



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Alguns Fundamentos Acerca dos Testes de Hipóteses

André Marques de Andrade

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Jorge Gama

Covilhã, Junho de 2011

Agradecimentos

Para a realização deste trabalho foram vários os intervenientes que colaboram direta e indiretamente, os quais merecem o meu reconhecimento e gratidão.

Ao meu orientador, Professor Jorge Gama, pela dedicação, empenho e disponibilidade com que direcionou e acompanhou este trabalho, bem como pelos comentários e sugestões.

Quero agradecer aos meus pais, mulher, restante família e amigos, pela compreensão, apoio incondicional, incentivo e motivação imprescindíveis para realização deste trabalho.

Dedico a todos este trabalho.

Prefácio

A inferência estatística é um ramo da Estatística moderna que é constituída por duas vertentes, a clássica e a Bayesiana, com metodologias distintas.

A inferência clássica, defendida por Karl Pearson, utiliza o método ou informação da amostragem, analisando os dados resultantes de inquéritos, experiências repetidas em condições mais próximas quanto possível, ou sucessões cronológicas.

A inferência Bayesiana utiliza o método ou informação à priori, servindo-se da intuição e/ou conhecimentos adquiridos pelo investigador, que são anteriores à experiência ou amostra. Resulta assim tanto de dados objectivos como subjetivos. Tem assim um influência dedutiva.

A influência clássica origina uma inferência do tipo indutiva, na qual a observação dos resultados se estende da amostra para a população e onde se adquirem novos conhecimentos. Rejeita a inferência Bayesiana por esta ser subjetiva. Com o teorema de Bayes, a inferência Bayesiana combina a inferência à priori com a informação obtida por amostragem.

No desenvolvimento dos métodos da estatística moderna, as primeiras técnicas de inferência que apareceram foram as que faziam diversas hipóteses sobre a natureza da população da qual se extraíram os dados. A primeira grande conquista da inferência estatística é o bem conhecido teste do qui-quadrado de Pearson.

Para se chegar à conclusão que uma determinada hipótese deverá ser rejeitada ou não rejeitada, baseado em um particular conjunto de dados, é necessário dispor de um processo objetivo que permita decidir sobre a veracidade ou a falsidade de tal hipótese.

A objetividade desse processo deve ser baseada na informação proporcionada pelos dados, e como estes dados, em geral, envolvem apenas parte da população que se pretende atingir, no risco que se está disposto a correr de que a decisão tomada não esteja correta. A decisão sobre a hipótese pode levar à rejeição, revisão ou aceitação da teoria que a originou.

Desta forma, pretende-se com este estudo, compilar alguns fundamentos da teoria dos testes de hipóteses. Para isso foi necessário estudar testes de hipóteses simples e compostas, unilaterais e bilaterais. O Lema de Neyman-Pearson deu um importante contributo para a grande maioria dos testes, pois o recurso à razão de verosimilhança é usual na maioria dos testes de hipóteses para determinar os testes mais potentes e os testes uniformemente mais potentes.

Resumo

A fundamentação teórica dos testes de hipóteses é excepcionalmente analisada em estudos estatísticos, daí o objetivo deste estudo ser a recolha de alguns dos mais importantes pressupostos teóricos dos testes de hipóteses. A obtenção de resultados como testes Mais Potentes (MP), testes Uniformemente Mais Potentes (UMP) e testes Uniformemente Mais Potentes Não Enviesados (UMPU) é comum nos estudos estatísticos, mas é necessário o conhecimento das condições que satisfazem esses testes.

Palavras - chave

Testes de Hipóteses, Testes de Hipóteses Mais Potentes (MP), Testes de Hipóteses Uniformemente Mais Potentes (UMP), Testes de Hipóteses Uniformemente Mais Potentes Não Enviesados (UMPU), Lema Neyman-Pearson, Razão de Verossimilhanças, Valor de Prova.

Abstract

The theoretical basis of hypothesis testing is exceptionally analyzed in statistical studies. The purpose of this study is the collection of some of the most important theoretical premises of the hypotheses tests. Obtaining results such as Most Powerful test (MP), Uniformly Most Powerful tests (UMP), Uniformly Most Powerful Unbiased tests (UMPU) are common in statistical studies but it is necessary to know the conditions that satisfy those tests.

Keywords

Hypotheses tests, Most Powerful test (MP), Uniformly Most Powerful tests (UMP), Uniformly Most Powerful Unbiased tests (UMPU), Neyman-Pearson Lemma, Likelihood Ratio, P-Value.

Índice

Parte I	
1 Generalidades acerca dos Testes de Hipóteses	1
1.1 Conceitos Básicos	1
1.2 Lema de Neyman-Pearson	4
1.3 Razão de Verossimilhanças	8
1.4 Valor de Prova	11
1.5 Estatística Suficiente	13
2 Testes de Hipóteses Uniformemente Mais Potentes	16
2.1 Teste de hipóteses simples contra hipóteses compostas	16
2.2 Testes Não Enviados e Testes Similares	23
3 Conclusão	26
4 Referências Bibliográficas	28
Parte II	
1.1 Planificação de subunidade	30
1.2 Anexos	83

Lista de Figuras

Figura 1.1.1 - Representação de α e β para o caso de um teste de hipóteses sobre a média de uma população normal	4
Figura 1.2.1 - Representação das regiões W e W' para amostras de tamanho 2	6

Lista de Tabelas

Tabela 1.1.1 - Representação das decisões corretas e dos possíveis tipos de erros	3
--	---

Lista de Acrónimos

RC - região crítica

MP - mais potente

UMP - uniformemente mais potente

UMPU - uniformemente mais potente não enviesado

RMV - razão de verosimilhança monótona

Parte I

CAPÍTULO 1

Generalidades acerca dos Testes de Hipóteses

1.1 Conceitos básicos

Um dos objetivos principais da análise estatística é derivar (ou inferir) conclusões válidas acerca de uma população ou populações através do exame de amostra(s) dessa população ou populações. A inferência estatística pretende responder a dois tipos de questões:

- 1) Qual é o valor de um certo parâmetro de uma população? (Estimação de parâmetros).
- 2) Pode considerar-se que um dado parâmetro de uma população tem determinado valor? (Prova ou teste de hipóteses).

Os testes de hipóteses são um método inferencial, o qual constitui uma outra análise de um problema inferencial na estimação paramétrica com base na informação contida numa amostra. Todos os dias temos de tomar decisões respeitantes a determinadas populações, com base em amostras das mesmas (decisões estatísticas). Nesta tomada de decisões, é útil formular hipóteses sobre as populações, hipóteses essas que podem ou não ser verdadeiras. A essas hipóteses chamamos hipóteses estatísticas, as quais geralmente se baseiam em afirmações sobre as distribuições de probabilidade das populações ou sobre alguns dos seus parâmetros. Quando a forma da distribuição ou a forma da função densidade de probabilidade é conhecida e as afirmações dizem respeito a um determinado parâmetro, fala-se em testes paramétricos. Caso contrário, dizem-se testes não-paramétricos. O uso tanto dos testes paramétricos como dos não-paramétricos está condicionado à dimensão da amostra e à respectiva distribuição da variável em estudo.

Definição 1.1.1 *Uma hipótese estatística é uma afirmação ou conjectura sobre parâmetros, distribuições de probabilidades, ou outras propriedades probabilísticas de variáveis aleatórias.*

Uma hipótese pode então ser definida como uma conjectura acerca de uma ou mais populações. Desta forma, os testes de hipóteses podem considerar-se uma segunda vertente da inferência estatística, tendo por objectivo verificar, a partir de dados observados numa amostra, a validade de certas hipóteses relativas à população. O resultado do teste corresponde inevitavelmente a uma das duas respostas possíveis para cada questão: afirmativa ou negativa. Em ambos os casos corre-se o risco de errar. Uma das características do teste de hipóteses é, justamente, a de permitir controlar ou minimizar tal risco.

Definição 1.1.2 *Um teste de uma hipótese estatística é o procedimento ou regra de decisão que nos possibilita decidir entre rejeitar ou não rejeitar essa hipótese, com base na informação proveniente de uma amostra observada.*

Nos testes de hipóteses, e ao contrário dos intervalos de confiança, em vez de procurar uma estimativa pontual ou um intervalo para um parâmetro, admite-se ou avança-se um valor hipotético para o mesmo, utilizando depois a informação da amostra para rejeitar ou não rejeitar esse mesmo valor. A hipótese a testar denomina-se por hipótese nula e representa-se por H_0 . O objectivo é verificar se os factos observados a contradizem, levando a optar pela hipótese alternativa, representada por H_1 .

No que se segue aborda-se os testes de hipóteses sobre um parâmetro. Assim, seja X uma variável aleatória com função de densidade (ou de probabilidade) representada por $f(x|\theta)$, em que θ é um parâmetro desconhecido com espaço parâmetro $\Theta \subset \mathbb{R}$. Pretende-se testar uma certa hipótese nula, H_0 , contra a hipótese alternativa, H_1 . Qualquer conjectura sobre o parâmetro θ estabelece uma partição,

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \quad \text{e} \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

Assim, temos a seguinte formulação:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

Um teste de hipóteses deve basear-se no comportamento probabilístico de uma população e estabelecer um critério para determinar quais as amostras que levam à rejeição da hipótese nula.

Este procedimento leva-nos a definir a região crítica ou região de rejeição: se (X_1, X_2, \dots, X_n) é uma amostra aleatória no espaço amostra \mathbb{R}^n , considere-se um subconjunto $W \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

- se $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$, rejeita-se H_0 ;

- se $(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin W$, não se rejeita H_0 .

em que (x_1, x_2, \dots, x_n) uma realização (uma amostra observada) da amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) . Ao subconjunto W dá-se o nome de **região crítica** ou **região de rejeição**.

A **região crítica** (RC) é o conjunto de valores assumidos pela variável aleatória ou estatística de teste para os quais a hipótese nula é rejeitada.

O teste é feito considerando uma **região crítica** (RC) que permite **rejeitar** H_0 , ou seja, se o valor da estatística de teste, obtido a partir de uma amostra observada, pertencer à RC rejeita-se H_0 , caso contrário, não se rejeita H_0 . Naturalmente, uma estatística de teste é uma estatística (função de uma amostra aleatória) que normalmente especifica um teste de hipóteses e cuja distribuição amostral resulta do comportamento probabilístico da população (variável aleatória X), do tamanho da amostra e/ou da hipótese nula.

Em geral, num teste de hipóteses, qual a decisão a tomar? Temos quatro situações possíveis:

- 1ª - H_0 é verdadeira e não se rejeita H_0 : decisão correta;
- 2ª - H_0 é falsa e rejeita-se H_0 : decisão correta;
- 3ª - H_0 é verdadeira e rejeita-se H_0 : erro tipo I;
- 4ª - H_0 é falsa e não se rejeita H_0 : erro tipo II.

Resumindo-se na seguinte tabela:

DECISÃO	Situação real	
	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Rejeitar H_0	ERRO TIPO I	Decisão correta
Não rejeitar H_0	Decisão correta	ERRO TIPO II

Tabela 1.1.1 Representação das decisões corretas e dos possíveis tipos de erros.

A probabilidade do erro do tipo I (ou de 1ª espécie) é representado por α e denomina-se de **nível de significância** do teste:

$$\alpha = P(\text{Erro do tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}).$$

A probabilidade do erro do tipo II (ou de 2ª espécie) é representado por β :

$$\beta = P(\text{Erro do tipo II}) = P(\text{n\~{a}o rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

Chama-se **pot\~{e}ncia do teste** \~{a} probabilidade de se rejeitar a hip\~{o}tese nula quando a hip\~{o}tese alternativa \~{e} verdadeira, ou seja, a probabilidade de se rejeitar corretamente a hip\~{o}tese nula:

$$1-\beta = 1 - P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadeira}).$$

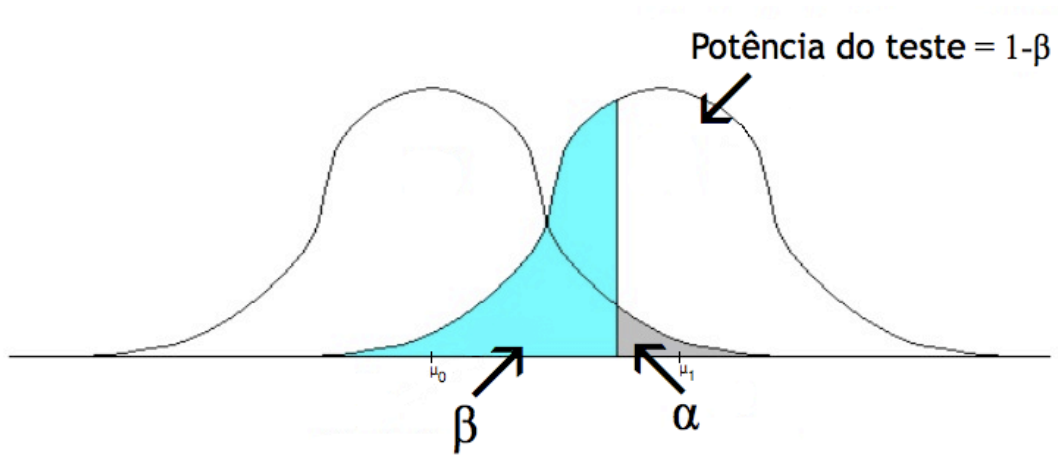


Figura 1.1.1 Representa\~{c}\~{o} de α e β para o caso de um teste de hip\~{o}teses sobre a m\~{e}dia de uma popula\~{c}\~{o} normal.

1.2. Lema de Neyman-Pearson

A teoria dos testes de hip\~{o}teses sistematizada por Neyman e Pearson (1933) consiste em definir uma regi\~{o} cr\~{i}tica, tal que, se a amostra observada pertencer a esta regi\~{o}, a hip\~{o}tese nula \~{e} rejeitada.

Desta forma, para um teste de dimens\~{a}o α apresenta-se a mesma probabilidade de erro na rejei\~{c}\~{o} se os dados est\~{a}o muito pr\~{o}ximos do valor cr\~{i}tico. A maior cr\~{i}tica \~{a} teoria dos testes de hip\~{o}teses de Neyman-Pearson \~{e} devida ao facto de os erros Tipo I e Tipo II n\~{a}o refletirem a evid\~{e}ncia dos dados observados.

Numa popula\~{c}\~{o} X com fun\~{c}\~{a}o densidade $f(x|\theta)$, pretende-se agora testar uma hip\~{o}tese simples contra uma hip\~{o}tese alternativa simples, com espa\~{c}o par\~{a}metro $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta = \theta_1 .$$

O objetivo é encontrar a melhor região crítica, W_0 , de dimensão α , com $0 < \alpha < 1$, que satisfaz as seguintes condições:

- $P\{X \in W_0 | \theta_0\} = P\{W_0 | \theta_0\} = \int_{W_0} f(x | \theta_0) = \alpha$
- $P\{X \in W_0 | \theta_1\} = P\{W_0 | \theta_1\} = \int_{W_0} f(x | \theta_1) = \text{máxima} .$

Para encontrar W_0 é bom recordar que cada seu elemento é avaliado segundo dois critérios: o da probabilidade de rejeitar H_0 , quando H_0 é verdadeira, e o da probabilidade de não rejeitar H_0 , quando H_0 é falsa.

O Lema de Neyman-Pearson recorre à razão de verossimilhanças para encontrar a região W_0 , que é dada por:

$$\lambda(x | \theta_0, \theta_1) = \frac{f(x | \theta_1)}{f(x | \theta_0)},$$

a partir da qual W_0 é o conjunto de todos os pontos x tais que $\lambda(x | \theta_0, \theta_1) \geq c$, com c determinado pela condição,

$$P\{W_0 | \theta_0\} = \int_{W_0} f(x | \theta_0) = \alpha$$

Contudo, a condição anterior pode ser melhorada, considerando não só para valores iguais a α como também incluir os valores inferiores a α , em particular para o caso de variáveis aleatórias discretas, i.e.,

$$P\{W_0 | \theta_0\} = \int_{W_0} f(x | \theta_0) \leq \alpha$$

Lema de Neyman-Pearson 1.2.1 *Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de uma população com função densidade, $f(x | \theta)$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$,*

Seja c é um número real positivo e W o subconjunto do espaço amostra \mathbb{R}^n , tal que,

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)} \geq c \text{ para } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W, \quad (1)$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)} \leq c \text{ para } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{W}, \quad (2)$$

$$P\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W | \theta = \theta_0\} = \alpha. \quad (3)$$

Então W é a melhor região crítica de dimensão α para ensaiar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$ contra a alternativa simples $H_1 : \theta = \theta_1$.

Demonstração: Considere-se a região crítica W de dimensão α nas condições do Lema e seja W' outra região crítica arbitrária da mesma dimensão.

A representação geométrica da região crítica W e W' é reproduzida, na figura 1.2.1, supondo que $n = 2$ ($W, W' = W \cap W'$).

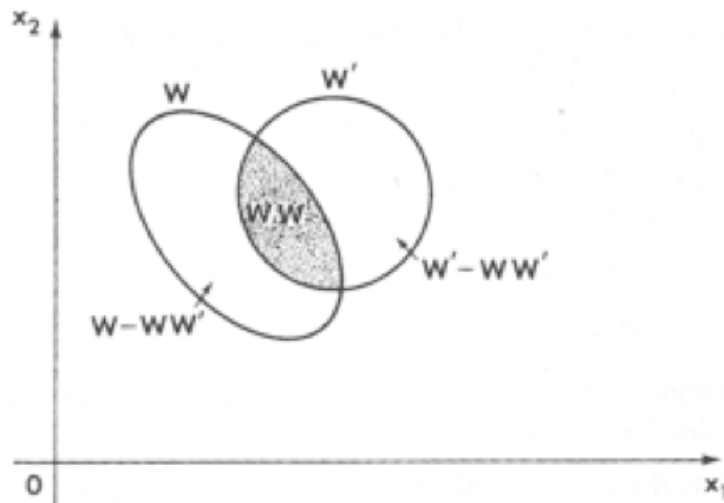


Figura 1.2.1 Representação das regiões W e W' para amostras de tamanho 2.

Dado que as hipóteses H_0 e H_1 são simples, a função densidade fica especificada, completamente, em ambos os casos.

- Se H_0 é verdadeira, a amostra tem função densidade, $L_0 = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)$;

- Se H_0 é falsa, H_1 é verdadeira e a amostra tem função densidade, $L_1 = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)$;

Sendo W e W' regiões críticas da mesma dimensão, tem-se,

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W | \theta = \theta_0\} = P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W' | \theta = \theta_0\} = \alpha$$

O que equivale a,

$$\int \dots \int_w \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0) dx_1, dx_2, \dots, dx_n = \int \dots \int_{w'} \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0) dx_1, dx_2, \dots, dx_n.$$

Ou ainda, de forma abreviada,

$$\int_w L_0 dx = \int_{w'} L_0 dx \quad (dx = dx_1, dx_2, \dots, dx_n).$$

Observe-se que,

$$W = (W - W \cap W') \cup (W \cap W') \quad \text{e} \quad W' = (W' - W \cap W') \cup (W \cap W'),$$

onde

$$(W - W \cap W') \cap (W \cap W') = \emptyset \quad \text{e} \quad (W' - W \cap W') \cap (W \cap W') = \emptyset.$$

Usando-se as igualdades anteriores, pode escrever-se,

$$\int_{W - W \cap W'} L_0 dx = \int_{W' - W \cap W'} L_0 dx, \quad (4)$$

depois de reduzir em ambos os membros o integral sobre o domínio comum $W \cap W'$.

Considerando que a região crítica W' é arbitrária, o lema fica demonstrado caso se prove que para a região W a probabilidade de se cometer um erro do tipo II é inferior ou quando muito igual à probabilidade obtida quando se toma a região W' , isto é, caso se prove que

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \bar{W} | \theta = \theta_1\} \leq P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \bar{W}' | \theta = \theta_1\}$$

ou, equivalente,

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W | \theta = \theta_1\} \geq P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W' | \theta = \theta_1\} = 1 - \beta.$$

Considere-se então a diferença,

$$\begin{aligned} & P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W | \theta = \theta_1\} - P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W' | \theta = \theta_1\} = \\ & = \int_w L_1 dx - \int_{w'} L_1 dx = \int_{W - W \cap W'} L_1 dx - \int_{W' - W \cap W'} L_1 dx. \end{aligned}$$

Como,

$$(W - W \cap W') \cap (W \cap W') = \emptyset$$

e dado que

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \in (W - W \cap W') \Rightarrow L_1 \geq c L_0, \text{ por (1),}$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \in (W' - W \cap W') \Rightarrow L_1 \leq c L_0, \text{ por (2),}$$

efetuando as necessárias substituições, resulta que

$$\begin{aligned} & P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W | \theta = \theta_1\} - P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W' | \theta = \theta_1\} \geq \\ & \geq c \left[\int_{W - W \cap W'} L_0 dx - \int_{W' - W \cap W'} L_0 dx \right] = 0. \end{aligned}$$

A igualdade a zero resulta da igualdade apresentada em (4). A demonstração fica completa, pois para a região crítica W , definida pelas desigualdades (1) e (2), a potência resultante nunca é inferior à de qualquer outra região crítica da mesma dimensão. A região crítica W é a mais potente (MP). ■

Observações 1.2.1:

1. A constante c referida em (1) deve ser escolhida de forma a que a região crítica tenha dimensão α . Contudo, em algumas situações, consegue-se determinar a região crítica sem ser necessário determinar c .
2. Caso a distribuição da população seja discreta, a condição (3) é substituída por:

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid \theta = \theta_0\} \leq \alpha.$$

Facilmente se conclui que o teste MP é aquele que, quando é fixada a probabilidade de se rejeitar a H_0 , maximiza a potência quando H_0 é verdadeira, ou a capacidade de rejeitar a mesma hipótese quando é falsa [2].

As aplicações do Lema de Neyman-Pearson ultrapassam o ensaio de hipóteses simples contra a alternativa também simples, ficando para o próximo capítulo o estudo de outros tipos de testes.

1.3. Razão de verosimilhanças

O método da razão de verosimilhanças está relacionado com os estimadores de máxima verosimilhança [2]. Tem ainda a vantagem de resultar em testes a que correspondem regiões críticas intuitivas, embora não conduza necessariamente a testes uniformemente mais potentes (UMP), que abordaremos no próximo capítulo. Podem ainda estar definidos no caso multi-paramétrico [8].

Seja X uma variável aleatória com função densidade (ou de probabilidade) $f_x(\cdot \mid \theta)$, onde θ é um parâmetro desconhecido, e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra observada proveniente de X . Recorde-se que a função de verosimilhança, definida para todo o espaço paramétrico Θ , é dada por

$$L(x \mid \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i \mid \theta).$$

Definição 1.3.1 A razão de verosimilhanças para testar $H_0: \theta \in \Theta_0$ contra $H_1: \theta \in \overline{\Theta_0}$ baseada numa amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) é dada por

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \theta_0} L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta)}{\sup_{\theta \in \theta_0^c} L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta)}$$

Um teste da razão de verosimilhanças é um teste cuja região de rejeição W é dada por $\{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) \leq c\}$, onde $c \in [0, 1]$.

Exemplo 1.3.1 Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória e (x_1, x_2, \dots, x_n) uma realização desta amostra, de uma população $N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 desconhecido. Pretende-se testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

utilizando-se o teste da razão de verosimilhanças. Temos que

$$L((x_1, x_2, \dots, x_n); \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

Para este caso, $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty; \sigma^2 > 0\}$ e $\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0; \sigma^2 > 0\}$,

$$\sup_{(\mu, \sigma^2) \in \Theta} L((x_1, x_2, \dots, x_n); \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \right)^n e^{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

com $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, e

$$\sup_{(\mu, \sigma^2) \in \Theta_0} L((x_1, x_2, \dots, x_n); \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s^*}} \right)^n e^{-\frac{1}{2(s^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2},$$

onde $s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}$ é uma estimativa de σ que maximiza a função de verosimilhança

se $\mu = \mu_0$.

Assim, tem-se sucessivamente que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s^*}} \right)^n e^{-\frac{1}{2(s^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \right)^n e^{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^n e^{-\frac{n}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2} \right)^n e^{-\frac{n}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Rejeita-se H_0 , se $\lambda < \lambda_0$, o que implica que exista c tal que $\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} > c$.

Mas

$$\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} > c \Rightarrow \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s'} \sqrt{n} \right| > c_1,$$

em que $s' = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

Como a estatística

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s'} \sim t_{n-1},$$

a região crítica fica definida por:

$$\begin{aligned}
RC &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s'} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \right\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} > \mu_0 + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \bar{x} < \mu_0 - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \right\},
\end{aligned}$$

para um dado nível de significância α .

Em geral, os testes de razão de verossimilhanças não são testes UMP, como veremos no Capítulo 2. Contudo, estes testes são bastante intuitivos e, sob algumas condições de regularidade, apresentam boas propriedades assintóticas [13].

1.4. Valor de Prova (P-Value)

Quando é realizado um teste de hipóteses é possível apresentar as conclusões de diversas formas. Uma dessas possibilidades consiste em adotar um nível de significância α e a decisão será tomada para esse nível de significância. É claro que, quando a tomada de decisão é a de rejeitar H_0 e o nível de significância é pequeno, temos um resultado convincente, pois a probabilidade de se cometer um erro do tipo I é pequena.

Por outro lado, se o nível de significância adotado é grande e decide-se por rejeitar H_0 , há uma grande probabilidade de tomar a decisão errada. Assim, outra maneira de reportar o resultado de um teste de hipóteses é apresentando o valor de uma estatística denominada **valor de prova** (p-value, em inglês), sugerida por Fisher [16].

O valor de prova constitui uma medida do grau com que os dados amostrais contrariam a hipótese nula, isto é, o valor de prova corresponde à probabilidade de a estatística de teste tomar um valor igual ou mais extremo do que aquele que de facto é observado. O valor de prova é calculado, tal como a estatística de teste, admitindo que H_0 é verdadeira.

Quanto menor for o valor de prova maior será o grau com que os dados amostrais contrariam a hipótese nula. Assim deve incluir-se o valor de prova nos resultados dos testes de hipóteses.

Quando o teste é bilateral, no cálculo do valor de prova deve ter-se em consideração ambas as caudas da distribuição da estatística de teste.

Em vez de fixar α , determinar a região crítica e, em seguida, verificar se o valor observado pertence à região crítica, pode olhar-se diretamente para o valor observado da estatística de teste e determinar para que nível de significância a decisão muda. Quanto mais baixo for o valor de prova (p-value) maior é a evidência contra a hipótese nula.

Definição 1.4.1 *Dado o valor observado da estatística de teste, o valor de prova (p-value) é o maior nível de significância que conduz à não rejeição da hipótese nula (ou o menor que conduz à rejeição).*

Definição 1.4.2 Um valor de prova $\rho = \rho(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma estatística de teste satisfazendo $0 \leq \rho \leq 1$, com (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória proveniente de X . Um valor de prova é válido se, para todo $\theta \in \Theta_0$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$P(\rho(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \alpha | \theta) \leq \alpha.$$

Muitos autores contemporâneos não deixam claro a distinção entre os testes sugeridos por Neyman-Pearson e os testes baseados no valor de prova, sugeridos por Fisher e comumente chamados de testes de significância. Diferentemente da abordagem de Neyman-Pearson, os testes de significância propõem o uso de uma medida de “força de evidência contra a hipótese (nula)” [16].

O valor de prova é calculado, em geral, com auxílio de uma estatística de teste $T(x)$. Na sequência temos o teorema que especifica a definição 1.4.2.

Teorema 1.4.1 Seja $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma estatística de teste, tal que, grandes valores de T fornecem evidência contra a hipótese $H_0: \theta \in \Theta_0$. Para cada amostra observada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ defina-se

$$\rho(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(T(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq T(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Então, $\rho(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um valor de prova válido.

Demonstração: Considere-se $\theta \in \Theta_0$. Seja $F_\theta(t)$ a função de distribuição de $-T(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Defina

$$\begin{aligned} \rho_\theta(X_1, X_2, \dots, X_n) &= P(T(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq T(x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta) = \\ &= P(-T(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq -T(x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta) = F_\theta(-T(x_1, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

A variável aleatória $\rho(X_1, X_2, \dots, X_n) = F_\theta(-T(X_1, X_2, \dots, X_n))$ é estocasticamente maior ou igual a uma variável com distribuição uniforme no intervalo $]0, 1[$ [14], ou seja,

$$P(\rho(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \alpha | \theta) \leq \alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Mas

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \rho_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \rho_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \Rightarrow P(p(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \leq \alpha | \theta) \leq P(p_\theta(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \leq \alpha | \theta) \leq \alpha .$$

Como isso é verdade para todo $\theta \in \Theta_0$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$, $p(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$ é um valor de prova válido. ■

Como interpretação do teorema, considere $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$ um vetor aleatório, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma realização de \mathcal{X} e \mathcal{T} uma estatística de teste. Então, se um teste tem valor crítico c , ao observar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ decide-se por rejeitar H_0 se, e somente se, $\mathcal{T}(x) \geq c$. Dessa forma, o valor $c = \mathcal{T}(x)$ é o maior valor de c que conduziria à rejeição de H_0 com base na observação $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mas, pelo teorema 1.4.1, o tamanho de um teste com valor crítico c é $\alpha(c)$ e a função $\alpha(c)$ é decrescente em c . Sendo assim, o menor α que conduziria à rejeição de H_0 é $\alpha(\mathcal{T}(x))$.

1.5. Estatística suficiente

Tendo em conta a necessidade de utilizar uma estatística suficiente em posteriores resultados, tornou-se conveniente introduzir algumas propriedades deste tipo de estatística. A partir de uma amostra da aleatória $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$, proveniente de uma dada população, pode-se fazer inferência sobre um parâmetro θ da população. Para este fim, em geral, construímos uma estatística $\mathcal{T}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$.

Portanto, é fundamental saber dizer o quão boa é uma estatística no tocante à sua capacidade de sintetizar as informações que a amostra gera sobre o parâmetro populacional de interesse. Em síntese, avaliamos uma estatística em duas dimensões:

1. A estatística desperdiça informações relevantes sobre θ ? Se a resposta for negativa, diz-se que a estatística é suficiente para θ .
2. A estatística ignora informação irrelevante? Se a resposta for afirmativa, diz-se que a estatística é suficiente mínima.

Definição 1.5.1 *Seja $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$ uma amostra aleatória da população com função probabilidade ou função densidade na classe $f_\theta = \{f_x(x | \theta); \theta \in \Theta\}$. Uma estatística \mathcal{T} diz-se*

suficiente para θ se e somente se a distribuição de (X_1, X_2, \dots, X_n) condicionada por $T=t$ não depender de θ , para qualquer que seja o valor t do domínio de T , isto é,

$$F_{\theta}((X_1, X_2, \dots, X_n) | T(X_1, X_2, \dots, X_n) = t) = F((X_1, X_2, \dots, X_n) | T(X_1, X_2, \dots, X_n) = t),$$

sendo F a função de distribuição conjunta de (X_1, X_2, \dots, X_n) condicionada por $T = t$.

Teorema 1.5.1 Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de uma população X com função densidade (função probabilidade) na família $f_{\theta} = \{f_x(x | \theta); \theta \in \Theta\}$, a estatística

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

é suficiente se, e somente se, existem duas funções não negativas G e H tais que,

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = G[T(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta] H(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde, para cada valor fixo de $t = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a função H não depende de θ .

Demonstração: Ver demonstração do teorema em [2], páginas 107-108 . ■

Teorema 1.5.2 Se $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é estatística suficiente, a região crítica dada pelo Lema de Neyman-Pearson pode exprimir-se em termos de T .

Demonstração: Consequência imediata da fatorização de, $G(t, \theta) \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_n)$, estabelecida pelo teorema 1.5.1. Portanto,

$$\frac{\prod_i^n f(x_i | \theta_1)}{\prod_i^n f(x_i | \theta_0)} \geq c \Rightarrow \frac{G(t, \theta_1)}{G(t, \theta_0)} \geq c . \blacksquare$$

Exemplo 1.5.1 Considere-se uma população $N(\theta, \sigma)$, com σ conhecido e o teste de uma hipótese simples contra uma hipótese alternativa simples,

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$$

a partir de uma amostra de dimensão n . Tem-se que,

$$L_j = \left(\frac{1}{2} \pi \sigma^2\right)^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_j)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad j = 0, 1.$$

De acordo com o Lema 1.2.1, a região crítica ótima W é definida pela desigualdade,

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_0)^2 \right] \right\} \geq c,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\sigma^2 \ln c + \left(\frac{n}{2}\right)(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{\theta_1 - \theta_0},$$

ou ainda,

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq c' \text{ ou } \bar{x} \geq c''.$$

A constante c'' pode determinar-se em função da dimensão desejada α :

$$P\{\bar{X} \geq c'' \mid \theta = \theta_0\} = P\left\{ \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c'' - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right\} = \alpha,$$

donde,

$$c'' = \theta_0 + z_\alpha \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha,$$

onde Φ representa a função de distribuição da distribuição normal reduzida.

CAPÍTULO 2

Testes de Hipóteses Uniformemente Mais Potentes (UMP)

2.1. Teste de hipóteses simples contra hipóteses compostas

Anteriormente estudaram-se os testes de hipóteses numa situação pouco comum, na qual o espaço parâmetro é constituído apenas por dois pontos, $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Ao generalizar os procedimentos para situações quotidianas, torna-se necessário caracterizar as hipóteses paramétricas considerando duas situações: hipóteses simples e hipóteses compostas.

Definição 2.1.1 *Uma hipótese estatística diz-se simples quando o respetivo subconjunto do espaço parâmetro é formado por apenas um elemento; diz-se composta no caso contrário.*

A primeira generalização consiste em estudar o teste de hipóteses nulas simples contra hipóteses alternativas compostas mas unilaterais, ou seja, testes do tipo

- $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1 \subset \Theta$, em que θ_0 não pertence a Θ_1 ,

onde $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ e $\Theta_1 = \{\theta : \theta < \theta_0\}$, ou $\Theta_1 = \{\theta : \theta > \theta_0\}$.

A perspectiva inferencial continua a ser a determinação de uma região crítica, no espaço amostra IR^n , controlando a probabilidade de cometer um erro do tipo I, dada pela condição,

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}).$$

Contudo, não se pode falar agora em potência do teste, visto que a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta é falsa varia quando θ percorre o conjunto Θ_1 . É então necessário substituir o conceito de potência do teste pelo de **função potência do teste** e introduzir um novo conceito de **teste uniformemente mais potente (UMP)**.

Definição 2.1.2 *A função potência do teste $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$ ou contra $H_1 : \theta < \theta_0$, com região crítica W , é dada por*

$$\beta(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta) = P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid \theta\}, \text{ para } \theta \in \Theta_1,$$

onde $\Theta_1 = \{\theta : \theta > \theta_0\}$, ou $\Theta_1 = \{\theta : \theta < \theta_0\}$, respectivamente.

A função $\beta(\theta)$, definida para todo $\theta \in \Theta$, tal como foi introduzida na secção 1.1, deveria ser zero para todo $\theta \in \Theta_0$. Porém, só em casos triviais é que se regista esta situação. Um bom teste deve ter função potência próxima de 0 para quase todo $\theta \in \Theta_0$, e próxima de 1 para quase todo $\theta \in \Theta_1$. Nessa situação é facilmente discernível qual a decisão a adoptar face à veracidade das hipóteses.

Tipicamente a função potência depende da dimensão amostral n , uma vez que a distribuição da estatística de teste depende igualmente da dimensão amostral. Para um tamanho amostral fixo, é virtualmente impossível fazer ambas as probabilidades de erro arbitrariamente pequenas. Geralmente, dá-se primazia aos erros do tipo I, pelo que neste sentido os testes não são simétricos, isto é, tende-se a minorar a probabilidade de erro do tipo I. Assim sendo, a estratégia mais usual é fixar um nível para a probabilidade de erro tipo I e, de entre todos os testes que obedecem a esta restrição, escolher aquele que minimiza a probabilidade de erro tipo II.

Definição 2.1.3 Para $0 \leq \alpha \leq 1$, um teste com função potência $\beta(\theta)$ diz-se ser um teste de dimensão α se $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \alpha$. Um teste com nível α é um teste para o qual $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$.

Assim, o conjunto de testes de nível α contém o conjunto de testes de dimensão α . A distinção entre estes dois conceitos nem sempre é clara, mas é importante quando não é possível construir testes com dimensão α , pelo que nessas situações há um compromisso que leva a aceitar testes de nível α .

Definição 2.1.4 Ao testar a hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \theta > \theta_0$ (ou contra $H_1 : \theta < \theta_0$), considerem-se dois testes com a mesma dimensão, α , mas com regiões críticas W e W^* , respectivamente. As correspondentes funções potências são

$$\beta(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta) = P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid \theta\} \text{ para } \theta \in \Theta_1,$$

$$\beta^*(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta) = P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W^* \mid \theta\} \text{ para } \theta \in \Theta_1,$$

onde $\Theta_1 = \{\theta : \theta > \theta_0\}$, ou $\Theta_1 = \{\theta : \theta < \theta_0\}$. Diz-se que o teste com região crítica W é uniformemente mais potente do que o teste com região crítica W^* se e somente se

$$\beta(\theta) > \beta^*(\theta), \forall \theta \in \Theta_1.$$

Se o teste com região crítica W é uniformemente mais potente do que qualquer outro teste, diz-se que é o teste uniformemente mais potente.

Tendo em conta esta definição, pode-se concluir que em condições suficientemente gerais, a determinação da região crítica de um teste UMP em que a hipótese nula é simples e a hipótese alternativa é composta mas unilateral pode ser feita com base no Lema de Neyman-Pearson, uma vez que aquela região é a mesma qualquer que seja o valor escolhido como alternativo.

O comportamento da função potência do teste é, mediante o tamanho da amostra, quanto maior é a dimensão da amostra mais elevada é a potência. Embora para variáveis aleatórias contínuas se possa fixar arbitrariamente a dimensão do teste, o mesmo não acontece com a variável aleatória discreta.

Note-se ainda que a região crítica W é independente de θ_1 , desde que este seja maior que θ_0 . Logo o Lema de Neyman-Pearson serve não só para determinar o teste UMP para o par de hipóteses $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta = \theta_1$, mas também para determinar o teste UMP para $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta > \theta_0$, passando assim a ser um teste de hipótese simples contra hipótese composta unilateral.

Uma grande classe de problemas que admitem testes UMP de dimensão α envolvem testes de hipóteses unilaterais e função densidade (ou probabilidade) com função de verosimilhança monótona.

Como veremos mais à frente, existe sempre um teste UMP para os casos de testes unilaterais. No entanto, para testes bilaterais é difícil encontrar testes UMP. Para observar esta dificuldade, iremos recorrer à análise de Kendall e Stuart [4].

Assim, tomemos um teste bilateral, ou seja, $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta \neq \theta_0$, e seja θ_1 um valor alternativo. Tem-se que,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_j) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_j), \quad j = 0, 1, \quad j = 0, 1.$$

Admitindo que a derivada desta função de verosimilhança em relação ao parâmetro existe e é contínua, considerando o desenvolvimento em série de Taylor, resulta que,

$$L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_j) = L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0) + (\theta_1 - \theta_0) L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*),$$

onde $\theta^* \in]\theta_0, \theta_1[$, com $\theta_1 > \theta_0$, ou $\theta^* \in]\theta_1, \theta_0[$, com $\theta_1 < \theta_0$.

Pelo Lema de Neyman-Pearson, a melhor região crítica de dimensão α é da forma,

$$\frac{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_1)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} = 1 + \frac{(\theta_1 - \theta_0) L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} \geq c_\alpha(\theta_1)$$

Note-se que no caso geral não se pode excluir a possibilidade de c depender também de θ_1 , pois de α depende sempre.

Consequentemente, obtém-se que a melhor região crítica é,

$$\frac{L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} \geq a_\alpha \text{ se } \theta_1 > \theta_0$$

$$\frac{L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} \leq b_\alpha \text{ se } \theta_1 < \theta_0.$$

Quando $\theta_1 \rightarrow \theta_0$ também, pela continuidade, $\theta^* \rightarrow \theta_0$, donde,

$$\frac{L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} = \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} \geq a_\alpha \text{ se } \theta > \theta_0$$

$$\frac{L'((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta^*)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \theta_0)} = \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} \leq b_\alpha \text{ se } \theta < \theta_0.$$

Em conclusão, se o intervalo que define a alternativa contém valores do parâmetro que tornam positiva e negativa a diferença $\theta - \theta_0$, as condições anteriores não se verificam a não ser que,

$$\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} = \text{constante.}$$

Caso contrário não existe região crítica ótima quando a hipótese alternativa é bilateral.

O tratamento dos testes de hipóteses compostas contra alternativas compostas unilateral,

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0, \text{ ou,}$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_0,$$

não difere praticamente do que se passa com os casos acima descritos, pois, nas condições gerais consideradas,

$$P\left(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta_0\right) = \alpha \Rightarrow P\left(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta\right) \leq \alpha, \forall \theta \leq \theta_0.$$

Do mesmo modo, no teste $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$, tem-se

$$P\left(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta_0\right) = \alpha \Rightarrow P\left(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta\right) \leq \alpha, \forall \theta \geq \theta_0.$$

Existem testes UMP quando a população tem função densidade (função probabilidade) que pertencem à família de distribuições com razão de verossimilhança monótona (RVM).

A família,

$$F = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}, \Theta \in \mathbb{R}$$

tem RVM na estatística T quando, para qualquer par de valores admissíveis do parâmetro, $\theta_2 > \theta_1$,

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_2)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)} \text{ é uma função monótona em } t = T(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Teorema 2.1.1 (Karlin-Rubin) Se (X_1, X_2, \dots, X_n) é uma amostra aleatória proveniente de uma população com função densidade (função probabilidade) com RVM na estatística T, então, para ensaiar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$, os testes da forma,

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) > t_0,$$

onde t_0 é determinado em função da dimensão desejada α , são UMP.

Demonstração: Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e comece-se por considerar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$. Os pontos desejáveis que permitem a rejeição de H_0 são aqueles em que

$$r(x) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)} = g[T(x)] \text{ é suficientemente grande.}$$

Se $T(x) \leq T(x^*)$ então $r(x) \leq r(x^*)$ e x^* é uma amostra pelo menos tão desejável quanto x . Assim, o teste que rejeita H_0 para grandes valores de $T(x)$ é o mais poderoso. ■

Exemplo 2.1.1 Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória e (x_1, x_2, \dots, x_n) uma realização desta amostra, de uma população $N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu = \mu_0$ conhecido. Suponhamos que pretendemos testar as hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \text{ contra } H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

O modelo estatístico associado pertence à família exponencial e, além disso, a razão de verossimilhança é monótona, uma vez que, $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in]0, +\infty[$, com $\sigma_1 < \sigma_2$, tem-se

$$\frac{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \sigma_2)}{L((x_1, x_2, \dots, x_n) | \sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right\},$$

que é uma função estritamente crescente da estatística $T(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. O

teorema 2.1.1 (Karlin-Rubin) garante que, dado $\alpha \in]0, 1[$, o teste de região crítica

$$RC = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 > c \right\},$$

é o teste uniformemente mais potente de dimensão α , com c , tal que,

$$P\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 > c \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha.$$

A variável aleatória $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}\right)^2$ segue uma distribuição χ_n^2 , $\forall \sigma^2 \in]0, +\infty[$. Assim a condição

$$P\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 > c \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha,$$

é equivalente a

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} > \frac{c}{\sigma^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha \Leftrightarrow F_{\chi_n^2}\left(\frac{c}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha.$$

O teste tem então como região crítica definida por:

$$RC = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 > \sigma_0^2 F_{\chi_n^2}^{-1}(1 - \alpha) \right\}.$$

Se μ é desconhecido, a região crítica é da forma

$$RC = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > c \right\}.$$

Neste caso a variável aleatória $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$ segue uma distribuição χ_{n-1}^2 .

Considerando a família exponencial, em condições mais restritas do que as de Karlin-Rubin, Lehmann, [6] e [7], conseguiu demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.1.2 *Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de uma população com distribuição da família exponencial. Se $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente para ensaiar*

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ OU } \theta \geq \theta_2, \text{ (com } \theta_1 \geq \theta_2 \text{)}, \text{ contra } H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2,$$

então existe um teste UMP da forma $t_1 < T < t_2$, com t_1, t_2 determinados pela condição,

$$\beta(\theta_1) = P\{t_1 < T < t_2 \mid \theta = \theta_1\} = \alpha,$$

$$\beta(\theta_2) = P\{t_1 < T < t_2 \mid \theta = \theta_2\} = \alpha,$$

onde α é a dimensão desejada.

Demonstração: Ver demonstração do teorema 2.1.2 em [6], página 81-82. ■

Exemplo 2.1.1 *Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) um amostra aleatória de uma população X com distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, sendo σ conhecido. Considere-se as hipóteses*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Para um dado valor α , um teste de nível α satisfaz a seguinte condição:

$$P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta = \theta_0) \leq \alpha.$$

Supondo que consideramos primeiro um ponto $\theta_1 < \theta_0$, então é possível deduzir, com a ajuda do Lema de Neyman-Pearson, que o teste a que corresponde a região

$$W_1 = \left\{ \bar{X} < -\sigma \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{n} + \theta_0 \right\}$$

tem a potência máxima em θ_1 .

Logo, trata-se de um teste UMP e que, define a única região UMP, a menos de uma região de probabilidade nula.

Suponha-se agora que consideramos outro teste para o qual a região de rejeição é

$$\left\{ \bar{X} > \sigma \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{n} + \theta_0 \right\},$$

o qual é igualmente um teste com nível α .

Seja $\beta_i(\cdot)$ a função potência para o i -ésimo ($i=1,2$). Para qualquer $\theta_2 > \theta_0$

$$\begin{aligned}
 \beta_2(\theta_2) &= P\left(\bar{X} > \sigma \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{n} + \theta_0 \mid \theta = \theta_2\right) \\
 &= P\left(\frac{\bar{X} - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}} > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\theta_0 - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \theta = \theta_2\right) \\
 &> P\left(Z > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \mid Z \sim \mathcal{N}(0,1)\right), \text{ pois } \theta_0 - \theta_2 < 0 \\
 &= P\left(Z \leq -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \\
 &> P\left(\frac{\bar{X} - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}} < -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\theta_0 - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \theta = \theta_2\right) \\
 &= P\left(\bar{X} < -\sigma \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{n} + \theta_0 \mid \theta = \theta_2\right) \\
 &= \beta_2(\theta_2).
 \end{aligned}$$

O segundo teste tem potência superior à do primeiro teste pelo menos para um dos pontos $\theta \in \overline{\Theta_0}$. Assim, obviamente, não existe nenhum teste UMP de nível α para este problema.

Na verdade, quando se testam hipóteses compostas bilaterais, impor restrições à família de distribuições, não permite estabelecer a existência, em termos gerais, de testes UMP, sendo particularmente importante neste caso restringir a classe de testes de determinado nível.

2.2. Testes Não Enviesados e Testes Similares

O enviesamento nos testes de hipótese é a propriedade perante a qual é mais provável rejeitar a hipótese nula em qualquer ponto no espaço de parâmetro especificado pela hipótese alternativa do que em qualquer ponto no espaço de parâmetro especificado pela hipótese nula.

Uma condição que se pode querer impor aos testes das hipóteses é que, para qualquer valor da hipótese alternativa, a probabilidade de rejeição é menor que a dimensão do teste. Se esta condição não for satisfeita, não haverá hipóteses alternativas em que a não rejeição é mais provável que a hipótese nula.

Definição 2.2.1 Um teste diz-se não enviesado se a probabilidade de rejeitar a hipótese nula sabendo que é verdadeira não é superior à probabilidade de rejeitar a hipótese nula sabendo que ela é falsa. Formalmente, se o teste é de dimensão α , será não enviesado se

$$1 - \beta(\theta) \geq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

sendo $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} 1 - \beta(\theta)$.

Os testes de hipóteses não enviesados não dependem apenas das hipóteses, mas também do nível de significância. Se um teste UMP de nível α existe, então é não enviesado, porque a sua potência é pelo menos tão grande quanto a dimensão do teste.

Definição 2.2.2 Um teste diz-se uniformemente mais potente não enviesado (UMPU) de nível α para testar as hipóteses

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

quando,

- $\beta_W(\theta) \leq \alpha$, se $\theta \in \Theta_0$;
- $\beta_W(\theta) \geq \alpha$, se $\theta \in \Theta_1$,

em que, se W é um teste de dimensão α não enviesado, a probabilidade de se rejeitar H_0 quando falsa nunca é inferior à probabilidade de se rejeitar H_0 quando verdadeira.

O teorema seguinte ilustra um caso particular para alguns testes bilaterais, como por exemplo o caso da família de funções exponenciais.

Teorema 2.2.1 Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de uma população com distribuição da família exponencial. Se $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente para ensaiar

$$H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_1 \text{ ou } \theta > \theta_2,$$

com $\theta_1 < \theta_2$, então existe um teste UMPU da forma: $T < t_1$ ou $T > t_2$, com t_1, t_2 determinados pelas condições,

$$\beta(\theta_1) = P(T < t_1 \text{ ou } T > t_2 | \theta = \theta_1) = \alpha,$$

$$\beta(\theta_2) = P(T < t_1 \text{ ou } T > t_2 | \theta = \theta_2) = \alpha,$$

onde α é a dimensão desejada.

Demonstração: Ver demonstração do teorema em [8], página 406-407. ■

Uma vez que um teste UMP é UMPU, a discussão sobre o enviesamento de testes é útil apenas quando um teste UMP não existe. Em grande parte dos problemas onde não existam testes UMP, existem testes UMPU [8].

Recordando que apenas se tem analisado casos em que o parâmetro é um escalar, é importante analisar os casos de quando o parâmetro é multi-dimensional. Por exemplo, para um parâmetro bidimensional $(\eta, \nu) \in \Theta$, no ensaio de uma hipótese nula composta contra uma hipótese alternativa composta, em que η é o parâmetro que está diretamente “ligado” ao teste, e a presença de ν “embaraça” o processo inferencial. Se W a região crítica proposta, tem-se que $P\{W | \eta_0, \nu\}$ depende de ν . Se,

$$P\{W | \eta_0, \nu\} = \alpha, \quad \forall \nu$$

a região crítica diz-se similar, ou seja, W é similar na fronteira comum entre a hipótese nula e a hipótese alternativa, Θ_0 e Θ_1 , isto é na intersecção dos respetivos fechos $(\overline{\Theta_0} \cap \overline{\Theta_1})$. Resultando um teste UMP similar.

Os testes semelhantes aos UMP ou testes similares existem para importantes classes de problemas, relativo a um único parâmetro de valores reais, estando na presença ou não de parâmetros de incomodidade, mas não para as hipóteses do tipo $H: \theta_1 = \dots = \theta_s$ sobre vários parâmetros.

3. Conclusão

Para Neyman e Pearson o teste de hipóteses de uma determinada situação tem a máxima potência quando é controlada a função probabilidade da falsa rejeição a um determinado nível α e, portanto, o mínimo quando a função probabilidade da falsa aceitação. Para testar uma hipótese simples contra uma alternativa simples, Neyman e Pearson encontraram a solução no teste da razão de verosimilhança, sendo esta solução matematicamente bastante elementar, mas tem consequências cruciais na Estatística, tornando-se conhecido como o Lema Neyman-Pearson.

Contudo, acontece que em alguns casos (muito raros), o mesmo teste é mais potente contra todas as alternativas em análise, tornando os testes uniformemente mais potentes (UMP) a melhor solução. Sempre que um teste UMP não existe, prevalecem os outros critérios. As regiões de rejeição são chamadas regiões similares. Como exemplo importante, Neyman e Pearson mostraram que o teste t-student unilateral é UMP entre todas as regiões semelhantes [6]. Para as alternativas dos dois lados, não se pode esperar que existam testes UMP mesmo sem parâmetros de incomodidade. Para esses casos, Neyman e Pearson, impuseram uma condição imparcial adicional, em que o poder do teste é no mínimo α para todas as alternativas, mostrando mais tarde que os dois lados dos testes t-student são UMP entre todos os testes similares [6].

Segundo Lehmann, [6, 7], um teste de hipóteses é um procedimento de decisão entre a veracidade ou não de uma questionada hipótese. Tal decisão está baseada nas observações de uma variável aleatória X , cuja distribuição P_θ pertence a uma família de distribuições. À hipótese em teste está associado um subconjunto dos possíveis valores de θ , $\Theta_0 \subset \Theta$.

A tomada de decisão de um teste é dito não aleatório [6] se, para cada possível valor da variável aleatória X , uma das duas decisões é tomada: rejeita-se ou não a hipótese em teste. A eficiência do teste é dada pela capacidade, medida por intermédio de probabilidades, de não realizar uma decisão incorreta: rejeitar a hipótese, quando esta é verdadeira ou não rejeita-la, quando é falsa. Devido basicamente à restrição do tamanho amostral, é impossível controlar simultaneamente os dois possíveis erros de decisão. Assim, limita-se a incorreta rejeição da hipótese em teste a um pequeno valor preestabelecido α , que é denominado por nível de significância do teste, buscando-se por um mínimo possível de erro da decisão, de não rejeição de tal hipótese, quando esta é falsa.

Ainda segundo Lehmann, [6, 7], em uma situação cujo espaço paramétrico Θ possui somente dois elementos, um caracterizando a hipótese em teste e outro a sua negação, é aplicável o

Lema de Neyman-Pearson, que consiste em construir um procedimento de decisão que relacione a razão de verosimilhança das duas possíveis distribuições, sob consideração da hipótese em teste como verdadeira e sob consideração da hipótese em teste como falsa. Aos pontos de maior razão, associa-se a decisão de não rejeição da hipótese em teste, e aos pontos de menor razão a decisão de rejeitar tal hipótese. A especificação do nível de significância é o procedimento com melhor eficiência.

No caso mais geral, o conjunto Θ possui bem mais que dois elementos e, de modo análogo, os subconjuntos associados à hipótese em teste. Assim, permanecendo o controle de rejeição errônea da hipótese em teste, busca-se por procedimentos de decisão que apresentem valores razoáveis de probabilidade para rejeitar a hipótese em teste, sob a condição de esta ser falsa.

4. Referências Bibliográficas

- [1] Neyman, J., Pearson, E.S. (1933). On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Phil. Trans. of the Royal Society A*, 231, p. 289-337. Londres.
- [2] Murteira, B. (1990). *Probabilidades e Estatística*, vol. 2, 2ª ed.. McGraw-Hill, Lisboa.
- [3] Mood, A.M., Graybill, F. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, 3ª ed.. McGraw-Hill, New York.
- [4] Kendall, M.G., Stuart, A. (1979). *The advanced Theory of Statistics*, vol. 2, 4ªed.. Griffin, Londres.
- [5] Wilks, S.S. (1962). *Mathematical Statistics*. J. Wiley & Sons, Inc, New York.
- [6] Lehmann, E.L., Romano, Joseph P. (2005). *Testing Statistical Hypotheses*, 3ª ed., Springer-Verlag, New York.
- [7] Lehmann, E.L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, 2ª ed.. J. Wiley & Sons, Inc., New York.
- [8] Shao, Jun (2003). *Mathematical Statistics*, 2ª ed.. Springer-Verlag, New York.
- [9] Rohatgi, V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. J. Wiley & Sons, Inc., New York.
- [10] Ross, S.M. (1987). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. J. Wiley & Sons, Inc., New York.
- [11] Liese, F., Miescke, K. (2008). *Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [12] Pires, A.P.. *Inferência e Decisão I*. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- [13] Roussas, G.G. (1973). *A First Course in Mathematical Statistics*. Addison-Wesley Publishing Company, Londres.
- [14] Ross, S.M. (1996). *Stochastic Processes*, 2ª ed.. J. Wiley & Sons, Inc., New York.

- [15] Paulino, C.D. (2001). *Notas de Inferência Estatística*. AEIST, Lisboa.
- [16] Fossaluzza, Victor (2008). *Testes de hipóteses em eleições majoritárias*. IME-USP, São Paulo.
- [17] Casella, G., Berger, R.L. (1990). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Belmont.
- [18] Lehmann, E.L. (2009). Some History of Optimality. Monograph Series optimality: The Third. IMS. Califórnia.
- [19] Neyman, J., Pearson, E.S. (1936,1938). Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. *Statist. Res. Memoirs*. Londres.
- [20] Fisher, R.A. (1922). On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. *Phil. Trans. of the Royal Society A*, 222, p. 401-415. Londres.

Parte II

1.1 Planificação de subunidade

Ano lectivo: 2010/11 - 3º Período

Nível de ensino: 12º ano de Matemática

Tema III: Trigonometria e Números Complexos

Tópicos:

Números Complexos - Generalidades

- Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e de modo como se forma considerando novos números.
- Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número.
- Experimentação da necessidade de i , à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e fraccionários.
- Conjunto dos números complexos.

Forma Algébrica:

- Operações com complexos na forma algébrica.
- Representação geométrica e vectorial de um número complexo na forma algébrica.

Forma Trigonométrica:

- Operações com complexos na forma trigonométrica.
- Representação geométrica de um número complexo na forma trigonométrica.

Domínios planos e condições em variável complexa:

- Circunferência, círculo, semirecta, recta semiplano e mediatriz de um segmento.

Objectivos gerais:

- Complementar a consolidar o estudo da trigonometria
- Desenvolver a capacidade de matematizar situações da vida real para melhor compreender o mundo em que vivemos.

- Estimular a capacidade de estabelecer relações com a geometria.
- Incentivar a compreensão e aplicação de procedimentos algébricos a par da utilização da calculadora e computador.
- Desenvolver a capacidade de validar conjecturas através de processos demonstrativos.
- Integrar o estudo dos números complexos numa perspectiva histórica.

Objectivos Específicos:

- Identificar propriedades e características das funções trigonométricas.
- Utilizar as funções trigonométricas na resolução de problemas de geometria e na modelação de outras situações concretas.
- Compreender a necessidade e vantagem de aceitar os números complexos.
- Representar números complexos na forma algébrica, na forma trigonométrica e no plano complexo.
- Efectuar operações com números complexos na forma algébrica, na forma trigonométrica, reconhecer e aplicar propriedades das operações.
- Interpretar geometricamente as operações com números complexos.
- Representar, no plano, conjuntos definidos por condições numa variável complexa e definir conjuntos de pontos do plano por meio e condições no conjunto dos números complexos.

Capacidades transversais:

- resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados.
- raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos.
- comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.
- Sensibilizar para um “ diálogo inteligente” com as tecnologias de informação, considerando o seu uso como facilitar de uma participação activa do estudante na sua aprendizagem.
- Resolver problemas em domínios diversificados.
- Revelar consciência crítica para uma cidadania activa e participativa.

Blocos previstos: 7 aulas de 90 minutos



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 1

Duração: 90 minutos

Sumário:

Introdução aos números complexos.
Representação de um número complexo na forma algébrica.
Operações e propriedades de números complexos na forma algébrica.
Conjugado, simétrico e inverso de um número complexo.

Conteúdos Matemáticos:

- Perspectiva histórica do conceito de número;
- Perspectiva histórica do aparecimento do conjunto dos números complexos;
- Número i ; números complexos; o conjunto \mathbb{C} ;
- Operações com complexos;
- Propriedades de complexos;
- Complexos conjugados, complexos simétricos e complexos inversos.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Conjuntos numéricos
- Representar num referencial o.m. um par ordenado;
- Operações com polinómios em \mathbb{R} .

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Definir i e número complexo;
- Representar graficamente um número complexo na forma algébrica;
- Indicar o simétrico, inverso e o conjugado de um complexo;
- Efectuar operações com números complexos na forma algébrica.

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;

- Vídeo projector;
- Computador;
- Quadro interactivo.

Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos;
- Resolver exercícios;
- Interagir com a turma.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .

- Seguidamente, o professor iniciará pela análise do texto entregue no final da aula anterior. O texto referido é retirado do capítulo 8 “ os Imaginários”, páginas 161-171 do livro “*Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja*” , fazendo uma breve introdução sobre a História dos Números Complexos. De seguida, o professor introduz a unidade imaginária já referida na parte histórica e leva-os a compreender a necessidade e vantagem de aceitar os números complexos.

O facto de não existirem raízes quadradas reais de números negativos torna impossível muitas das expressões algébricas, nomeadamente algumas polinomiais. Por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução real, porque não há nenhum número real cujo quadrado seja -1 . Então para resolver este problema considere-se que existe pelo menos um número cujo quadrado é -1 e represente-se esse número por i .

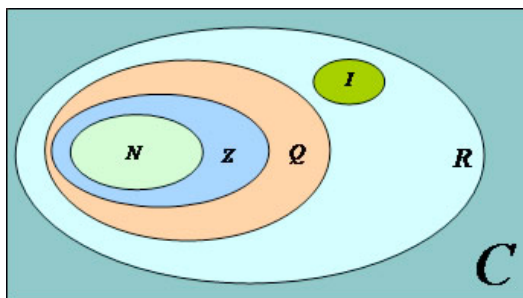
Então

$$i = \sqrt{-1} \text{ ou } i^2 = -1$$

Definição de unidade imaginária:

A unidade imaginária é a raiz quadrada de -1 e representa-se por i , $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$

Se ao conjunto \mathbb{R} se juntar o conjunto dos números imaginários obtém-se o conjunto \mathbb{C}



- O professor apresenta depois aos alunos um exercício para introduzir o conceito de número complexo.

Exercício:

“Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40.”

Resposta:

De acordo com o enunciado, retira-se a seguinte informação:

$$x + y = 10 \quad \text{e} \quad x \times y = 40$$

Para encontrar a solução é necessário recorrer à resolução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \times y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ (10 - y) \times y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ y^2 - 10y - 40 = 0 \end{cases}$$

Aplicando a formula resolvente:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

vem

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \pm \frac{\sqrt{100 - 160}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \pm \frac{\sqrt{-60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \pm \frac{2\sqrt{-15}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Então: $y = 5 \pm \sqrt{-15}$

Podendo-se considerar: $\begin{cases} y = 5 + \sqrt{-15} \\ x = 5 - \sqrt{-15} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 5 - \sqrt{-15} \\ x = 5 + \sqrt{-15} \end{cases}$.

Assim, considerando o primeiro caso e a definição de unidade imaginária resulta que $y = 5 + \sqrt{-1} \times \sqrt{15} = 5 + \sqrt{15}i$ e $x = 5 - \sqrt{15}i$ que se trata de números complexos.

Definição de Número Complexo:

Chama-se números complexos a todos os números que têm, a forma $z = a + bi$ sendo a e b números reais e i a unidade imaginária.

Nota:

Seja $z = a + bi$ um complexo:

- a é a parte real e escreve-se : $a = \text{Re}(z)$;
- bi é a parte imaginária;
- b é o coeficiente da parte imaginária e escreve-se $b = \text{Im}(z)$;
- $b = 0$, o número complexo é um **número real**;
- $b \neq 0$, o número complexo é um **número imaginário**;
- $b \neq 0$ e $a = 0$, o número complexo **imaginário puro**.

$z = a + bi$ é a forma algébrica.

Então de acordo com o que foi citado e voltando ao problema anterior, y e x são dois números imaginários onde a parte imaginária de cada um é $\sqrt{15}$ e $-\sqrt{15}$ respectivamente, e a parte real de ambos é 5.

- De seguida, o professor irá pedir aos alunos alguns exemplos de números imaginários, imaginários puros e reais e serão introduzidos novos conceitos.

Exemplos (sugerido pelo professor):

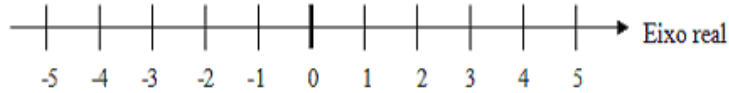
Escreva exemplos de números imaginários, imaginários puros e reais.

$3 - 3i, -4 + i, -\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{4}i$ → números imaginários;

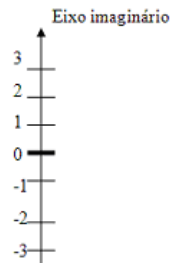
$-6i, 2i$ → números imaginários puros;

$\frac{3}{7}, \sqrt{8}, 21$ → números reais.

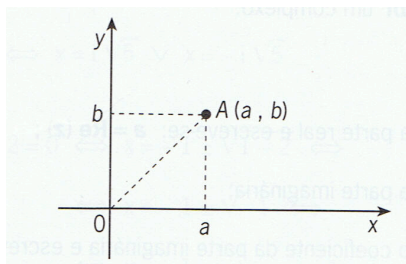
Um número real x é definido como sendo o valor da distância (numa determinada unidade de medida) que o número x se encontra ao zero no eixo da recta real, atribuindo-se o sinal positivo ou negativo caso x se encontre à direita ou a esquerda respectivamente do zero.



De forma idêntica, define-se os números imaginários puros como os números que se encontram sobre o eixo perpendicular ao eixo dos números reais (**eixo imaginário**), tendo ambos os eixos como ponto de intersecção o zero, sendo i o valor da unidade de medida do eixo imaginário.



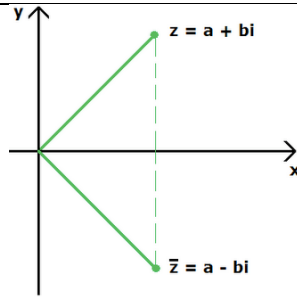
Considerando no plano o referencial o.m. xOy ,



a cada ponto do plano de coordenadas (a, b) corresponde o número complexo $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Ao ponto A (da figura em cima) chama-se **afixo ou imagem geométrica** do complexo z , ao plano chama-se **plano de Argand** ou **plano complexo z** , e ao vector \overline{OA} chama-se **imagem vectorial** do número complexo z .

Definição de conjugado:

Seja $z = a + bi$ um número complexo, chama-se ao **conjugado** de z ao número \overline{z} tal que $\overline{z} = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.



Exemplo:

O conjugado de $1 + 2i$ é $1 - 2i$.

Definição de igualdade:

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dizem-se iguais se e só se têm partes reais iguais e o coeficientes das partes imaginárias também iguais:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Definição de simétrico:

O simétrico de z é o número complexo $-z = -a - bi$ pois

$$(a + bi) + (-a - bi) = (-a - bi) + (a + bi) = 0, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo:

O simétrico de $-2 + 5i$ é $2 - 5i$.

Definição de inverso:

O inverso de $z = a + bi$ é o número complexo $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$, pois

$$(a + bi) \cdot \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot (a + bi) = 1, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo:

$$\text{O inverso de } 6 - 4i \text{ é } \frac{1}{6 - 4i} = \frac{1(6 + 4i)}{(6 - 4i)(6 + 4i)} = \frac{6 + 4i}{36 - 16i^2} = \frac{7 + 2i}{52}.$$

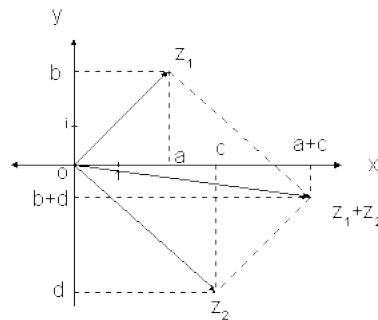
- Nos conteúdos anteriores deu-se bastante atenção às formas de representação dos números complexos e as relações entre elas. Seguidamente, o professor deve tratar as operações com números complexos na forma algébrica.

Adição de números complexos:

A adição de dois números complexos é um número complexo cuja parte real é igual à soma das partes reais e cuja parte imaginária é igual à soma das partes imaginárias das parcelas:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R}$$

A adição de números complexos corresponde a adição de vectores,

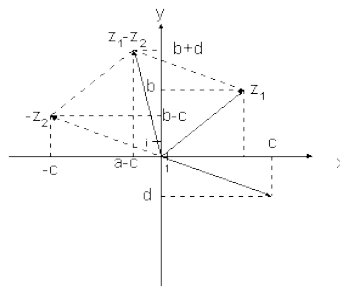


Considerando a representação vectorial dos números complexos, a soma de complexos não passa da soma dos vectores que os representam pela "regra do paralelogramo".

Subtracção de números complexos:

A subtracção de dois números complexos é um número complexo cuja parte real é igual à subtracção das partes reais e cuja parte imaginária é igual à subtracção das partes imaginárias das parcelas:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R}$$



Produto de números complexos:

O produto de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ é um número complexo na forma:

$$z.w = (ac - bd) + (ad + cb)i \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R}$$

Divisão de números complexos:

A divisão de dois números complexos é igual a multiplicação do numerador e do denominador pelo conjugado do segundo, isto é

$$\left(\frac{a + bi}{c + di} \right) = \left(\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \right) = \left(\frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \right)$$

- De seguida serão dadas aos alunos propriedades dos números complexos.

Propriedades:

Para quaisquer complexos z_1, z_2 e z_3 temos:

- a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ - Propriedade comutativa da adição em \mathbb{C} ;
- b) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 - 0$ é o elemento neutro da adição em \mathbb{C} ;
- c) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ - Propriedade associativa da adição em \mathbb{C} ;
- d) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ - Propriedade comutativa da multiplicação em \mathbb{C} ;
- e) $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1 - 1$ é o elemento neutro da multiplicação em \mathbb{C} ;
- f) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ - Propriedade associativa da multiplicação em \mathbb{C} ;
- g) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ e $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ -propriedade

distributiva da multiplicação em relação à adição.

- Por fim serão propostos aos alunos os seguintes exercícios.

Exercícios:

1) Calcule:

- a) i^3
- b) i^4
- c) i^n

Resposta:

1)

- a) $i^3 = i^2 \times i = -i$

$$b) i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

c) 1º- Caso n seja múltiplo de quatro, então $n = 4k$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Logo

$$i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$$

2º- Caso n seja da forma $4k + 3$

$$i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k \times i^3 = 1^k \times (-i) = -i$$

3º- Caso n seja da forma $4k + 2$

$$i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k \times i^2 = 1^k \times (-1) = -1 \quad i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k \times i^1 = 1^k \times (i) = i$$

4º- Caso n seja da forma $4k+1$

$$i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k \times i^1 = 1^k \times (i) = i$$

2) Efectue os seguintes operações e de seguida indica a parte real, a parte imaginária e o conjugado de cada um dos números complexos obtidos:

a) $A = (5-2i) + (7+3i)$

b) $B = (8 - 3i) \cdot i^7$

c) $C = \frac{1+2i}{3+4i}$

d) $D = \frac{2-\sqrt{-3}}{2+i} + 7 - 3i$

Resposta:

a) $(5-2i) + (7+3i) = (5-2i) + (7+3i) = 5 + 7 + (-2+3)i = 12 + i$

$$\text{Re}(A) = 12; \text{Im}(A) = 1; \overline{A} = (12 - i)$$

b) $(8 - 3i) \cdot i^7 = (8 - 3i) \cdot (-i) = -8i + 3i^2 = -8i - 3$

$$\text{Re}(B) = -3; \text{Im}(B) = -8; \overline{B} = 8i - 3$$

c) $\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i) \cdot (3-4i)}{(3+4i) \cdot (3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{9-16i^2} = \frac{3+2i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

$$\text{Re}(C) = \frac{11}{25}; \text{Im}(C) = \frac{2}{25}; \overline{C} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{2-\sqrt{-3}}{(2+i)} + 7-3i &= \frac{(2-\sqrt{3}i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + 7-3i = \frac{4-2\sqrt{3}i-2i+\sqrt{3}i^2}{i^2-4} + 7-3i = \\
 &= \frac{4+\sqrt{3}+(-2-2\sqrt{3})i}{-5} + 7-3i = \frac{4+\sqrt{3}-35}{-5} + \frac{(-2-2\sqrt{3})-15}{-5}i = \frac{-31+\sqrt{3}}{-5} + \frac{(-2-2\sqrt{3})-15}{-5}i \\
 &= \frac{-31+\sqrt{3}}{-5} + \frac{-2\sqrt{3}-17}{-5}i
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(D) = \frac{4+\sqrt{3}}{-5} + 7; \operatorname{Im}(D) = \frac{(-2-2\sqrt{3})}{-5} - 3;$$

$$\bar{D} = \frac{-31+\sqrt{3}}{-5} - \frac{-2\sqrt{3}-17}{-5}i.$$

3) Sejam $z = a + bi$, $z_1 = c + di$ e $z_2 = e + gi$ números complexos, com $a, b, c, d, e, g \in \mathfrak{R}$.

Mostre as seguintes propriedades:

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \text{ para } z_2 \neq 0$$

$$\text{d) } \overline{\overline{z}} = z$$

$$\text{e) } z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$\text{f) } z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

Resposta:

a)

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{c + di + e + gi} = \overline{c - di + e - gi} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

b)

$$\bullet \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(c + di)(e + gi)} = \overline{ce + cgi + edi - gd} = \overline{ce - cgi - edi - gd}$$

$$\bullet \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(c + di)} \cdot \overline{(e + gi)} = (c - di)(e - gi) = ce - cgi - edi - dg$$

c)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right) &= \left(\frac{c+di}{e+gi} \right) = \left(\frac{(c+di)(e-gi)}{(e+gi)(e-gi)} \right) = \\ &= \left(\frac{ce - cgi + dei + dg}{e^2 + g^2} \right) = \frac{ce + dg + cgi - dei}{e^2 + g^2} \\ \bullet \quad \frac{\overline{z_1}}{z_2} &= \frac{\overline{c+di}}{e+gi} = \frac{(c-di)(e+gi)}{(e-gi)(e+gi)} = \frac{ce + cgi - dei + dg}{e^2 + g^2} \\ &= \frac{ce + dg}{e^2 + g^2} + \frac{cg - de}{e^2 + g^2} j \end{aligned}$$

d)

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a+bi} = \overline{a-bi} = a+bi = z$$

e)

$$z + \overline{z} = a+bi + a-bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

f)

$$z - \overline{z} = a+bi - a-bi = 2bi = 2\operatorname{Im}(z)$$

- Propor aos alunos exercícios do manual para trabalho de casa, que serão corrigidos nas aulas de apoio.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Questões a resolver para trabalho de casa:

- Exercícios do manual escolar.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.
- Providência, Natália Bebiano, (2000), Matemática ou Mesas, Cadeiras, e Canecas de Cerveja, Gradiva, Lisboa.



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 2

Duração: 90 minutos

Sumário:

Resolução de exercícios.
Módulo e argumento de um número complexo.

Conteúdos Matemáticos:

- O plano complexo;
- Módulo e argumento de um número complexo;
- Representar geometricamente o produto de um complexo por i e $-i$;
- Argumento positivo mínimo e argumento principal de um número complexo.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos forma algébrica;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Representar geometricamente um par de coordenadas no eixo o.m..

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Calcular as raízes complexas de um número complexo na forma algébrica;
- Representar geometricamente um complexo na forma algébrica;
- Calcular o argumento de um número complexo;
- Calcular o módulo de um número complexo.

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;
- Vídeo projector;
- Computador;
- Quadro interactivo.

Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos
- Resolver exercícios;

- Interagir com a turma.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .

- De seguida, será proposto aos alunos que resolvam os seguintes exercícios, e com o decorrer a sua resolução serão introduzidos novos conceitos:

EXERCÍCIOS:

1) Resolva em \mathbb{C} , a equação $x^3 - 1 = 0$.

Resposta:

É óbvio que em \mathbb{R} a equação tem uma única raiz:

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Usando a regra de Ruffini obtemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Assim a equação tem as soluções:

$$1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ e } \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

- Após este exercício facilmente se pode constatar que:

Se $a + bi$, $b \neq 0$, é solução de uma equação de 2º grau, então $a - bi$ também é solução da mesma equação.

2) Sendo $4 + i$ e $2 - i$ duas raízes de uma equação de quarto grau de coeficientes reais, determina as outras raízes e escreve a equação.

Resposta:

As raízes complexas aparecem aos pares de números conjugados e como podemos decompor a equação de 4º grau no produto de duas equações de 2º grau as outras raízes são:

$$4 - i \text{ e } 2 + i.$$

A equação de 4º grau será da forma

$$(x^2 - Mx + N)(x^2 - M'x + N') = 0$$

onde

M é a soma das raízes conjugadas $4 - i$ e $4 + i$

M' é a soma das raízes conjugadas $2 + i$ e $2 - i$

N é o produto das raízes conjugadas $4 - i$ e $4 + i$

N' é o produto das raízes conjugadas $2 + i$ e $2 - i$.

Assim,

$$M = (4 - i) + (4 + i) = 8$$

$$M' = (2 + i) + (2 - i) = 4$$

$$N = (4 - i)(4 + i) = 16 + 1 = 17$$

$$N' = (2 + i)(2 - i) = 4 + 1 = 5$$

A equação de 4º grau é:

$$(x^2 - 8x + 17)(x^2 - 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x^3 + 32x^2 - 40x + 17x^2 - 68x + 85 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 85 = 0$$

- 4) Escreve como soma de duas expressões fraccionárias de denominador complexo a expressão fraccionária:

$$\frac{6}{x^2 - 2x + 10}$$

Resposta:

Primeiro vamos calcular as raízes de $x^2 - 2x + 10$

$$x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 - 6i}{2} \vee x = \frac{2 + 6i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - 3i \vee x = 1 + 3i$$

Assim

$$\frac{6}{x^2 - 2x + 10} = \frac{a + bi}{x - 1 - 3i} + \frac{c + di}{x - 1 + 3i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x^2 - 2x + 10} = \frac{(a + bi)(x - 1 - 3i) + (c + di)(x - 1 + 3i)}{(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x^2 - 2x + 10} = \frac{ax - a - 3ai + bxi - bi + 3b + cx - c + 3ci + dxi - di - 3d}{(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 0i = -a - 3ai - bi + 3b - c + 3ci - di - 3d \\ 0x + 0xi = ax + bxi + cx + dxi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 = -a + 3b - c - 3d \\ 0 = -3a - b + 3c - d \\ 0 = a + c \\ 0 = b + d \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -6d = 6 \\ 6c = 0 \\ a = -c \\ b = -d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = -1 \\ c = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

Logo $\frac{6}{x^2 - 2x + 10} = \frac{i}{x - 1 - 3i} + \frac{-i}{x - 1 + 3i}$.

5) Considere a equação $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$.

- Verifique que i é solução da equação e, sem usar cálculos, justifique que $-i$ também é solução.
- Determine $Q(z)$ tal que $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = (z^2 + 1) \cdot Q(z)$.
- Resolva a equação dada.

Resposta:

a)

Seja $P(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1$ então i é solução se e só se $P(i) = 0$

$$P(i) = 0 \Leftrightarrow i^4 - i^3 + 2i^2 - i + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + i - 2 - i + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (P.V.)}$$

Uma vez que $z = i$ é solução da equação, o conjugado de z , $\bar{z} = -i$, também é solução da equação, uma vez que, a nossa equação resulta do produto de 2 equações de segundo grau.

b)

Facilmente verificamos que i e $-i$ são soluções da equação $z^2 + 1$.

Assim usando a regra de Ruffini temos,

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\
 i & & i & -i-1 & 1+i & -1 \\
 \hline
 & 1 & -1+i & -i+1 & i & 0 \\
 -i & & -i & i & -i & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

Então, $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = (z^2 + 1)(z^2 - z + 1)$

Logo $Q(z) = (z^2 - z + 1)$.

$$z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 1) = 0 \vee (z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \pm j \vee z = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} j$$

$$\Leftrightarrow z = j \vee z = -j \vee z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} j \vee z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} j$$

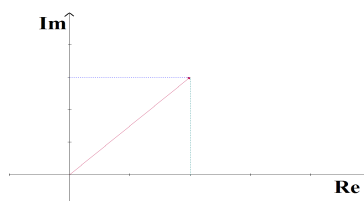
Cálculos auxiliares:

$$(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

- Após a resolução dos exercícios, será lembrado aos alunos que o esquema utilizado na representação geométrica de um número complexo chama-se **plano complexo**.

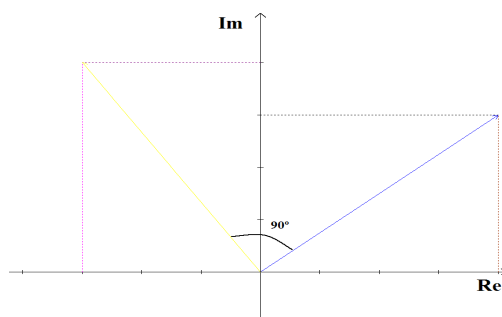
Exemplo:

O plano complexo de $2 + 3i$ é:



- De seguida verificar-se-á que o número i é um **operador de rotação de 90°** :

Seja $z = 4 + 3i$ então $iz = i(4 + 3i) = 4i - 3$ pelo plano complexo podemos verificar:



Assim, seja $z = a + bi$ um complexo de afixo P , então $z' = i(a + bi)$ tem afixo P' , que se obtém de P por uma rotação de centro na origem e ângulo $+90^\circ$.

De forma análoga verificamos que, se $z = a + bi$ um complexo de afixo P , então $z' = -i(a + bi)$ tem afixo P' , que se obtém de P por uma rotação de centro na origem e ângulo -90° .

Módulo de um número complexo

Chama-se **módulo** do complexo $z = a + bi$, e escreve-se $|z|$ ou ρ , ao número real $\sqrt{a^2 + b^2}$, ou seja, $|z|$ é o comprimento do vector $\vec{v} = (a, b)$. Assim,

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo:

Determina $|-3 + 4i|$.

Resposta:

$$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

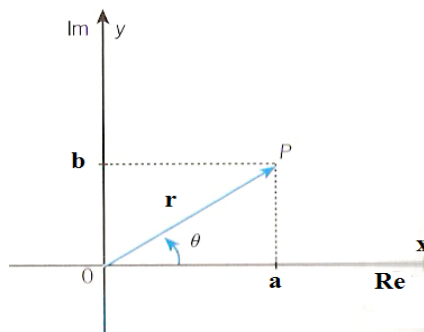
Será ainda salientado que, para qualquer z , z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, temos:

- a) $|z| = 0$ se e só se, $z = 0 + 0i$;
- b) Se $z \neq 0 + 0i$, então $|z|$ é um número real positivo;
- c) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$;

- d) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$;
- e) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$;
- f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- g) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Argumento de um número complexo

Chama-se **argumento** do número complexo $z = a + bi$ à amplitude, em radianos, do ângulo θ que o vector $\vec{v} = (a, b)$ faz com a parte positiva do eixo dos xx (eixo real).



Se θ é um argumento de um número complexo z , então qualquer ângulo da forma $\theta + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$ também é argumento de z .

Exemplo:

Seja $\frac{\pi}{3}$ um argumento de um número complexo $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ ($k = 1$) e

$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ ($k = -1$), são também argumentos desse número.

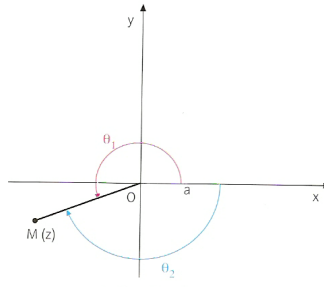
Nota:

Chama-se **argumento principal** a θ se:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Chama-se **argumento positivo mínimo** a θ se:

$$0 < \theta \leq 2\pi$$



De seguida será proposto o seguinte exercício:

Calcula o módulo e o argumento principal de:

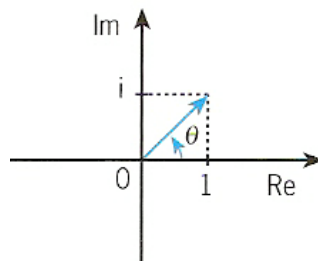
- a) $z = 1 + i$;
- b) $z = -2 + 3i$;
- c) $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Resposta:

a)

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

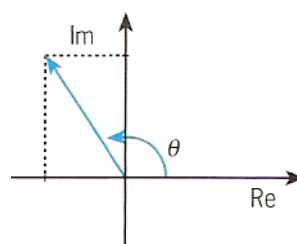
$$\text{Arg } z = \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$



b)

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

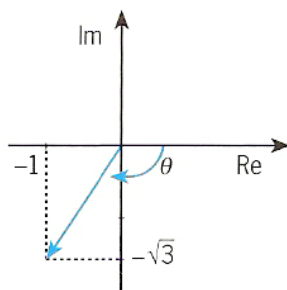
$$\text{arg } z = \theta = \pi - \text{tg}^{-1} \frac{3}{2} \approx 2,16 \text{ rad (utilizou-se a calculadora).}$$



c)

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg z = \theta = \pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$



Como o argumento principal está entre $]-\pi, \pi]$, temos que

$$\theta = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

ou

Outro processo de resolução seria:

$$\theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Propor aos alunos exercícios do manual para trabalho de casa, que serão corrigidos nas aulas de apoio.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Questões a resolver para trabalho de casa:

- Exercícios do manual escolar.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A, 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 3

Duração: 90 minutos

Sumário:

Representação de um número complexo na forma trigonométrica.
Exercícios de aplicação.
Utilização da Calculadora gráfica.

Conteúdos Matemáticos:

- Complexos na forma trigonométrica;
- Passagem de um número complexo na forma trigonométrica para a forma algébrica e vice-versa.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos na forma algébrica;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Determinar o argumento, modulo de um número complexo.

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Definir número complexo na forma trigonométrica;
- Passar um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa;
- Efectuar operações com complexos na forma trigonométrica;
- Resolver equações polinomiais de variável complexa;
- Determinar a potência e a radiciação de índice natural de um complexo.

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;
- Vídeo projector;
- Computador;
- Calculadora;
- Quadro interactivo.

Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos
- Resolver exercícios;
- Interagir com a turma.

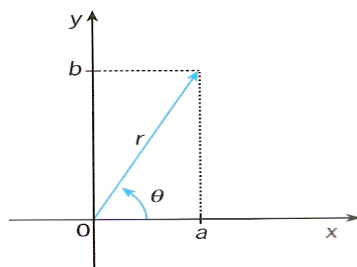
Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .
- De seguida serão introduzidos novos conceitos:

Forma trigonométrica de um número complexo

Na forma algébrica um complexo z representa-se por: $z = a + bi$.

Observe-se a seguinte figura:



Então, temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad e \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

ou

$$a = r \cos \theta \quad e \quad b = r \sin \theta$$

Assim o complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

que se designa por **representação trigonométrica** de z .

À expressão $\cos \theta + i \sin \theta$ representamos abreviadamente por $\text{cis} \theta$ ou $E(\theta)$. Logo

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow z = r \text{cis} \theta \Leftrightarrow E(\theta) .$$

- De seguida, serão propostos aos alunos os seguintes exercícios:

Exercício:

- 1) Escreve na forma trigonométrica:

a) i

Resposta:

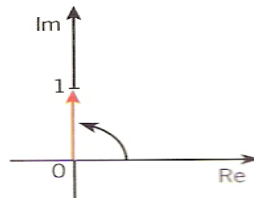
Inicia-se com o cálculo do módulo:

$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2}$$
$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

Posteriormente calcular o argumento:

$$\cos \theta = \frac{0}{1} \quad e \quad \sin \theta = \frac{1}{1}$$

Como o valor do co-seno é 0 e do seno é 1, então o valor de $\theta = \frac{\pi}{2}$



Então:

$$i = (1 \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$
$$= 1 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$
$$= cis \frac{\pi}{2}$$

Observação: Qualquer número imaginário puro positivo, e negativo, tem argumento $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$, respectivamente.

b) -3

Resposta:

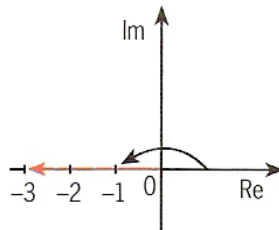
Inicia-se com o cálculo do módulo:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$$
$$\Leftrightarrow |z| = 3$$

Posteriormente calcular o argumento:

$$\cos \theta = \frac{-3}{3} \quad e \quad \sin \theta = \frac{0}{3}, \quad \cos \theta = -1 \quad e \quad \sin \theta = 0$$

Como o valor do co-seno é -1 e do seno é 0, então o valor de $\theta = \pi$



$$\begin{aligned} \text{Então: } -3 &= (3 \cos \pi + 3j \sin \pi) \\ &= 3(\cos \pi + j \sin \pi) \\ &= 3e^{j\pi} \end{aligned}$$

Observação: Qualquer número real puro negativo, e positivo, tem argumento 0 e π , respectivamente.

b) $-1 - j$

Resposta:

Inicia-se com o calculo do módulo:

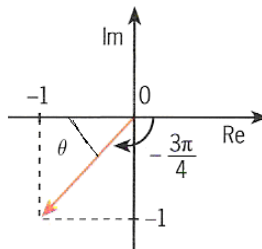
$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Posteriormente calcular o argumento:

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como o valor do co-seno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e do seno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, então o ângulo está no terceiro quadrante. Logo:



$$\text{Arg } z = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi \quad \text{ou} \quad \text{Arg } z = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi,$$

de um modo geral trabalha-se com o argumento positivo mínimo.

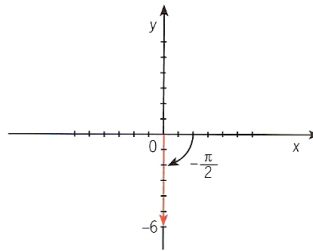
Então:

$$\begin{aligned} -1 - i &= \left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) i \right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

2) Escreve na forma algébrica:

a) $z = 6 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

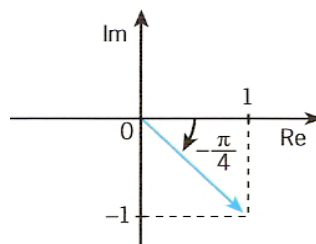
Resposta:



$$\begin{aligned} z &= 6 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 6 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 6(0 + (-1)i) \\ &= -6i \end{aligned}$$

b) $z = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Resposta:



$$\begin{aligned}
z &= 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \sqrt{2} - \sqrt{2}i
\end{aligned}$$

No fim, o professor deve conduzir os alunos a concluir que dados dois números complexos na forma trigonométrica, $z_1 = r_1\operatorname{cis}\theta_1$ e $z_2 = r_2\operatorname{cis}\theta_2$, são iguais se, e somente se,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Operações com complexos na forma trigonométrica

- De seguida (com o intuito de os alunos praticarem demonstrações, e de aplicar a multiplicação, divisão, potência e raiz índice n a números complexos na forma trigonométrica) será proposto aos alunos que demonstrem que:

Exercício:

1) Dados $z_1 = r_1\operatorname{cis}\theta_1$ e $z_2 = r_2\operatorname{cis}\theta_2$ prove que:

a) $z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ (produto)

Resposta:

$$\begin{aligned}
z_1 \times z_2 &= r_1\operatorname{cis}\theta_1 \times r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1(\cos(\theta_1) + i\operatorname{sen}(\theta_1)) \times r_2(\cos(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_2)) = \\
&= r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + i\cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)) = \\
&= r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + i(\cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2))) = \\
&= r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 \times r_2\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Nota:

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)) &= (\cos(\theta_1 + \theta_2)) \text{ e} \\
(\cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)) &= (\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}$$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ (divisão)

Resposta:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$$

Uma vez que o inverso de z_2 é $\frac{1}{z_2}$ e o elemento neutro para a multiplicação 1, temos que

$$z_2 \times \frac{1}{z_2} = 1 = \text{cis}0.$$

Assim, supondo que $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} \text{cis} \alpha$ temos que

$$z_2 \times \frac{1}{z_2} = \text{cis}0 \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_2} \text{cis}(\theta_2 + \alpha) = \text{cis}0$$

Logo

$$\theta_2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\theta_2$$

Portanto temos que

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} \text{cis}(-\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = r_1 \text{cis} \theta_1 \times \frac{1}{r_2} \text{cis}(-\theta_2) = \frac{r_1}{r_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

c) $z_1^n = r_1^n \text{cis}(n\theta_1)$ Esta é a fórmula é conhecida como fórmula de Moivre.

Resposta:

$$z_1^n = \underbrace{z_1 \times z_1 \times \dots \times z_1}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{r_1 \text{cis}(\theta_1) \times r_1 \text{cis}(\theta_1) \times \dots \times r_1 \text{cis}(\theta_1)}_{n \text{ vezes}} = r_1^n \text{cis}(\theta_1 + \theta_1 + \dots + \theta_1) = r_1^n \text{cis}(n\theta_1)$$

d) $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \text{cis} \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}$ (radiciação)

Resposta:

Como $z_1 = r_1 \text{cis} \theta_1$, então

$$\sqrt[n]{z_1} = t \text{cis} \gamma, \text{ para algum } t \in \mathfrak{R}.$$

Assim

$$z_1 = (t \operatorname{cis}(\gamma))^n \Leftrightarrow r_1 \operatorname{cis} \theta_1 = t^n \operatorname{cis}(n\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = t^n \\ \theta_1 = n\gamma + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[n]{r_1} \\ \gamma = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Logo, $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot \operatorname{cis} \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}$.

Nota: como quando $k = n$ temos $\operatorname{cis} \frac{\theta_1 + 2n\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{\theta_1}{n} + 2k\pi = \operatorname{cis} \frac{\theta_1}{n}$, apenas os n valores de k (0, 1, 2, ..., $n-1$) conduzem a valores diferentes do argumento.

- Após verificarem as igualdades anteriores serão propostos aos alunos os seguintes exercícios:

Exercício:

1) Seja $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$ e $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$ calcula os seguintes números complexos:

a) $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^7$ (apresenta na forma algébrica)

Resposta:

$$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

Seja $\arg(z_2) = -\theta$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo, $z_2 = 4 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^7 &= \frac{\left(2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right)^7}{\left(4 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)^7} = \left(\frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(\frac{11\pi}{6} \right) \right)^7 = \left(\frac{1}{2} \right)^7 \operatorname{cis} \left(\frac{77\pi}{6} \right) = \frac{1}{128} \operatorname{cis} \left(\frac{77\pi}{6} - 12\pi \right) = \\ &= \frac{1}{128} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^7 = -\cos \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right) \times \frac{1}{128} = -\frac{\sqrt{3}}{256}$$

$$\operatorname{Im} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^7 = \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right) \times \frac{1}{128} = \frac{1}{256}$$

Assim, $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^7 = -\frac{\sqrt{3}}{256} + \frac{1}{256}j$

b) $\left(\bar{z}_1\right)^4 \times \sqrt{-z_2}$ (apresenta na forma trigonométrica)

Resposta:

Como $\bar{z}_1 = 2cis\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ e $-z_2 = 4cis\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 4cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, temos:

$$\left(\bar{z}_1\right)^4 \times \sqrt{-z_2} = \left(2cis\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)^4 \times \sqrt{4cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = 16cis\left(-\frac{20\pi}{3}\right) \times 2cis\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right) =$$

$$= 32cis\left(-\frac{75\pi}{12} + k\pi\right) = 32cis\left(-\frac{75\pi}{12} + 6\pi + k\pi\right) = 32cis\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \wedge k = 0,1$$

$$k = 0 \longrightarrow \left(\bar{z}_1\right)^4 \times \sqrt{-z_2} = 32cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$k = 1 \longrightarrow \left(\bar{z}_1\right)^4 \times \sqrt{-z_2} = 32cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

2. Resolva no conjunto dos números complexos as equações:

a) $z^6 + 64 = 0$

Resposta:

$$z^6 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -64 \Leftrightarrow z^6 = 64cis\pi \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) \wedge k = 0,1,2,3,4,5$$

$$k = 0 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$k = 1 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$k = 2 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k = 3 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$k = 4 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$k = 5 \longrightarrow z = \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$S. = \left\{ \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{\pi}{6}\right), \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{3\pi}{6}\right), \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{5\pi}{6}\right), \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{7\pi}{6}\right), \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{9\pi}{6}\right), \sqrt[6]{64}cis\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right\}$$

b) $z^3 - 8\bar{z} = 0$

Resposta:

Seja $z = \rho cis \theta$, então

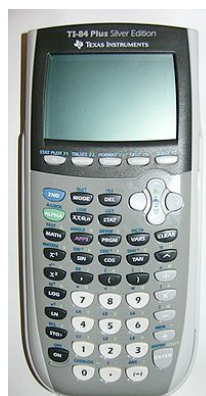
$$z^3 - 8\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (\rho cis \theta)^3 = (8 cis 0)(\rho cis(-\theta)) \Leftrightarrow \rho^3 cis(3\theta) = 8\rho cis(-\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^3 = 8\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^3 - 8\rho = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \wedge k \in Z \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} \rho = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{k\pi}{2} \wedge k \in Z \end{array} \right\}$$

$$S. = \left\{ 0, 2\sqrt{2}cis(0), 2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{2}\right), 2\sqrt{2}cis(\pi), 2\sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\}$$

- O professor pede aos alunos que verifiquem os resultados dos exercícios anteriores recorrendo a calculadora gráfica de forma a utilizar as suas potencialidades.

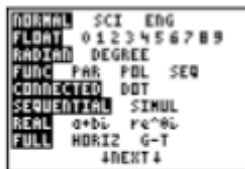
Para tal o professor deve informar os alunos os processos básicos de manuseamento da calculadora gráfica TI-84 plus.



Modos de Números Complexos

A TI-84 Plus exibe os números complexos nas formas retangular e polar. Para selecionar um modo de números complexos, pressione **MODE** e, em seguida, selecione um dos dois modos.

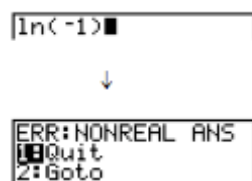
- $a+bi$ (modo complexo-retangular)
- $re^{\theta i}$ (modo complexo-polar)



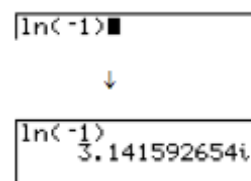
Na TI-84 Plus, os números complexos podem ser armazenados em variáveis. Da mesma forma, os números complexos são elementos válidos da lista.

No modo Real, os resultados dos números complexos retornam um erro, a menos que você tenha introduzido um número complexo como entrada. Por exemplo, no modo Real, $\ln(-1)$ retorna um erro; no modo $a+bi$, $\ln(-1)$ retorna uma resposta.

Modo Real



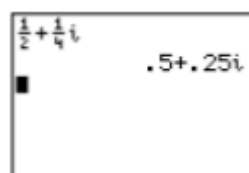
Modo a+bi



Introduzindo Números Complexos

Os números complexos são armazenados na forma retangular, mas você pode introduzir um número complexo no formato retangular ou polar, independente da definição do modo. Os componentes dos números complexos podem ser números reais ou expressões de números reais como resultado; as expressões são calculadas quando o comando é executado.

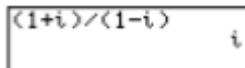
Pode introduzir frações em números complexos, mas a saída será sempre um valor decimal.



Quando utilizar o modelo n/d, uma fração não pode conter um número complexo.



Pode utilizar a divisão para calcular a resposta:



Nota sobre Modo Radiano x Grau

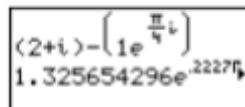
O modo Radian deve ser utilizado em cálculos envolvendo números complexos. A TI-84 Plus converte internamente todos os valores trigonométricos introduzidos mas não converte os valores das funções exponenciais, logarítmicas ou hiperbólicas.

No modo grau, as identidades complexas como $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ geralmente não são verdadeiras porque os valores do seno e do cosseno são convertidos para radianos, enquanto que os valores de $e^{i\theta}$ não são. Por exemplo, $e^{i45} = \cos(45) + i \sin(45)$ é internamente tratado como $e^{i45} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$. As identidades complexas são sempre tratadas no modo radiano.

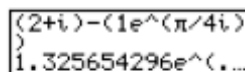
Interpretar Resultados Complexos

Os números complexos dos resultados, incluindo elementos de lista, são apresentados com forma rectangular ou polar, conforme for especificado pela definição de modo ou por uma instrução de conversão de visualização. No exemplo abaixo, os modos Polar-complex ($re^{i\theta}$) e Radian são definidos. No exemplo a seguir, estão activos os modos $re^{i\theta}$ e Degree.

MathPrint™:

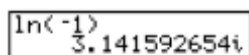


Classic:



Modo Rectangular-Complexo

O modo rectangular reconhece e apresenta um número complexo na forma $a+bi$, em que a é a componente real, b é a componente imaginária e i é uma constante igual a $\sqrt{-1}$.



Para introduzir um número complexo de forma rectangular, introduza o valor de a (*componente real*), prima \pm ou \square , introduza o valor de b (*componente imaginária*) e prima $\boxed{2nd}$ $\boxed{[i]}$ (constante).

componente real(+ ou -)componente imaginária i

$$4+2i \quad 4+2i$$

Modo Polar-Complexo

O modo polar reconhece e apresenta um número complexo na forma $re^{\theta i}$, em que r é a magnitude, e é a base do logaritmo natural, θ é o ângulo e i é uma constante igual $\sqrt{-1}$.

$$\frac{1}{3}e^{-1} \quad 3.141592654e^{(1...}$$

Para introduzir um número complexo na forma polar, introduza o valor de r (*magnitude*), prima $\boxed{2nd}$ [e^x] (função exponencial), introduza o valor de θ (*ângulo*) e prima $\boxed{2nd}$ [i] (constante).

magnitude $e^{($ *ângulo* $i)$

$$10e^{\frac{\pi}{3}i} \quad 10e^{1.047197551i}$$

MathPrint™

$$10e^{(\pi/3i)} \quad 10e^{(1.04719755...}$$

Classic

Operações MATH CPX (Complexas)

Menu MATH CPX

Para visualizar o menu **MATH CPX**, prima \boxed{MATH} $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$.

MATH	NUM	CPX	PRB
1:	conj (Devolve o complexo conjugado
2:	real (Devolve a parte real
3:	imag (Devolve a parte imaginária
4:	angle (Devolve o ângulo polar
5:	abs (Devolve a magnitude (módulo)
6:	►Rect		Apresenta o resultado na forma rectangular
7:	►Polar		Apresenta o resultado na forma polar

conj()

conj() (conjugado) devolve o complexo conjugado de um número complexo ou uma lista de números complexos.

conj($a+bi$) devolve um valor para $a-bi$ no modo **a+bi**.

conj($re^{i\theta}$) devolve um valor para $re^{-i\theta}$ no modo **re $^{i\theta}$** .

MathPrint™

```
conj(3+4i)      3-4i
conj(3e^4i)     3e^-4i
                2.283185307i
```

Classic

```
conj(3+4i)      3-4i
```

```
conj(3e^(4i))  3e^(-2.283185307i)
```

real()

real() (parte real) devolve a parte real de um número complexo ou uma lista de números complexos.

real($a+bi$) devolve um valor para a .

real($re^{i\theta}$) devolve um valor para $r\cos(\theta)$.

MathPrint™

```
real(3+4i)      3
real(3e^4i)     -1.960930863
```

Classic

```
real(3+4i)      3
```

```
real(3e^(4i))  -1.960930863
```

imag()

imag() (parte imaginária) devolve a parte imaginária (não real) de um número complexo ou uma lista de números complexos.

imag($a+bi$) devolve um valor para b .

imag($re^{i\theta}$) devolve um valor para $r\sin(\theta)$.

MathPrint™

```
imag(3+4i)      4
imag(3e^4i)     -2.270407486
```

Classic

```
imag(3+4i)      4
```

```
imag(3e^(4i))  -2.270407486
```

angle(

angle(devolve o ângulo polar de um número complexo ou uma lista de números complexos, calculados como $\tan^{-1}(b/a)$, em que b é a parte imaginária e a é a parte real. O cálculo é ajustado por $+\pi$ no segundo quadrante ou por $-\pi$ no terceiro quadrante.

angle(a+bi) devolve um valor para $\tan^{-1}(b/a)$.

angle(re^(θ i)) devolve um valor para θ , em que $-\pi < \theta < \pi$.

MathPrint™

```
angle(3+4i)
.927295218
angle(3e^4i)
-2.283185307
```

Classic

```
angle(3+4i)
.927295218
angle(3e^(4i))
-2.283185307
```

abs(

abs((valor absoluto) devolve a magnitude (módulos), $\sqrt{\text{real}^2 + \text{imag}^2}$, de um número complexo ou de uma lista de números complexos. Pode também aceder a **abs(** a partir do menu de atalho **FUNC** (**ALPHA**) [**F2**] 1).

abs(a+bi) devolve um valor para $\sqrt{a^2 + b^2}$.

abs(re^(θ i)) devolve um valor para r (magnitude).

$\sqrt{\text{real}^2 + \text{imag}^2}$

```
abs(3+4i)
5
```

```
abs(3e^(4i))
3
```

►Rect

►Rect (visualização como rectangular) apresenta um resultado complexo na forma rectangular. Só é válido no final de uma expressão. Não é válido se o resultado for real.

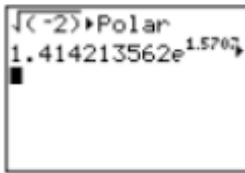
resultado complexo ►**Rect** devolve um valor para $a+bi$

```
√(-2)►Rect
1.414213562i
```

►Polar

►Polar (visualização como polar) apresenta um resultado complexo na forma polar. Só é válido no fim de uma expressão. Não é válido se o resultado for real.

resultado complexo ►Polar devolve um valor para $re^{i\theta}$



- Propor aos alunos exercícios do manual para trabalho de casa, que serão corrigidos nas aulas de apoio.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Questões a resolver para trabalho de casa:

- Exercícios do manual escolar.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.
- Manual TI-84 Plus.



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 4

Duração: 90 minutos

Sumário:

Domínios planos e condições em variável complexa.

Conteúdos Matemáticos:

- Condição universal;
- Condição impossível;
- Conjunção de condições;
- Disjunção de condições;
- Circunferência e círculo;
- Mediatriz;
- Rectas paralelas aos eixos;
- Semirectas;

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos na forma algébrica e trigonométrica;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Determinar o argumento e representar geometricamente um número complexo.

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Representar uma condição impossível;
- Representar uma condição universal;
- Distinguir condição impossível de condição universal;
- Representar uma circunferência, círculo, mediatriz, rectas e semirectas no plano complexo;
- Representar uma condição geometricamente.

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;
- Vídeo projector;
- Computador;
- Quadro interactivo.

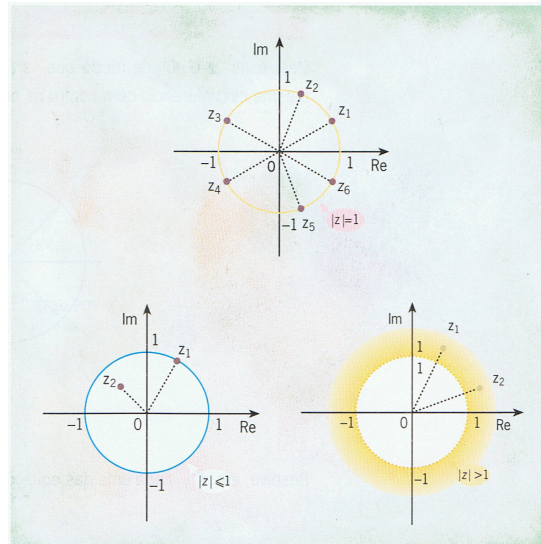
Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos
- Resolver exercícios;
- Interagir com a turma.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .
- De seguida serão introduzidos novos conceitos:

Domínios planos e condições em variável complexa



Como vimos e trabalhamos ao longo dos temas anteriores, as representações geométricas e vectoriais dos números complexos são muito úteis e permitem visualizar relações importantes entre estes números e entre as suas operações.

A ideia original de representar os números complexos geometricamente é devida a Caspar Wessel, um topógrafo norueguês que viveu no final do século XVIII. Anos mais tarde, já no século XIX, Jean Robert Argand recriava, por si, a mesma representação. Muitas vezes, o plano complexo é assim, indevidamente designado por plano de Argand mas, mais correctamente, deveria ser designado por plano de Wessel. Por esta razão optamos pelo chamado plano complexo.

Operações com condições e com conjuntos

Ao número complexo $z = x + yi$ corresponde no plano complexo o ponto $P \rightarrow (x, y)$.

A uma condição em \mathbb{C} corresponde um conjunto de pontos.

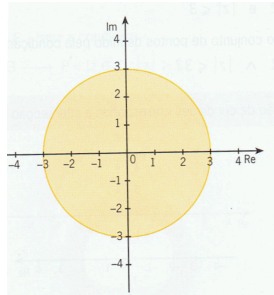
“Qual é o conjunto de pontos que satisfaz, em C , a condição $|z| \leq 3$?”

$$\text{Então } |z| \leq 3 \Leftrightarrow |z - 0| \leq 3$$

A questão pode ser formulada de outra forma:

Quais são os pontos do plano complexo que distam da origem 3 ou menos de 3 unidades?

A resposta a esta questão pode ser dada geometricamente ou em linguagem corrente. Os pontos em questão pertencem a um círculo de centro na origem e raio 3.



A representação geométrica do lugar geométrico dos pontos que satisfazem a condição $|z| \leq 3$ está representada a cor no plano complexo.

De um modo geral, tem-se

O conjunto definido pela condição $p(z)$ é o conjunto dos valores do Universo(U) que são solução da condição.

$$\{z \in U : p(z)\}$$

Qual será o conjunto definido pela condição $|z| \geq 0$?

A condição $|z| \geq 0$ é uma condição universal.

Uma condição universal define o Universo.

$$C = \{z \in C : |z| \geq 0\}$$

Qual será o conjunto definido pela condição $|z| < 0$?

A condição $|z| < 0$ é uma condição impossível.

Uma condição impossível define o conjunto vazio.

$$\phi = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 0\}$$

Conjunção de condições:

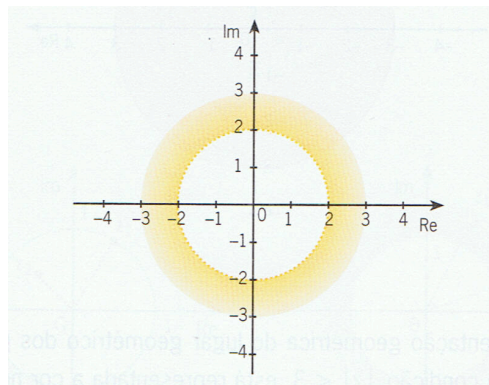
Considere-se em \mathbb{C} as condições:

$$|z| \geq 2 \text{ e } |z| \leq 3$$

Qual é o conjunto de pontos definidos pela condição: $|z| \geq 2 \wedge |z| \leq 3$?

Definição de conjunção de condições

A conjunção de condições corresponde a intersecção de conjuntos



Disjunção de condições:

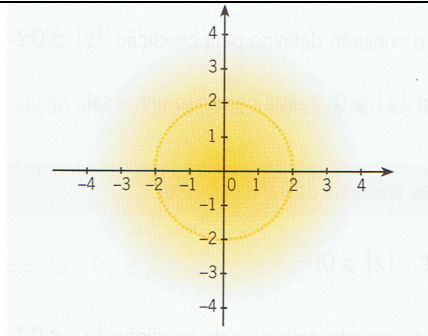
Considere-se em \mathbb{C} as condições:

$$|z| \geq 2 \text{ e } |z| \leq 3$$

Qual é o conjunto de pontos definidos pela condição: $|z| \geq 2 \vee |z| \leq 3$?

Definição de disjunção de condições

A disjunção de condições corresponde a reunião de conjuntos



Conjuntos definidos por condições envolvendo números complexos

De entre os lugares geométricos mais conhecidos faremos referência:

- Circunferência e círculo;
- Mediatriz de um segmento de recta;
- Rectas paralelas aos eixos;
- Semi-rectas;

Circunferência e círculo:

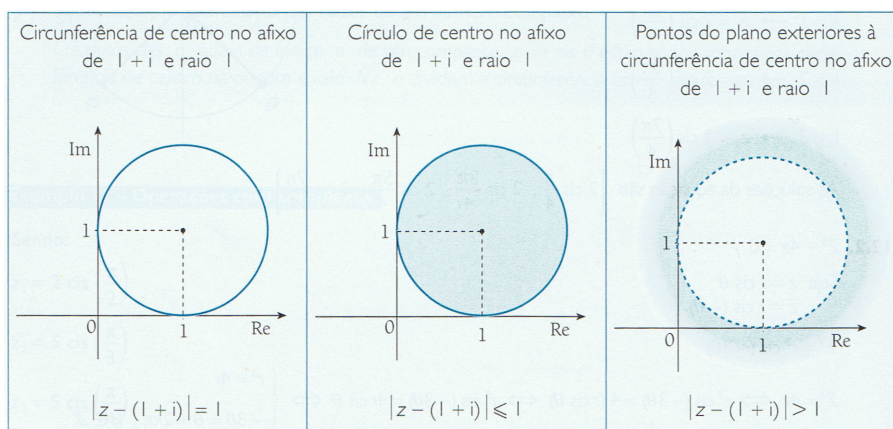
A circunferência caracteriza-se por ser o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo.

A distância de um qualquer ponto da circunferência a C (centro da circunferência) é igual ao raio (r).

Escreve-se $|P - C| = r$ a distância de P a C.

No plano complexo consideremos a variável complexa: $z = x + yi$.

Vejamos como representar, por uma condição, uma circunferência, um círculo e os pontos exteriores a circunferência.



Para obtermos a equação algébrica da circunferência recorre-se a substituição de z por

$x + yi$ e calcula-se o modulo:

$$\begin{aligned} |x + yi - (1 + i)| = 1 &\Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 1 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

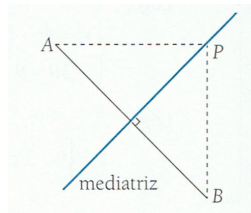


Circunferência de centro em $P \rightarrow (1,1)$ e raio 1.

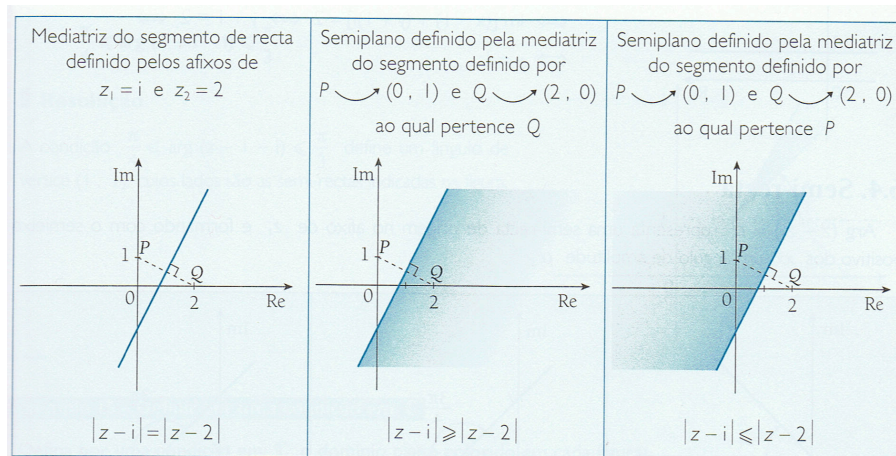
Mediatriz

A mediatriz de um segmento de recta $[AB]$ caracteriza-se por ser o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B.

$$|P - A| = |P - B|$$



Vejamos como se representa no plano complexo a mediatriz de um segmento de recta e os seus semiplanos por ela definidos.



Para determinarmos a equação da recta substitui-se por $x + yi$ e calculam-se os módulos.

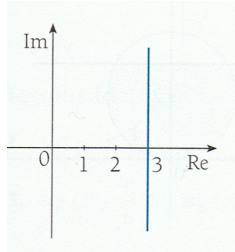
$$\begin{aligned} |x + yi - i| = |x + yi - 2| &\Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - 2) + yi| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= (x - 2)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ \Leftrightarrow 4x - 2y - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

equação da mediatriz do segmento definido por:

$$P \rightarrow (0,1) \text{ e } Q \rightarrow (2,0)$$

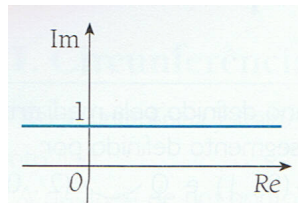
Rectas paralelas aos eixos

- Recta paralela ao eixo do yy ou ao eixo imaginário



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z - 1 + i) = 2 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(x + yi - 1 + i) = 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}[(x - 1) + (y + 1)i] = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

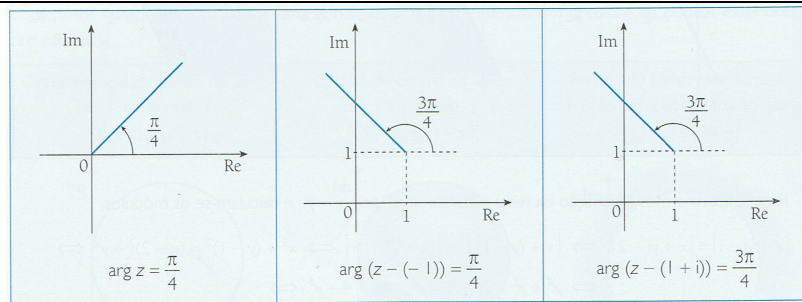
- Recta paralela ao eixo dos xx ou ao eixo real.



$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z - 1 + i) = 2 &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(x + yi - 1 + i) = 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im}[(x - 1) + (y + 1)i] = 2 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Semi-recta

$\operatorname{Arg}(z - z_1) = \alpha$ representa uma semi-recta de origem no afixo de z_1 e formando com o semieixo positivo dos xx um ângulo de amplitude α .



Posto isto o professor pede aos alunos que resolvam os seguintes exercícios.

Exercícios:

1) Representa no plano complexo o conjunto de pontos definido pelas condições:

$$|z - 2i| \leq 2 \wedge \text{Im}(z + 3i) \leq 6$$

Resposta:

A condição $|z - 2i| \leq 2$ define um círculo de raio 2 e centro em $z_0 = 2i$.

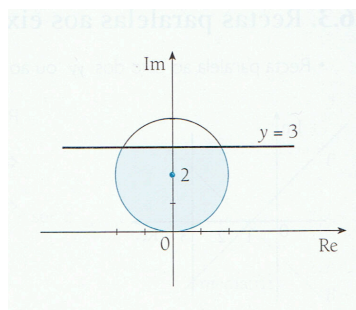
A condição $\text{Im}(z + 3i) \leq 6$ define um semiplano.

Seja

$$\begin{aligned} \text{Im}(z + 3i) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow \text{Im}(x + yi + 3i) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow \text{Im}(x + (y + 3)i) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow y + 3 &\leq 6 \\ \Leftrightarrow y &\leq 3 \end{aligned}$$

O semiplano é definido pela condição $y \leq 3$.

Podemos então representar as condições no plano complexo:

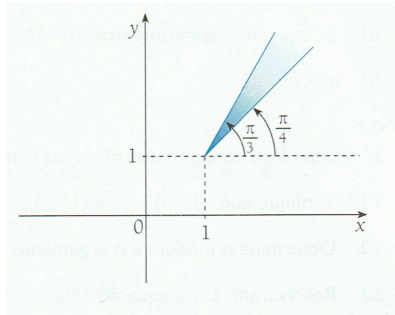


2) Represente no plano complexo o conjunto de pontos definidos pela condição:

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1 - i) \leq \frac{\pi}{3}$$

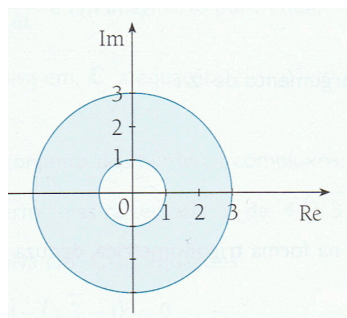
Resposta:

A condição $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1 - i) \leq \frac{\pi}{3}$ define um ângulo de vértice $(1,1)$, cujos lados são semi-rectas indicadas na figura.



3) Defina por uma condição, o domínio plano colorido em cada figura:

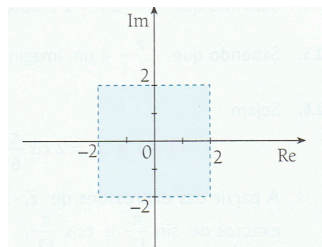
a)



Resposta:

$$1 \leq |z| \leq 3$$

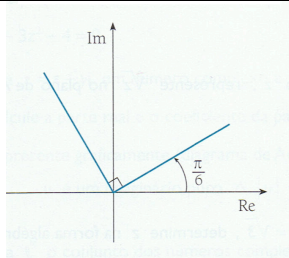
b)



Resposta:

$$-2 < \operatorname{Re}(z) < 2 \wedge -2 < \operatorname{Im}(z) < 2$$

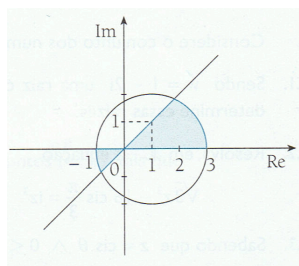
c)



Resposta:

$$\arg(z) = \frac{\pi}{6} \vee \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

d)



Resposta:

$$|z - 1| \leq 2 \wedge \left(0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \vee \pi \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4} \right)$$

- Propor aos alunos exercícios do manual para trabalho de casa, que serão corrigidos nas aulas de apoio.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Questões a resolver para trabalho de casa:

- Exercícios do manual escolar.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 5

Duração: 90 minutos

Sumário:

Resolução de uma proposta de trabalho.

Conteúdos Matemáticos:

- O plano complexo;
- Módulo e argumento de um número complexo;
- Representar geometricamente o produto de um complexo por i e $-i$;
- Argumento positivo mínimo e argumento principal de um número complexo.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Representar num referencial um par ordenado;
- Efectuar operações em \mathfrak{R} com polinómios;
- Calcular as raízes complexas de um número complexo;
- Representar geometricamente um complexo;
- Calcular o argumento de um número complexo;
- Calcular o módulo de um número complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Representar geometricamente um par de coordenadas no eixo o.m.;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos na forma algébrica e trigonométrica;
- Representar geometricamente um número complexo.

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Definir i e número complexo;
- Representar graficamente um número complexo;
- Indicar o simétrico, inverso e o conjugado de um complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Determinar o módulo e argumento de um número complexo;
- Representar geometricamente o produto de um complexo por i e $-i$;
- Determinar o argumento positivo mínimo e o argumento principal de um número complexo;
- Definir número complexo na forma trigonométrica;

- Passar um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa;
- Efectuar operações com complexos na forma trigonométrica;
- Resolver equações polinomiais de variável complexa;
- Determinar a potência e a radiciação de índice natural de um complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Representar uma condição impossível;
- Representar uma condição universal;
- Distinguir condição impossível de condição universal;
- Representar uma circunferência, círculo, mediatriz, rectas e semi-rectas no plano de Argand;
- Representar uma condição geometricamente.

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;
- Vídeo projector;
- Computador;
- Quadro interactivo.

Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos
- Resolver exercícios;
- Interagir com a turma.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .
- De seguida, o professor distribui a proposta de trabalho.
- Propor aos alunos para trabalho de casa a conclusão da proposta de trabalho.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Questões a resolver para trabalho de casa:

- Finalizar a proposta de trabalho.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educaçã



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 6

Duração: 90 minutos

Sumário:

Conclusão da proposta de trabalho.
Esclarecimentos de dúvidas.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Conjuntos numéricos;
- Representar num referencial um par ordenado;
- Operações em \mathfrak{R} com polinómios;
- Calcular as raízes complexas de um número complexo;
- Representar geometricamente um complexo;
- Calcular o argumento de um número complexo;
- Calcular o módulo de um número complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Representação geométrica de um par de coordenadas no eixo o.m.;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos na forma algébrica e trigonométrica;
- Argumento e representação geométrica de um número complexo.

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Definir i e número complexo;
- Representação gráfica de um número complexo;
- Indicar o simétrico, inverso e o conjugado de um complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- O plano de Argand;
- Módulo e argumento de um número complexo;
- Representar geometricamente o produto de um complexo por i e $-i$;
- Argumento positivo mínimo e argumento principal de um número complexo;
- Definir número complexo na forma trigonométrica;
- Passar um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa;
- Operar complexos na forma trigonométrica;
- Resolver equações polinomiais de variável complexa;
- Determinar a potência e a radiciação de índice natural de um complexo;

- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Regra de Ruffini;
- Argumento e representação geométrica de um número complexo;
- Representar uma condição impossível;
- Representar uma condição universal;
- Distinguir condição impossível de condição universal;
- Representar uma circunferência, círculo, mediatriz, rectas e semi-rectas no plano de Argand;

Material:

- Manual adoptado pela escola;
- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Tela;
- Vídeo projector;
- Computador;
- Quadro interactivo.

Estratégia:

- Exposição teórica dos conteúdos;
- Resolver exercícios;
- Interagir com a turma.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .
- De seguida, o professor conclui a correcção da proposta de trabalho e esclarece as duvidas dos alunos.
- Desejar um resto de bom dia aos alunos.

Avaliação:

Após a aula será preenchida uma ficha de observação que contempla os seguintes itens:

- Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente;
- Empenhamento nas actividades propostas;
- Conhecimento demonstrado;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Espírito de cooperação e relacionamento com os outros;
- Participação na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.



Plano de Aula

Matemática A 12º Ano - Turma A

Estagiário: André Marques de Andrade

Aula: 7

Duração: 90 minutos

Sumário:

Teste de avaliação.

Pré-Requisitos (o aluno deve saber):

- Conjuntos numéricos;
- Representar num referencial um par ordenado;
- Operações em \mathfrak{R} com polinómios;
- Calcular as raízes complexas de um número complexo;
- Representar geometricamente um complexo;
- Calcular o argumento de um número complexo;
- Calcular o módulo de um número complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Aplicar a regra de Ruffini;
- Representar geometricamente um par de coordenadas no eixo o.m.;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos na forma algébrica e trigonométrica;
- Argumento e representação geométrica de um número complexo.

Objectivos (o aluno deve ser capaz de):

- Definir i e número complexo;
- Representação gráfica de um número complexo;
- Indicar o simétrico, inverso e o conjugado de um complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- O plano de Argand;
- Módulo e argumento de um número complexo;
- Representar geometricamente o produto de um complexo por i e $-i$;
- Argumento positivo mínimo e argumento principal de um número complexo;
- Definir número complexo na forma trigonométrica;
- Passar um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa;
- Operar complexos na forma trigonométrica;
- Resolver equações polinomiais de variável complexa;
- Determinar a potência e a radiciação de índice natural de um complexo;
- Adicionar subtrair, multiplicar e dividir complexos;
- Regra de Ruffini;
- Argumento e representação geométrica de um número complexo;

- Representar uma condição impossível;
- Representar uma condição universal;
- Distinguir condição impossível de condição universal;
- Representar uma circunferência, círculo, mediatriz, rectas e semi-rectas no plano de Argand;
- Dada uma condição representa-la geometricamente.

Material:

- Quadro;
- Material de escrita diversificado;
- Teste de avaliação.

Estratégia:

- Resolver o teste.

Desenvolvimento da aula:

- O professor iniciará a aula com escrita do sumário e preencherá a folha de presenças .
- De seguida, o professor distribui o teste de avaliação.

Apoio bibliográfico:

- Manual adoptado pela escola, 12º ano de escolaridade.
- Programa de Matemática A - 12º Ano, DGIDC - Ministério da Educação.

1.2 Anexos

PROPOSTA DE TRABALHO - 12º ANO

1. Calcule: $\frac{2+i}{5-3i}$.

2. Coloca na forma $z = a + bi$ a expressão $\frac{1-i}{1+i} + \frac{i}{i-2}$.

3) Calcule:

a) i^{92} b) i^{45} c) i^{310} d) i^{1081} e) i^{4n} f) i^{4n+2}

4. Calcule o módulo do seguinte número complexo: $\frac{(4-3i)(12-5i)}{\sqrt{2}i}$.

5. Calcule o número do seguinte número complexo: $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

6. Passe o número complexo $z = 8i$ para a forma trigonométrica

7. Dados $z_1 = 5(\cos(\pi) + i.\text{sen}(\pi))$ e $z_2 = 3.\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ obtenha $z_1.z_2$.

8. Determine no plano de Argand os conjuntos dos afijos dos números complexos z que verificam cada uma das seguintes condições:

a) $|z - i| = 1$ **Sugestão:** Repare que o afixo vectorial de $z - i$ é o vector com origem em i e extremidade z e interprete, por esse facto, o significado geométrico de $|z - i| = 1$.

b) $|z + i| \leq 1$ **Sugestão:** Repare que $z + i = z - (-i)$

c) $\left|z + \frac{1}{2}\right| = |z - i|$.

d) $|z - 1| = 1 \wedge |z| < |z - 1 + i|$

e) $|z| \leq 1 \vee |z - i| = 1$

f) $|z - i| \leq |z - 1| \leq |z + i|$

9.

Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z + \bar{z} = 0$

(B) $\text{Im}(z) = 1$

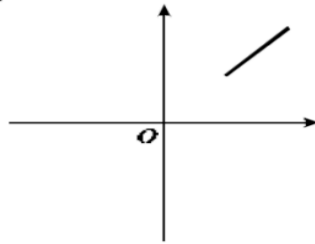
(C) $|z| = 0$

(D) $z - \bar{z} = 0$

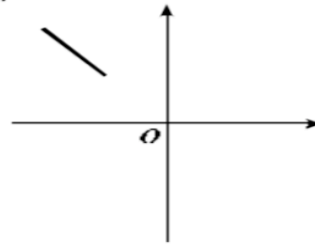
10.

Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-i| \wedge 2 \leq \text{Im}(z) \leq 4\}$?

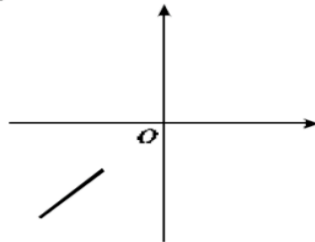
(A)



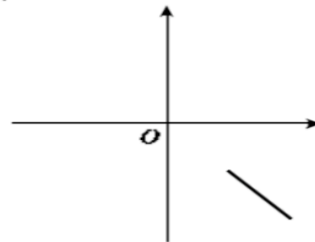
(B)



(C)

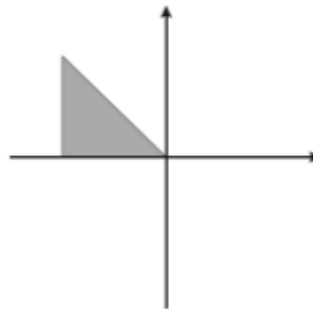


(D)



11.

Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais. Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\text{Re}(z) \geq 0 \wedge \text{Im}(z) \leq 0 \wedge |z| \leq 1$

(B) $\text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge |z| \leq 1$

(C) $\text{Re}(z) \geq -1 \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge |z-i| \geq |z+1|$

(D) $\text{Re}(z) \geq -1 \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge |z-i| \leq |z-1|$

CORRECÇÃO DA PROPOSTA DE TRABALHO - 12º ANO

1. Calcule: $\frac{2+i}{5-3i}$.

Resposta:

Multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo número complexo conjugado do denominador

$$\frac{(2+i) \cdot (5+3i)}{(5-3i) \cdot (5+3i)} = \frac{10+6i+5i+3i^2}{25-9i^2} = \frac{10+11i-3}{25-(-9)} = \frac{7+11i}{34} = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$$

2. Coloca na forma a+bi a expressão $\frac{1-i}{1+i} + \frac{i}{i-2}$.

Resposta:

Em cada expressão multiplicamos os seus termos pelo número complexo conjugado do denominador:

$$\begin{aligned} \frac{(1-i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} + \frac{i \cdot (-2-i)}{(-2+i) \cdot (-2-i)} &= \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} + \frac{-2i-i^2}{4-i^2} = \frac{1-2i-1}{1-(-1)} + \frac{-2i-(-1)}{4-(-1)} = \\ &= \frac{-2i}{2} + \frac{1-2i}{5} = -i + \frac{1-2i}{5} = \frac{-5i+1-2i}{5} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \end{aligned}$$

3) Calcule:

a) i^{92}

Resposta:

$$\begin{array}{r|l} 92 & 4 \\ \hline 92 & 23 \\ 0 & \end{array} \rightarrow i^0 = 1$$

b) i^{45}

Resposta:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 4 \\ \hline 44 & 11 \end{array} \rightarrow i^1 = i$$

$$\frac{44}{1}$$

c) i^{310}

Resposta:

$$\begin{array}{r|l} 310 & 4 \\ \hline 308 & 77 \end{array} \rightarrow i^2 = -1$$

$$\frac{308}{2}$$

d) i^{1081}

Resposta:

$$\begin{array}{r|l} 1081 & 4 \\ \hline 1080 & 270 \end{array} \rightarrow i^1 = i$$

$$\frac{1080}{1}$$

e) i^{4n}

Resposta:

$$i^{4n} = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

f) i^{4n+2}

Resposta:

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

4. Calcule o módulo do seguinte número complexo: $\frac{(4-3i)(12-5i)}{\sqrt{2}i}$.

Resposta:

Primeiramente colocamos o número na forma a+bi

$$\begin{aligned} \frac{(4-3i)(12-5i)}{(\sqrt{2}i)} \cdot \frac{(-\sqrt{2}i)}{(-\sqrt{2}i)} &= \frac{(48-20i-36i+15i^2) \cdot (-\sqrt{2}i)}{-2i^2} = \frac{(33-56i) \cdot (-\sqrt{2}i)}{-2(-1)} = \\ &= \frac{-33\sqrt{2}i - 56\sqrt{2}}{2} = -28\sqrt{2} - \frac{33\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Calculemos agora o módulo desse número:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-28\sqrt{2})^2 + \left(-\frac{33\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1568 + \frac{2178}{4}} = \sqrt{\frac{8450}{4}} = \sqrt{\frac{4225}{2}} = \frac{65}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{65\sqrt{2}}{2} \rightarrow |z| = \frac{65\sqrt{2}}{2}$$

5. Calcule o número do seguinte número complexo: $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Resposta:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{a}{|z|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{sen}(\theta) &= \frac{b}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

6. Passe o número complexo $z = 8i$ para a forma trigonométrica

Resposta:

$$|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{a}{|z|} = \frac{0}{8} = 0 \\ \text{sen}(\theta) &= \frac{b}{|z|} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\pi}{2}$$

Passando para a forma trigonométrica :

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta))$$

$$z = 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

7. Dados $z_1 = 5(\cos(\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi))$ e $z_2 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$ obtenha $z_1 \cdot z_2$.

Resposta:

$$|z_1| = \sqrt{(5 \cos(\pi))^2 + (5 \operatorname{sen}(\pi))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\theta_1) = \frac{a}{|z_1|} = \frac{-5}{5} = -1 \\ \operatorname{sen}(\theta_1) = \frac{b}{|z_1|} = \frac{0}{5} = 0 \end{array} \right\} \theta_1 = \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\theta_2) = \frac{a}{|z_2|} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta_2) = \frac{b}{|z_2|} = \frac{3\sqrt{3}/2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 3 \cdot \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

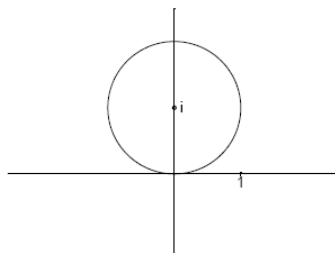
$$z_1 \cdot z_2 = 15 \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

8. Determine no plano de Argand os conjuntos dos afijos dos números complexos z que verificam cada uma das seguintes condições:

a) $|z - i| = 1$ **Sugestão:** Repare que o afixo vectorial de $z - i$ é o vector com origem em i e extremidade z e interprete, por esse facto, o significado geométrico de $|z - i| = 1$.

Resposta:

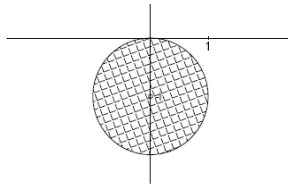
Uma vez que $|z - i| = 1$ é a distância entre os afijos de z e de i , o conjunto pedido é



b) $|z + i| \leq 1$ **Sugestão:** Repare que $z + i = z - (-i)$

Resposta:

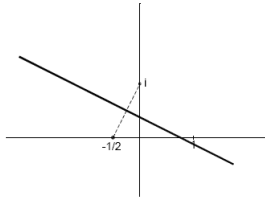
A condição é que a distância do afixo de z ao afixo de $-i$ deve ser menor ou igual a 1. Obtemos assim o conjunto:



c) $\left|z + \frac{1}{2}\right| = |z - i|.$

Resposta:

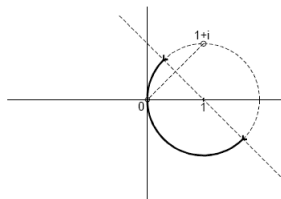
Procuramos os pontos do plano que estão à mesma distância dos afijos de $-\frac{1}{2}$ e de i , portanto os pontos da perpendicular ao meio do segmento determinado por estes pontos:



d) $|z - 1| = 1 \wedge |z| < |z - 1 + i|$

Resposta:

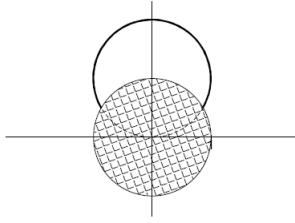
Temos aqui a intersecção da circunferência de centro no afixo do ponto 1 e raio 1 com um dos semi-planos abertos determinados pela recta dos pontos equidistantes dos afijos dos complexos 0 e $1 + i$



e) $|z| \leq 1 \vee |z - i| = 1$

Resposta:

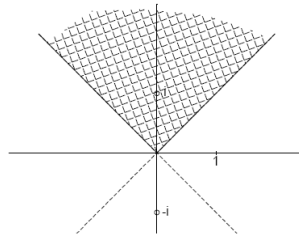
Temos aqui a união do círculo de centro na origem e raio 1 com a circunferência de centro no afixo de i e raio 1:



f) $|z - i| \leq |z - 1| \leq |z + i|$

Resposta:

Temos aqui a intersecção de dois semi-planos fechados, um limitado pela recta dos pontos equidistantes dos afixos de i e de 1 e outro limitado pela recta dos pontos equidistantes dos afixos de $-i$ e 1 :



9. R: A

10. R: B

11. R: C

Teste de Matemática A

12ºano de escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos

Turma: A

Na folha de respostas indique claramente a versão da prova,
A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO
I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II

O Grupo I inclui oito itens de escolha
múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta de
construção, subdivididos em alíneas.

Grupo I

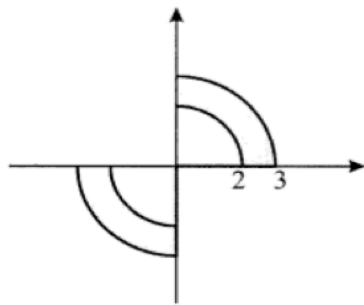
- As oito questões do primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$. Qual poderá ser um argumento simétrico de z ?

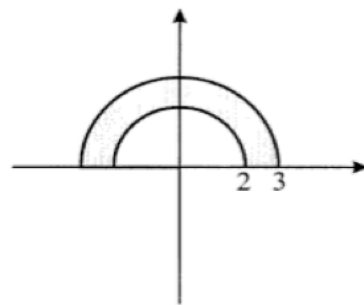
- (A) $-\frac{\pi}{5}$ (B) $\pi + \frac{\pi}{5}$ (C) $\pi - \frac{\pi}{5}$ (D) $2\pi + \frac{\pi}{5}$

2. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicado a sombreado) contém as imagens geométricas das raízes quadradas de $3 + 4i$?

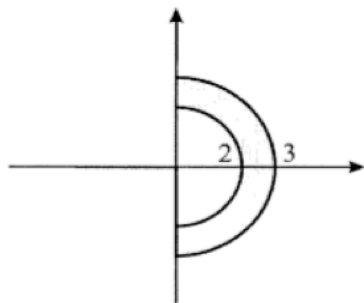
(A)



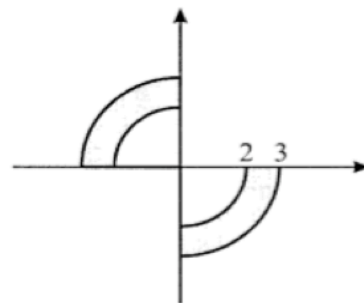
(B)



(C)



(D)



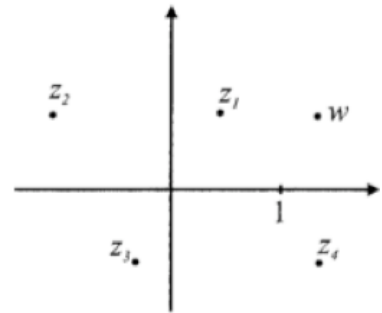
3. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?
- (A) $z - \bar{z} = 0$ (B) $\text{Im}(z) = 1$ (C) $|z| = 0$ (D) $z + \bar{z} = 0$

4. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

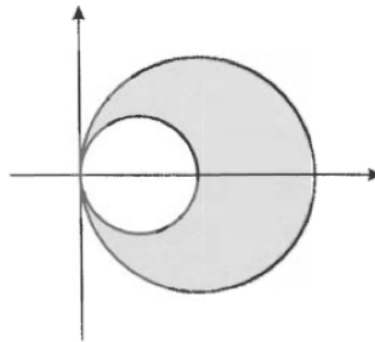
w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?

- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4



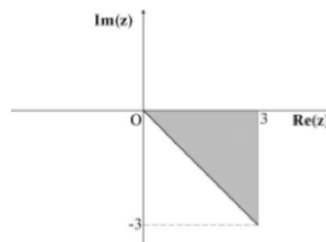
5. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

- (A) $|z - 1| \geq 1 \wedge |z - 2| \leq 2$ (B) $|z - 1| \geq 2 \wedge |z - 2| \leq 1$
 (C) $|z - 1| \leq 1 \wedge |z - 2| \geq 2$ (D) $|z - 1| \leq 2 \wedge |z - 2| \geq 1$

6. Considere a seguinte figura, representada no plano complexo.



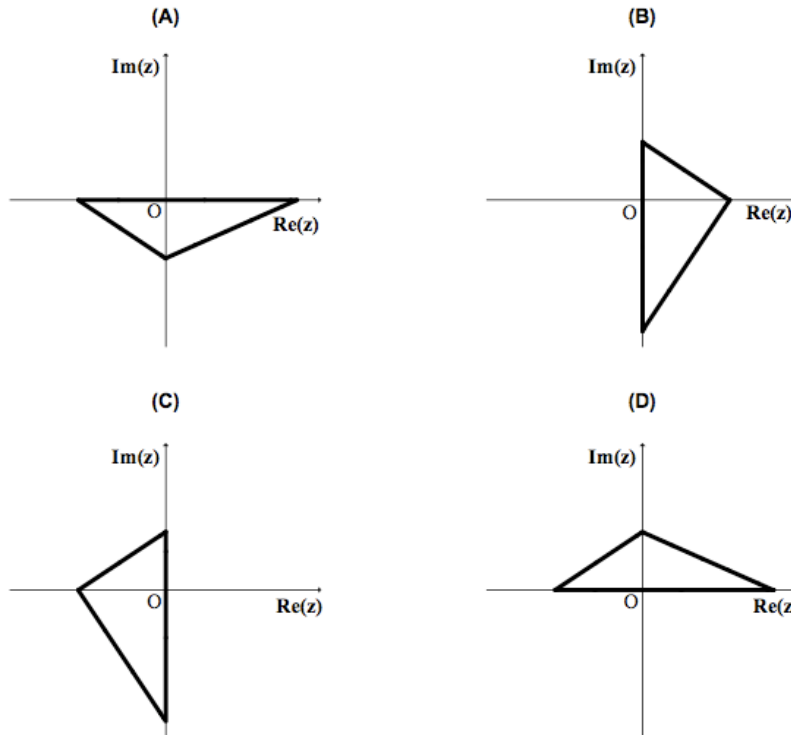
Qual é a condição, no conjunto dos números complexos, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

- (A) $\text{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ (B) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$
 (C) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$ (D) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

7.

Seja b um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo.

Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1 , $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?



8. Na figura 3, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas $(2, -1)$.

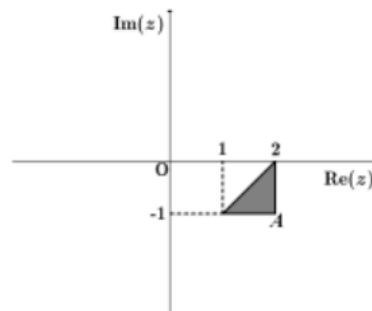


Fig. 3

Qual das condições seguintes define no conjunto dos números complexos, a região sombreada incluindo a fronteira?

- (A) $|z - 1| \geq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (B) $|z - 1| \leq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (C) $|z + 1| \geq |z - (2 + i)| \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$
- (D) $|z - 1| \geq |z - (2 - i)| \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq -1$

Grupo II

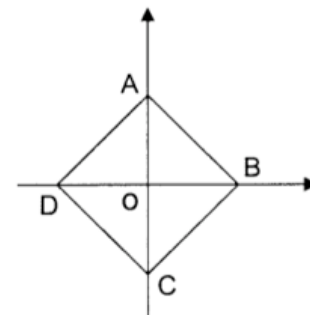
Nas questões do segundo grupo, apresente o raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre um valor exacto.

1. Considere, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real.

Estes quatro pontos encontram-se à distância de uma unidade de origem do referencial.



1.1 Sejam $w = 1 - i$ e $z = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$, sem recorrer à calculadora, mostre que as

raízes quartas do complexo $\frac{w^2}{z}$ têm por imagens geométricas os pontos A , B , C e D .

1.2 Defina, por meio de uma condição no conjunto dos números complexos, a circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$.

2. No conjunto dos números complexos, considere $w = 2 + i$

2.1 Determine $(w - 2)^{11}(1 + 3i)^2$ na forma algébrica.

2.2 Averigüe se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$.

3. Considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$.

3.1 Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo. Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

3.2 Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:

- A é a imagem geométrica de z_1
- B é a imagem geométrica de z_2
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

- um número inteiro;
- um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma alternativa incorrecta;
- mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

Nível Descritor:

3 - Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.

2 - Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.

1 - Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

De seguida, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não está prevista no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeita as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é classificada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido: - se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação; - se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto: - se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; - nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a etapas como a passos, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 6. (10 × 8 pontos) 80 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	A	D	C	A	D	C	A

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1.120

$$\frac{(1-i)^2}{2cis\frac{3\pi}{2}} = 1 \dots\dots\dots 10$$

- $\frac{(1-i)^2}{2cis\frac{3\pi}{2}} = \frac{1-2i+i^2}{2cis\frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 2$

- $\frac{-2i}{2cis\frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 2$

- $\frac{-2i}{-2i} \dots\dots\dots 3$

- 1.....2

2 Conclusão1

$$\sqrt[4]{cis0} = cis\frac{2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3 \dots\dots\dots 4$$

As raízes quartas de 1 são 1, i, -1, -i4

Identificação de 1, i, -1, -i com os vértices do quadrado [ABCD].....4

1.220

Determinar raio da circunferência (ver nota).....10

Escrever a condição $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 10

Nota:

Indicam-se a seguir um dos processos possíveis para obter o raio da circunferencia, com os respectivos desdobramentos dos 10 pontos:

Lado do quadrado = $\sqrt{2}$ 6

Raio da circunferencia = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4

2.120

$$(w - 2)^{11}(1 + 3i)^2 = -i(-8 + 6i) \dots\dots\dots 16(8+8)$$

$$= 6 + 8i \dots\dots\dots 4$$

2.2.20

Este item pode ser resolvido por vários processos. Um proposta é:

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -1 + i \dots\dots\dots 8$$

$$(-1 + i)(2 + i) = -3 + i \dots\dots\dots 9$$

conclusão3

3.120

Este item pode ser resolvido por vários processos. Um proposta é:

$$|z_1| = \sqrt{2} \dots\dots\dots 3$$

Determinar um argumento de z_1 3

$$z_1^4 = 4 \operatorname{cis} \pi \dots\dots\dots 4$$

$$z_2^4 = 4 \operatorname{cis}(3\pi) \dots\dots\dots 4$$

$$4 \operatorname{cis} \pi = 4 \operatorname{cis}(3\pi) = -4 \dots\dots\dots 6(4+2)$$

3.220

Indicar os comprimentos dos lados do triângulo16(8x8)

$$\text{Perímetro do triângulo} = 2 + 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 4$$