UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Pensamento Geométrico
Geometria não euclidiana no ensino secundário

Maria Teresa Serrão Sanches Gonçalves

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Didática da Matemática
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor José Manuel Leonardo de Matos
Co-orientador: Prof. Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

Covilhã, abril de 2019

Dedicatória

Para ti Cerdeira e para vós Ivo e Ana Teresa.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar e com profundo reconhecimento ao meu orientador Professor Doutor José Manuel Matos pela sua orientação, ensinamento, partilha, apoio e encorajamento na execução deste estudo.

Ao Professor Doutor Manuel Joaquim Saraiva, agradeço por todo o apoio e incentivo em concluir este projeto e por ter acreditado em mim.

Agradeço aos colegas da UBI e da UIED/UNL que ao longo de vários seminários onde apresentei alguns resultados empíricos, os discutiram comigo ajudando ao seu aprofundamento.

Agradeço aos alunos que colaboraram nesta pesquisa.

Agradeço às instituições e pessoas que disponibilizaram meios para a realização da investigação.

Agradeço à colega Maria João pois foi com ela que tudo começou.

Agradeço a todos os colegas da escola onde leciono pelo estímulo, pelo apoio e por todas as vezes que proferiram “tu és capaz”.

Por último, e por ter sido tão importante, ao Ivo e à Ana Teresa, por tudo, não cabendo aqui a discrição (eles entenderão).

Resumo

Muitos anos dedicados à prática letiva foram determinantes para a decisão de levar a cabo esta investigação. Porque os conteúdos relativos à Geometria são de forma generalizada um problema para os alunos e um entrave ao seu sucesso escolar, tem todo o sentido centralizar a investigação na área da Didática da Matemática no tema Geometria.

O objetivo desta investigação é o de averiguar como o conhecimento de outras geometrias (além da euclidiana) e a sua aplicação conduzem o pensamento geométrico dos alunos. Com o propósito bem definido de obter conclusões que possam contribuir de forma construtiva no domínio da didática da Matemática, e dar resposta a: (i) será importante, ou não, a apresentação e aplicação de outras geometrias (além da euclidiana) no ensino secundário com o objetivo de desenvolver capacidades geométricas? e (ii) de que modo o conhecimento e aplicação de outras geometrias influencia o pensamento geométrico nos alunos? Foram elaboradas propostas didáticas com um objetivo de estudo: "fazer emergir sinais" indiciadores de uma atividade intelectual, conducente à apropriação de significados geométricos, expressa através da linguagem.

A um grupo de nove alunos do ensino secundário (alunos com idades compreendidas entre 15 e 18 anos), elementos do Clube de Matemática da escola que frequentam, foi proposto a realização de algumas tarefas investigativas. Estas tarefas foram selecionadas para potenciar o desenvolvimento do processo semiótico. A professora/investigadora conduziu as sessões fomentando a discussão e a comunicação segundo uma perspetiva dialética em que promoveu a evolução de sinais (analisados na linguagem) e orientou de forma a que estes fossem consistentes com os significados matemáticos definidos na intervenção didática. De todas as sessões foi feita a gravação áudio e todas essas gravações foram transcritas permitindo uma análise ao modo como os alunos se envolveram na realização das tarefas, à interação entre si e com o professor, aos sinais emergentes de quaisquer reações no grupo de trabalho, em particular aos emergentes das discussões coletivas e à linguagem utilizada.

A análise dos dados recolhidos durante a realização das atividades pelos alunos teve em conta a mediação semiótica alicerçada na Teoria da Atividade.

Cada verbalização ocorrida dentro da discussão coletiva foi classificada por um sinal. A partir dessa classificação analisou-se o estado evolutivo dos significados pessoais dos alunos em relação ao significado matemático, de acordo com os conceitos matemáticos que associámos a cada tarefa. Essa análise levou-nos a identificação de cadeias evolutivas dentro da discussão coletiva. Essas cadeias evolutivas foram sujeitas a uma análise mais detalhada e verificou-se que a apresentação e aplicação das GNE em tarefas com os alunos não teve um efeito inócuo e pode desenvolver capacidades geométricas e influenciar o pensamento geométrico dos alunos.

Palavras-chave

Geometria Não Euclidiana, Linguagem, Pensamento geométrico, Significados matemáticos, Sinais.

Abstract

Several years devoted to teaching were influencial for deciding to take upon this investigation. Because Geometry related contents are generally difficult for the students and a barrier versus their scholar sucess, it makes all sense to centralize the investigation from the field of Mathemathic Didactics in the theme Geometry.

The purpose of this investigation is to check how knowledge of other geometries (besides euclidean) and its application may conduct student's geometric thought. With the well defined end of obtaining conclusions that can contribute constructively on Math didactic's domain, and to give answer to: (i) is it important, or not, to present and to apply other geometries (besides euclidean) on secondary school with the goal of developing geometrical capabilities?; and (ii) in what way does the knowledge and application of other geometries influences geometric thought in students? Didactic proposals have been produced with an objective for the study: "to make signs to emerge" which will indicate an intellectual activity, leading to the appropriation of geometrical meanings, express through language.

To a group of nine students from secondarý school (students with ages between 15 and 18 years old), pertaining to the Maths Club of the school where they study, some investigative tasks were proposed. These tasks were projected to potentiate the development of the semiotic process. The teacher/investigator has lead the sessions encouraging discussion and comunication according to a dialectic perspective in which sign's evolution (analised in language) are promoted and oriented in a way that these signs may be consistent with mathematical meanings defined by the didactical intervention. Of all the sessions an audio recording has been made and all those recordings were transcripted allowing for an analysis to the way the students got into the task's accomplishment, to the interaction between them and the teacher, to the emergent signs from any reaction within the work group, particularly to the ones which emerged from colective discussions and used language. The analysis from the data gathered during student's task accomplishment had in account the semiotic mediation based on Activity Theory.

Each verbalization ocurred within the colective discussion was classified with a sign. Then starting with this classification it was annalised the evolutive status of student's personal significances regarding mathematical significance, in accordance with the mathematical concepts that were associated with each task. This analysis led us to identify evolutive chains within collective discussion. These evolutive chains were the subject of further detailed analysis and it was verified that presentation and application of Non-Euclidian Geometries in tasks with students did not have innocuous effect and may develop geometrical skills and inluenciate student's geometrical thought.

Keywords

Non-Euclidean geometry, Language, Geometric thinking, Mathematical meanings, Signs.

Índice

Dedicatória iii

Agradecimentos v

Resumo vii

Palavras-chave viii

Abstract ix

Keywords x

Índice xi

Lista de Figuras xv

Lista de Tabelas xvii

Lista de Acrónimos xix

Lista de Anexos xxi

Parte I – Apresentação da Tese 1

Capítulo 1 1

Introdução 1
1. Motivação 1
2. Objetivo da investigação 4
3. Questões da investigação 4
4. Estrutura da Tese 5

Parte II - Enquadramento teórico 7

Capítulo 2 7

Teorias de suporte 7
1. Contextualização 7
2. Teoria sóciocultural de Vygotsky 8
   2.1. Mediação 10
   2.2. Instrumentos 11
   2.3. Sinais 11
   2.4. Internalização 12
   2.5. Zona de desenvolvimento proximal (ZDP) 13
3. Teoria da atividade 15
4. Teoria da mediação semiótica 16
   4.1. Artefactos e cognição 17
   4.2. Aproximação instrumental de Rabardel 17
5. Teoria sociocultural da ação mediada instrumental 19

Capítulo 3 23

Pensamento/linguagem 23

1. Linguagem 23
2. Linguagem e pensamento 24
2.1. Vygotsky 24
2.2. Worf: Linguagem, pensamento e realidade 26

Capítulo 4 27

Geometria – História, Natureza e Ensino/Aprendizagem 27
1. Breve incursão pela história da Geometria - De Euclides até ao séc. XX 27
2. Natureza, Funções didáticas e Processo ensino/aprendizagem da Geometria 30
3. Investigações em ensino e aprendizagem da Geometria 33

PARTE III – Abordagem investigativa 39

Capítulo 5 39

Metodologia da investigação 39
1. Tipologia adotada 39
2. A intervenção didática 40
2.1. Onde e quando decorreu 40
2.2. Caraterização dos participantes 40
2.3. Descrição do ambiente onde decorreu a intervenção 41
3. Tarefas utilizadas na intervenção 43
4. Recolha de dados 45
5. Análise alicerçada na mediação semiótica 47
5.1. Ferramenta/Artefacto 48
5.2. Ciclo didático 50
5.3. Sinais (Linguagem) 51
6. Metodologia da análise 53
6.1. Emergência de sinais (classificação) 53
6.2. Efeito Emissor e Recetor na génese e evolução dos sinais 57
6.3. Evolução dos sinais 58

Capítulo 6 59

Tratamento de dados 59
1. Sequências de intervenção e número de sessões por grupo participante 60
2. Base de referência para a análise de dados 63
3. Análise/Resultados 65
3.1. Cadeias Evolutivas 66
3.1.1. Sequência de intervenção do grupo do 10.ºano 67
3.1.2. Sequência de intervenção do grupo do 11.ºano 71
3.1.3. Sequência de intervenção do grupo do 12.ºano 80
3.2. Síntese 85

Conclusões 89
1. Apresentação 89
2. Enquadramento teórico 90
3. Respostas às questões da investigação 92
3.1. Aprendizagem através do grupo 92
3.2. Tarefas / Dinâmica do conhecimento 92
3.3. Resultados 93
4. Limitações e recomendações 96
4.1. Limitações 96
4.2. Recomendações decorrentes da investigação 96

Referências 99

Anexos 107

Anexo I: Planificação do Clube de Matemática 2015/2016 108
Anexo II: Autorizações áudio 113
(Agrupamento de Escolas) 113
(Alunos) 114
Anexo III: Tarefa GT-T_1 115
Anexo IV: Tarefa GT-T_2 117
Anexo V: Tarefa GT-T_3 119
Anexo VI: Tarefa GT-T_4 121
Anexo VII: Tarefa GE-T_1 123
Anexo VIII: Tarefa GE-T_2 125
Anexo IX: Tarefa GH-T_1 127
Anexo X: Tarefa GH-T_2 129
Anexo XI: Tarefa GH-T_3 131
Anexo XII: Narrativas por episódios de intervenção 133
1. Geometria táxi (GT) 133
1.1. Grupo do 10.º ano (15-16 anos) 133
1.1.1. Sessão [10-GT_T_1 e T_2] (Narrativa detalhada) 133
1.1.2. Sessão [10-GT_T_2, continuação] 141
1.1.3. Sessão [10-GT_T_4] 145
1.2. Grupo do 11.º ano (16-17 anos) 149
1.2.1. Sessão [11-GT_T_1] 149
1.2.2. Sessão [11-GT_T_2] 157
1.2.3. Sessão [11-GT_T_3] 159
1.3. Grupo do 12.ºano (17-18 anos) 163
1.3.1. Sessão [12-GT_T_1] 163
1.3.2. Sessão [12-GT_T_2 e T_3] 167
2. Geometria Esférica (GE) 175
2.1. Grupo do 10.ºano (15-16 anos) 175
2.1.1. Sessão [10-GE_T_1] 175
2.1.2. Sessão [10-GE_T_2] 179
2.2. Grupo do 11.ºano (16-17 anos) 184
2.2.1. Sessão [11-GE_T_1 e T_2] 184
2.2.2. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_1$] 188
2.2.3. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_2$] 190
2.2.4. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_3$] 194
2.3. Grupo do 12.ºano (17-18 anos) 198
2.3.1. Sessão [12-GE_T_1] 198
2.3.2. Sessão [12-GE_T_2] 202
2.3.3. Sessão [12-GE_T_2, continuação] 205
3. Geometria Hiperbólica (GH) 211
3.1. Grupo do 11.ºano (16-17 anos) 211
3.1.1. Sessão [11-GH_T_1] 211
3.1.2. Sessão [11-GH_T_1, conclusão] e [11-GH_T_2] 215
3.1.3. Sessão [11-GH_T_2, conclusão] e [11-GH_T_3] 219
3.2. Grupo do 12.ºano (17-18 anos) 223
3.2.1. Sessão [12-GH_T_1 e T_2] 223
3.2.2. Sessão [12-GH_T_2, continuação] 227
3.2.3. Sessão [12-GH_T_3] 231

Lista de Figuras

Figura 1: Evolução da classificação média dos alunos internos, na 1.ª chamada, e da percentagem da classificação média/cotação total dos itens selecionados e considerados equivalentes. 2
Figura 2: Esquema - Mediação (Oliveira, 1997, p. 27). 10
Figura 3: Estrutura da Atividade. 15
Figura 4: Esquema - Relação pensamento e Linguagem. 25
Figura 5: Esquema - "Ferramentas; Artefactos; Sinais; Significados". 48
Figura 6: Esquema - Ciclo didático. 51
Figura 7: Recorte da tarefa GT_T_1. 134
Figura 8: Recorte da ficha do Pedro (GT_T_2). 142
Figura 9: Representação feita pela Madalena (GT_T_4). 145
Figura 10: Recorte da ficha do Pedro (GT_T_4). 146
Figura 11: Representação do Pedro, à esquerda, representação da Madalena, à direita (GT_T_4). 147
Figura 12: Representação do Pedro, à esquerda, representação da Madalena, à direita (GT_T_4, continuação). 147
Figura 13: Recorte da ficha do Ivan à esquerda e, à direita, recorte da ficha do Alexandre (GT_T_4). 148
Figura 14: Recorte na tarefa resolvida (GT_T_3). 159
Figura 15: Recorte da ficha do Gabriel (GT_T_3). 161
Figura 16: Recortes das fichas do David, à esquerda, e do Rafael, à direita (GT-T_1). 165
Figura 17: Recorte da ficha do Roberto (GT_T_1). 166
Figura 18: Recorte da ficha do David (GT_T_2). 168
Figura 19: Recorte da ficha do Rafael (GT_T_2). 168
Figura 20: Recorte da ficha do Roberto (GT_T_2). 169
Figura 21: Recorte da ficha do David (GT_T_3). 171
Figura 22: Recorte da ficha do Rafael (GT_T_3). 172
Figura 23: Recorte da ficha do Roberto (GT_T_3). 173
Figura 24: Recorte da construção do Rafael (GT_T_3). 174
Figura 25: "Captura" do écran durante a realização da tarefa GE_T_1. 185
Figura 26: Recorte (1) da ficha do David (GE_T_2, continuação). 206
Figura 27: Área de um biângulo. 207
Figura 28: Recorte (2) da ficha do David (GE_T_2, continuação). 209
Figura 29: Recorte da ficha da Carolina (GH_T_1). 217
Figura 30: Recorte da ficha do Gabriel (GH_T_1). 217
Figura 31: Recomposição da imagem visualizada no ecrã (GH_T_2). 218
Figura 32: Recorte da ficha do Rafael (GH_T_1). 225

Lista de Tabelas

Tabela 1: Geometria no plano e no espaço. Classificação média em relação à cotação (%) . ..3
Tabela 2: Tarefas versus conceitos matemáticos.. 45
Tabela 3: Tarefas; Ferramentas. 49
Tabela 4: Classificação de diferentes tipos de produção do discurso (Natureza e Modo fenomenológico). 51
Tabela 5: Sessões por sequência de intervenção do grupo do 10.º ano. 61
Tabela 6: Sessões por sequência de intervenção do grupo do 11.º ano. 61
Tabela 7: Sessões por sequência de intervenção do grupo do 12.º ano. 62
Tabela 8: Apresentação dos sinais utilizados na análise. 64
Tabela 9: Cadeia evolutiva - Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GT-grupo do 10.ºano.. 67
Tabela 10: Cadeia evolutiva - Mediatriz em GT- grupo do 10.ºano. 68
Tabela 11: Cadeia evolutiva - Retas (Segmentos de reta). Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GE- grupo do 10.ºano. 69
Tabela 12: Cadeia evolutiva - Circunferência em GT- grupo do 11.ºano.......................... 71
Tabela 13: Cadeia evolutiva - Retas (Segmentos de reta). Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GE- grupo do 11.ºano. 73
Tabela 14: Cadeia evolutiva - Retas paralelas em GE- grupo do 11.ºano. 74
Tabela 15: Cadeia evolutiva - Retas em GH- grupo do 11.ºano. 76
Tabela 16: Cadeia evolutiva - Retas (ângulos) em GH- grupo do 11.ºano......................... 77
Tabela 17: Cadeia evolutiva – Mediatriz e circuncentro em GH- grupo do 11.ºano. 78
Tabela 18: Cadeia evolutiva – Perímetro da circunferência e Área do círculo em GT- grupo do 12.ºano.. 80
Tabela 19: Cadeia evolutiva – Polígonos. Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Área de um triângulo em GE- grupo do 12.ºano. 81
Tabela 20: Cadeia evolutiva –Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo em GH- grupo do 12.ºano. 83
Tabela 21: Cadeia evolutiva –Distância em GH- grupo do 12.ºano. 84

Lista de Acrónimos

AGD	Ambiente(s) de Geometria Dinâmica
APM	Associação de Professores de Matemática
EIEM	Encontro de Investigação em Educação Matemática
GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional
GE	Geometria Esférica
GH	Geometria Hiperbólica
GNE	Geometria Não Euclidiana
GSP	*Geometer's Sketchpad*
GT	Geometria Táxi
IAVE, I.P.	Instituto de Avaliação Educativa
MPT2013	Matemática do Planeta Terra 2013
S_e	Sinal elaborado
S_i	Sinal imediato
SIEM	Seminário de Investigação em Educação Matemática
S_m	Sinal mediador
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TMS	Teoria da Mediação Semiótica
UBI	Universidade da Beira Interior
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

Lista de Anexos

Anexo I	*Planificação do Clube de Matemática 2015/2016*
Anexo II	*Autorizações áudio (Agrupamento de Escolas e Alunos)*
Anexo III	*Tarefa GT-T_1*
Anexo IV	*Tarefa GT-T_2*
Anexo V	*Tarefa GT-T_3*
Anexo VI	*Tarefa GT-T_4*
Anexo VII	*Tarefa GE-T_1*
Anexo VIII	*Tarefa GE-T_2*
Anexo IX	*Tarefa GH-T_1*
Anexo X	*Tarefa GH-T_2*
Anexo XI	*Tarefa GH-T_3*
Anexo XII	*Narrativas por episódios de intervenção*

Parte I – Apresentação da Tese

Capítulo 1

"..., que jamais negligenciem a geometria ..."
Platão in A República, 527c, p. 250, (Platão, 2005)

Introdução

Este capítulo apresenta a investigação, começando por justificar o que motivou a sua realização. Prosseguimos com o objetivo da investigação e as questões de investigação que serviram de linhas mestras para este trabalho e terminamos este primeiro capítulo com uma descrição abrangendo a estrutura deste documento.

1. Motivação

Numa breve incursão pelas atas do XXII SIEM (2011), sobre o ensino aprendizagem da Geometria, Margarida Rodrigues e Marisa Bernardo, referem que várias investigações têm sido feitas, mas não é este o campo de investigação onde se realizaram estudos mais extensivos (Rodrigues & Bernardo, 2011, p.339). É reconhecida a importância de que se reveste a geometria no ensino aprendizagem da Matemática e é igualmente reconhecida a dificuldade que os alunos têm na resolução de exercícios/problemas geométricos.

Em Portugal, dados sobre os resultados das Provas Finais Nacionais do ensino básico (3.º ciclo- final de 9 anos de escolaridade), disponibilizados em relatórios do Instituto de Avaliação Educativa, IAVE, I.P., (até 2013, designado por Gabinete de Avaliação Educacional, GAVE) revelam que os itens com pior desempenho são os que mobilizam conhecimentos de Geometria. Na prova de Matemática do 3.º ciclo, em 2009, o relatório refere "*Quanto aos itens com pior desempenho, no ensino básico, destacam-se os itens de geometria (realização de construções geométricas, compreensão de conceitos associados à resolução de problemas e aplicação de conceitos)*"[1]; em 2010, "*Itens com pior desempenho (...) os itens 11. e 12.2. eram itens de Geometria que envolviam o conhecimento de propriedades (desigualdade triangular, no primeiro, e número de eixos de simetria de um retângulo, no segundo); o item 12.3. apresentava um problema que envolvia o cálculo da razão trigonométrica de um*

[1] GAVE, *Relatório – Um olhar sobre os resultados dos exames nacionais*, p. 7 (GAVE, 2010).

ângulo"[2]; em 2011, "*O item com pior desempenho foi o item 14.3 (item de resposta curta) que avaliava conteúdos do tema Geometria (…) O item em causa solicitava o cálculo de um volume que implicava o estabelecimento de uma relação entre o volume de uma pirâmide e o volume de um paralelepípedo com alturas iguais, e ainda o estabelecimento de uma relação entre as áreas das respetivas bases, as quais eram desconhecidas e diferentes. (…) O item 14.1 (item de escolha múltipla) pretendia avaliar os conceitos de retas complanares/não complanares e de retas concorrentes, exigindo alguma abstração. O fraco desempenho neste item revela que os alunos não se apercebem de que, na representação em perspetiva cavaleira, duas retas podem ser concorrentes sem que as suas representações se intersetem.*"[3]; em 2012, "*Itens com pior desempenho (…) O item 12.1. era um item de construção em que se pedia ao aluno que mostrasse como tinha chegado à resposta. Este item enquadrava-se no domínio temático Geometria e exigia que o aluno escrevesse o volume de um paralelepípedo retângulo em função da aresta de um cubo e que, conhecido o volume total do sólido, determinasse o valor exato da medida da aresta desse cubo.*"[4] Em 2013, o relatório evidencia uma análise da classificação média obtida pelos alunos, na 1ª chamada dos anos 2011, 2012 e 2013, e da classificação média de itens agrupados em três categorias, Probabilidades, Geometria e Comunicação matemática. O gráfico da Figura 1 ilustra claramente que as classificações médias, respeitantes aos itens de Geometria apresentam valores abaixo dos 50%, e ainda, inferiores aos das outras categorias, exceto em 2013.

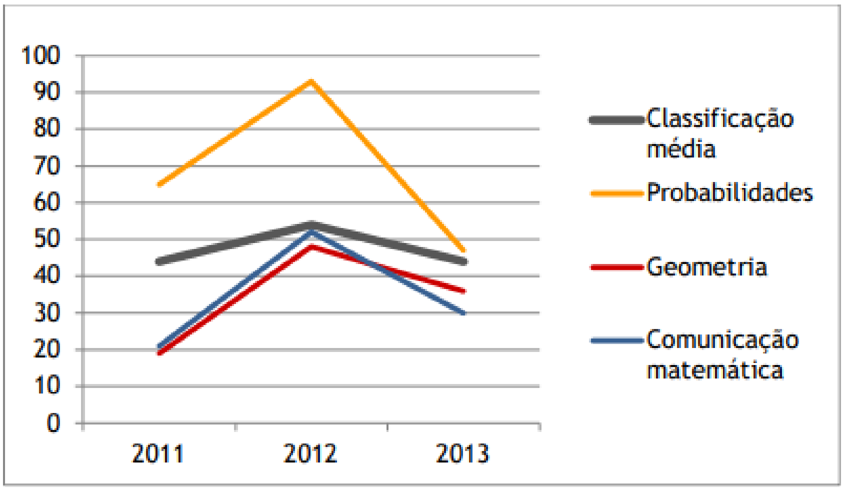


Figura 1: *Evolução da classificação média dos alunos internos, na 1.ª chamada, e da percentagem da classificação média/cotação total dos itens selecionados e considerados equivalentes*[5]*.*

No relatório de 2010-14 pode ler-se: "*No domínio Geometria e Medida, resulta evidente a necessidade de insistir na resolução de problemas que envolvam as noções de áreas,*

[2] GAVE, *EXAMES NACIONAIS Relatório 2010*, p. 11 (GAVE, 2011).
[3] GAVE, *EXAMES NACIONAIS Relatório 2011*, p. 14 (GAVE, 2012).
[4] GAVE, Relatório PROVAS FINAIS DE CICLO E EXAMES NACIONAIS 2012, p. 22 (GAVE, 2013b).
[5] GAVE, Relatório ANÁLISE PRELIMINAR DOS RESULTADOS PROVAS FINAIS DE CICLO EXAMES FINAIS NACIONAIS 2013, p. 16 (GAVE, 2013a).

perímetros, volumes e propriedades de figuras planas/sólidos com figuras suporte, mas também sem figuras suporte, de modo a trabalhar a capacidade de abstração.”[6]

Relativamente ao Ensino Secundário, os conteúdos do tema Geometria no plano e no espaço apenas começaram a ser objeto de avaliação, nos Exames Nacionais, em 2014. Na Tabela 1 resume-se a informação relativa aos resultados obtidos pelos alunos (final de 12 anos de escolaridade) nos Exames Finais Nacionais, nos itens que tinham como objetivo avaliar conteúdos de Geometria.

Tabela 1: *Geometria no plano e no espaço. Classificação média em relação à cotação (%)* [7]**.**

2014		2015		2016	
Conhecimentos (conceitos, regras e propriedades)					
I-6.	41%	I-7.	66%	I-7.	79%
		II-5.1.	68%		
		II-5.2.	53%		
Procedimentos (cálculo)					
				II-3.1.	71%
				II-3.2.	73%
				II-3.3.	40%
Resolução de problemas					
II-4.	34%	II-5.3.	38%		

Quatro dos dez itens analisados apresentam uma classificação média abaixo dos 50% e todos os itens que avaliam a resolução de problemas refletem um fraco desempenho dos alunos.

A Geometria assume-se como uma área em que os alunos revelam diversas dificuldades, o que sustenta a necessidade de mais investigação nesta área.

A reflexão sobre as dificuldades dos alunos revestiu-se de extrema importância na orientação e decisão por uma investigação sobre o pensamento geométrico dos alunos do Ensino Secundário.

Por outro lado, o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (homologado a 17 de junho de 2013) destaca três grandes finalidades para o Ensino da Matemática, das quais ressalvo “a estruturação do pensamento”. Sobre esta finalidade o texto que acabo de citar refere a importância primordial na estruturação do pensamento da apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, do estudo sistemático das suas propriedades e da argumentação clara e precisa que, segundo os autores, é própria da disciplina de

[6] IAVE, Relatório Nacional 2010-2014, Provas Finais 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, p. 54 (IAVE, 2015).
[7] IAVE, Relatório Nacional 2010-2016, Exames Finais Nacionais do Ensino Secundário, p.27 (IAVE, 2017).

Matemática[8]. Pessoalmente evidencio a Geometria como a área que por excelência permite apreender e hierarquizar conceitos, estudar propriedades geométricas básicas e, através de argumentação clara e precisa, deduzir/demonstrar outras propriedades geométricas menos elementares. Em suma, a Geometria assume-se como contributo essencial para a estruturação do pensamento matemático e em particular do pensamento geométrico.

Investigar na área da Didática da Matemática sobre Geometria, analisando a emergência de sinais que possam ser interpretados como uma evolução no desenvolvimento do pensamento geométrico, é, pois, de extrema importância, razão pela qual o tema central da investigação seja: **Pensamento em Geometria.**

2. Objetivo da investigação

Pretende-se, segundo uma perspetiva de dimensão social e cultural mediada, identificar/analisar a evolução de significados matemáticos através da interação entre os alunos e entre estes e o professor/investigador. O objetivo deste trabalho investigativo é:

> **Averiguar se o conhecimento da existência e aplicabilidade de outras geometrias, por parte dos alunos, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico.**

O conhecimento da existência e aplicação de outras geometrias (Geometrias não Euclidianas, GNE) efetivar-se-á com a resolução de tarefas selecionadas visando significados matemáticos específicos no domínio das GNE. Relativamente ao desenvolvimento do pensamento geométrico, este deverá ser interpretado como apropriação de significados geométricos e como evolução discursiva (forma de comunicação).

3. Questões da investigação

Entendemos ser relevante para o estudo conseguir obter respostas para as seguintes questões que orientarão os trabalhos a desenvolver:

---

[8] Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado a 17 de junho de 2013, 2.1, p.2 (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013)

(i) será importante, ou não, a apresentação e aplicação de outras geometrias (além da euclidiana) no ensino secundário com o objetivo de desenvolver capacidades geométricas?

(ii) de que modo o conhecimento e aplicação de outras geometrias influencia o pensamento geométrico nos alunos?

Com o propósito bem definido de obter conclusões que possam contribuir de forma construtiva no domínio da didática da Matemática, foram elaboradas propostas didáticas com um objetivo de estudo: "fazer emergir sinais" indiciadores de uma atividade intelectual, conducente à apropriação de significados geométricos, expressa através da linguagem.

4. Estrutura da Tese

Optou-se por estruturar este documento em três partes: Parte I, Parte II e Parte III.

A primeira, a mais curta, tem um único capítulo que numa introdução ao estudo apresenta o que motivou este trabalho, o objetivo e as questões da investigação. É a apresentação da tese.

Na parte II desta dissertação encontra-se uma explanação das teorias que dão corpo ao enquadramento teórico desta investigação e que são as "lentes" que permitiram uma análise consistente dos dados recolhidos. Essa parte é constituída por três capítulos. É a parte teórica do trabalho desenvolvido.

A terceira parte compreende dois capítulos e as conclusões. O primeiro dos dois descreve a metodologia adotada neste estudo, o ambiente de ensino, o desenvolvimento da administração das tarefas e carateriza os dados a analisar. No último, capítulo 6, é apresentado o tratamento dos dados. Finaliza-se a terceira parte deste trabalho com a apresentação das conclusões, onde também é feita uma breve referência às limitações e a algumas recomendações deste estudo. As transcrições áudio de todos os momentos de intervenção didática no grupo de participantes e que constituem a fonte de dados em análise, encontram-se no Anexo XII da secção Anexos.

Parte II - Enquadramento teórico

Capítulo 2

Teorias de suporte

> *"(…) ninguém educa ninguém, como tampouco ninguém se educa a si mesmo: os homens se educam em comunhão, mediatizados pelo mundo."*
> Paulo Freire in A pedagogia do oprimido, (Freire, 1970, p.39)

1. Contextualização

Contextualizando historicamente o momento no qual a Teoria da Atividade ganha relevância para a didática do ensino, é importante ter em conta a mudança de corrente de pensamento dos fins do século XIX, nomeadamente o positivismo. Tendo como principal proponente o filósofo francês August Comte, é na sua obra *Cours de philosophie positive* que surge pela primeira vez o princípio orientador de tal nova teoria das ideias, o progresso tecnológico e científico como motor do desenvolvimento humano e ferramenta indispensável para o bem-estar da humanidade, e é feita também a distinção dos três estádios segundo os quais, e segundo Comte, tal progresso é realizado, estádio teológico em primeiro lugar, estádio metafísico em segundo, e por fim estádio positivo. Desta pretensão de ultrapassagem de um modelo explicativo do mundo essencialmente teórico, como até então havia sido a tentativa do iluminismo racionalista, e como é expressa pelas palavras de Comte, "eliminar as especulações metafísicas abstratas, estabelecer os critérios da racionalidade dos saberes, e compreender as leis da organização social", torna-se fácil de perceber a mudança de paradigma do modelo de ensino então registada, com maior importância sendo dada à prática em detrimento da teoria, e com o estatuto escolástico do mestre superior ao aluno sendo substituído pela aproximação do primeiro a este último. A não esquecer também a importância epistemológica do surgimento de novas ciências sociais por força do ideário positivista, quer sejam a sociologia, a psicologia, ou a didática, todas incluindo no trabalho intelectual um cunho de atividade experimental e abrindo campo não só para a possibilidade de uma nova forma de ensino, como também para que ela mesma se constitua ciência, e se questione quanto às suas ferramentas e objetos.

Em seguimento disto, um último ponto a ter em conta, mas de extrema importância é o surgimento da escola pública, fruto histórico da tentativa positivista de universalização do ensino e reivindicação das correntes políticas então recém-nascidas, como sejam o liberalismo democrático e principalmente o comunismo. Será aliás nos países governados por tal ideologia, e que pelo ensino procuram a supressão das classes, que nomes tão caros à didática tiveram relevância no século passado, Leontiev (Alexis Nikolaevich, 1903-1979), Lúria (Alexander Romanovich, 1902-1977) ou Vygotsky (Lev Semenovitch, 1896-1934), entendendo-se então, segundo a envolvência histórica exposta, o enfoque dado pelos três à questão pedagógica, vista enquanto ferramenta de desenvolvimento humano, e também a justificação de uma Teoria da Atividade, preconizada pelos três, e pela qual a componente prática do ensino se sobreleva à teoria.

2. Teoria sóciocultural de Vygotsky

Fundamentada no pensamento marxista, a teoria sóciocultural de Vygotsky, sobre os processos psicológicos superiores, resume-se à aplicação do materialismo histórico e dialético.

A noção de desenvolvimento intelectual da criança é para Vygostky função das interações sociais (interação com os outros indivíduos e com o meio). De um lado oposto ao racionalismo, que sustenta que o ser humano é possuidor de ideias inatas, oposto também ao empirismo que coloca o psiquismo humano na dependência do plano sensível ou empírico para a sua constituição, Vygotsky afirma-se enquanto interacionista, privilegiando a análise dos reflexos do mundo exterior no interior do indivíduo (é através da interação entre as condições sociais e a base biológica do comportamento humano que as estruturas mentais se formam).

Piaget (Jean William Fritz, 1896-1984), também teórico interacionista, pesquisou sobre a interação entre as estruturas internas em contextos externos na construção do conhecimento. A partir desta ideia de Piaget, surge na educação o termo construtivismo. Vygotsky, procura a explicação para a construção do conhecimento, a partir das relações sociais dando assim corpo a uma teoria sócio construtivista. A aprendizagem é, para Piaget, um processo de reorganização cognitiva e depende do processo de desenvolvimento (desenvolvimento por estágios), enquanto para Vygotsky, a aprendizagem precede e impulsiona o desenvolvimento (Zona de desenvolvimento proximal). Relativamente à pedagogia Piaget sustenta que deve promover a construção do conhecimento, enquanto para Vygotsky deverá ajudar o aluno a desenvolver-se. Assim, para este último, o ensino deve antecipar-se ao que o aluno ainda não sabe, nem é capaz de aprender sozinho. Na relação entre aprendizagem e desenvolvimento, a aprendizagem precede o desenvolvimento e não está subordinada ao desenvolvimento das estruturas mentais.

No final da segunda década de 1900, Vygotsky, Lúria e Leontiev trabalhando em conjunto, com o propósito de criar uma nova forma de estudar os processos humanos, procuram construir uma psicologia que sintetize as duas tendências presentes na psicologia no início do século: a psicologia como ciência natural (psicologia experimental) e a psicologia como ciência mental. A análise simultânea do homem enquanto corpo e mente, enquanto ser biológico e ser social, enquanto membro da espécie humana e participante de um processo histórico, carateriza a forma como empreenderam a síntese pretendida e assim se iniciou o desenvolvimento da psicologia histórico-cultural (ou sócio histórica). Segundo Lúria, os termos "Instrumental", "Histórica" e "Cultural", da afeição de Vygotsky, retratam este novo modo de estudo de psicologia. Sintetizando a explanação de Lúria, "Instrumental" tem como referência a natureza basicamente mediadora de todas as funções psicológicas complexas, "Cultural" porque envolve os meios socialmente estruturados pelos quais a sociedade organiza os tipos de tarefas, os tipos de instrumentos (quer mentais quer físicos) para realizar as tarefas, e "Histórica" porque ao longo da história social do homem os instrumentos foram inventados e sofreram aperfeiçoamento (Vygotsky, Luria, & Leontiev, 2010).

A base biológica do funcionamento psicológico é o cérebro e este, enquanto sistema aberto, "ajusta-se" de acordo com os modos de funcionamento no decorrer do desenvolvimento individual. (Esta ideia encontra-se em vários autores que referem a "plasticidade" como caraterística do cérebro). Este desenvolvimento não está descontextualizado, ele ocorre numa dimensão histórica e cultural. Assim, o homem, organismo vivo, tem o seu pensamento construído num ambiente histórico e numa existência social, contudo, a relação com o mundo é uma relação mediada por sistemas simbólicos que agem como elementos intermediários entre o sujeito e o mundo (Oliveira, 1997).

Nas funções psicológicas distinguem-se as funções psicológicas elementares (ações reflexas, reações automatizadas, atenção, concentração, …) e as funções psicológicas superiores, estas mais complexas (controle consciente do comportamento, consciência, discernimento, intencionalidade, …)

Na senda desta teoria histórico-cultural, a preocupação central residia na compreensão das funções psicológicas superiores. Vygotsky desenvolveu estudos que demonstravam a mediação social no desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Para Oliveira (1997), esta nova abordagem assenta em três "pilares":

> "as funções psicológicas têm um suporte biológico, pois são produtos da atividade cerebral;
>
> o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre os indivíduos e o mundo exterior, as quais se desenvolvem num processo histórico;
>
> a relação homem/mundo é uma relação mediada por sistemas simbólicos." (p. 23)

O estudo deste desenvolvimento tem por base o "método genético experimental" concebido como "história social", sustentando que as "transmissões" não são apenas de ordem hereditária, mas são também culturais. Neste novo método, a abordagem é histórica e explicativa e não meramente descritiva. Os fenómenos psíquicos são estudados como processos em mudança, em transformação, e não meramente como objetos ou produto final.

2.1. Mediação

Hasan, citado por Bartolini Bussi e Mariotti (2008), refere que o substantivo mediação é derivado do verbo mediar, que se refere a um processo com uma estrutura semântica complexa envolvendo os seguintes participantes e circunstâncias que são potencialmente relevantes para este processo: [1] alguém que medeia, ou seja, um mediador; [2] algo que é mediado; isto é, um conteúdo / força / energia libertada pela mediação; [3] alguém / algo sujeito a mediação; ou seja, o "mediado" a quem / ao que a mediação faz alguma diferença; [4] as circunstâncias da mediação, tais como: a) os meios de mediação, isto é, modalidade; (b) a localização, ou seja, o sítio em que a mediação pode ocorrer (Bussi & Mariotti, 2008).

As funções psicológicas são efeito e causa da atividade social dos homens e esta atividade cumpre-se pela mediação.

De um modo elementar o comportamento estabelece-se uma relação direta que, simplesmente, pode ser representada pela ligação estímulo (S) e resposta (R). (Esquematicamente S--R).

A conceção de Vygotsky sobre o funcionamento psicológico, em particular sobre o desenvolvimento de funções psíquicas superiores, pressupõe um processo mais complexo onde intervém outro elemento intermediário na relação. Este elemento, elo intermediário entre o estímulo e a resposta, assume na relação o papel de estímulo de segunda ordem e é designado por signo (Vygotsky, 1991).

> "Um conceito central para a compreensão das concepções vygotskianas sobre o funcionamento psicológico é o conceito de mediação. Mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento."[9]

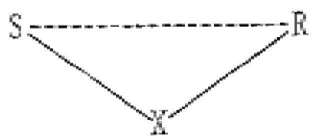


Figura 2: *Esquema - Mediação (Oliveira, 1997, p. 27).*

A Figura 2 ilustra esse processo em que X identifica o elemento mediador que age sobre o indivíduo e não sobre o ambiente. Nesta relação o elemento mediador (signo) facilita a relação de forma indireta. Todos os processos psicológicos superiores estão basicamente

[9] Oliveira, M. K., (1997), *Vygotsky, Aprendizado e desenvolvimento. Um processo socio-histórico*, Editora Scipione, Cap. 2 , pág. 26

organizados segundo o esquema da figura. Contudo o processo assume formas mais elaboradas do que a simples ilustração esquemática da figura. O uso de signos é conducente a uma estrutura específica do comportamento que faz toda a diferença entre o desenvolvimento biológico. Novas formas de processos psicológicos são geradas desta estrutura específica e esses processos estão enraizados na cultura. Assim, ao longo do desenvolvimento do indivíduo, as relações mediadas passam a prevalecer sobre as relações diretas, e a relação do homem com o mundo assenta na noção de uma relação mediada, como já referido atrás (Oliveira, 1997). As funções psicológicas superiores chegam à maturidade através da interação social e da mediação. Vygotsky distingue dois tipos de elementos mediadores da atividade humana: os instrumentos (ferramentas) e os signos.

2.2. Instrumentos

Os instrumentos (ferramentas) são usados ao nível prático numa relação dinâmica entre o homem e a natureza, entre o trabalho humano e a modificação de um meio social, de um meio ambiente e são externos ao indivíduo, são, pois, construídos fora dele e têm como função provocar mudanças nos objetos e/ou controlar processos da natureza.

Os meios através dos quais se realizam determinadas operações psicológicas ou determinadas atividades voltadas para um fim são fundamentais para o processo de formação de conceitos e para a realização da atividade. Não é possível explicar de modo satisfatório o trabalho como atividade humana voltada para um fim, focalizando a análise apenas nos objetivos pretendidos e nas tarefas a realizar. A explicação terá de recorrer ao auxílio de instrumentos/ferramentas, à aplicação de meios originais sem os quais o trabalho não poderia surgir. Do mesmo modo, para a explicação de todas as formas superiores de comportamento humano, a questão central é a dos meios através dos quais o homem domina o processo do próprio comportamento (Vygotsky, 2001).

2.3. Sinais

Os sinais (signos) são as "ferramentas psicológicas" com atuação orientada para o sujeito, dirigindo-se ao controlo de ações psicológicas do próprio individuo ou de outras pessoas. Assumem-se como estímulo que tem por função evocar uma imagem mental. Os sinais são marcas externas que permitem a realização de tarefas que exigem memória ou atenção (Fichtner, 2010).

> *"A invenção e o uso de signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher etc.) é análoga à invenção e uso de ferramentas, só que agora no campo*

> *psicológico. O sinal age como um instrumento de atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho."*[10]

Ainda neste quadro, o funcionamento de ferramentas psicológicas é, pois, interpretado como elemento principal da aprendizagem. Assim as funções mentais superiores desenvolvem-se graças a ferramentas psicológicas que a criança encontra no seu meio, entre as quais está a linguagem (ferramenta fundamental). Para Vygotsky a ferramenta psicológica mais importante é a linguagem, porque é o fator que diferencia o homem do animal inferior.

No cumprimento de uma tarefa, instrumentos (ferramentas) e sinais (signos) assumem em comum uma função mediadora. É nesta mediação que reside a analogia entre ambos. Em Educação Matemática, a mediação refere-se à potencialidade em reforçar a relação entre alunos e conhecimento matemático e está principalmente relacionada com o cumprimento de uma tarefa.

O efeito da interação social e cultural na evolução da cognição humana conduz a duas noções presentes na teoria de Vygotsky, **zona de desenvolvimento próximo** e de **internalização.**

2.4. Internalização

A internalização é apresentada como um processo dialético em que as relações sociais se transformam em novas funções psíquicas. O nível das relações sociais, interpsiquíco, precede o nível individual, intrapsíquico, transformando profundamente os modos de perceção e de memória do pensamento. Este processo é, pois, a apropriação do social de uma forma particular. É na troca do sujeito com outros sujeitos e consigo próprio que se vão internalizando os conhecimentos, situação que pode ser claramente identificável na relação entre alunos e professor. A linguagem é um exemplo de uma comunicação interpessoal que será internalizada e resultará na reorganização da ação. O processo da internalização é também a reconstrução interna de um processo externo, ou seja, é a transformação de fenómenos sociais em fenómenos psicológicos através de ferramentas e signos (Vygotsky, 1979).

Assente na teoria de Vygotsky, no processo de internalização, a experiência anterior vivida socialmente é elaborada individualmente: os processos interpessoais são transformados em intrapessoais. A internalização expressa a relação genética e evolutiva entre processos interpessoais externos e sua contraparte interna intrapessoal, tal como Wertsch e Addison Stone (1985) referem. O processo de internalização ocorre através de processos semióticos, em particular pelo uso de um sistema semiótico na interação social. Embora não limitada à

---

[10] Vygotsky, citado por Bernd Fichtner em *Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus Colaboradores*, pág. 18, consultado em 23/07/2013 no sítio http://www3.fe.usp.br/secoes/inst/novo/agenda_eventos/docente/PDF_SWF/226Reader%20Vygotskij.pdf.

linguagem natural, a análise do processo de internalização está centrada no funcionamento do sistema de signos envolvidos na atividade, ou seja, signos como palavras, desenhos, gestos e ações afins (Wertsch & Addison Stone, 1985).

De acordo com essa interpretação, os dois principais componentes da atividade social, sistemas de signos e processos semióticos, tornam-se componentes básicos da atividade individual, bem como do processo de internalização.

2.5. Zona de desenvolvimento proximal (ZDP)

Os trabalhos de investigação levados a cabo por Vygotsky permitiram-lhe observar que quando são propostas atividades a uma criança, existem algumas atividades que a criança soluciona sozinha e outras que só consegue realizar com ajuda de outras pessoas (adultos, professores, colegas …). As atividades que são realizadas sem qualquer ajuda mobilizam conceitos que já foram internalizados pela criança. Segundo a conceção de Vygotsky, este nível é identificado por nível real da criança. É o nível de desenvolvimento das funções mentais que são já o resultado de ciclos de desenvolvimento que já foram completados. Quando a criança resolve a atividade por intervenção de outra pessoa, ou seja, o desempenho da criança dependeu da interferência de outra pessoa, estamos perante a ideia fundamental da teoria de Vygotsky em que a interação social intervém no processo de construção de funções psicológicas humanas. É este momento do desenvolvimento que é designado por nível de desenvolvimento potencial. Este nível não carateriza as etapas já consolidadas, mas sim as etapas posteriores. É o nível em que a criança soluciona problemas com a ajuda, com a orientação de um adulto ou de um companheiro mais capaz.

O conceito de zona de desenvolvimento proximal é definido por Vygotsky como sendo a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial (Oliveira, 1997).

> "A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário." (Vygotsky, 1991, p. 58)

Todo o percurso que o indivíduo irá fazer para desenvolver as funções que, segundo Vygotsky, estão em fase de maturação até se tornarem funções consolidadas, ou seja, passarem a estar no nível real diz respeito à zona de desenvolvimento proximal.

> "A zona de desenvolvimento proximal é, pois, um domínio psicológico em constante transformação: aquilo que uma criança é capaz de fazer com

> ajuda de alguém hoje, ela conseguirá fazer sozinha amanhã. É como se o processo de desenvolvimento progredisse mais lentamente que o processo de aprendizado: o aprendizado desperta processos de desenvolvimento que, aos poucos, vão tornar-se parte das funções psicológicas consolidadas do indivíduo." (Oliveira, 1997, p. 60)

Segundo Vygotsky a pedagogia deve orientar-se não pelo ontem, mas pelo amanhã. O aluno deve ser encaminhado para aquilo que lhe falta.

> "Apenas o *bom ensino*[11] é o que se adianta ao desenvolvimento" (Vygotsky, 1991, p. 60).

[11] "aprendizado" no texto original.

3. Teoria da atividade

Visando constituir uma psicologia dentro da tradição filosófica marxista, Vygotsky explicou a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano no processo de apropriação da cultura mediante a comunicação com outras pessoas.

No período de 1930-40 Leontiev pesquisou os vínculos entre os processos internos da mente e a atividade humana concreta (Leontiev, 1978a). Explicou que na relação ativa do sujeito com o objeto, a atividade se concretiza por meio de ações, operações e tarefas, suscitadas por necessidades e motivos. Preocupou-se especialmente com o conceito de internalização e com o papel da cultura no desenvolvimento das capacidades humanas. Para ele, uma atividade distingue-se de outra pelo seu objeto e realiza-se nas ações dirigidas a este objeto (Leontiev, 1978b).

Segundo Leontiev, principal fundador da Teoria da Atividade, numa atividade, através de ações planeadas são definidos objetivos de forma intencional, sendo a **estrutura da atividade** constituída por: **Necessidade,** que será a razão ou motivo que faz com que a atividade aconteça, ou seja, a condição para que ocorra a atividade humana; **Objeto da atividade**, sendo este definido pela razão/motivo/necessidade que constitui a atividade e **Ações** que levarão à realização do objeto, pois todas as ações têm um objetivo a alcançar.

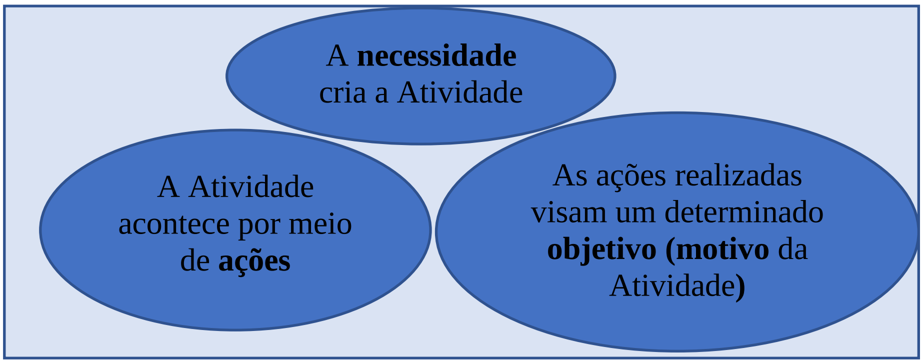


Figura 3: *Estrutura da Atividade.*

As atividades humanas são consideradas por Leontiev como formas de relação do homem com o mundo, dirigidas por motivos e por metas/objetivos a serem alcançados. Esta ideia de atividade que envolve a noção de que o homem de orienta por objetivos está associada a que o homem age de forma intencional e por meio de ações planeadas (Leontiev, 1978b).

4. Teoria da mediação semiótica

A mediação semiótica, apresentada na sua forma mais básica, é um tipo de mediação em particular.

O modelo proposto por Bartolini Bussi e Mariotti (2008), Teoria da Mediação Semiótica, tem como objetivo pormenorizar os processos de ensino-aprendizagem que têm por base a utilização de um artefacto específico. Esta teoria assenta na ideia de mediação de Vygotsky.

Os instrumentos (ferramentas) enquanto elementos mediadores da atividade humana tal como apresentados por Vygotsky aparecem muito frequentemente associados ao termo artefacto quando este é concebido para uma utilização e objetivo específicos (Mariotti, 2009).

A Teoria da Mediação Semiótica propõe descrever e compreender um processo de ensino-aprendizagem que se inicie com a utilização de um artefacto pelo aluno e que o conduza à apropriação de um conteúdo matemático em particular. Isto é, propõe descrever e compreender o sistema de relações entre artefacto, tarefa e conhecimento matemático. Assim, quando um artefacto é utilizado intencionalmente pelo professor torna-se uma ferramenta de mediação semiótica. Para as autoras acima referidas, o potencial semiótico de um artefacto sobressai pela dupla relação que esse artefacto tem com a emergência de significados. Esta dupla relação tem todo o sentido pois, decorrente da utilização de um determinado artefacto, na realização de uma tarefa específica, com vista a um objetivo bem definido, teremos duas categorias de significados: os que emergem do uso do artefacto selecionado para realizar a tarefa e os que são evocados de tal uso pelo professor (Bussi & Mariotti, 2008, p. 754). Em relação a estes últimos, na minha perspetiva, acrescentarei que poderão ser evocados pela utilização de um artefacto, guiados através da discussão coletiva e consequentemente orientados pelo professor.

As atividades didáticas previstas e que se concretizam na resolução de uma dada tarefa, têm como objetivo fazer emergir significados próprios. Essas atividades constituem a base sobre a qual o professor organiza a evolução de significados pessoais para os significados matemáticos. Na teoria da mediação semiótica, a organização de uma sequência de ensino/aprendizagem é baseada em ciclos didáticos (Bussi & Mariotti, 2008, p. 754). A cada ciclo didático está associado um objetivo didático específico e através da sequência de diferentes tarefas, elaboradas com a finalidade de desenvolver significados pessoais, produzir-se-ão sinais partilhados socialmente (discussões coletivas) que se irão transformar em significado pessoal dos alunos. A partir da orientação do professor, a evolução será guiada no sentido de obter significados matemáticos (Bussi, 1996, 1998).

4.1. Artefactos e cognição

Os artefactos (Vygotsky utiliza o termo ferramentas/instrumentos) são usados ao nível prático numa relação dinâmica entre o homem e a natureza, entre o trabalho humano e a modificação de um meio social, de um meio ambiente e são externos ao indivíduo, são, pois, construídos fora dele e têm como função provocar mudanças nos objetos e/ou controlar processos da natureza.

É característico dos seres humanos construir e utilizar artefactos não só para resolver problemas práticos, mas aproveitar o seu contributo ao nível cognitivo. Assim sendo, tem sentido evocar uma dupla natureza dos artefactos. Por um lado, a *caraterística pragmática ou experimental* direcionada para o exterior que permite a alteração do que nos rodeia, e por outro lado a *caraterística reflexiva* orientada para o interior aumentando o conhecimento.

São exemplos de artefactos sons, gestos, utensílios, ferramentas, textos, livros, instrumentos musicais, instrumentos científicos, ferramentas das tecnologias de informação e comunicação, e ainda a linguagem nas suas formas, oral e escrita, a qual tem um lugar de destaque entre os artefactos. A forma escrita de linguagem é produtora de sinais não só em si mesma, ou seja, na expressão escrita de que se compõe, mas também pelo processo de interpretação dessa mensagem. Segundo Goody (1987/1989), "escrever cria a diferença: não apenas em pensar a expressão, mas também e acima de tudo em como tal pensamento é pensado"[12]. A forma escrita de linguagem está sem dúvida ligada ao processo evolutivo da cognição humana, de acordo com a investigação de Luria (1976), "… enquanto a literacia é aprendida, e um novo estágio de prática social e cultural é alcançada, mudanças maiores ocorrem na atividade mental humana."[13] Cambiano (1997) avança mesmo que o uso da escrita pode estar relacionado com o nascimento do raciocínio dedutivo no campo da Geometria[14].

4.2. Aproximação instrumental de Rabardel

Segundo Rabardel (1995) o termo artefacto designa um objeto construído pelo homem e distingue-o do instrumento do qual o artefacto é apenas uma parte (parte neutra ou universal). Desta forma, o instrumento é uma "*entidade mista*", com componentes de tipo

[12] J. Goody, *Il suono e i segni*, p. 266, citado por Bussi e Mariotti no texto *"Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective"*, p. 747.

[13] A. Luria, *Cognitive development: its cultural and social foundations*, citado por Bussi e Mariotti no texto *"Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective"*, p. *747*.

[14] G. Cambiano, *La scrittura della Dimostrazione in Geometria. In M. Detienne (Ed.), Sapere e scrittura in Grecia (pp. 121-150). Bari: La Terza.*, citado por Bussi e Mariotti no texto *"Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective"*, p. 747.

artefacto (*artifact-type components*) e componentes esquemáticos (*schematic components*). Rabardel estuda a “ação instrumentalizada”, isto é, o uso de objetos técnicos numa dada tarefa. No decurso dessa tarefa o objeto técnico torna-se um instrumento para o sujeito, permitindo-lhe efetuar tarefas definidas. A parte do objeto técnico que é reconhecida pelo sujeito é o que Rabardel chama de artefacto. A parte do sujeito que integra o instrumento é o “esquema de ação”. Ao processo de apropriação do objeto técnico pelo sujeito para o tornar num instrumento (processo longo e complexo de elaboração e evolução dos instrumentos) Rabardel chama génese instrumental. Este processo é composto por dois movimentos: movimentação do sujeito em direção ao artefacto, reconhecendo a criação de funções do artefacto, instrumentalização, e a movimentação do artefacto para o sujeito através da modificação dos esquemas de ação e do pensamento do sujeito, instrumentação. Pelas suas palavras, “L’artefact prend place dans une activité finalisée du point de vue de celui qui l'utilise, il a alors un statut de moyen d’action pour le sujet, un moyen qu’il se donne pour opérer sur un objet (ou qui lui est donné, dans le cadre du travail par exemple). Ici le rapport à l’artefact est appréhendé du point de vue du sujet, de son activité et de son action.”[15]

A introdução de uma ferramenta TIC numa tarefa não garante que ela seja usada de uma ou de outra maneira. O processo de génese instrumental levará o seu tempo e as tarefas associadas a essa ferramenta devem visar a apropriação das funções do artefacto (instrumentalização) e a utilização da ferramenta com um objetivo determinado (instrumentação). Quando intervém numa dada tarefa um novo artefacto, a essa tarefa é acrescida uma dificuldade, pois é necessário ter em conta a génese instrumental do novo artefacto. Por exemplo a introdução de *software* ou calculadoras no ensino pressupõe uma transformação das práticas e uma dupla génese instrumental para os professores.

Portanto, se o uso de um artefacto nunca é neutro, mas dá lugar ao desenvolvimento das estruturas cognitivas humanas, é possível adaptá-lo a um ambiente de aprendizagem e em particular à aprendizagem da Matemática, o que pode ser feito por via da proposta da teoria de mediação semiótica preconizada por Mariotti e com pressupostos da teoria de Vygotsky.

[15] Pierre Rabardel, *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*, Cap. 3, pág. 51, consultado em 17/07/2013 no sítio https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document (Rabardel, 1995).

5. Teoria sociocultural da ação mediada instrumental

Os temas de estudo para Wertsch (James V., 1947-), enquanto investigador, são memória e identidade coletiva, desenvolvendo os seus trabalhos especialmente na Rússia e noutros países da antiga União Soviética, bem como nos Estados Unidos. Nos anos 70 lidou diretamente com Lúria e Leontiev e com base nos escritos de Vygotsky sustenta as suas ideias pesquisando sobre a mente e suas relações com o mundo social e físico.

No seu artigo *The Primacy of Mediated Action in Sociocultural Studies* (1994), Wertsch refere que a crescente quantidade de pesquisa e produção escrita em estudos "socioculturais" levou à assunção de novos significados para o termo "sociocultural" e que na sua perspetiva se sobrepõe aos termos "socio-histórico" e "histórico-culturais" utilizados por Vygotsky. Cita como exemplos Baker-Sennet, Matusov e Rogoff, 1992; Forman, Minick e Stone,1993; Wertsch, 1991; Wertsch, del Rio e Alvarez, 1998 (aquando da publicação do artigo acima referido este último ainda estava em fase de impressão) e afirma que uma adequada descrição das pesquisas socioculturais terá de ser alicerçada na noção de "ação mediada" (Wertsch, 1994).

Uma abordagem sociocultural da mente parte do princípio que a ação é mediada e que ela não pode ser separada do meio em que se realiza (Lucy & Wertsch, 1987). Assim, o contexto sociocultural da ação mediada estabelece o vínculo entre o cenário cultural, histórico e institucional por um lado, e por outro, a formação mental do indivíduo.

Tendo como suporte as obras escritas de Vygotsky, Wertsch esboça uma teoria sociocultural da mente. Partindo da identificação de três tópicos nucleares na estrutura teórica de Vygotsky, (1) uma dependência num método genético ou de desenvolvimento[16]; (2) a alegação de que as funções mentais superiores têm a sua origem em processos sociais e (3) a afirmação de que a ação humana, tanto no plano social como individual, é mediada por ferramentas e sinais, Wertsch ressalva que a análise de cada um deles só pode ser interpretada tendo em conta as suas inter-relações (Wertsch 1985,1993). Deste modo, as potencialidades do trabalho de Vygotsky residem na interligação destes três temas. Em (2), a noção de origem e de processos mentais, remete para o método (desenvolvimento) genético em (1) e para as formas de mediação envolvidas (entre estas a linguagem) em (3), respetivamente (Wertsch, 1985, p. 15).

Para além de Vygotsky, outro teórico soviético teve uma particular importância no trabalho desenvolvido por Wertsch: Bakhtin (Mikhail Mikhailovich, 1895-1975). Bakhtin, semiótico,

---

[16] Para interpretar os processos mentais humanos é fundamental considerar como e onde eles ocorrem. Não se trata da análise do produto do desenvolvimento, mas sim o processo de desenvolvimento em todas as suas fases e mudanças. "(…) é apenas em movimento que um corpo mostra o que é" (Vygotsky, 1979, p. 65)

filósofo, teórico da cultura europeia e das artes, foi um verdadeiro pesquisador da linguagem humana. A ele se deve a noção do termo “voz” usada por Wertch, como sendo mais do que um simples sinal auditivo, no sentido em que envolve o fenómeno bem mais abrangente tal como “a personalidade faladora, a consciência faladora” (apud Wertsch, 1993). Wertsch recorre preferencialmente ao termo “vozes” pois evidencia a pluralidade de formas de pensamento e de discurso envolvidas quer num plano individual quer num plano social (Wertsch, 1993).

Em diferentes grupos sociais podemos encontrar situações típicas de comunicação que levam a que se distingam diferentes géneros de discurso. Enquanto as linguagens sociais diferem entre si pelas características dos estratos sociais a que pertencem os indivíduos, os géneros de discurso diferem na sua forma (Wertsch, 1993). Isto significa que o discurso de um indivíduo invoca sempre uma linguagem social e um género de discurso ao qual esse indivíduo dará uma determinada forma. O ventriloquismo (Wertsch, 1993) é uma forma típica de discurso que consiste numa voz a falar através de outra voz. Numa linguagem social, um indivíduo retira do discurso de outros uma palavra, e antes de se apropriar dela, utiliza-a no seu próprio discurso. Esta situação é caraterizada pela interferência de uma voz noutra voz, acompanhada de uma subordinação parcial e correlativa. Carateriza o ventriloquismo a apropriação individual da palavra e do seu significado capacitando o indivíduo em utilizar o género de discurso e a linguagem social como recursos que lhe permitem um desempenho criativo e único. O significado só tem existência num meio social, quando as vozes entram em contacto, num processo dinâmico (Wertsch, 1993).

Wertsch evidencia três ideias básicas compartilhadas por Vygotsky e Bakhtin e que emergem desta noção: a primeira espelha-se na afirmação de que, para entender a ação humana, é preciso entender os dispositivos semióticos utilizados para mediar essa ação; a segunda, pressupõe que determinados aspetos do funcionamento mental humano estão fundamentalmente ligados a processos de natureza comunicativa e a terceira ideia é a de que a única forma de entender, adequadamente, o funcionamento mental humano é através de algum tipo de análise genética ou de desenvolvimento. É de notar que tanto Vygotsky como Bakhtin acreditavam que as práticas comunicativas humanas dão origem ao funcionamento mental do indivíduo (Bakhtin, 1981).

Nesta perspetiva, emerge a necessidade de uma análise dos processos comunicativos em contextos culturais concretos deslocando o foco de análise de entidades linguísticas abstratas tais como palavras ou frases isoladas.

Procurar uma explicação para a mente com base no contexto sociocultural ou vice-versa é, na ótica de Wertsch, demasiado limitativo, pelo que aponta como unidade de análise a ação mediada tal como ela é descrita por Vygotsky e Bakhtin. É, pois, com base nos trabalhos destes dois últimos pensadores que Wertsch argumenta que “a ação mediada deve ser entendida como envolvendo uma tensão irredutível entre os meios mediadores proporcionados pelo contexto sociocultural, por um lado, e o uso único e contextualizado desses meios realizando ações concretas particulares, por outro". Entende-se, pois, que será erróneo isolar os meios mediadores ou o indivíduo numa qualquer tentativa de reduzir a unidade básica de análise da ação mediada (Wertsch, 1994). A explicação de ação mediada, segundo Wertsch, Tulviste e Hagstrom aparece referida por Wertsch (1994), em termos de "agência". Para estes autores, "agência" é definida como indivíduo(s) operando através de processos de mediação, e não deve ser vista como algo que é uma propriedade do indivíduo considerado isoladamente.

Qualquer sistema de sinais, no sentido descrito por Wertsch, só desempenhará um determinado papel se fizer parte da ação. Concretamente no que concerne a linguagem, existe uma tendência generalizada em isolá-la do seu potencial de mediação ao analisá-la como sistema de sinais abstraído da ação humana. Este é um desvio relativamente à perspetiva de que a ação e os meios de mediação são mutuamente determinantes e desta forma tornar-se-á difícil qualquer interpretação do desenvolvimento (Wertsch & Tulviste, 1992).

Capítulo 3

Pensamento/linguagem

> *"(…) pois somente esse pensamento consciente ocorre em palavras, isto é, em signos de comunicação; com que se revela a origem da própria consciência. Dito concisamente, o desenvolvimento da linguagem e o desenvolvimento da consciência (...) vão de mãos dadas."*
>
> Nietzsche in Obras Incompletas, (Nietzsche, 1999, p. 201)

1. Linguagem

É a partir da linguagem que o homem se apropria da experiência acumulada na espécie humana no decorrer da história. A linguagem amplia o universo do indivíduo uma vez que o liberta do mundo percetual imediato pois, analisa objetos, abstraindo e generalizando as suas caraterísticas, assim como o introduz num sistema de relação com os outros objetos.

Para Frege, "fundador da filosofia da linguagem", a linguagem, e muito especialmente a linguagem natural, é apenas um "meio" de expressão do pensamento, e um meio que frequentemente obscurece este, no entanto, admite que não há outra forma de aceder ao pensamento que não seja a linguagem (Miguens, 2007, p. 84).

A linguagem enquanto sistema simbólico, é um instrumento do pensamento e um meio de comunicação e tem uma função conceitual que se desenvolve e enriquece em estreita relação com a evolução dos processos psíquicos.

Tendo por base a análise linguística de Saussure, relativamente aos termos linguagem, língua e fala este linguista e filósofo suíço propõe uma distinção conceitual. Assim, apresenta a linguagem como sendo a faculdade humana que permite ao homem aprender uma língua histórica, a língua como sendo um sistema convencionalmente estruturado pelos homens que permite o desenvolvimento da faculdade da linguagem e a fala como sendo a realização individual da língua enquanto sistema, ou seja, como sendo a forma como cada sujeito que fala concretiza o sistema linguístico que adquiriu a partir da faculdade da linguagem de que naturalmente dispõe. A língua e a fala são duas "partes" integrantes do estudo da linguagem e estão estreitamente relacionadas. Na sua essência, a língua é social e é independente do indivíduo sendo necessária para que a fala seja inteligível e atinja os seus objetivos. A fala, por sua vez, diz respeito à parte individual da linguagem e é necessária para que a língua se estabeleça (Saussure, 1995, pp. 36-39).

Tudo o que é incorporado como linguagem, a partir de uma dada cultura, é realizado pelo diálogo. Esta perspetiva realça a natureza social da linguagem ainda que esta decorra de um monólogo. Neste caso, situação em que o discurso é solitário, o discurso integra-se a outros discursos e serão múltiplas as vozes que, em polifonia, constituem a linguagem. O termo polifonia é um conceito de Bakhtin que expressa a multiplicidade de vozes sociais que, tal como acaba de ser referido, constituem a linguagem (Bakhtin, 1984, 1986).

Em síntese, a natureza social da linguagem decorre do facto de que ela é adquirida numa multiplicidade de contextos de interação e diálogo e de que a utilizamos para interagir e dialogar (Bakhtin, 1981).

Para Vygotsky, a linguagem é descrita como o fenómeno constituidor do ser humano. Segundo a sua perspetiva, a linguagem tem para o homem, por um lado o funcionamento social e por outro, o seu desenvolvimento mental. É neste nível que a linguagem exerce as funções de orientação e estruturação do pensamento, e assim, tem um aspeto funcional e psicológico.

A perspetiva de Vygotsky assenta no desenvolvimento do indivíduo como resultado de um processo sociocultural enfatizando o papel da linguagem, ou seja, os processos semióticos que envolvem o indivíduo e o uso da linguagem. A linguagem é, por um lado, sinal do que ela própria significa e por outro, é também emissora de significados. Neste último caso implica a partilha de informação e de comunicação, o que significa que há em si algum conteúdo cognitivo importante que possa ser interiorizado.

Fundamentada na natureza social da linguagem, a perspetiva de Bakhtin remete-nos para uma dependência da interação dialógica dos sentidos das palavras. Para Vygotsky, o sentido das palavras depende da relação que elas têm com os eventos psicológicos, estabelecendo a ligação entre pensamento e linguagem (Vygotsky, 2007).

2. Linguagem e pensamento

2.1. Vygotsky

Linguagem e pensamento têm raízes genéticas diferentes, mas a linguagem interfere no desenvolvimento percetual desde o nascimento na sua interação com os adultos.

O desenvolvimento do pensamento é, pois, determinado pela linguagem, ou seja, pelos instrumentos linguísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança. O crescimento intelectual da criança depende do seu domínio dos meios sociais de pensamento, ou seja, da linguagem.

Durante a evolução do pensamento e da linguagem, as relações estabelecidas entre ambos contribuem para que se modifiquem. A linguagem torna-se intelectual e o pensamento verbal.

A palavra dá forma ao pensamento criando novas modalidades de atenção, memória, imaginação... O pensamento torna-se simbólico e abstrato.

De modo a evidenciar a relação entre o pensamento e a linguagem, Vygotsky (2007) defende que a representação dessa relação se possa representar por dois círculos que se intersetam em parte, de acordo com o esquema da figura seguinte.

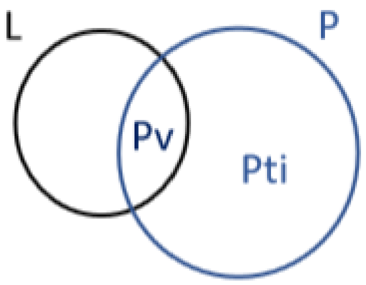


Figura 4: *Esquema - Relação pensamento e Linguagem.*

A região de sobreposição do círculo L (Linguagem) com o círculo P (Pensamento) constitui o "Pensamento verbal" (Pv). A parte mais significativa do pensamento ("Pensamento técnico e instrumental" (Pti)) não se relaciona diretamente com a linguagem. Por outro lado, alguns aspetos da linguagem não têm ligação com o pensamento (região de L exceto Pv). Esta situação é exemplificada com o caso de uma pessoa que declama um poema memorizado.

Sobre o significado das palavras e a formação de conceitos Vygotsky (2007) afirma que a partir do momento que a criança descobre que tudo tem um nome, cada novo objeto que surge representa um problema que a criança resolve atribuindo-lhe um nome. Quando lhe falta a palavra para nomear este novo objeto, a criança recorre ao adulto. Esses significados básicos de palavras assim adquiridos funcionarão como embriões para a formação de novos conceitos e ainda para a formação de conceitos cada vez mais complexos.

É no significado que o pensamento e a linguagem se unem em pensamento verbal e, portanto, é no significado que encontramos a relação entre o pensamento e o discurso. De um modo muito simplista podemos dizer que o significado é um ato de pensamento, mas é simultaneamente uma parte da palavra enquanto tal, pertencendo, portanto, tanto ao domínio da linguagem como ao do pensamento. Assim sendo, o significado das palavras é, simultaneamente, pensamento e linguagem, constituindo a unidade do pensamento verbal.

2.2. Worf: Linguagem, pensamento e realidade[17]

Tal como Vygotsky, foi na relação entre linguagem e pensamento que Benjamin Lee Worf (1897-1941), antropólogo linguístico americano, centrou a sua atenção e desenvolveu o seu trabalho investigativo. Foi apenas a partir de 1931 que Worf iniciou a sua atividade nesta área de estudo e deveu-se à influência de Edward Sapir (1884-1939) também antropólogo linguístico americano. Sapir explorou as implicações do estudo da linguagem para a compreensão da cultura e da personalidade e de forma preliminar desenvolveu a proposta de que cada língua forma o mundo conceitual do falante. Enquanto aluno e colaborador de Sapir, Worf começou por se dedicar ao estudo das línguas nativas indianas e consequentemente foi desenvolvendo argumentos, entendidos como uma extensão dos trabalhos de Sapir, que sustentam que a estrutura de uma determinada língua tende a condicionar/influenciar o modo de pensar de quem usa essa língua. Esta ideia, de que diferentes idiomas determinam diferentes habilidades cognitivas, em que a língua não é apenas o reflexo da realidade, mas sim o contributo para a sua construção, deu corpo à designada hipótese Sapir-Worf.

São dois os principais argumentos (duas teorias) da hipótese Sapir-Worf: Teoria de determinismo linguístico segundo a qual a linguagem que é falada determina a maneira como o individuo que a fala irá interpretar o mundo ao seu redor e Teoria de relativismo linguístico que sustenta que a linguagem influencia o pensamento sobre o mundo real. Estas teorias têm sido tema de estudo e de discussão e, apesar de na década de 70 terem sido praticamente postas de parte, são encaradas como sendo fortes argumentos abrindo perspetivas sobre a origem do conhecimento e a construção da realidade com implicações relevantes no domínio da educação.

Segundo Worf (1978), é apenas através das formas de representações permitidas pela linguagem natural (língua que se utiliza para comunicar) que o orador pode ter acesso ao mundo. Sustenta ainda que as línguas são portadoras, quer no seu léxico assim como na sua sintaxe, de modelos mentais culturalmente variáveis, e que estes permitem uma perceção da realidade de acordo com a cultura associada a cada uma dessas línguas (Worf & Carroll, 1978). Tal como foram apresentadas por Worf, estas conclusões não foram obtidas a partir de uma hipótese validada cientificamente, mas sim a partir de estudos empíricos que lhe permitiram uma visão geral sobre a influência da linguagem na perceção da realidade.

A linguagem como sistema de significados específicos pode orientar oradores numa direção de pensamento e não noutra.

[17] Este título é o mesmo que o do livro editado por John B. Carroll (1978), que reúne vários textos de Worf, e em cuja introdução se pode ler que este seria o título do livro de Worf que não chegou a ser escrito. Segundo John B. Carroll, esta edição inclui os textos mais interessantes e úteis de Worf para a linguística em geral.

Capítulo 4

"Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser mais conveniente."
Henri Poincaré *in* La science et l'hippothèse, (Poincaré, 1917, p. 67)

Geometria – História, Natureza e Ensino/Aprendizagem

A nossa preocupação de estudo é um aprofundamento didático sobre o ensino/aprendizagem da Geometria. Neste sentido, entendemos ser de extrema importância apresentar neste capítulo um breve desenvolvimento histórico da Geometria, da sua natureza e do seu ensino/aprendizagem. Por fim referimos ainda algumas investigações em ensino/aprendizagem da Geometria.

1. Breve incursão pela história da Geometria - De Euclides até ao séc. XX

É fundamental incluir neste trabalho uma referência a Euclides de Alexandria (325 a. C.-265 a.C.), mesmo que esta seja muito breve. Intitulado por inúmeros autores como o pai da Geometria, Euclides, deixou-nos um legado da maior importância, a sua obra composta por treze livros, "Os Elementos".

No livro I é tratada a Geometria Plana - Propriedades dos triângulos, teoria das paralelas e figuras equivalentes. Os conteúdos abordados em cada nos outros doze livros são a Álgebra Geométrica, a Geometria do Círculo, os Polígonos Regulares, a Teoria das Proporções, Tales e figuras semelhantes, a Teoria dos Números, Números Incomensuráveis, a Geometria Espacial de Posição, as Áreas e volumes e os Poliedros regulares.

Os Elementos é uma obra que contém o tratamento axiomático-dedutivo mais antigo da Matemática e pode ser encarado como uma antecipação do método axiomático da Matemática moderna.

O livro I[18] começa com uma lista de Definições (da I à XXXV) sem qualquer comentário como, por exemplo:

"I. Ponto é o, que não tem partes, ou o, que não tem grandeza alguma.";
"II. Linha é o, que tem comprimento sem largura.";
"III. As extremidades da linha são pontos."
(…)

A seguir às Definições surgem os Axiomas e os Postulados, por esta ordem. Da lista dos doze axiomas vejam-se os exemplos:

(…)
"XI. Todos os angulos rectos são eguaes. [Postulado 4]
XII. E se uma linha recta, encontrando-se com outras duas rectas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dous rectos, estas duas rectas, produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos dictos angulos internos. [Postulado 5]"

Da etimologia latina do vocábulo "postular" que significa "pedir com instância" concluímos que Euclides "pede" a aceitação das proposições geométricas que formula nos Postulados (usualmente axiomas):

"I. Pede-se como cousa possivel, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha recta.
II. E que uma linha recta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessario.
III. E que com qualquer centro e qualquer intervallo se descreva um circulo."

Note-se que toda a Geometria Euclidiana assenta nos três conceitos fundamentais, o de ponto, o de reta e o de círculo, e nos cinco postulados a eles referentes. O 5.º postulado, por ter um texto mais complexo que os outros quatro levou a que se pensasse que ele era independente deles e que não se tratasse de uma verdade de igual modo imediata.

Começou a grande odisseia, que duraria séculos, da tentativa de demonstrar o quinto postulado partindo dos outros quatro. Matemáticos tais como Ptolomeu (87-150 d. C.), Proclus (410-485) e Wallis (1616-1703) falharam o intento. Girolamo Saccheri (1667-1733) também não consegue fazê-lo, mas é o primeiro a utilizar na sua demonstração a possibilidade de existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é maior ou menor do que 180º, o que contraria a Geometria Euclidiana. No século XVIII o francês Legendre (1752-1833) conseguiu demonstrar que este axioma é equivalente a afirmar que "A soma dos ângulos internos de um

[18] Livro I da Versão Latina de Frederico Commandino, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1855, acedido no sítio http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Elementos_livroI.pdf em 03/03/2014 (Commandino, 1855).

triângulo é sempre igual a dois ângulos retos". No mesmo século, o matemático britânico John Playfair[19] (1748-1819) apresentou uma formulação equivalente do 5.º postulado mais simples do que a de Euclides. Poucos anos depois, Gauss (1777-1855), tal como todos os que o antecederam, tentou deduzir o axioma das paralelas a partir dos restantes quatro. Não o conseguindo após repetidos esforços, convenceu-se, por volta de 1817, de que este era independente dos restantes e começou a investigar as consequências de uma geometria em que o axioma das paralelas não fosse verificado. Então, o 5.º postulado, já designado por "Postulado das paralelas", passou a ser posto em causa, como axioma fundamental, dando origem a novas axiomáticas, designadas de não-euclidianas (Blumenthal, 1980).

Estávamos no início do século XIX. Lobatschewski (1792-1856) e János Bolyai (1802-1860), com trabalhos independentes, mas com ponto de partida comum, procuraram o desenvolvimento de uma nova geometria a partir de um sistema axiomático em que o Postulado das Paralelas fosse substituído por outro alternativo. Pela primeira vez são publicados resultados relativos a uma nova Geometria Não Euclidiana: Geometria Hiperbólica. Na Geometria Hiperbólica o Postulado das Paralelas é substituído pelo axioma, *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada*. O primeiro modelo para a geometria Hiperbólica foi apresentado em 1868 por Eugenio Beltrami (1835-1900). Um segundo modelo da Geometria Hiperbólica é o modelo de Poincaré num semiplano que foi apresentado por Henri Poincaré (1854-1912) em 1882. Para além do semiplano, Poincaré também desenvolveu o modelo do Disco que mantém o seu nome. Proposto por Félix Klein (1849-1945), outro modelo para a Geometria Hiperbólica é o do Disco de Klein.

Outra hipótese de substituição do postulado das paralelas pelo axioma, d*ada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada,* remete-nos para a Geometria esférica. A Geometria Esférica enquanto Geometria Não Euclidiana em que não existem retas paralelas foi primeiramente reconhecida por Bernhard Riemann (1826-1866). Nesta geometria as retas são círculos máximos e contrariamente ao que acontece na Geometria Hiperbólica e na Geometria Euclidiana duas retas distintas não se intersetam num único ponto, mas sim em dois pontos (dois círculos máximos distintos têm dois pontos em comum que se designam-se por pontos antípodas). Nesta situação o primeiro postulado de Euclides, “dois pontos definem uma única reta”, não se verifica. Esta questão é resolvida pelo matemático Felix Klein (1849-1925) que em 1871 propõe a identificação de ponto na esfera como sendo um par de pontos antípodas e uma reta como sendo um círculo máximo com os seus extremos identificados. Felix Klein designa esta nova geometria por Geometria Elíptica.

---

[19] O livro que aborda este assunto é “Elementos de Geometria”, disponível na versão original em http://books.google.pt/books?id=2XlaAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false, consultado em 04/03/2014 (Playfair, 1866).

A partir do momento em que são descobertas as Geometrias Não Euclidianas surgem vários sistemas axiomáticos. Desses sistemas sobressai Fundamentos da Geometria, de David Hilbert (1862-1943) estruturalmente influenciado por Euclides (Kline, 1972).

Desenvolvida por Hermann Minkowski (1864-1909), a Geometria Táxi é uma forma de Geometria Não Euclidiana, caraterizada por uma métrica nova em que a distância entre dois pontos é obtida pela soma dos trajetos verticais e horizontais entre eles, ou seja, a partir das coordenadas cartesianas desses dois pontos do plano, a distância é a soma das diferenças absolutas entre as suas coordenadas. Existem várias designações para esta geometria, neste estudo manteremos a designação de Geometria Táxi.

2. Natureza, Funções didáticas e Processo ensino/aprendizagem da Geometria

A geometria oferece-nos uma maneira de interpretar e refletir sobre o mundo em que vivemos. Para Laborde (1989), uma primeira caraterística da geometria fundamenta-se nas ligações complexas que ela preserva com o espaço físico que nos envolve. Assim, a geometria constitui-se como modelização deste espaço físico. Uma segunda caraterística diz respeito a uma mediação entre o espaço físico e os conhecimentos geométricos teóricos, que é constituída pelas representações gráficas (figuras da geometria plana, representações em perspetiva, sistemas de vistas de desenhos técnicos, …). Estas representações apresentam por um lado, aspetos figurativos e por outro lado simbólicos, assentes sobre códigos e convenções sociais, mas também sobre propriedades geométricas. Finalmente, uma terceira caraterística referente à existência de dois sistemas de significantes, as representações gráficas e o discurso em linguagem natural, mas fundamentalmente às correspondências entre estes dois sistemas cujas propriedades são totalmente diferentes (Laborde, 1989).

Referindo-se à importância da geometria, Guy Brousseau (2000) afirma que a aprendizagem da geometria leva os alunos a raciocinar matematicamente, ou seja, a uma mistura de raciocínio dedutivo e de imaginação indutiva que é ativada pela manipulação de imagens reconhecidas. Segundo este mesmo autor, a Geometria não consiste apenas em descrever o que se vê, mas para além disso permite-nos estabelecer o que deve ser visto (Brousseau, 2000).

Numa perspetiva curricular, Abrantes (1999) refere que a riqueza e variedade da geometria constituem argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática e fundamenta esta afirmação nos seguintes pressupostos: na geometria é possível encontrar inúmeros exemplos e concretizações da relação entre realidade concreta e situações matemáticas, o que permite tratar uma grande variedade de objetos e situações; a geometria é uma “fonte” de uma grande variedade de problemas e processos de resolução, que podem ser de visualização, representação, construção, transformações geométrica, forma e dimensão, algébricos, cálculo combinatório, possibilitando conexões com outros domínios da Matemática; aspetos essenciais da natureza da Matemática podem ser trabalhados a partir de atividades investigativas na geometria, pois estas atividades favorecem a formulação e resolução de problemas, permitem ainda conjeturar, testar, validar ou refutar, generalizar, justificar, comunicar a descoberta de forma natural, assim como para a natureza e o valor da demonstração em Matemática; por último, qualquer que seja o nível de escolaridade ou de desenvolvimento dos alunos, é sempre possível propor atividades de exploração e investigação em geometria (Abrantes, 1999).

A geometria pode ser um excelente meio para a criança indicar o seu nível de compreensão, o seu raciocínio, as suas dificuldades ou soluções. Normalmente são surpreendentes as resoluções geométricas que são apresentadas como resoluções de problemas algébricos. Alguns exemplos deste tipo de resoluções são apresentados em Lorenzato (1995) e, este autor, refere no mesmo artigo que a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui. Fundamenta essa conexão referindo que a Geometria se interliga com a Aritmética e com a Álgebra pois existe uma correspondência entre os objetos e relações da Geometria com os da Aritmética e da Álgebra. Assim, os conceitos, as propriedades e as questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela geometria, o que se revela uma verdadeira tradução para o aluno. Para aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, tudo o que é necessário pode ser encontrado na geometria (Lorenzato, 1995). A Geometria é um dos ramos da matemática que mais favorece o desenvolvimento de capacidades e habilidades, tais como a criatividade, a perceção espacial, o raciocínio hipotético-dedutivo, levando à interpretação do mundo físico que nos rodeia.

De todos os domínios do conhecimento a que os alunos têm de aceder, a geometria insere-se naquele que exige uma atividade cognitiva mais completa pois requer o gesto, a linguagem e o olhar (Duval, 2005a). Nesse domínio, construir, raciocinar e ver não ocorrem isoladamente, o que traduz a complexidade de qualquer análise enquanto fenómeno didático. O mesmo autor refere ainda que é a inter-relação entre a construção, o raciocínio e a visualização que capacita o aluno com a proficiência necessária em Geometria.

A importância dos modelos geométricos na grande variedade de estudos matemáticos e a eficácia da Matemática no domínio da geometria têm contribuído para que a distinção entre conhecimento do espaço e geometria tenda a desaparecer (Brousseau, 2000). Esta distinção não é fácil de reconhecer pelos alunos e também não está na mente dos professores. Contudo, na perspetiva do mesmo autor, esta distinção é extremamente importante quando a geometria deixa de ser usada como conhecimento por si só, e passa a ser usada como ferramenta para o ensino com o objetivo de levar o aluno a raciocinar dedutivamente ou de o iniciar na utilização de uma teoria matemática. Em súmula, usada como ferramenta, a geometria reúne potencialidades que devidamente exploradas permitem desenvolver várias capacidades cognitivas propiciando o estudo de conteúdos matemáticos com aplicações em várias ciências. Esclarecer as diferentes funções da geometria, como meio de representação do espaço ou como modelo de uma atividade matemática, evitará erros, desentendimentos e outras falhas.

É através da Geometria que podemos estruturar tudo o que nos rodeia, o ambiente físico onde nos movemos e vivemos ou o universo em que estamos inseridos. Somos levados, pela perceção dos objetos, a associar propriedades geométricas tais como a forma e a medida ao mundo que nos rodeia. As noções básicas de geometria que reconhecemos nos objetos com que lidamos todos os dias levam-nos a percecionar o mundo físico que nos rodeia com base no conhecimento geométrico de que dispomos. Quando invocamos, por exemplo, o conceito de reta associa-se-lhe uma imagem mental. Neste simples exemplo reconhecemos a necessidade de uma articulação cognitiva entre duas representações: a primeira, a linguagem, como forma de expressão de conceitos e propriedades e a segunda, a visualização de formas representativas do espaço que nos rodeia (Duval, 2005a). A dificuldade na aprendizagem da geometria reside no facto de que quer a visualização, quer a verbalização requererem funcionamentos cognitivos diferentes e de maior complexidade do que quando são mobilizados noutras áreas do conhecimento, fora da geometria. Poderemos sempre modificar o discurso sobre os objetos, orientá-lo numa determinada direção de acordo com um objetivo pré-definido, mas não conseguiremos modificar as formas que de um modo geral serão reconhecidas, pois o reconhecimento visual escapa a qualquer controlo intencional. A procura das condições ideais para a aprendizagem da geometria pode passar por se conseguir que a visualização e a linguagem funcionem em sinergia.

Pelo facto de lidarmos com entidades abstratas, será pela linguagem que melhor lhes poderemos aceder. Assim, a linguagem tem um papel bastante importante no desenvolvimento dos conceitos geométricos. As formas prototípicas como uma linha reta, um triângulo ou uma circunferência são descritas verbalmente de forma que nos possibilitam imaginar representações platónicas perfeitas, como o exemplo atrás citado de uma reta perfeita sem espessura que pode ser prolongada em qualquer direção. A prova euclidiana também utiliza a linguagem como forma de fornecer argumentos verbais que possam sustentar um raciocínio discursivo, contudo os textos diferirão de aluno para aluno consoante o tipo de representação visual que lhes serve de apoio.

A intuição é frequentemente mencionada no domínio da aprendizagem da geometria como sendo essencial no processo de aprendizagem (Fujita, Jones, & Yamamoto, 2004). A intuição é apresentada como sendo a habilidade em “ver” figuras geométricas, imaginando-as mentalmente. Através da manipulação mental de figuras, podem destacar-se as propriedades, decompor ou compor, imaginar composições, criar novas figuras, para serem aplicadas na análise e/ou resolução de problemas. Poincaré (1908) refere a existência de vários tipos de intuição e distingue a que faz apelo aos sentidos e à imaginação e a intuição do número puro como sendo a que leva à génese dos raciocínios matemáticos. Para este último autor, a intuição é o instrumento da invenção e a lógica será o da demonstração (Poincaré, 1908). Voltando a Fujita et al. (2004), é referido que são várias as visões sobre o papel e a natureza da intuição geométrica e ainda de que há dúvidas de como se pode desenvolver a intuição nos alunos. Vários educadores têm vindo a pronunciar-se sobre o papel crucial que a intuição tem no processo ensino/aprendizagem da geometria. Para Fischbein (1993), referido em Fujita et al., 2004, um quadrado pode ser descrito a partir das suas propriedades conceituais, que lhe são intrínsecas, sustentadas pela teoria geométrica, mas possui também uma representação mental de uma propriedade espacial. Com base nesta afirmação, refere que o raciocínio geométrico é caracterizado pela interação entre esses dois aspetos, que designa de figurativo e de conceitual. Também citado por Fujita et al. (2004) e Mason (1991), é referido por sugerir que, em primeiro lugar, os diagramas podem ser pensados como um meio de despertar a imaginação mental e, em segundo lugar, como formas de aumentar, ampliar e fortalecer as imagens mentais e, consequentemente, o pensamento matemático.

Goldenberg, Cuoco & Mark (1998, p.6) consideram que as visualizações na geometria são muito importantes quando se pretende resolver problemas em geometria. Para tal, sugerem que o "pré-requisito é a capacidade em separar uma figura na mente, ver os elementos individuais e formular conjeturas suficientemente boas sobre a relação entre ambos de modo a conduzir a escolha de mais ferramentas experimentais e analíticas" (Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998).

Na nossa perspetiva, a aprendizagem da geometria pode ser interpretada segundo dois focos de incidência. Por um lado, resultante da atividade em que os alunos se envolvem e que deverá ser proporcionada por tarefas cuja resolução dê sentido aos conhecimentos geométricos visados. Por outro lado, assente numa construção coletiva e social que conduz a um modo específico de agir, falar e pensar.

3. Investigações em ensino e aprendizagem da Geometria

Quaisquer que sejam os trabalhos publicados e cujo desenvolvimento tenha como tema a Geometria, a ideia comum neles partilhada é a de que a Geometria é uma área rica em possibilidades de pesquisas. Uma análise mais profunda evidencia outra ideia, do meu ponto de vista mais importante que a primeira, e que é a de que a aprendizagem da Geometria se reveste de uma especificidade própria quando é comparada com outras áreas da Matemática. Tendo por referência trabalhos ou publicações de investigação em educação matemática sobre Geometria, quer em Portugal quer noutros países, verificamos que o cerne das questões está focalizado nos processos de ensino/aprendizagem.

Numa tentativa de organização dos vários trabalhos consultados é possível distinguir cinco áreas de pesquisa:

- Tecnologias no ensino/aprendizagem da geometria (Ambientes de Geometria Dinâmica-AGD);
- Organização/Reestruturação curricular (Distribuição de conteúdos). Normativos e Programas;
- Demonstrar/provar em Geometria (formalização do discurso);
- Pensamento/Raciocínio geométrico (Visualização espacial);
- Formação inicial (no âmbito da formação de futuros professores) e Formação contínua de professores no ensino da geometria.

De um modo bastante abrangente verificámos que estas são as cinco áreas que emergem dos trabalhos investigativos que analisámos. Constatámos que muitos dos trabalhos não estão confinados a uma só destas áreas e que são os AGD que mais são estudados em simultâneo com uma ou mais das outras quatro áreas. Existe um grande número de trabalhos de investigação com foco nas tecnologias associadas ao ensino/aprendizagem da Geometria. Apenas a título de exemplo segue-se a referência a alguns dos estudos analisados neste trabalho.

Neto (2009) centrou o seu estudo em abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, no sentido de promover níveis estruturados do pensamento matemático recorrendo em particular às potencialidades de outros modelos de Geometria Plana (e.g. Geometria Hiperbólica, Geometria do Motorista de Táxi). O principal objetivo da sua investigação foi analisar ambientes de aprendizagem em que os alunos sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados e, de uma forma mais geral promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. Foram abordados, em particular, problemas de prova num contexto de Geometria Não Euclidiana, com recurso a artefactos e a software de geometria dinâmica (Neto, 2009).

Sobre as práticas de Ensino de Geometria no 3º ciclo do Ensino Básico, Lopes (2010) focou-se na articulação dos esforços realizados e desenvolvidos pelo professor na sala de aula, para a promoção de aprendizagens significativas nos alunos, concluindo que o trabalho colaborativo entre os professores é fundamental na gestão e desenvolvimento curriculares (Lopes, 2010).

O estudo desenvolvido por Nunes (2011) insere-se na problemática da construção do significado matemático, no que concerne à aprendizagem de conceitos e relações geométricas. Teve por base de trabalho a realização de tarefas com recurso ao GeoGebra e procurou dar resposta a três questões: de que modo a mediação semiótica está presente ao longo da construção do significado; qual o papel da linguagem no processo de aprendizagem da geometria e como é que a utilização do GeoGebra influencia a aprendizagem de conceitos e relações geométricas. Os resultados deste estudo apontam evidências de que a aprendizagem da geometria é sustentada por processos de interpretação, de linguagem e de uma contínua e infinita construção de sistemas conceptuais que se vão organizando, tornando-se mais especializados, mais significativos e mais próximos do registo matemático (Nunes, 2011).

Com o estudo de pavimentações regulares e semi-regulares em ambiente de geometria dinâmica, Vieira (2011), pretendeu analisar o impacto que a tecnologia, em particular o Geometer's Sketchpad (GSP), tem na aprendizagem da Matemática e em particular no ensino da Geometria e da demonstração de propriedades geométricas. A análise dos dados recolhidos permitiu identificar que os alunos têm algumas dificuldades no cumprimento das tarefas propostas, e fundamentalmente na compreensão do papel da demonstração. Apenas um grupo de alunos reconhece a função de validação e explicação da demonstração considerando esta última a principal função da demonstração matemática. A maior parte dos alunos revelou dificuldade em formular conjeturas e manipular resultados algébricos relativamente ao tema em estudo. Por outro lado, revelaram um bom desempenho ao nível da utilização de isometrias na construção de pavimentações sendo que numa fase inicial eram conduzidos aos resultados iniciais por imposição das tarefas, mas posteriormente revelaram saber aplicar com correção as isometrias (na construção de pavimentações) (Vieira, 2011).

O artigo *Aprendizagem da geometria em b-learning no ensino básico* de Carvalho e Andrade (2012) tem por base uma investigação sobre a implementação de ambientes de ensino e aprendizagem mais ricos, criadores de contextos mais estimulantes e mais desafiantes, que permitam aos alunos desenvolver a sua capacidade para explorar, conjeturar, raciocinar e relacionar logicamente. Estes autores apresentam os AGD como poderosos instrumentos de ensino da Geometria e, em particular, referem o Compass and Ruler do qual ressalvam as potencialidades enquanto mediador no processo de ensino/aprendizagem da Geometria, no que respeita quer ao desempenho matemático, quer às atitudes dos alunos. Expressam ainda, no mesmo artigo, a opinião de que o recurso ao software e ao site "carmate" na resolução das tarefas de investigação/exploração, permite aos alunos participarem mais ativamente no seu processo de aprendizagem, enquanto construtores do seu próprio conhecimento (Carvalho & Andrade, 2012).

Sobre a formação inicial de professores do Ensino Básico e a geometria, Couto (2015) refere que a prática docente é decisiva nos resultados dos sistemas de avaliação nacionais e internacionais que mostram um fraco desempenho dos nossos estudantes particularmente em relação à Geometria. Acrescenta que alguns professores não se encontram preparados para as necessidades de uma sociedade em permanente transformação pelo que, a formação inicial e a formação contínua de professores assumem uma importância fundamental. O estudo que esta autora realizou no âmbito da unidade curricular de Geometria do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação, teve como objetivo principal a identificação do conhecimento e do raciocínio geométrico dos futuros professores. Este estudo permitiu a recolha de informação relevante para que se desenvolva uma reflexão aprofundada sobre a unidade curricular de Geometria e seu conteúdo, facilitando a sua reformulação e melhoria em aspetos relacionados com os temas a tratar e como os abordar (Couto, 2015).

A integração gradual e crescente das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no currículo de Matemática tem provocado mudanças que exigem abordagens complexas e integradoras. Na sua dissertação de mestrado, Ventura (2017) propôs-se estudar o potencial da utilização da linguagem de programação, Scratch, no ensino da geometria no 1.º ciclo, de forma a intensificar a abstração necessária à compreensão das propriedades das figuras geométricas. A manipulação da ferramenta educativa, Scratch, permitiu uma melhor compreensão dos conteúdos, intensificando o pensamento computacional (Ventura, 2017).

No artigo de Jacinto e Carreira (2017), resolução de problemas de matemática com o GeoGebra: aspetos do pensamento geométrico no desenvolvimento de modelos conceptuais, é discutida a atividade de resolução de problemas de matemática com um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, no âmbito de uma Competição de Matemática, online, o SUB14. As autoras pretendem compreender os aspetos do pensamento geométrico envolvido no desenvolvimento de modelos conceptuais aquando da atividade de resolver e exprimir as soluções (Jacinto & Carreira, 2017).

O trabalho desenvolvido por Silveira (2018) teve como finalidade avaliar a influência de uma Ação de Formação Contínua, centrada nas aprendizagens de transformações geométricas isométricas no plano euclidiano, com recurso a um ambiente dinâmico de geometria dinâmica (GeoGebra), no desenvolvimento de competências geométricas, tecnológicas, curriculares e didáticas de professores e competências geométricas e tecnológicas dos seus respetivos alunos. De acordo com a autora, a experiência desenvolvida na sala de aula teve repercussões muito positivas ao nível da motivação e empenho dos alunos, bem como da construção de conhecimento sobre os tópicos geométricos abordados e do desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, de comunicação e de raciocínio. Permitiu, ainda, o desenvolvimento de uma visão mais abrangente, correta e positiva das ferramentas (Silveira, 2018).

Sobre as condições cognitivas da aprendizagem da Geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciações dos raciocínios e coordenação dos seus funcionamentos, Duval (2005a) refere-se a dois registos de representação diferentes: a visualização de formas para representar o espaço e a linguagem para enunciar propriedades e para deduzir outras novas. Menciona ainda no seu artigo que a Geometria é um domínio do conhecimento que exige a articulação cognitiva entre esses dois registos e atribui a uma utilização desadequada destes registos as dificuldades da aprendizagem da Geometria. Distingue dois modos de ver as figuras, o icónico e o não icónico, e apresenta três tipos de desconstrução de formas: a desconstrução instrumental, a decomposição heurística e a desconstrução dimensional. Esta última constitui o processo central da visualização geométrica. Para a análise do papel da linguagem em Geometria distingue três níveis de operações discursivas: a denominação, a enunciação de propriedades e a dedução. Conclui que para que a visualização e a linguagem funcionem em sinergia é necessária a tomada de consciência da desconstrução dimensional da forma e da variedade das operações discursivas (Duval, 2005a).

Referindo-se aos AGD em 2D, Hattermann (2008), aponta que conseguiram melhorar as aulas de Matemática e que se tornaram populares nas escolas de todo o mundo. Durante as últimas três décadas, vários AGD em 2D foram criados para enriquecer e aprofundar o processo de aprendizagem na sala de aula de matemática. Aponta exemplos dos AGD mais populares, tais como: Cabri-géomètre, GEOLOG, Geometrics Sketchpad, Geometry Inventor, Geometric Supposer e Thales. Na Alemanha, Euklid-DynaGeo, Cinderela, GeoGebra, Geonext e Zirkel-und-Lineal. Refere ainda que os AGD são ferramentas poderosas, nas quais o utilizador é capaz de construir geometricamente, descobrir dependências, desenvolver ou refutar conjectras ou obter ideias para provas. Aponta três propriedades centrais que caraterizam os AGD: o "modo de arrastar", a funcionalidade "locus de pontos" e a capacidade de construir "macros". Destas três, o modo de arrastar é o recurso mais importante disponível nesses ambientes, porque permite introduzir movimento na geometria euclidiana estática. Com a ajuda da funcionalidade "locus de pontos", o utilizador é capaz de visualizar o caminho de um ou mais pontos enquanto está arrastando um ponto básico. As macros são usadas para condensar uma série de etapas de construção num só comando de software. Ao usar macros, o utilizador pode facilitar o controle de construções mais complexas, que consistem em várias etapas de construção. Com base na importância da orientação espacial e do uso do modo de arrastar "*drag-mode*", este artigo apresenta um primeiro passo para aprender mais sobre as atividades dos alunos em AGD em 3D. Foram alvo deste estudo, estudantes cujo percurso académico visa a formação de futuros professores (Hattermann, 2008).

No artigo "Aprender Geometria, entre adaptação e aculturação. Linguagem e atividade geométrica" de Bulf, Mathé & Mithalal, (2014) podemos ler que, quer nos primeiros anos de ensino (dos 6 aos 10 anos), quer no início do outro ciclo (dos 11 aos 15 anos), a aprendizagem da geometria resulta do confronto com problemas cuja resolução dá sentido aos conhecimentos geométricos. Contudo, a aprendizagem da geometria também se faz através da construção coletiva e social que conduz a um modo específico de agir, de falar, de pensar culturalmente determinado. De modo a explorar a questão de como os dois processos se interlaçam e interagem foi considerada a linguagem utilizada pelos alunos durante a atividade geométrica. Os autores recorrem a uma ferramenta metodológica, "*mode de fréquentation*" e propõem caminhos para pesquisas que examinem as interações entre os fenómenos de adaptação e a construção social do conhecimento geométrico (Bulf, Mathé, & Mithalal, 2014).

O texto de abertura da segunda secção da publicação das atas do EIEM 2017[20], da autoria de Isabel Vale e Teresa Pimentel, dinamizadoras do Grupo de Discussão 1 do referido Encontro, deixa um conjunto de questões de reflexão que se enquadram perfeitamente nesta secção do nosso trabalho.

> 1. O que se pretende com a inclusão da geometria no currículo da matemática escolar? Competências geométricas, construção de conceitos geométricos, prova, resolução de problemas, uso de materiais, tecnologias? 2. A aprendizagem em geometria: o que está em jogo, quais as dificuldades, quais os obstáculos, o que é possível melhorar? 3. O ensino da geometria: o que está em jogo, produção, divulgação e avaliação de recursos, práticas de ensino, formação inicial e contínua de professores? e 4. O currículo de Geometria: organização, objetivos, tópicos, conexões com outros domínios matemáticos, o que contemplar? (Vale & Pimentel, 2017, p.43)

Todas as questões levantadas pelas duas autoras podem espelhar-se nas temáticas evidenciadas nos trabalhos que selecionámos. Não deixa de ser particularmente interessante verificar que a maioria desses trabalhos e/ou artigos científicos se foca no uso de tecnologias e que estas aparecem associadas a outra das áreas que identificámos no início desta secção.

[20] O tema deste Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM) foi "O ensino e a aprendizagem da Geometria", tendo sido realizado nos dias 11 e 12 de novembro de 2017 em Lisboa.

PARTE III – Abordagem investigativa

Capítulo 5

"A aranha realiza operações que lembram o tecelão, e as caixas suspensas que as abelhas constroem envergonham o trabalho de muitos arquitetos. Mas até mesmo o pior dos arquitetos difere, de início, da mais hábil das abelhas, pelo fato de que antes de fazer uma caixa de madeira, ele já a construiu mentalmente. No final do processo do trabalho, ele obtém um resultado que já existia em sua mente antes de ele começar a construção. O arquiteto não só modifica a forma que lhe foi dada pela natureza, dentro das restrições impostas pela natureza, como também realiza um plano que lhe é próprio, definindo os meios e o caráter da atividade aos quais ele deve subordinar sua vontade."
Karl Marx in O Capital, citado por Vygotsky in Formação social da mente, (Vygotsky, 1991, p. 6)

Metodologia da investigação

1. Tipologia adotada

Tendo como orientação os objetivos definidos para esta investigação, a opção por uma metodologia de investigação qualitativa de cunho descritivo e interpretativo permitiu observar a realização das tarefas propostas aos alunos e analisar, de forma a compreender, o modo de pensar do aluno a partir da reflexão das interações verbais entre professor e alunos (Carmo & Ferreira, 2008). A um grupo de nove alunos do ensino secundário (alunos com idades compreendidas entre 15 e 18 anos), elementos do Clube de Matemática da escola que frequentam, foi proposto a realização de algumas tarefas investigativas. A recolha de dados incluiu a observação dos alunos, os seus registos escritos (resolução das tarefas) e o registo áudio durante a realização das tarefas. Todos os registos áudio foram integralmente transcritos permitindo, numa fase posterior, a análise ao modo como os alunos se envolveram na realização das tarefas, à interação entre si e com a professora, aos sinais emergentes de quaisquer reações no grupo de trabalho, em particular dos emergentes das discussões coletivas e da evolução desses mesmos sinais.

Uma metodologia de natureza qualitativa carateriza-se pelo facto de a análise ser feita de forma indutiva em que o propósito é o de percorrer um processo de exploração e descoberta de aspetos emergentes da própria análise de dados, isto é, o interesse do estudo é focalizado no processo em detrimento do produto. Reconhece-se ainda neste tipo de metodologia que a fonte direta de dados é o ambiente natural e os dados são essencialmente de tipo descritivo (Bogdan & Biklen, 1994).

2. A intervenção didática

2.1. Onde e quando decorreu

A escola onde foi feita esta intervenção situa-se na Raia Centro do país, num concelho desertificado dada a interioridade que o afeta. Depois de todos os formalismos legais assegurados[21], no 1.º período letivo de 2015/2016 foram aplicadas as tarefas do grupo Geometria Táxi (GT[22]) e iniciou-se a aplicação das tarefas do grupo Geometria Esférica (GE[23]). No 2º período, do mesmo ano letivo, concluiu-se a aplicação iniciada no período letivo anterior, GE, e foram aplicadas as tarefas do grupo Geometria Hiperbólica (GH[24]).

2.2. Caraterização dos participantes

A investigação teve como alvo alunos de todos os níveis do Ensino Secundário. Este ciclo de ensino, em Portugal, contempla 3 níveis: o 10.ºano de escolaridade, alunos com 15-16 anos; o 11.º ano de escolaridade, alunos com 16-17 e o 12.º ano, alunos com 17-18 anos.

Realizaram as tarefas de investigação três grupos de alunos, um do 10.º, um do 11.º e outro do 12.º ano. Os alunos do 10.º ano constituíram o maior grupo com quatro alunos. No 11.º ano, o grupo era constituído por 2 alunos e no 12.º ano eram 3 os alunos que formavam o grupo. Todos eles são elementos ativos no Clube de Matemática onde têm sido assíduos, quer no ano letivo da implementação das tarefas de investigação quer em anos anteriores. Todos evidenciam um gosto particular pela disciplina de Matemática, pela realização de jogos de estratégia, pela resolução de desafios matemáticos diversos e alguns revelam mesmo curiosidade científica.

[21] As intervenções foram legalmente autorizadas, quer pela direção do Agrupamento de Escolas a que está afetada a escola em questão, quer pelos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos. (Anexo II).

[22] Neste documento GT identificará Geometria Táxi. (As tarefas do grupo GT podem ser consultadas nos Anexos III a VI).

[23] Neste documento GE identificará Geometria Esférica. (As tarefas do grupo GE podem ser consultadas nos Anexos VII e VIII).

[24] Neste documento GH identificará Geometria Hiperbólica. (As tarefas do grupo GH podem ser consultadas nos Anexos IX, X e XI).

Quanto aos seus resultados escolares nenhum é aluno com desempenho insuficiente na disciplina de Matemática (resultados confirmados na pauta de avaliação do final do ano letivo 2014-15). Assumindo os valores de referência da escala de comparabilidade de classificações tais que de 10 a 13 valores corresponde a classificação qualitativa de Suficiente, de 14 a 15 valores corresponde a classificação qualitativa de Bom, de 16 a 17 valores corresponde a classificação qualitativa de Muito Bom e de 18 a 20 valores corresponde a classificação qualitativa de Excelente, no final do 1.º período do ano letivo, em que foram aplicadas as tarefas, as pautas de avaliação afixadas dão a indicação de que:

- dois dos alunos de 10.º ano (Ivan e Alexandre) e um aluno do 12.º ano (Roberto) têm classificação Suficiente;
- uma aluna do 10.º ano (Madalena) e um aluno do 12.º ano (David) têm classificação Bom;
- um aluno do 12.º ano (Rafael) tem Muito Bom
- um aluno do 10.º ano (Pedro) e dois do 11.º ano (Carolina e Gabriel) têm classificação Excelente.

2.3. Descrição do ambiente onde decorreu a intervenção

Uma vez que as Geometrias Não Euclidianas estão fora do limite do currículo nacional não era viável um estudo em sala de aula, pois implicaria interferir com planificações (longo e médio prazo) e proceder a adaptações curriculares. Assim sendo, foi decidido que o estudo poderia ser implementado no clube da Matemática cuja dinamizadora é a própria investigadora. Deste modo, na planificação das atividades[25] a desenvolver no clube, foi inserida a realização de tarefas de investigação a realizar pelos alunos.

Como tudo foi acontecendo…

O espaço estava definido: Clube de Matemática.

Na maioria das vezes são os alunos que escolhem as atividades que pretendem realizar em cada sessão do clube da Matemática. As atividades a que têm acesso abrangem as três vertentes de atuação estabelecidas no Regulamento e Planificação (Seção funcionamento) do clube: *1) Funcionar, sempre que necessário, como sala de estudo, onde se poderão esclarecer dúvidas, dinamizar grupos de investigação e desenvolver o espírito de equipa; 2) Funcionar como oficina de trabalho, produzindo materiais que facilmente se apliquem nas atividades letivas; estes trabalhos poderão ser divulgados junto da comunidade escolar (escolas do agrupamento); 3) Funcionar como um espaço recreativo e de ocupação de tempos livres, promovendo atividades*

[25] A Planificação do Clube da Matemática 2015/2016 (Anexo I)

lúdicas junto dos alunos, onde resultem aprendizagens, competências e atitudes que operem mudança na relação com a disciplina.

O mais frequente é, os alunos, solicitarem os jogos de tabuleiro e de estratégia. Mas, se esporadicamente lhes for proposto resolver um problema/desafio, existe uma minoria que é recetiva à proposta e se envolve ativamente, mas raramente o fazem individualmente, optam por fazê-lo em grupo. Foi a esse grupo de alunos que enderecei o meu pedido de colaboração que foi aceite de imediato.

Semanalmente o horário do Clube contempla dois tempos de 45 minutos cada, definidos no horário da professora no início do ano letivo. Assim, facilmente se compreende que não foi possível organizar o horário de modo a contemplar tempos (sessões do Clube da Matemática) em comum para os três anos de escolaridade envolvidos. Após negociação com os alunos só se conseguiu que cada sessão tivesse sempre um único grupo a participar pelo que as interações estabelecidas, restringiram-se a alunos do mesmo ano de escolaridade e à docente responsável pela dinamização do clube de Matemática (investigadora).

As sessões não tiveram todas a mesma duração, variaram de 45 minutos a 90 minutos (mais 45 minutos do que o estabelecido no horário do clube, sendo esse tempo extra aproveitado da disponibilizado da docente e dos alunos). Nessas sessões, na sala estavam presentes apenas os alunos participantes e a investigadora.

3. Tarefas utilizadas na intervenção

Das tarefas espera-se que apresentem situações realistas e intrigantes, de modo a motivar os alunos e assim estes possam sentir necessidade de discutir/comunicar. Com as tarefas pretendeu despertar-se nos alunos a vontade de realização da atividade e provocar uma reflexão significativa de modo a que se criassem oportunidades de discussão coletiva. Gravita à volta desta ideia a teoria histórico-social da atividade: o desenvolvimento do conhecimento realiza-se no processo de apropriação da cultura mediante a comunicação. Neste processo de comunicação, as funções psíquicas superiores realizam-se primeiro numa atividade externa, ao nível interpessoal, sendo depois internalizada pela atividade individual, ao nível intrapsíquico (Leontiev, 1978a).

A escolha das tarefas de investigação impôs-se pelas suas potencialidades próprias. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) descrevem as potencialidades das tarefas de investigação e dessas realço apenas algumas: a motivação, o facto de favorecerem a aprendizagem e a criação de um ambiente propício a essa mesma aprendizagem (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003). Tentou-se, pois, escolher tarefas que fossem interessantes para os alunos, de modo a envolver conceitos fundamentais da geometria e que propiciassem oportunidades de discussão e comunicação de ideias. Era fundamental que suscitassem a participação dos alunos em expressar as suas ideias de forma construtiva e que pudessem ser conduzidos para discursos sobre novos conceitos matemáticos. A este propósito, Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002), referem que as tarefas de investigação permitem ao professor (neste caso, investigador) orientar a discussão para a realização de um ensino significativo da Matemática (Serrazina, Vale, Fonseca, & Pimentel, 2002). Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) defendem que investigações matemáticas podem constituir-se num poderoso processo de construção de conhecimento.

De modo a que não fosse demasiado redutor para o que se objetivou nesta investigação, as tarefas propostas aos alunos, abrangeram três das Geometrias Não Euclidianas. Geometria Táxi (GT), Geometria Esférica (GE) e Geometria Hiperbólica (GH), trabalhadas com esta ordem de sequência.

Sem perder de vista o rigor científico, os conceitos geométricos trabalhados foram selecionados tendo em vista estimular a curiosidade científica, a motivação e a argumentação. O propósito desta investigação não se traduz numa análise profunda e abrangente da teoria das Geometrias Não Euclidianas, mas sim à custa destas Geometrias criar condições que desenvolvam o pensamento geométrico dos alunos. Na escolha dos modelos para cada grupo de tarefas, privilegiou-se os de fácil interpretação e com ligação ao mundo físico imediato. Era fundamental que estes potenciassem uma discussão crítica face a conceitos geométricos e que desta produção oral emergissem sinais claros que pudessem ser associados aos significados matemáticos a mediar. A discussão crítica referida centrou-se numa discussão coletiva, cabendo à professora/investigadora o papel orientador, direcionando a evolução de significados.

Foram selecionados três modelos intuitivos para uma abordagem encorajadora e despertadora da curiosidade dos alunos. A malha quadrangular, em que as linhas horizontais e verticais assumiram o papel de ruas e os quadrados delimitados por essas linhas constituíram os edifícios, foi o modelo do plano usado para a GT. A esfera pôde ser considerada um modelo bastante simplificado do planeta terra e foi a superfície esférica que serviu para modelizar algumas situações geométricas subjacentes à GE. Por último, serviu de suporte à exploração de alguns conceitos geométricos hiperbólicos um círculo côncavo sem incluir a circunferência que o limita (Círculo ou Disco de Poincaré).

Os recursos/ferramentas utilizados não foram os mesmos para cada um dos três grupos de tarefas aplicadas. No caso do grupo GT apenas se utilizou a ficha de trabalho na qual os alunos foram fazendo os seus registos e foram propostas quatro tarefas ([T_1], [T_2], [T_3] e [T_4])[26]. Para o grupo GE, as tarefas usadas foram adaptadas das tarefas construídas no âmbito da seção da Matemática do Planeta Terra, MPT2013. Estas tarefas foram publicadas na revista Educação e Matemática, n.º 121, da Associação de Professores de Matemática (APM). Foram efetuados os contactos com os autores, Maria João Peres e Samuel Lopes, e estes autorizaram a que estas tarefas fossem usadas com o fim a que esta investigação se propõe (Latas, 2013). Para além da ficha de trabalho com as tarefas, foi utilizado o computador com o *software* Wolfram CDF Player previamente instalado para explorar de modo interativo quatro ficheiros.cdf[27] na resolução de duas tarefas ([T_1] e [T_2])[28]. Para as tarefas do grupo GH juntamente com a ficha de trabalho também foi utilizado o computador com o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* sendo três as tarefas propostas ([T_1], [T_2] e [T_3])[29]. O *GeoGebra* instalado continha macros[30] pré-construídas com objetos hiperbólicos pré-definidos (Ribeiro & Gravina, 2013).

Da observação do mundo físico imediato a noção de reta emerge intuitivamente e de forma natural, associando-se-lhe uma imagem mental que é parte integrante do pensamento geométrico comum, mas que assenta numa geometria plana sustentada pela axiomática da Geometria Euclidiana. Assim, a proposta didática comum aos três grupos de tarefas alicerçou-se na noção de reta e de distância, com o intuito de "alargar" a conceção de "reta" e de "segmento de reta" que "naturalmente" definimos na Geometria Euclidiana, e sobre a qual os

---

[26] Anexos III, IV, V e VI

[27] Os ficheiros .cdf estão disponíveis em http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino
[28] Anexos VII e VIII
[29] Anexos IX, X e XI
[30] As macros referidas fazem parte do material didático "Micro-Mundo Disco de Poincaré", disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/rribeiro/

alunos têm já a sua própria representação mental. A tabela que se segue apresenta os conceitos geométricos tratados particularmente em cada uma das tarefas dos três grupos.

Tabela 2: *Tarefas versus conceitos matemáticos.*

GT	T_1	Distância entre dois pontos (Caminho mais curto)
	T_2	Circunferência
	T_3	Perímetro da circunferência e área do círculo
	T_4	Mediatriz
GE	T_1	Retas (Segmento de reta) Distância entre dois pontos (Caminho mais curto)
	T_2	Retas paralelas Polígonos Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo Área de um triângulo
GH	T_1	Retas (Segmento de reta) Retas paralelas Axioma das paralelas (comparação entre GE, GH e Geometria Euclidiana)
	T_2	Ângulos (Ângulos formados por duas retas concorrentes) Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo (comparação entre GE, GH e Geometria Euclidiana)
	T_3	Distância Circunferência Mediatriz e circuncentro; Medianas e baricentro; Bissetrizes e incentro.

As tarefas foram selecionadas de modo a proporcionaram diferentes experiências pedagógicas, abordagens estratégicas diferenciadas e a permitir uma análise semiótica sustentada na seguinte estrutura para o ciclo didático: na primeira etapa os alunos foram confrontados com a tarefa a realizar associada a uma ferramenta tecnológica ou não, podendo ainda ser interativa ou não; na segunda etapa a tarefa foi resolvida a pares (*situação social*); na terceira etapa, a produção de *sinais* (resolução da tarefa), durante a qual a professora/investigadora teve o papel de gestora da evolução de sinais.

4. Recolha de dados

Procedemos agora à descrição dos instrumentos e métodos de recolha de dados que, em qualquer estudo qualitativo devem ser definidos. Todas as sessões em que decorreu a realização das tarefas foram gravadas em suporte áudio e foi a partir das gravações que foi possível a recolha de material para análise de acordo com o enquadramento teórico apresentado neste estudo. O processo de análise iniciou-se com a transcrição integral de todas as sessões realizadas. Terminada a transcrição das gravações áudio, efetuadas durante a realização das tarefas propostas aos alunos, estas foram minuciosamente analisadas. Cada uma das transcrições, a que chamámos narrativas por episódios de intervenção[31], contribuiu como uma fonte de dados para a nossa base de trabalho.

Centrando-nos na teoria da mediação semiótica e admitindo que a linguagem é a ferramenta mais importante para a passagem do plano inter-psicológico ao intra-psicológico, o nosso estudo focou-se na evolução da construção de significados matemáticos, analisado a partir da evolução de sinais, de tal modo que nesse processo se possa identificar alguma transformação ao nível do pensamento geométrico.

[31] A transcrição integral de todos os episódios de intervenção, bem como a sua análise encontra-se no Anexo XII.

5. Análise alicerçada na mediação semiótica

> *O sinal é, portanto, toda coisa que, além da impressão que produz em nossos sentidos, faz com que nos venha ao pensamento outra idéia distinta.*
> Santo Agostinho, Bispo de Hipona, in A Doutrina Cristã, Livro II, Capítulo I, (Agostinho, 2002, P. 85)

O nosso estudo focalizou-se na "linguagem" enquanto sistema simbólico e "meio" de expressão do pensamento (Miguens, 2007, p.84) e foi orientado pela teoria da mediação semiótica (Bussi & Mariotti, 2008). A nossa atenção centrou-se nas interações verbais como sinais/signos, pois foi na interação discursiva que reconhecemos o processo de construção de significados matemáticos e a manifestação do grupo em atividade (Bussi, 1996, 1998).

A interação discursiva foi por nós analisada como processo de comunicação por meio de signos. As produções verbais, sinais/signos, originadas no grupo em atividade foram sofrendo alterações perdendo a sua intenção particular, quando inicialmente formuladas, e foram ganhando generalidade. Foi neste "crescendo" que pudemos reconhecer a construção da formação de conceitos como invocada por Vygostky (2007).

> A formação dos conceitos é resultado de uma complexa atividade em que todas as funções intelectuais fundamentais participam. No entanto, este processo não pode ser reduzido à associação, à tendência, à imagética, à inferência ou às tendências determinantes. Todas estas funções são indispensáveis, mas não são suficientes se não se empregar o signo ou a palavra, como meios pelos quais dirigimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e o canalizamos para a solução do problema com que nos defrontamos (Vygotsky, 2007, p. 30).

A mediação do significado é um momento essencial na aquisição de ferramentas psicológicas, porque as ferramentas simbólicas derivam seu significado apenas das convenções culturais que as geraram. Ferramentas simbólicas (por exemplo, letras, códigos, sinais matemáticos) não têm qualquer significado fora da convenção cultural que as infunde com significado e propósito (Kozulin, Gindis, Ageyev, & Miller, 2003, p. 26)

É no seio da discussão coletiva, enquanto meio de comunicação onde a semiose ocorre, que se dá o processo de construção do conhecimento. Desta forma, foi através da identificação do tipo de sinais emergentes da análise das interações discursivas entre os alunos e a professora durante a realização das tarefas, e da evolução desses sinais, no decorrer das discussões coletivas no grupo em atividade que procurámos responder às questões específicas da nossa investigação:

(i) será importante, ou não, a apresentação e aplicação de outras geometrias (além da euclidiana) no ensino secundário com o objetivo de desenvolver capacidades geométricas?

(ii) de que modo o conhecimento e aplicação de outras geometrias influencia o pensamento geométrico nos alunos?

Sustentado pelas perspetivas da Mediação Semiótica e da Ação Mediada Instrumental, ambas alicerçadas na Teoria da Atividade, o esquema reproduzido na figura seguinte ilustra a emergência de sinais (interações verbais) em que focámos a nossa análise.

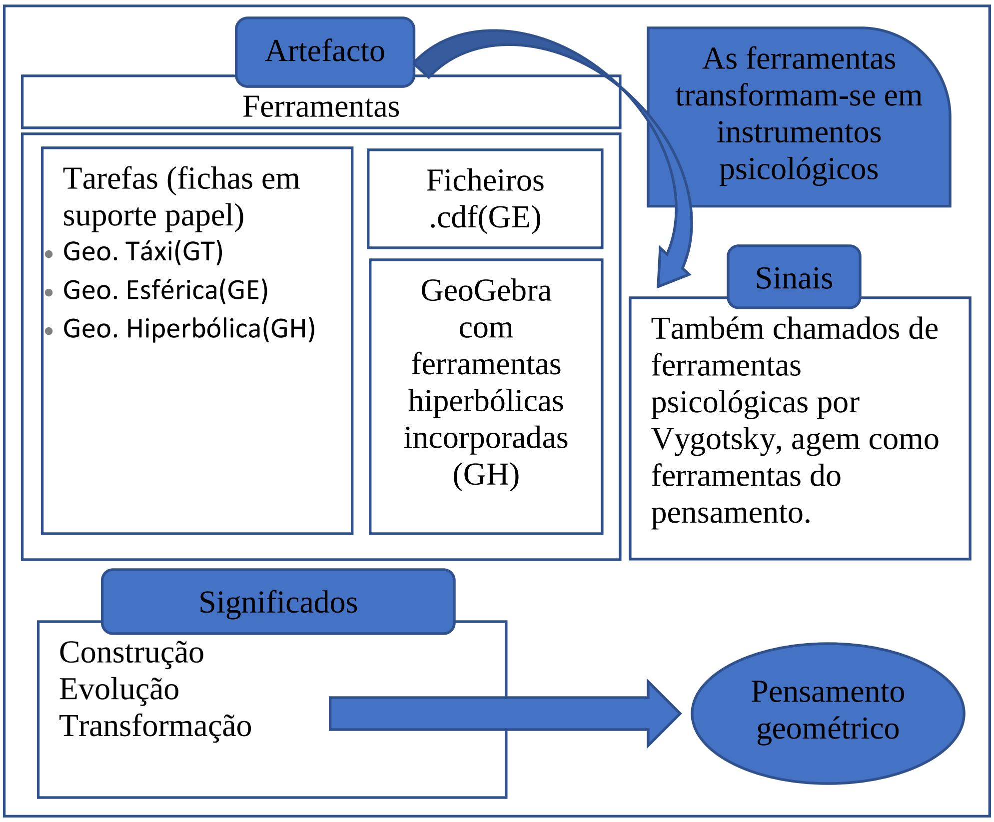


Figura 5: *Esquema - "Ferramentas; Artefactos; Sinais; Significados".*

5.1. Ferramenta/Artefacto

De modo a clarificar o conceito artefactos/ferramentas, tal como o apresento no esquema, refiro o exemplo apresentado por Luc Trouche (2003). Este autor apresenta como exemplo a calculadora, que para uma criança com dois anos será um artefacto, mas para um aluno do ensino secundário já será uma ferramenta. Nesse mesmo exemplo, o autor refere ainda que duas calculadoras idênticas para dois alunos darão azo a instrumentos psicológicos diferentes (Trouche, 2003).

No caso da Geometria Táxi, as tarefas em ficha de papel, para além de fornecerem as indicações do que se esperava que o aluno fizesse, facultaram o "ambiente de trabalho" que foi a malha quadriculada, onde o aluno pôde fazer as suas investigações. Já nos casos da Geometria Esférica e da Geometria Hiperbólica, aos alunos foram fornecidas ferramentas tecnológicas, pois no primeiro caso usaram o *Wolfram CDF Player* com recursos interativos e no segundo caso o *software GeoGebra* com macros específicas, ferramentas hiperbólicas, previamente construídas e incorporadas na barra de ferramentas do *GeoGebra*.

As ferramentas de um modo geral, e neste caso em particular, assumiram uma dupla função pois, para o aluno foram elas que lhe permitiram realizar a tarefa, mas para o professor assumiram-se como estratégia didática para construir conhecimento. Durante a realização da tarefa com o artefacto, os sinais que emergem da atividade vão sendo socialmente elaborados e são intencionalmente usados pela professora que desta forma explora as capacidades de mediação semiótica do artefacto. Neste processo, o papel da professora como orientadora da evolução dos sinais produzidos leva a que o artefacto deixe de ser apenas um mediador e assuma o papel de mediador semiótico (Bussi & Mariotti, 2008).

O objetivo didático foi o de aproveitar o potencial das ferramentas/artefactos de modo a envolver os alunos na atividade (resolução das tarefas), propiciando a interação verbal no grupo e reconhecida no ambiente favorável à discussão coletiva, tendo sido esta o alvo da nossa análise investigativa.

Tabela 3: *Tarefas; Ferramentas.*

	Tarefas investigativas, apresentadas como ficha de trabalho, em papel	Ferramenta/Artefacto para os alunos realizarem o trabalho investigativo proposto nas tarefas.	Resolução da tarefa em grande grupo / Produção de Sinais. (todos os presentes)
GT	T_1	Malha quadrangular (papel quadriculado) na ficha de trabalho, em papel. Registo na ficha.	Discussão coletiva, orientada pela professora (dinamizadora do Clube de Matemática).
	T_2		
	T_3		
	T_4		
GE	T_1	Computador com o *software Wolfram CDF Player*. Registo na ficha.	
	T_2		
GH	T_1	Computador com o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* com funções hiperbólicas previamente instaladas. Registo na ficha.	
	T_2		
	T_3		

A apropriação de conceitos por parte do aluno, envolvido na atividade, pode ser evidenciada quando o aluno deixa de resolver a tarefa por tentativa e erro e por repetição mecânica para passar a agir de forma refletida e analisada (reflete e analisa). Quando age por reflexão e análise mobiliza funções psíquicas superiores.

Um signo/sinal produzido a partir da utilização de um artefacto pode surgir espontaneamente ou pode ser explicitamente solicitado por uma tarefa previamente elaborada para esse efeito. Independentemente da forma da representação externa que possam assumir, a partir do momento que sejam produzidos, os signos/sinais podem ser socialmente partilhados. Quando esta interação social ocorre na sala de aula o objetivo passa a estar orientado para a Matemática e desta forma cabe ao professor promover a evolução dos sinais relativos a significados pessoais em sinais relativos a significados matemáticos (Bussi, 1996, 1998). Promover a evolução de sinais e orientar os alunos para uma tomada de consciência que vise o conhecimento matemático reveste-se uma enorme complexidade que envolve várias questões e entre elas a apropriação do género específico de fala (Hasan, 1992).

Tal como é sugerido no artigo de Bartolini Bussi e Mariotti (2008), de acordo com o modelo teórico desenvolvido na Teoria da Mediação Semiótica e que assenta na ideia da mediação de Vygotsky, a evolução dos sinais emergentes em significados matemáticos pode ser suportada pela iteração dos ciclos didáticos onde diferentes tipos de atividade têm lugar, contribuindo cada um deles de forma diferente, mas de forma complementar para o desenvolvimento do complexo processo de mediação semiótica.

5.2. Ciclo didático

Segundo a teoria da mediação semiótica, o processo semiótico a partir do qual os significados pessoais emergem e evoluem na construção de significados matemáticos previamente objetivados realiza-se de acordo com uma organização didática especifica: o ciclo didático (Bussi & Mariotti, 2008, p. 754).

Neste estudo o ciclo didático constituiu-se em quatro etapas. Tal como descrito anteriormente, no final do ponto 3 deste capítulo, distinguimos;

- confrontação com a tarefa (1.ª etapa):
    i) GT, (T1, T2, T3 e T4) fichas de trabalho_ papel e lápis;
    ii) GE, (T1, T2) fichas de trabalho_ papel e lápis e ainda o computador com o software Wolfram CDF Player;
    iii) GH, (T1, T2 e T3) fichas de trabalho_ papel e lápis e ainda o computador com o software GeoGebra com ferramentas hiperbólicas previamente construídas e adicionadas à barra de ferramentas.
- resolução da tarefa a pares/grupo, situação social (2.ª etapa)

- produção de sinais emergentes durante a resolução da tarefa (3.ª etapa)
- orquestração pela professora, gestora da evolução dos sinais (4.ª etapa)
  - -Pedir para repetir um procedimento;
  - -Focalizar a atenção dos alunos para determinados aspetos;
  - -Pedir uma síntese;
  - -Reconstruir a experiência de modo a fazer emergir sinais;
  - -Orientar de modo a que o contexto do artefacto dê lugar ao contexto matemático.

Figura 6: *Esquema - Ciclo didático.*

5.3. Sinais (Linguagem)

Nas interações discursivas é fundamental a distinção entre os três modos fenomenológicos de produção de linguagem (Vygotsky, 2007). São esses modos o “mental”, o “oral” e o “visual” e têm um papel fundamental na análise da linguagem. Esquematicamente podem ser apresentados e classificados, tal como a tabela seguinte sugere.

Tabela 4: *Classificação de diferentes tipos de produção do discurso (Natureza e Modo fenomenológico).*

		Modos fenomenológicos de produção (do discurso)		
		Interno	Externo	
		Mental	Oral	Visual
Natureza de produção (do discurso)	Semiótico *(Produção intencional)*	Verbalização não vocalizada	Fala	Escrita, desenhos, gráficos
	Não Semiótico *(Produção casual)*	Imagem mental *(memória)*		Reprodução de imagens dadas, fotografias

Nota. Tabela adaptada de “Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en Mathématiques” de R. Duval, *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, p.89, (Duval, 2005b).

Entendemos que a via para uma análise do discurso, que possa permitir interpretar o pensamento geométrico, deve passar pela ligação entre os dois modos fenomenológicos da produção do discurso, o interno e o externo. Todo o discurso exterior resulta do cruzamento com o discurso interior e só poderemos aceder a este último pela análise do discurso exterior. Assim, e de forma indireta, a nossa análise da linguagem seguiu a via da análise do discurso exterior procurando marcas indicativas do discurso interior.
As verbalizações concebidas nas interações discursivas, situação em que as vozes entram em contacto, (Wertsch, 1993), foram para nós os sinais emergentes da atividade (traduzida na resolução de tarefas) em que os elementos do grupo estavam envolvidos. Foram esses sinais que constituíram a nossa base de análise. A investigação gravitou em torno da classificação dos sinais (verbalizações) à medida que iam emergindo no discurso e ainda, numa análise mais fina, no modo como estes evoluíam nesse mesmo discurso tendo como objetivo os significados matemáticos. Foi na prática discursiva, reconhecida como processo dinâmico, que evidenciámos os sinais que socialmente foram partilhados. Através da interpretação do papel que esses sinais foram assumindo no discurso procurámos entender se as Geometrias Não Euclidianas influenciaram o pensamento geométrico dos alunos envolvidos na atividade. Este posicionamento em termos investigativos assentou na ideia basilar evidenciada por Wertsch e partilhada por Vygotsky e Bakhtin de que o funcionamento mental humano está fundamentalmente ligado a processos de natureza comunicativa.

Tendo por suporte as narrativas por episódios de intervenção, as verbalizações (palavras ou conjunto de palavras) foram sujeitas a dois tipos de análise: (i) como sinais emergentes das interações no grupo (alunos e professora) e (ii) como cadeias evolutivas que evidenciem o processo de internalização enquanto mecanismo de mudança individual ao longo do desenvolvimento do pensamento (Vygotsky, 1979).

6. Metodologia da análise

6.1. Emergência de sinais (classificação)

Em cada uma das narrativas foi possível identificar algumas verbalizações como sendo apenas sinais simples e pessoais (interpessoais) que ousámos identificar por *sinais imediatos* (S_i). Interpretámos esses sinais como sendo os que emergem da utilização do artefacto, de acordo com o que é solicitado pela tarefa a realizar, e permitem identificar conhecimentos que já foram internalizados num momento anterior ao da resolução da tarefa (tais como: definições e conceitos). De modo a clarificar o S_i identificado, associámos a cada um uma caraterística e notámo-lo por S_i/(caraterística) identificando a caraterística por definição ou conceito.

Na Sessão [11-GH_T_1, conclusão] e [11-GH_T_2] temos o exemplo de um S_i/conceito:

> *«**11. Carolina:** As retas paralelas não se intersetavam, mas estavam sempre à mesma distância.»*

Na Sessão [12-GT_T_2 e T_3] temos o exemplo de um S_i/definição:

> *«**4. David:** Isto é a mesma situação do círculo na euclidiana? Nós também dizíamos* "conjunto dos pontos representados à mesma distância de um ponto fixo".»

Progredindo na análise da narrativa distinguimos ainda dois tipos de sinais que optámos por destacar em *sinais elaborados* (S_e) e *sinais mediadores* (S_m).

As verbalizações que, sujeitas ao processo de mediação semiótica, vão sendo construídas e/ou reestruturadas ou que nitidamente refletem que houve algum raciocínio matemático que permitiu obter conhecimento novo, visível no desenvolvimento de competências argumentativas, designámo-las por sinais elaborados (S_e). Reconhecemos ainda estes sinais essencialmente nas conclusões obtidas pelos alunos que revelam conhecimento de novos significados matemáticos no domínio das Geometrias Não Euclidianas que lhes foram apresentadas. Podemos, pois, identificar dois tipos de S_e e usámos a notação S_e/(tipo): (1) quando verificamos que algum raciocínio está a ser construído teremos um S_e do tipo construção (S_e/construção); (2) quando são formuladas conclusões denunciadoras de que foram adquiridos novos significados matemáticos será do tipo conclusão (S_e/conclusão).

São exemplos, na Sessão [12-GE_T_2, continuação], as três intervenções:

> *«**67. Rafael:** um ângulo raso está sobre uma reta, os três também vão estar… e aqui a "reta é a circunferência" com diâmetro igual ao diâmetro da superfície esférica… os*

segmentos que definem o triângulo estão sobre a mesma "reta" … limitam a superfície da semiesfera que é o nosso "triângulo".

(…)

68. David: *Por isso a área do "triângulo" será a da superfície esférica quando a soma dos ângulos do triângulo for o valor máximo…*

(...)

70. David: *Como à amplitude máxima corresponde a área da superfície esférica, fazia uma proporção… a área da superfície esférica e a do triângulo são diretamente proporcionais.*»

Na primeira situação teremos um S_e do tipo construção (S_e/construção), na segunda situação será do tipo conclusão (S_e/conclusão) mas na terceira e última situação identificámos a composição dos dois tipos (S_e/construção-conclusão).

Quanto aos sinais mediadores (S_m), reconhecemo-los por serem os que carregam em si um potencial catalisador que permite conduzir a evolução de outros sinais. Assim, identificámos estes sinais mediadores como sendo as intervenções verbais no grupo, intencionais ou não, e que de algum modo são responsáveis pela orientação da discussão para a construção de conhecimento, reconhecido noutro tipo de sinais. Estes sinais, S_m, podem ser caraterizados por assumirem, na nossa análise, o papel de "elementos indutores" fundamentais no processo de ação mediada, tal como apresentada por Wertsch (1994). Identificámo-los nas intervenções da professora/investigadora quando pede aos alunos que "façam", que "repitam", que "verifiquem", …[32] (formas de ação), ou quando ela lhes coloca uma questão (forma de questionamento) ou ainda, quando é a própria a repetir uma intervenção dos alunos, podendo reproduzir exatamente como foi formulada ou fazendo pequenos acertos, acrescentando algo (duas formas de repetição: "enfatizar" ou "acrescentar"). Estes S_m, verbalizações da professora/investigadora, são muito particulares pois têm especificamente um caráter intencional.

Também identificamos S_m nas intervenções dos alunos e nestes casos de forma bem mais complexa. Esta complexidade pode ser apresentada nas situações em que identificamos S_i e S_e, mas reconhecemos também que esses sinais podem ser sinais mediadores para os alunos ouvintes, na medida em que podem ter o efeito de relembrar (S_m/relembrar) conceitos adquiridos anteriormente ou podem direcionar (S_m/direcionar) para a construção de novo conhecimento. Este último efeito é de um modo geral o efeito que qualquer S_m deve produzir, contudo no caso das intervenções discursivas dos alunos, algumas verbalizações distinguem-se de outros sinais mediadores em análise por não serem intencionais. Entendemos ser de

[32] Apenas são apresentadas como exemplos, nesta secção, algumas das formas analisadas, de modo a ilustrar a metodologia adotada. No capítulo seguinte serão apresentadas em pormenor todas as formas analisadas, pois integram parte dos resultados da análise de dados.

extrema importância o papel do emissor e o do recetor na discussão coletiva, conferindo um atributo diferente aos S_m e mais à frente neste texto, na secção 6.2 são apresentadas algumas situações exemplificativas. Neste trabalho usamos a notação S_m/(ação-I) e S_m/(ação-NI) discriminando em cada um a ação identificada e I/NI para distinguir os casos em que o S_m é intencional ou não.

Apresentámos de seguida alguns exemplos de S_m de caráter intencional:

Na sessão [10-GE_T_1] temos um exemplo de um S_m/acrescentar-I na intervenção 40.

> «***38. Pedro:*** *Não há!...não! …é um arco! O caminho mais curto é um arco…que passa no círculo máximo.*
> ***39. Madalena:*** *… que coincide com o círculo máximo.*
> ***40. Professora:*** *É um arco que limita o círculo máximo!*»

Na mesma sessão [10-GE_T_1], as intervenções 44, 46 e 48 exemplificam S_m/questionamento-I.

> «***44. Professora:*** *Então em que ficamos? O que são as retas?*
> ***45. Pedro:*** *…são círculos…são circunferências…*
> ***46. Professora:*** *círculos?… circunferências? Decidam-se.*
> ***47. Pedro:*** *Circunferências.*
> ***48. Professora:*** *Quaisquer circunferências?*»

Na sessão [11-GH_T_1 conclusão] e [11-GH_T_2], temos um exemplo de um S_m/façam-I

> «***17. Professora:*** *Não Gabriel, tens de usar a ferramenta hiperbólica. Procura-a… depois "arrastas" os extremos do segmento hiperbólico no círculo e veremos o que acontece.*

Na sessão [12-GE_T_2] temos um exemplo de um S_m/relembrar-I

> «***25. Professora:*** *Na Geometria Euclidiana… lembrem-se lá…" dada uma reta no plano e um ponto exterior a essa reta…" quantas retas, paralelas à reta dada, passam por esse ponto?*»

Por exemplo na sessão [12-GH_T_2, continuação], na intervenção 59, temos um exemplo de um S_m/enfatizar-I.

> «***58. Rafael:*** *Têm de ser iguais e vê-se… (enquanto falava, foi usando a ferramenta h_soma dos ângulos do triângulo) Mas já vemos… aí está!*
> ***59. Professora:*** *Vimos que a amplitude do ângulo hiperbólico era obtida à custa do ângulo euclidiano que era formado pelas*

semitangentes com origem no vértice. Por isso o Rafael disse que o ângulo se vê bem. Mas a distância já não.»

6.2. Efeito Emissor e Recetor na génese e evolução dos sinais

Associada à linguagem está a comunicação enquanto elemento essencial da interação social humana. Explorada nos atos de comunicação, a linguagem permite-nos adquirir um conjunto de conhecimentos.

Em qualquer processo de comunicação é possível distinguir, de modo muito simplificado, o emissor, o recetor e a mensagem. Muito haveria a explorar no ato da comunicação, contudo não cabe no âmbito deste trabalho esse estudo. Assim, para o nosso propósito torna-se interessante verificar que na discussão coletiva, quando sujeita a uma análise semiótica, um sinal imediato e/ou um sinal elaborado emitido pelos alunos pode ser assumido como sinal mediador dependendo do papel de recetor ou de emissor.

A título de exemplo vejamos os excertos:

Sessão [10-GT_T_1 e T_2]

Verbalizações	Sinal/(Caraterística, Ação ou Tipo)	Interpretação na comunicação
1.Pedro: *O caminho mais curto é uma linha reta…*	S_i/definição S_m/relembrar-NI	A intervenção do Pedro (emissor) é um S_I, contudo terá o efeito de recordar outro aluno (recetor) que não estivesse lembrado da definição e será um S_m não intencional.

Sessão [11-GH_T_2, conclusão] e [11-GH_T_3]

Verbalizações	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)	Interpretação na comunicação
5. Carolina: *… e os adjacentes são (fica a pensar) … dá 180º*	S_i/definição S_m/relembrar-NI	Para o aluno emissor temos um S_I, mas para os alunos recetores o S_I será um S_m não intencional.
6. Gabriel: *Suplementares*	S_i/definição S_m/relembrar-NI	

Sessão [12-GH_T_2, continuação]

Verbalizações	Sinal/(Caraterística, Ação ou Tipo)	Interpretação na comunicação
49. Rafael: *Aproxima todos os vértices da fronteira …aí. Espera, estás a ver a soma diminui… pois, próximo da fronteira os ângulos tendiam para zero. Volta lá para o centro… todos os vértices… aumenta, mas não chega a 180º.*	S_e/construção S_m/ direcionar-NI	Estamos perante um S_e para o Rafael (emissor) mas, dada a interação social coletiva, a verbalização enquanto sinal terá o efeito de direcionar outro aluno (recetor) e temos assim um S_m não intencional

Numa fase preliminar da nossa análise de dados foi feita uma primeira leitura/análise das transcrições em que se procurou identificar/classificar as verbalizações na discussão coletiva de acordo com a nossa categorização: S_i/(caraterística), S_e/(tipo) e S_m/(ação-I/NI).

6.3. Evolução dos sinais

Segundo Bakhtin (1981), a compreensão é uma resposta a um signo por meio de signos, pelo que compreender um signo passa por aproximá-lo de outros signos já conhecidos.

Limitar a análise a uma classificação de acordo com o tipo de sinais emergentes da interação social seria demasiado redutor para uma investigação que pretende averiguar se o conhecimento da existência e aplicabilidade de outras geometrias, por parte dos alunos, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim, quando analisámos as produções verbais, identificadas nas narrativas e tendo por base o ciclo didático, procurámos identificar cadeias evolutivas que clarificassem a passagem do contexto da tarefa ao contexto matemático. A iteratividade a que se refere o ciclo didático, tal como está esquematizado na figura 6 deste capítulo, não deve ser entendida como “andar em círculo”, mas sim “em espiral” avançando para níveis superiores do conhecimento.

O exposto clarifica a necessidade dos dois tipos de análise, quer a emergência dos vários tipos de sinais quer o modo como estes vão evoluindo durante a atividade. Uma vez que os sinais só emergem através de um processo de interação entre uma consciência individual e uma outra (Bakhtin, 1981), entendemos que era fundamental analisar o modo como iam sendo construídas cadeias de criatividade e ideias analisando a passagem de um sinal para outro novo sinal como se se tratasse de elos de ligação semiótica. Estas cadeia foram resultando dos contributos individuais que se foram ligando e dando lugar a uma consciência coletiva. De acordo com o objetivo didático de cada tarefa proposta, cada uma das narrativas por episódio de intervenção foi analisada a partir do modo como as intervenções discursivas (sinais) se foram organizando/evoluindo em cada intervenção didática (tarefas propostas). O modo como a linguagem, enquanto ferramenta de comunicação e interação social se vai transformando em instrumento de organização psíquica (pensamento) revelou-se bastante difícil de investigar. Dada a complexidade deste processo tentámos identificar em cada narrativa e entre narrativas, cadeias evolutivas de intervenções discursivas (de sinais) que possam evidenciar a passagem de S_I por S_m até S_e dos tipos construção e conclusão sendo estes indiciadores de alguma organização psíquica. Esta análise é desenvolvida no capítulo seguinte.

Capítulo 6

"O primeiro era o de nunca aceitar coisa alguma como verdadeira sem que a conhecesse evidentemente como tal; (…)
O segundo, dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para melhor resolvê-las.
O terceiro, conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, (…)
E, o último, fazer em tudo enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que eu tivesse certeza de nada omitir."

René Descartes in Discurso do método, segunda parte, (Descartes, 1996, p. 23)

Tratamento de dados

Os critérios subjacentes à organização de cada sequência da intervenção resultaram das considerações que apontamos sobre as teorias que sustentam este trabalho investigativo (cf. Capítulo 2). A utilização de diferentes artefactos, assim como a seleção das tarefas que foram utilizadas, tiveram o propósito de favorecer o processo de internalização de operações com tais artefactos tendo como objetivo a transformação em instrumentos de mediação semiótica (cf. esquema "mediação semiótica", Capítulo 5). Pretendeu-se, por um lado, que as tarefas levassem o grupo a envolver-se em discussões matemáticas possibilitadoras da utilização funcional de sinais. Por outro lado, que as tarefas fossem suscetíveis de intervir na ZDP dos alunos de modo a fazerem emergir e evoluir significados matemáticos reconhecidos em sinais que considerámos serem as verbalizações ocorridas durante a discussões matemáticas. A articulação entre os artefactos e a discussão coletiva, enquanto atividade de natureza semiótica, mostrou-se capaz de produzir significados matemáticos pessoais, convergentes para significados matemáticos culturais previamente definidos, através de processos de mediação. Quanto ao papel da professora/investigadora, durante a discussão matemática coletiva, este teve como objetivo principal promover essa convergência, levando em consideração as contribuições individuais e explorando as potencialidades semióticas advindas do uso das ferramentas utilizadas especificamente para esse efeito. Por potencial semiótico pretendemos realçar a capacidade, não necessariamente expressa de um sinal encaminhar para um dado objeto matemático. Mariotti e Maracci (2010) referem que o potencial semiótico de um artefacto reside no duplo vínculo semiótico que cada artefacto realiza, por um lado, com os significados que emergem do seu uso na realização da tarefa, por outro lado, com os com os possíveis significados que poderiam emergir dessa utilização através do seu reconhecimento por um especialista na matéria. Segundo esta perspetiva, cada artefacto pode ser considerado tanto do ponto de vista individual, por exemplo quando um aluno utiliza uma ferramenta para realizar uma tarefa, como do ponto de vista social, caso em que os significados são partilhados por um grupo matemáticos ou professores de Matemática. Segundo uma visão sociocultural, a tensão entre estes dois pontos de vista é o motor de um processo de ensino/aprendizagem centrado na utilização de um artefacto. Este pressuposto teórico descreve a aprendizagem como uma interação social, em que a evolução dos sinais é intencionalmente organizada pelo professor. Neste modelo o professor utiliza o artefacto para realizar as tarefas didáticas (Mariotti & Maracci, 2010).

O processo de mediação semiótica desenvolve-se em diferentes níveis: (i) o aluno usa o instrumento, de acordo com certos esquemas de utilização, para cumprir o objetivo dado pela tarefa. Ao fazê-lo, o instrumento pode funcionar como um mediador semiótico, ou seja, os significados emergem do envolvimento do sujeito na atividade; (ii) o professor usa o instrumento de acordo com esquemas de utilização específicos relacionados ao motivo educacional. Neste caso, os esquemas de utilização podem consistir nas estratégias de comunicação particulares centradas no artefacto. Na dialética entre estes dois níveis ocorre a construção de significados, como produto de um processo de internalização orientado pelo professor (Falcade, 2006, p. 25).

Em síntese, neste processo, no qual o artefacto é um componente e que envolve as ações do aluno enquanto utilizador e o respetivo *feedback*, os significados emergentes só evoluem por meio da construção social e sob a orientação do professor.

1. Sequências de intervenção e número de sessões por grupo participante

A sequência experimental que levámos a cabo desenvolveu-se em várias sessões que denominámos por sequência de intervenção para cada um dos grupos participantes. O número de sessões por sequência de intervenção foi diferente devido à disponibilidade de participação, no Clube de Matemática, de cada um dos grupos. O grupo de alunos do 10.º ano apenas pôde participar em quatro sessões e não pôde realizar nenhuma tarefa sobre Geometria Hiperbólica. O grupo de alunos do 11.º ano teve o maior número de participações, estando presente em dez sessões. O grupo de alunos do 12.º ano participou em 8 sessões.

A notação usada para identificar as narrativas permite identificar: o grupo de alunos a que se refere a narrativa, o grupo de GNE em questão, a tarefa e ainda se se trata de uma continuação da resolução da tarefa. Por exemplo, "12-GT_T_1", identifica a narrativa correspondente à sessão do grupo do 12.º ano na realização da tarefa 1, na Geometria Táxi.

Se o caso for por exemplo, "11-GE_T2, continuação$_3$", pretende-se identificar a narrativa correspondente à sessão do grupo do 11.º ano na continuação pela terceira vez da realização da tarefa 2, na Geometria Esférica.

As tabelas que se seguem ilustram a distribuição e número de sessões por tarefa, em cada uma das sequências de intervenção e a identificação da narrativa correspondente.

__Tabela 5:__ Sessões por sequência de intervenção do grupo do 10.º ano.

Tarefas	GT-T$_1$	GT-T$_2$	GT-T$_3$	GT-T$_4$	GE-T$_1$	GE-T$_2$	GH-T$_1$	GH-T$_2$	GH-T$_3$
Sessões	1.ª sessão	2.ª sessão		2.ª sessão	3.ª sessão	4.ª sessão			
Identificação da narrativa	[10-GT_T$_1$ e T$_2$]	[10-GT_T$_2$ continuação]		[10-GT_T$_4$]	[10-GE_T$_1$]	[10-GE_T$_2$]			

__Tabela 6:__ Sessões por sequência de intervenção do grupo do 11.º ano.

Tarefas	GT-T$_1$	GT-T$_2$	GT-T$_3$	GT-T$_4$	GE-T$_1$	GE-T$_2$	GH-T$_1$	GH-T$_2$	GH-T$_3$
Sessões	1.ª sessão	2.ª sessão	3.ª sessão		4.ª sessão	5.ª, 6.ª e 7.ª sessões	8.ª sessão	9.ª sessão	10.ª sessão
Identificação da narrativa	[11-GT_T$_1$]	[11-GT_T$_2$]	[11-GT_T3]		[11-GE_T1 e T2]	[11-GE_T2, continuação 1] [11-GE_T2, continuação 2] [11-GE_T2, continuação 3]	[11-GH_T1]	[11-GH_T1, conclusão] e [11-GH_T2]	[11-GH_T2, conclusão] e [11-GH_T3]

__Tabela 7:__ Sessões por sequência de intervenção do grupo do 12.º ano.

Tarefas	GT-T_1	GT-T_2	GT-T_3	GT-T_4	GE-T_1	GE-T_2		GH-T_1	GH-T_2	GH-T_3
Sessões	1.ª sessão	2.ª sessão			3.ª sessão	4.ª sessão	5.ª Sessão	6.ª Sessão	7.ª sessão	8.ª sessão
Identificação da narrativa	[12-GT_T1]	[12-GT_T2 e T3]			[12-GE_T1]	[12-GE_T2]	[12-GE_T2, continuação]	[12-GH_T1 e T2]	[12-GH_T2, continuação]	[12-GH_T3]

2. Base de referência para a análise de dados

A nossa análise centrou-se nos seguintes pontos:

- o artefacto como peça fundamental para que no grupo começasse a troca de impressões entre os participantes;
- a construção de significados matemáticos associados às verbalizações, em que no contexto da tarefa foi possível, a partir da discussão matemática, associar verbalizações aos conceitos matemáticos e tratar essas verbalizações como sinais (classificação de sinais cf. Capítulo 5, secção 6.);
- as intervenções (verbalizações) pedagógicas e sociais, na ZDP, pela professora/investigadora e pelos pares (S_m). Estas intervenções são as responsáveis pela evolução de significados desprovidos de sentido para os alunos, para significados matemáticos consistentes e consolidados (evolução de sinais cf. Capítulo 5, secção 6.1).

No Anexo XII, as narrativas por episódios de intervenção são apresentadas seguindo a ordem de intervenção com que foram aplicadas as tarefas por grupo de GNE. Primeiro todas as intervenções em GT, seguindo-se todas as da GE e terminando com as da GH. No entanto a nossa análise das narrativas seguiu a ordem da sequência de intervenção por grupo de alunos por estar mais de acordo com os nossos objetivos de investigação. Deste modo, analisámos toda a intervenção no 10.ºano, seguida de toda a intervenção do 11.º ano e por último, toda a intervenção do 12.º ano. Esta opção vai de encontro à nossa pretensão em estudar se a apresentação e a aplicação de outras geometrias nos grupos de alunos do secundário, permite desenvolver capacidades de ordem superior, isto é, se favorece o desenvolvimento de níveis mais elevados de pensamento. A apresentação das GNE e consequente aplicação por parte dos alunos, é objetivada com a resolução das tarefas propostas que envolvem os três grupos de GNE trabalhados. Com a análise das narrativas por episódios de intervenção, seguindo a sequência interventiva, pretendemos concentrar-nos em cadeias evolutivas reconhecidas nas verbalizações ocorridas nas discussões coletivas. Estas verbalizações constituíram os sinais que identificámos na análise efetuada e que apresentámos ao leitor na tabela seguinte.

Tabela 8: Apresentação dos sinais utilizados na análise.

<table>
<tr><th colspan="3">Sinais</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sinais imediatos (S_i)</td><td colspan="2">S_i/(caraterística)</td></tr>
<tr><td colspan="2">• S_i/definição
• S_i/conceito</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sinais elaborados (S_e)</td><td colspan="2">S_e/(tipo)</td></tr>
<tr><td colspan="2">• S_e /construção
• S_e/conclusão
• S_e/construção-conclusão</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Sinais mediadores (S_m)</td><td rowspan="2">Não Intencionais</td><td>S_m/(forma de ação)-NI</td></tr>
<tr><td>• S_m/relembrar-NI
• S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Intencionais</td><td>S_m/(forma de questionamento)-I</td></tr>
<tr><td>• S_m/questionar-I</td></tr>
<tr><td>S_m/(forma de repetição)-I</td></tr>
<tr><td>• S_m/enfatizar-I
• S_m/acrescentar-I</td></tr>
<tr><td>S_m/(forma de ação)-I</td></tr>
<tr><td>• S_m/relembrar-I

•S_m/confirmem-I
•S_m/construam-I
•S_m/consultem-I
•S_m/escolham-I (procurem)
•S_m/experimentem-I
•S_m/expliquem-I
•S_m/explorem-I
•S_m/façam-I
•S_m/fixem-I
•S_m/interpretem-I
•S_m/marquem-I
•S_m/meçam-I
•S_m/partilhem-I
•S_m/registem-I
•S_m/repitam-I
•S_m/representem-I
•S_m/utilizem-I (usem)
•S_m/vejam-I</td></tr>
</table>

3. Análise/Resultados

A sequência de intervenção foi planeada em função do processo de mediação semiótica. Entendemos que as tarefas selecionadas se adequavam ao nosso propósito pois, de acordo com as ideias de Vygotsky, permitem mobilizar ferramentas/artefacto que por sua vez proporcionam a troca de impressões entre o grupo de participantes e que nós interpretámos como sinais. À professora/investigadora coube o encargo de dirigir o processo de mediação semiótica, isto é, a emergência e evolução de sinais e garantir o caráter institucional dos conhecimentos matemáticos construídos com a ferramenta/artefacto.

As GNE despertaram nos alunos a vontade de realizar as tarefas e conseguiram ainda levá-los a refletir sobre geometria de modo significativo. Pudemos constatar que as experiências com as GNE que lhes proporcionámos estimularam-nos a participar entusiasticamente nas sessões e desse envolvimento resultaram novas aprendizagens. As sessões com a GT, primeira GNE apresentada e utilizada, funcionaram como uma preparação para as tarefas que se seguiram com a GE e GH tendo funcionado como estímulo à curiosidade científica dos alunos.

O processo de análise teve por base os conhecimentos geométricos já interiorizados, reconhecidos nos S_i e de como esses conhecimentos evoluem ou se complementam quando confrontados com as GNE. Começámos por classificar cada verbalização ocorrida dentro da discussão coletiva por um sinal. Para esse efeito foi fundamental a análise da construção sequencial da discussão coletiva. Tivemos sempre presente que cada uma das verbalizações proferidas (neste contexto semiótico) age como um instrumento psicológico e tem dessa forma um efeito determinante na emissão da verbalização seguinte. A partir do momento que são produzidos, os sinais passam a ser socialmente partilhados (Fichtner, 2010). Para o nosso objetivo de estudo, a análise das verbalizações só tem sentido enquanto elementos constituintes da discussão coletiva pois a sua análise isolada é irrelevante. Considerámos cada uma das verbalizações funcionando como um elo de uma cadeia (a discussão coletiva). O modo como a cadeia é construída permitiu destacar, dentro das narrativas por episódios de intervenção, cadeias evolutivas que se tornaram elementos fundamentais para a nossa análise.

3.1. Cadeias Evolutivas

As cadeias evolutivas revelam níveis crescentes de raciocínio mental nos alunos. As verbalizações expressam a representação mental que vai sendo construída ou transformada de acordo com o efeito mediador da verbalização, S_m Não Intencionais, e ainda de acordo com o papel de emissor e/ou recetor na comunicação (Wertsch, 1993). Contribui também para esta construção/transformação as verbalizações da professora que assumem sempre um caráter de S_m Intencional.

A identificação de cadeias evolutivas garante que alguns sinais foram interpretados como uma evolução de significados matemáticos, através da interação social durante as sessões de aplicação das tarefas. Em cada uma das cadeias evolutivas identificadas, uma análise mais pormenorizada permite evidenciar o processo de internalização e de apropriação de significados (Vygotsky, 1979).

Recordámos que o objetivo deste trabalho investigativo é *"Averiguar se o conhecimento da existência e aplicabilidade de outras geometrias, por parte dos alunos, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico"* e que relativamente ao desenvolvimento do pensamento geométrico, este é por nós interpretado como apropriação de significados geométricos e como evolução discursiva (forma de comunicação).

O facto de conseguirmos identificar cadeias evolutivas na nossa base de dados, tal como as identificámos, significa que conhecer e aplicar as GNE influenciou o pensamento geométrico dos alunos e conseguimos obter resposta à questão investigativa: *"(ii) de que modo o conhecimento e aplicação de outras geometrias influencia o pensamento geométrico nos alunos?"*

As transcrições das gravações áudio das discussões coletivas, narrativas por episódios de intervenção (Anexo XII), são a nossa fonte dos dados a analisar. Para facilitar a interpretação dessa análise e, consequentemente, ser exequível a apresentação de resultados, optámos por identificar cadeias evolutivas organizadas em tabelas. Apresentámos neste trabalho apenas algumas delas, pois limitámos, para esse efeito, a nossa escolha a alguns excertos das narrativas por episódios de intervenção por serem os mais representativos do processo de mediação semiótica e por se referirem a momentos da sequência de intervenção que mobilizam artefactos diferentes. Cada uma das tabelas permite uma leitura facilitada da classificação das verbalizações e da sua evolução nas discussões coletivas, durante a sessão a que se referem. A nossa visão focou-se nas verbalizações enquanto sinais e como estes foram evoluindo durante o decorrer das sessões e de uma sessão para outra (Esta análise é feita no final de cada tabela que apresentámos nas três subsecções seguintes).

Não nos detivemos na análise do papel da professora/investigadora, das ações dos alunos nem das potencialidades do artefacto per si.

3.1.1.Sequência de intervenção do grupo do 10.ºano

Tabela 9: *Cadeia evolutiva - Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GT- grupo do 10.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [10-GT_T_1 e T_2]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo) Emissor	 Recetor	
Malha quadrangular (papel quadriculado) na ficha de trabalho, em papel	***10.Professora:*** *É verdade! O caminho mais curto é o que tem menor distância. E o que é?*	S_m/questionar-I		Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GT
	11.Ivan: *É o caminho que nós não precisamos levar desvios.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	12.Pedro: *É uma reta!*	S_i/conceito		
	13.Professora: *É uma reta?*	S_m/questionar-I		
	14.Ivan: *Neste caso é.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	15.Professora: *OK… não será antes um segmento de reta?*	S_m/questionar -I S_m/acrescentar -I		
	16.Ivan: *Mas a stora disse para falarmos em linguagem natural… nós dizemos linha reta!*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	17.Professora: *Ah! Linha reta…, mas conseguem distinguir entre reta e segmento de reta?*	S_m/ questionar-I		
	18.Pedro: *Sim… aqui temos início e temos fim. Não é uma reta é um segmento de reta…*	S_e/construção	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	
	(…)			
	48. Ivan: *Já tenho…, mas é igual a este (tem um "caminho" representado e com o lápis mostra outro, mas não o representa).*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	49. Professora: *Ah! Afinal tens outro!*	S_m/enfatizar-I		
	50. Ivan: *É igual.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	51. Professora: *Mas é igual a quê?*	S_m/questionar-I		
	52. Ivan: *Têm a mesma distância.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	53. Professora: *Mas será o mesmo caminho? E vocês o que acham?*	S_m/questionar-I		
	54. Ivan: *Então eu encontrei quatro caminhos com a mesma distância.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	55. Pedro: *Exato!*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	56. Madalena: *Eu também.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	57. Professora: *E tu Alexandre?*	S_m/questionar-I		
	58. Alexandre: *4 caminhos.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	59. Professora: *E com quantas unidades de comprimento?*	S_m/questionar-I		
	60. Alexandre: *4.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	61. Professora: *4 unidades de comprimento de acordo com os dados da figura. Façam os vossos registos. (….) Partilhem o que estão a fazer.*	S_m/enfatizar-I S_m/façam-I S_m/partilhem-I		
	62. Ivan: *Não há um caminho único. Há quatro caminhos.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

Os S_i predominam no início da tabela. Nas intervenções 11, 12, 14 e 16 identificámos significados pessoais dos alunos revelando o domínio do conceito "*caminho mais curto*" a partir da noção de direção ("*reta*"). Com as intervenções 15 e 17, a professora orienta para a construção do significado de "*segmento de reta*" que é reconhecido na intervenção 18, S_e/construção. Entre as intervenções 48 e 53, assistimos à construção de sinais socialmente partilhados que evoluem para as intervenções finais da tabela em que verificámos a construção de significado matemático "*o caminho mais curto em GT não é único*". Na intervenção 62, o aluno refere explicitamente não haver um caminho único o que remete para a unicidade do caminho mais curto na Geometria Euclidiana por comparação com a GT, mas essa comparação não é expressa.

Tabela 10: *Cadeia evolutiva - Mediatriz em GT- grupo do 10.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [10-GT_T_4]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	Recetor	
Malha quadrangular (papel quadriculado) na ficha de trabalho, em papel	***40. Professora:*** *O vosso colega disse que quer experimentar para ver o que vai dar a mediatriz… e vocês não têm curiosidade? Pode ser interessante… querem interromper o que estão a fazer e experimentamos todos? Lembram-se da definição desse lugar geométrico do plano?*	S_m/experimentem-I S_m/questionar-I		Mediatriz em GT
	41. Madalena: *Conjunto de pontos do plano que se situam à mesma distância de dois pontos fixos.*	S_i/definição	S_m/relembrar-NI	
	42. Professora: *Isso mesmo Madalena. Vou distribuir uma nova tarefa, pois parece-me interessante que discutam sobre o que o Pedro está a pensar…* *Fixem dois pontos e depois vão representando todos os que estão à mesma distância desses dois…*	S_m/fixem-I S_m/representem-I		
	43. Ivan: *Se estiverem na vertical, a mediatriz estará na horizontal.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	44. Pedro: *Mas assim é como na geometria euclidiana.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	45. Professora: *Se os dois pontos fixos escolhidos estiverem alinhados horizontal ou verticalmente a mediatriz é a que já conhecemos… é uma reta, certo? Sugiro que experimentem com os dois pontos escolhidos noutra posição, talvez dê que pensar…*	S_m/acrescentar-I S_m/experimentem-I		
	(…)			
	55. Professora: *Pedro e Ivan, querem partilhar alguma coisa connosco?*	S_m/partilhem-I		
	56. Ivan: *Estou a dizer ao Pedro que pode não ser sempre assim….* ***(Todos olham para a representação do Pedro…) [Figura 4]***	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	57. Professora: *Quem escolheu pontos que não sejam os extremos da diagonal de um quadrado? (Abanam a cabeça) ninguém?*	S_m/questionar-I		
	58. Alexandre: *Também escolhi os pontos fixos na extremidade de um quadrado, mas eu fui marcando pontos nos vértices da quadrícula não pintei tudo como o Pedro…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	59. Professora: *Afinal como é? Podemos uni-los? Podemos "pintar"? como é?*	S_m/questionar-I		
	60. Ivan: *Podemos! Temos é semiplanos… não é uma reta!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	

	***61. Pedro:** Também temos uma parte que é um segmento de reta.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***62. Professora:** Parece-me que todos têm então o mesmo… Mas o que acontece se os pontos escolhidos para traçar a mediatriz forem extremos da diagonal de um retângulo…*	S_m/questionar-I		
	***63. Pedro:** É isso! é isso Ivan…*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

O S_i/definição identifica a intervenção 41 em que a Madalena enuncia a definição do lugar geométrico do plano, "*Mediatriz de um segmento*". A enunciação da definição é reveladora do domínio desse significado pessoal e é também um sinal mediador S_m/relembrar na interação social. A intervenção 43 que sucede a intervenção da professora em que se identificam S_m associados às formas de ação "*fixem*" e "*representem*" revela uma apropriação do significado pessoal pelo Ivan, mas desencadeia a intervenção do Pedro na forma de S_e/construção. Esta intervenção utiliza termos de comparação "*é como na geometria euclidiana*" que são indiciadores de que alguma atividade mental foi desenvolvida.

Em 56, identificámos um confronto de ideias entre os dois alunos: Pedro e Ivan. Contudo esse confronto desvanece-se dada a situação social em que se insere. Essa situação social carateriza-se pelas intervenções, 55, 57, 59 e 60, da professora identificadas nos S_m da forma "*partilhem*" e da forma de questionamento, e pela intervenção 58 do Alexandre, S_e/construção. Ivan põe em dúvida a representação feita pelo Pedro na malha quadriculada (Figura 4) e assistimos ao evoluir da situação que culmina na intervenção 62, da professora, ao invocar que se escolham para extremos do segmento, vértices opostos de um retângulo. A emergência do S_e/construção em 63 é uma evidência de que houve uma evolução no desenvolvimento do pensamento geométrico.

***Tabela 11:** Cadeia evolutiva - Retas (Segmentos de reta). Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GE-grupo do 10.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [10-GE_T$_1$]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	**Recetor**	
***Software* Wolfram CDF Player**	***36. Pedro:** (…) na terra parece um segmento de reta porque é grande, são coisas grandes, mas neste caso é…*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	**Retas (Segmento de reta) Distância entre dois pontos ("Caminho" mais curto) em GE**
	***37. Professora:** …é o quê?*	S_m/questionar-I		
	***38. Pedro:** Não há!...não! …é um arco! O caminho mais curto é um arco…que passa no círculo máximo.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***39. Madalena:** … que coincide com o círculo máximo.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***40. Professora:** É um arco da circunferência que limita o círculo máximo!*	S_m/acrescentar-I		
	***41. Pedro:** …e que contém os dois pontos…não pode ser um círculo máximo qualquer…tem de passar lá!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	

	42. Professora: *Claro… (O Pedro continua a leitura da ficha em voz alta…)*	S_m/enfatizar-I		
	43. Pedro: *(…) O que pode ser a reta? …só se for o círculo máximo, não tem princípio nem fim …, mas é um círculo …*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	44. Professora: *Então em que ficamos? O que são as retas?*	S_m/questionar-I		
	45. Pedro: *…são círculos…são circunferências…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	46. Professora: *círculos?… circunferências? Decidam-se.*	S_m/questionar-I		
	47. Pedro: *Circunferências.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	48. Professora: *Quaisquer circunferências?*	S_m/questionar-I		
	49. Pedro: *Máximas! … e como um segmento de reta é um bocado de uma reta… a reta é uma circunferência em que o centro é o mesmo que o centro da superfície esférica. Um segmento de reta é um arco dessa circunferência.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	(…)			
	54. Professora: *(…) Já agora, por dois pontos da superfície esférica quantas circunferências de raio máximo conseguem passar?*	S_m/questionar-I		
	55. Pedro: *Infinitas!...ah! Não! Máximas não!...Circunferências são infinitas, mas com raio máximo há só uma!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	56. Professora: *Então é única?*	S_m/questionar-I		
	57. Madalena: *…se os pontos forem os extremos do diâmetro…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	58. Professora: *sim Madalena, o que acontece?*	S_m/questionar-I		
	59. Madalena: *…há muitas circunferências com centro no centro da superfície esférica e a passar nesses dois pontos… Não há só uma!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	60. Professora: *Como por exemplo nos polos da terra …*	S_m/acrescentar-I		
	61. Pedro: *Depende dos dois pontos escolhidos. Se forem extremos de um diâmetro são infinitas as circunferências que os contêm …, mas se forem outros dois quaisquer, há só uma!*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	62. Professora: *Na superfície esférica há algumas diferenças… pois vocês sempre disseram que dois pontos definem uma única reta*	S_m/acrescentar-I		
	63. Pedro: *(interrompe) mas não era na esfera…*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	64. Alexandre: *Esta geometria é esférica.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

O excerto analisado nesta tabela 11 foi reconhecido como uma cadeia evolutiva e refere-se a uma situação em AGD que envolveu três alunos: Pedro, Madalena e Alexandre. O Pedro é o aluno mais interventivo. A Madalena tem três intervenções e o Alexandre apenas intervém no final da sequência.

Em 36 identificámos um S_i/conceito que é evocado pelo uso do *Software* Wolfram CDF Player. Este sinal vai evoluindo com o decorrer das várias intervenções que identificam S_e do tipo construção (intervenções 38, 39, 41, 43 e 45). Estas intervenções evidenciam significados partilhados pois é notória a construção que vai ocorrendo de uma verbalização para a seguinte. As intervenções sucedem-se como um encadeamento frásico, em que a intervenção seguinte retoma a anterior completando-a. Por exemplo, vemos na intervenção 47 uma única palavra "Circunferências" e de modo análogo a palavra "Máximas" em 49, mas a análise da sequência discursiva permite identificar claramente a construção do significado matemático "Retas e segmentos de reta em GE". Identificámos nesta forma de comunicação, a apropriação (Bussi & Mariotti, 2008), ou seja, uma forma de construção de conhecimento tal como definimos no nosso objetivo da investigação.

A segunda intervenção da Madalena, em 57, mostra na forma de S_e/construção que há atividade mental a ser desenvolvida. Essa atividade mental é interpretada a partir da sequência das intervenções e como reação ao S_m/questionar da intervenção 56 da professora, a Madalena traz para a discussão uma nova situação que não estava a ser contemplada "*… e se os pontos forem extremos do diâmetro…*". Esta intervenção é um sinal de que a situação social criada à volta da tarefa envolvendo GE não deixou os alunos indiferentes, mas fê-los pensar. Intervenções deste tipo indiciam que houve uma influência no pensamento geométrico a partir do conhecimento das GNE.

3.1.2. Sequência de intervenção do grupo do 11.ºano

Tabela 12: *Cadeia evolutiva - Circunferência em GT- grupo do 11.ºano.*

<table>
<tr><th rowspan="2">Artefacto</th><th rowspan="2">Verbalizações
Sessão [11-GT_T$_2$]</th><th colspan="2">Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)</th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th>Emissor</th><th>Recetor</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Malha quadrangular (papel quadriculado) na ficha de trabalho, em papel</td><td>6. Gabriel: O conjunto de pontos do plano que distam 3 unidades do ponto A é um lugar geométrico… é um círculo!</td><td>S_i/definição</td><td>S_m/relembrar-NI</td><td rowspan="10">Circunferência em GT</td></tr>
<tr><td>7. Professora: Como?</td><td colspan="2">S_m/questionar-I</td></tr>
<tr><td>8. Carolina: Não, não… aí era menor ou igual.</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI</td></tr>
<tr><td>9. Professora: O que é que era menor ou igual? Podes ser mais precisa.</td><td colspan="2">S_m/questionar-I
S_m/enfatizar-I</td></tr>
<tr><td>10. Gabriel: Distância!</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembar-NI</td></tr>
<tr><td>11. Carolina: é isso… com distância sempre igual, é a circunferência. O círculo é a circunferência e o interior…</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI</td></tr>
<tr><td>12. Gabriel: mas aqui vai ser diferente.</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>13. Professora: O que queres dizer com "ser diferente"?</td><td colspan="2">S_m/questionar-I
S_m/enfatizar-I</td></tr>
<tr><td>14. Gabriel: Espere um pouco…
(Os dois estão a fazer várias representações usando diferentes valores para a medida do raio, mas apenas representam pontos sobre os vértices das quadrículas)
15. Gabriel: Lá está… temos sempre pontos sobre os lados de quadrados!</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td colspan="3">(…)</td></tr>
</table>

	18. Carolina: *O problema está na distância…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	19. Professora: *Problema? O que queres dizer?*	S_m/questionar-I		
	20. Carolina: *Com a distância assim, os pontos que estão à mesma distância de um dado ponto não ficam numa circunferência.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	21. Professora: *Então o que acontece?*	S_m/questionar-I		
	22. Gabriel: *As circunferências são quadrados. Era isso que eu queria dizer no início. Os pontos ficam todos sobre os lados de um quadrado e não sobre a circunferência.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	23. Carolina: *Pois é! E isso é por causa da distância.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	24. Professora: *Notem que mantivemos a definição do lugar geométrico "circunferência" tal como a conhecem.*	S_m/enfatizar-I		
	25. Gabriel: *Mas a distância foi definida de maneira diferente e assim as circunferências têm outra forma e são quadrados.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

Podemos reparar que a intervenção 12 do Gabriel, na tabela 12, é elucidativa de que a realização da tarefa 1 envolvendo GT influenciou o seu pensamento geométrico. Por ser uma situação nova, ele acha que o significado já adquirido sobre o lugar geométrico do plano, "circunferência", pode ser diferente nesta geometria. As intervenções 14 e 15 confirmam que, para dar resposta à questão colocada na tarefa, o Gabriel teve de desenvolver alguma forma de raciocínio geométrico. Esta situação pode ser interpretada como uma forma de desenvolvimento de capacidades/habilidades geométricas.

A sequência de sinais emergentes revela uma predominância de S_e/construção que evoluem para S_e/conclusão. Seguindo a análise da sequência discursiva, as intervenções 23 e 25 são S_e/conclusão pois expressam uma formação do significado geométrico "circunferência em GT" definida à custa da métrica da GT. A evolução dos sinais verificada neste excerto da narrativa e que culminam nas verbalizações 23 e 25 expressa que houve construção de novo conhecimento.

Tabela 13: *Cadeia evolutiva - Retas (Segmentos de reta). Distância entre dois pontos (“Caminho” mais curto) em GE-grupo do 11.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [11-GE_T_1 e T_2]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo) Emissor	Recetor	
Software Wolfram CDF Player	***19. Carolina:*** *(pensativa) … se for um arco…*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	Retas (Segmento de reta). Distância entre dois pontos (“Caminho” mais curto) em GE
	20. Gabriel: *Só pode ser um arco!*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	21. Professora: *Que arco é esse?*	S_m/questionar-I		
	22. Gabriel: *O problema é que não há só um… há infinitos…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	23. Carolina: *(continuou a fazer variar as circunferências que contêm A e B fixo, num processo muito lento) mas olha está a diminuir…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	24. Gabriel: *O arco está a diminuir… é como se a esfera estivesse a ser intersetada por planos para dar um círculo… não é?*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	25. Carolina: *Quando obtemos a “circunferência do plano que passa pelo centro” … o arco AB é o menor!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	26. Professora: *Volta a dizer isso Carolina!*	S_m/enfatizar-I		
	27. Carolina: *Quando o arco pertence a (repete) “uma circunferência do plano que passa pelo centro” …*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	28. Professora: *Essa circunferência tem o raio máximo possível nessa superfície esférica!*	S_m/acrescentar-I		
	29. Gabriel: *O centro da esfera coincide com o centro da circunferência…. aí o arco tem a menor distância.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	30. Professora: *Afinal já temos o trajeto com a menor distância! E já temos resposta a 1.a). Procedam aos vossos registos e vamos explorar o ficheiro caminho-mais-curto-cdf.*	S_m/enfatizar-I S_m/registem-I S_m/explorem-I		
	(…)			
	(Gabriel continuou explorando o ficheiro…) ***36. Gabriel:*** *É outra vez um arco…*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	37. Professora: *Estás a falar de quê Gabriel?*	S_m/questionar-I		
	38. Gabriel: *Na 4.b) …*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	39. Professora: *Um arco tem extremos… quais são agora os teus extremos?*	S_m/questionar-I		
	40. Carolina: *Ah! … não é o arco, é a circunferência de raio máximo… não estás a ver? É como reta e segmento de reta! Estás a perceber? Entre o ponto de partida e o ponto de chegada tens um segmento de reta, mas o segmento de reta está contido numa reta… aqui também!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	41. Professora: *… a reta é…?*	S_m/questionar-I		
	42. Carolina: *Circunferência de raio máximo!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	43. Gabriel: *Mas uma reta não tem princípio nem fim…*			
	44. Carolina: *Mas aqui tem!... tem de ser… pensa que continuas às voltas sem fim.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	45. Professora: *Então há “retas” que são “circunferências”?*	S_m/acrescentar-I		
	46. Gabriel: *Na Geometria táxi a “circunferência” era um “quadrado” …*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

	47. Carolina: *Mas aí o caminho mais curto não era único…havia vários caminhos com a mesma distância… aqui é como na Geometria euclidiana o menor caminho é único… não é, é em linha reta!*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

O significado pessoal "*arco*" identificado nas verbalizações 19 e 20, que evidencia um S_i/conceito, evolui para S_e/construção em 23, 24, 25 e 26. As potencialidades do artefacto, em particular o *feedback* imediato, favorecem a evolução dos sinais. Contudo, centrámos a nossa atenção apenas nas verbalizações e encadeamento das mesmas. Na intervenção 26 a professora procura que na repetição pedida à Carolina, ela reorganize a sua frase, mas esta não o faz e repete exatamente o mesmo (27). Vemos que é o Gabriel que reconstrói a verbalização (29) que estava a ser solicitada à Carolina. Estamos perante uma reconstrução coletiva, significado contruído socialmente. A intervenção 42 da Carolina revela-o como significado já interiorizado, do domínio dos conceitos matemáticos.

Para o nosso estudo é interessante verificar que nas intervenções 46 e 47, que identificam S_e/conclusão, é efetuada uma comparação entre GT, GE e Geometria Euclidiana. Como já referimos anteriormente estes sinais indiciam desenvolvimento da atividade mental.

Tabela 14: *Cadeia evolutiva - Retas paralelas em GE- grupo do 11.ºano.*

Artefacto	**Verbalizações Sessão [11-GE_T_1 e T_2]**	**Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)**		
		Emissor	**Recetor**	
***Software* Wolfram CDF Player**	***53. Gabriel:*** *…vão sempre intersetar-se…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	**Retas paralelas em GE**
	54. Carolina: *Não são paralelas… não conseguimos circunferências paralelas umas às outras…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	55. Professora: *queres dizer retas, certo?*	S_m/questionar-I		
	56. Gabriel: *(aponta) …aqui vão cruzar-se sempre…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	57. Carolina: *E se forem os paralelos do globo?*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	58. Professora: *Carolina, não te esqueças do que são as retas…*	S_m/questionar-I		
	59. Carolina: *Eram as circunferências.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	60. Professora: *Quaisquer?*	S_m/questionar-I		
	61. Carolina: *Não… tinham de ter raio igual ao da esfera… Ah! Então não há! Os paralelos são circunferências com raio menor… não são retas. Não há!*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	
	62. Professora: *Não há o quê?*	S_m/questionar-I		
	(Gabriel interrompe) ***63. Gabriel:*** *Há! Só que as paralelas vão se intersetar…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	

	64. Professora: *Mas afinal há? Não há? do que estão a falar?*	S_m/questionar-I		
	65. Gabriel: Não há *retas que não se intersetam.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	66. Carolina: *Aqui são todas coincidentes.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	67. Professora: *Coincidentes, Carolina?*	S_m/enfatizar-I S_m/questionar-I		
	68. Carolina: *Não coincidem…, mas não são paralelas… Não consigo traçar uma circunferência com raio máximo, paralela aquela (aponta).*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	69. Professora: *Queres dizer concorrentes ou coincidentes. Então, …?*	S_m/enfatizar-I S_m/questionar-I		
	70. Carolina: *Que se cruzam é "concorrentes", aqui as retas são todas concorrentes.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	71. Gabriel: *Sobre a esfera não há retas paralelas! Há sempre dois pontos onde se cruzam…*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	72. Carolina: *São sempre concorrentes… porque as retas são circunferências… têm de cruzar-se em dois pontos.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	
	73. Professora: *Isso mesmo… esses dois pontos designam-se por pontos antípodas. Podem confirmar as vossas conclusões indo ao site aí indicado. (…)*	S_m/acrescentar-I S_m/confirmem-I		

Este episódio inicia-se com a intervenção 53 do Gabriel que identifica um S_e. Esse sinal remete para o significado matemático visado para esta sessão e que era exatamente a inexistência de retas paralelas em GE.

Todas as intervenções foram classificadas como S_e pois refletem que houve algum raciocínio matemático realizado. Este último permitiu obter conhecimento novo reconhecido nas verbalizações sequencialmente proferidas (54 até 70) permeadas pelas verbalizações S_m da professora. A cadeia aqui apresentada identifica a construção do conceito de "*retas paralelas na GE*". As intervenções 71 e 72 (S_e/conclusão) proferidas pelos alunos Gabriel e Carolina, mostram a situação em que as duas intervenções se complementam e o todo revela a apropriação do significado partilhado.

Tabela 15: Cadeia evolutiva - Retas em GH- grupo do 11.ºano.

Artefacto	Verbalizações Sessão [11-GH_T_1]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	Recetor	
Software de geometria dinâmica *GeoGebra* (Ferramentas hiperbólicas previamente instaladas: "Micro-Mundo Disco de Poincaré")	***16. Carolina**: Podemos construir uma reta?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	**Retas em GH**
	***17. Professora**: Se é uma reta hiperbólica, têm de construir primeiro o disco de Poincaré de que já falámos. Será dentro dele que construirão a reta hiperbólica.*	S_m/acrescentar-I S_m/construam-I		
	***18. Carolina**: Temos de selecionar o círculo e os dois pontos (foi clicando à medida que falava).*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***19. Gabriel**: Olha, fez um arco!*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	***20. Professora:** Façam outras… representem mais… (...)*	S_m/representem-I		
	***21. Carolina:** São sempre arcos.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***22. Professora:** Arcos de circunferência, certo?*	S_m/acrescentar-I S_m/questionar-I		
	***23. Gabriel:** Os centros estão sempre do exterior do círculo. E quanto menores forem os arcos, o centro aproxima-se da fronteira do círculo.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***24. Professora:** dá para ver, Carolina? (A carolina apagou tudo e representou uma nova reta hiperbólica. Selecionou um dos pontos da construção da reta que foi arrastando.)*	S_m/questionar-I		
	***25. Carolina**: Olhem! Quando arrastamos abaixo do centro do círculo o arco curva para baixo e quando o arrasto acima do centro, curva para cima, mas olhem… aqui está alinhado com o centro e não temos um arco. É um segmento de reta!*	S_e/construção S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	***26. Professora:** Continuas a ter uma reta hiperbólica. Sempre que arrastas, estás a obter retas hiperbólicas.*	S_m/acrescentar-I		
	***27. Carolina:** Mas então não são sempre arcos!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	***28. Gabriel:** (pega no "rato" e seleciona a ferramenta "arrastar ponto" que a Carolina esteve a usar) É isto… aqui deixa de ser arco, temos o diâmetro do círculo…*	S_e/construção S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	***29. Professora:** Pois, mas o círculo não tem fronteira… esse diâmetro não tem extremos.*	S_m/acrescentar-I		
	***30. Carolina:** mas esta reta é menos estranha do que as que são arcos.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	***31. Gabriel:** É isso! É uma ilusão ótica vemos um segmento de reta, mas são sempre arcos. Se imaginar que estou dentro da superfície esférica, faz assim (faz o gesto no ar com o indicador, seguindo o contorno da linha) a reta tem concavidade virada para cima.*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	

Esta cadeia é identificada na narrativa da 7.ª sessão da sequência de intervenção com estes alunos, o que poderá explicar a predominância de S_e do tipo construção-conclusão a ocorrer ao longo da cadeia (25, 28 e por último 31). Reconhecemos que, de uma sessão para outra, estão a ser desenvolvidas competências matemáticas que identificam desenvolvimento de capacidades geométricas. Tal como nas sessões que envolveram o software Wolfram CDF Player, nas tarefas com GE, as verbalizações da professora, S_m, foram menos frequentes e mais da forma de ação “acrescentar”. A ferramenta “arrastar” foi muito utilizada e proporcionou a maior parte da exploração (desde a 23 até à 31), excetuando três intervenções da professora (24, 26 e 30). A verbalização 31, S_e/construção-conclusão, confirma que com esta tarefa, envolvendo GH, o Gabriel desenvolve capacidades de visualização (representações mentais) geométrica.

Tabela 16: *Cadeia evolutiva - Retas (ângulos) em GH- grupo do 11.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [11-GH_T_1]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	Recetor	
Software de geometria dinâmica *GeoGebra* (Ferramentas hiperbólicas previamente instaladas: “Micro-Mundo Disco de Poincaré”)	***39. Carolina:*** *O que tem esse arco, ou essa reta hiperbólica, de especial?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	**Retas (ângulos) em GH**
	40. Professora: *É o ângulo que o arco forma com a fronteira do círculo! Neste modelo as retas hiperbólicas são arcos ortogonais à fronteira do círculo.*	S_m/acrescentar-I		
	41. Gabriel: *Perpendicular?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	42. Carolina: *(aponta com o dedo no ecrã) Aqui? 90º?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	43. Professora: *Podem medir. Usem as ferramentas euclidianas para traçar as duas tangentes à curva nesse ponto e meçam o ângulo entre elas.*	S_m/meçam-I S_m/utilizem-I		
	44. Carolina: *É como os ângulos entre os arcos na Geometria Esférica.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	45. Professora: *Construam e meçam.*	S_m/construam-I S_m/meçam-I		
	46. Carolina: *Temos de ir aqui? (coloca o cursor na ferramenta euclidiana para construir a reta tangente).*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	47. Professora: *Primeiro tens de ter o ponto de interseção do arco com a circunferência que limita o círculo de Poincaré.*	S_m/acrescentar-I		
	48. Carolina: *Pois é, é aqui.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	49. Gabriel: *Faz a outra tangente… agora é aqui, para medir (aponta no ecrã para a ferramenta “medir ângulos”).*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	

	50. Carolina: *Deu 270º logo está certo, aquele é 90º. Boa!*	S_e/construção S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	51. Professora: *Confirmaram que são ortogonais, mas isso não é a demonstração matemática.*	S_m/enfatizar-I		
	52. Gabriel: *Podemos arrastar este ponto (ele faz) e o ângulo mantém-se para todos os arcos.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	53. Carolina: *Arrasta agora o outro… dá sempre!*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	

Esta cadeia evolutiva integra a 7.ª sessão da sequência de intervenção com estes alunos. Tal como já foi dito, relativamente à cadeia evolutiva da tabela 15, as várias sessões já realizadas serão uma explicação para predominância, neste caso, de S_e do tipo construção. Nas intervenções 43 e 45 da professora, são identificados três S_m remetendo para as formas de ação "meçam", "utilizem" e "construam". Estes S_m evidenciando formas de ação são muito recorrentes nas sessões que envolvem AGD. Em 44, a Carolina refere o procedimento a adotar por comparação com o procedimento já usado na GE. De umas sessões para as outras verificámos que foram desenvolvidas capacidades geométricas. Nesta situação, podemos acrescentar que os alunos demonstraram (44, 46, 48, 49 e 50) estar mais capacitados para decidir quais os procedimentos/estratégia a adotar e confirmar que as retas hiperbólicas eram ortogonais à fronteira do círculo, S_m/acrescentar-I proferido pela professora (40).

Tabela 17: *Cadeia evolutiva – Mediatriz e circuncentro em GH- grupo do 11.ºano.*

Artefacto	Verbalizações Sessão [11-GH_T$_3$]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	**Recetor**	
Software de geometria dinâmica *GeoGebra* (Ferramentas hiperbólicas previamente instaladas: "Micro-Mundo Disco de Poincaré")	**32. Gabriel:** *Não podemos usar as ferramentas euclidianas? Aqui, a mediatriz… (Aponta no ícone das ferramentas euclidianas, a mediatriz de um segmento)*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	**Mediatriz e circuncentro em GH**
	33. Professora: *Não Gabriel, aí não podes. Tens de construir atendendo às propriedades que conheces para a mediatriz. (Ficam os dois calados.) Então? O que é a mediatriz?*	S_m/acrescentar-I S_m/questionar-I		
	34. Carolina: *Uma reta.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	35. Professora: *sim, e mais… (continuam calados) Vamos lá, o que sabem da posição dessa reta?*	S_m/acrescentar-I S_m/questionar-I		
	36. Carolina: *É perpendicular ao segmento.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	37. Professora: *e…*	S_m/enfatizar-I		
	38. Gabriel: *Já vi… vai dar confusão.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	39. Professora: *porquê Gabriel?*	S_m/questionar-I		
	40. Gabriel: *envolve distância… e a distância aqui…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	41. Professora: *Diz lá…*	S_m/enfatizar-I		
	42. Gabriel: *Os pontos da mediatriz estão todos à mesma distância dos extremos do segmento, certo?*	S_i/conceito S_e/construção	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	

	43. Professora: *Claro que sim…, mas para a construíres basta indicares que pretendes uma reta hiperbólica, perpendicular a um dado segmento hiperbólico e ainda… vocês não referiram, mas que passa no ponto médio do segmento. Todas as ferramentas necessárias estão no menu hiperbólico. Ora vejam lá…*	S_m/enfatizar-I S_m/vejam-I		
	44. Carolina: *Começamos pelo segmento hiperbólico… agora o ponto médio… e…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	45. Gabriel: *Vai ali onde diz h-reta perpendicular.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	46. Carolina: *(faz o que o colega sugeriu) Não dá… só se for aqui, h-reta por um ponto na h-reta…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	47. Gabriel: *Sim, já deu …, mas agora escolhe um ponto nessa reta e vê se está à mesma distância dos extremos. Vai a h-comprimento…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	48. Carolina: *um ponto, sete quatro três e um ponto, sete quatro três, deu!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	49. Gabriel: *Arrasta… pois, mantem-se… temos a mediatriz.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	50. Professora: *É isso mesmo! Agora queremos o circuncentro.*	S_m/enfatizar-I		
	51. Carolina: *Eu já não me lembrava, mas como está com as mediatrizes já me lembro era a interseção das mediatrizes…*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	
	52. Gabriel: *Então queremos mais uma mediatriz. Bastam duas…* *(A carolina constrói outra das mediatrizes)*	S_e/construção	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	
	53. Gabriel: *A interseção é ali (aponta para o ícone da barra de ferramentas). Faz a circunferência hiperbólica com centro aí e a passar num dos vértices. (A Carolina, constrói) Boa! Arrasta agora … dá mesmo!*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	
	54. Carolina: *É como na geometria euclidiana*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	

Esta cadeia evolutiva é reconhecida na narrativa da última sessão realizada com o grupo de alunos do 11.º ano. Na verbalização 33, a professora questiona de modo a orientar o discurso para a noção de mediatriz de um segmento (Sm/questionar-I). As intervenções 34 e 36 da Carolina encadeiam-se complementando a definição, mas esta fica ainda incompleta. Na sequência da intervenção 37 da professora “e…”, este Sm/enfatizar-I, faz reconhecer, na verbalização 38 proferida imediatamente a seguir pelo Gabriel, que foi desenvolvido raciocínio matemático mental. Confirma-se pela verbalização 40, em que o Gabriel evoca a “distância”. O conceito “distância hiperbólica” foi trabalhado no início da sessão. A sequência de verbalizações de 44 até 53, excetuando a 50 que diz respeito à professora, são todas Se/construção nas quais reconhecemos o desempenho dos alunos na realização da proposta da tarefa. A verbalização 54, Se/construção-conclusão, é reveladora da realização de várias operações mentais pois recorre a termos comparativos. A comparação requer que se tenham já interiorizado conhecimentos com os quais é feita a comparação e que conhecimentos novos passem integrar o conjunto de conhecimentos comparados.

3.1.3. Sequência de intervenção do grupo do 12.ºano

Tabela 18: Cadeia evolutiva – Perímetro da circunferência e Área do círculo em GT- grupo do 12.ºano.

Artefacto	Verbalizações Sessão [12-GT_T_2 e T_3]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)		
		Emissor	Recetor	
Malha quadrangular (papel quadriculado) na ficha de trabalho, em pape	***38. Roberto:*** *Os pontos que estão representados têm coordenadas inteiras. Então para o perímetro fazemos 4 vezes o lado. A distância de um vértice ao outro do quadrado é 10, cinco unidades na horizontal e mais cinco na vertical.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	Perímetro da circunferência e Área do círculo em GT
	39. Rafael: *Também podemos calcular o lado fazendo cinco vezes dois.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	
	40. Professora: *pois, explica lá isso.*	S_m/expliquem-I		
	41. Rafael: *A diagonal de cada quadrícula é duas unidades de comprimento. O lado do quadrado tem cinco diagonais de quadrículas. O perímetro é 40.*	S_e/construção	S_m/relembrar-NI S_m/direcionar-NI	
	42. Professora: *Quando estamos na Geometria Euclidiana, o quociente entre o perímetro da circunferência e o diâmetro é o quê? (Ficam todos pensativos)*	S_m/questionar-I S_m/relembrar-I		
	43. ***David:*** *O perímetro é $2\pi r$, o diâmetro é 2r, o quociente é… π.*	S_i/conceito	S_m/relembrar-NI	
	44. Professora: *usando o perímetro e o diâmetro da Circunferência Táxi, o que é o quociente?*	S_m/questionar-I		
	45. David: *Dá 4!*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	(…)			
	53. Rafael: *Ah!... já vi! Com π igual a quatro dá certo. Mesmo nesta (aponta para a figura da questão 1) a área é 100 e pode ser 4 vezes 25.*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	
	54. David: *Ou fazemos como sabemos para o quadrado ou como se fosse a circunferência desde que π seja igual a 4.*	S_e/conclusão	S_m/direcionar-NI	

Podemos reparar que a intervenção 38 do Roberto, e a 39 do Rafael, na tabela 18, apesar de serem Si/conceito são elucidativas de que a realização da tarefa 1 envolvendo a GT influenciou o seu pensamento geométrico pois recorrem à noção de "distância Táxi". A evolução na comunicação, até à obtenção do "valor π em GT", é revelada nas intervenções 53 e 54, S_e/conclusão e Se/construção-conclusão, e expressa que houve construção de novo conhecimento.

Tabela 19: Cadeia evolutiva – Polígonos. Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Área de um triângulo em GE- grupo do 12.ºano.

Artefacto	Verbalizações Sessão [12-GE_T_2, continuação]	Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo) Emissor	 Recetor	
***Software* Wolfram CDF Player**	***13. Professora:*** *Afinal, o que vos parece? O que podem dizer acerca dos polígonos na Geometria Esférica?*	S_m/questionar-I		**Polígonos. Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo em GE**
	14. Rafael: *Os segmentos de reta vão ser arcos.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	15. Professora: *Qual o polígono com menor número de lados?*	S_m/questionar-I		
	16. David: *Vai ser um triângulo com os lados arredondados.*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	17. Professora: *Na tarefa sugere-se que consultem "www.atractor.pt/mat/GeomEsf".*	S_m/consultem-I		
	18. Rafael: *Não… dois arcos podem unir-se… bi…ângulos…*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	(…)			
	(…) ***42. David:*** *Podemos abrir o ficheiro "soma_dos_ângulos_de_um_triângulo-cdf"?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	
	43. Professora: *Claro… vamos lá!*	S_m/façam-I		
	(…) ***44. David:*** *Temos que mover os pontos?*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI	
	45. Professora: *Comecem por explorar o ficheiro tal como é indicado em 1. e em 2.*	S_m/explorem-I		
	(…) ***46. David:*** *Podemos ir aqui onde diz "soma dos ângulos"?*	S_i/conceito	S_m/direcionar-NI	
	47. Professora: *Podem usar tudo o que têm, à vossa vontade.*	S_m/utilizem-I		
	48. David: *… não é igual ao triângulo… não é sempre 180º… não é constante… (fala para si)*	S_e/construção	S_m/direcionar-NI S_m/relembrar-NI	

Esta cadeia evolutiva permite-nos identificar o Se/construção na intervenção 14, do Rafael, como um registo que retrata a utilização de conhecimento adquirido na resolução da tarefa com GE, na sessão anterior "segmentos de reta em GE". Noutro Se/construção, verbalização 16, do David, temos uma nova situação em que a construção resulta da combinação da utilização de conteúdos referentes à Geometria Euclidiana com o conhecimento sobre "retas" trabalhado em GE. Esta construção, que não leva à resposta correta na questão da tarefa, denuncia atividade mental envolvendo os conhecimentos mobilizados na sessão anterior sobre GE. Na situação que envolve a verbalização 18, proferida pelo Rafael, esta resulta da consulta do site sugerido na tarefa. Reconhece-se nitidamente nestas situações o envolvimento dos alunos na construção de conhecimento novo.

Na sequência das verbalizações de 42 até à 48, as intervenções da professora são essencialmente S_m cuja forma de ação são: "façam", "explorem" e "utilizem". A predominância deste tipo de S_m intencionais é identificada em AGD. Estes alunos revelam muito "à vontade" na utilização das tecnologias e recorrem à procura de informação nos sites sugeridos na tarefa tal como é testemunhado na verbalização 42 do David. Na verbalização 48, proferida pelo David, evidencia o aluno a "pensar em voz alta" pois ele fala para si. Nessa situação, a exploração do valor "*soma dos ângulos internos de um triângulo em GE*" criou no David algum incómodo e a reflexão é feita de modo pessoal. Mas, esta situação é reveladora de uma forma de desenvolvimento do pensamento geométrico do David e esta resultou do contacto com a GE na tarefa proposta.

Tabela 20: Cadeia evolutiva –Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo em GH- grupo do 12.ºano.

<table>
<tr><th rowspan="2">Artefacto</th><th rowspan="2">Verbalizações
Sessão [12-GH_T$_2$, continuação]</th><th colspan="2">Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)</th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th>Emissor</th><th>Recetor</th></tr>
<tr><td rowspan="14">Software de geometria dinâmica GeoGebra (Ferramentas hiperbólicas previamente instaladas: “Micro-Mundo Disco de Poincaré”)</td><td>38. David: Olhem… aqui parece um triângulo normal.</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI
S_m/direcionar-NI</td><td rowspan="14">Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo em GH</td></tr>
<tr><td>39.Professora: O que queres dizer com “normal”?</td><td colspan="2">S_m/questionar-I</td></tr>
<tr><td>40.David: Os lados são segmentos de reta.</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI</td></tr>
<tr><td>41.Professora: Atenção… os lados são sempre segmentos de reta. Nesta geometria são segmentos hiperbólicos!</td><td colspan="2">S_m/acrescentar-I</td></tr>
<tr><td>42. David: Mas quando estamos próximos do centro, são segmentos de reta euclidianos.</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>43. Professora: Mais uma vez é apenas uma questão de visualização. O que vemos, parece-se mais com os segmentos euclidianos… é só isso… é o que vemos.</td><td colspan="2">S_m/enfatizar-I</td></tr>
<tr><td>44. Rafael: Pois são sempre hiperbólicos… vê-se bem quando os vértices se afastam do centro, mas no centro é como disse o David… vemos segmentos euclidianos.</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>45. Professora: Já viram como é afetada a construção, vejam agora os ângulos internos e a soma dos ângulos.</td><td colspan="2">S_m/vejam-I</td></tr>
<tr><td>46. David: Há aqui uma ferramenta que já vi, é h-soma dos ângulos de um triângulo, clica aqui. (Roberto faz o que o colega sugere.)</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>47. Roberto: Dá tudo… dá a soma e dá cada um dos ângulos. A soma é inferior a 180º!</td><td>S_i/conceito
S_e/construção</td><td>S_m/relembrar-NI
S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>48.David: (arrasta os vértices, modificando o triângulo) Estranho… não passa de 180º.</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI
S_m/relembrar-NI</td></tr>
<tr><td>49. Rafael: Aproxima todos os vértices da fronteira …aí. Espera, estás a ver a soma diminui… pois, próximo da fronteira os ângulos tendiam para zero. Volta lá para o centro… todos os vértices… aumenta, mas não chega a 180º</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>50. Professora: Já podem tirar algumas conclusões?</td><td colspan="2">S_m/questionar-I</td></tr>
<tr><td>51. David: Já! E é estranho, a soma varia. É como na Geometria Esférica. Mas aqui é sempre inferior a 180º.</td><td>S_e/construção-conclusão</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
</table>

A ferramenta “arrastar” revelou-se preponderante na emergência de sinais. Na intervenção 38, emitida pelo David, “…parece um triângulo normal” mostra que o aluno já tinha visualizado outros triângulos hiperbólicos e nesse momento tinha conseguido obter uma forma que lhe era mais familiar. Para o David, a normalidade do triângulo é associada aos lados do polígono serem segmentos de reta, tal como os reconhece na Geometria Euclidiana, intervenção 40, Si/conceito. O aluno ainda não interiorizou a noção de segmentos hiperbólicos. Na intervenção 44, o Rafael aceita que os lados do triângulo hiperbólico sejam segmentos hiperbólicos, mas reforça a ideia do David justificando-se com a visualização. O que acontece é que a representação mental que é reconhecida é a de segmentos de reta euclidianos. Levar os alunos a lidar com estas situações desenvolve capacidades geométricas e este é um exemplo de que a capacidade geométrica, no âmbito das representações mentais, pode ser desenvolvida.

As intervenções 46, 47, 48, 49 e 51 envolvem todos os alunos e evidenciam uma evolução discursiva no sentido da formação de um significado matemático, neste caso "soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico. Na intervenção 51, Se/Construção-conclusão, o David compara com a GE por se verificar, quer em GE quer em GH, a variação do valor obtido para a soma e essa variação é, nas suas palavras, "*E é estranho, a soma varia. (…)*".

Tabela 21: *Cadeia evolutiva –Distância em GH- grupo do 12.ºano.*

<table>
<tr><th rowspan="2">Artefacto</th><th rowspan="2">Verbalizações
Sessão [12-GH_T_2, continuação]</th><th colspan="2">Sinais/(Caraterística, Ação ou Tipo)</th><th rowspan="8">Distância em GH</th></tr>
<tr><th>Emissor</th><th>Recetor</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Software de geometria dinâmica GeoGebra (Ferramentas hiperbólicas previamente instaladas: "Micro-Mundo Disco de Poincaré")</td><td>53. Rafael: Posso ver o triângulo equilátero? (…)</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI
S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>54. David: Arrasta os vértices…
tem de se manter equilátero. (Rafael apaga a construção toda e constrói um triângulo equilátero recorrendo à ferramenta h-triângulo equilátero.)</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI
S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>55. Roberto: Esse não é equilátero! Este lado é mais pequeno!</td><td>S_i/conceito</td><td>S_m/relembrar-NI</td></tr>
<tr><td>56. Professora: São, são… a questão é a distância entre os pontos. Lembram-se de termos visto o ponto médio de um segmento? A distância do ponto médio a cada um dos extremos também não parecia a mesma… e vocês confirmaram com h-comprimento. (Ficam pensativos) Cada um desses segmentos hiperbólicos têm o mesmo comprimento…</td><td colspan="2">S_m/acrescentar-I
S_m/relembrar-I</td></tr>
<tr><td>(Rafael usa a ferramenta h-comprimento para obter o comprimento de cada um dos segmentos hiperbólicos do triângulo.)
57. David: 4,136 4,136 e 4,136; boa! Arrasta… mantem-se. E os ângulos são todos iguais, vê lá.</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
<tr><td>58. Rafael: Têm de ser iguais e vê-se… (enquanto falava, foi usando a ferramenta h_soma dos ângulos do triângulo) Mas já vemos… aí está!</td><td>S_e/construção</td><td>S_m/direcionar-NI</td></tr>
</table>

	***59. Professora:** Vimos que a amplitude do ângulo hiperbólico era obtida à custa do ângulo euclidiano que era formado pelas semitangentes com origem no vértice. Por isso o Rafael disse que o ângulo se vê bem. Mas a distância já não.*	S_m/relembrar-I S_m/enfatizar-I		
	***60. David:** Continua a ser no centro do círculo que ele é mais normal. Era onde víamos os segmentos mais parecidos com os segmentos euclidianos.*	S_e/construção-conclusão	S_m/direcionar-NI	

Esta cadeia evolutiva e a anterior, a analisada na tabela 20, foram reconhecidas na narrativa da mesma sessão. Alguns sinais desta cadeia refletem ainda uma evolução da cadeia anterior.

É possível reconhecer nas intervenções 54, 55, 57, 58 e 60 que a conceção de conceitos geométricos é extremamente condicionada pela visualização. A ferramenta “arrastar” neste AGD é por isso muito importante. À custa da construção e análise de triângulos equiláteros hiperbólicos discutiram-se duas noções: a de distância e a de ângulos. Esta última já tinha sido desenvolvida fora desta cadeia evolutiva. Na intervenção 55, o Roberto limita-se a tirar conclusões partindo da visualização e da representação mental que lhe tem associada. “*Este lado é mais pequeno!*”. À custa da construção do Rafael e do recurso à ferramenta hiperbólica “h-comprimento do segmento”, O David, na intervenção 57, confirma que a medida dos lados é sempre igual. Para as amplitudes dos ângulos diz simplesmente “*E os ângulos são todos iguais, vê lá.*”. A intervenção seguinte, 58, do Rafael a propósito das amplitudes confirma o que foi dito “*Têm de ser iguais e vê-se…*”, contudo e numa tentativa de prova, usa a ferramenta “h-soma dos ângulos de um triângulo” e acrescenta “*… aí está*”.

Na intervenção 60, S_e/construção-conclusão, o David refere que é no centro do círculo que o triângulo é mais normal e volta a fazer referência que também é aí que os segmentos de reta são mais parecidos com os euclidianos.

Concluímos que estas noções socialmente partilhadas se revelam na evolução discursiva como noções matemáticas de que os alunos se apropriaram.

3.2. Síntese

Começámos por classificar, através de um sinal, cada verbalização ocorrida dentro da discussão coletiva. A partir dessa classificação analisámos o estado evolutivo dos significados pessoais dos alunos em relação ao significado matemático, de acordo com os conceitos matemáticos que associámos a cada tarefa. Essa análise levou-nos a identificar cadeias evolutivas. Foram essas cadeias evolutivas que, sujeitas a uma análise mais detalhada das intervenções discursivas reconhecidas nas narrativas, permitiram obter respostas às questões da investigação.

Entendemos que a apresentação e aplicação das GNE se concretizou com a resolução das tarefas na aplicação das sequências de intervenção.

De um modo geral é possível observar a construção de sinais socialmente partilhados, normalmente visível na evolução para as intervenções/verbalizações finais da tabela em que reconhecemos a construção de algum significado matemático através de S_e/construção-conclusão e S_e/conclusão. A construção de significados matemáticos permite-nos concluir que houve alguma influência no pensamento geométrico.

Os S_m intencionais, associados às formas de ação, qualquer que seja a sua forma, desencadeiam intervenções que revelam uma apropriação do significado matemático. Esta apropriação irá repercutir-se no pensamento geométrico influenciando-o.

Encontrámos algumas situações envolvendo S_e/construção aos quais associámos intervenções em que são utilizados termos de comparação com a Geometria Euclidiana, com a GT, com a GE ou com a GH e estes indiciam que alguma atividade mental foi desenvolvida. Identificámos por um lado, que esta forma de atividade mental é uma habilidade geométrica e por isso é resultante do desenvolvimento de capacidades geométricas. Por outro lado, a comparação evidencia a apropriação dos novos conceitos que são usados na verbalização onde ela é reconhecida.

Quando as intervenções se sucedem num encadeamento frásico, em que cada intervenção retoma a anterior completando-a, identificámos nesta forma de comunicação, a apropriação, ou seja, uma forma de construção de conhecimento tal como definimos no nosso objetivo da investigação.

Trazer para a discussão uma nova situação que não estava contemplada indicia que houve uma influência no pensamento geométrico a partir do conhecimento das GNE. Esta situação foi visível na tabela 11, na intervenção 57, S_e/construção.

Identificámos como caso de “antecipação”, a situação da intervenção 12 do Gabriel, na tabela 12. A verbalização proferida é elucidativa de que a realização da tarefa 1 envolvendo GT influenciou o seu pensamento geométrico. Por ser uma situação nova, ele acha que o significado já adquirido sobre o lugar geométrico do plano, “circunferência”, pode ser diferente nesta geometria, é uma forma de antecipação da resposta. Na sequência dessa verbalização, as intervenções 14 e 15 confirmam que, para dar resposta à questão colocada na tarefa, o Gabriel teve de desenvolver alguma forma de raciocínio geométrico. Esta situação pode ser interpretada como uma forma de desenvolvimento de capacidades/habilidades geométricas.

Na tabela 13, identificámos uma situação de ventriloquismo (Wertsch, 1993). Na intervenção 26 a professora procura que na repetição pedida à Carolina, ela reorganize a sua frase, mas esta não o faz e repete exatamente o mesmo (27). Vemos que é o Gabriel que reconstrói a verbalização da Carolina (29) retomando-a e recompondo-a. Estamos perante uma reconstrução coletiva em que o significado é construído socialmente. Nesta cadeia evolutiva, verificamos mais à frente na verbalização 42 da Carolina que houve uma apropriação deste significado matemático.

Nas situações em que a construção social de um conceito resulta de intervenções que se complementam, mas que foram proferidas por dois sujeitos, o todo é revelador da apropriação do significado partilhado (e.g. intervenções 71 e 72 da cadeia evolutiva da tabela 14).

No grupo de alunos do 10.º e 11.º anos em que houve um número significativo de sessões, as cadeias evolutivas identificadas em narrativas dessas últimas sessões predominam Se/construção-conclusão pelo que podemos concluir que de uma sessão para outra, estão a ser desenvolvidas competências matemáticas que identificam desenvolvimento de capacidades geométricas. Por exemplo na cadeia evolutiva da tabela 16, os alunos demonstraram (verbalizações 44, 46, 48, 49 e 50) estar mais capacitados para decidir quais os procedimentos/estratégia a adotar.

Nas tarefas desenvolvidas com recurso a AGD, muitas das intervenções discursivas analisadas confirmam o desenvolvimento de capacidades de visualização (representações mentais) geométrica (ver, por exemplo, a análise da cadeia evolutiva da tabela 15, verbalizações 23 até 31). A ferramenta "arrastar" revelou-se preponderante na emergência de sinais.

Algumas verbalizações resultam da combinação da utilização de conteúdos referentes à Geometria Euclidiana com o conhecimento trabalhado em GT, GE ou GH. Esta combinação denuncia atividade mental envolvendo os conhecimentos mobilizados e consequentemente o desenvolvimento de capacidades.

As verbalizações que resultam de "pensar em voz alta", situação em que se "fala para si mesmo" reproduzem reflexões feitas de modo pessoal. Estas verbalizações não podem ser entendidas como intervenções na discussão. Essas situações são reveladoras de alguma forma de desenvolvimento do pensamento geométrico (e.g. a verbalização 48 do David na cadeia evolutiva da tabela 19).

As noções socialmente partilhadas revelam-se na evolução discursiva como noções matemáticas de que os alunos se apropriaram.

Conclusões

“A questão de saber se a geometria prática do mundo é ou não euclidiana tem um sentido preciso e a resposta só pode ser fornecida pela experiência.”
Albert Einstein in Geometria e experiência, p.3, 1921.[33]

1. Apresentação

Com este estudo pretendeu-se, segundo uma perspetiva de dimensão social e cultural mediada, identificar/analisar a evolução de significados matemáticos através da interação entre os alunos e entre estes e o professor/investigador. O objetivo deste trabalho investigativo é “**Averiguar se o conhecimento da existência e aplicabilidade de outras geometrias, por parte dos alunos, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico”.**

A apresentação e aplicação de outras geometrias (Geometrias não Euclidianas, GNE) concretizou-se com a resolução de tarefas selecionadas visando significados matemáticos específicos no domínio das GNE. Relativamente ao desenvolvimento do pensamento geométrico, este deverá ser interpretado como apropriação de significados geométricos e como evolução discursiva (forma de comunicação). Orientaram o trabalho investigativo duas questões: (i) será importante, ou não, a apresentação e aplicação de outras geometrias (além da euclidiana) no ensino secundário com o objetivo de desenvolver capacidades geométricas e (ii) de que modo o conhecimento e aplicação de outras geometrias influencia o pensamento geométrico nos alunos?

Com o propósito de obter respostas a estas questões e a partir delas tirar conclusões que pudessem contribuir de forma construtiva no domínio da didática da Matemática, foram elaboradas propostas didáticas com um objetivo de estudo: “fazer emergir sinais” indiciadores de uma atividade intelectual, conducente à apropriação de significados geométricos, expressa através da linguagem.

Optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa de cunho descritivo e interpretativo que permitiu observar a realização das tarefas propostas aos alunos e analisar, de forma a compreender o modo de pensar do aluno a partir da reflexão das interações verbais entre professor e alunos.

A escola onde foi feita esta intervenção situa-se na Raia Centro do país, num concelho desertificado dada a interioridade que o afeta. A um grupo de nove alunos do ensino secundário (alunos com idades compreendidas entre 15 e 18 anos), elementos do Clube de Matemática da escola que frequentam, foi proposto a realização de algumas tarefas

---

[33] Disponível em https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/einstein/geometria_e_experiencia.pdf

investigativas. As tarefas foram aplicadas em três grupos: o grupo do 10.º ano, com 4 alunos; o grupo do 11.º, com 2 alunos e o do 12.º ano com 3 alunos.

Uma vez que as Geometrias Não Euclidianas estão fora do limite do currículo nacional não era viável um estudo em sala de aula. Por esta razão, foi implementado no clube da Matemática cuja dinamizadora é a própria investigadora. O horário do Clube contempla dois tempos de 45 minutos cada por semana e foi nesses tempos que se realizaram todas as sessões. Nessas sessões, na sala estavam presentes apenas os alunos participantes e a investigadora.

No 1.º período letivo de 2015/2016 foram aplicadas as tarefas do grupo Geometria Táxi (GT) e iniciou-se a aplicação das tarefas do grupo Geometria Esférica (GE). No 2º período, do mesmo ano letivo, concluiu-se a aplicação iniciada no período letivo anterior, GE, e foram aplicadas as tarefas do grupo Geometria Hiperbólica (GH).

A recolha de dados incluiu a observação dos alunos, os seus registos escritos (resolução das tarefas) e o registo áudio durante a realização das tarefas. Todos os registos áudio foram integralmente transcritos (narrativas por episódio de intervenção) permitindo, numa fase posterior, a análise ao modo como os alunos se envolveram na realização das tarefas, à interação entre si e com a professora, aos sinais emergentes de quaisquer reações no grupo de trabalho, em particular dos emergentes das discussões coletivas e da evolução desses mesmos sinais.

2. Enquadramento teórico

Para dar resposta às questões da investigação foram mobilizadas duas abordagens da teoria da atividade: a teoria da mediação semiótica (Bussi & Mariotti, 2008) e a teoria sociocultural da ação mediada (Wertsch, 1993) ambas inspiradas no trabalho de Vygotsky e com o mesmo foco da teoria da atividade, a ênfase na mediação da ação humana através de artefactos culturais. A teoria sociocultural da ação mediada assenta na ideia de Vygotsky sobre o comportamento por sinais, em particular pela linguagem. As noções de linguagem social, género, fala e voz, (Bakhtin, 1981) têm um contributo significativo no trabalho desenvolvido por Wertsch. Fundamentada na natureza social da linguagem, a perspetiva de Bakhtin remete-nos para uma dependência da interação dialógica dos sentidos das palavras. Para Vygotsky (2007), o sentido das palavras depende da relação que elas têm com os eventos psicológicos, estabelecendo a ligação entre pensamento e linguagem. A linguagem enquanto sistema simbólico, é um instrumento do pensamento e um meio de comunicação e tem uma função conceitual que se desenvolve e enriquece em estreita relação com a evolução dos processos psíquicos. A perspetiva de Vygotsky assenta no desenvolvimento do indivíduo como resultado de um processo sociocultural enfatizando o papel da linguagem, ou seja, os processos semióticos que envolvem o indivíduo e o uso da linguagem. A linguagem é, por um lado, sinal do que ela própria significa e por outro, é também emissora de significados. Neste último caso implica a partilha de informação e de comunicação, o que significa que há em si algum conteúdo cognitivo importante que possa ser interiorizado.

> "A tomada de consciência de uma operação mental significa uma transferência dessa operação do plano da ação para o plano da linguagem, isto é, implica que se recrie essa mesma operação na imaginação, para que ela possa exprimir-se por palavras." (Vygotsky, 2007, p. 42)

Na teoria da mediação semiótica são a destacar a linguagem e a utilização de sinais, o recurso a ferramentas com vista à realização de tarefas com objetivos didáticos específicos e ainda as dinâmicas sociais entendidas como relação entre a dimensão individual e o trabalho realizado a pares ou coletivamente (Bussi, 1998; Bussi & Mariotti, 2008).

O artefacto/ferramenta usado passa a ter a função de instrumento psicológico. Os sinais produzidos podem ser evidenciados quando o aluno, numa atitude discursiva, "partilha" com o grupo de forma espontânea ou reage às intervenções do professor e/ou dos colegas. Estes sinais são, neste nível, portadores de significados matemáticos pessoais/particulares que podem evoluir para um nível de sinais socialmente partilhados, através da discussão coletiva e, pela intervenção do professor, constituir-se-ão em significados matemáticos previamente definidos no objetivo da intervenção didática.

O objetivo principal da atividade ensino-aprendizagem pôde ser alcançado através da interação social na sala de aula. Verificámos que tirando partido do potencial semiótico do artefacto, o professor usou-o como uma ferramenta de mediação semiótica, orientando os alunos para os significados, inicialmente pessoais, emergentes do uso desse artefacto e por fim para os significados matemáticos.

O ciclo didático pode descrever-se como um caminho desde o surgimento de sinais emergentes da realização das tarefas/artefacto para a apropriação de significados matemáticos. Assim, qualquer artefacto poderá ser referido como uma ferramenta de mediação semiótica, desde que a sua utilização tenha sido devidamente projetada pelo professor com o objetivo de mediar um conteúdo matemático através da intervenção didática planeada.

As verbalizações concebidas nas interações discursivas, situação em que as vozes entram em contacto tal como preconiza Wertsch (1993), foram para nós os sinais emergentes da atividade (traduzida na resolução de tarefas) em que os elementos do grupo estavam envolvidos.

A unidade de análise desta dissertação foram as verbalizações (sinais) proferidas pelos alunos durante as discussões coletivas.

3. Respostas às questões da investigação

3.1. Aprendizagem através do grupo

A dinâmica proporcionada pela troca de verbalizações (interações discursivas) nas sessões de trabalho em grupo restrito propiciou o ambiente de ensino/aprendizagem. Cada uma das palavras e/ou das verbalizações (conjunto de palavras) carregou em si, de modo implícito, tudo o que foi dito anteriormente por todos os intervenientes. Por essa razão, cada ideia nova é resultante da produção comum. Em cada sequência desenvolvida nenhuma intervenção pôde ser considerada de modo isolado, mas sim como um encadeamento de ideias e argumentos. Encontrar o significado do que é feito e dito na dinâmica das trocas entre os participantes é considerar que essas trocas testemunham uma inteligência coletiva em construção.

3.2. Tarefas / Dinâmica do conhecimento

Em parte, podemos entender a aprendizagem da matemática como tentativa de adquirir competências comunicativas no domínio da Matemática e desta forma, teve sentido que as atividades/tarefas fossem privilegiadamente examinadas a partir desta perspetiva. Não é possível obrigar os alunos a aprender, contudo é possível criar ambientes com situações bem estruturadas, de modo a que se possa perceber se as oportunidades de aprendizagem que estão a ser dadas aos alunos lhes permitem colaborar com ideias matemáticas expressas através da linguagem. A apresentação de um problema que exija a formação de conceitos não é só por si suficiente, mas é um fator importante para a emergência do pensamento conceptual. É fundamental procurar compreender as relações intrínsecas entre as tarefas e a dinâmica do desenvolvimento de modo a poder considerar a génese dos conceitos como função do crescimento cultural e social e consequente desenvolvimento do pensamento.

Os alunos devem ser confrontados com novas situações (e. g. GNE) que estimulem o seu intelecto, numa tentativa de os obrigar a um confronto com uma sequência de novos objetivos, pois desta forma perspetiva-se que o seu pensamento poderá desenvolver funções mentais superiores. Uma nova utilização significativa como meio de formação de significados tem inferência psicológica na transformação do processo intelectual à qual acresce o recurso às palavras para aprender a orientar os processos mentais pessoais e parte integrante do processo de formação dos conceitos.

3.3. Resultados

Reconhecemos que as verbalizações no processo comunicativo têm um efeito particular na mente de cada um dos presentes, contudo é no contexto social em que a atividade decorre que os significados matemáticos associados aos sinais são partilhados por todos os que participam neste processo de comunicação e vão sendo compostos e intencionalmente orientados pela professora. A informação, e neste caso concreto estamos a falar dos conhecimentos geométricos do domínio de "novas" geometrias, é partilhada no seio do grupo com o mesmo propósito e cada verbalização partilhada socialmente sob orientação da professora interioriza-se na forma de significados matemáticos.

Entendemos que a apresentação e aplicação das GNE se concretizou com a resolução das tarefas na aplicação das sequências de intervenção.

De um modo generalizado, no decorrer das sequências de intervenção, foi visível uma diminuição de S_i e um aumento da frequência de S_e do tipo construção. Estes sinais, S_e, são extremamente importantes por serem os que identificam construção de conhecimento. As verbalizações associadas aos S_e refletem a formação de conceitos, consequência de alguma atividade mental. São essas verbalizações que funcionam como registos de aquisições cognitivas, isto é, como marcas visíveis do pensamento. O pensamento reflete-se na linguagem e determina-a. O processo de transformação das formas de linguagem evidencia modos de pensar. No caso em que o ambiente de aprendizagem é propício à reflexão em torno de significados geométricos, revelada pelas interações sociais através da troca de verbalizações, isto é, através da linguagem, é possível evidenciar modos de pensar próprios da Geometria. A construção do conhecimento (pensamento) geométrico a partir das GNE fica explicitado pela passagem dos significados matemáticos socialmente partilhados, nas sessões de intervenção, aos significados pessoais.

Começámos por classificar, através de um sinal, cada verbalização ocorrida dentro da discussão coletiva. A partir dessa classificação analisámos o estado evolutivo dos significados pessoais dos alunos em relação ao significado matemático, de acordo com os conceitos matemáticos que associámos a cada tarefa. Essa análise levou-nos a identificar cadeias evolutivas. Foram essas cadeias evolutivas que, sujeitas a uma análise mais detalhada das intervenções discursivas reconhecidas nas narrativas, permitiram obter respostas às questões da investigação. A apresentação e aplicação das GNE em tarefas com os alunos não teve um efeito inócuo. Ilustramos com as situações seguintes que pode desenvolver capacidades geométricas e o modo como o pensamento geométrico dos alunos pode ser influenciado.

(i) As situações envolvendo S_e/construção aos quais associámos intervenções em que são utilizados termos de comparação com a Geometria Euclidiana, com a GT, com a GE ou com a GH indiciam que alguma atividade mental foi desenvolvida. Identificámos por um lado, que esta forma de atividade mental é uma habilidade geométrica e por isso é resultante do desenvolvimento de capacidades geométricas. Por outro lado, a comparação evidencia a apropriação dos novos conceitos que são usados na verbalização onde ela é reconhecida.

Quando as intervenções se sucedem num encadeamento frásico, em que cada intervenção retoma a anterior completando-a, identificámos nesta forma de comunicação, a apropriação, ou seja, uma forma de construção de conhecimento tal como definimos no nosso objetivo da investigação.

Identificámos como caso de "antecipação", a situação da intervenção 12 do Gabriel, na tabela 12. A verbalização proferida é elucidativa de que a realização da tarefa 1 envolvendo GT influenciou o seu pensamento geométrico. Por ser uma situação nova, ele acha que o significado já adquirido sobre o lugar geométrico do plano, "circunferência", pode ser diferente nesta geometria, é uma forma de antecipação da resposta. Na sequência dessa verbalização, as intervenções 14 e 15 confirmam que, para dar resposta à questão colocada na tarefa, o Gabriel teve de desenvolver alguma forma de raciocínio geométrico. Esta situação pode ser interpretada como uma forma de desenvolvimento de capacidades/habilidades geométricas.

No grupo de alunos do 11.º e 12.º anos em que houve um número significativo de sessões, as cadeias evolutivas identificadas em narrativas dessas últimas sessões predominam Se/construção-conclusão pelo que podemos concluir que de uma sessão para outra, estão a ser desenvolvidas competências matemáticas que identificam desenvolvimento de capacidades geométricas. Por exemplo na cadeia evolutiva da tabela 16, os alunos demonstraram (verbalizações 44, 46, 48, 49 e 50) estar mais capacitados para decidir quais os procedimentos/estratégia a adotar.

Nas tarefas desenvolvidas com recurso a AGD, muitas das intervenções discursivas analisadas confirmam o desenvolvimento de capacidades de visualização (representações mentais) geométrica (ver, por exemplo, a análise da cadeia evolutiva da tabela 15, verbalizações 23 até 31). A ferramenta "arrastar" revelou-se preponderante na emergência de sinais.

Algumas verbalizações resultam da combinação da utilização de conteúdos referentes à Geometria Euclidiana com o conhecimento trabalhado em GT, GE ou GH. Esta combinação denuncia atividade mental envolvendo os conhecimentos mobilizados e consequentemente o desenvolvimento de capacidades.

(ii) De um modo geral é possível observar a construção de sinais socialmente partilhados, normalmente visível na evolução para as intervenções/verbalizações finais da cadeia evolutiva em que reconhecemos a construção de algum significado matemático através de S_e/construção-conclusão e S_e/conclusão. A construção de significados matemáticos permite-nos concluir que houve alguma influência no pensamento geométrico.

Os S_m intencionais, associados às formas de ação, qualquer que seja a sua forma, desencadeiam intervenções que revelam uma apropriação do significado matemático. Esta apropriação irá repercutir-se no pensamento geométrico influenciando-o.

Trazer para a discussão uma nova situação que não estava contemplada indicia que houve uma influência no pensamento geométrico a partir do conhecimento das GNE.

No caso de situações de ventriloquismo (Wertsch, 1993): na intervenção 26 a professora procura que na repetição pedida à Carolina, ela reorganize a sua frase, mas esta não o faz e repete exatamente o mesmo (27). Vemos que é o Gabriel que reconstrói a verbalização da Carolina (29) retomando-a e recompondo-a. Estamos perante uma reconstrução coletiva em que o significado é construído socialmente. Nesta cadeia evolutiva, verificamos mais à frente na verbalização 42 da Carolina que houve uma apropriação deste significado matemático.

Nas situações em que a construção social de um conceito resulta de intervenções que se complementam, mas que foram proferidas por dois sujeitos, o todo é revelador da apropriação do significado partilhado.

As verbalizações que resultam de "pensar em voz alta", situação em que se "fala para si mesmo" reproduzem reflexões feitas de modo pessoal. Estas verbalizações não podem ser entendidas como intervenções na discussão, mas são reveladoras de alguma forma de desenvolvimento do pensamento geométrico.

4. Limitações e recomendações

4.1. Limitações

O grupo do 10.º ano não pôde realizar nenhuma tarefa da Geometria Hiperbólica devido a uma alteração no seu horário letivo;

Não foi possível reunir os três grupos de alunos (10.º, 11.º e 12.º anos) numa sessão partilhada. Os horários não permitiram um tempo em comum. Teria todo o interesse que os três grupos de alunos, dos três níveis de escolaridade, tivessem tido oportunidade de realizar as tarefas em conjunto. Teríamos cadeias evolutivas vincadas pela diversidade dos níveis de conhecimento e os significados matemáticos partilhados evoluiriam por "caminhos" influenciados por essa diversidade o que seria uma mais valia para a formação de significados.

A base de dados para análise resultou dos registos áudio de que foram feitas as transcrições e das quais resultaram as narrativas por episódios de intervenção (Anexo XII). Essa base ficou muito empobrecida, sobretudo nas intervenções com a GE e nas feitas com a GH, por não haver um registo visual da exploração feita pelos alunos. Por exemplo, fotos ou captura do ecrã.

Durante a realização das tarefas, propositadamente, a professora/investigadora permitiu que os alunos fizessem a sua própria exploração dando uma grande margem de liberdade para que que as intervenções discursivas surgissem com a maior naturalidade possível. Desse modo, por insuficiência de uma maior objetivação na orientação da realização das tarefas, não foram explorados todos os conceitos matemáticos que se pretendiam, de acordo com as tarefas selecionadas (secção 3, Capítulo 5). Teria sido pertinente, em alguns momentos, que a professora/investigadora não permitisse uma exploração tão "aberta" da tarefa.

4.2. Recomendações decorrentes da investigação

A aprendizagem da geometria é uma área rica em possibilidades de pesquisas futuras. Dado o fraco desempenho dos alunos nessa área, essa pesquisa é extremamente necessária. Considerando a aprendizagem sob o ponto de vista construtivista, torna-se necessária a pesquisa que descreve o desenvolvimento de conceitos geométricos e o pensamento em vários ambientes instrucionais. A criação de ambientes favoráveis à aprendizagem da Geometria requer a presença de um professor conhecedor da teoria e ferramentas previamente elaboradas para envolver os alunos na realização de investigações geométricas na sala de aula. Deste modo, no que concerne a Geometria, deve privilegiar-se a investigação no âmbito da formação inicial e contínua de professores, da utilização de ferramentas inovadoras (recurso às tecnologias) e do processo de formação/desenvolvimento do conhecimento geométrico dos alunos em ambientes instrucionais. Contudo, é essencial examinar a interação entre estas áreas de investigação em vez de as considerar isoladamente. Estudos aprofundados nessa interação poderão trazer à luz conhecimento sobre ensino/aprendizagem da Geometria. Resumidamente, trata-se de recorrer a *software*/tecnologias no desenvolvimento de culturas de sala de aula nas quais professores e alunos ampliam as suas crenças sobre a aprendizagem e a compreensão da geometria.

É porque a Geometria nos permite interpretar e refletir sobre o meio físico em que vivemos, porque pode ser usada como ferramenta para resolver questões ou para estudos vários em várias áreas científicas, mas essencialmente porque o pensamento geométrico é essencial para a construção de um pensamento crítico, lógico e estruturado sendo fundamental em qualquer área do conhecimento que não podemos descurar a investigação em ensino/aprendizagem da Geometria. Pode parecer demasiado vaga esta referência à aprendizagem em Geometria, mas não há forma de a objetivar. A Geometria tal como é descrita por Duval, (2005a), é entre todos os domínios do conhecimento com que os alunos têm de lidar aquele que exige uma atividade cognitiva mais completa por solicitar o gesto, a linguagem e a visualização. Em geometria é necessário fazer construções, raciocinar e visualizar indissociavelmente. É reconhecido, em teses, artigos científicos e na mais diversa literatura, que no ensino da Matemática a Geometria é a mais difícil de ensinar.

Como se aprende e/ou como se deve ensinar Geometria é uma preocupação que deve ser tida em consideração na investigação em Didática da Matemática e devem ser desenvolvidos mais trabalhos que se objetivem tentando dar resposta a questões investigativas que gravitem em torno destas duas grandes questões sem as dissociar.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. Em E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Eds.), *O ensino da Geometria no Virar do Milénio* (pp. 51–62). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Agostinho, S. (2002). *A doutrina cristã: Manual de exegese e formação cristã*. Obtido de https://efosm.files.wordpress.com/2013/02/a-doutrina-cristc3a3-santo-agostinho.pdf

Bakhtin, M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays by M. M. Bakhtin*. Austin: University of Texas Press.

Bakhtin, M. (1984). *Problems of Dostoevsky´s poetics*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Bakhtin, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin: University of Texas Press.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação e Ciência.

Blumenthal, L. M. (1980). *A Modern View of Geometry*. Dover Publications.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie*. Obtido de http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110

Bulf, C., Mathé, A.-C., & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale*, (54), 29–48. Obtido de https://doi.org/10.3406/spira.2014.1035

Bussi, M. G. B. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1–2), 11–41. https://doi.org/10.1007/bf00143925

Bussi, M. G. B. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. Em H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. Em L. English, M. G. B. Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd revise, pp. 746–782). Obtido de http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/Semiotic mediation Ch 28 Mariotti.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da Investigação, Guia para auto-aprendizagem* (2.ª ed.). Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, M. J., & Andrade, A. M. (2012). Aprendizagem da geometria em b-learning no ensino básico. *Educação, Formação & Tecnologias*, *5*(1), 62–71. Obtido de http://eft.educom.pt/index.php/eft/article/view/295

Commandino, F. (1855). *Livro I da Versão Latina, Os Elementos de Euclides*. Obtido de http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Elementos_livroI.pdf

Couto, A. M. P. (2015). *A formação inicial de professores do Ensino Básico e a geometria: um estudo de dois casos* (Tese de Doutoramento, Universidade Portucalense). Obtido de http://hdl.handle.net/11328/1303

Descartes, R. (1996). *Discurso do método*. Obtido de http://www.netmundi.org/home/wp-content/uploads/2018/08/DESCARTES-R.-Discurso-do-método-Ed.-Martins-fontes.pdf

Duval, R. (2005a). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (10), 5–53.

Duval, R. (2005b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en Mathématiques. Em J.-C. Rauscher (Ed.), *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (pp. 67–89). Strasbourg: IREM.

Falcade, R. (2006). *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction* (tese de doutoramento, Université Joseph-Fourier). Obtido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00085202/document

Fichtner, B. (2010). *Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus Colaboradores*. Obtido de http://www3.fe.usp.br/secoes/inst/novo/agenda_eventos/docente/PDF_SWF/226Reader Vygotskij.pdf

Freire, P. (1970). *A pedagogia do oprimido*. Obtido de http://www.dhnet.org.br/direitos/militantes/paulofreire/paulo_freire_pedagogia_do_oprimido.pdf

Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century. *International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Obtido de https://www.researchgate.net/publication/277770146_The_role_of_intuition_in_geometry_education_learning_from_the_teaching_practice_in_the_early_20th_century

GAVE. (2010). *Relatório - Um olhar sobre os resultados os exames nacionais*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educativa.

GAVE. (2011). *EXAMES NACIONAIS Relatório 2010*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educativa.

GAVE. (2012). *EXAMES NACIONAIS Relatório 2011*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educativa.

GAVE. (2013a). *ANÁLISE PRELIMINAR DOS RESULTADOS, PROVAS FINAIS DE CICLO, EXAMES FINAIS NACIONAIS 2013*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educativa.

GAVE. (2013b). *Relatório PROVAS FINAIS DE CICLO E EXAMES NACIONAIS 2012*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educativa.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. Em R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 3–44). New York: Routledge and the Taylor & Francis Group.

Hasan, R. (1992). Speech genre, semiotic mediation and the development of higher mental functions. *Language Sciences*, *14*(4), 489–528. https://doi.org/10.1016/0388-0001(92)90027-C

Hattermann, M. (2008). The dragging process in three dimensional dynamic geometry environments (DGE). Em O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (pp. 129–136). Morelia: Cinvestav-UMSNH.

IAVE, I. P. (2015). *Provas Finais — 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, Relatório Nacional: 2010-2014*. Lisboa: Instituto de Avaliação Educativa, I.P.

IAVE, I. P. (2017). *Exames Finais Nacionais —Ensino Secundário, Relatório Nacional: 2010-2016*. Lisboa: Instituto de Avaliação Educativa, I.P.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Resolução de problemas de matemática com o GeoGebra: aspetos do pensamento geométrico no desenvolvimento de modelos conceptuais. Em H.

Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro, & J. P. da Ponte (Eds.), *O Ensino e a Aprendizagem da Geometria, Livro de Atas do EIEM 2017* (pp. 65–78). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 3*. Oxfod: University Press.

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. S., & Miller, S. M. (2003). *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*. Cambridge: University Press.

Krause, E. F. (1986). *Taxicab geometry: an adventure in non-Euclidean geometry*. New York: Dover Publications, Inc.

Laborde, C. (1989). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Publications de l'institut de recherche mathématiques de Rennes, S6*, 9–11. Obtido de http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_9_0

Latas, J. (2013). Matemática do planeta Terra 2013. *Educação e Matemática, 121*, 21–28.

Leontiev, A. (1978a). *Activity, consciousness and personality*. Obtido de https://www.marxists.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf

Leontiev, A. (1978b). Sobre o desenvolvimento histórico da consciência. Em A. Leontiev (Ed.), *O desenvolvimento do psiquismo* (pp. 89–142). Lisboa: Horizonte Universitário.

Lopes, I. M. F. C. (2010). *Uma abordagem curricular em matemática no 3º ciclo do ensino básico: um estudo de caso em geometria* (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro). Obtido de http://hdl.handle.net/10773/3803

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III*(4), 3–13.

Lucy, J., & Wertsch, J. V. (1987). Vygotsky and Whorf: A comparative analysis. Em M. Hickmann (Ed.), *Social and functional approaches to language and thought*. (pp. 67–86). New York: Academic Press.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427–440. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. Em G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp. 91–107). Rennes: Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Miguens, S. (2007). *Filosofia da Linguagem: uma introdução*. Porto: Departamento de Filosofia da FLUP.

Neto, M. T. B. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas* (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro). Obtido de http://hdl.handle.net/10773/1475

Nietzsche, F. (1999). *Obras Incompletas*. Obtido de http://www.netmundi.org/home/wp-content/uploads/2017/05/NIETZSCHE-F.-Obras-incompletas-os-pensadores.pdf

Nunes, D. L. A. (2011). *O significado matemático na geometria do 7.º ano com recurso ao GeoGebra: uma perspectiva semiótica* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve). Obtido de http://hdl.handle.net/10400.1/3256

Oliveira, M. K. (1997). *Vygotsky, Aprendizado e desenvolvimento. Um processo socio-histórico*. São Paulo: Editora Scipione.

Platão. (2005). *A República*. Lisboa: Guimarães Editores.

Playfair, J. (1866). *Elements of geometry: containing the first six books of Euclid: with a supplement on the quadrature of the circle and the Geometry of solids, to which are added, elements of plane and spherical trigonometry* (9.ª ed.). Obtido de http://books.google.pt/books?id=2XlaAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false

Poincaré, H. (1908). *La valeur de la science*. Obtido de http://ia800206.us.archive.org/26/items/lavaleurdelasci00poingoog/lavaleurdelasci00poingoog.pdf

Poincaré, H. (1917). *La science et l'hipothèse*. Obtido de http://www.archive.org/details/lascienceetlhypo00poin

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies une approche cognitive des instruments contemporains*. Obtido de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document

Ribeiro, R. S., & Gravina, M. A. (2013). Disco de Poincaré: uma proposta para explorar geometria hiperbólica no GeoGebra. *Revista Professor de Matemática Online (PMO) da Sociedade Brasileira de Matemática*, *1*(1), 53–56. Obtido de http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/sbm-pmo-v001-n001-ribeiro-e-gravina.pdf

Rodrigues, M., & Bernardo, M. (2011). Ensino e aprendizagem da Geometria. Em *Atas XXII*

Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 339–344). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot & Rivages.

Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 41–58). Lisboa: SEM-SPCE.

Silveira, A. P. R. (2018). *O GeoGebra na formação e aprendizagem de transformações geométricas isométricas no plano euclidiano* (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Obtido de http://hdl.handle.net/10773/23721

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations* (Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Montpellier II). Obtido de http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/00/91/PDF/Trouche_2003.pdf

Vale, I., & Pimentel, T. (2017). O ensino e a aprendizagem da Geometria. Em H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro, & J. P. da Ponte (Eds.), *O Ensino e a Aprendizagem da Geometria, Livro de Atas do EIEM 2017* (pp. 43–48). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ventura, A. F. L. (2017). *O Scratch Promotor do Pensamento Computacional no Processo de Ensino - Aprendizagem da Geometria no 1.º CEB* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti). Obtido de http://repositorio.esepf.pt/handle/20.500.11796/2487

Vieira, M. J. P. S. F. (2011). *O estudo de pavimentações regulares e semi-regulares com ambiente de geometria dinâmica* (Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Obtido de http://hdl.handle.net/10362/8690

Vygotsky, L. S. (1979). *Mind and society: The Development of Higher Psychological Processes*. Obtido de http://ouleft.org/wp-content/uploads/Vygotsky-Mind-in-Society.pdf

Vygotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente* (4.ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (2007). *Pensamento e Linguagem*. Obtido de http://bibliotecadigital.puccampinas.edu.br/services/e-books/Lev Semenovich Vygotsky-1.pdf

Vygotsky, L. S., Luria, A. R., & Leontiev, A. N. (2010). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Icone Editora.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the Social Formation of Mind*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1994). The primacy of mediated action in sociocultural studies. *Mind, Culture, and Activity*, *1*(4), 202–208.

Wertsch, J. V., & Addison Stone, C. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. Em J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 162–166). New York: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V., & Tulviste, P. (1992). L. S. Vygotsky and contemporary developmental psychology. *Developmental Psychology*, *28*(4), 548–557. https://doi.org/10.1037/0012-1649.28.4.548

Worf, B. L., & Carroll, J. . B. (1978). *Language, thought and reality: Selected writings of Benjamin Lee Worf* (13.ª ed.). Cambridge, Mass: MIT Press.

Anexos

Anexo I: Planificação do Clube de Matemática 2015/2016

PREÂMBULO

Funcionamento do Clube de Matemática

Pretende-se que o Clube funcione 90 minutos por semana, em duas sessões de 45 minutos cada, à terça-feira e à quinta-feira às 12h25m.

O Clube pretende abranger alunos de todas as faixas etárias da escola.

O início do funcionamento do Clube será quinta-feira 08 de outubro.

A divulgação desta informação aos alunos será feita pelos professores de Matemática nas aulas e serão afixados cartazes informativos pela escola.

Logótipo do Agrupamento

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS (Nome do Agrupamento)

Clube M@π

REGULAMENTO

DEFINIÇÃO

O Clube de Matemática é uma atividade de complemento curricular, da responsabilidade do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais, que aposta numa forte componente lúdica para desenvolver/estimular nos alunos o raciocínio lógico/dedutivo, a curiosidade científica, o gosto pela investigação e sensibilizar para a importância do trabalho de equipa entre elementos de um grupo que partilham objetivos comuns.

LOCALIZAÇÃO

O clube funcionará na sala C_2 do bloco C.

OBJETIVOS GERAIS

- Desenvolver e aprofundar o gosto pela Matemática;
- Desmistificar ideias preconcebidas relativamente à Matemática;
- Modificar a atitude do aluno face à Matemática, fazendo-o tomar consciência das aplicações em áreas por vezes insuspeitadas e, indiretamente, na própria tecnologia que usa diariamente;
- Satisfazer a curiosidade e aprofundar a compreensão matemática daqueles que, embora já com uma postura positiva face à Matemática, não têm oportunidades de acesso a outros meios de satisfazer a curiosidade;
- Ocupar os tempos livres dos alunos através da concretização de atividades apelativas com caráter formativo;
- Fomentar nos alunos a confiança nas suas aptidões para a Matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realçar aspetos lúdicos e intelectualmente desafiantes da Matemática;
- Relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento;
- Desenvolver a capacidade de interpretar e resolver problemas;
- Desenvolver o raciocínio lógico/dedutivo e o cálculo mental;
- Desenvolver estratégias de jogo.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- A aptidão para cooperar com os outros;
- A aptidão para encontrar estratégias de jogo;
- Desenvolver capacidades matemáticas, pessoais e sociais;
- Aptidão para resolver problemas;
- A aptidão para selecionar informação e organizar estratégias criativas face às questões colocadas por um problema;
- A aptidão para promover a interação entre os vários intervenientes do agrupamento.

MÉTODOS DE ATUAÇÃO

Os métodos de atuação no Clube de Matemática visam englobar, essencialmente, três vertentes distintas:

- Funcionar, sempre que necessário, como sala de estudo, onde se poderão esclarecer dúvidas, dinamizar grupos de investigação e desenvolver o espírito de equipa;

- Funcionar como oficina de trabalho, produzindo materiais que facilmente se apliquem nas atividades letivas; estes trabalhos poderão ser divulgados junto da comunidade escolar (escolas do agrupamento);

- Funcionar como um espaço recreativo e de ocupação de tempos livres, promovendo atividades lúdicas junto dos alunos, onde resultem aprendizagens, competências e atitudes que operem mudança na relação com a disciplina.

NORMAS DE FUNCIONAMENTO

- A frequência do Clube de Matemática é livre, não exigindo inscrição prévia.
- O Clube funciona sempre na presença, de pelo menos um professor.
- No início de cada sessão, os alunos devem assinar uma folha de presenças.
- O aluno participa durante o tempo que deseja, desde que:
  a) tenha um comportamento satisfatório;
  b) desenvolva apenas as atividades autorizadas.
- Os utilizadores devem zelar pela conservação dos materiais. O não cumprimento desta norma implica a reposição do material danificado.
- O aluno deve pedir autorização ao professor responsável para utilizar qualquer tipo de material. Não pode, por livre iniciativa, retirar o material dos armários/arrecadação.
- Nos computadores, os alunos só podem utilizar *software* de caráter didático, relacionado com a Matemática.
- Os materiais utilizados pelos alunos devem ser anotados em folha própria, para futuro registo de frequência de utilização.
- Cinco minutos antes do toque de saída, os alunos devem ter o cuidado de arrumar o material que estiveram a utilizar, conferindo sempre a totalidade das peças e entregá-lo ao professor responsável.

- Os materiais usados em cada sessão deverão ser levados e arrumados na arrecadação nos respetivos armários.
- O professor não deve sair da sala sem conferir que não há peças de jogos espalhados pelo chão e que todos os materiais estão devidamente acondicionados ficando a sala arrumada.
- O Regimento e o Plano de Atividades estão sujeitos a alterações, ao longo do ano letivo.

ATIVIDADES PREVISTAS

- No clube:
  - ✓ Atividades lúdicas variadas.
  - ✓ Jogos de estratégia (tabuleiro e/ou multimédia)
  - ✓ Resolução de problemas.
  - ✓ Campeonatos de jogos.
  - ✓ Tarefas de investigação (quando oportuno, recurso a *software* específico em particular a AGD).

- Propostas à comunidade escolar (em data pré-definida):
  - ✓ Concursos (a definir oportunamente):

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Jogos de tabuleiro;
- Outros jogos matemáticos;
- Enunciados de problemas;
- Investigações;
- Passatempos;
- Internet;
- Quadro interativo;
- Computadores com ligação à Internet;
- Prémios para os concursos;
- Material didático diverso;

INTERVENIENTES

- Coordenação e dinamização: Coordenadora do Clube.
- Destinatários: Todos os alunos da escola (nome da escola)

Anexo II: Autorizações áudio

(Agrupamento de Escolas)

Ex.ma Sra Diretora do Agrupamento de Escolas (nome)

Encontro-me neste momento a realizar uma investigação no âmbito da minha tese de doutoramento em Educação (Didática da) Matemática sob orientação do Professor Doutor José Manuel Matos.

O trabalho de investigação que estou a desenvolver tem como objetivo averiguar se o conhecimento da existência e aplicabilidade de outras geometrias (não euclidianas), por parte dos alunos, pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e geométrico.

Pretendo aplicar algumas tarefas a alunos da Escola (nome), no Clube da Matemática.

Por este meio venho solicitar a sua autorização para proceder ao registo áudio durante a aplicação e realização das tarefas.

Na tese e em qualquer artigo que possa vir a ser publicado e que decorram desta investigação será garantida a confidencialidade da escola e dos alunos envolvidos.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,
A doutoranda e docente em atividade na instituição que V. Ex.ª dirige,

Maria Teresa Serrão Sanches Gonçalves

(Alunos)

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Sou professora de Matemática na Escola (nome) e estou a realizar uma investigação no âmbito da minha tese de doutoramento em Educação (Didática da) Matemática.

Pretendo efetuar a recolha de dados necessários à investigação na escola onde leciono, durante o presente ano letivo, tendo já sido autorizada pela diretora da escola. A obtenção dos dados passará pelo registo gravado em áudio de algumas sessões realizadas no Clube da Matemática, nas quais será pedido aos alunos a realização de tarefas matemáticas previamente estruturadas para esse efeito. Para tal, solicito a sua autorização para proceder à gravação áudio do seu educando. Saliento que os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos alunos participantes. Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário. Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A docente (investigadora)

(Maria Teresa Serrão Sanches Gonçalves)

Autorização

Eu, ..., Encarregado/a de Educação do/a aluno/a ...., nº........, da turma .... do ……. ano, autorizo que a docente Maria Teresa Sanches Gonçalves grave em áudio o meu educando, no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

....

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Anexo III: Tarefa GT-T_1

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Assinala na figura 1 o que te parece ser o "caminho" mais curto entre os pontos A e B já representados.

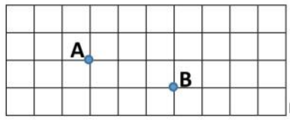


Figura 1

Expressa por palavras tuas o que entendes por distância entre A e B.

Na figura seguinte, figura 2, pretende representar-se parte de um bairro de uma cidade, sendo visíveis as ruas, na horizontal e na vertical, e os edifícios de várias cores.

Figura 2

Assinala na figura 2 o que te parece ser o "caminho" mais curto entre os pontos P e M já representados (Só te podes deslocar nas ruas).

1) Há apenas um caminho, ligando P e M, que seja o mais curto possível?

2) Quantas unidades de comprimento tem esse caminho (distância de P a M)? (A unidade de comprimento está indicada na figura 2)

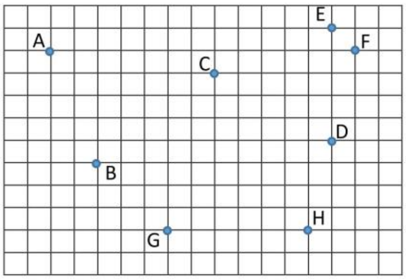
3) Entre P e M quantos caminhos consegues assinalar com a mesma distância?

GT_T1

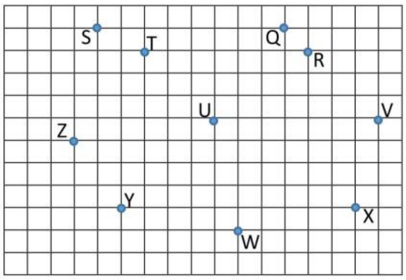
Com esta nova forma de medir definimos uma nova Geometria que podemos designar por **Geometria Táxi** (percurso efetuado por um táxi seguindo o traçado das ruas na horizontal e vertical) ou por **Geometria Pombalina** (supondo a baixa de Lisboa com um traçado de ruas tal como o da figura 2).

Atrás, na **figura 1**, entre A e B usámos a ***Distância Euclidiana*** (a que estamos habituados) e na **figura 2**, entre P e M usámos a **Distância Táxi** *(Não Euclidiana)*.

Distância Euclidiana (entre os pares de pontos)
A e B; C e D; E e F; G e H.



Distância Táxi (entre os pares de pontos)
Q e R; S e T; U e V; W e X; Y e Z.



Registа o que te chamou mais à atenção:

Anexo IV: Tarefa GT-T_2

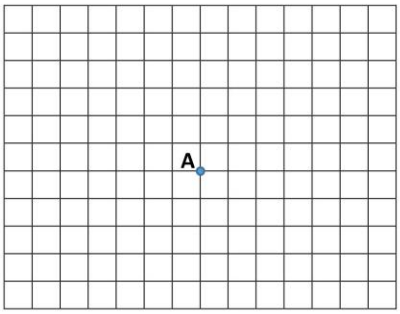
Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

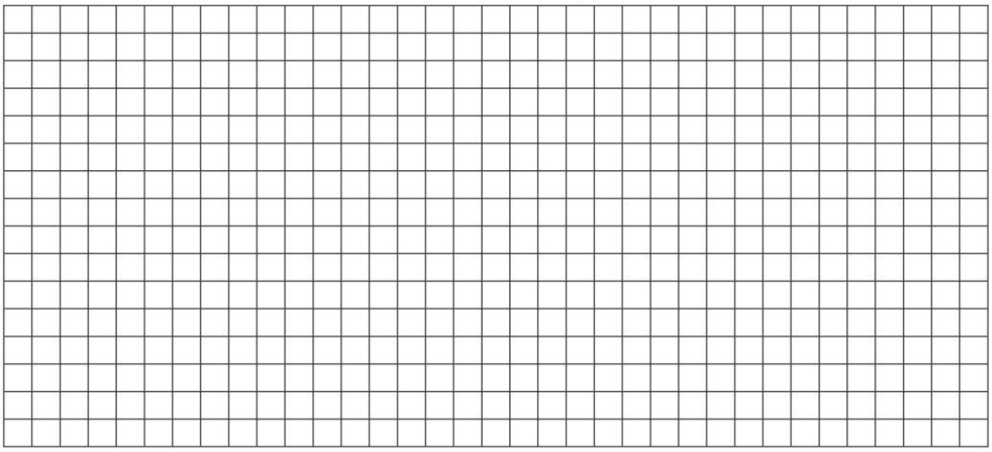
Continuemos…. MAS a "regra" agora obriga a que sempre que tenhas de utilizar a distância entre dois pontos terá de ser a da Geometria Táxi (ou Geometria Pombalina).

Considera como unidade de comprimento (u. c.) a medida do lado da quadrícula.

1. Representa um ponto P_1 que diste 3 u. c. do ponto A.
2. Consegues representar mais pontos que distem 3 u. c. de A?
3. Consegues representar todos os pontos (do plano) que distam 3 u.c. do ponto A?



Experimenta (situações à tua escolha que expressem o que fizeste acima) …



Regista o que te chamou mais à atenção por comparação com os teus conhecimentos de Geometria.

GT_T2

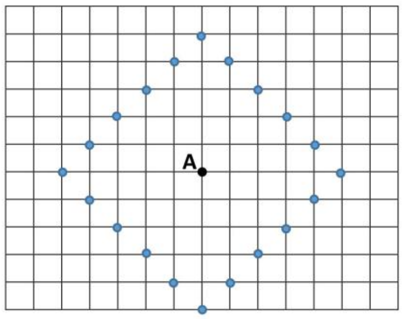
Anexo V: Tarefa GT-T_3

Clube m@π

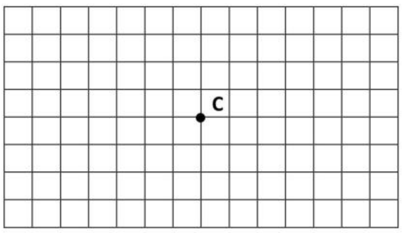
Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Geometria Táxi (ou Geometria Pombalina)

1. Considera como unidade de comprimento (u. c.) a medida do lado da quadrícula. Todos os pontos representados a azul estão à mesma distância do ponto A (Distância Táxi).
   1.1. Qual é essa distância?
   1.2. Quantos pontos estão representados?
   1.3. Qual o perímetro dessa figura?



2. Constrói, no quadriculado ao lado, a *circunferência* de centro em C e que, além disso, tenha raio igual a 1.
   2.1. Quantos são os pontos que formam essa *circunferência* e se situam nos vértices das quadrículas?
   2.2. Quantos são os pontos que formam o círculo e se situam nos vértices das quadrículas?
   2.3. Qual o perímetro dessa *circunferência?*
   2.4. Qual a área dessa *circunferência?*

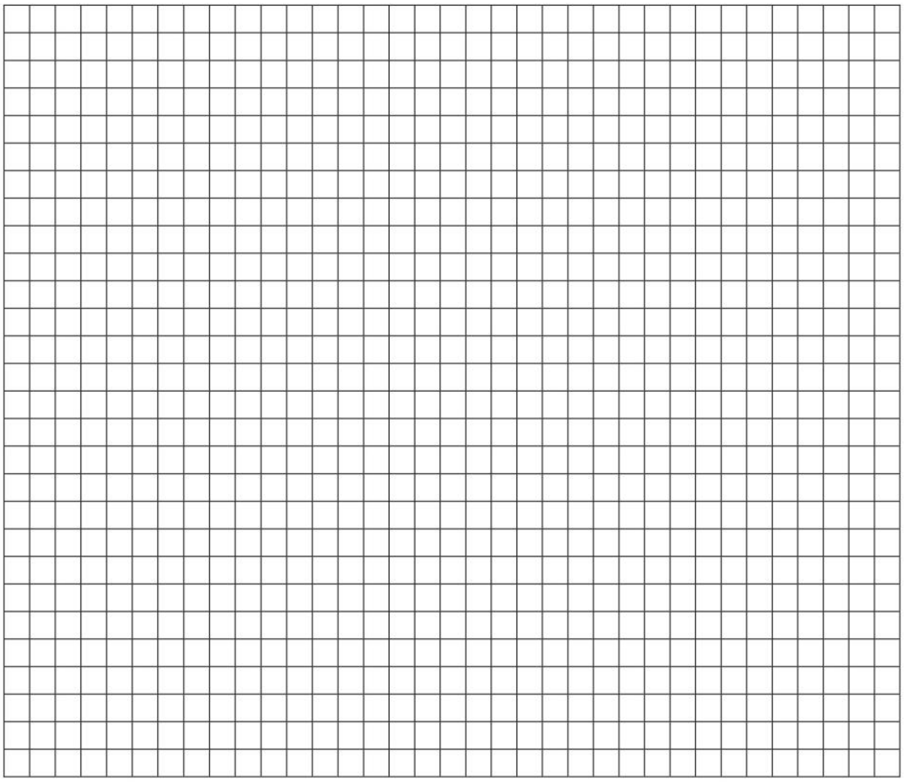


3. Relativamente a uma *circunferência* que tenha raio igual a r, consegues dar resposta a cada uma das questões 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4?
   Preenche a tabela abaixo pois pode ajudar-te a dar a resposta.

Raio	Apenas pontos situados nos vértices das quadrículas		Perímetro	Área
	Número de pontos da *circunferência*	Número de pontos cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio		
1				
2				
3				
4				
5				
...				
r				

Se precisares de algumas representações para fazeres as tuas investigações usa o quadriculado no verso desta página.

GT_T3



Depois de encontrares uma fórmula geral para determinar exatamente o que te é pedido em cada coluna da tabela anterior, averigua agora qual o valor de π na Geometria Táxi.

Registas algumas conclusões que te pareçam relevantes.

Anexo VI: Tarefa GT-T_4

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Geometria Táxi (ou Geometria Pombalina)

A partir de dois pontos à tua escolha representa os pontos que se situam **à mesma distância de cada um dos pontos que escolheste**, ou seja, representa os **pontos equidistantes dos dois pontos** inicialmente escolhidos.

GT_T4

Anexo VII: Tarefa GE-T_1

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Guião para o aluno[1]
Desafio: O Urso

Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direção e caminhou 10 Km sempre em direção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro How to solve it[2] do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana.
E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre? No final da resolução do conjunto de tarefas que te irei propondo poderás responder com facilidade ao desafio agora apresentado.

Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como superfície esférica de centro O e raio $r > 0$ consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de O.

Superfície esférica de centro *O* e raio *r*.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. Proponho-te a realização de um conjunto de tarefas para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

[1] Adaptado de Educação & Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, 2013, n.º 121, p. 27.
[2] Polya, George — How to Solve It: a new aspect of mathematical method. With a new foreword by John Conway. United States of America: Expanded Princeton Science Library Edition, 2004

Na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta determinado por eles. E na esfera? Qual o caminho mais curto entre dois pontos?
Para utilizares os ficheiros a seguir referidos, deve estar instalado no computador o Wolfram CDFPlayer, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/

I) Na superfície esférica, qual é o caminho mais curto entre dois pontos?

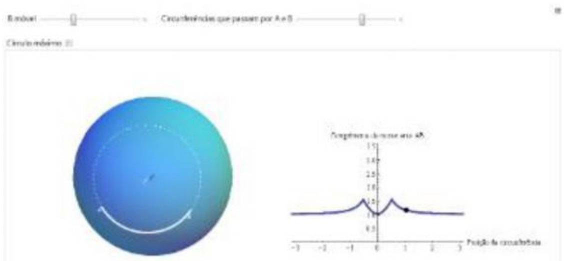
1. Abre o ficheiro esfera-azul-cdf.

Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de centro O e raio unitário, estando assinalados os pontos, na superfície esférica, A (fixo) e B (móvel). Na superfície esférica, há uma infinidade de circunferências que passam pelos pontos A e B.

1.a) O que podes concluir quanto ao caminho mais curto entre dois pontos na superfície esférica?

2. Abre o ficheiro caminho-mais-curto-cdf.

O cursor Circunferências que passam por A e B permite variar o centro C dessas circunferências. Para cada circunferência, o gráfico à direita mostra a medida do comprimento do menor arco de circunferência AB.



3. Move o cursor B móvel para escolheres uma posição de B na superfície esférica.

4. Desloca o cursor Circunferências que passam por A e B e observa, no gráfico, o que acontece ao comprimento do arco AB.[3]

Pára quando o comprimento do arco AB for mínimo.

Onde se situa o centro C da circunferência? Clica na caixa Círculo máximo. O que observas deve permitir confirmar a conclusão que registaste em 1.a) e dar resposta às questões:

a) Será que, na Geometria Esférica, o caminho mais curto entre dois pontos é dado por um segmento de reta?

b) Na superfície esférica, qual a curva que pode assumir um papel análogo ao da reta da Geometria Euclidiana?

---

[3] Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla *Alt*. Também podes: rodar a esfera - coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.

Se quiseres saber mais vai a www.atractor.pt/mat/GeomEsf , clica em Círculo Máximo e aí em Distância entre dois pontos.

Anexo VIII: Tarefa GE-T_2

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Guião para o aluno[1]

I) Paralelismo de retas

Da exploração dos dois ficheiros (da tarefa 1) esfera-azul-cdf e caminho-mais-curto-cdf, o que podes concluir relativamente à noção de retas paralelas na Geometria Esférica (Não esqueças a noção de reta nesta Geometria!)

Confirma as tuas conclusões indo a www.atractor.pt/mat/GeomEsf, clica em retas paralelas.

1. O que podes dizer acerca dos polígonos na Geometria Esférica?

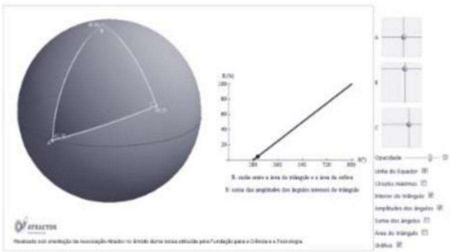
Confirma as tuas conclusões indo a www.atractor.pt/mat/GeomEsf, clica em biângulos.

II) Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro soma_dos_ângulos_de_um_triângulo-cdf.
Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa que contém uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: A, B e C.

2. Clica na caixa Interior do triângulo e move os pontos através dos cursores A, B e C que estão à direita de forma a obteres diferentes triângulos.

(Nota: Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla *Alt*.
Também podes rodar a esfera — coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.)



[1] Adaptado de Educação & Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, 2013, n.º 121, p. 27.

3. Escolhe uma posição para A, B e C e clica na caixa Amplitude dos ângulos.
Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo esférico? Podes clicar na caixa Soma dos ângulos para confirmar.

4. Em Geometria Euclidiana, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Será que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico também é constante?
Move os pontos de modo a obteres triângulos esféricos diferentes e observa o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de cada um desses triângulos.
5. É possível ter um triângulo esférico com dois ângulos retos? E três ângulos retos? E três ângulos rasos?

6. Entre que valores varia a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

7. Clica na caixa Gráfico e observa o gráfico da função que relaciona a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a sua área relativa (isto é, a razão entre a área do triângulo e a área da esfera). O que concluis?

III) Qual é a área de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro área_de_um_triângulo-cdf. Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com três pontos móveis assinalados, A, B e C, formando um triângulo.
1.a) Faz a tua investigação nesse ficheiro:

E agora, já sabes qual é a cor do urso?

Se tiveres curiosidade e quiseres saber mais vai a www.atractor.pt/mat/GeomEsf

Anexo IX: Tarefa GH-T_1

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Novas regras… Nova Geometria!

Considera um "universo" restrito a um círculo sem incluir a sua fronteira, isto é, sem incluir a circunferência que o delimita. Considera ainda que esse círculo sem fronteira é uma superfície côncava[1]. Este modelo[2] foi sugerido pelo matemático, físico e filósofo da ciência francês Henri Poincaré (1854-1912) para representar a **Geometria Hiperbólica**.

Uma vez mais, proponho-te a realização de um conjunto de tarefas para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

Tarefa 1: Retas hiperbólicas

Desta vez vamos usar o programa de geometria dinâmica *Geogebra*.

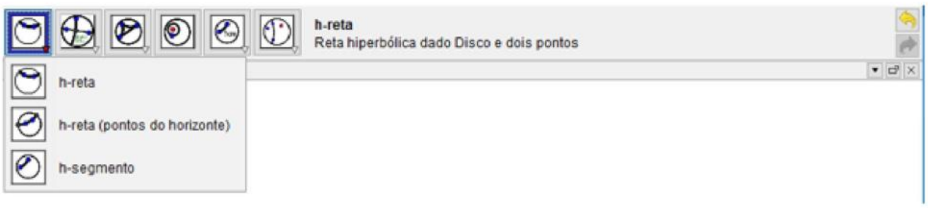
Vais abrir o ficheiro Geogebra_Geometria Hiperbólica que tem mais algumas ferramentas do que o Geogebra.

As novas ferramentas permitem obter objetos geométricos da Geometria Hiperbólica e manipulá-los. Todos os outros ícones dizem respeito à Geometria Euclidiana.

Clicando no canto inferior direito de cada ícone podes consultar todas as ferramentas disponíveis.

Nota que, sempre que selecionas uma ferramenta, surge à direita dos ícones um texto com a indicação de como deves proceder.

Por exemplo:



Significa que tens de selecionar o círculo e os dois pontos que te definirão a reta.

Podes começar a tua exploração…

Sugiro que sigas este guião:

1. Depois de teres construído o Disco de Poincaré (1ª ferramenta hiperbólica da barra de ferramentas), representa alguns pontos no círculo.

---

[1] Nota que no caso de uma superfície esférica ela é convexa e tem curvatura positiva, já uma superfície plana tem curvatura nula e se for uma superfície côncava terá curvatura negativa.

[2] Disco de Poincaré é apenas um entre outros modelos físicos conhecidos para representar a Geometria Hiperbólica (Geometria não euclidiana).

GH_T1

Nota que pontos euclidianos construídos no disco passam a ser pontos hiperbólicos quando usares as ferramentas da geometria hiperbólica caso contrário são euclidianos.

2. Constrói algumas retas da geometria hiperbólica. Movimenta um dos pontos e observa o comportamento da reta hiperbólica.

3. Explora as ferramentas até te familiarizares com este *software*.

Regista as tuas observações relativamente a:

i. De que "tipo" são as retas hiperbólicas?
ii. Quantas retas hiperbólicas passam por um ponto do Disco?
iii. Quando é que uma reta hiperbólica se parece com um segmento de reta euclidiano?
iv. Quantas retas hiperbólicas passam por dois pontos dados do Disco?

Mantendo o conceito de que retas paralelas não têm pontos em comum, será que existem retas paralelas na Geometria Hiperbólica?

Faz a tua investigação, vai trocando impressões com os teus colegas e comigo e regista as tuas conclusões sobre "retas paralelas" na Geometria Hiperbólica.

Síntese
Estás em condições de preencher a tabela que se segue:

<table>
<tr><td rowspan="4">Dada uma reta e um ponto que não pertença a essa reta.
Quantas retas passam por esse ponto e são paralelas a reta dada?</td><td colspan="3">GEOMETRIA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EUCLIDIANA</td><td colspan="2">NÃO EUCLIDIANA</td></tr>
<tr><td>Elíptica (Esférica)</td><td>Hiperbólica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Anexo X: Tarefa GH-T_2

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Tarefa 2: Ângulos hiperbólicos

Nota: A **amplitude de um ângulo hiperbólico** pode ser obtida através da amplitude euclidiana do ângulo formado pelas semirretas euclidianas tangentes aos arcos (retas hiperbólicas, segmentos de reta hiperbólicos e/ou semirretas hiperbólicas) com origem no vértice do ângulo que se pretende medir.
Encontras na barra de ferramentas hiperbólica a ferramenta hiperbólica que te permite obter essa amplitude mais facilmente.

Faz as tuas **investigações** recorrendo à **exploração das construções** que achares necessárias, à **partilha e discussão** com os colegas e comigo, **regista as tuas observações** e tenta responder às questões que vão sendo propostas a seguir:

1) A partir de três pontos constrói um ângulo. Movimenta o vértice do ângulo.
   i. Entre que valores varia a medida desse ângulo?
   ii. O que verificas quando a medida se aproxima de 0 grau?
   iii. E quando a medida se aproxima de 180 graus?

2) Retas hiperbólicas concorrentes
   i. Dadas duas retas hiperbólicas concorrentes, como se comportam os pares de ângulos adjacentes?
   ii. Como se comportam os pares de ângulos opostos pelo vértice?

3) Soma dos ângulos internos de um triângulo
   A partir de três pontos A, B e C constrói um triângulo hiperbólico. Movimenta os vértices.
   i. Como se comporta a soma dos ângulos internos desse triângulo?

Síntese
Estás em condições de preencher a tabela que se segue:

<table>
<tr><td rowspan="4">A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é:</td><td colspan="3">GEOMETRIA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EUCLIDIANA</td><td colspan="2">NÃO EUCLIDIANA</td></tr>
<tr><td>Elíptica (Esférica)</td><td>Hiperbólica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

GH_T2

Anexo XI: Tarefa GH-T_3

Clube m@π

Logótipo e nome do Agrupamento de Escolas

Tarefa 3: Distância hiperbólica

1) Constrói uma circunferência hiperbólica de centro A passando por B (usa a ferramenta hiperbólica para esse efeito).

   Movimenta os pontos A e B e observa o comportamento do raio.

   i. O que acontece quando aproximamos o centro dessa circunferência hiperbólica da fronteira do Disco de Poincaré?

   ii. O que acontece quando aproximamos o centro dessa mesma circunferência hiperbólica do centro do Disco de Poincaré?

2) Constrói um segmento de reta hiperbólico e o seu ponto médio (usa a ferramenta hiperbólica para esse efeito).

   Movimenta os extremos do segmento.

   i. O que acontece quando aproximamos (afastamos) um dos extremos à fronteira do Disco de Poincaré?

<u>Investiga construindo em Geometria Hiperbólica</u>

(Troca impressões sobre todas as tuas construções com os teus colegas, partilha toda a informação e regista as conclusões obtidas)

- Mediatrizes e circuncentro
- Medianas e baricentro
- Triângulo equilátero
- Triângulo isósceles
- Triângulo retângulo e teorema de Pitágoras
- Quadriláteros

GH_T3

Anexo XII: Narrativas por episódios de intervenção

Segue-se a apresentação das transcrições áudio (narrativas) de todas as sessões das sequências de intervenção. Nos textos que se seguem o narrador é a professora/investigadora que também foi a aplicadora das tarefas.

De modo a distinguir as narrativas do restante texto, estas apresentar-se-ão em itálico e nelas a professora/investigadora assume a primeira pessoa.

1. Geometria táxi (GT)

> *"Enquanto a geometria euclidiana parece ser um bom modelo do mundo «natural», a geometria táxi é um modelo melhor do mundo urbano artificial que o homem construiu."*
>
> Krause Eugene in Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry, (Krause, 1986, p. vi)

1.1. Grupo do 10.º ano (15-16 anos)

1.1.1. Sessão [10-GT_T_1 e T_2] (Narrativa detalhada)

Compareceram os quatro alunos do 10.ºano: Alexandre, Ivan, Madalena e Pedro.

Como já era hábito, sentaram-se os quatro à volta de uma das mesas da sala (dois de cada lado). Perguntaram se precisavam de tirar papel e calculadora. Disse-lhes que só iriam precisar de material de escrita e eu sentei-me com eles no topo da mesma mesa. Era percetível que os quatro estavam ansiosos, curiosos e trocavam entre si olhares de cumplicidade. Não fiz nenhuma introdução prévia e distribui a cada um deles a ficha com a Tarefa 1 do grupo Geometria Táxi (GT_T_1). Os alunos começaram a leitura individualmente, sugeri que estivessem à vontade, sem qualquer constrangimento e que fossem trocando impressões entre si como estavam já habituados a fazer e iniciei o processo de gravação áudio. Olharam entre si e pareceu-me que o gravador os estava a inibir, mas passados poucos segundos o Pedro, o mais entusiasta do grupo, iniciou a discussão e todos esqueceram o gravador… estavam totalmente descontraídos.

Apesar da primeira solicitação da tarefa remeter para uma ação direta "Assinala na figura 1 o que te parece ser o "caminho" mais curto entre os pontos A e B já representados.", a troca de impressões começou:

1. ***Pedro:*** *O caminho mais curto é uma linha reta…*
2. ***Madalena: b****asicamente, o caminho mais curto é uma hipotenusa.*
3. ***Pedro + Madalena:*** *Triângulo retângulo.*
4. ***Professora****: Porquê hipotenusa?*

5. ***Madalena:*** *Se pensarmos que isto é um retângulo, o caminho mais rápido vai ser a hipotenusa AB (Madalena aponta o contorno do retângulo definido à custa da diagonal AB).*
6. ***Professora:*** *Falaste num retângulo e falaste numa hipotenusa … (Pedro e Madalena interrompem em simultâneo)*
7. ***Pedro:*** *É a diagonal do retângulo.*
8. ***Professora:*** *Como definem em linguagem natural o que é o caminho mais curto? Como diriam a alguém qual é o caminho mais curto? Era preciso falar de hipotenusa?*
9. ***Ivan:*** *Menor distância.*
10. ***Professora:*** *É verdade! O caminho mais curto é o que tem menor distância. E o que é?*
11. ***Ivan:*** *É o caminho que nós não precisamos levar desvios.*
12. ***Pedro:*** *É uma reta!*
13. ***Professora:*** *É uma reta?*
14. ***Ivan:*** *Neste caso é.*
15. ***Professora:*** *OK… não será antes um segmento de reta?*
16. ***Ivan:*** *Mas a stora disse para falarmos em linguagem natural… nós dizemos linha reta!*
17. ***Professora:*** *Ah! Linha reta…, mas conseguem distinguir entre reta e segmento de reta?*
18. ***Pedro:*** *Sim… aqui temos início e temos fim. Não é uma reta é um segmento de reta…*
19. ***Ivan:*** *Por isso deslocamo-nos em linha reta.*
20. ***Professora:*** *Está bem, façam os vossos registos e depois passem à questão seguinte.*

(Os alunos escrevem)

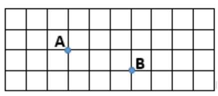


Figura 7: *Recorte da tarefa GT_T_1.*

Nesta troca de impressões, a partir da imagem da figura 1 da tarefa, associada ao pedido de ação "*Assinala na figura 1 o que te parece ser o "caminho" mais curto entre os pontos A e B já representados.*", a quantidade de significados matemáticos evocados foi significativa: "linha reta", "hipotenusa", "retângulo", "triângulo retângulo", "diagonal do retângulo", "distância", "reta" e "segmento de reta".

A representação do segmento de reta na figura foi imediata (ação mecânica e individual) contudo, a discussão (interação social) fez emergir no plano psicológico os objetos associados aos significados matemáticos evocados e que fazem parte do conhecimento matemático (geométrico) destes alunos. É impossível determinar qual o domínio destes conceitos invocados, ou o nível de interiorização atingido por cada aluno participante no grupo de trabalho, contudo a discussão gerada é o testemunho de que todos eles estão envolvidos numa atividade de aprendizagem.

O Ivan apropria-se da resposta do colega Pedro (linha 12) e justifica essa resposta como se fosse ele a formulá-la (linhas 14 e 16). Estamos perante uma partilha de pensamentos que leva a reorganização do pensamento individual, como uma aquisição pessoal.

Os alunos continuaram a resolução da tarefa sem interrupções.

21. ***Pedro:*** *Agora é a medida.*

(Ivan fica surpreso)

22. ***Professora:*** *Ivan lê a 2ª questão*
23. ***Ivan:*** *(Ivan lê em voz alta). "Expressa por palavras tuas o que entendes por distância entre A e B."*
24. ***Professora:*** *Aí já é a distância!*

(Todos começam a escrever.)

25. ***Professora:*** *É engraçado, estou a ver os registos de cada um de vocês e para a Madalena a distância é um caminho, para o Ivan a distância é um segmento… afinal como é? Uma distância é o quê?*
26. ***Madalena:*** *Não! (escreve novamente)*
27. ***Professora:*** *Então Alexandre… tu até sabes como a determinar ou não! Então deves saber o que é?*
28. ***Alexandre:*** *Sei.*
29. ***Professora:*** *Então o que é?*
30. ***Alexandre:*** *Posso pôr a fórmula?*
31. ***Professora:*** *Tu só me disseste: sei! Agora perguntas se podes escrever uma fórmula? Eu não sei o que é que tu sabes…*
32. ***Ivan:*** *Neste caso se não nos dessem um referencial, nem pontos nenhuns…*

(Pedro interrompe)

33. ***Pedro:*** *era fazer o triângulo retângulo. Com os catetos já podia saber a hipotenusa.*
34. ***Professora:*** *Como é que medias os catetos?*
35. ***Ivan:*** *Usava-se a unidade da quadrícula.*
36. ***Pedro:*** *Exato, já dava!*
37. ***Professora:*** *Para determinar a distância de A a B recorrias ao teorema de Pitágoras… Tudo bem… eu queria aproveitar o que o Alexandre estava a falar… ele falou numa fórmula…como é?*
38. ***Alexandre:*** *Precisamos conhecer as coordenadas de A e de B.*

39. ***Professora:*** *Ok! Muito bem… vocês têm então métodos para determinar a distância entre dois pontos. Já agora, como surgiu a fórmula que o Alexandre invocou? Como foi deduzida?*
40. ***Pedro:*** *Foi pelo teorema de Pitágoras.*
41. ***Professora:*** *Ok, certo! Mas, na tarefa, não é pedido que indiquem como se determina a distância, nem qual é a distância, mas sim, o que é a distância…*
42. ***Madalena:*** *é a medida.*
43. ***Pedro:*** *medida do segmento de reta.*
44. ***Professora:*** *Ou seja, é a medida do caminho mais curto. Quando terminarem os vossos registos passem à questão seguinte.*

O Pedro, mais perspicaz, de forma objetiva dá sempre o mote para a resposta às questões propostas na ficha (linhas 1, 18 e 33) e a sua rapidez provoca a reação no grupo. Essa reação é aproveitada pela professora para envolver os alunos numa troca de ideias de modo a que, dessa interação no grupo, emerjam conceitos que tenham significado para os alunos no contexto em que estão a ser usados.

Durante este diálogo os alunos foram fazendo registos, mas também os foram alterando durante a discussão e todos acabaram por registar que a distância era a medida do segmento de reta AB. Os conceitos evocados foram: “medida”, “fórmula (da distância entre dois pontos)”, “referencial”, “triângulo retângulo”, “medida dos catetos”, “quadrícula como unidade de medida”, “coordenadas de pontos” e “Teorema de Pitágoras”. Ressalta a dificuldade que os alunos têm em “dizer o que é a distância” e perante a questão “como determinar a distância” os alunos conseguem indicar métodos/estratégias que lhes permitam realizar essa ação. No caso do Alexandre, que é de entre os alunos deste grupo o que tem um desempenho na disciplina de Matemática mais fraco, associa a distância a uma fórmula matemática, domina o conteúdo curricular, mas não o utiliza para pensar. A distância entre dois pontos do plano (Geometria Euclidiana) é um conceito que para o Alexandre, apenas se restringe ainda ao domínio da ação não fazendo ainda uso deste conceito ao nível das operações.

Leontiev (1978b) realça as alterações na atividade propriamente dita, referindo que as ações se modificam dando lugar às operações, o que ocorre quando as ações passam a ser estratégias orientadas para a obtenção de um dado objetivo.

Numa perspetiva semiótica, poderemos dizer que, para o Alexandre, a fórmula da distância entre dois pontos (linha 26) assume-se como uma ferramenta que não evoluiu ainda para um instrumento psicológico.

As duas situações iniciais propostas na GT_T_1 têm como objetivo preparar os alunos para o confronto com a terceira situação da mesma tarefa em que, mediante regras previamente estabelecidas, a noção de "caminho mais curto entre dois pontos" pode gerar algum conflito mental por diferir do que os alunos já interiorizaram no decorrer da sua escolaridade.

É a partir dos conhecimentos que os alunos já adquiriram e que os capacita para a realização de determinadas operações, e mediante a troca do sujeito com outros sujeitos e consigo próprio que se vão internalizando conceitos, situação que pode ser claramente identificável na relação entre os alunos e a professora. (Noção de Zona de desenvolvimento próximo segundo o modelo de Vygotsky resultante do efeito da interação social e cultural na evolução da cognição humana)

(Após terminarem o registo, continuaram a leitura da ficha)

45. ***Professora:*** *O que vos parece ser o caminho mais curto?*
46. ***Pedro:*** *Sem saltar prédios…*
47. ***Professora:*** *Isso é para o Ivan que é perito em Educação Física.*

(Entretanto todos foram fazendo a sua representação nas respetivas fichas).

48. ***Ivan:*** *Já tenho…, mas é igual a este (tem um "caminho" representado e com o lápis mostra outro, mas não o representa).*
49. ***Professora:*** *Ah! Afinal tens outro!*
50. ***Ivan:*** *É igual.*
51. ***Professora:*** *Mas é igual a quê?*
52. ***Ivan:*** *Têm a mesma distância.*
53. ***Professora:*** *Mas será o mesmo caminho? E vocês o que acham?*
54. ***Ivan:*** *Então eu encontrei quatro caminhos com a mesma distância.*
55. ***Pedro:*** *Exato!*
56. ***Madalena:*** *Eu também.*
57. ***Professora:*** *E tu Alexandre?*
58. ***Alexandre:*** *4 caminhos.*
59. ***Professora:*** *E com quantas unidades de comprimento?*
60. ***Alexandre:*** *4.*
61. ***Professora:*** *4 unidades de comprimento de acordo com os dados da figura. Façam os vossos registos. (….) Partilhem o que estão a fazer.*
62. ***Ivan:*** *Não há um caminho único. Há quatro caminhos.*
63. ***Pedro:*** *Se só usarmos as ruas.*
64. ***Professora:*** *O que estavas a pensar utilizar Pedro?*
65. ***Ivan:*** *Saltar prédios…*
66. ***Professora:*** *Talvez atravessar prédios.*
67. ***Alexandre:*** *Existe mais do que um caminho possível, entre P e M, em que o comprimento é igual ao que representei na figura.*
68. ***Ivan:*** *Existem vários caminhos… o caminho mais curto não é único!*

(Este comentário não foi feito num tom de partilha, mas sim como se estivesse a falar consigo próprio, numa atitude reflexiva, como se fosse um diálogo interno, mas feito em voz alta.)

A noção de que nesta Geometria, o caminho mais curto não é único não causou grande estranheza. Os alunos, que já dominavam o conceito de caminho mais curto e a sua unicidade, aceitaram pacificamente, que mediante novas condições o caminho mais curto podia não ser o único existente.

69. ***Professora:*** *Como é? Podemos continuar? Agora têm um bocadinho de texto em que vos é dito (lê a ficha) "Com esta nova forma de medir definimos uma nova Geometria que podemos designar por Geometria Táxi, percurso efetuado por um táxi seguindo o traçado das ruas na horizontal e vertical, ou por Geometria Pombalina, supondo a baixa de Lisboa com um traçado de ruas tal como o da figura 2." (Repete) "Com esta nova forma de medir", … é uma nova forma de medir?*
70. ***Madalena:*** *Sim é!*
71. ***Professora:*** *(continua a realçar partes do texto já lido) "definimos uma nova Geometria que podemos designar por Geometria Táxi" … este é o nome pelo qual é designada, isto tem a ver com a analogia ao percurso efetuado por um táxi seguindo o traçado das ruas, está bem? Vamos partir do princípio de que as ruas dos bairros estão todas alinhadas paralelamente na horizontal e na vertical. Vamos pensar num modelo, certo? A ficha também refere a baixa de Lisboa, Baixa Pombalina, daí também se usar a designação de Geometria Pombalina, pois tem como referência a construção da baixa de Lisboa… (Pedro interrompe)*
72. ***Pedro:*** *…depois do terramoto de 1755…*
73. ***Professora:*** *exatamente… e a intervenção do Marquês de Pombal nessa reconstrução. Se tiverem curiosidade e quiserem saber mais, podem sempre questionar o vosso professor de História do Básico, agora, para já, não precisamos desses conhecimentos. Ora atrás, na figura 1, usámos a distância Euclidiana, é a que têm vindo a usar em todas as aulas ao longo do vosso percurso escolar, desde a pré-escola, aliás eu já fiz várias vezes referência, nas nossas aulas de Matemática, ao matemático grego?...*
74. ***Madalena:*** *Euclides.*
75. ***Professora:*** *Boa, Madalena! Mas uma vez mais, não são os nomes, agora, o mais importante…. Têm dois esquemas com pontos já marcados… à esquerda vamos utilizar a distância Euclidiana entre pares de pontos e no esquema do lado direito usaremos a distância Táxi que agora já conhecem. Marquem o caminho mais curto entre A e B, que é o que representa a distância entre A e B.*

76. ***Pedro:*** *Euclidiana?*
77. ***Professora:*** *Sim, do lado esquerdo… (os alunos representam na ficha) Isso… está representada! E agora do lado direito, tal como acabámos de ver… vamos lá… façam isso rapidinho para podermos ver outras "coisas" … façam para todos os pares de pontos.*

(O Alexandre está confuso. Vai mexendo nervosamente a régua entre as mãos… não fez nenhuma marcação no esquema do lado direito, mas representou com régua os segmentos de reta cujos extremos eram os pares de pontos no esquema da esquerda)

78. ***Professora:*** *Vamos lá Alexandre… e tu Pedro, isso está confuso… a tua marcação não se vê bem…*
79. ***Pedro:*** *Mas… há vários…*
80. ***Professora:*** *Como?*
81. ***Madalena:*** *E a minha vê-se? Entre Q e R há só dois. Quando há mais não se conseguem ver bem…*
82. ***Professora:*** *Já percebi… a vossa dificuldade é porque estão a querer representar todos os caminhos… estás a acompanhar os teus colegas Alexandre?… (acena afirmativamente com a cabeça) Facilita o vosso registo representarem um só.*
83. ***Pedro:*** *Pois, têm todos a mesma distância!*
84. *Claro… podem indicar por debaixo do esquema qual a distância entre cada par de pontos. Só é pedida a distância… não é pedido que representem todos os caminhos…*

(Enquanto todos procedem ao registo o Pedro fala em voz baixa, mas percetível)

85. ***Pedro:*** *Se estiverem na horizontal há só 1 caminho.*
86. ***Professora:*** *Pedro, queres partilhar connosco o que acabaste de dizer?*
87. ***Pedro:*** *Se os pontos estiverem na horizontal… ou na vertical é igual, só há um caminho. No caso dos pontos U e V, estão na horizontal e só há um caminho… é igual à distância Euclidiana.*
88. ***Ivan:*** *Sim! Vai ser igual… e na vertical também é igual!*
89. ***Professora:*** *Isso mesmo! Para pontos alinhados na vertical ou na horizontal, a distância Táxi é a mesma que a distância Euclidiana. Terminem os vossos registos… (Durante uns segundos, todos fazem os seus registos em silêncio) Vejamos então… o que é que esta Geometria tem de diferente da Geometria Euclidiana?*
90. ***Pedro:*** *Basicamente é a forma como é calculada a distância.*
91. ***Professora:*** *Eu estou totalmente de acordo… e vocês? (dirige-se para os outros elementos do grupo. Pela expressão facial, manifestam ter a mesma opinião) Bem, coloquem o vosso nome e vamos ver a tarefa*

seguinte… pode ser? (Os três acenam afirmativamente, é recolhida a tarefa 1 e distribuída a tarefa 2, GT_T_2).

Os registos apresentados não diferiram uns dos outros. No caso da distância euclidiana entre pares de pontos cuja posição não era a horizontal nem a vertical, é clara a utilização do teorema de Pitágoras por todos os alunos, pois os cálculos foram apresentados, e indicada a distância exata. Para a distância Táxi, limitaram-se ao registo "d_{QR}=2, …".

O Pedro teve um papel crucial, modelador do desempenho dos colegas, pois as intervenções com a professora, à medida que iam sendo proferidas, foram claramente interpretadas e assimiladas por eles. Foi visível o crescendo de autoconfiança e situação de conforto durante a realização nos registos. A atitude mais interventiva do Pedro neste grupo atuou como um catalisador na atividade de aprendizagem em que todos estiveram envolvidos.

1.1.2. Sessão [10-GT_T_2, continuação]

Neste novo encontro no Clube, compareceram os mesmos alunos do grupo do 10.ºano que estiveram presentes na sessão que envolveu a GT_T_1 e Iniciado a GT_T_2. Todos se mostravam entusiasmados e cheios de curiosidade. Esta curiosidade notou-se ainda no corredor de acesso à sala do Clube, pois por várias vezes questionaram "… e hoje? Vamos ver outra distância?". Como resposta, apenas lhes foi dito que continuariam a explorar outras situações, mas que manteriam a mesma noção de distância apresentada no último encontro.

Sentaram-se apressadamente nos mesmos lugares que tinham ocupado anteriormente e tiraram o material de escrita sem que lhes tivesse sido solicitado. Juntei-me ao grupo, distribui a tarefa 2, GT_T_2, liguei o gravador e começámos. Os alunos alhearam-se completamente do gravador e começaram a ler a ficha.

1. ***Professora:*** *Continuemos a última sessão… notem que vos é imposto que mantenham a regra definida para a distância Táxi, isso é claro no primeiro parágrafo da ficha. Vamos continuar a considerar a medida do lado da quadrícula como sendo uma unidade de comprimento. Em 1 é pedido: "Representa um ponto P_1 que diste 3 u. c. do ponto A." … vamos lá… (Todos representam) …. Ok! Já representaram P_1 nas condições pedidas, sem qualquer dificuldade… engraçado, fizeram todos representações diferentes…*
2. ***Pedro:*** *havia muitos…*
3. ***Professora:*** *Estão de acordo com o Pedro?… (madalena abana afirmativamente a cabeça e a expressão do Alexandre revela estar de acordo) então representem mais…*
4. ***Pedro:*** *há tantos!*
5. ***Professora:*** *…és capaz de dizer quantos?*
6. ***Madalena:*** *Ui!... (como se fosse muito difícil dizer quantos)*
7. ***Pedro:*** *…dá para fazer 1, 2, 3, 4, … espere… 8, 9, 10, 11, 12…*
8. ***Madalena:*** *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12… vai dar tipo assim…*

(Alexandre acompanhou a indicação da Madalena. Parece estar de acordo e representa também na sua ficha.)

9. ***Professora:*** *… (Espera que o Alexandre conclua) Alexandre, tens aí pontos que não estão a 3 unidades de distância de A…*
10. ***Alexandre:*** *Não?*
11. ***Professora:*** *Vê este…*
12. ***Alexandre:*** *(Com o lápis vai apontando e confirma contando uma quadrícula na horizontal e uma na vertical) … este está a 2…. Ok! enganei-*

me… (Faz os ajustes) Temos de marcar P_1, P_2, P_3, … (A professora interrompe-o)

13. ***Professora:*** *Não é necessário estares a identifica-los, basta a representação… vejam o que é pedido em 2 e em 3.*
14. ***Pedro:*** *Não estão todos… acho eu….*
15. ***Professora:*** *Pedro, queres partilhar connosco o que estás a pensar?*

(Faz uma pequena pausa para que todos acompanhem)

16. ***Pedro:*** *se eu colocar um ponto aqui? (assinala na sua ficha enquanto mostra à professora) também dá, está no plano e dista 3 unidades de A!*

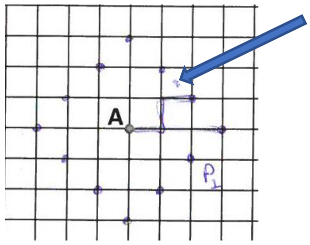


Figura 8: *Recorte da ficha do Pedro (GT_T2).*

17. ***Professora:*** *Olhem, prestem lá atenção ao que o Pedro me está a dizer.*
18. ***Pedro:*** *Este ponto também dá (Todos olham para a ficha do Pedro e o pedro volta a apontar para o ponto que já tinha indicado e todos ficam pensativos)*
19. ***Professora:*** *Porquê?*

(A resposta do Pedro é imediata)

20. ***Pedro:*** *Um e meio, um e meio.*
21. ***Professora:*** *Explica lá isso melhor.*
22. ***Pedro:*** *(aponta com o lápis à medida que fala) partindo de A, até aqui um e mais meio, e na vertical, um e mais meio. Um e meio, mais um e meio dá três. Por exemplo se estiver aqui, dois e meio mais meio dá três (ficam todos a pensar) … Todo o quadrado é possível!*
23. ***Professora:*** *Quadrado?*
24. ***Pedro:*** *Pontos sobre os quatro segmentos de reta que definem o quadrado.*
25. ***Madalena:*** *lá… dão todos.*
26. ***Ivan:*** *Mas é um quadrado…*
27. ***Professora:*** *Então como é? O que é que têm todos esses pontos sobre os lados do quadrado?*
28. ***Madalena:*** *Estão todos à mesma distância do ponto A, mas é a distância Táxi.*
29. ***Pedro:*** *Então é a circunferência!... mas não é a Euclidiana.... É isso?*
30. ***Professora:*** *Então em que ficamos?*

(Pedro e Madalena falam em simultâneo um texto desarticulado em que a Madalena define o lugar geométrico circunferência e o pedro refere que "o limite na Euclidiana é um segmento de reta… é o raio!")

31. ***Professora:*** *Calma… um de cada vez…*
32. ***Pedro:*** *Na Geometria Euclidiana o raio era um segmento de reta e aqui não…, mas os pontos estão sempre à mesma distância de um ponto fixo que é o A.*
33. ***Madalena:*** *e isso é a definição de circunferência…A é o centro.*
34. ***Ivan:*** *A circunferência aqui, com essa definição, é quadrada…*
35. ***Professora:*** *…então estamos perante a "Circunferência Táxi" …*
36. ***Madalena:*** *…é a mesma definição de lugar geométrico… é assim que definimos circunferência na Geometria Euclidiana, os pontos situam-se todos à mesma distância do centro…*
37. ***Pedro:*** *é tudo igual, o que é diferente é o conceito de distância!*
38. ***Professora:*** *Pois é… com este novo conceito de distância, acabámos de construir circunferências que saem do padrão daquilo que reconhecíamos ser uma circunferência. É este novo conceito de distância que carateriza a Geometria Táxi e esta é uma Geometria Não Euclidiana. Mas, continuemos. Na tarefa é sugerido que experimentem novas situações à vossa escolha… divirtam-se…*

(Madalena, Ivan e Alexandre começam a representar pontos à mesma distância de um ponto fixo por eles escolhido, procuram outras circunferências, com outro centro e outra medida para o raio… o Pedro fica pensativo a olhar para a ficha)

39. ***Pedro:*** *(fala em voz baixa) … pontos à mesma distância de A e de B… (noutro tom, falando mais alto) posso representar a mediatriz?*

São estes momentos em que é necessário improvisar pois nesta tarefa não estava ainda previsto analisar esse lugar geométrico. O Pedro levou a que a professora redirecionasse a sua intervenção didática rumo à exploração da tarefa 4.

1.1.3. Sessão [10-GT_T$_4$]

Esta sessão [10-GT_T$_4$] acabou por decorrer "dentro" da sessão [10-GT_T$_2$ continuação] de acordo com a narrativa dessa mesma sessão e que aqui se completa.

40. Professora: *O vosso colega disse que quer experimentar para ver o que vai dar a mediatriz… e vocês não têm curiosidade? Pode ser interessante… querem interromper o que estão a fazer e experimentamos todos? Lembram-se da definição desse lugar geométrico do plano?*

41. Madalena: *Conjunto de pontos do plano que se situam à mesma distância de dois pontos fixos.*

42. Professora: *Isso mesmo Madalena. Vou distribuir uma nova tarefa, pois parece-me interessante que discutam sobre o que o Pedro está a pensar…*

Fixem dois pontos e depois vão representando todos os que estão à mesma distância desses dois… (todos começam uma representação e passados uns segundos a professora continuou) … A madalena já representou… fez para o caso em que os dois pontos fixos estão alinhados na horizontal…

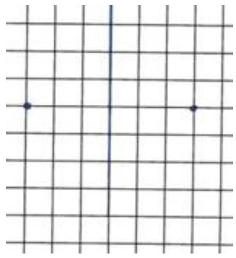


Figura 9: *Representação feita pela Madalena (GT_T$_4$).*

43. Ivan: *Se estiverem na vertical, a mediatriz estará na horizontal.*

44. Pedro: *Mas assim é como na geometria euclidiana.*

45. Professora: *Se os dois pontos fixos escolhidos estiverem alinhados horizontal ou verticalmente a mediatriz é a que já conhecemos… é uma reta, certo? Sugiro que experimentem com os dois pontos escolhidos noutra posição, talvez dê que pensar…*

(Todos se debruçam sobre a sua folha e começam a representar pontos exceto o Alexandre que mantem a régua nas mãos como se essa ferramenta fosse a sua tábua de salvação para representar a mediatriz.)

46. Professora: *Alexandre, já escolheste dois pontos fixos?*

47. Alexandre: *Podem ser estes?*

48. Professora: *Claro… não estão na horizontal nem na vertical… para essas posições percebeste como era a mediatriz?*

49. Alexandre: *(apressadamente) sim, sim…*

50. Professora: *Ok!... (desenha um ponto na folha do Alexandre) Este ponto está a que distância deste que tu escolheste?*

51. ***Alexandre:*** *1, 2, 3, 4. Quatro unidades.*

52. ***Professora:*** *E deste? (Aponta para o outro ponto fixo escolhido pelo Alexandre.)*

53. ***Alexandre:*** *Também 4… (pensa…) Então é um ponto da mediatriz!*

54. ***Professora:*** *Boa! Procura mais… e por enquanto esquece a régua. Quando tiveres mais pontos, talvez possamos tirar algumas conclusões… e veremos se é possível usar a régua.*

(Entretanto o Pedro já tem representado dois semiplanos na sua folha e discute com o Ivan.)

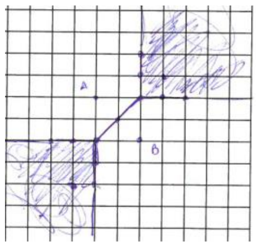


Figura 10: *Recorte da ficha do Pedro (GT_T_4).*

55. ***Professora:*** *Pedro e Ivan, querem partilhar alguma coisa connosco?*

56. ***Ivan:*** *Estou a dizer ao Pedro que pode não ser sempre assim….*

(Todos olham para a representação do Pedro…)

57. ***Professora:*** *Quem escolheu pontos que não sejam os extremos da diagonal de um quadrado? (Abanam a cabeça) ninguém?*

58. ***Alexandre:*** *Também escolhi os pontos fixos na extremidade de um quadrado, mas eu fui marcando pontos nos vértices da quadrícula não pintei tudo como o Pedro…*

59. ***Professora:*** *Afinal como é? Podemos uni-los? Podemos “pintar”? como é?*

60. ***Ivan:*** *Podemos! Temos é semiplanos… não é uma reta!*

61. ***Pedro:*** *Também temos uma parte que é um segmento de reta.*

62. ***Professora:*** *Parece-me que todos têm então o mesmo… Mas o que acontece se os pontos escolhidos para traçar a mediatriz forem extremos da diagonal de um retângulo…*

63. ***Pedro:*** *É isso! é isso Ivan…*

64. ***Professora:*** *Parece que poderia ser isso que intrigava o Ivan… vamos lá todos escolher dois pontos que não estejam na vertical, nem na horizontal e não sejam extremos da diagonal de um quadrado, e toca a marcar pontos da mediatriz para esse dois pontos assim escolhidos.*

(Todos começam a fazer na sua própria ficha)

65. *Pedro:* *Só são estes… mas é estranho. Têm de ser mais. (Todos deixam o que estavam a fazer e olham para a ficha do Pedro)*

66. *Madalena:* *Eu também fiz isso!*

67. *Ivan:* *Podemos uni-los…*

68. *Professora:* *Serão só esses?*

(Ivan partilha a representação do Pedro e o Alexandre a da Madalena. A posição deles à volta da mesa propicia essa partilha. Pedro e Ivan estão de um lado, à minha direita, e Alexandre e Madalena estão do outro lado, à minha esquerda.)

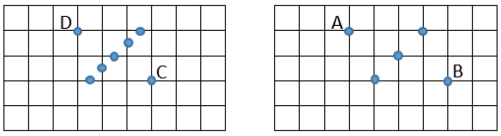


Figura 11: *Representação do Pedro, à esquerda, representação da Madalena, à direita (GT_T$_4$).*

69. *Madalena:* *Para baixo já não posso ir (aponta alguns pontos no seguimento da direção indicada pelos 3 já representados) … para cima, também não.*

70. *Professora:* *Vê bem Madalena… para baixo já não podes ir se mantiveres essa direção…*

71. *Madalena:* *Já sei! Faço outo abaixo deste… já dá!*

(Alexandre conta quadrículas, apontando com o lápis… abana a cabeça afirmativamente… é visível que está de acordo e interiorizou a situação. Continuam a marcação.)

72. *Pedro:* *Ok! Já dá…*

(Na representação do Pedro, os pontos da mediatriz não se situam sobre a linha da quadrícula e isso foi um bloqueio facilmente ultrapassado pela Madalena que não teve dificuldade em deslocar-se sobre a linha da malha quadriculada.)

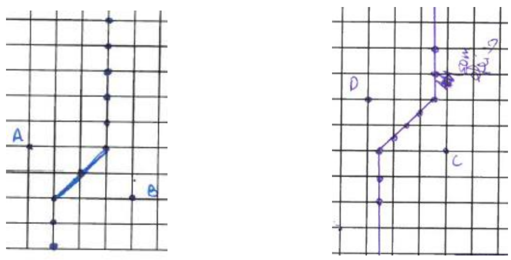


Figura 12: *Representação do Pedro, à esquerda, representação da Madalena, à direita (GT_T$_4$, continuação).*

73. *Professora:* *Penso que agora todos são capazes de concluir o que estavam a fazer… certo?*

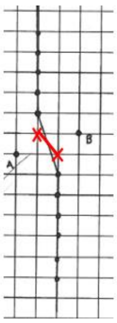
(Alexandre e Ivan concluem as representações enquanto o Pedro olha fixamente para a sua ficha como que meditando… a Madalena está já a arrumar as sua coisas na mochila.)

74. ***Pedro:*** *Todos os lugares geométricos que são definidos à custa da distância entre pontos vão ser esquisitos como a circunferência e a mediatriz… certo?*

75. ***Professora:*** *Esquisitos?*

76. ***Pedro:*** *Nesta geometria Táxi a distância é diferente, logo, tudo o que tem a ver com distância será afetado… ou não… Quando os pontos estavam na horizontal ou na vertical, a distância era igual à euclidiana e por isso a mediatriz também era igual à mediatriz euclidiana…*

77. ***Professora:*** *É isso mesmo Pedro…, mas temos de terminar por hoje. Já todos terminaram? Entregam e até à próxima sessão. Obrigada!*



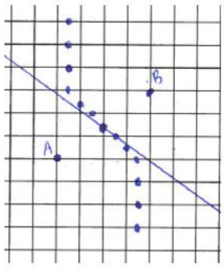


Figura 13: *Recorte da ficha do Ivan à esquerda e, à direita, recorte da ficha do Alexandre (GT_T$_4$).*

1.2. Grupo do 11.º ano (16-17 anos)

1.2.1. Sessão [11-GT_T$_1$]

Compareceram os dois alunos do 11.ºano que habitualmente participam no Clube: Carolina e Gabriel.

Sentaram-se os dois frente a frente numa das mesas da sala, pois essa era a disposição habitual no clube, mas nesta sessão estavam particularmente curiosos. Disse-lhes que só iriam precisar de material de escrita, sentei-me com eles no topo da mesma mesa e distribui a ficha GT_T$_1$. Optei novamente por não fazer nenhuma introdução prévia e pedi que começassem a leitura e resolução da tarefa. Começaram a leitura individualmente, e olharam um para o outro. Coloquei os à vontade, incentivando à participação de modo a que fossem trocando impressões entre si como estavam já habituados a fazer e iniciei o processo de gravação áudio. Não me pareceu que estivessem descontraídos e pedi para que se abstraíssem e esquecessem o gravador. A carolina começou por escrever na ficha e apontando para o registo feito foi a primeira a falar.

1. **Carolina:** *Acho que é este?*
2. **Professora:** *Achas?*
3. **Carolina:** *Tenho a certeza!*
4. **Professora:** *Então o caminho mais curto…*

(Gabriel interrompe)

5. **Gabriel:** *é diretamente.*
6. **Carolina:** *diretamente… e pronto!*

(Passam a questão seguinte sem dar muita importância ao que estão a fazer, parecendo com pressa de fazer algo "mais complicado")

7. **Gabriel:** *Distância entre A e B é os conjuntos …*

(Carolina interrompe)

8. **Carolina:** *conjunto de pontos no espaço, não?*
9. **Professora:** *A distância … é um conjunto de pontos?*
10. **Carolina:** *Não … é o deslocamento sobre a trajetória.*
11. **Professora:** *Isso parece-me física. Mas afinal, o que é a distância entre dois pontos?*
12. **Carolina:** *É aquilo que conseguimos … em metros. Na medida de metros, que é a unidade de distância, é a medida entre A e B. Como é que escrevemos isto?*
13. **Professora:** *Na representação anterior, porque é que desenharam "isso" e não outra coisa qualquer?*
14. **Gabriel:** *Desenhámos um segmento de reta que vai de um ponto a outro.*
15. **Carolina:** *Segmento de reta compreendido entre A e B e que liga A a B.*

16. ***Professora:*** *Então o caminho mais curto é um segmento de reta… e a distância?*
17. ***Carolina:*** *É a medida do segmento de reta AB.*
18. ***Professora:*** *E para ti Gabriel?*
19. ***Gabriel:*** *Para mim também.*
20. ***Professora:*** *Então estamos de acordo… ok! Digam-me lá, vocês não aprenderam a determinar essa medida?*
21. ***Carolina:*** *Sim, com as normas do vetor.*
22. ***Professora:*** *Ah!?*
23. ***Carolina:*** *Se tivermos um vetor AB, ou então com a fórmula da distância entre dois pontos.*
24. ***Professora:*** *Desde o início que estamos a falar de dois pontos… façam os vossos registos.*

(Escrevem)

25. ***Gabriel:*** *Está aqui a reta, (aponta para a construção da colega na ficha dela) não precisas de pôr nada.*
26. ***Professora:*** *Carolina, o que é xA, xB, yA e yB?*
27. ***Carolina:*** *São as coordenadas de A e de B.*
28. ***Professora:*** *Coordenadas…. Muito bem. Então teríamos de ter um referencial do plano?*
29. ***Carolina:*** *Sim, neste caso tive em conta que estava no plano.*
30. ***Professora:*** *Mas estamos no plano ou não?*
31. ***Carolina:*** *Acho que sim.*
32. ***Professora:*** *Mas achas? Não tens a certeza?*
33. ***Carolina:*** *Temos duas dimensões.*
34. ***Professora:*** *Muito bem! Podemos continuar. (cada um lê a questão seguinte para si) …. Vamos lá a assinalar o caminho mais curto entre P e M… (cada um assinala) Já assinalaram?*
    Ah! Não assinalaram o mesmo!... a seguir vejam o que é pedido.
35. ***Gabriel:*** *(responde à questão em voz alta) Não!*
36. ***Professora:*** *Então há mais? E têm a mesma medida?*
37. ***Gabriel:*** *têm 4 unidades.*
38. ***Carolina:*** *Um com quatro unidades, outro com quatro unidades, outro com quatro unidades e outro com quatro unidades (foi mostrando os caminhos, passando com o lápis, mas sem os representar).*
39. ***Gabriel:*** *Só há quatro*

(Cada um confirma novamente, passando com o lápis, mas não os assinalam)

40. ***Professora:*** *Muito bem! Continuem.*

(viram a folha e leem para si) ….

41. ***Professora:*** *Estás a rir Gabriel? O que foi?*

42. ***Gabriel:*** *Geometria Pombalina.*
43. ***Professora:*** *Já ouviste falar?*
44. ***Gabriel:*** *Já!*
45. ***Professora:*** *Já?*
46. ***Gabriel:*** *Não ouvi Geometria Pombalina, mas é a referência ao Marquês de Pombal e desse eu já ouvi falar.*
47. ***Professora:*** *Pois, estás a ver o traçado de ruas horizontais e verticais bem alinhadas, todas paralelas.*
48. ***Gabriel:*** *Parecido ao romano*
49. ***Professora:*** *(A professora tenta voltar ao assunto da ficha) é apenas uma designação em português, normalmente designa-se por Geometria Táxi.*
50. ***Gabriel:*** *Os romanos usavam isso no centro de Roma, o mercado e sempre paralelas e perpendiculares.*
51. ***Carolina:*** *(em surdina, fala baixinho) Geometria Táxi.*
52. ***Professora:*** *A designação Geometria Euclidiana diz-vos alguma coisa? Talvez… Euclides. Não conhecem? Nunca ninguém vos falou ou fez referência a este nome?*
53. ***Carolina:*** *Já ouvi falar na distância euclidiana, mas não sei mais nada.*
54. ***Professora:*** *Euclidiana…pois é uma homenagem a Euclides, grego que viveu cerca de 300 anos a.C.. Distância euclidiana é a distância que estão habituados a usar.*
55. ***Gabriel:*** *É para desenharmos?*
56. ***Professora:*** *Podes desenhar o caminho mais curto, mas pretendo a distância, do lado esquerdo a Euclidiana, do lado direito a Táxi. Força!*

(Gabriel representa um dos caminhos mais curtos entre Q e R)

57. ***Professora:*** *Gabriel esse caminho é único?*
58. ***Gabriel:*** *Não! Quer que eu desenhe os caminhos todos?*
59. ***Professora:*** *Não! Mas já viste que há mais?*
60. ***Gabriel:*** *Há mais um.*
61. ***Professora:*** *Sim, está bem!*
62. ***Carolina:*** *Mas é o caminho mais curto.*
63. ***Professora:*** *Sim claro! Afinal a distância é ou não a medida do caminho mais curto? Tenha ele a forma que tiver…*
64. ***Gabriel:*** *Exatamente!*
65. ***Professora:*** *Faz o mesmo com S e T. Qual é a distância entre eles?*
66. ***Gabriel:*** *são 3 unidades.*
67. ***Professora:*** *Muito bem!*
68. ***Gabriel:*** *Mas existem mais 2 caminhos alternativos. Há 3 caminhos possíveis.*
69. ***Professora:*** *Só há mesmo 3?*

70. **Gabriel:** *Mais curtos, sim.*

71. **Professora:** *Estás de acordo Carolina? Estamos a falar entre S e T.*

72. **Carolina:** *Eu sei. Sim, só há 3. Só vejo 3.*

73. **Professora:** *Muito bem. Vejam agora, por exemplo entre Y e Z. Qual é a distância entre Y e Z?*

74. **Gabriel:** *5 unidades.*

75. **Carolina:** *Também acho que é 5.*

76. **Gabriel:** *Em Z e Y, só conto 6 caminhos não tenho a certeza se serão mais.*

(Contam novamente…desesperam…)

77. **Professora:** *Eu ajudo-vos: são 10! Como veem não é fácil contar os caminhos. Deram conta que a partir do momento que a distância é maior, a dificuldade em contar todos os caminhos também aumenta. Foi fácil contar o número de caminhos quando a distância era de 2 unidades e quando era de 3 unidades. Com 5 unidades já sentiram a dificuldade. Vejam agora entre U e V.*

78. **Gabriel:** *7 unidades.*

79. **Professora:** *Entre U e V… e quantos caminhos?*

80. **Gabriel:** *Aqui temos a possibilidade de traçar uma linha reta, enquanto nos outros não, porque existem… para chegar ao ponto temos de traçar linhas… se possível oblíquas, mas não podemos traçar linhas oblíquas porque estamos na Geometria Táxi. Somos obrigados a traçar… só há 1 caminho! Com 7 unidades.*

81. **Professora:** *Então quando só há um caminho o que têm a dizer da Geometria Táxi comparada com a Geometria Euclidiana?*

82. **Gabriel:** *São iguais.*

83. **Professora:** *Sempre iguais? (Gabriel abana a cabeça negando.) Em que situação é que a distância Táxi é a mesma que a distância Euclidiana?*

84. **Gabriel:** *Quando podemos traçar uma linha que liga diretamente os pontos.*

85. **Professora:** *O que significa "ligar diretamente"? Notem que quando pretendo ir de Z para Y também ligo diretamente, ou não? Ou, o que queres dizer com diretamente?*

86. **Gabriel:** *Se nos for dado um referencial em que temos linhas paralelas e as perpendiculares, quando digo diretamente, temos de ligar por exemplo na perpendicular ou ligar na horizontal.*

87. **Carolina:** *É a horizontal ou a vertical.*

88. **Professora:** *Então sempre que seja possível traçar o caminho na horizontal ou na vertical a distância Euclidiana coincide com a distância Táxi?*

89. **Gabriel:** *Não! Também depende do gráfico. Depende da maneira como nos derem… porque se em vez de ser assim, fosse… os quadrados estivessem de lado, como que apoiados…*
90. **Professora:** *Está a falar da malha… em vez de ser quadrada ser à custa de paralelogramos não quadrados nem retângulos? Mas continuamos a ter duas direções? Ou não?*
91. **Gabriel:** *Continuo.*
92. **Professora:** *Então em que ficamos?*
93. **Gabriel:** *Quando o caminho é único, na Geometria Táxi, a distância é a mesma que na Geometria Euclidiana.*
94. **Professora:** *E quando é que o caminho é único?*
95. **Gabriel:** *Quando os pontos estão alinhados na horizontal ou então na vertical. Só nestas duas situações.*
96. **Professora:** *Façam os vossos registos por favor. O que vos chamou mais a atenção?*
97. **Gabriel:** *O facto de as distâncias serem diferentes.*
98. **Professora:** *Que consequências advêm dessa diferença entre as distâncias?*
99. **Gabriel:** *Nem sempre é possível usar o caminho mais curto.*
100. **Carolina:** *É sempre possível Gabriel! Só não é possível, é traçar um único caminho quando os pontos não estão na mesma linha horizontal ou na mesma linha vertical!*
101. **Gabriel:** *Se conseguíssemos voar por cima dos edifícios, a distância mais curta seria diferente.*
102. **Professora:** *Ninguém te está a pedir que voes sobre os edifícios. Só queria que, a partir da diferença entre as duas geometrias, partilhasses algumas conclusões que podes tirar.*
103. **Carolina:** *A distância Euclidiana e a distância Táxi só coincidem quando os pontos estão na vertical ou na horizontal …*
104. **Professora:** *Já referiste isso, e que diferenças há?*
105. **Carolina:** *São diferentes… porque…*
106. **Gabriel:** *Na Euclidiana não temos de estar preocupados em marcar o caminho por onde é possível ir.*
107. **Professora:** *Porquê? O que queres dizer?*
108. **Gabriel:** *É como se não houvesse obstáculos.*
109. **Carolina:** *Repete lá o que disseste antes…*
110. **Gabriel:** *Aqui (aponta para a tabela do lado esquerdo da ficha) tu não tens que te preocupar com o que é que são as quadrículas… tu simplesmente diriges-te para lá.*
111. **Carolina:** *Só te podes movimentar na vertical e na horizontal, é isso? E aqui podes movimentar-te em qualquer direção?*

112. ***Gabriel:*** *Mas isso deriva do facto de não poderes passar por cima dos quadrados!*

113. ***Carolina:*** *Estou-te a dizer… só podes traçar retas horizontais e verticais para chegar ao ponto e aqui (aponta para a tabela da esquerda) podes traçar na diagonal.*

114. ***Gabriel:*** *Mas aqui podes traçar na diagonal porque não tens, digamos assim, obstáculos. Se aqui não houvesse obstáculos podias ir de Z para Y.*

115. ***Professora:*** *A "regra" não permite… Não são "obstáculos" … é uma regra. É como nos jogos… é a regra do jogo: "só te podes deslocar na horizontal e na vertical".*

116. ***Gabriel:*** *O que eu tiro é que na cidade a utilização da distância Táxi leva-nos a andar mais unidades do que é preciso na distância Euclidiana.*

117. ***Professora:*** *Então uma das diferenças é que entre dois pontos a distância Táxi é… (Gabriel interrompe)*

118. ***Gabriel:*** *maior…diferente.*

119. ***Professora:*** *Maior? ...diferente? Como é?*

120. ***Gabriel:*** *Maior!*

121. ***Professora:*** *E porquê?*

122. ***Gabriel:*** *Porque os dois pontos não se …*

123. ***Professora:*** *Tenta lembrar-te de um conhecimento do ensino básico… vê esta figura geométrica (aponta para o traçado de triângulos já construídos na tabela da direita da ficha do Gabriel)*

124. ***Carolina:*** *Triângulo retângulo.*

125. ***Gabriel:*** *Na distância Táxi só somamos a medida dos catetos.*

126. ***Professora:*** *Desigualdade triangular, diz-vos alguma coisa?*

…(silêncio)…

127. ***Gabriel:*** *a soma de dois lados de um triângulo… (parou e ficou a pensar)*

128. ***Professora:*** *Continua… é isso …*

129. ***Gabriel:*** *… é sempre maior que o outro lado.*

130. ***Carolina:*** *mas isso é para um triângulo qualquer, não é preciso ser retângulo.*

131. ***Professora:*** *Se é válido para um triângulo qualquer também o será para um caso particular… Não achas?*

132. ***Carolina:*** *Claro, claro…*

133. ***Professora:*** *Vamos voltar à distância Euclidiana… então, podemos concluir que a distância entre dois pontos é?...*

134. ***Gabriel:*** *… é sempre menor do que a distância Táxi entre os mesmos pontos.*

135. ***Professora:*** *Sempre?*

136. Carolina: *Não! é igual quando os dois pontos se situam na horizontal ou na vertical, porque assim não temos nenhum triângulo.*

137. Professora: *Vamos lá fazer uma síntese de diferenças entre uma distância e a outra.*

138. Gabriel: *Já temos uma diferença, é sempre maior ou igual do que a distância euclidiana… (Carolina interrompe)*

139. Carolina: *e que na Euclidiana só existe um caminho mais curto e na Táxi existiam vários.*

140. Professora: *Sim, todos eles com a mesma distância. Por isso aqui (aponta para a tabela da esquerda) não tens de te preocupar porque só tens um único caminho, aqui (aponta para a tabela da direita) podes escolher o caminho que quiseres entre vários, todos eles com a mesma medida. Façam os vossos registos e continuamos no nosso próximo encontro.*

1.2.2. Sessão [11-GT_T$_2$]

Compareceram a Carolina e o Gabriel como era habitual e sentaram-se, frente a frente, numa mesa. Sentei-me com eles no topo da mesma mesa, distribui a ficha GT_T$_2$ e eles tiraram o lápis das respetivas mochilas. Mantive a opção, já tomada nas sessões anteriores, de não fazer nenhuma introdução e sugeri que iniciassem a resolução da tarefa. Como o Gabriel é fã de jogos, brinquei com a situação:

1. ***Professora**: Para quem gosta de jogos, aí está um jogo e tal como é referido na ficha: "a "regra" agora obriga a que sempre que tenham de utilizar a distância entre dois pontos terá de ser a distância da Geometria Táxi (ou Geometria Pombalina)".*
2. ***Gabriel:** É o círculo quadrado!*
3. ***Professora**: Explica lá isso Gabriel…*

(Gabriel não responde, fica em silêncio e acompanha a marcação de pontos da Carolina. Ele não faz.)

4. ***Carolina:** Já tenho P_1 e consegui marcar mais três (Representou os pontos na horizontal e na vertical que se intersetam em A.)*
5. ***Professora**: Gabriel, podes partilhar connosco o que estavas a dizer.*
6. ***Gabriel:** O conjunto de pontos do plano que distam 3 unidades do ponto A é um lugar geométrico… é um círculo!*
7. ***Professora**: Como?*
8. ***Carolina:** Não, não… aí era menor ou igual.*
9. ***Professora**: O que é que era menor ou igual? Podes ser mais precisa.*
10. ***Gabriel:** Distância!*
11. ***Carolina:** é isso… com distância sempre igual, é a circunferência. O círculo é a circunferência e o interior…*
12. ***Gabriel:** mas aqui vai ser diferente.*
13. ***Professora**: O que queres dizer com "ser diferente"?*
14. ***Gabriel:** Espere um pouco…*

(Os dois estão a fazer várias representações usando diferentes valores para a medida do raio, mas apenas representam pontos sobre os vértices das quadrículas)

15. ***Gabriel:** Lá está… temos sempre pontos sobre os lados de quadrados!*
16. ***Professora**: Já ouviste ou viste isto, Gabriel?*
17. ***Gabriel:** Não tenho a certeza se era isto … mas foi aqui no clube. Mas já não me lembro!*
18. ***Carolina**: O problema está na distância…*
19. ***Professora**: Problema? O que queres dizer?*

20. ***Carolina:*** *Com a distância assim, os pontos que estão à mesma distância de um dado ponto não ficam numa circunferência.*
21. ***Professora:*** *Então o que acontece?*
22. ***Gabriel:*** *As circunferências são quadrados. Era isso que eu queria dizer no início. Os pontos ficam todos sobre os lados de um quadrado e não sobre a circunferência.*
23. ***Carolina:*** *Pois é! E isso é por causa da distância.*
24. ***Professora:*** *Notem que mantivemos a definição do lugar geométrico "circunferência" tal como a conhecem.*
25. ***Gabriel:*** *Mas a distância foi definida de maneira diferente e assim as circunferências têm outra forma e são quadrados.*
26. ***Carolina:*** *Podemos unir os pontos?*
27. ***Gabriel:*** *Podemos! Olha aqui, (aponta para um ponto) fica à mesma distância, e assim (une os pontos) temos o quadrado.*
28. ***Carolina:*** *Pois era esse o problema… podemos dizer que são circunferências da Geometria Táxi?*
29. ***Professora:*** *Podem…, mas lembrem-se de que isso acontece porque a distância não é a distância da Geometria Euclidiana. Registem as vossas conclusões.*

(Começam a escrever, e o Gabriel fala baixinho enquanto escreve)

30. ***Gabriel:*** *… a geometria mudou…*
31. ***Carolina:*** *(Interrompe o colega) Não! O que mudou foi a distância! Até a definição do lugar geométrico se manteve! Não ouviste?*
32. ***Gabriel:*** *Então basta dizer que como a distância aqui é diferente, as circunferências são quadrados.*
33. ***Carolina:*** *A distância entre dois pontos é a soma das distâncias medidas na horizontal e na vertical, como se fosse a soma das medidas dos catetos…*
34. ***Professora:*** *Parece que nos estamos todos a entender… podem arrumar e continuamos na próxima semana, pode ser?*
35. ***Gabriel:*** *Está bem!*

1.2.3. Sessão [11-GT_T3]

Carolina e Gabriel compareceram tal como era habitual. Foram sentar-se na mesa posicionando-se como o tinham feito nas sessões anteriores. Retiraram das mochilas os lápis e a borracha muito rapidamente como se estivessem com pressa de começar. (Esta sessão, tal como a anterior, seria apenas de 45 minutos)

Era visível o entusiasmo dos dois alunos e este era revelador da "vontade" em começar para satisfação da sua curiosidade.

Distribui a tarefa 3 e comecei a gravação.

1. ***Professora:*** *Precisam que relembremos alguma coisa do nosso último encontro ou são capazes de "arrancar"? Peço que vão conversando e que partilhem todas as vossas reflexões. Não se limitem a ler e a escrever…*

Leem em voz baixa…

2. ***Gabriel:*** *Basta contar na horizontal e na vertical a partir de A, é mais fácil.*
3. ***Carolina:*** *Pois tens razão… os outros estão à mesma distância.*
4. ***Professora:*** *E porquê, Carolina?*
5. ***Carolina:*** *Isto é uma circunferência, certo?*
6. ***Gabriel:*** *É! Porque estamos a usar a distância Táxi, por isso é!*

(Nota-se que a Carolina fica satisfeita com a resposta)

7. ***Carolina:*** *Para sabermos o perímetro temos de saber a medida a toda a volta… (pensa durante uns segundos) Só precisamos da medida da diagonal da quadrícula.*
8. ***Gabriel:*** Se *estivéssemos a usar a distância euclidiana usávamos o Teorema de Pitágoras. Os lados da quadrícula eram os catetos: um ao quadrado, mais um ao quadrado é igual a diagonal ao quadrado…*
9. ***Carolina: E****ra raiz de dois! Mas com esta distância ainda é mais fácil, é logo 2!*
10. ***Professora:*** *Muito bem… então o perímetro é…*

(A Carolina segue o contorno da figura com o lápis. Nota-se que os dois estão a calcular mentalmente, mas o Gabriel interrompe:)

11. ***Gabriel:*** *cinco… cinco vez dois, dez… quatro vez dez, quarenta!*
12. ***Carolina:*** *É isso!*
13. ***Professora:*** *Ok! Avancem.*

Leem durante uns breves segundos e ambos fazem uma representação semelhante à figura seguinte.

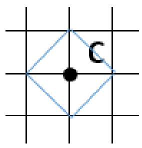


Figura 14: *Recorte na tarefa resolvida (GT_T3).*

14. ***Carolina:*** *Só os vértices são quatro.*

15. ***Gabriel:*** *Mas em 2.2 são cinco.*

(A Carolina aceita sem qualquer reação)

16. ***Gabriel:*** *(Dirigindo-se à professora) Para a área basta calcular a área de um quadrado? Aqui não vai haver π?*

17. ***Professora:*** *O que vos parece?*

18. ***Carolina:*** *πr^2 é a área do círculo na Geometria Euclidiana. Aqui…*

19. ***Gabriel:*** *Se é um quadrado, aqui não precisamos do π. Fazemos lado vezes lado, vai ser dois vezes dois.*

20. ***Carolina:*** *(Dirigindo-se à professora) É isso?*

21. ***Professora:*** *Como fizeste o perímetro? A distância permite-te ou não, saber a medida do lado? A partir daí calculas a área dessa figura usando o que sabes para calcular a área. Esta geometria só difere da Geometria Euclidiana na distância.*

22. ***Gabriel:*** *Pois… para o perímetro também não fizemos $2\pi r$. Aqui não precisamos do π.*

23. ***Carolina:*** *Mas isto (aponta para a figura) não é uma circunferência?*

24. ***Gabriel:*** *É, mas é com a distância esquisita!*

25. ***Professora:*** *Calma! Ela não é esquisita…*

26. ***Gabriel:*** *Mas é diferente e faz tudo esquisito.*

27. ***Professora:*** *Vamos lá esclarecer. Não há nesta geometria uma nova definição para perímetro ou para área. Continua a ser aquilo que sempre foram: perímetro para medida do contorno da figura e área para a medida da superfície que a figura ocupa. Repito, só alterámos a noção de distância entre dois pontos que se determina de maneira diferente da distância a que estão habituados.*

28. ***Carolina:*** *Pronto, então temos para o raio 1, perímetro 8 e área 4.*

29. ***Gabriel:*** *Esta (aponta para a 1ª figura da tarefa) tem perímetro 40 e área 10 vezes 10, que é 100.*

30. ***Professora:*** *Estou de acordo com vocês.*

(Leem sem falar)

31. ***Gabriel:*** *para 1 e 5 já temos as respostas todas.*

32. ***Carolina:*** *A primeira coluna é a mais fácil, é sempre 4r.*

33. ***Professora:*** *Confirmas Rafael?*

34. ***Gabriel:*** *Sim, sim… essa já está.*

(Carolina está a representar no verso da folha para o caso do raio 2 e fala para si mesma, mas em voz alta.)

35. ***Carolina:*** *oito, mais quatro, mais um.*

36. ***Gabriel:*** *treze! Quando o raio é dois, são treze os pontos.*

(Continuam a fazer outras representações, usando diferentes valores para o raio, mas não conversam.)

37. Professora: *Então de repente ficaram mudos.*

38. Gabriel: *O problema está em arranjar uma expressão para a segunda coluna… Quando vou verificar há sempre algum que falha…*

39. Carolina: *Pois, 4r dá para a primeira, 8r dá o perímetro e 2r vezes 2r dá para a área.*

40. Professora: *Podes simplificar a expressão para a área, não achas?*

41. Carolina: *Claro! $4r^2$. Mas ainda não consegui a dos pontos interiores…*

42. Gabriel: *Eu também não. Preciso sempre do n.º de pontos anterior para lhe somar 4r.*

43. Professora: *Explica-te melhor…*

44. Gabriel: *Olhe aqui (A Carolina também se debruçou sobre a ficha do colega) Para o raio 2 está fora do sítio, mas dá para perceber. Preciso de saber o anterior para lhe somar 4r.*

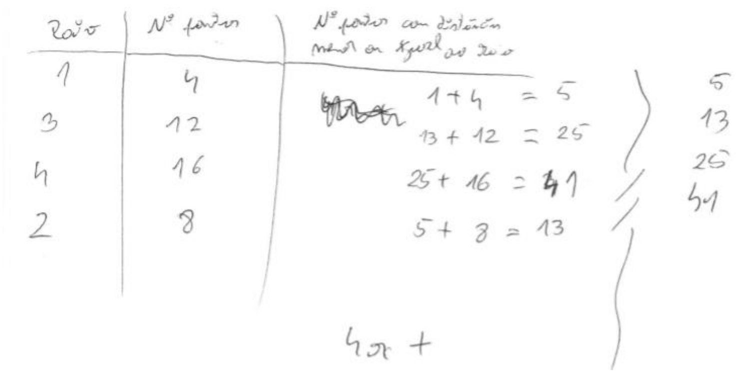


Figura 15: *Recorte da ficha do Gabriel (GT_T$_3$).*

45. Professora: *Conseguiste obter uma expressão por recorrência e está correta. Percebeste Carolina?*

46. Carolina: *Pois assim dá!*

47. Professora: *Vocês não deram conta, mas já tocou há alguns minutos. Temos de terminar por hoje.*

48. Gabriel: *Já? Hoje passou mesmo rápido!*

1.3. Grupo do 12.ºano (17-18 anos)

1.3.1. Sessão [12-GT_T1]

Compareceram os três alunos do 12.ºano: David, Rafael e Roberto. Sentaram-se na mesma mesa o Rafael e o David ficando o Roberto em pé. Disse-lhe para se sentar junto dos colegas e sentou-se no outro lado da mesa o que permitiu que eu ocupasse o lugar ao lado dele e em frente dos dois colegas que já estavam sentados.

Pedi-lhes que tirassem o material de escrita das mochilas, mas que não precisavam de papel pois iriam escrever na ficha que eu tinha para lhes distribuir.

Distribui a tarefa 1 e pedi que começassem.

1. ***Rafael:*** *Podemos discutir uns com os outros?*

Este grupo de alunos são meus alunos desde o 7.º ano e nos últimos três anos têm sido assíduos no Clube de Matemática. Nota-se que estão perfeitamente à vontade e habituados a resolver tarefas de investigação.

2. ***Professora:*** *Estava a ver que ninguém começava… claro que podemos e devemos conversar todos… Como é hábito é mesmo isso que pretendo. Até estou a gravar…*
3. ***Rafael:*** *(Apontando para o registo feito na figura.) O caminho mais simples é este!*
4. ***David:*** *Como?*

(Roberto olha para os colegas como se não estivesse a perceber nada com semblante confuso)

5. ***Rafael:*** *Mais curto, sim, porque as diagonais são sempre maiores que os lados…*
6. ***Professora:*** *Roberto não tens nada a dizer?*
7. ***Roberto:*** *(Roberto aponta para o registo dele) O caminho mais curto é este!*
8. ***Professora:*** *Está bem, mas o que é "caminho mais curto?"*
9. ***David:*** *Então, o mais rápido é este! (aponta para a sua ficha)*
10. ***Professora:*** *A definição de caminho mais curto passa por velocidade?*
11. ***David:*** *Não é isso… este é o mais curto! (insiste em apontar)*
12. ***Professora:*** *Então será que podem representar de outro modo o caminho mais curto?*
13. ***Rafael:*** *Não! (Resposta bastante acentuada como se não houvesse qualquer outra discussão à volta da questão.)*
14. ***Professora:*** *Ok Rafael…então como definiriam, em linguagem natural, o que acabaram de representar na vossa figura?*

15. ***David:*** *O caminho mais curto entre os pontos A e B, é o segmento de reta AB.*
16. ***Rafael:*** *Por isso é que se abrem os túneis…*
17. ***Professora:*** *Explica lá isso melhor Rafael?*
18. ***Rafael:*** *Temos de ir em linha reta…*
19. ***Professora:*** *Ah!... Será o segmento de reta invocado pelo David? Roberto o que te parece?*
20. ***Roberto:*** *Eu também acho que o caminho mais curto entre os pontos A e B é um segmento de reta.*
21. ***Professora:*** *Então parece-me que estamos todos de acordo. Continuemos…*

Durante brevíssimos segundos leem, sem se pronunciar, cada um para si.

22. ***David:*** *Podemos continuar a assinalar na ficha?*
23. ***Professora:*** *Claro, é mesmo para assinalarem e registarem o que precisarem.*
24. ***Rafael:*** *Mas há vários!*
25. ***Professora:*** *Do que estás a falar Rafael?*
26. ***Rafael:*** *Não podemos assinalar porque há vários.*
27. ***David:*** *Aqui diz para assinalar <u>o caminho</u>, a pergunta não está bem!*
28. ***Professora:*** *Se há vários, assinalem um deles. Mas atenção, pretende-se o mais curto.*
29. ***Rafael:*** *É esse o problema. Há vários, mesmo sendo o mais curto!*
30. ***Professora:*** *Está bem, têm razão… assinalem um na figura.*

Estes alunos revelam um poder crítico que não foi visível em nenhum dos grupos anteriores e de forma muito pertinente põem em causa a redação do enunciado.

31. ***Professora:*** *Insistem em que há vários… são capazes de dizer quantos são, afinal?*
32. ***David:*** *São as combinações.*
33. ***Professora:*** *O que achas Roberto? Estás muito calado.*
34. ***Roberto:*** *Há quatro caminhos com quatro unidades de comprimento.*
35. ***Professora:*** *E onde "entram" as combinações?*
36. ***David:*** *Demos este ano. No cálculo combinatório e fizemos exercícios em que tínhamos de contar os caminhos. Estão no manual.*
37. ***Professora:*** *Todos têm presente o que o David está a dizer?*

Pela expressão e pelo aceno ligeiro com a cabeça, nota-se que estão em sintonia. O Roberto, para além de ser o menos conversador é também o menos expressivo e por isso insisto em repetir-lhe a questão.

38. ***Professora:*** *Estás relembrado Roberto?*
39. ***Roberto:*** *Sim, aqui podíamos fazer combinações de 4, três a três.*
40. ***David:*** *…ou de quatro, um a um, via-se logo que eram quatro!*

41. *Professora*: *Está bem.*

Estes alunos estão munidos de conhecimentos que não fazem parte do domínio de conhecimentos dos alunos do 10.º e 11.º anos. Podemos considerar que as ferramentas psicológicas de que dispõem restringem a sua zona de desenvolvimento proximal. Não existe uma grande distância entre os conhecimentos já adquiridos e o conhecimento que está a ser construído.

42. *Professora*: *Podemos virar a folha e continuar, por favor? Podes ler Roberto? (Roberto lê em voz alta e após a leitura ficam os três em silêncio)*

43. *Rafael*: *Posso criar um referencial?*

44. *Professora*: *Se precisas, podes…*

45. *David*: *Nas quadrículas marcamos todos os caminhos?*

46. *Professora*: *Se quiseres… Se achas que te pode dar jeito. Quero que tirem algumas conclusões…*

Depois de fazerem algumas representações no quadriculado respeitante à distância euclidiana e à distância Táxi, o Rafael e o David procedem ao registo recorrendo à linguagem formal da Matemática. Este registo revela que possuem conhecimentos que lhes permite proceder a passagem entre representações diferentes.

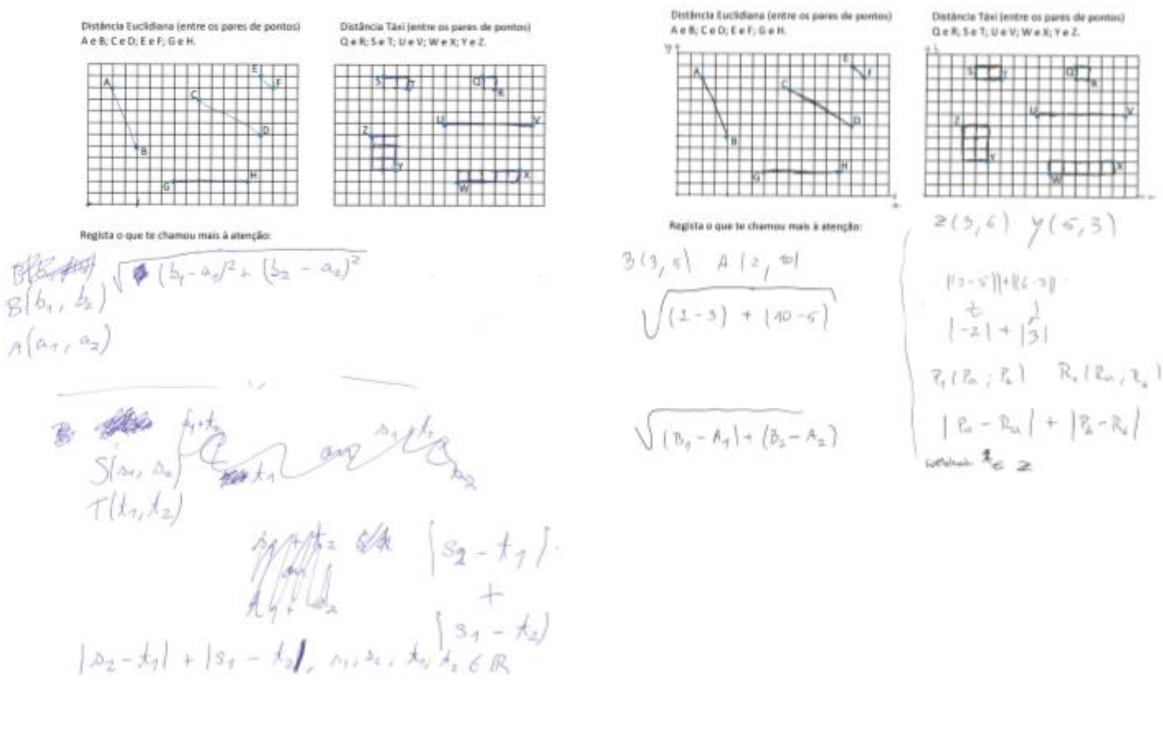


Figura 16: *Recortes das fichas do David, à esquerda, e do Rafael, à direita (GT-T$_1$).*

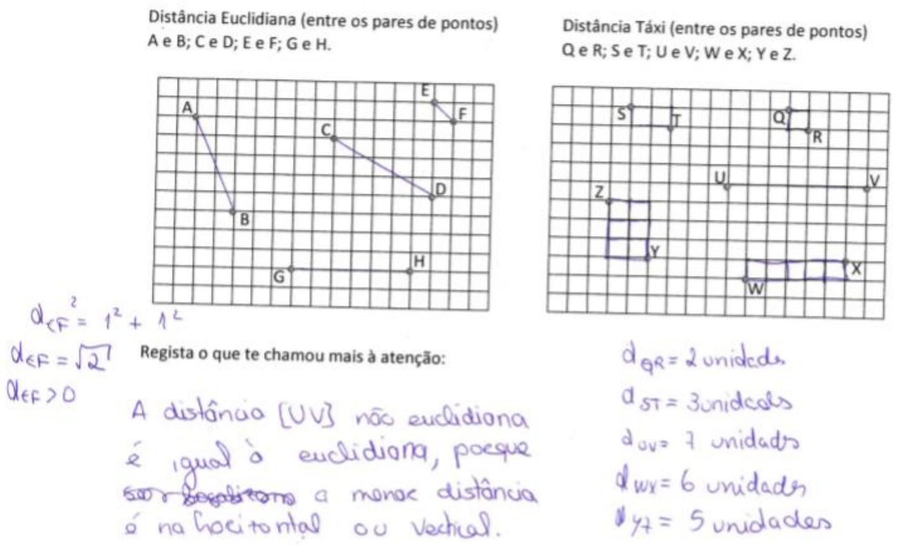


Figura 17: Recorte da ficha do Roberto (GT_T_1).

O Roberto olhou para as fichas dos colegas e sentiu-se incomodado e questionou:

47. ***Roberto**: A distância entre U e V determina-se da mesma maneira que a distância entre G e H?*
48. ***Professora**: Estão a ouvir o Roberto? Roberto, repete a tua questão, por favor?*
49. ***Roberto:** Como U e V estão na horizontal e G e H também, não há diferença no cálculo da distância. Eu acho que não.*
50. ***Professora**: O vosso colega está a dizer que na situação dos pontos U e V e entre G e H, a distância euclidiana e a distância Táxi são iguais. Concordam?*
51. ***David:** Se estivessem na vertical também era.*
52. ***Professora**: Então o que podemos concluir?*
53. ***Rafael**: (encolheu os ombros) Se os pontos estiverem na horizontal ou na vertical não precisamos de usar isto (apontou para a sua ficha), mas isso é lógico!*
54. ***Professora**: o que queres dizer com "isso é lógico"?*
55. ***Rafael**: é normal… porque a horizontal ou a vertical é mesmo o caminho mais curto, quer para uma distância quer para a outra.*
56. ***Professora**: Estão todos de acordo?*
57. ***Roberto**: Faz sentido!*
58. ***Professora**: Estou a olhar para os vossos registos… Rafael, porque identificas as coordenadas como pertencentes a Z e tu David, porque as colocaste pertencendo a R?*
59. ***David:** Então porque dá para todos os valores!*
60. ***Professora**: E tu, Rafael?*

61. ***Rafael:*** *Teve a ver com os pontos que estavam representados. Como estão no vértice das quadrículas e a quadrícula tem uma unidade de comprimento para a medida do lado, são sempre coordenadas inteiras.*
62. ***Professora:*** *Então podemos generalizar para os reais, como disse o David?*
63. ***Rafael:*** *Claro! As coordenadas podem ter valores reais, eu só fiz assim por causa destes pontos.*
64. ***Professora:*** *Podemos dar a sessão por terminada ou querem perguntar alguma coisa?*

Abanaram a cabeça dizendo que não

65. ***Professora:*** *Então até para a próxima sessão*

1.3.2. Sessão [12-GT_T_2 e T_3]

David, Rafael e Roberto aguardavam a minha chegada junto da sala. Estavam muito conversadores e bem-dispostos.

Entrámos e sentaram-se nos mesmos lugares que tinham ocupado na última sessão. Tiraram as canetas e coloquei-me ao lado do Roberto, tal como da última vez e comecei a gravação.

1. ***David:*** *Vamos continuar com atividades para usar a Geometria Táxi?*
2. ***Professora:*** *Acharam interessante e querem mais? É isso?*

Encolheram os ombros, parecia que lhes era indiferente. Mas queriam qualquer "coisa". Era claro o ar de curiosidade que os envolvia.

3. ***Professora:*** *Têm aqui uma tarefa que vem na sequência do que falámos a semana passada. Vamos lá, mãos à obra e vamos conversando, pode ser?*

Distribuí a tarefa e eles começaram a leitura em voz baixa.

4. ***David:*** *Isto é a mesma situação do círculo na euclidiana? Nós também dizíamos* "conjunto dos pontos representados à mesma distância de um ponto fixo".
5. ***Professora:*** *Círculo? Podes ser mais explícito.*
6. ***David:*** *Então todos os pontos que ficavam a uma distância fixa do centro, estavam no círculo. Não era?*
7. ***Professora:*** *Ninguém tem nada para dizer? Era o círculo?*

Roberto e Rafael olham entre eles, mas não reagem.

8. ***David:*** *Circunferência! O círculo era preenchido.*
9. ***Professora:*** *Pois assim parece-me melhor.*
10. *Roberto: Pois era… no círculo a distância era menor ou igual…*

11. Professora: *Pois David, dizíamos que a condição que define o conjunto de pontos que pertencem ao círculo é que todos esses pontos se situavam a uma distância menor ou igual à medida do raio. Se essa distância fosse apenas igual à medida do raio, esses pontos pertenciam à circunferência.*

12. ***David:*** *(fala sozinho) Há muitos…*

13. ***Professora:*** *Do que estás a falar Rafael?*

14. ***David:*** *Da resposta à 3.*

15. ***Professora:*** *Já respondeste às anteriores?*

16. ***David:*** *Já! Tenho isto (mostra a construção)*

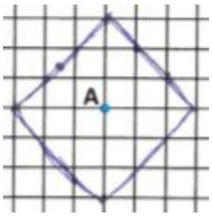


Figura 18: *Recorte da ficha do David (GT_T_2).*

17. ***Rafael:*** *Eu não acho…*

(Todos olhamos para a ficha do Rafael).

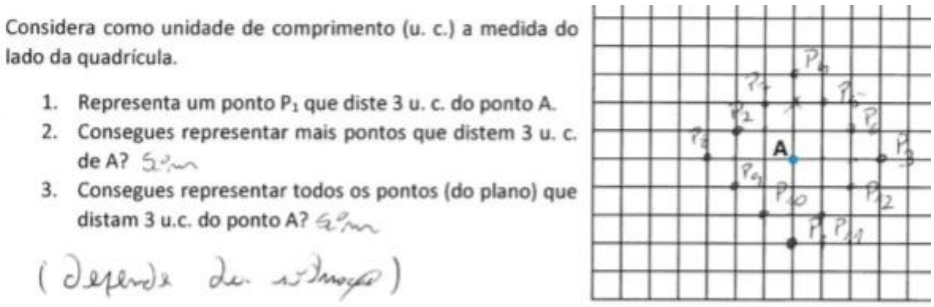


Figura 19: *Recorte da ficha do Rafael (GT_T_2).*

18. ***Rafael:*** *Continua a ser a situação em que depende das coordenadas dos pontos poderem ser reais ou são números inteiros.*

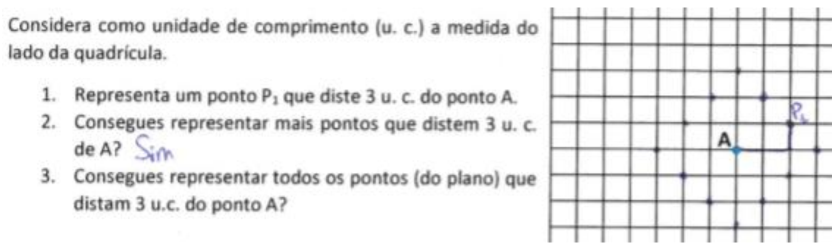
19. ***Professora:*** *O que está em discussão é se temos um conjunto finito ou um conjunto infinito de pontos.*

20. ***David:*** *Infinito… estes pontos também dão! (Aponta para os pontos sobre o lado do quadrado que representou.) As coordenadas podem ser reais!*

21. ***Rafael:*** *Isso não é dito em nenhum lado. Por isso é que acho que depende.*

22. ***Professora:*** *Então Roberto, e tu o que achas?*

23. ***Roberto:*** *É estranho. Estamos habituados o que uma circunferência seja sempre assim (Com a mão faz, no ar, o gesto circular, mantendo o dedo indicador a contornar a circunferência euclidiana.)*


Considera como unidade de comprimento (u. c.) a medida do lado da quadrícula.

1. Representa um ponto P_1 que diste 3 u. c. do ponto A.
2. Consegues representar mais pontos que distem 3 u. c. de A? Sim
3. Consegues representar todos os pontos (do plano) que distam 3 u.c. do ponto A?

Figura 20: *Recorte da ficha do Roberto (GT_T_2).*

24. ***Professora:*** *O Roberto está ainda a "olhar" para a "forma geométrica".*
25. ***Professora:*** *Vamos por partes: Primeiro, todos confirmam que a forma geométrica não é a que habitualmente conhecemos para circunferência. Quanto ao número de pontos também me parece que apresentaram argumentos válidos. Não sei se acompanhaste esta parte Roberto?*
26. ***Roberto:*** *Sim, sim… depende de estarmos a usar coordenadas inteiras ou reais. A parte do quadrado é que é mais confusa…*
27. ***Professora:*** *Isso acontece porque usaram sempre a Geometria Euclidiana. Estão tão habituados que, sempre que ouvem o termo "circunferência", na vossa cabeça veem sempre com esta forma (reproduzi o gesto feito pelo Roberto)*
28. ***Rafael:*** *A circunferência não é sempre um redondo…*
29. ***Professora:*** *O que dizes ser "redondo" tem a ver com a representação geométrica que mentalmente associas a uma circunferência. Se lhe associarmos a definição, enquanto lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma condição que depende da distância, será a definição de distância que condiciona o lugar geométrico ocupado pelos pontos.*
30. ***Rafael:*** *Pois tudo depende da distância. Os pontos dos lados do quadrado estão à mesma distância do centro, na distância Táxi.*
31. ***Roberto:*** *E o quadrado é uma circunferência (ri-se).*
32. ***Professora:*** *A esse quadrado devemos chamar Circunferência Táxi, para não haver confusão com a circunferência euclidiana. Então e agora, podemos continuar? Temos aqui a tarefa 3.*

(Roberto interrompe-me antes de eu distribuir a nova tarefa.)

33. ***Roberto:*** *Então todos os quadrados da Geometria Euclidiana são circunferências na Geometria Táxi… (fala em tom afirmativo, como se se estivesse a autoconvencer do que está a dizer.)*
34. ***David:*** *Claro e o raio é a medida de metade da diagonal do quadrado. Há mais distâncias noutras Geometrias?*

35. ***Professora:*** *Achas que se pode limitar a imaginação? (Os três esboçam um sorriso e cruzam olhares) Ok! será que é desta que continuamos? Já não temos muito tempo.*

36. ***Rafael:*** *Hoje podemos ficar mais meia hora, a seguir não temos nada. A professora pode?*

37. ***Professora:*** *Está combinado, (distribuí a tarefa 3) continuem.*

38. ***Roberto:*** *Os pontos que estão representados têm coordenadas inteiras. Então para o perímetro fazemos 4 vezes o lado. A distância de um vértice ao outro do quadrado é 10, cinco unidades na horizontal e mais cinco na vertical.*

39. ***Rafael:*** *Também podemos calcular o lado fazendo cinco vezes dois.*

40. ***Professora:*** *pois, explica lá isso.*

41. ***Rafael:*** *A diagonal de cada quadrícula é duas unidades de comprimento. O lado do quadrado tem cinco diagonais de quadrículas. O perímetro é 40.*

42. ***Professora:*** *Quando estamos na Geometria Euclidiana, o quociente entre o perímetro da circunferência e o diâmetro é o quê?*

(Ficam todos pensativos)

43. ***David:*** *O perímetro é $2\pi r$, o diâmetro é 2r, o quociente é… π.*

44. ***Professora:*** *usando o perímetro e o diâmetro da Circunferência Táxi, o que é o quociente?*

45. ***David:*** *Dá 4!*

46. ***Professora:*** *Passem para a questão seguinte e quando for pedida a área vejam o que acontece.*

47. ***Roberto:*** *É a área do quadrado… não precisámos de π.*

48. ***David:*** *com raio um, a área é quatro.*

49. ***Professora:*** *Como obtiveste?*

50. ***David:*** *2 vezes 2!*

51. ***Professora:*** *Roberto como ficaria se usasses a fórmula para a área da circunferência euclidiana?*

52. ***Roberto:*** *(Com ar de espanto) Quer que faça πr^2?*

53. ***Rafael:*** *Ah!... já vi! Com π igual a quatro dá certo. Mesmo nesta (aponta para a figura da questão 1) a área é 100 e pode ser 4 vezes 25.*

54. ***David:*** *Ou fazemos como sabemos para o quadrado ou como se fosse a circunferência desde que π seja igual a 4.*

55. ***Roberto:*** *É melhor fazer como no quadrado e deixar π continuar a ser π.*

56. ***David:*** *Podemos passar para a questão 3?*

57. ***Professora:*** *Sim, claro!*

Durante alguns segundos ficam em silêncio e vão completando a tabela. *O Roberto virou a folha e foi fazendo representações. Fez para o raio 1, raio 2,* *raio 3, e assim sucessivamente para ir preenchendo a tabela. O Rafael e o David foram completando as colunas.*

58. ***Professora:*** *Então, não querem dizer nada?*

59. ***David:*** *4r para a primeira coluna...*

60. ***Rafael:*** *…e para a coluna do perímetro é 2 vezes 4r*

Ficam novamente em silêncio*. Rafael e David tentam encontrar uma expressão, em função do raio, para o número de* pontos cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio e que estão no vértice das quadrículas.

61. ***Professora:*** *Então o que se passa? Vão falando… digam alguma coisa. Vamos lá ver: Para o raio 1 e raio 2, todos têm a linha preenchida. Para o raio 3, o Roberto tem já a representação. O que obtiveste?*

62. ***Roberto:*** 12 pontos na circunferência, 25 pontos no interior e na circunferência, o perímetro 24 e a área deu-me 36.

63. ***David:*** Para o raio r a área é 2r ao quadrado. Porque o lado é 2r.

64. ***Roberto:*** Eu escrevi $4r^2$. Lembrei-me do π que era 4 e deu certo.

65. ***Professora:*** *E logo tu que não querias usar π! Então e a segunda coluna? Já preencheram a 4.ª e a 5.ª linha?*

66. ***David:*** *tenho estado a ver se obtenho uma expressão, mas tenho sempre de somar o número de pontos da circunferência seguinte…*

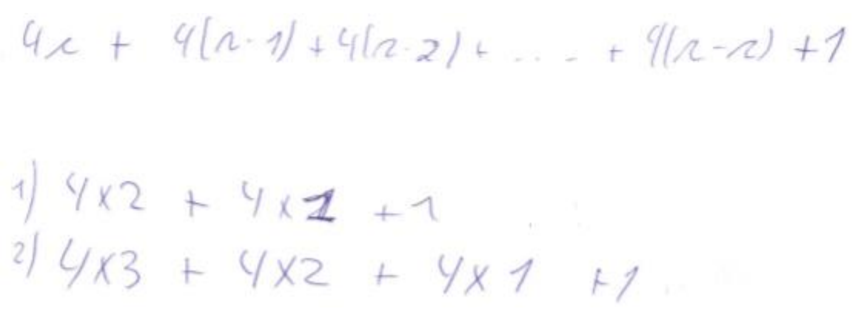


Figura 21: *Recorte da ficha do David (GT_T3).*

67. ***Rafael:*** *Podemos fazer por recorrência, como nas sucessões.*

O Roberto continuava nas representações riscando e fazendo construções. Não estava a acompanhar o que os colegas iam dizendo, mas também não o interrompi.

68. ***Professora: Gosto da ideia. Continuem…***

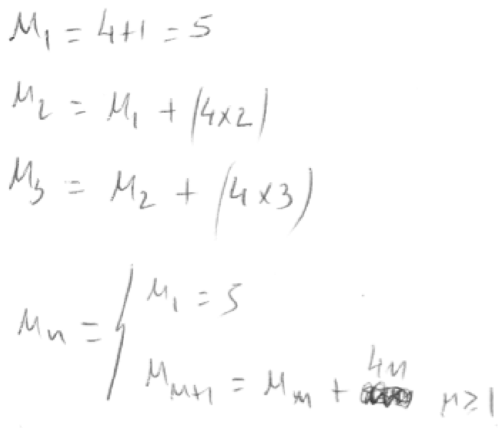


Figura 22: Recorte da ficha do Rafael (GT_T3).

69. ***Rafael:*** *Pode ser assim… dá, dá!*
70. ***David:*** *E cada vez que queres saber para um raio qualquer, fazes todos os anteriores?*
71. ***Professora:*** *Roberto, olha aqui para a ficha do David. Estás de acordo?*
72. *Roberto: Estou a acabar… (acaba de escrever e olha para a resolução do Rafael e franze a teste). Isso é muito complicado… eu não fiz nada disso.*
73. ***Professora:*** *O que andaste a fazer?*

(Todos olhámos para a ficha do Roberto.)

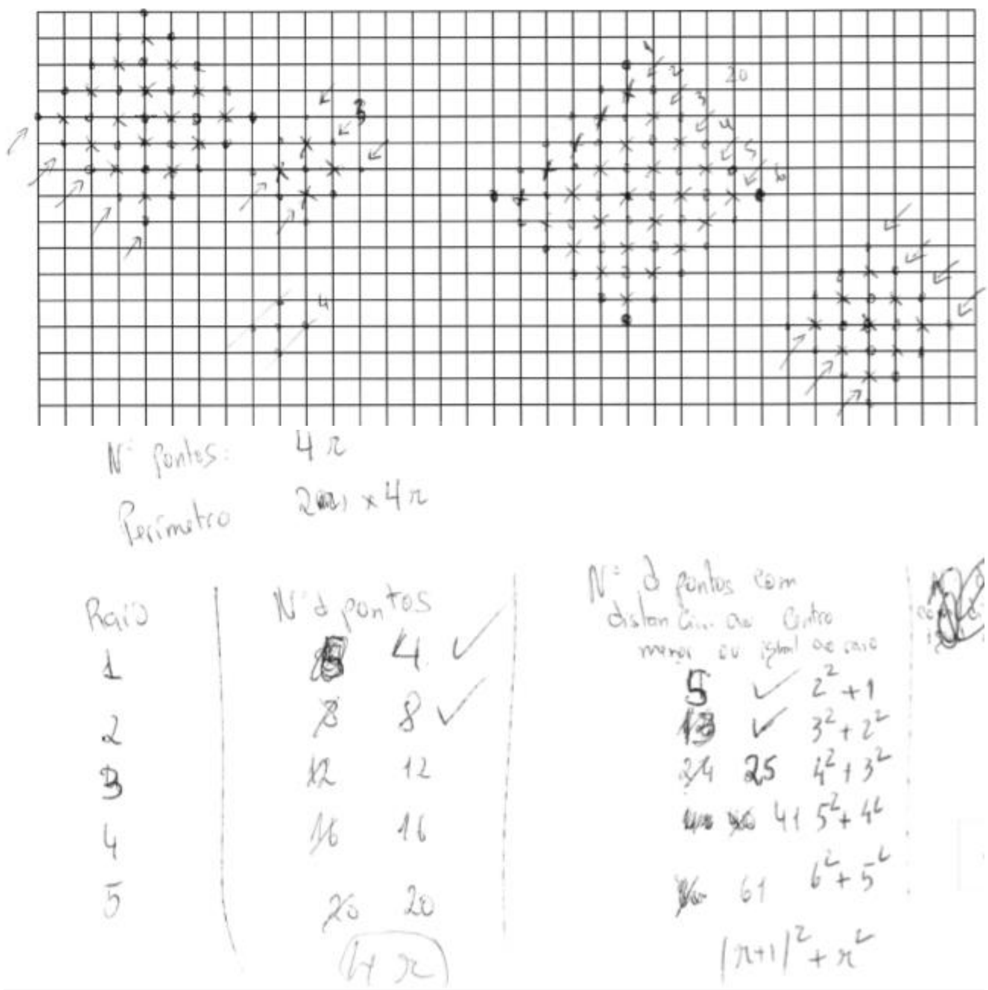


Figura 23: Recorte da ficha do Roberto (GT_T₃).

74. ***David:** O que é isso?*
75. ***Professora:** Roberto explica lá como procedeste.*
76. ***Roberto:** Em todos há sempre o mesmo número de linhas e de pontos… aqui (aponta para a figura, para a construção maior) temos seis linhas com seis pontos e cinco linhas com cinco pontos e o raio é cinco. Mas vi que dá para todos… aqui, o primeiro com raio um (aponta para a construção respetiva) também temos duas com dois pontos e uma com um. Mas só vi isso quando estava com raio cinco, mas dá para todos. A construção dá para ver!*
77. ***Rafael:** Pois dá… mas como a expressão é a soma de dois quadrados se calhar podemos decompor a figura em dois quadrados… (dirigindo-se à professora) Posso tirar uma folha para ver uma coisa?*
78. ***Professora:** Podes, mas queremos todos ver…*

(Ficámos todos a olhar para o Rafael que começou a fazer representações de pontos sucessivas, para diferentes valores do raio.)

79. ***Rafael:*** *Não vejo quadrados… ah! e se unir estes pontos? (apontou para os pontos que sobravam à volta dos interiores que formavam um quadrado, no caso do raio igual a 3)*

80. ***David:*** *São triângulos e juntos formam o quadrado. Já temos os dois quadrados…*

81. ***Roberto:*** *Estas figuras são mesmo giras… eu não vi os quadrados, só vi linhas iguais! Mas dá…*

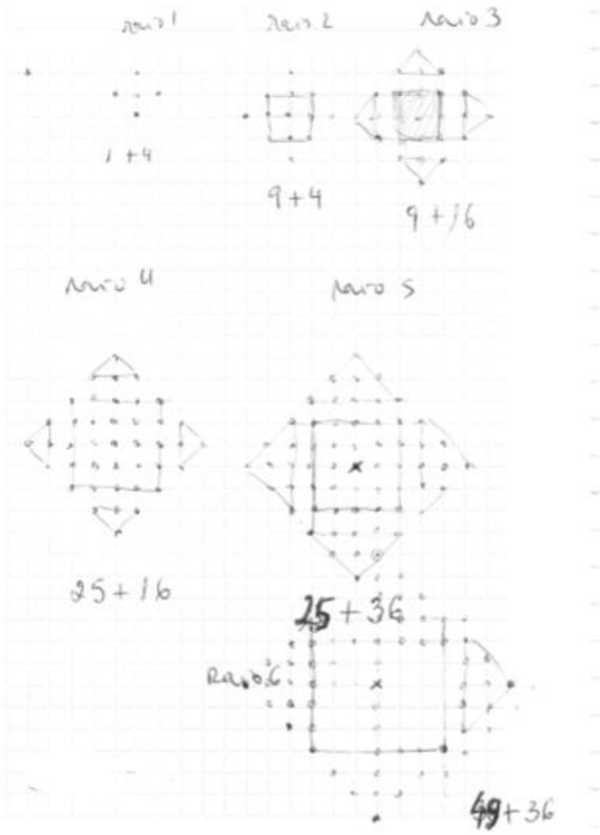


Figura 24: *Recorte da construção do Rafael (GT_T3).*

82. ***Professora:*** *Pois eu estou admirada com tudo o que viram… Gostei! Mas temos mesmo de terminar, arrumem tudo pois temos de sair.*

2. Geometria Esférica (GE)

"E quem desta maneira andar irá caminhar direito"
Pedro Nunes (1502-1578)[34]

2.1. Grupo do 10.ºano (15-16 anos)

2.1.1. Sessão [10-GE_T_1]

(O Ivan não fez parte do grupo nesta sessão nem na seguinte pois passou a frequentar o desporto escolar e os horários eram sobrepostos com os do Clube de Matemática.
A sessão realizou-se na Sala de Estudo, que é mais pequena que a Sala do Clube. Nesta sala existe uma mesa redonda e os alunos ocuparam os lugares nessa mesa. Acharam estranho haver computadores portáteis na mesa e os três alunos, Madalena, Pedro e Alexandre, pediram para utilizar um só computador pois juntavam-se mais e conseguiam trabalhar juntos. Não houve uma introdução prévia. A tarefa 1 foi distribuída e os alunos começaram a leitura individualmente. Não notei nenhuma reação à nova tarefa e depois de alguns instantes iniciei o registo áudio.)

1. ***Professora:*** *Conseguem abrir o ficheiro?… já está!…*

(Pedro vai explorando o ficheiro e os colegas olham fixamente o monitor. O Pedro está sentado entre os colegas e talvez por isso foi o primeiro a usar o teclado)

2. ***Pedro:*** *Qual é o ponto fixo?*
3. ***Alexandre:*** *É o A.*
4. ***Pedro:*** *(Pedro lê em voz alta a questão da ficha e vai repetindo em surdina…) … "O que podes concluir quanto ao caminho mais curto entre dois pontos na superfície esférica" … caminho mais curto entre dois pontos na superfície esférica …*

[34]Esta citação encontra-se na página de abertura de http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/urso2.html

(Madalena e Alexandre mantêm-se em silêncio olhando para o monitor, seguindo o que o Pedro vai fazendo)

5. ***Pedro:*** *Não dá para definir distância entre A e B?*
6. ***Professora:*** *Como? O que pretendes? A distância é o valor que aparece…*
7. ***Pedro:*** *Não é isso… sermos nós a introduzir o valor…*
8. ***Professora:*** *Mas tu podes deslocar o ponto B, podes mesmo verificar a distância entre A e B variando a circunferência a que pertencem… procura quando é que a trajetória, … caminho, entre A e B tem a menor distância…*
9. ***Alexandre:*** *…esses valores…*
10. ***Pedro:*** *…é o comprimento do arco.*
11. *Alexandre: Então o caminho mais curto é o… anda mais para baixo (dá indicações ao Pedro)*
12. *Pedro: 1600…450…2000…670…*

(Alexandre insiste)

13. ***Alexandre:*** *… anda mais um bocado…*

(Pedro roda a esfera…)

14. ***Madalena:*** *…mete no meio… clica em cículo máximo…não mexas no B… mexe nas circunferências que passam em A e B… Vê-se por aqui!*

(Depois de algumas tentativas…)

15. ***Alexandre:*** *É o que tem o arco mais pequeno…*
16. ***Pedro:*** *Não! Maior!… ou seja… o caminho mais pequeno… é o que passa no círculo máximo…que é este.*
17. ***Madalena:*** *mete lá…muda B… mexe nas circunferências, mas deixa o círculo máximo… uhm (pensativa)*
18. ***Pedro:*** *(repete) "O que podes concluir quanto ao caminho mais curto entre dois pontos na superfície esférica" … então podemos concluir que o caminho mais curto entre dois pontos…é o que passa no círculo máximo...*
19. ***Madalena:*** *Escrevemos! Mas não pomos medidas … vai variar para outra posição… dizemos que é o arco menor…que tem de passar no círculo máximo! Podemos escrever só numa ficha? Estamos a fazer juntos.*
20. ***Professora:*** *Sim. Façam o registo só numa ficha….*

(Alexandre ainda está a escrever e parece fora de contexto…)

21. ***Alexandre:*** *… o caminho mais curto é o …*
22. ***Professora:*** *Então Alexandre… estás perdido… és capaz de reproduzir o que foste vendo no computador e o que o Pedro e a Madalena foram dizendo?*
23. ***Alexandre:*** *Então temos de ter o círculo máximo…*
24. ***Professora:*** *Porquê?...*
25. ***Alexandre:*** *…o arco é menor quando passa no círculo máximo.*

26. ***Professora**: Ou seja, quando o arco está contido na circunferência que limita o círculo máximo.*

27. ***Alexandre**: O caminho mais curto é esse arco…*

28. ***Professora**: Estás convencido?*

(Alexandre abana a cabeça afirmativamente e escreve. Pedro continua a leitura da ficha em voz alta…)

29. ***Pedro**: "Abre o ficheiro caminho-mais-curto-cdf (…)"*

***(Pedro l**ê tudo até ao fim do parágrafo. Madalena e Pedro exploram o ficheiro durante breves segundos e de seguida o Pedro continua a leitura até ao fim da frase)*

30. ***Madalena**: é o mesmo que já vimos no outro ficheiro…*

31. ***Pedro**: É só para ver… Não pede nada…*

(Pedro continua a leitura da ficha em voz alta…)

32. ***Pedro**: …"4. Desloca o cursor circunferências que passam por A e B (…)" (Lê tudo até ao primeiro ponto de interrogação) … Já está! O C está mesmo no centro da circunferência.*

33. ***Professora**: … ou seja, o centro da circunferência coincide com? …*

34. ***Madalena**: com o centro da esfera…*

35. ***Pedro**: …da superfície esférica.…*

(Pedro continua a leitura da ficha em voz alta…)

36. ***Pedro**: "a) Será que, na Geometria Esférica, o caminho (…)" (Lê tudo até ao final da alínea, faz um comentário e ri-se, mas é impercetível) …na terra parece um segmento de reta porque é grande, são coisas grandes, mas neste caso é…*

37. ***Professora**: …é o quê?*

38. ***Pedro**: Não há!...não! …é um arco! O caminho mais curto é um arco…que passa no círculo máximo.*

39. ***Madalena**: … que coincide com o círculo máximo.*

40. ***Professora**: É um arco da circunferência que limita o círculo máximo!*

41. ***Pedro**: …e que contém os dois pontos…não pode ser um círculo máximo qualquer…tem de passar lá!*

42. ***Professora**: Claro…*

(O Pedro continua a leitura da ficha em voz alta…)

43. ***Pedro**: "alínea b, na superfície esférica (…)" (Lê tudo até ao final da alínea) … O que pode ser a reta? …só se for o círculo máximo, não tem princípio nem fim …, mas é um círculo …*

44. ***Professora**: Então em que ficamos? O que são as retas?*

45. ***Pedro**: …são círculos…são circunferências…*

46. ***Professora**: círculos?… circunferências? Decidam-se.*

47. ***Pedro**: Circunferências.*

48. ***Professora:*** *Quaisquer circunferências?*

49. ***Pedro:*** *Máximas! …e como um segmento de reta é um bocado de uma reta… a reta é uma circunferência em que o centro é o mesmo que o centro da superfície esférica, um segmento de reta é um arco dessa circunferência.*

50. ***Madalena:*** *Dizemos círculo máximo ou circunferência máxima?*

51. ***Pedro:*** *Como estamos na superfície esférica então devem ser circunferências máximas!*

52. ***Professora:*** *Um círculo inclui a circunferência …os pontos que estamos a considerar estão sobre a superfície esférica. Notem que este é um "modelo", pretende representar o planeta terra, logo "tem interior" e por isso na ficha se faz referência ao círculo máximo.*

53. ***Pedro:*** *mas é achatada nos polos.*

54. ***Professora:*** *Sim, mas independentemente desse achatamento, facilita-nos considerar o modelo esférico. Já agora, por dois pontos da superfície esférica quantas circunferências de raio máximo conseguem passar?*

55. ***Pedro:*** *Infinitas!...ah! Não! Máximas não!...Circunferências são infinitas, mas com raio máximo há só uma!*

56. ***Professora:*** *Então é única?*

57. ***Madalena:*** *…se os pontos forem os extremos do diâmetro…*

58. ***Professora:*** *sim Madalena, o que acontece?*

59. ***Madalena:*** *…há muitas circunferências com centro no centro da superfície esférica e a passar nesses dois pontos… Não há só uma!*

60. ***Professora:*** *Como por exemplo nos polos da terra …*

61. ***Pedro:*** *Depende dos dois pontos escolhidos. Se forem extremos de um diâmetro são infinitas as circunferências que os contêm …, mas se forem outros dois quaisquer, há só uma!*

62. ***Professora:*** *Na superfície esférica há algumas diferenças… pois vocês sempre disseram que dois pontos definem uma única reta*

63. ***Pedro:*** *(interrompe) mas não era na esfera…*

64. ***Alexandre:*** *Esta geometria é esférica.*

65. ***Professora:*** *Pois é!... E só poderemos continuar para a semana. Voltamos para esta sala, está bem?*

2.1.2. Sessão [10-GE_T_2]

(Foi distribuída a tarefa 2 aos três alunos que se sentaram nos mesmos lugares da última sessão. Desta vez só estava um portátil na mesa para ser usado. O Pedro assumiu novamente o papel do leitor da tarefa em voz alta. Iniciei a gravação.)

1. ***Pedro:*** *"Paralelismo de retas… "*
2. ***Professora:*** *Não é um conceito que conhecem?*
3. ***Pedro:*** *Sim… mesma direção.*
4. ***Professora:*** *… e na geometria esférica?*

(Pedro lê todo o parágrafo.)

5. ***Pedro:*** *"Da exploração dos dois ficheiros (da tarefa 1) esfera-azul-cdf e caminho-mais-curto-cdf, o que podes concluir relativamente à noção de retas paralelas na Geometria Esférica (Não esqueças a noção de reta nesta Geometria!)".*
6. ***Madalena:*** *Não pode!*
7. ***Professora:*** *O que queres dizer com isso?*
8. ***Pedro:*** *Retas paralelas têm de ter a mesma direção… e retas têm que ser um círculo máximo, certo?... e para ser um círculo máximo têm de dar a volta à esfera… e os círculos máximos, supostamente fazem isto (aponta com o cursor no ecrã selecionando um círculo máximo) ficam assim, ou seja, nós não podemos…*
9. ***Madalena:*** *Retas paralelas são… que não… que não se cruzam.*
10. ***Professora:*** *E o que está a acontecer a todas essas?*
11. ***Madalena:*** *Estão-se todas a cruzar em dois pontos.*
12. ***Professora:*** *E o que podem concluir?*
13. ***Madalena:*** *Não pode acontecer!... porque se cruzam sempre.*
14. ***Professora:*** *Mas o que é que não pode acontecer?... eu não percebo o que queres dizer…*
15. ***Madalena:*** *Não há paralelas!*
16. ***Professora:*** *Então não existem…*
17. ***Madalena:*** *Têm sempre dois pontos comuns que são os extremos do eixo (fala com hesitações) … do eixo… do… pronto.*
18. ***Professora:*** *Do quê? Queres dizer diâmetro?*
19. ***Madalena:*** *Isso… exatamente!*

20. ***Professora***: *Esses pontos chamam-se pontos antípodas… e todas as retas têm em comum dois pontos antípodas… onde se cruzam…*
21. ***Madalena***: *sempre? (Madalena parece confusa, mas o Alexandre parece totalmente fora de contexto…ouve sem reagir, mas é visível o seu desconforto.)*
22. ***Professora***: *… quando discutimos se dois pontos definiam sempre uma única reta, o que concluímos?*
23. ***Madalena***: *mas não são este A e B…*
24. ***Professora***: *exatamente porque estes (todos acompanham a imagem no ecrã) não são os extremos de um diâmetro …, mas vejam assim… (posicionei os pontos de modo a estarem diametralmente opostos) …*
25. ***Alexandre***: *(pensativo) … duas retas… dois círculos máximos… exatamente… vão cruzar-se em dois pontos… esse A e B baralham!*
26. ***Professora***: *Este A e B são os que permitem visualizar as circunferências que os contêm… ao identificarmos o conceito de reta na esfera com o de círculo máximo, concluímos que na Geometria Esférica não existem retas paralelas! Esta é uma grande diferença entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana. Um de vocês pode fazer o registo e depois podem consultar o site indicado na ficha…*

(O Alexandre está pronto para escrever, mas vai olhando para os colegas, parece inseguro e espera que digam algo para poder prosseguir.)

27. ***Professora***: *Alexandre, há algum problema? Estás perdido sobre a superfície terrestre? (Alexandre mantem-se em silêncio). Vamos pedir à Madalena que te ajude na redação.*
28. ***Madalena***: *Pode ser: "retas paralelas são retas que não se cruzam e, por isso não podemos afirmar que há paralelismo de retas, uma vez que se cruzam nas extremidades dos diâmetros".*
29. ***Professora***: *Não esqueçam o conceito de reta… circunferências cujo centro coincide com o centro da esfera…*
    Podemos pensar por exemplo nos meridianos… são retas! Onde se intersetam os meridianos?
30. ***Madalena***: *no meio! oh NÃO!*
31. ***Professora***: *Como? Onde?*
32. ***Madalena***: *… não!… queria dizer nos polos!*
33. ***Professora***: *Já agora, e se fossem os paralelos? Vocês sabem o que são os paralelos?*
34. ***Pedro***: *Sim são paralelos ao equador.*
35. ***Professora***: *…, mas...São retas?*
36. ***Pedro***: *Neste caso não… só o equador é que é!*
37. ***Madalena***: *É o único dos paralelos que é reta!*

*38. **Pedro:** … no caso dos meridianos os pontos antípodas são os polos.*

*39. **Professora:** Certo!... como é podemos avançar? Alexandre?*

(Alexandre acena afirmativamente com a cabeça… parece mais confiante. Pedro lê em voz alta, sem qualquer razão aparente, assumiu este papel desde o início da sessão.)

*40. **Pedro:** "O que podes dizer acerca dos polígonos na Geometria Esférica?"*

(Os três ficam pensativos e em silêncio)

*41. **Professora:** … vocês deram conta que um segmento de reta era um arco de uma circunferência de raio máximo… um polígono e´?...*

*42. **Pedro:** … um triângulo…*

*43. **Madalena:** … um triângulo é definido por três segmentos de reta…*

*44. **Pedro:** três ...*

(em simultâneo)

*45. **Madalena e Pedro**: … arcos!*

*46. **Professora:** Será que o triângulo é, na Geometria Esférica, o polígono com o menor número de lados que existe?*

(Olham entre si como se a questão colocada fosse fora de propósito, sem sentido.)

*47. **Pedro:** Hein? (lê na ficha) …Biângulos… bi… dois ângulos, dois lados, dois arcos?*

(Alexandre está completamente perdido, com o olhar vazio… perdeu a motivação!)

*48. **Professora:** Sugiro que vão novamente ao site indicado na ficha e cliquem em biângulos.*

(O Pedro clica para aceder ao site)

*49. **Madalena:** Olha!... é um polígono?*

(Pedro lê em voz alta, Madalena e Alexandre seguem a leitura no ecrã)

*50. **Pedro:** "Na esfera existem polígonos com dois lados! A explicação é simples: na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de círculo máximo; dados dois círculos máximos, estes intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por biângulos ou lúnulas. Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semicírculos máximos."*

*51. **Alexandre:** … cada vez mais estranho… polígonos com dois lados…*

*52. **Madalena:** os lados são segmentos esféricos… arcos… tem todo o sentido!*

*53. **Professora**: Como é, querem continuar?*

*54. **Pedro:** claro!*

55. ***Professora:*** *Voltem à ficha…*

(Pedro começa a leitura)

56. ***Pedro:*** *"II) Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?*

    1.Abre o ficheiro soma_dos_ângulos_de_um_triângulo-cdf."

    (pedro abre o ficheiro olha e continua a leitura da ficha) "Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa que contém uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: A, B e C."

(pedro vai arrastando os vértices A, B e C. Os colegas acompanham em silêncio)

57. ***Professora:*** *Quando olham para o ecrã, quantos triângulos veem?*
58. ***Pedro:*** *Quantos triângulos veem? …sim…*

(Silêncio)

59. ***Professora:*** *O que define triângulo? Ou melhor, como definem triângulo na Geometria Euclidiana? ... suponham que eu nunca vi nenhum triângulo… como o descreviam?*
60. ***Pedro:*** *Figura geométrica com três ângulos e três lados.*
61. ***Professora:*** *Então, na Geometria euclidiana, isso quer dizer que será a figura plana compreendida entre …*
62. ***Pedro:*** *três segmentos de reta!*
63. ***Professora:*** *E aqui? Na Geometria esférica como será?*
64. ***Alexandre:*** *Está compreendida entre três segmentos esféricos?*
65. ***Pedro:*** *É um triângulo estranho (ri-se) …*
66. ***Madalena:*** *Supostamente isto aqui é um segmento de reta…*
67. ***Professora:*** *esse arco é um segmento de reta, aí temos três… a minha questão é: esta região…para mim vocês estão a ver a região verde, certo?*
68. ***Madalena:*** *hum…hum… (entoação afirmativa)*
69. ***Professora:*** *a região verde está limitada por…*
70. ***Madalena:*** *três segmentos esféricos!*
71. ***Professora:*** *Está a acompanhar Alexandre? E… a azul?*
72. ***Pedro:*** *(muito rapidamente) por três também!*
73. ***Professora:*** *Então?...*
74. ***Pedro:*** *São dois… neste caso também não existem…*
75. ***Professora:*** *não existe o quê?*
76. ***Pedro:*** *não existem semirretas.*
77. ***Professora:*** *Semirretas? Porquê?*
78. ***Pedro:*** *porque é limitado.*
79. ***Professora:*** *O que é que é limitado? Já tínhamos definido retas? Ou não?*
80. ***Pedro:*** *limitadas à superfície.*

81. ***Professora***: *… limitadas?...acho que te estou a entender… sobre a superfície esférica a reta é limitada, mas podes continuar com um número infinito de voltas… a ideia de prolongamento infinito da reta, da Geometria Euclidiana, mantem-se… certo?*

(Visivelmente, Alexandre e Madalena não acompanham as ideias do Pedro)

82. ***Professora***: *Então quanto ao número de triângulos em que ficamos?*
83. ***Madalena***: *São dois… o verde e o azul!*
84. ***Professora***: *Entendem que a maioria das pessoas perante essa imagem referem apenas a existência do verde… vão pensando num valor para a soma das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo… vamos ter de terminar. Continuamos para a semana.*

Contudo, esta foi a última sessão possível com este grupo de alunos pois nas três semanas seguintes estiveram envolvidos em outras atividades da escola e não foi possível agendar mais nenhum encontro.

2.2. Grupo do 11.ºano (16-17 anos)

2.2.1. Sessão [11-GE_T_1 e T_2]

(Para esta sessão levei dois computadores portáteis onde instalei previamente o Wolfram CDF Player. *Informei os dois alunos de que iríamos realizar uma tarefa com recurso ao computador e, tal como sucedeu com os alunos do 10.º ano, eles perguntaram se era possível usar um só portátil, pois preferiam fazer a tarefa juntos. Não vi nenhum inconveniente e eles sentaram-se na mesa lado a lado e coloquei o computador à frente deles.*
A tarefa 1 foi distribuída e começaram a leitura individualmente. Coloquei-me em pé, atrás deles e começaram a discutir o problema da introdução da tarefa. Sugeri que continuassem a leitura… informei que o computador já tinha os ficheiros instalados e quando acederam ao ficheiro esfera-azul-cdf, iniciei o registo áudio)

1. ***Professora:*** *Podem explorar o ficheiro. Vão mexendo!*
   Para um arco AB vão explorando as circunferências que passam por A e B arrastando este (apontando no ficheiro) cursor. Vejam o que acontece…

(Gabriel pensativo e falando alto)

2. ***Gabriel:*** *Temos infinitas possibilidades iguais de chegar a A até B.*
3. ***Professora:*** *Iguais?*
4. ***Gabriel:*** *Com a mesma distância… não…*
5. ***Carolina:*** *Deu a volta à circunferência, não à esfera… A circunferência é que anda.*
6. ***Professora:*** *Não se esqueçam do que vos é pedido… não se afastem do que pretendem investigar. Estão à procura da menor distância entre A e B, ou seja, o caminho mais curto sobre a superfície esférica, certo?*
7. ***Gabriel:*** *Não há só um caminho… mas queremos o mais curto...*
8. ***Professora:*** *…é desse que estamos à procura.*
9. ***Carolina:*** *Eu acho que é a corda… em linha reta…*
10. ***Professora:*** *Ah!? A corda? O que é uma corda?*
11. ***Carolina:*** *Liga dois pontos da circunferência.*
12. ***Professora:*** *Certo! É um segmento de reta que é interior à circunferência. Neste caso não estaria sobre a superfície… então, atravessas a esfera?*
13. ***Carolina:*** *Não é a corda, eu queria dizer o arco! Também liga os dois pontos.*

14. **Professora:** *Vejam e podem acompanhar a variação do comprimento do arco que vos vai sendo indicado? Estão a ver esse valor? (apontando novamente para o ficheiro)*
15. **Gabriel:** *Esse valor é a distância de A até B…*

(Gabriel deixou de fazer variar as circunferências e faz variar a posição de B sobre uma circunferência fixa)

16. **Carolina:** *Queremos a distância entre A e B…, mas estão a coincidir…como pode o arco ter aquele comprimento? Se coincidem não há arco!*

Figura 25: *"Captura" do écran durante a realização da tarefa GE_T_1.*

17. **Gabriel:** *É do programa… parece que coincidem, mas não são mesmo coincidentes.*
18. **Professora:** *Estás a fazer variar o ponto B. Fixa A e B. Analisem esse arco…. Já viram que há infinitos arcos de extremos A e B. A questão continua a ser… Qual desses é o menor? Ou seja, qual o caminho que devem escolher, quando se deslocam sobre a superfície esférica de A para B (fixos), para que esse trajeto seja o mais curto.*
19. **Carolina:** *(pensativa) … se for um arco…*
20. **Gabriel:** *Só pode ser um arco!*
21. **Professora:** *Que arco é esse?*
22. **Gabriel:** *O problema é que não há só um… há infinitos….*
23. **Carolina:** *(continuou a fazer variar as circunferências que contêm A e B fixo, num processo muito lento) mas olha está a diminuir…*
24. **Gabriel:** *O arco está a diminuir… é como se a esfera estivesse a ser intersetada por planos para dar um círculo… não é?*
25. **Carolina:** *Quando obtemos a "circunferência do plano que passa pelo centro" … o arco AB é o menor!*
26. **Professora:** *Volta a dizer isso Carolina!*

27. **Carolina:** *Quando o arco pertence a (repete) "uma circunferência do plano que passa pelo centro" …*
28. **Professora:** *Essa circunferência tem o raio máximo possível nessa superfície esférica!*
29. **Gabriel:** *O centro da esfera coincide com o centro da circunferência…. aí o arco tem a menor distância.*
30. **Professora:** *Afinal já temos o trajeto com a menor distância! E já temos resposta a 1.a). Procedam aos vossos registos e vamos explorar o ficheiro caminho-mais-curto-cdf.*
31. **Gabriel:** *O cento da superfície esférica é o mesmo que o centro da circunferência.*
32. **Professora:** *Então Carolina onde entram as cordas que falavas no início?…*
33. **Carolina:** *Eu sabia que não podia andar dentro da esfera, eu queria dizer é que… era o arco e não a corda, é que a corda é que é em linha reta… e baralhou-me.*
34. **Professora:** *mas, estás convencida?*
35. **Carolina:** *Sim, sim! O caminho mais curto é um arco de circunferência com raio igual ao raio da esfera.*

(Gabriel continuou explorando o ficheiro…)

36. **Gabriel:** *É outra vez um arco…*
37. **Professora:** *Estás a falar de quê Gabriel?*
38. **Gabriel:** *Na 4.b) ….*
39. **Professora:** *Um arco tem extremos… quais são agora os teus extremos?*
40. **Carolina:** *Ah! … não é o arco, é a circunferência de raio máximo… não estás a ver? É como reta e segmento de reta! Estás a perceber? Entre o ponto de partida e o ponto de chegada tens um segmento de reta, mas o segmento de reta está contido numa reta… aqui também!*
41. **Professora:** *… a reta é…?*
42. **Carolina:** *Circunferência de raio máximo!*
43. **Gabriel:** *Mas uma reta não tem princípio nem fim…*
44. **Carolina:** *Mas aqui tem!... tem de ser… pensa que continuas às voltas sem fim.*
45. **Professora:** *Então há "retas" que são "circunferências"?*
46. **Gabriel:** *Na Geometria táxi a "circunferência" era um "quadrado" …*
47. **Carolina:** *Mas aí o caminho mais curto não era único…havia vários caminhos com a mesma distância… aqui é como na Geometria euclidiana o menor caminho é único… não é, é em linha reta!*
48. **Gabriel:** *Eu li que a trigonometria na esfera era diferente da Euclidiana…*
49. **Professora:** *Falaram disso nas aulas?*
50. **Carolina:** *Foi num trabalho…*

51. ***Gabriel:*** *Tivemos que fazer um trabalho no fim do estudo da trigonometria… e eu encontrei isso no manual. Depois o professor disse que quando enchemos um balão e desenhamos triângulos sobre o balão a soma dos ângulos internos é superior a 180º…*
52. ***Professora:*** *Vamos ter oportunidade de falarmos nisso quando explorarmos a próxima tarefa… Se já respondemos à 4.b) vamos ver agora a noção de retas paralelas sobre a superfície esférica. Podemos continuar?*
53. ***Gabriel:*** *…vão sempre intersetar-se…*
54. ***Carolina:*** *Não são paralelas… não conseguimos circunferências paralelas umas às outras…*
55. ***Professora:*** *queres dizer retas, certo?*
56. ***Gabriel:*** *(aponta) …aqui vão cruzar-se sempre…*
57. ***Carolina:*** *E se forem os paralelos do globo?*
58. ***Professora:*** *Carolina, não te esqueças do que são as retas…*
59. ***Carolina:*** *Eram as circunferências.*
60. ***Professora:*** *Quaisquer?*
61. ***Carolina:*** *Não… tinham de ter raio igual ao da esfera… Ah! Então não há! Os paralelos são circunferências com raio menor… não são retas. Não há!*
62. ***Professora:*** *Não há o quê?*

(Gabriel interrompe)

63. ***Gabriel:*** *Há! Só que as paralelas vão se intersetar…*
64. ***Professora:*** *Mas afinal há? Não há? do que estão a falar?*
65. ***Gabriel:* Não há r***etas que não se intersetam.*
66. ***Carolina:*** *Aqui são todas coincidentes.*
67. ***Professora:*** *Coincidentes, Carolina?*
68. ***Carolina:*** *Não coincidem…, mas não são paralelas… Não consigo traçar uma circunferência com raio máximo, paralela aquela (aponta).*
69. ***Professora:*** *Queres dizer concorrentes ou coincidentes. Então, …?*
70. ***Carolina:*** *Que se cruzam é "concorrentes", aqui as retas são todas concorrentes.*
71. ***Gabriel:*** *Sobre a esfera não há retas paralelas! Há sempre dois pontos onde se cruzam…*
72. ***Carolina:*** *São sempre concorrentes… porque as retas são circunferências… têm de cruzar-se em dois pontos.*
73. ***Professora:*** *Isso mesmo… esses dois pontos designam-se por pontos antípodas. Podem confirmar as vossas conclusões indo ao site aí indicado. E por hoje temos de terminar, já tocou. Para a semana continuamos.*

2.2.2. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_1$]

A tarefa 2 já tinha sido iniciada na última sessão, foi recolhida e agora foi novamente distribuída. Os alunos começaram a leitura individualmente depois de ocuparem os lugares habituais. (O computador já estava ligado e iniciei o registo áudio)

1. ***Professora:*** *Podem continuar onde tínhamos ficado.*
   (os alunos leem em voz baixa individualmente)
2. ***Carolina:*** *… concluímos que não havia retas paralelas na superfície esférica …*
3. ***Gabriel:*** *… eu já li sobre isso … falava de 5.º postulado de Euclides… foi ele que criou a Geometria Euclidiana?*
4. ***Professora:*** *Andaste a investigar… Euclides viveu cerca de 300 a.C., escreveu a obra "Os Elementos" que resume toda a Geometria Euclidiana… a que usualmente usamos e conhecemos.*
5. ***Gabriel:*** *Só falou da Geometria Euclidiana… não pensou nas outras?*
6. ***Professora:*** *Quais outras?*
7. ***Gabriel:*** *Na Esférica, na Geometria Táxi, e …não sei se há outras.*
8. ***Professora:*** *A Geometria Esférica é um modelo da Geometria Elíptica, surge apenas no sec. XIX… e há outras de facto…*
9. ***Gabriel:*** *Não sabia …*

(Carolina manteve-se a explorar o ficheiro muito pensativa e não deu importância à conversa entre a professora e o Gabriel.)

10. ***Carolina:*** *(Fala sozinha…) O equador é uma reta….*
11. ***Professora:*** *Lembram-se de como são as retas e os segmentos de reta na superfície esférica?!*
12. ***Carolina:*** *O triângulo não tem lados … tem arcos.*
13. ***Professora:*** *Carolina saltaste a questão 1, mas não faz mal voltamos lá depois, continua podemos explorar agora esse ficheiro que tens aberto (*soma_dos_ângulos_de_um_triângulo-cdf).
    (algum tempo em silêncio)
14. ***Gabriel:*** *…não tem um n.º fixo como na Geometria Euclidiana*
15. ***Professora:*** *O que é que não é fixo Gabriel?…*
16. ***Carolina:*** *A soma dos ângulos!*

17. ***Professora:*** *A soma dos ângulos internos… então uma conclusão que já podemos registar é que a soma dos ângulos internos de um triângulo, sobre a superfície esférica, não é constante.*
(aponta para o monitor…) Reparem… quantos triângulos veem sobre a superfície esférica?
18. ***Gabriel:*** *… dois…*
19. ***Carolina:*** *… dois?…*
20. ***Gabriel:*** *Sim há dois…*
21. ***Professora:*** *Porquê Gabriel?*
22. ***Gabriel:*** *O interior é limitado por três segmentos de reta, mas o exterior também…*
23. ***Carolina:*** *é o azul e o verde…*

(Exploram o ficheiro em silêncio, com muita curiosidade e interesse… o gráfico que relaciona R em função de S, em que R é a razão entre a área do triângulo e a área da superfície esférica e S é a soma dos ângulos internos do triângulo, parece intrigá-los. Gabriel arrasta o cursor fazendo variar a posição dos vértices A, B e C e a Carolina segue-o muito atenta.
A exploração do ficheiro, tanto é feita pelo Gabriel como pela Carolina. É interessante o modo como alternam entre eles esse papel, de forma espontânea, sem conversarem.)

24. ***Gabriel:*** *…, mas a razão entre a área do triângulo e a área da esfera varia…*
25. ***Carolina:*** *A área da superfície esférica é fixa…*
26. ***Professora:*** *Certo!... mas a área do triângulo varia…a razão entre a área do triângulo e a área da superfície esférica vai variando…vai de zero a 1, certo?*
27. ***Gabriel:*** *Quando o triângulo cobre a esfera essa razão é 100%.*
28. ***Professora:*** *Exatamente…*
29. ***Gabriel:*** *Na questão 3…escrevo o valor…*
30. ***Carolina:*** *Como varia… pomos um intervalo… à medida que vamos alterando o triângulo, vamos tendo sempre valores diferentes…*
31. ***Gabriel:*** *… procura a soma mínima…*
32. ***Professora:*** *agora estão a perceber!… continuem a explorar o ficheiro e obtenham a resposta…*
33. ***Carolina:*** *é aqui… é 180º. E a máxima… 900, não é?... mas nunca chega a 900. Nunca podia ser 180 nem 900.*
34. ***Gabriel:*** *uhm… uhm… (entoação afirmativa)*
35. ***Carolina:*** *Varia… é um intervalo aberto…*
36. ***Gabriel:*** *sim, é um intervalo!*

(Tocou para a saída e tivemos de finalizar esta sessão.)

2.2.3. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_2$]

(À semelhança do que se passou nas sessões anteriores, sem dar qualquer outra informação, limitei-me a distribuir a tarefa 2 que ainda não foi concluída. Os alunos começaram a leitura individualmente e iniciei o registo áudio)

1. ***Professora:*** *Podem continuar onde tínhamos ficado.*
   (os alunos leem em voz baixa individualmente)
2. ***Gabriel:*** *… então a área do triângulo, quando a soma dos ângulos é máxima, é a área da superfície esférica, cobre toda a esfera…*

(Ficam pensativos… em silêncio durante alguns segundos)

3. ***Professora:*** *Digam-me, qual era o raio da esfera?*
4. ***Gabriel:*** *era 1*
5. ***Professora:*** *Muito bem! Era unitário. Vocês sabem calcular a área da superfície esférica…*
6. ***Gabriel:*** $4\pi r^2$
7. ***Professora:*** *Ok! Podes então verificar se quando a soma dos ângulos internos é 900, se de facto é esse o valor que obténs… tu disseste que quando a soma dos ângulos é 900, o triângulo "cobria" a esfera… podes verificar… vê aqui…tens a área…quando a soma é quase 900, vê…claro que será um valor aproximado…disseste que a área da superfície esférica era quanto?*
8. ***Gabriel:*** $4\pi r^2$*…, mas ainda não calculei uma aproximação…o raio vai ser 0,5…não, não! É unitário, é 1!*
9. ***Professora:*** *Já tínhamos dito atrás…*
10. ***Gabriel:*** *Vai dar* 4π *... 1 ao quadrado, é 1.*
11. ***Professora:*** *… então aquele valor doze ponto cinquenta e dois é uma aproximação de* 4π*… confirma-se que quando a soma dos ângulos é próxima de 900, a área do triângulo é próxima da área da superfície esférica… é isso que aí tens.*
12. ***Gabriel:*** *…confirma-se, a razão entre as áreas… é 100%... são iguais…*
13. ***Professora:*** *O que é que não é fixo Gabriel?…*

14. ***Carolina:*** *A soma dos ângulos!*
15. ***Professora:*** *Muito bem… então continuem.*

(Silêncio…)

16. ***Carolina:*** *… não é constante…*
17. ***Professora:*** *Diz-me do que estás a falar.*
18. ***Carolina:*** *na questão 4…*
19. ***Professora:*** *"Será que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico também é constante?" … vocês já anteciparam essa resposta na questão 3, na nossa última sessão do clube na semana passada, recordam-se?*
20. ***Carolina:*** *Dissemos que variava de 180 a 900.*
21. ***Professora:*** *Certo!... então e a seguir… será possível obter um triângulo esférico com dois ângulos retos?*

(Fez-se silêncio… ficaram com o olhar fixo no ecrã, pensativos, mas não pesquisam com o programa)

22. ***Gabriel:*** *(com convicção) Claro que sim! Como a soma era maior do que 180, podemos ter duas vezes 90 e ainda o terceiro ângulo… e com três ângulos retos também é possível!...com três rasos… (para e fica a pensar)*
23. ***Carolina:*** *(baralhada) mas como é que podes ter dois ângulos retos?*
24. ***Professora:*** *Porque é que não tentam construir… nada melhor do que experimentar!*

(Carolina arrasta os vértices)

25. ***Professora:*** *…este está com 80º e o outro com 70º… anda mais um bocadinho…*

(Gabriel assume o papel da Carolina e é ele que arrasta os vértices tentando construir o triângulo com os dois ângulos retos)

26. ***Gabriel:*** *…90 e 91, está praticamente com dois retos…*
27. ***Professora:*** *Qual a amplitude do terceiro ângulo?*
28. *Carolina: É 111º*
29. ***Professora:*** *…então Carolina?*
30. ***Carolina:*** *É possível com dois ângulos retos…podemos experimentar para três? Mas vai dar… três vezes nove, vinte e sete… duzentos e setenta… é possível.*
31. ***Professora:*** *Estejam à vontade, demorem o tempo que precisarem… vão "mexendo" e tirem as vossas conclusões.*

(Vão experimentando e tentam acertar o valor 90 nos 3 ângulos…)

32. ***Gabriel:*** *…com três rasos também é possível…*
33. ***Professora:*** *Qual a amplitude de um ângulo raso?*
34. ***Carolina:*** *180!*
35. ***Professora:*** *… e então?...*

(Gabriel tenta a construção)

36. ***Gabriel:*** *… sim é possível….*
37. ***Professora:*** *Vocês já tinham concluído que a soma dos ângulos internos do triângulo variava de 180 a 900… seguindo o raciocínio da Carolina, 3 vezes 180 é 540…é um valor desse intervalo! Se quiserem visualizar, com alguma paciência conseguem construir e acertar as amplitudes dos três ângulos…*
38. ***Carolina:*** *(fala a medo) Na geometria mesmo…na geometria que damos nas aulas…*
39. ***Professora:*** *euclidiana!*
40. ***Carolina:*** *… euclidiana, nós não conseguimos obter um triângulo com dois ângulos retos porque a soma tem de dar 180º…*
41. ***Professora:*** *sim, essa soma é constante e é 180º!*
42. ***Carolina:*** *pois… por isso, dois ângulos retos, dava logo 180 e não havia mais nada para o terceiro…*

(Gabriel tem estado a tentar construir o triângulo com os três ângulos rasos…)

43. ***Gabriel:*** *… este serve?…*
44. ***Professora:*** *se consegues visualizar o pretendido…*
45. ***Gabriel:*** *eu acho que é isto… a soma dos ângulos é 540 e são todos iguais…estão muito aproximados de 180…*
46. ***Professora:*** *então tem aí o que procuravam…era assim que esperavam que ele fosse?*
47. ***Carolina:*** *É uma semi… área …*
48. ***Gabriel:*** *Semisuperficie esférica.*
49. ***Professora:*** *pois… distingam lá entre superfície e área … é um triângulo esférico e tem área! Notem que os vértices estão todos sobre uma "reta", tal como a definimos nesta geometria…recordam-se? Os vértices são colineares!*
50. ***Gabriel:*** *na geometria euclidiana, num triângulo, os vértices nunca podem ser colineares…*

(Carolina sorri…pensativa)

51. ***Professora:*** *Então podemos avançar?*
52. ***Gabriel:*** *Já fizemos a questão 6…*
53. ***Professora:*** *sim, já discutimos… avancem.*
54. ***Gabriel:*** *Também já vimos a 7…, mas escrevemos?*
55. ***Professora:*** *Se quiserem… o objetivo era discutir este assunto e penso que está feito. E se pensarmos em triângulos semelhantes!... o que vos parece?... nesta Geometria, o que têm a dizer sobre triângulos semelhantes?*

(Surpresos, olham um para o outro)

56. ***Professora:*** *… semelhança de triângulos… diz-vos alguma coisa?*

57. ***Carolina:*** *era aquilo do lado, lado, lado. Lado, ângulo, lado e ângulo, ângulo…*
58. ***Professora:*** *Podes ser mais precisa, Carolina?… por exemplo, lado, lado, lado… o que queres dizer com isso?*
59. ***Carolina:*** *… então quando os três lados são iguais…*
    (Interrupção brusca do Gabriel)
60. ***Gabriel:*** *Não!… (mas cala-se e fica pensativo)*
61. ***Professora:*** *Então?... (pausa) O que a Carolina está a relembrar parece ser um dos critérios de congruência de triângulos… diz respeito a triângulos congruentes… geometricamente iguais! Eu fiz referência a triângulos semelhantes… é mais abrangente, certo?*
62. ***Gabriel:*** *Tem a ver com a razão de semelhança…*
63. ***Professora:*** *Então como é? Dá um "jeitinho" ao que estavas a dizer…*
64. ***Carolina:*** *São …*
65. ***Gabriel:*** *… é quando um triângulo é a ampliação ou a redução de outro triângulo…*
66. ***Carolina:*** *já sei… proporcionais entre si!*
67. ***Professora:*** *Sim… então voltando aos três lados dos triângulos semelhantes, têm de ser…*
68. ***Carolina:*** *… proporcionais entre si… a mesma razão…*
69. ***Professora:*** *Esse era um dos critérios de semelhança e os outros?*
70. ***Carolina:*** *o dos ângulos… (hesita)…*
71. ***Professora:*** *o que sabes dos ângulos de triângulos semelhantes?*
72. ***Carolina:*** *Bastava que tivessem dois iguais!*
73. ***Professora:*** *Certo! E agora, na superfície esférica? Como é com os ângulos dos triângulos?*

(Ficam os dois pensativos…)

74. ***Gabriel:*** *Agora não!… podem ter os ângulos iguais e não são semelhantes.*
75. ***Carolina:*** *Então é porque a soma dos ângulos internos é variável… não é constante como na outra geometria.*
76. ***Professora:*** *Explica lá isso…*
77. ***Carolina:*** *Na outra, quando conhecemos dois ângulos de um triângulo já sabemos quanto mede o terceiro ângulo…, mas aqui podemos ter dois ângulos iguais em dois triângulos, mas o terceiro ângulo ser diferente nos dois triângulos…*
78. ***Gabriel:*** *Mas se dois triângulos esféricos tiverem os três ângulos iguais têm a mesma área, logo são iguais… aqui não há triângulos semelhantes!*

(Tocou neste momento para a saída e a sessão teve de terminar).

2.2.4. Sessão [11-GE_T_2, continuação $_3$]

(À semelhança do que se passou nas sessões anteriores, sem dar qualquer outra informação, voltei a distribuir a tarefa 2 e sugeri que acedessem novamente ao ficheiro. Enquanto os alunos acediam ao ficheiro iniciei o registo áudio)

1. ***Professora:*** *Vamos fazer uma síntese do que fomos explorando e discutindo na sessão anterior para darmos continuidade a esta tarefa. Então quem começa?*
2. ***Gabriel:*** *… então a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico não é constante, varia entre 180º e 900º.*
3. ***Professora:*** *Certo! Mais…*
4. ***Gabriel:*** *Quando a soma dos ângulos é máxima, a área do triângulo é a área da superfície esférica, o triângulo cobre toda a esfera…*

(Ficam pensativos… em silêncio durante alguns segundos)

5. ***Professora:*** *Aproveito para vos falar de um conceito que é o chamado excesso angular. O excesso angular é a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos do triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso. Notem que na Geometria Euclidiana o excesso angular é zero, mas na Geometria Esférica é sempre superior a zero.*
6. ***Gabriel:*** *Tudo o que está acima dos 180º é o excesso angular…*
7. ***Carolina:*** *… e 180º é o valor constante da soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo euclidiano.*
8. ***Professora:*** *Muito bem… então continuem, digam mais coisas de que se lembram.*

(Silêncio…)

9. ***Carolina:*** *… os triângulos esféricos podiam ter dois ângulos retos ou três ângulos retos… podiam ter três ângulos rasos!*
10. ***Gabriel:*** *Quando tinha três ângulos rasos o triângulo era a Semisuperficie esférica …*

(O termo Semisuperficie esférica já foi usado na sessão anterior e tem sido várias vezes repetido em substituição do termo superfície da semiesfera. O seu uso revela uma incorreção de linguagem, mas pressupõe a total perceção do conceito que pretendem trabalhar.)

11. ***Professora:*** *Nessa situação o que podem dizer da posição dos três pontos que são os vértices?*
12. ***Gabriel:*** *estavam sobre o equador…*
13. ***Professora:*** *E então?*
14. ***Gabriel:*** *O equador era uma reta…*
15. ***Carolina:*** *Ah! Na Geometria Euclidiana para termos um triângulo os três pontos que formam os vértices têm de ser não colineares… nesta geometria os pontos podem ser colineares e temos um triângulo esférico com três ângulos rasos.*
16. ***Professora:*** *Certo! Basta que os três vértices estejam sobre uma reta qualquer desta geometria… o equador foi apenas o exemplo que exploraram … mais alguma coisa?*
17. ***Carolina:*** *… hoje já vamos saber a cor do urso?*
18. ***Professora:*** *Carolina ainda não voltaste a pensar no assunto… caso contrário já devias ter a resposta.*
19. ***Carolina:*** *(fala a medo) Já? …*
20. ***Professora:*** *Eu abro o ficheiro com a tarefa 1, leiam novamente, discutam e digam-me qual a conclusão a que chegam.*

(Leem. Gabriel pega num lápis e faz um desenho…desenha um triângulo esférico e a Carolina acompanha o registo do colega acenando afirmativamente com a cabeça, numa atitude de confirmação.)

21. ***Gabriel:*** *… vai ser um triângulo esférico… a toca é o vértice de onde ele sai, pode ser o Pólo, faz isto (com o lápis segue o traçado do triângulo desenhado) …, mas o que é que tem a ver com a cor do urso?*
22. ***Professora:*** *Então Carolina?*
23. ***Carolina***: *Pois volta ao ponto de partida… à toca… no plano euclidiano não votaria ao ponto de partida!*
24. ***Professora:*** *então?... sai do polo e volta ao polo. Pode ser branco?*

(Os dois abanam a cabeça afirmativamente com ar de quem está mesmo convencido)

25. ***Professora:*** *Podemos voltar em I) à questão 1. Que fala nos polígonos?*
26. ***Gabriel:*** *Aqui onde diz biângulos…*
27. ***Professora:*** *Sim… vão pesquisar.*

(Gabriel vai clicando e os dois limitam-se a uma leitura muda durante alguns instantes.)

28. *Professora: Gostava de vos ouvir pronunciar alguma coisa. Então?*
29. ***Gabriel:*** *Podemos ter polígonos só com dois segmentos de reta… dois arcos.*
30. ***Carolina:*** *Na Geometria Euclidiana o polígono com menor número de lados é o triângulo, mas na Geometria Esférica pode ter só dois...*

31. ***Gabriel:*** *Então, e podemos ter só com um segmento de reta?*
32. ***Professora:*** *Como Gabriel? Explica-te lá… não te estou a perceber?*
33. ***Gabriel:*** *Os pontos podem ser colineares… vimos três pontos colineares… podemos considerar que é um só segmento de reta… ou não?*
34. ***Professora:*** *já estou a perceber o que queres dizer… estás a pensar num círculo máximo, mas isso é só uma reta. Volta um pouco atrás… olha aqui:* "dados dois círculos máximos, estes intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por **biângulos** ou lúnulas". Ficou mais claro?
35. ***Gabriel:*** *(volta para a aplicação e aponta dois pontos quaisquer sobre a superfície esférica) Estes dois pontos não definem este segmento de reta? (aponta um dos arcos entre os dois pontos)*
36. ***Professora:*** *Não! É importante reter que para teres um segmento de reta é necessário que o arco seja parte de um círculo máximo… e não um arco qualquer! O arco tem de estar contido no círculo de raio igual ao da superfície esférica, só dessa forma é um segmento de reta.*
    Vamos novamente visitar www.atractor.pt/mat/GeomEsf. Vamos aqui, aos biângulos… notem bem que é dito que na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de círculo máximo. Estás a ver… arcos menores de círculos máximos!
37. ***Gabriel:*** *…(Pensativo) Então, … para termos dois segmentos de reta sobre a mesma reta os extremos têm de ser pontos do diâmetro e podemos ter dois arcos menores iguais… e só assim esses pontos são os vértices do biângulos… já estou a ver… com um ponto não tinha o arco menor, tinha a reta toda e não é um segmento de reta…*
38. *Professora: A noção de segmento de reta estava difícil … Carolina, estás a acompanhar?*
39. ***Carolina:*** *Eu já tinha percebido … eu lembrava-me dos vértices desta imagem dos biângulos, eram pontos antípodas… não sabia o nome deles, mas sabia que era esquisito, já tínhamos dito… eram os pontos onde se intercetavam as retas. Foi quando vimos que não havia retas paralelas na Geometria Esférica.*
40. ***Professora:*** *Ora então muito bem, estamos lembrados disto tudo Gabriel? (acena com a cabeça, com ar satisfeito) … podemos continuar? Então e a semelhança de triângulos, em que ficamos? Lembram-se?*
41. ***Gabriel:*** *…Não há triângulos semelhantes!*
42. ***Professora:*** *És capaz de explicar isso…*
43. ***Gabriel:*** *…como a soma dos três ângulos não é constante não basta que os dois triângulos tenham dois ângulos iguais entre si porque o outro pode*

variar. Se tiverem os três ângulos iguais entre si, então têm a mesma área… e se têm a mesma área são iguais e não temos ampliações nem reduções.

44. ***Carolina:*** *Pois, porque a área dos triângulos tem a ver com a soma dos ângulos!*
45. ***Professora:*** *Hoje temos de ficar por aqui…*
46. ***Carolina:*** *Mas vai dar mais tarefas para a semana?*
47. ***Professora:*** *Vamos explorar mais…. Vamos conhecer outra Geometria…*
48. ***Carolina:*** *Sobre a superfície esférica ou no plano, plano?*
49. ***Professora:*** *Para a semana veremos…. Para já ficam com estes sites (Sites do atractor indicados na tarefa) e se tiverem curiosidade aprofundem os vossos conhecimentos…*

2.3. Grupo do 12.ºano (17-18 anos)

2.3.1. Sessão [12-GE_T_1]

(Tal como nos outros grupos de discussão não houve uma introdução prévia à tarefa. A cada aluno foi facultado um computador portátil e a tarefa 1 foi distribuída. Os alunos começaram a leitura individualmente, e não ficaram presos ao problema da introdução da tarefa continuando a leitura e demostrando curiosidade. Incentivei a que continuassem a leitura enquanto iniciava o registo áudio.)

1. ***Professora:*** *(Quando me apercebi de que os três alunos já tinham virado a folha sugeri:) podem explorar o ficheiro aí indicado, já está no ambiente de trabalho… vão mexendo e vão explorando o ficheiro. Usem todas as potencialidades disponíveis… vamos tentar dar resposta à questão: "Qual é o caminho mais curto entre dois pontos sobre a superfície esférica?"*

(Fui-me deslocando à volta da mesa de modo a poder acompanhar o que ia sendo feito por cada um deles. De um lado da mesa sentou-se o Rafael e o David e do outro lado o Roberto.)

2. ***David:*** *Tem de ser um arco…*
3. ***Professora:*** *… qualquer?*
4. ***David:*** *Não há de ser um qualquer… não sei…*
5. ***Professora:*** *Então sobre a superfície esférica quantos arcos podem traçar tendo os pontos A e B por extremos?*
6. ***Rafael:*** *Dois…(pensa) ou mais...*
7. ***Professora:*** *Podes ter este, este, este… são, ou não, arcos?*

(David espreita para o monitor do Rafael e acompanha a indicação)

8. ***David:*** *Não estava a pensar assim…*
9. ***Professora:*** *… e em que estavas a pensar?*
10. ***David:*** *Para mim dois … é porque na circunferência dois pontos definem dois arcos que completam a circunferência.*
11. ***Professora:*** *E agora?*
12. ***David:*** *Pois com dois pontos sobre a superfície esférica há infinitas circunferências… ou círculos…*
13. ***Rafael:*** *…sobre a superfície esférica serão circunferências!*
14. ***Professora:*** *Continuem a explorar o ficheiro… então e tu Roberto, neste momento tens aí um arco entre A e B e é te dada a indicação de que esse*

comprimento é 7511…, mas estás a fazer variar o ponto B… mantem os extremos do arco fixos e faz variar as circunferências que os contêm.

15. ***David:*** *Podemos mexer em tudo aqui em cima?*
16. ***Professora:*** *Claro! Deviam primeiro explorar tudo para depois mexerem apenas o que vos interessa*
17. ***David:*** *Já vi… há infinitas circunferências a passar por A e B… cada uma com dois arcos como eu disse…*
18. ***Rafael:*** *…, mas temos de encontrar a que dá mais jeito…*
19. ***Professora:*** *e qual achas que é?*
20. ***Rafael:*** *Este arco aqui é o mais curto entre A e B…*
21. ***Professora:*** *Será?*
22. ***Rafael:*** *Estou à procura do menor valor!*
23. ***Professora:*** *O David disse que havia infinitas circunferências… então têm de achar uma que vos dê esse valor menor de que andam à procura…*
24. ***Roberto:*** *Onde diz círculo máximo …*
25. ***David:*** *… é a maior circunferência sobre a superfície esférica…*
26. ***Roberto:*** *Na superfície terrestre essa circunferência é o equador, certo?*
27. ***Professora:*** *Certo…, mas essa é apenas uma… há mais…*
28. ***Roberto:*** *…, mas na superfície terrestre só há essa?!*
29. ***Rafael:*** *Não… os meridianos também são circunferências máximas!*
30. ***Professora:*** *Sim…, mas há mais!... Fixem A e B e estudem a família de circunferências que passa por A e B…*
31. ***Rafael:*** *Ah! Se A e B fizerem o círculo máximo…*
32. ***Professora:*** *Queres dizer se A e B estiverem sobre o círculo máximo… continua Rafael… então…*
33. ***Rafael:*** *… temos a menor distância…*
34. ***Professora:*** *Em suma, dados dois pontos sobre a superfície esférica, esses pontos podem pertencer…*
35. ***David:*** *(interrompe) a infinitas circunferências…*
36. ***Roberto:*** *mas quando estiverem sobre a circunferência de raio máximo, a distância entre eles é a menor.*
37. ***Rafael:*** *Essa circunferência é única… a que contém A e B e tem raio igual ao da superfície esférica.*
38. ***Professora:*** *Então já sabem qual é o caminho mais curto entre dois pontos sobre a superfície esférica… façam o vosso registo na ficha…*

(Os três alunos fazem as suas anotações)

39. ***Professora*** *Haverá alguma posição para A e B para a qual a circunferência de raio máximo não seja a única? (olham para o monitor, pensativos)*
40. ***Rafael:*** *(quebra o silêncio) Agora sim… tem a ver com o diâmetro…, mas é o diâmetro da superfície esférica.*

41. ***Professora:*** *Explica-te melhor.*
42. ***Rafael:*** *Se A e B estiverem nos extremos de um diâmetro da superfície esférica há infinitas circunferências a passar em A e B.*
43. ***Professora:*** *(faz uns segundos de pausa para que todos acompanhem o raciocínio do colega…) Estão todos a acompanhar o que acaba de ser dito pelo Rafael?... Estão todos de acordo?*

(É percetível pela expressão do David e do Roberto que partilham o que foi dito pelo Rafael)

44. ***Professora:*** *Então, nessa situação, a distância entre A e B como fica?*
45. ***David:*** *(De imediato, como se fosse irrefletido) Fica fixa! É o comprimento da semicircunferência de raio igual ao da superfície esférica.*
46. ***Professora:*** *Afinal em que ficamos? O Rafael começou por dizer que a circunferência de raio igual ao da superfície esférica e que passa em A e B é única, mas também já disse que se A e B forem os extremos de um diâmetro da superfície esférica há infinitas circunferências a passar em A e B…*
47. ***David:*** *Então só é única se os pontos não forem extremos de um diâmetro!*
48. ***Professora:*** *Notem que começamos a nossa discussão à volta do "caminho mais curto entre os pontos A e B" …*
49. ***Rafael:*** *Só seria mais curto se fizéssemos um túnel…*
50. ***Roberto:*** *Mas isso não é o caminho sobre a superfície esférica… isso eu já percebi*
51. ***Rafael:*** *… o que baralha é que a distância mais curta entre dois pontos é um segmento de reta…*
52. ***Professora:*** *Pois, porque sempre foi assim que fizeram… "ligam" os dois pontos e o que representam é um segmento de reta…*
53. ***David:*** *Na outra tarefa também vimos que a Distância Táxi não era dada pelo comprimento de um segmento de reta… o caminho mais curto só era um segmento de reta se os pontos estivessem na horizontal ou na vertical…*
54. ***Professora:*** *Exatamente… bem lembrado! Então voltemos à superfície esférica. Explorem o ficheiro "caminho-mais-curto-cd".*

(Este grupo de alunos é pouco falador. Durante alguns segundos exploraram o ficheiro sem se pronunciarem, mas, são visíveis o empenho e a motivação na exploração do ficheiro)

55. ***Professora:*** *Quero ouvir o Roberto agora…*

(O Roberto é o mais tímido e só participa quando solicitado. As suas intervenções não são espontâneas e têm de ser provocadas).

56. ***Roberto:*** *… estava a pensar na resposta à alínea a) … agora os segmentos de reta são arcos…*

57. ***Professora:*** *Também estou de acordo…, mas são arcos quaisquer? O que acham?*

(ficam a pensar…)

58. ***Professora:*** *Então para obterem a menor distância entre A e B, qualquer arco servia?*
59. ***David:*** *Não! Era o arco da circunferência com raio máximo e que continha A e B.*
60. ***Rafael:*** *Ah! Os segmentos de reta são arcos de circunferências de raio máximo… é isso!*
61. ***David:*** *Como estão na circunferência, as circunferências são as retas … pode ser?*

Construiu a afirmação, mas questiona a possibilidade do que afirma. Emerge um conflito de ideias.

62. ***Professora:*** *O que vos parece?*
63. ***Rafael:*** *como as circunferências passam pelo arco….*
64. ***Professora:*** *…Sim… E?…*
65. ***Rafael:*** *As circunferências têm infinitos pontos, como as retas. Os arcos são parte das circunferências como os segmentos de reta e são o caminho mais curto…*
66. ***Professora:*** *…e com tudo isso, o que queres dizer?*
67. ***Rafael:*** *Só tínhamos a menor distância quando os pontos estavam sobre a circunferência de raio máximo… essa é que, supostamente, vai ser a reta.*
68. ***David:*** *Pois o raio tem de ser o mesmo que o da superfície esférica… o diâmetro é o mesmo que o da superfície esférica.*
69. ***Rafael:*** *Registamos?*
70. ***Professora:*** *É melhor… pelo menos fica um registo escrito e hoje temos de terminar esta sessão.*

2.3.2. Sessão [12-GE_T_2]

À semelhança da sessão 1, a cada aluno foi facultado um computador portátil e distribuída a tarefa 2. Os alunos começaram a leitura individualmente exceto o David que começou por fazer a leitura em voz alta. David e Rafael interagem de imediato não permitindo que a professora intervenha.

1. ***David:*** *"Da exploração dos dois ficheiros (da tarefa 1) esfera-azul-cdf e caminho-mais-curto-cdf, o que podes concluir relativamente à noção de retas paralelas na Geometria Esférica (Não esqueças a noção de reta nesta Geometria!)"*
2. ***Rafael:*** *(em jeito de resposta à leitura do colega) São infinitas!*
3. ***David:*** *Vão todas cruzar-se… obrigatoriamente… de certeza absoluta (Isto é dito com muita convicção)*
4. ***Professora:*** *Sim…e então?*
5. ***David:*** *Não há!*
6. ***Professora:*** *Então em que ficamos? O Rafael diz que são infinitas, o David diz que não há… Roberto, desempata lá isto… o que é que tu achas?*
7. ***Roberto:*** *(Encolhe os ombros e fala timidamente, sem convicção alguma, mais em jeito de pergunta) eu acho que não há, vão cruzar-se sempre (?)*
8. ***David:*** *Só se for alguma coisa especial*
9. ***Rafael:*** *…alguma coisa para além do círculo máximo… por exemplo os paralelos…*
10. ***David:*** *Mas isso não são circunferências que limitem o círculo máximo! Não são retas!*
11. ***Rafael:*** *Pois o centro tem de ser o mesmo para todas.*
12. ***David:*** *Por isso são infinitas, mas cruzam-se todas em dois pontos…*

(É visível que o Roberto está "perdido")

13. ***Professora:*** *Onde estão esses dois pontos David?*
14. ***David:*** *Estão na extremidade… formam um diâmetro.*
15. ***Professora:*** *Diâmetro de quê?*
16. ***David:*** *da esfera!*
17. ***Professora:*** *Vamos tentar visualizar… vamos pensar nos polos terrestres… extremos do eixo da terra… São extremos de um diâmetro. As circunferências de raio máximo que passam nos polos são?... lembram-se da Geografia?*
18. ***Rafael:*** *Meridianos*

19. ***Professora***: *Exato! Os meridianos são exemplos de retas, mas os paralelos da Geografia já não são retas… certo? (Nota-se que todos estão perfeitamente de acordo …)*
20. ***David:*** *Com o equador também dá.*
21. ***Rafael:*** *E com todas as "retas" que quisermos… intersetam-se sempre em dois pontos que estão nos extremos do diâmetro. (Quando disse "retas" notou-se uma "inflexão" na voz)*
22. ***Professora:*** *Esses pontos, os extremos de um diâmetro da superfície esférica, designam-se por pontos antípodas.*
23. ***David:*** *Por isso não há retas paralelas!*

(Ficaram todos pensativos e em silêncio)

24. ***Rafael:*** *Mas há retas perpendiculares (fala baixinho, para si mesmo)… Não há retas paralelas.*
25. ***Professora:*** *Na Geometria Euclidiana… lembrem-se lá…" dada uma reta no plano e um ponto exterior a essa reta…" quantas retas, paralelas à reta dada, passam por esse ponto?*
26. ***David:*** *Uma só! (o David respondeu de forma muito rápida)*
27. ***Professora:*** *Estão todos de acordo? (na expressão dos dois colegas do David está visível que confirmam) Isso tem a ver com o axioma euclidiano de paralelismo… É equivalente ao 5.º Postulado de Euclides o tal que deu "problemas". (Os alunos não ficam indiferentes a este comentário e o olhar do David reflete curiosidade e olham entre si…) O 5.º Postulado de Euclides esteve durante séculos envolto em controvérsias… foram muitos os matemáticos que o tentaram demonstrar, mas em vão…. Foi já no final do sec. XIX que alguns matemáticos tornaram conhecidas as Geometrias Não Euclidianas admitindo a negação do 5.º Postulado de Euclides. Notem que se considerarem uma "reta" (através do gesto com a mão, a professora acompanha com o dedo indicador uma circunferência no espaço). Sobre a superfície esférica que contem esta "reta" considerem um ponto exterior a esta "reta" …*

    Vejam, não há nenhuma paralela à reta dada que contenha esse ponto…
28. ***David:*** *Mas a Geometria Euclidiana não está de todo errada?*
29. ***Professora:*** *Claro que não!*
30. *Rafael: Então podemos dizer que não é universal?*
31. ***Professora:*** *Pois …, foi isso que demorou séculos a ser admitido…*
32. ***David:*** *Mas nas aulas não nos dizem isso…*
33. ***Professora:*** *A Geometria que é explorada em sala de aula é a Geometria euclidiana… se não for dada a informação sobre a existência de outras geometrias, é claro que os alunos não questionam sobre a sua existência… atualmente no 9.º ano já faz parte do programa a referência ao 5.º*

Postulado de Euclides e à existência de outras Geometrias Não Euclidianas. (ficam a pensar…) Vamos seguir a orientação da ficha e vamos ao link que aí está… depois clicam em retas paralelas.

34. ***Rafael**: (Depois de ter lido em voz baixa) Isto é o que dissemos…*
35. ***Professora**: E por hoje ficamos por aqui… querem perguntar alguma coisa? Roberto, estiveste muito calado…*
36. ***Roberto**: Estou a pensar…*
37. ***Professora**: Então e não queres partilhar connosco?*
38. ***Roberto**: Sabe, acho que tem de haver muitas Geometrias…, não há?*
39. ***Professora**: Posta a questão dessa forma… há. É só isso que queres perguntar? (Ele faz sinal com a cabeça, que sim) Ok, vai pensando nisso… continuamos para a semana.*

2.3.3. Sessão [12-GE_T_2, continuação]

(São novamente distribuídas as duas fichas que foram recolhidas, tarefa 1 e tarefa 2. Cada aluno tem um computador portátil e os três "desdenham" a tarefa 1 e focalizam-se na questão onde tinham parado na tarefa 2. Parecia que tinham tudo muito presente, apesar de já ter passado uma semana, e que o objetivo era o de continuar a tarefa. De imediato começaram a leitura individualmente)

1. ***Professora:*** *Então não querem conversar um pouco…*
2. ***David:*** *Já tínhamos conversado entre nós três… lembrávamo-nos de que a questão onde tínhamos ficado e que perguntava como eram os polígonos… nós achamos que têm lados curvos…*
3. ***Rafael:*** *(interrompe o colega) se os segmentos de reta são arcos de circunferência, os lados dos polígonos serão esses arcos.*
4. ***David:*** *Podemos abrir o ficheiro*
5. ***Professora:*** *Qual?*
6. ***David:*** *O que abrimos da outra vez…*
7. ***Professora:*** *Exploraram dois… vejam aí nas tarefas.*

(Os três procuram nas tarefas)

8. ***David:*** *Tanto faz um como o outro*
9. ***Professora:*** *O último que exploraram foi "caminho-mais-curto-cdf".*
10. ***David:*** *Podemos abrir esse?*
11. ***Professora:*** *Claro que sim.*

(Os três abrem o ficheiro)

12. ***David:*** *Dava jeito poder marcar mais pontos… aqui não é possível…*
13. ***Professora:*** *Afinal, o que vos parece? O que podem dizer acerca dos polígonos na Geometria Esférica?*
14. ***Rafael:*** *Os segmentos de reta vão ser arcos.*
15. ***Professora:*** *Qual o polígono com menor número de lados?*
16. ***David:*** *Vai ser um triângulo com os lados arredondados.*
17. ***Professora:*** *Na tarefa sugere-se que consultem "www.atractor.pt/mat/GeomEsf".*
18. ***Rafael:*** *Não… dois arcos podem unir-se… bi…ângulos…*
19. ***David:*** *Pois é…, mas isso é um polígono?*

20. **Professora:** *Digam lá o que estão a pensar e vamos lá pôr o Roberto a falar…*

21. **David:** *Pode ser qualquer coisa assim… não sei é se é um polígono.*

(Ficam a pensar e o David esboça na folha com a tarefa a figura seguinte)

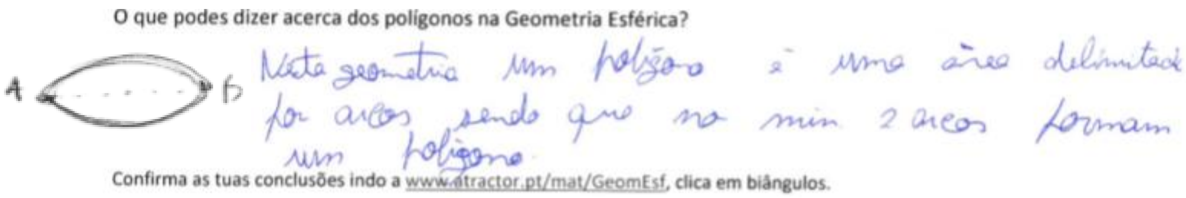


Figura 26: *Recorte (1) da ficha do David (GE_T_2, continuação).*

22. **Professora:** *… o que é um polígono?*

(Mas não conseguimos pôr o Roberto a falar…)

23. **Rafael:** *Em que Geometria?*

24. **Professora:** *Para ti… o que é um polígono?*

25. **David:** *Na Geometria Euclidiana … é uma porção de plano limitado por segmentos de reta… que são os lados do polígono.*

26. **Professora:** *Já tinham andado a refletir sobre isso…*

27. **Rafael:** *Por isso é que falamos nos lados curvos.*

28. **Professora:** *Roberto também falaste disto com os teus colegas?*

29. **Roberto:** *No intervalo começámos a falar dos polígonos na superfície esférica… achámos que os lados eram arcos de circunferência, mas mais nada…*

30. **Professora:** *mais nada?...*

31. **Roberto:** *Não falámos no número de lados… eu só pensei no triângulo.*

(Posiciona as mãos contornando um triângulo esférico à frente dele)

32. **Professora:** *Vamos então investigar o que é dito no link sugerido na tarefa…*

(Todos pesquisam em silêncio)

33. **Rafael:** *Posso ir ver a área?*

34. **Professora:** *Claro, podem todos.*

35. **David:** *(Depois de uns segundos de silêncio) Como é que medimos o ângulo?*

36. **Professora:** *Alguém tem alguma ideia? (silêncio) Sabem representar a reta tangente a uma circunferência num dado ponto da circunferência?*

37. **David:** *Ah! Fazemos isso no vértice nos dois lados…*

38. **Professora:** *Explica lá isso melhor.*

(Os colegas espreitam para o monitor do David que tem aberta a página que é reproduzida na figura seguinte)

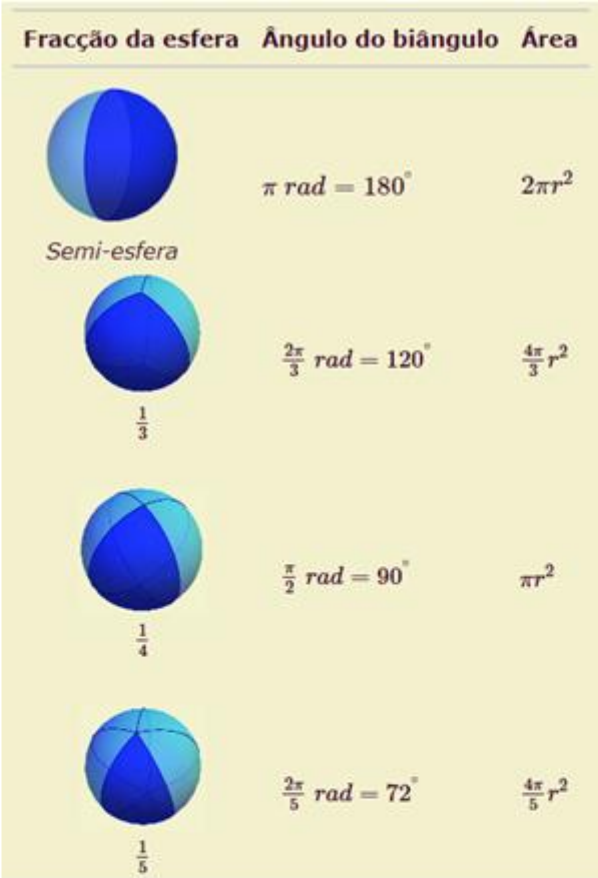


***Figura 27**: Área de um biângulo.*

(Em cada uma das esferas, com o dedo indicador, o David assinala as tangentes apontando o ângulo)

39. ***Professora:** … Isso mesmo… agora que sabem como obter a amplitude do ângulo, ficou entendido como se obtém a área?*
40. ***Rafael:** É uma regra de três simples.*
41. ***Professora:** se existe proporcionalidade direta…*
    Podemos voltar à nossa tarefa? Então sobre polígonos, o que podem dizer? Façam os vossos registos em 1. para podermos avançar…

(Escrevem em silêncio)

42. ***David:** Podemos abrir o ficheiro "soma_dos_ângulos_de_um_triângulo-cdf"?*
43. ***Professora:** Claro… vamos lá!*

(Todos olham para o monitor e acedem ao ficheiro)

44. ***David:** Temos que mover os pontos?*

45. **Professora:** *Comecem por explorar o ficheiro tal como é indicado em 1. e em 2.*

(Exploram durante alguns segundos, em silêncio)

46. **David:** *Podemos ir aqui onde diz "soma dos ângulos"?*
47. **Professora:** *Podem usar tudo o que têm, à vossa vontade.*
48. **David:** *… não é igual ao triângulo… não é sempre 180º… não é constante… (fala para si)*
49. **Professora:** *Estão a ouvir o David? Concordam? (acenam com a cabeça afirmativamente) Tentem interpretar a informação dada pelo gráfico…*
50. **Rafael:** *… Razão entre área da superfície esférica e área do triângulo…*
51. **David:** *Quando a soma dos ângulos aumenta a área do triângulo também aumenta…*
52. **Professora:** *Então Roberto… o que te parece?*
53. **Roberto:** *A área do triângulo aumenta e atinge a área total da superfície esférica… cobre toda a superfície esférica.*

(O Roberto só fala se solicitado, não se envolve na discussão no grupo.)

54. **David:** *Por isso a razão é 100%.*
55. **Professora:** *Isso acontece quando a soma dos ângulos é?....*
56. **David:** *900º*
57. **Professora:** *… sim… e varia entre que valores, Roberto?*
58. **Roberto:** *180º e 900º.*
59. **Professora:** *Todos concordam? (acenam com a cabeça afirmativamente) Vamos então tentar responder ao item 5. da tarefa, pois o 3. e o 4. já estão explorados.*
60. **Rafael:** *e o 6. também!*

(Durante alguns segundos exploram o ficheiro. Constroem triângulos…)

61. **David:** *não é fácil acertar os ângulos…, mas vê-se que é possível ter dois ângulos retos e três ângulos retos…*
62. **Professora:** *conseguiste Roberto?*
63. **Roberto:** *…valores muito aproximados… 85º, 88º, 93º…. Mas dá para ver que é possível ter três ângulos retos.*
64. **Professora:** *… e com os três ângulos rasos?*
65. **Rafael:** *… temos a superfície da semiesfera… é lógico!*
66. **Professora:** *Porquê?*
67. **Rafael:** *um ângulo raso está sobre uma reta, os três também vão estar… e aqui a "reta é a circunferência" com diâmetro igual ao diâmetro da superfície esférica… os segmentos que definem o triângulo estão sobre a mesma "reta" … limitam a superfície da semiesfera que é o nosso "triângulo".*

(Ao produzir o texto alguns conceitos são referidos com diferente entoação, daí estarem entre aspas.)

68. David: *Por isso a área do "triângulo" será a da superfície esférica quando a soma dos ângulos do triângulo for o valor máximo…*

69. Professora: *Como fariam para calcular a área de um triângulo?*

70. David: *Como à amplitude máxima corresponde a área da superfície esférica, fazia uma proporção… a área da superfície esférica e a do triângulo são diretamente proporcionais.*

71. Professora: *…pois, mas atenção… há um conceito que precisam conhecer e que é a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso. Essa diferença chama-se excesso angular. Na Geometria Euclidiana, o excesso angular de qualquer triângulo é zero. É esse excesso angular que devem ter em conta na proporção de que falava o David.*

72. Rafael: *Por isso o gráfico não passa na origem… se tivermos a reta na origem do gráfico, já temos proporcionalidade direta…*

73. David: *No eixo dos xx teremos o excesso angular… de 0º a 720º.*

74. Professora: *Roberto estás de acordo com o que os teus colegas foram dizendo… (acena afirmativamente com a cabeça) Pareces convencido…por hoje temos de dar a sessão por terminada. Na próxima semana falaremos de outra Geometria Não Euclidiana, pode ser?*

75. Rafael: *Então e não sabemos a cor do urso?*

(Esta questão surpreendeu a professora.)

76. Professora: *Depois de tudo o que fomos dizendo esqueci-me da questão sobre a cor do urso. Como era mesmo a questão?*

77. David: *Está no início da 1.ª ficha. (Todos vão procurar)*

78. Rafael: *O urso faz o percurso e volta à sua toca… faz um triângulo esférico.*

79. David: *Na Geometria Euclidiana, não podia voltar ao ponto de partida se andasse 10 para Sul, 10 para Este e 10 para Norte… (esboça na folha a figura seguinte)*

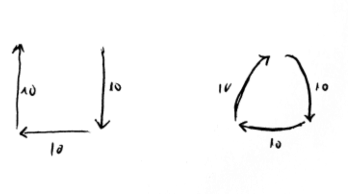


***Figura 28**: Recorte (2) da ficha do David (GE_T_2, continuação).*

80. ***Professora:*** *Então Roberto?*

81. ***Roberto:*** *… pode sair do Pólo e regressa ao Pólo…*

82. ***Professora:*** *Um urso Polar….*

83. ***Rafael:*** *…Branco!…*

(Todos sorriem notando-se um ar de cumplicidade enquanto arrumam os seus objetos pessoais.)

84. ***Professora:*** *Para a semana há mais…*

3. Geometria Hiperbólica (GH)

> *"**21. Gabriel:** Pois, a medida é a mesma, mas não é o que vemos.*
> ***(…)***
> ***27. Gabriel:** Aqui o que vemos não é real"*
> **Extraído da sessão [11-GH_T$_1$, conclusão]**

3.1. Grupo do 11.ºano (16-17 anos)

3.1.1. Sessão [11-GH_T$_1$]

Num encontro no corredor da escola, durante a semana, tinha já conversado com o Gabriel e com a Carolina sobre a nova sessão no Clube.

Quando chegaram, já sabiam que iríamos iniciar um novo conjunto de tarefas. Como já tinha ocorrido nas sessões com GE, pediram para trabalhar juntos num único computador. O computador estava já sobre a mesa quando entraram na sala e eles sentaram-se lado a lado, como já tinham feito anteriormente. Distribui a tarefa 1 e iniciei a gravação áudio.

1. ***Gabriel:*** *Nós já usámos aqui no Clube várias vezes o GeoGebra. É igual?*
2. ***Professora:*** *Continua a leitura, abre e explora o ficheiro depois dizes-me se é igual ou se há diferenças. Podem abrir, está no ambiente de trabalho. Mas leiam a ficha antes de começar.*

(Leem durante breves segundos.)

3. ***Gabriel:*** *Círculo sem fronteira?*
4. ***Carolina:*** *é uma região "aberta".*
5. ***Gabriel:*** *Aberta?*
6. ***Carolina:*** *Intervalos… intervalos abertos…*
7. ***Gabriel:*** *ah já sei. Como nos domínios planos. Podíamos ter a reta a tracejado ou a circunferência… já percebi… (ficou uns segundos calado e continuou) côncavo… como o vidro de um relógio arredondado, mas por dentro… será?*
8. ***Professora:*** *Pode ser… o modelo físico pode ser mais ou menos isso…*
9. ***Carolina:*** *Pode ser assim (colocou uma mão em forma de concha).*

10. ***Gabriel:*** *Podemos pensar numa superfície esférica cortada ao meio, vista pelo lado de dentro.*
11. ***Professora:*** *Isso… não esquecendo que a fronteira não existe. O modelo que aqui estamos a usar designa-se por Disco de Poincaré. Leram isso na ficha.*
12. ***Gabriel:*** *É como se fosse o universo em expansão… é possível que o Big-Bang tenha ocorrido na parte mais funda…*
13. ***Professora:*** *Pois Gabriel, é possível. Eu só propus este modelo, do matemático Poincaré, por me parecer ser fácil perceber alguns conceitos geométricos noutra Geometria Não Euclidiana. Mas, se te interessa, podes aprofundar os teus conhecimentos sobre esse assunto fazendo algumas pesquisas. Podemos continuar?*

(Foi o Gabriel que tomou a iniciativa em abrir o ficheiro.)

14. ***Gabriel****: Estas ferramentas aqui, não fazem parte do GeoGebra. Este é outro?*
15. ***Professora****: Essas ferramentas foram previamente construídas e acrescentadas no GeoGebra para podermos "tratar" objetos da Geometria Hiperbólica. Os procedimentos com o GeoGebra vocês já conhecem.*
16. ***Carolina****: Podemos construir uma reta?*
17. ***Professora****: Se é uma reta hiperbólica, têm de construir primeiro o disco de Poincaré de que já falámos. Será dentro dele que construirão a reta hiperbólica.*
18. ***Carolina****: Temos de selecionar o círculo e os dois pontos (foi clicando à medida que falava).*
19. ***Gabriel****: Olha, fez um arco!*
20. ***Professora****: Façam outras… representem mais…*

(A carolina continua a representar pontos e retas à custa de dois pontos. O Gabriel acompanha a resolução de olhar fixo no ecrã.)

21. ***Carolina:*** *São sempre arcos.*
22. ***Professora:*** *Arcos de circunferência, certo?*
23. ***Gabriel:*** *Os centros estão sempre do exterior do círculo. E quanto menores forem os arcos, o centro aproxima-se da fronteira do círculo.*
24. ***Professora:*** *dá para ver, Carolina?*

(A carolina apagou tudo e representou uma nova reta hiperbólica. Selecionou um dos pontos da construção da reta que foi arrastando.)

25. ***Carolina:*** *Olhem! Quando arrastamos abaixo do centro do círculo o arco curva para baixo e quando o arrasto acima do centro, curva para cima, mas olhem… aqui está alinhado com o centro e não temos um arco. É um segmento de reta!*

26. ***Professora:*** *Continuas a ter uma reta hiperbólica. Sempre que arrastas, estás a obter retas hiperbólicas.*
27. ***Carolina:*** *Mas então não são sempre arcos!*
28. ***Gabriel:*** *(pega no "rato" e seleciona a ferramenta "arrastar ponto" que a Carolina esteve a usar) É isto… aqui deixa de ser arco, temos o diâmetro do círculo…*
29. ***Professora:*** *Pois, mas o círculo não tem fronteira… esse diâmetro não tem extremos.*
30. ***Carolina:*** *mas esta reta é menos estranha do que as que são arcos.*
31. ***Gabriel:*** *É isso! É uma ilusão ótica vemos um segmento de reta, mas são sempre arcos. Se imaginar que estou dentro da superfície esférica, faz assim (faz o gesto no ar com o indicador, seguindo o contorno da linha) a reta tem concavidade virada para cima.*
32. ***Professora:*** *O Gabriel não se desliga de um modelo físico. Concordo, temos arcos, mas quando os dois pontos escolhidos estão alinhados com o centro do círculo, a reta hiperbólica que é visível é um segmento de reta idêntico ao da geometria euclidiana. Então será que qualquer arco de circunferência que contenha dois pontos do círculo de Poincaré é uma reta hiperbólica?*

(Ficam calados a pensar.)

33. ***Professora:*** *Então, não dizem nada. O que pretendo saber é se dois pontos definem uma ou mais retas hiperbólicas.*
34. ***Gabriel:*** *Ah! É só uma!*
35. ***Carolina:*** *É como na Geometria Esférica… Por dois pontos passavam muitas circunferências, mas só a que tinha o raio igual ao da esfera é que era uma reta. Aqui, também podemos ter muitos arcos a passar nos dois pontos, mas… (ficou calada)*
36. ***Professora:*** *Então Carolina?*
37. ***Gabriel:*** *Pois, … o arco é dado pelo GeoGebra…*
38. ***Professora:*** *Queres dizer reta hiperbólica. Pois, só há uma reta hiperbólica a passar em dois pontos dados…*
39. ***Carolina:*** *O que tem esse arco, ou essa reta hiperbólica, de especial?*
40. ***Professora:*** *É o ângulo que o arco forma com a fronteira do círculo! Neste modelo as retas hiperbólicas são arcos ortogonais à fronteira do círculo.*
41. ***Gabriel:*** *Perpendicular?*
42. ***Carolina:*** *(aponta com o dedo no ecrã) Aqui? 90º?*
43. ***Professora:*** *Podem medir. Usem as ferramentas euclidianas para traçar as duas tangentes à curva nesse ponto e meçam o ângulo entre elas.*
44. ***Carolina:*** *É como os ângulos entre os arcos na Geometria Esférica.*
45. ***Professora:*** *Construam e meçam.*

46. ***Carolina:*** *Temos de ir aqui? (coloca o cursor na ferramenta euclidiana para construir a reta tangente).*
47. ***Professora:*** *Primeiro tens de ter o ponto de interseção do arco com a circunferência que limita o círculo de Poincaré.*
48. ***Carolina:*** *Pois é, é aqui.*
49. ***Gabriel:*** *Faz a outra tangente… agora é aqui, para medir (aponta no ecrã para a ferramenta "medir ângulos").*
50. ***Carolina:*** *Deu 270º logo está certo, aquele é 90º. Boa!*
51. ***Professora:*** *Confirmaram que são ortogonais, mas isso não é a demonstração matemática.*
52. ***Gabriel:*** *Podemos arrastar este ponto (ele faz) e o ângulo mantém-se para todos os arcos.*
53. ***Carolina:*** *Arrasta agora o outro… dá sempre!*
54. ***Professora:*** *Ficaram convencidos! Mas relembro de que o que estão a fazer não é a demonstração. Vamos seguir a tarefa, ora já discutimos os pontos i), ii), iii) e iv)*
55. ***Gabriel:*** *Então as retas hiperbólicas são arcos ortogonais à fronteira do círculo e quando os pontos da reta estão alinhados com o centro do círculo vemos um segmento de reta. É interessante!*
56. ***Professora:*** *Ok, parece que está entendido.*
57. ***Gabriel:*** *Não vimos quantas retas passam por um ponto.*
58. ***Carolina:*** *É fácil ver… olha aqui (constrói retas hiperbólicas selecionando sempre um mesmo ponto e fazendo variar o outro ponto) vês fazemos as que queremos, são infinitas.*
59. ***Gabriel:*** *Já falámos da iii) é a que passa no centro do círculo e por dois pontos só é possível traçar uma reta.*
60. ***Carolina:*** *Temos de dizer reta hiperbólica, como em Geometria Táxi também dizíamos circunferência Táxi.*
61. ***Professora:*** *Pois, é importante esclarecermos "onde" estamos a trabalhar… assim não há confusão.*
62. ***Gabriel:*** *Quando não dizemos nada é sempre a geometria normal.*
63. ***Professora:*** *normal?*
64. ***Gabriel:*** *A euclidiana.*
65. ***Professora:*** *Certo! Esta tarefa ainda não está concluída, mas por hoje temos de terminar.*
66. ***Gabriel:*** *Podemos acabar esta tarefa agora?*
67. ***Professora:*** *Prefiro deixar-vos cheios de curiosidade… já vi que estão entusiasmados, mas o tempo acabou e continuamos para a semana, está bem?*
68. ***Gabriel:*** *Tem de ser.*

3.1.2. Sessão [11-GH_T_1, conclusão] e [11-GH_T_2]

Os dois alunos esperavam-me no hall e fomos juntos para a sala. Pedi-lhes que fossem ligando o computador enquanto eu procurava as tarefas. Voltei a distribuir a tarefa 1.

1. ***Carolina:*** *Só falta aqui preencher esta tabela.*
2. ***Gabriel:*** *Temos de ver aqui isto das restas paralelas… não vimos ainda.*
3. ***Professora:*** *Tal como é relembrado na tarefa, as retas paralelas não têm pontos em comum, ou seja, não se intersetam… usem as ferramentas que quiserem e explorem, mas vão conversando para eu vos poder acompanhar.*

(Durante alguns segundos a Carolina representou algumas retas, foi arrastando e o Gabriel limitou-se a observar.)

4. ***Carolina:*** *É tão estranho. Isto são retas hiperbólicas paralelas… não têm pontos em comum, mas são arcos!*
5. ***Gabriel:*** *Esquece que são arcos. Basta que dentro deste círculo, não se intersetem, só isso. (Dirigindo-se à professora) Não é?*
6. ***Professora:*** *Lembram-se do que dissemos sobre retas paralela na Geometria Esférica?*
7. ***Gabriel:*** *Não podiam existir… intersetam-se todas em dois pontos.*
8. ***Professora:*** *E aqui, na Geometria Hiperbólica, o que podem concluir?*
9. ***Carolina:*** *Aqui temos muitas…, mas aqui não é igual ao que sabemos…*
10. ***Professora:*** *O que queres dizer com isso?*
11. ***Carolina:*** *As retas paralelas não se intersetavam, mas estavam sempre à mesma distância.*
12. ***Professora:*** *Ah! é isso… estás com uma imagem mental das retas paralelas da geometria euclidiana. Pois, mas aqui, nesta geometria, a distância é … como hei de dizer … "distorcida". Há aí uma ferramenta que permite obter comprimentos hiperbólicas. Procurem-na e explorem, vão ver.*
13. ***Carolina:*** *Faz tu Gabriel.*

(Gabriel começa por ir "abrindo" os vários ícones das ferramentas hiperbólicas e quando aparece h-comprimento de um segmento a Carolina interrompe-o.)

14. ***Carolina:*** *Aí, podemos usar isso… desenha primeiro um segmento qualquer.*
15. ***Gabriel:*** *(constrói o segmento e obtém o comprimento) E agora?*

16. ***Professora:*** *Procurem a ferramenta que permite obter o ponto médio de um segmento.*

(Gabriel vai direito à ferramenta euclidiana que já conhece.)

17. ***Professora:*** *Não Gabriel, tens de usar a ferramenta hiperbólica. Procura-a… depois "arrastas" os extremos do segmento hiperbólico no círculo e veremos o que acontece.*

(Gabriel segue as instruções dadas.)

18. ***Gabriel:*** *Mas este não é o ponto médio! Não está à mesma distância de E e de F.*
19. ***Carolina:*** *Pede o comprimento dos segmentos EG e GF para ver.*

(Gabriel segue a sugestão da Carolina.)

20. ***Carolina:*** *Vê… 2 ponto 4 e 2 ponto 4. São iguais!*

(Gabriel "arrasta" um dos extremos.)

21. ***Gabriel:*** *Pois, a medida é a mesma, mas não é o que vemos.*
22. ***Professora:*** *Já vos disse… nós vemos com o "olhar" da geometria euclidiana. Estão a dar conta de como está posicionado o ponto médio? Arrastem mais…*
23. ***Carolina:*** *Faz devagar para ver… mexe este (aponta para um dos extremos do segmento.)*
24. ***Gabriel:*** *Está mais próximo do extremo que estiver perto da fronteira…, mas se os extremos estiverem os dois próximos da fronteira parece mesmo o ponto médio.*
25. ***Professora:*** *Ele é sempre o ponto médio… a distância aos extremos é sempre a mesma apesar de não "vermos" isso. Experimenta com os extremos igualmente afastados do centro do círculo.*
26. ***Carolina:*** *é igual… só quando um deles está mais próximo da fronteira é que o ponto médio também está mais próximo desse ponto… pronto, não é mais próximo…, mas é o que vemos!*
27. ***Gabriel:*** *Aqui o que vemos não é real.*
28. ***Professora:*** *Sabes Gabriel, foi assim que pensaram durante muitos anos, acharam sempre que só a geometria euclidiana era real. Mas como vês basta ter outro modelo e o que vemos é "diferente". (Carolina e Gabriel olham um para o outro, mas não fazem qualquer comentário.) Ainda não completaram a tabela…, podemos continuar?*

(Ficam os dois em silêncio e a Carolina é a primeira a intervir.)

29. ***Carolina:*** *Na geometria euclidiana, por um ponto conseguimos uma paralela à reta…*
30. ***Gabriel:*** *mas é só essa! É única.*

A Carolina completou a tabela recorrendo a figuras enquanto que o Gabriel foi mais sintético.

Dada uma reta e um ponto que não pertença a essa reta. Quantas retas passam por esse ponto e são paralelas a reta dada?	GEOMETRIA		
	EUCLIDIANA	NÃO EUCLIDIANA	
		Elíptica (Esférica)	Hiperbólica
	Só há 1	Não há	infinitas

__Figura 29:__ Recorte da ficha da Carolina (GH_T$_1$*).*

Dada uma reta e um ponto que não pertença a essa reta. Quantas retas passam por esse ponto e são paralelas a reta dada?	GEOMETRIA		
	EUCLIDIANA	NÃO EUCLIDIANA	
		Elíptica (Esférica)	Hiperbólica
	1	Nenhuma	infinitas

__Figura 30:__ Recorte da ficha do Gabriel (GH_T$_1$*).*

31. ***Carolina:*** *Pode dar-nos outra tarefa?*
32. ***Professora:*** *Claro! Mas não querem dizer nada sobre a tarefa que concluíram?*
33. ***Gabriel:*** *As retas aqui são estranhas e é tudo estranho!*
34. ***Professora:*** *Estranho? O que queres dizer?*
35. ***Gabriel:*** *Como as retas hiperbólicas são arcos de circunferência dentro de um círculo e para serem retas paralelas basta que não se intersetem, as paralelas não são normais… nem as medidas!*
36. ***Professora:*** *São os teus "olhos" que estão habituados à geometria euclidiana que te fazem ver estas retas "estranhas" … tens criada na tua mente uma imagem que associas a reta e a retas paralelas, e essa imagem não é a que vemos no Círculo de Poincaré. Mas percebeste?*
37. ***Gabriel:*** *Ah, sim!*

(Distribuí a tarefa 2. Começaram a ler em silêncio.)

38. ***Gabriel:*** *Não sabia que isto fazia isto? Pensei que tínhamos de fazer as tangentes com as ferramentas euclidianas e depois medir o ângulo entre as tangentes.*
39. ***Professora:*** *Foi o que fizemos…, mas podemos usar a ferramenta h-ângulo no círculo.*

(Gabriel criou três pontos e pediu o ângulo hiperbólico.)

40. ***Carolina:*** *Volta atrás e faz segmentos de reta com um ponto comum que é o vértice do ângulo.*

(Gabriel fez o gesto com o teclado para que fosse a Carolina a continuar.)

41. ***Carolina:*** *Olha aqui quando arrastamos o vértice … aqui perto da fronteira… a amplitude diminui.*
42. ***Gabriel:*** *O que acontece sobre a fronteira?*

(A Carolina arrasta o vértice colocando-o sobre a fronteira e o GeoGebra dá a indicação de que o ângulo não está definido.)

43. ***Carolina:*** *Claro! Não está definido!*
44. ***Gabriel:*** *Então aproxima-se de zero, mas nunca é zero?*
45. ***Professora:*** *Arrastem o ponto de um dos segmentos de forma a alterar a amplitude…*
46. ***Carolina:*** *Assim?*
47. ***Gabriel:*** *Fecha tudo.*
48. ***Professora:*** *Queres que a Carolina sobreponha os dois segmentos, é isso?*
49. ***Gabriel:*** *Pois, assim dá mesmo zero. Agora abre tudo.*
50. ***Carolina:*** *Volta a diminuir… não temos ângulos maiores do que 180º.*
51. ***Gabriel:*** *(Fala para ele próprio) 180º … (dirigindo-se à Carolina) faz uma reta…*
52. ***Carolina:*** *Uma qualquer?*
53. ***Gabriel:*** *Sim… (Carolina fez uma reta hiperbólica) Agora escolhe um ponto entre esses dois para ser o vértice e pede o h-ângulo. Tem de dar 180º!*
54. ***Carolina:*** *É como na euclidiana… fazemos agora com o vértice neste ponto C, olha aqui ângulo DCE. Vamos obter zero de certeza.*

(A construção dos alunos foi semelhante à que reproduzo na figura seguinte:)

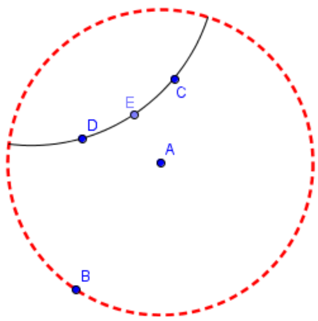


Figura 31: *Recomposição da imagem visualizada no ecrã (GH_T_2).*

55. ***Professora:*** *Então já verificaram entre que valores varia a amplitude do ângulo hiperbólico e até viram como se comporta quando o vértice está na proximidade da fronteira. Podem fazer os vossos registos e eu tenho de arrumar, pois já devíamos ter terminado. Continuamos para a próxima.*

3.1.3. Sessão [11-GH_T_2, conclusão] e [11-GH_T_3]

Carolina e Gabriel esperavam-me no corredor e fomos juntos para a sala. Enquanto caminhávamos, o Gabriel foi contando que tinha andado a fazer uma pesquisa sobre a Geometrias Não Euclidianas. Lembro-me de que fez referência ao quinto postulado de Euclides e citou os nomes de Lobachevsky e Riemann. Parecia impressionado pela ligação das Geometrias Não Euclidianas com a Física, e com a Teoria Geral da Relatividade de Einstein. Eu e Carolina fomos ouvindo o Gabriel que falava entusiasticamente.
Na sala, retomámos as mesmas posições da semana anterior e voltei a distribuir a tarefa 2. Eles ligaram o computador, abriram o GeoGebra e comecei a gravar.

1. ***Professora:*** *vamos concluir a tarefa 2, por favor.*
2. ***Gabriel:*** *Faço duas retas concorrentes… (vai construindo à medida que fala) … a interseção …*
3. ***Carolina:*** *Tem de ser com a ferramenta euclidiana.*
4. ***Gabriel:*** *Faço logo os quatro ângulos… Os opostos são iguais… quando arrasto, olha…*
5. ***Carolina:*** *… e os adjacentes são (fica a pensar) … dá 180º*
6. ***Gabriel:*** *Suplementares*
7. ***Carolina:*** *é isso… não me lembrava do nome*
8. ***Gabriel:*** *É tudo como na geometria euclidiana.*
9. ***Professora:*** *Tudo?*
10. ***Gabriel:*** *Não! É aqui… na questão 2 da tarefa.*
11. ***Professora:*** *Boa… continuem, não percam tempo. Essa questão está explorada.*
12. ***Carolina:*** *Faz "novo"*
13. ***Gabriel:*** *(Constrói um triângulo hiperbólico) Também uso logo a ferramenta h-soma dos ângulos de um triângulo.*
14. ***Carolina:*** *Pois… é menos de 180º e varia!*
15. ***Gabriel:*** *Os ângulos aproximavam-se de zero aqui ao pé do círculo…*
16. ***Professora:*** *da fronteira!*
17. ***Gabriel:*** *Sim, sim… é aqui (arrastou os três vértices para junto do centro do círculo) que a soma é mais próxima de 180º.*
18. ***Professora:*** *São capazes de preencher a tabela da tarefa? Assim passamos à tarefa 3.*
19. ***Gabriel:*** *Nestas geometrias a soma dos ângulos internos de um triângulo não é constante. Andámos sempre a dizer que era igual a 180º (parece falar para si mesmo).*

20. ***Professora:*** *Então Gabriel, há alguma dúvida? Queres dizer alguma coisa?*
21. ***Gabriel:*** *Não, não… acho que estas geometrias são bem interessantes.*
22. ***Professora:*** *(Distribuindo a tarefa 3) Vamos continuar?*
23. ***Carolina:*** *(foi ela que fez a construção) olha, aqui (estava representado próximo da fronteira) o centro é como se não fosse o centro.*
24. ***Gabriel:*** *Pois é o que vemos… foi como o ponto médio, estava sempre mais perto do extremo que estava perto da fronteira. Estás a ver (A Carolina tinha já arrastado o centro do círculo hiperbólico, sobrepondo-o ao centro do círculo do Disco de Poincaré) no centro já vemos tudo certo.*
25. ***Professora:*** *Notam que para vocês, "tudo certo" é o que acontece na geometria euclidiana? Falam como se o que se vê nas Geometrias Não Euclidianas não fosse certo. Mas é!*
26. ***Gabriel:*** *Pois, … é de não estarmos habituados…*
27. ***Professora:*** *Querem aí registar alguma coisa na ficha ou continuamos?*
28. ***Gabriel:*** *Aqui diz investiga construindo… é para construir?*
29. ***Professora:*** *Já avançaste na ficha. Sim, é para serem vocês a construir.*
30. ***Carolina:*** *Nós já vimos o ponto médio do segmento. O problema é que a distância, mesmo que seja a mesma, não se vê igual. E, junto da fronteira do círculo parece mais pequena… pronto, sabemos que é igual, mas não a vemos igual…*
31. ***Professora:*** *Estamos todos de acordo, se quiserem avancem… força.*
32. ***Gabriel:*** *Não podemos usar as ferramentas euclidianas? Aqui, a mediatriz… (Aponta no ícone das ferramentas euclidianas, a mediatriz de um segmento)*
33. ***Professora:*** *Não Gabriel, aí não podes. Tens de construir atendendo às propriedades que conheces para a mediatriz. (Ficam os dois calados.) Então? O que é a mediatriz?*
34. ***Carolina:*** *Uma reta.*
35. ***Professora:*** *sim, e mais… (continuam calados) Vamos lá, o que sabem da posição dessa reta?*
36. ***Carolina:*** *É perpendicular ao segmento.*
37. ***Professora:*** *e…*
38. ***Gabriel:*** *Já vi… vai dar confusão.*
39. ***Professora:*** *porquê Gabriel?*
40. ***Gabriel:*** *envolve distância… e a distância aqui…*
41. ***Professora:*** *Diz lá…*
42. ***Gabriel:*** *Os pontos da mediatriz estão todos à mesma distância dos extremos do segmento, certo?*
43. ***Professora:*** *Claro que sim…, mas para a construíres basta indicares que pretendes uma reta hiperbólica, perpendicular a um dado segmento*

hiperbólico e ainda… vocês não referiram, mas que passa no ponto médio do segmento. Todas as ferramentas necessárias estão no menu hiperbólico. Ora vejam lá…

44. ***Carolina:*** *Começamos pelo segmento hiperbólico… agora o ponto médio… e…*
45. ***Gabriel:*** *Vai ali onde diz h-reta perpendicular.*
46. ***Carolina:*** *(faz o que o colega sugeriu) Não dá… só se for aqui, h-reta por um ponto na h-reta…*
47. ***Gabriel:*** *Sim, já deu …, mas agora escolhe um ponto nessa reta e vê se está à mesma distância dos extremos. Vai a h-comprimento…*
48. ***Carolina:*** *um ponto, sete quatro três e um ponto, sete quatro três, deu!*
49. ***Gabriel:*** *Arrasta… pois, mantem-se… temos a mediatriz.*
50. ***Professora:*** *É isso mesmo! Agora queremos o circuncentro.*
51. ***Carolina:*** *Eu já não me lembrava, mas como está com as mediatrizes já me lembro era a interseção das mediatrizes…*
52. ***Gabriel:*** *Então queremos mais uma mediatriz. Bastam duas…*

(A carolina constrói outra das mediatrizes)

53. ***Gabriel:*** *A interseção é ali (aponta para o ícone da barra de ferramentas). Faz a circunferência hiperbólica com centro aí e a passar num dos vértices. (A Carolina, constrói) Boa! Arrasta agora … dá mesmo!*
54. ***Carolina:*** *É como na geometria euclidiana.*
55. ***Professora:*** *Pois é… e era isso que eu queria que vissem. Gostaram?*
56. ***Gabriel:*** *Podemos fazer as medianas e o baricentro?*
57. ***Professora:*** *Gostava muito, mas vocês nem ouviram o toque… temos de arrumar e terminar.*
58. ***Gabriel:*** *Podemos ainda fazer para a semana?*
59. ***Professora:*** *Claro! Agora vamos…*

(Esta foi a última sessão possível com áudio gravação, contudo estes alunos ainda retomaram esta ficha bem mais tarde, a pedido deles, noutras sessões do clube.)

3.2. Grupo do 12.ºano (17-18 anos)

3.2.1. Sessão [12-GH_T_1 e T_2]

Já estavam os três computadores sobre a mesa quando chegaram os três alunos. Ao entrar o Rafael perguntou se era possível fazerem todos juntos no mesmo computador. Não coloquei qualquer objeção, pois assim eu também podia acompanhar com mais facilidade o que iam fazendo e estaríamos todos a discutir sobre a mesma construção no GeoGebra.

Sentaram-se os três do mesmo lado da mesa, ficando o Rafael no meio. Adverti que iriam alternando entre os três a utilização do teclado e guardei dois dos computadores.

Disse-lhes que iríamos usar o GeoGebra e pareceu-me que ficaram satisfeitos, pois já conheciam bastante bem este software, já o tinham usado no clube e com alguma frequência nas aulas de Matemática.

Distribuí a tarefa 1 e iniciei a gravação áudio. Começaram a leitura da ficha em silêncio e o Rafael pediu para abrir o GeoGebra.

1. ***Professora:*** *Rafael, aí tens de abrir o ficheiro "menu_hiperbólico".*
2. ***David:*** *Acrescentou a barra de ferramentas.*
3. ***Professora:*** *Leram a ficha… sigam as indicações.*

(O Rafael representou alguns pontos no círculo e os colegas não se manifestaram.)

4. ***Rafael:*** *Aqui a seta também arrasta?*
5. ***Professora:*** *Claro e dá muito jeito usá-la.*
6. ***Rafael:*** *(depois de ter experimentado "arrastar" alguns pontos) Já posso representar retas?*
7. ***Professora:*** *Sim, apaga esses pontos e continuem.*
8. ***David:*** *oups… isso é a reta?*
9. ***Rafael:*** *Faço outra…*
10. ***Professora:*** *Estão mesmo a olhar para retas hiperbólicas!*
11. ***David:*** *São ramos de hipérbole?*
12. ***Professora:*** *Hipérbole?... hiperbólica! Não, não são. São arcos de circunferência. Experimentem arrastar para fora um dos pontos… veem, completa a circunferência. Mas o nosso modelo para tratar a Geometria Hiperbólica é exclusivamente o círculo como está dito na ficha, Disco de Poincaré. É o nosso "domínio".*

(Ficam a olhar para o ecrã sem falar.)

13. ***Professora**: Então? Não fiquem parados… vamos lá David, agora é a tua vez de assumir a construção. Vão explorando o programa de modo a dar resposta às questões i), ii), iii) e iv). Mas quero vos ouvir falar.*
14. ***Rafael**: As h-retas são arcos de circunferência.*
15. ***Professora**: Sempre? David vai arrastando lentamente um dos pontos da h-reta dentro do círculo.*
16. ***Rafael**: aí, pára. Centra o ponto com o centro do círculo… não é um arco.*
17. ***David**: Quando passa no centro é como a reta euclidiana.*

***(Ficam calados**.)*

18. ***Professora**: Será reta ou segmento de reta?*
19. ***David**: Ah, é isso… é um segmento de reta.*
20. ***Professora**: E os extremos? Roberto diz lá o que achas.*
21. ***Roberto**: Como o círculo não tem pontos de fronteira, o segmento não tem extremos.*
22. ***Professora**: Pois é! Mas na Geometria Hiperbólica, isso que estamos a ver, é uma reta hiperbólica. Vamos lá tentar responder à ficha.*

(Ficam novamente em silêncio.)

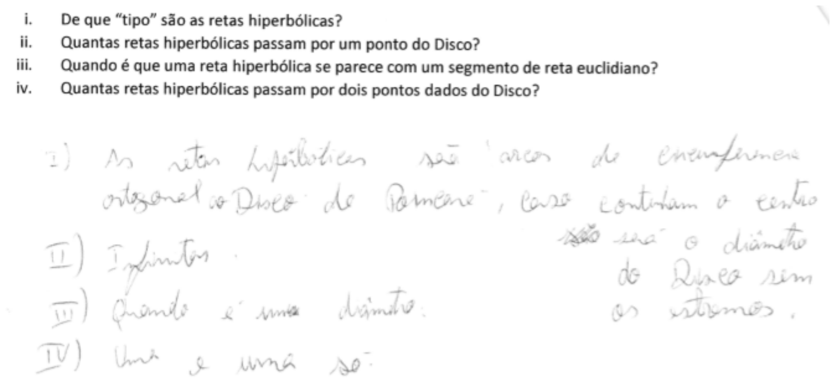
23. ***Professora**: Hoje está a ser difícil pôr-vos a falar… vamos lá, digam qualquer coisa.*
24. ***Rafael**: Já vi tudo!*
25. ***Professora**: Tudo? O que viste?*
26. ***Rafael**: Não é preciso fazer nada para ver que num ponto passam infinitas retas hiperbólicas. Basta pensar num fixo e o outro onde quisermos.*
27. ***Professora**: Vocês também conseguem ver? (com a cabeça acenam afirmativamente) Então e as questões seguintes.*
28. ***David**: Por dois pontos só há uma reta hiperbólica que lá passa.*
29. ***Professora**: Roberto, não pareces muito convencido…*
30. ***Roberto**: Não sei…*
31. ***Professora**: Vamos saber qual o ângulo que estes arcos formam entre si (apontei para uma reta hiperbólica e para a fronteira do círculo). Pretendo que seja o Roberto a fazer. Para isso vamos partir do ponto de interseção das curvas, que será o vértice do ângulo. Depois vamos representar as tangentes a cada uma dessas curvas, nesse ponto. Finalmente só teremos de pedir o ângulo. Estas construção será feita apenas com as ferramentas euclidianas. Vamos lá…*
32. ***Roberto**: Primeiro o ponto de interseção…*
33. ***Rafael**: vai às primeiras ferramentas, era por aí…*
34. ***Roberto**: As tangentes… é aqui…*

***(O Roberto fez a construção com as duas tangentes no ponto de interseção**.)*

35. ***David**: O ângulo é neste (aponta para a ferramenta).*

36. **Roberto:** *É 90º. Se arrastar… pois é sempre 90º, as tangentes são perpendiculares.*

37. **Professora:** *Também as curvas! Por isso as retas hiperbólicas são ortogonais à fronteira do círculo. Façam o registo na vossa ficha.*



i. De que "tipo" são as retas hiperbólicas?
ii. Quantas retas hiperbólicas passam por um ponto do Disco?
iii. Quando é que uma reta hiperbólica se parece com um segmento de reta euclidiano?
iv. Quantas retas hiperbólicas passam por dois pontos dados do Disco?

I) As retas hiperbólicas são arcos de circunferência ortogonal ao Disco de Poincaré, caso contenham o centro ~~são~~ será o diâmetro do Disco sem os extremos.
II) Infinitas.
III) Quando é um diâmetro.
IV) Uma e uma só.

***Figura 32**: Recorte da ficha do Rafael (GH_T_1).*

38. **Roberto:** *Estas duas retas hiperbólicas são paralelas… não se intersetam.*

39. **David:** *Não é preciso mais nada? Basta que não tenham pontos em comum, é isso?*

40. **Professora:** *O conceito de retas paralelas é o mesmo da geometria euclidiana. Na geometria euclidiana, retas que não tenham pontos em comum são estritamente paralelas e na Geometria Hiperbólica também.*

41. **David:** *Pois, mas aqui são paralelas esquisitas.*

42. **Professora:** *São paralelas!*

43. **Roberto:** *Preenchemos a tabela?*

44. **Professora:** *Sim, mas quero que digam alguma coisa. Hoje não estão nada comunicativos. Deve ser de estarem todos juntos no mesmo computador. Queres começar Roberto? Diz qualquer coisa…*

45. **Roberto:** *Então na geometria euclidiana sabemos que por um ponto exterior a reta passa uma e uma só reta paralela a essa reta.*

46. **David:** *pois, quando temos um ponto e uma direção… só há uma reta que contem esse ponto e tem essa mesma direção.*

47. **Professora:** *Boa! E na Geometria Esférica? Como é?*

48. **David:** *Na Geometria Esférica não há retas paralelas, logo não há nenhuma.*

49. **Professora:** *Estão todos de acordo?*

(Acenam afirmativamente com a cabeça.)

50. **Rafael:** *Sim, vimos que há sempre dois pontos de interseção entre duas retas, não havia paralelas nessa geometria.*

51. **David:** *Mas na Geometria Hiperbólica temos muitas.*

52. **Professora:** *Muitas?*

53. **Rafael:** *Infinitas!*

54. ***Professora:*** *Concordas Roberto? (é visível que está de acordo, pois abana a cabeça afirmativamente.)*
55. ***Professora:*** *Terminem de completar a tabela síntese da tarefa1, e eu vou já distribuir a tarefa 2, pois ainda temos tempo.*
56. ***David:*** *Esta é a Geometria mais complicada que vimos.*
57. ***Professora:*** *Não é complicada… só não estão ainda familiarizados com ela. Continuemos. Vamos outra vez para os ângulos. Rafael queres fazer a leitura em voz alta, por favor.*

(Rafael lê o primeiro parágrafo da ficha e no final o David interveio)

58. ***David:*** *Então com esta ferramenta hiperbólica não precisávamos ter feito as tangentes para medir o ângulo entre os arcos?*
59. ***Professora:*** *vais poder verificar que nesse caso a ferramenta h-ângulo não funciona, porque o vértice não é um ponto do Disco de Poincaré. A fronteira do círculo não existe. A ferramenta h-ângulo só funciona para pontos do interior do círculo. Mas verifiquem.*
60. ***David:*** *Posso fazer… onde está a ferramenta?*
61. ***Professora:*** *Se clicarem no canto inferior direito, em todos os ícones, irão encontrar. Procurem.*
62. ***Rafael:*** *Está aí, agora basta ter três pontos.*
63. ***David:*** *Quero experimentar com o vértice sobre a circunferência que limita o Disco.*
64. ***Roberto:*** *Não definido… não dá!*
65. ***David:*** *Está visto…*
66. ***Professora:*** *Mas hoje não vamos poder fazer mais, já tocou. Continuamos esta tarefa na próxima sessão do clube. Conto convosco.*

3.2.2. Sessão [12-GH_T$_2$, continuação]

Quando os alunos chegaram perguntei-lhes se queriam trabalhar no mesmo computador ou separados. Os três demonstraram preferir trabalhar juntos num só computador. Pedi-lhes que se sentassem, abrissem o computador e que acedessem ao GeoGebra. Sentaram-se nos mesmos lugares da semana anterior. Essa disposição permitiu-me ficar em pé atrás deles e acompanhar as construções no ecrã. Distribuí novamente a tarefa 2 e comecei a gravar.

1. ***Professora:*** *Continuem a ficha. Estão lembrados de onde ficaram na semana passada?*
2. ***Rafael:*** *Usámos a ferramenta h-ângulo para medir ângulos.*
3. ***Professora:*** *Como fizeram?*
4. ***Rafael:*** *Escolhíamos três pontos, que tinham de estar no círculo, e obtínhamos a amplitude do ângulo hiperbólico. O segundo ponto indicado era o vértice.*
5. ***Professora:*** *Está bem, agora sugiro que em vez de terem só três pontos, usem segmentos de reta hiperbólicos ou semirretas hiperbólicas. Façam as vossas construções e tentemos dar resposta às três questões: i), ii) e iii). Vou insistir que quero ouvir-vos falar. Vamos lá.*
6. ***Rafael:*** *(Enquanto constrói uma semirreta hiperbólica fala em jeito afirmativo) Para termos um ângulo as duas semirretas têm de ter a mesma origem…*
7. ***David:*** *Pede o h-ângulo e depois arrasta o vértice… vê a amplitude está a diminuir… agora aumenta.*
8. ***Professora:*** *Roberto, estás a acompanhar? Consegues associar o aumento ou a diminuição à posição do vértice? Arrasta tu. (Roberto faz deslocar o vértice).*
9. ***Roberto:*** *À medida que o vértice se aproxima da fronteira, o ângulo está a tender para zero. Quando o arrasto mais para o centro do círculo, aumenta.*
10. ***Professora:*** *O Roberto disse, tender para zero, mas será que nunca é zero?*
11. ***Rafael:*** *Não! Porque os pontos da fronteira não pertencem ao círculo e já vimos que não está definido.*
12. ***Professora:*** *Só arrastaram o vértice no círculo. Já experimentaram mover um dos pontos de uma das semirretas?*
13. ***David:*** *(dirige-se ao Roberto.) Deixa-me fazer… pode dar zero quando as semirretas estão sobrepostas, e pode dar… (arrasta até obter 180º) 180º.*

14. ***Professora:*** *Mantem nos 180º. Constrói a reta hiperbólica que contem dois desses pontos. O que observas?*
15. ***David:*** *Lá está, passa nos três…*
16. ***Rafael:*** *Pois tinha de ser… os pontos estão sobre uma reta. É como na geometria euclidiana quando temos o ângulo raso, as duas semirretas completam a reta.*
17. ***David:*** *Era quando os três pontos eram colineares… estes aqui…também são!*
18. ***David:*** *Podemos avançar para as retas concorrentes.*
19. ***Professora:*** *Apaguem tudo, comecem sempre de novo. Roberto, faz tu, pode ser?*

(Roberto vira o teclado para ele e começa por representar uma reta hiperbólica.)

20. ***David:*** *Temos de ver ângulos adjacentes.*
21. ***Rafael:*** *Falta outra reta…, mas tem de ser concorrente a essa. Um dos pontos pode ser um desses, dessa reta.*

(Roberto constrói outra reta hiperbólica seguindo a instrução do Rafael.)

22. ***David:*** *Esse ponto vai ser sempre a interseção. Agora é só usar h-ângulo.*
23. ***Roberto:*** *CDE …118º… faço já outro ponto e peço o ângulo adjacente?*
24. ***Rafael:*** *Sim…*
25. ***Roberto:*** Este ângulo EDF é o adjacente… 62º
26. ***Professora:*** *Aqui na barra entrada vamos fazer a soma dessas amplitudes, clica naquele α e podes selecionar as letras gregas para fazeres $\alpha+\beta$, … soma-os … faz "enter" e obtemos γ.*
27. ***Rafael:*** *Move tudo, com a seta, … mantem-se 180º!*
28. ***David:*** *Não arrastes para aí, se não, não temos ângulos adjacentes, alteras a construção.*
29. ***Rafael:*** *A soma dá sempre 180º é como na geometria euclidiana.*
30. ***Professora:*** *Vejam agora os ângulos opostos.*
31. ***Roberto:*** *Vão ser congruentes, como na euclidiana.*
32. ***Professora:*** *Nem queres saber qual a amplitude?*
33. ***Rafael:*** *Faz lá para confirmar.*

(Roberto usa a ferramenta h-ângulo para determinar as amplitudes dos ângulos e confirma o que estavam a dizer)

34. ***Professora:*** *Sabem que a Geometria Hiperbólica pode ser estudada noutros modelos, sem ser o Disco de Poincaré. Esta foi uma escolha minha, pois pareceu-me que poderiam com facilidade perceber os conceitos usando as ferramentas do GeoGebra no Disco de Poincaré. Vamos lá terminar esta tarefa.*

(Leem em silêncio a ficha)

35. ***David:*** *(Puxando para si o teclado) Podemos fazer segmentos hiperbólicos para construir o triângulo ou temos de usar os três pontos com a ferramenta h-Triângulo?*
36. ***Professora:*** *Façam como quiserem…*
37. ***Rafael:*** *(Aponta para o triângulo hiperbólico no ecrã) Arrasta lá os vértices…*
38. ***David:*** *Olhem… aqui parece um triângulo normal.*
39. ***Professora:*** *O que queres dizer com "normal"?*
40. ***David:*** *Os lados são segmentos de reta.*
41. ***Professora:*** *Atenção… os lados são sempre segmentos de reta. Nesta geometria são segmentos hiperbólicos!*
42. ***David:*** *Mas quando estamos próximos do centro, são segmentos de reta euclidianos.*
43. ***Professora:*** *Mais uma vez é apenas uma questão de visualização. O que vemos, parece-se mais com os segmentos euclidianos… é só isso… é o que vemos.*
44. ***Rafael:*** *Pois são sempre hiperbólicos… vê-se bem quando os vértices se afastam do centro, mas no centro é como disse o David… vemos segmentos euclidianos.*
45. ***Professora:*** *Já viram como é afetada a construção, vejam agora os ângulos internos e a soma dos ângulos.*
46. ***David:*** *Há aqui uma ferramenta que já vi, é h-soma dos ângulos de um triângulo, clica aqui.*

(Roberto faz o que o colega sugere.)

47. ***Roberto:*** *Dá tudo… dá a soma e dá cada um dos ângulos. A soma é inferior a 180º!*
48. ***David:*** *(arrasta os vértices, modificando o triângulo) Estranho… não passa de 180º.*
49. ***Rafael:*** *Aproxima todos os vértices da fronteira …aí. Espera, estás a ver a soma diminui… pois, próximo da fronteira os ângulos tendiam para zero. Volta lá para o centro… todos os vértices… aumenta, mas não chega a 180º.*
50. ***Professora:*** *Já podem tirar algumas conclusões?*
51. ***David:*** *Já! E é estranho, a soma varia. É como na Geometria Esférica. Mas aqui é sempre inferior a 180º.*
52. ***Professora:*** *É isso! Agora vejam a tabela síntese, acho que já a podem preencher.*
53. ***Rafael:*** *Posso ver o triângulo equilátero?*

(Rafael apaga a construção toda e constrói um triângulo equilátero recorrendo à ferramenta h-triângulo equilátero.)

54. ***David:*** *Arrasta os vértices… tem de se manter equilátero.*

55. ***Roberto:*** *Esse não é equilátero! Este lado é mais pequeno!*

56. ***Professora:*** *São, são… a questão é a distância entre os pontos. Lembram-se de termos visto o ponto médio de um segmento? A distância do ponto médio a cada um dos extremos também não parecia a mesma… e vocês confirmaram com h-comprimento. (Ficam pensativos) Cada um desses segmentos hiperbólicos têm o mesmo comprimento…*

(Rafael usa a ferramenta h-comprimento para obter o comprimento de cada um dos segmentos hiperbólicos do triângulo.)

57. ***David:*** *4,136 4,136 e 4,136; boa! Arrasta… mantem-se. E os ângulos são todos iguais, vê lá.*

58. ***Rafael:*** *Têm de ser iguais e vê-se… (enquanto falava, foi usando a ferramenta h_soma dos ângulos do triângulo) Mas já vemos… aí está!*

59. ***Professora:*** *Vimos que a amplitude do ângulo hiperbólico era obtida à custa do ângulo euclidiano que era formado pelas semitangentes com origem no vértice. Por isso o Rafael disse que o ângulo se vê bem. Mas a distância já não.*

60. ***David:*** *Continua a ser no centro do círculo que ele é mais normal. Era onde víamos os segmentos mais parecidos com os segmentos euclidianos.*

61. ***Professora:*** *E o que é para ti mais normal?*

62. ***David:*** *Então, é vê-lo equilátero.*

63. ***Professora:*** *Pois, como estás habituado a "imaginar" um triângulo equilátero, é isso.*

    Por hoje já chega. Será que podemos ter ainda outra sessão para a semana? (Todos confirmam que estarão presentes.) Ok, então vamos arrumar e até para a semana.

3.2.3. Sessão [12-GH_T_3]

(Mantivemos as posições das duas últimas sessões. Distribuí a tarefa 3, enquanto abriam os ficheiros. Não fizeram qualquer comentário e o Rafael começou de imediato a construção da circunferência hiperbólica. Comecei a gravar.)

1. ***David:*** *Quando arrastas o centro da circunferência para junto da fronteira já não o vemos no centro.*
2. ***Rafael:*** *Já sabemos… é o que vemos. Mas está no centro. Olhem aqui, quando centro com o centro do círculo fica normal.*
3. ***Professora:*** *Decididamente… para vocês "normal" passa a ser sinónimo de euclidiano. Comecem a distinguir os vossos objetos por hiperbólicos ou euclidianos. Até parece que tudo o que não é euclidiano, é "anormal"!*
4. ***Rafael:*** *(Rindo)… e não é lá muito normal…*
5. ***Professora:*** *Continuem então.*
6. ***David:*** *Já vimos o ponto médio, avança.*
7. ***Rafael:*** *Faço um triângulo qualquer?*
8. ***Professora:*** *Triângulo hiperbólico.*
9. ***Rafael:*** *Não é isso… uso h-triângulo? Não faço os segmentos de reta primeiro.*
10. ***David:*** *Claro! É mais rápido.*
11. ***Rafael:*** *E as mediatrizes? Como faço?*
12. ***Professora:*** *Ajudem lá. O que sabem das mediatrizes?*
13. ***David:*** *Passam no ponto médio de um segmento.*
14. ***Professora:*** *Não chega… Roberto, como é?*
15. ***Roberto:*** *(fica a pensar) Os pontos ficavam todos à mesma distância dos extremos do segmento.*
16. ***Professora:*** *Boa… pensem na construção geométrica.*
17. ***David:*** *Usávamos o compasso e depois desenhávamos a reta onde se cruzavam os arcos.*
18. ***Professora:*** *Qual era a posição dessa reta em relação ao segmento?*
19. ***Rafael:*** *Era perpendicular.*
20. ***Professora:*** *Então agora podem usar a perpendicular e o ponto médio… vamos lá, procurem as ferramentas hiperbólicas que fazem isso.*

(Rafael vai clicando nos ícones da barra das ferramentas hiperbólicas.)

21. ***David:*** *É essa… h-reta perpendicular por ponto na h-reta.*
22. ***Rafael:*** *Precisamos primeiro do ponto médio.*
23. ***Roberto:*** *faz logo para os três lados…*

(Rafael constrói sequencialmente os três pontos médios e representa as três mediatrizes.)

24. ***David:*** *Arrasta os vértices… Calma, faz devagar. Tens de ver se as mediatrizes se intersetam. Se afastas muito não temos interseção.*
25. ***Professora:*** *Essa interseção é o circuncentro hiperbólico. Podem confirmar na vossa construção.*
26. ***David:*** *O circuncentro era o centro da circunferência que passava nos três vértices do triângulo… fazemos essa circunferência… dá para fazer?*
27. ***Professora:*** *Experimentem …*
28. ***Rafael:*** *Precisamos primeiro do centro.*
29. ***David:*** *Pede a interseção … é nas ferramentas euclidianas.*
30. ***Professora:*** *Está bem construída, vejam quando arrastam. Podem continuar para as construções seguintes.*
31. ***David:*** *Faço eu… faço "novo". Começo com um triângulo hiperbólico qualquer (constrói e fica calado) … medianas… como era?*
32. ***Rafael:*** *Ponto médio… e …*
33. ***Professora:*** *E? Então em que ficamos? (espera)*
34. ***Rafael:*** *era o vértice do triângulo?*
35. ***Roberto:*** *Era o segmento de reta… os extremos eram o ponto médio de um lado e o vértice oposto a esse lado.*
36. ***Professora:*** *Isso… e de que mais se lembram sobre as medianas?*
37. ***David:*** *O baricentro era onde se intersetavam as medianas.*
38. ***Professora:*** *Mais…*
39. ***Rafael:*** *Era o ponto de equilíbrio do triângulo.*
40. ***Professora:*** *Sim… e a distância do baricentro ao vértice? … e ao ponto médio?*
41. ***David:*** *O baricentro estava a um terço do lado e a dois terços do vértice, era isso.*
42. ***Professora:*** *Queres dizer qua a mediana era dividida nessa proporção pelo baricentro, certo? Façam lá a construção.*

(David faz a construção começando pelos três pontos médios de cada um dos lados do triângulo hiperbólico e depois faz os segmentos de reta hiperbólicos à custa dos pontos médios e dos vértices do triângulo.)

43. ***David:*** *Peço a medida dos segmentos para ver se estão na proporção de um para dois (recorre a h-comprimento do segmento).*
44. ***Rafael:*** *Não dá! Este não é o dobro daquele.*
45. ***Professora:*** *Fizeste o cálculo? Arrasta lá David. Não dá, pois não? Convencidos? Bem, já temos pouco tempo, era interessante que vissem o que se passa com os triângulos retângulos… será que o Teorema de Pitágoras se aplica nesta Geometria?*
46. ***David:*** *Como faço o triângulo retângulo?*

47. ***Rafael:*** *Faz um segmento e traça a reta perpendicular a passar no extremo.*

48. ***Professora:*** *Roberto, queres fazer agora?*

(Roberto representa um segmento hiperbólico e a reta perpendicular a esse segmento, passando em C.)

49. ***Rafael:*** *Assim vai ser sempre retângulo em C.*

50. ***Roberto:*** *Posso escolher um ponto qualquer da reta para fazer o outro vértice… peço os comprimentos… e agora?*

51. ***Professora:*** *Olhem aqui nesta coluna da esquerda. O comprimento EC é a e ED é b, aqui em g temos DC. Vamos aqui à barra "entrada" fazer os cálculos. Elevar ao quadrado é acento circunflexo e dois. Faz a ao quadrado mais g ao quadrado, "enter", obtivemos h, aqui na coluna. Faz agora b ao quadrado, "enter", e temos i. Dá para comparar resultados, mesmo arrastando a construção e obtendo outros triângulos retângulos hiperbólicos.*

52. ***Roberto:*** *O Teorema de Pitágoras não dá nesta geometria!*

(Todos confirmam.)

53. ***Professora:*** *E vamos ter de terminar, já tocou.*

54. ***Rafael:*** *Só aqui estão os quadriláteros… o que é para fazer?*

55. ***Professora:*** *Pretendia discutir convosco como podem ser os quadriláteros, como será a soma dos ângulos internos, por exemplo, e outras coisas.*

56. ***Rafael:*** *Se a soma dos ângulos internos dos triângulos hiperbólicos é sempre menor que 180º, então nos quadriláteros será sempre menor que 360º.*

57. ***Professora:*** *Não precisaste de nenhuma construção e tem todo o sentido o que estás a dizer. Então e como ficam os quadrados nesta geometria?*
    (Ficam todos calados e muito pensativos) Podem ir pensando e quando quiserem discutimos esse assunto.

58. ***Rafael:*** *Eu não sei, mas acho que não pode haver com 4 ângulos retos. Não há retângulos!*

59. ***Professora:*** *Claro! Agora temos mesmo de terminar. Obrigada. Podemos conversar noutra altura.*