



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Roteiro para a classificação dos padrões do plano

Paula Cristina Calçada Martins Marques

Relatório de Estágio

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de mestre em
Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino
Secundário

(2º ciclo de estudos)

Orientador científico: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, outubro de 2013

Dedicatória

Aos meus eternos bebês, João e Lucas.

Resumo

O relatório de estágio (RE) aqui apresentado é elaborado no âmbito da unidade curricular Estágio Pedagógico (EP) do 2º ano do plano de estudos do 2º Ciclo em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, pela Universidade da Beira Interior (UBI).

A Prática de Ensino Supervisionada (PES), parte integrante do EP, decorreu ao longo do ano letivo de 2012/2013, na Escola Secundária Nuno Álvares (ESNA) em Castelo Branco.

O núcleo de estágio integrou duas estagiárias, Paula Marques e Rita Isidoro, e a PES esteve sob a orientação de um docente do departamento de Matemática (orientador científico) Professor Doutor Rui Pacheco e do docente da ESNA (orientador cooperante) Professor José Monteiro.

A elaboração deste RE esteve sob a orientação do Professor Doutor Rui Pacheco e divide-se em dois capítulos. No primeiro capítulo descreve-se de forma sumária o trabalho realizado no âmbito da PES e no segundo capítulo apresenta-se um roteiro para a classificação dos padrões do plano.

A par deste trabalho escrito foi elaborado um portfólio de estágio onde estão arquivados todos os documentos produzidos ao longo do ano de estágio.

Palavras-chave

Funções Polinomiais, Transformações Geométricas, Simetria, Padrões.

Abstract

This document is a report of the Pedagogic Practice, which is part of the 2nd year of the Master course on Mathematics teaching at the University of Beira Interior (UBI).

The Pedagogic Practice took place throughout the academic year 2012/2013, in the Secondary School Nuno Álvares, Castelo Branco - Portugal under the supervision of Professor Rui Pacheco (from the Mathematics Department - UBI) and Professor José Monteiro (from Secondary School Nuno Álvares).

This report is structured in two main chapters. The first chapter describes the work carried out during the Pedagogic Practice at Secondary School Nuno Álvares. The second chapter presents a roadmap for wallpaper patterns classification.

Keywords

Polynomial function, Transformations, Symmetry, Wallpaper Patterns.

Agradecimentos

Agradeço,

Ao Professor Doutor Rui Pacheco pelo exemplo de serenidade e confiança que sempre me transmitiu e pelas muitas horas disponibilizadas para me orientar no meu trabalho.

Ao Professor José Monteiro pelo apoio que me deu desde o primeiro dia, pela compreensão e pela forma como me acolheu na sua escola e nas suas turmas.

À Professora Doutora Isabel Dias pelo exemplo de profissionalismo, pela disponibilidade e pela simpatia com que sempre me tratou.

Ao Miguel, meu amigo filósofo que sem ele teria sido mais difícil chegar ao fim.

À minha família por todo o apoio que recebi ao longo deste percurso.

Ao Paulo, meu “companheiro de viagem” pela disponibilidade para ouvir os meus desabafos.

Índice

CAPÍTULO 1	1
Prática de Ensino Supervisionada	1
1.1 Introdução	1
1.2 Descrição do trabalho desenvolvido da PES.....	1
1.3 Planificações	3
1.3.1 Planificação da aula nº1	4
1.3.2 Planificação da aula nº2.....	9
1.3.3 Planificação da aula nº3.....	14
1.3.4 Planificação da aula nº4.....	16
1.3.5 Planificação da aula nº5.....	18
1.3.6 Planificação da aula nº6.....	21
1.4 Reflexão sobre a PES.....	24
CAPÍTULO 2	25
Roteiro para a classificação dos padrões do plano.....	25
2.1. Transformações geométricas	26
2.1.1. Transformação geométrica	26
2.1.2. Transformação geométrica inversa.....	26
2.1.3. Produto de transformações geométricas	26
2.2. Exemplos de transformações geométricas	27
2.2.1. Translação	27
2.2.2. Rotação.....	27
2.2.3. Reflexão	28
2.2.4. Reflexão deslizante	29
2.2.5. Homotetia.....	29
2.3. Isometrias	30
2.3.1. Definição	30
2.3.2. Propriedades	30
2.4. Produtos de isometrias	31
2.4.1. Produto de duas translações.....	31
2.4.2. Produto de duas reflexões	32
2.4.3. Produto de uma translação com uma reflexão	32
2.4.4. Produto de uma translação com uma reflexão deslizante	35
2.4.5. Produto de uma rotação com uma translação	35
2.4.6. Produto de uma reflexão com uma reflexão deslizante	36
2.4.7. Produto de duas reflexões deslizantes.....	36
2.4.8. Produto de duas rotações	37
2.4.9. Produto de uma rotação com uma reflexão	38
2.4.9.1. Produto de uma meia-volta por uma reflexão	39
2.4.10. Produto de uma rotação com uma reflexão deslizante	41
2.4.10.1. Produto de uma meia-volta por uma reflexão deslizante	41
2.4.11. Produto de três reflexões	43
2.5. Simetrias de uma figura plana.....	43
2.5.1. Simetria de uma figura plana.....	43
2.5.2. Conjunto das simetrias de uma figura: propriedades	44
2.6. Padrões	44
2.6.1. Definição	44
2.6.2. Rede de um padrão.....	45
2.6.3. Domínio fundamental	46
2.6.4. Postulado da Melhor Aproximação.....	47
2.6.5. Restrição cristalográfica	48

2.6.6.	Os 17 tipos de padrões planos.....	49
2.6.6.1.	Ausência de rotações	52
2.6.6.2.	Rotações de ordem 2	58
2.6.6.3.	Rotação de ordem 4.....	66
2.6.6.4.	Rotação de ordem 3.....	69
2.6.6.5.	Rotação de ordem 6.....	72
2.6.7.	Fluxograma para a classificação de padrões do plano.	74
	Referências Bibliográficas.....	75

Lista de Figuras

Figura 1: Translação do ponto P.	27
Figura 2: Rotação do ponto A com centro em O e ângulo α	28
Figura 3: Reflexão de um segmento, de um ponto e de um triângulo.	28
Figura 4: Reflexão deslizante do triângulo T_1	29
Figura 5: Exemplo de duas homotetias do mesmo triângulo ABC com o mesmo centro e fatores diferentes.	30
Figura 6: Produto de duas translações.	31
Figura 7: Produto da translação T pela reflexão M e $M = L_2$	33
Figura 8: Produto da translação T pela reflexão M e $M = L_1$	33
Figura 9: Produto da translação T pela reflexão M (nem paralela nem perpendicular).	34
Figura 10: Composição de uma translação com uma rotação.	35
Figura 11: Composição de duas reflexões deslizantes com eixos paralelos.	37
Figura 13: Produto de duas rotações de centros distintos.	38
Figura 14: Centro de rotação C sobre o eixo de reflexão f	40
Figura 15: Centro de rotação C fora do eixo de reflexão m	40
Figura 16: Eixos de reflexão “rodados” e eixos f e m paralelos.	41
Figura 17: Composição de uma rotação de MV com uma reflexão deslizante (sobre o eixo). .	41
Figura 18: Composição de uma rotação de MV com uma reflexão deslizante (fora do eixo). .	42
Figura 20: Diferentes simetrias de translação existentes neste padrão.	45
Figura 21: Parte da rede formada pelo conjunto de translações T_{AB}, T_{AD}	45
Figura 22: Célula do padrão de uma tampa de saneamento.	46
Figura 23: Simetrias do padrão de uma tampa de saneamento.	47
Figura 25: Célula de uma malha retangular.	53
Figura 26: Célula de uma malha rômica.	53
Figura 27: Exemplo de padrão do tipo pm	54
Figura 28: Exemplo de padrão do tipo pm com “falsas” reflexões deslizantes ($T_0 = T_2$).	55
Figura 29: Exemplo de padrão do tipo pg	55
Figura 30: Padrão do tipo pg , combinado com uma reflexão (entre reflexões deslizantes). .	56
Figura 31: Exemplo de padrão do tipo cm	57
Figura 32: Célula de um padrão do tipo cm	57
Figura 33: Composição de uma translação T com uma rotação de MV com centro em C	58
Figura 34: Produto das translações geradoras de um padrão pelo um centro de rotação C . ..	58
Figura 35: Exemplo de padrão do tipo $p2$	59
Figura 36: Célula primitiva de um padrão do tipo $p2$	59
Figura 38: Exemplo de padrão do tipo pmm	61

Figura 39: Célula de um padrão do tipo pmm .	61
Figura 40: “Esqueleto” de um padrão pm com centros de MV fora dos eixos de reflexão.	62
Figura 41: Exemplo de padrão do tipo pmg .	62
Figura 42: Célula de um padrão do tipo pmg .	62
Figura 43: “Esqueleto” de um padrão pg com centros de MV sobre os eixos de reflexão.	63
Figura 44: “Esqueleto” de um padrão pg com centros de MV fora dos eixos de reflexão.	64
Figura 45: Exemplo de padrão do tipo pgg .	64
Figura 46: Célula de um padrão do tipo pgg .	64
Figura 47: “Esqueleto” de um padrão cm com centros de MV sobre os eixos de reflexão.	65
Figura 48: Exemplo de padrão do tipo cmm .	65
Figura 49: Célula do padrão do tipo cmm .	66
Figura 50: Exemplo de padrão do tipo $p4$.	67
Figura 51: Célula do padrão $p4$.	67
Figura 52: Exemplo de padrão do tipo $p4m$.	67
Figura 53: Célula do padrão $p4m$.	68
Figura 54: Exemplo de padrão do tipo $p4g$.	68
Figura 56: Exemplo de padrão do tipo $p3$.	69
Figura 57: Célula do padrão $p3$.	69
Figura 58: Exemplo de padrão do tipo $p31m$.	70
Figura 59: Célula do padrão $p31m$.	70
Figura 60: Exemplo de padrão do tipo $p3m1$.	71
Figura 61: Célula do padrão $p3m1$.	71
Figura 62: Exemplo de padrão do tipo $p6$.	72
Figura 63: Célula do padrão $p6$.	72
Figura 64: Exemplo de padrão do tipo $p6m$.	73
Figura 65: Célula do padrão $p6m$.	73

CAPÍTULO 1

Prática de Ensino Supervisionada

Neste capítulo, descreve-se o trabalho realizado durante a PES, com referência a diversos documentos que poderão ser consultados no portefólio do núcleo de estágio. Apresenta-se detalhadamente os planos de aula de seis aulas lecionadas à turma de 10º B de Matemática A e termina-se com uma reflexão sobre o trabalho realizado durante a PES.

1.1 Introdução

O EP iniciou-se no dia 3 de setembro de 2012, quando as estagiárias se apresentaram na ESNA e lhes foi apresentado o orientador da escola cooperante, o Professor José Monteiro. Realizou-se uma reunião informal na qual se procedeu à troca de contactos quer telefónico quer eletrónico, informação sobre o horário do professor cooperante e na indicação dos manuais escolares que iriam ser necessários para o corrente ano letivo.

Posteriormente realizou-se na UBI uma reunião convocada pela Diretora de Curso, Professora Doutora Isabel Cunha, na qual estiveram presentes os dois orientadores e as duas estagiárias. Nesta reunião foi apresentado o regulamento específico da iniciação à prática profissional do 2.º Ciclo em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. No decorrer desta apresentação discutiu-se em concreto a natureza e objetivos da PES e do RE.

A distribuição das turmas procedeu-se após algumas reuniões informais com o Professor José Monteiro e o resultado foi que ambas as estagiárias iriam poder realizar a PES em duas turmas de 10º ano. Destas turmas, uma corresponderia ao currículo de Matemática A e outra ao currículo de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). A PES iniciou-se com a turma G do 10º ano de MACS, no decorrer do 1º período, onde se lecionou seis blocos de 90 minutos (dos dezoito blocos mínimos obrigatórios) do capítulo *Teoria da partilha equilibrada*, mais concretamente sobre o tema das *Partilhas no caso contínuo*. Os restantes doze blocos foram lecionados no 3º período, na turma 10º B de Matemática A, sobre o tema *Funções polinómicas e Polinómios*. Destes doze blocos, seis estão apresentados detalhadamente no subcapítulo 1.2, na forma de plano de aula e seu desenvolvimento.

1.2 Descrição do trabalho desenvolvido da PES

O trabalho desenvolvido durante a PES divide-se em dois momentos: o primeiro momento desenvolvido no 1º período na turma 10º G do currículo de MACS e o segundo

momento desenvolvido no 3º período na turma 10º B do currículo de Matemática A. Desde o início do período e devido à especificidade do currículo de MACS, elaborou-se com o apoio e supervisão do Professor José Monteiro, instrumentos de trabalho e avaliação, nomeadamente uma ficha de trabalho, onde constavam apenas exercícios/problemas retirados de provas escritas de MACS dos Exames Nacionais do Ensino Secundário, uma vez que se considerou oportuno e vantajoso que os alunos tivessem um primeiro contacto com este tipo de exercícios/problemas. Elaboraram-se também 3 enunciados para trabalho de grupo para que os alunos pudessem trabalhar em conjunto. Até ao momento da realização deste trabalho de grupo, já tinham sido abordados em sala de aula, pelo Professor José Monteiro, todos os conteúdos referentes ao capítulo da *Teoria matemática de eleições* e os *Métodos de partilha no caso discreto*, nomeadamente os *Métodos de divisão justa* e os *Métodos de divisão proporcional*. Como tal, neste trabalho de grupo era solicitado aos alunos que realizassem uma pesquisa, elaborassem um relatório e que apresentassem o trabalho oralmente a toda a turma com recurso a uma apresentação eletrónica, sobre os seguintes temas: Vida e obras de Condorcet e Borda; Evolução das formas de voto até ao voto eletrónico; Vida e obra de Malba Tahan, Steven Brams, Alan Taylor, Bronislaw Knaster; Vida e obra de Victor d'Hondt, Alexander Hamilton, Thomas Jefferson, John Quincy Adams, Daniel Webster, Edward V. Huntington e Saint-Laguë. Foi entregue aos alunos por via eletrónica um documento onde constavam orientações para a realização de uma boa apresentação eletrónica.

Após o subtema das *Partilhas no caso discreto*, iniciou-se o primeiro momento de serviço docente com o subtema das partilhas no caso contínuo, nomeadamente com os seguintes métodos: Método de divisor-selecionador; Método do divisor único, Método do selecionador único, Método do último a diminuir, Método livre de inveja e Método da faca deslizante (não constava no manual adotado). Foram planeados e elaborados seis planos de aula, com base no manual adotado [7], nos quais a metodologia adotada consistiu na apresentação oral (com recurso a uma apresentação eletrónica) de cada um dos métodos, e para consolidação procedia-se à resolução individual ou em grupo dos exercícios propostos pelo manual. Numa das aulas, onde foi apresentado o Método da faca deslizante, realizou-se com os alunos uma atividade que consistia em dividir uma torta gigante (desenhada no quadro) por toda a turma seguindo os passos deste método. Tornou-se uma aula diferente, divertida e com resultados inesperados relativamente ao tamanho da fatia da torta que coube a cada um. O primeiro momento de docência terminou com a elaboração e entrega de um teste de avaliação.

O segundo momento de docência realizou-se no 3º período na turma do 10º B, onde se lecionou o tema *Funções polinomiais e polinómios*. Dadas as características deste tema optou-se na planificação das aulas pelo método expositivo seguido da resolução de exercícios/problemas para aprofundamento e consolidação dos conteúdos abordados. Para auxílio na exposição oral dos conteúdos recorreu-se a uma apresentação eletrónica que proporcionou um desenrolar organizado das aulas. A turma geralmente mostrava-se

empenhada e trabalhadora: sempre que eram solicitados para responder a qualquer questão ou para ir ao quadro, respondiam ao pedido sem qualquer problema.

1.3 Planificações

A elaboração dos planos de aula apresentados nesta subseção teve como base o manual da disciplina adotado pela escola [3] e documento oficial dos Programas de Matemática do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Ciência, mais concretamente o programa de Matemática A - 10º ano.

Os pré-requisitos exigidos aos alunos para o ensino do tema *Funções polinomiais e Polinómios* foram: conhecer a função afim; reconhecer a função afim através do gráfico; esboçar o gráfico e conhecer algumas propriedades, nomeadamente a monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações; saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau; conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Na tabela seguinte encontram-se de uma forma resumida os conteúdos, objetivos e metodologias para o tema *Funções polinomiais e Polinómios*.

Conteúdos	Objetivos	Metodologias	Nº de aulas (90 min.)
<p>Polinómios numa variável.</p> <p>Reduzir e ordenar um polinómio.</p> <p>Operações com polinómios: adição, subtração, multiplicação.</p>	<p>Usar a linguagem e simbologia dos polinómios.</p> <p>Identificar um monómio, binómio, trinómio e polinómio.</p> <p>Reduzir e ordenar polinómios.</p> <p>Determinar grau de um polinómio.</p> <p>Operar com polinómios: soma, subtração e multiplicação.</p> <p>Aplicar os casos notáveis da multiplicação de binómios.</p>	<p>Resolver analítica, gráfica e numericamente equações e inequações.</p> <p>Resolver analiticamente problemas acompanhada de verificação numérica ou gráfica.</p> <p>Resolver exercícios e problemas do manual.</p>	6

Divisão inteira de polinómios.	Efetuar divisão inteira de polinómios, indicando o quociente e o resto.		
Método dos coeficientes indeterminados.	Aplicar o método dos coeficientes indeterminados.		
Regra de Ruffini.	Aplicar a Regra de Ruffini na divisão inteira de polinómios.		
Teorema do resto.	Aplicar o Teorema do resto.		
Zeros de um polinómio.	Decompor polinómios de grau superior a dois.		
Decomposição de um polinómio.	Determinar os zeros de um polinómio.		

Seguidamente apresentam-se detalhadamente os seis planos de aula lecionadas no segundo momento de docência da PES.

1.3.1 Planificação da aula nº1

Tema	Funções polinomiais e polinómios	Data	02/04/2013	Nº aula	133/134
Tópico	Polinómios Operações com polinómios				
Objetivos Usar a linguagem e simbologia dos polinómios; Identificar um monómio, binómio, trinómio e polinómio; Reduzir e ordenar polinómios; Determinar grau de um polinómio; Operar com polinómios: soma, subtração e multiplicação; Aplicar os casos notáveis da multiplicação de binómios.		Conteúdos programáticos Polinómios numa variável; Reduzir e ordenar um polinómio; Operações com polinómios: adição, subtração, multiplicação;			
Sumário	Polinómios numa variável. Operações com polinómios. Resolução de exercícios.	Materiais <ul style="list-style-type: none"> • Manual da disciplina • Apresentação eletrónica • Quadro e giz 			
Avaliação	Observação direta.				

Desenvolvimento da aula

Recorde-se alguns conceitos já estudados em anos anteriores e também abordados nas últimas aulas:

Monómio é um número real ou produto de um número real (coeficiente) por uma ou mais variáveis (parte literal).

Exemplo:

Parte numérica

Variáveis (letras)

Monómio	Coeficiente	Parte Literal
x^2	1	x^2
$4x$	4	x
4	4	Não tem
$2xyz^2$	2	xyz^2

Monómio numa variável é um número real, ou produto de um número real por uma potência de uma variável em que o expoente é um número inteiro não negativo (zero ou nº positivo).

Exemplos:

Monómios	$4x$	$2x^4$
Não são monómios	x^{-1}	$2x^{-3}$

Monómios não semelhantes, são monómios cuja parte literal é diferente.

Exemplos: $2x^2$, $2x^3$, $6x^4$, $4x^6$ são monómios não semelhantes.

Monómios semelhantes, são monómios com a mesma parte literal.

Exemplos: $2x^2$ é semelhante a $4x^2$ e $6x^6$ é semelhante a $4x^6$.

Binómio é a soma de dois monómios não semelhantes.

Exemplos: $2x^2 - 3$; $4x + 5$; $3x^4 + 2$.

Trinómio é a soma de três monómios não semelhantes.

Exemplos: $x^3 - 2x^2 - 3$; $x^2 + 4x + 5$; $3x^4 + 3x^3 - 2$.

Polinómio é a soma de vários monómios a que também podemos chamar de termos do polinómio.

Exemplos: $2x^2 + x - 1$, $2x^3 - 7x$, $6x^4 + 9$, $4x^6 + x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 8$.

Grau de um polinómio é o grau do seu termo ($\neq 0$) de grau mais elevado.

Exemplos:

- Polinómio de grau 2
 $2x^2 + 5$ - Incompleto (falta o termo de grau 1)
- Polinómio de grau 4
 $3x^4 + x^3 + x^2 - 3x - 3$ - Completo

Poder-se-ia arranjar inúmeros exemplos de polinómios dos mais variados graus, mas vamos generalizar e definir a expressão que define o **polinómio de grau n**, sendo n um número natural.

Polinómio de

grau 1: $a_0x^1 + a_1$

grau 2: $a_0x^2 + a_1x^1 + a_2$

grau 3: $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3$

grau 4: $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x^1 + a_4$

...

grau n: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$

Em suma, um **polinómio de grau n**, em x , é toda a expressão algébrica do tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

em que:

- x é a variável real;
- $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$;
- $n \in \mathbb{N}_0$.

Nota: Ao termo sem parte literal chamamos de termo independente.

Polinómio nulo é um polinómio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero e tem grau indeterminado.

Exemplos: $0x^2 + 0$; $0x^6 + 0x^4 - 0$.

Reduzir um polinómio é escrevê-lo de forma que não apresente termos semelhantes.

Ordenar um polinómio é escrevê-lo segundo as potências crescentes ou decrescentes da variável.

Polinómio completo é um polinómio que possui todos os termos desde o de maior grau até ao termo independente.

Nota: Só se deve indicar o grau de um polinómio depois deste ser reduzido e ordenado.

Exercícios de aplicação

Página
69/70

Exercício 72	Exercício 74
<p>Considera os seguintes polinómios: $A(x) = 3x^2 + 5x - x^6$ $B(x) = 1 + x^2 + 5x^4$ $C(x) = 3 - x$ $D(x) = -7$ Indica o grau e ordena cada um deles segundo as potências decrescentes de x.</p>	<p>Quais das seguintes expressões são polinómios e qual é o respetivo grau? $A(x) = \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{3x}{7}$; $B(x) = x^3 + 2x^2 - \sqrt{x} + 1$; $C(x) = -3x^2 + \sqrt{2}x^3 - \frac{1}{4}$; $D(x) = 2 - \frac{3}{x}$; $E(x) = \frac{x^4}{7}$.</p>
<p>Resolução:</p> <p>$A(x) = -x^6 + 3x^2 + 5x$ é de grau 6 $B(x) = 5x^4 + x^2 + 1$ é de grau 4 $C(x) = -x + 3$ é de grau 1 $D(x) = -7$ é de grau 0</p>	<p>Resolução:</p> <p>$A(x)$ - Polinómio de grau 4. $B(x)$ - Não é um polinómio, pois o 3º termo tem expoente que não pertence a \mathbb{N}. $C(x)$ - Polinómio de grau 3. $D(x)$ - Não é um polinómio, pois tem um termo com expoente que não pertence a \mathbb{N}. $E(x)$ - Polinómio de grau 4.</p>
Exercício 73	
<p>Comenta a afirmação: “Existe um valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a + 1)x^3 + ax^2 + (3a + 3)x + a$ é um polinómio completo de 2º grau.”</p>	
<p>Resolução:</p> <p>Para que o polinómio dado seja um polinómio de 2º grau temos que eliminar o termo de grau 3, portanto</p> $a + 1 = 0,$ <p>Mas, como tem de ser completo temos de garantir que</p> $a \neq 0 \text{ e } 3a + 3 \neq 0$ <p>De $a + 1 = 0$ temos que $a = -1$ e portanto $a \neq 0$ Substituindo a por -1 na segunda desigualdade temos $3(-1) + 3 \neq 0 \Leftrightarrow -3 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq 0$ P.F. Se $a = -1$ eliminamos o termo de grau 1. Portanto a afirmação é FALSA.</p>	

Operações com polinómios

Adição

Reduzir os termos semelhantes, ou seja, somar os monómios com igual parte literal.

Exemplo:

$$(-2x^2 + 3x - 1) + (-5x^2 - 2x + 3) = -2x^2 + 3x - 1 - 5x^2 - 2x + 3 = -7x^2 + x + 2.$$

Subtração

Ao primeiro polinómio adicionar o simétrico do segundo polinómio.

Exemplo:

$$(-2x^2 + 3x - 1) - (-5x^2 - 2x + 3) = -2x^2 + 3x - 1 + 5x^2 + 2x - 3 = 3x^2 + 5x - 4.$$

Multipliação

Aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica e adicionar os termos semelhantes.

Exemplo:

$$(x^2 + x + 2) \times (3 + 2x) = 3x^2 + 3x + 6 + 2x^3 + 2x^2 + 4x = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6.$$

Nota: Se observarmos o 1º polinómio tem *grau* 2 e o 2º polinómio tem *grau* 1. Do produto de ambos resulta um polinómio de *grau* 3.

A partir deste resultado podemos generalizar e afirmar que:

Para dois polinómios M e N de grau m e n respetivamente o polinómio $M \times N$ será um polinómio de grau $m+n$.

Polinómio	Grau
M	M
N	N
$M \times N$	$m+n$

Casos notáveis da multiplicação de binómios.

Quadrado de um binómio

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Diferença de quadrados

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Exercícios de aplicação

Exercício 75
<p>75. Considera os polinómios: $A(x) = 3x^2 + x - 1$; $B(x) = x^2 - 2$; $C(x) = 10x^4 + 3x^2 + x - 8$. Calcula, apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido e ordenado:</p> <p>75.1. $A(x) + B(x)$; 75.2. $A(x) - C(x)$; 75.3. $A(x) \times B(x)$; 75.4. $(B(x))^2 - C(x)$.</p>
<p>Resolução:</p> <p>75.1. $A(x) + B(x) = 3x^2 + x - 1 + x^2 - 2 = 4x^2 + x - 3$. 75.2. $A(x) - C(x) = 3x^2 + x - 1 - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) = 3x^2 + x - 1 - 10x^4 - 3x^2 - x + 8 = -10x^4 + 7$.</p>

75.3. $A(x) \times B(x) = (3x^2 + x - 1)(x^2 - 2) = 3x^4 - 6x^2 + x^3 - 2x - x^2 + 2 = 3x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2.$

75.4. $(B(x))^2 - C(x) = (x^2 - 2)^2 - (10x^4 - 3x^2 + x - 8) = x^4 - 4x^2 + 4 - 10x^4 - 3x^2 - x + 8 = -9x^4 - 7x^2 - x + 12.$

Exercício 76

Comenta a afirmação: “Se o polinómio $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios do 4º grau, então $P(x) + Q(x)$ também é um polinómio do 4º grau.”

Resolução:
A afirmação é falsa.
Consigno arranjar um exemplo que contraria esta afirmação:

$P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 9$ e $Q(x) = -4x^4 + 2x - 4$
 $P(x) + Q(x) = 4x^4 - 3x^2 + 9 - 4x^4 + 2x - 4 = -3x^2 + 2x + 5$
 $P(x) + Q(x)$ é um polinómio de 2º grau.

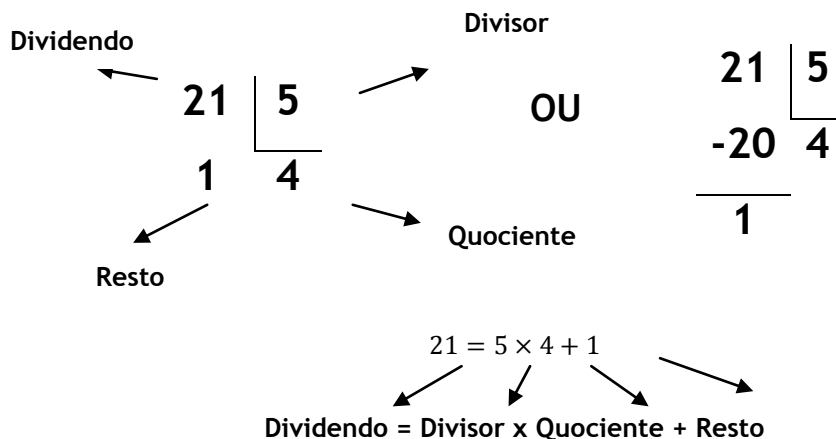
1.3.2 Planificação da aula nº2

Tema	Funções polinomiais e polinómios	Data	04/04/2013	Nº aula	135/136
Tópico	Operações com polinómios				
Objetivos	Efetuar divisão inteira de polinómios, indicando o quociente e o resto; Aplicar o método dos coeficientes indeterminados.		Conteúdos programáticos Divisão inteira de polinómios; Método dos coeficientes indeterminados.		
Sumário	Divisão inteira de polinómios. Método dos coeficientes indeterminados. Resolução de exercícios.		Materiais		
Avaliação	Observação direta.		<ul style="list-style-type: none"> Manual da disciplina Apresentação eletrónica Quadro e giz 		

Desenvolvimento da aula

Divisão inteira de polinómios

Desde o 1ºCiclo do E.B. que o algoritmo utilizado para efetuar divisões é o seguinte:



Solicitar aos alunos que apliquem o algoritmo nos seguintes exemplos:

1. $566 \div 2$;
2. $1425 \div 3$;
3. $1425 \div 22$

Para efetuar uma divisão inteira de polinómios pode proceder-se da mesma forma:

Considere-se M e N dois polinómios de graus m e n respetivamente. Se $m \geq n$ então é possível encontrar polinómios Q e R de modo que se verifique a condição:

$$M(x) = N(x) \times Q(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{r|l} M(x) & N(x) \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

Relativamente ao grau de cada polinómio, temos que:

Polinómio	Grau
M	m
N	n
Q	$m-n$
R	$r < n$

A divisão termina quando o resto tem grau inferior ao grau do divisor, ou seja,

$$\text{grau } R(x) < \text{grau } N(x)$$

Exemplo 1:

Calcular o quociente e o resto da divisão de $x^3 + x^2 - 3x - 3$ por $x^2 + 1$:

Passo 1

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 \quad \left| \quad x^2 + 1 \right.$$

Escrever o dividendo e o divisor por ordem decrescente das potências

Passo 2

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 3x - 3 & x^2 + 1 \\ -x^3 & x \\ \hline & x^2 - 4x - 3 \end{array}$$

Divide-se o monómio de maior grau do dividendo pelo monómio de maior grau do divisor.

$$x^3 \div x^2 = x$$

Passo 3

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 3x - 3 & x^2 + 1 \\ -x^3 & x + 1 \\ \hline & \end{array}$$

Repete-se o processo até se obter como resto um polinómio de grau inferior ao do divisor.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 x^2 - 4x - 3 \\
 -x^2 \quad -1 \\
 \hline
 -4x - 4
 \end{array}$$

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x^2 + 1) \times (x + 1) + (-4x - 4)$$

\swarrow \swarrow \downarrow \searrow
Dividendo = Divisor x Quociente + Resto

G r a u 3 2 1 1 < 2

Exemplo 2:

Calcular o quociente e o resto da divisão de $x^3 + x^2 - 3x - 3$ por $x + 1$

Passo 1

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 - 3x - 3 \quad | \quad x + 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 - 3x - 3 \quad | \quad x + 1 \\
 -x^3 - x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 \\
 \hline
 -3x - 3
 \end{array}$$

Passo 2

Passo 3

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 - 3x - 3 \quad | \quad x + 1 \\
 -x^3 - x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 - 3 \\
 \hline
 -3x - 3 \\
 +3x + 3 \\
 \hline
 0 \\
 x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1) \times (x^2 - 3) + 0
 \end{array}$$

Dividendo = Divisor x Quociente + Resto

G r a u 3 1 2 0 < 1

Neste exemplo em concreto o resto deu zero, isto é, $R(x) = 0$, portanto estamos perante uma divisão exata e diz-se que o **dividendo é divisível pelo divisor**.

Exercícios de aplicação

Exercício 78.1	
Determina o polinómio que dividido por $x^2 + 3x - 1$ tem como quociente $3x - 2$ e o resto $5x + 4$.	
Resolução:	
$M(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$	
Sendo $M(x)$ o polinómio que se quer determinar então,	
$M(x) = (x^2 + 3x - 1) \times (3x - 2) + (5x + 4)$	
$M(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x - 3x + 2 + 5x + 4$	
$M(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4x + 6.$	
Exercício 79	
Efetua as seguintes divisões, indicando o quociente e o resto:	
79.1.	$(3x^4 - 2x^3 - 5x + 10) \div (3x - 2);$
79.2.	$(x^4 - 8) \div (x^2 - 2).$

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ os polinômios que representam o quociente e o resto da divisão inteira de $M(x)$ por $N(x)$.

Sabemos que,

Polinômio	Grau	
M	3	
N	1	
Q	$3 - 1 = 2$	$\rightarrow Q(x) = ax^2 + bx + c$
R	$r = 0 (r < 1)$	$\rightarrow R(x) = r$

Atendendo a esta igualdade $M(x) = N(x) \times Q(x) + R(x)$ temos que:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) + r$$

Efetuada os cálculos no 2º membro da igualdade, obtemos:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) + r$$

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = ax^3 + ax^2 + bx^2 + bx + cx + c + r$$

Reduzindo os termos semelhantes,

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c + r$$

Pela definição de polinômios idênticos, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -3 \\ b + c = 5 \\ c + r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 10 \\ r = -8 \end{cases}$$

Os coeficientes estão determinados e portanto podemos construir os polinômios que definem o quociente e o resto:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 10$$

$$R(x) = -8$$

Exercícios de aplicação

Página
74

Exercício 82

Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.

A área do retângulo é dada pela expressão $3x^3 + x^2 - 2x$ e $\overline{AB} = x^2 + x$.

Utiliza o método dos coeficientes indeterminados para determinar a expressão que representa \overline{BC} .

Resolução:

Pelo enunciado sabemos que:

$$\overline{AB} = x^2 + x \text{ e } A(x) = 3x^3 + x^2 - 2x$$

Sabemos também que o cálculo da área de um retângulo é igual ao produto da sua largura pelo seu comprimento, ou seja:

$$A(x) = L(x) \times C(x)$$

Onde $L(x) = \overline{CB}$ e $C(x) = \overline{AB} = x^2 + x$

Como $A(x)$ tem grau 3 e $C(x)$ tem grau 2 então $L(x)$ terá grau 1, logo será um polinómio do tipo $ax + b$.

Então da igualdade 1) temos

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 2x &= (x^2 + x)(ax + b) \\ 3x^3 + x^2 - 2x &= ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx \\ 3x^3 + x^2 - 2x &= ax^3 + (a + b)x^2 + bx \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 - 3 = -2 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$L(x) = ax + b = 3x - 2$$

Portanto o polinómio que representa a largura é $L(x) = 3x - 2$.

1.3.3 Planificação da aula nº3

Tema	<i>Funções polinomiais e polinómios</i>	Data	08/04/2013	Nº aula	137/138
Tópico	Operações com polinómios				
Objetivos Aplicar a Regra de Ruffini na divisão inteira de polinómios.	Conteúdos programáticos Regra de Ruffini: <ul style="list-style-type: none"> • Divisor do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{R}$. • Divisor do tipo $ax - b$, com $a \neq 0$. 				
Sumário	Regra de Ruffini. Resolução de exercícios.	Materiais <ul style="list-style-type: none"> • Manual da disciplina • Quadro e giz 			
Avaliação	Observação direta.				

Desenvolvimento da aula

Outro método utilizado para determinar o quociente e o resto de uma divisão de polinómios é a Regra de Ruffini.

Regra de Ruffini

Aplica-se quando, na divisão inteira de polinómios, o divisor é um polinómio de grau 1, em particular do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

Aplicar a Regra de Ruffini para obter o quociente e o resto da divisão de $x^3 - 2x + 5$ por $x - 3$.

O divisor é da forma $x - a$ portanto $a = 3$.

Etapas:

Nota: No caso do polinómio ser incompleto, os coeficientes dos termos em falta são iguais a zero.

1.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & & & & \end{array}$$

Valor de a

Coeficientes do dividendo por ordem decrescente das potências

2.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Escrever na 3ª linha o 1º elemento da 1ª linha

3.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 3 & & \\ \times & & & & \end{array}$$

$3 \times 1 = 3$ e $0 + 3 = 3$

4.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \\ \times & & & & \end{array}$$

$3 \times 3 = 9$ e $-2 \times 9 = 7$

5.
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 21 \\ \times & & & & \\ \hline & & & & 26 \end{array}$$

Resto

$3 \times 7 = 21$ e $5 \times 21 = 26$

Coeficientes do polinómio quociente

Os coeficientes que irão “construir” o polinómio $Q(x)$ são três, portanto este será composto por três monómios onde:

7	Termo independente	7
3	Coeficiente do termo de grau 1	$3x$
1	Coeficiente do termo de grau 2	x^2

Portanto,

Quociente: $Q(x) = x^2 + 3x + 7$

Resto: $R(x) = 26$

Exercícios de aplicação

Página
75

Exercício 85.1				
Utiliza a regra de Ruffini para efetuar a seguinte divisão: $(2x^3 - x^2 - 12x - 7) \div (x - 3)$.				
Resolução:				
	2	-1	-12	-7
3		6	15	9
	2	5	3	2
$Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$				
$R(x) = 2$				

1.3.4 Planificação da aula nº4

Tema	Funções polinomiais e polinómios	Data	09/04/2013	Nº aula	139/140
Tópico	Teorema do Resto Determinação das raízes de um polinómio Decomposição em fatores				
Objetivos	Aplicar a Regra de Ruffini na divisão inteira de polinómios; Aplicar o teorema do resto;		Conteúdos programáticos	Regra de Ruffini; Teorema do resto;	
Sumário	Regra de Ruffini: divisor do tipo $ax - b, a \neq 0$. Teorema do resto: demonstração e aplicação. Resolução de exercícios.		Materiais	<ul style="list-style-type: none"> Manual da disciplina Quadro e giz 	
Avaliação	Observação direta.				

Desenvolvimento da aula

A Regra de Ruffini com divisor do tipo $ax - b, a \neq 0$

Exemplo:

Seja a divisão de um polinómio $A(x)$ por um polinómio do tipo $ax - b, a \neq 0$.

Sabe-se que

$$A(x) \begin{array}{l} | \\ ax - b \\ \hline R \\ Q(x) \end{array}$$

$$A(x) = (ax - b)Q(x) + R \Leftrightarrow A(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \Leftrightarrow A(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)aQ(x) + R$$

Desta igualdade verifica-se que o quociente da divisão de $A(x)$ por $\left(x - \frac{a}{b}\right)$ é um polinómio $Q_1(x)$ tal que $Q_1(x) = a \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ o quociente da divisão de $A(x)$ por $ax - b$.

Logo, $Q(x) = \frac{1}{a}Q_1(x)$.

Os restos das divisões são os mesmos.

Exercícios de aplicação

Página 76

Exercício 87

87. Utiliza a regra de Ruffini para efetuar as seguintes divisões:

87.2 $(x^4 + 1) \div (x - 1)$;

87.3 $(4x^3 - 8x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

Resolução:

87.2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$R(x) = 2$$

87.3.

Como $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$, onde $a = \frac{1}{2}$, então irá determinar-se o quociente, $Q_1(x)$, e o resto da divisão por $(x - \frac{1}{2})$ pela Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 0 & -1 \\ & & 2 & -3 & -\frac{3}{2} \\ \hline & 4 & -6 & -3 & -\frac{5}{2} \end{array}$$

Temos

$$Q_1(x) = 4x^2 - 6x - 3 \text{ e } R(x) = -\frac{5}{2}$$

Para determinar $Q(x)$ temos que $Q(x) = \frac{1}{a} Q_1(x)$, portanto

$$Q(x) = \frac{1}{2} (4x^2 - 6x - 3) = 2x^2 - 3x - \frac{3}{2} \text{ e } R(x) = -\frac{5}{2}$$

Exercício 88

88. Considera que a área do triângulo [RST] da figura é dada, em centímetros quadrados, pela expressão: $A(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$ e que \overline{SR} é representado, em centímetros, por $H(x) = 2x - 3$.

88.1. Calcula \overline{ST} para $x = 4$.

88.2. Determina uma expressão em que x represente \overline{ST} .

Resolução:

88.1. Sabemos que a expressão $2x^3 - x^2 - 5x + 3$ representa a área do triângulo e que $2x - 3$ a altura.

Sabemos que $A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$, ou seja, $A_{\Delta} = \frac{\overline{ST} \times \overline{RS}}{2} \Leftrightarrow \overline{ST} = 2A_{\Delta} \times \frac{1}{\overline{RS}}$.

Seja \overline{ST} a base do triângulo e $B(x)$ o polinómio que a representa, então

$$B(x) = 2(2x^3 - x^2 - 5x + 3) \times \frac{1}{2x - 3}$$

Para $x = 4$, temos

$$B(4) = 2(2 \times 4^3 - 4^2 - (5 \times 4) + 3) \times \frac{1}{(2 \times 4) - 3}$$

$$B(4) = 2(2 \times 64 - 16 - 20 + 3) \times \frac{1}{5}$$

$$B(4) = 2 \times 95 \times \frac{1}{5}$$

$$B(4) = \frac{190}{5} = 38$$

1) Da alínea anterior temos que

$$B(x) = 2(2x^3 - x^2 - 5x + 3) \times \frac{1}{2x - 3}$$

$$B(x) = (2x^3 - x^2 - 5x + 3) \times \frac{2}{2x - 3} = (2x^3 - x^2 - 5x + 3) \div (x - \frac{3}{2})$$

Pela regra de Ruffini

$\frac{3}{2}$	2	-1	-5	3
	3	3	-3	
	2	2	-2	0

Portanto $B(x) = 2x^2 + 2x - 2$ é o polinómio que representa a base do triângulo [RST].

1.3.5 Planificação da aula nº5

Tema	Funções polinomiais e polinómios	Data	11/04/2013	Nº aula	141/142
Tópico	Polinómios				
Objetivos	Determinar os zeros de um polinómio; Decompor polinómios em fatores. Aplicar a regra de Ruffini; Aplicar o Teorema do Resto; Decompor polinómios de grau superior a dois; Determinar os zeros de um polinómio.		Conteúdos programáticos		
			Operações com polinómios; Regra de Ruffini; Teorema do Resto; Zeros de um polinómio; Decomposição de um polinómio.		
Sumário	Determinação das raízes de um polinómio. Decomposição em fatores.		Materiais		
Avaliação	Observação direta.		<ul style="list-style-type: none"> • Manual da disciplina • Quadro e giz 		

Desenvolvimento da aula

Teorema do resto: O resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por um binómio $(x - a)$ é igual ao valor numérico do polinómio para $x = a$, ou seja, $P(a)$. Se o divisor é um binómio do tipo $ax - b$, o resto é dado por $P(\frac{b}{a})$.

O número real a diz-se um **zero** ou **raiz** do polinómio $P(x)$ se e só se $P(a) = 0$

$$a \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a \text{ é divisor de } P(x).$$

Seja $M(x)$ um polinómio de grau n , em linguagem de polinómios, resolver a equação

$$M(x) = 0$$

consiste em encontrar os zeros (ou raízes) do polinómio $M(x)$.

A decomposição de polinómios em fatores é importante para resolver equações e inequações de grau superior a dois.

Nesta factorização é útil conhecer os seguintes teoremas:

Teorema: Dado um polinómio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, de grau n , com n raízes x_1, x_2, \dots, x_n , $P(x)$ pode ser decomposto na seguinte forma:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Teorema: um polinómio de grau n de coeficientes reais tem, no máximo, n raízes (zeros) reais.

Decomposição em fatores

Para a decomposição de polinómios de grau ≥ 2 podem ser úteis as seguintes ferramentas:

- Lei do anulamento do produto;

Um produto é nulo se e só se pelo menos um dos seus fatores é nulo.

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

- Regra de Ruffini (quando conhecida uma raíz ou zero);
- Colocar o x em evidência (ou x^2, \dots, x^p , com $p < \text{grau do polinómio}$);
- Fórmula resolvente.

Raiz de multiplicidade k

Diz-se que a é uma raiz de multiplicidade k do polinómio $P(x)$ se o fator $(x - a)$ aparece exatamente k vezes na factorização de $P(x)$. Isto é:

$$P(x) = (x - a)^k Q(x)$$

e $Q(x)$ não é divisível por $(x - a)$.

Exercícios de aplicação

Exercício 89
Sem efetuar as operações determina o resto das seguintes divisões: 89.1. $-x^3 + 3x - 2$ por $x - 1$; 89.2. $-x^3 + 3x - 2$ por $x + 1$.
Resolução: Pelo Teorema do Resto, determinar o resto da divisão de $A(x)$ por $x - a$ é o mesmo que determinar $A(a)$.

89.1. Para $B(x) = -x^3 + 3x - 2$ e $a = 1$ temos
 $B(1) = -(1^3) + 3 \times 1 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$
 Portanto $R(x) = 0$.
 Podemos acrescentar que 1 é zero ou raiz do polinómio $B(x)$.

89.2. Para $C(x) = -x^3 + 3x - 2$ e $a = -1$ temos
 $B(-1) = -(-1^3) + 3 \times (-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4$
 Portanto $R(x) = -4$.

Exercício 90

Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que a divisão de $2x^3 - 5x^2 + kx + 3$ por $x - 3$ seja exata.

Resolução:
 Para procedermos à divisão do polinómio dado por $x - 3$ podemos usar a regra de Ruffini, uma vez que estamos perante um divisor do tipo $x - a$.
 Pretendemos que esta divisão, seja exata, ou seja, que o resto seja zero.
 Pela regra de Ruffini

3	2	-5	k	3	Pretende-se que este resultado seja zero.
		6	3	3(K+3)	
	2	1	K+3	0	

Portanto para que o resto seja zero temos que garantir que $3 + 3(k + 3) = 0$
 donde $3 + 3k + 9 = 0 \Leftrightarrow 3k = -12 \Leftrightarrow k = -4$
 Para $k = -4$ o resto da divisão de $2x^3 - 5x^2 + kx + 3$ por $x - 3$ é exata.

Exercício 91

Considera a família de polinómios $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b; a, b \in \mathbb{R}$.

91.1. Determina uma relação entre a e b de modo que $P(x)$ seja divisível por $x - 2$.

91.2. Determina a e b sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e dividido por $x + 2$ dá resto 1.

Resolução:
 91.1. Para determinar uma relação entre a e b de modo que $P(x)$ seja divisível por $x - 2$, devemos proceder à respetiva divisão, usando a regra de Ruffini:

2	1	-a	-2	b
			2(2-a)	2(-2+2(2-a))
	1	2-a	-2+2(2-a)	Pretende-se que seja zero

Portanto $b + 2(-2 + 2(2 - a)) = 0 \Leftrightarrow b + 2(-2 + 4 - 2a) = 0 \Leftrightarrow b + 2(2 - 2a) = 0 \Leftrightarrow b + 4 - 4a = 0 \Leftrightarrow b = 4a - 4$.

91.2. Determina a e b sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e dividido por $x + 2$ dá resto 1.
 Se $P(x)$ é divisível por $x - 1$, então pelo Teorema do Resto $P(1) = 0$ e $P(-2) = 1$.
 Portanto

$$P(1) = 1^3 - a(1^2) - 2 + b = 0 \Leftrightarrow 1 - a - 2 + b = 0 \Leftrightarrow -a + b - 1 = 0$$

e

$$P(-2) = (-2)^3 - a(-2)^2 - 2(-2) + b = 1 \Leftrightarrow -8 - 4a + 4 + b = 1 \Leftrightarrow -4a + b = 5$$

De ambas as igualdades podemos criar um sistema de duas equações de duas incógnitas

$$\begin{cases} -a + b - 1 = 0 \\ -4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ -4(b - 1) + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -4b + 4 + b = 5 \\ -3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} - 1 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Página 82

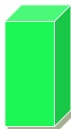
Exercício 100																																					
Determina a multiplicidade da raiz -1 do polinómio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e decompõe $P(x)$ em fatores.																																					
Resolução:																																					
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">-2</td> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">-1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> </table>	-1	1	2	0	-2	-1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	-1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	
-1	1	2	0	-2	-1																																
-1	1	1	-1	-1	0																																
-1	1	0	-1	1	0																																
-1	1	-1	1	1	0																																
1	1	1	1	0	0																																
1	1	0	0	0	0																																
A multiplicidade da raiz -1 é 3. $P(x)$ pode ser decomposto nos seguintes fatores: $P(x) = (x - 1)(x + 1)^3$																																					

1.3.6 Planificação da aula nº6

Tema	Funções polinomiais e polinómios	Data	15/04/2013	Nº aula	143/144
Tópico	Polinómios				
Objetivos	Determinar os zeros de um polinómio; Decompor polinómios em fatores. Aplicar a regra de Ruffini; Aplicar o Teorema do Resto; Decompor polinómios de grau superior a dois; Determinar os zeros de um polinómio.		Conteúdos programáticos Operações com polinómios; Regra de Ruffini; Teorema do Resto; Zeros de um polinómio; Decomposição de um polinómio.		
Sumário	Resolução de exercícios.		Materiais		
Avaliação	Observação direta.		<ul style="list-style-type: none"> • Manual da disciplina • Quadro e giz 		

Desenvolvimento da aula

Página 80

Exercício 94	
Na figura encontra-se representado um prisma quadrangular regular cuja área é dada, em centímetros quadrados, pela expressão: $A(x) = 6x^2 + 4x - 10$.	
$x - 1$ 	
Sabe-se que o lado da base é dado em centímetros, por $L(x) = x - 1$.	
94.1. Mostra que 1 é uma das raízes do polinómio $A(x)$.	
94.2. Mostra que a área de cada face lateral é dada pela expressão: $x^2 + 2x - 3$.	
94.3. Determina, em função de x , a altura do prisma.	
94.4. Determina as dimensões do prisma no caso de a sua área ser $22cm^2$.	

Resolução:

94.1. Pelo Teorema do Resto, 1 é raiz de $A(x)$ sse $A(1) = 0$.

$$A(1) = 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 10 = 6 + 4 - 10 = 0$$

94.2. A área do prisma é igual a $2x$ a área da base mais $4x$ a área lateral, ou seja,

$$A_t = 2A_b + 4A_l$$

Como a área total é dada pela expressão $6x^2 + 4x - 10$ e a área da base é dada pela expressão $(x - 1)^2$, então pela igualdade temos

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4x - 10 &= 2(x - 1)^2 + 4A_l(x) \\ 6x^2 + 4x - 10 &= 2(x^2 - 2x + 1) + 4A_l(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 10 &= 2x^2 - 4x + 2 + 4A_l(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4A_l(x) &= 6x^2 - 2x^2 + 4x + 4x - 10 - 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4A_l(x) &= 4x^2 + 8x - 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_l(x) &= x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

94.3. Seja $A_l(x) = x^2 + 2x - 3$ a expressão que nos dá a área lateral do prisma e $A_l(x) = (x - 1)C(x)$, e $C(x)$ é o polinómio que nos dá a altura do prisma. Portanto $C(x) = A_l(x) \div (x - 1)$. Para o cálculo desta divisão, podemos usar a regra de Ruffini, pois o divisor é do tipo $x - a$, com $a = 1$:

1	1	2	-3
	1	3	0

Logo, $C(x) = x + 3$.

94.4. No caso de termos $A(x) = 22\text{cm}^2$ temos $6x^2 + 4x - 10 = 22$ donde

$$6x^2 + 4x - 10 - 22 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 6 \times (-32)}}{2 \times 6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 + 28}{12} \vee x = \frac{-4 - 28}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{12} \vee x = \frac{-32}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

A equação tem duas soluções mas para o problema só nos serve uma solução, a positiva, pois estamos a tratar de medidas de comprimento.

Portanto a aresta da base mede 1cm ($L(x) = x - 1$) e a altura mede 4cm ($C(x) = x + 3$).

Exercício 96

Considera o polinómio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x$.

96.1. Mostra que $P(-1) = 2$.

96.2. Recorrendo à Regra de Ruffini, resolve a equação $P(x) = 2$.

Resolução:

96.1. $P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) = -1 + 2 + 1 = 2$.

Este resultado representa o resto da divisão inteira do polinómio $P(x)$ por $(x + 1)$, pelo Teorema do Resto.

96.2. $P(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

Considere-se $P'(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$ um polinómio de grau 3.

Pretende-se saber para que valores de x , o polinómio P' é igual a zero.

Como

$$P(x) = (x + 1)Q(x) + R(x) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (x + 1)Q(x) + 2 \Leftrightarrow$$

$$P(x) - 2 = (x + 1)Q(x) \Leftrightarrow$$

$$P'(x) = (x + 1)Q(x) \text{ e } R(x) = 0.$$

Pelo Teorema do Resto, -1 é zero ou raiz do polinómio $P'(x)$.

Aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

O polinómio P' pode ser decomposto da seguinte forma

$$P'(x) = (x^2 + x - 2)(x + 1)$$

Igualando $P'(x)$ a zero obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} P'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \vee x = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{2} \vee x = \frac{-1-3}{2} \vee x = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \vee x = -1 \\ &C.S. = \{-2, -1, 1\}. \end{aligned}$$

Exercício 98

Decompõe em fatores os seguintes polinómios.

98.1. $A(x) = x^3 - 1$;

98.2. $B(x) = x^4 - x^2 - 2$. Sugestão: Considera $y = x^2$;

98.3. $C(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, sabendo que $C(x)$ é divisível por $x + 2$.

Resolução:

98.1. Facilmente se confirma que 1 é zero do polinómio pois $A(1) = 0$.

Usando a regra de Ruffini para decompor o polinómio temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Portanto $A(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

98.2. Se considerarmos a seguinte mudança de variável $y = x^2$ ficamos com $C(y) = y^2 - y - 2$ e se igualarmos a zero temos,

$$y^2 - y - 2 = 0$$

pela Fórmula Resolvente,

$$\begin{aligned} y^2 - y - 2 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1+3}{2} \vee y = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1 \end{aligned}$$

Portanto pode ser decomposto da seguinte forma:

$$C(y) = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

Fazendo novamente a mudança de variável ficamos com

$$B(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

Nota: $(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, donde $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

98.3. Pela Regra de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$C.A.: x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1+5}{2} \vee x = \frac{-1-5}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$

$$C(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x + 2)(x + 3).$$

1.4 Reflexão sobre a PES

Da experiência obtida no decorrer do EP, salienta-se o apoio fundamental do orientador cooperante Professor José Monteiro. Como sempre se mostrou disponível para dialogar, refletir, orientar e apoiar, considera-se que os objetivos propostos foram alcançados. A opção de efetuar a prática de ensino em duas turmas do mesmo nível mas de currículos diferentes revelou-se vantajosa, pois alargou o leque de experiências.

A experiência resultante do contacto com o programa de MACS foi estimulante na medida em que permitiu usar outros instrumentos de avaliação (não apenas os testes de avaliação), nomeadamente os trabalhos de grupo. O uso destes materiais/instrumentos permitiram que os alunos revelassem capacidades que de outra forma não conseguiriam revelar, nomeadamente, responsabilidade, empenho e capacidade de trabalhar em grupo de uma forma proveitosa.

Destaca-se o facto de apenas o manual de MACS da editora Texto Editores possuir informação referente a uma revisão científica e pedagógica efetuada por um professor universitário e por um professor do ensino secundário respetivamente. Talvez por este facto se considere que o livro de MACS tem melhor organização, estrutura e apresentação de conteúdos, embora se considere que o manual de Matemática A da Porto Editora possua uma grande quantidade de bons exercícios e uma grande quantidade de problema estimulantes ligados a situações reais.

Considera-se que o número de aulas atribuídas ao tema *Funções polinomiais e polinómios* deveria ser superior, para permitir a resolução de um maior número de exercícios/problemas.

Como algo menos positivo, salienta-se o facto de ambas as turmas onde se realizou a PES serem demasiado grandes no que diz respeito ao número de alunos por turma.

No que diz respeito a atividades Extra Curriculares, participou-se na correção de 7 provas das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, da Categoria A - 8º/9º anos, 1ª Eliminatória.

CAPÍTULO 2

Roteiro para a classificação dos padrões do plano

O objetivo deste capítulo é apresentar um estudo de introdução à classificação dos padrões planos. Esta classificação, estabelecida pela primeira vez pelo matemático russo E. Fedorov, tem como base a classificação dos grupos simetria - grupos cristalográficos bidimensionais - das respectivas figura geométricas. Como tal, em primeiro lugar vamos apresentar as principais propriedades do grupo das isometrias do plano. Para mais detalhes o leitor pode consultar a referência [1].

Nem todos os subgrupos do grupo de isometrias correspondem a padrões do plano. Por exemplo, o *Postulado da melhor aproximação* garante uma distância mínima entre dois centros de rotação e a *Restrição cristalográfica* garante que só existem centros de rotação de ordem 2,3, 4 e 6.

Neste estudo optou-se pela notação IUC - International Union of Crystallography para nomear cada um dos 17 padrões e portanto apresenta-se uma explicação detalhada de cada símbolo que compõe esta notação, uma vez que a informação dada através destes símbolos refere-se às simetrias que pertencem ao conjunto de geradores do padrão. Segue-se uma explicação detalhada da existência de apenas 4 padrões sem simetrias de rotação e da existência de apenas 5 padrões com simetrias de rotação de ordem 2. Os restantes padrões com simetrias de rotação de ordem 3, 4 e 6 são apresentados sem uma explicação detalhada indicando-se, além de um exemplo para cada tipo de padrão, o seu conjunto de simetrias, o conjunto de geradores e o domínio fundamental.

Alguns dos exemplos de padrões apresentados foram criados com auxílio do programa Kali de Jeff Weeks obtido na Internet [10].

Como o processo de classificar um padrão pode ser muito complexo, apresenta-se um fluxograma baseado numa ideia original de Dorothy Washburn e Donald Crowe [5] para facilitar este processo.

2.1. Transformações geométricas

2.1.1. Transformação geométrica

Uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto P de \mathbb{R}^2 um e um só ponto P' de \mathbb{R}^2 , verificando as seguintes condições:

- a) Se P e Q são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes P' e Q' são também distintos;
- b) Se U é um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 , então existe um ponto V em \mathbb{R}^2 tal que o seu correspondente pela transformação geométrica T é U .

Por outras palavras a transformação geométrica T é uma correspondência biunívoca (bijectiva) entre os pontos do plano \mathbb{R}^2

2.1.2. Transformação geométrica inversa

Seja T uma transformação geométrica qualquer e N um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 . Designemos por M a sua imagem inversa. Diz-se transformação geométrica inversa de T , e designa-se por T^{-1} , a correspondência $N \mapsto M$ assim definida.

A correspondência verifica a) e b) e é portanto uma transformação geométrica.

Para cada transformação geométrica T existe uma transformação geométrica inversa T^{-1} .

2.1.3. Produto de transformações geométricas

Dadas duas transformações geométricas S e T , o produto de S por T (ou composta de S com T) é a correspondência $P \mapsto P''$, em que $P' = T(P)$ e $P'' = S(P')$. O produto de S por T denota-se por $S \circ T$.

Dada uma transformação geométrica T , diz-se que o ponto P é um ponto fixo da transformação T , ou que T fixa P , se o ponto P é transformado em si próprio, isto é, $T(P) = P$.

Designa-se por *identidade*, e escreve-se I , a transformação geométrica em \mathbb{R}^2 que faz corresponder a cada ponto o mesmo ponto, ou seja, qualquer que seja o ponto P , $I(P) = P$. Todos os pontos do plano são fixos para a transformação identidade. Para qualquer transformação geométrica T , tem-se $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$.

Sejam S e T duas transformações geométricas. Diz-se que S e T são iguais se, qualquer que seja o ponto P do plano, as imagens de P por meio de S e por meio de T coincidem, isto é, $S(P) = T(P)$.

2.2. Exemplos de transformações geométricas

2.2.1. Translação

Sejam A e B dois pontos quaisquer do plano. O segmento orientado AB é um segmento de reta AB a que foi atribuído um sentido. No segmento orientado AB considera-se o ponto A como a origem e o ponto B como a extremidade. Sendo AB um segmento orientado possui comprimento, direção e sentido.

Diz-se que dois segmentos orientados são equipolentes quando possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Dado um segmento orientado AB , diz-se translação definida por AB a transformação geométrica T que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' que é a extremidade do segmento orientado PP' equipolente a AB e tendo P como origem.

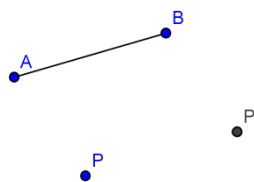


Figura 1: Translação do ponto P.

Ao comprimento do segmento AB designa-se por módulo da translação. Se A e B coincidem, ou seja, o módulo de AB é zero, a translação é a transformação identidade.

Designa-se por vetor o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um dado segmento orientado do plano. No caso do segmento orientado ser AB , pode dizer-se que a translação é definida pelo vetor AB .

2.2.2. Rotação

Sejam dados um ponto O e um ângulo orientado α . Diz-se rotação R de centro O e ângulo α a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto A do plano, o ponto $A' = R(A)$ nas seguintes condições:

- $R(O) = O$, isto é, o ponto O é fixo para a rotação R ;

b) Se $A \neq O$,

- O ângulo AOA' é igual a α ;
- Os segmentos OA e OA' têm igual comprimento.

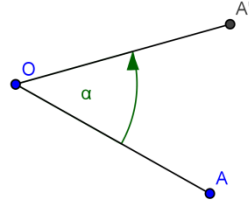


Figura 2: Rotação do ponto A com centro em O e ângulo α .

O ponto que não é afetado por esta transformação é o centro de rotação. Uma rotação em que α seja um múltiplo inteiro de 360° é a transformação identidade. A rotação inversa de R é a rotação R^{-1} de centro O e ângulo $-\alpha$.

Duas rotações com o mesmo centro e ângulos que difiram de um múltiplo inteiro de 360° são a mesma transformação geométrica. Uma rotação de 180° chama-se meia-volta (MV).

2.2.3. Reflexão

Dada uma reta m , a reflexão M de eixo m , é a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = M(P)$ que verifica as seguintes condições:

- Se P pertencer a m , $P = P'$;
- Se P não pertencer a m , a mediatriz do segmento PP' é o segmento m .

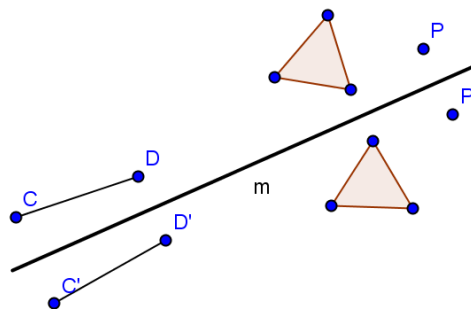


Figura 3: Reflexão de um segmento, de um ponto e de um triângulo.

Se M é uma reflexão, M^{-1} é a mesma reflexão ou seja $M^2 = M \circ M^{-1} = I$.

2.2.4. Reflexão deslizante

Dados um segmento orientado RG e uma reta g paralela ao segmento RG , sejam T a translação definida pelo segmento RG e M a reflexão definida pelo eixo g . Diz-se reflexão deslizante definida pela reta g e pelo segmento orientado RG a transformação geométrica G definida por $G = T \circ M$.

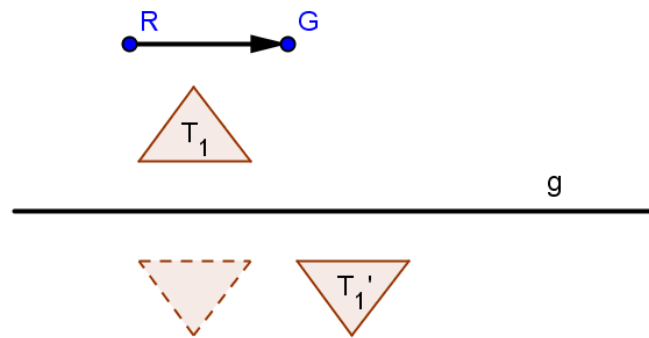


Figura 4: Reflexão deslizante do triângulo T_1 .

Na figura está exemplificado o efeito da reflexão deslizante $G = T \circ M$. O triângulo tracejado é o transformado do triângulo T_1 pela reflexão M de eixo g antes de se aplicar a transformação T . A ordem de aplicação das duas transformações de que é composta uma reflexão deslizante é indiferente, isto é, $T \circ M = M \circ T$.

2.2.5. Homotetia

Dados um ponto O e um número real $k \neq 0$, diz-se homotetia H , de centro O e fator k , a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = H(P)$, que verifica as seguintes condições:

- $H(O) = O$, isto é, O é um ponto fixo para H ;
- Se $P \neq O$, então $P' = H(P)$ está situado na reta OP e $\frac{|OP'|}{|OP|} = |k|$;
- Sendo k positivo ou negativo, assim P e P' estão do mesmo lado ou em lados contrários relativamente ao ponto O .

A inversa H^{-1} de H (centro O e fator k) é uma homotetia com o mesmo centro e fator $\frac{1}{k}$.

Conforme $|k| > 1$ ou $|k| < 1$, homotetia é uma ampliação ou redução. Se $k = 1$ a homotetia reduz-se à identidade e se $k = -1$ a homotetia é uma meia-volta de centro O .

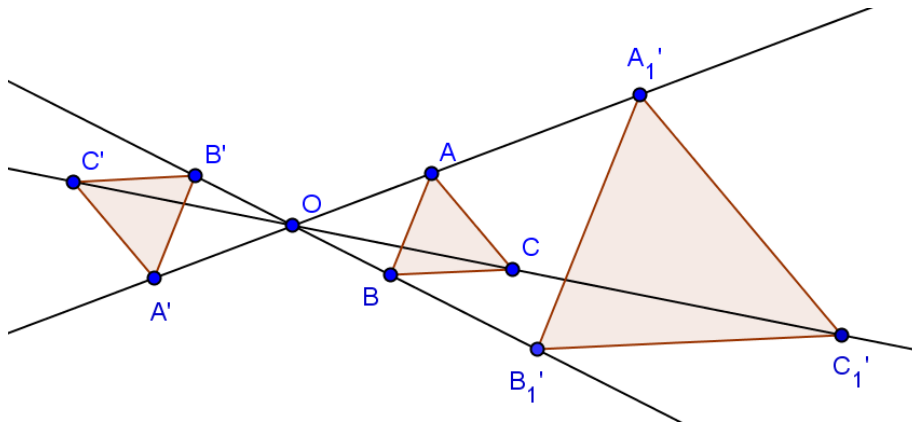


Figura 5: Exemplo de duas homotetias do mesmo triângulo ABC com o mesmo centro e fatores diferentes.

Neste exemplo o triângulo $A_1'B_1'C_1'$ é a imagem do triângulo ABC por meio da homotetia de centro O e fator $k > 1$ e que o triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC por meio da homotetia como o mesmo centro mas de fator $k = -1$.

2.3. Isometrias

2.3.1. Definição

Diz-se que uma transformação geométrica T preserva a distância entre dois pontos se, quaisquer que sejam dois pontos P e Q do plano, as distâncias entre P e Q e entre P' e Q' , transformados respectivamente de P e Q por meio de T , são iguais, isto é:

$$\text{dist}(P', Q') = \text{dist}(T(P), T(Q)) = \text{dist}(P, Q).$$

Portanto, diz-se que a transformação geométrica T é uma isometria se preserva a distância entre quaisquer dois pontos P e Q .

As transformações geométricas, reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante são isometrias.

Isometria é uma palavra de origem grega *Isos* = igual e *metria* = medida.

2.3.2. Propriedades

Diz-se que o ponto C está *situado entre* A e B se $\text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B) = \text{dist}(A, B)$. Portanto se A' , B' e C' forem respectivamente as imagens de A , B e C por meio de T , e se C estiver situado entre A e B , teremos $\text{dist}(A', C') + \text{dist}(C', B') = \text{dist}(A', B')$ e portanto também C' está situado entre A' e B' .

Teorema: As isometrias preservam as noções de situado entre, ponto médio, segmento, semi-reta, reta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularidade.

Teorema: O conjunto de todas as isometrias do plano, verifica as seguintes propriedades:

1. O produto de duas isometrias é sempre uma isometria.
2. A inversa de uma isometria é ainda uma isometria.
3. A transformação Identidade é uma isometria.
4. O produto de isometrias goza da propriedade associativa, isto é, sejam P , Q e R isometrias, então $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$.

Portanto, o conjunto de todas as isometrias tem uma estrutura de grupo relativamente à composição.

Finalmente, enuncia-se o mais importante teorema relacionado com as isometrias do plano.

Teorema da classificação das isometrias: Seja f um isometria do plano: então f é uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

2.4. Produtos de isometrias

Nesta secção estudaremos o produto ou composição dos quatros tipos de isometrias e iremos constatar que a reflexão pode ser considerada como a isometria fundamental, pois todas as outras podem ser obtidas como o produto de reflexões.

2.4.1. Produto de duas translações

Para o produto ou composição de duas translações T_1 e T_2 , cada uma delas representada por um vetor, necessitamos de aplicar a Regra do Paralelogramo:

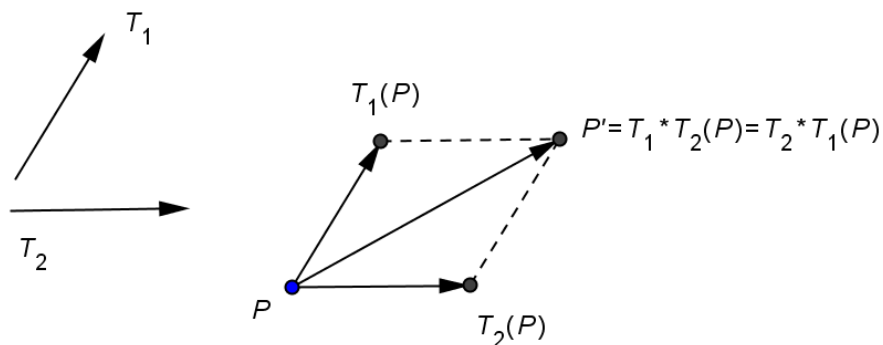


Figura 6: Produto de duas translações.

Podemos assim enunciar o seguinte teorema:

Teorema: O produto de duas translações é uma translação.

2.4.2. Produto de duas reflexões

Eixos de reflexão r e q são paralelos não coincidentes

Teorema: Sejam R e Q duas reflexões distintas de eixos paralelos r e q . O produto $R \circ Q$ é uma translação definida por um segmento orientado que obedece às seguintes condições:

- *Direção perpendicular às retas (eixos) r e q ;*
- *Sentido de “ q para r ”;*
- *Comprimento igual ao dobro da distância entre r e q .*

Eixos de reflexão r e q não são paralelos

Teorema: Sejam R e Q duas reflexões distintas de eixos não paralelos r e q . O produto $R \circ Q$ é uma rotação cujo centro é a interseção de r com q e o ângulo tem amplitude igual ao dobro da amplitude do ângulo orientado definido pelas retas q e r , sendo q o lado origem e r o lado extremidade.

2.4.3. Produto de uma translação com uma reflexão

Translação e reflexão paralelas

Teorema: A composição de uma translação com uma reflexão, cujo eixo se posiciona paralelamente ao vetor que define a translação, produz uma reflexão deslizante.

Translação e reflexão perpendiculares

Teorema: A composição de uma translação T com uma reflexão M , com eixos perpendiculares, é uma reflexão paralela a M e que dista desta $\frac{|T|}{2}$.

Com efeito, sejam T uma translação e M uma reflexão, com eixos perpendiculares. A translação pode ser vista como o resultado do produto de duas reflexões, isto é, $T = L_2 \circ L_1$. Vejamos o que se obtém de $M \circ T$ e $T \circ M$, fazendo coincidir uma das reflexões de T com M :

- Considere-se $M = L_2$, de acordo com a figura seguinte:

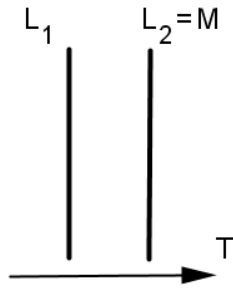


Figura 7: Produto da translação T pela reflexão M e $M = L_2$.

Então,

$$M \circ T = M \circ (L_2 \circ L_1) = L_2 \circ L_2 \circ L_1 = I \circ L_1$$

Ou seja, obtem-se uma reflexão que coincide com a “primeira” reflexão da translação, e que dista de M metade do comprimento do vetor que define T . Por outras palavras, $M \circ T$ resulta numa reflexão “recuada”.

- Considere-se agora $M = L_1$, de acordo com a figura seguinte:

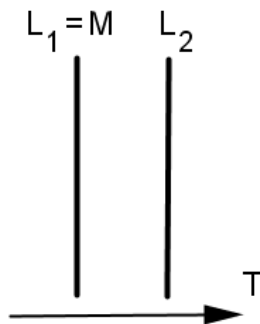


Figura 8: Produto da translação T pela reflexão M e $M = L_1$.

Então,

$$T \circ M = (L_2 \circ L_1) \circ L_1 = L_2 \circ (L_1 \circ L_1) = L_2 \circ I = L_2.$$

Ou seja, obtem-se uma reflexão que coincide com a “segunda” reflexão da translação, e que dista de M metade do comprimento do vetor que define T . Por outras palavras, $T \circ M$ resulta numa reflexão “avançada”.

Podemos acrescentar que uma reflexão e uma translação perpendiculares não comutam uma com a outra.

Translação e reflexão não são paralelas nem perpendiculares

Consideremos a reflexão M e a translação T definida pelas componentes T_1 e T_2 (perpendicular e paralela a M , respetivamente). Como $T = T_1 \circ T_2$ então

$$M \circ T = M \circ (T_1 \circ T_2) = (M \circ T_1) \circ T_2.$$

Mas como M é uma reflexão perpendicular a T_1 temos que o produto entre estas duas isometrias é uma nova reflexão que designaremos de M' . Portanto, substituindo na expressão anterior temos

$$M \circ T = M' \circ T_2 = G'.$$

Ou seja, obtemos uma reflexão deslizante G' em relação a um eixo paralelo ao de M e à distância de $\frac{|T_1|}{2}$ (“recuado” relativamente à direção de T).

Mas também podemos ter $T = T_2 \circ T_1$ e pelo mesmo argumento usado anteriormente, temos que,

$$T \circ M = (T_2 \circ T_1) \circ M = T_2 \circ (T_1 \circ M) = T_2 \circ M'' = G''.$$

Isto é, obtemos uma reflexão deslizante G'' em relação a um eixo paralelo ao de M e à distância de $\frac{|T_1|}{2}$ (“avançada” relativamente à direção de T).

Como podemos ver ilustrado na figura seguinte:

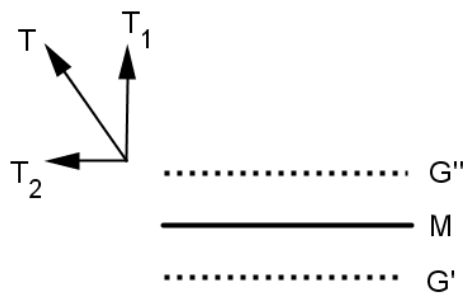


Figura 9: Produto da translação T pela reflexão M (nem paralela nem perpendicular).

Teorema: A composição de uma translação T com uma reflexão M , cujos eixos não são nem perpendiculares nem paralelos, é uma reflexão deslizante paralela a M e que dista desta $\frac{|T_1|}{2}$.

2.4.4. Produto de uma translação com uma reflexão deslizante

Seja G uma reflexão deslizante com $G = T_0 \circ M = M \circ T_0$, e T uma translação paralela a G . Pretende-se determinar o resultado de $G \circ T$ e de $T \circ G$. Então,

$$G \circ T = (M \circ T_0) \circ T = M \circ (T_0 \circ T) = M \circ T' = G'$$

$$T \circ G = T \circ (T_0 \circ M) = (T \circ T_0) \circ M = T' \circ M = G'.$$

Isto é, obtemos a reflexão deslizante G' paralela a G e vetor deslizante T' . Se T e T_0 são paralelos então G' e G são semelhantes.

Teorema: A composição de uma translação T com uma reflexão deslizante G , com eixos paralelos, é uma reflexão deslizante com o mesmo eixo.

2.4.5. Produto de uma rotação com uma translação

Consideremos a rotação $R_B = (B, \alpha)$ de centro em B e ângulo α , e a translação T . Uma vez que a rotação pode ser a composição de duas reflexões M e N , que se intersectam em B e cujos eixos de reflexão fazem entre si um ângulo de $\frac{\alpha}{2}$, então $R_B = N \circ M$. Suponhamos que a reflexão M é perpendicular a T . Uma vez que a composição da reflexão M perpendicular à translação T resulta numa nova reflexão L com eixo perpendicular a T e à distância $\frac{|T|}{2}$ do eixo de M , então

$$R_B \circ T = (N \circ M) \circ T = N \circ (M \circ T) = N \circ L = R_C.$$

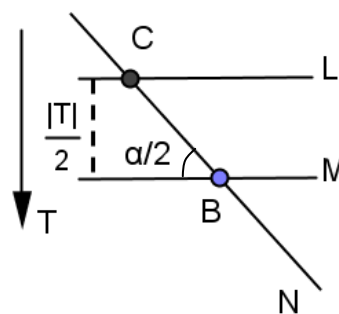


Figura 10: Composição de uma translação com uma rotação.

R_C é o novo centro que resulta da interseção de L com N , e a amplitude do seu ângulo é a mesma que R_B e $|BC| = \frac{|T|}{2 \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})}$.

2.4.6. Produto de uma reflexão com uma reflexão deslizante

Teorema: A composição de uma reflexão com uma reflexão deslizante, com eixos paralelos é uma translação.

Seja M uma reflexão e G uma reflexão deslizante paralela a M que distam d uma da outra. Se considerarmos $G = T \circ M'$ então,

$$G \circ M = (T \circ M') \circ M = T \circ (M' \circ M) = T \circ T'$$

Uma vez que $M' \circ M$ é uma translação T' cujo vetor de translação é perpendicular aos eixos de reflexão e tem comprimento $2d$. Ou seja, resulta numa nova translação que pode ser determinada por aplicação da Regra do Paralelogramo.

Teorema: A composição de uma reflexão com uma reflexão deslizante, cujos eixos se intersectam, é uma rotação.

Seja M uma reflexão, G uma reflexão deslizante e K a interseção dos eixos de reflexão que fazem entre si um ângulo α . Se considerarmos $G = T \circ M'$ então,

$$G \circ M = (T \circ M') \circ M = T \circ (M' \circ M) = T \circ R_K$$

Uma vez que de $M' \circ M$ resulta uma rotação R_K com centro em K e ângulo 2α , então

$$T \circ R_K = R_C$$

Ou seja, resulta numa nova rotação R_C , de ângulo 2α e centro C situado sobre o eixo de M' e tal que $|KC| = \frac{|T|}{2}$.

2.4.7. Produto de duas reflexões deslizantes

Reflexões deslizantes paralelas

Seja G_1 uma reflexão deslizante obtida por composição da reflexão M_1 com o vetor T_1 , e G_2 outra reflexão deslizante obtida por composição da reflexão M_2 com o vetor T_2 paralelo a T_1 . Temos

$$G_2 \circ G_1 = (T_2 \circ M_2) \circ (T_1 \circ M_1) = (T_2 \circ T_1) \circ (M_2 \circ M_1) = T''$$

$$G_1 \circ G_2 = (T_1 \circ M_1) \circ (T_2 \circ M_2) = (T_1 \circ T_2) \circ (M_1 \circ M_2) = T''$$

De acordo com a seguinte figura:

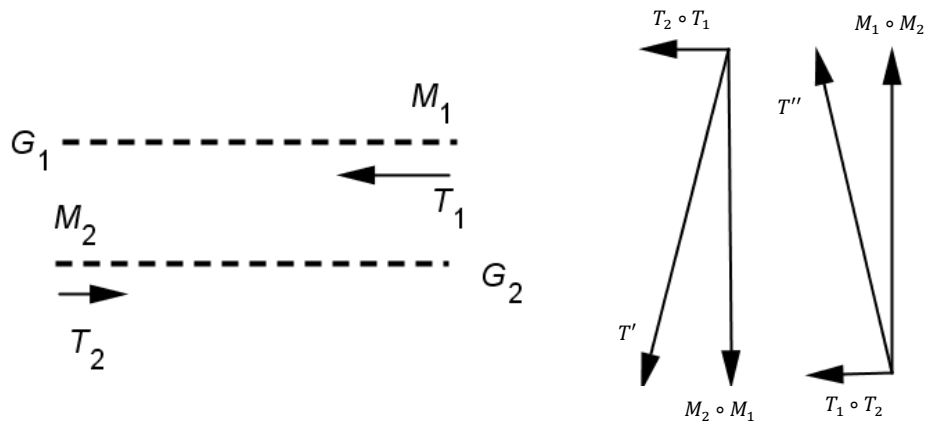


Figura 11: Composição de duas reflexões deslizantes com eixos paralelos.

Teorema: A composição de duas reflexões deslizantes com eixos paralelos é uma translação.

Reflexões deslizantes que se intersectam

Seja G_1 e G_2 duas reflexões deslizantes que se intersectam em K por um ângulo α . Consideremos M_1 e M_2 as respectivas reflexões e T_1 e T_2 os respectivos vetores deslizantes: $G_1 = M_1 \circ T_1$ e $G_2 = M_2 \circ T_2$. Considere-se ainda a rotação $R_K = M_1 \circ M_2$. Então

$$\begin{aligned} G_1 \circ G_2 &= (M_1 \circ T_1) \circ (M_2 \circ T_2) = (T_1 \circ M_1) \circ (M_2 \circ T_2) = \\ &= T_1 \circ (M_1 \circ M_2) \circ T_2 = T_1 \circ (R_K \circ T_2) = T_1 \circ R_{K'} = R_C. \end{aligned}$$

Ou seja, R_C é uma rotação de centro em C e de ângulo 2α .

Teorema: O produto de duas reflexões deslizantes com eixos não paralelos é uma rotação.

2.4.8. Produto de duas rotações

Consideremos uma rotação $R_C = (C, 2\alpha)$ de centro C de ângulo 2α . Se “quebrarmos” esta rotação, podemos obtê-la como uma composição de duas reflexões desde que os eixos de reflexão se intersectem em C e o ângulo formado por eles seja α , como podemos ver ilustrado na figura seguinte:

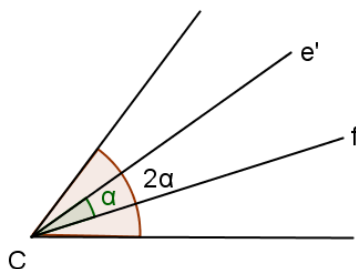


Figura 12: Rotação obtida como uma composição de duas reflexões.

Este “quebrar” das rotações em duas reflexões será daqui em diante, muitas vezes utilizado.

Teorema: O produto de duas rotações que partilham do mesmo centro e ângulos α e β é uma rotação com o mesmo centro e de ângulo $\varphi = \alpha + \beta$.

Teorema: O produto de duas rotações de centros distintos é em geral uma rotação.

Consideremos duas rotações $R_A = (A, \alpha)$ e $R_B = (B, \beta)$, ambas com sentido horário. Se “quebrarmos” as rotações em reflexões obtemos $R_A = M \circ L$ e $R_B = N \circ M$, com M e L reflexões que se intersectam em A com ângulo $\frac{\alpha}{2}$ e M e N reflexões que se intersectam em B com ângulo $\frac{\beta}{2}$. Suponhamos que a reflexão M é uma reflexão comum a ambos os centros, então,

$$R_B \circ R_A = (N \circ M) \circ (M \circ L) = N \circ L = R_C$$

Ou seja, obtemos uma nova rotação de centro em C e de ângulo (sentido anti-horário) $\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

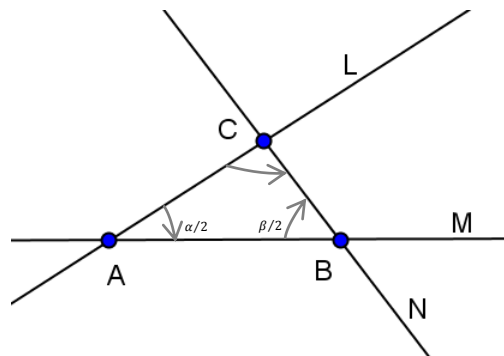
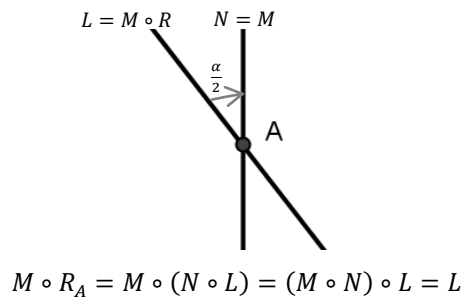


Figura 13: Produto de duas rotações de centros distintos.

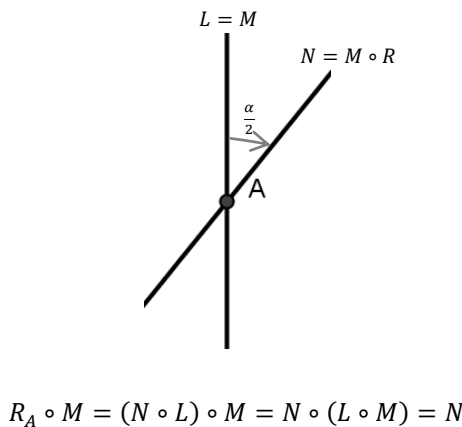
2.4.9. Produto de uma rotação com uma reflexão

Consideremos a rotação $R_A = (A, \alpha)$ de centro em A e ângulo α (sentido horário) e a reflexão M . Uma vez que a rotação pode ser a composição de duas reflexões L e N , que se intersectam em A e cujos eixos de reflexão fazem entre si um ângulo de $\frac{\alpha}{2}$, então $R_A = N \circ L$. Suponhamos que a rotação encontra-se sobre o eixo da reflexão M e que o eixo de N coincide com o eixo de M .

Então,



Se L coincide com M então,



Teorema: O produto de uma rotação com uma reflexão que passa pelo centro de rotação é uma reflexão “inclinada” de ângulo equivalente a metade do ângulo da rotação e que passa pelo centro de rotação.

Na subseção 2.6.6.2 estudaremos a existência de apenas 5 padrões com rotações de ordem 2. Por este facto, consideramos necessário acrescentar com algum detalhe o resultado do produto de uma rotação de ordem 2, ou meia-volta com uma reflexão. Assim como o resultado do produto de uma meia-volta com uma reflexão deslizante.

2.4.9.1. Produto de uma meia-volta por uma reflexão

Centro de MV pertence ao eixo de reflexão

Consideremos a reflexão M de eixo m e a rotação de meia-volta R de centro C . Esta rotação R pode ser obtida pela composição de duas reflexões F e G de eixos f e g perpendiculares e que passam por C . Podemos supor que $f = m$ e portanto $F = M$. Assim

$$M \circ R = M \circ (M \circ G) = M^2 \circ G = G$$

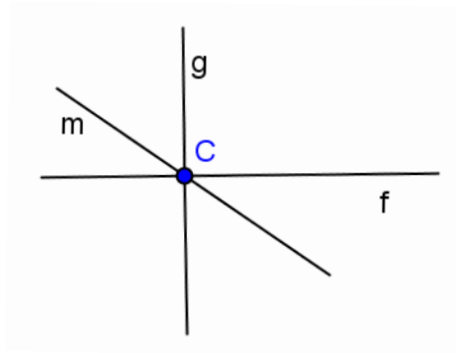


Figura 14: Centro de rotação C sobre o eixo de reflexão f .

Centro de MV não pertence ao eixo de reflexão

Consideremos a reflexão M de eixo m que dista d do centro de rotação C de uma meia-volta R . Podemos considerar novamente que esta rotação R pode ser obtida pela composição de duas reflexões F e G de eixos f e g perpendiculares e que passam por C . O que pretendemos determinar é o resultado de $M \circ R$ e como $R = F \circ G$, então passamos a ter que determinar o resultado de $M \circ F \circ G$.

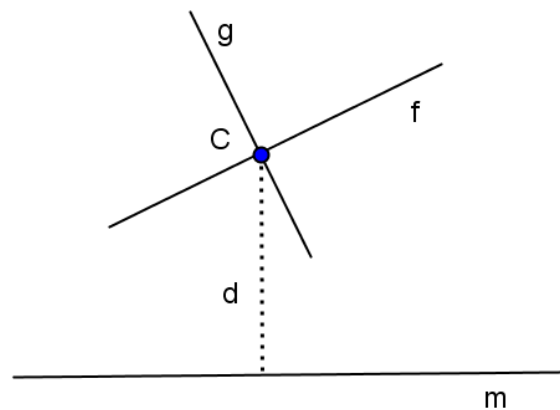


Figura 15: Centro de rotação C fora do eixo de reflexão m .

Se “rodarmos” os eixos g e f fixando o ângulo, até que o eixo f se posicione paralelamente ao eixo m , obtemos o que se pode ver ilustrado na figura seguinte:

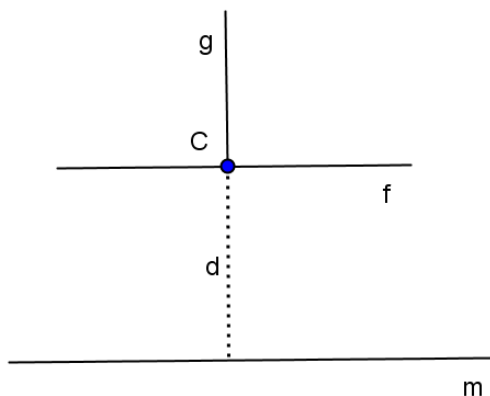


Figura 16: Eixos de reflexão “rodados” e eixos f e m paralelos.

Como $F \circ M = T$ sendo T uma translação (direção perpendicular a m , sentido de f para m e comprimento $2d$), então $R \circ M = G \circ F \circ M = G \circ T$. Portanto, o que obtemos é uma reflexão deslizante G' de eixo g e com vetor deslizante igual ao vetor que define a translação T .

2.4.10. Produto de uma rotação com uma reflexão deslizante

Teorema: O produto de uma rotação com uma reflexão deslizante é uma reflexão (centro de rotação sobre o eixo) ou uma reflexão deslizante (centro de rotação fora do eixo de reflexão).

2.4.10.1. Produto de uma meia-volta por uma reflexão deslizante

Consideremos a reflexão deslizante G de eixo de reflexão g , com vetor deslizante T de comprimento D . Consideremos também uma meia-volta R cujo centro C se posiciona sobre o eixo g . Tendo em conta os resultados de 2.4.9.1 e 2.4.5, a composição de R com G é M , uma reflexão de eixo de reflexão m perpendicular a g e que dista do centro de rotação $\frac{D}{2}$.

A figura seguinte ilustra este resultado:

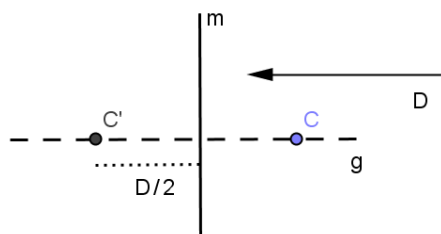


Figura 17: Composição de uma rotação de MV com uma reflexão deslizante (sobre o eixo).

Corolário: O produto de uma MV e uma reflexão deslizante (centro de rotação sobre o eixo de reflexão) é uma reflexão, perpendicular ao eixo de reflexão deslizante e que dista do centro de rotação metade do comprimento do vetor de translação.

Consideremos a reflexão deslizante G de eixo de reflexão g e com vetor deslizante de comprimento D . Consideremos também uma meia-volta R cujo centro C dista d do eixo g . O resultado da composição de R com G é uma reflexão deslizante G' , de eixo de reflexão g' perpendicular a g que dista do centro de rotação $\frac{D}{2}$ com vetor deslizante de comprimento $2d$.

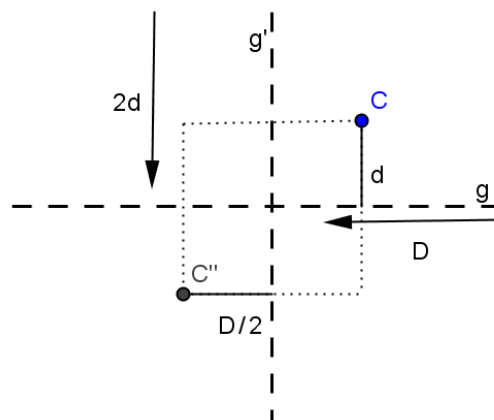


Figura 18: Composição de uma rotação de MV com uma reflexão deslizante (fora do eixo).

Corolário: O produto de uma MV e uma reflexão deslizante (centro de rotação fora do eixo de reflexão) é uma reflexão deslizante, cujo vetor deslizante tem de comprimento o dobro da distância do centro de rotação, e cujo eixo de reflexão é perpendicular à primeira de reflexão deslizante e cujo eixo dista do centro de rotação metade do comprimento do vetor de translação.

2.4.11. Produto de três reflexões

Tendo em conta todos os resultados anteriores, podemos concluir o seguinte:

Teorema: O produto de três reflexões cujos eixos são concorrentes num ponto ou paralelas entre si é uma reflexão.

Teorema: O produto de três reflexões distintas cujos eixos não são nem concorrentes num ponto nem paralelos entre si é uma reflexão deslizante.

2.5. Simetrias de uma figura plana

2.5.1. Simetria de uma figura plana

Consideremos uma figura plana F (conjunto de pontos do plano) e o conjunto de isometrias do plano que designamos por $Iso(\mathbb{R}^2)$. Seja S uma isometria do plano e F' a imagem de F por meio de S . Quando $F' = F$, S diz-se simetria de F .

Desta definição convém salientar que nem todos os pontos de F ficam invariantes para a isometria S , mas sim que a imagem de F por meio de S coincide com F , daí dizer-se *globalmente invariante*. Como se pode verificar na figura seguinte, todos os pontos são alterados por meio da reflexão, exceto os comuns com o eixo m , mas a figura mantém-se invariante.

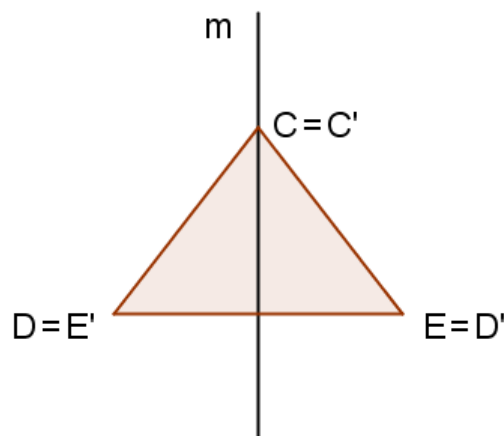


Figura 19: Reflexão de eixo m do triângulo CDE .

2.5.2. Conjunto das simetrias de uma figura: propriedades

Seja F uma figura qualquer. Procurar as simetrias de F é procurar as isometrias do plano que deixam a figura globalmente invariante. Quando encontradas as simetrias, ao seu conjunto designamos por $Sim(F)$. A este conjunto pertence sempre a isometria identidade I , uma vez que esta fixa todos os pontos do plano e portanto todas as figuras, nomeadamente F .

Se S é uma simetria de F , a sua inversa S^{-1} é também uma simetria, uma vez que também fixa F .

Se S_1 e S_2 são simetrias de F então o seu produto é uma simetria de F .

Podemos condensar estas propriedades no seguinte teorema:

Teorema: $Sim(F)$ é um grupo.

2.6. Padrões

2.6.1. Definição

Seja F uma qualquer figura do plano, diz-se que F é um padrão se contém duas simetrias de translação T e V de módulo $\neq 0$ e de direções diferentes e tais que as simetrias de translação de F sejam precisamente os produtos $V^m \circ T^n$, para m e n inteiros. Portanto, para constatar se uma dada figura é um padrão, primeiramente temos que encontrar duas simetrias de translações que sirvam para definir esse padrão. Isto é, devemos escolher duas simetrias de translação T_1 e T_2 tais que seja possível obter qualquer uma das outras simetrias de translação T de F como produto de duas potências de expoente inteiro de T_1 e T_2 . Encontradas as duas simetrias de translação T_1 e T_2 , podemos dizer que estas geram o conjunto de simetrias de translação de F .

No exemplo seguinte, que se trata efetivamente de um padrão (tampa de saneamento em ferro¹), consegue-se verificar a existência de duas translações T_{AB} e T_{AD} definidas pelos segmentos orientados AB e AD que obedecem às condições exigidas pela definição de padrão. Qualquer outra simetria de translação do padrão pode exprimir-se como produto de potências de expoente inteiro de T_{AB} e T_{AD} . Por exemplo, $T_{AC} = T_{AB} \circ T_{AD}$ e $T_{AF} = T_{AB}^{-1} \circ T_{AD}$

¹ Imagem retirada da Internet: <http://www.atractor.pt/simetria/matematica/caixas/>.

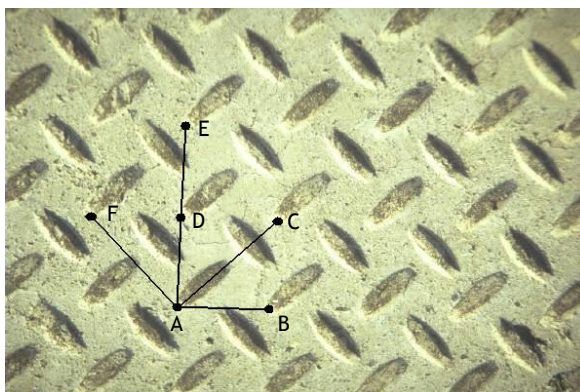


Figura 20: Diferentes simetrias de translação existentes neste padrão.

2.6.2. Rede de um padrão

Consideremos novamente o padrão da “tampa de saneamento” a que chamaremos de \mathcal{P} . Tínhamos visto que a partir das translações T_{AB} e T_{AD} poderíamos gerar o padrão. Isto é, qualquer simetria de translação de \mathcal{P} resulta como o produto de duas potências de expoente inteiro de T_{AB} e T_{AD} . Se designarmos $T(\mathcal{P})$ o conjunto de todas as simetrias de translação de \mathcal{P} , então $T(\mathcal{P})$ é gerado pelo conjunto $\{T_{AB}, T_{AD}\}$, ou seja, $T(\mathcal{P}) = \Lambda(T_{AB}, T_{AD})$.

Se considerarmos um qualquer ponto do padrão e no conjunto de todas as suas imagens obtidas pelas translações de $T(\mathcal{P})$, obtemos um conjunto de pontos em todo o plano. Na figura seguinte escolheu-se o ponto A e por aplicação de algumas translações de $T(\mathcal{P})$ obtivemos os seguintes pontos: $B, C, D, E, G, H, I, J, K, L$ e M .

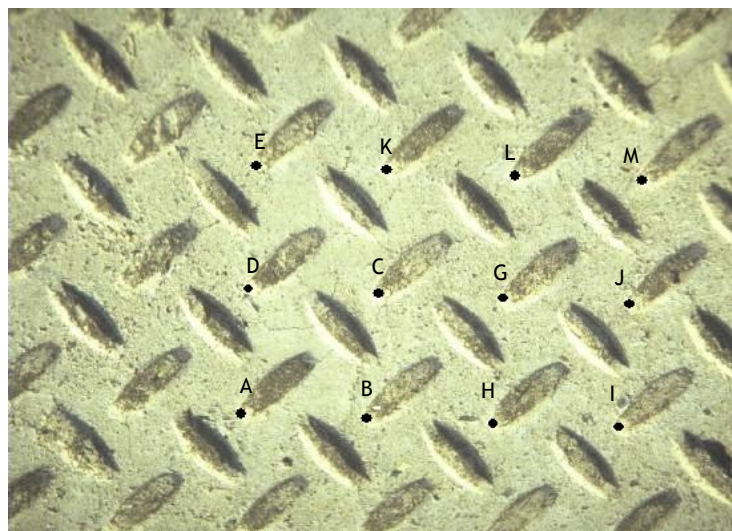


Figura 21: Parte da rede formada pelo conjunto de translações $\{T_{AB}, T_{AD}\}$.

Desta forma consegue-se associar a todos os padrões uma rede de pontos que cobre todo o plano. Estes pontos da rede são os vértices de paralelogramos que podem ser quadrados,

retângulos, ou losangos. No contexto dos padrões, estes paralelogramos que formam a rede designam-se por *células*.

Esta rede de pontos é gerada por dois vetores linearmente independentes. No entanto, como veremos de seguida, a escolha de um tal par de vetores pode não ser única.

Dados \vec{u} e \vec{v} dois vetores linearmente independentes, consideremos a grelha $\Lambda(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$. Então, para quaisquer $\vec{u}', \vec{v}' \in \Lambda(\vec{u}, \vec{v})$, podemos escrever

$$\begin{cases} \vec{u}' = n_1\vec{u} + n_2\vec{v} \\ \vec{v}' = m_1\vec{u} + m_2\vec{v} \end{cases}, \text{ com } n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Teorema: $\Lambda(\vec{u}', \vec{v}') = \Lambda(\vec{u}, \vec{v})$ se e somente se a matriz $\begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$ admite inversa com entradas inteiras.

2.6.3. Domínio fundamental

Como já foi dito, se quiséssemos cobrir toda uma parede com um padrão, a forma mais simples seria cobrir toda a parede com um ladrilho. Após a colocação do primeiro ladrilho, os restantes seriam colocados por “orientação” apenas das simetrias de translação. Mas vejamos com mais detalhe este “ladrilho” designado de célula do exemplo da “tampa de saneamento”:

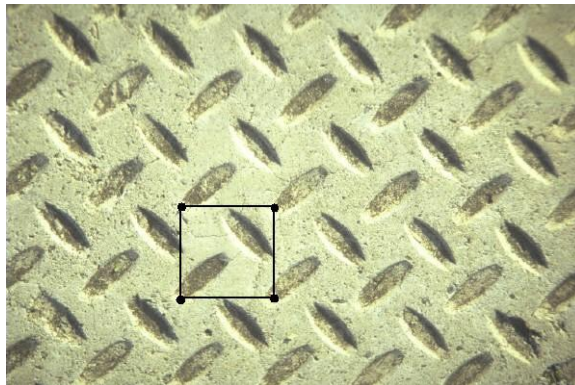


Figura 22: Célula do padrão de uma tampa de saneamento.

Dentro da célula podemos ver que existem duas regiões, R e R' , em que R' é uma “duplicação” de R mas numa orientação diferente dentro da célula:

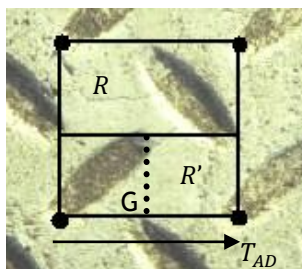


Figura 23: Simetrias do padrão de uma tampa de saneamento.

Ou seja, R' surge por aplicação de uma reflexão deslizante, G perpendicular à translação T_{AD} , cujo vetor deslizante tem de comprimento metade do comprimento do vetor que define esta translação. Esta região que se “repete” dentro da célula por aplicação de uma ou mais simetrias, designa-se por **domínio fundamental**.

Então, dado um padrão, o *domínio fundamental* de um padrão caracteriza-se pelas seguintes condições:

- É um subconjunto fechado da célula do padrão;
- Dado um ponto Y do plano, existe sempre um ponto X' do domínio fundamental e uma simetria do padrão tal que $Y = S(X)$;
- Quaisquer que sejam os pontos distintos X e Y do interior do domínio fundamental, não existe nenhuma simetria S do padrão tal que $Y = S(X)$.

O conhecimento do domínio fundamental de um padrão e de um conjunto de geradores do grupo de simetria permite, através de um software de geometria dinâmica com comando de iteração visualizar a reconstrução de um padrão.

2.6.4. Postulado da Melhor Aproximação

Nesta secção vamos apresentar o *Postulado da Melhor Aproximação*, que além de garantir a distância mínima entre dois centros de rotação, limita o comprimento das translações que deixam um padrão invariante, já que estas não podem ter um comprimento qualquer arbitrário.

Considerem-se dois centros de rotação P e P' de ordem n , situados a uma distância d um do outro. Sejam $R_{(P,\alpha)}$ e $R_{(P',\alpha)}$ as rotações de ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ e centros em P e P' , respetivamente. As rotações $R_{(P,\alpha)}$ e $R_{(P',\alpha)}$ são simetrias do padrão e, conseqüentemente, a composição $R_{(P,\alpha)} \circ R_{(P',\alpha)}^{-1}$ é também uma simetria. Acontece que esta composição é uma translação por um vetor de comprimento $2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Como existe uma simetria de translação (não nula) com comprimento mínimo, existe também um valor mínimo para d . Assim

Postulado da Melhor Aproximação: Para qualquer padrão que se considere, existe uma distância mínima d , tal que, quaisquer dois centros de rotação que se considere, estes distam um do outro uma distância nunca inferior a d .

Em particular, existe uma distância mínima para centros de rotação com a mesma ordem.

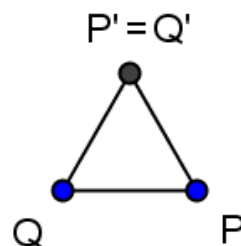
2.6.5. Restrição cristalográfica

O teorema designado de *Restrição cristalográfica*, provado por W. Barlow em 1894, é um dos resultados mais importantes para o estudo dos padrões no plano, pois limita o número de padrões possíveis em \mathbb{R}^2 . Portanto, tendo em conta a sua importância a sua demonstração será também aqui apresentada.

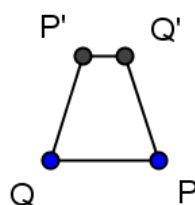
Restrição Cristalográfica: Os centros de simetria de um padrão apenas podem ser de ordem 2, 3, 4 e 6.

Prova: Seja P um qualquer centro de rotação de ordem n . A aplicação das restantes isometrias do grupo transforma P num número infinito de centros de rotação com a mesma ordem. Seja Q um desses centros de rotação, que dista de P a distância mínima possível garantida pelo *Postulado da melhor aproximação*. Considere-se um terceiro centro de rotação P' que deriva de P por uma rotação de $\frac{2\pi}{n}$ em torno de Q , e um quarto centro de rotação Q' que deriva de Q por uma rotação de $-\frac{2\pi}{n}$ em torno de P . Os segmentos \overline{PQ} , $\overline{QP'}$ e $\overline{PQ'}$ têm o mesmo comprimento.

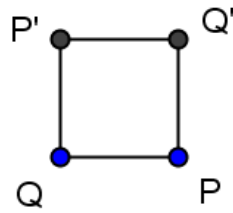
- Se P' e Q' coincidirem então $n = 6$;



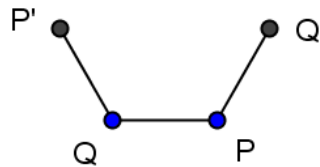
- Se $n = 5$ é obvio que $|P'Q'| < |PQ|$ e portanto absurdo já que o comprimento de \overline{PQ} é o comprimento mínimo possível entre dois centros de rotação da mesma ordem.



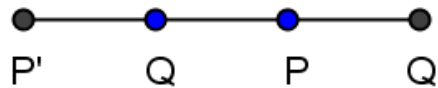
- Para $n = 4$, $PQP'Q'$ é um quadrado e $|PQ| = |Q'P'|$.



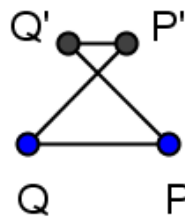
- Para $n = 3$ o Postulado não é violado.



- Para $n = 2$ não existe qualquer violação do Postulado.



- Se $n > 6$, $\overline{QP'}$ intersesta $\overline{PQ'}$ e temos que $|QP'| < |PQ|$, o que é absurdo pois viola o *Postulado da melhor aproximação*.



Fica assim provado que em padrões do plano só poderão existir simetrias de rotação de ordem 2, 3, 4 e 6.

2.6.6. Os 17 tipos de padrões planos

Nos finais do século XIX, mais concretamente em 1891, o matemático e mineralogista Evgraf S. Fedorov publicou um resultado sobre padrões em que afirmava a existência de apenas 17 tipos de padrões planos.

Para a classificação de um padrão deve ser indicada a sua tipologia, as simetrias presentes no padrão e/ou conjunto de geradores, a célula e o domínio fundamental.

Neste trabalho, para a designação dos 17 tipos de padrões ou nome cristalográfico será utilizada a notação IUC - International Union of Crystallography, por ser talvez a notação mais utilizada na literatura e pela sua origem na cristalografia.


Esta notação é constituída por 4 dígitos que nos dão informação relativamente às simetrias geradoras de cada padrão. No primeiro dígito encontraremos dois símbolos, p ou c . O símbolo p vem de célula primitiva (de *primitive cell*), e o símbolo c de célula centrada (de *centred cell*). No caso do primeiro dígito ser p , temos:

- No segundo dígito os símbolos utilizados são 1, 2, 3, 4 e 6 que indicam a maior ordem de rotação dos centros de rotação. O símbolo 1 indica a ausência de centros de rotação;
- No terceiro dígito os símbolos utilizados são 1, m e g que indicam existência ou não de reflexões (deslizantes) perpendiculares a um eixo de translação. Portanto, 1 indica a ausência de eixo de reflexão perpendicular a um eixo de translação, m (inicial da palavra inglesa "mirror" e da francesa "miroir" que significam espelho) indica a existência de uma reflexão cujo eixo de reflexão é perpendicular a um eixo de translação (que será designado de eixo principal) e g (inicial da palavra inglesa "glide" e da francesa "glissement" que significam deslizamento) indica a existência de uma reflexão deslizante genuína (reflexão deslizante que não resulta da composição de uma translação T por uma reflexão M , com T e $M \in Sim(F)$) cujo eixo deslizante é perpendicular a um eixo de translação;
- No quarto dígito os símbolos utilizados também 1, m e g que indicam existência de eixos de reflexão (deslizantes) que poderão ser paralelos ao eixo principal, ou formarem um ângulo de $\frac{180^\circ}{n}$, $n > 2$, em relação ao eixo principal.



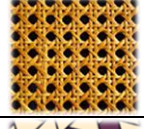

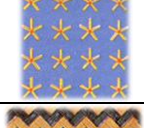



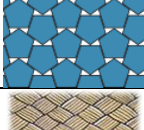




Nos 17 tipos de padrões existem apenas dois casos em que se utilizará c no primeiro dígito. Estes padrões não exibem reflexões geradoras perpendiculares ou paralelas aos vetores que geram a rede.

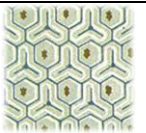


Nota: Na possibilidade de existirem dois candidatos a eixo principal, pode ser escolhido qualquer um dos dois.

Na tabela seguinte encontraremos a designação completa, abreviada e um exemplo² para os 17 tipos de padrões planos:

Designação completa	Designação abreviada	Exemplo
$p1$	$p1$	

² As imagens dos exemplos aqui apresentados foram retiradas da Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group#References.

$p211$	$p2$	
$p3$	$p3$	
$p4$	$p4$	
$p6$	$p6$	
$p1m1$	pm	
$p1g1$	pg	
$c1m1$	cm	
$p2mm$	pmm	
$p2mg$	pmg	
$p2gg$	pgg	
$c2mm$	cmm	
$p4mm$	$p4m$	
$p4gm$	$p4g$	

$p3m1$	$p3m1$	
$p31m$	$p31m$	
$p6mm$	$p6m$	

Neste capítulo usar-se-á preferencialmente a designação abreviada por ser esta a mais frequentemente utilizada na literatura.

Os padrões apresentados na subsecção seguinte foram criados no software interativo para criação de padrões planos, *Kali*. O motivo é sempre o mesmo, para facilitar a comparação, e foi propositadamente escolhido por não conter qualquer simetria de rotação, ou simetria de reflexão.

2.6.6.1. Ausência de rotações

Se a composição de duas reflexões não paralelas resulta numa rotação, então em padrões onde estão ausentes rotações, as reflexões ou reflexões deslizantes poderão existir mas apenas com eixos de reflexão (deslizante) paralelos entre si.

Se, para além da ausência de rotações, não existirem reflexões e/ou reflexões deslizantes, o conjunto de geradores do grupo de simetria possuiu apenas duas translações. Este tipo de padrão designa-se por $p1$.

A figura seguinte ilustra um padrão do tipo $p1$,

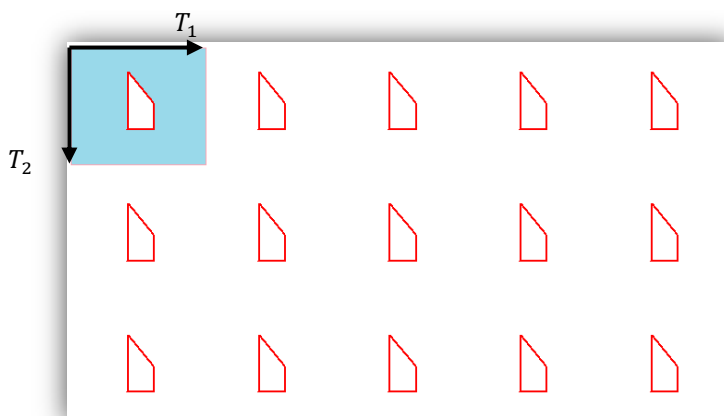


Figura 24: Exemplo de padrão do tipo $p1$.

Neste exemplo, a região azul corresponde à célula e ao domínio fundamental. Como conjunto de geradores temos as duas translações assinaladas na figura.

A ausência de rotações não implica a ausência de reflexões ou de reflexões deslizantes. Estas duas isometrias poderão existir ou coexistir num mesmo padrão se os seus eixos de reflexão se posicionarem paralelamente uns aos outros. Assim sendo, podemos ter três situações distintas: a situação em que o padrão possui apenas reflexões, a situação em que o padrão possui apenas reflexões deslizantes e, por último, a situação em que o padrão possui simultaneamente reflexões e reflexões deslizantes. Aqui e de agora em diante pensaremos sempre em reflexões deslizantes genuínas.

Vejamos então a primeira situação: além das translações o padrão pode possuir reflexões.

Como já foi dito, os eixos de reflexão deverão ser paralelos uns aos outros, mas como deverão estes posicionar-se relativamente às translações? Deverão posicionar-se perpendicularmente ao eixo de uma das translações ou poderão fazer um ângulo com este?

Se cada padrão tem uma rede associada cuja célula é um paralelogramo, que é construído a partir dos vetores de translação, então apenas as redes retangulares e rômbricas admitem reflexão como simetria, como podemos ver ilustrado pelas figuras seguintes:

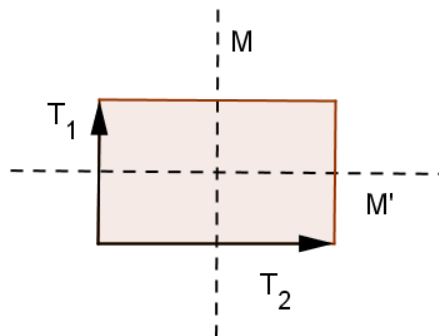


Figura 25: Célula de uma malha retangular.

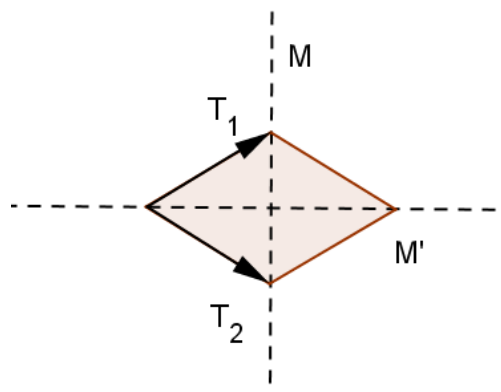


Figura 26: Célula de uma malha rômbrica.

Para termos apenas reflexões não é possível termos malha rômbricas. Com efeito, considerem-se a figura 27 e as componentes T_1' e T_1'' de T_1 , paralela e perpendicular ao eixo de M , respectivamente. A composição da reflexão M com a translação T_1 é uma reflexão deslizante com vetor deslizante dado por T_1' que não pertence à rede do padrão. Como tal não podemos ter malhas rômbricas na ausência de reflexões deslizantes. Reciprocamente, este mesmo argumento mostra que a existência de uma reflexão deslizante implica a existência da reflexão M .

Assim, devemos apenas considerar malhas retangulares e portanto as reflexões e seus respectivos eixos são perpendiculares a um dos eixos de translação (eixo principal). A partir destes resultados surge o padrão pm que aparece ilustrado na figura seguinte:

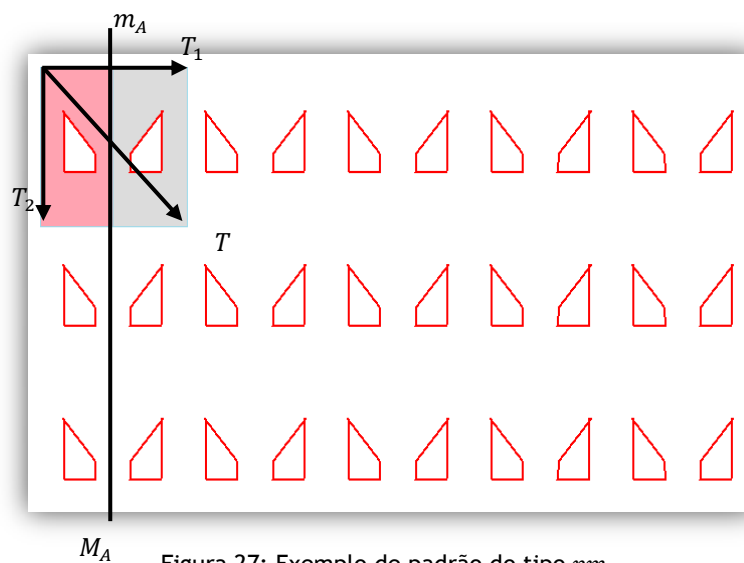


Figura 27: Exemplo de padrão do tipo pm .

Este tipo de padrão tem no seu conjunto de simetrias translações e reflexões. No seu conjunto de geradores podemos ter duas translações (T_1, T_2) e uma reflexão (eixo m_A). A região colorida corresponde à célula e a região rosa corresponde ao domínio fundamental.

Vejamos de seguida a possibilidade da existência de padrões apenas com reflexões deslizantes.

No caso da célula ser retangular, os correspondentes vetores deslizantes T_0 terão de ter comprimento inferior ao do vetor T_2 perpendicular ao eixo principal. Se estes comprimentos fossem iguais a reflexão deslizante não seria genuína.

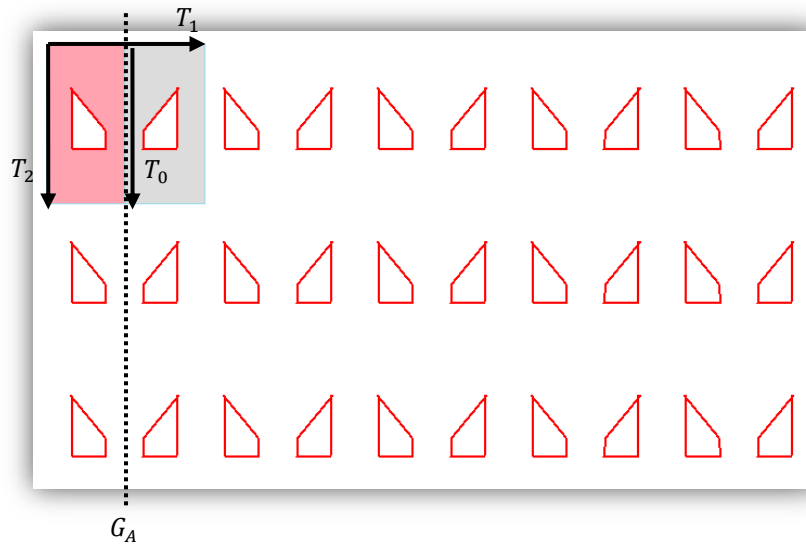


Figura 28: Exemplo de padrão do tipo pm com “falsas” reflexões deslizantes ($T_0 = T_2$).

Consideremos então $T_0 = kT_2$, com $0 < k < 1$. Uma vez que a composição de uma reflexão deslizante com ela própria é uma translação por um vetor paralelo ao vetor deslizante e com o dobro do comprimento, temos necessariamente $k = \frac{1}{2}$.

A figura seguinte ilustra um padrão do tipo pg , o único tipo de padrão com célula retangular e apenas uma reflexão deslizante. Como já vimos atrás, não podemos ter padrões com células rômbricas e apenas uma reflexão deslizante.

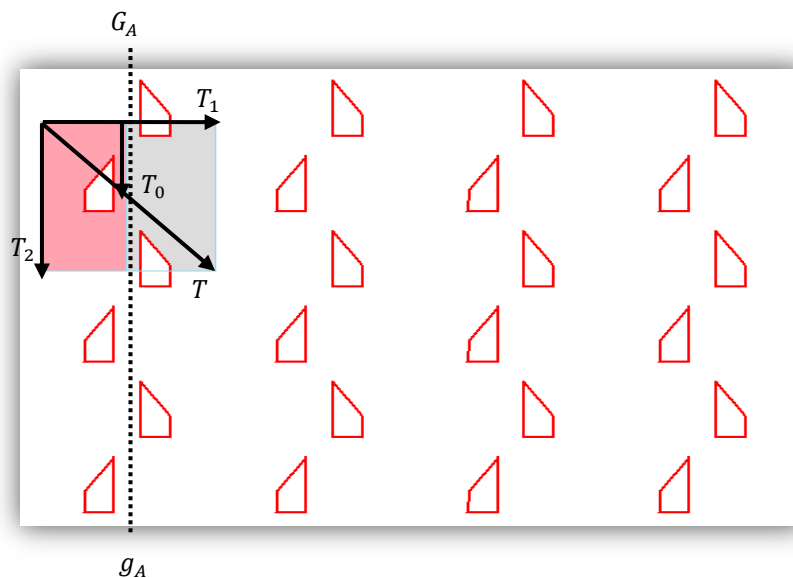


Figura 29: Exemplo de padrão do tipo pg .

Neste tipo de padrão o seu conjunto de simetrias possui translações e reflexões deslizantes e no seu conjunto de geradores podemos ter duas translações e uma reflexão deslizante G_A .

Neste exemplo, a região de colorida corresponde à célula e a região rosa corresponde ao domínio fundamental.

Finalmente, resta analisarmos a terceira situação, que se refere à possibilidade da coexistência de reflexões e reflexões deslizantes num mesmo padrão livre de rotações.

Depois do que já foi analisado nas duas situações anteriores, e com os possíveis comprimentos do vetor deslizante T_0 , somos levados a constatar numa primeira aproximação que as simetrias de reflexão e de reflexão deslizante poderão coexistir num mesmo padrão desde que obedeçam a determinadas condições. A primeira condição é que os seus eixos de reflexão se posicionem paralelamente e alternadamente uns aos outros e que um eixo de reflexão esteja a meia distância entre dois eixos de reflexão deslizante e vice-versa.

Assim sendo, analisemos então as diferentes possibilidades partindo dos dois tipos de padrão já estudados, pm e pg e mediante as condições descritas no parágrafo anterior:

Opção 1: Padrão do tipo pg , combinado com uma reflexão

Partindo do padrão pg e adicionando uma reflexão M_A , cujo eixo se posiciona entre dois eixos de reflexão deslizante, o padrão que obteríamos surge ilustrado na figura seguinte:

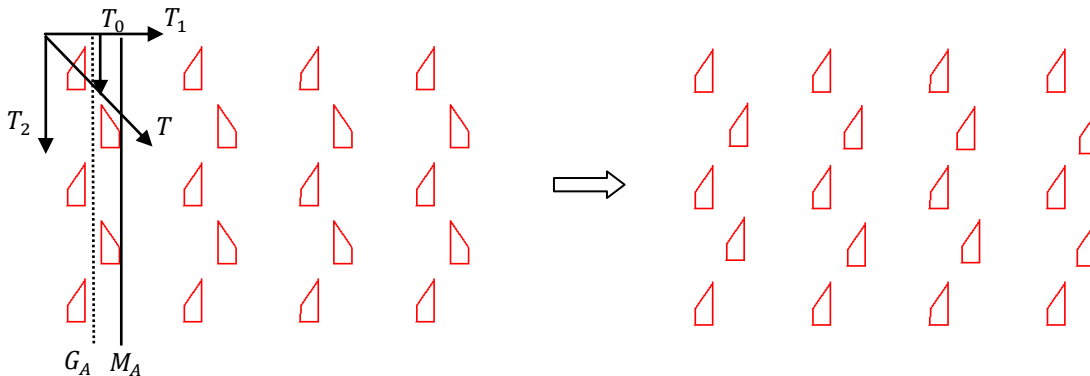


Figura 30: Padrão do tipo pg , combinado com uma reflexão (entre reflexões deslizantes).

Este é um padrão que não está nas condições pretendidas. Para existir um padrão do tipo $p1gm$ teríamos uma reflexão deslizante G_A e uma reflexão M_A . A combinação das duas é a translação $T_0 \circ \frac{T_1}{2}$, que também seria uma simetria do padrão. No entanto esta translação não pertence ao subgrupo de simetrias de translação gerado pelo conjunto $\{T_1, T_2\}$.

Opção 2: Padrão do tipo pm , combinado com uma reflexão deslizante

O mesmo argumento acima utilizado mostra que não é possível ter padrões do tipo $p1mg$.

No entanto existe um padrão de rede rômbrica com uma reflexão M_A e uma reflexão deslizante G_A , denotado por cm e ilustrado na figura seguinte:

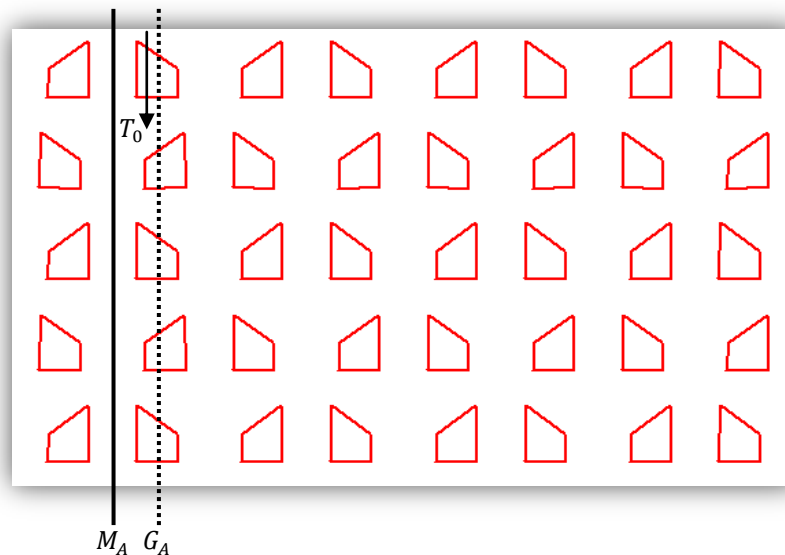


Figura 31: Exemplo de padrão do tipo cm .

A sua célula corresponde portanto a um losango (que forma uma rede rômbrica), como podemos ver ilustrado na figura seguinte:

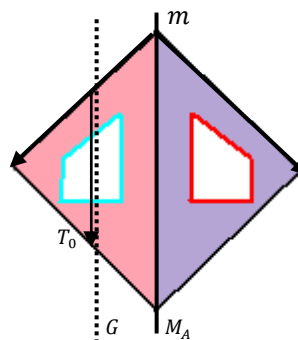


Figura 32: Célula de um padrão do tipo cm .

Neste tipo de padrão o conjunto de simetrias possui translações, reflexões e reflexões deslizantes. No seu conjunto de geradores, podemos ter duas translações e uma reflexão (eixo m) como indica a figura. O domínio fundamental corresponde à região rosa da célula.

Sendo o padrão do tipo cm um caso particular, a melhor forma de o detetar é após o reconhecimento dos eixos de reflexão, procurar entre dois eixos adjacentes, um eixo de reflexão deslizante e seu vetor deslizante que não “choque” com os restantes vetores que definem as simetrias de translação do padrão.

Fica assim terminado o estudo dos padrões livres de rotação, e podemos verificar que existem apenas quatro padrões nestas condições, $p1$, pm , pg e cm .

2.6.6.2. Rotações de ordem 2

De uma rotação de ordem 2 (ou de meia-volta- MV) combinada com uma translação resulta dois novos centros de rotação de meia volta, como podemos ver ilustrado pela figura seguinte:

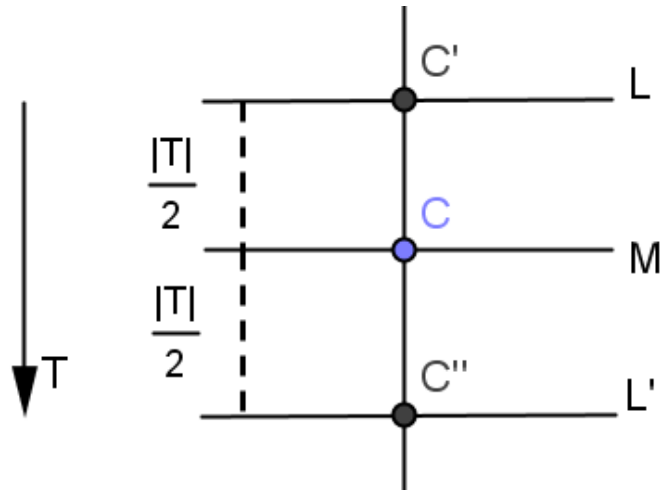


Figura 33: Composição de uma translação T com uma rotação de MV com centro em C .

Consideremos T uma translação mínima de componentes T_1 e T_2 mínimas. Se as combinarmos com um centro de rotação de MV em centro C , obteremos novos centros de MV como podemos ver na figura seguinte:

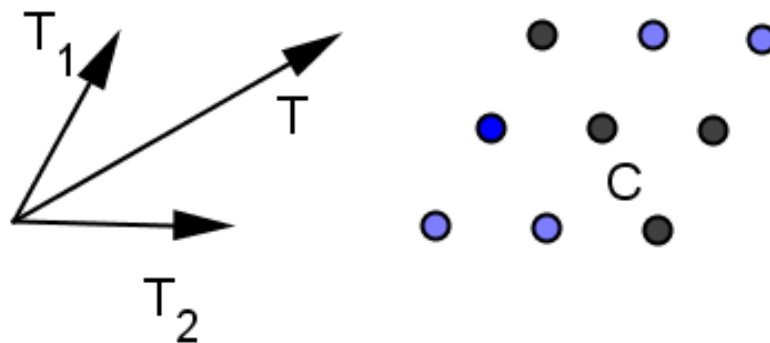


Figura 34: Produto das translações geradoras de um padrão pelo um centro de rotação C .

A combinação destas translações com os novos centros de MV gera uma rede infinita de novos centros de MV . Portanto, um padrão nestas condições, onde só existem translações e rotações de MV , designa-se de padrão do tipo $p2$ ilustrado no exemplo da figura seguinte:

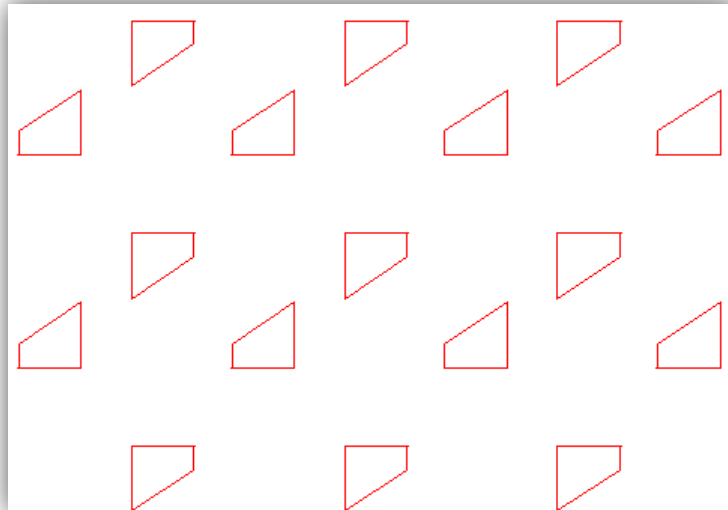


Figura 35: Exemplo de padrão do tipo $p2$.

O paralelogramo que podemos visualizar na figura seguinte corresponde à célula do padrão e o domínio fundamental corresponde à região rosa. Todos os pontos assinalados a negro são centros de rotação de MV .

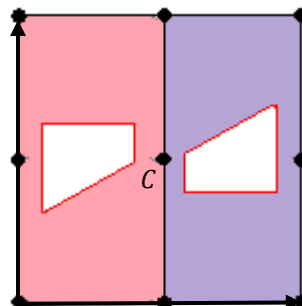


Figura 36: Célula primitiva de um padrão do tipo $p2$.

Neste tipo de padrão, o conjunto de simetrias possui translações e rotações de ordem 2, e no conjunto de geradores podemos ter duas translações e uma rotação de MV com centro em C .

Antes de continuarmos com o estudo de padrões com simetrias de rotação de MV , convém relembrar que uma rotação de centro C de ângulo 2α pode ser obtida como uma composição de duas reflexões desde que os seus eixos se intersectem no centro de rotação e a amplitude do ângulo formado pelos seus eixos seja α . Portanto, um centro de rotação de MV pode ser obtido pela composição de duas reflexões desde que os seus eixos se intersectem no centro de rotação e a amplitude do ângulo formado pelos seus eixos de reflexão seja de 90° , isto é, sejam perpendiculares.

Outro resultado que convém recordar é que a composição de uma reflexão com uma rotação de MV resulta numa reflexão (centro pertence ao eixo de reflexão) ou numa reflexão deslizante (centro não pertence ao eixo de reflexão), ambas perpendiculares em relação ao eixo da reflexão dada.

Podemos observar que, num padrão com simetrias de rotação de ordem 2, as reflexões e as reflexões deslizantes a existirem, terão os seus eixos de reflexão posicionados perpendicularmente uns com os outros.

Usando os padrões pg , pm e cm (padrões com reflexões e reflexões deslizantes), iremos “adicionar” rotações de MV e estudar o que resulta da composição desta simetria com as já existentes em cada um dos padrões.

Das composições estudadas que envolvam as rotações de MV , podemos verificar que os centros de rotação se poderão posicionar sobre os eixos de reflexão (deslizante) ou fora destes, mas fora destes significa mais precisamente que se posicionam a meia distância entre dois eixos de reflexão (deslizante).

Começemos por analisar o padrão pm com centros de rotação de MV posicionados sobre o eixo de reflexão.

Se os centros de rotação se posicionam sobre os eixos de reflexão então o resultado da composição destas duas simetrias é uma reflexão, que passa pelo centro de rotação e com eixo perpendicular à simetria já existente.

Na figura seguinte podemos observar que a rotação de MV com centro em K é transladada por múltiplos das translações T_1 e T_2 . Por sua vez, esta rotação por composição com T_1 e T_2 gera novos centros de rotação à distância $\frac{|T_1|}{2}$ e $\frac{|T_2|}{2}$, todos sobre os eixos de reflexão. Finalmente a composição de rotação de MV com uma reflexão M origina novas reflexões perpendiculares às já existentes e que também passam pelos centros de rotação.

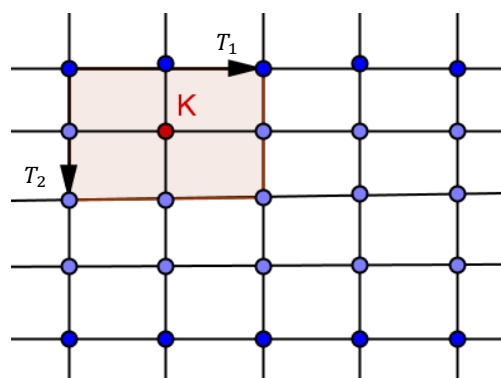


Figura 37: “Esqueleto” de um padrão pm com centros de MV sobre os eixos de reflexão.

Fica assim encontrado um padrão que além de simetrias de rotação de ordem 2 possui também simetrias de reflexão, com eixos perpendiculares e paralelos ao eixo de translação principal. Este padrão designa-se por $p2mm$ ou pmm na sua designação abreviada.

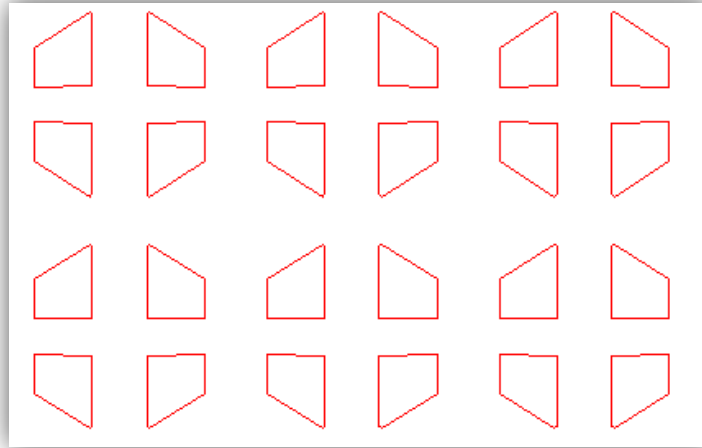


Figura 38: Exemplo de padrão do tipo pmm .

O paralelogramo seguinte corresponde à célula primitiva do padrão e o domínio fundamental corresponde à região rosa.

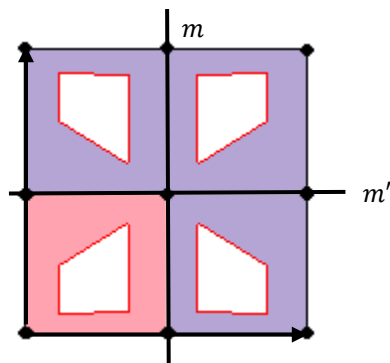


Figura 39: Célula de um padrão do tipo pmm .

Neste tipo de padrão temos no conjunto de simetrias translações, rotações de ordem 2 e reflexões. No conjunto de geradores podemos ter duas translações e duas reflexões (eixos m e m').

Analisemos agora o padrão pm com centros de rotação de MV posicionados fora do eixo de reflexão.

Se os centros de rotação se posicionam fora dos eixos de reflexão então o resultado da composição destas duas simetrias é uma reflexão deslizante, com eixo perpendicular ao eixo

de reflexão e que passa pelo centro de rotação e o vetor deslizante tem comprimento igual ao dobro da distância do centro de rotação ao eixo de reflexão.

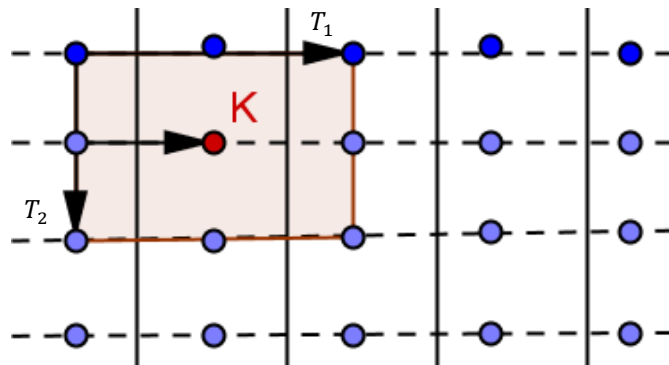


Figura 40: “Esqueleto” de um padrão pm com centros de MV fora dos eixos de reflexão.

Fica encontrado um padrão que possui simetrias de rotação de ordem 2, simetrias de reflexão e simetrias de reflexão deslizante, com eixos perpendiculares e paralelos ao eixo de translação principal, respetivamente. Este padrão designa-se por $p2mg$ ou pmg .

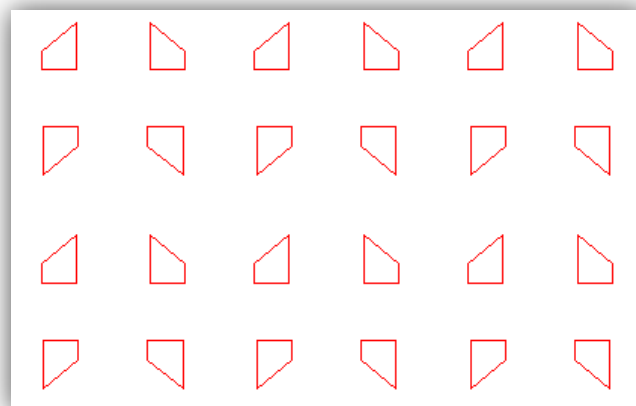


Figura 41: Exemplo de padrão do tipo pmg .

O paralelogramo seguinte corresponde à célula primitiva do padrão e o domínio fundamental corresponde à região rosa.

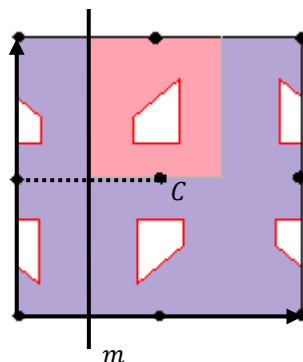


Figura 42: Célula de um padrão do tipo pmg .

Neste tipo de padrão temos no conjunto de simetrias translações, rotações de ordem 2, reflexões e reflexões deslizantes. No conjunto de geradores podemos ter duas translações, uma rotação de MV (centro em C) e uma reflexão (eixo m).

Analisemos agora o padrão pg com rotações de MV sobre os eixos.

Sabemos que a composição de um centro de rotação de MV com uma reflexão deslizante, quando o centro de rotação se encontra sobre o eixo de reflexão é uma reflexão. Portanto os eixos de reflexão ficariam posicionados da forma como vemos ilustrada na figura seguinte, ou seja outra representação de padrão do tipo pmg .

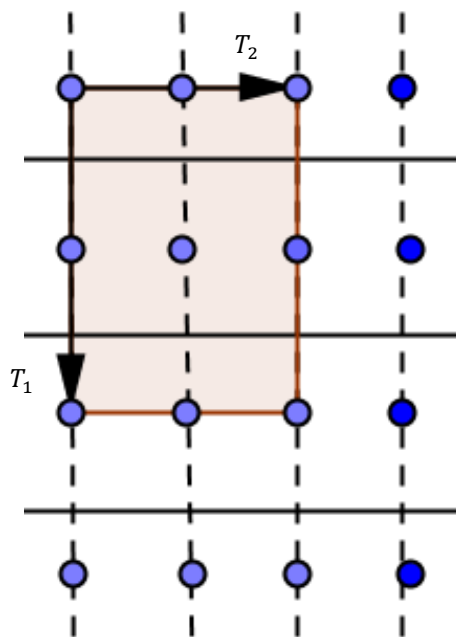


Figura 43: “Esqueleto” de um padrão pg com centros de MV sobre os eixos de reflexão.

Vejamos agora a possibilidade dos centros de MV se posicionarem fora dos eixos de reflexão deslizante num padrão pg .

Como já sabemos, a composição de uma reflexão deslizante com uma rotação de MV cujo centro não pertence ao eixo de reflexão é uma reflexão deslizante perpendicular à reflexão deslizante dada, com vetor deslizante $T_0 = \frac{T_2}{2}$.

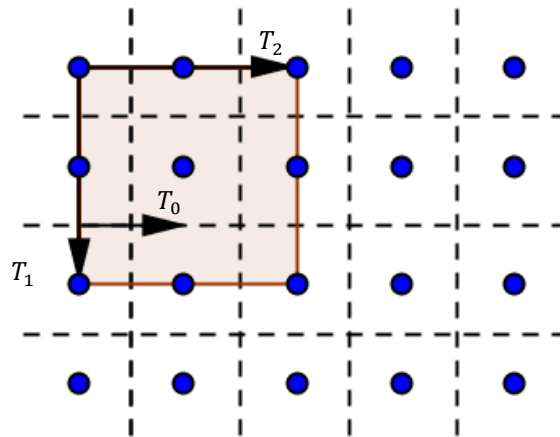


Figura 44: “Esqueleto” de um padrão pg com centros de MV fora dos eixos de reflexão.

Desta forma, obtemos um padrão do tipo $p2gg$ ou na sua designação abreviada pgg que podemos ver exemplificado na figura seguinte:

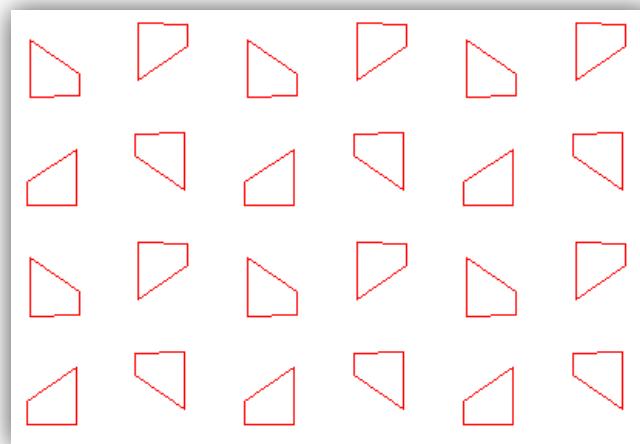


Figura 45: Exemplo de padrão do tipo pgg .

O paralelogramo seguinte corresponde à célula primitiva do padrão e o domínio fundamental corresponde à região rosa.

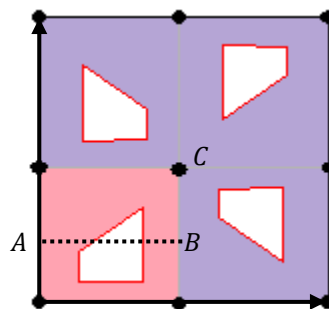


Figura 46: Célula de um padrão do tipo pgg .

Neste tipo de padrão o conjunto de simetrias possui translações, rotações de ordem 2 e reflexões deslizantes. No conjunto de geradores podemos ter duas translações, uma rotação de MV (centro em C) e uma reflexão deslizante (AB).

Finalmente, vejamos como podemos combinar centros de rotação de MV com o padrão do tipo cm .

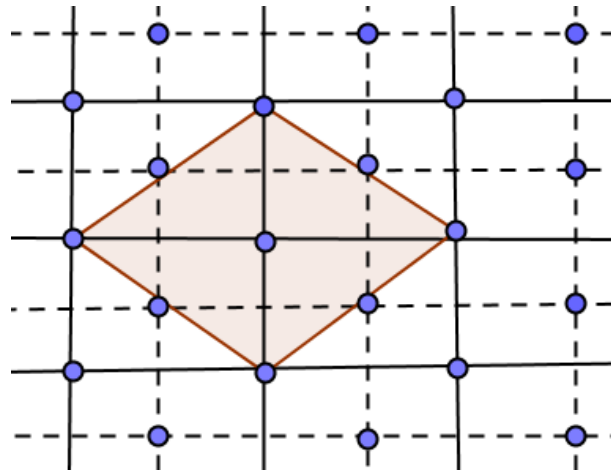


Figura 47: “Esqueleto” de um padrão cm com centros de MV sobre os eixos de reflexão.

Obtemos assim um padrão do tipo $cm\bar{m}$ ilustrado na figura seguinte:

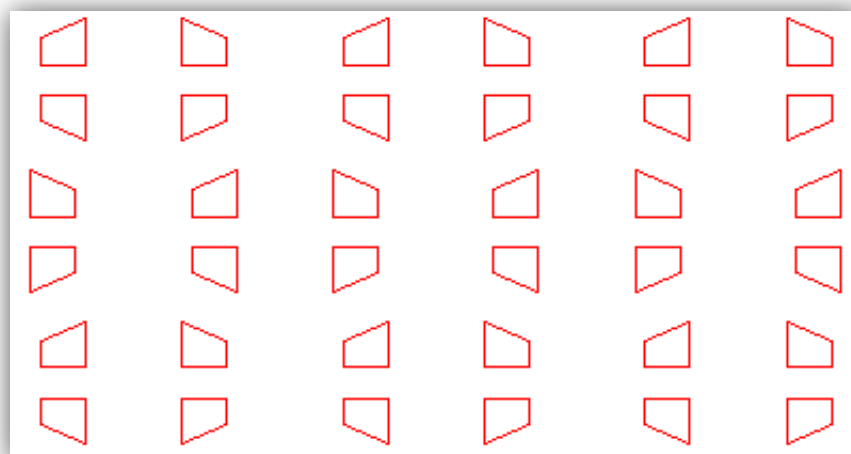


Figura 48: Exemplo de padrão do tipo $cm\bar{m}$.

O paralelogramo seguinte corresponde à célula primitiva do padrão e o domínio fundamental corresponde à região rosa.

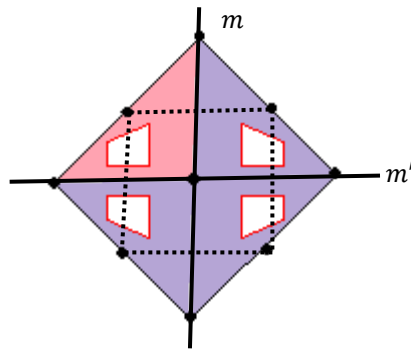


Figura 49: Célula do padrão do tipo *cmm*.

Este tipo de padrão possui como conjunto de simetrias, translações, meias-voltas, reflexões e reflexões deslizantes. Quanto ao conjunto de geradores podemos ter duas translações e duas reflexões (eixos m e m').

Os restantes padrões com simetrias de rotação de ordem 3, 4 e 6 são apresentados sem uma explicação detalhada indicando-se, além de um exemplo para cada tipo de padrão, o seu conjunto de simetrias, o conjunto de geradores e o domínio fundamental.

2.6.6.3. Rotação de ordem 4

São três os possíveis padrões de ordem 4: $p4$, $p4m$ e $p4g$.

Padrão $p4$

O padrão do tipo $p4$ tem como características o facto de possuir no seu conjunto de simetrias translações e rotações de ordem 2 e 4. Como conjunto de geradores podemos ter duas translações e uma rotação (ordem 4 e centro em C).

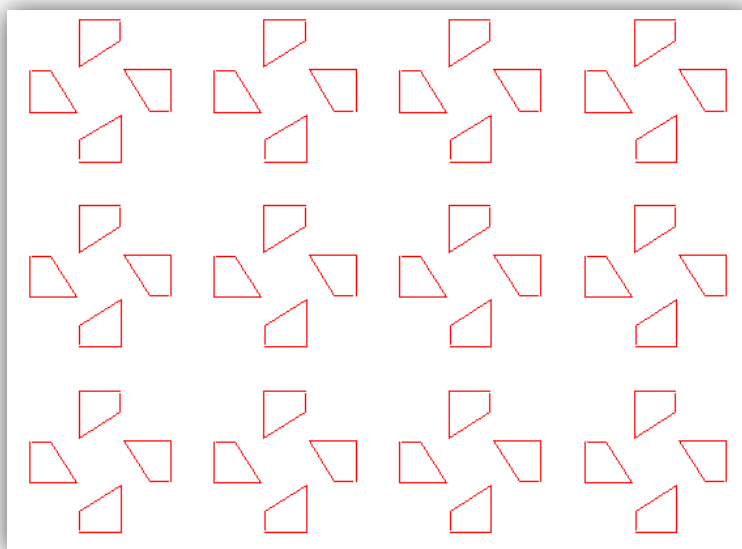


Figura 50: Exemplo de padrão do tipo $p4$.

Na figura seguinte podemos visualizar a célula deste tipo de padrão. A região rosa corresponde ao domínio fundamental e os centros de rotação de ordem assinalados nos círculos negros, e os centros de rotação de ordem 4 assinalados nos quadrados negros.

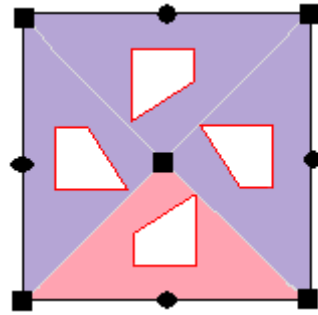


Figura 51: Célula do padrão $p4$.

Padrão $p4m$

Este tipo de padrão tem rotações de ordem 2 e de ordem 4. Tem também quatro eixos de reflexão inclinados entre si de 45° , de modo que estes quatro eixos de reflexão passem através de cada centro de rotação da ordem de 4 e também reflexões deslizantes que passam através dos centros de rotação de ordem 2, com os eixos a 45° em relação aos eixos de reflexão. Portanto os padrões do tipo $p4m$ têm no seu conjunto de simetrias, translações, rotações de ordem 2 e 4, reflexões e reflexões deslizantes. Como conjunto de geradores podem ter duas translações, uma rotação (ordem 4 e centro em C) e uma reflexão (eixo m). A figura seguinte ilustra um padrão do tipo $p4m$:

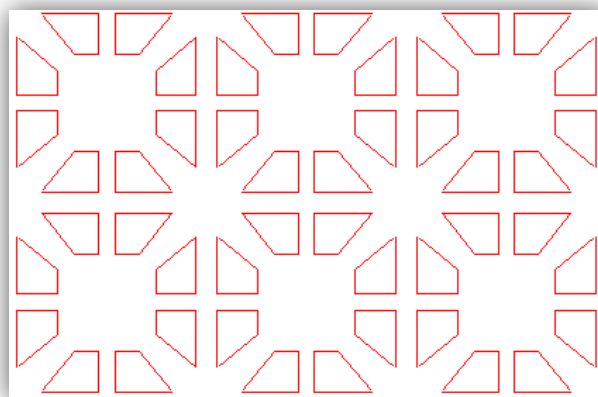


Figura 52: Exemplo de padrão do tipo $p4m$.

Vejamos com mais detalhe uma célula do exemplo anterior:

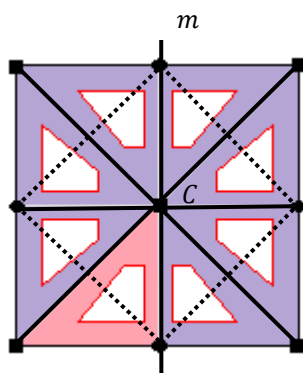


Figura 53: Célula do padrão $p4m$.

Nesta célula a região rosa corresponde ao domínio fundamental. O padrão $p4m$ é muito comum e é fácil de reconhecer por causa de sua rede quadrada.

Padrão $p4g$

Este tipo de padrão contém reflexões e rotações de ordens 2 e 4. Possui também reflexões perpendiculares que passam por cada rotação da ordem 2. No entanto, através dos centros de rotação de ordem 4 não passa qualquer eixo de reflexão. Tem quatro direções de reflexões deslizantes. Na figura seguinte podemos visualizar um padrão do tipo $p4g$:

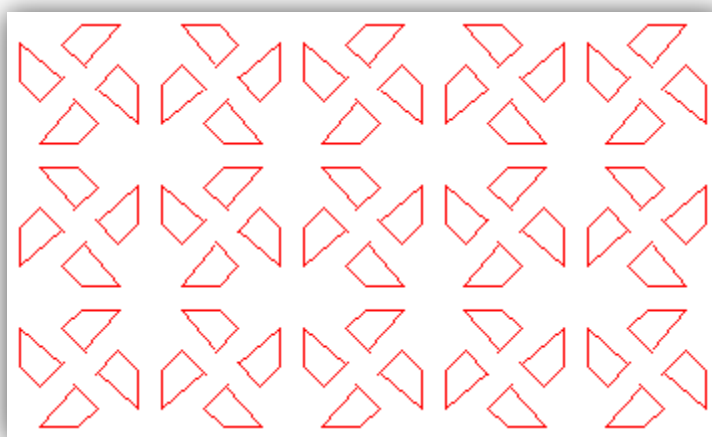


Figura 54: Exemplo de padrão do tipo $p4g$.

Este padrão tem no seu conjunto de simetrias, translações, rotações de ordem 2 (círculos negros) e 4 (quadrados negros), reflexões e reflexões deslizantes. No conjunto de geradores podemos ter duas translações, uma rotação (ordem 4 e centro em C) e uma reflexão (eixo m). Na célula seguinte a região rosa corresponde ao domínio fundamental.

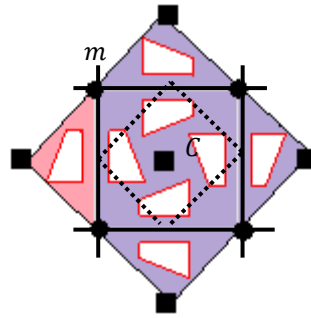


Figura 55: Célula do padrão $p4g$.

2.6.6.4. Rotação de ordem 3

Os padrões planos possíveis de ordem 3 são: $p3$, $p31m$ e $p3m1$.

Padrão $p3$

O padrão do tipo $p3$ tem como características o facto de possuir no seu conjunto de simetrias, translações e rotações de ordem 3 (triângulos negros). Como conjunto de geradores podemos ter duas translações e uma rotação (ordem 3 e centro em C).

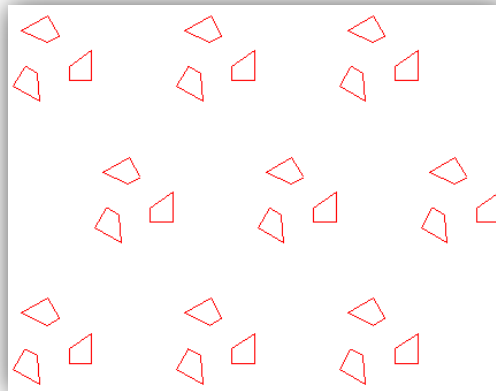


Figura 56: Exemplo de padrão do tipo $p3$.

Na figura seguinte podemos visualizar a célula deste tipo de padrão. A região rosa corresponde ao domínio fundamental

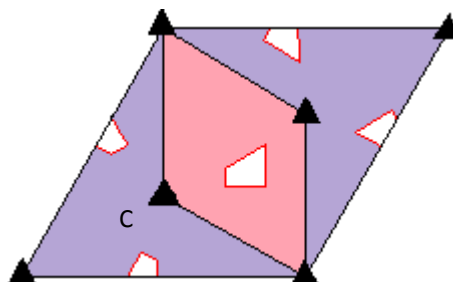


Figura 57: Célula do padrão $p3$.

Padrão $p31m$

Este padrão contém reflexões que fazem entre si um ângulo de 60° , rotações de ordem 3 e reflexões deslizantes. Os centros de rotação posicionam-se sobre os eixos de reflexão e fora destes. Estas simetrias compõem o conjunto de simetrias deste padrão.

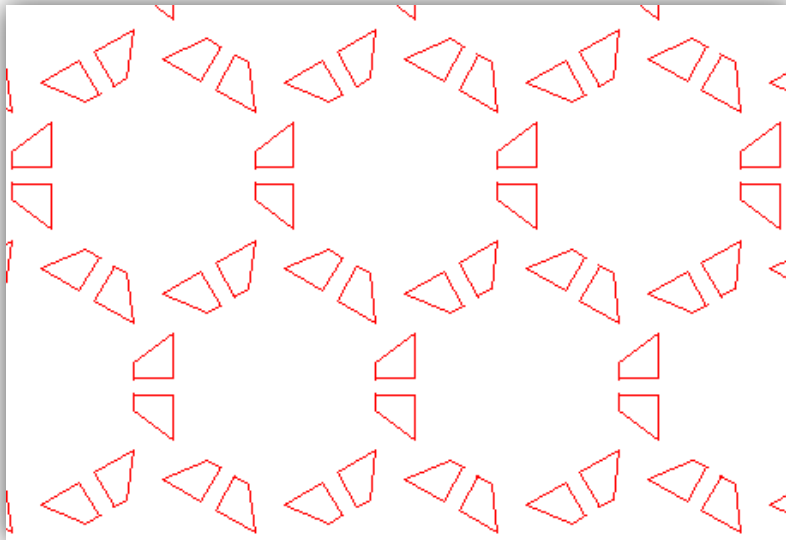


Figura 58: Exemplo de padrão do tipo $p31m$.

No conjunto de geradores deste padrão podemos ter duas translações, uma rotação de ordem 3 (centro em C) e uma reflexão (eixo m), como podemos visualizar na figura seguinte:

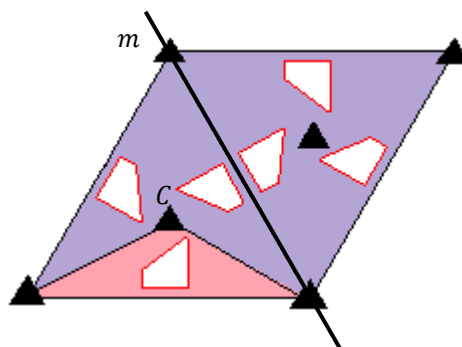


Figura 59: Célula do padrão $p31m$.

O domínio fundamental corresponde à região assinalada na cor rosa.

Padrão $p3m1$

O grupo de simetrias deste padrão é semelhante ao anterior já que contém reflexões que fazem entre si um ângulo de 60° , rotações de ordem 3 e reflexões deslizantes, mas os centros

de rotação posicionam-se sobre os eixos de reflexão. Estas simetrias compõem o conjunto de simetrias do padrão $p3m1$.

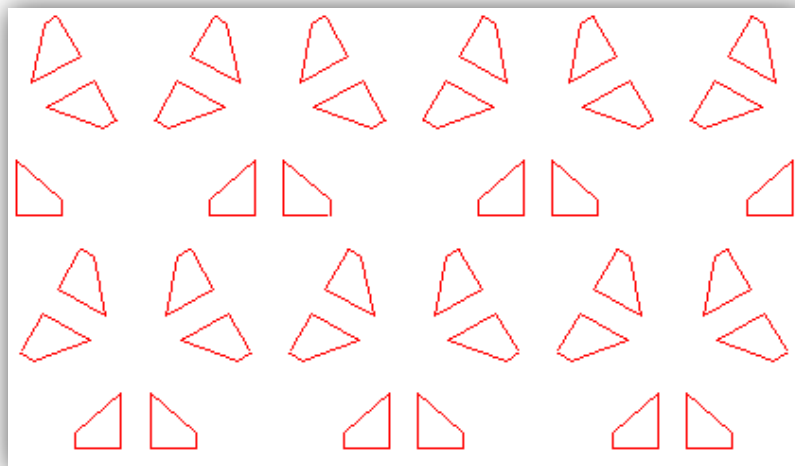


Figura 60: Exemplo de padrão do tipo $p3m1$.

Na figura seguinte podemos visualizar uma célula deste padrão. A região rosa corresponde ao domínio fundamental.

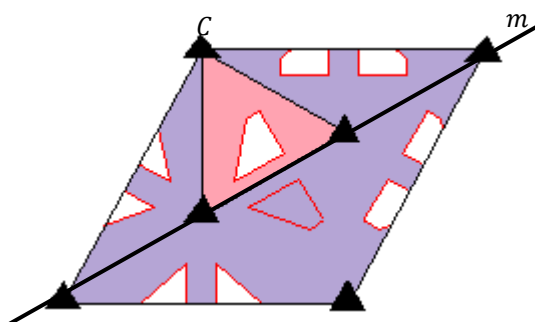


Figura 61: Célula do padrão $p3m1$.

No conjunto de geradores deste padrão podemos ter duas translações, uma rotação de ordem 3 (centro em C) e uma reflexão (eixo m).

2.6.6.5. Rotação de ordem 6

Existem apenas dois padrões do plano que possuem rotações de ordem 6, o padrão $p6$ e o padrão $p6m$.

Padrão $p6$

O padrão $p6$ é um padrão que no seu conjunto de simetrias possui apenas translações e rotações de ordem 2, 3 e 6. Na figura seguinte podemos visualizar um exemplo de padrão deste grupo de simetrias:

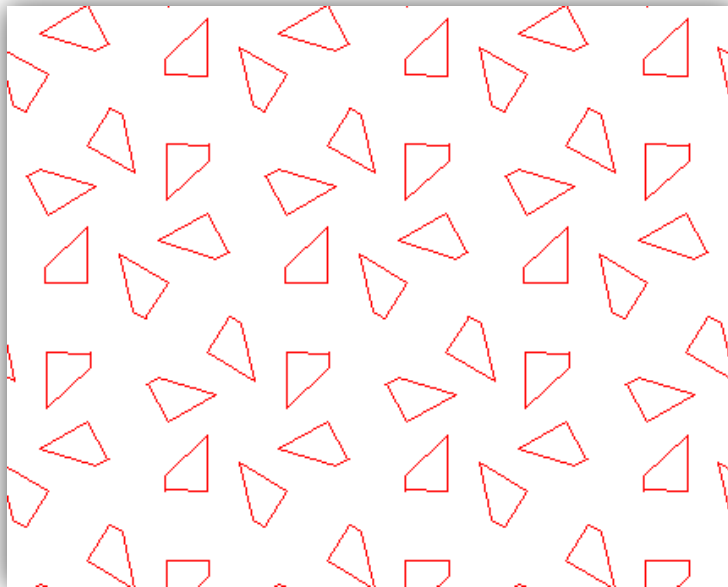


Figura 62: Exemplo de padrão do tipo $p6$.

No conjunto de geradores deste padrão podemos ter duas translações e uma rotação de ordem 3 (centro em C), como podemos visualizar na figura seguinte. O domínio fundamental corresponde à região rosa:

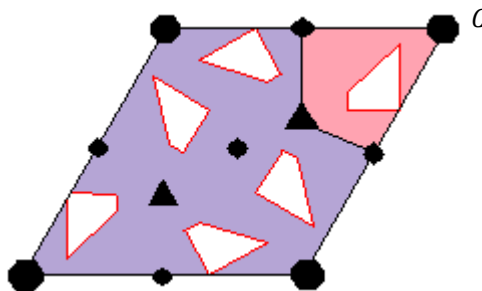


Figura 63: Célula do padrão $p6$.

Padrão $p6m$

O padrão $p6m$ possui rotações de ordem 2, 3 e 6, reflexões e reflexões deslizantes. Os eixos de reflexão passam por todos os centros de rotação. Nos centros de rotação de ordem seis passam seis eixos de reflexão que fazem entre si um ângulo de 30° . Estas simetrias compõem o conjunto de simetrias deste padrão.

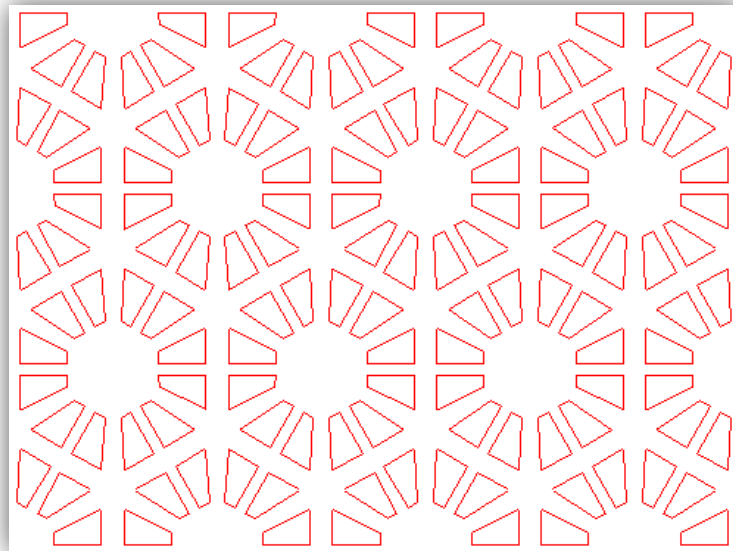


Figura 64: Exemplo de padrão do tipo $p6m$.

Na figura seguinte podemos visualizar a célula do padrão anterior, onde a região rosa corresponde ao domínio fundamental. Ao conjunto de geradores pertencem duas translações, uma reflexão (eixo m) e uma rotação de ordem 6 (centro C).

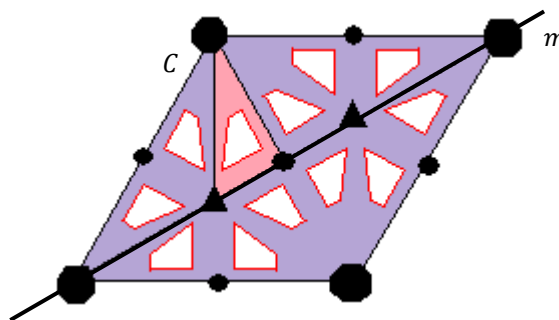


Figura 65: Célula do padrão $p6m$.

2.6.7. Fluxograma para a classificação de padrões do plano.

A ideia da criação de um fluxograma que facilitasse a classificação de padrões foi introduzida por Dorothy Washburn and Donald Crowe e que serviria inicialmente como ferramenta em Antropologia Cultural. O fluxograma seguinte é uma recriação do fluxograma original [5].

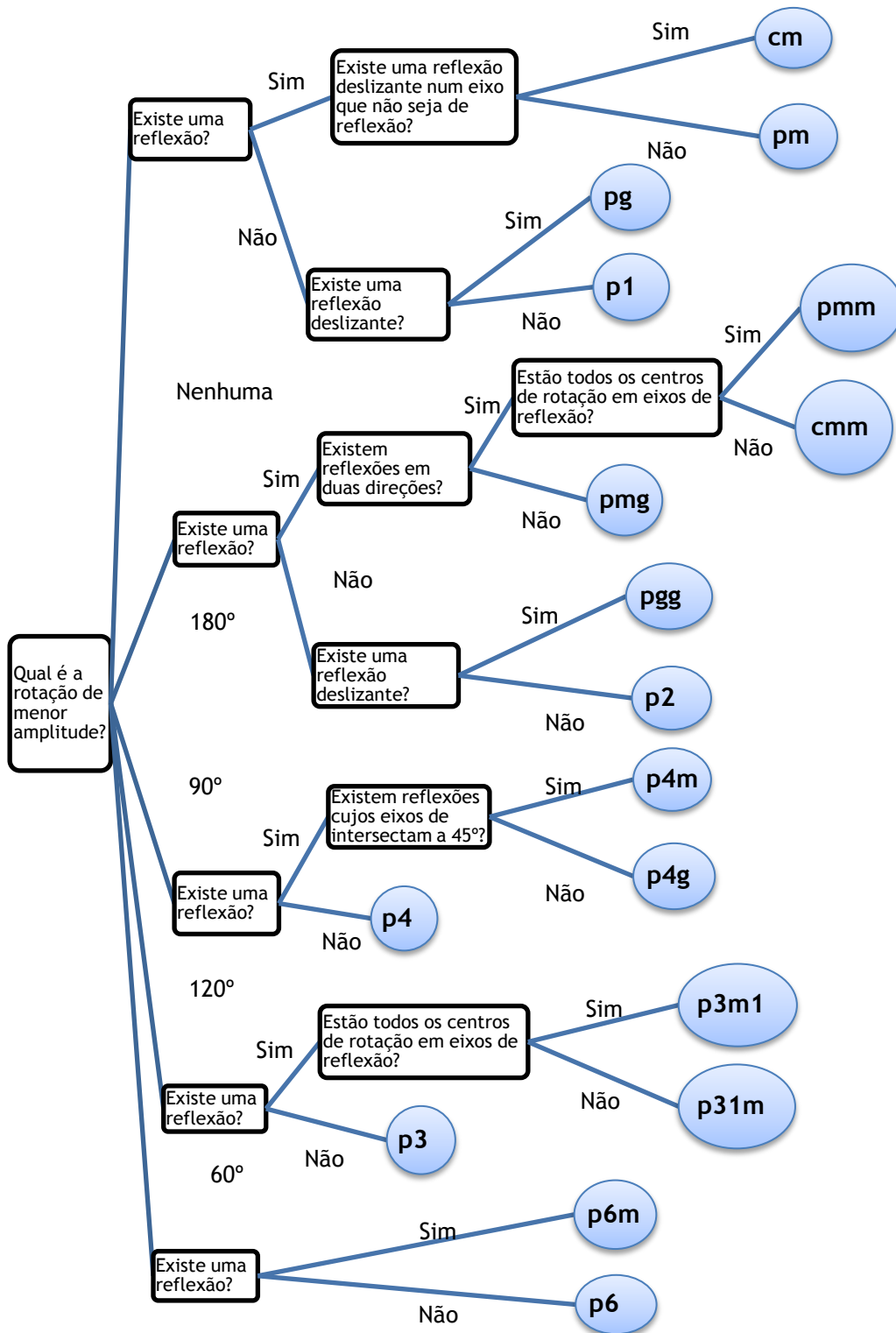


Figura 66: Fluxograma para a classificação de padrões planos.

Referências Bibliográficas

- [1] Baloglou, G., *Isometrica - A geometrical Introduction to Planar Crystallographic Groups*. Retirado a 6 de Junho de 2013 do website da State University of New York (Suny) OSWEGO: <http://www.oswego.edu/~baloglou/103/isopage.html>.
- [2] Baloglou, G., *Crystallography Now*. Consultado em 2013 no website da Suny OSWEGO: <http://www.oswego.edu/~baloglou/103/seventeen.html>.
- [3] Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço, Matemática A 10º ano*, Porto Editora.
- [4] Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Crowe, D.W., *Symmetries of Culture*. Retirado a 9 de setembro de 2013 do website de Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/crowe1/#f10>
- [6] Farmer, David W. (1999). *Grupos e Simetria - Um guia para descobrir a matemática*, Gradiva, 1ª Edição.
- [7] Longo, E. & Branco, I. (2010). *Matemática Aplicada às Ciências Sociais 10º Ano*. Texto Editores, Lda.
- [8] Veloso, E. (1998). *Geometria*. Instituto de Inovação Educacional, 1ª Edição.
- [9] Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*, Associação de Professores de Matemática.
- [10] Weeks, J. *Kali*. Retirado a 13 de junho de 2013 do website Programas de Topologia e Geometria: <http://www.geometrygames.org/index.html>