



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura

Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Torção

Cátia Sofia Batista Taborda

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, Outubro de 2012

Agradecimentos

Existem tantas pessoas a quem eu quero deixar o meu agradecimento pelo apoio incansável ao longo do meu percurso e em especial às pessoas que de certa forma me apoiaram na elaboração do presente trabalho.

Quero agradecer ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador científico desta dissertação, pelo constante apoio, disponibilidade e por todo o conhecimento que me transmitiu não só ao longo da elaboração do trabalho conducente a esta dissertação mas também durante o meu percurso académico.

Quero agradecer também ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade pela disponibilidade e pelo apoio prestado para a utilização do software onde foi implementado o modelo teórico.

Quero também deixar um agradecimento especial ao Professor Jorge Manuel dos Reis Gama, professor do Departamento de Matemática, pela sua disponibilidade e pelo apoio prestado na análise paramétrica realizada.

Aos meus pais que sem a sua confiança e orientação neste momento não estaria onde estou e ao meu irmão por me ensinar a ter pontos de vista diferentes, o meu especial agradecimento.

Ao meu namorado, João, quero agradecer pelo seu incondicional apoio e encorajamento em todos os momentos.

À família mais próxima e aos amigos que de algum modo contribuíram nas mais diversas formas para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento de vigas de betão estrutural sujeitas à torção e confinadas axialmente. O estudo realizado tem por objetivo considerar a influência das reais condições de ligação das vigas aos elementos adjacentes no dimensionamento da mesma à torção. Para tal, tem-se em conta o estado de tensão de compressão longitudinal induzido pelo efeito do confinamento axial.

A incorporação e estudo do efeito do confinamento axial em vigas à torção será realizado mediante a extensão do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável para a nova situação de interação resultante do confinamento. Para a realização de uma análise não linear, o novo modelo proposto incorpora leis constitutivas para caracterizar o comportamento não linear dos materiais, designadamente para o betão à compressão nas escoras incluindo o *softening effect* e para as armaduras à tração nos tirantes incluindo o *stiffening effect*.

É realizada uma extensa análise paramétrica com vista a estudar a influência de diversas variáveis de estudo (resistência à compressão do betão, taxa total de armadura de torção e nível de confinamento axial) no comportamento de vigas à torção com confinamento axial. Tal análise demonstra, entre outros aspetos, o efeito favorável do confinamento axial no incremento da resistência à torção das vigas. A partir da análise paramétrica realizada são propostos ábacos auxiliares para apoio ao projeto de vigas à torção.

Por forma a validar o modelo teórico proposto, as previsões teóricas são comparadas com alguns resultados experimentais disponíveis na literatura e também com os resultados obtidos a partir de uma análise não linear com elementos finitos, tendo-se recorrido ao programa LUSAS.

Palavras-chave

Betão estrutural, Viga, Torção, Confinamento axial, Modelo de treliça espacial, Elementos finitos

Abstract

The behavior of structural concrete beams under torsion and axially confined is studied in this thesis. The study aims to consider the influence of the real conditions of the beams connected to adjacent structural elements in the design for torsion. For this purpose, the longitudinal compressive stress state induced by the axial confinement is take into account.

The inclusion and the study of the influence of the axial confinement in beams under torsion are performed by extending the Variable Angle Truss Model to this new situation of interaction that result from the axial confinement. In order to perform a nonlinear analysis, the new proposed model incorporates constitutive relationships to characterize the nonlinear behavior of the materials, namely the concrete in compression in the struts including the softening effect and the reinforcement in tension in the ties including the stiffening effect.

An extensive parametric analysis is performed in order to study the influence of several variables study (compressive concrete strength, torsional reinforcement ratio and axial confinement level) in the behavior of beams under torsion with axial confinement. This analysis demonstrates, among other aspects, the favorable effect of the axial confinement in increasing the torsional strength of the beams. From the performed parametric analysis, abacuses are proposed to help for the design of beams under torsion.

In order to validate the proposed theoretical model, the theoretical predictions are compared with some experimental results available in literature and also with the results obtained from a nonlinear analysis with finite elements by using LUSAS software.

Keywords

Structural concrete, Beam, Torsion, Axial confinement, Space truss model, Finite elements

Índice

Capítulo 1 - Enquadramento do Tema	1
1.1. Introdução ao estudo da Torção	1
1.1.1. Notas históricas	1
1.1.2. Casos de estruturas sujeitas ao efeito torsional	5
1.1.3. Torção de Compatibilidade e Torção de Equilíbrio.....	9
1.1.4. Torção de Saint Venant e torção com Empenamento.....	11
1.2. Justificação do tema do trabalho.....	13
1.2.1. Introdução	13
1.2.2. Confinamento em vigas sujeitas à flexão	14
1.2.3. Confinamento em vigas sujeitas à torção	17
1.2.4. Descrição do comportamento de uma Viga de Betão Armado à Torção	18
1.3. Objetivos do trabalho.....	21
1.4. Organização do documento	22
Capítulo 2 - Modelação teórica do comportamento de vigas à torção: o VATM	23
2.1. Introdução	23
2.2. Notas históricas	23
2.3. Modelo de Treliza com Ângulo Variável - VATM - para vigas de betão armado....	26
2.3.1. Considerações gerais.....	26
2.3.2. Análise de uma viga com base no Modelo de Treliza Plana.....	27
2.3.3. Vigas com secção vazada sujeitas à torção pura	29
2.3.4. Flexão das escoras de betão.....	32
2.3.5. Caracterização do comportamento do betão à compressão e do aço das armaduras ordinárias à tração	33
2.4. Previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM	41
2.4.1. Considerações gerais.....	41
2.4.2. Procedimento de cálculo.....	41
2.5. Modelo de Treliza com Ângulo Variável - VATM - para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme.....	45
2.5.1. Considerações gerais.....	45
2.5.2. Extensão do VATM para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme.....	46
2.5.3. Caracterização do comportamento do betão à compressão e do aço das armaduras ordinárias e de pré-esforço à tração.....	48
2.5.4. Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme.....	49
2.6. Descrição da Utilização do Aplicativo TORQUE_MTEAV.....	51
2.6.1. Considerações iniciais	51
2.6.2. Aplicativo TORQUE_MTEAV	51

2.7.	Notas Finais.....	60
Capítulo 3 - VATM Modificado para Vigas com Confinamento Axial sujeitas à Torção		61
3.1.	Introdução	61
3.2.	Justificação da metodologia escolhida para a incorporação do efeito do confinamento axial.....	62
3.3.	O VATM - para vigas de betão armado com confinamento axial	64
3.3.1.	Considerações gerais.....	64
3.3.2.	Análise de uma viga com confinamento axial com base no Modelo de Treliça Plana	65
3.3.3.	Vigas confinadas axialmente com secção vazada sujeitas à torção pura.....	66
3.3.4.	Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial.....	68
3.4.	Vigas de Betão Pré-esforçado com armaduras não aderentes e/ou cabos exteriores	74
3.4.1.	Considerações gerais.....	74
3.4.2.	Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial.....	75
3.5.	Descrição do Aplicativo TORQUE_MTEAV adaptado ao caso de vigas confinadas axialmente.....	79
3.5.1.	Considerações gerais.....	79
3.5.2.	Aplicativo TORQUE_MTEAV adaptado a vigas confinadas axialmente.....	79
3.6.	Validação do VATM	81
3.7.	Notas Finais.....	87
Capítulo 4 - Análise Paramétrica.....		88
4.1.	Introdução	88
4.2.	Caracterização da Viga A2 - Viga de referência.....	88
4.3.	Influência do confinamento axial na Curva teórica $T - \theta$ da Viga A2	90
4.4.	Influência do confinamento axial em várias curvas de comportamento para a Viga A2	95
4.5.	Influência da resistência à compressão do betão, da taxa total de armadura e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção	101
4.6.	Ábacos para o apoio ao projeto de vigas à torção.....	107
4.7.	Notas Finais.....	112
Capítulo 5 - Modelação com Elementos Finitos.....		113
5.1.	Introdução	113
5.2.	Modelo numérico - Elementos Finitos.....	114
5.2.1.	Betão	115
5.2.2.	Armaduras	119
5.2.3.	Chapas de aço.....	120
5.2.4.	Cabo Exterior não aderente	121

5.3.	Modelo Numérico - Análise não linear	121
5.3.1.	Considerações gerais.....	121
5.3.2.	Geometria e propriedades do Modelo Numérico.....	124
5.3.3.	Calibração do modelo numérico	131
5.3.4.	Resultados obtidos	135
Capítulo 6 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros		144
6.1.	Introdução	144
6.2.	Conclusões	144
6.3.	Propostas de Trabalhos Futuros.....	147
Referências		148
Anexos		154
Anexo I - Combinações das variáveis de estudo para a Análise Paramétrica Parte II		155
Anexo II - Influência da resistência à compressão do betão e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção.....		156
Anexo III - Influência da taxa total de armadura e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção.....		174
Anexo IV - Valores de C_{ca} utilizados na modelação do polinómio.....		186
Anexo V - Polinómio para obtenção do valor de C_{ca}		188
Anexo VI - Ábacos auxiliares para a obtenção dos valores C_{ca}		190
Anexo VII - Valores para correção de C_{ca} para vãos de 2, 4, 6, 8 e 10 metros.....		194
Anexo VIII - Ábaco de correção de C_{ca} para os vãos 2, 4, 6, 8 e 10 metros.....		198

Lista de Figuras

Figura 1.1 (a) - Vista geral da Ponte de Waterloo [45].....	1
Figura 1.1 (b) - Vista inferior da ponte de Waterloo [47]	2
Figura 1.1 (c) - Secção Transversal [16]	2
Figura 1.2 (a) - Interior do Royal Festival Hall [48]	2
Figura 1.2 (b) - Vista do caixão triangular para suporte da bancada em consola [16].....	2
Figura 1.3 - Rotura por torção numa viga de um edifício [16].....	3
Figura 1.4 - Pormenor de laje de cobertura em consola ((a) contínua e (b) isolada, respetivamente) [46][12].....	5
Figura 1.5 - Vigas com desenvolvimento curvo [12].....	6
Figura 1.6 - Viga com mudança de direção ao longo do seu eixo longitudinal [12].....	6
Figura 1.7 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo em planta [16].....	6
Figura 1.8 - Vigas de suporte com carregamento excêntrico [7].....	7
Figura 1.9 - Vigas com apoios indiretos [12].....	7
Figura 1.10 - Apoio de laje de pavimento em viga de extremidade e de continuidade [16].....	8
Figura 1.11 - Apoio de uma laje inclinada numa viga de extremidade [7].....	8
Figura 1.12 - Torção de compatibilidade e de equilíbrio e a respetiva formação de rótulas plásticas [7].....	9
Figura 1.13 - Evolução da rigidez de torção com o momento torsos [16].....	10
Figura 1.14 - Simplificação dos modelos de cálculo para viga de extremidade e de continuidade [16].....	11
Figura 1.15 - Torção circulatoria e torção com empenamento [7].....	12
Figura 1.16 - Diagramas P-d das Vigas 4, 5 e 6 [37].....	15
Figura 1.17 - Diagrama da carga-deformação de vigas de betão armado axialmente restringidas com diferentes áreas de reforço exterior [55].....	16
Figura 1.18 - Curva $T - \theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura.....	19
Figura 2.1 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana.....	28
Figura 2.2 - Viga com secção retangular vazada sujeita à torção pura.....	30
Figura 2.3 - Flexão de uma escora inserida numa parede de uma viga em caixão sujeita à torção.....	32
Figura 2.4 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão.....	33
Figura 2.5 - Curva $\sigma - \epsilon$ para o betão comprimido tendo em conta o <i>softening effect</i>	35
Figura 2.6 - Integração da Curva $\sigma - \epsilon$ para $\epsilon_d \leq \beta_e \epsilon_0$	36
Figura 2.7 - Integração da Curva $\sigma - \epsilon$ para $\epsilon_d > \beta_e \epsilon_0$	37
Figura 2.8 - Curva $\sigma - \epsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas tendo em conta o <i>stiffening effect</i>	40
Figura 2.9 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva T- θ	44
Figura 2.10 - Ilustração do conceito de descompressão [62 JA].....	47

Figura 2.11 - Curva $\sigma - \varepsilon$ teórica baseada na equação de Ramberg-Osgood.....	49
Figura 2.12 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva $T-\theta$ (vigas com pré-esforço longitudinal).....	50
Figura 2.13 - Janela principal do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	52
Figura 2.14 - Menu Ficheiro do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	53
Figura 2.15 - Abrir Ficheiro da secção/viga a analisar.....	53
Figura 2.16 - Janela do aplicativo TORQUE_MTEAV com os modelos seleccionados.....	54
Figura 2.17 - Menu Editar do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	54
Figura 2.18 - Janela Editar Secção - Geometria do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	55
Figura 2.19 - Janela Editar Secção - Betão do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	55
Figura 2.20 - Janela Editar Secção - Armaduras do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	56
Figura 2.21 - Janela Editar Secção - Pré-esforço do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	56
Figura 2.22 - Menu Editar do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	57
Figura 2.23 - Janela de Resultados ($T-\theta$) do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	57
Figura 2.24 - Ficheiro de resultados (“results”) para a viga A2.....	58
Figura 2.25 - Ficheiro de resultados (“results (graf)”) para a viga A2.....	58
Figura 2.26 - Janela Opções - Fatores do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	59
Figura 2.27 - Janela Opções - Vários do aplicativo TORQUE_MTEAV.....	59
Figura 3.1 - Viga sujeita à torção inserida num pórtico simples.....	62
Figura 3.2 - Alongamento da viga de betão armado sujeita à torção pura.....	63
Figura 3.3 - Viga isolada com influência dos pilares simulada através de molas lineares de rigidez k.....	64
Figura 3.4 - Análise de uma viga confinada axialmente com base no Modelo de Treliça Plana.....	65
Figura 3.5 - Viga com secção vazada sujeita à interação de esforços de torção e esforço axial.....	67
Figura 3.6 - Encurtamento da escora de betão devido ao confinamento axial.....	70
Figura 3.7 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva $T-\theta$ para a situação de viga com confinamento axial.....	73
Figura 3.8 - Diagrama do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva $T-\theta$	78
Figura 3.9 - Janela Principal do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado.....	80
Figura 3.10 - Viga de exemplo de introdução de dado no TORQUE com uma extremidade livre e outra fixa.....	80
Figura 3.11 - Definição geométrica (a) Viga D-0; (b) Viga D-1 e D-2.....	81
Figura 3.12 - Curvas $T-\theta$ das vigas D-0, D-1 e D-2.....	83
Figura 3.13 - Curva $T-\theta$ da Viga D-0.....	85
Figura 3.14 - Curva $T-\theta$ da Viga D-1.....	86
Figura 3.15 - Curva $T-\theta$ da Viga D-2.....	86
Figura 4.1 - Características da Viga A2.....	89
Figura 4.2 - Curva $T-\theta$ para a Viga A2.....	90
Figura 4.3 - Curvas teóricas $T-\theta$ para Viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	92

Figura 4.4 - Variação percentual do momento torsor máximo e da rotação respetiva.....	94
Figura 4.5 - Variação percentual do momento torsor de cedência da armadura transversal e da rotação respetiva.....	94
Figura 4.6 - Curvas teóricas $t_d - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	96
Figura 4.7 - Curvas teóricas $\alpha - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	97
Figura 4.8 - Curvas teóricas $\beta - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	98
Figura 4.9 - Curvas teóricas $\varepsilon_{ds,ef} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	99
Figura 4.10 - Curvas teóricas $\varepsilon_l - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	100
Figura 4.11 - Curvas teóricas $\varepsilon_t - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento.....	100
Figura 4.12 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável.....	102
Figura 4.13 - Análise da variação percentual do momento torsor resistente.....	103
Figura 4.14 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável.....	103
Figura 4.15 - Análise da variação percentual da rotação associada ao momento torsor máximo.....	104
Figura 4.16 - Momento torsor resistente para $f_c = 30MPa$ e ρ_{tot} variável.....	105
Figura 4.17 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 30MPa$ e ρ_{tot} variável.....	106
Figura 4.18 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 30 MPa.....	108
Figura 4.19 - Gráfico de dispersão de dados para o vão de 12 metros.....	111
Figura 4.20 - Ábacos de correção do coeficiente C_{ca} para os vãos 2, 4, 6, 8 e 10 m.....	111
Figura 5.1 - Geometria do elemento HX8 [56].....	115
Figura 5.2 - Estados de contacto local da fissura [51].....	117
Figura 5.3 - Curva do betão à tração [51].....	118
Figura 5.4 - Geometria do elemento BRS2 [56].....	119
Figura 5.5 - Curva tensão-extensão para a armadura longitudinal.....	120
Figura 5.6 - Curva tensão-extensão para a armadura transversal.....	120
Figura 5.7 - Dimensões, modelo estático e reforço da viga B1 [50].....	122
Figura 5.8 - Malha de elementos finitos, condições de apoio e carregamento para um quarto da viga B1, LUSAS.....	123
Figura 5.9 - Armadura de reforço da Viga B1, LUSAS.....	123
Figura 5.10 - Curva Carga-flecha para a viga B1.....	124
Figura 5.11 - (a) Secção transversal real da viga A2, (b) Secção transversal simplificada da viga A2	125
Figura 5.12 - Malha de elementos finitos da secção transversal da viga.....	125
Figura 5.13 - Corte longitudinal da viga A2 [16].....	126

Figura 5.14 - (a) Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2, (b), (c) e (d) cortes transversais do modelo numérico da viga A2.....	127
Figura 5.6 - Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2 com restrição axial.....	127
Figura 5.16 - (a) Modelo numérico global (sólido), (b) malha de elementos finitos do modelo numérico global, LUSAS.....	128
Figura 5.17 - Malha de elementos finitos das armaduras de reforço, LUSAS.....	129
Figura 5.18 - Lei de Belarbi e Hsu para a armadura longitudinal à tração, LUSAS.....	130
Figura 5.19 - Lei de Belarbi e Hsu para a armadura transversal à tração, LUSAS.....	130
Figura 5.20 - (a) Binário de forças aplicado na chapa metálica da extremidade esquerda, (b) Encastramento à torção da viga na extremidade direita, LUSAS.....	131
Figura 5.21 - Comparação entre a Curva $T-\theta$ experimental e teórica da Viga A2.....	132
Figura 5.722 - Elementos finitos HX20 e BRS3.....	133
Figura 5.23 - Curva $T-\theta$ numérica e experimental da viga A2.....	135
Figura 5.24 - Curvas numéricas $T-\theta$ para a Viga A2 com diversos níveis de confinamento..	136
Figura 5.25 - Deformada da Viga A2 para $k=0$ (a) segundo o eixo longitudinal e (b) secção transversal, LUSAS.....	137
Figura 5.26 - Deformada da Viga A2 segundo o eixo longitudinal para (a) $k=0$ kN/m e (b) $k=60000$ kN/m, LUSAS.....	138
Figura 5.27 - Fissuração da Viga A2 com $k=40000$ kN/m na direção longitudinal, LUSAS.....	138
Figura 5.28 - Caminho de tensões principais (a) compressão no betão (b) tração nas armaduras, LUSAS.....	139
Figura 5.29 - Tensão principal de compressão na Viga A2 com $k=0$, LUSAS.....	139
Figura 5.30 - Tensão principal de compressão na Viga A2 com $k=50000$, LUSAS.....	140
Figura 5.31 - Tensão principal de compressão para um nó no centro da parede vertical da Viga A2.....	140
Figura 5.32 - Força nas armaduras para a Viga A2 com $k=0$ kN/m, LUSAS.....	141
Figura 5.33 - Força nas armaduras para a Viga A2 com $k=20000$ kN/m, LUSAS.....	141
Figura 5.34 - Tensão de tração na armadura longitudinal num nó ao centro da Viga A2.....	142
Figura 5.35 - Tensão de tração na armadura transversal num nó ao centro da Viga A2.....	142

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 (a) - Características das vigas D.....	81
Tabela 3.1 (b) - Características das vigas D.....	82
Tabela 3.1 (c) - Características das vigas D.....	82
Tabela 4.1 - Secções dos pilares numa situação de pórtico simples.....	91
Tabela 4.2 - Secção do pilar numa situação de viga confinada.....	91
Tabela 4.3 - Variação percentual dos momentos torsores e das respetivas rotações.....	93
Tabela 4.4 - Coeficientes de correlação dos polinómios de correção.....	110
Tabela 5.1 - Propriedades dos materiais da viga B1 [50].....	122
Tabela 5.2 - Propriedades do cabo exterior não aderente para os diferentes níveis de confinamento axial.....	128

Capítulo 1 - Enquadramento do Tema

1.1. Introdução ao estudo da Torção

1.1.1. Notas históricas

No séc. XX, o dimensionamento de estruturas em betão armado tomou um papel de maior interesse para a comunidade científica, mas durante muitos anos a torção foi desprezada para efeitos de dimensionamento pois acreditava-se que os esforços de torção eram resistidos através de redistribuições de esforços e pela reserva de resistência que os fatores de segurança proporcionavam.

A partir da década de 60, quando começou a existir estruturas onde a torção desempenhava um esforço de real importância, começou-se a dar conta da pouca ou mesmo inexistência documentação acerca do dimensionamento de peças de betão armado sujeitas a torção.

Os primeiros casos onde a torção era um efeito a ser considerado explicitamente no seu dimensionamento, são referenciados por Armstrong em 1956 [9], tais casos referem-se aos projetos da Ponte de Waterloo e do Royal Festival Hall, ambos em Londres.

A Ponte de Waterloo atravessa o rio Tâmisa e é constituída por duas vigas caixão nas extremidades, cada um com três células cada, formando assim o elemento principal do tabuleiro, como se pode observar na figura 1.1. b) e c). O principal autor do projeto, Cuerel em 1948, lembrou-se da problemática situação de se concentrarem cargas excêntricas e provocarem elevados momentos torsões nas vigas caixões. Com esta preocupação em mente, surgiu a necessidade de se realizarem ensaios [33] para avaliar a capacidade resistente à torção de vigas caixão com as mesmas características das que iriam ser utilizadas no projeto. Outros dos objetivos com a realização destes ensaios era confirmar se o fator de forma para a rigidez à torção de uma viga retangular oca ou com secção cheia era o mesmo que o fornecido pela Teoria de St. Venant. Foram obtidos resultados muito idênticos aos da teoria e ainda se conseguiu averiguar que a tensão tangencial máxima era atingida na parede de menor espessura.



Figura 8.1 (a) - Vista geral da Ponte de Waterloo [45]



Figura 1.1 (b) - Vista inferior da ponte de Waterloo [47]

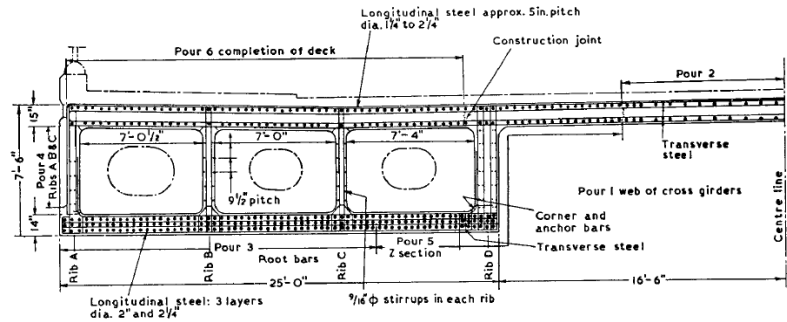


Figura 1.1 (c) - Secção Transversal [16]

Hugh Casson, arquiteto do Royal Festival Hall, desenhou uma estrutura extremamente modernista para a década de 40, e nomeou apenas jovens projetistas para conceberem o ambicioso projeto. Em 1951, Measor e New [57] disponibilizaram alguns pormenores de dimensionamento e conceção da “caixa de torção” que suportava uma laje em consola, o carregamento da dita laje gerava na viga triangular em caixão elevados momentos torsores e era necessário tê-los em consideração na fase de dimensionamento.

Muito antes da referência destes dois casos, na literatura já se referencia o dimensionamento à torção das “estacas-parafuso” (*screw piles*), estacas pré-fabricadas cravadas por meio mecânico, aplicando-se uma força vertical e um momento torsor pré-determinados. Resultado deste modo de aplicação das estacas, os esforços predominantes era simultaneamente a compressão e o esforço de torção ao longo da estaca. Uma vez que o valor e o sentido do momento torsor aplicado era previamente conhecido, as estacas eram dotadas de uma armadura transversal helicoidal para que esta não rompesse no processo de cravação. A armadura transversal de torção era definida tendo por base ensaios experimentais, alterando-se as variáveis (resistência e tipo de solo, profundidade de penetração da estaca, entre outros) para cada caso, recorria-se ainda à reduzida bibliografia existente até então.



Figura 1.2 (a) - Interior do Royal Festival Hall [48]

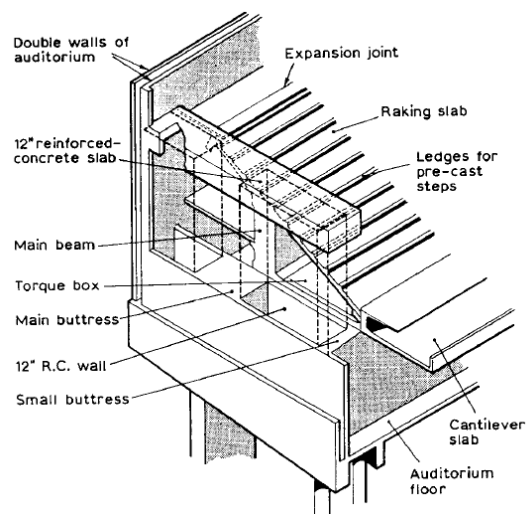


Figura 1.9 (b) - Vista do caixão triangular para suporte da bancada em consola [16]

Em meados da década de 40, como já foi referido anteriormente, a evolução da arquitetura foi notável, as estruturas passaram a ter um aspeto arrojado mas de maior complexidade de cálculo pois estas tomaram formas irregulares, vigas curvas, estruturas enviesadas, carregamentos excêntricos, que exigiam cálculos morosos e fastidiosos. Para estas estruturas, as hipóteses anteriormente adotadas de simplificação dos efeitos de torção deixou de ser adequada.

O desenvolvimento dos processos gerais de dimensionamento de estruturas de betão armado veio acompanhar a evolução da arquitetura, conduzindo a uma redução dos coeficientes de segurança por consequência de uma análise estrutural mais precisa e rigorosa. Assim, diminuíra, também, a reserva de resistência com que os projetistas contavam para a resistência aos esforços de torção. A diminuição dos fatores de segurança deve-se à alteração do método de dimensionamento baseado nas tensões admissíveis pelo método baseado nos Estados Limites Últimos (ELU). Em Portugal, o novo método de dimensionamento entrou em vigor com o Regulamento de Estruturas de Betão Armado em 1996.

Antes da aplicação dos novos regulamentos a adoção dos esforços de torção como esforços secundários foram denunciados através de fissuração helicoidal e deformações excessivas comprometendo a estética e a durabilidade das estruturas em questão.

Na bibliografia e segundo Bernardo em 2003 [16], são raros os casos de insuficiência à torção que são documentados, mas existem alguns casos em que a rotura por deficiente dimensionamento à torção é evidente. Tem-se o caso documentado em 1964 de uma viga inserida numa estrutura de um parque de estacionamento na Flórida (USA) [40] em que a fissura helicoidal denuncia a escassa armadura específica para resistência à torção. Um segundo caso relatado é referente a uma fissuração pronunciada numa viga de apoio de varandas muito pesadas [40].



Figura 1.3 - Rotura por torção numa viga de um edifício [16]

Outra dificuldade sentida pelos engenheiros fixava-se no cálculo das diferentes formas, arrojadas e complexas em estruturas estaticamente indeterminadas, o cálculo

manual lento limitava a análise dessas estruturas. Mas o avanço de programas de análise computacional acompanhou este desenvolvimento arquitetônico facilitando, desta forma, a análise estrutural e permitiu ainda aos engenheiros uma visão mais realista do comportamento estrutural.

Atualmente, a modelação estrutural é uma ferramenta essencial e indispensável no projeto de estruturas, uma vez que o dimensionamento e verificação de elementos de betão armado e pré-esforçado à torção ainda são baseados em procedimentos empíricos e semi-empíricos [40].

O primeiro documento normativo a incluir procedimentos explícitos para o dimensionamento de secções à torção surge na América em 1971, o código ACI 318-71 [3] deste modo passou a ser exigido ao engenheiro a consideração do esforço de torção como um efeito primordial. Posteriormente, foram surgindo outras normas em diferentes países. Onde se destaca a investigação produzida pelo Comité Européen du Beton (CEB) através da comissão V “Esforço transversal - Torção” que entre 1972 e 1977 desenvolveram os procedimentos de dimensionamento à torção que culminaram na edição de 1978 do código europeu (MC 78 [28]).

Apesar de toda a investigação já existente, a problemática da torção com interação de vários esforços ainda é um problema, pois os documentos normativos remetem para uma análise separada e uma sobreposição final das armaduras resultantes. Existe uma verificação adicional de interação entre os esforços que complementa o processo.

Além disso, o cálculo e verificação do comportamento de um elemento à torção em serviço, sobretudo no estado fissurado, não se encontram explícitos, uma vez que as cláusulas apenas fazem referência a Estados Limites Últimos.

De entre os problemas atrás referidos, surge a introdução de novos materiais estruturais e incorporação de sistemas de reforço como o pré-esforço quer longitudinal quer transversal que dificulta a análise do procedimento de torção, dos materiais destacam-se os betões de alta resistência, betões leves e betões com fibras.

Os estudos da problemática da torção do comportamento de elementos de betão armado ainda não abrangem com suficiente clareza alguns domínios estruturais. Por exemplo, o caso de vigas confinadas sujeitas à torção não se encontra referido na literatura nem contemplado na literatura. Existem alguns estudos, que serão referidos ainda neste capítulo, onde o efeito do confinamento de vigas é atendido no comportamento de vigas à flexão. Daí se considerar indispensável o desenvolvimento do estudo e a revisão de regras práticas de dimensionamento para que este tipo de elementos estruturais possa ser utilizados com maior confiança e segurança no domínio da construção.

Convém conhecer alguns exemplos onde o efeito torsional representa um esforço de diferentes graus de importância na sua conceção.

1.1.2. Casos de estruturas sujeitas ao efeito torsional

Nesta secção serão descritos casos correntes de estruturas cuja torção é um esforço principal ou secundário de dimensionamento. No primeiro caso há que dotar a estrutura de armadura específica de resistência à torção, no segundo caso a adoção de uma armadura mínima sob a forma de varões longitudinais e transversais convenientemente colocada absorve os efeitos gerados.

A Figura 1.4 ilustra o caso de uma laje de cobertura em que a viga de apoio se encontra sujeita a esforços de torção. Esta torção surge devido às diferentes deformações da laje em consola, na zona mais rígida, onde se encontram os pilares o elemento apresenta uma deformação menor do que na zona a meio da viga onde a rigidez é menor. O caso ilustrado na Figura 1.4 (a) não é tão penoso como o caso da Figura 1.4 (b), pois no primeiro, o facto de a laje possuir continuidade com a laje de pavimento/cobertura adjacente reduz significativamente o esforço de torção na viga de apoio.

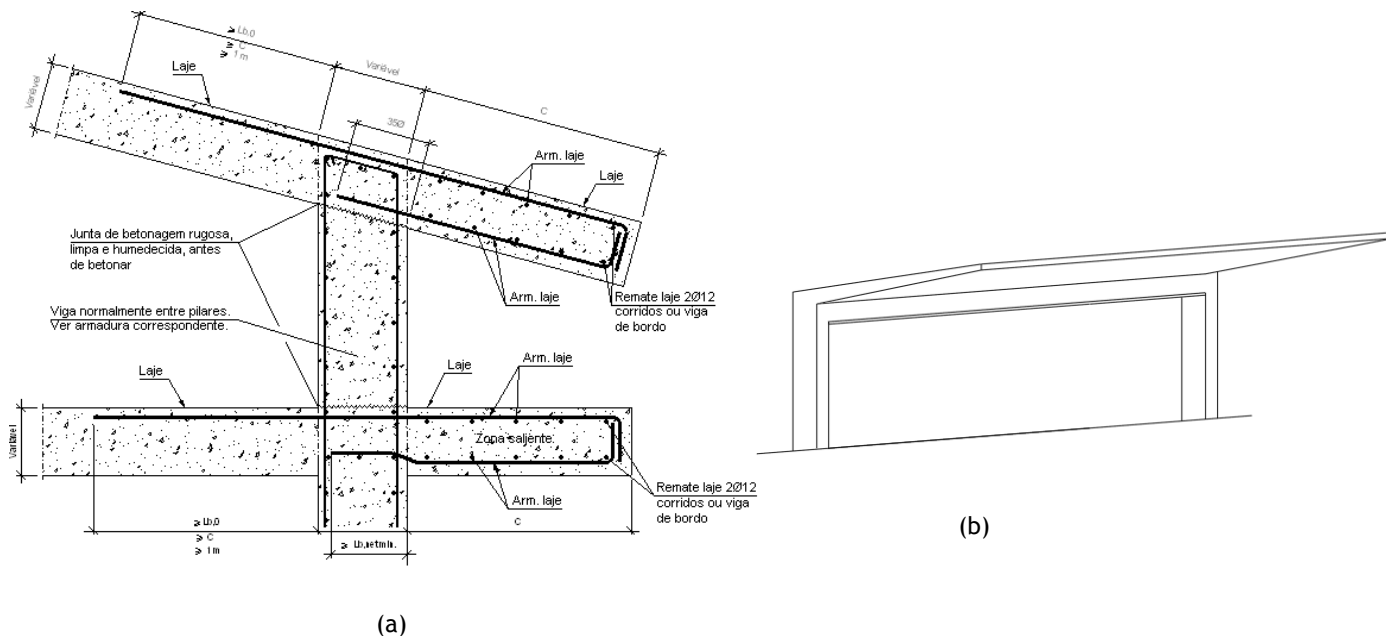


Figura 1.4 - Pormenor de laje de cobertura em consola ((a) contínua e (b) isolada, respetivamente) [46][12]

Outro caso importante de torção surge em vigas de desenvolvimento curvo, mesmo que o carregamento seja aplicado de forma simétrica e atue no eixo da viga, encontra-se ilustrado na Figura 1.5. Qualquer viga que apresente um desenvolvimento curvo e se encontre restringida transversalmente nos seus apoios de extremidade, a carga aplicada irá gerar torção na viga. Casos de vigas com mudança de direção são, de certa forma, frequentemente utilizados na construção. As Figuras 1.5 a 1.7 representam vigas com mudanças de direção, a viga ilustrada na Figura 1.6 não apresenta desenvolvimento curvo, no entanto o elemento contínuo possui uma mudança de direção na ligação entre os dois tramos. A carga aplicada

num tramo gera no tramo adjacente um esforço de torção que deve ser considerado no processo de dimensionamento.

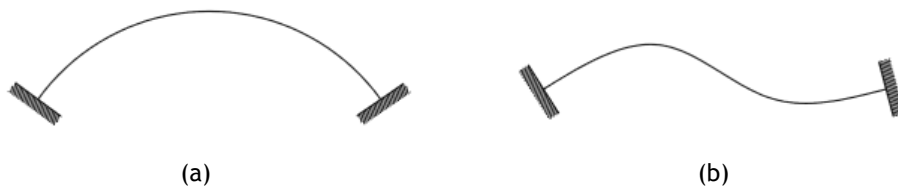


Figura 1.5 - Vigas com desenvolvimento curvo [12]

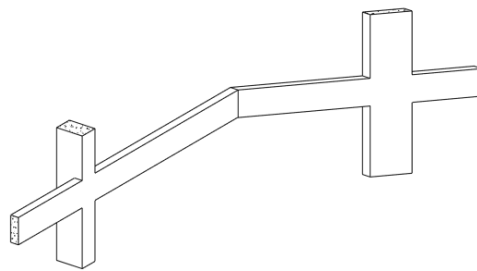


Figura 1.6 - Viga com mudança de direção ao longo do seu eixo longitudinal [12]



Figura 1.7 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo em planta [16]

Atualmente, com a recente linha arquitetónica, existe a necessidade de conceber, cada vez mais, estruturas com formas complexas em que a envolvente não é regular. Quando se trata de construir um canto curvo, geralmente exige a execução de vigas de bordadura. Esta viga terá que suportar o peso próprio da parede exterior e as cargas transmitidas através da laje, este carregamento provoca na viga, entre outros esforços, um efeito torsional, apesar de este ser aplicado no seu eixo.

Nas Figuras 1.8 (a) e 1.8 (b) ilustram-se casos de vigas de suporte em que a carga é transmitida excentricamente à viga por intermédio dos banzos que funcionam como consolas curtas. Na Figura 1.8 (a) a viga pré-fabricada representa um apoio por carga suspensa das

duas vigas que apoiam no banzo inferior da viga de apoio. As cargas aplicadas nos banzos devem ser encaminhadas para os apoios propriamente ditos da viga de suporte, esta transmissão é realizada por uma armadura transversal nas faces da viga e deve garantir-se que a força sobe para a parte superior da viga e assim ser distribuída normalmente. Caso as forças F_1 e F_2 sejam assimétricas gera-se um momento torsor na viga de apoio. A Figura 1.8 (b) ilustra uma parede de alvenaria a carregar de forma excêntrica a viga de apoio provocando, deste modo, o aparecimento de esforços de torção.

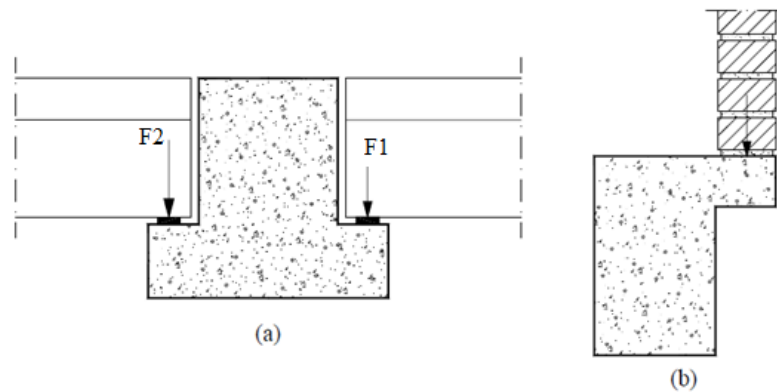


Figura 1.8 - Vigas de suporte com carregamento excêntrico [7]

A Figura 1.9 ilustra uma situação em que a viga de apoio é um apoio indireto. A necessária compatibilidade de deformações entre a viga de apoio e a apoiada gera o aparecimento, na primeira, de momentos torsores.

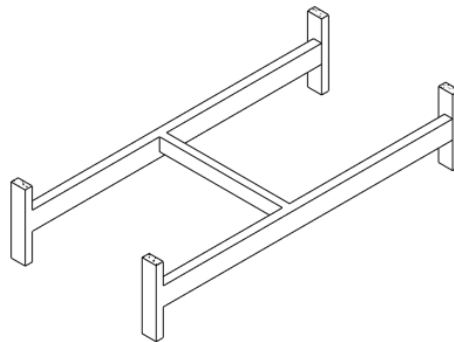


Figura 1.9 - Vigas com apoios indiretos [12]

A Figura 1.10 ilustra dois exemplos de apoios de extremidade e de continuidade, com ligação monolítica, para uma laje de pavimento vigada sujeita a um carregamento uniforme. A Figura 1.10 (a) ilustra o caso de uma viga de apoio de extremidade, a qual se encontra sujeita a rotações variáveis provocadas pela deformação da laje. Através do diagrama de momentos fletores elásticos M conclui-se que o momento fletor “ m ” tem que ser equilibrado. Este momento é absorvido pela rigidez de torção da viga, originando momentos torsores nesta. Como a viga de apoio se encontra restringida à rotação pela sua rigidez de torção,

restrição esta que ocorre devido à ligação monolítica da viga de bordadura à laje de pavimento e também pela sua ligação aos pilares, os momentos torsores que surgem constituem momentos hiperstáticos. À semelhança do que acontece no caso descrito anteriormente, a viga de apoio de continuidade intermédia, ilustrada na Figura 1.10 (b), pode ficar sujeita a esforços de torção se não subsistir simetrias das lajes de pavimento adjacentes, ou seja, carregamentos e vãos diferentes das lajes. A ausência de condições simétricas nas lajes provoca na viga um diferencial de momentos, “ Δm ”, que terá que ser absorvido pela sua rigidez de torção. Estes momentos torsores aparecem, igualmente ao caso da Figura 1.10 (a), devido à restrição de rotação da viga.

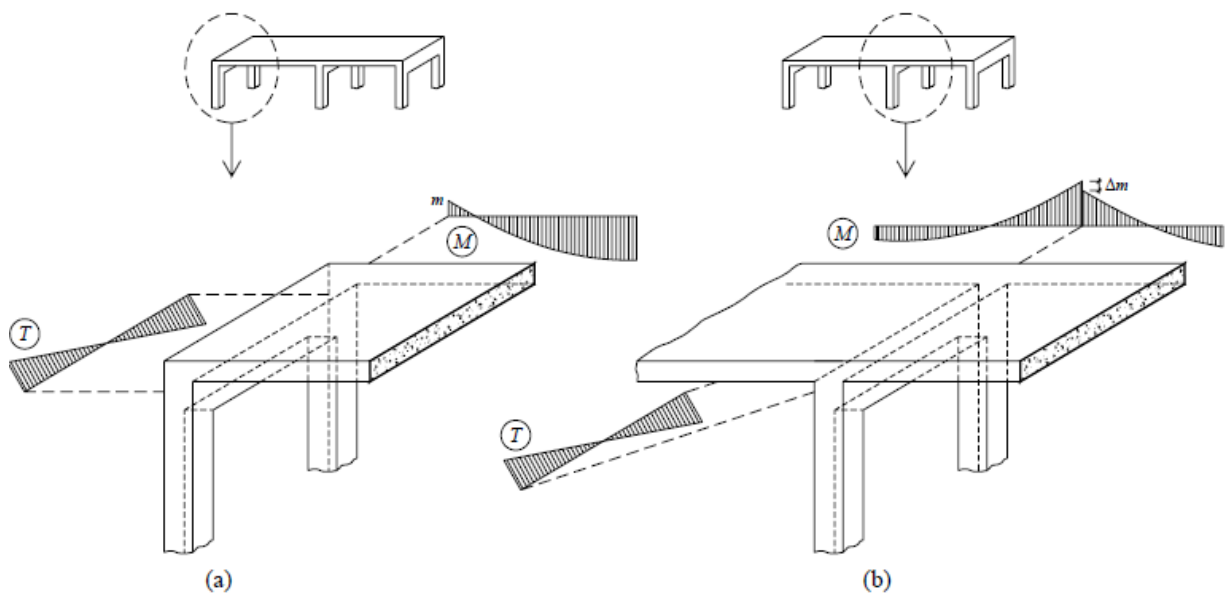


Figura 1.10 - Apoio de laje de pavimento em viga de extremidade e de continuidade [16]

A Figura 1.11 ilustra a descarga de uma laje de cobertura inclinada numa viga de bordadura. Neste caso, o esforço de torção ocorre devido ao esforço axial distribuído na laje inclinada, que constitui uma carga concêntrica em relação à viga.

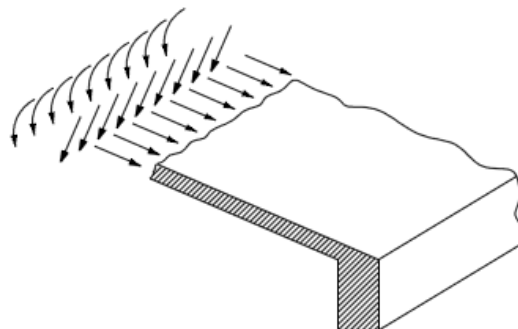


Figura 1.11 - Apoio de uma laje inclinada numa viga de extremidade [7]

1.1.3. Torção de Compatibilidade e Torção de Equilíbrio

A torção gerada nos diferentes casos descritos anteriormente não tem a mesma origem e podem distinguir-se duas situações fundamentais, a torção de compatibilidade e a torção de equilíbrio. Dependendo das condições em que a torção surja, esta pode ser ou não desprezada no procedimento de verificação da segurança.

Em estruturas hiperstáticas, como é o caso de pórticos correntes em edifícios com ligações monolíticas entre os elementos estruturais, a torção que se gera nas vigas deve-se muitas vezes a compatibilidades de deformação, constituindo assim um efeito secundário. Este género de torção designa-se por torção de compatibilidade e um exemplo encontra-se ilustrado na Figura 1.12 (a). Neste caso, o equilíbrio da estrutura não depende da consideração do efeito da torção no processo de dimensionamento. Deste modo, pode ocorrer deformação do elemento por fissuração nas zonas onde se instala os esforços de torção sem que ocorra o colapso da estrutura. Devem no entanto ser adotadas as disposições construtivas necessárias e garantidas as quantidades mínimas de armadura para o controlo da fissuração como recomendado nas disposições normativas, é exemplo das armaduras construtivas a designada *armadura de bordo apoiado*, recomendada pelo Eurocódigo 2, EN 1992-1-1 [35]. Neste caso, é possível desprezar-se a torção para efeitos de dimensionamento, pois a rigidez de torção do elemento na passagem para o Estado II (fase de fissuração) reduz-se drasticamente (Figura 1.13) e, conseqüentemente, os esforços de torção na ligação tornam-se bem menores, podendo mesmo ser desprezados pelo que não é realista adotar-se os diagramas elásticos de momentos flectores e torsões para uma hipótese do betão não fissurado. A consideração dos momentos flectores nulos equivale a considerar a rigidez de torção da viga nula.

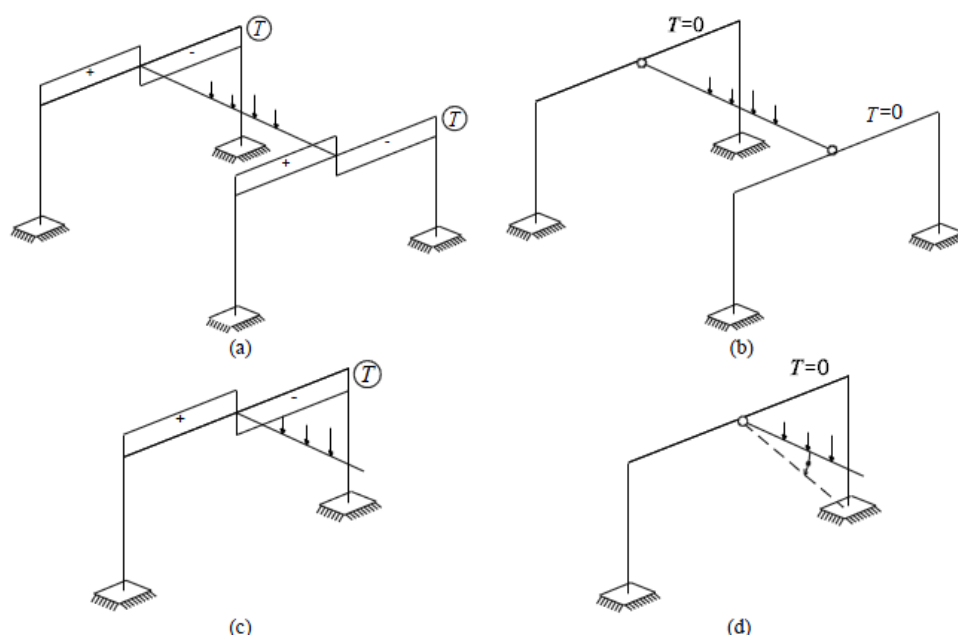


Figura 1.12 - Torção de compatibilidade e de equilíbrio e a respetiva formação de rótulas plásticas [7]

A Figura 1.13 ilustra a perda de rigidez de torção [27] de vigas, com dimensões diferentes mas áreas iguais, ensaiadas à torção e sujeitas a diferentes níveis de carga. A rigidez da viga após a fissuração é radicalmente reduzida em 85 a 90% segundo Hsu em 1968 [39] quando estas entram em estado fissurado. A redução da rigidez afeta a distribuição dos esforços hiperstáticos numa estrutura estaticamente indeterminada, sendo compensada por um aumento de esforços de flexão e corte noutras secções.

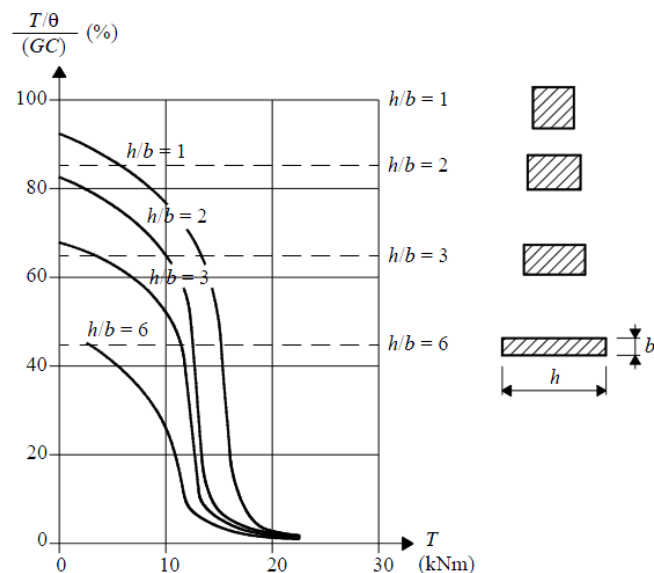


Figura 1.110 - Evolução da rigidez de torção com o momento torsos [16]

São exemplos de situações com torção de compatibilidade os casos ilustrados nas Figuras 1.4 (a), 1.9, 1.10 (a), 1.11 (apenas a torção na viga de apoio induzida pela deformação da laje por flexão pode ser considerada torção de compatibilidade).

A simplificação considerada nos modelos de cálculos das Figuras 1.10 (a) e 1.10 (b) onde se despreza a rigidez de torção encontra-se ilustrada na Figura 1.14 (a) e 1.14 (b), respetivamente. A Figura 1.14 (a) representa o caso do apoio de extremidade da laje de pavimento e a Figura 1.14 (b) é referente ao caso de um apoio de continuidade de uma laje. A mola colocada na zona da ligação monolítica simula a rigidez de torção elástica das vigas de apoio. A Figura 1.14 mostra que ao desprezar-se a rigidez de torção das vigas de apoio facilita muito o cálculo dos diagramas elásticos de momentos fletores.

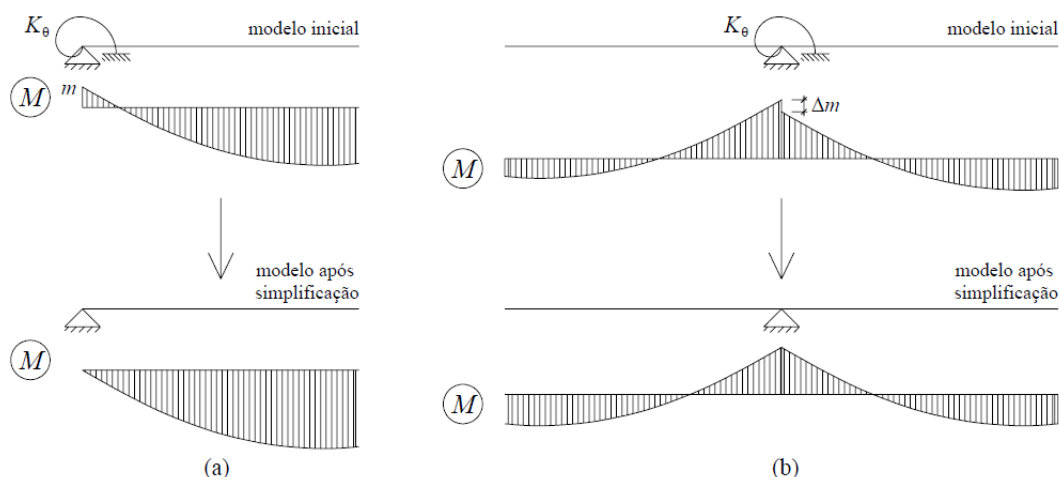


Figura 1.111 - Simplificação dos modelos de cálculo para viga de extremidade e de continuidade [16]

No caso de torção de equilíbrio, a estabilidade da estrutura depende da rigidez de torção da viga de apoio. Portanto, neste caso, não se pode desprezar este efeito em termos de dimensionamento. O caso ilustrado na Figura 1.12 (c) representa perfeitamente o descrito anteriormente, ou seja, se na zona de ligação da viga em consola com a viga de apoio se considerar a rigidez de torção nula (Figura 1.12 (d)), a primeira poderá rodar livremente nessa ligação dando-se o colapso parcial da estrutura.

Em estruturas isostáticas, quando se gera torção esta é designada torção de equilíbrio e deve ser considerada em Estados Limites Últimos (ELU). Já a torção de compatibilidade, após a fissuração os momentos torsores, resultantes das restrições induzidas pelos elementos adjacentes, reduzem substancialmente, logo, interessa fundamentalmente garantir a segurança em Estados Limites de Serviço (ELS). Devido à necessidade de compatibilidade de deformações dos elementos adjacentes podem produzir-se efeitos secundários que devem ser considerados em ELS e deve dispor-se de armaduras necessárias para controlar esses efeitos. O cálculo complexo da deformação e da fissuração é substituído, pelos regulamentos e códigos, pela adoção de armaduras construtivas pois o problema ocorre frequentemente em estruturas correntes e a dificuldade é ultrapassada com simplicidade.

1.1.4. Torção de Saint Venant e torção com Empenamento

A forma da secção transversal do elemento influencia, de certo modo, o mecanismo como este absorve os esforços de torção a que se encontra sujeito. Assim, surge mais uma classificação dos efeitos da torção caracterizando a forma como as secções absorvem os efeitos torsionais. No caso de secções cheias e ocas, os momentos de torção são resistidos essencialmente por um fluxo de tensões circulatório ao longo das paredes da secção, a designada *Torção circulatória* ou *Torção de St. Venant*, ilustrada na Figura 1.15 (a). Em elementos de secções abertas a torção é resistida essencialmente por momentos adicionais

que se geram nas paredes, a denominada *Torção com empenamento*, encontrando-se este caso ilustrado na Figura 1.15 (b).

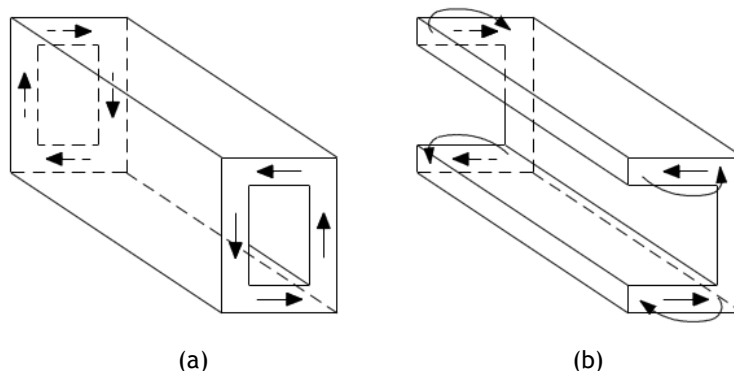


Figura 1.112 - Torção circulatoria e torção com empenamento [7]

A torção com empenamento é um tema que não será tratado explicitamente neste trabalho, mas de seguida serão referidos alguns aspetos relativos a este tipo de torção que se consideram importantes. Na realidade, a ação torsional é acompanhada muitas vezes pelo empenamento das secções.

O empenamento da secção transversal ocorre devido a diferentes alongamentos longitudinais das fibras. O empenamento é geralmente variável ao longo do desenvolvimento da viga e usualmente devido a restrições, como por exemplo, a existência de diafragmas que restringem as deformações longitudinais, ou ainda devido à distribuição não homogénea do momento torsor. Nos locais onde o empenamento é restringido ocorrem as tensões longitudinais de tração e compressão máximas e a uma diminuição das tensões tangenciais. Apenas as secções de geometria circular e as secções com certas propriedades de configuração são livres de empenamento. As vigas com secção de paredes finas não sofrem tanto os efeitos do empenamento como vigas com secção de paredes mais espessas [78].

Quando um elemento não se encontra restringido ao empenamento e para secções cheias ou ocas, os efeitos de empenamento não são tão relevantes quanto os efeitos da torção de St. Venant. Em secções abertas compostas por pelo menos três paredes (como por exemplo, secções em “I” ou “U”), o empenamento pode gerar esforços de flexão secundários que devem ser tidos em conta pois podem ser críticos. As restantes secções (cheias, vazadas e de parede fina composta ate duas paredes, por exemplo “L”), o empenamento pode gerar uns pequenos acréscimos de tensões no elemento que podem ser desprezados no cálculo por não afetarem a sua capacidade resistente. Quando o empenamento não pode ocorrer livremente, mesmo para secções cheias ou vazadas, as tensões longitudinais adicionais que resultam da restrição ao empenamento reduzem drasticamente no Estado II, uma vez que a fissuração liberta parte dessa restrição [78]. Por todas estas razões, e uma vez que as secções correntes de vigas de betão armado são constituídas por secções retangulares cheias ou vazadas, os eventuais efeitos da restrição ao empenamento podem ser desprezados.

A torção com empenamento é um fenómeno difícil de ter em conta no dimensionamento em Estado Limite Último, e não se encontra explicitamente contemplado em documentos normativos. Existe no entanto alguma bibliografia especializada que trata o problema da torção de empenamento, por exemplo, Wlassow em 1964, Grob em 1975 e Kovács em 1995 [16].

No que respeita à torção de St. Venant, no caso de uma viga de secção cheia ou vazada de betão armado, o mecanismo de absorção dos efeitos torsionais através das tensões circulatorias (comportamento puro de torção) só é válido quando o elemento não se encontra fissurado. Após a fissuração do betão, os efeitos torsionais deixam de ser absorvidos pelo comportamento da secção transversal mas sim com base no comportamento da viga ao longo do seu eixo longitudinal. Este assunto será abordado mais especificamente no Capítulo 2.

1.2. Justificação do tema do trabalho

1.2.1. Introdução

Nos casos correntes de projeto de estruturas, o dimensionamento de vigas de betão armado é geralmente realizado desprezando-se o efeito da restrição axial induzido pelos restantes elementos estruturais aos quais se encontram ligadas, em geral pilares e lajes. Cada viga encontra-se restringida, não só em termos de rotação nas suas extremidades como também em termos do seu alongamento axial. Se o carregamento da viga provocar nesta uma deformação axial, a sua restrição axial irá gerar o aparecimento de um estado de tensão de compressão ao longo do seu eixo. O nível de confinamento na viga aumenta com o aumento da rigidez dos elementos adjacentes. Contudo, importa conhecer se esta simplificação conservadora não conduzirá a um sobredimensionamento exagerado do elemento, uma vez que o confinamento da viga conduz ao aumento da sua resistência. Por exemplo, para o caso da flexão as zonas mais suscetíveis de serem alteradas em termos comportamentais são as zonas potenciais de formação de rótulas plásticas devido à carga axial resultante do efeito de confinamento [37]. É também sabido que o esforço transversal resistente em vigas aumenta em resultado da existência de um estado de tensão de compressão axial. Este aspeto encontra-se aliás previsto na generalidade dos documentos normativos, de que é exemplo o Eurocódigo 2 [35]. Assim sendo, é esperado que o momento torsor resistente em vigas também aumente em resultado do referido estado de tensão, visto que as tensões de corte são preponderantes.

É importante conhecer-se a evolução do comportamento dos elementos de betão armado com restrição axial para, deste modo, se prever o desempenho real da estrutura face ao carregamento aplicado, tais como o desenvolvimento de deformações e sucessivas fissuras e sua resistência. Como já referido anteriormente, as vigas são geralmente dimensionadas

desprezando-se a sua restrição axial. Na realidade, o confinamento da viga existe e ainda não existem regras nos documentos normativos que abordem essa situação.

Os primeiros estudos encontrados na literatura que têm em conta a situação de confinamento axial são relativos a estruturas metálicas, verificando-se que este efeito tem uma importância considerável nos problemas de encurvadura dos perfis metálicos. Mais recentemente os estudos abordam o comportamento de vigas metálicas inseridas em estruturas que sofrem restrição aos deslocamentos axiais devidos à dilatação térmica quando sujeitas a um incêndio. Ensaios realizados por Smith-Pardo e Aristizabal-Ochoa em 2007 [72] em vigas metálicas compostas por um perfil prismático permitiram concluir que o aumento das imperfeições iniciais aumenta a compressão axial induzida, e este aumento é maior para o caso de cargas concentradas em comparação com cargas uniformemente distribuídas. Tsipiras e Sapountzakis, em 2009, [70] concluíram que a condição axial limite tem uma influência significativa na rigidez de torção e na resposta da viga mista (betão - perfil metálico "I") ao efeito do momento torsor uniforme. As vigas que possuem uma restrição axial total, para o mesmo nível de momento torsor, apresentam menores ângulos de torção, ou seja, a restrição total dos deslocamentos ao longo do eixo da viga incrementa a sua rigidez à torção. Os referidos autores obtiveram tal conclusão ao avaliarem o comportamento de vigas compostas (secção em "I") envolvidas totalmente em betão e sujeitas à ação de um momento torsor uniforme, em que as diferentes vigas apresentam desiguais níveis de restrição. No caso de estruturas metálicas o Eurocódigo 3 preconiza métodos avançados de cálculo que são baseados em modelos numéricos de comportamento não linear material e geométrico [63].

As conclusões destes estudos não são diretamente extrapoláveis ao caso de vigas de betão armado, uma vez que o comportamento mecânico de vigas de betão armado é diferente do de vigas metálicas. [54] [36] [71].

Neste trabalho não será desenvolvido o estudo do confinamento em vigas metálicas, mas sim em vigas de betão armado sujeitas à torção. Considera-se importante desenvolver-se esta questão uma vez que os avanços no estudo do comportamento dos elementos como forma integrada na estrutura e não de forma isolada, tornam possível ao projetista possuir uma perceção da estrutura como um todo e realizar uma análise comportamental mais realista e um dimensionamento mais otimizado.

1.2.2. Confinamento em vigas sujeitas à flexão

É do conhecimento geral que uma viga de betão armado sujeita à flexão apresenta três estados distintos: o Estado I até ocorrer a fissuração da peça, o Estado II até ocorrer a cedência das armaduras e o Estado III que ocorre desde a plastificação das armaduras até à rotura do elemento. Importa conhecer se uma viga que se insere numa estrutura apresenta o mesmo desenvolvimento de comportamento que a viga livre de restrições à deformação axial normalmente considerada.

Na bibliografia consultada não foram encontrados muitos estudos sobre esta problemática. Por exemplo, foram encontrados estudos publicados por Délcio Gomes e por Rui Rodrigues [37][67], na FCTUC, 2011, que se dedicaram a estudar o comportamento à flexão de vigas de betão armado axialmente restringidas. Estes estudos consistiram no ensaio à flexão de vigas de secção retangular cheia com um vão de 3 metros. A restrição axial foi simulada com o auxílio de armaduras externas devidamente ancoradas nas extremidades da viga. Na Figura 1.16 encontra-se ilustrado um diagrama carga-deformação de um dos grupos de vigas ensaiadas à flexão por Délcio Gomes e Rui Rodrigues, as três vigas possuem a mesma taxa de armadura longitudinal e transversal, bem como a mesma classe de resistência de betão. A viga 5 constitui uma viga de comparação sem restrição axial.

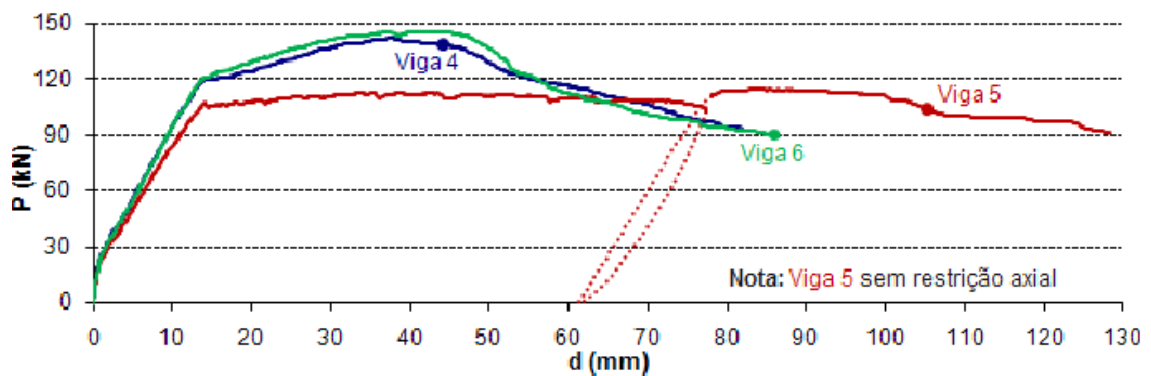


Figura 1.16 - Diagramas P-d das Vigas 4, 5 e 6 [37]

De uma forma geral, os referidos autores observaram que a influência da restrição axial incide essencialmente no Estado II e Estado III. Após a fissuração das vigas o efeito da restrição faz-se sentir através do aumento da rigidez no Estado II, mas é após a cedência das armaduras que o nível de esforço axial resultante da restrição origina um aumento significativo da rigidez da viga e da carga de plastificação das armaduras. A reserva de resistência que as vigas axialmente confinadas apresentam no Estado III é conferida pelo esforço axial mobilizado no sistema de restrição axial. Já no Estado I, a restrição axial não influencia notavelmente a rigidez da viga bem como o valor da carga para o qual a fissuração ocorre. De facto, a rigidez da viga no Estado I depende principalmente da configuração da secção transversal, ou seja, da inércia da secção [21]. Tendo em conta o acréscimo da rigidez do elemento, existe um aumento da reserva de resistência da viga que permite uma maior absorção e sucessiva dissipação de energia, em caso de sismo. No entanto, interessa perceber a amplitude de deformação que existe desde que se inicia a fendilhação até que as armaduras entrem em cedência. O surgimento de fissuras que sejam visíveis ao olho humano cria uma ideia de insegurança, apesar do estado da viga poder encontrar-se distante da cedência. O ideal é que esta reserva de resistência confira segurança à estrutura, ou seja, um intervalo de tempo considerável desde a abertura de fissuras até à cedência sem que haja um mau aproveitamento da secção.

Com base no estudo de Délcio Gomes e de Rui Rodrigues, na FCTUC, 2011, é ainda possível observar-se que apesar de a restrição axial incrementar a rigidez da viga, a sua ductilidade diminui ligeiramente. Este facto foi observado a partir da comparação do valor de deformação último que, no caso de vigas restringidas axialmente, é ligeiramente inferior ao valor da deformação última de vigas ensaiadas sem restrição axial [67]. Entende-se por ductilidade a capacidade de um material, secção, elemento estrutural ou estrutura de suportar grandes deformações sem que haja grande perda da sua resistência. A esta propriedade é hoje atribuída uma grande importância visto que está diretamente relacionada com a capacidade estrutural de redistribuição de tensões e esforços em segurança. Por isso, o estudo de qualquer fenómeno que modifica o comportamento dúctil de vigas torna-se importante.

Outro estudo publicado por Tiejiong Lou et al, em 2011, permite chegar às mesmas conclusões anteriores [55]. Esta investigação consistiu em simular o confinamento da viga através da colocação de armaduras exteriores que atuam como restrição passiva, ou seja, apenas atuam quando a viga tende a aumentar o seu comprimento, ao nível das fibras tracionadas onde se localizam as armaduras exteriores, devido à deformação por flexão provocada pela aplicação das cargas no vão da viga. Tal como se pode observar na Figura 1.17 (diagrama carga-deformação resultado dos ensaios realizados por Tiejiong Lou et al) com o aumento da área de armadura exterior (simulando uma maior restrição axial), o valor da carga de cedência e última (de rotura) aumentam, enquanto a carga de fissuração se mantém visualmente inalterada. A viga, ao ser solicitada pelo carregamento, tende a sofrer deformações na direção longitudinal e, conseqüentemente, o elemento tende a alongar na zona tracionada da secção transversal, induzindo uma força de tração na armadura externa. Note-se que a força de restrição na armadura externa aumenta linearmente com a deformação da viga, aumentando deste modo a capacidade de carga da viga.

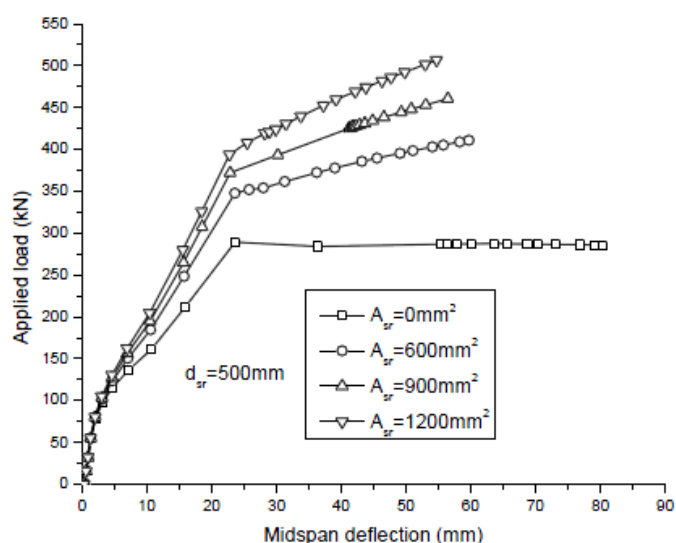


Figura 1.17 - Diagrama da carga-deformação de vigas de betão armado axialmente restringidas com diferentes áreas de reforço exterior [55]

1.2.3. Confinamento em vigas sujeitas à torção

Quando uma viga de betão armado é submetida a um momento torsor superior ao valor de fissuração, ocorrem fissuras diagonais, com desenvolvimento helicoidal em torno do seu eixo longitudinal. Deste modo, após a fissuração forma-se um mecanismo de treliça espacial onde os elementos inclinados entre fissuras se encontram sujeitos à compressão e os elementos transversais (perpendiculares ao eixo) e longitudinais suportam as trações resultantes do esforço de torção. Um conceito básico para o dimensionamento estrutural de vigas sujeitas a este tipo de ação é que as diagonais devem ser asseguradas pelo betão (o betão possui grande resistência à compressão) enquanto as barras longitudinais e transversais devem ser asseguradas pelo aço (o betão possui uma fraca resistência à tração). A teoria de analogia da treliça espacial, para caracterizar o comportamento de vigas de betão armado solicitadas à torção, foi desenvolvida originalmente, por Rausch em 1929 e mais tarde em 1971 alargada por Lampert e Collins, com trabalho adicional de Hsu, Thurliman, Elfregren, entre outros [60].

Na subsecção anterior, os estudos mencionados pretenderam, essencialmente, entender o comportamento de vigas confinadas axialmente sujeitas à flexão. No entanto, na realidade as vigas também devem estar preparadas para resistir a outros tipos de solicitações, de entre as quais a torção, a falha de resistência de uma viga à torção pode ser mais perigosa que uma falha de resistência à flexão, pois pode ocorrer subitamente e sem aviso prévio devido ao ser carácter mais frágil [61][22].

No caso de vigas à torção livres de restrições no Estado II, com o aparecimento de fissuras a armadura longitudinal é solicitada elasticamente à tração até atingir a sua tensão de cedência. Uma vez em cedência, as armaduras sofrem grandes extensões sem que a tensão aumente muito, permitindo que a viga suporte grandes deformações sem perda da sua capacidade de carga. Em ambos os estados comportamentais anteriormente referidos, a viga apresenta deformações axiais positivas (alongamento).

No caso de vigas axialmente restringidas sujeitas à torção espera-se um comportamento ligeiramente diferente ao exposto no parágrafo anterior. O facto de a viga se encontrar restringida origina o aparecimento de uma força de compressão ao longo do seu eixo longitudinal que poderá proporcionar um aumento da rigidez e da resistência da mesma, devido ao fecho das fissuras. Além disso, a força de compressão originará também um aumento de tensão nas escoras inclinadas que poderá conduzir a uma rotura tendencialmente mais frágil por esmagamento do betão. Ou seja, a força de compressão axial impede os elementos longitudinais de se alongarem livremente, e conseqüentemente, a restrição da extensão das armaduras poderá coibir as armaduras de entrarem em cedência para o valor de carga esperado. Desta forma, à medida que o efeito de restrição axial aumenta, a rotura da viga deverá ser tendencialmente mais frágil.

É importante referir que no dimensionamento de elementos estruturais aos Estados Limites Últimos de rotura, deve-se fazer uma avaliação da resistência e da ductilidade de

modo a que se obtenha uma secção otimizada em que ambos os materiais (aço e betão) sejam utilizados até à sua capacidade última [8].

A partir da experiência da observação do comportamento mecânico de vigas de betão armado submetidas à torção, poderá esperar-se que em caso de confinamento total a armadura longitudinal possa apresentar uma baixa influência para o comportamento das vigas à torção. No entanto, na prática deve dimensionar prevendo-se sempre uma armadura mínima constituída por estribos verticais e barras longitudinais que seja capaz de absorver as tensões de tração que são libertadas pelo betão tracionada aquando da fissuração, de modo a evitar-se uma rotura brusca e prematura [54]. Ensaio realizados por Morsch, nos anos 1904 a 1921, [54] demonstraram que em vigas dotadas de armadura em apenas uma direção, 0° ou 90° (armadura longitudinal ou transversal), a sua capacidade resistente não é aumentada em relação à mesma viga sem armadura. Contudo, dotando a viga de uma armadura helicoidal, acompanhando as trajetórias das tensões principais de tração previstas pela teoria da elasticidade, inclinadas de 45° , conduz a uma carga de rotura bastante superior. Daí ser necessário prover a viga de uma quantidade mínima de armadura longitudinal e transversal.

A problemática descrita neste capítulo e a ausência de estudos específicos e de disposições nos documentos normativos que abranjam o efeito do confinamento em vigas à torção, são questões que contribuiram na escolha do desenvolvimento de um modelo teórico baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável para vigas confinadas axialmente.

1.2.4. Descrição do comportamento de uma Viga de Betão Armado à Torção

A caracterização do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção pode ser realizada mediante a obtenção e estudo da curva comportamental momento torsor (T) - rotação (θ). Tal curva comportamental permite avaliar, de uma forma simples, o estado evolutivo da viga em todo o historial de carga.

Os dados experimentais resultantes de ensaios de vigas correntes em betão armado sujeitas à torção pura até à rotura, e disponíveis na literatura consultada, permitem, para taxas de armaduras moderadas, desenhar uma Curva $T-\theta$ típica tal como a representada na Figura 1.18. Na referida curva típica é possível distinguir três zonas (Zonas 1, 2 e 3) correspondentes a fases de comportamento distintas.

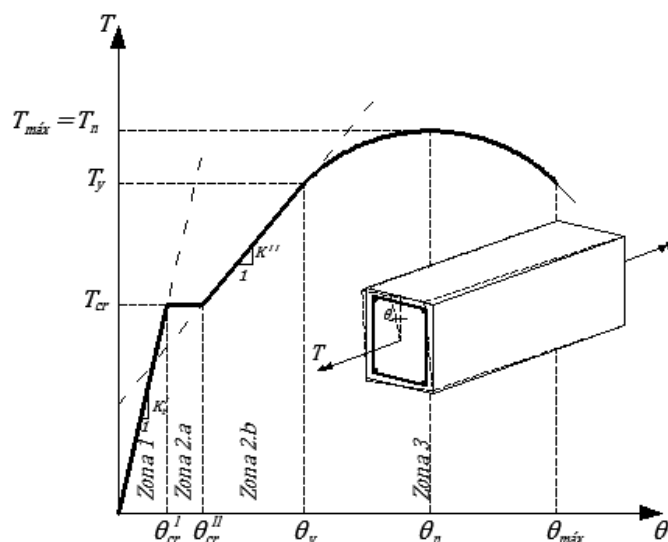


Figura 1.18 - Curva $T - \theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura

A Zona 1 corresponde à fase comportamental antes de ser atingido o momento torsor de fissuração T_{cr} (Estado I ou não fissurado). Nesta fase a rigidez de torção (K_t^I , Figura 1.18) pode ser estimada através da Teoria de St. Venant, uma vez que é considerado válido poder assumir-se um comportamento elástico linear da viga. Desta forma, pode considerar-se que o declive da curva é aproximadamente constante na zona 1. Esta é uma aproximação simplificativa, uma vez que os ensaios experimentais mostram que, pouco antes de ser atingido o momento torsor de fissuração, a viga evidencia uma ligeira perda de rigidez, provavelmente resultante da microfissuração do betão [20]. No entanto, como as rotações são muito pequenas nesta fase comportamental, o cálculo da rigidez de torção tendo por base um comportamento elástico-linear assumido é bastante aceitável. Importa ainda referir que nesta fase a armadura de torção tem pouca influência na rigidez da viga, contribuindo apenas para aumentar ligeiramente o momento torsor para o qual ocorre a fissuração. Este ligeiro aumento do momento torsor é diretamente proporcional à taxa de armadura de torção, tal como referido por Bernardo em 2003 [16].

Após ser atingido o momento torsor de fissuração, inicia-se a Zona 2 (Estado II ou fissurado). Para as vigas com secção cheia, esta fase tem início com um aumento significativo da rotação para um valor do momento torsor constante e igual a T_{cr} (Zona 2.a da Figura 1.18). Tal aumento da rotação ocorre ao longo de um intervalo de deformação ($\theta_{cr}^I < \theta < \theta_{cr}^{II}$), a partir do qual se observa um desenvolvimento praticamente linear da Curva $T - \theta$ até um determinado nível do momento torsor. O declive deste troço representa a rigidez de torção da viga em estado fissurado (K^II).

As vigas com secção vazada não evidenciam experimentalmente a Zona 2.a caracterizada anteriormente. Bernardo em 2003 [16] avançou uma possível explicação para esta diferença de comportamento entre vigas com secção cheia e vazada na transição do

estado não fissurado para o estado fissurado. Tal explicação faz intervir a capacidade de redistribuição de tensões tangenciais que as secções cheias apresentam devido à existência do núcleo de betão, dando origem a uma zona de transição comportamental até que as armaduras sejam efetivamente mobilizadas. Tal capacidade de redistribuição é muito limitada nas secções vazadas, principalmente se as paredes forem finas. A caracterização do comportamento da viga à torção no estado fissurado poderá ser realizada, de forma aceitável, por intermédio de uma análise elástico-linear em regime fissurado. Um modelo adequado para caracterizar a viga na Zona 2.b é um modelo de treliça espacial com ângulo constante de 45° e considerando um comportamento elástico-linear dos materiais, ou seja, considerando relações constitutivas lineares para os mesmos. A validade deste modelo foi observada por Bernardo em 2003 [20][23].

O modelo elástico-linear referido anteriormente para caracterizar a Zona 2.b pode ser considerado válido até que a Curva $T - \theta$ comece a evidenciar um comportamento não linear acentuado, a partir do qual a viga entra na Zona 3. Tal situação pode ocorrer por duas razões. O comportamento elástico-linear pode deixar de ser válido quando pelo menos uma das armaduras de torção (longitudinal ou transversal) entra em cedência. No caso de vigas com taxas de armadura elevadas, a perda de linearidade pode também ocorrer devido ao nível elevado de tensões instaladas no betão comprimido das escoras, o que origina uma resposta não linear dos materiais. Um modelo eficaz para caracterizar esta fase comportamental é o modelo de treliça espacial com ângulo variável (Variable Angle Truss Model - VATM). A Fase 3 termina quando a viga atinge a rotura efetiva, quer por esmagamento do betão comprimido nas escoras quer por rotura das armaduras tracionadas (caso de vigas com taxas de armaduras de torção muito baixas).

1.3. Objetivos do trabalho

O trabalho apresentado, em termos de análise efetuada, pode ser dividido em quatro objetivos principais:

Primeiro objetivo - Extensão do Modelo de Analogia da Treliça Espacial de Ângulo Variável (VATM) por forma a prever o comportamento de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado sujeitas à torção e a uma força de compressão centrada induzida pelo confinamento axial. A estrutura da formulação do VATM modificado seguirá a estrutura original da formulação global do VATM original. Como a utilização do modelo pode tornar-se um tanto complexa e morosa se os cálculos forem realizados manualmente, o modelo proposto será implementado num aplicativo computacional, designado TORQUE_MTEAV modificado.

Segundo objetivo - Realização de uma análise paramétrica de forma a observar a influência do confinamento axial no comportamento de vigas de betão armado. Esta análise paramétrica divide-se em duas partes:

- Na Parte I o objetivo é analisar a influência do nível de confinamento na evolução de vários parâmetros caracterizadores do estado interno de deformação da viga (parâmetros estes que constituem os resultados de saída do TORQUE_MTEAV modificado).
- Na Parte II o objetivo é analisar a influência da resistência do betão à compressão, da taxa total de armadura de torção e do nível de confinamento axial no comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção, mediante o estudo da evolução do momento torsor resistente (máximo) e respetiva rotação para diferentes combinações das três variáveis de estudo.

Terceiro objetivo - Elaboração de ábacos de apoio ao projeto de vigas à torção que permitem corrigir o valor da resistência à torção das vigas, obtido através de procedimentos usuais tais como disposições normativas, de modo a contabilizar o efeito favorável do confinamento axial. Estes ábacos permitirão estabelecer uma correlação entre o incremento da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento, e as várias variáveis de estudo analisadas, designadamente: resistência do betão à compressão, taxa total de armadura de torção e nível de confinamento axial.

Quarto objetivo - Validação do VATM modificado e confirmação das respetivas previsões teóricas tendo por base alguns resultados experimentais disponíveis e resultados obtidos através de uma análise não linear com elementos finitos de uma viga de referência utilizando o programa LUSAS.

1.4. Organização do documento

Apresenta-se seguidamente a organização da dissertação com uma descrição muito sumária do conteúdo dos diversos capítulos.

No Capítulo 1 apresenta-se o tema, enquadrando-o no âmbito da prática e salientando os aspetos que tornam este trabalho importante e necessário.

No Capítulo 2 apresenta-se a descrição de um modelo teórico e respetivo procedimento de cálculo, baseado no Modelo de Analogia da Treliza Espacial de Ângulo Variável (VATM), com vista à previsão teórica do comportamento último de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado sujeitas à torção pura. Neste capítulo são ainda apresentadas as leis constitutivas que caracterizam o comportamento do betão à compressão e das armaduras à tração utilizadas ao longo do presente trabalho. Para o apoio à dissertação foi utilizado o aplicativo computacional, designado TORQUE_MTEAV, que incorpora o procedimento de cálculo definido.

No Capítulo 3 o modelo teórico baseado no VATM, e respetivo procedimento de cálculo, é modificado com vista a torná-lo apto a prever o comportamento último de vigas de betão armado e pré-esforçado à torção confinadas axialmente. Também o modelo do VATM modificado foi implementado num aplicativo computacional designado TORQUE_MTEAV modificado. No final do capítulo apresenta-se uma tentativa de validação do modelo teórico através da utilização dos resultados experimentais de vigas de betão com pré-esforço longitudinal não aderente.

No Capítulo 4 apresenta-se uma análise paramétrica com o objetivo de averiguar a influência da resistência à compressão do betão, da taxa total de armadura de torção, do nível de confinamento axial, bem como dos parâmetros que caracterizam o estado interno de deformação da viga, no comportamento global de vigas à torção com confinamento axial. Esta análise paramétrica foi realizada com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado. Ainda neste capítulo são apresentados uns ábacos auxiliares para corrigir o valor da resistência à torção das vigas, obtido através de procedimentos usuais tais como disposições normativas, de modo a contabilizar o efeito favorável do confinamento axial.

No Capítulo 5, devido aos escassos resultados experimentais disponíveis, apresenta-se um estudo numérico baseado na modelação de uma viga de referência sujeita à torção realizada com o programa LUSAS. Este programa incorpora a possibilidade de realizar uma análise não linear com elementos finitos por forma a tentar simular o comportamento da referida viga à torção. Este capítulo tem como objetivo validar o VATM modificado através da comparação das previsões numéricas com as teóricas apresentadas no Capítulo 4.

Finalmente, no Capítulo 6 resumem-se as conclusões principais do estudo efetuado e apresentam-se indicações e recomendações para futuros desenvolvimentos do trabalho.

Para facilitar a leitura da dissertação, a anteceder o texto são apresentados o índice geral, a lista de figuras e de tabelas. As referências bibliográficas são listadas no final do texto.

Capítulo 2 - Modelação teórica do comportamento de vigas à torção: o VATM

2.1. Introdução

Neste capítulo descreve-se de forma sucinta alguns dos principais estudos desenvolvidos que conduziram ao conhecimento atual do comportamento e resistência de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado (pré-esforço longitudinal uniforme) submetidas à torção pura. Em particular, é descrito com mais pormenor o Modelo de Analogia da Treliça Espacial de Ângulo Variável (VATM - Variable Angle Truss Model) em vigas de betão armado e pré-esforçado de secção retangular cheia ou vazada. Tal modelo, que constitui o modelo base do presente trabalho, reveste-se de uma grande importância uma vez que a Analogia de Treliça Espacial serviu de base para a elaboração das disposições relativas ao dimensionamento à torção incorporadas em diversos documentos normativos com enorme abrangência territorial, tais como o código do ACI (American Concrete Institute), os códigos europeus MC (Model Code) 90 e EC 2 (Eurocode 2), entre outros.

Neste capítulo, é apresentado e descrito o procedimento de cálculo baseado no VATM com vista à previsão teórica do comportamento de vigas de betão armado e de vigas de betão pré-esforçado sujeitas à ação de um momento torsor até à rotura. Tal previsão é realizada através do cálculo e traçado das curvas teóricas de comportamento momento torsor (T) - rotação (θ), em particular na zona correspondente à fase última comportamental.

A adaptação do VATM ao caso de vigas de betão armado e pré-esforçado submetidas a um estado de confinamento axial, em adição, à torção pura, será realizada no Capítulo 3.

2.2. Notas históricas

A torção em barras homogéneas constitui a base dos estudos pioneiros da torção. Os modelos teóricos associados são em muitos aspetos diretamente extrapoláveis ao caso de vigas de betão armado não fissuradas sujeitas à torção.

Em 1826, Navier [59] deduziu uma equação para barras homogéneas com secção retangular em tudo muito semelhante à equação teórica deduzida pelo mesmo autor para barras homogéneas com secção circular. Navier assumiu que as tensões tangenciais eram proporcionais à distância ao eixo de torção (à semelhança das barras circulares). No entanto, foi posteriormente observado que as extrapolações de Navier sobrestimavam a rigidez de torção em cerca da 20%, o que levantou dúvidas quanto à exatidão das equações de Navier para barras retangulares.

St. Venant em 1855 [68] resolveu a problemática da torção de peças prismáticas com secção retangular. A solução esteve na origem da substituição do momento polar de inércia pela constante de torção de St. Venant. Esta constante é 18% inferior em relação ao momento polar de inércia. O facto de St. Venant ter conseguido resolver o problema que subsistiu cerca de três décadas deveu-se à necessidade de esperar pela evolução das ferramentas

matemáticas necessárias, mais especificamente as Séries de Fourier e a Teoria da Elasticidade, teoria esta desenvolvida por Cauchy em 1828 [26].

Segundo a Teoria de St. Venant, uma barra prismática sujeita à torção origina apenas tensões tangenciais circulatorias. A tensão tangencial é nula no eixo de torção (centro de corte da secção) e é incrementada até a um valor máximo à superfície (a meio da face maior em secções retangulares). A distribuição das tensões tangenciais numa secção transversal de uma barra prismática, segundo a Teoria de St. Venant, mostra que a parte da secção mais solicitada corresponde à parte mais externa da mesma. Por estas razões, a secção transversal mais eficiente e económica para resistir à torção é um tubo fino. Em 1896, Bredt derivou umas equações para tubos de paredes finas, muito úteis para os estudos posteriores de vigas de betão armado à torção [24].

Desde a década de 60 do século passado, foram desenvolvidas diversas teorias para calcular a resistência à torção pura de vigas de betão armado. Estas teorias podem, de uma forma geral, ser divididas em dois grupos: a Analogia da Treliça Espacial e a Teoria da Flexão Enviesada. As três teorias mais marcantes foram desenvolvidas por Rausch em 1929 [64], Cowan em 1950 [32] e Hsu em 1968 [41]. As teorias desenvolvidas por Rausch e Cowan pertencem à Analogia da Treliça Espacial. Outros autores, como Lampert e Thurlimann em 1969 [53], Elfgren em 1972 [34] e Collins em 1973 [30], desenvolveram posteriormente novas teorias tendo por base as teorias originais de Rausch e Cowan. Apesar da Analogia da Treliça Espacial ter, desde a sua origem, influenciado a grande maioria dos investigadores, grupos de trabalho para o estabelecimento de normas, o código americano durante um longo período de tempo (desde 1971 [3] até 1995 [2]) adotou a teoria original de Hsu como base das disposições normativas para a torção em vigas de betão armado. Em 1995, o código americano foi revisto e as disposições relativas à torção foram reformuladas tendo por base a Analogia da Treliça Espacial, à semelhança do adotado por diversos documentos normativos (por exemplo, códigos europeus e canadiano).

Neste contexto histórico, torna-se assim importante abordar a idealização da teoria de Analogia de Treliça Espacial desenvolvida por Rausch em 1919 e que deu origem, entre outras teorias desenvolvidas posteriormente, ao VATM que constitui a teoria base deste trabalho.

A simulação de um elemento de betão armado (fase pós-fissuração) tendo por base o modelo de treliça teve origem em Ritter em 1899 [66] e Morsh em 1902 [58]. Os referidos autores observaram que numa viga de betão armado sujeita ao esforço transversal, ocorre fissuração diagonal que divide o betão numa série de escoras. No plano de carga, a viga foi idealizada como uma treliça plana. Neste modelo, as barras longitudinais superiores e inferiores constituem as cordas da treliça, enquanto que as barras transversais e as escoras de betão constituem os elementos de equilíbrio da alma. Para simplificar o modelo, os autores consideraram a inclinação das escoras como sendo constante e igual a 45° . Este modelo, designado de Modelo de Treliça a 45° de Ritter e Morsh, permitia derivar facilmente e de forma elegante três equações de equilíbrio a partir das quais podiam ser calculadas as

tensões na armadura transversal, na armadura longitudinal e nas escoras de betão a 45°. Estas equações podiam ser utilizadas para calcular a resistência última ao esforço transversal de uma viga de betão armado.

Em 1929 [64] foi proposta a primeira teoria capaz de prever a resistência última de elementos de betão armado sujeitos à torção. Esta teoria foi proposta por Rausch e consiste basicamente no alargamento do campo de aplicação do Modelo de Treliça a 45°. Rausch assumiu que uma viga de betão armado, após fissurar, funciona como um tubo. Deste modo a resistência de uma viga submetida a um momento torsor consiste, essencialmente, num fluxo circulatório de corte em torno do eixo de torção da viga, ou seja, este tubo funciona como uma treliça espacial. Esta treliça é formada por uma série de escoras inclinadas a 45° (em relação ao eixo da viga) que interagem com a armadura longitudinal e transversal. Face ao exposto, pode concluir-se que a ideia de Analogia da Treliça Espacial de Rausch estabelece uma conjugação inteligente entre a teoria do tubo fino de Bredt com a analogia da treliça plana para a análise do esforço transversal em vigas de betão armado. Além disso, este conceito fornece uma ideia bastante esclarecedora do funcionamento da armadura e do betão na resistência à torção.

No entanto, o modelo simplificado de Rausch não tem em conta alguns mecanismos resistentes adicionais, designadamente: a resistência ao corte da escora, a resistência ao corte devido ao “efeito de ferrolho” nas barras longitudinais e transversais, a contribuição do núcleo de betão e a resistência do betão à tração [16]. A não consideração destes mecanismos foi considerada como a responsável pelos desvios observados entre as previsões e as resistências efetivas de vigas à torção.

De modo a melhorar a precisão do modelo de Rausch foram desenvolvidas, nas últimas décadas do século passado, três aproximações. A primeira aproximação considera que a armadura é parcialmente eficiente, aproximação seguida por Andersen em 1935 [5], Cowan em 1950 [32] e assumida pelo código americano desde 1971 [3] até 1995 [2].

A segunda aproximação baseou-se na redução da área A (área limitada pela linha média do fluxo de corte e que aparece na formulação de Rausch pela introdução da Teoria do Tubo Fino de Bredt), assumindo que esta coincide com a área limitada por uma linha fechada que liga os centros dos varões longitudinais. Esta aproximação foi inicialmente seguida por Lampert e Thurlimann em 1969 [53] e adotada pelo código modelo europeu de 1978 [28].

A terceira aproximação foi proposta por Collins e Mitchell em 1980 [29] e consiste também em reduzir a área A assumindo que a linha média do fluxo de corte coincide com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras. Nesta aproximação, considera-se que o betão de recobrimento, betão exterior à linha média de um varão transversal, não é efetivo.

Contudo, a hipótese de Collins e Mitchell para o cálculo da profundidade do bloco equivalente das tensões de compressão não é rigoroso, pois não tem em conta o *softening effect*. Na realidade, a resistência à compressão da escora não é igual à resistência do betão medida em provetes cilíndricos em compressão uniaxial, uma vez que a resistência da escora

é significativamente reduzida pela fissuração diagonal (Hsu e Mo em 1985 [42]). Por isso, esta aproximação não foi adotada pela comunidade científica em geral. Ainda assim, esta aproximação continua a ser adotada pelo código canadiano [1].

2.3. Modelo de Treliça com Ângulo Variável - VATM - para vigas de betão armado

2.3.1. Considerações gerais

As aproximações enunciadas no final da Secção 2.2., apesar de melhorarem a equação proposta por Rausch, apresentavam alguns problemas que comprometiam a sua utilização generalizada.

A primeira questão dizia respeito ao facto de as aproximações se encontrarem calibradas apenas para um tipo de estruturas (vigas com pequenas dimensões do tipo das utilizadas em edifícios) e não se poder aplicar na generalidade dos casos. A segunda questão dizia respeito ao facto dos métodos empíricos de modificação da equação de Rausch serem considerados teoricamente não satisfatórios.

Deste modo, era necessário uma nova aproximação que, em primeiro lugar, unificasse o comportamento de vigas com pequenas ou grandes secções, bem como incluísse o caso das vigas pré-esforçadas. Em segundo lugar, essa nova aproximação deveria abandonar, tanto quanto possível, o carácter empírico da correção da equação de Rausch. De entre alguns modelos teóricos propostos por diversos autores, um dos modelos mais utilizado é o VATM que incorpora o *softening effect*. Este modelo teórico foi desenvolvido sucessivamente por diversos autores que tiveram por base o modelo de treliça inicial de Rausch.

Em 1969, Lampert e Thurlimann [53] desenvolveram o VATM assumindo que o ângulo das escoras de betão podia variar para além dos 45° e que a teoria da plasticidade seria aplicável aos elementos de betão armado. Assim, passou a ser possível explicar-se o facto de as armaduras longitudinal e transversal entrarem ambas em cedência mesmo que estas não respeitem o princípio da igualdade de volume (armaduras não equilibradas). Os mesmos autores, ao estudarem a deformação de vigas sujeitas à torção, observaram que as superfícies da viga que inicialmente se encontravam planas, após a deformação por torção transformavam-se numa superfície hiperbólica, ou seja, a escora diagonal de betão para além de se encontrar num estado de compressão também se encontra sujeita a um efeito de flexão por imposição da deformação imposta. Este fenómeno será apresentado com mais pormenor na Secção 2.3.4.

O VATM foi ainda desenvolvido por Collins, a partir de 1973 [30], embora com uma abordagem diferente. Este autor, em alternativa ao uso da teoria da plasticidade, utilizou a compatibilidade de deformações da treliça. Collins derivou uma equação de compatibilidade para determinar o ângulo do campo de tensões de compressão idêntica à de Wagner para o

campo de tensões de tração de almas de perfis metálicos [77]. Desta forma, Collins podia prever as condições de deformação utilizando o círculo de Mohr. O Modelo de Collins foi designado de Teoria do Campo Diagonal de Compressões.

Nos modelos anteriormente referidos, foi adotada a curva $\sigma - \varepsilon$ convencional para o betão comprimido nas escoras (curva obtida através de ensaios de provetes cilíndricos à compressão uniaxial). Na realidade esta curva não é conservativa, vindo-se posteriormente a observar que a sua utilização conduzia a desvios entre os valores previstos e efetivos da resistência à torção de vigas de betão armado. Como já foi referido anteriormente, existe na realidade a influência negativa do *softening effect*. Este fenómeno foi incorporado no VATM com sucesso por Hsu e Mo em 1985 [42] [43], dando origem a um novo modelo cujas previsões das resistências à torção para vigas de betão armado e pré-esforçado eram congruentes com as observadas experimentalmente. Esse modelo é por vezes designado de SVATM (Softened Variable Angle Truss Model).

É precisamente esta última versão do VATM que serve de base a este trabalho.

Nas seguintes secções apresenta-se, com algum rigor, o estabelecimento deste modelo e a uma respetiva formulação.

2.3.2. Análise de uma viga com base no Modelo de Treliza Plana

Como já foi referido anteriormente, o modelo de treliza espacial com ângulo variável derivou do modelo simplificado de treliza espacial de Rausch, que por sua vez derivou do modelo simplificado de treliza plana de Morsh e Ritter. Por isso, considera-se importante, numa primeira fase, entender o modelo de treliza plana para a análise do esforço transversal em vigas de betão armado.

Considere-se a viga ilustrada na Figura 2.1 a), de vão l e com uma carga concentrada aplicada a meio vão. Esta viga encontra-se sujeita à ação combinada do esforço transversal e da flexão. No modelo de treliza ilustrado é assumido que na corda inferior está localizada toda a armadura longitudinal inferior e na corda superior toda a armadura longitudinal superior. A distância vertical entre as cordas é designada d_v , que também pode ser considerada como sendo o comprimento das barras verticais.

Considere-se o elemento A para análise dos esforços, representado na Figura 2.1 (a). O equilíbrio do elemento A encontra-se ilustrado na Figura 2.1 (b). Analisando a Figura 2.1 (d), observa-se que a força de corte V (que atua na face esquerda) é decomposta em duas componentes - N e D , sendo a força N absorvida pelas armaduras longitudinais e a força D pelas escoras de betão. Conclui-se ainda que a componente horizontal, a força N , é igualmente distribuída pela armadura superior e inferior.

Pelo equilíbrio de forças:

$$\bar{N} = V \cot \alpha \quad (1-1)$$

$$D = \frac{V}{\sin \alpha} \quad (1-2)$$

Então:
$$\frac{\bar{N}}{2} = \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (1-3)$$

A tensão nas escoras de betão, σ_d , é obtida dividindo a força D pela área da secção transversal das escoras, como se pode observar na Figura 2.1 (b):

$$\sigma_d = \frac{D}{td_v \cos \alpha} \quad (1-4)$$

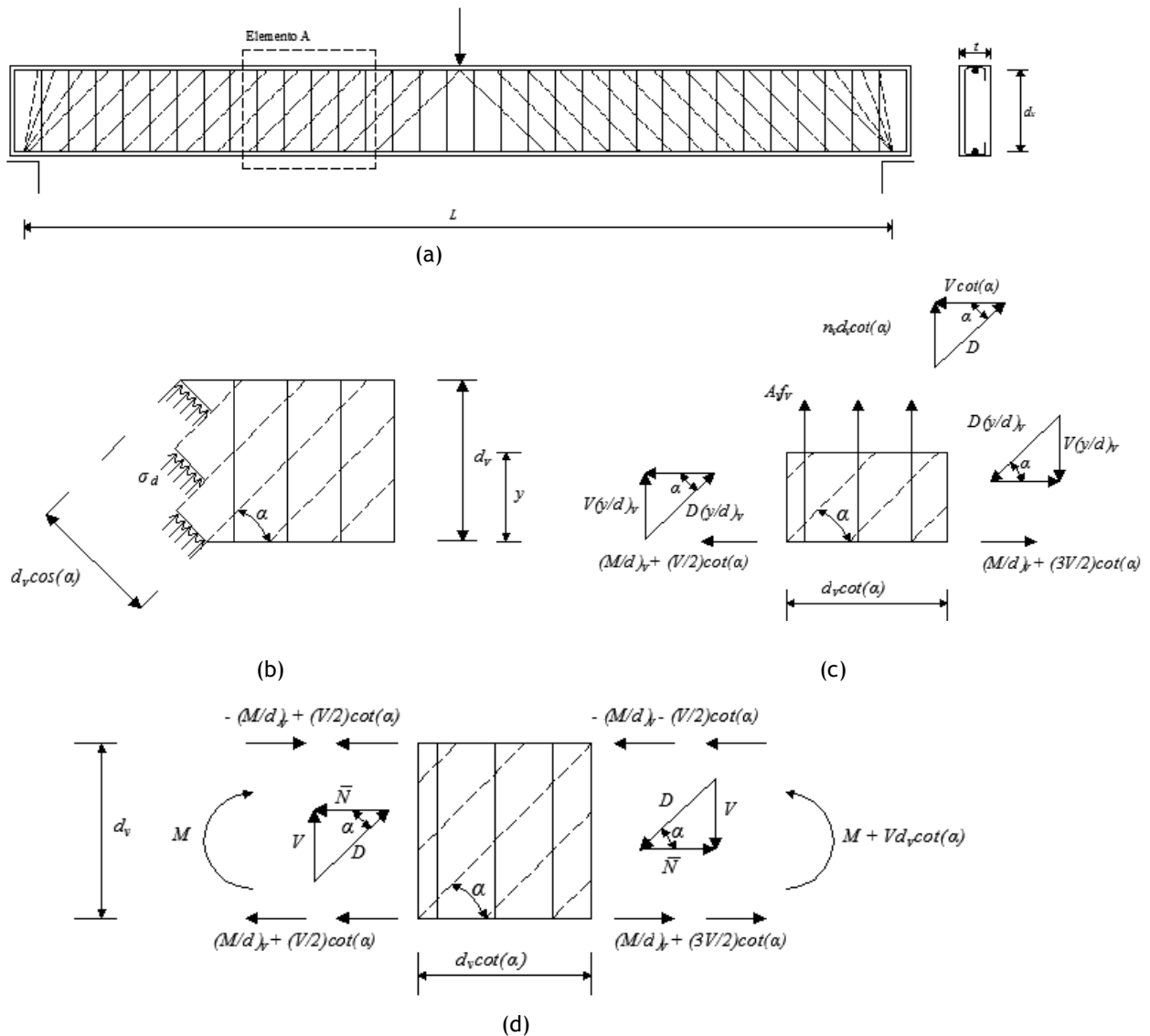


Figura 2.1 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana

Na corda longitudinal superior e inferior, para além da força $N/2$ provocada pela força de corte V , também existe o efeito provocado pelo momento M . Na face esquerda, em adição à força $N/2$ acresce-se $\pm M/d_v$, tem-se então a força total na corda superior e inferior, N_t e N_b , respetivamente:

$$N_t = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (1-5)$$

$$N_b = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (1-6)$$

Na face direita, em adição à força $N/2$ acrescenta-se o valor da força devido ao momento fletor $M + Vd_v \cot \alpha$:

$$N_t = -\frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (1-7)$$

$$N_b = \frac{M + d_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha = \frac{M}{d_v} + \frac{3V}{2} \cot \alpha \quad (1-8)$$

Através do equilíbrio horizontal obtido pelo corte horizontal no elemento A a uma distância arbitrária y da base, Figura 2.1 (c), obtém-se a força na armadura transversal. Observando-se o equilíbrio do triângulo representado nessa mesma figura, nota-se que para existir equilíbrio a força horizontal $V \cot \alpha$ deve decompor-se em duas forças: D e $n_v d_v \cot \alpha$. A primeira força é a resistida pelas escoras diagonais e a segunda força é uma força uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento, n_v .

Definindo:

$$n_v = \frac{A_v f_v}{s} \quad (1-9)$$

Obtém-se:

$$n_v d_v = V \tan \alpha \Leftrightarrow A_v f_v = V \frac{s}{d_v} \tan \alpha \quad (1-10)$$

2.3.3. Vigas com secção vazada sujeitas à torção pura

A analogia da treliça espacial de Rausch foi descrita muito sucintamente na secção 2.3.1. Este autor admitiu uma inclinação constante de 45° para as escoras diagonais de betão. Esta hipótese simplificativa está associada à relação equilibrada entre as quantidades de armadura longitudinal e transversal para o caso da torção pura. Contudo, os ensaios experimentais demonstraram, posteriormente, que ambas as armaduras (longitudinal e transversal) podiam entrar em cedência para um determinado intervalo da relação entre a quantidade de armadura longitudinal e transversal [40]. Por esta razão passou-se a adotar um ângulo variável para as escoras de betão, α . Este ângulo encontra-se gerido pela relação real entre a armadura longitudinal e transversal.

Na Figura 2.2 está representada uma viga de secção retangular e vazada, a qual é armada com um varão longitudinal em cada canto, cintas uniformemente espaçadas e escoras

inclinadas de um ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A interação entre estes três elementos forma a treliça espacial de ângulo variável.

Observando o corte transversal da viga, Figura 2.2 (a), nota-se que existem dois tipos de forças: as forças nas barras longitudinais, $A_l f_l$, e as forças nas escoras diagonais de betão. A resultante destas duas forças constitui o fluxo de corte, q , que atua na secção transversal.

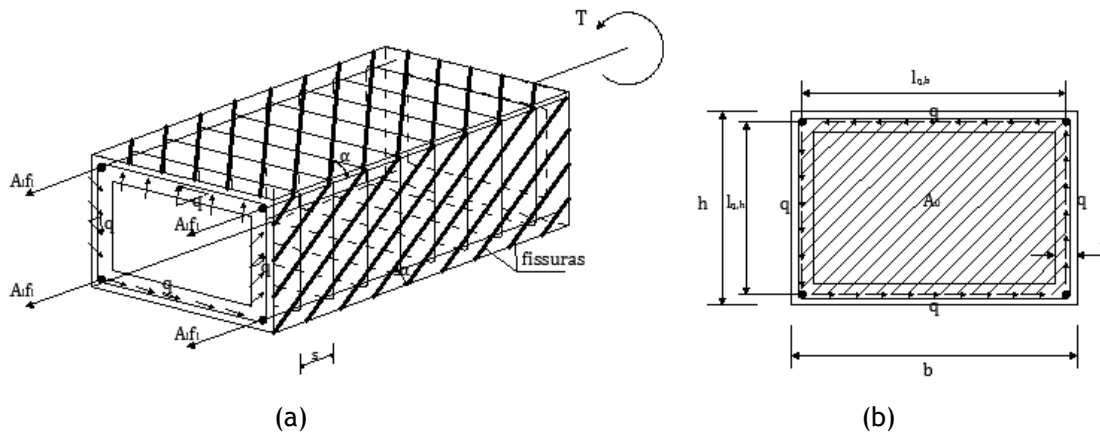


Figura 2.2 - Viga com secção retangular vazada sujeita à torção pura

A viga ilustrada na Figura 2.2 (a) pode ser assemelhada a um tubo fino a resistir a um momento torsor puro, pelo que pode ser utilizada a Teoria do Tubo de Paredes Finas de Bredt para a análise da mesma. Bredt deduziu que o fluxo de corte que circula nas paredes finas de um tubo é dado por:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (1-11)$$

O parâmetro A_0 é a área limitada pela linha média do fluxo de corte (Figura 2.2 (b)), que pode ser assumida como a linha média das paredes com espessura t .

A força de corte que atua na parede reta da viga em caixão é em tudo muito semelhante a uma força de corte a atuar numa secção cheia de viga com pequena largura, tal como ilustrado na Figura 2.1, exceto que neste caso o comprimento (maior dimensão) da secção transversal onde o fluxo se desenvolve é l_q . Desta forma, a força de corte equivalente ao fluxo de corte numa parede reta é dado por:

$$V = ql_q \quad (1-12)$$

A força na armadura longitudinal é calculada a partir da Equação (2-1):

$$\bar{N} = ql_q \cot \alpha \quad (1-13)$$

Definindo $\Delta N = A_l f_l$ como sendo a força total nas armaduras longitudinais, onde A_l e f_l representam a área total de armadura longitudinal e a tensão dessa mesma armadura,

respetivamente, e definindo $p_0 = \sum l_q$ como sendo o perímetro da linha média do fluxo de corte, a força total nas armaduras longitudinais vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot \alpha = A_l f_l \quad (1-14)$$

Substituindo q pela equação (2-11), vem:

$$A_l f_l = \frac{Tp_0}{2A_0} \cot \alpha \quad (1-15)$$

A força na armadura transversal, em cada cinta, pode ser derivada de uma forma muito semelhante a partir da Equação (2-10) e tendo em conta a igualdade $q = V/d_v$:

$$A_t f_t = qs \tan \alpha \quad (1-16)$$

Os parâmetros A_t e f_t representam a área de armadura transversal e tensão de uma barra transversal, respetivamente. Agora, substituindo, o fluxo de corte, q , na última equação pela Equação (2-11), vem:

$$A_t f_t = \frac{T_s}{2A_0} \tan \alpha \quad (1-17)$$

Falta ainda calcular a tensão nas escoras de betão, esta pode ser obtida a partir da Equação (2-4):

$$\sigma_d = \frac{q}{t \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1-18)$$

Substituindo a Equação (2-11) nesta última:

$$\sigma_d = \frac{T}{2A_0 t \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1-19)$$

Neste ponto, encontraram-se as quatro equações básicas de equilíbrio para a torção segundo o VATM: Equações (2-11), (2-15), (2-17) e (2-19).

Se ambas as armaduras longitudinal e transversal entrarem em cedência, isto é, $A_l f_l = A_t f_t$ e $f_l = f_t$, as Equações (2-15) e (2-17) ficam:

$$A_l f_l = \frac{T_y p_0}{2A_0} \cot \alpha \quad (1-20)$$

$$A_t f_t = \frac{T_y s}{2A_0} \tan \alpha \quad (1-21)$$

Como já foi referido anteriormente, a resistência última de uma viga de secção vazada é idêntica à de uma viga com secção cheia de características iguais (dimensões exteriores, tipo de betão, quantidade e disposição das armaduras). Uma vez que o núcleo não contribui para a sua resistência pode considerar-se que este não é efetivo quando a rotura é eminente. Desta forma, e uma vez que o VATM considera que a viga já está plenamente fissurada, as equações deduzidas nesta secção podem também ser consideradas válidas para vigas com secção cheia.

2.3.4. Flexão das escoras de betão

Como já foi referido anteriormente na Secção 2.3.1, quando uma viga se encontra submetida a um momento torsor, as escoras para além de se encontrarem sujeitas a um esforço axial também se encontram sujeitas a um efeito de flexão.

Na Figura 2.3 encontra-se ilustrada a flexão de uma escora de betão da parede superior de uma viga com secção vazada sujeita à torção. A superfície plana OABC encontra-se ao nível médio do fluxo de corte q . Na Figura 2.3 encontra-se representado a escora da superfície anteriormente referida (linha diagonal OA) com inclinação α em relação ao eixo longitudinal da viga.

Quando é imposto um ângulo de torção θ (por unidade de comprimento) à viga em caixão, a superfície plana onde se encontra a escora roda para a posição OA'. Em resultado desta deformação a superfície fica com um desenvolvimento curvo. A nova superfície da parede superior da viga transforma-se num paraboloide hiperbólico com uma inclinação na secção transversal de $\theta l_q \cot \alpha$ (Figura 2.3).

De forma a derivar equação para a curvatura da escora de betão, a superfície parabólica hiperbólica pode ser expressa pela equação:

$$w = \theta xy \quad (1-22)$$

Sendo w o deslocamento perpendicular ao plano x - y .

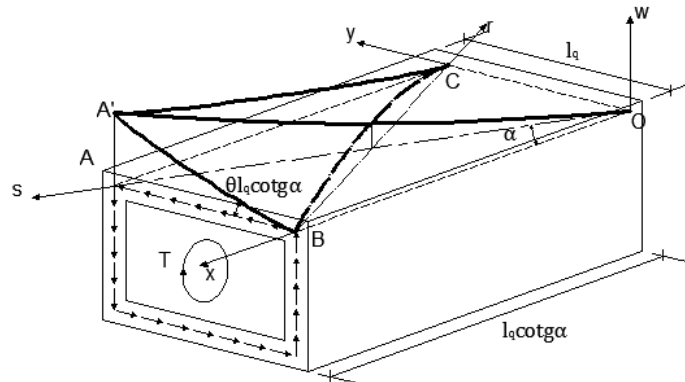


Figura 2.3 - Flexão de uma escora inserida numa parede de uma viga em caixão sujeita à torção

Derivando a Equação (2-22) em relação à direção da escora diagonal de betão, s , obtém-se a inclinação da escora de betão:

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta y) \cos \alpha + (\theta x) \sin \alpha \quad (1-23)$$

A curvatura da escora da betão, ψ , é a segunda derivada de w em relação a s :

$$\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin 2\alpha \quad (1-24)$$

Considere-se agora uma secção da escora de betão com largura unitária e com secção $l \times t$ (Figura 2.3), a qual será analisada quanto ao estado de tensão e extensão. Devido ao efeito de flexão da escora de betão, podem ocorrer trações junto à face inferior e, nessas condições, a área da escora pode ser desprezada uma vez que é considerado que o betão é apenas resistente à compressão. Assim, apenas a correspondente à profundidade t_d área é considerada como efetiva. Assumindo que a distribuição das extensões é linear, a extensão máxima, ε_{ds} , ocorre à superfície (Figura 2.4) e é dada por:

$$\varepsilon_{ds} = \psi t_d \quad (1-25)$$

O valor de t_d deve ser calculado a partir das equações de equilíbrio e das propriedades do bloco de tensões.

As Equações (2-24) e (2-25) constituem as duas condições básicas de compatibilidade para a flexão das escoras de betão devido à torção. Note-se que na Figura 2.4 a linha média de fluxo de corte não coincide com a resultante das tensões de compressão, sendo assumida como passando a meio da profundidade efetiva t_d . Por simplificação, a tensão na escora de betão é uniformizada aplicando o coeficiente k_s , processo este que será explicado mais à frente.

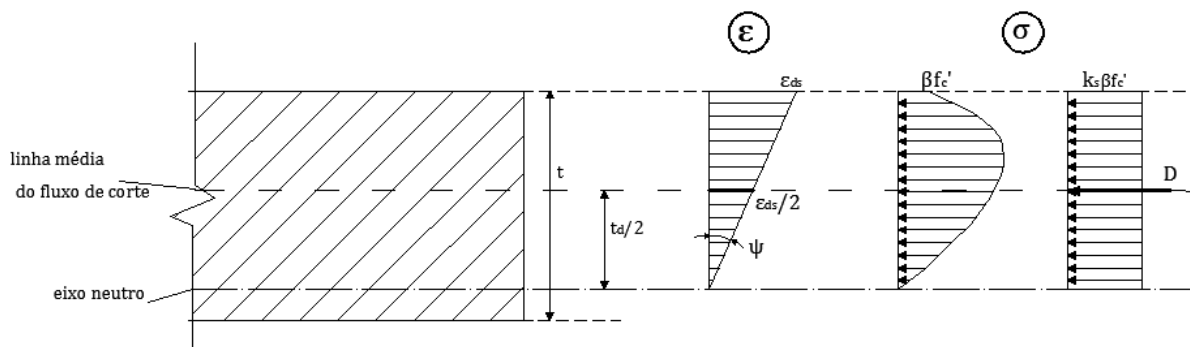


Figura 2.4 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão

2.3.5. Caracterização do comportamento do betão à compressão e do aço das armaduras ordinárias à tração

As abordagens desenvolvidas recentemente com o propósito de modelar o comportamento de elementos laminares planos de betão armado quando sujeitos a esforços no próprio plano, são geralmente formuladas em termos de tensões médias e extensões médias tanto no betão como nas armaduras. As tensões médias e extensões médias são aqui entendidas como tensões e extensões medidas ao longo de um comprimento suficientemente grande que inclui várias fissuras. Estas abordagens são geralmente adotadas em alternativa ao estudo de tensões locais com grande variabilidade espacial (por exemplo, elevadas tensões nas armaduras de reforço nas fissuras e reduzidas tensões em zonas afastadas das fissuras).

A relação tensão (σ) - extensão (ε) para o betão à compressão é geralmente obtida através de ensaios de compressão uniaxiais e habitualmente é representada por uma curva parabólica. Hognestad em 1952 [38] foi dos primeiros autores a propor uma relação constitutiva para o betão à compressão baseada em ensaios de compressão uniaxial. No entanto, esta relação não deve ser utilizada na sua forma original para estudar o comportamento de elementos sujeitos preponderantemente a tensões de corte (vigas sujeitas ao esforço transversal ou à torção) visto que não tem em conta a existência de extensões transversais de tração (*softening effect*). Diversos estudos experimentais foram posteriormente realizados com vista a propor novas relações constitutivas de modo a que estas se aproximassem do comportamento real do betão comprimido quando este se encontra sujeito a um estado biaxial de tensão/deformação. De entre tais estudos, destacam-se os realizados por Vecchio e Collins entre 1982 e 1993 [74] [75] [73], Belarbi e Hsu em 1991 [15] e Zhu e Hsu em 2001 [81]. No entanto, nem todas as relações constitutivas propostas se mostraram adequadas para serem usadas na modelação comportamental de vigas de betão armado sujeitas à torção. Esta observação resulta de várias razões, como por exemplo:

- as relações $\sigma - \varepsilon$ são habitualmente obtidas indiretamente com base em ensaios experimentais de painéis de betão armado submetidos ao corte;
- as relações $\sigma - \varepsilon$ são habitualmente calibradas e limitadas a determinados intervalos de determinadas variáveis (classe do betão, taxa e balanço de armaduras, efeito de escala, etc.)

Num estudo recente realizado por Bernardo *et al.* em 2012 [19], foram analisados os resultados do VATM para a previsão do comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção, tendo por base 21 relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras propostas por vários autores. Com base numa exaustiva análise comparativa entre as previsões dos modelos e os dados experimentais, os autores concluíram que um dos modelos teóricos mais adequados era aquele que incorporava a relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [15] com os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang em 1998 [80] para ter em conta o *softening effect*. As expressões matemáticas associadas à relação $\sigma - \varepsilon$ anteriormente referida são seguidamente apresentadas.

Segundo Belarbi e Hsu, [15][14] a Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à compressão é traduzida por dois ramos, um ascendente traduzido pela Equação (2-26) e outro ramo descendente traduzido pela Equação (2-27), como ilustrado na Figura 2.5.

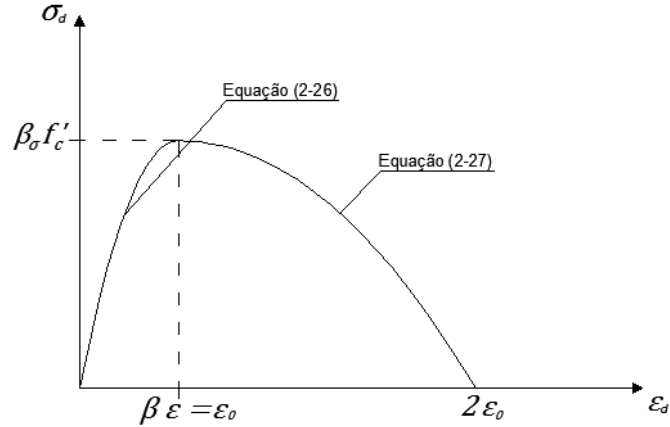


Figura 2.5 - Curva $\sigma - \epsilon$ para o betão comprimido tendo em conta o *softening effect*

$$\sigma_d = \beta_\sigma f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon_d}{\beta_\epsilon \epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_{ds}}{\beta_\epsilon \epsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{para} \quad \epsilon_d \leq \beta_\epsilon \epsilon_0 \quad (1-26)$$

$$\sigma_d = \beta_\sigma f'_c \left[1 - \left(\frac{\epsilon_d - \beta_\epsilon \epsilon_0}{2\epsilon_0 - \beta_\epsilon \epsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{para} \quad \epsilon_d > \beta_\epsilon \epsilon_0 \quad (1-27)$$

Nas equações anteriores, σ_d representa a tensão de compressão, f'_c é a tensão de compressão resistente do betão, ϵ_0 é a extensão correspondente ao pico de tensão f'_c (medida em ensaios experimentais uniaxiais), β_σ e β_ϵ são coeficientes redutores que têm em conta o *softening effect* na tensão máxima do betão e na extensão correspondente ao pico de tensão.

Para aplicações correntes, Belarbi e Hsu adotaram o mesmo coeficiente de redução para as tensões e para as extensões, sendo este dado pela Equação (2-28):

$$\beta_\epsilon = \beta_\sigma = \frac{R(f'_c)}{\sqrt{1 + \frac{400\epsilon_{ct}}{\eta'}}} \quad (1-28)$$

A extensão principal de tração, ϵ_{ct} , na direção perpendicular à escora diagonal, pode ser considerada como sendo a soma das extensões na armadura longitudinal (ϵ_l), transversal (ϵ_t) e à superfície da escora de betão (ϵ_{ds}), ou seja, $\epsilon_{ct} = \epsilon_l + \epsilon_t + \epsilon_{ds}$. Esta relação foi obtida a partir da análise do estado de deformação recorrendo ao Círculo de Mohr de um elemento de membrana em betão armado sujeito ao corte [19]. Na Equação (2-28) o numerador é calculado através da seguinte equação:

$$R(f'_c) = \frac{5,8}{\sqrt{f'_c (MPa)}} \leq 0,9 \quad (1-29)$$

Na Equação (2-28) η' depende do valor de η :

$$\eta = \frac{\rho_l f_{sly}}{\rho_t f_{sty}} \quad (1-30)$$

e

$$\begin{cases} \eta' = \eta \text{ se } \eta \leq 1 \\ \eta' = 1/\eta \text{ se } \eta > 1 \end{cases} \quad (1-31)$$

Onde $\rho_l, \rho_t, f_{sy,l}$ e $f_{sy,t}$ representam, respetivamente as taxas de armadura longitudinal e transversal, e a tensão de cedência das armaduras longitudinal e transversal.

A partir da Figura 2.4 pode estabelecer-se uma equação que permite determinar a tensão média de compressão nas escoras de betão correspondente a um diagrama de tensões retangular:

$$\sigma_d = k_s \beta_\sigma f'_c \quad (1-32)$$

No decorrer do cálculo da tensão média de compressão na escora de betão torna-se necessário determinar o parâmetro k_s . Tal parâmetro obtém-se por integração das Equações (2-26) e (2-27). Para tal, é necessário realizar a integração separadamente para os dois intervalos das extensões correspondentes ao ramo ascendente e descendente da curva $\sigma - \varepsilon$. Quando a tensão na escora de betão é inferior ao valor da extensão de pico ($\beta_\varepsilon \varepsilon_0$) a Equação (2-26) é integrada, de acordo com o ilustrado na Figura 2.6.

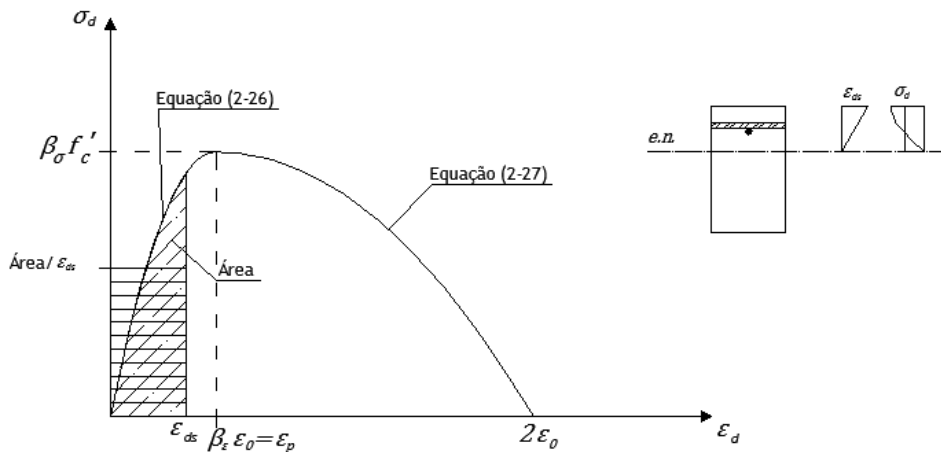


Figura 2.6 - Integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para $\varepsilon_d \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$

Vem:

$$\text{Área} = k_s \beta_\sigma f'_c = \beta_\sigma f'_c \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \int_0^{\varepsilon_{ds}} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] d\varepsilon_d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_s = \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \left(\frac{2}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_{ds}} \varepsilon_d d\varepsilon_d - \frac{1}{(\beta_\varepsilon \varepsilon_0)^2} \int_0^{\varepsilon_{ds}} \varepsilon_d^2 d\varepsilon_d \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_s = \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \left(\frac{2}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_d^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_{ds}} - \frac{1}{(\beta_\varepsilon \varepsilon_0)^2} \left[\frac{\varepsilon_d^3}{3} \right]_0^{\varepsilon_{ds}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_s = \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \left(\frac{2}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{ds}^2}{2} - \frac{1}{(\beta_\varepsilon \varepsilon_0)^2} \frac{\varepsilon_{ds}^3}{3} \right) = \frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ds}}{3\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)$$

Conclui-se então que para $\varepsilon_{ds} \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$:

$$k_s = \frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ds}}{3\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right) \quad (1-33)$$

Quando a extensão na escora de betão (ε_{ds}) é superior ao valor da extensão de pico ($\beta_\varepsilon \varepsilon_0$) as Equações (2-26) e (2-27) são integradas tal como ilustrado na Figura 2.7. Realizando a substituição $\beta_\varepsilon \varepsilon_0 = \varepsilon_p$ tem-se:

$$B = \frac{\text{Área 1} + \text{Área 2}}{\varepsilon_{ds}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_s \beta_\sigma f'_c = \frac{\beta_\sigma f'_c}{\varepsilon_{ds}} \left(\int_0^{\varepsilon_p} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] d\varepsilon_d + \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_d - \beta_\varepsilon \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 - \beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] d\varepsilon_d \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_s = \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \left(\underbrace{\int_0^{\varepsilon_p} 2 \frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} d\varepsilon_d - \int_0^{\varepsilon_p} \left(\frac{\varepsilon_d}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 d\varepsilon_d}_{\text{Termo A}} + \underbrace{\int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} 1 d\varepsilon_d - \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} \left(\frac{\varepsilon_d - \beta_\varepsilon \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 - \beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 d\varepsilon_d}_{\text{Termo B}} \right) \Leftrightarrow$$

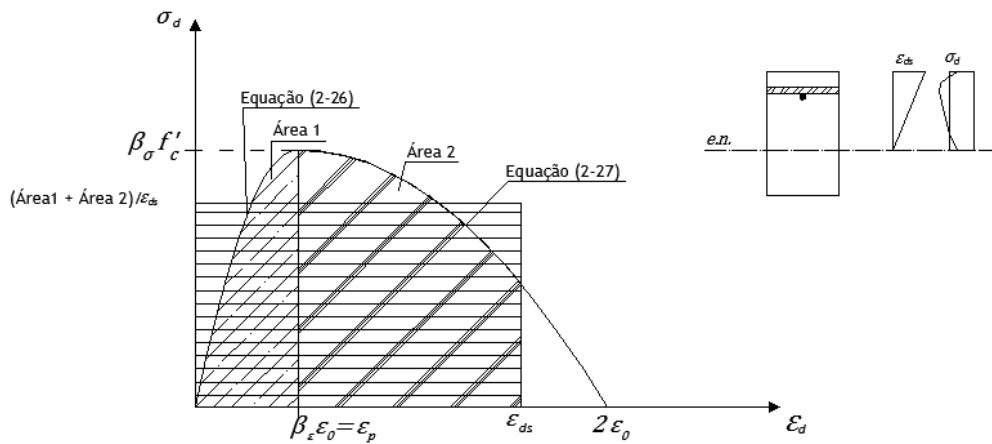


Figura 2.7 - Integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para $\varepsilon_{ds} > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$

Desenvolvendo o Termo A:

$$\int_0^{\varepsilon_p} 2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_p} d\varepsilon_d - \int_0^{\varepsilon_p} \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_p} \right)^2 d\varepsilon_d = \frac{2}{\varepsilon_p} \left[\frac{\varepsilon_d^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_p} - \frac{1}{\varepsilon_p^2} \left[\frac{\varepsilon_d^3}{3} \right]_0^{\varepsilon_p} = \frac{2}{\varepsilon_p} \frac{\varepsilon_p^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon_p^2} \frac{\varepsilon_p^3}{3} = \frac{2}{3} \varepsilon_p$$

Desenvolvendo o Termo B:

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} 1 d\varepsilon_d - \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{\frac{2\varepsilon_p}{\beta_\varepsilon} - \varepsilon_p} \right)^2 d\varepsilon_d = \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} 1 d\varepsilon_d - \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} \frac{\varepsilon_d^2 - 2\varepsilon_d\varepsilon_p + \varepsilon_p^2}{\left(\frac{2\varepsilon_p}{\beta_\varepsilon} - \varepsilon_p \right)^2} d\varepsilon_d = \\ & = \left[\varepsilon_d \right]_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} - \frac{1}{\left(\frac{2\varepsilon_p}{\beta_\varepsilon} - \varepsilon_p \right)^2} \left(\left[\frac{\varepsilon_d^3}{3} \right]_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} - \left[\frac{2\varepsilon_d^2\varepsilon_p}{2} \right]_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} + \left[\varepsilon_p^2\varepsilon_d \right]_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_{ds}} \right) = \\ & = \varepsilon_{ds} - \varepsilon_p - \frac{1}{\left(\frac{2\varepsilon_p}{\beta_\varepsilon} - \varepsilon_p \right)^2} \left(\frac{\varepsilon_{ds}^3}{3} - \frac{\varepsilon_p^3}{3} - \frac{2\varepsilon_{ds}^2\varepsilon_p}{2} + \frac{2\varepsilon_p^2\varepsilon_p}{2} + \varepsilon_p^2\varepsilon_{ds} - \varepsilon_p^2\varepsilon_p \right) = \\ & = \varepsilon_{ds} - \varepsilon_p - \frac{1}{\varepsilon_p^2 \left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \left(\frac{\varepsilon_{ds}^3}{3} - \frac{\varepsilon_p^3}{3} - \varepsilon_{ds}^2\varepsilon_p + \varepsilon_p^3 + \varepsilon_p^2\varepsilon_{ds} - \varepsilon_p^3 \right) \end{aligned}$$

Somando os Termos A e B, vem:

$$\begin{aligned} k_s &= \frac{1}{\varepsilon_{ds}} \left[\frac{2}{3} \varepsilon_p + \varepsilon_{ds} - \varepsilon_p - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_{ds}^3}{3\varepsilon_p^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p^3}{3\varepsilon_p^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_{ds}^2\varepsilon_p}{\varepsilon_p^2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p^3}{\varepsilon_p^2} - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p^2\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p^3}{\varepsilon_p^2} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k_s &= \frac{2\varepsilon_p}{3\varepsilon_{ds}} + 1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_{ds}^2}{3\varepsilon_p^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p}{3\varepsilon_{ds}} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} \\ & \quad - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1 \right)^2} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} \end{aligned}$$

Fatorizando a soma dos termos na forma $1-b-a+ab=(1-a)(1-b)$, e substituindo $\varepsilon_p = \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ tem-se, para $\varepsilon_{ds} > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$:

$$k_s = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\beta_\varepsilon \varepsilon_0}{\varepsilon_{ds}}\right) \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1\right)^2}\right) + \frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\varepsilon} - 1\right)^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0}\right) \quad (1-34)$$

No que diz respeito às relações $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias em tração, devem ser adotadas relações adequadas com vista a serem incorporadas em modelos de comportamento para elementos de betão armado sujeitos ao corte. Devem ser adotadas relações que traduzam o comportamento de armaduras embebidas em betão, pelo que, em rigor, não devem ser usadas relações resultantes do ensaio à tração uniaxial de provetes de aço, tais como as habitualmente fornecidas pelos documentos normativos. Tais relações não contabilizam a participação do betão tracionado entre fendas, ou seja o *stiffening effect*. Este efeito deve ser tido em conta uma vez que ao longo da viga parte da tração é suportada pelo betão tracionado não fissurado, sendo a tração transferida das armaduras para o betão por aderência. No estudo realizado por Bernardo *et al.* [19], os autores também compararam os resultados decorrentes de modelos que incorporavam diferentes relações $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas. Os referidos autores encontraram que a Curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [7] eram adequadas para exprimir o comportamento das armaduras ordinárias tracionadas em vigas de betão armado sujeitas à torção. A Curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [13] para expressar o comportamento das armaduras envolvidas em betão quando tracionadas encontra-se representada na Figura 2.8 e é expressa pela Equação (2-35). A curva é composta por um primeiro troço reto com um declive igual ao módulo de elasticidade elástico, E_s , traduzindo a fase de comportamento elástico-linear. O segundo troço é curvo e depende do parâmetro m (Equação 2-36). O último troço da curva é retilíneo e tem um declive igual ao módulo de elasticidade plástica, E_p . Este troço traduz o endurecimento das armaduras. De acordo com Belardi e Hsu, o valor do módulo de elasticidade na região plástica, E_p , é cerca de 1,8% a 2,5% do módulo de elasticidade elástico E_s .

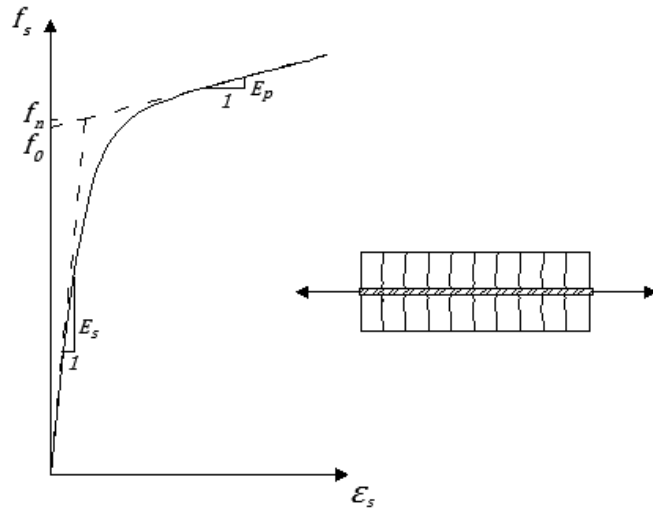


Figura 2.8 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas tendo em conta o *stiffening effect*

Na Curva $\sigma - \varepsilon$ ilustrada na Figura 2.8, as retas representam um limite assintótico do troço curvo e a tensão correspondente ao ponto onde estas retas se intersectam é designado de f_n . Esta tensão assume valores da ordem de 91% do valor da tensão de cedência das armadura, f_{sy} [65].

De acordo com Belarbi e Hsu, a tensão correspondente ao ponto em que a reta do segundo tramo retilíneo intersecta o eixo das ordenadas, f_0 , toma um valor cerca de 89% da tensão de cedência das armadura, f_{sy} [13].

$$f_s = \frac{0,975E_s\varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1,1E_s\varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0,025E_s\varepsilon_s \quad (1-35)$$

A forma do troço curvo encontra-se definida na Equação (2-35) através do parâmetro m (Equação (2-36)) e é função da resistência à tração do betão, f_{cr} , da tensão de cedência do aço, f_{sy} e da taxa de armadura, ρ (Equações (2-37) e (2-36)).

$$m = \frac{1}{9B - 0,2} \leq 25 \quad (1-36)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}}\right)^{1,5} \quad (1-37)$$

$$f_{cr} = 3,75\sqrt{f'_c} \text{ (psi)} \quad (1-38)$$

2.4. Previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM

2.4.1. Considerações gerais

Nesta secção é apresentado e descrito o procedimento de cálculo baseado no VATM com o objetivo de calcular a previsão teórica do comportamento de vigas de betão armado (com secção cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência) submetidas à torção pura até à rotura. O objetivo é, mais à frente, estender este procedimento ao caso de vigas com confinamento axial sujeitas à torção.

A caracterização do comportamento das vigas sujeitas à torção será realizada principalmente mediante o cálculo e traçado das curvas comportamentais momento torsor (T) - rotação (θ). Tais curvas permitem avaliar, de uma forma simples, o comportamento global de uma viga de betão armado sujeita à torção. De todos os pontos que caracterizam as curvas $T - \theta$, apenas os pontos característicos e correspondentes à fase última serão analisados (momentos torsores de cedência e máximo, e respetivas rotações, ver Figura 1.18). Esta opção prende-se com o facto do VATM apenas fornecer boas previsões para a referida zona da Curva $T - \theta$. Apesar do VATM permitir caracterizar os diversos parâmetros do estado da viga à torção (momento torsor, deformação angular, tensões e extensões nos materiais) ao longo de todo o seu historial de carga, a verdade é que o modelo despreza as contribuições do betão à tração e do núcleo em seções cheias. Além disso o VATM assume desde o início do carregamento um estado plenamente fissurado (o que não corresponde à realidade). Desta forma, o VATM é inadequado para prever o comportamento à torção de vigas sujeitas a baixos níveis de carregamento.

Para o cálculo da Curva $T - \theta$ tendo por base o VATM é necessário recorrer a algoritmos de cálculo implementados computacionalmente em folhas de cálculo ou através de linguagem de programação. Tal necessidade decorre do carácter não linear, devido à adoção de leis constitutivas não lineares para os materiais, e também iterativo, devido ao desconhecimento inicial de algumas variáveis interdependentes, associado ao procedimento de cálculo. Este último aspeto advém do facto das equações de equilíbrio e de compatibilidade apresentadas anteriormente (Secções 2.3.4 e 2.4.2) serem em número inferior ao número de variáveis do problema.

2.4.2. Procedimento de cálculo

Para a construção da curva teórica $T - \theta$, o VATM fornece três equações de equilíbrio necessárias para calcular o momento torsor T , a espessura efetiva t_d das escoras de compressão e o ângulo que estas fazem com o eixo longitudinal da viga.

O momento torsor pode ser calculado rearranjando a Equação (2-19), vindo:

$$T = 2A_0 t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha \quad (1-39)$$

Assumindo que a linha média do fluxo de corte se encontra a meia profundidade do diagrama de tensões (Figura 2.4) o perímetro da linha média do fluxo de corte (p_0) e a área limitada pela mesma linha (A_0), podem ser obtidos através das Equações (2-40) e (2-41), em que x e y representam as dimensões externas da secção:

$$p_0 = 2(x + y) - 4t_d \quad (1-40)$$

$$A_0 = (x - t_d)(y - t_d) \quad (1-41)$$

Substituindo a Equação (2-39) nas Equações (2-20) e (2-21) obtém-se o ângulo α em função dos outros parâmetros já conhecidos:

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (1-42)$$

$$(\sin \alpha)^2 = \frac{A_t f_t}{s \sigma_d t_d} \quad (1-43)$$

Somando as duas equações anteriores, a espessura efetiva das escoras vem:

$$t_d = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (1-44)$$

Deste modo obtém-se as três equações de equilíbrio fundamentais para o cálculo do momento torsor: As Equações (2-39), (2-42) ou (2-43) e (2-44).

Para além das equações de equilíbrio são ainda necessárias três equações para determinar as extensões na armadura longitudinal (ε_l) e transversal (ε_t), bem como o ângulo de torção (θ) por unidade de comprimento. As expressões para o cálculo das extensões na armadura longitudinal e transversal são derivadas tendo por base relações trigonométricas obtidas através do círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte (Equações (2-45) e (2-46)) [16]. Para além das equações referidas anteriormente, que relacionam entre si as extensões nos materiais e o ângulo da escora, é também necessário uma relação que permita calcular o ângulo de torção. Tal relação é expressa pela Equação (2-47) que advém da Teoria do Tubo Fino de Bredt [7], onde $\gamma = \tau / G$ é a distorção (τ é a tensão tangencial e G é o módulo de distorção) e $p_0 = \int ds$ é o perímetro da linha média do fluxo de corte.

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_l + \varepsilon_d) \cot \alpha \quad (1-45)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_t + \varepsilon_d) \tan \alpha \quad (1-46)$$

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma \quad (1-47)$$

Substituindo a Equação (2-46) na Equação (2-47), e substituindo a equação resultante na Equação (2-24), e por último substituindo esta última equação resultante na Equação (2-25), obtém-se:

$$\varepsilon_{ds} = \frac{2p_0 t_d}{A_0} (\varepsilon_t + \varepsilon_d) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (1-48)$$

Resolvendo a Equação (2-39) em ordem a t_d e substituindo-a na Equação (2-53), considerando que $\varepsilon_d = \varepsilon_{ds} / 2$ (Figura 2.4), obtém-se a seguinte equação para a extensão na armadura transversal:

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (1-49)$$

De forma semelhante, obtém-se a extensão na armadura longitudinal:

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (1-50)$$

Por fim, eliminando ψ a partir das Equações (2-24) e (2-25) o ângulo de torção θ é dado por:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1-51)$$

As Equações (2-49), (2-50) e (2-51) constituem as três equações de compatibilidade do VATM para o cálculo da Curva Teórica $T - \theta$.

Atendendo às equações apresentadas ao longo desta Secção e às relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido e para as armaduras tracionadas apresentadas na Secção 2.3.5, é possível estabelecer um procedimento iterativo para o cálculo dos diversos pontos $(\theta; T)$ que constituem a Curva teórica $T - \theta$.

De uma forma simplificada e resumida pode apresentar-se o processo iterativo na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo pode apresentar-se na Figura 2.9. Para além das variáveis anteriormente referidas e associadas às equações de equilíbrio e de compatibilidade (T , t_d , α , ε_t , ε_l e θ), são também desconhecidas à partida as variáveis ε_{ds} e β_σ e/ou β_ε . Desta forma, o número de variáveis é superior ao número de equações disponíveis, daí a necessidade em recorrer-se a um procedimento de cálculo iterativo.

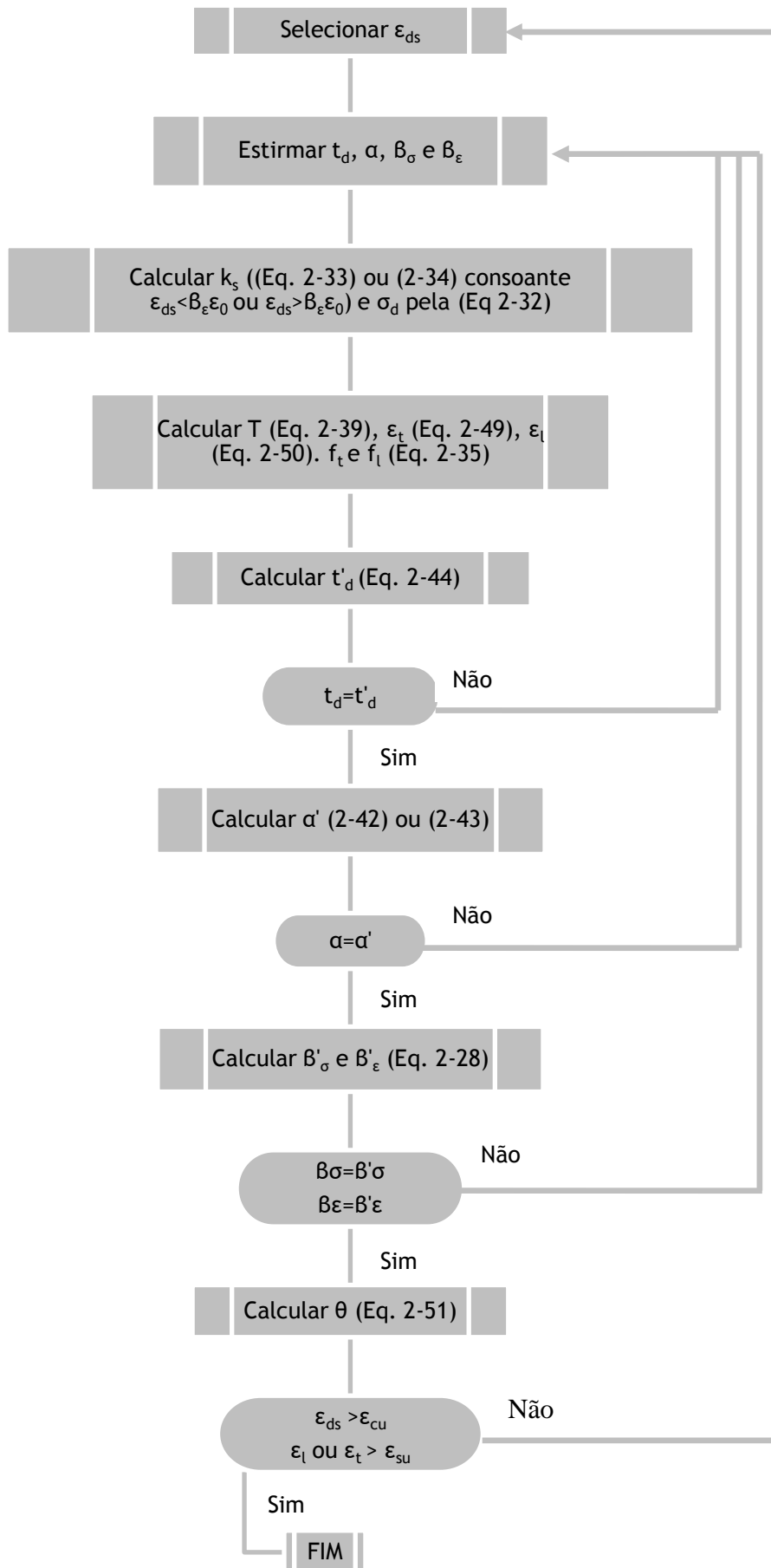


Figura 2.9 – Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva T-θ

2.5. Modelo de Treliça com Ângulo Variável - VATM - para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme

2.5.1. Considerações gerais

Aplicando de forma racional e de uma forma semelhante ao que ocorre com vigas sujeitas à torção, o pré-esforço aumenta a resistência à fissuração de um elemento de betão armado sujeito à torção. Neste caso o pré-esforço induz uma tensão de compressão que, em combinação com a tensão tangencial induzida pelo esforço transversal ou pelo momento torsor, resulta num estado de tensão biaxial (corte + compressão). Este estado de tensão biaxial atrasa a fissuração do betão. Dado o estado de tensão induzido por um esforço puro de torção, a solução de pré-esforço lógica para vigas sujeitas à torção pura é a de pré-esforço longitudinal uniforme [18].

Em 1985 Hsu e Mo [44] mostraram que o VATM poderia ser estendido ao caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme submetidas à torção pura. O princípio passa em considerar, de forma resumida, a participação das armaduras de pré-esforço para o equilíbrio na direção longitudinal, a introdução da relação $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras de pré-esforço para o cálculo da tensão nessas mesmas armaduras e a consideração do estado inicial de tensão induzido pelo pré-esforço para o cálculo da deformação inicial na armadura longitudinal ordinária.

Por consequência da aplicação de um momento torsor numa viga pré-esforçada resulta uma força de tração longitudinal que alivia as tensões instaladas no betão devido ao pré-esforço. Quando a força longitudinal de tração iguala a força de compressão induzida no betão, este efeito anular-se-á e a força de tração passa a ser absorvida na sua totalidade pela armadura de pré-esforço longitudinal, uma vez que até esse ponto a extensão no betão e na armadura ordinária é nula. Ao fenómeno descrito neste parágrafo designa-se a descompressão do betão. Após a descompressão do betão, pode considerar-se uma viga de betão pré-esforçado se comporta como uma viga ordinária de betão armado.

O VATM estendido ao caso das vigas com pré-esforço longitudinal pressupõe, à partida, que o estado de descompressão do betão foi atingido e que a viga se encontra plenamente fissurada. Desta forma, o VATM continua apenas a ser válido para a previsão do comportamento último de vigas com pré-esforço longitudinal à torção, uma vez que somente para níveis elevados de carregamento se pode considerar que o elemento se encontra plenamente fissurado. Com estas hipóteses, a viga com pré-esforço longitudinal irá comportar-se como uma viga de betão armado.

Nesta secção é apresentado o VATM estendido ao caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme

2.5.2. Extensão do VATM para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme

Como foi referido na secção anterior, após ocorrer a descompressão do betão a viga com pré-esforço comporta-se como uma viga de betão armado sujeita à torção pura. Desta forma, no que se refere às equações do VATM basta afetar as equações relativas ao equilíbrio longitudinal com a contribuição das armaduras de pré-esforço. Assim, a força longitudinal na armadura ordinária ($A_l f_l$) deve ser substituída pela força longitudinal total que inclui a participação da armadura ordinária e da armadura de pré-esforço ($A_l f_l + A_{pl} f_{pl}$).

Assim, a Equação (2-42) para o cálculo do ângulo de inclinação das escoras de betão (α), toma a forma:

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{A_l f_l + A_{pl} f_{pl}}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (1-52)$$

Na equação anterior A_{pl} e f_{pl} representam a área e a tensão na armadura longitudinal de pré-esforço, respetivamente. Também para o cálculo da espessura efetiva da escora de betão, t_d , a Equação (2-44) sofre uma alteração semelhante à da Equação (2-42):

$$t_d = \frac{A_l f_l + A_{pl} f_{pl}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_l f_l}{s \sigma_d} \quad (1-53)$$

Para o cálculo da tensão instalada na armadura longitudinal de pré-esforço, f_{pl} , deve conhecer-se previamente a respetiva extensão, ε_{pl} . Utilizando o conceito de descompressão do betão esta extensão é dada por:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{dec} + \varepsilon_l \quad (1-54)$$

Onde ε_{dec} é a extensão na armadura de pré-esforço na descompressão do betão e ε_l é a extensão na armadura longitudinal ordinária. A Equação (2-54) pode ser justificada através da Figura 2.10. Esta figura ilustra a sobreposição das Curvas $\sigma - \varepsilon$ para o aço da armadura ordinária e para o aço da armadura de pré-esforço. A Figura 2.10 mostra que a armadura ordinária começa a ser solicitada à tração somente após a armadura de pré-esforço atingir a tensão correspondente à descompressão do betão (Ponto B).

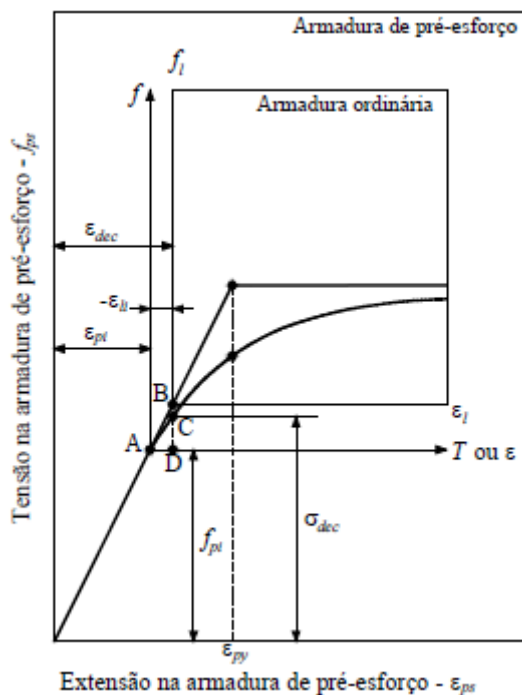


Figura 2.10 - Ilustração do conceito de descompressão [40]

No momento de aplicação do pré-esforço, é imposta uma extensão inicial de tração na armadura de pré-esforço longitudinal, ϵ_{pl} , e, por consequência, uma extensão inicial de compressão na armadura longitudinal ordinária, ϵ_{li} . Este estado inicial de extensões é representado pelo Ponto A da Figura 2.10. Recorrendo à lei de Hooke e ao conceito de homogeneização da secção as duas extensões anteriores podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$\epsilon_{pi} = \frac{f_{pi}}{E_p} \quad (1-55)$$

$$\epsilon_{li} = \frac{A_{pl} f_{pl}}{A_l (E_s - E_c) + E_c (A_c - A_h - A_{pl})} \quad (1-56)$$

Onde:

- f_{pi} - Tensão inicial na armadura de pré-esforço;
- E_p - Módulo de Elasticidade da armadura longitudinal de pré-esforço;
- E_s - Módulo de Elasticidade da armadura longitudinal ordinária;
- E_c - Módulo de Elasticidade do betão;
- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão;
- A_h - Área da zona vazada da secção ($A_h = 0$ em Secções cheias)

A extensão de descompressão, ε_{dec} (Ponto C na Figura 2.10) pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{dec} = \varepsilon_{pi} + \varepsilon_{li} \quad (1-57)$$

2.5.3. Caracterização do comportamento do betão à compressão e do aço das armaduras ordinárias e de pré-esforço à tração

No que se refere à relação constitutiva para o betão à compressão torna-se necessário realizar uma correção. Para o cálculo dos parâmetros de redução $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ é necessário calcular o parâmetro η que representa a relação entre as forças resistentes na direção longitudinal e transversal. Assim, deve ser considerada a contribuição da força resistente total, incluindo a participação da armadura ordinária longitudinal e da armadura longitudinal de pré-esforço. Para calcular a força resistente total na direção longitudinal, uma vez que para níveis elevados de carregamento (domínio de validade do VATM) as armaduras de pré-esforço se comportam como simples armaduras passivas [80], soma-se a contribuição de ambas as armaduras, vindo:

$$\eta = \frac{\rho_l f_{sly} + \rho_{pl} f_{pl0.1\%}}{\rho_l f_{sty}} = \frac{A_l f_{sly} + A_{pl} f_{pl0.1\%}}{\frac{u}{s} A_l f_{sty}} \quad (1-58)$$

Na equação anterior, $f_{pl0.1\%}$ representa a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% para a armadura longitudinal de pré-esforço.

Para o aço das armaduras ordinárias a relação constitutiva apresentada na Secção 2.3.5 não sofre alterações.

No que diz respeito às relações $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras de pré-esforço à tração, apesar de também ser possível desenvolver relações $\sigma - \varepsilon$ tendo em consideração o *stiffening effect*, a diferença entre esta curva e a curva obtida desprezando o efeito da resistência do betão à tração não é significativa na medida em que a variação de extensão ao longo do comprimento dos cabos é desprezável face à extensão introduzida nas armaduras no ato de aplicação do pré-esforço [31]. Segundo Hsu [40] as idealizações bilineares para caracterizar o comportamento destas armaduras à tração, tais como as fornecidas nos documentos normativos são pouco rigorosas. Neste tipo de armadura a resposta inicial é elástico-linear até uma extensão limite proporcional (0,1%). Para além desse limite, a resposta das armaduras é não linear podendo ser expressa pela equação de Ramberg-Osgood [44]:

$$f_{pl} = \frac{E_p \varepsilon_{pl}}{\left[1 + \left(\frac{E_p \varepsilon_{pl}}{f_{pu}} \right)^R \right]^{1/R}} \quad (1-59)$$

Na equação anterior, f_{pu} é a tensão de rotura da armadura de pré-esforço e R é um coeficiente determinado através de ensaios experimentais que pode ser considerado igual 4,38 para armaduras correntes de pré-esforço.

A Figura 2.11 ilustra um exemplo de uma Curva $\sigma - \varepsilon$, onde $f_{pl0.1\%}$ é a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% para a armadura longitudinal de pré-esforço.

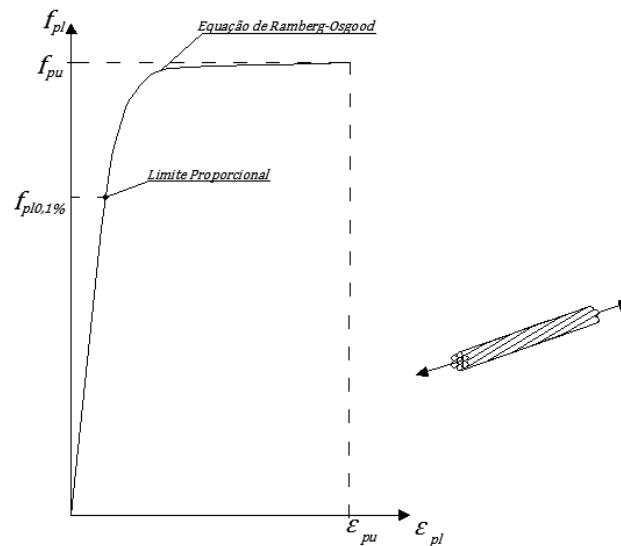


Figura 2.11 - Curva $\sigma - \varepsilon$ teórica baseada na equação de Ramberg-Osgood

2.5.4. Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme

Nas secções anteriores foram apresentadas todas as alterações necessárias a incorporar no VATM por forma a que o modelo inclua o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme. Todas as restantes equações do VATM (equações de compatibilidade (2-49) a (2-51) e a equação de equilíbrio (2-39)) permanecem válidas para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal.

De forma análoga às vigas de betão armado, e atendendo às equações do VATM apresentadas nas secções anteriores (equações com alterações), às equações do VATM anteriormente referidas (equações sem alterações) e às relações $\sigma - \varepsilon$ para os materiais (betão comprimido nas escoras, armadura ordinária e de pré-esforço longitudinal à tração) é possível estabelecer um procedimento de cálculo iterativo para o cálculo da curva teórica $T - \theta$. Tal procedimento encontra-se esquematizado no diagrama de fluxo da Figura 2.12.

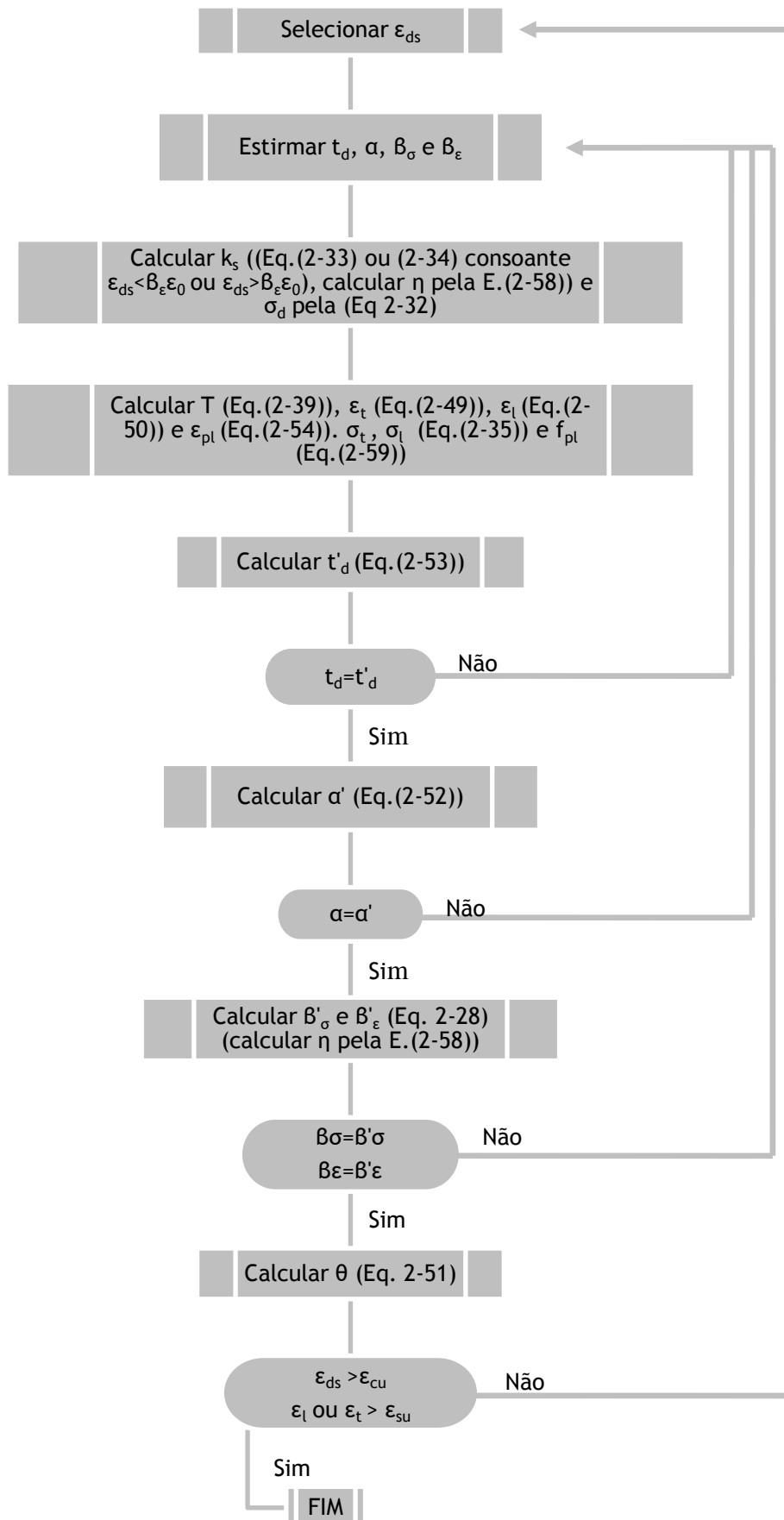


Figura 2.12 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva $T-\theta$ (vigas com pré-esforço longitudinal)

2.6. Descrição da Utilização do Aplicativo TORQUE_MTEAV

2.6.1. Considerações iniciais

A presente secção tem como objetivo, de forma sucinta, apresentar o funcionamento do aplicativo TORQUE_MTEAV.

O aplicativo TORQUE_MTEAV foi desenvolvido por Andrade em 2011 [7], utilizando a linguagem de programação Delphi. O objetivo deste aplicativo é calcular o comportamento teórico de vigas de betão armado e pré-esforçado com secção cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência sujeitas à torção pura. Este aplicativo permite calcular a evolução de diversos parâmetros que caracterizam o comportamento de uma viga submetida à torção pura, como por exemplo, a curva do momento torsor (T) - rotação (θ), entre outros [6]. O modelo de cálculo base é o VATM, descrito nas Secções 2.5 e 2.7, utilizando, entre outras, as leis constitutivas que caracterizam o comportamento dos materiais (betão à compressão, armaduras ordinárias e de pré-esforço à tração) apresentadas na Secção 2.3.5.

2.6.2. Aplicativo TORQUE_MTEAV

O aplicativo TORQUE_MTEAV tem como objetivo realizar de forma automática o procedimento de cálculo iterativo apresentado no final das Secções 2.5 e 2.7, para vigas de betão armado e pré-esforçado, respetivamente.

O modo de trabalhar com este aplicativo é bastante simples, devendo ser seguidas as seguintes etapas:

- 1- Abrir um ficheiro de dados que possui as características geométricas e mecânicas da secção a calcular e que deve ser previamente criado seguindo as regras do manual do utilizador;
- 2- Na janela principal do aplicativo, deve escolher-se o(s) modelo(s) (leis constitutivas) que definem o comportamento do betão à compressão nas escoras e do aço à tração;
- 3- Mandar o aplicativo calcular a viga;
- 4- Visualizar/exportar os resultados.

Para além do enunciado nos passos anteriores, existem ainda mais funcionalidades ao alcance do operador, tal como introduzir os resultados experimentais na forma de Curvas $T - \theta$ para as análises comparativas, editar os dados relativos à secção introduzida no Passo 1 (tais como as dimensões, as propriedades dos materiais, as quantidades de armaduras ordinárias e de pré-esforço, quer na direção longitudinal ou transversal), ter acesso à evolução das diversas variáveis que caracterizam o estado de comportamento de uma viga submetida à torção, como por exemplo, as tensões e extensões nas armaduras longitudinais e transversais e nas escoras de betão, a espessura efetiva da escora e o seu ângulo com o eixo da viga, entre outros.

De seguida, passa-se a descrição do modo de utilização do aplicativo TORQUE_MTEAV [6] com o auxílio de ilustrações e, a título exemplificativo, do cálculo do comportamento à

torção da viga de referência A2 de Bernardo (2003) [16]. Apenas serão descritas as principais funcionalidades utilizadas no âmbito do presente trabalho.

Ao iniciar-se o aplicativo TORQUE_ MTEAV, abre-se a janela principal (Figura 2.13) onde é visível a extensa biblioteca dos modelos (leis constitutivas) do betão comprimido nas escoras e do aço à tração.

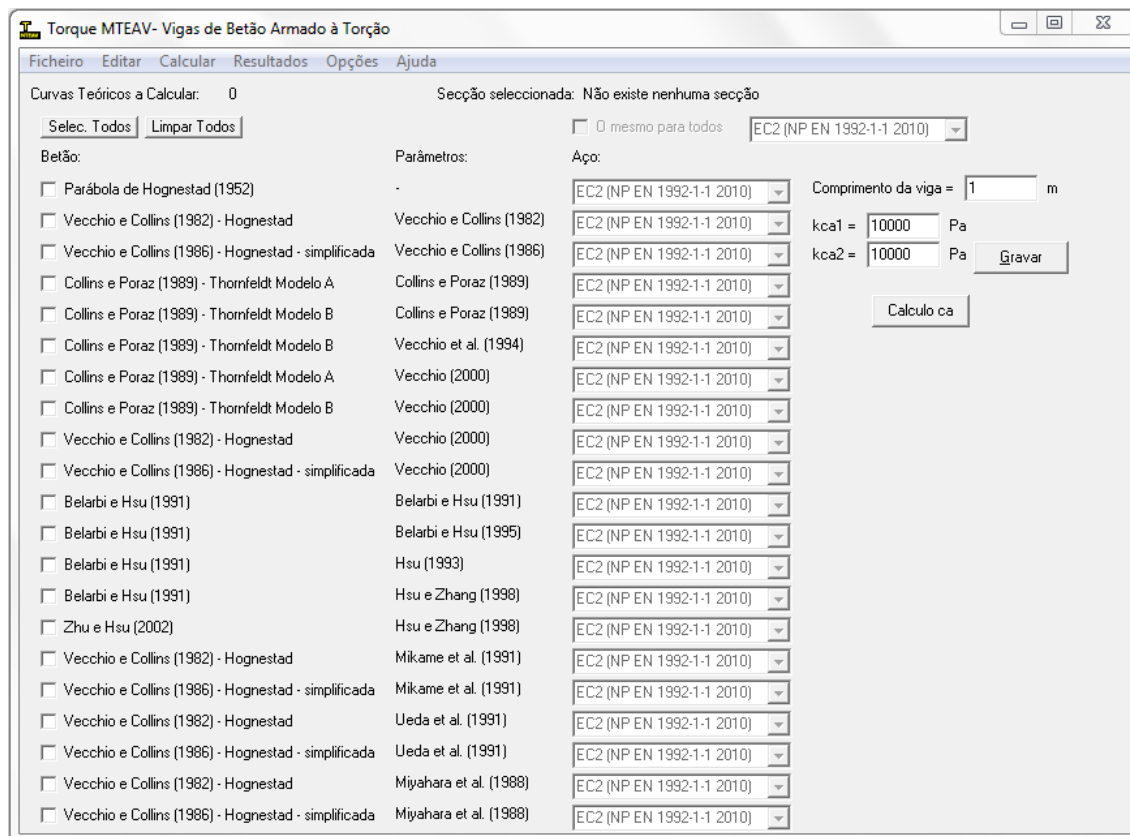


Figura 2.13 - Janela principal do aplicativo TORQUE_ MTEAV

Na janela principal do aplicativo pode observar-se que ainda não existe nenhuma viga/secção nem modelo teórico escolhido pelo utilizador (“Secção seleccionada: Não existe nenhuma secção”) e por isso ainda não há nenhuma curva teórica a calcular (“Curva Teóricas a Calcular: 0”).

Como já foi exposto anteriormente, o primeiro passo a realizar é abrir o ficheiro de dados que possui as características geométricas e mecânicas da viga/secção no menu “Ficheiro”, “Abrir secção” (Figura 2.14). Seleciona-se, então os dados relativos a “A2-Bernardo (2003)”

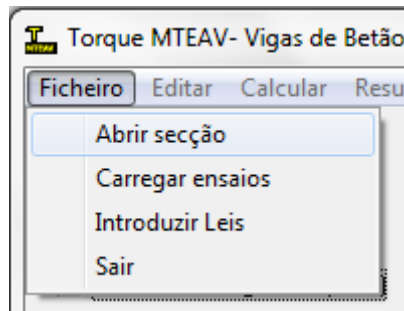


Figura 2.14 - Menu Ficheiro do aplicativo TORQUE_MTEAV

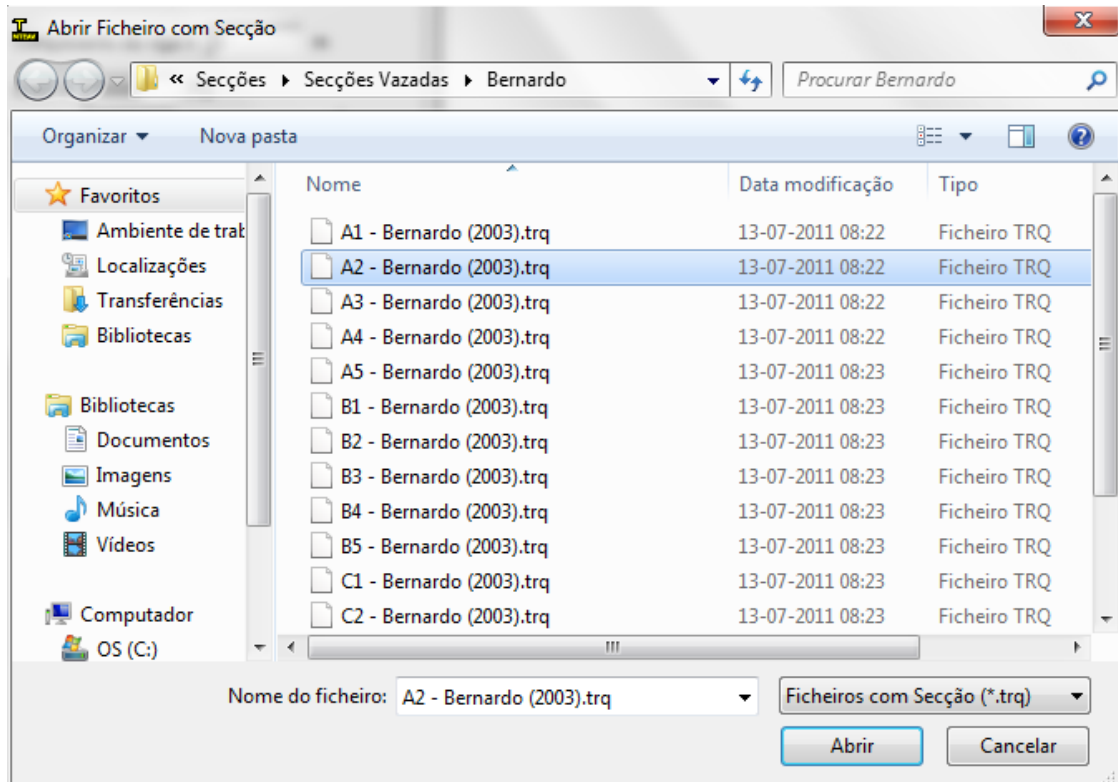


Figura 2.15 - Abrir Ficheiro da secção/viga a analisar

Após os passos anteriores, o utilizador pode escolher os modelos comportamentais (leis constitutivas) do betão comprimido nas escoras de betão e da armadura ordinária à tração, que pretende utilizar no cálculo. No presente trabalho, e como foi apresentado na Secção 2.3.5, o modelo utilizado para caracterizar o betão comprimido nas escoras é o modelo de “Belarbi e Hsu (1991) mais Hsu e Zhang (1998)”, e para as armaduras ordinárias à tração é o modelo que tem em conta o *stiffening effect* “Belarbi e Hsu (1994)”, a seleção destes modelos encontra-se ilustrada na Figura 2.16.

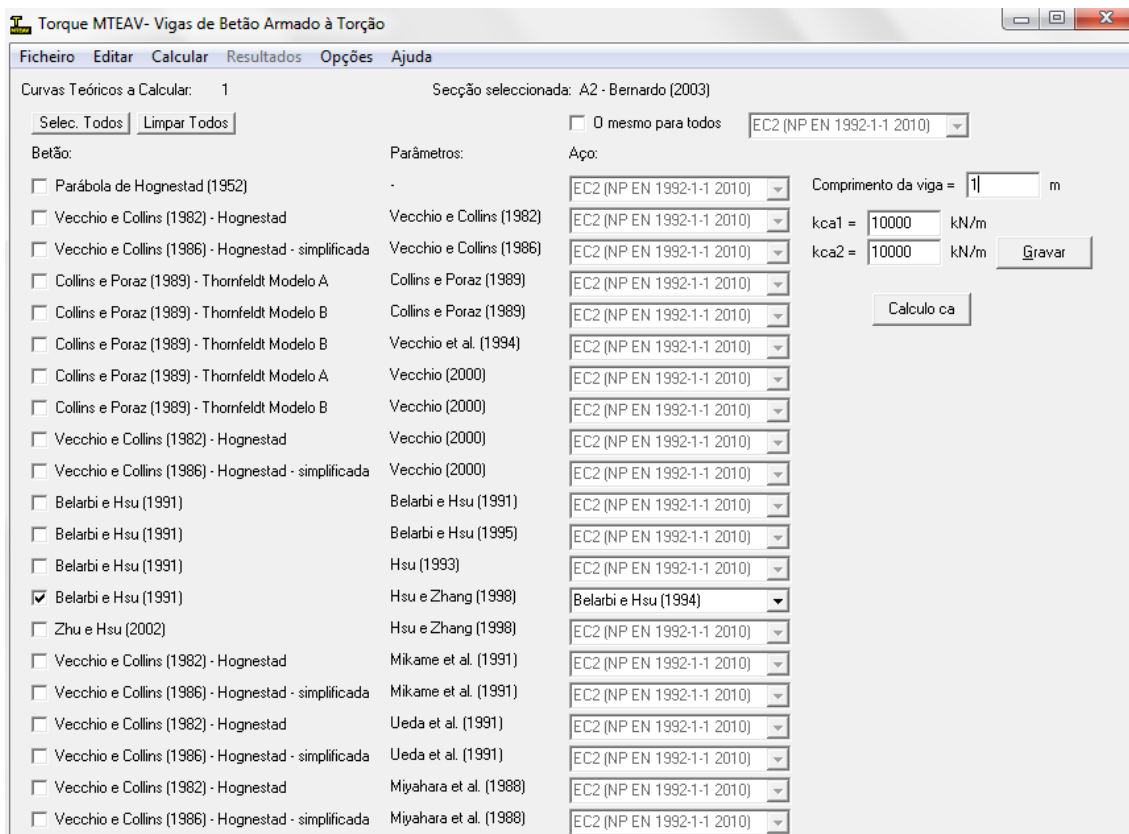


Figura 2.16 - Janela do aplicativo TORQUE_ MTEAV com os modelos seleccionados

Assim, o aplicativo encontra-se apto a calcular a viga/secção seleccionada. Mas antes disso, se o utilizador pretender alterar os dados no que respeita à geometria (Figura 2.18), propriedades do betão (Figura 2.19), propriedades das armaduras ordinárias (Figura 2.20) ou existência de armaduras pré-esforço longitudinal ou transversal (Figura 2.21), é possível realizar essas alterações no menu “Editar” (Figura 2.17).

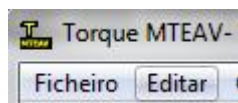


Figura 2.17 - Menu Editar do aplicativo TORQUE_ MTEAV

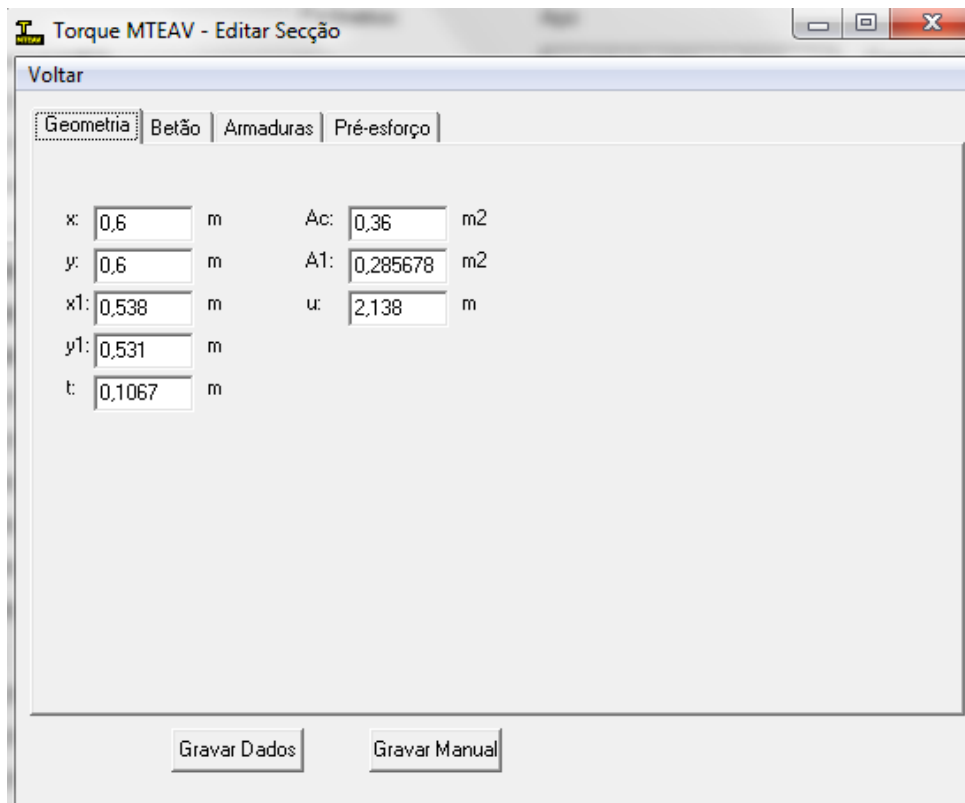


Figura 2.18 - Janela Editar Secção - Geometria do aplicativo TORQUE_MTEAV

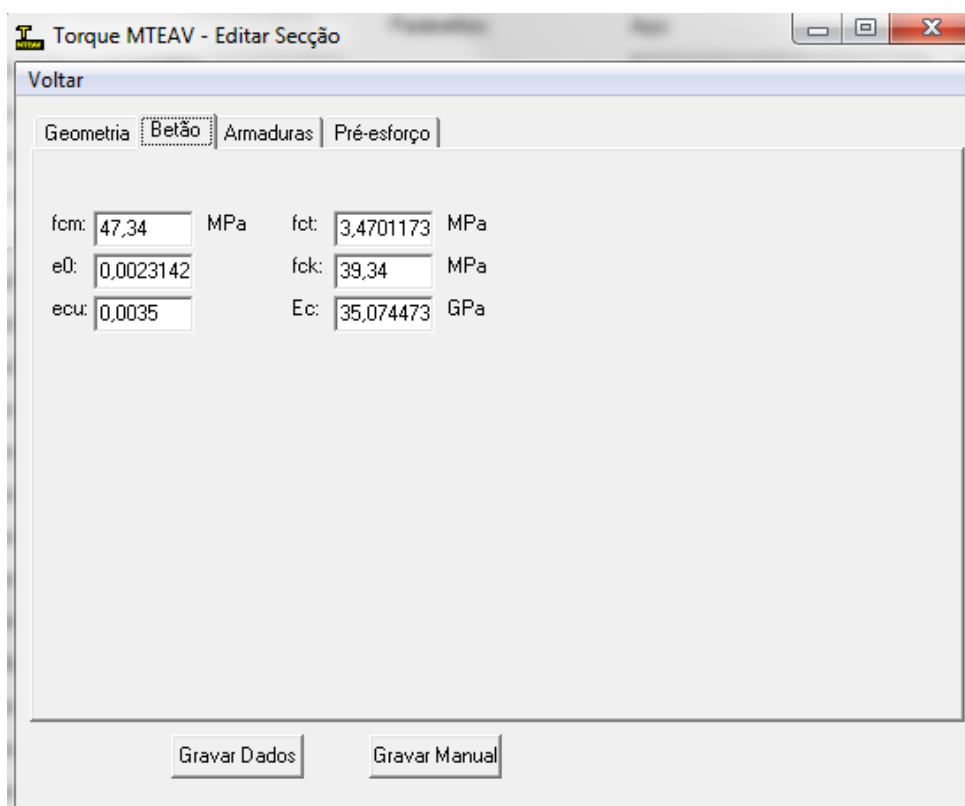


Figura 2.19 - Janela Editar Secção - Betão do aplicativo TORQUE_MTEAV

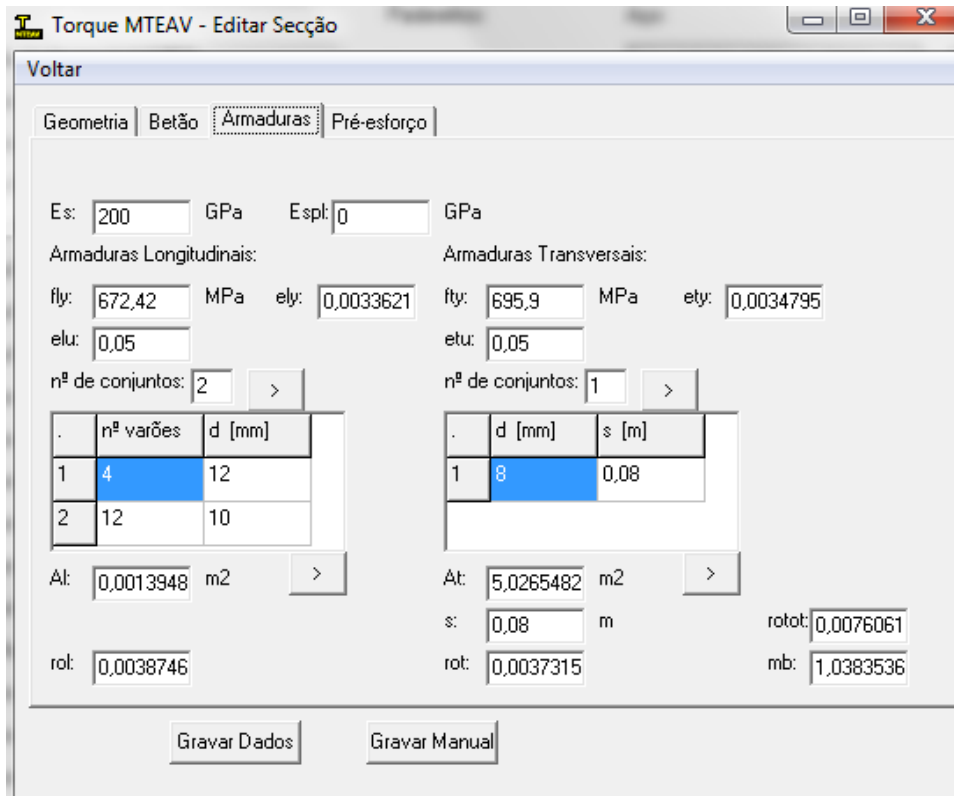


Figura 2.20 - Janela Editar Secção - Armaduras do aplicativo TORQUE_MTEAV

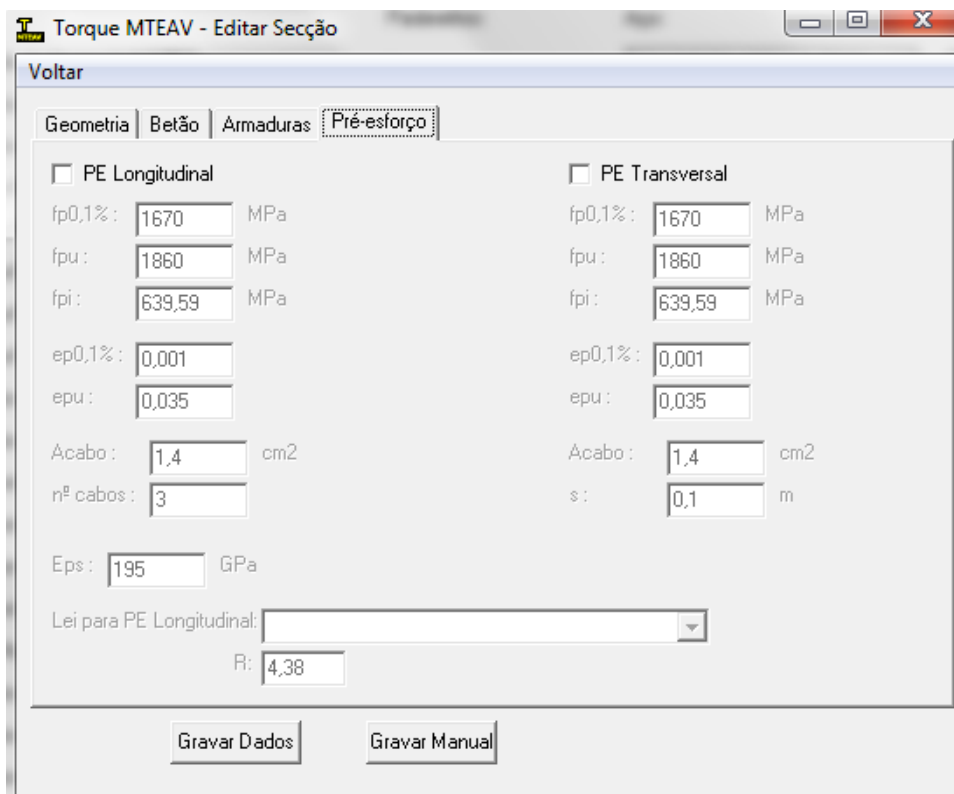


Figura 2.21 - Janela Editar Secção - Pré-esforço do aplicativo TORQUE_MTEAV

Após o utilizador alterar os dados pretendidos, este deve proceder à gravação dos dados para utilização posterior. Como se pode observar nas Figuras 2.18 a 2.21 existem dois modos para gravar os dados editados. Tem-se o botão “Gravar Dados” e o botão “Gravar Manual”. O botão “Gravar Dados” para além de memorizar os dados introduzidos nestas secções também calcula dados derivados, isto é, por exemplo, em virtude da introdução das dimensões características geométricas da secção o programa calcula a sua área e também memoriza este valor para uso futuro. Em contrapartida, o botão “Gravar Manual” grava apenas os valores que são introduzidos nestas secções, sem calcular os dados derivados.

No caso de uma viga ser pré-esforçada, o que não é o caso da viga considerada neste exemplo, deve-se explicitar se o pré-esforço é longitudinal e/ou transversal, a quantidade de armadura de pré-esforço, os níveis de pré-esforço bem como o modelo de comportamento (lei constitutiva) que se pretende utilizar na janela “Editar Secção - Pré-esforço” (Figura 2.21).

Neste ponto, o aplicativo encontra-se pronto a realizar o cálculo da viga selecionada, para isso o operador deve clicar no menu “Calcular” (Figura 2.22).



Figura 2.22 - Menu Editar do aplicativo TORQUE_ MTEAV

Logo que o aplicativo termine o cálculo, abre uma janela (Figura 2.23) onde se pode visualizar a curva $T - \theta$ calculada, bem como as diversas variáveis calculadas e representadas junto aos eixos das abcissas e das ordenadas do gráfico. Desta forma, o utilizador pode observar a evolução de uma variável em função de outra, à sua escolha.

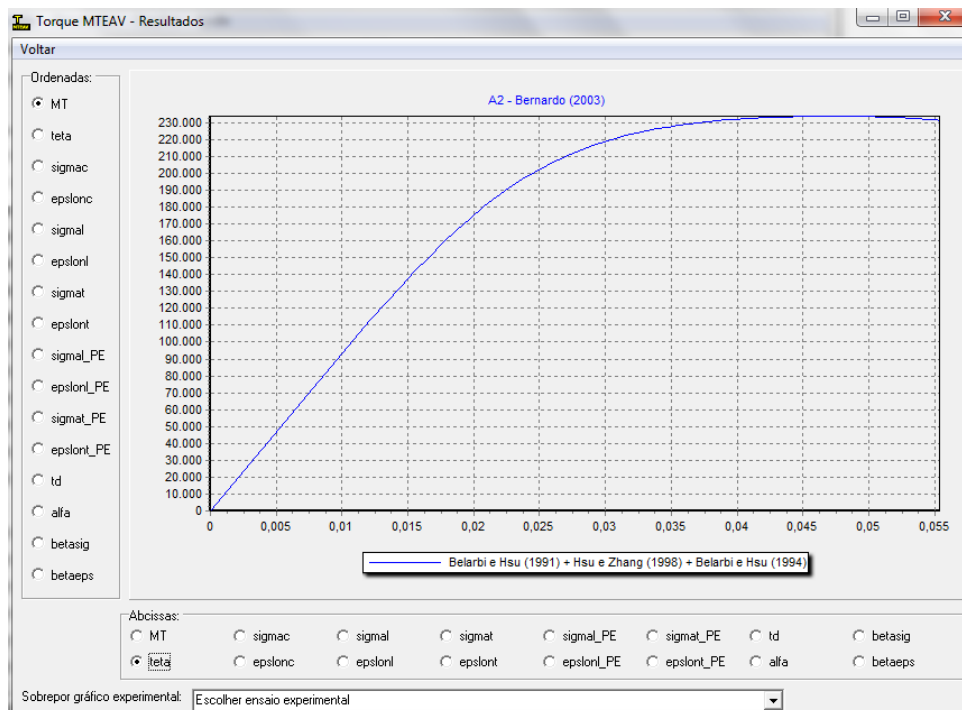


Figura 2.23 - Janela de Resultados ($T - \theta$) do aplicativo TORQUE_ MTEAV

Além da janela de resultados, o aplicativo devolve dois ficheiros, um com os pontos notáveis da Curva $T-\theta$ (pontos de cedência das armaduras e ponto relativo ao momento torsor máximo) e outro ficheiro com todos os valores calculados para as diversas variáveis. Ambos ficheiros de resultados começam pelo nome da secção/viga calculada seguido de “results” para o ficheiro que possui os pontos característicos da Curva $T-\theta$ (Figura 2.24), e “results (graf)” para o ficheiro que contém todos os valores para as diversas variáveis (Figura 2.25).

ponto	MT [N.m/m]	teta [rad/m]
MT máximo	2.33887308276E+0005	4.69463099727E-0002
Arm. Long.	2.16406761232E+0005	2.90213502439E-0002
Arm. Transv.	2.20496841893E+0005	3.07045970251E-0002

Figura 2.24 - Ficheiro de resultados (“results”) para a viga A2

ponto	MT [N.m/m]	teta [rad/m]	sigma [Pa]	epsilon	sigma1 [Pa]
0	0.0000000000E+0000	0.0000000000E+0000	0.0000000000E+0000	0.0000000000E+0000	0.0000000000E+0000
1	1.96535992610E+0005	2.36639216199E-0002	1.43469649093E+0007	1.05003096252E-0003	5.05442087685E+0008
2	2.00918152996E+0005	2.45975555731E-0002	1.45704880937E+0007	1.10006311871E-0003	5.17044724859E+0008
3	2.04667992522E+0005	2.55096215833E-0002	1.47423650154E+0007	1.15009643118E-0003	5.26984113453E+0008
4	2.08138847953E+0005	2.64081956640E-0002	1.48927701503E+0007	1.20013086178E-0003	5.36147394820E+0008
5	2.11318867140E+0005	2.73078127650E-0002	1.50277802133E+0007	1.25016638378E-0003	5.44509459490E+0008
6	2.1396806610E+0005	2.81626495296E-0002	1.51097400430E+0007	1.30020296073E-0003	5.51656816087E+0008
7	2.16406761232E+0005	2.90213502439E-0002	1.51839182401E+0007	1.35024061608E-0003	5.58160259338E+0008
8	2.18573251748E+0005	2.98684393113E-0002	1.52391295431E+0007	1.40027927130E-0003	5.63956958185E+0008
9	2.20496841893E+0005	3.07045970251E-0002	1.52778496557E+0007	1.45031893811E-0003	5.69147907039E+0008
10	2.2284798576E+0005	3.15301048094E-0002	1.53077275227E+0007	1.50035959804E-0003	5.73792365403E+0008
11	2.2384463176E+0005	3.23414124605E-0002	1.53203621294E+0007	1.55040122591E-0003	5.77923398866E+0008
12	2.25173989732E+0005	3.31456918978E-0002	1.53206654016E+0007	1.60044380840E-0003	5.81654443601E+0008
13	2.26360295689E+0005	3.39396392849E-0002	1.53112764699E+0007	1.65048732638E-0003	5.85004049760E+0008
14	2.27410088491E+0005	3.47232392000E-0002	1.52933703249E+0007	1.70053176040E-0003	5.88018042868E+0008
15	2.28380130037E+0005	3.55104091409E-0002	1.52757039396E+0007	1.75057708929E-0003	5.90805754834E+0008
16	2.29157901388E+0005	3.62589432377E-0002	1.52358836856E+0007	1.80062329414E-0003	5.93186758490E+0008
17	2.29881104011E+0005	3.70114860846E-0002	1.51981944141E+0007	1.85067037958E-0003	5.95409590201E+0008
18	2.30517566452E+0005	3.77524886005E-0002	1.51550360707E+0007	1.90071829982E-0003	5.97426216581E+0008
19	2.31108611959E+0005	3.84959356607E-0002	1.51136336533E+0007	1.95076703404E-0003	5.99312260349E+0008
20	2.31566455656E+0005	3.92015049725E-0002	1.50553612257E+0007	2.00081653729E-0003	6.00932437351E+0008
21	2.31983040364E+0005	3.99286822165E-0002	1.50050194516E+0007	2.05086679608E-0003	6.0252516883E+0008
22	2.32354468635E+0005	4.06250357898E-0002	1.49460050931E+0007	2.10091780505E-0003	6.03883678655E+0008
23	2.32648653210E+0005	4.12975928723E-0002	1.48787463852E+0007	2.15096956600E-0003	6.05126675237E+0008

Figura 2.25 - Ficheiro de resultados (“results (graf)”) para a viga A2

O aplicativo ainda permite ao utilizador definir no menu “Opções” o valor inicial do parâmetro ϵ_{ds} (“epsilon inicial”), o incremento deste parâmetro, os erros toleráveis para as variáveis t_d , α , β_σ e β_ϵ (Figura 2.26). Ainda neste menu, o utilizador pode decidir se pretende obter ou não os ficheiros de resultados, bem como se pretende carregar os ensaios experimentais para a curva final $T-\theta$, Figura 2.27.

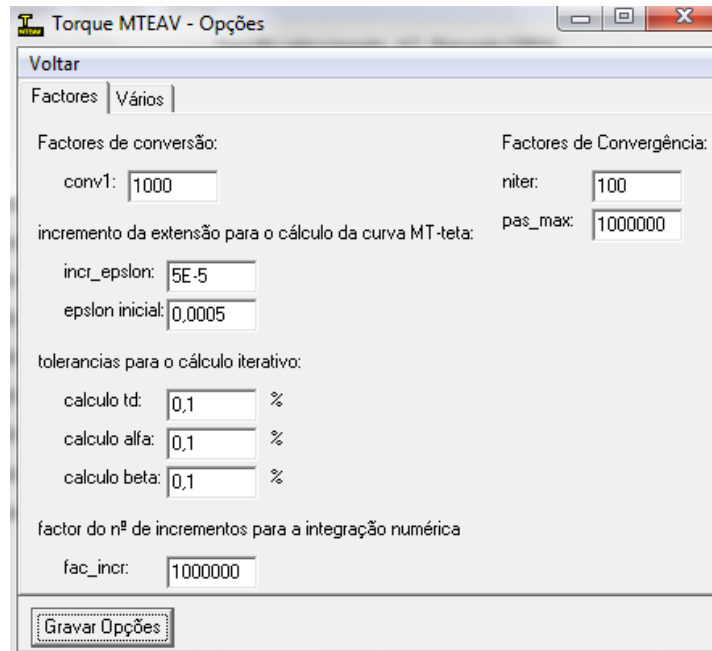


Figura 2.26 - Janela Opções - Fatores do aplicativo TORQUE_MTEAV

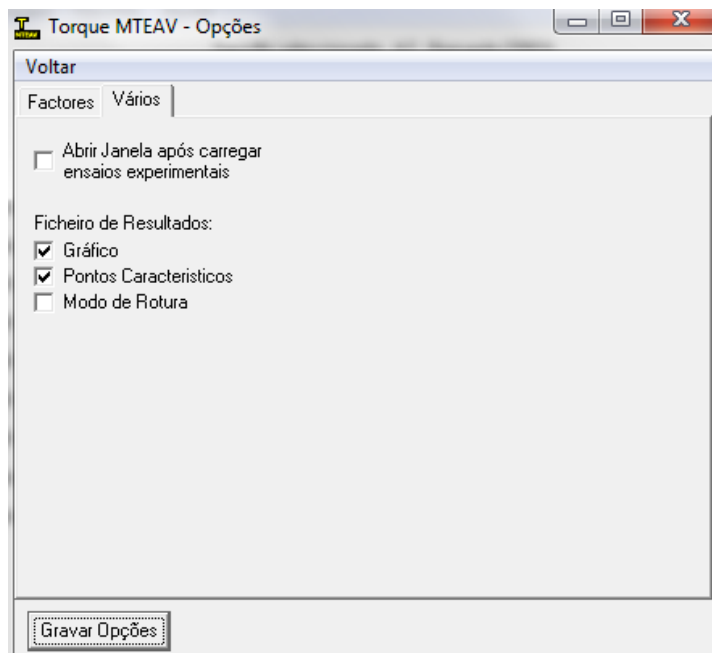


Figura 2.27 - Janela Opções - Vários do aplicativo TORQUE_MTEAV

Também neste menu existe o botão “Gravar Opções” que permite gravar todas as alterações realizadas e a serem assumidas pelo aplicativo.

2.7. Notas Finais

No presente Capítulo foi apresentado com detalhe a formulação do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (VATM) para o estudo do comportamento último de vigas de betão armado e pré-esforçado quando sujeitas à torção pura. Este modelo incorpora as relações constitutivas para o betão comprimido nas escoras (incluindo o *softening effect*) e para as armaduras ordinárias e de pré-esforço tracionadas (para as armaduras ordinárias tem-se em conta o *stiffening effect*) que permitem calcular uma boa previsão para o comportamento último das vigas de betão armado com secção cheia ou vazada, quer de resistência normal ou de alta resistência, e ainda incluindo vigas com pré-esforço longitudinal exterior e/ou não aderente (situações com especial interesse para este trabalho).

A utilização dos modelos apresentados pode tornar-se um quanto complexa e morosa se for realizado manualmente. Por isso, utiliza-se neste trabalho o aplicativo computacional, designado TORQUE_MTEAV e desenvolvido por Jorge Andrade em 2011, para realizar as tarefas de cálculo de forma automática. No final deste capítulo apresentou-se uma breve descrição do funcionamento do aplicativo. Refere-se desde já que, no âmbito deste trabalho, tanto o VATM como o aplicativo TORQUE_MTEAV, sofrerão alterações no sentido de incorporarem o efeito do confinamento axial. Tal será explicado em pormenor no próximo capítulo.

Capítulo 3 - VATM Modificado para Vigas com Confinamento Axial sujeitas à Torção

3.1. Introdução

No presente Capítulo, o VATM descrito no Capítulo 2 é estendido ao caso de vigas de betão armado em situação de confinamento axial sujeitas à torção pura. O objetivo é obter uma previsão teórica do comportamento último de vigas de betão armado que se encontrem nestas condições.

Conforme explicado na Secção 1.2.3, uma viga de betão armado submetida à torção tende a sofrer um alongamento na direção longitudinal. Este efeito é mais pronunciado após a fissuração da viga. No caso do alongamento se encontrar restringido pelos elementos adjacentes da estrutura, a viga fica sujeita a um estado de compressão axial em adição à torção. O valor da força de compressão depende das características da viga, do nível de carregamento e do grau de confinamento induzido pelos elementos adjacentes. A existência dessa força de compressão modifica o estado interno de equilíbrio da viga. Então, para o equilíbrio interno é assumido neste trabalho uma situação de interação de esforços: Torção - compressão centrada. Desta forma, a caracterização da viga nesta nova situação, tendo por base a formulação do VATM, requer a modificação do modelo teórico que apenas é válido para a situação de torção pura.

Numa fase inicial, a modificação é realizada para vigas de betão armado com secção retangular.

Conforme referido na Secção 1.2.2, ensaios realizados em vigas sujeitas à flexão com armaduras externas, devidamente ancoradas nas extremidades, induzem um estado de confinamento axial. Então, estes resultados podem ser extrapolados para ao caso de vigas sujeitas à torção com armaduras externas. Em relação a estes elementos, interessa em particular o caso das vigas com pré-esforço longitudinal exterior sujeitas à torção, para as quais existem alguns resultados experimentais encontrados na bibliografia que podem servir para a verificação do modelo teórico. Assim, após a modificação do VATM para vigas de betão armado, este capítulo inclui também a modificação do mesmo modelo para vigas com pré-esforço longitudinal centrado (exterior ou não aderente) sujeitas à torção.

O VATM modificado é seguidamente utilizado no âmbito de uma análise comparativa com alguns resultados experimentais disponíveis na literatura consultada e também com alguns resultados numéricos resultantes da simulação com elementos finitos (análise não linear) de uma viga de betão armado sujeita a diferentes níveis de confinamento axial. A utilização dos resultados de um modelo numérico previamente calibrado torna-se necessário face à escassez de resultados experimentais de vigas à torção com confinamento axial. A descrição do modelo numérico é feita no Capítulo 5.

3.2. Justificação da metodologia escolhida para a incorporação do efeito do confinamento axial

A proposta apresentada neste trabalho para a modificação do VATM com vista a estender este modelo ao caso de vigas com confinamento axial sujeitas à torção, resultou da experimentação de várias aproximações que foram sendo corrigidas até se chegar ao modelo final considerado como sendo o mais adequado.

Como foi discutido no Capítulo 1, na realidade e nas situações correntes de utilização uma viga não se encontra livre de restrições axiais. Na Figura 3.1 apresenta-se um exemplo de uma viga inserida num pórtico simples em que existe continuidade ao nível dos nós. Quando a viga tende a aumentar o seu comprimento ao longo do seu eixo longitudinal devido ao efeito torsional, esta mobiliza a rigidez à flexão dos pilares adjacentes (deformada representada na Figura 3.1), a rigidez dos pilares depende da sua secção, da sua altura, das suas condições de apoio e ligação à viga e dos materiais que os constituem. Deste modo os pilares restringem o movimento livre da viga. Neste caso considera-se que estes conferem um estado de confinamento axial à viga. O nível de confinamento depende então da rigidez à flexão dos pilares.

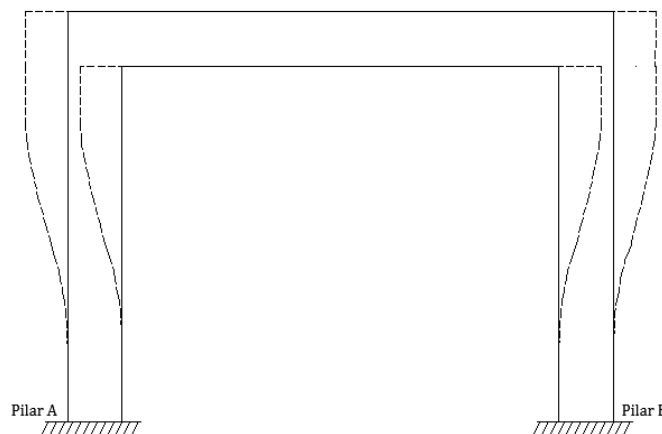


Figura 3.1 - Viga sujeita à torção inserida num pórtico simples

Numa primeira fase, analisando-se o comportamento de uma viga de betão armado sujeita à torção pura e livre de restrições, observa-se que esta alonga ao longo do eixo longitudinal e principalmente no estado fissurado, tal como se ilustra na Figura 3.2. O alongamento da viga, Δl , é quantificado através da extensão das armaduras longitudinais, ε_l , isto é, admite-se por simplicidade da análise do problema que o alongamento da armadura longitudinal corresponde ao alongamento total da viga. Admite-se também que a extensão nas armaduras é constante ao longo de toda a viga (torção pura), mesmo no estado fissurado. Esta última simplificação decorre da ainda não existência de um modelo de cálculo para a fissuração de vigas de betão armado sujeitas à torção, o qual permitiria calcular uma extensão média da armadura longitudinal para toda a viga (à semelhança do realizado nas vigas à flexão para o cálculo da deformação). Deve referir-se que o padrão de fissuração de

uma viga à torção é constituído por fissuras principais com desenvolvimento helicoidal na direção longitudinal e por múltiplas fissuras secundárias [16], não existindo propriamente zonas da viga com a secção totalmente em estado não fissurado como acontece no caso das vigas à flexão. Por isso, julga-se que a consideração de uma extensão constante ao longo da viga (resultante do cálculo da secção pelo VATM), mesmo em estado fissurado, corresponderá a uma situação muito próxima da real.

Tendo por base as hipóteses anteriores, torna-se necessário calcular a extensão na armadura ordinária longitudinal, ε_l , tendo por base o procedimento de cálculo do VATM (Figura 2.9) exposto na Secção 2.4.2. Conhecendo a extensão na armadura longitudinal, é possível calcular uma estimativa para o alongamento da viga conhecendo o seu vão (l):

$$\Delta l = l\varepsilon_l \quad (3-1)$$

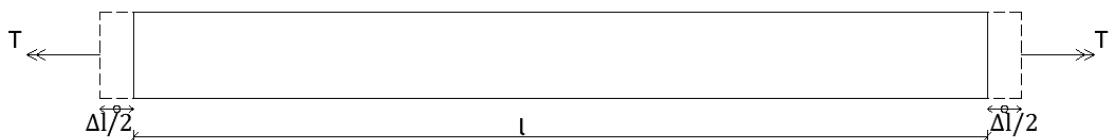


Figura 3.2 - Alongamento da viga de betão armado sujeita à torção pura

Tomando em conta o caso da viga inserida no pórtico da Figura 3.1, e pretendendo-se analisar esta viga para uma situação de interação de esforços torção - compressão centrada, em virtude da existência da restrição axial, tem-se como equivalente à Figura 3.1 a Figura 3.3 quando se pretende representar a viga isolada. No modelo de viga representado na Figura 3.3, as molas lineares, com constante elástica k , pretendem simular a rigidez de flexão dos pilares do pórtico aos quais a viga se encontra na realidade da viga. A existência da referida força de compressão centrada está associada à força na viga restituída pelas molas quando a mesma tende a alongar do valor Δl . Essa força será tanto maior quanto maior a rigidez da mola, devendo ser também diretamente proporcional ao alongamento livre da viga. Em virtude da existência desta interação, o alongamento efetivo da viga será na realidade menor em comparação com a situação de viga livre. Com base no referido anteriormente, fica assim justificado a existência de uma interação de esforços torção - compressão centrada em resultado da restrição ao alongamento da viga. Fica também justificado que a situação de viga à torção com confinamento axial pode ser considerada como equivalente a uma viga sujeita a uma interação de esforços torção - compressão centrada.

Torna-se necessário portanto calcular a força de confinamento, F_{ca} , resultante da existência de molas no modelo de viga isolada, em função da rigidez k e conhecendo-se à partida o alongamento total da viga livre, Δl . A força de confinamento axial pode ser calculada simplificada através da expressão:

$$F_{ca} = \Delta l \times k \quad (3-2)$$

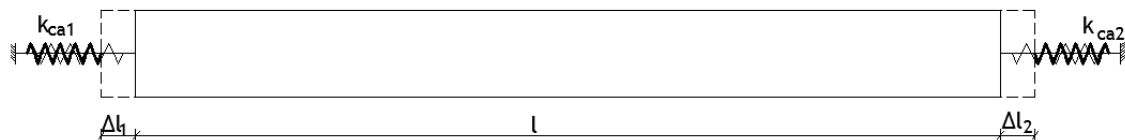


Figura 3.3 - Viga isolada com influência dos pilares simulada através de molas lineares de rigidez k

A rigidez k na Equação (3-2) é considerada neste trabalho como um parâmetro de entrada no procedimento de cálculo a ser introduzido pelo utilizador. O seu cálculo deverá assim ser executado previamente em função da real situação correspondente à localização da viga na estrutura e à sua ligação aos restantes elementos que lhe conferem o confinamento axial.

Para introduzir o efeito da força de confinamento, definida pela Equação (3-2) no VATM, exige que o modelo seja revisto para incorporar a situação de interação de esforços torção - compressão centrada. Tal será apresentado nas secções seguintes.

Deve finalmente referir-se que a metodologia anteriormente apresentada para a simulação do confinamento axial de vigas à torção é aplicável a qualquer outra situação real de viga restringida, diferente do exemplo ilustrado na Figura 3.1 e utilizado nesta secção.

3.3. O VATM - para vigas de betão armado com confinamento axial

3.3.1. Considerações gerais

Como foi referido na secção anterior, a metodologia adotada para simular o efeito do confinamento axial em vigas sujeitas à torção pressupõe, numa primeira fase e para cada nível de carregamento, o cálculo do alongamento da viga sem restrição axial e a força de confinamento axial associada devido à restrição induzida pelos elementos adjacentes. O objetivo da Secção 3.3 consiste em modificar o VATM para a situação em que, para além do momento torsor, existe também um esforço axial de compressão centrado.

Deste modo, para derivar as novas equações do VATM nas secções que se seguem, segue-se a linha de raciocínio exposta ao longo do Capítulo 2 para a derivação da formulação do VATM original. Pretende-se assim, estabelecer um VATM mais geral e cuja formulação deverá coincidir com o VATM original ao se considerar a não existência do confinamento.

3.3.2. Análise de uma viga com confinamento axial com base no Modelo de Treliça Plana

Nesta secção pretende-se adaptar a análise de uma viga com base no Modelo de Treliça Plana apresentada na Secção 2.3.2. ao caso de vigas confinadas axialmente. Este problema pode ser interpretado como uma situação de interação de esforços Flexão + Esforço Transverso + Esforço axial. É para esta nova situação de interação de esforços que as equações apresentadas na Secção 2.3.2. serão revistas e adaptadas. O esforço axial será designado por P e, para derivar as novas equações, considera-se convencionalmente um esforço axial positivo, ou seja, de tração. Uma vez que o esforço axial associado ao problema em estudo se trata de um esforço de compressão, basta apenas trocar o sinal da força P nas equações apresentadas seguidamente.

Considere-se novamente o elemento A de viga ilustrado na Figura 2.1 (a) que agora se encontra num novo estado de equilíbrio representado na Figura 3.4. Também neste caso se admite que a força de corte V é decomposta na força diagonal D absorvida pelas escoras de betão e pela força longitudinal \bar{N} absorvida pelas armaduras longitudinais (esta força continua a ser repartida igualmente pelas duas cordas superior e inferior). Nesta nova situação a força \bar{N} deve incorporar a força axial P , pelo que a força longitudinal passa a ser dada pela Equação (3-3) e a força diagonal e a tensão na escora de betão continuam a ser traduzidas pela Equações (2-2) e (2-4), respetivamente.

$$\bar{N} = V \cot \alpha + P \quad (3-3)$$

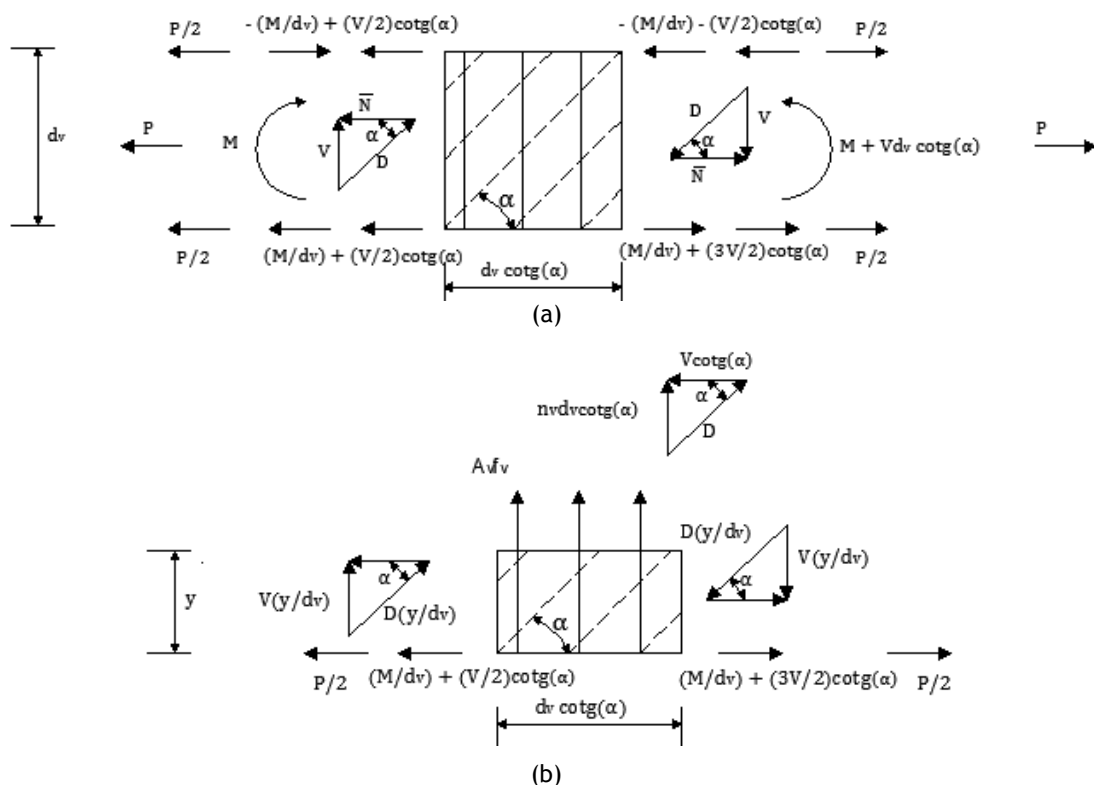


Figura 3.4 - Análise de uma viga confinada axialmente com base no Modelo de Treliça Plana

Devido à presença do esforço axial P a solicitação nas armaduras longitudinais é alterada relativamente ao previsto nas Equações (2-5) a (2-8). Na face esquerda, somando a contribuição do momento fletor M , da força de corte V e da força de confinamento axial P , as forças na corda superior e inferior, N_t e N_b , vêm:

$$N_t = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} \quad (3-4)$$

$$N_b = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} \quad (3-5)$$

Na face direita soma-se a contribuição do momento fletor $M + Vd_v \cot \alpha$, da força de corte V da força de confinamento axial P , e as forças na corda superior e inferior, N_t e N_b , vêm:

$$N_b = \frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{3V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} \quad (3-6)$$

$$N_t = -\frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \alpha + \frac{P}{2} \quad (3-7)$$

Como foi referido anteriormente, a utilização das equações anteriores no âmbito de um problema de confinamento axial é realizada apenas mediante a troca do sinal da força P .

A presença do esforço axial não influencia o equilíbrio na direção transversal, pelo que não existe influência desse esforço no cálculo da força da armadura transversal, permanecendo válida a Equação (2-10).

3.3.3. Vigas confinadas axialmente com secção vazada sujeitas à torção pura

Como foi referido na Secção 2.3.3, a inclinação das escoras de betão não é constante e igual a 45° tal como assumido inicialmente por Rausch [64]. De facto, o ângulo das escoras é na realidade próximo de 45° se as armaduras longitudinais e transversais estiverem equilibradas. A presença de esforço axial influencia no ângulo das escoras de betão. Se se estabelecer uma analogia entre o confinamento axial e o estado de compressão induzido pelo pré-esforço longitudinal em vigas à torção, tanto o Código Americano ACI 318-R-05 [1] como vários estudos anteriores [16], mostraram que a presença de um esforço axial de compressão reduz o ângulo das escoras de betão.

Assim, é expectável que, devido ao confinamento, o ângulo de inclinação das escoras de betão seja menor em comparação com uma viga sem restrição axial com as mesmas características (geométricas, material, quantidade e disposição das armaduras). Esta tendência será comprovada tendo por base uma análise paramétrica que é objetivo do Capítulo 4.

Na viga ilustrada na Figura 3.5 pode observar-se que a força longitudinal nas barras de canto deve incorporar, para além da solicitação longitudinal devida ao momento torsor T

também a componente do esforço axial $P/4$ (assumindo que o esforço axial P é igualmente repartido pelos varões longitudinais de canto). Assumindo que o modelo de treliça espacial continua a ser válido para qualquer valor de P (este assunto será retomado no Capítulo 4), a força longitudinal na armadura de canto, que era calculada pela Equação (2-13), fica:

$$\bar{N} = ql_q \cot \alpha + \frac{P}{4} \quad (3-8)$$

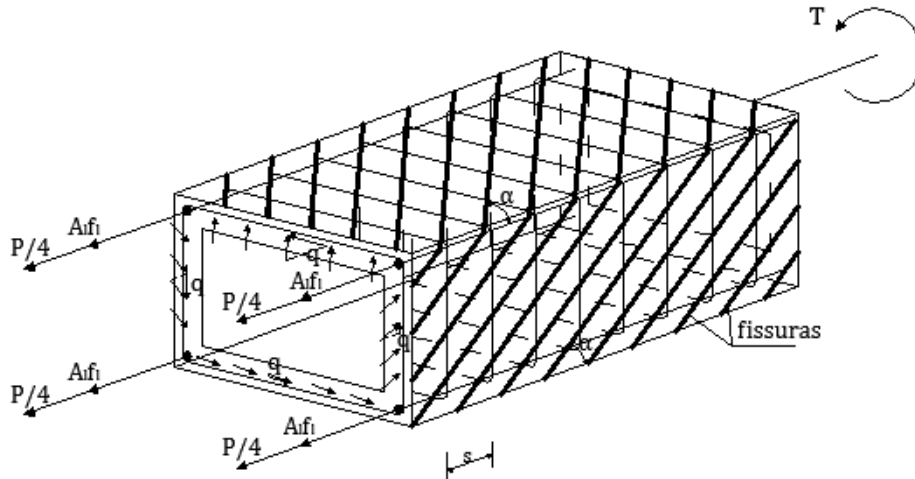


Figura 3.5 - Viga com seção vazada sujeita à interação de esforços de torção e esforço axial

Definindo a força total nas barras longitudinais como sendo ΔN , em que A_l e f_l representam a área total de armadura longitudinal e a tensão dessa mesma armadura, respetivamente e definindo $p_0 = \sum l_q$ como sendo o perímetro da linha média do fluxo de corte, a força total nas armaduras longitudinais vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot \alpha + P = A_l f_l + P \quad (3-9)$$

Substituindo q pela fórmula de Bredt (Equação (2-11)) na equação anterior fica:

$$A_l f_l = \frac{Tp_0}{2A_0} \tan \alpha + P \quad (3-10)$$

As Equações (2-17), (2-18) (ou (2-19)) para o cálculo da força nas barras transversais e na escora diagonal de betão, respetivamente, mantêm-se inalteradas.

As Equações (2-11), (3-10), (2-17) e (2-19) constituem as quatro equações básicas de equilíbrio para o VATM estendido a vigas sujeitas à torção com esforço axial. Como referido anteriormente, a utilização das equações anteriores no âmbito de um problema de confinamento axial é realizada apenas mediante a troca de sinal para a força P .

3.3.4. Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial

Tendo por base o exposto nas secções anteriores, apresenta-se seguidamente o procedimento de cálculo para estimar a curva $T - \theta$ de vigas de betão armado com confinamento axial tendo por base o VATM estendido a este tipo de vigas.

À semelhança do exposto na Secção 2.4.2, o cálculo da curva $T - \theta$ pelo VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial requer três equações de equilíbrio para determinar o momento torsor T , a espessura efetiva t_d das escoras de compressão e sua inclinação em relação ao eixo longitudinal da viga α . O momento torsor pode ser calculado através da Equação (2-39).

Substituindo a Equação (2-39) nas Equações (3-10) e (2-21), o ângulo α pode ser determinado a partir:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_t f_l - P}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (3-11)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_t f_t}{s \sigma_d t_d} \quad (3-12)$$

A espessura efetiva da escora de betão pode ser calculada somando as Equações (3-11) e (3-12), ficando:

$$t_d = \frac{A_t f_l - P}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (3-13)$$

Obtém-se assim as três equações de equilíbrio procuradas: Equação (2-39), (3-11) (ou (3-12)) e (3-13).

As equações para determinar a extensão na armadura longitudinal e transversal, Equações (2-50) e (2-49) respetivamente, e a Equação (2-51) para o cálculo do ângulo de torção θ , bem como a Equação (2-32) e (2-35) para o cálculo da tensão na escora de betão e armaduras ordinárias, respetivamente, permanecem à priori inalteradas visto que não são afetadas pela força P . No entanto, estas três equações sofrem na realidade uma pequena alteração relativamente ao exposto na Secção 2.4. Tal alteração prende-se com a necessidade da extensão à superfície da escora diagonal de betão, ε_{ds} , ter de ser substituída pela extensão efetiva à superfície da escora diagonal de betão, $\varepsilon_{ds,ef}$. Este assunto será explicado seguidamente. Desta forma, a extensão na armadura longitudinal e transversal e o ângulo de torção θ devem ser determinados através das seguintes equações:

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds,ef} \quad (3-14)$$

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds,ef} \quad (3-15)$$

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds,ef}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3-16)$$

O cálculo da tensão instalada nas armaduras segundo a Equação (2-35) permanece válido, tendo em conta a relação constitutiva adotada neste trabalho e apresentada na Secção 2.3.5.

Por forma a aproveitar o código implementado para o programa TORQUE_MTEAV, pretende-se tanto quanto possível manter o algoritmo original de cálculo representado no diagrama de fluxo da Figura 2.9 e relativo ao VATM para vigas de betão armado sem confinamento axial. Desta forma, o parâmetro ε_{ds} deverá continuar a constituir o valor de entrada do procedimento. Tal como explicado na Secção 3.2, a metodologia escolhida para a consideração do efeito do confinamento axial consiste, numa primeira fase e para cada valor de entrada do ε_{ds} , utilizar o VATM original para calcular a resposta da viga à torção sem confinamento axial, designadamente a extensão das armaduras longitudinais. A partir desta extensão, é calculado o alongamento da viga e a força de confinamento axial resultante (força de compressão) que é introduzida no novo procedimento de cálculo baseado no VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial. O novo procedimento incorpora as novas equações deduzidas nas secções anteriores. O aproveitamento da estrutura do algoritmo do VATM original para o VATM estendido à situação de vigas com confinamento axial, obriga a que o valor do ε_{ds} inicialmente considerado no VATM original seja corrigido no VATM modificado para ter em conta a força de compressão resultante do confinamento axial. O novo valor do ε_{ds} , designado de $\varepsilon_{ds,ef}$, deverá contabilizar o encurtamento das escoras em resultado da força de confinamento. Deste modo, pretende-se repor o estado real de deformação da viga na situação de confinamento axial, impondo-se no procedimento de cálculo a deformação imposta devido à força de compressão. A alternativa a esta metodologia seria reformular o algoritmo de cálculo, impondo-se como valor de entrada um parâmetro que não traduza o estado de deformação axial da viga. Desta forma, o estado de deformação induzido pela força de confinamento axial seria calculado durante o procedimento. Como foi referido anteriormente, a opção por manter a estrutura original do algoritmo não permitiu seguir este caminho.

O valor de $\varepsilon_{ds,ef}$ segue um raciocínio que se passa a explicar. Recorde-se que para calcular a força de confinamento (F_{ca}) foi admitido que a viga se encontra livre de confinamento, ou seja, desligada dos elementos adjacentes (Secção 3.2). A correção da deformação axial da viga, em situação de confinamento, é feita considerando também a viga livre. Assim, a partir da força de confinamento, calcula-se o encurtamento da armadura longitudinal ($\varepsilon_{l,ca}$) na situação de viga confinada. Tal cálculo é realizado admitindo que o encurtamento da armadura longitudinal pode ser considerado igual ao encurtamento da viga. Homogeneizando a secção, o encurtamento da armadura longitudinal devido à força de confinamento pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{l,ca} = \frac{\sigma_{ca}}{E_c} = \frac{F_{ca}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{F_{ca}}{E_c (A_c - A_h) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (3-17)$$

Onde:

- σ_{ca} - Tensão devido à força de confinamento axial
- F_{ca} - Força de compressão devido ao confinamento axial
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- A_{ch} - Área de betão equivalente
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão
- A_h - Área da zona vazada da secção (em secções cheias $A_h = 0$)

A ocorrência do encurtamento na armadura longitudinal induz um encurtamento na escora de betão inclinada. Assim, em rigor, deve calcular-se o encurtamento que a fibra da face exterior da escora de betão ($\varepsilon_{ds,ca}$) sofre devido ao confinamento axial da viga. O cálculo desse encurtamento é feito de uma forma simplificada, tendo por base o ilustrado na Figura 3.6, a partir da qual se pode estabelecer que:

$$\varepsilon_{ds,ca} = \frac{\varepsilon_{l,ca}}{\cos \alpha} \quad (3-18)$$

Em rigor, a fibra da face exterior da escora de betão sofre um encurtamento $\varepsilon_{ds,ca}$, devido ao confinamento axial da viga, tal como se encontra ilustrado na Figura 3.6.

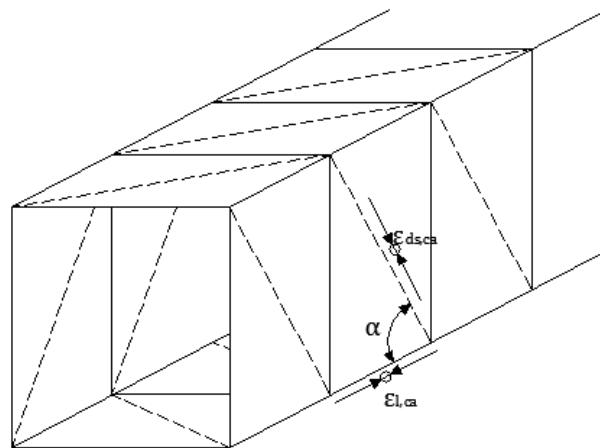


Figura 3.6 - Encurtamento da escora de betão devido ao confinamento axial

Deste modo, no novo procedimento de cálculo, o valor de entrada ε_{ds} para o procedimento de cálculo iterativo deve ser somado ao encurtamento da escora devido ao

confinamento axial de modo a calcular a extensão efetiva $\varepsilon_{ds,ef}$, sendo este o valor que deve ser dado como dado inicial para o mesmo procedimento.

$$\varepsilon_{ds,ef} = \varepsilon_{ds} + \varepsilon_{ds,ca} \quad (3-19)$$

A metodologia anterior permite, de uma forma simples, corrigir o estado de deformação inicial da viga livre tendo em conta o efeito do confinamento axial.

Tendo por base as expressões matemáticas deduzidas ao longo da Secção 2.5, é neste ponto possível estabelecer o novo modelo de cálculo iterativo para calcular os pontos da curva $T-\theta$ que caracterizam o comportamento evolutivo da viga na situação de confinamento axial. De seguida apresenta-se de forma sucinta os passos a realizar para a construção da curva $T-\theta$ da viga nessa situação.

- 1) Seleccionar ε_{ds} . Assumir valores para t_d , α e β (uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$).
- 2) Inicialmente deve calcular-se ε_l através do processo iterativo do Modelo de Trelíça Espacial de Ângulo Variável (Figura 2.9). Calcular Δl a partir da Equação (3-1);
- 3) Determinar a constante de rigidez k da estrutura (valor de entrada do utilizador do processo iterativo). Calcular a força de compressão devido ao confinamento axial F_{ca} através da Equação (3-2) e posteriormente determinar o valor da extensão na armadura longitudinal $\varepsilon_{l,ca}$ devido a esta força a partir da Equação (3-17);
- 4) Calcular a extensão na escora de betão $\varepsilon_{ds,ca}$ devido à força de confinamento através da Equação (3-18). Calcular o valor de entrada para a extensão efetiva da escora de betão $\varepsilon_{ds,ef}$ a partir da Equação (3-19), substituir o valor ε_{ds} no passo 1;
- 5) Calcular k_s através da Equação (2-33) se $\varepsilon_{ds} \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2-34) se $\varepsilon_{ds} > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ e determinar a tensão nas escoras σ_d a partir da Equação (2-32);
- 6) Determinar o momento torsor T pela Equação (2-39);
- 7) Calcular as extensões na armadura longitudinal (ε_l) e transversal (ε_t) a partir das Equações (3-15) e (3-14), respetivamente, e posteriormente calcular as tensões nas armaduras longitudinal e transversal a partir da Equação (2-35), equação definida pela relação constitutiva;
- 8) Verificar t_d e α pelas Equações (3-13) e (3-11) ou (3-12), respetivamente;
- 9) Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ através da Equação (2-28) definida pela lei constitutiva;
- 10) Se:
 - 6.1) Os valores calculados de t_d , α e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 1) a 5) até que estes valores convirjam.
 - 6.2) Caso os valores calculados de t_d , α e β forem próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.

- 11) Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (3-16). Assim obtém-se um ponto pertencente à Curva teórica $T-\theta$ de coordenadas $(\theta; T)$;
- 12) Selecionar outros valores de ε_{ds} , e consecutivamente calcular o novo valor de $\varepsilon_{ds,ef}$ e repetir os Passos 2) a 7) para cada valor de ε_{ds} por forma a obter vários pontos $(\theta; T)$ que permitam desenhar a previsão da Curva $T-\theta$.

De uma forma simplificada e resumida, pode apresentar-se o processo iterativo geral na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo se encontra ilustrado na Figura 3.7.

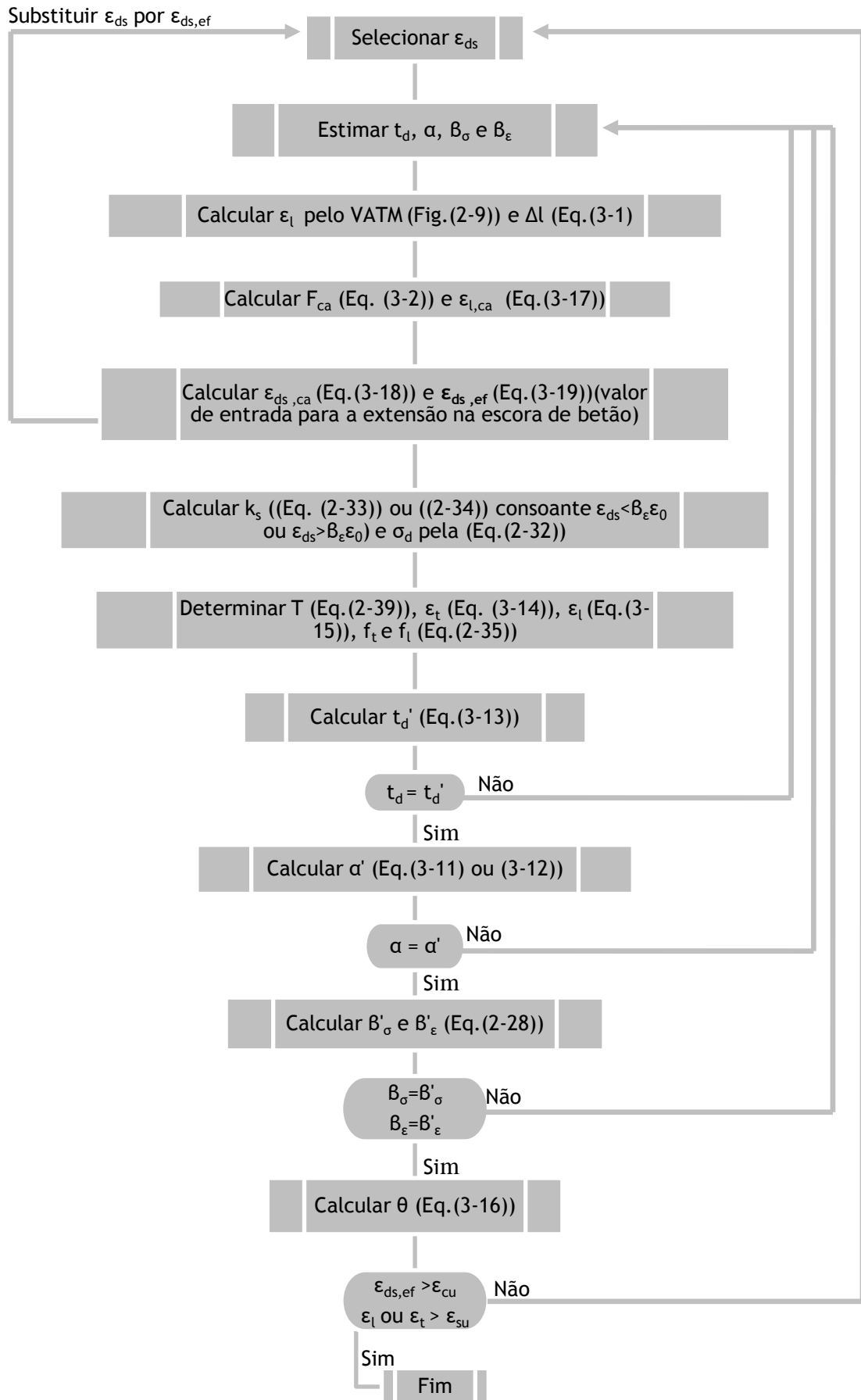


Figura 3.7 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva T- θ para a situação de viga com confinamento axial

3.4. Vigas de Betão Pré-esforçado com armaduras não aderentes e/ou cabos exteriores

3.4.1. Considerações gerais

Conforme já referido no início deste capítulo, pode considerar-se que as vigas com pré-esforço longitudinal exterior ou não aderente, desde que as armaduras de pré-esforço se encontrem devidamente ancoradas nas extremidades, induzem um estado de confinamento axial à viga sujeita à torção pura, em resultado da rigidez axial dessas mesmas armaduras. A ausência de aderência entre as armaduras de pré-esforço e o betão na viga permite considerar que o confinamento da viga constitui um problema análogo ao de uma viga restringida por outros elementos estruturais externos à mesma. De facto, o cálculo do alongamento que a viga tende a desenvolver, em resultado da torção e a qual depende diretamente da extensão da armadura longitudinal ordinária (armadura aderente), não é influenciado pela presença da armadura de pré-esforço não aderente [25]. Nesta situação, quando a viga de betão pré-esforçado é sujeita à torção pura, esta tende a alongar segundo o seu eixo longitudinal. No entanto, a armadura de pré-esforço não aderente poderá continuar no seu estado de compressão conferindo. Assim, o grau de confinamento da viga irá depender essencialmente da rigidez axial da armadura de pré-esforço.

Deve também referir-se que a compressão inicial induzida pelo pré-esforço não é neste trabalho considerada como participante para o confinamento axial da viga. Esta hipótese resulta do facto do modelo de cálculo usado para simular a viga à torção (VATM) assumir que a viga está plenamente fissurada desde o início do carregamento. Desta forma, o estado de tensão anterior correspondente à situação de descompressão do betão não pode ser tido em conta. Uma vez que apenas se pretende estudar o comportamento último da viga, o facto de não ser possível entrar com a compressão inicial induzida pelo pré-esforço para o cálculo do efeito de confinamento axial torna-se irrelevante.

A metodologia adotada neste trabalho para simular o efeito do confinamento axial em vigas de betão pré-esforçado com cabos exteriores e/ou não aderentes sujeitas à torção é em tudo muito semelhante à metodologia descrita na Secção 3.3 para o caso de vigas de betão armado. Assim, na próxima secção apenas se apresentará a alteração do modelo apresentado na Secção 3.3 com vista a incorporar o efeito da armadura de pré-esforço. Ao longo da próxima secção apresenta-se a derivação das novas equações tendo por base a modelação do VATM. Tal derivação deve, à semelhança das vigas de betão armado, respeitar a premissa de que a nova formulação deverá coincidir com a formulação do VATM original para vigas de betão pré-esforçado (Secção 2.5) quando se considerar um confinamento nulo.

3.4.2. Procedimento de cálculo para a previsão teórica da Curva $T - \theta$ com base no VATM estendido ao caso de vigas com confinamento axial

Nesta secção apresenta-se o procedimento de cálculo para estimar a curva teórica $T - \theta$ para vigas de betão pré-esforçado considerando o confinamento axial que a armadura de pré-esforço confere. Tendo em consideração o exposto na Secção 2.5 e na Secção 2.3.4, essa mesma formulação será tomada como linha de raciocínio.

Para vigas de betão pré-esforçado, o equilíbrio da força de confinamento axial é tido em conta nas equações de equilíbrio longitudinal. Para o cálculo do momento torsor, T , mantém-se a Equação (2-39). No entanto, para o cálculo do ângulo, α , que a escora de betão faz com o eixo longitudinal a Equação (2-52) fica:

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{A_l f_l + A_{pl} f_{pl} - F_{ca}}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (3-20)$$

Para o cálculo da espessura efetiva, t_d , da escora de betão, a Equação (2-53) é substituída pela seguinte equação:

$$t_d = \frac{A_l f_l + A_{pl} f_{pl} - F_{ca}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_l f_t}{s \sigma_d} \quad (3-21)$$

Em relação às equações de compatibilidade para o caso em estudo, como estas não envolvem o equilíbrio longitudinal, mantêm-se inalteradas. Assim, para o cálculo da extensão na armadura ordinária longitudinal, ε_l , transversal, ε_t , e o ângulo de torção θ permanecem válidas as Equações (3-16), (3-17) e (3-18), respetivamente. Pelo mesmo motivo e para o cálculo da tensão na armadura longitudinal e transversal, mantém-se a Equação 2-35. Também a tensão na armadura longitudinal de pré-esforço continua a ser determinada pela Equação 2-59.

De forma análoga ao procedimento descrito na Secção 3.3, deve inicialmente calcular-se a extensão na armadura longitudinal ordinária através do modelo descrito e resumido na Secção 2.5 (Figura 2.12). Posteriormente, determina-se uma estimativa do alongamento da viga através da Equação (3-22), onde l é o vão da viga:

$$\Delta l = l \varepsilon_l \quad (3-22)$$

Para a situação em estudo na presente secção, o confinamento axial da viga é conferido pela rigidez axial da armadura de pré-esforço não aderente ou exterior. Deste modo a força de confinamento axial continua a ser definida pela Equação (3-2). Contudo, é necessário ter em conta para o equilíbrio longitudinal a força de pré-esforço inicial aplicada ao cabo, F_{ci} , sendo dada pela seguinte equação:

$$F_{ci} = f_{pi} A_{pl} \quad (3-23)$$

Como foi na Secção anterior, durante o alongamento da viga o cabo de pré-esforço é solicitado axialmente, por isso, a rigidez que este confere pode ser determinada através da seguinte equação:

$$k = \frac{E_p A_{pl}}{l_p} \quad (3-24)$$

Onde l_p é o comprimento efetivo da armadura de pré-esforço, E_p é o módulo de elasticidade das armaduras de pré-esforço e A_{pl} é a área das respetivas armaduras.

A partir da força de confinamento axial, F_{ca} , e da força de pré-esforço inicial, F_{ci} , determina-se o encurtamento da armadura ordinária longitudinal, numa situação de viga livre. Este cálculo é realizado considerando, por simplicidade, que o encurtamento da armadura longitudinal é o mesmo que o encurtamento total da viga. Assim, homogeneizando a secção, o encurtamento da armadura longitudinal pode ser calculado através da equação:

$$\varepsilon_{l,ca} = \frac{\sigma_{ca}}{E_c} = \frac{F_{ca} + F_{ci}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{F_{ca} + F_{ci}}{E_c (A_c - A_h - A_{pl}) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (3-25)$$

O encurtamento da armadura longitudinal implica um encurtamento da escora de betão inclinada, $\varepsilon_{ds,ca}$, que é calculado, em módulo, através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{ds,ca} = \frac{\varepsilon_{l,ca}}{\cos \alpha} \quad (3-26)$$

Também neste procedimento de cálculo o parâmetro de entrada ε_{ds} deverá ser substituído pela extensão da escora de betão inclinada corrigida que tem em conta o efeito de confinamento, $\varepsilon_{ds,ef}$. O novo parâmetro de entrada é determinado pela seguinte equação:

$$\varepsilon_{ds,ef} = \varepsilon_{ds} + \varepsilon_{ds,ca} \quad (3-27)$$

Tendo por base as expressões matemáticas apresentadas ao longo da Secção 2.7, bem como as relações constitutivas para o betão à compressão, armaduras ordinárias e de pré-esforço à tração (Secção 2.3.5), é possível estabelecer, de forma resumida, o novo processo de cálculo iterativo para encontrar os pontos da curva $T-\theta$ que caracterizam o comportamento evolutivo de uma viga de betão pré-esforçado.

- 1) Selecionar ε_{ds} e assumir valores para t_d , α e β (uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$).
- 2) Inicialmente deve calcular-se ε_l através do processo iterativo do VATM (Figura 2.12). Calcular Δl a partir da Equação (3-22);
- 3) Determinar a constante de rigidez axial k da armadura de pré-esforço através da Equação (3-24). Calcular a força de compressão devido ao confinamento axial F_{ca} através da Equação (3-2) e posteriormente determinar o valor da extensão na armadura longitudinal $\varepsilon_{l,ca}$ devido a esta força a partir da Equação (3-25);

- 4) Calcular a extensão na escora de betão $\varepsilon_{ds,ca}$ devido à força de confinamento através da Equação (3-26). Calcular o valor de entrada para a extensão efetiva da escora de betão $\varepsilon_{ds,ef}$ a partir da Equação (3-27) e substituir ε_{ds} no passo 1;
- 5) Calcular k_s através da Equação (2-33) se $\varepsilon_d \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2-34) se $\varepsilon_d > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ e determinar a tensão nas escoras σ_d a partir da Equação (2-32);
- 6) Determinar o momento torsor T pela Equação (2-39);
- 7) Calcular as extensões na armadura ordinária longitudinal (ε_l) e transversal (ε_t) a partir das Equações (3-15) e (3-14), respetivamente, e posteriormente calcular as tensões nas armaduras longitudinal e transversal a partir da Equação (2-35), equação esta definida pela relação constitutiva; Calcular a extensão na armadura longitudinal de pré-esforço pela Equação (2-54) e a respetiva tensão a partir da Equação (2-59);
- 8) Verificar t'_d e α' pelas Equações (3-21) e (3-20), respetivamente;
- 9) Verificar $\beta' = \beta'_\sigma = \beta'_\varepsilon$ através da Equação (2-28) definida pela lei constitutiva;
- 10) Se:
 - 10.1) Os valores calculados de t'_d , α' e β' não são próximos dos valores assumidos no Passo 1) (t_d , α e β), então deve repetir-se os Passos 1) a 5) até que estes valores convirjam.
 - 10.2) Caso os valores calculados de t'_d , α' e β' forem próximos dos valores assumidos (t_d , α e β) então deve proceder-se ao próximo Passo.
- 11) Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (3-16). Assim obtém-se um ponto pertencente à Curva teórica $T-\theta$ de coordenadas $(\theta; T)$;
- 12) Selecionar outros valores de ε_{ds} , e, consecutivamente, calcular o novo valor de $\varepsilon_{ds,ef}$ e repetir os Passos 2) a 7) para cada valor de ε_{ds} por forma a obter vários pontos $(\theta; T)$ que permitam desenhar a previsão da Curva $T-\theta$.

De uma forma simplificada e resumida pode apresentar-se o processo iterativo geral na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo se encontra ilustrado na Figura 3.8.

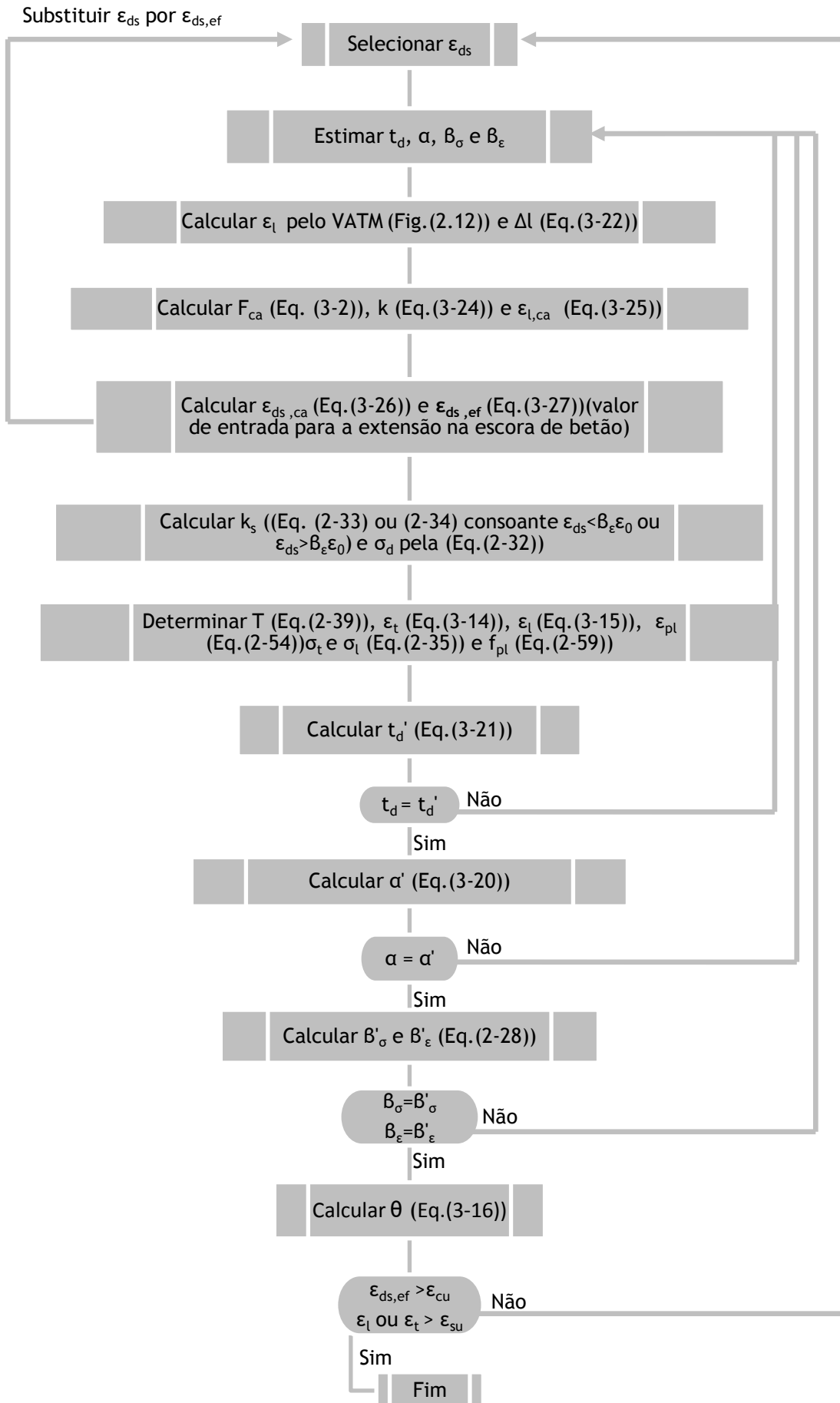


Figura 3.8 - Diagrama do algoritmo de cálculo dos pontos da Curva T-θ

3.5. Descrição do Aplicativo TORQUE_MTEAV adaptado ao caso de vigas confinadas axialmente

3.5.1. Considerações gerais

De forma a apoiar as análises realizadas ao longo deste trabalho, foi requerido ao autor do aplicativo TORQUE_MTEAV que realizasse uma nova versão do aplicativo por forma a torná-lo aplicável ao caso de vigas com confinamento axial. A nova versão teve por base a metodologia exposta ao longo deste capítulo para incorporar no VATM o efeito do confinamento axial.

Nesta secção será descrito, de forma sucinta, os aspetos novos relativos à utilização do aplicativo TORQUE_MTEAV após a incorporação do efeito de confinamento axial.

3.5.2. Aplicativo TORQUE_MTEAV adaptado a vigas confinadas axialmente

O aplicativo TORQUE_MTEAV modificado tem como modelo base o VATM modificado e tem o mesmo objetivo do aplicativo original, ou seja, calcular a curva do momento torsor (T) - rotação (θ), bem como a evolução dos parâmetros que caracterizam a evolução do comportamento de uma viga à torção, incluindo a situação de confinamento axial.

O modo de utilização deste aplicativo incide essencialmente, para este caso de análise, em 5 etapas que serão enunciadas seguidamente:

- 1- Abrir o ficheiro que possui a definição da secção a calcular;
- 2- Na janela principal do aplicativo, deve escolher-se o(s) modelo(s) que definem o comportamento do betão à compressão nas escoras e do aço à tração;
- 3- Introduzir o nível de confinamento a que a viga se encontra sujeita, bem como o comprimento da viga;
- 4- Mandar o aplicativo calcular a viga;
- 5- Visualização dos resultados.

A título exemplificativo de descrição da utilização do aplicativo é novamente utilizada a viga de referência A2 de Bernardo (2003) [16], com os modelos comportamentais descritos na Secção 2.3.5, e assumindo agora que a viga se encontra numa situação de confinamento axial. Em relação ao descrito na Secção 2.6, neste novo exemplo falta então introduzir apenas o valor da constante elástica k . Na janela do aplicativo (Figura 3.9) observa-se do lado direito um campo onde deve ser introduzido esse valor. No campo “Comprimento da viga =” deve introduzir-se o valor do comprimento total da viga e no campo “ $kca1 =$ ” e “ $kca2 =$ ” introduz-se o valor do confinamento axial da viga (considerado igual nas duas extremidades da viga, Figura 3.3) para o qual foi admitido um valor de 10000 kN/m.

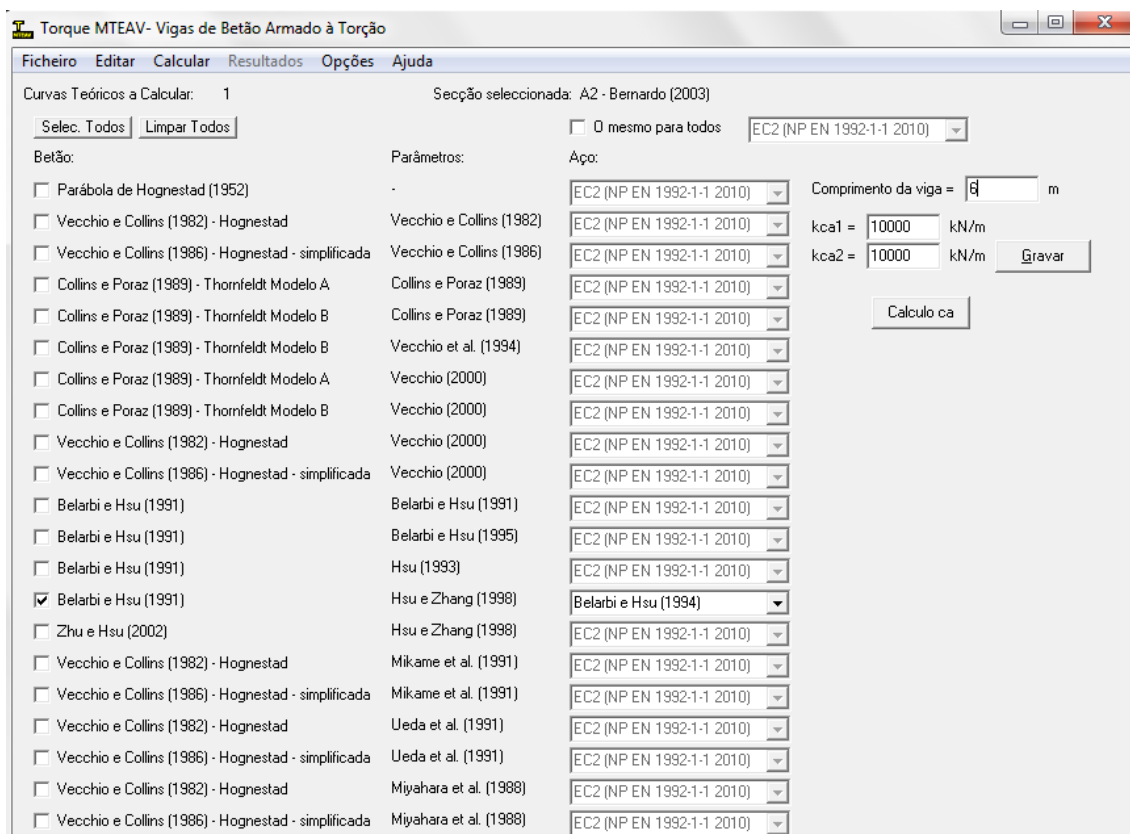


Figura 3.9 - Janela Principal do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado

Após a introdução dos valores deve proceder-se à memorização dos mesmos, então o utilizador deve carregar no botão “Gravar” que se encontra abaixo dos campos referidos anteriormente. Assim, o aplicativo encontra-se apto para realizar o cálculo das curvas, basta para isso carregar no botão “Cálculo ca”. Terminado o cálculo é apresentada a janela “Resultados” e a partir deste momento é então possível obter os dois ficheiros de resultados, tal como já foi explicado na Secção 2.6.2.

Se a viga em análise se encontrar no caso ilustrado na Figura 3.10 o valor do confinamento da viga, k_{ca} , a ser colocado no aplicativo nos campos “kca1” e “kca2” devem ser tomados como iguais a k_{ca} .

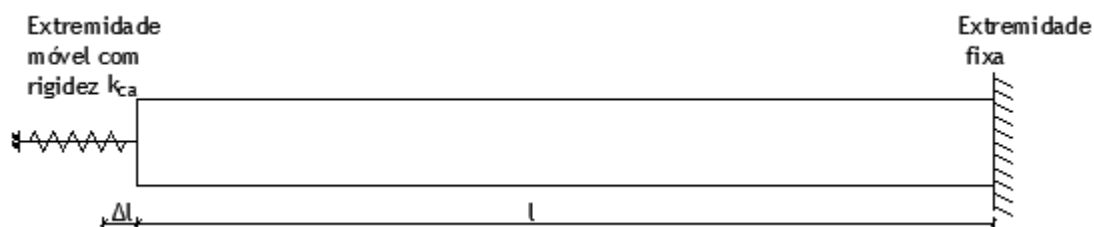


Figura 3.10 - Viga de exemplo de introdução de dado no TORQUE com uma extremidade livre e outra fixa

3.6. Validação do VATM

Nesta secção pretende-se tentar validar o VATM modificado com vista a incorporar o caso de vigas confinadas axialmente tendo por base a comparação das previsões do modelo teórico com resultados experimentais. Na literatura consultada, não foram encontrados resultados experimentais específicos sobre o comportamento de vigas de betão armado à torção confinadas axialmente. No entanto, tal como já foi referido na Secção 3.4.1, a aplicação de pré-esforço longitudinal exterior induz um estado de confinamento axial nas vigas devido à rigidez axial das armaduras de pré-esforço ancoradas nas extremidades das vigas. Por isso, vigas com pré-esforço longitudinal exterior sujeitas à torção podem ser utilizadas para estudar o efeito do confinamento axial. De entre as vigas com pré-esforço sujeitas à torção encontradas na literatura, apenas as ensaiadas por Bernardo em 2005 [17] podem ser consideradas válidas para o estudo em questão. Tais vigas, num número total de três, possuem uma secção oca retangular com 6,49 metros de comprimento. Na Figura 3.11 (a) e (b) encontram-se representadas as secções das vigas D-0 e D-1 e D-2 e na Tabela 3.1 encontram-se resumidas as características geométricas e mecânicas das mesmas vigas. Todas as vigas são iguais, com exceção do nível de pré-esforço introduzido. Nas vigas D-1 e D-2 o pré-esforço foi introduzido através de um cabo centrado devidamente ancorado nas extremidades das vigas (Figura 3.11 (b)). A Viga D-0, sem pré-esforço, é também utilizada neste trabalho para efeitos comparativos.

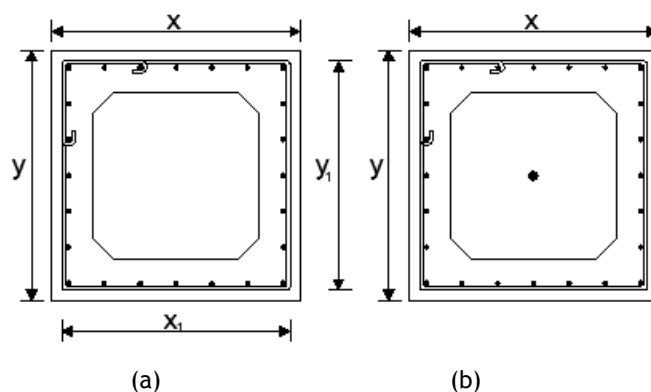


Figura 3.11 - Definição geométrica (a) Viga D-0; (b) Viga D-1 e D-2

Tabela 3.2 (a) - Características das vigas D

Viga	t cm	x cm	y cm	x ₁ cm	y ₁ cm	Armadura ordinária	A _{st} cm ²	Armadura transversal	A _{st} cm ² /cm	Armadura de pré- esforço	A _p cm ²
D-0	10,9	60	60	53,5	53,7	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,07	11,22	-	-
D-1	11,4	60	60	54,3	54,2	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,07	11,22	3 cordões (f _{cp} =1,5 MPa)	5,6
D-2	11,5	60	60	55,0	54,6	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,07	11,22	4 cordões (f _{cp} =1,5 MPa)	4,2

Tabela 3.1 (b) - Características das vigas D

Viga	ρ_l %	ρ_t %	ρ_{tot} %	m_b	ϵ_0 %	ϵ_{cu} %	ϵ_{lu} %	ϵ_{tu} %	ϵ_{pu} %
D-0	0,66	0,67	1,33	0,99	0,210	0,310	1	1	-
D-1	0,66	0,68	1,35	0,97	0,211	0,304	1	1	3,5
D-2	0,66	0,68	1,35	0,96	0,200	0,348	1	1	3,5

Tabela 3.1 (c) - Características das vigas D

Viga	f_{cm} MPa	f_{ctm} MPa	f_{lym} MPa	f_{tym} MPa	$f_{p0,1\%}$ MPa	f_{pi} MPa	f_{cp} MPa	E_c GPa	E_s GPa	E_p GPa
D-0	77,82	4,33	723,83	714,83	-	-	-	40,72	-	-
D-1	80,84	4,43	723,83	714,83	1670	639,59	1,79	51,18	200	195
D-2	58,77	3,66	723,83	714,83	1670	1100,34	3,08	37,43	200	195

Onde:

- A_{sl} - Área de armadura ordinária longitudinal
- A_{st} - Área de armadura ordinária transversal
- A_p - Área de armadura longitudinal de pré-esforço
- ρ_l - Taxa de armadura ordinária longitudinal
- ρ_t - Taxa de armadura ordinária transversal
- ρ_{tot} - Taxa total de armadura
- m_b - Relação entre o “volume” de armaduras
- ϵ_0 - Extensão correspondente ao pico de tensão
- ϵ_{cu} - Extensão ultima convencional do betão
- ϵ_{tu} - Extensão ultima convencional da armadura ordinária transversal
- ϵ_{lu} - Extensão ultima convencional da armadura ordinária longitudinal
- ϵ_{pu} - Extensão ultima convencional da armadura longitudinal de pré-esforço
- f_{cm} - Tensão media à compressão uniaxial do betão
- f_{ctm} - Tensão media à tração uniaxial do betão
- f_{lym} - Valor médio da tensão de cedência da armadura longitudinal
- f_{tym} - Valor médio da tensão de cedência da armadura transversal
- $f_{p0,1\%}$ - Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1%
- f_{pi} - Tensão inicial na armadura de pré-esforço
- f_{cp} - Tensão no betão induzida pelo pré-esforço

A Figura 3.12 apresenta os gráficos experimentais $T-\theta$ obtidos para o conjunto das duas vigas em análise com pré-esforço longitudinal uniforme (Vigas D-1 e D-2) e para a viga com as mesmas características geométricas e mecânicas que as primeiras duas mas sem pré-esforço longitudinal (Viga D-0). Na Figura 3.12 é visível a influência do pré-esforço

longitudinal uniforme exterior no comportamento das vigas. Como já foi explicado na Secção 3.1, a armadura de pré-esforço longitudinal induz também um estado de confinamento axial pelo que aumenta a tensão de compressão no betão. Assim, este efeito deve, na realidade, ser adicionado ao efeito do estado de compressão inicial induzido pelo pré-esforço para atrasar a formação da primeira fissura uma vez que só após o betão sofrer a descompressão é que este começa a trabalhar à tração. No entanto, tal como igualmente referido anteriormente (Secção 1.2.3), o efeito do confinamento axial no Estado I (não fissurado) é negligenciável (o alongamento da viga só se manifesta apreciavelmente no estado fissurado) pelo que o aumento do momento torsor de fissuração nas Vigas D-1 e D-2 é essencialmente devido ao estado inicial de compressão induzido pela força de pré-esforço. Assim, na Zona 1, verifica-se o aumento do momento torsor de fissuração relativamente à viga de comparação (Viga D-0). Para a Viga D-2 (com uma tensão no betão induzida pelo pré-esforço de 3,09 MPa) o aumento do momento torsor de fissuração é relativamente pequeno quando comparado ao da Viga D-1 (com uma tensão no betão induzida pelo pré-esforço de 1,79 MPa). Esta incongruência é facilmente explicada se se tiver em conta as diferenças nas resistências à compressão do betão de ambas as vigas. A Viga D-2 apresenta uma resistência de cerca 58,8 MPa e a Viga D-1 e D-0 apresentam uma resistência de cerca de 80,8 MPa e 77,8 MPa (Tabela 3.1). A diferença da resistência à compressão do betão poderá explicar a observação anterior.

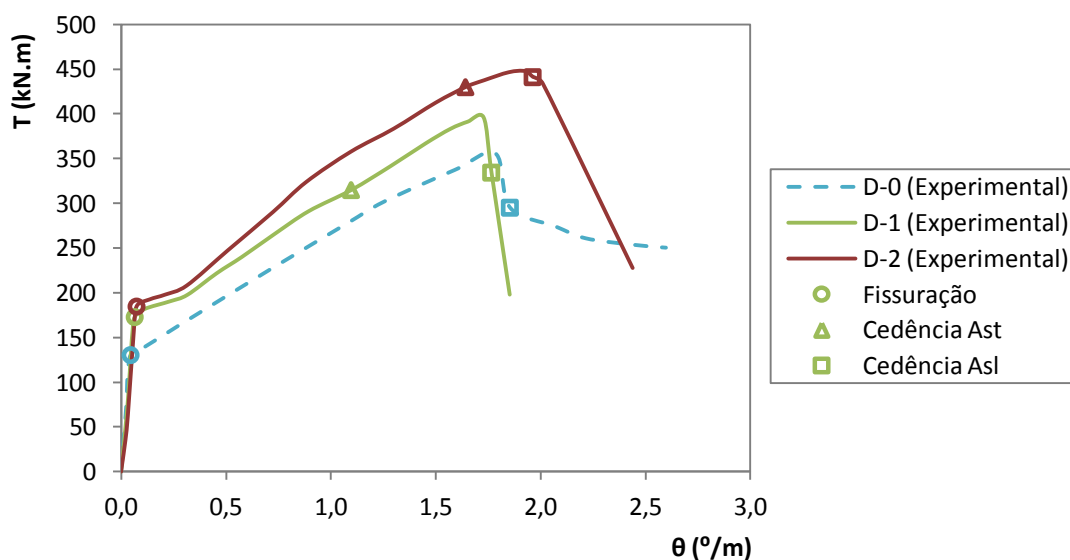


Figura 3.12 - Curvas $T-\theta$ das vigas D-0, D-1 e D-2

Na Zona 2 (após a fissuração do betão) as Curvas $T-\theta$ mostram que, à primeira vista, o pré-esforço longitudinal não possui uma influência notável na rigidez das vigas D-1 e D-2 uma vez que as curvas se mantêm praticamente paralelas independentemente do nível de pré-esforço ou da sua existência. No entanto, se se pensar em termos de rigidez secante, para um determinado nível do momento torsor, a rigidez torsional em estado fissurado é na

realidade incrementada. Nesta fase, o efeito da restrição axial induzido pela rigidez axial das armaduras de pré-esforço exteriores deverão contribuir para a rigidez em Estado II, em adição ao efeito induzido pelo próprio pré-esforço.

Na Figura 3.12 também é notório o aumento da resistência das vigas face a introdução e aumento do pré-esforço longitudinal. Quanto à rotação associada ao momento torsor resistente é compreensível que para a Viga D-2 a rotação ultrapasse a das outras vigas. O facto de a viga D-2 possuir uma resistência à compressão do betão inferior às outras vigas em estudo confere-lhe uma capacidade de deformação última maior (viga mais dúctil).

Um outro aspeto importante de referir, e que será explicado com mais pormenor no Capítulo 4, é que a cedência da armadura transversal ocorre antes do pico de resistência, enquanto a cedência da armadura ordinária longitudinal ocorre após o pico de resistência. Após a fissuração do betão, a armadura longitudinal de pré-esforço passa a funcionar como uma armadura ordinária na resistência da viga à torção. Deste modo, as Vigas D-1 e D-2 apresentam um real desequilíbrio entre a armadura longitudinal e transversal.

A diferença observada no ramo após o pico de resistência e respetivos pontos de cedência das armaduras longitudinal e transversal da Viga D-0 deve-se ao carácter prematuro da rotura, isto é, a viga sofreu uma rotura por destacamento dos cantos o que condiciona a resistência global da viga.

Após a apresentação da evolução do comportamento das três vigas em estudo, importa fazer uma análise isolada do comportamento das duas vigas de betão pré-esforçado através do algoritmo desenvolvido ao longo da Secção 3.4 e avaliar a validade do modelo no que se refere à influência do confinamento axial induzido pela armadura de pré-esforço exterior.

Nas Figuras 3.13, 3.14 e 3.15 encontram-se ilustradas as curvas de evolução do momento torsor resistente e as rotações de secção a ele associadas para a Viga D-0, D-1 e D-2, respetivamente. Na Figura 3.13 encontra-se representada a curva experimental $T-\theta$ para a viga D-0 bem como a curva $T-\theta$ obtida através do TORQUE_MTEAV.

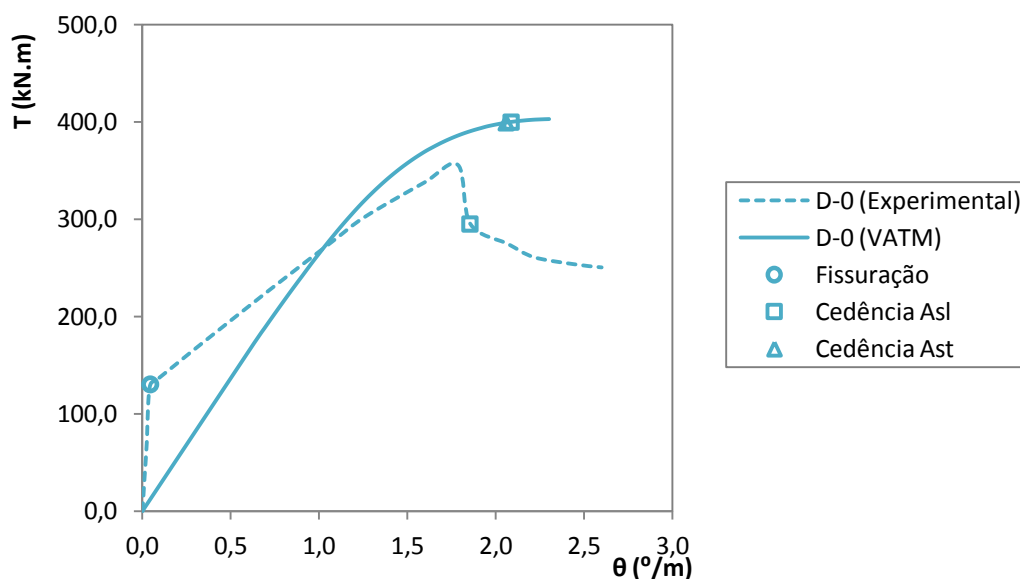


Figura 3.13 - Curva $T-\theta$ da Viga D-0

Na Figura 3.13 pode observar-se que o modelo VATM produz resultados congruentes tendo em conta a comparação entre a parte última da curva $T-\theta$ experimental e teórica. Observa-se uma pequena sobrevalorização do valor do momento torsor máximo e da respetiva rotação. Esta observação pode explicar-se pelo facto de a viga ter na realidade sofrido uma rotura de carácter um pouco prematuro (rotura por destacamento dos cantos da viga), sendo que este modo tipo de rotura não é tido em conta no modelo teórico utilizado. Assim, considera-se que o resultado do modelo teórico é aceitável e considera-se que o mesmo é passível de ser utilizado para análises comparativas no que se refere à introdução do pré-esforço longitudinal e ao efeito da restrição axial induzida pela armadura de pré-esforço.

Com base na análise das curvas $T-\theta$ ilustradas nas Figuras 3.14 e 3.15 conclui-se que a previsão, para a parte final da Curva $T-\theta$, obtida pelo TORQUE_MTEAV modificado (modelo exposto na Secção 3.4.2) apresentam resultados que não são muito diferentes comparativamente ao modelo teórico exposto na Secção 2.5.4. A consideração do efeito de confinamento axial (devido à armadura de pré-esforço longitudinal exterior) confere à viga um ligeiro incremento da resistência à torção da viga. Tal deve-se provavelmente, à pequena área de armadura de pré-esforço utilizada nas Vigas D-1 e D-2. Os resultados obtidos indiciam que o efeito de restrição axial induzido pela armadura de pré-esforço nas referidas vigas é bastante pequeno, sendo que tal efeito não é claramente visualizado no comportamento experimental das vigas.

Em termos de tendência geral, o VATM modificado consegue prever o comportamento das Vigas D. O problema em relação à validação do modelo através da comparação das previsões teóricas com os resultados experimentais é quando se tenta comparar valores do momento torsor resistente. Portanto, conclui-se que a utilização dos resultados experimentais das Vigas D-1 e D-2 para validar o modelo teórico não permite estabelecer conclusões sólidas.

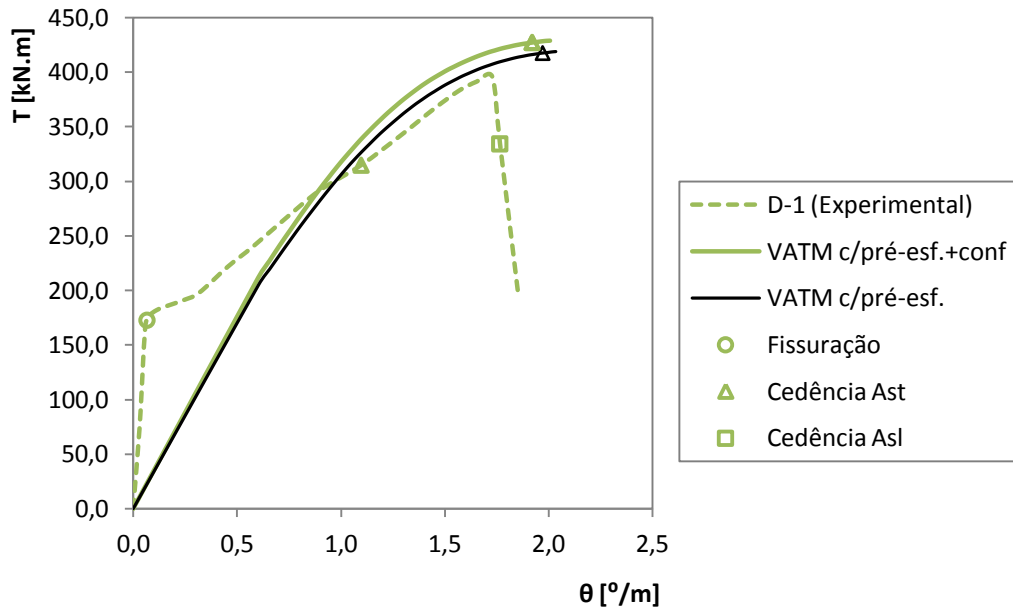


Figura 3.14 - Curva $T - \theta$ da Viga D-1

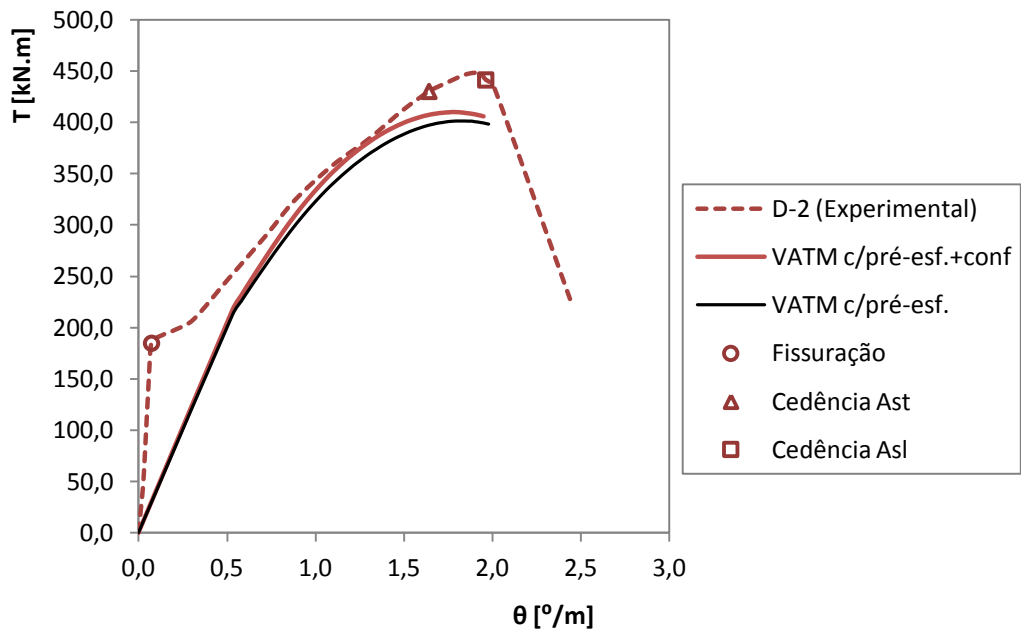


Figura 3.15 - Curva $T - \theta$ da Viga D-2

3.7. Notas Finais

No presente Capítulo foram apresentadas e descritas com detalhe as alterações realizadas ao VATM original de forma a incorporar o efeito do confinamento axial na formulação do modelo de análise de comportamento último de vigas de betão armado e pré-esforçado quando sujeitas à torção pura. Este modelo incorpora as mesmas relações constitutivas para o betão comprimido nas escoras (incluindo o *softening effect*) e para as armaduras ordinárias e de pré-esforço tracionadas (para as armaduras ordinárias tem-se em conta o *stiffening effect*) pois estas leis permitem obter boas previsões para o comportamento último das vigas de betão armado com confinamento axial quer com secção cheia ou vazada, quer de resistência normal ou de alta resistência, e ainda incluindo vigas com pré-esforço longitudinal exterior e/ou não aderente (situações com especial interesse para este trabalho). Antes de apresentar a formulação do VATM modificado foi apresentada uma justificação da metodologia adotada para a incorporação do efeito do confinamento no comportamento à torção do VATM original.

O modelo do VATM modificado foi implementado num aplicativo computacional designado TORQUE_MTEAV modificado. A implementação passou por alterar as linhas de código de forma a introduzir a nova formulação, deste modo os cálculos complexos e morosos são realizados de forma automática. Neste capítulo descreveu-se ainda de forma simples o modo de utilização do TORQUE_MTEAV modificado.

No final deste capítulo apresentou-se uma tentativa de validação do modelo teórico através da utilização dos resultados experimentais de vigas de betão com pré-esforço longitudinal não aderente (vigas com pré-esforço exterior) ensaiadas por Bernardo em 2003, que, tal como foi explicado ao longo do presente capítulo, apresentam-se em situação de confinamento axial conferido pela rigidez axial das armaduras de pré-esforço longitudinais. Os resultados não foram conclusivos devido à pequena rigidez induzida pelas armaduras de pré-esforço. A falta de outros resultados experimentais disponíveis na literatura consultada e estando fora do âmbito desta dissertação a realização de ensaios experimentais, no Capítulo 5 serão utilizados os resultados de análises não lineares com elementos finitos para tentar validar o modelo teórico.

Capítulo 4 - Análise Paramétrica

4.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma análise paramétrica com o objetivo de averiguar a influência de várias variáveis de estudo no comportamento global de vigas à torção com confinamento axial. Tais variáveis são as seguintes: resistência à compressão do betão, taxa total de armadura de torção e nível de confinamento axial. As primeiras duas variáveis influenciam substancialmente o comportamento último da viga.

A análise paramétrica encontra-se dividida em duas partes.

Na Parte I é analisada a influência do nível de confinamento na evolução de vários parâmetros caracterizadores do estado interno de deformação da viga e de outros incorporados no procedimento de cálculo do VATM.

Na Parte II é analisada a influência do nível de confinamento no comportamento último da viga mediante o estudo da forma da curva $T-\theta$ e também de pontos chave da curva $T-\theta$, designadamente: momento torsor resistente (máximo) e respetiva rotação e momento torsor de cedência (da armadura longitudinal e transversal) e respetiva rotação. Nesta parte da análise paramétrica será dada uma especial ênfase ao momento torsor máximo e respetiva rotação visto que, de entre os anteriormente indicados, são os que assumem maior importância do ponto de vista da segurança estrutural. Ainda neste capítulo são apresentados uns ábacos auxiliares, obtidos a partir do VATM modificado, para corrigir o valor da resistência à torção das vigas, obtido através de procedimentos usuais tais como disposições normativas, de modo a contabilizar o efeito favorável do confinamento axial.

Para realizar as análises referidas anteriormente, toma-se por base a Viga A2 de Bernardo [16], cuja descrição é feita na secção seguinte.

4.2. Caracterização da Viga A2 - Viga de referência

A viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [16], com uma secção retangular vazada, possui uma taxa total de armadura de torção (armadura longitudinal e transversal equilibrada) bastante moderada e dentro da gama de taxas compatível com um comportamento dúctil à torção. Este último aspeto foi bastante decisivo na escolha desta viga como base da análise, uma vez que, como já foi referido anteriormente, se pretende analisar o comportamento último. Uma vez que se atribui hoje em dia uma grande importância à ductilidade dos elementos estruturais, por esta propriedade estar diretamente relacionada com a capacidade de redistribuição de esforços e com a segurança estrutural, julgou-se muito importante tomar-se uma viga de referência que permitisse analisar, entre vários aspetos, a influência do confinamento axial sobre a ductilidade. As características geométricas e mecânicas da viga de referência A2 encontram-se resumidas na Figura 4.1.

Refere-se que, como foi confirmado por Hsu logo em 1968 [39], o núcleo de betão não tem uma influência notável na resistência à torção de vigas de betão armado. Deste ponto de

vista, pode considerar-se indiferente considerar-se uma viga de referência com secção cheia ou vazada. A opção por uma viga com secção vazada deveu-se essencialmente ao facto deste tipo de secção ser a mais corrente nas estruturas submetidas a elevados momentos torsores.

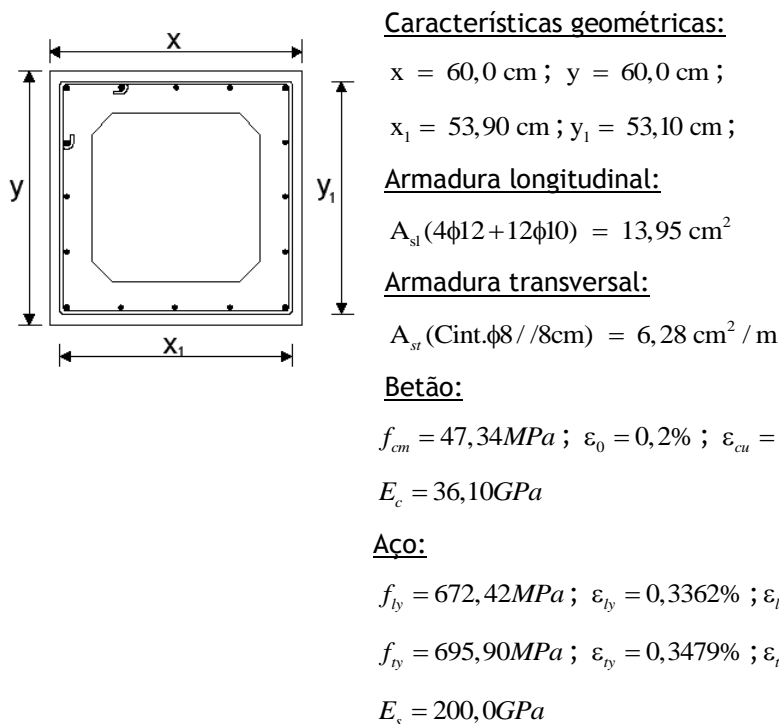


Figura 4.1 - Características da Viga A2

Na viga A2 da Figura 4.1 existe um equilíbrio volumétrico entre as armaduras na direção longitudinal e transversal (o equilíbrio das armaduras significa que ambas possuem uma participação equivalente e implica um ângulo teórico de 45° para as escoras de betão aquando da fissuração da viga). A viga A2 pode ser considerada de resistência normal tendo em conta a resistência uniaxial do betão à compressão ($f_{cm} = 47,34 \text{ MPa}$).

O sucesso do VATM para a previsão do traçado da Curva $T-\theta$ teórica, Figura 4.2, para níveis elevados de carregamento depende bastante das leis constitutivas consideradas para os materiais, designadamente para o betão à compressão nas escoras. A Figura 4.2 ilustra a curva $T-\theta$ experimental da viga A2 obtida por Bernardo [16]. Para além da curva experimental, são também apresentadas duas curvas teóricas obtidas com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV. A curva azul foi calculada assumindo as seguintes leis constitutivas: Belarbi e Hsu (1991) e Hsu e Zhang (1997,1998) para o betão à compressão e respetivos fatores de redução e Belarbi e Hsu (1994) para as armaduras ordinárias. Tendo por base uma exaustiva análise comparativa com os resultados do TORQUE_MTEAV, incorporando diversas leis constitutivas propostas por vários autores, e também os resultados experimentais de diversas vigas, Andrade [19] encontrou que as leis anteriormente referidas eram as que, em termos médios, forneciam as melhores previsões para o comportamento último de vigas

de betão armado à torção. A Figura 4.2 mostra, no entanto, que, tendo por base tal modelo teórico, os níveis últimos dos momentos torsores podem ser algo subestimados para algumas vigas concretas, comparativamente ao modelo que utiliza outras leis constitutivas. Em alternativa às leis anteriormente referidas, se forem, por exemplo, utilizadas as leis Belarbi e Hsu (1991) e Hsu e Zhang (1997,1998) para o betão à compressão e respetivos fatores de redução, bem como a lei bilinear do EC2 (2010) para as armaduras ordinárias à tração, a correspondente curva laranja da Figura 4.2 é visualmente mais aceitável no que se refere à previsão dos momentos torsores últimos. Uma vez que no presente capítulo o objetivo principal é a análise de tendências, o aspeto anteriormente discutido e apresentado torna-se menos importante, pelo que se continuará a utilizar o TORQUE_MTEAV incorporando as leis constitutivas que apresentaram os melhores resultados em termos médios.

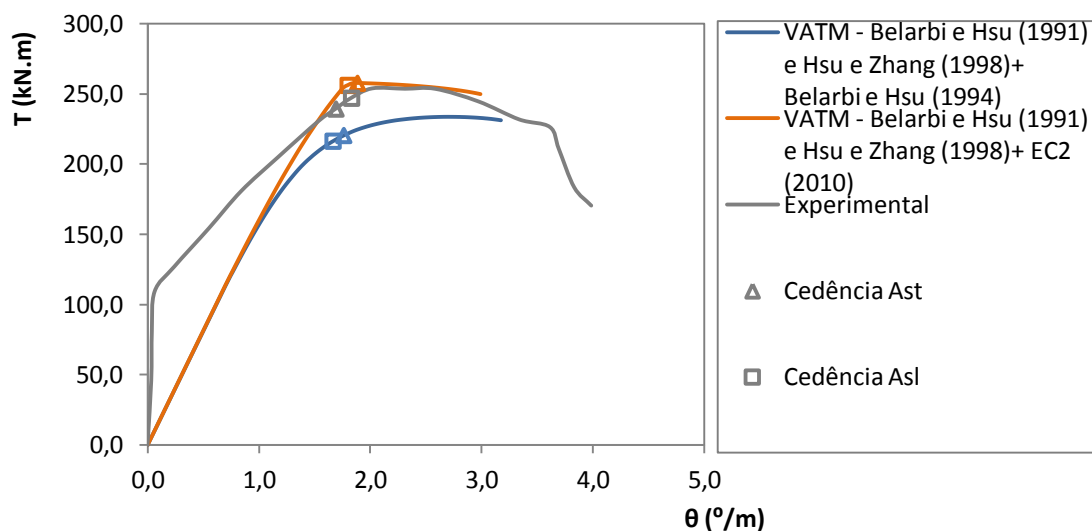


Figura 4.2 - Curva $T-\theta$ para a Viga A2

4.3. Influência do confinamento axial na Curva teórica $T-\theta$ da Viga A2

Nesta secção procede-se a uma análise comparativa entre as curvas teóricas $T-\theta$ referentes à viga A2 e calculada para diferentes níveis de confinamento axial. As curvas foram calculadas com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado para incluir o efeito do confinamento axial. As curvas encontram-se ilustradas na Figura 4.3.

Com já foi referido anteriormente as vigas podem encontrar-se confinadas devido à rigidez de flexão dos pilares adjacentes, no caso de estruturas porticadas simples, ou devido à rigidez axial da armadura de pré-esforço exterior. A situação mais corrente em edifícios é quando a viga se encontra inserida num pórtico. De forma a definir o intervalo de valores de k para a análise paramétrica foi realizado um estudo prévio com o auxílio do aplicativo

TORQUE_MTEAV modificado onde se observou que a partir de um valor de confinamento axial igual a 60000 kN/m a viga A2 alcança uma rotura frágil por esgotamento da escora de betão. Por esta razão, decidiu-se que não interessa estudar a rotura frágil da viga A2 para além de um valor de confinamento muito superior, pelo que se estabeleceu um limite de 80000 kN/m. Inicia-se a análise paramétrica para um valor de 10000 kN/m, valor este correspondente a um pilar de secção com pequena espessura 0,10x0,60 m. Nas Tabela 4.1 e 4.2 encontram-se alguns exemplos que ajudam a fundamentar a escolha do intervalo de valores considerado para k. A altura de secção (0,60 m) do pilar corresponde à largura da viga de referência utilizada neste estudo, viga A2.

Tabela 4.3 - Secções dos pilares numa situação de pórtico simples

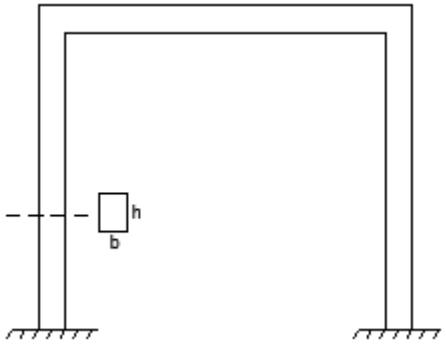
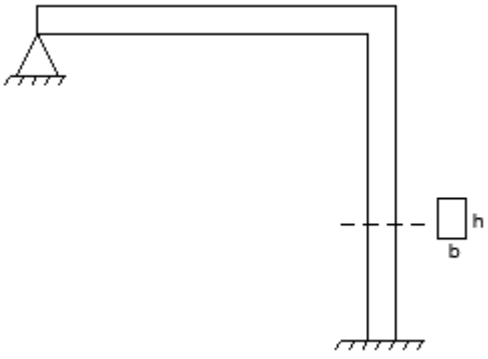
Situação: Viga confinada por dois pilares	Nível de confinamento	Secção dos pilares (bxh)
	10000 kN/m	0,10x0,60 m
	20000 kN/m	0,18x0,60 m
	30000 kN/m	0,25x0,60 m
	40000 kN/m	0,35x0,60 m
	50000 kN/m	0,45x0,60 m
	60000 kN/m	0,50x0,60 m
	70000 kN/m	0,60x0,60 m
	80000 kN/m	0,70x0,60 m

Tabela 4.4 - Secção do pilar numa situação de viga confinada

Situação: Viga fixa na extremidade esquerda e “confinada” na extremidade direita	Nível de confinamento	Secção dos pilares (bxh)
	10000 kN/m	0,20x0,60 m
	20000 kN/m	0,35x0,60 m
	30000 kN/m	0,50x0,60 m
	40000 kN/m	0,70x0,60 m
	50000 kN/m	0,85x0,60 m
	60000 kN/m	1,0x0,60 m
	70000 kN/m	1,20x0,60 m
	80000 kN/m	1,35x0,60 m

A Figura 4.3 mostra que, apesar da viga A2 respeitar o princípio da igualdade do volume para as armaduras (implicando que as armaduras entrem em cedência praticamente em simultâneo, conforme pode ser observado na Figura 4.2), tal condição passa a ser violada devido ao efeito do confinamento axial. De facto, para $k=10000\text{kN/m}$ observa-se que, comparativamente à armadura transversal, a armadura longitudinal entra mais tardiamente

em cedência. A partir de $k=20000\text{kN/m}$ a armadura longitudinal deixa de atingir a cedência antes da rotura teórica da viga. Esta observação pode ser explicada pela influência da força de compressão centrada originada pelo confinamento axial. Tal força induz um estado de tensão de descompressão nas armaduras longitudinais, contrariando assim as trações induzidas pelo momento torsor. Quanto maior for o grau de confinamento, maior o valor dessa força de compressão centrada. É assim compreensível que a partir de um determinado valor para o k , a armadura longitudinal deixe de entrar em cedência. No que se refere à armadura transversal, observa-se que a influência do confinamento é substancialmente inferior, visto que a mesma atinge sempre a tensão de cedência, embora de forma ligeiramente mais prematura à medida que o k aumenta.

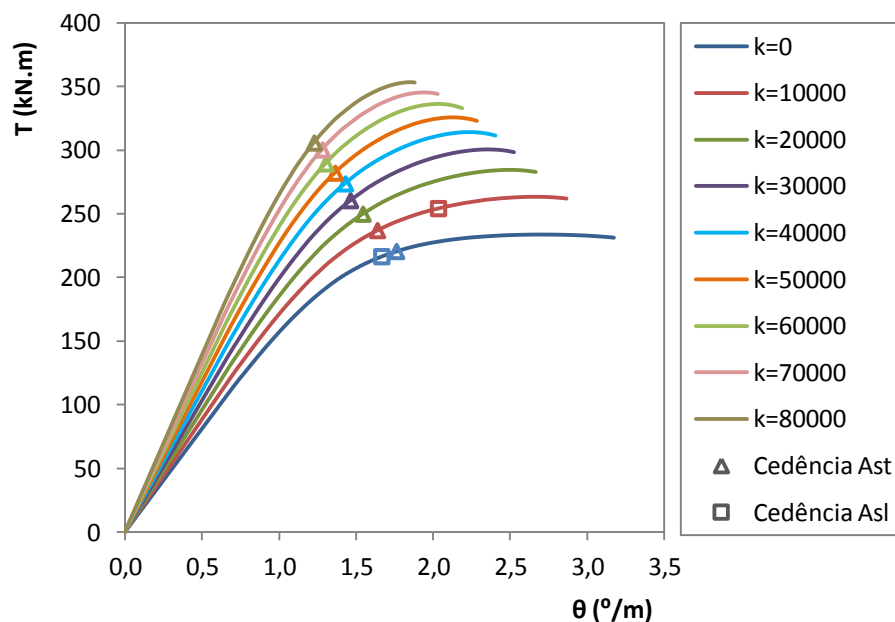


Figura 4.3 - Curvas teóricas $T - \theta$ para Viga A2 com diversos níveis de confinamento

Na Figura 4.3 é também evidente que, à medida que aumenta o nível de confinamento, aumenta o momento torsor máximo da viga e diminui a rotação correspondente à rotura da viga (rotação máxima). A primeira observação era já esperada visto que, de forma análoga ao que acontece nas secções dos pilares sujeitas à flexão composta, a influência de uma força de compressão centrada moderada é favorável visto que contraria o estado de tração induzido pelo momento torsor, permitindo à secção absorver momentos torsores maiores. A redução da rotação máxima poderá estar associada à redução da deformação na armadura longitudinal devido à influência da força de compressão centrada. Esta redução da rotação máxima está também associada à redução progressiva do intervalo de rotações em que a viga evidencia uma deformação inelástica com elevada capacidade de carga. Assim, é possível observar que a ductilidade em torção da viga é reduzida com o incremento do nível de confinamento.

Relacionado com algumas das observações anteriores, observa-se também que a rigidez de torção da viga aumenta com o incremento do nível de confinamento, dado o

aumento da inclinação da curva na sua parte ascendente. Recorde-se que o VATM assume um estado plenamente fissurado para a viga desde o início do carregamento, pelo que os resultados observados na Figura 4.3 e correspondentes à parte ascendente da Curva $T-\theta$ podem ser extrapolados para o comportamento real da viga em estado fissurado. Assim, pode concluir-se que a rigidez de torção da viga no estado fissurado aumenta com o incremento do nível de confinamento, em virtude da influência da força de compressão centrada.

A título informativo e fazendo-se uso dos valores (saída de resultados) que o TORQUE_MTEAV disponibiliza após o cálculo da viga de referência para diversos níveis de confinamento, de seguida é realizada uma análise comparativa para o momento torsor máximo e rotação associada, dos momentos torsores de cedência das armaduras e das rotações associadas para vários níveis de confinamento, a partir da situação de confinamento nulo. A Tabela 4.3 resume as variações percentuais dos parâmetros em análise. As Figuras 4.4 e 4.5 ilustram as variações dos momentos torsores máximos e de cedência da armadura transversal, bem como das respetivas rotações.

Tabela 4.3 - Variação percentual dos momentos torsores e das respetivas rotações

Intervalo		$T_{\text{máx}}$ (%)	$\theta_{T_{\text{máx}}}$ (%)	T_{ly} (%)	$\theta_{T_{\text{ly}}}$ (%)	T_{ty} (%)	$\theta_{T_{\text{ty}}}$ (%)
0-10000	1	12,646	-1,221	17,443	22,130	7,445	-7,024
0-20000	2	21,660	-7,132	-	-	13,293	-12,363
0-30000	3	28,536	-12,109	-	-	18,101	-16,967
0-40000	4	34,239	-17,609	-	-	24,091	-18,838
0-50000	5	39,222	-21,153	-	-	27,919	-22,590
0-60000	6	43,679	-24,374	-	-	31,202	-26,045
0-70000	7	47,585	-27,905	-	-	36,171	-27,327
0-80000	8	51,082	-31,184	-	-	38,636	-30,341

Tal como já se tinha observado na Figura 4.3, o aumento do confinamento axial incrementa a resistência da viga à torção. A Figura 4.4 mostra que a variação desse incremento aparenta tender a reduzir com o aumento do confinamento, provavelmente devido ao facto de a viga tender a esgotar mais rapidamente a sua capacidade resistente por compressão do betão. A este problema está obviamente associada a diminuição da ductilidade da viga implicando, deste modo, uma redução da capacidade de rotação da secção transversal quando o confinamento axial aumenta. O aumento da rigidez da viga constitui outra explicação para a notável redução da rotação associada ao momento torsor máximo relativamente à situação de confinamento nulo.

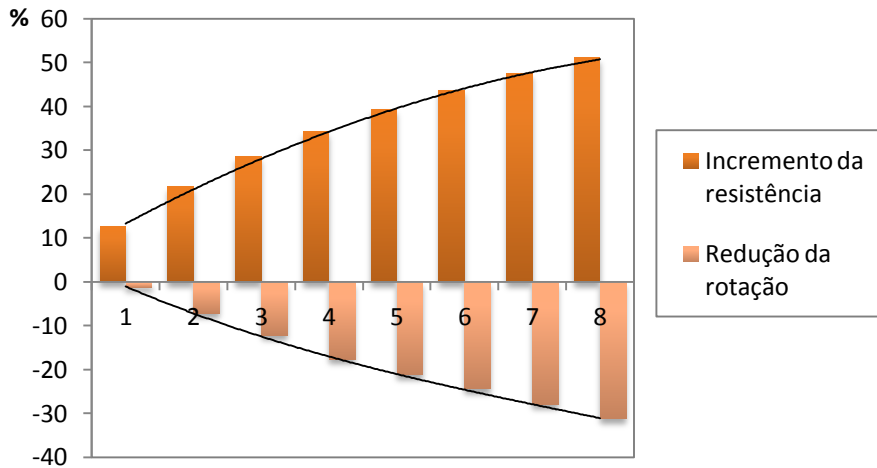


Figura 4.4 - Variação percentual do momento torsor máximo e da rotação respectiva

O incremento observado na Figura 4.5 do momento torsor associado à cedência da armadura transversal relativamente à situação de confinamento nulo segue a mesma tendência observada para o momento torsor máximo. Quanto à rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal, a sua redução está diretamente relacionada com o aumento da força de compressão centrada associada ao aumento do confinamento axial. Isto é, o aumento da força de compressão reduz a sollicitação da armadura longitudinal e, por motivos de equilíbrio interno a armadura transversal é mais sollicitada atingindo a sua cedência para valores da rotação menores.

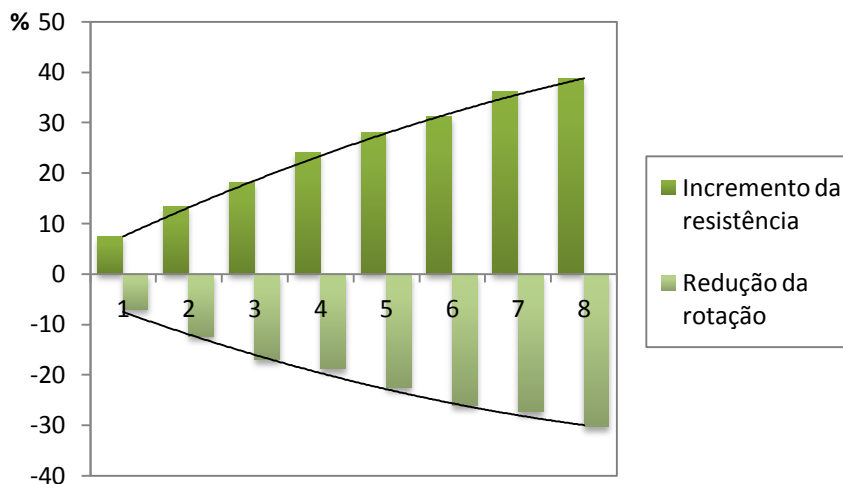


Figura 4.5 - Variação percentual do momento torsor de cedência da armadura transversal e da rotação respectiva

4.4. Influência do confinamento axial em várias curvas de comportamento para a Viga A2

Nesta secção são analisadas várias curvas teóricas de comportamento para a viga A2 para os diversos níveis de confinamento considerados. O traçado destas curvas foi realizado mais uma vez com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado.

É analisada a influência do confinamento axial em diversos parâmetros incorporados na formulação do VATM e caracterizadores do comportamento de uma viga à torção. A análise da influência do confinamento axial em tais parâmetros possui interesse para analisar o comportamento da viga de betão armado sujeita à torção pura e sob o efeito do confinamento axial. Nas análises comparativas para os diferentes níveis de confinamento, é incluída sempre a situação livre sem confinamento ($k=0$ kN/m). Importa recordar que o modelo teórico possui como critério de paragem quando a extensão à superfície da escora ou a extensão das armaduras tracionadas atinge os valores das respetivas extensões convencionais de rotura ($\varepsilon_{cu} = 0,0035$ para o betão comprimido na escora e $\varepsilon_{su} = 0,01$ para as armaduras tracionadas).

A Figura 4.6 ilustra a evolução teórica da espessura efetiva da escora de betão, t_d , com a extensão efetiva de compressão à superfície da escora de betão, $\varepsilon_{ds,ef}$, para a viga de referência A2 quando submetida a diferentes níveis de confinamento axial. A espessura efetiva da escora de betão é calculada teoricamente ao longo do historial de carga para os diversos valores da extensão efetiva da escora de betão, através do processo iterativo exposto na Secção 3.3.4 (Figura 3.7). Cada curva $t_d - \varepsilon_{ds,ef}$ tem início no valor de entrada ε_{ds} definido pelo aplicativo como sendo 0,0005. Contudo este valor de entrada inicial sofre um incremento para ter em conta o efeito do confinamento axial, sendo este corrigido para o valor $\varepsilon_{ds,ef}$. Esta correção explica porque razão, no início do traçado das curvas teóricas, se observa um acréscimo da extensão efetiva de compressão inicial à superfície da escora de betão à medida que o nível do confinamento aumenta.

Também é possível observar que para um determinado valor da extensão efetiva $\varepsilon_{ds,ef}$, à medida que aumenta o nível de confinamento axial da viga, aumenta também a espessura efetiva da escora de betão, t_d . Esta observação encontra explicação por várias razões. Primeiramente, é necessário entender que o confinamento axial induz um estado de compressão axial na viga, pelo que aumenta o nível de tensão de compressão nas escoras de betão e, por consequência, existe necessidade de uma maior espessura efetiva da escora para o equilíbrio do modelo de treliça. Por outro lado, o confinamento axial impede a participação normal das armaduras longitudinais (a força de compressão centrada reduz as tensões de tração das armaduras), pelo que a escora de betão, conjuntamente com a armadura transversal, têm que compensar a menor efetividade da armadura longitudinal de modo a

garantir o equilíbrio do modelo de treliça. Tal situação conduz a um necessário incremento de tensão de compressão nas escoras de betão.

Uma análise mais atenta da Figura 4.6 pode suscitar algumas dúvidas quanto ao critério de paragem para o traçado das curvas $t_d - \varepsilon_{ds,ef}$ da viga quando sujeita a um nível de confinamento superior a 60000 kN/m. Os dois casos com confinamento superior constituem situações em que a capacidade resistente da viga é atingida antes do betão atingir a sua extensão máxima convencional de compressão à superfície da escora de betão. Esse esgotamento ocorreu porque a espessura efetiva da escora ultrapassou a espessura real da parede. Pode referir-se que, teoricamente e nestas condições a viga sofreu uma rotura algo prematura. Refere-se que este aspeto é igualmente observado nos restantes gráficos desta secção.

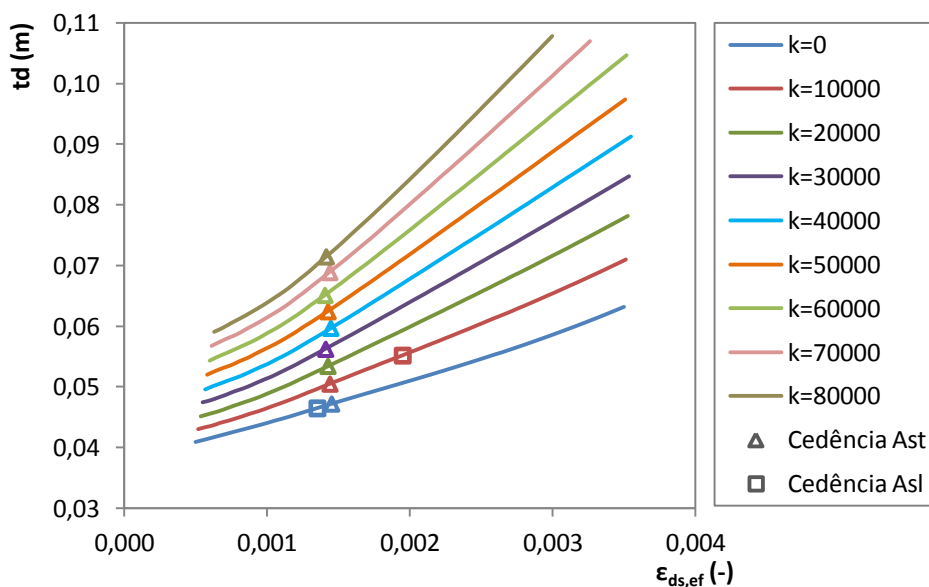


Figura 4.6 - Curvas teóricas $t_d - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

A Figura 4.6 mostra também que a taxa de incremento da espessura efetiva, à medida que aumenta a extensão efetiva, aumenta com o nível do confinamento, o que origina um desenvolvimento não linear mais pronunciado da curva. A explicação apresentada na Secção 4.3 para justificar a evolução do ponto de cedência da armadura longitudinal mantém-se inalterada para o gráfico da Figura 4.6 (e é também válida para os restantes gráficos desta secção).

A Figura 4.7 ilustra a evolução da inclinação da escora de betão, α , com a extensão efetiva de compressão à superfície da escora de betão, $\varepsilon_{ds,ef}$, para a viga A2 de referência quando submetida a diferentes níveis de confinamento axial.

O cálculo do ângulo da escora de betão α (e dos restantes parâmetros analisados nesta secção) é realizado teoricamente de forma semelhante ao cálculo da espessura efetiva

da escora de betão t_d e no que se refere à introdução do valor ε_{ds} e à sua correção para $\varepsilon_{ds,ef}$.

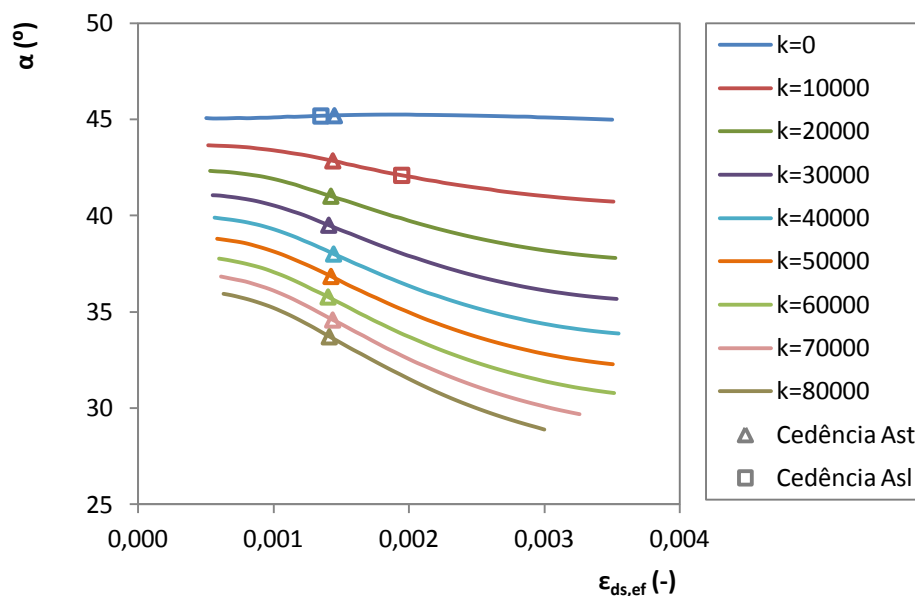


Figura 4.7 - Curvas teóricas $\alpha - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

A Figura 4.7 mostra que, quando a viga de referência A2 se encontra livre de restrições axiais ($k=0$ kN/m), o ângulo das escoras de betão α ronda os 45° , com desvios muito pequenos. Este valor para o ângulo das escoras de betão era previsível tendo em conta que a viga A2 respeita o princípio da igualdade de volume entre a armadura longitudinal e transversal. Para as situações com confinamento, o ângulo das escoras de betão diminui com o aumento do nível de confinamento e diminui também de forma não linear, para cada valor de k , com o aumento da extensão efetiva. A diminuição do ângulo das escoras deve-se à influência da força de compressão centrada que aumenta com o nível de confinamento e também com o aumento da extensão efetiva.

A evolução da inclinação da escora de betão face ao aumento da força de compressão centrada, resultante do confinamento axial da viga de referência, segue uma tendência análoga às vigas de betão pré-esforçado sujeitas à torção. Por exemplo, o Código Americano ACI 318R-05 [1] prescreve uma redução do ângulo das escoras de betão na presença de um esforço axial de compressão. Por isso, a tendência observada para o ângulo da escora de betão já era esperada.

A Figura 4.8 ilustra a evolução do coeficiente de redução β (para ter em conta o *softening effect* no betão comprimido das escoras de betão devido às extensões transversais de tração) com a extensão efetiva de compressão à superfície da escora de betão, $\varepsilon_{ds,ef}$, da viga de referência quando submetida a diferentes níveis de confinamento axial. O cálculo

teórico do coeficiente de redução β é realizado através do procedimento de cálculo iterativo exposto na Secção 3.3.4 e para os vários valores de ε_{ds} posteriormente corrigidos para $\varepsilon_{ds,ef}$.

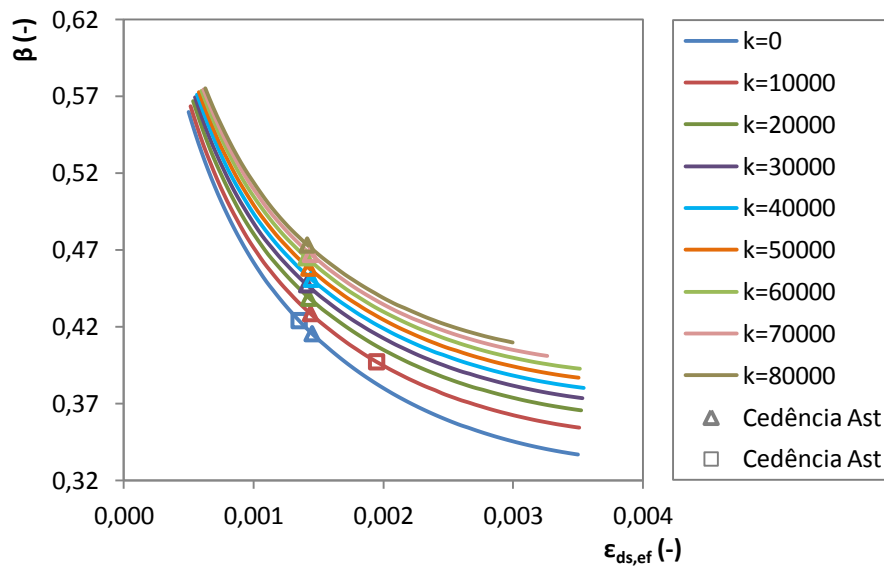


Figura 4.8 - Curvas teóricas $\beta - \varepsilon_{ds,ef}$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

A partir da Figura 4.8 é notório que o coeficiente β possui um efeito menos redutor à medida que aumenta o confinamento axial da viga.

A Figura 4.9 ilustra a evolução da extensão efetiva de compressão à superfície da escora de betão, $\varepsilon_{ds,ef}$, com a deformação angular da secção, θ , da viga de referência quando submetida a diferentes níveis de confinamento axial. Os traçados das Curvas $\varepsilon_{ds,ef} - \theta$ têm início para um valor de zero da deformação angular e da extensão efetiva de compressão à superfície da escora de betão, uma vez que para um estado de carga nulo a treliça não apresenta qualquer deformação.

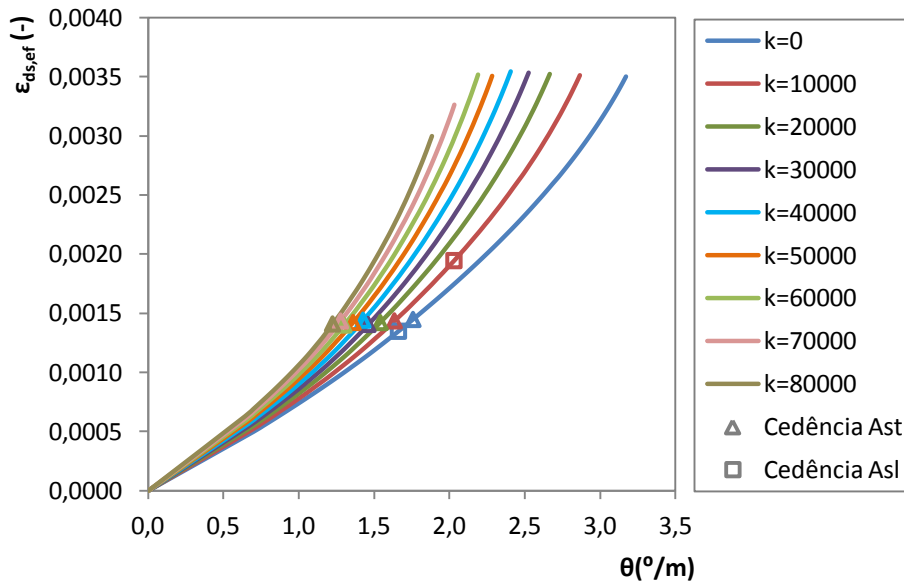


Figura 4.9 - Curvas teóricas $\varepsilon_{ds,ef} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

A Figura 4.9 mostra que, à medida que o nível de confinamento vai aumentando, a viga esgota mais rapidamente (em termos de rotação da viga) a capacidade resistente do betão comprimido na escora. À semelhança do observado na Figura 4.3, também a Figura 4.9 mostra que o confinamento axial aumenta a rigidez da viga. De facto, por observação da Figura 4.9 e considerando um determinado valor para a extensão de compressão da escora de betão, observa-se que, com o aumento do nível de confinamento, a viga apresenta uma menor capacidade de rotação.

As Figuras 4.10 e 4.11 ilustram, respetivamente, a evolução da extensão na armadura longitudinal, ε_l , e da extensão na armadura transversal, ε_t , com a deformação angular da secção, θ , da viga de referência quando submetida a diferentes níveis de confinamento axial. Os valores de ε_l e ε_t são também calculados através do procedimento de cálculo iterativo apresentado na Secção 3.3.4 (Figura 3.7) e para os vários valores de ε_{ds} posteriormente corrigidos para $\varepsilon_{ds,ef}$. Os traçados das Curvas $\varepsilon_l - \theta$ e $\varepsilon_t - \theta$ têm início para um valor de zero da deformação angular e da extensão nas armaduras, uma vez que, como referido anteriormente, para um estado de carga nulo a treliça não apresenta qualquer deformação.

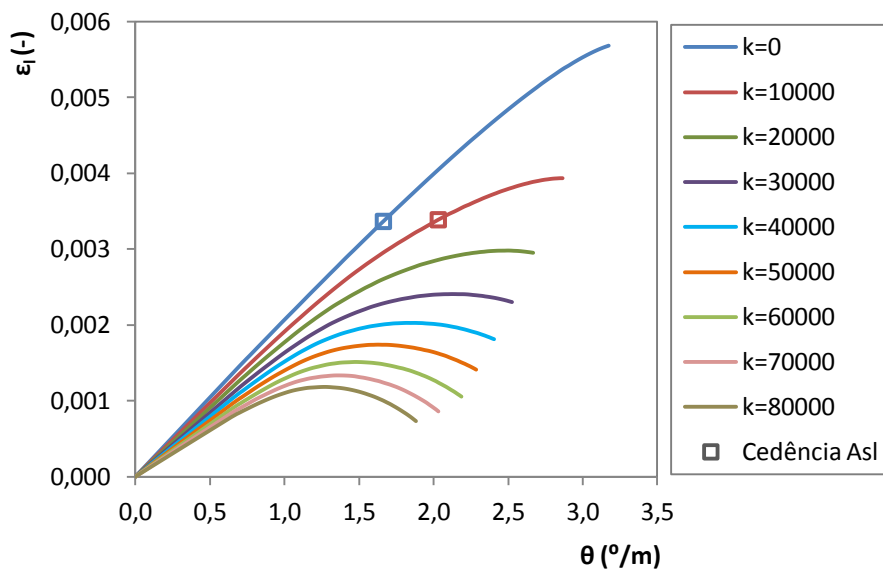


Figura 4.10 - Curvas teóricas $\varepsilon_l - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

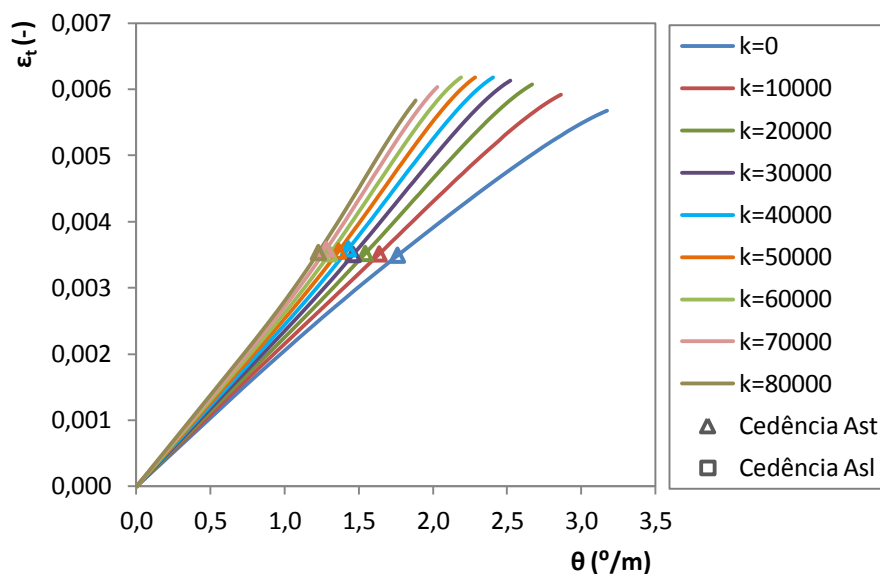


Figura 4.11 - Curvas teóricas $\varepsilon_l - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento

Por observação das Figuras 4.10 e 4.11 observa-se que, para um nível de confinamento nulo, e tendo em conta que o princípio da igualdade de volume entre a armadura longitudinal e transversal foi respeitado na viga, ambas as armaduras apresentam uma contribuição equivalente para o equilíbrio da treliça espacial. O mesmo não se verifica quando a viga se encontra sob o efeito do confinamento axial. À medida que o nível de confinamento axial aumenta, observa-se que, enquanto a participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno diminui devido ao estado de compressão axial, a participação da armadura transversal aumenta. Tal observação pode ser confirmada tomando

um determinado valor para a rotação, verificando-se que para esse valor a extensão na armadura transversal, ε_t , aumenta, enquanto a extensão na armadura longitudinal, ε_l , diminui. Refere-se que, observando a tendência de evolução da extensão na armadura longitudinal com o aumento do nível de confinamento, é possível prever que, para níveis de confinamento axial mais elevados do que o considerado nesta análise comparativa, as armaduras longitudinais podem ficar sujeitas a tensões de compressão. Ao ocorrer tal situação, o VATM modificado não pode mais ser considerado válido visto que o modelo não se encontra preparado para incluir esta situação.

4.5. Influência da resistência à compressão do betão, da taxa total de armadura e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção

Nesta secção é analisada a influência da resistência à compressão do betão, da taxa total de armadura e do confinamento axial no momento torsor máximo e na respetiva rotação de uma viga com as mesmas características geométricas que a viga A2. Para esta análise foram realizadas 192 combinações (que podem ser consultadas no Anexo I) entre os vários valores fixados para a resistência à compressão do betão, f_c , taxa total de armadura, ρ_{tot} , e o nível de confinamento axial, k . O cálculo do momento torsor máximo e da rotação associada foi realizado com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado.

Para esta segunda parte da análise paramétrica achou-se importante que a análise abrangesse diversos tipos de vigas com diferentes tipos de rotura e de ductilidade. Neste sentido, decidiu-se que para a resistência do betão à compressão deveriam ser incluídos betões de resistência normal (NSC - Normal-Strength Concrete) e betões de alta resistência (HSC - High-Strength Concrete), tendo-se escolhido as seguintes resistências: 30, 50, 70 e 90 MPa (os primeiros dois valores para a classe de resistência normal e os últimos dois para a classe de alta resistência). O primeiro valor de referência escolhido, 30 MPa, constitui hoje a classe de resistência normal mais comum. O último valor de resistência escolhido, 90 MPa, constitui o limite imposto pelo Eurocódigo 2. Quanto à taxa total de armadura de torção, foram adotados os seguintes valores: 0,6, 0,8, 1,0, 1,2, 1,4 e 1,6 %. Esta escolha teve como objetivo abranger os diversos modos de rotura em torção observados para vigas em caixão [16]. Intervalos de valores para com ρ_{tot} entre 0,6 e 0,8 % correspondem a uma rotura dúctil. Valores de ρ_{tot} entre 1,0 e 1,2 correspondem a uma rotura com carácter frágil e prematuro (destacamento dos cantos). Finalmente, valores de ρ_{tot} entre 1,4 e 1,6 correspondem a uma rotura do tipo frágil por compressão do betão. Relativamente aos valores adotados para o nível de confinamento, os mesmos são iguais aos utilizados e justificados na Secção 4.2.

O objetivo da presente secção é avaliar a influência da resistência do betão à compressão e da taxa total da armadura no momento torsor máximo e na respetiva rotação

para diversos níveis de confinamento axial, incluindo a situação de confinamento nulo. Os resultados são apresentados em gráficos e, para uma primeira análise, encontram-se organizados tomando a resistência do betão à compressão constante e, numa segunda fase, adotando o valor da taxa total de armadura constante. Deste modo pode avaliar-se a influência de cada parâmetro em separado.

Para avaliar a influência da resistência do betão à compressão no momento torsor máximo resistente, adotou-se para a taxa total de armadura um valor constante $\rho_{tot} = 1,0\%$. Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 4.12. Observa-se que o aumento do confinamento axial incrementa a resistência à torção da viga. No entanto, este aumento é maior para valores baixos de k .

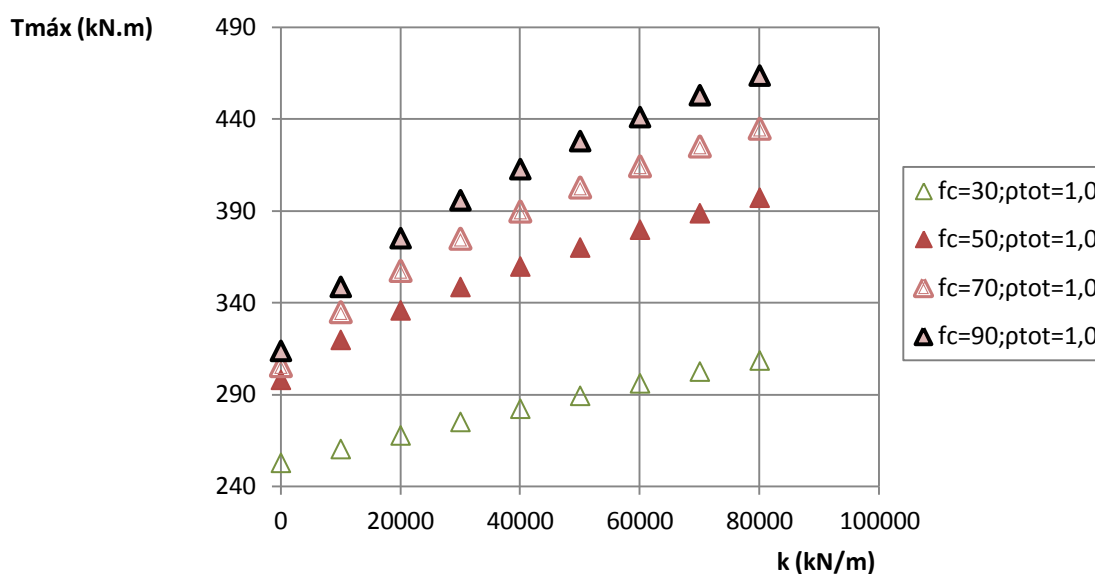


Figura 4.12 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

Outra observação que se pode retirar da Figura 4.12, e comprovada na Figura 4.13 mediante a análise da variação percentual do incremento do momento torsor resistente para os diversos níveis de confinamento axial e a situação de confinamento nulo, o efeito favorável do confinamento é notoriamente maior para vigas de maior classe de resistência do betão. Veja-se a situação para $k = 80000 \text{ kN/m}$ o incremento percentual relativamente à situação de confinamento nulo, para uma viga com $f_c = 90 \text{ MPa}$, é cerca de 50%, enquanto para uma viga com $f_c = 30 \text{ MPa}$ o incremento percentual é cerca de 20%.

Todas as tendências observadas anteriormente para o momento torsor resistente permanecem válidas para os outros valores de ρ_{tot} , tal como se pode observar no Anexo II.

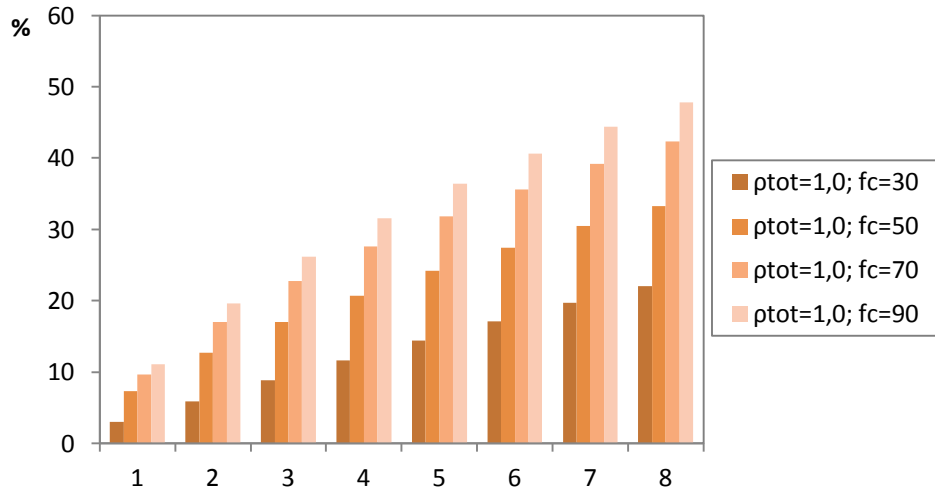


Figura 4.13 - Análise da variação percentual do momento torsor resistente

Para avaliar a influência da resistência do betão à compressão na rotação da secção transversal associada ao momento torsor máximo, $\theta_{Tmáx}$, adotou-se o mesmo exemplo da análise anterior. Os resultados obtidos encontram-se ilustrados na Figura 4.14. Numa análise global da evolução da $\theta_{Tmáx}$ verifica-se uma redução da rotação com o aumento do confinamento axial. Tal deve-se essencialmente ao facto da existência da força de compressão induzida pelo confinamento axial aumentar a rigidez da viga, o que restringe a sua deformação.

Fazendo uma análise para um determinado valor de k observa-se que betões de alta resistência permitem uma maior rotação da secção transversal comparativamente com betões de resistência normal.

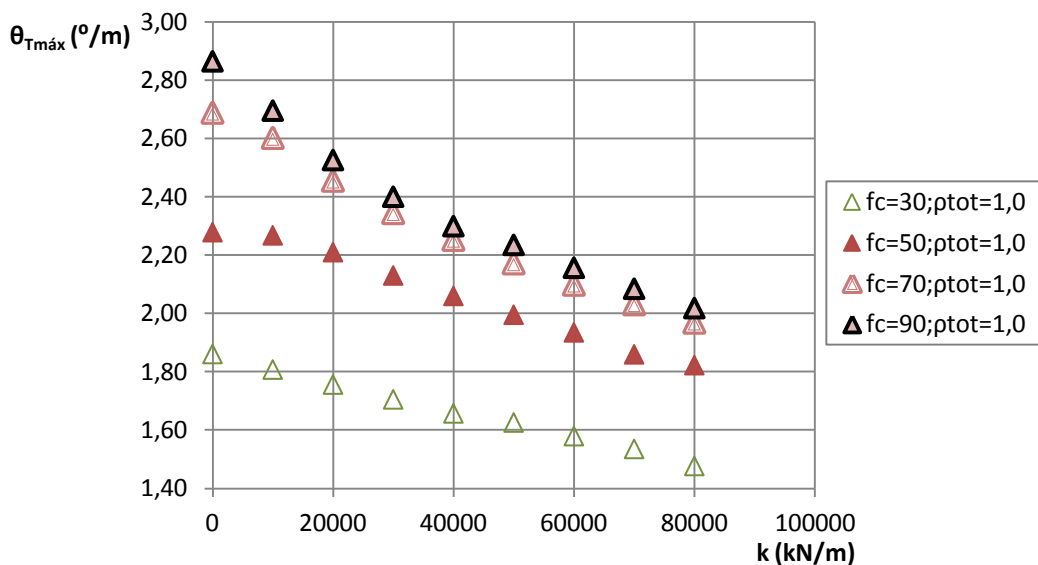


Figura 4.14 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

A variação percentual de $\theta_{Tm\acute{a}x}$, encontra-se ilustrada na Figura 4.15. Para vigas de alta resist\encia e de resist\encia normal verifica-se que a introdu\c\ao do confinamento axial induz \a viga uma menor capacidade de deforma\c\ao, aumentando assim o car\acter fr\agil da rotura em adi\c\ao ao mesmo efeito induzindo e resultante da utiliza\c\ao de bet\oes de elevada resist\encia. Por exemplo, para $k=50000kN/m$ a viga com $f_c=90MPa$ apresenta uma redu\c\ao da rota\c\ao de cerca de 22% enquanto a viga de $f_c=30MPa$ tem uma redu\c\ao de apenas 12%.

Em termos de ductilidade o efeito do confinamento axial \e mais prejudicial em vigas de alta resist\encia, pois a for\ca de compress\ao torna as vigas ainda mais fr\ageis.

Todas as tend\encias observadas anteriormente para a an\alise da rota\c\ao associada ao momento torsor s\ao v\alidas para os restantes valores de ρ_{tot} , tal como se pode observar no Anexo II.

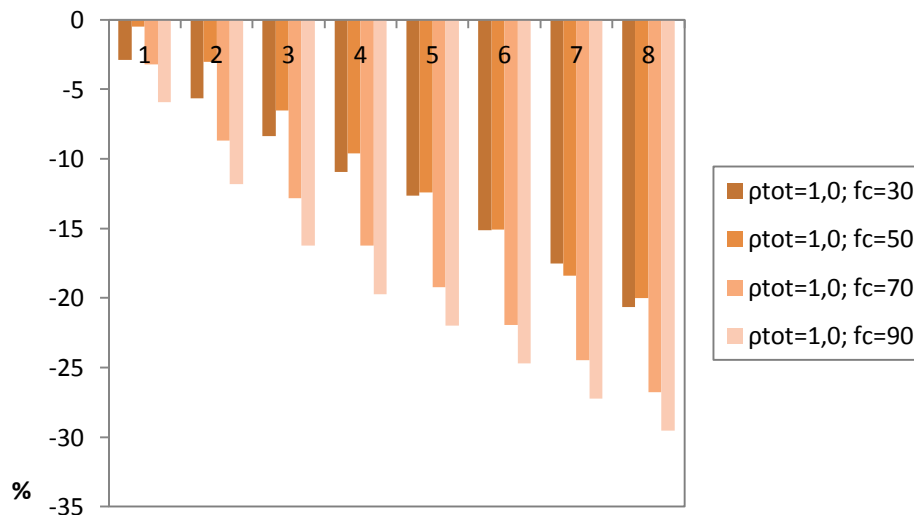


Figura 4.15 - An\alise da varia\c\ao percentual da rota\c\ao associada ao momento torsor m\aximo

De seguida, passa-se \a segunda fase da an\alise, que consiste em avaliar a influ\encia da taxa total de armadura na resist\encia \a tor\c\ao de uma viga submetida a diferentes n\iveis de confinamento axial. A Figura 4.16 ilustra a evolu\c\ao da resist\encia m\axima para o caso de $f_c=30MPa$ e ρ_{tot} vari\avel face o aumento do confinamento axial. \E vis\ivel na Figura 4.16 que vigas com maior taxa de armadura possuem uma resist\encia maior. Analisando uma curva com ρ_{tot} e f_c constantes, observa-se que a resist\encia m\axima tende a aumentar com o aumento do confinamento axial pois a for\ca de compress\ao centrada induz um efeito ben\efico contrariando o estado de tra\c\ao da viga \a tor\c\ao.

Para um determinado valor de k e fazendo uma an\alise das tend\encias da resist\encia observa-se que as vigas com rotura d\uctil (ρ_{tot} entre 0,6 e 0,8 %) apresentam um incremento de resist\encia maior do que para as vigas com rotura praticamente fr\agil por destacamento

dos cantos (ρ_{tot} entre 1,0 e 1,2). Estas últimas, por sua vez apresentam um maior incremento comparativamente às vigas com rotura frágil por compressão do betão (ρ_{tot} entre 1,4 e 1,6). Esta tendência deixa de ser tão evidente quando se aumenta a resistência do betão à compressão, tal como se pode observar nas curvas para outras classes de resistência do betão no Anexo III.

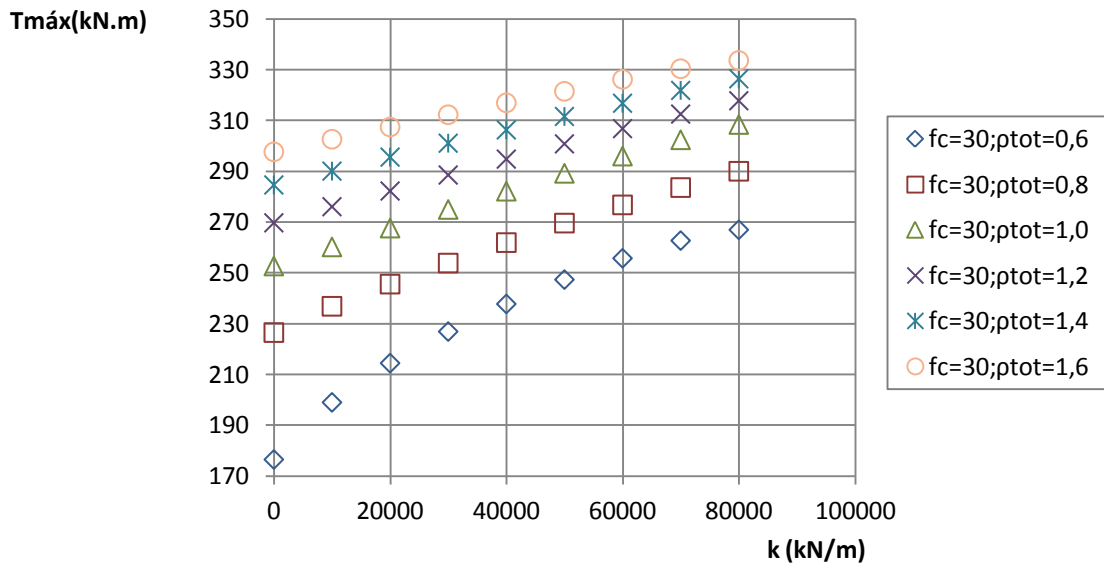


Figura 4.16 - Momento torsor resistente para $f_c = 30\text{MPa}$ e ρ_{tot} variável

Realizando agora uma comparação entre o desenvolvimento da curva para vigas com rotura dúctil, por exemplo quando $\rho_{tot} = 0,6\%$, e vigas com rotura frágil, por exemplo quando $\rho_{tot} = 1,6\%$, é notório que existe um incremento maior da resistência para as vigas com rotura dúctil, para níveis de confinamento baixos. Esta observação é facilmente entendida se se perceber o modo de rotura de ambas as vigas em análise. No caso da viga com rotura dúctil, a sua resistência é condicionada pela cedência das armaduras. Nesta situação o betão não esgota imediatamente a sua resistência integral à compressão quando é atingido o momento torsor máximo. Em vigas com rotura frágil a rotura é condicionada pelo betão à compressão nas escoras, sendo que a armadura nem chega a entrar em cedência. Nestas vigas o betão esgota imediatamente a sua capacidade resistente quando é atingido o momento torsor máximo. Deste modo, compreende-se que para vigas com elevado ρ_{tot} o incremento de resistência devido ao confinamento é mais pequeno.

Falta ainda analisar a influência da taxa total de armadura na rotação da secção transversal associada ao momento torsor máximo, $\theta_{Tmáx}$. A Figura 4.17 ilustra a evolução de $\theta_{Tmáx}$ com o aumento do confinamento axial. Foi utilizado o mesmo exemplo da análise anterior. Para qualquer valor de ρ_{tot} e f_c , $\theta_{Tmáx}$ diminui com o aumento do confinamento axial. Esta redução é mais acentuada para vigas com rotura dúctil, principalmente quando a

viga possui uma taxa total de armadura igual a 0,6%. Em vigas com rotura dúctil, e para o caso de confinamento nulo, a cedência das armaduras longitudinais permite à viga uma grande capacidade de deformação até que o betão esgote a sua resistência. Quando é introduzido um confinamento axial, o estado de compressão associado implica que as armaduras longitudinais entrem em cedência mais tarde ou que nem entrem sequer em cedência, pelo que o carácter dúctil da viga é reduzido acentuadamente e a resistência máxima do betão à compressão atinge-se mais rapidamente. Desta forma a redução da capacidade de rotação é mais acentuada.

Para as vigas com rotura frágil, a redução da capacidade de rotação é menos acentuada, uma vez que as mesmas vigas, sem confinamento axial, já não possuíam uma capacidade de rotação apreciável da secção transversal.

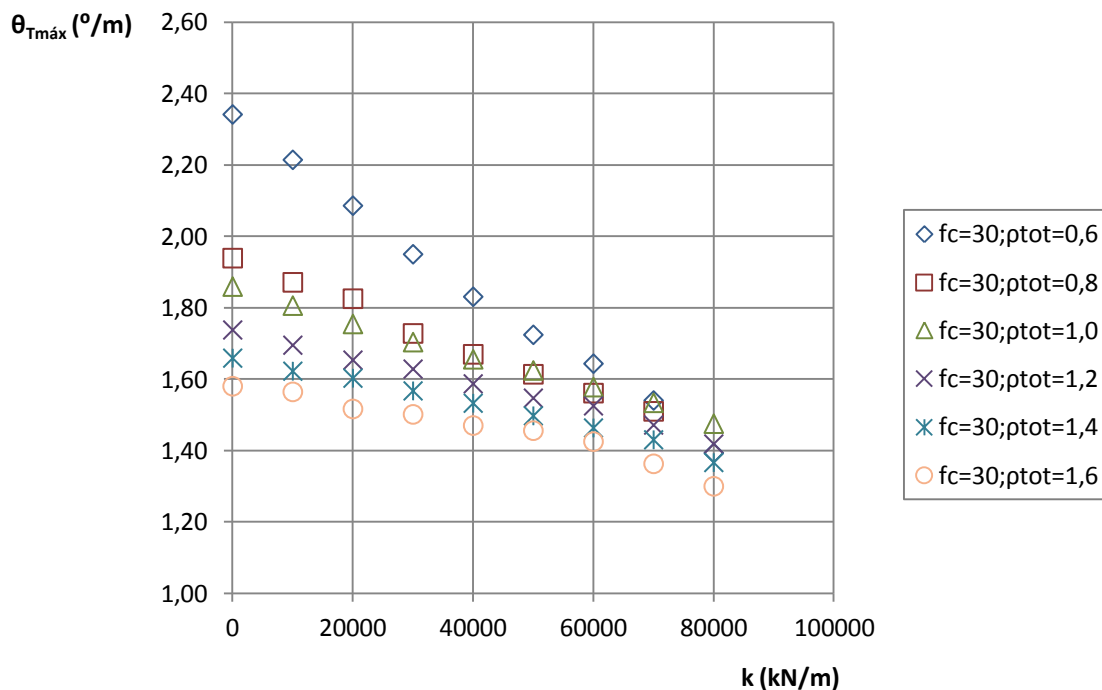


Figura 4.17 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 30 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

Todas as tendências observadas anteriormente permanecem válidas para os restantes valores de f_c , tal como se pode observar no Anexo III.

4.6. Ábacos para o apoio ao projeto de vigas à torção

Após a análise da influência do confinamento axial no comportamento último de vigas à torção tendo em conta diversas variáveis de estudo (resistência à compressão do betão, taxa total de armadura e nível de confinamento) é de realçar o incremento da resistência à torção em função do nível de confinamento (Figuras 4.12 e 4.16). Por conseguinte, decidiu-se tentar apresentar uma ferramenta de auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção que se encontrem em situação de confinamento axial, ferramenta que permitiria de uma forma simples contabilizar o referido efeito favorável do confinamento axial.

O objetivo inicialmente fixado era o de tentar encontrar uma expressão matemática simples que permitisse estabelecer uma correlação entre o incremento da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento, e as várias variáveis de estudo analisadas, designadamente: resistência do betão à compressão, taxa total de armadura e nível de confinamento axial. Desta forma, seria possível corrigir o momento torsor resistente usual para vigas sem confinamento, o qual pode ser calculado, por exemplo, tendo em conta as disposições de documentos normativos. Para auxiliar nesta tarefa, foi solicitado o apoio do Professor Doutor Jorge Manuel dos Reis Gama do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior.

Fazendo uso das 192 combinações utilizadas na segunda parte da análise paramétrica (Anexo I), foi possível estabelecer o incremento da resistência à torção através da utilização de um parâmetro designado C_{ca} . Tal parâmetro constitui um simples coeficiente multiplicativo (maior ou igual à unidade) da resistência à torção da viga na situação sem confinamento. Assim, neste estudo avaliou-se qual o C_{ca} de uma viga tipo (Viga A2) em função do nível de confinamento, da classe de resistência do betão e da taxa total de armadura de torção. Para tal, foi utilizado o software de cálculo *R*.

O *R* é um software com linguagem e ambiente para computação estatística e gráficos. Este software fornece uma ampla variedade de funções estatísticas (modelagem linear e não linear, testes estatísticos clássicos, análises temporais, classificação, ...) e técnicas gráficas, sendo altamente extensível. O *R* é um software livre e inclui diversos pacotes para as diversas aplicações [76].

Embora o problema em estudo nesta secção possa ser do tipo determinista, a sua complexidade obrigou a que se recorresse a ferramentas estatísticas, optando-se pelo programa estatístico *R* devido à sua grande aplicabilidade e recursos. Recorrendo-se a uma análise baseada no Método dos Mínimos Quadrados, foi possível ajustar-se um polinómio de grau 13, resultando assim um modelo não linear. Este modelo possui um coeficiente de determinação e um coeficiente de determinação ajustado aproximadamente iguais a 1, isto é, quase 100% da variabilidade do C_{ca} é explicada pelo polinómio de grau 13 nas variáveis consideradas, ou seja, a resistência do betão (f_c), a taxa total de armadura de torção (ρ_{tor}) e o nível de confinamento axial (k).

Como as variáveis anteriormente referidas são dependentes entre si, o polinómio que melhor se ajustou aos valores de C_{ca} que foram fornecidos pelo TORQUE_MTEAV modificado (Anexo IV) é um polinómio de grau 13, devido à interação entre as três variáveis. Deste modo, o polinómio contém 171 parcelas e, em virtude de ser um polinómio bastante extenso a sua apresentação é feita no Anexo V. O resíduo máximo (o resíduo é a diferença entre os valores amostrais observados da variável dependente, C_{ca} , e os respetivos valores dados pelo modelo ajustado (o polinómio de grau 13) nas variáveis independentes, f_c , ρ_{tot} e k) resultante do ajustamento deste polinómio é 0,000488, podendo assim considerar-se que o polinómio é bastante preciso. O polinómio foi modelado para as 192 combinações pelo que para outra combinação de valores da resistência do betão, f_c , taxa total de armadura, ρ_{tot} , e confinamento axial, k , não se garante o mesmo nível de erro. Ainda assim, a margem de erro para diferentes combinações de f_c , ρ_{tot} e k poderá ser considerada bastante admissível.

A extensão do polinómio encontrado invalida a sua utilização em projeto pelo que o mesmo foi utilizado para traçar as curvas de ábacos auxiliares, designados de ábacos - confinamento axial, para a obtenção gráfica dos valores C_{ca} em função das variáveis consideradas. A Figura 4.18 ilustra um dos ábacos obtidos, sendo que os restantes podem ser consultados no Anexo VI.

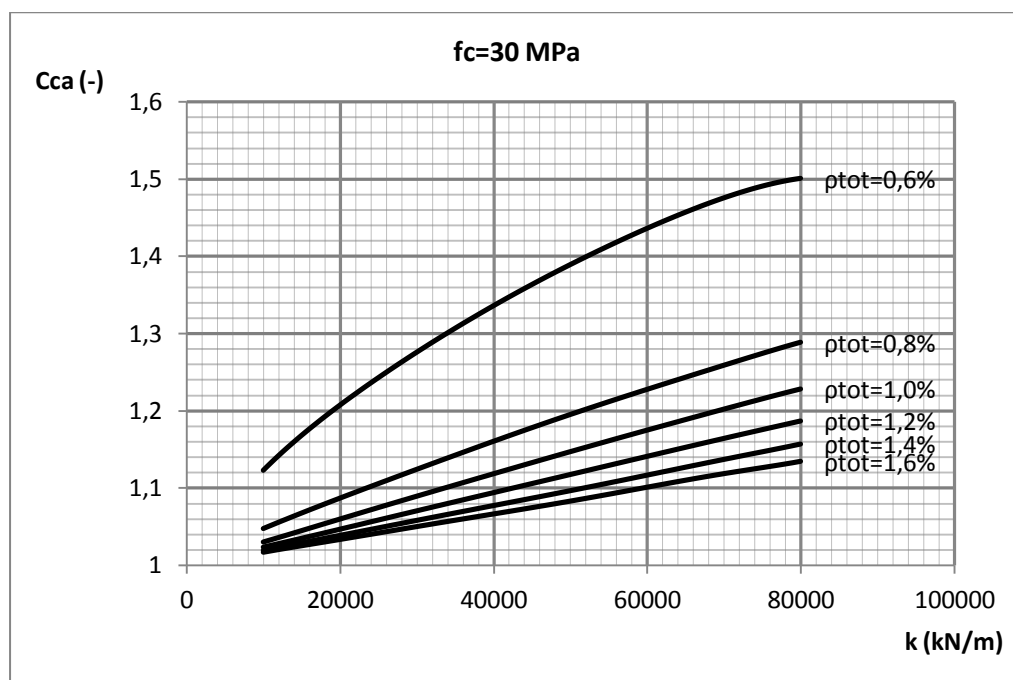


Figura 4.18 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 30 MPa

Os ábacos foram organizados por classe de resistência do betão à compressão e são de consulta muito simples. Para determinar a resistência máxima de uma viga de betão armado que se encontre confinada axialmente basta conhecer previamente qual o nível de confinamento longitudinal, a taxa total de armadura e a resistência máxima da viga para a

situação de confinamento nulo. Para exemplificar como se obtém resistência à torção da viga com confinamento axial, $T_{máx,ca}$, apresenta-se de seguida a Equação (4-1):

$$T_{máx,ca} = C_{ca} T_{máx} \quad (4-1)$$

Para se obter o valor de C_{ca} deve consultar-se o ábaco relativo à classe de resistência do betão à compressão da situação em questão. Deve-se, portanto, fixar a linha respetiva ao valor do confinamento axial (entrada nas abcissas) e intercetar essa linha vertical com a curva correspondente à taxa de armadura total, caso não exista a curva da ρ_{tot} relativa ao valor da situação em análise deve realizar-se um interpolação linear. De seguida, projetando o ponto de interseção na direção horizontal para o eixo das ordenadas obtém-se o valor do coeficiente de confinamento axial, C_{ca} .

Os ábacos apresentados em anexo são válidos para situações de vigas com características geométricas semelhantes às da Viga A2 (a caracterização da referida viga foi realizada na Secção 4.2), o que limita de certo modo a sua utilização. Outro aspeto relevante destes ábacos é que apenas são válidos para vigas com um comprimento livre igual a 5,90 metros. O comprimento da viga influencia o cálculo do momento torsor resistente uma vez que, tal como foi referido na Secção 3.2, a força de confinamento induzida na viga depende da rigidez dos elementos adjacentes e do alongamento total da viga livre. O alongamento da viga quando sujeita à torção é diretamente proporcional ao comprimento total livre da viga, sendo este por sua vez também diretamente proporcional à força de confinamento. Para tentar ultrapassar esta limitação surgiu a ideia de tentar encontrar equações de correlação suplementares que pudessem corrigir o valor do C_{ca} para situações semelhantes à viga tipo mas com outros valores de comprimento livre.

Para tal, utilizou-se o software *IBM SPSS Statistics* para o qual Universidade da Beira Interior possui uma licença de utilização. O software *IBM SPSS Statistics* é um sistema completo para análise de dados. O *IBM SPSS Statistics* pode fazer a aquisição dos dados a partir de praticamente qualquer tipo de arquivo e usá-los para gerar relatórios tabulados, tabelas e gráficos de distribuição de tendências, estatísticas descritivas e análises estatísticas complexas [49]. O objetivo neste trabalho consistiu em encontrar um polinómio de correção do coeficiente C_{ca} para vãos de 2, 4, 6, 8, 10 e 12 metros. Desta forma, ajustaram-se os polinómios através de 129 combinações de f_c , ρ_{tot} e k para cada valor do vão. Foi utilizada uma regressão não linear quadrática (foram também experimentados outros tipos de regressões não lineares), tendo-se encontrado 6 polinómios que se ajustam bem aos dados de entrada.

As Equações (4-2) a (4-8) representam os polinómios de correção:

$$C_{ca,corr} \approx 0,8529 - 0,09479C_{ca} + 0,2396C_{ca}^2, \quad l= 2 \text{ m} \quad (4-2)$$

$$C_{ca,corr} \approx 0,4139 + 0,4376C_{ca} + 0,1454C_{ca}^2, \quad l= 4 \text{ m} \quad (4-3)$$

$$C_{ca,corr} \approx -0,02234 + 1,03168C_{ca} - 0,009414C_{ca}^2, l= 6 \text{ m} \quad (4-4)$$

$$C_{ca,corr} \approx -0,4613 + 1,6764C_{ca} - 0,20969C_{ca}^2, l= 8 \text{ m} \quad (4-5)$$

$$C_{ca,corr} \approx -0,8031 + 2,2023C_{ca} - 0,386C_{ca}^2, l= 10 \text{ m} \quad (4-6)$$

$$C_{ca,corr} \approx -0,97734 + 2,4863C_{ca} - 0,4847C_{ca}^2, l= 12 \text{ m} \quad (4-7)$$

Na Tabela 4.4 encontram-se representados os coeficientes de correlação, R^2 , coeficientes estes que traduzem a qualidade dos polinómios encontrados. Como pode ser observado, com exceção do valor associado ao vão de 12,0 m, os valores dão bastante próximos da unidade.

Tabela 4.4 - Coeficientes de correlação dos polinómios de correção

l (m)	R^2
2	0,996
4	0,9993
6	0,9999
8	0,9979
10	0,9868
12	0,961

Face à qualidade dos polinómios de correção obtidos para os vãos 2 a 10 metros, tentou-se perceber o que estava a acontecer com o ficheiro de dados introduzido para um vão igual a 12 metros através da análise do gráfico de dispersão ilustrado na Figura 4.19. A partir dos dados pôde-se observar alguma dispersão dos valores. Para tentar perceber porque razão os dados não seguiam a mesma tendência, foi-se observar a que combinação correspondia esses pontos. Tendo-se concluído que uma combinação de valores baixos para f_c e ρ_{tot} e para um elevado nível de k verifica-se um desvio da tendência e para garantir a validade do modelo decidiu-se reduzir o intervalo de correção dos vãos da viga para um intervalo de 2 a 10 metros.

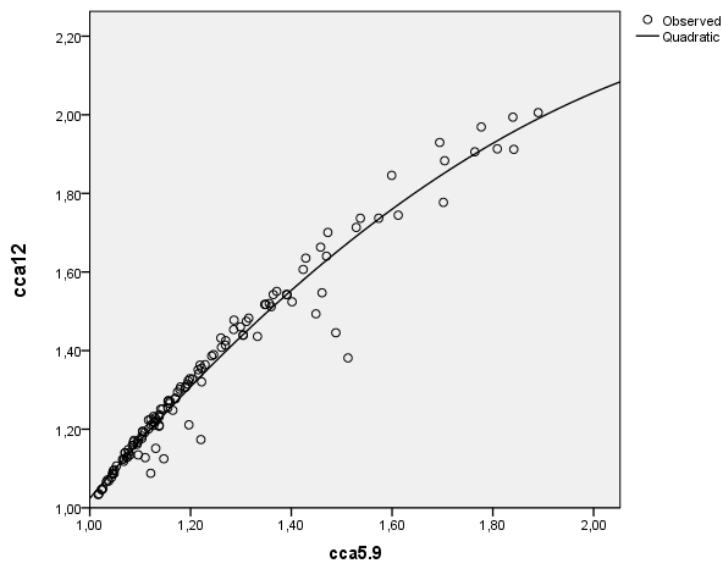


Figura 4.19 - Gráfico de dispersão de dados para o vão de 12 metros

De modo a facilitar o uso das Equações (4-2) a (4-7) decidiu-se organizar um ábaco que permite com grande facilidade obter o valor corrigido de C_{ca} , para cada vão. Tal valor é designado por $C_{ca,corr}$. O referido ábaco encontra-se ilustrado na Figura 4.20 e pode também ser consultado no Anexo VIII.

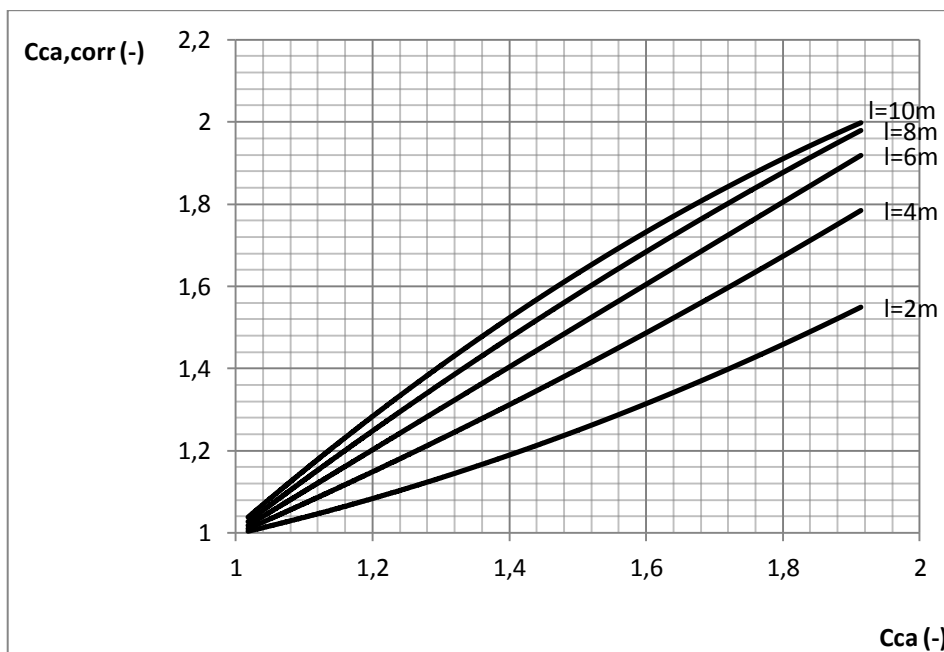


Figura 4.20 - Ábaco de correção do coeficiente C_{ca} para os vãos 2, 4, 6, 8 e 10 m

A utilização do ábaco da Figura 4.20 é em tudo semelhante aos ábacos anteriormente apresentados. Para obter $C_{ca,corr}$ basta inicialmente realizar o procedimento explicado anteriormente para obter o valor do C_{ca} . De seguida deve fixar-se a linha respetiva ao valor

do C_{ca} (entrada nas abcissas) e intercepar com a linha do respectivo vão e segundo uma projeção na direção horizontal e no eixo das ordenadas obtém-se o valor corrigido do coeficiente, $C_{ca,corr}$. Assim, o valor da resistência máxima passa a ser calculado através da Equação (4-8):

$$T_{máx,ca} = C_{ca,corr} T_{máx} \quad (4-8)$$

4.7. Notas Finais

No presente Capítulo foram apresentados os resultados da análise paramétrica, com a qual se pretendeu observar a influência de várias variáveis de estudo (resistência à compressão do betão, taxa total de armadura de torção e nível de confinamento axial) no comportamento global de vigas à torção com confinamento axial. No início do presente capítulo foi apresentada e caracterizada a viga de referência (Viga A2) que serviu de base para a análise paramétrica.

Numa primeira análise avaliou-se o efeito do nível de confinamento na evolução dos vários parâmetros caracterizadores do estado interno de deformação da viga e de outros parâmetros que são incorporados na formulação do VATM modificado. Numa segunda análise avaliou-se a influência do nível de confinamento no comportamento último da viga mediante o estudo da forma da curva $T-\theta$, nomeadamente a evolução do momento torsor resistente (máximo) e respetiva rotação face ao aumento do nível de confinamento. O traçado das curvas e gráficos analisados foi realizado com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado.

No final deste capítulo, após a análise da influência do confinamento axial no comportamento último de vigas à torção tendo em conta as diversas variáveis de estudo consideradas observou-se, entre outros aspetos, um efeito favorável do confinamento através do incremento da resistência à torção. Por esta razão, foram elaborados uns ábacos propostos para auxiliar o projeto de vigas de betão armado à torção. Estes ábacos permitem obter um coeficiente multiplicativo para a resistência à torção da viga na situação sem confinamento, permitindo corrigir este mesmo valor para a situação de confinamento axial. Tais ábacos, para além de incorporarem as variáveis analisadas (resistência à compressão do betão, taxa total de armadura de torção e nível de confinamento axial) permitem ainda contabilizar a influência do comprimento livre da viga.

Capítulo 5 - Modelação com Elementos Finitos

5.1. Introdução

As limitações da mente humana não permitem compreender o comportamento de estruturas complexas que rodeiam o engenheiro numa só operação. Assim, o processo de subdivisão do sistema complexo em componentes individuais ou elementos, cuja análise do seu comportamento individual é mais fácil, é uma forma que o Engenheiro encontrou para contornar essa dificuldade [82]. Deste ponto de vista, uma viga de betão armado sujeita à torção pode ser encarada como uma estrutura complexa, dado o real comportamento não linear dos materiais bem como a complexidade do estado evolutivo interno de tensão e de deformação que se gera no elemento para equilibrar a ação externa.

De um ponto de vista matemático, o método dos elementos finitos (MEF) é baseado na substituição de formulações integrais sobre um domínio complexo por um somatório de integrais estendidos a sub-domínios de geometria simples. Cada sub-domínio corresponde a um elemento finito que pode ser por exemplo uma reta, um triângulo, um quadrilátero, um tetraedro ou um paralelepípedo. Atualmente, esta área constitui uma área de pesquisa muito ativa. As modernas formulações de elementos finitos integrais podem ser obtidas por dois processos distintos: princípio variacional ou método dos resíduos pesados [4][10].

É referido por vários autores que a publicação mais antiga em que é utilizada a designação “elemento finito” é o artigo publicado sobre a análise de tensões planas em 1960 por R. W. Clough [11]. Anteriormente eram já conhecidas algumas técnicas que vieram a ser incorporadas no MEF, sem este aparecer ainda com as principais características que hoje em dia possui. Os grandes passos do desenvolvimento do MEF, que o conduziram ao formato que atualmente apresenta maior aceitação, foram dados na década de 60 e início da de 70. No entanto, o rápido desenvolvimento do MEF coincidiu praticamente com a generalização da utilização de computadores, uma vez que a utilização deste método depende de um computador digital. Este requisito é devido à grande quantidade e complexidades dos cálculos que é necessário realizar, nomeadamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares [10].

Tendo em conta as conclusões limitadas obtidas no final do Capítulo 3 quando foi feita uma tentativa de validar o VATM modificado através da comparação das suas previsões com os escassos resultados experimentais disponíveis, optou-se no presente trabalho por fazer um estudo numérico através da modelação da viga A2 de betão armado (caracterizada na Secção 4.2) sujeita à torção. Para tal foi utilizado o programa LUSAS que incorpora a possibilidade de realizar uma análise não linear com elementos finitos por forma a tentar simular o comportamento da referida viga à torção. O objetivo era calibrar um modelo numérico de modo a poder ser utilizado posteriormente para simular o efeito do confinamento axial. Desta forma, pretende-se obter resultados numéricos que possam ser considerados fiáveis para serem comparados com as previsões do VATM modificado. O

comportamento não-linear advém principalmente devido à plasticidade das armaduras de reforço e do betão à compressão (em menor grau), bem como da fissuração do betão. Outras não-linearidades surgem com a interação entre as armaduras de reforço e o betão, o atrito entre os agregados nas fissuras do betão, fluência e retração do betão, entre outros [79].

A calibração do modelo numérico bem como dos parâmetros que definem o comportamento do betão à compressão e à tração e das armaduras à tração será baseada nos resultados dos ensaios experimentais da viga de referência A2, resultados obtidos por Bernardo, em 2003 [16].

Como já foi referido anteriormente, pretende-se que a modelação com elementos finitos e a análise não linear da viga de betão armado sujeita à torção com diferentes níveis de confinamento axial possa auxiliar na confirmação das previsões teóricas obtidas a partir do VATM modificado, de modo a poder validar o modelo neste trabalho.

No presente Capítulo, inicialmente serão descritas as leis constitutivas utilizadas para a caracterização do comportamento dos materiais para a análise não linear bem como dos elementos finitos utilizados na modelação geométrica. Posteriormente realiza-se uma descrição do modelo geométrico, e suas propriedades, utilizado na análise numérica. Descreve-se ainda pormenorizadamente todas as alterações feitas ao modelo para a calibração da curva $T-\theta$ da viga A2 sujeita à torção e por fim apresentam-se os resultados da análise não linear da Viga A2 simulada sem confinamento axial e com os diversos níveis de confinamento.

5.2. Modelo numérico - Elementos Finitos

Muitos desenvolvimentos importantes foram realizados na definição das leis constitutivas utilizadas para simular o comportamento do betão. No entanto, ainda não existe nenhum modelo capaz de descrever corretamente todos os aspetos do comportamento não linear do betão. Uma razão para isso é, sem dúvida, a complexidade do comportamento do betão sujeito a um estado multiaxial de tensões. Por essa razão, muitas vezes é necessário a calibração dos modelos e a sua validação tendo por base, se possível, resultados experimentais. Esta calibração por vezes não é muito fácil, isto porque os mecanismos internos que regem o comportamento mecânico do betão não foram observados diretamente. Por exemplo, a formação de fissuras, o interbloqueamento entre agregados, o esmagamento do betão e a dilatância do betão fissurado são parâmetros cujos valores são extrapolados indiretamente através de medições experimentais e observações da superfície [62].

O modelo de elementos finitos adotado neste estudo utiliza uma abordagem de fissuração distribuída para a modelação da viga de betão armado e são utilizados elementos tridimensionais para modelar os elementos constituintes da viga. Esta modelação tridimensional permite a simulação do comportamento não linear da viga de betão armado de uma forma mais realista uma vez que permite ter em conta, entre outras coisas, o efeito do confinamento do betão devido ao facto dos elementos possuírem uma espessura.

Para simular o comportamento do betão e das chapas metálicas foram utilizadas leis constitutivas disponíveis no LUSAS que melhor se adequam às leis descritas na Secção 2.3.5., no entanto para as armaduras foi introduzida a Lei de Belarbi e Hsu, 1994, também descrita na Secção 2.3.5.

5.2.1. Betão

O betão foi modelado através do elemento HX8. Este elemento é um elemento sólido contínuo, possui oito nós com três graus de liberdade por cada nó - translações segundo as direções x, y e z. A Figura 5.1 ilustra esquematicamente a geometria do elemento [56].

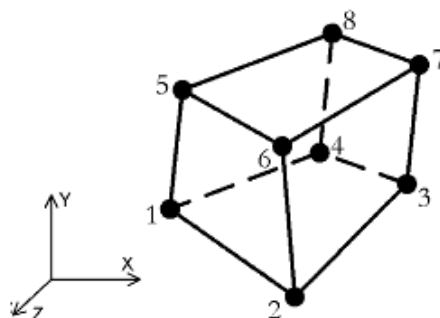


Figura 5.1 - Geometria do elemento HX8 [56]

Para modelar o comportamento não linear do betão foi utilizado o modelo *Multi-Crack* incorporado no LUSAS. Este modelo foi desenvolvido por Jefferson em 2003 [51][52]. O referido autor incorporou na moderna teoria para modelar o comportamento elasto-plástico e o dano do betão armado algumas das características dos primeiros modelos de fissuração-plástica. O modelo de fissuração-plástica usa a teoria plástica para representar o comportamento do betão à compressão e teorias de fissuração incremental para simular a fissuração em planos definidos. No entanto, este modelo não abordava os aspetos importantes relativos ao dano, tais como o aumento da resistência desviatória (resistências diferentes em direções diferentes) com o aumento do confinamento triaxial, o comportamento não linear do betão à compressão, a perda de resistência à tração com o esmagamento do betão, o atrito entre os agregados em fissuras totais ou parciais e a abertura de fissuras com a incorporação do efeito de corte. Deste modo, o modelo *Multi-Crack* assume um comportamento elástico-linear para o betão à compressão e a componente plástica para modelar o comportamento não linear do betão à compressão é feita adicionalmente por diversos parâmetros.

Uma descrição muito detalhada do modelo *Multi-Crack* está fora do âmbito deste trabalho, remetendo-se um estudo mais aprofundado do mesmo para as publicações de Jefferson em 2003 [51][52]. Ainda assim, alguns aspetos do modelo serão aqui descritos, designadamente no que se refere à utilização do modelo do LUSAS.

Para a caracterização do comportamento do betão, o modelo *Multi-Crack* no LUSAS solicita os seguintes parâmetros de entrada:

E	-	Módulo de Elasticidade
ν	-	Coefficiente de Poisson
f_c	-	Resistência do betão à compressão uniaxial
f_t	-	Resistência do betão à tração uniaxial
ε_c	-	Extensão no pico da tensão de compressão
ε_0	-	Extensão no final da curva do betão à tração (ver Figura 5.2)
β_r	-	Relação entre a tensão biaxial e uniaxial principal no pico
ψ	-	Fator de dilatância
m_g	-	Constante de atrito
m_{hi}	-	Coefficiente multiplicador de ε_0 para a abertura da primeira fissura
m_{fid}	-	Coefficiente multiplicador final de ε_0
r_σ	-	Intercepção de corte da resistência à tração para o dano local
μ	-	Inclinação da assíntota de atrito para a superfície de danos locais

O modelo incorpora diversas componentes de modo a simular o comportamento não linear do betão de uma forma mais precisa [51]:

i) Relações contacto-dano local:

A ideia essencial do modelo *Multi-Crack* para simular a fissuração é a utilização, segundo Jefferson, de relações tensão-extensão de um plano de fissura efetiva para gerar uma relação entre tensões e extensões locais.

Segundo Jefferson (2003) existem três estados de contacto que caracterizam a fissura e que são denominados de “aberto”, “interbloqueado” (*interlock*) e “fechado”. O estado interbloqueado pode ser definido como uma fissura aberta mas que possui capacidade de resistência a significativos movimentos de corte, o que não se observa na fissura totalmente aberta. Estes três estados podem ser observados na Figura 5.2.

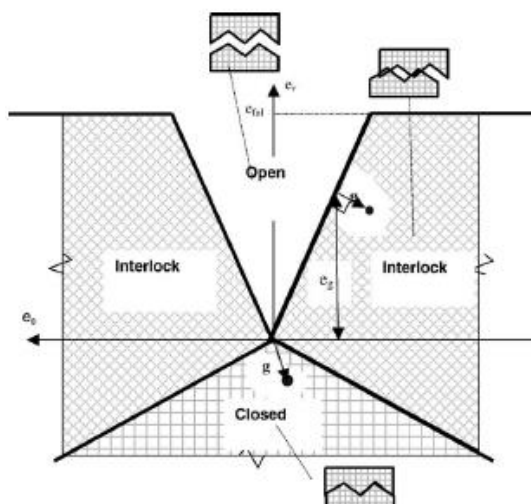


Figura 5.2 - Estados de contacto local da fissura [51]

No estado aberto da fissura a tensão na zona desligada é considerada nula. No estado interbloqueado a tensão na zona desligada deriva de uma lei de contacto onde as tensões são função da distância entre as superfícies de contacto (extensões locais) que é representada pelo vetor g . No estado fechado o vetor g é igual ao vetor de extensão local.

A constante m_g é utilizada no modelo como um parâmetro de interação das duas superfícies de contacto através de movimentos de corte ou atrito entre os agregados. Segundo ensaios realizados por Walraven e Reinhardt, em 1981, verificou-se que para betões de resistência normal m_g pode tomar valores entre 0,3 a 0,6. Verificou-se também que um valor inferior a 0,3 pode levar à formação de fissuras devido ao desenvolvimento de forças de corte relativamente grandes e, portanto um valor mais próximo de 0,5 é aconselhável.

Existe uma extensão da fissura aberta para o qual já não se consegue recuperar o contacto através do corte e essa extensão é denominada e_{ful} . No modelo e_{ful} é um múltiplo de ε_0 , isto é, $e_{ful} = \varepsilon_0 m_{ful}$. Estudos sugerem que quando o betão possui agregados com dimensões entre 20 e 30 mm, pode-se adotar um valor para m_{ful} entre 10 e 20, enquanto para betões com agregados relativamente pequenos, isto é, 5 a 8 mm, deve-se adotar um valor entre 3 e 5. Esta variação é necessária porque o deslocamento relativo, ε_0 , que marca o final da curva de tração do betão, que se encontra representada na Figura 5.3, não está diretamente relacionado com o tamanho do agregado, enquanto e_{ful} é aproximadamente proporcional ao tamanho do agregado pelo que é necessária a existência do parâmetro m_{ful} .

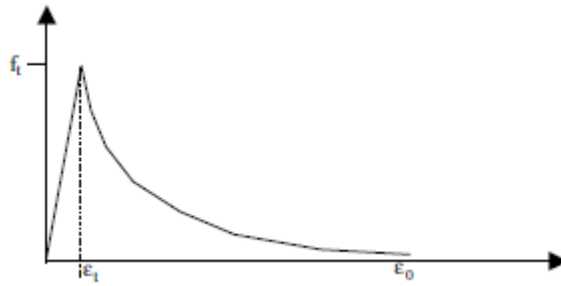


Figura 5.3 - Curva do betão à tração [51]

Quando o betão experimenta um certo grau de fissuração em compressão existe em geral uma redução da resistência à tração e no presente modelo este efeito é simulado com o aumento do dano e a redução da tensão após a formação da primeira fissura. Jefferson, reconheceu que, por exemplo, a aparente fissuração de um cubo de betão envolve a sua fissuração difusa e, portanto, a simulação do aumento do dano é considerada razoável.

A evolução da função do dano utilizada neste modelo destina-se a melhorar o desempenho do modelo numérico. O dano, ou os planos de fissuração é gerado através de planos de degradação (POD). O POD é formado quando a tensão principal atinge a tensão máxima de tração, f_t . Os parâmetros r_c e μ são parâmetros de entrada no modelo *Multi-Crack* e caracterizam a superfície de dano, podendo tomar valores nos intervalos 0,5 a 2,5 e 0,5 a 1,5, respetivamente [56].

ii) Componente plástica:

- Comportamento triaxial

Em experiências de provetes de betão à compressão observaram-se determinadas características relevantes que devem ser tidas em conta no modelo *Multi-Crack*:

- Significativa não linearidade da relação tensão-extensão até ao pico de tensão e o efeito do *softening effect* se existirem extensões transversais de tração;
- Aumento da resistência desviatória com o confinamento triaxial;
- Comportamento próximo do elástico até bem perto do pico quando submetido a carga-descarga, exceto na situação de elevadas pressões confinantes.

No modelo *Multi-Crack* é introduzida uma componente plástica relativamente simples mas muito importante. O modelo inclui funções de atrito *hardening/softening* que permitem caracterizar o comportamento não linear pré e pós pico do betão à compressão.

- Critérios de cedência e de rotura

Os parâmetros de entrada necessários para definir tais critérios são a resistência uniaxial do betão à compressão, f_c , e a razão entre a resistência biaxial e uniaxial do betão à compressão, β_r , que geralmente se encontra no intervalo 1,05 a 1,3 (Kupler et al., 1969; Van Mier, 1997). [51]

iii) Potencial plástico e lei de fluxo:

A função potencial plástico é derivada de equações dos critérios de cedência propostas para o modelo e é usado adicionalmente o parâmetro da dilatância, ψ , para se poder controlar o grau de dilatância do betão. Em estudos anteriores verificou-se que ψ pode tomar valores entre -0,1 e -0,3. Geralmente ψ é definido como -0,1 mas para elevados graus de confinamento triaxial deve ser adotado o valor -0,3. [51]

iv) Relações Hardening/Softening

O modelo *Multi-Crack* presume que a quantidade de trabalho para obter o pico de tensão aumenta com a tensão principal. O modelo adota relações de *Hardening/Softening* pois permitem uma transição suave entre o comportamento pré e pós-pico.

5.2.2. Armaduras

As armaduras longitudinais e transversais foram modeladas através do elemento BRS2. Este é um elemento de barra reto isoparamétrico 3D com dois nós, cada nó possui três graus de liberdade - translações segundo as direções x, y e z. Na Figura 5.4 está representado esquematicamente a geometria do elemento [56]. Refere-se que o elemento BRS2 é compatível com o elemento tridimensional HX8 para modelar o betão, sendo ambos também compatíveis para uma análise não linear.

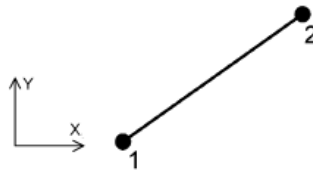


Figura 5.4 - Geometria do elemento BRS2 [56]

No presente estudo foi considerado uma ligação perfeita entre os elementos de barra e os elementos de betão. Desta forma, cada elemento de barra partilha os mesmos nós com o elemento sólido contínuo de betão ao qual fica ligado.

Para retratar o comportamento não linear das armaduras à tração foi introduzida a lei constitutiva de Belarbi e Hsu, 1994, que foi apresentada na Secção 2.3.5. Nas Figuras 5.5 e 5.6 encontram-se representadas as curvas tensão-extensão para as armaduras longitudinais e transversais, respetivamente. Tais curvas foram simplificadas através de troços retos por forma a facilitar a introdução das mesmas no LUSAS (através das coordenadas dos pontos que limitam os referidos troços).

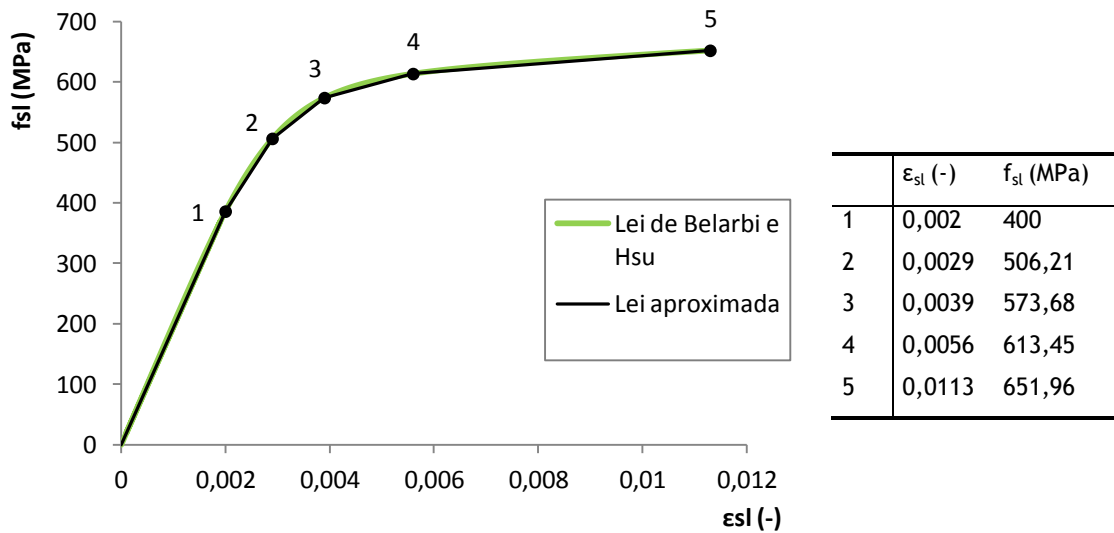


Figura 5.5 - Curva tensão-extensão para a armadura longitudinal

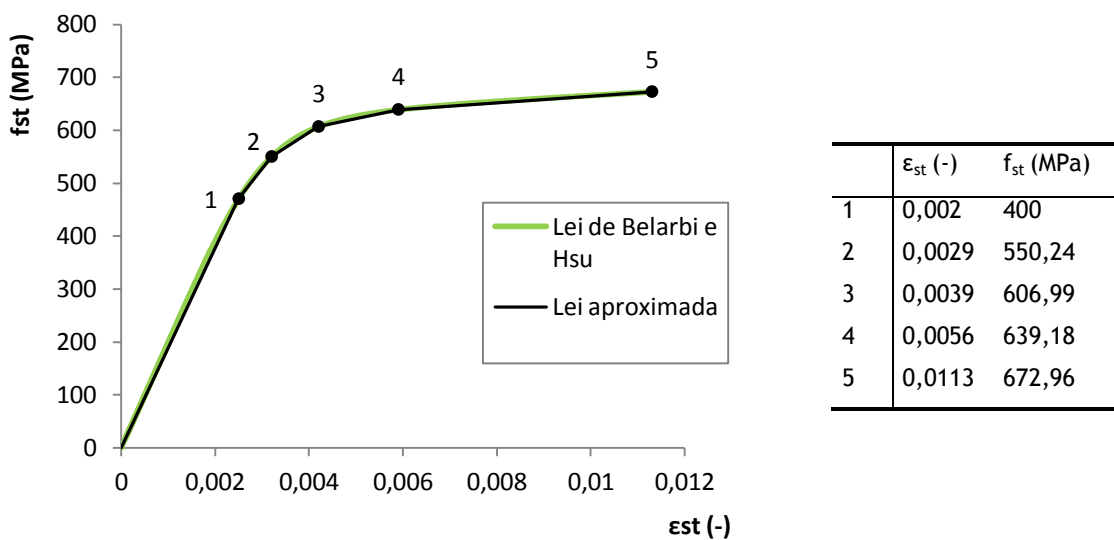


Figura 5.6 - Curva tensão-extensão para a armadura transversal

5.2.3. Chapas de aço

Para introduzir os apoios nodais numa das extremidades da viga (simulando o encastramento de torção) e introduzir a ação equivalente ao momento torsor externo na outra extremidade, foram modeladas chapas de aço rígidas em ambas as extremidades da viga. As chapas metálicas foram adicionadas ao modelo na zona de apoio e de carregamento para minorar problemas de concentrações de tensões no betão.

Para modelar as chapas de aço foi utilizado o elemento HX8, Figura 5.1. Deste modo conseguiu-se uma compatibilidade (partilha dos mesmos nós) entre os elementos da chapa de aço e os de betão, à semelhança do realizado para a ligação do betão com as armaduras.

Para o aço que compõe as chapas, foi adotado um módulo de elasticidade igual a $10E9$ N/mm² e um coeficiente de Poisson igual a 0,3. Foi utilizada a mesma lei elástico-linear que nas armaduras. No entanto, adotou-se uma tensão de cedência bastante elevada (100 GPa) para evitar pontos de plastificação nas chapas.

5.2.4. Cabo Exterior não aderente

De modo a simular o confinamento axial da viga A2 no LUSAS, foi introduzido um cabo longitudinal de aço na zona oca da viga, localizado no centro de gravidade da secção (externo à secção de betão) e ligado às duas chapas metálicas nas extremidades. O cabo possui um módulo de elasticidade igual a 200 GPa e uma área variável consoante o nível de confinamento, k , que se pretendia simular. Mais à frente serão indicadas quais as áreas utilizadas para simular os diferentes níveis de confinamento axial.

O cabo foi modelado com o elemento de barra linear tridimensional, BRS2, descrito na Secção 5.2.2.

5.3. Modelo Numérico - Análise não linear

5.3.1. Considerações gerais

O objetivo inicial deste trabalho é calibrar o modelo numérico representativo da viga A2 (viga de referência deste estudo) de modo a reproduzir a curva experimental $T-\theta$. Tal tarefa foi realizada antes de iniciar o estudo do efeito do confinamento axial nessa mesma viga.

Como ponto de partida para a utilização do programa LUSAS no âmbito de análises não lineares e a título de experiência optou-se primeiro por tentar reproduzir os resultados do ensaio experimental com uma viga (viga B1) realizado por Ibrahim e Mahmood, em 2009 [50]. A escolha deste exemplo deve-se ao facto de a viga B1 ser uma viga de betão armado simplesmente apoiada e, uma vez que as cargas se encontram bastante perto dos apoios, estar essencialmente solicitada ao corte (a rotura ocorreu por corte). Considerou-se que o caso da torção em vigas de betão armado poderá ser considerado uma extensão da viga B1 solicitada essencialmente ao esforço transversal.

A viga B1 é uma viga de betão armado com 3,62 m de comprimento, secção retangular de 0,15x0,25 m e com cargas concentradas a 0,37 m dos apoios. A viga B1 bem como o respetivo modelo estático encontram-se ilustrados na Figura 5.7. A viga possui 2 varões de diâmetro 13 mm como armadura longitudinal inferior e 2 varões de diâmetro 10 mm como armadura longitudinal superior, é ainda dotada de varões transversais de diâmetro 10 mm espaçados de 0,61 m [50], a taxa de armadura transversal é bastante baixa com o objetivo de tentar obter uma rotura frágil por corte.

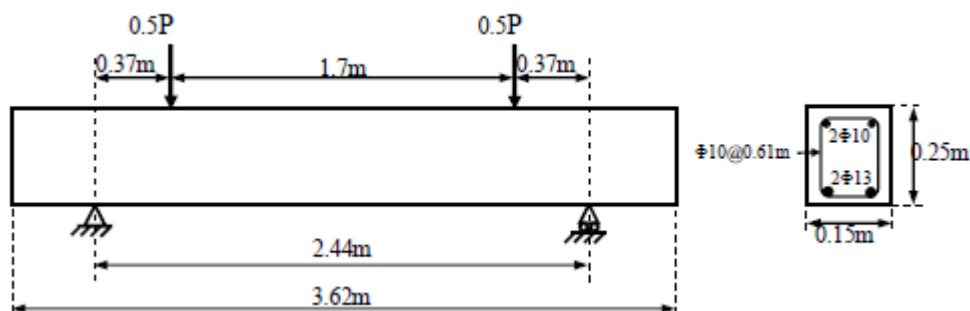


Figura 5.7 - Dimensões, modelo estático e reforço da viga B1 [50]

Na Tabela 5.1 encontra-se um resumo das propriedades dos materiais da viga B1 fornecidos pelos autores e utilizados neste trabalho a análise não linear.

Tabela 5.1 - Propriedades dos materiais da viga B1 [50]

Viga	f_y (MPa)	E_s (GPa)	ν_s	f_{cm} (MPa)	ν_s
B1	77,82	200	0,3	27,54	0,2

Onde:

- f_y - Tensão de cedência das armaduras
- E_s - Módulo de Elasticidade das armaduras
- ν_s - Coeficiente de Poisson das armaduras
- f_{cm} - Resistência do betão à compressão
- ν_s - Coeficiente de Poisson do betão

No seu estudo original, Ibrahim e Mahmood modelaram esta viga no programa ANSYS. Para o betão, Ibrahim e Mahmood utilizaram um elemento de oito nós com três graus de liberdade cada - translações nodais nas direções x, y e z. O elemento HX8 do LUSAS, descrito na Secção 5.2.1, é equivalente ao utilizado pelos autores. Quanto às armaduras, os autores utilizaram um elemento 3D com dois nós com três graus de liberdade cada - translações nodais nas direções x, y e z - semelhante ao elemento BRS2 do LUSAS, elemento descrito na Secção 5.2.2. Na simulação realizada neste trabalho foi utilizado o modelo *Multi-Crack* para simular o comportamento não linear do betão e uma lei bi-linear para simular o comportamento das armaduras à tração.

Fazendo uso da simetria da secção transversal e do modelo estático, modelou-se apenas um quarto da viga. Esta simplificação reduz significativamente o tempo de cálculo do programa e o espaço que os ficheiros de dados e resultados ocupam no disco. A malha de elementos finitos, condições de apoio e carregamento encontram-se ilustrados na Figura 5.8.

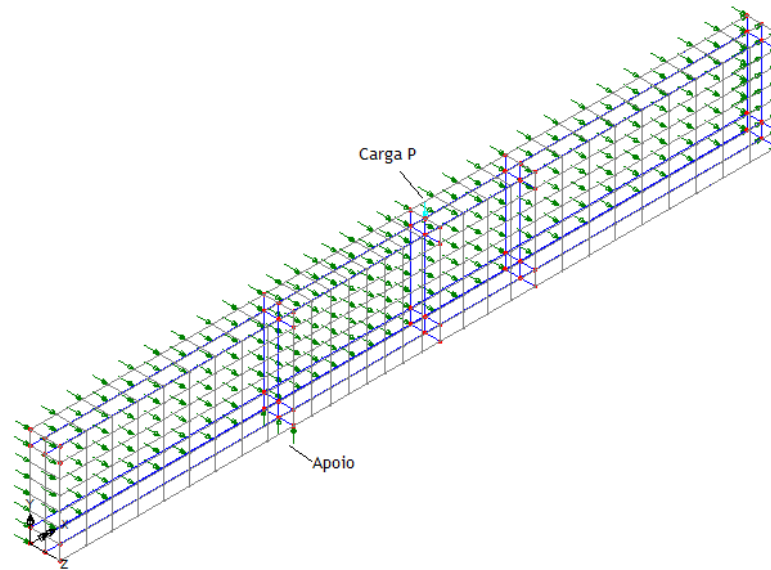


Figura 5.8 - Malha de elementos finitos, condições de apoio e carregamento para um quarto da viga B1, LUSAS

Na Figura 5.9 encontra-se ilustrado a disposição das armaduras no interior do modelo. Como foi referido anteriormente, é admitido que existe uma ligação perfeita entre as armaduras e o betão (não ocorre deslizamento entre os elementos).

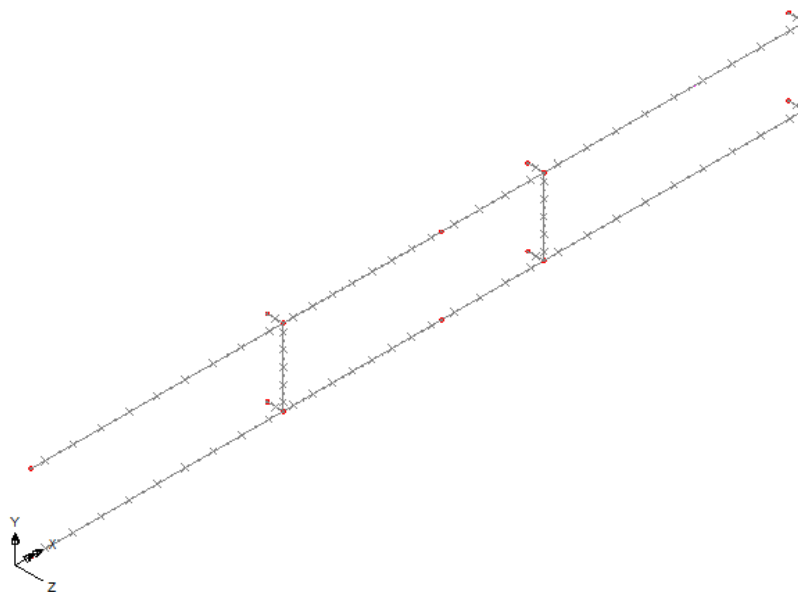


Figura 5.9 - Armadura de reforço da Viga B1, LUSAS

Realizou-se uma análise não linear por incremento de carga e inicialmente deparou-se com a situação de que a curva Carga (P) - Flecha (δ) a viga B1, na análise numérica acabava muito antes do observado experimentalmente, mesmo sem estabelecer qualquer critério de paragem relacionado com a limitação das deformações. Após algumas experiências, observou-se que o valor de ϵ_0 (extensão no final da curva do betão à tração, ver Figura 5.2),

inicialmente considerado igual a 0,0035 (valor tomado por defeito no LUSAS) constitui um critério relevante de paragem da análise. Após alguma pesquisa verificou-se que Yang e Chen em 2005 [79] afirmaram que o valor da extensão no fim da curva de tração do betão deve tomar um valor na ordem de grandeza de 0,02 e não um valor de ordem de grandeza inferior tal como o LUSAS adotou por hipótese. Adotou-se então um valor para a extensão última de tração igual a 0,035 e deste modo obteve-se a curva numérica carga-flecha ilustrada na Figura 5.10.

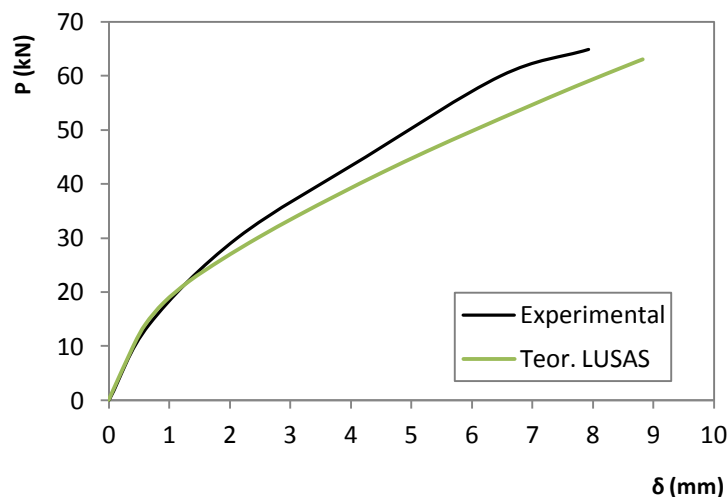


Figura 5.10 - Curva Carga-flecha para a viga B1

A curva teórica mostra uma boa concordância com a experimental (com menores desvios comparativamente à obtida pelos autores no programa ANSYS). Deste modo considerou-se que era possível passar para a modelação da viga A2 sujeira à torção. Refere-se desde já que para o caso da torção houve necessidade de calibrar parâmetros suplementares. Esse aspeto será discutido na próxima secção.

5.3.2. Geometria e propriedades do Modelo Numérico

Uma vez descritos os elementos, modelos e leis utilizadas para caracterizar os materiais, falta definir a geometria do modelo e a malha de elementos finitos utilizada para modelar a viga A2 sem e com restrição axial

Foi necessário encontrar um padrão nodal (discretização da malha) que melhor se adequasse ao caso particular em estudo, tendo designadamente em conta o espaçamento dos varões e a espessura das paredes da secção e, também, que se considerasse suficientemente preciso no âmbito de uma análise global do comportamento da viga em estudo [11].

Inicialmente procedeu-se a uma ligeira simplificação da viga A2 ao nível da secção transversal, designadamente para eliminar pequenas assimetrias relacionadas com a posição das armaduras. A Figura 5.11 (a) ilustra a posição real dos varões, verificando-se que existe uma ligeira diferença entre os ramos das cintas em ambas as direcções. A Figura 5.11 (b)

ilustra a secção depois de corrigida. O objetivo desta ligeira correção foi o de simplificar a modelação.

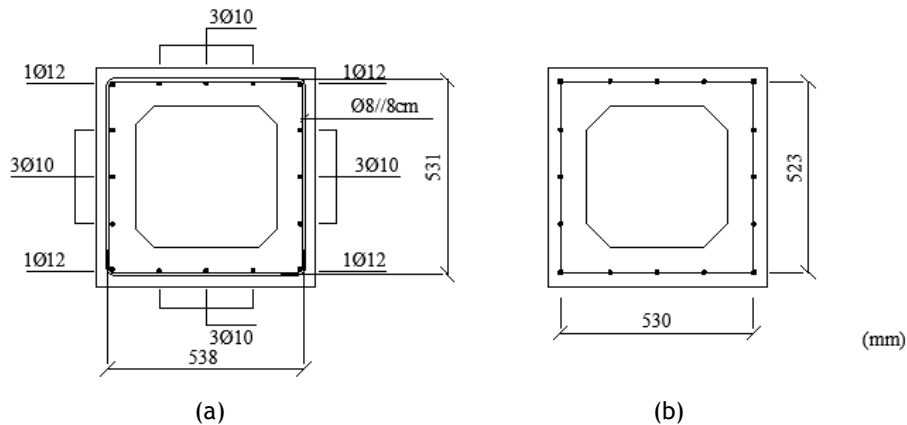


Figura 5.11 - (a) Secção transversal real da viga A2, (b) Secção transversal simplificada da viga A2

Existem algumas condições geométricas que condicionam a definição dos nós. Quando se trata de uma análise de tensões deve-se adotar uma malha mais refinada quando comparado com uma análise de deslocamentos. A configuração da malha deve ser adequada à geometria da secção e por questões práticas deve respeitar um padrão uniforme. Outra condição importante diz respeito às discontinuidades da geometria da secção, um elemento não se deve estender através de discontinuidades ou mudanças de espessura. Deve então adicionar-se mais nós e usar elementos mais pequenos [11].

Como a geometria da secção transversal não é complexa, a definição da malha foi relativamente simples. Na Figura 5.12 pode observar-se a malha adotada para a secção transversal da viga A2. A secção transversal representada na Figura 5.12 desenvolve-se uniformemente na zona central da viga, na zona de transição (extremidades da viga) e nas chapas metálicas, como será ilustrado mais à frente.

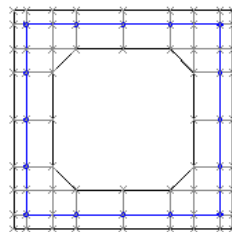


Figura 5.12 - Malha de elementos finitos da secção transversal da viga

Longitudinalmente, a análise foi realizada de acordo com a Figura 5.13 que representa em corte longitudinal a geometria da viga. As “cabeças” na extremidade da viga tinham como único propósito acomodar a viga ao dispositivo de ensaio. Na extremidade esquerda encontra-se a cabeça onde é induzido o momento torsor (através de uns pernos de aço) e na extremidade direita é restringida a rotação de torção (também através de uns pernos de aço). No modelo numérico estas duas cabeças foram substituídas por chapas

metálicas com uma elevada tensão de cedência e um elevado módulo de elasticidade. Na Figura 5.13 é ainda visível uma zona de transição junto das cabeças de extremidade. Esta zona de transição com reforço de armadura e aumento da espessura das paredes tinha como objetivo suavizar a degradação das tensões resultantes da aplicação do momento torsor e das reações de apoio. Com esta zona de transição pretendeu-se ainda controlar a possível ocorrência de uma rotura indesejável nas zonas extremas da viga [16].

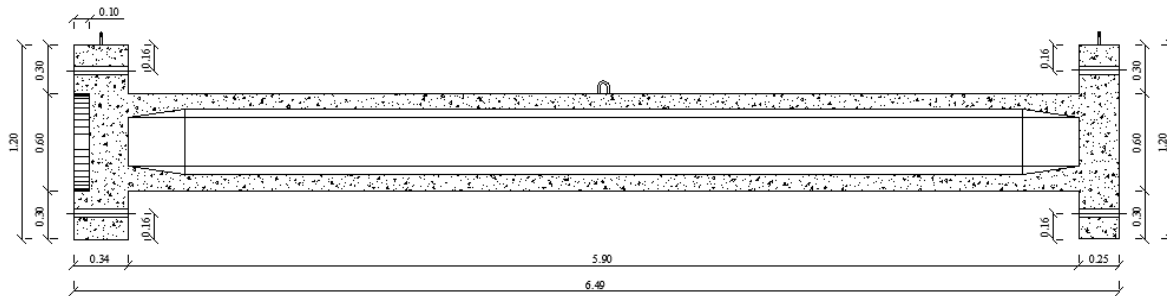


Figura 5.13 - Corte longitudinal da viga A2 [16]

A malha de elementos finitos que discretiza a viga é constituída por 76 nós na direção longitudinal com secção uniforme. A zona de transição em betão foi dividida em 5 nós. Tal como se pode observar na Figura 5.14 (a) as zonas da viga foram divididas em elementos com igual comprimento de forma a simplificar o modelo. As Figuras 5.14 (b), (c) e (d) ilustram a discretização das seções transversais que constituem a viga A2 ao longo do seu eixo longitudinal. Importa referir que devido ao tipo de solitação em estudo, não se adotou nenhuma simplificação do modelo tendo em conta a existência de simetria geométrica. Assim, a viga foi inteiramente modelada.

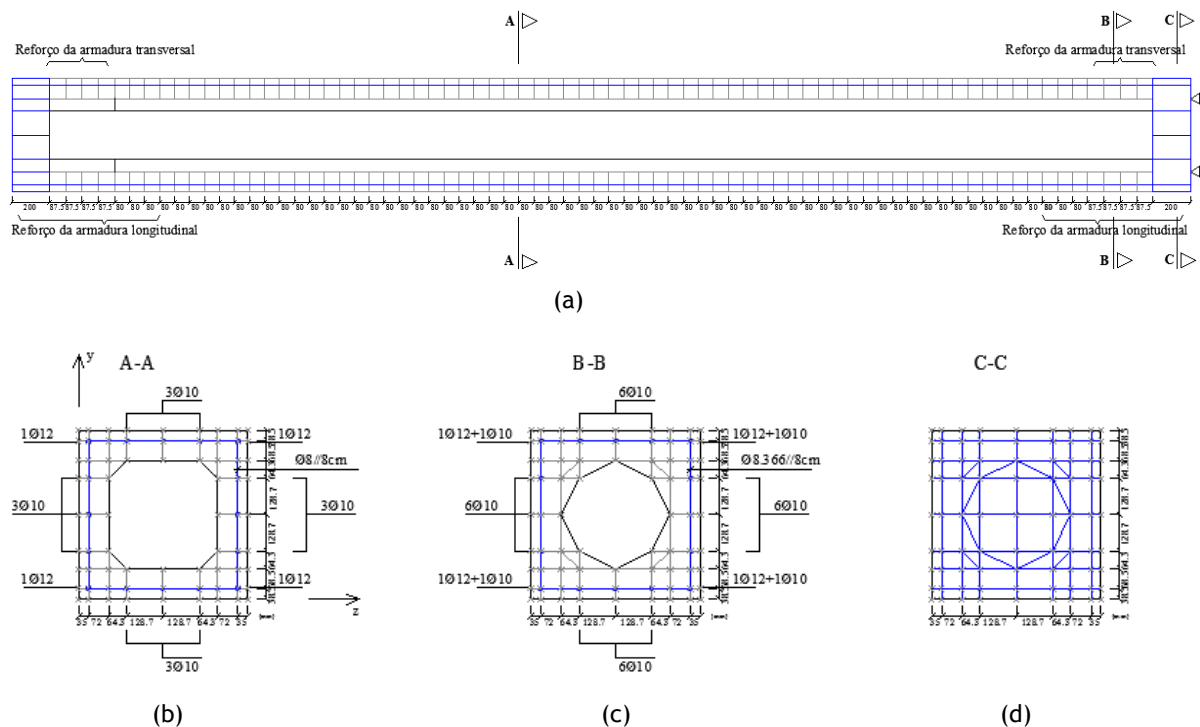


Figura 5.14 - (a) Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2, (b), (c) e (d) cortes transversais do modelo numérico da viga A2

Como o objetivo fundamental desta análise não linear é avaliar o comportamento global da viga A2 quando sujeita a diferentes níveis de restrição axial, falta apresentar o modelo numérico considerado para esta situação. O modelo numérico com restrição axial é exatamente igual ao modelo descrito anteriormente, sendo apenas acrescentado um elemento de barra de modo a conferir o confinamento axial da viga.

Para efeitos de modelação do confinamento axial da viga A2, inicialmente utilizaram-se molas na extremidade esquerda. Verificou-se que tal opção conduzia a problemas numéricos para elevados níveis de rigidez das molas, dando origem a comportamentos não realistas da viga. Por isso, tal opção inicial foi abandonada, optando-se posteriormente por simular o confinamento axial da viga através de um cabo exterior ligado às chapas metálicas, tal como ilustrado na Figura 5.15.

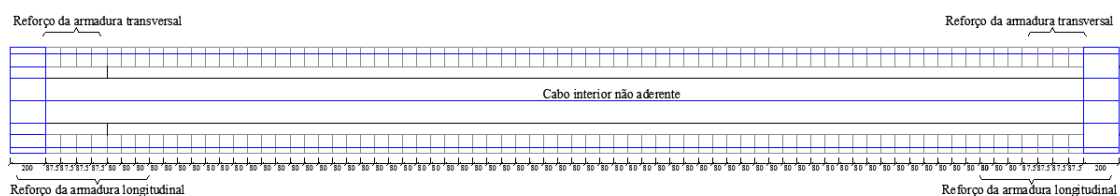


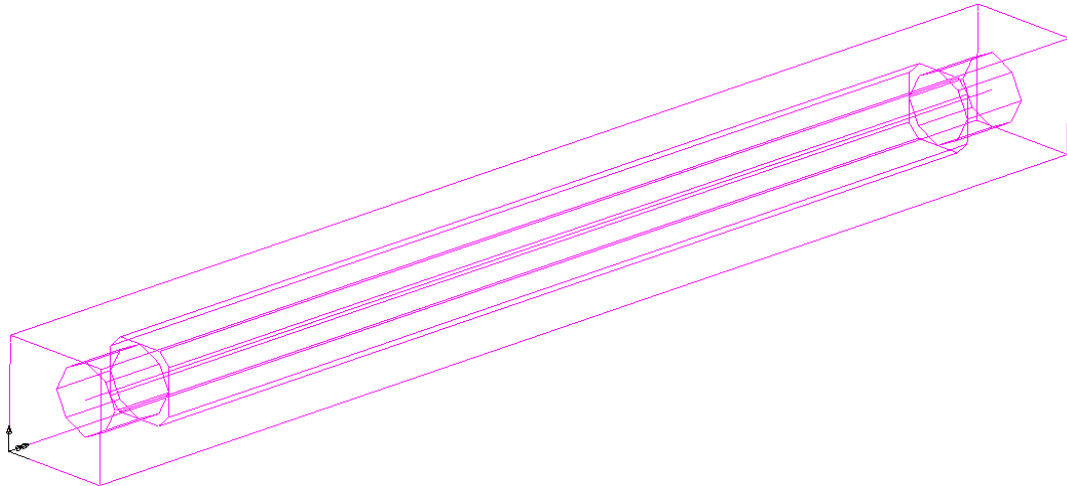
Figura 5.13 - Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2 com restrição axial

A restrição axial que o cabo exterior não aderente confere à viga depende da sua rigidez axial. Na Tabela 5.2 encontram-se listadas as diferentes áreas da secção transversal do cabo para simular os diferentes níveis de confinamento axial, k , pretendido (o módulo de elasticidade do material foi considerado constante).

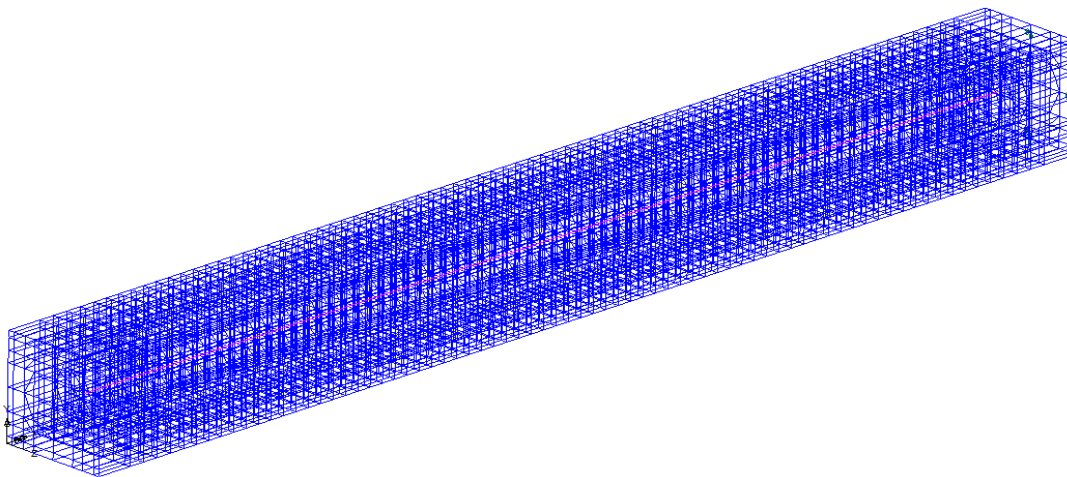
Tabela 5.2 - Propriedades do cabo exterior não aderente para os diferentes níveis de confinamento axial

l (m)	E (GPa)	A (m ²)	$k = \frac{EA}{l}$ (kN/m)
5,90	200	$2,95 \times 10^{-4}$	10000
		$5,90 \times 10^{-4}$	20000
		$8,85 \times 10^{-4}$	30000
		$1,18 \times 10^{-3}$	40000
		$1,475 \times 10^{-3}$	50000
		$1,77 \times 10^{-3}$	60000
		$2,065 \times 10^{-3}$	70000
		$2,36 \times 10^{-3}$	80000

O modelo global é constituído por um total de 5540 nós, 2978 elementos de barra e 4044 elementos de volume sólidos, possui um comprimento de 6,30 metros sendo 0,2 m de chapa metálica onde é aplicada o incremento de deslocamentos, 5,90 m de viga de betão armado e 0,20 m de chapa metálica onde é restringida a rotação de torção. Na Figura 5.16 é possível observar o modelo de elementos finitos global.



(a)



(b)

Figura 5.16 - (a) Modelo numérico global (sólido), (b) malha de elementos finitos do modelo numérico global, LUSAS

Os elementos de armadura encontram-se embebidos no modelo global, podendo-se observar a malha definida para as armaduras longitudinais e transversais da viga A2 na Figura 5.17, no qual a área da secção transversal das barras respeita o modelo original 5.14 (a). Os espaçamentos entre os varões, tanto longitudinais como transversais, estão de acordo com o modelo original.

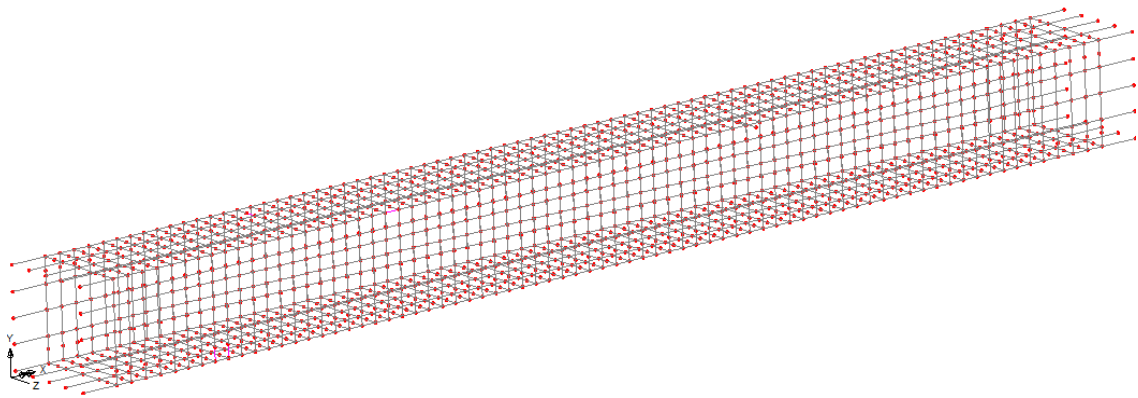


Figura 5.17 - Malha de elementos finitos das armaduras de reforço, LUSAS

Como já foi referido na Secção 5.2.2, uma vez que era facultado pelo LUSAS a possibilidade de introduzir uma nova lei para as armaduras à tração, decidiu-se modelar o comportamento das armaduras com maior rigor utilizando-se a lei constitutiva proposta por Belarbi e Hsu em 1994. Tal lei revelou-se adequada para simular o comportamento de vigas à torção [19][7]. A introdução das leis no LUSAS passa por inserir as coordenadas dos pontos que definem a curva tensão-extensão que se pretende introduzir. Foi então realizada uma simplificação da curva original mediante a sua divisão em diversos troços retos, em número suficiente para alcançar uma boa aproximação da lei original.

De acordo com a definição das curvas tensão-extensão demonstradas nas Figuras 5.5 e 5.6 para as armaduras longitudinal e transversal, respetivamente, foi possível implementar no LUSAS a lei de Belarbi e Hsu.

Após a consulta do manual do LUSAS, averiguou-se que, nas propriedades do material aço, bastava selecionar no campo “*Hardenig*” a opção “*total strain*” e assim se introduz uma nova lei de comportamento no programa [56]. As Figuras 5.18 e 5.19 ilustram a entrada dos dados para a definição das novas leis para as armaduras longitudinal e transversal, respetivamente.

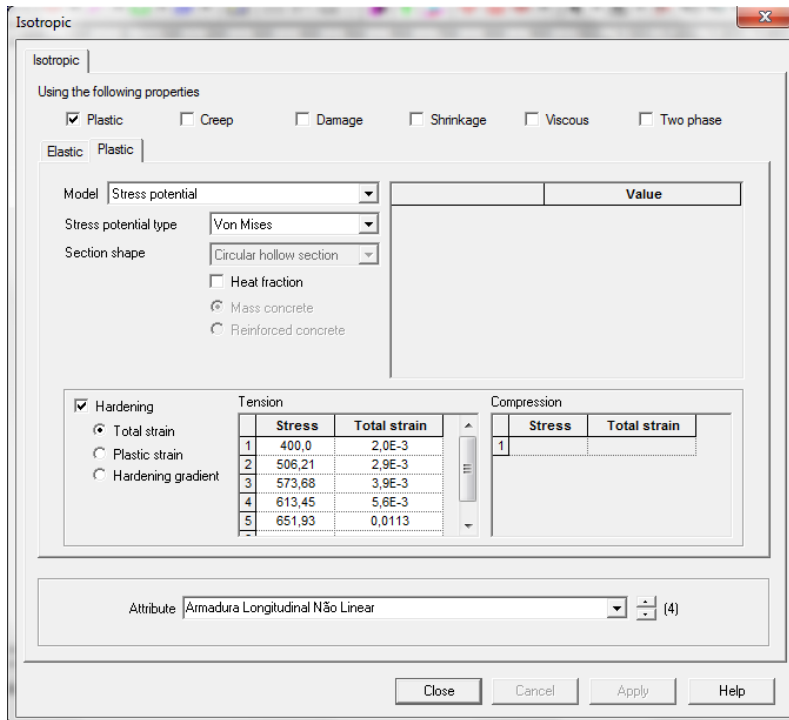


Figura 5.18 - Lei de Belarbi e Hsu para a armadura longitudinal à tração, LUSAS

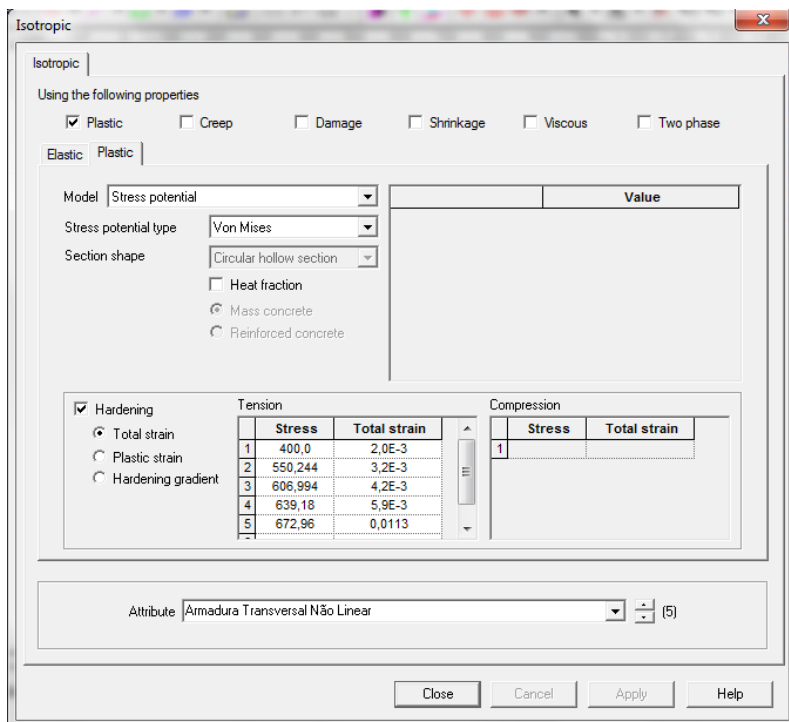


Figura 5.19 - Lei de Belarbi e Hsu para a armadura transversal à tração, LUSAS

5.3.3. Calibração do modelo numérico

A calibração do modelo numérico através da curva $T-\theta$ da viga A2 sem restrição axial é fundamental para encontrar o valor dos parâmetros do modelo numérico que resultem numa boa concordância entre os dados experimentais e os calculados através da análise numérica.

Como foi implementada a lei de Belarbi e Hsu para caracterizar o comportamento das armaduras à tração o problema do ajuste dos parâmetros incidiu essencialmente nos valores de entrada do modelo *Multi-Crack*. Portanto, numa fase inicial adotou-se os valores que eram conhecidos com algum rigor, como por exemplo, a resistência do betão à compressão, f_c , o módulo de elasticidade do betão, E_c , o coeficiente de Poisson, ν_c , a resistência do betão à tração, f_t e a extensão no pico da tensão de compressão, ε_c . A extensão no final da curva do betão à tração, ε_0 , foi inicialmente considerado igual ao valor utilizado no exemplo descrito na Secção 5.3.1. Para os restantes parâmetros de entrada foram inicialmente aceites os valores por defeito do LUSAS.

A torção no modelo foi inicialmente simulada através de um binário de forças aplicado em dois pontos na chapa metálica da extremidade esquerda, tal como se ilustra na Figura 5.20 (a) e a Figura 5.20 (b) ilustra a extremidade direita onde é restringida a rotação de torção (encastramento).

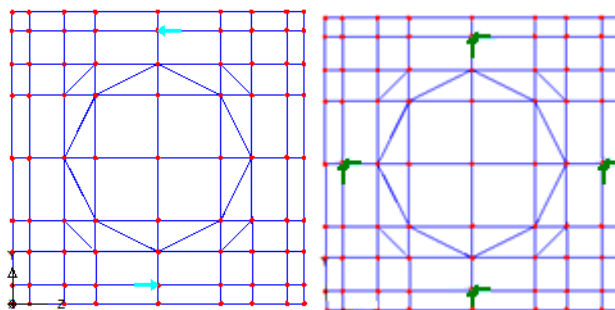


Figura 5.20 - (a) Binário de forças aplicado na chapa metálica da extremidade esquerda, (b) Encastramento à torção da viga na extremidade direita, LUSAS

Realizou-se a análise não linear através do LUSAS com os parâmetros indicados anteriormente e com o modelo descrito na secção anterior, tendo-se obtido o resultado inicial ilustrado na Figura 5.21. O critério de paragem foi associado ao valor introduzido para a extensão final do betão à tração.

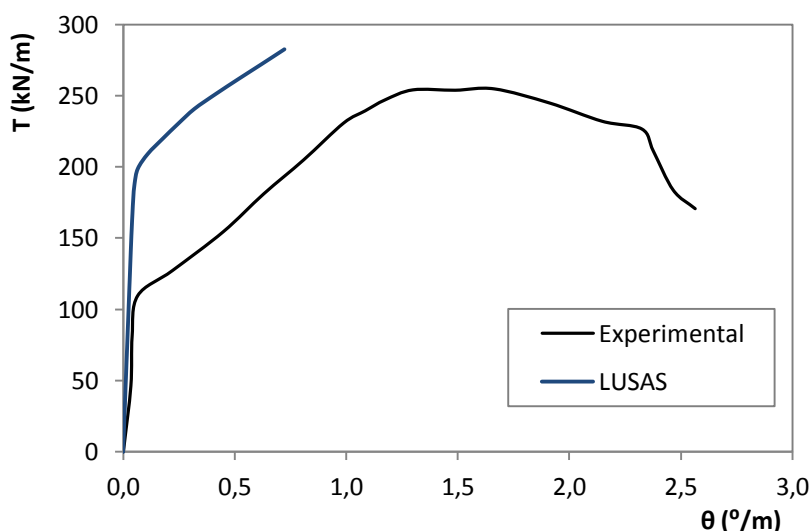


Figura 5.21 - Comparação entre a Curva $T-\theta$ experimental e teórica da Viga A2

Ao longo do historial de carga, o momento torsor foi calculado multiplicando a reação horizontal, Figura 5.20 (b), obtida no nó onde se encontra o apoio central superior, pelo braço ao apoio simétrico em relação ao centro da secção. Ao longo do historial de carga, a rotação foi calculada a partir da relação tangente entre o deslocamento de um nó localizado à superfície da chapa de extremidade esquerda e a distância do mesmo ao centro dessa chapa.

Por observação das curvas ilustradas na Figura 5.21 ressaltam dois aspetos negativos. O primeiro relaciona-se com o valor sobrestimado do momento torsor de fissuração e o segundo diz respeito ao facto de a curva ter terminado de forma precoce comparativamente à curva experimental.

Inicialmente, pensou-se que o problema seria do modelo utilizado na análise, designadamente da precisão dos elementos finitos utilizados. Desta forma, substituíram-se os elementos finitos por outros semelhantes mas com mais nós. Para o betão utilizou-se o elemento HX20 que é um elemento sólido contínuo 3D com vinte nós, cada nó possui três graus de libertação - translações segundo as direções x, y e z. Para as armaduras, de forma a manter a compatibilidade entre elementos finitos, houve necessidade de utilizar o elemento BRS3 que é um elemento isoparamétrico de barra curvo 3D com três nós, cada nó possui três graus de libertação - translações segundo as direções x, y e z. Estes dois elementos, ilustrados na Figura 5.22, são igualmente compatíveis entre si.

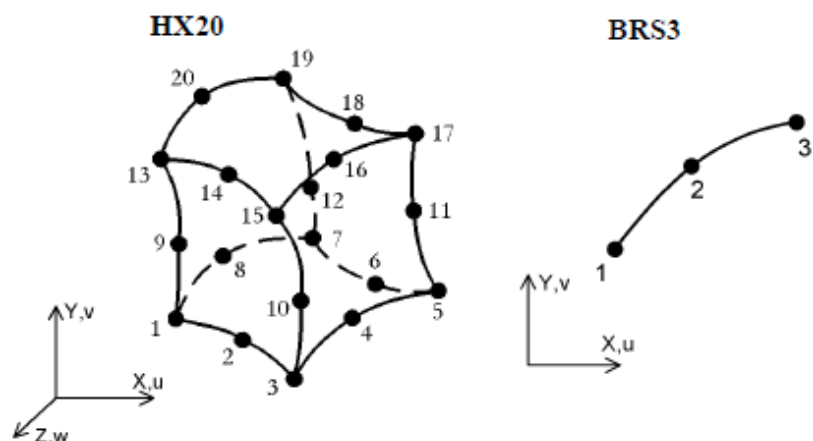


Figura 5.1422 - Elementos finitos HX20 e BRS3 [56]

Após a simulação do modelo com os elementos finitos HX20 e BRS3 no LUSAS, observou-se que não houve alteração apreciável dos resultados da análise numérica, tendo-se apenas observado um aumento significativo do tempo de cálculo da análise. Esta solução foi então descartada, optando-se novamente pelos elementos HX8 para o betão e BRS2 para as armaduras (elementos descritos na Secção 5.2).

Quanto à sobrestimação do momento torsor de fissuração, encontrou-se em diversos estudos publicados a descrição, por parte dos autores, de problemas semelhantes no âmbito da modelação do betão estrutural. De uma forma simplificada, o problema está relacionado com o facto da tensão de tração no betão sofrer, no modelo numérico, uma redução lenta e não abrupta como acontece na realidade. Esta questão está relacionada com o facto do modelo não linear de betão utilizado, calcular estados de tensão e deformação médios iguais para todas as secções da viga. Desta forma, o efeito de um estado efetivo de fissuração faz-se sentir mais tardiamente na curva comportamental teórica. Os autores do trabalho dos estudos consultados (por exemplo José Santos 2012 [69]) resolvem o referido problema reduzindo o valor atribuído à energia de fratura do betão à tração para cerca metade. Seguindo-se a mesma linha de raciocínio, e uma vez que a energia de fratura do betão à tração não é um parâmetro de entrada no LUSAS para o *Multi-Crack* aplicado a elementos de betões armados, reduziu-se a resistência do betão à tração para 1,8 MPa.

Deste modo, foi possível corrigir-se o valor do momento torsor de fissuração.

Ainda assim persistiu o problema da curva teórica terminar antecipadamente face à curva experimental. Após algumas experiências, observou-se que a forma como o momento torsor era simulado, associado ao tipo de análise incremental, não era adequada. Uma análise incremental com cargas aplicadas, no âmbito de uma análise não linear, não permite obter a parte última da curva $T-\theta$ visto que a partir de um determinado nível do momento torsor a rigidez torsional começa a decrescer substancialmente (a curva fica não linear), observando-se que o aumento da deformação é bastante superior ao aumento de carga, até ser atingida a capacidade de carga máxima. Assim, a partir desse nível de carregamento, interessa incrementar a deformação e não a carga. Por outras palavras, para obter a parte da curva

$T-\theta$ até ao momento torsor máximo deve utilizar-se um incremento de deslocamentos. Assim, em vez de impor forças nos nós (Figura 5.20) como condição de carregamento, passou-se a impor deslocamentos impostos segundo as mesmas direções das forças iniciais nos mesmos nós.

Observou-se também que foi necessário alterar o parâmetro de entrada ε_0 que define numericamente a forma final da curva $T-\theta$ numérica. O aumento deste parâmetro, até determinado nível, permite aumentar o intervalo de deformação no qual se desenvolve a curva $T-\theta$. Foi adotado um valor de ε_0 igual a 0,07 e deste modo conseguiu-se calibrar o modelo numérico da Viga A2 à torção de acordo com os resultados experimentais, incluindo até ao momento torsor máximo e a parte inicial da curva pós-pico para a viga sem confinamento axial (Figura 5.23).

Julga-se que o sucesso do modelo, isto é, modelar a curva $T-\theta$ teórica com maior precisão, de forma a incluir o patamar horizontal e o ramo descendente no traçado da curva $T-\theta$, passaria pela implementação da lei constitutiva de Belarbi e Hsu (1991) e Hsu e Zhang (1997,1998) para o betão à compressão e respetivos fatores de redução no LUSAS. No entanto, a versão utilizada do LUSAS não permite implementar leis diferentes para simular o comportamento não-linear do betão.

O facto de o manual do LUSAS não ser muito claro quanto à definição dos critérios de convergência e de paragem e o escasso tempo disponível impossibilitaram o aperfeiçoamento dos mesmos critérios. Foram realizadas muitas tentativas de alteração aos critérios de convergência e de paragem com o intuito de obter um traçado da curva $T-\theta$ mais próximo da curva experimental. No entanto, não se obteve alterações significativas e optou-se por utilizar os critérios mais simples disponíveis no LUSAS.

É sabido que o processo de convergência tendo por base o método de Newton-Raphson (modificado ou não) deixa de ser adequado quando a resposta deixa de ser linear (neste trabalho, tal ocorre quando são atingidos elevados momentos torsores). Para esta situação, são geralmente adotados métodos numéricos suplementares (por exemplo o Arc-length) que auxiliam a convergência. No entanto, tais métodos dependem de vários parâmetros a serem introduzidos pelo utilizador, parâmetros estes que vão sendo calibrados por tentativas em função dos resultados obtidos.

Problemas não lineares requerem critérios de convergência apertados e múltiplas calibrações de parâmetros a fim de manter a solução sobre o caminho correto de equilíbrio.

Para o critério de paragem adotou-se um valor máximo para o incremento do deslocamento (sabendo-se previamente que a rotura convencional ocorreria antes dos nós de aplicação do deslocamento imposto atingirem esse valor). Contudo o desenvolvimento da curva não atingiu esse valor e parou no ponto limite.

Após várias tentativas não foi possível modelar extensivamente a parte pós-pico da curva $T-\theta$. A Figura 5.23 ilustra a curva $T-\theta$ numérica que melhor traduziu o

comportamento da Viga A2 à torção. Deve referir-se que o cálculo integral da curva $T-\theta$ no LUSAS levava diversas horas.

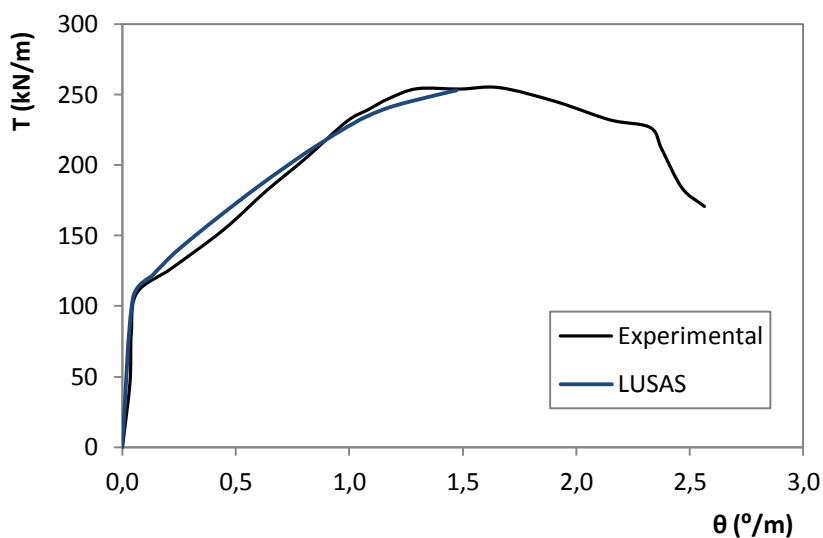


Figura 5.23 - Curva $T-\theta$ numérica e experimental da viga A2

Foi de grande importância calibrar a curva numérica com a experimental para que quando se simulasse a viga A2 mas confinada axialmente através de um cabo exterior não aderente fosse possível extrapolar comparações passíveis de validar o modelo apresentado ao longo do presente trabalho e comparar com as tendências que o modelo teórico revelou.

5.3.4. Resultados obtidos

Nesta secção procede-se inicialmente a uma análise comparativa entre as curvas numéricas $T-\theta$ referentes à viga A2 obtidas através da análise não linear do LUSAS e as curvas calculadas para diferentes níveis de confinamento axial. Para tal, foi utilizado o mesmo intervalo de valores da análise paramétrica, descrito na Secção 4.3. As curvas $T-\theta$ encontram-se ilustradas na Figura 5.24. As curvas $T-\theta$ podem estar incompletas pois, apesar das inúmeras tentativas, não foi possível modelar a curva até ao pico nem a parte pós-pico para a maioria das vigas simuladas.

Posteriormente fez-se uma análise comparativa dos resultados numéricos relativos ao comportamento do betão à compressão, armaduras à tração e dos resultados relativos ao comportamento global das vigas que apresentaram em situação de confinamento nulo e com diversos níveis de confinamento axial. Nesta secção a apresentação dos resultados é feita apenas para algumas situações de confinamento e a escolha do nível de confinamento foi aleatório. Outro aspeto importante é que os valores em análise são respetivos apenas à zona central da viga.

A primeira observação a retirar da análise das curvas $T-\theta$ da Figura 5.24, à semelhança do que acontece com vigas pré-esforçadas com armaduras não aderentes [17], não existe influência visível do efeito do confinamento no estado não fissurado. Ou seja, o estado de compressão induzido pelo confinamento axial só é relevante a partir do momento que a viga fatura pois é neste ponto que a viga submetida à torção tende a alongar na direção longitudinal. Quanto maior for o grau de confinamento, maior o valor dessa força de compressão centrada. É assim compreensível que com o aumento do valor para o k , a influência dessa mesma força de compressão seja maior para o comportamento da Viga A2 no estado fissurado.

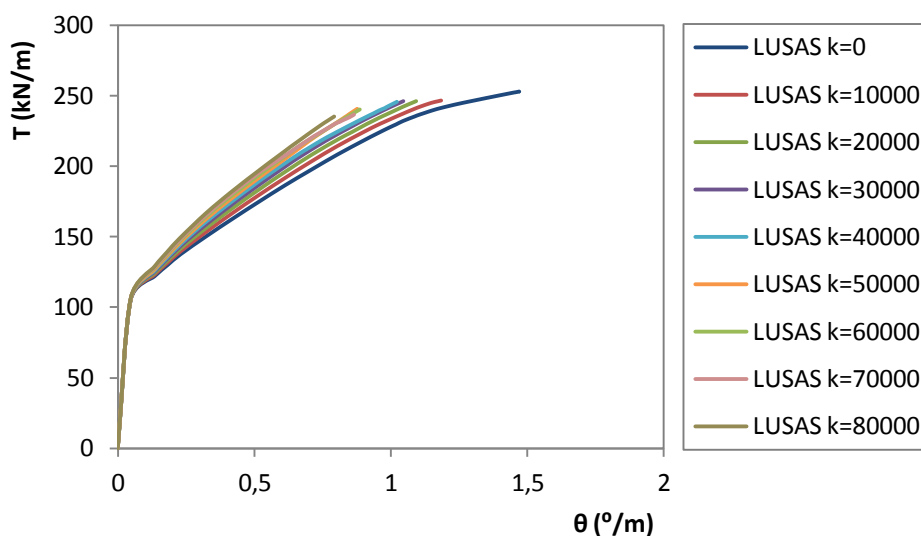


Figura 5.24 - Curvas numéricas $T-\theta$ para a Viga A2 com diversos níveis de confinamento

Visto que a resistência máxima da Viga A2 para diversos níveis de confinamento não foi obtida, não é possível realizar uma análise comparativa das resistências obtidas numericamente e com o VATM modificado. Ainda assim, é possível observar-se na Figura 5.24 tendências similares às apresentadas na Secção 4.3 (Figura 4.3). Parece possível referir que à medida que aumenta o nível de confinamento, aparenta existir uma tendência de diminuição da capacidade de rotação. Esta tendência corrobora o observado a partir da análise paramétrica realizada no Capítulo 4. A redução da rotação máxima com o incremento do confinamento está diretamente relacionada com a redução da ductilidade da viga devido à influência da força de compressão centrada.

Recorde-se que na Secção 4.3 foi referido que a rigidez de torção da viga no estado fissurado aumenta com o incremento do nível de confinamento, em virtude da influência da força de compressão centrada. Tal observação é perfeitamente evidente na Figura 5.24. A partir da fissuração do betão observa-se um aumento da rigidez de torção da viga, dado o aumento da inclinação ramo do estado não fissurado da curva $T-\theta$.

Na Figura 5.25 (a) e (b) podem observar-se a cor cinzenta a deformada para o último incremento de carga da Viga A2 (sem confinamento axial) segundo o eixo longitudinal e para a

secção transversal, respetivamente. A premissa básica do modelo proposto e desenvolvido ao longo do presente trabalho, que foi alvo de descrição no Capítulo 3, é que uma viga de betão armado quando sujeita à torção tende a alongar o seu comprimento segundo o eixo longitudinal, principalmente a partir do estado fissurado. Este facto é facilmente confirmado e visível na Figura 5.25 (a), podendo ainda observar-se com maior pormenor na Figura 5.26 (a). A Figura 5.25 (b) onde se ilustra a rotação da secção transversal segundo o eixo longitudinal, auxilia a verificação de que o modelo numérico da Viga A2 se encontra a “trabalhar bem” em situação de torção.

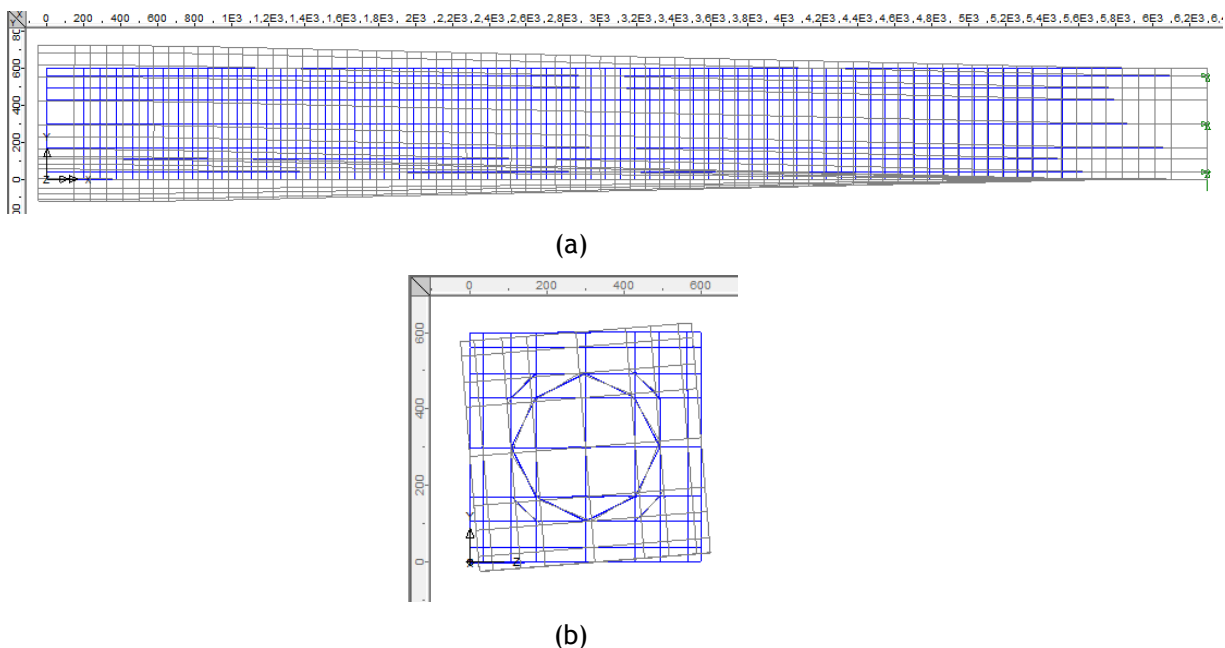


Figura 5.25 - Deformada da Viga A2 para $k=0$ (a) segundo o eixo longitudinal e (b) secção transversal, LUSAS

Na Figura 5.26 (a) e (b) ilustra-se o alongamento da malha deformada da Viga A2 segundo o eixo longitudinal para uma situação sem confinamento axial e uma situação de confinamento igual a 60000 kN/m, respetivamente. Para a análise da Figura 5.26 (a) e (b) importa referir que ambas as figuras se encontram à mesma escala, tal como se pode observar na escala auxiliar de visualização do LUSAS. Na situação da viga livre de restrições axiais quando sujeita a um momento torsor esta alonga livremente, segundo o eixo longitudinal. Tal não acontece quando existem restrições axiais, pois neste caso é mobilizada a rigidez axial do cabo exterior (linha de cor rosa da Figura 5.26 (b)) induzindo o referido estado de confinamento axial e impedindo que a viga alongue tanto quanto o observado na situação sem restrições axiais.

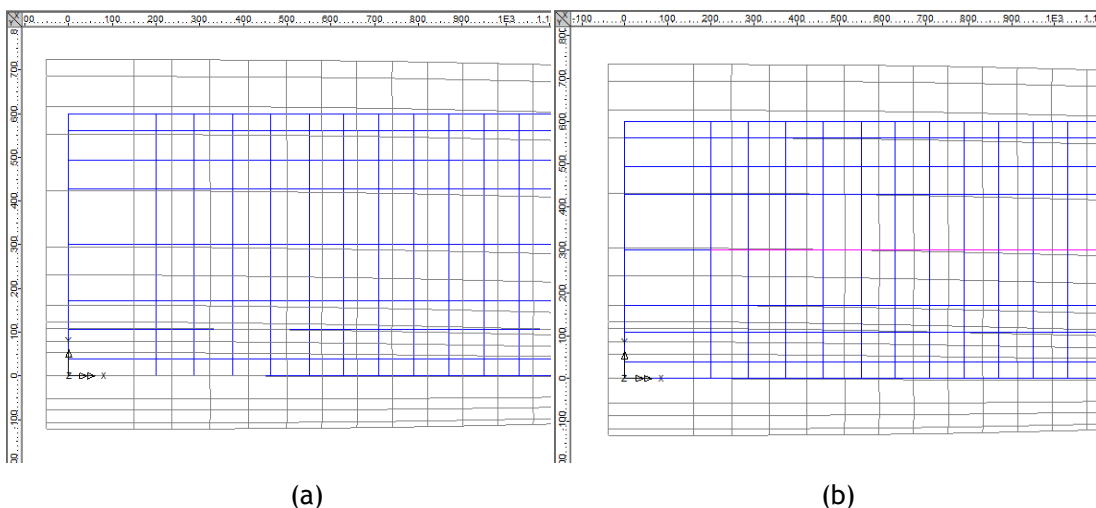


Figura 5.26 - Deformada da Viga A2 segundo o eixo longitudinal para (a) $k=0$ kN/m e (b) $k=60000$ kN/m, LUSAS

A existência da referida força de compressão centrada na viga é restituída pela rigidez axial do cabo exterior quando a mesma tende a alongar do valor Δl (valor que, conforme referido no Capítulo 3, quantifica o alongamento total da viga livre). Essa força será tanto maior quanto maior a rigidez axial do cabo, sendo que também deve ser diretamente proporcional ao alongamento livre da viga (alongamento que depende das características da viga e do nível de carregamento). Em virtude do exposto, fica assim comprovado que a premissa inicial adotada para o modelo é na realidade relevante na interpretação do problema comportamental de uma viga de betão armado sujeita à torção com e sem restrições axiais.

A título ilustrativo, a Figura 5.27 apresenta o padrão de fissuração da viga A2 com um confinamento axial igual a 40000 kN/m. Nesta Figura está representada a tendência de desenvolvimento helicoidal das fissuras na direcção longitudinal. O modelo numérico simula o comportamento da viga à torção em termos médios, daí não se observar ao longo da viga, na direcção longitudinal, zonas com fissuração mais pronunciada comparativamente a outras. Isto é, a rotura não ocorre num local específico.

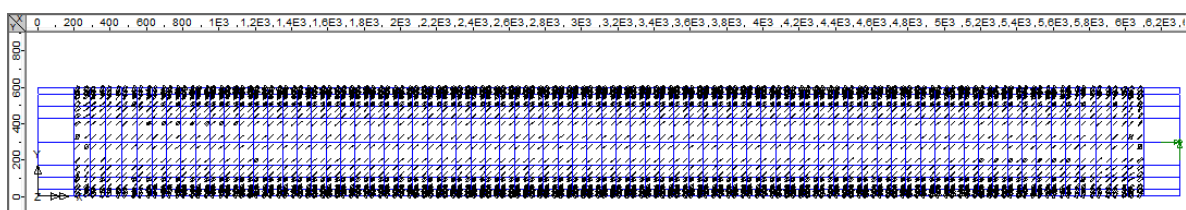


Figura 5.27 - Fissuração da Viga A2 com $k=40000$ kN/m na direcção longitudinal, LUSAS

Como já foi referido na Secção 1.2.3, o padrão de fissuração helicoidal que a viga de betão armado manifesta está diretamente ligado com o modelo de treliça espacial, onde o betão funciona à compressão e as armaduras à tração. Este modelo prevê o desenvolvimento

de campos de tensões principais de compressão e tração que indicam os caminhos principais da carga a partir do ponto de carregamento até ao outro extremo da viga em que este carregamento é equilibrado pelas reações de apoio.

Na Figura 5.28 encontram-se ilustrados os caminhos de tensões principais no betão da Viga A2 com um confinamento axial igual a 40000 kN/m. Tal como era sugerido na Figura 5.27, na Figura 5.28 as compressões (cor azul) desenvolvem-se segundo uma inclinação aproximadamente 45° com o eixo longitudinal e as tensões de tração (cor vermelha), com uma inclinação aproximadamente de 135°. Estas últimas são as responsáveis pela orientação principal da fissuração helicoidal. Deste modo, as escoras estendem-se entre fissuras em torno e ao longo de toda a viga.

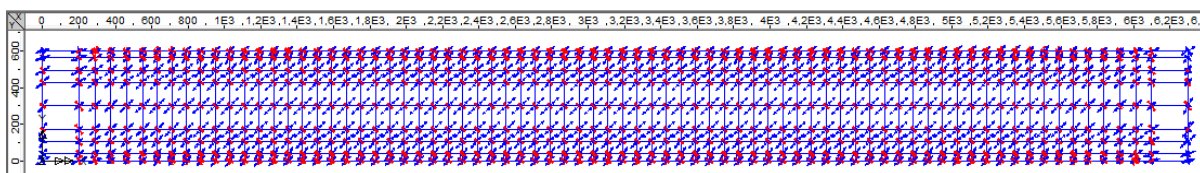


Figura 5.28 - Caminho de tensões principais (a) compressão no betão (b) tração nas armaduras, LUSAS

Outro aspeto importante de comparação dos resultados numéricos é relativo à tensão principal de compressão no betão no caso de a viga A2 se encontrar com ou sem restrições axiais. Nas Figuras 5.29 e 5.30 ilustra-se as tensões principais de compressão na Viga A2, para o último incremento de carga, sem confinamento axial e com um confinamento axial igual a 50000 kN/m, respetivamente. As tensões máximas concentram-se essencialmente na zona central das paredes. Esta observação está de acordo com a teoria de St. Venant que prevê que a distribuição das tensões circulatorias numa barra prismática atinge o máximo no meio da parede maior [7]. A observação anterior é válida para as duas situações de carregamento.

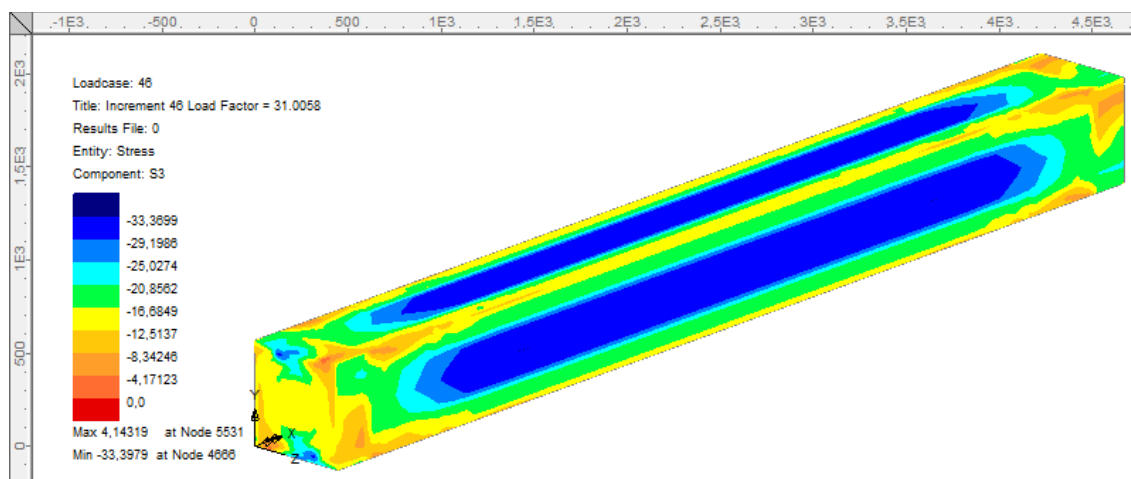


Figura 5.29 - Tensão principal de compressão na Viga A2 com $k=0$, LUSAS

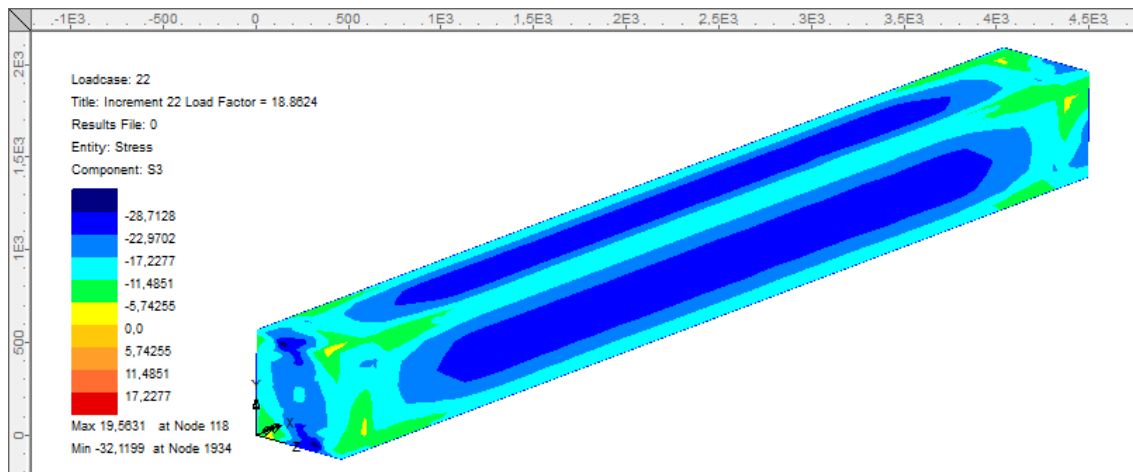


Figura 5.30 - Tensão principal de compressão na Viga A2 com $k=50000$, LUSAS

Após a observação da distribuição das tensões principais de compressão ao longo da viga A2 para ambos os casos de carregamento, achou-se relevante comparar a evolução da tensão principal de compressão para um mesmo nó da malha de elementos finitos no centro da parede vertical ao longo do carregamento. O resultado da comparação é visível na Figura 5.31. Com o aumento da rotação da secção transversal observa-se um maior acréscimo de tensão de compressão para a situação de confinamento axial. A Viga A2 com confinamento axial igual a 50000 kN/m esgota mais rapidamente a sua capacidade de carga, tal como se previu na Secção 4.5, relativamente à situação da Viga A2 sem confinamento axial.

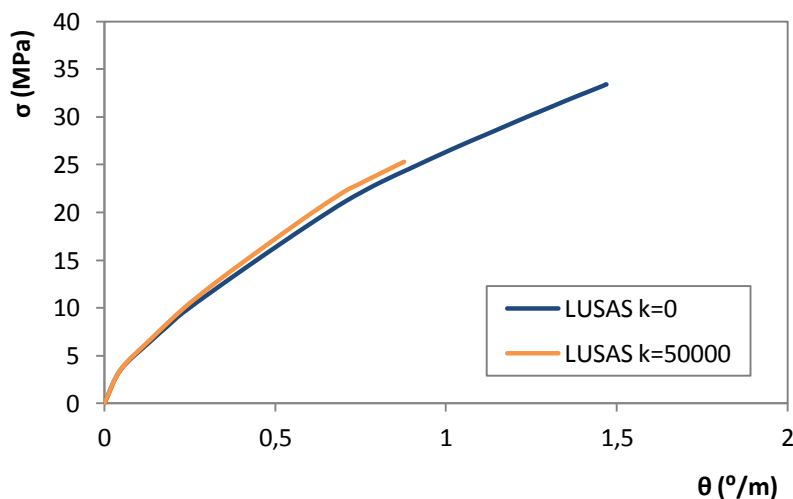


Figura 5.31 - Tensão principal de compressão para um nó no centro da parede vertical da Viga A2

Com a aplicação do confinamento axial na Viga A2 a existência da força de compressão conduz a que viga esgote mais rapidamente (relativamente à rotação da viga) a capacidade resistente do betão comprimido na escora. Considerando-se um valor fixo de rotação para as duas situações, por observação da Figura 5.31, observa-se que o

confinamento axial aumenta a rigidez da viga, à semelhança do exposto no início desta secção.

Para finalizar a análise do efeito do confinamento axial numa viga de betão armado, falta analisar a participação das armaduras longitudinal e transversal numa situação de viga à torção com e sem confinamento axial. Nas Figuras 5.32 e 5.33 encontra-se ilustrada a distribuição das forças de tração na malha de elementos finitos das armaduras para a Viga A2 sem restrição axial e para a Viga A2 com um confinamento axial igual a 20000 kN/m, respetivamente. Verifica-se que todas as armaduras trabalham à tração e participam no equilíbrio da viga.

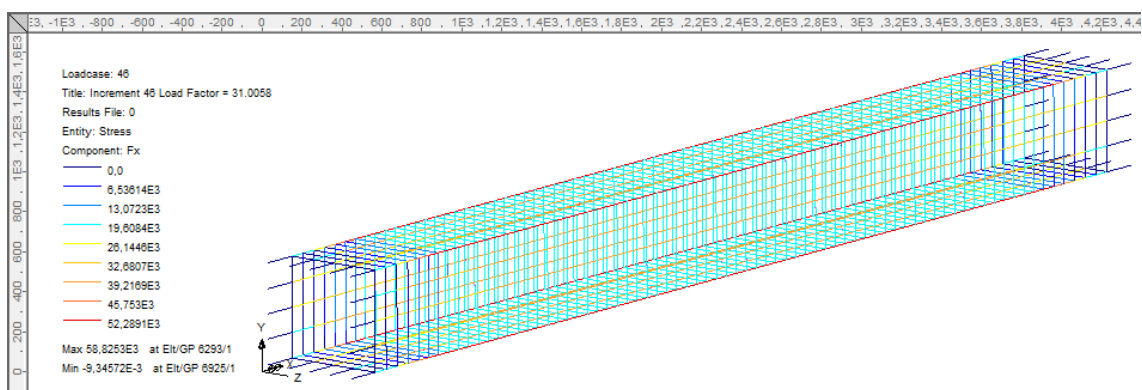


Figura 5.32 - Força nas armaduras para a Viga A2 com $k=0$ kN/m, LUSAS

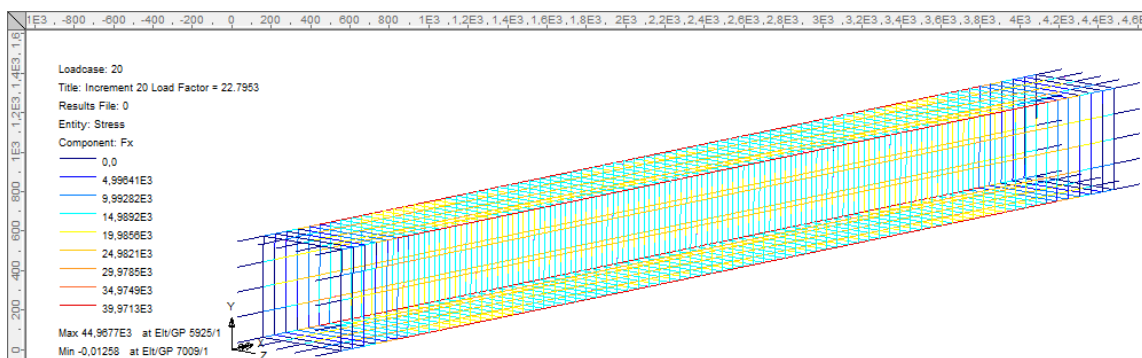


Figura 5.33 - Força nas armaduras para a Viga A2 com $k=20000$ kN/m, LUSAS

Relembrando a situação de violação do princípio da igualdade do volume para as armaduras devido ao efeito do confinamento axial, referida no Capítulo 4, pensou-se que seria importante comparar a participação das armaduras face a introdução do confinamento axial na Viga A2. Para tal, seleccionou-se um nó da armadura longitudinal de canto na zona central da Viga A2 para comparar as tensões na armadura longitudinal em ambas as situações e um nó da armadura transversal a meio da parede também na zona central da Viga A2 para comparar as tensões na armadura transversal. Na Figura 5.34 encontram-se representadas as tensões na armadura longitudinal para o caso da Viga A2 sem confinamento axial e para o caso da viga com confinamento axial igual a 20000 kN/m. Na Figura 5.35 encontram-se

representadas as tensões na armadura transversal para o caso da Viga A2 sem confinamento axial e para o caso da viga com confinamento axial igual a 20000 kN/m.

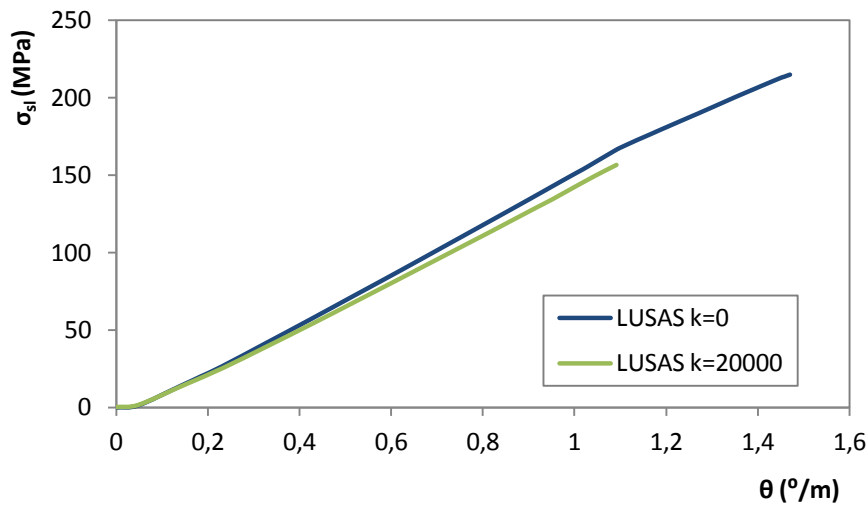


Figura 5.34 - Tensão de tração na armadura longitudinal num nó ao centro da Viga A2

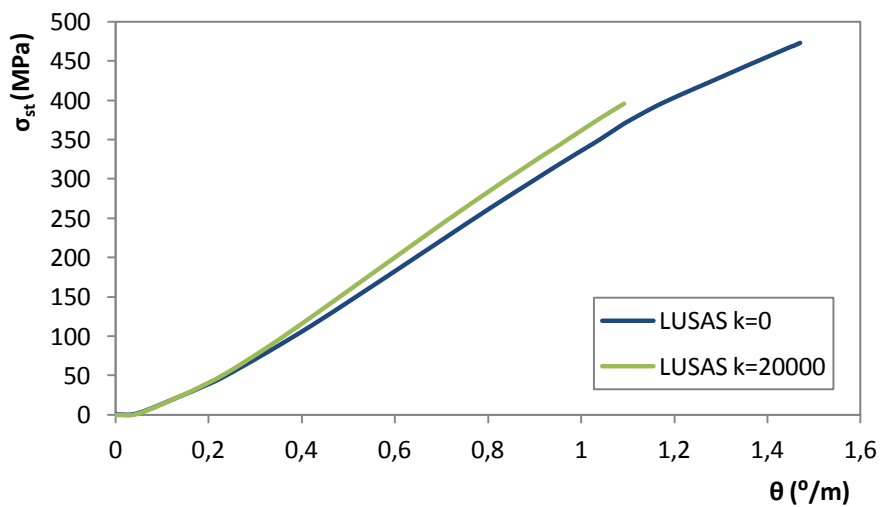


Figura 5.35 - Tensão de tração na armadura transversal num nó ao centro da Viga A2

Por observação das Figuras 5.34 e 5.35 conclui-se que, com o efeito do confinamento axial, a participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno diminui e a participação da armadura transversal por sua vez aumenta, de modo a compensar a menor participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno. Mais uma vez se verifica a influência do estado de compressão axial no equilíbrio interno da viga.

Esta observação pode também ser confirmada se se fixar um determinado valor da rotação, verificando-se que a tensão na armadura transversal, σ_{st} , aumenta enquanto a

tensão na armadura longitudinal, σ_{st} , diminui. Tal tendência foi também observada na análise teórica do Capítulo 4.

5.4. Notas Finais

No presente capítulo foi apresentada a modelação com elementos finitos da viga de referência (Viga A2) e realizada uma análise não linear da mesma viga sujeita à torção com diferentes níveis de confinamento axial. A realização da análise não linear da viga A2 sujeita à torção teve como objetivo auxiliar a validação do VATM, uma vez que a tentativa de validação do modelo teórico através da comparação com os escassos resultados experimentais disponíveis não foi conclusiva (Capítulo 3). A análise não linear com elementos finitos permitiu ainda confirmar algumas das previsões teóricas obtidas a partir do VATM modificado e observadas no Capítulo 4.

Neste capítulo apresentou-se inicialmente a descrição dos elementos finitos utilizados para modelar os elementos constituintes da Viga A2 bem como do modelo utilizado que o LUSAS incorpora para a caracterização do comportamento do betão armado à compressão - *Multi-Crack* - e da lei constitutiva de Belarbi e Hsu, 1994, que foi apresentada na Secção 2.3.5 - para a caracterização das armaduras à tração e que foi introduzida no LUSAS.

Posteriormente, descreveu-se o modelo utilizado na análise numérica. De seguida descreveu-se o trabalho conducente à calibração da curva $T-\theta$ teórica da viga A2 sem restrição axial com a respetiva curva experimental.

No final do capítulo apresentou-se uma análise comparativa entre as curvas numéricas $T-\theta$ referentes à viga A2 obtidas através da análise não linear do LUSAS e as curvas calculadas para diferentes níveis de confinamento axial. Analisou-se ainda os resultados numéricos obtidos relativos ao efeito do confinamento axial no comportamento do betão à compressão, das armaduras à tração e uma análise do comportamento global das vigas que apresentaram em situação de confinamento nulo e com diversos níveis de confinamento axial.

Ainda que os problemas numéricos encontrados e descritos não tenham permitido obter o traçado integral das curvas $T-\theta$ da viga de referência A2 ara vários níveis de confinamento axial, foi possível validar em parte o modelo teórico proposto e descrito no Capítulo 3 para a previsão do comportamento último de vigas à torção com confinamento axial.

Capítulo 6 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

6.1. Introdução

Resumem-se, neste capítulo, as conclusões principais do presente trabalho e apresentam-se também propostas de desenvolvimento futuras.

No que se refere ao procedimento de cálculo do VATM modificado proposto, bem como ao aplicativo computacional associado, pode considerar-se que este constitui um modelo teórico totalmente satisfatório que permite simular de forma lógica e congruente o problema estudado que é o de vigas à torção com confinamento axial.

A modelação em elementos finitos realizada para a viga de referência estudada, tendo por base o LUSAS, mostrou-se adequada para os propósitos deste trabalho uma vez que permitiu obter tendências gerais que confirmaram algumas das previsões do VATM modificado. As previsões obtidas com base na análise com elementos finitos permitiram também aferir sobre a consistência das previsões obtidas a partir do VATM modificado.

Por tudo isto, pode afirmar-se que os objetivos propostos no início deste trabalho foram alcançados com sucesso.

6.2. Conclusões

Segue-se, de forma sumária, as principais conclusões obtidas ao longo do presente trabalho.

A proposta de extensão da formulação do VATM original por forma a incorporar o efeito do confinamento axial, de acordo com a metodologia adotada neste trabalho, mostrou-se adequada. As previsões obtidas a partir do modelo proposto são congruentes e as tendências obtidas para as curvas comportamentais analisados possuem um carácter lógico.

O modelo é limitado à situação em que as armaduras longitudinais se encontrem sempre em tração. O modelo desenvolvido neste trabalho não está preparado numericamente para a situação em que as armaduras longitudinais tomem extensões de compressão. Deste modo, o modelo é válido para a maioria das situações de confinamento parcial, mas não para a situação de confinamento total.

A partir da análise comparativa das previsões do VATM modificado com os escassos resultados experimentais disponíveis na literatura consultada e associados a vigas com pré-esforço exterior sujeitas à torção (Vigas D-1 e D-2) observou-se que:

- O efeito do confinamento axial induzido pela armadura de pré-esforço longitudinal exterior no comportamento das vigas é mais pronunciado no Estado II (após a fissuração da viga). O efeito do confinamento axial manifesta-se por um incremento da rigidez à torção secante no estado fissurado e num ligeiro aumento

do momento torsor resistente, dado a reduzida rigidez axial introduzida pela armadura de pré-esforço nas vigas. As tendências gerais observadas experimentalmente estão de acordo com as revisões do VATM modificado;

- Em termos de comparação do comportamento último das vigas D-1 e D-2, designadamente dos valores dos momentos torsos resistentes, com as previsões teóricas do VATM modificado não foi possível estabelecer conclusões sólidas. Tal poderá motivar-se pelo baixo nível de confinamento introduzido pelas armaduras de pré-esforço nas referidas vigas. Tal pode não ter permitido “visualizar” uma tendência clara para a evolução dos momentos torsos resistentes

A partir das simulações obtidas com o VATM modificado para a viga de referência A2 com diversos níveis de confinamento observou-se que:

- Com o aumento do confinamento axial a armadura longitudinal entra mais tarde em cedência ou nem chega a entrar em cedência a partir de um certo nível de confinamento axial. Assim, a armadura transversal é mais solicitada devido às condições de equilíbrio interno. Estas tendências devem-se essencialmente ao aumento do estado de compressão longitudinal da viga com o aumento do nível de confinamento;
- Com o aumento do confinamento axial o momento torsor resistente da viga aumenta devido ao efeito favorável do estado de compressão induzido pela restrição axial que tende a contrariar o estado de tração induzido pelo momento torsor. Contudo, o incremento do momento torsor resistente, com o aumento do nível de confinamento axial, tende a estabilizar uma vez que a capacidade resistente do betão por compressão tende a esgotar mais rapidamente;
- Com o aumento do confinamento axial a rotação associada ao momento torsor máximo bem como a rotura última (associada à rotura convencional) diminui. Observa-se que qualquer eventual ductilidade em torção existente numa viga sem confinamento axial tende rapidamente a desaparecer com o aumento do nível do mesmo. A viga terá uma rotura tendencialmente mais frágil. A ductilidade está associada à plastificação das armaduras de torção antes do betão esgotar a sua capacidade resistente nas escoras. Esta observação explica-se pelo facto do confinamento axial contrariar o estado de tração nas armaduras longitudinais induzido pelo momento torsor

A partir da análise das várias curvas teóricas de comportamento para a viga A2 (viga de referência) obtidas para os diversos níveis de confinamento simulados, observou-se que:

- Com o aumento do confinamento axial existe uma necessidade de aumento da espessura efetiva da escora. Este facto era previsível uma vez que o estado de compressão axial na viga aumenta o nível de tensão de compressão nas escoras de betão. Para níveis de confinamento superiores a 60000 kN/m a viga de referência analisada (viga com secção vazada) sofreu inclusive uma rotura algo prematura

pois a espessura da escora de betão necessária para absorver o momento torsor ultrapassou a espessura real da parede;

- Tal como já era previsto pelo Código Americano ACI 318R-05 para vigas de betão pré-esforçado, o ângulo das escoras de betão diminui com o aumento do nível de confinamento. A diminuição do ângulo das escoras deve-se à influência da força de compressão centrada que aumenta com o nível de confinamento;
- À medida que o nível de confinamento vai aumentando, a viga esgota mais rapidamente a capacidade resistente do betão comprimido na escora, verificando-se simultaneamente um aumento da rigidez à torção da viga no estado fissurado;
- À medida que o nível de confinamento axial aumenta, enquanto a participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno diminui devido ao estado de compressão axial, a participação da armadura transversal aumenta. Tal decorre de uma redistribuição de tensões que ocorre internamente no modelo de treliça devido ao efeito do estado de compressão longitudinal. Por outras palavras, a escora de betão conjuntamente com a armadura transversal têm que compensar a menor efetividade da armadura longitudinal de modo a garantir o equilíbrio do modelo de treliça.

A partir da análise dos resultados numéricos obtidos decorrentes da análise não linear com elementos finitos realizada com o LUSAS, observou-se que:

- Comprova-se através da curva $T-\theta$ que não existe influência visível do efeito do confinamento axial no estado não fissurado e no valor do momento torsor de fissuração. Isto é, o efeito da força de compressão é mais pronunciada a partir do momento que a viga fissa pois é neste ponto que a viga submetida à torção tende a alongar na direção longitudinal;
- Confirma-se a existência de uma tendência para a diminuição da capacidade de rotação com o aumento do confinamento axial. Associada a esta observação está a redução da ductilidade da viga devido à influência da força de compressão centrada;
- Confirma-se que a rigidez de torção da viga no estado fissurado aumenta com o incremento do nível de confinamento, em virtude da influência da força de compressão centrada;
- A análise da deformada mostra que em situação de confinamento nulo a viga alonga mais comparativamente com a viga confinada axialmente. Desta forma comprova-se que o confinamento axial restringe axialmente o alongamento livre da viga, alterando assim o seu equilíbrio interno;
- Confirma-se que, com o aumento do confinamento axial, a tensão de compressão no betão das escoras aumenta comparativamente com a situação de confinamento nulo. Observou-se também que a existência da força de compressão conduz a que a viga esgote mais depressa a capacidade resistente do betão à compressão nas escoras;

- Com o aumento do confinamento axial, confirma-se que a participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno diminui e a participação da armadura transversal por sua vez aumenta. Mais uma vez se verifica a influência do estado de compressão axial no equilíbrio interno da viga que obriga à existência de uma redistribuição interna de tensões.

Parece assim ser possível afirmar que as previsões teóricas do VATM modificado foram, na sua generalidade, confirmadas pelos resultados da análise não linear com elementos finitos realizada através do LUSAS.

6.3. Propostas de Trabalhos Futuros

Como extensão do trabalho desenvolvido considera-se de especial interesse o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Incorporar no VATM modificado a lei constitutiva $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração de forma a permitir uma previsão teórica da Curva $T-\theta$ para todo o estado comportamental de vigas de betão estrutural à torção (e não apenas o estado último comportamental);
- Incorporar no procedimento de cálculo do VATM modificado a rotura por destacamento dos cantos observado especialmente para as vigas com secção vazada;
- Estender o VATM modificado para englobar a situação de confinamento total;
- Estender o VATM modificado para englobar a situação genérica de interação com outros esforços (flexão e esforços transversos);
- Alargar o número de casos em que são aplicáveis os ábacos auxiliares ao projeto de vigas de betão estrutural através da formulação de mais ábacos para outros tipos de secções, designadamente para secções com diferentes geometrias;
- Realizar uma campanha experimental com ensaio de vigas de betão estrutural à torção com confinamento axial por forma a comprovar experimentalmente a validade do modelo VATM modificado;
- Implementar diferentes leis constitutivas e modelos de dano/rotura para caracterizar o comportamento do betão na análise não linear com elementos finitos no LUSAS de forma a afinar a previsão numérica da Curva $T-\theta$ para vigas de betão estrutural à torção.

Referências

- 1- ACI Commite 318, “Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 31 (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05)” Detroit, MI : American Institute, 2005
- 2- ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-95)”, American Concrete Institute, Detroit, 1995
- 3- ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)”, American Concrete Institute, Detroit, 1971(citado em [16])
- 4- Akin, J. E., “Application and Implementation of Finite Element Methods”, Academic Press Inc., Londres, 1982
- 5- Andersen, P., “Experiments with Concrete in Torsion”, *Transactions*, ASCE, Vol. 100, 1935, pp.949-983 (citado em [16])
- 6- Andrade, A.M.; Bernardo, L.F.A.; Lopes, S.M.R. “TORQUE_MTEAV: ComputingTool to Evaluate the Ultimate Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams in Torsion”, *Structural Concrete Applications* (CoRAN 2011): Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models - Structural Concrete Applications, 24-25 November 2011, Coimbra, Portugal: pp. 369-382.
- 7- Andrade, J. M. A. “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2010
- 8- Appleton, J. et al., “Verificação da Segurança aos Estados Limites Últimos de elementos com esforço axial desprezável”, *Betão Armado e Pré-Esforçado I*, Folhas de apoio às aulas 2011/2012, Instituto Superior Técnico
- 9- Armstrong, S., “The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion”, *Proceedingd of a Symposium of the Strength of Concrete Structures, Session B: Paper 2*, Cement and Concrete Association, Londres, Maio 1956, pp. 101-122 (citado em [16])
- 10- Azevedo, Álvaro, F. M., “Método dos Elementos Finitos”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril, 2003
- 11- Baran, Nicholas M., “Finite Element Analysis on Microcomputers”, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1987
- 12- Bastos, Paulo, “Torção em vigas de concreto armado”, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Estruturas de Concreto II - notas de aula, Maio 2005
- 13- Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 91(4), 1994, pp. 465-474 (citado em [7])
- 14- Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression” *Structural Journal of American Concrete Institute*, 92 (5), 1995, pp. 562-573 (citado em [7])

- 15- Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression” Research Report UHCEE 91-2, University of Houston, Texas, 1991 (citado em [73])
- 16- Bernardo, L. F. A. “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003
- 17- Bernardo, L. F. A.; “Prestressed HSC Hollow Beams Under Torsion” *Journal of Civil Engineering and Management* (em publicação).
- 18- Bernardo, L. F. A.; Andrade, J. M. A.; Oliveira, L. A. P., “Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion”. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2012 (em publicação).
- 19- Bernardo, L. F. A.; Andrade, J.M.A.; Lopes, S.M.R., “Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study”, *Engineering Structures*, 2012, volume 42, pp. 278-296
- 20- Bernardo, L. F. A.; Lopes S.M.R., “Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams”, *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, Junho 2008, pp. 1143-1167.
- 21- Bernardo, L. F. A.; Lopes, S. M. R., “Plastic Analysis of HSC Beams In Flexure”, *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 42, No. 1, Janeiro 2009, pp. 51-69.
- 22- Bernardo, L. F. A.; Lopes, S. M. R., “Torsion in HSC Hollow Beams: Strength and Ductility Analysis”, *ACI Structural Journal*, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A., Vol. 106, Issue 1, Janeiro-Fevereiro 2009, pp. 39-48.
- 23- Bernardo, L.F.A.; Lopes, S.M.R., “Theoretical Behaviour of HSC Sections under Torsion”, *Engineering Structures*, volume 33, Issue 12, December 2011, pp. 3702-3714.
- 24- Bredt, R., “Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat”, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1896, Vols. 40, No. 28, Julho 11, pp. 785-790; No. 29, Julho 18, pp. 813-817. (em Alemão, citado em [40])
- 25- Camposinhos, Rui de Sousa, “Lajes Pré-esforçadas por cabos não aderentes”, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Construção de Edifícios, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1991
- 26- Cauchy, A. Sur les équations qui expérimentent les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, *Exercices de mathématique*, Paris 1828 (citado em [40])
- 27- CEB, “Torsion”, *Bulletin d'Information* N°71, Março 1969 (citado em [16])
- 28- CEB-FIP, “Model Code for Concrete Structures”, CEB-FIP International Recommendations, 3rd edition, Paris, 1978, 348 pp. (citado em [16])
- 29- Collins, M. P., Mitchell, D., “Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams”, *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc.,

- V. 25, No. 5, Setembro-Outubro 1980, pp. 32-100 (citado em [16])
- 30- Collins, M.P., “Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams”, *Inelasticity and Non-linearity in Structural Concrete, Study No. 8, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, Canada, 1973, pp. 211-232* (citado em [16])
 - 31- Costa, R. J. T., Lopes, S.M.R., Bernardo, L.F.A “Behaviour of RC Panels under Shear”. INCOS 05, *International Conference on Concrete for Structures - Coimbra, 7-8, July, 2005, pp. 269-276*
 - 32- Cowan, H.J., “Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams”, *Magazine of Concrete Research, Julho 1950, Vol. 2, No. 4, pp.3-8*
 - 33- Cuerel, J., “New Waterloo Bridge at London”, *International Association for Bridge and Structural Engineering, 3rd Congress, Liège, 1948, pp. 367-380* (citado em [9])
 - 34- Elfrgren, L., “Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear”, Publication 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Gotebor, Sweden, 1972 (citado em [7])
 - 35- EN 1992-1-1, “Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios”, Comité Europeu de Normalização, Abril 2004
 - 36- Gervásio, Helena, Simões da Silva, Luís e Simão, Pedro, “Dimensionamento de elementos metálicos com perfis enformados a frio de acordo com a parte 1.3 do Eurocódigo 3”, *IV Congresso de Construção Metálica e Mista, Dezembro 2003, pp. 399-408*
 - 37- Gomes, D. P., “Resistência à Flexão de Vigas de Betão Armado Restringidas Axialmente”, Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, 2011, 79p.
 - 38- Hognestad, E., “What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete?”, Circular Series, 64, University of Illinois, Engineering Exp. Station, Ill. 1952 (citado em [7])
 - 39- Hsu, T.T., “Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members” *Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp.261-306* (citado em [7])
 - 40- Hsu, T.T.C., “Torsion of Reinforced Concrete”, Van Nostrand Reinhold Company, 1984
 - 41- Hsu, T.T.C., “Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams”, *Journal of the Structural Division, ASCE, Fevereiro 1968, Vols. 94, ST 2, pp. 485-510* (citado em [7])
 - 42- Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. “Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests”, *Journal of the American Concrete Institute, Proc., Vol. 82, No.3, Maio-Junho 1985, pp. 290-303* (citado em [16])
 - 43- Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. “Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations”, *Journal of the American Concrete Institute, Proc., Julho-Agosto 1985, Vol. 82, No.4, pp. 443-452.* (citado em [7])

- 44- Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Prestressed Concrete" *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Vol. 82, No. 5, Stembro-Outubro 1985, pp. 603-615 (citado em [16])
- 45- <<http://en.structurae.de/photos/index.cfm?JS=156633>>, acesso em 05/03/2012
- 46- <http://pormenoresconstrutivos.cype.pt/FIG009_A.html>, acesso em 05/03/2012
- 47- <<http://www.birddog.co.uk/2011/06/the-business-of-social-media/>>, acesso em 05/03/2012
- 48- <http://www.travelpod.com/ad/Royal_Festival_Hall-London>, consultado em 05/03/2012
- 49- IBM SPSS Statistics 19 Core System, User's Guide, <http://sociology.rutgers.edu/Sociologycomputing/SPSS19_Manuals/IBM%20SPSS%20Statistics%2019%20Core%20System%20User's%20Guide.pdf > acesso em 4/10/2012
- 50- Ibrahim, Amer M., Mahmood, Mohammed Sh., "Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Beams Strengthened with FRP Laminates", *European Journal of Scientific Research*, 2009, Vol.30 No.4, pp. 526-541
- 51- Jefferson, A. D., "Craft - a plastic-damage-contact model for concrete. Part I - Model theory and thermodynamics", *International Journal of Solids and Structures*, Junho, 2003, Vol. 40, No.22, pp. 5973-5999.
- 52- Jefferson, A.D., "Craft - a plastic-damage-contact model for concrete. Part II - Model implementation with implicit return-mapping algorithm and consistent tangent matriz" *International Journal of Solids and Structures*, Junho, 2003, Vol. 40, pp. 6001-6022
- 53- Lampert, P., Thurlimann, B., "Torsionsversuche an Stanhlbetobalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams)", *Bericht*, No. 6506-2, *Institute fur Baustatik, ETH, Zurich*, 1969. (em Alemão, citado em [7])
- 54- Leonhardt, F. e Monnig, E., "Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado" Volume 1, Editora Interciência, 1977
- 55- Lou, Tiejiong, Lopes, Adelino e Lopes, Sérgio "Numerical Behaviour axially restricted RC beams", *International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models - Structural Concrete Applications*, 2011
- 56- LUSAS User Manual, (2001). FEA Ltd., London, England
- 57- Measor, E. O. and New, D. H., "The Design and Construction of the Royal Festival Hall South Bank", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 75, N°10, Outubro 1978, pp.511-519 (citado em [16])
- 58- Morsh, E., "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", *1st edition*, *Wayss and Freytag, A.G., Im selbstverlag der Firma, Neustdat a. d. Haardt*, May 1902, 188 pp.; "der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", *2nd edition*, *Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart*, 1906, 252 pp.; *3rd edition (traduzido para Inglês por E.P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.)* (citado em [40])

- 59- Navier, C.L., “Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des machines, Première partie, contentant les leçons sur la résistance des matériaux et sur l'établissement des constructions” (*Article V - de la résistance d'un corps prismatique à la torsion, pp. 71-76. Article VI - de la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion, pp. 76-80*), Paris 1826 (citado em [40])
- 60- Nawy, Edward G., “Prestressed concrete - A Fundamental Approach”, Prentice Hall, 1989
- 61- Nilson, Arthur H., “Design of Prestressed Concrete” - Second edition, February 1987
- 62- Nuygen, V. B., “Numerical Modelling of Reinforced Concrete Bridge Pier under Artificially Generated Earthquake Time-Histories” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Birmingham, Birmingham, 2006
- 63- Piloto, P.A.G. e Vila Real, P.J.M.M.F., “Comportamento termo-mecânico de vigas com restrição à deformação axial sujeitas a temperaturas elevadas”, *III Encontro de Construção Metálica e Mista*, Dezembro 2001, pp. 449-457
- 64- Rausch, E., “Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion)”, *Ph D. Thesis, Berlin*, 1929 (em Alemão, citado em [40])
- 65- Richard, R.M. and Abbott, B.J., “Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 101(EM4), 1975, pp. 511-515 (citado em [13])
- 66- Ritter, W., “Die Bauweise Hennebique”, *Schweizerische Bauzeitung, Zurich*, Fevereiro 1899 (em Alemão, citado em [40])
- 67- Rodrigues, Rui, “Deformação de vigas de betão armado restringidas axialmente”, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Agosto 2011
- 68- Saint-Venant, B. de, “Mémoire sur la torsion des prismes, (lu à l'Académie le 13 juin 1853), *Mémoires des savants étrangers, Mémoires des divers savants à l'Académie des Sciences, de l'Institut Impérial de France et imprimé par son ordre*, 1856, Vols. 14, imprimerie Impériale, Paris, pp. 233-560 (citado em [40])
- 69- Santos, José, “Avaliação da Ductilidade das Estruturas de Betão Armado. Avaliação Experimental e Numérica” Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2012, pp. 276
- 70- Sapountzakis, E.J., Tsipiras, V.J., “Effect of axial restraint in composite bars under nonlinear inelastic uniform torsion by BEM”, *Engineering Structures*, vol. 31, 2009, pp. 1190-1203
- 71- Simões, Rui A. D., “Manual de dimensionamento de estruturas metálicas - Eurocódigo 3: Projecto de Estruturas de Aço - Parte 1 - 1: Regras gerais e regras para edifícios”, *Edição por Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista*, Fevereiro 2007
- 72- Smith-Pardo, J. Paul e Aristizabal-Ochoa, “Second-order axial force and midspan

- deflection in a simple supported beam axially restrained”, *Engineering Structure*, vol.30, 2008, pp. 561-569
- 73- Vecchio, F.J. and Collins, M.P., “Compression Response of Cracked Reinforced Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 119 (12), 1993, pp.3590-3610
- 74- Vecchio, F.J. and Collins, M.P., “The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear”, *Journal of the American Concrete Institute*, Março-Abril 1986, Vol. 83, No.2, pp. 219-231
- 75- Vecchio, F.J. and Collins, M.P., “The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Forces”, Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Março 1982 (citado em [7])
- 76- Venables, W. N., Smith D. M. and the R Core Team “An Introduction to R”, version 2.15.1, Junho 2012
- 77- Wagner, H., “Ebene Blechwandträger mit Sehr Dünnem Stegblech (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web). *Zeitschrift für Flugtechnik und Motolufschiffahrt*, Berlin, 1929, Vol. 20, No.8 to 12 (em Alemão, citado em [40])
- 78- Waldren, P. “The Significance of Warping Torsion in the Design of Straight Concrete Box Girder Bridges”, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 1988, Vol. 15, pp. 879-889
- 79- Yang, Z. J. e Chen, Jianfei, “Finite element modeling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams”, *Engineering Fracture Mechanics*, April 2005, pp. 2281-2297
- 80- Zhang, L.X. and Hsu, T.C., “Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Janeiro-Fevereiro 1998, Vol. 124, No. 1, pp.24-34(citado em [7])
- 81- Zhu, et al., “Rational Shear Modulus for Smearred-Crack Analysis of Reinforced Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 98(4), 2001, pp.443-450
- 82- Zienkiewicz, O. C., “The Finite Element Method”, 4ª Edição, McGraw-Hill, Londres, 1977

Anexos

Anexo I - Combinações das variáveis de estudo para a Análise Paramétrica Parte II

Tabela I.1 - 192 Combinações entre as variáveis de estudo (nível de confinamento, resistência do betão à compressão e taxa total de armadura)

k (kN/m)									f_c [MPa]	ρ_{tot} [%]
0	10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	30	0,6
										0,8
										1
										1,2
										1,4
										1,6
									50	0,6
										0,8
										1
										1,2
										1,4
										1,6
									70	0,6
										0,8
										1
										1,2
										1,4
										1,6
									90	0,6
										0,8
										1
										1,2
										1,4
										1,6

Nota: Na tabela I.1 encontra-se representado as 192 combinações (k ; f_c ; ρ_{tot}) - cada valor de k é combinado com cada valor de f_c e com cada valor de ρ_{tot} .

Anexo II - Influência da resistência à compressão do betão e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção

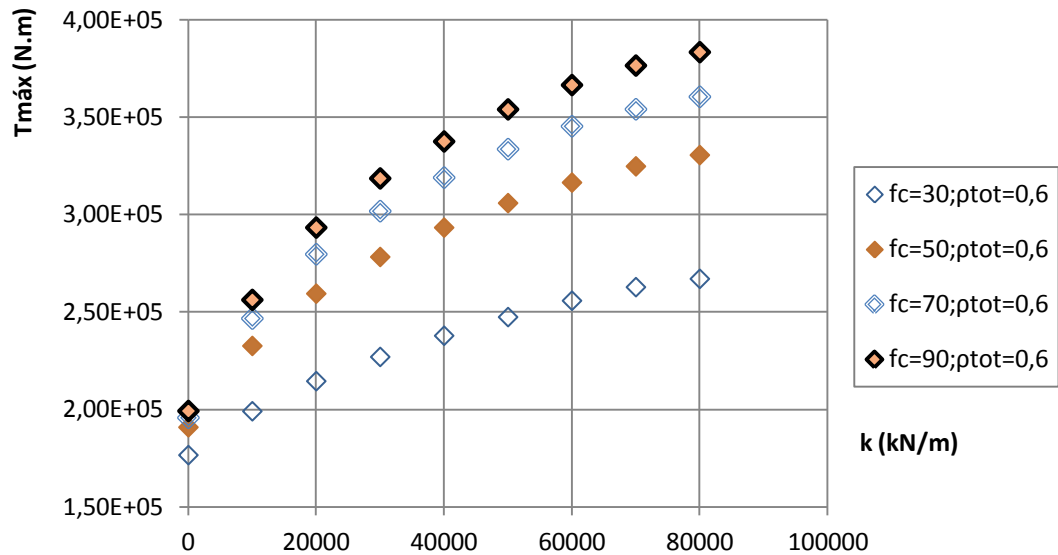


Figura II.1 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

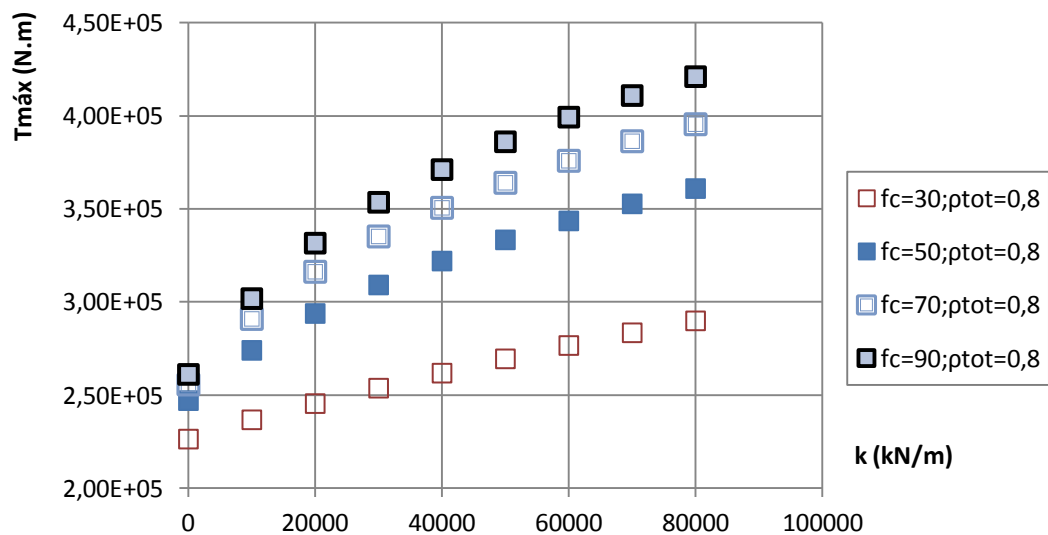


Figura II.2 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

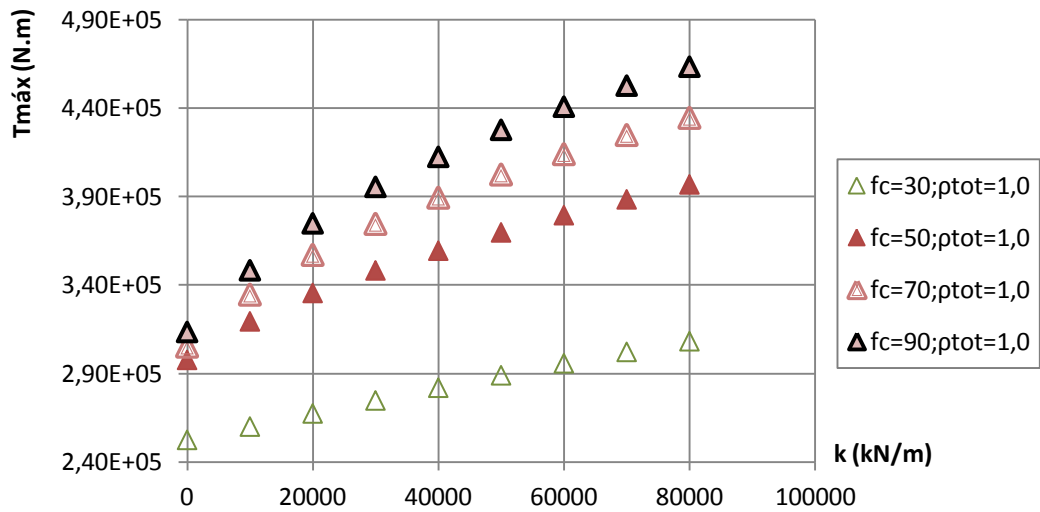


Figura II.3 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

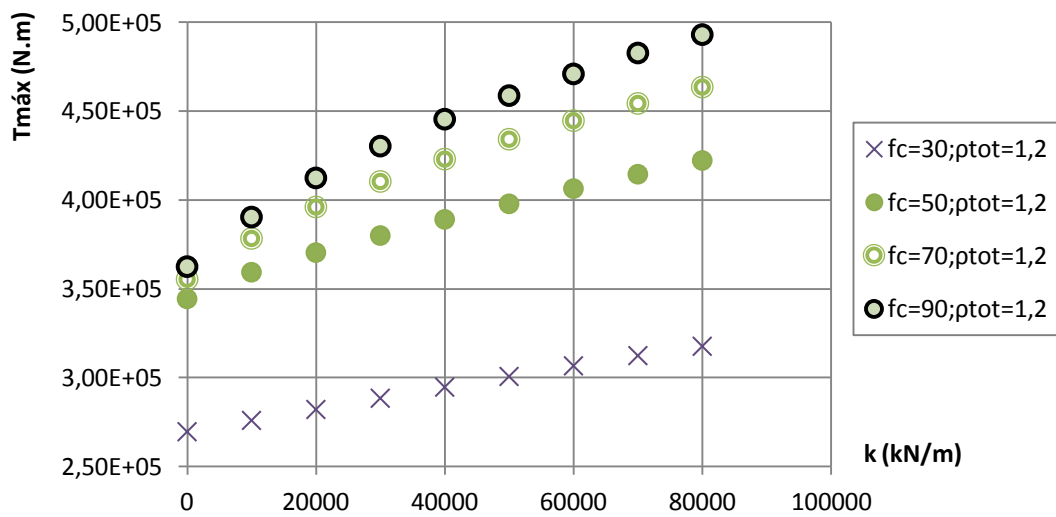


Figura II.4 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

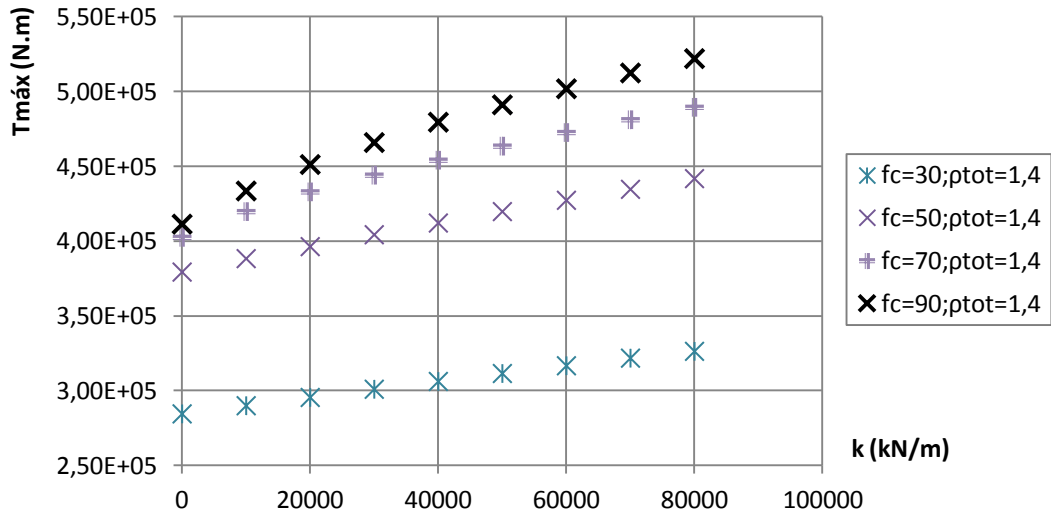


Figura II.5 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

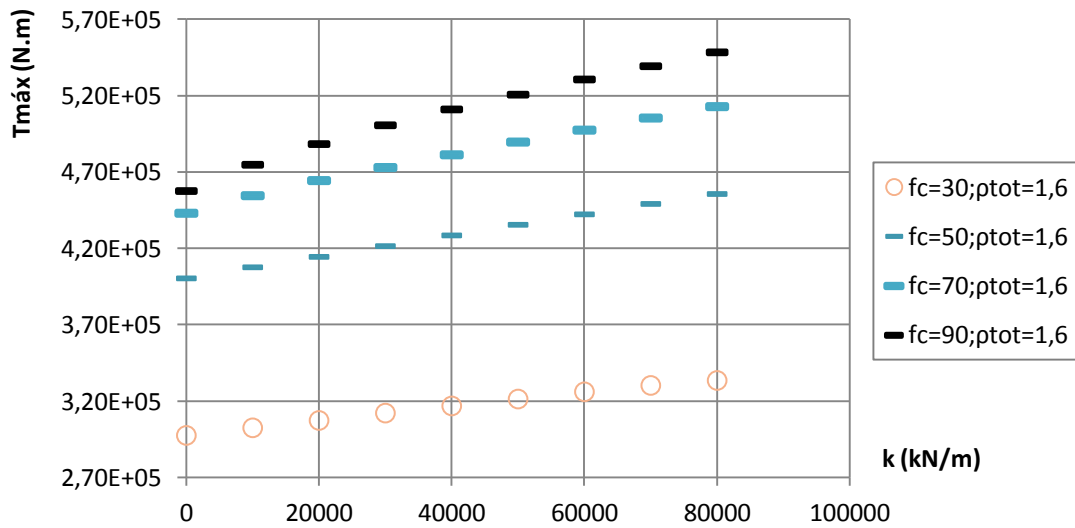


Figura II.6 - Momento torsor resistente para $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

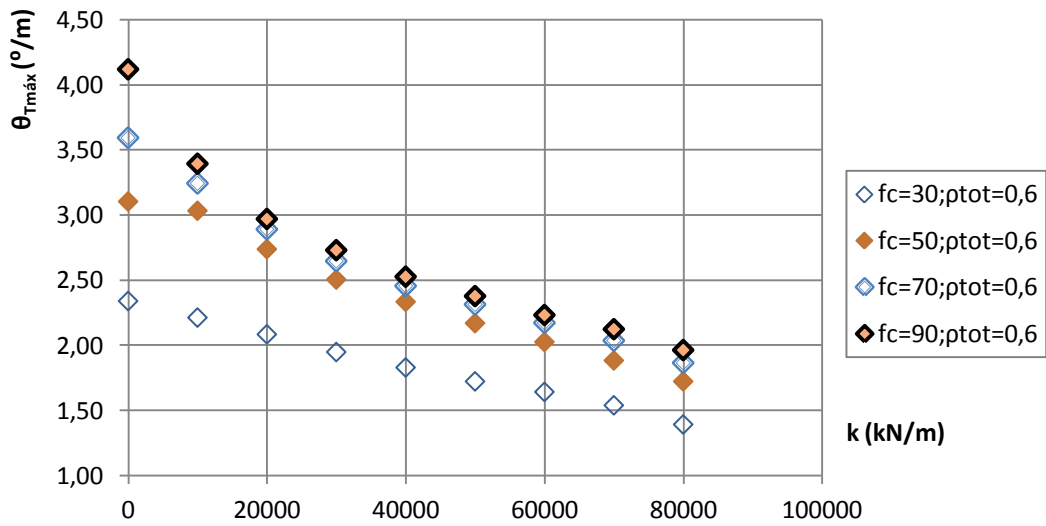


Figura II.7 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

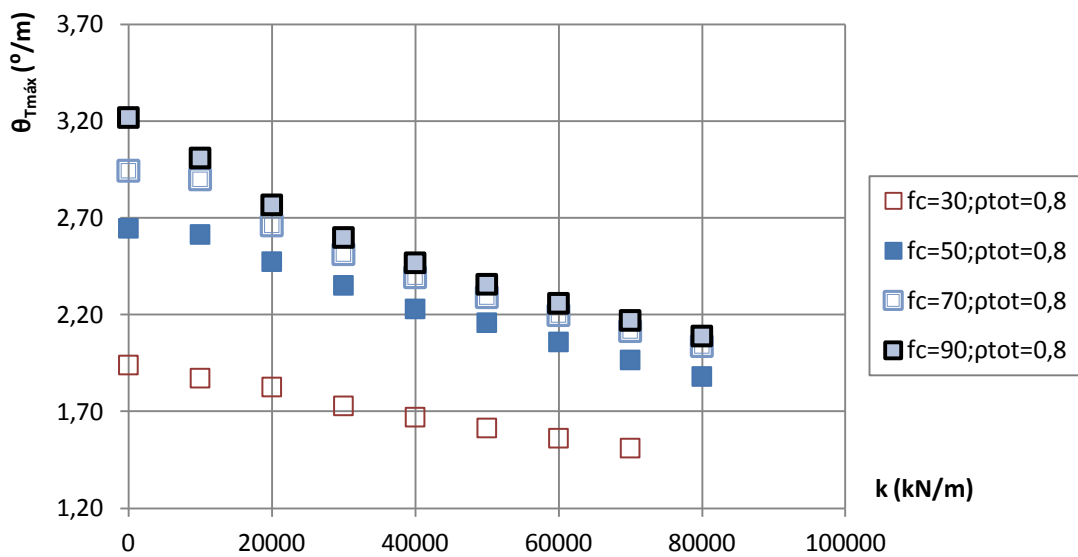


Figura II.8 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

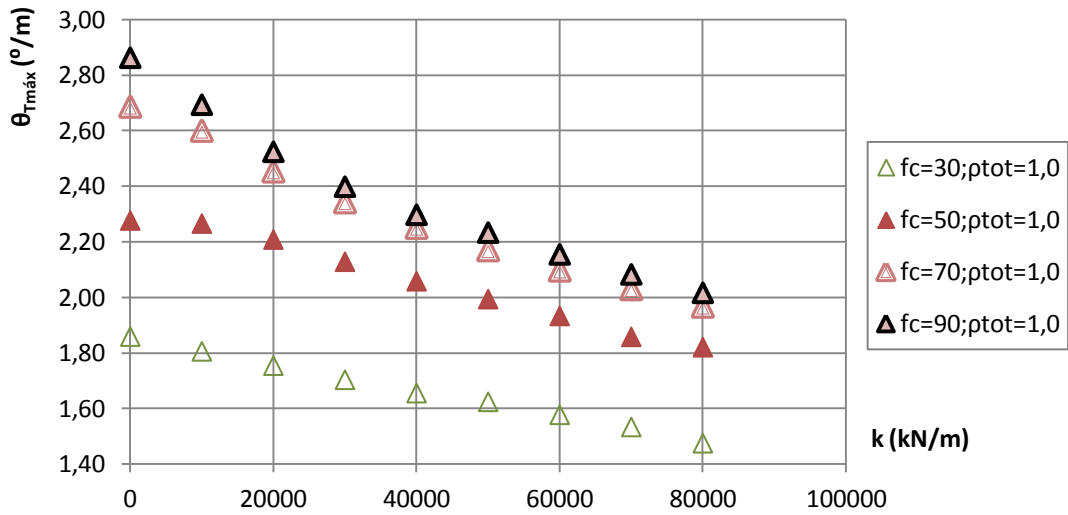


Figura II.9 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

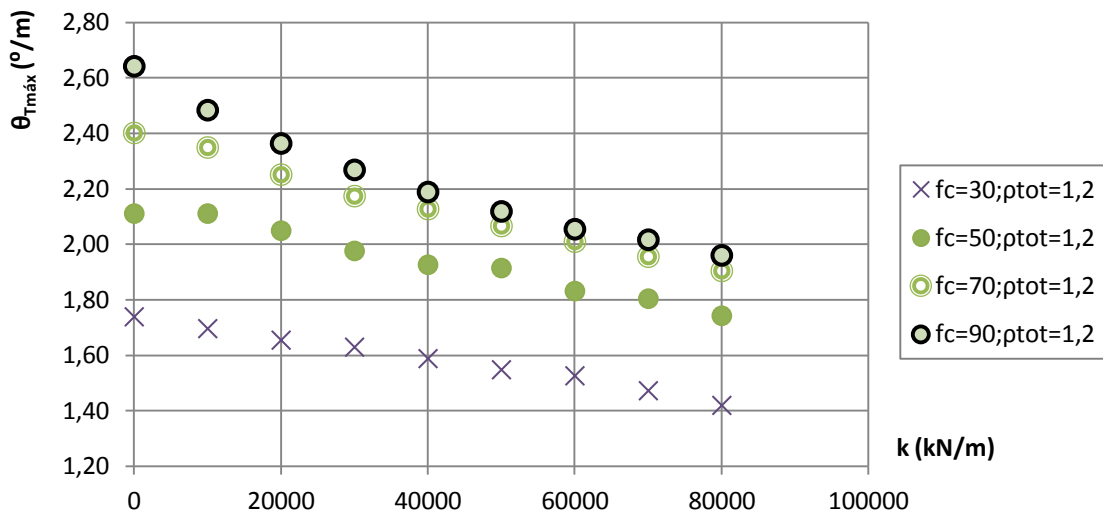


Figura II.10 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

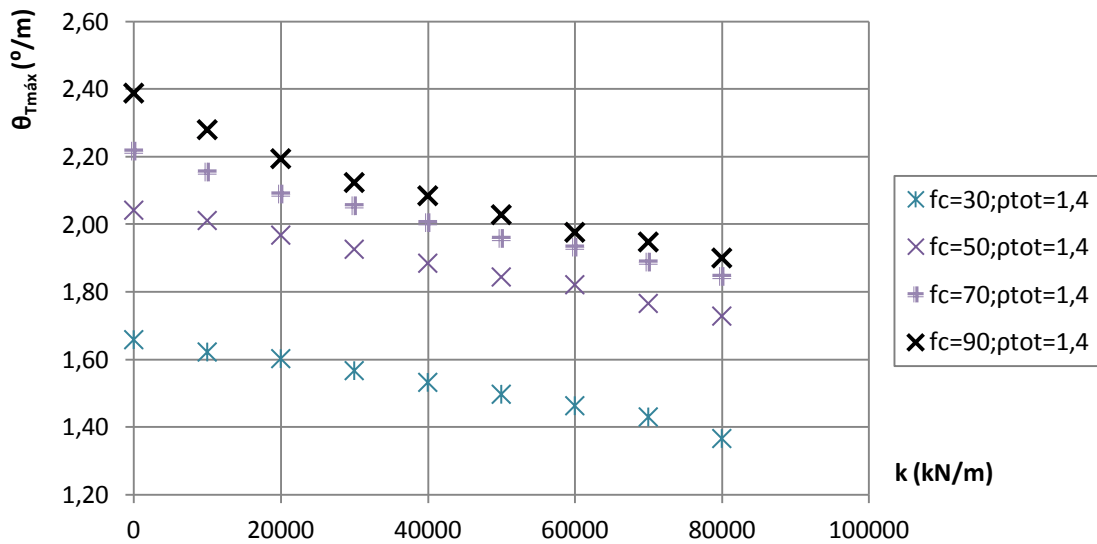


Figura II.11 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

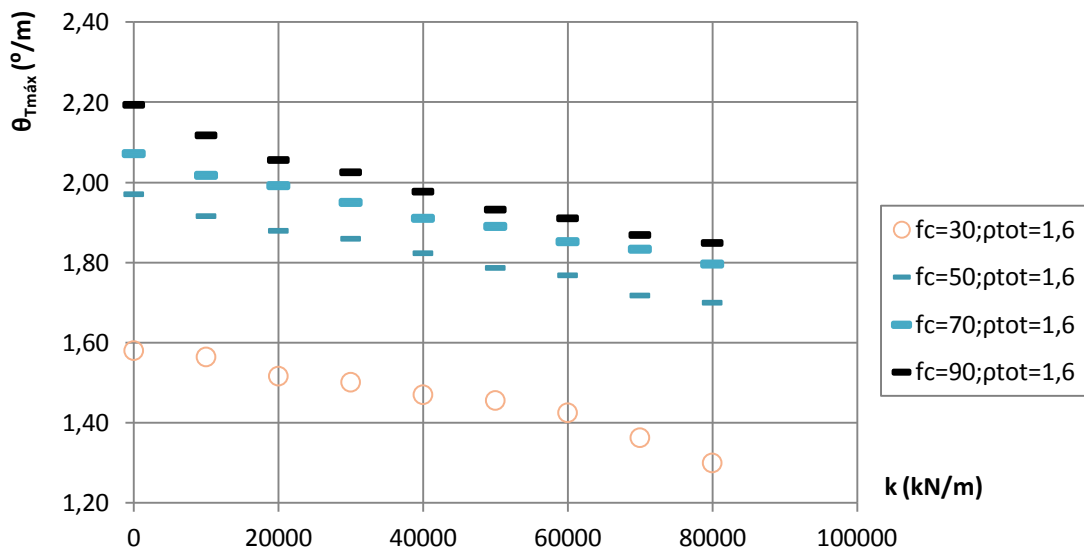


Figura II.12 - Rotação associada ao momento torsor máximo de uma viga à torção com $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

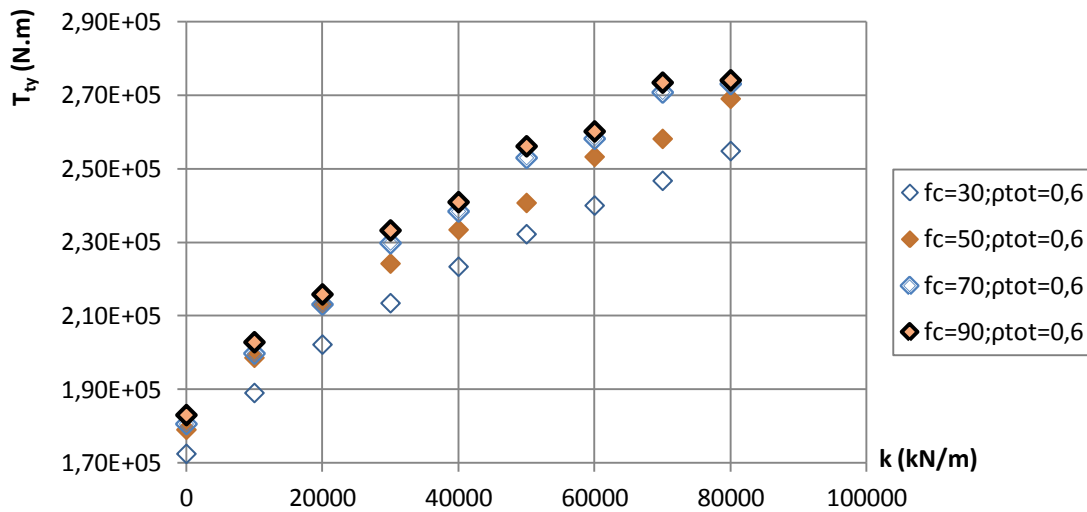


Figura II.13 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

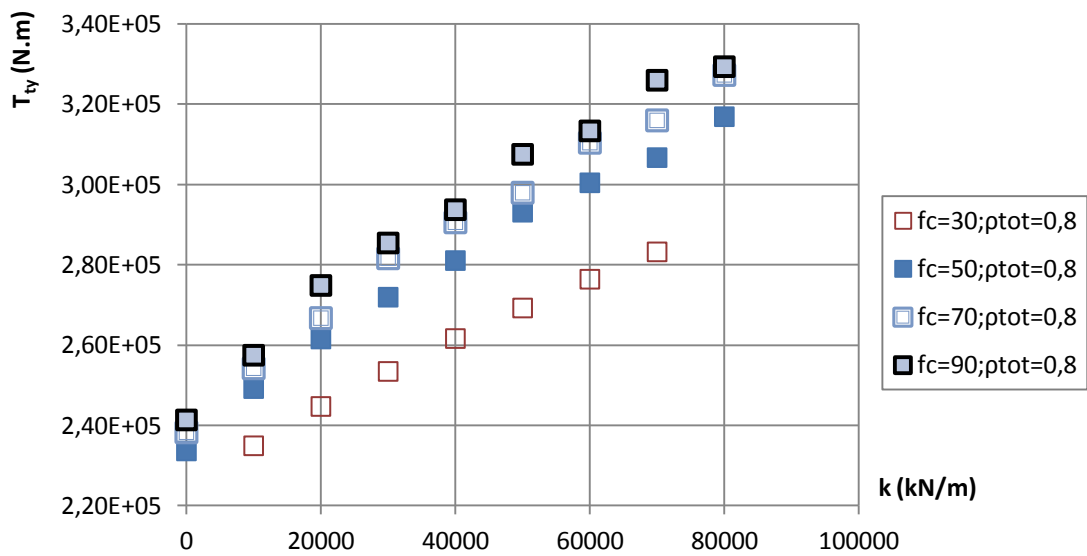


Figura II.14 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

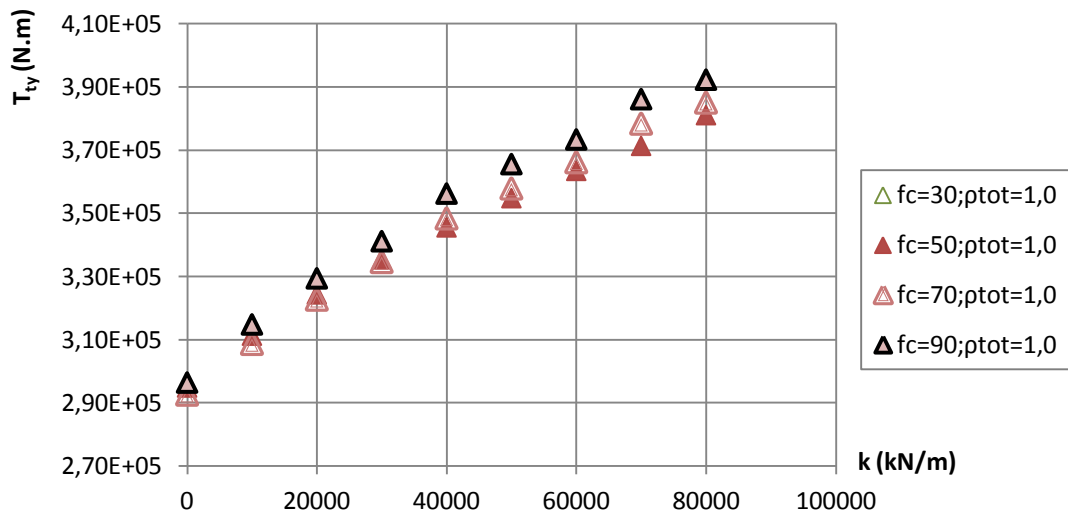


Figura II.15 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

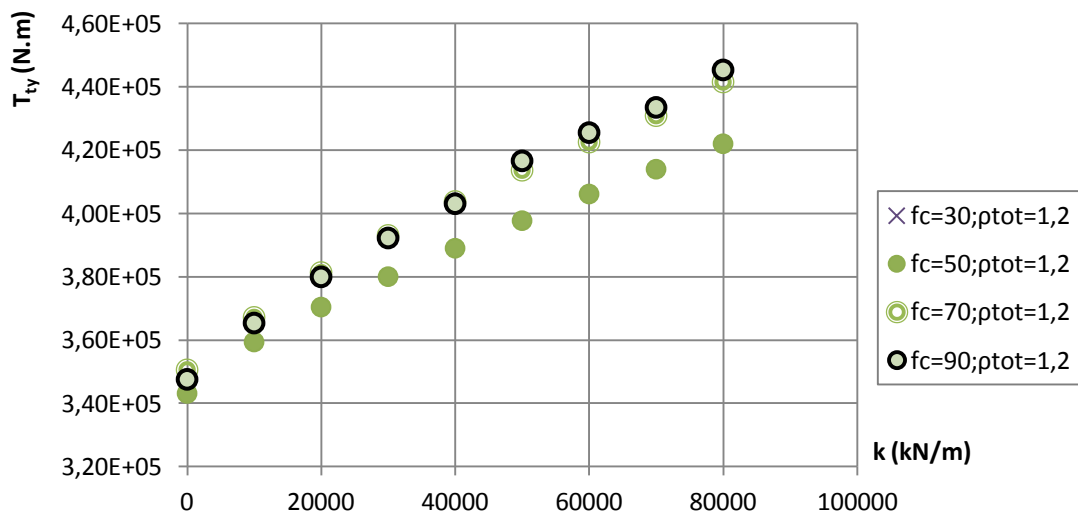


Figura II.16 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

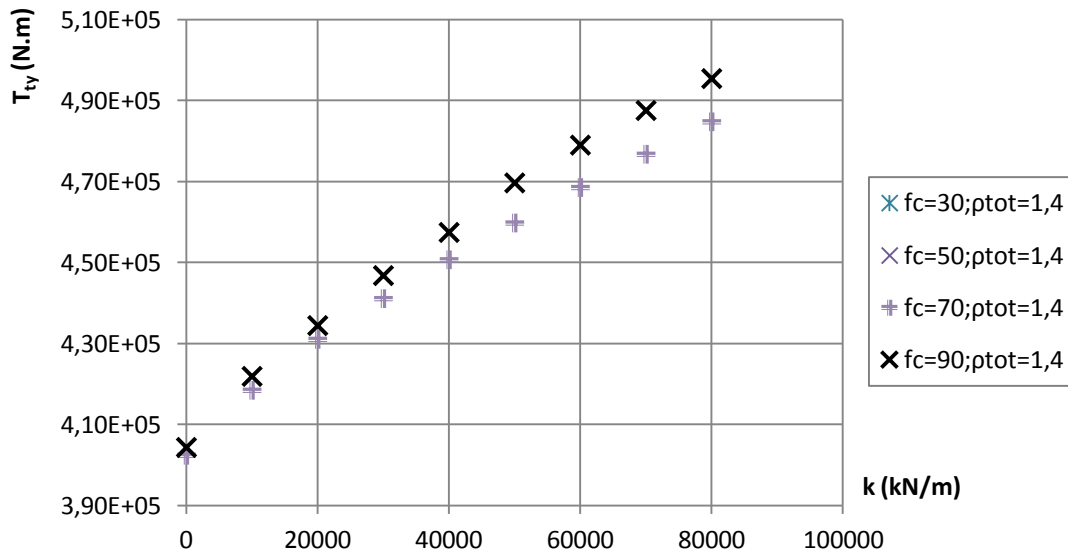


Figura II.17 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

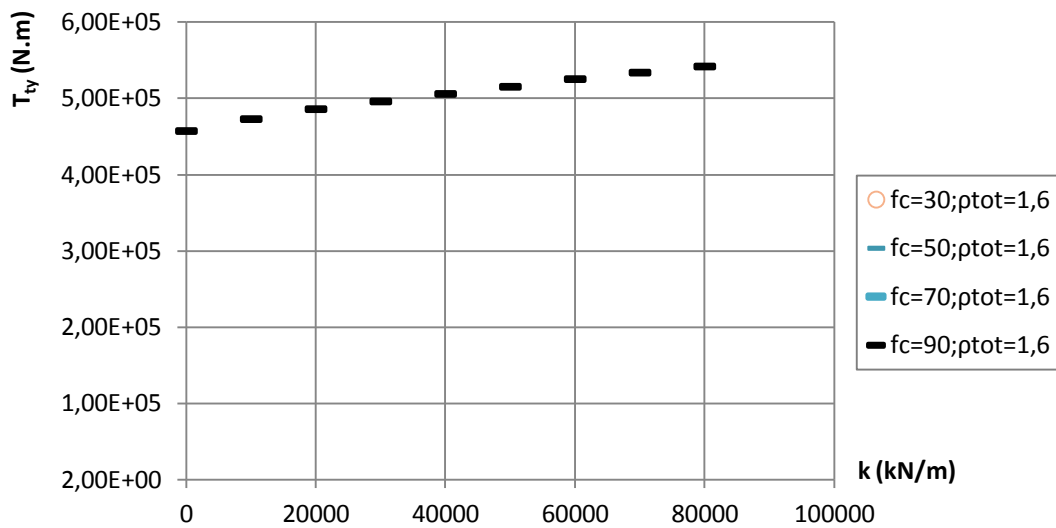


Figura II.18 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

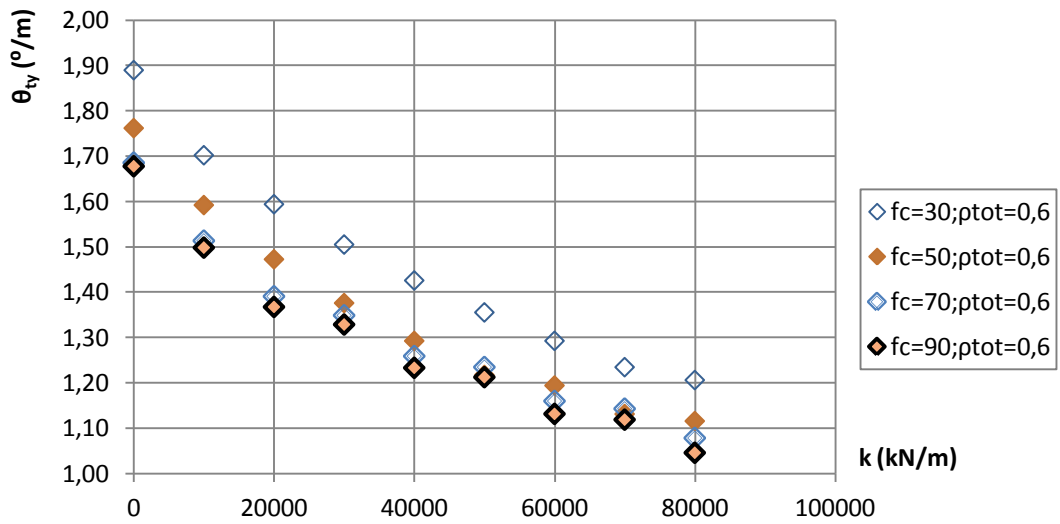


Figura II.19 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

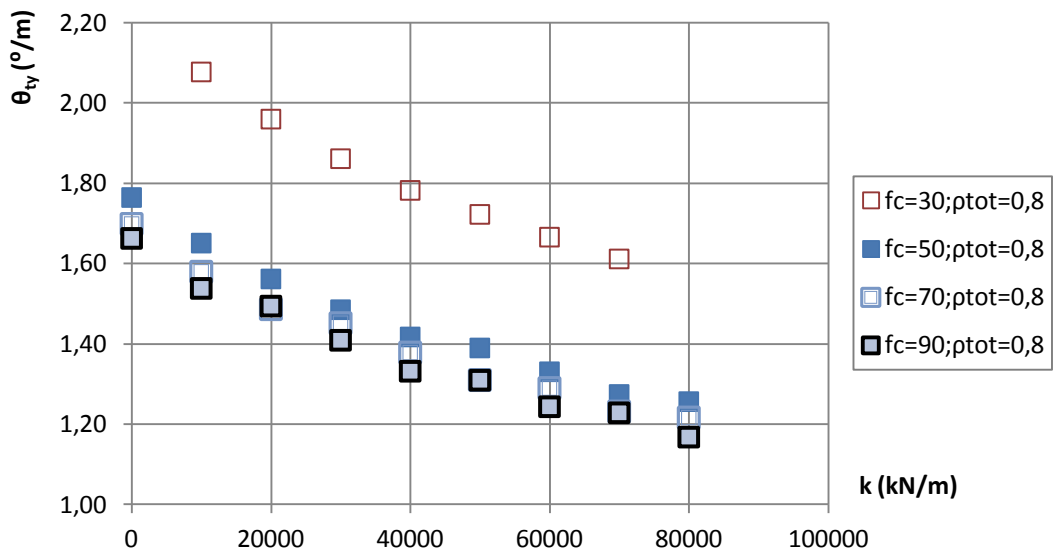


Figura II.20 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

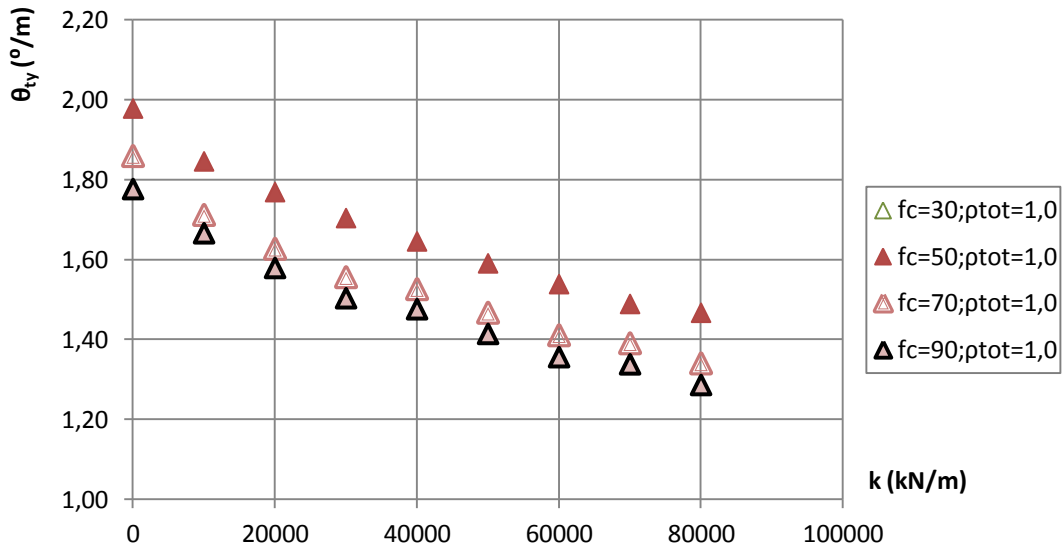


Figura II.21 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

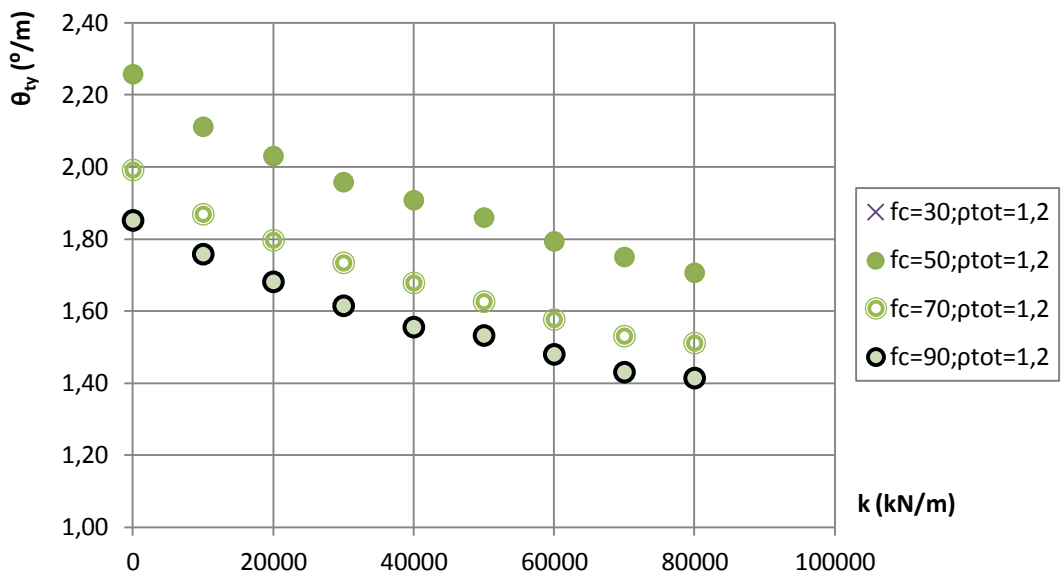


Figura II.22 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

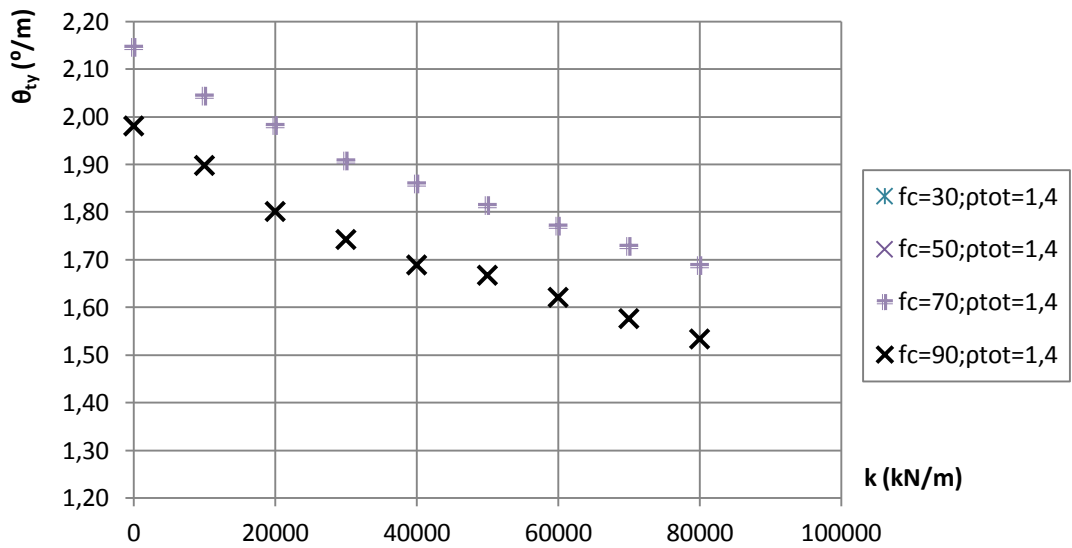


Figura II.23 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

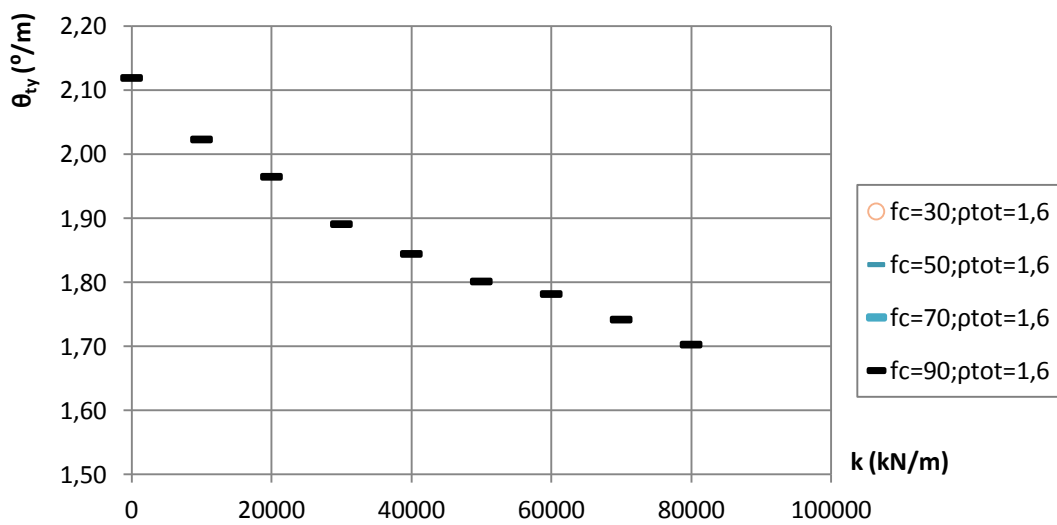


Figura II.24 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

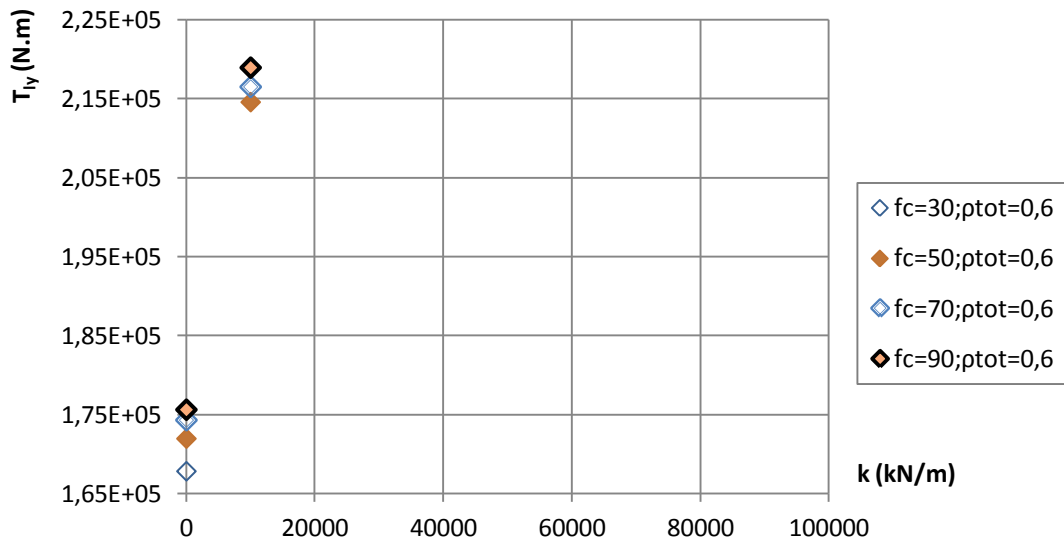


Figura II.25 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

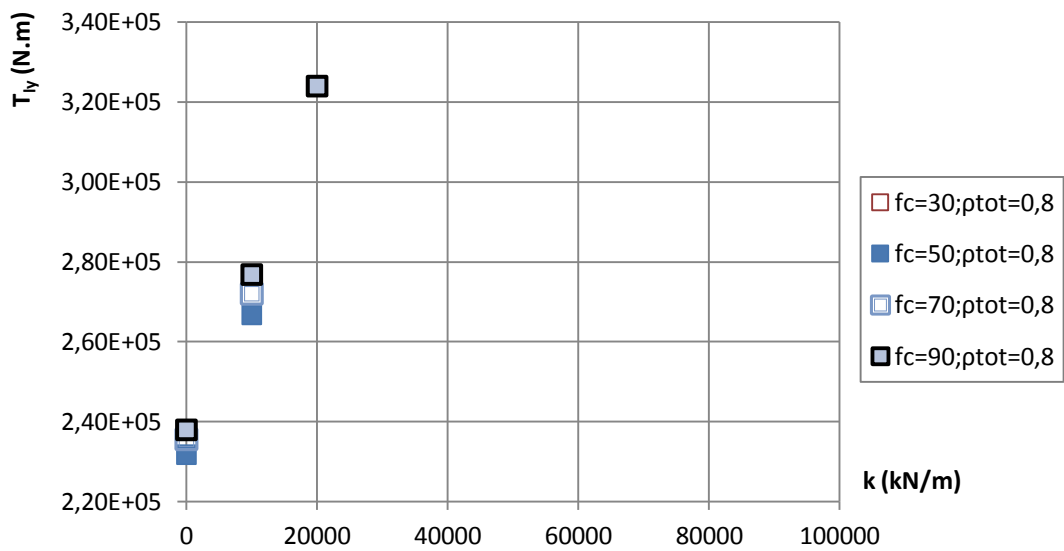


Figura II.26 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

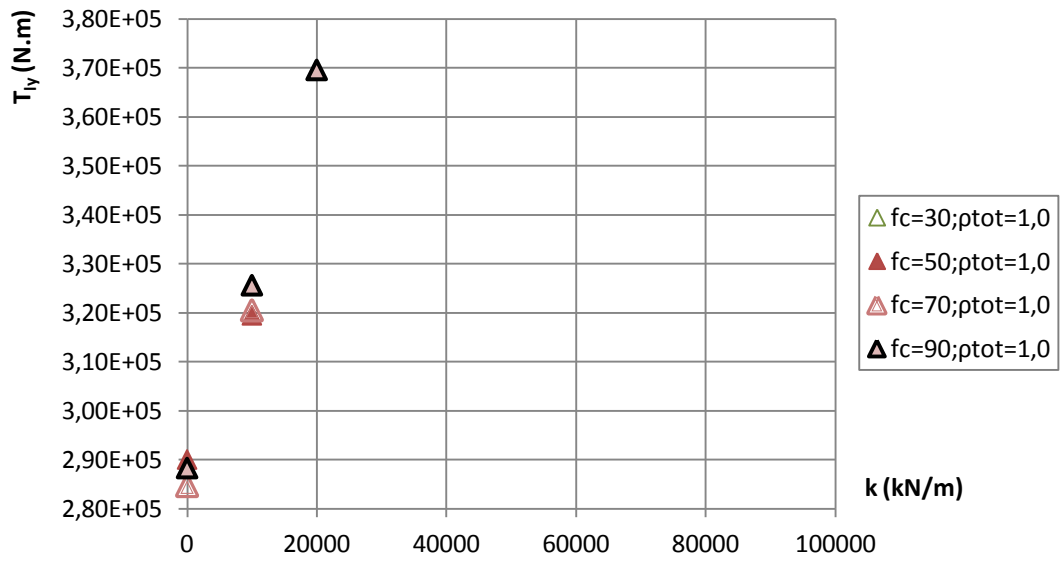


Figura II.27 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

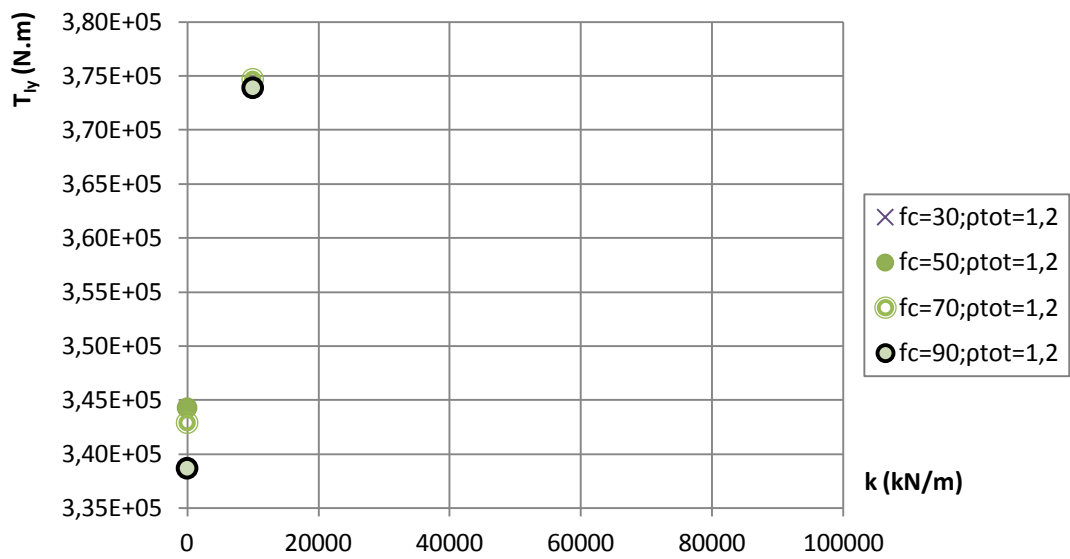


Figura II.28 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

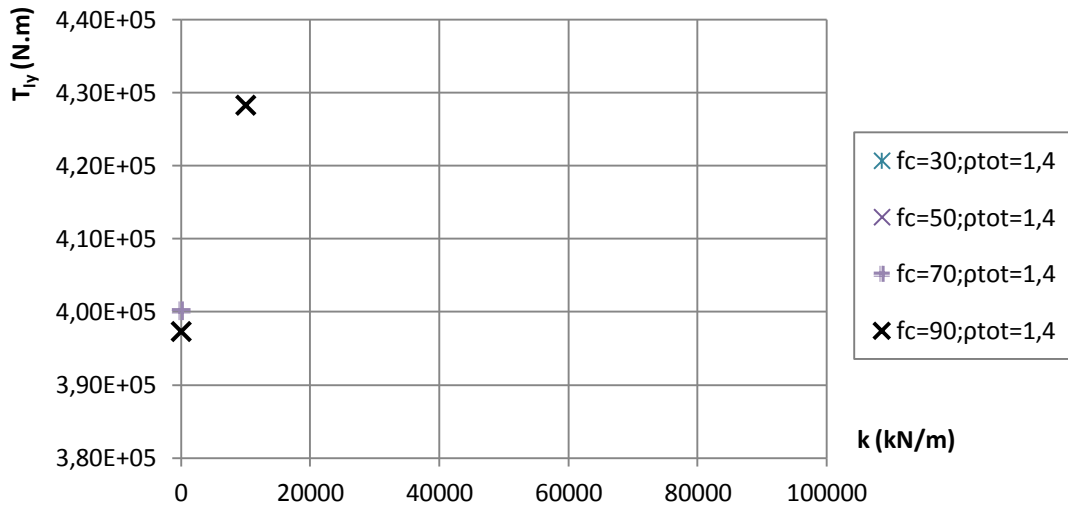


Figura II.29 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

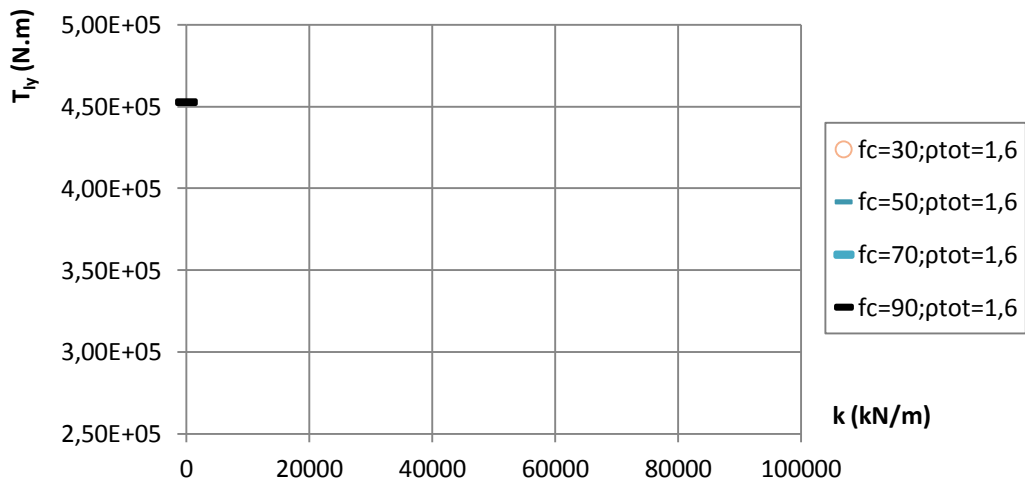


Figura II.30 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

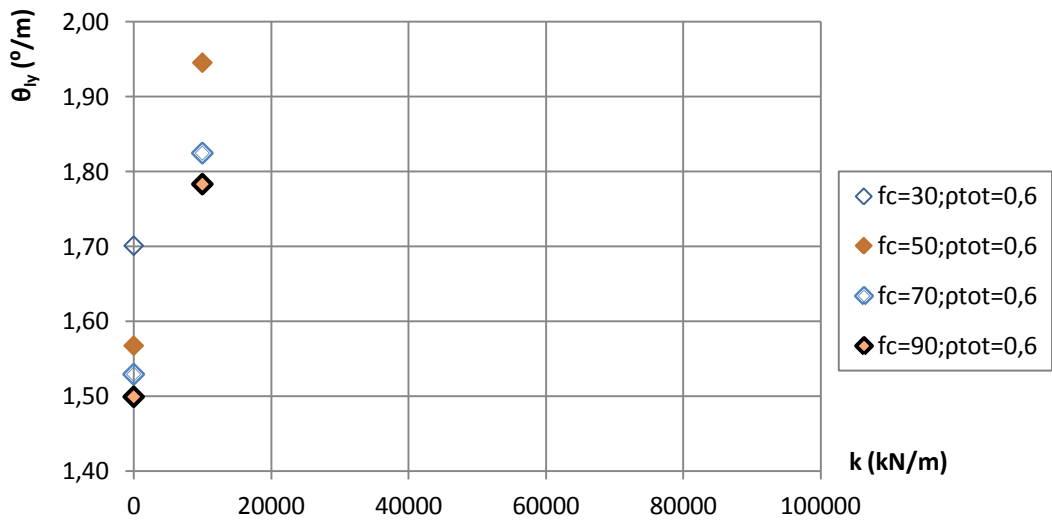


Figura II.31 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 0,6\%$ e f_c variável

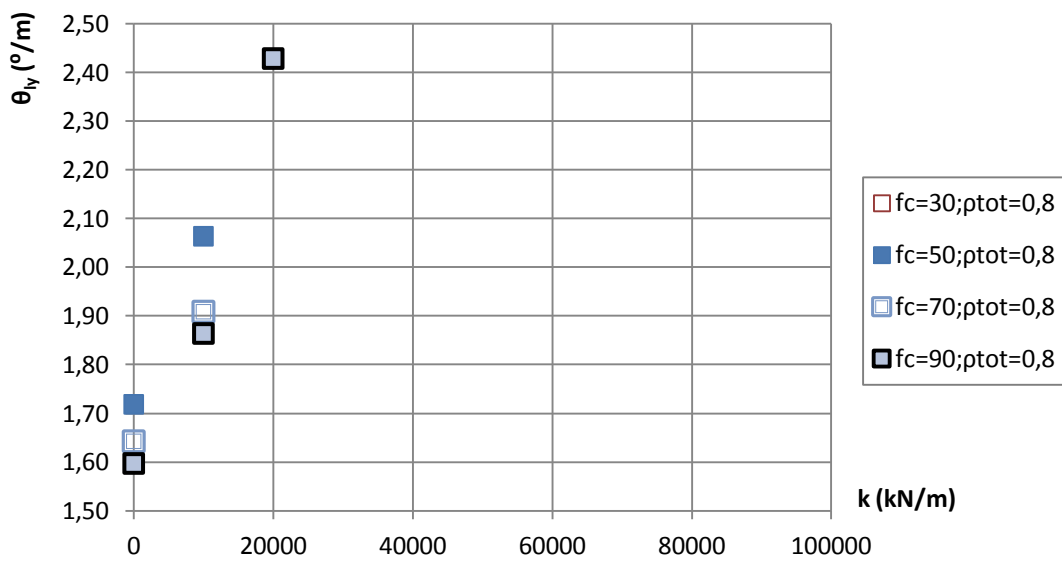


Figura II.32 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 0,8\%$ e f_c variável

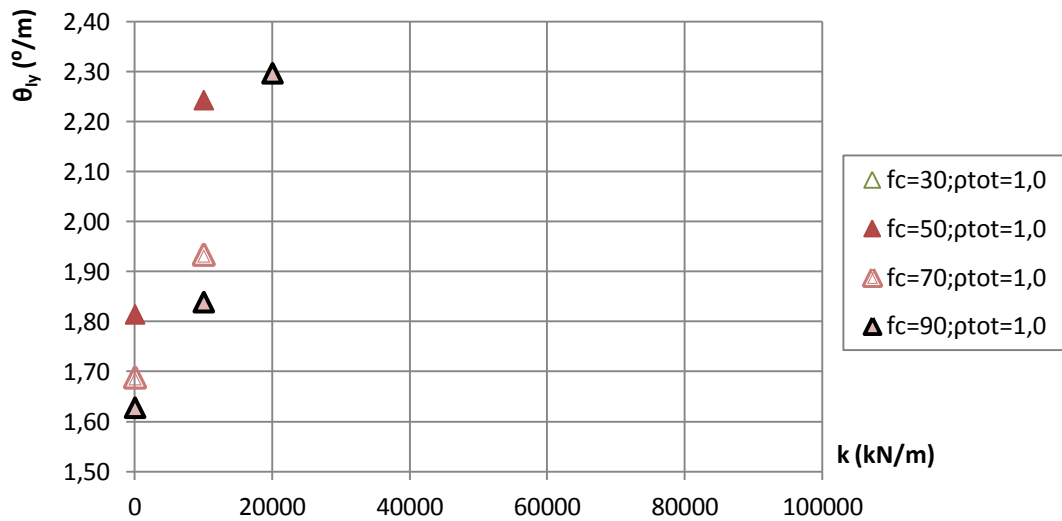


Figura II.33 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 1,0\%$ e f_c variável

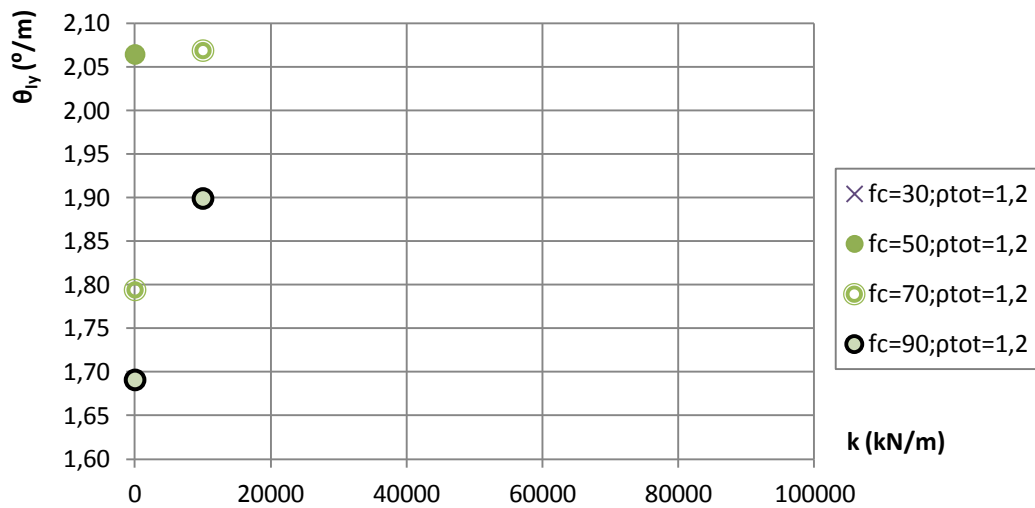


Figura II.34 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 1,2\%$ e f_c variável

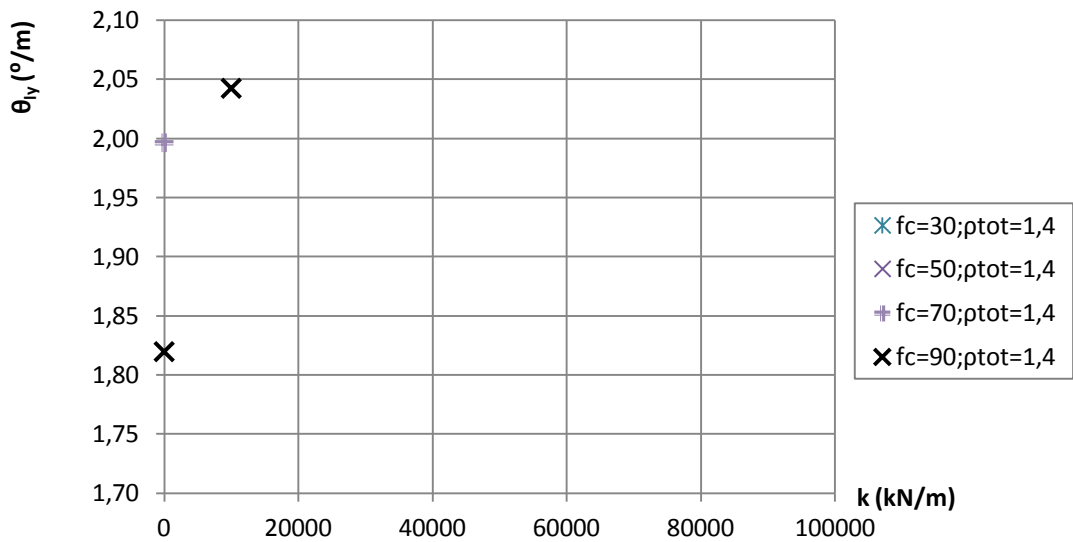


Figura II.35 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 1,4\%$ e f_c variável

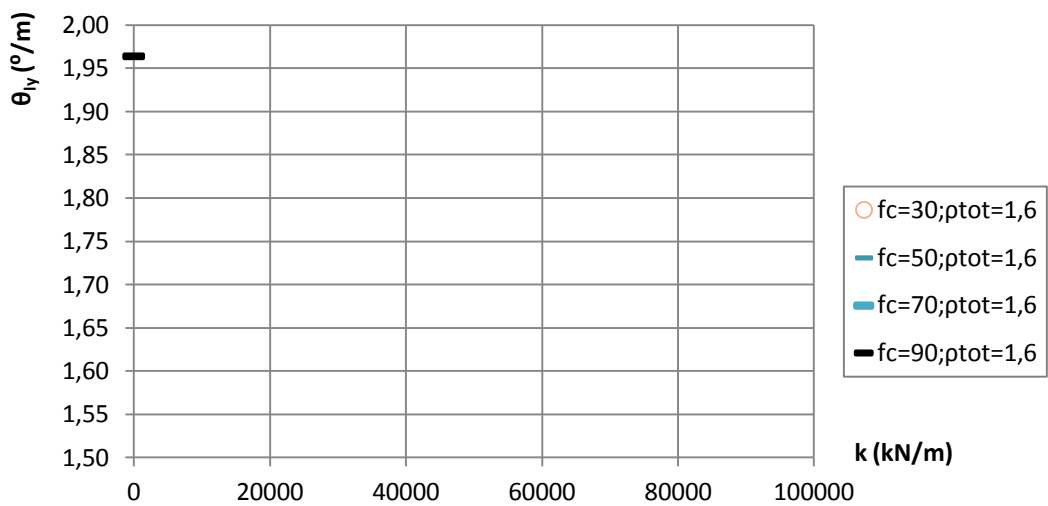


Figura II.36 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $\rho_{tot} = 1,6\%$ e f_c variável

Anexo III - Influência da taxa total de armadura e do nível de confinamento axial na resistência e rotação de uma viga à torção

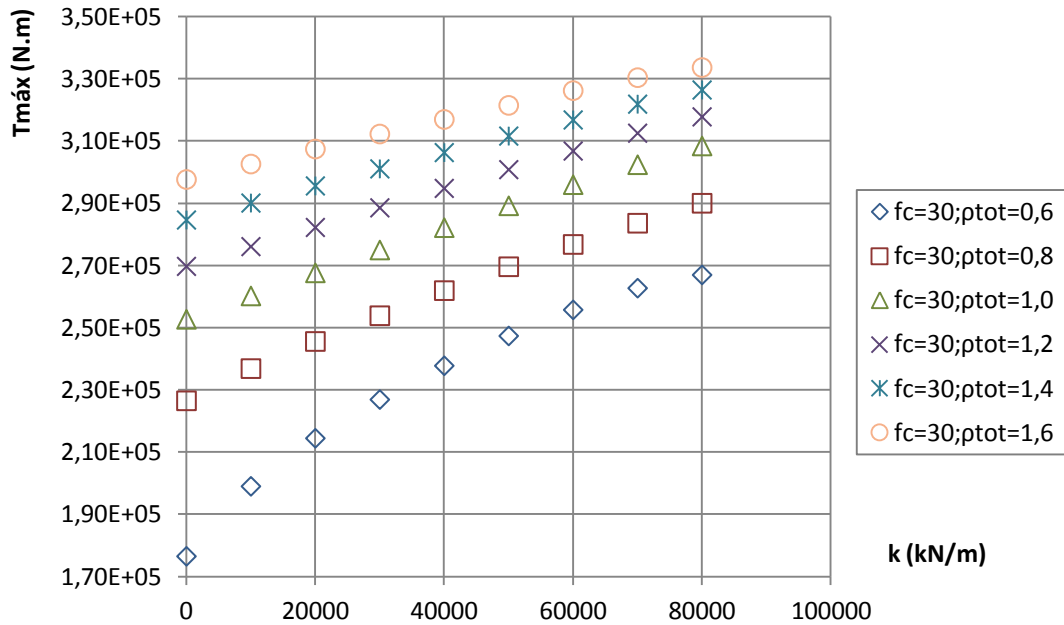


Figura III.1 - Momento torsor resistente para $f_c = 30\text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

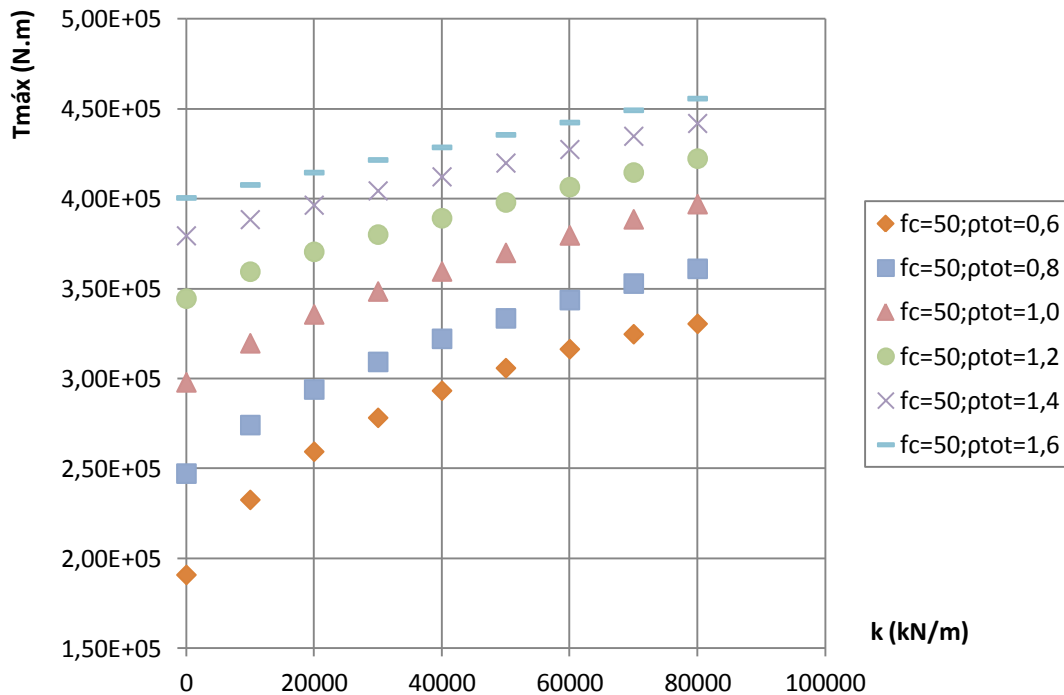


Figura III.2 - Momento torsor resistente para $f_c = 50\text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

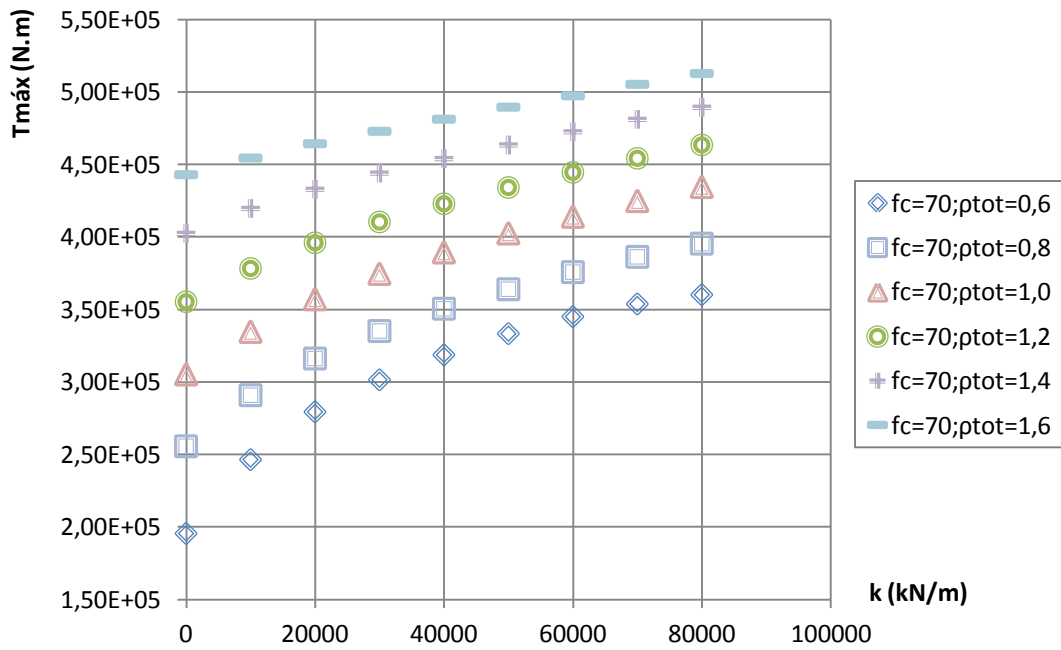


Figura III.3 - Momento torsor resistente para $f_c = 70 MPa$ e ρ_{tot} variável

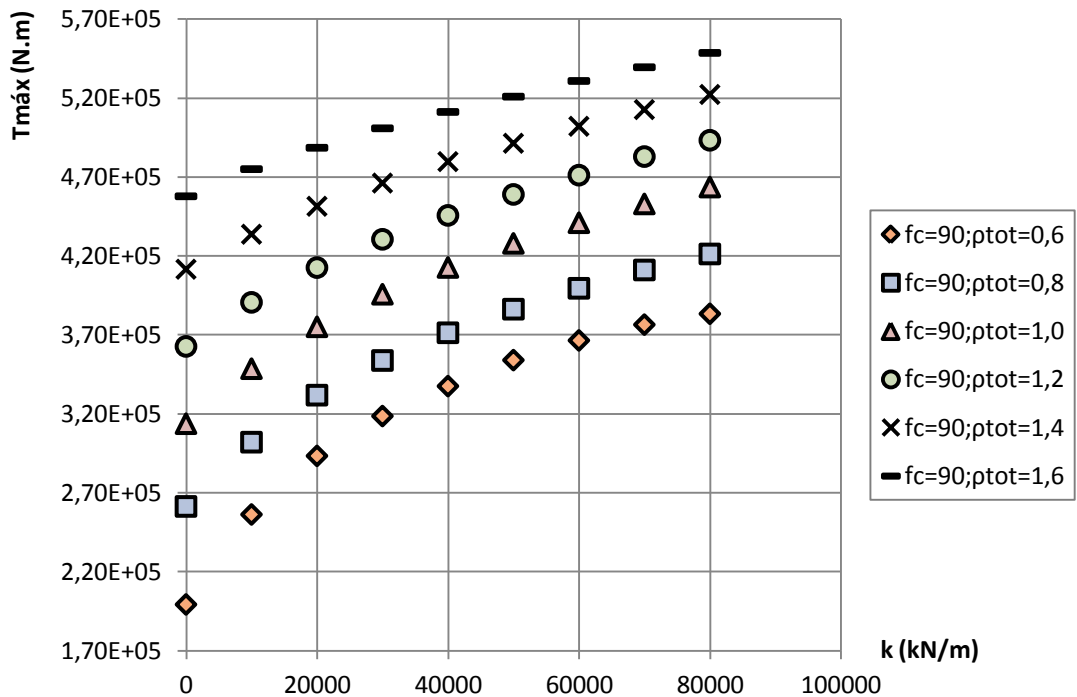


Figura III.4 - Momento torsor resistente para $f_c = 90 MPa$ e ρ_{tot} variável

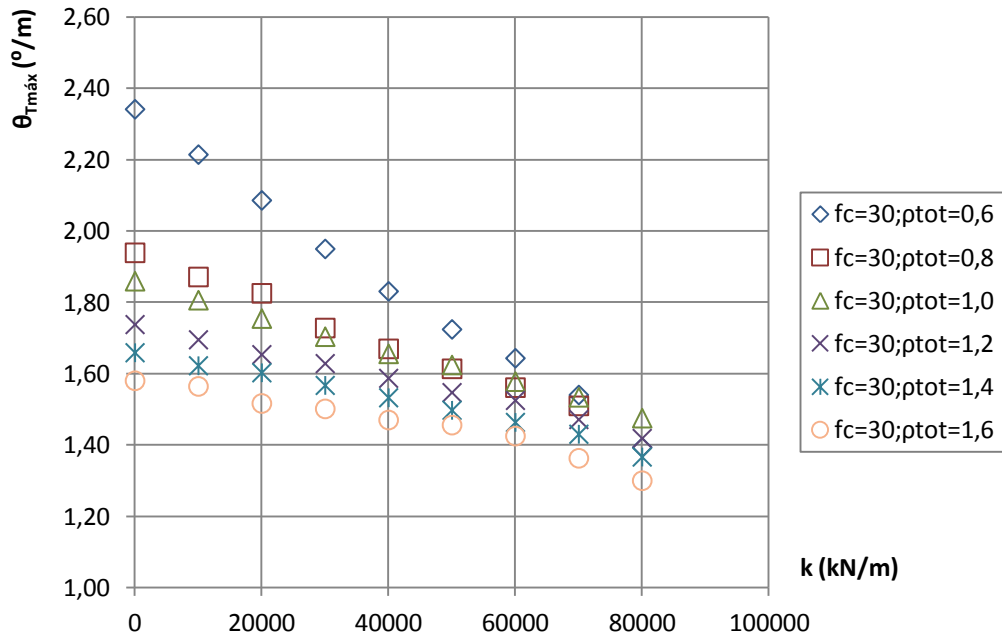


Figura III.5 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 30 MPa$ e ρ_{tot} variável

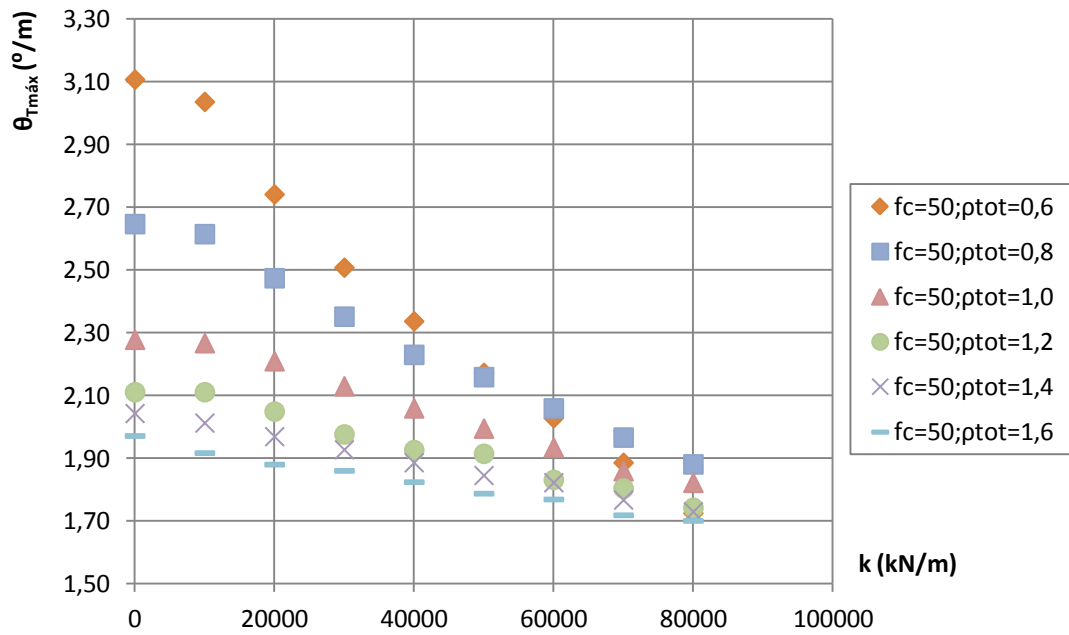


Figura III.6 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 50 MPa$ e ρ_{tot} variável

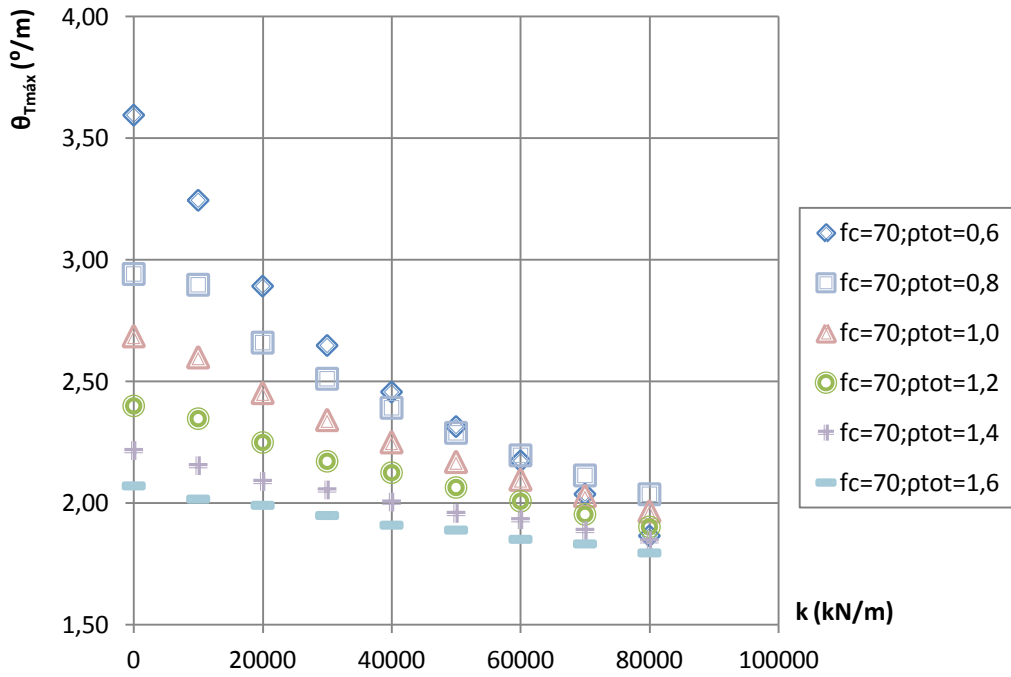


Figura III.7 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 70$ MPa e ρ_{tot} variável

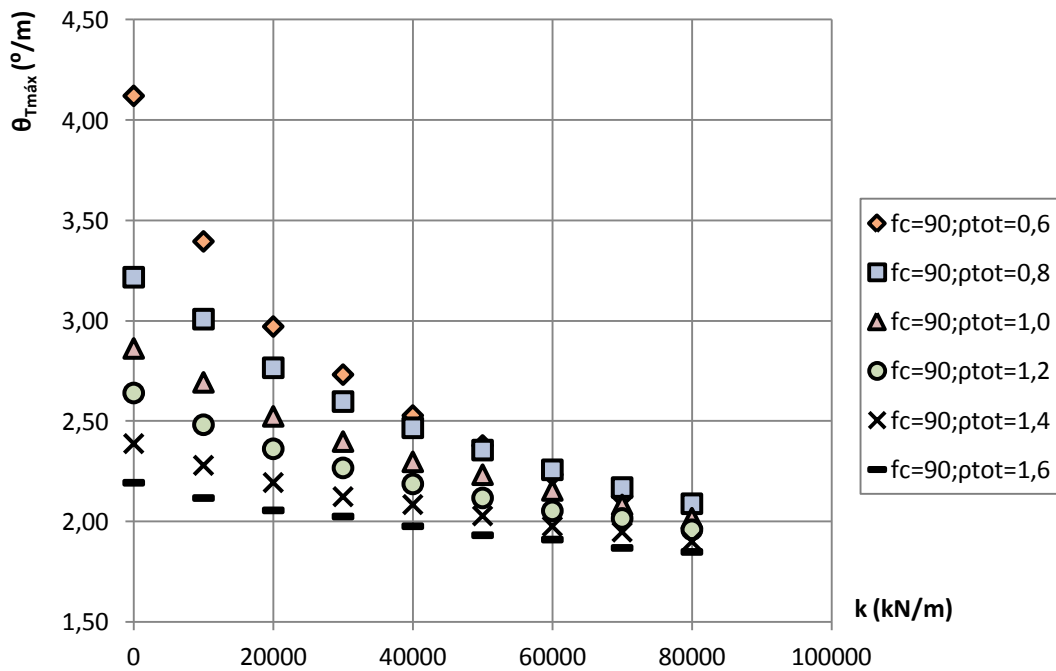


Figura III.8 - Rotação associada ao momento torsor máximo para $f_c = 90$ MPa e ρ_{tot} variável

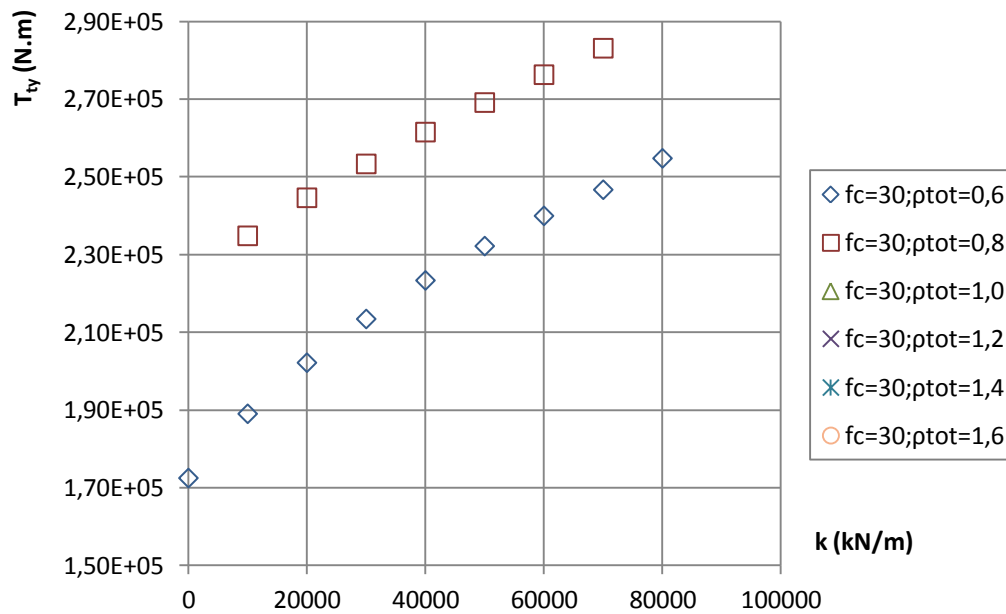


Figura III.9 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $f_c = 30 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

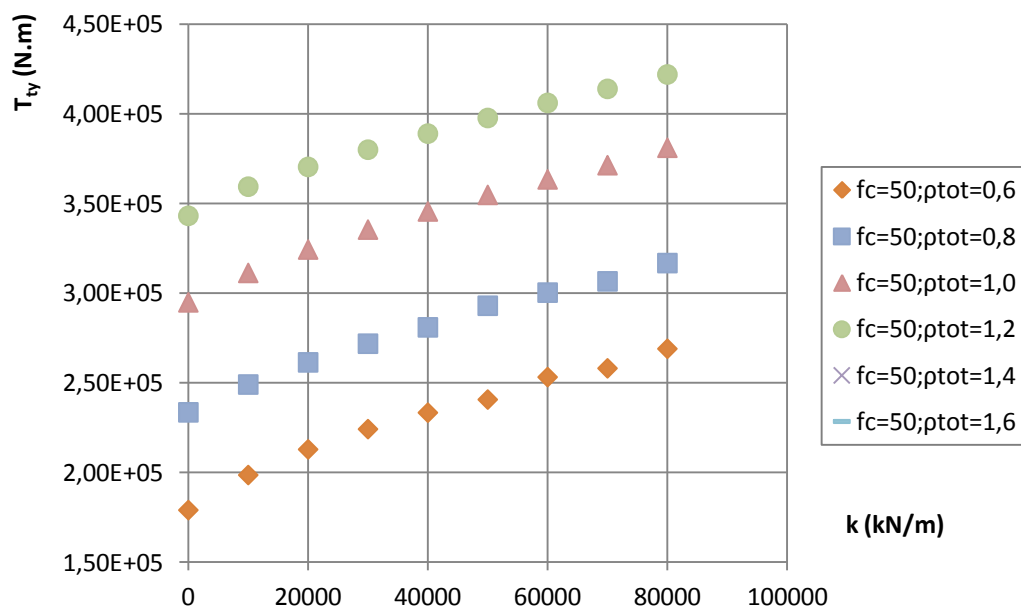


Figura III.10 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $f_c = 50 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

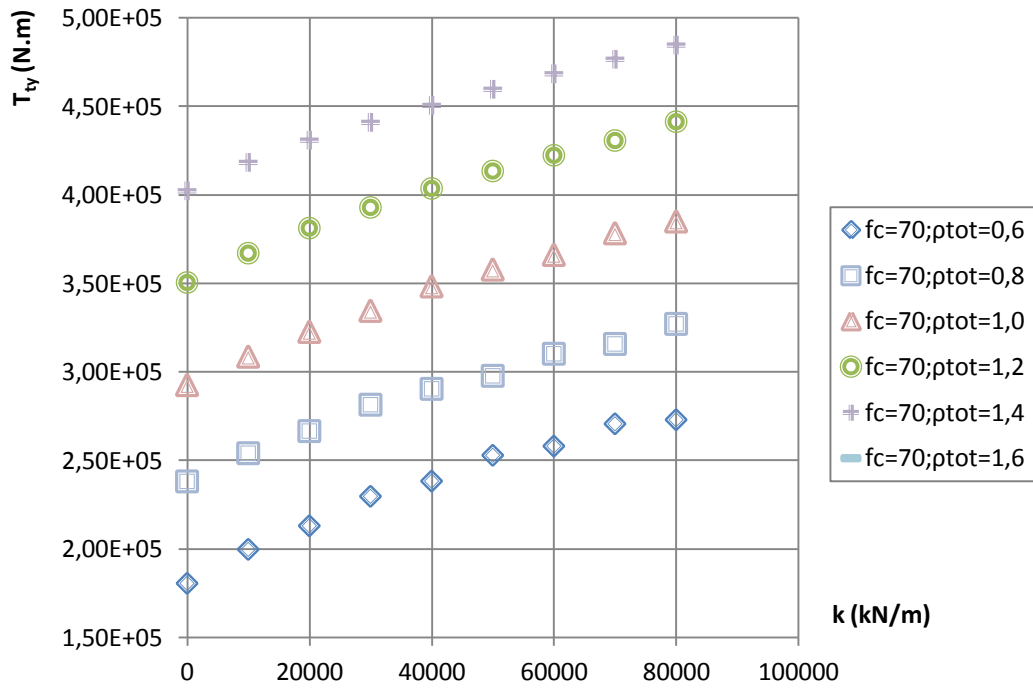


Figura III.11 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $f_c = 70 MPa$ e ρ_{tot} variável

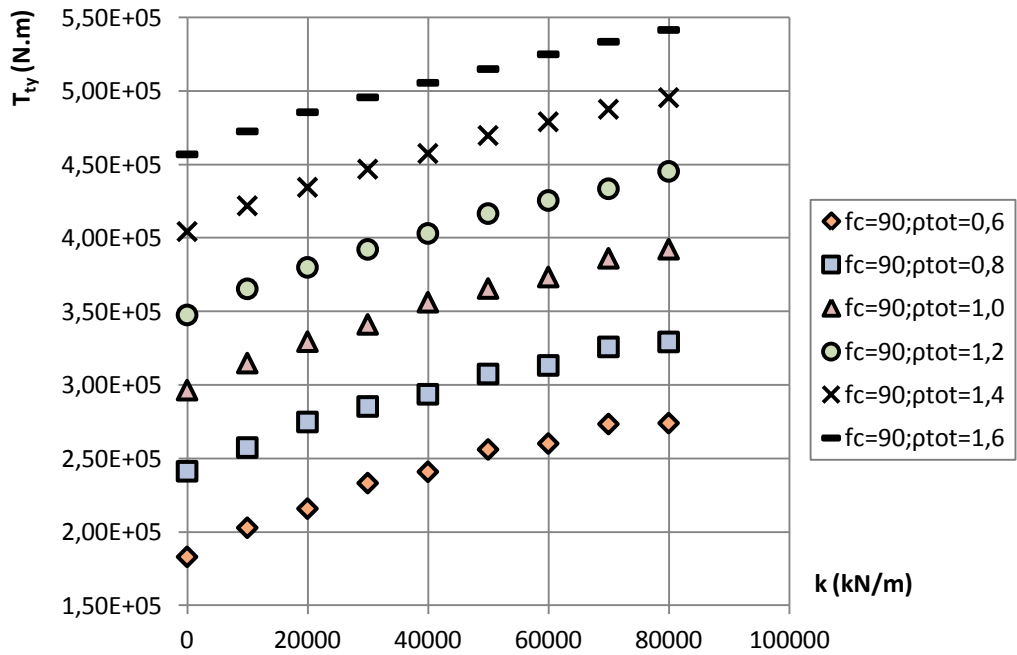


Figura III.12 - Momento torsor de cedência da armadura transversal para $f_c = 90 MPa$ e ρ_{tot} variável

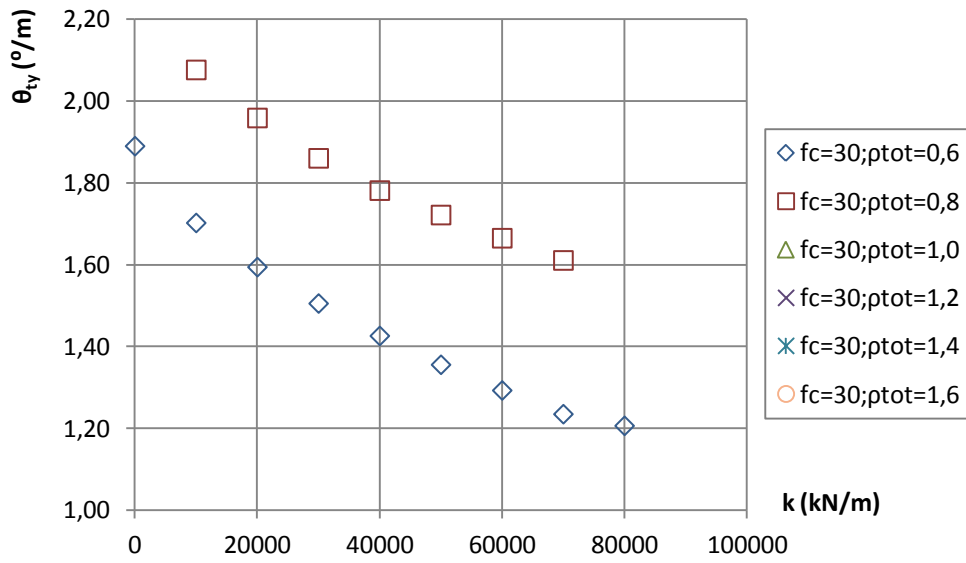


Figura III.13 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $f_c = 30 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

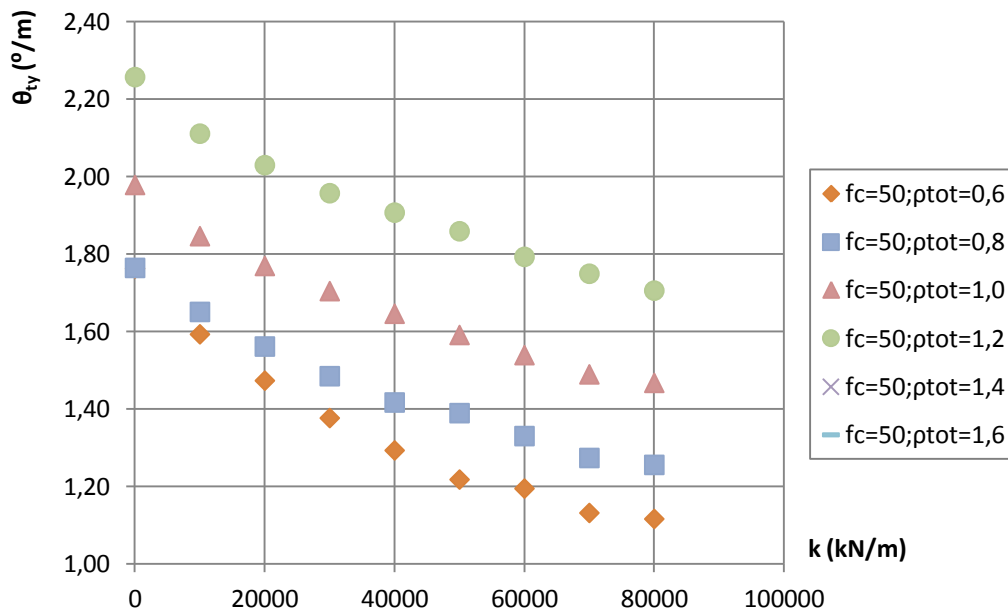


Figura III.14 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $f_c = 50 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

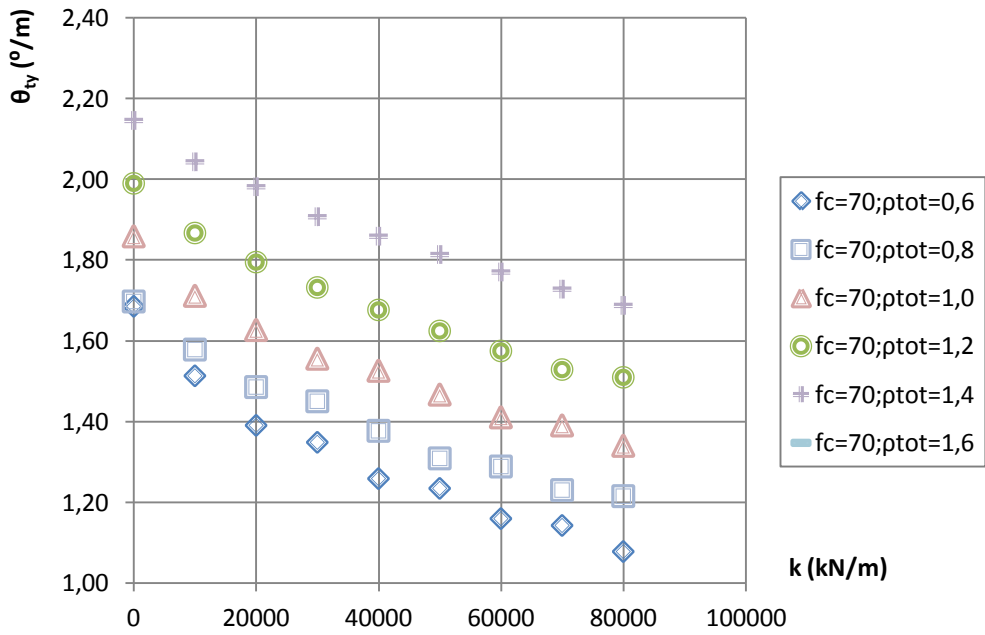


Figura III.15 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $f_c = 70 MPa$ e ρ_{tot} variável

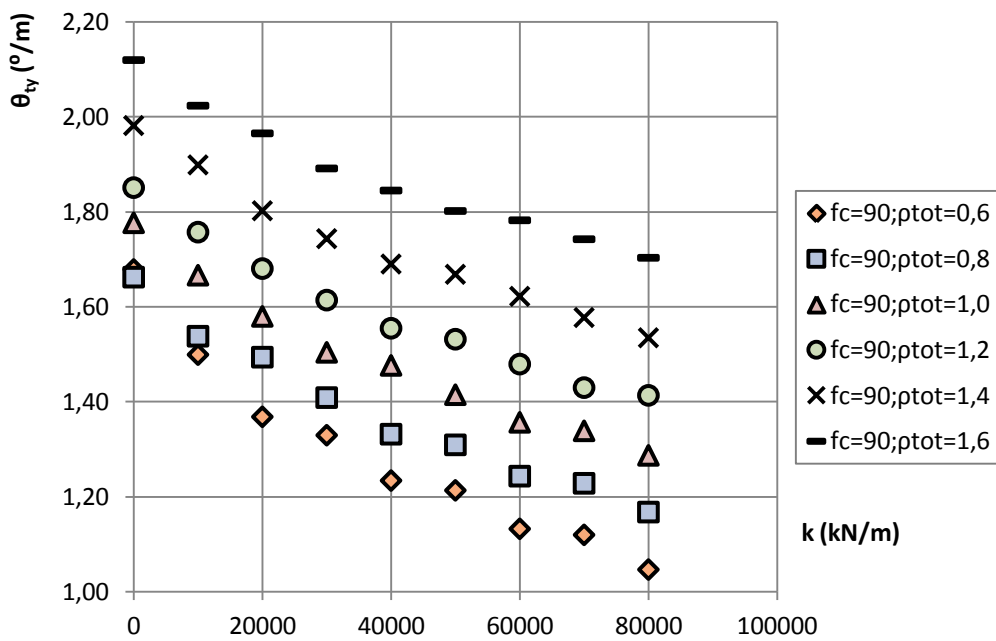


Figura III.16 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura transversal $f_c = 90 MPa$ e ρ_{tot} variável

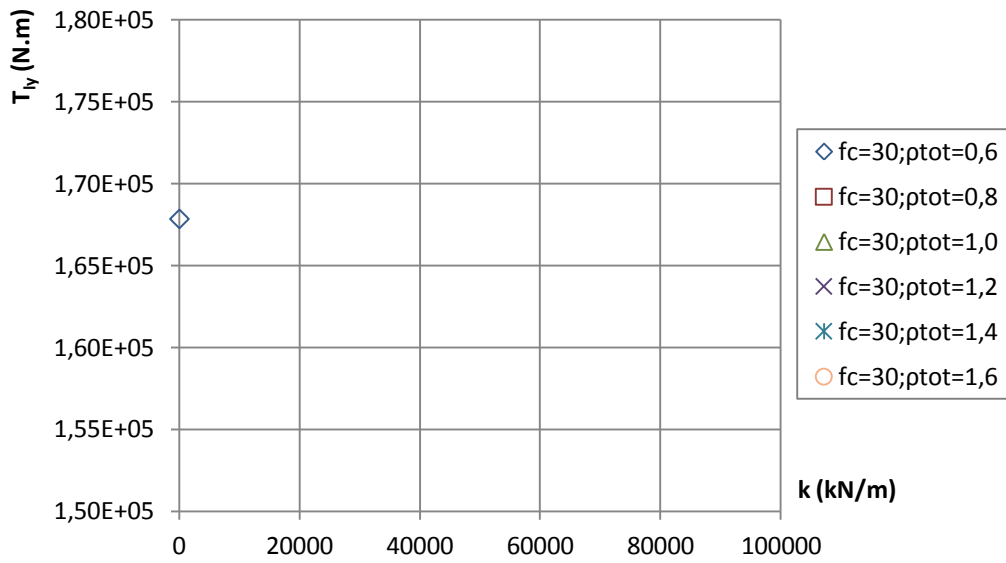


Figura III.17 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $f_c = 30$ MPa e ρ_{tot} variável

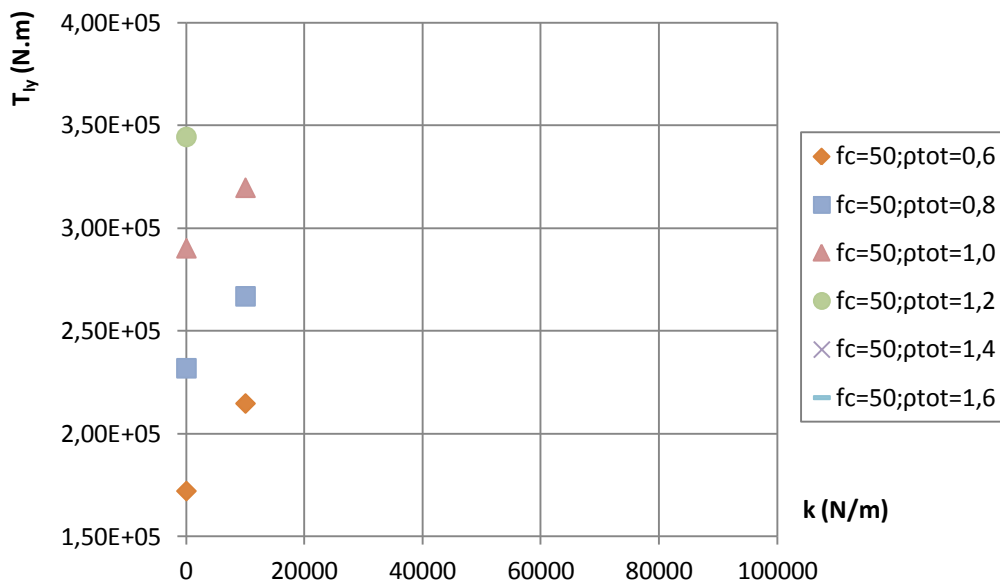


Figura III.18 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $f_c = 50$ MPa e ρ_{tot} variável

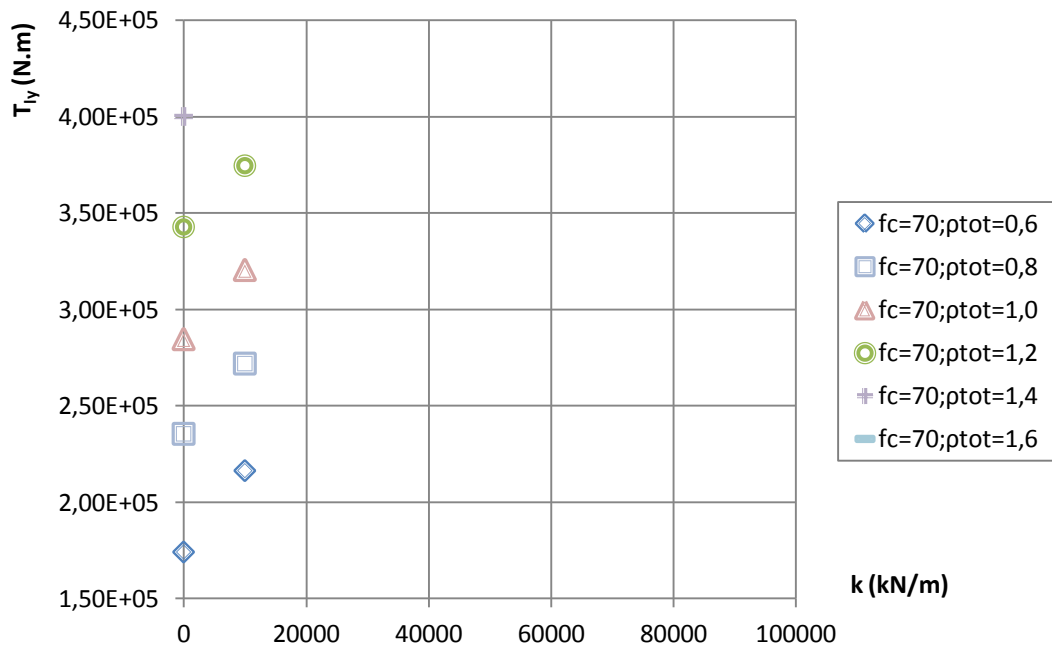


Figura III.19 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $f_c = 70 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

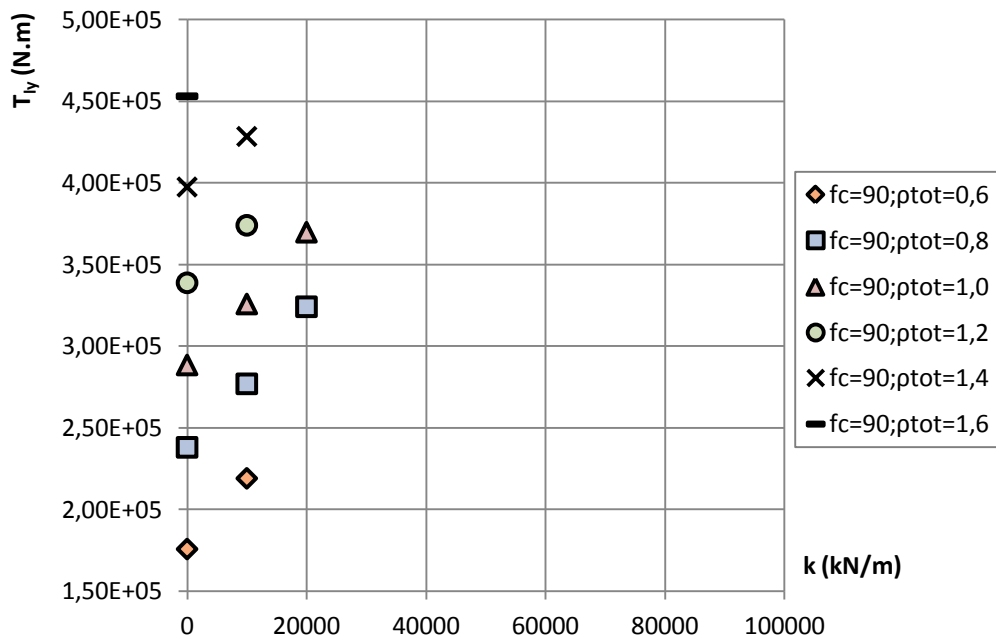


Figura III.20 - Momento torsor de cedência da armadura longitudinal para $f_c = 90 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

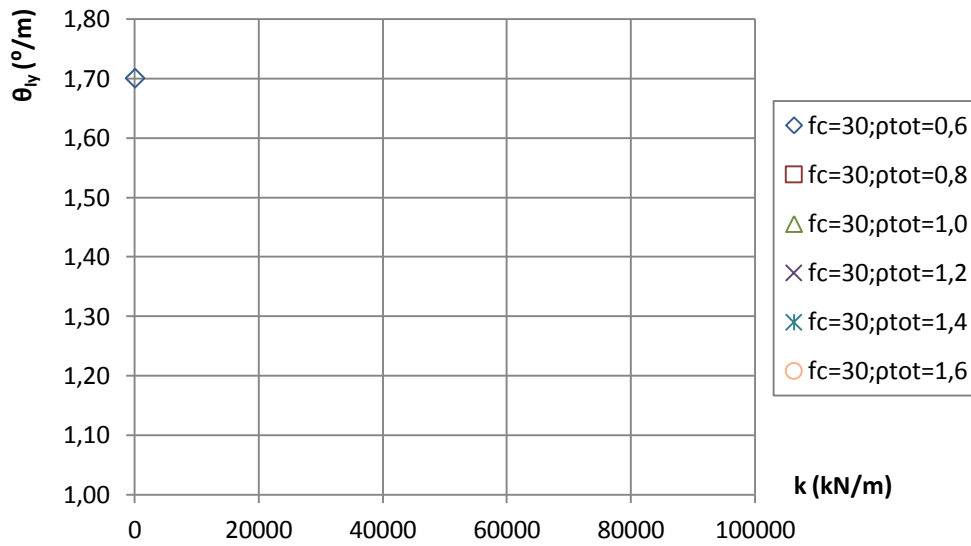


Figura III.21 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $f_c = 30 MPa$ e ρ_{tot} variável

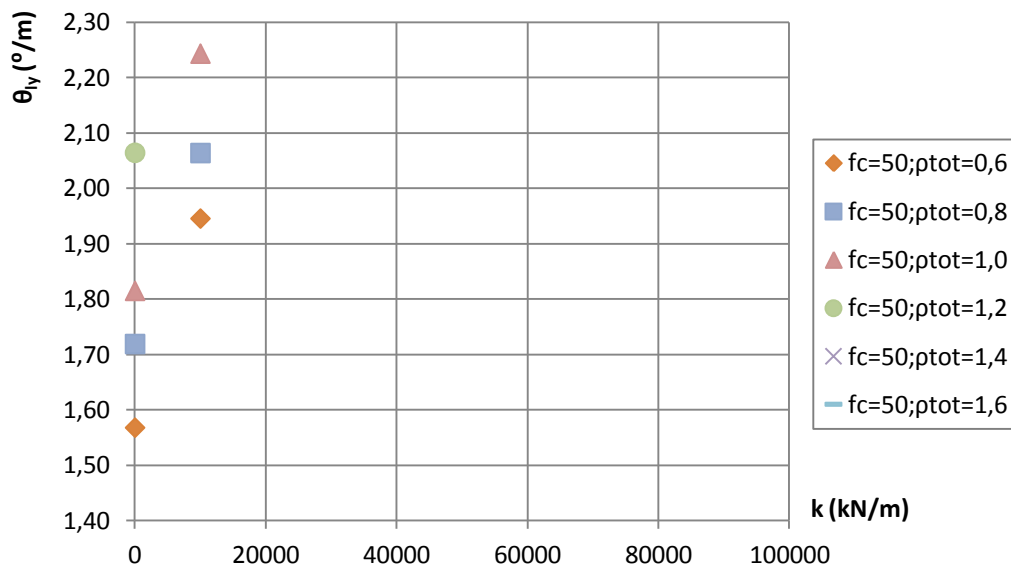


Figura III.22 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $f_c = 50 MPa$ e ρ_{tot} variável

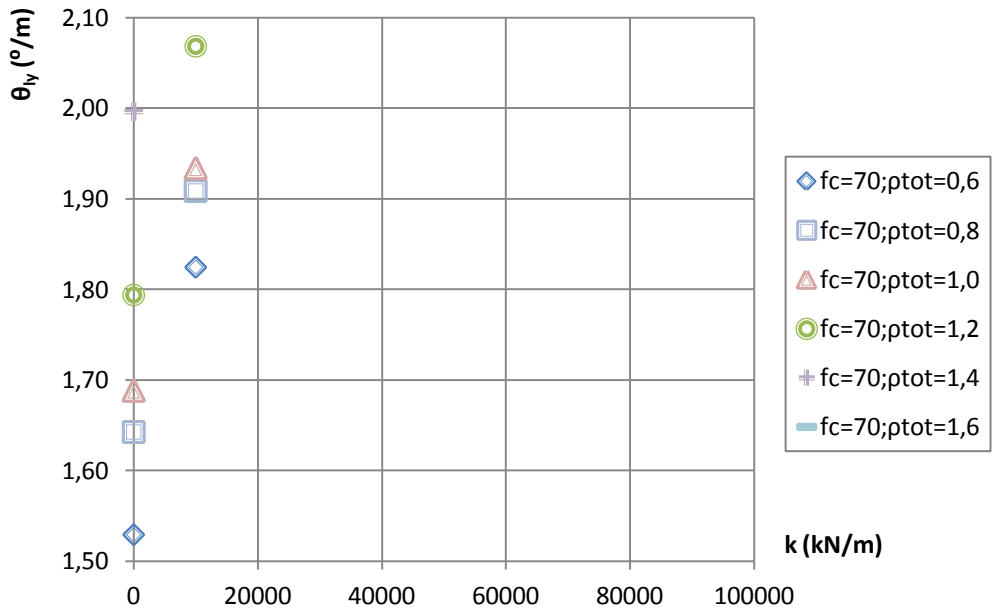


Figura III.23 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $f_c = 70 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

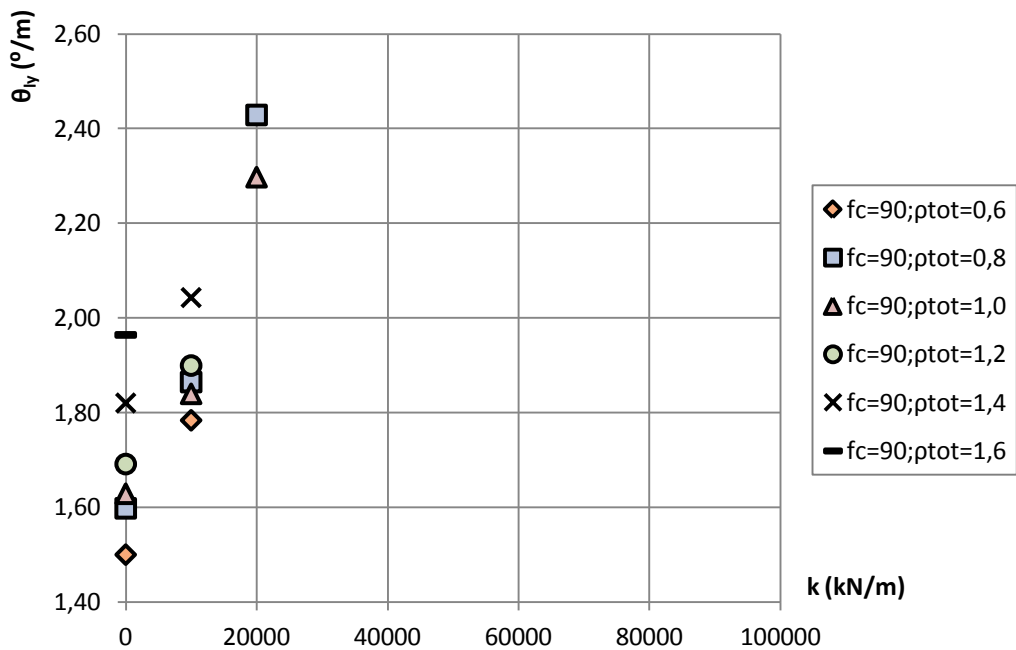


Figura III.24 - Rotação associada ao momento torsor de cedência da armadura longitudinal $f_c = 90 \text{ MPa}$ e ρ_{tot} variável

Anexo IV - Valores de C_{ca} utilizados na modelação do polinómio

Tabela IV.1 - Valores de C_{ca} para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=10000$ a 40000 kN/m)

$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}
10000;30;0,6	1,13	20000;30;0,6	1,22	30000;30;0,6	1,29	40000;30;0,6	1,35
10000;30;0,8	1,05	20000;30;0,8	1,08	30000;30;0,8	1,12	40000;30;0,8	1,16
10000;30;1,0	1,03	20000;30;1,0	1,06	30000;30;1,0	1,09	40000;30;1,0	1,12
10000;30;1,2	1,02	20000;30;1,2	1,05	30000;30;1,2	1,07	40000;30;1,2	1,09
10000;30;1,4	1,02	20000;30;1,4	1,04	30000;30;1,4	1,06	40000;30;1,4	1,08
10000;30;1,6	1,02	20000;30;1,6	1,03	30000;30;1,6	1,05	40000;30;1,6	1,06
10000;50;0,6	1,22	20000;50;0,6	1,36	30000;50;0,6	1,46	40000;50;0,6	1,54
10000;50;0,8	1,11	20000;50;0,8	1,19	30000;50;0,8	1,25	40000;50;0,8	1,30
10000;50;1,0	1,07	20000;50;1,0	1,13	30000;50;1,0	1,17	40000;50;1,0	1,21
10000;50;1,2	1,04	20000;50;1,2	1,08	30000;50;1,2	1,10	40000;50;1,2	1,13
10000;50;1,4	1,02	20000;50;1,4	1,04	30000;50;1,4	1,07	40000;50;1,4	1,09
10000;50;1,6	1,02	20000;50;1,6	1,04	30000;50;1,6	1,05	40000;50;1,6	1,07
10000;70;0,6	1,26	20000;70;0,6	1,43	30000;70;0,6	1,54	40000;70;0,6	1,63
10000;70;0,8	1,14	20000;70;0,8	1,24	30000;70;0,8	1,31	40000;70;0,8	1,37
10000;70;1,0	1,10	20000;70;1,0	1,17	30000;70;1,0	1,23	40000;70;1,0	1,28
10000;70;1,2	1,06	20000;70;1,2	1,11	30000;70;1,2	1,15	40000;70;1,2	1,19
10000;70;1,4	1,04	20000;70;1,4	1,08	30000;70;1,4	1,10	40000;70;1,4	1,13
10000;70;1,6	1,03	20000;70;1,6	1,05	30000;70;1,6	1,07	40000;70;1,6	1,09
10000;90;0,6	1,29	20000;90;0,6	1,47	30000;90;0,6	1,60	40000;90;0,6	1,69
10000;90;0,8	1,16	20000;90;0,8	1,27	30000;90;0,8	1,35	40000;90;0,8	1,42
10000;90;1,0	1,11	20000;90;1,0	1,20	30000;90;1,0	1,26	40000;90;1,0	1,32
10000;90;1,2	1,08	20000;90;1,2	1,14	30000;90;1,2	1,19	40000;90;1,2	1,23
10000;90;1,4	1,05	20000;90;1,4	1,10	30000;90;1,4	1,13	40000;90;1,4	1,17
10000;90;1,6	1,04	20000;90;1,6	1,07	30000;90;1,6	1,09	40000;90;1,6	1,12

Tabela IV.1 - Valores de C_{ca} para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=50000$ a 80000 kN/m)

$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}	$k; f_c; \rho_{tot}$	C_{ca}
50000;30;0,6	1,40	60000;30;0,6	1,45	70000;30;0,6	1,49	80000;30;0,6	1,51
50000;30;0,8	1,19	60000;30;0,8	1,22	70000;30;0,8	1,25	80000;30;0,8	1,28
50000;30;1,0	1,14	60000;30;1,0	1,17	70000;30;1,0	1,20	80000;30;1,0	1,22
50000;30;1,2	1,12	60000;30;1,2	1,14	70000;30;1,2	1,16	80000;30;1,2	1,18
50000;30;1,4	1,09	60000;30;1,4	1,11	70000;30;1,4	1,13	80000;30;1,4	1,15
50000;30;1,6	1,08	60000;30;1,6	1,10	70000;30;1,6	1,11	80000;30;1,6	1,12
50000;50;0,6	1,60	60000;50;0,6	1,66	70000;50;0,6	1,70	80000;50;0,6	1,73
50000;50;0,8	1,35	60000;50;0,8	1,39	70000;50;0,8	1,43	80000;50;0,8	1,46
50000;50;1,0	1,24	60000;50;1,0	1,27	70000;50;1,0	1,30	80000;50;1,0	1,33
50000;50;1,2	1,16	60000;50;1,2	1,18	70000;50;1,2	1,20	80000;50;1,2	1,23
50000;50;1,4	1,11	60000;50;1,4	1,13	70000;50;1,4	1,15	80000;50;1,4	1,16
50000;50;1,6	1,09	60000;50;1,6	1,10	70000;50;1,6	1,12	80000;50;1,6	1,14
50000;70;0,6	1,70	60000;70;0,6	1,76	70000;70;0,6	1,81	80000;70;0,6	1,84
50000;70;0,8	1,42	60000;70;0,8	1,47	70000;70;0,8	1,51	80000;70;0,8	1,55
50000;70;1,0	1,32	60000;70;1,0	1,36	70000;70;1,0	1,39	80000;70;1,0	1,42
50000;70;1,2	1,22	60000;70;1,2	1,25	70000;70;1,2	1,28	80000;70;1,2	1,30
50000;70;1,4	1,15	60000;70;1,4	1,17	70000;70;1,4	1,20	80000;70;1,4	1,22
50000;70;1,6	1,11	60000;70;1,6	1,12	70000;70;1,6	1,14	80000;70;1,6	1,16
50000;90;0,6	1,78	60000;90;0,6	1,84	70000;90;0,6	1,89	80000;90;0,6	1,92
50000;90;0,8	1,48	60000;90;0,8	1,53	70000;90;0,8	1,57	80000;90;0,8	1,61
50000;90;1,0	1,36	60000;90;1,0	1,41	70000;90;1,0	1,44	80000;90;1,0	1,48
50000;90;1,2	1,27	60000;90;1,2	1,30	70000;90;1,2	1,33	80000;90;1,2	1,36
50000;90;1,4	1,19	60000;90;1,4	1,22	70000;90;1,4	1,25	80000;90;1,4	1,27
50000;90;1,6	1,14	60000;90;1,6	1,16	70000;90;1,6	1,18	80000;90;1,6	1,20

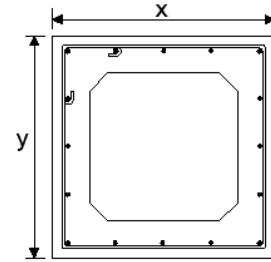
Anexo V - Polinómio para obtenção do valor de C_{ca}

$$\begin{aligned}
 & -9,161486 \times 10^{-1} + 1,501727 \times 10^{-1} \times fc - 4,569828 \times 10^{-3} \times fc^2 + 3,799306 \times 10^{-5} \times fc^3 + 1,036658 \times 10^1 \times \rho_{tot} - \\
 & 2,109204 \times 10^1 \times \rho_{tot}^2 + 2,019799 \times 10^1 \times \rho_{tot}^3 - 8,846418 \times \rho_{tot}^4 + 1,375796 \times \rho_{tot}^5 - 6,866878 \times 10^{-4} \times k + \\
 & 7,942326 \times 10^{-8} \times k^2 - 2,473994 \times 10^{-12} \times k^3 + 3,801938 \times 10^{-17} \times k^4 - 2,623171 \times 10^{-22} \times k^5 + 2,33322 \times 10^{-28} \times k^6 + \\
 & 3,640715 \times 10^{-33} \times k^7 - 7,637845 \times 10^{-1} \times fc \times \rho_{tot} + 2,173979 \times 10^{-2} \times fc^2 \times \rho_{tot} - 1,730889 \times 10^{-4} \times fc^3 \times \rho_{tot} + \\
 & 1,482847 \times fc \times \rho_{tot}^2 - 4,036036 \times 10^{-2} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 + 3,124799 \times 10^{-4} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 - 1,353276 \times fc \times \rho_{tot}^3 + \\
 & 3,568644 \times 10^{-2} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 - 2,717254 \times 10^{-4} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 + 5,610716 \times 10^{-1} \times fc \times \rho_{tot}^4 - \\
 & 1,456589 \times 10^{-2} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 + 1,105136 \times 10^{-4} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 - 8,114493 \times 10^{-2} \times fc \times \rho_{tot}^5 + 2,124978 \times 10^{-3} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \\
 & - 1,637735 \times 10^{-5} \times fc^3 \times \rho_{tot}^5 + 4,377308 \times 10^{-5} \times fc \times k - 2,664230 \times 10^{-7} \times fc^2 \times k - 1,463817 \times 10^{-9} \times fc^3 \times k - \\
 & 4,256067 \times 10^{-9} \times fc \times k^2 + 4,785599 \times 10^{-11} \times fc^2 \times k^2 - 7,452314 \times 10^{-14} \times fc^3 \times k^2 + 1,324594 \times 10^{-13} \times fc \times k^3 - \\
 & 1,579884 \times 10^{-15} \times fc^2 \times k^3 + 2,053817 \times 10^{-18} \times fc^3 \times k^3 - 2,161956 \times 10^{-18} \times fc \times k^4 + 2,638414 \times 10^{-20} \times fc^2 \times k^4 - \\
 & 6,389440 \times 10^{-24} \times fc^3 \times k^4 + 1,737981 \times 10^{-23} \times fc \times k^5 - 1,979367 \times 10^{-25} \times fc^2 \times k^5 - 6,179818 \times 10^{-28} \times fc^3 \times k^5 - \\
 & 4,083160 \times 10^{-29} \times fc \times k^6 + 7,686983 \times 10^{-32} \times fc^2 \times k^6 + 1,095386 \times 10^{-32} \times fc^3 \times k^6 - 1,314154 \times 10^{-34} \times fc \times k^7 + \\
 & 4,453776 \times 10^{-36} \times fc^2 \times k^7 - 5,637057 \times 10^{-38} \times fc^3 \times k^7 + 2,925750 \times 10^{-3} \times \rho_{tot} \times k - 4,923963 \times 10^{-3} \times \rho_{tot}^2 \times k + \\
 & 3,92803 \times 10^{-3} \times \rho_{tot}^3 \times k - 1,526744 \times 10^{-3} \times \rho_{tot}^4 \times k + 2,443583 \times 10^{-4} \times \rho_{tot}^5 \times k - 3,279485 \times 10^{-7} \times \rho_{tot} \times k^2 + \\
 & 5,084159 \times 10^{-7} \times \rho_{tot}^2 \times k^2 - 3,640894 \times 10^{-7} \times \rho_{tot}^3 \times k^2 + 1,248950 \times 10^{-7} \times \rho_{tot}^4 \times k^2 - \\
 & 1,772423 \times 10^{-8} \times \rho_{tot}^5 \times k^2 + 9,745073 \times 10^{-12} \times \rho_{tot} \times k^3 - 1,407151 \times 10^{-11} \times \rho_{tot}^2 \times k^3 + 9,02182 \times 10^{-12} \times \rho_{tot}^3 \times k^3 - \\
 & 2,6998 \times 10^{-12} \times \rho_{tot}^4 \times k^3 + 3,562487 \times 10^{-13} \times \rho_{tot}^5 \times k^3 - 1,4307 \times 10^{-16} \times \rho_{tot} \times k^4 + 1,92146 \times 10^{-16} \times \rho_{tot}^2 \times k^4 - \\
 & 1,056056 \times 10^{-16} \times \rho_{tot}^3 \times k^4 + 2,448916 \times 10^{-17} \times \rho_{tot}^4 \times k^4 - 2,979224 \times 10^{-18} \times \rho_{tot}^5 \times k^4 + \\
 & 9,595955 \times 10^{-22} \times \rho_{tot} \times k^5 - 1,205216 \times 10^{-21} \times \rho_{tot}^2 \times k^5 + 4,881200 \times 10^{-22} \times \rho_{tot}^3 \times k^5 - \\
 & 3,21053 \times 10^{-23} \times \rho_{tot}^4 \times k^5 + 4,3583 \times 10^{-24} \times \rho_{tot}^5 \times k^5 - 1,098347 \times 10^{-27} \times \rho_{tot} \times k^6 + 1,58962 \times 10^{-27} \times \rho_{tot}^2 \times k^6 + \\
 & 2,518981 \times 10^{-28} \times \rho_{tot}^3 \times k^6 - 5,560036 \times 10^{-28} \times \rho_{tot}^4 \times k^6 - 1,017335 \times 10^{-32} \times \rho_{tot} \times k^7 + \\
 & 7,9258 \times 10^{-33} \times \rho_{tot}^2 \times k^7 - 3,30586 \times 10^{-33} \times \rho_{tot}^3 \times k^7 + 5,98577 \times 10^{-34} \times \rho_{tot}^4 \times k^7 - 1,79301 \times 10^{-4} \times fc \times \rho_{tot} \times k + \\
 & 1,031172 \times 10^{-6} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k + 6,130644 \times 10^{-9} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k + 2,906967 \times 10^{-4} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k \\
 & - 1,444154 \times 10^{-6} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k - 1,166360 \times 10^{-8} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k - 2,276828 \times 10^{-4} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k + \\
 & 8,991481 \times 10^{-7} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k + 1,120171 \times 10^{-8} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 \times k + 8,957433 \times 10^{-5} \times fc \times \rho_{tot}^4 \times k - \\
 & 3,162820 \times 10^{-7} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k - 4,688066 \times 10^{-9} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k - 1,498823 \times 10^{-5} \times fc \times \rho_{tot}^5 \times k + \\
 & 6,938384 \times 10^{-8} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k + 5,962239 \times 10^{-10} \times fc^3 \times \rho_{tot}^5 \times k + 1,705860 \times 10^{-8} \times fc \times \rho_{tot} \times k^2 - \\
 & 1,931502 \times 10^{-10} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^2 + 3,668327 \times 10^{-13} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^2 - 2,536513 \times 10^{-8} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k^2 + \\
 & 2,725668 \times 10^{-10} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^2 - 4,386883 \times 10^{-13} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^2 + 1,733130 \times 10^{-8} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k^2 - \\
 & 1,675776 \times 10^{-10} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k^2 + 1,195851 \times 10^{-13} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 \times k^2 - 5,753039 \times 10^{-9} \times fc \times \rho_{tot}^4 \times k^2 + \\
 & 5,028207 \times 10^{-11} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k^2 + 1,304731 \times 10^{-14} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k^2 + 8,311925 \times 10^{-10} \times fc \times \rho_{tot}^5 \times k^2 - \\
 & 7,723710 \times 10^{-12} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k^2 + 3,744436 \times 10^{-15} \times fc^3 \times \rho_{tot}^5 \times k^2 - 5,017832 \times 10^{-13} \times fc \times \rho_{tot} \times k^3 + \\
 & 6,150660 \times 10^{-15} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^3 - 1,160176 \times 10^{-17} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^3 + 6,774897 \times 10^{-13} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k^3 - \\
 & 7,931859 \times 10^{-15} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^3 + 1,268545 \times 10^{-17} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^3 - 3,922849 \times 10^{-13} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k^3 + \\
 & 4,022432 \times 10^{-15} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k^3 - 6,909297 \times 10^{-19} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 \times k^3 + 1,042317 \times 10^{-13} \times fc \times \rho_{tot}^4 \times k^3 - \\
 & 9,055363 \times 10^{-16} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k^3 - 1,996375 \times 10^{-18} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k^3 - 1,367313 \times 10^{-14} \times fc \times \rho_{tot}^5 \times k^3 + \\
 & 1,454007 \times 10^{-16} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k^3 + 7,856253 \times 10^{-18} \times fc \times \rho_{tot} \times k^4 - 1,041936 \times 10^{-19} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^4 + \\
 & 1,533884 \times 10^{-22} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^4 - 9,735416 \times 10^{-18} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k^4 + 1,292605 \times 10^{-19} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1,845732 \times 10^{-22} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^4 + 4,548471 \times 10^{-18} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k^4 - 5,545796 \times 10^{-20} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k^4 - \\
& 2,569036 \times 10^{-23} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 \times k^4 - 7,622297 \times 10^{-19} \times fc \times \rho_{tot}^4 \times k^4 + 8,345118 \times 10^{-21} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k^4 + \\
& 5,134934 \times 10^{-23} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k^4 + 8,824149 \times 10^{-20} \times fc \times \rho_{tot}^5 \times k^4 - 1,707875 \times 10^{-21} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k^4 - \\
& 4,001638 \times 10^{-25} \times fc^3 \times \rho_{tot}^5 \times k^4 - 6,313692 \times 10^{-23} \times fc \times \rho_{tot} \times k^5 + 8,974678 \times 10^{-25} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^5 - \\
& 3,308564 \times 10^{-28} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^5 + 7,460311 \times 10^{-23} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k^5 - 1,175045 \times 10^{-24} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^5 + \\
& 1,431191 \times 10^{-27} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^5 - 2,627608 \times 10^{-23} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k^5 + 4,626309 \times 10^{-25} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k^5 + \\
& 2,066081 \times 10^{-28} \times fc^3 \times \rho_{tot}^3 \times k^5 - 4,144976 \times 10^{-26} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k^5 - 4,897283 \times 10^{-28} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k^5 + \\
& 1,285864 \times 10^{-26} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k^5 + 1,794499 \times 10^{-28} \times fc \times \rho_{tot} \times k^6 - 2,386625 \times 10^{-30} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^6 - \\
& 1,364168 \times 10^{-32} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^6 - 2,333382 \times 10^{-28} \times fc \times \rho_{tot}^2 \times k^6 + 4,392428 \times 10^{-30} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^6 - \\
& 7,387047 \times 10^{-34} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^6 + 5,295004 \times 10^{-29} \times fc \times \rho_{tot}^3 \times k^6 - 1,692346 \times 10^{-30} \times fc^2 \times \rho_{tot}^3 \times k^6 + \\
& 2,044321 \times 10^{-29} \times fc \times \rho_{tot}^4 \times k^6 + 1,709090 \times 10^{-33} \times fc^3 \times \rho_{tot}^4 \times k^6 - 4,032233 \times 10^{-32} \times fc^2 \times \rho_{tot}^5 \times k^6 + \\
& 2,252463 \times 10^{-34} \times fc \times \rho_{tot} \times k^7 - 6,862894 \times 10^{-36} \times fc^2 \times \rho_{tot} \times k^7 + 1,014675 \times 10^{-37} \times fc^3 \times \rho_{tot} \times k^7 + \\
& 4,921212 \times 10^{-37} \times fc^2 \times \rho_{tot}^2 \times k^7 - 3,907543 \times 10^{-38} \times fc^3 \times \rho_{tot}^2 \times k^7 + 7,099153 \times 10^{-37} \times fc^2 \times \rho_{tot}^4 \times k^7 - \\
& 2,118765 \times 10^{-35} \times fc \times \rho_{tot}^5 \times k^7
\end{aligned}$$

Anexo VI - Ábacos auxiliares para a obtenção dos valores C_{ca}

ÁBACO
TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
Secção Retangular



$f_c=30$ MPa

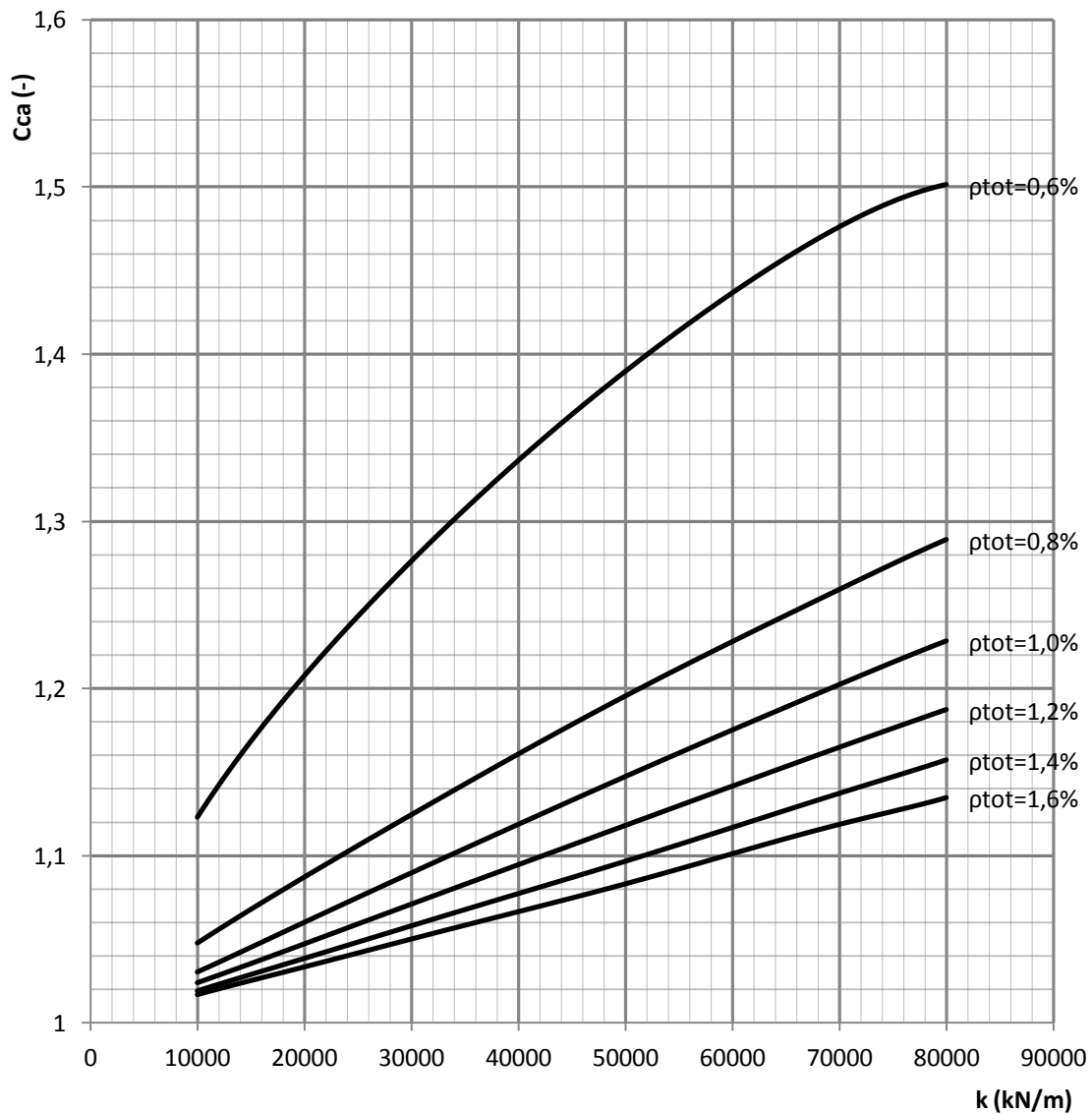
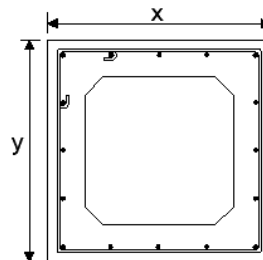


Figura VI.1 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 30 MPa

ÁBACO
 TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
 Secção Retangular



$f_c = 50 \text{ MPa}$

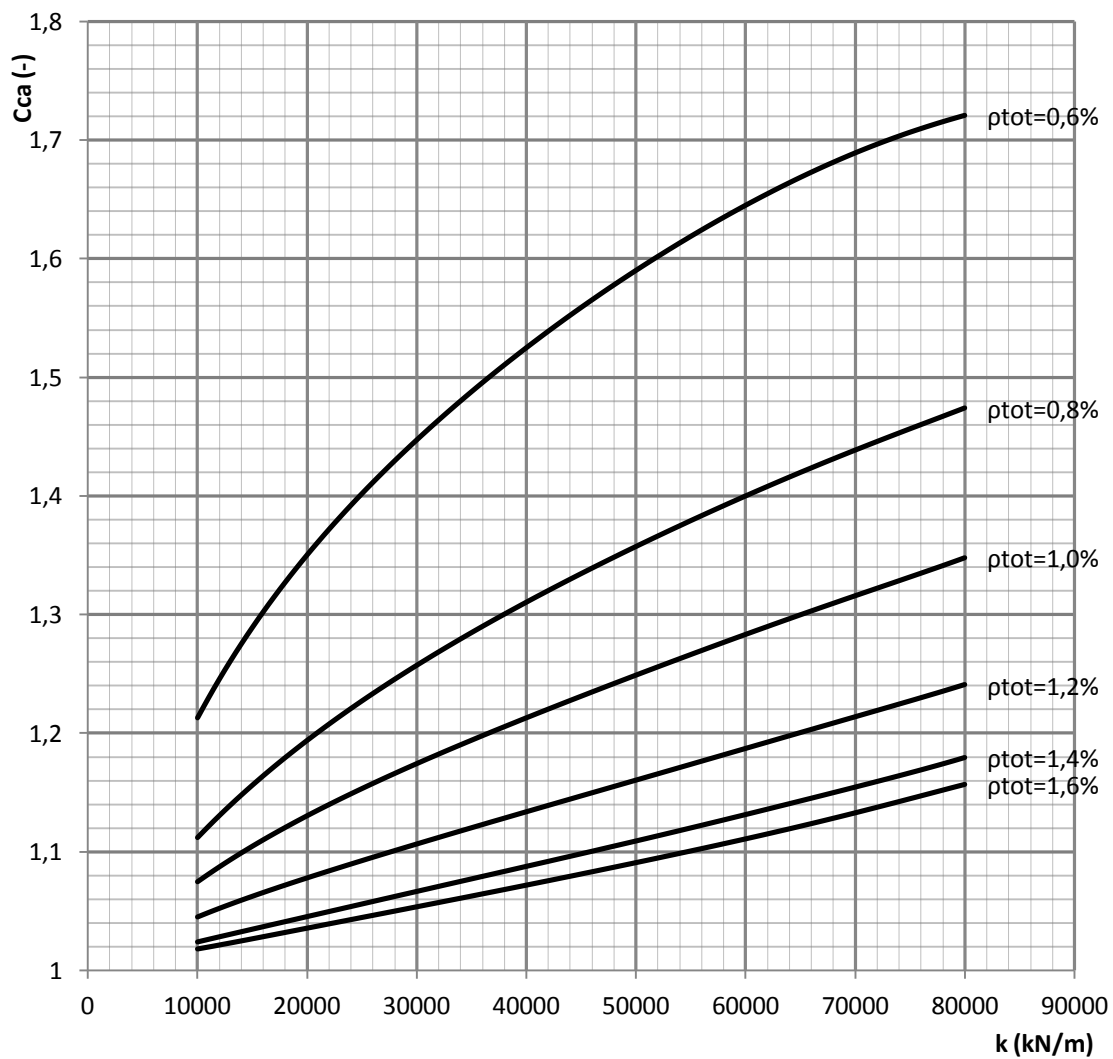


Figura VI.2 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 50 MPa

ÁBACO
 TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
 Secção Retangular

$f_c=70$ MPa

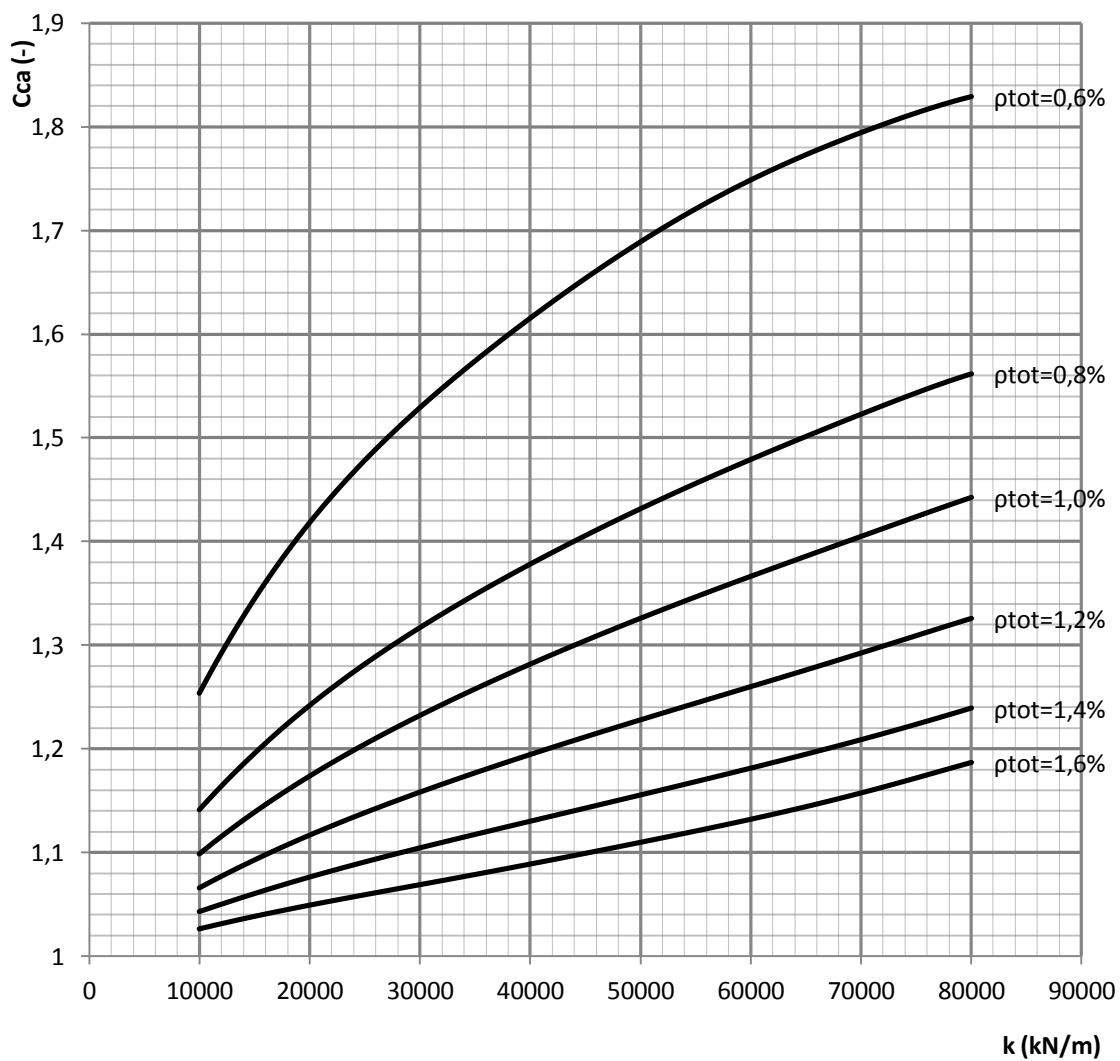
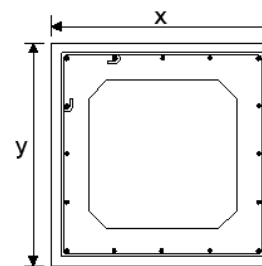
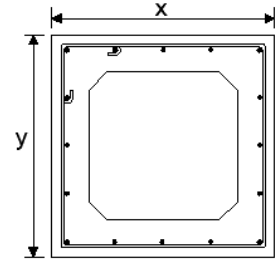


Figura VI.3 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 70 MPa

ÁBACO
 TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
 Secção Retangular



$f_c=90$ MPa

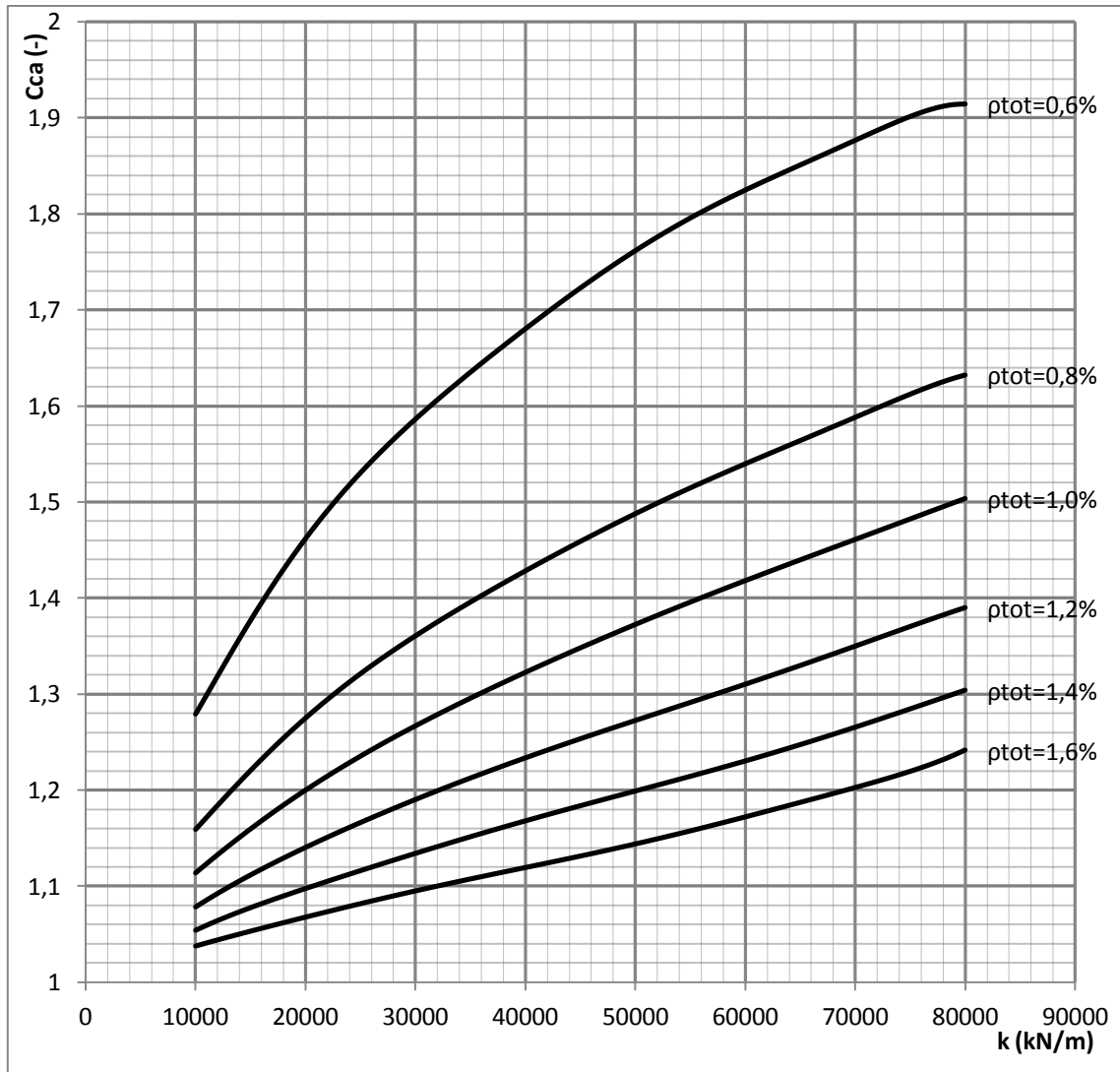


Figura VI.4 - Ábaco - confinamento axial para uma resistência do betão à compressão de 90 MPa

Anexo VII - Valores para correção de C_{ca} para vãos de 2, 4, 6, 8 e 10 metros

Tabela VII.1 - Valores de $C_{ca,corr}$ para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=10000$ e 20000 kN/m)

k;f _c ;ρ _{tot}	C _{ca,corr}					
	l=2,00	l=4,00	l=5,90	l=6,00	l=8,00	l=10,00
10000;30;0,6	1,05	1,09	1,13	1,13	1,16	1,19
10000;30;0,8	1,02	1,03	1,05	1,05	1,06	1,07
10000;30;1,2	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,04
10000;30;1,6	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03
10000;50;0,6	1,08	1,16	1,22	1,22	1,28	1,32
10000;50;0,8	1,04	1,08	1,11	1,11	1,14	1,17
10000;50;1,0	1,05	1,05	1,07	1,07	1,09	1,11
10000;50;1,4	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,04
10000;50;1,6	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03
10000;70;0,6	1,10	1,19	1,26	1,26	1,33	1,39
10000;70;1,0	1,04	1,07	1,10	1,10	1,12	1,15
10000;70;1,4	1,02	1,03	1,04	1,04	1,06	1,07
10000;70;1,6	1,01	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
10000;90;0,6	1,11	1,21	1,29	1,29	1,36	1,43
10000;90;0,8	1,06	1,11	1,16	1,16	1,20	1,24
10000;90;1,2	1,03	1,05	1,08	1,08	1,10	1,12
10000;90;1,6	1,01	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06
20000;30;0,6	1,09	1,16	1,22	1,22	1,27	1,31
20000;30;0,8	1,03	1,06	1,08	1,09	1,11	1,14
20000;30;1,2	1,02	1,03	1,05	1,05	1,06	1,08
20000;30;1,6	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,06
20000;50;0,8	1,08	1,14	1,19	1,19	1,23	1,27
20000;50;1,0	1,05	1,09	1,13	1,13	1,16	1,18
20000;50;1,4	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07
20000;50;1,6	1,01	1,02	1,04	1,04	1,05	1,06
20000;70;0,6	1,19	1,33	1,43	1,43	1,51	1,58
20000;70;1,0	1,07	1,12	1,17	1,17	1,21	1,25
20000;70;1,4	1,03	1,06	1,08	1,08	1,10	1,11
20000;70;1,6	1,02	1,03	1,05	1,05	1,06	1,08
20000;90;0,6	1,21	1,36	1,47	1,48	1,57	1,64
20000;90;0,8	1,11	1,20	1,27	1,27	1,33	1,38
20000;90;1,2	1,05	1,10	1,14	1,14	1,17	1,20
20000;90;1,6	1,03	1,05	1,07	1,07	1,09	1,10

Tabela VII.2 - Valores de $C_{ca,corr}$ para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=30000$ e 40000 kN/m)

$k; f_c; \rho_{tot}$	Cca					
	$l=2,00$	$l=4,00$	$l=5,90$	$l=6,00$	$l=8,00$	$l=10,00$
30000;30;0,6	1,13	1,22	1,29	1,29	1,35	1,41
30000;30;0,8	1,05	1,09	1,12	1,12	1,16	1,19
30000;30;1,2	1,02	1,05	1,07	1,07	1,09	1,12
30000;30;1,6	1,02	1,03	1,05	1,05	1,07	1,08
30000;50;0,6	1,22	1,36	1,46	1,46	1,54	1,61
30000;50;1,0	1,07	1,13	1,17	1,17	1,21	1,24
30000;50;1,2	1,04	1,08	1,10	1,10	1,13	1,16
30000;50;1,6	1,02	1,04	1,05	1,05	1,07	1,09
30000;70;0,8	1,14	1,24	1,31	1,31	1,37	1,43
30000;70;1,2	1,07	1,12	1,15	1,16	1,19	1,22
30000;70;1,4	1,04	1,08	1,10	1,10	1,13	1,15
30000;70;1,6	1,03	1,05	1,07	1,07	1,09	1,11
30000;90;0,6	1,29	1,48	1,60	1,60	1,70	1,78
30000;90;1,0	1,11	1,20	1,26	1,26	1,32	1,37
30000;90;1,4	1,05	1,10	1,13	1,13	1,17	1,20
30000;90;1,6	1,04	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14
40000;30;0,6	1,16	1,27	1,35	1,35	1,42	1,48
40000;30;1,0	1,04	1,08	1,12	1,12	1,16	1,19
40000;30;1,4	1,03	1,05	1,08	1,08	1,10	1,13
40000;30;1,6	1,02	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11
40000;50;0,6	1,28	1,43	1,54	1,54	1,63	1,69
40000;50;1,2	1,06	1,10	1,13	1,13	1,17	1,20
40000;50;1,4	1,03	1,06	1,09	1,09	1,12	1,14
40000;50;1,6	1,02	1,05	1,07	1,07	1,09	1,12
40000;70;0,8	1,18	1,29	1,37	1,37	1,44	1,50
40000;70;1,2	1,08	1,14	1,19	1,19	1,23	1,27
40000;70;1,4	1,06	1,10	1,13	1,13	1,16	1,19
40000;70;1,6	1,03	1,06	1,09	1,09	1,11	1,14
40000;90;0,6	1,36	1,57	1,69	1,70	1,80	1,88
40000;90;1,0	1,14	1,25	1,32	1,32	1,38	1,44
40000;90;1,2	1,10	1,17	1,23	1,23	1,28	1,32
40000;90;1,6	1,05	1,09	1,12	1,12	1,15	1,17

Tabela VII.3 - Valores de $C_{ca,corr}$ para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=50000$ e 60000 kN/m)

k;f _c ;ρ _{tot}	C _{ca}					
	l=2,00	l=4,00	l=5,90	l=6,00	l=8,00	l=10,00
50000;30;0,6	1,19	1,31	1,40	1,41	1,48	1,52
50000;30;1,0	1,05	1,10	1,14	1,15	1,19	1,23
50000;30;1,4	1,03	1,06	1,09	1,10	1,13	1,15
50000;30;1,6	1,03	1,06	1,08	1,08	1,11	1,13
50000;50;0,8	1,17	1,27	1,35	1,35	1,42	1,48
50000;50;1,0	1,11	1,18	1,24	1,24	1,30	1,35
50000;50;1,2	1,07	1,11	1,16	1,16	1,20	1,24
50000;50;1,6	1,03	1,06	1,09	1,09	1,12	1,15
50000;70;0,6	1,39	1,58	1,70	1,71	1,80	1,85
50000;70;0,8	1,21	1,34	1,42	1,43	1,50	1,56
50000;70;1,2	1,10	1,17	1,22	1,22	1,27	1,32
50000;70;1,6	1,04	1,08	1,11	1,11	1,14	1,17
50000;90;0,6	1,43	1,64	1,78	1,78	1,88	1,94
50000;90;1,0	1,17	1,28	1,36	1,37	1,44	1,49
50000;90;1,4	1,08	1,15	1,19	1,20	1,24	1,28
50000;90;1,6	1,06	1,10	1,14	1,14	1,17	1,21
60000;30;0,6	1,22	1,35	1,45	1,45	1,52	1,52
60000;30;0,8	1,09	1,16	1,22	1,23	1,28	1,32
60000;30;1,2	1,05	1,09	1,14	1,14	1,18	1,20
60000;30;1,6	1,03	1,07	1,10	1,10	1,12	1,13
60000;50;0,8	1,19	1,31	1,39	1,39	1,46	1,52
60000;50;1,2	1,08	1,13	1,18	1,18	1,23	1,27
60000;50;1,4	1,05	1,09	1,13	1,13	1,17	1,20
60000;50;1,6	1,04	1,07	1,10	1,11	1,14	1,17
60000;70;0,6	1,43	1,64	1,76	1,77	1,84	1,88
60000;70;0,8	1,24	1,37	1,47	1,47	1,55	1,61
60000;70;1,0	1,17	1,28	1,36	1,36	1,43	1,48
60000;70;1,4	1,08	1,13	1,17	1,18	1,22	1,26
60000;90;0,6	1,48	1,70	1,84	1,85	1,93	1,97
60000;90;0,8	1,27	1,43	1,53	1,53	1,62	1,68
60000;90;1,2	1,14	1,23	1,30	1,30	1,36	1,42
60000;90;1,6	1,07	1,12	1,16	1,16	1,20	1,24

Tabela VII.4 - Valores de $C_{ca,corr}$ para combinações de $k; f_c; \rho_{tot}$ ($k=70000$ e 80000 kN/m)

k;f _c ;ρ _{tot}	Cca					
	l=2,00	l=4,00	l=5,90	l=6,00	l=8,00	l=10,00
70000;30;0,6	1,24	1,39	1,49	1,49	1,53	1,50
70000;30;1,0	1,07	1,14	1,20	1,20	1,24	1,25
70000;30;1,4	1,05	1,09	1,13	1,13	1,16	1,17
70000;30;1,6	1,04	1,08	1,11	1,11	1,13	1,14
70000;50;0,6	1,40	1,59	1,70	1,71	1,76	1,78
70000;50;1,0	1,14	1,23	1,30	1,31	1,37	1,42
70000;50;1,2	1,09	1,15	1,20	1,21	1,26	1,30
70000;50;1,6	1,04	1,08	1,12	1,12	1,16	1,19
70000;70;0,6	1,48	1,69	1,81	1,81	1,87	1,90
70000;70;1,0	1,19	1,31	1,39	1,40	1,47	1,52
70000;70;1,4	1,09	1,15	1,20	1,20	1,25	1,29
70000;70;1,6	1,05	1,10	1,14	1,14	1,18	1,22
70000;90;0,6	1,53	1,76	1,89	1,90	1,96	1,99
70000;90;0,8	1,30	1,46	1,57	1,58	1,66	1,71
70000;90;1,4	1,11	1,19	1,25	1,25	1,30	1,35
70000;90;1,6	1,08	1,13	1,18	1,18	1,23	1,26
80000;30;0,6	1,27	1,42	1,51	1,52	1,52	1,46
80000;30;1,0	1,08	1,16	1,22	1,22	1,25	1,23
80000;30;1,4	1,05	1,10	1,15	1,15	1,17	1,16
80000;30;1,6	1,04	1,09	1,12	1,12	1,14	1,13
80000;50;0,8	1,23	1,37	1,46	1,46	1,53	1,55
80000;50;1,0	1,16	1,26	1,33	1,34	1,40	1,44
80000;50;1,4	1,06	1,12	1,16	1,17	1,22	1,24
80000;50;1,6	1,05	1,09	1,14	1,14	1,18	1,20
80000;70;0,6	1,51	1,73	1,84	1,84	1,89	1,91
80000;70;1,2	1,14	1,23	1,30	1,31	1,37	1,42
80000;70;1,4	1,10	1,16	1,22	1,22	1,27	1,31
80000;70;1,6	1,06	1,11	1,16	1,16	1,20	1,24
80000;90;0,8	1,33	1,50	1,61	1,62	1,69	1,73
80000;90;1,2	1,17	1,28	1,36	1,36	1,43	1,49
80000;90;1,4	1,12	1,21	1,27	1,27	1,33	1,38
80000;90;1,6	1,09	1,15	1,20	1,20	1,25	1,29

Anexo VIII - Ábaco de correção de C_{ca} para os vãos 2, 4, 6, 8 e 10 metros

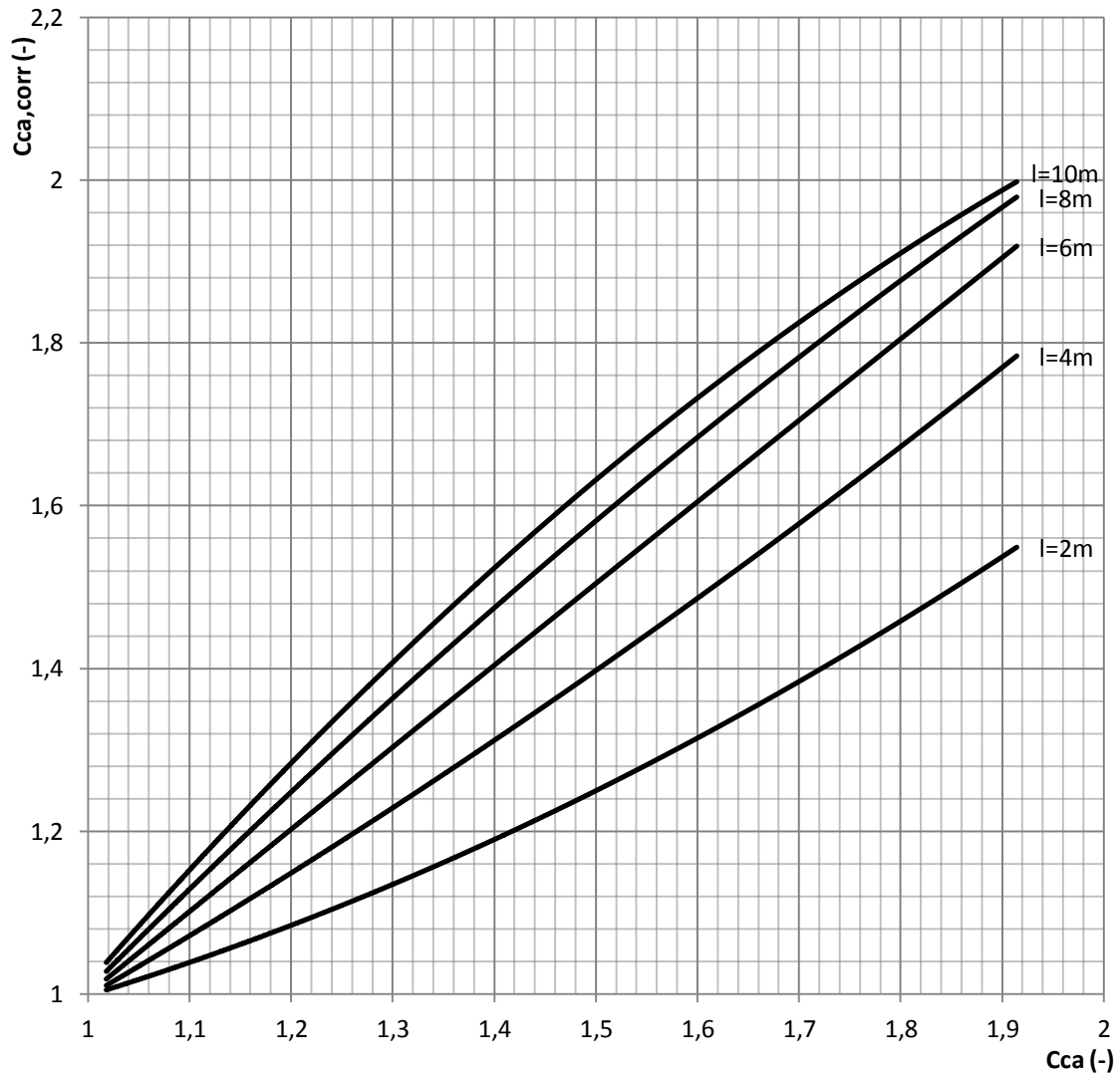


Figura VIII.1 - Ábaco de correção de C_{ca}