Universidade
da
Beira
Interior

Continuidade e
Derivação
de
Funções

Relatório Final subordinado ao tema:

******Continuidade e Derivação de Funções******

****

Apresentado ao – **Prof. Dr. Celino Miguel**,
para aprovação do Relatório de Estágio.

****

Discente: Tânia Rodrigues

Mestrado: Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Número: m 3219

“ Os pontos não têm partes nem dimensões. Como podem combinar-se para formar uma linha? ”

J. A. Lindon

“O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos.”

Galileu

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

Na elaboração do relatório de estágio, que apesar de ser um processo de carácter individual, reúne contributos de várias pessoas.

Volto a reiterar tal afirmação, com a certeza de que nunca foi tão verdadeira quanto agora.

Desde o início do Mestrado, contei com a confiança e o apoio de inúmeras pessoas. Sem esses contributos, esta investigação não teria sido possível.

Ao Professor Doutor Celino José Martins Miguel, orientador do Relatório de Estágio, agradeço o apoio, a partilha do saber e as valiosas contribuições para o trabalho. Acima de tudo, obrigada por me continuar a acompanhar nesta jornada e por estimular o meu interesse pelo conhecimento e pelo mundo académico.

Estou muito grata a todos os meus familiares pelo incentivo recebido ao longo deste ano. Aos meus pais Deonilde Rodrigues e Manuel Rodrigues, à minha irmã Soraia, obrigada pelo amor, alegria e apoio incondicional. Quero agradecer também a alguns colegas da Universidade. Assim como à equipa de trabalho da Escola Básica 2.º e 3.º Ciclos D. Domingos Jardo, onde estive a leccionar em 2009/2010 e onde me encontro no presente ano de 2010/2011.

O meu profundo e sentido agradecimento a todas as pessoas que contribuíram para a concretização deste Relatório, estimulando-me intelectual e emocionalmente.

INTRODUÇÃO

A análise é um ramo da Matemática, podemos relacioná-la com o nosso quotidiano? E a continuidade? Fazendo parte desta ciência, qual a relação existente entre este conceito e o mundo que nos rodeia? Estas são algumas, diante de muitas questões que tentarei dar resposta neste trabalho. Embora não pareça, mas se olharmos em nosso redor, ou mesmo se pensarmos em situações do nosso dia a dia, iremos de certeza encontrar analogias com a continuidade.

Este trabalho divide-se em duas secções, a primeira basear-se-á no estudo da Continuidade enquanto a segunda secção abordará a Derivação de funções.

Este é desenvolvido de forma que os conceitos apresentados venham sempre que possível acompanhados da respectiva definição assim como exemplos.

Em ambas as secções, a abordagem aos temas “Continuidade e Derivação ” serão feitas de forma muito elementar, pois esta será baseada nos programas educativos do 3.ºciclo, deste modo os conhecimentos acerca destes temas ainda são muito básicos.

Contudo pretende-se dar a conhecer, um pouco o que é o estudo da Continuidade para progredirmos para a Derivação. Neste estudo passamos por definições básicas de função, limite, intervalos e teoremas fundamentais. É de salientar, que todo este estudo relativamente à Continuidade e Derivação só será feito unicamente no 12.ºano, pois só ai terão “bases” suficientes para poderem analisar estes temas.

Ao analisarmos a Derivação surge-nos de imediato o conceito de função, no entanto este é o resultado de uma lenta e longa evolução que se iniciou na Antiguidade, com os matemáticos Babilónios e Pitagóricos.

Nessa altura o conceito de função ainda era pouco claro, as relações entre as variáveis surgiam de forma implícita e eram descritas verbalmente ou através de gráficos.

O grande impulso matemático surge no séc. XVII com Descartes e Fermat. Estes matemáticos introduziram as coordenadas cartesianas que vieram revolucionar o estudo das funções. Através do estudo analítico desenvolvido por Descartes e Fermat, outros cientistas passaram a procurar a fórmula ou função que relacionava a variável em estudo. Esta procura constante era feita com base na observação ou em experiências.

Com o estudo das derivadas o Homem fez a ligação da Matemática às mais diversas áreas das Ciências Exactas, assim como solucionou inúmeros problemas, relacionados como a minimização e maximização de dimensões, áreas, custos, etc.

CONTINUIDADE

O que se entende por fenómeno contínuo?

Cada ser humano apresenta uma ideia intuitiva de continuidade.

Se pedíssemos a uma criança para desenhar numa folha o tempo, possivelmente ela iria desenhar uma linha, sem interrupções.

Segundo diversos cientistas, até aos séculos XVIII e XIX, os fenómenos físicos observáveis eram contínuos. No entanto, por volta de 1920 descobriu-se que nem tudo resulta de um processo contínuo, como sendo o caso da oscilação dos átomos na molécula de hidrogénio. Quando são aquecidos, estes átomos emitem luz através de frequências discretas e não por espectros contínuos.

Haverá alguma relação entre a continuidade e o dia-a-dia?

São diversas as ciências que recorrem à continuidade para progredirem nos seus estudos.

Normalmente este conceito está mais direccionado para o ramo das ciências exactas tais como a Matemática, a Física, a Biologia, a Química entre outras.

Perante as mais variadas situações, o Homem depara-se constantemente com situações de continuidade.

O simples facto de “correr sangue nas nossas veias” é sinónimo de continuidade, pois à partida que tal deixa de ser feito, a continuidade é quebrada.

Um exemplo, muito comum no nosso dia-a-dia é a representação do horizonte, pois este é algo infinito mas também contínuo.

Estudo da Continuidade no Ensino Secundário (12.ºAno)

O sinónimo que caracteriza o termo "Continuidade", segundo diversos dicionários, é algo que sofre de ausência de interrupção, ou seja em linguagem corrente significa que "não é interrompido" ou "não está dividido em partes".
Segundo o matemático Descartes (1596 – 1650), uma função diz-se contínua quando se consegue desenhar um gráfico "sem nunca ter levantado o lápis do papel".

Graficamente:

Função Contínua

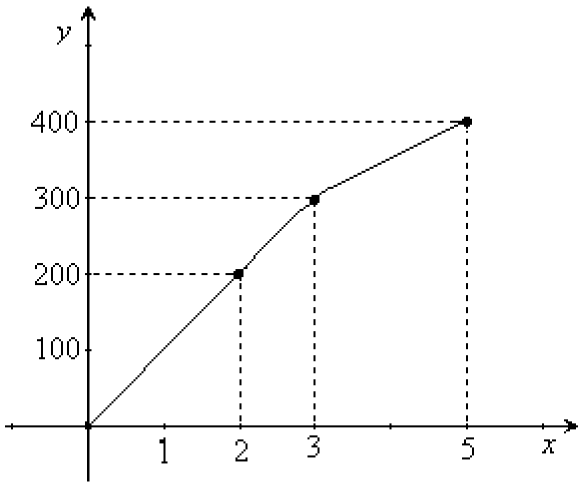


Figura 1

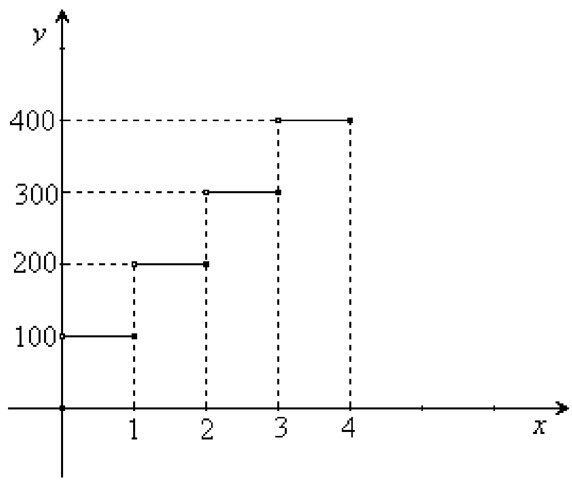


Figura 2

Função Descontínua

Função Contínua num Ponto

DEFINIÇÃO 1. Seja *f* uma função real de variável real e *c* um ponto de acumulação do domínio de *f*. Diz-se que f tende para *b* quando *x* tende para *c* e escreve-se

$$\lim_{x\to c} f(x) = b$$

se, e só se, toda a sucessão de valores de *x* do domínio de *f* convergente para *c*, sendo os termos da sucessão todos diferentes de *c*, corresponde uma sucessão de imagens por *f* convergente para *b*.

Em seguida definimos os chamados limites laterais de uma função. A igualdade dos limites laterais é condição necessária e suficiente para a existência do limite no ponto dado.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que b é o **limite à esquerda** de f no ponto *c*, *c* ponto de acumulação do domínio da função, se a toda a sucessão(x_n) de valores do domínio de *f*, com$(x_n) < c,\ x \to c$ corresponde uma sucessão$(f(x_n))$ convergente para *b*.
Escreve-se

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = b \qquad (1)$$

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que d é o **limite à direita** de *f* no ponto *c*, *c* ponto de acumulação do domínio da função, se a toda a sucessão(x_n) de valores do domínio de *f*, com $(x_n) > c, x \to c$ corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para *d*.
Escreve-se

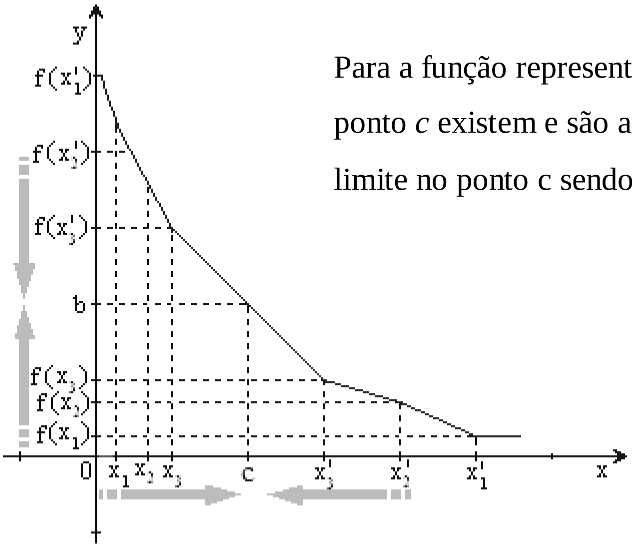
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = d \qquad (2)$$

NOTA 1. O limite à esquerda (1) e o limite à direita (2) dizem-se limites laterais.

NOTA 2. Se os limites laterais forem iguais, a função tem limite no ponto; se forem diferentes, a função não tem limite nesse ponto.

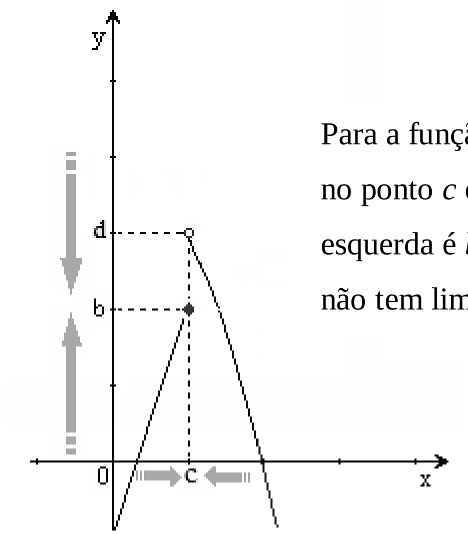
De seguida vamos ilustrar graficamente os conceitos que acabamos de apresentar.

Graficamente:



Para a função representada na **Figura 3** os limites laterais no ponto *c* existem e são ambos iguais a *b*, pelo que a função tem limite no ponto c sendo esse limite *b*.

Figura 3



Para a função representada na **Figura 4** os limites laterais no ponto *c* existem mas são diferentes. O limite à esquerda é *b* e o limite à direita é *d*. Pelo que a função não tem limite no ponto *c*.

Figura 4

De seguida vamos apresentar de modo formal o conceito de função contínua.

DEFINIÇÃO 4. Seja *f* uma função definida em A e seja $c \in A$ (*c* ponto de acumulação de *A*). Diz-se que *f* é **contínua** em *c* se e só se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Se $c \in A$ não é ponto de acumulação, f é contínua por convenção.
Da definição anterior podemos concluir que se a função f é contínua em c (c ponto de acumulação do domínio da função) então:

1. $f(c)$ existe, isto é $c \in D_f$;

2. existe $\lim_{x \to c} f(x)$;

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

OBSERVAÇÃO. Se A é um subconjunto do domínio de f, dizemos que f é contínua em A quando é contínua em todos os pontos de A.

EXEMPLOS:

Vamos ver de seguida uma ilustração gráfica do conceito de continuidade.

a) Consideremos a função f, definida no intervalo $[-6,9]$

Graficamente:

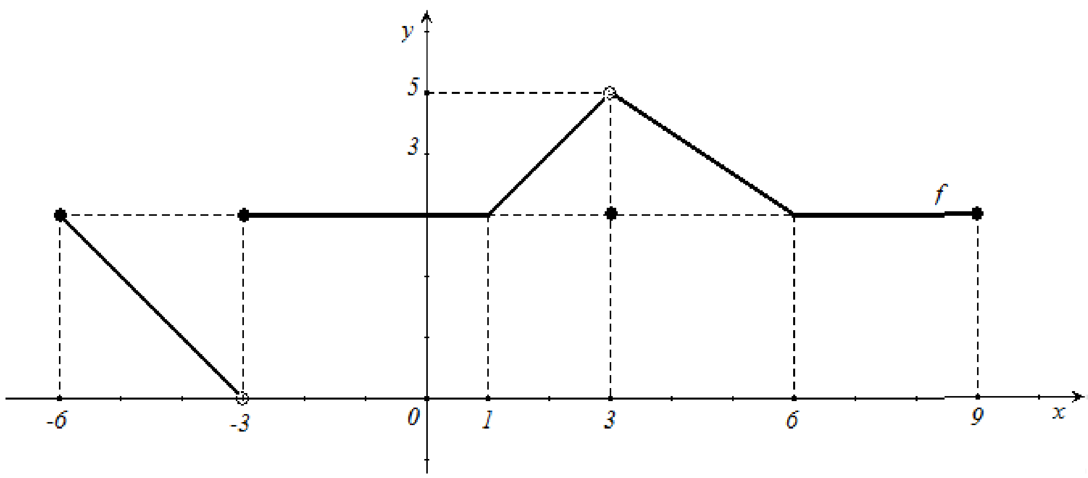


Figura 5

Deste modo não podemos afirmar que f é contínua no intervalo $[-6; 9]$.

Esta função, definida no intervalo $[-6; 9]$, não é contínua nos pontos -3 e 3, sendo contínua em qualquer outro ponto. Podemos ainda observar que no ponto -3 os limites laterais são diferentes e que no ponto 3 são iguais, mesmo assim a função não é contínua no ponto 3 uma vez que $\lim_{x\to 3} f(x)$, apesar de existir, não é igual a $f(3)$.

Vamos agora estudar a continuidade de algumas funções que aparecem com frequência em Matemática.

b) Verifique se a função f, dada por $f(x) = x^3 - 2x$, é contínua no ponto $x = 2$.

Graficamente:

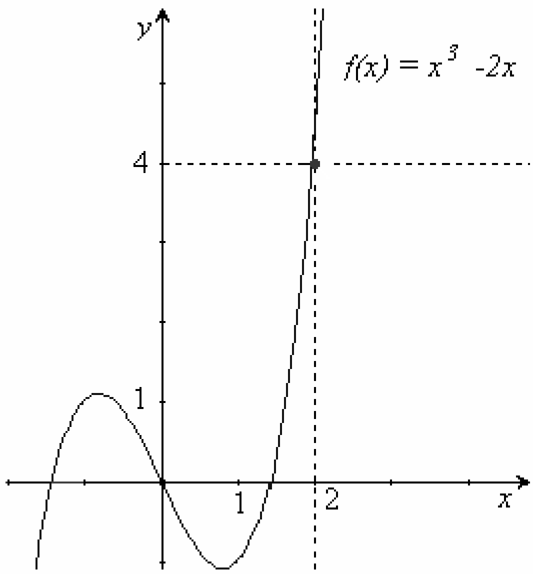


Figura 6

Vamos verificar as três condições mencionadas anteriormente:

1. $f(2)$ existe, isto é $2 \in D_f$;

2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, isto é existe $\lim_{x\to 2} f(x)$;

3. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(x^3 - 2x) = 4 \Leftrightarrow 2^3 - 2 \times 2 = 4 \Leftrightarrow 8 - 4 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4.$

Portanto esta função é contínua ponto $x = 2$.

Casos Particulares de Funções Contínuas em Todo o Ponto do seu Domínio.

Toda a função afim é contínua em qualquer ponto c de R:

$$\lim_{x\to c} (ax + b) = ac + b = f(c), \qquad \forall_c \in R$$

Graficamente:

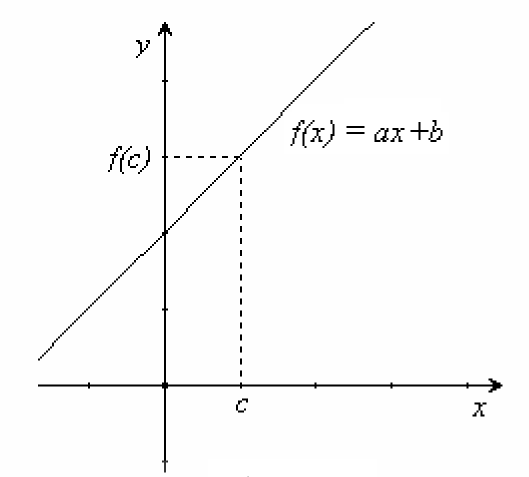


Figura 7

2. Toda a função quadrática é contínua em qualquer ponto c de R:

$$\lim_{x\to c}(ax^2 + bx + d) = ac^2 + bc + d = f(c), \qquad \forall_c \in R$$

GENERALIZAÇÃO. Toda a função polinomial é contínua em qualquer ponto de R.

Graficamente (no caso em que $a < 0$)*:*

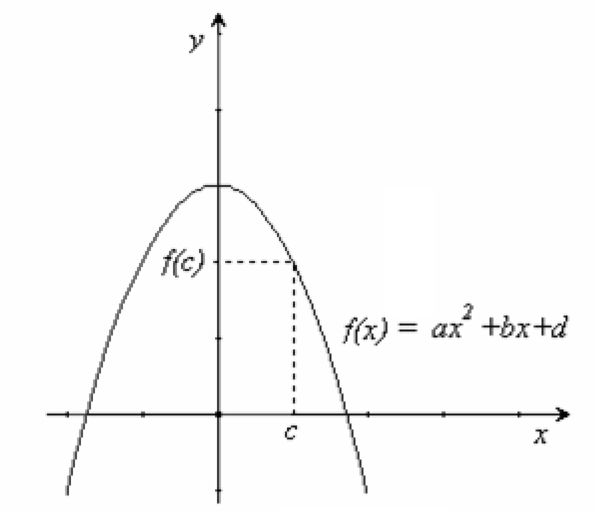


Figura 8

3. A função dada por $f(x) = \sqrt{x-2}$ tem por domínio $[2; +\infty[$ e é contínua para $x = 2$, pois

$f(2) = \sqrt{2-2} = 0$ logo $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Esta função é contínua para quaisquer outros pontos do seu domínio.

Graficamente:

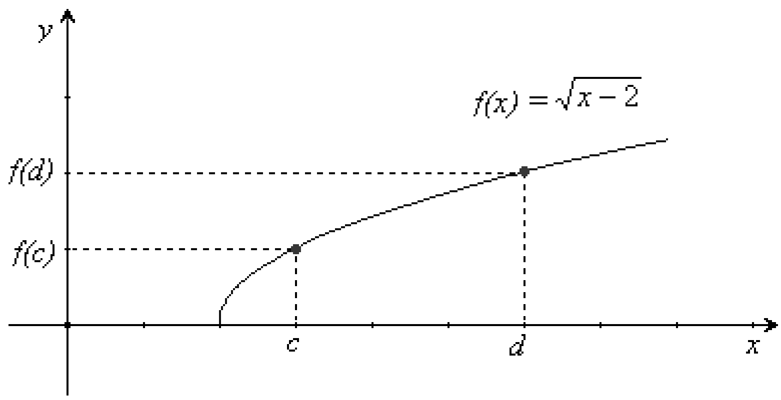


Figura 9

4. A função $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(x)}$ é contínua em todo o seu domínio que é $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Graficamente:

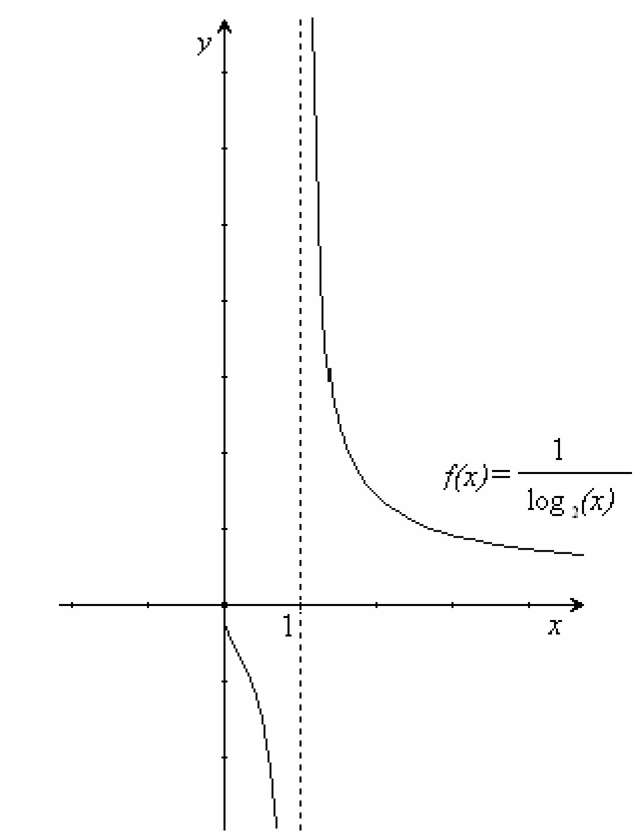


Figura 10

5. A função $f(x) = \frac{1}{e^x}$ é contínua em todo o ponto de R.

Graficamente:

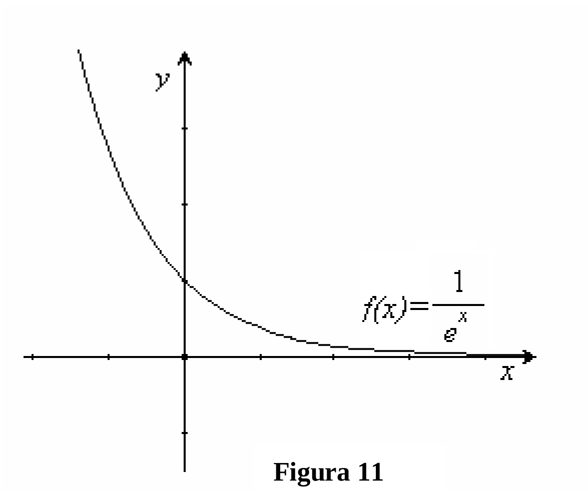


Figura 11

Operações com Funções Contínuas

As propriedades operatórias dos limites de funções reais de variável real reflectem-se na continuidade da soma, do produto, da potência, do quociente e da raiz de funções contínuas em certo ponto.

Sejam f e g funções contínuas no ponto $c \in D_f \cap D_g$, podemos concluir que nesse ponto, $f+g,\ f-g,\ fg\ e\ \frac{f}{g}$ são funções contínuas;

f^n é função contínua $n \in N$;

$\frac{f}{g}$ é função contínua (para o caso em que $g(c) \neq 0$);

$\sqrt[n]{f}$ é função contínua (para o caso em que $f(c) \geq 0$, se n par).

A composição de funções contínuas é ainda uma função contínua nos pontos em que a composição esta definida.

a) Toda a função polinomial é uma função contínua em R. Com efeito as funções x^2, x^3, x^4, ... são potências duma função contínua $(f(x) = x)$ em R.

Podemos então afirmar que toda a função polinomial

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

é uma função contínua em qualquer ponto $n \in R$.

b) Toda a função racional é contínua no seu domínio.

Uma vez que se exprime por somas, produtos ou quocientes de polinómios que são funções contínuas.

Vamos de seguida apresentar um dos teoremas mais importantes das funções contínuas.

Teorema de Bolzano

O Teorema de Bolzano-Cauchy, ou Teorema do valor intermédio, diz-nos que uma função contínua num intervalo não passa de um valor para outro sem que passe por todos os valores intermédios.

TEOREMA 1. Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se s é um ponto do intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = s$.

DEMONSTRAÇÃO:

AGUDO, F. R. Dias, "*Análise Real*", Escolar Editora, Lisboa, 1989. (Ver bibliografia páginas 32 e 33)

Este teorema tem várias aplicações na Matemática. Entre as mais notáveis está a garantia de existência a localização de raízes de equações.
De seguida vamos ver um exemplo da aplicação referida anteriormente.

EXEMPLO:

Mostre que a equação $x^4 - 3x^3 + 5 = 0$ é possível no intervalo $[-1,2]$.
Seja f uma função definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$.
Como f é uma função polinomial, é contínua em $\mathbb{R}$, logo, é contínua em $[-1,2]$.
Apliquemos o Teorema de Bolzano ao intervalo $[-1,2]$.

$f(-1) = 1 + 3 + 5 = 9$
$f(2) = 16 - 24 + 5 = -3$

Como
$f(-1) \times f(2) < 0$, a função f tem pelo menos um zero em $]-1,2[$.
Logo a equação $x^4 - 3x^3 + 5 = 0$ tem, pelo menos, uma raiz em $]-1,2[$.

Graficamente:

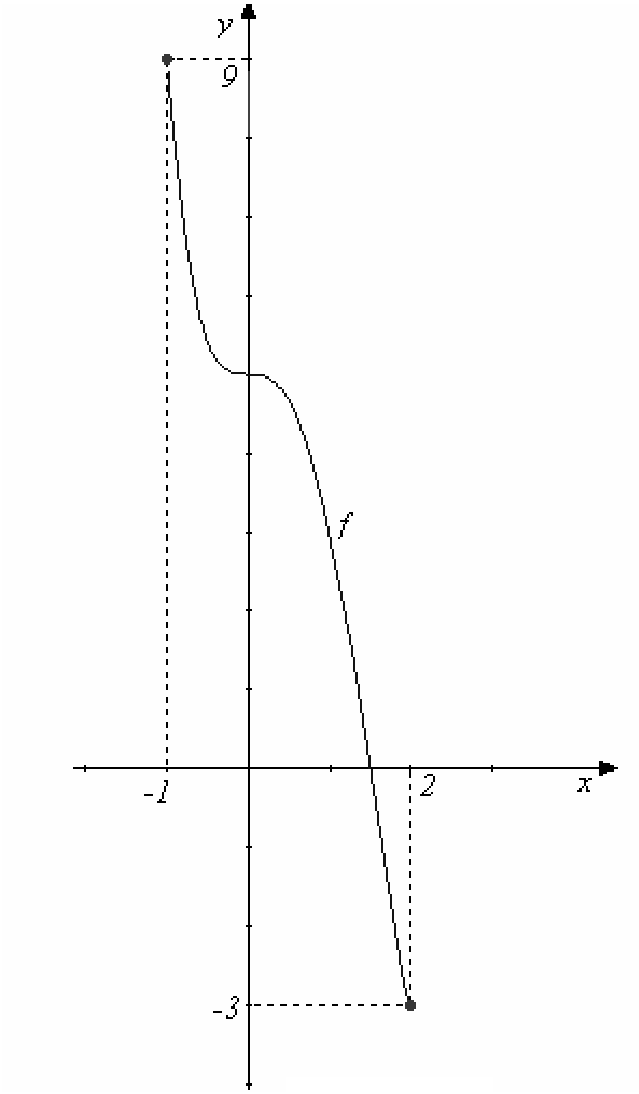
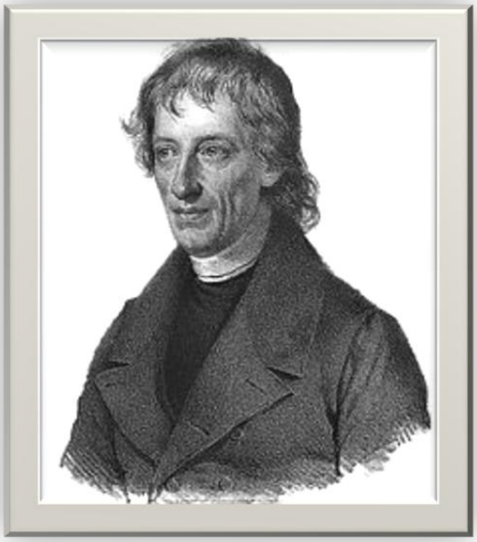


Figura 12

Matemáticos que Contribuíram para o Estudo da Continuidade

Bolzano



Nasceu em 5 de Outubro de 1781 em Praga, faleceu na sua cidade natal a 18 de Dezembro de 1848.

Filho de um comerciante de artes foi educado na Universidade de Praga. Depois de estudar teologia, filosofia e matemática, foi ordenado sacerdote da Igreja Católica em 1805, e foi designado para uma cadeira de Filosofia, na Universidade de Praga, para leccionar como professor de religião. Defendeu abertamente uma reforma educacional, proclamou os direitos da consciência individual sobre as exigências do governo austríaco, e discursou sobre os absurdos da guerra e do militarismo.

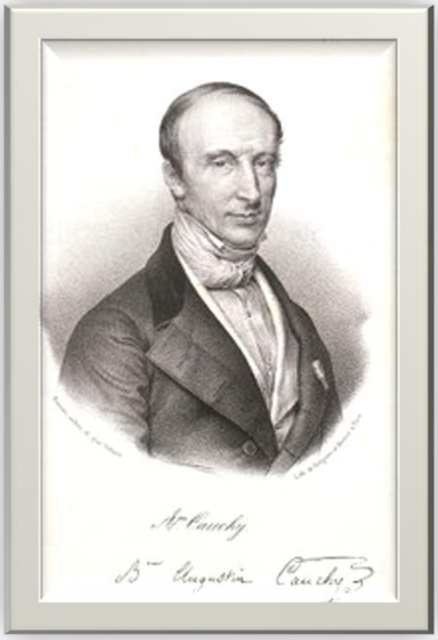
Pioneiro na exigência total de formalização e rigor lógico das demonstrações matemáticas em que, até então, só admitiam a introdução de conclusões com base na intuição.

Conhecido como um solitário no seu trabalho que veio a ser, no entanto, retomado e continuado por outros matemáticos notáveis como Cauchy, George Cantor e Richard Dedekind, na linha de uma progressiva formalização e rigor.

Os estudos científicos de Bolzano foram muito avançados para o seu tempo, nos fundamentos de vários ramos da matemática, depois de demonstrar o Teorema do Valor Intermédio, deu o primeiro exemplo de uma função contínua não derivável sobre o conjunto dos números reais.

Num trabalho publicado em 1817, Bolzano apresentou definições rigorosas de função contínua e de derivada de uma função, tendo ainda estabelecido formalmente as relações entre derivabilidade e continuidade de uma função.

Cauchy



Nasceu em 21 de Agosto de 1789 na cidade de Paris, e veio a falecer próximo da sua cidade natal a 23 de Maio de 1857.
Foi o pioneiro no estudo de análise e da teoria de permutação de grupos. O seu contributo no desenvolvimento das ciências matemáticas ainda hoje é reconhecido, pois é raro o ramo destas ciências onde não se encontrem teoremas, métodos, critérios, definições, condições, etc., com o seu nome.

O primeiro avanço na matemática moderna foi produzido por Cauchy, na medida em que foi ele quem introduziu o rigor na análise matemática.
No âmbito da análise infinitesimal, foi o fundador da noção moderna de continuidade nas funções de variável real ou complexa.

Devido ao seu tipo de crença religiosa e à péssima relação que mantinha com os outros matemáticos, foi atribuída a Cauchy a seguinte expressão: ***"Cauchy está louco e não há nada que possa ser feito por ele; no entanto, neste momento, ele é o único que sabe como deve ser feita a Matemática".***

DERIVAÇÃO

Estudo da Derivação no Ensino Secundário (12.ºAno)

Matemáticos que contribuíram para o estudo da derivação

Fermat

Pierre de Fermat foi um matemático e cientista francês que nasceu em Agosto de 1601 em Beaumont- de – Lomagne e faleceu em Janeiro de 1665, em Castres também em França.

Era oriundo de uma família abastada, pois o seu pai era um rico mercador, que lhe deu sempre a possibilidade de uma educação privilegiada.

Estudou sempre em locais conceituados tais como a Universidade de Toulouse.

A matemática surgiu na vida de Fermat, como forma de lazer/ entretenimento, pois mantinha a sua profissão de jurista e magistrado.

Fermat nunca viu nenhum dos seus trabalhos publicados em vida, no entanto Pascal considerou-o o maior matemático da época.

Fermat deu os seus contributos em diversas áreas da matemática, tais como: Cálculo Geométrico e Infinitesimal; Teoria dos Números e Teorias das Probabilidades.

Este matemático foi a base de alguns estudos assim como o alicerce de Isaac Newton.

Foi a primeira pessoa a enunciar o Pequeno Teorema de Fermat, embora a prova do referido teorema tenha sido feita por Euler.

Outro contributo de referência de Fermat prende-se com a Teoria de Probabilidades. De novo o cientista fez progresso nessa área mas com apoio do célebre matemático Pascal. Ambos trocavam correspondência, mas Fermat era principiante e pouco percebia do tema, no entanto devido à sua perspicácia descobriu algumas regras matemáticas que garantiam com maior precisão as leis do caso. Em conjunto alcançaram as regras essências da Probabilidade.

É de salientar que a área que o mais fascinava Fermat era sem dúvida a Teoria dos Números, através dela o matemático manteve um grande relacionamento com outros matemáticos, pois através de jogos com números, propunha-lhes desafios.

Newton

Isaac Newton foi um grande cientista inglês, no entanto era mais conhecido como físico e matemático, nasceu em Woolsthorpe em Janeiro de 1643. Era também reconhecido como astrónomo, filosofo natural, teólogo e alquimista.

Newton ao longo dos seus oitenta e quatro anos, fez imensas descobertas, escreveu inúmeras obras muitas delas desgastantes, passou por períodos muito difíceis, vindo a falecer em Março de 1727 em Londres, Inglaterra, país que o viu nascer.

Este cientista era oriundo de uma família de classe baixa, o seu pai faleceu antes do seu nascimento, a mãe voltou a casar-se quando ele tinha três anos, ficando este sempre ao cargo da avó.

Frequentou a escola, na cidade que o viu nascer. O seu tio apercebeu-se do talento de Newton e incentivou-o a prosseguir os estudos, matriculando-o numa escola em Cambridge. Newton foi sempre um grande autodidacta, deste modo em 1664 achou que tinha alcançado as metas do conhecimento matemático e assim estaria apto a dar as suas contribuições nesta ciência, descobrindo então:

- O Teorema Binomial;
- O Cálculo;
- A Lei da Gravitação;
- A Natureza das Cores.

Após três anos de trabalho, Newton foi eleito professor *of Mathematics* por Barrow.

A sua vida tinha um ritmo árduo, no entanto, o cientista devido aos seus esforços, no campo da matemática e das ciências viu em 1687, ser publicada uma das suas maiores obras, designada de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.*

Newton embarcou então para França, onde encontrou um grande sucessor do seu trabalho, Laplace que iria também ele dar os seus contributos na obra *Principia,* no entanto o matemático não se ficou por ali e descobriu que o cálculo era bastante reconhecido no Continente, então aproximou-se de Leibniz de modo a dar algum contributo do seu saber, desta forma Leibniz tornar-se-ia o seu grande rival. Eis que as descobertas não vão muito além, Newton viu-se obrigado a abandonar o estudo da matemática, voltando a exercer o papel de presidente da *Royal Society*, papel que assumiu até a sua morte.

José Anastácio da Cunha

Matemático português, José Anastácio da Cunha nasceu em Lisboa, em Maio de 1774. Teve um percurso de vida muito curto pois faleceu com aproximadamente quarenta e três anos.

José Anastácio da Cunha foi um seguidor de Isaac Newton pois foi um grande matemático português que formulou alguns conceitos tais como o de *Derivada.*

Embora tenha sido militar, com apenas dezanove anos foi promovido pelo Marquês de Pombal, professor da Faculdade Matemática da Universidade de Coimbra. José Anastácio da Cunha não teve o merecido reconhecimento em vida, pois só dois séculos após ter falecido é que lhe foi atribuído o mérito relativamente ao Cálculo Infinitesimal.

Durante a sua curta vida apenas viu impressa uma obra intitulada *Princípios Matemáticos para instrução dos alunos do Colégio de São Lucas, da Casa Pia do Castelo de São Jorge.* Nesta obra referenciou as primeiras noções de Aritmética, Geometria, Teoria das Equações, Análise Algébrica, Trigonometria, Geometria Analítica e Calculo Diferencial e Integral.

José Sebastião e Silva

José Sebastião e Silva foi um conceituado professor universitário e investigador na área da Matemática, nasceu em Mértola em Dezembro de 1914 e faleceu na capital em Maio de 1972. Fez grande parte dos seus estudos em Lisboa nomeadamente a Licenciatura e Doutoramento.

Conhecido como um aluno exemplar, na área da Análise. Intitulou a sua dissertação como *As funções analíticas e a análise funcional.* No entanto em 1950 lançou uma nova dissertação designada de *Integração e derivação em espaços de Banach.*

Portugal viveu momentos de inúmeras descobertas onde José Sebastião e Silva deu grande contributo na área da Matemática, realçando a Análise Numérica, a Análise Funcional e Teoria das Distribuições. Para além de investigador nato era um excelente pedagogo do ensino liceal.

Actualmente existem compêndios escritos pelo matemático que foram publicados pelo Instituto Nacional de Investigação Cientifica.

Análise Global do Cálculo Diferencial

Graficamente:

O declive da recta tangente ao gráfico de uma função é um conceito fundamental, permite saber se a função é crescente ou decrescente.

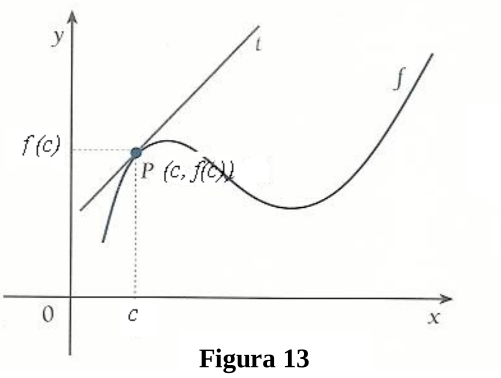


Figura 13

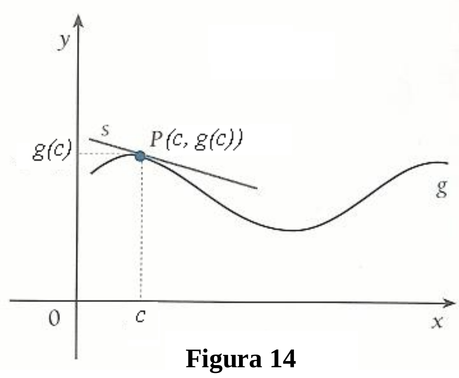


Figura 14

Através dos seguintes gráficos podemos visualizar o declive da recta tangente. Para determinar esse declive num determinado ponto $P(c; f(c))$, consideramos um acréscimo h, diferente de zero e outro que se encontra sobre a curva $(c + h; f(c + h))$.

Graficamente:

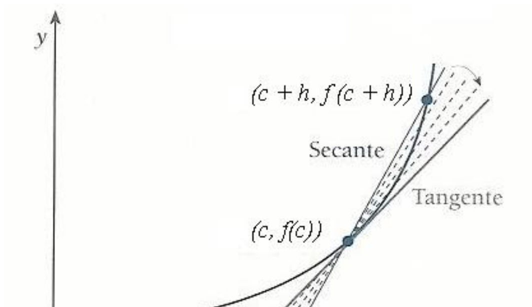


Figura 15

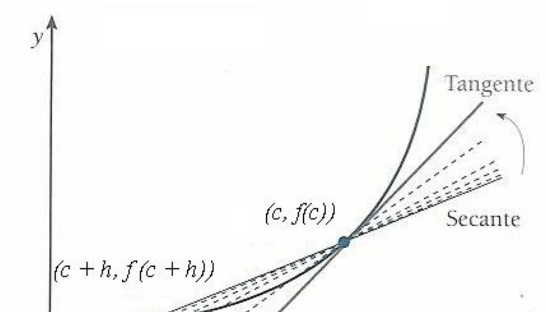


Figura 16

É de salientar que quando h tende para zero $(h \to 0)$, obtemos uma recta tangente à curva; ou seja a recta secante definida pelas abcissas c e $c + h$, tende para uma posição limite que é tangente no ponto $(c; f(c))$.

Deste modo o declive da secante é:

$$\frac{f\,(c+h)-f\,(c)}{h}.$$

Assim conclui-se que o declive da recta tangente ao gráfico f que passa no ponto $P\big(c; f(c)\big)$, é:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\,(c+h)-f\,(c)}{h}.$$

Graficamente:

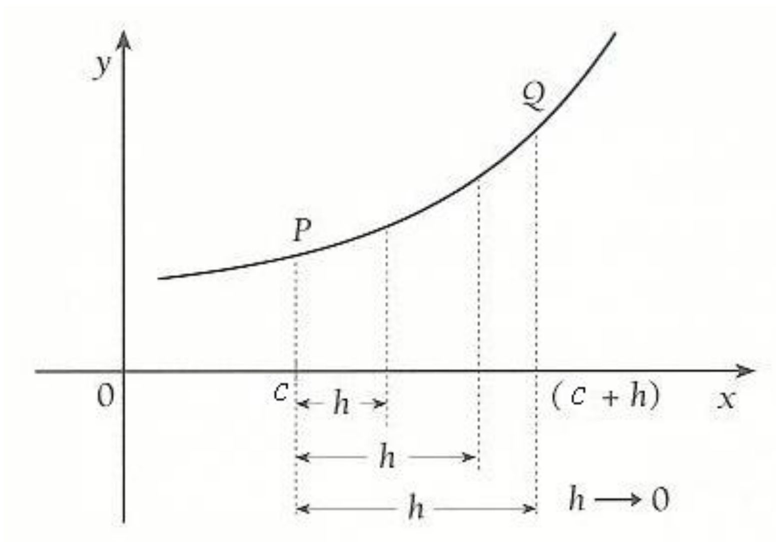


Figura 17

Taxa de Variação

Ao considerarmos o declive de uma recta tangente ao gráfico é fundamental referir a sua importância matemática, pois este equivale à taxa de variação de uma função.

Consideremos o intervalo $[c; c+h]$ da função f, a taxa de variação média é o declive da recta secante ao gráfico f que passa pelos pontos $\big(c+h; f(c+h)\big)$ e $\big(c; f(c)\big)$; ou seja

$$t.v.m. = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

O declive da recta tangente ao gráfico f no ponto $\left(c; f(c)\right)$ permite-nos determinar a variação instantânea ou taxa de variação de f em $x = c$,

$$t.v. = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Graficamente:

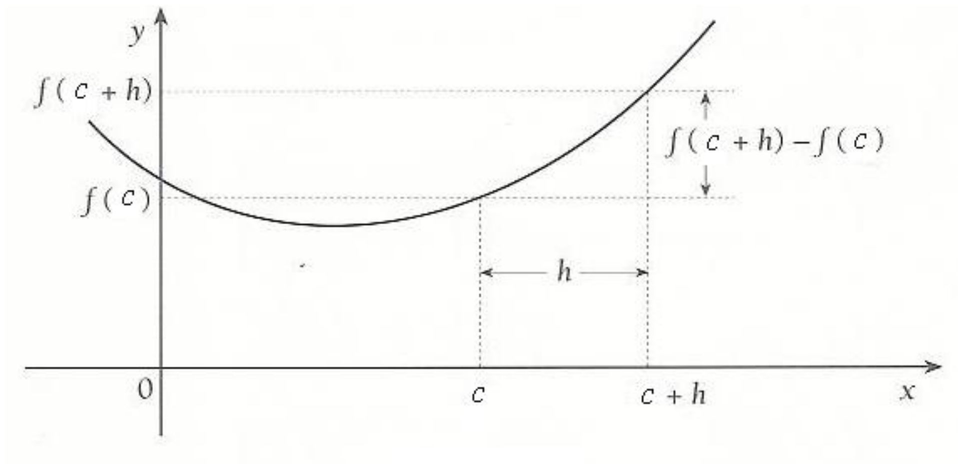


Figura 18

DEFINIÇÃO 5. Seja f uma função real de variável real e c um ponto de acumulação do domínio de *f*. A derivada de *f* no ponto *c*, denota-se por $f'(c)$ é

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

A derivada de *f* também pode ser designada por

$$D\,f_{x\,=\,c} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x\,=c}$$

Fazendo $x - c = h$ temos

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

DEFINIÇÃO 6. Seja f uma função real de variável real e c um ponto de acumulação de f.

Diz-se que f é derivável à esquerda de c se existir:

$$f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Diz-se que f é derivável à direita de c se existir:

$$f'(c^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Caso as derivadas, à esquerda de c e a à direita de c sejam iguais, a função é derivável no ponto c, e o seu valor é comum ao das derivadas laterais.
Então $f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$.

Vejamos agora uma ilustração gráfica dos conceitos que acabamos de introduzir.

Graficamente:

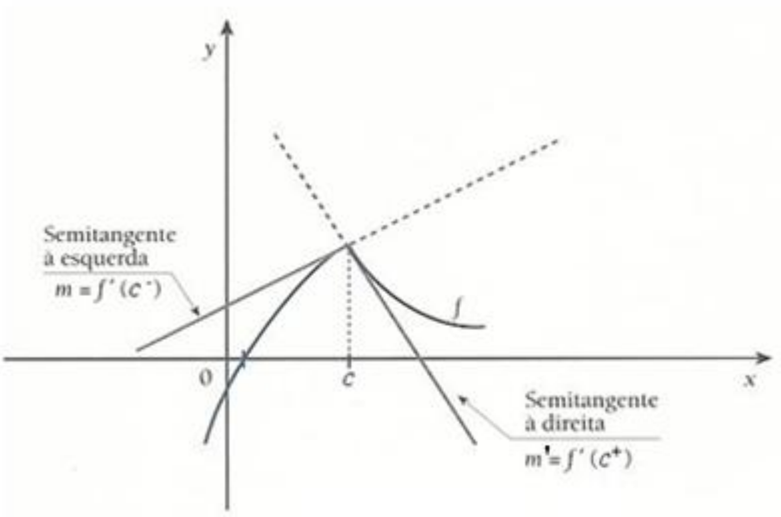


Figura 19

No caso da figura anterior, a derivada à esquerda de c não é igual à derivada à direita de c. Neste ponto a função não tem portanto derivada.

A derivada de uma função *f* no ponto de abcissa *c* é igual ao declive da recta tangente ao gráfico *f* no ponto $(c; f(c))$.

Vejamos de seguida as derivadas de algumas das função mais usadas em Matemática.

Derivada da Função Constante

Consideremos,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

se $f(c) = b$,

então

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{b - b}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Graficamente:

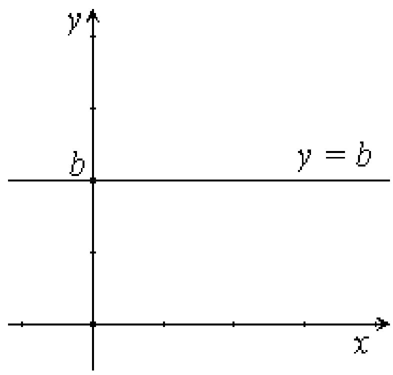


Figura 20

NOTA 4. A derivada de uma função constante é sempre zero.

$$y = b \Rightarrow y' = 0$$

Derivada da Função Afim

Consideremos,

$f'(c) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

se $f(c) = ac + b$ então $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{a(c+h)+b-(ac+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ac+ah+b-ac-b}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = = \lim_{h\to 0} a = a$.

Graficamente:

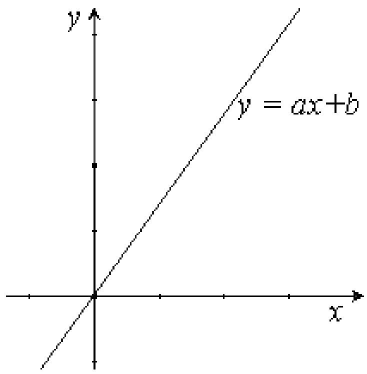


Figura 21

A derivada de uma função afim é igual ao declive da recta da função dada.

$$y = ax + b \Longrightarrow y' = a$$

Derivada do Produto de Função por Uma Constante

Consideramos c uma constante real e f uma função com derivada em $]a, b[$, a função $y = cf(x)$ admite derivada no intervalo $]a, b[$, e $[cf(x)]' = cf'(x)$.

De seguida vamos enunciar algumas regras de derivação (Em alguns casos fazemos a respectiva demonstração. Nos casos em que a complexidade da demonstração sai do âmbito ao qual se destina este trabalho, a demonstração é omitida.)

REGRA 1. Consideramos a função *f*, definida pela potência x^n, em que *n* é um número real, então

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

REGRA 2. Consideramos duas funções f e g deriváveis no intervalo $]a, b[$, então podemos afirmar que $f+g$ também é derivável no referido intervalo e

$$(f+g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

DEMONSTRAÇÃO

Hipótese: f e g são funções deriváveis num ponto c do intervalo $]a, b[$.
Tese: $f + g$ é derivável num ponto c do intervalo $]a, b[$ e
$(f+g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto obtemos:

Considerando $x = c$;

$$(f+g)'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h) - (f+g)(c)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - [f(c) + g(c)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \frac{g(c+h) - g(c)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
$$+ \lim_{h\to 0}\frac{g(c+h) - g(c)}{h} = f'(c) + g'(c) \qquad c.q.d.$$

REGRA 3. Consideramos duas funções f e g deriváveis no intervalo $]a, b[$, então podemos afirmar que $f-g$ também é derivável no referido intervalo e

$$(f-g)'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).$$

NOTA 5. Para demonstrar a derivada da diferença de funções processa-se de forma análoga à derivada da soma de funções.

REGRA 4. Consideramos duas funções f e g com derivada em todos os pontos do intervalo $]a,b[$, então podemos afirmar que $f \cdot g$ também é derivável no referido intervalo e $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO

Considerando $x = c$, temos:

$$(f \cdot g)'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(c+h) - (f \cdot g)(c)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - [f(c) + g(c)]}{h}$$

De seguida adiciona-se e subtrai-se no numerador a expressão $f(c+h)g(c)$, obtemos:

$$(f \cdot g)'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) + f(c+h)g(c) - f(c+h)g(c) - f(c)g(c)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(c)[f(c+h) - f(c)] + f(c+h)[g(c+h) - g(c)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(c)[f(c+h) - f(c)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)[g(c+h) - g(c)]}{h}$$
$$= g(c) \lim_{h \to 0} \frac{[f(c+h) - f(c)]}{h} + f(c+h) \lim_{h \to 0} \frac{[g(c+h) - g(c)]}{h}$$
$$= g(c)f'(c) + f(c)g'(c)$$

Assim,

$$(f \cdot g)'(c) = g(c)f'(c) + f(c)g'(c)$$

ou

$$(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \qquad c.q.d.$$

REGRA 5. Consideramos duas funções f e g com derivada em todos os pontos do intervalo $]a,b[$, então podemos afirmar que $\frac{f}{g}$ também é derivável no referido intervalo e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$.

DEMONSTRAÇÃO

Fazendo $x = c$ e pondo $\varphi(c) = \frac{f(c)}{g(c)}$, ou seja $f(c) = \varphi(c)g(c)$ e aplicando a regra do produto obtemos

$$f'(c) = \varphi'(c)g(c) + \varphi(c)g'(c)$$

donde

$$f'(c) = \varphi'(c)g(c) + \frac{f(c)}{g(c)}g'(c)$$

ou seja

$$\varphi'(c)g(c) = f'(c) - \frac{f(c)}{g(c)}g'(c)$$

isto é

$$\varphi'(c)g(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)}$$

e finalmente

$$\varphi'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2} \quad c.q.d.$$

REGRA 6. Consideramos duas funções f e g, $y = (fog)(x)$ a sua função composta.

Se g admite derivada num ponto c e se f tem derivada na imagem por g correspondente a c, então a função composta é derivada em c e

$$y' = (fog)'(c) = f'[g(c)] \times g'(c)$$

OBSERVAÇÃO. Consideramos u uma função de x, aplicando a regra de derivação da composição podemos concluir que $(u^n)' = nu^{n-1}u'(n \in N)$.

Vejamos agora as derivadas de algumas das funções mais usadas em Matemática.

Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas

REGRA 7. Seja $y = e^u$ então $y' = u'e^x$.

REGRA 8. Seja $y = a^u$ então $y' = \ln a\, u'a^u$.

REGRA 9. Seja $y = \log u$ então $y' = \frac{u'}{u}$.

REGRA 10. Seja $y = \log_a u$ então $y' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Derivada de Funções Trigonométricas

REGRA 11. Seja $y = \sin u$ então $y' = u' \cos u$.

REGRA 12. Seja $y = \cos u$ então $y' = -u' \sin u$.

REGRA 13. Seja $y = \tan u$ então $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

Relação entre Continuidade e Derivabilidade

Analisando os seguintes gráficos podemos afirmar que uma função pode ser contínua num ponto $x = c$, mas não ser derivável no ponto referido.

Graficamente:

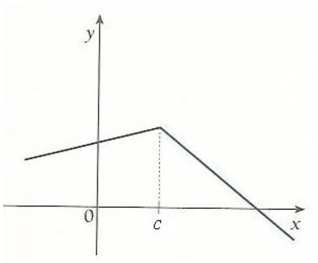


Figura 22

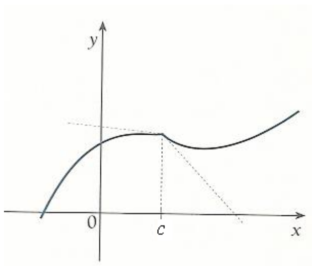


Figura 23

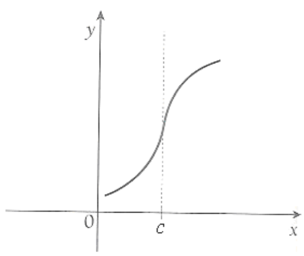


Figura 24

No entanto o recíproco não se verifica.

TEOREMA 2. Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

DEMONSTRAÇÃO
Suponhamos que a função f tem derivada finita no ponto de abcissa c.

Temos que:

$$f(x)-f(c)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c), \quad x\neq c$$

Aplicando limites, obtemos:

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=\lim_{x\to c}\frac{[f(x)-f(c)]}{x-c}\times\lim_{x\to c}(x-c)=f'(c)\times 0$$

Mas $f'(c)$ é finita, temos:

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=f(c)$$

ou

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c) \qquad c.q.d.$$

Logo f é contínua no ponto de abcissa c.

Teoremas Fundamentais do Cálculo Diferencial

TEOREMA 3. Consideremos a função $f:[a,b]\to R$, em que $a<b$, contínua e derivável no intervalo . Se $f(a)=f(b)$ então existe pelo menos um ponto c $]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ contínua em } [a,b] \\ f \text{ derivável em } [a,b] \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \exists_c \in\,]a,b[: f'(c)=0$$

Graficamente:

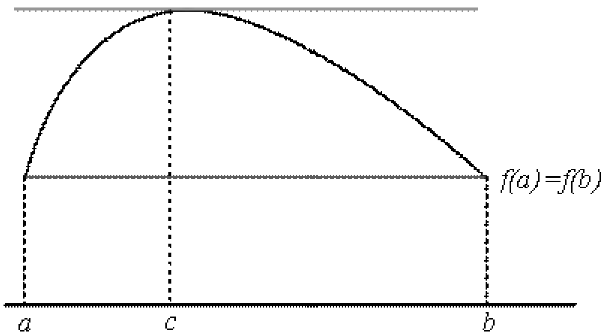


Figura 25

TEOREMA 4. Consideremos duas funções $f: [a, b] \to R$ e $g: [a, b] \to R$, com $a < b$ contínuas e deriváveis no intervalo $[a, b]$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.
, existe pelo menos um ponto c em$[a, b]$, tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)}.$$

Graficamente:

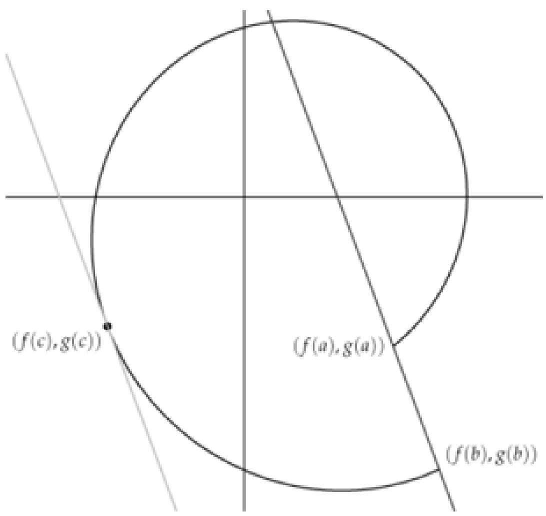


Figura 26

REGRA DE CAUCHY. Consideremos duas funções deriváveis num intervalo A, tal que $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in A$ e c um extremo da função f. Quando $x \to c$ e $f(x)$ e $g(x)$tendem para zero ou para $\pm$ infinito, e existindo $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então existirá $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ assim:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NOTA 6. A aplicação da regra de Cauchy permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ ou, quando $x \to \pm\infty$.

OBSERVAÇÃO. De um modo geral a regra de Cauchy serve para levantar indeterminações, no entanto não serve para levantar todas, pois pode existir $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ mas não $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

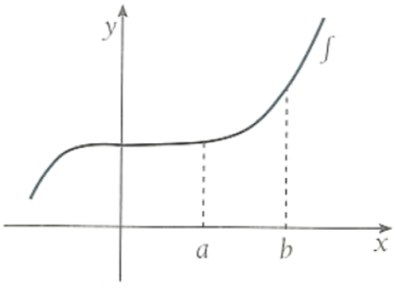
Aplicações

De seguida vamos ver uma das aplicações mais importantes do conceito de derivada: o estudo dos extremos de uma função.

1.ª Derivada

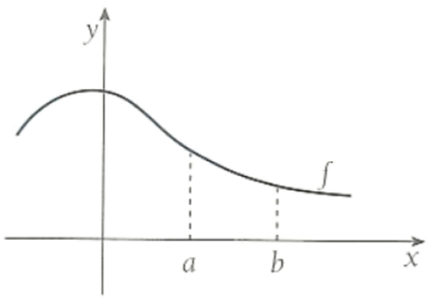
Crescimento e Decrescimento de Uma Função

Graficamente:



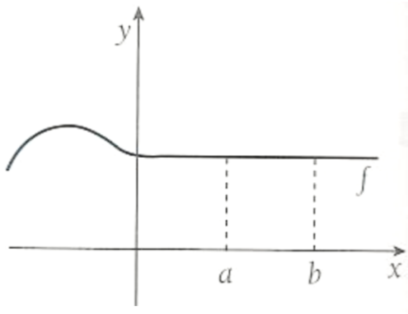
f é estritamente crescente em $[a, b]$

Figura 27



f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Figura 28



f é constante em $[a, b]$

Figura 29

DEFINIÇÃO 8. Sejam a e b dois pontos pertencentes a I e f uma função real de variável real definida num intervalo I.

f é estritamente crescente em I se para todos os números reais a e b de I tais que $a < b$, se tem $f(a) < f(b)$.

f é estritamente decrescente em I se para todos os números reais a e b de I tais que $a < b$, se tem $f(a) > f(b)$.

f é constante em I se para todos os números reais a e b de I se tem $f(a) = f(b)$.

Intervalos de Monotonia

TEOREMA 5. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Se $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente.

Se $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente decrescente.

Se $f'(x) = 0$, para todo o $x \in]a, b[$ então a função é constante.

EXEMPLO:

Consideramos a função f definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

Para determinar os intervalos de monotonia, vamos recorrer ao Teorema 5.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Determinar os zeros de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 3x = 6 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[0,2]$.

Extremos de Uma Função

DEFINIÇÃO 9. Seja f uma função de domínio I.

Diz-se que $f(a)$ é o máximo absoluto de f, se $f(a) \geq f(x)$, para todo o $x \in I$.

DEFINIÇÃO 10. Seja f uma função de domínio I.

Diz-se que $f(a)$ é o mínimo absoluto de f, se $f(a) \leq f(x)$, para todo o $x \in I$.

DEFINIÇÃO 11. Seja f uma função de domínio I.

Diz-se que $f(a)$ é um máximo relativo de f, se existir um intervalo aberto D que contem a tal que $f(a) \geq f(x)$, para $x \epsilon D$.

DEFINIÇÃO 12. Seja f uma função de domínio I.

Diz-se que $f(b)$ é um mínimo relativo de f, se existir um intervalo aberto D que contem b tal que $f(b) \leq f(x)$, para $x \epsilon D$.

Graficamente:

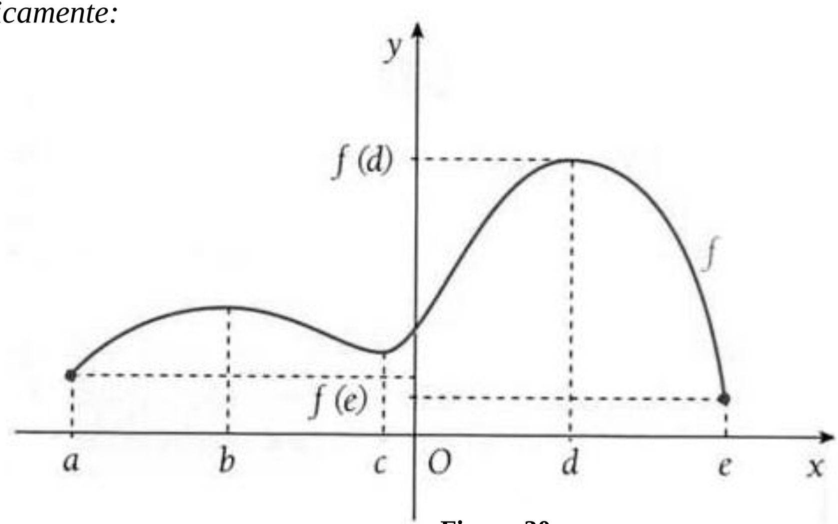


Figura 30

NOTA 7:

$f(d)$ é o máximo absoluto de f.

$f(e)$ é o mínimo absoluto de f.

$f(b)$ é um máximo relativo de f.

$f(c)$ e $f(a)$ são mínimos relativos de f.

Máximos e Mínimos Absolutos

TEOREMA 6. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com máximo ou mínimo absolutos em $c \in \ ]a, b[$. Então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

DEFINIÇÃO 13. Seja c um ponto do domínio de uma função f. Diz-se que c é um ponto crítico de f se $f'(c) = 0$.

Extremos Relativos

TEOREMA 7. Seja c um ponto crítico de f, f uma função contínua em c e derivável num intervalo aberto I, que contem c.

$f(c)$ é um máximo relativo, se f' muda de positiva para negativa em c.

$f(c)$ é um mínimo relativo, se f' muda de negativa para positiva em c.

EXEMPLO:

Para determinar os extremos relativos da função f, vamos recorrer ao EXEMPLO dos intervalos de monotonia.

Como a função $f'(x)$ admite zeros, vamos determinar a imagem da função f, cujos objectos são os zeros.

$f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - 2 \Leftrightarrow f(0) = -2$

$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 2 \Leftrightarrow f(2) = 8 - 12 - 2 \Leftrightarrow f(2) = -6$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

$f(0) = -2$ é um máximo relativo de *f*.

$f(2) = -6$ é um mínimo relativo de *f*.

2.ª Derivada

DEFINIÇÃO 14. Consideremos o gráfico de *f* e o ponto $(c, f(c))$. Diz-se que $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão (P.I.) se verificar as seguintes condições:

— *f* é contínua em c;

— existe um intervalo $]a, b[$ que contem *c*, de modo que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]a, c[$ e voltada para cima em $]c, b[$, ou então o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima em $]a, c[$ e voltada para baixo em $]c, b[$.

Graficamente:

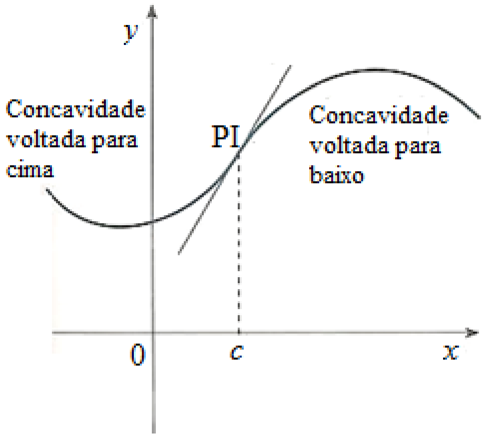


Figura 31

EXEMPLO:

Consideramos a função *f* definida por $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$.

Para determinar o s pontos de inflexão, vamos recorrer à 2.ª Derivada.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 18x$

$f''(x) = 6x - 18$

Calculo dos zeros de $f''(x)$:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	-51	∪

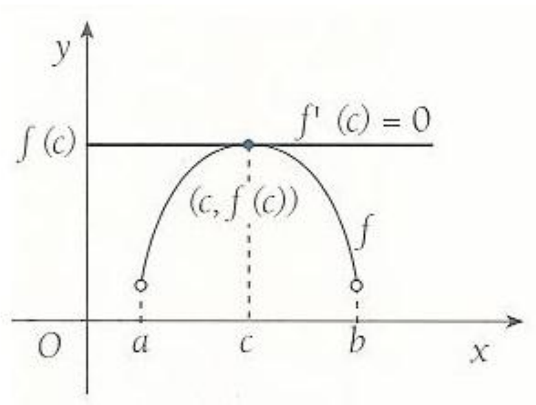
$(3, -51)$ é o ponto de inflexão da função f.

TEOREMA 8. Seja f uma função derivável em $]a, b[$. O gráfico f tem concavidade voltada para cima em $]a, b[$ se e só se f' é crescente.

TEOREMA 9. Seja f uma função derivável em $]a, b[$. O gráfico f tem concavidade voltada para baixo em $]a, b[$ se e só se f' é decrescente.

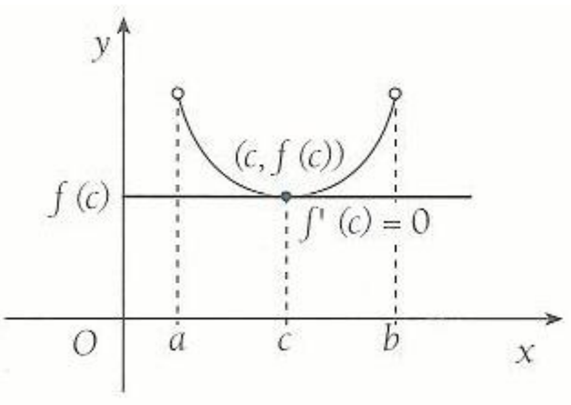
NOTA 8. Se $f'' > 0$ então f' é crescente e logo a concavidade está voltada para cima. Se $f'' < 0$ então f' é decrescente e logo a concavidade está voltada para baixo.

Graficamente:



$f'(c) = 0$; $f''(c) < 0$; $f(c)$ é máximo relativo.

Figura 32



$f'(c) = 0$; $f''(c) > 0$; $f(c)$ é mínimo relativo.

Figura 33

TEOREMA 10. Seja f uma função derivável em $]a, b[$, que contem o ponto c e $f'(c) = 0$. Então, f tem um máximo relativo em c, se $f''(c) < 0$.

TEOREMA 11. Seja f uma função derivável em $]a, b[$, que contem o ponto c e $f'(c) = 0$. Então, f tem um mínimo relativo em c, se $f''(c) > 0$.

Representação Gráfica de Uma Função

NOTA 9. Para representar uma função graficamente podemos recorrer a nove passos importantes, sendo eles:

1.º - Representar a função na calculadora, pois o gráfico obtido, ajudar-nos-á a compreender os resultados que serão feitos analiticamente;

2.º - Determinar o domínio da função;

3.º - Estudar a continuidade da função;

4.º - Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos coordenados;

5.º - Estudar a simetria do gráfico;

6.º - Determinar os extremos e estudar a monotonia da função (análise da 1.ª Derivada);

7.º - Estudar o sentido da concavidade (análise da 2.ª Derivada);

8.º - Determinar as equações das assimptotas;

9.º - Comparar os resultados obtidos analiticamente com os obtidos com o auxílio da calculadora e indicar o contradomínio.

Problemas de Optimização

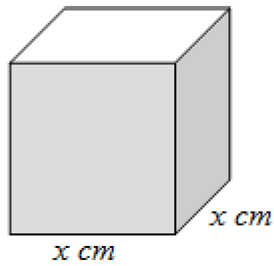
NOTA 10. É de salientar que na resolução de problemas de optimização, nem sempre é dada a expressão analítica, em muitos dos casos, temos de defini-la primeiro.

Análise de Problemas

EXEMPLO:

Na figura está representada uma caixa aberta com a forma de um paralelepípedo rectângulo de base quadrada de lado *x*.

O volume da caixa é $100\ cm^3$.



a) Mostre que a área total A da figura, em cm^2, da caixa aberta é dada por:

$$A = x^2 + \frac{400}{x}.$$

b) Determine *x* de modo a ser mínimo o custo do material a usar na construção da caixa.

RESOLUÇÃO:

a) $V_{caixa} = V_{prisma}$

$V_{prisma} = A_{base} \times altura$

$\Leftrightarrow 100 = x \times x \times altura$

$\Leftrightarrow altura = \dfrac{100}{x^2}$

$A_{base} = x \times x = x^2$

$A_{lateral} = x \times \dfrac{100}{x^2}$

$A_{lateral} = \dfrac{100}{x}$

$$A_{caixa\ aberta} = A_{base} + 4 \times A_{lateral}$$

$$\Leftrightarrow A_{caixa\ aberta} = x^2 + 4 \times \frac{100}{x}$$

$$\Leftrightarrow A_{caixa\ aberta} = x^2 + \frac{400}{x}$$

b) Consideramos a função A definida por $A = x^2 + \frac{400}{x}$.

Para determinar os intervalos de monotonia, vamos recorrer ao Teorema 5.

$$A(x) = x^2 + \frac{400}{x}$$

$$A'(x) = 2x - \frac{400}{x^2}$$

Determinar os zeros de $A'(x)$:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 400 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 400 \Leftrightarrow x^3 = \frac{400}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 200 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{200} \Leftrightarrow x \approx 5{,}8\ (1c.d.)$$

x	$-\infty$	5,8	$+\infty$
$A'(x)$	-	0	+
$A(x)$	$\searrow$	102,6	$\nearrow$

$A(5{,}8) = 102{,}6$ é um mínimo relativo de A.

O valor de x, de modo a ser mínimo o custo do material a usar na construção da caixa terá de ser 102,6 cm.

CONCLUSÃO

Afinal….conseguimos relacionar a continuidade com o nosso dia a dia?

Esta foi uma questão colocada implicitamente no início deste trabalho, pois relacionar a Matemática com a Natureza, ou mesmo com o meio que nos envolve não é fácil.

Com a elaboração deste trabalho enriqueci os meus conhecimentos acerca do tema " Continuidade e Derivação de Funções".

Sendo uma área do meu interesse, a Análise Matemática, veio despertar bastante interesse e curiosidade, contudo também vontade de aprofundar o seu estudo.

A divisão deste trabalho em duas secções, prende-se com o facto de dar a conhecer um pouco como são abordados estes temas no Ensino Secundário.

Dado que o conceito de derivada surge da continuidade, podemos afirmar que a noção de derivada seguiu o método histórico, uma vez que faz as noções matemáticas não se desenvolvem de maneira autárquica, mas antes conectadas entre si.

Desta forma somos levados a compreender que a evolução do conceito em estudo não foi linear, pois, verificamos progressos e retrocessos, indecisões, dúvidas, hesitações.

Tratando-se de um Relatório de Estágio, ou seja, de maior nível investigacional posso dizer que senti de perto as dificuldades de todos aqueles que se dedicam à investigação, pois são horas e horas perante bibliografia que nunca acaba, contendo por vezes meras referências muito globais. Contudo, não foi em vão que realizei este trabalho, pois devido à sua envergadura, enriqueci os meus conhecimentos, espero também, quem com ele contacte fortalece os seus saberes.

BIBLIOGRAFIA

LIVROS DE CONSULTA- ANÁLISE, CÁLCULO

GUIDORIZZI, Hamilton L., *" Um curso de cálculo",* Livros técnicos e científicos Editora S.A., São Paulo, 1985.

AGUDO, F. R. Dias, "*Análise Real*", Escolar Editora, Lisboa, 1989.

COURANT, R. e tal, *"Introduction to Calculus and Analysis",* Wiley International Edition, New York, 1965.

MANUAIS - ENSINO SECUNDÁRIO

GUERREIRO, Luís et al, *"Acesso ao ensino superior 2002-Matemática"*, Porto Editora, Porto, 2001.

GUERREIRO, Luís et al, *"Acesso ao ensino superior 2003-Matemática"*, Porto Editora, Porto, 2003.

CARVALHO, Paula et al, "*Preparar os testes*", Areal Editora, 2006.

NEVES, Maria e tal, "*Funções III*", Porto Editora, Porto, 2005.

JORGE, Ana et al, "*Infinito 12*", Areal Editores, Porto, 1999.

FERNANDES, Ana et al, "*Matemática A – 12.º O essencial*", Edições Asa, Porto, 2007.

LIMA, Yolanda et al, "*XEQMAT*", Editorial O Livro, Porto.

TEMAS DIVERSOS

"Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira", Editorial Enciclopédia, Lisboa-Rio de Janeiro, volume IV, 1945.

"Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira", Editorial Enciclopédia, Lisboa-Rio de Janeiro, volume VI, 1945.

GUZMAN, Miguel de, *" Aventuras Matemáticas",* Gradiva, Lisboa, 1990.

SÍTIOS ELECTRÓNICOS

http://br.geocities.com

http://pt.wikipedia.org

http://www.econ.fea.usp.br

www.fc.up.pt

http://www.educ.fc.ul.pt

http://www.mat.uc.pt