



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Engenharia

Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura

**PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE VIGAS DE BETÃO
DE ALTA RESISTÊNCIA À TORÇÃO**

Hélder Constantino Gomes Forte

Orientador Científico: **Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo**

Dissertação apresentada na Universidade da Beira Interior para obtenção
de Grau de Mestre em Engenharia Civil

Covilhã, Agosto 2009

*“Só sabemos com exactidão quando sabemos pouco;
À medida que vamos adquirindo conhecimentos,
Instala-se a dúvida”*

(Johann Goethe)

“A dúvida é o princípio da sabedoria”

(Aristóteles)

Aos meus Pais, por Tudo!
Ao meu irmão pela amizade!
À Joana por estar sempre ao meu lado!

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho envolveu uma longa pesquisa sobre o objecto em estudo e, conseqüentemente originou o envolvimento e cooperação directa e indirecta de inúmeras pessoas, para as quais desde já expresso os meus mais profundos agradecimentos, pois sem elas não seria possível a concretização desta dissertação.

Em primeiro lugar, um sincero agradecimento ao meu Ilustre orientador, Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, pela orientação que me prestou, pelo incentivo, pelas muitas horas despendidas em prol da elaboração desta dissertação, o meu muito obrigado!

Ao corpo docente da UBI pelo acompanhamento e conhecimento partilhado nesta fase crucial da minha formação profissional.

Aos meus pais e familiares, pela força e incentivo que me deram e pela compreensão pelas muitas horas de ausência.

À namorada, que mesmo distante sempre teve o cuidado de manter presente o apoio, motivação e paciência, muito obrigado!

Ao meu amigo, Joaquim Tojal, pelo encorajamento, estímulos, disponibilidade e amizade sempre demonstrada e também pelos ensinamentos e experiências transmitidos ao longo do tempo.

Agradeço a todos os meus amigos, sem referir nomes porque eles sabem a quem me refiro, pelo carinho e apoio que me deram nesta fase em que o tempo para eles era sempre pouco.

Por último, importa referir que este trabalho foi indispensável para o meu crescimento profissional e pessoal que jamais esquecerei e que me acompanhará ao longo de toda a minha carreira profissional.

RESUMO

Nesta dissertação é estudado o comportamento de vigas de betão armado sujeito à torção pura.

É desenvolvido um modelo teórico com vista a prever o comportamento global à torção pura de vigas de betão armado de alta resistência com secção rectângular oca.

Ao longo desta dissertação é também desenvolvida uma folha de cálculo, para prever de uma forma gráfica o comportamento teórico de uma viga sujeita à torção pura. É realçada toda a programação da folha de cálculo utilizado e ao mesmo tempo descrita de forma pormenorizada o seu desenvolvimento.

São analisadas e comparadas várias teorias base para o estudo de secções de betão armado sujeitas à torção.

Numa última fase, são analisados e discutidos os vários resultados obtidos.

ABSTRACT

In this dissertation, the behaviour of structural concrete beams, under torsion is studied.

A theoretical procedure is developed to predict the general behaviour of High Strength concrete hollow beams under torsion.

A computation procedure is also developed to calculate the behaviour graphs of the beams under torsion. The programming procedure and its development is carefully described.

Different theoretical models for the study of sections of concrete beams under torsion are analysed and compared.

Finally, the different results are analysed and discussed.

ÍNDICE GERAL

	Pág.
1 – INTRODUÇÃO	19
PARTE I – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	
1 – TEORIAS BASE PARA SECÇÕES SUJEITAS À TORÇÃO	21
1.1 – TEORIA DA ELASTICIDADE	21
1.2 – TEORIA DA FLEXÃO ENVIESADA	23
1.3 – TEORIA DE BREDT PARA TUBOS DE PAREDE FINA	24
1.4 – MODELO EM TRELIÇA COM ÂNGULO VARIÁVEL	26
1.4.1 – Vantagens e hipóteses do modelo de treliça com ângulo variável.	27
2 – IDEALIZAÇÃO TEÓRICA DA CURVA T-θ	29
3 – MODELOS TEÓRICOS PARA A ANÁLISE	32
3.1 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME NÃO FISSURADO (ESTADO I).....	32
3.2 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME FISSURADO (ESTADO II).	35
3.3 – ANÁLISE NÃO LINEAR.....	36
PARTE II – APLICATIVO COMPUTACIONAL	
1 – FUNCIONAMENTO DE UM EXEMPLO ATRAVÉS DO APLICATIVO COMPUTACIONAL	43
1.1 – FUNCIONAMENTO GERAL DO APLICATIVO COMPUTACIONAL.....	43
2 – DESCRIÇÃO DAS VÁRIAS ANÁLISES REALIZADAS	52
2.1 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME NÃO FISSURADO (ESTADO I).....	52
3 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME FISSURADO (ESTADO II)....	57
4 – ANÁLISE NÃO LINEAR	60
4.1 – AUTOMATIZAÇÃO DA ANÁLISE NÃO LINEAR.....	68
4.1.1 – Função calcula_erro.....	68

4.1.2 – Função calcula_erro_graus.....	70
4.1.3 – Função calcula_erro_zetasigma.....	71
4.1.4 – Função calcula_erro_zetatau.....	72
4.1.5 – Função calcular_tudo.....	74
4.2 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR.....	75
4.2.1 – Função tek07.....	75
4.2.2 – Função tfek07.....	77
4.2.3 – Função ttfk07.....	79
4.2.4 – Função ttfkut.....	82
4.2.5 – Função tfekut.....	84
4.2.6 – Função tekut.....	87
4.2.7 – Função tek1.....	89
4.2.8 – Função tfek1.....	92
4.2.9 – Função ttfk1.....	94
4.3 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR ATRAVÉS DO DECLIVE.....	96
4.3.1 – Função new_tek07.....	97
5 – DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	99
5.1 – ANÁLISE LINEAR EM ESTADO NÃO FISSURADO.....	99
5.2 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR	102
5.3 – PASSAGEM ENTRE A ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR ATRAVÉS DO DECLIVE.....	104
6 – CONCLUSÃO.....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114

ANEXOS

ANEXO I - Código computacional (Macro)

ÍNDICE DE QUADROS

	Pág..
Quadro 1 – Quadro inicial a preencher pelo utilizador.....	44
Quadro 2 – Caracterização geral.....	45
Quadro 3 – Caracterização da curva experimental.....	46
Quadro 4 – Regressão linear.....	46
Quadro 5 – Caracterização da geometria da secção.....	47
Quadro 6 – Caracterização da armadura longitudinal e transversal.....	47
Quadro 7 – Características geométricas.....	48
Quadro 8 – Valores característicos da análise não linear.....	48
Quadro 9 – Quadro representativo das tensões.....	49
Quadro 10 – Quadro representativo das extensões.....	49
Quadro 11 – Propriedades do betão.....	50
Quadro 12 – Taxas de armadura.....	51
Quadro 13 – Módulos de elasticidade.....	51
Quadro 14 – Factor de rigidez de torção.....	52
Quadro 15 – Módulo elástico de torção.....	53
Quadro 16 – Caracterização do momento torsor de fissuração segundo a Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e Teoria do Tubo Fino.....	53
Quadro 17 – Rigidez de torção ($k(GJ)^I$) segundo vários factores minorativos.....	54
Quadro 18 – Rotação de torção de fissuração (θ_{cr}) segundo vários factores minorativos e segundo a Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e a Teoria do Tubo Fino.....	55
Quadro 19 – Espessura equivalente da parede de secção oca.....	57
Quadro 20 – Coeficiente de homogeneização n	57
Quadro 21 – Abcissa na origem (ηT_c).....	57
Quadro 22 – Rigidez de torção na análise linear em estado fissurado.....	58
Quadro 23 – Pontos da Curva ($T-\theta$) correspondentes à análise linear em estado fissurado.....	58
Quadro 24 – Declive da recta representativa da análise linear em estado fissurado.....	58
Quadro 25 – Valores correspondentes da análise não linear.....	61
Quadro 26 – Parâmetros da secção, das armaduras e do betão.....	62
Quadro 27 – Parâmetros iniciais para o cálculo da Curva ($T-\theta$).....	62

Quadro 28 – Valores das tensões e extensões.....	63
Quadro 29 – Quadro indicativo dos parâmetros necessários para o cálculo da Curva teórica $T-\theta$ e as percentagens de erro inerentes a cada parâmetro.....	64
Quadro 30 – Valores correspondentes à primeira aproximação da Curva teórica $T-\theta$	67
Quadro 31 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 0,7.....	76
Quadro 32 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 0,7.....	78
Quadro 33 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 0,7.....	81
Quadro 34 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$).....	83
Quadro 35 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$)...	86
Quadro 36 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$).....	88
Quadro 37 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1.....	91
Quadro 38 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1.....	93
Quadro 39 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1.....	95
Quadro 40 – Valores correspondentes à transição da análise linear em estado fissurado para a análise não linear.....	98
Quadro 41 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com os vários factores minorativos.....	105
Quadro 42 – Valores correspondentes à curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com os vários factores minorativos.....	107
Quadro 43 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com os vários factores minorativos.....	109

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Fig. 1 – Curva Teórica $T-\theta$ típica	29
Fig. 2 – Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o <i>softening effect</i> [20].....	37
Fig. 3 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,7$	55
Fig. 4 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,85$	56
Fig. 5 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=1$	56
Fig. 6 – Análise comparativa da análise linear em estado fissurado com a curva experimental.....	59
Fig. 7 – Organograma dos vários passos iterativos.....	60
Fig. 8 – Análise comparativa entre a curva experimental e a análise não linear ..	66
Fig. 9 – Análise comparativa entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear.....	66
Fig. 10 – Primeira aproximação da Curva teórica $T-\theta$	67
Fig. 11 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade ($k=0,7$).....	77
Fig. 12 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada ($k=0,7$).....	79
Fig. 13 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino ($k=0,7$).....	81
Fig. 14 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas ($k=0,7$)	82
Fig. 15 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino ($k=0,85$).....	84
Fig. 16 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada ($k=0,85$).....	86
Fig. 17 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade ($k=0,85$).....	88
Fig. 18 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas ($k=0,85$)	89

Fig. 19 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade ($k=1$).....	91
Fig. 20 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada ($k=1$).....	93
Fig. 21 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino ($k=1$).....	95
Fig. 22 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas ($k=1$).....	96
Fig. 23 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,7$	99
Fig. 24 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,85$	100
Fig. 25 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=1$	100
Fig. 26 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade.....	102
Fig. 27 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada	103
Fig. 28 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino	104
Fig. 29 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de $0,7$	105
Fig. 30 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de $0,85$	106
Fig. 31 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1	106
Fig. 32 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de $0,7$	107
Fig. 33 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de $0,85$	108
Fig. 34 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1	108
Fig. 35 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de $0,7$	109
Fig. 36 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de $0,85$	110

Fig. 37 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1.....	110
Fig. 38 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1.....	111
Fig. 39 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1.....	111
Fig. 40 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1.....	112

SIGLAS E ABREVIATURAS

Siglas

SI – Sistema Internacional

UBI- Universidade da Beira Interior

Abreviaturas

Fig. - Figura

pág. - página

Prof.- Professor

T.E. - Teoria da Elasticidade

T.F.E. - Teoria da Flexão Enviesada

T.T.F - Teoria do Tubo Fino

SIMBOLOGIA

Alfabeto Latino

- A - Área da secção transversal / área limitada pela linha média da parede de um tubo / área limitada pela linha média da armadura Transversal
- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
- A_l - Área da secção transversal de uma barra de armadura longitudinal
- A_m - Área da parte oca da secção transversal
- A_0 - Área limitada pela linha média do fluxo de corte
- A_{sl} - Área total da armadura longitudinal ordinária
- A_{st} - Área da secção transversal de um ramo de armadura transversal
- A_{stotal} - Área total da armadura longitudinal ordinária / área da secção transversal de um ramo de armadura transversal
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- C - Constante de torção de St. Venant / parâmetro ou factor de rigidez de torção
- J - Módulo de distorção
- $(GJ)^I$ - Rigidez de torção em estado I (não fissurado)
- $(GJ)^{II}$ - Rigidez de torção em estado II (fissurado)
- K_t^1 - Rigidez de torção minorada
- K_1 - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão
- T - Momento torsor
- T_{cr} - Momento torsor de fissuração
- T'_{cr} - Momento torsor de fissuração com influência das armaduras
- $T'_{cr,ef}$ - Momento torsor de fissuração efectivo
- T_{ly} - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal
- T_n - Valor nominal do momento torsor resistente
- T_{np} - Valor nominal do momento torsor resistente de uma viga de betão sem armaduras
- T_r - Momento torsor resistente
- T_{ty} - Momento torsor de cedência da armadura transversal

W_T	- Módulo elástico de torção
a	- Rigidez de torção em estado II (fissurado)
b	- Ordenada na origem da recta teórica $T - \theta$ em estado II
d	- Declive de uma recta
f'_c	- Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{ck}	- Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{cm}	- Valor médio da resistência à compressão do betão
f_{ct}	- Resistência à tracção do betão
f_{ctm}	- Resistência média à tracção do betão
f_l	- Tensão de cedência da armadura longitudinal
f'_p	- Tensão máxima
f'_t	- Resistência à tracção do betão
f_t	- Tensão de rotura da armadura ordinária
f_{ty}	- Tensão de cedência da armadura transversal
h	- Altura da secção transversal / espessura da parede da secção
h_e	- Espessura efectiva da parede da secção oca
k	- Factor minorativo
n	- Coeficiente de homogeneização / número de varões longitudinais
p_c	- Perímetro exterior de uma secção transversal
p_0	- Perímetro da linha média do fluxo de corte
s	- Espaçamento das barras longitudinais / espaçamento longitudinal da armadura transversal (cintas ou estribos)
t_d	- Profundidade efectiva da escora de betão
t_{do}	- Profundidade efectiva da escora de betão
u	- Perímetro da linha média da parede de um tubo fino / perímetro da linha média da armadura transversal / perímetro exterior da secção transversal
u_m	- Perímetro da parte oca da secção de betão armado
x	- Menor dimensão da secção transversal rectangular
x_1	- Menor dimensão de um estribo fechado referido à linha média
y	- Maior dimensão da secção transversal rectangular
y_1	- Maior dimensão de um estribo fechado referido à linha média

Alfabeto Grego

- α - Ângulo Giro
- ε_{cu} - Extensão última convencional
- ε_d - Extensão na escora diagonal de betão
- ε_{ds} - Extensão máxima de compressão à superfície da escora de betão
- ε_l - Extensão na armadura longitudinal
- ε_0 - Extensão principal de compressão
- ε_p - Extensão correspondente ao pico de tensão σ_p
- ε_t - Extensão na armadura transversal
- ϕ - Diâmetro de um varão de armadura
- γ_m - Distorção máxima num elemento sujeito ao corte
- η - Coeficiente multiplicativo
- η' - Coeficiente multiplicativo
- ηT_c - Ordenada na origem da recta teórica $T - \theta$ em estado II
- λ - Coeficiente de eficiência de Cowan / coeficiente redutor para ter em conta o *softening effect*
- θ - Ângulo de torção por unidade de comprimento
- θ_{cr}^I - Rotação de torção correspondente a T_{cr}
- θ_{cr}^{II} - Rotação de torção correspondente a T_{cr} em estado II
- θ_{ly} - Rotação de torção correspondente a T_{ly}
- θ_{Tr} - Rotação de torção correspondente a T_r
- θ_{ty} - Rotação de torção correspondente a T_{ty}
- ρ_l - Taxa de armadura longitudinal de torção
- ρ_{Tot} - Taxa total de armadura de torção
- ρ_t - Taxa de armadura transversal de torção
- σ - Tensão
- σ_d - Tensões nas escoras diagonais de betão
- τ - Tensão tangencial induzida pelo momento torsor
- τ_{max} - Tensão tangencial máxima
- ν - Coeficiente de Poisson / tensão tangencial induzida pelo esforço transversal
- ξ - Coeficiente de redução para ter em conta o *softening effect*
- ξ_ε - Coeficiente de redução para ter em conta o *softening effect* nas extensões
- ξ_σ - Coeficiente de redução para ter em conta o *softening effect* nas tensões

CONVERSÕES

$$1 \text{ deg/in} = 39.370 \text{ } ^\circ/\text{m}$$

$$1 \text{ in-kips} = 0.113 \text{ KNm}$$

$$1 \text{ in-kips} = 2.540 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ KNm} = 8.850 \text{ in-kips}$$

$$1 \text{ MPa} = 145.00 \text{ psi}$$

$$1 \text{ rad/m} = 57.296 \text{ } ^\circ/\text{m}$$