



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Ciências

# Projeções e curvas notáveis da esfera

Cândida Sofia Serrano Paulo

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em  
**Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino  
Secundário**  
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, outubro de 2012



# Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor Rui Pacheco, orientador desta tese, por todo o apoio, disponibilidade, conselhos e sugestões dados ao longo da realização do trabalho. Toda a ajuda prestada na dedução de fórmulas e na compreensão de alguns assuntos que já estavam algo esquecidos, foi sem dúvida decisiva para chegar a esta versão final do trabalho. Os meus sinceros agradecimentos.

Uma palavra de agradecimento à Professora Doutora Isabel Dias, coordenadora de curso, pela forma como me recebeu e orientou quando tomei a decisão de me inscrever no 2º ciclo.

Agradeço à minha família, em especial ao Roberto, pelo incentivo constante ao longo da tarefa de escrita da tese. A tua atitude de encorajamento foi sem dúvida decisiva para que eu concluísse o trabalho.



# Resumo

A forma do planeta Terra, desprezando o achatamento nos pólos, pode ser modelada por uma esfera. Na construção de mapas ou cartas, é necessário projetar a superfície curva da Terra no plano, processo que inevitavelmente introduz deformações pois a superfície esférica não é planificável. As deformações podem ser de distâncias, de ângulos ou de áreas. Um dos objetivos deste trabalho foi estudar as propriedades de quatro projeções da esfera: a projeção estereográfica (que preserva ângulos), a projeção cilíndrica equidistante (que mantém distâncias ao longo dos meridianos), a projeção de Mercator (que preserva ângulos) e a projeção cilíndrica de Lambert (que preserva áreas).

O segundo objetivo do trabalho foi estudar curvas notáveis na esfera: as linhas que formam um ângulo constante com os meridianos, denominadas linhas de rumo ou loxodrómicas, e as curvas que resultam da intersecção da esfera com um plano secante que passa pelo seu centro, designadas geodésicas, círculos máximos ou ortodrómicas.

## Palavras-chave

Esfera, plano, projeção estereográfica, projeção equidistante, projeção de Mercator, projeção cilíndrica de Lambert, linhas de rumo, círculos máximos.



# Abstract

The shape of the Earth, neglecting the flattening of the poles, can be modelled by a sphere. In the construction of maps or charts, it is necessary to project the curved surface of the earth in the plane, which will inevitably introduce distortions, because the spherical surface cannot be planned. These deformations can be related to distances, angles and areas. One of the goals of this work was to study the properties of four projections of the sphere: the stereographic projection (which preserves angles), the equidistant cylindrical projection (which maintains distances along the meridians), the Mercator projection (which preserves angles) and the Lambert cylindrical projection (preserving areas).

The second goal was to study notable curves on the sphere: the curves that form a constant angle with the meridians, known as rhumb lines or loxodrome, and the curves resulting from the intersection of the sphere with an intersecting plane, which passes on its centre, called geodesic, great circles or orthodrome.

## Keywords

Sphere, plane, stereographic projection, equidistant cylindrical projection, Mercator projection, Lambert cylindrical projection, rhumb lines, great circles.



# Índice

|  |    |
|--|----|
| Introdução.....  | 1  |
| Capítulo 1   |    |
| Projeções da esfera no plano .....                                 | 5  |
| 1.1 Sistemas de coordenadas para a esfera e para o plano .....     | 5  |
| 1.1.1 Coordenadas polares .....                                    | 5  |
| 1.1.2 Coordenadas esféricas .....                                  | 6  |
| 1.1.3 Coordenadas geográficas .....                                | 7  |
| 1.2 Projeção estereográfica.....                                   | 9  |
| 1.2.1 Definição .....  | 9  |
| 1.2.2 Propriedades .....   | 9  |
| 1.2.3 Fórmulas de transformação pela projeção estereográfica ..... | 11 |
| 1.3 Projeções cilíndricas.....                                     | 13 |
| 1.3.1 Projeção cilíndrica equidistante .....                       | 16 |
| 1.3.2 Projeção de Mercator .....                                   | 19 |
| 1.3.3 Projeção cilíndrica de Lambert.....                          | 23 |
| 1.3.4 As três projeções cilíndricas normais.....                   | 25 |
| Capítulo 2   |    |
| Linhas de rumo e geodésicas na esfera .....                        | 27 |
| 2.1 Linhas de rumo .....   | 27 |
| 2.1.1 Linhas de rumo e espiral logarítmica.....                    | 27 |
| 2.1.2 Rumo e comprimento de arco de curva loxodrómica.....         | 33 |
| 2.2 Geodésicas na esfera .....                                     | 35 |
| 2.2.1 Problemas Variacionais .....                                 | 35 |
| 2.2.2 Geodésicas na esfera e círculos máximos .....                | 35 |
| 2.2.3 Comprimento de um arco de círculo máximo.....                | 38 |
| 2.3 Um exemplo: De Lisboa a Nova Iorque .....                      | 39 |
| Considerações finais   |    |
| Referências Bibliográficas .....                                   | 45 |



# Lista de Figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1: Classificação das projeções quanto ao tipo de superfície de projeção .....  | 1  |
| Figura 2: Linha de rumo de 45° e o correspondente círculo máximo passando por um ponto do Equador, figura de Pedro Nunes (1537).....                | 3  |
| Figura 3: Método de determinação de pontos sobre a mesma linha de rumo por resolução sequencial de triângulos esféricos, figura de Pedro Nunes..... | 3  |
| Figura 4: Sistema de coordenadas polares .....  | 5  |
| Figura 5: Sistema de coordenadas esféricas .....  | 6  |
| Figura 6: Paralelos e Meridianos .....  | 7  |
| Figura 7: Sistema de coordenadas geográficas .....  | 8  |
| Figura 8: Projeção estereográfica .....   | 9  |
| Figura 9: Vista lateral da projeção estereográfica .....  | 10 |
| Figura 10: A projeção estereográfica preserva ângulos.....  | 11 |
| Figura 11: Classificação das projeções cilíndricas quanto à posição do cilindro .....   | 13 |
| Figura 12: Projeção cilíndrica normal.....  | 13 |
| Figura 13: Sistema de coordenadas cartesianas para uma projeção cilíndrica normal.....  | 14 |
| Figura 14: Elementos infinitesimais na esfera e na projeção .....   | 15 |
| Figura 15: Projeção cilíndrica equidistante .....   | 17 |
| Figura 16: Deformações na projeção cilíndrica equidistante .....  | 17 |
| Figura 17: Mapa-múndi desenhado a partir das tabelas do tratado <i>Geographike Hyphegesis</i> de Ptolomeu. ....                                     | 18 |
| Figura 18: Projeção de Mercator .....   | 20 |
| Figura 19: Deformações na projeção de Mercator .....  | 21 |
| Figura 20: Projeção de Mercator, 1569, “ <i>Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata</i> ”.....               | 22 |
| Figura 21: Projeção cilíndrica de Lambert .....   | 23 |
| Figura 22: Deformações na projeção cilíndrica de Lambert .....  | 24 |
| Figura 23: Representação dos meridianos na projeção estereográfica .....  | 27 |
| Figura 24: Espiral logarítmica .....  | 29 |
| Figura 25: Linha de rumo ou curva loxodrómica .....   | 31 |
| Figura 26: Pontos de sete rumos vistos em projeção estereográfica, figura apresentada num manuscrito de Harriot, 1595.....                          | 32 |
| Figura 27: Loxodrómica entre os pontos A e B na projeção de Mercator. ....  | 32 |
| Figura 28: <i>Sphere Spirals</i> , Escher, 1958 .....   | 33 |
| Figura 29: Comprimento de linha de rumo.....  | 34 |
| Figura 30: Arco de círculo máximo .....   | 38 |

Figura 31: Arco de curva loxodrómica e arco de curva ortodrómica entre Lisboa e Nova Iorque na projeção de Mercator ..... 41

# Lista de Tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1: Comparação das três projeções cilíndricas normais .....                     | 25 |
| Tabela 2: Coordenadas geográficas de Lisboa e Nova Iorque .....                       | 39 |
| Tabela 3: Coordenadas esféricas de Lisboa e Nova Iorque .....                         | 39 |
| Tabela 4: Coordenadas polares de Lisboa e Nova Iorque (projeção estereográfica) ..... | 39 |



# Introdução

O planeta Terra pode ser representado por um volume aproximadamente esférico, assim se pretendermos representar a superfície da Terra sem distorções devemos utilizar um globo, pois esta forma de representação apenas implicará a utilização de uma escala de redução. No entanto, os globos apresentam inconvenientes de natureza prática, que são ultrapassados quando a Terra é representada enquanto mapa (ou carta) sobre uma superfície plana.

Em Cartografia, são definidas e classificadas projeções cartográficas que definem a forma como a superfície da Terra é representada numa superfície plana, designada por superfície de projeção. A superfície de projeção pode ser um plano ou uma superfície planificável, habitualmente o cilindro ou o cone. Em Cartografia, de acordo com a superfície de projeção utilizada, as projeções cartográficas são classificadas em planas ou azimutais, cilíndricas e cónicas (figura 1).

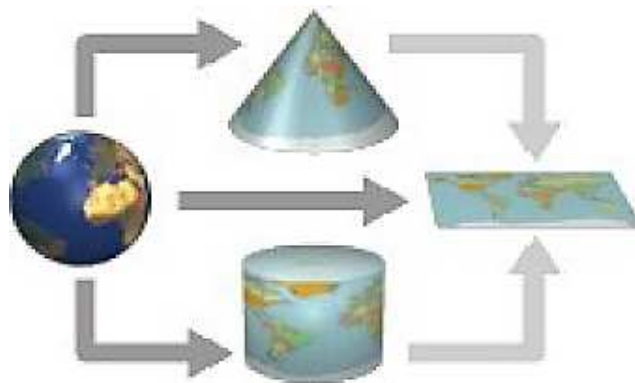


Figura 1: Classificação das projeções quanto ao tipo de superfície de projeção

Qualquer que seja a superfície de projeção escolhida é impossível projetar a superfície curva da Terra num plano sem que sejam introduzidas distorções, pois a esfera não é planificável. Assim sendo, uma projeção deve ser pensada de acordo com a propriedade que se pretende conservar. De um modo geral, as propriedades que interessam preservar são as distâncias, as áreas ou os ângulos. Segundo Catalão [5],

“o cartógrafo deve escolher qual a característica que deve aparecer corretamente, em prejuízo das outras, ou contemporizar com todas elas, não aparecendo nenhuma correta. Os numerosos sistemas de representação cartográfica existentes, apresentam vantagens e inconvenientes, dependendo o critério de escolha do fim a que a carta se destina.”

De acordo com a propriedade que se preserva as projeções são classificadas em:

- Equidistantes: quando as relações de distância são conservadas ao longo de certas linhas ou a partir de determinados pontos.
- Conformes: quando a forma dos objetos (com dimensões infinitesimais) é conservada, ou seja, os ângulos são preservados.
- Equivalentes: quando as proporções entre as áreas dos objetos são conservadas.

A representação das deformações introduzidas pelas projeções pode ser apresentada de modo gráfico através da elipse de deformação ou indicatriz de Tissot. O matemático francês Auguste Tissot (1824-1897) sugeriu a utilização de um dispositivo gráfico, que denominou indicatriz, para ilustrar os conceitos de distorção angular e de superfície que se produzem num círculo de dimensões infinitesimais, de uma superfície de referência, quando é projetado sobre um plano. A representação, nas projeções cartográficas, destas deformações efetua-se pela colocação de figuras (círculos ou elipses) representativas das indicatrizes de Tissot na intersecção de paralelos e meridianos, a determinados intervalos. Desta forma, fornece-se uma imagem expressiva e intuitiva das deformações [3-5].

Sobre a superfície esférica destacam-se duas curvas notáveis: as curvas que intersectam todos os meridianos segundo um mesmo ângulo, denominadas linhas de rumo ou curvas loxodrómicas; e as curvas que resultam da intersecção da esfera com um plano secante que passa pelo seu centro, que correspondem ao caminho mais curto entre dois pontos da superfície esférica, designadas por círculos máximos, geodésicas ou ortodrómicas. Na navegação marítima a utilidade das linhas de rumo é evidente, pois a forma mais simples de navegar em mar alto será mantendo um ângulo constante com o norte indicado pela bússola, no entanto esta trajetória não corresponde, exceto se navegarmos ao longo do Equador ou de um meridiano, ao caminho mais curto entre dois pontos.

O matemático português Pedro Nunes (1502-1578) terá sido o primeiro a colocar a questão das linhas de rumo [13]. Em 1537, data da publicação da tradução do *Tratado da Esfera* de Sacrobosco, Pedro Nunes incluiu em anexo dois tratados em português sobre questões de navegação: o *Tratado sobre certas dúvidas da navegação* e o *Tratado em defesa da carta de marear, com o regimento da altura*. Nestes tratados, Pedro Nunes faz a distinção entre dois tipos de curva: os círculos máximos e as rotas de rumo constante. Pedro Nunes refere que salvo no caso do Equador e dos meridianos, as rotas de rumo constante não coincidem com círculos máximos, ou seja, não são o caminho mais curto entre dois pontos (figura 2).

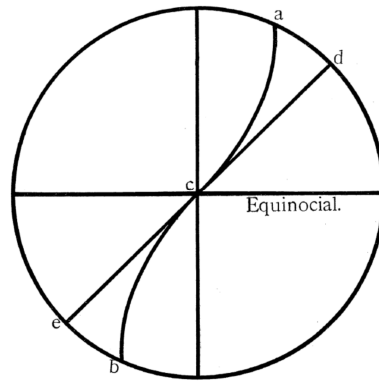


Figura 2: Linha de rumo de 45° e o correspondente círculo máximo passando por um ponto do Equador, figura de Pedro Nunes (1537)

Na versão desenvolvida destes Tratados, publicada em 1566, em Basileia e escrita em latim, Pedro Nunes apresenta uma análise mais pormenorizada das linhas de rumo apresentando um processo complicado para obter pontos sobre linhas de rumo na esfera. Este processo consiste na resolução sequencial de vários triângulos esféricos. A figura 3 é do texto original de Pedro Nunes [13].

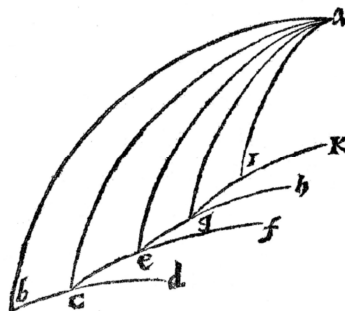


Figura 3: Método de determinação de pontos sobre a mesma linha de rumo por resolução sequencial de triângulos esféricos, figura de Pedro Nunes

Ainda no século XVI, Mercator (1512-1594) apresentou um mapa construído de tal modo que as linhas de rumo fossem representadas por retas e Edward Wright (1558-1615) forneceu uma explicação matemática recorrendo a tabelas para a construção da carta de Mercator [13].

No capítulo 1, do presente trabalho, serão inicialmente definidos sistemas de coordenadas para a esfera e para o plano, nomeadamente coordenadas polares no plano, coordenadas esféricas e coordenadas geográficas, de modo a que nos tópicos subsequentes seja claro quais as notações a utilizar. De seguida, serão apresentadas quatro projeções da esfera no plano: a projeção estereográfica, cujo método de construção será definido, bem como serão enunciadas as suas principais propriedades e provada a propriedade de conformalidade (preservação de ângulos); três projeções cilíndricas: a projeção cilíndrica equidistante (que

preserva distâncias ao longo dos meridianos), a projeção de Mercator (que preserva ângulos) e a projeção cilíndrica de Lambert (que preserva áreas). Nas subsecções dedicadas a cada uma destas projeções, serão definidas as suas principais propriedades e apresentado um estudo das deformações por recurso à elipse de deformação ou indicatriz de Tissot. Sempre que se considerar interessante serão apresentadas referências históricas.

No segundo capítulo serão abordadas curvas notáveis na esfera: as curvas loxodrómicas e as curvas ortodrómicas. Começaremos por apresentar uma dedução da equação das linhas de rumo com recurso às técnicas do cálculo infinitesimal, ainda inexistentes na época de Pedro Nunes. Usando a propriedade de conformalidade da projeção estereográfica, este problema será transferido para o plano, onde as imagens das linhas de rumo são curvas que cortam um feixe de retas concorrentes segundo um ângulo constante. Veremos que estas curvas são soluções de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. De seguida, serão deduzidas fórmulas para a determinação do rumo (o ângulo constante segundo o qual a loxodrómica corta os meridianos) e do comprimento de arco da curva loxodrómica entre dois pontos na superfície da Terra. Apresentaremos também a prova de que as curvas de comprimento mínimo na esfera são círculos máximos, através da resolução de um problema de cálculo variacional, e deduziremos uma fórmula de cálculo do comprimento de um arco de círculo máximo entre dois pontos na superfície da Terra em função das suas coordenadas geográficas. Por último, apresentaremos um exemplo de utilização das fórmulas deduzidas anteriormente com as coordenadas de Lisboa e Nova Iorque.

Não poderíamos terminar esta introdução sem uma breve referência ao uso que pontualmente faremos de infinitésimos. Embora reconhecendo a sua incompatibilidade com a axiomática da análise infinitesimal, não podemos esquecer que os infinitésimos são ainda utilizados de forma corrente e eficaz em muitas áreas de aplicação da matemática. Como afirmava Klein em 1908 [8],

“The reason why such reflections could so long hold their place [alongside] the mathematically rigorous method of limits, must be sought probably in the widely felt need of penetrating beyond the abstract logical formulation of the method of limits to the intrinsic nature of continuous magnitudes, and of forming more definite images of them than were supplied by emphasis solely upon the psychological moment which determined the concept of limit.”

# Capítulo 1

## Projeções da esfera no plano

### 1.1 Sistemas de coordenadas para a esfera e para o plano

#### 1.1.1 Coordenadas polares

Para definir um sistema de coordenadas polares no plano, considere-se um ponto fixo  $O$ , designado origem ou pólo, e uma semi-reta orientada, denominada eixo polar, com extremidade em  $O$  (figura 4).

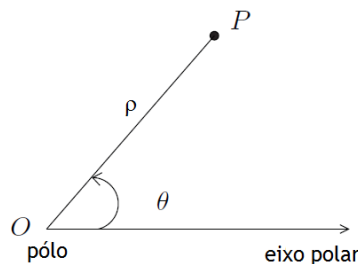


Figura 4: Sistema de coordenadas polares

Seja  $P$  um ponto do plano arbitrário, distinto da origem, as coordenadas polares de  $P$  são  $(\rho, \theta)$ , onde  $\rho$  é a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  é a amplitude do ângulo medido no sentido positivo formado pelo eixo polar e  $OP$ , com  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Fazendo coincidir o eixo polar com o eixo cartesiano  $Ox$ , a relação entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas de um ponto  $P$  pode ser traduzida por:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Coordenadas esféricas

Fixemos no espaço tridimensional um sistema de eixos cartesianos  $Oxyz$ . Num sistema de coordenadas esféricas, um ponto  $P$  do espaço, distinto da origem, é representado por um terno  $(\rho, \theta, \phi)$ , onde  $\rho$  é o comprimento do vetor  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\theta$  é o ângulo polar associado à projeção  $P'$  de  $P$  sobre o plano horizontal e  $\phi$  é o ângulo entre a parte positiva do eixo  $Oz$  e o vetor  $\overrightarrow{OP}$ , com  $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

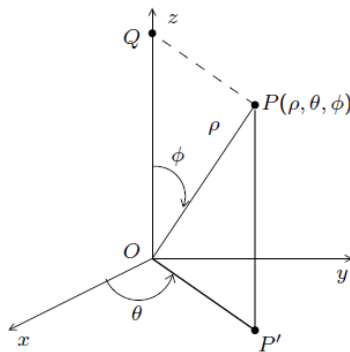


Figura 5: Sistema de coordenadas esféricas

Atendendo à figura 5 e à trigonometria do triângulo retângulo, a relação entre as coordenadas esféricas e as coordenadas cartesianas de um ponto  $P$  pode ser traduzida por:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.1.3 Coordenadas geográficas

As coordenadas geográficas baseiam-se em linhas imaginárias traçadas sobre o globo terrestre: os paralelos e os meridianos (figura 6).

A linha do Equador é o paralelo de referência, correspondendo ao círculo máximo perpendicular ao eixo da Terra e dividindo-a em dois hemisférios, Norte e Sul. Os restantes paralelos são círculos menores paralelos ao Equador.

Os meridianos são círculos máximos que passam pelos pólos e são perpendiculares ao Equador. A metade de um meridiano que vai de pólo a pólo chama-se semimeridiano. O meridiano de referência adotado desde 1884 é o semimeridiano de Greenwich, o seu anti-meridiano é a Linha Internacional de Mudança de Data.

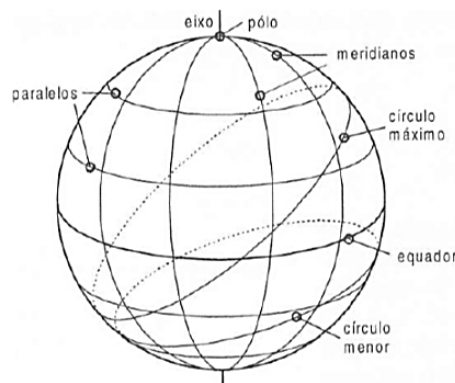


Figura 6: Paralelos e Meridianos

Num sistema de coordenadas geográficas (figura 7), cada ponto à superfície da Terra é identificado por dois ângulos (expressos habitualmente em graus, minutos e segundos): a latitude ( $\varphi$ ) e a longitude ( $\lambda$ ).

A latitude de um lugar é a amplitude do ângulo entre o plano do Equador e o raio que passa por esse lugar ou o arco do meridiano entre o Equador e o lugar; varia de  $0^\circ$ , no Equador, a  $90^\circ$  nos pólos, Norte ou Sul.

A longitude de um lugar é a amplitude do ângulo entre o plano do meridiano desse lugar e um meridiano de referência (como já foi referido, o semimeridiano de Greenwich) ou o arco do Equador entre esses meridianos; varia entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , Este (E) ou Oeste (W).

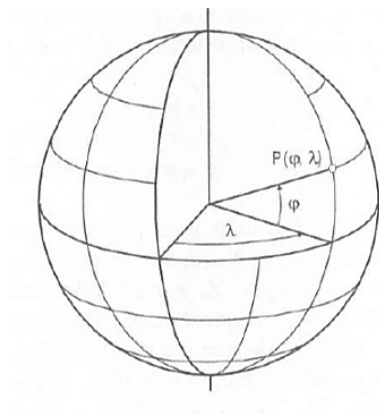


Figura 7: Sistema de coordenadas geográficas

Dado um ponto P com coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$  onde,  $\varphi$  representa a latitude e  $\lambda$  a longitude, em coordenadas cartesianas temos (com  $R$  raio da Terra):

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad (1.5)$$

É importante notar que a latitude geográfica, que identificamos com a letra  $\varphi$ , e a coordenada esférica  $\phi$  são ângulos complementares, pois

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \phi$$

## 1.2 Projeção estereográfica

### 1.2.1 Definição

Sejam  $S^2$  a superfície esférica centrada na origem com raio unitário, o ponto  $N$  (pólo Norte) de coordenadas  $(0,0,1)$ , e  $\pi$  um plano perpendicular ao eixo  $Oz$  que não contenha o ponto  $N$ . A projeção estereográfica

$$\Pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \pi$$

é uma aplicação da superfície esférica no plano definida da seguinte forma: dado um ponto  $P$  pertencente a  $S^2 \setminus \{N\}$ , tracemos a reta  $PN$ ; o ponto  $\Pi(P)$  é o ponto de intersecção de  $PN$  com o plano  $\pi$ . Esta construção, quando o plano é colocado ao nível do Equador (plano  $z=0$ ) é ilustrada na figura 8. Ao longo deste trabalho consideramos sempre o plano do Equador como plano de projeção  $\pi$ , que por sua vez será identificado com  $\mathbb{R}^2$ .

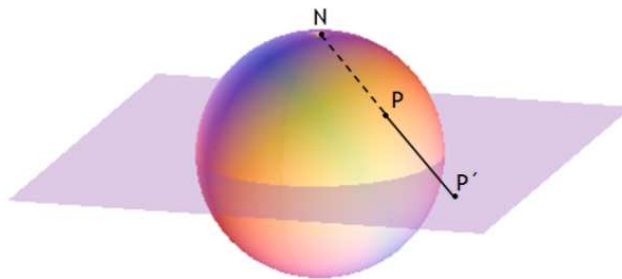


Figura 8: Projeção estereográfica

### 1.2.2 Propriedades

De acordo com esta construção geométrica, podemos concluir que por uma projeção estereográfica:

- O pólo Sul, ponto  $(0,0,-1)$ , é transformado no ponto  $(0,0)$ .
- O Equador é transformado numa circunferência de centro na origem e raio unitário. Os pontos do hemisfério sul são projetados dentro desta circunferência e os pontos do hemisfério norte fora desta circunferência.
- Os meridianos no plano são representados por retas que passam pela origem e os paralelos por circunferências centradas na origem.
- As áreas e as distâncias não são preservadas.
- Os ângulos são conservados, ou seja, a projeção estereográfica é conforme.

A única destas propriedades que não resulta diretamente da definição é a última. Vejamos então uma prova, adaptada da apresentada em Hilbert e Cohn-Vossen [7].

Consideremos um ponto  $P \in S^2 \setminus \{N\}$  e sejam  $T_P$  o plano tangente a  $S^2$  no ponto P e  $T_N$  o plano tangente a  $S^2$  no ponto  $N$ .

Atendendo à figura 9, o triângulo  $[ONP]$  é isósceles, pois  $[ON]$  e  $[OP]$  são raios, e logo os ângulos designados por  $\alpha$  são iguais. Como os planos tangentes formam um ângulo reto com os raios  $[ON]$  e  $[OP]$ , então os ângulos designados por  $\beta$  são iguais. Os ângulos  $\beta$  e  $\beta'$  são iguais, o que permite concluir que o triângulo  $[PQP']$  é isósceles e então os segmentos de reta  $[PQ]$  e  $[QP']$  têm o mesmo comprimento (denotado por  $b$ ).

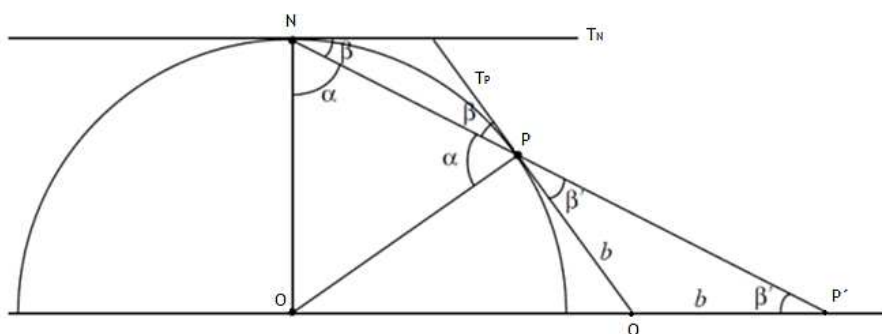


Figura 9: Vista lateral da projeção estereográfica

Consideremos a extensão natural da projeção estereográfica  $\Pi$  a  $\mathbb{R}^3 \setminus \{N\}$ , que continuaremos a designar por  $\Pi$ . Seja  $\gamma$  uma curva suave em  $S^2$  por P,  $t$  a reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto P e  $\hat{t}$  a imagem por  $\Pi$  de  $t$ .

Atendendo a que toda a aplicação diferenciável transforma curvas tangentes em curvas tangentes e  $\Pi$  é diferenciável, podemos concluir que  $\hat{t}$  é tangente à imagem de  $\gamma$  pela projeção estereográfica  $\Pi$  no ponto  $\Pi(P)$ .

Observando a figura 10, temos que o lado  $[QS]$  é comum aos triângulos  $[PQS]$  e  $[\Pi(P)QS]$ ,  $\overline{PQ} = \overline{Q\Pi(P)} = b$  (como provado anteriormente) e o ângulo Q é reto, podemos então concluir que os triângulos  $[PQS]$  e  $[\Pi(P)QS]$  são semelhantes, e logo o ângulo  $\theta$  é igual.

Repetindo esta análise para uma segunda curva  $\hat{\gamma}$  por P, a prova fica completa.

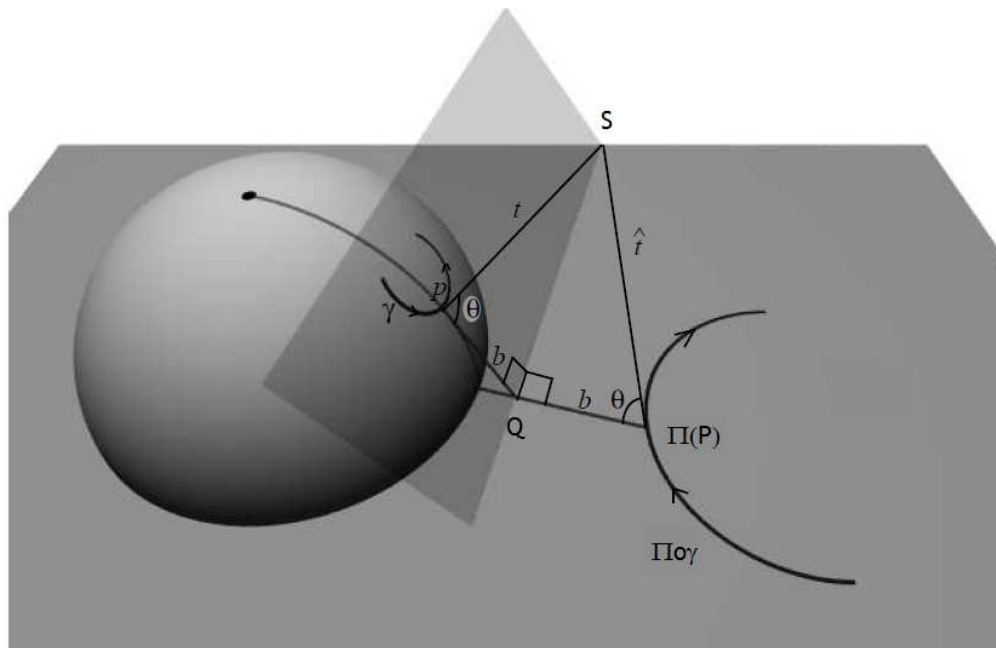


Figura 10: A projeção estereográfica preserva ângulos

Na prova anterior assumiu-se que as retas  $t$  e  $\hat{t}$  se intersectam, no caso particular de as retas  $t$  e  $\hat{t}$  serem estritamente paralelas, temos que  $t$  é paralela ao plano de projeção e então  $\theta = 90^\circ$ .

### 1.2.3 Fórmulas de transformação pela projeção estereográfica

Considerando coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  na superfície esférica e coordenadas cartesianas  $(X, Y)$  no plano, as fórmulas de transformação direta e inversa pela projeção estereográfica são:

$$\Pi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$\Pi^{-1}(X, Y) = \left( \frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2} \right) \quad (1.6)$$

Por exemplo, dado um ponto  $P'(X, Y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , para encontrar as coordenadas  $(x, y, z)$  de  $\Pi^{-1}(X, Y)$  procedemos do seguinte modo. A reta  $P'N$  tem equação paramétrica

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(X, Y, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Esta reta intersecta a esfera  $S^2$  quando

$$\lambda^2 X^2 + \lambda^2 Y^2 + (1-\lambda)^2 = 1,$$

De onde resultam duas soluções:  $\lambda = 0$  (o pólo Norte) e  $\lambda = \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1}$ .

Esta última solução corresponde ao ponto

$$(x, y, z) = \left( \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \frac{-1 + X^2 + Y^2}{1 + X^2 + Y^2} \right)$$

A dedução da fórmula para  $\Pi$  é idêntica.

Considerando coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  na esfera e coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  no plano, as fórmulas de transformação direta e inversa pela projeção estereográfica são:

$$\begin{aligned} \Pi(\rho, \theta, \phi) &= \left( \frac{\sin \phi}{1 - \cos \phi}, \theta \right) \\ \Pi^{-1}(\rho, \theta) &= \left( \rho, 2 \arctan \frac{1}{\rho}, \theta \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.3 Projeções cilíndricas

Uma projeção cilíndrica é uma projeção cartográfica em que a esfera é projetada sobre um cilindro tangente ou secante à esfera. Quanto à posição o cilindro pode ser: normal ou equatorial, transverso ou oblíquo (figura 11).

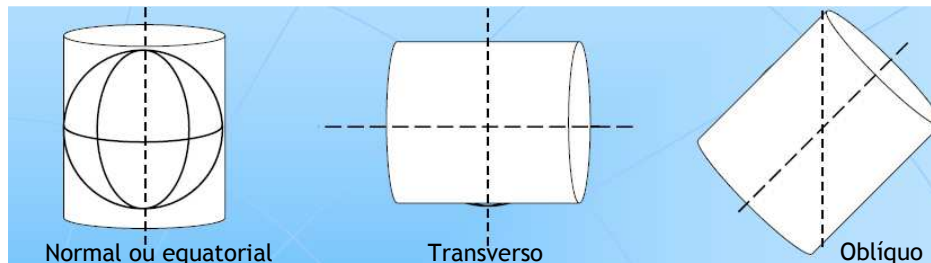


Figura 11: Classificação das projeções cilíndricas quanto à posição do cilindro

As três projeções cilíndricas aqui apresentadas são projeções cilíndricas normais, pois o cilindro é colocado tangente ao Equador.

Para definir uma projeção cilíndrica normal, consideremos um cilindro e uma esfera, ambos com raio  $a$ , e posicionemos o cilindro tangente à esfera no Equador. O eixo do cilindro coincide com o diâmetro NS da esfera. Qualquer plano que contenha o eixo do cilindro intersecta a esfera num meridiano e o cilindro numa geratriz. Uma projeção cilíndrica transforma pontos de um meridiano em pontos da geratriz correspondente (figura 12).

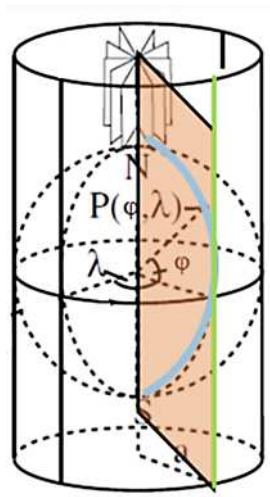


Figura 12: Projeção cilíndrica normal

Por esta construção geométrica, os meridianos são projetados em retas paralelas com igual espaçamento e os paralelos são projetados em retas paralelas com um espaçamento eventualmente variável.

No plano, é definido um referencial, de modo a que o eixo  $Ox$  coincida com o Equador e o eixo  $Oy$  coincida com um meridiano em particular (habitualmente com o Meridiano de Greenwich).

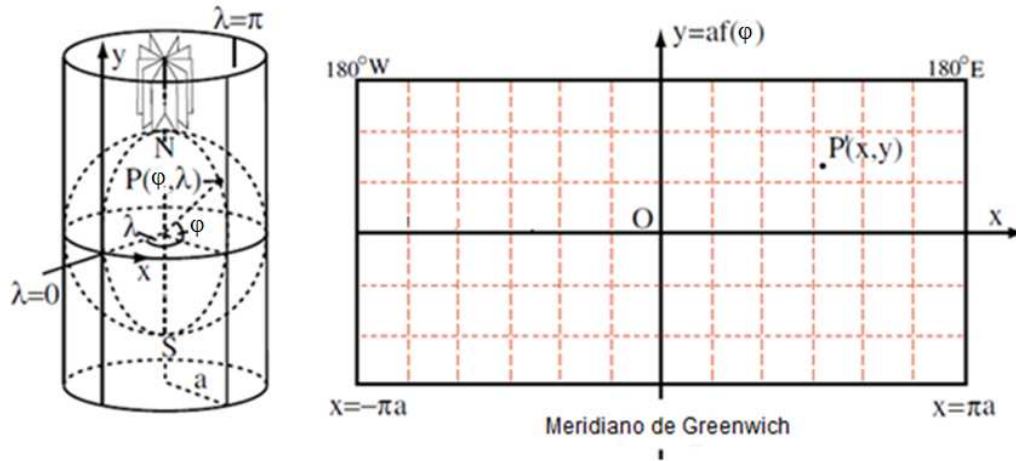


Figura 13: Sistema de coordenadas cartesianas para uma projeção cilíndrica normal

Seja  $P$  um ponto da esfera com coordenadas  $(\varphi, \lambda)$  onde  $\varphi$  representa a latitude e  $\lambda$  a longitude. Por uma projeção cilíndrica, as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de  $P$  no plano são dadas por

$$\begin{cases} x = a \lambda \\ y = a f(\varphi) \end{cases} \quad (1.8)$$

onde  $a$  raio da esfera e  $\varphi$  e  $\lambda$  em radianos.

Neste subcapítulo são apresentadas três projeções cilíndricas normais: a projeção cilíndrica equidistante, a projeção de Mercator e a projeção cilíndrica de Lambert. Para cada uma destas três projeções, a função  $f(\varphi)$  será definida de acordo com a propriedade que se pretende preservar. Como já foi referido, na projeção cilíndrica equidistante pretende-se que o espaçamento entre os paralelos seja constante, na projeção de Mercator pretende-se garantir a conformalidade e na projeção cilíndrica de Lambert a preservação de áreas.

De modo a definir a função  $f(\varphi)$  para cada uma destas três projeções cilíndricas, comecemos por observar as seguintes propriedades em relação a ângulos e a áreas na esfera e na projeção.

Consideremos o elemento infinitesimal  $[PMQK]$  na esfera e o correspondente elemento  $[P'M'Q'K']$  na projeção cilíndrica, representados na figura seguinte:

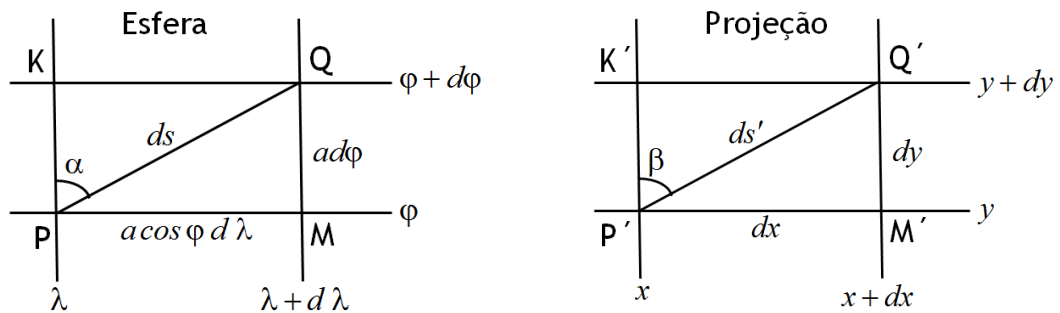


Figura 14: Elementos infinitesimais na esfera e na projeção

$PM$  é precisamente o paralelo correspondente à latitude  $\varphi$ .

Temos que,

$$\tan \alpha = \frac{a \cos \varphi d\lambda}{a d\varphi}$$

$$\tan \beta = \frac{dx}{dy} = \frac{a d\lambda}{a f'(\varphi) d\varphi}$$

Resolvendo as igualdades anteriores em ordem  $d\lambda$ , temos

$$\tan \beta = \frac{\sec \varphi}{f'(\varphi)} \tan \alpha \quad (1.9)$$

A igualdade anterior estabelece uma relação entre ângulos na esfera e ângulos na projeção cilíndrica.

De modo a encontrar um fator de área, e atendendo novamente à figura 14, o fator de escala ao longo de um paralelo é dado por

$$\frac{dx}{a \cos \varphi d\lambda} = \frac{a d\lambda}{a \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

e o fator escala ao longo de um meridiano por

$$\frac{dy}{a d\varphi} = \frac{f'(\varphi) d\varphi}{d\varphi} = f'(\varphi)$$

Então o fator de escala de área será dado por

$$\sec\varphi f'(\varphi) \quad (1.10)$$

### 1.3.1 Projeção cilíndrica equidistante

Como já foi referido, na projeção cilíndrica equidistante pretendemos que os paralelos sejam projetados por retas paralelas com espaçamento constante e igual ao espaçamento dos meridianos. Ou seja,

$$dy = dx$$

Atendendo às fórmulas de transformação pela projeção cilíndrica normal (igualdades 1.8), temos

$$a f'(\varphi) d\varphi = a d\lambda$$

$$f'(\varphi) = \frac{d\lambda}{d\varphi} = 1$$

Integrando

$$f(\varphi) = \int 1 d\varphi = \varphi$$

Concluimos assim que a função  $f(\varphi)$  para a projeção equidistante é

$$f(\varphi) = \varphi \quad (1.11)$$

Por uma projeção cilíndrica equidistante, as imagens dos meridianos e dos paralelos formam uma quadrícula no plano.

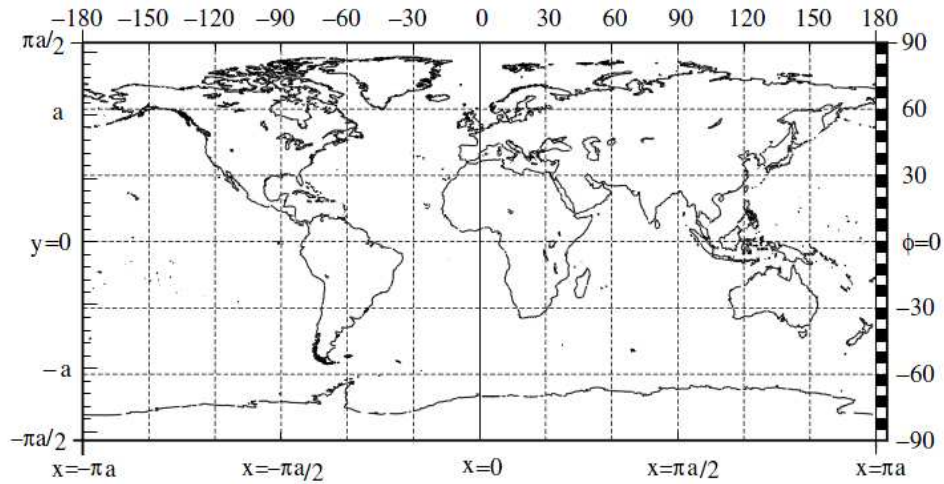


Figura 15: Projeção cilíndrica equidistante

Esta projeção não preserva áreas ou ângulos. Apesar da designação equidistante, as distâncias também não são preservadas (apenas ao longo dos meridianos). A sua vantagem reside no facto de ser de fácil construção [11].

Na figura seguinte é possível observar as deformações introduzidas pela projeção cilíndrica equidistante.

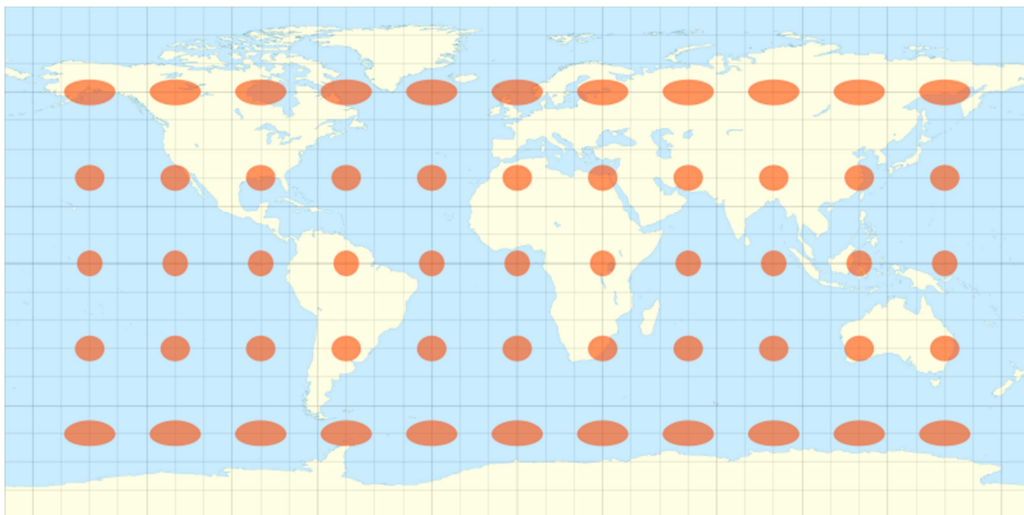


Figura 16: Deformações na projeção cilíndrica equidistante

Com o auxílio das elipses de deformação representadas, podemos facilmente observar que a distorção aumenta em função da latitude. À medida que nos aproximamos dos pólos, as elipses de deformação sofrem um alongamento na direção horizontal.

Com efeito, o fator de escala nos paralelos é dado por  $\sec \phi$  e então

$$\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec \phi = \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \phi} = \infty$$

Já a deformação vertical é inexistente porque o fator de escala nos meridianos para uma projeção cilíndrica equidistante é  $f'(\phi)=1$ .

Historicamente a projeção cilíndrica equidistante, também designada por projeção equiretangular ou projeção de Plate Carré, é atribuída a Marinus de Tiros, cerca de 100 A.C. Esta projeção foi utilizada por Cláudio Ptolomeu (90-168) na construção do mapa-múndi de Ptolomeu. Ptolomeu escreveu obras importantes das quais se destaca *Geographike Hyphegesis*, na qual descreveu as terras conhecidas até então, no mundo ocidental, embora com imprecisões de cálculo [11].



Figura 17: Mapa-múndi desenhado a partir das tabelas do tratado *Geographike Hyphegesis* de Ptolomeu.

### 1.3.2 Projeção de Mercator

Pretendemos que a projeção de Mercator seja conforme. Considerando a igualdade (1.9)

$$\tan \beta = \frac{\sec \varphi}{f'(\varphi)} \tan \alpha$$

que relaciona um ângulo  $\alpha$  na esfera com o correspondente ângulo  $\beta$  na projeção, temos de fazer  $\alpha = \beta$  e então

$$f'(\varphi) = \sec \varphi$$

Integrando

$$f(\varphi) = \int \sec \varphi \, d\varphi = \int \frac{1}{\cos \varphi} \, d\varphi$$

Para resolver este integral notemos que

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Assim

$$f(\varphi) = \int \frac{1}{\cos \varphi} \, d\varphi = \int \frac{\sec^2 \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \, d\varphi = \ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Concluimos que a função  $f(\varphi)$  para a projeção de Mercator é

$$f(\varphi) = \ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.12)$$

Na projeção de Mercator o espaçamento entre os paralelos aumenta à medida que a latitude aumenta. Este espaçamento é tal que permita a preservação de ângulos, e é inversamente proporcional ao cosseno da latitude.

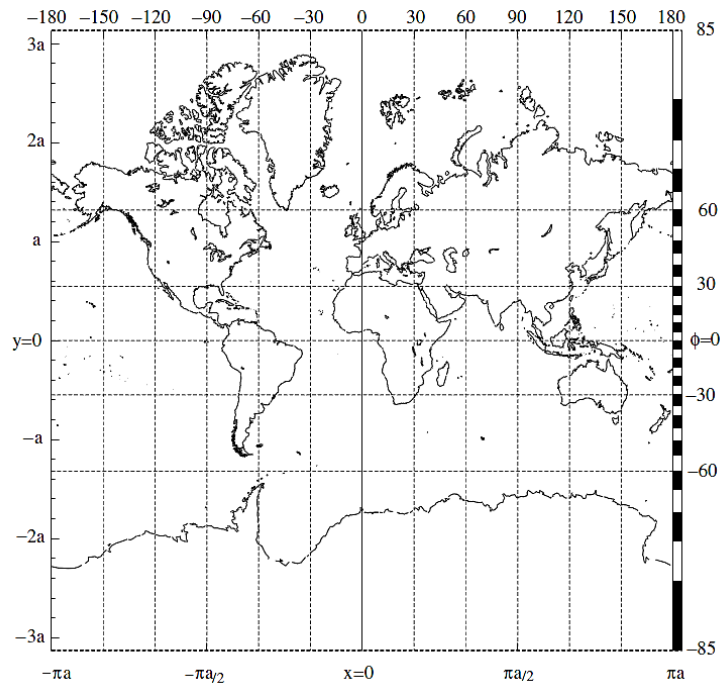


Figura 18: Projeção de Mercator

A projeção de Mercator apresenta grande distorção nas altas latitudes, aparecendo as áreas das regiões polares muito exageradas. As distorções de área na projeção de Mercator podem levar a concepções erradas, por exemplo, na projeção de Mercator a área da Gronelândia é maior do que a América do Sul, apesar de na realidade o tamanho da Gronelândia ser cerca de 1/8 do tamanho da América do Sul. O pólo Norte e o pólo Sul não têm representação na projeção de Mercator.

Na projeção de Mercator as indicatrizes de Tissot são sempre círculos (figura 19), uma vez que o fator de escala nos meridianos é igual ao fator de escala nos paralelos (como vimos é igual a  $\sec \phi$ ). O tamanho dos círculos aumenta em função do aumento da latitude.

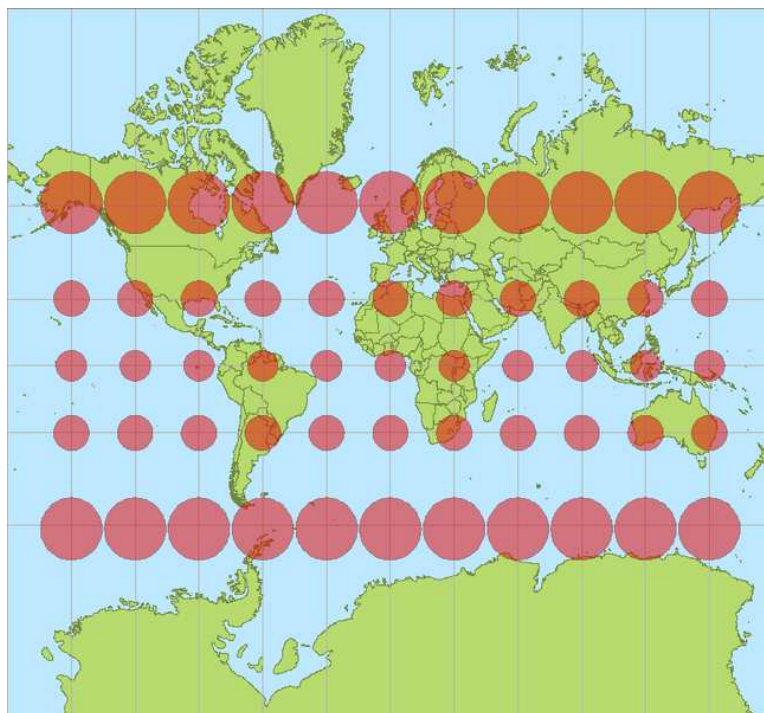


Figura 19: Deformações na projeção de Mercator

Uma vez que a projeção de Mercator preserva ângulos, é particularmente apropriada na construção de cartas para apoiar a navegação marítima ou aeronáutica, pois em cartas assim construídas as linhas de rumo ou loxodrómicas, linhas de ângulo constante com os meridianos sobre a superfície da Terra, são representadas por linhas retas (no capítulo 2 as loxodrómicas serão tratadas em maior detalhe).

O matemático português Pedro Nunes terá abordado no seu trabalho a questão de desenhar cartas em que as linhas de rumo são representadas por linhas retas, nos tratados de 1537 Pedro Nunes apresentou um esboço de uma solução para esta questão [13].

Em 1569, o cosmógrafo e cartógrafo flamengo Gerard de Kremer (1512-1594), em latim Gerardus Mercator, apresentou um planisfério com 202 cm por 124 cm, constituído por dezoito folhas impressas separadamente (figura 20), construído de tal forma que as linhas de rumo são representadas por retas. O método de construção da carta não foi explicado por Mercator, mas provavelmente terá utilizado um método gráfico. Mercator terá transferido algumas linhas de rumo traçadas num globo para uma quadrícula e ajustado o espaçamento entre os paralelos de modo a que essas linhas de rumo se tornassem retas e mantivessem o ângulo com os meridianos no plano igual ao ângulo que formavam com os meridianos no globo [4-11].

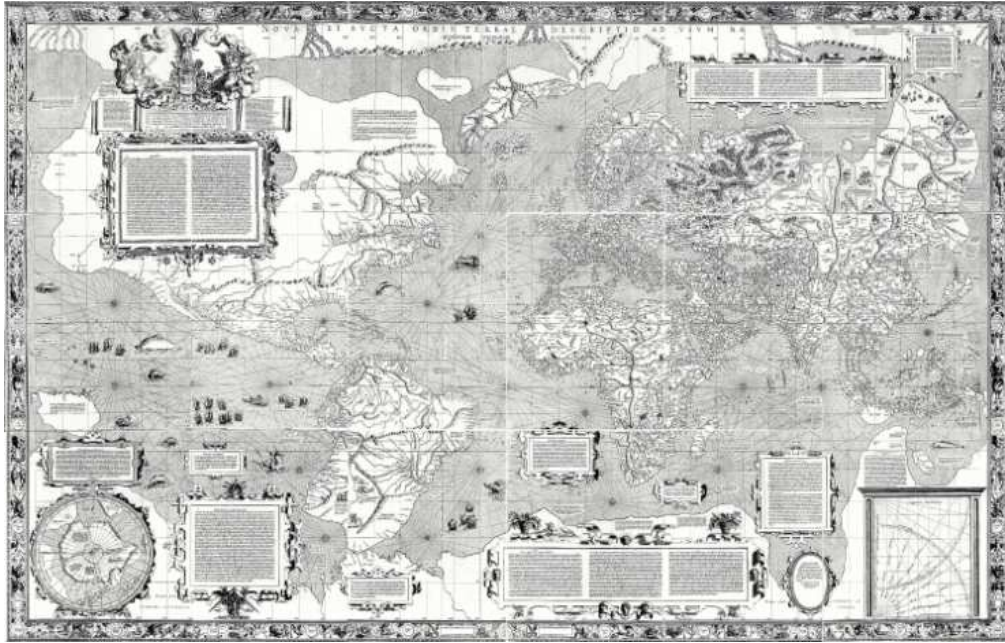


Figura 20: Projeção de Mercator, 1569, “*Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata*”.

Em 1599, o matemático inglês Edward Wright (1558-1615) publicou um livro onde descreveu com exatidão o processo matemático de desenhar cartas em que as linhas de rumo são representadas por linhas retas. Nesse livro Wright apresentou tabelas precisas para a construção de cartas através da projeção de Mercator, fornecendo uma explicação matemática para a carta apresentada por Mercator alguns anos antes [13].

### 1.3.3 Projeção cilíndrica de Lambert

Na projeção cilíndrica de Lambert pretende-se que as áreas sejam conservadas, recordando que o fator de escala de área é dado por (1.10),  $\sec \varphi f'(\varphi)$ , temos

$$f'(\varphi) \sec \varphi = 1$$

$$f'(\varphi) = \frac{1}{\sec \varphi}$$

Integrando

$$f(\varphi) = \int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi$$

Concluimos assim que a função  $f(\varphi)$  para a projeção cilíndrica de Lambert é

$$f(\varphi) = \sin \varphi \quad (1.13)$$

Nesta projeção as áreas são preservadas uma vez que o fator de escala nos meridianos compensa o alongamento nos paralelos. A escala sobre os meridianos é reduzida na proporção inversa à do seu aumento sobre os paralelos, de modo a manter as áreas. Nesta projeção o espaçamento entre os paralelos diminui à medida que a latitude aumenta.

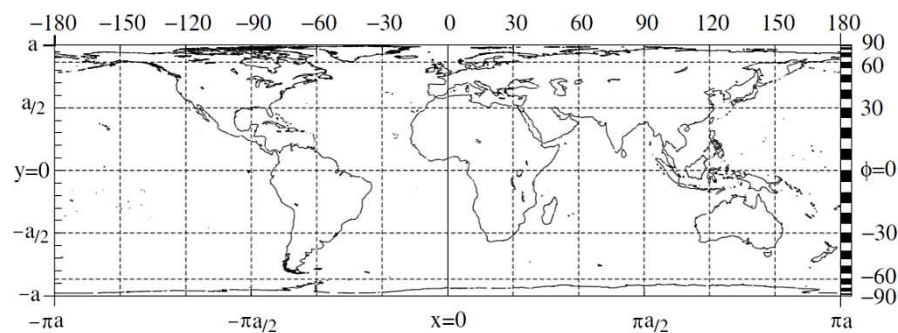


Figura 21: Projeção cilíndrica de Lambert

A projeção cilíndrica de Lambert apresenta grande distorção em latitudes elevadas devido à desigualdade entre a escala nos meridianos e nos paralelos, assim a forma dos elementos representados sofre grandes distorções. As indicatrizes de Tissot são elipses, exceto no paralelo central onde são círculos, mas mantêm sempre a área original (figura 22).

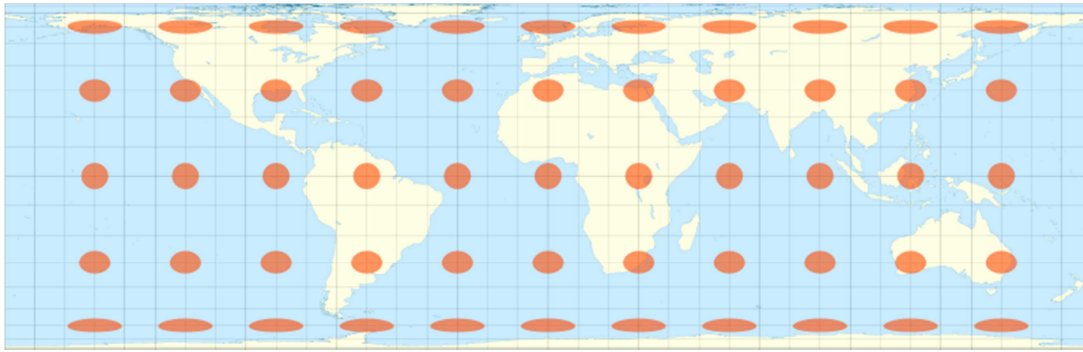


Figura 22: Deformações na projeção cilíndrica de Lambert

À medida que a latitude aumenta, ocorre um alongamento na direção horizontal acompanhado de uma contração na direção vertical de forma a manter a área das indicatrizes constante. Considerando os fatores de escalas nos meridianos e paralelos (fórmulas 1.9 e 1.10), para a projeção cilíndrica de Lambert, temos para o fator de escala nos meridianos

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \varphi} = \infty$$

E para o fator de escala nos paralelos

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \varphi = 0$$

A projeção cilíndrica de Lambert foi proposta em 1772 por Johann Heinrich Lambert (1728-1777), é a quarta projeção de um total de sete apresentadas por este matemático. Esta projeção não tem grande aplicação prática, sendo essencialmente referida como exemplo de uma projeção cilíndrica equivalente de construção simples [3-11].

### 1.3.4 As três projeções cilíndricas normais

Na tabela 1 é apresentada uma síntese das principais propriedades de cada uma das três projeções cilíndricas normais atrás descritas.

Tabela 1: Comparação das três projeções cilíndricas normais

|                               | Projeção Cilíndrica                              |  |   |
|-------------------------------|--|--|---|
|                               | Equidistante                                     | Mercator   | Lambert                                   |
| $x$                           | $x = a\lambda$                                   | $x = a\lambda$   | $x = a\lambda$                            |
| Intervalo de variação de $x$  | $(-a\pi, a\pi)$                                  | $(-a\pi, a\pi)$  | $(-a\pi, a\pi)$                           |
| $y$                           | $a\varphi$                                       | $a \ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$ | $a \sin \varphi$                          |
| Intervalo de variação de $y$  | $\left( -a\frac{\pi}{2}, a\frac{\pi}{2} \right)$ | $(-\infty, +\infty)$   | $(-a, a)$                                 |
| $f(\varphi)$                  | $\varphi$  | $\ln \left[ \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$   | $\sin \varphi$                            |
| $f'(\varphi)$                 | 1  | $\sec \varphi$   | $\cos \varphi$                            |
| Escala nos meridianos         | 1  | $\sec \varphi$   | $\cos \varphi$                            |
| Fator de escala nos paralelos | $\sec \varphi$                                   | $\sec \varphi$   | $\sec \varphi$                            |
| Fator de escala no Equador    | 1  | 1  | 1   |
| Fator de escala para áreas    | $\sec \varphi$                                   | $\sec^2 \varphi$   | 1   |
| Ângulos                       | $\tan \beta = \sec \varphi \tan \alpha$          | $\tan \beta = \tan \alpha$   | $\tan \beta = \sec^2 \varphi \tan \alpha$ |



# Capítulo 2

## Linhas de rumo e geodésicas na esfera

### 2.1 Linhas de rumo

#### 2.1.1 Linhas de rumo e espiral logarítmica

Consideremos o problema de conhecer a trajetória de um barco que navegue segundo uma linha de rumo, ou seja, que navegue mantendo um ângulo constante com os meridianos. Para dar resposta a este problema vamos considerar a projeção estereográfica da esfera no plano. Como foi demonstrado na secção 1.2, a projeção estereográfica é conforme, isto é, preserva ângulos. Assim, podemos começar por encontrar a equação das curvas no plano que cortam um feixe de retas concorrentes segundo um ângulo constante. As linhas de rumo na superfície esférica serão precisamente as imagens inversas dessas curvas por meio da projeção estereográfica. Obviamente que este não é o único método possível. Por exemplo, poderíamos optar por utilizar a projeção de Mercator para estudar as linhas de rumo. Outra possibilidade seria trabalhar diretamente sobre a superfície esférica, esta abordagem pode ser encontrada em Queiró [13].

Pela projeção estereográfica no plano, os meridianos são projetados num feixe de retas que se intersectam na origem. Seja  $\beta$  o ângulo entre a direção de navegação e os meridianos (rumo) e  $\alpha$  o ângulo entre a direção de navegação e a parte positiva do eixo  $Ox$  (figura 23).

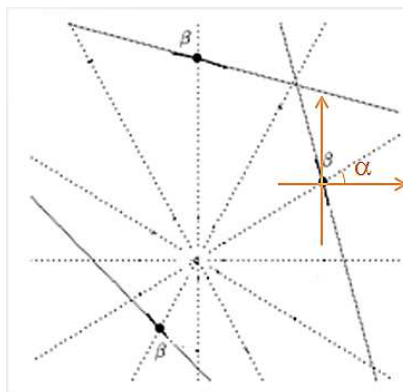


Figura 23: Representação dos meridianos na projeção estereográfica

Se localmente a curva solução é dada pelo gráfico de uma função  $y(x)$ , temos

$$y' = \tan(\alpha + \beta) \quad (2.1)$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (2.2)$$

Atendendo à fórmula trigonométrica:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (2.3)$$

Substituindo 2.2 e 2.3 em 2.1 vem

$$y' = \frac{y + x \tan \beta}{x - y \tan \beta} \quad (2.4)$$

A igualdade 2.4 é uma equação diferencial homogénea, que recorrendo à substituição  $y = zx$   $y' = xz' + z$  e por simplificação algébrica pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separadas (2.5).

$$\frac{1 - z \tan \beta}{1 + z^2} dz = \tan \beta \frac{dx}{x} \quad (2.5)$$

Integrando ambos os membros da equação 2.5 e aplicando as regras operatórias dos logaritmos, temos:

$$\int \frac{1}{1 + z^2} dz - \tan \beta \int \frac{z}{1 + z^2} dz = \tan \beta \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan z = \tan \beta \left( \ln|x| + \ln \sqrt{1 + z^2} \right) + C$$

$$\arctan z = \tan \beta \left( \ln x \sqrt{1 + z^2} \right) + C \quad (2.6)$$

Substituindo  $z = \frac{y}{x}$  em 2.6, vem

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan\beta \left(\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C \quad (2.7)$$

Considerando coordenadas polares (igualdades 1.2)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

e resolvendo em ordem a  $\rho$ , a equação 2.7 pode ser escrita na forma

$$\rho = C e^{\frac{\theta}{\tan\beta}} \quad (2.8)$$

A igualdade 2.8 é a equação de uma espiral logarítmica.

A espiral logarítmica foi estudada por René Descartes (1596-1650), e algumas décadas depois extensivamente analisada por Jacob Bernoulli (1654-1705) que, impressionado com as suas propriedades matemáticas, a designou por *Spira mirabilis*. A espiral logarítmica é uma curva no plano que corta as retas radiais segundo um mesmo ângulo, ou seja, dado um ponto P sobre a espiral logarítmica, o ângulo entre o respetivo raio e a tangente à curva nesse ponto é sempre igual a uma constante. Atualmente, a espiral logarítmica é utilizada na descrição matemática de vários fenómenos naturais.

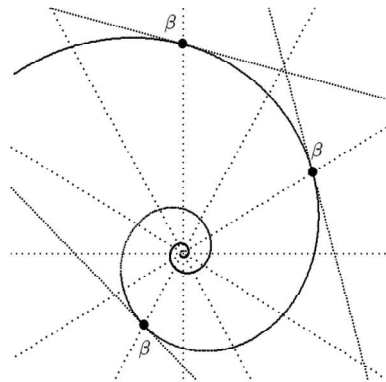


Figura 24: Espiral logarítmica

De modo a obter a equação da imagem da espiral logarítmica sobre a superfície esférica, vamos aplicar as fórmulas de transformação pela projeção estereográfica (igualdades 1.7)

$$\Pi(\rho, \theta, \phi) = \left( \frac{\sin\phi}{1 - \cos\phi}, \theta \right)$$

Temos

$$\frac{\sin \phi}{1 - \cos \phi} = C e^{\frac{\theta}{\tan \beta}} \quad (2.9)$$

Usando algumas relações trigonométricas, o 1º membro da equação anterior pode ser escrito

$$\begin{aligned} \frac{\sin \phi}{1 - \cos \phi} &= \frac{1 + \cos \phi}{\sin \phi} = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} = \frac{1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \\ &= \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.9) e resolvendo em ordem a  $\phi$ , obtemos a equação da linha de rumo ou curva loxodrómica

$$\phi = -2 \arctan \left( e^{\frac{\theta}{\tan \beta}} \right) + \pi \quad (2.10)$$

De forma equivalente,

$$\theta = \tan \beta \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) \right) \quad (2.11)$$

As equações anteriores permitem obter as linhas de rumo ou curvas loxodrómicas, onde  $\beta$  é o rumo,  $\phi$  é a latitude esférica e  $\theta$  é a longitude.

As equações 2.10 e 2.11 podem ser reescritas considerando as coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$

$$\varphi = 2 \arctan \left( e^{\frac{\lambda}{\tan \beta}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (2.12)$$

$$\lambda = \tan \beta \ln \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (2.13)$$

A curva loxodrómica é uma espiral infinita convergente, um barco que hipoteticamente navegasse segundo a mesma linha de rumo sobre um planeta coberto de água seguiria uma trajetória que se aproximaria de um dos pólos, só o atingindo depois de um número infinito de voltas.

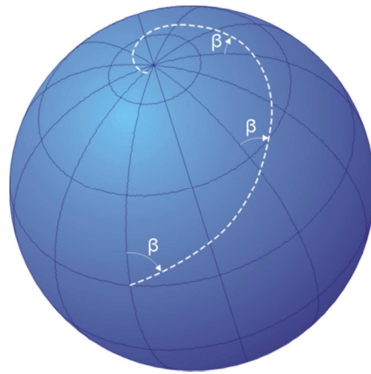


Figura 25: Linha de rumo ou curva loxodrómica

O primeiro matemático a observar que a projeção estereográfica de uma linha de rumo é uma espiral logarítmica foi provavelmente o inglês Thomas Harriot (1560-1621). Na figura 26 pode observar-se uma imagem de um manuscrito de Harriot, de 1595, que incluiu pontos de sete linhas de rumo vistas em projeção estereográfica [13].

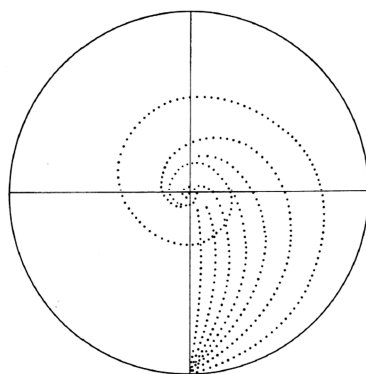


Figura 26: Pontos de sete rumos vistos em projeção estereográfica, figura apresentada num manuscrito de Harriot, 1595

Como foi referido no capítulo 1, na projeção de Mercator as loxodrómicas são representadas por retas (figura 27).

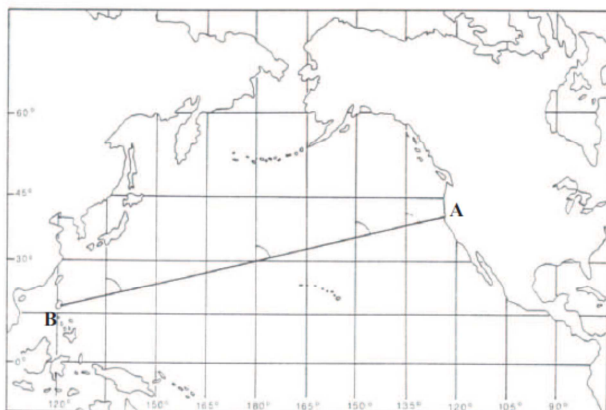


Figura 27: Loxodrómica entre os pontos A e B na projeção de Mercator.

A título de curiosidade refira-se que a espiral loxodrómica foi utilizada pelo artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) em alguns desenhos de efeito visual bastante interessante [6]. Na figura seguinte apresenta-se uma das gravuras de Escher.



Figura 28: *Sphere Spirals*, Escher, 1958

### 2.1.2 Rumor e comprimento de arco de curva loxodrômica

Pretendemos determinar o rumor (ângulo constante  $\beta$ ) de modo a que dados dois pontos do plano com coordenadas polares  $(\rho_0, \theta_0)$  e  $(\rho_1, \theta_1)$  estes estejam sobre a mesma espiral logarítmica. Substituindo as coordenadas destes pontos na equação da espiral logarítmica (igualdade 2.8) temos

$$\begin{cases} \rho_0 = Ce^{\frac{\theta_0}{\tan\beta}} \\ \rho_1 = Ce^{\frac{\theta_1}{\tan\beta}} \end{cases}$$

resolvendo em ordem a  $\beta$ , temos

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = e^{\frac{\theta_0 - \theta_1}{\tan\beta}}$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{\theta_0 - \theta_1}{\ln \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)} \right) \quad (2.14)$$

A igualdade 2.14 permite calcular o rumor entre dois pontos sobre a mesma espiral logarítmica. Como a projeção estereográfica é conforme, o rumor no plano será igual ao rumor sobre a superfície esférica.

Consideremos agora o problema de determinar o comprimento de um arco de loxodrómica entre dois pontos. Seja P um ponto da linha de rumo com coordenadas  $(\varphi, \lambda)$  e P' um ponto sobre a mesma linha de rumo obtido por uma variação infinitesimal  $d\varphi$  da latitude  $\varphi$  de P. N é o pólo norte e Q é o ponto de intersecção do paralelo de P com o meridiano de P'. Denotemos por  $ds$  o comprimento infinitesimal do arco de curva loxodrómica entre P e P'.

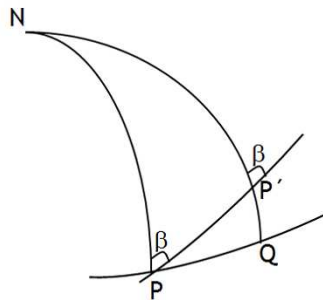


Figura 29: Comprimento de linha de rumo

Podemos considerar que o triângulo  $[PQP']$  é um triângulo retângulo no vértice Q e no vértice P' o ângulo é  $\beta$ . Como a diferença de longitudes entre Q e P é  $d\varphi$ , temos

$$\cos \beta = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos \beta} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\cos \beta} \quad (2.15)$$

Ou seja, para determinar o comprimento de um arco de loxodrómica basta dividir o arco de meridiano entre duas latitudes pelo cosseno do rumo da loxodrómica.

## 2.2 Geodésicas na esfera

### 2.2.1 Problemas Variacionais

O principal problema do Cálculo Variacional é o de encontrar uma função  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que minimize (ou maximize) o integral

$$I(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \quad (2.16)$$

Prova-se que se  $I$  atinge um extremo local em  $x_0$ , então  $x_0$  é solução da equação de Euler-Lagrange (2.17),

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'(t)} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Fica assim estabelecida uma condição necessária para a existência de extremo local.

Mais detalhes sobre problemas de cálculo variacional poderão ser consultados em Povoas [12].

### 2.2.2 Geodésicas na esfera e círculos máximos

Pretendemos determinar as geodésicas, ou seja, as linhas de comprimento mínimo na esfera  $S^2$  de centro na origem e raio  $R > 0$ . Usando coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  e tomando para parâmetro  $\phi$ , um caminho na esfera que une os pontos  $(R, \theta_0, \phi_0)$  e  $(R, \theta_1, \phi_1)$  é parametrizado por:

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta(\phi) \\ y = R \sin \phi \sin \theta(\phi) \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

então

$$\left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 = \left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\phi} \right)^2 = R^2 \left( 1 + \sin^2 \phi \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 \right).$$

Assim, determinar as geodésicas na esfera corresponde a minimizar o integral:

$$I(\theta) = R \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{1 + \theta'^2(\phi) \sin^2 \phi} \, d\phi$$

Trata-se de um problema variacional com  $f(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{1 + \theta'^2(\phi) \sin^2 \phi}$ . Como a função  $f(\phi, \theta, \theta')$  não depende explicitamente de  $\theta$ , a equação de Euler-Lagrange reduz-se a:

$$\frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}} = c \quad (2.18)$$

(onde  $c$  constante,  $c < 1$ )

Resolvendo 2.18 em ordem a  $\theta'$ :

$$\theta' \sin^2 \phi = c \sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}$$

$$\theta' = \frac{c}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - c^2}}$$

Então,

$$\theta = \int \frac{c}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - c^2}} \, d\phi \quad .$$

Tomando  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $c = \sin \alpha$ , temos

$$\theta = \int \frac{\sin \alpha}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \alpha}} \, d\phi$$

Efetuada a mudança de variável  $\tan \phi = \frac{1}{u}$  e resolvendo o integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\theta &= -\int \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-(1+u^2) \sin^2 \alpha}} du \\
&= -\int \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1-u^2 \tan^2 \alpha}} du \\
&= -\arccos(u \tan \alpha) + \beta
\end{aligned}$$

(com  $\beta \in \mathbb{R}$  constante)

Efetuada a mudança de variável  $u = \frac{1}{\tan \phi}$ , resulta

$$\begin{aligned}
\theta &= -\arccos\left(\frac{\tan \alpha}{\tan \phi}\right) + \beta \\
\theta &= -\arccos(u \tan \alpha) + \beta \\
\theta - \beta &= -\arccos\left(\frac{\tan \alpha}{\tan \phi}\right) \\
\cos(\theta - \beta) &= \frac{\tan \alpha}{\tan \phi}
\end{aligned}$$

Atendendo à relação trigonométrica para o cosseno da diferença de ângulos, podemos escrever

$$\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta = \frac{\tan \alpha}{\tan \phi}$$

Multiplicando a igualdade anterior por  $R \sin \phi$  e voltando às variáveis  $(x, y, z)$  a equação anterior escreve-se

$$x \cos \beta + y \sin \beta = z \tan \alpha \quad (2.19)$$

(com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes)

A equação 2.19 é a equação de um plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem (centro da esfera). Fica assim demonstrado que as geodésicas na esfera obtêm-se intersectando a esfera com um plano que passa pelo seu centro, ou seja, são os círculos máximos.

### 2.2.3 Comprimento de um arco de círculo máximo

Pretendemos determinar o comprimento de um arco de círculo máximo entre dois pontos à superfície da Terra. Esta tarefa resume-se a efetuar o produto da amplitude do ângulo ao centro  $\alpha$  (em radianos) pelo comprimento do raio da Terra  $R$  (figura 30).

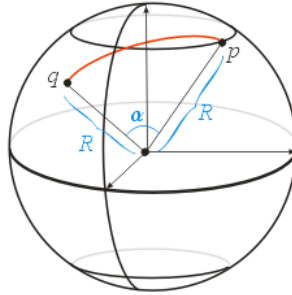


Figura 30: Arco de círculo máximo

De modo a determinar a amplitude de  $\alpha$ , consideremos dois pontos P e Q de coordenadas geográficas, respetivamente,  $(\varphi_0, \lambda_0)$  e  $(\varphi_1, \lambda_1)$ . Em coordenadas retangulares temos:

$$(x_0, y_0, z_0) = (R \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, R \cos \varphi_0 \sin \lambda_0, R \sin \varphi_0)$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (R \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, R \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, R \sin \varphi_1)$$

Sabendo que para o produto interno usual de dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\hat{\vec{u} \cdot \vec{v}}), \text{ podemos escrever}$$

$$R^2 \cos \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1 + R^2 \cos \varphi_0 \cdot \sin \lambda_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1 + R^2 \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi_1 = R \cdot R \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1 + \cos \varphi_0 \cdot \sin \lambda_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1 + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi_1$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda_1) + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi_1$$

$$\alpha = \arccos(\cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda_1) + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi_1) \quad (2.20)$$

Assim, o comprimento de um arco de círculo máximo à superfície da Terra é dado por:

$$\Gamma = R\alpha \quad (2.21)$$

com  $\alpha$  em radianos.

## 2.3 Um exemplo: De Lisboa a Nova Iorque

Nas secções 2.1.2 e 2.2.3 foram deduzidas as fórmulas para o comprimento de arco de loxodrómica, a amplitude do rumo e o comprimento de arco de círculo máximo, neste subcapítulo é apresentado um exemplo de utilização dessas fórmulas com as coordenadas das cidades de Lisboa e Nova Iorque.

Consideremos as coordenadas geográficas de Lisboa e Nova Iorque e as correspondentes coordenadas em radianos (tabela 2).

Tabela 2: Coordenadas geográficas de Lisboa e Nova Iorque

| Coordenadas Geográficas |                         |                     |                         |
|-------------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|
| Lisboa                  |                         | Nova Iorque         |                         |
| Latitude ( $\phi$ )     | Longitude ( $\lambda$ ) | Latitude ( $\phi$ ) | Longitude ( $\lambda$ ) |
| 38° 42' 9'' N           | 9° 8' 10'' W            | 40° 42' 57'' N      | 74° 0' 21'' W           |
| 0,6755 rad              | 0,1595 rad              | 0,7106 rad          | 1,2916 rad              |

Efetuada a 'correção da latitude' ( $\phi = \frac{\pi}{2} - \phi$ ) em coordenadas esféricas temos:

Tabela 3: Coordenadas esféricas de Lisboa e Nova Iorque

| Coordenadas esféricas |                         |                     |                         |
|-----------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|
| Lisboa                |                         | Nova Iorque         |                         |
| Latitude ( $\phi$ )   | Longitude ( $\lambda$ ) | Latitude ( $\phi$ ) | Longitude ( $\lambda$ ) |
| 0,8953 rad            | 0,1595 rad              | 0,8602 rad          | 1,2916 rad              |

Pelas fórmulas de transformação pela projeção estereográfica (1.7), podemos escrever as coordenadas esféricas de Lisboa e Nova Iorque em coordenadas polares no plano:

Tabela 4: Coordenadas polares de Lisboa e Nova Iorque (projeção estereográfica)

| Coordenadas polares |            |             |            |
|---------------------|------------|-------------|------------|
| Lisboa              |            | Nova Iorque |            |
| $\rho$              | $\theta$   | $\rho$      | $\theta$   |
| 2,0826 rad          | 0,1595 rad | 2,1800 rad  | 1,2916 rad |

Recordando que o rumo  $\beta$  é dado pela igualdade 2.14

$$\beta = \arctan \left( \frac{\theta_0 - \theta_1}{\ln \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)} \right)$$

e efetuando os cálculos, concluímos que o rumo de Lisboa a Nova Iorque é aproximadamente  $272^\circ 18' 38''$

O comprimento de arco de loxodrómica é dado por 2.15,

$$s = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\cos \beta}$$

considerando o raio da Terra igual a 6371 km, substituindo as longitudes de Lisboa e Nova Iorque e o rumo calculado anteriormente, obtém-se o comprimento do arco de loxodrómica de Lisboa a Nova Iorque igual a 5553 km. De referir que entre dois pontos à superfície da Terra existem dois arcos de curva loxodrómica, na prática considera-se sempre o menor, que corresponderá ao menor caminho em longitude.

Quanto ao comprimento de arco de círculo máximo, já deduzimos que é dado por 2.20

$$\Gamma = R\alpha$$

Com  $\alpha$  dado por (2.21)

$$\alpha = \arccos(\cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda_1) + \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi_1)$$

Calculando  $\alpha$  e multiplicando pelo raio da Terra, obtemos um comprimento de arco de círculo máximo igual a 5423 km.

Na figura 31 pode observar-se o arco de curva loxodrómica e o arco de círculo máximo entre Lisboa e Nova Iorque na projeção de Mercator. De notar que, como já foi referido anteriormente, na projeção de Mercator as loxodrómicas são representadas por retas e os círculos máximos representados por curvas.

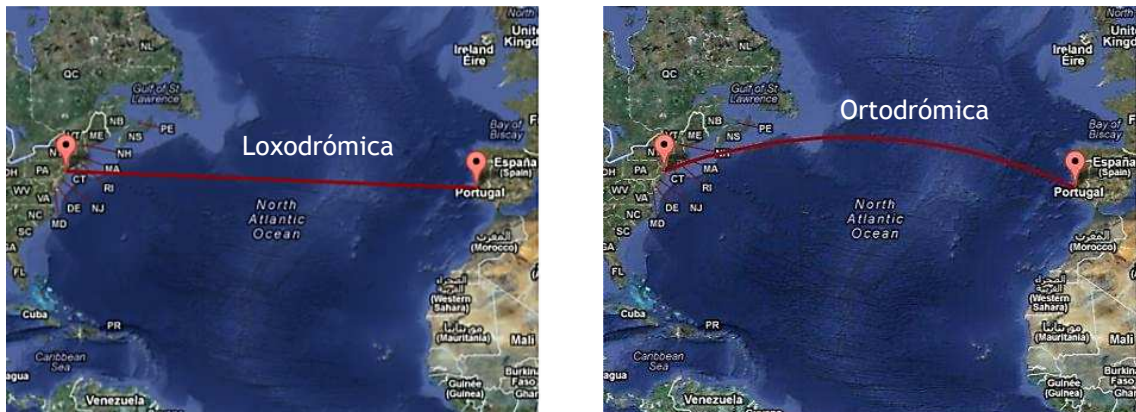


Figura 31: Arco de curva loxodrómica e arco de curva ortodrómica entre Lisboa e Nova Iorque na projeção de Mercator

O comprimento do arco de círculo máximo entre Lisboa e Nova Iorque é menor que o comprimento de arco de loxodrómica, uma diferença de aproximadamente 130 km.

Os valores encontrados foram comparados com os obtidos em alguns calculadores disponíveis na internet e os resultados não diferiram significativamente (por exemplo ver [10]).

Para os cálculos aqui apresentados foi utilizado o programa *Microsoft Excel*, o ficheiro produzido permite o cálculo do rumo e dos comprimentos de arco de loxodrómica e ortodrómica entre dois pontos na superfície da Terra. O utilizador deve introduzir as coordenadas geográficas (em graus, minutos e segundos) de dois locais à superfície da Terra no campo assinalado para o efeito. O ficheiro pode ser encontrado em formato digital no CD de apoio ao presente trabalho.



# Considerações finais

Neste trabalho procurou-se apresentar uma base teórica sobre projeções da esfera no plano, um tópico com aplicação sobretudo na construção de mapas cartográficos. As quatro projeções aqui apresentadas foram as que se consideraram importantes abordar essencialmente pela sua ligação com as curvas notáveis da esfera. A projeção estereográfica surgiu como um exemplo de uma projeção plana e conforme. Já as três projeções cilíndricas apresentadas diferem pela propriedade que é preservada.

O segundo objetivo do trabalho foi estudar duas curvas notáveis na superfície esférica: as loxodrómicas e as ortodrómicas. A este tema dedicou-se o capítulo 2, onde, entre outros assuntos, se apresentou a relação entre as curvas loxodrómicas e as espirais logarítmicas. Como já foi referido, a abordagem aqui apresentada para a dedução da curva loxodrómica (via projeção estereográfica) resultou de uma escolha pessoal. Em alternativa poderíamos ter trabalhado diretamente sobre a superfície esférica ou com a projeção de Mercator, contudo se tivesse sido essa a nossa escolha a relação entre a loxodrómica e a espiral logarítmica não seria evidente.

Para além das aplicações práticas em Cartografia, o tema deste trabalho revela-se bastante rico em múltiplos aspetos da matemática, nomeadamente, Geometria, Trigonometria, Análise Infinitesimal, Equações Diferenciais, Cálculo Variacional e História da Matemática. Muitos dos temas aqui apresentados podem ser relacionados com os currículos do ensino básico, secundário ou dos primeiros anos do ensino superior.

Por exemplo, o tema círculos máximos na esfera pode ser trabalhado com alunos do ensino secundário, pois os conhecimentos matemáticos envolvidos, tais como a conversão de graus em radianos, o produto interno entre vetores, as propriedades de ângulos na circunferência, fazem parte do programa destes anos de escolaridade. Os referenciais cartesianos são um assunto transversal a vários anos de escolaridade, sendo uma oportunidade de interdisciplinaridade com a Geografia. Já o tema equações diferenciais faz parte do currículo de várias licenciaturas, e assim o processo de dedução da equação da espiral logarítmica através da solução de uma equação homogénea de primeira ordem poderá ser utilizado como exemplo de modelação de uma situação real.

No decurso do trabalho de pesquisa, surgiram nomes de vários matemáticos cujo trabalho está de algum modo relacionado com os temas aqui tratados, optamos por ao longo do texto incluir referências a alguns desses nomes na tentativa de fornecer ao leitor uma abordagem não só dos conteúdos matemáticos, mas também uma perspetiva histórica.

É importante referir que neste trabalho a forma do planeta Terra foi modelada por uma esfera, desprezando-se o efeito do achatamento dos pólos. Em situações em que seja desejável maior precisão, nomeadamente em cálculos de Geodesia, é utilizado o elipsoide para modelo da Terra.

Como foi referido na introdução, pontualmente recorreu-se à utilização de infinitésimos, considero que seria interessante no futuro fazer um estudo sobre o uso de infinitésimos no ensino da matemática, uma vez que, neste aspeto, continua a existir um desfasamento metodológico entre as áreas de aplicação da matemática e a análise infinitesimal presente nos programas curriculares dos ensinos pré-universitário e universitário.

Com a elaboração deste trabalho reforcei conhecimentos científicos transversais a várias áreas da Matemática que certamente serão úteis na minha vida profissional. Para além disso, considero que conhecer aplicações da Matemática é importante, pois permitem tornar esta ciência mais próxima dos alunos. Com a realização deste trabalho pude aprofundar a ligação da Matemática à Cartografia e conhecer a aplicação da Matemática na resolução de problemas de navegação, dois exemplos de aplicação da Matemática.

# Referências Bibliográficas

- [1] Afonso, J. *Cartografia Matemática*. Série Cadernos Técnicos e de Informação, Vol. 31, Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa, 1972.
- [2] Alexander, J. Loxodromes: A Rhumb Way to Go. *Mathematics Magazine*. Vol.77, nº5, (dezembro 2004), 349-356.
- [3] Alves Gaspar, J. *Cartas e projecções cartográficas*. Lidel - Edições Técnicas, Lda, Lisboa, 2000.
- [4] Casaca, J. *Pedro Nunes e a Carta de Mercator*, LNEC, Lisboa, 2004.
- [5] Catalão, J. *Projecções Cartográficas*. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Monografia não publicada, 2007.
- [6] Crato, N. Pedro Nunes, Mercator e Escher. *Revista do Expresso*. (fevereiro 1999).
- [7] Hilbert D. and Cohn-Vossen S. *Geometry and the Imagination*. 2ª edição. AMS Chelsea Publishing Series, 1999.
- [8] Klein, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. Vol. I. Macmillan, New York, 1932.
- [9] MathWorld, A Wolfram Web Resource. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/>; Consult. 17 Outubro 2012.
- [10] Movable Type Scripts. Disponível em <http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong.html>; Consult. 17 Outubro 2012.
- [11] Osborne, P. *The Mercator Projections*. Edinburgo, 2008.
- [12] Povoas, M.C. *Métodos Matemáticos da Física- Uma Introdução*. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2002.
- [13] Queiró, J. F. Pedro Nunes e as linhas de rumo. *Gazeta de Matemática*, 143, (julho 2002), 42-47.
- [14] Richardus, P. and Adler R.K. *Map projections*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.

[15] Santos, F. *Sebenta de Matemáticas Gerais-Primitivas e Integrais*. 11ª edição, Plátano Editora, Lisboa, 1996.

[16] Weinholtz A. Bivar. *Equações Diferenciais- Uma Introdução*. 2ª edição, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2000.