: 'não há volumes negativos', ou 'o comprimento do quadrado que se cortou não pode ser maior que metade do lado do quadrado que foi cortado'.

A transformação de significados ocorreu dentro da mesma resolução e do mesmo registo de representação. Também foi usada a mesma estratégia em situações diferentes. Por exemplo, a estratégia usada pelas alunas do grupo 1 e atrás apresentada na figura 5.54, que foi definir o lado do cartão 12 cm e explorar a situação graficamente, foi novamente repetida nas mesmas alíneas com um lado de cartão 10 cm. As alunas reiteram a estratégia e afirmam que *"quando, por exemplo, o cartão antes de ser cortado tem $10\ cm$ de lado"*, *"colocamos na calculadora a expressão que nos dá o volume máximo da caixa, neste caso: $(10-2x)(10-2x)x$"*, *"calculando o máximo da função"*, tal como mostra a figura e concluindo do mesmo modo que o resultado é $\frac{1}{6}\ de\ 10$, tal como no teste anterior era $\frac{1}{6}\ de\ 12$.

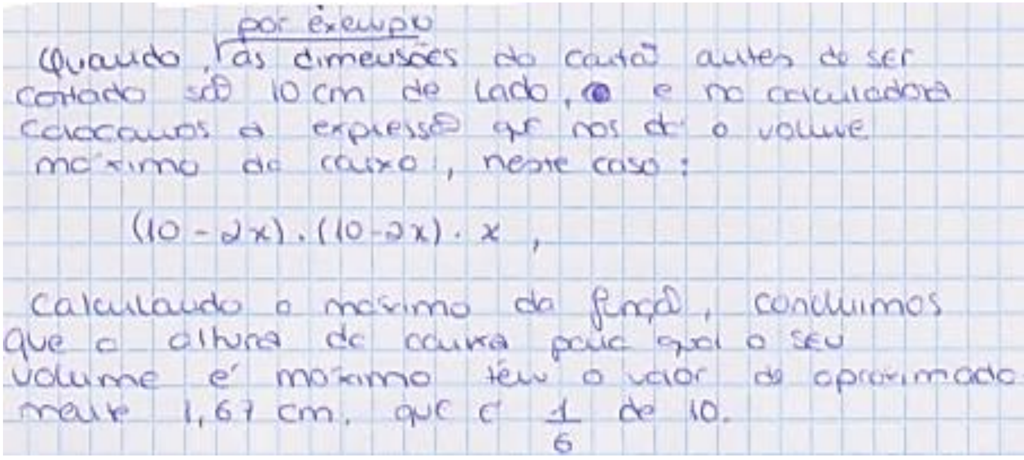


Figura 5.55: Raciocínio indutivo e dedutivo, representado por signos índices e símbolo: Significados N2S2D2 e N2S3D2, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1

Em complementaridade visualizam na calculadora gráfica o seguinte gráfico:

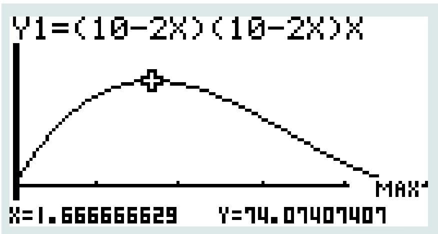
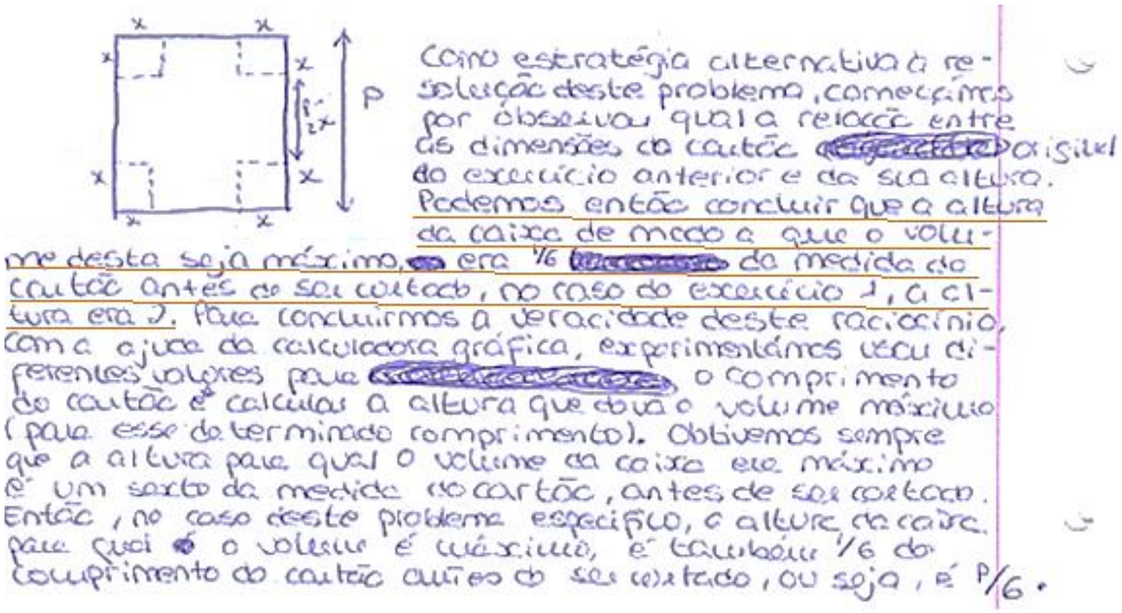


Figura 5.56: Raciocínio dedutivo, representado por signos símbolo: Significado N2S3D2, na resolução da questão 1.3 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1

Na última afirmação que as alunas fazem, *"…, que é $\frac{1}{6}$ de 10"* mostram que estão a relacionar o valor que atribuíram à dimensão do cartão, com o resultado a que chegaram para o valor do corte que maximiza o volume da caixa. Este significado final, relaciona e estrutura os significados anteriores e prepara as alunas para a última questão da tarefa, na qual relacionam estas dimensões, mas para valores genéricos da dimensão do cartão, como mostra a resolução da figura 5.57. Esta resolução é a reiteração da estratégia que as alunas aplicaram às situações concretas da questão 1.1, tal como as próprias alunas reconhecem e afirmam.



Como estratégia alternativa à resolução deste problema, começámos por observar qual a relação entre as dimensões do cartão original do exercício anterior e da sua altura. Podemos então concluir que a altura da caixa de modo a que o volume desta seja máximo, era 1/6 da medida do cartão antes de ser cortado, no caso do exercício 1, a altura era 2. Para concluirmos a veracidade deste raciocínio, com a ajuda da calculadora gráfica, experimentámos vários diferentes valores para o comprimento do cartão e calcular a altura que dava o volume máximo (para esse determinado comprimento). Obtivemos sempre que a altura para qual o volume da caixa era máximo é um sexto da medida do cartão, antes de ser cortado. Então, no caso deste problema específico, a altura da caixa para qual o volume é máximo, é também 1/6 do comprimento do cartão antes de ser cortado, ou seja, é P/6.

Figura 5.57: Raciocínio dedutivo, representado por signos símbolo: Significado N3S3D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1

Síntese: No que refere ao parâmetro na transformação de representações, os alunos relacionam, sucessivamente, cada significado com outro, construindo uma cadeia de significados sob um raciocínio indutivo, estruturando-os depois sob um raciocínio dedutivo. Começam por estudar a situação com o valor do lado do cartão fixo. Constroem a expressão que lhes permite determinar o volume e exploram-na na calculadora gráfica, detalhando todos os raciocínios que fazem. Depois, representam por escrito a estratégia que seguiram e justificam os passos da estratégia com significados de grau 3 do segundo nível do método (N2).

Afirmações como *"$Xmin$: 0 (pois não há medidas negativas)",." $Xmáx$: 6 (pois o comprimento do quadrado que se cortou não pode ser maior que metade do lado do quadrado que foi cortado)", "$Ymin$: 0 (porque não há volumes negativos)"* e *"$Ymáx$: 250 (pois com este valor conseguimos observar no ecrã da calculadora todo o gráfico"* constituem significados que conjuntamente formam uma estrutura, respondem à intencionalidade da questão, e são dedutivos porque são justificados com argumentos matemáticos que são por si estruturadores e válidos para qualquer situação, por isso genéricos, tal como: *'não há volumes negativos'*, ou *'o comprimento do quadrado que se cortou não pode ser maior que metade do lado do quadrado que foi cortado'*. Estas justificações constituem-se como argumentos matemáticos para todo e qualquer sólido geométrico ou para todo e qualquer quadrado cortado nos cantos por quadrados.

A transformação de significados ocorreu não apenas dentro da mesma resolução e do mesmo registo de representação, ocorreu também como forma de reiterar estratégias, ou seja, a mesma estratégia aplicada a situações diferentes, como modo de testar e de consolidar quer as próprias estratégias quer os raciocínios usados em tais estratégias. Por exemplo, a estratégia usada por um dos grupos de alunas, que foi definir o lado do cartão 12 cm e explorar a situação graficamente, foi novamente repetida nas mesmas alíneas com um lado de cartão 10 cm. As alunas reiteram a estratégia e afirmam que *"quando, por exemplo, o cartão antes de ser cortado tem* $10\,cm$ *de lado"*, *"colocamos na calculadora a expressão que nos dá o volume máximo da caixa, neste caso:* $(10-2x)(10-2x)x$*"*, *"calculando o má*ximo da função", e concluindo do mesmo modo que o resultado é $\frac{1}{6}\text{ de }10$, tal como no teste anterior era $\frac{1}{6}\text{ de }12$.

Na afirmação "…, que é $\frac{1}{6}$ de 10" as alunas mostram que estão a relacionar o valor que atribuíram à dimensão do cartão, com o resultado a que chegaram para o valor do corte que maximiza o volume da caixa. Este significado final, relaciona e estrutura os significados anteriores e prepara as alunas para a última questão da tarefa, na qual relacionam estas dimensões, mas para valores genéricos da dimensão do cartão. Esta resolução é a reiteração da estratégia aplicada às situações concretas.

Esta sequência de significados e esta transformação de significados e de estratégias promoveu a construção e transformação de estratégias e significados matemáticos estruturados.

5.2.2.5. O parâmetro na conversão entre registos de representação

No que refere ao parâmetro na conversão de representações, os três grupos de alunos começam por construir, nas questões 1.1, 1.2 e 1.3 da tarefa, significados em torno da situação que a seguir representam em linguagem natural e em esquema. Depois, os alunos convertem essas representações para linguagem algébrica e para um registo de representação gráfica, como mostra o exemplo da figura 5.58.

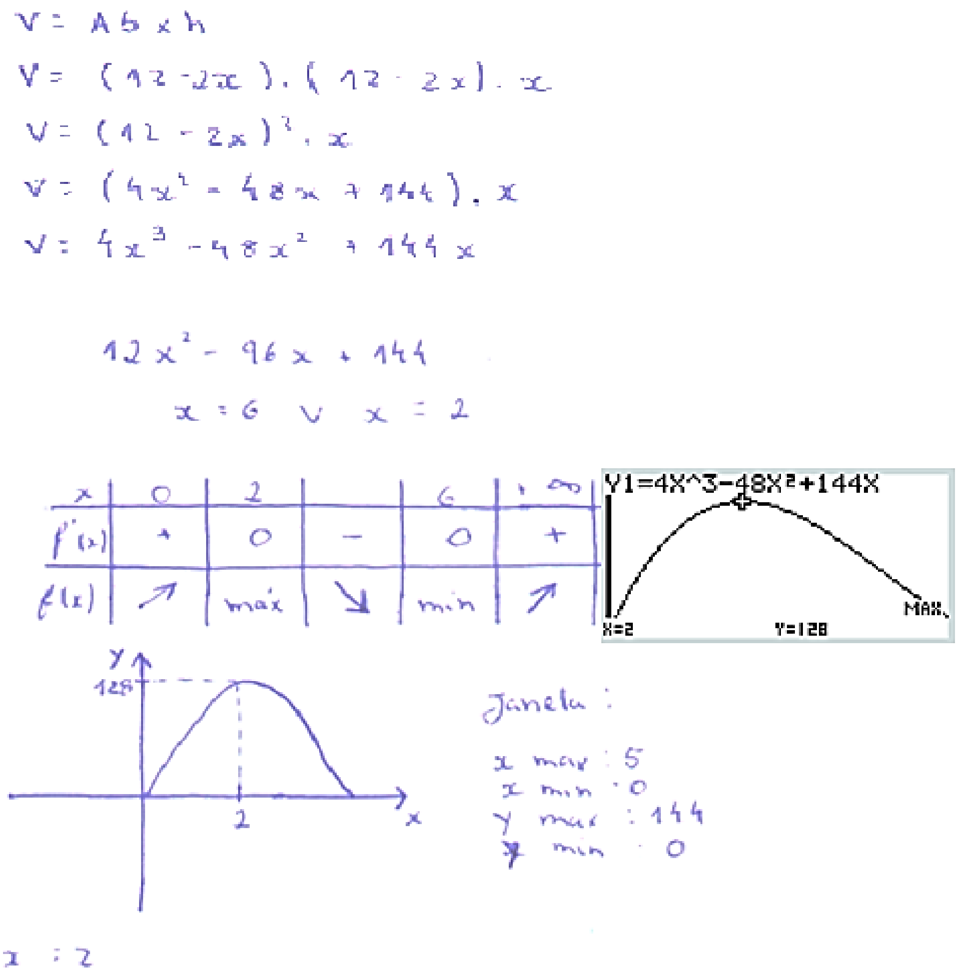
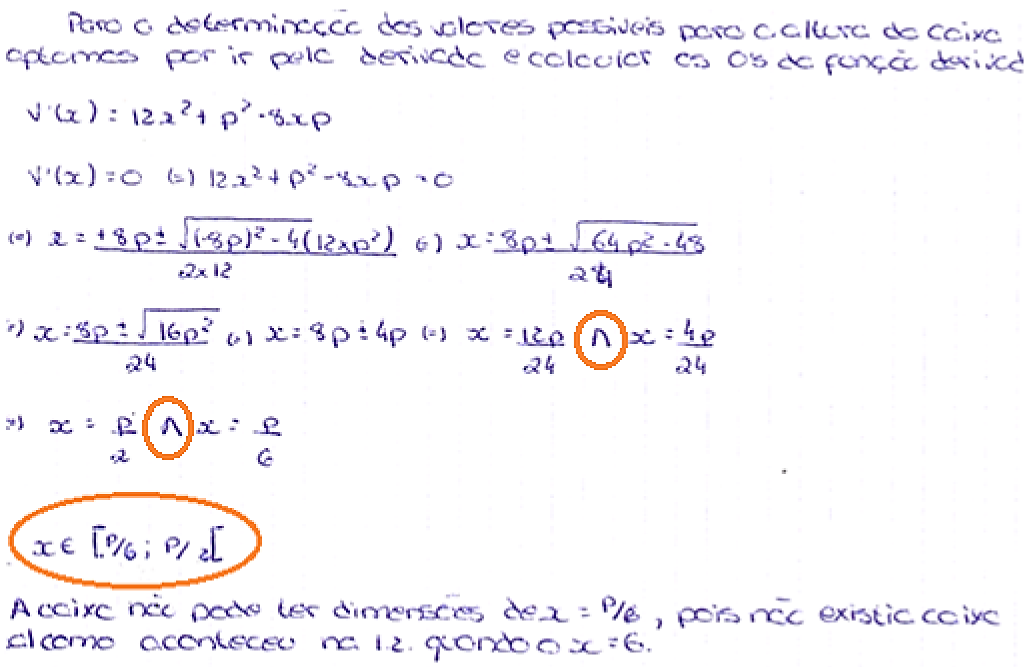


Figura 5.58: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N2S3D2, na resolução da questão 1.3 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 3

Esta representação mostra o uso de vários registos de representação para a resolução das questões e a conversão de significados matemáticos entre esses registos de representação. Na resolução que se segue, referente ao segundo nível (N2) do método de ensino, na tarefa *"A caixa de volume máximo"*, os alunos constroem a função que permite determinar o volume da caixa num registo algébrico, transformam a função num registo algébrico, estudam a função na calculadora num registo gráfico, constroem a tabela de variação de monotonia da função em causa, relacionam a monotonia da função com o sinal da função derivada correspondente num registo em tabela e localizam o valor do maximizante e do respetivo máximo da função novamente usando um registo gráfico.

O mesmo aconteceu na última questão da tarefa, em que os três grupos de alunos apresentam em vários registos de representação a resposta ao pedido *'Considera agora que o cartão tem* p *cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?'*, à semelhança da resolução que a seguir se apresenta:


Para a determinação dos valores possíveis para a altura da caixa optamos por ir pela derivada e calcular os 0s da função derivada

$V'(x) = 12x^2 + p^2 - 8xp$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + p^2 - 8xp = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{+8p \pm \sqrt{(-8p)^2 - 4(12 \times p^2)}}{2 \times 12} \Leftrightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{64p^2 - 48}}{24}$

$\Leftrightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{16p^2}}{24} \Leftrightarrow x = 8p \pm 4p \Leftrightarrow x = \frac{12p}{24} \wedge x = \frac{4p}{24}$

$\Leftrightarrow x = \frac{p}{2} \wedge x = \frac{p}{6}$

$x \in [p/6 ; p/2[$

A caixa não pode ter dimensões de $x = p/6$, pois não existia caixa tal como aconteceu na 1.2. quando o $x = 6$.

Figura 5.59: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N3S3D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 2

No que refere à resolução da figura 5.59 ocorreram significados de grau 0 que não condicionaram a resolução da situação, referentes à representação do signo "$x = \frac{p}{2} \wedge x = \frac{p}{6}$ " e do signo "$\left[\frac{p}{6}, \frac{p}{2}\right[$ ". Estas situações foram mediadas pela professora, nas quais as alunas alegaram que *"Foi distração. Nós sabíamos que, na resolução de equações do segundo grau é um 'ou' e não um 'e'. E também sabíamos que o intervalo é aberto quer em $\frac{p}{6}$, quer em $\frac{p}{2}$, até porque esta conclusão já a tínhamos tirado na alínea 1.2."* Estes significados de grau 0 (S0), ocorreram no nível 3, na última questão. Significados como este ocorreram em várias fases de resolução da tarefa, em algum dos grupos. São significados não semióticos que ocorreram fruto da desconcentração pontual dos alunos. Contudo, significados de grau 0 referentes a raciocínios matemáticos errados, que condicionassem a resolução da tarefa, registaram-se por escrito com pouca frequência, pois a grande maioria das situações que, ao longo da resolução da tarefa causaram dúvidas e provocaram significados de grau 0 condicionadores da resolução foram representados num registo oral, e foram mediados, quer pelos colegas dentro do grupo de trabalho, quer pela professora. Tal como aconteceu com o grupo 2. Estas alunas, na transformação algébrica da equação do segundo grau, adicionaram erradamente dois valores. Esta situação resultou num binómio discriminante com valor negativo que lhes impossibilitou a determinação dos zeros da primeira derivada da função que representa o volume da caixa. Este significado de grau 0 foi mediado dentro do grupo.

Síntese: No que refere ao parâmetro na conversão de representações, a maioria dos alunos começou por construir, nas questões 1.1, 1.2 e 1.3 da tarefa, significados em torno da situação que a seguir representam em linguagem natural e em esquema. Depois, os alunos convertem essas representações para linguagem algébrica e para um registo de representação gráfica.

As resoluções dos alunos mostram o uso de vários registos de representação para a resolução das questões e a conversão de significados matemáticos entre esses registos de representação, nomeadamente no 2.º nível. Como por exemplo, quando os alunos constroem a função que permite determinar o volume da caixa num registo algébrico, transformam a função num registo algébrico, estudam a função na calculadora num registo gráfico, constroem a tabela de variação de monotonia da função em causa, relacionam a monotonia da função com o sinal da função derivada correspondente num registo em tabela e localizam o valor do maximizante e do respetivo máximo da função novamente usando um registo gráfico.

O mesmo aconteceu na última questão da tarefa, em que os três grupos de alunos apresentam em vários registos de representação a resposta ao pedido *'Considera agora que o cartão tem p cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?'*

Na última questão ocorreram significados de grau 0 que não condicionaram a resolução da questão, referentes à representação do signo "$x = \frac{p}{2} \wedge x = \frac{p}{6}$" e do signo "$\left[\frac{p}{6}, \frac{p}{2}\right[$". Estas situações foram mediadas pela professora, nas quais as alunas alegaram que "*Foi distração. Nós sabíamos que, na resolução de equações do segundo grau é um 'ou' e não um 'e'. E também sabíamos que o intervalo é aberto quer em $\frac{p}{6}$, quer em $\frac{p}{2}$, até porque esta conclusão já a tínhamos tirado na alínea 1.2.*" Estes significados de grau 0 (S0), ocorreram nalguma fase de resolução da tarefa em algum dos grupos. São significados não semióticos, que não condicionaram a resolução da tarefa e que ocorreram fruto da desconcentração pontual dos alunos. Contudo, significados de grau 0 referentes a raciocínios matemáticos errados registaram-se por escrito com pouca frequência, pois na grande maioria das situações foram mediados oralmente, quer pelos colegas dentro do grupo de trabalho, quer pela professora.

Saliente-se que, no que refere à ocorrência de significados de grau 0 que condicionaram o processo de significação, nas questões 1.3 e 2 da primeira tarefa da proposta pedagógica, os alunos do grupo 3 tiveram muita dificuldade em atribuir significados. Porém, nas questões 1.3 e 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, os mesmos alunos construíram significados de grau 3, tal como explicitam as resoluções das figuras 5.58 e 5.59.

Na resolução da tarefa *"A caixa de volume máximo"* a atividade matemática de transformação e conversão de representações no 2.º nível intensificou-se, comparativamente a esta atividade no início do estudo. Esta intensificação também se registou no 3.º nível (questão 2). Esta constatação remete-nos para a seguinte questão: a intensificação da atividade matemática dos alunos, no que refere à construção de significados nas transformações e conversões de representações, está relacionada com o tipo de tarefas que têm vindo a resolver?

5.3. Parâmetros, funções e geometria

Na análise que se segue é feita a descrição dos dados mais representativos conjuntamente com a classificação dos respetivos significados referentes à tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, que foi a sétima e última tarefa implementada.

5.3.1. A mediação semiótica

A mediação semiótica é analisada segundo: i) o questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos; e ii) o questionamento para sínteses e a realização de sínteses.

5.3.1.1. O questionamento para voltar atrás na tarefa e a focalização em aspetos particulares dos raciocínios dos alunos

A professora leu, para toda a turma e em voz alta, o enunciado geral que acompanha o esquema do cilindro e leu também o enunciado da questão 1.1 (ver extrato 5.27). Com este procedimento a professora quis assegurar que alguns aspetos relevantes do enunciado fossem explicitados, tal como a recomendação inicial (ver extrato 5.25).

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Extrato 5.25: Focalização do raciocínio dos alunos para aspetos particulares do enunciado comuns a todas as tarefas: Significados N3S1D1, N3S2D1, N3S3D1

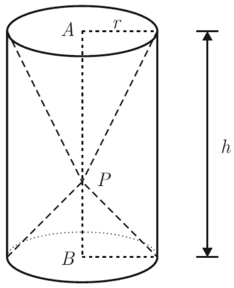
A professora quis assegurar-se, também, que os alunos compreendiam que o ponto P varia ao longo do eixo central do cilindro, dando origem a dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P e cujas bases coincidem com as bases do cilindro, tal como explicita o extrato 5.26.

> **Professora:** Temos de considerar que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento *[AB]*, nunca pode coincidir com o ponto *A*, nem com o ponto *B*. O que é que isto origina na figura?
>
> **Lúcia:** Vai originar sempre dois cones.

Professora: Exatamente. Cada posição do ponto *P* determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P. E em relação às bases de cada cone, o que podemos dizer?

Íris: As bases dos cones são as bases do cilindro

Extrato 5.26: Mediação semiótica da professora que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*



"Na figura está representado um cilindro de altura *h* e raio da base *r*. Sejam *A* e *B* os centros das bases do cilindro. Considera que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento *[AB]*, nunca coincidindo com o ponto *A*, nem com o ponto *B*. Cada posição do ponto *P* determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto *P* e cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Que relações matemáticas podemos estabelecer com as dimensões h, r e p ?"

"1.1. Mostra que a soma dos volumes dos dois cones não depende da posição do ponto *P*. **Sugestão:** Designa por *a* a altura de um dos cones.

1.2. Para que valores do raio do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor da altura *h*.

1.3. Para que valores da altura do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor do raio.

2. Supõe que queremos embalar o cilindro, de volume *v*, numa caixa paralelepipédica. Como determinamos as dimensões do cilindro para que a área total da caixa seja mínima?"

Extrato 5.27: Enunciado que promove raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos nos alunos e respetivas representações: Significado N3S1D1, N3S2D1, N3S3D1, da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria.*

A resolução da questão 1.1 da tarefa, na qual os alunos (neste caso as alunas do grupo 2) trabalham com as expressões algébricas dos volumes dos cones nas quais h representa, primeiro a altura de um cone, e, a seguir, a altura do cilindro, passando a altura de um dos cones a ser representada por a e a altura do outro cone por $h - a$, mostra que as alunas atribuíram distintos significados algébricos à mesma letra (neste caso h), (ver figura 5.60).

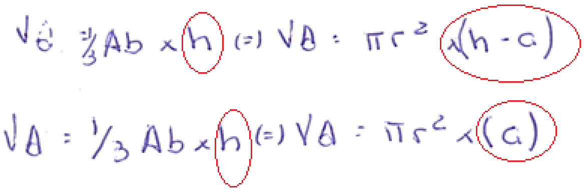


Figura 5.60: Raciocínio indutivo representado por signos índices: Significado N3S2D1 que decorrem da interpretação do enunciado da questão 1.1 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 2

Esta representação é um signo índice porque as alunas relacionaram a letra h com a letra a, quando atribuíram um novo significado à relação da altura do cilindro com a altura dos cones e constroem as expressões $h - a$ e a. Contudo, apesar do raciocínio abdutivo que antecedeu o indutivo da figura 5.61 estar implícito nas expressões que as alunas constroem, a professora, na fase de discussão, focalizou a atenção das alunas para que esse raciocínio implícito se tornasse explícito na resolução escrita da tarefa. É necessário representar o que designa cada uma das letras nas expressões e esta necessidade foi mediada através da discussão de significados de grau 2 que ocorreu com o grupo 2 na entrevista final do estudo, tal como mostra o extrato 5.26.

(…)

Professora: Vocês apresentam a seguinte resolução, mas o que significa cada uma das letras?

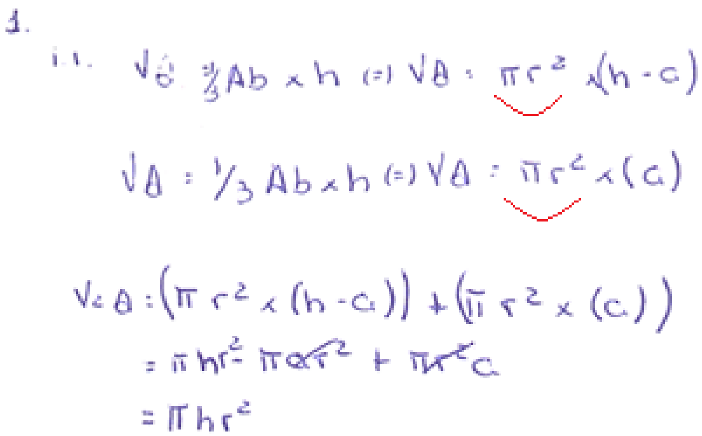


Figura 5.61: Significado de grau 2 da resolução da questão 1.1 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 2

Sílvia: Mas, já se sabe o que é cada letra, o h é a altura do cilindro e o a é a altura de um cone (é dito para fazermos isso na sugestão dada no enunciado).

Professora (apontando para a resolução das alunas)**:** Então, que h é este aqui? O que é que ele representa?

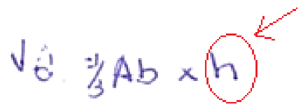


Figura 5.62: Discussão da resolução da questão 1.1 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 2

Sílvia: Esse é a altura do cone.

Professora: Então em que é que ficamos? Este h representa a altura do cilindro ou a do cone?

Sílvia: Primeiro representa a altura do cone, depois a do cilindro.

Professora: E isso está claro na vossa resolução?

Sílvia: Hum, se calhar não.

Íris: Não, temos que o clarificar.

Professora: Pois têm. Reparem numa coisa, nas tarefas que têm vindo a fazer até aqui, vocês, na primeira questão começavam por atribuir um valor concreto a algo, não era? Se não o fizessem seria possível resolver a tarefa?

Íris: Não. Se não o fizéssemos não conseguíamos resolver as questões.

Professora: E quem leia a vossa resolução fica com a certeza que vocês sabiam o que significa cada letra na vossa resolução?

Íris: Fica porque resolvemos bem, mas pode ter dúvidas e por isso temos que fazer como fazíamos nas outras tarefas. Dizer o que é que cada letra significa. Assim, não há dúvidas para ninguém. E para o ano no exame também temos que ter esta preocupação.

Professora: Sim têm. Sempre. No exame e fora do exame. O leitor não pode ter dúvidas sobre o que aconteceu em todas as fases do vosso raciocínio.

Sílvia e Íris: Mas aqui isso é fácil.

Íris: Basta pensarmos como se fossem números quando tivermos dúvidas e ver o que é que acontece quando variamos esses números e depois no fim pensamos com a letra.

(…)

Extrato 5.28: Mediação semiótica da professora na construção de signos índices durante um raciocínios indutivo, na resolução da questão 1.1 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria", do grupo 2*

Na resolução da questão 1.1, a resolução que se segue foi classificada como significado de grau 2 representado por signos índices que não foram estruturados num signo símbolo. Por um lado, as alunas cometeram um erro, significado de grau 0, na transformação da expressão do volume do cone, pois "esqueceram-se" do valor $\frac{1}{3}$. Este significado de grau 0 foi discutido com as alunas na entrevista e, à semelhança de outros significados de grau 0 ocorridos ao longo do estudo, justificam que este ocorreu devido à sua desconcentração pontual, não sendo tal significado indicador de desconhecimento ou dificuldade, mas de descontinuidade na concentração que originou o significado de grau 0. O significado de grau 0 em causa é apresentado da figura 5.63.

$$V_{\ddot{o}} \; \tfrac{1}{3}Ab \times h \; (=) \; V_B : \pi r^2 \times (h - a)$$

Figura 5.63: Significado de grau 0 da questão 1.1 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo2

No entanto a mediação intencionada pela professora não se prendeu a este significado de grau 0, mas sim com a resposta final dada pelas alunas. A intenção da questão era *'Mostra que a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto P'* e essa intenção não foi concretizada, no caso das alunas do grupo 2. Ou seja, esse raciocínio dedutivo não foi concluído pelas alunas, porque elas construíram a expressão que designa a soma dos volumes, transformaram algebricamente essa expressão, mas não estruturaram tais significados com uma conclusão que traduzisse e sintetizasse o significado *'a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto P'*. A seguinte discussão apresenta a mediação feita pela professora, não apenas à necessidade de tornar explícito na resolução o raciocínio abdutivo que deu origem à resolução que apresentam, mas também o significado síntese, final, que suporta, liga, estrutura e legitima toda a resolução, ou seja a conclusão.

> (…)
>
> **Professora:** O que é que se conclui do resultado $\pi h r^2$?
>
> **Sílvia:** Significa que não depende do ponto *P*, porque não precisamos de saber nada acerca do ponto *P*
>
> **Professora:** E isso é dito na vossa resolução?
>
> **Sílvia:** Pois, também não dizemos, temos de dizer.

Extrato 5.29: Focalização da professora para aspetos particulares dos raciocínios indutivos das alunas do grupo 2, relativos à questão 1.1 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria": Significado N3S2D1

Nesta mediação as alunas perceberam a importância de tornarem explícitos, nas representações que fazem (ou seja, nas resoluções que apresentam, nomeadamente as escritas), todos os significados que atribuem a cada letra das expressões algébricas quando afirmam *'temos que dizer na resolução o que é que cada letra significa'*. Ou seja, importa que, na representação de um raciocínio dedutivo fique explícito o raciocínio abdutivo que lhe deu origem, bem como os raciocínios indutivos necessários que suportam, ligam e estruturam tal dedução. Importa portanto que, na representação de um raciocínio dedutivo fiquem representados os signos ícones e os signos índices que definem e estruturam o signo símbolo resultante. Por outro lado, na entrevista final, também ficou evidente a aprendizagem que os alunos fizeram das etapas do próprio método, afirmações como *'… basta pensarmos como se fossem números e quando tivermos dúvidas temos de ver o que é que acontece quando variamos esses números e depois no fim pensamos com a letra'* mostram que as alunas aprenderam uma forma de raciocínio que é, em si, construtivo, desde o nível 1 até ao nível 3 e que lhes permite interpretar, definir estratégias de resolução e resolver problemas que envolvam o parâmetro generalizado e as variáveis numa função.

A representação que a seguir se apresenta, relativa à questão 1.2, que foi classificada de significado de grau 3, na qual as alunas do grupo 1 dão continuidade à expressão que construíram $r^2 < \frac{9}{\pi}$ para determinarem os valores do raio da base do cilindro que transforma o valor da soma dos volumes dos dois cones menor que o triplo do valor da altura do cilindro. Para tal construíram a função $y = x^2 - \frac{9}{\pi}$ e representaram-na graficamente, sem recurso à calculadora gráfica, e fazem referência aos valores que esse raio pode e não pode ter, como mostra a representação que se segue:

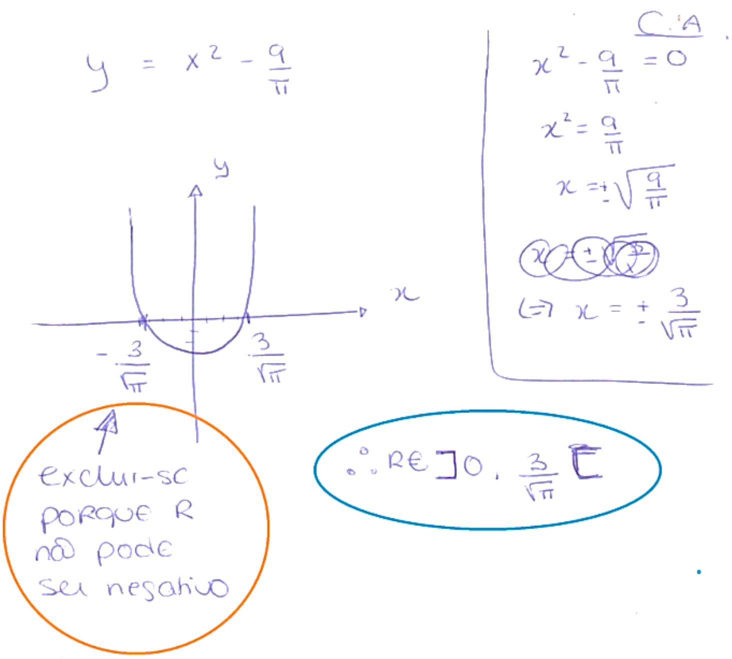


Figura 5.64: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolo: significado N3S3D1 resultante da interpretação do enunciado da questão 1.2 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1.

Esta situação evidencia uma clara compreensão do parâmetro em funções no final do estudo.

Síntese: A professora leu, para toda a turma e em voz alta, a recomendação, o enunciado geral que acompanha o esquema do cilindro e o enunciado da questão 1.1. Com este procedimento quis assegurar-se que alguns aspetos relevantes do enunciado eram explicitados. Quis assegurar-se, também, que os alunos compreendiam que o ponto P varia ao longo do eixo central do cilindro, dando origem a dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P e cujas bases coincidem com as bases do cilindro.

O enunciado desta tarefa foi intencionalmente construído apenas com questões do nível 3 do método de ensino. Pretendeu-se perceber o desempenho dos alunos, após a implementação do estudo, face a questões que integrem apenas o 3.º nível do método.

As representações construídas pelos alunos que decorrem da resolução da tarefa evidenciam destreza na construção e na transformação de significados que envolvem expressões apenas com letras para representar algo com que é necessário trabalhar matematicamente. Por exemplo, na resolução da questão 1.1, os alunos trabalham com as expressões algébricas dos volumes dos cones nas quais h representa, primeiro a altura de um cone, e, a seguir, a altura do cilindro, passando a altura de um dos cones a ser representada por a e a altura do outro cone por $h-a$. Isto significa que atribuíram distintos significados algébricos à mesma letra (neste caso h). Esta representação é um signo índice porque as alunas relacionaram a letra h com a letra a, quando atribuíram um novo significado à relação da altura do cilindro com a altura dos cones e constroem as expressões $h-a$ e a. Contudo, apesar do raciocínio abdutivo que antecedeu o indutivo estar implícito nas expressões que as alunas constroem, a professora, na fase de discussão, focalizou a atenção das alunas para que esse raciocínio implícito se tornasse explícito na resolução escrita da tarefa, frisando que, é necessário representar o que designa cada uma das letras nas expressões.

Nesta resolução, estas alunas cometeram um erro, significado de grau 0, aquando da transformação da expressão do volume do cone, pois esqueceram-se do valor $\frac{1}{3}$. Este significado de grau 0 foi discutido na entrevista, na qual justificam ter ocorrido devido à sua desconcentração pontual, não foi indicador de desconhecimento ou dificuldade, mas de desconcentração. A mediação da professora não se prendeu com o significado de grau 0, mas sim com a resposta final dada pelas alunas. A intenção da questão era *'Mostra que a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto P'* e, no caso das alunas do grupo 2, essa intenção não foi concretizada. O raciocínio dedutivo não foi concluído pelas alunas, porque elas construíram a expressão que designa a soma dos volumes, transformaram algebricamente essa expressão, mas não estruturaram tais significados com uma conclusão que traduzisse e sintetizasse o significado *'a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto P'*. Na mediação da professora as alunas perceberam a importância de tornarem explícitos, nas representações que fazem (ou seja, nas resoluções que apresentam, nomeadamente as escritas), todos os significados que atribuem a cada letra das expressões algébricas quando afirmam '*temos que dizer na resolução o que é que cada letra significa*'. Ou seja, importa que, na representação de um raciocínio dedutivo fique explícito o raciocínio abdutivo que lhe deu origem, bem como os raciocínios indutivos necessários que suportam, ligam e estruturam tal dedução. Importa portanto que, na representação de um raciocínio dedutivo fiquem representados os signos ícones e os signos índices que definem e estruturam o signo símbolo resultante. Por outro lado, na entrevista final, também ficou evidente a aprendizagem que os alunos fizeram das etapas do próprio método, afirmações como '*… basta pensarmos como se fossem números e quando tivermos dúvidas temos de ver o que é que acontece quando variamos esses números e depois no fim pensamos com a letra*' mostram que as alunas aprenderam uma forma de raciocínio que é, em si, construtivo, desde o nível 1 até ao nível 3 e que lhes permite interpretar, definir estratégias de resolução e resolver problemas que envolvam o parâmetro generalizado e as variáveis numa função.

Contudo, alguns aspetos particulares do raciocínio dos alunos e que evidenciam uma clara compreensão do parâmetro em funções no final do estudo são postos em evidência pelos próprios alunos nas representações que eles constroem durante a resolução da última tarefa. Por exemplo, na questão 1.2, as alunas do grupo 1 dão continuidade à expressão que construíram $r^2 < \frac{9}{\pi}$ para determinarem os valores do raio da base do cilindro que transforma o valor da soma dos volumes dos dois cones menor que o triplo do valor da altura do cilindro. Para tal, construíram a função $y = x^2 - \frac{9}{\pi}$ e representaram-na graficamente, sem recurso à calculadora gráfica, e fazem referência aos valores que esse raio pode e não pode ter.

A intervenção da professora ao longo da resolução da tarefa foi feita, no decurso da entrevista, para aspetos particulares dos significados construídos pelos alunos para que promovam a representação de raciocínios, nomeadamente a representação de raciocínios dedutivos, bem como dos raciocínios iniciais e intermédios, os abdutivos e os indutivos, que fundamentam a estratégia usada na resolução e estruturam os significados construídos.

5.3.1.2. O questionamento para sínteses e a realização de sínteses

As alunas do grupo 1 mostram como na primeira questão da tarefa a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto *P*, apresentando uma síntese algébrica dos seus raciocínios, face a uma questão que, embora não sendo a última da tarefa, é uma questão do nível 3. Esta representação do grupo 1 foi classificada com um signo símbolo porque as alunas designam cada uma das letras, constroem as expressões e chegam a uma conclusão estruturada. De facto, a intenção da questão era *'Mostra que a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto P'* e essa intenção foi concretizada. Ou seja, o raciocínio dedutivo que foi intencionado no enunciado, foi conseguido por estas alunas, porque elas construíram a expressão que designa a soma dos volumes, transformaram algebricamente essa expressão e estruturaram tais significados com uma conclusão que traduz e sintetiza o significado *'a soma dos volumes dos dois cones é constante'*, como a seguir se apresenta na figura 5.65:

cone 1

altura = h - a

$V_\Delta = \frac{1}{3}\pi R^2 \times (h-a)$

cone 2

altura = a

$V_\Delta = \frac{1}{3}\pi R^2 \times a$

$$V\,\text{total} = \frac{1}{3}\pi R^2 (h-a) + \frac{1}{3}\pi R^2 \times a$$

$$V\,\text{total} = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \cancel{\frac{1}{3}\pi R^2 a} + \cancel{\frac{1}{3}\pi R^2 \times a}$$

1.1): Como h é sempre constante, o V total da soma dos dois cones não depende do ponto P.

Figura 5.65: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: *significado N3S3D1 resultante da resolução da questão 1.1 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 1*

De forma equivalente à questão 1.1, as alunas do grupo 2 mostram, na segunda questão da tarefa (ver figura 5.66), como definem os valores do raio do cilindro para os quais a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor da altura *h*. Apesar de, por lapso, as alunas não considerarem a terça parte de $\pi r^2 h$, constroem um raciocínio estruturado que comunicam por escrito através de uma representação que classificamos também por significado de grau 3, pelos mesmos motivos que classificamos por significado de grau 3 a resolução da figura 5.65.

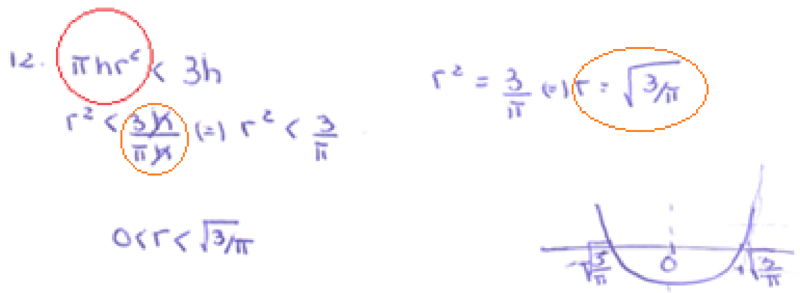


Figura 5.66: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: *significado N3S3D1 resultante da resolução da questão 1.2 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 2*

E analogamente para as questões 1.3 da tarefa, tal como mostra a figura 5.67:

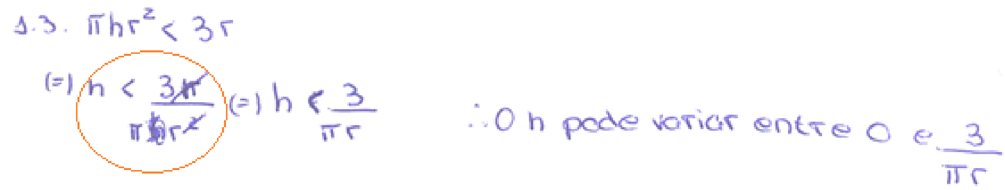


Figura 5.67: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: *significado N3S3D1, resultante da resolução da questão 1.3 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 2*

Contudo, a resolução apresentada pelas alunas do grupo 2 à questão 1.3 apresenta uma característica que se prende com a formalização dos resultados em matemática num registo de representação em linguagem natural *versus* registo de representação em linguagem algébrica. Apesar da representação da figura 5.67 ter sido classificada como um significado de grau 3, foi necessário mediar, durante a entrevista, a importância e a adequação da escolha dos registos de representação para cada tipo de resposta, de modo a que a escolha do registo para responder à questão resulte apropriada ao tipo de resolução. De facto, a resposta dada pelas alunas '*o* h *pode variar entre* 0 *e* $\frac{3}{\pi r}$ ' não explicita devidamente o que acontece quando $h = 0$ ou quando $h = \frac{3}{\pi r}$. No entanto, como na transformação algébrica é usado o símbolo $<$, fica claro que $h \neq \frac{3}{\pi r}$, o mesmo não se pode dizer para o valor 0. Uma outra situação mediada pela professora foi a simplificação da fração $\frac{3r}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r}$ que implica a explicitação de $r > 0$. E tal foi omitido pelas alunas. A imprecisão $r^2 = \frac{3}{\pi} <=> r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$ foi também mediada pela professora e a representação foi rapidamente corrigida pelas alunas para $r^2 = \frac{3}{\pi} <=> r = \pm\sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Estas imprecisões/omissões foram considerados significados de grau 0 (S0) que não condicionaram a resolução da tarefa.

(...)

Professora: Vocês escreveram '*o h pode variar entre 0 e $\frac{3}{\pi r}$* '. Comentem esta afirmação por favor.

Íris: Então, o h tem de ser maior que 0 e menor que $\frac{3}{\pi r}$.

Professora: Muito bem. Mas na resposta que vocês dão não fica claro para quem lê o que acabaste de dizer, ou fica?

Íris: Deveríamos ter posto na resposta, excluindo 0 e excluindo $\frac{3}{\pi r}$.

Professora: Ou escrito a resposta de outra forma, ou não?

Sílvia: Pois, é bem mais fácil responder com um intervalo aberto.

Íris: Pois é, e é mais curta a resposta $h \in \left]0, \frac{3}{\pi r}\right[$.

Professora: Pois, assim não há dúvidas.

Sílvia: É que, quando estamos explicar oralmente é uma coisa, por escrito é outra. É melhor usar símbolos quando se tratam de resoluções só com expressões simbólicas, acho eu.

Professora: Pois é. Por dois motivos, conseguimos mais precisão e é uma resposta mais coerente com o registo de representação usado. Isto é, quando usamos só símbolos na resolução é mais coerente usarmo-los, sempre que possível, na resposta.

(...)

Professora: Outra coisa. Como garantem que $\frac{3r}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r}$?

Sílvia: Estamos à vontade porque r representa o valor do raio, por isso é positivo.

Professora: Mas, temos de ser precisos na escrita. Nessa equivalência vocês deveriam ter explicitado que $r > 0$.

(...)

Professora: E na resolução da equação $r^2 = \frac{3}{\pi}$ não vos falta nada na raiz?

Íris: Sim, o $\pm$. Foi distração, porque nós sabíamos bem que tinha de ser $\pm$, por sabermos é que fizemos o esquema da parábola e concluímos o intervalo.

Professora: Mas é necessário haver o máximo de rigor possível nas respostas, seja em linguagem algébrica, seja por palavras, doutra forma.

Extrato 5.30: Focalização para aspetos particulares dos signos símbolos das alunas do grupo 2, relativos à questão 1.3 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria": Significado N2S3D1

Síntese: Na primeira questão da tarefa, um dos grupos mostra como a soma dos volumes dos dois cones não depende do ponto *P*, apresentando uma síntese algébrica dos seus raciocínios, sob raciocínio dedutivo e através de um signo símbolo.

Na segunda questão da tarefa os grupos de alunas mostram como definem os valores do raio do cilindro para os quais a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor da altura *h*. Apesar de, por lapso (S0), as alunas não considerarem a terça parte de $\pi r^2 h$, constroem um raciocínio estruturado (significado de grau 3).

A resolução da questão 1.3 apresenta uma característica que se prende com a formalização dos resultados em matemática num registo de representação em linguagem natural *versus* registo de representação em linguagem algébrica. Apesar da representação da figura 5.67 ter sido classificada como um significado de grau 3, foi necessário mediar, durante a entrevista, a importância e a adequação da escolha dos registos de representação para cada tipo de resposta, de modo a que a escolha do registo para responder à questão resulte apropriada ao tipo de resolução. De facto, a resposta dada pelas alunas '*o* h *pode variar entre* 0 *e* $\frac{3}{\pi r}$ ' não explicita devidamente o que acontece quando $h = 0$ ou quando $h = \frac{3}{\pi r}$. No entanto, como na transformação algébrica é usado o símbolo $<$, fica claro que $h \neq \frac{3}{\pi r}$, o mesmo não se pode dizer para o valor 0. Esta situação foi mediada pela professora, assim também como outras imprecisões associadas à simplificação de uma fração e à resolução de uma equação de 2.º grau.

No decurso da resolução da tarefa, o questionamento para a elaboração de sínteses foi feito através das questões do enunciado e durante a mediação da professora, na entrevista, quando as alunas fizeram referência aos raciocínios que tinham construído quer na tarefa, nomeadamente na fase final de cada questão em que a professora pediu às alunas para apresentarem a resposta, fazendo uma síntese dos principais raciocínios que haviam feito até ao momento e usando um registo de representação apropriado à representação usada.

5.3.2. A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções

A representação, transformação e conversão de significados dos alunos durante a aprendizagem dos parâmetros em funções é analisada segundo: i) a interpretação do enunciado; ii) o parâmetro e as variáveis dependente e independente; iii) o parâmetro e a incógnita; iv) o parâmetro na transformação de representações; e v) o parâmetro na conversão entre registos de representação.

5.3.2.1. A interpretação do enunciado

Em relação à interpretação do enunciado na tarefa, os alunos recorrem a esquemas para iniciar uma estratégia de resolução. Tais esquemas funcionaram primeiramente como signos ícones de um raciocínio inicial, que, por isso, classificamos de significados de grau 1 (S1) do terceiro nível do método (N3), dado que esta tarefa contém apenas questões com as variáveis e com o parâmetro genérico. Foi com estes significados que os alunos começaram a construir uma estratégia para resolverem as questões das alíneas, apesar de serem questões genéricas. Disto é exemplo a representação que se segue, na qual as alunas do grupo 1 mostram como iniciam o seu raciocínio para construírem a expressão que lhes permitiu embalar o cilindro, de volume *v*, numa caixa paralelepipédica (ver figura 5.68).

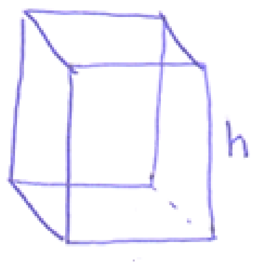


Figura 5.68: Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: *significado N3S1D2, da questão 2 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 1*

Numa segunda fase, os alunos relacionam as representações que já construíram com novos significados. Disto é exemplo a representação que se segue, na qual as alunas do grupo 1 relacionam as dimensões da base da caixa paralelepipédica com o raio da base do cilindro (ver figura 5.69). Classificamos estes novos significados como significados de grau 2, que têm início nos de grau 1 construídos e permitem estender o raciocínio a significados seguintes.

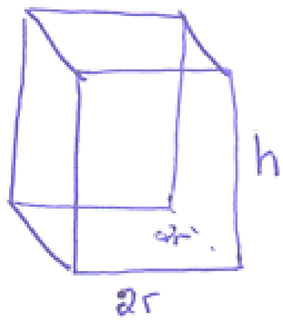


Figura 5.69: Raciocínio indutivo representado por signos índices: *significado N3S2D2, da questão 2 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 1*

Posteriormente, os alunos continuam a relacionar as representações que já construíram com novos significados. Disto é exemplo a representação que se segue, ver figura 5.70, na qual as alunas do grupo 1 relacionam as dimensões da base e da altura da caixa paralelepipédica e convertem a representação em esquema numa expressão algébrica que representa a área total da caixa. Classificamos estes novos significados como significados de grau 2, pois eles continuam a permitir construir e interligar o raciocínio a significados seguintes e que na fase final da resolução da questão permitem construir significados de grau 3. Tais significados são representados por signos índices, ou seja, o esquema da caixa como em baixo se apresenta é um signo índice, a expressão construída é um signo índice, a transformação dessa expressão é um signo índice e a representação da figura também é um significado de grau 2.

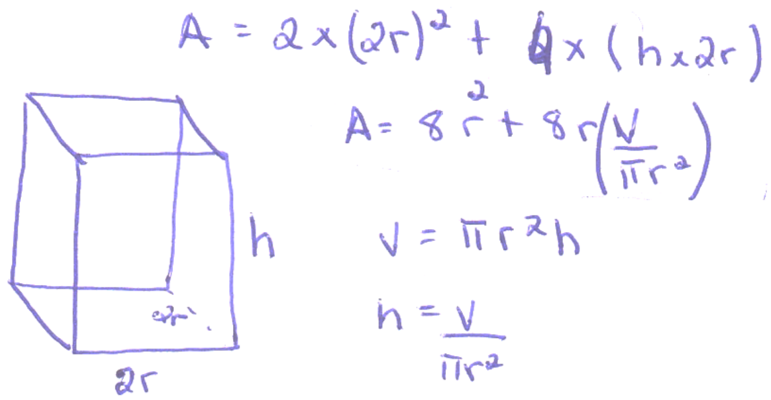


Figura 5.70: Raciocínio indutivo representado por signos índices: *significado N3S2D2, da questão 2 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 1*

Síntese: Em relação à interpretação do enunciado na tarefa, os alunos recorrem a esquemas para iniciar uma estratégia de resolução. Tais esquemas funcionaram primeiramente como signos ícones de um raciocínio inicial, que, por isso, classificamos de significados de grau 1.

Numa segunda fase, os alunos relacionam as representações que já construíram com novos significados. Classificamos estes novos significados como significados de grau 2, que têm início nos de grau 1 construídos e permitem estender o raciocínio a significados seguintes.

Os alunos por um lado exploraram o esquema do enunciado, mas por outro lado também construíram esquemas que os ajudaram a raciocinar num contexto algébrico com todos os valores genéricos.

5.3.2.2. O parâmetro e a variável dependente e independente

No que refere ao parâmetro e à variável dependente e independente, os alunos mostraram compreender o conceito de variável, não apenas pelo uso que fizeram das letras nas expressões que construíram e transformaram, mas pela interpretação que fizeram de tais expressões. Disto é exemplo a resolução da figura 5.71, relativa à questão 1.3 do grupo 2, na qual as alunas respondem *'O h pode variar entre …'*.

∴ O h pode variar entre 0 e $\frac{3}{\pi r}$

Figura 5.71: Significado de grau 2, N3S2D2, da questão 1.2 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 2

Naquele contexto algébrico, o h foi obtido da seguinte inequação que as próprias alunas construíram e resolveram, com a posterior mediação da professora relativamente à equivalência da desigualdade que implica uma referência a $r > 0$ e que as alunas não explicitaram.

1.3. $\pi h r^2 < 3r$

$\Leftrightarrow h < \frac{3\cancel{r}}{\pi r^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow h < \frac{3}{\pi r}$

Figura 5.72: Significado de grau 2, N3S2D2, da questão 1.3 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 2

Também o grupo 1 mostra ter compreendido o conceito de variável em representações como as que fizeram e onde justificam *'como h é sempre constante, o volume total da soma dos dois cones não depende do ponto P'*.

Como h é sempre constante, o
V total da soma dos dois cones
não depende do ponto P.

Figura 5.73: Excerto da resposta das alunas do grupo 1, à questão 1.1 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria"

Contudo, este significado do grupo 1 foi discutido com o auxílio do esquema do enunciado durante a entrevista, onde a professora teve a intenção de que as alunas sintetizassem o raciocínio que fizeram na afirmação da figura 5.73, e confrontassem a resolução que fizeram num registo de representação em linguagem algébrica (figura 5.74) com o registo de representação em linguagem natural que apresentam no final como resposta, por forma a corrigirem o seguinte significado de grau 0 que ocorreu nessa resposta.

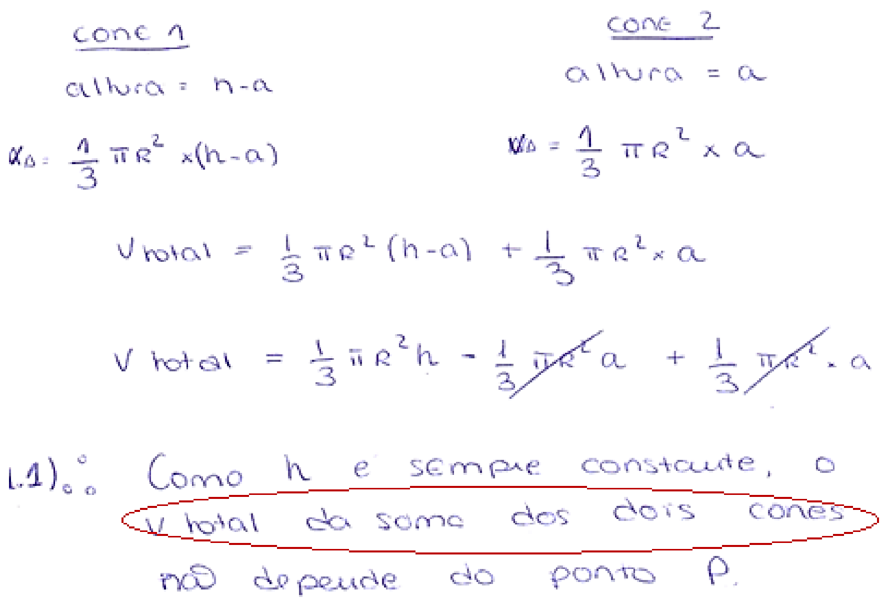


Figura 5.74: *Significado N3S0D2, da questão 1.1 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria", do grupo 1*

No decurso da entrevista, e ao serem confrontadas pela professora com o significado de grau 0 (assinalado na figura 5.74), as alunas corrigem o significado e argumentam que o ponto P se move, e ao mover-se, vai fazer com que *"a altura de um dos cones aumente e a do outro diminua, de forma direta"*, ou seja, *"o valor que a altura de um dos cones diminui é o valor que a altura do outro aumenta"*, porque *"as bases são sempre iguais e as alturas de cada um dos dois cones variam com o ponto P, mas a soma dessas alturas é sempre igual"*.

Síntese: No que refere ao parâmetro e à variável dependente e independente, os alunos mostraram compreender o conceito de variável, não apenas pelo uso que fizeram das letras nas expressões que construíram e transformaram, mas pela interpretação que fizeram de tais expressões, como por mostram afirmações como *'o h pode variar entre …'* e *'como h é sempre constante, o volume total da soma dos dois cones não depende do ponto P'*.

Estes significados foram discutidos com o auxílio do esquema do enunciado durante a entrevista, onde a professora teve a intenção de que as alunas sintetizassem o seu raciocínio e confrontassem a resolução que fizeram num registo de representação em linguagem algébrica com o registo de representação em linguagem natural que apresentam no final como resposta, por forma a corrigirem o significado de grau 0 *"a altura de um dos cones aumente e a do outro diminua, de forma direta"*, corrigido para, "*o valor que a altura de um dos cones diminui é o valor que a altura do outro aumenta*", porque "*as bases são sempre iguais e as alturas de cada um dos dois cones variam com o ponto P, mas a soma dessas alturas é sempre igual*".

No que refere ao parâmetro e à variável dependente e independente, os alunos mostraram compreender o conceito de variável e de constante em contextos algébricos em que trabalham com expressões que contém apenas letras e que a cada letra é requerida a construção de um significado.

5.3.2.3. O parâmetro e a incógnita

Os alunos usam a letra enquanto incógnita no decurso da resolução da tarefa. Exemplo disso é a transformação algébrica que se segue, em que as alunas resolvem a equação literal construída em ordem a h, ou seja, em ordem à altura do cilindro:

$$V_{cilindro} = V$$
$$V = ab \times h$$
$$\Leftrightarrow \boxed{V = \pi R^2 \times h}$$
$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

Figura 5.75: Extrato da resolução da questão 1.2 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Um outro exemplo do uso da letra enquanto incógnita é o que a seguir apresentamos, relativo à resolução das inequações construídas pelas alunas na questão 1.3 como a seguir se apresenta na figura 5.76 e que foi mediada pela professora relativamente à equivalência da desigualdade que implica uma referência a $r > 0$ e que as alunas não explicitaram :

1.3)
$$\frac{1}{3}\pi R^2 h < 3R$$
$$\Leftrightarrow h < \frac{3R}{\frac{1}{3}\pi R^2}$$
$$\Leftrightarrow h < \frac{3R \times 3}{\pi R^2} \Leftrightarrow h < \frac{9R}{\pi R^2}$$
$$\Leftrightarrow h < \frac{9}{\pi R} \quad \therefore h \in \left]0, \frac{9}{\pi R}\right[$$

Figura 5.76: Resolução da questão 1.3 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Síntese: A exploração que os alunos fazem ao longo da resolução da tarefa promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, quer numa equação literal, quer numa inequação literal.

5.3.2.4. O parâmetro na transformação de representações

No que refere ao parâmetro na transformação de representações, apresentamos exemplos que mostram a simplificação algébrica de expressões que ocorreram no decurso da resolução da questão 1.1 da tarefa, como o apresentado na figura 5.77.

$$V\,\text{total} = \frac{1}{3}\pi R^2 (h-a) + \frac{1}{3}\pi R^2 \times a$$

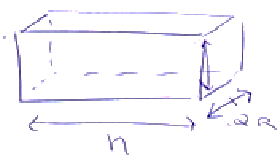
$$V\,\text{total} = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \cancel{\frac{1}{3}\pi R^2}\, a + \cancel{\frac{1}{3}\pi R^2} \times a$$

Figura 5.77: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos na transformação de representações algébricas: significado N3S3D2, na resolução da questão 1.1 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Um outro exemplo da transformação de representações, envolvendo o parâmetro, é o que a seguir apresentamos, na resolução da questão 2, as alunas constroem uma caixa paralelepipédica, constroem a expressão da função que define a área total da caixa, em função da altura (h) e do diâmetro da base ($2r$) que sirva para embalar o cilindro, tal como mostra a figura 5.78.

2 $V_{p.} = ab \times h$

a base do paralelipipedo tem que ser $2R$. e é um quadrado



$ab = (2R)^2 = 4R^2$

h paralelipipedo $= h$

$V_{p.} = 4R^2 \times h$

$A_p = 2(4R^2) + 4(2Rh)$

$\boxed{A_p = 8R^2 + 8Rh}$

Figura 5.78: Raciocínio indutivo representado por signos índices na construção de uma expressão algébrica: significado N3S2D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Na sequência da construção da expressão algébrica da função que define a área total da caixa paralelepipédica em função das dimensões do cilindro (raio da base e altura do cilindro), o grupo 1, procede com novos significados, associados à determinação do valor do mínimo dessa função que construiu. Assim, as alunas explicam 'como determinar as dimensões do cilindro para que a área total da caixa seja mínima'. Nesta fase da resolução, tal significado das alunas foi classificado de grau 3, porque, através de uma sequência concertada e estruturada de significados que antecederam a este (ver figura 5.78), respondem ao que era intencionado na questão 2 da tarefa, tal como mostra a resolução da figura 5.79.

os minimos da função podem-se calcular analiticamente onde a derivada e' zero.

$$Ap = 8R^2 + 8R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right)$$

$$\left(8 \cdot R^2 + 8R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right)\right)' = 0$$

Figura 5.79: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolo na construção de uma expressão algébrica: significado N3S3D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Um outro exemplo de tratamento algébrico e de conversão do enunciado em linguagem natural para a linguagem algébrica na tarefa, realizada em resposta à questão 1.3 da tarefa, na qual é pedido aos alunos que determinem os valores da altura h do cilindro, para os quais a soma do valor dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor do raio da base, é o seguinte, e já referido anteriormente:

1.3) $\frac{1}{3}\pi R^2 h < 3R$

$\Leftrightarrow h < \frac{3R}{\frac{1}{3}\pi R^2}$

$\Leftrightarrow h < \frac{3R \times 3}{\pi R^2} \Leftrightarrow h < \frac{9R}{\pi R^2}$

$\Leftrightarrow h < \frac{9}{\pi R}$ $\quad \therefore h \in \left]0, \frac{9}{\pi R}\right[$

Figura 5.80: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: significado N3S3D2, da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Frise-se que, esta resolução foi mediada pela professora, relativamente à equivalência da desigualdade e da referência a $r > 0$.

Síntese: No que refere ao parâmetro na transformação de representações, os alunos simplificaram expressões algébricas que resultaram da resolução das questões da tarefa. Na resolução da última questão, as alunas constroem uma caixa paralelepipédica, constroem a expressão da função que define a área total da caixa, em função da altura (h) e do diâmetro da base ($2r$) que sirva para embalar o cilindro. À sequência dessa construção procedem com novos significados, associados à determinação do valor do mínimo dessa função que construíram. Assim, as alunas explicam '*como determinar as dimensões do cilindro para que a área total da caixa seja mínima*'. Nesta fase da resolução, tal significado das alunas foi classificado de grau 3, porque, através de uma sequência concertada e estruturada de significados que antecederam a este, respondem ao que era intencionado na questão 2 da tarefa.

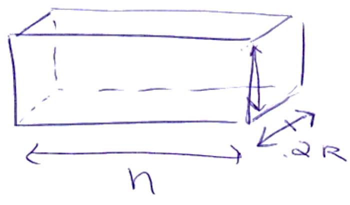
Apesar da tarefa "Parâmetros, funções e geometria" ter apenas questões que se referem ao nível 3 do método de ensino, a forma como as questões são apresentadas na tarefa leva à construção de significados de transformação de representações.

5.3.2.5. O parâmetro na conversão entre registos de representação

Mesmo sem recurso à calculadora, os alunos usaram vários registos de representação nas suas resoluções, mesmo em contextos genéricos, como é o caso das resoluções das questões da tarefa, em que as alunas estudam a variação da função quadrática obtida através e um gráfico e constroem-na manualmente e usando o parâmetro genérico:

(2) $V_{p.} = ab \times h$

a base do paralelipipedo tem que ser 2R. e é um quadrado



$ab = (2R)^2 = 4R^2$

h paralelipipedo $= h$

$V_{p.} = 4R^2 \times h$

$A_p = 2(4R^2) + 4(2Rh)$

$\boxed{A_p = 8R^2 + 8Rh}$

$V_{cilindro} = V$

$\Leftrightarrow V = ab \times h$

$\Leftrightarrow \boxed{V = \pi R^2 \times h}$

$h = \dfrac{V}{\pi R^2}$

os minimos de uma função podem-se calcular analiticamente onde a derivada é zero.

Figura 5.81: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: Significado N3S3D2, da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Constitui também um exemplo de conversão de significados entre registos de representação a conversão do significado de linguagem natural para a linguagem algébrica que as alunas do grupo 1 apresentam na última questão do estudo.

os minimos da funçã podem-se calcular analiticamente onde a derivada e´ zero.

$$A_P = 8R^2 + 8R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right)$$

$$\left(8R^2 + 8R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right)\right)' = 0$$

Figura 5.82: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolo na conversão entre registos de representação: significado N3S3D2, na resolução da questão 2 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*, do grupo 1

Síntese: Os alunos usaram vários registos de representação em contextos genéricos, sem recorrerem à calculadora, como é o caso do estudo da variação da função quadrática, construída a partir do parâmetro genérico e da conversão dos significados de linguagem natural para a linguagem algébrica e vice-versa.

No enunciado da tarefa, a seguinte informação " … *começa por explorar a situação usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-a por meio de linguagem natural* …" promoveu a construção de signos e a sua conversão entre registos de representação semiótica.

No final do estudo regista-se maior construção de significados de grau 3 em contextos de transformação e conversão de representações no 3.º nível, comparativamente ao registado no início do estudo (Tarefa *A Vedação do Jardim*). Tudo indica que a experiência matemática dos alunos com tarefas construídas segundo o método de ensino enriqueceu o significado que eles atribuem a um parâmetro numa função.

6. A mediação pelo método e pelas tarefas

Neste capítulo apresenta-se a análise de terceira ordem referente às sete unidades de análise selecionadas e analisadas: *A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*.

A análise de terceira ordem será feita sob: i) o método; e ii) as tarefas.

6.1. O método

O método deste estudo integra três níveis de ensino e quatro graus de significado que funcionaram como contextos de ensino para a atuação didática da professora e como contextos algébricos para a aprendizagem dos alunos. A sua análise vai ser realizada segundo os níveis e os significados.

6.1.1. Os níveis de ensino

O 1.º nível do método foi definido por contextos matemáticos que requereram dos alunos a construção de significados entre as correspondências das variáveis (dependente e independente), fixando ou concretizando numericamente o(s) parâmetro(s) e as variáveis (ver como exemplo a figura 6.1).

Cada um dos seguintes gráficos representa uma família de funções que se obtém da função $h(x) = a + \dfrac{b}{x+d}$ através variação de um dos parâmetros a, b, d num intervalo de números reais e da substituição dos restantes por valores reais concretos. Associa a cada gráfico uma expressão algébrica. Explica de forma detalhada e explícita todos os teus raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas usando a tecnologia gráfica de que dispões.

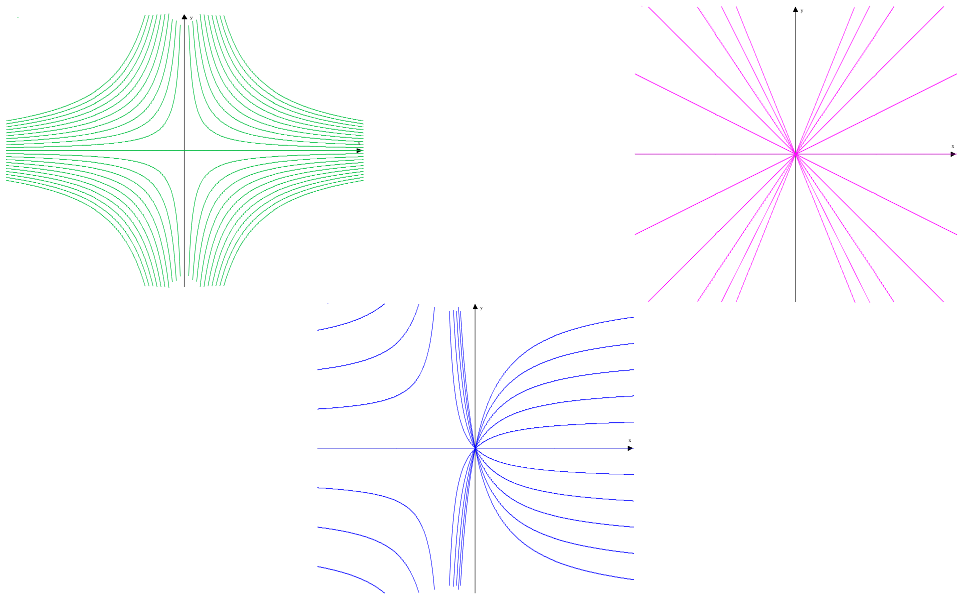


Figura 6.1: Enunciado que pretende promover a construção de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos: Significado N1S1D1,N2S1D1, N3S1D1, N1S2D1,N2S2D1, N3S2D1, N1S3D1,N2S3D1, N3S3D1, da tarefa *"Parâmetros em funções racionais (parte 3)"*

Nele, a professora apelou, em todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], à experimentação, incentivando os alunos ao livre uso de esquemas, tabelas e linguagem natural e à relação entre tais representações. Nesta fase, a mediação semiótica feita pela professora aos significados matemáticos dos alunos foi determinante para que estes explorassem os enunciados propostos, e concretizassem os esquemas que os acompanhavam e que não continham, à partida, valores concretos.

Após esta mediação, os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução. Esta mediação foi mais recorrente e intensa no início do estudo, nomeadamente na primeira tarefa da proposta pedagógica (*A vedação do jardim*).

Com o decurso do estudo, os alunos evidenciaram mais autonomia no que refere à exploração do enunciado das tarefas e já não questionaram a professora acerca do esquema sem valores no enunciado, porque esse facto já não constituiu novidade, como se verificou a partir da segunda tarefa proposta [*O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*]. Apesar desse crescendo de autonomia, a professora no início da resolução de cada tarefa da proposta pedagógica focalizou, e em todas elas, a atenção dos alunos para os aspetos que considerou mais importantes. Entre os quais, a recomendação inicial que consta do enunciado de todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*] e que apelava à experimentação e à respetiva justificação, fazendo uso de quaisquer tipos de representação que os alunos considerassem pertinentes para justificar os seus raciocínios.

A mediação da professora no início da atividade matemática dos alunos (no 1.º nível) foi fundamental para a construção de raciocínios abdutivos. O que permitiu aos alunos iniciar a resolução das tarefas propostas. Ao longo da resolução de todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], as intervenções da professora, tais como: *"olhem para o esquema e tentem perceber o que acontece com valores concretos"*, *"explorem o esquema do enunciado e façam essa exploração como quiserem mas considerem-no como um início e um fim para a vossa resolução"*, promoveram a construção de raciocínios abdutivos pelos alunos.

No 1.º nível do método registou-se uma grande interação de significados, entre os alunos e a professora, em consequência do enunciado da tarefa e estímulo da professora para a experimentação de vários valores concretos para o parâmetro. Nos grupos de alunos em que tal experimentação ocorreu com mais intensidade, registou-se alguma atividade matemática com o parâmetro generalizado no 1.º nível, apesar deste método prever a atividade matemática com o parâmetro generalizado apenas no 3.º nível. Embora a ordem das questões das tarefas promova a atividade matemática desde o 1.º nível até ao 3.º nível, por que as tarefas foram concebidas segundo o método, a mediação da professora foi muito importante para que os alunos atribuíssem significados entre cada um dos níveis. Foi esta mediação que promoveu a atribuição de significados no 1.º nível para distintas concretizações do parâmetro que permitiu aos alunos alguma significação com o parâmetro genérico logo no primeiro nível. Como por exemplo, no 1.º nível da tarefa *"A vedação do jardim"*, foi construída a função de proporcionalidade inversa, aquando da construção das expressões que permitem representar algebricamente o comprimento em função da largura e a largura em função do comprimento, num jardim retangular de área concreta. Houve significados dos alunos, representados oralmente, tais como *"…se o jardim tiver uma área qualquer, o comprimento é sempre obtido através desse valor a dividir pela largura"*. Porém, tais significados não foram convertidos em linguagem algébrica no 1.º nível, nem tão pouco foi estudada a função de proporcionalidade inversa com o parâmetro genérico no 1.º nível, embora tais significados tenham sido recuperados pelas alunas que os construíram nos níveis seguintes. O que ocorreu na implementação do método de ensino foi que, de facto, no 1.º nível são os alunos quem define o(s) valor(es) concreto(s) a experimentar. No 1.º nível, o estímulo à experimentação de diferentes valores concretos foi feito pela professora pois o enunciado das tarefas não pede aos alunos diversidade de concretizações na primeira questão. Contudo, após alguns raciocínios construtivos efetuados no 1.º nível, os alunos facilmente iniciam a generalização do valor do parâmetro e continuam-na nos níveis seguintes (no 2.º e no 3.º nível).

No 2.º nível, os alunos construíram significados sobre a variação das variáveis e do(s) parâmetro(s) envolvidos na(s) função(ões), para valores fixos ou numéricos do(s) parâmetro(s) e valores não concretizados das variáveis dependente e independente. Construíram, passo a passo, e numa segunda fase, transformações e conversões algébricas que exploraram, em todas as tarefas da proposta pedagógica. Tal aconteceu, quer analiticamente, quer graficamente, quer em linguagem natural, construindo esquemas e retomando o esquema sem valores concretos proposto no início das tarefas. No 2.ºnível do método foi onde se registou maior atividade matemática dos alunos no que refere à transformação e conversão de significados. Uma explicitação dessa intensa atividade matemática dos alunos registada no 2.º nível, pode ser vista na figura 6.2, relativa à resolução da questão 2 da tarefa *"O passeio das amigas"*. Nesta resolução, as alunas (neste caso as do grupo 2) atribuem significados e representam-nos em linguagem natural, em linguagem algébrica e em linguagem gráfica. Tudo na resposta à mesma questão. Esta resolução constitui, em si, um signo símbolo, por responder à intencionalidade da questão do enunciado de forma estruturada. Nela, as alunas constroem o gráfico da situação, convertem as funções lineares que traduzem o percurso das duas amigas de um registo gráfico para um registo algébrico, constroem e resolvem o sistema de equações lineares. Por último, transformam significados após a resolução desse sistema ao concluírem a distância pedida no enunciado.

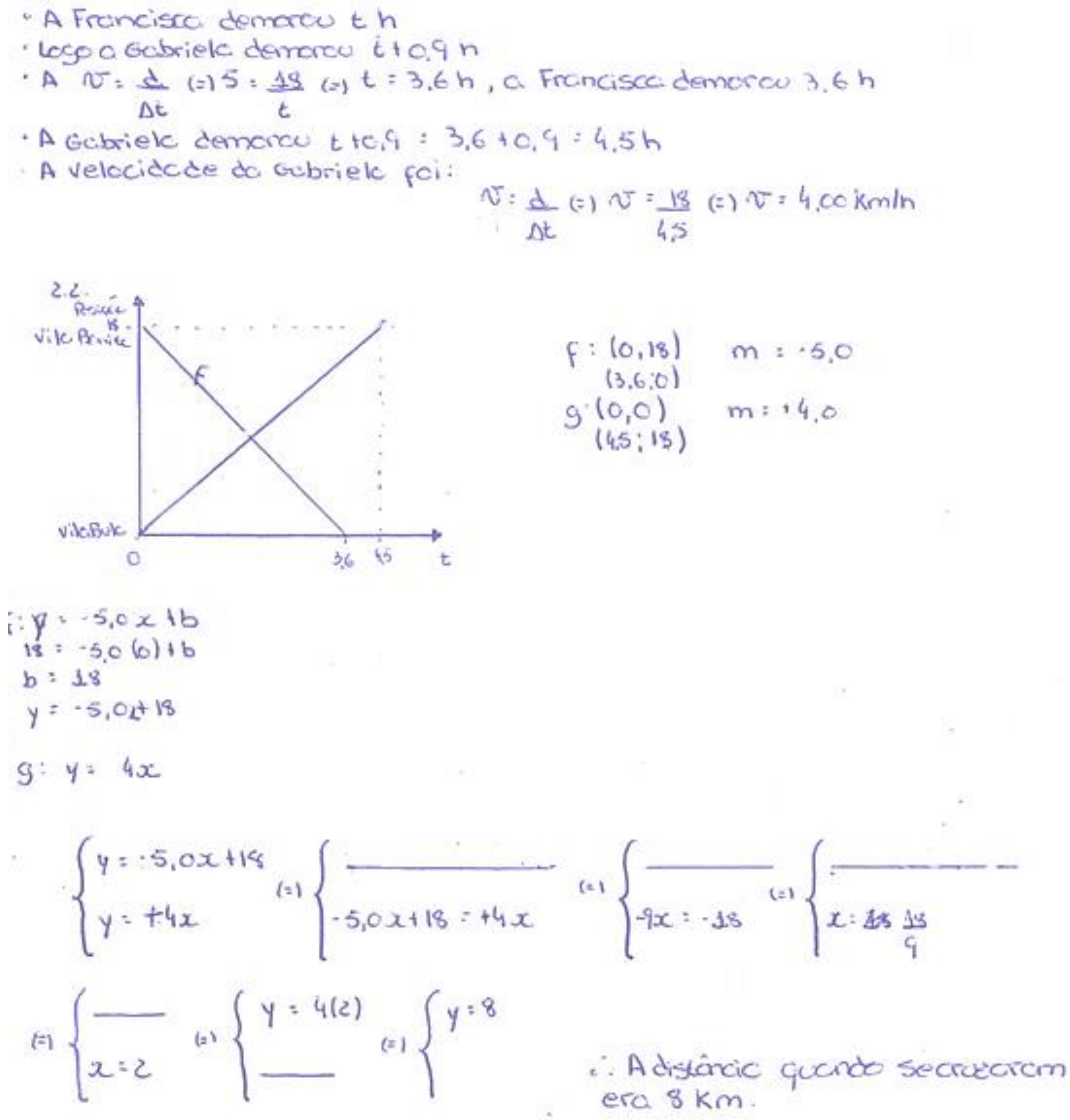


Figura 6.2: A resolução do grupo 2 da questão 2 da tarefa *"O passeio das amigas"*: Significado N2S3D2

Este encadeamento de significados é provocado, por um lado pelas tarefas que induzem o aluno, em cada questão, a recuperar significados que construiu nas questões anteriores. Por outro lado, pelos significados que se constroem na conversão entre registos de representação (como exemplifica a resolução da figura 6.2). E, complementarmente, pelo uso da calculadora gráfica que permitiu aos alunos construírem significados novos e sintetizarem significados já construídos. Disto é exemplo a resolução dos alunos do grupo 3 à mesma questão. Estes alunos não construíram o sistema de equações, mas recorreram à calculadora gráfica para determinar o ponto de interseção das duas retas. Neste caso, como em todas as questões do 2.º nível das tarefas [*A vedação do jardim, O passeio das amigas, Funções, composta e inversa, A caixa de volume máximo, O triângulo inscrito numa circunferência, e, Parâmetros em funções racionais*], a resolução através da calculadora gráfica mediou os significados dos alunos. E aquando da fase de discussão de resultados na turma, esta conjunção de resoluções resultou em sínteses que estruturaram, não apenas a resolução matemática das questões das tarefas, mas também as diferentes estratégias de resolução. As usadas pelos grupos para a resolução desta questão foram discutidas pelos alunos com a mediação da professora (ver extrato 6.1).

O objetivo da professora com a mediação apresentada no extrato 6.1 foi que fossem criados novos significados inerentes à complementaridade que existe nas diferentes estratégias de resolução, ou seja que fosse criado um novo significado de grau 3 que sintetizasse os significados de grau 3 anteriores e que ficasse explicita, também, a complementaridade que pode existir em relação aos artefactos de mediação usados na resolução. Neste caso, a calculadora gráfica funcionou como um artefacto de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos do grupo 3 porque os ajudou a interligar significados que, sem a calculadora, não seriam capazes de os interligar (como também se constata no extrato 6.2). Por sua vez, as alunas do grupo 2 usaram o sistema de equações como meio para atribuir significado matemático, ou seja, o sistema de equações funcionou como estratégia para construção de significados (ver figura 6.2).

(…)

Professora: A Eva e a Lúcia resolveram a questão através de um sistema de equações. Mas o Miguel, o Tiago e o Marco, usaram a calculadora gráfica, não foi?

Marco: Foi, porque o que queríamos era o ponto em que as duas retas se cruzavam.

Professora: E como é que "introduziram as retas na calculadora"?

Marco: Então, as retas são funções.

Eva: Pois, nós também queríamos o ponto em que as duas retas se cruzavam, mas usámos um sistema.

Miguel: Eu cá, sistemas de equações, fujo sempre disso porque me engano sempre nos cálculos! E a calculadora resolve muito os sistemas.

Professora: A calculadora resolve bem sistemas se tivermos as funções definidas com valores concretos para o declive e para a ordenada na origem, que é o caso aqui nesta questão. Mas se tivermos valores genéricos já não é assim, ou é?

Eva: Não, com valores genéricos até podemos perceber o que está a acontecer, mas para o justificarmos numa resposta escrita é mais fácil justificarmos com os cálculos do sistema do que por palavras.

Marco: Não é nada. Na questão 4 também não fizemos muitos cálculos e justificámos o que estava a acontecer com um gráfico.

Eva: Nós na questão 4 também fizemos um gráfico para justificar.

Professora: Então podemos usar todas as estratégias na mesma resposta?

Eva: Podemos, claro.

Marco (risos) **:** Para quê? Isso é um desperdício de tempo.

Professora: Não. Isso é estudar. Isso é aproveitar ao máximo cada questão para relacionar conhecimentos. E, quem o faz, 'atalha' caminhos no seu estudo e na sua caminhada de aprendizagem, porque aproveita cada situação para estudar o máximo de relações matemáticas que consegue. É ou não é uma eficiência de tempo?

Marco: Hum, bem, vistas assim as coisas, é.

Extrato 6.1: Mediação da professora na construção de significados inerentes à complementaridade de estratégias de resolução e à complementaridade de artefactos de mediação, relativos à tarefa *"O passeio das amigas"*: Significado N1S1D1, N1S2D1, N1S3D1, N2S1D1, N2S2D1, N3S1D1, N3S2D1, N3S3D1

É de registar da implementação do método de ensino que os raciocínios abdutivos e indutivos construídos no 2.º nível resultam dos raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos no início da tarefa. Ou seja, construídos no 1.º nível. Este encadeamento de significados ocorreu ao longo da implementação de todas as tarefas da proposta pedagógica [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*].

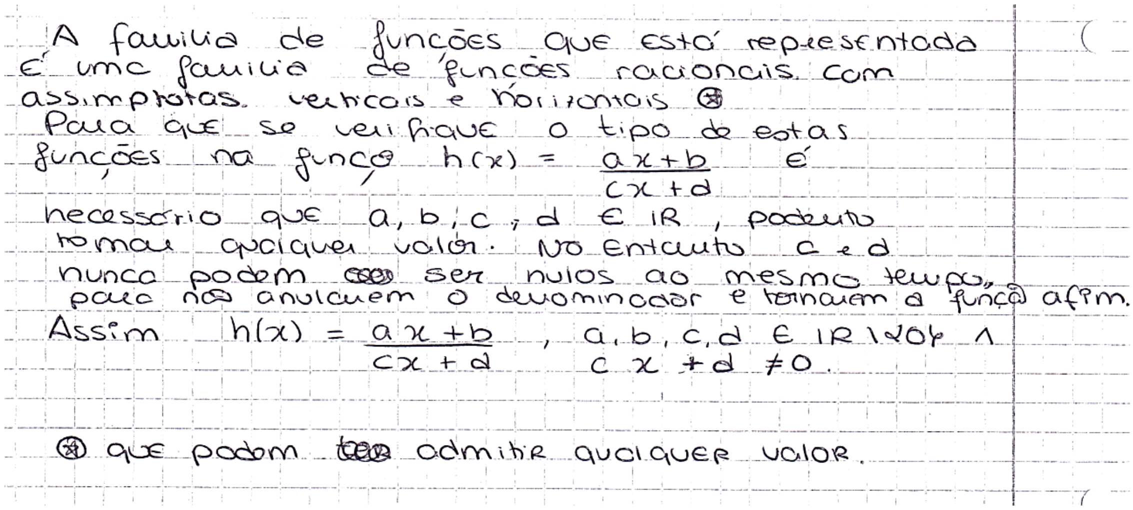
Os significados de grau 0 ocorreram, quer em resultado de erros matemáticos, quer em resultado de desconcentrações pontuais dos alunos. Porém, sempre que tais significados foram detetados pela professora, foram mediados por forma a convergirem para significados semióticos. A estratégia recorrentemente usada pela professora foi *questionar os alunos e incentivá-los a voltarem atrás nos seus raciocínios*, quer no mesmo nível, quer em níveis antecedentes. O incentivo a *"voltar atrás"* registou-se não apenas na mediação de significados de grau 0, mas em todas as questões das tarefas da proposta pedagógica [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], o que se traduziu em sistemáticas *sínteses* que resultaram do encadeamento de significados de umas alíneas para as seguintes, quer por iniciativa dos alunos, quer por iniciativa da professora.

Contudo, algumas vezes essa mediação fez-se também com questões que não apontam nenhum caminho ao aluno, mas antes o levam a fazer uma pausa no seu raciocínio, nomeadamente em significados de grau 0 que são imprecisões/incorreções, que não condicionaram a resolução das tarefas. Tais como, *"vamos retomar os raciocínios que construíram, pode ser?"*. Um exemplo de um significado de grau 0 que ocorreu no decurso da construção de um significado de grau 3 e que não condicionou o processo de significação foi a resolução da questão 1.3 da tarefa *"Parâmetros, funções e geometria"*. Nela, a professora provocou uma discussão mediadora em torno da formalização dos resultados em matemática num registo de representação em linguagem natural *versus* registo de representação em linguagem algébrica. Na qual também foi necessário mediar, durante a entrevista, a importância e a adequação da escolha dos registos de representação para cada tipo de resposta. O objetivo foi conduzir as alunas para compreensão da importância da escolha do registo adequado para uma determinada resposta, de modo que resulte apropriada ao tipo de resolução. Nesse exemplo, a resposta dada pelas alunas foi *'o h pode variar entre 0 e $\frac{3}{\pi r}$* ' não explicita devidamente o que acontece quando $h = 0$ ou quando $h = \frac{3}{\pi r}$. No entanto, como na transformação algébrica é usado o símbolo $<$, fica claro que $h \neq \frac{3}{\pi r}$. O mesmo não se podia dizer para o valor 0. Com a mediação da professora, estas imprecisões/incorreções foram discutidas, corrigidas e ultrapassadas.

No 2.º nível do método, nos raciocínios construídos pelos alunos, o de *voltar atrás* e *parar em aspetos particulares da resolução* foi decidido, muitas vezes, pelos próprios alunos. Estes sentiram necessidade de justificar e confrontar os procedimentos atuais, e as estratégias que estavam a assumir, com os significados que já tinham construído na resolução das questões anteriores, bem como em confrontá-los com os resultados e com as estratégias que os colegas dos outros grupos adotaram. Um exemplo deste confronto foi a construção da expressão que traduz a quantidade de arame gasto em função da largura ou do comprimento do jardim, na tarefa *"A vedação do jardim"*. Nesta tarefa, na discussão das questões 1.2 e 1.3 foram as alunas do grupo 1 que mostraram a sua resolução aos seus colegas do grupo 3. Mostraram-lhes também as dúvidas que tiveram durante a resolução, para que eles ultrapassassem as dificuldades que estavam a sentir na resolução da tarefa.

A justificação dos procedimentos atuais com os raciocínios construídos nas questões anteriores foi feita pelos alunos quer em questões do 2.º nível, quer em questões do 3.º nível. Por exemplo, na questão 2 da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, as alunas do grupo 2 verificaram o resultado que obtiveram com o valor genérico p. E fazem essa verificação com o valor que inicialmente consideraram. Retomaram as alíneas anteriores como forma de atribuírem significados de síntese (ou seja significados de grau 3) e, na questão 2 (referente ao 3.º nível), depois de terem obtido o resultado $\frac{p}{6}$, fizeram afirmações baseadas em significados atribuídos no 1.º nível. Tais afirmações foram: *'se utilizássemos $p = 20$ iríamos obter uma expressão para o máximo de $\frac{20}{6}$, o que resultaria $3,(3)$. Como é uma dízima infinita, não é aconselhável pois, dificultaria a construção da caixa'*.

No 3.º nível, os alunos construíram significados, transformaram e converteram representações do(s) parâmetro(s) envolvidos na(s) função(ões), para valores não concretizados do(s) parâmetro(s) e das variáveis dependente e independente. Em todas as questões das tarefas referentes ao 3.º nível do método ocorreram significados que estruturaram e sintetizaram os anteriores. Eles resultaram, por um lado, do encadeamento de significados que se construiu de umas alíneas para as seguintes; por outro lado, da (re)visita aos raciocínios desenvolvidos nas questões relativas ao 1.º e 2.º nível do método. Isto deu origem a significados que, na fase final das tarefas, facilitaram e tornaram naturais as *sínteses* que estruturaram os principais significados construídos na tarefa. Tal é explicitado na resolução da última questão da tarefa *"Parâmetros em funções racionais (parte 3)"* (ver figura 6.3).


A família de funções que está representada é uma família de funções racionais com assimptotas verticais e horizontais ⊛
Para que se verifique o tipo de estas funções na função $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ é necessário que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podendo tomar qualquer valor. No entanto c e d nunca podem ser nulos ao mesmo tempo, para não anularem o denominador e tornarem a função afim.
Assim $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge cx+d \neq 0$.

⊛ que podem admitir qualquer valor.

Figura 6.3: Síntese de significados que ocorreu na última questão da tarefa *"Parâmetros em funções racionais (parte 3)"*, do grupo 1

A passagem de um nível para outro dependeu da ordem, e do próprio encadeamento, em que as questões eram apresentadas nas tarefas. Também dependeu, e muito, da mediação da professora. A estruturação das tarefas, resultante do método concebido, permitiu que os alunos tivessem partido do nível 1, transitassem para o nível 2, e, a seguir, alcançassem o nível 3 (que é o nível mais elevado e o mais desejado para ser alcançado pelos alunos).

6.1.2. Os graus de significados

Ao consciencializar as fases de significados (S1, S2 e S3) preconizadas na resolução de cada uma das questões da tarefa, a professora parte do pressuposto que um significado de grau 1 pode (e deve) evoluir para significados de grau 2 e de grau 3. E sabendo o que pretende da atividade matemática do aluno em cada contexto algébrico, ela própria, foi conduzida a mediar os significados dos alunos de um modo organizado, dirigindo a sua mediação, para que os significados dos alunos convergissem para significados de grau 3. Com este método de ensino, a atividade algébrica dos alunos preconizou-se em três níveis algébricos e, cada um deles, em três graus de significados. Havendo a possibilidade de um quarto grau de significado ocorrer em qualquer fase do método, de forma não hierarquizada, que é o significado de grau 0 (S0). Usualmente o S0 está associado a erros matemáticos e a desconcentrações pontuais dos alunos num determinado raciocínio. Contudo, ao ocorrerem erros matemáticos ou significados que não se complementam com os de grau 1, 2 ou 3 já construídos, a professora mediou-os para que se convertessem em significados de grau 1, 2 e 3. O mesmo aconteceu quando ocorreram significados de grau 1 ou de grau 2 e que o aluno não completa com significados de grau 3. A forma desta mediação acontecer é promovida/facilitada pela implementação do método, porque a professora, ao consciencializar/classificar o grau de significado que o aluno está a atribuir numa determinada situação, sabe (porque o método o preconiza) em que fase está o raciocínio do aluno. E sabe, também, para que fase tem de ser conduzido tal raciocínio. Esta questão remete-nos para a importância da definição clara do que se pretende que o alune signifique em cada mediação provocada pela professora. Por exemplo, na questão 2.1 da tarefa *"Funções: composta e inversa"*, os alunos do grupo 3, apresentaram a seguinte resolução:

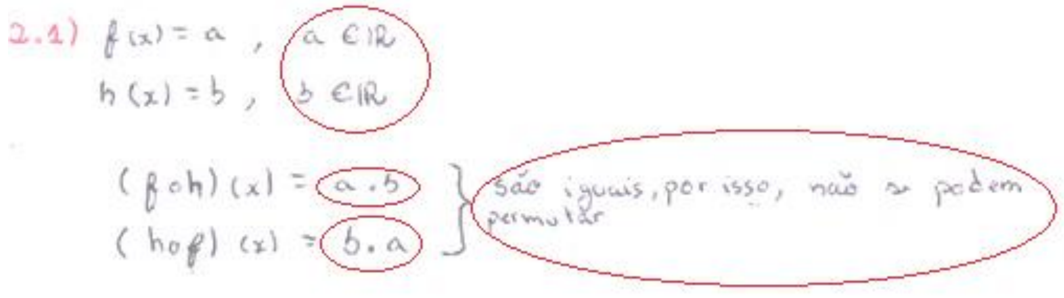


Figura 6.4: Resolução da questão 2.1 da tarefa *"Funções, composta e inversa"*, do grupo 3

Nesta questão era pedido aos alunos o seguinte: *"Mostra que duas funções constantes distintas não são permutáveis"*. A resolução dos alunos apresentada na figura 6.4 tem significados que requereram a mediação da professora. Ela identificou-os e classificou-os, de acordo com o método, para planificar a sua mediação. Tais significados e classificações são:

i) A omissão da restrição $a \neq b$ que definiria a distinção entre as funções f e h, mas que os alunos não explicitam na sua representação. A professora, sem perceber o significado que deu origem a este signo, não consegue classificá-lo, por não saber se é de grau 0, ou de grau 1. E, ao ser confrontada com este signo dos alunos, colocou a si mesma as seguintes questões: *"Os alunos não especificam a restrição $a \neq b$ porque não pensaram nela?* (em caso afirmativo este significado é de grau 0). Ou, *"os alunos pensaram na restrição mas consideraram que basta usar letras diferentes para definir as funções para que essa distinção fique garantida?"* (em caso afirmativo, tal significado não é de grau 0, mas sim de grau 1).

ii) O resultado algébrico da transformação foh e hof, que foi classificado como um significado de grau 0, porque os alunos não transformaram corretamente a composição de funções. À professora importa saber *"porquê?"*. E constrói, ela própria, uma hipótese desse porquê. Ou seja, ela constrói um significado de grau 1 que lhe servirá para iniciar a mediação com os alunos. Esse significado de grau 1 da professora é: *"os alunos, provavelmente, confundiram, na transformação algébrica, as letras a e b com a variável x, por isso é necessário partir desses significados para conduzir os alunos à compreensão da letras a e b como constantes e da letra x como variável, assim como das consequentes repercussões algébricas desses distintos significados."*

iii) A frase que os alunos escrevem no fim da sua resolução *"são iguais, por isso, não se podem permutar"* foi classificada como um significado de grau 0 que a professora mediou com: 1.º) optou por confrontar os alunos com o seguinte significado de grau 1, trabalhado num nível algébrico com os parâmetros a e b concretos (ou seja, significado N2S1D1): *"Considerem que têm duas funções $j(x) = 2$ e $k(x) = 2$, elas são permutáveis, ou não?"*. E em seguida com: 2.º) um significado de grau 2, significado N2S2D1: *"E agora, considerem as duas funções $j(x) = x$ e $k(x) = x$, elas são permutáveis, ou não?"*

Depois, consoante os significados que os alunos deram, assim a mediação avançou para significados de grau 2 (ao transformarem corretamente a função composta). E depois, para significados de grau 3 (ao concluírem que, por a e b serem constantes reais distintas, e não serem variáveis, as funções $f(x) = (f \circ h)(x) = a$ e $h(x) = (h \circ f)(x) = b$).

Frise-se que os significados foram mediados em todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], para que tivesse havido, no mesmo nível ou entre vários níveis, o seguinte:

i) A construção de significados entre os alunos, tal como aconteceu na discussão que ocorreu entre os alunos do grupo 3 durante a resolução da tarefa *A caixa de volume máximo*, em resultado do seguinte incentivo provocado pela professora (ver extrato 6.2):

Professora: Mais uma vez, o enunciado da tarefa não tem valores concretos, por isso vocês devem experimentar os valores que entenderem ser adequados à situação. E devem justificar sempre os vossos raciocínios. Não esqueçam também que devem (re)visitar o esquema sempre que entenderem, quer seja no início, no meio ou no fim da tarefa. Devem também ter sempre presente ao longo da vossa resolução, a questão central que acompanha o esquema do cartão.

(…)

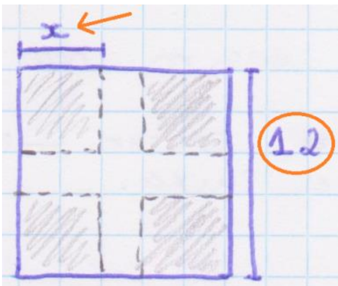
Tiago: Temos que ter o valor do lado do quadrado que vamos cortar nos cantos do cartão para experimentarmos construir a caixa. Dissemos que o cartão tinha 12 cm de lado. E se não tiver 12 cm? Se tiver 14 cm a caixa vai ser maior!

Miguel: Oh esperto, se tiver 1400 cm também vai ser maior, claro!!! Tu não estás a ver que se não tiver 12 cm já vamos ter outra caixa! Com 14 cm já não vamos obter o mesmo valor para o lado dos cantos a cortar porque já não é o mesmo cartão, será outro.

Tiago: Mas não sabíamos quanto é que media o cartão. Nós é que dissemos que era 12 cm. Mas e se não for?

Miguel: Se não for é claro que vão resultar valores diferentes, porque se não for 12 vamos ter outra caixa, logo vamos ter outro problema com outros cálculos para fazer e com outra solução!

Marco: O Miguel tem razão! Se não for 12 cm é outra caixa, não esta. Agora queremos é determinar este *x* aqui, com o lado do cartão fixo e igual a 12 cm. E queremos que esta caixa tenha o maior volume possível. As contas que fizermos com cartões com outras dimensões serão parecidas. Vamos ter de construir uma função para o volume e depois ir à máquina para calcular o máximo.



Extrato 6.2: Mediação semiótica da professora de modo a que se construam significados entre os alunos, na primeira questão da tarefa "A caixa de volume máximo": construção do significado N1S1D2, do grupo 3

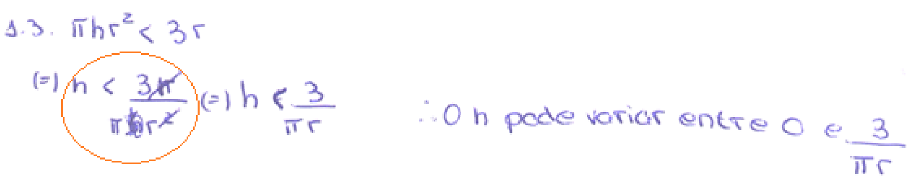
ii) A construção de significados de grau 3, a partir de significados de grau 0, de grau 1 e de grau 2, tal como aconteceu na discussão do extrato 6.3, em que a professora pretendeu que as alunas do grupo 2 atribuíssem significados acerca da escolha adequada entre o registo de representação em linguagem natural e o registo de representação em linguagem algébrica, conduzindo-as à atribuição de significados de grau 3:

(…)

Professora: Vocês escreveram *'o h pode variar entre* 0 *e* $\frac{3}{\pi r}$ '. Comentem esta afirmação por favor.

Íris: Então, o h tem de ser maior que 0 e menor que $\frac{3}{\pi r}$.

Professora: Muito bem. Mas na resposta que vocês dão não fica claro para quem lê o que acabaste de dizer, ou fica?



Íris: Pois. Deveríamos ter posto na resposta, excluindo 0 e excluindo $\frac{3}{\pi r}$.

Professora: Ou escrito a resposta de outra forma, ou não?

Sílvia: Pois, é bem mais fácil responder com um intervalo aberto.

Íris: Pois é, e é mais curta a resposta $h \in \left]0, \frac{3}{\pi r}\right[$.

Professora: Pois, assim não há dúvidas.

Sílvia: É que, quando estamos explicar oralmente é uma coisa, por escrito é outra. É melhor usar símbolos quando se tratam de resoluções só com expressões simbólicas, acho eu.

Professora: Pois é. Por dois motivos, conseguimos mais precisão e é uma resposta mais coerente com o registo de representação usado. Isto é, quando usamos só símbolos na resolução é mais coerente usarmo-los, sempre que possível, na resposta.

(…)

Professora: Outra coisa. Como garantem que $\frac{3r}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi r}$?

Sílvia: Estamos à vontade porque r representa o valor do raio, por isso é positivo.

Professora: Mas, temos de ser precisos na escrita. Nessa equivalência vocês deveriam ter explicitado que $r > 0$.

(…)

Extrato 6.3: Mediação semiótica da professora de modo a que se construam significados de grau 3, relativos à questão 1.3 da tarefa "Parâmetros, funções e geometria": construção do significado N2S3D1, do grupo 2

iii) A construção de um novo significado de grau 3 que sintetize os significados de grau 3 já construídos, tal como o ocorrido na discussão do extrato 6.2, em que a professora tinha a intenção de que os alunos construíssem significados no nível 3, com base em significados já construídos pelos alunos no nível 1:

(...)

Professora: Expliquem-me como é que, na última questão, chegaram ao intervalo $\left]0,\frac{p}{2}\right[$ para o valor que o corte nos cantos do cartão pode assumir?

Marco: Não foi difícil porque nas alíneas anteriores já tínhamos experimentado o que é que acontecia à caixa quando o valor do lado era 12, 20, etc. E percebemos que não pode ser zero porque se fosse não construíamos caixa porque não teria altura.

Miguel: Pois, e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque, se se cortar metade do cartão, não dá para fazer a caixa. Por exemplo, se o lado do cartão for 12 cm, não podemos cortar 6 cm.

Professora: Muito bem. E o esquema do enunciado ajudou-vos?

Miguel: Sim, claro que sim. Eu sem esquema não conseguia perceber bem o enunciado e o que é que podíamos experimentar com o cartão.

(...)

Professora: E como é que derivaram a função $4x^3 - 4x^2p + p^2x$?

Marco: Quando estávamos a resolver essa questão eu pensava que não iríamos ser capazes de resolver com p e x tudo misturado. Mas não foi difícil, porque nessa função o p é como se fosse um número e portanto basta pensarmos como pensamos para um número qualquer como o 2 ou o 3. E pensando assim não foi difícil.

Extrato 6.4: Mediação semiótica de significados construídos no nível 1 e no nível 3, do grupo 3, na tarefa *"A caixa de volume máximo"*: construção de significados de grau 3, *do grupo 3*

E é neste âmbito que a preconização do método de ensino foi um fator confortável para a própria atividade de mediação da professora ao longo da implementação do estudo. Pois, durante a implementação do método, em cada mediação semiótica, a professora teve um referente diretamente associado à intencionalidade da questão que quis ver trabalhada pelos alunos, conduzindo-os de forma sequencial e encadeada até a essa intenção. Neste método, essa intenção define-se por cada um dos três graus de significado em cada nível e limita-se pelo significado de grau 3 no nível 3, renovando-se o ciclo em cada novo episódio de mediação. O que, pragmaticamente, resultou nas tarefas do estudo, quer pelos níveis algébricos que têm a intenção de conduzir os alunos desde contextos algébricos concretos até contextos algébricos genéricos, como pelos graus de significado mediados pela professora, que têm a intenção de conduzir os alunos desde significados de grau 1 até significados de grau 3.

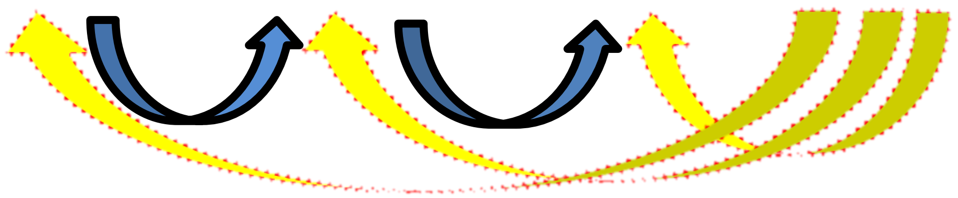
Tendo sido por isso necessário, em cada episódio de mediação, ter claramente identificado não apenas o grau de significado em que o aluno se encontra, mas também, o significado de grau 3 que se intenciona que o aluno signifique. Assim, cada episódio de mediação decorreu de três formas distintas, para que tivesse havido, no mesmo nível ou entre vários níveis: I)

Construção de significados entre os alunos; II) Construção de significados de grau 3, a partir de significados de grau 0, de grau 1 e de grau 2; III) Construção de um novo significado de grau 3 que sintetize os significados de grau 3 já construídos.

Neste estudo, à professora mediadora coube a função de, em cada episódio de mediação, ter definido o propósito/a intenção da mediação e conduzir a mediação até significados de grau 3, ou seja, ter definido o grau de significado 3 que pretendeu que os alunos significassem. Este resultado elucida-se com a ilustração que se segue e que completa, após o estudo, a tabela 3.1 apresentada no capítulo 3.

Tabela 6.1: Desenvolvimento do método de ensino: o propósito de cada mediação

Identificação do grau de significado em que se encontra o mediado no início do episódio de mediação			
Significados de Grau 1 construídos pelo aluno	**Significados de Grau 2 construídos pelo aluno**	**Significados de Grau 3 construídos pelo aluno**	**Significados de Grau 0 construídos pelo aluno**
S1	**S2**	**S3**	**S0**
		INTENCIONALIDADE DA MEDIAÇÃO	



MEDIAÇÃO SEMIÓTICA DO PROFESSOR: *CICLO DIDÁTICO*

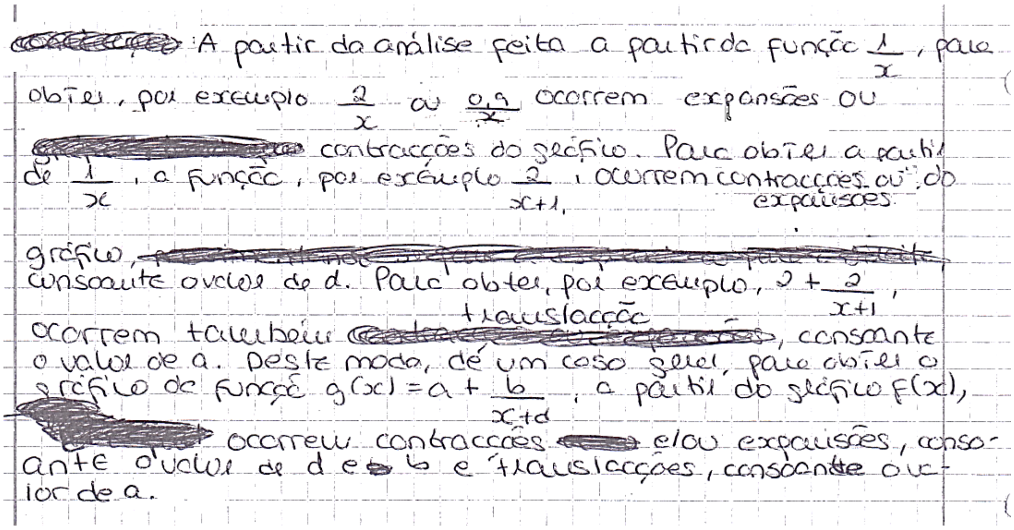
6.2. As Tarefas

As tarefas foram construídas de raiz para a proposta pedagógica deste estudo de modo concordante com os três níveis definidos no método de ensino aplicado ao caso dos parâmetros em funções. A sua análise vai ser apresentada segundo os níveis e os significados.

6.2.1. Os níveis de ensino

A ordem das questões das tarefas, concertada com os três níveis algébricos, desde contextos concretos até contextos genéricos, ensinou aos alunos uma forma de raciocinar (desde o concreto até ao genérico). Um exemplo revelador de tal aprendizagem é a estratégia alternativa das alunas do grupo 1 na tarefa *"A caixa de volume máximo"*, onde as alunas referem que, nas questões iniciais da tarefa, o valor do lado do canto cortado era x cm. Como o valor para o lado do cartão que concretizaram era 12 cm, resultou a função $y = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ para a representação do volume da caixa. Desta função determinaram o maximizante que era a sexta parte de 12 cm, ou seja, 2 cm. Em seguida, as alunas afirmaram que experimentaram vários valores como forma de testarem o resultado $\frac{p}{6}$, que obtiveram posteriormente quando trabalharam com o parâmetro p. E comunicam todos estes raciocínios, usando um registo de representação em linguagem natural, de forma muito clara e estruturada. Esta resolução explicita a aprendizagem do método desde o concreto até ao genérico e o uso que as alunas sabem fazer do mesmo.

Nesta perspetiva, as tarefas funcionaram como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos construídos pelos alunos. Esta aprendizagem permitiu-lhes atribuir significado, sempre que o requereram, aos contextos genéricos do 3.ºnível, isto é, ao parâmetro genérico trabalhado na última questão das tarefas. Para a atribuição de tal significado, o que aconteceu com as alunas do grupo 1 foi frequente acontecer com a mediação da professora aos alunos dos restantes grupos na fase de discussão e síntese dos resultados e das estratégias usadas. Um outro exemplo disso foi, também, a resolução da última questão da tarefa *"Parâmetros em funções racionais (parte 2)"*. Nesta questão, as alunas, para construírem a função $g(x) = a + \frac{b}{x+d}, a, b, d \in IR$ a partir da função$f(x) = \frac{1}{x}$, recorrem aos significados que atribuíram às funções $\frac{2}{x}$ e $\frac{0,9}{x}$ nas questões anteriores. E, para justificarem as transformações de $a + \frac{b}{x+d}$, recorrem a concretizações de $a, b \; e \; d$, e só depois dessa concretização é que respondem ao que é pedido com valores genéricos dos parâmetros (ver figura 6.5).



A partir da análise feita a partir da função $\frac{1}{x}$, para obter, por exemplo $\frac{2}{x}$ ou $\frac{0,9}{x}$ ocorrem expansões ou contracções do gráfico. Para obter a partir de $\frac{1}{x}$, a função, por exemplo $\frac{2}{x+1}$, ocorrem contracções ou expansões do gráfico, consoante o valor de d. Para obter, por exemplo, $2+\frac{2}{x+1}$, ocorrem também translacção, consoante o valor de a. Deste modo, de um caso geral, para obter o gráfico de função $g(x)=a+\frac{b}{x+d}$, a partir do gráfico $f(x)$, ocorrem contracções e/ou expansões, consoante o valor de d e b e translacções, consoante o valor de a.

Figura 6.5: A resolução do grupo 1 da questão 9.3 da tarefa *"Parâmetros em funções racionais (parte 2)"*: Raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, do 3.º nível do método: Significados N3S1D2, N3S2D2 e N3S3D2

Da (re)exploração do enunciado que ocorreu na resolução da última questão da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, onde: 1.º) as alunas do grupo 1 mostram que compreenderam a variação do parâmetro (altura da caixa), entre $\left]0,\frac{p}{2}\right[$ para um cartão com p cm de lado; 2.º) explicam o raciocínio dedutivo que fazem, em linguagem natural e através da representação esquemática, quando afirmam "*… a altura da caixa nunca pode ser $\frac{p}{2}$ cm porque a caixa deixaria de existir, pois seria cortada na sua totalidade*" e apresentam um esquema com a situação hipotética na qual colocam um corte de $\frac{p}{2}$ cm; e, 3.º) referem que o valor mínimo que a altura pode ter é um valor *"infinitamente próximo de 0, mas superior a 0, pois caso contrário a caixa também deixaria de existir porque não possuiria altura"*. Por tudo isto podemos inferir que as alunas aprofundaram o significado de parâmetro. O aprofundamento que as alunas do grupo 1 fizeram foi estendido aos restantes grupos aquando da discussão dos resultados em toda a turma, na qual as alunas explicaram detalhadamente aos colegas, fazendo uso do esquema do cartão como se apresenta na figura 6.6, o porquê do corte não poder assumir nenhum dos dois extremos do intervalo $\left]0,\frac{p}{2}\right[$.

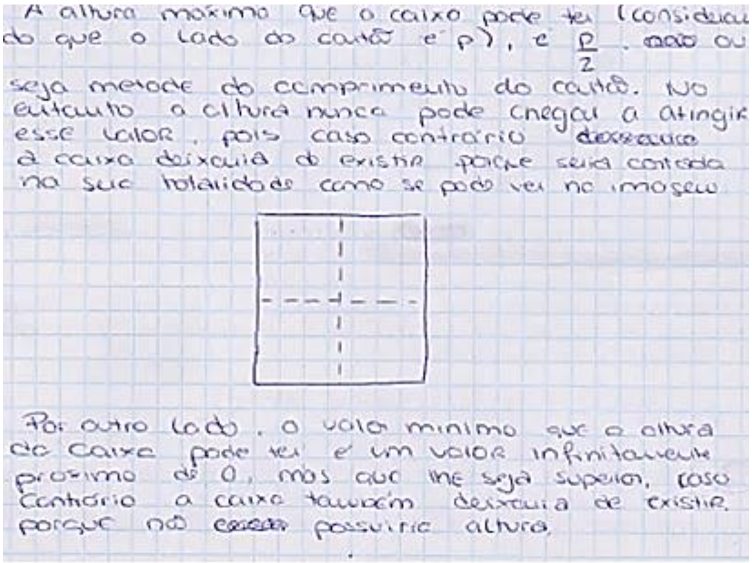


Figura 6.6: Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: significado N3S3D2, da questão 2, da tarefa *"A caixa de volume máximo"*, do grupo 1

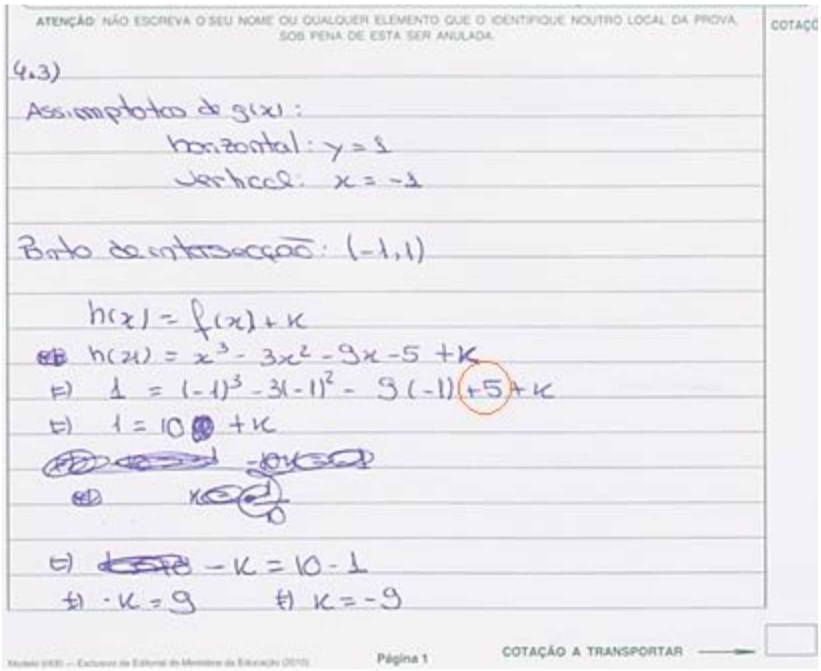
No nível 1 e no nível 2 do método, os alunos fixaram o valor do parâmetro e, em consequência dessa concretização, ao obterem condições que definem o valor das variáveis, compreenderam que a concretização do parâmetro condiciona os valores das variáveis. Essa compreensão estende-se a contextos em que o parâmetro é genérico. Ou seja, ao 3.º nível. Este raciocínio dedutivo, e cuja representação foi classificada como um significado de grau 3 do terceiro nível do método (N3), mostra a compreensão do conceito de parâmetro a variar num intervalo de valores, não podendo assumir nenhum dos dois extremos desse intervalo, pois a situação em causa (a construção da caixa) deixaria de ter significado. Deste tipo de exploração, podemos inferir que os alunos experimentaram que, *parâmetro é algo que pode determinar o intervalo de variação de alguma variável*.

A interpretação que é dada a uma *letra* $(x, y, p, \ldots)$ no 1.º nível do método é semelhante à que usualmente os alunos fazem para uma incógnita quando resolvem uma equação. Pois, por um lado, a escrita algébrica é a mesma, isto é, $p = 10$ (por exemplo). Por outro lado, quando se fixa algo desconhecido num valor concreto, como aconteceu com o lado da caixa de volume máximo (por exemplo), resolve-se o problema e constrói-se a caixa e determina-se o seu consequente volume. O que, em problemas da vida real (como o da caixa), não é possível fazer-se sem que o desconhecido se torne conhecido/definido/determinado. O mesmo acontece com a determinação da incógnita na resolução de um problema ou de uma equação. Desta interpretação que é dada à *letra* $(x, y, p, \ldots)$ no 1.ºnível do método [*letra* $(x, y, p, \ldots)$ que usualmente representou o parâmetro nas tarefas da proposta pedagógica], podemos inferir que o significado de parâmetro, que os alunos experimentaram ao longo do estudo foi: *parâmetro é algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto*.

Ao longo do estudo o que se registou em relação ao uso das letras foi que, na resolução das primeiras questões de todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], os alunos tenderam a usar as letras como rótulos, que, nas questões seguintes assumiram o papel de variáveis, ou de parâmetros, para a designação de algo no esquema inicial e como início de alguma estratégia que desenvolvem no decurso da resolução. Esta sequência de significados promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, enquanto variável de uma função e enquanto parâmetro.

A exploração que os alunos fizeram ao longo da resolução das tarefas do estudo promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, quer numa equação literal, quer numa inequação literal. No que refere ao parâmetro e à incógnita numa equação literal, os alunos calcularam o valor que *x* assume para o valor concreto do parâmetro. Após essa concretização, atribuem um novo significado matemático à expressão, considerando-a como uma equação literal que resolvem em ordem a uma das incógnitas. Em seguida, as equações literais que os alunos construíram foram interpretadas como funções, nas quais cada uma das incógnitas passa a ser interpretada como variável dependente ou independente dessa função. Por exemplo, na tarefa *"A vedação do jardim"* após a experimentação para vários valores da área, os alunos fixam-na num valor e constroem a equação resolvendo-a em ordem a uma das duas incógnitas, tal como $x.y = 100 <=> x = \frac{100}{y}$. A seguir constroem a expressão que representa o comprimento do arame da vedação $P = 2x + 3y$ e, após a substituição de x por $\frac{100}{y}$, obtêm a função $C(x) = 2\left(\frac{100}{y}\right) + 3y$.

No final do estudo, os alunos mostraram compreender o conceito de variável, de constante, de incógnita e de parâmetro em contextos algébricos em que trabalham com expressões que contêm apenas letras. E em que, a cada letra, é requerida a construção de um significado. Tal como aconteceu com as últimas questões das tarefas da proposta pedagógica e nas tarefas que não foram construídas com base no método de ensino. Exemplo disto são as resoluções à questão que envolveu funções e parâmetros do teste intermédio que foi realizado na fase final do estudo (ver figura 6.7), das quais apresentamos a resolução da Sílvia (aluna que integrou o grupo 2).



ATENÇÃO: NÃO ESCREVA O SEU NOME OU QUALQUER ELEMENTO QUE O IDENTIFIQUE NOUTRO LOCAL DA PROVA, SOB PENA DE ESTA SER ANULADA.

COTAÇÕES

(4.3)

Assimptotas de g(x):

horizontal: $y = 1$

vertical: $x = -1$

Ponto de intersecção: $(-1,1)$

$h(x) = f(x) + k$

$\Leftrightarrow h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + k$

$\Leftrightarrow 1 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 + k$

$\Leftrightarrow 1 = 10 + k$

$\Leftrightarrow -k = 10 - 1$

$\Leftrightarrow -k = 9 \quad \Leftrightarrow k = -9$

Página 1

COTAÇÃO A TRANSPORTAR

Figura 6.7: Resolução da Sílvia à questão 4.3 do teste intermédio de matemática A do 11.ºano realizado no dia 24 de maio de 2011: Significado de grau 3

À exceção do significado de grau 0 que ocorreu no raciocínio indutivo (aquando da transformação algébrica, na resolução da equação), a aluna, na determinação do valor de k, evidencia um conhecimento estruturado acerca do que cada letra representa em cada situação. Resolve a questão e representa a resolução através de um signo símbolo que traduz o seu raciocínio dedutivo.

No final do estudo registam-se alguns aspetos particulares do raciocínio dos alunos e que evidenciam uma clara compreensão do parâmetro em funções, postos em evidência pelos próprios alunos nas representações que constroem. Como, por exemplo, durante a resolução da tarefa *Parâmetros, funções e geometria*, na questão 1.2, as alunas do grupo 1 dão continuidade à expressão que construíram $r^2 < \frac{9}{\pi}$. Tal expressão permitiu-lhes determinar os valores do raio da base do cilindro que transformam o valor da soma dos volumes dos dois cones menor que o triplo do valor da altura do cilindro. Para tal, construíram a função $y = x^2 - \frac{9}{\pi}$ e representaram-na graficamente, sem recurso à calculadora gráfica, e fazem referência aos valores que esse raio pode e não pode ter.

A construção de significados que ocorreu em cada nível foi mediada através das tarefas matemáticas elaboradas e das discussões entre os alunos e a professora. Nas resoluções das questões relativas ao 2.º nível, os alunos transformaram e converteram mais representações comparativamente às questões do 1.º e do 3.º nível. Ao longo da implementação da proposta pedagógica, as respostas dos alunos às questões referentes ao 1.º nível e ao 3.º nível tenderam a ser menos extensas e menos detalhadas do que as respostas relativas ao 2.º nível.

Tal aconteceu em todas as tarefas da proposta pedagógica, excetuando a última tarefa que continha apenas questões relativas ao 3.º nível [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais*]. Ou seja, retomando o esquema da figura 3.1 do capítulo 3, a atividade matemática dos alunos na implementação do método neste estudo foi mais intensa no 2.º nível do que no 1.º nível e no 3.º nível e pode ilustrar-se como a seguir se apresenta:

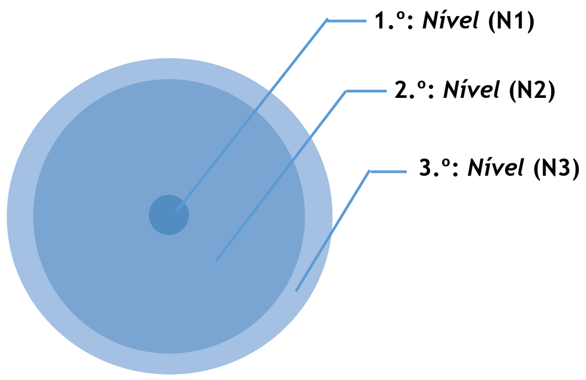


Figura 6.8: Distribuição da atividade de representação e conversão de significados matemáticos dos alunos pelos três níveis na implementação do método

O que aconteceu na implementação do método no que refere à intensidade da atividade matemática do aluno, relativa à transformação e conversão de representações ao longo dos três níveis foi que tal atividade resultou não equitativa nos três níveis do método.

6.2.2. Os graus de significados

As tarefas iniciam-se a partir de um enunciado sem valores concretos e que apelam à concretização dos alunos. Porém, a experimentação com diversos valores concretos foi requerida pela professora e não pelo enunciado. Este pedido da professora foi uma estratégia de mediação de significados construídos pelos alunos. Porque, ao experimentarem concretizar o parâmetro para vários valores, os alunos mostraram ganhar mais capacidade de atribuir significado ao parâmetro genérico. Tal foi o que a professora reteve logo na primeira questão da primeira tarefa. Na qual os alunos que experimentaram concretizar o parâmetro com diversos valores acabaram por construir significados de grau 1 e de grau 2 em linguagem natural, sobre o que era pedido na primeira questão, mas para "uma área qualquer" (como os alunos lhe chamaram). Iniciaram também a escrita algébrica com valores genéricos resultando a expressão $A = x.y,\ y{:}\, largura\ e\ x{:}\, comprimento$. Porém, os alunos que não concretizaram o valor da área com diversos valores, fizeram depender a sua resposta de apenas um valor concreto que atribuíram à área do jardim e não extrapolaram para *"um valor qualquer"*. A mediação da professora nesta fase do enunciado foi fundamental, pois sem ela, os alunos teriam concretizado o parâmetro para apenas um valor o que condicionaria o processo de significação. Logo, após a implementação do estudo, urge-nos a necessidade de melhorar a eficiência do próprio enunciado das tarefas, corrigindo-o para a seguinte redação (ver extrato 6.2):

> 1. Começa por considerar vários valores concretos para … :
>
> 1.1. Com cada um desses valores, define uma estratégia que te permita … – começa por explorar a situação usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-a por meio de linguagem natural.
>
> (…)

Extrato 6.5: Melhoria da eficiência da primeira questão do enunciado das tarefas do método de ensino

A interpretação do enunciado das tarefas da proposta pedagógica [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*] foi feita em cada grupo de trabalho, e ao longo do estudo, essencialmente através da exploração da representação esquemática que acompanhava o texto escrito em linguagem natural. Essa interpretação foi feita por meio de raciocínios abdutivos (S1), indutivos (S2) e dedutivos (S3). Na interpretação do enunciado, os alunos começaram por usar significados que evidenciam o início de uma estratégia de resolução, que, por serem os primeiros, geraram a 'hipótese'/'a intenção'/'o caminho a seguir'. Foram estes raciocínios que lhes permitiram definir as estratégias que implementaram nos raciocínios indutivos e dedutivos que se seguiram em complementaridade com os abdutivos que construíram. Como exemplo, apresentamos a seguinte resolução relativa à tarefa *"O triângulo inscrito numa circunferência"*.

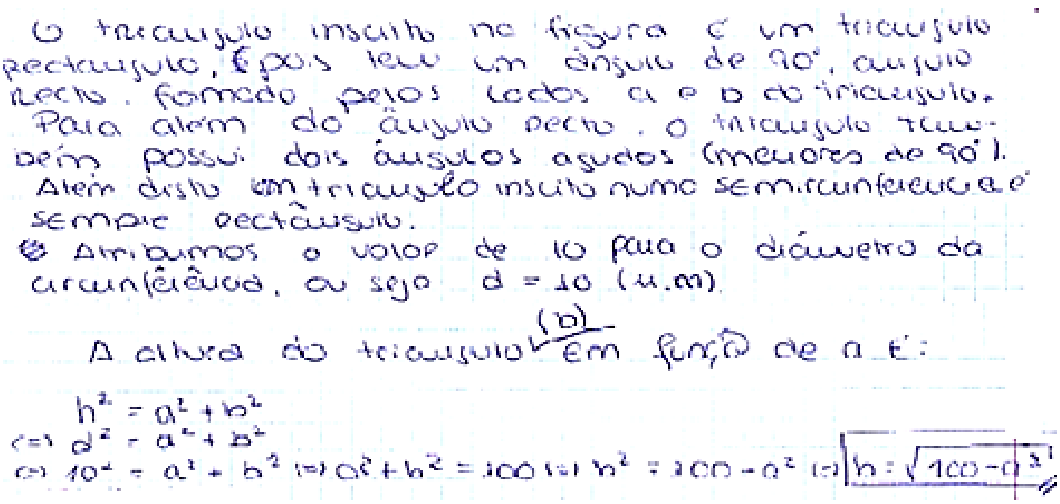

O triângulo inscrito na figura é um triângulo rectângulo, (pois tem um ângulo de 90°, ângulo recto formado pelos lados a e b do triângulo.
Para além do ângulo recto, o triângulo também possui dois ângulos agudos (menores de 90°).
Além disto um triângulo inscrito numa semicircunferência é sempre rectângulo.
Atribuímos o valor de 10 para o diâmetro da circunferência, ou seja d = 10 (u.m).
A altura do triângulo (b) em função de a é:
$h^2 = a^2 + b^2$
$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2$
$\Leftrightarrow 10^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 = 100 - a^2 \Leftrightarrow \boxed{b = \sqrt{100 - a^2}}$

Figura 6.9: A resolução do grupo 1 da questão 1.1 da tarefa *"O triângulo inscrito numa circunferência"*: Raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, do 1.º nível do método: Significados N1S1D2, N1S2D2 e N1S3D2

Frise-se que os raciocínios abdutivos também foram, por sua vez, antecedidos por raciocínios dedutivos (que o são em contextos que antecedem a tarefa). Por exemplo, na resolução da figura 6.9 as alunas partem de uma série de raciocínios dedutivos [ou seja, partem de conhecimentos prévios já estruturados e que nesta questão lhes servem como base para a construção de novos significados] quando começam por afirmar: i) *"O triângulo inscrito na figura é retângulo (pois tem um ângulo de 90º, angulo reto formado pelos lados a e b do triângulo)"*, ii) *"Para além do ângulo reto, o triângulo também possui dois ângulos agudos (menores que 90º)"*, iii) *"… um triângulo inscrito numa semicircunferência é sempre retângulo"*. Estes raciocínios i), ii) e iii), vistos fora do contexto da questão da tarefa, são dedutivos e genéricos. Constituem-se como argumentos matemáticos, que fora do contexto da questão 1.1 da tarefa, são representados, por se constituírem como tal, por *signos símbolos*. Neste caso, estes símbolos antecedem a resolução que se pretende. Ou seja, face à intencionalidade da questão 1.1 da tarefa *"O triângulo inscrito numa circunferência"*, os signos i), ii) e iii) não se constituem signos símbolo da resolução da questão, pois a intencionalidade da questão é '…determinar relações possíveis entre os lados do triângulo', apesar de num contexto prévio ao da resolução da tarefa o serem. Contudo, tais raciocínios i), ii) e iii) são sucedidos pelo raciocínio iv) *"Atribuímos o valor 10 para o diâmetro da circunferência"* que em complementaridade com a informação de que o triângulo é retângulo, ou seja, em complementaridade com um dos três raciocínios i) ou ii) ou iii), é o que marca o início da estratégia que as alunas definiram que vão seguir para a resolução da questão. É esta complementaridade que dá origem à abdução que marca o início da resolução das alunas. Ou seja, esta complementaridade é o *significado de grau 1* da resolução das alunas. Este significado de grau 1 é sucedido por um raciocínio indutivo. Tal raciocínio indutivo é a transformação algébrica da equação de 2.º grau resultante da aplicação do Teorema de Pitágoras e que permite obter, a altura do triângulo em função de um dos seus lados menores. Este é o *significado de grau 2* da resolução das alunas. Por último, a resolução toda da questão que é representada na figura 6.9 constitui-se em si um signo símbolo da resolução das alunas, pois responde de forma estruturada e sintética, à intenção da questão. A figura 6.9 representa, por tudo isto, um raciocínio dedutivo no contexto da questão com a intencionalidade definida por '…determinar relações possíveis entre os lados do triângulo'. A figura 6.9 é o *significado de grau 3* da resolução das alunas.

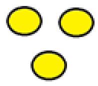
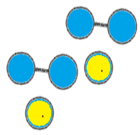
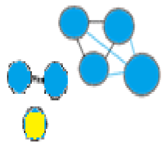
A experimentação de vários valores concretos na questão inicial das tarefas promoveu a construção de significados em torno dos valores genéricos da sua última questão. Porém, o estímulo à experimentação foi feito maioritariamente pela professora, porque no enunciado esse estímulo consta apenas implícito na recomendação inicial e não consta explicitamente no enunciado das primeiras questões. A exploração que os alunos fazem do enunciado da primeira questão das tarefas, usando um valor concreto para o parâmetro, tende a ser a mesma que é usada na resolução da última questão da tarefa. Como, por exemplo, na tarefa *"A vedação do jardim"*, os alunos construíram primeiramente, uma função em ordem a duas variáveis (em ordem ao comprimento e à largura do retângulo). Depois, construíram, por substituição de uma dessas variáveis, uma função em ordem a apenas uma variável (ou ao comprimento, ou à largura). Posteriormente, na última questão, em resultado dos significados que construíram nas questões anteriores, constroem uma função que permite determinar o que é pedido, mas para um valor genérico do parâmetro.

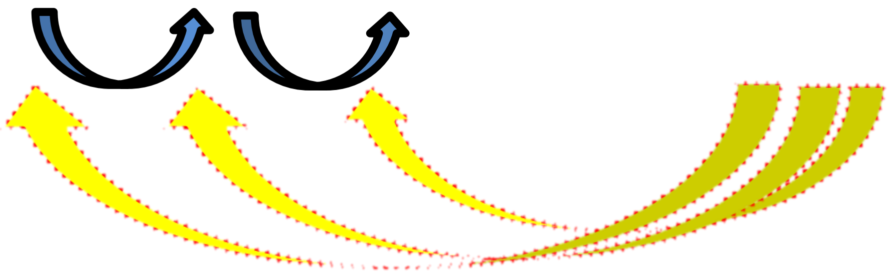
Ao iniciarem a resolução das tarefas, os alunos, por um lado, exploraram o esquema do enunciado, mas, por outro, lado também construíram esquemas que funcionaram como artefactos de mediação, que (re)visitaram, para os ajudar a raciocinar num contexto algébrico com todos os valores genéricos, como o que lhes foi requerido na última questão das tarefas. Exemplo disso foi o que aconteceu com os esquemas que os alunos construíram na tarefa *"A caixa de volume máximo"*, que lhes permitiu construir significados acerca do tamanho do corte nos cantos do cartão. E que lhes permitiu recuperar tais significados, na última questão da tarefa, ao atribuírem significado ao intervalo $\left[\frac{p}{6}, \frac{p}{2}\right[$ para o valor genérico p do lado do cartão. Este reaproveitamento/reconversão dos significados e das estratégias construídas nas questões anteriores ocorreu na resolução de todas as tarefas da proposta pedagógica [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*]. O esquema inicial do enunciado da tarefa, sem dados concretos, complementado pela mediação da professora, foi um artefacto de mediação semiótica de significados matemáticos que promoveu a compreensão da variação do parâmetro num intervalo de valores genéricos.

Os significados de grau 0 ocorreram em todas as tarefas [*A vedação do jardim; O passeio das amigas; Funções, composta e inversa; A caixa de volume máximo; O triângulo inscrito numa circunferência; Parâmetros em funções racionais; Parâmetros, funções e geometria*], em algum dos grupos de alunos. Tais significados ocorreram quer em resultado de erros matemáticos que condicionaram a resolução das tarefas e que requereram mais da mediação da professora [como aconteceu com o grupo 3, nas resoluções das questões 1.2 e 1.3 da tarefa *A vedação do jardim*], quer em resultado de imprecisões/incorreções matemáticas que resultaram de desconcentrações pontuais dos alunos, que não condicionaram a resolução das tarefas e que foram rápida e facilmente ultrapassadas com uma breve intervenção da professora [como a imprecisão $r^2 = \frac{3}{\pi} <=> r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$ mediada e rapidamente corrigida pelas alunas do grupo 2 para $r^2 = \frac{3}{\pi} <=> r = \pm\sqrt{\frac{3}{\pi}}$].

O facto de se terem registado ao longo do estudo dois tipos distintos de significados de grau 0, os que condicionam o processo de significação e os que não o condicionam, conduz-nos à necessidade de redefinir o próprio método no que refere à tipologia dos significados de grau 0, dando origem à redefinição do esquema da figura 3.1 do capítulo 3. Complementando esta redefinição com o desenvolvimento do método inerente à mediação do professor, explicitado em 6.1.1 e sintetizado na tabela 6.1, obtém-se a seguinte síntese do método de ensino:

Tabela 6.2: Método de Ensino para Mediar Significados em Matemática

Significados de Grau 1	Significados de Grau 2	Significados de Grau 3	Significados de Grau 0 do Tipo1	Significados de Grau 0 do Tipo2
Significados construídos, em cada um dos níveis N1, N2, N3 do método, resultantes de um primeiro impulso gerador de uma hipótese ou estratégia matemática.	Significados construídos, em cada um dos níveis N1, N2, N3 do método, resultantes da prescrição de uma relação matemática.	Significados construídos, em cada um dos níveis N1, N2, N3 do método, que anteveem, englobam, legitimam e sintetizam relações matemáticas.	Imprecisões ou incorreções matemáticas em cada um dos níveis N1, N2, N3, que não bloqueiam o processo de significação no contexto matemático em que ocorrem.	Imprecisões ou incorreções matemáticas em cada um dos níveis N1, N2, N3, que bloqueiam o processo de significação no contexto matemático em que ocorrem.
Ícones em raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3.	Índices em raciocínios indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3.	Símbolos em raciocínios dedutivos, construídos em N1, N2, N3.		
				
S1	**S2**	**S3** Intencionalidade da mediação	**SO_1**	**SO_2**



1.º) IDENTIFICAÇÃO DO NÍVEL E DO GRAU DE SIGNIFICADO EM QUE SE ENCONTRA O ALUNO NO INÍCIO DO EPISÓDIO DE MEDIAÇÃO

2.º) MEDIAÇÃO SEMIÓTICA DO PROFESSOR DE ACORDO COM A INTENCIONALIDADE DO S3

7. Conclusões e recomendações

Neste capítulo apresenta-se uma síntese dos objetivos do estudo, da sua fundamentação teórica e da metodologia de investigação utilizada. Apresentam-se e discutem-se igualmente as conclusões do estudo relativamente à mediação, quer do método de ensino, quer das tarefas como um artefacto. Por fim, são feitas algumas recomendações relativas a trabalhos futuros.

7.1. Síntese

O que os alunos transmitem na solução de um problema e as questões que colocam a si próprios sobre a sua experiência nas aulas de Matemática (Evans & Sawm, 2015) e sobre as experiências que trazem da resolução de problemas (Tirosh et al., 2015) constitui fundamento para que adquiram conhecimento matemático, conjeturando e reconhecendo o significado de cada resolução e de cada experiência.

De acordo com Bingolbali e Bingolbali (2015), o ensino da matemática centrado no aluno exige do professor: i) ter conhecimento prévio do aluno e ensiná-lo em conformidade; ii) gerir com métodos adequados as aprendizagens e as suas dificuldades, percebendo as conceções implícitas que causam os erros, diagnosticando-os e elaborando um plano para ultrapassar as dificuldades; iii) desenvolver no aluno capacidades de raciocínio, de observação, de comunicação, de classificação, de estabelecimento de conexões, entre outras; iv) fornecer um *feedback* ao aluno, de modo a que ele saiba onde tem bom e mau desempenho; v) criar um ambiente de sala de aula comunicativo, onde haja liberdade de expressão, ajudando o professor a ter uma visão global do ensino e uma melhor perceção das dificuldades dos alunos; e vi) integrar a avaliação formativa no processo de ensino, pelo retorno que este tipo de avaliação devolve ao aluno sobre o seu desempenho.

No que refere à aprendizagem da álgebra, uma parte da estrutura algébrica e dos significados podem ser construídos partindo da experiência dos alunos em contextos operacionais aritméticos (Gravemeijer, 2005), dos quais ressalta a intuição (NCTM, 2000), e nos quais o aluno é conduzindo à construção de expressões algébricas genéricas e estruturadas (Sfard, 2008). A comunicação em matemática não pode reduzir-se à linguagem técnica (Steinbring, 2006), mas sim à condução do aluno na construção do seu próprio raciocínio bem como da comunicação que faz desse raciocínio (Bussi & Mariotti, 2008), onde os signos e a atividade sígnica (Peirce, 1978) criam dificuldades na aprendizagem (Rojano, 2002; Sfard & Linchevski, 1994).

Relativamente às funções, as tabelas, os gráficos e os problemas em linguagem natural constituem um meio de tratamento algébrico (Ursini & Trigueros, 2004). Por sua vez, um *parâmetro* numa função é um objeto matemático que, quando substituído por valores numéricos, identifica cada um dos elementos de uma determinada função ou família de funções. Um parâmetro numa função pode ser representado por uma letra que assume diferentes significados, dependendo do contexto algébrico em que se insere (Arcavi, 2006; Pereira & Saraiva, 2008; Ursini & Trigueros, 2004).

Os signos têm extrema importância na razão e na comunicação matemática (Peirce, 1978), porque a matemática depende de um uso intensivo de diferentes signos, tais como letras, diagramas, termos, expressões, notações, registos orais, gestuais e escritos, algoritmos, procedimentos, operações (D'Amore, 2006; Radford, 2006), bem como da sua representação em diferentes registos de representação (Duval, 1995, 2006). Na atividade sígnica, a experiência algébrica dos alunos com tarefas de natureza aberta é essencial – elas permitem-lhes compreender cada experiência e considerá-la como preparação para um trabalho algébrico profundo. Quando, na resolução de uma tarefa matemática, se extrapolam os dados iniciais e se tornam explícitos novos desconhecidos, que passam a ser novos objetivos da tarefa, desencadeia-se um novo conjunto de estratégias que relaciona esses desconhecidos entre si por meio de condições e procedimentos algébricos que se podem aplicar a famílias de problemas similares (Filloy et al., 2007); evoluindo-se gradualmente em generalização, até à criação de modelos formais independentes dos dados da tarefa inicial (Gravemeijer, 2005), adquirindo-se uma noção estrutural dos mesmos. Quando este processo é mediado pelo professor, através da promoção de raciocínios que levam o aluno a focalizar-se em aspetos particulares da tarefa, a recorrer a experiências matemáticas anteriores, a elaborar sínteses do raciocínio (Bussi & Mariotti, 2008; Sfard, 2008), facilitam-se os próprios processos cognitivos envolvidos, tais como o processo de aprendizagem e de resolução de problemas.

Com este estudo pretendia-se promover e conduzir a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos na aprendizagem da matemática de alunos do 11.ºano de escolaridade, concretamente na aprendizagem dos parâmetros em funções. Partindo de um método de ensino construído para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos matemáticos genéricos e estruturados, pretendíamos responder às seguintes questões: *I) Como é que o método de ensino construído funciona como um mediador da atividade do professor? II) Como é que as tarefas matemáticas elaboradas e implementadas com base no método de ensino construído funcionam como artefactos de mediação semiótica de significados matemáticos dos alunos?* Para atingir este objetivo e responder a estas questões, construímos e implementámos um método para ensinar matemática que aplicámos aos parâmetros em funções com tarefas específicas, construídas segundo o método.

Este método integra três níveis de ensino e quatro graus de significados. Os três níveis foram construídos sob um crescendo de independência e estrutura algébrica em concordância com os fundamentos teóricos do estudo. No 1.º nível o aluno atribui significado e representa em múltiplos registos de representação, num contexto aritmético em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) são concretizados por valores numéricos concretos, por um conjunto de valores numéricos ou por um intervalo de valores numéricos. No 2.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou no 1.ºnível e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente não são concretizadas numericamente e o(s) parâmetro(s) são concretizado(s) por valores numéricos concretos, por um conjunto de valores numéricos ou por um intervalo de valores numéricos. No 3.º nível o aluno trabalha com significados e representações com que já trabalhou nos 1.º e 2.º níveis e constrói novos significados e novas representações em múltiplos registos de representação, num contexto algébrico em que as variáveis dependente e independente e o(s) parâmetro(s) não são concretizados numericamente. No 3.º nível, o trabalho do aluno torna-se independente das situações específicas concretas com que trabalhou nos 1.º e 2.º níveis; o aluno significa e representa, quer com base nos significados que já construiu, quer com os novos significados e novas representações. As tarefas da proposta pedagógica deste estudo foram construídas de acordo com esta estrutura.

Para a construção dos graus de significados do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções foi considerada a atividade sígnica dos alunos sob as etapas de primeiridade, secundidade e terceiridade definidas por Peirce (associadas, aos signos ícone, índice e símbolo e ao raciocínio abdutivo, indutivo e dedutivo) e a mediação semiótica do professor, associada ao conceito de ciclo didático, definido por Bussi e Mariotti. Em cada um dos três níveis (N1, N2, N3), o aluno constrói significado de grau um, dois e três (S1, S2, S3). Pode construir ainda significados de grau zero, em resultado da construção de significados que não se enquadram no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática (erros, imprecisões/incorreções).

A metodologia de investigação usada neste estudo foi qualitativa. A investigadora foi a professora. O método de ensino foi implementado em sala de aula numa turma com doze alunos do ensino secundário, do 11.ºano, em que sete desses doze alunos eram internos à disciplina e frequentavam as aulas assiduamente. Os dados foram recolhidos durante três meses, aquando do estudo do tema *Funções*. Foram constituídos, dentro da turma, três grupos, dois grupos com dois alunos e um grupo com três alunos. Foram recolhidos dados dos três grupos. Antes da implementação do estudo foram feitas entrevistas para melhor compreender os significados que os alunos traziam dos anos letivos transatos relativamente ao parâmetro em funções. A recolha dos dados foi feita através de gravações áudio, de transcrições e de registos da investigadora. As gravações áudio e as transcrições foram usadas nas entrevistas realizadas. Todas as entrevistas foram gravadas e posteriormente transcritas. A tarefa da entrevista feita no final do estudo [Parâmetros, funções e geometria] que foi construída sob o 3.º nível do método de ensino aplicado aos parâmetros em funções, com o propósito de compreender os significados matemáticos que os alunos constroem em contextos que envolvem parâmetros em funções após o estudo.

Para dar resposta às questões de investigação, foram identificadas unidades de análise resultantes das intervenções escritas e orais que os alunos e a professora investigadora realizaram, durante as aulas em que o método de ensino foi implementado. Foram selecionadas sete unidades de análise: *'A vedação do jardim'*, *'O passeio das amigas'*, *'Funções: composta e inversa'*, *'A caixa de volume máximo'*, *'O triângulo inscrito numa circunferência'*, *'Parâmetros em funções racionais'* e *'Parâmetros, funções e geometria'*. Sobre estas unidades de análise fizeram-se três tipos de análise: a de primeira ordem, a de segunda ordem e a de terceira ordem. A análise de primeira ordem é uma compilação do que se observou e registou, o que inclui os registos escritos pelos alunos, a transcrição das gravações das aulas e das entrevistas e os registos da professora investigadora. Esta fez ainda uma seleção dos momentos que considerou mais relevantes para o estudo. Para a análise de segunda ordem selecionaram-se os dados mais representativos de cada unidade de análise que foram analisados segundo as dimensões, categorias e subcategorias. A análise de terceira ordem baseia-se numa leitura transversal dos resultados da análise de segunda ordem, permitindo colocar questões e relacioná-las, de onde resultaram as respostas às questões do estudo.

7.2. Apresentação das conclusões

Nesta secção são apresentadas as conclusões do estudo respeitantes ao método de ensino e às tarefas como um artefacto.

7.2.1. A mediação pelo método de ensino

Durante a implementação do método, a professora teve um referente diretamente associado àquilo que ela, em cada momento, quis ver trabalhado pelos alunos. Conduzindo-os de forma sequencial e encadeada, até a essa intenção. Neste método, essa intenção definiu-se pelo S3 em cada nível, que correspondeu ao que era pedido em cada questão do enunciado das tarefas, e tinha como meta atingir o significado de grau 3 no nível 3, que correspondeu ao que se pretendia na última questão das tarefas. Renovando-se o ciclo, em cada nova tarefa.

Durante a resolução de cada questão da tarefa foi necessário à professora identificar com o máximo de clareza quais os significados que os alunos estavam a atribuir em cada momento. Foi por isso necessário à professora estar atenta às dúvidas que os alunos lhe colocavam perante a interpretação do enunciado, às ideias que verbalizavam quando começavam a trabalhar sobre o esquema que acompanhava o enunciado de cada tarefa, àquilo que começavam a escrever na folha de respostas, às hipóteses de resolução que discutiam no grupo e às discussões que surgiram acerca da escolha dos valores para concretizarem o parâmetro na primeira questão. Todos estes indicadores permitiram à professora saber quais eram os significados de grau 1 que estavam a ser construídos pelos alunos nos grupos de trabalho. Nesta fase, foi fundamental deixar que os alunos discutissem, trocassem significados entre eles, e que definissem quais os caminhos de resolução que, depois da discussão, iam seguir. Também foi fundamental incentivar os alunos a fazerem concretizações com vários valores, pedir-lhes que não tivessem pressa em avançar para as questões seguintes e que empreendessem algum tempo na experimentação, promovendo o livre uso de esquemas, tabelas e linguagem natural e a relação entre tais representações. Nesta fase a mediação semiótica da professora aos significados matemáticos dos alunos foi determinante para que estes tivessem explorado os enunciados propostos, e tivessem concretizado os esquemas que os acompanhavam e que não tinham, à partida, valores concretos, o que lhes permitiu iniciar a resolução das tarefas propostas. Estas concretizações revelaram-se fundamentais porque promoveram a generalização nos níveis seguintes.

Complementarmente, ao prosseguirem com a(s) estratégia(s) que definiram na fase da discussão, os alunos entraram na representação escrita dos significados e começaram a relacionar significados associados à exploração do esquema da tarefa. Estas associações permitiram à professora perceber quais eram as relações matemáticas que os alunos estavam a construir sobre o esquema. Ou seja, quais eram os significados de grau 2 que estavam a ser construídos pelos alunos no primeiro nível. Em seguida, quando os alunos responderam à primeira questão das tarefas foram construídos os significados de grau 3 do primeiro nível.

Nas questões seguintes, as referentes ao 2.º nível, os alunos iniciaram um ciclo idêntico. Primeiro discutiram o enunciado, acerca do que é que a questão pede, como é que podem responder à questão, o que têm de fazer e usar (se vão resolver a questão usando ou não a calculadora para determinar máximos/mínimos), o que é que necessitam matematicamente para determinarem o que é pedido no enunciado (a construção de uma função, o estudo dessa função). Ao estar atenta a estes significados construídos pelos alunos, a professora tomou conhecimento de quais foram os significados de grau 1 que foram atribuídos no nível 2. Depois da discussão do enunciado, os grupos iniciaram as representações escritas e, ao associarem significados, entram na significação de grau 2. Nesta fase, a atividade dos alunos foi muito mais intensa do que nas restantes. Na fase N2S2 os alunos trataram e converteram muitas representações, através da construção algébrica de funções, do seu tratamento, da consequente conversão gráfica, da resultante interpretação em linguagem natural, do retorno aos significados construídos no primeiro nível como forma de justificar o que estava a acontecer à função construída no 2.º nível, entre outros significados. E, quando estes significados se estruturavam na resposta, a professora tomou conhecimento de quais os significados de grau 3 que estavam a ser atribuídos no nível 2.

Contudo, após a fase de discussão entre os alunos do grupo, quando algum aluno, ou algum grupo, não havia conseguido relacionar significados matemáticos a partir do esquema da tarefa, a professora entendia que estes alunos ainda não estavam a conseguir construir significados de grau 2. Sempre que isso aconteceu foi necessária a mediação da professora. A forma de mediação foi a seguinte. Primeiro, levar o aluno (ou o grupo) a fazer uma reconstrução dos significados que tinham sido construídos até essa dificuldade ser consciencializada pelos alunos e/ou ter sido percecionada pela professora. Com este procedimento, a professora tomou consciência da fase em que o raciocínio dos alunos se encontrava e o aluno fez uma síntese dos significados que construiu até esse momento. Perante isto, foi necessário a professora compreender: i) se os alunos não conseguiam relacionar significados porque ainda não tinham entendido o enunciado e por isso não tinham construído significados de grau 1; ou se ii) os alunos não conseguiam relacionar os significados que tinham construído por não saberem matematicamente como fazê-lo e, apesar de terem construído significados de grau 1, não os conseguiam transformar em significados de grau 2. Nestes dois casos foi necessária a mediação da professora. Quando a causa da dificuldade foi do tipo i), a professora retornou ao enunciado, promoveu e guiou uma nova discussão sobre o enunciado, para que houvesse construção de significados S1. Quando a causa da dificuldade foi do tipo ii), a professora conduziu o(s) aluno(s) a fazer(em) uma retrospetiva dirigida aos conhecimentos matemáticos específicos requeridos para a associação dos significados de grau 1 construídos.

Na última questão da tarefa, a referente ao 3.º nível, os alunos iniciaram um ciclo idêntico. Primeiro discutiram o enunciado, acerca do que é pedido, e de como é que podem responder à questão, o que têm de fazer (mas nesta fase com todos os valores da função genéricos). Ao estar atenta a estes significados construídos pelos alunos, a professora tomou conhecimento de quais foram os significados de grau 1 que foram atribuídos no nível 3. Depois da discussão do enunciado, os grupos iniciaram as resoluções e entraram na significação de grau 2. Nesta fase, a atividade dos alunos baseou-se muito no que tinham construído no nível 2. Na fase N3S2 os alunos trataram e converteram algumas representações da função com os valores genéricos para o parâmetro e para as variáveis. Mas, para construírem tais representações e conversões do N3S2, os alunos retornaram com muita regularidade aos significados N2S3 que construíram nas questões anteriores. A fase mais difícil para a maioria dos alunos foi a atribuição de significados S3 no nível 3, que dependeu da estruturação e das relações que se deduziam do que tinham construído na questão com todos os valores genéricos. Contudo, quando estes significados se estruturavam na resposta final, a professora tomou conhecimento de quais os significados de grau 3 que estavam a ser atribuídos no nível 3. Foi frequente acontecer o seguinte: os alunos que alcançaram no grupo o significado N3S3 retornaram ao N1S3 para validarem o significado N3S3 que construíram.

Nesta fase do nível 3, sempre que os alunos não conseguiam atribuir significados N3S3, a professora optou por abrir a discussão à turma, para que a sua mediação pudesse ser enriquecida com os significados N3S3 dos alunos que os conseguiram alcançar. Esta fase marcou a iniciação à mediação para a construção de N3S3 e constituiu o início da discussão coletiva e da partilha dos resultados e das estratégias usadas pelos vários grupos na turma. A intenção da professora nesta fase foi conduzir todos os alunos para o N3S3 porque foi este significado que marcou a síntese dos significados. A mediação que a professora usou teve sempre os mesmos propósitos e foi a seguinte: 1.º) conduzir em discussão coletiva os alunos a fazerem uma retrospetiva dos significados que construíram no nível 1 e no nível 2, essencialmente, uma retrospetiva dos N1S3 e dos N2S3; 2.º) Com base nos N1S3 e nos N2S3 conduzir os alunos aos N3S3.

Durante a implementação do método, que se traduz na implementação das tarefas e na mediação à resolução que os alunos constroem, também ocorreram significados de grau zero, em várias fases do método e de forma irregular. Tais significados, sempre que foram consciencializados pela professora foram mediados para que se tornassem semióticos. Usualmente o S0 esteve associado a erros matemáticos que condicionaram a resolução das questões ou a pequenas imprecisões/incorreções que não condicionaram a continuidade da resolução da tarefa. Mas por vezes as imprecisões tiveram origem, não em desconhecimento matemático, mas, em desconcentrações pontuais dos alunos, e que a causa não foi possível apurar neste estudo. Porém, este segundo tipo de S0 foi fácil de mediar porque, como a causa foi a desconcentração e não o desconhecimento matemático, normalmente bastou uma pequena focalização da professora para que o aluno o transformasse em significado semiótico.

Os S0 que tiveram origem em desconhecimento matemático foram mediados sempre de forma organizada e do seguinte modo: 1.º) Levar o aluno a fazer uma retrospetiva dos significados que construiu até esse S0; 2.º) Isolar o S0, ou seja, no momento que que aluno comete o erro, durante a reconstrução que faz, o raciocínio dele deve parar nesse instante, e a professora deve desfazer o conceito matemático errado que levou ao erro, promovendo a reiniciação do raciocínio do aluno a partir desse instante, retomando-se os significados semióticos.

Durante o estudo, sempre que a professora consciencializou o significado (S0, S1, S2 ou S3) que o aluno estava a atribuir em cada fase da resolução das tarefas, conduziu-o de um significado de grau 0, ou de grau 1, até a um significado de grau 3. E partindo do que pretendia da atividade matemática do aluno em cada contexto algébrico, mediou-a de um modo organizado. Neste âmbito, cada episódio de mediação decorreu de três formas distintas, para que houvesse: i) construção de significados entre os alunos; ii) construção de significados de grau 3, a partir de significados de grau 0, de grau 1 e de grau 2; e iii) construção de um novo significado de grau 3 que sintetizasse os significados de grau 3 já construídos. Foi a construção de um novo significado de grau 3 (que sintetize os significados de grau 3 já construídos) que promoveu a criação de significados de grau 1 no episódio de mediação seguinte – quer esse episódio de mediação seguinte tivesse sido uma nova tarefa, quer tivesse sido um problema usual implementado nas aulas que intermediavam as de implementação das tarefas.

Neste âmbito, este método de ensino foi um instrumento confortável para a própria atividade de mediação da professora. De facto, durante a sua implementação, em cada mediação semiótica, a professora teve um referente diretamente associado à intencionalidade da questão que quis ver trabalhada pelos alunos. Conduzindo-os de forma sequencial e encadeada até essa intenção. Essa intencionalidade foi o S3. A forma como os significados S1, S2 e S3 do método funcionou no raciocínio dos alunos, mediados através da professora e das tarefas construídas sob o método, foi uma implementação da teoria de Peirce (1978) [no que refere aos signos e aos raciocínios] e da teoria de Bussi e Mariotti (2008) [no que refere à mediação]. Contudo, para a construção de uma metodologia de mediação dos significados de grau 0 deste método, não encontramos resposta na teoria de Peirce. Embora Peirce tenha feito referência a signos que não são *representamen*, a sua ocorrência no raciocínio dos alunos impossibilitou a professora de os prever no encadeamento S1->S2->S3. Apesar destes signos (não *representamen*) constituírem uma exceção que os professores não desejam ver no raciocínio dos alunos, por representarem erros/imprecisões/incorreções no sistema de evidências e verdades matemáticas, eles ocorrem. Acresce ainda que, muitas vezes, neste estudo, a ocorrência de S0 gerou contextos matematicamente muito ricos, pela mediação que a professora lhes fez e que conduziu os alunos a significados estruturados e a consequentes recapitulações e sínteses, que, comprovadamente, auxiliaram a resolução das tarefas e promoveram a aprendizagem do conceito de parâmetro. Por isto, a inexplicabilidade da ocorrência de muitos dos signos que não são *representamen* no raciocínio humano impossibilitou-nos de contemplar os S0 na construção dos instrumentos destinados à promoção da mediação – as tarefas. Foi nesta vertente que a mediação da professora se revelou fundamental no decurso do estudo. Donde inferimos que a complementaridade tarefas/professora, constitui, em si, um artefacto de mediação de significados matemáticos construídos pelos alunos. Deste estudo, concretamente da constatação da ocorrência de signos que não se enquadraram no sistema de evidências e verdades matemáticas, inferimos também a validade dos argumentos que fundamentaram a *triangulação* (Schoenfeld, 2002) da teoria de Peirce (1978) com a de Bussi e Mariotti (2008), aquando da construção deste método de ensino.

Ou seja, o método conduziu a professora à forma como mediou os significados dos alunos localizando em que fase está o raciocínio do aluno e conduzindo-o sequencialmente até ao S3, através da retrospetiva/reconstrução dos significados que foram construídos, através das sínteses e através das tarefas que promoviam essas retrospetivas e essas sínteses. Porém, a imprevisibilidade da ocorrência de muitos dos significados de grau 0 no raciocínio dos alunos, sendo um fator não controlável, constituiu-se uma dificuldade na construção das tarefas.

No que refere à mediação, os resultados deste estudo corroboram a teoria de Bussi e Mariotti (2008), estendendo-a em relação à ordem de ocorrência dos significados (S1->S2->S3) que este método contempla, bem como ao próprio método, porque este funciona como um artefacto da própria atuação mediadora do professor. De facto, neste estudo, a teoria de Bussi e Mariotti (2008) é afirmada com a forma de mediação da professora aos significados dos alunos, que neste estudo também resultou em retrospetivas e sínteses, mas, organizadas segundo significados que ocorrem sequencialmente e que funcionam em dois sentidos. Por um lado são um instrumento de mediação para o aluno através das tarefas, por outro lado são um instrumento de mediação da própria atividade do professor.

7.2.2. A mediação pelas tarefas

As tarefas iniciaram-se a partir de um enunciado sem valores concretos que apelava à concretização dos alunos. Na implementação das tarefas, a professora apelou à experimentação, incentivando os alunos ao livre uso de esquemas, tabelas e linguagem natural e à relação entre tais representações. Nessa fase, a mediação semiótica da professora aos significados matemáticos dos alunos foi determinante para que eles explorassem os enunciados propostos, e concretizassem os esquemas que os acompanhavam e que não tinham, à partida, valores concretos, o que lhes permitiu iniciar a resolução das tarefas propostas.

Na interpretação do enunciado, os alunos começaram por usar significados que evidenciaram o início de uma estratégia de resolução, que, por serem os primeiros, geram 'a hipótese'/'a intenção'/'o caminho a seguir' (significados de grau1). Foram estes significados que lhes permitiram definir as estratégias que implementaram nos raciocínios indutivos e dedutivos que se seguiram em complementaridade com os abdutivos que construíram.

As tarefas induziram o aluno, em cada questão, a recuperar significados que construíram nas questões anteriores. A calculadora gráfica, bem como outros artefactos, entre os quais o próprio esquema que acompanha o enunciado que foi (re)explorado ao longo da resolução das questões, permitiu aos alunos construírem significados novos e sintetizarem significados já construídos, essencialmente nos 2.º e 3.º níveis do método. Na fase de discussão de resultados na turma, a conjunção de resoluções resultou em sínteses (concordantemente com Bussi e Mariotti, 2008) que estruturaram, não apenas a resolução matemática das questões das tarefas, mas também as diferentes estratégias usadas pelos grupos para a resolução das questões. Estes resultados convergem para o conceito de tarefa defendido por Rezat e Sträber (2012), bem como Iarke, Strømskag, Johnson, Bikner-Ahsbahs, & Gardner (2014), em que as tarefas podem ser vistas como tendo um papel mediador no ensino e na aprendizagem da matemática.

Da resolução das tarefas é de registar os raciocínios abdutivos e indutivos construídos nos 2.º e 3.º níveis resultantes dos raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos construídos no início da tarefa. Ou seja, construídos no 1.º nível. Este encadeamento de raciocínios ocorreu ao longo da implementação de todas as tarefas. Nos raciocínios construídos pelos alunos, a decisão de *voltar atrás* e *parar em aspetos particulares da resolução* foi feito, muitas vezes, pelos próprios alunos (concordantemente com Bussi e Mariotti, 2008), ao sentirem necessidade de justificar e confrontar os procedimentos atuais e as estratégias que assumiram em cada momento da resolução da tarefa, com os significados que tinham construído na resolução das questões anteriores. Assim como, em confrontá-los com os resultados e com as estratégias dos outros grupos. A justificação dos procedimentos atuais com os raciocínios construídos nas questões anteriores foi feita pelos alunos quer em questões do 2.º nível, quer em questões do 3.º nível. Estes resultados convergem para os conceitos de aprendizagem centrada no aluno em que o próprio aluno coloca a si mesmo questões que o induz à reflexão sobre a própria aprendizagem, de acordo com o defendido por Evans e Sawm (2015) e Bingalbali e Bingalbali (2015).

Na última questão das tarefas os alunos construíram significados, transformaram e converteram representações em contextos genéricos. Em todas as questões das tarefas referentes ao 3.º nível do método, ocorreram significados que estruturaram e sintetizaram os anteriores, quer por resolução dos alunos, quer por discussão na turma com mediação da professora. Estes resultam, por um lado, do encadeamento de significados que se constrói de umas alíneas para as seguintes; por outro lado, da (re)visita aos raciocínios desenvolvidos nas questões relativas ao 1.º e 2.º nível do método. Isto deu origem a significados que, na fase final das tarefas, facilitaram e tornam naturais as *sínteses* (concordantemente com Bussi e Mariotti, 2008) que no fim da última questão da tarefa estruturaram os principais significados construídos. De facto, a ordem das questões das tarefas, concertada com os três níveis algébricos, desde contextos concretos até contextos genéricos, ensinou aos alunos uma forma de raciocinar (desde o concreto até ao genérico).

A passagem de um nível para outro dependeu da ordem e do próprio encadeamento em que as questões foram apresentadas nas tarefas. Tal estruturação das tarefas resultou do método concebido e permitiu que os alunos tivessem partido do nível 1, transitassem para o nível 2, e, a seguir, alcançassem o nível 3. No nível 1 e no nível 2 do método, os alunos fixaram o valor do parâmetro e, em consequência dessa concretização, obtiveram condições que definiam o valor das variáveis e compreenderam que a concretização do parâmetro condicionava os valores das variáveis. Esta compreensão estendeu-se a contextos em que o parâmetro é genérico. Ou seja, ao 3.º nível. Este raciocínio dedutivo mostrou a compreensão do conceito de parâmetro como *algo que pode determinar o intervalo de variação de alguma variável*. Este resultado remete-nos para o parâmetro visto como a composição de generalizações, pois o 2.º nível pode ser considerado como uma 1.ª generalização e o 3.º nível pode ser considerado como uma generalização da 1.ª generalização, à semelhança do que defendem Trigueros e Ursini (2003).

A interpretação que foi dada a uma *letra* $(x, y, p, \dots)$ no 1.ºnível do método foi semelhante à que usualmente os alunos fazem para uma incógnita quando resolvem uma equação. Por um lado, a escrita algébrica é a mesma, isto é, $p = 10$ (por exemplo), por outro lado, quando se fixa algo desconhecido num valor concreto, resolve-se o problema. O mesmo acontece com a determinação da incógnita na resolução de um problema ou de uma equação. Desta interpretação que foi dada à *letra* $(x, y, p, \dots)$ no 1.ºnível do método [*letra* $(x, y, p, \dots)$ que usualmente representou o parâmetro nas tarefas], é possível inferir que o significado de parâmetro que os alunos experimentaram ao longo deste estudo foi: *parâmetro é algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto*. Este resultado converge para o que os autores Trigueros e Ursini (2003) defendem acerca da construção do conceito de parâmetro.

O que se registou em relação ao uso das letras foi que, na resolução das primeiras questões de todas as tarefas, os alunos tenderam a usar as letras como rótulos, que, nas questões seguintes assumiram o papel de variáveis, ou de parâmetros, para a designação de algo no esquema inicial e como início de alguma estratégia que desenvolveram no decurso da resolução. Esta sequência de significados promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita, enquanto variável de uma função e enquanto parâmetro, na transformação e conversão de representações em registos gráficos, algébricos, esquemáticos e em linguagem natural. Este resultado corrobora conceito de aprendizagem matemática defendido por Duval (2006).

A exploração que os alunos fizeram ao longo da resolução das tarefas do estudo promoveu a compreensão da noção de letra enquanto incógnita numa equação literal e numa inequação literal. No que refere ao parâmetro e à incógnita numa equação ou inequação literal, os alunos calcularam o valor que x assume para o valor concreto do parâmetro. Após essa concretização, atribuíram um novo significado matemático à expressão, considerando-a como uma equação/inequação literal que resolvem em ordem a uma das incógnitas. Em seguida, as equações e inequações literais que os alunos construíram foram interpretadas como funções, nas quais cada uma das incógnitas passou a ser interpretada como variável dependente ou independente dessa função.

No final do estudo, os alunos evidenciaram uma compreensão bastante clara do conceito de parâmetro em funções, mostraram compreender o conceito de variável, de constante, de incógnita e de parâmetro em contextos algébricos em que trabalharam com expressões que continham apenas letras. Atribuíram significados na transformação e conversão de representações, em registos gráficos, algébricos, esquemáticos e em linguagem natural (concordantemente com Duval, 2006), em que, a cada letra, era requerida a construção de um significado. Esta compreensão concorda com a teoria de Sfard (2002), no que refere à noção estrutural que os alunos adquirem de função.

7.3. Recomendações

A construção de significados que ocorreu em cada nível na implementação deste estudo foi mediada através das tarefas matemáticas elaboradas e das discussões entre os alunos e a professora. Ao longo da implementação da proposta pedagógica, as respostas dos alunos às questões referentes ao 1.º nível e ao 3.º nível tenderam a ser menos extensas e menos detalhadas do que as respostas relativas ao 2.º nível. Em futuras implementações do método, importa compreender se a distribuição desta atividade dos alunos pelos níveis resulta novamente não equitativa, bem como que fatores influem nessa distribuição. Importa ainda compreender como é que a distribuição da atividade matemática pelos níveis depende da atividade de mediação semiótica do professor e das tarefas propostas aos alunos.

Da implementação deste estudo verificou-se que, na resolução das questões referentes ao 3.º nível, os resultados obtidos com o valor genérico do parâmetro foram, recorrentemente, testados pelos alunos com os valores concretos experimentados no 1.º nível. Esta constatação permitiu-nos induzir que a passagem de um nível para o seguinte depende da ordem e do encadeamento em que as questões são apresentadas nas tarefas. Tal estruturação das tarefas resulta do método concebido, e permitiu aos alunos partirem do nível 1, transitarem para o nível 2, e, a seguir, alcançarem o nível 3 (que é o nível mais elevado e o mais desejado que os alunos alcancem). Mas, como tema para trabalhos futuros, parece-nos ser fundamental para compreendermos melhor a atividade matemática do aluno em processos de generalização, investigar se durante a transição de contextos matemáticos concretos para genéricos, o aluno depende do retorno aos significados que construiu no nível concreto para construir significados estruturados no nível genérico.

Este estudo teve como objetivo promover e conduzir a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos na aprendizagem da matemática, concretamente na aprendizagem dos parâmetros em funções em alunos do 11.º ano de escolaridade. E partiu de um método de ensino construído para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos matemáticos genéricos e estruturados. Em futuros estudos, importa implementar o método com o objetivo de promover e conduzir a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos na aprendizagem doutros temas matemáticos, quer dentro da álgebra ou noutro domínio da matemática.

8. Referências

Alro, H., & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: AUTENTICA.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista latino americana de investigación en matemática educativa, 15*(2), 137-169.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, 29-47.

Atweh, B., Forgasz, H., & Nebres, B. (2013). *Sociocultural Research on Mathematics Education: An International Perspective*: Taylor & Francis.

Berrincha, R., & Saraiva, M. J. (2009). Das igualdades numéricas ao estudo das equações do 1º grau. *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática: SPCE-SEM: Vila Real.*

Bingolbali, E., & Bingolbali, F. (2015). PRINCIPLES OF STUDENT CENTERED TEACHING AND IMPLICATIONS FOR MATHEMATICS TEACHING. *Papers and posters for presentation in CERME 9, February 2015*, 13.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365): Springer.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 412-446.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories And Methods*: Pearson/Allyn and Bacon.

Burton, L. L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education (2nd ed., pp. 746-783). New York: Routledge*.

Carthy, Y. G. M. (2013). *Bringing the NCTM Standards to Life: Exemplary Practices for Middle School*: Taylor & Francis.

Carvalho e Silva, J., Pinto, J., & Vladimiro, M. (2010). ALEPH 10, ASA. 2, 62-123.

Center for Science, M. E. E., Board, N. C. T. M. M. S. E., & Council, N. R. (1998). *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium*: National Academies Press.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6.

Clarke, D., Strømskag, H., Johnson, H. L., Bikner-Ahsbahs, A., & Gardner, K. (2014). *MATHEMATICAL TASKS AND THE STUDENT*. Paper presented at the Cite as: Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D.(Eds.).(2014). Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1). Vancouver, Canada: PME.

Costa, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores. Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra*, 257-273.

Costa, C. (2005). *Modelo do Pensamento Visual-Espacial: Transformações Geométricas no Início da Escolaridade*. Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 177-196.

D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*: Editora LIVRARIA DA FISICA.

Damásio, A. (2010). O livro da consciência. *A Construção do Cérebro Consciente. Lisboa: Temas e Debates*.

Dewey, J. (2007). Cohen, M. D. (2007). Reading Dewey: Reflections on the study of routine. *Organization Studies*, *28*(5), 773-786.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*: Peter Lang.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 45-82.

Edwards, E. L., & Trust, M. E. (1990). *Algebra for Everyone*: Mathematics Education Trust, National Council of Teachers of Mathematics.

Evans, S., & Sawm, M. (2015). Developing student questioning when problem solving: the role of sample student responses. *CERME 2015*.

Fidalgo, A. (1995). *Semiótica: a lógica da comunicação*: Universidade da Beira Interior.

Filloy Y., Rojano, T., & Puig, L. (2007). Educational algebra: *A theoretical and empirical approach* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H., & Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. In The Legacy of Hans Freudenthal (pp. 109-135). Springer Netherlands.

Gagatsis, A., Mousoulides, N., & Elia, I. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 197-224.

Gibbs, R. W., & Steen, G. J. (1999). *Metaphor in Cognitive Linguistics: Selected Papers from the Fifth International Cognitive Linguistics Conference, Amsterdam, July 1997*: John Benjamins Publishing Company.

Giménez, J., Santos, L., & Ponte, J. P. d. (2004). La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes. *Biblioteca de Uno; 204*.

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Springer Netherlands.

Gravemeijer. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it. *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*, 83-101.

Hart, K. M., & Team, C. C. C. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*: Anthony Rowe Publishing.

Hillman, T. (2014). Tracing the Construction of Mathematical Activity with an Advanced Graphing Calculator to Understand the Roles of Technology Developers, Teachers and Students. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 21*(2), 1.

Kaput, J. J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*: National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2012). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*: Taylor & Francis.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 11-49.

Keitel, C., & Kilpatrick, J. (2005). Mathematics education and common sense. In *Meaning in mathematics education* (pp. 105-128). Springer US.

Kuratowski, K., & Mostowski, A. (1966). Set theory. With an introduction to descriptive set theory. Translated from the 1966 Polish original. Second, completely revised edition. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 86*.

Lerman, S. (1994). Changing focus in the mathematics classroom. In C*ultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 191-213). Springer Netherlands.

Lester, F., Jr. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85): Springer Berlin Heidelberg.

Lima, R. N., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational studies in mathematics, 67*(1), 3-18.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). THE STUDY OF FUNCTIONAL RELATIONSHIPS AND THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF VARIABLE IN 8 (TH) GRADE STUDENTS. *REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA-RELIME, 11*(2), 195-231.

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Moura, A. (2009). Matemática A, 11.ºano, Porto Editora. *vol.* 2.

Nobre, S., Amado, N., Carreira, S., & Ponte, J. P. d. (2011). Algebraic thinking of grade 8 students in solving word problems with a spreadsheet.

Pais, S., & Saraiva, M. J. (2011). O significado das representações da função afim para alunos do '8.° ano de escolaridade. *Quadrante, vol. XX, n.º*2, pp. 17-55. Lisboa: APM.

Peirce, C. S. (1978). *ÉCRITS SUR LE SIGNE, Rassembllés, traduits et comentés par Gérard Deledalle* (Éditions du Seuil, Paris ed.).

Peirce, C. S., Houser, N., Kloesel, C. J. W., & Project, P. E. (1998). *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings*: Indiana University Press.

Pereira, M. N., & Saraiva, M. J. (2005). Tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das sucessões. *Quadrante, XIV*, 43-67.

Pereira, M. N., & Saraiva, M. J. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7º ano de escolaridade. *Investigation en education Matemática XII. Badajoz: Sociedade Española de Investigation en Education Matemática, SPCE e APM*, 517-527. Badajoz: SEIEM.

Polya, G. (2008). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*: Princeton University Press.

Ponte. J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. Em J. P. Ponte (Ed.), Educação matemática: Temas de investigação (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 25, 105-132.Ponte. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Ponte, & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1. º Ciclo*: Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Matos, A., & Branco, N. (2009). Sequências e funções. Lisboa: DGIDC.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2006). Semiótica cultural y cognición. *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica. México*.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM, 44*(5), 641-651.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. *Handbook of international research in mathematics education, 1*, 143-161.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational studies in mathematics, 53*(3), 229-254.

Santaella, L. (2001). *Matrizes da linguagem e pensamento: sonora, visual, verbal: aplicações na hipermídia*. Editora Iluminuras Ltda.

Santaella, L. (2002). *Semiótica aplicada*. Cengage Learning Editores.

Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento n 4 al n, 19*, 74-83. Itália: Palermo.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração. *Projecto IMLNA-Promover a aprendizagem Matemática em Números e Álgebra*.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. *Handbook of international research in mathematics education*, 470-519.

Schoenfeld, A. H. (2007). *Assessing mathematical proficiency* (Vol. 53). Cambridge university press, 59-73.

Serra, P. (1996). Peirce e o signo como abdução. *C ovilhã: Universidade da Beira Interior*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra *Learning mathematics* (pp. 87-124): Springer.

Sfard, A., & McClain, K. (2002). *Analyzing Tools: Perspectives on the Role of Designed Artifacts in Mathematics Learning - A Special Double Issue of "The Journal of the Learning Sciences"*: Taylor & Francis Group.

Skemp, R. R. (2012). *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition*: Taylor & Francis.

Spinillo, L. L. M. E. A. G. (2006). *Psicologia Cognitiva: Cultura, Desenvolvimento E Aprendizagem*: UFPE.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*: Springer.

Steinbring, H. (2006). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction: An Epistemological Perspective*: Springer.

Sutherland, R., Rojano, T., & Bell, A. (2000). *Perspectives on school algebra* (Vol. 22). Springer Science & Business Media.

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 57-71): Springer.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*: Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learn Instr, 14*(5), 6-6. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.017

Tirosh, D., Tsamir, P., Leverson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2015). Unsolvable mathematical problems in kindergarten: are they appropriate? *CERME 2015*.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. *CBMS issues in mathematics education, 8*, 1-26.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra*, K-12, 8, 19.

Usiskin, Andersen, & Zotto. (2010). *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference*: Information Age Pub.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981). The genisis of higher mental functions. *J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology. Armonk: Sharpe.*

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods*: SAGE Publications.

9. Anexos

Anexo 1: Tarefas das Entrevistas Iniciais

Dia 3 de fevereiro de 2011: parte A

Tarefa n.º18, pág. 62, do livro ALEPH[10], vol.2. (Carvalho e Silva, Pinto, & Vladimiro, 2010)

Considera a função real de variável real definida por $f\ (x) = 2x - 1$. Determina todos os valores reais m para os quais é válida a igualdade $f(m^2) - 2\,f(m) + f(2m) = \frac{m}{2}$.

Tarefa n.º33, pág. 66, adaptada do livro ALEPH[10], vol.2. (Carvalho e Silva et al., 2010)

Uma função da família de funções quadráticas definida por $f\ (x) = 3x^2 + 6x - m$ tem um mínimo igual a 4. Determina o valor de m.

Dia 14 de fevereiro de 2011: parte B

Tarefa n.º4, pág. 103, adaptada do livro ALEPH[10], vol.2. (Carvalho e Silva et al., 2010)

Os zeros de uma função quadrática da família $f(x) = x^2 + bx + c$ são $p = -7$ e $q = -1$. Obtém o vértice da parábola que representa o gráfico dessa função.

Tarefa n.º4, pág. 123, do livro ALEPH[10], vol.2. (Carvalho e Silva et al., 2010)

Considera os polinómios:

$P(x) = (a^2 - 3a + 2)x^3 + 5x^2 - 3ax + 1$; $Q\ (x) = (a - 7)x^2 + ax + 3$

Determina o conjunto solução de todos os valores reais de a , para os quais a soma $P(x) + Q(x)$ é um polinómio do 2.ºgrau.

Anexo 2: Uma das tarefas da aula de matemática

Tarefa da aula do dia 21 de fevereiro de 2011 (Neves, Guerreiro, & Moura, 2009)

Tarefa n.º16, pág. 28, do livro Matemática A 11.ºano, Funções II, vol.2. (Neves et al., 2009)

Numa cuba foram colocados dois tipos de vinho com percentagens de álcool diferentes.

Tipo A – com 10% de álcool

Tipo B – com 13% de álcool

Sabemos que do tipo A foram colocados 100 litros e do tipo B x litros.

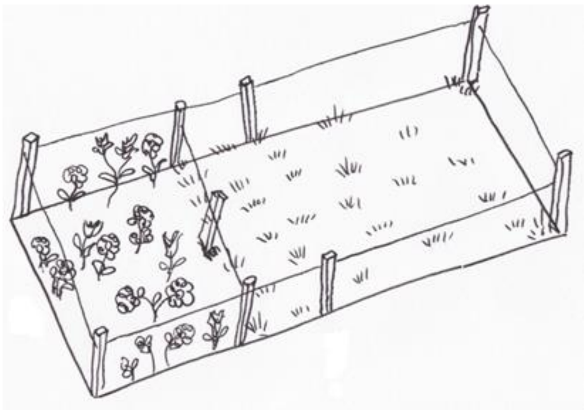
1. Escreve uma expressão $C = \frac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c, d números reais e $c \times d \neq 0$ que represente a percentagem final de álcool da mistura.
2. Determina quantos litros foram colocados do vinho tipo B, se a mistura tem 11,5% de álcool.

Anexo 3: Tarefa A vedação do Jardim

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Tarefa 1: *A vedação do jardim*

"Pretendemos construir uma cerca com um fio de arame para vedar um pequeno jardim retangular com uma determinada área, dividido em dois canteiros também vedados entre si por fio de arame. Que modelo matemático nos permite minimizar a quantidade de arame gasto, dependendo da largura, ou do comprimento, do jardim?"



1. Começa por considerar um valor concreto para a área do jardim:

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões do jardim (largura e comprimento) com a sua área – começa por explorar a situação usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-a por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um o modelo matemático que nos permita calcular o valor da medida do comprimento do arame gasto (que podes designar por c) em função da largura e do comprimento do jardim?

1.3. Quais deverão ser as dimensões do jardim de modo a gastar o mínimo de arame possível na construção da vedação? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora que o jardim tem a m^2 de área. Qual é a expressão algébrica que traduz a quantidade de arame em função da medida da largura do jardim?

Anexo 4: Tarefa O passeio das amigas

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

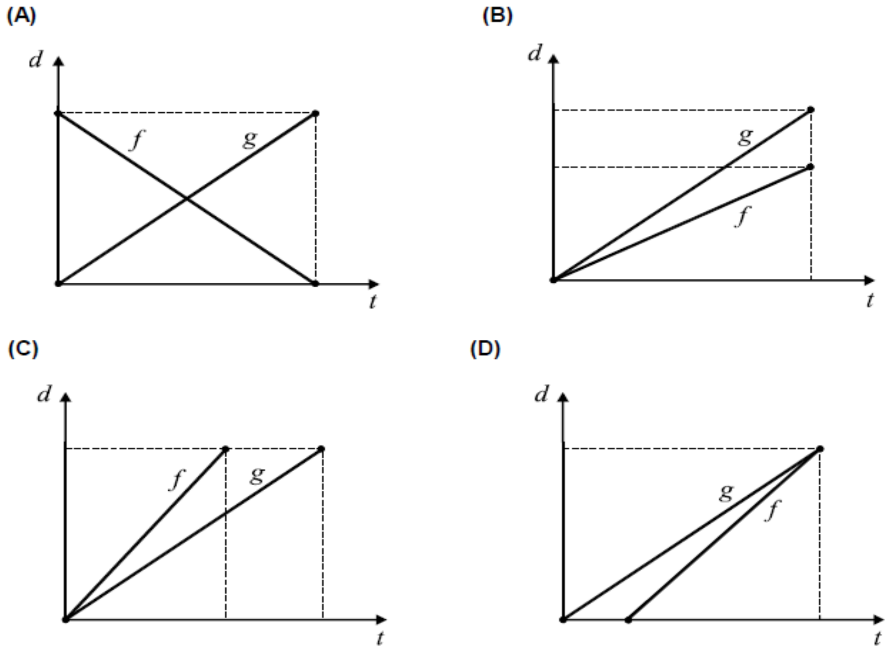
Tarefa 2: *O passeio das amigas*

A Francisca e a Gabriela são amigas. A Francisca mora em Vilabonita e a Gabriela mora em Vilabela. Existe apenas uma estrada que liga as duas localidades. Numa manhã de Verão as duas amigas saíram das suas casa à mesma hora. A Francisca deslocou-se de Vilabonita para Vilabela, e a Gabriela de Vilabela para Vilabonita. Ambas fizeram os 18 km que separam as duas localidades de bicicleta.

Seja f a função que dá, em quilómetros, a distância percorrida pela Francisca, t minutos depois de ter saído de Vilabonita.

Seja g a função que dá, em quilómetros, a distância percorrida pela Gabriela, t minutos depois de ter saído de Vilabela. Em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções f e g?

1. Numa pequena composição, explica por que é que as outras três opções são incorrectas, apresentando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeitaste.



2. Admite agora que:
    - a Francisca se deslocou a uma velocidade constante de 5 km/h.
    - a Gabriela também se deslocou a uma velocidade constante e demorou mais 54 minutos do que a Francisca a chegar ao seu destino.

   2.1. Qual foi a velocidade da Gabriela?

   2.2. A que distância estava a Francisca de Vilabela, quando se cruzou com a Gabriela?

3. Admite agora que:
    - a Francisca se deslocou-se a uma velocidade constante de *r* km/h.
    - a Gabriela demorou mais *m* minutos do que a Francisca a chegar ao seu destino.

   3.1. Exprime o tempo que a Gabriela demora de Vilabela a Vilabonita, em função de *r* e de *m*. Designa essa função por t_g.

   3.2. Testa a função t_g que construíste, com os dados que admitiste na questão 2.

   3.3. O que acontece à função t_g à medida que a velocidade da Francisca aumenta?

   <u>Sugestão:</u> Para responderes a esta questão podes começar por:

   1º) definir cada função *t(r)* através da concretização de *m* em t_g por valores específicos, por exemplo:

   a. m = 1.
   b. m = 30.
   c. m = 60 .

   Obtiveste assim, para cada concretização de *m* uma função que, para cada valor da velocidade da Francisca, nos dá o tempo que a Gabriela demorou a fazer o percurso de Vilabela a Vilabonita.

   2º) Esboça, no mesmo referencial, o gráfico das funções que obtiveste no passo anterior. Explica o que acontece à função *t* à medida que a velocidade da Francisca aumenta.

   3º) Explica o que acontece à função t_g à medida que a velocidade da Francisca aumenta.

4. <u>Para que valores *r*</u> da velocidade da Francisca se tem $t_g > \frac{3}{2}m$? Interpreta o resultado, explicando o que acontece ao tempo que a Gabriela demora a mais que a Francisca: i) à medida que a velocidade da Francisca aumenta; ou ii) à medida que a velocidade da Francisca diminui.

Anexo 5: Tarefa Funções: composta e inversa

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Tarefa 3: *Funções: composta e inversa*

1. Considera as funções reais f e h definidas respetivamente por:

   $f(x) = x-1,\ x \in IR$;

   $h(x) = 2x,\ x \in IR$.

   1.1. Caracteriza $g(x)$ de modo que: $(h \circ g)(x) = (g \circ h)(x)$, ou seja, de modo que h e g sejam funções permutáveis.

   1.2. Caracteriza $g(x)$ de modo que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, ou seja, de modo que f e g sejam funções permutáveis.

2. Considera uma função p definida por $p(x) = ax+b$,$a,\ b,\ x \in IR$.

   2.1. Mostra que duas funções constantes distintas não são permutáveis.

   2.2. Mostra que duas funções lineares são sempre permutáveis.

   2.3. Duas funções representadas graficamente por retas paralelas com declive igual a 1 são permutáveis? E com declive diferente de 1? Argumenta a tua resposta.

   2.4. Duas funções representadas graficamente por retas não paralelas são permutáveis? Argumenta a tua resposta.

   2.5. Define $g(x)$ de modo que p e g sejam funções permutáveis.

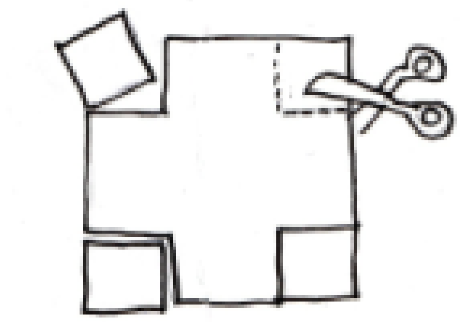
3. Mostra que qualquer função afim é permutável com a sua inversa.

Anexo 6: Tarefa A caixa de volume máximo

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Tarefa 4: *A caixa de volume máximo*

"Pretendemos construir uma caixa e dispomos de um pedaço de cartão quadrado. Para tal, cortamos aos quatro cantos do cartão quadrados iguais. Que modelo matemático nos permite maximizar o volume da caixa, dependendo do lado do quadrado cortado?"



1. Começa por atribuir um valor concreto para o lado do cartão:

1.1. Define uma estratégia que te permita relacionar as dimensões da caixa (largura, comprimento e altura) com o seu volume – começa por explorar a situação concretizando valores possíveis para o lado do quadrado cortado, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural.

1.2. Constrói um o modelo matemático que nos permita calcular o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?

1.3. Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

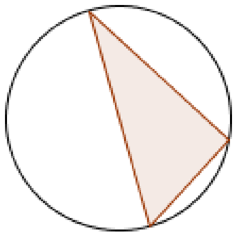
2. Considera agora que o cartão tem p cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado.

Anexo 7: Tarefa O triângulo inscrito numa circunferência

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a questão).

Tarefa 5: *O triângulo inscrito numa circunferência*

"Considera um triângulo inscrito numa circunferência cujo diâmetro é um dos seus lados. Constrói um modelo matemático que nos permita maximizar a área desse triângulo em função de um dos seus lados menores."



1. Começa por considerar um valor concreto para o diâmetro da circunferência:

1.1. Usando um software de geometria dinâmica ou alguma propriedade dos triângulos que conheças, começa por explorar a situação determinando relações possíveis entre os lados do triângulo e explica-as por meio de cálculos, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando-as por meio de linguagem natural.

1.2. Define uma estratégia que nos permita relacionar as dimensões dos dois lados menores do triângulo com a medida do diâmetro da circunferência considerado.

1.3. Considerando os dois lados menores do triângulo, constrói um modelo matemático que nos permita calcular a medida de um desses dois lados, em função da medida do outro.

1.4. Constrói um modelo matemático que nos permita calcular a área do triângulo, em função da medida de um dos dois lados menores do triângulo.

1.5. Determina as dimensões do triângulo de modo a que a sua área seja máxima? (recorre à tua calculadora gráfica para explorares esta questão, explicando detalhadamente todos os teus raciocínios).

2. Considera agora <u>um valor qualquer para o diâmetro da circunferência</u>. Seja d esse valor:

2.1. Define uma estratégia que nos permita relacionar as dimensões dos dois lados menores do triângulo com a medida do diâmetro da circunferência considerado.

2.2. Considerando os dois lados menores do triângulo, constrói um modelo matemático que nos permita calcular a medida de um desses dois lados, em função da medida do outro.

2.3. Constrói um modelo matemático que nos permita calcular a área do triângulo, em função da medida de um dos seus lados menores.

Anexo 8: Tarefa Parâmetros em funções racionais (parte1)

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios - usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a

Tarefa 6: *Parâmetros em funções racionais*

"Dadas as funções reais de variável real $f(x)=ax+b$ e $g(x)=cx+d$, com $a, b, c, d \in IR$, com c e d não cumulativamente nulos. O que podes dizer acerca da função $f(x)$ acerca da função $g(x)$? E o que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?"

1. Considera $a = c = 0 \ \wedge \ b = 1 \ \wedge \ d = \frac{1}{2}$. Deste modo:
   1.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   1.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   1.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

2. Considera $a = -2 \ \wedge \ c = 1 \ \wedge \ b = d = 0$. Deste modo:
   2.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   2.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   2.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

3. Considera $a = d = 2 \wedge b = 1 \wedge c = 0$. Deste modo:
   3.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   3.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   3.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

4. Considera $a = 2 \wedge b = 1 \wedge c = d = 0$. Deste modo:
   4.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   4.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   4.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

5. Considera $a = 3 \wedge b = 1 \wedge c = 2 \wedge d = 0$. Deste modo:
   5.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   5.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?

5.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

6. Considera $a = -3 \wedge b = 1 \wedge c = 2 \wedge d = -1$. Deste modo:
   6.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   6.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   6.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

7. Considera $c = 0 \wedge a, b \in IR \setminus \{0\}$. Deste modo:
   7.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   7.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   7.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

8. Considera $d = 0 \wedge a, b \in IR \wedge c \in IR \setminus \{0\}$. Deste modo:
   8.1. O que podes dizer acerca da função $f(x)$?
   8.2. O que podes dizer acerca da função $g(x)$?
   8.3. O que podes dizer acerca da função $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Anexo 9: Tarefa Parâmetros em funções racionais (parte2)

9. Partindo da representação gráfica da função real de variável real $f(x) = \frac{1}{x}$ constrói a representação gráfica da função $g(x) = a + \frac{b}{x+d}$. Explica de forma detalhada e explícita todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas usando a tecnologia gráfica de que dispões.

9.1. Considerando:

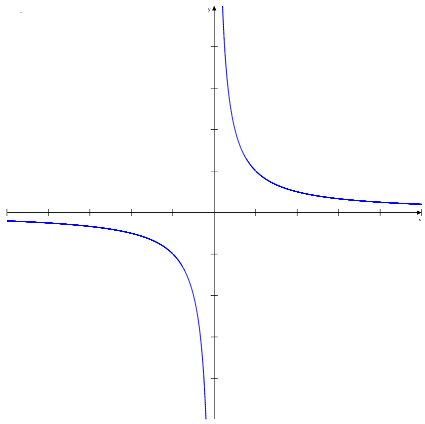
9.1.1. $a=0 \wedge b=1 \wedge d=1$.

9.1.2. $a=1 \wedge b=1 \wedge d=1$.

9.1.3. $a=-1 \wedge b=1 \wedge d=-1$.

9.1.4. $a=1 \wedge b=1 \wedge d=-1$.

9.1.5. $a=-1 \wedge b=1 \wedge d=1$.



9.2. Considerando:

9.2.1. $a=0 \wedge b, d \in IR^+$.

9.2.2. $a, b, d \in IR^+$.

9.2.3. $a, d \in IR^-, b \in IR^+$.

9.2.4. $a, b \in IR^+, d \in IR^-$.

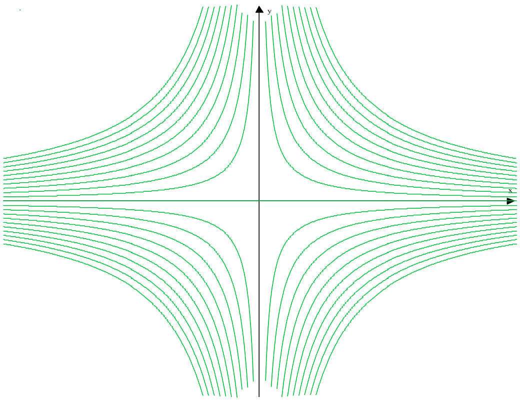
9.2.5. $a \in IR^-, b, d \in IR^+$.

9.3. Partindo da representação gráfica da função real de variável real $f(x) = \frac{1}{x}$, como constróis a representação gráfica da função $g(x) = a + \frac{b}{x+d}$, $a, b, d \in IR$?

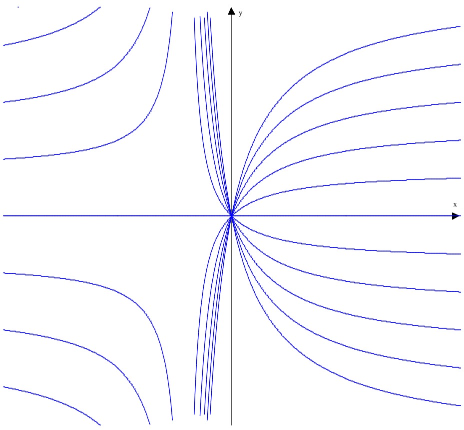
Anexo 10: Tarefa Parâmetros em funções racionais (parte3)

10. Cada um dos seguintes gráficos representa uma família de funções que se obtém da função $h(x) = a + \dfrac{b}{x+d}$ através variação de um dos parâmetros a, b, d num intervalo de números reais e da substituição dos restantes por valores reais concretos. Associa a cada gráfico uma expressão algébrica. Explica de forma detalhada e explícita todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas usando a tecnologia gráfica de que dispões.

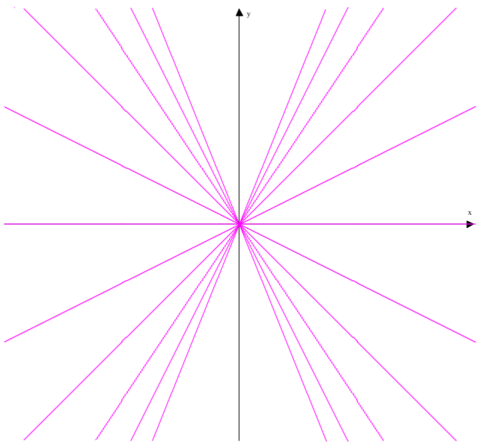
10.1.



10.2.



10.3.



Anexo11: Tarefa do Teste Intermédio, 24 de maio de 2011

Questão 4.3 do Teste Intermédio de Matemática A do 11.ºano, de 24 de maio de 2011

Considera

- a função f, de domínio IR definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

- a função g, de domínio $IR \setminus \{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Seja *P* o ponto de interseção das assíntotas do gráfico da função g.

Para um certo número real k, o ponto *P* pertence ao gráfico da função h, de domínio IR, definida por $h(x) = f(x) + k$.

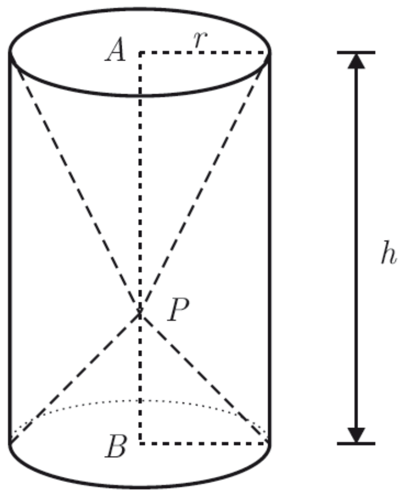
Determine o valor de k.

Anexo 12: Tarefa *Parâmetros, funções e geometria* (Entrevista final)

Em cada alínea da tarefa que se segue explica detalhadamente e de modo explícito todos os teus raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessites realizar, expressões simbólicas e gráficos que construas (quer usando a tua calculadora gráfica, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaste para resolver a

Tarefa 7: *Parâmetros, funções e geometria*

Na figura está representado um cilindro de altura *h* e raio da base *r*. Sejam *A* e *B* os centros das bases do cilindro. Considera que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento *[AB]*, nunca coincidindo com o ponto *A*, nem com o ponto *B*. Cada posição do ponto *P* determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto *P* e cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Que relações matemáticas podemos estabelecer com as dimensões h, r e p ?



1. Considera que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento *[AB]*, nunca coincidindo com o ponto *A*, nem com o ponto *B*. Cada posição do ponto *P* determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto *P* e cujas bases coincidem com as bases do cilindro.

    1.1. Mostra que a soma dos volumes dos dois não depende da posição do ponto *P*. **Sugestão:** Designa por *a* a altura de um dos cones.

    1.2. Para que valores do raio do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor da altura *h*.

    1.3. Para que valores da altura do cilindro a soma dos volumes dos dois cones é menor que o triplo do valor do raio.

2. Supõe que queremos embalar o cilindro, de volume *v*, numa caixa paralelepipédica. Como determinamos as dimensões do cilindro para que a área total da caixa seja mínima?