



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Construindo os conceitos de Continuidade e de Limite - Uma experiência de ensino com estudantes do ensino superior politécnico

Ana Isabel Valongo dos Santos

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Didática da Matemática
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

Covilhã, agosto de 2018

Dedicatória

À Mariana e ao Diogo.

Agradecimentos

Na realização deste trabalho o Ilustre Professor Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva ofereceu contributos e estímulos positivos essenciais à sua execução, além de ter disponibilizado de forma generosa a sua agenda no decurso da investigação, merecendo ainda registo o seu incansável suporte na discussão de ideias.

Expresso-lhe os meus os meus especiais agradecimentos por tão preciosa orientação.

Ao colega Professor Doutor Miguel Martins Felgueiras, por ter acordado em disponibilizar as suas aulas para a recolha de dados, sem os quais este trabalho não teria sido possível. Foi igualmente indispensável o seu contributo na discussão de ideias e na elaboração das tarefas que serviram de guia a este estudo, encorajando-me sempre no seu prosseguimento. Pela amizade demonstrada, por tudo, muito obrigada!

À Mariana e ao Diogo, a quem nem sempre foi fácil aceitar o tempo empregue nesta empreitada.

À minha mãe, por todas as palavras de encorajamento e pela confiança nas minhas capacidades, em diversas ocasiões muito superior à minha.

Resumo

A Matemática é unanimemente reconhecida como uma das mais importantes ciências de base, atendendo à sua aplicação de forma transversal em quase todas as outras áreas do conhecimento. Por seu turno, a Didática é uma área do conhecimento científico que se desenvolveu na última metade do século XX, com o objetivo de estudar as diferentes etapas do processo de construção de conhecimento. Assim, a investigação em Didática da Matemática emerge como de capital relevo, especialmente a que está direcionada para as diversas etapas da construção de conceitos matemáticos. Conceitos mal compreendidos levam a que, mais tarde, os seus utilizadores revelem dificuldades de adaptação a novos conceitos e realidades, muitas vezes noutras ciências que utilizam a Matemática como pedra basilar.

No caso concreto deste estudo, procurámos compreender como é que os alunos do primeiro ano de uma licenciatura com uma unidade curricular de Métodos Quantitativos no plano de curso constroem os conceitos de continuidade e de limite. Assim, pretendemos responder às seguintes questões de investigação: que ações epistémicas são possíveis identificar no decurso do processo de abstração dos alunos durante a construção dos conceitos de continuidade e de limite; e como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?

Com esse objetivo, começámos por trabalhar em aula a noção de continuidade e só posteriormente a de limite. Esta é uma sequência de ensino pouco habitual mas justificável, quer historicamente, quer atendendo a que não existe uma estrutura hierárquica entre estes conceitos. Mais ainda, os alunos revelam habitualmente mais dificuldade em compreender a noção de limite, pelo que definir continuidade à custa de limite representa um problema acrescido. Note-se que a investigadora não era a professora da turma, tendo assumido um papel de observadora ativa.

Adotámos a teoria *AiC* (Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus, 2001) e o conseqüente modelo teórico e metodológico *RBC+Co* (*Recognizing - Ação-R; Building-with - Ação-B; Constructing - Ação-C; Consolidation - Consolidação*). As ações epistémicas, ao serem ações do pensamento, tornam-se visíveis através de ações externas produzidas pelos alunos permitindo, assim, estudar o desenvolvimento do processo de abstração e a construção do novo conhecimento matemático.

Neste estudo considerámos subcategorias das ações epistémicas, de acordo quer com o que se entende ser cada ação epistémica, quer com o contexto, nomeadamente o matemático. Com as subcategorias pretendemos facilitar a identificação dessas ações epistémicas.

Usámos uma metodologia de investigação qualitativa, inserida no paradigma interpretativo. A recolha dos dados foi efetuada no ano letivo de 2014/2015.

Ao nível da implementação do estudo, este foi realizado ao longo das aulas. Os alunos procuraram responder a questões de dificuldade crescente sobre estas temáticas, sendo o seu progresso registado, quer através da recolha de produções escritas em papel, quer através do registo áudio e vídeo das aulas. Na análise dos dados recorreremos ao *software* ATLAS.ti.

As conclusões apresentadas indicam que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram interligadas durante o processo de abstração dos alunos, onde a *Interpretação* do enunciado em conjunto com as *Estruturas adquiridas* por ela despoletadas fazem parte integrante das *Estratégias* formuladas, bem como da *Aplicação de construções prévias*. A combinação de todas estas subcategorias identificadas, quer na *Ação-R*, quer na *Ação-B*, é essencial na construção dos conceitos de continuidade e de limite posteriormente alcançados pelos alunos. Concluímos ainda que a *Ação-C* se manifestou após o desenvolvimento simultâneo da *Ação-R* e da *Ação-B*, estando essa situação relacionada com a *Interpretação* dos enunciados e com as *Estruturas adquiridas* anteriormente, as quais permitiram que os alunos fossem formulando *Estratégias* e *Aplicando construções prévias* de modo a obterem *Soluções intermédias*.

A *Consolidação* só se manifestou em algumas situações, mormente quando os alunos reconheceram similaridades entre a questão que se propunham trabalhar e questões previamente resolvidas, e quando consideraram que construções anteriores lhes poderiam ser úteis para alcançar a nova construção.

A noção de *Vizinhança* assumiu-se como um bom contexto para a aprendizagem dos conceitos de continuidade e de limite. Foi um poderoso fio condutor da continuidade para os limites, facilitando claramente a construção dos conceitos lecionados. A alteração da sequência de ensino apresentou-se como prometedora.

Finalmente, foram elencadas algumas recomendações, das quais destacamos a necessidade de estudar o papel do professor com o intuito de promover nos alunos a construção de novos conhecimentos matemáticos e o reflexo desta abordagem de construção dos conceitos de continuidade e de limite na construção posterior das noções de derivada e de integral.

Palavras-chave

Abstração, Modelo *RBC+Co*, *Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C*, *Consolidação*, *Vizinhança*, Limite, Continuidade.

Abstract

Mathematics is unanimously recognized as one of the most important basic sciences, given its transversal application in almost all other areas of knowledge. Didactics, in turn, is an area of scientific knowledge that has developed in the last half of the 20th century, with the objective of studying the different stages of the knowledge construction process. Thus, the investigation in Mathematics Didactics emerges as of capital importance, especially the one that is directed to the several stages of the construction of mathematical concepts. Misunderstood concepts lead to later difficulties for users when adapting to new concepts and realities, often in other sciences that use Mathematics as a cornerstone.

In the specific case of this study, we tried to understand how the first-year students of a degree with a curricular unit of Quantitative Methods in the course plan construct the concepts of continuity and limit. Thus, the research sought to answer the following research questions: what epistemic actions are possible to identify in the students' process of abstraction during the construction of concepts of continuity and limit; and how are these epistemic actions sequenced and related?

To this end, we began by working on the concept of continuity and only later on the limit. This is an unusual but justifiable teaching sequence, both historically and because there is no hierarchical structure among these concepts. Moreover, students usually find it more difficult to understand the notion of limit, so defining continuity at the expense of limit represents an added problem. The researcher was not the classroom teacher but took an active role as an observer.

We adopted the *AiC* theory (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus, 2001) and the consequent theoretical and methodological model *RBC+Co* (*Recognizing - R-Action; Building-with - B-Action; Constructing - C-Action; Consolidation*). The epistemic actions, being actions of the thought, are visible through external actions produced by the students, allowing to study the development of the abstraction process and the construction of new mathematical knowledge.

In this study we considered subcategories of the epistemic actions, according to the meaning of each epistemic action, or with the context, namely the mathematician one. With the subcategories it was intended to facilitate the identification of these epistemic actions.

We used a qualitative research methodology, inserted in the interpretative paradigm. The data was obtained in the scholar year of 2014/2015.

The study was implemented throughout the lessons. The students sought to answer questions of increasing difficulty on these subjects, and their progress was recorded either by collecting

written productions on paper or by recording audio and video from lessons. The data analysis was carried out with the *software* ATLAS.ti.

The main conclusions indicate that the *R-Action* and the *B-Action* are interconnected during the students' abstraction process. The *Interpretation* of the statement together with the *Acquired structures* by it are an important part of the *Strategies* formulated as well as the *Application of previous constructions*. The combination of all these subcategories identified in both the *R-Action* and the *B-Action* is essential when building the concepts of continuity and limit, subsequently achieved by students. We concluded that the *C-Action* was manifested after the simultaneous development of *R-Action* and *B-Action*, which is related to the *Interpretation* of statements and to the previously *Acquired structures*. Previous relations allowed students to formulate *Strategies* and to *Apply previous constructions* in order to obtain *Intermediate solutions*.

Consolidation was only manifested in some situations, especially when students recognized similarities between the question that they intended to work on and those previously resolved, and when they considered that previous constructions might be useful to achieve the new construction.

The notion of *Neighborhood* assumed a suitable context for learning the concepts of continuity and limit. It was a powerful conduit from continuity to limit, making it easier to construct these concepts. The teaching sequence inversion was considered as encouraging.

Finally, some recommendations were made, highlighting the need to study the teacher's role in order to promote students' constructions of new mathematical knowledge. Furthermore, we suggested to study how this approach to the construction of the concepts of continuity and limit can be reflected in the subsequent construction of derivative and integral notions.

Keywords

Abstraction, *RBC+Co* model, *Action-R*, *Action-B*, *Action-C*, *Consolidation*, *Neighborhood*, *Limit*, *Continuity*.

Índice

Dedicatória.....	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract.....	ix
Lista de Figuras.....	xvii
Lista de Tabelas.....	xxv
Lista de Acrónimos.....	xxvii
Lista de Anexos.....	xxix
Capítulo 1	1
Introdução.....	1
1.1 Modelo <i>RBC+Co</i> e a Construção do Conhecimento	6
1.2 Questões de Investigação	8
1.3 Descrição dos Capítulos	9
Capítulo 2	11
Limites e Continuidade	11
2.1 Noções topológicas.....	11
2.2 Noção de limite.....	13
2.2.1 Algumas formas de definir limite	13
2.2.2 Implicações das diferentes definições de limite	15
2.2.3 A definição de limite no novo programa de Matemática A	18
2.2.4 Síntese	20
2.3 Noção de continuidade	22
2.3.1 Continuidade baseada no conceito de limite	22
2.3.2 Continuidade baseada no conceito de vizinhança	23
2.3.3 Continuidade baseada em infinitésimos	25
2.3.4 A definição de continuidade no novo programa de Matemática A	26
2.3.5 Síntese	26
Capítulo 3	29
A construção do conhecimento matemático	29
3.1 Abstração em Contexto	29
3.1.1 Etapas da <i>AiC</i>	30
3.1.2 Modelo teórico <i>RBC+Co</i>	31
3.2 A Teoria Comognitiva.....	36
3.3 As Regras de Pólya	37
3.4 Argumentação e Prova	38
3.5 Mediação Semiótica.....	40

3.6 Síntese	41
Capítulo 4	43
Metodologia de Investigação.....	43
4.1 Opções metodológicas.....	43
4.2 Caracterização dos alunos e descrição do contexto	46
4.3 Implementação	47
4.4 Recolha, tratamento e análise de dados.....	48
4.4.1 Análise de primeira ordem	49
4.4.2 Análise de segunda ordem	49
4.4.3 Análise de terceira ordem.....	55
4.5 Considerações	56
Capítulo 5	59
Proposta Pedagógica	59
5.1 Caracterizando a Unidade Curricular de Métodos Quantitativos na Administração Pública	59
5.2 Objetivos da Unidade Curricular	60
5.3 Programa da Unidade Curricular	61
5.4 Revisitando as Questões de Investigação	62
5.5 Definindo a Proposta	63
5.6 Questões Propostas sobre Continuidade	64
5.6.1 Questão 1	64
5.6.2 Questão 2	66
5.6.3 Questão 3	66
5.6.4 Questão 4	67
5.6.5 Questão 5	68
5.7 Questões Propostas sobre Limites.....	68
5.7.1 Questão 1	68
5.7.2 Questão 2	69
5.7.3 Questão 3	70
5.7.4 Questão 4	71
5.7.5 Questão 5	71
5.7.6 Questão 6	72
5.7.7 Questão 7	73
5.7.8 Questão 8	73
5.8 Calendarização das Atividades Propostas.....	74
5.9 Síntese	75
Capítulo 6	77
A continuidade e os limites à luz do <i>RBC+Co</i>	77
6.1 Questões sobre continuidade	78
6.1.1 Questão 2	78

6.1.1.1	Ação-R	79
6.1.1.2	Ação-B.....	82
6.1.1.3	Ação-C	84
6.1.1.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	87
6.1.2	Questão 3.....	87
6.1.2.1	Ação-R	88
6.1.2.2	Ação-B.....	91
6.1.2.3	Ação-C	96
6.1.2.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	98
6.1.3	Questão 4.....	99
6.1.3.1	Ação-R	99
6.1.3.2	Ação-B.....	102
6.1.3.3	Ação-C	106
6.1.3.4	Consolidação	109
6.1.3.5	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	110
6.1.4	Questão 5.....	112
6.1.4.1	Ação-R	112
6.1.4.2	Ação-B.....	115
6.1.4.3	Ação-C	118
6.1.4.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	121
6.2	Questões sobre limites	123
6.2.1	Questão 2.....	123
6.2.1.1	Ação-R	124
6.2.1.2	Ação-B.....	130
6.2.1.3	Ação-C	133
6.2.1.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	140
6.2.2	Questão 3.....	141
6.2.2.1	Ação-R	142
6.2.2.2	Ação-B.....	145
6.2.2.3	Ação-C	147
6.2.2.4	Consolidação	149
6.2.2.5	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	150
6.2.3	Questão 4.....	151
6.2.3.1	Ação-R	151
6.2.3.2	Ação-B.....	156
6.2.3.3	Ação-C	161
6.2.3.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	163
6.2.4	Questão 5.....	164
6.2.4.1	Ação-R	165
6.2.4.2	Ação-B.....	169

6.2.4.3	Ação-C	173
6.2.4.4	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	176
6.2.5	Questão 6	177
6.2.5.1	Ação-R	177
6.2.5.2	Ação-B.....	181
6.2.5.3	Ação-C	186
6.2.5.4	Consolidação	187
6.2.5.5	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	189
6.2.6	Questão 7	190
6.2.6.1	Ação-R	191
6.2.6.2	Ação-B.....	193
6.2.6.3	Ação-C	196
6.2.6.4	Consolidação	198
6.2.6.5	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	201
6.2.7	Questão 8	202
6.2.7.1	Ação-R	202
6.2.7.2	Ação-B.....	205
6.2.7.3	Ação-C	209
6.2.7.4	Consolidação	213
6.2.7.5	Relações estabelecidas entre as ações epistémicas.....	215
Capítulo 7	217
As ações epistémicas na construção da continuidade e dos limites	217
7.1	As contribuições das subcategorias no desenvolvimento das ações epistémicas ...	218
7.1.1	A relação estabelecida entre as subcategorias da Ação-R.....	218
7.1.1.1	Interpretar e Estrutura adquirida.....	218
7.1.1.2	Interpretar, Estrutura adquirida e Vizinhança	220
7.1.1.3	Interpretar, Estrutura adquirida e Aproximação	221
7.1.1.4	Interpretar, Estrutura adquirida, Vizinhança e Aproximação....	222
7.1.2	A relação estabelecida entre as subcategorias da Ação-B	223
7.1.2.1	Estratégias e Aplicação de construção prévia	224
7.1.2.2	Aplicação de construção prévia, Soluções intermédias e Justificação	225
7.1.2.3	Estratégias, Aplicação de construção prévia, Soluções intermédias e Justificação.....	226
7.1.3	A relação estabelecida entre as subcategorias da Ação-C.....	227
7.1.3.1	Reorganização e as construções associadas às questões sobre a noção de continuidade	228
7.1.3.2	Reorganização e as construções associadas às questões sobre o conceito de limite	229

7.1.3.3 Todas as construções de continuidade e de limite e <i>Comunicação</i>	233
7.2 O papel das ações epistémicas na construção dos conceitos de continuidade e de limite	234
7.2.1 <i>Ação-R</i> e <i>Ação-B</i>	234
7.2.2 <i>Ação-R</i> , <i>Ação-B</i> e <i>Ação-C</i>	236
7.2.3 <i>Ação-R</i> , <i>Ação-B</i> e <i>Consolidação</i>	237
Capítulo 8	241
Conclusões	241
8.1 Síntese	242
8.2 Apresentação das conclusões	243
8.2.1 As ações epistémicas identificadas no decurso do processo de abstração dos alunos durante a construção dos conceitos de continuidade e de limite	243
8.2.1.1 O desenvolvimento da <i>Ação-R</i> durante o processo de abstração	243
8.2.1.2 O desenvolvimento da <i>Ação-B</i> durante o processo de abstração	244
8.2.1.3 O desenvolvimento da <i>Ação-C</i> durante o processo de abstração	245
8.2.1.4 O desenvolvimento da <i>Consolidação</i> durante o processo de abstração	246
8.2.2 Como se sequenciam e relacionam as ações epistémicas	246
8.2.2.1 A relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> e a <i>Ação-B</i>	247
8.2.2.2 A relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Ação-C</i>	247
8.2.2.3 A relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Consolidação</i>	247
8.3 Recomendações	248
Referências Bibliográficas	249
Anexos	255

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Exemplo de pontos de interesse no estudo da continuidade	5
Figura 1.2 - Representação gráfica de uma vizinhança de um ponto	6
Figura 2.1 - Limites em pontos de descontinuidade e em pontos isolados	17
Figura 4.1 - Exemplo de um excerto das transcrições.....	49
Figura 4.2 - Exemplo da análise de dados no <i>software</i> ATLAS.ti.....	52
Figura 4.3 - Exemplo da criação de famílias no <i>software</i> ATLAS.ti	53
Figura 4.4 - Exemplo do gráfico inicial produzido no <i>software</i> ATLAS.ti	53
Figura 4.5 - Exemplo do gráfico obtido no <i>software</i> ATLAS.ti	54
Figura 4.6 - Exemplo do gráfico obtido no <i>software</i> ATLAS.ti após manipulação	54
Figura 4.7 - Exemplo da relação entre as subcategorias evidenciadas na <i>Ação-R</i>	55
Figura 4.8 - Exemplo da relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Ação-C</i> no processo de construção.....	56
Figura 4.9 - Exemplo de uma função descontínua em $x = a$	57
Figura 4.10 - Exemplo de uma função contínua em $x = a$	57
Figura 5.1 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de continuidade	65
Figura 5.2 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade	66
Figura 5.3 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade	66
Figura 5.4 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade	67
Figura 5.5 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade	68
Figura 5.6 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de limite	68
Figura 5.7 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite	69
Figura 5.8 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite	70
Figura 5.9 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite	71
Figura 5.10 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite	72
Figura 5.11 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite	72
Figura 5.12 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite	73
Figura 5.13 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite	73
Figura 6.1 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade	78
Figura 6.2 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2.....	79
Figura 6.3 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	80
Figura 6.4 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)	80
Figura 6.5 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 2.....	81
Figura 6.6 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	82
Figura 6.7 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a) i.	82
Figura 6.8 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a) ii.....	82
Figura 6.9 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)	83
Figura 6.10 - RA respeitante à resolução da Questão 2 b).....	83
Figura 6.11 - RAV da <i>Ação-B</i> na Questão 2	83
Figura 6.12 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	84
Figura 6.13 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	85
Figura 6.14 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	85
Figura 6.15 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)	85
Figura 6.16 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 2	86
Figura 6.17 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 2 ...	87
Figura 6.18 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade	87
Figura 6.19 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f) .	88
Figura 6.20 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f) .	89
Figura 6.21 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g) .	89
Figura 6.22 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f) .	89
Figura 6.23 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g) .	89
Figura 6.24 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f) .	90
Figura 6.25 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g) .	90
Figura 6.26 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 3	90
Figura 6.27 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f) .	91

Figura 6.28 - RA respeitante à simplificação da expressão analítica da função f na Questão 391	
Figura 6.29 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)	92
Figura 6.30 - RA respeitante ao cálculo de dois pontos da função f na Questão 3	92
Figura 6.31 - RA respeitante à representação gráfica da função f na Questão 3	92
Figura 6.32 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)	93
Figura 6.33 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)	93
Figura 6.34 - RA respeitante ao cálculo da imagem de $x = 1$ para o primeiro ramo da função g da Questão 3	93
Figura 6.35 - RA respeitante à representação gráfica da função g na Questão 3	94
Figura 6.36 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)	94
Figura 6.37 - RAV da Ação-B na Questão 3	95
Figura 6.38 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)	96
Figura 6.39 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)	96
Figura 6.40 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 3	97
Figura 6.41 - RAV da Ação-C na Questão 3	97
Figura 6.42 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 3	98
Figura 6.43 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade	99
Figura 6.44 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	99
Figura 6.45 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	99
Figura 6.46 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	99
Figura 6.47 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	100
Figura 6.48 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	100
Figura 6.49 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 b)	100
Figura 6.50 - RAV da Ação-R na Questão 4	101
Figura 6.51 - RA respeitante aos cálculos para a determinação do domínio na Questão 4 a)	102
Figura 6.52 - RA respeitante à simplificação da expressão analítica da função na Questão 4	102
Figura 6.53 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	102
Figura 6.54 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	103
Figura 6.55 - RA respeitante à representação gráfica da função por DV na Questão 4 a)	103
Figura 6.56 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	103
Figura 6.57 - RA respeitante ao cálculo do valor da função em $x = 4$ por AF na Questão 4 b)	103
Figura 6.58 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)	104
Figura 6.59 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)	104
Figura 6.60 - RA respeitante resolução por DV da Questão 4 b)	104
Figura 6.61 - RAV da Ação-B na Questão 4	105
Figura 6.62 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	106
Figura 6.63 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	107
Figura 6.64 - RA respeitante resolução da Questão 4 a)	107
Figura 6.65 - RA respeitante à apresentação do domínio da função na Questão 4 a)	107
Figura 6.66 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	107
Figura 6.67 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)	108
Figura 6.68 - RAV da Ação-C na Questão 4	108
Figura 6.69 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> na Questão 4	109
Figura 6.70 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 4	111
Figura 6.71 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade	112
Figura 6.72 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	113
Figura 6.73 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	113
Figura 6.74 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	113
Figura 6.75 - RAV da Ação-R na Questão 5	114
Figura 6.76 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	115
Figura 6.77 - RA respeitante à determinação das raízes e do cálculo do vértice na Questão 5	116
Figura 6.78 - RA respeitante à representação gráfica do polinómio do 2º grau na Questão 5	116
Figura 6.79 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	116
Figura 6.80 - RA respeitante à indicação do domínio da função na Questão 5	116
Figura 6.81 - RAV da Ação-B na Questão 5	117
Figura 6.82 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	118
Figura 6.83 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	118
Figura 6.84 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	119

Figura 6.85 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5	119
Figura 6.86 - RAV da Ação-C na Questão 5	120
Figura 6.87 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 5 ..	122
Figura 6.88 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite	124
Figura 6.89 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2	124
Figura 6.90 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a), função g	125
Figura 6.91 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g	125
Figura 6.92 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i	125
Figura 6.93 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k	126
Figura 6.94 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 1$	126
Figura 6.95 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 2$	127
Figura 6.96 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i	127
Figura 6.97 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j	127
Figura 6.98 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k	128
Figura 6.99 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)	128
Figura 6.100 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função l	128
Figura 6.101 - RAV da Ação-R na Questão 2	129
Figura 6.102 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g	130
Figura 6.103 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k	130
Figura 6.104 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i	131
Figura 6.105 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j	131
Figura 6.106 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)	131
Figura 6.107 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a), função g	131
Figura 6.108 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g	131
Figura 6.109 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l	131
Figura 6.110 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i	132
Figura 6.111 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j	132
Figura 6.112 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k	132
Figura 6.113 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)	132
Figura 6.114 - RAV da Ação-B na Questão 2	132
Figura 6.115 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a)	133
Figura 6.116 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)	134
Figura 6.117 - RA respeitante à resolução da Questão 2 b)	134
Figura 6.118 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g	134
Figura 6.119 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i	134

Figura 6. 120 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i	135
Figura 6.121 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k	135
Figura 6.122 - RA respeitante à resolução da Questão 2 c)	136
Figura 6.123 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 1$	136
Figura 6.124 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 2$	136
Figura 6.125 - RA respeitante à resolução da Questão 2 d), funções i e j	136
Figura 6.126 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i	136
Figura 6.127 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j	137
Figura 6.128 - RA respeitante à resolução da Questão 2 d), funções k e l	137
Figura 6.129 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k	137
Figura 6.130 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)	138
Figura 6.131 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k	138
Figura 6.132 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função l	138
Figura 6.133 - RAV da Ação-C na Questão 2	139
Figura 6.134 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 2	141
Figura 6.135 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite	141
Figura 6.136 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3	142
Figura 6.137 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3	143
Figura 6.138 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3, função g	143
Figura 6.139 - RAV da Ação-R na Questão 3	144
Figura 6.140 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 3	145
Figura 6.141 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3	145
Figura 6.142 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3	146
Figura 6.143 - RAV da Ação-B na Questão 3	146
Figura 6.144 - RA respeitante à resolução da Questão 3	147
Figura 6.145 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3	148
Figura 6.146 - RAV da Ação-C na Questão 3	148
Figura 6.147 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> na Questão 3	149
Figura 6.148 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 3	150
Figura 6.149 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite	151
Figura 6.150 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	151
Figura 6.151 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	152
Figura 6.152 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	153
Figura 6.153 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	153
Figura 6.154 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	154
Figura 6.155 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	154
Figura 6.156 - RAV da Ação-R na Questão 4	154
Figura 6.157 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	156
Figura 6.158 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4	158
Figura 6.159 - RAV da Ação-B na Questão 4	159
Figura 6.160 - RA respeitante à resolução da Questão 4 a)	161
Figura 6.161 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)	161
Figura 6.162 - RA respeitante à resolução da Questão 4 b)	162
Figura 6.163 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 b)	162
Figura 6.164 - RAV da Ação-C na Questão 4	163
Figura 6.165 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 4	164
Figura 6.166 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite	165
Figura 6.167 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)	165
Figura 6.168 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)	166
Figura 6.169 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)	166

Figura 6.170 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)	166
Figura 6.171 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)	166
Figura 6.172 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)	166
Figura 6.173 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra.....	167
Figura 6.174 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra.....	167
Figura 6.175 - RAV da Ação-R na Questão 5.....	168
Figura 6.176 - RA respeitante à resolução da Questão 5 a)	169
Figura 6.177 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)	170
Figura 6.178 - RA respeitante à resolução da Questão 5 b)	170
Figura 6.179 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)	170
Figura 6.180 - RA respeitante à resolução da Questão 5 c)	170
Figura 6.181 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)	170
Figura 6.182 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra.....	171
Figura 6.183 - RAV da Ação-B na Questão 5.....	172
Figura 6.184 - RA respeitante à resolução da Questão 5 a)	173
Figura 6.185 - RA respeitante à resolução da Questão 5 b)	174
Figura 6.186 - RA respeitante à resolução da Questão 5 c)	174
Figura 6.187 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)	174
Figura 6.188 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)	174
Figura 6.189 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)	175
Figura 6.190 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra.....	175
Figura 6.191 - RAV da Ação-C na Questão 5.....	175
Figura 6.192 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 5.....	176
Figura 6.193 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite	177
Figura 6.194 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	178
Figura 6.195 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 6.....	178
Figura 6.196 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	178
Figura 6.197 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	178
Figura 6.198 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	179
Figura 6.199 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	179
Figura 6.200 - RAV da Ação-R na Questão 6.....	180
Figura 6.201 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	181
Figura 6.202 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 6	181
Figura 6.203 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	182
Figura 6.204 - RA respeitante à resolução da Questão 6	182
Figura 6.205 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	182
Figura 6.206 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	183
Figura 6.207 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	183
Figura 6.208 - RAV da Ação-B na Questão 6.....	184
Figura 6.209 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	186
Figura 6.210 - RAV da Ação-C na Questão 6.....	186
Figura 6.211 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6.....	187
Figura 6.212 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução por DV da Questão 6....	187
Figura 6.213 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 6	188
Figura 6.214 - RA da ação epistémica <i>Consolidação</i> na Questão 6	188
Figura 6.215 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 6.....	189
Figura 6.216 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite	190
Figura 6.217 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	191
Figura 6.218 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7.....	191
Figura 6.219 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	191
Figura 6.220 - RAV da Ação-R na Questão 7.....	192
Figura 6.221 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)	193
Figura 6.222 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	193
Figura 6.223 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)	193
Figura 6.224 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	193
Figura 6.225 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7.....	194
Figura 6.226 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	194
Figura 6.227 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 7 b)	194
Figura 6.228 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	194
Figura 6.229 - RAV da Ação-B na Questão 7.....	195

Figura 6.230 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)	196
Figura 6.231 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	196
Figura 6.232 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	196
Figura 6.233 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	196
Figura 6.234 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 7 b)	196
Figura 6.235 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	196
Figura 6.236 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 7 a)	197
Figura 6.237 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	197
Figura 6.238 - RA respeitante à resolução da Questão 7 b)	197
Figura 6.239 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	197
Figura 6.240 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 7	198
Figura 6.241 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)	199
Figura 6.242 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)	199
Figura 6.243 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> na Questão 7	200
Figura 6.244 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 7	201
Figura 6.245 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite	202
Figura 6.246 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	202
Figura 6.247 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	203
Figura 6.248 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	203
Figura 6.249 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	203
Figura 6.250 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	203
Figura 6.251 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 8	204
Figura 6.252 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	205
Figura 6.253 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	205
Figura 6.254 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	206
Figura 6.255 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra	206
Figura 6.256 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra	206
Figura 6.257 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	207
Figura 6.258 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra	207
Figura 6.259 - RAV da <i>Ação-B</i> na Questão 8	208
Figura 6.260 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra	209
Figura 6.261 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra	210
Figura 6.262 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	210
Figura 6.263 - RA respeitante à resolução da Questão 8	211
Figura 6.264 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	211
Figura 6.265 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 8	212
Figura 6.266 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8	214
Figura 6.267 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> na Questão 8	214
Figura 6.268 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 8	215
Figura 7.1 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Interpretar</i> e <i>Estrutura adquirida</i> da <i>Ação-R</i>	220
Figura 7.2 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Interpretar</i> , <i>Estrutura adquirida</i> e <i>Vizinhança</i> da <i>Ação-R</i>	221
Figura 7.3 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Interpretar</i> , <i>Estrutura adquirida</i> e <i>Aproximação</i> da <i>Ação-R</i>	221
Figura 7.4 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Interpretar</i> , <i>Estrutura adquirida</i> , <i>Vizinhança</i> e <i>Aproximação</i> da <i>Ação-R</i>	222
Figura 7.5 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-R</i>	223
Figura 7.6 - Relação estabelecidas entre as subcategorias <i>Estratégias</i> e <i>Aplicação de construção prévia</i> da <i>Ação-B</i>	224
Figura 7.7 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Aplicação de construção prévia</i> , <i>Soluções intermédias</i> e <i>Justificação</i> da <i>Ação-B</i>	225
Figura 7.8 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Aplicação de construção prévia</i> , <i>Soluções intermédias</i> e <i>Justificação</i> da <i>Ação-B</i>	226
Figura 7.9 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Estratégias</i> , <i>Aplicação de construção prévia</i> , <i>Soluções intermédias</i> e <i>Justificação</i> da <i>Ação-B</i>	227
Figura 7.10 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-B</i>	227
Figura 7.11 - Relação estabelecida entre as subcategorias da <i>Ação-C</i> nas questões sobre continuidade	229

Figura 7.12 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> , <i>Limite num ponto de descontinuidade</i> , <i>Limite no infinito</i> e <i>Limite num ponto exterior</i> da <i>Ação-C</i>	230
Figura 7.13 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> e <i>Limite num ponto de descontinuidade</i> da <i>Ação-C</i>	230
Figura 7.14 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> , <i>Cálculo de limite por substituição</i> e <i>Cálculo de limite – infinitésimos e infinitamente grandes</i> da <i>Ação-C</i>	231
Figura 7.15 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> e <i>Limite com limites laterais</i> da <i>Ação-C</i>	231
Figura 7.16 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> , <i>Limite com limites laterais</i> e <i>Continuidade num intervalo</i> da <i>Ação-C</i>	232
Figura 7.17 - Relação estabelecida entre as subcategorias <i>Reorganização</i> , <i>Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro</i> (que não pertence ao domínio) e <i>Continuidade baseada em limite num ponto do domínio</i> da <i>Ação-C</i>	232
Figura 7.18 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-C</i>	233
Figura 7.19 - <i>Ação-R</i> e <i>Ação-B</i> no processo de <i>construção</i> do novo conhecimento matemático	234
Figura 7.20 - <i>Ação-R</i> e <i>Ação-B</i> no processo de <i>construção</i> do novo conhecimento matemático	235
Figura 7.21 - <i>Ação-R</i> e <i>Ação-B</i> no processo de <i>construção</i> do novo conhecimento matemático	235
Figura 7.22 - Relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> e a <i>Ação-B</i> no processo de <i>construção</i> ..	236
Figura 7.23 - Relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Ação-C</i> no processo de <i>construção</i>	237
Figura 7.24 - Relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Consolidação</i>	238
Figura 7.25 - Relação estabelecida entre a <i>Ação-R</i> , a <i>Ação-B</i> e a <i>Consolidação</i> no processo de <i>construção</i>	239

Lista de Tabelas

Tabela 1.1 – Datas de implementação das novas metas curriculares (M – Matemática e Mat A – Matemática A)	3
Tabela 4.1 - Descritores das subcategorias relativas ao modelo <i>RBC+Co</i>	50
Tabela 5.1 - Áreas científicas do curso	60
Tabela 5.2 - Distribuição das classificações por unidade curricular (1.º ano)	60

Lista de Acrónimos

A	Alunos
AiC	Abstração em Contexto
AP	Administração Pública
APM	Associação de Professores de Matemática
CET	Cursos de Especialização Tecnológica
DGE	Direção-Geral da Educação
IP	Instituto Politécnico
MQAP	Métodos Quantitativos na Administração Pública
P	Professor
RA	Registos dos Alunos
RAV	Registos Audiovisuais
RI	Registos da Investigadora
<i>RBC</i>	Recognizing, Building-with and Constructing
<i>RBC+Co</i>	Recognizing, Building-with, Constructing and Consolidation
SIEM	Seminário de Investigação em Educação Matemática
SPM	Sociedade Portuguesa de Matemática
TeSP	Cursos Técnicos Superiores Profissionais
UBI	Universidade da Beira Interior
UC	Unidade Curricular

Lista de Anexos

Anexo 5.1 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de continuidade.....	255
Anexo 5.2 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade.....	256
Anexo 5.3 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade.....	256
Anexo 5.4 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade.....	256
Anexo 5.5 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade.....	256
Anexo 5.6 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de limite.....	257
Anexo 5.7 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite.....	257
Anexo 5.8 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite.....	257
Anexo 5.9 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite.....	258
Anexo 5.10 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite.....	258
Anexo 5.11 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite.....	258
Anexo 5.12 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite.....	258
Anexo 5.13 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite.....	258
Anexo 6.1 – Ampliação da Figura 6.5 - RAV da Ação-R na Questão 2 sobre Continuidade....	259
Anexo 6.2 – Ampliação da Figura 6.11 - RAV da Ação-B na Questão 2 sobre Continuidade..	260
Anexo 6.3 – Ampliação da Figura 6.16 - RAV da Ação-C na Questão 2 sobre Continuidade..	261
Anexo 6.4 – Ampliação da Figura 6.17 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2 sobre Continuidade.....	262
Anexo 6.5 – Ampliação da Figura 6.26 - RAV da Ação-R na Questão 3 sobre Continuidade..	263
Anexo 6.6 – Ampliação da Figura 6.37 - RAV da Ação-B na Questão 3 sobre Continuidade..	264
Anexo 6.7 – Ampliação da Figura 6.41 - RAV da Ação-C na Questão 3 sobre Continuidade..	265
Anexo 6.8 – Ampliação da Figura 6.42 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 3 sobre Continuidade.....	266
Anexo 6.9 – Ampliação da Figura 6.50 - RAV da Ação-R na Questão 4 sobre Continuidade..	267
Anexo 6.10 – Ampliação da Figura 6.61 - RAV da Ação-B na Questão 4 sobre Continuidade..	268
Anexo 6.11 – Ampliação da Figura 6.68 - RAV da Ação-C na Questão 4 sobre Continuidade..	269
Anexo 6.12 – Ampliação da Figura 6.69 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> na Questão 4 sobre Continuidade.....	270
Anexo 6.13 – Ampliação da Figura 6.70 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 4 sobre Continuidade.....	271
Anexo 6.14 - Ampliação da Figura 6.75 - RAV da Ação-R na Questão 5 sobre Continuidade..	272
Anexo 6.15 - Ampliação da Figura 6.81 - RAV da Ação-B na Questão 5 sobre Continuidade..	273
Anexo 6.16 - Ampliação da Figura 6.86 - RAV da Ação-C na Questão 5 sobre Continuidade..	274
Anexo 6.17 - Ampliação da Figura 6.87 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 5 sobre Continuidade.....	275
Anexo 6.18 - Ampliação da Figura 6.101 - RAV da Ação-R na Questão 2 sobre limites.....	276
Anexo 6.19 - Ampliação da Figura 6.114 - RAV da Ação-B na Questão 2 sobre Limite.....	277
Anexo 6.20 - Ampliação da Figura 6.133 - RAV da Ação-C na Questão 2 sobre Limite.....	278
Anexo 6.21 - Ampliação da Figura 6.134 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2 sobre Limite.....	279
Anexo 6.22 - Ampliação da Figura 6.139 - RAV da Ação-R na Questão 3 sobre Limite.....	280
Anexo 6.23 - Ampliação da Figura 6.143 - RAV da Ação-B na Questão 3 sobre Limite.....	281
Anexo 6.24 - Ampliação da Figura 6.146 - RAV da Ação-C na Questão 3 sobre Limite.....	282
Anexo 6.25 - Ampliação da Figura 6.147 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> na Questão 3 sobre Limite.....	283
Anexo 6.26 - Ampliação da Figura 6.148 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 3 sobre Limite.....	284
Anexo 6.27 - Ampliação da Figura 6.156 - RAV da Ação-R na Questão 4 sobre limites.....	285
Anexo 6.28 - Ampliação da Figura 6.159 - RAV da Ação-B na Questão 4 sobre Limite.....	286
Anexo 6.29 - Ampliação da Figura 6.164 - RAV da Ação-C na Questão 4 sobre Limite.....	287
Anexo 6.30 - Ampliação da Figura 6.165 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 4 sobre Limite.....	288
Anexo 6.31 - Ampliação da Figura 6.175 - RAV da Ação-R na Questão 5 sobre Limite.....	289
Anexo 6.32 - Ampliação da Figura 6.183 - RAV da Ação-B na Questão 5 sobre Limite.....	290

Anexo 6.33 - Ampliação da Figura 6.191 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 5 sobre Limite.....	291
Anexo 6.34 - Ampliação da Figura 6.192 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 5 sobre Limite	292
Anexo 6.35 - Ampliação da Figura 6.200 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 6 sobre Limite.....	293
Anexo 6.36 - Ampliação da Figura 6.208 - RAV da <i>Ação-B</i> na Questão 6 sobre Limite.....	294
Anexo 6.37 - Ampliação da Figura 6.210 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 6 sobre Limite.....	295
Anexo 6.38 - Ampliação da Figura 6.214 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> na Questão 6 sobre Limite	296
Anexo 6.39 - Ampliação da Figura 6.215 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 6 sobre Limite	297
Anexo 6.40 - Ampliação da Figura 6.220 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 7 sobre Limite.....	298
Anexo 6.41 - Ampliação da Figura 6.229 - RAV da <i>Ação-B</i> na Questão 7 sobre Limite.....	299
Anexo 6.42 - Ampliação da Figura 6.240 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 7 sobre Limite.....	300
Anexo 6.43 - Ampliação da Figura 6.243 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> na Questão 7 sobre Limite	301
Anexo 6.44 - Ampliação da	302
Anexo 6.45 - Ampliação da Figura 6.251 - RAV da <i>Ação-R</i> na Questão 8 sobre Limite.....	303
Anexo 6.46 - Ampliação da Figura 6.259 - RAV da <i>Ação-B</i> na Questão 8 sobre Limite	304
Anexo 6.47 - Ampliação da Figura 6.265 - RAV da <i>Ação-C</i> na Questão 8 sobre Limite.....	305
Anexo 6.48 - Ampliação da Figura 6.267 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> na Questão 8 sobre Limite	306
Anexo 6.49 - Ampliação da Figura 6.268 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 8 sobre Limite	307
Anexo 7.1 - Ampliação da Figura 7.5 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-R</i>	308
Anexo 7.2 - Ampliação da Figura 7.10 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-B</i>	309
Anexo 7.3 - Ampliação da Figura 7.18 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da <i>Ação-C</i>	310

Capítulo 1

Introdução

A investigação em Didática da Matemática só floresceu em Portugal no último quarto do século passado, sendo por isso relativamente recente. As disciplinas da área começaram a ser lecionadas em Universidades e Escolas Superiores de Educação após a revolução de abril de 1974, mas só nos anos 80 surgiram estudos de Mestrado em Didática da Matemática e foram constituídos os primeiros grupos de investigação. Atualmente, já existem estudos de Doutoramento em Didática da Matemática, sem que, no entanto, exista um elevado número de investigadores nesta área do conhecimento. Ponte (2008) refere algumas dezenas de investigadores portugueses, entre doutorados e não doutorados. A maioria destes investigadores são igualmente professores (eventualmente com algumas exceções entre os bolsheiros de doutoramento) não existindo a figura do investigador a tempo inteiro (carreira de investigação). É ainda indicado que boa parte destes investigadores começou a sua carreira a lecionar no ensino não superior, o que ajuda a explicar a grande ligação entre investigadores e professores na área da Didática da Matemática em Portugal.

Ao nível da divulgação do conhecimento em Educação Matemática, saliente-se a importância da revista de investigação *Quadrante* e de alguns congressos anuais de investigação, como o Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), promovido pela Associação de Professores de Matemática (APM) e que se realiza desde o ano de 1989, na literacia Matemática.

Por sua vez, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) publica desde 1937 a revista *Portugaliae Mathematica*, indexada em diversos índices da especialidade, e ainda o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* e a *Gazeta de Matemática*. A SPM tem procurado discutir a problemática do ensino e da aprendizagem de Matemática, ora realizando encontros de professores como o Encontro Nacional da SPM, ora promovendo cursos de formação e especialização de professores, ou ainda apoiando e organizando outras atividades, entre as quais se destacam as famosas Olimpíadas Portuguesas de Matemática.

Também a Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação organizou diversos encontros temáticos sobre Educação Matemática (entretanto surgiu uma nova organização autónoma, a Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática), e recentemente têm surgido vários congressos em Ciências da Educação parcialmente dedicados à Educação Matemática, como o de Investigação, Práticas e Contextos em Educação, realizado pelo Instituto Politécnico de Leiria desde 2014.

Existem variadas valências da Didática da Matemática como campo académico, incluindo-se nelas as comunicações em congressos e outras reuniões científicas, a produção de artigos e livros e a publicação de teses académicas, que compõem a investigação propriamente dita. Mas além da produção do material citado, é também importante englobar nas valências os processos de trabalho, como as atividades dos projetos, a inserção institucional, o funcionamento dos grupos de trabalho e a ligação com outros campos da Matemática e de outras ciências.

A investigação portuguesa em Educação Matemática tem assentado em três grandes eixos, seguidamente indicados e sucintamente explicados (Ponte, 2008).

1. **A perspetiva curricular.** Esta é muitas vezes enfatizada, já que as sucessivas reformas dos diferentes planos de estudo, nos diversos ciclos de estudo, foram normalmente alvo de críticas e debate, o que incutiu especial relevo a esta perspetiva. A maioria dos alunos que estão atualmente no ensino superior tiveram metas curriculares, e respetivos programas nelas assentes, que valorizavam, desde o ensino básico, capacidades de resolução de problemas, espírito crítico e autónomo na resolução de tarefas, bem como a contextualização do problema e a aplicação da Matemática. O uso da tecnologia (com o seu expoente máximo na utilização de calculadoras gráficas) e o recurso ao trabalho de grupo fizeram parte (e ainda fazem) da maioria das orientações curriculares dos programas do ensino não superior de Matemática. O Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro, definiu datas de implementação de novas metas curriculares e respetivos programas. Estas encontram-se explanadas na Tabela 1.1. Os novos programas, cuja fase de implementação cobre os anos de realização desta tese, são ambiciosos em todos os ciclos de estudos e têm (como aliás os anteriores programas) sido alvo de fortes críticas, em especial pela miríade de tópicos que se espera cobrir. A título de exemplo, podemos referir a introdução do conceito de fração no 2.º ano ou a multiplicação e divisão de números racionais no 4.º ano. Já ao nível da Matemática A, os programas a implementar (com início no ano letivo 2015/16) foram publicados em janeiro de 2014. Nestes, destaca-se no 10.º ano a lógica matemática, o formalismo das classes de equivalência e a antecipação de temas habitualmente lecionados em anos seguintes. Por conseguinte, introduz-se agora no 12.º ano um capítulo de cálculo integral. Os programas e metas curriculares respeitantes à Matemática A (Bivar, Grosso, Oliveira, Loura, e Timóteo, 2014), bem como os cadernos de apoio relativos a estes, estão disponíveis no site da Direção-Geral da Educação (DGE) em <http://www.dge.mec.pt/matematica-ch-ct>.
2. **O objeto de estudo.** Em relação ao objeto de estudo, vários trabalhos de investigação visam o papel do professor. Este é habitualmente considerado como peça fundamental no processo educativo, devido à autonomia que detém na sala de aula. Assim, procura-se entender os seus conhecimentos profissionais, a sua formação e as suas competências pedagógicas. Outros trabalhos focam-se na aprendizagem dos alunos e na forma como estes constroem o conhecimento. Neste particular procura-se debelar

carências neste processo, estudando a aprendizagem em domínios específicos e historicamente controversos, como a noção de limite ou a Teoria das Probabilidades.

3. **A metodologia de investigação.** Quanto à metodologia de investigação, a tradição portuguesa tem sido influenciada pela escola anglo-saxónica, procurando equilibrar rigor e relevância. É habitualmente qualitativa e interpretativa, utilizando diversos métodos (estudos de caso, estudos colaborativos, experiências de ensino, entre outros).

Tabela 1.1 - Datas de implementação das novas metas curriculares (M - Matemática e Mat A - Matemática A)

Ano letivo de aplicação obrigatória	Anos de escolaridade											
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
2013-2014	M		M		M		M					
2014-2015		M		M		M		M				
2015-2016									M	Mat A		
2016-2017											Mat A	
2017-2018												Mat A

A noção matemática de continuidade é relativamente bem conhecida pela maioria dos alunos, pelo menos quanto ao seu significado intuitivo, desde o ensino secundário. Por exemplo, o desabrochar de uma flor é um fenómeno contínuo (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles, 1997), bem como o crescimento de uma criança. Por outro lado, a passagem de um fluido do estado líquido para o estado gasoso configura um ponto de descontinuidade, bem como a morte de um determinado ser vivo.

Muitas vezes as noções intuitivas de limite e de continuidade de uma função num ponto parecem razoavelmente apreendidas por parte dos alunos, do ponto de vista conceptual. Porém, ao nível das definições, são detetadas bastantes dificuldades. Entre estas destacamos as seguintes:

- o formalismo dos conceitos;
- o simbolismo utilizado;
- o conceito de variável/incógnita;
- a noção de aproximação;
- a ligação entre o significado informal dos conceitos e as suas definições;
- as representações gráficas dos conceitos.

As dificuldades sentidas pelos alunos relativamente à compreensão do conceito de limite refletem-se, naturalmente, na compreensão do conceito de continuidade visto este ser definido

com base no primeiro de acordo com o currículo ministrado no ensino secundário até ao ano letivo de 2015/16, e também no novo currículo do 11.º ano que começou a vigorar no ano letivo 2016/17.

Neste estudo, e quanto aos conceitos de limite e de continuidade, opta-se por introduzir primeiramente o conceito de continuidade e só posteriormente o de limite. O conceito de vizinhança de um ponto será a base desta nova abordagem.

De acordo com o nosso ponto de vista, esta perspetiva tem a vantagem, para os alunos, do conceito de função contínua num ponto ou em todo o seu domínio não depender da compreensão do conceito de limite, comumente considerado como mais difícil. Efetivamente, abundam na literatura trabalhos sobre a dificuldade do conceito de limite. Em Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas e Vidakovic (1996) é indicado que a maioria dos estudantes não consegue compreender o conceito de limite, quanto mais calcular a maioria dos limites pretendidos. Mais ainda, é indicado que boa parte das dificuldades posteriormente encontradas em conceitos como continuidade, diferenciabilidade e integração advêm de dificuldades com o conceito e o cálculo de limites (ainda sobre este assunto, consultar por exemplo Orton, 1983, ou Tall, 1992). Mesmo quando a tecnologia foi utilizada para auxiliar o cálculo de limites, os resultados foram pouco satisfatórios, o que se nos afigura estar relacionado com a inexistência de uma estratégia “única” para calcular limites (Monaghan, Sun e Tall, 2006). Estes autores referem ainda que para boa parte dos alunos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é visto como um processo dinâmico e quase de “aproximar sem alcançar”, e não como um valor concreto. Em Cornu (1981) é indicado que, independentemente dos limites estarem relacionados com a continuidade de funções ou com sequências e séries, o seu cálculo e compreensão é sempre complicado. Por sua vez, Cottrill *et al* (1996) afirmam que não encontraram trabalhos que apresentem estratégias eficazes que permitam ultrapassar as dificuldades sentidas com a compreensão e o cálculo de limites.

Podemos agora concretizar e exemplificar algumas das dificuldades associadas às definições de limite e continuidade atualmente em vigor para os alunos do 12.º ano de Matemática A:

- O facto de uma função poder nunca atingir o valor do limite. Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ mas no entanto $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e do mesmo modo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ quando $\frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta questão (e outras similares) é frequentemente colocada por alunos no cálculo de limites, pois parte deles consideram que os limites acima indicados não existem. Em Juter (2007), afirma-se que é um desafio encarar o fim de um processo infinito (limite) como um objeto finito, o que só é alcançado por parte dos alunos que conseguem arquivar o conceito de limite como um objeto e que podem utilizá-lo como uma parte de um processo mental, com mais ou menos ligações a outros conceitos.

- Em muitos casos, os alunos apenas referem a igualdade dos limites laterais de uma função num ponto para justificarem a continuidade da função nesse ponto sem referirem o valor da função no ponto. As consequências desta justificação levariam a que uma função pudesse ser considerada contínua num ponto onde nem sequer estivesse definida, ou seja, fora do seu domínio. Por exemplo, considerando as funções g e i seguidamente expostas, a função g é muitas vezes indicada como contínua no ponto $x = 1$ e a função i como contínua em $x = 0$.

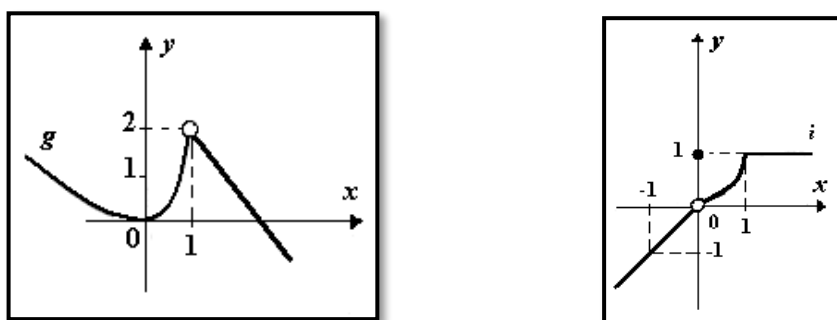


Figura 1.1 - Exemplo de pontos de interesse no estudo da continuidade

- A definição de continuidade baseada no conceito de limite num ponto isolado não é facilmente apreendida por parte dos alunos visto a função não se encontrar definida nem à esquerda nem à direita do ponto isolado, o que dificulta a compreensão dos limites laterais.

É de salientar ainda que o novo programa curricular de Matemática A do 11.º ano implementado em 2016/17 já contempla a noção de limite num ponto admitindo o valor no próprio ponto (e não apenas por valores distintos deste), pelo que expectavelmente os alunos que ingressarem no ensino superior em 2018/19 já assumirão, por exemplo, a existência de limite num ponto isolado. No entanto, os alunos que estão atualmente no 12.º ano ainda estão a trabalhar os conceitos de limite e continuidade de acordo com o programa antigo, com as consequências acima indicadas. Esta questão será debatida com mais profundidade no próximo capítulo.

Importa agora perceber como é que a noção de continuidade poderá, na prática, ser introduzida antes da definição de limite. Note-se desde já que esta ideia não é nova, mesmo no contexto português. Em Teixeira *et al* (1997), obra que pretendia ser um caderno de apoio para professores de Matemática ensino secundário, a continuidade não é introduzida com recurso aos limites, mas com a definição seguinte, de Weierstrass.

Definição 1.1 (Weierstrass)

Seja A um subconjunto de \mathbb{R} e $a \in A$. A função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a se para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$ se tenha $|f(x) - f(a)| < \delta$.

A definição supra é independente do conceito de limite, e implica a continuidade nos pontos isolados. Assim, por exemplo, a função $f(x) = x$ com $x \in \mathbb{N}$ é contínua em \mathbb{R} , com base na definição acima, apesar do seu domínio se tratar apenas de um conjunto de pontos isolados.

No programa de Matemática A que vigorou até ao pretérito ano letivo (homologado em 2002 e revogado em 2016/17), os alunos tinham o primeiro contacto com os limites no 11.º ano, onde de forma relativamente informal e com base na calculadora gráfica se estudam os limites de sucessões. Mais tarde, no 12.º ano (e saliente-se mais uma vez que em 2016/17 é o programa antigo que está a vigorar), os alunos trabalham a continuidade com recurso às definições de Cauchy e de Heine (ver Capítulo 2), mas habitualmente consideram que uma função é contínua num ponto a aderente ao seu domínio quando o seu limite nesse ponto é igual ao valor da função no ponto, excluindo o valor do ponto a na obtenção do limite. O facto de no 12.º ano se excluir o valor da função no ponto a no cálculo do limite nesse ponto leva a que x não possa efetivamente ser igual a a no cálculo desse limite, implicando a não existência de limite em pontos isolados. Na prática, a exclusão de a dos pontos a analisar o limite leva a que, na prática, apenas os pontos de acumulação sejam considerados como passíveis de ter limite. Revela-se assim uma diferença entre os diferentes conceitos de continuidade possíveis de ser ensinados aos alunos de Matemática A.

Coloca-se então a questão: “Como introduzir o conceito de continuidade sem recurso ao conceito de limite?”. Seguindo a linha de pensamento de Campos Ferreira (2005), iremos basear o conceito de continuidade na noção de vizinhança de um ponto.

A noção de vizinhança de um ponto, que será mais tarde formalizada, pode ser vista como um intervalo aberto e simétrico em torno de um ponto (figura seguinte)

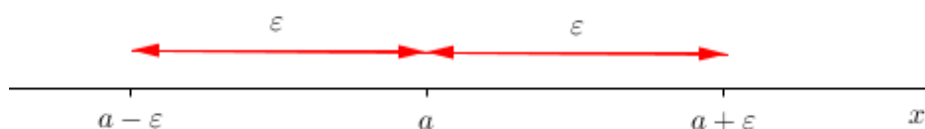


Figura 1.2 - Representação gráfica de uma vizinhança de um ponto

Assim, os estudantes têm de compreender o comportamento de uma certa função f numa vizinhança de um ponto a , o que nos parece uma forma mais simples e elegante de introduzir o conceito de continuidade num ponto, compreendendo uma série de vantagens que serão elencadas nos capítulos seguintes.

1.1 Modelo RBC+Co e a Construção do Conhecimento

O modelo RBC+Co (“Recognizing”, “Building-with”, “Constructing” and “Consolidation”) é habitualmente utilizado quando se pretende estudar o processo de construção de conhecimento matemático (Kidron e Dreyfus, 2008) pelos estudantes. As quatro ações epistémicas que o

compõem, e que em português podem ser traduzidas como *reconhecer*, *construir*, *construção* e *consolidação*, definem a espinha dorsal da construção do conhecimento abstrato, normalmente produzido em sala de aula. Sucintamente (ver descrição detalhada no Capítulo 3) trata-se de um modelo onde as ações epistêmicas se encontram aninhadas, em que se procura estudar o processo de construção de conhecimento pelo aluno. Pretende-se que este comece por *reconhecer* (“*Recognizing*”) que certos conceitos que já domina são importantes para resolver um novo problema, e seguidamente que junte esses conceitos adquiridos e produza novas ideias (“*Building-with*”). A terceira fase é a da *construção* (“*Constructing*”), que ocorre quando o estudante utiliza pela primeira vez o novo conhecimento produzido, habitualmente de forma incipiente e no contexto de um problema concreto em análise. A fase da *consolidação* (“*Consolidation*”) visa o aperfeiçoamento da *construção*, normalmente em fase posterior, depois de a tarefa ser alvo de análise pelo sujeito, levando ao debelar dos pontos fracos revelados durante a *construção*.

O modelo *RBC* é uma componente essencial da Abstração em Contexto (*AiC*), estrutura teórica que procura estudar a construção do conhecimento abstrato. Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2015), num trabalho recente, escalpelizam e (re)definem esta metodologia, com base em trabalhos anteriores dos mesmos autores e seguindo as ideias preliminares de Davydov (1990). Este tópico será igualmente desenvolvido no Capítulo 3, mas podemos resumidamente considerar que a *AiC* procura estudar a ascensão ao concreto, através de um processo de matematização vertical da construção do conhecimento. Contendo três etapas (necessidade, emergência e consolidação), é na segunda que habitualmente se concentram os maiores esforços dos investigadores e onde se utiliza a metodologia *RBC+Co*. Tal como os nomes indicam, a necessidade refere-se ao momento em que o estudante sente que precisa de mais conhecimento matemático (*construção*), a emergência ao processo de obtenção dessa construção, e a consolidação à fase final em que a nova construção pode ser utilizada “livremente” pelo estudante em situações concretas e diversas, pois já a domina de forma abstrata.

No contexto do problema em análise, pretende-se que o estudante *construa* as suas noções de continuidade e de limite, através da realização de tarefas práticas, supervisionadas por um professor que procura direcionar esse processo de construção, por forma a que o estudante atinja os objetivos propostos (*construção* e *consolidação* dos conceitos de continuidade e limite). Neste sentido é importante que o estudante comece por “*reconhecer*” que as representações gráficas e que a noção de vizinhança são importantes para definir a continuidade num ponto, originando o “*construir*” de uma representação gráfica de uma função contínua. Essa “*construção*” será depois “*consolidada*” de forma analítica e, mais tarde, usada num novo “*reconhecer*” em relação ao limite num ponto.

1.2 Questões de Investigação

De acordo com o já referido nas secções anteriores, o objetivo do estudo é mais amplo do que a simples mudança sequencial da ordem de lecionação do programa. É imprescindível compreender a forma como os alunos *constroem* os conceitos de limite e de continuidade, e não apenas discernir se eles os compreendem e sabem aplicar, nos diversos problemas e de diversas formas. A análise das dificuldades sentidas neste processo é igualmente relevante e pode servir para melhorar todo o processo de lecionação; se soubermos quais são as principais dificuldades dos alunos, e porque é que estas surgem, poderemos atuar de forma profilática nas aulas de forma a trabalhar detalhadamente os pontos mais delicados, ou definir novas abordagens aos conceitos mais complicados. Por exemplo, se os alunos tiverem dificuldade em “reconhecer” que uma função contínua num ponto tem limite nesse ponto, eles irão certamente ter dificuldade em “construir” a noção de limite, pelo que mais tarefas sobre o assunto (com recurso a funções contínuas e descontínuas, representadas quer de forma analítica quer de forma gráfica) poderão ser necessárias.

Os objetivos visados no presente estudo, de acordo com o enquadramento no modelo teórico *RBC+Co* (ver Capítulo 3), são os seguintes:

1. proceder à análise, descrição e reflexão do raciocínio dos alunos, na perspetiva das ações epistémicas *reconhecer* (Ação-R), *construir* (Ação-B), *construção* (Ação-C) e *consolidação* (Co);
2. detetar as dificuldades dos alunos manifestadas no processo de resolução das tarefas e exposição de raciocínios, bem como as características presentes nessas tarefas ou nos raciocínios desenvolvidos que contribuam para a *construção* dos conceitos de continuidade e de limite.

Desta forma, no quadro dos objetivos delineados, a investigação pretende responder às seguintes questões de investigação:

1. que ações epistémicas são possíveis identificar, no decurso do processo de abstração dos alunos durante a *construção* do novo conhecimento matemático, nomeadamente:
 - enquanto desenvolvem a compreensão dos dados enunciados;
 - identificam a necessidade de recorrer a outras noções matemáticas ou construções já adquiridas;
 - aplicam estratégias e soluções intermédias;
 - organizam conhecimentos e ideias;
 - constroem os conceitos de limite e de continuidade?
2. como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?

1.3 Descrição dos Capítulos

Após o presente capítulo introdutório, no Capítulo 2 são discutidas e analisadas as diferentes definições de limite e de continuidade, bem como as suas implicações. Procura-se discutir as diferentes abordagens possíveis a estes conceitos por forma a justificar as definições utilizadas na experiência pedagógica que foi realizada.

O Capítulo 3 é dedicado ao processo de *construção* do conhecimento. Além de se discutirem e analisarem várias das estratégias habitualmente utilizadas em Didática da Matemática, é dado o enfoque à Abstração em Contexto e ao Modelo Teórico *RBC+Co*, e à forma como estas estratégias podem ser aplicadas na análise dos dados.

Por sua vez, o Capítulo 4 descreve a Metodologia de Investigação. São introduzidas as particularidades de uma investigação qualitativa, segundo diversos autores, com o intuito de justificar a escolha da investigadora. Segue-se a caracterização dos alunos e a contextualização do espaço em que o estudo decorreu. Finalmente são descritos os processos de tratamento, recolha e análise de dados que foram efetuados neste trabalho.

A proposta pedagógica ocupa o Capítulo 5. Neste capítulo é apresentada a unidade curricular alvo de experimentação. As diferentes atividades desenvolvidas com os alunos, enquadradas no objetivo e no problema do estudo, são igualmente abordadas neste capítulo.

Os registos escritos e audiovisuais das produções dos alunos, em relação às atividades por estes desenvolvidas, gerou uma inegável fonte de informação que é não só relatada, mas também discutida e analisada no Capítulo 6. É naturalmente um capítulo de vital importância pois permite aquilatar o processo de *construção* de conhecimento matemático pelos alunos envolvidos.

O Capítulo 7 é dedicado à análise transversal dos resultados apresentados no Capítulo 6, no qual tentaremos verificar se as conjecturas que foram despontando ao longo do capítulo anterior se confirmam pela análise que iremos efetuar. Na primeira secção irá ser realizada a análise, para todas as questões, das subcategorias evidenciadas em cada uma das ações epistémicas, bem como das suas conexões, enquanto na segunda secção serão analisadas a manifestação das ações epistémicas e as relações existentes entre estas, novamente para todas as questões.

Para finalizar, no Capítulo 8 apresentam-se as conclusões do estudo, dando resposta às questões de investigação colocadas. Paralelamente, procura-se avaliar a relevância deste estudo e os efeitos que este possa ter na prática educativa, prestando-se, igualmente, algumas recomendações.

Capítulo 2

Limites e Continuidade

No presente capítulo iremos confrontar diversas definições acerca dos conceitos de limite e de continuidade de diversos autores, após as quais iremos selecionar aquelas a que o nosso trabalho se irá dedicar.

Em termos estruturais, o atual capítulo encontra-se dividido em três secções, a primeira referente às noções topológicas necessárias às secções seguintes, relativas aos conceitos de limite e de continuidade.

Relativamente à segunda secção, dedicada ao conceito de limite, começaremos por apresentar, como já foi referido, diferentes formas de definir limite e as suas implicações na lecionação deste conteúdo. Em consequência das alterações efetuadas ao programa de Matemática A acerca da definição de limite utilizada no ensino secundário, consideramos que essas modificações são de extrema relevância, pelo que serão incluídas nesta secção. Toda esta análise irá culminar na opção assumida no presente trabalho no que concerne à definição de limite e à sua justificação.

Na terceira secção serão abordadas várias definições de continuidade, nomeadamente a noção de continuidade baseada nos conceitos de limite, de vizinhança, em infinitésimos e ainda a definição de continuidade no novo programa de Matemática A. Analogamente ao que foi efetuado na secção anterior, todas essas definições serão confrontadas com o intuito de selecionar e justificar a escolha que melhor se adapta ao nosso estudo.

2.1 Noções topológicas

Atendendo a que ao longo deste capítulo serão necessários alguns conceitos topológicos na reta real, já que são referidos nas diversas definições de limite e de continuidade, opta-se por os introduzir nesta secção. Começemos por formalizar a definição de vizinhança, já introduzida de forma gráfica com a Figura 1.2, da forma seguidamente indicada.

Definição 2.1 (Vizinhança de um ponto).

Sendo a um número real qualquer e ε um número real positivo, chama-se vizinhança de centro a e raio ε ao conjunto dos números reais cuja distância a a é inferior a ε ,

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[.$$

Por analogia, a vizinhança lateral à direita de um ponto será

$$V^+_{\varepsilon}(a) = \{x \in]a, +\infty[: |x - a| < \varepsilon\} =]a; a + \varepsilon[$$

e a vizinhança lateral à esquerda

$$V^-_{\varepsilon}(a) = \{x \in]-\infty, a[: |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon; a[.$$

Também os conceitos de ponto de acumulação, de ponto isolado, de ponto aderente, de ponto exterior e de ponto fronteiro são muitas vezes utilizados para definir o limite e a continuidade num ponto, como veremos nas secções seguintes, e são agora formalizados, de acordo com Ferreira (2005).

Definição 2.2 (Ponto de acumulação)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é ponto de acumulação de X se e só se

$$\forall \varepsilon > 0, V_{\varepsilon}(a) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Definição 2.3 (Ponto isolado)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\varepsilon}(a) \cap X = \{a\}$, diz-se que a é um ponto isolado de X .

Definição 2.4 (Ponto aderente)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é ponto aderente a X se e só se $\forall \varepsilon > 0, V_{\varepsilon}(a) \cap X \neq \emptyset$.

Definição 2.5 (Ponto exterior)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\varepsilon}(a) \cap X = \emptyset$, diz-se que a é exterior a X .

Definição 2.6 (Ponto fronteiro)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Chama-se ponto fronteiro de X qualquer ponto a tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon}(a)$ tenha pelo menos um ponto de X e pelo menos um ponto do seu complementar.

Destacamos o facto de um ponto fronteiro poder, ou não, pertencer ao domínio de uma função, o qual será fundamental verificar em determinadas situações.

2.2 Noção de limite

2.2.1 Algumas formas de definir limite

Na análise matemática atual, grande parte dos conceitos são lecionados com recurso à noção de limite. Associadas a ela estão as noções de continuidade, derivada e integral e ainda o estudo de séries. As noções de limite sempre provocaram debate entre os matemáticos, assentando inicialmente, e até ao final do século XVIII, em ideias vagas sobre o infinito. D’Alembert, que afirmou que a noção de derivada precisava de uma definição explícita de limite, considerou (no século XVIII) que “a teoria dos limites era a metafísica do cálculo”. Mais tarde, em 1821, Cauchy redesenhou o curso de cálculo da Escola Politécnica de Paris, tendo introduzido a noção rigorosa de limite como base para os seus apontamentos:

Definição 2.7 (Cauchy)

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a , podendo não estar definida no ponto a . Seja b um número real. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b , se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que, para todo o x do domínio de f , se x é tal que $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Atualmente, a definição de limite de Cauchy (juntamente com a de Heine, que veremos posteriormente) ainda é uma das bases para as diferentes definições de limite utilizadas nas unidades curriculares de Análise e Métodos Quantitativos dos cursos superiores portugueses. Neste trabalho, identificaremos algumas destas definições, baseadas de forma mais ou menos explícita na definição de limite de Cauchy. Em Cotrim, Felgueiras e Matos (2009) é indicada a definição seguinte.

Definição 2.8 (Cotrim, Felgueiras e Matos)

Seja f uma função real de variável real e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do seu domínio (exclui os pontos isolados). Diz-se que o limite de f quando x tende para a é o número real b se e só se para toda a vizinhança de b de raio δ existe uma vizinhança de a de raio ε tal que

$$(1.1) \quad x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b),$$

isto é,

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Por sua vez, em Nápoles (1994), encontramos a seguinte definição:

Definição 2.9 (Nápoles)

Seja $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \bar{X}$. Diz-se que b é o limite de f no ponto a (ou quando x tende para a) e escreve-se

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se

$$(1.4) \quad \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: x \in X \cap V_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

ou de forma equivalente

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: f(X \cap V_\varepsilon(a)) \subset V_\delta(b)$$

onde \bar{X} representa o conjunto de pontos aderentes de X , ou seja, o seu interior unido com a sua fronteira.

De acordo com a autora, a notação utilizada na definição 2.9 permite que esta se adapte aos casos em que a ou b não sejam finitos.

Por outro lado, se $a \in X$ a definição 2.9 conduz a que $b = f(a)$. Com efeito, nesse caso $a \in V_\varepsilon(a)$ para qualquer $\varepsilon > 0$ e assim $f(a) \in V_\delta(b)$ para qualquer $\delta > 0$, o que obriga a que $b = f(a)$. Assim, a existência de limite num ponto pertencente ao domínio da função é equivalente à continuidade nesse ponto (Ferreira, 2005).

A diferença fundamental entre as duas definições de limite anteriores reside no facto de que em (1.1) $x \in V_\delta(a) \setminus \{a\}$, excluindo-se o ponto a , enquanto que em (1.4) o ponto a não é retirado. Esta diferença parece subtil, mas será importante no estudo do limite em pontos isolados e em pontos de descontinuidade. Mais ainda, na definição 2.8 é indicado que o ponto a tem de ser de acumulação, implicando a não existência de limite nos pontos isolados, ao passo que na definição 2.9 isso não acontece.

Por sua vez, Safier (2011) utiliza a seguinte definição de limite de uma função num ponto:

Definição 2.10 (Safier)

Se os valores assumidos por uma função $f(x)$ arbitrariamente se aproximam de L , quando os valores de x de entrada ficam cada vez mais próximos de a , então L é designado como o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a , o que se escreve como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Apesar de depender do conceito vago de aproximação, esta definição é apreendida por boa parte dos estudantes. Talvez exemplos práticos se justifiquem nesta introdução “informal” de limite. Por exemplo, posso dividir um bolo por um número cada vez maior de pessoas, sem nunca dar “zero bolos” a cada pessoa nem ter “infinitas” pessoas, ou posso somar sucessivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ (os termos da sucessão 2^{-n}) sem nunca alcançar 1.

Também Ferreira (2005) introduz o limite como o significado intuitivo da frase “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ”, seguido da expressão (1.3). Este autor faz a *construção* do conceito de limite, desde a sua noção intuitiva até à noção mais teórica, que será da forma

Definição 2.11 (Ferreira)

Seja f uma função real definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D e b um número real. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a ,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in V_\varepsilon(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)).$$

Por fim, apresentamos outra definição de limite, segundo Heine. Esta definição faz parte dos programas de Matemática A do ensino secundário, mesmo do que vigora desde 2016/17:

Definição 2.12 (Heine)

O limite de f no ponto a é b se, para todas as sucessões (x_n) de elementos de D_f convergentes para a , as sucessões $f(x_n)$ forem convergentes para b .

Considera-se na definição acima que as sucessões podem efetivamente assumir o valor de a , apesar de em alternativa se poder considerar apenas as sucessões que não assumem o valor de a , com as implicações já consideradas aquando da discussão das definições 2.8 e 2.9.

Esta definição¹ utiliza os conhecimentos de sucessões adquiridos no ensino secundário, mas o processo de Bolonha implicou que, pelo menos nas licenciaturas das escolas politécnicas, as unidades curriculares de matemática tivessem sido substancialmente reduzidas, o que levou a que as séries/sucessões não sejam atualmente lecionadas na maioria das licenciaturas nas áreas de engenharia e gestão destas escolas. No entanto, é uma definição especialmente útil para provar a não existência de limite. Por exemplo, para provar que $f(x) = \sin x$ não tem limite quando x tende para infinito, basta considerar a sucessão $x_n = \frac{2n+1}{2}\pi$, onde $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ mas $f(x_n) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n$ não tem limite.

2.2.2 Implicações das diferentes definições de limite

Importa agora escarpelizar e exemplificar as implicações das diferentes definições de limite introduzidas. A este respeito, destacamos a excelente discussão promovida em Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1999) sobre estas questões. Nesse texto são apresentadas duas definições de limite com base em Cauchy, e duas definições de limite com base em Heine. Vamos considerar as definições de Cauchy apresentadas nesse manual, atendendo ao facto das definições de Cauchy e de Heine serem equivalentes e desta última

¹ Em Nápoles (1994) ou, de forma similar, em Ferreira (2005).

dependem de conhecimentos de sucessões e de séries que não são atualmente lecionados na maioria das licenciaturas nas áreas de engenharia e gestão das escolas politécnicas.

Definição 2.7* (Cauchy)

Seja f uma função definida num subconjunto X de \mathbb{R} e a um ponto aderente de X . Diz-se que b é o limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para qualquer número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem $f(x) \in V_\delta(b)$, sempre que $x \in X \cap V_\varepsilon(a)$.

Definição 2.7' (Cauchy)

Seja f uma função definida num subconjunto X de \mathbb{R} e a um ponto aderente de X . Diz-se que b é o limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para qualquer número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que se tem $f(x) \in V_\delta(b)$, sempre que $x \in (X \setminus \{a\}) \cap V_\varepsilon(a)$.

Note-se que a definição 2.7* é equivalente à definição 2.11, de Ferreira, e que a definição 2.7' é equivalente à definição 2.8, de Cotrim *et al* (2009). Nesta última igualdade, note-se que na definição 2.8 estamos restritos a pontos de acumulação e que na definição 2.7' admitimos pontos aderentes (basicamente, os pontos aderentes de um conjunto X incluem os seus pontos de acumulação mais os seus pontos isolados), mas como na definição 2.7' retiramos o ponto a dos pontos de interesse, as definições acabam por ser equivalentes. Neste sentido importa ainda referir que a condição $x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ na definição 2.8 pode ser escrita como $x \in V_\varepsilon(a)$, pois ao ser indicado que a é um ponto de acumulação já estamos a excluir os pontos isolados, que é o objetivo desta restrição na definição 2.7'.

Teixeira *et al* (1999) apresentam um conjunto de observações sobre esta temática, entre as quais destacamos:

- Quando $a \notin X \Rightarrow X \setminus \{a\} = X$, logo as definições 2.7* e 2.7' são equivalentes.
- Apesar de parecer que a definição 2.7* é uma extensão da definição 2.7', por incluir o ponto a , assim não é, pois, na realidade são definições diferentes que implicam em alguns casos (ver exemplo seguinte) a existência ou não de limite num ponto.
- A definição 2.7* implica que se existir limite num ponto $a \in X$, então esse limite é igual a b , isto é, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Ferreira (2005) desenvolve um pouco mais esta ideia e afirma que

... na hipótese de a ser um ponto do domínio de f , se f for contínua no ponto a esta condição será verificada se (e só se) for $b = f(a)$... Assim, a existência de limite num ponto pertencente ao domínio da função

equivale à continuidade nesse ponto, verificando-se, nesta hipótese, a igualdade $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. (p. 284)

Ou seja, não há limite nos pontos de descontinuidade da função.

- A definição 2.7' implica que não exista limite nos pontos isolados, ao passo que a definição 2.7* implica que o limite nos pontos isolados é o valor da função nesses pontos.

Em sùmula, as grandes diferenças entre as duas definições prendem-se com a existência ou não de limite em pontos isolados e com a existência ou não de limite em pontos de descontinuidade.

A definição 2.7* tem ainda outra implicação: é comum os alunos no secundário afirmarem que se existirem e forem iguais os limites laterais no ponto a , ou seja, quando x se aproxima de a mas sem atingir este ponto, então a função tem limite nesse ponto. Concretizando, se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Ora esta conclusão contraria o que foi dito anteriormente, caso $f(a) \neq b$. Ferreira (2005) resolve esta questão considerando simplesmente $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$, e afirma apenas que se os limites laterais forem diferentes então a função não tem limite no ponto.

Para facilitar a compreensão dos tópicos discutidos, apresentamos em baixo um pequeno exemplo de aplicação das definições introduzidas.

Exemplo: Seja f uma função real de variável real cuja representação gráfica se encontra exposta a seguir.

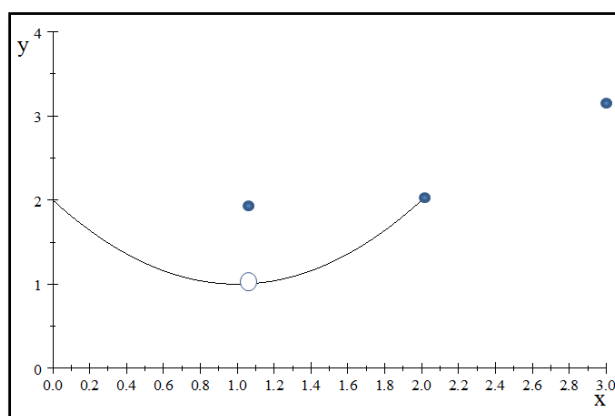


Figura 2.1 - Limites em pontos de descontinuidade e em pontos isolados

Com base na definição 2.7', que é atualmente lecionada, de forma mais ou menos similar, no ensino secundário, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Note-se ainda que é irrelevante para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ que o ponto $x = 2$ pertença ou não ao domínio da função.

Por sua vez, com base na definição 2.7*, que é muitas vezes adotada em cursos superiores, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe, e portanto caracterizamos assim as duas diferenças fundamentais entre as duas definições: os pontos isolados e os pontos de descontinuidade. Neste caso verifica-se igualmente $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ e a irrelevância do ponto $x = 2$ pertencer ou não ao domínio da função.

2.2.3 A definição de limite no novo programa de Matemática A

O programa de Matemática A que vigorou até ao ano letivo 2015/16 para o 11.º ano de escolaridade contemplava a introdução do conceito de limite nesse ano de escolaridade, mas de forma intuitiva e informal. No programa disponível no sítio da DGE é indicado que

O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental. (p. 6)

Somente no 12.º ano se procede à formalização do conceito do limite, com base na definição de Heine, mas considerando na definição 2.12 que os valores de X são distintos de a . No programa em vigor, até ao final do presente ano letivo, no 12.º ano de Matemática A pode ler-se “Aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada.” (p. 4)

O programa de Matemática A para o 11.º ano que começou a vigorar no ano letivo 2016/17 inclui a definição de limite segundo Heine, mas com uma diferença fundamental. **De entre as sequências consideradas no domínio da função, que tendem para o valor a , passam a ser incluídas aquelas que assumem valor a .** Ou seja, a definição é equivalente às definições 2.7*, de Cauchy, e 2.12 de Heine, já anteriormente referidas.

Definição 2.13 (Heine, de acordo com o novo programa de Matemática A)

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como “ponto aderente a A ” quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como “limite de $f(x)$ quando tende para a ” quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$,

justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ”, referir, nesta situação, que “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ” e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

A este propósito, o documento *Programa e Metas Curriculares - Ensino Secundário - Matemática A* (Bivar et al, 2014), disponível no sítio da DGE, dedica várias considerações sobre as vantagens e desvantagens de se considerar o próprio ponto no cálculo de limites.

A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É, pois, exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados.

No domínio Funções Reais de Variável Real, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio Sucessões, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto a ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para a , para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a . Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por “limite por valores diferentes de a ”. Neste programa optou-se pela versão alternativa que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a ; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar por ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade) e em segundo lugar porque a própria noção de “limite por valores diferentes” (como outras afins, como a de “limite à esquerda” e “à direita”) passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio.

A definição de limite segundo Heine - que já é comum no Ensino Secundário - permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões

enquadradas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional.
(pp. 15 e 16)

Analisando o texto acima transcrito, é notória a preocupação do Ministério da Educação em redefinir a forma de cálculo de limites no ensino secundário. Por um lado, desaparece a referência ao conceito intuitivo de limite, apostando-se claramente na formalização deste com recurso à definição de Heine logo no 11.º ano, e por outro lado, pretende-se que o ponto a onde é calculado o limite passe a ser considerado na definição das sucessões x_n de elementos de D_f convergentes para a . Esta definição implica que os limites laterais sejam simples de calcular, passando a poder ser tratados como um caso particular da noção de limite, ou seja um limite calculado num subconjunto D_f de valores convergentes para a . Mais uma vez, as diferenças fundamentais prendem-se com o valor do limite em pontos isolados ou de descontinuidade.

Como exemplo, e retomando novamente o gráfico exposto na Figura 2.1, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ com base na definição atual de limite. Por outro lado, com base na definição que irá vigorar a partir de 2016/17, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.

2.2.4 Síntese

Introduzimos nesta secção diversas noções de limite, desde as intuitivas, às baseadas nas noções de Cauchy e de Heine. Consideramos que a noção intuitiva de limite, “valor b para o qual a função f se aproxima quando x se aproxima de a ”, tal como indicado na definição de Safier, é insuficiente para uma unidade curricular de matemática de licenciatura. Falta-lhe o rigor necessário para lidar, por exemplo, com o conceito de pontos isolados. Mais ainda, atendendo a que a noção de limite é fundamental para a noção de derivada (e esta é utilizada amiúde quer nos cursos da área da Gestão, quer nos cursos da área da Engenharia), convém que este conceito seja bem apreendido pelos alunos, quer na questão do significado informal, quer na formalização do conceito. Ademais, afigura-se-nos que a noção de Heine é complicada tendo em consideração os currículos atuais de matemática nas licenciaturas politécnicas. Apesar dos alunos que frequentaram a Matemática A possuírem conhecimento desta definição, têm muitas vezes dificuldades em aplicá-la. O trabalho com sucessões é complexo, pois recorre frequentemente a manipulações algébricas artificiosas e a provas por indução e por redução ao absurdo. A revisão sucessiva de currículos de matemática no ensino secundário levou a um incremento de conteúdos de estatística e de probabilidades, mas originou um esvaziamento das provas formais e do trabalho com sucessões, pelo que a maioria dos estudantes não conseguiria, a nosso ver, abarcar a noção de limite de Heine. Esta tendência poderá ser invertida a partir do ano letivo 2018/19, já que os alunos que ingressarem no ensino superior nessa altura já terão certamente frequentado a Matemática A à luz dos novos programas, tendo por isso um maior

domínio das ferramentas necessárias para lidar corretamente com sucessões. É ainda importante notar que vários dos alunos a frequentar o ensino superior politécnico não frequentaram Matemática A no secundário. Todos os cursos da área da Gestão e das Engenharias do ensino politécnico permitem o acesso a alunos que vieram de currículos alternativos, quer do ensino recorrente quer dos cursos Científico-Tecnológicos. Mais ainda, os alunos que ingressam através das provas M23 e dos Cursos de Especialização Tecnológica (CET) representam já uma boa parte dos alunos do ensino superior politécnico, uma tendência que até deverá aumentar com os novos Cursos Técnicos Superiores Profissionais (TeSP), que se iniciaram no ano letivo 2015/16, e que darão igualmente ingresso às licenciaturas.

Como as definições de limite de Heine e de Cauchy são equivalentes, optámos por esta última. É então fundamental decidir desde logo o tratamento que se pretende dar aos pontos isolados e aos pontos de descontinuidade da função, pois as repercussões serão sentidas, mormente no estudo da continuidade. Ao inverter-se a ordem de lecionação dos conteúdos, ou seja, começar por lecionar a noção de continuidade e só depois a noção de limite, parece-nos preferível considerar a existência de limite e de continuidade nos pontos isolados, o que facilita bastante a notação e o cálculo dos limites laterais, tal como anteriormente referido.

Assim, ao longo deste trabalho optou-se por considerar a definição 2.11 de limite, a qual se reproduz novamente.

Definição 2.11 (Ferreira)

Seja f uma função real definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D e b um número real. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in V_\varepsilon(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)).$$

Os limites laterais podem agora ser definidos com recurso à vizinhança lateral, já introduzida na definição 2.1 da página 11.

Definição 2.11⁺ (Limite lateral à direita)

Seja f uma função real definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D e b um número real. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores à direita de a , $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$, se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in V_\varepsilon^+(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)).$$

Definição 2.11⁻ (Limite lateral à esquerda)

Seja f uma função real definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D e b um número real. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores à esquerda de a , $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in V_{\varepsilon}^-(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_{\delta}(b)).$$

2.3 Noção de continuidade

2.3.1 Continuidade baseada no conceito de limite

A noção de continuidade que é habitualmente ensinada, quer no ensino secundário, quer no ensino superior, está assente no conceito de limite. No entanto, historicamente a noção de continuidade é anterior à de limite - quanto mais não fosse na perspectiva de uma função “sem buracos” (Thomas, Finney, Weir e Giordano, 2002). Estes autores consideram que o termo *limite*, no sentido mais atual do termo, só foi definido no século XIX, ao passo que o conceito de continuidade já se encontrava bem estabelecido no século XVIII. Na obra de 1748, publicada por Euler “*Introductio in Analysin Infinitorum*”, é definida a estrutura inicial da matemática que ainda hoje é lecionada no ensino superior português. Na referida obra, Euler indica que uma função contínua é formada por uma única expressão analítica, enquanto as funções descontínuas são formadas por mais de uma expressão analítica (Santana e Otte, 2010). Naturalmente que essa noção de função contínua (bem como as noções de limite introduzidas nessa época) carece, à luz do conhecimento atual, de rigor matemático, e denota algumas falhas. Basta notar que existem funções definidas por ramos que são contínuas em todo o seu domínio, como por exemplo

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Mas o trabalho de Euler foi pioneiro para a época e acabou por ter significativo impacto no desenvolvimento posterior da matemática. Atualmente, e na sua forma mais simples (Safier, 2011), uma primeira definição de função contínua num ponto será

Definição 2.14 (Safier)

Uma função f é dita contínua num ponto a se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Parece-nos que esta definição é demasiado incompleta para o ensino superior, pois nada refere quanto ao intervalo a que a pode pertencer, e o tratamento da continuidade nos pontos isolados nem sequer é abordado. Uma outra definição de continuidade amplamente utilizada e indicada em diversos manuais é:

Definição 2.15 (Cotrim, Felgueiras e Matos)

Seja a um ponto de acumulação do domínio de uma função real de variável real f .

Diz-se que f é contínua no ponto a se e só se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Atendendo à definição 2.8 de limite, na qual esta definição de continuidade se baseia, não existe continuidade nos pontos isolados. A este respeito os autores afirmam que não faz qualquer sentido falar em continuidade ou em descontinuidade de uma função f num ponto a que não pertença ao domínio (não existiria $f(a)$) ou num ponto isolado do domínio (não faria sentido falar em $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$).

Por sua vez, em Nápoles (1994) temos uma noção de continuidade igualmente simples, mas que assenta na sua definição mais complexa de limite, fornecida anteriormente.

Definição 2.16 (Nápoles)

Seja $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em a se existe em \mathbb{R} o limite de f no ponto a .

A partir das noções de limite e de continuidade enunciadas por Nápoles (1994), e atendendo à nota apresentada aquando da definição de limite,

$$f \text{ contínua em } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ou, de forma equivalente, recorrendo à definição de limite de Heine

$$f \text{ contínua em } a \Leftrightarrow \forall x_n \in X, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

A continuidade nos pontos isolados é assim consagrada nesta definição pois decorre da noção de limite apresentada. Se $a \in X$ é um ponto isolado, $\exists \varepsilon > 0: X \cap V_\varepsilon(a) = \{a\}$ e assim $x \in X \cap V_\varepsilon(a) \Rightarrow x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$, logo $|f(x) - f(a)| = 0 < \delta, \forall \delta > 0$.

2.3.2 Continuidade baseada no conceito de vizinhança

Ferreira (2005) não baseia a sua definição de continuidade em limites, mas antes em distâncias ou vizinhanças. Tal como na introdução do conceito de limite, aquele autor começa por referir a continuidade de forma intuitiva, formalizando sucessivamente esta noção ao longo do texto. Na sua expressão mais formal,

Definição 2.17 (Ferreira)

A função f é contínua no ponto a se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta).$$

A expressão acima pode naturalmente ser reescrita recorrendo ao conceito de vizinhança

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in D \cap V_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))).$$

Esta abordagem pode ser vantajosa em cursos que necessitem das noções de continuidade, derivada e integral, mas cuja estrutura curricular e programática (habitualmente uma única unidade curricular de cálculo onde deverão ser lecionados os conceitos supra) não permita o aprofundamento do conceito teórico de limite. É evidente que não será desejável evitar completamente a noção de limite na leção dos conceitos de continuidade, derivada e integral, mas atendendo à elevada dificuldade que os alunos revelam, por exemplo, no levantamento de indeterminações, poderá ser adequado numa licenciatura que necessite de ferramentas práticas de análise (como as noções de aceleração e velocidade nas engenharias, ou as noções de valor médio e elasticidade do capital na gestão) suavizar o cálculo de limites que dependam de cálculos mais trabalhosos e conceder mais relevo a outros conceitos que serão posteriormente utilizados em unidades curriculares específicas de cada licenciatura.

Bernstein (1997) tem também um trabalho bastante original onde introduz os conceitos de continuidade, derivada, integral e só depois o de limite. Consegue, num trabalho curto e de linguagem simples, tratar vários dos mais usuais conceitos de análise. Através do conceito de bola aberta centrada no ponto c , $Ball(c, h) = \{x: |x - c| < h\}$ para algum h , são definidas as noções de continuidade e de limite.

Definição 2.18 (Bernstein)

Seja f uma função definida em c . f é contínua em c se, para qualquer bola aberta F de centro $f(c)$, existe uma bola aberta B centrada em c tal que $f(B) \subseteq F$.

Esta definição também implica continuidade nos pontos isolados, pois naturalmente que existirá sempre uma bola tão pequena quanto o desejado em torno do ponto isolado c cuja imagem estará contida em F . É ainda de notar que as noções de continuidade de Ferreira e de Bernstein são equivalentes, pois a vizinhança é uma bola aberta quando trabalhamos em \mathbb{R} . Bernstein aplica a sua noção de continuidade para definir limite.

Definição 2.19 (Bernstein)

Seja f uma função. Então f converge para b no ponto c se a função

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = c \\ f(x) & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

é contínua em c .

Um teorema do autor mostra (a prova depende do conceito de bola aberta e encontra-se em Bernstein, 1997) que existe no máximo um número b que verifica a definição anterior de convergência, e que se este existir será o limite em c , ou seja, as noções de limite e

continuidade num ponto são equivalentes. Esta forma de introduzir os conceitos de continuidade e limite é, na nossa opinião, altamente inovadora e merecedora de uma experimentação prática nas unidades curriculares de matemática, até porque, como referido, o autor consegue num trabalho pequeno (12 páginas) e com uma linguagem razoavelmente acessível introduzir vários dos conceitos chave em análise.

2.3.3 Continuidade baseada em infinitésimos

O cálculo foi originalmente desenvolvido com base no conceito intuitivo de infinitésimo mas, por razões de rigor matemático, os infinitésimos perderam a sua importância nos últimos cem anos. Só em 1960, após uma definição rigorosa de infinitésimo por Abraham Robinson, foi possível reescrever conceitos base de análise com base nos infinitésimos. Os infinitésimos serão os números ε tais que $-a < \varepsilon < a$ para todo o a . Além do zero, nenhum outro número real observa esta condição.

Keisler (2012) considera que deste modo será mais fácil trabalhar os conceitos de análise do que através da noção mais difícil de limite. São enumeradas pelo autor três vantagens na utilização da abordagem infinitesimal em vez da abordagem com base em limites. A primeira é pelo facto de esta aproximação ser mais intuitiva e estar mais próxima das bases do cálculo. A segunda vantagem relaciona-se com o facto dos conceitos de derivada e de integral se tornarem mais simples de enunciar e compreender (apesar do autor não explicitar de que forma é que a compreensão destes conceitos pelos alunos sai beneficiada com esta abordagem). Por exemplo, Keisler define a derivada da função f no ponto a como o declive (se existir) da função, definido como

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},$$

onde Δx é um infinitésimo diferente de zero. A noção acima tem a vantagem de ser independente do conceito de limite.

Finalmente, a abordagem infinitesimal fornece uma ferramenta (infinitésimos) com crescente aplicação noutras áreas do conhecimento, como a economia e a física.

Com base no tratamento efetuado por Abraham Robinson (Davis e Hersh, 1995) aos infinitésimos, os quais em conjunto com os números reais definem os números hiperreais, Keisler definiu inúmeras propriedades que advêm desta nova construção.

Definição 2.20 (Keisler)

f é uma função contínua num ponto c se é definida em c e se sempre que x é infinitamente próximo de c , $f(x)$ é infinitamente próximo de $f(c)$.

Apesar de não o explicitar, parece evidente que o autor considera a continuidade nos pontos isolados ($x - c = 0$ e $f(x) - f(c) = 0$ são infinitésimos, como referimos). Também a noção de

limite enunciada pelo autor é baseada no conceito de infinitésimo.

Definição 2.21 (Keisler)

b é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de c se sempre que x está infinitamente próximo de c (mas não é igual a c) $f(x)$ está infinitamente próximo de $f(c)$.

Esta noção de limite é semelhante à ideia de limite de Safier (definição 2.10), “o valor b para o qual f se aproxima quando x se aproxima de a , sem, no entanto, f alcançar b e x alcançar a ”, mas com recurso ao conceito de infinitésimo no lugar do conceito de aproximação. Importa ainda considerar que nesta obra o conceito de derivada é introduzido antes dos conceitos de limite e de continuidade, alterando a ordem habitual de leção destes conteúdos.

2.3.4 A definição de continuidade no novo programa de Matemática A

Na subsecção 2.2.4 descrevemos de forma detalhada a definição de limite que começou a ser utilizada na Matemática A em 2016/17, e comparámo-la com a noção utilizada presentemente. Em relação à definição de continuidade, manter-se-á a sua introdução de acordo com o conceito de limite, tal como atualmente. Segundo o plasmado no documento *Programa e Metas Curriculares - Ensino Secundário - Matemática A* (Bivar et al, 2014),

1. justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$;
2. designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por “contínua em a ” quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Assim, a definição de continuidade permanecerá similar à definição 2.15, ou seja, considera-se que uma função é contínua num ponto a quando o valor da função em a é igual ao limite nesse ponto. O que muda, como já referido, é o conceito de limite de um ponto, com as implicações já estudadas ao nível dos pontos isolados. Recordando a Figura 2.1 da página 17, note-se que a função aí representada passará a ser contínua no ponto $x = 3$.

2.3.5 Síntese

A noção de continuidade é, por norma, compreendida pelos alunos, porque facilitada pela noção de “traçar o gráfico de f sem levantar a caneta”, que naturalmente implica a descontinuidade nos pontos isolados. Impõe-se, contudo, verificar se as definições “facilitadoras” não apresentam problemas. Por exemplo, uma definição de continuidade “sem limites” exposta num fórum sobre matemática, em <http://math.stackexchange.com/questions/575778/definition-of-continuity-without-limit>, indica

Definição 2.22 (errada)

$f(x)$ é contínua no ponto a quando:

1. $f(a)$ existe;
2. para todo o $d > 0$, existe um máximo M e um mínimo m no intervalo $[a - d; a + d]$;
3. para todo o $d > 0$, e para todo o $M > y > m$ existe um c no intervalo $a - d \leq c \leq a + d$ tal que $f(c) = y$, no intervalo $[a - d; a + d]$.

Apesar de a definição acima funcionar na maior parte das situações, note-se por exemplo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

satisfaz as condições da definição acima (contraexemplo apresentado por outro utilizador do fórum) e, no entanto, não é contínua em $x = 0$, segundo as restantes definições de continuidade introduzidas. As definições apresentadas que são baseadas no conceito de limite tratam a continuidade nos pontos isolados de acordo com a noção de existência (ou não) de limite num ponto isolado.

Foram ainda apresentadas outras definições de continuidade (baseadas em vizinhanças ou em infinitésimos) que dispensam o cálculo de limites, e que podem facilitar imenso a lecionação deste conceito. De facto, o cálculo de limites (e a própria compreensão do conceito) é com frequência um sério entrave ao sucesso académico dos alunos, contribuindo para a sua desmotivação precoce em relação aos conteúdos de análise. Ainda a este propósito, Mastorides e Zachariades (2004) estudaram este assunto na perspetiva do conhecimento dos professores, argumentando que apesar de ser tomado como garantido que os docentes dominam bem as matérias em causa, nem sempre isso sucede condicionando ainda mais o processo de aprendizagem dos alunos.

As noções de continuidade de Ferreira (2005) e de Bernstein (1997) com recurso a vizinhanças ou a bolas abertas, dispensam a noção de limite (que deverá ser posteriormente lecionado de forma rigorosa, simplificando-se no cálculo de limites mais trabalhosos, caso estes não sejam necessários para outras unidades curriculares). Porém, têm como contrapartida a perda da noção intuitiva de “traçar o gráfico de f sem levantar a caneta”. Podem, no entanto, ser adaptadas para desconsiderar a continuidade nos pontos isolados – basta retirar o ponto x da vizinhança ou da bola aberta que o rodeia.

Assim, ao longo deste estudo vamos utilizar a definição 2.17 de Ferreira, baseada na noção de vizinhança, a qual reproduzimos novamente.

Definição 2.17 (Ferreira)

A função f é contínua no ponto a se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in D \cap V_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))).$$

Com base nas vizinhanças laterais explanadas na definição 2.1, podemos facilmente definir continuidade lateral à direita e à esquerda do ponto a .

Definição 2.17⁺ (Continuidade lateral à direita)

A função f é contínua à direita do ponto a se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in D \cap V^+_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))).$$

Definição 2.17⁻ (Continuidade lateral à esquerda)

A função f é contínua à esquerda do ponto a se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \forall x, (x \in D \cap V^-_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))).$$

Considerando que historicamente a noção de continuidade precede o conceito de limite (Thomas, Finney, Weir e Giordano, 2002), o que de alguma forma suscitou a inversão dos conteúdos lecionados no propósito deste estudo, sentimos a necessidade de definir a continuidade de uma função num ponto sem utilizar a noção de limite. Neste sentido, decidimo-nos pelo recurso à noção de vizinhança, seguindo a linha de pensamento de Campos Ferreira (2005).

Face ao exposto, consideramos que a lecionação dos conteúdos em análise pela ordem assim definida obviará as dificuldades manifestadas pelos alunos em relação aos conceitos de limite e de continuidade ministrados à data da implementação deste estudo.

Capítulo 3

A construção do conhecimento matemático

No presente Capítulo iremos analisar algumas metodologias teóricas utilizadas no processo de construção de conhecimento, nomeadamente, a Abstração em Contexto, a Teoria Comognitiva, as Regras de Pólya, a Argumentação e Prova e a Mediação Semiótica, com o intuito de decidirmos qual se adapta melhor ao estudo que se pretende realizar.

3.1 Abstração em Contexto

A Abstração em Contexto (AiC) é uma estrutura teórica que procura estudar a *construção* do conhecimento abstrato, habitualmente em sala de aula. Trabalhos pioneiros de Piaget (1970), Davydov (1990) e Dreyfus (2002), entre outros, introduziram esta questão na área da Didática da Matemática. Para Davydov, o conhecimento científico necessita de formas estruturadas de pensamento, que permitam a ligação de ideias e conhecimentos, por forma a enriquecer a realidade. Segundo este autor,

À medida que os alunos passam através de vários cursos, eles aprendem muitos factos variados sobre fenómenos e eventos históricos particulares, com esses factos frequentemente pouco inter-relacionados e não representando o conhecimento sistematizado, o que leva a uma confusão dos fenómenos e a uma explicação imprópria das causas. (p. 71)

Deste modo, mostra-se necessário existir uma racionalização destas ideias e conhecimentos, para que seja possível ascender ao concreto e alcançar a abstração. A abstração pode iniciar-se de uma forma simples e pouco desenvolvida, e terminar de uma forma mais elaborada e consistente. Note-se que a abstração contrasta com a generalização, pois nesta última pretende-se estender um conceito existente, mas sem mais desenvolvimentos ou reorganizações, em contraste com o que sucede com a abstração.

Freudenthal (1991), no seguimento das ideias de Piaget, definiu a *construção* de conhecimento matemático como um esforço reflexivo realizado pelo aluno em direção a uma *construção* prevista de antemão pelo matemático, numa perspetiva cognitiva. Para Freudenthal,

O professor que adere a essa perspetiva necessariamente cria matemática estruturalista. Se eu aceitasse o termo "construtivismo", gostaria de um programa com uma filosofia que concede aos aprendentes a liberdade de atividade. (p.143)

A abordagem de Davydov é sociocultural apesar de ter o mesmo propósito. Davydov procurou assim estudar as interações entre o professor e os alunos (e entre estes e a sua envolvimento no meio) por forma a compreender o processo de *construção* de conhecimento destes, lançando assim as sementes do modelo AiC. Atualmente, Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2015) preveem ainda uma maior flexibilização, no sentido em que o aluno pode atingir outra *construção* que não a prevista inicialmente.

Basicamente, podemos considerar que “Abstração” é uma atividade teórica que contempla um conjunto de tarefas realizadas por um ou mais indivíduos, motivadas por um determinado problema integrado num “Contexto”, que abarca a envolvimento pessoal e social dos indivíduos. Segundo Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2015), *Abstraction in Context (AiC)* é:

Um quadro teórico para o estudo dos processos de construção de conhecimento matemático abstrato, pois ocorre num contexto que inclui componentes matemáticos, curriculares e sociais específicos, bem como um ambiente de aprendizagem particular. (p. 186)

Atualmente, esta teoria é utilizada como suporte teórico em trabalhos que visam compreender a *construção* do conhecimento matemático, sendo referida em diversos estudos que procuram de alguma forma que os alunos almejem noções de vários níveis de dificuldade (Dreyfus (2012); Hershkowitz, Dreyfus e Tabach (2012) ou Kidron e Dreyfus (2008)).

3.1.1 Etapas da AiC

A AiC contém três etapas, designadas por *necessidade*, *emergência* e *consolidação* (Kidron e Dreyfus, 2008). De acordo com estes autores

A génese de uma abstração passa por um processo de três estágios, que inclui o surgimento da necessidade de uma nova construção, o surgimento da nova construção e a sua consolidação. A necessidade pode surgir a partir do desenho de uma atividade de aprendizagem, do interesse do aluno no tópico ou problema em consideração, ou numa combinação de ambos; sem essa necessidade, no entanto, nenhum processo de abstração será iniciado. (p. 303)

A *necessidade* ocorre quando o estudante percebe que precisa de novos conhecimentos para lidar com um certo problema, e permite estabelecer a ligação entre o conhecimento que já domina e a futura *construção* de novo conhecimento. É importante no sentido em que sem ela o estudante não se apercebe da importância desses conhecimentos, que poderiam evidentemente ser “debitados” pelo docente, mas que sem o devido enquadramento levantam a habitual questão “para que serve?”.

A *emergência* refere-se ao processo de aquisição de novos conhecimentos pelo estudante.

Através da recapitulação dos conhecimentos adquiridos, o estudante elabora uma nova *construção* de conhecimento, mais elaborada e complexa, que providencia uma adequada explicação da realidade. Procura-se nesta fase que os alunos elaborem uma *construção* vertical do conhecimento. Esta pode ser definida como o processo de *construção* de novo conhecimento matemático, dentro da área da matemática e através de métodos matemáticos. O processo compreende a reorganização e a integração das construções anteriores, e a utilização dessas construções como blocos para elaborar novas construções, aumentando o conhecimento matemático. (Hershkowitz, Hadas, Dreyfus e Schwarz, 2007).

Finalmente, a *consolidação* é um processo contínuo em que as noções adquiridas na *emergência* de novo conhecimento são analisadas de vários ângulos. As novas construções são utilizadas na resolução de problemas, e procura-se flexibilizá-las, testá-las e aperfeiçoá-las. Após esta fase, estas construções podem ser reutilizadas para construir mais conhecimento, num processo cíclico. Esta noção define a teoria da atividade, que se debruça sobre os processos cognitivos em contexto matemático e que defende que os resultados de atividades prévias se tornam artefactos (ver subsecção sobre Mediação Semiótica) para outros resultados.

Consideramos que a *construção* do conhecimento é feita juntando conhecimentos adquiridos, relevantes para lidar com o problema em análise para o qual os conhecimentos anteriores não são suficientes, de forma a atingir uma nova *construção*. O processo é similar à *construção* com peças de encaixe - as peças simples juntam-se para se obter peças mais complexas, que se juntam para obter figuras simples, que se juntam para obter figuras complexas, de acordo com as necessidades e interesses do construtor.

3.1.2 Modelo teórico RBC+Co

O processo de *emergência* de novo conhecimento matemático é a parte central da AiC e é habitualmente analisado à luz de três ou quatro ações epistémicas – *reconhecer* (Ação-R), *construir* (Ação-B) e *construção* (Ação-C), a que se pode juntar a *consolidação* (Co) – que compõem o modelo teórico RBC+Co (“Recognizing”, “Building-with”, “Constructing” e “Consolidation”).

Com base no trabalho de Hershkowitz, R; Schwarz, B; Dreyfus, T (2001), Kidron e Dreyfus (2008) afirmam que:

... escolheram usar ações epistémicas para modelar o segundo estágio central do processo de abstração. As três ações epistémicas que eles encontraram relevantes e úteis para os seus propósitos são reconhecer (R), construir com (B) e construir (C). Reconhecer ocorre quando o aluno reconhece que uma construção de conhecimento anterior específica é relevante para o problema com o qual ele está a lidar. Construir com é uma ação que compreende a combinação de construções reconhecidas, com o fim de atingir um objetivo localizado, tal como a atualização

de uma estratégia ou uma justificação ou a solução de um problema. O modelo sugere construir com como a ação epistémica central da abstração matemática. Construir consiste em montar e integrar constructos anteriores através de uma matematização vertical para produzir um novo constructo. Refere-se à primeira vez em que a nova construção é expressa pelo aluno, seja através da verbalização, seja através da ação. No caso da ação, o aluno pode, mas não precisa, estar totalmente consciente do novo constructo. (p. 304)

Este modelo epistémico não é rígido, pois pode existir sobreposição das ações epistémicas, mas é sempre iniciado pelo *reconhecer* (que designaremos por *Ação-R*). Nesta fase o estudante compreende que um determinado conhecimento matemático específico (*construção anterior*) é relevante para a resolução de um novo problema – como a ideia de continuidade para a noção de derivada ou, no nosso caso concreto, a noção de vizinhança para estudar a continuidade e os limites, e a representação gráfica de funções para o mesmo efeito.

Na fase do *construir com* (que nomearemos por *Ação-B*), o estudante combina os conhecimentos anteriores que considera relevantes para lidar com o problema em análise, e procura *construir* mais conhecimento através da *construção* vertical deste. Por *construção* vertical de conhecimento entende-se o processo de abstração que compreende a reorganização das construções matemáticas anteriores por forma a obter uma nova *construção*, ou seja, quando o aluno junta as “peças” de informação que possui para fazer uma nova *construção*, como na montagem de um puzzle. Surge, por exemplo, quando o aluno reconhece, através da representação gráfica de uma função, que as imagens dos pontos situados na vizinhança de um determinado objeto têm de se concentrar numa única vizinhança para a função ser contínua neste, e procura discernir o comportamento da continuidade em pontos isolados.

A *construção* (que denominaremos por *Ação-C*) ocorre quando a *construção* vertical de novo conhecimento é efetivada. Refere-se à primeira vez que o estudante utiliza ou expressa a nova *construção*, independentemente de o fazer de forma rudimentar e muito ligada ao problema em análise. Esta fase do processo *RBC* é considerada de grande importância e é o núcleo de toda a *AiC*. Por exemplo, quando o aluno *reconhece* que se uma função for contínua num certo ponto então ela terá limite nesse ponto. É de alertar, no entanto, que não se espera que nesta fase a nova *construção* esteja já *consolidada*, pois esse passo só ocorre na última fase da *AiC*. Por vezes o aluno nem se apercebe que está a utilizar uma nova *construção* nos seus processos de aprendizagem, ou utiliza-a ainda de forma incipiente ou mesmo deficiente e depende do contexto. É importante conseguir distinguir entre “*construir*” (*Ação-B*) e “*construção*” (*Ação-C*). Enquanto o termo *construir* se refere ao processo, a *construção* refere-se aos resultados de tal ação.

Muitas vezes não é fácil discernir as diferentes etapas do modelo *RBC*, até porque este se auto alimenta. Por vezes os alunos realizam construções, mas regressam ao reconhecimento e ao

construir de forma interativa. Dado que o *RBC* se refere à segunda etapa do modelo *AiC*, a consolidação (*Co*) não se engloba nesta metodologia. Quando queremos contemplar igualmente a terceira etapa do *AiC* (Hershkowitz, 2009), como sucede no presente estudo, recorreremos então ao modelo *RBC+Co*. Segundo esta autora,

De facto, a investigação deixou claro que o modelo RBC+C pode ser estendido para processos de abstração e consolidação numa escala de tempo de médio prazo, onde Consolidação é um processo pelo qual a construção se torna cada vez mais evidente, a consciência do aluno sobre a construção aumenta e o uso da construção torna-se mais flexível. (p. 4)

Assim, a *consolidação* é um processo nunca terminado através do qual os alunos se tornam conhecedores da sua *construção*, e conseguem usá-la de forma assertiva e abrangente (Dreyfus e Tsamir, 2004). Uma forma de comprovar que o processo de *consolidação* ocorre é quando o utilizador verifica que necessita da *construção* numa nova atividade, ou seja, através de um novo *reconhecimento*.

Conforme acima referido, no processo de abstração as ações epistémicas estão aninhadas de acordo com uma hierarquia flexível. A *construção* depende de *reconhecer* e de *construir*, mas a *construção* é mais do que a coleção de todos os *reconhecimentos* e do *construir*, atendendo que integra ainda as conexões entre todos estes blocos de conhecimento. De igual modo, as ações de *reconhecimento* estão aninhadas no *construir*. Por exemplo, um aluno pode *reconhecer* a necessidade de limites e continuidade para o cálculo da derivada, pode *construir* esta noção, mas não é por isso que saberá derivar.

Mais ainda, uma *construção* simples pode estar aninhada numa outra mais abrangente, de forma sucessiva. Esta situação origina o modelo *RBC+Co*, no sentido de indicar a importância da *consolidação*, pois este aninhamento sucessivo só é possível quando o aluno domina a *construção* realizada e desta forma alcança a *consolidação*. O modelo *RBC* é a lente teórica através da qual observamos e analisamos a dinâmica da abstração em contexto, permitindo fazer sucessivas aproximações consoante o grau de detalhe que se pretende.

A interligação entre as ações epistémicas é também evidenciada em Pimenta (2016). Esta investigadora realizou uma investigação com alunos de dez anos de idade (5.º ano de escolaridade), e no estudo da aritmética com a perspetiva *early álgebra* (a qual defende que se pode trabalhar a aritmética conduzindo os alunos mais novos a interpretar relações, expondo-os a ideias e ao uso de uma linguagem progressivamente mais formal), usou o modelo *RBC+Co* e concluiu que o processo de abstração se iniciou com o desenvolvimento de *Recognizing*. Porém, reforça a ideia de que esta ação epistémica e a de *Building with* foram essenciais à nova *construção* (*Constructing*). Ainda segundo aquela autora,

A consolidação manifestou-se através do desenvolvimento da ação epistémica Recognizing, quando os alunos adquiriram a percepção do conhecimento concebido com a resolução das tarefas aplicadas e que lhes poderia ser útil para conceberem a nova construção, ocorrendo durante o desenvolvimento das ações epistémicas Recognizing e Building with, ou durante o desenvolvimento destas duas ações. (p. 374)

Esta interligação entre as ações epistémicas é realçada por Dreyfus e Kidron (2006), ao afirmarem que a “Ação-C está intimamente ligada à Ação-R (a qual pode conduzir à interrupção, e posterior reassunção, dos processos de construção) e à Ação-B” (p. 333).

Pimenta (2016) considerou subcategorias das ações epistémicas,

Face à necessidade de se conseguir identificar a presença de cada ação epistémica, durante a resolução das tarefas, e de se efetuar uma leitura mais precisa das mesmas. (p. 69)

Com as subcategorias, a autora pretendia alcançar de forma mais precisa o surgimento da cada ação epistémica. O significado que Pimenta (2016) deu das subcategorias que considerou “*resultou do ajustamento da definição de cada ação epistémica à realidade do estudo apresentado*” (p. 70), tendo em linha de conta os próprios conceitos matemáticos que pretendia estudar. Assim, e para o seu estudo, e como exemplo, para a ação epistémica *Recognizing* considerou as subcategorias *Interpretação, Estruturas adquiridas e Regularidades*. Com elas, a autora almejava identificar melhor a interpretação dos enunciados que os alunos faziam, bem como o reconhecimento da utilidade de conhecimentos já adquiridos, ou seja, observar melhor a ação epistémica *Recognizing*.

Este estudo de Pimenta realça a ideia de que identificar subcategorias das ações epistémicas pode ser muito útil. Com elas pode-se observar melhor as ações epistémicas, logo, alcançar de forma mais precisa a *construção* do conhecimento matemático pelos alunos. Dreyfus e Kidron (2006) já haviam aberto o caminho para as subcategorias das ações epistémicas. Segundo estes autores, em muitas ocasiões tiveram dificuldade em identificar se um determinado acontecimento era parte da *Ação-R* ou da *Ação-B*, por exemplo. Isto levou-os a observar que “*estas ações exibiam uma grande variedade relativamente ao que até ali havia sido considerado.*” (p. 302), conduzindo-os a um refinamento da categorização das ações epistémicas. Concluíram, do estudo que realizaram, que as ações epistémicas surgiram de forma mais variada e com maior complexidade do que aquilo que era previsto no modelo *RBC* existente. Constataram o aparecimento de um novo tipo (*type*) significativo da *Ação-R* - o registo (mais do que simplesmente *reconhecer*) de informação não esperada obtida pela aluna participante do estudo a partir de fontes exteriores. Ao nível da *Ação-B* fizeram duas distinções (*type*) relacionadas com a natureza matemática do que estava a ser estudado (o fenómeno da

bifurcação associado ao estudo dos sistemas dinâmicos). A primeira distinção foi a de “*problem-solving*” e a segunda a de “*organizing the problem space*” (p. 319). Ainda para Dreyfus e Kidron (2006), as componentes da *Ação-C* foram numerosas, paralelas e interagindo de modos complexos, tendo-as associado em quatro grupos. Afirmam ainda que “*a complexidade da Ação-C deve-se também à complexidade da situação matemática que constitui o objeto de aprendizagem*” (p. 333). Estes autores referem também que é importante identificar a categorização refinada das ações epistémicas.

Os investigadores que recorrem ao *RBC* defendem que a teoria é construída através da análise dos dados recolhidos através da experimentação, e que esses dados servem igualmente para validar a teoria desenvolvida (Hershkowitz, 2009). Neste particular, surge como especialmente relevante a recolha e análise de dados sobre as produções dos alunos, que será discutida nos capítulos seguintes. Hershkowitz (2009) apresenta ainda um exemplo prático da aplicação da metodologia *RBC*, onde ressalva a importância de se alocarem aulas para a componente *Ação-B* da metodologia, para que os alunos consigam *consolidar* conceitos anteriores, refinando e modificando a *Ação-R* e a *Ação-B* de forma a obter diferentes e mais assertivas ações de *construção* (*Ação-C*).

Em Hershkowitz *et al* (2007) é também realçada a importância do “conhecimento partilhado”, em que diversos indivíduos contribuem para a *construção* do conhecimento comum. Estes autores referem-se a este aspeto da seguinte forma:

Embora tenhamos demonstrado que o conhecimento era altamente diversificado e subjetivo, poderíamos definir o conhecimento partilhado do conjunto de forma analítica e objetiva. O facto de os alunos no conjunto continuarem a trabalhar em colaboração para construir conhecimento e construir com ele em atividades futuras, levou-nos a identificar este conhecimento partilhado não apenas ad hoc mas também post hoc, isto é, através da observação da consolidação do conhecimento partilhado. Pode ter sido a existência desse conhecimento partilhado que permitiu aos alunos continuarem a intervir de forma produtiva numa sucessão de atividades de aprendizagem. (p. 65)

Esta situação é a habitual em sala de aula, pelo menos nas aulas (como as que integram a parte de obtenção de dados deste trabalho) em que os alunos têm um tempo para realizar tarefas e podem interagir entre si, e não somente com o professor. Segundo aqueles autores, o conhecimento total produzido pela turma é habitualmente superior à soma dos conhecimentos individuais.

Nas secções seguintes são apresentadas outras metodologias teóricas habitualmente utilizadas na investigação em Didática da Matemática. Apesar destas não serem explicitamente utilizadas neste trabalho, merecem uma referência neste texto já que correspondem a outras abordagens

igualmente válidas no contexto da investigação em Didática da Matemática.

3.2 A Teoria Comognitiva

Na metodologia *AiC* o enfoque é fundamentalmente colocado no aluno, que constrói o seu próprio conhecimento, cabendo ao professor a tarefa de auxiliar nesse processo. Também na teoria comognitiva (Sfard, 1998) o centro é o aluno, e é sobre a perspetiva da aprendizagem deste que a teoria é desenvolvida.

Considera-se na teoria comognitiva que o processo de aprendizagem se divide na aquisição e na participação. Enquanto a aquisição se centra na acumulação de saberes, já a participação pode ser descrita como a habilidade de comunicar dentro de uma certa comunidade (no caso em concreto a matemática) e de acordo com as regras por ela estabelecidas.

No desenvolvimento do processo da participação, Sfard constrói uma nova teoria, denominada “teoria comognitiva” do discurso matemático de forma a encapsular tanto a comunicação intrapessoal como a interpessoal. De acordo com a autora,

Todos os nossos conceitos e crenças têm as suas raízes num número limitado de ideias fundamentais que cruzam limites disciplinares e são transportados de um domínio para outro pela linguagem que usamos. Um olhar pelo discurso atual sobre aprendizagem deve ser suficiente para perceber que hoje em dia a pesquisa educacional está entre duas metáforas que, neste artigo, serão chamadas por metáfora de aquisição e metáfora de participação. Ambas estão simultaneamente presentes nos textos mais recentes, porém, embora a metáfora de aquisição seja provavelmente mais proeminente em escritos mais antigos, os estudos mais recentes são muitas vezes dominados pela metáfora de participação. (p. 5)

Os diferentes tipos de comunicação são referenciados de *discurso*, os quais se encontram em constante evolução e crescimento, aumentando a sua complexidade. Assim, a aprendizagem de um aluno será definida pelo seu *discurso individual*. Essa aprendizagem será naturalmente influenciada pelo *discurso do professor*, pelo que é fundamental discernir sobre o modo como os professores realizam o seu *discurso*. Existem quatro características que descrevem e distinguem os diferentes tipos de *discurso*:

- uso de palavras específicas durante o discurso;
- recurso a objetos visuais, como diagramas;
- recurso a narrativas, como definições, teoremas e equações;
- recurso a rotinas, caracterizadas pelos padrões repetitivos do discurso e consistindo em métodos similares de resolver exercícios ou construir provas, por exemplo.

Na perspetiva do professor, Viirman, Attorps e Tossavainen (2010) focam a sua atenção nas

rotinas e regras no *discurso dos professores*. As primeiras consideram as propriedades dos objetos do *discurso* e as segundas dizem respeito às ações do discursante.

Numa rotina é essencial determinar o como e o quando uma ação é apropriada e, no caso particular da docência, estas questões colocam-se primariamente em como e quando introduzir um novo conceito matemático. É importante saber quando introduzir uma definição de modo formal ou quando se deve adotar a perspectiva informal.

Apesar da presente investigação se centrar na Abstração em Contexto, e no modelo teórico *RBC+Co*, não deixaria de ser interessante, por exemplo, estudar o *discurso do aluno* e a sua ligação às várias etapas do modelo teórico *RBC+Co*. Por exemplo, se os alunos utilizam corretamente as terminologias (vizinhança, limite, continuidade no ponto, ...) então provavelmente já terão ultrapassado a fase do “*reconhecer*” do modelo *RBC+Co*. De igual forma um aluno que no seu discurso utiliza objetos visuais e narrativas quase certamente que atingiu pelo menos a fase da *construção*, e a *consolidação* será almejada quando o estudante recorrer a rotinas durante o seu discurso. Esta será uma ideia que poderá ser desenvolvida em futuros trabalhos.

3.3 As Regras de Pólya

George Pólya teve uma prolífera carreira científica de mais de sete décadas, durante as quais publicou um vasto número de livros, entre os quais destacamos “How to Solve it” publicado originalmente em 1945, existindo uma versão em português de 1975 (Pólya, 1975). Mais tarde, Schoenfeld (1985) publicou uma heurística de resolução de problemas baseada nas ideias de Pólya. Em Davis e Hersh (1995), estas e outras ideias são desenvolvidas com uma abordagem mais atual ao tema.

Pólya acreditava que existe uma arte da descoberta e que a capacidade de descobrir e de inventar podem ser desenvolvidas nos estudantes, através de um método que os alerte para os princípios da descoberta e que os leve a aplicá-los. As regras utilizadas por Pólya (1975) são

Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguiremos quatro fases de trabalho. Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (p. 3)

Resumidamente, podemos considerar as regras de Pólya como as seguintes:

- compreender o problema;

- obter um plano;
- realizar o plano;
- examinar a solução obtida.

Estas regras podem ainda ser subdivididas e utilizadas de forma pessoal, consoante a estratégia escolhida.

Aproveitando as ideias de Pólya, Schoenfeld (1985) compilou um esquema de princípios heurísticos, frequentemente utilizados ao nível do ensino superior. Em súmula, a tabela desenhada por Schoenfeld contempla os seguintes passos. Em primeiro lugar, a análise do problema em estudo. Sugere-se que se comece pela representação gráfica deste, caso seja possível, passando-se depois ao exame dos casos especiais, e finalmente à simplificação do problema em causa. Segue-se a exploração do problema, considerando inicialmente outros problemas que lhe sejam equivalentes, passando de seguida a problemas ligeiramente modificados e posteriormente para problemas muito modificados. Em último lugar, procede-se à verificação da solução, fazendo-a passar por testes inicialmente específicos e finalmente gerais, de modo a confirmar a sua integridade.

Na investigação em torno da resolução de problemas é incontornável o legado deixado por Pólya.

3.4 Argumentação e Prova

Boero desenvolveu um conjunto de modelos teóricos (Boero, Douek, Morselli e Pedemonte, 2010; Boero, 2011), baseados nos trabalhos basilares de Pedemonte (2007), Toulmin (1974) e Habermas (2003), que procuram desenvolver o conhecimento através de uma discussão abrangente e unificada, baseada nas noções de hipótese, prova e verificação da hipótese, com base na ligação desta com os dados. Segundo Boero (2011),

O desenvolvimento da consciência dos alunos sobre as "regras" da argumentação e da prova em matemática é um dos principais desafios para a educação matemática. Esta declaração expressa uma convicção amplamente compartilhada entre os educadores de matemática nas últimas três décadas, apesar de diferentes posições sobre quando desenvolver essa consciência, quais elementos devem ser conscientes e como lidar com eles na sala de aula. (p. 3)

Sucintamente, o processo contempla quatro momentos chave (Perry, Molina, Camargo e Samper, 2011), que integram o modelo de argumentação de Toulmin (1974) e o modelo de pensamento racional de Habermas (2003), os quais se sumarizam seguidamente.

- **Tipo de argumento.** Aceitar que uma demonstração envolve vários tipos de argumentos que os estudantes podem utilizar. De acordo com Toulmin (1974), cada argumento tem

como componentes a hipótese, as premissas que originaram o colocar da hipótese, e a prova. Os argumentos podem ser divididos em dedutivos, indutivos e abdutivos. Os argumentos dedutivos são baseados na lógica e derivam de uma regra geral para a sua aplicação. Desta forma, se o princípio geral é verdadeiro, também a sua aplicação o será. Por exemplo, se todos os animais respiram, então o meu gato respira. Já os argumentos indutivos são diferentes. Estes são baseados em observações particulares de certos fenómenos, procurando-se almejar uma generalização destes. Assim, partem de uma aplicação e procuram alcançar uma generalização, ao contrário dos argumentos dedutivos, pelo que as conclusões atingidas pelos métodos indutivos não são certas, mas apenas possíveis. Normalmente o progresso científico é atingido com argumentos indutivos: observam-se fenómenos, e procuram-se formular hipóteses gerais que os expliquem. Os argumentos abdutivos são os menos plausíveis de todos, pois com base na informação disponível (que pode estar incompleta) procura-se a explicação mais plausível para esta. Por exemplo, com base nos sintomas descritos por um paciente, um médico procura indicar a doença mais plausível que os explique. No entanto, a doença indicada pelo médico pode não explicar alguns dos sintomas descritos pelo paciente, ou alguns dos sintomas da doença podem não ser sentidos pelo paciente.

- **Aspeto teleológico.** Numa demonstração é necessário não esquecer o resultado que se pretende alcançar, de forma a que todas as ações e procedimentos a realizar tenham um objetivo claro.
- **Aspeto epistémico.** Para uma demonstração ser aceite é necessário que seja validada pela comunidade, neste caso matemática; para tal é fundamental que cumpra certos requisitos desta área de conhecimento.
- **Aspeto comunicativo.** Não basta apenas conseguir efetuar uma demonstração, é também essencial conseguir comunicá-la de modo perceptível (vertente sociocultural).

Assim, as noções de prova e de demonstração matemáticas são um indicador do pensamento matemático avançado. Produzir ou ler uma prova ou demonstração requer a habilidade de articular várias ações e conhecimentos. Perry, Molina, Camargo e Samper (2011), a respeito do trabalho realizado numa disciplina de Geometria Eucliana, indicam que,

Para nós, a atividade de prova inclui dois processos, não necessariamente independentes ou separados. O primeiro consiste em ações que sustentam a produção de uma conjectura. Essas ações geralmente começam com a exploração baseada em computador de uma situação geométrica para procurar regularidades, seguida da formulação de conjecturas e da respetiva verificação de que o facto geométrico enunciado é verdadeiro. As ações do segundo processo estão concentradas na procura e organização de ideias que se tornarão uma prova. Este último termo refere-se a um argumento de natureza dedutiva baseado num sistema teórico de referência do qual a afirmação comprovada pode ser um

teorema. (p.2)

Especificamente, Boero (2011) foca a sua atenção na exploração da análise de informação baseada nas noções de hipótese, prova e verificação da hipótese na ocasião em que é pertinente tal atividade e no como a orientar (ênfase no trabalho do professor em sala de aula). Também refere que, no decorrer da atividade de argumentação e prova, novas questões vão surgindo e torna-se fundamental saber como as explorar, à luz destes conceitos.

Desta forma, cada vez mais se torna necessário explorar como, quando e o que ensinar aos nossos alunos (particularmente no ensino superior) para que estes sejam capazes de aprender e dominar os conceitos de argumentação e prova.

3.5 Mediação Semiótica

A mediação semiótica pode ser definida como o uso ou a apropriação de sinais e artefactos enquanto faceta do desenvolvimento psicológico, exclusivamente por seres humanos (Vygotsky, 1978). É célebre a frase de Vygotsky, indicada em Dahms, Geonnotti, Passalacqua, Schilk, Wetzel e Zulkowsky (2008),

O animal só pode ser treinado. Só pode adquirir novos hábitos. Pode através de exercícios e combinações aperfeiçoar o seu intelecto, mas não é capaz de desenvolvimento mental através da instrução no sentido real da palavra. (p. 4)

Os artefactos compreendem, entre outros, a linguagem nas vertentes oral e escrita, mapas de todo o tipo e instrumentos científicos e musicais. Na escola, os artefactos incluem todo o material escolar, mas também o quadro e o computador. Os sinais são por vezes confundidos com os artefactos, mas referem-se ao que é produzido com a utilização dos artefactos (como por exemplo novos artefactos).

A mediação semiótica ocorre em sala de aula, já que o ensino pode ser considerado como uma relação entre os estudantes e o conhecimento, mediada pelo professor. Esta relação contempla a introdução, exterior ao aluno, de uma ligação ou sinal intermédio que faz a conexão entre um estímulo (que pode ser um problema matemático) e a resposta a este. Assim, o uso de artefactos, como por exemplo a calculadora, no acompanhamento de uma tarefa que envolve tanto professor como alunos, utiliza e gera sinais entre os participantes. Algumas destas ligações ou sinais intermédios podem ainda ser vistos como artefactos cognitivos (Bussi e Mariotti, 2008), na medida em que representem novos trechos de conhecimento que pode ser reutilizado. Na matemática, a mediação semiótica procura fazer a ponte, a cargo do professor, entre o conhecimento intuitivo e o conhecimento científico. De acordo com Bussi, Corni, Mariani e Falcade (2012),

O processo de ensino-aprendizagem começa com o surgimento dos significados

pessoais dos alunos em relação ao uso do artefacto. O surgimento é testemunhado pela aparência de textos situados e a sua evolução em textos matemáticos/científicos deve ser promovida pelo professor através de atividades sociais específicas. Em resumo, o processo de mediação semiótica consiste no processo de evolução que tem o seu primeiro passo no surgimento de significados pessoais relacionados à realização de uma tarefa e desenvolve-se na construção coletiva de sinais compartilhados relacionados ao uso do artefacto e a matemática/física a ser aprendida. ... O papel do professor em cada etapa é diferente e crucial. Por exemplo, ele varia a partir da escolha de tarefas adequadas que exploram o potencial semiótico de um artefacto. (p.17 e 18)

Há, assim, no processo de ensino-aprendizagem um papel muito importante quer para a mediação do professor, quer para o uso de artefactos.

3.6 Síntese

A importância de se compreender como é que os alunos constroem o seu conhecimento matemático de continuidade e de limites num contexto de sala de aula, onde o professor desempenha um forte papel de mediação levou-nos a abraçar o modelo *RBC+Co*. Trata-se de uma ferramenta teórica poderosa que nos permitirá identificar as abstrações dos alunos. As suas ações epistémicas (ações do pensamento que se tornarão visíveis através de ações externas produzidas pelo aluno - exposição/representação do raciocínio) serão identificadas e sequenciadas, com o recurso a subcategorias construídas de acordo com o que se entende por cada ação epistémica e pela matemática que se vai trabalhar. Procurar-se-á também desvendar as relações que são estabelecidas entre as ações epistémicas. Esperamos, assim, ficar a compreender melhor como é feita a *construção* do conhecimento matemático da continuidade e dos limites pelos alunos que participaram no presente estudo.

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

O presente capítulo inicia-se com a descrição das especificidades relativas a uma metodologia qualitativa, segundo diversos autores, e com a justificação das opções metodológicas adotadas pela investigadora neste trabalho. Seguidamente, encontram-se caracterizados o espaço em que decorreu o estudo, bem como os alunos em que ele incidiu. Será igualmente analisada a estrutura que norteou a sua implementação, assim como o processo de recolha, tratamento e análise de dados.

4.1 Opções metodológicas

A definição e aplicação de uma correta metodologia de investigação é uma etapa fundamental na investigação em Didática da Matemática. Historicamente, a investigação portuguesa nesta área é baseada na escola anglo-saxónica, que produziu boa parte dos investigadores pioneiros na Educação Matemática (Ponte, 2008). Esta tradição de investigação é sustentada pela conceptualização teórica dos estudos, fazendo um balanceamento entre a relevância dos aspetos a estudar e o seu enquadramento teórico. As metodologias adotadas são essencialmente qualitativas e interpretativas, com recurso frequente a estudos-caso em contraponto com as abordagens positivistas que procuram obter generalizações e validações estatísticas (Ponte, 1994). São igualmente utilizados outros *designs* de investigação, como os estudos colaborativos, as experiências de ensino e de formação e as investigações dos professores sobre as suas próprias práticas de ensino.

Os estudos nesta área visam uma miríade de temas onde se incluem o conhecimento do professor, a sua formação e o seu desenvolvimento profissional, e também estudos sobre a aprendizagem da Matemática pelos alunos. Nestes são abordadas questões quer sobre a *construção* de conhecimento, de uma forma geral, quer sobre a *construção* de conhecimentos sobre conceitos e temas específicos (Ponte, 2008), como é o caso concreto deste trabalho em relação à aprendizagem de limites e continuidade. Existem ainda outros estudos não enquadráveis nas categorias anteriores, como os estudos sobre o desenvolvimento e adequação dos currículos. Este último campo é sempre pertinente, pois, a implementação curricular é um aspeto crucial no ensino e aprendizagem da Matemática e, também, atendendo às diversas reformas curriculares que ciclicamente são propostas, em todos os níveis de ensino.

Em relação aos estudos sobre a aprendizagem dos alunos, registam-se três grandes tendências. Uma primeira reporta-se aos estudos de matriz cognitivista, sociocultural ou antropológica. Neste campo inserem-se trabalhos como o de Carreira (1998), visando o estudo de processos de

metaforização na procura de significados para modelos e conceitos matemáticos. Esta autora obteve um modelo semiótico para a compreensão desse processo e estudou a sua aplicabilidade. Uma segunda tendência visa a aprendizagem de temas matemáticos específicos. Aqui inserem-se, por exemplo, trabalhos como o de Monteiro e Pinto (2006) na procura de factos teóricos e empíricos para analisar a aprendizagem dos números racionais, nomeadamente em relação às frações e suas estratégias formais e informais de análise de problemas. Finalmente, uma terceira tendência aborda a aprendizagem quando o ensino é efetuado através de métodos inovadores. Jesus e Serrazina (2005) colocam o enfoque nas tarefas de natureza investigativa, estudando a respetiva inserção nos primeiros anos de escolaridade e procurando discernir a sua influência no aumento das capacidades dedutivas, indutivas e comunicativas dos estudantes. O presente trabalho tem traços das segunda e terceira tendências aqui elencadas - estuda a construção dos conceitos de continuidade e de limite, pelos alunos, através de uma sequência de ensino diferente da usual, onde primeiro se lecionou a continuidade e depois os limites.

A metodologia qualitativa é habitualmente baseada numa perspetiva interpretativa dos fenómenos em estudo. Esta perspetiva assenta em dois conceitos basilares, a fenomenologia e a interação simbólica. A fenomenologia procura estudar os acontecimentos enquadrados nas interações sociais entre os indivíduos. Por sua vez, a interação simbólica defende que os acontecimentos não têm significado *per si*, antes são definidos pelas pessoas através da interação social entre indivíduos, constituindo um processo interpretativo que cada pessoa vive diariamente ao lidar com diversos símbolos (Ponte, 1994).

De acordo com Denzin (1989), a investigação qualitativa preocupa-se fundamentalmente com os processos e as dinâmicas, e está dependente do investigador. Baseia-se na descrição densa (*thick description*) dos fenómenos, apresentando com grande detalhe o contexto e as interações que ligam os diversos intervenientes no processo. Procura-se ir além dos factos e aparências, podendo o processo indutivo originar reformulações ao longo do processo investigativo.

Na investigação qualitativa, o investigador assume um papel de especial relevo. É ele que define não só os atributos que pretende estudar, mas igualmente os métodos a utilizar na recolha de dados e o ambiente em que esta recolha deve ser feita (Domingos, 2003). Em Bogdan e Bicklen (1994) são definidas cinco características que definem a investigação qualitativa. Estas não têm necessariamente de ser aprofundadas em todos os trabalhos, mas definem as traves mestras nas quais esta investigação deve assentar. Neste trabalho não se pretende fazer uma descrição exaustiva dessas características, mas sim introduzi-las e relacioná-las com o estudo prático realizado.

A principal fonte dos dados é o ambiente natural onde se desenrola o estudo. A comparência do investigador no ambiente natural é fulcral, com vista a compreender não só as ações observadas, mas também o contexto em que estas se inserem. No caso concreto do presente

trabalho, o ambiente natural foi a sala de aula, tendo o investigador comparecido nas aulas ministradas sobre o assunto. Em virtude de as aulas não terem sido lecionadas por ele, mas sim por outro docente, existiram naturalmente interações estudante - professor - investigador. Se por um lado estas interações introduziram um novo sujeito no processo de aprendizagem, por outro lado permitiram ao investigador estar mais disponível para, em sala de aula, registrar os processos de construção de conhecimento. No contexto educativo, o investigador tem como incumbência a observação e a condução da investigação, procurando recolher os dados com o máximo de precisão e detalhe, ao passo que o professor tem como preocupação primordial a leção e a aprendizagem dos alunos. Também ao nível dos objetivos existem diferenças, atendendo a que o investigador tem por missão a recolha dos “melhores” dados possíveis, e o professor procura que os alunos atinjam competências específicas e obtenham o sucesso académico. Neste sentido, parecem existir vantagens em que o investigador e o docente sejam diferentes (Domingos, 2003), tal como sucede no presente trabalho.

A observação participante ocorre quando o investigador se integra na população em estudo, o que, convenhamos, pode ser extremamente complexo de alcançar, principalmente quando o investigador tem um estatuto diverso dessa população, como um professor numa sala de aula. O investigador procura assim compreender as interações entre os diferentes membros da população em estudo, sem interferir nestas. Apesar de ser um processo naturalmente complicado, permite compreender com alto grau de exatidão as dinâmicas do grupo em análise e dessa forma extrair padrões de comportamento e aprendizagem.

Complementa as considerações anteriores a pesquisa bibliográfica que é também uma forma relevante de investigação qualitativa, a qual não pode ser descurada em qualquer trabalho. Um investigador bem preparado, com a noção do que é expectável suceder com, por exemplo, a realização de uma experiência de ensino, tem à partida mais hipóteses de ser bem-sucedido pois pode antecipar as dificuldades dos alunos, e prever as construções de conhecimento que estes deverão realizar. Além da consulta de trabalhos anteriores sobre o mesmo tema, ou sobre temas relacionados, a análise das produções anteriores dos alunos em estudo (como testes ou exercícios) aumenta a perceção do investigador quanto à problemática em análise e quanto às características concretas desse grupo específico de alunos.

A investigação qualitativa, por não ser quantitativa, não depende das técnicas usuais de estatística, nomeadamente as inferenciais. Não se pretende calcular intervalos de confiança ou testes de hipóteses, de forma a estimar ou prever características gerais da população. O objetivo é aproveitar toda a riqueza dos dados, respeitando as formas como estes foram recolhidos e a singularidade de cada resposta. Tenha-se em vista que a investigação qualitativa é essencialmente descritiva. Compreende-se assim que não se pretende utilizar as ferramentas da estatística inferencial, mas organizar a informação recolhida sobre a forma de tabelas, imagens e mesmo registos de vídeo e áudio. O objetivo não é a redução dos dados, pretendendo-se que estes conservem toda a sua riqueza e diversidade. O enfoque é direcionado para a

diversidade e especificidade de cada indivíduo. Mais ainda, os processos são muitas vezes tão ou mais importantes que os resultados. As formas como os alunos organizam a construção do conhecimento (ver capítulo anterior) é vital em todo este processo. Procura-se descobrir em que momento e de que forma é atingida determinada noção, e se esta é integrada no discurso matemático dos discentes, funcionando posteriormente para cotejar problemas mais complexos e elaborar outras construções. Na investigação qualitativa em contexto educacional, é ainda relevante estudar a influência das expectativas do professor na construção do conhecimento dos alunos.

Bogdan e Bicklen (1994), numa das mais conhecidas obras sobre esta matéria, referem que as múltiplas formas de interpretar as experiências dependem das relações entre os diversos intervenientes no processo de aprendizagem. É necessário que o investigador procure compreender o processo de construção de conhecimento dos alunos envolvidos, sem, no entanto, prescindir do seu ponto de vista. Neste sentido, adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa, inserida no paradigma interpretativo (Bogdan e Biklen, 1994).

A experiência de ensino utilizada neste trabalho é comumente aplicada em estudos qualitativos no ensino, principalmente quando o investigador tem acesso à sala de aula. Procura descortinar os processos de desenvolvimento e construção de conhecimento matemático (ver Capítulo 3) e estudar os diferentes comportamentos dos alunos, bem como a influência que estes têm na dita construção de conhecimento. É expectável que o ensino influa sobre estes processos, e cabe ao investigador a tarefa de descobrir de que forma é que tal sucede. Existe neste caso uma interação entre professor e aluno, mas também entre alunos, o que permite obter múltiplos dados de interesse. Na situação em causa, é vantajoso que nas resoluções das tarefas os alunos expliquem à restante turma de que forma é que alcançaram determinados resultados, e que o professor corrija em voz alta as questões e debata as diferentes construções de conhecimento utilizadas pelos discentes. Embora tal estratégia possa ser aplicada em situações em que existem apenas um ou dois alunos, o ideal é a turma ter uma dimensão razoável para que existam diferentes abordagens às questões e para que o processo de construção de conhecimento seja não apenas individual, mas também conjunto e por via disso mais enriquecedor.

4.2 Caracterização dos alunos e descrição do contexto

Dos 40 alunos inscritos na UC de MQAP no ano letivo em que foi realizada a experiência, 17 estavam a repetir a frequência e 23 eram novos alunos. Cerca de um terço dos alunos (quase todos dos novos alunos) têm Matemática A ou B ao nível do 12.º ano. A formação dos restantes alunos varia entre a Matemática Aplicada às Ciências Sociais do 12.º ano, o 11.º ano de Matemática das escolas profissionais e o 9.º ano de Matemática para alguns alunos que optaram por formação secundária na área de Humanidades.

À data de implementação do presente estudo, apenas vinte e dois alunos encontravam-se a frequentar a UC, sendo, porém, de notar que nem todos realizaram a totalidade das questões. Acresce que alguns dos discentes eram repetentes e, como tal, frequentavam UC's de anos mais avançados. Estes alunos tinham algumas das aulas semanais total ou parcialmente sobrepostas, o que condicionou a sua assiduidade. Compreende-se assim que neste enquadramento não seria produtivo analisar as respostas de todos os alunos, já que os que não compareceram à totalidade das aulas realizaram as tarefas propostas de forma incompleta. Por outro lado, de entre os que responderam a todas as questões, alguns também o fizeram de forma incipiente (várias respostas em branco ou quase em branco). Finalmente, não seria exequível analisar de forma consistente a produção de um grande número de respondentes, o que resultaria num documento demasiado extenso. No final, e considerando o supra elencado, dos vinte e dois participantes iniciais seleccionámos apenas dois para a análise de produções escritas, designados daqui em diante por AF e DV, pelo seu acompanhamento e interesse nas aulas. Resta acrescentar que a análise dos comentários orais, efetuados em aula, foi realizada considerando as contribuições de todos os alunos presentes.

O docente responsável pela UC aceitou colaborar neste estudo piloto, concordando em disponibilizar quatro aulas, de 120 minutos cada, para a leção dos conceitos de limite e continuidade da forma pretendida. Por esse motivo, a autora deste trabalho disponibilizou-lhe os materiais pedagógicos necessários (exercícios, bibliografia, etc.) e colaborou nas aulas sobre o tema, quer acompanhando e registando o trabalho dos alunos, quer completando as interações do docente com a turma de forma a acompanhar o processo de construção de conhecimento pelos alunos presentes nas aulas.

4.3 Implementação

No final da aula que antecedeu o início do estudo da continuidade, foi apresentada sumariamente aos alunos da UC a proposta pedagógica. Após este procedimento introdutório, todos os alunos tiveram de responder, de forma individual e em papel, a uma primeira questão (Questão 1 a) e 1 b) sobre continuidade, indicadas na secção 5.6). Com a resposta a esta questão pretendeu-se identificar o conhecimento preliminar dos alunos acerca da noção de continuidade, sendo que, todavia, esta questão não foi corrigida.

Nas aulas subsequentes o processo foi similar. O docente foi distribuindo as questões, de dificuldade crescente, visando o estudo da continuidade de uma função, quer num ponto quer no seu domínio. Após a realização de um conjunto de tarefas, os alunos responderam novamente à questão inicial, procurando-se aferir se estes conseguiram ou não abarcar os conhecimentos pretendidos e evoluir em relação ao seu conhecimento inicial. Só após esta fase a noção formal de continuidade foi debatida, e mais tarde escrita de acordo com a definição 2.17 da página 28.

Para o estudo dos limites, o processo decorreu de forma análoga à acima descrita. Após a formalização de acordo com a definição 2.11 da página 21, procurou-se ainda que os alunos conseguissem ligar de forma consistente os conceitos de vizinhança, continuidade e limite, de forma a discernir a ocorrência de uma *construção* efetiva de conhecimento sobre esta matéria.

Atendendo a que seria difícil, em aula, registar toda a discussão ocorrida aquando da resolução das tarefas propostas, estas foram gravadas, obtidas as devidas autorizações e garantindo a utilização dos dados para fins meramente académicos. Desta forma, foi possível recolher um manancial de informação quer em relação à componente escrita (respostas individuais às questões) quer em relação à componente oral (gravação vídeo da discussão dos problemas em estudo), na qual os diálogos mais relevantes para a resolução de cada questão, contendo as interações entre os alunos e destes com o professor, são transcritos sumariamente nas subsecções dedicadas à análise de cada questão.

4.4 Recolha, tratamento e análise de dados

A recolha de dados efetuou-se exclusivamente em ambiente de sala de aula, de três formas distintas: através dos registos audiovisuais (RAV) das discussões promovidas antes e após a resolução das questões por parte dos alunos, bem como pelos seus registos escritos (RA), e ainda pelos registos efetuados pela investigadora (RI) sempre que se revelou necessário completar algo que verbalmente não se consegue evidenciar.

Cada questão foi primeiramente projetada no quadro, sem que fossem tecidas grandes considerações sobre a sua resolução. Todas as questões foram respondidas de forma individual e em papel pelos estudantes, sem que, no entanto, se tenha impedido a sua simultânea discussão pela turma, durante o período de resolução. Nesse período os alunos que o pretenderam consultaram o docente da UC e a autora do estudo quando tinham dúvidas particulares, casos em que apenas se revelaram pequenas “pistas” individuais para auxiliar aqueles que mais dificuldades sentiam. Após a entrega das resoluções à autora do estudo, as questões e as produções dos alunos foram discutidas em aula, sendo este debate mediado pelo professor responsável e pela investigadora, procurando-se assim contribuir para o processo de construção de conhecimento matemático, abstrato e avançado, por parte dos alunos. Após a fase de discussão, todas as questões foram corrigidas no quadro por forma a garantir que, como habitualmente nesta UC, todos os alunos têm acesso à correta resolução dos problemas.

A análise dos dados recolhidos, referentes à resolução de cada questão, foi efetuada em três etapas distintas: (1) análise de primeira ordem, a qual inclui as transcrições dos registos audiovisuais das discussões das questões, ocorridas em aula, entre alunos e professor, incluindo os registos da investigadora, e a digitalização dos registos escritos dos alunos; (2) análise de segunda ordem, que se iniciou com a definição das categorias e subcategorias respeitantes às ações epistémicas do modelo *RBC+Co*, e posterior aplicação à análise de cada questão, de

acordo com o problema de estudo e referentes teóricos estabelecidos; (3) análise de terceira ordem, a qual consistiu na análise transversal de cada uma das categorias definidas na etapa anterior, pretendendo verificar se todas as subcategorias foram evidenciadas em cada uma das ações epistémicas e compreender como se relacionaram e que influência tiveram no desenvolvimento dessas ações, assim como analisar a manifestação das ações epistémicas e as relações existentes entre estas, novamente para todas as questões.

4.4.1 Análise de primeira ordem

As transcrições dos registos audiovisuais das discussões das questões, ocorridas em aula, entre alunos e professor, foram efetuadas em diferentes documentos para cada uma das questões no processador de texto *Word*, da *Microsoft*, em formato editável, com a extensão *.docx*, e ainda em formato portátil, com a extensão *.pdf*. Procurou-se reproduzir fielmente as intervenções dos alunos (AF e DV) e do professor (P), incluindo os registos da investigadora (RI) sempre que estes serviam para contextualizar algumas intervenções. As intervenções foram ainda numeradas sequencialmente, em cada documento, como se demonstra no seguinte exemplo:

- AF3: Então é só fazer uma bola no sítio correto...
- RI4: AF refere-se a uma bola fechada.
- AF5: Temos de fechar o ponto 1.
- P7: Mas qual deles?
- DV8: Ah! Tenho de fechar **UM** deles!

Figura 4.1 - Exemplo de um excerto das transcrições

Procurou-se refletir a entoação dada pelos alunos e pelo professor através da pontuação utilizada e da formatação do texto aplicada.

Foram ainda utilizados parêntesis retos sempre que os registos da investigadora eram essenciais durante uma intervenção, não estando estes numerados, por exemplo: “*DV9: Vai ser uma “coisinha” [RI: faz o gesto de um retângulo] que apanhe todos os pontos.*”, ou em conjunto com reticências quando não foi possível apreender alguma passagem, como em: “*AF26: Professor! Não é contínua, pois não? [...] Tem uma paragem...*”.

Os registos escritos dos alunos foram digitalizados para formato portátil (.pdf) tendo sido efetuadas capturas de ecrã parciais de cada um (em formato .png ou .jpg), de modo a incluí-las na análise posterior

4.4.2 Análise de segunda ordem

A análise de segunda ordem consiste em identificar, questão a questão, as ações epistémicas manifestadas pelos alunos no decorrer da resolução da questão, à luz do modelo *RBC+Co*, bem como as relações estabelecidas entre estas.

Seguindo a linha de pensamento de Pimenta (2016), a necessidade de se conseguir identificar a presença de cada ação epistémica, durante a resolução de cada questão, conduziu à sua divisão em diferentes subcategorias, possibilitando uma leitura mais precisa das mesmas.

Para este trabalho, a definição das subcategorias resultou do ajustamento da definição de cada ação epistémica à realidade do estudo apresentado e, em particular, das questões de investigação definidas, as quais encontram-se na tabela seguinte, adaptada de Pimenta (2016).

Tabela 4.1 - Descritores das subcategorias relativas ao modelo *RBC+Co*

Ação-R	Interpretar Os alunos reconhecem que a informação contida no enunciado é necessária para dar resposta à questão.	
	Estrutura adquirida Os alunos reconhecem a utilidade de construções anteriores para dar resposta à questão.	
	Vizinhança Os alunos identificam a necessidade de recorrer à noção de vizinhança para dar resposta à questão.	
	Aproximação Os alunos identificam a necessidade de recorrer à noção de aproximação para dar resposta à questão.	
Ação-B	Estratégias Os alunos aplicam estratégias para chegar à solução da questão colocada.	
	Aplicação de construção prévia Os alunos integram e combinam uma construção adquirida (conhecimento prévio) para conseguirem atingir determinado objetivo, mesmo que esses venham a revelar-se “falsos começos” ou “becos sem saída”. Inclui conceitos e procedimentos matemáticos.	
	Soluções intermédias Os alunos apresentam soluções intermédias que contribuem para a resolução da questão.	
	Justificação Os alunos apresentam uma justificação para a solução apresentada.	
Ação-C	Reorganização Os alunos reorganizam as construções já utilizadas de modo a atingirem o objetivo da questão.	
	Continuidade num ponto Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função num ponto.	Continuidade à esquerda num ponto Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função à esquerda de um ponto.
		Continuidade à direita num ponto Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função à direita de um ponto.
	Continuidade no domínio Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função no seu domínio.	
	Continuidade num intervalo Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função num intervalo.	
	Continuidade num ponto isolado Os alunos alcançam a noção de continuidade de uma função num ponto isolado.	
	Limite com limites laterais Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto com base nos limites laterais.	
	Limite num ponto de continuidade Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto em que esta é contínua.	

	Limite num ponto de descontinuidade
	Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto em que esta é descontinua.
	Limite no infinito
	Os alunos alcançam a noção de limite de uma função no infinito.
	Limite num ponto isolado
	Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto isolado.
	Limite num ponto fronteiro
	Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto fronteiro, podendo este pertencer, ou não, ao seu domínio.
	Limite num ponto exterior
	Os alunos alcançam a noção de limite de uma função num ponto exterior ao seu domínio.
	Cálculo de limite por substituição
	Os alunos alcançam o cálculo de limite de uma função definida pela sua expressão analítica, por substituição.
	Cálculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes
Os alunos alcançam o cálculo de limite de uma função definida pela sua expressão analítica (infinitésimos e infinitamente grandes).	
Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro (que não pertence ao domínio)	
Os alunos alcançam a relação entre as noções de limite e de continuidade num ponto fronteiro do domínio de uma função.	
Continuidade baseada em limite num ponto do domínio	
Os alunos alcançam a definição continuidade num ponto interior ao domínio de uma função com base no limite nesse ponto.	
Comunicação	
Os alunos expressam, através da exposição oral, escrita corrente ou simbólica, ou através de uma ação matemática, a construção que fizeram.	
Consolidação	Os alunos aplicam uma construção adquirida nas questões realizadas anteriormente.

Relativamente às subcategorias definidas na tabela anterior, ressaltamos o facto de, na *Ação-R*, a *Aproximação* só se encontrar definida para a análise das questões relativas ao conceito de limite. No que concerne à *Ação-C*, destacamos a existência de um grupo de subcategorias relativas à noção de continuidade, outro alusivo ao conceito de limite, e ainda um terceiro respeitante às relações entre os dois. Importa por fim referir que na *Consolidação* não se verificou a necessidade de considerar quaisquer subcategorias.

Usando como referência a Tabela 4.1, foram analisadas as resoluções cada uma das questões 2 a 5, sobre a noção de continuidade, e 2 a 8, sobre o conceito de limite.

Primeiramente, a análise referida foi efetuada pela investigadora, identificando nas transcrições de cada questão os excertos que evidenciam cada uma das subcategorias, bem como nas capturas de ecrã parciais dos registos escritos dos alunos.

Posteriormente, toda essa análise foi coligida com recurso ao *software* de análise qualitativa de dados ATLAS.ti, cujo procedimento referiremos de seguida, com o objetivo de construir diagramas que evidenciam quais as subcategorias manifestadas em cada ação epistémica, bem como as suas relações. Como já referimos, foram igualmente analisadas as relações

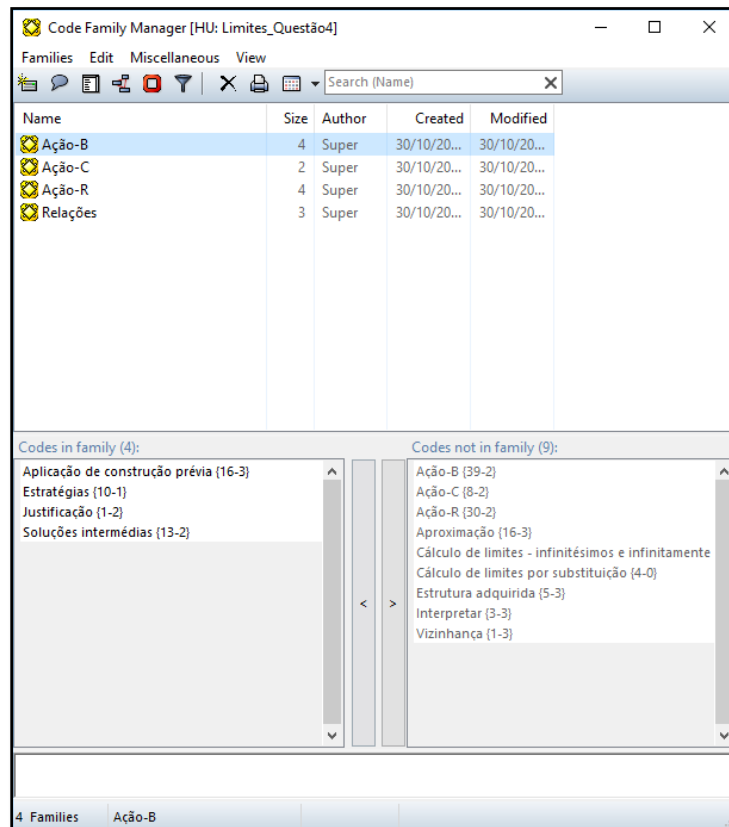


Figura 4.3 - Exemplo da criação de famílias no software ATLAS.ti

Para cada uma delas é então criado um gráfico, o qual é apresentado pelo ATLAS.ti, sem qualquer manipulação, como se segue, neste caso exemplificado pela *Ação-B*.

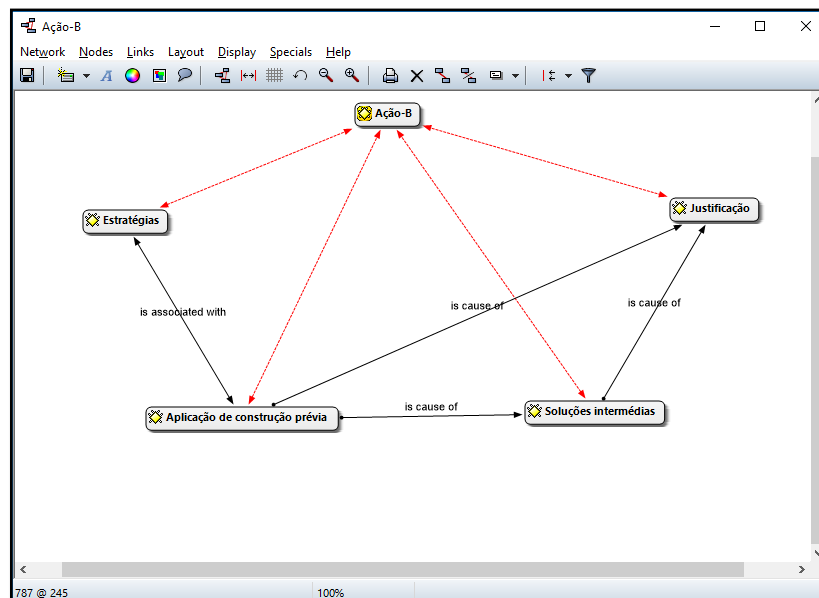


Figura 4.4 - Exemplo do gráfico inicial produzido no software ATLAS.ti

Constatando que os excertos que evidenciam cada uma das subcategorias consideradas não surgem imediatamente, é necessário proceder à sua importação no gráfico, o qual passa a ter o seguinte aspeto, bastante mais complexo.

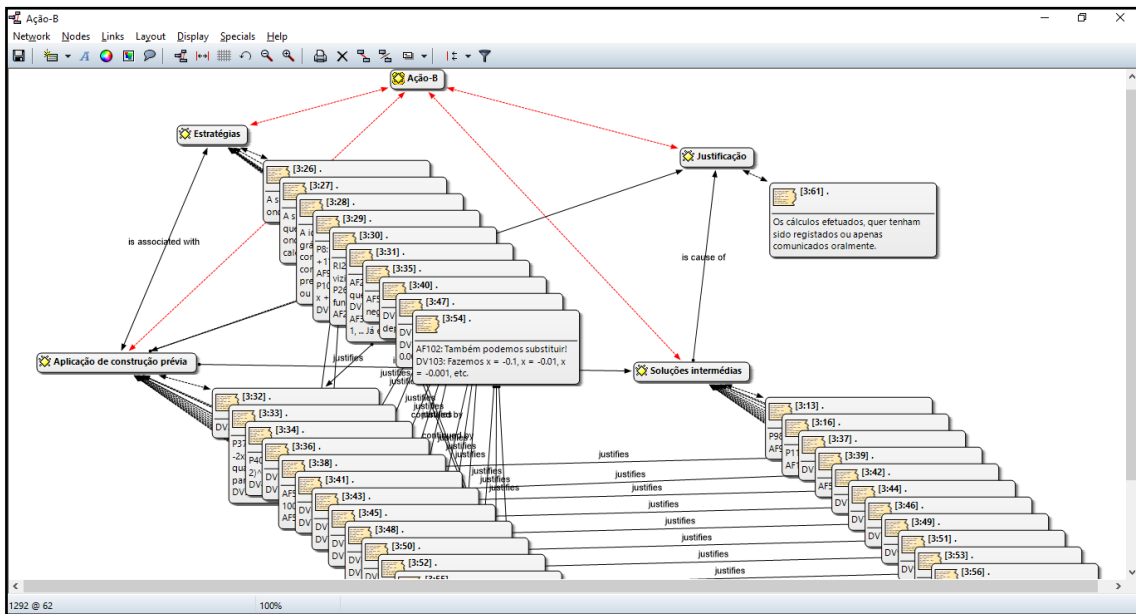


Figura 4.5 - Exemplo do gráfico obtido no software ATLAS.ti

De modo a facilitar a leitura dos gráficos gerados pelo ATLAS.ti, os mesmos foram modificados relativamente à disposição das caixas de texto, à seleção de cores e à tradução para a língua portuguesa das relações identificadas entre as categorias e subcategorias, obtendo-se o gráfico final que será apresentado ao leitor.

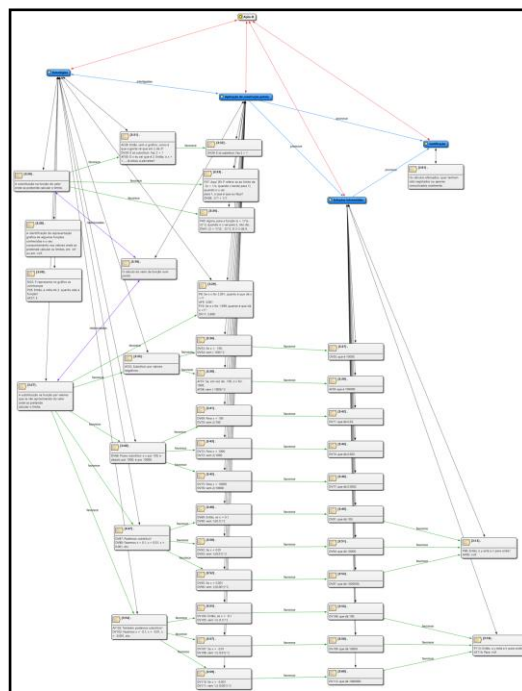


Figura 4.6 - Exemplo do gráfico obtido no software ATLAS.ti após manipulação

A análise de segunda ordem é então finalizada pelo exame dos gráficos criados pelo ATLAS.ti para cada uma das ações epistémicas, bem como para as suas relações, em cada questão.

Face ao exposto, verificamos que, embora o *software* utilizado seja uma excelente ferramenta para auxiliar a análise qualitativa dos dados recolhidos, tem a característica de ser estático dependendo de todo o trabalho da investigadora, desde a criação dos ficheiros para análise, passando pela seleção dos excertos que evidenciam cada uma das categorias e subcategorias referentes ao modelo *RBC+Co* e pela criação das famílias que as associam, até à manipulação dos gráficos de modo a facilitar a sua leitura.

4.4.3 Análise de terceira ordem

Finalmente, a análise de terceira ordem é executada em duas fases. Na primeira, é realizada a análise, para todas as questões, das subcategorias evidenciadas em cada uma das ações epistémicas, pretendendo-se verificar se todas ocorreram em cada uma das questões, compreender como se relacionaram e que influência tiveram no desenvolvimento dessas ações. Seguidamente, são analisadas a manifestação das ações epistémicas e as relações existentes entre estas, novamente para todas as questões, com o intuito de averiguar a sua influência no desenvolvimento da nova construção por parte dos alunos.

Em relação aos documentos que sustentam a análise aqui efetuada, cumpre notar que estes foram criados compilando as conclusões obtidas pela análise de segunda ordem referentes a cada uma das ações epistémicas, na primeira fase, e às relações entre estas para a fase posterior. A título de exemplo, apresentamos de seguida um gráfico ilustrativo de cada uma das fases consideradas.

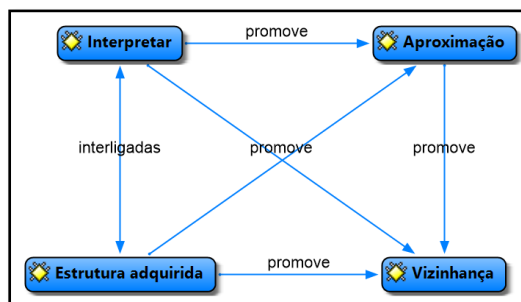


Figura 4.7 - Exemplo da relação entre as subcategorias evidenciadas na Ação-R

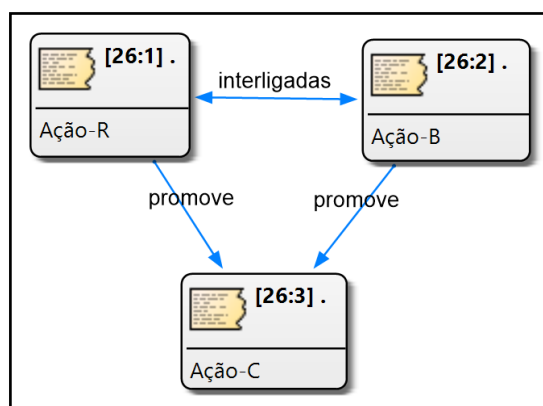


Figura 4.8 - Exemplo da relação estabelecida entre a Ação-R, a Ação-B e a Ação-C no processo de construção

No que concerne à criação dos gráficos obtidos, o processo é idêntico ao utilizado aquando da análise de segunda ordem, explanado no tópico anterior.

4.5 Considerações

Ao longo do texto encontram-se registadas algumas afirmações proferidas pelos alunos, para justificar quer a continuidade quer o limite de uma função num ponto, com base no conceito de vizinhança. A título de exemplo, destacamos as frases “Na vizinhança do -1 só pode haver uma vizinhança para o y ” ou “Temos 3 vizinhanças diferentes no y ”, as quais consideramos ser essencial enquadrar em consonância com as definições adotadas, cingindo-nos à definição de continuidade, dado que o mesmo raciocínio poderá ser aplicado ao conceito de limite.

De acordo com a definição 2.17 de continuidade segundo Ferreira (2005), adotada no presente trabalho,

“ f é contínua num ponto $a \in D_f$ se e só se, escolhida arbitrariamente uma vizinhança de $f(a)$, $V_\delta(f(a))$, existir sempre uma vizinhança de a , $V_\varepsilon(a)$, tal que, para $x \in D \cap V_\varepsilon(a)$, se tenha necessariamente $f(x) \in V_\delta(f(a))$ ” (p. 273),

e considerando que a definição pressupõe a análise das vizinhanças de $f(a)$ para qualquer δ , parece-nos, à primeira vista, que esta entra em conflito com a afirmação dos alunos, “só pode haver uma vizinhança para o y ”.

Em virtude da análise da continuidade efetuada pelos alunos se basear na representação gráfica de funções, iremos aqui utilizar o mesmo suporte para explicitar o seu raciocínio, incluindo a representação de faixas verticais e horizontais associadas, respetivamente, às vizinhanças dos objetos e das imagens dos pontos considerados, com o objetivo de auxiliar a visualização dos pontos do gráfico relacionados com as mesmas.

Na prática constatamos que os alunos apreendem e aplicam com maior facilidade a negação da

definição supra, considerando que para tal bastará verificar que, para os pontos situados nas vizinhanças do ponto a , por mais pequenas que estas sejam, as respetivas imagens não se encontram todas localizadas nas vizinhanças de $f(a)$.

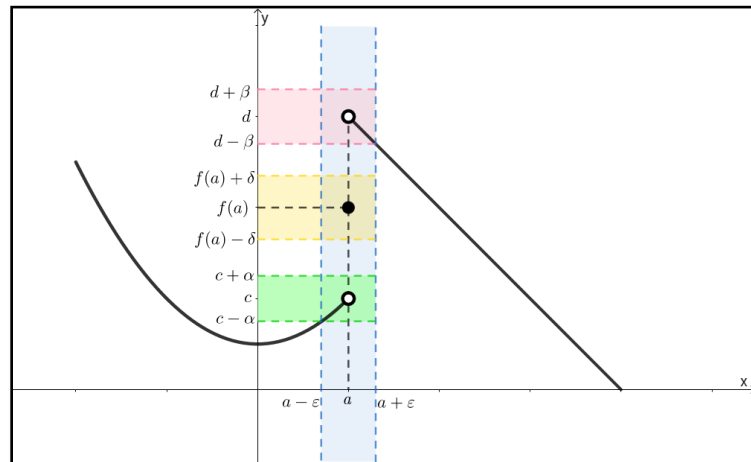


Figura 4.9 - Exemplo de uma função descontínua em $x = a$

É assim justificada a afirmação “*Temos 3 vizinhanças diferentes no y*”.

Seguindo a mesma linha de pensamento, os alunos consideram, através da interpretação gráfica, que se ao considerarem vizinhanças cada vez menores em torno de $x = a$, as respetivas imagens se localizarem todas na vizinhança de $f(a)$, então a função será contínua em a .

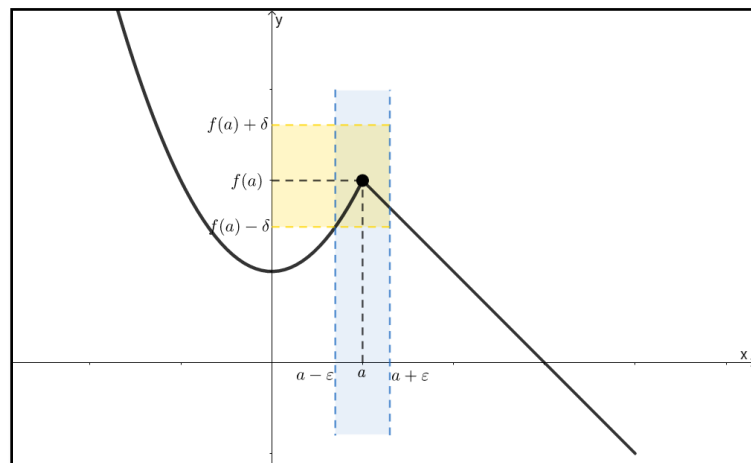


Figura 4.10 - Exemplo de uma função contínua em $x = a$

Este é o raciocínio subjacente à afirmação “*Na vizinhança do -1 só pode haver uma vizinhança para o y* ”.

Aproveitando a Figura 4.9, destacamos o facto de as noções de bola aberta e de bola fechada referidas ao longo deste trabalho não estarem relacionadas com os seus conceitos topológicos em \mathbb{R} , no qual uma bola aberta de centro a se refere à vizinhança desse ponto, ou seja, ao

intervalo $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, considerando-se este intervalo fechado para o caso de bola fechada. Aqui os alunos aplicam a expressão “bola fechada” unicamente para localizar $f(a)$, sendo a “bola aberta” utilizada para identificar pontos que não pertencem ao domínio de uma função ou que configuram pontos de descontinuidade, durante a análise das representações gráficas das funções. É o recurso a uma linguagem matemática pouco rigorosa, mas que é muito utilizada nas nossas escolas no dia-a-dia. Estamos conscientes disso. Porém, aceitámos a situação pois ela facilitava o alcance, pelos alunos, dos conceitos de continuidade e de limite, sem prejuízo dos seus aspetos concetuais e formais.

Capítulo 5

Proposta Pedagógica

No Capítulo 2 revimos as diversas noções de limite e de continuidade habitualmente lecionadas nas unidades curriculares da área da Matemática no ensino superior português. Neste capítulo iremos definir a nossa proposta pedagógica onde se pretende, de forma sucinta, inverter a ordem de leção dos conceitos de limite e de continuidade.

O presente capítulo contempla a descrição das atividades, dos alunos, e dos processos desenvolvidos em aula, não obstante a referência a algumas situações concretas observadas em aula como forma de exemplificar os processos e metodologias em estudo.

5.1 Caracterizando a Unidade Curricular de Métodos Quantitativos na Administração Pública

Atendendo a que as noções de continuidade e limite já não são lecionadas em boa parte das unidades curriculares (UC) da área da Matemática na Escola Superior do Instituto Politécnico (IP) onde foi conduzido o estudo, foi escolhida como objeto de experimentação a turma de Métodos Quantitativos na Administração Pública (MQAP), lecionada no curso de Administração Pública (AP). Nos cursos da área das engenharias deste IP, a UC basilar de Matemática é designada por Análise Matemática, sendo que nessa UC os conceitos supra são apenas revistos, habitualmente em parte de uma única aula de 120 minutos. Entende-se que os alunos a frequentar estes cursos já têm os conceitos de continuidade e de limite bem estabelecidos do ensino secundário (Matemática A no plano curricular). Também nos cursos da área da gestão deste IP é assumido o conhecimento prévio das noções supra, pelo que os conceitos em estudo são apenas revistos na UC de Métodos Quantitativos pertencente ao plano curricular desses cursos. Quer nos cursos da área das engenharias, quer nos cursos da área da gestão do IP, os alunos com menos bases matemáticas (habitualmente alunos que ingressam no ensino superior através dos concursos especiais) são convidados a frequentar uma UC extra curricular, denominada Matemática Geral, onde são revistos os conhecimentos matemáticos de nível secundário.

A UC de MQAP encontra-se inserida no primeiro semestre, do primeiro ano, no plano curricular do curso, onde são lecionados conteúdos de matemática e estatística, de nível considerado como elementar para um curso superior. De facto, os alunos que frequentam este curso têm uma formação bastante heterogénea. As provas de ingresso no curso de AP são (em opção) Economia, Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Português, o que alarga a base de recrutamento do curso, mas implica uma formação Matemática, à entrada no curso, bastante

diversa entre os novos alunos.

A UC funcionou com uma única turma teórico-prática, sob a responsabilidade científica e de lecionação de um docente doutorado e com vasta experiência na lecionação de UC's de Matemática e Estatística no ensino superior (desde 1999).

5.2 Objetivos da Unidade Curricular

O curso de AP tem uma forte componente de Direito, mas também uma parte de Economia e Gestão, conforme se pode verificar analisando as Áreas Científicas deste:

Tabela 5.1 - Áreas científicas do curso

Área científica	Sigla	Créditos	
		Obrigatórios	Optativos
Administração Pública	AP	39	12
Contabilidade	C	18	5
Direito	D	55	12
Economia	E	11	5
Finanças	F	6	
Gestão	G	20	12
Inglês	I	2	
Marketing	MK	6	
Matemática	MAT	6	
Tecnologias de Informação e Comunicação	TIC	5	
<i>Total</i>		168	12

Desta forma, para os alunos conseguirem frequentar com aproveitamento as UC da área de Gestão e similares precisam de dominar diversos conceitos matemáticos. Entre estes, destacam-se as noções de função contínua e derivada, utilizados mais tarde em conceitos como a elasticidade do capital, a análise de funções de produção e utilidade, e os modelos de crescimento económico. É assim fundamental que os conhecimentos de MQAP fiquem bem consolidados pelos alunos, o que nem sempre acontece.

Tabela 5.2 - Distribuição das classificações por unidade curricular (1.º ano)

1º Ano

TABELA 9 - APROVAÇÕES 1º ANO

	Área Científica	Unidade Curricular	Inscritos	Não Avaliados	Avaliados			
					Reprovados	Aprovados		
1º Semestre	AP	Introdução à Administração Pública	31	4	6	22,2%	21	77,8%
	D	Noções Fundamentais de Direito	23	4	1	5,3%	18	94,7%
	D	Ciência Política e Direito Constitucional	36	9	13	48,1%	14	51,9%
	I	Inglês	58	29	12	41,4%	17	58,6%
	TIC	Sistemas de Informação da Administração Pública	31	9	1	4,5%	21	95,5%
	MAT	Métodos Quantitativos na Administração Pública	60	18	14	33,3%	28	66,7%
2º Semestre	D	Direito Administrativo	42	18	2	8,3%	22	91,7%
	G	Introdução ao Estudos das Organizações	30	6	4	16,7%	20	83,3%
	C	Contabilidade Financeira	35	12	0	0,0%	23	100,0%
	E	Fundamentos de Economia	51	10	22	53,7%	19	46,3%
	G	Gestão de Recursos Humanos	32	6	6	23,1%	20	76,9%

Consultando a tabela anterior², observa-se que a taxa de aprovação a MQAP foi razoável (28 em 60), no entanto a UC de MQAP era aquela que à partida tinha mais inscritos. Por outro lado, a UC de Fundamentos de Economia (que utiliza vários conceitos lecionados em MQAP, conforme já referido) foi aquela com menor taxa de aprovados. Nesta última UC, e segundo os envolvidos, parte do insucesso está ligado ao facto de os alunos não dominarem suficientemente as noções de continuidade, limite e derivada.

5.3 Programa da Unidade Curricular

O programa da UC de MQAP é, de forma resumida,

1. Estatística Descritiva
2. Regressão Linear e Correlação Simples
3. Funções Reais de Variável Real
4. Cálculo Diferencial em IR
5. Funções Reais de Várias Variáveis Reais

É efetivamente um programa bastante extenso, para uma carga letiva de 60 horas teórico-práticas, repartidas por 4 horas semanais durante 15 semanas. A componente de Estatística tem uma duração pré-estabelecida de cerca de 24 horas, sobrando assim 36 horas para os pontos 3., 4. e 5. do programa acima exposto. Em 2014/2015 os conteúdos serão lecionados, pela primeira vez, nesta sequência. Habitualmente os dois primeiros tópicos eram lecionados no final da UC, mas devido ao insucesso em MQAP, e ao facto dos conteúdos de Estatística serem independentes dos restantes e mais “apelativos” para os alunos, optou-se por iniciar a leção com estes (decisão do Responsável da UC em consonância com o Diretor de Curso). O ponto 3. inclui os seguintes tópicos

3. Funções Reais de Variável Real
 - a) Conceitos base sobre funções
 - i. Aplicações entre conjuntos
 - ii. Funções reais de variável real. Domínios
 - iii. Gráfico de uma função
 - iv. Classificação de funções reais de variável real
 - v. Monotonia. Extremos
 - vi. Zeros. Sinal
 - b) Funções polinomiais
 - i. Função afim
 - ii. Função quadrática
 - iii. Inequações do 2º grau
 - c) Função exponencial

² Disponível no relatório de autoavaliação do curso relativo ao ano letivo 2012/2013

- d) Função logarítmica
- e) Limites e Continuidade de Funções Reais de Variável Real
 - i. Definição de limite de uma função
 - ii. Limites laterais
 - iii. Propriedades dos limites de funções
 - iv. Indeterminações
 - v. Função contínua e função descontínua num ponto
 - vi. Propriedades das funções contínuas num ponto
 - vii. Continuidade num intervalo

Como se pode verificar no tópico 3. e), a introdução dos conceitos de limite e de continuidade é iniciada com a definição de limite e só posteriormente é lecionada a continuidade, tradicionalmente seguindo a definição 2.15 da página 23.

5.4 Revisitando as Questões de Investigação

Já no primeiro Capítulo referimos as questões de investigação subjacentes ao estudo. Estamos agora em condições de as analisar, tendo em consideração a caracterização dos alunos inscritos na UC de MQAP, e que são as seguintes:

1. que ações epistémicas são possíveis identificar, no decurso do processo de abstração dos alunos durante a construção do novo conhecimento matemático, nomeadamente:
 - enquanto desenvolvem a compreensão dos dados enunciados;
 - identificam a necessidade de recorrer a outras noções matemáticas ou construções já adquiridas;
 - aplicam estratégias e soluções intermédias;
 - organizam conhecimentos e ideias;
 - constroem os conceitos de limite e de continuidade?
2. como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?

Efetivamente, e tendo em consideração a heterogeneidade da formação de base destes alunos, os processos de construção e aplicação do conhecimento são necessariamente diferentes. Os alunos que frequentaram a Matemática A ou B no ensino secundário já tinham construído o conceito de limite e continuidade e, nessa medida, esperava-se que as dificuldades sentidas por estes se prendessem essencialmente com o acomodar das diferenças impostas por esta nova abordagem, mormente ao nível da continuidade e limite em pontos isolados e em pontos de mudança de ramos. Estes alunos estavam condicionados pelo conhecimento anterior e, em certa medida, teriam de “destruir” algumas construções que já dominavam para *construir* as novas. Por outro lado, o seu maior conhecimento matemático global (simbolismo, formalismo, cálculo) fornecia-lhes vantagens importantes. Como já dominavam outras construções que

destas dependem (como as derivadas), esperava-se que tivessem mais facilidade em proceder a aplicações e generalizações, após a primeira fase de “resistência” à nova abordagem e suas diferenças.

Por outro lado, os alunos de primeira matrícula que não tinham tido contacto com as noções de continuidade e limite partiriam inicialmente em vantagem, na medida em não teriam ideias pré-concebidas sobre limite e continuidade que não fossem as intuitivas e, nesse particular, não passariam pelo processo de “desconstrução” das noções anteriores. Para estes alunos esperava-se que as principais dificuldades estivessem ao nível da formalização das noções e da resolução de problemas baseados em funções definidas por expressões analíticas, na medida em que estes problemas requerem habitualmente manipulações algébricas mais avançadas. A interligação dos conceitos (exceção feita à noção de vizinhança, por ter sido utilizada no estudo dos extremos) também se afigurava mais complicada, em virtude da extensão do programa que não permite o tempo necessário para sedimentar a construção.

Finalmente, os alunos com mais de uma matrícula são aqueles que poderiam à partida sentir mais dificuldades. Por um lado, não tiveram a formação matemática ao nível da Matemática A ou B do ensino secundário (por norma estes alunos não repetem MQAP) que lhes daria um certo traquejo na construção de conhecimento e, por outro lado, já tinham feito uma construção, nem que fosse razoavelmente débil, da noção de continuidade baseada em limite tal como foi lecionada em MQAP nos anos transatos.

5.5 Definindo a Proposta

O programa acima exposto foi assim alterado, passando os tópicos 3. e) v., vi. e vii. a ser lecionados antes dos restantes tópicos indicados em 3. e). Na proposta que apresentamos, na linha de pensamento de Campos Ferreira, a definição de função contínua num ponto já não poderá assentar na definição de limite, o que nos leva a adotar uma nova perspetiva relativamente ao conceito de continuidade.

Coloca-se então a questão fundamental para a definição desta nova proposta pedagógica: “De que modo será introduzido o conceito de continuidade?”.

A primeira noção intuitiva vem do secundário: uma função é contínua quando ao esboçar a sua representação gráfica não é necessário levantar a caneta. Naturalmente que esta definição implica, por exemplo, a não continuidade nos pontos isolados, ou a continuidade em \mathbb{R} de funções definidas em \mathbb{Q} , mas serve como primeira abordagem ao tema.

Para uma abordagem mais formal, e de acordo com a definição 2.17 da página 28, existem dois caminhos possíveis: o recurso à função módulo ou o recurso à noção de vizinhança. Suspeitámos que se a escolha recaísse na função módulo, registaríamos uma vez mais enormes dificuldades dos alunos em compreender os conceitos em causa, já que a função módulo não é considerada

“fácil” por eles, devido ao facto de recorrer a ramos na sua representação analítica. Assim, a escolha recaiu na continuidade com recurso a vizinhanças. Saliente-se que no tópico 3. a) v. do programa acima exposto já foi necessário introduzir o tópico “vizinhança de um ponto”, pelo que os alunos já têm conhecimento da noção de vizinhança, ou seja, foi apenas necessário recordar este conceito.

Ao nível prático, pretendeu-se trabalhar exclusivamente com o conceito intervalar de vizinhança, $]a - \delta; a + \delta[$, e a sua representação gráfica. Após este passo, seria introduzida a definição de continuidade de Ferreira da seguinte forma:

Definição 5.1

A função f é contínua no ponto a do seu domínio se, para qualquer vizinhança de $f(a)$, tão pequena quanto o desejado, existir sempre uma vizinhança de a , tal que, para um ponto x do domínio nessa vizinhança, se tenha $f(x)$ na vizinhança de $f(a)$.

Só mais tarde a definição 2.17 deverá ser escrita na forma indicada na página 28, tendo-se o cuidado de substituir os quantificadores nesta pelas suas nomenclaturas, já que a maioria dos alunos desconhece os quantificadores.

5.6 Questões Propostas sobre Continuidade

Nos parágrafos seguintes são apresentadas as questões propostas e os seus objetivos. De forma similar, em 5.7 são listadas as questões sobre limites e os seus propósitos. Ao nível da notação, recorde-se que no modelo teórico *RBC+Co* definido no Capítulo 3 temos as etapas “*Recognizing*”, “*Bulding-with*”, “*Constructing*” e “*Consolidation*”, as quais serão, daqui em diante, referenciadas por *Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C* e *Consolidação*, respetivamente.

5.6.1 Questão 1

- Questão 1
- a) O que entende por função real de variável real contínua num ponto? Apresente dois exemplos, um gráfico e um analítico, destas funções.
 - b) O que entende por função real de variável real contínua? Apresente dois exemplos, um gráfico e um analítico, destas funções.
 - c) Considere as funções reais de variável real g , i , j , k e l cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas.
 - i. Indique o domínio das funções.
 - ii. Indique, justificando, quais das funções são contínuas em todo o seu domínio.

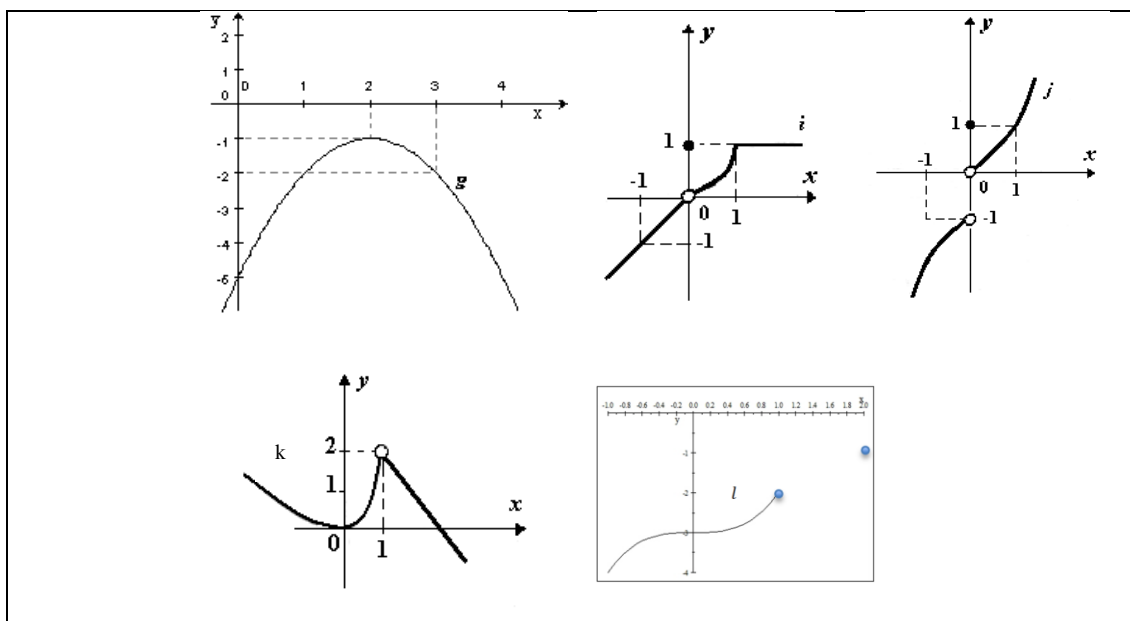


Figura 5.1 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de continuidade

A Questão 1 tem como objetivo diagnosticar o conhecimento inicial dos alunos sobre o conceito de continuidade. Na alínea a), os alunos serão confrontados com continuidade num ponto, e em b) com continuidade num intervalo. Espera-se que os alunos com Matemática A dominem a *construção* (Ação-C) do conceito de continuidade, com níveis mais ou menos diferentes de *consolidação*, e como tal consigam resolver a questão. Quanto aos restantes alunos, e visto que nada foi referido sobre o assunto, não se espera grandes resultados. Em relação à alínea c), se o conceito de domínio de uma função deverá ser algo já bem estabelecido (Ação-C), já a continuidade neste deverá ser problemática. Se em relação aos alunos sem Matemática A continuavam a valer as premissas indicadas, para os alunos com Matemática A a função l deverá causar problemas, já que o conhecimento de continuidade que dominam (Ação-C) diferia do que agora se pretendia, atendendo ao facto de a função l ter um ponto isolado. É expeável que estes alunos indiquem que a função l é descontínua para $x = 2$ (Ação-B).

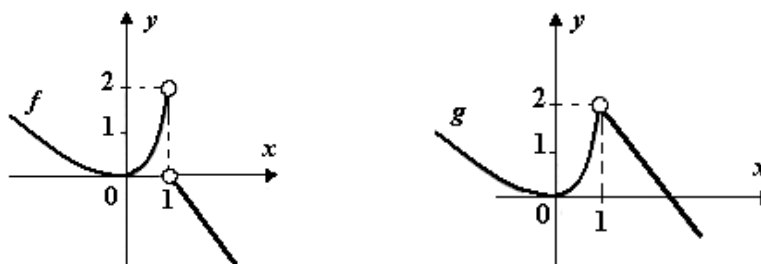
Seguidamente, pretende-se que os alunos recordem a definição de vizinhança num ponto, tal como exposta na definição 2.1 da página 11. Esta definição já deverá ser conhecida dos alunos pois foi previamente utilizada, de acordo com o programa da unidade curricular, na definição de extremos relativos. Pretende-se que o recordar desta definição ajude os alunos a *construir* o seu próprio conhecimento (Ação-R + Ação-B).

Apesar de Ferreira (2005, p. 302) definir continuidade lateral após a introdução dos limites, estes não são utilizados nessa definição. Considerou-se que era mais interessante modificar um pouco a ordem de introdução dos conceitos e trabalhar a continuidade lateral numa fase inicial do processo, com recurso à vizinhança à direita e à esquerda de um ponto, respetivamente $]a; a + \delta[$ e $]a - \delta; a[$. Também o prolongamento por continuidade num ponto só é estudado por Ferreira (2005, p. 292) após a introdução dos limites, mas não necessita destes (apesar de

simplificar a noção). Considerou-se assim que a continuidade lateral e o prolongamento por continuidade deveriam ser trabalhados inicialmente, antes de se referir os limites, por forma a mostrar claramente que o limite não é necessário para a continuidade.

5.6.2 Questão 2

Questão 2 Observe os seguintes gráficos das funções reais de variável real f e g .



- a) Prolongue a função f no ponto $x = 1$ de modo que f seja contínua:
 - i. apenas à direita de 1;
 - ii. apenas à esquerda de 1.
- b) Prolongue a função g no ponto $x = 1$ de modo que g seja contínua em \mathbb{R} .

Figura 5.2 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade

Nesta questão o fundamental é que os alunos reconheçam (Ação-R) a necessidade de interpretar corretamente a informação contida no gráfico. Preferencialmente, pretende-se que utilizem vizinhanças para estudar a continuidade num ponto, quer as laterais para a alínea a), quer as de raio δ para a alínea b) (Ação-R + Ação-B). É ainda relevante, apesar de ser indicado que o objetivo é analisar o comportamento no ponto $x = 1$, que os alunos notem que o domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por forma a compreender que o ponto $x = 1$ será o mais relevante, numa mistura entre as ações de reconhecer e construir (Ação-R + Ação-B). Na etapa seguinte, pretende-se que os alunos compreendam a ideia de continuidade lateral, quer à esquerda quer à direita (Ação-B), e indiquem os valores dos prolongamentos pedidos (Ação-C). Espera-se que, com a resolução desta questão, seja alavancado o restante processo de construção da noção de continuidade.

5.6.3 Questão 3

Questão 3 Com base na sua representação gráfica, estude a continuidade das seguintes funções reais de variável real f e g .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = -3 \\ \frac{9 - x^2}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Figura 5.3 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade

Esta atividade já implica que sejam os alunos a representar graficamente as funções (Ação-R + Ação-B), sendo este o processo pretendido. É ainda relevante que os alunos tenham a sensibilidade para notar que os pontos onde a continuidade é duvidosa são aqueles em que a função muda de ramo (Ação-R). Aqui será expectável que existam grandes assimetrias entre as resoluções, pois o processo de representação gráfica de uma função por ramos não é uma *construção consolidada* (Ação-C + Consolidação), nem sequer uma *construção* (Ação-C) para muitos dos alunos, com base nos resultados académicos anteriores dos participantes no estudo. Supondo que os alunos conseguem representar corretamente os gráficos, a análise do comportamento para $x = -3$, no caso da função f , e para $x = 1$, no caso da função g , será a base da construção (Ação-B) da continuidade das funções num intervalo. É ainda necessário dominar o conceito de vizinhança (Consolidação) e compreender que esta deve ser analisada no ponto de mudança de ramo (Ação-R). Para a função f , será ainda necessário simplificar a sua expressão designatória (Ação-R + Ação-B), o que por si só deverá ser uma tarefa complicada para alguns alunos.

Pretende-se que os alunos verifiquem que ambas as funções são contínuas em todo o seu domínio, exceto no ponto de mudança de ramo e, preferencialmente, que compreendam que a continuidade de funções definidas por ramos tem de ser sempre analisada com cuidado (Ação-C).

5.6.4 Questão 4

Questão 4 Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8}$.

a) A função f é contínua em todo o seu domínio?

b) Prolongue a função f de modo a que esta seja contínua em \mathbb{R} .

Figura 5.4 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade

Na Questão 4, já nada é indicado sobre o método pretendido para a resolução da questão. Espera-se, após a resolução das questões anteriores, que os alunos reconheçam a necessidade de utilizar representações gráficas, simplificação de expressões designatórias e vizinhanças (Ação-R). Estes procedimentos são similares aos elencados para a Questão 3, mas é agora necessário realizar cálculos analíticos por forma a obter o domínio de f , $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ (Ação-R + Ação-B). Note-se aqui que, mesmo que o aluno consiga representar corretamente a função e obter o seu domínio, tem de discernir que o que se pretende é a continuidade no domínio e não em \mathbb{R} . Como a representação gráfica da função implica colocar uma “bola aberta” em $x = 4$, o processo de obtenção desta construção (Ação-R) parece-nos mais complicado.

Era ainda necessário ter já a *construção* de prolongamento em continuidade *consolidada* da Questão 2 (Ação-C), por forma a se atingir nesta altura a *construção* de continuidade de uma função em \mathbb{R} e não apenas no seu domínio (Ação-C).

5.6.5 Questão 5

Questão 5 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 3 \\ x^2 - x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

A função f é contínua em todo o seu domínio?

Figura 5.5 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade

A Questão 5 pretende atingir a *consolidação* da *construção* da noção de continuidade (*Ação-C* + *Consolidação*). Apesar de parecer, numa primeira análise, similar às questões 3 e 4, temos agora o enfoque no estudo de um ponto isolado ($x = 3$). É importante que os alunos *reconheçam* a importância deste ponto (*Ação-R*), bem como das já citadas *construções* de vizinhança num ponto e de representação gráfica de funções (*Ação-R*). Os alunos que tenham a noção de vizinhança bem dominada (*Ação-C* + *Co*) e tenham conseguido realizar as tarefas anteriores deverão realizar esta tarefa sem grandes problemas. No entanto, os alunos que tiveram Matemática A no secundário serão tentados a indicar que a função é descontínua no ponto $x = 3$. Note-se ainda que a Questão 1 já aflorava a noção de continuidade num ponto isolado, recorrendo a uma representação gráfica, e como tal os mais atentos deverão recordar o que já foi feito.

É assim necessário que os participantes representem graficamente a função (*Ação-B*), verifiquem a continuidade no ponto $x = 3$ (*Ação-B*) e notem que esta também é contínua no restante domínio da função, que não é \mathbb{R} . Após esta questão, espera-se que os discentes almejem a *construção* da noção de continuidade (*Ação-C*), com maior ou menor grau de *consolidação*.

5.7 Questões Propostas sobre Limites

5.7.1 Questão 1

Questão 1 O que entende por limite de uma função real de variável real num ponto $x = a$?

Figura 5.6 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de limite

Esta primeira questão sobre limites pretendeu apenas aquilatar quanto à existência, ou não, da *construção* do conceito de limite por parte dos alunos antes da lecionação destes conceitos. Tal como indicado na secção 5.6.1 aquando das questões sobre continuidade, esperava-se que os alunos com Matemática A dominassem a *construção* (*Ação-C*) do conceito de limite. Estes poderiam apresentar, nesta questão, a definição informal de limite “valor b para o qual a função f se aproxima quando x se aproxima de a ”. Também poderiam recorrer a um ou mais gráficos e indicar o valor de alguns limites concretos. Não sendo a solução ideal, mostraria que apesar da *construção* não estar completa, esses alunos estariam já na fase do *construir* (*Ação-*

-B). Quanto aos alunos com uma maior capacidade de abstração e com um nível de *consolidação* mais elevado, poderiam apresentar uma definição mais formal, tal como a de Cauchy nas suas diversas formas ou a de Heine (ver secção 2.2). Quanto aos restantes alunos, e visto que nada tinha sido referido sobre o assunto, não se esperavam quaisquer resultados, em consonância com o indicado aquando da discussão sobre as questões de continuidade.

5.7.2 Questão 2

Questão 2 Considere as funções reais de variável real g, i, j, k e l cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Calcule os seguintes limites:

- $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} l(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$.

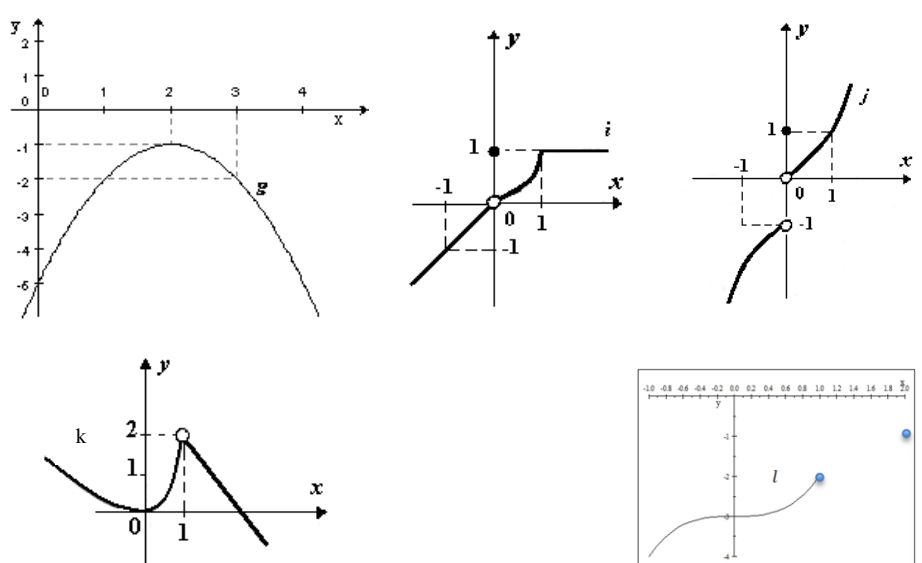


Figura 5.7 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite

A Questão 2 é uma questão em que se pretende que o aluno comece por *reconhecer* (Ação-R) a importância das representações gráficas e também da noção de vizinhança. Na alínea a) estudam-se os limites em pontos onde não existem dúvidas quanto à continuidade, pelo que o processo de *construir* (Ação-B) pode começar sem sobressaltos. Na alínea b) temos os limites quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que é necessário *reconhecer* (Ação-R) que o gráfico se prolonga fora do intervalo apresentado e intuir quanto ao comportamento do limite nessa situação (Ação-B). Na alínea c) os limites pedidos compreendem um limite num ponto isolado e um limite num ponto em que a função está somente definida no ponto e à sua esquerda (ponto fronteiro) pelo que além dos alunos terem de *reconhecer* a importância da vizinhança e da continuidade (Ação-R) têm ainda de discernir o que deve suceder ao limite nestas situações

(Ação-B). Finalmente, na alínea d) os limites pedidos compreendem um ponto onde a função não está definida, nem na sua vizinhança (Ação-R + Ação-B). Além disso, é importante que os alunos reconheçam a importância da continuidade (Ação-R + Ação-B) para a noção do limite. Espera-se uma “acesa discussão” entre os alunos, especialmente em relação a $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$ e a $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$, pois os que já conhecem a ideia de limite do secundário serão tentados a dizer que $\lim_{x \rightarrow 0} i(x) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$ não existe, o que é incorreto à luz da definição de limite que se pretende alcançar. A este respeito, recorde-se o que já indicámos na secção 2.2 e que difere em relação à *construção* de continuidade e limite (Ação-C + Consolidação) ensinada no antigo programa de Matemática A do ensino secundário: a existência de limite num ponto pertencente ao domínio da função equivale à continuidade nesse ponto, verificando-se, nesta hipótese, a igualdade $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, o que implica que não há limite nos pontos de descontinuidade no domínio da função. Será assim muito importante, já nesta fase, que estes alunos consigam “reconstruir” (Ação-R + Ação-B + Ação-C) a sua ideia de limite, o que passa pela “reconstrução” da noção de continuidade (Ação-R + Ação-B + Ação-C) que se espera que, nesta altura, já tenha sido realizada. Em síntese, a Questão 2 é muito relevante, pois não só cobre (desejavelmente) todas as situações de interesse como é útil no processo de reconstrução das noções de continuidade e de limite pelos alunos que frequentaram Matemática A no ensino secundário.

5.7.3 Questão 3

Questão 3 Considere as funções reais de variável real f e g cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Indique os pontos do domínio onde as funções não têm limite.

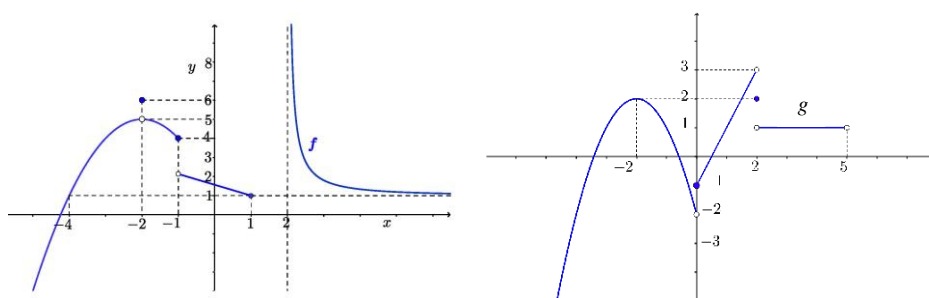


Figura 5.8 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite

A Questão 3 tem, quanto a nós, uma importante mas subtil diferença em relação à anterior. Prende-se com o facto de serem pedidos os pontos do **domínio** em que as funções não têm limite, e não como anteriormente para estudar o limite em pontos em que a função poderia ou não estar definida. Por exemplo, é natural que alguns alunos indiquem que $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$, o que sendo verdadeiro não é o pretendido, já que a pergunta restringe o estudo ao domínio da função. Desta forma, é importante que o aluno compreenda (Ação-R) que é necessário começar por indicar o domínio destas funções, e só depois começar a estudar os limites (Ação-B). Nesta altura, expectavelmente, todos os alunos deveriam dominar a *construção* de domínio de uma

função, pelo menos do ponto de vista gráfico (*Ação-C + Consolidação*). Pretende-se assim que a *construção* de limite pelos alunos distinga o que é limite em \mathbb{R} e o que é limite no domínio da função (*Ação-B + Ação-C*).

5.7.4 Questão 4

Questão 4 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$, $\lim_{x \rightarrow 8} (-10)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-2x + \frac{1}{x}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)(x - 2)^2]$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$

Figura 5.9 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite

A Questão 4 é a primeira em que o cálculo do limite é pedido sem o auxílio da representação gráfica. Na alínea a), é importante que os alunos compreendam (*Ação-R + Ação-B*) que basta substituir o valor de x na expressão designatória da função para determinar o valor do limite. Na alínea b), já são esperadas mais dificuldades. Atendendo a que nesta UC é possível utilizar calculadoras gráficas, apesar de ser sempre pedido para se justificarem os gráficos obtidos e os cálculos apresentados, é possível que os estudantes obtenham o gráfico na máquina ou que o desenhem em papel (*Ação-R + Ação-B*), aplicando um raciocínio similar ao das questões anteriores. Por outro lado, alguns alunos que dominem bem a *construção* (*Ação-C + Consolidação*) das funções envolvidas, sobejamente conhecidas, poderão intuir quanto ao valor dos limites sem apresentar quaisquer cálculos ou representações gráficas (alunos da Matemática A). Existe ainda um terceiro caminho que será inicialmente orientado pelo docente, como base para situações similares. Através da substituição na expressão designatória da função de x por valores de interesse, é possível que o aluno consiga descobrir o valor do limite pretendido. Por exemplo, substituindo em $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)$ o valor de x por -10 , -100 e -1000 é fácil concluir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ (*Ação-B*). Um pouco mais complicado será o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$. Apesar de bastar substituir os valores de x por valores positivos cada vez mais próximos de zero para se obter a solução correta, pretende-se que os alunos reconheçam (*Ação-R*) que é igualmente possível aproximar x por valores negativos cada vez mais próximos de zero. Na fase da discussão, é natural que se questione o que sucederia se o pretendido fosse $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)$. A questão dos limites laterais já foi a florada nas questões anteriores, de forma gráfica, mas no final desta questão espera-se, ainda que de forma rudimentar, que os alunos verifiquem a importância desta noção (*Ação-R + Ação-B*).

5.7.5 Questão 5

Questão 5 Calcule os limites laterais das seguintes funções reais de variável real nos

pontos indicados e diga, justificando, se existe limite da função nesses pontos

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ em } x = 0. \\ \text{b) } g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ em } x = 1. \\ \text{c) } h(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > -1 \\ -\frac{1}{2x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \text{ em } x = -1. \end{aligned}$$

Figura 5.10 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite

Esta questão é a primeira a ser trabalhada após a noção de limite ser formalmente introduzida (ver secção seguinte). Nesta são apresentadas as expressões analíticas de funções definidas por ramos o que, por si só, é uma dificuldade acrescida. Apesar destas funções terem sido anteriormente introduzidas nesta UC, sabe-se de experiência passada que esta é uma *construção* (Ação-C + Co) muitas vezes extremamente débil para a maioria dos alunos. É necessário que os alunos reconheçam a importância destas funções (Ação-R) e das representações gráficas (Ação-R), essencialmente para a alínea a). Para a resolução das alíneas b) e c), e apesar de ser possível realizar as suas representações gráficas, o cálculo do limite recorrendo a estratégias de substituição e de aproximação (Ação-R), conforme explanado em relação à questão anterior, configura-se mais simples. Em nosso entender, especialmente o gráfico da função $h(x)$ é uma *construção* (Ação-C + Consolidação) que poucos discentes deverão dominar. Pretende-se assim que os alunos utilizem essencialmente as estratégias de substituição e de aproximação (Ação-B + Ação-C) para obter a *construção* de limite lateral. Depois, e de forma similar ao realizado já na Questão 2, a comparação desses valores na vizinhança do ponto de interesse permitirá, expectavelmente, a *construção* do conceito de limite (Ação-C) a partir do conhecimento dos limites laterais.

5.7.6 Questão 6

Questão 6 Determine o valor do parâmetro real a de modo a que a função real de variável real h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{se } x < -1 \\ x^2 - ax + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

tenha limite quando x tende para -1 .

Figura 5.11 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite

Na Questão 6 pretende-se aquilatar se a *construção* do conceito de limite já foi alcançada pelos alunos (Ação-B + Ação-C). Note-se que como a função h depende de um parâmetro real a , a representação gráfica será impossível nesta questão. Atendendo a que a definição de limite já foi lecionada e os limites laterais trabalhados, os alunos devem *reconhecer* a importância da

igualdade dos limites laterais (Ação-R + Ação-B) para a existência de limite num ponto (Ação-B + Ação-C). Assim, deverão igualar as expressões obtidas pelo cálculo dos limites laterais à esquerda e à direita de $x = 1$ (Ação-B) como única forma de resolver a questão proposta. A obtenção do correto valor de a indicará que a construção está, total ou parcialmente, realizada (Ação-B + Ação-C).

5.7.7 Questão 7

<p>Questão 7 Considere a seguinte função real de variável real g definida por</p> $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \\ x^2 - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ <p>a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.</p> <p>b) Estude a continuidade da função g.</p>

Figura 5.12 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite

Nesta penúltima questão do estudo realizado, a alínea a) é similar à Questão 5. Pretende-se que o aluno recorde (Ação-R) as estratégias de substituição e aproximação, de limite lateral, vizinhança e limite que nesta altura já deverão ser *construções* (Ação-C) dominadas, mesmo que não *consolidadas*. O principal objetivo da alínea a) é preparar a alínea b), onde se retoma a questão da continuidade. Evidentemente que os alunos podem estudar a continuidade com recurso à vizinhança, tal como tinha sido realizado nas aulas sobre esta matéria (Ação-R + Ação-B + Ação-C + *Consolidação*). Mas o que se pretende, e o docente procurará direcionar os estudantes nesse sentido, é que estes notem que se $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ não existe, então a função não é contínua nesse ponto (Ação-R + Ação-B). Por outro lado, se o limite existe em todos os restantes pontos do domínio de g , então a função é contínua nesses pontos (Ação-R + Ação-B).

5.7.8 Questão 8

<p>Questão 8 Com base no conceito de limite, defina continuidade num ponto.</p>

Figura 5.13 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite

A Questão 8, e última, é o pináculo das questões sobre continuidade e limite. Pretende-se que o aluno considere as *construções* que tem de continuidade e limite, mais ou menos *consolidadas* (Ação-C + *Consolidação*), e as interligue e relacione (Ação-B). É evidente que a noção de continuidade pode ser definida sem recurso à noção de limite, como referimos várias vezes neste trabalho, até porque introduzimos o conceito de continuidade antes do conceito de limite. No entanto, ambas estão fortemente relacionadas. Antes do início do estudo, os alunos com Matemática A seriam tentados a imediatamente dizer que f é contínua no ponto de acumulação a se e só se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Após o estudo, quer estes quer os restantes alunos devem indicar, mesmo sem recorrer a linguagem matemática, que a existência

de limite num ponto do domínio da função implica a sua continuidade nesse ponto, e que a não existência de limite num ponto do domínio da função implica a sua descontinuidade nesse ponto (Ação-C). Ou seja, e conforme já foi referido na subsecção 2.3.4, a função f é designada por contínua num ponto do domínio a quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (Ação-C). Obviamente que a diferença entre a continuidade em \mathbb{R} e a continuidade no domínio da função é subtil, e só quando tivermos algum grau de *consolidação* é que um número significativo dos estudantes vai discernir essa diferença (Ação-C + *Consolidação*).

5.8 Calendarização das Atividades Propostas

Como referimos anteriormente, foram utilizadas no total quatro aulas, de 120 minutos cada, com o estudo, sendo que no final da **Aula 0** apenas foram apresentados o estudo e a autora, e entregue a primeira questão. Esquemáticamente, a repartição das questões pelas aulas disponibilizadas foi a abaixo indicada.

Aula 0 (apenas o final da aula):

- Apresentação do estudo e da autora (5 minutos)
- Resolução da questão 1 (20 minutos)

Aula 1:

- Noção de vizinhança num ponto (5 minutos)
- Resolução da questão 2, incluindo discussão (30 minutos)
- Noção de vizinhança à direita e à esquerda de um ponto (15 minutos)
- Resolução da questão 3 (30 minutos)
- Discussão sobre as representações gráficas da questão 3 e suas implicações na continuidade em funções definidas por ramos (20 minutos).

Aula 2:

- Resolução da questão 4, incluindo discussão (30 minutos)
- Resolução da questão 5, incluindo discussão (40 minutos)
- Resolução da questão 1, pela 2.^a vez (10 minutos)
- Definição de continuidade de acordo com o exposto em Ferreira, 2005 (10 minutos)

Limites

- Resolução da questão 1 (10 minutos)

Aula 3:

- Resolução da questão 2, incluindo discussão (30 minutos)
- Resolução da questão 3, incluindo discussão (15 minutos)
- Resolução da questão 4, incluindo discussão (40 minutos)
- Resolução da questão 1, pela 2.^a vez (5 minutos)
- Definição de limite de acordo com o exposto em Ferreira, 2005 (10 minutos)

Aula 4:

- Resolução da questão 5, incluindo discussão (30 minutos)
- Resolução da questão 6, incluindo discussão (30 minutos)
- Resolução da questão 7, incluindo discussão (20 minutos)
- Resolução da questão 8, incluindo discussão (15 minutos)
- Definição de continuidade com base em limite de acordo com o exposto em Ferreira (2005) (5 minutos)

5.9 Síntese

Neste capítulo procurámos enquadrar a unidade curricular de Métodos Quantitativos na Administração Pública, bem como os alunos que a frequentaram, no processo de compreensão da construção de conhecimento das noções de continuidade e limite. Foram descritas quer as características da UC quer as características do conjunto heterogéneo de alunos que a frequentaram. Este enquadramento irá, certamente, influenciar as análises de resultados realizadas nos capítulos subsequentes.

A inversão da ordem de lecionação das noções de continuidade e de limite, em relação ao comumente estabelecido, é realçada através das tarefas propostas e respetiva calendarização, onde é explicitada a forma como todo o processo decorreu. Procurou-se, assim, compreender todo o processo de construção de conhecimento, pelos alunos, destas noções.

Capítulo 6

A continuidade e os limites à luz do *RBC+Co*

No presente capítulo é efetuada a análise de segunda ordem dos dados recolhidos através dos registos escritos dos alunos (RA), bem como das transcrições dos registos audiovisuais (RAV) obtidos pela gravação das aulas, e ainda os registos escritos da investigadora (RI) sempre que se evidenciou necessidade de completar algo que não se evidencia verbalmente, segundo as categorias e subcategorias já definidas:

- *Ação-R:*
 - Interpretar;
 - Estrutura adquirida;
 - Vizinhança:
 - Aproximação;
- *Ação-B:*
 - Estratégias;
 - Soluções intermédias;
 - Justificação;
 - Aplicação de construção prévia;
- *Ação-C:*
 - Reorganização;
 - Continuidade num ponto;
 - Continuidade à esquerda num ponto;
 - Continuidade à direita num ponto;
 - Continuidade no domínio;
 - Continuidade num intervalo;
 - Continuidade num ponto isolado;
 - Limite com limites laterais;
 - Limite num ponto de continuidade;
 - Limite num ponto de descontinuidade;
 - Limite no infinito;
 - Limite num ponto isolado;
 - Limite num ponto fronteiro;
 - Limite num ponto exterior;
 - Cálculo de limite por substituição;
 - Cálculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes;

- Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro que não pertença ao domínio;
- Continuidade baseada em limite num ponto interior ao domínio;
- Comunicação;
- *Consolidação.*

Serão analisadas as questões relativas à Continuidade e aos Limites, seguindo a ordem em que estas são fornecidas aos alunos. Em cada questão serão analisadas sequencialmente a *Ação-R*, a *Ação-B*, a *Ação-C* e a *Consolidação*, ressalvando os casos em que a *Consolidação* não ocorreu, sendo ainda realizada uma síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas. Em virtude das primeiras questões, em cada grupo, terem um carácter puramente diagnóstico, estas não irão ser objeto de análise.

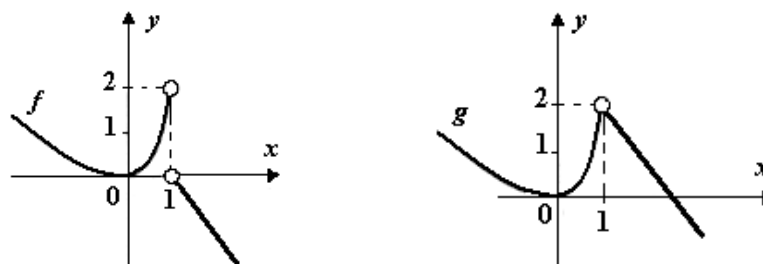
Os gráficos apresentados foram obtidos com recurso ao *software* de análise qualitativa de dados ATLAS.ti e, visto alguns serem relativamente complexos, impossibilitando a sua leitura ao longo do texto, esses mesmos encontram-se ampliados em anexo.

6.1 Questões sobre continuidade

Apresentam-se seguidamente os resultados obtidos com a recolha dos registos audiovisuais e escritos dos alunos referentes às questões, de dificuldade crescente, visando o estudo da continuidade de uma função, quer num ponto quer no seu domínio. Apesar de já introduzidas no Capítulo 5, apresentam-se novamente as questões trabalhadas pelos alunos, por forma a facilitar a leitura deste documento.

6.1.1 Questão 2

Questão 2 Observe os seguintes gráficos das funções reais de variável real f e g .



- a) Prolongue a função f no ponto $x = 1$ de modo que f seja contínua:
 - i. apenas à direita de 1;
 - ii. apenas à esquerda de 1.
- b) Prolongue a função g no ponto $x = 1$ de modo que g seja contínua em \mathbb{R} .

Figura 6.1 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade

No que concerne à alínea a), pretendeu-se aferir se os alunos conseguiam alcançar a noção de continuidade lateral num ponto. Sendo uma questão de caráter elementar, e atendendo a que já tinham sido analisadas as respostas à Questão 1, esperava-se que a quase totalidade dos alunos a realizasse corretamente.

De forma a auxiliar os alunos, foi introduzida pelo docente, por analogia à definição de vizinhança de um ponto, já do seu conhecimento de aulas anteriores, a noção de vizinhança lateral de um ponto (recordar a definição 2.1 da página 11). Assim, a vizinhança lateral à direita de um ponto será

$$V^+_{\varepsilon}(a) = \{x \in]a, +\infty[: |x - a| < \varepsilon\} =]a; a + \varepsilon[$$

e a vizinhança lateral à esquerda

$$V^-_{\varepsilon}(a) = \{x \in]-\infty, a[: |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon; a[.$$

Recorde-se, mais uma vez, que foi necessário referir por diversas vezes a importância da noção de vizinhança, em especial para os alunos que aprenderam a continuidade de outra forma.

Em relação à alínea b) foi trabalhada a ideia de prolongamento por continuidade a um ponto. Esperava-se que o debate fosse intenso nesta parte, em especial porque a função g já é contínua em todo o seu domínio (mas não em \mathbb{R}), o que contribuiu para gerar alguma confusão. Reconheça-se que nesta questão os alunos que já dominavam o conceito de limite estavam em vantagem, pois para uma certa função f o prolongamento em continuidade ao ponto $a \notin D_f$ consiste, de forma simples, em atribuir ao objeto a o valor do seu limite. No entanto, os alunos que compreenderam bem a noção de vizinhança também deveriam conseguir visualizar que basta atribuir ao ponto $a \notin D_f$ um valor para $f(a)$. Os resultados foram encorajadores, pois mesmo alunos sem as noções de continuidade e de limite do ensino secundário conseguiram identificar esse valor.

6.1.1.1 Ação-R

O diálogo transcrito na Figura 6.2 mostra que os alunos reconhecem a importância do gráfico apresentado (*Interpretar*) e das noções de bola aberta e de bola fechada para responder à questão formulada (*Estrutura adquirida*).

- AF3: Então é só fazer uma bola no sítio correto...
- RI4: AF refere-se a uma bola fechada.
- AF5: Temos de fechar o ponto 1.

Figura 6.2 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2

No entanto, como podemos verificar no excerto seguinte, os alunos não identificam, numa

primeira fase, a importância da vizinhança lateral neste contexto, tendo de ser o docente a relembrar essa importância (*Vizinhança*). É de notar, ainda, alguma hesitação em relação à bola que deveria ser fechada.

- P7: Mas qual deles?
- DV8: Ah! Tenho de fechar **UM** deles!
- ...
- P12: Mas o que se pede é “contínua à direita de 1”!
- ...
- P18: Para a função ser contínua à direita de 1, vamos só considerar “os vizinhos” à direita de 1. [...] Faço os “vizinhos” só à direita...
- ...
- P20: E para o ii.? Vou fazer os “vizinhos” para que lado?
- AF21: Esquerda.

Figura 6.3 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

No caso da alínea b), a relevância do estudo da função na vizinhança do ponto $x = 1$ foi mais uma vez indicada pelo professor (*Vizinhança*).

- P26: Então, têm de considerar os vizinhos do ponto...
- RI27: No quadro P representa uma vizinhança de $x = 1$.

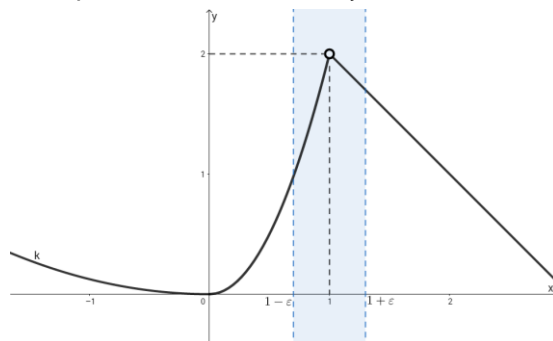


Figura 6.4 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)

Recorrendo ao *software* ATLAS.ti, podemos observar, na figura seguinte (ver Anexo 6.1), as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança* que se manifestaram durante a *Ação-R*, assim como a relação entre estas.

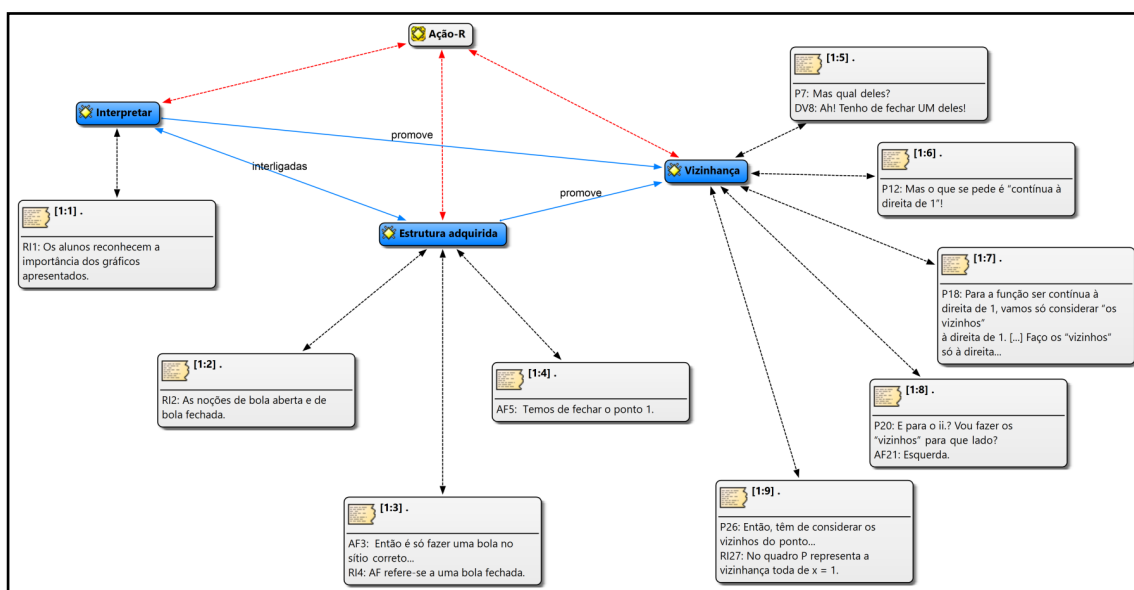


Figura 6.5 - RAV da Ação-R na Questão 2

Podemos verificar, pela análise da Figura 6.5, que a subcategoria *Interpretar*, em que os alunos analisam os gráficos apresentados [1:1], foi determinante para o reconhecimento das *Estruturas adquiridas* que seriam necessárias para darem início à resolução das questões, neste caso as noções de bola aberta e de bola fechada [1:2]. Por sua vez, a noção de bola aberta é fundamental para a *Interpretação* dos gráficos apresentados.

Por outro lado, o excerto [1:3] – AF3: *Então é só fazer uma bola no sítio correto...* –, aliado à *Interpretação* dos gráficos fornecidos [1:1], conduz os alunos a identificarem a necessidade de recorrer à noção de *Vizinhança* num ponto, para continuarem a responder às questões colocadas. Embora pelo excerto [1:4] – AF5: *Temos de fechar o ponto 1.* – se identifique a *Estrutura adquirida* necessária para a resolução da questão, neste caso a noção de bola fechada, verifica-se, no excerto [1:5] – DV8: *Ah! Tenho de fechar UM deles!* –, alguma dificuldade em identificar qual das bolas abertas deveria ser fechada no caso da alínea a). Daqui vem a necessidade do recurso à noção de *Vizinhança* lateral, lembrada pelo docente no excerto [1:6] – P12: *Mas o que se pede é "continua à direita de 1!"* –, e que foi determinante para o prosseguimento da resolução da questão no caso da alínea a), quer para a continuidade à direita [1:7], quer para a continuidade à esquerda [1:8] num ponto.

Também para dar início à resposta da alínea b), se verifica a interligação entre as subcategorias *Estruturas adquiridas*, mais uma vez pelo excerto [1:4] – AF5: *Temos de fechar o ponto 1.* –, e *Vizinhança*, aqui refletida pelo excerto [1:9] – P26: *Então, têm de considerar os vizinhos do ponto...* RI27: *No quadro P representa uma vizinhança de $x = 1$.*

Síntese

Pela análise efetuada, verificamos que a *Ação-R* se expressou através das subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*. Além disso, verificámos uma interligação entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, a qual revela, da parte dos alunos, que a interpretação de uma questão ocorre, quase em simultâneo, com a seleção de conhecimentos obtidos anteriormente. Por outro lado, evidencia-se que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* despoletam nos alunos o recurso à noção de *Vizinhança*.

6.1.1.2 Ação-B

Quando consideramos esta etapa do processo de construção de conhecimento, verificamos que, em relação à alínea a), a *Estratégia* dos alunos passa pelo fecho de uma das bolas abertas.

- AF3: Então é só fazer uma bola no sítio correto...
- RI4: AF refere-se a uma bola fechada.
- AF5: Temos de fechar o ponto 1.
- P7: Mas qual deles?
- DV8: Ah! Tenho de fechar **UM** deles!

Figura 6.6 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

Em relação à produção escrita, note-se que as respostas de AF e DV à Questão 2, alínea a), seguidamente expostas, mostram que as alunas conseguiram realizar com sucesso esta tarefa, preenchendo corretamente as bolas abertas respetivas (*Aplicação de construção prévia*).

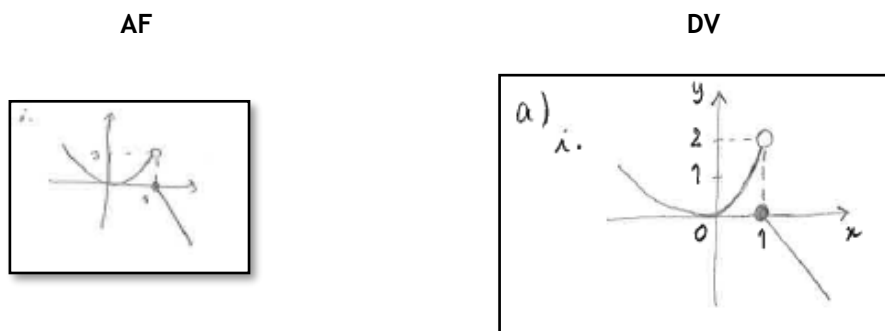


Figura 6.7 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a) i.

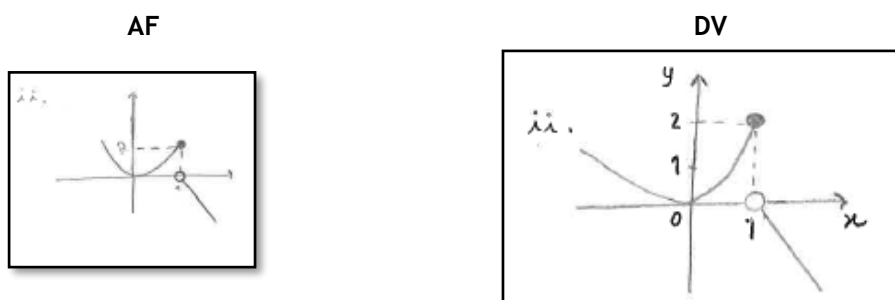


Figura 6.8 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a) ii.

O fecho da bola em $(x, y) = (1, 2)$ foi a *Estratégia* utilizada para a alínea b), no processo de *construir*.

- AF28: É só pintar a bolinha!

Figura 6.9 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)

A análise das respostas escritas fornecidas por ambas as alunas mostra que estas responderam corretamente à questão, preenchendo a bola aberta, demonstrando deste modo a *Aplicação de construção prévia*.

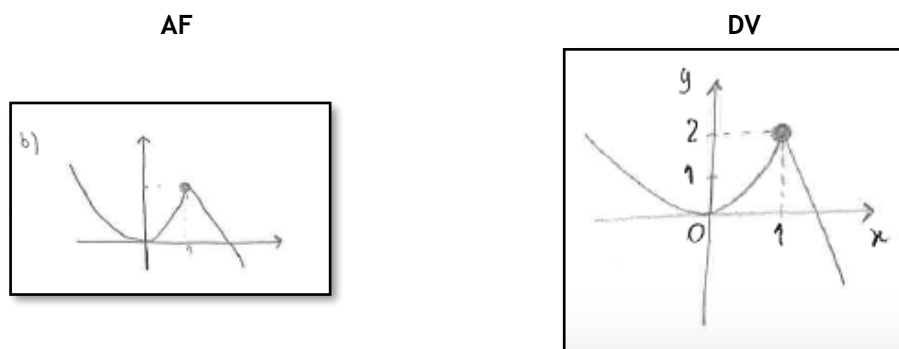


Figura 6.10 - RA respeitante à resolução da Questão 2 b)

A *Ação-B*, identificada através das suas subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* aquando da resolução desta questão, encontra-se esquematizada no gráfico seguinte (ver Anexo 6.2), obtido com recurso ao *software* ATLAS.ti.

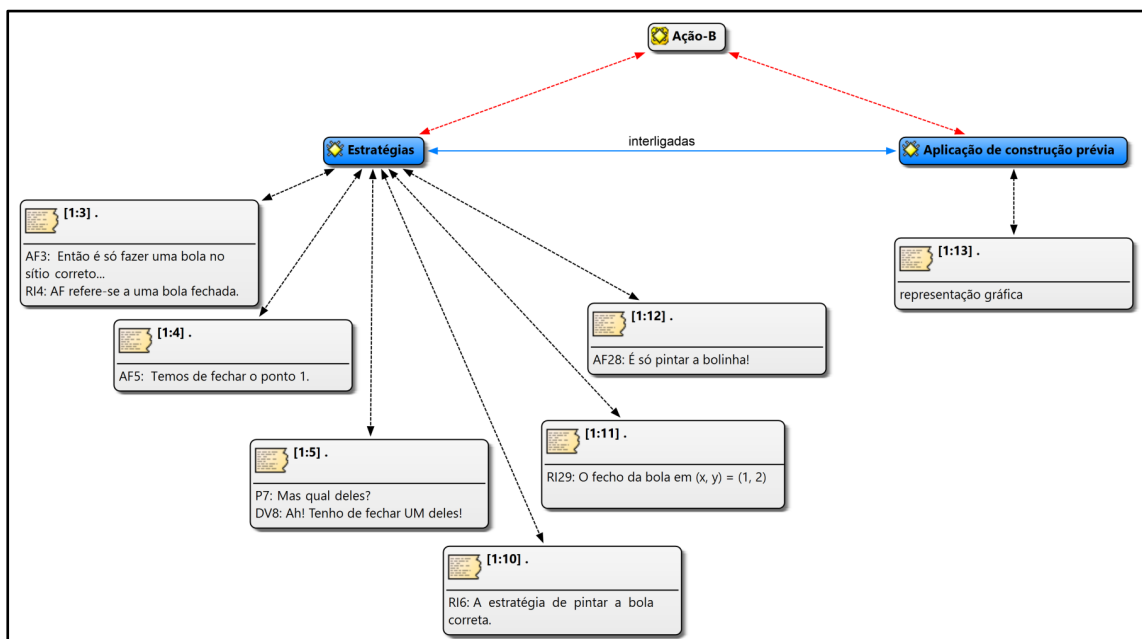


Figura 6.11 - RAV da *Ação-B* na Questão 2

Na figura anterior podemos constatar que as *Estratégias* utilizadas pelos alunos na resolução

desta questão se encontram interligadas com a *Aplicação da construção prévia* relacionada com o fecho da bola aberta respetiva em cada alínea. Neste caso, a *Estratégia* de pintar a bola que se encontra aberta para representar a imagem do ponto de abcissa $x = 1$, tal como os excertos [1:3], [1:4], [1:5] e [1:12] reproduzem, leva a que os alunos representem graficamente as funções para os diferentes casos, o que consideramos revelar a *Aplicação de construção prévia*.

Síntese

Na *Ação-B* foram identificadas as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*. De acordo com a Figura 6.11 constata-se que as *Estratégias* utilizadas pelos alunos para dar resposta à questão colocada se encontram intrinsecamente ligadas à *Aplicação da construção prévia* de bola fechada. Questionamos se esta relação de interdependência será sempre verificada, o que será analisado aquando do estudo das seguintes questões.

Parece-nos, na análise desta questão, haver uma relação de interdependência entre as subcategorias identificadas na *Ação-R* e na *Ação-B*, em particular, entre as subcategorias *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*, as quais ocorrem aquando da *Ação-R*, e as *Estratégias* utilizadas pelos alunos que são despoletadas pela *Ação-B*. Também a *Aplicação de construção prévia* pelos alunos sob a forma do fecho das bolas abertas na *Ação-B*, parece advir da *Interpretação* dada pelos alunos ao enunciado da questão, em particular à análise dos gráficos apresentados, e das *Estruturas adquiridas*, neste particular as noções de bola aberta e de bola fechada, no momento em que a *Ação-R* é despoletada.

6.1.1.3 *Ação-C*

Analisando agora quer as produções escritas de AF e DV, quer a interação oral com o professor (abaixo exposta), verificamos que para dar resposta à alínea a), os alunos apresentam dois gráficos distintos, uma vez que não será possível proceder ao fecho de ambas as bolas em simultâneo, uma vez que deixariam de ter uma função (*Reorganização*).

- RI16: Os alunos chegaram à conclusão que para as questões i. e ii. da alínea a) era necessário proceder à representação gráfica de dois gráficos distintos.

Figura 6.12 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

Além disso, pelos excertos reproduzidos seguidamente, tudo indica que os alunos identificam graficamente as construções de *Continuidade à esquerda num ponto* e de *Continuidade à direita num ponto*, *Comunicando* oralmente os valores que as imagens de $x = 1$ na função f deveriam ter em cada caso.

- P18: Para a função ser contínua à direita de 1, vamos só considerar “os vizinhos” à direita de 1. [...] Faço os “vizinhos” só à direita... Quanto é que tem que valer este ponto?
- A19: Zero!

- P20: E para o ii.? Vou fazer os “vizinhos” para que lado?
- AF21: Esquerda.
- P22: Então, quanto é que tem de valer este ponto?
- AF23: Dois!

Figura 6.13 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

Extrapolam ainda o que sucederia se o pretendido fosse a *Continuidade num ponto*, sendo que neste caso já reconhecem a importância das *Vizinhanças*. Tal é ainda corroborado pelos diálogos seguidamente apresentados, nos quais a transcrição de DV11 constitui a *Comunicação* da descontinuidade da função f em $x = 1$.

- RI9: Os alunos extrapolam sobre o que sucederia se o pretendido fosse a continuidade no ponto $x = 1$.
- AF10: Não é contínua na vizinhança também.
- DV11: Aqui nós fechamos esta bolinha. Mas assim ela é contínua exceto no 1!

Figura 6.14 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

Analisando agora a resolução da alínea b), notamos que os alunos atingem a *construção* pretendida (*Continuidade num intervalo*), sendo o exemplo concreto referente à continuidade em \mathbb{R} . Nenhum aluno mostrou conhecer a *construção* de *Continuidade no domínio*, pois apesar da função não ser contínua em \mathbb{R} é contínua em todo o seu domínio. Apesar de não ser esta a questão, alguém poderia ter levantado este problema.

- P24: Na b) não se diz à direita nem à esquerda, portanto têm de considerar o quê?
- DV25: Dizia: “contínua em \mathbb{R} ”.
- ...
- P30: Então, quanto é que tem de valer?
- AF31: Dois!

Figura 6.15 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b)

Também aqui é *Comunicando* oralmente o valor que $g(1)$ deverá ter para que a função g seja contínua em \mathbb{R} .

Na figura seguinte (ver Anexo 6.3) são apresentadas as subcategorias identificadas na *Ação-C*, evidenciando-se as relações entre as subcategorias *Reorganização*, *Continuidade à esquerda num ponto*, *Continuidade à direita num ponto*, *Continuidade num ponto*, *Continuidade num intervalo* e *Comunicação*.

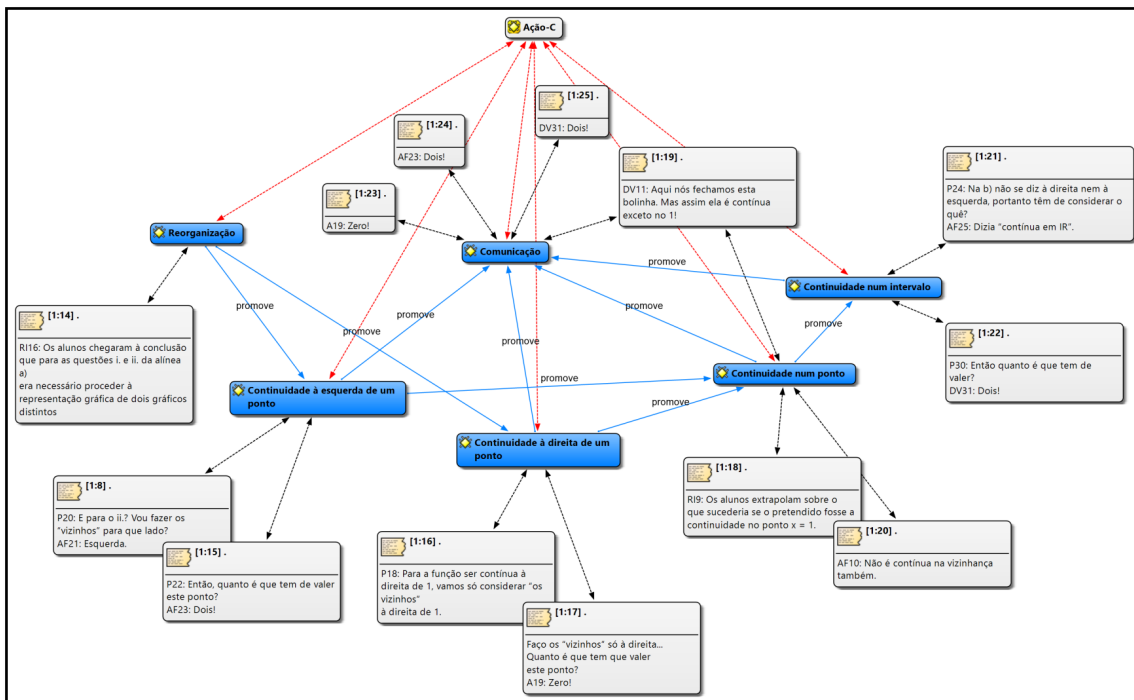


Figura 6.16 - RAV da Ação-C na Questão 2

Podemos verificar, pela análise da figura anterior, que a subcategoria *Reorganização* promove a manifestação das subcategorias *Continuidade à esquerda num ponto* e *Continuidade à direita num ponto*.

Por outro lado, ao extrapolar o que sucederia se, ainda na alínea a), o pretendido fosse a *Continuidade no ponto $x = 1$* , os alunos verificam que, pelo exposto na *Continuidade à esquerda de um ponto* ou na *Continuidade à direita de um ponto*, visto a imagem de $x = 1$ ter valores distintos em cada caso, não é possível, na alínea a), obter-se uma função contínua em $x = 1$. A *Continuidade num ponto* promove o aparecimento da subcategoria *Continuidade num intervalo* aquando da discussão da alínea b).

Síntese

A subcategoria *Reorganização* promove as construções de *Continuidade à esquerda num ponto* e de *Continuidade à direita num ponto*, as quais por sua vez promovem o aparecimento da subcategoria *Continuidade num ponto*. Esta última construção, por seu turno, desencadeia a manifestação da *Continuidade num intervalo*.

Relativamente à *Comunicação*, constatamos que esta é despoletada por todas as construções pretendidas nesta questão.

Além disso, afigura-se-nos que a *Ação-R* e a *Ação-B* são preponderantes para o aparecimento da *Ação-C*, o que iremos analisar em seguida.

6.1.1.4 Relações estabelecidas entre as ações epistêmicas

A figura seguinte (ver Anexo 6.4) evidencia as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C* durante a resolução da Questão 2, apresentando alguns dos excertos utilizados anteriormente.

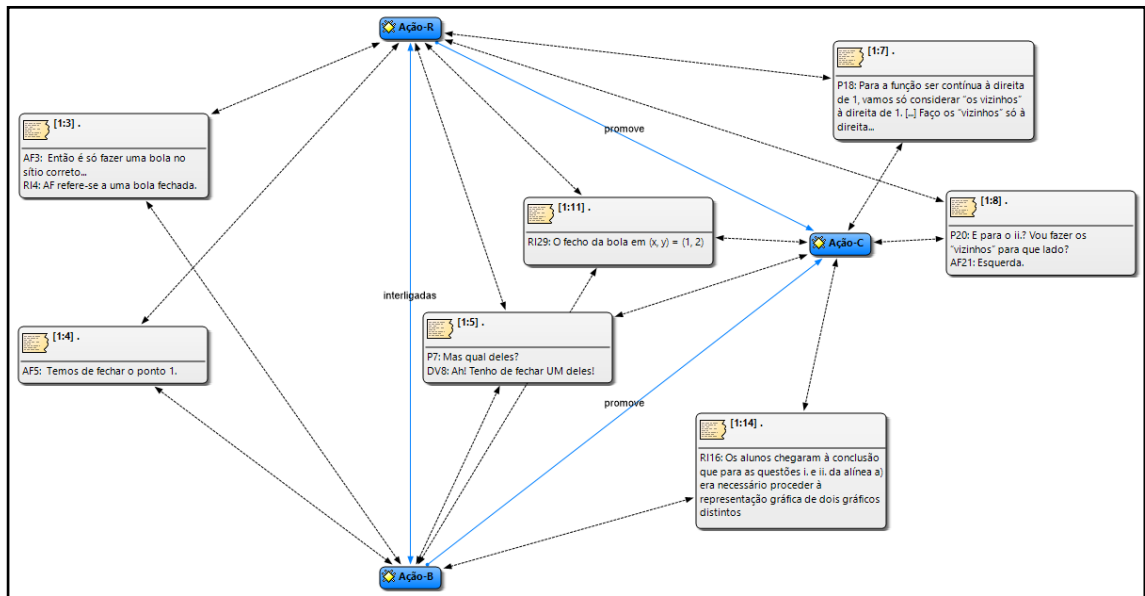


Figura 6.17 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2

Como podemos observar, durante a resolução da Questão 2 sobre a noção de continuidade a *Ação-R* e a *Ação-B* mantiveram-se interligadas e ambas promoveram o desenvolvimento da *Ação-C*.

As noções de bola aberta e de bola fechada (*Estrutura adquirida*) bem como as de vizinhança lateral e num ponto (*Vizinhança*) identificadas na *Ação-R* contribuíram para desencadear as *Estratégias* aplicadas pelos alunos no desenvolvimento da *Ação-B*. Por outro lado, essas *Estratégias*, quando combinadas com a interpretação do enunciado relativamente aos gráficos apresentados (*Interpretar*), auxiliam os alunos a apresentar uma resposta à questão colocada (*Justificação*).

Finalmente, a *Reorganização* de todos os conceitos, em conjunto com as *Estratégias*, despoletaram a *Ação-C*.

6.1.2 Questão 3

Questão 3 Com base na sua representação gráfica, estude a continuidade das seguintes funções reais de variável real f e g .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = -3 \\ \frac{9 - x^2}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Figura 6.18 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade

Na aula anterior já tinha sido pedido aos alunos que estudassem, em casa, a continuidade de funções polinomiais (em particular a função afim e a função quadrática), função exponencial e função logarítmica. Como anteriormente estas funções já tinham sido trabalhadas em aula, sendo as suas representações gráficas e domínios conceitos conhecidos, a maioria dos alunos obteve a *construção* correta e considerou que estas funções eram contínuas no seu domínio. No entanto, a Questão 3 apresenta duas funções com diferentes expressões analíticas para partes do seu domínio (vulgo ramos). Mais ainda, estas funções designadas por f e g são representadas pela sua expressão analítica, e não pelo seu gráfico, o que por si só se esperava que dificultasse bastante a tarefa proposta, já que vários alunos não dominavam a construção de função definida por ramos e a correspondente representação gráfica.

6.1.2.1 Ação-R

A discussão em torno do problema “porque é que o estudo dos pontos de mudança de ramo é fundamental para o estudo da continuidade” foi realizada antes dos alunos realizarem as tarefas em papel, tendo em atenção que a Questão 3 é consideravelmente mais complexa que a questão anterior. A Questão 3 foi resolvida de modo individual, como habitualmente, mas após uma discussão fomentada em aula.

Em relação à discussão em aula, os alunos começaram por *reconhecer* que a informação contida no enunciado do problema, neste caso o facto da expressão analítica da função estar definida por diferentes expressões em partes do seu domínio, é fundamental para iniciar a resolução (*Interpretar*) da questão para ambas as funções, f e g .

No caso da função f , houve recurso a conhecimentos anteriormente adquiridos (*Estrutura adquirida*), como a identificação de um caso notável $(9 - x^2)$ e posteriormente a simplificação de frações.

- RI3: Em relação ao 2º ramo da função f .
- AF4: É só meter $(3 - x)(3 + x)$ e cortar um com o outro.
- RI5: Referindo-se ao denominador.

Figura 6.19 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

Após esta simplificação, foi ainda necessário recordar a representação gráfica de funções, no caso concreto a da função afim (*Estrutura adquirida*).

- RI2: Os alunos tentam fazer os gráficos mas denotam dificuldades...
- ...
- P10: O gráfico de $3 - x$ é uma...?
- DV11: Função afim.
- P12: Já sabem representar....

- DV13: Precisamos de dois pontos para a representar graficamente!
- P14: Então como fazem?
- DV15: Damos 2 valores a x e calculamos o y ...

Figura 6.20 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

No que diz respeito à função g , a sua representação gráfica não era imediata pois os alunos que não tiveram Matemática A não conheciam a representação gráfica de uma função polinomial de grau 3. Apesar de tal ser irrelevante para o estudo da continuidade de g , seria exetável que a representação gráfica da função g não fosse realizada na íntegra. No entanto, como era de prever, os alunos identificam a representação gráfica para o polinómio do segundo grau (*Estrutura adquirida*).

- P53: O gráfico, para $x > 1$ é uma...?
- DV54: Parábola!

Figura 6.21 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

Para ambas as funções, a discussão preliminar centrou-se no ponto de mudança de ramo, reconhecendo os alunos a necessidade de recorrer às noções de bola aberta e de bola fechada para dar resposta à questão (*Estrutura adquirida*).

- RI16: Em relação à representação gráfica da função $3 - x$ para $x \neq -3$.
- DV17: Quando o x for -3 tem de ficar aberto, porque não conta.
- ...
- P28: Qual é o único ponto em que a reta muda? O que é que acontece em $x = -3$?
- AF29: Ela “salta”!
- RI30: Os alunos referem-se às bolas aberta e fechada.

Figura 6.22 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

- P40: No ponto 1, como é só para > 1 , seria uma...? [RI: Em relação ao 1º ramo].
- AF41: Uma bola aberta!
- ...
- P47: Para $x = 1$ quanto vale a função?
- DV4: Três.
- P49: Então, na representação gráfica, faz-se o quê?
- DV50: Uma bola fechada.
- ...
- P55: No ramo de baixo, já vimos que para $x = 1$ vale -2 . É uma bola aberta ou fechada?
- DV56: Aberta.

Figura 6.23 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

Podemos constatar também, embora nem sempre de forma explícita, que a noção de *Vizinhança* de um ponto é igualmente um recurso utilizado pelos alunos para seguirem ao encontro da resolução da questão em causa.

- RI18: Os alunos reconhecem a importância da noção de vizinhança.
- P19: Quando $x = -3$, quanto vale a função?
- DV20: Zero.
- P21: E nos outros pontos já vimos que a função é...
- A22: $3 - x!$

Figura 6.24 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

- P59: Então no ponto 1, é contínua? O que se passa na vizinhança?
- DV60: Não, os valores da função são diferentes na vizinhança de $x = 1$.

Figura 6.25 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

Esquemáticamente, as subcategorias identificadas pelos excertos anteriores durante o processo de reconhecimento a que se refere a *Ação-R*, encontram-se na figura seguinte (ver Anexo 6.5).

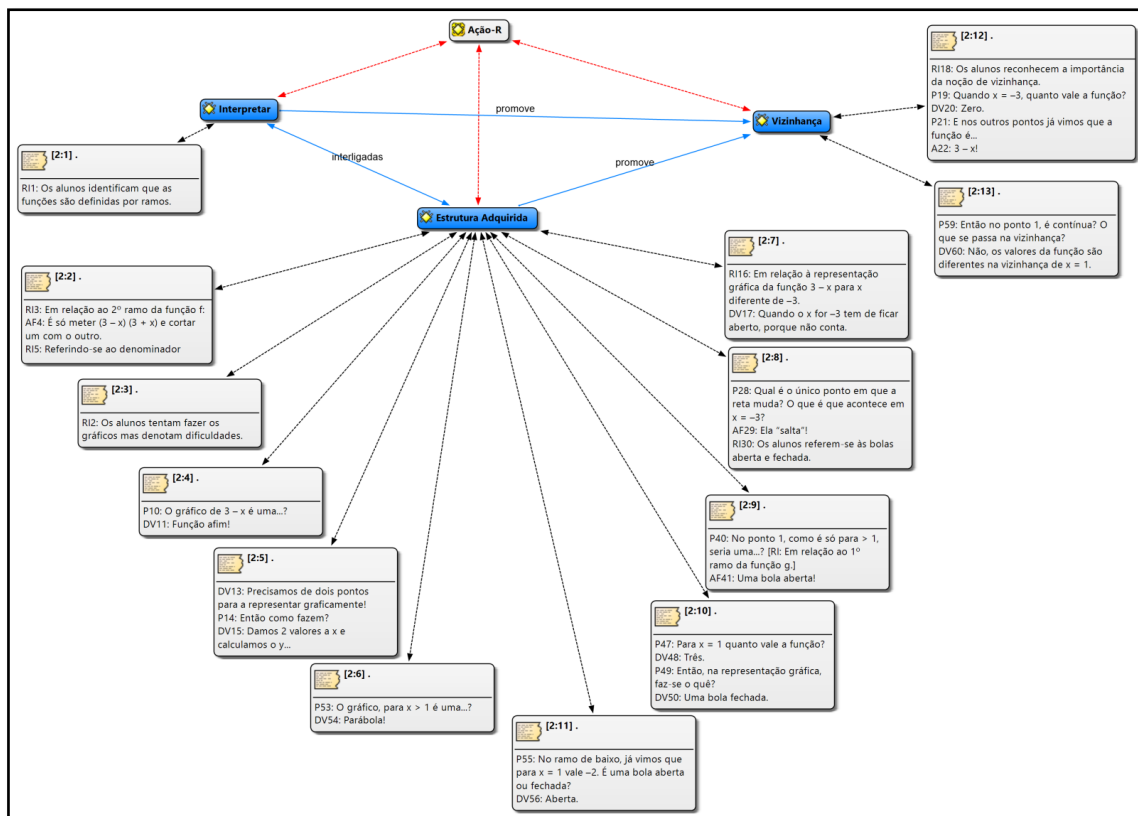


Figura 6.26 - RAV da Ação-R na Questão 3

Como podemos verificar, a maioria das ações epistémicas acionadas pelos alunos encontra-se patente na subcategoria *Estrutura adquirida*, na qual se verifica o recurso dos alunos a construções anteriormente estabelecidas, como a identificação de um caso notável e

consequente simplificação de uma fração, patente no excerto [2:2], e que resulta na obtenção de uma função afim [2:4] cuja representação gráfica pressupõe o cálculo de dois pontos [2:5]. É também visível, nos excertos [2:7] a [2:11], a discussão que envolve o reconhecimento da necessidade de utilização das noções de bola aberta e de bola fechada para a posterior representação gráfica das funções envolvidas, o qual se encontra estreitamente ligado à identificação do recurso à noção de *Vizinhança* ([2:12] e [2:13]), sendo essa ligação biunívoca visto que, como se percebe pelo excerto [2:13] – DV60: *Não, os valores da função são diferentes na vizinhança de $x = 1$* – esta também influi na utilidade das noções de bola aberta e de bola fechada.

Síntese

Pela análise efetuada, verificamos que a *Ação-R* se expressou através da manifestação das subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*, fomentando as respetivas conexões.

De modo análogo ao que ocorreu aquando da análise da *Ação-R* na Questão 2, verificamos também aqui uma interligação entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, a qual revela, da parte dos alunos, que a interpretação de uma questão ocorre, quase em simultâneo, com a seleção de conhecimentos obtidos anteriormente. Por outro lado, verifica-se que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* promovem a manifestação da subcategoria *Vizinhança*.

6.1.2.2 Ação-B

No processo de *construir*, a *Estratégia* utilizada para a função f consiste em simplificar a expressão designatória da função para $x \neq -3$, recorrendo à aplicação de um caso notável e à simplificação da fração (*Aplicação de construção prévia*).

- P6: Então fica $\frac{(3-x)(3+x)}{x+3}$.
- AF7: Corta-se o $3+x$ com o $x+3$... Fica só $3-x$.

Figura 6.27 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

A *Justificação* dada pelos alunos para obtenção da expressão analítica simplificada da função f é evidenciada pelos cálculos apresentados na figura seguinte.

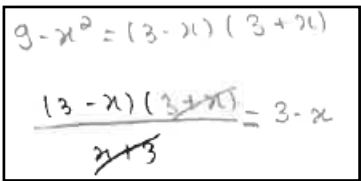
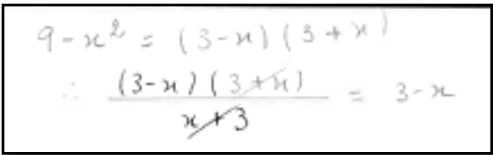
<p>AF</p> 	<p>DV</p> 
--	---

Figura 6.28 - RA respeitante à simplificação da expressão analítica da função f na Questão 3

Através da discussão promovida pelo professor, que se transcreve seguidamente, e durante a qual a maioria dos estudantes interrompeu as suas atividades, vários alunos mostraram dominar a construção de função afim com recurso ao cálculo de dois pontos (*Aplicação de construção prévia*).

- P23: Quando o x é, por exemplo, 0, quanto vale?
- AF24: Três.
- P25: Quando o x é, por exemplo, 1, quanto é que é?
- DV26: Dois.

Figura 6.29 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

Consideramos ainda que os cálculos apresentados para a determinação de dois pontos da reta $y = 3 - x$ representam uma *Justificação* para a sua posterior representação gráfica.

AF

$$f(0) = 3 - 0 = 3$$

$$f(1) = 3 - 1 = 2$$

DV

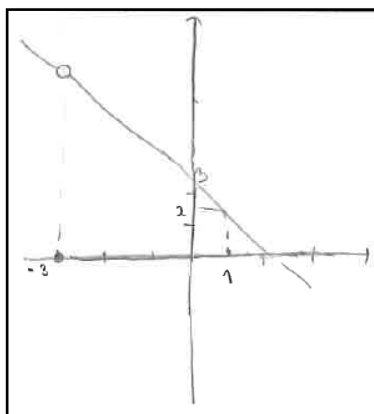
$$f(0) = 3 - 0 \Rightarrow f(0) = 3$$

$$f(1) = 3 - 1 \Rightarrow f(1) = 2$$

Figura 6.30 - RA respeitante ao cálculo de dois pontos da função f na Questão 3

Seguidamente, os alunos procederam à representação gráfica da expressão simplificada, sendo o gráfico da função afim para essa situação uma *Solução intermédia* que contribuirá para a resolução da questão colocada. É ainda relevante notar que os gráficos apresentados (*Justificação*) são pouco rigorosos: no caso de AF parece que a função tem um zero em $x = 2$, o que apesar de não influir no problema em análise, poderá ser relevante noutros problemas similares, e em relação a DV não é perceptível o que acontece à reta na *Vizinhança* de $x = -3$.

AF



DV

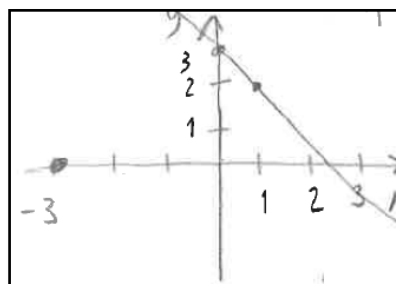


Figura 6.31 - RA respeitante à representação gráfica da função f na Questão 3

Em relação ao ponto $x = -3$, os alunos entendem que algo muda (a função “salta”) e aplicam os conceitos de bola aberta e de bola fechada na representação gráfica (*Estratégias*).

- P28: Qual é o único ponto em que a reta muda? O que é que acontece em $x = -3$?
- AF29: Ela “salta”!
- RI30: Os alunos referem-se às bolas aberta e fechada.

Figura 6.32 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

Do mesmo modo, em relação à função g , os alunos envolvem-se nos cálculos necessários para a posterior representação gráfica da função (*Aplicação de construção prévia*), tal como os seguintes excertos das transcrições orais demonstram.

- P37: Para $x > 1$, a função é $x^2 - 2$. No ponto 1 quanto é que valia?
- RI38: Os alunos envolvem-se nos cálculos.
- DV39: $1^2 - 2 = -1$
- ...
- P42: Para $x < 1$, é $x^3 - 3$ e se x fosse 1 dava...?
- RI43: Os alunos envolvem-se nos cálculos.
- DV44: $1^3 - 3 = -2$

Figura 6.33 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

Em termos dos registos escritos, apenas DV apresenta o seguinte cálculo, respeitante à imagem de $x = 1$ mas apenas para o ramo $x > 1$, o que representa uma *Justificação* incompleta para a posterior representação gráfica. A aluna deveria também apresentar a imagem de $x = 1$ para o ramo $x < 1$ para completar a sua justificação.

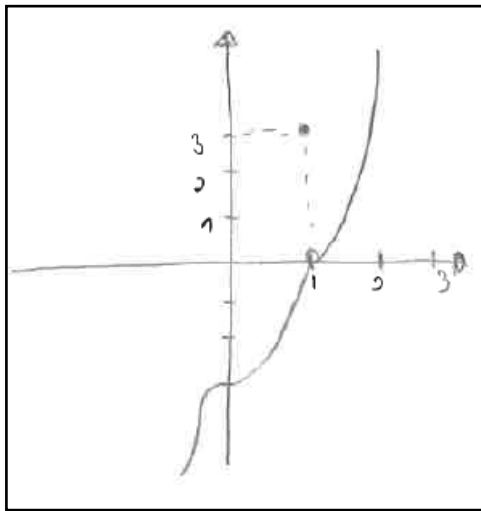
DV

$$x = 1 = 1^2 - 2 = -1$$

Figura 6.34 - RA respeitante ao cálculo da imagem de $x = 1$ para o primeiro ramo da função g da Questão 3

Após os cálculos supra, os alunos prosseguem para a representação gráfica da função g , a qual consideramos uma *Solução intermédia* para a questão colocada.

AF



DV

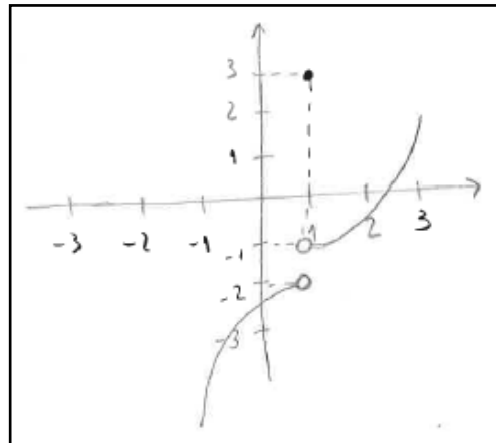


Figura 6.35 - RA respeitante à representação gráfica da função g na Questão 3

Como podemos constatar, nenhum dos alunos foi capaz de representar corretamente o gráfico da função g (*Justificação*), tal como tínhamos intuído. Embora AF pareça representar a função cúbica para $x < 1$, em $x = 1$ deveriam existir duas bolas abertas com imagens $y = -1$, para o ramo em que $x > 1$, e $y = -2$, para o ramo em que $x < 1$, tal como acontece no gráfico de DV. Nele podemos verificar uma correta aplicação do conceito de bola aberta e de bola fechada (*Estratégias*), as quais estão patentes na discussão oral transcrita no excerto seguinte, muito embora neste a representação da função polinomial de grau 3 não esteja correta.

- P47: Para $x = 1$ quanto vale a função?
- P49: Então, na representação gráfica, faz-se o quê?
- DV50: Uma bola fechada.
- P51: No ramo de cima, quando x é 1 dá -1 [RI: já visto anteriormente] e no gráfico é uma...?
- DV52: Bola aberta.
- ...
- P55: No ramo de baixo, já vimos que para $x = 1$ vale -2 . É uma bola aberta ou fechada?
- DV56: Aberta.

Figura 6.36 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

A figura seguinte (ver Anexo 6.6) resume a identificação efetuada anteriormente das subcategorias manifestadas na *Ação-B*.

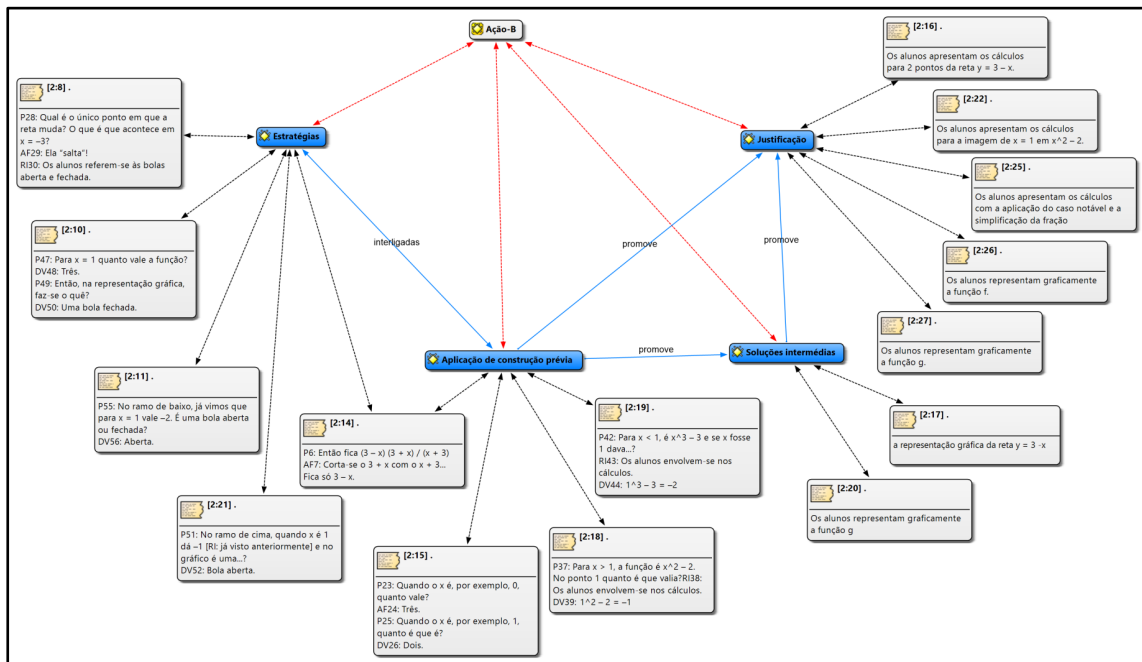


Figura 6.37 - RAV da Ação-B na Questão 3

Como podemos verificar na Figura 6.37, de modo a atingir a resolução da questão colocada (que, neste caso, passa pela representação gráfica das funções enunciadas), os alunos recorrem, para a função f , à aplicação de um caso notável e posterior simplificação da fração ([2:14]) para obtenção da expressão analítica de uma função afim, procedimentos estes que denotam a utilização de *Estratégias* para avançar na resolução da questão proposta, assim como a *Aplicação de construções prévias*.

Podemos também verificar que a *Aplicação de construção prévia*, neste caso o cálculo das imagens das funções para alguns valores de x ([2:15], [2:18] e [2:19]), em particular para os pontos de mudança de ramo, despoletam as *Estratégias* de utilizar as noções de bola aberta e de bola fechada ([2:8], [2:10], [2:11] e [2:21]) na representação gráfica das funções ([2:17] e [2:20]). Os gráficos assim obtidos constituem *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão colocada.

Por outro lado, a apresentação dos cálculos utilizados (*Aplicação de construção prévia*) na aplicação do caso notável e na subsequente simplificação da fração ([2:25]), bem como o cálculo de dois pontos para a representação da reta associada à função afim obtida por essa simplificação ([2:16]), e a apresentação das representações gráficas das funções ([2:26] e [2:27]) representam *Justificações* para as *Soluções intermédias* encontradas.

Síntese

Pela análise dos dados fornecidos com a resolução da Questão 3, podemos constatar que a Ação-B é revelada pelas subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*.

Verifica-se uma relação bilateral entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*. As *Estratégias* relatadas oralmente pelos alunos pressupõem conhecimentos previamente adquiridos que permitem aos alunos desenvolverem as referidas estratégias para procederem à resolução da questão proposta.

Por sua vez, os resultados alcançados com a *Aplicação de construções prévias*, bem como a representação gráfica das funções envolvidas constituem *Soluções intermédias*.

Finalmente, a apresentação dos cálculos efetuados com a *Aplicação de construções prévias* e dos gráficos obtidos nas *Soluções intermédias* promovem a *Justificação* das resoluções executadas no sentido de dar uma resposta à questão subjacente.

6.1.2.3 Ação-C

Através da *Reorganização* das construções utilizadas, nomeadamente a representação dos gráficos das funções f , já com a expressão simplificada, e g , das noções de bola aberta e de bola fechada, e da importância da noção de *Vizinhança* os alunos concluem quanto à descontinuidade de ambas as funções nos pontos em que estas mudam de ramo (*Continuidade num ponto*) e à continuidade nos restantes pontos (*Continuidade num intervalo*).

- P19: Quando $x = -3$, quanto vale a função?
- DV20: Zero.
- P21: E nos outros pontos já vimos que a função é...
- A22: $3 - x!$
- ...
- P35: Então o que podemos dizer sobre a continuidade?
- AF36: É contínua em \mathbb{R} exceto -3 .

Figura 6.38 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função f)

- P57: Agora estudem a continuidade. Qual é o ponto que pode dar problemas?
- AF58: O 1.
- P59: Então no ponto 1, é contínua? O que se passa na vizinhança?
- DV60: Não, os valores da função são diferentes na vizinhança de $x = 1$.
- P61: Então, onde é que a função é contínua?
- AF62: Em \mathbb{R} exceto 1. [RI: Depois de representarem graficamente a função.]

Figura 6.39 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3 (função g)

Em relação à produção escrita, verificamos que AF expressa através de escrita simbólica a *construção*, indicando explicitamente (*Comunicação*) os domínios de ambas as funções, assim como os intervalos em que estas são contínuas, atingindo desta forma a *construção* pretendida (*Continuidade num intervalo*). Tal não é claro em relação a DV, já que esta omite uma resposta conclusiva.



Figura 6.40 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 3

No esquema que se segue (ver Anexo 6.7) podemos identificar, de modo mais sucinto, os excertos que evidenciam as subcategorias *Reorganização*, *Continuidade num ponto*, *Continuidade num intervalo* e *Comunicação*, despoletadas pela *Ação-C* na análise dos dados recolhidos em relação à Questão 3.

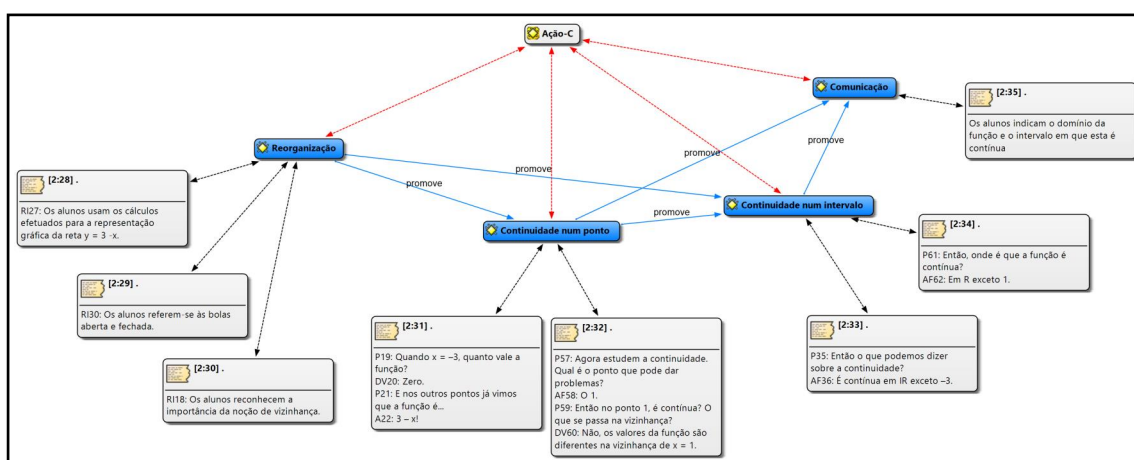


Figura 6.41 - RAV da Ação-C na Questão 3

Verifica-se, na Figura 6.41, que os alunos *Reorganizam* as construções efetuadas anteriormente, nomeadamente os cálculos algébricos ([2:28]) e as noções de bola aberta, de bola fechada ([2:29]) e de *Vizinhança* ([2:30]) para procederem à nova *construção*.

A *Reorganização* dessas construções permite que os alunos percecionem que a *Continuidade num ponto* não é verificada ([2:31] e [2:32]) e, por sua vez, ao confrontarem essa informação com o domínio das funções, atingem o objetivo da questão, ou seja, a *Continuidade num intervalo* ([2:33] e [2:34]). Dessas conclusões surge a *Comunicação*, através de escrita simbólica, do domínio de cada função e do intervalo onde cada uma delas é contínua.

Síntese

Constatamos que a *Reorganização* das construções efetuadas anteriormente está relacionada com a emergência das subcategorias *Continuidade num ponto* e *Continuidade num intervalo*. Por outro lado, a análise efetuada à *Continuidade num ponto* está associada à identificação da *Continuidade num intervalo*, e ambas promovem a *Comunicação* da resposta final à questão em estudo.

Além disso, à semelhança que que foi percebido na Questão 2, figura-se-nos que a *Ação-R* e a *Ação-B* são decisivas para o aparecimento da *Ação-C*, cuja análise iremos efetuar seguidamente.

6.1.2.4 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

A figura seguinte (ver Anexo 6.8) evidencia as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C* durante a resolução da Questão 3, apresentando apenas alguns dos excertos transcritos anteriormente e que se consideram de maior relevância, uma vez que se tornaria impossível a leitura do gráfico caso se utilizassem todos os excertos.

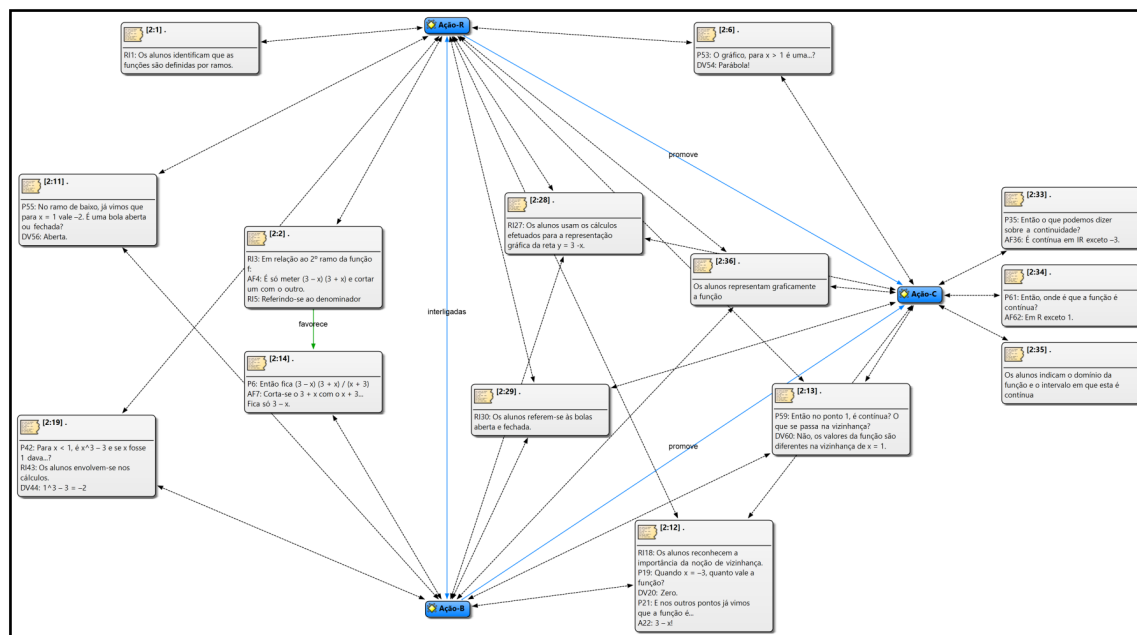


Figura 6.42 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 3

Como podemos observar, a *Ação-R* e a *Ação-B* mantiveram-se interligadas e ambas promoveram o desenvolvimento da *Ação-C*.

Reconsiderando o que já foi constatado anteriormente, identificação do caso notável, a simplificação da fração, as noções de bola aberta e de bola fechada e a representação gráfica das funções afim e quadrática (*Estrutura adquirida*), bem como a noção de *Vizinhança*, identificadas na *Ação-R*, contribuíram para desencadear as *Estratégias* aplicadas pelos alunos no desenvolvimento da *Ação-B*, bem como a *Aplicação dessas construções prévias* à resolução da questão. Por sua vez, a *Aplicação de construções prévias* conduziu os alunos a considerarem novas *Estratégias* e, como consequência, a identificarem outras *Estruturas adquiridas* para prosseguirem com a resolução da questão proposta. Estas relações sugerem que a *Ação-R* e a *Ação-B* se autoalimentam.

Analogamente ao que sucedeu com a Questão 2, a *Reorganização* de todos os conceitos identificados na *Ação-R*, em conjunto com as *Estratégias* e a *Aplicação de construções prévias*

despoletadas na Ação-B, desencadearam as construções necessárias na Ação-C para a resolução da questão colocada.

6.1.3 Questão 4

Questão 4 Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8}$.

- a) A função f é contínua em todo o seu domínio?
- b) Prolongue a função f de modo a que esta seja contínua em \mathbb{R} .

Figura 6.43 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade

A Questão 4 é um exercício mais avançado, na medida em que envolve problemas de domínios e de simplificação de expressões designatórias com recurso à fatorização ou à divisão de polinómios. Com ela procurava-se aferir se efetivamente o conhecimento da noção de continuidade estava bem adquirido pelos alunos, e se estes conseguiam aplicar as suas construções na resolução de problemas um pouco mais avançados sobre continuidade.

6.1.3.1 Ação-R

Para dar início à resolução desta questão, os alunos *reconheceram* que era necessário analisar a expressão analítica da função definida por um quociente de dois polinómios (*Interpretar*) e utilizar as construções já conhecidas de cálculo de domínios de funções reais de variável real (*Estrutura adquirida*).

- P1: Na alínea a), [...] qual é a 1ª coisa que têm de fazer?
- AF2: Calcular o domínio.

Figura 6.44 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Neste caso concreto, para a determinação do domínio da função representada por uma fração os alunos reconhecem que o seu denominador não se poderá anular (*Estrutura adquirida*).

- P3: Neste caso, para calcular o domínio, o que é que tem de acontecer?
- DV4: O denominador tem de ser diferente de zero!

Figura 6.45 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Seguidamente, os alunos verificam que é possível simplificar a expressão analítica da função, colocando um fator comum em evidência, quer no numerador, quer no denominador da respetiva fração (*Estrutura adquirida*).

- AF7: Simplificar. Colocar o x em evidência em cima, e em baixo o 2.
- DV8: E depois corta!

Figura 6.46 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

A expressão analítica simplificada da função é corretamente identificada pelos alunos como sendo uma função afim, cuja representação gráfica é já sua conhecida (*Estrutura adquirida*),

- P10: Como fica a expressão simplificada?
- AF11: $\frac{x}{2}$
- P12: Que é uma função...?
- AF13: Afim.
- P14: E o gráfico, o que é?
- DV15: Uma reta!

Figura 6.47 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Verificamos, na discussão que envolve a representação gráfica da função, que os alunos recorrem mais uma vez à noção de bola aberta (*Estrutura adquirida*).

- P33: Então o que é que tenho de fazer no 4?
- RI34: Referindo-se à representação gráfica.
- DV35: Uma bolinha aberta!

Figura 6.48- RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

No que concerne à alínea b), a *Interpretação* do enunciado vai desencadear o recurso à noção já conhecida de bola fechada (*Estrutura adquirida*). Apesar da informação contida no problema ser relevante para iniciar a resposta, tão ou mais relevante é a resposta obtida na alínea a), pois assim os alunos identificam que o único ponto da função a prolongar por continuidade é aquele onde $x = 4$ (*Interpretar*).

- P36: Agora, na alínea b), o que é que se pergunta? “Prolongue... em \mathbb{R} ”! O que é que têm de fazer?
- DV37: Fechar a bola!

Figura 6.49- RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 b)

As subcategorias previamente relatadas na *Ação-R* encontram-se esquematizadas na figura que se segue (ver Anexo 6.9).

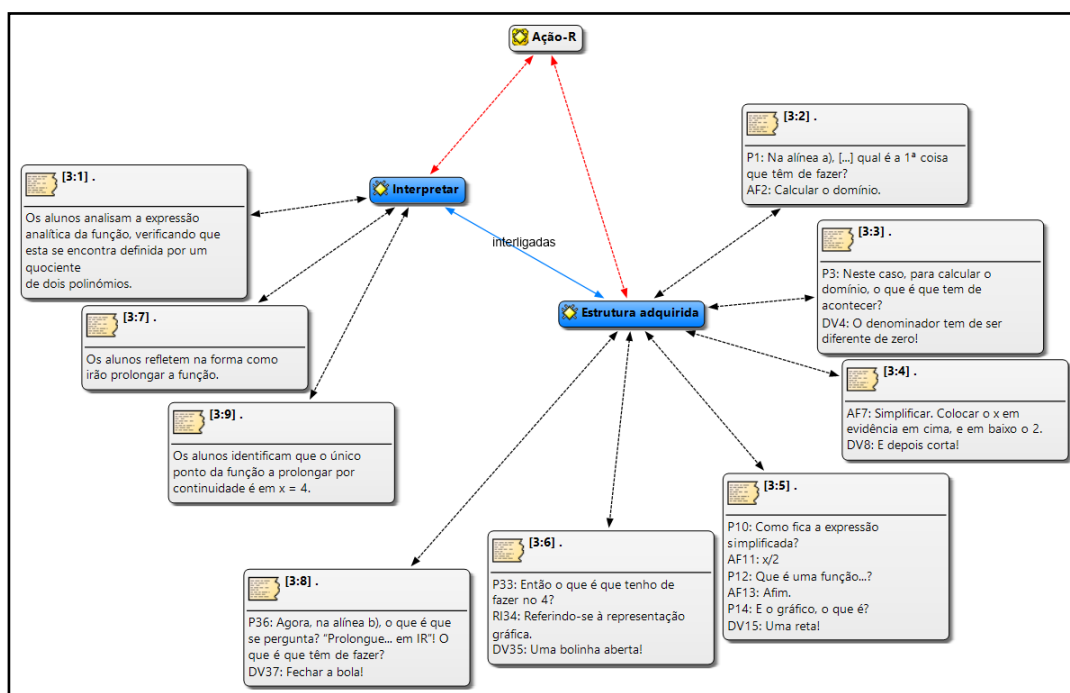


Figura 6.50 - RAV da Ação-R na Questão 4

Como podemos constatar através da análise da Figura 6.50, as subcategorias identificadas na Ação-R foram a *Interpretação* e a *Estrutura adquirida*, uma vez que para esta questão em particular não havia necessidade de recurso à noção de *Vizinhança*.

Relativamente à alínea a), ao reconhecerem que a expressão analítica da função se encontra definida por um quociente ([3:1]) os alunos acionam, quase automaticamente, *Estruturas adquiridas* anteriormente que os impelem a calcular o domínio da função constatando que o denominador não se poderá anular ([3:2] e [3:3]).

No seguimento do que foi executado na Questão 3, os alunos constataam a possibilidade de simplificar a fração que define analiticamente a função, colocando em evidência um fator comum, quer no numerador, quer no denominador ([3:4]), recorrendo uma vez mais a *Estruturas adquiridas* anteriormente. Tal simplificação conduz ao reconhecimento da função afim e da respetiva representação gráfica ([3:5]). Nesta é identificada a necessidade de recurso à noção já conhecida de bola aberta de modo a refletir a exceção criada pelo cálculo do domínio da função ([3:6]). Toda esta abstração por parte dos alunos só é possível pelo uso de *Estruturas adquiridas* previamente.

Após a resolução da alínea a), os alunos refletem como poderão efetuar o prolongamento por continuidade da função pedido na alínea b) ([3:7]), identificando que o único ponto em falta é o ponto de abcissa $x = 4$ ([3:9]), o que despoleta o recurso à noção de bola fechada ([3:8]) para efetuar a resolução da questão.

Síntese

Da análise efetuada anteriormente, podemos comprovar que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram interligadas, visto considerarmos que a *Interpretação* do enunciado, por si só não teria expressão se não existissem *Estruturas adquiridas* anteriormente pelos alunos. Por outro lado, são as próprias *Estruturas adquiridas* que impulsionam a *Interpretação* dada pelos alunos ao enunciado da questão colocada.

6.1.3.2 Ação-B

A *Estratégia* de calcular o domínio da função leva os alunos a aplicarem conhecimentos adquiridos anteriormente, como o cálculo dos zeros de uma função linear (*Aplicação de construção prévia*).

AF	DV
$2x - 8 \neq 0$ $2x - 8 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 8 \Leftrightarrow x \neq \frac{8}{2} \Leftrightarrow x \neq 4$	$2x - 8 \neq 0$ $\Rightarrow 2x \neq 8$ $\Rightarrow x \neq 4$

Figura 6.51 - RA respeitante aos cálculos para a determinação do domínio na Questão 4 a)

Após a obtenção do domínio da função, os alunos simplificam a expressão analítica da função (*Estratégias*) por forma a tornar mais acessível o seu estudo. Para tal aplicam construções adquiridas anteriormente, em particular a fatorização de polinómios (*Aplicação de construção prévia*).

AF	DV
$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8} = \frac{x(x - 4)}{2(x - 4)} = \frac{x}{2}$	$f(x) = \frac{x \cancel{(x - 4)}}{2 \cancel{(x - 4)}} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$

Figura 6.52 - RA respeitante à simplificação da expressão analítica da função na Questão 4

Ao identificarem que a expressão simplificada é uma função afim, indicam ainda que esta é contínua em \mathbb{R} , o que configura uma *Solução intermédia* e estudam o que sucede no ponto $x = 4$.

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• P29: E onde é que uma função afim é contínua?• AF30: Em \mathbb{R}. |
|---|

Figura 6.53 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Alguns alunos, tal como DV, recorrem ainda à representação gráfica da função (*Aplicação de construção prévia*), já na sua expressão simplificada (*Estratégias*), de modo a alcançarem a solução da questão colocada (*Soluções intermédias*), calculando para tal as imagens de dois objetos (*Aplicação de construção prévia*) e tendo o cuidado de refletir a exceção calculada no domínio pela representação de uma bola aberta (*Estratégias*).

- RI24: Sobre a representação gráfica da função, a turma discute o valor da função para alguns objetos.
- P25: Quando o x é 0, quanto é que vale a função?
- DV26: Zero!
- P27: E quando o x é 2, por exemplo?
- AF28: Vale 1.

Figura 6.54 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

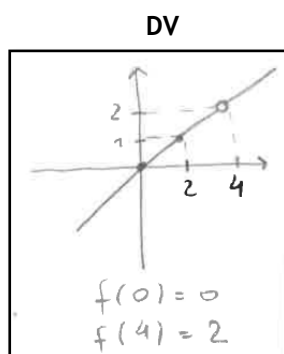


Figura 6.55 - RA respeitante à representação gráfica da função por DV na Questão 4 a)

Através da representação gráfica da função, os alunos verificam que a função é contínua apenas em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (*Soluções intermédias*), atendendo a que o objeto $x = 4$ não pertence ao domínio da função.

- P20: Pronto! Então, onde é que a função é contínua?
- AF21: Em \mathbb{R} exceto 4!

Figura 6.56 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Note-se que, no caso concreto da alínea a), a representação gráfica seria irrelevante pois os alunos já sabiam que a função afim é contínua no seu domínio. No entanto, para os alunos parece ser mais simples efetuar a representação gráfica da função do que justificar a continuidade analiticamente. Ressalvamos aqui o facto de AF não ter procedido à representação gráfica da função, mas mesmo assim ter concluído que a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (*Soluções intermédias*).

Na alínea b), os alunos utilizam como *Estratégia* o cálculo da imagem da função f simplificada no seu domínio ($f(x) = \frac{x}{2}$) para o objeto $x = 4$.

AF	DV
$f(4) = \frac{4}{2} = 2$	$f(4) = \frac{4}{2} = 2$

Figura 6.57 - RA respeitante ao cálculo do valor da função em $x = 4$ por AF na Questão 4 b)

Visto que AF não tinha, na alínea anterior, representado graficamente a função, opta por o fazer aqui, fechando a bola no ponto $(x,y) = (4,2)$ (*Estratégias*), calculando as imagens de alguns objetos, muito embora só fossem necessários dois, considerando que se trata de uma função afim (*Aplicação de construção prévia*).

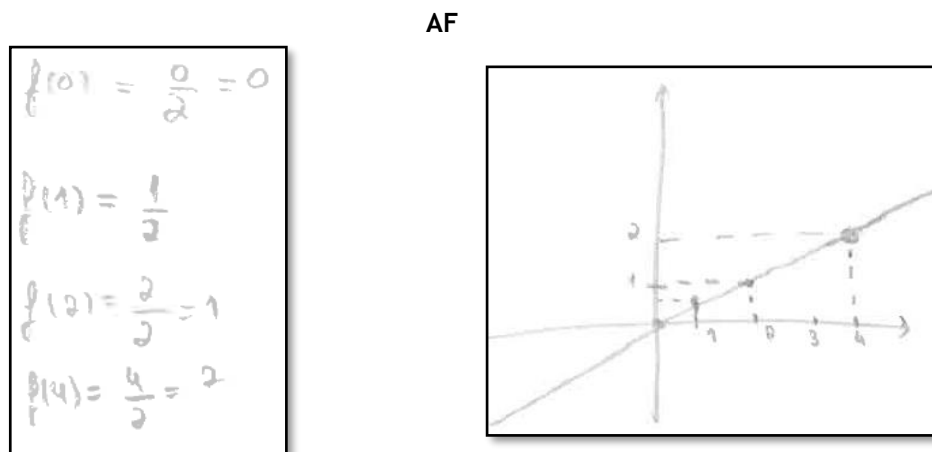


Figura 6.58 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)

Tal é interessante, mas desnecessário: bastaria AF indicar que a função f passa a ser definida pela sua expressão designatória simplificada, mas em toda a reta real, que era o expetável tendo em atenção o processo de construção de conhecimento realizado por AF até aqui, além de que essa *Justificação* é apresentada ao lado do gráfico da função.

AF

Figura 6.59 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)

Embora DV já tivesse representado a função na alínea a), opta por proceder a nova representação gráfica (*Estratégias*), fechando agora a bola no ponto de abcissa $x = 4$ (*Aplicação de construção prévia*).

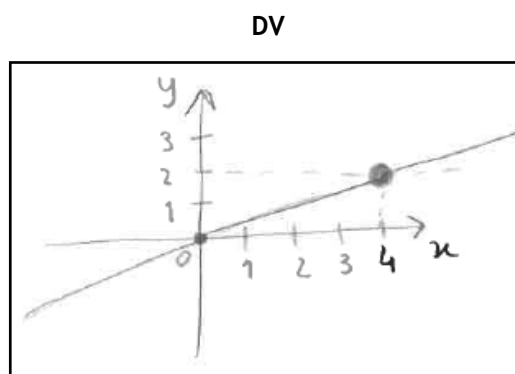


Figura 6.60 - RA respeitante resolução por DV da Questão 4 b)

Finalmente, consideramos que a apresentação dos cálculos efetuados pelos alunos, assim como a apresentação dos gráficos da função, para ambas as alíneas, são *Justificação* para as soluções obtidas.

A Figura 6.61 (ver Anexo 6.10) sintetiza o que foi registado e referido anteriormente.

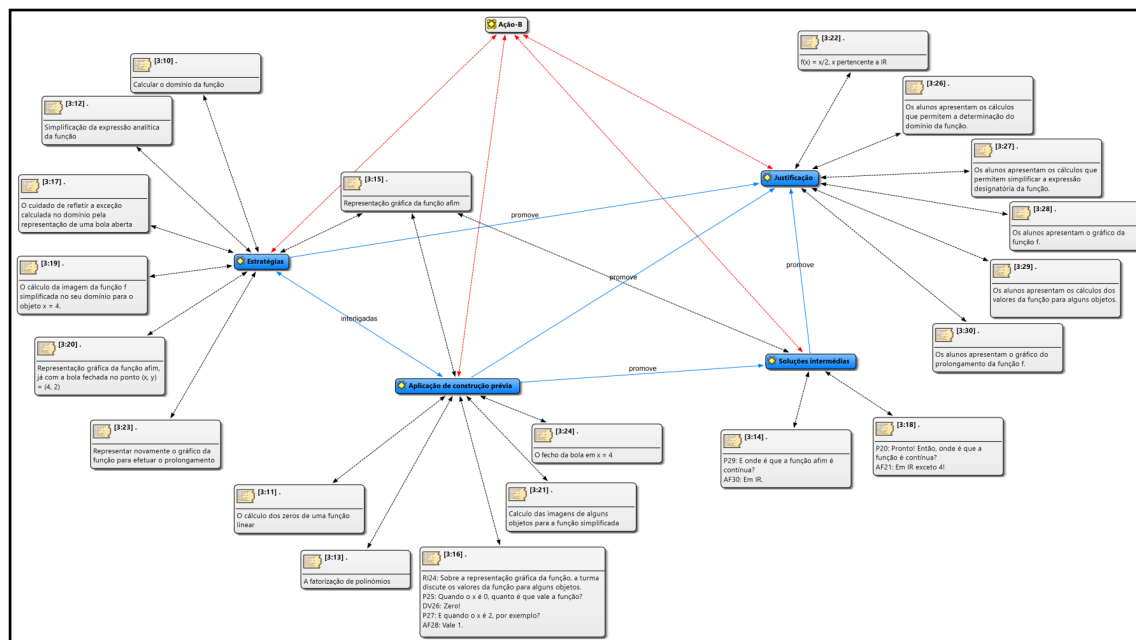


Figura 6.61 - RAV da Ação-B na Questão 4

As subcategorias verificadas foram as *Estratégias*, a *Aplicação de construção prévia*, as *Soluções intermédias* e a *Justificação*.

Com a *Estratégia* do cálculo do domínio da função ([3:10]), para a resolução da alínea a), os alunos recorrem à *Aplicação de uma construção prévia*, nesta instância ao cálculo dos zeros da função linear ([3:11]) que figura no denominador da expressão analítica da função.

Seguidamente, a *Estratégia* de simplificar a expressão designatória da função ([3:12]), conduz à aplicação de uma *construção* adquirida previamente, neste caso a fatorização de polinómios ([3:13]).

Após a obtenção da dita expressão simplificada, que é identificada como uma função afim, a progressão natural, para alguns dos alunos, reflete-se na *Estratégia* da representação gráfica dessa função ([3:15]). Esta é já também do seu conhecimento (*Aplicação de construção prévia*), e pressupõe a determinação das coordenadas de dois pontos ([3:16]), tendo os alunos o cuidado de refletir a exceção causada pelo domínio da função com a *Estratégia* de representar o ponto (4, 2) através de uma bola aberta ([3:17]).

Tanto a representação gráfica da função afim ([3:15]) como o reconhecimento da sua

continuidade em \mathbb{R} ([3:14]) constituem *Soluções intermédias* para a resolução da alínea a) desta questão. A combinação destas duas *Soluções intermédias* contribuem ainda para a verificação da continuidade da função em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ([3:18]), que por sua vez constitui uma nova *Solução intermédia*.

Já em relação à alínea b), as *Estratégias* consideradas pelos alunos diferem um pouco. Para os que não efetuaram a representação gráfica da função na alínea a), a *Estratégia* passa pela representação gráfica da função, já sob a forma simplificada de uma função afim ([3:15]), com o respetivo cálculo das imagens de alguns objetos ([3:21]) e de $f(4)$ ([3:19]) para o fecho da bola em $x = 4$ ([3:24]), o que traduz a *Aplicação de construção prévia*. Por outro lado, os alunos que já tinham representado graficamente a função na alínea anterior, optam pela *Estratégia* de efetuar novamente o seu gráfico já com a bola fechada em $(x, y) = (4, 2)$ ([3:20]), o que pressupõe igualmente o cálculo de $f(4)$ ([3:19]) e a *Aplicação da construção prévia* de bola fechada em $x = 4$ ([3:24]).

Finalmente, como já antes referimos, todos os cálculos apresentados pelos alunos nos seus registos escritos constituem *Justificações* para as soluções apresentadas.

Síntese

Pelo exposto, verificamos que as *Estratégias* e a *Aplicação de construção prévia* se encontram intrinsecamente relacionadas pois não seria possível conceber *Estratégias* sem que existissem as respetivas construções adquiridas previamente, e por outro lado será a *Aplicação de construção prévia* que irá despoletar as *Estratégias* consideradas pelos alunos.

A *Aplicação de construções prévias* irá originar o aparecimento das *Soluções intermédias* que permitem prosseguir com a resolução da questão proposta. Estas, em conjunto com as *Estratégias* idealizadas pelos alunos promovem, como já vimos, a *Justificação* das soluções alcançadas.

6.1.3.3 Ação-C

A *Reorganização* de construções alcançadas anteriormente permite que os alunos atinjam o objetivo da questão colocada na alínea a).

Em particular, os alunos utilizam a noção *Continuidade num intervalo* em relação a uma função afim.

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• P16: E onde é que uma função afim é contínua?• DV17: Em \mathbb{R}. |
|---|

Figura 6.62 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Aplicam a noção de *Continuidade num intervalo* ao analisarem a representação gráfica da

função e redigem uma frase que traduz essa conclusão (*Comunicação*).

- P20: Pronto! Então, onde é que a função é contínua?
- AF21: Em \mathbb{R} exceto 4!

Figura 6.63 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

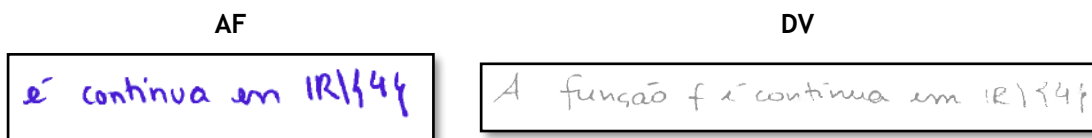


Figura 6.64 - RA respeitante resolução da Questão 4 a)

Por outro lado, os cálculos efetuados anteriormente conduzem à *Comunicação*, através da escrita simbólica, do domínio da função.

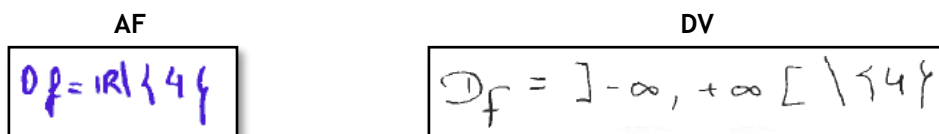


Figura 6.65 - RA respeitante à apresentação do domínio da função na Questão 4 a)

Os alunos reparam que a função é contínua apenas em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, mas ao compararem essa informação com o domínio da função, concluem que, como o ponto $x = 4$ não pertence ao domínio de f , então a função é contínua em todo o seu domínio (*Continuidade no domínio*).

- P22: Então, depois de verem o domínio e de verem onde é que a função é contínua, qual será a resposta?
- DV23: A função é contínua em todo o seu domínio. Porque o domínio é igual ao \mathbb{R} exceto 4, que é onde a função é contínua.

Figura 6.66 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Para dar resposta à alínea b) os alunos *Reorganizam* as construções alcançadas anteriormente, tais como a expressão simplificada da função, a sua representação gráfica e o valor de $f(4)$, para atingirem o objetivo da tarefa (*Continuidade num intervalo*).

Embora DV não o indique de forma explícita, consideramos que a apresentação do gráfico da função com a bola fechada no ponto $(x, y) = (4, 2)$ traduz essa *construção*.

Já AF indica, ao lado da representação gráfica da função, a *construção* pretendida através de linguagem simbólica (*Comunicação*).

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Figura 6.67 - RA respeitante resolução por AF da Questão 4 b)

De modo esquemático, as relações entre as subcategorias que constituem a *Ação-C* encontram-se na figura seguinte (ver Anexo 6.11).

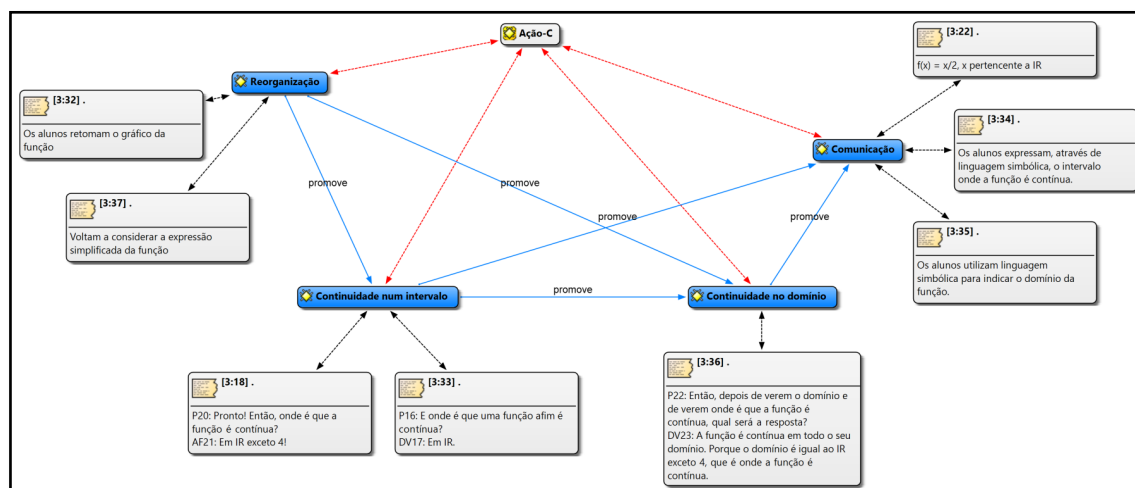


Figura 6.68 - RAV da *Ação-C* na Questão 4

Em relação à *Ação-C*, verificamos o surgimento das subcategorias *Reorganização*, *Continuidade no domínio*, *Continuidade num intervalo* e *Comunicação*.

Ao *Reorganizar* as construções obtidas na *Ação-B*, em particular a expressão analítica da função, já simplificada ([3:37]), os alunos atingem um objetivo intermédio da questão, neste caso a *Continuidade num intervalo* ([3:33]). Essa *construção*, *Reorganizada* em conjunto com a representação gráfica da função ([3:32]) despoleta mais uma vez a *Continuidade num intervalo* ([3:18]).

Por sua vez, a *Reorganização* das construções intermédias, obtidas com a *Continuidade num intervalo*, conduzem à derradeira resolução da alínea a): a *Continuidade no domínio* ([3:36]).

Por último, a *Comunicação* é verificada pelos registos escritos dos alunos, nos quais estes recorrem a linguagem simbólica para expressarem as conclusões obtidas através da *construção* de *Continuidade num intervalo* ([3:34] e [3:35] para a alínea a) e [3:22] para a alínea b)). No que respeita à *Continuidade no domínio* pretendida na alínea a), esta apenas é *Comunicada* através da exposição oral patente no excerto [3:36].

Síntese

Verifica-se que é fundamental a *Reorganização* das construções intermédias para os alunos alcançarem a *construção* pretendida de *Continuidade num intervalo*. As construções referidas,

em conjunto, voltam a ser *Reorganizadas* com o intuito de alcançar nova construção, neste caso de *Continuidade no domínio*.

Quando os alunos atingem os objetivos da questão, neste caso a *construção* das noções de *Continuidade num intervalo* e de *Continuidade no domínio*, estes repercutem-se na *Comunicação* dessas mesmas construções.

6.1.3.4 Consolidação

Pela observação das ações epistémicas utilizadas pelos alunos na resolução da Questão 4, alínea a), podemos constatar que estes aplicam as construções adquiridas na questão anterior, uma vez que, embora não fosse dito explicitamente, recorrem ao processo de simplificação da expressão analítica da função para facilitar a representação gráfica da função, a qual por sua vez facilita o estudo da continuidade num intervalo, tal como foi feito para a Questão 3.

No que concerne à alínea b), a questão é similar à Questão 2 b), anteriormente realizada, pelo que a *construção* do prolongamento de uma função por continuidade já se encontra estabelecida, como podemos verificar pela identificação dos alunos que bastará proceder ao fecho da bola aberta no gráfico da função f , sendo para tal necessário calcular a imagem do ponto de abcissa $x = 4$.

Na figura seguinte (ver Anexo 6.12) encontram-se sintetizadas as transcrições que evidenciam a *Consolidação*.

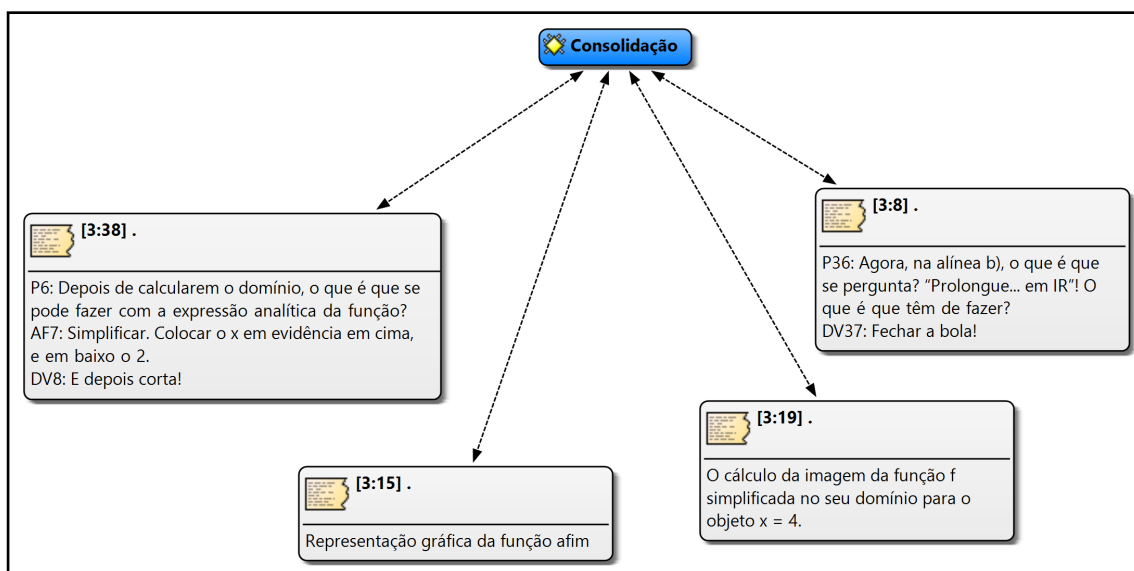


Figura 6.69 - RAV da ação epistémica *Consolidação* na Questão 4

Através do excerto [3:38] verificamos que os alunos aplicam uma *construção* adquirida na Questão 3 (*Estrutura adquirida*), ao identificarem a similaridade entre questões, reconhecendo (*Interpretar*) que terão de simplificar a expressão analítica da função e posteriormente

construindo a sua representação gráfica ([3:15]) de modo a prosseguirem com o seu estudo (*Estratégias*). A concretização destas *Estratégias* consiste na *Aplicação de construções previamente adquiridas*.

Por outro lado, para efetuarem o prolongamento por continuidade da função, constatamos que a *Consolidação* é manifestada pela aplicação de uma *Estrutura adquirida* ([3:8]) na Questão 2, e pela *Estratégia* de calcular a imagem de $x = 4$ de modo a proceder ao fecho da bola ([3:19]) aberta que existia nesse ponto (*Aplicação de construção prévia*) e assim atingir a *construção* pretendida.

Síntese

Podemos constatar que a ação epistémica *Consolidação* se manifestou através da *Ação-R* e da *Ação-B*, no primeiro caso quando os alunos reconhecem (*Interpretar*) a utilidade de construções anteriores para darem início à resposta da questão, ou seja, com a emergência da subcategoria *Estrutura adquirida*, e no segundo caso ao conceberem *Estratégias*, as quais são colocadas em prática pela *Aplicação de construção prévia*, de modo a obterem a solução do problema colocado.

6.1.3.5 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

Na figura seguinte (ver Anexo 6.13) encontram-se esquematizadas as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B*, a *Ação-C* e a *Consolidação* durante a resolução da Questão 4, apresentando apenas alguns dos excertos transcritos anteriormente e que se consideram de maior relevância, de modo a simplificar a leitura do gráfico.

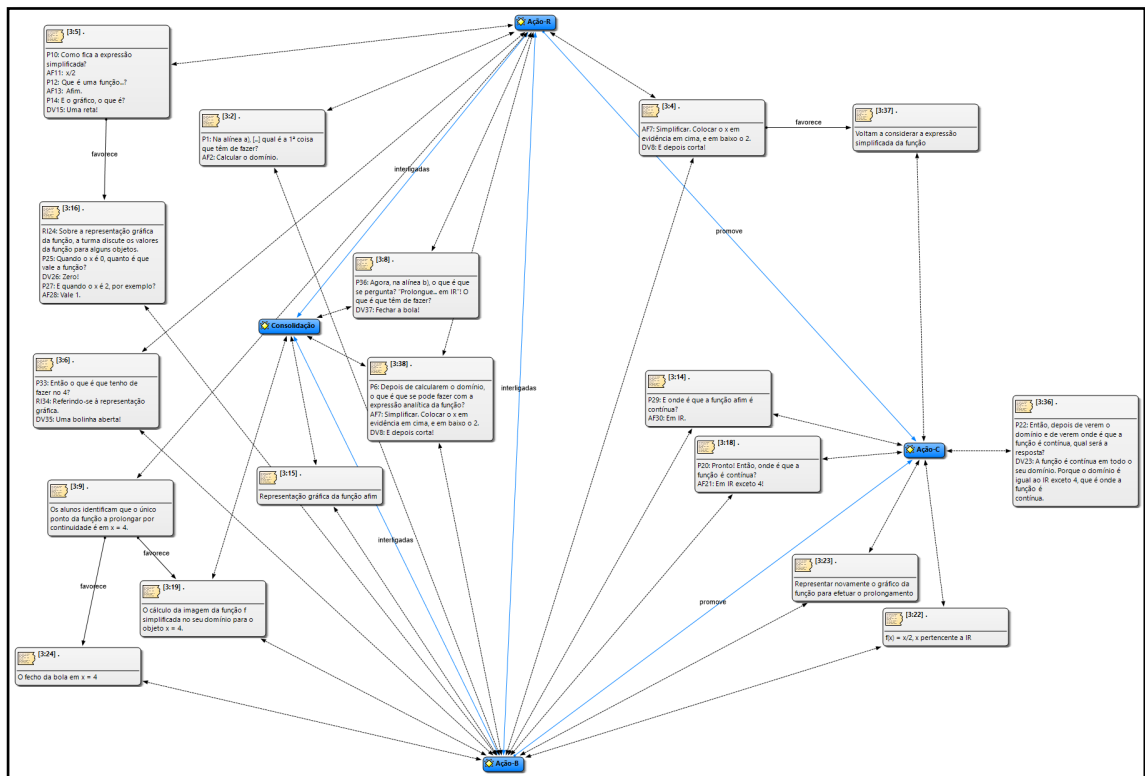


Figura 6.70 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 4

Podemos observar que, uma vez mais, a *Ação-R* e a *Ação-B* se mantiveram interligadas durante o processo de abstração e que ambas promoveram o desenvolvimento da *Ação-C*. Observa-se igualmente a manifestação da *Consolidação*, a qual ocorre pela primeira vez, encontrando-se associada quer à *Ação-R*, quer à *Ação-B*.

Relativamente à interligação identificada entre a *Ação-R* e a *Ação-B*, verificamos que a *Interpretação* do enunciado da questão desencadeia automaticamente nos alunos *Estratégias* para a resolução da questão. Essas *Estratégias* estão, por seu turno, diretamente ligadas com as *Estruturas adquiridas* pelos alunos em ocasiões anteriores, bem como com a *Aplicação de construções prévias*. Destacamos o cálculo do domínio da fração que define a função e a sua simplificação, colocando um termo comum em evidência quer no numerador quer no denominador, e a posterior representação gráfica da função afim obtida por este processo, com o conseqüente cálculo de dois pontos e a representação da bola aberta definida pela exceção calculada no domínio da função. Todo o processo atrás descrito origina a obtenção de *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão em apreciação.

Por outro lado, a *Interpretação* do enunciado da alínea b) conduz os alunos a identificarem que o único ponto a prolongar por continuidade é em $x = 4$, desencadeando na *Ação-B* as *Estratégias* de calcular o valor de $f(4)$, na expressão simplificada da função, e o respetivo fecho da bola no seu gráfico, ações epistêmicas estas aliadas quer às *Estruturas adquiridas*

anteriormente, quer à *Aplicação de construções prévias*, conduzindo igualmente a *Soluções intermédias* da questão.

Através da análise do gráfico apresentado, constatamos que a *Consolidação* das construções realizadas nas questões anteriores é verificada tanto na *Ação-R* como na *Ação-B*, traduzindo-se pelo reconhecimento da similaridade entre a questão colocada e as anteriores, levando os alunos a empregarem as mesmas *Estratégias*, referenciadas por *Estruturas adquiridas* previamente e *Aplicando construções prévias* de modo análogo ao efetuado anteriormente.

No que concerne à exteriorização da *Ação-C*, esta encontra-se uma vez mais associada à *Ação-R* e à *Ação-B* (as quais já vimos estarem estreitamente interligadas), visto que as *Estratégias* empregues para obter as *Soluções intermédias* promovem, através de uma *Reorganização* dos conceitos aplicados, a obtenção das construções pretendidas com a questão colocada, neste caso a *Continuidade no domínio* e a *Continuidade num intervalo*.

6.1.4 Questão 5

Questão 5 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 3 \\ x^2 - x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

A função f é contínua em todo o seu domínio?

Figura 6.71 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade

Com esta questão, que versa exclusivamente sobre a noção de continuidade, visa-se verificar se os alunos atingiram a consolidação da *construção* da noção de continuidade. A grande diferença em relação às questões 3 e 4 centra-se na análise da continuidade num ponto isolado, algo que tinha sido abordado apenas na Questão 1 e de forma preliminar, tendo em atenção que nesse caso era fornecida a representação gráfica da função.

6.1.4.1 Ação-R

Com base nos registos da investigadora, constatamos que os alunos *reconheceram* que a informação fornecida no enunciado, na forma da expressão analítica de uma função definida por ramos, é necessária para iniciar a resposta da questão, assim como o facto de o segundo ramo da função ser definido por uma função quadrática (*Interpretar*).

Reconheceram ainda a importância de construções adquiridas como o cálculo das raízes do polinómio do 2º grau que define um dos ramos da função, com recurso à fórmula resolvente, e das coordenadas do vértice de uma função quadrática (*Estrutura adquirida*).

- P1: Em relação a esta [RI: referindo-se ao 2º ramo], o que é que estiveram a fazer?
- AF2: Calcular os zeros.
- P3: Utilizando o quê?

- AF4: A fórmula resolvente.
- ...
- P7: E agora, como é que é o vértice?
- DV8: $-\frac{b}{2a}$
- P9: E a imagem?
- DV10: $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Figura 6.72 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

Pela análise das produções dos alunos, verificamos que a necessidade dos cálculos precedentes adveio da sua vontade de representar graficamente a função (*Estrutura adquirida*), a qual despoletou simultaneamente a *Estrutura adquirida* de domínio de funções definidas por ramos.

- P15: Então, agora, podemos fazer o quê?
- AF16: O gráfico!
- RI17: Os alunos procuram esboçar o gráfico.
- P18: Cuidado que é apenas para...?
- AF19: $x \leq 2$!
- DV20: Falta o 3!
- P21: Certo! E vale quanto?
- DV22: Dois!
- P23: Então qual é o domínio?
- AF24: $] - \infty; 2] \cup \{3\}$

Figura 6.73 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

Posteriormente foi necessário recorrer à noção de *Vizinhança* para dar seguimento à resposta à questão, em particular para a análise da continuidade da função no seu domínio uma vez que o ponto isolado da função levantou aqui alguma entropia, como veremos mais tarde.

- P31: Recordem que, para **não ser** contínua, o que é que tinha de acontecer? Em relação às vizinhanças?
- DV32: Para não ser contínua as vizinhanças têm de “apanhar” valores diferentes.

Figura 6.74 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

A discussão anterior encontra-se sintetizada no esquema seguinte (ver Anexo 6.14).

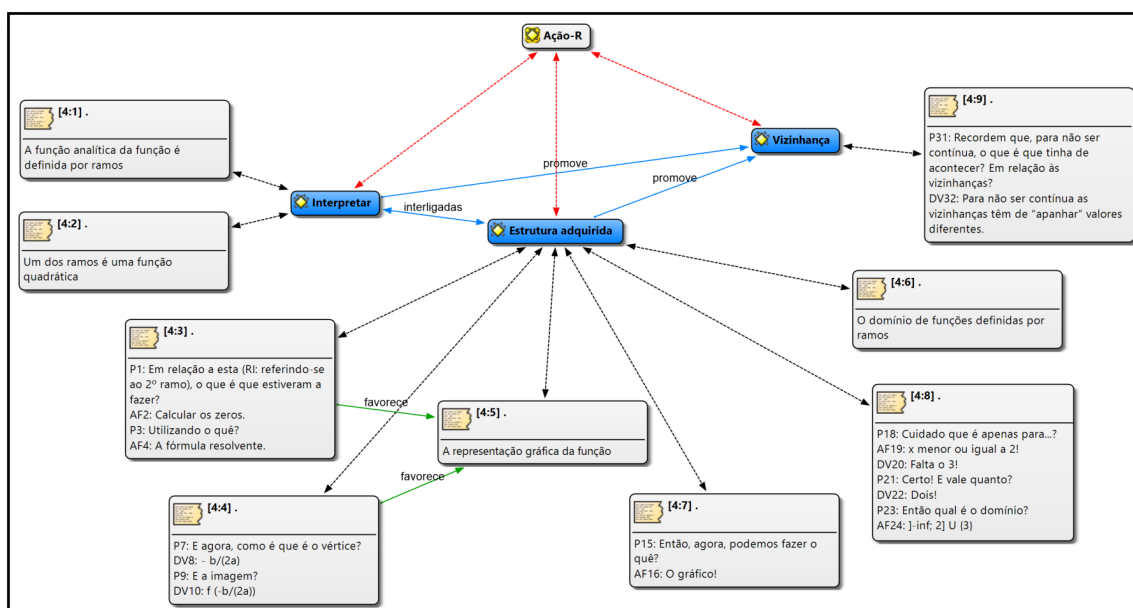


Figura 6.75 - RAV da Ação-R na Questão 5

Como podemos constatar, evidenciam-se as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*.

A *Interpretação* do enunciado da questão levou os alunos a *reconhecerem* a importância do facto da função ser definida por expressões analíticas diferentes em partes do seu domínio ([4:1]) e que o segundo ramo da função se encontra definido à custa de uma função quadrática ([4:2]). A descrita interpretação suscitou desde logo o recurso, por parte dos alunos, ao reconhecimento de *Estruturas adquiridas* anteriormente para prosseguir com a resolução da questão. São elas o cálculo das raízes da função quadrática, com recurso à fórmula resolvente, ([4:3]) e a determinação das coordenadas do vértice da parábola representativa dessa função ([4:4]). Estas estão, por sua vez, estreitamente relacionadas com a representação gráfica da função, a qual representa de igual modo uma *Estrutura adquirida* previamente pelos alunos. A combinação do gráfico da função quadrática com a interpretação da função definida por ramos despoletou nos alunos o recurso a outra pré-existente *Estrutura adquirida*: o domínio de funções definidas por ramos ([4:6] e [4:8]).

Comprovamos também a necessidade de os alunos, ao analisarem o gráfico da função, recorrerem novamente à noção de *Vizinhança* para prosseguirem com a resolução da questão colocada ([4:9]), em particular para a análise da continuidade no ponto isolado, que veremos posteriormente com maior detalhe.

Síntese

Pela análise efetuada, verificamos que a *Ação-R* se expressou através das subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*.

De modo idêntico ao que sucedeu na análise das questões anteriores, também aqui confirmamos uma estreita interligação entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, a qual revela, da parte dos alunos, que a interpretação de uma questão ocorre, quase em simultâneo, com a seleção de conhecimentos obtidos anteriormente. Por um lado, consideramos que a *Interpretação* do enunciado por si só não teria expressão se não existissem *Estruturas adquiridas* anteriormente pelos alunos. Por outro lado, são as próprias *Estruturas adquiridas* que impulsionam a *Interpretação* dada pelos alunos ao enunciado da questão colocada.

Há evidência de que a *Interpretação* do enunciado, em conjunto com as *Estruturas adquiridas*, em particular no que concerne à representação gráfica da função, vão conduzir à necessidade de recorrer à noção de *Vizinhança* para avançar na resolução da questão em apreciação.

6.1.4.2 Ação-B

A *Estratégia* dos alunos para darem seguimento à resolução da questão passa pela representação gráfica da função quadrática, a qual identificam como sendo uma parábola (*Aplicação de construção prévia*) e que pressupõe a determinação dos zeros e das coordenadas do vértice da função f quando $x \leq 2$.

- P1: Em relação a esta [RI: referindo-se ao 2º ramo], o que é que estiveram a fazer?
- AF2: Calcular os zeros.
- ...
- P5: Deu $x = -1$ ou $x = 2$, certo?
- AF6: Sim!
- P7: E agora, como é que é o vértice?
- ...
- P13: Certo! Então dá...?
- DV14: 0.5 e -2.25 [RI: Referindo-se a x e a y , respetivamente].

Figura 6.76 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

Para tal, os alunos efetuaram os cálculos necessários (*Aplicação de construção prévia*), apresentando-os nos seus registos escritos (*Justificação*).

AF

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 2 \vee x = -1$$

DV

zeros de f :

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Rightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$\left(-\frac{(-1)}{2 \times 1}, f\left(-\frac{(-1)}{2 \times 1}\right)\right) \quad \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$V = \left(-\frac{(-1)}{2 \times 1}, f\left(-\frac{(-1)}{2 \times 1}\right)\right)$$

$$V = (0,5; f(0,5))$$

$$V = (0,5; -2,25)$$

Figura 6.77 - RA respeitante à determinação das raízes e do cálculo do vértice na Questão 5

Consideramos que a apresentação do gráfico da função construído representa uma *Solução intermédia* que contribui para a resolução da questão colocada, onde se verifica ainda a *Aplicação de construção prévia* em relação à noção de bola fechada.

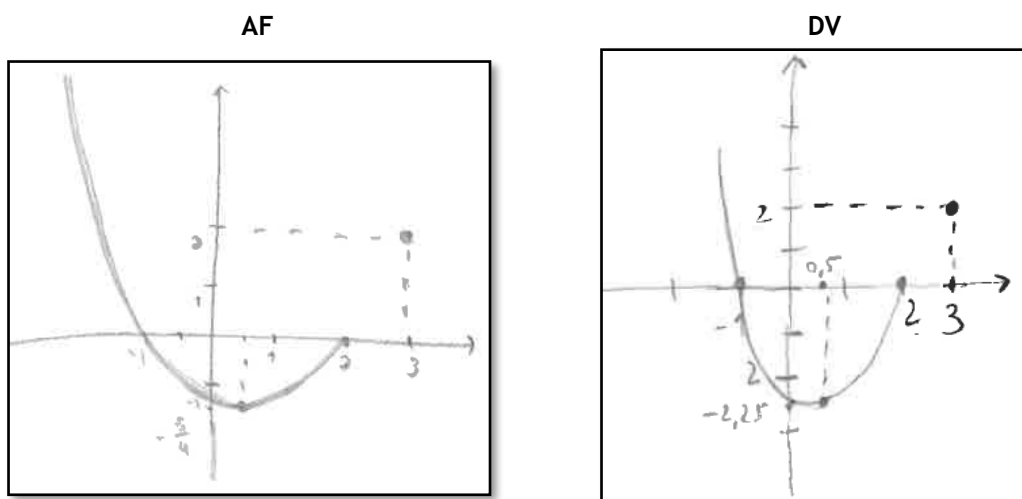


Figura 6.78 - RA respeitante à representação gráfica do polinómio do 2º grau na Questão 5

Do estudo do gráfico levado a cabo pelos alunos resulta a obtenção do domínio da função, a qual representa mais uma *Solução intermédia* para a questão.

- P23: Então qual é o domínio?
- AF24: $] - \infty; 2] \cup \{3\}$.

Figura 6.79 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

A mesma encontra-se *Justificada* pelos registos escritos apresentados pelos alunos.

Figura 6.80 - RA respeitante à indicação do domínio da função na Questão 5

Na figura seguinte (ver Anexo 6.15) apresentam-se os excertos, de forma sintetizada, que fundamentam as subcategorias evidenciadas na *Ação-B*.

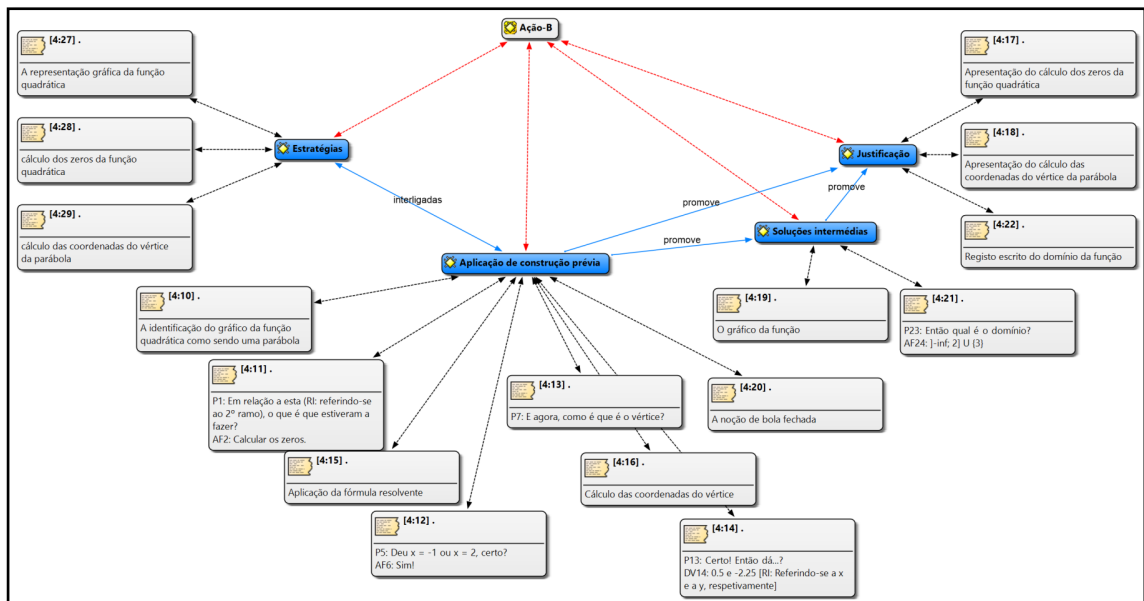


Figura 6.81 - RAV da *Ação-B* na Questão 5

Pela análise do esquema apresentado na figura anterior, todas as subcategorias da *Ação-B* foram evidenciadas durante a resolução da Questão 5.

Podemos constatar que as *Estratégias* aplicadas pelos alunos estão intimamente relacionadas com cálculos associados ao estudo da função quadrática ([4:28] e [4:29]) e sua representação ([4:27]). Se por um lado as *Estratégias* estão intrinsecamente relacionadas com a *Aplicação de construções prévias*, neste particular a fórmula resolvente ([4:10] a [4:12] e [4:15]) e o cálculo das coordenadas do vértice da parábola ([4:13], [4:14] e [4:16]), por outro são estas construções que permitem a idealização da *Estratégia de construir* o gráfico da função, esta última acompanhada ainda da noção de bola fechada ([4:20]) (*Aplicação de construção prévia*).

Observamos ainda que as *Estratégias* e a *Aplicação de construções prévias* vão encaminhar os alunos na obtenção de *Soluções intermédias* que contribuem para alcançar a resolução final da questão proposta, em particular a representação gráfica da função ([4:19]), a qual por sua vez contribui para a determinação do domínio da função ([4:21]).

À semelhança do que ocorreu nas questões anteriores, consideramos que os cálculos apresentados pelos alunos ([4:17] e [4:18]) e o registo escrito do domínio da função ([4:22]) representam *Justificações* para as soluções encontradas.

Síntese

Consideramos que as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* são despoletadas quase em simultâneo e de modo recursivo: ao identificarem a função quadrática,

automaticamente são desencadeadas as *Estratégias* de representar graficamente essa função, para a qual é fundamental o cálculo das suas raízes e das coordenadas do seu vértice, cálculos estes que pressupõem a *Aplicação de construções prévias* tal como o recurso à fórmula resolvente. Por outro lado, se os alunos não estivessem em posse desses conhecimentos, não lhes seria possível desenvolverem as *Estratégias* necessárias para abordar a questão desta maneira.

Por sua vez, os resultados obtidos pela *Aplicação de construções prévias*, verificada no parágrafo anterior, vai encaminhar os alunos na obtenção de *Soluções intermédias* que contribuem para alcançar a resolução final da questão proposta. Consideramos ainda que a conjunção dos cálculos realizados aquando da *Aplicação de construções prévias* e das *Soluções intermédias* alcançadas refletem a *Justificação* dessas mesmas soluções.

6.1.4.3 Ação-C

A *Reorganização* das *Soluções intermédias* obtidas anteriormente, em especial a representação gráfica da função, aliada ao seu domínio, foi fundamental para que os alunos prosseguissem com a resolução da questão.

Como relatado no excerto seguinte, a *construção* do conceito de *Continuidade no domínio* foi aqui colocada em causa pela existência do ponto isolado $x = 3$, a qual já era expectável.

- RI25: Embora identifiquem o domínio da função, a maioria dos alunos não responde à questão.
- AF26: Professor! Não é contínua, pois não? [...] Tem uma paragem...
- RI27: A refere-se ao “salto” do ponto (2; 0) para o ponto (3; 2) – o ponto isolado

Figura 6.82 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

A *construção* da *Continuidade num ponto isolado* só foi possível alcançar com o auxílio do professor, recordando a importância da noção de *Vizinhança* de um ponto nestas situações.

- P31: Recordem que, para não ser contínua, o que é que tinha de acontecer? Em relação às vizinhanças?
- DV32: Para não ser contínua as vizinhanças têm de “apanhar” valores diferentes.
...
- P35: E aqui? [RI: refere-se à vizinhança de $x = 3$]. Quem é que acha que é contínua e quem é que acha que é descontínua?
- AF36: É contínua! A vizinhança está vazia longe do 3...

Figura 6.83 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

Por outro lado, na *construção* de *Continuidade num intervalo*, neste caso referente à parte do domínio definida por $]-\infty; 2]$, não é detetada nenhuma dificuldade por parte dos alunos, considerando-se que esta *construção* é atingida sem dificuldade.

- P28: A questão agora é: onde é que esta função é contínua?
- DV29: De menos infinito até 2!

Figura 6.84 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

No que se refere à manifestação das construções adquiridas pelos alunos, embora a *Comunicação* do domínio seja feita explicitamente com recurso a linguagem simbólica, já a *construção* da *Continuidade no domínio* é apenas expressada oralmente.

- P33: Certo. Quando faço as vizinhanças, tenho de obter imagens diferentes em caso de descontinuidade, não é? Aqui [RI: refere-se à vizinhança de $x = 2$] há algum problema de descontinuidade?
- DV34: Não.
- P35: E aqui? [RI: refere-se à vizinhança de $x = 3$]. Quem é que acha que é contínua e quem é que acha que é descontínua?
- AF36: É contínua! A vizinhança está vazia longe do 3...
- DV37: Então é contínua no domínio todo!

Figura 6.85 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5

Seguidamente apresenta-se o gráfico (ver Anexo 6.16) que sintetiza as subcategorias evidenciadas na *Ação-C*.

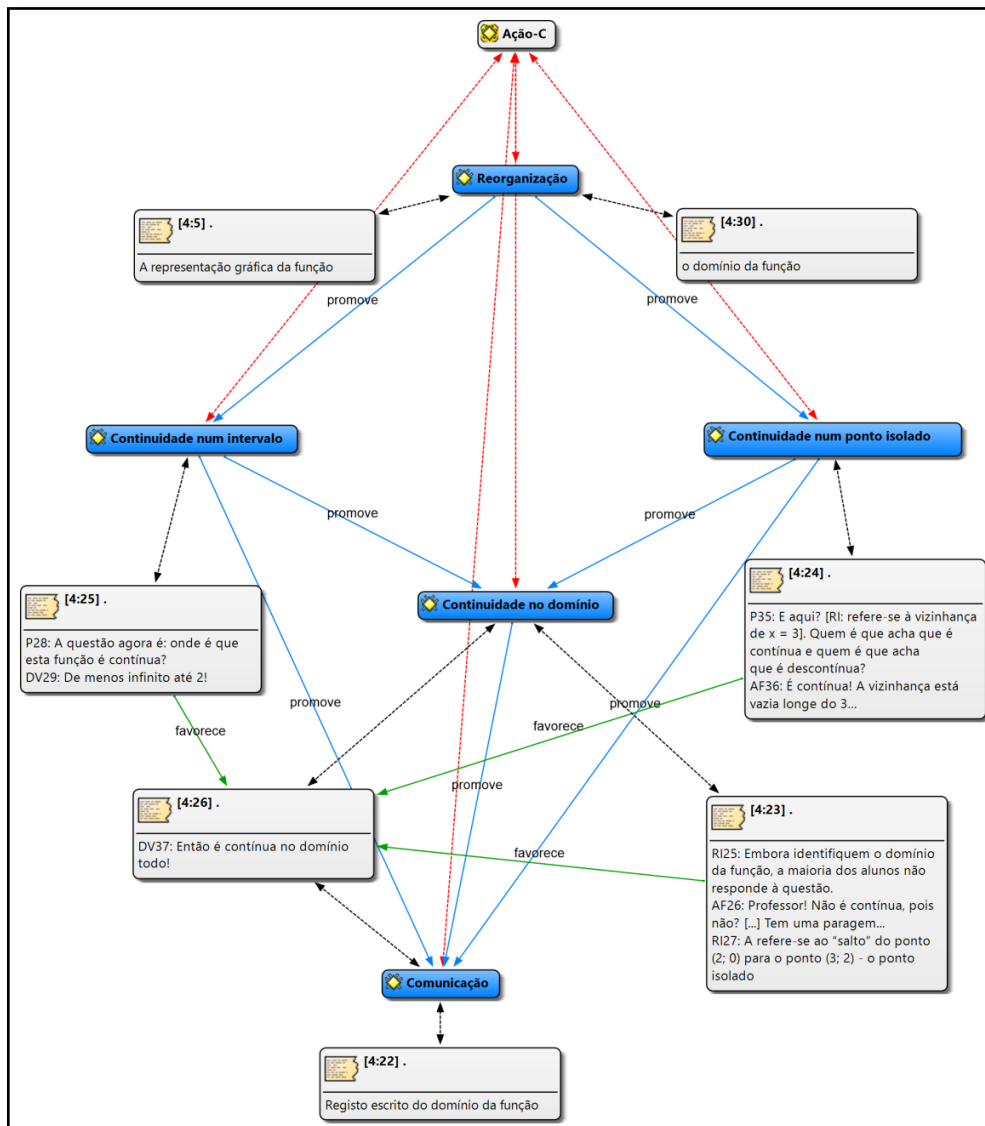


Figura 6.86 - RAV da Ação-C na Questão 5

Em primeiro lugar, podemos constatar que a *Ação-C* se manifestou através das subcategorias *Reorganização*, *Continuidade num intervalo*, *Continuidade num ponto isolado*, *Continuidade no domínio* e *Comunicação*.

A *Reorganização* das *Soluções intermédias* obtidas anteriormente, com foco na análise do gráfico construído pelos alunos, em conjunto com a identificação do domínio da função, constituiu o ponto de partida para dar seguimento ao processo de *construção* dos conceitos aqui visados.

O que dificultou a resolução da questão foi, como já referimos, a existência de um ponto isolado, o que inicialmente conduz (erradamente) os alunos à constatação de que a função não seria contínua no seu domínio ([4:23]). É nesta ocasião que é recordada a noção de *Vizinhança* (*Ação-R*) de modo a reavaliar esta situação, optando-se por diferenciar os dois ramos da função.

Para a análise do ponto isolado, verificou-se maior eficácia em negar a noção de continuidade num ponto de modo a encaminhar os alunos na obtenção da noção de *Continuidade num ponto isolado* ([4:24]). No que concerne à *Continuidade num intervalo* ([4:25]), esta noção foi facilmente atingida pelos alunos ao interpretarem o gráfico da função.

Da análise da *Continuidade num ponto isolado*, concomitantemente com a análise efetuada à *Continuidade num intervalo*, os alunos atingem assim mais um objetivo da questão: a *Continuidade no domínio* ([4:26]), ao compararem as conclusões obtidas individualmente com o domínio da função, já obtido anteriormente.

Finalmente, a *Comunicação* é evidenciada pelo registo escrito do domínio da função ([4:22]) e pelo excerto [4:26], uma vez que a *Continuidade no domínio* apenas é expressa oralmente pelos alunos, não existindo nenhum registo escrito.

Síntese

No que concerne às relações verificadas entre as subcategorias nas *Ação-C*, consideramos que a *Reorganização* das construções anteriores, aliadas à noção de *Vizinhança*, foram decisivas para as construções de *Continuidade num intervalo* e de *Continuidade num ponto isolado*.

Verifica-se igualmente que a *Continuidade num intervalo* e a *Continuidade num ponto isolado* foram atingidas separadamente. No entanto, ao serem associadas com o domínio da função, foram decisivas para a *construção* da *Continuidade no domínio*.

Em simultâneo é alcançada a *Comunicação* que traduz todas estas construções.

6.1.4.4 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

O esquema seguinte (ver Anexo 6.17) ilustra as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C* durante a resolução da Questão 5. Com o objetivo de simplificar a leitura do gráfico, apenas alguns dos excertos transcritos anteriormente e que se consideram de maior relevância serão apresentados.

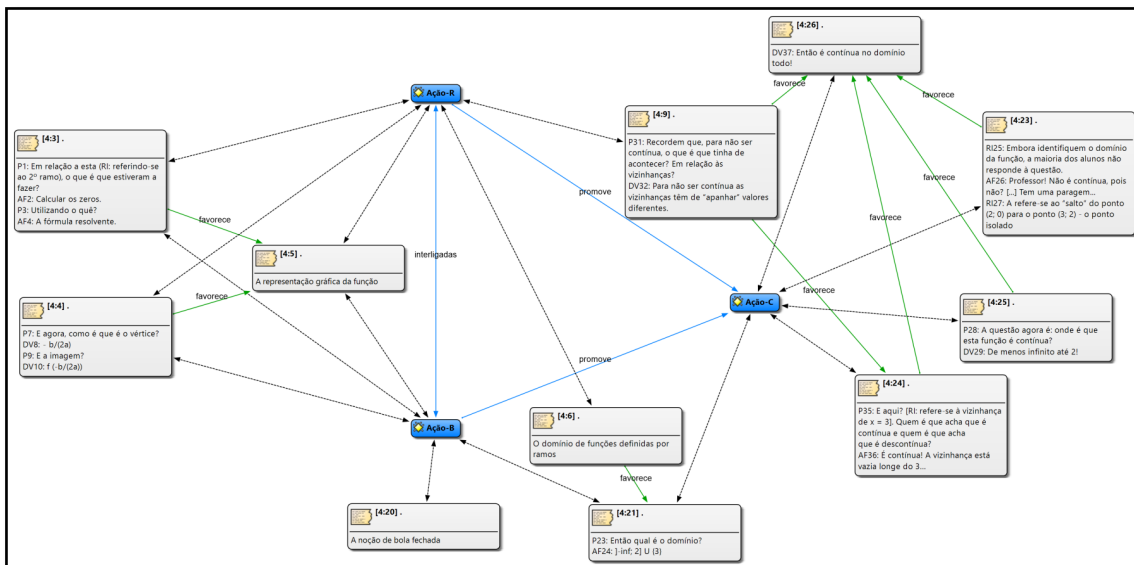


Figura 6.87 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 5

Uma vez mais, constata-se uma estreita ligação entre a *Ação-R* e a *Ação-B*, revolvendo neste caso em torno da função quadrática e da representação gráfica da parábola a ela associada.

Como já referimos, a *Interpretação* do enunciado concomitantemente com o reconhecimento de *Estruturas adquiridas* na *Ação-R* suscita de forma automática a *Ação-B* para a utilização de *Estratégias* e para a *Aplicação de construções prévias*. Juntamente com a noção de *Vizinhança* e com as *Soluções intermédias* alcançadas, são desta forma alcançadas as várias construções em torno da noção de continuidade almejadas na *Ação-C*.

Com exceção da questão dos pontos isolados, que realmente causou muita entropia essencialmente entre os alunos que frequentaram Matemática A (recorde-se que estes aprenderam que, num ponto isolado, uma função não é contínua) parece-nos que as construções de Continuidade, de um modo geral, estavam por esta altura realizadas pela maioria dos alunos, salvo quando existiam pontos isolados.

No final do estudo relativo à noção de continuidade os alunos realizaram novamente a Questão 1. Procurou-se verificar se a construção de conhecimento, pelos alunos, sobre a noção de continuidade foi bem-sucedida e se estes conseguiam escrever a definição 2.17 de forma pelo menos aproximada. Esperava-se assim que a construção de continuidade dos alunos já fosse similar a esta definição. Os resultados foram francamente positivos atendendo a que boa parte dos alunos conseguiu produzir uma definição satisfatória.

A definição formal de Ferreira (2005) foi somente introduzida após a discussão das respostas à Questão 1.

6.2 Questões sobre limites

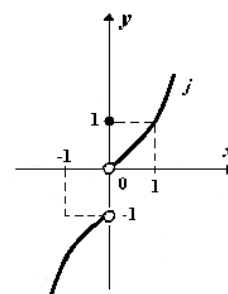
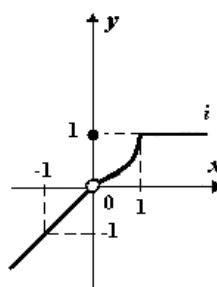
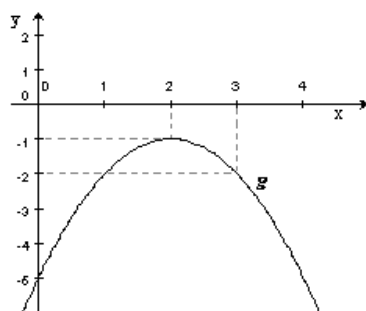
Apresentam-se seguidamente os resultados obtidos com a recolha dos registos escritos dos alunos referentes às tarefas, de dificuldade crescente, visando o estudo da existência e do cálculo do limite de uma função num ponto, pertencente ao seu domínio ou a um ponto aderente a este e a sua interligação com a noção de continuidade.

As atividades sobre limites foram começadas logo após a leção da definição de continuidade atrás indicada, ou seja, no decorrer da aula 2. Atendendo a que nesta altura já se esperava que os alunos conhecessem a noção de vizinhança e de continuidade num ponto, a definição 2.11 de Ferreira (2005) explanada na página 21 deveria ser alcançada, após a realização das tarefas propostas pelos alunos, através da utilização dessas construções anteriores (*Estrutura adquirida*). O maior entrave a essa construção seria *a priori* a noção de ponto aderente, que não era conhecida pelos alunos. No entanto foi possível obviar esse problema, notando de forma informal que o ponto a onde se calcula o limite não tem de pertencer ao domínio da função, mas sim à vizinhança deste (na definição 2.11, $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ implica que o ponto a onde se calcula o limite não tem de pertencer ao domínio da função, mas sim ser um ponto aderente ao domínio).

6.2.1 Questão 2

Questão 2 Considere as funções reais de variável real g, i, j, k e l cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Calcule os seguintes limites:

- $\lim_{x \rightarrow 2} g(x), \lim_{x \rightarrow 1} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} l(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} i(x), \lim_{x \rightarrow 0} j(x), \lim_{x \rightarrow 1} k(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$.



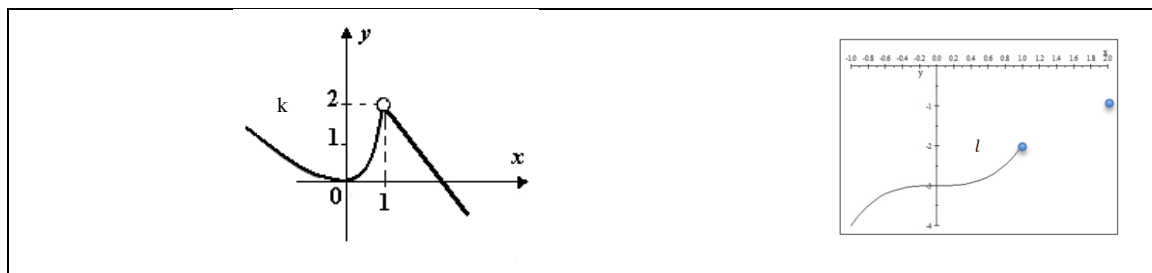


Figura 6.88 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite

O objetivo da Questão 2, como já referido na subsecção 5.7, é que os alunos alcancem a construção de limite num ponto finito, em $-\infty$ e em $+\infty$, com base na representação gráfica das funções selecionadas.

As quatro alíneas encontram-se divididas nos seguintes casos: a) análise do limite num ponto de continuidade; b) estudo de limites quando $x \rightarrow -\infty$ ou quando $x \rightarrow +\infty$; c) estudo de limites num ponto fronteiro e num ponto isolado; d) análise de limites em pontos de descontinuidade e em pontos que não pertencem ao domínio da função.

6.2.1.1 Ação-R

Os alunos *Interpretam* o enunciado, reconhecendo a importância da representação gráfica das funções fornecida para dar início à resolução da questão (*Estrutura adquirida*).

Em relação à discussão em sala de aula, é de salientar que foi necessário começar por explicar aos alunos a notação utilizada, neste caso $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, atendendo ao facto da maioria dos alunos não a conhecer, auxiliando os alunos a *Interpretar* o enunciado.

- RI3: Como alguns alunos nunca tinham trabalhado com limites foi referida a importância da forma como se lê a linguagem matemática: “o limite, quando x tende para 2, ou seja, quando o x se aproxima de 2, de $g(x)$, da imagem da função g ”.

Figura 6.89 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2

A noção intuitiva de *Aproximação* encontra-se implícita no cálculo de todos os limites, quer no que respeita aos objetos (“quando o x se aproxima de 2”), quer no que concerne às imagens (“da imagem da função”).

Depois desta primeira introdução ao tema, o professor procurou que os alunos reconhecessem a importância do conceito de *Vizinhança* de um ponto de modo a prosseguirem com a resolução da alínea a).

A noção de aproximação aparece associada à noção de *Vizinhança*, visto que ao fazerem “ x tender para 2”, a ideia subjacente implica considerar vizinhanças cada vez mais pequenas, centradas em $x = 2$, sendo o processo análogo realizado para as respetivas imagens.

- AF7: Por causa das vizinhanças!
- P8: Certo, a ideia é, mais ou menos, ver como viram para as vizinhanças. Então, o que é que será o limite no ponto 2?
- DV9: Vai ser uma “coisinha” [RI: faz o gesto de um retângulo] que apanhe todos os pontos.
...
- P12: Como diz DV, a ideia é fazer o quê?
- AF13: As vizinhanças, como na continuidade!
- P14: Certo! Portanto, a ideia é fazer as vizinhanças do 2, e ver o que acontece em relação às imagens, ao y .

Figura 6.90 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a), função g

Podemos constatar que AF (AF13: *As vizinhanças, como na continuidade!*) reconhece que a *Estrutura adquirida* previamente nas questões relacionadas com a continuidade é essencial para dar prosseguimento à resolução da questão colocada.

Na alínea b) é pedido aos alunos que calculem limites quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$. Para tal, é necessário *reconhecer* que o gráfico se prolonga fora do intervalo apresentado (*Interpretar*) e compreender que o comportamento da função na parte “não visível” do gráfico será similar ao comportamento da função na parte “visível” do gráfico (*Estrutura adquirida*).

Seguidamente, os alunos tiveram de compreender o comportamento da função em infinito (*Estrutura adquirida*), recorrendo uma vez mais à noção de *Aproximação*, agora para $-\infty$ ou $+\infty$, consoante o caso em análise, apesar de se notar alguma dificuldade em aplicar o conceito de *Vizinhança* de um ponto quando os objetos e/ou as imagens tendem para infinito.

- DV25: Se é $-\infty$ não tem vizinhanças!
- P26: Mas pensem lá, à medida que o x vai para a esquerda (ou para trás), para onde é que vai a função (o gráfico)?
- AF27: Para $-\infty$.

Figura 6.91 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g

- P33: Vejam lá... o que acontece ao gráfico da função para $x \geq 1$?
- DV34: É horizontal, constante.

Figura 6.92 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i

- P40: Então, vamos lá ver. O x está a ir para...
- DV41: $-\infty$, para trás...

- RI42: P representa, por baixo do eixo dos xx , do lado esquerdo, uma seta para a esquerda \leftarrow .
- P43: ... o y está a ir para onde?
- AF44: Para cima.
- RI45: P prolonga o gráfico para a esquerda e para cima e representa uma seta ao lado do eixo dos yy , na parte superior \uparrow .

Figura 6.93 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k

A Questão 2 c) pretende estudar os limites em pontos fronteiros ($\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$) e em pontos isolados ($\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$). Os alunos começaram por observar a representação gráfica da função l (*Interpretar*) e reconheceram a importância da noção de *Vizinhança* num ponto, em conjunto com a noção de *Aproximação*.

A discussão seguidamente transcrita, para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$, espelha o que indicámos no parágrafo anterior. A ressaltar, ainda, a curiosidade de alguns alunos sobre o que sucederia ao limite caso o ponto fronteiro não pertencesse ao domínio da função, associada às noções de bola aberta e de bola fechada (*Estrutura adquirida*). Uma vez que esse caso iria ser estudado posteriormente, optou-se por não o desenvolver neste parágrafo de modo a não causar entropia.

- DV50: Aqui, nos limites, a bolinha também conta? Se ela fosse aberta, também era -2 ?
- ...
- P52: Para já, vamos fazer como está, com a bola fechada. À volta do 1, onde estão as imagens, vamos fazer...
- DV53: As vizinhanças!

Figura 6.94 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 1$

Em relação ao cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$, a resposta unânime à questão transparece o reconhecimento da *Estrutura adquirida* de ponto isolado, que, aliado ao reconhecimento da importância da noção de *Vizinhança* num ponto, contribuiu para que os estudantes alcançassem também a construção de limite num ponto isolado. Recorde-se que o limite num ponto isolado seria à partida mais complicado para os alunos que frequentaram Matemática A, já que estes alunos aprenderam no secundário que o limite num ponto isolado não existe.

- DV57: Fazemos as vizinhanças à volta do 2...
- AF58: E só há uma imagem!

Figura 6.95 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 2$

Relativamente à alínea d), conforme referimos no Capítulo 5, estamos agora perante um exercício que se pensava criar grandes dificuldades aos alunos que tiveram Matemática A no ensino secundário, ou que são repetentes a MQAP. Em relação ao $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$, é necessário que esses alunos “destruam” a construção antiga de limite e “construam” a nova, o que leva a que a resposta seja diferente (“0” na definição antiga e “não existe” na nova).

Como já referimos, os alunos começaram por *reconhecer* que a representação gráfica das funções em causa era fundamental para resolver a questão (*Interpretar + Estrutura adquirida*), bem como o conceito de *Vizinhança* e a noção de *Aproximação*.

- AF66: Quando o x se aproxima de 0...
- AF67: ... fazemos as vizinhanças.
- P68: E em relação às imagens?
- DV69: Umas estão na vizinhança do 0 do y e uma é 1.

Figura 6.96 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i

Quanto ao cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$, a síntese da produção oral abaixo transcrita indica que os alunos recorrem novamente ao conceito de *Vizinhança*, aliado à noção de aproximação, e à *Interpretação* do gráfico da função (*Estrutura adquirida*) para darem seguimento à resolução da questão colocada.

- AF79: Fazemos outra vez as vizinhanças do 0...
- P80: E onde é que estão as imagens?
- DV81: Está no 1.
- AF82: E no -1, na vizinhança.
- DV83: E na de 0 [RI: refere-se à vizinhança].

Figura 6.97 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j

No que concerne os limites das funções k e l , pretendia-se estudar o que sucede em pontos que não pertencem ao domínio da função.

Para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$, a afirmação seguinte mostra mais um momento em que os alunos voltam a recorrer ao conceito de *Vizinhança*, aliado uma vez mais à noção de aproximação, e à *Interpretação* do gráfico da função (*Estrutura adquirida*) para darem resposta à questão colocada.

- DV90: Se fizermos as vizinhanças do 1, as imagens estão na vizinhança do 2!

Figura 6.98 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k

Em relação a este limite, é extremamente interessante analisar o diálogo entre a turma e o professor que apresentaremos na secção *Ação-B*, por se considerar que este configura uma ação de *construir*, mais do que de *reconhecer*. Com base na representação gráfica da função k , foi discutida (ainda que de uma forma preliminar) o que sucederia em diferentes cenários, tendo os alunos recorrido à *Estrutura adquirida* de bola aberta e de bola fechada.

- DV95: Então, se tiver só uma bola, seja aberta ou fechada, há sempre limite.
- ...
- DV97: As bolas abertas.

Figura 6.99 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)

Finalmente, vamos analisar a produção oral em relação a $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$. O cálculo deste limite não causou grande celeuma entre a turma, pois os alunos rapidamente verificaram que o ponto de abscissa $x = 1,5$ não se encontrava representado no gráfico da função, ou seja, não pertencia ao domínio da função (*Interpretar + Estrutura adquirida*), recorrendo à noção de *Vizinhança*, aliada novamente à noção de *Aproximação*.

- DV100: Fazemos as vizinhanças à volta de 1,5.
- P101: Certo! E as imagens?
- AF102: Não há!

Figura 6.100 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função l

De um modo geral, as subcategorias evidenciadas na *Ação-R* encontram-se esquematizadas na figura seguinte (ver Anexo 6.18).

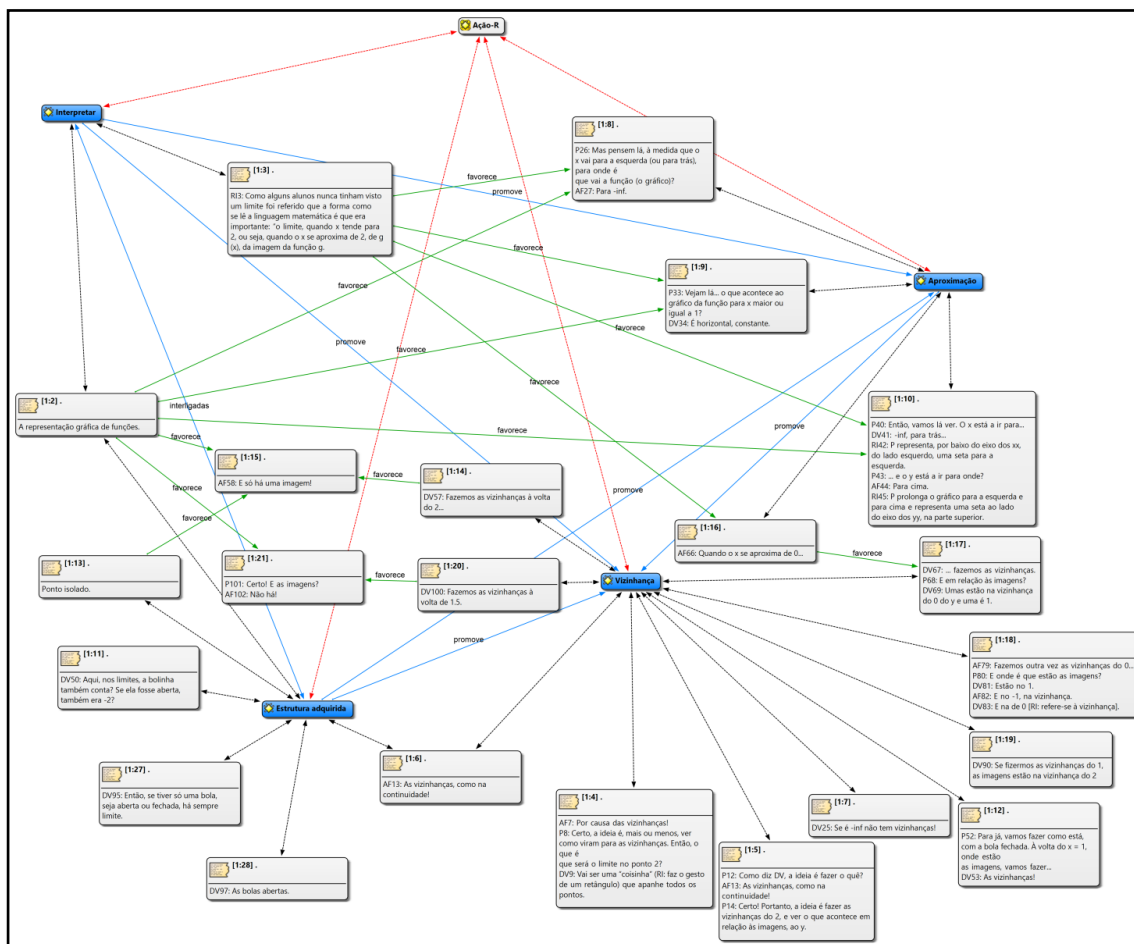


Figura 6.101 - RAV da Ação-R na Questão 2

Iniciando a interpretação do gráfico anterior pela subcategoria *Interpretar*, podemos constatar que os alunos, ao interpretarem os gráficos fornecidos no enunciado ([1:2]), bem como a linguagem matemática que envolve o cálculo de limites ([1:3]), utilizaram a noção de *Aproximação* para iniciarem a resolução da questão ([1:8], [1:9] e [1:10]).

Isoladamente, a explicação acerca da linguagem matemática que envolve o cálculo de limites ([1:3]) favorece o recurso à noção de *Aproximação* ([1:16]), e esta por sua vez dá origem à utilização da noção de *Vizinhança* ([1:17]).

Verificamos que os alunos, ao reconhecerem a importância da noção de ponto isolado (*Estrutura adquirida* - [1:13]), em conjunto com a noção de *Vizinhança* ([1:14]), utilizaram uma outra *Estrutura adquirida* ([1:15]), neste caso a representação gráfica de funções, para prosseguirem com a resolução da questão proposta.

Também o excerto [1:20], associado à noção de *Vizinhança*, impele, uma vez mais, os alunos a recorrerem-se da *Estrutura adquirida* ([1:21]), sob a forma da representação gráfica de funções, para darem continuidade à resolução da questão enunciada.

Síntese

Da análise efetuada, podemos verificar que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram interligadas, uma vez que a interpretação do enunciado é realizada com recurso aos conhecimentos adquiridos anteriormente, e por outro lado se os alunos não tivessem as construções necessárias adquiridas não lhes seria possível interpretar corretamente o enunciado e prosseguir com a resolução da questão.

Podemos também confirmar que a relação evidenciada entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* promovem o recurso à noção de *Aproximação* e em conjunto fomentam a necessidade de recorrer à noção de *Vizinhança*.

6.2.1.2 Ação-B

Considerando o exposto no tópico anterior, constatamos que as *Estratégias* utilizadas pelos alunos para proceder à resolução da Questão 2 incidiram essencialmente na visualização das imagens dos objetos situados nas vizinhanças do ponto para o qual se está a calcular o limite (*Aplicação de construção prévia*).

Recorde-se a Figura 6.91 e a Figura 6.93, em que os alunos começam por verificar as vizinhanças em torno do objeto, $x \rightarrow -\infty$.

- P26: Mas pensem lá, à medida que o x vai para a esquerda (ou para trás), para onde é que vai a função (o gráfico)?
- AF27: Para $-\infty$.

Figura 6.102 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g

- P40: Então, vamos lá ver. O x está a ir para...
- DV41: $-\infty$, para trás...
- RI42: P representa, por baixo do eixo dos xx , do lado esquerdo, uma seta para a esquerda ←
- P43: ... e o y está a ir para onde?
- AF44: Para cima.
- RI45: P prolonga o gráfico para a esquerda e para cima e representa uma seta ao lado do eixo dos yy , na parte superior ↑

Figura 6.103 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k

Atente-se que, na alínea d), alguns destes alunos tentaram utilizar a ideia de limite lateral, o qual não seria a *Estratégia* mais adequada neste caso concreto já que os limites laterais apenas tinham sido superficialmente aflorados por esta altura do semestre. A *Estratégia* mais adequada seria considerar, de novo, as vizinhanças dos objetos e das respetivas imagens no gráfico (*Aplicação de construção prévia*), obtendo em alguns casos *Soluções intermédias*.

Importa recordar a Figura 6.96, a Figura 6.97 e a Figura 6.98, em que os alunos começam por verificar as vizinhanças em torno do objeto que figura em cada limite.

- DV69: Umas estão à volta do 0 do y e uma é 1.

Figura 6.104 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i

- DV81: Estão no 1.
- AF82: E no -1 , na vizinhança.
- DV83: E na de 0 [RI: refere-se à vizinhança].

Figura 6.105 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j

Para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$, a discussão que se segue mostra que os alunos procuraram *construir* e analisar diversos cenários, alcançando *Soluções Intermédias*. Fechando a bola em $x = 1$ (Caso extra), os alunos reconhecem a construção da alínea anterior. Mantendo o gráfico original, discutem as diferenças entre a função ser contínua num ponto e ter limite nesse ponto. Não são ainda alcançadas as *construções* que relacionam os conceitos de limite e de continuidade (nem tal era pretendido nesta alínea), mas fica dado o primeiro passo nessa direção.

- P93: E se, para $x = 1$, tivéssemos uma bola fechada noutro sítio [RI: diferente da localização da bola aberta] ia ter limite?
- AF94: Não, porque em $x = 1$ tinha esse valor [RI: onde foi colocada a bola fechada] e na vizinhança de $x = 1$ [RI: nos outros pontos] tínhamos uma vizinhança de y com valores diferentes.

Figura 6.106 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k
(Caso extra)

Ao longo das transcrições verificam-se vários momentos em que os alunos *Justificam* os resultados obtidos, tal como os seguintes excertos comprovam:

- P6: Porquê?
- AF7: Por causa das vizinhanças!

Figura 6.107 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a), função g

- P24: Porquê?
- DV25: Se é $-\infty$ não tem vizinhanças!

Figura 6.108 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g

- DV57: Fazemos as vizinhanças à volta do 2...
- AF58: E só há uma imagem!

Figura 6.109 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l

- P72: Porquê?
- DV73: Porque não pode ter vizinhanças diferentes!

Figura 6.110 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i

- DV86: Pois, só podia haver uma vizinhança nas imagens!

Figura 6.111 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j

- P89: Porque...?
- DV90: Se fizermos as vizinhanças do 1, as imagens estão na vizinhança do 2!

Figura 6.112 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k

- AF94: Não, porque em $x = 1$ tinha esse valor [RI: onde foi colocada a bola fechada] e na vizinhança de $x = 1$ [RI: nos outros pontos] tínhamos uma vizinhança de y com valores diferentes.

Figura 6.113 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k
(Caso extra)

As subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, evidenciadas na *Ação-B* encontram-se esquematizadas na figura seguinte (ver Anexo 6.19).

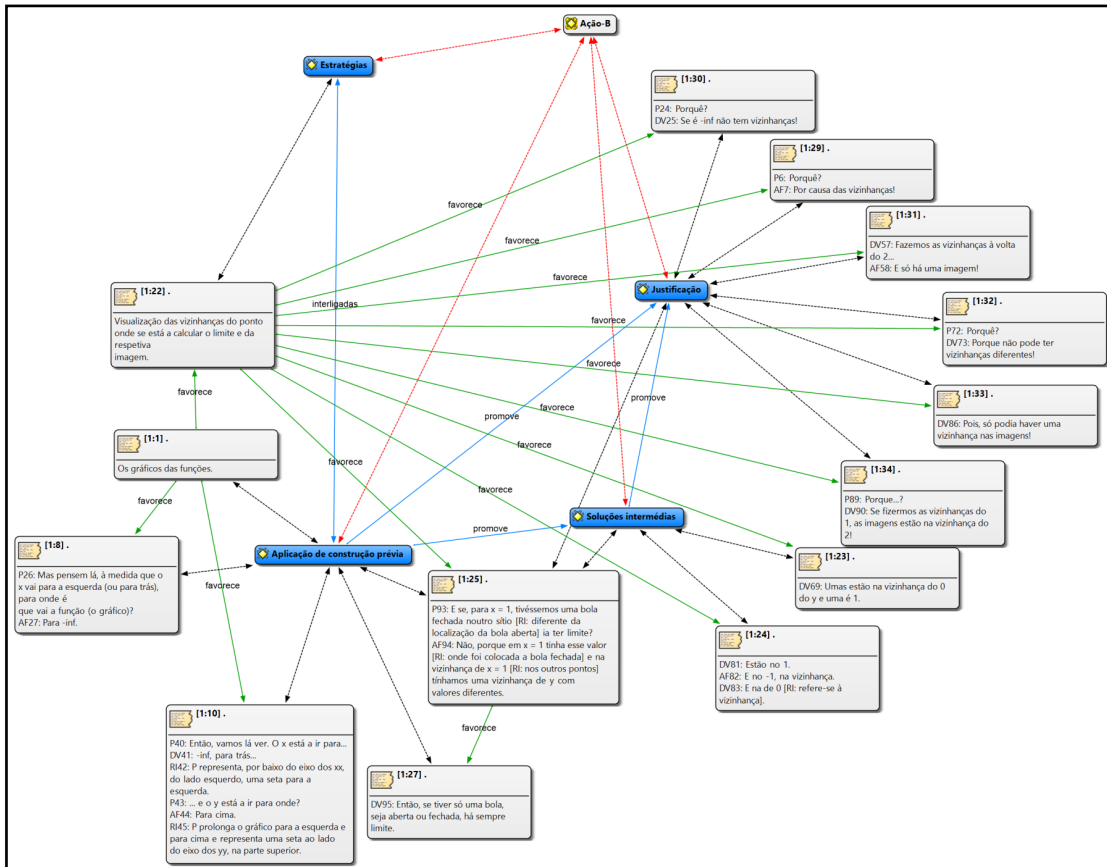


Figura 6.114 - RAV da Ação-B na Questão 2

Verificamos que a *Estratégia* escolhida pelos alunos relativamente à visualização das *Vizinhanças* do ponto onde se está a calcular o limite e da respetiva imagem ([1:22]), é colocada em prática pela a *Aplicação da construção prévia* de representação gráfica de funções ([1:1]).

Estas favorecem o aparecimento de *Soluções intermédias* quando existem diferentes *Vizinhanças* relativamente às imagens ([1:23], [1:24] e [1:25]), verificadas com recurso às noções de bola aberta e de bola fechada ([1:25] e [1:27]), e de algumas *Justificações*, todas baseadas na noção de *Vizinhança* ([1:25], [1:29], [1:30], [1:31], [1:32], [1:33] e [1:34]).

Síntese

Consideramos que as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* se encontram intrinsecamente relacionadas, uma vez que a *Estratégia* desenvolvida pelos alunos para dar seguimento à resolução da questão ([1:22]) pressupõe a *Aplicação de construções prévias* ([1:1]). Por outro lado, a *Estratégia* elaborada é fundamental para que seja possível *Aplicar as construções previamente* adquiridas.

Como podemos constatar pela análise do gráfico anterior, a *Aplicação de construção prévia*, promove quer a obtenção de *Soluções intermédias*, quer as *Justificações* para os cálculos efetuados.

6.2.1.3 Ação-C

Em relação à alínea a) não se denotou qualquer dificuldade por parte dos alunos em atingirem a *construção* pretendida de *Limite num ponto de continuidade*, mesmo antes da discussão em sala de aula com o professor.

AF

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} i(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} l(x) = -3$$

DV

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} i(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} l(x) = -3$$

Figura 6.115 - RA respeitante à resolução da Questão 2 a)

- P1: Quando x vai para 2, para onde vai o $g(x)$?
- AF2: -1 .
- ...
- P16: Para a função i , quando o x vai para 1, para onde vão as imagens?
- AF17: Para 1.
- ...
- P19: Depois, para a função l , quando o x vai para 0, para onde vai a função?

- DV20: -3 .

Figura 6.116 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 a)

No que concerne à alínea b), já foram identificadas algumas dificuldades por parte dos alunos na resolução inicial da questão, as quais foram posteriormente corrigidas aquando da discussão em aula, levando os alunos a atingirem a *construção* de *Limite no infinito*.

AF

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$

DV

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$

Figura 6.117 - RA respeitante à resolução da Questão 2 b)

A produção oral reproduzida a seguir mostra que os alunos atingem a *construção* de *Limite no infinito* para $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

- P22: O limite da função g , quando x vai para $-\infty$, quanto é que vai dar?
- AF23: $-\infty$.

Figura 6.118 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função g

No entanto, se analisarmos os diálogos seguintes, em que se discutiu o $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$, percebe-se que na realidade a noção de limite de uma função no infinito não estava ainda completa. Parece-nos que parte dos alunos percecionou (erradamente) que se o objeto vai para $+\infty$, então a imagem também deve tender para $+\infty$, procedendo-se de forma similar para $-\infty$.

De modo a atingirem a *construção* pretendida, foi necessário os alunos *Reorganizarem* as construções obtidas anteriormente.

- P28: Agora, para a função i , quando o x vai para $+\infty$?
- AF29: $+\infty$.
- DV30: 1.
- P31: Então, é $+\infty$ ou 1?
- AF32: Ah! Se calhar é 1...

Figura 6.119 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i

No entanto, após a discussão em aula, os alunos acabam por atingir a *construção* de *Limite no infinito*, para $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$.

- P35: Certo, logo o limite é...?
- DV36: 1.

Figura 6. 120 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função i

Para concluir a análise à produção oral à alínea b), atente-se que o problema supracitado se repete para $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$. Também aqui tivemos opiniões diferentes ministradas pelos diversos alunos da turma. No nosso entender, a questão fulcral tem a ver com a não consolidação da construção “representação gráfica de funções” quando se pretende analisar objetos e imagens não representados. Apenas no final da discussão em aula a *construção de Limite no infinito* é atingida.

Os alunos voltam a *Reorganizar* as construções atingidas previamente de modo a alcançarem a *construção final de Limite no infinito*.

- P37: Para a função k , quando x vai para $-\infty$, para onde vai a função?
- DV38: $-\infty$.
- AF39: $+\infty$.
- P40: Então, vamos lá ver. O x está a ir para...
- DV41: $-\infty$, para trás...
- RI42: P representa, por baixo do eixo dos xx , do lado esquerdo, uma seta para a esquerda \leftarrow .
- P43: ... e o y está a ir para onde?
- AF44: Para cima.
- RI45: P prolonga o gráfico para a esquerda e para cima e representa uma seta ao lado do eixo dos yy , na parte superior \uparrow .
- AF46: Então é $+\infty$!

Figura 6.121 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 b), função k

Com a Questão 2 c) pretendia-se averiguar as construções de *Limite num ponto fronteiro* ($\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$) e *Limite num ponto isolado* ($\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$), as quais foram imediatamente alcançadas pelos alunos, como se pode constatar quer pelos seus registos escritos, quer pelos excertos das transcrições.

AF

c) $\lim_{x \rightarrow 1} l(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 2} l(x) = -1$

DV

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} l(x) = -2; \lim_{x \rightarrow 2} l(x) = -1$$

Figura 6.122 - RA respeitante à resolução da Questão 2 c)

- P47: Agora, o limite, quando x tende para 1, da função $l(x)$
- AF48: -2 .

Figura 6.123 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 1$

- P59: Então, qual é o limite?
- DV60: -1 .

Figura 6.124 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 c), função l , quando $x \rightarrow 2$

Relativamente à alínea d) verificamos, pelos registos escritos, que inicialmente os alunos não atingiram a *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade*, tendo sido fundamental a discussão com o professor para que essa *construção* fosse alcançada.

AF

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} i(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} j(x) = 1$$

DV

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} i(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 0} j(x) = 1$$

Figura 6.125 - RA respeitante à resolução da Questão 2 d), funções i e j

Para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$, a discussão abaixo mostra que as dificuldades sentidas pelos alunos foram colmatadas, levando os alunos nela participantes a atingirem a *construção* pretendida (*Limite num ponto de descontinuidade*) através da *Reorganização* das soluções intermédias obtidas.

- P68: E em relação às imagens?
- DV69: Umas estão na vizinhança do 0 do y e uma é 1.
- P70: Então qual é o limite?
- AF71: Não existe!

Figura 6.126 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função i

Seguidamente, quanto ao cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$, a síntese da produção oral abaixo indicada mostra que os alunos já atingiram a *construção* com facilidade (*Limite num ponto de descontinuidade*), *Reorganizando* as respetivas soluções intermédias.

- P80: E onde é que estão as imagens?
- DV81: Estão no 1.
- AF82: E no -1, na vizinhança.
- DV83: E na de 0 [RI: refere-se à vizinhança].
- P84: Então, qual é o limite?
- AF85: Não existe o limite!

Figura 6.127 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função j

Já no caso do cálculo de *Limite num ponto fronteiro*, mas que não pertence ao domínio da função, e de *Limite num ponto exterior*, também a generalidade da turma alcançou a *construção* pretendida, não se tendo verificado dúvidas em relação à função k . Relativamente à função l a notação utilizada nos registos escritos não reproduz fielmente o que é expressado oralmente.

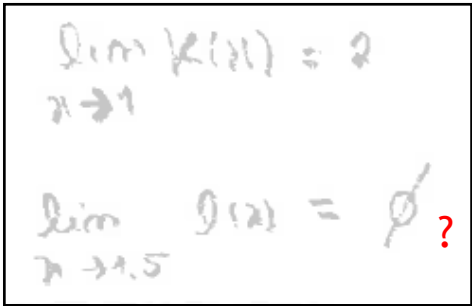
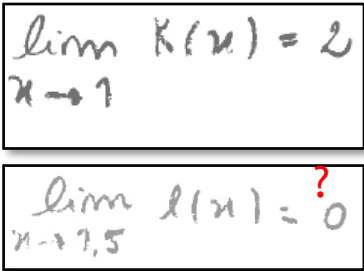
AF	DV
	

Figura 6.128 - RA respeitante à resolução da Questão 2 d), funções k e l

- P87: Agora, quando x tende para 1, o limite de $k(x)$.
- AF88: É o 2!

Figura 6.129 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k

Em relação a este limite, é extremamente interessante analisar o diálogo entre a turma e o professor que apresentamos a seguir. Com base na representação gráfica da função k , foi discutido (ainda que de uma forma preliminar) o que sucederia em diferentes cenários.

Fechando a bola para $x = 1$ (mas com $y \neq 2$) os alunos reconhecem a *construção* da alínea anterior (*Limite num ponto de descontinuidade*), com base na *Reorganização* das soluções intermédias obtidas com base na noção de vizinhança.

- P93: E se, para $x = 1$, tivéssemos uma bola fechada noutra sítio [RI: diferente da localização da bola aberta] ia ter limite?
- AF94: Não, porque em $x = 1$ tinha esse valor [RI: onde foi colocada a bola fechada] e na vizinhança de $x = 1$ [RI: nos outros pontos] tínhamos uma vizinhança de y com valores diferentes.

Figura 6.130 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k (Caso extra)

Mantendo o gráfico original, discutem as diferenças entre a função ser contínua num ponto e ter limite nesse ponto. Não são ainda alcançadas as *construções* que relacionam os dois conceitos em análise (nem tal era pretendido nesta alínea), mas fica dado o primeiro passo nessa direção.

- P95: Podemos ver aqui, comparando as noções de continuidade e de limite, que há uma diferença: para esta função k , não faz sentido estudar a continuidade em $x = 1$, pois não pertence ao domínio. No entanto, vimos que existe o limite. Então, o que distingue limite de continuidade?
- DV96: As bolas abertas, para a continuidade não podemos ter bolas abertas.
- P97: Certo, num ponto que não pertença ao domínio da função não está definida a continuidade mas pode haver limite.

Figura 6.131 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função k

Finalmente, vamos analisar a produção oral em relação a $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$. O cálculo deste limite não causou grande dificuldade, pois o facto de não existirem imagens conduziu os alunos (*Reorganização*) à conclusão que não existe limite num ponto exterior à função, alcançando assim a *construção* pretendida (*Limite num ponto exterior*).

- P101: Certo! E as imagens?
- AF102: Não há!
- P103: Então, há limite?
- AF104: Não!

Figura 6.132 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 2 d), função l

Através da análise efetuada consideramos que as construções alcançadas são *Comunicadas* quer pelos registos escritos dos alunos, quer pelos excertos referentes às transcrições dos registos audiovisuais.

No esquema seguinte (ver Anexo 6.20) apresentam-se as subcategorias *Reorganização*, *Limite num ponto de continuidade*, *Limite no infinito*, *Limite num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio), *Limite num ponto isolado*, *Limite num ponto de descontinuidade* e *Limite num ponto exterior*, identificadas na *Ação-C*.

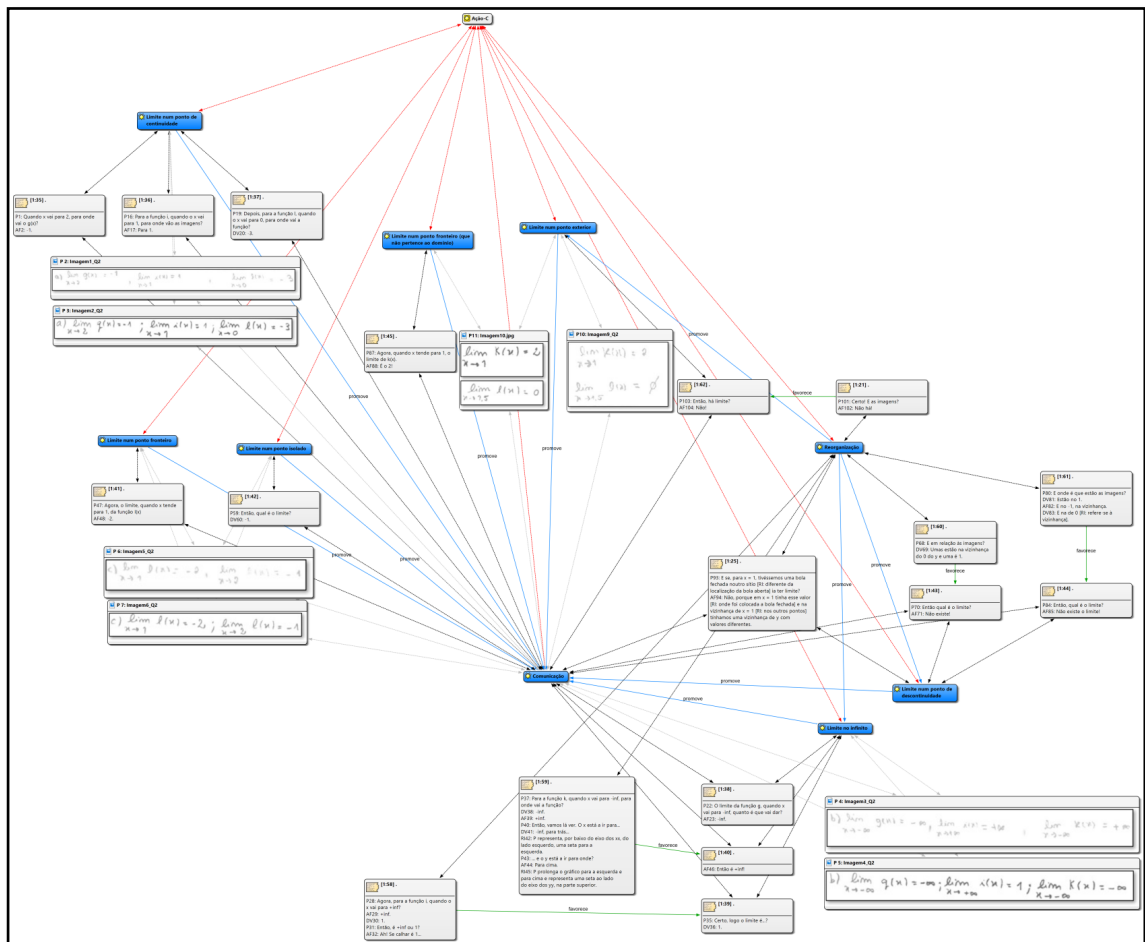


Figura 6.133 - RAV da Ação-C na Questão 2

Relativamente às construções de *Limite num ponto de continuidade* ([1:35], [1:36], [1:37], P2 e P3), *Limite num ponto fronteiro* ([1:41], P6 e P7), *Limite num ponto fronteiro (que não pertence ao domínio)* ([1:45], P10 e P11) e *Limite num ponto isolado* ([1:42], P6 e P7), verificamos que estas são atingidas de forma direta.

Já as construções de *Limite no infinito* e de *Limite num ponto de descontinuidade* são alcançadas após a *Reorganização das Soluções intermédias* obtidas anteriormente.

Como já referimos anteriormente, a *construção de Limite no infinito* é atingida de forma imediata no caso da função g ([1:38], P3 e P4), mas para as funções i e k já se verificaram algumas dificuldades (P4 e P5, respetivamente). Para essas funções já foi necessário *Reorganizar as Estruturas adquiridas* previamente, neste particular a representação gráfica de funções ([1:58] e [1:59]), para a resolução da questão ([1:39] e [1:40], respetivamente).

No que concerne à *construção de Limite num ponto de descontinuidade* confirmamos que as construções relatadas nos excertos [1:43] e [1:44], apenas são atingidas após a *Reorganização das Soluções intermédias* com base na noção de *Vizinhança* descritas nos excertos [1:60] e [1:61], respetivamente. Ainda em relação à *construção de Limite num ponto de*

descontinuidade no Caso extra da função k confirmamos, pelo excerto [1:25], que AF também atinge a *construção* pretendida com base na *Reorganização* de construções anteriores relacionadas, uma vez mais, com a noção de *Vizinhança* – “AF94: Não, porque em $x = 1$ tinha esse valor [RI: onde foi colocada a bola fechada] e na vizinhança de $x = 1$ [RI: nos outros pontos] tínhamos uma vizinhança de y com valores diferentes.”.

No caso da *construção* de *Limite num ponto fronteiro*, o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$ é imediato ([1:45], P10 e P11). No entanto, para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$ ([1:62]) é essencial a *Reorganização* associada à representação gráfica da função ([1:21]) para os alunos atingirem a *construção* de *Limite num ponto exterior*. Como já referimos, as produções registadas pelos alunos não se encontram corretas ([P10 e P11]), mas constatamos pela discussão em aula que não houve dúvidas em relação à *construção*.

Podemos ainda constatar que a subcategoria *Comunicação* é verificada em todas as construções de limite solicitadas nesta questão, quer através dos registos escritos dos alunos, quer através das discussões em aula. Em relação à *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade* a *Comunicação* é apenas feita oralmente, uma vez que os registos escritos dos alunos se encontram incorretos e que o Caso extra para a função k apenas foi introduzido depois dos registos escritos terem sido recolhidos.

Síntese

Pelo que foi dito, constatamos que a *Reorganização* promove as *construções* de *Limite num ponto de descontinuidade*, de *Limite no infinito* e de *Limite num ponto exterior*, tendo as restantes sido alcançadas de modo imediato.

Por outro lado, todas as *construções* de limite pretendidas nesta questão promovem a *Comunicação* dessas construções.

6.2.1.4 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

A figura seguinte (ver Anexo 6.21) evidencia as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Ação-R*, *Ação-B* e *Ação-C* identificadas durante a resolução da Questão 2, apresentando alguns dos excertos acima utilizados.

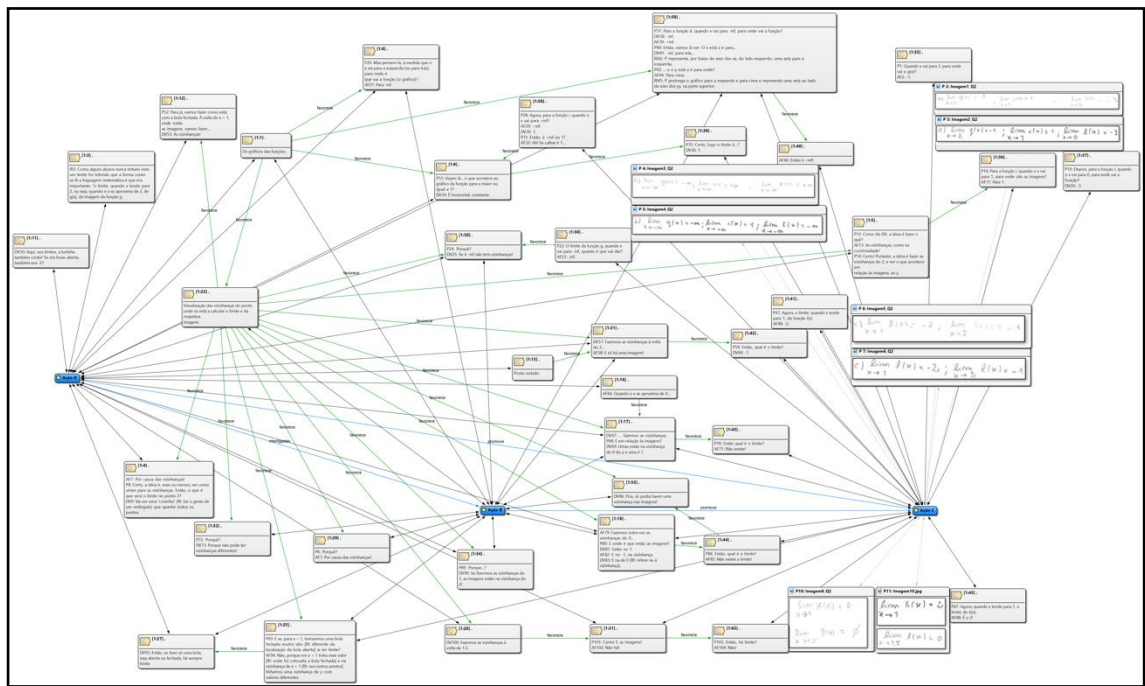


Figura 6.134 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2

Pela análise do esquema anterior, podemos constatar que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram interligadas e que ambas promovem a *Ação-C*.

De um modo geral, podemos verificar que a *Interpretação* dos gráficos das funções fornecidos no enunciado da questão favorece a *Estratégia* adotada pelos alunos, aliada à *Estrutura adquirida* de *Vizinhança*. Por outro lado, a *Estratégia* de visualizar nos gráficos das funções as *Vizinhanças* dos pontos onde se pretende calcular os limites e das respetivas imagens, juntamente com a *Aplicação da construção prévia* de representação gráfica de funções, aliada à *Estrutura adquirida* de bola aberta e de bola fechada, desencadeiam a obtenção de *Soluções intermédias*, cuja *Reorganização* conduz às construções de limite pretendidas nesta questão.

6.2.2 Questão 3

Questão 3 Considere as funções reais de variável real f e g cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Indique os pontos do domínio onde as funções não têm limite.

Figura 6.135 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite

Na Questão 3 pretendeu-se continuar a explorar o conceito gráfico de limite, procurando agora verificar se os alunos compreenderam o conceito abordado em 2 d) de ponto do domínio onde o limite não existe. Recordando o que foi realizado pelos alunos na Questão 2 d), esta *construção* não foi inicialmente alcançada pelos alunos de forma autónoma, tendo sido essencial a intervenção do professor para que tal *construção* fosse atingida.

Pretendemos agora verificar se a *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade* se encontra estabelecida.

6.2.2.1 Ação-R

Os alunos *Interpretam* o enunciado da questão e verificam que, através da análise da representação gráfica das funções (*Estrutura adquirida*), que necessitam de calcular os seus domínios (*Estrutura adquirida*).

- P1: Ora bem, pontos do domínio onde não há limite.
Qual foi a primeira coisa que fizeram?
- DV2: O domínio!

Figura 6.136 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3

Igualmente pela *Interpretação* dos gráficos das funções, os alunos recorrem às noções de bola aberta e de bola fechada (*Estrutura adquirida*) para identificar os pontos de descontinuidade das funções (*Estrutura adquirida*) e à noção de *Vizinhança* para dar seguimento à resolução da questão.

- P3: Certo! Então, para a função f , qual é o primeiro ponto onde há problemas?
- AF4: No -2 . Há uma bola aberta e em cima uma bola fechada...
- P5: Aqui, à volta do -2 [RI: representa a vizinhança], onde é que estão as vizinhanças [RI: referindo-se às imagens]?
- DV6: Umas aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 5$] e outra em $y = 6$.
...
- P10: Certo! E a seguir?
- AF11: No -1 .
- P12: E porquê?
- AF13: Há outra vez uma bola aberta e uma bola fechada
- DV14: À volta do -1 [RI: refere-se à vizinhança] tenho uns pontos aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 4$] e outras aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 2$].
...
- P19: Para a função g , onde é que há problemas?
- AF20: No 0 . Há uma bola aberta e em cima uma bola fechada.
- P21: O que é que acontece no 0 ?

- DV22: Temos umas imagens em baixo, à esquerda, e outras imagens em cima, à direita.
- AF23: Dá 2 vizinhanças diferentes.
- ...
- P26: E mais?
- DV27: No 2. Temos 2 bolas abertas e uma fechada.
- P28: O que é que sucede à volta do dois? [RI: representa a vizinhança]
- DV29: Temos 3 vizinhanças diferentes no y !
- P30: Certo, temos uma vizinhança em $y = 3$, outra em $y = 2$ e outra em $y = 1$.

Figura 6.137 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3

O excerto seguinte reproduz o diálogo entre professor e alunos no qual o professor indaga acerca do ponto $x = 5$. Pretende-se realçar a importância da *Interpretação* do enunciado da questão quanto ao facto do ponto não pertencer ao domínio da função (*Estrutura adquirida*), condição esta explicitada no enunciado da questão. Como podemos constatar, os alunos respondem automaticamente à questão colocada, sendo o professor a sugerir a verificação do domínio. Para a obtenção deste, os alunos recorrem à noção de bola aberta (*Estrutura adquirida*) para verificar que o ponto $x = 5$ não pertence efetivamente ao domínio da função (*Estrutura adquirida*).

- P32: Mais algum ponto do domínio?
 - AF33: Não.
 - P34: Então e o $x = 5$?
 - DV35: No 5 é 1 [RI: referindo-se ao limite].
 - P36: O 5 é do domínio?
 - DV37: Ah, não! A bola é aberta.
 - P38: No ponto $x = 5$, o limite é 1, correto! Mas o $x = 5$ não pertence ao domínio e na pergunta está “indique os pontos do domínio...”!
- Se a pergunta fosse para calcular o $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ a resposta seria 1.

Figura 6.138 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3, função g

Na figura seguinte (ver Anexo 6.22) podemos observar as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança* que se manifestaram durante a *Ação-R*, assim como a relação entre estas.

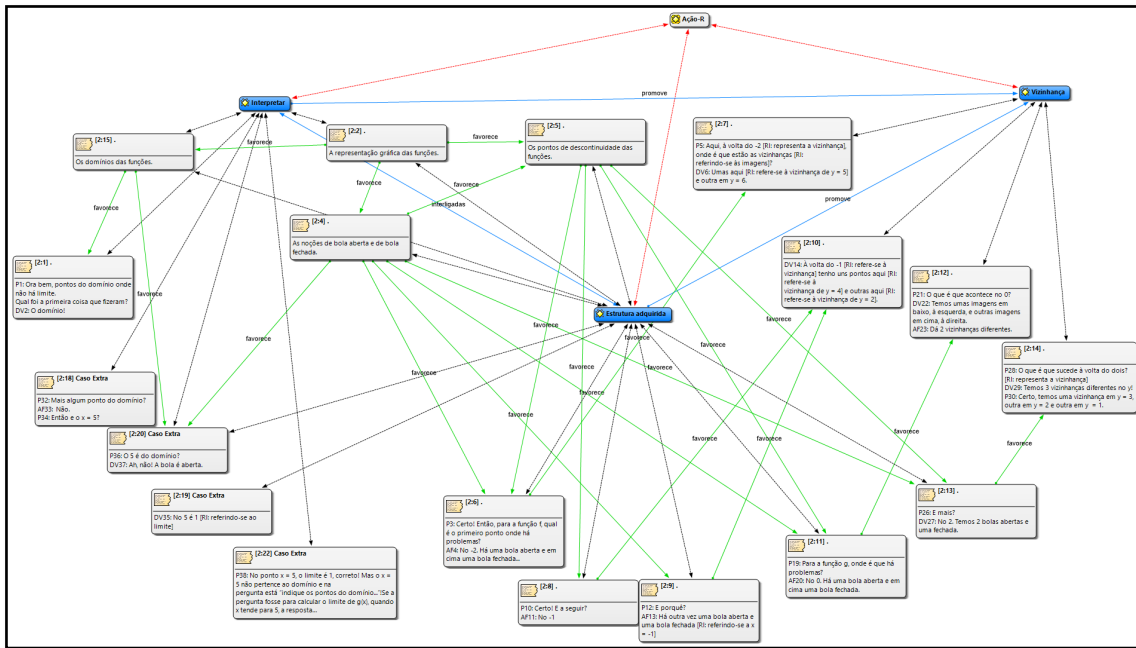


Figura 6.139 - RAV da Ação-R na Questão 3

Pela análise da figura anterior, verificamos que a *Interpretação* dos gráficos das funções ([2:2]) suscita o recurso às noções de domínio de uma função ([2:15], [2:1]), de bola aberta e de bola fechada ([2:4]) e de pontos de descontinuidade de uma função ([2:5]), os quais constituem igualmente *Estruturas adquiridas*.

A *Interpretação* do enunciado em conjunto com o recurso às *Estruturas adquiridas* de bola aberta, de bola fechada e de pontos de descontinuidade ([2:6], [2:11] e [2:13]), despoletam o recurso à noção de *Vizinhança* ([2:7], [2:12] e [2:14], respetivamente).

Por outro lado, as noções de bola aberta e de bola fechada ([2:9]), juntamente com a noção de pontos de descontinuidade ([2:8]), favorecem igualmente o recurso à noção de *Vizinhança* ([2:10]).

Relativamente ao Caso Extra ([2:18]), os alunos calculam imediatamente o $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ ([2:19]) com base na *Estrutura adquirida* de limite num ponto. No entanto, o recurso às *Estruturas adquiridas* de domínio de uma função ([2:20]) e de representação gráfica de uma função ([2:2]), aliada às noções de bola aberta e de bola fechada ([2:4]), são fundamentais para retificar o resultado inicialmente obtido, uma vez que no enunciado é explicitado que os pontos têm de pertencer ao domínio da função ([2:22]).

Síntese

Constatamos, novamente, que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram associadas, em virtude de não ser possível *Interpretar* o enunciado da questão sem que existam *Estruturas adquiridas* anteriormente que suportem essa interpretação. Em contrapartida, a


Interpretação do enunciado pelos alunos desencadeia o recurso às *Estruturas adquiridas* previamente.

Assim sendo, as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* promovem ambas o recurso à noção de *Vizinhança* para dar início à resolução da questão proposta.

6.2.2.2 Ação-B

A *Estratégia* utilizada pelos alunos nesta questão adveio da interpretação do enunciado, levando-os à determinação dos domínios (*Aplicação de construção prévia*) das funções representadas graficamente, os quais se consideram *Soluções intermédias* que encaminham os alunos na resolução da questão colocada.

DV



The image shows two handwritten mathematical expressions for domains, each enclosed in a rectangular box. The first box on the left contains the expression $D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. The second box on the right contains the expression $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, 5[$. The handwriting is in black ink on a white background.

Figura 6.140 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 3

A escolha dos pontos domínio onde as funções não têm limite é *Justificada* pelos alunos com o recurso às noções de bola aberta e de bola fechada, aquando da análise dos gráficos fornecidos (*Estratégias*).

- AF4: No -2. Há uma bola aberta e em cima uma bola fechada...
...
- AF13: Há outra vez uma bola aberta e uma bola fechada [RI: referindo-se a $x = -1$].
...
- AF20: No 0. Há uma bola aberta e em cima uma bola fechada.
...
- DV27: No 2. Temos 2 bolas abertas e uma fechada.

Figura 6.141 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3

Por outro lado, as *Justificações* apresentadas pelos alunos para a não existência de limite nos pontos identificados prendem-se com a noção de vizinhança.

- AF8: São duas [RI: vizinhanças] diferentes.
...
- DV14: À volta do -1 [RI: refere-se à vizinhança] tenho uns pontos aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 4$] e outras aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 2$].
...
- AF23: Dá 2 vizinhanças diferentes.
...

- DV29: Temos 3 vizinhanças diferentes no y !

Figura 6.142 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 3

Na *Ação-B* observam-se as subcategorias *Estratégia*, *Aplicação de construção prévia*, *Solução intermédia* e *Justificação*, cujas relações se encontram esquematizadas na figura seguinte (ver Anexo 6.23).

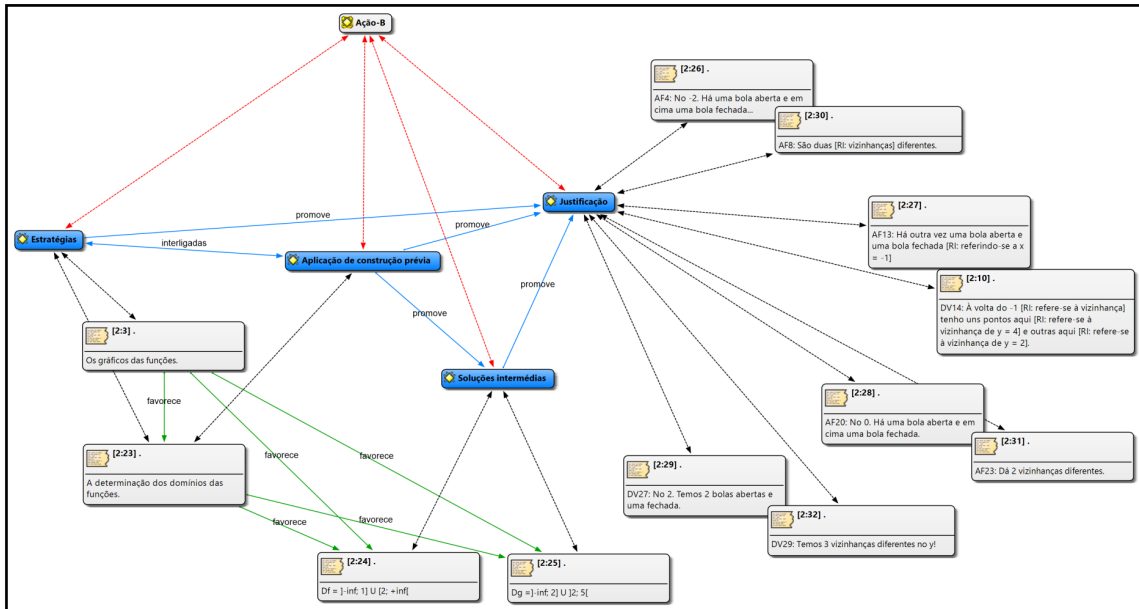


Figura 6.143 - RAV da *Ação-B* na Questão 3

Podemos constatar, pela análise do gráfico anterior, que a *Estratégia* utilizada pelos alunos se centrou em analisar os gráficos das funções ([2:3]) e em determinar os domínios das funções ([2:23]). A identificação dos ditos domínios ([2:23]) considera-se a *Aplicação de construção prévia*, a qual favoreceu a sua obtenção ([2:24] e [2:25]), constituindo *Soluções intermédias* para prosseguir com a resolução da questão.

A análise dos gráficos fornecidos (*Estratégias*) juntamente com os domínios obtidos (*Soluções intermédias*) permite que os alunos identifiquem quais os pontos em que as funções não têm limite, *Justificando* as suas conclusões com base nas noções de bola aberta, de bola fechada e de vizinhança ([2:26] e [2:30], [2:27] e [2:10], [2:28] e [2:31], [2:29] e [2:32]).

Síntese

Também nesta questão se verifica a interligação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, em virtude de só ser possível desenvolver *Estratégias* quando se possui conhecimentos prévios que suportem essas *Estratégias*, e por outro lado, para empregar as *Estratégias* selecionadas é necessário *Aplicar as construções previamente* adquiridas.

Por outro lado, através da *Aplicação de construções prévias*, serão obtidas *Soluções intermédias* que permitem que os alunos prossigam com a resolução da questão colocada, as quais, por sua

vez, contribuem para a *Justificação* da escolha dos pontos do domínio onde figuram simultaneamente bolas abertas e bolas fechadas, relacionando-os com a multiplicidade de *Vizinhanças* para as imagens desses pontos.

6.2.2.3 Ação-C

Através dos registos escritos (*Comunicação*) concluímos que os alunos atingem a *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade*.

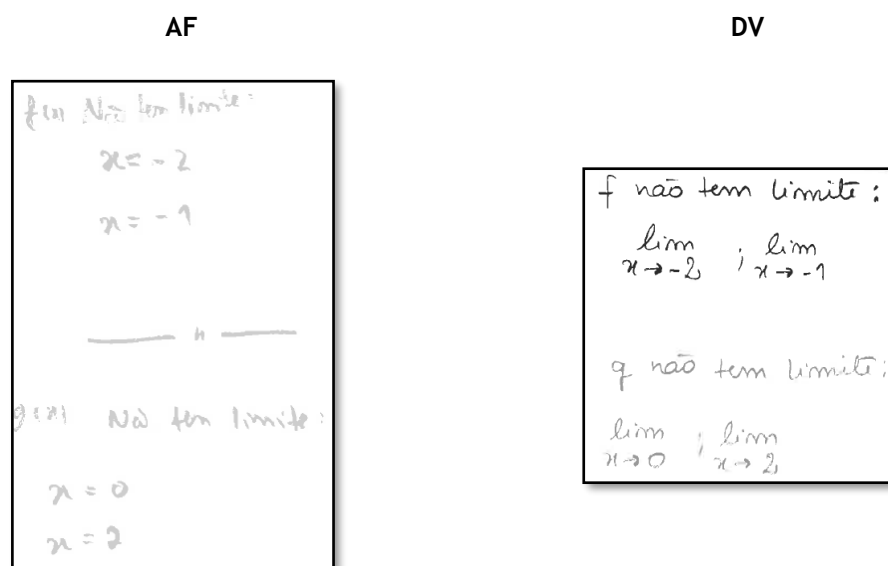


Figura 6.144 - RA respeitante à resolução da Questão 3

Analisando as transcrições dos registos audiovisuais constatamos que os alunos *Reorganizam* as conclusões obtidas com a aplicação da noção de *Vizinhança* para atingirem a *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade*.

- DV6: Umas aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 5$] e outra em $y = 6$.
- ...
- AF8: São duas [RI: vizinhanças] diferentes.
- AF9: Logo, não há limite.
- ...
- DV14: À volta do -1 [RI: refere-se à vizinhança] tenho uns pontos aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 4$] e outras aqui [RI: refere-se à vizinhança de $y = 2$].
- P15: E em relação ao limite?
- AF16: Não tem limite.
- ...
- DV22: Temos umas imagens em baixo, à esquerda, e outras imagens em cima, à direita.
- AF23: Dá 2 vizinhanças diferentes.
- P24: Logo...?

descontinuidade. A Comunicação dos resultados alcançados com a construção final é realizada quer oralmente, quer pelos registos escritos dos alunos.

6.2.2.4 Consolidação

Constatamos que a discussão que incidiu sobre as funções i e j , da Questão 2 d), com o professor foi essencial para os alunos compreenderem o que ocorre, em termos de limites, nos pontos de descontinuidade de uma função, levando os alunos a identificarem imediatamente, através dos gráficos apresentados, os pontos do domínio onde as funções não têm limite (pontos de descontinuidade).

Deste modo, consideramos que a construção de Limite num ponto de descontinuidade se encontra por esta altura Consolidada.

Na figura seguinte (ver Anexo 6.25) encontram-se sintetizadas as transcrições que evidenciam a Consolidação.

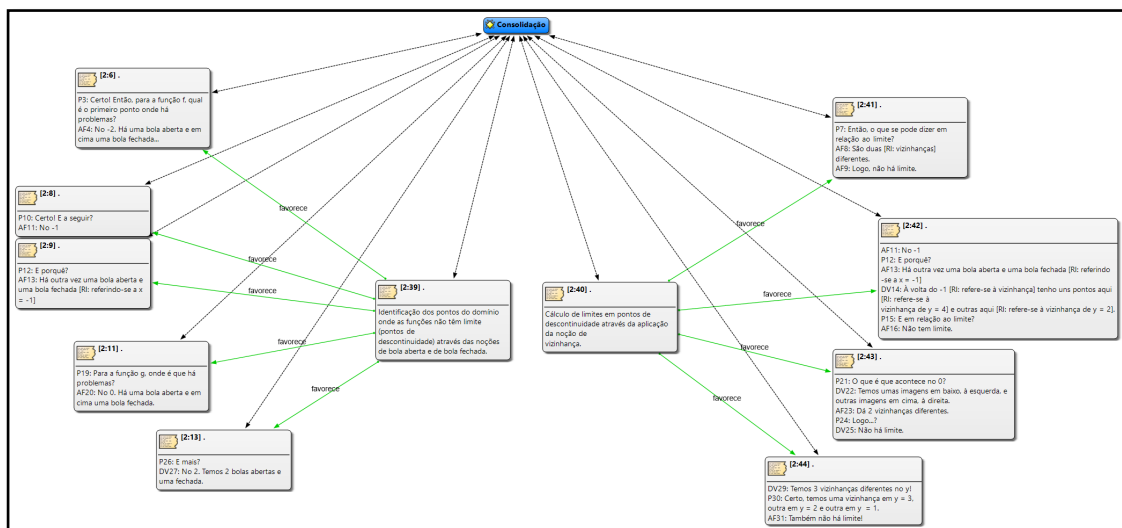


Figura 6.147 - RAV da ação epistémica Consolidação na Questão 3

Os alunos *Interpretam* os gráficos das funções fornecidos no enunciado e *Aplicam a construção prévia* de domínio de uma função, a qual juntamente com o recurso às *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada ([2:39]), leva os alunos a identificarem os pontos onde as funções não têm limite ([2:6], [2:8], [2:9], [2:11] e [2:13]).

Por analogia à questão anterior, a *Estratégia* de analisar os gráficos das funções fornecidos no enunciado conduz os alunos à *Aplicação da construção prévia* de cálculo dos limites nos pontos identificados anteriormente, com base na *Vizinhança* de um ponto ([2:40]). Os excertos [2:41], [2:42], [2:43] e [2:44] evidenciam a *Consolidação* desta construção.

Síntese

Podemos constatar que a *Consolidação* se manifestou através da *Ação-R* e da *Ação-B*, no primeiro caso expressa pelas subcategorias *Interpretar*, *Estruturas adquiridas* e *Vizinhança*, e no segundo caso pelas *Estratégias* e pela *Aplicação de construções prévias*.

6.2.2.5 Relações estabelecidas entre as ações epistêmicas

No esquema seguinte (ver Anexo 6.26) encontram-se sintetizadas as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B*, a *Ação-C* e a *Consolidação* durante a resolução da Questão 3, apresentando apenas alguns dos excertos transcritos anteriormente e que se consideram de maior relevância, de modo a simplificar a leitura do gráfico.

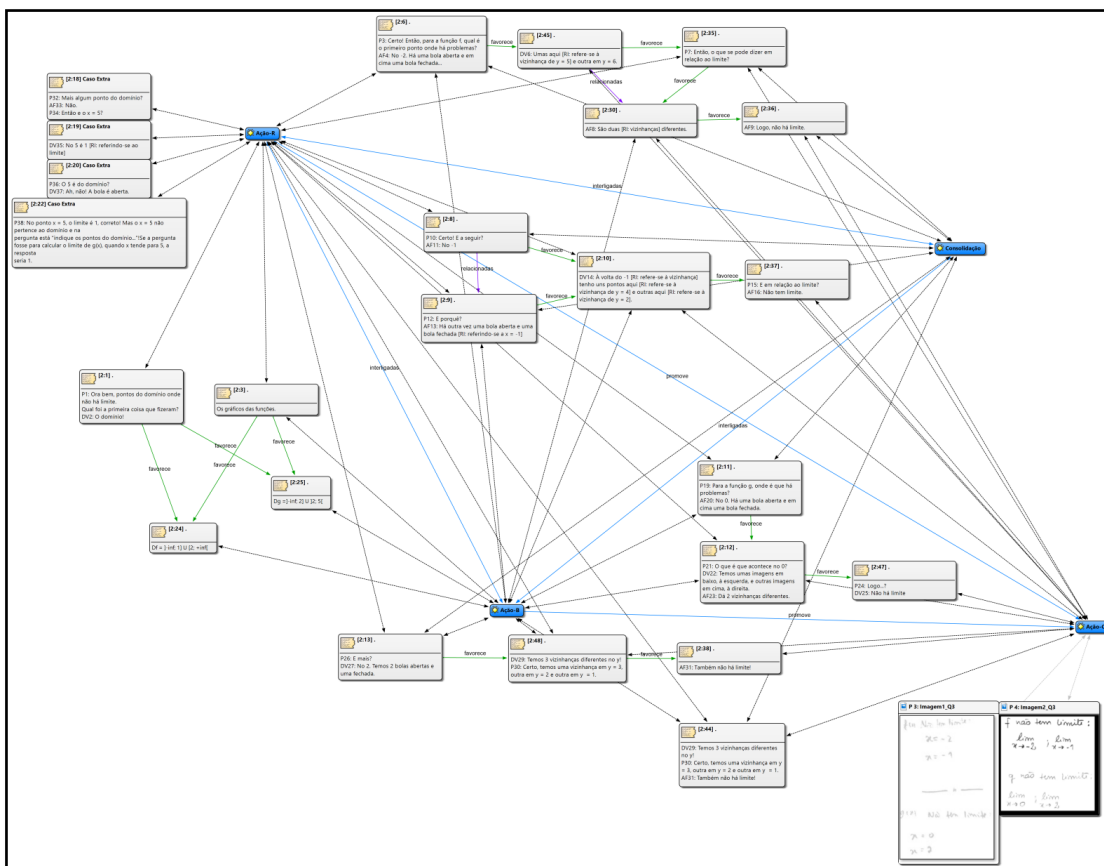


Figura 6.148 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 3

Em relação à ação epistêmica *Consolidação*, verifica-se a interligação quer com a *Ação-R*, quer com a *Ação-B*, o que vem confirmar o que já foi concluído no estudo da continuidade.

No que concerne à *Ação-R* e à *Ação-B*, constatamos que estas se encontram associadas uma vez que a *Interpretação* do enunciado e das representações gráficas das funções promovem a determinação dos domínios das funções (*Aplicação de construção prévia*), os quais por sua vez, em conjunto com as *Estruturas adquiridas* de bola aberta e bola fechada e a noção de *Vizinhança* fazem parte da *Estratégia* adotada pelos alunos para identificarem os pontos onde não existe limite.

Neste caso, a Ação-C foi desencadeada pela Ação-R e pela Ação-B. Recordando o objetivo da questão, “Indique os pontos do domínio onde as funções não têm limite.”, verificamos que a Estratégia utilizada pelos alunos se prende com a Interpretação dos gráficos das funções e com as Estruturas adquiridas de bola aberta e de bola fechada para identificarem os pontos onde não existe limite. Aplicando a noção de Vizinhança ao cálculo dos limites das funções nesses pontos (Aplicação de construção prévia), os alunos atingem a construção pretendida de Limite num ponto de descontinuidade.

6.2.3 Questão 4

Questão 4 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$, $\lim_{x \rightarrow 8} (-10)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-2x + \frac{1}{x}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)(x - 2)^2]$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$

Figura 6.149 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite

Na aula 4 pretendeu-se introduzir o estudo dos limites de funções definidas por expressões analíticas. A Questão 4 foi a primeira em que os alunos abordaram esta temática. Saliente-se que não se pretende, nesta unidade curricular, que os alunos trabalhem o levantamento de indeterminações. Pretende-se apenas que os alunos compreendam o conceito de limite, na perspetiva de aferir quanto ao comportamento de uma certa função f quando x se aproxima de um certo ponto a . Nesta perspetiva, sugeriu-se o uso da máquina de calcular no cálculo de $f(x)$, para pontos $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.

Para o cálculo dos limites apresentados na Questão 4 a) basta substituir x pelo valor a do qual se aproxima na expressão designatória da função. Já na alínea b), pretendeu-se que os alunos utilizassem a calculadora para indagar o limite, experimentando diferentes valores próximos de a e inferindo quanto ao comportamento de $f(x)$ nessas circunstâncias.

6.2.3.1 Ação-R

Embora alguns alunos tenham apreendido imediatamente o objetivo da questão (*Interpretar*), para outros já foi necessário algum auxílio por parte do professor de modo a que estes avançassem na sua resolução, em particular, no que concerne ao cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$.

- P1: Então, nesta questão, o que é que temos de fazer?
- AF2: Temos de calcular os limites!

Figura 6.150 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

Nesta fase a noção de Aproximação foi crucial para os alunos, quer pelo que significa x tender para 2, como pela perceção dos resultados, em y , tenderem para 3, tendo sido necessário rever o procedimento de modo a esclarecê-lo para alguns alunos.

- P4: Então, para o primeiro, quando o x vai para 2, para onde é que vai o $x + 1$?
...
- P8: Se o x for 2.001 [...]
...
- P10: Se o x for 1.999[...]
...
- P12: Então, estão ou não perto de 3? [RI: referindo-se às imagens]
- AF13: Mas porquê esses valores?
- P14: Quando o x se está a aproximar do 2, pode-se aproximar por valores maiores ou menores, certo?
Se for por valores mais pequenos, por exemplo, 1.9, 1.99, 1.999, etc.
Do outro lado, por exemplo, 2.05, 2.04, 2.02, etc.
- AF15: Ah!
- P16: A ideia é ver, à medida que o x se está a aproximar do 2, a imagem pela função $x + 1$ está-se a aproximar de que valor?

Figura 6.151 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

O estudo deste caso em particular foi essencial para a utilização da noção de *Aproximação* no cálculo de outros limites.

- P51: Outra maneira é, pensando que o x vai para $-\infty$, o que podemos fazer?
- AF52: Substituir por valores negativos.
- DV53: Se $x = -100$,
...
- AF56: E o x está a diminuir.
- AF57: Se, em vez de -100 , o x for -1000 ,
...
- P60: Então, isto está a ir para onde? [RI: referindo-se às imagens].
- AF61: Para positivo.
- P62: Para positivo e cada vez, quê?
- DV63: Cada vez maior.
- P64: Então vai para onde? [RI: referindo-se às imagens].
- AF65: $+\infty$
...
- DV67: Então, agora o x está a aumentar.
- DV68: Posso substituir o x por 100, e depois por 1000, e por 10000.
...
- P78: Então, está a ir para onde? [RI: referindo-se às imagens].
- DV79: Para 0.

- ...
- P86: Não podem dividir por zero, certo!
Mas o que estamos a fazer é o “ x a tender para zero”.
O que podemos fazer?
- ...
- DV88: Fazemos $x = 0.1$, $x = 0.01$, $x = 0.001$, etc.
- ...
- P98: Então, o y está a ir para onde?
 - AF99: $+\infty$.
- ...
- P100: Os números que escolheram para x são todos positivos. Mas também me posso me aproximar de 0 por números...?
 - AF101: Negativos!
- ...
- DV103: Fazemos $x = -0.1$, $x = -0.01$, $x = -0.001$, etc.
- ...
- P113: Então, o y está a ir para onde?
 - AF114: Para $+\infty$

Figura 6.152 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

A *Interpretação* do enunciado relativo ao cálculo do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ conduz os alunos a *reconhecerem* que 0 não pertence ao domínio da função (*Estrutura adquirida*), não podendo neste caso efetuar a substituição na função por esse valor.

- P82: Então e agora?
- RI83: Para a função $\frac{1}{x^2}$, quando $x \rightarrow 0$.
- AF84: O zero não pode estar a dividir!
- RI85: Os alunos verificam que, para $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, como 0 não pertence ao domínio da função, a estratégia de substituir na função o x por 0 falha.

Figura 6.153 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

Os alunos *Interpretam* o enunciado e, para determinadas funções ($x + 1$, -10 e x^2), reconhecem as suas expressões analíticas (*Estrutura adquirida*), associando-as às suas representações gráficas (*Estrutura adquirida*).

- DV17: Mas esta função nós conhecemos: é uma função afim!
- DV18: Não podíamos ir pelo gráfico?
- P19: Se fossemos fazer o gráfico de $x + 1$, o que era?
- DV20: Uma reta.

- ...
- P32: Agora o $\lim_{x \rightarrow 8}(-10)$. Como é esta função?
- AF33: É constante!
- DV34: O gráfico é uma reta horizontal.
- ...
- P43: Em relação ao $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$?
- DV44: É uma função quadrática!
- P45: E o gráfico é uma...?
- AF46: Parábola.
- P47: Com a concavidade voltada para...?
- DV48: Cima.

Figura 6.154 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

A identificação da função afim $y = x + 1$, aliada à sua representação gráfica, leva os alunos a relacionarem a noção de *Aproximação* com a noção de *Vizinhança*.

- RI21: P representa a reta no quadro.
- P22: Então, quando o x se aproxima de 2, o que fazemos?
- AF23: As vizinhanças.
- P24: Certo!

Figura 6.155 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

As subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida*, *Vizinhança* e *Aproximação*, identificadas na *Ação-R*, encontram-se resumidas na figura seguinte (ver Anexo 6.27).

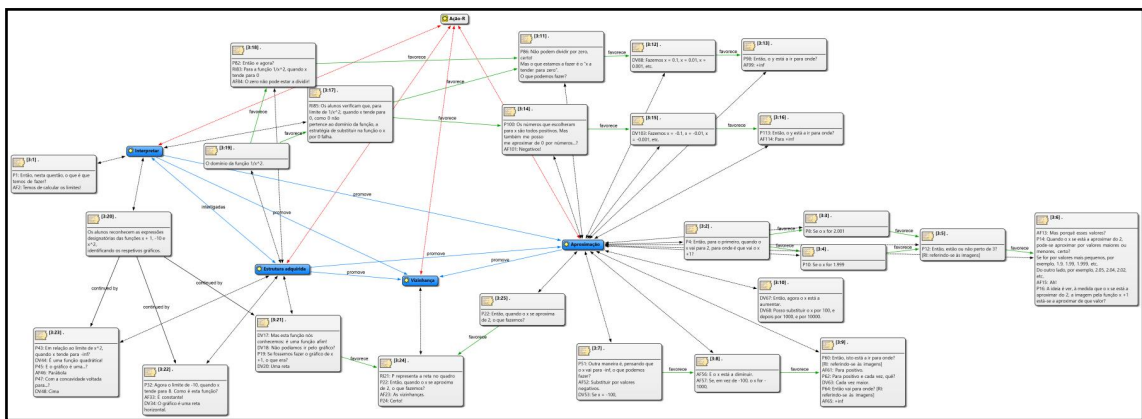


Figura 6.156 - RAV da *Ação-R* na Questão 4

Os alunos *Interpretam* o enunciado da questão ([3:1]), tendo sido necessária a intervenção do professor para dar início à resolução da questão ([3:2]).

Uma das técnicas aqui utilizadas para o cálculo do $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$ baseia-se na noção de *Aproximação*, considerando valores perto de 2, quer superiores ([3:3]), quer inferiores ([3:4]), e verificando de que valor se *Aproximam* as imagens ([3:5]). No entanto, podemos constatar pelo excerto [3:6] que houve ainda alguns alunos com dificuldade em apreender esta noção.

Outra técnica utilizada consiste na *Interpretação* do enunciado ([3:20]) onde os alunos identificam as *Estruturas adquiridas* de função afim e sua representação gráfica como forma alternativa para o cálculo deste limite ([3:21]). Aqui a noção de *Aproximação* ([3:25]) instiga os alunos a aplicarem a noção de *Vizinhança* ([3:24]).

Para calcularem o $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)$, os alunos *Interpretam* o enunciado e reconhecem as *Estruturas adquiridas* de função quadrática e sua representação gráfica ([3:23]). Impulsionados pelo professor, os alunos verificam que podem igualmente recorrer à noção de *Aproximação*, quer em relação aos objetos ([3:7] e [3:8]), quer para as respetivas imagens ([3:9]), para os auxiliar no cálculo deste limite.

De modo análogo, para o cálculo do $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$, os alunos *Interpretam* a expressão analítica da função e recorrem à *Estrutura adquirida* de domínio de uma função para concluírem que 0 não pertence ao domínio da função. Logo a única opção será ir *Aproximando* os valores de x de 0 ([3:11] e [3:12]) e verificar o que sucede às suas imagens ([3:13]). Em primeira instância, os alunos apenas consideram valores de x positivos a *Aproximarem-se* de 0, tendo sido necessário o professor recordar a existência da *Aproximação* por valores negativos ([3:14], [3:15] e [3:16]).

Para finalizar, a *Interpretação* do $\lim_{x \rightarrow 8} (-10)$ conduz os alunos à identificação da função constante e da sua representação gráfica ([3:22]) identificadas na subcategoria *Estrutura adquirida*.

Síntese

Pela análise efetuada, constatamos que a *Ação-R* se manifestou através das subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida*, *Vizinhança* e *Aproximação*.

De modo análogo ao que sucedeu em questões anteriores, também aqui se constata uma estreita interligação entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, a qual revela, da parte dos alunos, que a interpretação de uma questão ocorre, quase simultaneamente com a seleção de conhecimentos obtido previamente. Se por um lado a *Interpretação* isolada do enunciado não teria relevância caso os alunos não possuíssem *Estruturas adquiridas* anteriormente, por outro lado são as próprias *Estruturas adquiridas* que impelem a *Interpretação* do enunciado por parte dos alunos.

Esta associação entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, vai conduzir à necessidade de recorrer à noção de *Aproximação*, e as três contribuem para o recurso à noção de *Vizinhança*, de modo a prosseguir com a resolução da questão proposta.

6.2.3.2 Ação-B

No processo de ir construindo a solução da questão colocada, os alunos utilizaram três *Estratégias* distintas: a substituição pelo ponto onde se pretende calcular o limite, a identificação do gráfico de algumas funções conhecidas e a substituição por valores aproximados.

Na discussão envolvendo o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2}(x + 1)$, por ser o primeiro, foram aplicadas as três *Estratégias*, de modo a exemplificar o processo adotado em cada uma delas. Esta discussão acabou por ter um papel preponderante em relação às *Estratégias* adotadas pelos alunos para os cálculos dos restantes limites.

- P8: Se o x for 2.001, quanto é que dá $x + 1$?
- AF9: 3.001
- P10: Se o x for 1.999, quanto é que dá $x + 1$?
- DV11: 2.999
- ...
- RI25: P representa no gráfico as vizinhanças
- P26: Então, à volta do 2, quanto vale a função?
- AF27: 3
- ...
- AF28: Então, sem o gráfico, como é que a gente vê que em 2 dá 3?
- DV29: É só substituir. Faz $2 + 1$
- AF30: O x eu sei que é 2. Então, o $x + 1$, ... Já estou a perceber!

Figura 6.157 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

Na sequência destas discussões, os alunos embrenharam-se nos cálculos envolvidos nas substituições que consideraram necessárias em cada caso (*Aplicação de construção prévia*), levando-os, em certas situações, à obtenção de *Soluções intermédias* que os iriam auxiliar na resolução da questão em análise.

Note-se que boa parte das transcrições são comuns à *Ação-R - Aproximação*, vista na secção anterior, e à *Ação-B* elencada nesta secção, pelo que são aqui repetidas. É de notar que, os alunos ao reconhecerem a necessidade de aproximar, e ao realizarem a aproximação, na mesma intervenção, evidenciam que as ações epistémicas se interligam.

- DV5: Substituímos!

...

- P8: Se o x for 2.001, quanto é que dá $x + 1$?
- AF9: 3.001.
- P10: Se o x for 1.999, quanto é que dá $x + 1$?
- DV11: 2.999.

...

- DV29: É só substituir. Faz $2 + 1$.

...

- P37: Aqui [RI: P refere-se ao $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-2x + \frac{1}{x}\right)$], quando o x vai para 1, o que é que eu faço?
- DV38: $-2 \times 1 + \frac{1}{1}$.

...

- P40: Agora, para a função $[(x + 1)(x - 2)^2]$, quando o x vai para 2, isto dá...
- DV41: $(2 + 1)(2 - 2)^2$ [...]

...

- AF52: Substituir por valores negativos.
- DV53: Se $x = -100$,
- DV54: vem $(-100)^2$
- DV55: que é 10000.

...

- AF57: Se, em vez de -100, o x for -1000,
- AF58: vem $(-1000)^2$
- AF59: que é 100000.

...

- DV68: Posso substituir o x por 100, e depois por 1000, e por 10000.
- DV69: Para $x = 100$
- DV70: vem $\frac{2}{100}$
- DV71: que dá 0.02.
- DV72: Para $x = 1000$
- DV73: vem $\frac{2}{1000}$
- DV74: que dá 0.002
- DV75: Para $x = 10000$
- DV76: vem $\frac{2}{10000}$
- DV77: que dá 0.0002

...

- DV87: Podemos substituir!
- DV88: Fazemos $x = 0.1$, $x = 0.01$, $x = 0.001$, etc.

- ...
- DV89: Então, se $x = 0.1$
 - DV90: vem $\frac{1}{(0.1)^2}$
 - DV91: que dá 100.
 - DV92: Se $x = 0.01$
 - DV93: vem $\frac{1}{(0.01)^2}$
 - DV94: que dá 10000.
 - DV95: Se $x = 0.001$
 - DV96: vem $\frac{1}{(0.001)^2}$
 - DV97: que dá 1000000.
 - P98: Então, o y está a ir para onde?
 - AF99: $+\infty$
- ...
- AF102: Também podemos substituir!
 - DV103: Fazemos $x = 0.1, x = 0.01, x = 0.001, \text{ etc.}$
- ...
- DV104: Então, se $x = -0.1$
 - DV105: vem $\frac{1}{(-0.1)^2}$
 - DV106: que dá 100.
 - DV107: Se $x = -0.01$
 - DV108: vem $\frac{1}{(-0.01)^2}$
 - DV109: que dá 10000.
 - DV110: Se $x = -0.001$
 - DV111: vem $\frac{1}{(-0.001)^2}$
 - DV112: que dá 1000000.
 - P113: Então, o y está a ir para onde?
 - AF114: Para $+\infty$

Figura 6.158 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4

Uma vez mais, consideramos que os cálculos efetuados, quer tenham sido registados ou apenas comunicados oralmente, representam uma *Justificação* para as soluções apresentadas.

O esquema que se segue (ver Anexo 6.28) resume as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, identificadas na *Ação-B*.

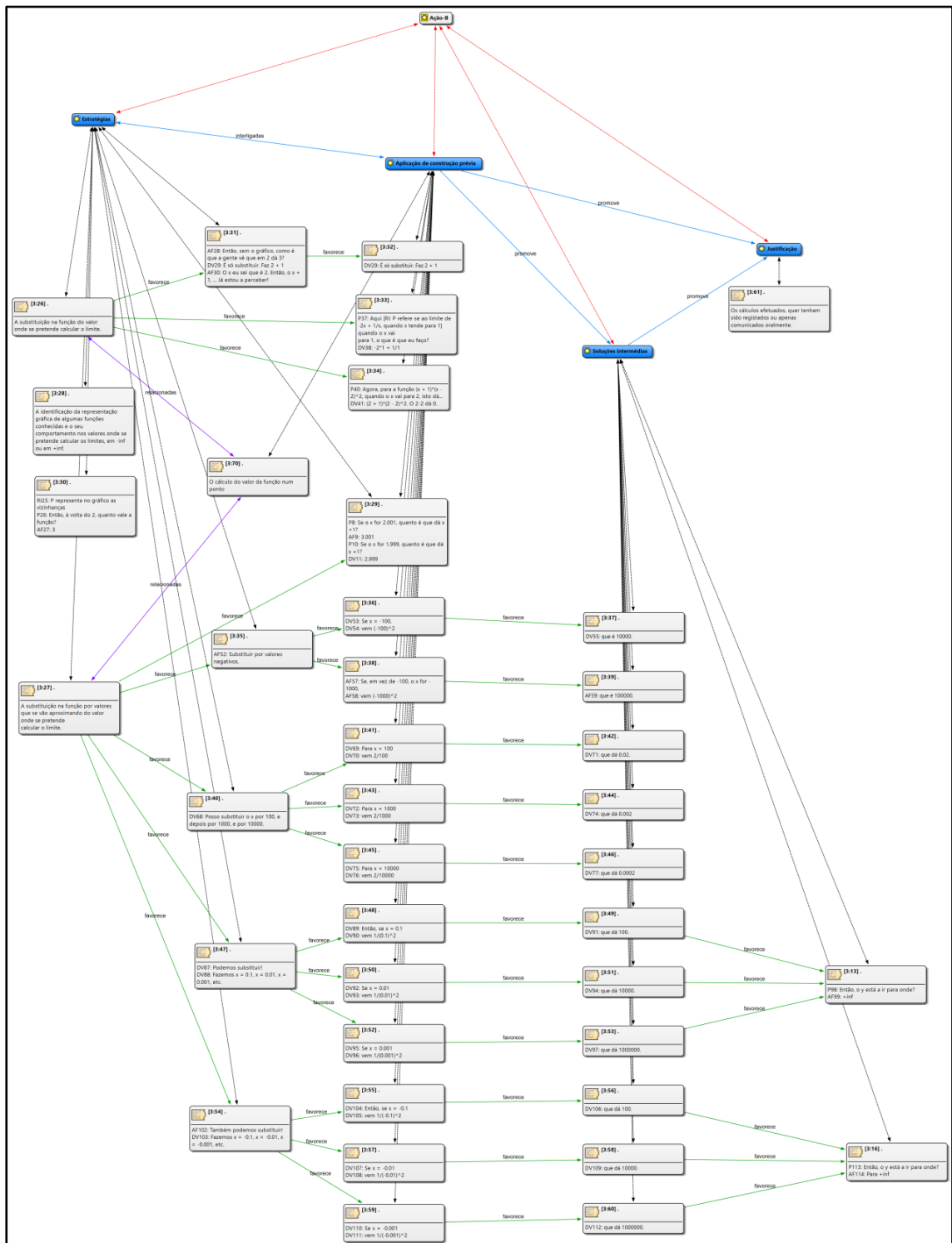


Figura 6.159 - RAV da Ação-B na Questão 4

Pela análise efetuada ao gráfico precedente, constatamos que a Ação-B se manifestou através das subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*.

Como já foi aflorado pela análise da Ação-B, os alunos recorreram a diferentes *Estratégias* para o cálculo dos limites pretendidos.

No que concerne à *Estratégia* de representar graficamente as funções cujas expressões analíticas são conhecidas, e verificar qual o seu comportamento quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$ ([3:28]), ou ainda quando $x \rightarrow a$ e $a \in D_{função}$ ([3:30]), consideramos que são ações mais de reconhecimento do que de *construir*, tendo sido analisadas aquando da *Ação-R*.

As *Estratégias* utilizadas no processo de ir construindo a solução da questão apresentada baseiam-se na substituição, na expressão analítica da função, de x pelo valor onde se pretende calcular o limite ([3:26] e [3:31]) ou por valores que se vão aproximando de $-\infty$ ([3:35]), $+\infty$ ([3:40]) ou do valor, no caso em que esse não pertence ao domínio da função ([3:47] e [3:54]).

Se por um lado a *Estratégia* de substituir o x por determinados valores ([3:26] e [3:27]) se encontra intrinsecamente relacionada com a *Aplicação da construção prévia* de cálculo do valor de uma função num ponto ([3:70]), por outro lado é esta construção que permite projetar essa *Estratégia*.

A *Aplicação de construção prévia* relativa ao cálculo do valor de uma função no ponto onde se pretende calcular o limite é identificada nos excertos [3:32], [3:33] e [3:34]. Nos caso em que o valor onde se pretende calcular o limite não pertence ao domínio da função, os cálculos relativos às sucessivas substituições (*Aplicação de construção prévia*) encontram-se apresentados nos excertos [3:29], [3:36], [3:38], [3:41], [3:43], [3:45], [3:48], [3:50], [3:52], [3:55], [3:57] e [3:59], os quais, à exceção do cálculo indicado em [3:29], favorecem o aparecimento das *Soluções intermédias* registadas pelos excertos [3:37], [3:39], [3:42], [3:44], [3:46], [3:49], [3:51], [3:53], [3:56], [3:58] e [3:60], respetivamente. Por sua vez, as *Soluções intermédias* consideradas em [3:49], [3:51] e [3:53] vão originar nova *Solução intermédia*, expressa no excerto [3:13], e os excertos [3:56], [3:58] e [3:60] induzem o aparecimento da *Solução intermédia* [3:16].

Finalmente, consideramos que os cálculos efetuados (*Aplicação de construção prévia*) e as *Soluções intermédias* obtidas são *Justificados* pelos registos escritos dos alunos ou apenas pela discussão em aula.

Síntese

Pelo que foi concluído anteriormente, constatamos a interligação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação da construção prévia*, visto que não seria possível os alunos arquitetarem *Estratégias* se não possuíssem construções previamente adquiridas e por outro lado são essas *Estratégias* que fomentam a *Aplicação de construções prévias*.

Por seu turno, a *Aplicação de construção prévia* vai promover o aparecimento de *Soluções intermédias* que conduzem os alunos à obtenção da solução final para a questão colocada.

Relativamente à *Justificação*, consideramos que esta é promovida quer pelos cálculos efetuados aquando da *Aplicação de construção prévia*, quer pelas *Soluções intermédias* obtidas.

6.2.3.3 Ação-C

De um modo geral, verificamos que a *Reorganização* das construções obtidas no decurso da resolução da questão conduziu os alunos a atingirem as construções pretendidas, com maior ou menor dificuldade, tendo sido inicialmente necessária a ajuda do professor para proceder à resolução da questão, em particular para alguns alunos que não estariam a compreender o processo.

Na alínea a), o *Cálculo de limites por substituição* é concretizado pelos alunos.

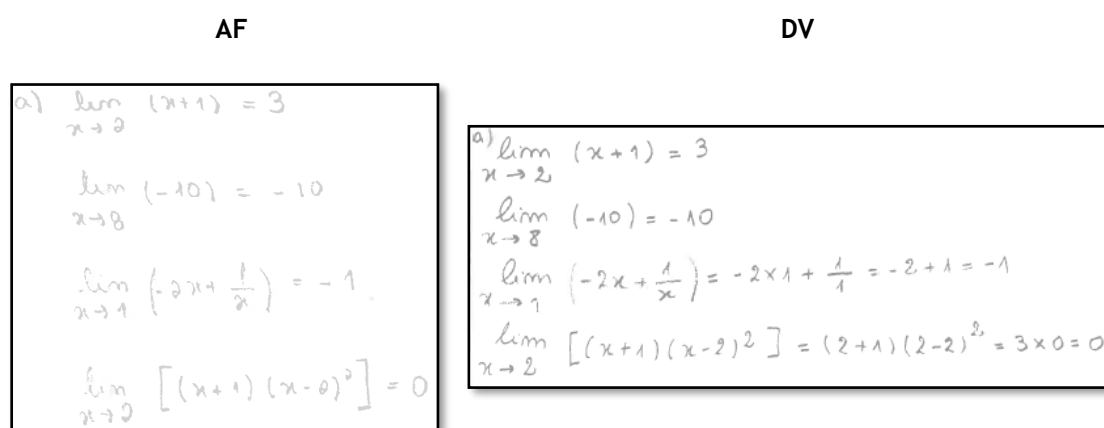


Figura 6.160 - RA respeitante à resolução da Questão 4 a)

- DV6: Dá 3!
- ...
- P35: Então qual é o limite?
- DV36: É -10
- ...
- AF39: Dá -1
- ...
- DV42: Logo o limite é 0.

Figura 6.161 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 a)

Relativamente à alínea b), podemos verificar que a *construção* (*Cálculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes*) não foi, à partida, totalmente efetivada, embora a discussão em aula tenha colmatado essas falhas.

AF

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) &= +\infty \end{aligned}$$

DV

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) &= (-\infty)^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{+\infty}\right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} ? \end{aligned}$$

Figura 6.162 - RA respeitante à resolução da Questão 4 b)

- P49: Logo, quando o x vai para $-\infty$, para onde vai a função?
- AF50: $+\infty$
- ...
- P64: Então vai para onde? [RI: referindo-se às imagens]
- AF65: $+\infty$
- ...
- P78: Então, está a ir para onde? [RI: referindo-se às imagens]
- DV79: Para 0.
- ...
- P115: Então, quando me aproximo de 0, quer por valores à sua direita, quer por valores à sua esquerda, a função vai para onde?
- AF116: Vai sempre para $+\infty$!

Figura 6.163 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 4 b)

Os alunos *Comunicam* as construções obtidas através dos seus registos escritos, bem como oralmente.

A figura seguinte (ver Anexo 6.29) evidencia as subcategorias *Reorganização*, *Cálculo de limites por substituição*, *Cálculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes*, e *Comunicação* que se manifestaram durante a *Ação-C*.

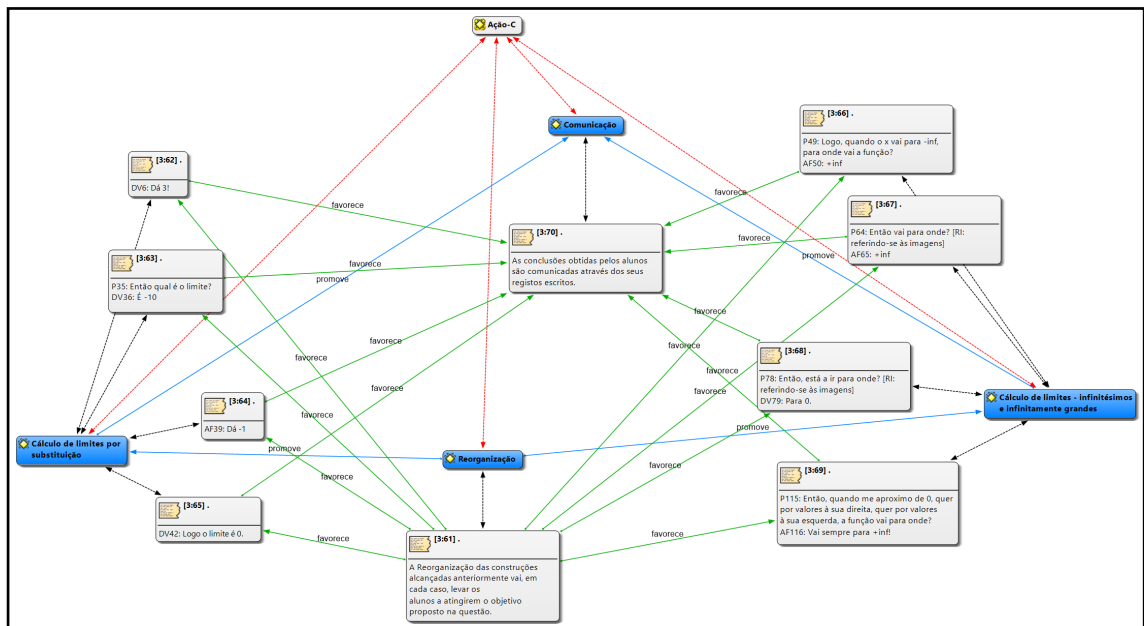


Figura 6.164 - RAV da Ação-C na Questão 4

Analisando a figura anterior, verifica-se que a *Reorganização* das construções intermédias obtidas previamente ([3:61]) conduz os alunos às construções finais de *Cálculo de limites por substituição* ([3:62], [3:63], [3:64] e [3:65]), e de *Cálculo de limites - infinitésimos e infinitamente grandes* ([3:66], [3:67], [3:68] e [3:69]).

Todas estas construções são *Comunicadas* ou oralmente ou através dos registos escritos dos alunos ([3:70]).

Síntese

Pela análise do gráfico apresentado, podemos verificar que a *Reorganização* das construções alcançadas anteriormente conduz os alunos a atingirem as construções de *Cálculo de limites por substituição* e *Cálculo de limites - infinitésimos e infinitamente grandes*, as quais são por sua vez *Comunicadas* através dos seus registos escritos, bem como pela discussão em aula.

6.2.3.4 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

No esquema seguinte (ver Anexo 6.30) encontram-se sintetizadas as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Ação-R*, *Ação-B* e *Ação-C* durante a resolução da Questão 4, apresentando apenas alguns dos excertos transcritos anteriormente e que se consideram de maior relevância.

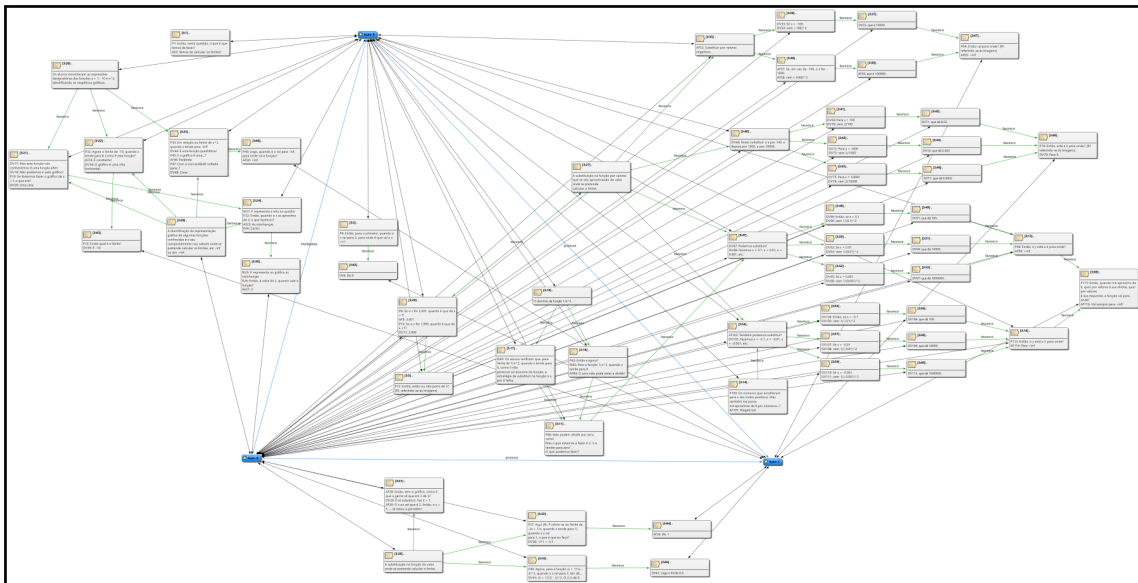


Figura 6.165 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 4

Podemos constatar que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram interligadas, revolvendo neste caso em torno da identificação das expressões analíticas de funções conhecidas e do comportamento dos seus gráficos. Para os restantes casos, as noções de *Aproximação* e de *Vizinhança* conduzem à *Aplicação de construções prévias*, neste caso a substituição, na expressão analítica da função, de x por determinados valores, seja no próprio ponto onde se pretende calcular o limite ou em valores nas suas proximidades.

Nos casos em que a substituição pode ser realizada no próprio ponto onde se pretende calcular o limite, esta conduz ao *Cálculo de limites por substituição* pretendido (*Ação-C*).

Nos casos em que a substituição tem de ser efetuada em valores perto do ponto onde se pretende calcular o limite, são inicialmente obtidas *Soluções intermédias* e posteriormente a *construção* final de *Cálculo de limites - infinitésimos e infinitamente grandes* (*Ação-C*).

Pelo anteriormente exposto, verificamos que a *Ação-R*, em conjunto com a *Ação-B*, despoletam o aparecimento da *Ação-C*.

6.2.4 Questão 5

Questão 5 Calcule os limites laterais das seguintes funções reais de variável real nos pontos indicados e diga, justificando, se existe o limite da função nesses pontos.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ em } x = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ em } x = 1. \\
 \text{c) } h(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > -1 \\ -\frac{1}{2x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \text{ em } x = -1.
 \end{aligned}$$

Figura 6.166 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite

As questões 5 e 6 afiguraram-se de dificuldade acrescida, pois nestas abordaram-se pela primeira vez os limites laterais (já aflorados em questões anteriores), e a existência de limite num ponto com base nestes, para funções definidas por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio.

No final da resolução da questão colocada, os alunos extrapolam ainda o que aconteceria se fosse pedida a verificação da existência de limite em $x = 0$ para a função $-\frac{1}{2x}$. Considerando que este caso se coaduna com o estudo de limites laterais pretendido nesta questão, iremos proceder igualmente à sua análise, intitulando-a de “Questão Extra”.

6.2.4.1 Ação-R

Os alunos iniciam a resolução da questão pela *Interpretação* do enunciado, verificando que, visto as funções serem definidas por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio (*Estrutura adquirida*), será necessário proceder ao cálculo de dois limites, ditos laterais, para cada ponto (*Estrutura adquirida*).

- P1: O que é que acontece aqui na função f ? Queremos calcular o limite de f em $x = 0$.
- DV2: Mas a função está definida por 2 expressões diferentes à esquerda de 0 e à direita de 0...
- AF3: Então tenho de calcular dois limites...
- P4: Sim, à esquerda e à direita.

Figura 6.167 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)

Relativamente à alínea b), verifica-se uma dificuldade acrescida pela escolha dos ramos a utilizar no cálculo do limite, visto esta função ser definida por três ramos (*Estrutura adquirida*). Neste caso, a intervenção do professor encaminha os alunos na direção certa, recordando-os do ponto em que é pedido o cálculo do limite (*Interpretar*).

- RI18: Alguns alunos ficam com dúvidas em relação ao cálculo do limite, não sabendo que expressões utilizar.
- P19: No que diz respeito à alínea b), prestem atenção: a função tem quantos ramos?
- AF20: Três.

- P21: Três, certo! E o limite que se pede é em que valor de x ?
- AF22: Em $x = 1$.
- P23: Então, vou precisar de quais dos ramos da função? Todos?
- DV24: Não, só do 2.º e do 3.º.

Figura 6.168 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)

A noção de *Aproximação* auxilia os alunos na escolha da expressão analítica da função a utilizar para o cálculo de cada um dos limites laterais.

- P5: E quando o x vai para 0^- , estou em que ramo?
- DV6: No de cima.
- AF7: Então, à esquerda vai ser o $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ que é $2x$.
- ...
- P11: Quando o x vai para 0^+ , em que ramo é que eu estou?
- AF12: No de baixo.

Figura 6.169 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)

- AF26: Quando vai para 1^+ , usamos o $-\frac{1}{x}$.
- ...
- P29: E quando vai para 1^- ?
- AF30: Para x entre -1 e 1 a função vale 2 .

Figura 6.170 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)

- P38: Quando o x vai para -1^- , onde estamos na função?
- DV39: No ramo de baixo...
- ...
- P42: Então e agora?
- DV43: Vamos para -1^+ .
- P44: Então aqui, para -1^+ , temos...
- DV45: O ramo de cima.

Figura 6.171 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)

Ressalvamos aqui a necessidade de, na alínea c), ser necessário o cálculo do valor da função em $x = -1$, tendo sido o professor a destacar esta condição.

- P47: Então, ... e ainda falta o quê?
- DV48: Ah! Falta o $h(-1)$!

Figura 6.172 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)

Relativamente à Questão Extra, os alunos questionam (*Interpretar*) sobre o cálculo de

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x}\right)$, uma vez que $x = 0$ não pertence ao domínio da função (*Estrutura adquirida*).

- AF53: E se fosse em $x = 0$?
- P54: Então, se fosse em $x = 0$, o que é que tinham de fazer? Se fosse $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x}\right)$?
- DV55: Não posso substituir por 0!
- P56: E porquê?
- AF57: Porque o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Figura 6.173 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra

Neste caso, os alunos recorrem mais uma vez, aliado ao cálculo de limites, à noção de *Aproximação*, quer em relação aos objetos, quer em relação às imagens, para a resolução da Questão Extra.

- P58: Então, como é que eu me posso aproximar de zero?
- AF59: Ah! Procuramos um número pequeno perto de 0!
- P60: Sim, por exemplo?
- DV61: 0.3
- ...
- P63: Agora, outro número mais perto de 0
- AF64: 0.01
- ...
- P72: E agora posso-me aproximar também por onde?
- DV73: Pela esquerda.
- P74: Se o x for, por exemplo...?
- AF75: -0.01
- ...
- P78: Se continuassem este processo, isto ia para onde?

Figura 6.174 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra

Na figura seguinte (ver Anexo 6.31) resumem-se as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Aproximação*, evidenciadas na *Ação-R*.

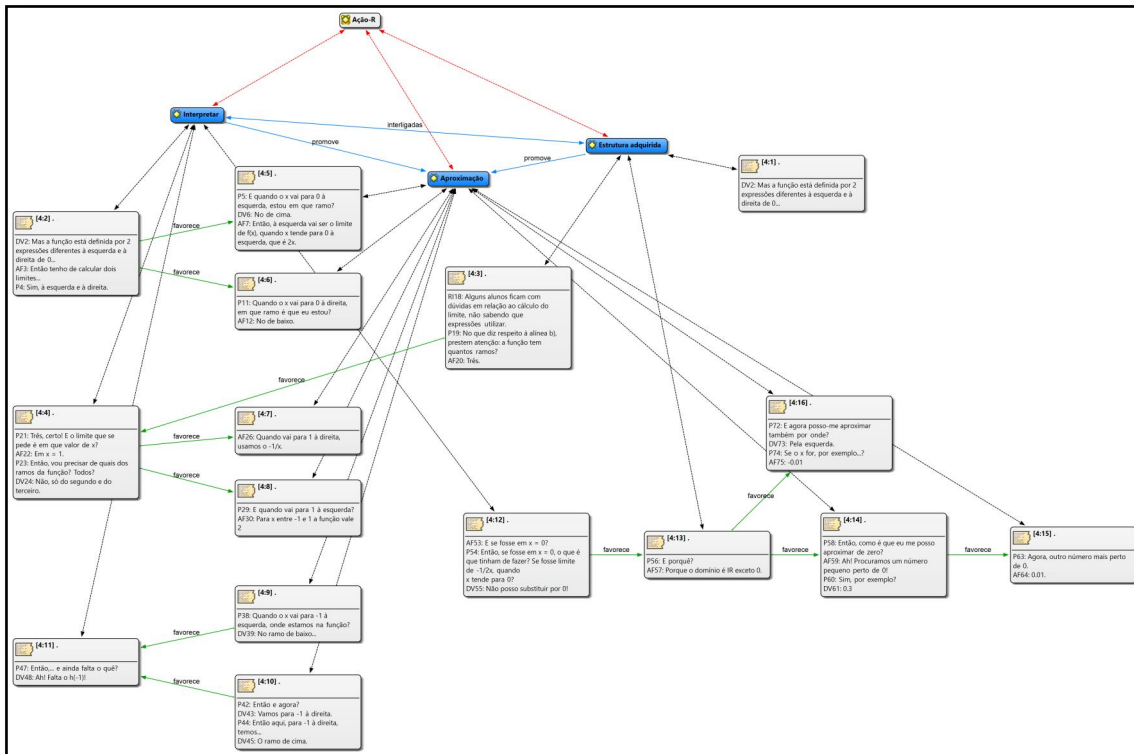


Figura 6.175 - RAV da Ação-R na Questão 5

Analisando o gráfico anterior constatamos que a *Interpretação* do enunciado ([4:2] e [4:4]) despoleta nos alunos o recurso à *Estrutura adquirida* de funções definidas por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio ([4:1]), as quais por sua vez conduzem os alunos à aplicação da noção de *Aproximação* para escolher qual dos ramos a utilizar para o cálculo de cada limite lateral ([4:5], [4:6], [4:7] e [4:8]). Destacamos ainda a dificuldade sentida pelos alunos relativamente à função g , uma vez que esta se encontra definida por três ramos (*Estrutura adquirida*), dificultando a escolha dos alunos sobre que ramos utilizar ([4:3]). Só após a resolução desta dificuldade é que os alunos conseguiram *Interpretar* eficazmente o enunciado da alínea b) ([4:4]).

No caso da alínea c), a função h apenas tem dois ramos, e a noção de *Aproximação* é novamente utilizada para a escolha dos ramos a utilizar em cada caso ([4:9] e [4:10]). No entanto o professor suspeita que os alunos não estão a considerar o valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite, chamando a atenção para esse facto, e conduzindo os alunos novamente à *Interpretação* do enunciado ([4:11]).

No seguimento da análise efetuada à função h , os alunos exploram uma outra situação (*Interpretar*), considerando a função $-\frac{1}{2x}$ e questionando o que aconteceria se o limite pedido fosse em $x = 0$ ([4:12]). Esta *Interpretação* encaminha os alunos a *reconhecerem* a utilidade da *Estrutura adquirida* de domínio de uma função, verificando que neste caso o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ([4:13]), o que conduz uma vez mais à aplicação da noção de *Aproximação* ([4:14], [4:16] e

[4:15]).

Síntese

Da análise efetuada anteriormente constatamos que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram, uma vez mais, interligadas. Como já referimos em análises anteriores, a *Interpretação* do enunciado por parte dos alunos desencadeia o recurso a *Estruturas adquiridas* anteriormente. Por outro lado, só estando os alunos na posse dessas *Estruturas adquiridas* é que é possível uma correta *Interpretação* do enunciado.

Ao reconhecerem (*Interpretar*) que as funções são definidas por ramos (*Estrutura adquirida*) os alunos recorrem à noção de *Aproximação* para eleger qual das expressões analíticas a utilizar para o cálculo de cada um dos limites laterais pretendidos.

6.2.4.2 Ação-B

A *Estratégia* utilizada pelos alunos para a resolução da Questão 5 centra-se na substituição de x pelo valor no qual se pretende calcular o limite (*Aplicação de construção prévia*), na respetiva expressão designatória da função, consoante se trata do limite lateral à esquerda ou à direita desse ponto, obtendo deste modo *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão.

Voltamos a chamar a atenção para o facto de, na alínea c), os alunos não terem identificado a necessidade do cálculo da função no ponto indicado (*Aplicação de construção prévia*), tendo sido essencial a orientação do professor nesse sentido.

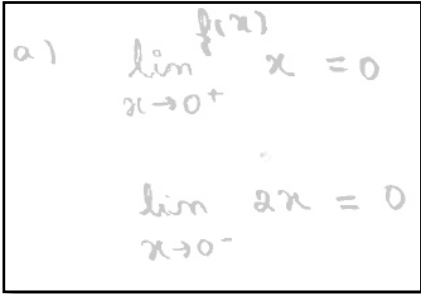
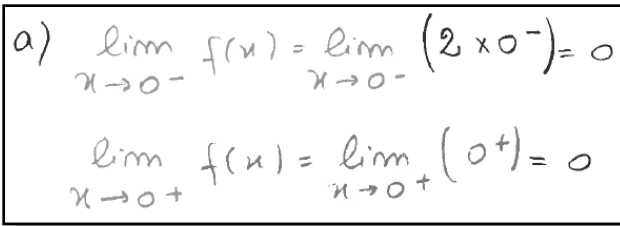
AF	DV
	

Figura 6.176 - RA respeitante à resolução da Questão 5 a)

- DV8: Basta substituir o x por 0... Fica $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 2 \times 0$.
- P9: E dá?...
- AF10: 0!
- ...
- P13: No de baixo! Então o que é que têm de fazer?
- DV14: Substituir o x por 0.

- AF15: Fica $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$.

Figura 6.177 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)

AF

DV

b) $g(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$

Figura 6.178 - RA respeitante à resolução da Questão 5 b)

- P27: Certo! E dá quanto?
- DV28: Substituo o x por 1 e dá $-\frac{1}{1} = -1$.
- ...
- P31: Certo, então o limite à esquerda dá...?
- DV32: 2.

Figura 6.179 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)

AF

DV

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} l_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} l_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{(-1)^2+1}\right) = \frac{1}{2}$

Figura 6.180 - RA respeitante à resolução da Questão 5 c)

- AF41: Fica $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$.
- ...
- AF46: Fica $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2}$.
- ...
- DV50: $h(-1) = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$.

Figura 6.181 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)

No caso da Questão Extra, a *Estratégia* utilizada volta a ser a substituição de x por valores que se vão aproximando do valor no qual se pretende calcular o limite (*Aplicação de construção prévia*), na respetiva expressão designatória da função, consoante se trata do limite lateral à esquerda ou à direita desse ponto, obtendo uma vez mais *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão.

- P62: Vinha, para $x = 0.3$, $-\frac{1}{2 \times 0.3} \cong -1.67$.
- ...
- P65: Então, para $x = 0.01$, quanto dá?
- DV66: $-\frac{1}{2 \times 0.01} = -50$.
- P67: Então, está a ir para onde?
- AF68: $-\infty$.
- ...
- P76: Dá quanto?
- AF77: $-\frac{1}{2 \times (-0.01)} = 50$.
- P78: Se continuassem este processo, isto ia para onde?
- DV79: Para $+\infty$.

Figura 6.182 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra

Finalmente, os cálculos efetuados, quer tenham sido registados pelos alunos ou apenas comunicados oralmente, constituem *Justificações* para as soluções apresentadas.

No esquema seguinte (ver Anexo 6.32) sintetizam-se as subcategorias *Estratégias*, *Soluções intermédias*, *Justificação* e *Aplicação de construção prévia*, manifestadas na *Ação-B*.

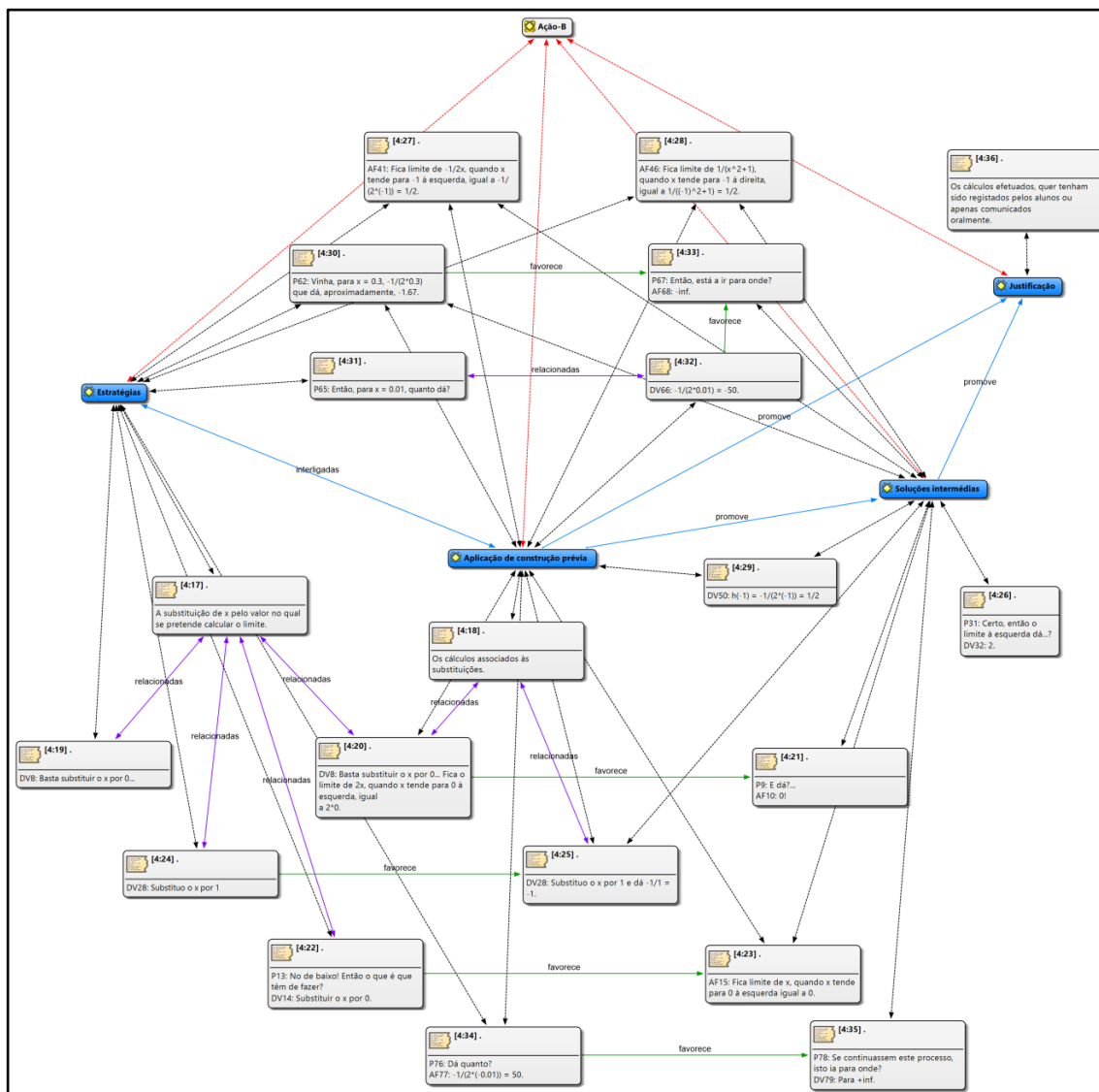


Figura 6.183 - RAV da Ação-B na Questão 5

As *Estratégias* utilizadas para proceder com a resolução da Questão 5 resumem-se à *Aplicação da construção prévia* de substituir, na expressão analítica de cada função, o valor de x pelo valor onde se pretende calcular o limite ([4:17], [4:18], [4:20], [4:22], [4:24], [4:23] e [4:25]), ou por valores que se vão aproximando do valor onde se pretende calcular o limite ([4:27], [4:28], [4:30], [4:31], [4:32] e [4:34]).

Os cálculos associados às substituições identificadas no parágrafo anterior vão originar as *Soluções intermédias*. Excetuando os excertos [4:17] e [4:18], os restantes conduzem às seguintes conexões, onde “ \rightarrow ” traduz a relação unilateral entre os excertos, [4:20] \rightarrow [4:21], [4:22] \rightarrow [4:23], [4:24] \rightarrow [4:25], [4:34] \rightarrow [4:35], [4:30] e [4:32] \rightarrow [4:33].

Temos também alguns excertos em que não foi possível separar as citações referentes às *Estratégias* das relativas à *Aplicação de construção prévia* nem das alusivas às *Soluções intermédias*: [4:27], [4:28] e [4:30]. De um modo geral, nestes excertos evidencia-se a

Estratégia de substituir x por -1 em cada um dos ramos da função h , cuja efetivação dos cálculos constituem a *Aplicação de construção prévia*, os quais por sua vez conduzem às *Soluções intermédias* obtidas com os cálculos dos limites laterais.

Relativamente ao excerto [4:26], este traduz uma *Solução intermédia*, a qual não necessita de cálculos auxiliares uma vez que a função a que se refere é constante.

Finalmente, temos o cálculo da função h em $x = -1$, o qual representa em simultâneo a *Aplicação de construção prévia* e uma *Solução intermédia*.

Todos os cálculos efetuados, quer tenham sido registados pelos alunos ou relatados oralmente, representam uma *Justificação* para as soluções apresentadas.

Síntese

Verificamos de novo a interligação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, uma vez que as *Estratégias* concebidas pelos alunos conduzem à *Aplicação de construções previamente* adquiridas e, por outro lado, se os alunos não estivessem em posse dessas construções não lhes seria possível idealizar tais *Estratégias*.

Por sua vez, a *Aplicação de construção prévia* dirige os alunos à obtenção de *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão colocada.

Em conjunto, os cálculos efetuados na *Aplicação de construções prévias* e as *Soluções intermédias* obtidas são *Justificados* pelos registos escritos dos alunos, bem como pela produção oral aquando da discussão em aula.

6.2.4.3 Ação-C

A *Reorganização* das construções de limite lateral alcançadas anteriormente vai, em cada caso, levar os alunos a atingirem o objetivo proposto na questão, neste caso a noção de limite num ponto com base nos limites laterais (*Limite com limites laterais*).

As conclusões obtidas pelos alunos são *Comunicadas* através dos seus registos escritos, apresentados a seguir.

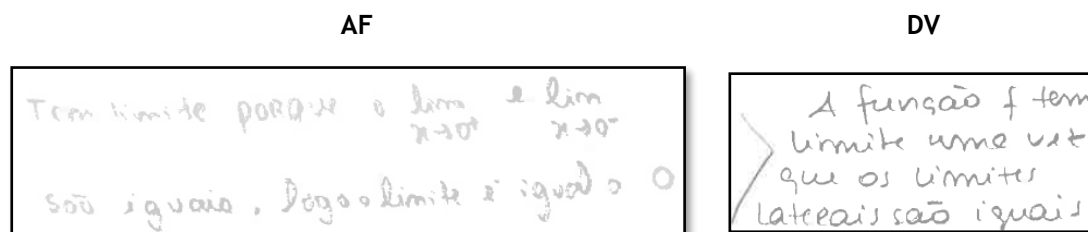


Figura 6.184 - RA respeitante à resolução da Questão 5 a)

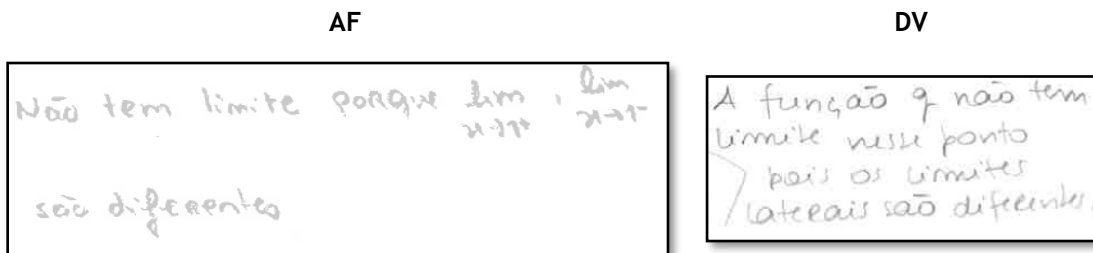


Figura 6.185 - RA respeitante à resolução da Questão 5 b)

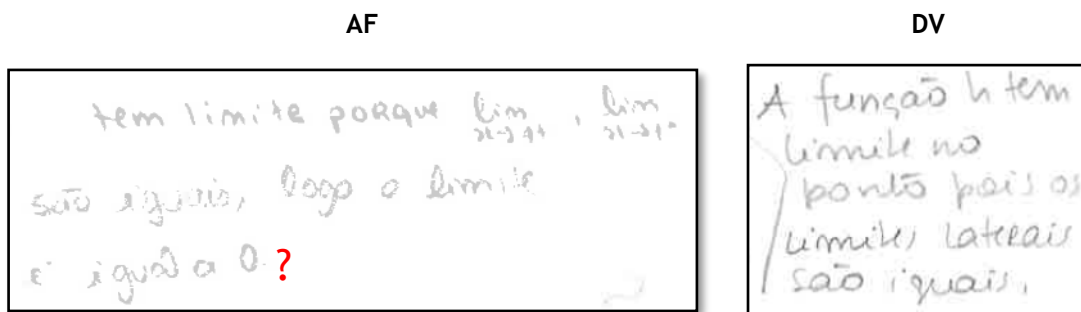


Figura 6.186 - RA respeitante à resolução da Questão 5 c)

Relativamente à alínea c), podemos verificar, pelos registos escritos dos alunos, que estes não identificam a necessidade de calcular o valor da função no ponto, referindo-se apenas aos limites laterais. Além disso, AV indica que o limite será igual a 0, o que pensamos tratar-se de um lapso, talvez originado pela cópia da conclusão da alínea a), uma vez que o cálculo dos limites laterais foi efetuado corretamente.

Esta *construção* é identificada nos seguintes excertos das transcrições relativas à discussão em aula entre os alunos e o professor, ressaltando uma vez mais o facto de, na alínea c), os alunos não se lembrarem do cálculo do valor da função no ponto, tendo sido chamada a atenção para esta questão pelo professor.

- P16: Então, o que é que nós temos? A função não está definida em 0, mas à esquerda de 0 vai para 0 e à direita de 0 também vai para 0. Qual é o limite?
- DV17: Zero!

Figura 6.187 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 a)

- P33: Então, acham que tem limite?
- AF34: Não, porque à direita dá -1 e à esquerda dá 2.
- DV35: São diferentes e não podem!
- P36: Certo! Então...?
- DV37: Não existe o $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Figura 6.188 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 b)

- P47: Então, temos: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}$ e ainda falta o quê?
- DV48: Ah! Falta o $h(-1)$!
- P49: Que dá...?
- DV50: $h(-1) = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$.
- P51: Logo, o limite é quanto?
- DV52: $\frac{1}{2}$.

Figura 6.189 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 5 c)

- P80: Neste caso, teríamos $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2x}\right) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2x}\right) = +\infty$, logo, o que podemos dizer quanto ao limite?
- AF81: Não existe!

Figura 6.190 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão Extra

As subcategorias *Reorganização*, *Limite com limites laterais* e *Comunicação*, identificadas na *Ação-C*, encontram-se esquematizadas na figura seguinte (ver Anexo 6.33).

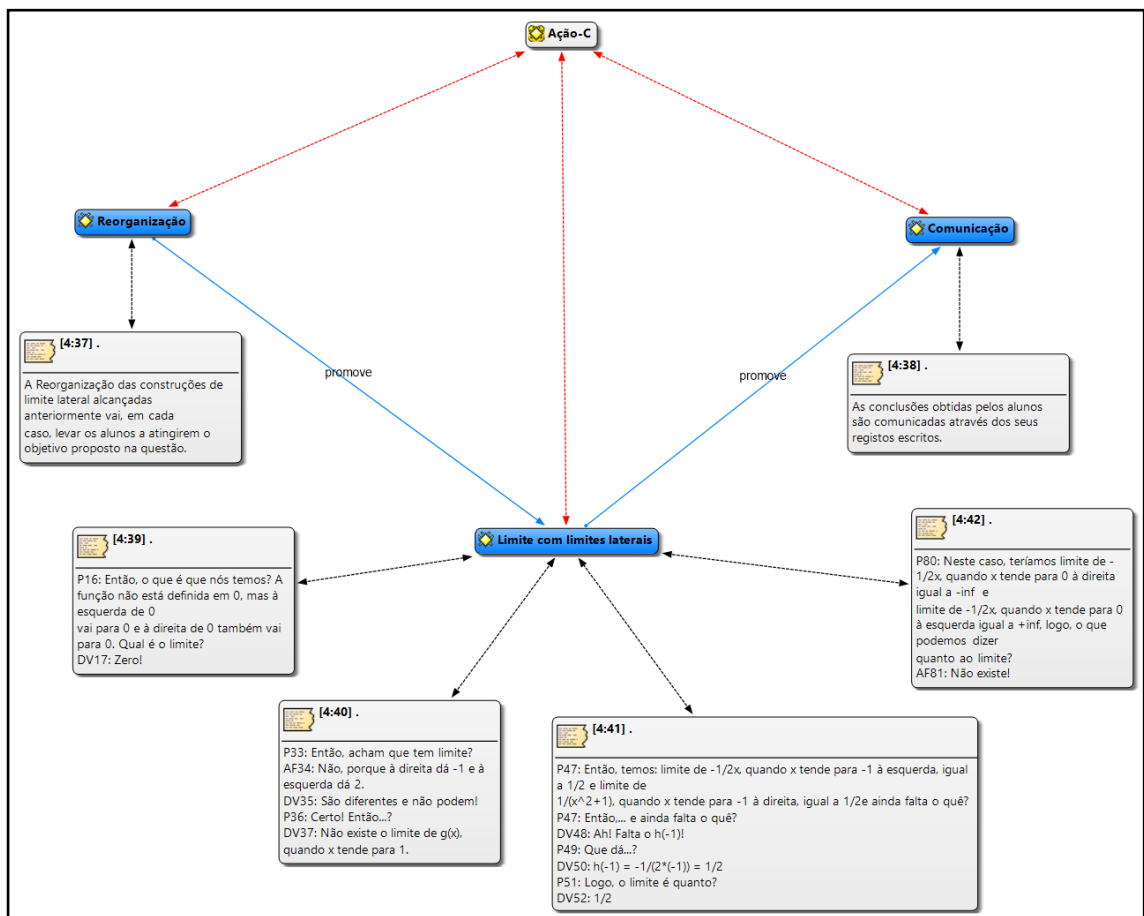


Figura 6.191 - RAV da Ação-C na Questão 5

Pela análise da figura anterior, contactamos que a *Reorganização* das soluções intermédias

Constatamos, uma vez mais, que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram interligadas, promovendo ambas a *construção de Limite com limites laterais (Ação-C)*.

A *Interpretação* do enunciado, em conjunto com as *Estruturas adquiridas* e a noção de *Aproximação*, evidenciadas na *Ação-R*, encontram-se mutuamente relacionadas com as *Estratégias* concebidas pelos alunos e com a *Aplicação de construções prévias* despoletadas na *Ação-B*. Todas estas subcategorias revolvem em torno das funções definidas por ramos, do cálculo de limites laterais e da substituição, na expressão analítica de cada função, de x por determinados valores. É através da sua *Reorganização* que os alunos atingem a *construção* pretendida (*Ação-C*)

6.2.5 Questão 6

Questão 6 Determine o valor do parâmetro real a de modo a que a função real de variável real h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{se } x < -1 \\ x^2 - ax + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

tenha limite quando x tende para -1 .

Figura 6.193 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite

A Questão 6 eleva o grau de dificuldade, comparativamente à Questão 5. Embora a função se encontre definida por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio, tal como na questão anterior, aqui o cálculo dos limites laterais para a verificação da existência de limite no ponto de mudança de ramo está dependente de um parâmetro real desconhecido, o que vem causar alguma entropia relativamente à resolução desta questão.

6.2.5.1 *Ação-R*

Os alunos iniciam a resolução da questão pela *Interpretação* do enunciado, verificando que, visto a função se encontrar definida por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio, será necessário verificar que os limites laterais nesse ponto são iguais (*Estruturas adquiridas*). Além disso, a existência de limite num ponto advém de apenas poder existir uma *Vizinhança* para as imagens dos pontos situados na *Vizinhança* de $x = -1$.

- P1: Vá leiam lá o enunciado e digam o que pensam fazer.
- AF2: A função está definida por 2 ramos.
- DV3: E temos de calcular o limite quando x tende para -1 .
- AF4: Mas tem um a ...
- P5: Certo! Mas o limite é quando x tende para -1 , não o a .
- AF6: Então não mexemos no a !
- P7: Para ter limite em $x = -1$, o que é que tem de acontecer?

- AF8: Na vizinhança do -1 só pode haver uma vizinhança para o y .
- P9: Exatamente! Então, como temos 2 ramos, o que é que temos de verificar?
- DV10: O limite à direita tem de ser igual ao limite à esquerda.

Figura 6.194 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Através dos registos escritos de AF, verificamos que a *Estrutura adquirida* de igualdade entre os limites laterais é reconhecida pelo aluno. Relativamente a DV, esse reconhecimento é apenas verificado oralmente (“DV10: O limite à direita tem de ser igual ao limite à esquerda.”).

AF

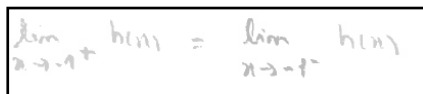


Figura 6.195 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 6

A noção de *Aproximação* auxilia os alunos na escolha da expressão analítica da função a utilizar para o cálculo de cada um dos limites laterais.

- P14: Vamos lá ver: quando o x vai para -1^- , estamos no ramo de cima ou no de baixo?
- DV15: No de cima.
- ...
- P19: E quando o x vai para -1^+ ?
- AF20: Substituímos no ramo de baixo.

Figura 6.196 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

No entanto, embora os alunos calculem corretamente os limites laterais, consideram que estes têm de ser iguais a -1 . A intervenção do professor é fundamental para corrigir esse equívoco, redirecionando os alunos para a forma correta de prosseguir com a resolução da questão (*Interpretar + Estrutura adquirida*).

- P22: Então, agora o que é que tem de acontecer a estes 2 limites?
- AF23: Então, não têm de ser iguais a -1 ?
- RI24: Erro comum (foi o que fizeram AF e DV).
- P25: Não têm de ser iguais a -1 ! Para existir o $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ o que é que tem de acontecer aos limites laterais?
- AF26: Têm de ser iguais entre si!
- DV27: Ah! Então, $-1 + 2a$ tem de ser igual a $2 + a$!

Figura 6.197 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Ressalvamos aqui a necessidade de ser necessário o cálculo do valor da função em $x = -1$, a

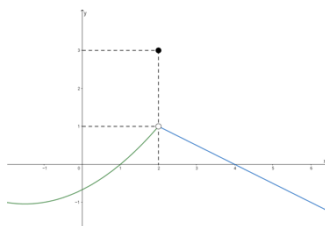
qual os alunos não identificam, tendo sido uma vez mais o professor a lembrar esta condição, tal como aconteceu na Questão 5 c).

- P31: Falta mais uma coisa, que é o quê?
- RI32: Os alunos não respondem
- P33: E se o valor da função no ponto for diferente?

Figura 6.198 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Como os alunos não participam, o professor dá um exemplo, através da representação gráfica que se encontra na Figura 6.199 (*Estrutura adquirida*), de modo a mostrar aos alunos que a igualdade dos limites laterais não basta para que uma função tenha limite num determinado ponto e que é indispensável a verificação do valor da função nesse ponto. Com este exemplo os alunos recorrem uma vez mais à noção de *Vizinhança*, bem como de bola aberta e de bola fechada (*Estrutura adquirida*), para darem resposta à pergunta do professor.

- RI34: Como os alunos não participavam, o professor representou o gráfico de uma função do tipo



...

- DV40: Temos 2 vizinhanças diferentes para o y : uma para os limites à esquerda e à direita e outra para a bola fechada lá em cima.

Figura 6.199 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Na figura seguinte (ver Anexo 6.35) resumem-se as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida*, *Vizinhança* e *Aproximação*, evidenciadas na *Ação-R*.

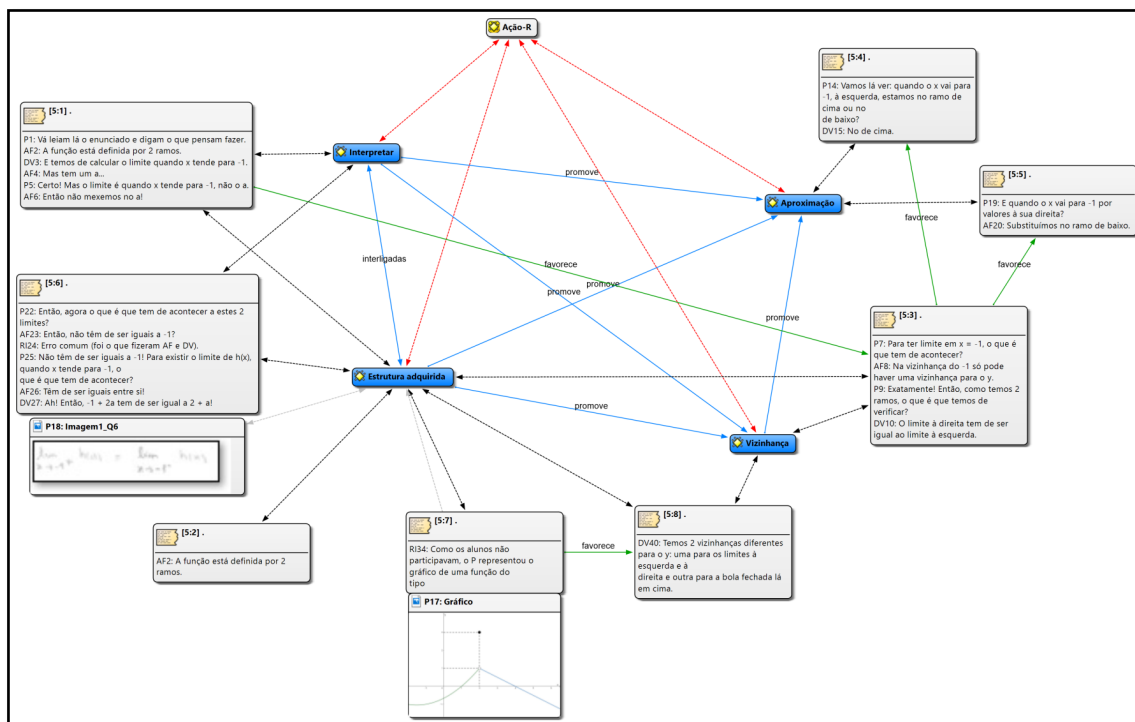


Figura 6.200 - RAV da Ação-R na Questão 6

Os alunos *Interpretam* o enunciado e verificam que a função se encontra definida por expressões analíticas diferentes em partes do seu domínio (*Estrutura adquirida*), no entanto o facto de existir um parâmetro real desconhecido causa alguma entropia em relação ao que fazer com ele ([5:1]), a qual é resolvida com o auxílio do professor.

Pela discussão transcrita no excerto [5:1] constatamos que a verificação da existência de limite no ponto de mudança de ramo orienta os alunos para a aplicação da noção de *Vizinhaça* a verificação da igualdade dos limites laterais, como se comprova pela análise do excerto [5:3]. Estas duas subcategorias, em conjunto com a *Interpretação* do enunciado, conduzem os alunos à aplicação da noção de *Aproximação* de modo a elegerem qual o ramo da função utilizar em cada caso ([5:4] e [5:5]).

Embora os alunos tenham percecionado imediatamente que os limites laterais terão de ser iguais, patentes no excerto [5:3], em particular na transcrição “DV10: O limite à direita tem de ser igual ao limite à esquerda.”, e na imagem P18 (*Estrutura adquirida*), na prática o que fazem é igualar cada um dos limites a -1 (“AF23: Então, não têm de ser iguais a -1 ?”), tendo sido essencial a intervenção do professor para encaminhar os alunos na direção correta ([5:6] (*Interpretar*)).

Visto que os alunos se restringiram ao cálculo dos limites laterais, não indicando, uma vez mais a necessidade de calcular o valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite, o professor apresenta o gráfico P17, o qual é uma *Estrutura adquirida* pelos alunos, de modo a demonstrar a gravidade dessa omissão. Essa representação gráfica induz os alunos a aplicarem

a noção de *Vizinhança* e as *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada para prosseguirem com a resolução da questão.

Síntese

Pelo exposto, constatamos que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram interligadas, facto que já foi verificado em questões anteriores. Também aqui a *Interpretação* do enunciado só é possível porque os alunos possuem *Estruturas adquiridas* anteriormente que a suportem. Inversamente, a *Interpretação* do enunciado da questão desencadeia o surgimento dessas *Estruturas adquiridas*. Nesta questão as subcategorias identificadas previamente prendem-se com o facto da função se encontrar definida por ramos, e com a igualdade dos limites laterais, conduzindo os alunos à aplicação da noção de *Vizinhança*. A mesma subcategoria foi utilizada para realçar a importância do cálculo do valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite. As subcategorias identificadas anteriormente, em conjunto, promovem o recurso à noção de *Aproximação* para a escolha dos ramos a utilizar no cálculo dos limites laterais.

6.2.5.2 Ação-B

Na resolução desta questão, à semelhança do que aconteceu nas questões anteriores em que apenas é fornecida a expressão analítica da função e não a sua representação gráfica, os alunos voltam a aplicar a *Estratégia* de substituir o x pelo valor para o qual se pretende calcular o limite, neste caso o ponto onde a função muda de ramo, a qual só é possível porque os alunos possuem os conhecimentos prévios (*Aplicação de construção prévia*) que permitem conceber tal *Estratégia*.

- DV11: Nós não podemos substituir este x na mesma por -1 ?
 - ...
 - P16: Então o que é que têm de fazer?
 - AF17: Substituir o x por -1

Figura 6.201 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Esta *Estratégia* conduz os alunos ao cálculo dos limites laterais da função em $x = -1$ (*Aplicação de construção prévia*), considerando cada uma das expressões analíticas que definem a função na vizinhança deste ponto, obtendo deste modo *Soluções intermédias* que contribuem para a resolução da questão.

DV

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = (-1)^2 - a \times (-1) + 1 = 1 + a + 1 = 2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -1 + 2a$$

Figura 6.202 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 6

- DV18: Fica: $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 2a) = -1 + 2a$.
- DV21: Dá $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - ax + 1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 1 = 2 + a$.

Figura 6.203 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Após os cálculos anteriores, os alunos igualam cada uma das expressões obtidas a -1 , resolvendo essas equações em função de a (*Aplicação de construção prévia*), muito embora uma das equações de DV se encontre mal resolvida.

AF	DV
$-1 + 2a = -1 \Rightarrow 2a = -1 + 1 \Rightarrow a = 0$ $(-1)^2 - a(-1) + 1 = -1 \Rightarrow 1 + a + 1 = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 \Rightarrow a = -3$	$2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$ $-1 + 2a = -1 \Rightarrow a = 1$

Figura 6.204 - RA respeitante à resolução da Questão 6

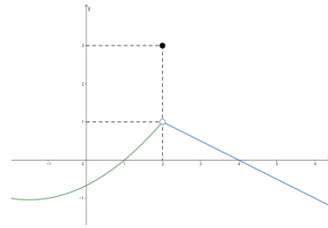
Suspeitamos que esta confusão adveio do facto do parâmetro real a figurar nas expressões obtidas no cálculo dos limites laterais. Esta lacuna teve de ser colmatada pelo professor, encaminhando os alunos na direção correta, levando os alunos à resolução da equação (*Aplicação de construção prévia*), obtendo mais uma *Solução intermédia* para a resolução da questão colocada.

- P28: Pois, os limites laterais têm de ser iguais: $-1 + 2a = 2 + a$.
- AF29: Então fica:

$$\begin{aligned}
 -1 + 2a &= 2 + a \\
 \Leftrightarrow 2a - a &= 2 + 1 \\
 \Leftrightarrow a &= 3.
 \end{aligned}$$

Figura 6.205 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Neste ponto da resolução os alunos chegam a um impasse, como se verifica pela contribuição de AF – AF30: *Então, fica assim?* –, tendo sido indispensável o contributo do professor para evidenciar que a igualdade dos limites laterais num ponto não é suficiente para a existência de limite nesse ponto. Através da representação gráfica de uma função em que os limites laterais em $x = 2$ são iguais, mas o valor da função nesse ponto é diferente, ou seja, não existe o limite em $x = 2$ (*Aplicação de construção prévia*), os alunos apercebem-se da importância do cálculo da função no ponto de abscissa 2 e *Justificam* a não existência de limite com recurso às noções de vizinhança e de bola fechada.



- P35: O que é que acontece aos limites laterais neste ponto?
- AF36: São iguais.
- P37: Então, tem limite?
- AF38: Não.
- P39: Porquê?
- DV40: Temos 2 vizinhanças diferentes para o y : uma para os limites à esquerda e à direita e outra para a bola fechada lá em cima.

Figura 6.206 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Após a análise deste exemplo, a discussão volta a centrar-se na resolução da Questão 6, a qual já é atingida pelos alunos, embora neste caso o facto do valor da função em $x = -1$ coincidir com o limite lateral à direita de -1 venha a levantar alguma celeuma. No entanto, a orientação do professor, juntamente com os cálculos efetuados pelos alunos (*Aplicação de construção prévia*), encaminha os alunos a verificarem que, neste caso, a igualdade dos limites laterais efetuada anteriormente (*Solução intermédia*) é suficiente pois já inclui o valor de $h(-1)$ (*Justificação*).

- P41: Então o que é que tem de acontecer para existir o limite da função h quando $x \rightarrow -1$?
- DV42: Os limites laterais têm de ser iguais ao $h(-1)$.
- DV43: Então temos de fazer $h(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$.
- P44: Certo! Mas prestem atenção que neste caso o valor da função em $x = -1$, como o 2.º ramo está definido para $x \geq -1$, o valor de $h(-1)$ é exatamente igual ao limite quando x tende para -1^+ !
- AF45: Não percebo... Não temos de calcular o valor de $h(-1)$?
- P46: Não é necessário, mas calculem lá.
- AF47: $h(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 1 = 2 + a$.
- AF48: Ah! Já percebi! É porque $h(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$.
- P49: Pois. Assim, como esses dois valores já são iguais, neste caso basta igualar os limites laterais, que foi o que fizemos atrás...
- DV50: Então fica assim.

Figura 6.207 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Embora a grande maioria dos cálculos realizados (*Aplicação de construção prévia*) e respetivos

o facto da segunda equação resolvida por DV não se encontrar certa (P16).

Como já referimos, os alunos voltam a não relacionar a igualdade dos limites laterais com o valor da função no ponto, levando o professor a exemplificar a importância desse facto com recurso ao gráfico de uma função em que os limites laterais são iguais (*Aplicação de construção prévia*), mas o valor da função nesse ponto é diferente, ou seja, não existe o limite no ponto considerado ([5:16]).

Na sequência da análise deste gráfico, os alunos *Justificam* a não existência de limite com recurso às noções de *Vizinhança*, de bola aberta e de bola fechada ([5:17]), após a qual *Aplicam construções prévias* para concretizar a tripla igualdade, entre o limite à esquerda, o limite à direita e o valor da função no ponto ([5:18] e [5:19]), embora tal não fosse necessário uma vez que $h(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ ([5:19]).

No entanto os alunos não compreendem que esta igualdade torna irrelevante o cálculo do valor de $h(-1)$, procedendo não obstante ao seu cálculo (*Aplicação de construção prévia* - [5:19]) e obtendo mais uma *Solução intermédia*, cujos cálculos representam uma *Justificação* para a solução encontrada ([5:20]).

Após o cálculo de $h(-1)$ os alunos compreendem a irrelevância citada anteriormente e *Justificam-na* oralmente no excerto [5:21].

Os cálculos efetuados em [5:11], [5:13], [5:14] e P19 constituem igualmente *Justificações* para as soluções encontradas.

Síntese

Consideramos que as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* se encontram intrinsecamente relacionadas, uma vez que a *Estratégia* desenvolvida pelos alunos para dar seguimento à resolução da questão ([5:9] e [5:10]) pressupõe a *Aplicação de construções prévias* ([5:11] e ([5:12])). Por outro lado, a *Estratégia* elaborada é fundamental para que seja possível *Aplicar as construções previamente* adquiridas.

Verificamos igualmente que as subcategorias *Aplicação de construção prévia* e *Soluções intermédias* se encontram interligadas uma vez que nesta questão os cálculos dos limites laterais (*Aplicação de construção prévia*) conduzem a expressões que dependem do parâmetro real a (*Soluções intermédias*), resultando na resolução da equação linear obtida pela igualdade dessas expressões (*Aplicação de construção prévia*) por forma a determinar o seu valor (*Soluções intermédias*).

Como podemos constatar pela análise do gráfico anterior, a *Aplicação de construção prévia* fomenta quer a obtenção de *Soluções intermédias*, quer a *Justificação* dos cálculos efetuados.

Também as *Soluções intermédias* promovem a *Justificação* dos resultados obtidos.

6.2.5.3 Ação-C

A *Reorganização* das construções de limite lateral alcançadas anteriormente vai, em cada caso, levar os alunos a atingirem o objetivo proposto na questão, neste caso a noção de limite num ponto com base nos limites laterais (*Limite com limites laterais*).

- DV27: Ah! Então, $-1 + 2a$ tem de ser igual a $2 + a$!
- P28: Pois, os limites laterais têm de ser iguais: $-1 + 2a = 2 + a$.
- AF29: Então fica: $-1 + 2a = 2 + a$, ou seja, $2a - a = 2 + 1$, que dá $a = 3$.
- ...
- DV42: Os limites laterais têm de ser iguais ao $h(-1)$.
- ...
- P51: Agora falta dar a resposta...
- P52: Leiam o enunciado: “Determine o valor de a de modo a que a função... tenha limite quando x tende para -1 ”.
- DV53: Para existir o $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$, então a tem de ser igual a 3.

Figura 6.209 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

O excerto “DV53: Para existir o $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$, então a tem de ser igual a 3”, para além de traduzir a *construção* propriamente dita, também representa a *Comunicação* oral dessa *construção*.

Na figura seguinte (ver Anexo 6.37) resumem-se as subcategorias *Reorganização*, *Limite com limites laterais* e *Comunicação*, evidenciadas na *Ação-C*.

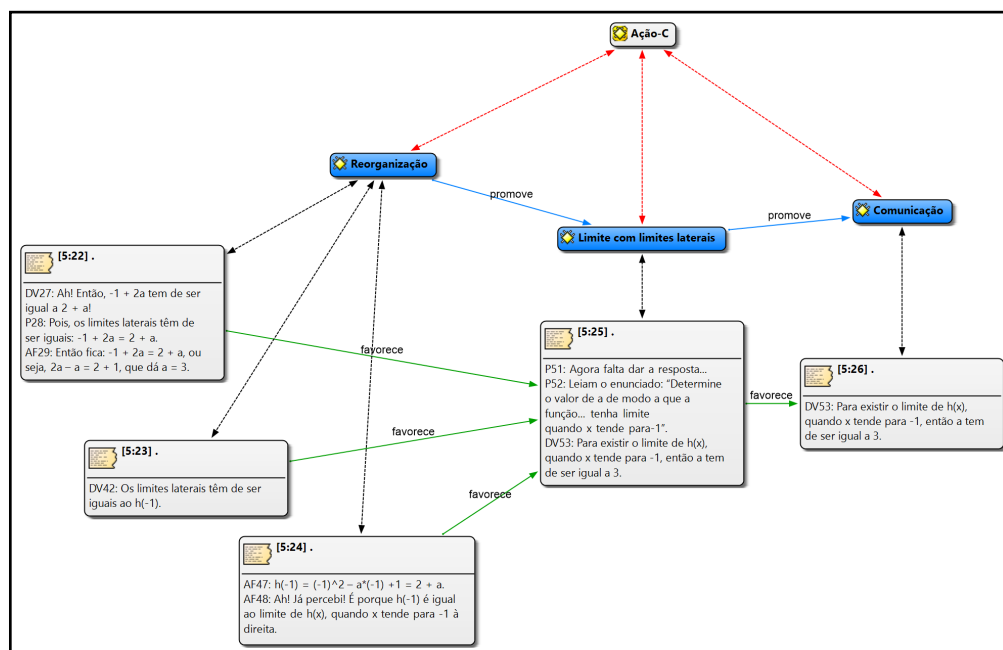


Figura 6.210 - RAV da Ação-C na Questão 6

Pela análise da figura anterior, constatamos que a *Reorganização* das soluções intermédias obtidas anteriormente ([5:22], [5:23], e [5:24]) conduz os alunos à *construção* de *Limite com limites laterais* ([5:25]), a qual por sua vez promove a *Comunicação* da *construção* final ([5:26]).

Síntese

Verificamos novamente que a *Reorganização* das construções adquiridas anteriormente, neste particular de limites laterais, foi fundamental para que os alunos atingissem a *construção* de *Limite com limites laterais* pretendida nesta questão. Após terem alcançado a referida *construção*, os alunos *Comunicam* o resultado oralmente aquando da discussão em aula.

6.2.5.4 Consolidação

Pela observação das ações epistémicas utilizadas pelos alunos na resolução da Questão 6, podemos constatar que estes aplicam as construções adquiridas na Questão 4, alínea a), e na Questão 5 (referentes ao estudo dos limites), uma vez que, para o cálculo dos limites laterais, recorrem ao processo de substituição do valor de x pelo ponto onde têm de calcular esses limites, embora tal não fosse indicado explicitamente.

- DV11: Nós não podemos substituir este x na mesma por -1 ?
- ...
- P14: Vamos lá ver: quando o x vai para -1^- , estamos no ramo de cima ou no de baixo?
- DV15: No de cima
- P16: Então o que é que têm de fazer?
- AF17: Substituir o x por -1
- ...
- P19: E quando o x vai para -1^+ ?
- AF20: Substituímos no ramo de baixo.

Figura 6.211 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 6

Após a identificação dos ramos onde irão realizar as substituições referidas, os alunos *Aplicam construções prévias* aos cálculos associados aos limites laterais, os quais encontram-se igualmente *Consolidados*.

- DV18: Fica: $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 2a) = -1 + 2a$.
- ...
- DV21: Dá $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - ax + 1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 1 = 2 + a$.

Figura 6.212 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução por DV da Questão 6

6.2.5.5 Relações estabelecidas entre as ações epistêmicas

A figura seguinte (ver Anexo 6.39) evidencia as relações estabelecidas entre a *Ação-R*, a *Ação-B*, a *Ação-C* e a *Consolidação* identificadas durante a resolução da Questão 6, apresentando alguns dos excertos utilizados anteriormente.

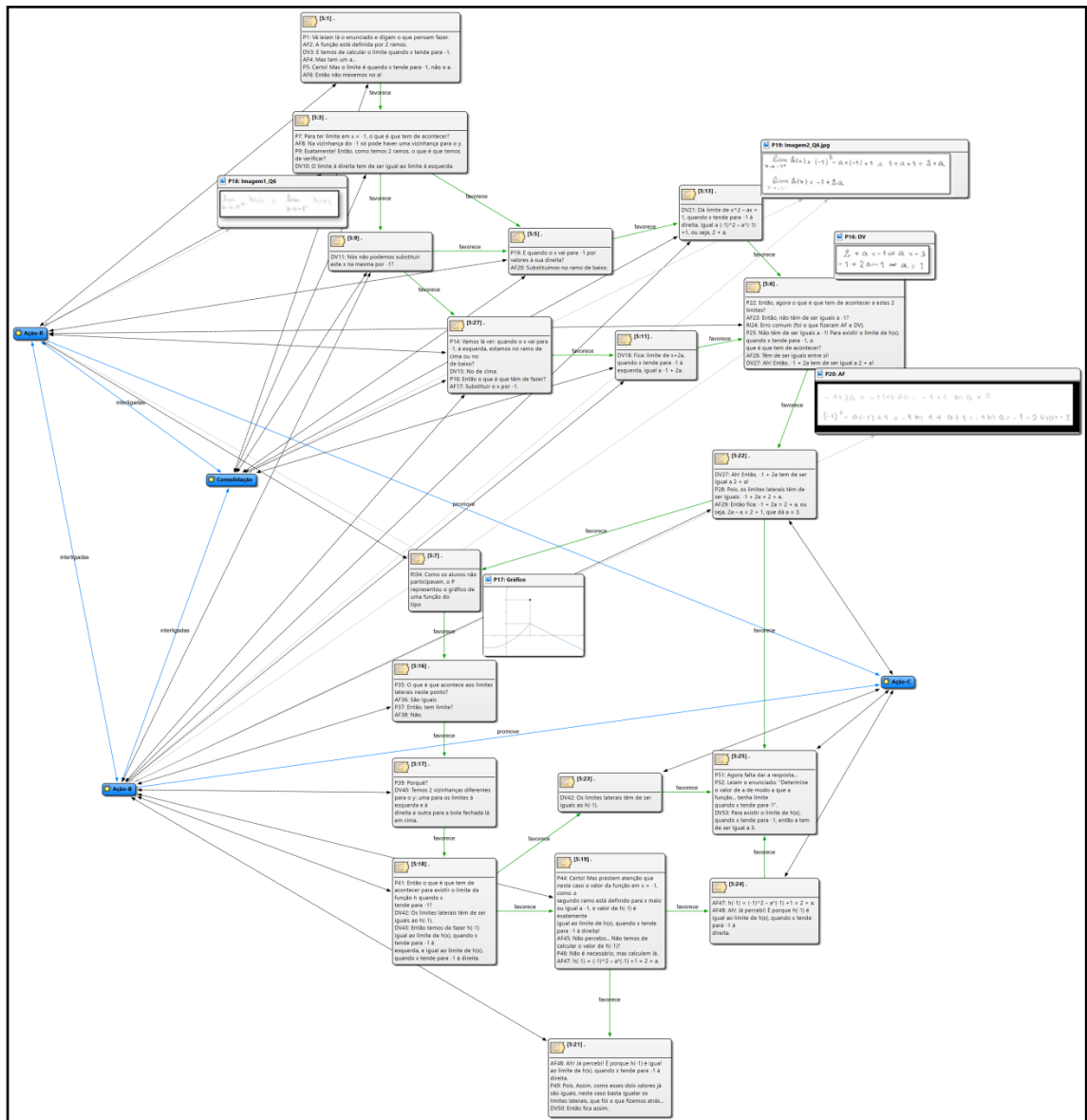


Figura 6.215 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 6

Podemos constatar que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram mutuamente associadas, uma vez que a *Interpretação* do enunciado, dado que a função se encontra definida por diferentes expressões designatórias em partes do seu domínio, conduz os alunos, por meio da noção de *Vizinhança*, à igualdade dos limites laterais (*Estrutura adquirida*).

A noção de *Aproximação* auxilia os alunos na escolha dos ramos relativos a cada um dos limites laterais, utilizando para seu cálculo a *Estratégia* de substituir x pelo valor onde se pretende determinar os referidos limites (*Aplicação de construção prévia*), constituindo esses resultados

Soluções intermédias que irão encaminhar os alunos para a *construção* de *Limite com limites laterais*.

Uma vez mais os alunos têm de ser recordados da importância do valor da função no ponto onde se está a calcular o limite, nesta instância com base num exemplo gráfico fornecido pelo professor em que num ponto de descontinuidade os limites laterais são iguais.

Pela *Interpretação* do gráfico apresentado, os alunos a recorrerem às *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada, assim como à aplicação da noção de *Vizinhança*, para concluir que a função não tem limite nesse ponto (*Aplicação de construção prévia*).

A análise deste exemplo direciona os alunos ao cálculo do valor de $h(-1)$ (*Soluções intermédias*), obtendo a correta *construção* de *Limite com limites laterais*.

Pelo exposto, concluímos que a *Ação-R*, em conjunto com a *Ação-B*, promovem a manifestação da *Ação-C*.

Em relação à ação epistémica *Consolidação*, verifica-se a interligação quer com a *Ação-R*, quer com a *Ação-B*, o que vem confirmar o que já foi concluído no tópico anterior.

Após a resolução das questões anteriores, pretendeu-se que os alunos percebessem que quando ambos os limites laterais existem, a função só é contínua num certo ponto a se os limites laterais forem iguais entre si e iguais ao valor da função no ponto a .

6.2.6 Questão 7

Na aula 5 procurou-se aferir se os alunos conseguiam relacionar os conceitos de limite e de continuidade. Foi importante discernir esta ligação atendendo a que está diretamente ligada à última etapa do processo *AiC*, onde a *consolidação* do conhecimento construído é testada na resolução de problemas. As questões 7 e 8 visaram esse processo, contendo perguntas relacionadas com os dois conceitos trabalhados.

<p>Questão 7 Considere a seguinte função real de variável real g definida por</p> $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \\ x^2 - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ <p>a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.</p> <p>b) Estude a continuidade da função g.</p>

Figura 6.216 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite

6.2.6.1 Ação-R

Os alunos começam por *reconhecer* que a função dada é definida por expressões analíticas diferentes em partes do seu domínio (*Interpretar*), o que os leva a aplicarem as *Estruturas adquiridas* em questões anteriores de limite lateral e de valor de uma função num ponto.

- P1: Agora, para a linha a), o que é que vão fazer?
- AF2: A função tem 3 ramos...
- DV3: É como fizemos antes!
- AF4: Sim, temos de fazer o limite à esquerda, o limite à direita e no ponto.
- P5: Exatamente!

Figura 6.217 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

Os alunos inquiram o professor quanto à relação entre a existência de limite e a de continuidade (*Estrutura adquirida*), identificando a necessidade de recurso à noção de *Vizinhança*.

- AF22: Quando não há limite, não quer dizer necessariamente que não há continuidade, ou quer?
- P23: O que é que acham?
- ...
- P26: E porquê?
- DV27: Por causa das vizinhanças.

Figura 6.218 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7

Para dar resposta à alínea b), os alunos são orientados pelo professor no sentido de *reconhecerem* a necessidade de calcular o domínio da função (*Estrutura adquirida*).

- P33: O que é que têm de ver ainda?
- DV34: O domínio!

Figura 6.219 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

Na figura seguinte (ver Anexo 6.40) resumem-se as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*, evidenciadas na *Ação-R*.

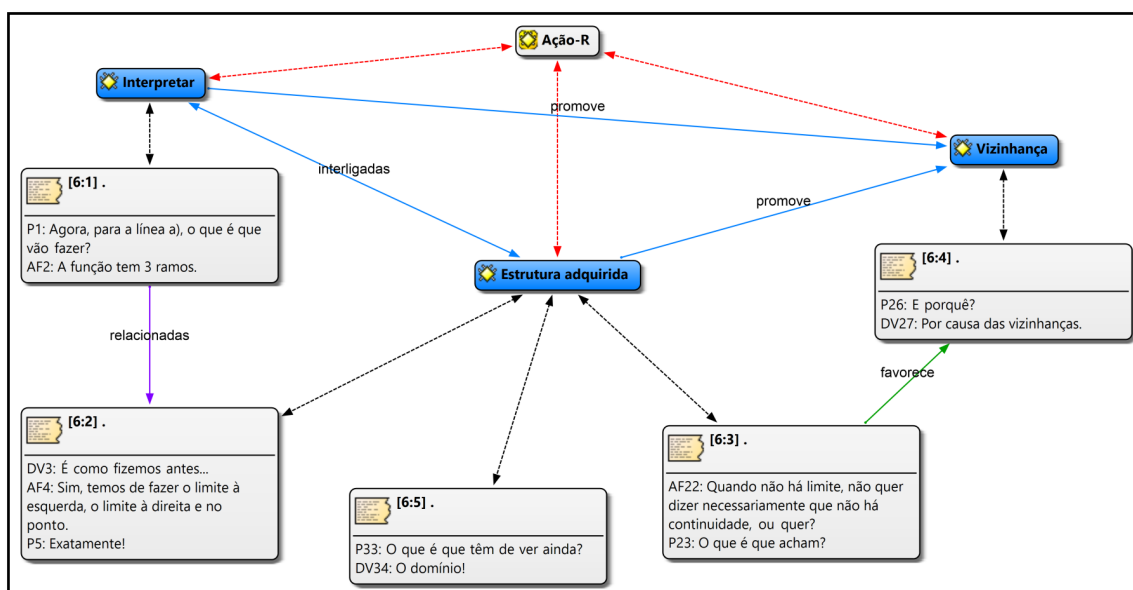


Figura 6.220 - RAV da Ação-R na Questão 7

Pela análise do gráfico anterior, verificamos que os alunos reconhecem que a função é definida por diferentes expressões designatórias em partes do seu domínio (*Interpretar* - [6:1]), e, portanto, terão de calcular os limites laterais e o valor da função no ponto $x = 1$ (*Estrutura adquirida* - [6:2]) para dar continuidade à resolução da alínea a).

Após a resolução da alínea a), os alunos indagam o professor acerca da relação entre limite e continuidade (*Estrutura adquirida* - [6:3]), sendo a resposta fundamentada com a noção de *Vizinhança* ([6:4]).

Para dar resposta à alínea b), os alunos são orientados para a *Estrutura adquirida* de domínio de uma função ([6:5]).

Síntese

Pelo exposto anteriormente, verificamos novamente que as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram interligadas. Também aqui a *Interpretação* do enunciado só é possível porque os alunos possuem *Estruturas adquiridas* anteriormente que a suportem. Inversamente, a *Interpretação* do enunciado da questão desencadeia o surgimento dessas *Estruturas adquiridas*. Nesta questão as subcategorias identificadas previamente prendem-se com o facto da função se encontrar definida por ramos, e com a igualdade dos limites laterais e do valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite.

No que concerne à relação entre a existência de limite e a de continuidade (*Estrutura adquirida*), esta conduz os alunos à noção de *Vizinhança*, evidenciando a importância e a utilidade deste conceito que tem vindo a ser trabalhado neste estudo desde a continuidade.

6.2.6.2 Ação-B

À semelhança do que se passou nas questões anteriores, os alunos recorrem à *Estratégia* de substituir x por 1 para efetuar os cálculos relativos aos limites laterais (*Aplicação de construção prévia*), os quais constituem *Soluções intermédias* para a resolução da alínea a).

AF	DV
$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1^2 - 3 = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1^3 - 3 = -2$	$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) = 1^3 - 3 = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} q(x) = 1^2 - 3 = -2$

Figura 6.221 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)

- P7: Então, o que é que vocês fizeram?
- DV8: Os limites laterais.
- P9: Que deram...?
- DV10: À esquerda deu -2 .
- AF11: À direita também deu -2 .
- P12: Então, para já, podemos dizer que...?
- DV13: Que os limites laterais são iguais.

Figura 6.222 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

Relativamente ao cálculo do valor da função num ponto (*Soluções intermédias*), apenas se verifica a *Aplicação de construção prévia* através das transcrições, uma vez que a notação utilizada pelos alunos nos seus registos escritos teve de ser retificada pelo professor, visto grande parte o ter registado como $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ em vez de $g(1)$.

AF	DV
$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$	$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = 3$

Figura 6.223 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)

- P14: Queria chamar só a atenção que em $x = 1$, não é o limite, é mesmo o valor da função!
- P15: Quanto é que a função vale em $x = 1$?
- AF16: 3.
- P17: Então, o correto seria dizer que $g(1) = 3$ e não $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$!

Figura 6.224 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

No que concerne à relação entre a existência de limite e de continuidade (*Aplicação de construção prévia*), levantada pelos alunos, podemos verificar que esta é alcançada pelos alunos através do recurso à noção de vizinhança (*Justificação*).

- P24: Se não há limite, pode ser contínua?
- DV25: Não!
- ...
- AF28: Ah! São diferentes!
- DV29: Pois, temos uma vizinhança em $y = -2$ que vem dos limites laterais e outra em $y = 3$ que é do $g(1)$.

Figura 6.225 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7

O diálogo anterior contribui para a resolução da alínea b), onde os alunos verificam que a função não é contínua no ponto 1 (*Soluções intermédias*).

- P30: Pronto, então a resposta à alínea b) qual será?
- AF31: A função não é contínua em $x = 1$ pois não existe o limite em $x = 1$.

Figura 6.226 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

Por esta altura parece que os alunos pretendem dar a questão como finalizada, deixando como resposta apenas a continuidade no ponto.

O professor realça o objetivo da questão, levando os alunos à determinação do domínio da função (*Soluções intermédias*), identificando os casos em que a expressão analítica de uma função obriga à imposição de condições para o cálculo de certos valores (*Justificação*).

AF

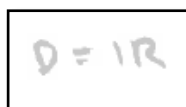

$$D = \mathbb{R}$$

Figura 6.227 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 7 b)

- P37: Porquê?
- AF38: Porque não há quocientes, raízes de índice par nem logaritmos.

Figura 6.228 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

Uma vez mais, os registos escritos, bem como as produções orais, representam *Justificações*, quer para os processos aplicados, quer para as soluções obtidas durante a *Ação-B*.

No gráfico seguinte (ver Anexo 6.41) encontram-se esquematizadas as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, exteriorizadas pela *Ação-B*.

Deste modo, as subcategorias *Aplicação de construções prévias* e *Soluções intermédias* encontram-se igualmente interligadas.

Finalmente, verificamos que as *Estratégias* utilizadas, a *Aplicação de construções prévias* e a obtenção de *Soluções intermédias*, em conjunto contribuem para a *Justificação* da não existência de limite com base na noção de vizinhança e do facto do domínio de função ser \mathbb{R} .

6.2.6.3 Ação-C

A *Reorganização* das construções anteriores, foi determinante para os alunos alcançarem as construções pretendidas.

AF	DV
$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1^2 - 3 = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1^3 - 3 = -2$	$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) = 1^3 - 3 = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} q(x) = 1^2 - 3 = -2$

Figura 6.230 - RA respeitante à resolução da Questão 7 a)

- DV10: À esquerda deu -2 .
- AF11: À direita também deu -2 .
- P12: Então, para já, podemos dizer que...?
- DV13: Que os limites laterais são iguais.

Figura 6.231 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

- P15: Quanto é que a função vale em $x = 1$?
- AF16: 3.

Figura 6.232 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

- AF31: A função não é contínua em $x = 1$ pois não existe o limite em $x = 1$.

Figura 6.233 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

AF

$$D = \mathbb{R}$$

Figura 6.234 - RA respeitante à resolução por AF da Questão 7 b)

- P35: O domínio, que é...?
- AF36: \mathbb{R}

Figura 6.235 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

Em relação à alínea a), podemos verificar que os alunos atingem a *construção* pretendida de *Limite com limites laterais*, comprovada quer pelos registos escritos, quer pelas transcrições da discussão em aula (*Comunicação*).

DV

∴ Apesar de os limites laterais serem iguais, no ponto eles são diferentes, assim $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ não existe.

Figura 6.236 - RA respeitante à resolução por DV da Questão 7 a)

- P18: O que é que podemos concluir acerca do limite da função g em $x = 1$?
- DV19: Não há limite.
- P20: Certo, não há limite! E porquê?
- DV21: Apesar dos limites laterais serem iguais, são diferentes do valor da função no ponto.

Figura 6.237 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

Também em relação à alínea b), podemos verificar que os alunos atingem a *construção* pretendida de *Continuidade num intervalo*, como se pode constatar nas figuras seguintes (*Comunicação*).

AF

contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

DV

b) A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Figura 6.238 - RA respeitante à resolução da Questão 7 b)

- P39: Certo! Então, onde é que a função é contínua?
- DV40: Em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Figura 6.239 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

Na figura seguinte (ver Anexo 6.42) resumem-se as subcategorias *Reorganização*, *Limite com limites laterais*, *Continuidade num intervalo* e *Comunicação* evidenciadas na Ação-C.

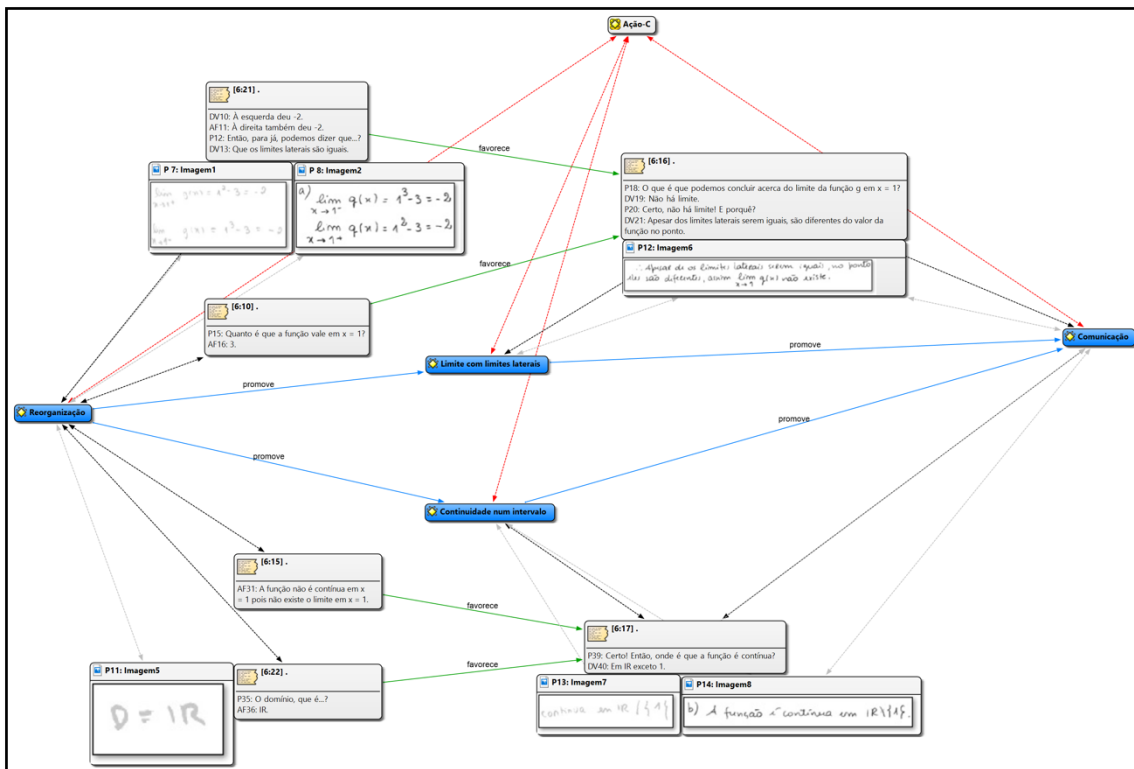


Figura 6.240 - RAV da Ação-C na Questão 7

Da análise da Figura 6.240, constatamos que a *Reorganização* das construções intermédias referentes aos limites laterais ([6:21], P7 e P8) em conjunto com a identificação do valor de $g(1)$ ([6:10]) conduz os alunos a alcançarem a *construção* de *Limite com limites laterais* ([6:16] e P12) pretendida na alínea a), a qual é *Comunicada* quer oralmente ([6:16]), quer através dos registos escritos dos alunos ([P12]).

No que concerne à alínea b), verifica-se igualmente que os alunos começam por *Reorganizar* as soluções intermédias obtidas anteriormente, em particular a descontinuidade em $x = 1$ ([6:15]) e o domínio da função ([6:22] e P11), as quais encaminham os alunos para atingirem a *construção* de *Continuidade num intervalo* ([6:17], P13 e P14). Também esta *construção* é *Comunicada* oralmente ([6:17]) e pelos registos escritos dos alunos (P13 e P14).

Síntese

A *Reorganização* das construções anteriores, em particular o cálculo dos limites laterais, foi determinante para que os alunos alcançassem a *construção* de *Limite com limites laterais*. Por sua vez, a *construção* de *Continuidade num intervalo* é atingida quando os alunos *Reorganizam* as *Soluções intermédias* relacionadas com a descontinuidade da função no ponto de mudança de ramo e com a identificação do domínio da função. Essas *construções* são *Comunicadas* quer oralmente, quer pelos registos escritos dos alunos.

6.2.6.4 Consolidação

A análise efetuada anteriormente à alínea a) revela-nos que por esta altura o cálculo do limite

de uma função definida por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio, num ponto de mudança de ramo, com recurso às noções de limite lateral à direita e à esquerda desse ponto e ao valor da função no mesmo ponto (*Limite com limites laterais*), já se encontra *Consolidada* pelos alunos, assim como o facto dos limites laterais, embora sejam iguais, serem diferentes do valor da função no ponto, pelo que a função não tem limite nesse ponto.

- P1: Agora, para a alínea a), o que é que vão fazer?
- AF2: A função tem 3 ramos.
- DV3: É como fizemos antes...
- AF4: Sim, temos de fazer o limite à esquerda, o limite à direita e no ponto.
- P5: Exatamente!
- ...
- DV10: À esquerda deu -2 .
- AF11: À direita também deu -2 .
- P12: Então, para já, podemos dizer que...?
- DV13: Que os limites laterais são iguais.
- ...
- DV19: Não há limite.
- P20: Certo, não há limite! E porquê?
- DV21: Apesar dos limites laterais serem iguais, são diferentes do valor da função no ponto.

Figura 6.241 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 a)

Também relativamente à alínea b), consideramos que é efetivada pelos alunos a *Consolidação* das noções de *Continuidade num ponto* com recurso à noção de vizinhança, relacionando-a já com o limite num ponto, e, em conjunto com a verificação do domínio da função, de *Continuidade num intervalo*.

- P24: Se não há limite, pode ser contínua?
- DV25: Não!
- P26: E porquê?
- DV27: Por causa das vizinhanças.
- ...
- P35: O domínio, que é...?
- AF36: \mathbb{R} .
- ...
- P39: Certo! Então, onde é que a função é contínua?
- DV340: Em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Figura 6.242 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 7 b)

A *Interpretação* do enunciado, em conjunto com as *Estruturas adquiridas* e a noção de *Vizinhança*, evidenciadas na *Ação-R*, encontram-se mutuamente relacionadas com as *Estratégias* concebidas pelos alunos, com a *Aplicação de construções prévias* e respetivas *Soluções intermédias*, promovendo a *Justificação* dos cálculos efetuados, e que são despoletadas na *Ação-B*.

Todas estas subcategorias revolvem em torno da identificação da função ser definida por ramos, do cálculo de limites laterais que reporta à substituição de x por 1, na expressão analítica de cada ramo da função, da verificação do valor de $g(1)$ e da determinação do domínio da função.

Podemos constatar que a *Consolidação* se encontra interligada quer com a *Ação-R*, quer com a *Ação-B*. Nesta fase constatamos que a manipulação de funções definidas por ramos se encontra estabelecida (*Estrutura adquirida*), tendo os alunos recorrido automaticamente à *Estratégia* de substituir, em cada expressão analítica da função, x pelo valor onde se pretende calcular o limite, no intuito de calcular os respetivos limites laterais (*Soluções intermédias*).

Relativamente à *Ação-C*, verificamos que a *Reorganização* das construções obtidas pela associação entre a *Ação-R* e a *Ação-B* foi determinante para que os alunos alcançassem as construções de *Limite com limites laterais* e *Continuidade num intervalo* pretendidas nesta questão, as quais são *Comunicadas* quer oralmente, quer pelos registos escritos dos alunos. As relações identificadas anteriormente sugerem-nos que a *Ação-R* e a *Ação-B*, promovem em conjunto a manifestação da *Ação-C*.

6.2.7 Questão 8

Nesta última questão pretendia-se que os alunos fossem capazes de definir a continuidade de uma função num ponto com base no seu limite nesse ponto. Recordando a análise efetuada à Questão 7, verificamos que estes dois conceitos já foram relacionados, tendo os alunos concluído que a não existência de limite de uma função num ponto implica a não continuidade da função nesse ponto.

Questão 8 Com base no conceito de limite, defina continuidade num ponto.

Figura 6.245 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite

6.2.7.1 Ação-R

Uma vez que o enunciado desta questão é bastante reduzido, a única *Interpretação* passível de existir é a dada pelos alunos ao verificarem que têm de relacionar as *Estruturas adquiridas* previamente de continuidade de uma função num ponto e de limite de uma função num ponto.

- AF1: Então, temos de ver, quando uma função é contínua num ponto, o que é que acontece ao limite nesse ponto.

Figura 6.246 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Como os alunos não estavam a perceber como prosseguir com a resolução da questão, o professor orientou-os no sentido de *Interpretarem* algumas das representações gráficas fornecidas na Questão 2 da secção dos limites e os respetivos resultados (*Estrutura adquirida*).

- DV3: Como é que fazemos isso?
- P4: Vamos aproveitar alguns dos gráficos da Questão 2, dos limites, para vermos o que acontece em cada caso.

Figura 6.247 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Relativamente à análise da continuidade dessas funções seleccionadas para os mesmos pontos onde foi estudado o limite, os alunos recorrem à noção de *Vizinhança* para tirarem as respetivas ilações.

- P8: E em relação à continuidade nesse ponto, como podem concluir?
- AF9: Pelas vizinhanças!
- ...
- P15: Porquê?
- AF16: Por causa das vizinhanças!

Figura 6.248 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Num dos casos considerados, os alunos recorrem à identificação do domínio da função (*Estrutura adquirida*) para justificar o estudo da continuidade num ponto.

- P27: Vamos lá ver: qual é o domínio da função k ?
- DV28: É $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Figura 6.249 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Recorrem igualmente às noções de bola aberta e de bola fechada (*Estrutura adquirida*), relacionando-as com os limites e a continuidade (*Interpretar*).

- AF41: Então, os limites podem existir independentemente de ser aberto ou fechado.
- ...
- DV44: Na continuidade tem de ser fechado.

Figura 6.250 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Na figura seguinte (ver Anexo 6.45) resumem-se as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*, evidenciadas na *Ação-R*.

Nesta questão as subcategorias identificadas previamente prendem-se com a relação entre continuidade num ponto e limite no mesmo ponto.

A *Interpretação* dos gráficos selecionados na Questão 2 para o estudo da continuidade (*Estrutura adquirida*) nos pontos onde foram calculados os limites, conduz os alunos à noção de *Vizinhança*.

Por outro lado, a análise dos mesmos gráficos (*Interpretar*) orienta os alunos no sentido de relacionarem os limites e a continuidade com as noções de bola aberta e de bola fechada, bem como a determinação do domínio da função k (*Estrutura adquirida*).

6.2.7.2 Ação-B

Como temos vindo a referir, foi necessária a orientação do professor de modo a encaminhar os alunos para a resolução da questão.

Assim, a *Estratégia* utilizada centrou-se na recapitulação de resultados obtidos anteriormente, em particular na Questão 2, e na *Aplicação de construções prévias*, nomeadamente o limite de uma função num ponto e a continuidade de uma função num ponto, de modo a obterem *Soluções intermédias* que conduzem à resolução da questão.

- P5: Por exemplo, para a função g calculámos na alínea a) o limite quando $x \rightarrow 2$.
- AF6: Deu -1.
- DV7: Portanto existe!
- ...
- DV10: Como só há uma vizinhança em y para os pontos na vizinhança do 2, então é contínua em $x = 2$.
- P11: Agora, em relação ao $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$. O que vimos?
- AF12: Vimos que não existe!
- P13: Certo! E em relação à continuidade da função nesse ponto, o que podem dizer?
- AF14: Não é contínua!

Figura 6.252 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Através da análise das transcrições, podemos constatar que a *Justificação* dada pelos alunos relativamente à continuidade num ponto se baseia na noção de vizinhança.

- DV10: Como só há uma vizinhança em y para os pontos na vizinhança do 2, então é contínua em $x = 2$.
- ...
- DV17: Temos duas vizinhanças diferentes para y . [RI: Referindo-se às imagens dos pontos na vizinhança de $x = 0$].

Figura 6.253 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Relativamente à discussão em aula, verificamos novamente que os alunos atingem apenas uma *Solução intermédia* visto não identificarem que o ponto em que o limite é calculado terá de pertencer ao domínio da função.

- DV19: Uma função é contínua num ponto se existir o limite da função nesse ponto!

Figura 6.254 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Verificado que os alunos não identificam a importância do ponto em que o limite é calculado ter de pertencer ao domínio da função, para que não haja equívocos, no que concerne à relação entre as duas noções em análise, o professor explora ainda mais um caso com os alunos. Embora este não fizesse parte da questão colocada, consideramos de extrema importância, pelo que nos propusemos a analisá-lo igualmente, denominando-o como “Caso Extra”

- RI20: O professor aproveita para realçar o facto da existência de limite de uma função num ponto ser uma condição necessária para a continuidade da função nesse ponto, mas que tal não é suficiente!
- P21: Mas, cuidado que pode existir o limite de uma função num ponto e ela não ser contínua nesse ponto!

Figura 6.255 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra

Visto os alunos não terem identificado quando ocorre o Caso Extra, o professor remeteu-os, novamente, para a exploração da Questão 2, neste caso com a função k (*Estratégias*).

Pela análise do excerto seguinte verificamos uma vez mais o recurso à *Aplicação de construções prévias*, nomeadamente o limite de uma função num ponto, a continuidade de uma função num ponto e o domínio de uma função, de modo a obterem *Soluções intermédias* que conduzem à resolução desta questão suplementar.

- P23: Revejam agora a função k .
- DV24: Então, vimos que o $\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = 2$. Existe!
- P25: Certo! E em relação à continuidade da função em $x = 1$?
- RI26: Como os alunos não respondem, o professor dá uma ajuda.
- P27: Vamos lá ver: qual é o domínio da função k ?
- DV28: É $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- P29: Então, o que posso dizer em relação à continuidade em $x = 1$?
- AF30: Mas se 1 não pertence ao domínio...
- P31: Verdade, logo...?
- AF32: Não se pode falar em continuidade!

Figura 6.256 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra

Seguidamente, o professor indaga os alunos quanto às condições que fundamentam a existência

do limite de uma função num ponto, sendo a mesma *Justificada* pelos alunos com a existência dos limites laterais e do valor da função no ponto (*Aplicação de construção prévia*).

- P35: E quando é que existe o limite de uma função num ponto?
- AF36: Quando o limite à esquerda é igual ao limite à direita.
- DV37: E igual ao valor no ponto!
- RI38: O professor escreve no quadro: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Figura 6.257 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Através do excerto seguinte percebe-se que alguns alunos ainda se encontravam com dúvidas relativamente ao Caso Extra, sendo este revisto pelo professor, no qual verificamos a ligação efetuada pelos alunos entre as noções de bola fechada e de bola aberta com o facto do ponto pertencer ou não ao domínio da função (*Justificação*).

- AF41: Então, os limites é independentemente de ser aberto ou fechado.
- RI42: Refere-se ao facto do ponto poder, ou não, pertencer ao domínio da função.
- P43: Exato!
- DV44: Na continuidade tem de ser fechado.
- RI45: Refere-se ao facto do ponto ter de pertencer ao domínio da função.

Figura 6.258 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra

No gráfico seguinte (ver Anexo 6.46) encontram-se esquematizadas as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, exteriorizadas pela *Ação-B*.

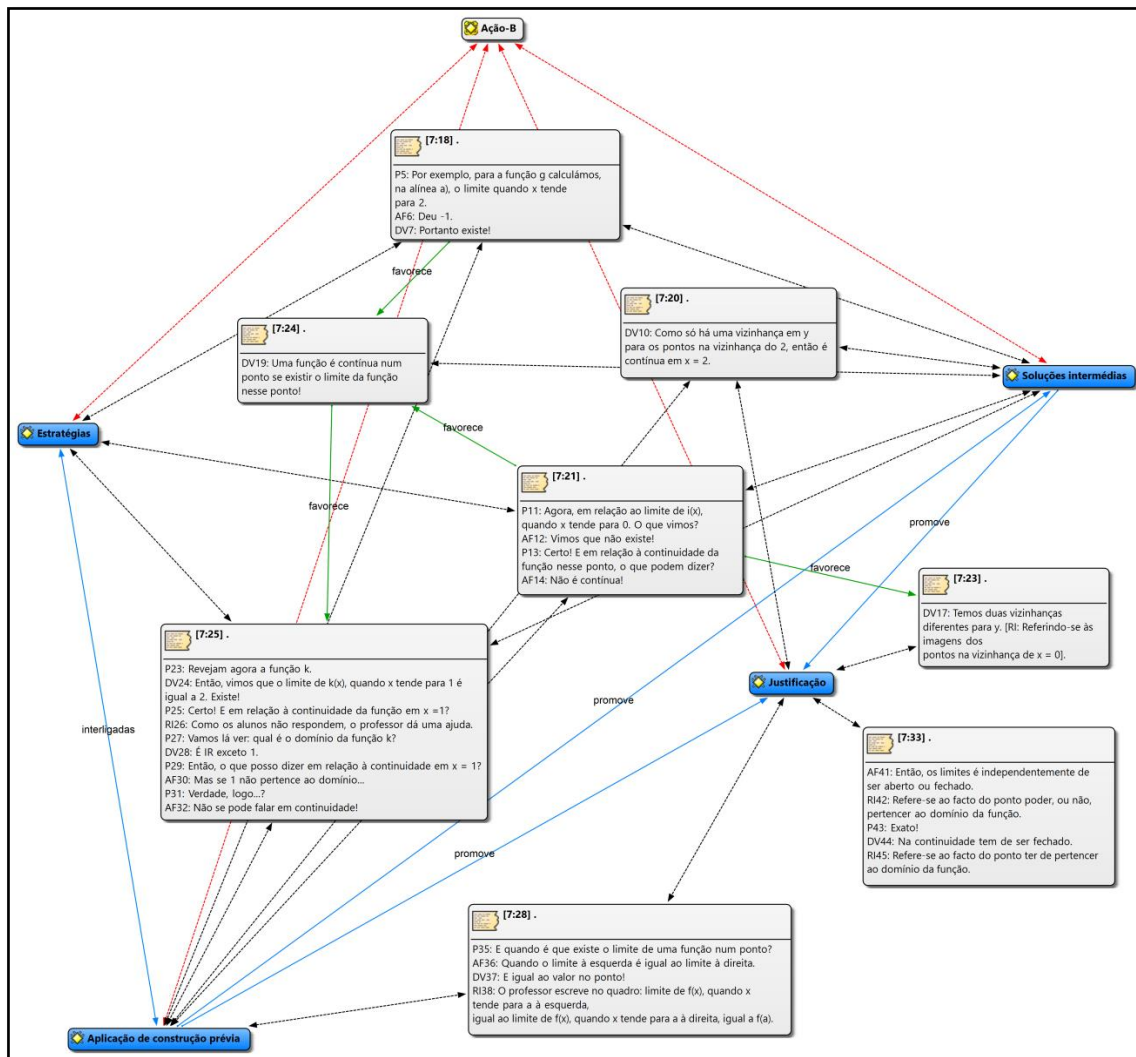


Figura 6.259 - RAV da Ação-B na Questão 8

Verificamos que, para a resolução desta questão, os alunos recorrem à *Estratégia* de recuperar os resultados alcançados na Questão 2, nomeadamente em relação aos limites aí calculados, *Aplicando construções prévias* de modo a concluir o que acontece em relação à continuidade nos mesmos pontos onde foram calculados os limites ([7:18], [7:21] e [7:25]).

Todo este processo dirige os alunos para a obtenção de diferentes *Soluções intermédias*, as quais identificamos nos parágrafos seguintes.

A existência de limite relatada em [7:18], juntamente com a análise da função i revelada em [7:21], induz os alunos a considerarem que “*DV19: Uma função é contínua num ponto se existir o limite da função nesse ponto!*” ([7:24]), no entanto não é referido se o ponto pertence, ou não, ao domínio da função, tendo sido essencial a intervenção do professor para evidenciar essa lacuna, induzindo os alunos na determinação do domínio da função ([7:25]).

Através da análise do gráfico da função g (*Estratégias* - [7:18]) os alunos concluem o que

acontece em relação à continuidade em $x = 2$ (*Soluções intermédias*), recorrendo à noção de vizinhança para *Justificar* essa conclusão ([7:20]).

Mais ainda, os alunos *Justificam* a descontinuidade da função i em $x = 0$ ([7:21]) recorrendo à noção de vizinhança ([7:23]), e a existência de limite de uma função num ponto através da tripla igualdade $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ([7:28]).

Finalmente, a relação estabelecida entre limite, continuidade e domínio, é *Justificada* com recurso às noções de bola aberta e de bola fechada ([7:33]).

Síntese

Voltamos a verificar a interligação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, em virtude de só ser possível desenvolver *Estratégias* quando se possuem conhecimentos prévios que suportem essas *Estratégias*, e por outro lado, é manifesto que para colocar em prática as *Estratégias* selecionadas torna-se imprescindível *Aplicar as construções previamente adquiridas*.

Em acréscimo, a *Aplicação de construção prévia* fomenta a obtenção de *Soluções intermédias* que permitem que os alunos prossigam com a resolução da questão colocada, promovendo ambas a *Justificação* das várias construções alcançadas durante o processo de *construir*.

6.2.7.3 Ação-C

De modo a atingirem a *construção* pretendida na Questão 8, os alunos *Reorganizam* as construções intermédias obtidas previamente para analisarem o Caso Extra que demonstra as consequências do ponto, onde se pretende relacionar os conceitos de limite e de continuidade, não pertencer ao domínio da função.

- DV19: Uma função é contínua num ponto se existir o limite da função nesse ponto!
- ...
- DV24: Então, vimos que $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 2$. Existe!
- ...
- P27: Vamos lá ver: qual é o domínio da função k ?
- DV28: É $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- ...
- AF30: Mas se 1 não pertence ao domínio...
- P31: Verdade, logo...?
- AF32: Não se pode falar em continuidade!

Figura 6.260 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra

Esta constatação por parte dos alunos encaminha-os para a *construção* da *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio), a qual, embora não fizesse

parte do objetivo da questão, se considera verdadeiramente importante para que os alunos atinjam a *construção* de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*.

- DV33: Então o limite existe mas não é contínua!
- P34: Certo! Em pontos que não pertençam ao domínio da função não existe a continuidade, mas pode existir o limite.

Figura 6.261 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução do Caso Extra

O excerto anterior constitui igualmente a *Comunicação* da *construção* da *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio).

Relativamente ao objetivo pretendido na Questão 8, os alunos voltam a *Reorganizar* as soluções intermédias relativas aos limites laterais e ao valor da função num ponto do seu domínio de modo a atingirem a *construção* de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*.

- DV33: Então o limite existe mas não é contínua!
- P34: Certo! Em pontos que não pertençam ao domínio da função não existe a continuidade, mas pode existir o limite.
- ...
- P35: E quando é que existe o limite de uma função num ponto?
- AF36: Quando o limite à esquerda é igual ao limite à direita.
- DV37: E igual ao valor no ponto!
- ...
- DV44: Na continuidade tem de ser fechado.
- RI45: Refere-se ao facto do ponto ter de pertencer ao domínio da função.

Figura 6.262 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Pela análise das produções dos alunos (*Comunicação*) podemos comprovar que estes atingem a *construção* pretendida (*Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*), muito embora AF considere que o ponto seja aderente ao domínio. Uma vez que um ponto aderente ao domínio poderá não pertencer a esse domínio, e que o conceito de ponto aderente não foi explorado em aula, consideramos que esse apontamento de AF não terá sido aplicado com a consciência dessa implicação. Aliás, as transcrições “AF30: *Mas se 1 não pertence ao domínio...*” e “AF32: *Não se pode falar em continuidade!*” comprovam que AF entende que *a* tem de pertencer ao domínio.

AF

Para existir continuidade tem de existir limite, logo só existe continuidade quando o limite da função f num ponto aderente ao domínio a é igual $f(a)$.

DV

Uma função é contínua num ponto quando os limites laterais nesse ponto forem iguais ao valor no ponto.

Figura 6.263 - RA respeitante à resolução da Questão 8

Finalmente, podemos constatar, pelo excerto seguinte (*Comunicação*) onde são resumidas todas as conclusões obtidas anteriormente, que os alunos atingem totalmente a *construção* pretendida de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*, culminando na sua definição formal por parte do professor.

- DV50: Uma função f é contínua num ponto se existir o limite nesse ponto.
- P51: Sim, desde que o ponto pertença onde?
- AF52: Ao domínio!
- P53: E para existir o limite num ponto do domínio da função, o que é que tem de acontecer?
- AF54: Os limites laterais têm de ser iguais.
- DV55: E iguais ao valor da função nesse ponto!
- P56: Certo! Então podemos escrever a definição assim: “Uma função f é contínua num ponto $a \in D_f$ se existir o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou seja, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ”.

Figura 6.264 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Na figura seguinte (ver Anexo 6.47) resumem-se as subcategorias *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*, *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio) e *Comunicação* evidenciadas na Ação-C.

não pertence ao domínio) ([7:31]) com a *Reorganização* ([7:29] e [7:40]) promove a *construção* de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio* da função ([7:36], P8 e P9).

Síntese

Verificamos novamente que a *Reorganização* das construções adquiridas anteriormente, neste particular a relação de dependência entre continuidade e limite pressupor a verificação do domínio da função, conduziu à *construção* da *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio).

Essa *construção*, em conjunto com a *Reorganização* das *Soluções intermédias* relativas aos limites laterais e ao valor da função num ponto do seu domínio, promovem a *construção* pretendida de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*.

Ao alcançarem as referidas construções, os alunos *Comunicam* os resultados através dos seus registos escritos e oralmente aquando da discussão em aula, o que demonstra que a subcategoria *Comunicação* é fomentada pelas subcategorias *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro que não pertença ao domínio* e *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*.

6.2.7.4 Consolidação

Pela análise efetuada, podemos verificar que a *Interpretação* das representações gráficas fornecidas na Questão 2, em conjunto com a noção de *Vizinhança*, para justificar a descontinuidade num ponto, e a *Estrutura adquirida* de domínio de uma função, foram preponderantes para os alunos aplicarem sem dificuldade as noções de continuidade e de limite num ponto (*Aplicação de construção prévia*), obtendo assim *Soluções intermédias* que os conduziram às construções finais.

- DV10: Como só há uma vizinhança em y para os pontos na vizinhança do 2, então é contínua em $x = 2$.
- P11: Agora, em relação ao $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$. O que vimos?
- AF12: Vimos que não existe!
- P13: Certo! E em relação à continuidade da função nesse ponto, o que podem dizer?
- AF14: Não é contínua!
- ...
- DV17: Temos duas vizinhanças diferentes para y . [RI: Referindo-se às imagens dos pontos na vizinhança de $x = 0$.]
- ...
- P23: Revejam agora a função k .
- DV24: Então, vimos que o $\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = 2$. Existe!
- P25: Certo! E em relação à continuidade da função em $x = 1$?

- RI26: Como os alunos não respondem, o professor dá uma ajuda.
- P27: Vamos lá ver: qual é o domínio da função k ?
- DV28: É $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- P29: Então, o que posso dizer em relação à continuidade em $x = 1$?
- AF30: Mas se 1 não pertence ao domínio...
- P31: Verdade, logo...?
- AF32: Não se pode falar em continuidade!
- ...
- P35: E quando é que existe o limite de uma função num ponto?
- AF36: Quando o limite à esquerda é igual ao limite à direita
- DV37: E igual ao valor no ponto!

Figura 6.266 - RAV e RI sobre a discussão que envolveu a resolução da Questão 8

Na figura seguinte (ver Anexo 6.48) resumem-se os excertos que evidenciam a *Consolidação*.

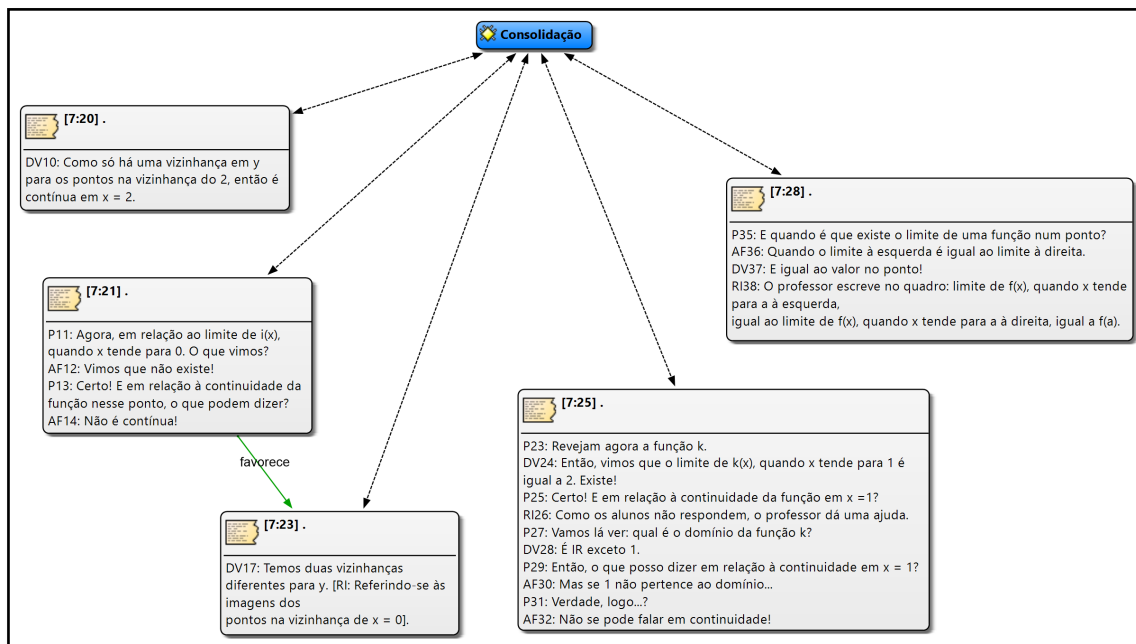


Figura 6.267 - RAV da ação epistêmica *Consolidação* na Questão 8

Pela análise da Figura 6.267, podemos verificar os alunos recorrem à *Interpretação* dos gráficos da Questão 2, a partir da qual *Justificam*, com a noção de *Vizinhança*, que a função g é contínua em $x = 2$ (*Aplicação de construção prévia + Soluções intermédias*), demonstrando que estas construções se encontram *Consolidadas* ([7:20]).

Pela análise do excerto [7:21], constatamos que a *Aplicação das construções prévias* de limite num ponto e de continuidade num ponto, as quais integram igualmente *Soluções intermédias*, ([7:21]) favorecem a *Justificação* da descontinuidade num ponto com recurso à noção de *Vizinhança* ([7:23]). Todos os excertos mencionados refletem a *Consolidação* das construções

aplicadas. Igualmente no excerto ([7:25]) verificamos a *Consolidação* de várias construções, as quais detalhamos em seguida.

A *Estratégia* adotada remete os alunos para a análise do gráfico da função k , na qual comprovam a existência do $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$. Prosseguindo para a análise da continuidade nesse ponto, a qual pressupõe a determinação do domínio da função, os alunos constataam que, pelo facto de o ponto em apreciação não pertencer ao domínio da função, não faz sentido considerar a continuidade nesse ponto. Em toda esta análise verifica-se a manifestação das subcategorias *Aplicação de construção prévia* e *Soluções intermédias*.

Síntese

Podemos constatar que a ação epistémica *Consolidação* se manifestou através da *Ação-R* e da *Ação-B*, no primeiro caso expressa pelas subcategorias *Interpretação* e *Vizinhança*, e no segundo caso pelas subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construções prévias*, *Soluções intermédias* e *Justificação*.

6.2.7.5 Relações estabelecidas entre as ações epistémicas

A figura seguinte (ver Anexo 6.49) evidencia as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C* e *Consolidação* identificadas durante a resolução da Questão 8, apresentando alguns dos excertos utilizados anteriormente.

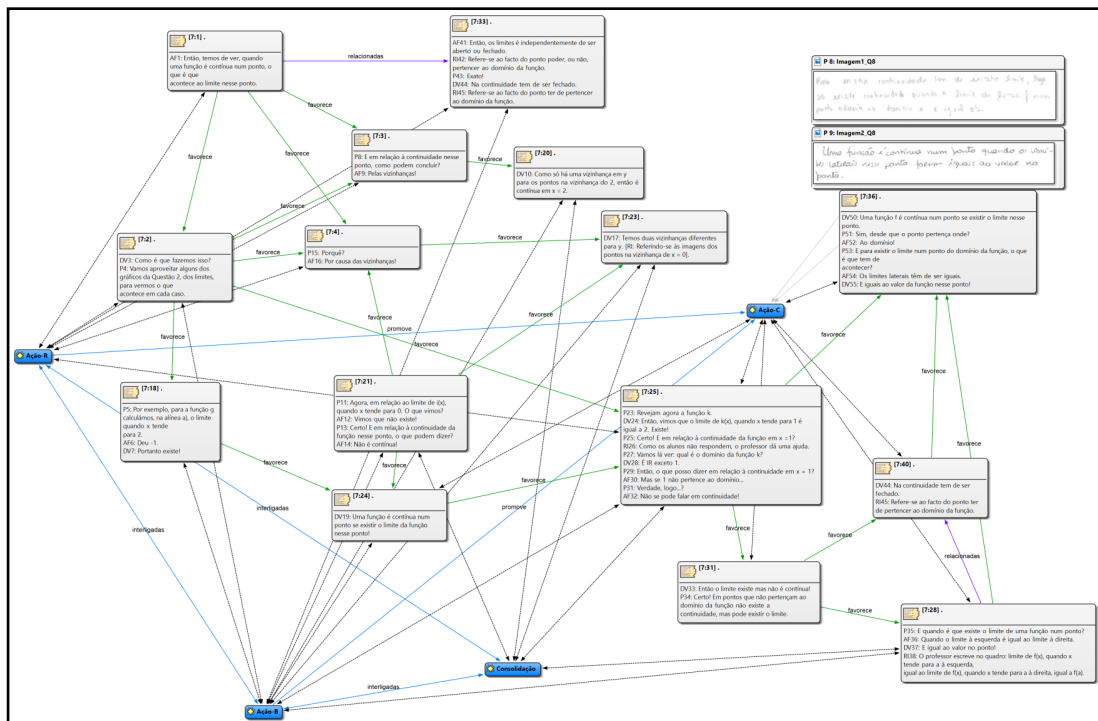


Figura 6.268 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistémicas na Questão 8

Pela análise do esquema anterior, podemos constatar que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram interligadas e que ambas promovem a *Ação-C*.

De um modo geral, podemos verificar que a *Interpretação* do enunciado conduz os alunos a relacionarem a continuidade de uma função num ponto com o seu limite nesse ponto (*Estruturas adquiridas*). De modo a dar continuidade à resolução da questão, os alunos empregam a *Estratégia* de analisar os gráficos das funções (*Estrutura adquirida*) fornecidos no enunciado da Questão 2, aliada à noção de *Vizinhança* para *Justificar* a existência, ou não, de continuidade num ponto, constituindo os resultados que daí advêm *Soluções intermédias* obtidas pela *Aplicação de construções prévias*. Todas estas construções e noções que os alunos aplicaram encontram-se já *Consolidadas* pelos alunos, o que nos sugere que a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Consolidação* se encontram interligadas.

As relações estabelecidas no parágrafo anterior são *Reorganizadas* pelos alunos de modo a obterem a *construção* da *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro que não pertença ao domínio*, a qual, embora não integrasse o enunciado da questão em estudo, foi introduzida para destacar a importância do ponto em que a continuidade e o limite estão a ser estudados pertencer, ou não, ao domínio da função.

A integração das relações anteriormente referidas com a *construção* da *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro que não pertença ao domínio* foram igualmente *Reorganizadas* pelos alunos para assim atingirem a *construção* de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*, pretendida na Questão 8.

Capítulo 7

As ações epistémicas na construção da continuidade e dos limites

Ao longo deste capítulo apresentaremos a análise de terceira ordem, baseada na leitura transversal, por categorias, dos onze grupos obtidos no Capítulo 6 e que foram interpretados de acordo com o problema do estudo, com o enquadramento teórico e com o trabalho empírico desenvolvido.

Pressupondo a análise de segunda ordem efetuada no Capítulo 6, efetuada para cada uma das questões, das ações epistémicas e respetivas subcategorias, respeitando a seguinte ordem: *Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C* e *Consolidação*, nos casos em que esta última é verificada, assim como as relações estabelecidas entre as referidas ações epistémicas, tencionamos verificar se as conjecturas que foram despontando ao longo do capítulo anterior se confirmam pela análise que iremos efetuar.

Desta análise transversal procura-se compreender melhor como ocorreu o processo de abstração dos alunos, na *construção* do novo conhecimento matemático, identificar eventuais dificuldades manifestadas e concluir sobre a *construção*, por parte dos alunos, dos conceitos de limite e de continuidade, bem como a relação entre os mesmos.

Relativamente à estrutura deste capítulo, distinguimos duas secções (7.1 e 7.2) intituladas “*As contribuições das subcategorias no desenvolvimento das ações epistémicas*” e “*O papel das ações epistémicas na construção dos conceitos de continuidade e de limite*”, respetivamente, as quais apresentamos de seguida.

Na primeira secção proceder-se-á à análise, para todas as questões, das subcategorias evidenciadas em cada uma das ações epistémicas, pretendendo-se verificar se todas ocorreram em cada uma das questões, compreender como se relacionaram e que influência tiveram no desenvolvimento dessas ações. Realçamos o facto de a *Consolidação* não ter subcategorias definidas, pelo que não será incluída nesta análise. A apresentação segue a seguinte estrutura: (1) a relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-R*, (2) a relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-B*, (3) a relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-C*.

Na segunda secção serão analisadas a manifestação das ações epistémicas (*Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C* e *Consolidação*) e as relações existentes entre estas, novamente para todas as questões.

7.1 As contribuições das subcategorias no desenvolvimento das ações epistémicas

7.1.1 A relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-R*

Pretendemos, nesta secção, apurar de que modo a *Ação-R* emergiu durante o processo de abstração dos alunos durante a resolução das questões fornecidas. Interessa averiguar se todas, ou algumas, das subcategorias que compõem esta ação epistémica se evidenciaram em cada questão, bem como se as relações entre as subcategorias pressupõem características especiais para que a *Ação-R* se desenvolva.

Antes porém, importa realçar que, para as questões referentes à continuidade, apenas se definiram as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhança*, tendo-se adicionado a subcategoria *Aproximação* para as questões sobre a noção de limite.

7.1.1.1 *Interpretar e Estrutura adquirida*

Em primeiro lugar, constatamos que em todas as questões se evidenciaram as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, as quais se encontram sempre interligadas.

Como já referimos, aquando da análise de segunda ordem realizada no Capítulo 6, a *Interpretação* do enunciado só é possível se os alunos possuírem *Estruturas adquiridas* anteriormente que a suportem. Inversamente, a *Interpretação* do enunciado da questão desencadeia o surgimento dessas *Estruturas adquiridas*.

Com o intuito de efetuar uma análise mais detalhada acerca da simbiose entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, começamos por destacar o facto de os enunciados das questões se encontrarem apresentados de formas distintas, o que influencia a *Interpretação* dos mesmos por parte dos alunos. Por conseguinte, iremos verificar quais as características que se destacam em cada caso e como estas evoluem ao longo das resoluções das questões.

Relativamente ao grupo de questões sobre a noção de continuidade, este é iniciado por uma questão em que apenas são fornecidas as representações gráficas de duas funções (*Estruturas adquiridas*), para a qual a *Interpretação* do enunciado se baseia na análise do gráfico e no recurso às *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada.

Verificamos que em todas as questões subsequentes, apenas são fornecidas as expressões designatórias das funções (*Interpretação*), sejam elas definidas por ramos ou por uma única expressão analítica. Em ambos os casos, os alunos consideram que as suas representações gráficas (*Estrutura adquirida*) serão um ponto de partida para resolução dessas questões, as quais pressupõem o recurso a diferentes *Estruturas adquiridas*, nomeadamente à simplificação de frações no seu domínio e aos cálculos associados à representação gráfica de uma parábola

ou de uma reta. Novamente, os alunos consideram essenciais as *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada para refletir as condições designadas nos domínios das funções (*Interpretar + Estrutura adquirida*).

Resumindo o que foi verificado anteriormente, constatamos que as representações gráficas das funções (*Estrutura adquirida*) foram cruciais para os alunos darem início à resolução das questões propostas sobre continuidade.

Relativamente às questões sobre o conceito de limite, começamos por destacar que a *Interpretação* da notação de limite é fulcral para dar início à resolução de todas as questões relacionadas com esse conceito. Nas questões 2 e 3 voltam a ser fornecidas unicamente as representações gráficas de algumas funções (*Interpretar + Estrutura adquirida*), embora nas restantes questões deste grupo nem sempre seja possível recorrer à representação gráfica das funções definidas analiticamente, visto que a maior parte delas não são do conhecimento dos alunos, obrigando-os a abordar essas questões por outra perspetiva.

No que respeita à Questão 4, verifica-se ainda a associação de certas funções, conhecidas pelos alunos, aos seus gráficos (*Interpretar + Estrutura adquirida*), não se tendo verificado a necessidade de efetivar essas representações gráficas uma vez que estas já se encontram estabelecidas, considerando o respetivo comportamento, em particular quando x tende para $-\infty$ ou para $+\infty$ (*Estrutura adquirida*).

No que concerne às questões 5, 6 e 7 sobre a noção de limite, nas quais a *Interpretação* do enunciado consiste em verificar que as funções se encontram definidas por diferentes expressões analíticas em partes dos seus domínios e se pretende estudar os seus limites nos pontos de mudança de ramos, os alunos aliam-nos aos respetivos limites laterais e aos valores das funções nesses pontos, e às igualdades que daí advêm (*Estruturas adquiridas*).

A dificuldade inerente à *Interpretação* da Questão 8 é ultrapassada, uma vez mais, com o recurso às representações gráficas (*Estrutura adquirida*) fornecidas na Questão 2. Novamente a análise gráfica das funções encontra-se associada às noções de bola aberta e de bola fechada (*Estruturas adquiridas*).

De um modo geral, verificamos que na grande maioria das questões os alunos sentem a necessidade de identificar ou de calcular os domínios das funções (*Estrutura adquirida*) para dar prosseguimento à resolução das tarefas. Relativamente às questões em que são apresentados ou construídos os gráficos de funções, identifica-se sempre o recurso às *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada.

Constatou-se assim, que, independentemente dos dados fornecidos no enunciado, as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* se encontram sempre interligadas. Acresce que

as questões em que não foram fornecidas as representações gráficas das funções impeliram os alunos a recorrerem a mais conhecimentos adquiridos anteriormente do que nos casos em que eram apresentados os gráficos das funções.

Da análise efetuada, concluímos que a *Ação-R* é sempre iniciada pela *Interpretação* do enunciado e pelo recurso a *Estruturas adquiridas* previamente, constituindo igualmente o princípio da resolução das questões fornecidas.

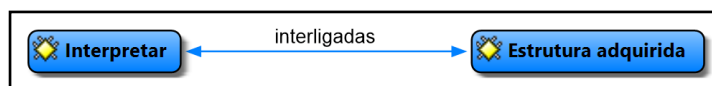


Figura 7.1 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* da *Ação-R*

7.1.1.2 *Interpretar, Estrutura adquirida e Vizinhaça*

Começamos por destacar o facto de na Questão 4, relativa à continuidade, não se manifestar a subcategoria *Vizinhaça* – a qual não fazia parte do objetivo desta questão – a mesma não se evidenciando na Questão 5 sobre a noção de limite, uma vez que o recurso à noção de *Aproximação* foi suficiente para dar início à resolução desta questão.

A análise de segunda ordem efetuada no capítulo anterior permite-nos constatar que nas questões 2, 3 e 5, sobre a noção de continuidade, e 3, 7 e 8, sobre o conceito de limite, as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida*, em conjunto, promoveram nos alunos o recurso à noção de *Vizinhaça*.

Relativamente ao conceito de *Vizinhaça*, concluímos que este se manifestou maioritariamente pela *Interpretação* dos gráficos das funções em estudo (*Estrutura adquirida*), em particular nos pontos onde figuram bolas abertas e bolas fechadas (*Estrutura adquirida*).

Destacamos o facto de na Questão 5 sobre continuidade, embora os alunos recorram igualmente à representação gráfica da função (*Interpretar* + *Estrutura adquirida*), na qual não figuram bolas abertas (*Estrutura adquirida*), eles examinam o seu domínio (*Estrutura adquirida*) aplicando a noção de *Vizinhaça* ao ponto fronteiro $x = 2$ e ao ponto isolado $x = 3$.

Em contrapartida, na Questão 7 os alunos não sentem a necessidade de representar graficamente a função (*Interpretar*), concentrando-se nos limites laterais e no valor da função no ponto onde se pretende calcular o limite (*Estrutura adquirida*). A justificação da não existência do referido limite baseia-se na não unicidade de *Vizinhaças* para as imagens dos pontos situados na *Vizinhaça* de $x = 1$.

Resumindo, à exceção da Questão 7, consideramos que o surgimento da subcategoria *Vizinhaça* se encontra dependente da análise gráfica das funções, sejam estas fornecidas ou

realizadas pelos alunos (*Interpretar* + *Estrutura adquirida*), maioritariamente associada às *Estruturas adquiridas* de bola aberta e de bola fechada.

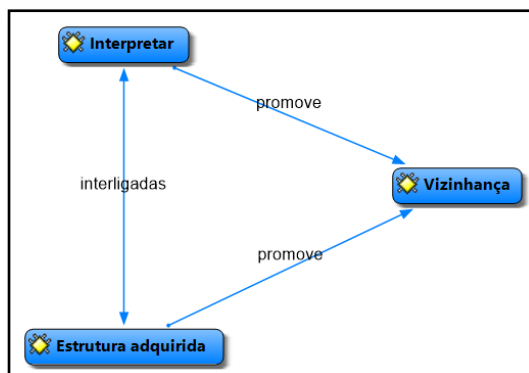


Figura 7.2 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Vizinhaça* da *Ação-R*

Desta análise inicial, conclui-se que a noção de *Vizinhaça* foi essencial para dar início à resolução das questões propostas. Indagamos se esta subcategoria se voltará a manifestar ou se apenas se evidencia nesta fase inicial.

7.1.1.3 *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Aproximação*

Como já referimos, na Questão 5, sobre o conceito de limite, apenas se evidenciam as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Aproximação* referentes à *Ação-R*.

Uma vez que as funções apresentadas nesta questão se encontram definidas por ramos (*Interpretar* + *Estrutura adquirida*), a escolha das expressões analíticas a utilizar para o cálculo de cada limite lateral (*Estrutura adquirida*) é efetuada com recurso à noção de *Aproximação*, a qual se encontra relacionada com a notação de limite, em particular com a *Interpretação* das expressões “quando x tende para a à esquerda” ou “quando x tende para a à direita”.

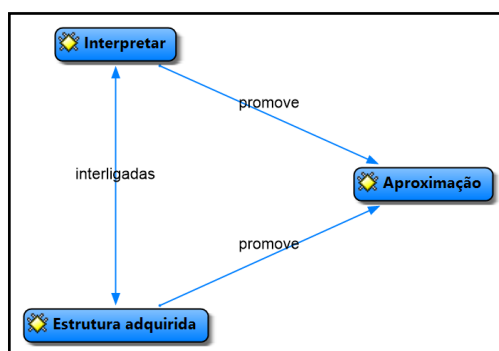


Figura 7.3 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Aproximação* da *Ação-R*

7.1.1.4 Interpretar, Estrutura adquirida, Vizinhaça e Aproximação

A associação verificada em 7.1.1.1 entre as subcategorias *Interpretação* e *Estrutura adquirida*, promove o recurso às noções de *Vizinhaça* e de *Aproximação*, por parte dos alunos, verificando-se ainda uma relação entre as duas últimas, tal como se pode atestar pela análise das questões 2, 4, e 6, sobre o conceito de limite.

Confirmamos que, no caso das questões 2 e 4, a noção de *Aproximação* é imediatamente despoletada pela *Interpretação* do enunciado relativamente à notação de limite, quando os alunos consideram que x tende para determinado valor. Paralelamente, a representação gráfica de determinadas funções (*Estrutura adquirida*) auxilia os alunos a relacionarem o conceito de *Aproximação* com a noção de *Vizinhaça* ao considerarem que, quando x se aproxima de um valor, terão de considerar *Vizinhaças* cada vez menores em torno desse valor.

Relativamente à Questão 6, temos uma dinâmica diferente entre os conceitos que suportam a evidência das subcategorias aqui analisadas, uma vez que a justificação dos alunos para a existência de limite de uma função num ponto (*Interpretar*) se prende com a unicidade de *Vizinhaças* para as imagens dos pontos situados nas *Vizinhaças* de $x = -1$, ou seja com a igualdade entre os limites laterais e o valor de $h(-1)$ (*Estruturas adquiridas*). Desta análise, os alunos consideram que a referida unicidade de *Vizinhaças* terá de ser confirmada pelo cálculo dos limites laterais, os quais pressupõem a escolha das expressões designatórias a utilizar em cada caso, que por sua vez se encontra associada à noção de *Aproximação*.

Concluimos assim que a relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretar* e *Estrutura adquirida* fomenta nos alunos a necessidade de recurso às noções de *Aproximação* e de *Vizinhaça*. Da análise efetuada às três questões referidas, constatamos que, sempre que o cálculo de limites é baseado na representação gráfica de funções, a noção de *Aproximação* conduz à noção de *Vizinhaça*, enquanto que nos casos em que o cálculo de limites para funções definidas por ramos pressupõe o cálculo dos seus limites laterais, a dinâmica entre as noções de *Aproximação* e de *Vizinhaça* encontra-se invertida.

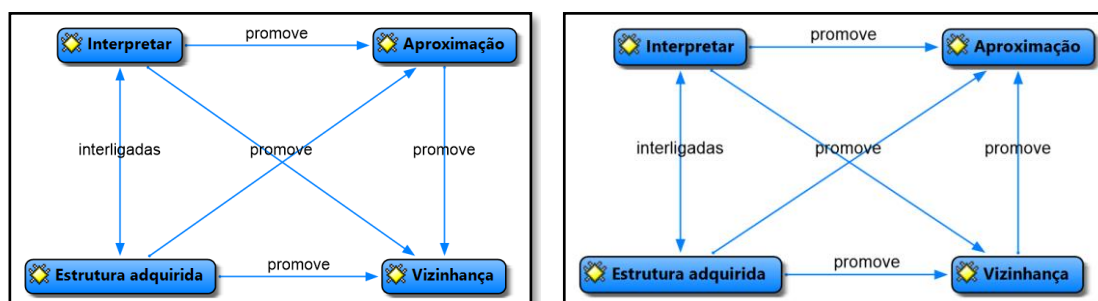


Figura 7.4 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida*, *Vizinhaça* e *Aproximação* da Ação-R

Com o objetivo de sintetizar a análise transversal efetuada às relações entre as subcategorias evidenciadas na *Ação-R*, optou-se por construir o seguinte esquema (ver Anexo 7.1), com recurso ao *software* ATLAS.ti.

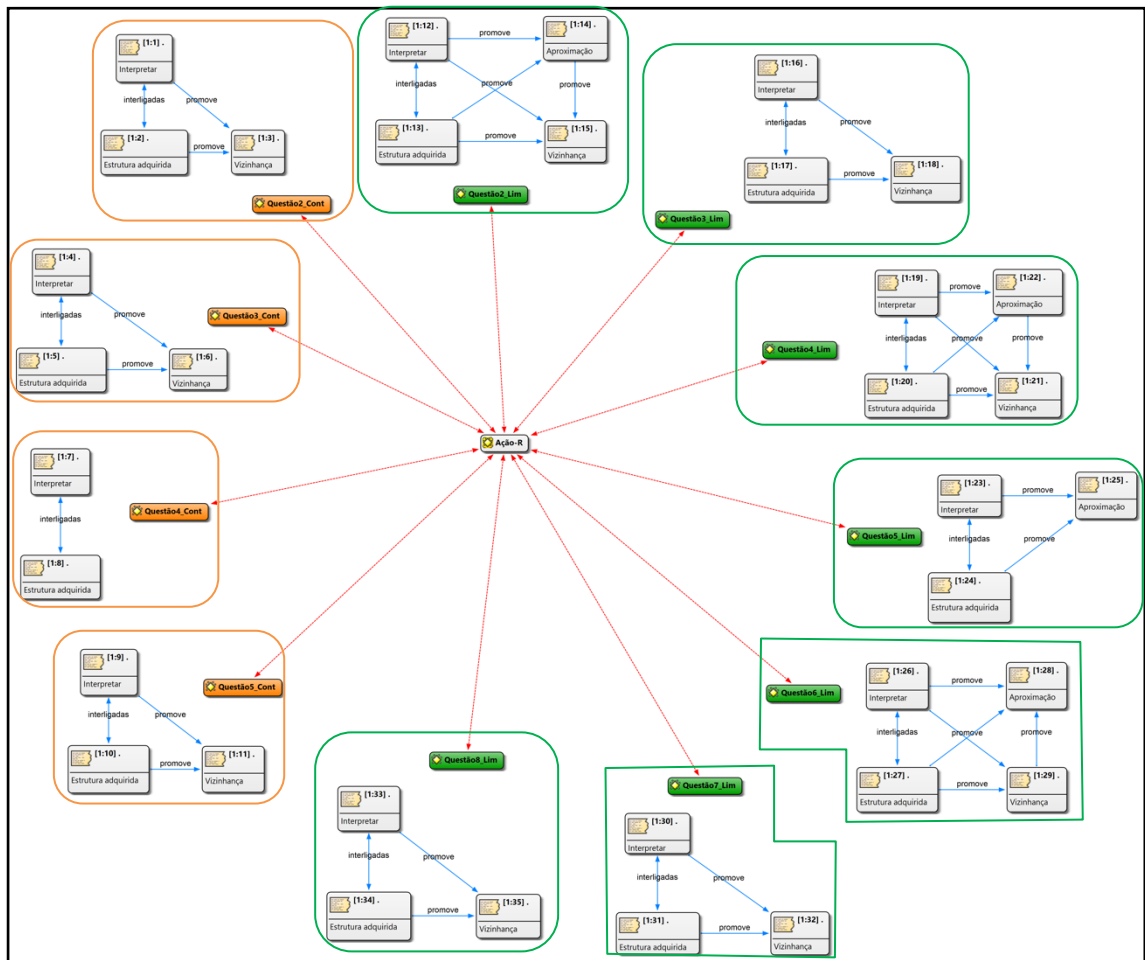


Figura 7.5 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da *Ação-R*

7.1.2 A relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-B*

Pretende-se, nesta subsecção, averiguar se durante a resolução das questões apresentadas aos alunos se evidenciam todas as subcategorias, ou apenas algumas, e qual a relação entre estas. Em virtude do que foi sugerido na análise efetuada no Capítulo 6, pretendemos investigar se os conhecimentos matemáticos adquiridos previamente serão imprescindíveis para que a *Ação-B* se manifeste, em particular no que concerne às subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construções prévias*.

A ordem de apresentação das relações estabelecidas entre as subcategorias da *Ação-B* resulta das ilações sugeridas no capítulo anterior, nomeadamente entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, seguindo-se as subcategorias *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, e finalmente as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*.

7.1.2.1 Estratégias e Aplicação de construção prévia

Pela análise efetuada no capítulo anterior, verificamos que as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* se encontram interligadas uma vez que a aplicação das *Estratégias* idealizadas pelos alunos os conduz à *Aplicação de construções prévias*, e, por outro lado, se os alunos não possuísem construções prévias para aplicar, tais *Estratégias* seriam desprovidas de significado. Deste modo, consideramos imprescindível que os alunos possuam conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente para que a *Ação-B* se possa evidenciar. Verificamos igualmente que estas duas subcategorias se manifestam em todas as questões. Além disso, destacamos que na Questão 2, sobre continuidade, apenas se manifestaram essas duas subcategorias, o que se deve ao facto de ser aquela em que se inicia o estudo dos conceitos de continuidade e de limite.

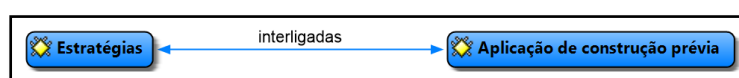


Figura 7.6 - Relação estabelecidas entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* da *Ação-B*

De um modo geral, verificamos que as *Estratégias* concebidas pelos alunos se centram na análise das representações gráficas das funções (*Estrutura adquirida*), quer tenham sido fornecidas no enunciado (*Interpretar*) ou efetuadas pelos alunos (*Aplicação de construção prévia*). Neste último caso constata-se a aplicação das noções de bola aberta e de bola fechada (*Aplicação de construções prévias*) de modo a refletir (*Estratégias*) as condições inerentes aos domínios das funções (*Interpretar + Estrutura adquirida*). Ademais, quando a representação gráfica é realizada pelos alunos manifesta-se fundamental o recurso aos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente de modo a possibilitar uma eficaz representação gráfica da função. Nesta instância, verificou-se a importância do estudo efetuado anteriormente relativo às funções afim e quadrática, aliadas aos cálculos necessários para a representação da reta e da parábola a elas associadas, nomeadamente, a determinação das suas raízes, com recurso à fórmula resolvente no caso da função quadrática e das coordenadas do vértice da parábola. Assim, consideramos que a representação dos gráficos por parte dos alunos incentiva-os a mobilizar conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente, o que não acontece quando aqueles são fornecidos nos enunciados das questões.

Outra *Estratégia* vastamente utilizada baseia-se na substituição de x , na expressão designatória de cada função, pelo valor onde se pretende calcular o limite ou os limites laterais, caso pertença ao domínio da função (*Interpretar + Estrutura adquirida*), determinando ainda, nestes casos, o valor da função nesse ponto (*Aplicação de construções prévias*), de modo a concluir acerca dos limites solicitados.

Nos casos em que o valor a substituir não pertença ao domínio da função, seja $-\infty$ ou $+\infty$ (*Interpretar*), a substituição terá de ser efetuada em valores que se vão *Aproximando* deles

(*Estratégias + Aplicação de construções prévias*), observando a tendência dos valores obtidos e assim prosseguir para a resolução final da questão.

Conjeturamos que a *Ação-R* e a *Ação-B* se encontram relacionadas, considerando que as subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida* e *Aproximação*, as quais integram a *Ação-R*, emergem na análise das subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, relativas à *Ação-B*, realizada neste tópico. As relações aqui sugeridas farão parte de uma posterior análise detalhada.

7.1.2.2 *Aplicação de construção prévia, Soluções intermédias e Justificação*

Da análise efetuada no Capítulo 6, constatamos que, à exceção da Questão 2 sobre continuidade, nas questões 3 e 5, sobre continuidade, e 2, 4, 5, 6 e 8, sobre limite, as subcategorias *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação* encontram-se relacionadas. Seguidamente iremos analisar essas conexões, com o objetivo de verificar em que condições se manifestam.

Pela análise efetuada, constatamos que os resultados obtidos pela *Aplicação de construções prévias* constituem *Soluções intermédias* para a resolução da respetiva questão, promovendo ambos *Justificações* para os cálculos e os resultados apresentados.

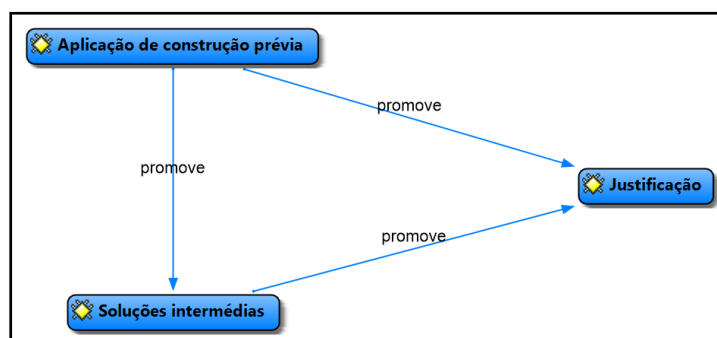


Figura 7.7 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação* da *Ação-B*

Nas questões 6 e 8, em aditamento às relações elencadas no parágrafo anterior, verificamos que nestes casos algumas *Soluções intermédias* promovem novamente a *Aplicação de construções prévias*. Por exemplo, e em relação à Questão 6, os resultados obtidos pelos cálculos dos limites laterais, os quais dependem de um parâmetro, conduziram à resolução de uma equação linear para calcular o valor desse parâmetro, o qual constitui nova *Solução intermédia*; no caso da Questão 8, o facto de ter sido necessário destacar a importância de o ponto pertencer, ou não, ao domínio da função.

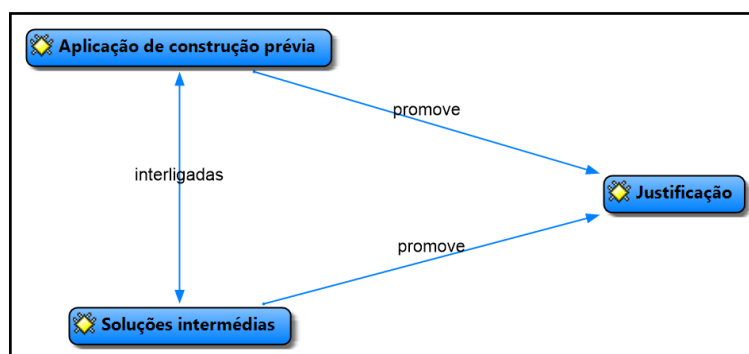


Figura 7.8 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação* da *Ação-B*

Finalmente, realçamos o facto de, em várias *Justificações*, os alunos recorrerem à noção de *Vizinhança*, e de a noção de *Aproximação* ter sustentado a *Aplicação de construções prévias*, nomeadamente quando os alunos realizam a substituição de x por valores que se vão aproximando do valor onde se pretende calcular determinados limites. Facto este já constado aquando da análise da relação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*.

As relações identificadas no parágrafo anterior sugerem-nos que a manifestação da *Ação-B* se encontra de algum modo relacionada com a *Ação-R*, o que irá ser objeto de uma análise mais aprofundada na secção 7.2 do presente capítulo.

7.1.2.3 *Estratégias, Aplicação de construção prévia, Soluções intermédias e Justificação*

Neste ponto iremos finalizar o estudo das relações estabelecidas entre as subcategorias da *Ação-B*, analisando as três questões em que todas as subcategorias se encontram, de alguma forma, conectadas. Em virtude da interligação entre as subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia* ter sido já analisada para todas as questões em 7.1.2.1, iremos aqui concentrar-nos nas restantes ligações.

Como já constatámos anteriormente, a subcategoria *Soluções intermédias* emerge sempre que os alunos *Aplicam construções prévias*, existindo, no caso da Questão 7, uma interligação entre ambas. Verificamos que os resultados que vão sendo obtidos pelos alunos se encontram *Justificados* em todas as manifestações decorrentes da idealização de *Estratégias*, da *Aplicação de construções prévias* e da obtenção de *Soluções intermédias*.

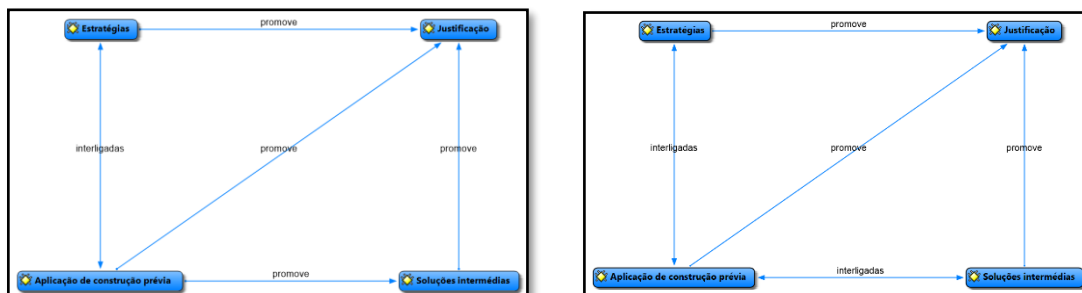


Figura 7.9 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação* da *Ação-B*

Com o intuito de obtermos uma visão geral das relações entre as subcategorias *Estratégias*, *Aplicação de construção prévia*, *Soluções intermédias* e *Justificação*, relativas à *Ação-B*, foi construído o gráfico constante na Figura 7.10 (ver Anexo 7.2).

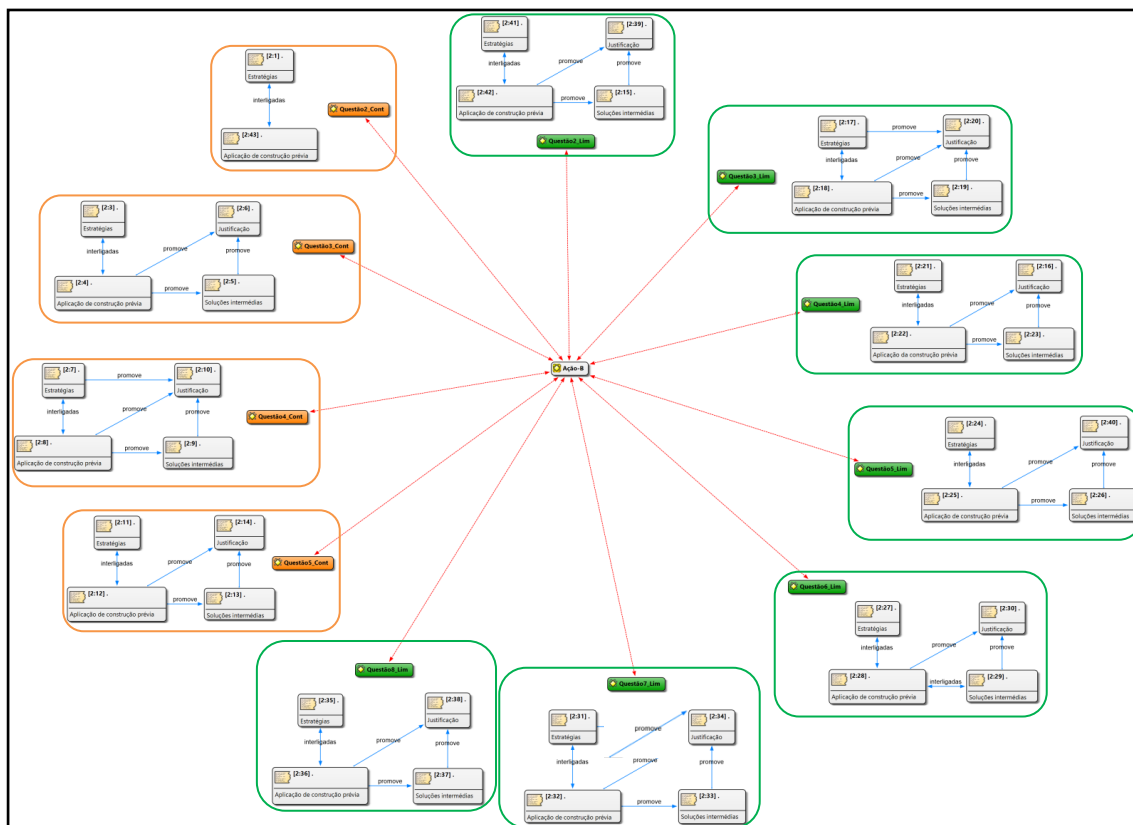


Figura 7.10 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da *Ação-B*

7.1.3 A relação estabelecida entre as subcategorias da *Ação-C*

Sintetizando a análise efetuada à manifestação da *Ação-C* em cada uma das questões no capítulo precedente, verificamos que em todas as questões se evidenciam as subcategorias *Reorganização* e *Comunicação*. Atendendo a que as construções pretendidas na *Ação-C* são bastante particulares, não se verificando por conseguinte grandes semelhanças nas relações

entre as suas subcategorias, optámos por realizar aqui uma análise um pouco mais geral, considerando apenas as relações entre as seguintes subcategorias: (1) *Reorganização* e as construções associadas ao bloco de questões sobre a noção de continuidade, (2) *Reorganização* e as construções associadas às questões sobre o conceito de limite e (3) Todas as construções de continuidade e de limite e *Comunicação*.

7.1.3.1 Reorganização e as construções associadas às questões sobre a noção de continuidade

De um modo geral, como já tivemos oportunidade de referir, todas as questões sobre o conceito de continuidade encontram-se associadas às representações gráficas de funções, tenham estas sido fornecidas no enunciado (*Interpretar*) ou efetuadas pelos alunos (*Estruturas adquiridas + Estratégias + Aplicação de construção prévia*).

A abordagem dos alunos para concluírem a resolução destas questões inicia-se com a *Reorganização* das *Soluções intermédias* obtidas, associadas às noções de bola aberta e de bola fechada (*Estruturas adquiridas*) e a sua influência na noção de *Vizinhança*, em particular para as construções de *Continuidade à esquerda num ponto*, *Continuidade à direita num ponto* e *Continuidade num ponto*. Considerando que as construções relativas à continuidade lateral constituem um meio para atingir a *construção* de *Continuidade num ponto*, tudo sugere que as subcategorias *Continuidade à esquerda num ponto* e *Continuidade à direita num ponto* se encontram aninhadas na subcategoria *Continuidade num ponto*.

Em relação à *Continuidade num ponto isolado*, os alunos recorrem à noção de *Vizinhança* para alcançarem a dita *construção*, considerando que para qualquer *Vizinhança* da sua abcissa as *Vizinhanças* associadas às ordenadas se concentram em torno de um único valor, neste caso a imagem do ponto isolado. Aliando estas construções à identificação dos domínios de funções (*Estruturas adquiridas*), os alunos atingem as construções de *Continuidade num intervalo* e de *Continuidade no domínio*.

Comprova-se que as construções relativas às questões envolvendo a noção de continuidade são sempre iniciadas pela *Reorganização* das construções obtidas anteriormente aquando da manifestação da *Ação-B*. Mais ainda, verifica-se que, em certos casos, tais construções se encontram por sua vez relacionadas, promovendo novas construções associadas ao conceito em estudo, tal como se evidencia nas representações gráficas que se seguem.

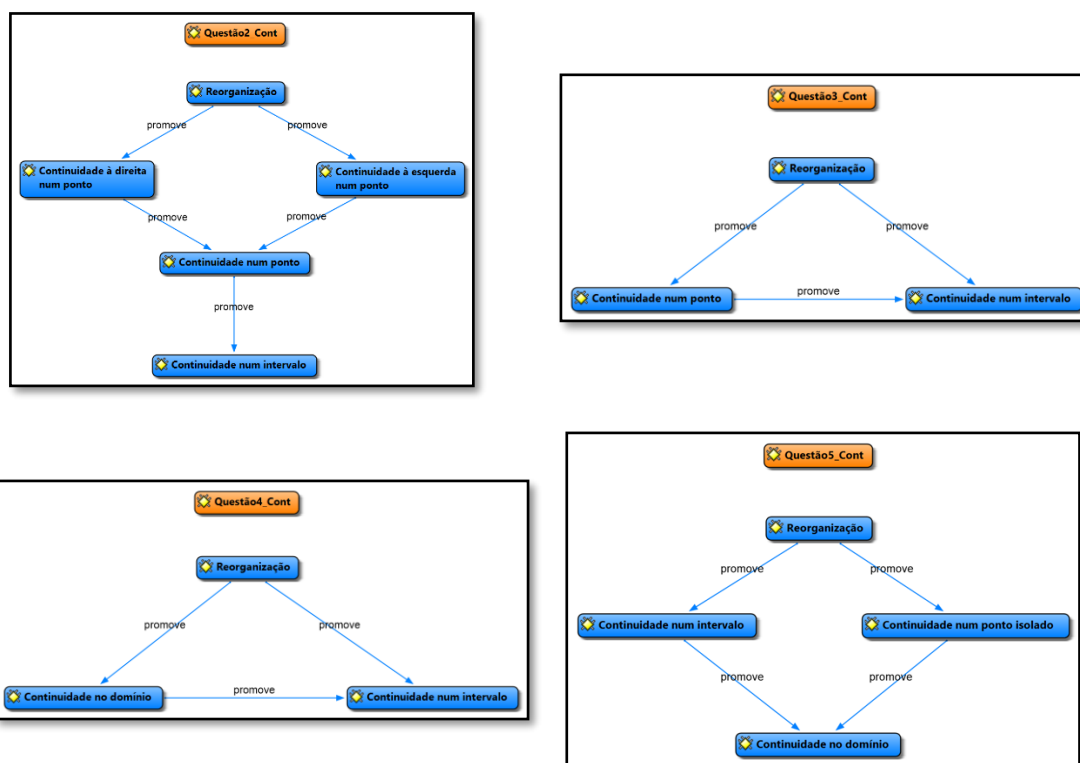


Figura 7.11 - Relação estabelecida entre as subcategorias da Ação-C nas questões sobre continuidade

Face ao exposto, afigura-se-nos a existência de alguma conexão entre a Ação-R, a Ação-B e a Ação-C, essencialmente ao nível da Reorganização de construções intermédias obtidas anteriormente, cuja análise será efetuada na secção 7.2 relativa ao papel das ações epistémicas na construção dos conceitos de continuidade e de limite.

7.1.3.2 Reorganização e as construções associadas às questões sobre o conceito de limite

No que se refere às construções pretendidas sobre o conceito de limite, importa realçar que algumas foram obtidas diretamente pelos alunos, não havendo lugar à Reorganização, pelo que nos cingiremos aqui à análise daquelas em que os alunos Reorganizaram construções anteriores. Neste caso, convém recordar que algumas questões foram abordadas através da representação gráfica das funções e as restantes analiticamente, pelo que a análise das questões relativas ao conceito de limite será apresentada refletindo essa distinção.

Considerando as especificidades das questões relacionadas com o conceito de limite, impõe-se efetuar uma análise mais pormenorizada para cada questão.

Iniciaremos a análise pelas questões sobre o conceito de limite que foram abordadas graficamente.

Relativamente à Questão 2, cujo objetivo se prende com a construção de *Limite no infinito*, os alunos constataram, num dos casos, que a secção do gráfico que se pretendia analisar era

definida por uma reta horizontal (*Interpretar + Estrutura adquirida*), alcançando assim a *construção* pretendida. Em outra instância, foi necessário analisar o comportamento da função em $-\infty$, considerando os conhecimentos adquiridos relativamente à função quadrática (*Interpretar + Estrutura adquirida*).

Em relação à *construção* de *Limite num ponto exterior*, bastou aos alunos verificarem graficamente a não existência de imagens (*Interpretar*) para concluir acerca da não existência de limite nesses casos.

Para a *construção* de *Limite num ponto de descontinuidade*, igualmente pretendida na Questão 3, os alunos consideraram as *Soluções intermédias* obtidas anteriormente, neste caso a identificação dos objetos em cujas *Vizinhanças* as imagens se encontram em *Vizinhanças* distintas, constatando que nesses pontos não existe o limite da função.

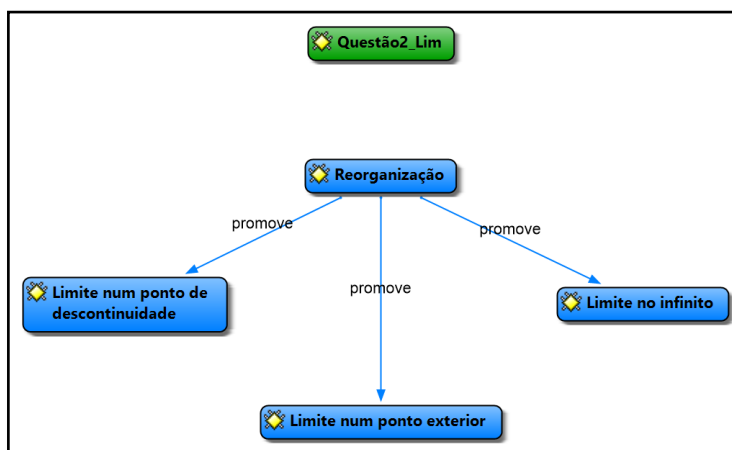


Figura 7.12 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização*, *Limite num ponto de descontinuidade*, *Limite no infinito* e *Limite num ponto exterior* da Ação-C

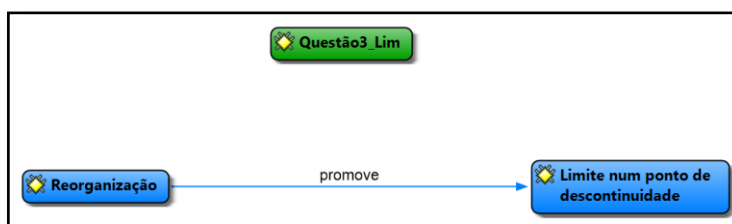


Figura 7.13 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* e *Limite num ponto de descontinuidade* da Ação-C

Seguidamente analisamos as questões sobre o conceito de limite que foram abordadas numa perspetiva analítica.

Na Questão 4, a *Reorganização* das *Soluções intermédias* obtidas pelo cálculo das substituições diretas de x pelo valor onde se pretende calcular o limite conduz imediatamente à *construção* de *Cálculo de limite por substituição*.

Nos casos em que se pretendia o cálculo de limites num ponto que não pertencia ao domínio da função, em $-\infty$ ou em $+\infty$, uma vez que a substituição não poderia ser direta, os alunos recorrem à noção de *Aproximação* para efetuar substituições de x por valores cada vez mais próximos daqueles onde se pretende calcular o limite, as quais constituem *Soluções intermédias* obtidas aquando da manifestação da *Ação-B*. Verificando a tendência dos resultados assim obtidos, os alunos atingem a *construção* de *Calculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes*, pretendida com esta questão.

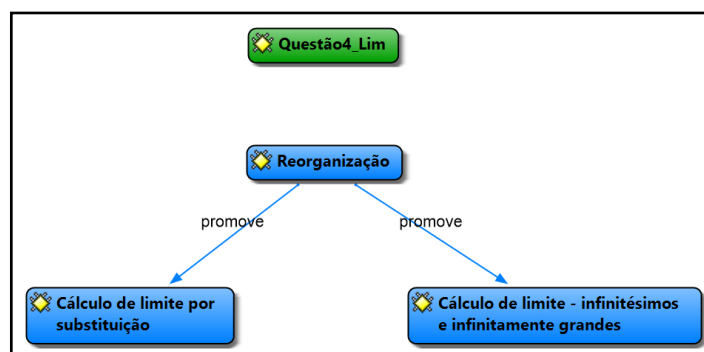


Figura 7.14 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização*, *Cálculo de limite por substituição* e *Cálculo de limite - infinitésimos e infinitamente grandes* da *Ação-C*

Relativamente às questões 5, 6 e 7, a *Reorganização* das *Soluções intermédias*, alcançadas anteriormente através da substituição direta de x pelo valor onde se pretende calcular o limite, a comparação entre os limites laterais e, em alguns casos, com o valor da função no ponto, conduz os alunos a atingirem o objetivo proposto na questão, neste caso a *construção* de *Limite com limites laterais*.



Figura 7.15 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* e *Limite com limites laterais* da *Ação-C*

No caso particular da *Questão 7*, a *construção* de *Limite com limites laterais* referida no parágrafo anterior, constitui o ponto de partida para que os alunos concluam que a função também não será contínua em $x = 1$. Combinando esse resultado com o domínio da função, os alunos conquistam a pretendida *construção* de *Continuidade num intervalo*.

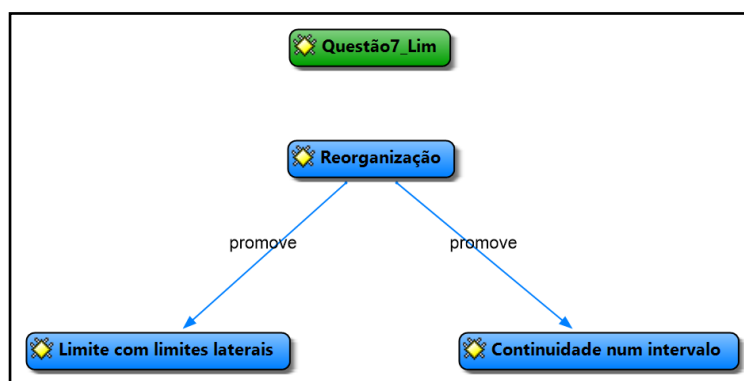


Figura 7.16 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização*, *Limite com limites laterais* e *Continuidade num intervalo* da Ação-C

A *construção* visada na Questão 8 surge em consequência de uma afirmação proferida pelos alunos - “DV19: Uma função é contínua num ponto se existir o limite da função nesse ponto!”, a qual se encontra incompleta, tendo sido, por esse motivo, considerada uma *Solução intermédia*. Com o intuito de demonstrar a necessidade de o ponto pertencer ao domínio da função para que a afirmação se encontre totalmente correta, foi introduzido um Caso Extra para análise, para o qual os alunos atingem a *construção* de *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio).

Tendo constatado a importância de um ponto pertencer ou não ao domínio de uma função para relacionar os conceitos em estudo, os alunos *Reorganizam* as construções obtidas previamente, em particular os valores dos limites laterais e o valor da função nesse ponto, as quais em conjunto com a verificação do ponto pertencer ao domínio da função converge na *construção* de *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio*.

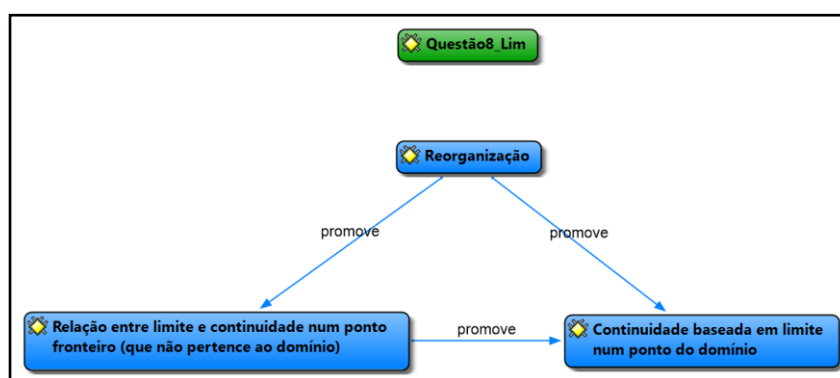


Figura 7.17 - Relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização*, *Relação entre limite e continuidade num ponto fronteiro* (que não pertence ao domínio) e *Continuidade baseada em limite num ponto do domínio* da Ação-C

Similarmente ao que constatámos relativamente à relação entre a *Reorganização* e todas as construções associadas às questões sobre a noção de continuidade, verificamos que as construções relativas às questões envolvendo o conceito de limite principiam com a

Reorganização das construções obtidas anteriormente. Mais ainda, comprovamos igualmente que por vezes essas construções originam novas construções associadas ao conceito de limite.

Analogamente ao constatado no tópico anterior, observamos existir uma relação entre a Ação-R, a Ação-B e a Ação-C, a qual será analisada na secção 7.2 relativa ao papel das ações epistémicas na construção dos conceitos de continuidade e de limite.

7.1.3.3 Todas as construções de continuidade e de limite e Comunicação

Da análise geral às conclusões obtidas para cada questão no Capítulo 6, concluímos que todas as construções, sejam elas relacionadas com a noção de continuidade ou com o conceito de limite, promovem a Comunicação dos resultados obtidos, quer seja verbalmente ou registado pelos alunos.

Com o intuito de resumir a análise das relações verificadas anteriormente entre as subcategorias evidenciadas na Ação-C, foi novamente construído o gráfico seguinte no software ATLAS.ti (ver Anexo 7.3).

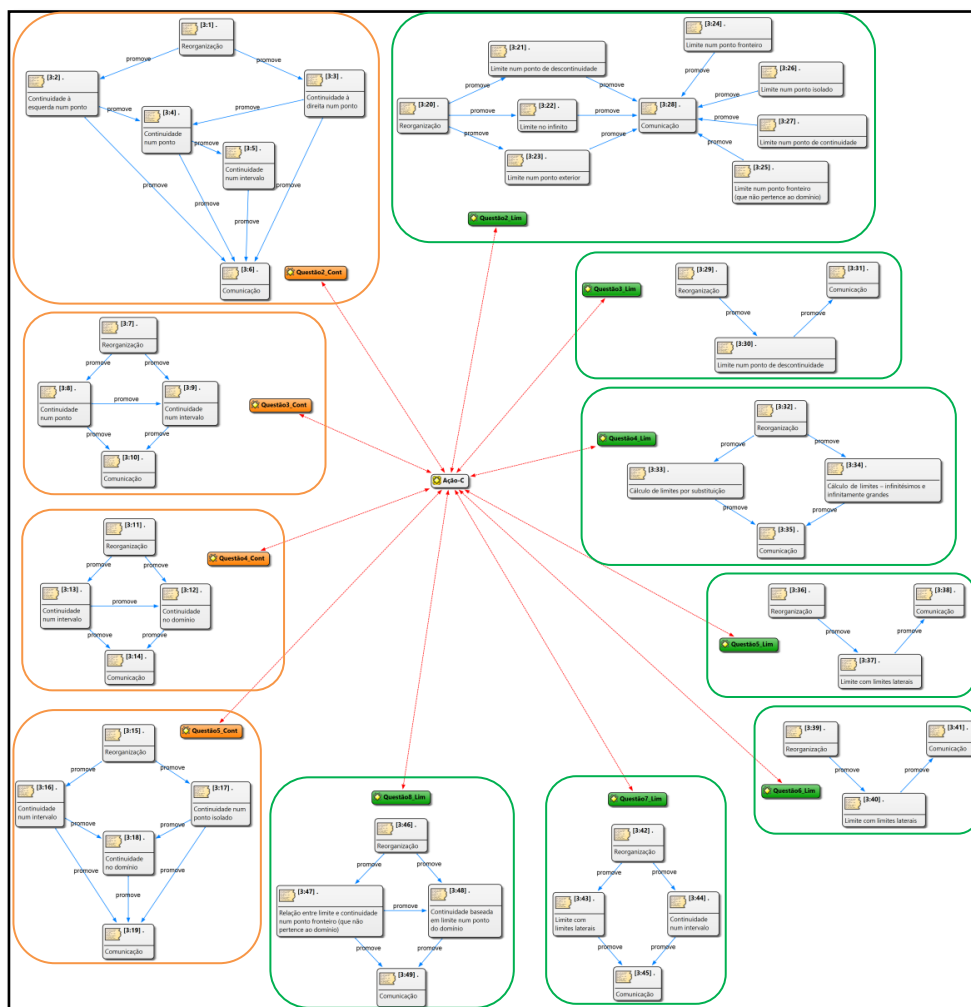


Figura 7.18 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da Ação-C

7.2 O papel das ações epistémicas na construção dos conceitos de continuidade e de limite

Até agora, as ações epistémicas definidas no modelo *RBC+Co* têm sido analisadas separadamente. Nesta secção iremos discutir as relações entre elas, sugeridas pela análise transversal e pormenorizada dos resultados obtidos no Capítulo 6. Ressalvamos o facto de a *Consolidação* apenas se ter manifestado durante a resolução de algumas questões, e nunca nas questões iniciais relativas a cada um dos conceitos em estudo, em virtude de não existirem ainda construções que possam ser *Consolidadas*.

A supracitada análise permite comprovar a existência de conexões entre a *Ação-R* e a *Ação-B*, entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C* e entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Consolidação*, as quais passaremos a examinar.

7.2.1 *Ação-R* e *Ação-B*

Os resultados evidenciados pela *Ação-R* ao longo da análise efetuada a cada questão demonstram que o desenvolvimento das construções de continuidade e de limite esteve subjacente no momento em que os alunos exploram nos enunciados as representações gráficas das funções, as expressões analíticas de determinadas funções, distinguindo os casos em que a função de encontra definida por uma única expressão designatória ou por ramos. Esteve igualmente presente na interpretação da linguagem simbólica, essencial para a *construção* do conceito de limite.

A confluência dos resultados que foram sendo obtidos em análises anteriores permite-nos concluir que o processo de abstração dos alunos se inicia sempre com a *Ação-R*, nomeadamente com a interpretação e análise dos dados enunciados, através dos quais os alunos selecionam estruturas adquiridas anteriormente, o que poderá ter fomentado o interesse para prosseguir com a resolução da questão, demonstrada na *Ação-B*, em particular com a idealização de estratégias e respetiva aplicação.



Figura 7.19 - *Ação-R* e *Ação-B* no processo de *construção* do novo conhecimento matemático

Por outro lado, ao aplicarem as construções prévias os alunos sentem necessidade de voltar a interpretar o enunciado e a recorrer a diferentes estruturas adquiridas de modo a prosseguirem com a resolução das questões propostas, evidenciando que a *Ação-B* promove o recurso à *Ação-R*.



Figura 7.20 - *Ação-R* e *Ação-B* no processo de *construção* do novo conhecimento matemático

Paralelamente, a aplicação de construções prévias evidenciadas na *Ação-B*, em conjunto com as noções de vizinhança e/ou de aproximação manifestadas na *Ação-R*, conduzem à obtenção de soluções intermédias de modo a prosseguirem com a resolução das questões colocadas.

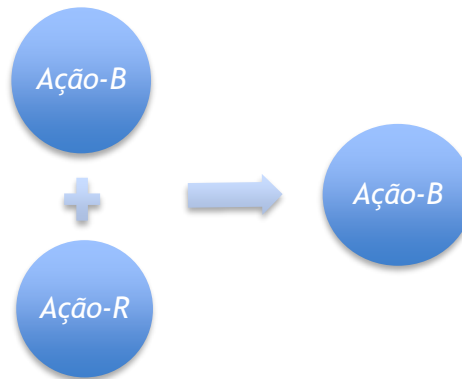


Figura 7.21 - *Ação-R* e *Ação-B* no processo de *construção* do novo conhecimento matemático

Os resultados apresentados revelam que o desenvolvimento da *Ação-R* é decisivo para que a *construção* do novo conhecimento matemático ocorra, pelo que entendemos que os alunos devem ser levados a explorar, em profundidade, os enunciados das questões, procurando identificar construções adquiridas previamente e estabelecer relações entre as mesmas.

A análise das resoluções efetuadas pelos alunos permite ainda identificar o desenvolvimento das construções de continuidade e de limite durante a manifestação da *Ação-B*, quando os alunos relacionam os dados interpretados, utilizam formas diferenciadas para expor o seu raciocínio e para obterem soluções intermédias, com foco na representação gráfica de funções e na substituição de x por um determinado valor. O desenvolvimento do processo de abstração observa-se em particular quando os alunos transitam da resolução das questões com base nas representações gráficas das funções para a sua forma analítica.

Os resultados apresentados valorizam o desenvolvimento da *Ação-B* na *construção* do novo conhecimento matemático, evidenciando progressivamente uma maior autonomia por parte dos alunos à medida que foram avançando na resolução das questões propostas.

Pelo exposto, podemos concluir que, tal como suspeitámos aquando da análise de segunda ordem realizada no Capítulo 6, a *Ação-R* e a *Ação-B* concorrem em todas as questões, sendo desta forma essenciais para que o processo de abstração de desenvolva.

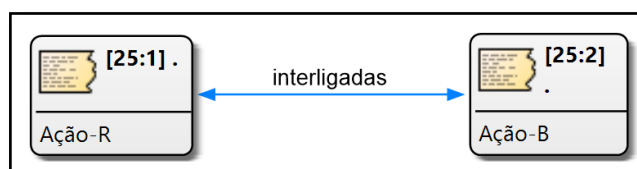


Figura 7.22 - Relação estabelecida entre a *Ação-R* e a *Ação-B* no processo de *construção*

7.2.2 *Ação-R*, *Ação-B* e *Ação-C*

As construções manifestadas na *Ação-C* são sempre iniciadas pela reorganização das construções anteriores obtidas pela conexão ente a *Ação-R* e a *Ação-B* identificada no tópico precedente, em particular das soluções intermédias alcançadas, fruto dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos. Estes dependem da mobilização de conhecimentos matemáticos anteriores, destacando-se a representação gráfica das funções afim e quadrática e suas propriedades, as noções de vizinhança e aproximação, consoante as questões em estudo incidem sobre a noção de continuidade ou de limite, e ainda a manipulação das expressões designatórias das funções, incidindo particularmente na simplificação de frações e na substituição de x por determinado valor. No respeitante ao desenvolvimento da *Ação-C*, constata-se uma evolução por parte dos alunos, revelando progressivamente maior facilidade e destreza ao combinarem as construções anteriores que permitem alcançar a *construção* pretendida. Neste sentido, consideramos indispensável fomentar a continuidade e o desenvolvimento destas competências, as quais certamente irão contribuir para facilitar a aprendizagem, por parte dos alunos, de conceitos relacionados com as noções de continuidade e de limite, nomeadamente de derivada e de integral.

Considerando que o processo de reorganização está dependente da combinação entre a interpretação dos enunciados, as estruturas adquiridas identificadas, as estratégias concebidas e colocadas em prática pela aplicação de construções prévias, dando origem a soluções intermédias que contribuem para o desenvolvimento do processo de abstração, então, o desenvolvimento da *Ação-R* e da *Ação-B* torna-se essencial para a *construção* do novo conhecimento matemático, pretendido na *Ação-C*. Deste modo, constatamos que o processo de reorganização é essencial para que a *Ação-C* ocorra.

Face à simbiose aqui descrita, concluímos que o desenvolvimento do processo de abstração e, em particular, a sequência de raciocínio estabelecida pelos alunos está dependente das características da própria questão. Confirmada esta relação, impõe-se analisar de que modo os professores selecionam e estruturam as questões, considerando as características dos seus alunos, com o objetivo de promover a *construção* dos conceitos de continuidade e de limite.

Ao longo da análise efetuada no capítulo anterior, fomos conjeturando que a interligação entre a *Ação-R* e a *Ação-B* desencadeava a *Ação-C*, facto que vimos aqui confirmado.

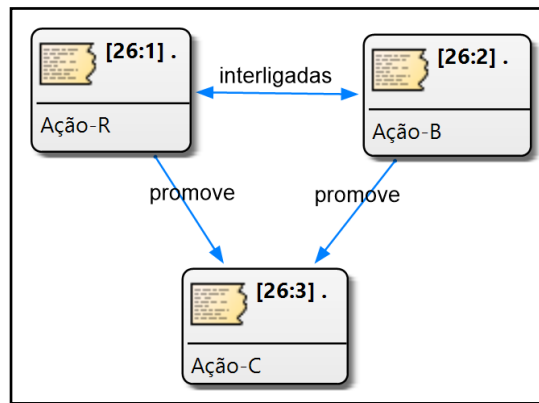


Figura 7.23 - Relação estabelecida entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C* no processo de *construção*

7.2.3 *Ação-R*, *Ação-B* e *Consolidação*

Por força da análise efetuada no Capítulo 6, concluímos que a *Consolidação* apenas se manifestou na Questão 4, relativa ao estudo da continuidade, e nas questões 3, 6, 7 e 8 sobre limites. Mais ainda, verificamos que a *Consolidação* nunca emergiu nas primeiras questões, o que é expectável dado que constituem o início do estudo dos referidos conceitos, não havendo, portanto, lugar à *Consolidação*.

Durante o processo de abstração, a *Consolidação* é identificada sempre que os alunos relacionam a resolução de uma questão com construções adquiridas em questões anteriores, evidenciando-se deste modo em simultâneo com a *Ação-R*, em particular aquando da interpretação do enunciado e da seleção de estruturas adquiridas idênticas, e com a *Ação-B*, sempre que as estratégias utilizadas eram similares. A manifestação da *Consolidação* confere aos alunos um aprofundamento dos conhecimentos adquiridos ao longo da resolução das várias questões, permitindo concluir que a experiência e os conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores são fundamentais para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático.

Seguidamente iremos analisar pictoricamente cada uma das questões onde se evidenciou a *Consolidação*, de modo a aferirmos em que condições se verifica a sua relação com a *Ação-R* e com a *Ação-B*.

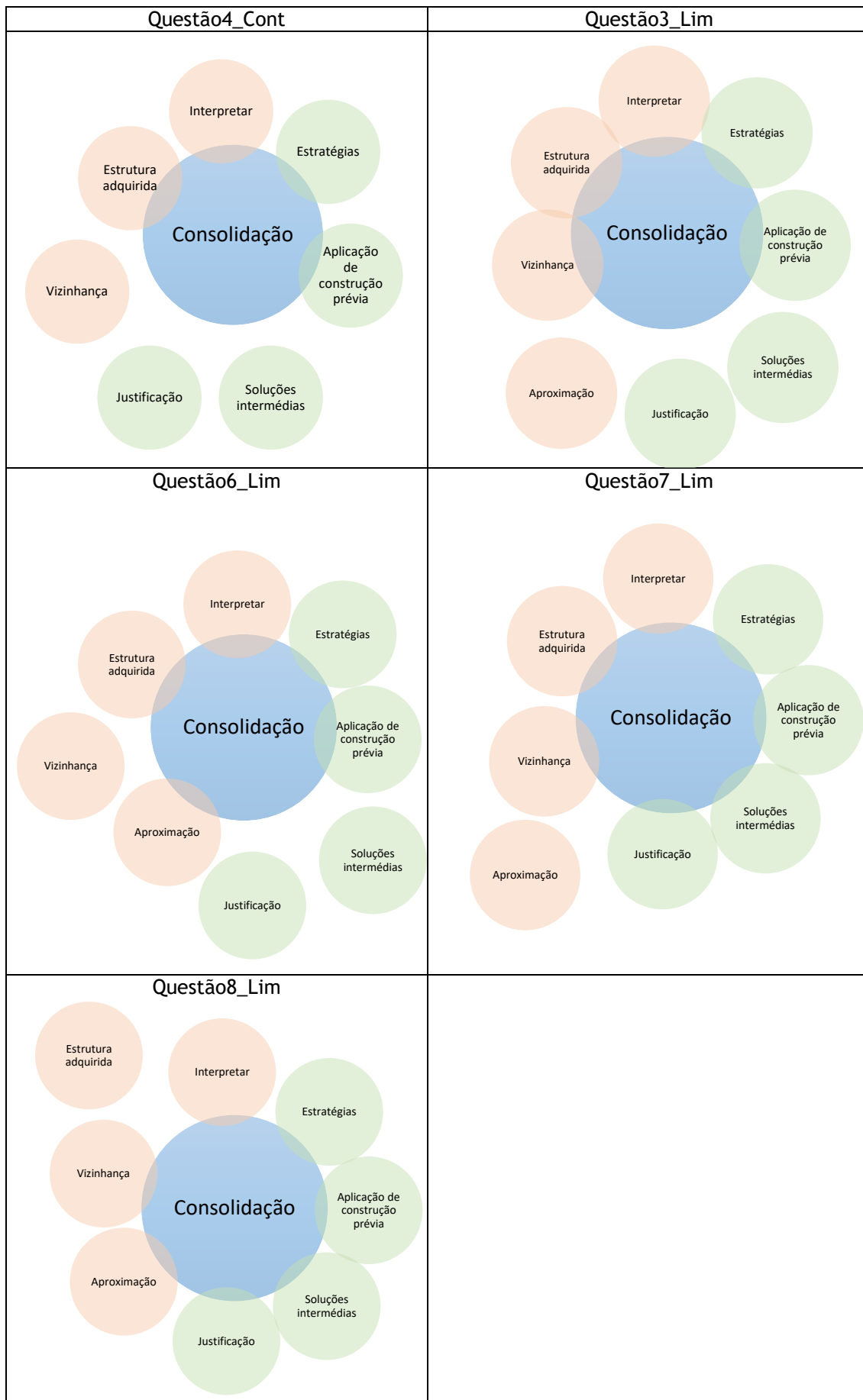


Figura 7.24 - Relação estabelecida entre a Ação-R, a Ação-B e a Consolidação

Em suma, podemos constatar que a ação epistémica *Consolidação* se manifestou em simultâneo com a *Ação-R*, quando os alunos interpretam os enunciados das questões, verificando semelhanças com questões resolvidas anteriormente e mobilizam estruturas adquiridas nessas questões, fazendo-os recorrer similarmente às noções de vizinhança e de aproximação. A *Consolidação* encontra-se de igual forma relacionada com a *Ação-B*, uma vez que na idealização de estratégias os alunos aplicam construções efetivadas em questões prévias, de modo a alcançarem soluções intermédias para prosseguir com a resolução da questão em estudo.

Relativamente às subcategorias *Interpretar*, *Estrutura adquirida*, manifestadas na *Ação-R*, e às subcategorias *Estratégias* e *Aplicação de construção prévia*, evidenciadas na *Ação-B*, constatamos que estas integram a *Consolidação* em todas as questões, excetuando-se o facto de na Questão 8 não se manifestar a *Estrutura adquirida* devido à particularidade do respetivo enunciado.

Comprovamos ainda que apenas nas últimas questões (7 e 8) são acrescentadas as subcategorias *Soluções intermédias* e *Justificação* para evidenciar a *Consolidação* ocorrida nestas questões.

Relativamente à inclusão das subcategorias *Vizinhança* e *Aproximação*, não se constata qualquer regularidade que revele quando estas são incluídas na *Consolidação*.

Face ao exposto, concluímos que, nos casos em que a ação epistémica *Consolidação* se manifesta, esta encontra-se sempre interligada quer com a *Ação-R* quer com a *Ação-B*.

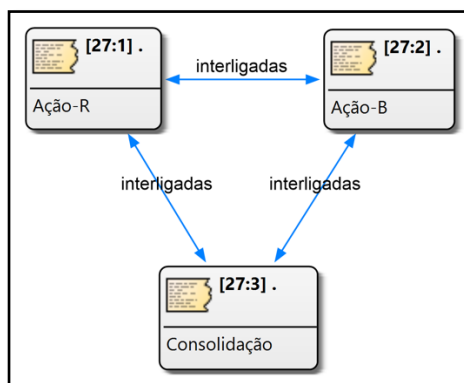


Figura 7.25 - Relação estabelecida entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Consolidação* no processo de *construção*

Capítulo 8

Conclusões

O presente capítulo tem como principal objetivo apresentar uma súmula do trabalho desenvolvido, quer ao nível teórico e metodológico, quer ao nível dos resultados empíricos obtidos, respondendo assim de forma assertiva às questões de investigação. É composto por três secções:

1. Síntese, onde se faz referência aos aspetos mais relevantes já apresentados e que se prendem com a motivação para este estudo, com as questões de investigação colocadas, com o problema de estudo definido, com o enquadramento teórico e com a metodologia utilizada;
2. Apresentação das conclusões, respeitante às ações epistémicas identificadas no decurso do processo de abstração dos alunos, durante a *construção* dos conceitos de continuidade e de limite, e ao modo como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas.
3. Implicações e recomendações, que contempla a apresentação de sugestões para o trabalho a desenvolver com alunos do ensino superior.

No que se refere à segunda secção, serão primeiramente apresentadas as conclusões relativas às ações epistémicas *per si* e seguidamente as que respeitam à forma como se sequenciam e relacionam entre si.

As que concernem às ações epistémicas, distribuem-se pelos seguintes tópicos:

- i. O desenvolvimento da *Ação-R* durante o processo de abstração;
- ii. O desenvolvimento da *Ação-B* durante o processo de abstração;
- iii. O desenvolvimento da *Ação-C* durante o processo de abstração;
- iv. O desenvolvimento da *Consolidação* durante o processo de abstração.

Já as conclusões provenientes do modo como estas se sequenciam e relacionam entre si, apresentam-se organizadas da seguinte forma:

- i. A relação estabelecida entre a *Ação-R* e a *Ação-B*;
- ii. A relação estabelecida entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Ação-C*;
- iii. A relação estabelecida entre a *Ação-R*, a *Ação-B* e a *Consolidação*.

8.1 Síntese

O presente estudo adveio das preocupações da investigadora relativamente à *construção* dos conceitos de limite e de continuidade por parte dos alunos, nos quais revelam manifestas dificuldades. As mais sentidas relativamente à compreensão do conceito de limite refletem-se, naturalmente, na compreensão do conceito de continuidade visto este ser definido com base no primeiro, de acordo com o currículo ministrado no ensino secundário até ao ano letivo de 2015/16, e também no novo currículo do 11.º ano, que começou a vigorar no ano letivo 2016/17.

Da mesma forma, entende-se que parte substancial das dificuldades posteriormente encontradas em conceitos como diferenciabilidade e integração advêm de falhas na aprendizagem do conceito e do cálculo de limites.

A análise das dificuldades sentidas neste processo é igualmente relevante e pode servir para melhorar de forma eficaz todo o processo de lecionação. A identificação das principais dificuldades dos alunos, e a razão por que surgem, servirão para atuarmos de modo profilático nas aulas em ordem a trabalhar detalhadamente os pontos mais delicados, ou a definir novas abordagens aos conceitos mais complicados.

No presente estudo, e relativamente aos conceitos de limite e de continuidade, opta-se por inverter a ordem de lecionação destes conteúdos, introduzindo-se o conceito de vizinhança de um ponto como a base desta nova abordagem, seguindo a linha de pensamento de Ferreira (2005), apresentando-se esta alteração da sequência de ensino como promissora. Considera-se que a noção de vizinhança constitui um contexto facilitador de uma melhor compreensão dos conceitos de continuidade e de limite, assumindo-se um poderoso fio condutor da continuidade para os limites. O interesse da investigadora foca-se em compreender como é que os alunos constroem o novo conhecimento matemático neste contexto, através da resolução de um conjunto de questões que estimulam os alunos à aquisição de competências matemáticas que favorecem essa *construção*.

Considerando o interesse em compreender e descrever o modo como os alunos vão construindo os conceitos de continuidade e de limite, adotou-se o modelo teórico e epistemológico *AiC* (Hershkowitz, Schwartz e Dreyfus, 2001). Neste caso focado na emergência associada ao processo de obtenção dessa *construção*, e onde se utiliza a metodologia *RBC+Co* com o objetivo de averiguar de que modo as ações epistémicas (*Ação-R*, *Ação-B*, *Ação-C* e *Consolidação*) estão envolvidas e contribuem para a nova *construção* pretendida. Neste sentido, adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa, inserida no paradigma interpretativo (Bogdan e Biklen, 1994).

Estabelecidos os referentes teóricos, a investigadora procedeu à recolha dos dados, através dos registos escritos dos alunos, bem como dos registos audiovisuais das aulas em que os conceitos de continuidade e de limite foram introduzidos. Os dados recolhidos foram produzidos por 22

alunos do primeiro ano do Ensino Superior Politécnico, durante quatro aulas de 120 minutos cada, tendo apenas sido analisadas as produções de dois desses alunos em virtude de terem respondido à totalidade das questões apresentadas, assim como pelo acompanhamento e interesse manifestado nas aulas. Não sendo docente da UC em que o presente estudo de realizou, a investigadora participou em todas aulas afetas ao mesmo, com liberdade para intervir sempre que considerasse necessário.

Seguidamente foi efetuada a análise dos dados recolhidos, com recurso ao *software* ATLAS.ti, aplicando a metodologia *RBC+Co*, a qual integra os capítulos 6 e 7 do presente trabalho.

Com base nas conclusões obtidas nesses capítulos, pretende-se dar resposta às questões de investigação:

1. que ações epistémicas são possíveis identificar, no decurso do processo de abstração dos alunos durante a *construção* do novo conhecimento matemático, nomeadamente:
 - enquanto desenvolvem a compreensão dos dados enunciados;
 - identificam a necessidade de recorrer a outras noções matemáticas ou construções já adquiridas;
 - aplicam estratégias e soluções intermédias;
 - organizam conhecimentos e ideias;
 - constroem os conceitos de limite e de continuidade?
2. como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?

conforme se explana na secção seguinte.

8.2 Apresentação das conclusões

8.2.1 As ações epistémicas identificadas no decurso do processo de abstração dos alunos durante a construção dos conceitos de continuidade e de limite

Nesta secção procura-se dar resposta à primeira questão de investigação, através da identificação das ações epistémicas que estiveram envolvidas no processo de abstração dos alunos durante a *construção* do novo conhecimento matemático.

8.2.1.1 O desenvolvimento da Ação-R durante o processo de abstração

Considerando a análise de terceira ordem efetuada no Capítulo 7, constatamos que a *construção* do novo conhecimento matemático resulta do processo de abstração realizado pelos alunos, o qual neste estudo foi sempre desencadeado pela *Ação-R*.

A fase inicial do processo de abstração emerge com a *Interpretação* dos enunciados das questões propostas, a qual se encontra intrinsecamente relacionada com a identificação de *Estruturas* anteriormente *adquiridas* pelos alunos, em particular as representações gráficas de funções, ligadas às noções de bola aberta e de bola fechada, o reconhecimento das expressões analíticas de determinadas funções, bem como de funções definidas por diferentes expressões analíticas em partes do seu domínio, a simplificação de frações recorrendo à fatorização de polinómios e à aplicação de casos notáveis e ao cálculo de domínios de funções.

Verifica-se um desenvolvimento da *Ação-R*, no presente trabalho, durante o processo de abstração dos alunos. Este desenvolvimento é particularmente evidente quando os alunos já não dependem da representação gráfica das funções e passam a trabalhar com as suas expressões analíticas.

No caso particular das questões relativas ao conceito de limite, consideramos que foi fundamental para os alunos a compreensão da notação matemática de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, sem a qual seria impossível dar continuidade à resolução destas questões, e para a qual os alunos identificam a necessidade de recurso à noção de *Aproximação*.

Verificamos igualmente que, na maioria das vezes, os alunos recorrem à noção de *Vizinhança*, já do seu conhecimento aquando do estudo dos extremos de funções, identificada quer na fase inicial do processo de abstração, quer durante o processo de *construir* as soluções necessárias que conduzem à resolução das questões propostas. Realçamos assim, a importância do conceito de *Vizinhança*, o qual constitui um elemento facilitador da *construção* dos conceitos de continuidade e de limite por parte dos alunos, sendo amplamente utilizado, constituindo igualmente um reforço para a leção dos mencionados conceitos.

Verificando que o processo de abstração se inicia com a *Ação-R*, concluímos que esta é essencial para que as restantes ações epistémicas se evidenciem.

8.2.1.2 O desenvolvimento da *Ação-B* durante o processo de abstração

A análise de terceira ordem efetuada no capítulo anterior permite-nos concluir que a *Interpretação* do enunciado e a identificação de *Estruturas adquiridas* alavancam a evolução do processo de abstração dos alunos, projetando *Estratégias* que lhes permitam avançar com a resolução das questões.

A aplicação dessas *Estratégias* encontra-se interligada com a *Aplicação de construções prévias*, visto não ser possível os alunos conceberem *Estratégias* sem possuírem construções prévias para aplicar, as quais são identificadas pelas *Estruturas adquiridas* aquando da manifestação da *Ação-R*. Por seu turno, a *Aplicação das construções prévias* coloca em prática as *Estratégias* idealizadas.

A *Aplicação de construções prévias* constitui a parte fulcral da *Ação-B*, já que é aqui que os alunos aplicam variadas construções matemáticas com o intuito de chegar à solução final. Como já referimos, os resultados obtidos pelos alunos aquando da *Aplicação de construções prévias* constituem *Soluções intermédias* que favorecem a sua progressão em direção à resolução final das questões. Em certos casos, as *Soluções intermédias* obtidas são ainda insuficientes para dar continuidade ao processo de abstração, obrigando a que os alunos retrocedam à *Aplicação de construções prévias*, de modo a alcançarem novas *Soluções intermédias*, verificando-se nestes casos que estas subcategorias se evidenciam num ciclo.

Relativamente à *Justificação*, constatamos que a exteriorização desta subcategoria se encontra associada, maioritariamente, às subcategorias *Aplicação de construção prévia* e *Soluções intermédias*, e em alguns casos às *Estratégias*. Apenas nas questões 2 sobre continuidade e sobre limites, relativas a cada um dos conceitos em estudo, isso não é verificado. Consideramos que tal sucede por essas serem as primeiras questões em que os alunos entram em contacto com as noções de continuidade e de limite. Nesta linha de pensamento, observamos que, à medida que os alunos prosseguem com as resoluções das questões propostas, se vai verificando uma evolução relativa à exteriorização da *Ação-B* por parte dos alunos.

Em conformidade com o que foi referido, constatamos que, tal como sucede com a *Ação-R*, a *Ação-B* é fundamental para que a *construção* ocorra, constituindo um momento indispensável no processo de abstração.

8.2.1.3 O desenvolvimento da *Ação-C* durante o processo de abstração

Começamos por constatar que as construções relativas às questões envolvendo as noções de continuidade e de limite são sempre iniciadas pela *Reorganização* das construções obtidas no momento em que a *Ação-B* foi desencadeada, as quais, por sua vez, não teriam sido alcançadas caso os alunos não tivessem efetuado um eficaz *reconhecimento* da questão em análise.

Mais ainda, verificamos que nem sempre a *construção* se encontra isolada, existindo por vezes construções que se encontram relacionadas entre si, e em alguns casos promovendo novas construções associadas ao conceito em estudo. A título de exemplo, a *construção* de *Continuidade no domínio*, pretendida na Questão 5 sobre a noção de continuidade, só é alcançada após as construções de *Continuidade num intervalo* e de *Continuidade num ponto isolado* se encontrarem estabelecidas.

De um modo geral, constatamos que todas as construções, sejam elas relacionadas com a noção de continuidade ou com o conceito de limite, promovem a *Comunicação* dos resultados obtidos, quer seja verbalmente ou registado pelos alunos.

Finalmente, concluímos que todo o trabalho realizado pelos alunos durante a *Ação-R* e a *Ação-B* culmina na nova *construção* obtida na *Ação-C*, constituindo esta a fase final do modelo *RBC*.

8.2.1.4 O desenvolvimento da *Consolidação* durante o processo de abstração

Da análise efetuada, concluímos que a *Consolidação* se evidencia em simultâneo com a *Ação-R*, quando os alunos reconhecem similaridades entre a questão que se propõem trabalhar e questões previamente resolvidas, e com a *Ação-B*, ao considerarem que construções anteriores lhes poderão ser úteis para alcançarem a nova construção, tal como constatado por Dreyfus e Tsamir (2004), justificando o facto de a *Consolidação* nunca emergir nas questões iniciais.

Deste modo, consideramos que a presença desta categoria resulta do desenvolvimento do processo de abstração quando os alunos procedem à análise dos dados fornecidos no enunciado e ponderam sobre os resultados obtidos em construções prévias, refletindo sobre conhecimentos que possuem, tal como referido pelos autores do modelo *RBC+Co*.

A ligação entre a *Consolidação*, a *Ação-R* e a *Ação-B*, elencada no parágrafo anterior encontra-se intrinsecamente relacionada com as questões propostas, as quais promoveram as construções inerentes aos conceitos de continuidade e de limite. Considerando a variedade de construções pretendidas nas questões relativas ao conceito de limite, verificamos que apenas se evidencia a *Consolidação* sempre que a *construção* pretendida remete os alunos aos resultados obtidos em construções previamente resolvidas, reforçando o que foi dito anteriormente. Motivo que justifica o facto de em certas questões não se ter evidenciado a *Consolidação*.

Analogamente ao que foi concluído por Pimenta (2016), constatamos que “...a manifestação da *Consolidação* significou... fortalecer a compreensão dos conhecimentos adquiridos e ganhar experiência com a aplicação da mesma em contextos diferenciados.” (p. 376).

Embora a manifestação desta categoria não seja indispensável para que a nova construção ocorra, torna-se uma mais-valia porquanto demonstra a destreza dos alunos ao abordarem questões em que o recurso a construções anteriores agiliza a sua resolução.

Da análise efetuada às ações epistémicas, consideramos que a definição de subcategorias se revelou indispensável para identificar de modo mais exato a manifestação de cada ação epistémica durante a resolução das questões propostas por parte dos alunos, tal como constatado por Pimenta (2016) e Dreyfus e Kidron (2006). Naturalmente, as subcategorias definidas no presente trabalho foram definidas em concordância com as especificidades dos conceitos em análise.

8.2.2 Como se sequenciam e relacionam as ações epistémicas

Nesta secção procura-se dar resposta à segunda questão de investigação, realçando as principais conclusões relativas ao modo como se sequenciam e relacionam as ações epistémicas evidenciadas no decurso do processo de abstração dos alunos durante a construção do novo conhecimento matemático.

8.2.2.1 A relação estabelecida entre a Ação-R e a Ação-B

Os resultados obtidos neste estudo permitem concluir que a Ação-R e a Ação-B se encontram interligadas durante o processo de abstração dos alunos. Consideramos que a *Interpretação* do enunciado, em conjunto com as *Estruturas adquiridas* por ela despoletadas fazem parte integrante das *Estratégias* formuladas, bem como da *Aplicação de construções prévias*. Todo este raciocínio efetuado pelos alunos culmina na obtenção de *Soluções intermédias*, as quais são fundamentais para os alunos progredirem com a resolução da questão proposta.

Relativamente à noção de *Vizinhança*, esta constitui um ponto fundamental nas resoluções efetuadas pelos alunos, sendo amplamente utilizada para *Justificar* quer a continuidade ou a descontinuidade de uma função num ponto, quer a existência, ou não, de limite de uma função num ponto. Neste último caso, a noção de *Vizinhança* aparece por vezes associada à noção de *Aproximação*, relação essa que pode ocorrer nos dois sentidos (*Vizinhança* promove *Aproximação* ou *Aproximação* promove *Vizinhança*).

A combinação de todas estas subcategorias identificadas quer na Ação-R, quer na Ação-B, é essencial para que a construção dos conceitos de continuidade e de limite sejam posteriormente alcançados pelos alunos.

Assim, consideramos que a relação estabelecida entre estas ações epistémicas evidencia o início do processo de abstração dos alunos em direção às construções dos novos conceitos de continuidade e de limite.

8.2.2.2 A relação estabelecida entre a Ação-R, a Ação-B e a Ação-C

Neste estudo, concluímos que a Ação-C se manifestou após o desenvolvimento simultâneo da Ação-R e da Ação-B, estando essa situação relacionada com a *Interpretação* dos enunciados e com as *Estruturas adquiridas* anteriormente, as quais permitem que os alunos vão formulando *Estratégias* e *Aplicando construções prévias* de modo a obterem *Soluções intermédias*.

A *Reorganização* de todas as construções anteriores culmina nas construções pretendidas em cada questão, podendo haver lugar à obtenção de diferentes construções, as quais se encontram relacionadas entre si.

Pelo exposto, concluímos que, no caso do presente estudo, a Ação-C constitui o momento final do processo de abstração evidenciado pelos alunos.

8.2.2.3 A relação estabelecida entre a Ação-R, a Ação-B e a Consolidação

Relativamente à *Consolidação*, podemos constatar que esta apenas se manifestou na Questão 4, relativa ao estudo da continuidade, e nas questões 3, 6, 7 e 8 sobre limites. Mais ainda, verificamos que a *Consolidação* nunca emergiu nas primeiras questões, o que é expectável uma

vez que essas constituem o início do estudo dos referidos conceitos, não havendo, portanto, lugar à *Consolidação*.

Concluimos que a ação epistémica *Consolidação* se manifestou na *Ação-R*, quando os alunos *Interpretam* os enunciados de questões similares e recorrem sem dificuldade a *Estruturas adquiridas*, às noções de *Vizinhança* e/ou de *Aproximação* de forma a iniciarem a resolução de questões com características semelhantes. Paralelamente, durante a *Ação-B*, os alunos revelam, através das *Estratégias* formuladas e pela *Aplicação de construções prévias*, que várias construções obtidas em questões anteriores se encontram *Consolidadas*.

Finalmente, importa realçar o facto de as ações epistémicas definidas no modelo *RBC+Co* se evidenciarem não através de uma hierarquia linear, mas de forma aninhada, tal como referido por Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2015).

Podemos igualmente afirmar que as subcategorias *Continuidade num ponto*, *Continuidade à esquerda num ponto* e *Continuidade à direita num ponto*, definidas na *Ação-C*, se encontram por sua vez aninhadas.

8.3 Recomendações

Como já referimos, a análise das dificuldades sentidas pelos alunos é de extrema importância e pode servir para melhorar todo o processo de lecionação. A identificação das principais dificuldades dos alunos, e a razão por que surgem, servirá para atuarmos de forma profilática nas aulas para serem trabalhados detalhadamente os pontos mais frágeis, ou definir novas abordagens aos conceitos mais complicados.

Constatamos que a estrutura e a sequência das questões propostas aos alunos são essenciais para a construção de novos conhecimentos matemáticos e para desencadear o processo de abstração. Neste sentido, entendemos que é igualmente importante estudar o papel do professor quanto à forma de lecionação dos conteúdos, às opções metodológicas adotadas, à seleção e elaboração das questões a propor, com o intuito de promover nos alunos a construção de novos conhecimentos matemáticos.

Por outro lado, em virtude dos conceitos de continuidade e de limite se repercutirem no estudo dos conceitos de derivada e de integral, seria igualmente interessante analisar de que modo a construção dos conceitos de continuidade e de limite efetuada pela abordagem utilizada neste estudo se iria refletir na *construção* desses conceitos. Em particular, que ações epistémicas se evidenciarão, e quais as subcategorias que seriam aí definidas, bem como se desenvolveriam e relacionariam entre si. O que exorbita o âmbito e os objetivos do presente trabalho, mas impõe a ponderação de, no futuro, se proceder ao respetivo estudo.

Referências Bibliográficas

Bernstein, D (1997). *Calculus for mathematicians*. Edição eletrónica, <https://cr.yep.to/papers/calculus.pdf>.

Bivar, A; Grosso, C; Oliveira, F; Loura, L e Timóteo, M (2014). *Programa e Metas Curriculares - Ensino Secundário - Matemática A*. Edição eletrónica, <http://www.dge.mec.pt/matematica-ch-ct>.

Boero, P (2011). Argumentation and Proof: Discussing a "Sucessful" Classroom Discussion. *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 120-130.

Boero, P; Douek, N; Morselli, F; Pedemonte, B (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of PME*, **34(1)**, 179-209.

Bogdan, R; Biklen, S (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora, Porto.

Bussi, B; Corni, F; Mariani, C; Falcade, R (2012). Semiotic Mediation in Mathematics and Physics Classrooms: Artefacts and Signs after a Vygotskian Approach. *The Electronic Journal of Science Education*, **16(3)**, 1-28.

Busi, B; Mariotti, M (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, 746-783. Routledge, Nova York.

Carreira, S (1998). Do triângulo ao trapézio semiótico: Uma análise do pensamento metafórico em problemas de aplicação da matemática. *Quadrante*, **7(1)**, 44-54.

Cornu, B (1981). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, **4**, 236-268.

Cotrim, L; Felgueiras, M; Matos, P (2009). *Apontamentos Teóricos de Matemática Geral*. ESTG, Leiria.

Cottrill, J; Dubinsky, E; Nichols, D; Schwingendorf, K; Thomas, K; Vidakovic, D (1996).

Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior*, **15**, 167-192.

Dahms, M; Geonnotti, K; Passalacqua, D; Schilk, J; Wetzel, A; Zulkowsky, M (2008). *The Educational Theory of Lev Vygotsky: an analysis*. Edição eletrónica, <http://www.newfoundations.com/GALLERY/Vygotsky.html>.

Davis, P; Hersh, R (1995). *A Experiência Matemática*. Gradiva, Lisboa.

Davydov, V (1990). *Soviet Studies in Mathematics Education: Vol. 2. Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. National Council of Teachers of Mathematics, Virginia.

Denzin, N (1989). *Interpretive interactionism*. Sage, Califórnia.

Domingos, A (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados - A Matemática no início do Superior*. Tese de Doutoramento. UNL, Lisboa.

Dreyfus, T; Hershkowitz, R; Schwarz, B (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, 185-217. Springer, Dordrecht.

Dreyfus, T (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. *12th International Congress on Mathematical Education*.

Dreyfus, T; Kidron, I (2006). Interacting parallel constructions. A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en didactique des mathématiques*, **26(3)**, 295-336.

Dreyfus, T; Tsamir, P (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, **23**, 271-300.

Dreyfus, T (2002). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41. Kluwer, Dordrecht.

Ferreira, J (2005). *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Freudenthal, H (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht.

Habermas, J (2003). *Truth and justification*. MIT Press, Cambridge.

Hershkowitz, R; Dreyfus, T; Tabach, M (2012). Exponential Growth - Constructing Knowledge in the Classroom. *12th International Congress on Mathematical Education*.

- Hershkowitz, R (2009). Contour lines between a model as a theoretical framework and the same model as methodological tool. *Transformation of knowledge through classroom interaction*, 273-280. Routledge, Londres.
- Hershkowitz, R; Hadas, N; Dreyfus, T; Schwarz, B (2007). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research*, **19(2)**, 41-68.
- Hershkowitz, R; Schwarz, B; Dreyfus, T (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **32(2)**, 195-222.
- Jesus, A; Serrazina, L (2005). Actividades de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. *Quadrante*, **14(1)**, 3-35.
- Keisler, H (2012). *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*. Edição eletrónica, <http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html> .
- Kidron, I; Dreyfus, T (2008). Abstraction in Context, Combining Constructions, Justification and Enlightenment. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 303-309.
- Juter, K (2007). Students' Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast*, **4(1)**, 53-65.
- Mastorides, E; Zachariades, T (2004). *Secondary Mathematics Teacher's Knowledge Concerning the Concept of Limit and Continuity*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, **4**, 481-488.
- Monaghan, J; Sun, S; Tall, D (2006). Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*.
- Monteiro, C; Pinto, H (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, **14(1)**, 89-108.
- Nápoles, S (1994). *Lições de Análise Infinitesimal, volume I*. Associação de Estudantes da FCUL, Lisboa.
- Orton, A (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, **14**, 1-18.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, **66(1)**, 23-41.

Perry, P; Molina, Ó; Camargo, L; Samper, C (2011) Analyzing the Proving Activity of a Group of Three Students. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Piaget, J (1970). *Genetic Epistemology*. Columbia University Press, Nova York.

Pimenta, C. (2016). *A Construção do Conhecimento no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Tese de Doutoramento em Didática de Matemática*. UBI, Covilhã.

Pólya, G (1975). *A Arte de Resolver Problemas*. Interciências, Rio de Janeiro.

Ponte, J (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. *Investigación en educación matemática XII*, 55-78.

Ponte, J (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante 3(1)*, 3-18.

Santana, G; Otte, M (2010). As Concepções de Euler e Cauchy para o conceito de função contínua na perspectiva de Pierre Bourtois. *Atas do X Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Safier, F (2011). *Pré-Cálculo*. Coleção Schaum. Eurobooks editora, Lisboa.

Sfard, A (1998). On two metaphors for Learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27 (2), 4-13.

Schoenfeld, A (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Orlando.

Tall, D (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 495-511. Macmillan, Nova York.

Teixeira, P; Precatado, A; Albuquerque, C; Antunes, C; Nápoles, S (1999). *Funções, 12.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Lisboa.

Teixeira, P; Precatado, A; Albuquerque, C; Antunes, C; Nápoles, S (1997). *Funções, 10.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Lisboa

Thomas, G; Finney, R; Weir, M; Giordano, F (2002). *Cálculo. Volume I*. Pearson Education, Londres.

Toulmin, S (1974). *The uses of arguments*. Cambridge Press, Nova York.

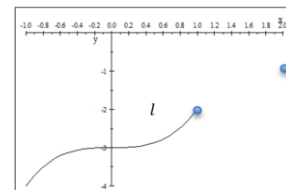
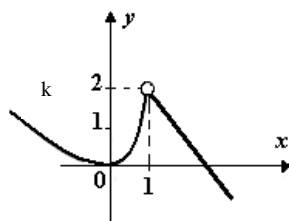
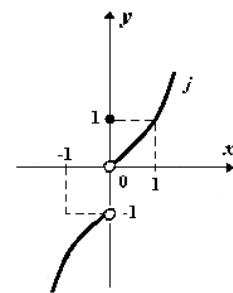
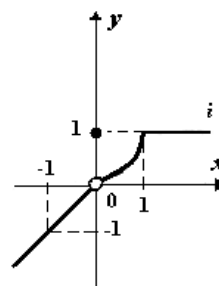
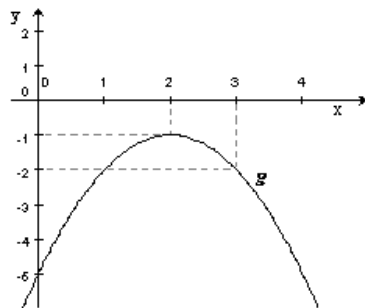
Viirman, O; Attorps, I; Tossavainen, T (2010). Different views - some Swedish mathematics students' concept images of the function concept. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 15 (4), 5-24.

Vygotsky, L (1978). *Mind in Society*. Harvard University Press, Cambridge.

Anexos

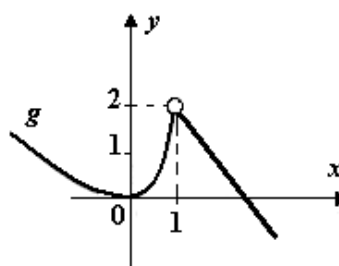
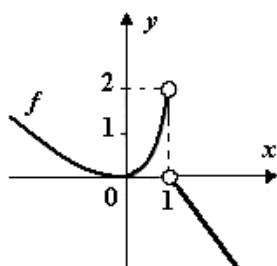
Anexo 5.1 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de continuidade

- Questão 1
- a) O que entende por função real de variável real contínua num ponto? Apresente dois exemplos, um gráfico e um analítico, destas funções.
- b) O que entende por função real de variável real contínua? Apresente dois exemplos, um gráfico e um analítico, destas funções.
- c) Considere as funções reais de variável real g , i , j , k e l cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas.
- iii. Indique o domínio das funções.
- iv. Indique, justificando, quais das funções são contínuas em todo o seu domínio.



Anexo 5.2 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de continuidade

Questão 2 Observe os seguintes gráficos das funções reais de variável real f e g .



- a) Prolongue a função f no ponto $x = 1$ de modo que f seja contínua:
 - i. apenas à direita de 1;
 - ii. apenas à esquerda de 1.
- b) Prolongue a função g no ponto $x = 1$ de modo que g seja contínua em \mathbb{R} .

Anexo 5.3 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de continuidade

Questão 3 Com base na sua representação gráfica, estude a continuidade das seguintes funções reais de variável real f e g .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = -3 \\ \frac{9 - x^2}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x > 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Anexo 5.4 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de continuidade

Questão 4 Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8}$.

- a) A função f é contínua em todo o seu domínio?
- b) Prolongue a função f de modo a que esta seja contínua em \mathbb{R} .

Anexo 5.5 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de continuidade

Questão 5 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 3 \\ x^2 - x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

A função f é contínua em todo o seu domínio?

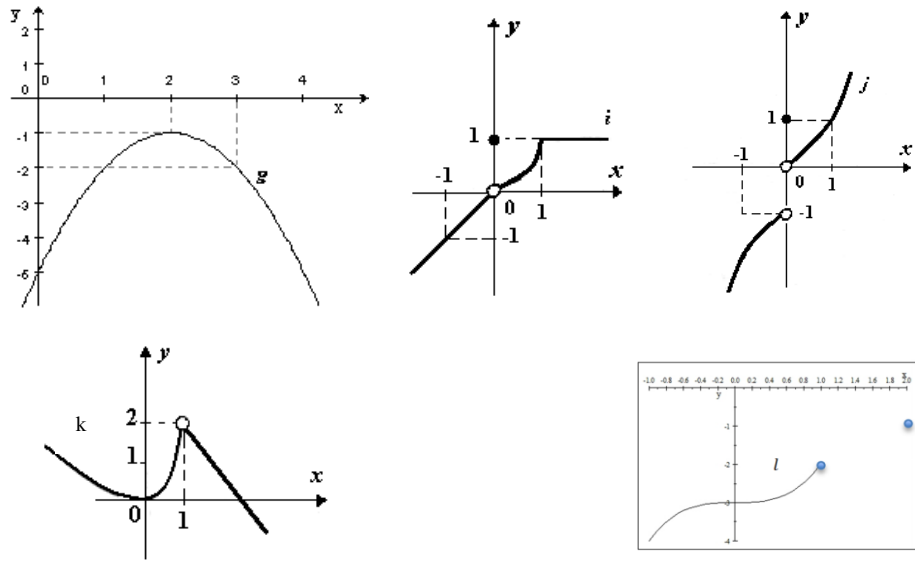
Anexo 5.6 - Apresentação da Questão 1 sobre a noção de limite

Questão 1 O que entende por limite de uma função real de variável real num ponto $x = a$?

Anexo 5.7 - Apresentação da Questão 2 sobre a noção de limite

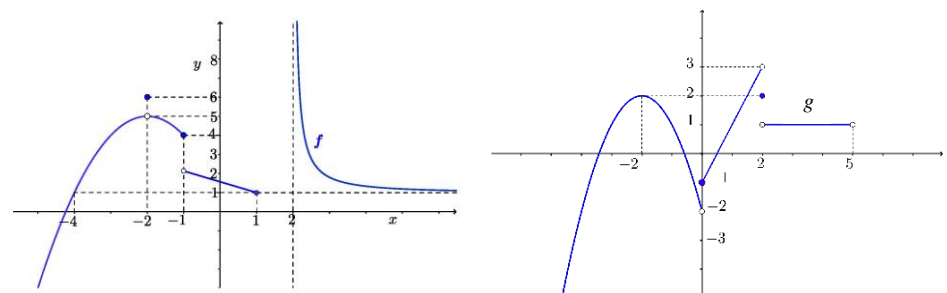
Questão 2 Considere as funções reais de variável real g, i, j, k e l cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} l(x)$;
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} l(x)$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1,5} l(x)$.



Anexo 5.8 - Apresentação da Questão 3 sobre a noção de limite

Questão 3 Considere as funções reais de variável real f e g cujas representações gráficas se encontram abaixo expostas. Indique os pontos do domínio onde as funções não têm limite.



Anexo 5.9 - Apresentação da Questão 4 sobre a noção de limite

Questão 4 Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)$, $\lim_{x \rightarrow 8} (-10)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-2x + \frac{1}{x}\right)$ e
 $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)(x - 2)^2]$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$

Anexo 5.10 - Apresentação da Questão 5 sobre a noção de limite

Questão 5 Calcule os limites laterais das seguintes funções reais de variável real nos pontos indicados e diga, justificando, se existe limite da função nesses pontos

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ em $x = 0$.
- b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $x = 1$.
- c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > -1 \\ -\frac{1}{2x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$ em $x = -1$.

Anexo 5.11 - Apresentação da Questão 6 sobre a noção de limite

Questão 6 Determine o valor do parâmetro real a de modo a que a função real de variável real h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{se } x < -1 \\ x^2 - ax + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

tenha limite quando x tende para -1 .

Anexo 5.12 - Apresentação da Questão 7 sobre a noção de limite

Questão 7 Considere a seguinte função real de variável real g definida por

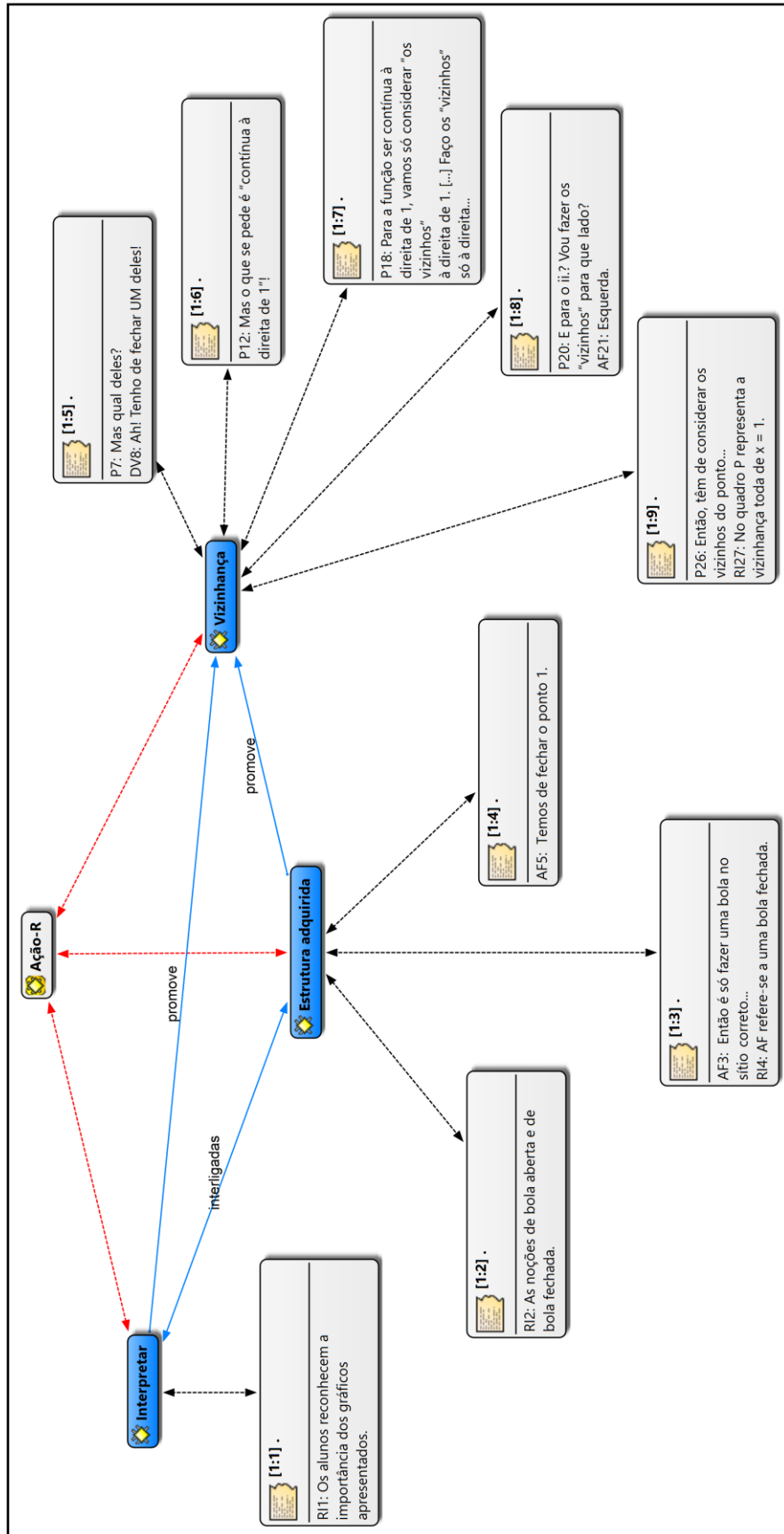
$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ x^2 - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
- b) Estude a continuidade da função g .

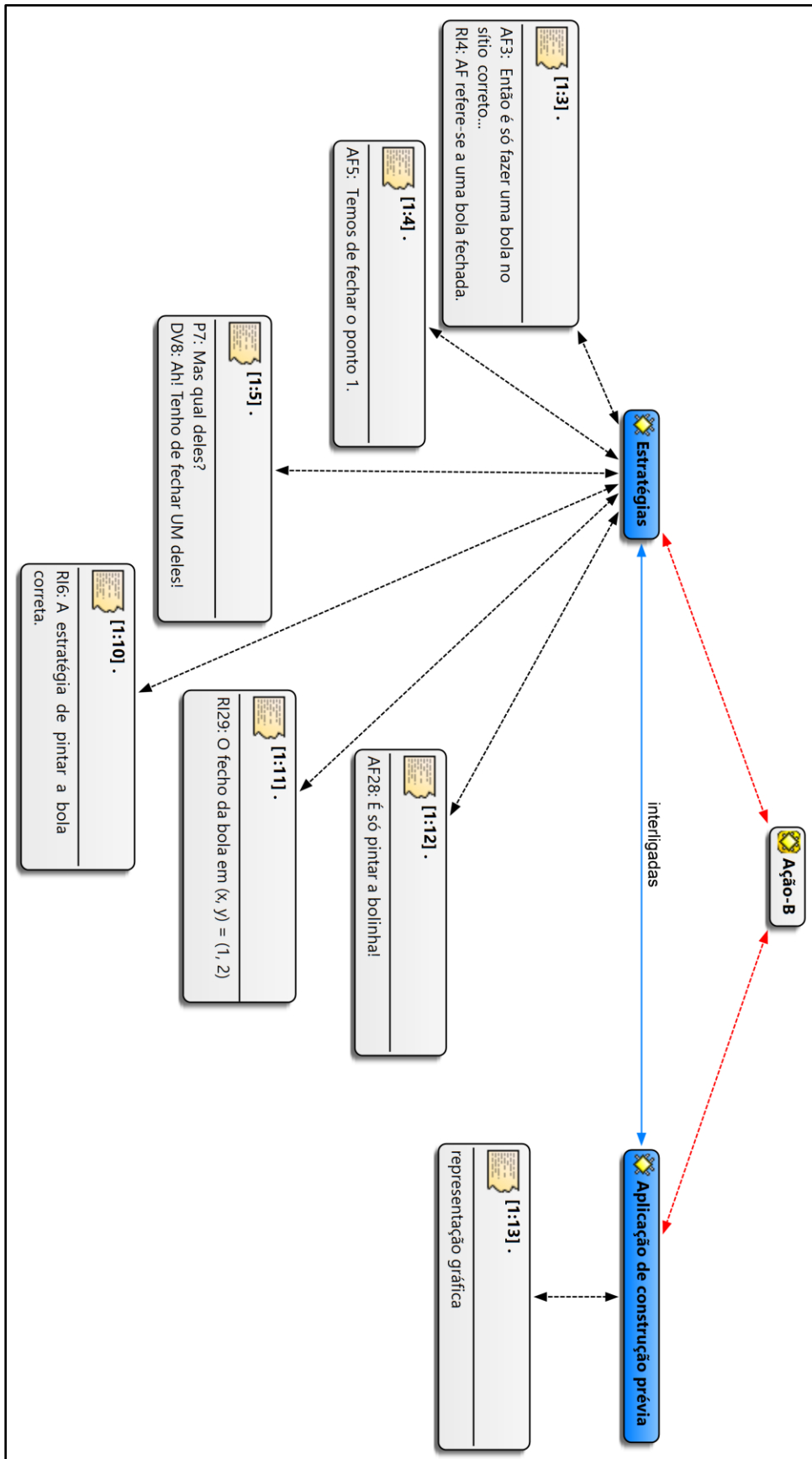
Anexo 5.13 - Apresentação da Questão 8 sobre a noção de limite

Questão 8 Com base no conceito de limite, defina continuidade num ponto.

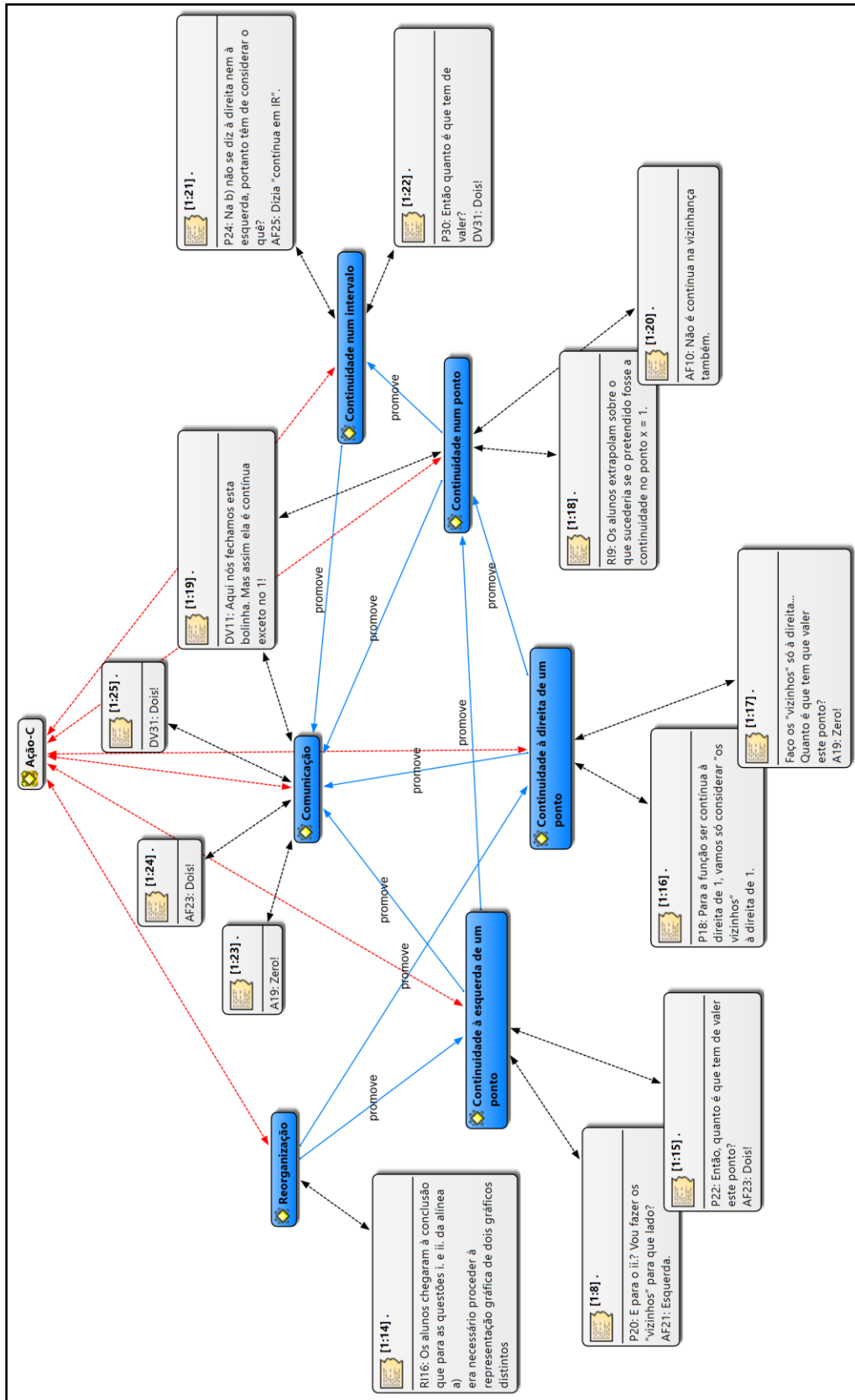
Anexo 6.1 - Ampliação da Figura 6.5 - RAV da Ação-R na Questão 2 sobre Continuidade



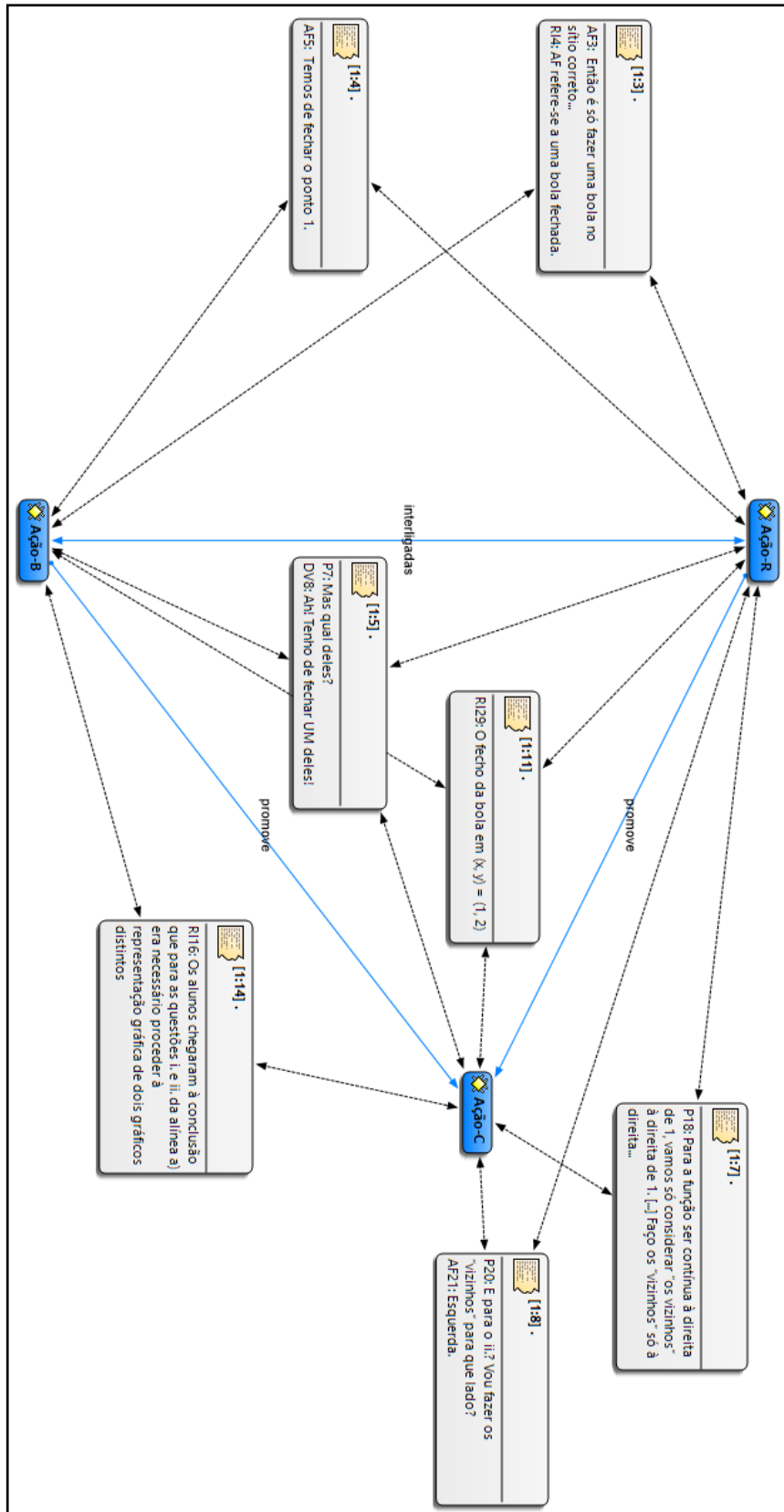
Anexo 6.2 - Ampliação da Figura 6.11 - RAV da Ação-B na Questão 2 sobre Continuidade



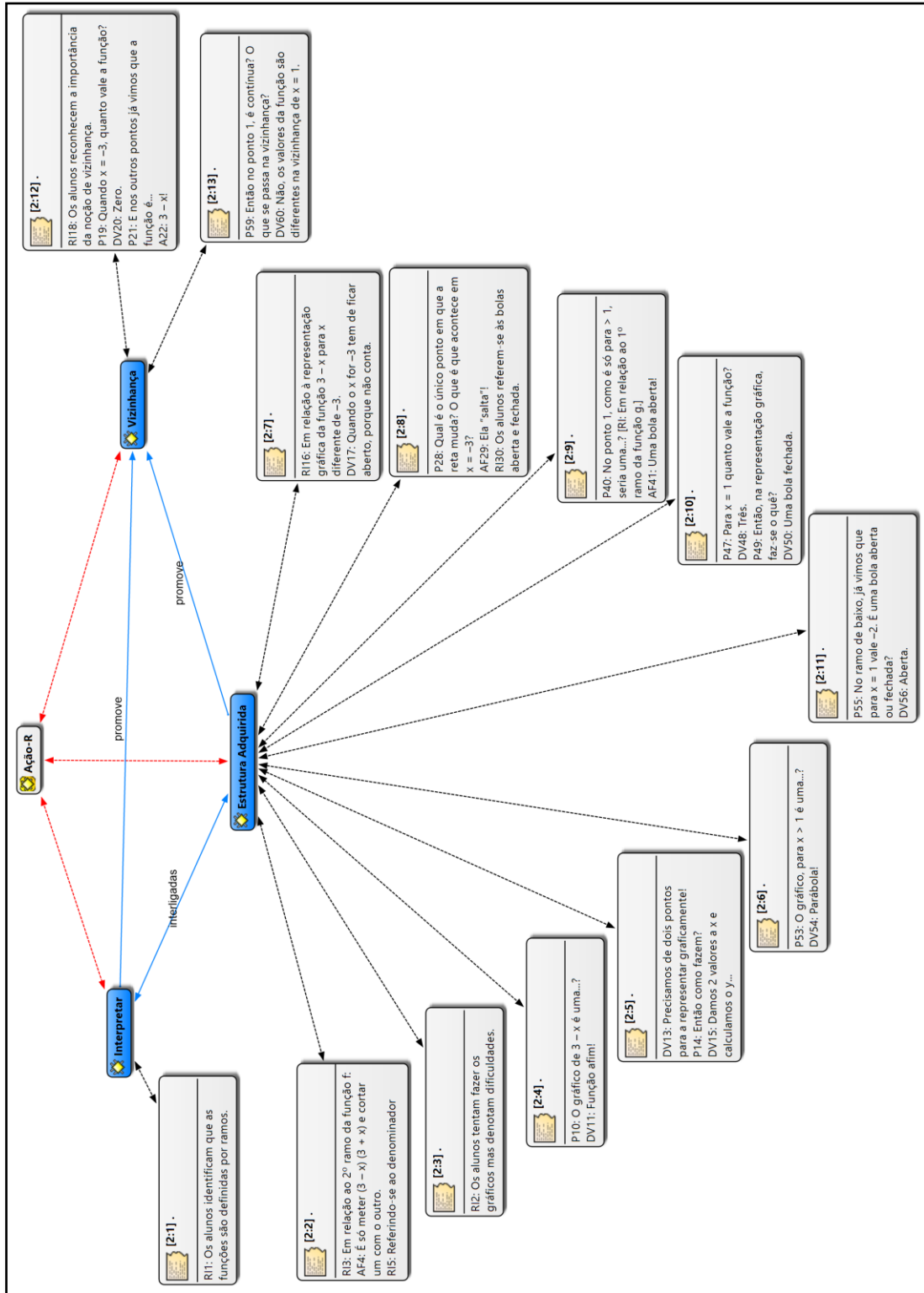
Anexo 6.3 - Ampliação da Figura 6.16 - RAV da Ação-C na Questão 2 sobre Continuidade



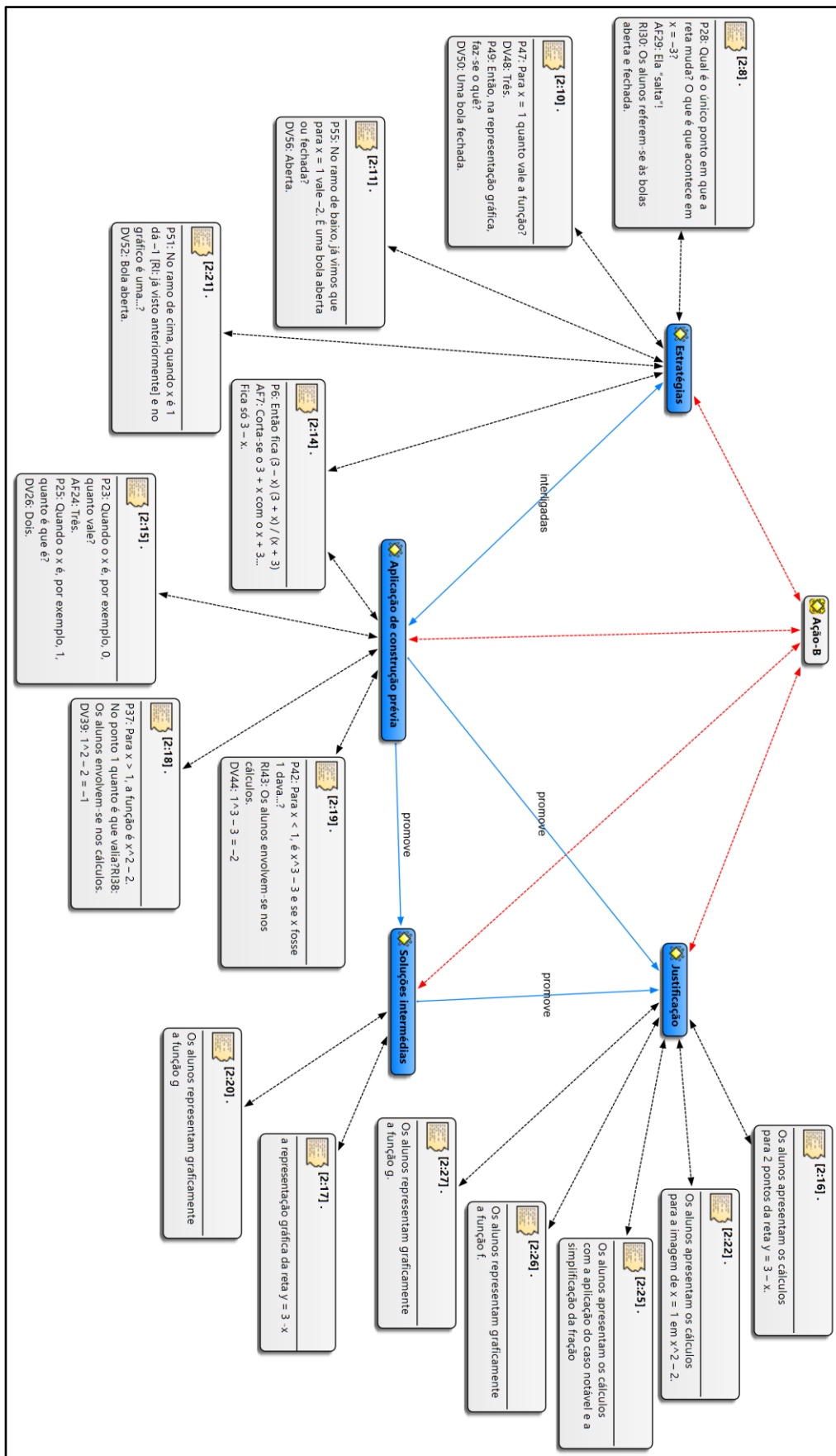
Anexo 6.4 - Ampliação da Figura 6.17 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2 sobre Continuidade



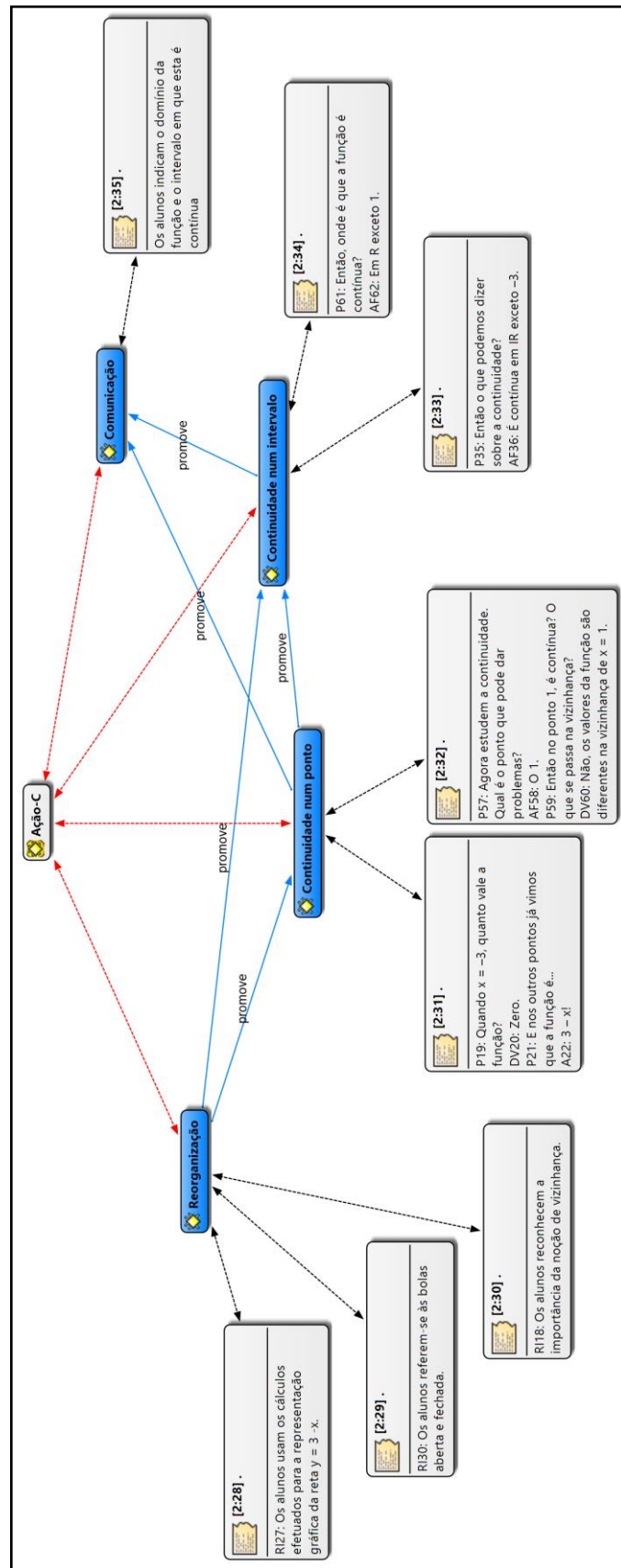
Anexo 6.5 - Ampliação da Figura 6.26 - RAV da Ação-R na Questão 3 sobre Continuidade



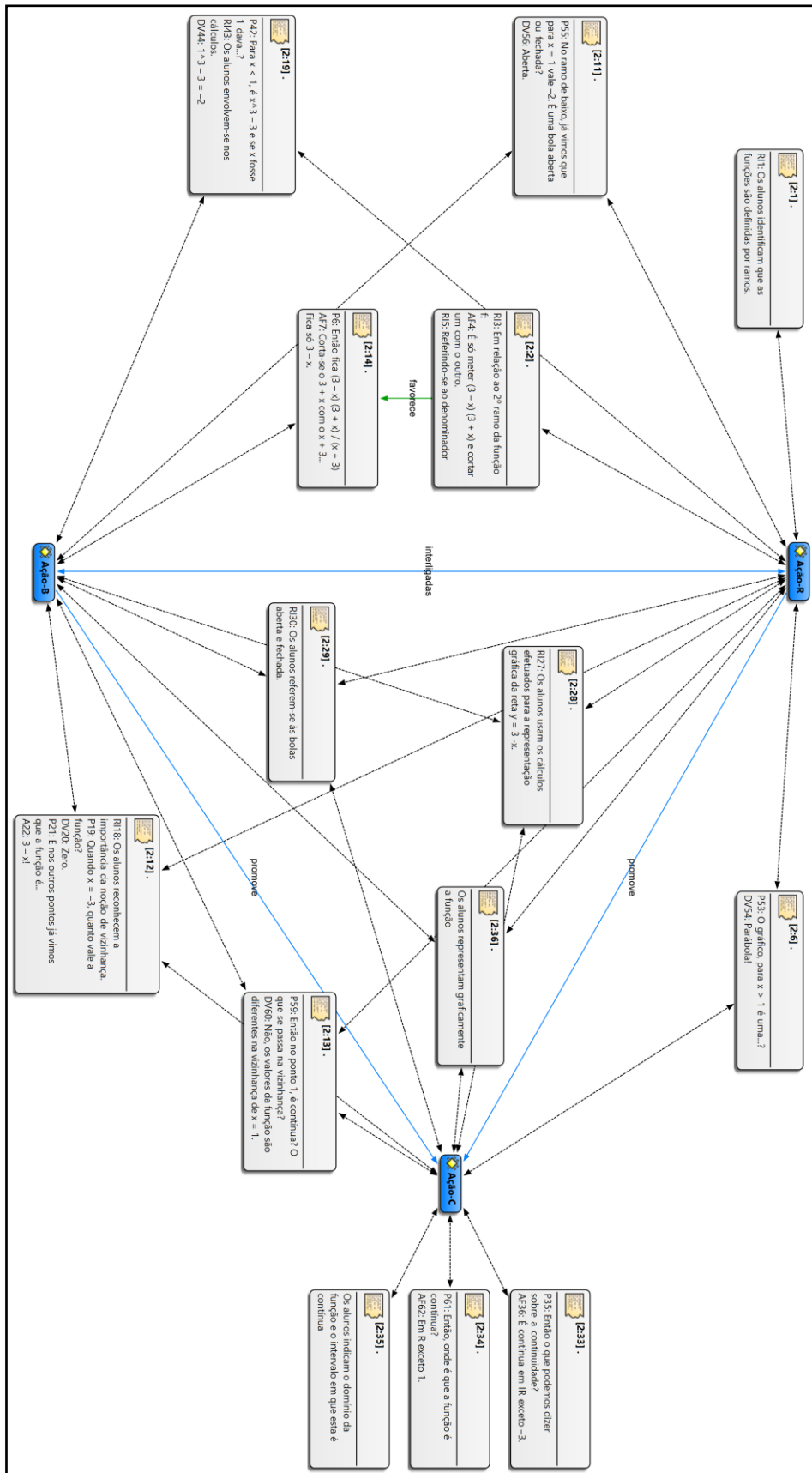
Anexo 6.6 - Ampliação da Figura 6.37 - RAV da Ação-B na Questão 3 sobre Continuidade



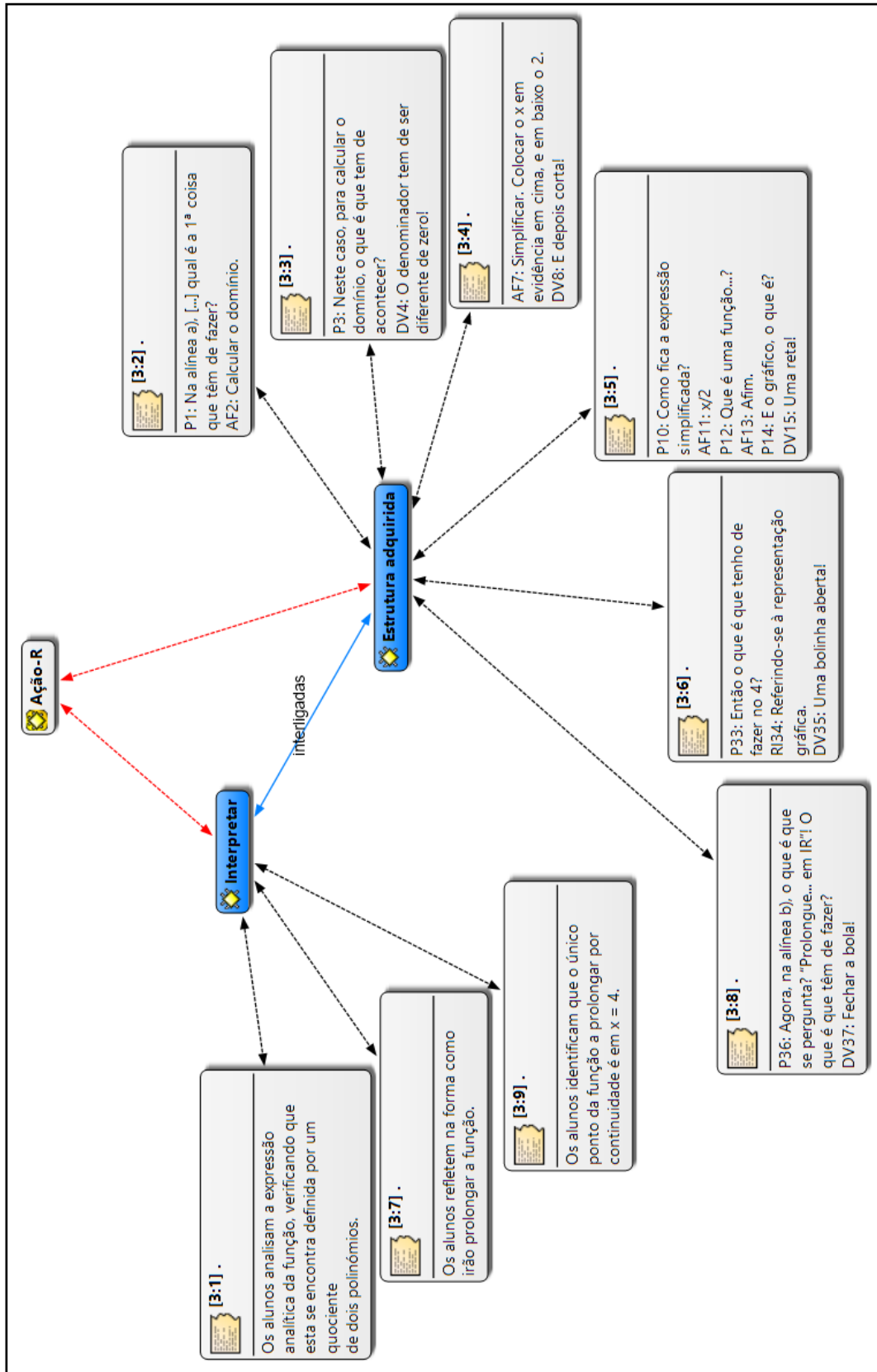
Anexo 6.7 - Ampliação da Figura 6.41 - RAV da Ação-C na Questão 3 sobre Continuidade



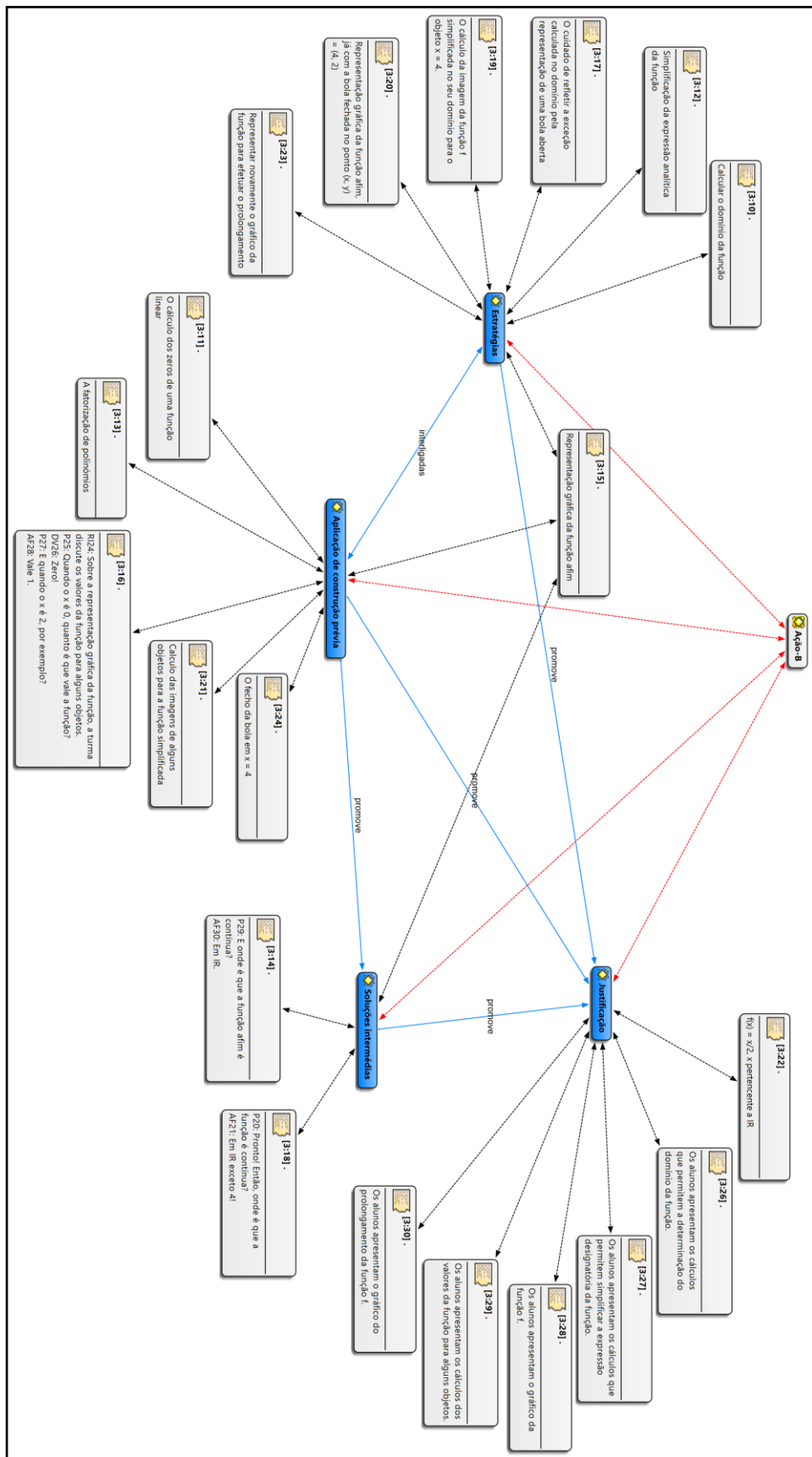
Anexo 6.8 - Ampliação da Figura 6.42 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 3 sobre Continuidade



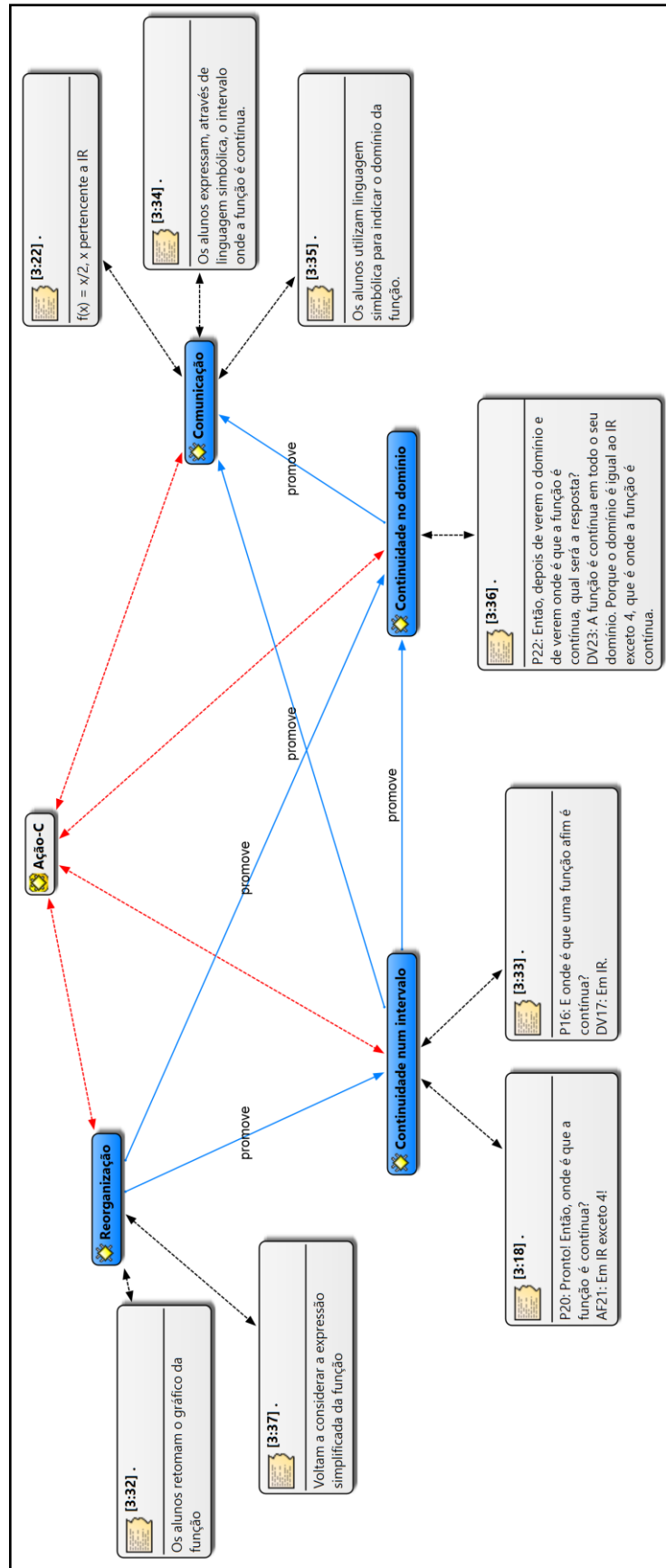
Anexo 6.9 - Ampliação da Figura 6.50 - RAV da Ação-R na Questão 4 sobre Continuidade



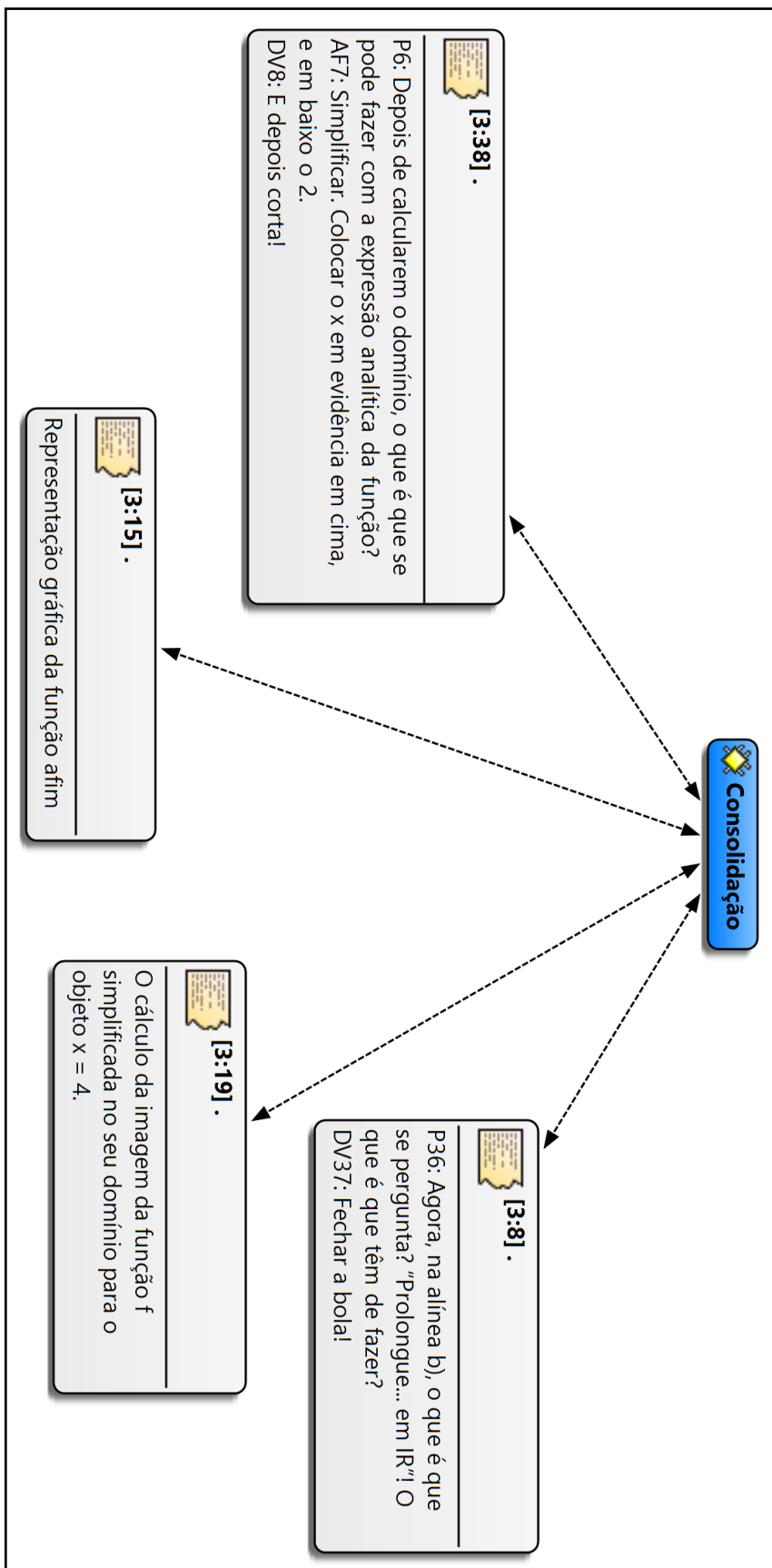
Anexo 6.10 - Ampliação da Figura 6.61 - RAV da Ação-B na Questão 4 sobre Continuidade



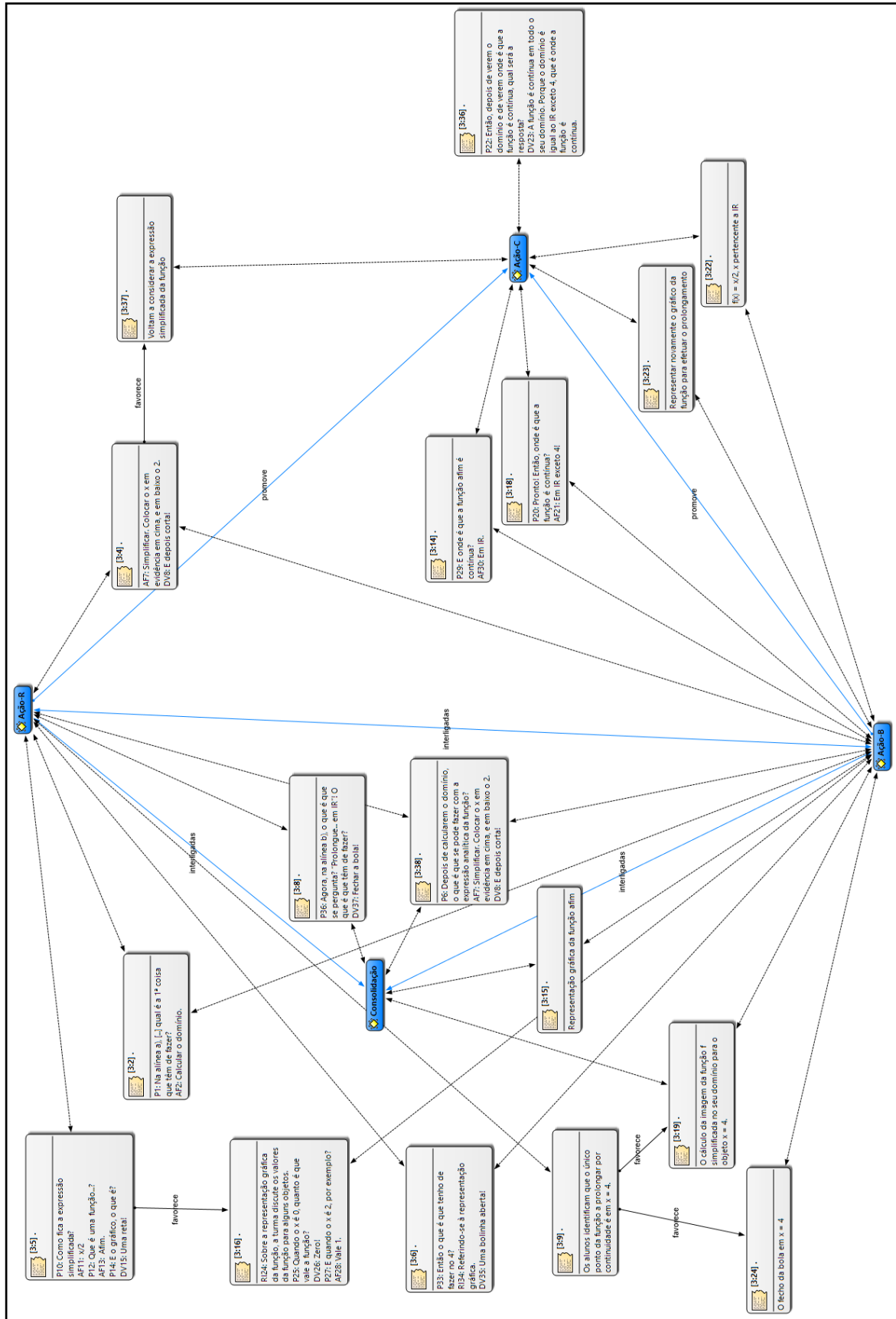
Anexo 6.11 - Ampliação da Figura 6.68 - RAV da Ação-C na Questão 4 sobre Continuidade



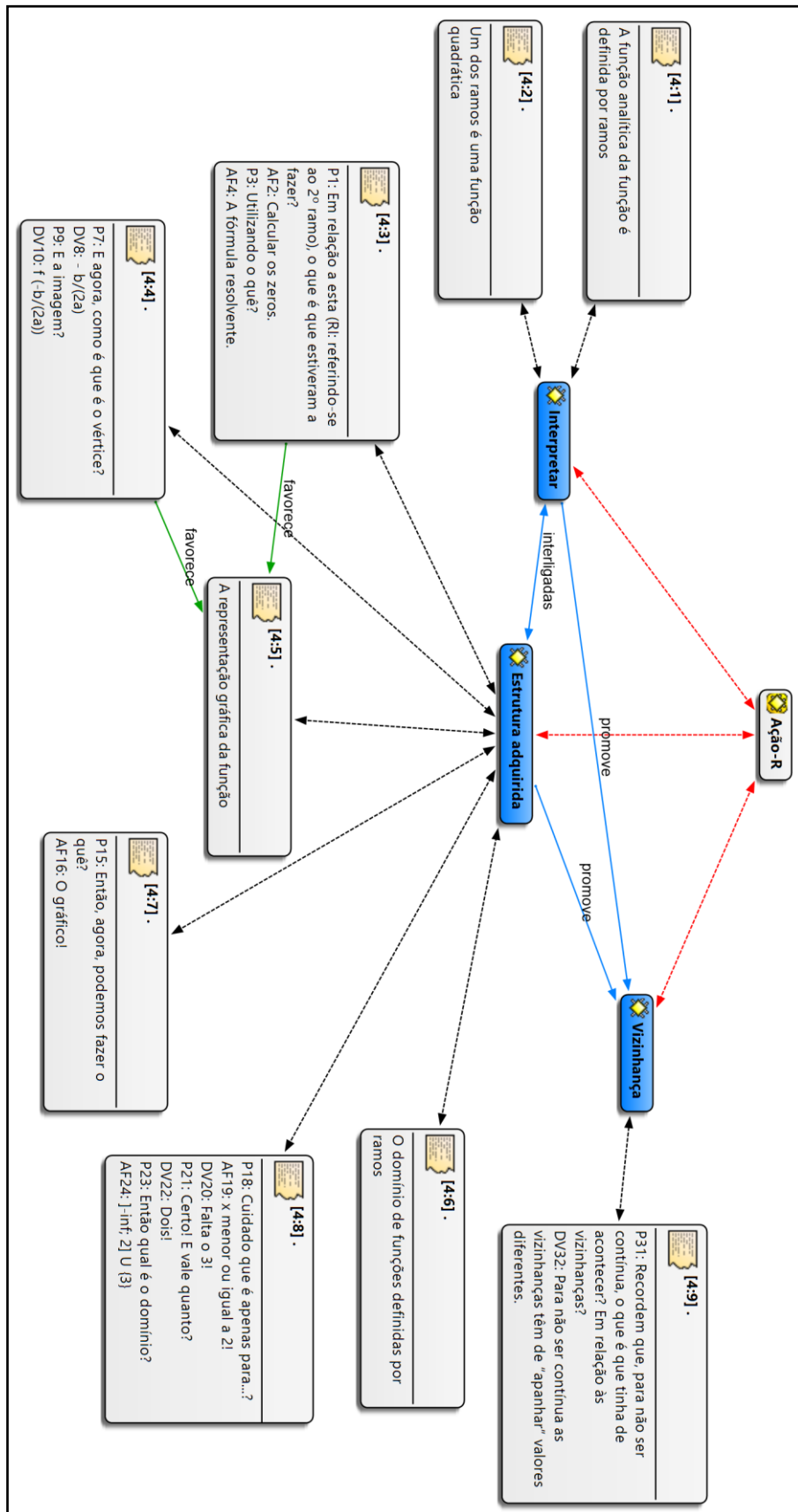
Anexo 6.12 - Ampliação da Figura 6.69 - RAV da ação epistêmica *Consolidação* na Questão 4 sobre Continuidade



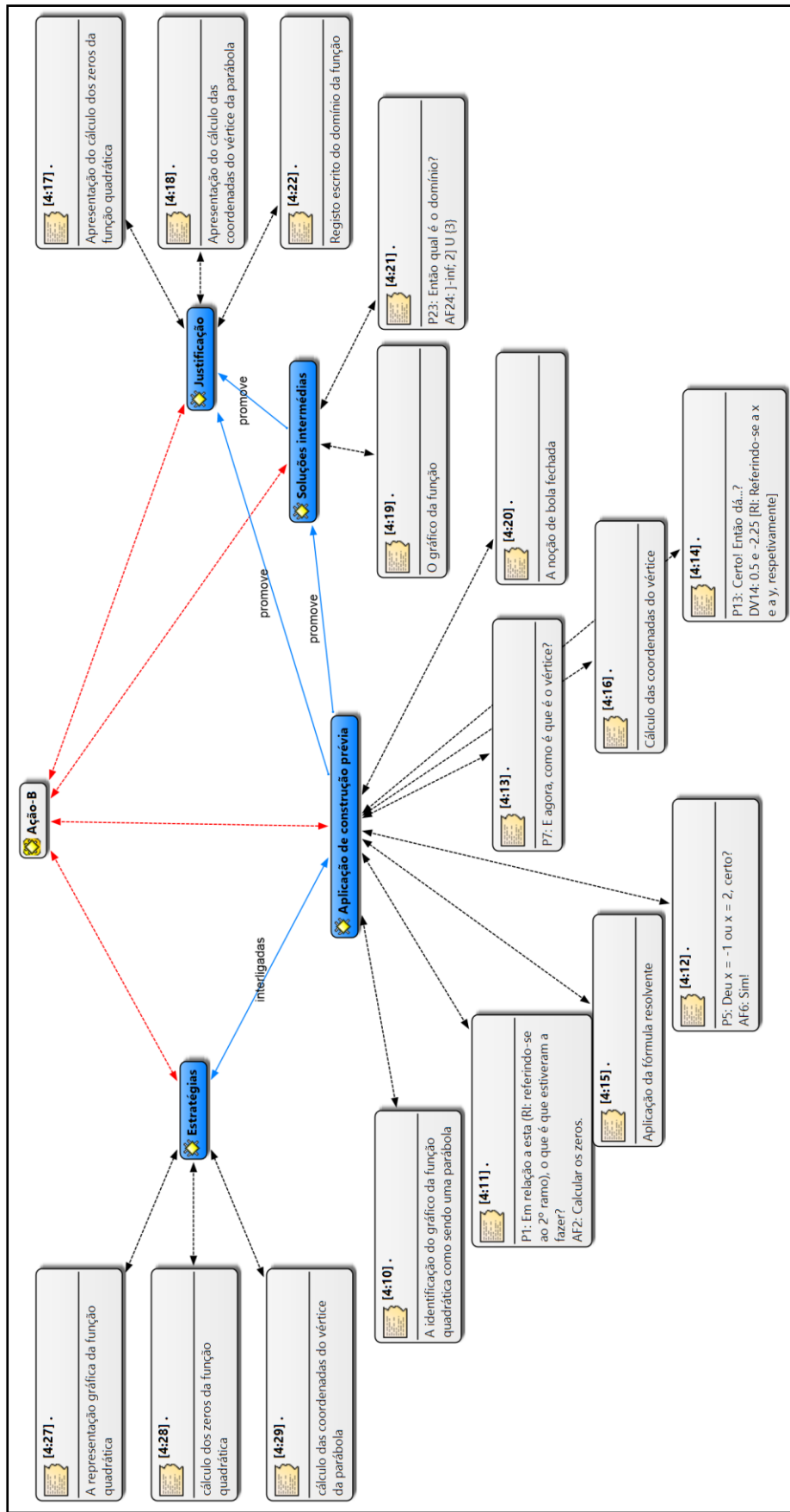
Anexo 6.13 - Ampliação da Figura 6.70 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 4 sobre Continuidade



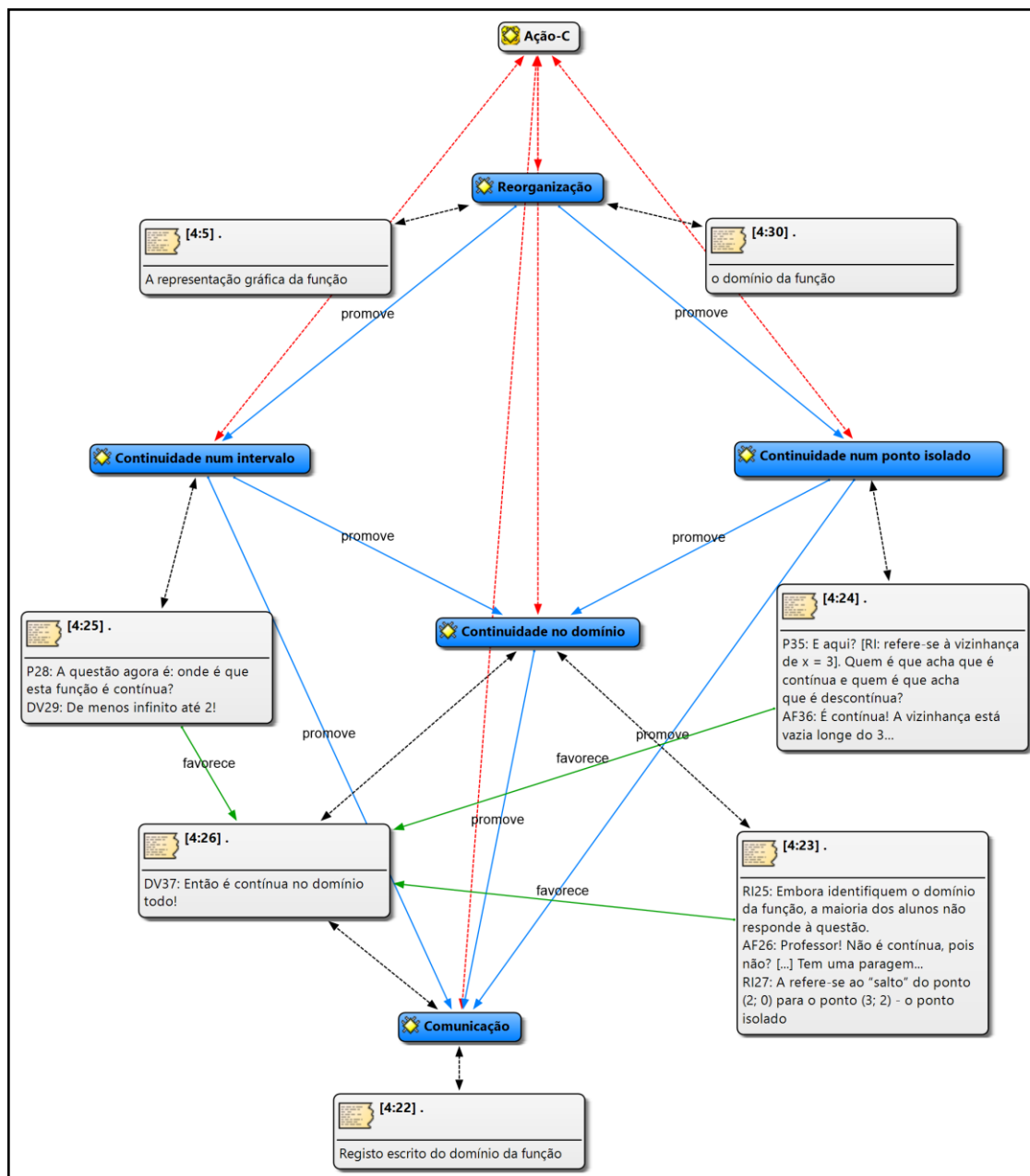
Anexo 6.14 - Ampliação da Figura 6.75 - RAV da Ação-R na Questão 5 sobre Continuidade



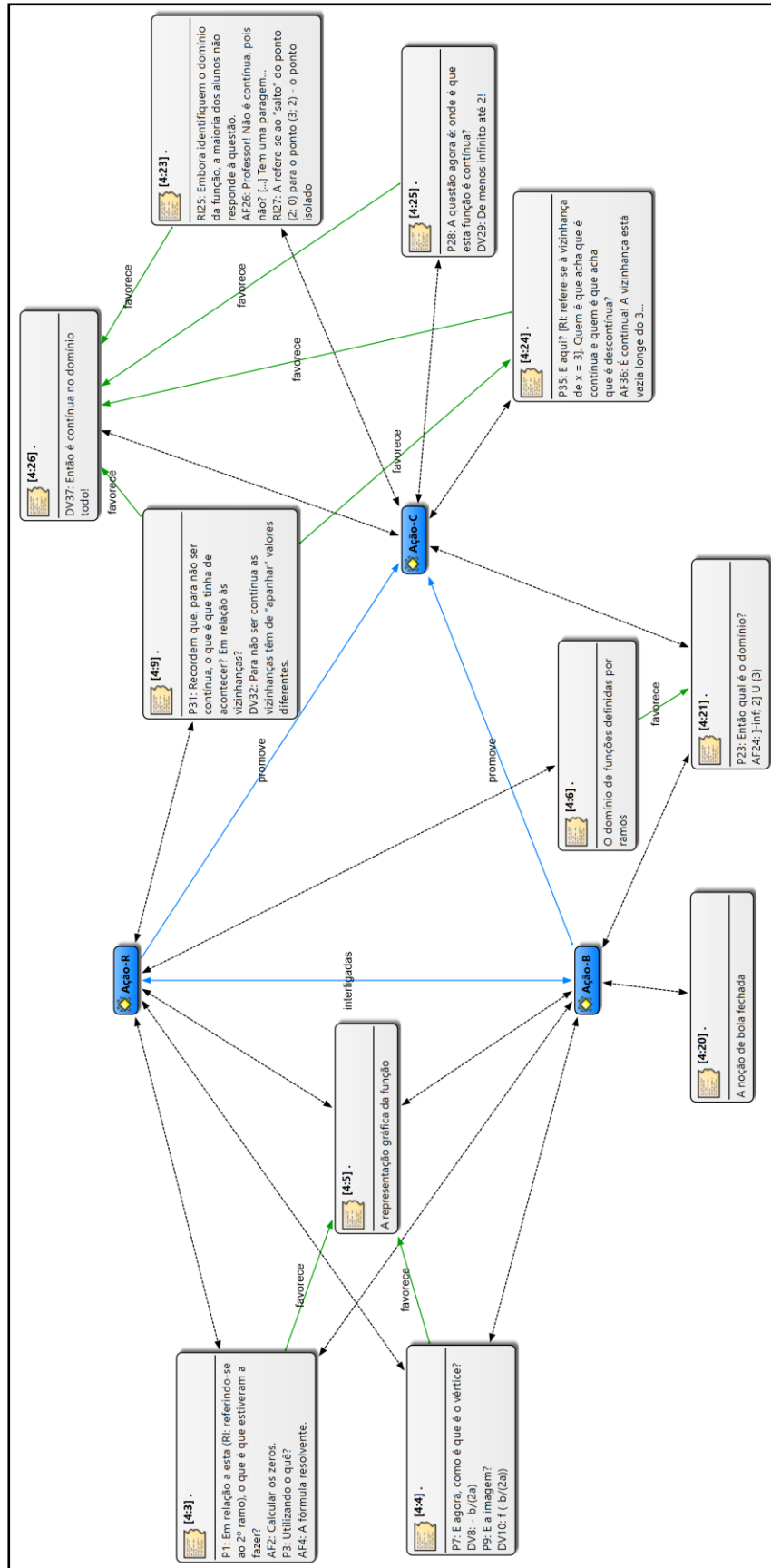
Anexo 6.15 - Ampliação da Figura 6.81 - RAV da Ação-B na Questão 5 sobre Continuidade



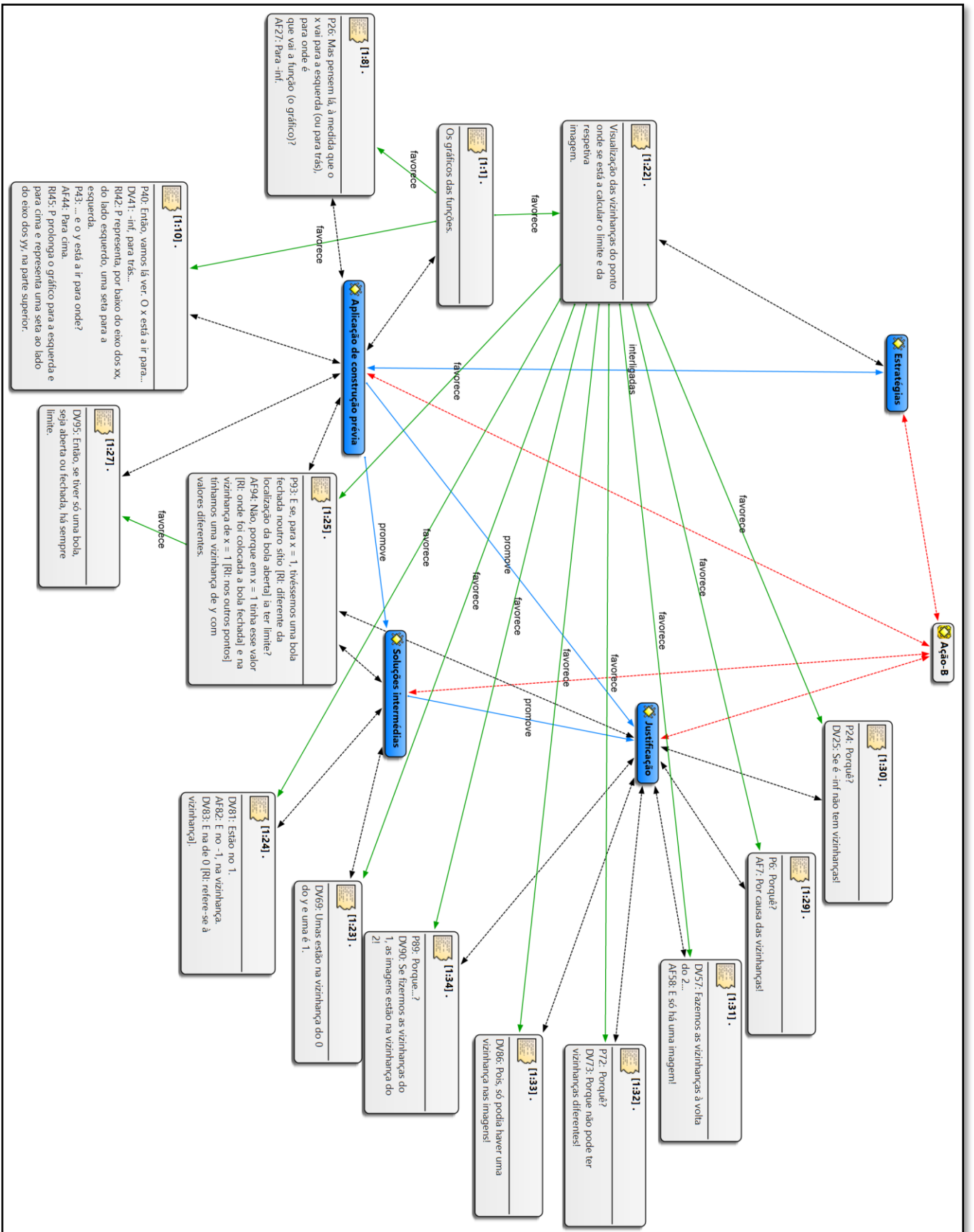
Anexo 6.16 - Ampliação da Figura 6.86 - RAV da Ação-C na Questão 5 sobre Continuidade



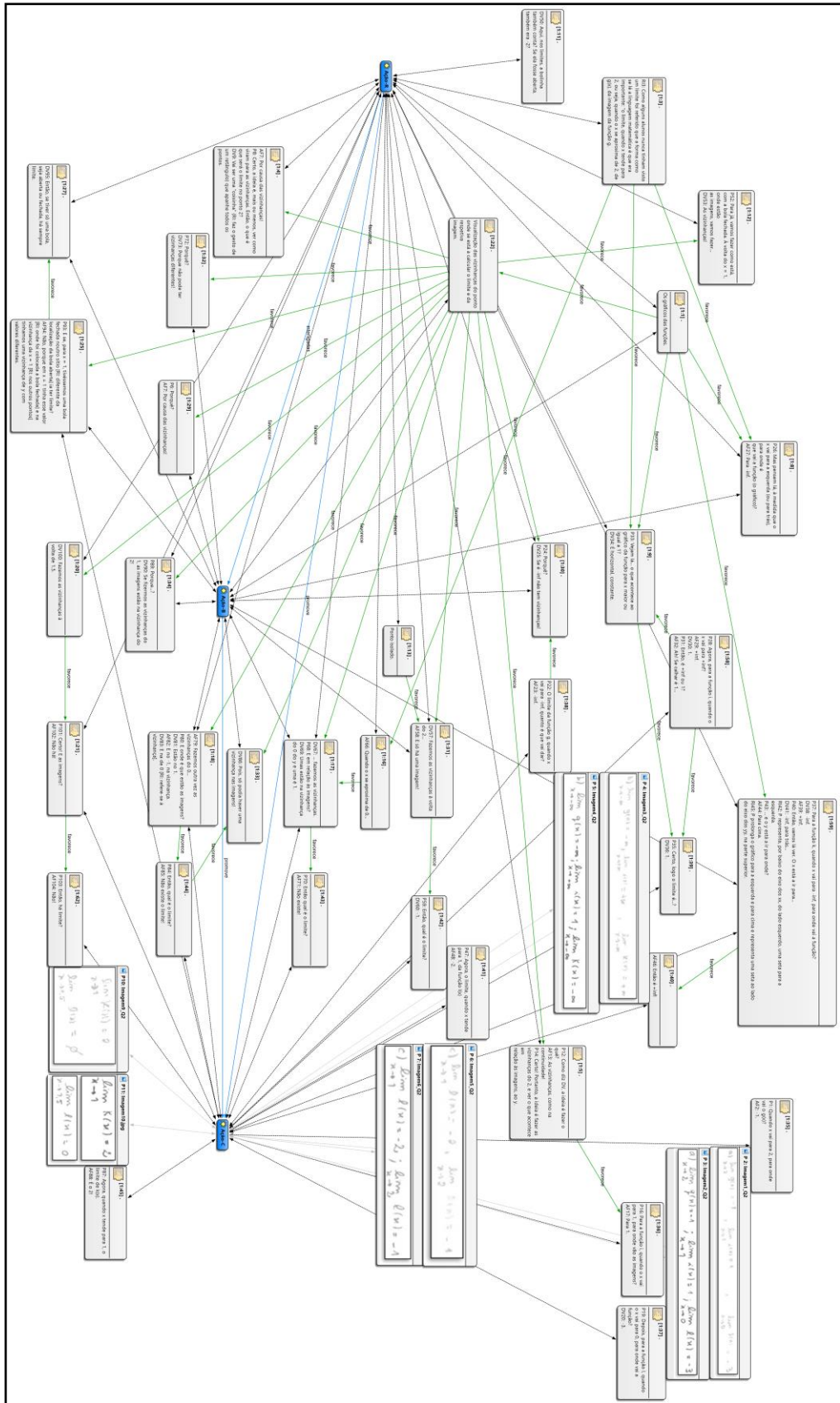
Anexo 6.17 - Ampliação da Figura 6.87 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 5 sobre Continuidade



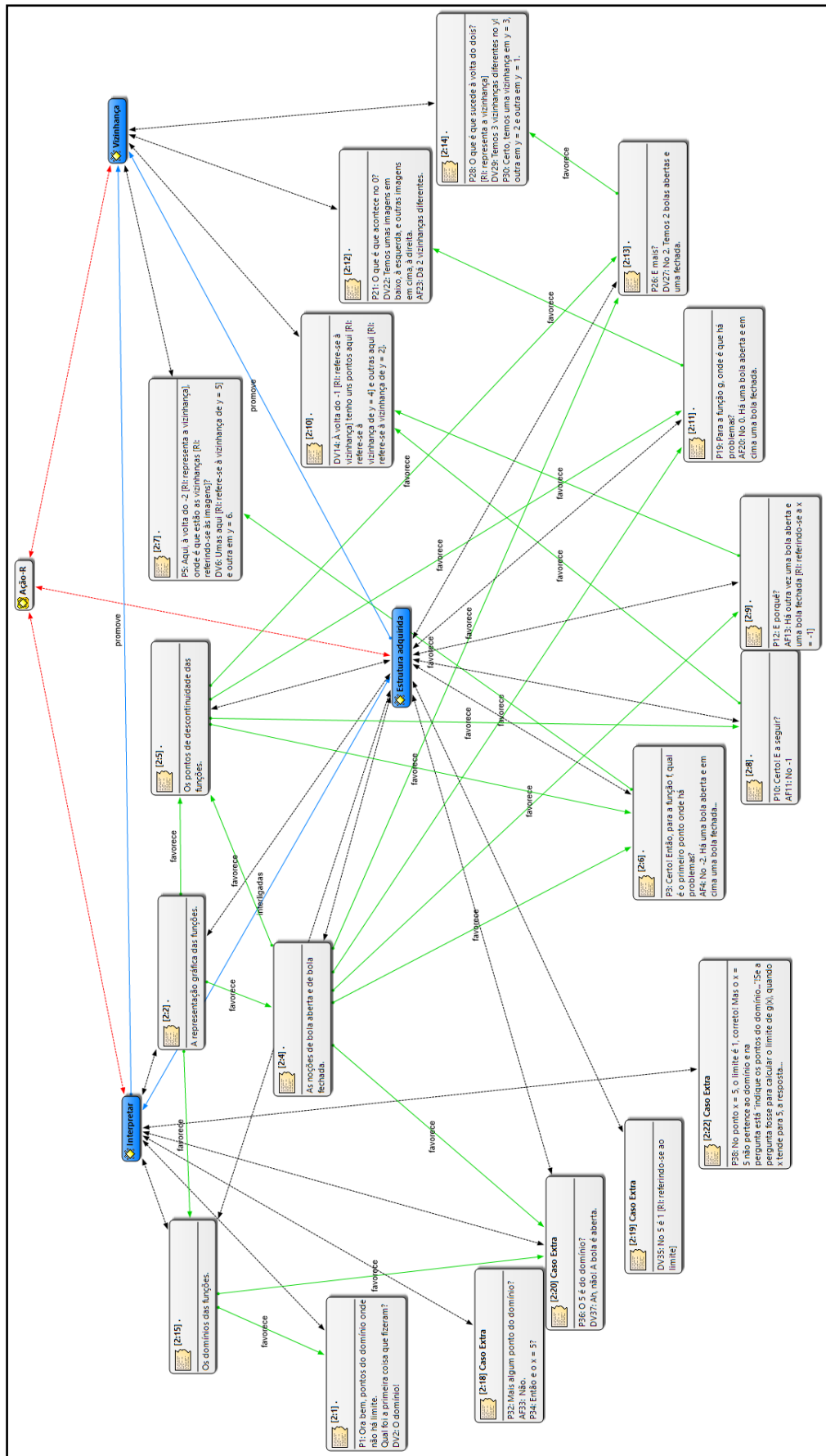
Anexo 6.19 - Ampliação da Figura 6.114 - RAV da Ação-B na Questão 2 sobre Limite



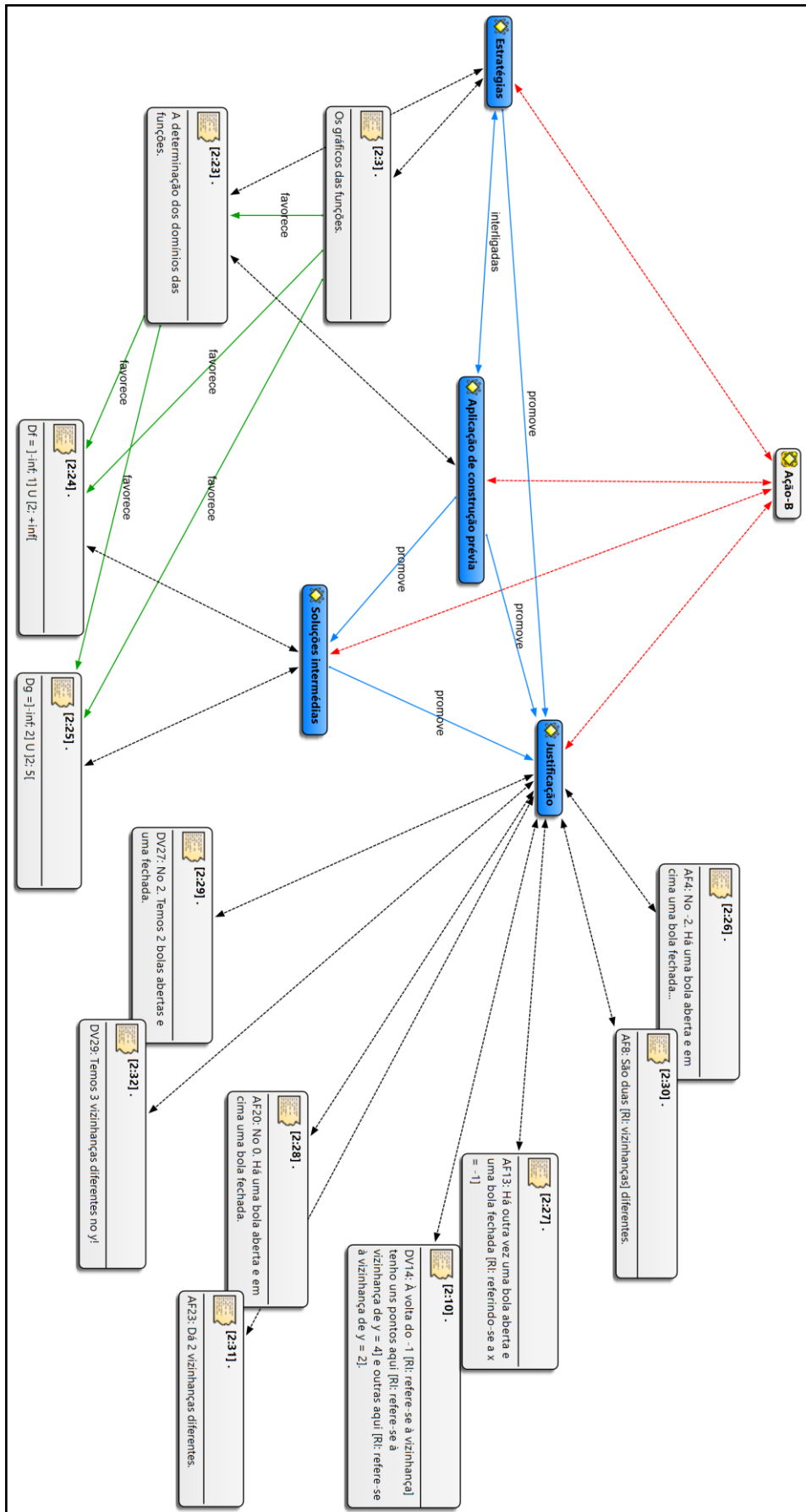
Anexo 6.21 - Ampliação da Figura 6.134 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 2 sobre Limite



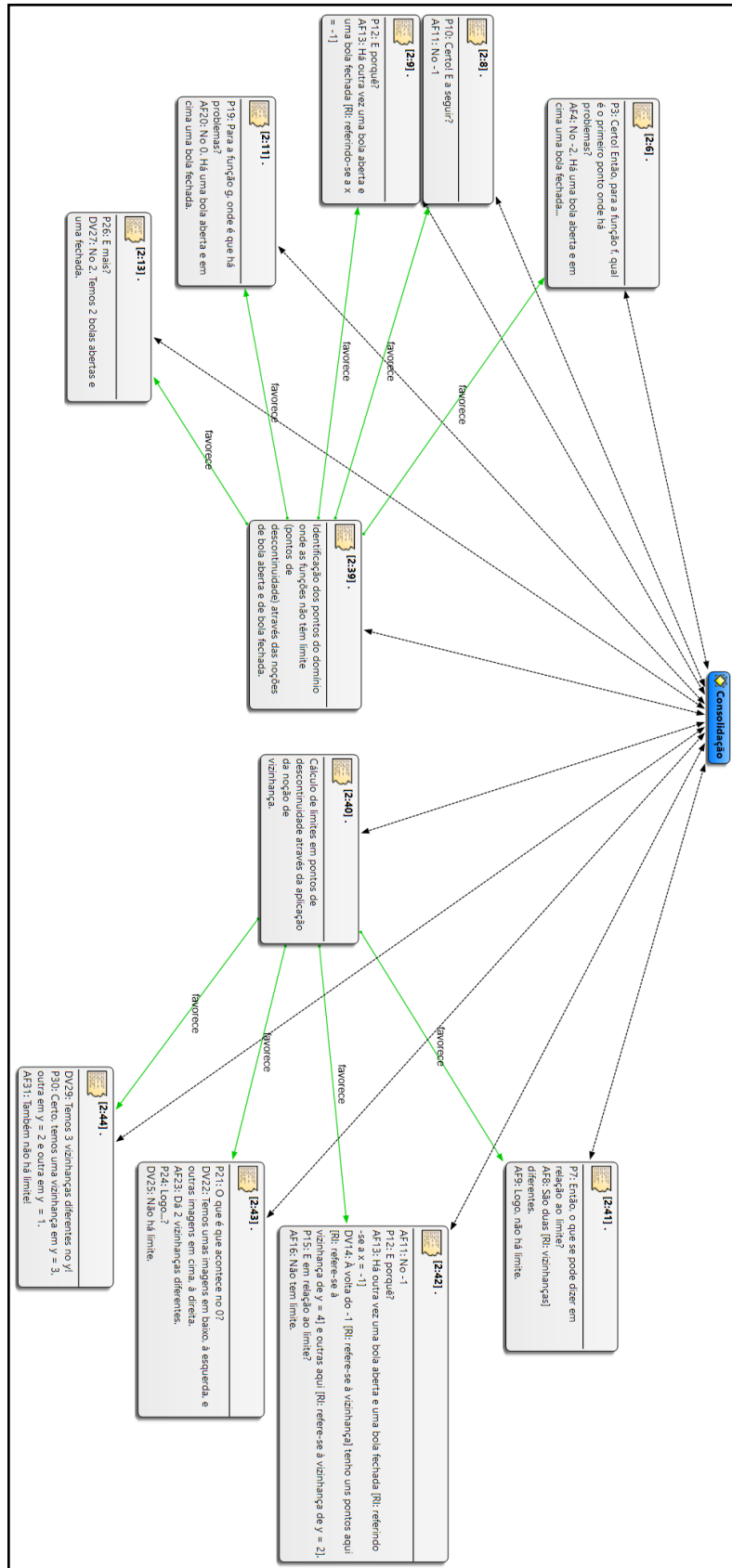
Anexo 6.22 - Ampliação da Figura 6.139 - RAV da Ação-R na Questão 3 sobre Limite



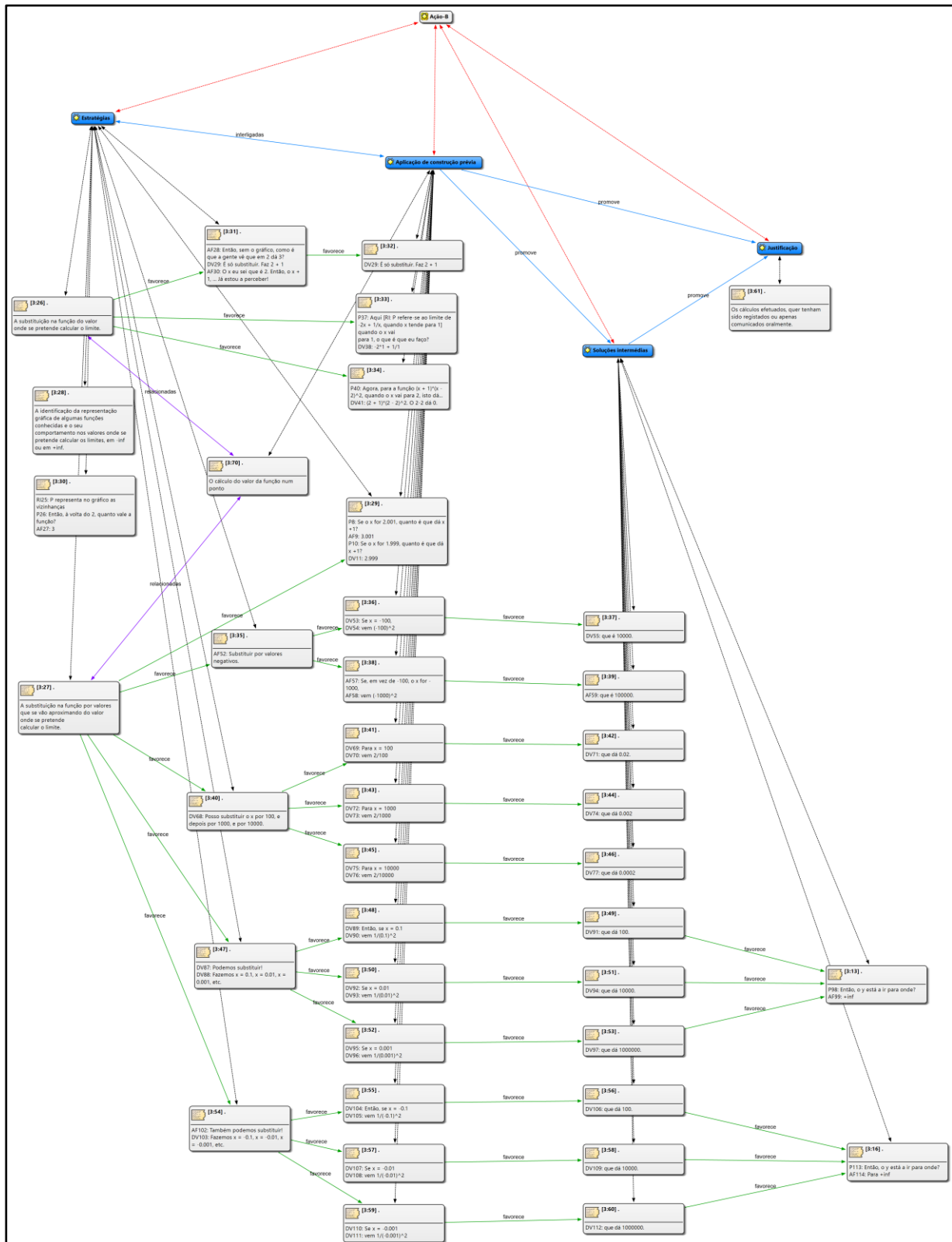
Anexo 6.23 - Ampliação da Figura 6.143 - RAV da Ação-B na Questão 3 sobre Limite



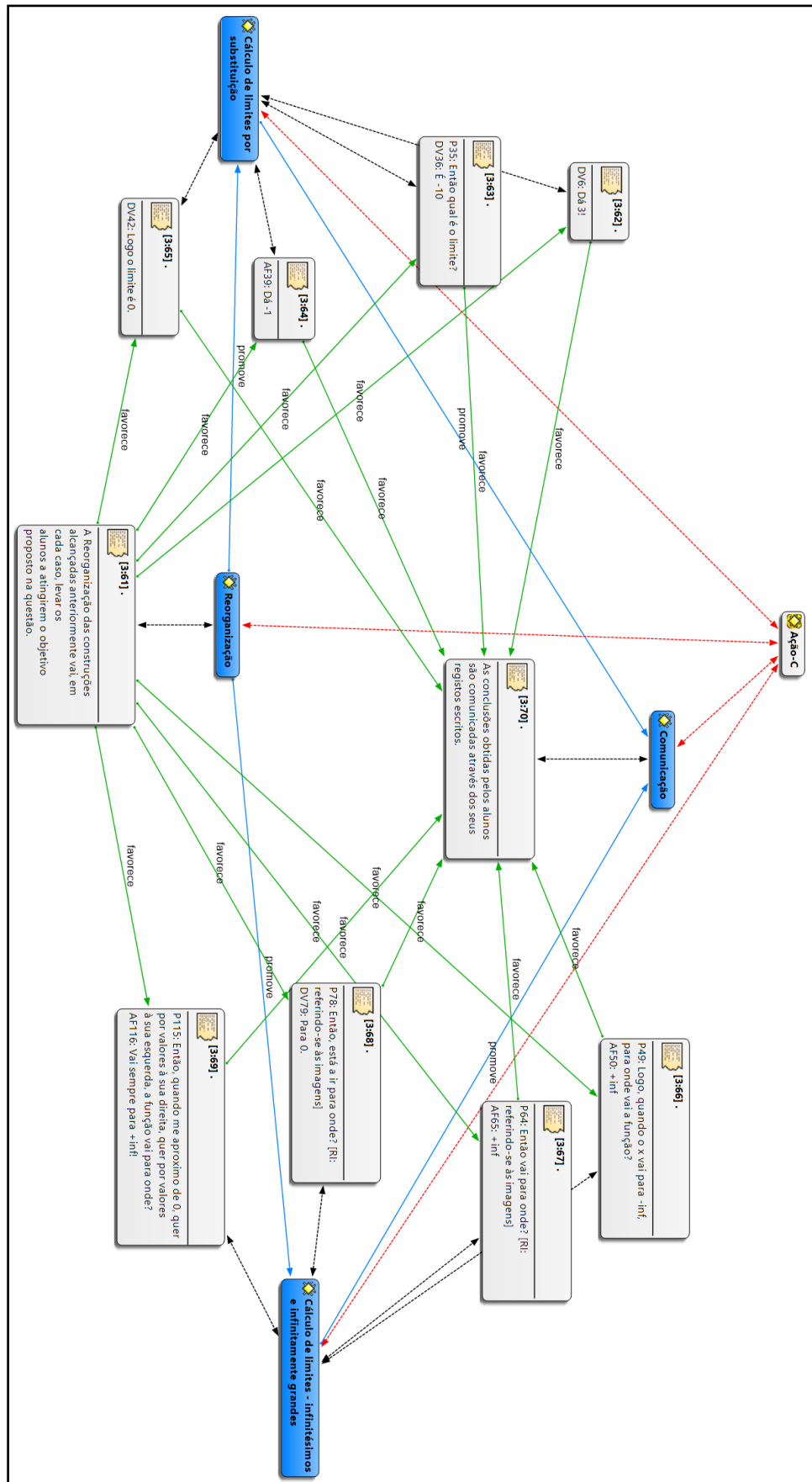
Anexo 6.25 - Ampliação da Figura 6.147 - RAV da ação epistêmica *Consolidação* na Questão 3 sobre Limite



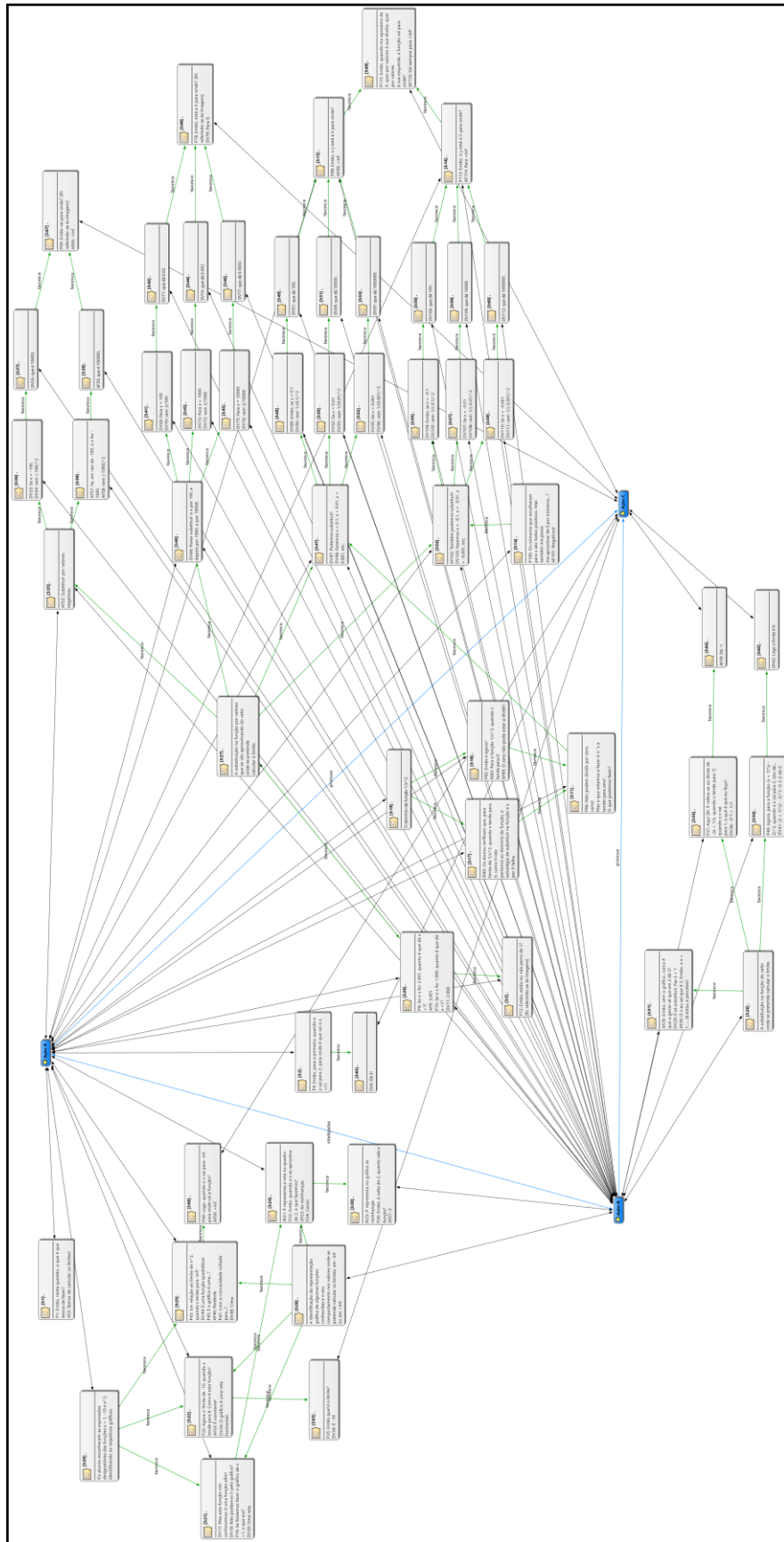
Anexo 6.28 - Ampliação da Figura 6.159 - RAV da Ação-B na Questão 4 sobre Limite



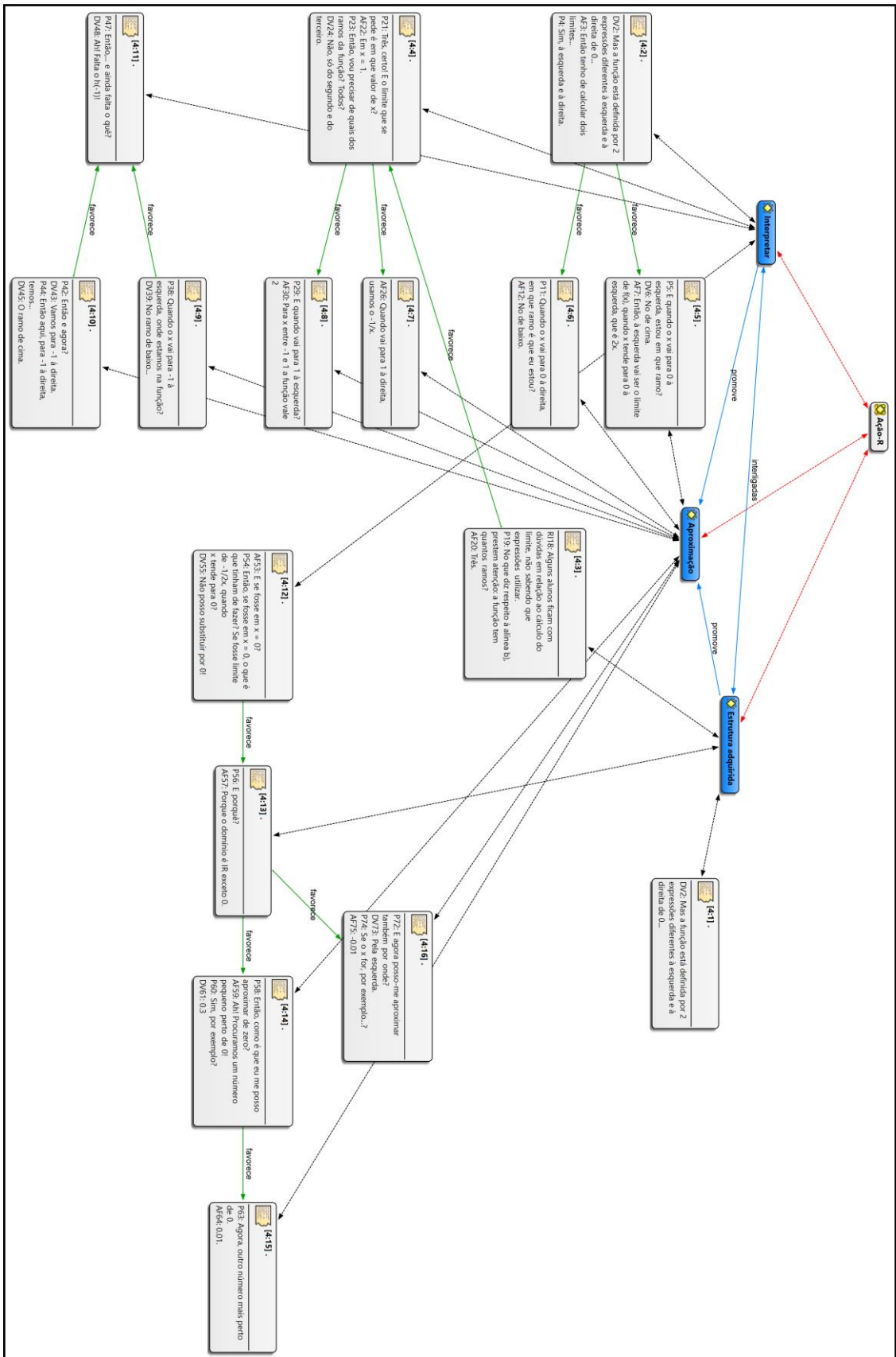
Anexo 6.29 - Ampliação da Figura 6.164 - RAV da Ação-C na Questão 4 sobre Limite



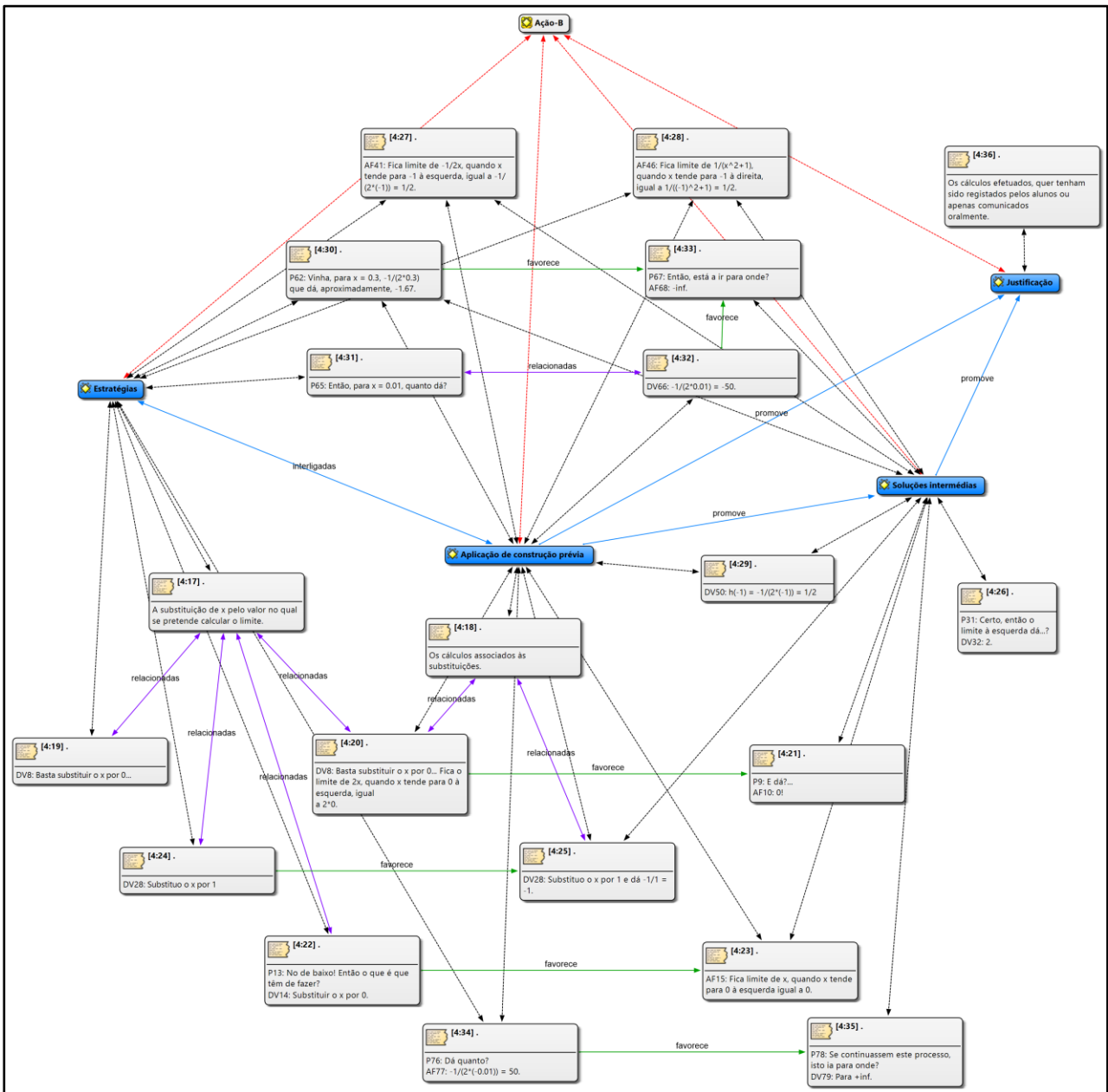
Anexo 6.30 - Ampliação da Figura 6.165 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 4 sobre Limite



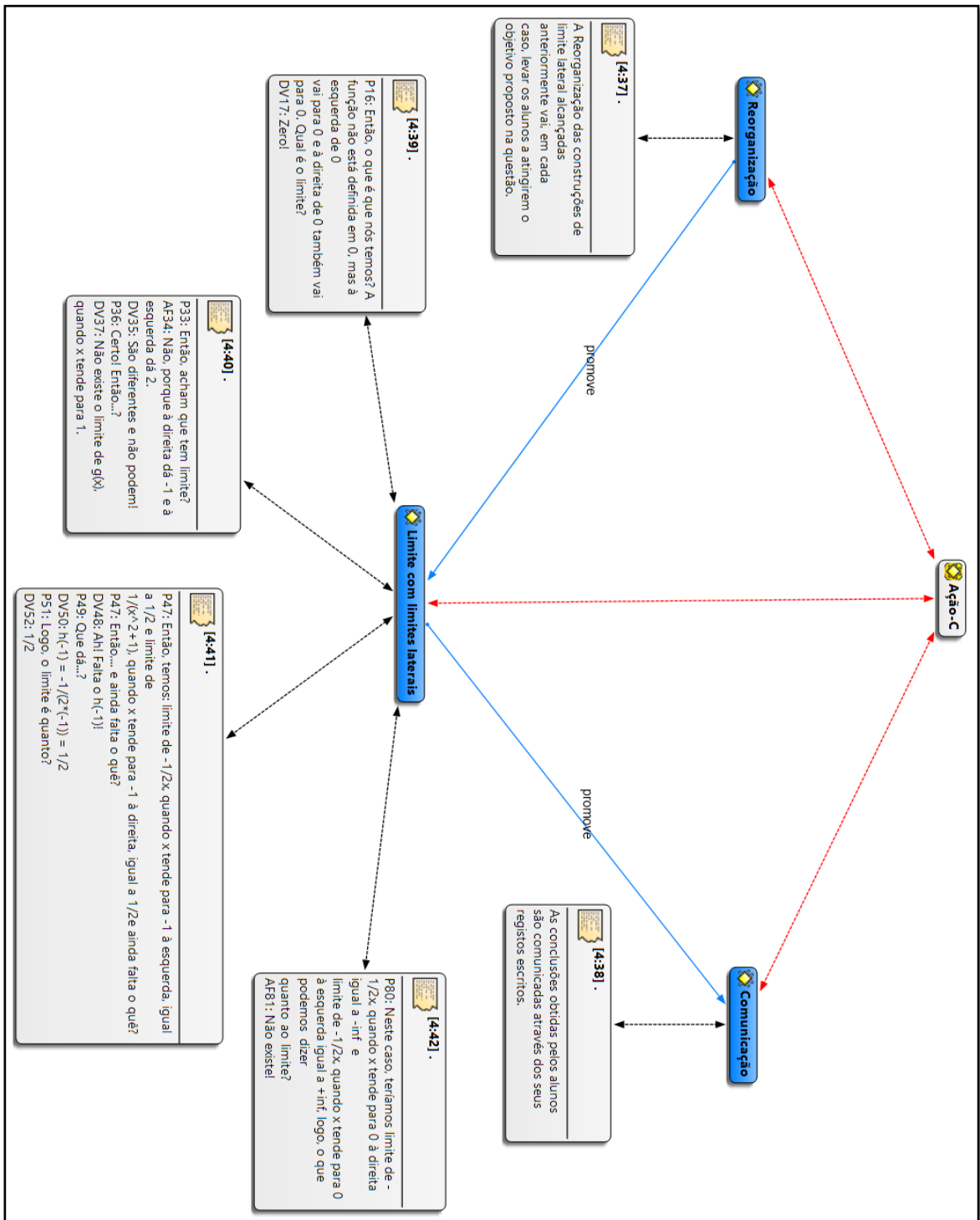
Anexo 6.31 - Ampliação da Figura 6.175 - RAV da Ação-R na Questão 5 sobre Limite



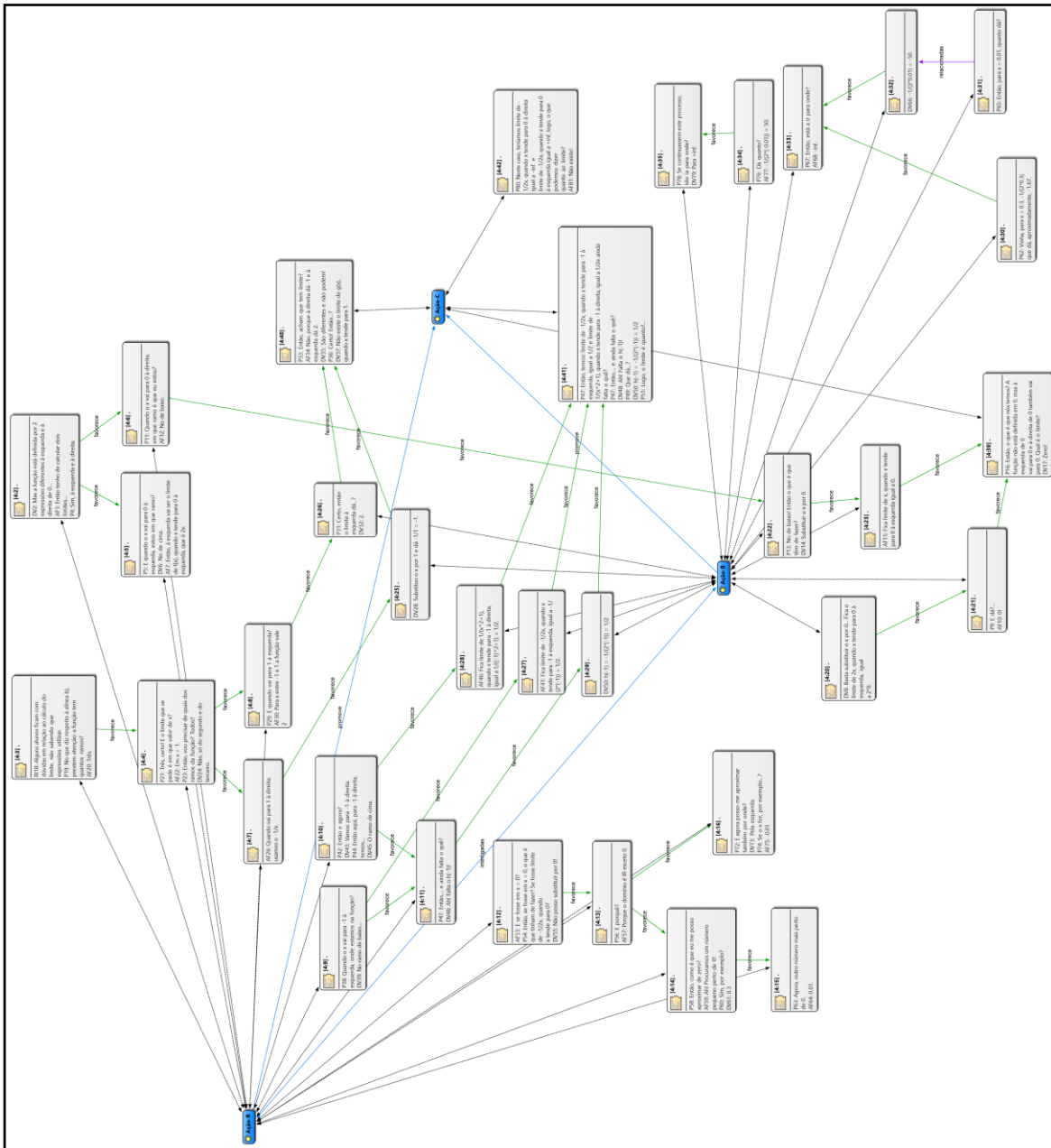
Anexo 6.32 - Ampliação da Figura 6.183 - RAV da Ação-B na Questão 5 sobre Limite



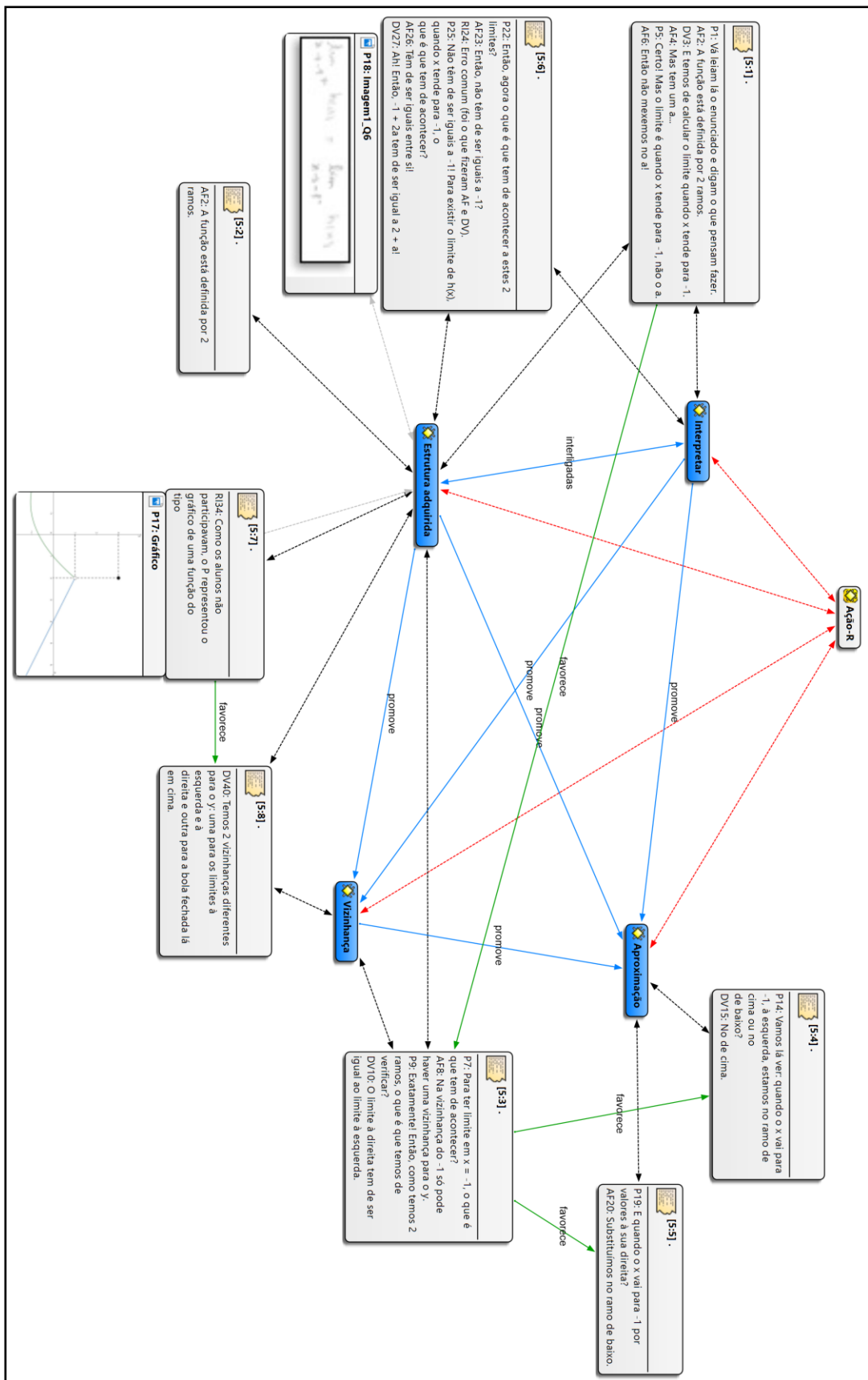
Anexo 6.33 - Ampliação da Figura 6.191 - RAV da Ação-C na Questão 5 sobre Limite



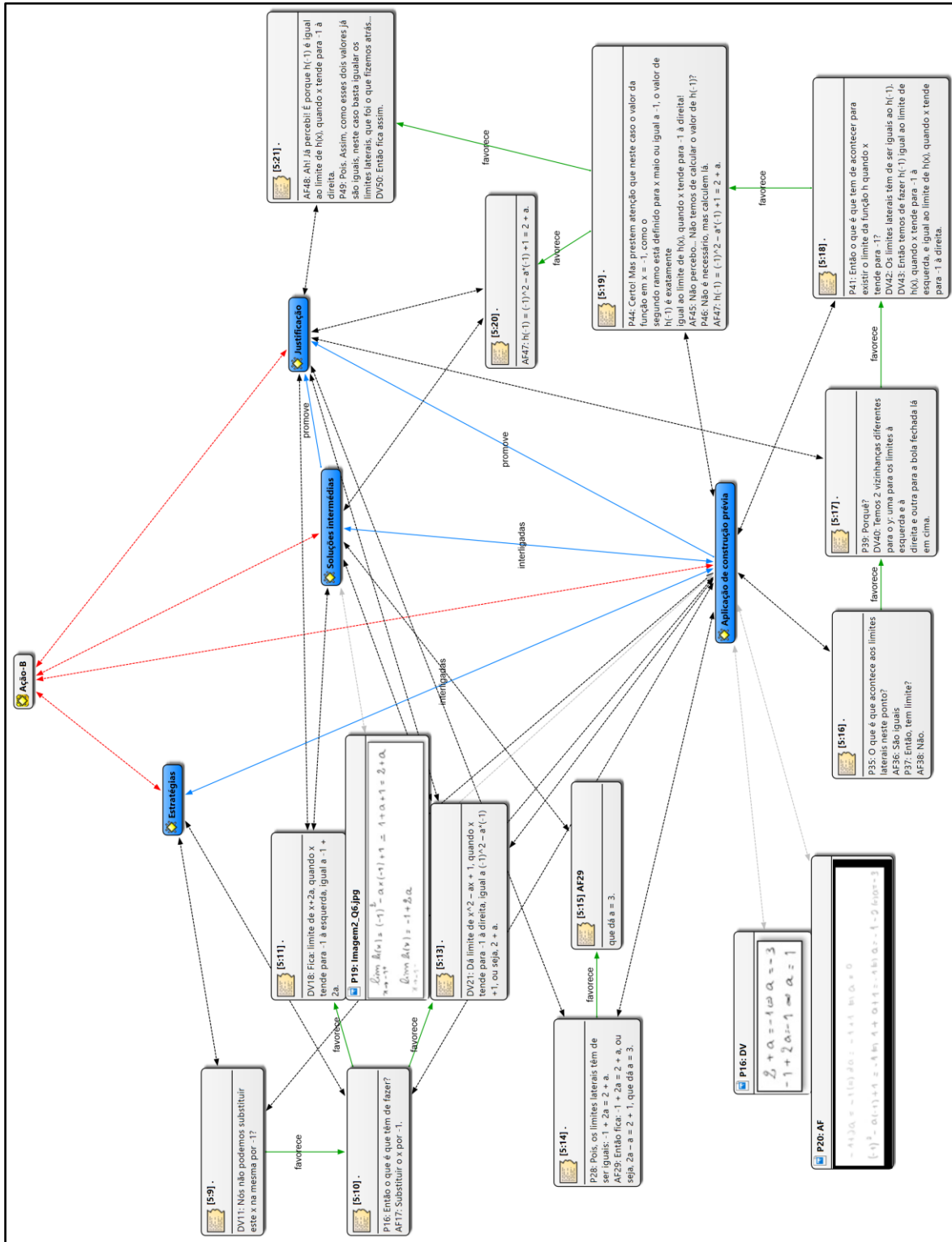
Anexo 6.34 - Ampliação da Figura 6.192 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 5 sobre Limite



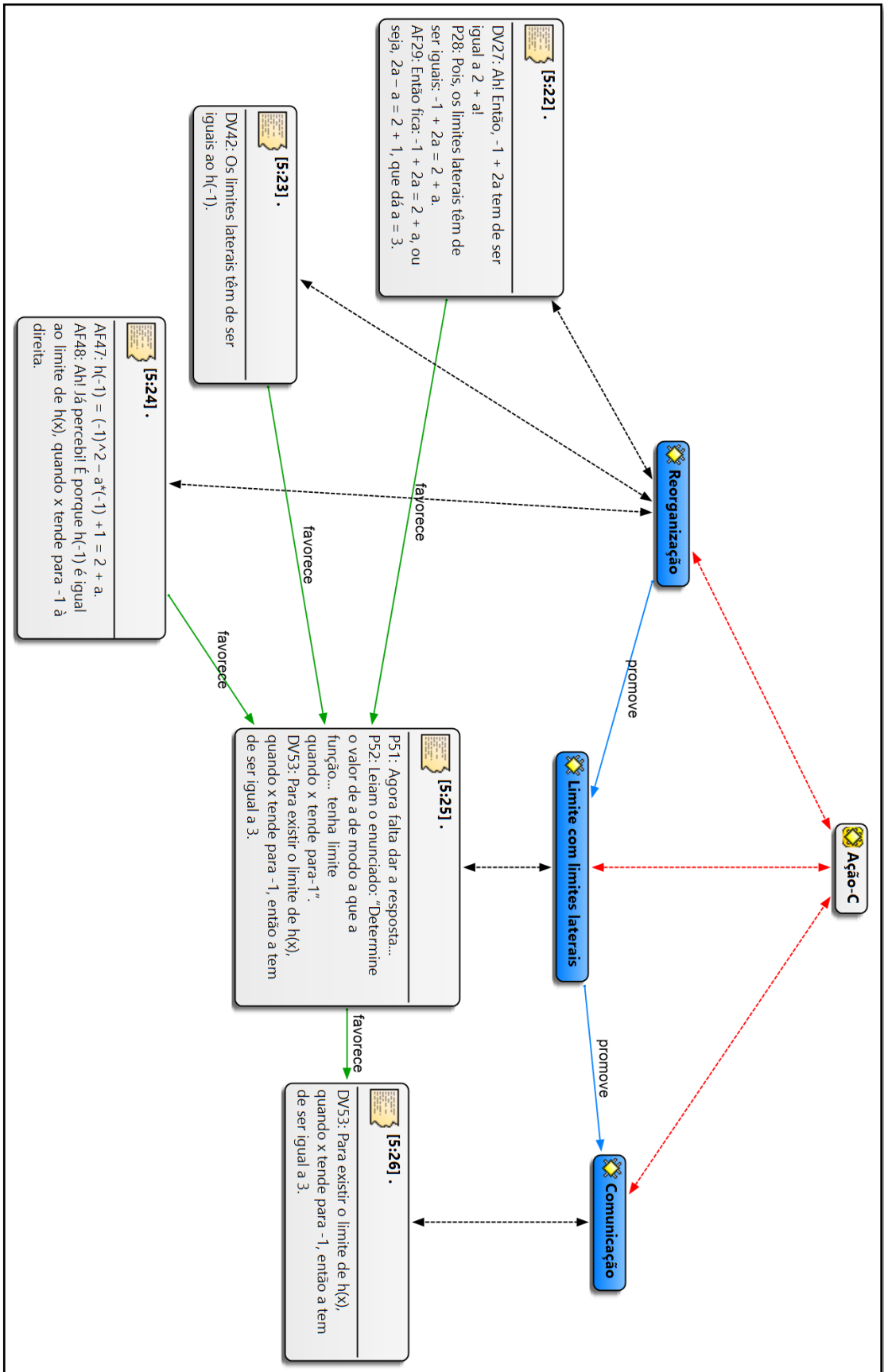
Anexo 6.35 - Ampliação da Figura 6.200 - RAV da Ação-R na Questão 6 sobre Limite



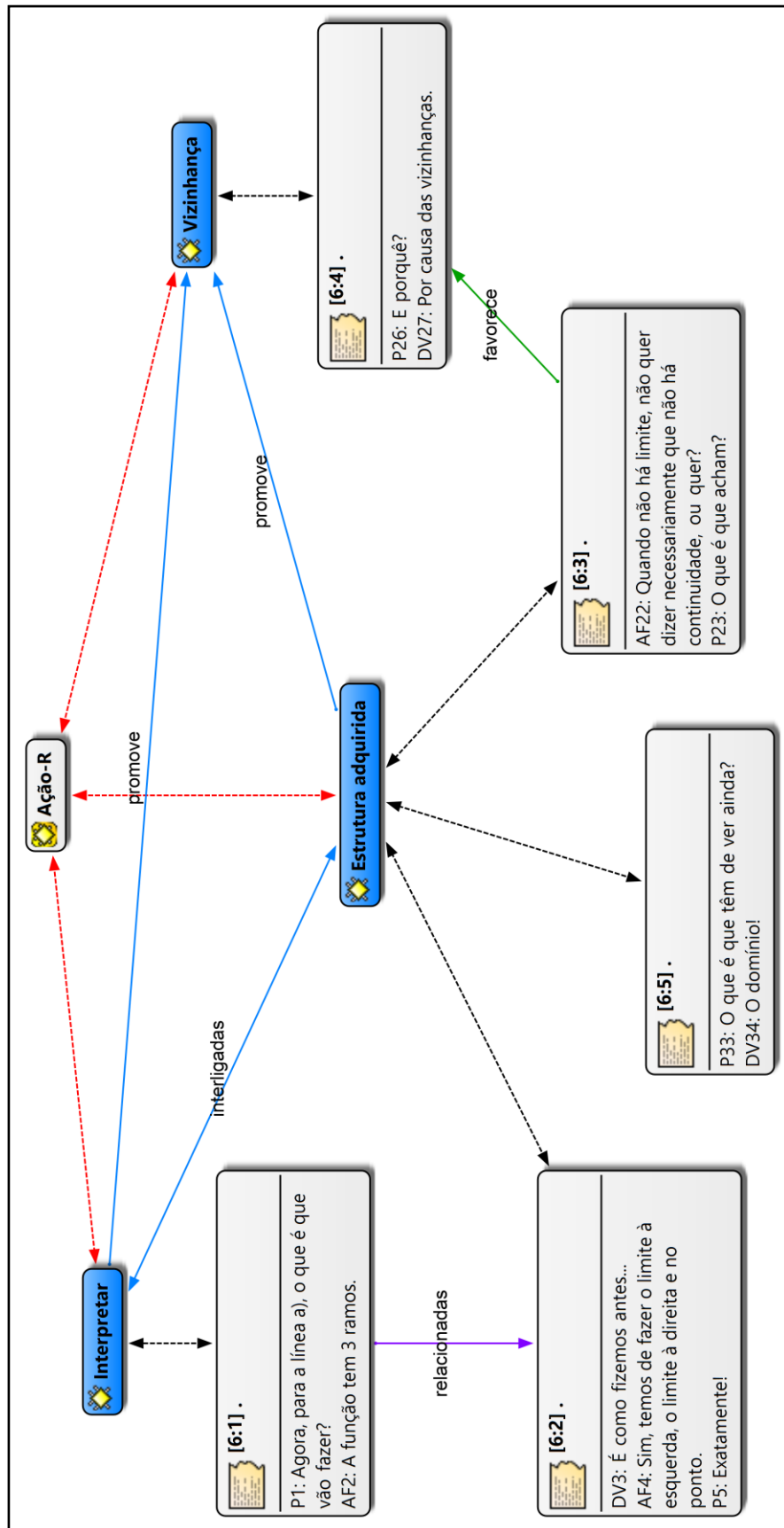
Anexo 6.36 - Ampliação da Figura 6.208 - RAV da Ação-B na Questão 6 sobre Limite



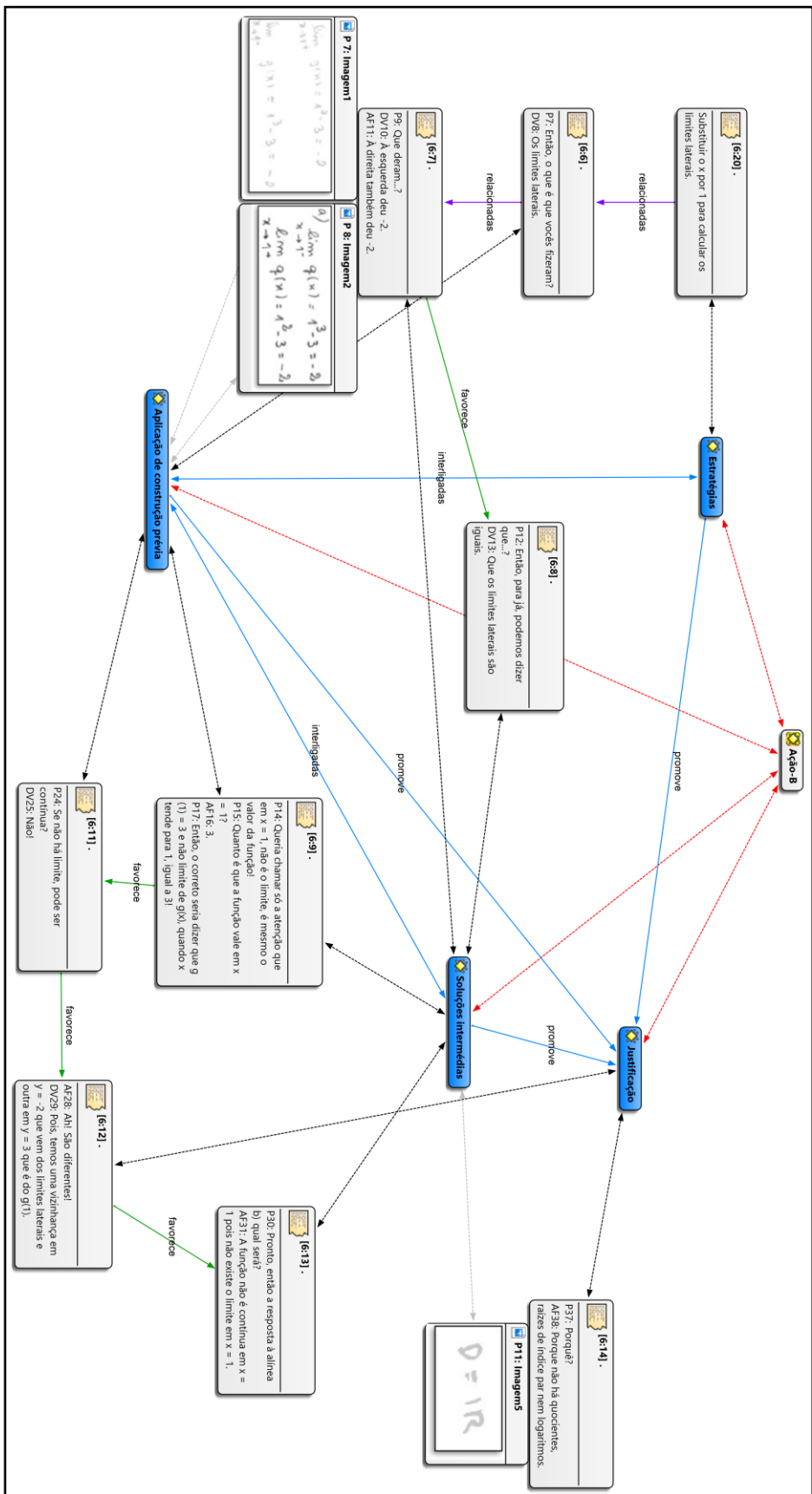
Anexo 6.37 - Ampliação da Figura 6.210 - RAV da Ação-C na Questão 6 sobre Limite



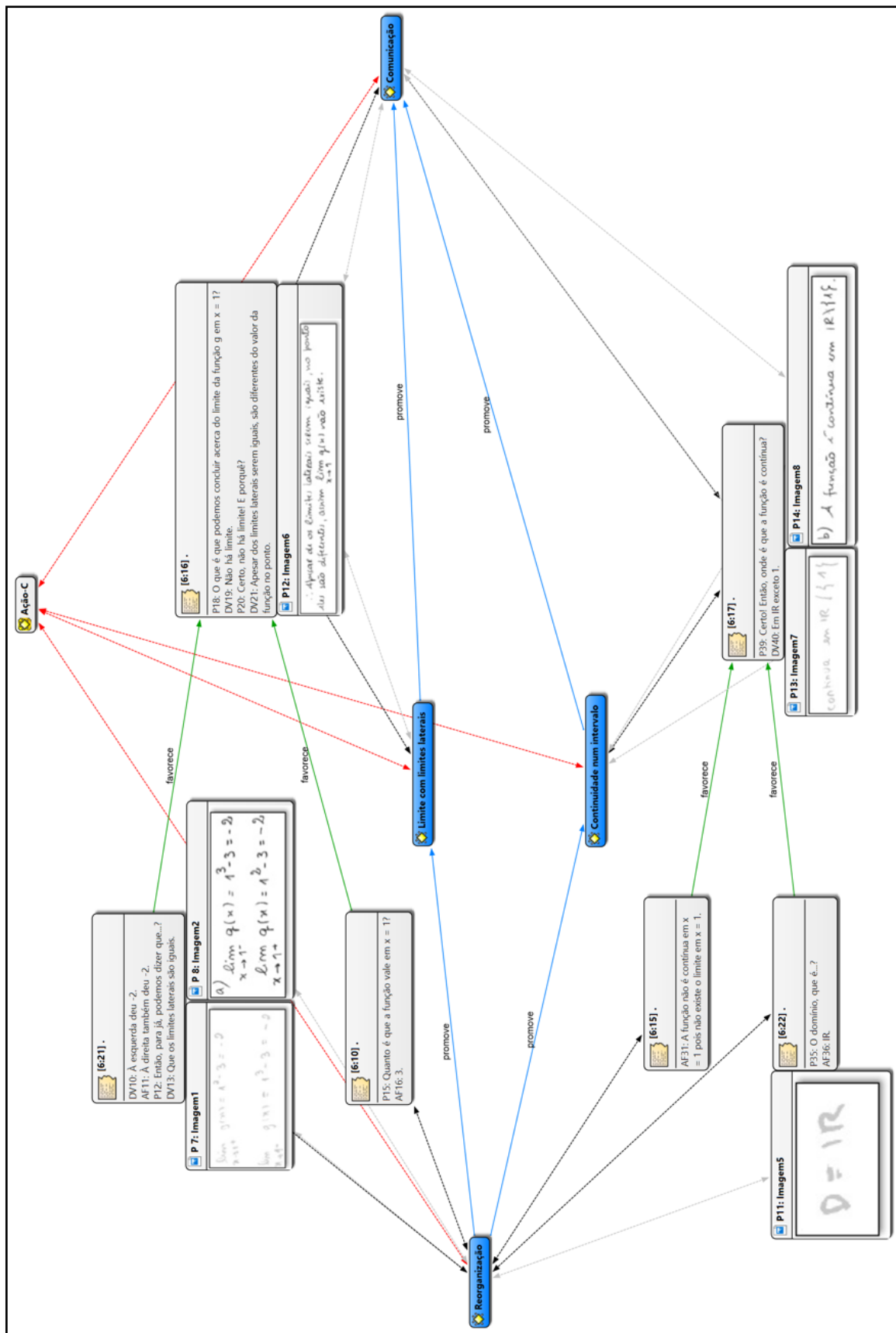
Anexo 6.40 - Ampliação da Figura 6.220 - RAV da Ação-R na Questão 7 sobre Limite



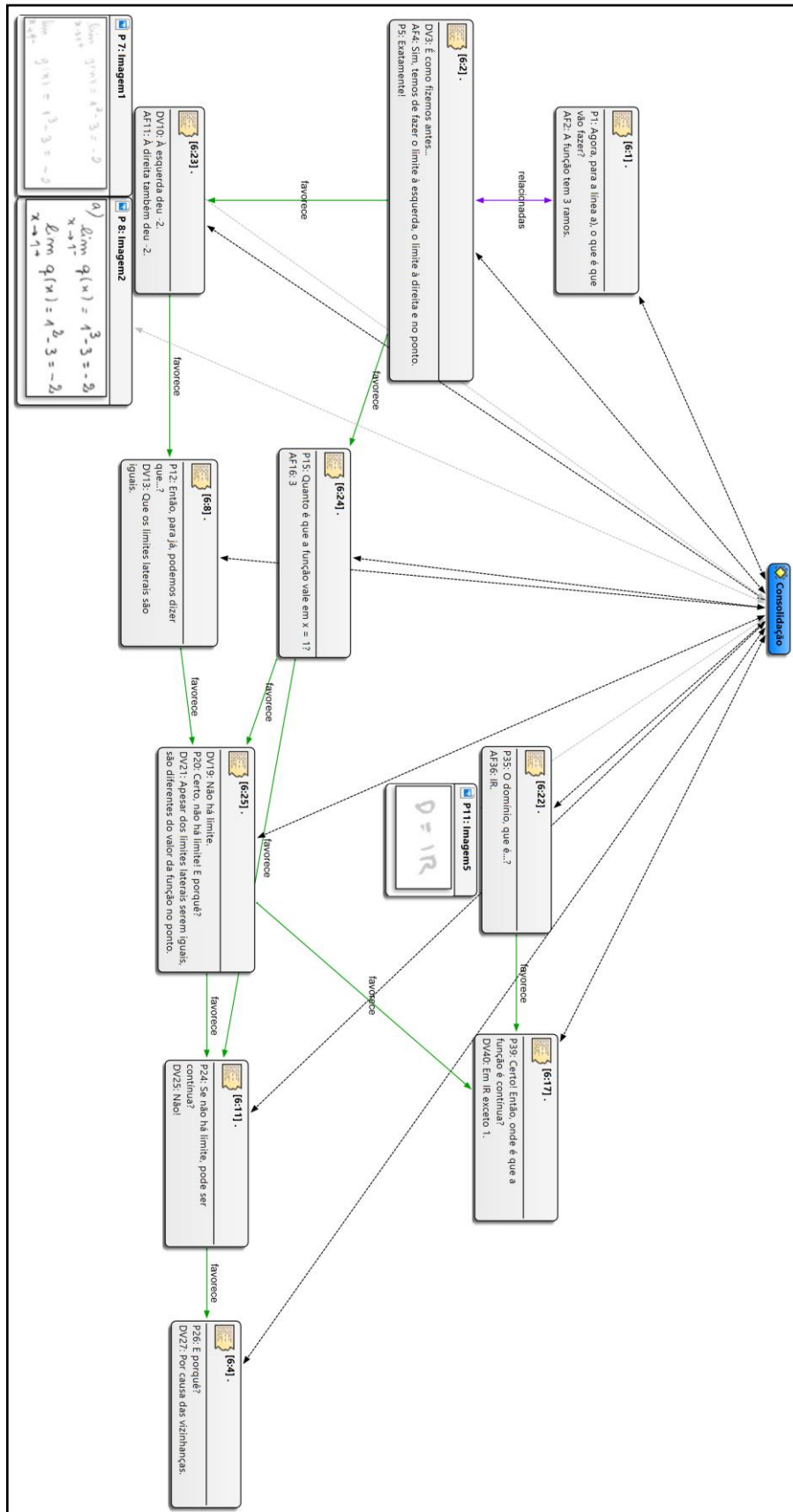
Anexo 6.41 - Ampliação da Figura 6.229 - RAV da Ação-B na Questão 7 sobre Limite



Anexo 6.42 - Ampliação da Figura 6.240 - RAV da Ação-C na Questão 7 sobre Limite

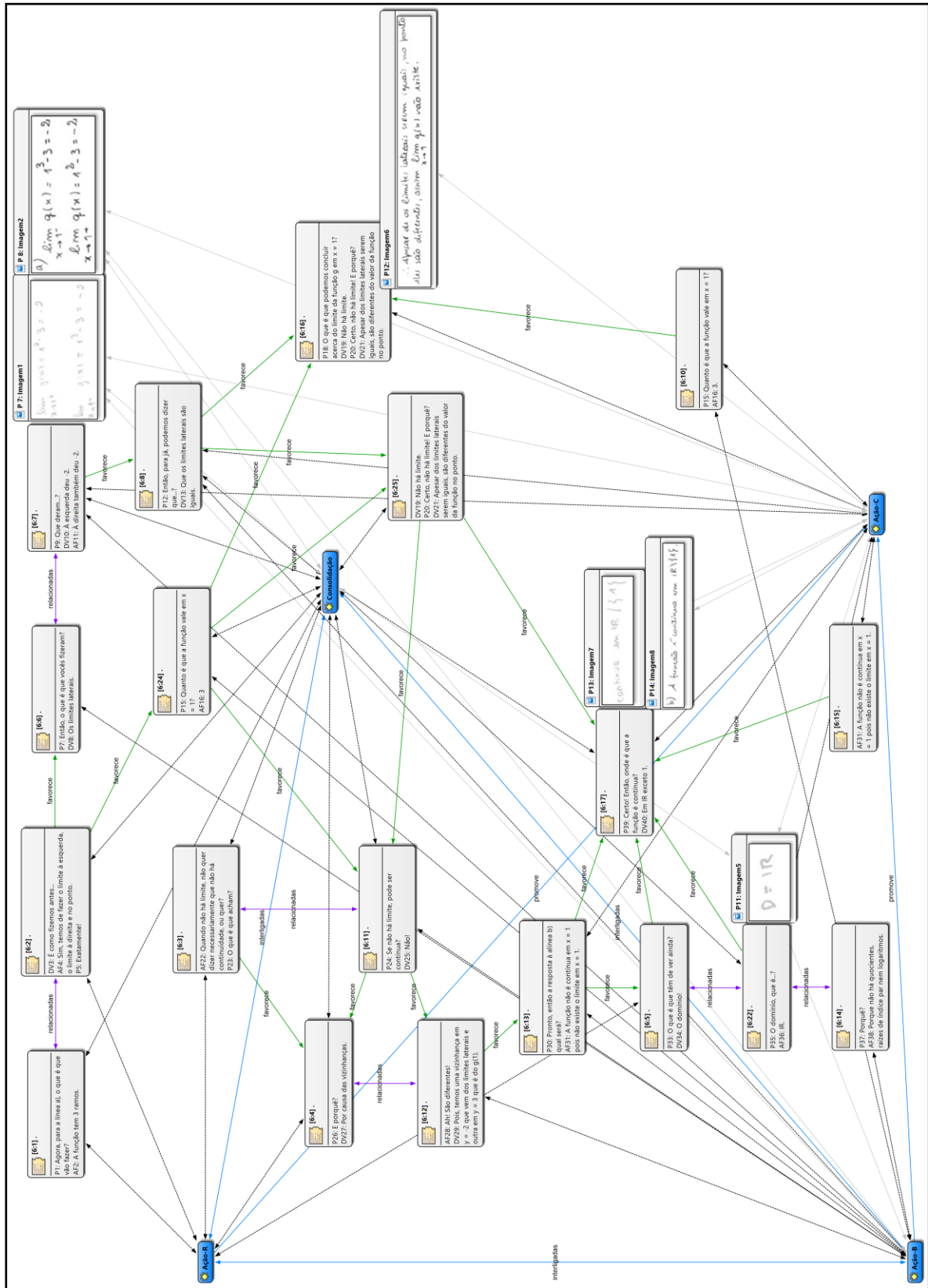


Anexo 6.43 - Ampliação da Figura 6.243 - RAV da ação epistêmica *Consolidação* na Questão 7 sobre Limite

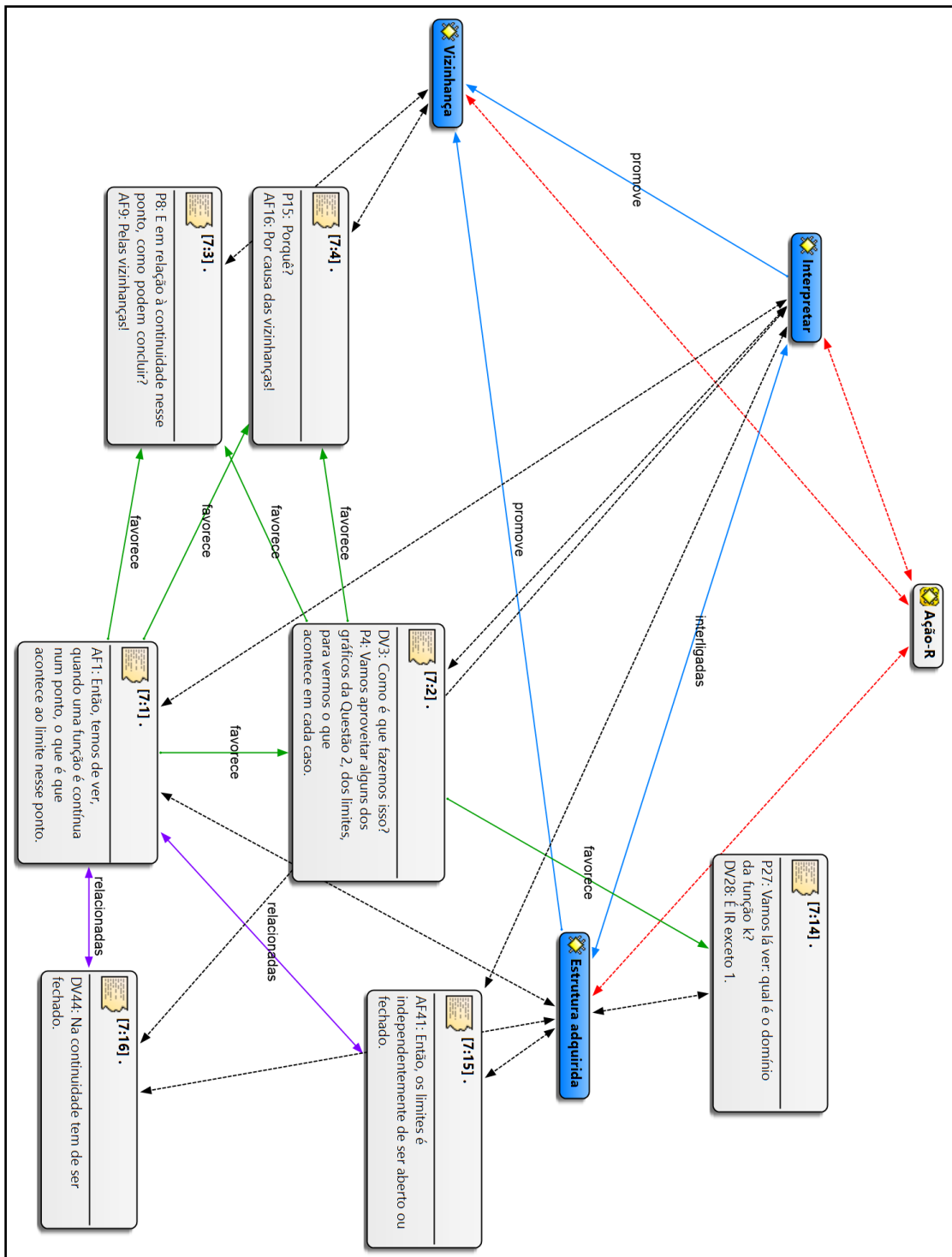


Anexo 6.44 - Ampliação da

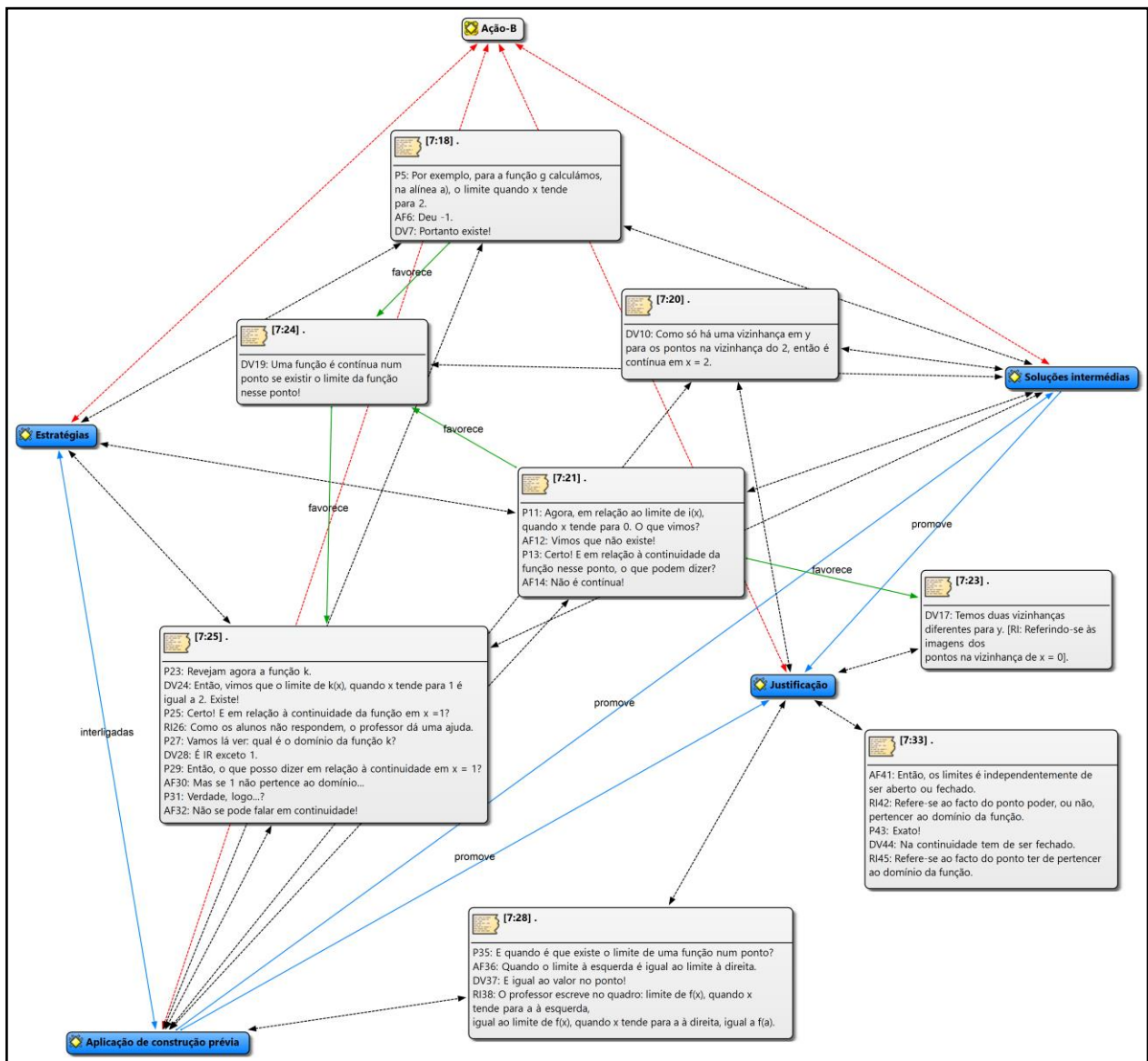
Figura 6.244 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 7 sobre Limite



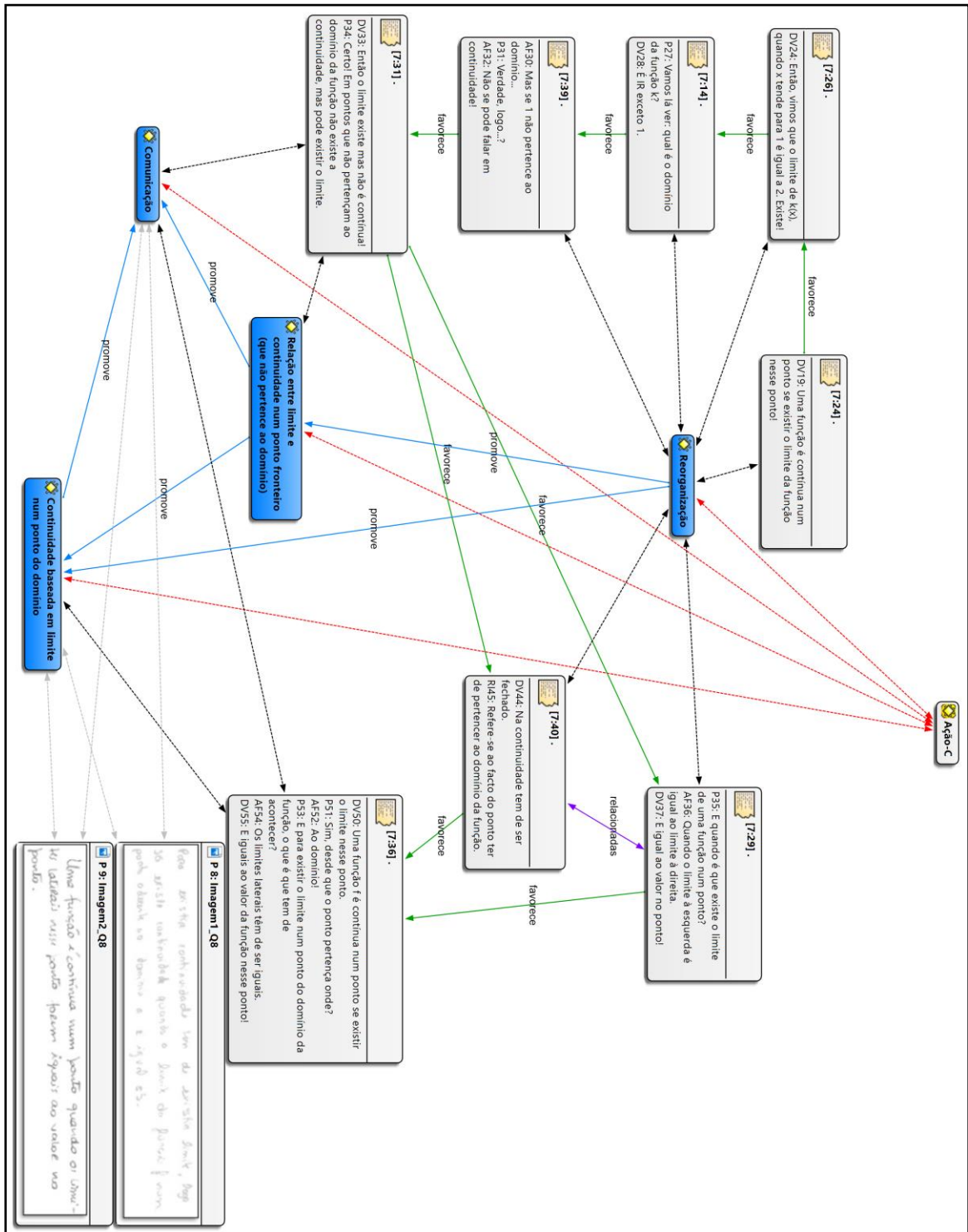
Anexo 6.45 - Ampliação da Figura 6.251 - RAV da Ação-R na Questão 8 sobre Limite



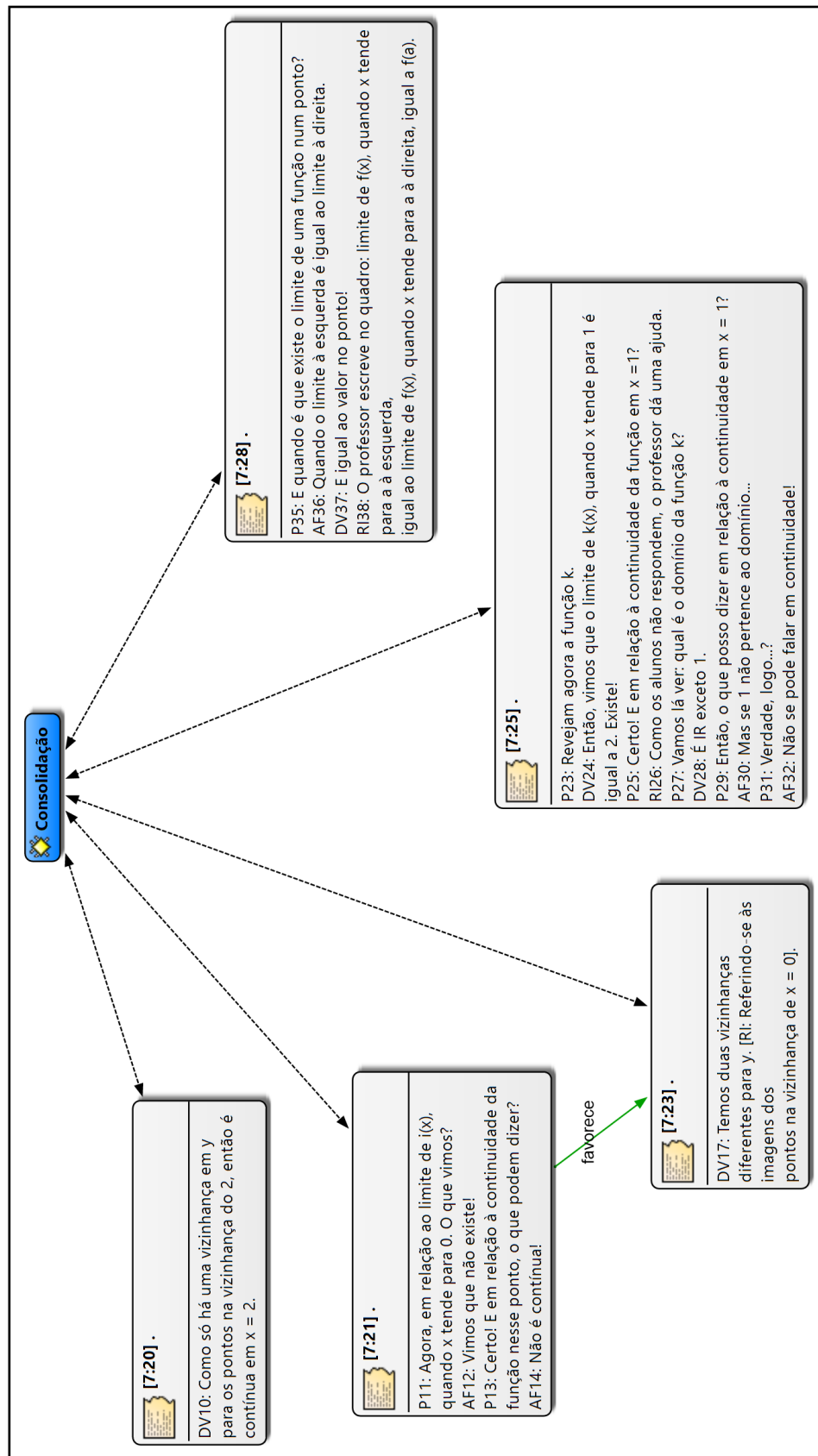
Anexo 6.46 - Ampliação da Figura 6.259 - RAV da Ação-B na Questão 8 sobre Limite



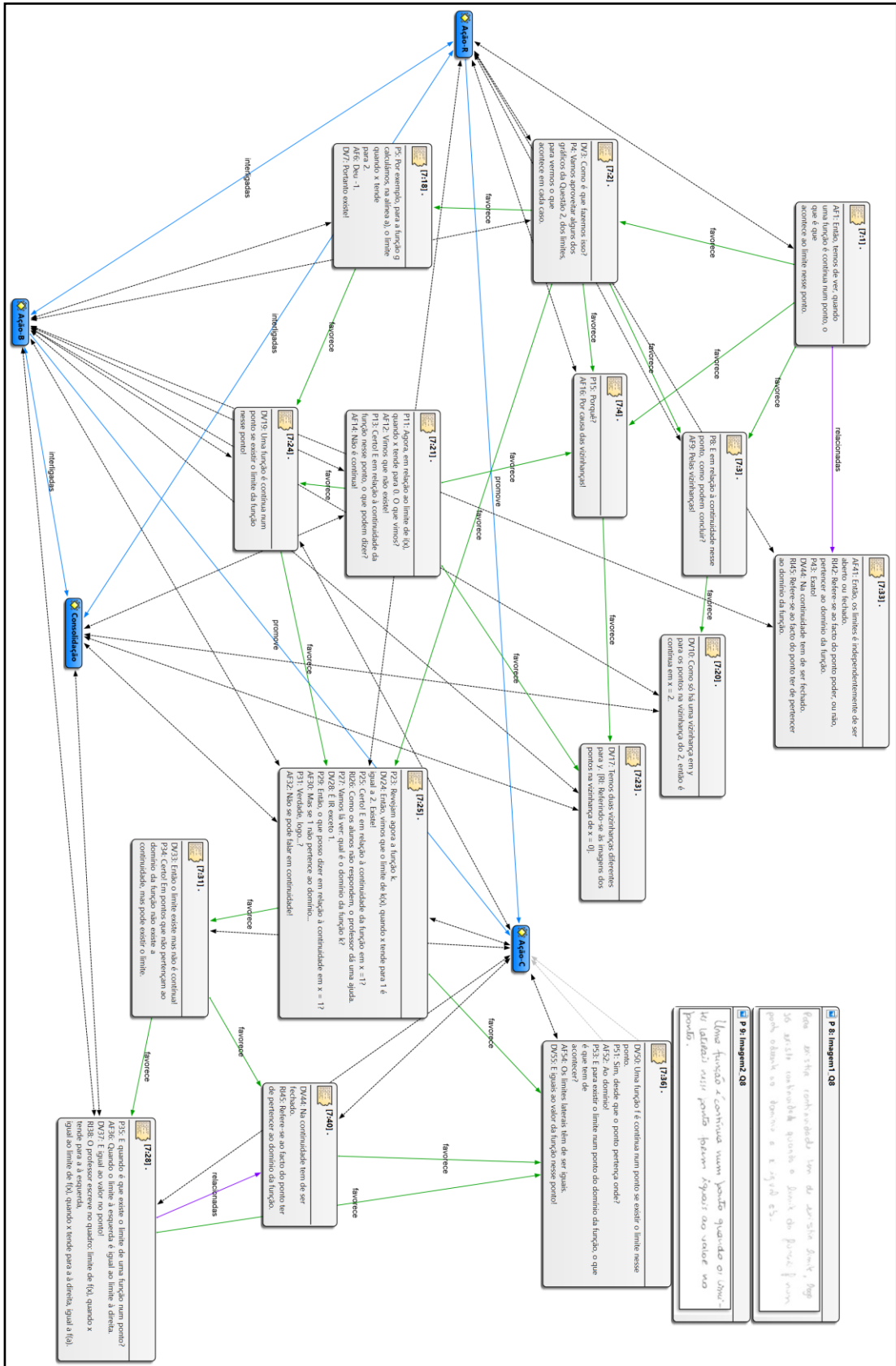
Anexo 6.47 - Ampliação da Figura 6.265 - RAV da Ação-C na Questão 8 sobre Limite



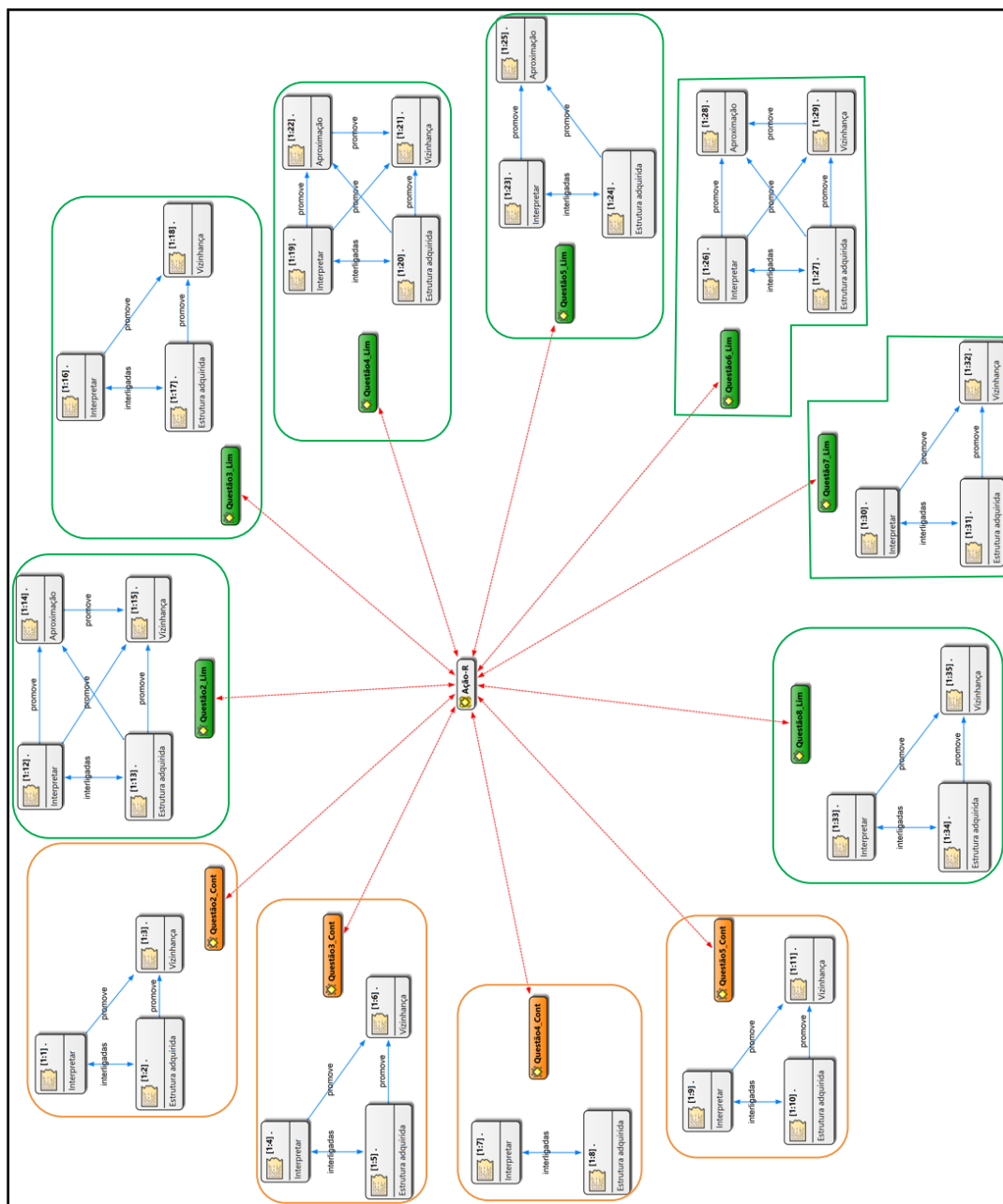
Anexo 6.48 - Ampliação da Figura 6.267 - RAV da ação epistêmica *Consolidação* na Questão 8 sobre Limite



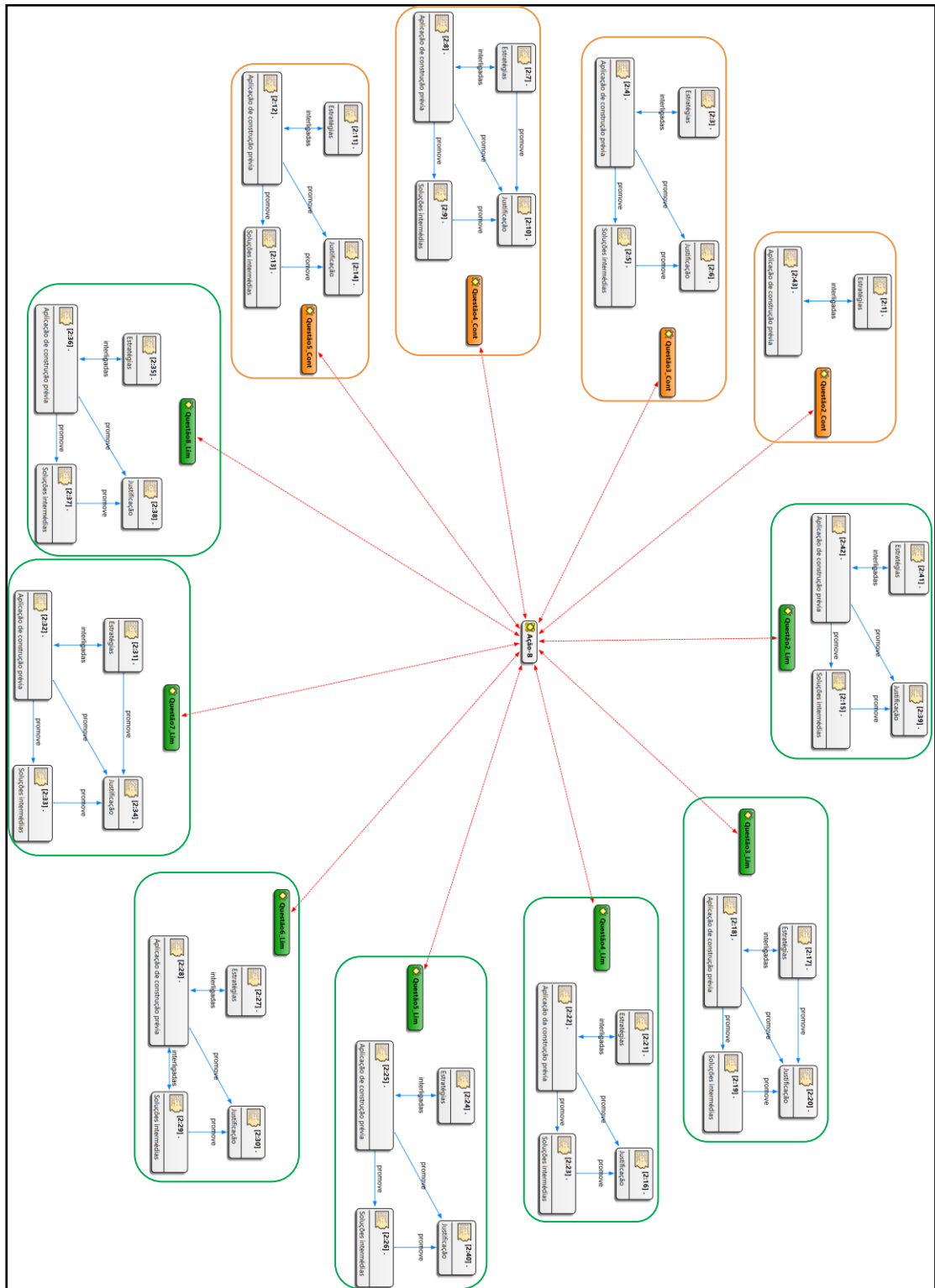
Anexo 6.49 - Ampliação da Figura 6.268 - Síntese das relações estabelecidas entre as ações epistêmicas na Questão 8 sobre Limite



Anexo 7.1 - Ampliação da Figura 7.5 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da Ação-R



Anexo 7.2 - Ampliação da Figura 7.10 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da Ação-B



Anexo 7.3 - Ampliação da Figura 7.18 - Síntese das relações estabelecidas entre as subcategorias da Ação-C

