



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Faculdade de Ciências

Ensino da Geometria Analítica no contexto cultural do Cuito-Bié

Ezequias Adolfo Domingas Cassela

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2º ciclo de estudos)
Versão final após defesa

Orientadora: Professora Doutora Sandra Margarida Pinho Bento

Covilhã, Maio de 2018

Dedicatória

Dedico esta dissertação primeiramente a alguém que muito admiro e que em todos os momentos da minha vida tem servido como um exemplo a seguir, um homem que muito fez para me tornar a pessoa que sou. Este homem possui uma categoria especial na minha vida, a de Avô, Ezequias Adolfo; dedico também a minha mãe Alice Domingas Adolfo, minha avó Julinda Jamba Adolfo, minha esposa Domingas Cassitue Betatela, minha filha Aldina Cássia Betatela Cassela, meu filho, Eduardo Misael Betatela Cassela, aos meus tios e tias, aos meus irmãos.

Ezequias Adolfo Domingas Cassela

Agradecimentos

A Deus pai todo poderoso por tudo que me tem proporcionado em cada passo que dou. Ao Governo de Angola. Aos meus pais pela educação. À Direção da Escola Superior Pedagógica do Bié, na pessoa do Professor Doutor Alfredo Maria de Jesus Paulo, pelo apoio moral e por todos os seus feitos para tornar possível este sonho. À Professora Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento, cujo apoio prestado foi mais longe de uma simples orientação. Aos nossos queridos professores: Professor Doutor Rui Pacheco, Professor Doutor Henrique Cruz e Professor Doutor Rogério Seródio, pela forma sábia com que conduziram o processo. Aos meus colegas de curso, aos meus amigos e amigas que a Universidade fez questão de colocar em minha vida.

Resumo

Este estudo qualitativo explorou o potencial das atividades de base cultural no ensino e aprendizagem do tópico 1.4.1 do Programa de Geometria Analítica II do primeiro ano de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié, referente às curvas cónicas. Foram seguidas duas abordagens: a Etnomatemática e a Educação Matemática Realística (EMR).

O contexto sócio-cultural do estudo foi o município do Cuito, na Província do Bié em Angola, mais especificamente, o contexto educativo da Escola superior Pedagógica do Bié. Objetivou-se em extrair ideias matemáticas de atividades culturais em algumas aldeias tradicionais do município do Cuito, para auferir uma proposta pedagógica de intervenção na cadeira de Geometria Analítica.

Este estudo tem o seu enquadramento teórico na concepção histórico-cultural de Vigostsky com base às potencialidades que brindam as duas abordagens escolhidas. A investigação foi encaminhada para dar resposta a seguinte questão: Qual é o potencial das ideias geométricas associadas com as atividades culturais do município do Cuito no ensino da Geometria Analítica?

Palavras-chave

Etnomatemática, Matemática Realística, Ensino da Geometria Analítica, Curvas cónicas

Abstract

This qualitative study explored the potential of the cultural based activities in the teaching and learning of topic 1.4.1 of the Program of Analytical Geometry II of the first year of Mathematics Degree in Bié Pedagogical Higher Education School, referring to the conic curves. Two approaches were followed: Ethnomathematics and Realistic Mathematical Education (RME).

The socio-cultural context of the study was the municipality of Cuito, in the Province of Bié in Angola, more specifically, the educational context of Bié Pedagogical Higher Education School. The objective was to extract mathematical ideas of cultural activities in some traditional villages of the municipality of Cuito, to obtain a pedagogical proposal of intervention in the Analytic Geometry Course.

This study has its theoretical framework in the historical-cultural conception of Vigostsky based on the potentialities offered by the two approaches chosen. The research was directed to answer the following question: What is the potential of the geometric ideas associated with the cultural activities of the municipality of Cuito in the teaching of Analytical Geometry?

Keywords

Ethnomathematics, Realistic Mathematics, Teaching of Analytical Geometry, Conic Curves

Índice

1	Enquadramento teórico	5
1.1	Sobre a Etnomatemática	5
1.2	Sobre a Educação Matemática Realística (EMR)	9
2	Desenvolver o "olhar matemático": o estudo antes da pesquisa no terreno	13
2.1	Distância entre dois pontos no plano	13
2.2	Circunferência	14
2.3	Cônicas	16
2.3.1	Breve introdução histórica sobre as cônicas	16
2.3.2	Construção das cônicas usando esferas de Dandelin	16
2.3.3	Geometria Analítica - As equações reduzidas das cônicas	23
2.3.4	Dedução da equação geral das cônicas	35
2.3.5	Propriedades notáveis das cônicas	43
2.4	Geometria Analítica no espaço	48
2.4.1	Espaço cartesiano	48
2.4.2	Equações da reta no espaço	51
2.4.3	Equação geral do plano	53
2.5	Parametrizações de curvas	55
3	Problemas matemáticos motivados pelo contexto	65
3.1	Sobre a a Geometria "congelada"na cestaria produzida no Cuito	67
3.1.1	A diferença entre a elipse e circunferência ilustrada na produção de cestos	68
3.1.2	Interpretação matemática	69
3.1.3	Técnica do artesão para o cálculo da área da circunferência a partir da primeira imagem	70
3.1.4	Cálculo da área da elipse a partir do cesto da segunda imagem	73
3.2	A Geometria "congelada"na construção de um Onjango	75
3.2.1	Interpretação matemática da forma do Onjango	78
3.3	Sobre o enrolar e desenrolar de "lenços"no plano e no espaço	83
4	Metodologia	95
4.1	Breve caracterização histórica do município do Cuito	95
4.2	Opção metodológica	96
4.3	Instrumentos de recolha de dados	97

4.4	Apresentação de dados e discussão	97
4.4.1	Análise dos programas de Geometria Analítica I e II do primeiro ano do curso de Matemática da Escola em questão	97
4.4.2	Análise da entrevista dos professores, dos alunos e do questionário de diagnóstico.	98
4.4.3	Análise da dinâmica aplicada aos alunos	109
4.5	Caracterização da proposta pedagógica	122
4.6	Conclusões	123
A	Anexos	129
A.1	Instrumentos da investigação	130
A.2	Proposta pedagógica	140

Lista de Figuras

2.1	Distância entre dois pontos (a)	13
2.2	Distância entre dois pontos (b)	14
2.3	Circunferência	15
2.4	Esfera de Dandelin parábola	17
2.5	Plano π intersetando obliquamente um cone e paralelamente a uma geratriz	17
2.6	Esfera de Dandelin inscrita no cone	18
2.7	Interseção entre os planos π e θ	18
2.8	Reta paralela ao eixo do cone (a)	18
2.9	Reta paralela ao eixo do cone (b)	19
2.10	Reta paralela ao eixo do cone (c)	19
2.11	Reta paralela ao eixo do cone (d)	20
2.12	Esferas de Dandelin elipse	21
2.13	Esferas de Dandelin hipérbole	22
2.14	Parábola (a)	23
2.15	Parábola (b)	23
2.16	Parábola (c)	24
2.17	Parábola (d)	25
2.18	Parábola (e)	25
2.19	Parábola (f)	25
2.20	Parábola (g)	26
2.21	Elipse	27
2.22	Focos da elipse	27
2.23	Elipse com os focos no eixo dos yy	29
2.24	Focos da hipérbole	31
2.25	Hipérbole (a)	33
2.26	Hipérbole (b)	33
2.27	Rotação de eixos	38
2.28	Propriedade notável da parábola	44
2.29	Reflexão de sinais na superfície parabólica (Filipe[35], p.4)	45
2.30	Elipsóide [35]	46
2.31	Propriedade notável da hipérbole	47
2.32	Espaço cartesiano	48
2.33	Determinação da abcissa	49
2.34	Determinação da ordenada	49
2.35	Determinação da cota	50

2.36	Distância entre dois pontos no espaço (Stewart[44] p.795)	50
2.37	Retas no espaço (a) adaptada de (Stewart[44] p.822)	51
2.38	Reta no espaço (b) adaptada de (Stewart[44], p.822)	52
2.39	Plano θ com seu vetor ortogonal	53
2.40	Plano θ com seu vetor ortogonal B	54
2.41	Parábola parametrizada (a) ([44], p.647)	56
2.42	Parábola parametrizada (b) ([44], p.648)	57
2.43	Circunferência parametrizada (a)	57
2.44	Parábola parametrizada (c)	58
2.45	Circunferência parametrizada (d)	59
2.46	Elipse parametrizada	59
2.47	Parábola parametrizada (b)	60
2.48	Hipérbole parametrizada	61
2.49	Segmento de reta (Stewart[44], p.850)	63
2.50	Curva no cone	64
3.1	Canteiro elíptico (a)	65
3.2	Canteiro elíptico (b)	66
3.3	Cestos com bases diferentes (a)	68
3.4	Cestos com bases diferentes (b)	69
3.5	Cestos com base elíptica	69
3.6	Elipse de excentricidade nula	70
3.7	Primeiro passo na construção da base do cesto	70
3.8	Segundo passo da base do cesto	71
3.9	Terceiro passo da base do cesto	71
3.10	Polígono de n lados inscrito numa circunferência	71
3.11	Elipse inscrita na circunferência, ([30] p. 46)	74
3.12	Estacas amarradas nas extremidades de uma corda	75
3.13	Girar a estaca	76
3.14	Medição da distância entre as estacas	76
3.15	Cobertura do Onjango (a)	77
3.16	Cobertura do Onjango (b)	77
3.17	Onjango	78
3.18	Simetrização (a)	79
3.19	Simetrização (b)	79
3.20	Mapa de Angola	81
3.21	Simetrização (c)	82
3.22	Cobertura do Onjango (c) ([9], p.320)	83
3.23	Corte oblíquo em uma vela cilíndrica	84

3.24	Secção oblíqua obtida do corte	84
3.25	Secção oblíqua desenrolada no plano	85
3.26	Intersecção da elipse com a cunha do cilindro (a)	85
3.27	Intersecção da elipse com a cunha do cilindro (b), adaptada de [4]	85
3.28	Triângulo inscrito no setor circular (a)	86
3.29	Triângulo inscrito no setor circular (b)	87
3.30	Curva na parede do cilindro desenrolada no eixo x , adaptada de [4]	87
3.31	Intersecção entre dois cilindros (a) [4]	88
3.32	Arco do cilindro principal	89
3.33	Segmento de reta enrolada num cilindro [4]	91
3.34	Segmento de reta enrolado numa vela cilíndrica	91
3.35	Mulher angolana	92
3.36	Segmento de reta no lenço (a)	92
3.37	Segmento de reta no lenço (b)	93
4.1	Mapa de Angola ilustrando o Cuito/Bié	95
4.2	Determinação da distância entre dois pontos num exercício de contexto	105
4.3	Determinação da distância horizontal, medida ao nível do chão entre os pontos de apoio dos bancos da gangorra	106
4.4	Conceito de cónicas e sua identificação	107
4.5	Identificação das cónicas	107
4.6	Grupo 1	110
4.7	Grupo 2	110
4.8	Grupo 3	110
4.9	Grupo 4	111
4.10	Grupo 1 (a)	112
4.11	Grupo 1 (b)	113
4.12	Grupo 1 (c)	113
4.13	Grupo 2 (a)	114
4.14	Grupo 2 (b)	115
4.15	Grupo 2 (c)	115
4.16	Grupo 3 (a)	116
4.17	Grupo 3 (b)	117
4.18	Grupo 3 (c)	118
4.19	Grupo 3 (d)	118
4.20	Grupo 4 (a)	119
4.21	Grupo 4 (b)	120
4.22	Grupo 4 (c)	121
A.1	Circunferência	

A.2	Parábola (a)
A.3	Parábola (b)
A.4	Parábola (c)
A.5	Parábola (d)
A.6	Parábola (e)
A.7	Parábola (f)
A.8	Parábola com foco no eixo das abcissas
A.9	Representação de focos da hipérbole
A.10	Hipérbole
A.11	Canteiro elíptico (a)
A.12	Canteiro elíptico (b)
A.13	Curva (a) ([43], p. 11)
A.14	Curva (b) ([44], p. 650)
A.15	Parábola parametrizada (a)
A.16	Parábola parametrizada (b)
A.17	Circunferência parametrizada (a)
A.18	Circunferência parametrizada (b)
A.19	Elipse parametrizada (a)
A.20	Elipse parametrizada (b)
A.21	Hipérbole parametrizada (a)
A.22	Hipérbole parametrizada (b)
A.23	Curva espacial parametrizada ([44], p. 849
A.24	Segmento de reta ([44], p.850)
A.25	Curva no cone
A.26	Interseção das duas superfícies

Introdução

Angola é um país plurilinguístico onde o português é a língua oficial e de comunicação para os angolanos no universo das diferentes línguas nacionais como por exemplo: Umbundu, Kimbundu, Kikongo, Tchokwé e Nganguela, entre outras. Situa-se na África Austral, com uma superfície de $1.246.700\text{km}^2$ e faz fronteira a norte com as Repúblicas do Congo Brazavile e da República Democrática do Congo, a este com a República da Zâmbia, a sul com a República da Namíbia e a oeste tem o Oceano Atlântico. Foi durante o período de 1482 a 1975 uma colónia portuguesa. Tornou-se independente fruto de uma guerra de libertação nacional iniciada em 1961, que culminou com a proclamação da independência a 11 de Novembro de 1975. Mas logo depois da sua independência (1975), o país conheceu outro período de guerra civil, que terminou a 4 de Abril de 2002.

Esta situação influenciou negativamente o desenvolvimento progressivo da ciência em Angola, em particular da Matemática, fazendo com que dependesse de conhecimentos produzidos pelos outros países. Tal realidade obrigou o país a importar currículo, o que, por suas vez, tirou espaço à matemática do contexto, aprendida e desenvolvida fora da escola, provocando em muitos alunos um sentimento de dependência.

Movido pela intenção de superar esta fase, o governo angolano leva a cabo profundas reformas na sua política de governação e em particular no sistema educativo, tendo sempre como premissa a formação multifacetada dos cidadãos para que possam atuar criticamente e estejam aptos para construir uma nova sociedade e defender as conquistas alcançadas, tal como se verifica na Lei de Bases do Sistema Educativo angolano, Lei 13/01 de 31 de Dezembro, no seu Artigo 3º, aprovada em 2001 pela Assembleia Nacional da República.

(...) “formar um indivíduo capaz de compreender os problemas nacionais, regionais e internacionais de forma crítica e construtiva para a sua participação ativa na vida social, à luz dos princípios democráticos”
([6], p.3)

No âmbito deste processo de transformações, as escolas superiores pedagógicas jogam um papel importante e têm a missão de ajustar os planos de estudo dos cursos pedagógicos, orientar vias e métodos de trabalho para as estruturas educativas precedentes, formar os futuros profissionais e garantir que os alunos adquiram conhecimentos de um elevado rigor científico de acordo com as exigências contemporâneas, tal como afirmou o então Ministro da Educação da República de Angola, Pinda Simão.

(...)“sem educação de qualidade não haverá crescimento, equidade, nem democracia”.

Nestas palavras se compreende a importância que o executivo angolano concede na preparação do homem e o papel que este deve desempenhar na sua formação integral para enfrentar a realidade e assumir uma atitude transformadora. Não obstante, para o alcance de tal desiderato, não basta apenas fazer reformas curriculares, faz-se necessário alcançar um ensino que estimule os alunos a pensar. Primar pelo desenvolvimento da reflexão sobre os conteúdos aprendidos e a forma como se aprende, adaptando a utilização de planos de ação para as novas situações.

Por isso a Escola e em particular as instituições de ensino superior devem ser capazes de contribuir para a formação dos cidadãos, pelo que é necessário que o processo de ensino-aprendizagem se relacione com o contexto sócio-cultural e produtivo do aluno, de tal forma que se possam levar discussões nas aulas relativas aos problemas da prática social.

Esta perspetiva requer a inclusão dos contextos locais, históricos e culturais no ensino e aprendizagem da Matemática, que por sua vez, sugere a matematização de atividades culturais. Facto que levou o autor desse trabalho a adotar em sua linha de investigação duas abordagens: a Etnomatemática e a Educação Matemática Realística (EMR). Esta investigação pretende dar resposta a seguinte questão: qual é o potencial das ideias geométricas associadas com as atividades culturais do município do Cuito no ensino da Geometria Analítica? Por esta razão, pretende-se com este trabalho, extrair ideias matemáticas de atividades culturais em algumas aldeias tradicionais do município do Cuito, para auferir uma proposta pedagógica de intervenção na cadeira de Geometria Analítica, nos alunos do 1º ano do curso de Matemática da Escola superior Pedagógica do Bié.

No primeiro capítulo, apresenta-se um breve resumo sobre a Etnomatemática e a Educação Matemática Realística (EMR), sob o ponto de vista histórico, bem como a linha pedagógica assumida nesta investigação.

No segundo capítulo faz-se uma descrição epistemológica inerente à Matemática a ter em conta pelo investigador, organizada em função do estudo levado a cabo nesta dissertação. Organiza-se uma síntese da base científica de referência subjacente à investigação que se pretende fazer no terreno. O objetivo é sedimentar o rigor científico na atitude do investigador-observador. Os conteúdos abordados são distribuídos em 5 secções da seguinte maneira: a primeira trata da distância entre dois pontos no plano, a segunda trata da circunferência, a terceira apresenta uma abordagem inerente as cónicas, a quarta apresenta um estudo sobre a Geometria Analítica no espaço e a quinta fala da parametrização de curvas.

No terceiro capítulo desenvolvem-se alguns problemas motivados pelo contexto, com o objetivo de valorizar os conhecimentos que os alunos adquirem no seu contexto

sócio-cultural, facto que levou o investigador a deslocar-se a Angola, concretamente ao município do Cuito, província do Bié, no primeiro período do ano letivo. É constituído por 3 secções. Nas duas primeiras secções (3.1 e 3.2) apresenta-se um exemplo de possível matematização de uma atividade tradicional, que o investigador teve oportunidade de observar durante a experiência no terreno, e mais duas atividades observadas e analisadas durante esta mesma experiência, que incluem não só a transcrição de partes do diálogo com habitantes e artesãos locais, como também o possível processo de matematização dessas atividades. Por outro lado, procurou-se averiguar, na secção 3.3 a possibilidade de usar este mesmo tipo de motivação e construção de significados na aprendizagem de novos conteúdos científicos através de um estudo posterior à experiência no terreno.

O quarto capítulo é constituído por 6 secções: na primeira secção apresenta-se uma breve caracterização histórica do município do Cuito, na segunda secção define-se a opção metodológica, na terceira secção apresentam-se os instrumentos de recolha de dados, na quarta secção apresenta-se a análise dos resultados, na quinta secção apresenta-se a caracterização da proposta pedagógica e na sexta secção apresentam-se as conclusões gerais. De referir que as entrevistas e os questionários foram alvo de planeamento antes de ir para o terreno, à luz das ideias consultadas em [17], [26] e [31] e adaptadas no contexto em estudo.

Capítulo 1

Enquadramento teórico

Neste capítulo sistematizam-se os referenciais teóricos que sustentam a Etnomatemática e a Educação Matemática Realística (EMR), sob o ponto de vista histórico, bem como a linha pedagógica assumida nesta investigação.

1.1 Sobre a Etnomatemática

"(...) A Matemática é um empreendimento cultural enraizado na tradição. Ela não foi concebida como uma linguagem universal, porque seus princípios, conceitos e fundamentos foram desenvolvidos de maneira diferenciada pelos membros de grupos culturais distintos" (Rosa[41], p. 869).

A ideia deste autor enfatiza a necessidade de pensar a Matemática na perspectiva de explicá-la, conhecê-la e conviver com ela dentro da realidade de um determinado grupo étnico, cultural ou profissional. Trata-se de um pensamento "sustentado na prática espontânea e natural, assim como na busca pela sobrevivência, estimulando a criatividade e a descoberta" (Breda e Lima[11], p.7).

Historicamente a "Etnomatemática surgiu por volta das décadas de 70 e 80 do século XX" segundo Paulus Gerdes [23], citado por Domingos Dias ([17], p.14). O seu surgimento teve como base as críticas feitas à Matemática moderna, quando um grupo de educadores percebeu que nela não havia espaço para a valorização do conhecimento que o aluno traz para a sala de aula proveniente do seu contexto social. Teve como precursor e idealizador no Brasil o matemático, professor universitário, Ubiratan D'Ambrosio. Este autor esclarece a origem etimológica da palavra Etnomatemática como junção de vocábulos gregos: Etno+matema+tica. Nesta perspectiva, a palavra Etnomatemática surge como a arte ou técnica (*tica*), de explicar, de conhecer, de entender e de conviver (*matema*) com uma realidade social, cultural e natural, desenvolvida por distintos grupos culturais (*etno*) (D'Ambrosio[15], p.8). De realçar que antes de D'Ambrosio ter uma ligação com o termo, em 1984, durante o 5º Congresso Internacional em Educação Matemática, já havia alguns trabalhos que relacionavam a Matemática e a Cultura, tal como o trabalho de Marcia Ascher (1981), com a civilização Inca, de Zaslavsky (1973), com o estudo de práticas matemáticas em África, entre outros.

Durante milhares de anos a Matemática foi nascendo sob determinadas condições económicas, sociais e culturais, motivando cada cultura a produzir a sua própria matemática, resultante das suas necessidades específicas, conforme se constata no seguinte argumento:

(...) "Os indivíduos de um mesmo grupo social, cultural ou profissional desenvolveram, motivados pelo meio ambiente em que estão inseridos, o conhecimento e o comportamento de uma comunidade, bem como, as suas maneiras de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir. Deste modo, criaram a sua própria matemática, melhor dizendo, a sua própria Etnomatemática"(D'Ambrosio[16], p.164).

Sobre esta concepção, vários investigadores têm mostrado o seu interesse em divulgar a existência de uma dimensão cultural da Matemática em variados povos. No que diz respeito a África por exemplo, o professor catedrático de nacionalidade holandesa, Paulus Gerdes, exerceu um papel preponderante para o reconhecimento da Etnomatemática, publicando diversos livros nessa área com trabalho realizado com povos africanos. Para este autor "a Etnomatemática mostra que ideias matemáticas existem em todas as culturas humanas, nas experiências de todos os povos, de todos os grupos sociais e culturais, tanto de homens como de mulheres"([24], p.11).

Relativamente a Angola, a partir de uma revisão feita de alguns trabalhos publicados nos últimos anos sobre a Etnomatemática, o autor deste trabalho tomou conhecimento de várias investigações relacionadas com a mesma, tais como as do Professor Doutor Domingos Dias ([17]), que estudou o grupo étnico Nyaneka-Nkhumbi do sudoeste de Angola, as de Manuel Neto Matos Osório Nelo, Armando Assunção Soares e Paula Catarino ([36]), com a Etnomatemática da marimba, as de Infeliz Carvalho Coxe ([28]), com uma abordagem mais geral sobre a Etnomatemática de Angola, entre outros. Todos procuram propor soluções para determinados problemas diagnosticados no ensino não contextualizado. Não se encontrou, no entanto, nenhum registo de investigações relacionadas com o tema em estudo no que diz respeito a província do Bié, com particular realce ao município do Cuito.

De afirmar que desde os tempos mais remotos até pelo menos aos anos de 1999-2000, ainda no período do conflito armado, o município do Cuito foi uma base sólida no âmbito da preservação cultural, mas desde o ano de 2002, depois do acordo de paz assinado no dia 4 de Abril, os tempos começaram a definir um novo padrão de vida para os populações. A globalização em passos lentos foi ganhando corpo, exercendo a sua influência no seio da juventude. A falta de universidades, bem como as políticas do governo no que tange a formação de quadros, quer seja ao nível da graduação

ou da pós-graduação na província e no país em geral, provocou a saída massiva de homens e mulheres que procuraram superar-se no exterior do país.

Neste sentido alguns escolheram países da Europa e outros da América, fundamentalmente Cuba. Com o seu regresso, diante de alguns benefícios manifestados, observou-se que as ideias que norteiam o domínio da investigação, assim como da elaboração de programas educativos das novas gerações, são trabalhadas de forma isolada da realidade sócio-cultural do município. Os quadros formados em Matemática por exemplo, afetos às duas únicas escolas superiores na província, não trabalham para uma linguagem comum. As suas publicações em jornadas científicas e outras conferências estão mais viradas para a realidade de países mais industrializados, desprovidas de quaisquer argumentos que despertem o pensamento cultural das novas gerações. Os programas de Matemática são definidos sem exigência de um conhecimento largo do contexto sócio-cultural dos alunos. Entre outros motivos, isto tem contribuído para que o município observe nos dias que correm um elevado índice de perda de valores culturais. Este facto preocupou o autor desta dissertação motivando-o em adotar na sua linha de investigação esta abordagem ligada à Etnomatemática. Isto porque para além de "contribuir para o resgate da identidade cultural dos alunos e da consciência desta identidade, poderá servir para combater os níveis baixos de aproveitamento em Matemática amplamente difundidos, visto que os alunos sentem a Matemática como uma disciplina bastante estranha e sem utilidade, importada de fora de África"(Gerdes[22], p.17).

Para tal é necessário que se perceba que a Etnomatemática não se trata de um método de ensino nem de uma nova ciência. Mas pode ser adotada como uma proposta educacional que estimula o desenvolvimento da criatividade, conduzindo a novas formas de relações interculturais. Tal como afirma D'Ambrósio, citado por (Feitosa[18], p.1): "é um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimentos em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos".

O descrito anterior é reforçado pela afirmação de Bello citado por Bernardi e Caldeira ([8], p.13) ao dizer que "a Etnomatemática foi entendida e desenvolvida sob dois aspetos: como programa de pesquisa e/ou como proposta para a ação pedagógica. O primeiro tem como principal objetivo conhecer os processos de geração, organização, difusão de conhecimentos e ideias matemáticas no seio de grupos culturalmente identificáveis. O segundo pretende desenvolver ações na área da Educação Matemática que permitam contextualizar os conteúdos académicos abordados na sala de aula numa dimensão sócio-cultural".

Com a segunda perspetiva pode-se eliminar o medo nos alunos da Matemática, através da Matemática nativa "intuitiva" incorporada no currículo. D' Ambrosio citado por Paulus Gerdes ([22], p.19) afirma que "a incorporação da etnomatemática

no currículo, contribui para a descolonização cultural, reganhando a auto-confiança cultural, social e individual nas suas capacidades. Os povos podem desenvolver criativamente aquelas capacidades matemáticas de que gostam e que lhes interessa". Este autor propõe orientar "o currículo matemático para a criatividade, para a curiosidade e para crítica e questionamentos permanentes, contribuindo para a formação de um cidadão na sua plenitude e não para ser um instrumento do interesse, da vontade e das necessidades das classes dominantes ([15], p.13)".

Como refere Pais ([37], p.33), ao debruçar-se sobre esta problemática: "os alunos já possuem algum tipo de conhecimento matemático antes de entrarem na escola, que deve ser tido em conta pelo professor na organização do processo de ensino e aprendizagem, garantindo-se a valorização das diferenças culturais e abrindo-se espaço para uma aprendizagem mais eficiente. Nesse sentido, a Etnomatemática surge como um instrumento de aprendizagem e uma ferramenta didática direcionada para ensinar matemática".

Para D'Ambrósio ([15], p.8), "ao praticar Etnomatemática, o professor atinge os grandes objetivos da Educação Matemática, ao aproveitar tudo o que faz parte do quotidiano de um povo e que tenha relevantes componentes matemáticos, dando um novo olhar ao seu ambiente cultural".

Por outro lado, Paulus Gerdes ([38], p.17) propõe os seguintes pontos a ter em conta relativamente ao ensino da Matemática, os quais ressaltam a importância da incorporação da Etnomatemática no currículo escolar.

1. incorporação no currículo de elementos pertencentes aos ambientes socioculturais dos alunos e professores como ponto de partida para as atividades matemáticas na sala de aula, como factor de motivação tanto dos alunos como dos professores;
2. alertar os futuros professores de matemática da existência de ideias matemáticas compreendidas por pessoas com pouca ou nenhuma educação formal que são semelhantes às que estão nos manuais;
3. preparação dos futuros professores de matemática para a pesquisa das ideias e práticas matemáticas das suas comunidades culturais, étnicas e linguísticas e que reflitam na incorporação destas na sua prática de ensino;
4. incorporação no currículo de material de várias culturas, valorizando assim os conhecimentos culturais dos seus alunos;
5. incorporação nos programas de formação de professores de ideias matemáticas de vários grupos culturais de uma região ou país ou desenvolvidos por grupos sociais particulares;

6. uso de ideias implícitas nas atividades de certos grupos marginalizados numa sociedade de forma a desenvolver um currículo matemático para esse grupo;
7. introdução nos manuais de elementos culturais que facilitem a aprendizagem através do seu reconhecimento;
8. elaboração de materiais da herança matemática dos antepassados dos alunos e a sua incorporação nos programas de formação de professores e nos currículos escolares;
9. elaboração de materiais que explorem possibilidades de atividades matemáticas com desenhos artisticamente apelativos pertencentes à cultura dos alunos ou dos seus antepassados.

Em concordância com os pontos anteriores, torna-se importante afirmar que assim como as outras escolas superiores pedagógicas em Angola, os programas de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié devem ser orientados para cultura da comunidade onde a escola se encontra inserida, para assegurar a sobrevivência da cultura bem como a originalidade do pensamento dos alunos.

1.2 Sobre a Educação Matemática Realística (EMR)

A Educação Matemática Realística (EMR) é uma abordagem para o ensino que surgiu na Holanda entre o final da década de 1960 e começo dos anos 1970. Nessa época, educadores holandeses, influenciados pelas ideias de Hans Freudenthal (1905-1990), buscavam elaborar uma proposta curricular que modernizasse a Educação Matemática do país. Desenvolveu-se uma reforma educacional oposta ao movimento da Matemática Moderna, que tinha uma perspectiva de ensino mecânico e estruturalista como base (Ferreira e Buriasco[19] p.238). Segundo estes autores, o matemático alemão Hans Freudenthal, que desenvolveu interesse em Matemática, Ciências e Literatura, é tido como precursor desta abordagem.

A expressão *Educação Matemática Realística* começou a ser utilizada no final dos anos 70 de acordo com Treffers, citado por (Ferreira e Buriasco[19], p.242). Segundo estes autores, o termo "realistic" tem origem no verbo holandês "zich REALISEREN" foi traduzido para o português pelo GEPEMA-Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, para "realístico", ao invés de "realista", porque parece estar mais relacionado com significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tomar consciência de" e, por sua vez, à possibilidade de "tornar real" na mente dos alunos. O que sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolvem, não precisam ser "automaticamente reais", mas precisam

ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (Van den Heuvel Panhuizen[47], citado por Ferreira e Buriasco[19] p. 242).

No trabalho de Van den Panhuizen [47], traduzido por ([19], p.241), a reforma educacional levada a cabo pelos educadores holandeses encarava o ensino da Matemática longe das abordagens **mecanicista e estruturalista** cujas características são abaixo descritas.

- A abordagem mecanicista "é caracterizada por centrar o seu foco em cálculos com números simples, e pela pouca atenção prestada às aplicações. A Matemática é ensinada de uma forma atomizada. Os alunos aprendem os procedimentos de uma maneira passo a passo na qual o professor demonstra como resolver um problema"([47], p.4). Esta abordagem limita o aluno ao treino de procedimentos e de algoritmos algébricos, não havendo pois necessidade de explorar problemas do mundo real e aplicações da Matemática (Kooij[27], p.1992).
- A abordagem estruturalista "é o modelo de ensinar a Matemática focada em conceitos abstratos" ([47], p.4).

Freudenthal, mostrando-se insatisfeito com estas abordagens dominantes na época, foi conduzido a promover uma discussão a respeito do que acreditava ser Educação Matemática, lançando suas ideias a respeito do seu ensino-aprendizagem. Propôs-se, assim, discutir

- a matemática como **Atividade humana**;
- ensino e aprendizagem como **Princípio de Reinvenção**;
- aprendizagem matemática por meio da **Matematização**;
- reinvenção de ferramentas matemáticas por meio da **matematização** progressiva

"Para Freudenthal, a Matemática deve ser conetada com a realidade, estar próxima dos alunos, ser relevante para a sociedade e ser de valor humano"(Ferreira e Buriasco[19], p.241). Este autor defende a Matemática como uma atividade humana, onde os alunos devem ter a oportunidade "guiada"para reinventá-la, em lugar de serem considerados como recetores de uma matemática já "pronta"e "acabada". Por outro lado, argumenta que, se os alunos aprenderem a Matemática de forma isolada, divorciada de suas experiências, ela será esquecida e não serão capazes de aplicá-la. Para este autor os alunos têm maior chance de aprender a Matemática construindo-a, reinventando-a, recriando-a.

Quanto à reinvencão guiada, Freudenthal considerava que a aprendizagem era concebida, na realidade, a partir da exploração de situações que possibilitassem aos alunos "reiventar" (palavra entendida, segundo Ferreira e De Buriasco ([19], p.244), como a possibilidade que os alunos têm de experimentar um caminho "semelhante" ao processo pelo qual a Matemática foi elaborada historicamente e, então, atribuir algum sentido à sua utilidade em situações diversas).

Relativamente à matematização, Freudenthal considerava a Matemática não como o corpo do conhecimento matemático, mas como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de forma mais geral, como a atividade de organizar "matematicamente" a "realidade" (Van den Panhuizen[47], citado por ([19], p.246)). Para este autor aprender Matemática deveria ter origem no "fazer" matemática, sendo a matematização o núcleo da Educação Matemática.

Desde o ponto de vista destas concepções, o autor deste trabalho entende que o raciocínio levado a cabo nestas duas abordagens está relacionado com o da teoria de aprendizagem **histórico-cultural** de Vigotsky, a qual por sua vez concebe o papel do professor como o de formar diferentes personalidades que sejam ativas, independentes, criativas, sensíveis e comprometidas com que acontece no seu contexto.

Um dos conceitos importantes da teoria de Vigotsky é o de Zona de desenvolvimento próximo (ZDP), entendido como "a distância entre o nível real de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro mais capaz" ([48], p.86).

Outro conceito importante desta teoria relacionado com o da ZDP, é o conceito de mediação, o qual se refere ao conjunto de influências que se dão no processo de ensino-aprendizagem. As três abordagens têm em comum a consideração dos conhecimentos prévios dos alunos necessários para a aquisição de novos conhecimentos. Estas teorias se refletem na presente investigação, pois nela se tem em conta as relações entre os agentes do processo e a determinação dos conhecimentos prévios que permitem identificar o nível de desenvolvimento atual dos alunos sobre os quais se define o sistema de ajudas necessárias para alcançar o nível de desenvolvimento desejado.

Capítulo 2

Desenvolver o "olhar matemático": o estudo antes da pesquisa no terreno

Neste capítulo faz-se uma descrição inerente à Matemática a ter em conta pelo investigador, organizada em função do estudo levado a cabo nesta dissertação. Organiza-se uma síntese da base científica de referência subjacente à investigação que se pretende fazer no terreno. Dela fazem parte algumas noções elementares de Geometria Analítica no plano em conformidade com os programas de Geometria Analítica I e II (ver anexo 3) do 1º ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié. O referencial cartesiano no plano e no espaço, bem como a equação cartesiana do plano são tópicos do programa de Geometria Analítica I. Por outro lado o estudo da circunferência, as curvas cónicas, a parametrização de curvas, são tópicos do programa de Geometria analítica II. O objetivo é sedimentar o rigor científico na atitude do investigador-observador. E por outro lado constituir um documento que possa ser arquivado na Escola Superior Pedagógica do Bié para consulta na preparação de alguns conteúdos das disciplinas referidas.

De referir que os conteúdos descritos nas secções 2.1 e 2.2 seguem a referência do livro de Lima et. al, ([29], pp.159-160) e foram objeto de estudo nas unidades curriculares de Projeto de Ensino, no 1º ano do Mestrado em Matemática para Professores.

2.1 Distância entre dois pontos no plano

Se dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$ têm a mesma ordenada y então a distância $d(P, Q)$, entre eles é igual a distância $|x' - x|$ entre as suas projeções sobre o eixo Ox . Analogamente, se $P = (x, y)$ e $Q' = (x, y')$ têm a mesma abcissa x então $d(P, Q') = |y' - y|$ = distância entre as projeções de P e Q' sobre o eixo Oy .

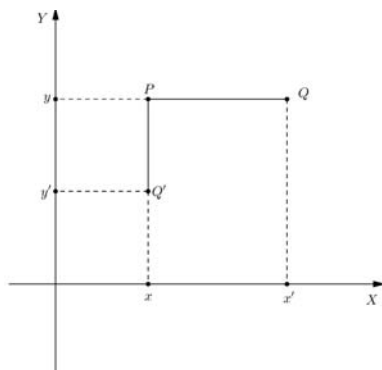


Figura 2.1: Distância entre dois pontos (a).

Por outro lado, se $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ têm abscissas e ordenadas diferentes então, considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que $[PSQ]$ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $|PQ|$.

Como P e S têm a mesma ordenada e S e Q a mesma abscissa tem-se: $d(P, S) = |x - u|$ e $d(S, Q) = |y - v|$

E pelo teorema de Pitágoras vem:

$$[d(P, Q)]^2 = [d(P, S)]^2 + [d(S, Q)]^2$$

Logo,

$$[d(P, Q)]^2 = [(x - u)]^2 + [(y - v)]^2$$

Ou seja

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

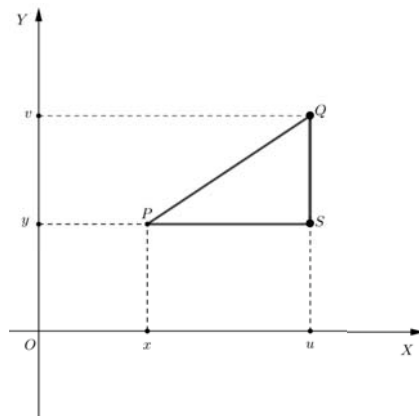


Figura 2.2: Distância entre dois pontos (b)

2.2 Circunferência

Tendo em conta que este estudo já foi desenvolvido no âmbito do Projeto de Ensino I por Ezequias Cassela([12], p.36), não apresentaremos o processo dedutivo para a obtenção da equação geral da circunferência, mas nos limitaremos a reproduzir simplesmente a sua definição e o processo para obtenção da sua equação reduzida.

Definição 1. *A circunferência de centro O e raio r maior que zero, é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a distância r de O (Araújo[5] p.37).*

Dedução geométrica da equação reduzida da circunferência

Em atenção a definição anterior, vamos deduzir a equação reduzida da circunferência a partir da Figura (2.3)

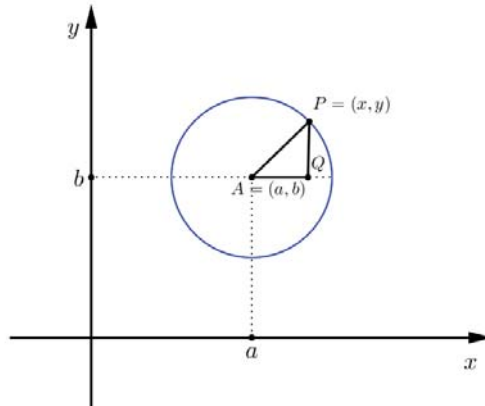


Figura 2.3: Circunferência

Como o triângulo $\triangle APQ$ é retângulo em Q , podemos determinar a distância entre o centro A e o ponto P aplicando o teorema de Pitágoras.

$$d^2(A, P) = r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \Leftrightarrow \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A equação obtida é a reduzida da circunferência e no caso particular em que o centro está na origem das coordenadas, a equação é: $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral da circunferência

Para a obtenção da equação geral da circunferência, tem-se em consideração o teorema que se segue demonstrado no Projeto de Ensino I ([12], pp.36-38), cujo resultado identifica uma circunferência a partir de condições sobre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau em duas variáveis.

Teorema 1. *Consideremos a equação $Ax^2 + Cy^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$. O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação é uma circunferência se, e somente se $A = C \neq 0$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$*

(Lima et. al., [29], p.42)

2.3 Cónicas

2.3.1 Breve introdução histórica sobre as cónicas

Os Elementos de Euclides (300 a.c) tratavam de figuras planas que se podiam construir com segmentos e círculos, das figuras sólidas correspondentes que se podiam construir com porções de planos, como os prismas e os poliedros regulares, e da esfera. Mas os Gregos clássicos também estudaram uma outra classe de curvas a que chamaram secções cónicas por serem originalmente obtidas cortando um cone com um plano. As curvas daí resultantes, a parábola, a elipse, e a hipérbole, foram estudadas por Euclides mas também mais tarde por outro geômetra grego, Apollonius, que escreveu um tratado exaustivo sobre estas curvas. A sua contribuição principal foi o facto de ter conseguido gerar todas as cónicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção (Boyer[10], p.99).

Segundo Caios dos Santos Guimarães [25], citado por Monteiro([34], p.11), em sua dissertação de Mestrado, afirma que "em 1822 um matemático belga chamado Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) introduziu uma nova ideia que ajudaria a demonstrar as propriedades das secções cónicas. Adolphe Quelet, também belga, e colega de Dandelin foi um importante colaborador deste trabalho".

O trabalho de Dandelin consistiu em mostrar que dado um plano que interseja um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone. Por esse motivo são chamadas esferas de Dandelin. Trabalhando com a propriedade das tangentes a uma circunferência, que diz que "dado um ponto externo a uma circunferência é possível traçar duas retas que a tangenciam em pontos distintos, e cujas distâncias ao ponto dado são iguais, Dandelin consegue encontrar os focos da elipse e da hipérbole e verificar simultaneamente as respectivas propriedades"([34], p.11).

Por outro lado, "Dandelin não conseguiu mostrar a propriedade focal para as parábolas, mas Pierce Morton em 1829, usou uma construção semelhante à de Dandelin para provar esta propriedade. Diferentemente da elipse e da hipérbole, na demonstração da parábola apenas haverá uma esfera tangente ao cone e ao plano"([34], p. 11).

2.3.2 Construção das cónicas usando esferas de Dandelin

Segue-se um estudo da construção das cónicas usando esferas de Dandelin apoiando-se no raciocínio apresentado por Monteiro([34], pp.12-15). Começaremos pelo estudo da parábola, seguido do da elipse e do da hipérbole.

A parábola

Proposição 1. *Considere-se um cone circular reto e um plano π paralelo a uma das sua geratrizes que o interseta obliquamente. Assumimos que existe uma esfera que tangencia simultaneamente o plano π e o cone (ver Figura 2.4). Seja também o plano θ ortogonal ao eixo do cone que contém a circunferência c de tangência da esfera com todas as geratrizes do cone. Se F é o ponto de interseção da esfera com o plano π , c a circunferência de tangência entre a esfera e o cone e l a reta resultante da interseção entre o plano de corte (π) e o plano θ ortogonal ao eixo do cone que contém a circunferência c , então qualquer ponto P da interseção do cone com o plano de corte é tal que:*

$$d(P, F) = d(P, l)$$

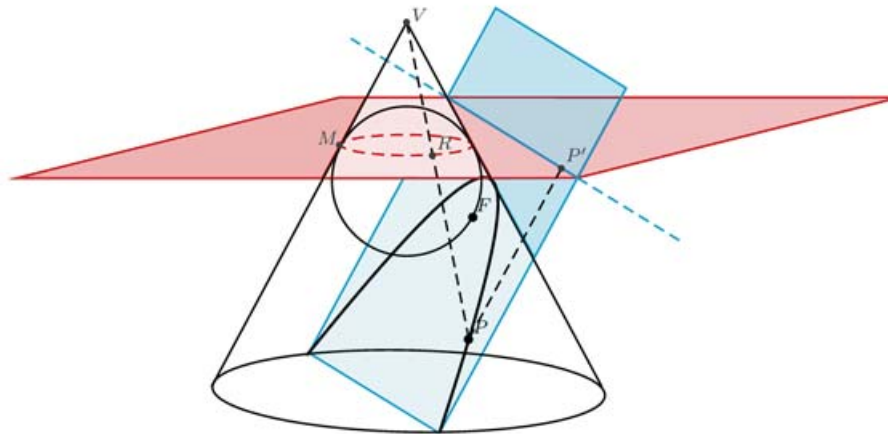


Figura 2.4: Esfera de Dandelin parábola

Demonstração:

Consideremos um cone reto de vértice V e um plano π paralelo a uma das suas geratrizes que o interseta obliquamente.

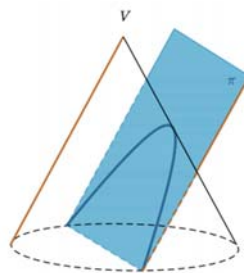


Figura 2.5: Plano π intersetando obliquamente um cone e paralelamente a uma geratriz

Seja S uma esfera de Dandelin inscrita no cone e tangente ao plano π no ponto F .

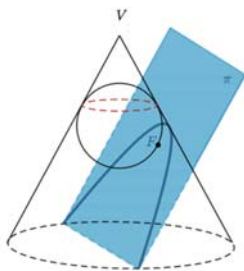


Figura 2.6: Esfera de Dandelin inscrita no cone

Seja também o plano θ ortogonal ao eixo do cone que contém a circunferência c de tangência da esfera com todas as geratrizes do cone. Os planos π e θ interseccionam-se numa reta l , como mostra a Figura (2.7):

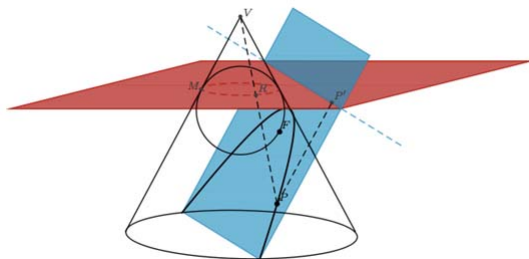


Figura 2.7: Interseção entre os planos π e θ

Seja M o ponto de interseção da circunferência c com a geratriz do cone paralela ao plano π . Seja P um ponto qualquer da cônica e P' o pé da perpendicular à reta l passando por P . Seja R a interseção da circunferência c com a geratriz que contém P e t a reta paralela ao eixo do cone que passa pelo ponto P interseccionando o plano θ em Q .

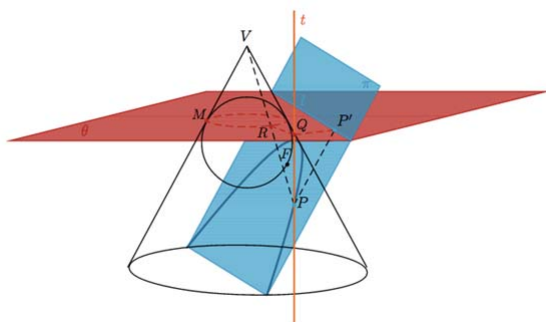


Figura 2.8: Reta paralela ao eixo do cone (a)

Os pontos P , R e F definem um plano que intersecciona a esfera de Dandelin S numa circunferência. Pela propriedade das tangentes às circunferências, temos:

$$d(P, R) = d(P, F)$$

Seja O o ponto de interseção entre o eixo e o plano θ . Comparando o triângulo $\triangle VOR$ com o triângulo $\triangle PRQ$, tem-se que: o ângulo RPQ é igual ao ângulo RVO entre o eixo e a geratriz, (alternos congruentes) pelo teorema das paralelas. E o ângulo VOM é igual ao ângulo PQR , ambos são retângulos, como em dois triângulo dois ângulos iguais subtendem um terceiro igual, então, o ângulo PRQ é igual ao ângulo VRO . Logo pelo critério AA (ângulo ângulo) os triângulos $\triangle VOR$ e $\triangle PRQ$ são semelhantes.

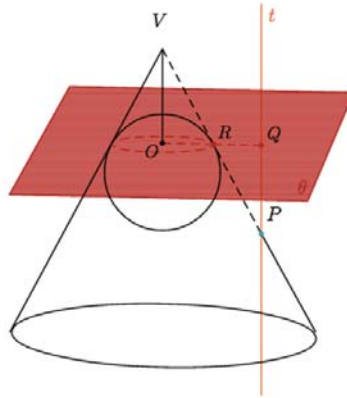


Figura 2.9: Reta paralela ao eixo do cone (b)

Por outro lado, comparando os triângulos $\triangle VOM$ e $\triangle PQP'$, temos: O ângulo QPP' é igual ao ângulo OVM entre o eixo e o plano de secção do cone e o ângulo PQP' é igual ao ângulo VOM , ambos são retângulos, de modo análogo o ângulo VMO é igual ao ângulo $PP'Q$, logo os triângulos $\triangle VOM$ e $\triangle PQP'$ são semelhantes.

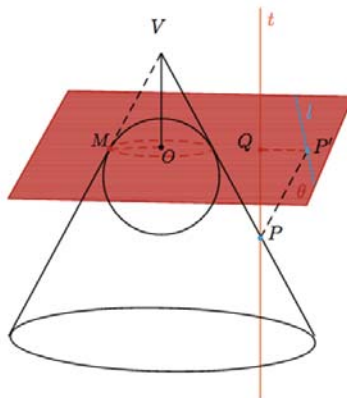


Figura 2.10: Reta paralela ao eixo do cone (c)

Daí vem: O triângulo $\triangle PRQ$ é congruente ao triângulo $\triangle PQP'$, pois têm um lado em comum logo:

$$d(P, R) = d(P, P')$$

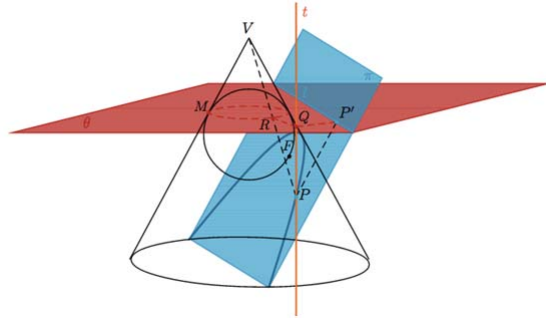


Figura 2.11: Reta paralela ao eixo do cone (d)

e como P' é o pé da perpendicular de P sobre a reta l , temos:

$$d(P, R) = d(P, l)$$

e como $d(P, R) = d(P, F)$, temos:

$$d(P, F) = d(P, l)$$

o que quer dizer que:

$$d(P, F) = d(P, l)$$

A elipse

Proposição 2. *Considere-se um cone circular reto e um plano π que o intersesta obliquamente não paralelo ao eixo e nem a nenhuma geratriz do cone. Assumimos que existem duas esferas S_1 e S_2 que tangenciam simultaneamente o plano e o cone ver Figura (2.12). Sejam F_1 e F_2 , respetivamente os pontos de interseção das esferas S_1 e S_2 com o plano π , então qualquer ponto $P \in \pi$ na interseção com a superfície do cone é tal que:*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(R, Q)$$

Onde $d(R, Q)$ é uma constante que não depende da posição de P .

Demonstração: Sejam as circunferências c_1 e c_2 , tangentes a todas geratrizes do cone, a interseção do cone com as esferas S_1 e S_2 respetivamente. Seja $P \in \pi$ um ponto da interseção do plano com o cone e sejam R e Q as interseções da geratriz do cone que passa por P com as circunferências c_1 e c_2 respetivamente. Seja \overline{RQ} o comprimento do segmento entre c_1 e c_2 que passa por P . Os pontos P , F_1 e Q definem um plano que intersesta a esfera de Dandelin S_1 numa circunferência e os pontos P , F_2 e Q definem um plano que intersesta a esfera de Dandelin S_2 noutra circunferência. Pela propriedade das tangentes às circunferências, temos:

$$d(P, F_1) = d(P, R) \text{ e } d(P, F_2) = d(P, Q)$$

Então:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, Q) + d(P, R) = d(R, Q)$$

Esta soma será sempre constante, não importa onde o ponto P sobre a interseção do plano com o cone é escolhido.

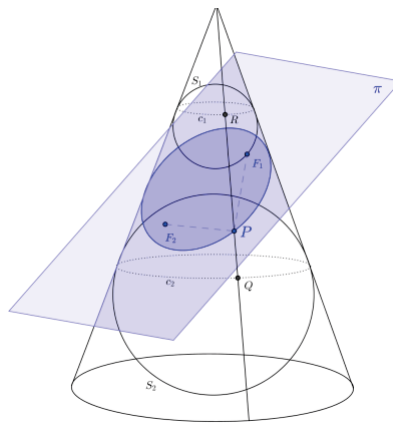


Figura 2.12: Esferas de Dandelin elipse

A hipérbole

Proposição 3. *Considere-se um cone circular reto de duas folhas e um plano π paralelo ao eixo, que o intersecciona. Assumimos que existem duas esferas que tangenciam simultaneamente o plano e o cone, (ver Figura 2.13). Sejam F_1 e F_2 pontos de interseção das esferas com o plano π , então qualquer ponto P da interseção da superfície do cone com o plano π é tal que*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d(R, Q)$$

Onde $d(R, Q)$ é uma constante que não depende da posição de P .

Demonstração: Sejam duas esferas S_1 e S_2 inscritas em um cone de duas folhas, de tal forma que tangenciam o plano de interseção π e todas as geratrizes do cone.

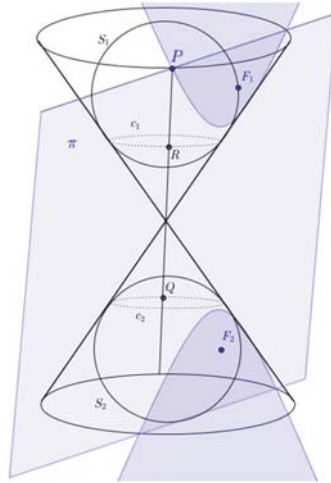


Figura 2.13: Esferas de Dandelin hipérbole

Sejam c_1 e c_2 duas circunferências de tangência de S_1 e S_2 respectivamente. Suponha-se que P é um ponto arbitrário sobre a interseção do plano com o cone (ver Figura 2.13). Tracemos a geratriz do cone passando por P . Como as esferas S_1 e S_2 são tangentes ao cone, esta geratriz será tangente às esferas em R e Q . Seja \overline{RQ} o comprimento do segmento entre c_1 e c_2 que passa por V . Os pontos P , F_1 e R definem um plano que intersecta a esfera de Dandelin S_1 numa circunferência e os pontos P , F_2 e Q definem um plano que intersecta a esfera de Dandelin S_2 noutra circunferência. Pela propriedade das tangentes às circunferências, temos:

$$|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = |d(P, Q) - d(P, R)| = d(R, Q)$$

Esta diferença será sempre constante, não importa o ponto P sobre a interseção do plano com o cone é escolhido.

2.3.3 Geometria Analítica - As equações reduzidas das cónicas

O estudo que se segue foi desenvolvido com base em (Fuller e Tarwater[21], p.95-117)

Equações reduzidas da parábola

Definição 2. Uma Parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes a um ponto fixo e uma reta fixa no plano. O ponto fixo chama-se **foco** e a reta fixa chama-se **diretriz**.

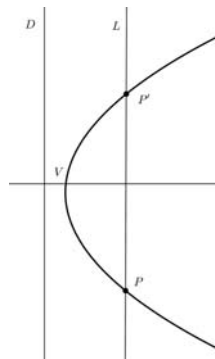


Figura 2.14: Parábola (a)

A equação mais simples de uma parábola obtém-se quando colocamos um sistema de coordenadas numa posição especial relativamente ao foco e à diretriz. Seja o eixo dos xx a reta que passa no foco e é perpendicular à diretriz, e considere-se a origem no vértice. Então, escolhemos $a > 0$, designamos as coordenadas do foco $F(a, 0)$, e a equação da diretriz por $x = -a$ (ver Figura 2.15)

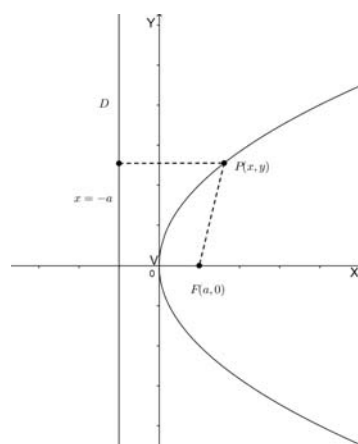


Figura 2.15: Parábola (b)

Como $P(x, y)$ é equidistante ao foco e à diretriz tem-se a igualdade das distâncias:

$$|x + a| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

elevando ao quadrado ambos os lados da equação e reorganizando os termos obtém-se:

$$(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2,$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$y^2 = 4ax$$

Esta é a equação de uma parábola com vértice na origem e foco em $(a, 0)$. Como $a > 0$, x pode ter qualquer valor positivo ou zero mas não pode ter valores negativos. Logo o gráfico pode estender-se indefinidamente ao longo dos 1º e 4º quadrantes, e o eixo da parábola coincide com o semi-eixo positivo dos xx . Fica evidente a partir da equação que a parábola é simétrica em relação ao seu eixo, porque

$$y = \pm\sqrt{ax}.$$

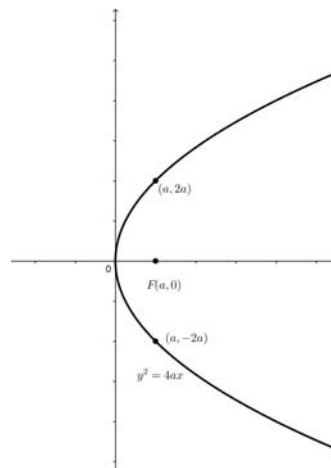


Figura 2.16: Parábola (c)

Também se pode considerar o foco de uma parábola à esquerda da origem. Nesse caso tem-se $a < 0$, e a variável x só pode tomar valores negativos ou zero.

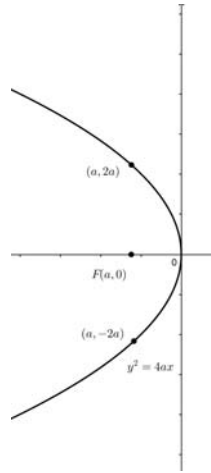


Figura 2.17: Parábola (d)

Podemos ainda trocar os papéis das variáveis x e y e colocar o foco no eixo dos yy , obtendo a parábola de equação:

$$x^2 = 4ay$$

A parábola desta equação é voltada para cima quando $a > 0$ e é voltada para baixo quando $a < 0$, tal como se observa nas seguintes figuras:

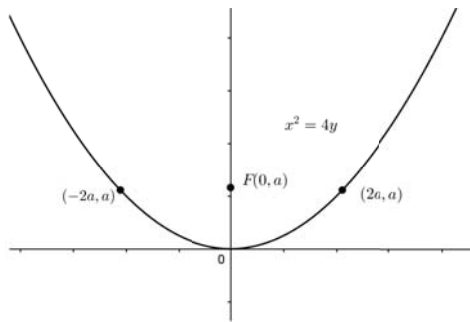


Figura 2.18: Parábola (e)

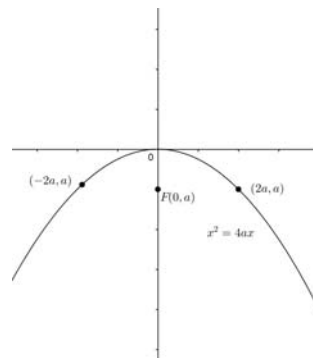


Figura 2.19: Parábola (f)

Vamos agora considerar o caso em que o eixo da parábola é paralelo a um dos eixos coordenados mas não coincide com nenhum deles. Na (Figura 2.20) o vértice é no ponto (h, k) e o foco é $F(h+a, k)$. Introduzimos um novo par de eixos por translação associada ao vetor (h, k) , considerando a origem do novo referencial o ponto (h, k) .

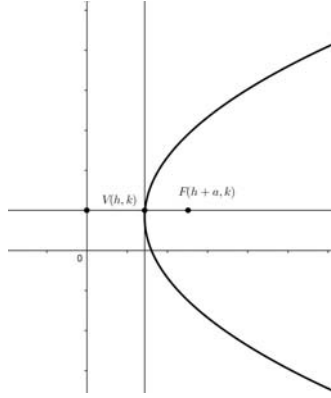


Figura 2.20: Parábola (g)

Nas novas coordenadas $x_1 = x - h$ e $y_1 = y - k$ a distância do foco a origem $(x, y) = (h, k)$ é a , logo a parábola satisfaz a equação

$$y_1^2 = 4ax_1$$

ou, equivalentemente

$$(y - k)^2 = 4a(x - h).$$

Observamos na equação e na figura que, quando $a > 0$, o factor $x - h$ tem que ser maior ou igual a zero, logo a parábola tem abertura para a direita. No caso em que $a < 0$, a parábola abrirá para a esquerda. Em qualquer dos casos o eixo da parábola é a reta $y = k$. Podemos obter de forma análoga a equação de uma parábola com eixo paralelo ao eixo dos yy . Podemos concluir que a equação standard de uma parábola tem uma das seguintes formas:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad (2.1)$$

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \quad (2.2)$$

Observamos que cada uma das equações (2.1) ou (2.2) é quadrática numa das variáveis e linear na outra. Podem desenvolver-se os quadrados escreverem-se respetivamente nas formas:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.3)$$

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.4)$$

Equações reduzidas da elipse

Definição 3. *Uma elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano (focos) é constante. Podemos desenhar uma Elipse se prendermos as pontas de um fio aos focos e colocarmos o lápis a afastar o fio de forma a manter o fio esticado.*

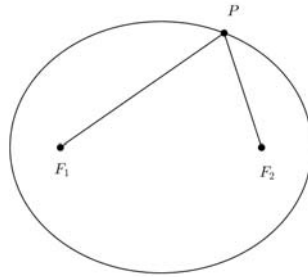


Figura 2.21: Elipse

Neste sentido, para deduzirmos a equação reduzida da elipse, comecemos por introduzir um sistema conveniente de coordenadas da seguinte forma: Escolhemos como eixos das abscissas a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 , e a origem no ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Este ponto é chamado centro da elipse, conforme a figura abaixo.

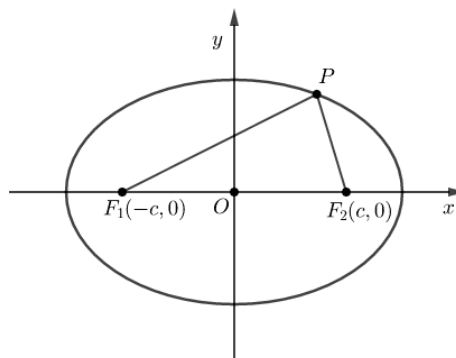


Figura 2.22: Focos da elipse

Se F_2 tem coordenadas $(c,0)$, $c > 0$, então F_1 tem coordenadas $(-c,0)$. A distância de F_1 a F_2 é $2c$. Denotemos $2a$ a soma constante das distâncias de P a F_1 e F_2 . Pela definição da elipse $P(x, y)$ pertencerá a elipse se e somente se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificando os termos simétricos temos:

$$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{4}$, temos:

$$xc = -a^2 + a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(xc + a^2)^2 = (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$-x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = -a^2(a^2 - c^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Graficamente observa-se que os focos e o ponto P da elipse são vértices de um triângulo, logo a distância entre os focos $2c$ é menor que a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, ou seja $2c < 2a$. Então $c < a$ e podemos considerar $b^2 = a^2 - c^2$. Assim, podemos dividir toda equação pela quantidade positiva a^2b^2 . Assim a equação fica:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.5)$$

Observamos que o gráfico da equação (2.5) é simétrico em relação a ambos os eixos coordenados. Quando $y=0$, então $x=\pm a$, e quando $x=0$, vem $y=\pm b$. Assim a elipse intersesta o eixo dos xx nos pontos $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ e intersesta o eixo dos

yy nos pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$. O segmento $\overline{V_1V_2}$ chama-se eixo maior da elipse e o segmento $\overline{B_1B_2}$ chama-se eixo menor.

Se considerarmos os focos da elipse no eixo dos yy nos pontos $(0, -c)$ e $(0, c)$ a equação fica:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2.6)$$

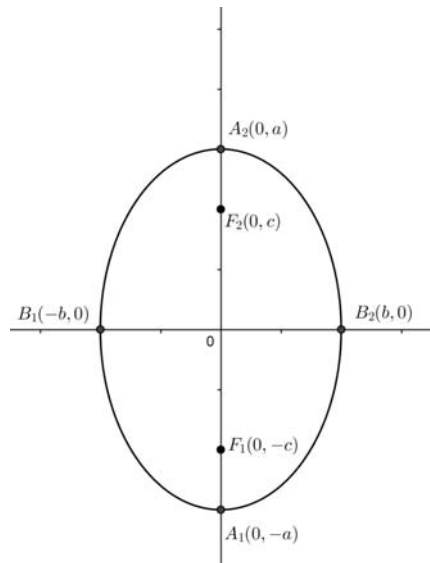


Figura 2.23: Elipse com os focos no eixo dos yy

Os pontos da elipse não se afastam indefinidamente dos focos. Podemos usar a equação da elipse para deduzir que a sua extensão é limitada. Basta resolver a equação em ordem a x ou y :

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

ou

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Estas equações mostram que y^2 não pode exceder b^2 e que x^2 não pode exceder a^2 . Ou seja, os valores admissíveis são:

$$-b \leq y \leq b$$

e

$$-a \leq x \leq a$$

No caso da equações 2.5 e 2.6 os vértices são respetivamente $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$, ou $V_1(0, -a)$ e $V_2(0, a)$ mas as relações entre a , b e c não se alteram. As equações gerais da elipse quando os eixos são paralelos aos eixos coordenados e têm origem

num ponto de coordenadas (h, k) são:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

ou

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

Observando as equações 2.7 e 2.8, é possível constatar que ambas são de grau 2 nas duas variáveis. Pode-se desenvolver os quadrados e escreverem respetivamente nas formas:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.9)$$

ou

$$Ay^2 + Bx^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.10)$$

Excentricidade da elipse

Para uma elipse de focos $(0, \pm c)$ ou $(\pm c, 0)$ e eixo maior de comprimento $2a$, chama-se **excentricidade** da elipse à quantidade.

$$e = \frac{c}{a}$$

A forma de uma elipse depende do valor da sua excentricidade que é o quociente entre a metade da distância focal e a metade da medida do eixo maior. Para compreendermos isto suponhamos que o eixo maior tem comprimento fixo $2a$, e a distância focal tem comprimento $2c$, com $a > 0$ e $c > 0$ o que implica $e > 0$. Como $a > c > 0$ teremos que a excentricidade de uma elipse é um número compreendido entre 0 e 1: $0 < e < 1$, isto é: quanto maior for a distância focal de uma elipse, com a fixado, mais a excentricidade se aproxima de 1 e quanto menor for a distância focal, mais a excentricidade se aproxima de 0. Mas que fazendo variar a excentricidade e entre zero e 1, temos:

- se $e=0$, isso significa que $c = 0$, logo $b^2 = a^2$ e portanto os dois focos coincidem com o centro, caso em que a elipse é uma circunferência;
- se $e=1$ então $c = a$, logo $b^2 = 0$ e portanto nesse caso não podemos definir a elipse por nenhuma das equações 2.5 ou 2.6. Trata-se do caso em que o gráfico é simplesmente o segmento de reta que une os focos;

À medida em que e varia de 0 até 1 a elipse evolui de uma circunferência para valores de b cada vez mais pequenos, ficando a elipse cada vez mais estreita até ao caso limite em que se transforma num segmento.

Equações reduzidas da hipérbole

Definição 4. Uma hipérbole tem por definição o conjunto dos pontos de um plano, tais que o módulo da diferença das suas distâncias a dois pontos fixos (focos) do plano é uma constante positiva. Para obtermos a equação da hipérbole, escolhemos um sistema de coordenadas com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e denotemos a distância (constante) por $2a$.

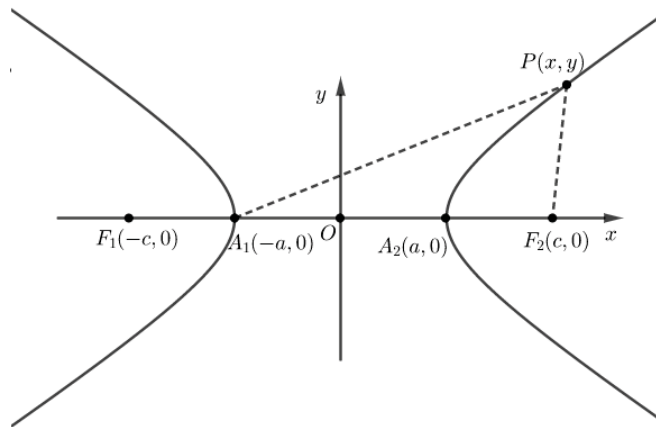


Figura 2.24: Focos da hipérbole

Pela definição, o ponto $P(x, y)$ pertence a hipérbole se e somente se a condição abaixo for verdadeira:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificando os termos simétricos temos:

$$-4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{4}$, temos:

$$xc = -a^2 - a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
xc + a^2 &= -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
(xc + a^2)^2 &= (-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\
x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\
x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\
x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

Como no gráfico da hipérbole (ver Figura 2.24) a relação que se pode estabelecer entre a, b, c é

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

onde a é a metade do eixo do eixo real ou transversal, b a metade do eixo conjugado e c a metade da distância focal. tomando $b^2 = c^2 - a^2$ e substituindo na expressão $x^2(c^2 - a^2) = a^2(c^2 - a^2)$, temos:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.11)$$

A divisão por $c^2 - a^2$ pode fazer-se porque a distância focal $2c$ é maior que a medida do eixo transversal, logo $c > a$. O gráfico da equação 2.11 é simétrico em relação aos eixos coordenados. Para percebermos que valores podem ter as variáveis podemos usar a equação para isolar cada uma delas:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}$$

e

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Vemos na primeira destas equações que y pode ter qualquer valor, mas da segunda conclui-se que $x^2 < a^2$. Assim a hipérbole afasta-se dos eixos indefinidamente em cada quadrante. Mas não tem pontos estritamente entre as retas verticais $x = -a$ e $x = a$. A hipérbole tem dois ramos separados e os pontos $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ chamam-se vértices. Ao segmento V_1V_2 chama-se **eixo transversal**. O segmento entre $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$ chama-se **eixo conjugado**, mas não contém pontos da hipérbole. O centro desta hipérbole é a origem.

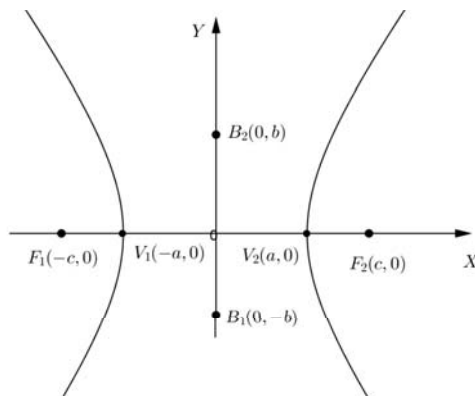


Figura 2.25: Hipérbole (a)

As relações entre a , b e c não são as mesmas na elipse e na hipérbole. Para a elipse $a > c$, $c^2 = a^2 - b^2$ e $a > b$. Para a hipérbole $c > a$, $c^2 = a^2 + b^2$ e não há restrições na relação de a com b . Se os focos da hipérbole estiverem no eixo dos yy então a equação da hipérbole fica

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2.12)$$

As assíntotas da hipérbole

De forma diferente das restantes cónicas, à hipérbole estão associadas duas retas com uma importante relação com a curva. São as retas que prolongam as diagonais do retângulo representado na figura seguinte:

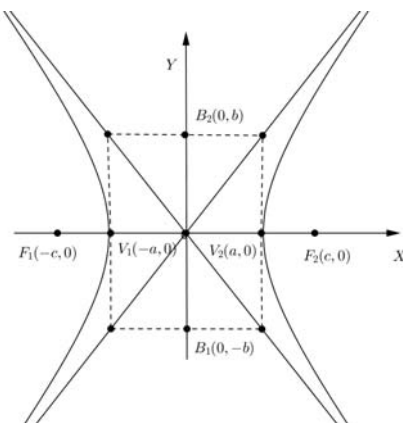


Figura 2.26: Hipérbole (b)

As retas que são assíntotas de uma hipérbole com equação 2.11 têm equações

$$y = \frac{b}{a}x$$

e

$$y = -\frac{b}{a}x$$

enquanto as da equação 2.12 são:

$$y = \frac{a}{b}x$$

e

$$y = \frac{-a}{b}x$$

Conhecer as assíntotas pode ajudar a esboçar o gráfico da hipérbole, desenhando o retângulo e estendendo as diagonais. Se $a = b$ diz-se que a hipérbole é equilátera ou retangular porque as assíntotas serão perpendiculares.

No caso das equações 2.11 e 2.12 os vértices são respetivamente $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$, ou $V_1(0, -a)$ e $V_2(0, a)$, mas as relações entre a , b e c não se alteram.

As equações gerais da hipérbole quando os eixos são paralelos aos eixos coordenados e têm origem num ponto de coordenadas (h, k) são:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (2.14)$$

Observando as equações 2.13 e 2.14, é possível constatar que ambas são de grau 2 nas duas variáveis. Pode-se desenvolver os quadrados e serem escritas respetivamente nas formas:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.15)$$

ou

$$Ay^2 + Bx^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.16)$$

Excentricidade da hipérbole

Chamamos de **excentricidade da hipérbole** à razão $e = \frac{c}{a}$. O ângulo de interseção das assíntotas e consequentemente a forma da hipérbole depende do valor de e . como $c > a$ o valor de e é superior a 1.

2.3.4 Dedução da equação geral das cónicas

Para este estudo trataremos de simplificação por translação e por rotação da equação geral de uma cónica tendo como base o estudo feito em Fuller e Tarwater([21], pp.136-149)

Simplificação das cónicas por translação

Nesta secção nos serviremos da ideia de translação de eixos para expressarmos as equações da parábola, elipse e hipérbole nas suas diferentes formas, de acordo com as equações 2.3, 2.4, 2.9, 2.10, 2.15 e 2.16, analisadas durante o processo dedutivo para a obtenção das suas reduzidas. Portanto, esse estudo será feito a partir da equação geral do segundo grau do seguinte tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Inicialmente mostraremos os seguintes exemplos:

Por uma translação de eixos, simplifique a equação

$$x^2 - 6x - 6y - 15 = 0.$$

Comecemos por completar os quadrados desta equação.

$$x^2 - 6x + 9 = 6y + 9 + 15,$$

$$(x - 3)^2 = 6(y + 4).$$

O vértice da parábola é o ponto (3, -4). Daí vem $h = 3$ e $k = -4$, sabendo que as fórmulas para a translação de eixos são

$$x = x_1 + h \quad e \quad y = y_1 + k, \quad (2.17)$$

temos:

$$x = x_1 + 3 \quad e \quad y = y_1 - 4,$$

Substituindo em 2.17, temos:

$$(x_1 + 3 - 3)^2 = 6(y_1 - 4 + 4),$$

$$(x_1 + 3 - 3)^2 = 6(y_1 - 4 + 4),$$

$$x_1^2 = 6y_1.$$

que reconhecemos como equação de uma parábola com vértice na origem e eixo coincidente com o eixo das ordenadas.

Exemplo 2:

Faça a translação dos eixos e simplifique a equação

$$2x^2 + 3y^2 + 10x - 18y + 26 = 0$$

A simplificação pode ser feita por completamento de quadrado nos termos x e y . Assim tem-se:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 5x) + 3(y^2 - 6y) &= -26, \\ 2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 3(y^2 - 6y + 9) &= -26 + \frac{25}{2} + 27, \\ 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 3(y - 3)^2 &= \frac{27}{2}, \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de translação temos:

$$x = x_1 - \frac{5}{2}.$$

e

$$y = y_1 + 3$$

podemos reduzir a equação para uma livre de termos do primeiro grau. Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{aligned} 2\left(x_1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + 3(y_1 + 3 - 3)^2 &= \frac{27}{2}. \\ 4x_1^2 + 6y_1^2 &= 27. \end{aligned}$$

que reconhecemos como equação de uma elipse de centro na origem e semi-eixos de comprimento $3\sqrt{3}$ e $3\sqrt{2}$.

Nos exemplos anteriores completamos quadrados dos termos x e y das equações para localizarmos as origens dos novos sistemas de coordenadas.

Na sequência deste estudo, importa afirmar que os exemplos 1 e 2 ilustram a ideia de que os eixos podem ser transladados. Esta descrição remete-nos ao enunciado do seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja uma equação do segundo grau do tipo*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação pode ser transformada por uma translação de eixos numa das seguintes

formas:

$$A'x_1^2 + C'y_1^2 + F' = 0.$$

$$A'x_1^2 + E'y_1 = 0.$$

$$C'y_1^2 + D'x_1 = 0.$$

Demonstração:

Consideremos então a equação:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.18)$$

fazendo a mudança de variáveis por translação temos:

$$x = x_1 + h \quad e \quad y = y_1 + k$$

e substituindo na equação dada tem-se:

$$A(x_1 + h)^2 + C(y_1 + k)^2 + D(x_1 + h) + E(y_1 + k) + F = 0$$

Desenvolvendo os quadrados fazendo as devidas operações vem:

$$A'x_1^2 + C'y_1^2 + D'x_1 + E'y_1 + F' = 0$$

onde:

$$D' = 2Ah + D$$

$$E' = 2Ck + E$$

$$F' = Ah^2 + Ck^2 + Dh + Ek + F$$

No caso em que A e C são ambos diferentes de zero, queremos que na equação transformada se tenha $D' = 0$ e $E' = 0$, logo, fazendo D' e E' iguais a zeros obtém-se os valores h e k que fornecem uma translação que elimina os termos do primeiro grau na equação 2.18, enquanto os coeficientes A e C são invariantes por translação de eixos, logo a equação reduz-se à seguinte forma:

$$Ax_1^2 + Cy_1^2 + F' = 0$$

Se $C = 0$ e $A \neq 0$ basta fazer $D' = 0$ ($E = E'$) e obtém-se uma equação do tipo

$$A'x_1^2 + E'y_1 + F' = 0$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$ basta fazer $E' = 0$ ($D = D'$) e obtém-se uma equação do tipo

$$C'x_1^2 + D'y_1 + F' = 0$$

Transformação de coordenadas através da rotação dos eixos

Nesta secção vamos considerar uma transformação de coordenadas onde os novos eixos têm a mesma origem mas diferentes direções com respeito aos eixos primitivos. Neste sentido, os novos eixos podem ser obtidos rodando os eixos primitivos um ângulo com o vértice na origem. A transformação é chamada **rotação de eixos**.

Seja $P(x, y)$ a identificação do ponto P no sistema de eixos xy e $P(x_1, y_1)$ a sua identificação no novo sistema de eixo obtido por rotação, que designaremos por: x_1y_1 . Vamos nomear alguns pontos do plano para determinarmos a relação entre as coordenadas de ambos os sistemas:

Seja N um ponto com coordenadas $(x, 0)$ pertencente ao sistema xy . Seja R um ponto com coordenada $(x_1, 0)$ pertencente ao sistema de eixos x_1y_1 . Consideremos os pontos M e Q , tal que M é a projeção ortogonal de R sobre o eixo Ox e Q a projeção ortogonal sobre o segmento PN , tal como se observa na figura 2.27.

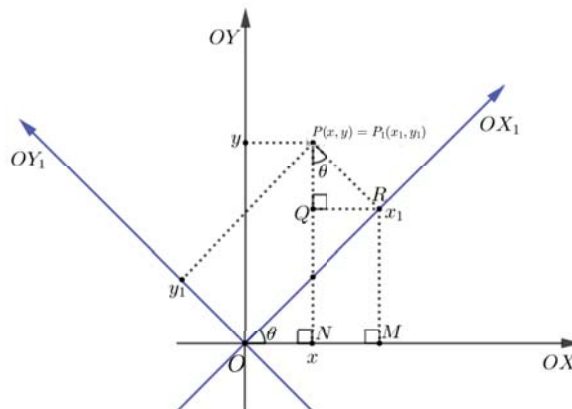


Figura 2.27: Rotação de eixos

Tem-se então:

$$x = \overline{OM} - \overline{NM}.$$

$$y = \overline{NQ} + \overline{QP}.$$

Com a ajuda do gráfico podemos verificar as seguintes relações:

$$\cos \theta = \frac{\overline{OM}}{x_1} \Rightarrow \overline{OM} = x_1 \cos \theta.$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{MR}}{x_1}$$

Como $\overline{MR} = \overline{NQ}$, então vem:

$$\sin \theta = \frac{\overline{NQ}}{x_1} \Rightarrow \overline{NQ} = x_1 \sin \theta.$$

Como $\overline{NM} = \overline{QR}$, então vem:

$$\sin \theta = \frac{\overline{NM}}{y_1} \Rightarrow \overline{NM} = y_1 \sin \theta.$$

e por sua vez

$$\overline{QP} = y_1 \cos \theta$$

Portanto,

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad e \quad y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (2.19)$$

Exemplo :

Transforme o gráfico de equação

$$xy = 1$$

ou equivalentemente

$$y = \frac{1}{x}$$

rodando os eixos por um ângulo de 45° .

quando $\theta=45^\circ$, usando as fórmulas em 2.19, temos:

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_1}{\sqrt{2}} \quad e \quad y = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_1}{\sqrt{2}}$$

Fazendo a substituição na equação dada, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) = 1,$$

que se reduz a

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = 1 :$$

Que reconhecemos como a equação de uma hipérbole de vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ no eixo das abscissas.

Simplificação das cónicas por rotação e translação

Uma equação polinomial do 2º grau em x e em y na sua forma mais geral é representada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Nesta equação pelo menos uma das constantes A , B , ou C têm que ser diferentes de zero.

Na seção 2.3.4, apresentamos o procedimento para simplificação de equações do segundo grau quando $B = 0$. Se $B \neq 0$, a parte essencial da simplificação consiste na obtenção de uma equação transformada sem o produto dos termos cruzados x_1y_1 . Mostraremos como determinar um ângulo de rotação para este propósito.

Começemos com o seguinte exemplo.

Exemplo :

Determine o ângulo, segundo o qual os eixos devem ser rodados para eliminar o termo xy na equação

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16.$$

Substituindo as coordenadas transformadas por rotação na expressão dada, teremos:

$$7(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 - 6\sqrt{3}[(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)] +$$

$$13(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2 = 16.$$

$$(7 \cos^2 \theta - 6\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 13 \sin^2 \theta)x_1^2 + [12 \sin \theta \cos \theta - 6\sqrt{3}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]x_1y_1 +$$

$$(7 \sin^2 \theta + 6\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 13 \cos^2 \theta)y_1^2. \quad (2.20)$$

Queremos encontrar o valor de θ , então fazendo o coeficiente do termo x_1y_1 igual a zero, teremos:

$$6(2 \cos \theta \sin \theta) - 6\sqrt{3}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow 6 \sin 2\theta - 6\sqrt{3} \cos 2\theta = 0.$$

$$\Rightarrow 6 \sin 2\theta - 6\sqrt{3} \cos 2\theta = 0.$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = 60^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$$

Neste caso, θ é uma das várias amplitudes possíveis ($30^\circ + k(180^\circ)$). Substituindo θ na equação 2.20, a equação reduz-se a:

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1.$$

Esta é a equação reduzida de uma elipse de centro na origem e semi-eixos $a = 2$ e $b = 1$.

Teorema 3. *Seja uma equação do segundo grau do tipo*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se $B \neq 0$, a equação pode ser transformada por uma rotação de eixos e por uma translação se for necessário numa das seguintes formas:

$$A'x_1^2 + C'y_1^2 + F' = 0.$$

$$A'x_1^2 + E'y_1 = 0.$$

$$C'y_1^2 + D'x_1 = 0.$$

Se $A \neq C$ o ângulo de rotação θ é obtido por

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

e se $A = C$, então $\theta = 45^\circ$ e a equação indicada será a de uma circunferência.

Demonstração:

Obs: Alguns passos intermédios desta demonstração, estão explicitados no Projeto de ensino II desenvolvido por Ezequias Cassela, ([13], p.39), com o título "Estudo sintético e analítico das curva cónicas."

Consideremos a equação do segundo grau com duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com $A \neq C$. Pode-se eliminar o produto cruzado xy usando o procedimento do exemplo anterior da seguinte forma:

$$A(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 + B[(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)] + C(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2$$

$$D(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) + E(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + F = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta)x_1^2 + [-2A \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) +$$

$$2C \sin \theta \cos \theta]x_1y_1$$

$$+ (A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)y_1^2 + (D \cos \theta + E \sin \theta)x_1 + (E \cos \theta - D \sin \theta)y_1 +$$

$$F = 0 \quad (2.21)$$

desta forma tem-se:

$$A'x_1^2 + B'x_1y_1 + C'y_1^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

onde:

$$B' = B \cos 2\theta + (A - C) \sin 2\theta,$$

fazendo o coeficiente do produto cruzado $xy = 0$, B' será igual a zero, logo temos:

$$-A(2 \cos \theta \sin \theta) + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + C(2 \sin \theta \cos \theta) = 0$$

$$-A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta = 0$$

$$A \sin 2\theta - C \sin 2\theta = B \cos 2\theta$$

$$\sin 2\theta(A - C) = B \cos 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{B}{A - C}$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

O ângulo θ é o que define a rotação necessária para eliminar o termo xy , substituindo em 2.21 e calculado pela fórmula

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{B}{A - C}\right).$$

com $A \neq C$.

Esta fórmula determina o ângulo de rotação excepto quando $A = C$. Se $A = C$, o coeficiente de x_1y_1 é $B \cos 2\theta$. Este termo desaparece por uma rotação de 45° .

Identificação de uma cónica através do binómio discriminante da equação geral

Como sabemos representar graficamente as curvas cónicas, podemos concluir que a representação gráfica de uma equação geral do segundo grau com duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pode ser determinada quando a equação é reduzida a uma das formas simplificadas. A identificação do tipo de cónica pode ser feita a partir dos coeficientes da equação geral. Já vimos que fazendo uma rotação de eixos obtemos uma equação equivalente:

$$A'x_1^2 + B'x_1y_1 + C'y_1^2 + D'x_1 + E'y_1 + F' = 0.$$

com

$$A' = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 2\theta,$$

$$B' = B \cos 2\theta - (A - C) \sin 2\theta,$$

$$C' = A \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta.$$

Se as expressões A' , B' e C' são substituídas em $B'^2 - 4A'C'$ e procedermos a devida simplificação, o resultado é

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Esta é a relação entre coeficientes da equação original e da equação transformada por uma rotação. Por esta razão, a expressão $B^2 - 4AC$ é designada por **invariante**. Para o caso em que $B' = 0$, temos:

$$-4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Quando $B' = 0$, o tipo de cônica representada por uma equação transformada pode ser determinado pelos sinais de A' e C' . Recorde-se a equação reduzida da elipse

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

onde $A' = \frac{1}{a^2}$ e $C' = \frac{1}{b^2}$ logo A' e C' têm o mesmo sinal. Analogamente conclui-se da equação reduzida da hipérbole que A' e C' têm sinais contrários, enquanto no caso da parábola um dos coeficientes é nulo, logo o produto $-A'C' = 0$.

Portanto para a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

no caso de uma cônica não degenerada, o gráfico é:

- Uma elipse se $B^2 - 4AC < 0$
- Uma Parábola se $B^2 - 4AC = 0$
- Uma hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$

2.3.5 Propriedades notáveis das cónicas

As cónicas possuem inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes de algumas propriedades notáveis a elas inerentes as quais apresentaremos em seguida, começando com a propriedade ligada a parábola, seguindo-se a da elipse e da hipérbole. De salientar que quando nos referimos a ângulos de incidência e reflexão sobre um ponto de uma curva eles são por definição os ângulos respetivos de incidência e reflexão sobre a reta tangente à curva nesse ponto.

Propriedade notável da parábola

De realçar que este estudo será feito com base ao livro de Lima et. al, ([29], p.135).

Definição 5. *Dada uma parábola e um ponto P pertencente a parábola, a reta tangente a parábola por P é a única reta que satisfaz as seguintes condições:*

- *Passa por P ;*
- *Não intersesta a parábola em mais nenhum ponto;*
- *Todos os pontos da parábola com exceção de P , ficam situados num dos semi-planos limitados pela reta tangente.*

Proposição 4. *Se P for um ponto da parábola com foco F e diretriz l e Q a projeção ortogonal de P em l , então a mediatriz do segmento FQ é tangente à parábola em P .*

Demonstração:

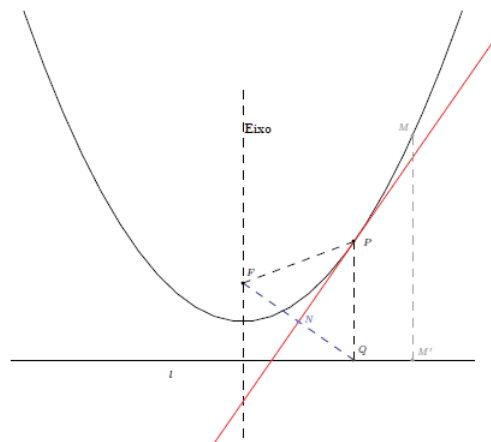


Figura 2.28: Propriedade notável da parábola

Por definição da parábola $|FP| = |PQ|$, logo o triângulo $\triangle FPQ$ é isósceles. Seja N o ponto médio do segmento \overline{FQ} e consideremos NP a mediatriz do segmento \overline{FQ} . Vamos provar que NP é a reta tangente à parábola por P . Então consideremos um ponto M distinto de P pertencente a parábola e seja M' uma projeção ortogonal de M sobre a reta l . A reta NP divide o plano em dois semi-planos, um cujo pontos se encontram mais próximo de F (foco) do que de Q e outros cujos pontos se encontram mais próximo de Q do que de F . Daí vem:

$$|MQ| > |MM'| \quad (2.22)$$

e

$$|MF| = |MM'| \quad (2.23)$$

logo de 2.22 e 2.23 vem:

$$|MF| < |MQ|,$$

isto é, M está mais próximo de F do que de Q . Como M é um ponto arbitrário sobre a parábola, distinto de P , concluímos que todos os pontos com exceção de P , estão no semi-plano limitado pela reta NP cujos pontos estão mais próximo de F do que de Q . logo a reta NP é a reta tangente à parábola.

Teorema 4. (*Propriedade notável da parábola*)

Os ângulos de incidência na parábola paralelos ao seu eixo são iguais ao ângulos de reflexão para o foco a partir do ponto de incidência.

([29], p.141)

Demonstração: Pela proposição 4 a reta NP é tangente à parábola por P . Como o triângulo $\triangle FPQ$ é isósceles, esta reta é também a bissetriz do ângulo em P . Portanto, os ângulos FPN e NPQ são iguais. As retas PQ e NP formam entre si dois ângulos verticalmente opostos, sendo um deles o ângulo NPQ , logo o ângulo de incidência vai ser igual ao ângulo de reflexão FPN .

Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície de revolução chamada **parabolóide de revolução**. Uma aplicação da propriedade notável da parábola observa-se num importante uso destas superfícies parabólicas-as antenas parabólicas. São usadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo reforçando-os consideravelmente.



Figura 2.29: Reflexão de sinais na superfície parabólica (Filipe[35], p.4)

Se a antena parabólica estiver voltada para a posição estacionária do satélite, a grande distância faz com que os sinais emitidos por este sigam trajetória praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena, logo eles se refletem na superfície e convergem para o foco, de acordo com o princípio que acabámos de demonstrar.

Propriedade notável da elipse

O seguinte estudo será feito de acordo com alguns excertos traduzidos informalmente e adaptados de Alcopyan e Zaslavsky [1].

Definição 6. *Dada uma elipse E e um ponto $P \in E$, a reta tangente a E por P é a única reta que tem apenas esse ponto em comum com E .*

Teorema 5. *Considere-se uma linha l tangente a uma elipse num ponto P . Então os ângulos que l faz com os segmentos que unem P a cada um dos focos são iguais.*

Demonstração: Seja X um ponto arbitrário de l diferente de P . Como X é exterior à elipse tem-se $|XF_1| + |XF_2| > |PF_1| + |PF_2|$. Ou seja, de todos os pontos de l , P é aquele a partir do qual a soma das distâncias a cada um dos focos é a menor. Sabendo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, isso significa que os ângulos entre PF_1 e l e entre PF_2 e l são iguais.

Esta propriedade está na base de algumas aplicações, uma delas consiste num dispositivo de iluminação muito utilizado por dentistas, que consiste num espelho com a forma de uma secção de um elipsóide de rotação que contorna apenas um dos focos, onde é colocada uma lâmpada como se vê na Figura 2.30. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco.

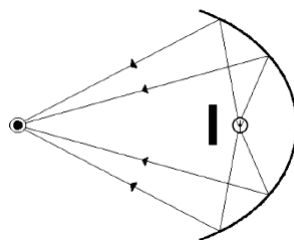


Figura 2.30: Elipsóide [35]

Propriedade notável da hipérbole

À semelhança da propriedade ligada à elipse, este estudo será feito de acordo com [1].

A hipérbole é a cônica que se caracteriza por possuir dois ramos e dois focos. Já a propriedade de reflexão da hipérbole diz que, a reta tangente l num ponto P da hipérbole é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos PF_1 e PF_2 , como mostra a figura a seguir:

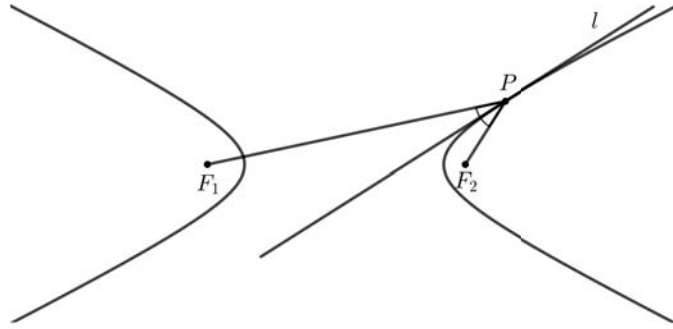


Figura 2.31: Propriedade notável da hipérbole

Teorema 6. *Se l é uma tangente à hipérbole num ponto P então os ângulos que l faz com cada um dos segmentos PF_1 e PF_2 , que unem P aos focos, são iguais.*

Demonstração: Queremos mostrar que l bisseta o ângulo F_1PF_2 . Suponhamos com vista a um absurdo que existe uma outra reta l' que passa por P e por outro ponto Q no mesmo ramo da hipérbole, e que é a bissetriz deste ângulo. Nesse caso consideramos a reflexão F'_1 de F_1 por l' . Tem-se $|F_1Q| = |QF'_1|$ e $|F_1P| = |PF'_1|$. Isto quer dizer que P , F'_1 e F_2 são colineares. Como $|F_2P| - |PF_1| = |F_2Q| - |QF_1|$, tem-se $|F_2F'_1| = |F_2P| - |PF'_1| = |F_2Q| - |QF'_1|$. Isto contraria a desigualdade triangular $|F_2Q| < |F_2F'_1| + |QF'_1|$.

Um exemplo de aplicação da propriedade notável da hipérbole é o chamado telescópio de reflexão. Esse telescópio é constituído, basicamente, por dois espelhos: um maior, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos estão dispostos de maneira que além dos eixos coincidirem, o foco da parábola coincide com um dos focos da hipérbole.

2.4 Geometria Analítica no espaço

Nesta secção vamos falar da Geometria Analítica no espaço de acordo com Steinbrusch e Winterle ([43] pp.27-28).

2.4.1 Espaço cartesiano

Analogamente ao plano, fixar um sistema de coordenadas cartesianas em E^3 , onde E representa a designação de **eixo** (uma reta orientada na qual se fixou um ponto O , chamado origem) corresponde a fixar um sistema de retas orientadas (l_1, l_2, l_3) , mutuamente perpendiculares e com um ponto em comum O , a origem do sistema de eixos cartesianos. Desta forma, cada ponto P pertencente E^3 pode ser identificado com um triplo ordenado (a, b, c) pertencente a \mathbb{R}^3 , escrevemos $P = (x, y, z)$, em particular $O = (0, 0, 0)$.

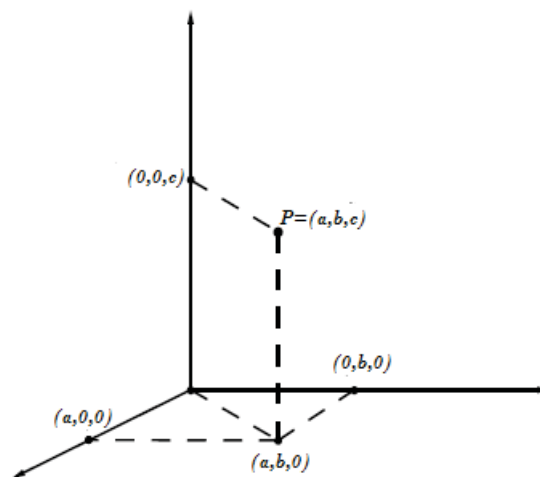


Figura 2.32: Espaço cartesiano

Cada ponto P do espaço vai corresponder a um triplo ordenado (a, b, c) pertencente a \mathbb{R}^3 , chamado de coordenadas de P e denominadas abcissa, ordenada e cota, respectivamente. Para obter a abcissa de P , tracemos por P um plano paralelo ao plano yz , o ponto de interseção deste plano com o eixo dos xx tem nesse eixo uma coordenada a , que é a abcissa de P (ver Figura 2.33).

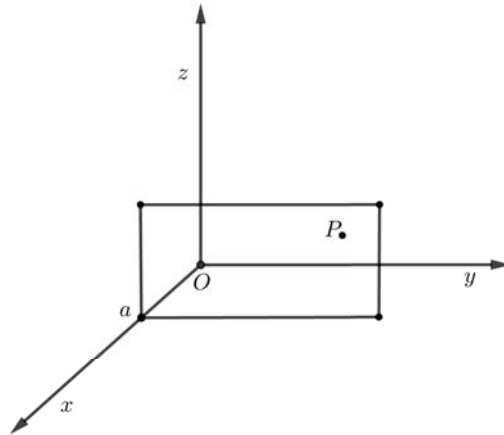


Figura 2.33: Determinação da abscissa

Para obter a ordenada de P , tracemos por P um plano paralelo ao plano xz , o ponto de interseção deste plano com o eixo dos yy tem, nesse eixo, uma coordenada b , que é a ordenada de P (ver Figura 2.34).

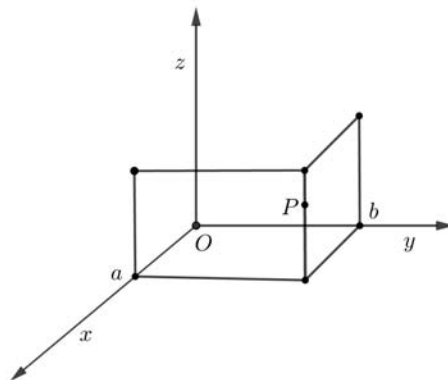


Figura 2.34: Determinação da ordenada

De forma análoga, ao traçar por P um plano paralelo ao plano xy , fica determinada a coordenada c , que é a cota de P , (ver Figura 2.35).

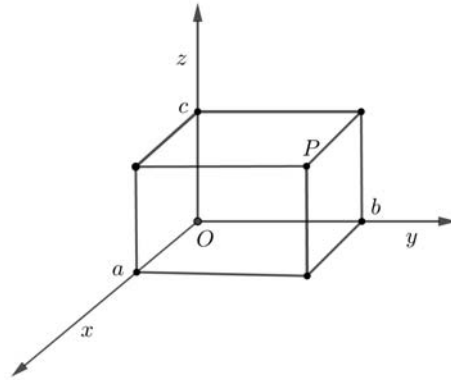


Figura 2.35: Determinação da cota

Traçando os três planos pelo ponto P , fica determinado um paralelepípedo retângulo como o da Figura (2.35)

Distância entre dois pontos no espaço

Consideremos um paralelepípedo retangular (como na Figura 2.36). Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vértices opostos do mesmo, tal que as faces desse paralelepípedo sejam paralelas aos planos coordenados. Se $A = (x_2, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_1)$ são vértices da caixa indicados na figura, então

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \quad |AB| = |y_2 - y_1| \quad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

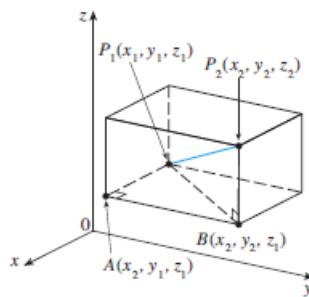


Figura 2.36: Distância entre dois pontos no espaço (Stewart[44] p.795)

Como os triângulos P_1BP_2 e P_1AB são retângulos, o Teorema de Pitágoras fornece

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1B|^2 + |BP_2|^2}$$

$$|P_1B| = \sqrt{|P_1A|^2 + |AB|^2}$$

Combinadas as duas equações, obtemos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2}$$

Substituindo os valores de $|P_1A|$, $|AB|$ e $|BP_2|$, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Portanto a fórmula da distância entre P_1 e P_2 em três dimensões é dada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(Stewart[44] p.795).

2.4.2 Equações da reta no espaço

No estudo desenvolvido no Projeto de Ensino I relacionado com as equações da reta no plano, viu-se que uma reta no plano xy é determinada quando um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta) são dados. "A equação da reta pode ser escrita utilizando-se a forma ponto-inclinação"(Stewart[44], p.756).

Da mesma maneira, uma reta l no espaço tridimensional é determinada quando conhecemos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em l e a direção de l . Em três dimensões a direção de uma reta é descrita por um vetor. Seja \vec{V} um vetor paralelo a l , seja $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário em l e seja \vec{r}_0 e \vec{r} os vetores posição de P_0 e P (ou seja, eles têm representantes $\overrightarrow{OP_0}$ e \overrightarrow{OP}). Se \vec{a} é o vetor com representante $\overrightarrow{P_0P}$, como na Figura (2.37).

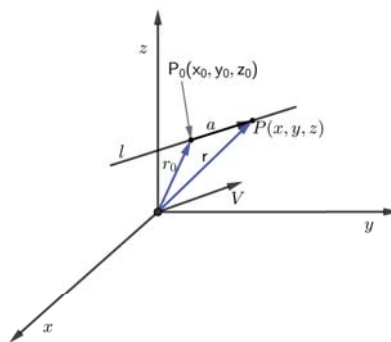


Figura 2.37: Retas no espaço (a) adaptada de (Stewart[44] p.822)

Pela regra do triângulo para a soma de vetores temos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}$$

Mas, como \vec{a} e \vec{V} são vetores paralelos, existe um escalar t , tal que $\vec{a} = t\vec{V}$. Assim

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{V}$$

que é a equação vetorial de l . Cada valor do parâmetro t fornece um vetor posição \vec{r} de um ponto de l . Em outras palavras, à medida que t varia, a reta é traçada pela ponta do vetor. Como a Figura (2.38) indica.

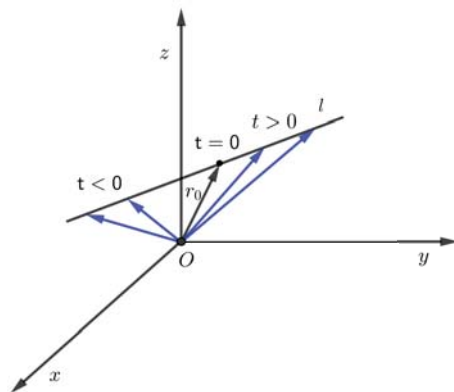


Figura 2.38: Reta no espaço (b) adaptada de (Stewart[44], p.822)

Valores positivos de t correspondem a pontos de l pertencentes a um lado em relação a P_0 , ao passo que valores negativos de t referem-se a pontos pertencentes ao outro lado de P_0 .

Se o vetor \vec{V} que fornece a direção da reta l é escrito sob a forma de componentes, $\vec{V} = \langle a, b, c \rangle$, temos que $t\vec{V} = \langle ta, tb, tc \rangle$. Podemos também escrever $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, e assim a equação vetorial de l se torna em:

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Dois vetores iguais têm componentes correspondentes iguais. Assim, temos três equações:

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct \quad (2.24)$$

Onde t pertence a \mathbb{R} . Essas equações são chamadas **equações paramétricas da reta** l , que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{V} = \langle a, b, c \rangle$. Cada valor do parâmetro t fornece um ponto (x, y, z) em l .

Em geral se o vetor $\vec{V} = \langle a, b, c \rangle$ é usado para descrever a direção da reta l , como qualquer vetor paralelo a \vec{V} pode ser usado, quaisquer três números proporcionais a a, b e c podem ser usados como componentes do vetor diretor de l .

Outra maneira de descrever uma reta l é estabelecer uma relação entre as variáveis x, y e z das equações (2.24). Se nenhum dos números a, b e c for nulo, podemos

isolar t em cada uma das equações e igualar os resultados, obtendo:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas equações são chamadas equações simétricas da reta l . Mesmo que umas das componentes desse vetor seja nula, podemos estabelecer a relação entre as variáveis. Por exemplo, se $a = 0$, podemos escrever as equações de l como:

$$x = x_0 \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Isso indica que a reta l , pertence ao plano vertical $x = x_0$.

2.4.3 Equação geral do plano

Apresentamos este tópico de acordo com (Steinbruch e Winterle[43] pp.143-145).

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano θ e $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$, $n \neq 0$ um vetor normal (ortogonal) ao plano. O plano θ pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tais que o vetor \overrightarrow{AP} é ortogonal ao vetor \vec{n} (Figura 2.39). O ponto P pertence a θ se, e somente se:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.25)$$

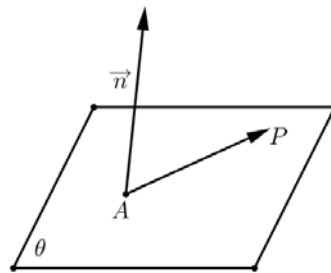


Figura 2.39: Plano θ com seu vetor ortogonal

Tendo em vista que: $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, a equação (2.25) fica:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Ou ainda:

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo:

$$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$$

vem:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta é a equação geral ou cartesiana do plano θ .

Observações:

- Da forma com que definimos o plano θ , vimos que ele fica perfeitamente identificado por um dos seus pontos A e por um vetor normal $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ a θ , com a, b, c , não simultaneamente nulos. Qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$, é também normal ao plano.
- Sendo \vec{n} um vetor ortogonal ao plano θ , ele será ortogonal a qualquer vetor representado nesse plano. Em particular, se \vec{V}_1 e \vec{V}_2 são vetores não colineares, e paralelos ao plano, em virtude de \vec{n} ser ortogonal, ao mesmo tempo, a \vec{V}_1 e \vec{V}_2 , (Figura 2.40), tem-se

$$\vec{n} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$$

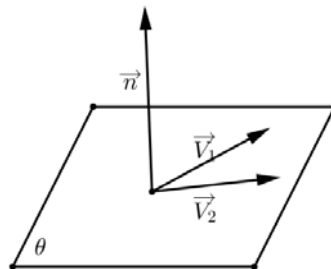


Figura 2.40: Plano θ com seu vetor ortogonal B

- Os três coeficientes a, b, c da equação geral de um plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano θ é dado por:

$$\theta : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$$

um de seus vetores normais é:

$$\vec{n} = \langle 3, 2, -4 \rangle$$

Este mesmo vetor \vec{n} é também normal a qualquer plano paralelo a θ . Assim, todos os planos paralelos a θ têm equação geral do tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

na qual d é o elemento que diferencia um plano do outro. O valor de d está identificado quando se conhece um ponto do plano.

2.5 Parametrizações de curvas

Nesta secção vamos falar sobre parametrização de curvas. Este estudo é feito para preparar o tópico 1.4.4 dos conteúdos a lecionar na disciplina de Geometria Analítica II segundo o Programa ([40], p.4), e é desenvolvido tendo em conta a necessidade do investigador no que diz respeito extração de ideias matemáticas escondidas em artefactos culturais do contexto do aluno.

Stewart ([44], p.647) ao introduzir este tema explica que quando uma partícula move-se ao longo de uma curva C , nem sempre é possível descrever C por uma equação do tipo $y = f(x)$ porque C falha no teste da reta vertical, ou seja, não pode representar a curva do gráfico de uma função de uma variável. Mas as coordenadas x e y da partícula podem ser interpretadas como funções de um mesmo parâmetro (em muitos contextos com o significado da variável tempo). Assim podemos escrever convenientemente $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira de descrever uma curva e motiva a seguinte definição.

Definição 7. *Seja (x, y) um ponto pertencente a uma curva C do plano \mathbb{R}^2 . Chamam-se Equações Paramétricas da curva C às equações:*

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

que definem ambas as coordenadas x e y como funções contínuas de uma terceira variável t , a que se chama parâmetro.

Cada valor de t determina um ponto (x, y) , que podemos representar num plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x, y) = [f(t), g(t)]$ varia e traça a curva C , que chamamos **curva paramétrica**.

Em muitas aplicações das curvas paramétricas, t representa o tempo e, portanto, podemos interpretar $(x, y) = [f(t), g(t)]$ como a posição de uma partícula no instante t .

Exemplo 1: Esboçar e identificar a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \quad y = t + 1$$

Cada valor de t fornece um ponto na curva, como mostra a tabela abaixo.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

Tabela 2.1: Variação dos valores de t

Por exemplo, $t = 0$, então $x = 0$, $y = 1$ e assim o ponto correspondente é $(0, 1)$. Na figura (2.41) representamos os pontos (x, y) determinados por diversos valores do parâmetro. Se determinarmos uma relação comum entre as duas coordenadas destes pontos, podemos traçar a curva que os une.

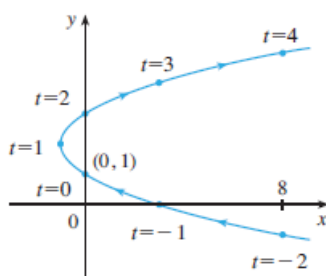


Figura 2.41: Parábola parametrizada (a) ([44], p.647)

Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas desloca-se ao longo da curva na direção das setas quando t aumenta.

Observamos que na Figura (2.41), está representada uma linha da parábola. Essa representação pode ser confirmada determinando uma relação entre as coordenadas x e y a partir de uma redefinição do parâmetro t . Obtemos $t = y - 1$ a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação. Assim:

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

logo, a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola de equação

$$x = y^2 - 4y + 3$$

Nenhuma restrição foi colocada no parâmetro t no **Exemplo 1**; assim, assumimos

que t poderia ser qualquer valor real. No entanto, algumas vezes restringimos t para ficar em um intervalo finito. Por exemplo, a curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1, \quad 0 \leq t \leq 4$$

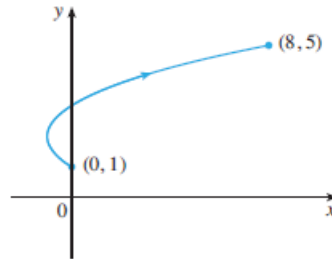


Figura 2.42: Parábola parametrizada (b) ([44], p.648)

mostrada na figura (2.42) é parte da parábola no **Exemplo 1** que começa no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(8, 5)$. A seta indica a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta de 0 a 4.

Em geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

tem **ponto inicial** $(f(a), g(a))$ e **ponto final** $(f(b), g(b))$.

Exemplo 2: Que curva é representada pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$?

Se representarmos alguns pontos, parece que a curva é uma circunferência. Podemos confirmar estabelecendo uma equação algébrica que resulta da fórmula fundamental da trigonometria. Note que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

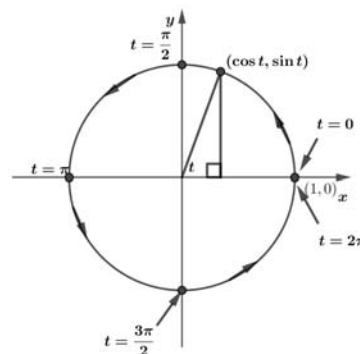


Figura 2.43: Circunferência parametrizada (a)

Então o ponto (x, y) move-se na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$. Note que, neste exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura (2.43). Quando t aumenta de 0 à 2π , o ponto $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ percorre a circunferência uma vez no sentido anti-horário partindo do ponto $(1, 0)$.

Exemplo 3:

Esboçar a curva com equações paramétricas $x = \sin t, y = \sin^2 t$.

Observe que $y = (\sin t)^2 = x^2$ e dessa forma o ponto (x, y) se move na parábola $y = x^2$. Mas note também que, como $-1 \leq \sin t \leq 1$, temos $-1 \leq x \leq 1$, assim as equações paramétricas representam apenas a parte da parábola onde

$$-1 \leq x \leq 1$$

Como $\sin t$ é periódica, o ponto $(x, y) = (\sin t, \sin^2 t)$ se move para frente e para trás infinitamente ao longo da parábola de $(-1, 1)$ até $(1, 1)$, conforme a figura abaixo.

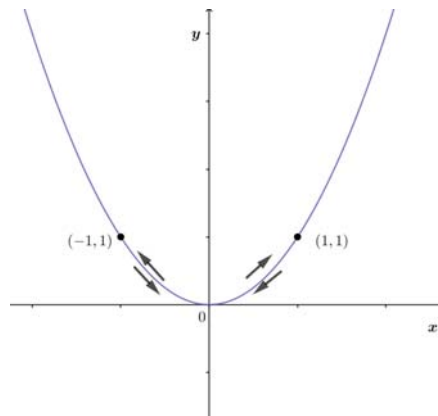


Figura 2.44: Parábola parametrizada (c)

Os exemplos anteriores foram tirados de Stewart ([44] pp.647-648), enquanto os que se seguem são fruto de recolhas diversas do investigador e resolvidos com base ao estudo feito no livro de Apostol ([3], pp.607-609).

Podemos agora estabelecer uma relação com a secção anterior destinada ao estudo das curvas cónicas (2.3), determinando as equações paramétricas para cada uma das seguintes curvas cónicas de equação:

1. $x^2 + y^2 = r^2$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. $y = \frac{1}{4a}x^2$

$$4. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1. No primeiro caso, vamos obter a equação paramétrica para a circunferência. Suponha que desejamos associar x e y com o ângulo t .

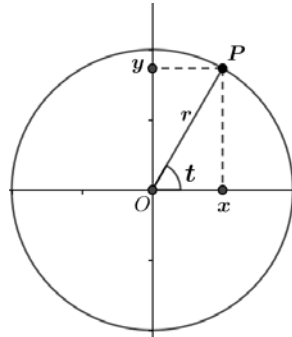


Figura 2.45: Circunferência parametrizada (d)

No triângulo $\triangle OPX$, ilustrado na Figura (2.45), é possível verificar que o cateto oposto mede y , o adjacente mede x e a hipotenusa mede r . Daí vem:

$$\cos t = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos t$$

e

$$\sin t = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da circunferência dadas por:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

2. No segundo caso, vamos obter a equação paramétrica da elipse. Suponha que desejamos associar x e y com o ângulo t .

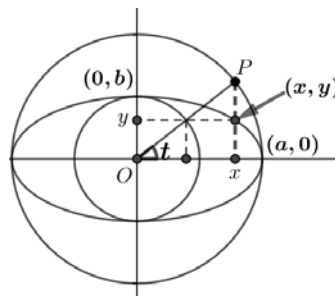


Figura 2.46: Elipse parametrizada

Vamos considerar uma elipse com eixo maior $2a$ e eixo menor $2b$. Consideremos também duas circunferências concêntricas de raio a e b . No triângulo $\triangle OPX$,

ilustrado na Figura (2.46), é possível observar que o cateto adjacente mede x e a hipotenusa mede a , pois é o raio da circunferência maior. Daí vem:

$$\cos t = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cos t$$

por outro lado, observando o triângulo retângulo inscrito na circunferência de raio b , é possível verificar que o cateto oposto mede y e a hipotenusa mede b . Daí vem:

$$\sin t = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y = b \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da elipse dadas por:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Obs: Estas equações se relacionam com as da circunferência pois basta fazer $a = b$.

3. No terceiro caso, vamos determinar novas equações paramétricas da parábola de equação cartesiana $y = \frac{1}{4a}x^2$. Suponha que desejamos associar x e y ao ângulo t .

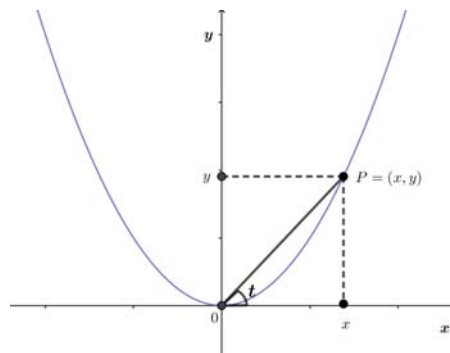


Figura 2.47: Parábola parametrizada (b)

Do triângulo retângulo $\triangle OPX$, vem: $\tan t = \frac{y}{x}$, como $y = \frac{1}{4a}x^2$ (1), temos:

$$\tan t = \frac{\frac{1}{4a}x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\tan t = \frac{1}{4a}x^2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\tan t = \frac{x}{4a} \Leftrightarrow$$

$$x = 4a \tan t$$

Substituindo o valor de x em (1), temos:

$$y = \frac{1}{4a}(4a \tan t)^2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{4a}(16a^2 \tan^2 t) \Leftrightarrow$$

$$y = 4a \tan^2 t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da parábola dadas por:

$$\begin{cases} x = 4a \tan t \\ y = 4a \tan^2 t \end{cases}$$

4. No quarto caso, vamos obter a equação paramétrica para a hipérbole de equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Suponha que desejamos associar x e y com o ângulo t .

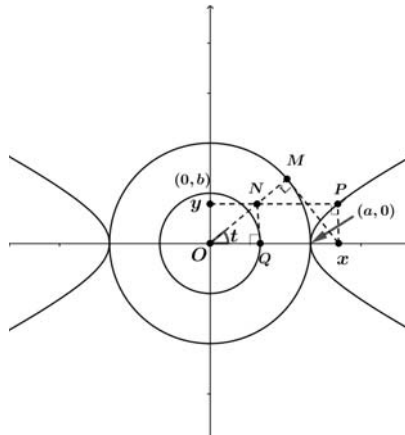


Figura 2.48: Hipérbole parametrizada

Na Figura (2.48) temos duas circunferências concêntricas de raio a e b e uma hipérbole de eixo transversal igual a $2a$ e eixo conjugado igual a $2b$. Visualizando o triângulo retângulo $\triangle OMP$ é possível identificar a hipotenusa medindo x e o cateto adjacente medindo a .

$$\cos t = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\cos t} \Leftrightarrow x = a \sec t$$

No triângulo retângulo $\triangle ONQ$, o cateto adjacente mede b e o cateto oposto mede y . Daí vem:

$$\tan t = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y = b \tan t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da hipérbole dadas por:

$$\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \tan t \end{cases} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Consideremos agora a parametrização de curvas no espaço, cuja definição abaixo se apresenta:

Definição 8. *Seja (x, y, z) um ponto pertencente a uma curva C do espaço \mathbb{R}^3 . Chamam-se Equações Paramétricas da curva C às equações:*

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad (2.26)$$

que definem as coordenadas x , y e z como funções contínuas de uma quarta variável t , a que chamamos de parâmetro.

Seguem-se dois exemplos. Um segmento de reta no espaço e uma curva no espaço (incluídos numa aula em anexo).

Exemplo 1: segmento de reta no espaço

Determine a equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P = (1, 3, -2)$ ao ponto $Q = (2, -1, 3)$.

Para obtermos uma equação vetorial do segmento de reta que passa pelos pontos $P = (1, 3, -2)$ e $Q = (2, -1, 3)$, vamos inicialmente determinar o vetor deste segmento.

$$v = Q - P = (2, -1, 3) - (1, 3, -2) = (1, -4, 5)$$

Seja $C = (x, y, z)$ o conjunto de todos os pontos no espaço, nos quais

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

temos:

$$\overline{PC} = tv \Leftrightarrow C - P = t(1, -4, 5) \Leftrightarrow$$

$$(x - 1, y - 3, z + 2) = (t, -4t, 5t) \Leftrightarrow$$

$$x = t + 1 \quad y = 3 - 4t \quad z = -2 + 5t$$

O intervalo de variação do parâmetro t é definido a partir de uma das equações, por exemplo $x = t + 1$, temos:

para $x = 1$, $t = 0$ e para $x = 2$, $t = 1$. Logo t varia de 0 a 1, isto é $0 \leq t \leq 1$.

Como $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, a função vetorial é dada por:

$r(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle$ com $0 \leq t \leq 1$. E as equações paramétricas são:

$$x = t + 1, \quad y = 3 - 4t, \quad z = -2 + 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Graficamente temos:

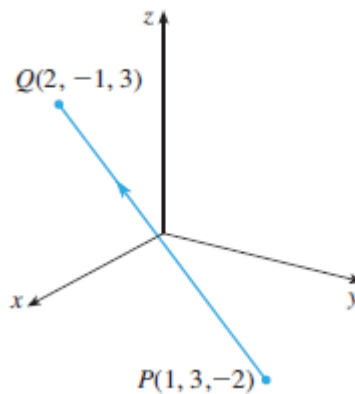


Figura 2.49: Segmento de reta (Stewart[44], p.850)

Exemplo 2: curva no cone

Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, está em $z^2 = x^2 + y^2$.

Vamos substituir os valores das variáveis x , y e z , na equação dada.

$$z^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t \Leftrightarrow z^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

como $z = t$, temos

$$z^2 = z^2$$

Logo a curva com equações paramétricas dada está em $z^2 = x^2 + y^2$. Conforme a figura abaixo.

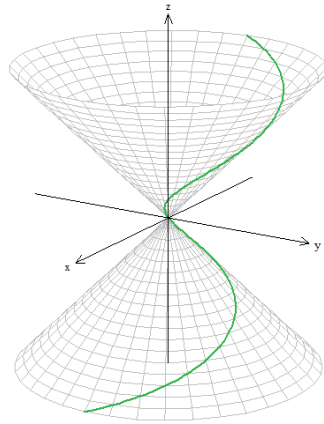


Figura 2.50: Curva no cone

A sequência dos assuntos abordados no estudo anterior foi escolhida tendo em conta a sua importância para a compreensão de alguns tópicos do Programa de Geometria Analítica [40]. Foram estes os conteúdos escolhidos para a planificação de algumas aulas (em anexo).

Obs: o estudo das curvas cónicas desenvolvido na secção 2.3 começou com a sua definição como curvas de interseção de duas superfícies no espaço - um plano e uma superfície cónica. O estudo de curvas e superfícies no espaço a desenvolver no âmbito da disciplina de Geometria Analítica II, na Escola Superior Pedagógica do Bié poderá ser motivado e enriquecido com exemplos culturalmente contextualizados, como o da construção de um Onjango (3.2) e o da decoração de lenços (3.3), sugeridos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Problemas matemáticos motivados pelo contexto

(...) "As práticas matemáticas do contexto local, quando ensinadas, podem incentivar o gosto pela aprendizagem da Matemática e a retenção de conceitos básicos sem ambiguidade" (Dias[17], p.367).

Em concordância com o anteriormente descrito, identificam-se nas práticas culturais inerentes ao povo do Cuito, algumas atividades que "escondem" conhecimentos geométricos. Por exemplo, na construção de casas de pau-a-pic, Onjango, nos desenhos dos lenços usados pelas mulheres angolanas, na medição e delimitação de terrenos. Estas observações despertam no autor deste trabalho a motivação de extrair ideias geométricas no proceder diário deste povo, para servir de auxílio no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica dos alunos do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié. O exemplo que se segue é um exercício elaborado a partir da observação no terreno de determinados conhecimentos geométricos "congelados" nas várias atividades praticadas pelo povo do centro administrativo do Njimba Silili.

Exemplo:

Para fazer um canteiro de tomateiros, um agricultor do Njimba Silili traçou uma elipse tangenciando, nos respectivos pontos médios, os quatro lados de um terreno retangular de $4m$ por $3,2m$. Para isso, usou uma corda esticada presa em duas estacas por suas extremidades M e N , como mostra a figura. Qual a distância entre os pontos M e N ?

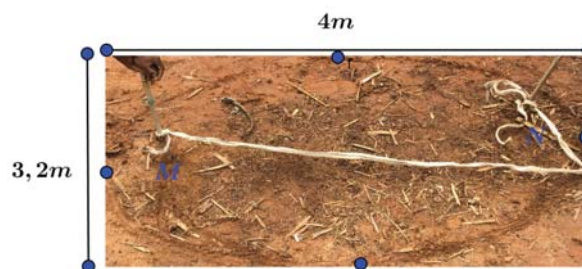


Figura 3.1: Canteiro elíptico (a)

Se a elipse traçada pelo agricultor tangencia o terreno retangular que tem como comprimento $4m$, então o comprimento do eixo maior desta elipse é $4m$. Sabendo que a é a metade do eixo maior, então:

$$a = \frac{4m}{2} = 2m$$

De modo análogo, b é o comprimento do eixo menor, então:

$$b = \frac{3,2m}{2} = 1,6m$$

Se M e N representam os focos da elipse traçada pelo agricultor, então:

$$d(M, N) = 2c$$

Então para acharmos a distância de $d(M, N)$, precisamos do valor de c , para tal vamos analisar a figura a baixo:

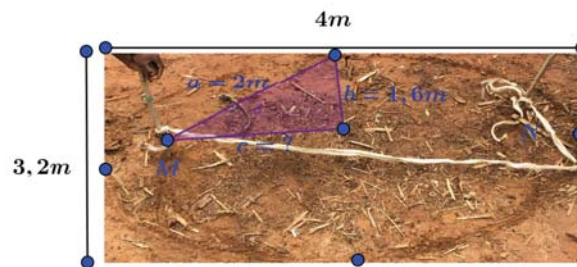


Figura 3.2: Canteiro elíptico (b)

Como o triângulo formado é retângulo, então pelo teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$2^2 = 1,6^2 + c^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 4 - 2,56 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 1,44 \Leftrightarrow$$

$$c = 1,2$$

logo

$$d(M, N) = 2 \cdot 1,2 \Leftrightarrow$$

$$d(M, N) = 2,4 \Leftrightarrow$$

Resposta: A distância entre os pontos M e N é de $2,4m$.

O encontro com um agricultor na aldeia de Njimba Silili, que partilhou a sua técnica de contorno do canteiro ilustrada nas fotografias, foi o primeiro exemplo de possível matematização de uma atividade tradicional que o investigador teve oportunidade de observar durante a experiência no terreno. Nas próximas duas secções são explicadas com algum detalhe mais duas atividades observadas e analisadas durante

esta mesma experiência, que incluem não só a transcrição de partes de uma conversa informal com habitantes e artesãos locais, como também o possível processo de matematização dessas atividades. "O olhar matemático" desenvolvido em estudos recentes despertou o interesse do investigador nos processos de criação de cestos e de construção de um Onjango. Por exemplo, o Problema Isoperimétrico tinha sido abordado na disciplina do Mestrado dedicada a Matemática Arte e Natureza, pelo que o investigador decidiu aproveitar esse conhecimento para a interpretação matemática da forma do Onjango. E quanto ao estudo de superfícies, menos presente por não ter sido alvo de trabalho recente, o autor deixou apenas a possibilidade como sugestão na interpretação matemática do teto do Onjango. No que diz respeito à última secção, procurou-se averiguar sobre a possibilidade de usar este mesmo tipo de motivação e construção de significados na aprendizagem de novos conteúdos científicos. Foi por isso um estudo posterior à experiência no terreno.

3.1 Sobre a Geometria "congelada" na cestaria produzida no Cuito

A Matemática está presente na vida do homem desde os primórdios das civilizações humanas, desempenhando um papel preponderante na satisfação das suas necessidades práticas e estando presente nas mais altas esferas do trabalho e do pensamento científico.

Ao longo do tempo cada grupo étnico foi abraçando determinadas artes com o propósito de se tornar independente do que a Natureza oferecia, usando técnicas que subentendiam determinado pensamento geométrico, sobretudo na produção de alguns artefactos culturais.

Esta perspectiva despertou a atenção do matemático e investigador Paulus Gerdes, de origem holandesa, mas vivendo e trabalhando em Moçambique ao longo de mais de 3 décadas, que desenvolveu uma linha de investigação baseada no "descongelar" do pensamento geométrico usado para a produção destes artefactos. "A intenção era a de que o investigador inicialmente aprendesse as técnicas de fabricação sobreviventes (por exemplo, as técnicas de entrelaçamento, de produtos de trabalhos tradicional como esteiras, cestos, balaios, entre outros) e, em cada fase do processo de fabricação, se questionasse sobre os aspetos de natureza geométrica que desempenham um papel importante para se chegar à fase seguinte, permitindo assim a descoberta do pensamento geométrico escondido" (Gerdes[22]).

Seguindo o exemplo da linha de investigação de Gerdes, o autor desta investigação foi conduzido a fazer um estudo sobre a geometria escondida na produção de artefactos ligados à cultura do povo do Cuito, partindo desde o simples pensar do construtor até ao objetivo sob o ponto de vista funcional ou estético do objeto produzido, tal

como se verifica nos estudos abaixo apresentados.

De realçar que a ideia da utilização destes artefactos no processo de ensino-aprendizagem, está pautada no pensamento de Rosa e Orey [42], ao afirmarem que os artefactos culturais são instrumentos pedagógicos que podem ser utilizados para facilitar o entendimento e a compreensão no ensino de determinados conteúdos.

3.1.1 A diferença entre a elipse e circunferência ilustrada na produção de cestos

Começamos por observar as fotografias abaixo apresentadas que retratam imagens das bases de dois cestos diferentes feitos por um artesão.



Figura 3.3: Cestos com bases diferentes (a)

Sobre a ideia original que motivou o artesão a construir os dois cestos, colocaram-se as seguintes questões durante a entrevista a baixo descrita onde **I** é o investigador e o **A** é o artesão :

- **I:** Qual é a diferença entre a primeira e segunda base?
- **A:** Uma é circular e a outra é oval
- **I:** Porquê que escolheu estas formas?
- **A:** A forma circular tem sido a que mais aparece, então para fazer a diferença decidi fazer também cestos de forma oval
- **I:** Como fizeste para definir as duas bases?
- **A:** A base circular começo pelo meio fazendo um entrelaçado redondo (ideia do centro) e depois com um tipo de capim que tiro na minha aldeia no mês de Outubro, depois de seco entrelaço com linhas de várias cores e envolvo o meio várias vezes até atingir a medida que eu quero. A base de forma oval começo por tirar o capim e entrelaço até ficar direito como um pedaço pequeno de pau (ideia de segmento de reta) e depois vou envolvendo com outro entrelaçado fazendo várias voltas até atingir a medida que eu quero.

3.1.2 Interpretação matemática

Seguindo a linha técnica do artesão, marquemos na primeira imagem um ponto C onde ele começa por definir a base. Marquemos também M e N pontos definidos pelo pedaço de pau que intuitivamente representa um segmento de reta na segunda imagem.



Figura 3.4: Cestos com bases diferentes (b)

O ponto C está definido de forma que quaisquer pontos que possamos imaginar em cada entrelaçado envolvente terão sempre iguais distância com respeito a C , com isto podemos dizer que a primeira imagem tem a forma de uma circunferência com centro em C . Se considerarmos o cesto do lado direito, vamos ter um segmento de reta \overline{MN} e o artesão a medida que vai envolvendo este segmento com a forma que ele chama de oval, parece ir descrevendo uma trajetória de pontos cuja soma das distância entre o ponto M e o ponto N será uma constante. Se assim for, podemos dizer que os vários contornos observados na segunda figura têm a forma de uma elipse com focos em M e N .

Da técnica do artesão, podemos interpretar a diferença entre a circunferência e a elipse, para tal comecemos por analisar a segunda imagem.

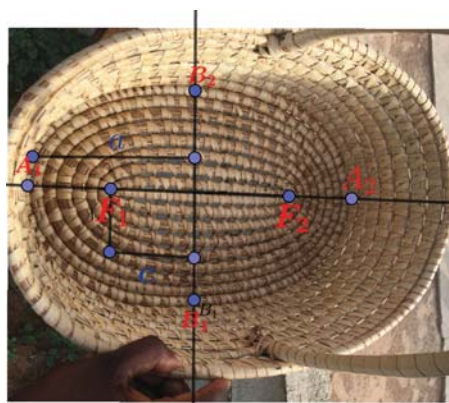


Figura 3.5: Cestos com base elíptica

Observa-se que as voltas que o artesão vai dando ao segmento de reta \overline{MN} , vão partindo da forma mais achatada para a menos achatada. À medida que a curva vai se tornando cada vez menos achatada vai sendo maior a diferença de comprimentos entre os segmentos $\overline{F_1F_2}$ (onde $F_1 = M$ e $F_2 = N$ são os focos da elipse) e $\overline{A_1A_2}$ (eixo maior da elipse). Se o artesão continuar vai obter uma curva cada vez mais próxima da circunferência. Matematicamente existe um número compreendido ente 0 e 1 que traduz estas transformações na elipse que é a chamada **excentricidade de elipse** (razão entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior).

$$e = \frac{c}{a}$$

Portanto a circunferência pode ser considerada como a elipse de excentricidade nula conforme a figura seguinte.

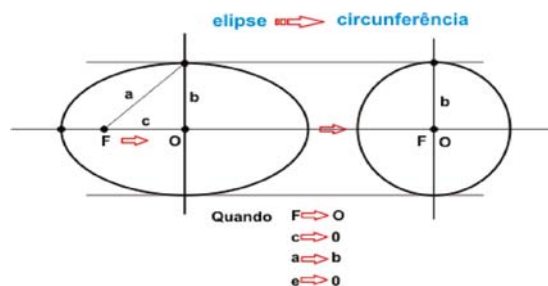


Figura 3.6: Elipse de excentricidade nula

3.1.3 Técnica do artesão para o cálculo da área da circunferência a partir da primeira imagem

Vamos estudar a área da circunferência a partir do procedimento usado pelo artesão, ao fazer um cesto de base circular. Inicialmente o artesão começa por definir um ponto, por estes faz passar determinados juncos (caniços) retos, cujo ponto definido é o da interseção entre eles, no objeto da figura abaixo representada se usam 12 juncos retos.



Figura 3.7: Primeiro passo na construção da base do cesto

Na sequência delimita a região com uma linha circular, o que aparentam definir 12 setores circulares, delimitados pelo posicionamento dos 12 juncos retos relativamente a essa linha.



Figura 3.8: Segundo passo da base do cesto

Seguidamente o artesão vai colocando sucessivamente caniços por formas a tornar setores circulares cada vez mais próximos do ponto onde se cruzam os 12 juncos retos e ao mesmo tempo vai entrelaçando de forma gradual os caniços contornando a curva inicialmente definida, até se formar a base.



Figura 3.9: Terceiro passo da base do cesto

Interpretação matemática para o cálculo da área da circunferência

Conhecendo o perímetro de uma circunferência, é possível demonstrar a partir da técnica do artesão que a área da circunferência é:

$$A_c = \pi R^2 \quad (3.1)$$

Começemos por pensar da seguinte forma:

- Apoiando-se nos triângulos formados com ajuda dos caniços dentro da circunferência, uma forma de estimar a sua área é somar as áreas dos n triângulos formados (no objeto fotografado $n=12$), como mostra a figura abaixo (polígono de n lados inscrito numa circunferência):

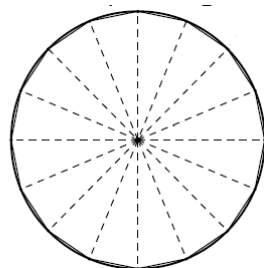


Figura 3.10: Polígono de n lados inscrito numa circunferência

- Conhecendo a altura h e a base de cada triângulo formado pelos caniços, uma forma de obter a área de cada triângulo é a utilização da seguinte fórmula:

$$A_t = \frac{bh}{2} \quad (3.2)$$

- Vamos supor que todos os triângulos formados são iguais, então a área da circunferência será igual a soma das áreas dos triângulos formados:

$$A_c = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \dots + \frac{bh}{2} \quad (3.3)$$

- Tomando $n \frac{bh}{2} = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \dots + \frac{bh}{2}$, vem:

$$A_c = n \frac{bh}{2} \quad (3.4)$$

- Se o artesão diminuir cada vez mais o tamanho (**ângulo do setor circular, ou seja, a amplitude do ângulo com vértice no centro do polígono inscrito, que coincide com o centro da circunferência circunscrita**) de cada triângulo formado, veremos que a base de cada triângulo estará mais próxima da linha de circunferência e assim, a altura de cada um dos triângulos estará cada vez mais próxima do raio da circunferência.
- Reduzindo a amplitude dos ângulos de forma infinitesimal, ou seja, considerando amplitudes cada vez mais próximas de zero, teremos infinitos triângulos, portanto, fazendo n tendendo ao infinito a base b será infinitamente pequena, então a área da circunferência será:

$$A_c = \lim(n \frac{bh}{2})$$

Daí sai:

$$A_c = \lim(nb) \frac{h}{2}$$

Tendo em conta que $nb = b + b + b + \dots + b$, quando a base b for infinitamente pequena, dando a volta para toda linha da circunferência, no final nb será igual ao perímetro da circunferência.

$$\lim(nb) = 2\pi R$$

Substituindo temos:

$$A_c = 2\pi R \frac{h}{2}$$

Sabendo que quanto mais pequena for a base do triângulo, a altura do mesmo tenderá para o raio da circunferência, isto é:

$$h \longrightarrow R$$

Então vem:

$$A_c = 2\pi R \frac{R}{2}$$

Simplificando, temos:

$$A_c = \pi R^2$$

Assim fica demonstrado o procedimento para a obtenção da área da circunferência tendo como base a técnica do artesão.

3.1.4 Cálculo da área da elipse a partir do cesto da segunda imagem

A imagem 3.5 estudada anteriormente possui a forma de uma elipse com focos em M e N .

Nos estudos feitos anteriormente, ficou demonstrado o procedimento para a obtenção da equação reduzida da elipse a partir da sua interpretação gráfica, o que permitiu chegar ao resultado que se segue.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.5)$$

Neste caso, para além do cálculo da área da elipse por meio do integral definido, podemos reproduzir aqui um estudo desenvolvido por Kariton Pereira Lula ([30], p.47), em sua dissertação de mestrado intitulada "Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo de volumes e áreas":

- Consideremos uma elipse de semi-eixos a e b , com $a \geq b$. Podemos escolher eixos cartesianos de modo que a equação cartesiana da elipse seja dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Utilizando a versão bidimensional do **princípio de cavalieri** que diz: (...) "*Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos*

de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante" (Lula[30] p. 22), vamos comparar esta elipse com uma circunferência de equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = a^2$$

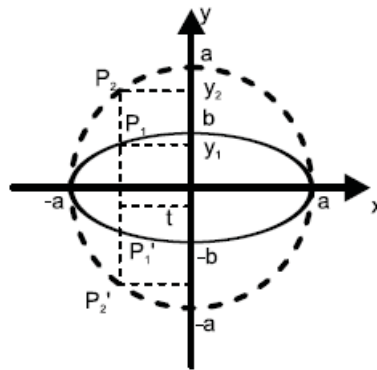


Figura 3.11: Elipse inscrita na circunferência, ([30] p. 46)

Tendo em conta o princípio de Cavalieri, tracemos retas paralelas ao eixo Oy . A reta $x = t$, para cada t fixo em $(-a, a)$, intersecta a circunferência em P_2 e P_2' e intersecta a elipse em P_1 e P_1' . Para obtermos P_1P_1' e P_2P_2' observamos que P_1 e P_1' e P_2 e P_2' são simétricos em relação à reta $y = 0$, logo $P_1P_1' = 2y_1$ e $P_2P_2' = 2y_2$.

Como P_1 pertence à elipse, temos para cada t pertencente a $(-a, a)$,

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)$$

como P_2 pertence à circunferência, temos:

$$t^2 + y_2^2 = a^2 \Rightarrow y_2^2 = a^2 - t^2$$

Assim, o quociente entre y_1^2 e y_2^2 é

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{b^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)}{a^2 - t^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

Onde obtemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$$

Logo, para qualquer $-a < t < a$, temos

$$\frac{P_1 P'_1}{P_2 P'_2} = \frac{2y_1}{2y_2} = \frac{b}{a}$$

Pelo princípio de Cavalieri, a razão entre as áreas obedece a mesma proporção logo,

$$\frac{A_E}{A_C} \Rightarrow \frac{A_E}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow A_E = \pi ab$$

Onde A_E e A_C indicam as áreas da elipse e da circunferência, respectivamente ([30], p.48).

3.2 A Geometria "congelada" na construção de um Onjango

Numa entrevista com um ancião da aldeia de "Njimba silili", onde cresceram três alunos da Escola Superior Pedagógica do Bié do curso de Matemática, fomos informados sobre a estrutura que constitui um dos lugares de alto valor cultural daquela região, sendo o lugar definido pelas autoridades tradicionais da aldeia como o espaço digno para a transmissão de valores culturais da velha para a nova geração. Este lugar tem o nome de "Onjango" em língua nacional Umbundo.

A entrevista abaixo descrita apresenta as seguintes notações: **(I)** entrevistador, **(A)** ancião.

- **I:** Como é construído o Onjango?

- **A:** O Onjango é feito da seguinte forma:

- Amarrar em duas extremidade de uma corda duas estacas e fixar uma no chão por formas a esticar a corda até no limite;



Figura 3.12: Estacas amarradas nas extremidades de uma corda

- Depois de esticada girar envolta da estaca fixada no chão (**definir o centro, uma variação da construção com um compasso**);



Figura 3.13: Girar a estaca

- Medir a distância entre a estaca do centro até a linha da curva para se ter a certeza de que qualquer "ekoso"(tronco cortado de uma árvore estreita) colocado na linha da curva terá a mesma distância com respeito a estaca do meio (**conceito da circunferência como lugar geométrico de todos os pontos que se encontram a igual distância com respeito ao centro**);



Figura 3.14: Medição da distância entre as estacas

- Preencher a curva com determinados "ekoso" mantendo a igual distância entre eles (**vértices do polígono regular inscrito na circunferência**);
- Preencher os espaços da linha com uma parede construída de adobe;
- No final obtém-se uma parede da forma da curva (**parede circular**);
- Obedecendo à curva da parede faz-se a base do teto com a mesma curva (**circular**) que em língua umbundo é chamado de "ekungo";

- Preencher a base da cobertura com alguns paus que vão se unir em cima da curva (**vão se unir num único ponto, ideia de vértice de um cone**)

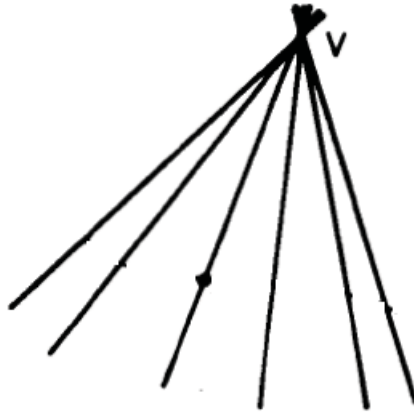


Figura 3.15: Cobertura do Onjango (a)

- Envolver de forma circular os paus levantados com "vikandambala" (paus amarrados de forma circular) até ao ponto de união, amarrando-os com uma corda de "londovi" (cordas extraídas do tronco de uma árvore);

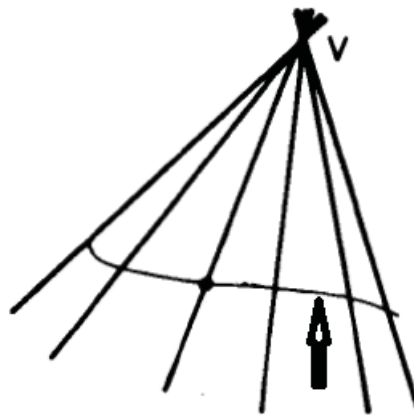


Figura 3.16: Cobertura do Onjango (b)

- Finalmente "Okuyambela" processo de cobertura com capim;
- Ao final obtém-se uma cobertura ilustrada na Figura (3.17)



Figura 3.17: Onjango

3.2.1 Interpretação matemática da forma do Onjango

A seguir se descreve a conversa entre o investigador e o ancião na sequência da entrevista.

-I: Porquê que todos Onjangos têm esta forma (**circular**) e não outra?

-A: Risos..."Momo oyo ya tandavala enene okuti vosi vasuamõ"o que significa que é a mais espaçosa (**tem maior área**) congregadora de um maior número de pessoas. A resposta dada pelo ancião está em conformidade com um problema muito antigo associado a seguinte questão: de entre as curvas de perímetro P qual é a que encerra maior área?

A razão da discussão promovida em torno deste problema está ilustrada na lenda de Dido e da fundação da cidade de Cartago que aparece referida no cântico I da obra épica "Eneida", escrita pelo poeta romano Virgílio (70 a.c. a 19 a.c).

Como foi referido, desde a antiguidade que se sabe que esta curva é a circunferência, no entanto, a demonstração rigorosa deste resultado é relativamente recente (apresentada pela primeira vez por H. A. Schwarz em 1890). Não é a demonstração de Schwarz que vamos apresentar, mas sim um método introduzido por J. Steiner e explicado em Urakawa ([46], pp.117-119), chamado de simetrização. Efetivamente, este método é ainda hoje aplicado na resolução de muitos problemas variacionais.

O argumento de Steiner (em traços gerias) reside no seguinte:

1. Seja D um domínio plano e C a curva que o encerra. Considera-se uma reta l . Pretendemos obter uma curva C_l , simétrica relativamente a l e com o mesmo perímetro de C . Esta curva C_l é obtida do seguinte modo: tomemos uma perpendicular l' a l ; seja M a interseção entre l e l' e considerem-se os pontos M_1 e M_2 , em l' , de tal modo que M seja o ponto médio do segmento $\overline{M_1M_2}$ e cujo comprimento é igual ao da interseção de l' com a curva C . Repetindo este processo para as várias retas perpendiculares a l e secantes à curva C obtemos

o domínio plano D_l cuja curva que o encerra é a C_l , tal como se ilustra na seguinte figura.

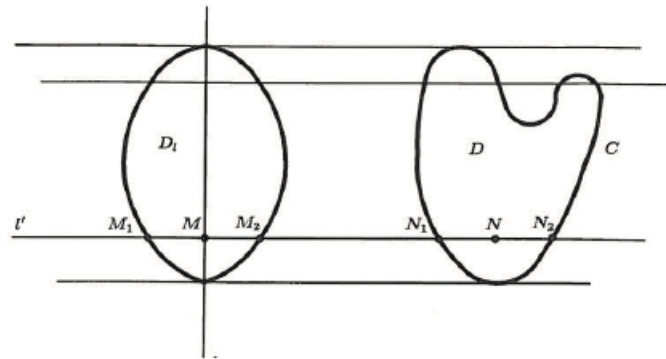


Figura 3.18: Simetrização (a)

2. Pelo **princípio de Cavalieri**, que diz que: (...) "*Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante*" (Lula[30] p.22), a curva C_l , encerra a mesma área que a curva C , mas o comprimento L_l da curva C_l é menor do que o comprimento L de C .
3. Demonstraremos de seguida que $L \geq L_l$. Consideremos os dois trapézios $N_1N'_1N'_2N_2$ e $M_1M'_1M'_2M_2$, ilustrados na figura abaixo.

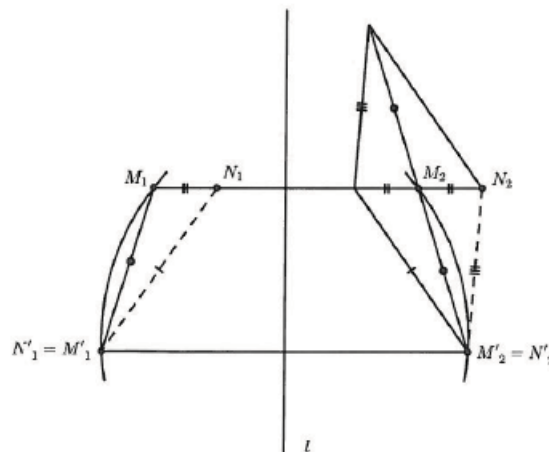


Figura 3.19: Simetrização (b)

Na figura temos $|M_1M_2| = |N_1N_2|$ e $|M'_1M'_2| = |N'_1N'_2|$. Por simetria, temos também $|M_1M'_1| = |M_2M'_2|$. Aplicando a desigualdade triangular, resulta que

$$2|M_2M'_2| \leq |N_1N'_1| + |N_2N'_2|$$

Fazendo M'_1 e M'_2 "muito próximos" de M_1 e M_2 , respetivamente, e tomando a soma do comprimento de todos esses segmentos, (**método de exaustão**) obtemos $L \geq L_l$.

4. Procedendo do mesmo modo relativamente ao domínio plano D_l e a curva C_l , tomando uma outra reta não paralela a l , vamos obter uma nova curva com um novo eixo de simetria. Se repetirmos recursivamente o processo, no limite, vamos obter uma curva com infinitos eixos de simetria, isto é uma circunferência com a mesma área da superfície original, mas com menor perímetro. Mais à frente mostraremos que isto é suficiente para concluir que, de entre todas as curvas com comprimento fixado, a circunferência é a que encerra maior área.

Partindo de uma curva C que encerra a área A e perímetro L . Aplicando sucessivamente o processo de simetrização em relação as diferentes retas $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_n$, obtemos curvas fechadas $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_n$, no limite vamos obter uma circunferência C_0 e todas as curvas Limitam a mesma área, enquanto o perímetro diminuirá progressivamente.

$$\begin{cases} A = A_1 = A_2 = \dots = A(C_0) \\ L \geq L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L(C_0) \end{cases}$$

Consideremos uma circunferência de perímetro L e área A_c , a área da circunferência de perímetro L é obtida da seguinte forma:

sabendo que

$$L = 2\pi R \quad (3.6)$$

$$A_c = \pi R^2 \quad (3.7)$$

isolando o raio em (3.6) vem

$$R = \frac{L}{2\pi}$$

substituindo em (3.7) temos

$$A_c = \frac{\pi L^2}{4\pi^2}$$

$$A_c = \frac{L^2}{4\pi}$$

$$\frac{L^2}{4\pi} \geq \frac{L_o^2}{4\pi} \Leftrightarrow A_c > A_0 = A$$

Assim a curva C limita uma área menor do que a circunferência com o mesmo perímetro L .

Logo de entre as curvas de perímetro L a circunferência é a que encerra maior área. Assim fica demonstrada a ideia partilhada pelo ancião da aldeia de "Njimba Silili" que a circunferência encerra maior área de entre as curvas de igual perímetro. De ressaltar que o enquadramento da ideia de perímetro fixo na construção do Onjango, tem a ver com a economia do material necessário para a construção do mesmo.

O método utilizado por J. Steiner na obtenção do resultado anteriormente apresentado, pode ser aplicado em outros problemas de contexto. Por exemplo, como obter área aproximada do território angolano por um processo de simetrização que compara o território angolano com polígonos com a mesma área e, no limite, com um círculo?

O mapa de Angola constitui a imagem bastante visualizada no seio dos alunos angolanos, entretanto a sua linha de fronteira lhes é muito familiar.



Figura 3.20: Mapa de Angola

Por se tratar de curvas fechadas, vamos obter a curva desejada sem olhar para a província de Cabinda.

Com um número relativamente baixo de iterações deste processo podemos encontrar um minorante e um majorante do raio relativamente próximos um do outro. Podemos trabalhar por exemplo 4 eixos de simetria correspondentes à Rosa dos Ventos: NS , EO , $NoSe$, $NeSo$, cujo processo é ilustrado nas imagens que se seguem.

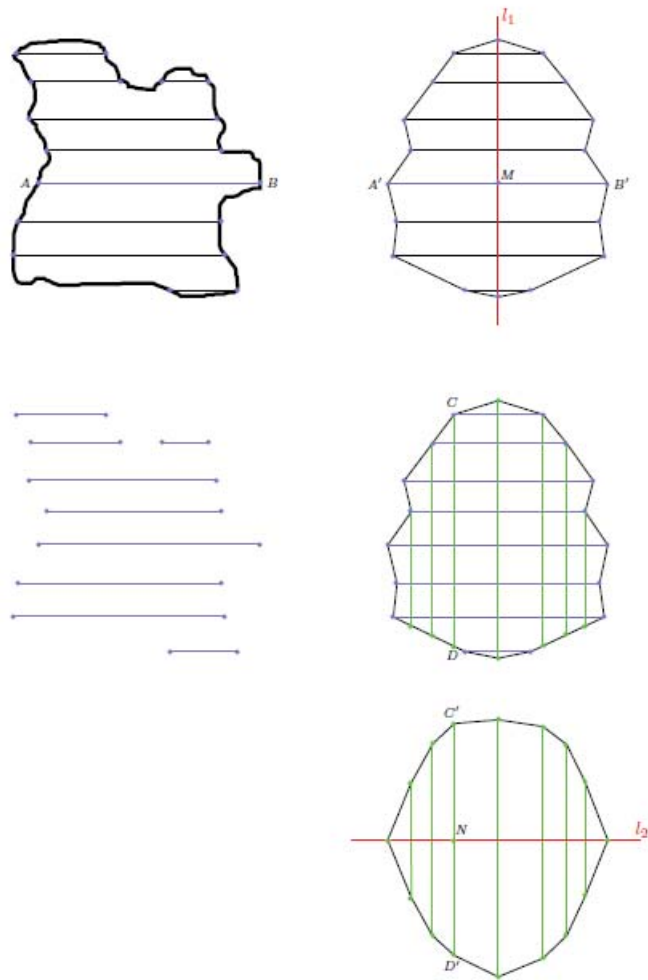


Figura 3.21: Simetrização (c)

Observação/sugestão:

Também o formato do telhado do Onjango pode servir de motivação e contextualização no estudo de superfícies. Em particular de superfícies cónicas. Por exemplo, a definição que se segue, dada por Boulo e Camargo ([9], p.320), pode constituir o ponto de partida para este estudo.

Definição 9. *Um subconjunto S de E^3 se diz uma superfície cónica se existir uma curva C e um ponto V não pertencente a C tais que S é a reunião das retas VQ , onde Q percorre C . C se chama diretriz de S , V vértice de S , cada reta VQ uma geratriz de S .*

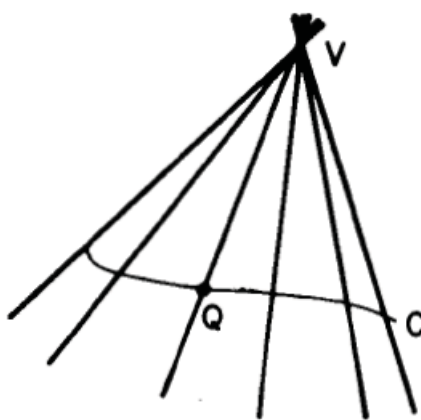


Figura 3.22: Cobertura do Onjango (c) ([9], p.320)

3.3 Sobre o enrolar e desenrolar de "lenços" no plano e no espaço

O tempo no terreno não permitiu explorar todas as potencialidades desta abordagem cultural. Por exemplo, será que os grafismos e padrões que observamos em panos de vestir podem ser também objeto de matematização consciente? Ou mesmo a forma como esses panos são usados e que visualizações dos seus motivos possibilitam? Que conteúdos de Geometria podem estar presentes nestes artefactos culturais? Podemos estudar novos conteúdos científicos motivados por estes possíveis objetos de mediação de uma aprendizagem?

No sentido de averiguar essa possibilidade, depois de regressado da experiência no terreno, foi escolhido um novo tema de estudo, desenvolvido num livro de publicação relativamente recente (2012), com um nome sugestivo e significativo neste âmbito - *Novos Horizontes em Geometria*[4]. Portanto, nesta secção, vamos analisar algumas experiências, através de equações e transformações geométricas bidimensionais, motivadas por duas questões importantes levantadas num estudo desenvolvido por

Apostol[4] sobre enrolar e desenrolar de curvas em superfícies cilíndricas. Tal resultado será posteriormente ilustrado no processo de enrolar e desenrolar de lenços.

- O que acontece à forma de uma curva desenhada na superfície de um cilindro quando desenrolamos o cilindro num plano?
- Quando desenhamos uma reta ou um segmento de reta num papel transparente ou num tecido qualquer e enrolamos em volta de cilindros de raios diferentes. Qual é a configuração da curva vista de diferentes direções?

Antes de começarmos a analisar, vamos considerar a seguinte definição:

Definição 10. *Um cilindro é toda superfície gerada pelo deslocamento de uma determinada linha reta ao longo de uma curva de forma a manter-se paralela a uma reta inicial. A curva chama-se a diretriz do cilindro e a reta em movimento chama-se a geratriz. A diretriz não é a única porque qualquer plano corta o cilindro numa curva plana que pode servir de diretriz. Quando o plano de corte é perpendicular às geratrizes diz-se que a curva diretriz é um perfil do cilindro.*

Agora comecemos por analisar inicialmente a situação imposta pela primeira questão.

Desenrolar de cilindros

Enrolou-se uma folha de papel de cozinha a uma vela cilíndrica, e cortou-se obliquamente com uma faca.

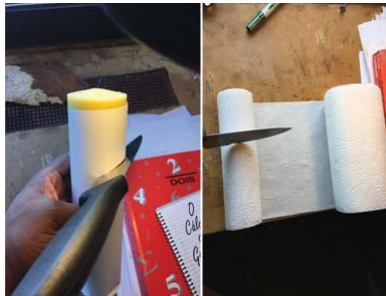


Figura 3.23: Corte oblíquo em uma vela cilíndrica

A secção oblíqua obtida é uma elipse.



Figura 3.24: Secção oblíqua obtida do corte

Vamos analisar a forma que a secção oblíqua toma quando é desenrolada no plano.

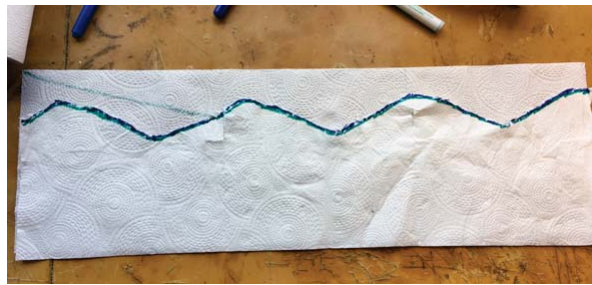


Figura 3.25: Secção oblíqua desenrolada no plano

Pelo que se observou, aparentemente a secção oblíqua se transforma numa curva sinusóide quando é desenrolada no plano.

O procedimento anterior, pode ser analisado como o corte de uma secção elíptica de um cilindro de raio r , usando um plano oblíquo com inclinação β , com $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Para um estudo mais elaborado, vamos analisar a metade do corte da fatia elíptica a partir de um setor circular, através da Figura (3.26).

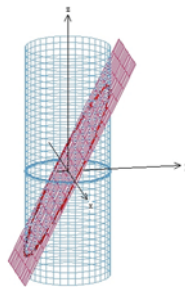


Figura 3.26: Intersecção da elipse com a cunha do cilindro (a)

Se fizermos um corte vertical por um plano paralelo ao eixo maior da elipse, como mostra a Figura (3.27) a intersecção com a cunha cilíndrica será um triângulo retângulo T com ângulo de base β .

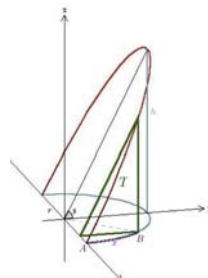


Figura 3.27: Intersecção da elipse com a cunha do cilindro (b), adaptada de [4]

A base do triângulo T , ilustrado na Figura (3.27) tem comprimento $r \sin \frac{x}{r}$ e altura $h \sin \frac{x}{r}$.

Nos passos que se seguem, mostraremos porque é que o comprimento da base de T é $r \sin \frac{x}{r}$ e a sua altura é $h \sin \frac{x}{r}$.

- Sobre a base de T temos:

Seja θ o ângulo que subtende o arco AB cujo comprimento é x , e y o comprimento da base de T e cateto oposto do triângulo retângulo inscrito no setor circular, buscando uma relação entre θ e x , sabendo que θ está para 2π e x está para $2\pi r$ temos:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{x}{2\pi r}$$

$$x = \theta r \Leftrightarrow$$

$$\theta = \frac{x}{r}$$

Analisando o triângulo inscrito no setor circular

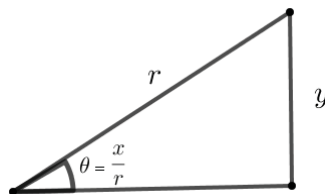


Figura 3.28: Triângulo inscrito no setor circular (a)

Temos:

$$\sin \frac{x}{r} = \frac{y}{r}$$

$$y = r \sin \frac{x}{r}$$

Segue-se que o comprimento da base de T é $r \sin \frac{x}{r}$.

- Sobre a medida do comprimento da altura de T , temos: seja t o comprimento da altura, com a base $r \sin \frac{x}{r}$. Como mostra a Figura abaixo.

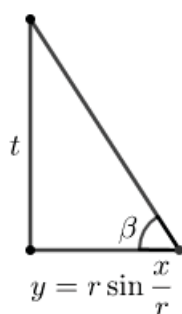


Figura 3.29: Triângulo inscrito no setor circular (b)

Na Figura (3.27) é possível verificar que T é semelhante ao triângulo com a altura $h > t$, pelo critério AA , logo os seus lados são proporcionais.

$$\frac{t}{h} = \frac{r \sin \frac{x}{r}}{r}$$

$$t = h \sin \frac{x}{r}$$

Então a altura deste triângulo é $h \sin \frac{x}{r}$, onde $h = r \tan \beta$, obtida com base no triângulo maior.

Se considerarmos a outra metade da cunha cilíndrica abaixo da base vai aparecer uma curva simétrica abaixo do eixo dos xx .

Ainda é possível verificar que quando desenrolamos a parede do cilindro num plano, a base semi-circular desenrola-se num segmento de reta que consideramos estar no eixo x , como mostra a Figura (3.30).

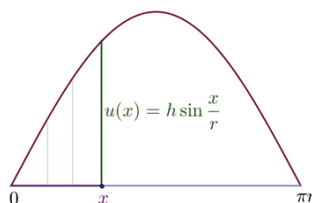


Figura 3.30: Curva na parede do cilindro desenrolada no eixo x , adaptada de [4]

O que quer dizer que a curva desenrolada é o gráfico de $u(x) = h \sin \frac{x}{r}$. Isto nos leva a concluir que quando desenrolamos cilindros, a função representada é a **função seno**.

Quanto à segunda questão, que inclui a visualização no espaço de uma reta desenhada no plano, apresentamos a demonstração do seguinte Teorema.

Teorema 7. *Num cilindro circular direito do raio r , seja C uma curva na parede do cilindro definida pelo perfil C_p de um cilindro de corte horizontal e seja C_u sua imagem desdobrada. Então, a equação do perfil $p(t, z) = 0$ para C_p e a equação de desdobragem $u(x, z) = 0$ para C_u estão relacionados por*

$$u(x, z) = p\left(r \sin \frac{x}{r}, z\right)$$

$$p(t, z) = u\left(r \operatorname{arcsin} \frac{t}{r}, z\right)$$

Demonstração:

Consideremos a interseção de dois cilindros, um dos quais é o principal e o outro o de corte, como mostra a Figura (3.31).

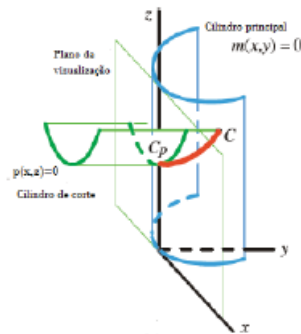


Figura 3.31: Interseção entre dois cilindros (a) [4]

Tenhamos em conta que o cilindro principal é um cilindro circular direito de raio r (ver Figura 3.31).

Seja C uma curva no cilindro principal e C_p o seu perfil horizontal que tangenciam o plano de visualização xz . Seja C_u a curva desdobrada, obtida pelo rolar do cilindro ao longo do plano de desdobragem. Um arco de comprimento circular $r\theta$, está desembrulhado num segmento de comprimento $x = r\theta$, como mostra a Figura (4.2)

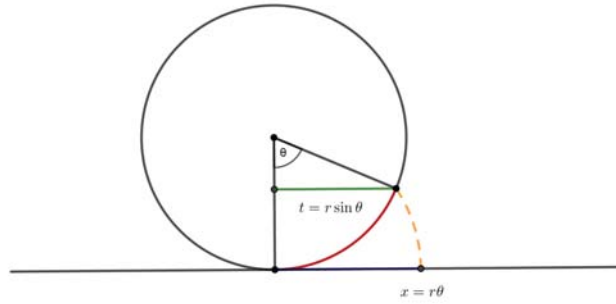


Figura 3.32: Arco do cilindro principal

Na Figura (4.2) é possível verificar que a projeção horizontal tem comprimento $t = r \sin \theta$, onde $\theta = \frac{x}{r}$ porque:

$$\frac{x}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow x = r\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{x}{r}$$

Imaginemos cada ponto P no perfil do cilindro principal descrito em termos de parâmetros novos t e $s(t)$, onde $s(t)$ é a função do comprimento do arco da porção do perfil que une P à origem do referencial, e t a projeção desse arco no eixo x . Ao desenrolar, esse cilindro imprime P num ponto do plano xz com coordenadas $(s(t), z)$, onde z satisfaz a equação de perfil $p(t, z) = 0$. Consequentemente, a equação de desdobragem é $u(x, z) = 0$, onde x e z estão relacionados com $x = s(t)$ e $p(t, z) = 0$.

Trabalhando a função do comprimento do arco $x = s(t)$, temos:

$$x = s(t) = r\theta \quad (3.8)$$

como $t = r \sin \theta$, vem:

$$\theta = \arcsin \frac{t}{r}$$

substituindo θ em (3.8), vem:

$$x = r \arcsin \frac{t}{r}$$

buscando a sua inversa $t = s^{-1}(x)$, temos:

$$\sin \arcsin \frac{t}{r} = \sin \frac{x}{r} \Leftrightarrow t = r \sin \frac{x}{r}$$

Para a curva C de interseção entre as duas superfícies, a equação de perfil $p(t, z) = 0$

de C_p e a equação de desdobragem $u(x, z) = 0$ de C_u estão relacionadas por

$$u(x, z) = p(s^{-1}(x), z)$$

$$p(t, z) = u(s(t), z)$$

onde $x = r \operatorname{arcsin} \frac{t}{r}$ e $t = r \sin \frac{x}{r}$. Temos então:

$$u(x, z) = p\left(r \sin \frac{x}{r}, z\right)$$

$$p(t, z) = u\left(r \operatorname{arcsin} \frac{t}{r}, z\right)$$

Quando C_p e C_u são descritas explicitamente por $z = p(t)$ e $z = u(x)$, as equações do Teorema ficam:

$$u(x) = p\left(r \sin \frac{x}{r}\right)$$

$$p(t) = u\left(r \operatorname{arcsin} \frac{t}{r}\right)$$

Se $r = 1$, então $\operatorname{arcsin} t = s(t)$, é o comprimento do arco circular cujo seno é t .

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: (função de perfil linear $p(t) = ct$).

Neste caso, o corte é feito por um plano que contém a reta $z = ct$, onde c é constante. Da Figura (3.30) encontramos que a função de desdobragem é $u(x) = cr \sin \frac{x}{r}$, cujo gráfico é uma curva sinusoidal com período $2\pi r$.

Se o plano de corte estiver inclinado com um ângulo β com um diâmetro horizontal do cilindro, então $c = \tan \beta$ e a função de desdobragem é $u(x) = h \sin \frac{x}{r}$, onde $h = r \tan \beta$, de acordo com o resultado obtido anteriormente, analisado na Figura (3.27).

A forma da curva de secção transversal C depende da direção a partir da qual ela é vista. Quando visto ao longo da borda do plano de corte, vemos o perfil C_p como um segmento de reta. Quando visto de qualquer outra direção, a secção transversal cortada por um plano é uma elipse (possivelmente degenerada).

Exemplo 2 (função de desdobragem linear $u(x) = cx$). Este exemplo explica o que acontece quando um segmento de reta é enrolado num cilindro de raio r , o qual responde a segunda questão colocada acima. A função de perfil correspondente obtida de (3.33) é

$$p(t) = cr \arcsin \frac{t}{r}$$

Porque as distâncias são preservadas quando o cilindro é desdobrado, um segmento de reta no cilindro desenrolado é o caminho mais curto. Por outro lado, um segmento de reta num cilindro circular, enrola-se num arco geodésico na superfície do cilindro e o perfil de um arco geodésico faz parte de uma curva de arco-seno.

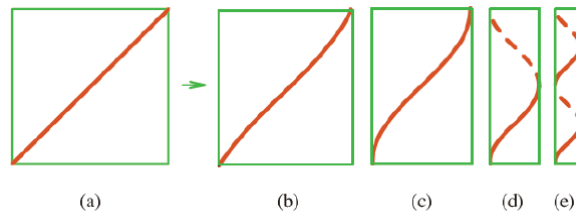


Figura 3.33: Segmento de reta enrolada num cilindro [4]

Figura (3.33): Um segmento de reta (a) envolve uma geodésica. (a) - (e) Perfis geodésicos (curvas arco-seno) em cilindros de raio decrescente. As curvas dobradas em (d) e (e) estão na metade traseira do cilindro.

A Figura 3.33a mostra a reta $u(x) = x$ no plano de desdobragem, e as Figuras 3.33b-e mostram o perfil do arco geodésico em cilindros de raios decrescentes. Mais uma vez, vemos curvas sinusoidais, mas são as inversas da função seno. A curva tracejada na Figura 6.6d indica a porção do arco geodésico que fica na metade traseira do cilindro.

As duas curvas repetidas na Figura 3.33d representam diferentes ramos da função arco-seno. Isso sugere uma atividade prática educacional simples que pode envolver os alunos do primeiro ano de Matemática da ESPB. Podemos usar uma caneta de feltro para desenharmos um segmento de reta numa folha transparente e enrolar a folha à volta de cilindros com vários raios, e vemos o perfil em várias direções e as ondas de seno mudar de forma conforme o raio do cilindro varia.

A figura que se segue mostra uma reta desenhada num papel de cozinha e em seguida enrolado numa vela cilíndrica.

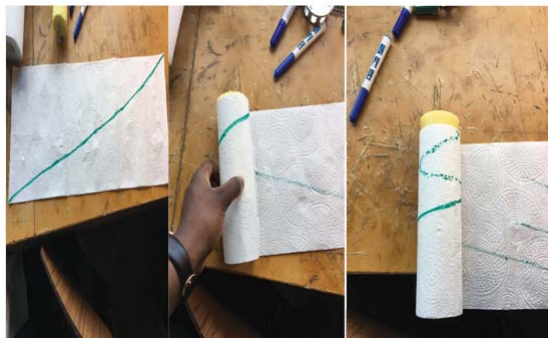


Figura 3.34: Segmento de reta enrolado numa vela cilíndrica

Por outro lado, uma prática cultural onde podemos visualizar o estudo anterior é nos motivos dos lenços usados pelas mulheres angolanas, conforme as imagens que se seguem.



Figura 3.35: Mulher angolana

Amarrar lenços na cabeça é uma das práticas mais comuns da mulher angolana em termos de indumentária. O estudo ligado à forma da curva que um segmento de reta, identificado num lenço, ou papel pode tomar quando enrolado numa superfície curva, pode ter lugar na forma como as mulheres angolanas, em particular do Cuito amarram os seus lenços. Por exemplo, o que é que acontece ao segmento \overline{CD} , desenhado no lenço da Figura (3.36) quando uma mulher o enrola sobre a sua cabeça?



Figura 3.36: Segmento de reta no lenço (a)

O segmento \overline{CD} vai se transformando em curvas que aparentemente descrevem uma espiral, contornando a forma da cabeça, que geralmente aparenta ter um perfil elíptico (ver Figura (3.37)).



Figura 3.37: Segmento de reta no lenço (b)

Em sentido geral, o autor deste trabalho considera que esse estudo sugere uma atividade motivacional e significativa no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, baseada no contexto do aluno. Neste sentido, deixa em aberto a elaboração de uma possível proposta pedagógica no âmbito do estudo de funções trigonométricas e suas inversas.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo apresenta-se uma breve caracterização histórica do município do Cuito, faz-se uma abordagem relativa a opção metodológica, instrumentos de recolha de dados, análise dos resultados bem como a caracterização da proposta pedagógica.

4.1 Breve caracterização histórica do município do Cuito

O Cuito é o município sede da Província do Bié, fundado em 1771, na época do Governador geral da província ultramarina de Angola, Dom Inocêncio de Sousa Coutinho Júnior. É uma evolução da povoação original que se chamava Amarante, fundada pelo padre Gonçalo de Silveira em 1771, depois passou para Belmonte, e mais tarde Silva Porto, em memória ao sertanejo portuense, pela contribuição na ocupação desta parcela do então reino Viye, pelos portugueses.

Em 31 de Agosto de 1925 com a criação do Distrito do Bié, a povoação foi elevada a categoria de vila. Sob proposta dos habitantes desta vila e através do diploma legislativo nº 740, de 31 de Agosto de 1935, a vila foi elevada a categoria de cidade. Este município divide-se em 4 comunas, tais como: Cuito, Cunje, Trumba, Chicala e três centros administrativos, nomeadamente: Kukema, Jimba Silili e Ekovongo. Ocupa uma área de 4.814 Km^2 e uma população estimada em 795.518 habitantes distribuídos em 21 regedorias, 84 Embalas, 56 bairros e 252 aldeias.

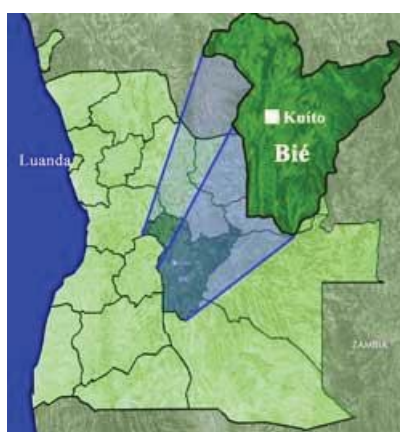


Figura 4.1: Mapa de Angola ilustrando o Cuito/Bié

Habitam neste município, maioritariamente os ovimbundu, mas também estão presentes os cokués, os Nganguelas com a sua variante Luimbi. A dança e a música são as manifestações culturais mais importantes e estão presentes em todas as festas,

nas Iohandas (lugar onde as meninas pisam o milho para converter em fuba), nos atos religiosos, nas curas, nos óbitos, etc. A agricultura é a principal atividade para a subsistência, para além das artes como: a olaria, a cestaria e a escultura. As festas mais importantes são: uvala (casamento), evamba (circuncisão), onjuluka, eyele, ocisunji. No que diz respeito ao traje, o vestuário mais apreciado para as meninas depois da casca da árvore, (ocimuanji), passou a ser o pano pintado amarrado com um sinto de pano denominado olimbueta e um kimoni de pintado. Isto para a classe nobre. Os homens, usavam calções de caqui, camisa ou camisola com quedes praia ou meias brancas.

4.2 Opção metodológica

Esta investigação foi desenvolvida na perspetiva de duas abordagens, nomeadamente: a **Etnomatemática** focada em artefactos culturais, bem como em atividades tradicionais que escondem determinados conhecimentos matemáticos do município do Cuito, e a **Educação Matemática Realística** dirigida para a vinculação do aprendizado da Matemática com o contexto realístico do aluno, no sentido de tornar a Matemática relevante para a sociedade e ser de valor humano, de acordo com Freudenthal [20].

A intenção prende-se em extrair ideias matemáticas dos artefactos culturais, atividades tradicionais, assim como o ambiente do aluno para auferir uma proposta pedagógica de intervenção na cadeira de Geometria Analítica, concretamente no estudo das curvas cónicas.

Para tal, escolheu-se o enfoque qualitativo, privilegiando o emprego de métodos qualitativos de acordo com Cohen, Manion e Morrison ([14], citados por Dias[17], p.84). Constituem a amostra para este estudo 3 professores da cadeira em questão, sendo dois do período regular e um do período pós-laboral do curso de Matemática do 1º ano da Escola Superior Pedagógica do Bié, e 16 alunos do ano e curso em causa com pelo menos três origens distintas no que diz respeito a instituição/região onde realizaram a sua formação de nível secundário. A amostragem é orientada e não probabilística.

Merriam ([32]) citada por Maducise ([31], p.2014) identifica a amostragem orientada como sendo a estratégia adequada para o desenho de estudos de caso (estudo etnomatemático no contexto tradicional escolhido). Nesta conformidade uma aldeia foi escolhida que é o centro administrativo do Njimba Silili, por se acreditar que ali algum conhecimento tradicional tem sido preservado e é próximo da comuna sede onde se encontra a Escola Superior Pedagógica do Bié.

4.3 Instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados foi feita na forma documental, por entrevista e com observação participante e não participante. As fontes de dados incluíram fotografias, suportes escritos e áudio de atividades culturais, observações de aula, lecionadas pelos professores da amostra, uma entrevista aos alunos para registrar a suas experiências de aprendizagem de conteúdo de Geometria Analítica, um questionário de diagnóstico e ao mesmo tempo recolha de dados etnográficos/etnomatemáticos/ etnogeométricos sobre as suas culturas de origem, entrevistas aos professores. Os resultados derivados do questionário de diagnóstico reforçaram a decisão do investigador na implementação de um roteiro de atividades (dinâmica) proposto por Ana Kaleff[26], cuja intenção era estabelecer uma comparação entre o modelo de ensino habitual no estudo das cónicas e uma nova forma de ensino por dinâmicas que possibilitassem aos alunos análise, discussões, conjeturas e formações de ideias para a apropriação dos conceitos.

"(...) As múltiplas fontes de dados fornecem linhas convergentes de prova que credibilizam a proposta" (Marriam[33], citados por Maducice[31], p.60).

4.4 Apresentação de dados e discussão

4.4.1 Análise dos programas de Geometria Analítica I e II do primeiro ano do curso de Matemática da Escola em questão

Para a análise do programa se teve em conta a sua estrutura, a qual de maneira geral segue a seguinte sequência: introdução, carga horária, objetivos, sistema de conteúdos, bibliografia. Nesta perspectiva, foram analisados cada um dos itens anteriormente referidos, tendo-se constatado o seguinte: com relação a estrutura, identificaram-se algumas inconsistências: falta da fundamentação da disciplina; falta de correspondência com os conteúdos antecedentes; não se apresentam as sugestões metodológicas e avaliação; não se apresenta o sistema de habilidades a desenvolver; os conteúdos programados não estabelecem vínculo com o contexto do aluno; não se enfocam aspetos didáticos e procedimentos a seguir para o desenvolvimento das competências através da auto-aprendizagem; as formas de organização dos conteúdos seguem o modelo de programas definido por outros países, tal como Cuba, por isso os "conteúdos não fazem face aos problemas matemáticos resultantes das prioridades nacionais" (Gerdes[22]). Com efeito, este documento não parece ser suficientemente orientador para o professor.

4.4.2 Análise da entrevista dos professores, dos alunos e do questionário de diagnóstico.

As tabelas que se seguem apresentam os resultados obtidos através da aplicação dos instrumentos de recolha acima mencionados, as quais obedecem a seguinte ordem:

1. Tabela da entrevista dos professores participantes;
2. Tabela dos resultados derivados do questionário de diagnóstico;
3. Tabela da entrevista dos alunos sobre os seus desempenhos no estudo das cónicas;
4. Tabela da entrevista dos alunos sobre a análise dos seus contextos.

De realçar que para tabela que apresenta os resultados derivados do questionário do diagnóstico aos alunos, relativamente ao assunto em estudo, o autor deste trabalho apresenta as categorias de análise com valores codificados da seguinte maneira: atribui-se o valor (1) à variável com a resposta correta, (0) para a resposta incorreta e (–) para a resposta em branco, por outro lado utilizou-se o termo A_n para identificar cada um dos 16 alunos selecionados, cujos valores de n vão de 1 – 16.

Categorias	Professor A	Professor B	Professor C
Importância da incorporação de práticas culturais pertencentes ao ambiente dos alunos nas aulas de Geometria Analítica	... Tem importância pois permite uma melhor interpretação dos conceitos que se trabalham em sala de aulas que algumas vezes apresentam-se como abstratos e de difícil compreensão.	...Considero um apeto motivador, uma vez que permite aos alunos terem uma visão cultural do conhecimento geométrico, valorizando cada vez mais a cultura nacional em conformidade com a função social da escola...	...É importante visto que alguns alunos não conseguem estabelecer uma relação entre a Geometria e o mundo ao seu redor. Com este tipo de ensino, estrutura-se a sensação de um conhecimento intuitivo que permite vincular com o seu contexto.
Importância das habilidades para a identificação de objetos geométricos dentro do contexto do aluno	... É importante porque permite criar com maior facilidade o conceito, uma vez que já domina a representação geométrica do mesmo	A visualização permite ao aluno reproduzir a imagem no plano mental e a compreensão de todos os conceitos, teoremas, definições, axiomas, etc.	...Tem importância porque o seu objetivo está ligado ao sentido de localização, reconhecimento de figuras manipuláveis de forma geométricas, representação espacial etc.
Consequências da transmissão de conteúdos distanciados da realidade dos alunos	- Baixos resultados nas avaliações; - demora na fixação dos conteúdos; - perda do gosto pela disciplina por causa do seu pouco significado prático	...Tendência à uma aprendizagem memorística, com uma visão abstrata do conhecimento, totalmente dissociada da realidade objetiva; pouco interesse dos alunos pela aprendizagem dos conteúdos.	...O aluno tem dificuldades de compreender a realidade em que se encontra inserido e com isso não aprende a conhecer, não aprende a fazer, não aprende a ser e nem aprende a viver juntos com os outros.
Criação de situações que levam os alunos a exercitarem as suas capacidades de pensar e buscar soluções de problemas relacionados-os com as suas vivências	- Orientando atividades que tenham relação com o cotidiano; - vinculando as explicações com situações do seu contexto.	...Utilizar formas de organização das aulas como: seminários, aulas de campo e outras atividades que favoreçam a reflexão crítica e holística dos problemas, como visitar locais onde se podem visualizar determinados objetos geométricos.	Fazer pesquisas de campo, bem como incorporar práticas que ajudem a despertar o interesse dos alunos
Dificuldades relacionadas ao ensino das cônicas	- Falta de meios de ensino para visualizar os conteúdos; - falta de interesse que prejudica a concentração	Dificuldades na modelação de objetos manipuláveis que favoreçam a visualização de objetos geométricos no plano bi e tridimensional	Debilidades ligadas às classes anteriores, pouco domínio sobre a geometria no plano, e dificuldades ligadas a origem das cônicas

Tabela 4.1: Tabela da entrevista dos professores participantes

Variáveis	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
Cálculo da medida do comprimento da corda que liga dois edifícios	1	1	1	0	0	0	1	0	0	-	0	1	0	-	0	1
Cálculo do comprimento de uma gan-gorra	0	0	0	0	0	-	0	0	0	-	0	-	0	-	0	0
Conceito de cônica	0	0	0	1	0	0	-	0	0	0	0	-	-	0	0	0
Identificação do tipo de cónicas a partir das suas fórmulas	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	-	-	1	0	-
Identificação da distância entre dois pontos a partir das fórmulas das cónicas	0	0	0	0	0	-	-	-	0	0	0	-	0	0	-	0
Identificação do tipo de cónica tendo em conta o valor da ex-centricidade	1	0	0	0	0	-	-	-	0	0	0	-	0	0	0	-
Classificação analítica das cónicas a partir da equação geral, tendo em conta o sinal do binómio discriminante	0	-	0	0	0	-	-	-	0	0	1	-	0	1	0	-

Tabela 4.2: Tabela dos resultados derivados do questionário de diagnóstico

categorias	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
Desempenho na cadeira GA	Normal	Normal	mal	muito bom	esta fraco	Normal	positiva	Mal	é normal	Normal	Normal	Normal	regular	Muito bom	Razoável	Normal
Aprendizagem no estudo das cónicas	Normal	Muito bom	Normal	Bom	Bom	Normal	Positiva	Regular	Boa	Normal	Excelente	Positivo	Normal	Mal	Normal	Normal
Vínculo dos conteúdos de GA com o seu contexto	no estudo da circunferência, relação com o disco	parabo loide com uma antena parabólica	Nem sempre	Sim	Não	Não se faz	Nem sempre	Tem-se feito	Pela posição das casas	Com a estrutura das casas	Não	Antena parabólica	Compa ro com o con- texto	Não se faz	Normal	Normal
Gostos pela disciplina	Sim	Sim	Não, sinto muitas dificuldades	Sim	Um pouco	Não gosto	Sim gosto	Não gosto	Nem tanto	Sim	Um pouco	Gosto das aulas	Não gosto	Sim gosto	Gosto	Gosto
Percepção da relação da GA com outras áreas	não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Sim	Com muitas dificuldades	Nem sempre	Sim	Sim	Não	Não	Nem tanto	Não	Tenho dificuldades

Tabela 4.3: Tabela da entrevista dos alunos sobre análise das suas relações com o estudo das cónicas

Categorias	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
Identificação cultural/dialeto	É umbundu	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Kimbu do	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Kimbu do	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Umbundu	Umbundu
Residência em zona urbana/rural	Vivo numa zona rural	vivo em zona urbana	Zona suburbana	Rural	Rural	Urbana	Urbana	Urbana	Urbana	Urbana	Urbana	Zona urbana	Zona urbana	Zona urbana	Urbana	Urbana
tipo de habitação/decoração/localização	Algumas casas são de capim e outras de adobe	Casas de adobe e blocos	Casas de bloco pintadas com variadas cores	Casas de tijolo, bloco e adobe	Casas de adobe	Casa de bloco	Casas de adobe e bloco	Casas de bloco	Casas de adobe e bloco	Casa de tijolo, bloco e madeira	casas de bloco	tijolo adobe e bloco	casas de adobe	casas diversificadas	Casas de adobe, tijolo e bloco	Tijolo e adobe
Produtos artesanais fabricados na comunidade	Esteiras, balaios e batusques	Balaíos, amofariz e esteira	Bandejas, batusque, balaios	Panela de barro, pe-neira	Pilau, amofariz	Nenhum	Não há esses produtos	Pilau, almo-fariz e pe-neira	Portas de madeira	cabaça	Cesto, esteira e balaios	Panela de barro e mo-ringue	Portas, cama e mesas	Pulseira de missan-gas, balais, batu-que	Panela de barro e cabaça	Nenhum
Locais onde são feitas trocas comerciais	Em mercados e em lugares combinados	Mercados, praças, lojas e supermercados	Mercados, lojas e zungas	Praças, lojas e zungas	Mercados	Mercados	Praças, lojas e zungas	Mercado do Chis-sin do	Mercado e praças	Mercado do tchis-sin do	Mercados paralelos	Mercado	Praças e lojas	Cantinas e mercado	Praças	Mercado

Tipo de culto e local	Culto cristão numa igreja de adobe	Cristão	Cristão	Cristão	Nenhum	Cristão	Cristão, zona urbana	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	
Objetos do local de culto	Púlpito de adobe	Cadeiras, altar, aparelhos de som	Cadeiras, Púlpito, cadeiras, instrumentos musicais	Viola, batoque e piano	Aparelhos musicais	Púlpito, aparelhos de som	Cadeiras, púlpito, aparelhos	Cristão	Cristão	Cristão	Nenhum	Cadeiras e instrumentos de som	Aparelhos de som	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão	Cristão
Festas celebradas na comunidade	Festas da chuva, páscoa e natal	Aniversário, casamentos, Farras	Festas comuns	Casamento, feira e carnaval	Otchin gongo, festas comuns	Casamento, circuncisão	Festas comuns	Festas comuns	Carnaval e casamento	Festas comuns	Festas comuns	Festas comuns	Festas comuns	Festas comuns	Vários tipos	Feira e carnaval	Aniversário	
Rituais associados a estas festas	Danças com vin-ganji (pa-lhaço) mata-se bois...	Danças comuns	Rituais tradicionais	Danças tradicionais	Cantar a meia noite	Alambamento	Amar rar pa-nos e lenços	Alambamento	Tradições	Alambamento	Nenhum	Nenhum	Danças tradicionais	Alambamento	Tradição familiar	Rituais do cuito	Danças	

Tipos de trajes/bijuterias	Trajes feitos com bananaeira	Roupas normais	Trajes de panos com missangas	Trajes de panos tradicionais e missangas	Vestidos e trajes africanos	Depende do tipo de festa	Trajes de pano	Samaca	Panos típicos da terra	Tradicional	Trajes africanos	Trajes populares	Quimo fino, fitas de tecido	Trajes de pano samacaca	factos e vestidos
Tipos de músicas para rituais	Músicas tradicionais	Semba, kuku duro e louvores	Músicas normais	Nakawete, Sons do batuque, tambores	Sungur ra de batuque	Louvores	Músicas normais, guitarras, piano	Louvores e música tradicional	Músicas tradicionais	Músicas antigas	Vários tipos de som	Músicas variadas	Louvores	Músicas tradicionais com apto	Música semba
Outras culturais	-	-	Desporto	-	-	-	Não	Contos de estórias	Transmissão de valores	Nenhuma	Danças de sawoia	Convívio	Nenhum	Nenhum	Nenhum

Tabela 4.4: Tabela da entrevista dos alunos sobre a análise dos seus contextos

No que diz respeito a entrevista feita aos professores, (ver anexo 2) cujos dados constam na tabela (4.1), observou-se que as respostas dadas a cada uma das questões colocadas evidenciam os seguintes reconhecimentos:

- A Matemática faz parte da cultura do aluno e portanto deve ser um aprendizado em contexto, situado do particular ao universal;
- as habilidades para a identificação de objetos geométricos dentro do contexto do aluno permitem a formação de conceitos geométricos, criando maior envolvimento dos alunos na aula;
- para que um conhecimento seja utilizável o aluno deve conhecer a sua utilidade e ser capaz de aplicá-lo em sua vivência;
- os alunos têm dificuldades relacionadas com a interpretação de conceitos das cónicas; visualização das mesmas no plano; falta de meios que possibilitam a interpretação correta das cónicas como lugar geométrico.

De realçar que o questionário do diagnóstico cujos resultados são apresentados na tabela 4.2 foi elaborado com o objetivo de diagnosticar o grau de dificuldade relativamente ao estudo das cónicas nos alunos selecionados para a amostra. Cada uma das questões foi elaborada com um propósito. As duas primeiras questões (ver anexo 4) estão relacionadas com o cálculo da distância entre dois pontos usando o teorema de Pitágoras e têm como objetivo perceber se os alunos conseguem aplicar este conceito fundamental em contextos reais. Trata-se de um ponto de partida essencial para o estudo das cónicas. Reproduz-se abaixo a resolução feita por uma das alunas da amostra.

- Em uma atividade de resgate um policial de intervenção rápida pretende atravessar com uma corda do terraço do prédio gabiconta para o teto do lado frontal do pavilhão desportivo do Sporting clube do Bié, como mostra a figura abaixo.

- Qual é a medida do comprimento da corda que liga os dois edifícios?



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= B - A \\ &= 15m - 25m \\ &= -10m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= A - B \\ &= 25m - 10m \\ &= 15m \end{aligned}$$

Figura 4.2: Determinação da distância entre dois pontos num exercício de contexto

• O Pedro e o João são duas crianças do Centro infantil Kilamba do Cuito e estão a andar de gangorra, como indica a figura:
 - A altura máxima a que pode subir cada um dos amigos é de 60cm. Qual é o comprimento da gangorra? $h_{max} = 60 \text{ cm}$

calculos auxiliares
 $h = 60 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $c^2 = (1,8 \text{ m})^2 + (60 \text{ m})^2$
 $c^2 = 1 \text{ m}^2$
 $c = 1 \text{ m}$

Figura 4.3: Determinação da distância horizontal, medida ao nível do chão entre os pontos de apoio dos bancos da gangorra

Os resultados revelam alguma incapacidade dos alunos na resolução de problemas que fogem do padrão normal utilizado em sala de aulas, isto porque os alunos têm conhecimento sobre distância entre dois pontos e sobre o teorema de Pitágoras, mas os questionários mostram que tais conhecimentos foram adquiridos de uma forma isolada, "divorciada de suas experiências" (Freudenthal, citado por Ferreira e Burriascos[19]), conseqüentemente têm dificuldades na aplicação em situações reais.

Por outro lado, a 3ª, 4ª, 6ª e 7ª pergunta, (ver anexo 4) têm o propósito de diagnosticar o conhecimento da definição das cônicas, sua identificação a partir de equações, a partir do valor da excentricidade ou a partir do binómio discriminante. Algumas dificuldades na resolução são ilustradas nas imagens que se seguem.

- O que são cónicas?
As cónicas são curvas geradas ou encontradas, na intersecção de um plano que atravessa um cone.
- Identifique o tipo de cónica a partir das fórmulas abaixo representadas:
 - $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow$ *Elipse com excentricidade igual a 1.*
 - $\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ *Elipse*
 - $\frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ *hiperbola.*
 - $(y-h)^2 = 4p(x-k)^2 \Rightarrow$

Figura 4.4: Conceito de cónicas e sua identificação

- Identifique o tipo de cónica tendo em conta o valor da excentricidade.
 - Excentricidade nula: \Rightarrow
 - Excentricidade igual a 1: \Rightarrow *Elipse.*
 - Excentricidade menor que 1: \Rightarrow *Parábola virada pra baixo*
 - Excentricidade maior que 1: \Rightarrow *Parábola virada pra cima.*
- Classifique de forma analítica, tendo em conta o valor do binómio discriminante, o tipo de cada uma das cónicas a partir da equação do segundo grau com duas variáveis, do tipo

$$\underline{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$-B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ *Jem uma solução.*
 $-B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ *Jem duas soluções*
 $-B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ *~~Elipse~~. Não tem solução*

Figura 4.5: Identificação das cónicas

As respostas dadas por esta aluna revelam dificuldades comuns entre os vários alunos da amostra (ver tabela 4.2) no que diz respeito à identificação de uma cónica, quer seja a partir do valor da excentricidade, quer seja a partir do sinal do binómio discriminante. Por exemplo, esta aluna apresenta uma linha de pensamento relacionada com a determinação das raízes de uma equação do segundo grau numa variável.

Por outro lado, no que concerne às relações dos alunos com a aprendizagem da Geometria Analítica, a tabela (4.3) mostra que a maior parte considera razoável o seu desempenho nesta cadeira. Quando se trata do estudo das cônicas, alguns chegam a perceber, mas as dificuldades se manifestam no momento de vincular tais conhecimentos com o contexto.

Quanto a tabela 4.4 que apresenta os resultados da análise do contexto, verifica-se que dos alunos participantes da amostra são maioritariamente umbundu, e portanto os seus costumes estão de acordo com o descrito na breve caracterização histórica do município do Cuito.

4.4.3 Análise da dinâmica aplicada aos alunos

A dinâmica que se segue é uma atividade que se enquadra no modelo proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira ([39],p.67), a qual se apresenta em três fases:

- Introdução da atividade: esta fase foi marcada por uma proposta feita oralmente pelo professor.
- Realização das atividades: foi realizada em pequenos grupos de 4 alunos.
- Discussão das atividades: nesta fase os alunos relataram os resultados provenientes das suas atividades com vista a formação de uma linha lógica do pensamento relativo ao assunto em estudo.

A linha de pensamento desta dinâmica está também enquadrada na perspectiva de Educação Matemática Realística de Van Den Heuvel-Panhuizen [47], a qual afirma que o aluno deve "fazer matemática" partindo de fenómenos e, ao lidar com eles, desenvolver ferramentas matemáticas necessárias para esse lidar.

Dinâmica

A dinâmica que se segue foi elaborada apoiando-se em alguns roteiros de atividades de Ana Kaleff [26], elaboradas no laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (Brasil).

Objetivo:

Desenvolver nos alunos habilidades de visualização, identificação e classificação das cónicas, com vista a prepará-los para um estudo mais consciente dessas curvas tanto do ponto de vista da Geometria Sintética como da Geometria Analítica.

Metodologia:

Dividiu-se o conjunto de alunos selecionados em 4 grupos, 3 dos quais tiveram um cone para cada um e o quarto teve dois cones de esferovite e todos grupos tiveram em sua posse uma faca, uma tesoura, uma folha de cartolina, pionés e um pedaço de corda.

Com o material em posse, os alunos executaram as seguintes atividades:

- Grupo $n^{\circ}1$ fez um corte ao meio do cone paralelamente a sua respetiva base;



Figura 4.6: Grupo 1

- Grupo $n^{\circ}2$ fez um corte ao meio do cone de forma oblíqua a sua base, não paralelo a uma das suas geratrizes;



Figura 4.7: Grupo 2

- Grupo $n^{\circ}3$ fez um corte ao cone de forma paralela a uma das suas geratrizes;



Figura 4.8: Grupo 3

- Grupo $n^{\circ}4$ uniu os dois cones pelos vértices e fez um corte paralelo ao seu eixo.



Figura 4.9: Grupo 4

Terminada a execução desta atividade, cada grupo contornou com uma tinta da caneta hidrocolor a sua secção plana de cada pedaço do cone originado de um corte. Feito isto cada grupo teve as seguintes atividades, com vista a identificação de cada curva cónica:

Grupo 1

Material:

- Folha de papel, folha de cartolina, um pedaço de corda, dois pioneses, um lápis e conjuntos de cortes do cone.

- Coloque uma folha de papel em branco sobre a folha de cartolina para servir de apoio, fixe um piones mais ou menos no centro da folha e chama este ponto C .
- No piones prenda uma das pontas de um pedaço de corda de forma que quando o esticar, a outra ponta não saia da folha;
- Amarre o lápis na outra ponta da corda e desloque-o sobre o papel partindo de um ponto e retornando até ele, de modo a manter a corda bem esticada ao traçar uma curva;

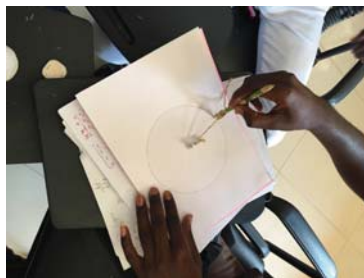


Figura 4.10: Grupo 1 (a)

- Troque a corda que o grupo utilizou por um pedaço menor e repita os itens anteriores;
- O grupo responderá as seguintes questões:
 - Qual é a forma dessa última curva?
 - Esta é parecida com a anterior;
 - Em que essas curvas são parecidas e em que são diferentes?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem a forma parecida com a curva que o grupo desenhou?
- Pegue a peça correspondente do corte do cone e molhe a parte do corte com tinta de carimbo e carimbe-a sobre uma folha de papel;

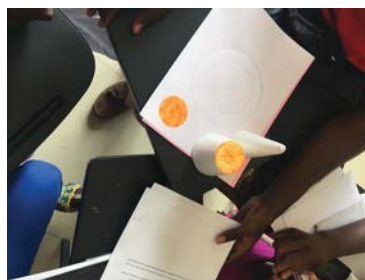


Figura 4.11: Grupo 1 (b)

- Em seguida o grupo respondeu a seguinte questão:
 - A curva de contorno da figura carimbada é parecida com a que o grupo desenhou anteriormente?

Na discussão o professor ajudou o grupo a compreender que as curvas obtidas são representações de uma circunferência onde:

- O ponto onde foi fixado o piones é chamado centro da circunferência e o tamanho da corda é o tamanho do raio.

Na sequência da atividade o professor orientou o grupo para a formação dos dois conceitos:



Figura 4.12: Grupo 1 (c)

- Do corte do cone veio a ideia de que a curva da circunferência é resultante da interseção de um cone circular reto com um plano paralelo a sua base;
- do desenho, veio a ideia de que a circunferência é o lugar geométrico onde todos os pontos estão à mesma distância de um ponto fixo chamado centro.

Percebido o conceito da circunferência nas duas perspectivas o professor colocou a seguinte questão:

- Conhecem alguns instrumentos e artefactos culturais que fazem parte do vosso contexto sócio-cultural que possibilita a visualização desta curva? Se sim descreva-os.

Grupo 2

Material:

- Folha de papel, folha de cartolina, um pedaço de corda, dois pioneses, um lápis e conjuntos de cortes do cone.

- Tome um pedaço de corda, coloque uma folha de papel em branco na folha de cartolina de apoio, fixe dois pioneses de forma que a distância entre eles seja um pouco menor que o comprimento da corda e prenda-a usando os pioneses. Coloque um lápis no laço da corda e desloque-o partindo de um ponto e retornando até ele, de modo a manter a corda bem esticada sobre o papel.



Figura 4.13: Grupo 2 (a)

- O grupo observou a curva desenhada depois respondeu as seguintes questões:
 - Já viu a forma desta curva antes?
 - O grupo sabe qual é o seu nome?
- Troque o pedaço de corda por um menor e repita o mesmo procedimento;
- O grupo respondeu a seguinte questão:
 - Qual curva foi formada?
 - Esta curva é parecida com a anterior?
 - Em que são parecidas e em que são diferentes?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem a forma parecida com essa curva?
- O grupo pegou a peça correspondente ao corte do cone, molhou com tinta de caneta hidrocolor e carimbou-a sobre a folha de papel. depois respondeu a seguinte questão:

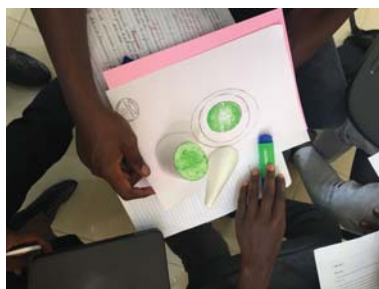


Figura 4.14: Grupo 2 (b)

- A forma da curva de contorno da figura carimbada é parecida com as curvas que o grupo desenhou?

A partir da discussão o grupo soube que as curvas desenhadas são representações de uma elipse e os pontos onde foram fixados os pioneses são chamados de focos da elipse.

Na sequência o professor ajudou os alunos a formarem o conceito da elipse nas duas vertentes:



Figura 4.15: Grupo 2 (c)

- Do corte do cone vem a ideia de que a elipse é a curva que resulta da interseção de um cone circular reto com plano oblíquo à sua base, não paralelo a uma geratriz;
- do desenho vem a ideia de que a elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma da distância aos focos é constante.

Em seguida o professor ajudou os alunos a compreender através das atividades por eles executadas que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é igual à medida do comprimento da corda.

Entendido o conceito da elipse nas duas perspectivas os alunos foram orientadas à responder a seguinte questão:

- Conhecem alguns artefactos culturais ou objetos que fazem parte do vosso contexto que permite a visualização desta curva? Refira alguns e explique como podemos interpretá-los matematicamente.

Grupo 3

Nota: A atividade prevista para o estudo da parábola, segundo [26] foi de difícil implementação por falta de material adequado. Em alternativa elaborou-se a seguinte tarefa com enquadramento de Geometria Analítica.

Material:

- Folha de cartolina, fita adesiva, um esquadro, um compasso e um conjunto de corte do cone.

- Coloque uma folha em branco na cartolina de apoio;
- Com o lápis, trace uma reta horizontal e chame-a de d marque um ponto não pertencente de reta de d e chame-o de F .
- Traça-se uma reta perpendicular a reta d que passa pelo ponto F e chame D ao ponto de interseção;
- Traçam-se as retas r_1 , r_2 e r_3 paralelas à reta d ;

Obs: o professor instruiu de acordo com o desenho do aluno sobre a localização das retas. Porque têm que ser todas no lado da diretriz que contém F

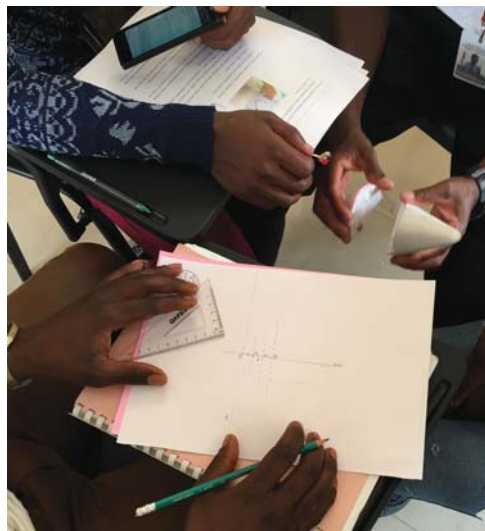


Figura 4.16: Grupo 3 (a)

- Sejam os pontos A_1 , A_2 e A_3 pontos de interseção das retas r_1 , r_2 e r_3 com a reta perpendicular à reta d que passa pelo ponto F ;
- Com o centro em F e raio A_1D traça-se com um compasso o arco de circunferência que interceta r_1 nos pontos P_1 e P'_1 . Na fase da instrução o professor fez as seguintes questões: o que é que estes pontos têm em comum?

(esperando-se que respondam que estão à mesma distância de F). Há mais pontos na representação à mesma distância de P_1 e P'_1 ? (Esperando-se que respondam as projeções sobre a reta d), **obs: Deu-se tempo aos alunos para a pesquisa, experimentação e reflexão. As mesmas questões são análogas aos pontos subsequentes;**

- Com o centro em F e raio A_2D traça-se o arco de circunferência que interceta r_1 nos pontos P_2 e P'_2 ;
- Com o centro em F e raio A_3D traça-se o arco de circunferência que interceta r_1 nos pontos P_3 e P'_3 ;
- Continuando a traçar outras retas paralelas a d , conclui-se que podem obter-se vários pontos pertencentes a uma mesma curva. O professor levou os alunos a pensar sobre a configuração desta curva;



Figura 4.17: Grupo 3 (b)

- Depois disso o grupo respondeu as seguintes questões:
 - O grupo já viu uma curva geométrica como esta?
 - O grupo sabe o nome dela?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem uma forma parecida com esta?
 - Pegue a peça que corresponde ao corte do cone, molhe com tinta de caneta hidrocolor e carimbe-a sobre a folha de papel. A forma do contorno curvo da figura carimbada é parecida com a curva que o grupo desenhou?

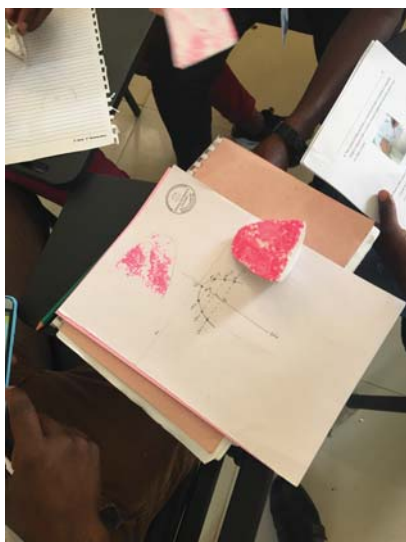


Figura 4.18: Grupo 3 (c)

Na discussão o professor ajudou os alunos a compreender que as curvas obtidas nas duas atividades são representações de uma parábola, e na curva obtida a partir do desenho, a reta d é a diretriz e o ponto F o foco da parábola.

E na formação do conceito nas duas vertentes, o grupo entendeu que:



Figura 4.19: Grupo 3 (d)

- Do corte vem: a parábola é a curva que resulta da interseção de um cone com um plano paralelo a uma das suas geratrizes;
- do desenho e do trabalho de experimentação e de identificação de propriedades comuns (equidistâncias) aos vários pontos que vão sendo marcados sob orientação do professor, o grupo entendeu que a parábola é o lugar geométrico onde todos os pontos se encontram a igual distância de um ponto fixo chamado foco e de uma reta chamada diretriz.

Em seguida o grupo respondeu a seguinte questão:

Conhecem alguns artefactos culturais e objetos que fazem parte da vossa realidade que possibilita a visualização desta curva? Descrevam alguns, explicando como podemos interpretá-los matematicamente.

Grupo 4

Obs: Para a atividade deste grupo, foi preciso uma tira de papel de cartolina com alguma espessura para desenhar a cônica, obtida pelo seguinte procedimento: recortaram-se duas tiras de papel de cartolina de tamanho $10\text{cm} \times 3\text{cm}$ e colou-se uma por cima da outra. Com um furador fez-se um furo numa das extremidades da tira.

Material:

- Folha de papel, folha de cartolina, furador, conjunto de cortes de cone, pedaço de corda.

- Coloque uma folha de papel em branco na folha de cartolina de apoio;
- Trace duas retas perpendiculares na folha de papel, uma vertical e outra horizontal, tais que, o ponto de interseção esteja aproximadamente no centro da folha. Nomeie de x e y .
- Marque dois pontos na reta x de maneira que sejam simétricos em relação à y . chame-os de F_1 e F_2 .
- Com o auxílio de um piones prenda a tira de papel para desenhar a cônica na extremidade não furada no ponto F_1 .



Figura 4.20: Grupo 4 (a)

- Pegue um pedaço de corda de comprimento menor que 15cm e amarre-o no furo da tira de papel feito numa das suas extremidades para desenhar a cônica e posicione obliquamente a tira em relação ao eixo x .
- Amarre um piones na outra ponta da corda e prenda-o no ponto F_2 . **Obs: faça com que a corda tenha uma folga e tenha uma posição paralela em relação ao eixo y .**

- Com o lápis, estique a corda de cima para baixo, de modo a encostá-la na tira de papel e a movimente em torno de F_1 , mantendo a ponta do lápis encostada na folha de papel e a corda esticada, pare quando o lápis chegar ao final da corda.
- Agora prenda a tira de papel com o auxílio de um piones no ponto F_2 .
- Amarre um piones na outra ponta da corda e prenda-o no ponto F_1 . **Obs: faça com que a corda tenha uma folga e tenha uma posição paralela em relação ao eixo y .**
- Com o lápis, estique a corda de cima para baixo, de modo a encostá-la na tira de papel e a movimente em torno de F_2 , mantendo a ponta do lápis encostada na folha de papel e a corda esticada, pare quando o lápis chegar ao final da corda.



Figura 4.21: Grupo 4 (b)

- Em seguida o grupo respondeu as seguintes questões:
 - O que é que o grupo observou?
 - O grupo já viu alguma curva parecida com esta?
 - O grupo sabe o nome dela?
 - No conjunto de cortes do cone existe algum corte parecido com esta curva?
 - Pegue a peça que corresponde ao corte do cone, molhe a parte do corte com tinta de carimbo e carimbe-a sobre a folha de papel. O contorno da figura carimbada é parecido com as curvas que o grupo desenhou?

Da discussão, o grupo percebeu que as curvas obtidas são representações de uma hipérbole. Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da hipérbole.

Desta feita o professor orientou a formação do conceito nas duas vertentes.



Figura 4.22: Grupo 4 (c)

- Do corte do cone vem ideia de que a hipérbole é a curva resultante da interseção entre um cone circular reto de duas folhas com um plano paralelo ao seu eixo;
- do desenho, através da promoção de alguma experimentação e alguma observação de repetições na medição de distâncias, garantindo um tempo necessário aos alunos para descobrirem propriedades comuns a vários pontos. Veio a ideia de que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos focos é constante.

Sugestão: o docente deve preparar a construção com distâncias inteiras entre os focos e, na interpretação matemática posterior, escolher pontos que permitam cálculos com distâncias até aos focos de medição simples. Esta preparação tornará a tarefa mais eficaz para a compreensão do conceito por parte dos alunos.

Na sequência o professor orientou os seus alunos a responderem a seguinte questão:

- Conhecem alguns artefactos culturais e objetos que fazem parte da vossa realidade que possibilita a visualização desta curva? Descrevam alguns, explicando como podemos interpretá-los matematicamente.

Durante a discussão e partilha de ideias, relativamente a implementação da dinâmica, cada grupo foi manifestando as dificuldades encontradas no que diz respeito a interpretação das instruções. Constatou-se que o primeiro grupo e o segundo tiveram maior facilidade na implementação do que os dois últimos. Estas evidências levaram o autor deste trabalho a concluir que as quatro dinâmicas têm grau de dificuldade distinto, pelo que seria mais equilibrado dividir em 3 grupos em vez de 4, juntando elipse e circunferência no mesmo grupo de trabalho. Por outro lado, importa referir que num próximo momento de implementação desta atividade, procurar-se-á cumprir com o objetivo previsto inicialmente para a atividade do grupo 3, inspirada em [26], pois só assim se cumpre o requisito de estabelecer pontos de partida

semelhantes no que diz respeito a conhecimentos prévios de Geometria Analítica. Apesar das imprecisões, os professores e alunos reconhecem esta dinâmica como fundamental para uma aprendizagem significativa no que tange ao conceito das cónicas nas duas perspectivas bem como no desenvolvimento de habilidades para visualizá-las em determinados contextos.

4.5 Caracterização da proposta pedagógica

A proposta pedagógica que se apresenta em anexo, foi elaborada tendo em conta o programa de Geometria Analítica do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié. É constituída por sete aulas, estruturadas de acordo com os objetivos declarados nos tópicos 1.3.4, 1.4.1 e 1.4.4 do respetivo programa. Não são por isso aulas todas seguidas, com exceção da sequência definida nas aulas 2,3 e 4, e nas aulas 5, 6 e 7. Os conteúdos e estratégias de ensino são descritos de forma geral como situações que privilegiam as condições prévias dos alunos, provenientes do seu próprio contexto. Cada aula com planificação em anexo tem sugerido um problema de contexto do capítulo 3 que possa ser usado. Cada plano de aula apresenta os seguintes preliminares:

- Pré-requisitos: conhecimentos necessários para aquisição do novo conteúdo.
- Materiais e recursos: suporte material dos métodos.
- Objetivos: metas a serem atingidas em cada aula.
- Competências transversais: habilidades extensivas a outras situações do contexto.

As aulas planeadas pretendem responder a insuficiências derivadas da análise dos resultados.

4.6 Conclusões

As abordagens assumidas na presente investigação, assim como a síntese da base científica de referência à investigação feita no terreno, permitiram extrair ideias matemáticas de atividades culturais numa das aldeias tradicionais escolhida do município do Cuito, província do Bié. O que levou à elaboração de um acervo prático de problemas matemáticos para a valorização dos conhecimentos que os alunos adquirem no seu contexto sócio-cultural.

Os resultados do diagnóstico revelam insuficiências relacionadas com a resolução de problemas que fogem do padrão normal utilizado em sala de aulas, cujos resultados são dados de forma pronta e acabada. São exemplo disso: a aplicação do teorema de Pitágoras, distância entre dois pontos, definição das cónicas, identificação a partir das suas fórmulas e do valor da excentricidade, bem como a sua classificação a partir do binómio discriminante.

A proposta pedagógica elaborada com base nas ideias matemáticas extraídas do contexto tem em conta o aluno como agente ativo da sua aprendizagem, o que poderá contribuir para uma melhor compreensão do ensino-aprendizagem da Geometria Analítica.

Bibliografia

- [1] Alcopyan, A.V., Zaslavsky A.A. *Geometry of conics*. American Mathematical Society., 2007. 46,
- [2] Alencar, H., S. *Geometria diferencial das curvas planas*. IMPA, 2003.
- [3] Apostol, T. M., *Cálculo com funções de uma variável, uma introdução à Álgebra*. Reverté S. A., 1988. 58
- [4] Apostol, T. M., Mnatsakaniam, M. A., *New Horizons in Geometry*. MAA, Dolciani Mathematical Expositions, 47, 2012. xv, 83, 84, 85, 87, 88, 91
- [5] Araújo, P., V., *Curso de Geometria*. Gradiva, Lisboa, 2012. 14,
- [6] Assembleia Nacional de Angola, *Lei de Base de Educação. Lai 13/01*. Imprensa Nacional, Luanda, Angola 2001. 1
- [7] Avila, G., A., *A hipérbole e os telescópios*. Revista de Matemática V.34. P.22-27., 1997.
- [8] Bernardi, L., Caldeira, A. *Educação escolar indígena, Matemática e cultura: a abordagem etnomatemática*. Revista latinoamericana de Etnomatemática, Vol.4, n°1. Disponível em: <http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/View/28>. 2011. 7
- [9] Boulos, P., Camargo, I. *Geometria analítica - um tratamento vetorial*. Makron Books, Brasil 2005. xiv, 83
- [10] Boyer, C. B., *História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo., 2003. 16
- [11] Breda, A., Lima, V., *Etnomatemática sob dois pontos de vista: a visão D'ambrosiana e a visão pós-Estruturalista*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, Vol.4, n° 2. Disponível em: <http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view> 131. 2011. 5
- [12] Cassela, E., A., D., *Processo dedutivo para a obtenção da equação geral da circunferência, Projeto de Ensino I*. Universidade da Beira Interior, Faculdade de Ciências , Covilhã, Portugal 2016. 14, 15
- [13] Cassela, E., A., D., *Estudo das sintético e analítico das cónicas, Projeto de Ensino II*. Universidade da Beira Interior, Faculdade de Ciências , Covilhã, Portugal 2017. 41

- [14] Cohen, L., Manion, L., e Morrison, K., *Research Methods in Education*. Taylor Francis, New York, 6a. Ed., 2007. 96
- [15] D'Ambrosio, U., *O Programa Etnomatemática: Uma síntese*. *Acta Sciential*, Vol.10, nº 1, . Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/View/74>. 2008a. 5, 8
- [16] D'Ambrosio, U., *Para uma abordagem multicultural: O programa Etnomatemática*. Revista Lusófona de Educação. Disponível em: <http://www.scielo.mec.pt/pdf/rle/n11/n11a11.pdf>. 2008b. 6
- [17] Dias D., *Estudos Etnomatemático sobre o grupo étnico Nyaneka-Nkhumbi do sudoeste de Angola. Aplicações à Educação Matemática*. PhDs thesis, Universidade do Minho: Instituto de Educação, Portugal, 2015. 3, 5, 6, 65, 96
- [18] Feitosa, A., *A Etnomatemática e seus pressupostos históricos*. Disponível em: [https://www.infoescola.com/aetnomatematica e seus pressupostos históricos/](https://www.infoescola.com/aetnomatematica-e-seus-pressupostos-historicos/). Acessado aos 12 de Fevereiro de 2018. 7
- [19] Ferreira, P., Buriasco, R., *Educação Matemática Realística: Uma abordagem para o processo de ensino aprendizagem*. Educação Matemática pesquisa: Revista de Estudos pós graduados em Educação Matemática [SI], 18(1), 2016. 9, 10, 11, 106
- [20] Freudenthal, H., Why to teach Mathematics so as be usefull. *Educational studies in Mathematics, Vol.1, n 1-2*. 1991. 96
- [21] Fuller, G., Tarwater, J.D., *Analytic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Brasil., 1992. 23, 35
- [22] Gerdes P., *Etnogeometria-Cultura e o despertar do pensamento geométrico*. Instituto Superior de Tecnologias e de Gestão (ISTEG), Belo Horizonte, Boane, Moçambique. 2012. 7, 67, 97
- [23] Gerdes, P., *Cultura e o despertar do pensamento geométrico*. Instituto Superior Pedagógico, Maputo, 1991. 5
- [24] Gerdes, P., *Reflexões sobre Matemática e Diversidade cultural*. Rebeirão: Edições Húmus, Lda. 2007. 6
- [25] Guimarães, C., S., *Matemática em nível Ime Ita*. São José dos Campos: Vest-seller, 2008. 16

- [26] Kaleff, M., A., *Roteiro de atividades para o ensino das cônicas*. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/conicas/professor01.html> 3, 97, 109, 116, 121,
- [27] Kooij, H., V., *Matemática realística na Holanda*. Educação e Matemática, 1992, N°23, p. 38-44. 10
- [28] Coxe, I., C., *Etnomatemática de Angola*. Universidade Lueji A'Nkonde - Angola, disponível em: www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/131.pdf 2003 6
- [29] Lima, E., L., Carvalho P., Wagner E. e Morgado A., *A Matemática do Ensino Médio. Volume 3. Cap.1- Geometria Analítica Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, Brasil., 2007. 13, 15, 44, 45
- [30] Lula, K., P., *Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo de volumes e áreas*. Master's thesis, Universidade Federal de Goiás, Brasil. Disponível em: <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3674> 2013. xiv, 73, 74, 75, 79
- [31] Madusise, S., Mwakapenda, W., *Culturally-Based Activities in grade 9 Mathematics: Tensions and possibilities from practice*. University of Mathematics, Science and Thecnology. 2010. 3, 96, 97
- [32] Marriam, S., B., *Qualitative Research: A guide to design and implementation*. San francisco: Jossey-Bass publisger, 2009. 96
- [33] Marriam, S., B., *Qualitative Research and case study application in Education*. San francisco: Jossey-Bass publisger, 1998. 97
- [34] Monteiro, R., M., *Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de Cônicas com o Geogebra*. Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4819> 2014. 16
- [35] Queiró, F., J., *A elipse, a parábola e hipérbole - propriedades e aplicações*. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/jfqueiro/aplicações.pdf> acesso em: 17/05/2017. xiii, 45, 46
- [36] Nelo, M., N., M., O., Soares, A., A., Cataro, P., *Etnomatemática da Marimba*. Disponível em:<http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/381>. 2010. 6
- [37] Pais, A., *A investigação em Etnomatemática e os limites da cultura*. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do sul, Vol. 20, n° 2, p.3248. Disponível em: <https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/artcle/ViewFile/3226/2238>. 2012. 8

- [38] Palhares, P., Sousa, F., *A Etnomatemática na comunidade piscatória de câmara de lobos em portugal*. Journal of Mathematics e culture, Vol.9, n^o 1. Disponível em: nagem.rpi.edu/files/30989 2015. 8
- [39] Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H., *Investigações Matemática na sala de aula*. autêntica, Belo Horizonte, 2005. 109
- [40] Professores da Escola Superior Pedagógica do Bié, *Programas de Geometria Analítica I e II primeiro ano do curso de Matemática*. ESPB, 2010. 55, 64
- [41] Rosa, M., *A mixed-methods study to understand the perceptions of high school leader about English Language Learners (ELL): The case of mathematics. Thesis (Doutorado)*. College of Education , California State University, Sacramento 2010. 5
- [42] Rosa, M., Orey, D.C., *Abordagens atuais do programa Etnomatemática: delineando um caminho para ação pedagógica*. Bolema, 19(26), 1-26. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2912/291221866003/> 2009. 68
- [43] Steinbruch, A, Winterle, P., *Geometria analítica*. Mcgraw Hill, 1987. xvi, 48, 53,
- [44] Stewart, J., *Cálculo Volume 2*. Cengage Learning, São Paulo, 2008. xiv, xvi, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 58, 63,
- [45] Swokowski, W. E., *Cálculo com Geometria Analítica*. McGraw-Hill, Brasil.,1983.
- [46] Urakawa, H., *Calculus of Variations and Harmonic Maps, Translations of Mathematical Monographs*. Vol. 132, AMS. 1990. 78
- [47] Van den Heuvel Panhuizen, M., V., D., *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-B Press/Freudenthal Institute, utrecht university. 1996. 10, 11, 109
- [48] Vygotsky, L. S., *História del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Editorial ciencia y técnica, La habana, Cuba 1978. 11
- [49] Yin, R., K., *Case study Research*. Sage Publications, London, England. 2003.

Apêndice A

Anexos

A.1 Instrumentos da investigação

1. Entrevista aos alunos.
2. Entrevista aos professores.
3. Programas curriculares e plano de estudos da Licenciatura em Matemática da ESPB.
4. Questionário de diagnóstico.

Anexo nº 1: Entrevista aos alunos

Objetivo:

Diagnosticar o estado atual do estudo das cónicas no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica em alguns alunos selecionados do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié.

Os alunos responderam as dezasseis questões que procuram averiguar as informações sobre o estado atual do estudo das cónicas e que foram apresentadas no seguinte formato:

Estimado aluno:

Estamos a realizar uma investigação sobre o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, em particular o estudo das curvas cónicas, e portanto, necessitamos de sua colaboração respondendo cuidadosamente as questões que se seguem: **Nota:** Sua opinião será de grande valor para podermos chegar as conclusões quanto ao desenvolvimento desse trabalho.

- Qual é a sua identidade cultural e qual é o seu dialeto?
- Vive numa zona urbana ou rural?
- Que tipo de habitações existem na zona onde vive? E como são tradicionalmente decoradas? Qual a localização relativa a outros locais?
- Que produtos artesanais são fabricados na sua comunidade?
- Em que local ou locais se fazem trocas comerciais?
- Que culto frequenta e em que tipo de local?
- Que objetos estão presentes no seu local de culto?
- Que festas são celebradas na sua comunidade?
- Que rituais estão associados a essas festas?
- Que tipo de traje é usado em celebrações? E que tipo de enfeites ou bijuteria usam tradicionalmente?
- Que tipo de música acompanha esses rituais? E que instrumentos são tocados?
- Existe mais alguma prática cultural que associe à sua comunidade?
- Como avalia o seu desempenho na cadeira de Geometria analítica?

- Como avalia a sua aprendizagem do estudo das cónicas?
- Quando te são lecionadas as aulas de Geometria analítica, têm sido relacionadas com a tua vivência? De que forma?
- Marque com um X uma ou mais das alternativas abaixo mencionadas. Ao assistir as aulas de Geometria Analítica,
 - Gostas do assunto em estudo;
 - Sentes dificuldades;
 - Percebes como se relaciona com outros conteúdos matemáticos?

Anexo nº2: Entrevista aos Professores

Objetivo:

Obter informações acerca do desempenho dos professores relativamente ao processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica em alguns alunos selecionados do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié.

Os professores responderam as cinco questões que procuram averiguar as informações relativas ao processo referido e que foram apresentadas no seguinte formato:

Estimado professor:

Como parte de uma investigação que se realiza nesta escola, sobre o processo ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, em particular o estudo das cónicas para contribuir para o aperfeiçoamento do dito processo, consideramos que sua ajuda nos seria de grande utilidade.

Por tal motivo, necessitamos da sua colaboração dando a sua opinião partilhando sua experiência pedagógica ao responder as questões que se seguem:

Nota:

Sua opinião será de grande valor para podermos chegar a conclusões quanto ao desenvolvimento desse trabalho.

- Que importância tem a incorporação de práticas pertencentes ao ambiente sócio-cultural dos alunos nas aulas de Geometria analítica?
- Que importância tem para ti a habilidade para visualizar e identificar objetos geométricos dentro do contexto do aluno no ensino da Geometria Analítica?
- Quais são as consequências na aprendizagem dos alunos quando os conteúdos ensinados se encontram distanciados dos seus contextos?
- Em sua opinião de que forma se pode criar situações que levam os alunos a exercitarem as suas capacidades de pensar e buscar soluções dos problemas apresentados na sala de aula relacionando-os com as suas vivências ?
- Com que dificuldades te deparas ao ministrar as aulas relacionadas com o estudo das cónicas?

Anexo nº3: Programas curriculares e plano de estudos da Licenciatura em Matemática da ESPB

PROGRAMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA I

Introd:

Carga Horária Semestral: 98 horas; Carga Horária Semanal: 2 h Teóricas + 4 h Práticas

Conteúdo Programático:

Objectivos:

1. Estudo das Leis básicas do cálculo vectorial e da geometria analítica de duas e três dimensões.

1.3.1 Vectores

1. Recta orientada. Segmento orientado. Segmentos equipolentes; 2. Vector. Tipos de vectores; 3. Operações básicas com vectores

1.3.2 Expressão Analítica de um vector. Operações.

1. Vectores linearmente independentes e dependentes. Combinação linear; 2. Decomposição de um vector; 3. Base; 4. Expressão analítica de um vector; 5. Ângulo de dois vectores; 6. Bases ortonormais; 7. Cálculo do módulo de um vector; 8. Condição de ortogonalidade de dois vector
9. Condição de paralelismo de dois vectores; 10. Ângulo directores de dois vectores; 11. Cosenos directores de um vector; 12. Sistema de coordenadas cartesianas; 13. Coordenadas de um ponto
14. Expressão cartesiana do vector definido pelas coordenadas da origem e extremidade.

1.3.3 Produto de vectores

1. Produto escalar de dois vectores. Propriedades; 2. Independência do produto escalar; 3. Cálculo de ângulos de dois vectores; 4. Projecção de um vector; 5. Matrizes quadradas de 2ª e 3ª ordem. Determinantes associados; 6. Produto vectorial. Propriedades. Interpretação geométrica. Independência do produto vectorial; 7. Produto misto. Propriedades. Interpretação geométrica. Independência do produto misto; 8. Duplo produto vectorial. Decomposição.

1.3.4 Caracterização do Espaço Bidimensional e Tridimensional.

Algebra Vectorial no Espaço Bidimensional.

1.3.5 A recta

1. Equação vectorial da recta; 2. Equações paramétricas da recta; 3. Equações da recta na forma simétrica; 4. Equações da recta determinadas por dois pontos; 5. Rectas paralelas aos planos e aos eixos coordenados; 6. Equação reduzida da recta; 7. Ângulo de duas rectas; 8. Condição de ortogonalidade de duas rectas; 9. Condição de coplanaridade de duas rectas; 10. Intersecção de duas rectas; 11. Recta ortogonal a duas rectas; 12. Ponto que divide um segmento de recta dada uma razão

1.3.6 O plano e a recta no espaço

1. Equação vectorial do plano; 2. Equações paramétricas do plano; 3. Equações geral do plano; 4. Rectas paralelas aos planos e aos eixos coordenados; 5. ângulo de dois planos; 6. Condição de paralelismo de dois planos; 7. Condição de perpendicularidade de dois planos; 8. Ângulo de uma recta com um plano; 9. Condição de paralelismo entre recta e plano; 10. Condição de perpendicularidade entre recta e plano; 11. Estrela de planos. Feixe de planos; 12. Intersecção de dois planos; 13. Intersecção de uma recta com um plano

1.3.7 Distância, Área e Volume

1. Distância de dois pontos, de um ponto a uma recta e a um plano, de uma recta a um plano; 2. Área do triângulo. Volume do tetraedro; 3. Distâncias e áreas no espaço bidimensional

Bibliografia

A. Caroli, C. A. Cillioli, M. feitosa, - Vectores e geometria analítica: teoria e exercícios, L.P. M, São Paulo 1965

A. Rodrigues, - Curso de Geometria Analítica 2ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo

L. A. Medeiros, N.G. Andrade, A. M. Wanderley, - Álgebra vectorial e geometria analítica, Campus, Rio de Janeiro

P. Boulos, I. C. Oliveira, - Vectores e geometria analítica 2ª Edição, McGraw-Hill, S Paulo 1987.

PROGRAMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA II

Introdução:

Carga Horária Semestral: 98 horas, Carga Horária Semanal: 2 h Teóricas + 2 h Práticas

Conteúdo Programático:

Objectivos:

1. Completar a formação em geometria analítica iniciada no semestre anterior.

1.4.1 Propriedades Geométricas das linhas de 2ª Ordem

1. A circunferência. Forma geral, forma ordinária. Família de circunferências.

Lugares geométricos; 2. A parábola. Definição da parábola. Equação tangente a parábola. Função quadrática. Aplicações; 3. A elipse. Definição. Equação da elipse. Propriedades; 4. A Hipérbole. Definição. 1ª e 2ª equações ordinárias. Assintotas. Hipérbolas conjugadas. Propriedades.

1.4.2 Transformações de coordenadas

1. Translação dos eixos no plano; 2. Rotação dos eixos no plano; 3. Simplificação de equações por transformações de coordenadas.

1.4.3 Coordenadas Polares

1. Sistemas de coordenadas polares; 2. Mudança de coordenadas polares para coordenadas rectangulares; 3. Traçados de curvas em coordenadas polares; 4. Intersecção de curvas em coordenadas polares; 5. Distância entre dois pontos em coordenadas polares; 6. Equação da recta em coordenadas polares; 7. Equação da circunferência em coordenadas polares; 8. Equação geral das cónicas em coordenadas polares

1.4.4 Equações Paramétricas

1. Obtenção de equação paramétrica de uma curva a partir de uma representação paramétrica; 2. Gráfico de uma curva a partir da sua representação paramétrica; 3. Representação paramétrica das cónicas; 4. A cicloide. Epicycloide e hipercicloide.

1.4.5 Superfícies de revolução

1. Dedução de equações de uma superfície de revolução; 2. Análise da construção de uma superfície de revolução; 3. Representação da esfera, elipsóide, hiperbolóide de uma folha; 4. Representação do hiperbolóide de duas folhas, parabolóide e cone de revolução; 5. Equação de uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados.

1.4.6 Quádricas

1. Propriedades gerais; 2. Quádricas com centro; 3. Quádricas sem centro; 4. Intersecção. Planos tangentes; 5. Pontos singulares e quádricas degeneradas; 6. Quádricas regulares; 7. Secções circulares. Secções diametraes

Bibliografia

² Lehmann, C. H. - Geometria Analítica, Instituto Cubano del libro, Havana, 1975

² Boulos P. - Geometria Analítica um tratamento vectorial. McGraw-Hill, São Paulo, 1987

² kindle J. - Geometria Analítica, McGraw-Hill, São Paulo



MINISTÉRIO DO ENSINO SUPERIOR
 ESCOLA SUPERIOR PADAGOGICA DO BIÉ
 DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXACTAS
 Plano de Estudo do Curso de Licenciatura em MATEMÁTICA

1º Ano													
1º Semestre		C.H./Sem					2º Semestre		C.H./Sem				
N.º de Semanas Lectivas: 15		T	P	TP	T.SMN	T.SMT	N.º de Semanas Lectivas: 15		T	P	TP	T.SMN	T.SMT
Pedagogia Geral		2		2	4	60	Pedagogia Geral		2		2	4	60
Psicologia Geral		2		2	4	60	Psicologia Geral		2		2	4	60
Fund. da Matemática Escolar I		1		2	3	45	Fund. da Matemática Escolar II		1	1	1	3	45
Análises Matemático I		1	2	1	4	60	Análises Matemático II		1	1	2	4	60
Álgebra I		1	2	1	4	60	Álgebra II		1	2	1	4	60
Geometria Analítica I		1	1	1	3	45	Geometria analítica II		1	1	1	3	45
Informática Básica I		1	1		2	30	Informática Básica II		1	1		2	30
Língua Portuguesa I		1		1	2	30	Língua Portuguesa I		1	1		2	30
Língua Estrangeira I		1		1	2	30	Língua Estrangeira I		1		1	2	30
Historia e Cultura de Angola		1	1		2	30	Historia e Cultura de Angola		1	1		2	30
TOTAL SEMANAL		30					TOTAL SEMANAL		30				
TOTAL SEMESTRAL		450					TOTAL SEMESTRAL		450				
TOTAL ANUAL = 900													
2º Ano													
1º Semestre		C.H./Sem					2º Semestre		C.H./Sem				
N.º de Semanas Lectivas: 15		T	P	TP	T.SMN	T.SMT	N.º de Semanas Lectivas: 15		T	P	TP	T.SMN	T.SMT
Met Invest Científica		2		1	3	45	Met Invest Científica		2		1	3	45
Psicologia pedag e do desenvolvimento		2		1	3	45	Psicologia pedag e do desenvolvimento		2	1		3	45
Geometria Descritiva		2		1	3	45	Geometria Superior		2		1	3	45
Didáctica Geral		2		2	4	60	Didáctica Geral		1	1	2	4	60
Analise Matemático III		2		2	4	60	Análises Matemático IV		2		2	4	60
Fun. da Matemática Escolar III		1	1	2	4	60	Teoria do Desenvolvimento Curricular		2	2		4	60
Álgebra Superior		1	1	1	3	45	Aritmética e Teoria dos Números		1	1	1	3	45
História da Matemática		1		1	2	30	Probabilidades e Estatística I		1		2	3	45
Língua Estrangeira II		1	1		2	30	Língua Estrangeira II		1	1		2	30
Língua Portuguesa II		1	1		2	30	Língua Portuguesa II		1	1		2	30
TOTAL SEMANAL		30					TOTAL SEMANAL		30				
TOTAL SEMANAL		450					TOTAL SEMANAL		450				

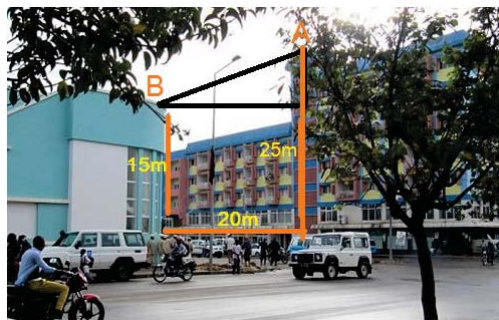
Anexo nº4: Questionário de diagnóstico

Objetivo:

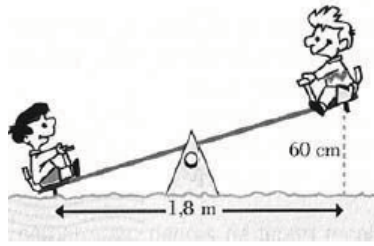
Diagnosticar o grau de dificuldade relativamente ao estudo das cónicas no tocante ao processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica em alguns alunos selecionados do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié.

Os alunos responderam as sete questões que procuram averiguar as dificuldades comuns entre os vários alunos da amostra no que diz respeito ao ensino das cónicas e que foram apresentadas no seguinte formato:.

- Em uma atividade de resgate um policial de intervenção rápida pretende atravessar com uma corda do terraço do prédio gabiconta para o teto do lado frontal do pavilhão desportivo do Sporting clube do Bié, como mostra a figura abaixo.
 - Qual é a medida do comprimento da corda que liga os dois edifícios?



- O Pedro e o João são duas crianças do Centro infantil Kilamba do Cuito e estão a andar de gangorra, como indica a figura:
 - A altura máxima a que pode subir cada um dos amigos é de 60cm . Qual é o comprimento da gangorra?



- O que são cónicas?

- Identifique o tipo de cónica a partir das fórmulas abaixo representadas:

a)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

b)

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

c)

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

d)

$$(y - h)^2 = 4p(x - k)^2$$

- Observando as equações reduzidas das cónicas conseguem visualizar a definição da distância entre dois pontos retratada nestas equações?

- Identifique o tipo de cónica tendo em conta o valor da excentricidade.

- Excentricidade nula:

- Excentricidade igual a 1:

- Excentricidade menor que 1:

- Excentricidade maior que 1:

- Classifique de forma analítica, tendo em conta o valor do binómio discriminante, o tipo de cada uma das cónicas a partir da equação do segundo grau com duas variáveis, do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$-B^2 - 4AC < 0$$

$$-B^2 - 4AC > 0$$

$$-B^2 - 4AC = 0$$

A.2 Proposta pedagógica

1. Planificação da aula nº 1: Espaço cartesiano e distância entre dois pontos no espaço.
2. Planificação da aula nº 2: Conceito de cónicas.
3. Planificação da aula nº 3: Equação reduzida das cónicas.
4. Planificação da aula nº 4: Equação geral das cónicas.
5. Planificação da aula nº 5: Parametrização de uma curva no plano.
6. Planificação da aula nº 6: Traço de uma curva parametrizada no plano.
7. Planificação da aula nº 7: Parametrização de uma curva no espaço.

Unidade Didática 1.3.4- Espaço cartesiano

Tópico Central - Espaço cartesiano.
Distância entre dois pontos no espaço.

Aula nº: 1

Data:

Duração: 90 min.

Sumário

Espaço cartesiano.

Determinação de coordenadas de um ponto no espaço.

Resolução de exercícios de aplicação.

Distância entre dois pontos no espaço.

Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Conhecimento básico sobre plano cartesiano.
- Determinação das coordenadas de um ponto no plano.
- Representar um par ordenado no plano cartesiano.
- Conhecimento básico sobre triângulo retângulo.
- Aplicação do teorema de Pitágoras.
- Determinação das distância entre dois pontos no plano.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Definir um espaço cartesiano.
- Determinar coordenadas de um ponto no espaço cartesiano.
- Resolver exercícios relacionados com a representação de pontos no espaço
- Determinar a distância entre dois pontos no espaço.
- Resolver exercícios relacionados com a determinação da distância entre dois pontos no plano.

Competências transversais

- Ser capaz de aplicar o aprendido na resolução de outros problemas matemáticos.
- Usar esses conhecimentos na visualização de objetos geométricos que fazem parte do contexto.
- Desenvolver habilidade para aplicação do aprendido na resolução de problemas geométricos do contexto.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O Professor começa por recordar o conceito de plano cartesiano bem como a razão de ser chamado plano bidimensional, afirmando que um ponto no plano pode ser representado como um par ordenado (a, b) de números reais, onde a é coordenada x e b é a coordenada y . Em seguida pergunta aos alunos, então o que é o espaço cartesiano? e como podemos representar um ponto no espaço? Diante da busca de idéias por parte dos alunos, o professor apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos da aula, explicando que a aula estará dividida em duas fases, na primeira tratar-se-á do espaço cartesiano e na segunda trataremos da distância entre dois pontos no espaço.

Videoprojetor

Aulas nº: 1

Data:

Sumário:

Espaço cartesiano.

Determinação de coordenadas de um ponto no espaço.

Resolução de exercícios de aplicação.

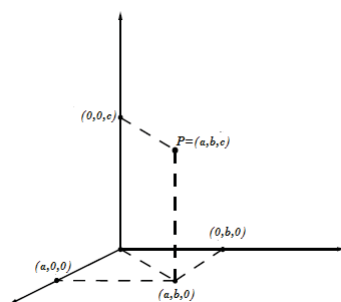
Distância entre dois pontos no espaço.

Resolução de exercícios de aplicação.

Depois de ouvir as diferentes opiniões dos alunos, o Professor apresenta a definição de espaço cartesiano em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 11. *O Espaço cartesiano consiste num sistema de três eixos orientados, mutuamente perpendiculares com um ponto em comum O , a origem do sistema de eixos cartesianos, onde cada ponto P pertencente a E^3 pode ser indicado com um triplo ordenado (a, b, c) pertencente a R^3 e escrevemos $P = (a, b, c)$, em particular $O = (0, 0, 0)$.*



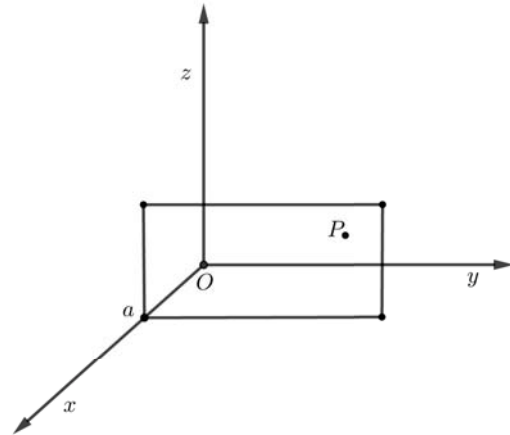
Os três eixos coordenados determinam três planos coordenados. O plano xy contém o eixo x e y , o plano yz possui os eixos y e z e o plano xz detém os eixos x e z . Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, chamadas **otante**.

Na seqüência o professor pergunta outra vez, como determinar as coordenadas de um ponto P no espaço cartesiano?

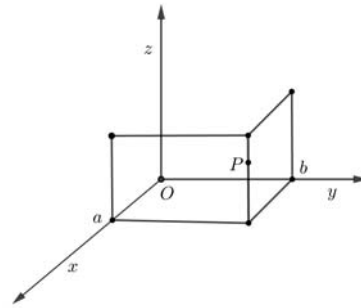
Depois de ouvidas as diferentes opiniões dos alunos, o professor apresenta o procedimento em videoprojetor, explicando que cada ponto P do espaço vai corresponder a um triplo ordenado (x, y, z) , chamado de coordenadas de P e denominadas abcissa, ordenada e cota, respetivamente.

Videoprojetor

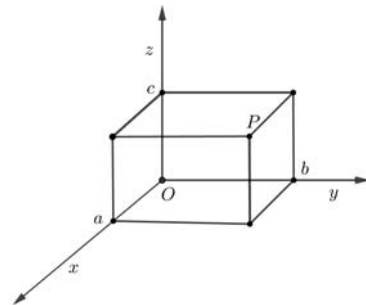
1º-Como determinar a abscissa do ponto P ? Para obter a abscissa de P , tracemos por P um plano paralelo ao plano yz , o ponto de interseção deste plano com o eixo dos x tem nesse eixo uma coordenada a , que é a abscissa de P .



2º-Como determinar a ordenada do ponto P ? Para obter a ordenada de P . Tracemos por P um plano paralelo ao plano xz , o ponto de interseção deste plano com o eixo dos y tem, nesse eixo, uma coordenada b , que é a ordenada de P .



2º-Como determinar a cota do ponto P ? De forma análoga, ao traçar por P um plano paralelo ao plano xy , fica determinada a coordenada c , que é a cota de P .



Traçando os três planos pelo ponto P , fica determinado um paralelepípedo retângulo como o da Figura anterior.

Continuando, o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 1:

1.1 Observem um dos cantos da nossa sala, suponham que o canto inferior seja a origem do sistema de eixo cartesiano, o eixo x está ao longo da interseção do chão com a parede esquerda, o eixo y está ao longo da interseção do chão com a parede direita e o eixo z fica ao longo da interseção das duas paredes orientadas no sentido do teto.



1.2 Em que plano está a parede que se encontra à vossa esquerda?.

1.3 Em que plano está a parede que se encontra à vossa direita?.

1.4 Em que plano está o chão?

Resolução:

O Professor pede para os alunos observarem o canto em estudo e em conjunto resolvem o exercício no quadro.

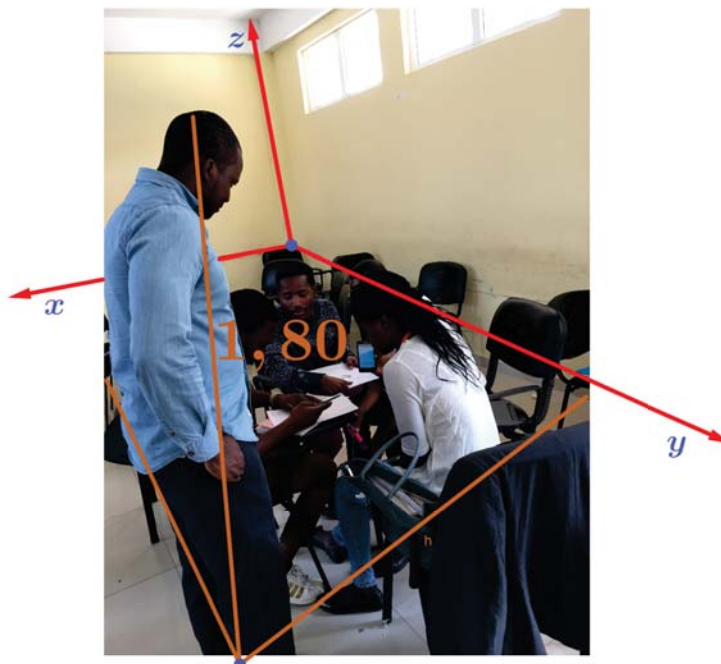
Quadro

A parede que se encontra à vossa esquerda está no plano xz

A parede que se encontra à vossa direita está no plano yz

O chão se encontra no plano xy .

De seguida o professor fica posicionado num ponto do espaço visualizado com forme a figura abaixo e coloca as seguintes questões.



Considerem $1m$ e $80cm$ como medida da minha altura, calculem a distância que me separa dos eixos x e y , contando os mosaicos colocados no piso da sala. Determinem em que posição do espaço estou situado.

Obs: A dinâmica aplicada neste exercício é fundamental para vincular os conhecimentos da matéria em estudo no contexto do aluno, neste caso em sala de aula, entretanto, o professor pode repetir várias vezes o mesmo exercício pedindo aos alunos para determinarem a posição de cada um deles na turma, tomando em consideração o espaço visualizado. Por outro lado o professor pode aproveitar introduzir o conceito de lugar geométrico, tomando um aluno como referência e posicionar os outros a volta dele, mas com igual distância, usando o mosaico da sala como unidade de medida. Recomenda-se que o professor dedique algum tempo a estas dinâmicas para que os alunos ganhem habilidade de aplicar o aprendido em suas vivências.

Resolução:

Quadro

O professor orienta os alunos para trabalharem em grupo, contando os mosaicos supõe-se que encontram 8 de distância que separa o professor do eixo x e 5 do eixo y , então o professor está localizado no ponto $(8, 5, 1.80)$.

Continuando o professor propõe a resolução do seguinte exercício (*Stewart, 2008p.794*).

Exercício 2:

2.1 Representa os seguintes pontos no espaço cartesiano: $(-4, 3, -5)$ e $(3, -2, -6)$.

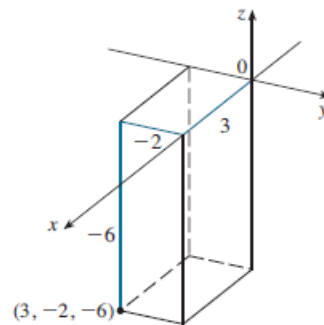
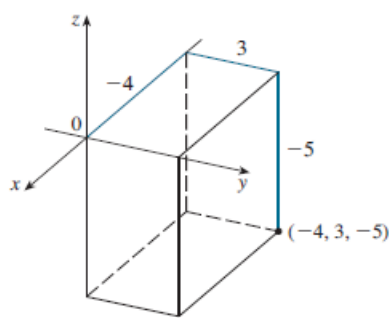
2.2 Que superfície de \mathbb{R}^3 são representadas pelas seguintes equações? $z = 3$ e $y = 5$, relacione o resultado da equação $z = 3$, com uma das superfícies da sala apresentadas na segunda imagem (parede esquerda, parede direita, chão, teto), justifique a tua resposta

Resolução:

O professor orienta os alunos para a resolução dos exercícios no quadro.

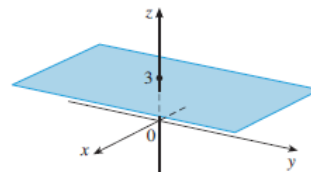
Quadro

Para os pontos $(-4, 3, -5)$ e $(3, -2, -6)$ tem-se:



Quanto a equação $z = 3$, tem-se:

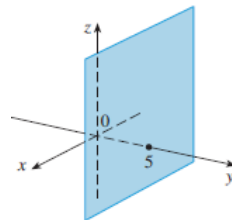
A equação $z = 3$ representa o conjunto $(x, y, z) | z = 3$, que é o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^3 com coordenada z igual a 3. Isso representa um plano horizontal paralelo ao plano xy e três unidades acima dele.



Considerando 3 como a distância medida em metro entre os planos paralelos em questão, então a superfície representada pela equação $z = 3$ é o teto, conforme indica a figura.



A equação $y = 5$ representa o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^3 com coordenada y igual a 5. Esses pontos pertencem a um plano vertical, paralelo ao plano xz , e cinco unidades à direita deste.



Continuando propõe-se o seguinte exercício.

Exercício 3:

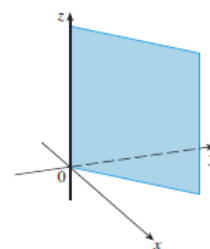
3.1 Descreva e esboce a superfície em \mathbb{R}^3 representada pela equação $y = x$.

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

A equação representa o conjunto de todos os pontos em \mathbb{R}^3 com coordenada x e y iguais, isto é, $(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$. Esses pontos pertencem a um plano vertical que interseca o plano xy na reta $y = x, z = 0$.



Continuando o professor pergunta aos alunos o enunciado do teorema de Pitágoras, e recorda o procedimento para a determinação da distância entre dois pontos no plano. Na sequência pergunta aos alunos, como determinar a distância entre dois pontos no espaço? Enquanto os alunos refletem, o professor apresenta os títulos que constituem a segunda fase da aula em videoprojetor e orienta os objetivos.

Videoprojetor

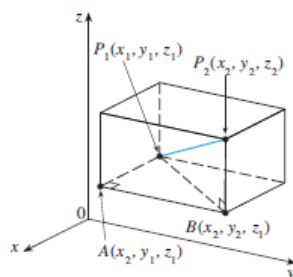
Distância entre dois pontos no espaço.
Resolução de exercícios de aplicação.

Depois de ouvir as diferentes opiniões dos alunos, o professor apresenta o procedimento para a determinação da distância entre dois pontos no espaço em videoprojetor, explicando que a fórmula da distância entre dois pontos no espaço é uma extensão da fórmula da distância entre dois pontos no plano.

Videoprojetor

Consideremos um paralelepípedo retangular conforme a Figura que se segue. Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vértices opostos do mesmo, tal que as faces desse paralelepípedo sejam paralelas aos planos coordenados. Se $A = (x_2, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_1)$ são vértices da caixa indicados na figura, então, $|P_1A| = |x_2 - x_1|$,

$$|AB| = |y_2 - y_1|, \quad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$



Como os triângulos P_1BP_2 e P_1AB são retângulos, o Teorema de Pitágoras fornece

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1B|^2 + |BP_2|^2}$$

$$|P_1B| = \sqrt{|P_1A|^2 + |AB|^2}$$

Combinadas as duas equações, obtemos

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2}$$

Substituindo os valores de $|P_1A|$, $|AB|$ e $|BP_2|$, temos

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Portanto a fórmula da distância entre P_1 e P_2 em três dimensões é dada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(Stewart, 2008 p.795).

Como exemplo o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 4:

4.1 Determine a distância entre os pontos $P = (2, -1, 7)$ e $Q = (1, -3, 5)$.

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

Aplicando a fórmula temos:

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2}$$

$$|PQ| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

Portanto a distância entre os Pontos P e Q é igual a 3.

Continuando, o professor propõe a resolução dos seguintes exercícios.

Exercício 5:

5.1 Mostre que o triângulo com vértices $P = (-2, 4, 0)$, $Q = (1, 2, -1)$ e $R = (-1, 1, 2)$ é

equilátero. 5.2 Encontre o comprimento dos lados do triângulo com vértices

$A = (1, 2, -3)$, $B = (3, 4, -2)$ e $C = (3, -2, 1)$. O triângulo ABC é retângulo? É

isósceles?

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta os exercícios são resolvidos no quadro com a mediação do professor.

Quadro

Quanto ao primeiro exercício, tem-se:

Por definição, um triângulo é equilátero quando todos os seus lados são iguais, isto é.

$$|PQ| = |QR| = |PR|$$

$$|PQ| = \sqrt{(1+2)^2 + (2-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|QR| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|PR| = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$$

Portanto o triângulo PQR é equilátero.

Quanto a terceiro exercício, vem:

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (-2+3)^2} = 3$$

$$|BC| = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{45}$$

$$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{6}$$

Como $(\sqrt{45})^2 = 3^2 + 6^2$, o triângulo ABC é retângulo.

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Referências

[43] [44]

Unidade Didática 1.4.1 - cónicas

Tópico Central - Cónicas.
Conceito de cónicas

Aula nº: 2

Duração: 90 min.

Data: -/-/—

Sumário

Cónicas - vertentes sintética e analítica.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Conhecimento básico sobre conceito de lugar geométrico.
- Conhecimento básico de superfícies cónicas e planos.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor, cones, facas, pioneses, papeis e pedaços de corda, folha de cartolina, caneta hidrocolor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Definir as cónicas na vertente sintética e analítica.
- Identificar as cónicas e visualizá-las no seu contexto.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de identificar curvas cónicas no contexto em estudo.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O professor começa por fazer as seguintes perguntas aos alunos:

Conhecem o conceito de lugar geométrico? Recorda o conceito.

Conhecem algumas curvas que se identificam com este conceito? como são obtidas?

Enquanto os alunos procuram responder as questões colocadas, o professor apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos.

Videoprojetor

Aulas nº: 2

Data:—/—/—

Sumário:

Cónicas - vertentes sintética e analítica.

Resolução de exercícios de aplicação.

Em seguida o professor reitera a questão. O que são cónicas? Porquê que elas possuem este nome?

Na sequência o professor introduz uma dinâmica de experimentação em sala de aula inspirada em Ana Kaleff [26] e divide a turma em 3 grupos, de tal forma que o primeiro e o terceiro tenham dois cones de esferovite e o segundo tenha um em sua posse, e para além disso cada grupo terá: uma faca, uma tesoura, uma folha de cartolina, pionés, um pedaço de corda e uma caneta hidrocolor. O grupo 1 executará duas atividades que designaremos por (a) como primeira atividade e (b) como segunda atividade.

Com o material em posse, os alunos executam as seguintes atividades:

- Grupo $n^{\circ}1$ (a): fará um corte ao meio do cone paralelamente a sua respetiva base;
- Grupo $n^{\circ}1$ (b): fará um corte ao cone de forma oblíqua a sua base, não paralelo a sua geratriz;
- Grupo $n^{\circ}2$ fará um corte ao cone de forma paralela a uma das suas geratrizes;
- Grupo $n^{\circ}3$ unirá os dois cones pelos vértices e fará um corte paralelo ao seu eixo.

Terminada a execução desta atividade, cada grupo contornará com uma tinta da caneta hidrocolor à sua seção plana de cada pedaço do cone originado de um corte.

Na sequência, cada grupo terá as seguintes atividades, com vista a identificação de cada curva cónica:

Grupo $n^{\circ} 1$ (a)

- Coloque uma folha de papel em branco sobre a folha de cartolina para servir de apoio, fixe um pionés mais ou menos no centro da folha e chama este ponto C .
- No pionés prenda uma das pontas de um pedaço de corda de forma que quando o esticar, a outra ponta não saia da folha;
- Amarre o lápis na outra ponta da corda e desloque-o sobre o papel partindo de um ponto e retornando até ele, de modo a manter a corda bem esticada ao traçar a curva;
- Troque a corda que o grupo utilizou por um pedaço menor e repita os itens anteriores;

- O grupo responderá as seguintes questões:
 - Qual é a forma dessa última curva?
 - Esta é parecida com a anterior;
 - Em que essas curvas são parecidas e em que são diferentes?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem a forma parecida com a curva que o grupo desenhou?
 - Pegue a peça correspondente do corte do cone e molhe a parte do corte com tinta de carimbo e carimbe-a sobre uma folha de papel;
 - Em seguida o grupo responderá a seguinte questão:
 - O contorno da figura carimbada é parecido com o que o grupo desenhou anteriormente?
- Na discussão o professor ajudará o grupo a compreender que as curvas obtidas são representações de uma circunferência onde:
- O ponto onde foi fixado o piones é chamado centro da circunferência e o tamanho da corda é o tamanho do raio.

Na sequência da atividade o professor orienta o grupo para a formação dos dois conceitos, apresentando-os em videoprojetor.

Videoprojetor

Conclusão 1. - *Do corte do cone veio a idéia de que a curva da circunferência é resultante da interseção de um cone circular reto com um plano paralelo a sua base; - do desenho, veio a idéia de que a circunferência é o lugar geométrico onde todos os pontos estão a mesma distância de um ponto fixo chamado centro.*

Percebido o conceito da circunferência nas duas perspectivas o professor colocará a seguinte questão:

- Conhecem alguns instrumentos e artefatos culturais que fazem parte do vosso contexto sócio-cultural que possibilita a visualização desta curva? se sim descreva-os.

Grupo nº 1 (b)

- Tome um pedaço de corda, coloque uma folha de papel em branco na folha de cartolina de apoio, fixe dois piones de forma que a distância entre eles seja menor que o comprimento da corda e prenda-a usando os piones. Coloque um lápis no laço da corda e desloque-o partindo de um ponto e retornando até ele, de modo a manter a corda bem esticada sobre o papel.
- O grupo observará a curva desenhada depois responderá as seguintes questões:
 - Já viu a forma desta curva antes?
 - O grupo sabe qual é o seu nome?
- Troque o pedaço de corda por um menor e repita o mesmo procedimento;
- O grupo responderá as seguintes questões:
 - Qual curva foi formada?
 - Esta curva é parecida com a anterior?

- Em que são parecidas e em que são diferentes?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem a forma parecida com essa curva?
 - O grupo pegará a peça correspondente ao corte do cone, molhará com tinta de caneta hidrocolor e carimbará sobre a folha de papel. depois responderá a seguinte questão:
 - A forma do contorno da figura carimbada é parecida com as curvas que o grupo desenhou?
-

A partir da discussão o grupo saberá que as curvas desenhadas são representações de uma elipse e os pontos onde foram fixados os pioneses são chamados de focos da elipse. Na sequência o professor ajudará os alunos a formarem o conceito da elipse nas duas vertentes, apresentando-os em videoprojetor:

Videoprojetor

Conclusão 2. - *Do corte do cone vem a ideia de que a elipse é a curva que resulta da interseção de um cone circular reto com plano oblíquo à sua base;*
- *do desenho vem a ideia de que a elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma da distância aos focos é constante.*

O professor ajudará os alunos a compreender através das atividades por eles executadas que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é igual a medida do comprimento da corda.

Percebido o conceito da elipse nas duas perspectivas, o professor colocará a seguinte questão:

- Conhecem alguns artefatos culturais ou objetos que fazem parte do vosso contexto que permitem a visualização desta curva? Descreva alguns e explique como podemos interpretá-los matematicamente.
-

Grupo nº 3

- Use uma folha de papel em branco;
- Desenhe uma reta e nomeie-a por d , marque fora dessa reta um ponto e nomeie-o por F .
- Selecione um ponto D sobre a reta e dobre o papel de forma a fazer coincidir os pontos D e F .
- Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a reta d . Realizando esta operação um número suficiente de vezes, observar-se-á que as dobragens parecem tangenciar uma curva.
- Depois disso o grupo responderá as seguintes questões:
 - O que têm em comum os pontos desta curva?
 - Relacionar as dobras feitas com o conceito de mediatriz de um segmento que une dois pontos.
 - O grupo já viu uma curva geométrica como esta?
 - O grupo sabe o nome dela?
 - Qual corte do conjunto de cortes do cone tem uma forma parecida com esta?

- Pegue a peça que corresponde ao corte do cone, molhe com tinta de caneta hidrocolor e carimbe-a sobre a folha de papel. O contorno da figura carimbada é parecido com a curva que o grupo desenhou?

Na discussão o Professor ajudará os alunos a compreender que as curvas obtidas são representações de uma parábola, a reta d é a diretriz e o ponto F o foco da parábola. E na formação do conceito nas duas vertentes, o professor ajudará o grupo a entender apresentando-os em videoprojetor:

Videoprojetor

Conclusão 3. - *Do corte vem: a parábola é a curva que resulta da interseção de um cone com um plano paralelo a uma das suas geratrizes;*
- *do desenho o grupo entenderá que a parábola é o lugar geométrico onde todos os pontos encontram-se a mesma distância de um ponto fixo chamado foco e de uma reta chamada diretriz.*

Percebido o conceito da parábola nas duas perspectivas o professor colocará a seguinte questão:

- Conhecem alguns instrumentos e artefatos culturais que fazem parte do vosso contexto sócio-cultural que possibilita a visualização desta curva? Se sim descreva-os.

Grupo nº 3

Obs: Para a atividade deste grupo, foi preciso uma tira de papel de cartolina com alguma espessura para desenhar a cônica, obtida pelo seguinte procedimento: recortaram-se duas tiras de papel de cartolina de tamanho $10cm \times 3cm$ e colou-se uma por cima da outra. Com um furador fez-se um furo numa das extremidades da tira.

- Coloque uma folha de papel em branco na folha de cartolina de apoio;
- Trace duas retas perpendiculares na folha de papel, uma vertical e outra horizontal, tais que, o ponto de interseção esteja aproximadamente no centro da folha. Nomeie de x e y .
- Marque dois pontos na reta x de maneira que sejam simétricos em relação à y . chame-os de F_1 e F_2 .
- Com o auxílio de um piónés prenda a tira de papel para desenhar a cônica na extremidade não furada no ponto F_1 .
- Pegue um pedaço de corda de comprimento menor que $15cm$ e amarre-o no furo da tira de papel feito numa das suas extremidades para desenhar a cônica e posicione obliquamente a tira em relação ao eixo x .
- Amarre um piónés na outra ponta da corda e prenda-o no ponto F_2 . **Obs: faça com que a corda tenha uma folga e tenha uma posição paralela em relação ao eixo y .**
- Com o lápis, estique a corda de cima para baixo, de modo a encostá-la na tira de papel e a movimente em torno de F_1 , mantendo a ponta do lápis encostada na folha de papel e a corda esticada, pare quando o lápis chegar ao final da corda.
- Agora prenda a tira de papel com o auxílio de um piónés no ponto F_2 .

- Amarre um piones na outra ponta da corda e prenda-o no ponto F_1 . **Obs: faça com que a corda tenha uma folga e tenha uma posição paralela em relação ao eixo y .**
 - Com o lápis, estique a corda de cima para baixo, de modo a encostá-la na tira de papel e a movimente em torno de F_2 , mantendo a ponta do lápis encostada na folha de papel e a corda esticada, pare quando o lápis chegar ao final da corda.
 - O quê que o grupo observou?
 - O grupo já viu alguma curva parecida com esta?
 - O grupo sabe o nome dela?
 - No conjunto de cortes do cone existe algum corte parecido com esta curva?
 - Pegue a peça que corresponde ao corte do cone, molhe a parte do corte com tinta de carimbo e carimbe-a sobre a folha de papel. O contorno da figura carimbada é parecido com as curvas que o grupo desenhou?
-

Da discussão, o grupo perceberá que as curvas obtidas são representações de uma hipérbole. Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da hipérbole.

Desta feita o professor orientará a formação do conceito nas duas vertentes apresentando-os em videoprojetor.

Videoprojetor

Conclusão 4. - *Do corte do cone vem ideia de que a hipérbole é a curva resultante da interseção entre um cone circular reto de duas folhas com um plano paralelo ao seu eixo; - do desenho, através da promoção de alguma experimentação e alguma observação de repetições na medição de distâncias, garantindo um tempo necessário aos alunos para descobrirem propriedades comuns a vários pontos. Vem a ideia de que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos focos é constante.*

Na sequência o professor orientará os seus alunos a responderem a seguinte questão:

- Conhecem alguns artefatos culturais e objetos que fazem parte da vossa realidade que possibilita a visualização desta curva? Descrevam alguns, explicando como podemos interpretá-los matematicamente.
-
-

Continuando, o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 1:

1.1 Visualize as imagens apresentadas em videoprojetor e identifique o tipo de cônica que elas representam. Como explicá-las matematicamente?

O professor apresenta as imagens em videoprojetor

Videoprojetor



Resolução:

Os alunos vão identificando cada uma das cónicas visualizadas na imagem e vão explicando matematicamente cada uma delas.

Obs: algumas dessas imagens foram interpretadas geometricamente no capítulo 3.

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.
- Os alunos vão escrever um relatório explicando os métodos utilizados, descrevendo detalhadamente as facilidades e dificuldades apresentadas. A partir dos relatórios individuais, avaliar-se-á a capacidade de argumentação, a lógica do raciocínio, a compreensão correta dos conceitos envolvidos. Por outro lado, os alunos vão pensar num outro modelo construindo com materiais alternativos para o conjunto de cortes do cone.

Referências

Unidade Didática 1.4.1 - Cónicas

Tópico Central - Equação reduzida das cónicas.

Aula nº: 3

Data: -/-/—

Duração: 90 min.

Sumário

Equação reduzida das cónicas.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Representação gráfica de coordenadas de um ponto num sistema de coordenadas retangulares.
- Distância entre dois pontos no plano.
- Polinômios e equações do segundo grau com duas variáveis.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Determinar as equações reduzidas de uma curva cónica
- Identificar e construir as representações gráficas das cónicas.
- Resolver exercícios relacionados com as cónicas.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de identificar curvas cónicas no contexto em estudo.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O professor começa por fazer as seguintes perguntas aos alunos:

Conhecem o procedimento para a determinação da distância entre dois pontos? A seguir recorda o procedimento

Quais são os tipos de cónicas aprendidos na aula passada e como são definidas? o professor ajuda os alunos a recordar em seguida, questiona outra vez, como determinar as equações para cada uma delas? Em quanto os alunos refletem, o professor apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos.

Videoprojetor

Aulas nº: 3

Data:—/—/—

Sumário:

Equações reduzidas das cónicas.

Resolução de exercícios de aplicação.

Na sequência o professor pergunta outra vez, como determinar a equação reduzida da circunferência?

Em seguida apresenta o procedimento em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 12. A circunferência de centro O e raio r maior que zero, é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a distância r de O (Araújo, 2012, p.37).

Tendo em conta a sua definição, vamos deduzir a equação reduzida da circunferência a partir da Figura (A.1)

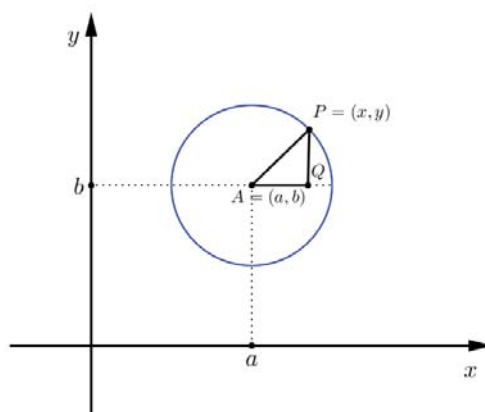


Figura A.1: Circunferência

Como o triângulo $\triangle APQ$ é retângulo em Q , podemos determinar a distância entre o centro A e o ponto P aplicando o teorema de Pitágoras.

$$d^2(A, P) = r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A equação obtida é a reduzida da circunferência e no caso particular em que o centro está na origem das coordenadas, a equação é: $x^2 + y^2 = r^2$.

Exemplo: **Exercício 1:**

1.1 Determine a equação da circunferência centrada em (3, 2) de raio 5.

Resolução:

Depois de analisado o exercício é resolvido no quadro pelo professor.

Quadro

A equação da circunferência centrada em (3, 2) e raio 5 é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

Continuando questiona outra vez, como determinar a equação reduzida da elipse?

Depois de ouvir as diferentes opiniões dos alunos o professor apresenta o procedimento em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 13. *A elipse é o conjunto dos pontos de um plano, tais que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos (focos) do plano é uma constante positiva.*

Para deduzirmos a equação reduzida da elipse, comecemos por introduzir um sistema conveniente de coordenadas da seguinte forma: Escolhemos como eixos das abcissas a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 , e a origem no ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Este ponto é chamado centro da elipse.

Se F_2 tem coordenadas $(c, 0)$, $c > 0$, então F_1 tem coordenadas $(-c, 0)$. A distância de F_1 a F_2 é $2c$.

Denotemos $2a$ a soma constante das distâncias de P a F_1 e F_2 . Pela definição da elipse $P(x, y)$ pertencerá a elipse se e somente se:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificando os termos simétricos temos:

$$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{4}$, temos:

$$xc = -a^2 + a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$(xc + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right)^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$-x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = -a^2(a^2 - c^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Graficamente observa-se que os focos e o ponto P da elipse são vértices de um triângulo, logo a distância entre os focos $2c$ é menor que a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, ou seja $2c < 2a$.

Então $c < a$ e podemos dividir toda equação pela quantidade positiva $b^2 = a^2 - c^2$. Assim a equação fica:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.1})$$

Observamos que o gráfico da equação (4.1) é simétrico em relação a ambos os eixos coordenados. Quando $y=0$, então $x=\pm a$, e quando $x=0$, vem $y=\pm b$. Assim a elipse interseca o eixo dos xx nos pontos $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ e interseca o eixo dos yy nos pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$. O segmento $\overline{V_1V_2}$ chama-se eixo maior da elipse e o segmento $\overline{B_1B_2}$ chama-se eixo menor.

Como exemplo o professor apresenta o seguinte exercício:

Exercício 2:

2.1 Determinar a equação da elipse que tem focos $(0, \pm 4)$ e vértice no ponto $(0, 6)$.

Resolução:

O professor resolve o exercício no quadro enquanto os alunos prestam atenção.

Quadro

Como os focos estão no eixo dos yy a equação é do tipo A.1, e como $c = 4$ e $a = 6$ tem-se:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20.$$

A equação fica por isso:

$$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$$

Continuando questiona outra vez como obter a equação reduzida da parábola? Depois de ouvir as ideias dos alunos, o professor apresenta o procedimento em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 14. *Uma Parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma reta fixa no plano. O ponto fixo chama-se **foco** e a reta*

fixa chama-se diretriz.

A equação reduzida de uma parábola obtém-se quando colocamos um sistema de coordenadas numa posição especial relativamente ao foco e à diretriz. Seja o eixo do xx a reta que passa no foco e é perpendicular à diretriz, e considere-se a origem no vértice. Então, escolhemos $a > 0$, designamos as coordenadas do foco $F(a, 0)$, e a equação da diretriz por $x = -a$ (ver figura A.2)

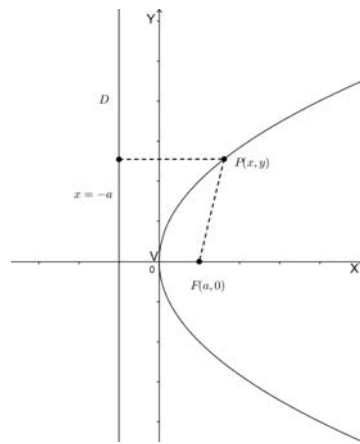


Figura A.2: Parábola (a)

Como $P(x, y)$ é equidistante ao foco e à diretriz tem-se a igualdade das distâncias:

$$x + a = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

elevando ao quadrado ambos os lados da equação e reorganizando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned} (x + a)^2 &= (x - a)^2 + y^2, \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= x^2 + 2ax + a^2, \end{aligned}$$

$$y^2 = 4ax$$

Esta é a equação de uma parábola com vértice na origem e foco em $(a, 0)$. Como $a > 0$, x pode ter qualquer valor positivo ou zero mas não pode ter valores negativos. Logo o gráfico pode estender-se indefinidamente ao longo do dos 1º e 4º quadrantes, e o eixo da parábola coincide com o semi-eixo positivo dos xx . Fica evidente a partir da equação que a parábola é simétrica em relação ao seu eixo, porque

$$y = \pm\sqrt{4ax}.$$

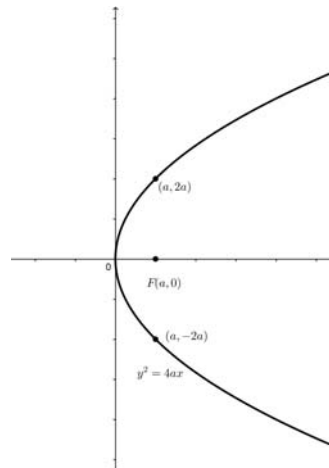


Figura A.3: Parábola (b)

Também se pode considerar o foco de uma parábola à esquerda da origem. Nesse caso tem-se $a < 0$, e a variável x só pode tomar valores negativos ou zero.

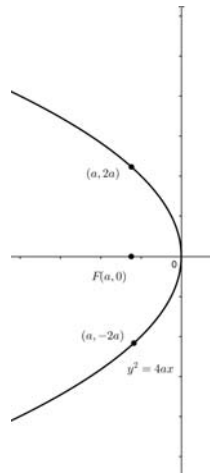


Figura A.4: Parábola (c)

Podemos ainda trocar os papéis das variáveis x e y e colocar o foco no eixo dos yy , obtendo a parábola de equação:

$$x^2 = 4ay$$

A parábola desta equação é voltada para cima quando $a > 0$ e é voltada para baixo quando $a < 0$, tal como se observa nas seguintes figuras:

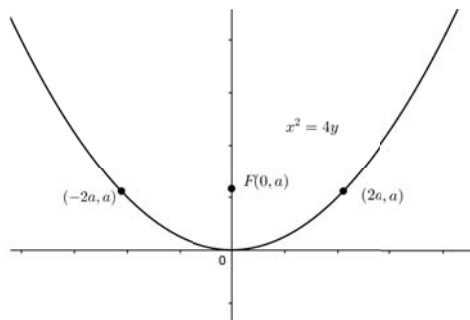


Figura A.5: Parábola (d)

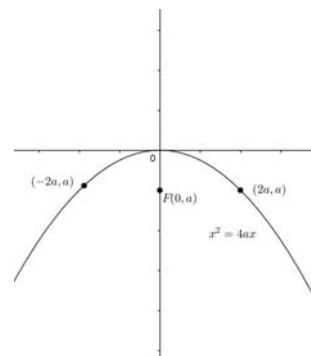


Figura A.6: Parábola (e)

Vamos agora considerar o caso em que o eixo da parábola é paralelo a um dos eixos coordenados mas não coincide com nenhum deles. Na figura A.7 o vértice é no ponto (h, k) e o foco é $F(h + a, k)$. Introduzimos um novo par de eixos por translação para o ponto (h, k) .

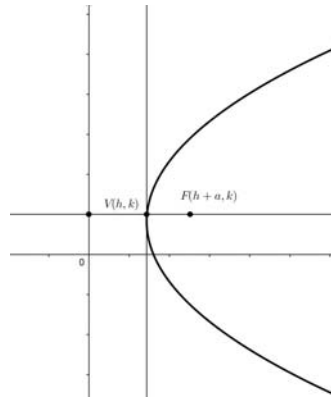


Figura A.7: Parábola (f)

Nas novas coordenadas $x_1 = x - h$ e $y_1 = y - k$ a distância do foco a origem $(x, y) = (h, k)$ é a , logo a parábola satisfaz a equação

$$y_1^2 = 4ax_1$$

ou equivalentemente

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

Observamos na equação e na figura que, quando $a > 0$, o fator $x - h$ tem que ser maior igual a zero, logo a parábola tem abertura para a direita. No caso em que $a < 0$, a parábola abrirá para a esquerda. Em qualquer dos casos o eixo da parábola a reta $y = k$. Podemos obter de forma análoga a equação de uma parábola com eixo paralelo ao eixo dos yy . Podemos concluir que a equação standard de uma parábola tem uma das seguintes formas:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad (\text{A.2})$$

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \quad (\text{A.3})$$

Observamos que cada uma das equações A.2 ou A.5 é quadrática numa das variáveis e linear na outra. Podem desenvolver-se os quadrados escreverem-se respetivamente nas formas:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como exemplo o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 3:

3.1 Uma parábola, cujo vértice é a origem e cujo eixo de simetria é coincidente com o eixo x , passa pelo ponto $P = (-2, 4)$. Determinar a equação da parábola, o seu foco e a sua diretriz.

Resolução:

O Exercício é resolvido no quadro enquanto os alunos prestam atenção.

Quadro

$$V = (0, 0)$$

Como o eixo de simetria coincide com o eixo x , o foco pertence ao eixo das ordenadas, logo a equação tem a seguinte forma:

$$y^2 = 4ax$$

$$4^2 = 4a(-2) \Leftrightarrow 16 = -8a \Leftrightarrow a = -2$$

Como $a < 0$, a concavidade é voltada para a esquerda. Logo a equação da parábola é:

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$y^2 = -8x$$

$$x = \frac{-y^2}{8}$$

$$F = (-2, 0)$$

$$l : x = 2$$

Graficamente temos:

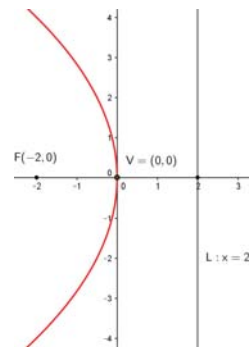


Figura A.8: Parábola com foco no eixo das abcissas

Na sequência o professor questiona outra vez, como obter a equação reduzida de uma hipérbole?

Depois de ouvir as ideias dos alunos o professor apresenta o procedimento em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 15. A hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano, tais que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos (focos) do plano é uma constante positiva.

Para obtermos a equação da hipérbole, escolhamos um sistema de coordenadas com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e denotemos a distância (constante) por $2a$.

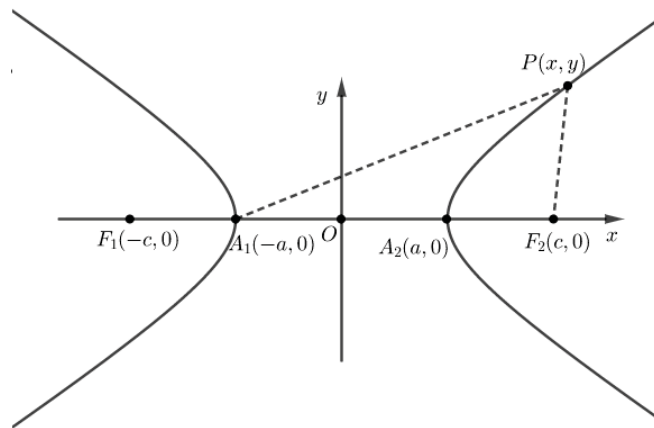


Figura A.9: Representação de focos da hipérbole

Pela definição, o ponto $P(x, y)$ pertence a hipérbole se e somente se a condição abaixo for verdadeira:

$$|F_1P| - |F_2P| = 2a$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \end{aligned}$$

Simplificando os termos simétricos temos:

$$-4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Multiplicando ambos os membros por $-\frac{1}{4}$, temos:

$$\begin{aligned} xc &= -a^2 - a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ xc + a^2 &= -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (xc + a^2)^2 &= (-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\ x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \end{aligned}$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como no gráfico da hipérbole (ver Figura A.10) a relação que se pode estabelecer entre a, b, c é

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

onde a é a metade do eixo do eixo real ou transversal, b a metade do eixo conjugado e c a metade da distância focal. tomando $b^2 = c^2 - a^2$ e substituindo na expressão $x^2(c^2 - a^2) = a^2(c^2 - a^2)$, temos:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.6})$$

A divisão por $c^2 - a^2$ pode fazer-se porque a distância focal $2c$ é maior que a medida do eixo transversal, logo $c > a$. O gráfico da equação 2.11 é simétrico em relação aos eixos coordenados. Para percebermos que que valores podem ter as variáveis podemos usar a equação para isolar cada uma delas:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}$$

e

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Vemos na primeira destas equações que y pode ter qualquer valor, mas da segunda conclui-se que $x^2 > a^2$. Assim a hipérbole afasta-se dos eixos indefinidamente em cada quadrante. Mas não tem pontos entre as retas verticais $x = -a$ e $x = a$. A hipérbole dois ramos separados e os pontos $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ chamam-se vértices. Ao segmento V_1V_2 chama-se **eixo transversal**. O segmento entre $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$ chama-se **eixo conjugado**, mas não contém pontos da hipérbole. O centro da hipérbole é a origem.

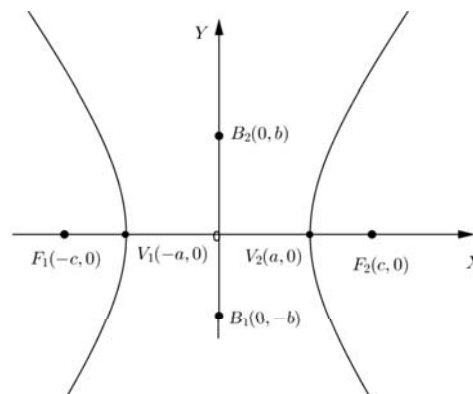


Figura A.10: Hipérbole

As relações entre a , b e c não são as mesmas na elipse e na hipérbole. Para a elipse $a > c$, $c^2 = a^2 - b^2$ e $a > b$. Para a hipérbole $c > a$, $c^2 = a^2 + b^2$ e não há restrições na relação de a com b . Se os focos da hipérbole estiverem no eixo dos yy então a equação da

hipérbole fica

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.7})$$

Nesse caso os vértices são $V_1(0, -a)$ e $V_2(0, a)$, mas as relações entre a , b e c não se alteram. As equações gerais da hipérbole quando os eixos são paralelos aos eixos coordenados e têm origem num ponto de coordenadas (h, k) são:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.8})$$

ou

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.9})$$

Como exemplo o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 4:

4.1 Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, cujo eixo transversal mede 4.

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

Como o eixo transversal mede 4, temos:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$3^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 5$$

como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

temos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Em seguida o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 5:

5.1 Pretendendo-se fazer a base circular de um Onjango na aldeia de Njimba Silili, os construtores amarram nas extremidades de uma corda de $2m$ duas estacas, ao serem esticadas, uma foi fixada ao centro e a outra era forçada a girar em volta do centro. Suponha que a estaca central foi colocada no ponto $(3, 5)$. Qual é a equação da base circular do Onjango.

O professor apresenta a imagem em videoprojetor.

Videoprojetor

**Resolução:**

Depois de analisado o exercício é resolvido no quadro pelo professor.

Quadro

O ponto $(3, 5)$ onde foi colocada a estaca central é o centro, e a corda mede $2m$ portanto é o raio, logo a equação da base circular do Onjango é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

Continuando, o professor propõe a resolução dos seguintes exercícios.

Exercício 6:

6.1 Para fazer um canteiro de tomateiros, um agricultor do Njimba Silili traçou uma elipse tangenciando, nos respectivos pontos médios, os quatro lados de um terreno

retangular de $4m$ por $3,2m$. Para isso, usou uma corda esticada presa em duas estacas por suas extremidades M e N , como mostra a figura. Qual a distância entre os pontos M e N ?

O professor apresenta a imagem em videoprojetor

Videoprojetor

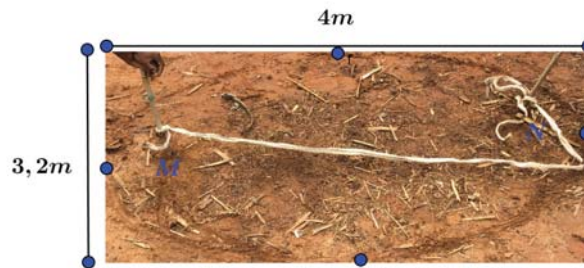


Figura A.11: Canteiro elíptico (a)

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta os exercícios é resolvidos no quadro com a mediação do professor.

Quadro

Se a elipse traçada pelo agricultor tangencia o terreno retangular que tem como comprimento $4m$, então o comprimento do eixo maior desta elipse é $4m$. Sabendo que a é a metade do eixo maior, então:

$$a = \frac{4m}{2} = 2m$$

De modo análogo, b é o comprimento do eixo menor, então:

$$b = \frac{3,2m}{2} = 1,6m$$

Se M e N representam os focos da elipse traçada pelo agricultor, então:

$$|MN| = 2c$$

Então para acharmos a distância de $|MN|$, precisamos do valor de c , para tal vamos analisar a figura a baixo:

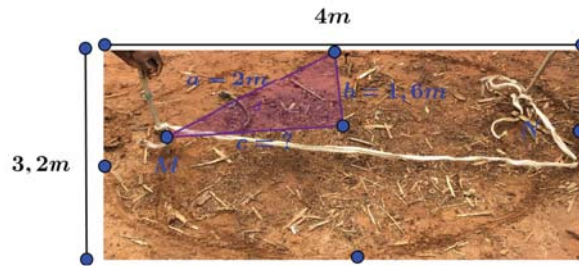


Figura A.12: Canteiro elíptico (b)

Como o triângulo formado é retângulo, então pelo teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$2^2 = 1,6^2 + c^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 4 - 2,56 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = 1,44 \Leftrightarrow$$

$$c = 1,2$$

logo

$$|MN| = 2,1,2 \Leftrightarrow$$

$$|MN| = 2,4 \Leftrightarrow$$

Resposta: A distância entre os pontos M e N é de $2,4m$

Obs: os dois últimos exercícios foram elaborados com base aos pressupostos narrados no capítulo 3.

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Referências

[1] [5]

Unidade Didática 1.4.1 - cónicas

Tópico Central - Equação geral das cónicas.

Aulas nº: 4

Data: -/-/—

Duração: 45 min.

Sumário

Equação geral das cónicas.

Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Representação gráfica de coordenadas de um ponto num sistema de coordenadas retangulares.
- Distância entre dois pontos no plano.
- Polinômios e equações do segundo grau com duas variáveis.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Determinar as equações gerais de uma curva cónica
- Identificar e construir as representações gráficas das cónicas.
- Resolver exercícios relacionados com a equação geral das cónicas.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de identificar curvas cónicas no contexto em estudo.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Obs: Esta aula é uma continuação da anterior, por isso foi planejada para um período de 45min

O professor começa por fazer uma retrospectiva da aula passada, recordando aos alunos a definição analítica e sintética das cónicas bem como o procedimento para a obtenção das suas equações reduzidas, na sequência coloca as seguintes questões: Qual é a forma da equação geral das cónicas? Enquanto os alunos procuram responder apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos.

Videoprojetor

Aula nº: 4 Data:—/—/—

Sumário:

Equações gerais das cónicas.

Resolução de exercícios de aplicação.

Na sequência o professor apresenta em videoprojetor as várias equações reduzidas das cónicas estudadas na aula anterior, e pede aos alunos para identificarem as particularidades comuns e não comuns entre elas.

Videoprojetor

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 4ax$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Com a identificação, o professor espera que os alunos apontem como umas das semelhanças o fato de todas elas serem do segundo grau, em duas variáveis e como diferença entre elas, a forma como cada uma está estruturada algebricamente.

Depois desta discussão o professor apresenta o conteúdo em videoprojetor.

Videoprojetor

A equação geral de uma cónica é uma equação polinomial do segundo grau em duas variáveis do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Continuando questiona outra vez, que condições devem respeitar os coeficientes desta equação para a identificação de cada uma das cónicas?

Depois de ouvir as diferentes opiniões dos alunos o professor apresenta as condições em videoprojetor, afirmando que o gráfico de uma cónica pode ser imediatamente determinado quando a equação é

reduzida a uma das suas formas simplificadas, para tal a determinação pode ser feita a partir dos coeficientes da equação geral.

Videoprojetor

Uma equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

representa

- Uma circunferência se $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$
 - Uma elipse se $C^2 - 4AB < 0$
 - Uma parábola se $C^2 - 4AB = 0$
 - Uma hipérbole se $C^2 - 4AB > 0$
-

Continuando o professor apresenta o seguinte exercício:

Exercício 1:

2.1 Identifique cada uma das cónicas e escreva a sua forma reduzida.

1. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$
2. $x^2 - 10x + 2y + 23 = 0$
3. $x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$
4. $5y^2 - 6x - 3y^2 - 10y - 13 = 0$

Resolução:

O professor resolve o exercício no quadro enquanto os alunos prestam atenção.

Quadro

Quanto ao primeiro exercício, olhando pela forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, temos

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$$

$$A = 1, \quad B = 1 \quad C = 0$$

É possível verificar que $A = B \neq 0$, $C = 0$. Tudo indica para uma circunferência, para confirmarmos vamos verificar a outra condição.

$$D^2 + E^2 > 4AF$$

Como $D = 4$, $E = 8$ e $F = 2$, então

$$4^2 + 8^2 > 32$$

O que confirma ser uma circunferência, cuja forma reduzida é obtida pelo seguinte procedimento.

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$$

Vamos completar quadrados

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = -2 + 4 + 16$$

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 18$$

Portanto trata-se de uma circunferência centrada em $(-2, -4)$ com o raio $3\sqrt{2}$.

Quanto a segunda $x^2 - 10x + 2y + 23 = 0$, temos:

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 0$$

A diferença do caso anterior, temos $A \neq B$, então vamos aplicar o binômio discriminante.

$$C^2 - 4AB = 0^2 - 4.1.0 = 0$$

Logo a condição aponta para uma parábola cuja equação reduzida é obtida pelo seguinte procedimento:

$$x^2 - 10x + 2y + 23 = 0$$

completando quadrado temos:

$$x^2 - 10x + 25 + 2y + 23 - 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 + 2(y - 1) = 0$$

$$(x - 5)^2 = -2(y - 1)$$

Esta é a equação reduzida da parábola com o vértice no ponto $(5, 1)$.

Quanto ao terceiro exercício $x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$, temos:

$$A = 1 \quad B = 4 \quad C = 0$$

Como $A \neq B$, não probabilidade de vir a ser uma circunferência, portanto vamos aplicar o binômio discriminante.

$$C^2 - 4AB = 0^2 - 4.1.4 < 0$$

A condição aponta para uma elipse, vamos obter a sua forma reduzida:

$$x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$$

Completando quadrado temos:

$$x^2 + 4x + 4 + 4(y^2 + 2y + 1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)^2 + 4(y + 1) = 4$$

Dividindo tudo por 4 temos:

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + (y + 1)^2 = 1$$

Trata-se de uma elipse centrada em $(-2, -1)$, com eixo maior igual a 4 e eixo menor igual a 2

Quanto a quarta $y^2 - 8y + 9x + 16 = 0$, temos:

$$A = 0 \quad B = 1 \quad C = 0$$

Aplicando o binômio discriminante temos:

$$C^2 - 4AB = 0^2 - 4.0.1 = 0$$

A condição aponta para uma parábola, pelo mesmo procedimento a sua equação reduzida é:

$$(y - 4)^2 + 9x = 0$$

Trata-se de uma parábola com o vértice no ponto $(0, 4)$.

Quanto ao quinto exercício, $5y^2 - 6x - 3x^2 - 10y - 13 = 0$, temos:

$$A = -3 \quad B = 5 \quad C = 0$$

Aplicando o binômio discriminante temos:

$$C^2 - 4AB = 0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (5) > 0$$

A condição aponta para uma hipérbole. Vamos obter a sua equação reduzida.

$$5y^2 - 6x - 3x^2 - 10y - 13 = 0$$

Completando quadrado temos:

$$5(y^2 - 2y + 1) - 3(x^2 + 2x + 1)^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5(y - 1)^2 - 3(x + 1)^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

dividindo tudo por 5, temos:

$$\frac{(y - 1)^2}{3} - \frac{(x + 1)^2}{5} = 1$$

Continuando o professor propõe os seguintes exercícios para os alunos resolverem na aula:

Exercício 1:

2.1 Identifique cada uma das cónicas e escreva a sua forma reduzida.

1. $9x^2 - 18y^2 + 24y - 26 = 0$

2. $3x^2 - 12x + 2y^2 + 8y = 14$

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Unidade Didática 1.4.4 - Curvas parametrizadas

Tópico Central - Curvas parametrizadas no plano.
Curvas definidas por equações paramétricas

Aula nº: 5

Data:

Duração: 90 min.

Sumário

Equações paramétricas.
Definição de curvas parametrizadas.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Representação gráfica de uma função num sistema de coordenadas retangulares.
- Operações básicas com vetores.
- Conhecimento básico sobre curva no plano.
- Relações trigonométricas.

Obs: Para que haja eficácia no nível de partida no que toca ao tratamento de funções nas aulas de parametrização de curvas é necessário que o professor de Geometria analítica tenha uma correspondência com o professor de Análise matemática.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Parametrizar uma curva.
- Definir curvas paramétricas
- Obter os resultados do cálculo de curvas parametrizadas no plano e no espaço.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de usar os conhecimentos aprendidos na resolução de problemas geométricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O professor começa por escrever a seguinte função no quadro

Quadro

$$y = f(x)$$

Na sequência fará a seguinte questão aos alunos: Imaginemos que queremos determinar um ponto sobre esta função, qual seria o procedimento? Dos alunos o professor espera que respondam da seguinte forma: temos que atribuir um valor para x e a partir daí obtermos o valor de y .

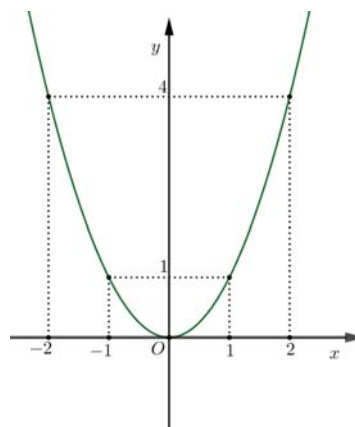
O professor apresenta em videoprojetor uma parábola de equação $y = x^2$, pedindo aos alunos para identificarem alguns pontos da curva usando uma tabela de valores entre -2 e 2 . Da linha de pensamentos dos alunos, pode resultar o procedimento que segue.

Videoprojetor

$$y = x^2$$

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Obs: Depois de representar os pontos no sistema de eixo, o professor pede aos seus alunos para recordarem o traçado de uma parábola e posteriormente unir os pontos representados com este traçado.

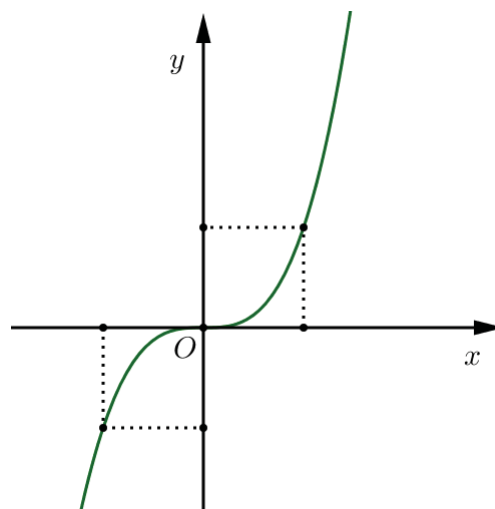


O Professor apresenta em videoprojetor outra função conhecida pelos alunos e pede novamente para identificarem alguns pontos da curva usando uma tabela de valores entre -1 e 1 , pelo mesmo procedimento, obter-se-á o seguinte.

Videoprojetor

x	y
-1	-1
0	0
1	1

$$y = x^3$$



Continuando questionará outra vez. Para curvas mais gerais, será que também conseguimos definir as coordenadas (x, y) de cada ponto da curva no plano a partir de valores atribuídos a um número real? Os alunos farão silêncio por desconhecem a resposta desta questão, então o professor apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos da aula.

Videoprojetor

Aulas nº: 5

Data:

Sumário:

Conceito de curva parametrizada.

Equações paramétricas.

Resolução de exercícios de aplicação.

O professor pede aos alunos para desenharem uma curva, conforme o desenho da figura (A.13). Em seguida o professor observa que os seus desenhos podem ser vistos como deformação de um fio (ou de plasticina, ou uma palha). Lembrando-lhes que parece existir uma correspondência entre um segmento de reta e o desenho feito.

Videoprojetor



Figura A.13: Curva (a) ([43], p. 11)

Depois de ouvir as diferentes opiniões dos alunos conducentes a identificação da curva, pedirá aos alunos para desenharem um sistema de eixos sobre a curva desenhada e averiguar quais deles podem ser funções de x ou de y .

Diante das diferentes ideias dirigidas para o conceito de curva como uma deformação contínua de um intervalo, questionará outra vez. O que é uma curva parametrizada? respeitando as ideias dos alunos apresenta a imagem de curva parametrizada num sistema de eixos bem como a sua definição.

Videoprojetor

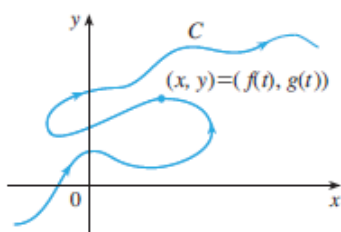


Figura A.14: Curva (b) ([44], p. 650)

Definição 16. Seja (x, y) um ponto pertencente a uma curva C do plano \mathbb{R}^2 . Chamam-se Equações Paramétricas da curva C às equações:

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

que definem ambas as coordenadas x e y como funções contínuas de uma terceira variável t , a que se chama parâmetro.

Na sequência questionará outra vez, o que são equações paramétricas?

Depois de ouvir as diferentes opiniões, orienta a formação da seguinte definição:

Videoprojetor

Definição 17. Quando x e y são dadas como funções de uma terceira variável t (denominada parâmetro), as equações

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

são chamadas equações paramétricas, onde f e g são funções contínuas num intervalo de números reais.

Obs: A curva com equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ $a \leq t \leq b$ tem ponto inicial $(f(a), g(a))$ e ponto final $(f(b), g(b))$

Continuando, o professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 1:

1 Determine as equações paramétricas da seguinte curva, considerando t a variar no intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ e posteriormente estenda para um caso mais geral.

1.1 $y = x^2$

Resolução:

O exercício é resolvido no quadro em forma de elaboração conjunta.

Quadro

Para determinarmos uma equação paramétrica da parábola de equação cartesiana $y = x^2$, vamos supor que desejamos associar x e y ao ângulo $\theta = t$.

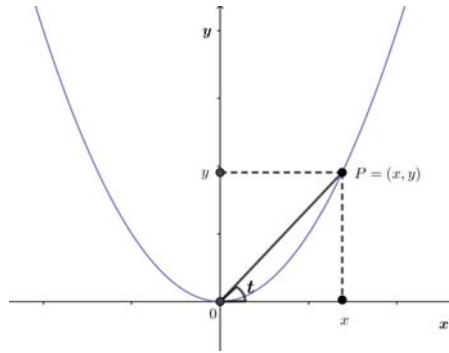


Figura A.15: Parábola parametrizada (a)

Do triângulo retângulo $\triangle OPX$, vem: $\tan t = \frac{y}{x}$, como $y = x^2$ (1), temos:

$$\tan t = \frac{x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$x = \tan t$$

Substituindo o valor de x em (1), temos:

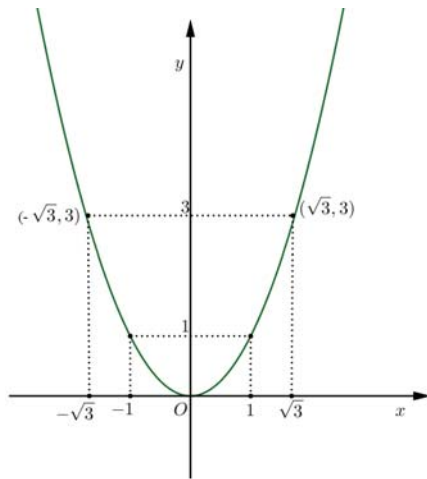
$$y = (\tan t)^2$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da parábola dadas por:

$$\begin{cases} x = \tan t \\ y = \tan^2 t \end{cases}$$

Atribuindo valores do intervalo dado a t , para $r(t) = (\tan t, \tan^2 t)$, temos:

$$\begin{array}{ll} r\left(\frac{7\pi}{4}\right) = (-1, 1) & r(0) = (0, 0) \\ r\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (-\sqrt{3}, 3) & r\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1, 1) \\ & r\left(\frac{\pi}{3}\right) = (\sqrt{3}, 3) \end{array}$$



Para o caso mais geral, vamos determinar uma equação paramétrica da parábola de equação cartesiana $y = \frac{1}{4a}x^2$, onde a é a abscissa do foco, cuja abordagem mais detalhada encontra-se no capítulo III. suponha que desejamos associar x e y ao ângulo $\theta = t$.

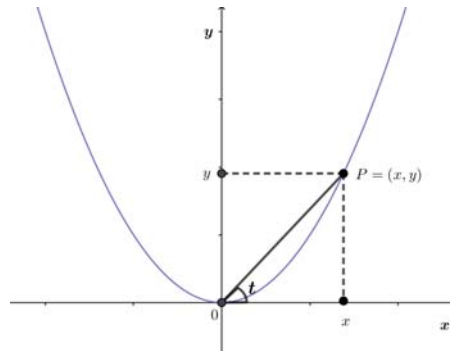


Figura A.16: Parábola parametrizada (b)

Do triângulo retângulo $\triangle OPX$, vem: $\tan t = \frac{y}{x}$, como $y = \frac{1}{4a}x^2$ (1), temos:

$$\tan t = \frac{\frac{1}{4a}x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\tan t = \frac{1}{4a}x^2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\tan t = \frac{x}{4a} \Leftrightarrow$$

$$x = 4a \tan t$$

Substituindo o valor de x em (1), temos:

$$y = \frac{1}{4a}(4a \tan t)^2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{4a}(16a^2 \tan^2 t) \Leftrightarrow$$

$$y = 4a \tan^2 t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da parábola dadas por:

$$\begin{cases} x = 4a \tan t \\ y = 4a \tan^2 t \end{cases}$$

Na sequência o professor propõe a resolução do exercício 2.

Exercício 3:

3 Determine as equações paramétricas da circunferência de raio 4, com o centro na origem, considerando t a variar no intervalo $[0, 2\pi]$ e posteriormente determine um caso mais geral para ela.

3.1 $y = x^2$

Resolução:

O professor resolve no quadro com a participação dos alunos.

Quadro

Para obtermos as equações paramétricas da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, vamos supor que desejamos associar x e y com o ângulo t .

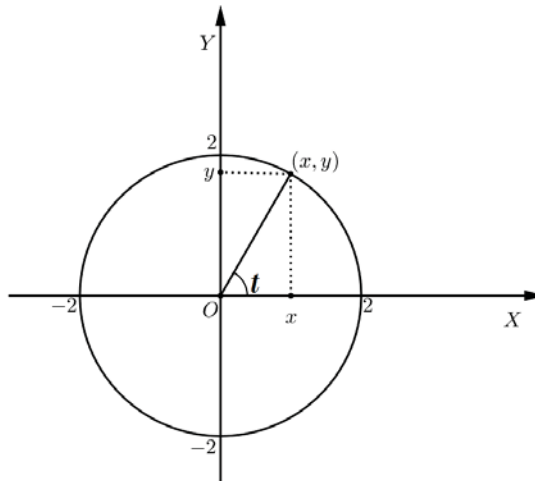


Figura A.17: Circunferência parametrizada (a)

No triângulo retângulo inscrito na circunferência, é possível verificar que o cateto oposto mede y , o adjacente mede x e a hipotenusa mede 2 por ser o raio da circunferência. Daí vem:

$$\cos t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cos t$$

e

$$\sin t = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2 \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da circunferência dadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

Para casos mais geral, da equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$, a semelhança do procedimento anterior. Suponhamos que desejamos associar x e y com o ângulo t .

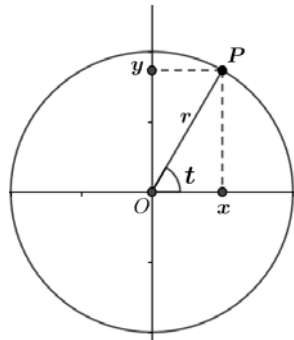


Figura A.18: Circunferência parametrizada (b)

No triângulo $\triangle OPX$, ilustrado na Figura (A.18), é possível verificar que o cateto oposto mede y , o adjacente mede x e a hipotenusa mede r . Daí vem:

$$\cos t = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos t$$

e

$$\sin t = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da circunferência dadas por:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Continuando propõe-se o seguinte exercício.

Exercício 3:

3 Determine as equações paramétricas para a seguinte equação, considerando t a variar no intervalo $[0, 2\pi]$, na sequência estendida para um caso mais geral..

3.1 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

Usando o procedimento anterior, vamos supor que desejamos associar x e y com o ângulo $\theta = t$.

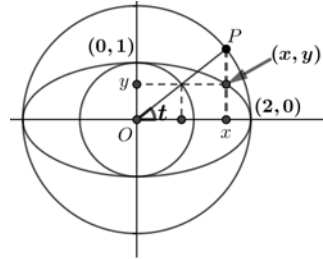


Figura A.19: Elipse parametrizada (a)

Vamos considerar uma elipse com eixo maior 4 e eixo menor 2, consideremos também duas circunferências concêntricas de raio 2 e 1. o ângulo t chama-se ângulo excêntrico. No triângulo $\triangle OPX$, ilustrado na Figura (A.19), é possível observar que o cateto adjacente mede x e a hipotenusa mede 2, pois é o raio da circunferência maior. Daí vem:

$$\cos t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cos t$$

por outro lado, observando o triângulo retângulo inscrito na circunferência de raio b , é possível verificar que o cateto oposto mede y e a hipotenusa mede 1. Daí vem:

$$\sin t = y \Leftrightarrow y = \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da elipse dadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Para o caso mais geral da elipse com equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, usando o mesmo procedimento, temos:

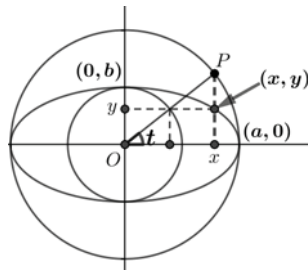


Figura A.20: Elipse parametrizada (b)

Pela análise anterior considerando uma elipse com eixo maior $2a$ e eixo menor $2b$, e também duas circunferências concêntricas de raio a e b , vem:

$$\cos t = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cos t$$

$$\sin t = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y = b \sin t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da elipse dadas por:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{com } (a, b) > 0,$$

Obs: Estas equações se relacionam com o caso da circunferência pois basta fazer $a = b$

Exercício 4:

5.1 Determine as equações paramétricas para a seguinte equação, considerando t a variar no intervalo $[0, 2\pi]$ e estenda para um caso mais geral.

5.2 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

Resolução:

Em forma de elaboração conjunta os exercícios são resolvidos no quadro com a mediação do professor.

Quadro

A semelhança dos procedimentos anteriores, vamos associar as variáveis x e y ao ângulo $\theta = t$.

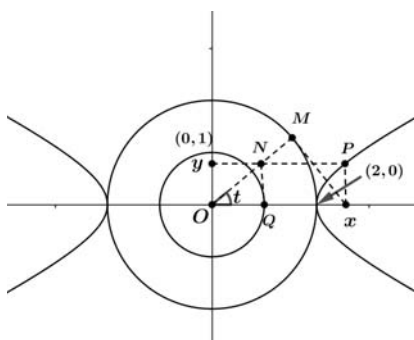


Figura A.21: Hipérbole parametrizada (a)

Na Figura (A.22) temos duas circunferências concêntricas de raio 2 e 1 e uma hipérbole de eixo transverso igual a 4 e eixo conjugado igual a 2. Visualizando o triângulo retângulo $\triangle OMX$ é possível identificar a hipotenusa medindo x e o cateto adjacente medindo 2.

$$\cos t = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\cos t} \Leftrightarrow x = 2 \sec t$$

No triângulo retângulo $\triangle ONQ$, o cateto adjacente mede 1 e o cateto oposto mede y . Daí vem:

$$\tan t = y \Leftrightarrow y = \tan t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da hipérbole dadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \sec t \\ y = \tan t \end{cases}$$

Para o caso mais geral usando o mesmo procedimento à hipérbole de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos.

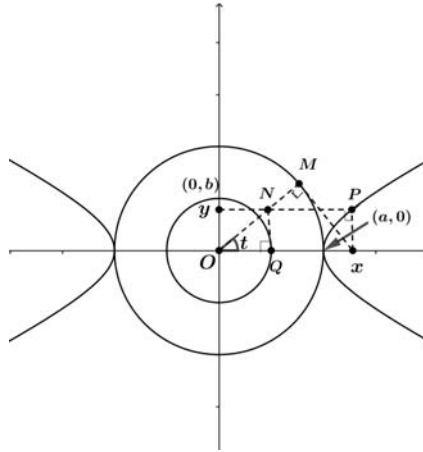


Figura A.22: Hipérbole parametrizada (b)

Pela mesma análise, considerando duas circunferências concêntricas de raio a e b e uma hipérbole de eixo transversal igual a $2a$ e eixo conjugado igual a $2b$. Visualizando o triângulo retângulo $\triangle OMX$ é possível identificar a hipotenusa medindo x e o cateto adjacente medindo a .

$$\cos t = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\cos t} \Leftrightarrow x = a \sec t$$

No triângulo retângulo $\triangle ONQ$, o cateto adjacente mede b e o cateto oposto mede y . Daí vem:

$$\tan t = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y = b \tan t$$

Portanto, usando um ângulo como parâmetro, podemos considerar as equações paramétricas da hipérbole dadas por:

$$\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \tan t \end{cases} \quad \text{com } (a, b) > 0$$

Obs: o professor pode recorrer as figuras ilustradas no capítulo 3, e pedir aos alunos para determinarem as equações das suas curvas e posteriormente parametrizá-las

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula.

- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Referências

[43] [44]

Unidade Didática 1.4.4 - Curvas parametrizadas

Tópico Central - Traço de uma curva parametrizada.

Aula nº: 6

Data:

Duração: 90 min.

Sumário

Definição de traço de uma curva parametrizada.

Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Representação gráfica de uma função num sistema de coordenadas retangulares.
- Operações básicas com vetores.
- Relações trigonométricas.
- Conhecimento básico sobre curva parametrizadas no plano e no espaço.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Definir traço de uma curva parametrizada.
- Esboçar o traço de uma curva parametrizada.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de usar os conhecimentos aprendidos na resolução de problemas geométricos.

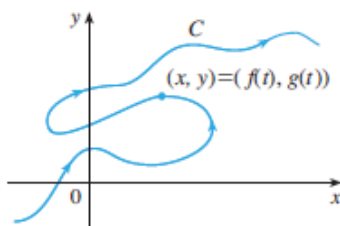
Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O professor começa por fazer uma retrospectiva da aula passada e em seguida apresenta em videoprojetor um gráfico de curva parametrizada estudada na aula anterior.

Videoprojetor



Depois de observada a imagem, o professor coloca para a reflexão dos alunos a seguinte questão: na aula passada estudamos que a curva ilustrada nesta figura, onde vimos que as coordenadas dos pontos desta curva podem descrever-se como imagem de uma função vetorial que tem o domínio num intervalo de números reais e o contradomínio em \mathbb{R}^2 , e então sabendo isso, como se chama o desenho desta curva? Perante o silêncio feito pelos alunos apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos da aula.

Videoprojetor

Aulas nº: 6

Data:

Sumário:

Definição de traço de uma curva.

Resolução de exercícios de aplicação.

O professor ajuda os alunos a pensar com auxílio do gráfico o desenho da curva é chamado de traço da curva, e em seguida pergunta novamente aos alunos, então como se define o traço de uma curva? Depois de ouvir as diferentes opiniões apresenta a definição em videoprojetor.

Videoprojetor

Definição 18. Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. O conjunto imagem $Im(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ é chamado de traço de γ .

Como exemplo o professor resolve exercício nº 1.

Exercício 1:

1.1 Esboce o traço da curva parametrizada $r : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por: $r(t) = (t, t^2)$.

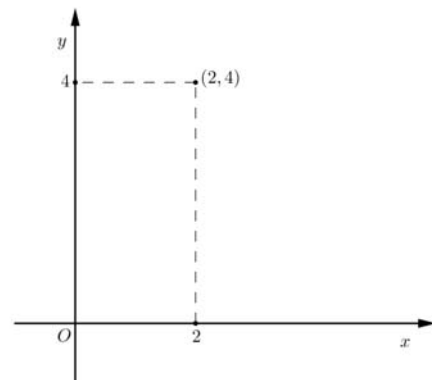
Resolução:

O professor resolve o exercício no quadro enquanto os alunos acompanham com atenção.

Quadro

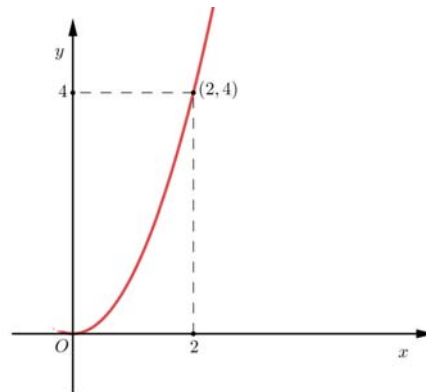
$$r(0) = (0, 0)$$

$$r(2) = (2, 4)$$



O professor coloca a seguinte questão: como é que a curva liga o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(2, 4)$? Em seguida ajudará os alunos a chegarem na seguinte conclusão: a melhor maneira é determinar uma relação entre x e y a partir das suas equações paramétricas.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$



$$y = x^2$$

Como temos $y = x^2$, então o traço de r estará sobre o gráfico da função $f(x) = x^2$, para $x \in [0, 2]$.

Obs: A parametrização de uma curva não é única. Este exemplo é uma segunda parametrização da parábola que já tinham sido parametrizada na aula anterior. Nos dois casos o parâmetro é escolhido de forma diferente, mas o traço é o mesmo.

Na sequência o professor propõe a resolução do exercício 2.

Exercício 2:

2.1 Esboce o traço da curva parametrizada $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $r(t) = (t, 1)$

Resolução:

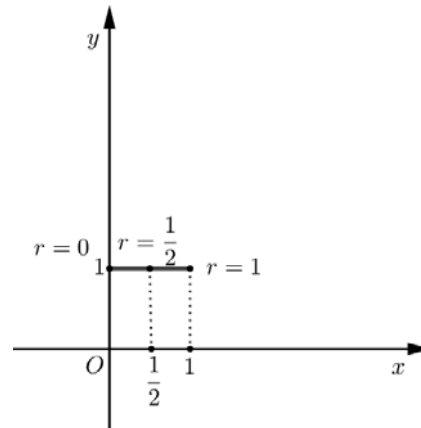
O professor resolve no quadro com a participação dos alunos.

Quadro

$$r(0) = (0, 1)$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$r(1) = (1, 1)$$



Então enquanto t varia de 0 a 1 o traço da curva vai paralelamente ao eixo dos x do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 1)$.

Obs: o conceito de curva definido pode resultar num traço que descreve uma linha reta.

Continuando propõe-se o seguinte exercício.

Exercício 3:

3.1 Analisemos a curva de $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por: $r(t) = (2t, t^3)$

Resolução:

Juntos com os alunos o professor analisa a curva dada no quadro. Lembrando-os que para cada t real que estiver entre 0 e 1 fornece um elemento de \mathbb{R}^2 , por exemplo.

Quadro

$$t = 1 \Rightarrow r(1) = (2, 1)$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow r\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2, \frac{1}{8}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow r(0) = (0, 0)$$

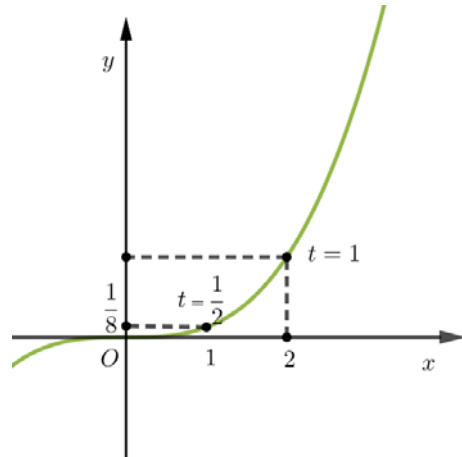
Basta atribuírmos valores ao parâmetro t , uma vez que cada valor de t oferece um ponto na curva e unimos cada um deles por formas a obtermos a curva.

Para sabermos de que curva se trata, basta determinarmos uma relação entre x e y a partir das suas equações paramétricas, chamando:

$$x = 2t \text{ e } y = t^3$$

Daí vem:

$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^3$$



graficamente temos:

Continuando o professor propõe a resolução do exercício nº4.

Exercício 4:

4.1 Suponha que o trajeto de uma formiga é descrito pela correspondência $r(t) \rightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ com t pertencente ao intervalo $[0, 1]$ qual é o rasto que ela marcaria?

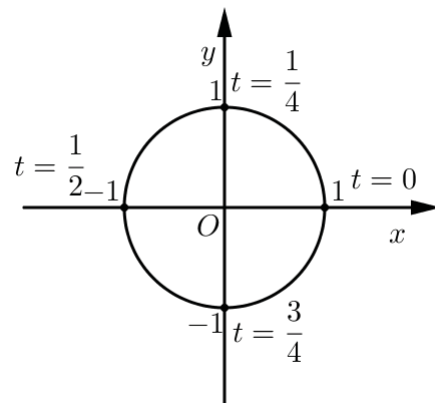
Resolução:

A luz da orientação do professor o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

Vamos atribuir valores ao parâmetro t .

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow r(t) = (1, 0) \\ t = \frac{1}{2} &\Rightarrow r\left(\frac{1}{2}\right) = (-1, 0) \\ t = \frac{1}{4} &\Rightarrow r\left(\frac{1}{4}\right) = (0, 1) \\ t = \frac{3}{4} &\Rightarrow r\left(\frac{3}{4}\right) = (0, -1) \end{aligned}$$



graficamente temos:

Logo a trajetória da formiga é uma circunferência de raio 1.

Continuando o professor propõe a resolução do exercício nº 5.

Exercício 5:

5.1 Que curva é representada pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \sin t$,

$0 \leq t \leq 2\pi$?

5.2 Esboce o respectivo gráfico.

Resolução:

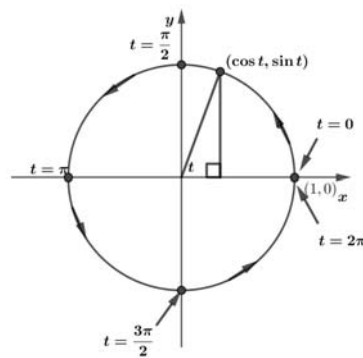
m forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro a luz da orientação do professor, levando os alunos a perceber que se se plotar os pontos, parece que a curva é um círculo. Podendo-se confirmar esta impressão ao estabelecermos uma relação entre x e y a partir das suas equações paramétricas, mostrando os passos no quadro.

Quadro

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Quanto a questão 5.2 depois do professor explorar os diferentes pontos de vista dos alunos, apresenta a figura, explicando a movimentação da partícula ao longo da curva.

Vídeoprojetor



Na sequência o professor propõe a resolução do exercício 6 (Stewart, 2008 p. 647-648).

Exercício 6:

6.1 Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas $x = t^2 - 2t$ e

$y = t + 1$.

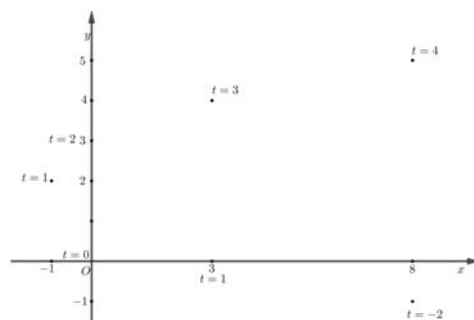
6.2 Depois de identificada a curva restrinja o parâmetro t no intervalo $0 \leq t \leq 4$.

Resolução:

O professor escreve a resolução 6.1 no quadro, mostrando aos alunos que para esboçarmos o gráfico da curva definida pelas equações paramétricas dadas, basta atribuímos valores ao parâmetro t , uma vez que cada valor de t oferece um ponto na curva e unimos cada um deles por formas a obtermos a curva.

Quadro

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

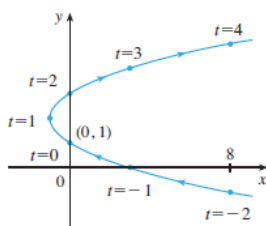


O Professor convidará os alunos a observarem a curva obtida por formas a identificarem-na. Valorizando suas opiniões concluirá que a curva dada pode ser uma parábola. Isso pode ao estabelecermos uma relação entre x e y a partir das suas equações paramétricas, mostrando os passos no quadro.

Quadro

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

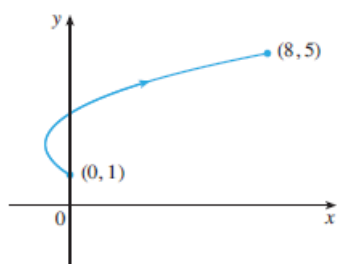
Assim a curva $y^2 - 4y + 3$ representada pelas equações paramétricas dadas é uma parábola.



Continuando o professor convidará os alunos a emitirem opinião para a resolução do exercício 2.2 e 2.3.

Valorizando a opinião dos alunos o professor os levará a concluir que quando t aumenta de 0 a 4, a curva começa no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(8, 5)$.

Quadro



$$x = t^2 - 2t \quad y = t + 1 \quad 0 \leq t \leq 4$$

Como o valor de t aumenta de 0 a 4 e a curva começa no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(8, 5)$,

Para consolidar o conhecimento dos alunos o professor propõe o seguinte exercício.

Exercício 7:

7.1 A trajetória descrita por um jardineiro do Njimba silili ao fazer um canteiro de flores é dada pela correspondência $r(t) \rightarrow (3 \cos t, 2 \sin t)$ com t pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$ qual é o rasto que ele marcaria?

O professor apresenta a imagem do jardineiro a definir a curva em videoprojetor.

Videoprojetor



Resolução:

Em forma de elaboração conjunta o exercício é resolvido no quadro, declarando as variáveis da seguinte forma:

$$x = 3 \cos t$$

e

$$y = 2 \sin t$$

Quadro

Vamos atribuir valores ao parâmetro t .

$$t = 0 \Rightarrow r(t) = (3, 0)$$

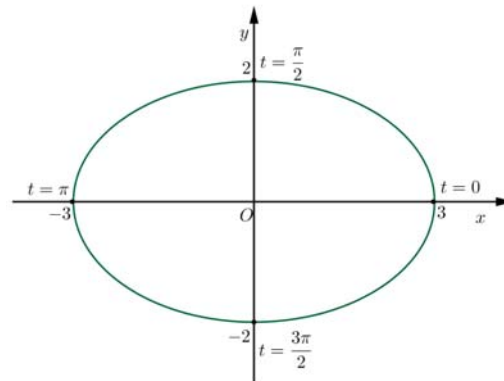
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 2)$$

$$t = \pi \Rightarrow r(\pi) = (-3, 0)$$

$$t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -2)$$

$$t = 2\pi \Rightarrow r(2\pi) = (3, 0)$$

Observa-se que o ponto inicial coincide com o ponto final, logo a curva é fechada. graficamente temos:



Portanto a trajetória percorrida é uma elipse centrada na origem, com eixo maior igual a 6 e eixo menor igual a 2.

O Professor apresenta o traço feito pelo jardineiro em videoprojetor

Videoprojetor



O exercício 7.1 foi inspirado nos conteúdos desenvolvidos no capítulo 3

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Referências

[43] [44]

Unidade Didática 1.4.4- Curvas parametrizadas

Tópico Central - Curvas parametrizadas no espaço
Curvas espaciais definidas por equações paramétricas

Aula nº: 7

Data:

Duração: 90 min.

Sumário

Definição de curvas espaciais parametrizadas.
Equações paramétricas de curvas espaciais.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Representação gráfica de uma função num sistema de coordenadas retangulares.
- Operações básicas com vetores no espaço.
- Conhecimento básico sobre curva no plano.
- Parametrizar uma curva no plano.
- Obter resultados de cálculo de uma curva parametrizada no plano.
- Relações trigonométricas.

Materiais e Recursos

- Material de apoio a docência.
- Quadro, marcador, computador, ponteiro e videoprojetor.
- Ficha de trabalho:

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Parametrizar uma curva espacial.
- Definir curvas espacial paramétricas
- Obter os resultados do cálculo de curvas parametrizadas no espaço.

Competências transversais

- Desenvolver habilidades para aplicar o aprendido em situações relacionadas ao contexto em estudo.
- Ser capaz de usar os conhecimentos aprendidos na resolução de problemas geométricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

Notas:

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

O professor começa por fazer duas questões aos seus alunos: o que é uma curva parametrizada no plano? E o que são equações paramétricas no plano? Por ser um conteúdo já tratado, o professor ajuda-os a recordar tais conceitos. De seguida questiona novamente o que é uma curva parametrizada no espaço? Como determinar equações paramétricas de uma curva no espaço? Face a curiosidade despertada nos alunos sobre o assunto em questão, o professor apresenta o sumário em videoprojetor e orienta os objetivos da aula.

Videoprojetor

Aulas nº: 7

Data:

Sumário:

Definição de curvas espaciais parametrizadas.

Equações paramétricas de curvas espaciais.

Resolução de exercícios de aplicação.

Depois de ouvir as diferentes opiniões com respeito as questões feitas, o professor apresenta em videoprojetor a definição de uma curva parametrizada no espaço.

Videoprojetor

Definição 19. *Seja (x, y, z) um ponto pertencente a uma curva C do espaço \mathbb{R}^3 . Chamam-se Equações Paramétricas da curva C às equações:*

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad (\text{A.10})$$

que definem as coordenadas x , y e z como funções contínuas de uma quarta variável t , a que chamamos de parâmetro.

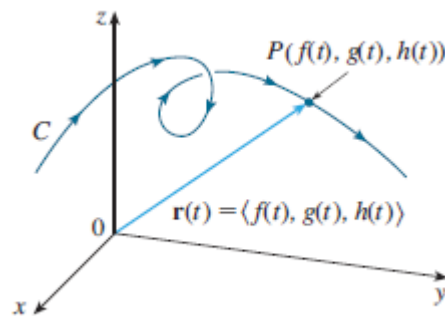


Figura A.23: Curva espacial parametrizada ([44], p. 849)

As equações em (A.10) são denominadas **equações paramétricas de C** e t é conhecido como **parâmetro**.

Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos a função vetorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então $r(t)$ é um vetor de posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ sobre C . Assim, qualquer função vetorial r define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento $r(t)$, como mostra a figura (A.23).

Como exemplo o professor resolve exercício nº 1.

Exercício 1:

1.1 Determine a equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P = (1, 3, -2)$ ao ponto $Q = (2, -1, 3)$.

Resolução:

O professor resolve o exercício no quadro enquanto os alunos acompanham com atenção.

Quadro

Para obtermos uma equação vetorial do segmento de reta que passa pelos pontos $P = (1, 3, -2)$ e $Q = (2, -1, 3)$, vamos inicialmente determinar o vetor deste segmento.

$$v = Q - P = (2, -1, 3) - (1, 3, -2) = (1, -4, 5)$$

Seja $C = (x, y, z)$ o conjunto de todos os pontos no espaço, nos quais

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

temos:

$$\overline{PC} = tv \Leftrightarrow C - P = t(1, -4, 5) \Leftrightarrow$$

$$(x - 1, y - 3, z + 2) = (t, -4t, 5t) \Leftrightarrow$$

$$x = t + 1 \quad y = 3 - 4t \quad z = -2 + 5t$$

O intervalo de variação do parâmetro t é definido a partir de uma das equações, por exemplo $x = t + 1$, temos:

para $x = 1$, $t = 0$ e para $x = 2$, $t = 1$. Logo t varia de 0 a 1, isto é $0 \leq t \leq 1$.

Como $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, a função vetorial é dada por:

$r(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle$ com $0 \leq t \leq 1$. E as equações paramétricas são:

$$x = t + 1, \quad y = 3 - 4t, \quad z = -2 + 5t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Graficamente temos:

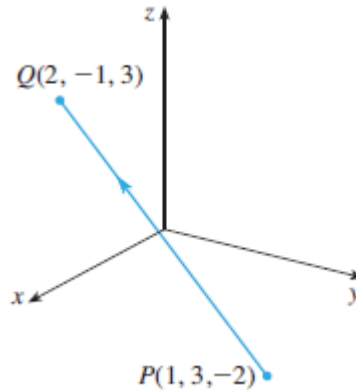


Figura A.24: Segmento de reta ([44], p.850)

Na sequência o professor propõe a resolução do exercício 2.

Exercício 2:

2 Descreva a curva definida pela função vetorial $r(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$

Resolução:

O professor resolve no quadro com a participação dos alunos.

Quadro

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x=1+t, \quad y=2+5t, \quad z=-1+6t$$

que são reconhecidas como equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto $(1, 2 - 1)$ e paralela ao vetor $\langle 1, 5, 6 \rangle$. Outro modo de ver é observar que a função pode ser escrita como $r = r_0 + tv$, onde $r_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$ e $v = \langle 1, 5, 6 \rangle$ (Stewart, 2008 p.849).

Continuando propõe-se o seguinte exercício.

Exercício 3:

3.1 Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, está em $z^2 = x^2 + y^2$.

Resolução:

Inicialmente o professor orienta aos alunos para resolverem o exercício nos cadernos em seguida é apresentado por um aluno no quadro.

Quadro

Vamos substituir os valores das variáveis x , y e z , na equação dada.

$$z^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t \Leftrightarrow z^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

como $z = t$, temos

$$z^2 = z^2$$

Logo a curva com equações paramétricas dada está em $z^2 = x^2 + y^2$. Conforme a figura abaixo.

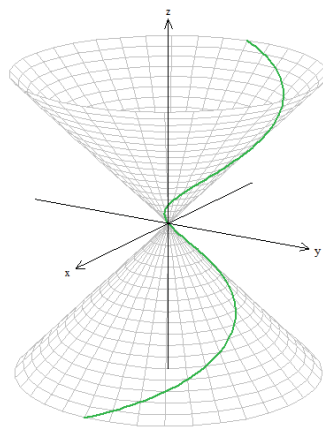


Figura A.25: Curva no cone

Continuando o professor propõe a resolução do exercício nº5.

Exercício 4:

4.1 Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin^2 t$ é a curva de interseção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$

Resolução:

A luz da orientação do professor o exercício é resolvido no quadro.

Quadro

Se a curva com as equações paramétricas dadas for da interseção entre as superfícies em causa, então as suas equações paramétricas são soluções das suas equações.

$$z = x^2 \Leftrightarrow z - x^2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 t - \sin^2 t = 0$$

e por outro lado

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Logo a curva com equações paramétricas dada é a interseção das duas superfícies, como mostra a seguinte figura.

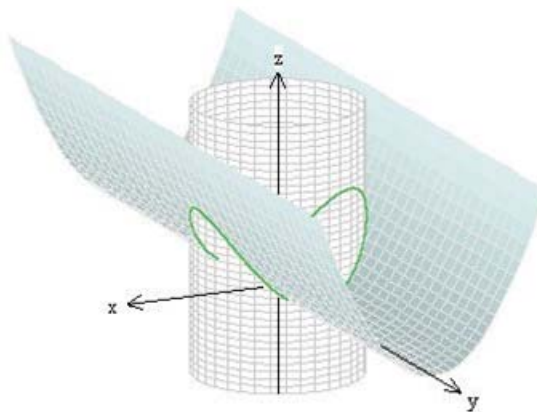


Figura A.26: Interseção das duas superfícies

Continuando o professor propõe a resolução do exercício nº 5.

Exercício 5:

5.1 Encontre a equação cartesiana da equação vetorial $r(t) = \langle a \cos t, b \sin t, t \rangle$ e analise o estado da curva

Resolução:

O professor resolve o exercício no quadro, com a participação dos seus alunos.

Quadro

Para a equação vetorial $r(t) = \langle a \cos t, b \sin t, t \rangle$

As suas equações paramétricas são:

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t, \quad z = t$$

para encontrarmos a equação cartesiana, vamos eliminar o parâmetro t , e então escrevemos.

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad e \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A curva está inteiramente no cilindro elíptico cuja diretriz é uma elipse no plano xy e cujas determinantes são paralelas ao eixo z .

Para consolidação, o professor propõe os seguintes exercícios para serem resolvidos na aula.

Exercício 6:

6.1 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q .

- $P = (0, 0, 0)$ e $Q = (1, 2, 3)$
- $P = (1, -1, 2)$ e $Q = (4, 1, 7)$
- $P = (-2, 4, 0)$ e $Q = (6, -1, 2)$

Obs: a construção do Onjango narrada no capítulo 3 pode ser usada para ilustração e interpretação geométrica nesta aula

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição da aula.
- Interação com o professor e os colegas.
- Comportamento em sala de aula.

Referências

[43] [44]