



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Ciências

# O Método dos Elementos Finitos Móveis para Problemas Evolutivos com Fronteira Móvel

Rui Jorge Mendes Robalo

Tese para obtenção do Grau de Doutor em  
**Matemática Aplicada**  
(3<sup>o</sup> ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida  
Coorientadora: Prof. Doutora Maria do Carmo da Costa Patrocínio Coimbra

Covilhã, abril de 2014



## Dedicatória

Ao Rui Francisco e à Isabel



## Agradecimentos

Várias foram as pessoas que contribuíram, de uma forma decisiva, para que este trabalho pudesse ser levado a bom termo. A todas elas, eu expresso o meu mais profundo e sincero sentimento de gratidão. Em particular, pretendo agradecer:

- ao Professor Rui Manuel Pires Almeida, da Universidade da Beira Interior (UBI), e à Professora Maria do Carmo da Costa Patrocínio Coimbra, da Universidade do Porto, a quem se deve a orientação deste trabalho, por todos os seus valiosos ensinamentos, sugestões, críticas e pela permanente disponibilidade para ajudar;
- à Professora Ana Paula André Martins Fernandes, pela recetividade e comunicabilidade, sempre presentes, como Presidente do Departamento de Matemática da UBI;
- ao Professor Mário Júlio Pereira Bessa da Costa, pelo apoio prestado como Diretor do Curso de Matemática Aplicada (3º ciclo de estudos);
- a todos os colegas do Departamento de Matemática por todo o apoio que sempre me prestaram, especialmente ao Professor José Duque, pelas longas conversas que ajudaram a desbloquear algumas situações e permitiram o avanço no trabalho;
- ao Professor Jorge Ferreira, da Universidade de Pernambuco, pela colaboração, importantes comentários e sugestões que permitiram melhorar este trabalho, e pelo tempo disponibilizado.

Este trabalho foi parcialmente suportado pelos projetos:

PEst-C/EQB/LA0020/2011 e PEst-OE/MAT/UI0212/2011, financiados por FEDER através do COMPETE - Programa Operacional Fatores de Competitividade e pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia.



## Resumo

Nesta tese, apresenta-se uma nova formulação do método dos elementos finitos móveis, para se obter a solução aproximada de uma vasta classe de problemas de evolução, do tipo

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \sum_{I=1}^d \mathbf{F}_I \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_I^2} + \mathbf{g},$$

definidos em domínios espaciais de  $\mathbb{R}^d$ , com  $d = 1, 2$ , que são caracterizados por apresentarem fronteira móvel. A originalidade está presente no desenvolvimento do algoritmo numérico que conduz à aplicação computacional para resolver problemas multifase bidimensionais com duas *interfaces* móveis. Os elementos da matriz diagonal  $\mathbf{F}_I$ , bem como os do vetor  $\mathbf{g}$ , são funções de  $\mathbf{x}$ ,  $t$ ,  $\mathbf{y}$  e das derivadas  $\partial \mathbf{y} / \partial x_I$ . No caso bidimensional, o domínio espacial inicial do problema, que pode possuir uma geometria não retangular, é discretizado por intermédio de elementos finitos triangulares. São usadas malhas possuindo diferentes tipos de simetria. Os vértices da malha espacial movem-se no tempo de modo a permitir uma descrição eficiente da posição da fronteira móvel e de modo a que a solução seja convenientemente representada. Esta representação consiste numa aproximação por funções interpoladoras, seccionalmente polinomiais de grau superior a um. Desenvolve-se a formulação do método adotado, recorrendo-se a um elemento finito fixo de referência. Para cada uma das variáveis dependentes, associa-se uma malha espacial, o que é inovador em domínios espaciais bidimensionais. O facto de se poder trabalhar com malhas distintas, permite simular todas as *interfaces* móveis num problema com mais de uma fase de interesse. A técnica usada foi implementar uma decomposição do domínio espacial do problema com a introdução de nós que vão descrever a posição de uma *interface* em cada instante.

Estuda-se a solubilidade global do problema dado inicialmente para o caso em que a  $m$ -ésima equação é definida por

$$(F_I)_{m,m} = a_m \left( \int_{\Omega_t} y_{\sigma(m)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \quad \text{e} \quad g_m = g_m(\mathbf{x}, t),$$

onde  $\sigma$  é uma permutação dos elementos de  $\{1, \dots, n\}$ , com  $m = 1, \dots, n$ . Prova-se a existência e unicidade de soluções fortes para  $n = 1, 2$ , assim como o decaimento exponencial das soluções. É de realçar que o último resultado é obtido diretamente no domínio não cilíndrico. O sistema de equações é discretizado utilizando o método de Galerkin no espaço e um método de Crank-Nicolson no tempo. Prova-se a convergência das soluções discretas e obtém-se a ordem de convergência em função dos parâmetros da discretização. São apresentados exem-

plos numéricos ilustrativos da influência dos dados iniciais no comportamento assintótico das soluções. Tanto quanto é possível saber, estes resultados são os primeiros nesta direção para equações com um termo difusivo não local do tipo apresentado.

O código desenvolvido com base no método adotado permite a simulação de sistemas de equações diferenciais do tipo apresentado, em domínios espaciais de dimensão 1 e 2 com fronteira parcialmente ou totalmente móvel. A discretização espacial, que origina a construção de um sistema de equações diferenciais ordinárias de grande dimensão, é a principal tarefa a ser implementada. Para o conseguir, constrói-se um conjunto de funções do Matlab que implementam o algoritmo numérico de modo a que o utilizador tenha apenas que caracterizar o problema a resolver. É de realçar que esta nova aplicação computacional geral, desenhada em Matlab, pode ser utilizada de modo simples, por um utilizador com conhecimentos de nível básico em Matlab, para resolver de modo eficiente uma grande variedade de problemas evolutivos, incluindo problemas em que ocorrem mudança de fases. São resolvidos vários problemas e os resultados numéricos são comparados com os fornecidos na literatura, evidenciando a eficácia e potencialidade do método e a robustez e performance do código numérico desenvolvido.

## Palavras-chave

Fronteira móvel; Sistema com derivadas parciais parabólicas; Termo difusivo não local; Solubilidade global; Decaimento exponencial; Método dos elementos finitos móveis; Malhas adaptativas.

## Abstract

In this thesis, we present a new formulation of the finite element method, to obtain the approximate solutions of a wide class of evolution problems of the type

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \sum_{I=1}^d \mathbf{F}_I \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_I^2} + \mathbf{g},$$

defined in spatial domains  $\mathbb{R}^d$ , with  $d = 1, 2$ , which are characterized as having moving boundary. The originality is present in the development of the numerical algorithm that leads to the computational application for solving two-dimensional multiphase problems with two moving interfaces. In the above equation, the elements of the diagonal matrix  $\mathbf{F}_I$  and of the vector  $\mathbf{g}$  are functions of  $\mathbf{x}$ ,  $t$ ,  $\mathbf{y}$  and of the derivatives  $\partial \mathbf{y} / \partial x_I$ . In the two-dimensional case, the initial spatial domain of the problem, which may have a non-rectangular geometry, is discretized by means of triangular finite elements. Meshes having different types of symmetry are used. The vertices of the spatial mesh move in time, to allow an efficient description of the position of the moving boundary and in such a way that the solution is conveniently represented. This representation is an approximation by interpolating functions, piecewise polynomials of degree greater than one. The formulation of the method adopted, using one fixed finite element of reference, is presented and developed. One spatial mesh is associated to each one of the dependent variables, which is an innovation for two-dimensional spatial domains. The use of distinct meshes allows the simulation of all the moving interfaces in a problem with more than one phase of interest. The technique used is the decomposition of the spatial domain of the problem, with the introduction of nodes which describe the position of one interface at each instant.

The overall solvability of the initially given problem, for the case where the  $m$ -th equation is defined by

$$(F_I)_{m,m} = a_m \left( \int_{\Omega_t} y_{\sigma(m)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \quad \text{and} \quad g_m = g_m(\mathbf{x}, t),$$

where  $\sigma$  is a permutation of the elements  $\{1, \dots, n\}$ , with  $m = 1, \dots, n$ , is studied. Proof of the existence and uniqueness of strong solutions, for  $n = 1, 2$ , as well as of the exponential decay of solutions is given. It should be emphasized that the final result is obtained directly in the non-cylindrical domain. The system is discretized using the Galerkin method in space and a Crank-Nicolson method in time. The convergence of the discrete solutions is proved, and the order of convergence in terms of the discretization parameters is obtained. Numerical

examples, which illustrate the influence of the initial data on the asymptotic behaviour of solutions, are presented. To the best of our knowledge, these are the first results in this direction, for equations with a nonlocal diffusive term of the type presented.

The code developed, based on the adopted method, permits the simulation of systems of differential equations of the type presented, in spatial domains of dimensions 1 and 2 with partially or totally moving boundary. The spatial discretization, which leads to the construction of a large system of ordinary differential equations, is the main task to be implemented. To achieve this, a set of Matlab functions, which implement the numerical algorithm in such a way that the user only has to characterize the problem to be solved, is constructed. It should be noted that this general new computer application may be easily used by someone with a basic knowledge of Matlab to efficiently solve a wide variety of evolution problems, including problems in which phase changes occur. Various problems are solved and numerical results are compared with those given in the literature, indicating the effectiveness and potentiality of the method and the robustness and performance of the numerical code developed.

## Keywords

Moving boundary; Nonlinear system with parabolic partial derivatives; Nonlocal diffusion term; Global solvability; Exponential decay; Moving finite element method; Adaptive grids.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Método dos Elementos Finitos Móveis com funções de base seccionalmente polinomial de grau arbitrário</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Bases fundamentais do MEFM . . . . .	11
2.2.1	Discretização da variável espacial . . . . .	11
2.2.2	Minimização dos resíduos . . . . .	25
2.2.3	Sistema de equações diferenciais ordinárias . . . . .	28
2.3	Equações gerais do MEFM para um modelo com fronteiras móveis . . . . .	30
2.3.1	Regularização da solução aproximada . . . . .	32
2.3.2	Desenvolvimento das equações e simplificação dos integrais . . . . .	35
2.3.3	O cálculo dos integrais . . . . .	41
2.3.4	Tratamento numérico da fronteira móvel . . . . .	45
2.3.5	Equações gerais do MEFM . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Existência de solução forte para uma classe de problemas não locais com fronteira móvel</b>	<b>51</b>
3.1	Introdução . . . . .	51
3.2	Formulação do problema . . . . .	53
3.3	Existência de solução do problema em domínio fixo . . . . .	57
3.3.1	Problema aproximado . . . . .	57
3.3.2	Estimativas à priori . . . . .	59
3.3.3	Passagem ao limite . . . . .	64
3.4	Unicidade da solução . . . . .	65
3.5	Decaimento exponencial da solução . . . . .	68
3.6	Solubilidade global do sistema acoplado . . . . .	70
3.7	Decaimento exponencial da solução do sistema . . . . .	79
3.8	Estimativas do erro . . . . .	82
3.8.1	Solução semidiscreta . . . . .	82
3.8.2	Problema totalmente discreto . . . . .	86
3.9	Estudo numérico . . . . .	91

<b>4</b>	<b>Aplicações do MEFM a sistemas com fronteiras móveis em 1-D e 2-D</b>	<b>105</b>
4.1	Introdução . . . . .	105
4.2	Desenvolvimento da aplicação computacional . . . . .	106
4.2.1	Funções fornecidas pelo utilizador . . . . .	107
4.2.2	Programa principal e funções gerais da implementação do MEFM . . . . .	108
4.3	Problema de Stefan com duas fronteiras móveis . . . . .	110
4.4	Problema das esferas de Frank . . . . .	115
4.5	Modelo bifásico num domínio retangular . . . . .	122
4.5.1	Fluxo de calor constante . . . . .	124
4.5.2	Temperatura fixada por uma condição de Dirichlet . . . . .	125
4.5.3	Fluxo de calor variável . . . . .	130
4.6	Problema com duas fronteiras móveis em 2-D . . . . .	133
4.7	Algumas considerações . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>141</b>
5.1	Considerações finais . . . . .	141
5.2	Perspetivas de trabalho futuro . . . . .	143
	<b>Bibliografia</b>	<b>145</b>

## Lista de Figuras

2.1	Malha uniformemente distribuída (à esquerda) e malha concentrada junto da origem (à direita) . . . . .	12
2.2	Padrão da matriz de adjacência da malha espacial representada na figura 2.1 (à esquerda) . . . . .	13
2.3	Decomposição não admissível . . . . .	13
2.4	Decomposição pouco fina da coroa circular definida por $R = 2$ e $r = 0.5$ . . . . .	15
2.5	A fronteira móvel perde a simetria em relação ao eixo $\mathcal{O}x_1$ (à esquerda) e mantém-na (à direita) . . . . .	16
2.6	Transformação afim invertível do elemento finito unitário em $\Delta_{m,L}$ ( $d=2$ ) . . . . .	17
2.7	Numeração dos pontos de interpolação em $\Delta$ . . . . .	20
2.8	Nós locais $\mathbf{x}_{m,L}^i$ em $\Delta_{m,L}$ para $r = 3$ ( $d=2$ ). Os seus correspondentes em $\Delta$ estão à mesma cor . . . . .	20
2.9	Representação gráfica em $\Delta$ das funções $\ell^1$ , $r = 2$ (à esquerda) e $\ell^{10}$ , $r = 3$ (à direita) ( $d=2$ ) . . . . .	21
2.10	Representação gráfica de $\Phi_m^k$ , associada a $\mathbf{x}_{m,L}^2$ (à esquerda) e a $X_{m,L+1}$ (à direita) ( $d=1$ ) . . . . .	23
2.11	Aproximação seccionalmente de grau 3 de $f(x_1, x_2) = (1 + \exp(20(x_1 + x_2 - 1)))^{-1}$ , com a malha projetada . . . . .	24
2.12	Ilustração das diferentes possibilidades para a direção do movimento nodal ( $d=2$ ) . . . . .	26
2.13	Aproximação cúbica de Hermite da função $Y_m$ na vizinhança de um ponto angularo $X_{m,j}$ (à esquerda) e o valor de $\partial Y_m / \partial x$ em $\Delta_{m,j-1}$ , $\Delta_{m,j}$ e $\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})$ (à direita) . . . . .	33
2.14	Ilustração da vizinhança aberta de cada aresta nodal de $\Delta_{m,L}$ ( $d=2$ ) . . . . .	36
2.15	Quadrado $[0, 1]^2$ (à esquerda) e o seu transformado $\Delta$ por $\mathcal{U}$ (à direita). Os elementos correspondentes estão à mesma cor . . . . .	43
2.16	Aproximação seccionalmente linear de $\Gamma_M$ definida pelos nós assinalados a cor vermelha . . . . .	45
3.1	Domínio não retangular . . . . .	54
3.2	Domínio não retangular (à esquerda) e domínio transformado por $\tau$ (à direita) . . . . .	55
3.3	Solução aproximada em $\Omega_t \times [0, 1]$ . . . . .	93
3.4	Perfis da solução em diferentes instantes para $u$ (em cima) e para $v$ (em baixo) . . . . .	94
3.5	Ampliação da figura 3.4 na região centrada em $(\beta(t), 0)$ , para $u$ . . . . .	95
3.6	Trajetórias dos nós de separação da malha associada a $v$ . . . . .	96

3.7	Evolução da solução aproximada $u$ (em cima) e $v$ (em baixo) no domínio do espaço-tempo . . . . .	97
3.8	Comportamento assintótico das soluções $u$ (à esquerda) e $v$ (à direita) . . . . .	98
3.9	Solução aproximada $u$ (à esquerda) e $v$ (à direita) em $\Omega_t \times ]0, 1[$ . . . . .	98
3.10	Evolução da densidade populacional em diferentes instantes, $u$ (em cima) e $v$ (em baixo) . . . . .	99
3.11	Movimento da malha, associada a $u$ . . . . .	100
3.12	Histórias de $v(x, t)$ em dois valores fixos de $x$ para as funções $f_2$ (à esquerda) e $\bar{f}_2$ (à direita) . . . . .	100
3.13	Energia do sistema com $f_2$ (à esquerda) e comparação com o majorante estabelecido no teorema 3.8 (à direita) . . . . .	101
3.14	Evolução, no tempo, dos termos de difusão $a_1$ e $a_2$ . . . . .	101
3.15	Soluções aproximadas em $\Omega_t \times ]0, 3[$ . . . . .	102
3.16	Estudo da convergência em função de $h$ com aproximações de grau 2 (à esquerda) e de grau 3 (à direita) . . . . .	103
3.17	Estudo da convergência em função de $\delta$ com aproximações de grau 2 . . . . .	104
4.1	Blocos não-zeros da matriz $M$ , para $n = 1$ , $N_m = 5$ e $r = 4$ . . . . .	109
4.2	Representação do sistema com geometria plana . . . . .	111
4.3	Solução em vários valores de $t$ (à esquerda) e movimento nodal (à direita) . . . . .	112
4.4	Distribuição dos valores de $u$ (à esquerda) e histórias do teor de humidade (à direita) . . . . .	112
4.5	Solução aproximada em $t = 1$ , para diferentes valores dos parâmetros do modelo . . . . .	113
4.6	Perfis do teor de humidade, para $d(u) = 1.43 \times 10^{-7} e^{15.66u}$ , $a = 3$ e $b = 0.15$ . . . . .	114
4.7	Trajetórias dos nós de separação para $a = 3$ , $b = 0.15$ e $d(u) = 1.43 \times 10^{-7} e^{15.66u}$ . . . . .	114
4.8	Decomposição triangular do domínio computacional $\tilde{D}(t_0)$ , com $R(t_0) = 0.5$ e $R_F = 2$ . . . . .	116
4.9	Padrão da matriz do sistema de EDOs . . . . .	117
4.10	Solução em diferentes instantes e malha na qual está representada . . . . .	118
4.11	Solução em diferentes instantes e malha na qual está representada (cont.) . . . . .	119
4.12	Cortes segundo $x_2 = 0$ (à esquerda) e <i>interface</i> líquido-sólido (à direita), em diferentes instantes . . . . .	120
4.13	Solução em diferentes instantes, com a malha projetada; aproximação local de grau 3 . . . . .	121
4.14	Geometria do domínio espacial (à esquerda) e tratamento numérico da <i>interface</i> (à direita) . . . . .	123

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

4.15 Solução e malha em que está representada em $t = 0.02$ (à esquerda) e no instante $t = 0.45$ (à direita) . . . . .	125
4.16 Solução aproximada e malha representativa em $t = 0.02$ (à esquerda) e em $t = 0.45$ (à direita) . . . . .	126
4.17 Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha . . . . .	127
4.18 Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha (cont.) . . . . .	128
4.19 Evolução da <i>interface</i> sólido-líquido . . . . .	128
4.20 Temperatura, nas duas fases, para diferentes valores de $y$ , em $t = 0.2$ . . . . .	128
4.21 Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha . . . . .	129
4.22 Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha (cont.) . . . . .	130
4.23 Fluxo de calor variável em $x = 0$ , perfis de temperatura (à esquerda) e evolução da malha (à direita) . . . . .	131
4.24 Fluxo de calor variável em $x = 0$ , perfis de temperatura e evolução da malha (cont.) . . . . .	132
4.25 Fluxo de calor variável em $x = 0$ , evolução da <i>interface</i> sólido-líquido . . . . .	132
4.26 Fluxo de calor variável em $x = 0$ , temperatura, nas duas fases, para diferentes valores de $y$ , em $t = 0.1$ . . . . .	133
4.27 Mancha de elementos não nulos da matriz dos coeficientes do sistema de EDOs . . . . .	135
4.28 Perfis de temperatura nas três fases (à esquerda) e evolução da malha (à direita) . . . . .	136
4.29 Perfis de temperatura nas três fases (à esquerda) e evolução da malha (à direita) (cont.) . . . . .	137
4.30 <i>Interface</i> sólido-“mushy” em diferentes instantes . . . . .	138
4.31 Evolução da <i>interface</i> líquido-“mushy” . . . . .	138
4.32 Temperatura, nas três fases, para diferentes valores de $y$ , em $t = 1$ . . . . .	139
4.33 Histórias de temperatura em três pontos do domínio espacial . . . . .	139



## Lista de Tabelas

3.1 Erros obtidos em vários instantes . . . . .	93
3.2 Comparação dos erros obtidos em vários instantes . . . . .	103
4.1 Comparação de algumas estatísticas computacionais do integrador . . . . .	113
4.2 Precisão dos resultados obtidos em função do número de elementos finitos . . . . .	121



# Capítulo 1

## Introdução

A simulação numérica dos modelos matemáticos de sistemas físicos dinâmicos descritos por equações diferenciais de derivadas parciais (EDPs) é um problema de difícil resolução, particularmente quando a fronteira do domínio é móvel e tem que ser determinada como parte da solução do problema. É igualmente um desafio o estudo da solubilidade deste tipo de problemas, com demonstração da unicidade e de propriedades das soluções. O exemplo clássico de um problema com fronteira móvel é a fusão de um sólido ou a congelação de um líquido em que a posição da *interface* (superfície onde ocorre a mudança de fase) evolui continuamente no tempo. Numa descrição mais aproximada do fenómeno real, considera-se que a mudança de fase ocorre ao longo de um intervalo de temperatura de transição. Neste caso, não se pode falar numa *interface* e o problema é bem mais complexo. Problemas deste tipo surgem nos mais variados campos da ciência, da engenharia e da vida real:

- na biologia, por exemplo, na difusão de uma população num meio que é dependente do tempo;
- na engenharia química, por exemplo, numa reação sólido-fluído;
- na física, por exemplo, no uso de dispositivos de calor latente para conservação da energia;
- na indústria alimentar, por exemplo, na confeção ou na congelação de alimentos;
- na indústria metalúrgica, por exemplo, na fusão ou soldagem de um metal;
- na indústria vidreira;
- na teoria de combustão.

Os problemas com fronteira móvel, que são frequentemente designados por problemas de Stefan, com referência ao trabalho inicial de J. Stefan que, em 1889 [33], se interessou pela fusão da camada de gelo polar, têm sido estudados por muitos autores, como Briozzo *et al.* [15], Santos *et al.* [91], Benabidallah e Ferreira [10], Friedman e Hu [41] e, Caffarelli e Evans [16], por exemplo. No entanto, eles não investigaram a solução numérica dos problemas nem realizaram a simulação dos modelos. Rincon [79] obteve a existência, unicidade e regularidade das soluções, fazendo ainda a análise da solução do problema discretizado, mas

sem a determinar. Meyer [68], Nochetto *et al.* [73] e Rose [88], entre outros (veja-se [101]), propuseram, e implementaram, métodos numéricos para o cálculo de soluções aproximadas de problemas com fronteira móvel, em domínios espaciais bidimensionais. Para desenvolverem as suas metodologias, os autores usaram uma reformulação do problema original, à custa de uma função de entalpia, de modo a que todas as EDPs do novo sistema estejam definidas no mesmo domínio cilíndrico. As principais publicações dedicadas ao tema estão sintetizadas nos livros [33, 66, 89] e os desenvolvimentos posteriores encontram-se mencionados em [46, 102, 104] e nas referências aí apresentadas.

Um dos dois principais objetivos desta tese é estabelecer resultados teóricos relativos à solubilidade, unicidade e propriedades das soluções de problemas em aberto, modelizados por sistemas de EDPs, dependentes do tempo, em domínios com fronteira móvel. O segundo objetivo primordial é desenvolver uma aplicação computacional geral que permita determinar soluções aproximadas deste tipo de problemas evolutivos, o que inclui a posição da fronteira móvel em cada instante, diretamente no domínio inicial não cilíndrico.

Seja  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d = 1, 2$ , um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega_t$  regular e dependente do tempo. Nesta tese interessa resolver problemas de evolução constituídos por EDPs do tipo

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} - \sum_{I=1}^d (F_I)_m \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d} \right) \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_I^2} = g_m \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d} \right), \quad (1.1)$$

para todo o  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \times ]0, \infty[$ , com  $m = 1, \dots, n$ , onde  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = (y_1(\mathbf{x}, t), \dots, y_n(\mathbf{x}, t))^T$  é o vetor das variáveis dependentes. No modelo de um sistema físico de mudança de fase, para cada tempo  $t$ , a  $m$ -ésima função componente do vetor das incógnitas, pode estar definida apenas num subdomínio de  $\Omega_t$ , que se passará a designar por  $D_m(t)$ . Os exemplos de problemas com fronteira móvel solucionados exatamente são muito poucos, sendo, na sua maioria, casos com uma única dimensão de espaço e com condições de fronteira e iniciais bastante simples. Normalmente, a complexidade matemática das funções  $(F_I)_m$  e  $g_m$ , conjuntamente com a não linearidade associada ao movimento da fronteira móvel, torna impraticável o desenvolvimento de soluções analíticas. A simulação numérica constitui, assim, um desafio e praticamente a única via de resolução deste tipo de problemas, pelo que o foco se centra no desenvolvimento de algoritmos numéricos eficientes. Os resultados obtidos através da simulação numérica podem fornecer linhas orientadoras para a demonstração da solubilidade do modelo de um determinado fenómeno físico ou para o estabelecimento de propriedades da solução.

Considere-se, a título de exemplo, uma equação diferencial de derivadas parciais que traduz matematicamente determinado fenómeno evolutivo com uma só dimensão espacial. O domínio pode ser discretizado em quadriláteros “espaço-tempo” e as derivadas parciais substi-

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

tuídas pelas suas aproximações em cada nó da malha. A resolução do sistema de equações assim obtido gera uma aproximação da solução do problema original nos nós da malha. Atualmente, a situação mais comum é discretizar no espaço e resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) resultante através de um integrador adequado.

Para esta classe de problemas que se propõe solucionar, a posição da fronteira móvel tem que ser determinada em cada instante e, no caso bidimensional, pode ser função da variável de espaço e possuir curvatura acentuada. No modelo de um sistema físico de mudança de fase, num domínio espacial retangular, admite-se ainda a hipótese de que os pontos pertencentes a uma *interface* possam ser definidos por  $x_I = h(x_J, t)$ , com  $J \neq I$ , e que esta função pode desenvolver vários extremos no tempo. É ainda expectável encontrar perfis com gradiente elevado numa região, que se deslocam no tempo, e bastante mais suave noutras. Assim, é de todo conveniente que a integração numérica se faça numa malha adaptativa, continuamente deformável.

Os algoritmos numéricos para resolver este tipo de problemas inserem-se, basicamente, num dos três grandes grupos: métodos que descrevem a posição da fronteira móvel no tempo, métodos que fixam a posição da fronteira e móvel e métodos que fixam o domínio. Nos primeiros, a posição da fronteira móvel é calculada para cada instante em que se obtém a solução numérica do problema, enquanto que os segundos são caracterizados pela fixação da fronteira móvel através de uma mudança adequada de variáveis. Nos últimos, o problema é reformulado por forma a estender as equações a todo o domínio espacial, surgindo a fronteira móvel como uma característica importante da solução.

No primeiro grupo incluem-se as metodologias, alicerçadas em malhas móveis, desenvolvidas por Baines *et al.* [7] ou Huang e Russel [51], o método dos elementos de fronteira usado por Ghoneim e Ojo [42] ou Ahmed e Meshrif [1], ou as formulações do método dos elementos finitos móveis apresentadas por Rodrigues [87], Wachter e Sobey [106], Coimbra *et al.* [30] ou Carlson e Miller [17]. Alternativamente aos métodos que definem a posição da fronteira móvel em cada instante, na literatura encontram-se vários autores, como Barry e Caunce [8], Rattanadecho e Wongwises [78], Gülkaç [43], Mazhukin e Chuiko [65], Kim e Kaviany [56] ou Gupta e Kumar [44], que fazem uma mudança de variáveis por forma a que no novo sistema de coordenadas a fronteira móvel permaneça fixa. Um caso especial desta metodologia é o método da migração isotérmica descrito em [33]. Uma desvantagem inerente a esta técnica é que a mudança de coordenadas só pode ser usada em domínios com uma geometria relativamente simples. Os autores que fixam o domínio recorrem a uma função de distribuição da entalpia ou reformulam o problema original em termos de inequações, quer diferenciais quer variacionais. No método da entalpia, usado, por exemplo, por Chao *et al.* [20], Chen *et al.* [21], Feulvarch

*et al.* [39], Hannoun *et al.* [47], Mencinger [67] ou Beckett *et al.* [9], a posição da *interface* é obtida à *posteriori* como um conjunto de nível ou através do método das fases alternantes. Lian *et al.* [60] resolvem um problema de Stefan bifásico, recorrendo a uma sua reformulação através de uma inequação variacional. Neste método a equação que define o movimento da *interface* é incorporada implicitamente nas inequações discretizadas. Várias formulações de problemas com uma fronteira móvel através de inequações do tipo parabólico são apresentadas por Crank [33], bem como as correspondentes soluções numéricas.

Muitas propostas de métodos baseados numa malha adaptativa, que dão origem a resultados precisos com um consumo de tempo de computação razoável, têm surgido nos últimos anos [7, 8, 52, 53, 105]. Uma abordagem que revelou potencialidades desde a sua formulação inicial foi o Método dos Elementos Finitos Móveis (MEFM), proposto, em 1981, por K. Miller e R. Miller [71] e K. Miller [69]. Como o próprio nome indica, a discretização espacial faz-se por intermédio de elementos finitos, permitindo o movimento dos nós no tempo. Neste método, a obtenção da solução aproximada e a redefinição da posição dos vértices da malha encontram-se interligadas no mesmo algoritmo. A evolução da malha no interior do domínio espacial é definida, em cada instante, pelo próprio método, obtida da minimização da soma dos quadrados dos resíduos das equações do sistema (1.1). Após a discretização da variável espacial, cada EDP de (1.1) origina um sistema de EDOs. Para prevenir o aparecimento de singularidades na matriz deste sistema, introduzem-se, no processo de minimização, termos de penalização do movimento nodal. Originalmente, o MEFM foi desenhado para aproximar, por uma função seccionalmente linear, a solução de problemas evolutivos com uma variável de espaço unidimensional, cujas soluções exibem muita atividade espacial, apresentando zonas de transição abruptas que se movem com o tempo. Posteriormente, sofreu algumas alterações que se encontram sintetizadas, por exemplo, em [52, 105].

A formulação do MEFM que é desenvolvida nesta tese, para sistemas que apresentam fronteira móvel, baseia-se nos trabalhos de Coimbra [28], Coimbra *et al.* [29, 30] e Sereno *et al.* [94, 95], onde o método foi desenvolvido e implementado para uma classe restrita de problemas em que todas as variáveis dependentes estão definidas num domínio espacial comum com fronteira fixa. É de salientar que, no presente trabalho, se admite que o domínio espacial pode ter fronteira parcial ou totalmente móvel e, no caso bidimensional, pode possuir variadas geometrias, enquanto que nos trabalhos de Coimbra, envolvendo variáveis de espaço bidimensionais, o domínio do problema é sempre um paralelepípedo.

Uma parte original do núcleo desta tese é a inclusão de duas ou mais *interfaces* móveis no desenvolvimento do algoritmo numérico que permite resolver problemas multifase em domínios espaciais bidimensionais, modelados por sistemas de EDPs do tipo (1.1). Este algoritmo,

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

que é baseado na formulação do MEFM com aproximações seccionalmente polinomiais de grau arbitrário, motivou a construção de uma aplicação computacional para a simulação de sistemas físicos de mudança de fase, que incorporam fronteiras fixas e uma ou mais *interfaces* móveis e permite determinar eficientemente as posições de todas as *interfaces* móveis ao longo do tempo.

Este trabalho é constituído por cinco capítulos. Neste primeiro capítulo, *Introdução*, apresenta-se a motivação para o trabalho realizado e os objetivos da tese, assim como o modo como está organizada. Descrevem-se ainda e discutem-se as principais características dos métodos numéricos modernos que são aplicados a sistemas físicos com fronteira móvel, fundamentalmente, os que se baseiam numa malha adaptativa visto serem os que minimizam os problemas que a simulação numérica origina – a dispersão e a dissipação. A dispersão é notória quando surgem oscilações na solução numérica e a dissipação revela-se pelo espalhamento da frente por uma região do domínio mais ou menos larga.

No Capítulo 2, intitulado *Método dos Elementos Finitos Móveis com funções de base seccionalmente polinomiais de grau arbitrário*, apresenta-se e desenvolve-se a formulação do MEFM com aproximações locais de grau superior a um, para a simulação de sistemas físicos que descrevem fenómenos evolutivos em domínios espaciais de  $\mathbb{R}^d$ , com fronteira móvel, incluindo problemas de mudança de fase, com uma ou mais fases de interesse. Para desenvolver o algoritmo numérico, focando a atenção na discretização espacial, utiliza-se o MEFM com as seguintes características:

- a malha de elementos finitos associada a uma variável dependente é independente das outras malhas, podendo apenas haver interseção numa fronteira móvel comum;
- cada variável dependente é aproximada, num dado instante, por uma função interpoladora seccionalmente polinomial de grau arbitrário;
- os pontos de interpolação são definidos em cada instante, de modo a minimizar o erro máximo de interpolação em cada elemento finito unidimensional ou, com coordenadas triangulares igualmente espaçadas em 2-D;
- as aproximações de cada uma das variáveis dependentes são regularizadas na vizinhança de um nó ou de uma aresta nodal das respectivas malhas, para se poderem definir aproximações das derivadas espaciais nesses pontos;
- os integrais que surgem são calculados (sem erro de truncatura, sempre que possível) recorrendo à integração numérica, por quadraturas de Lobatto, de Radau ou de Gauss.

Neste capítulo, discutem-se ainda algumas das dificuldades inerentes à resolução numérica deste tipo de problemas em domínios espaciais bidimensionais, nomeadamente, a compli-

cação para conseguir uma adequada definição da fronteira móvel através de um número reduzido de elementos finitos, quando esta desenvolve curvaturas acentuadas; a obtenção de uma boa descrição poligonal da região associada a cada fase, num sistema físico bifásico, por exemplo, se a fronteira for não poligonal e a introdução de uma fase inicial relativamente pequena para conseguir simular um modelo em que prematuramente coexistam duas fases, mas não inicialmente.

O MEFM descreve, eficientemente, a posição da *interface* móvel e pode ser inicializado de uma forma autónoma, não requerendo o conhecimento da solução exata nem do comportamento inicial da solução numérica e não exigindo o desenvolvimento de soluções locais de inicialização. Para além disso, produz soluções de qualidade, independentemente da coexistência de condições iniciais e de fronteira não conformes e apesar da introdução de erros iniciais na posição da fronteira móvel (quando uma fase de interesse não exista no princípio).

Nos últimos anos, a investigação da existência e unicidade de soluções para problemas não locais descritos por uma EDP parabólica com um coeficiente de difusão não linear aplicado num termo linear tem sido particularmente intensa [19, 25, 26, 31, 111]. Este tipo de coeficiente de difusão foi inicialmente proposto por Chipot e Lovat [24] num domínio aberto cilíndrico. No entanto, os trabalhos com modelos descritos por um sistema de EDPs não lineares com termos não locais já não são tão abundantes na literatura [11, 76]. Tanto quanto a pesquisa efetuada permite concluir, ainda não foi feito o estudo da solubilidade, unicidade e comportamento assintótico das soluções de (1.1), para o caso em que a  $m$ -ésima equação é definida por

$$(F_I)_{m,m} = a_m \left( \int_{\Omega_t} y_{\sigma(m)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \quad \text{e} \quad g_m = g_m(\mathbf{x}, t),$$

onde  $a_m$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $]0, +\infty[$  e  $\sigma$  é uma permutação dos  $n$  primeiros números naturais. Este problema tem aplicabilidade numa vasta classe de modelos, como na biologia, por exemplo, onde pode governar os movimentos de diferentes espécies populacionais que interagem num domínio comum dependente do tempo. O problema é não local no sentido em que o coeficiente de difusão é determinado por uma quantidade global.

No Capítulo 3 desta tese, designado por *Existência de solução forte para uma classe de problemas não locais com fronteira móvel*, prova-se a existência e unicidade de solução forte, global no tempo, para uma certa classe de problemas parabólicos, sujeitos a condições de fronteira de Dirichlet, nulas, com um coeficiente de difusão do tipo não local, definidos num domínio limitado com fronteira móvel. É de realçar, por um lado, que é obtido o decaimento exponencial da energia associada à solução do problema, diretamente no domínio não cilíndrico, considerando as mesmas hipóteses sobre os dados e, por outro lado, que também é determinada uma solução aproximada para estes problemas de modo a poder comparar-se o

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

comportamento teórico e numérico das soluções. O passo seguinte consiste na extensão destes resultados, o que é feito para um sistema acoplado com duas equações, podendo recorrer-se às técnicas utilizadas para se generalizarem os resultados apresentados para um sistema com  $n$  EDPs. Usa-se uma transformação de coordenadas que fixa a fronteira móvel. O sistema definido no domínio retangular é discretizado utilizando o método de Galerkin no espaço e um método linearizado de Crank-Nicolson no tempo. A solução semidiscreta é definida por um polinómio de grau arbitrário em cada elemento finito. Prova-se a convergência das soluções discretas, obtendo-se a ordem de convergência em função dos parâmetros da discretização. No final do capítulo, são apresentados exemplos numéricos ilustrativos da influência dos dados iniciais no comportamento assintótico das soluções.

A discretização do modelo matemático (1.1), por aplicação do MEFM, conduz a um sistema de EDOs de grande dimensão, no qual devem ser incorporadas as condições de fronteira e incluídas as equações discretizadas que definem a velocidade de deslocamento da fronteira do domínio espacial. Para resolver o problema de valor inicial no tempo assim constituído, recorre-se a um integrador adequado como, por exemplo, a rotina LSODI [50] ou a função `ode15s` do Matlab [96], que são recomendados para problemas *stiff*. Estes integradores utilizam fórmulas de integração de ordem variável e adaptam a amplitude do passo de integração, de modo a controlarem o erro das estimativas em cada instante. Em [85], foi efetuada a comparação entre a implementação Matlab do MEFM com a desenvolvida em código FORTRAN, em que a integração no tempo é realizada recorrendo à rotina LSODIS, permitindo concluir que a opção por qualquer um dos dois integradores não é determinante para a qualidade da solução numérica. Nos últimos anos, o Matlab tem sido cada vez mais usado na simulação de modelos matemáticos em diversas áreas da investigação científica como ferramenta computacional de alto desempenho. Assim, no Capítulo 4, *Aplicações do MEFM a sistemas com fronteiras móveis em 1-D e 2-D*, apresenta-se a estrutura do código em ambiente Matlab, descrevendo os aspetos fundamentais com interesse para o utilizador. Foi desenvolvido um conjunto de funções que implementam o MEFM, executando a principal tarefa que consiste na discretização espacial e preparação do sistema de EDOs para o integrador. O código foi escrito em Matlab, permitindo, a um utilizador com conhecimentos básicos deste software, a determinação da solução aproximada do problema em instantes pré-estabelecidos, a sua visualização e a validação dos resultados. Termina-se o capítulo com a apresentação e simulação de diversos exemplos de problemas com fronteiras móveis. Os resultados obtidos demonstram a robustez, a performance e flexibilidade deste código numérico escrito em Matlab e baseado no MEFM.

Esta tese encerra com o Capítulo 5, *Conclusões*, onde são apresentadas as conclusões do trabalho e propostos alguns pontos como potenciais áreas de estudo.

A evolução registada durante os trabalhos com vista à elaboração desta tese permitiu escrever artigos que foram divulgados pelo autor em apresentações orais nos congressos internacionais: “Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2011”, Coimbra, Portugal; “International Conference on Engineering UBI2011” e “6th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation”, ambos realizados na Covilhã, Portugal, em 2011 e 2012, respetivamente; “5th International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources”, que se realizou em Granada, Espanha, em 2013. Os artigos encontram-se publicados nos respetivos livros de atas [85, 86, 84, 83]. Alguns dos resultados obtidos constam do artigo [82], aceite para publicação na revista *Applied Mathematical Modelling* e dos *preprints* [81, 4, 3] que foram submetidos para revistas da área.

## Capítulo 2

# Método dos Elementos Finitos Móveis com funções de base seccionalmente polinomiais de grau arbitrário

### 2.1 Introdução

O domínio espacial de alguns problemas da área da engenharia ou da ciência modifica-se continuamente no tempo. Os problemas de transferência de calor acompanhados de mudança de fase e certos processos de difusão constituem grande parte dos fenómenos onde ocorrem fronteiras móveis. Uma questão essencial que se coloca na resolução deste tipo de problemas é determinar a posição da fronteira em cada instante que, pelo facto de se mover, pode originar frentes móveis. No caso particular de existirem frentes móveis, especialmente se elas forem abruptas, para se obter uma boa aproximação da solução, é necessário haver uma grande definição da malha nas regiões onde ocorrem as variações acentuadas. Um bom método permite obter uma boa solução numérica em tempo de computação adequado.

Muito do tratamento numérico dos modelos matemáticos de sistemas físicos com fronteira móvel é conseguido à custa de diferenças finitas ou elementos finitos, alternando na forma de tratar a fronteira móvel [33]. A formulação inicial do método dos elementos finitos móveis (MEFM) foi proposta por K. Miller e R. Miller [71] e K. Miller [69] para a resolução de problemas de evolução com uma variável de espaço unidimensional, pertencente a um domínio fixo. O método determina, não só a solução aproximada, como também a malha em que essa solução está representada, gerando assim uma malha adaptativa que pode ser modificada de modo a solucionar eficientemente problemas com fronteira móvel. Esta malha é continuamente deformável e está adaptada, em cada instante, à solução, o que, naturalmente, inclui a região onde ela está definida por estar a modificar-se, permitindo uma descrição eficiente da posição da *interface* móvel. Podem ainda apontar-se mais duas características do MEFM que o tornam adequado para a simulação numérica de sistemas físicos com fronteiras móveis:

- pode ser inicializado de uma forma autónoma, não requerendo o conhecimento da solução exata nem do comportamento inicial da solução numérica e não exigindo o desenvolvimento de soluções locais de inicialização, como em [109];
- produz soluções de qualidade, independentemente da coexistência de condições iniciais

e de fronteira não conformes e apesar da introdução de erros iniciais na posição da *interface* num problema de mudança de fases (quando uma fase de interesse não exista no princípio).

Assim, na secção 2.2 do presente capítulo, serão definidas as bases fundamentais do MEFM, apresentando com rigor os conceitos envolvidos e as técnicas utilizadas na presente abordagem. A formulação do método desenvolvida nesta tese é obtida a partir dos trabalhos de Coimbra *et al.* [29, 30] e permite a obtenção de soluções de grande qualidade para um vasta classe de problemas evolutivos definidos num domínio espacial de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$ ), com fronteira móvel, incluindo problemas com duas ou três fases. A discretização da variável espacial faz-se por intermédio de elementos finitos, associando uma malha distinta a cada função  $y_m$  componente do vetor solução, que é obtida por intermédio de uma partição inicial admissível do domínio espacial do problema em subdomínios. Esta malha inicial é definida por um conjunto finito de pontos (vértices) e pela relação de adjacência existente entre eles. É objeto de reflexão, a geração da malha de elementos finitos em domínios espaciais iniciais, de  $\mathbb{R}^2$ , com geometrias complicadas ou que as possam desenvolver no tempo. Localmente, em cada elemento finito, a solução aproximada é definida por interpolação de Lagrange. No caso 1-D, usa-se uma estratégia recente para definir os pontos interiores de interpolação [6], que permite minimizar o erro máximo de interpolação. Globalmente, cada componente da solução exata do sistema de EDPs (1.1), é aproximada por uma função interpoladora contínua e seccionalmente polinomial de grau superior a um, à qual está associada a malha de elementos finitos onde está representada. No MEFM, o algoritmo que permite determinar a solução em cada instante e o algoritmo de redefinição da malha estão interligados. Para determinar a posição dos vértices e a aproximação da solução, é necessário integrar no tempo, o sistema de EDOs gerado pela minimização da soma dos resíduos, em norma  $L^2$ , com respeito a cada uma das derivadas de primeira ordem dos parâmetros efetivos do método.

Na terceira secção, será apresentada a dedução das equações do sistema de EDOs que resultam da aplicação do método ao modelo genérico de um sistema físico num domínio espacial com fronteira móvel. A técnica usada para localizar a fronteira móvel consiste na introdução de um conjunto finito de nós, que descrevem a posição da *interface* em cada instante e que induzem uma decomposição do domínio espacial do problema. A velocidade destes nós da malha espacial não é determinada por uma equação do MEFM, resultante do processo de minimização, mas sim, por uma equação externa. As variáveis que figuram nesta equação são substituídas pelas respetivas aproximações expressas em termos das diferentes variáveis que resultam da aplicação do MEFM e, a seguir, são incorporadas no sistema de EDOs. Para se definirem aproximações das derivadas espaciais nos pontos onde elas não existam, cada função componente da

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

solução aproximada é regularizada através de polinómios interpoladores cúbicos de Hermite. Esta estratégia é igualmente usada na simplificação dos integrais que figuram no sistema de EDOs. Todos os integrais são calculados através de integração numérica, no elemento finito de referência, por quadraturas de Gauss ou Lobatto.

## 2.2 Bases fundamentais do MEFM

Nesta secção, apresenta-se uma visão global dos aspetos essenciais do MEFM, apontando as principais diferenças que distinguem a abordagem a um problema 1-D ou a um 2-D.

### 2.2.1 Discretização da variável espacial

No processo de discretização da variável espacial, inicialmente, considera-se uma decomposição do domínio desta variável, permitindo que os nós se movam continuamente no tempo, depois constrói-se a aproximação local em cada elemento finito e, finalmente, define-se a aproximação global. Seguidamente, explica-se, com detalhe, os conceitos e técnicas envolvidas em subsecções distintas.

#### 2.2.1.1 Geração da malha de elementos finitos

No MEFM, a primeira tarefa a realizar pelo utilizador consiste na construção da malha adaptativa de elementos finitos. Assim, considera-se uma partição ou decomposição  $\mathcal{P} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$  do domínio espacial conexo inicial  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$ ), de cada problema que se pretende resolver, em subdomínios – *os elementos finitos*, dois a dois não sobrepostos (isto é, sem pontos interiores comuns) e de reunião igual a  $\overline{\Omega_0}$ , (o fecho de  $\Omega_0$ ):

$$\text{int}(\Delta_{L_i}) \cap \text{int}(\Delta_{L_j}) = \emptyset \quad \text{para } L_i \neq L_j; \quad \bigcup_{L=1}^N \Delta_L = \overline{\Omega_0}. \quad (2.1)$$

Esta decomposição é determinada por um conjunto finito de pontos de  $\overline{\Omega_0}$  e pela relação de adjacência existente entre eles, podendo ser definida por intermédio de um grafo simples, conexo e planar  $G_{\mathcal{P}} = (V_{\mathcal{P}}, E_{\mathcal{P}})$ . Os elementos de  $V_{\mathcal{P}} = \{\mathbf{X}_j : j = 1, \dots, N_v\}$  designam-se por *vértices* (ou *nós de separação*) e cada elemento de  $E_{\mathcal{P}}$  é um segmento de reta  $[\mathbf{X}_{j_i}, \mathbf{X}_{j_k}]$  que une dois vértices adjacentes – *uma aresta (nodal)*. As  $N$  faces finitas de  $G_{\mathcal{P}}$ , se  $d = 2$ , ou as arestas nodais no caso  $d = 1$ , constituem o conjunto  $\mathcal{P}$ , que se passará a designar por *sistema de elementos finitos ou malha espacial*. A fórmula de Euler que relaciona o número de vértices,

o número de faces e o número de arestas de um grafo conexo planar, permite escrever

$$N_v + N = N_e + 1, \quad (2.2)$$

onde  $N_e$  designa o número de elementos de  $E_{\mathcal{P}}$ .

Os elementos finitos triangulares, devido à sua adaptabilidade a fronteiras não poligonais e à manutenção da convexidade (não serão considerados triângulos degenerados), são frequentemente usados em domínios bidimensionais. Neste trabalho, irão considerar-se sempre decomposições triangulares de  $\Omega_0$ , isto é, o grafo da partição é face-regular de grau 3. A figura 2.1 apresenta dois exemplos de malhas espaciais triangulares num domínio retangular de  $\mathbb{R}^2$ , uma malha uniforme em  $[0, 1] \times [-1, 1]$  (à esquerda) e outra não uniforme em  $[0, 1]^2$  (à direita). Para Huang e Russell [52], uma triangularização com elementos do mesmo tamanho, só é considerada uniforme, quando os triângulos forem equiláteros. O sistema de elementos

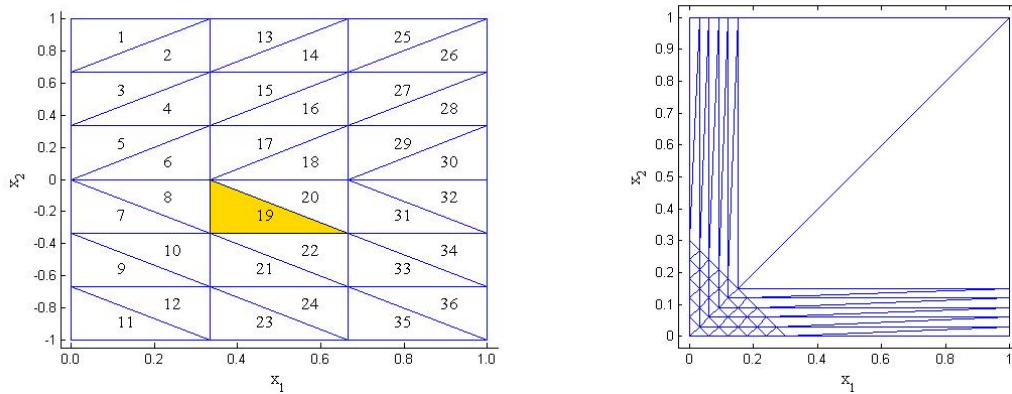


Figura 2.1: Malha uniformemente distribuída (à esquerda) e malha concentrada junto da origem (à direita)

finitos  $\mathcal{P}$ , representado na figura da esquerda (considerado como exemplo), fica completamente identificado pelas matrizes

$$X_1 = \mathbf{1}_{7 \times 1} \cdot (0, 1/3, 2/3, 1) \quad ; \quad X_2 = (1, 2/3, 1/3, 0, -1/3, -2/3, -1)^T \cdot \mathbf{1}_{1 \times 4},$$

que definem as coordenadas dos vértices e pela matriz de adjacência  $A_{G_{\mathcal{P}}}$  que define o grafo  $G_{\mathcal{P}}$ . O elemento da posição  $(i, j)$ , da matriz de adjacência de um grafo simples, vale 1 se o segmento de reta  $[X_i, X_j]$  é uma aresta nodal e vale 0, caso contrário. A mancha de elementos iguais a 1 da matriz  $A_{G_{\mathcal{P}}}$  encontra-se ilustrada na figura 2.2

Num domínio retangular  $\Omega_0$ , os elementos finitos são numerados por colunas, tal como a figura 2.1 (à esquerda) ilustra e usa-se a mesma estratégia para a numeração dos nós de separação. Assim, o vértice de coordenadas  $(X_1(i, j), X_2(i, j))^T$  é o  $((j - 1)n_l + i)$ -ésimo elemento

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

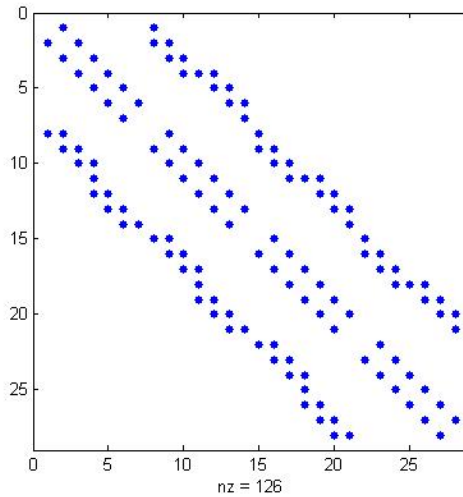


Figura 2.2: Padrão da matriz de adjacência da malha espacial representada na figura 2.1 (à esquerda)

de  $V_{\mathcal{P}}$ , onde  $n_l$  representa o número de linhas de  $X_1$  (e de  $X_2$ ). Considere-se, por exemplo, o décimo nono elemento finito de  $\mathcal{P}$ , assinalado a amarelo. Tem-se

$$\Delta_{19} = [\mathbf{X}_{11} \mathbf{X}_{12} \mathbf{X}_{19}] ,$$

o que indica que o referido elemento finito é definido pelos vértices 11, 12 e 19 da malha.

Acrescente-se, por último, que se impõem condições de conformidade ou compatibilidade à malha espacial, isto é, dois elementos finitos adjacentes estão ligados entre si por “toda” uma aresta comum ou num vértice. Não serão admitidos outros tipos de conectividade entre os elementos finitos, como a apresentada na figura 2.3, por exemplo.

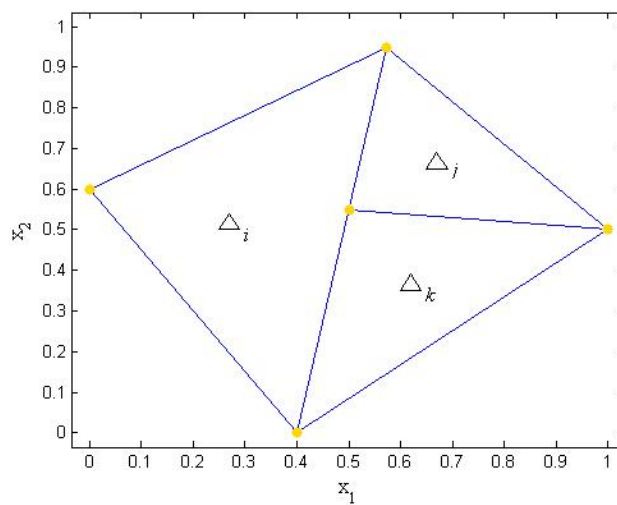


Figura 2.3: Decomposição não admissível

Pode utilizar-se um único sistema de elementos finitos para todas as variáveis depen-

dentadas definidas em  $D_0 \subseteq \Omega_0$  ou optar por vários. Na presente abordagem, a cada variável dependente  $y_m$  do problema associa-se uma malha inicial  $\mathcal{P}_m(0)$ , constituída por  $N_m$  elementos finitos, que é independente das outras malhas definidas no domínio espacial comum. O facto essencial do MEFM é a inclusão do movimento dos nós de separação. Assim, a decomposição inicial  $\mathcal{P}_m(0)$  estabelece uma malha espacial adaptativa

$$\mathcal{P}_m(t) = \{\Delta_{m,L}(t) : L = 1, \dots, N_m\}, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

onde  $\Delta_{m,L}(t) = [\mathbf{X}_{m,j_i}(t) \dots \mathbf{X}_{m,j_{i+d}}(t)]$  representa o  $L$ -ésimo elemento finito da malha espacial associada a  $y_m$ , no instante  $t$ . A posição dos nós de separação vai variar continuamente no tempo por forma a acompanhar a evolução da fronteira móvel e a concentrarem-se nas regiões críticas, permitindo que a solução seja convenientemente descrita. Omitir-se-á o parâmetro  $t$ , sempre que não gerar ambiguidade.

Interessa agora apontar três aspetos sobre os quais é fundamental que o utilizador tenha um entendimento claro para poder gerar a malha espacial inicial:

- a possível dependência da malha relativamente à fronteira em domínios bidimensionais com geometrias complicadas;
- a existência, ou não, de alguma simetria na solução durante o tempo;
- a não total desanexação de dois sistemas de elementos finitos com uma fronteira móvel em comum.

Relativamente ao primeiro aspeto focado, em 1-D é simples de obter um sistema de elementos finitos que cumpra as condições definidas em (2.1). É suficiente considerar uma sucessão de pontos  $D_m(0) = D_{0m} = [a, b]$ , tal que

$$a = (X_1)_{m,1} < (X_1)_{m,2} < \dots < (X_1)_{m,N_m} < (X_1)_{m,N_m+1} = b, \quad (2.4)$$

mas esta tarefa nem sempre é possível de concretizar em 2-D. Observe-se que a união  $\bigcup_{L=1}^{N_m} \Delta_{m,L}$  é sempre um domínio com fronteira poligonal. Assim, no caso de  $\partial D_m(0)$  – leia-se *fronteira do domínio*  $D_m(0)$  – ser curva ou irregular e/ou  $D_m(0)$  ter uma fronteira móvel, tem-se

$$\widetilde{D}_m(t) = \bigcup_{L=1}^{N_m} \Delta_{m,L}(t) \simeq \overline{D}_m(t), \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

isto é, a união dos elementos finitos de  $\mathcal{P}_m$ , que constitui o domínio computacional associado a  $y_m$  é, em cada instante  $t$ , uma aproximação de  $\overline{D}_m(t)$ . Nestas condições, naturalmente, impõe-se a definição de uma malha espacial suficientemente fina para que aproxime adequada-

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

mente o domínio espacial em cada instante, de modo a que o erro inicial cometido na discretização de  $D_m(0)$  não seja determinante para a qualidade da solução numérica.

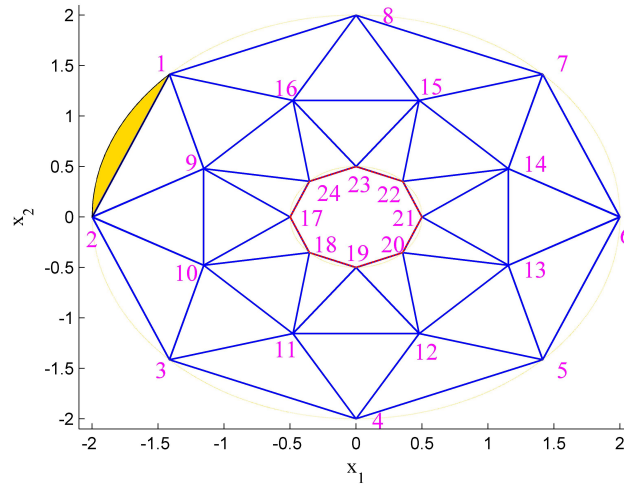


Figura 2.4: Decomposição pouco fina da coroa circular definida por  $R = 2$  e  $r = 0.5$

Considere-se, para exemplificar, o sistema de elementos finitos  $\mathcal{P}$  representado na figura 2.4 que define uma triangularização da coroa circular  $D(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1/4 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ . A numeração gerada para os vértices está indicada a cor “magenta” e a posição do vértice  $\mathbf{X}_{(j-1)n_i+i}$ , para  $i = 1, \dots, 8 (= n_i)$  e  $j = 1, 2, 3$ , é definida pelas coordenadas

$$X_1(i, j) = \rho(j) \cos(\theta(i, j)), \quad X_2(i, j) = \rho(j) \sin(\theta(i, j)), \quad (2.6)$$

onde  $\rho = (2, 1.25, 0.5)$  e  $\theta(i, j) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}(2i + j - 3)$ . Tal como a figura sugere, a região de  $D(0)$  adjacente a  $\Delta_1 = [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_9]$  e destacada a cor amarela, não faz parte do domínio computacional inicial  $\tilde{D}(0)$ . Para além desta, outras sete regiões do domínio espacial com a mesma área da referida também não são incluídas em  $\tilde{D}(0)$ . Por outro lado, as arestas nodais que constituem a fronteira interior de  $\tilde{D}(0)$  não pertencem a  $D(0)$ , bem como parte dos elementos finitos que as contêm. Conclui-se, assim, que  $\mathcal{P}$  não é uma boa decomposição da coroa circular  $D(0)$ . Neste caso, o utilizador deve começar por considerar um maior número de nós sobre a fronteira exterior (por exemplo) por forma a obter uma boa descrição poligonal dessa fronteira, que vai induzir uma decomposição mais fina de  $D(0)$  e, conseqüentemente, um menor erro na aproximação do domínio espacial inicial.

Outro ponto a ter em conta na construção da malha espacial inicial é a possibilidade de a solução apresentar algum tipo de simetria. Em caso afirmativo, é de todo conveniente que a decomposição  $\mathcal{P}_m(0)$  possua o mesmo eixo de simetria, para que haja uma representação adequada da solução em cada instante. Por exemplo, as malhas espaciais representadas na figura 2.1 são simétricas relativamente ao eixo das abcissas e à bissetriz dos quadrantes ímpares,

respetivamente. Já o sistema de elementos finitos da figura 2.4 apresenta simetria radial.

Suponha-se que a solução é simétrica e desenvolve uma frente que se desloca no tempo perpendicularmente a um dos eixos de simetria do domínio espacial. Então, se a malha inicial não refletir essa mesma simetria, muito dificilmente a solução numérica a manterá com o decorrer da simulação, originando, deste modo, erros que poderiam ser evitados com uma criteriosa definição da malha inicial (figura 2.5 (à esquerda)). Na figura 2.5 (à direita), pode observar-se uma decomposição inicial com a simetria desejada (em relação ao eixo das abcissas), que potencia a manutenção desta simetria, no tempo, pela curva que define a posição da fronteira móvel, representada a cor vermelha. Assim, se o utilizador tiver um conhecimento prévio da

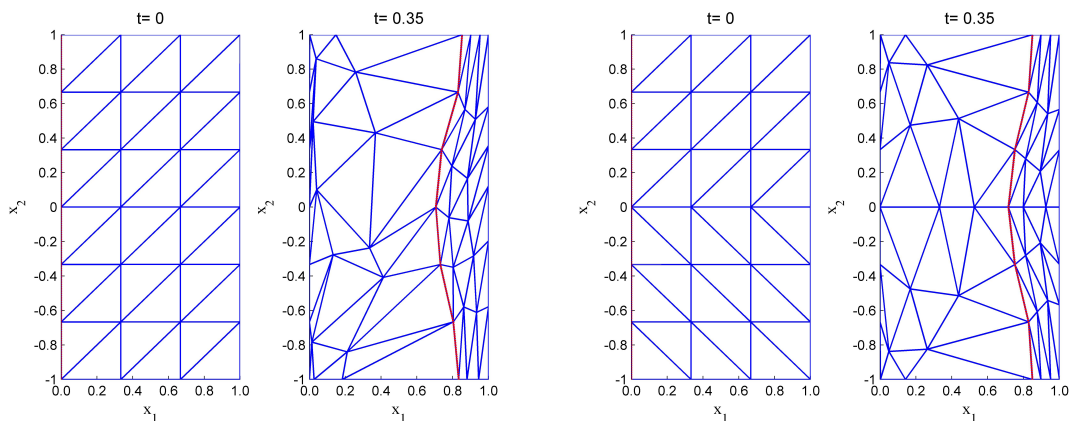


Figura 2.5: A fronteira móvel perde a simetria em relação ao eixo  $\mathcal{O}x_1$  (à esquerda) e mantém-na (à direita)

distribuição dos valores das variáveis dependentes no domínio espaço-tempo, pode construir sistemas de elementos finitos que favoreçam a obtenção de soluções numéricas de qualidade.

Um último facto relevante a considerar antes de se gerar a malha de elementos finitos é a existência de uma fronteira móvel comum a dois subdomínios espaciais contíguos, digamos  $D_{m_k}(0)$  e  $D_{m_l}(0)$ . Neste caso, os sistemas de elementos finitos  $\mathcal{P}_{m_k}(0)$  e  $\mathcal{P}_{m_l}(0)$  não são completamente independentes um do outro, estão interligados pelos vértices comuns pertencentes à fronteira móvel (figura 2.5). Por sua vez, o número e posição destes vértices da fronteira móvel condicionam a definição das decomposições  $\mathcal{P}_{m_k}(0)$  e  $\mathcal{P}_{m_l}(0)$ . Logo, tendo por objetivo a construção de uma partição inicial adequada da fronteira móvel, é importante saber como evoluem os subdomínios espaciais no tempo (se há expansão, ou contração, por exemplo).

### 2.2.1.2 Solução aproximada local

Localmente, em cada  $\Delta_{m,L}$  ( $L = 1, \dots, N_m$ ), a  $m$ -ésima variável dependente do sistema (1.1) é aproximada por uma função interpoladora apropriada, que depende de um conjunto finito de parâmetros ajustáveis. Estes parâmetros são as coordenadas dos pontos que descrevem

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

a posição dos vértices de  $\Delta_{m,L}$  e os coeficientes da combinação linear das funções da base do espaço de funções escolhido para a representar. Frequentemente, são escolhidas as funções polinomiais para aproximar cada função desconhecida  $y_m$ , porque são fáceis de manipular.

De modo a poderem trabalhar-se todos os elementos finitos da mesma forma, considere-se um *de referência ou unitário*, independente de  $t$ , definido por

$$\Delta = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d : v_I \geq 0 \wedge \sum_{I=1}^d v_I \leq 1 \right\}. \quad (2.7)$$

A transformação  $\mathcal{T}_{m,L}(t) : \Delta \rightarrow \Delta_{m,L}(t)$  definida por

$$(\mathcal{T}_{m,L}(t))(\mathbf{v}) = \mathbf{X}_{m,L}^{(1)}(t) + T(t) \cdot \mathbf{v}, \quad \text{com } T(:,j) = \mathbf{X}_{m,L}^{(j+1)} - \mathbf{X}_{m,L}^{(1)}, \quad (2.8)$$

é, para cada  $t$ , uma aplicação afim e bijetiva (figura 2.6).  $T(:,j)$  designa a coluna  $j$  da matriz quadrada  $T(t)$ , com  $1 \leq j \leq d$  e  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$  representa o  $i$ -ésimo vértice de  $\Delta_{m,L}$ , com  $1 \leq i \leq d+1$ . Os vértices são percorridos no sentido positivo ou anti-horário, tal como ilustra a figura 2.6. A família de malhas espaciais  $\{\mathcal{P}_m(t) : t \geq 0\}$  mantém a conectividade enquanto se permite o movimento contínuo dos vértices. Assim cada elemento finito  $\Delta_{m,L}(t_k) \in \mathcal{P}_m(t_k)$ , tem um único correspondente  $\Delta_{m,L}(t_*) \in \mathcal{P}_m(t_*)$ , para quaisquer  $t_k$  e  $t_*$  tais que  $0 \leq t_k < t_*$ .

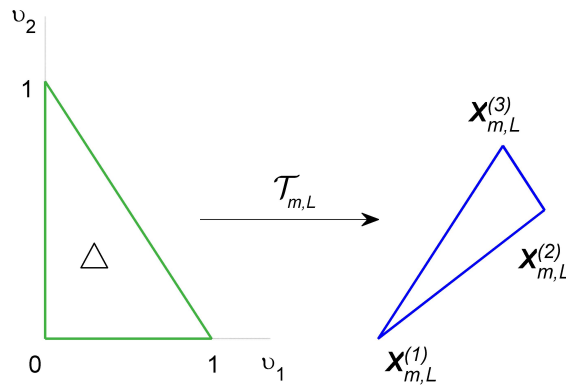


Figura 2.6: Transformação afim invertível do elemento finito unitário em  $\Delta_{m,L}$  ( $d=2$ )

Denote-se por  $Z_{m,L}$  a medida da área (ou do comprimento, se  $d = 1$ ) do elemento finito  $\Delta_{m,L}$ . Pode provar-se que

$$\det(T) = d \cdot Z_{m,L}, \quad d = 1, 2. \quad (2.9)$$

Como não se consideram elementos finitos degenerados, tem-se que  $\det(T) > 0$  e, consequente-

mente, existe a inversa da transformação  $\mathcal{T}_{m,L}$ , sendo definida por

$$\mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x}) = T^{-1} \left( \mathbf{x} - \mathbf{X}_{m,L}^{(1)} \right), \quad (2.10)$$

onde

$$T^{-1} = \frac{1}{2Z_{m,L}} \begin{pmatrix} (X_2)_{m,L}^{(3)} - (X_2)_{m,L}^{(1)} & (X_1)_{m,L}^{(1)} - (X_1)_{m,L}^{(3)} \\ (X_2)_{m,L}^{(1)} - (X_2)_{m,L}^{(2)} & (X_1)_{m,L}^{(2)} - (X_1)_{m,L}^{(1)} \end{pmatrix},$$

se  $d = 2$  e é igual a  $1/Z_{m,L}$  se  $d = 1$ . Na matriz anterior,  $(X_I)_{m,L}^{(i)}$  representa a  $I$ -ésima coordenada do vértice  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$ . A transformação  $\mathcal{T}_{m,L}$ , definida em (2.8), pode ainda ser expressa através das coordenadas baricêntricas ou triangulares  $(L^{(1)}, \dots, L^{(d+1)})^T$  em  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{m,L}(t))(\mathbf{v}) &= \left( 1 - \sum_{I=1}^d v_I \right) \mathbf{X}_{m,L}^{(1)}(t) + \sum_{I=1}^d v_I \mathbf{X}_{m,L}^{(I+1)}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} L^{(i)}(\mathbf{v}) \mathbf{X}_{m,L}^{(i)}(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Estas coordenadas satisfazem as condições seguintes

$$\begin{aligned} L^{(i)}(\mathbf{v}^{(j)}) &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d+1, \\ 0 \leq L^{(i)}(\mathbf{v}) \leq 1 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{d+1} L^{(i)}(\mathbf{v}) &= 1, \quad \forall \mathbf{v} \in \Delta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $\delta_{i,j}$  designa a função *delta* de Kronecker.

Seja  $\mathbb{P}_r^d(\Delta_{m,L})$  o espaço das funções polinomiais em  $d$  variáveis de grau menor ou igual a  $r$ , com coeficientes reais, definidas em  $\Delta_{m,L}$ . Note-se que não se usam aproximações lineares, logo  $r > 1$ . A restrição da função  $Y_m$  (que aproxima a  $m$ -ésima variável dependente  $y_m$ ) a  $\Delta_{m,L}$ , que se nota por  $Y_m|_{\Delta_{m,L}}$  é um elemento deste espaço, isto é,  $Y_m|_{\Delta_{m,L}} \in \mathbb{P}_r^d(\Delta_{m,L})$ . Constrói-se, agora, cada uma destas funções interpoladoras locais  $Y_m|_{\Delta_{m,L}}$ , com  $L = 1, 2, \dots, N_m$ .

Considerem-se definidos  $f_r(d)$  pontos de interpolação  $\{\mathbf{v}^i : i = 1, 2, \dots, f_r(d)\}$  no elemento finito unitário  $\Delta$ , onde

$$f_r(d) = \prod_{i=1}^d (r+i)/d, \quad (2.13)$$

e seja  $\ell^i(\mathbf{v})$  o polinómio de Lagrange de grau  $r$ , tal que

$$\ell^i(\mathbf{v}^j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, f_r(d). \quad (2.14)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Sabe-se que  $\mathcal{B}_r = \{\ell^i(\mathbf{v}) : i = 1, \dots, f_r(\mathbf{d})\}$  é uma base do espaço de funções

$$\mathbb{P}_r^{\mathbf{d}}(\Delta) = \{P(\mathbf{v}) : P \text{ é um polinómio com coeficientes reais de grau máximo } r, \forall \mathbf{v} \in \Delta\}.$$

Para cada  $g \in C^0(D_m)$ , defina-se

$$(\mathcal{I}_{N_m} g)(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{f_r(\mathbf{d})} g(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^i)) \ell^i(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Delta, \quad L = 1, \dots, N_m. \quad (2.15)$$

Então  $\mathcal{I}_{N_m} g$  é uma função contínua em  $D_m$  e satisfaz as condições de interpolação:

$$(\mathcal{I}_{N_m} g)(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^j)) = g(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^j)), \quad j = 1, \dots, f_r(\mathbf{d}), \quad L = 1, \dots, N_m. \quad (2.16)$$

Tem-se ainda que o operador  $\mathcal{I}_{N_m}$  define uma projeção limitada em  $C^0(D_m)$  e

$$\|\mathcal{I}_{N_m}\|_{\infty} = \max_{\mathbf{v} \in \Delta} \sum_{i=1}^{f_r(\mathbf{d})} |\ell^i(\mathbf{v})|.$$

A aproximação da função  $y_m$  deve ser uma função contínua em  $D_m(t)$  para cada instante  $t \geq 0$ . Localmente, no  $L$ -ésimo elemento finito do  $m$ -ésimo sistema, é frequentemente obtida por interpolação de Lagrange. Considere-se que a solução é conhecida nos  $f_r(\mathbf{d})$  nós de interpolação  $\mathbf{x}_{m,L}^i = \mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^i)$  do elemento finito  $\Delta_{m,L}$ . Então pode exprimir-se a solução aproximada local  $Y_{m,L}$ , em  $\Delta_{m,L}$ , por

$$Y_{m,L}(\mathbf{x}) = Y_m|_{\Delta_{m,L}}(\mathbf{x}) = (\mathcal{I}_{N_m} Y_m)(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})), \quad \mathbf{v} \in \Delta, \quad L = 1, \dots, N_m. \quad (2.17)$$

Observe-se que  $\ell^i(\mathbf{x}) = \ell^i(\mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x})) = \ell^i(\mathbf{v})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Delta_{m,L}$ .

Preste-se agora atenção à seleção dos pontos de interpolação – os *nós locais*. Sejam

$$\left(\frac{j}{r}, (\mathbf{d}-1)\frac{k}{r}\right)^T, \quad j, k = 0, 1, \dots, r, \quad j+k \leq r, \quad (2.18)$$

as coordenadas dos  $f_r(\mathbf{d})$  nós  $\mathbf{v}^i$ . Tal como a figura 2.7 sugere, os pontos de interpolação são numerados a partir da origem (com cor preta) percorrendo as arestas nodais no sentido positivo até ao nó  $\mathbf{v}^{3r} = (0, 1/r)^T$ . A seguir, recomeça-se a numeração em  $\mathbf{v}^{3r+1} = (1/r, 1/r)^T$  (a cor azul) e usa-se a mesma estratégia: percorrem-se os nós contidos nos segmentos de reta paralelos às arestas nodais, e assim sucessivamente (a cor vermelha), até que todos os nós tenham sido numerados. Estes nós de interpolação definem uma malha local em cada elemento finito, que está ilustrada na figura 2.8 para o caso de  $r = 3$ , com  $\mathbf{d} = 2$ .

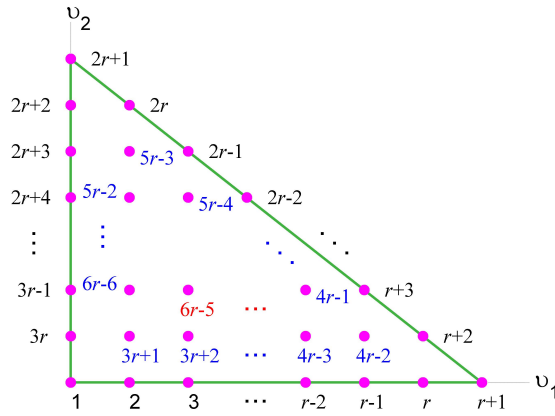


Figura 2.7: Numeração dos pontos de interpolação em  $\Delta$

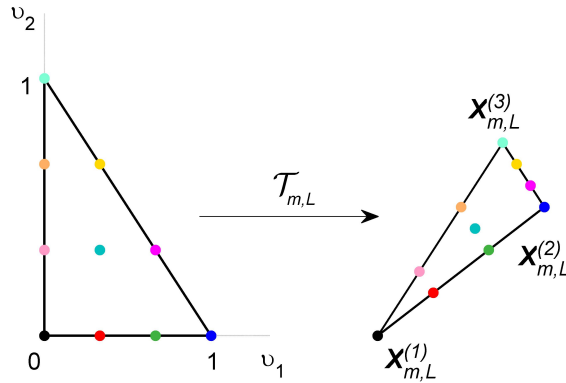


Figura 2.8: Nós locais  $\mathbf{x}_{m,L}^i$  em  $\Delta_{m,L}$  para  $r = 3$  ( $d=2$ ). Os seus correspondentes em  $\Delta$  estão à mesma cor

Neste caso, a  $i$ -ésima função da base  $\mathcal{B}_r$  dos polinómios de Lagrange é dada por

$$\ell^i(\mathbf{v}) = \prod_{M=1}^{d+1} \bar{f}_{k_{i,M}}(L^M(\mathbf{v})), \quad \text{sendo } \bar{f}_k(s) = \begin{cases} \prod_{j=1}^k (rs - j + 1)/j & \text{se } 1 \leq k \leq r \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}, \quad (2.19)$$

com  $k_{i,M} = rL^M(\mathbf{v}^i) \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, 2, \dots, f_r(d)$ . Na figura 2.9, está representado o gráfico de dois polinómios básicos da interpolação de Lagrange no triângulo de referência: o primeiro (à esquerda) de grau dois associado a  $v^1$ , o segundo (à direita) tem grau três e está associado ao décimo nó.

Aqui, interessa fazer uma distinção clara entre a interpolação (local) num domínio bidimensional e a interpolação em  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . No caso unidimensional, em vez de se usar (2.19),

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

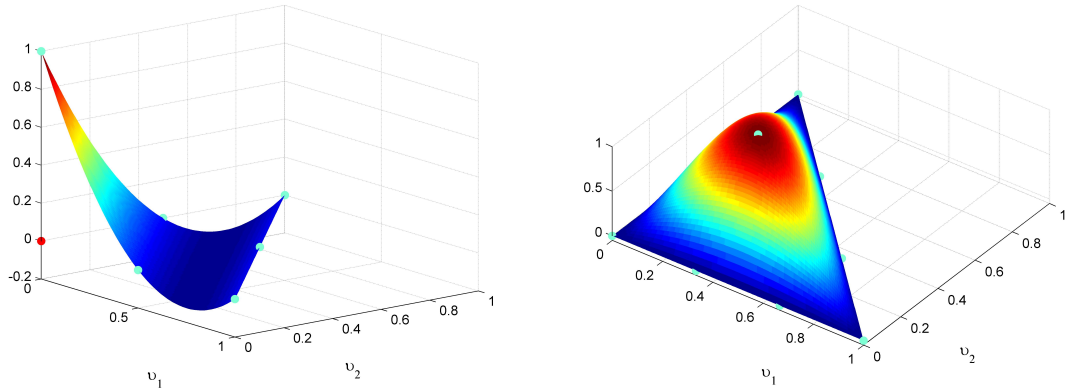


Figura 2.9: Representação gráfica em  $\Delta$  das funções  $\ell^1$ ,  $r = 2$  (à esquerda) e  $\ell^{10}$ ,  $r = 3$  (à direita) ( $d=2$ )

recorre-se à fórmula mais geral que define a  $i$ -ésima função da base  $\mathcal{B}_r$ ,

$$\ell^i(\mathbf{v}) = \prod_{j=1, j \neq i}^{r+1} \frac{v - v^j}{v^i - v^j}, \quad i = 1, 2, \dots, r + 1, \quad (2.20)$$

e o grau da aproximação local é definido previamente para cada elemento finito de cada uma das  $m$  malhas, logo  $r = r(m, L)$ , com  $m = 1, \dots, n$  e  $L = 1, \dots, N_m$ . Assim, pode escolher-se qualquer conjunto finito de pontos de interpolação. No MEFM, os nós interiores a  $\Delta_{m,L}$  são definidos em cada instante e, nesta tese, as suas posições são otimizadas com respeito à informação fronteira do elemento, como em [6]. De acordo com esta nova estratégia, as posições dos  $r + 1$  pontos de interpolação  $v^i$  são definidas por

$$v^i = \frac{z^i - z^1}{z^{r+1} - z^1}, \quad i = 1, 2, \dots, r + 1, \quad (2.21)$$

sendo  $z^i$  a  $i$ -ésima raiz do polinómio de Chebyshev de grau apropriado,  $r + 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , dada por

$$z^i = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \frac{i - 0.5}{r + 1} \pi \right) \right).$$

Este conjunto de nós permite minimizar o erro máximo da interpolação no intervalo

$$\left[ \frac{-z^1}{z^{r+1} - z^1}, \frac{1 - z^1}{z^{r+1} - z^1} \right] \supset \Delta = [0, 1].$$

Procedendo deste modo, os correspondentes pontos de interpolação  $\mathbf{x}_{m,L}^i$ , com  $i = 2, 3, \dots, r$  são tais que pertencem a  $\text{int}(\Delta_{m,L})$  e as suas posições estão também otimizadas em relação à informação fronteira, exterior ao elemento finito.

Relativamente ao caso bidimensional, observe-se que para se poder garantir a continuidade da solução numérica  $Y_m$  sobre uma aresta comum a dois elementos finitos adjacentes

$\Delta_{m,L_i}$  e  $\Delta_{m,L_j}$ , o número de nós de interpolação pertencentes a esta aresta, bem como as respectivas posições devem ser coincidentes em ambos os elementos finitos  $\Delta_{m,L_i}$  e  $\Delta_{m,L_j}$ . Logo, o número de pontos de interpolação é o mesmo para todos os elementos da malha  $\mathcal{P}_m$ , isto é,  $r = r(m)$ . Impõe-se agora a escolha dos melhores nós para interpolar num triângulo. Os pontos de Lebesgue ou os de Fekete são dois conjuntos de nós de interpolação que surgem na literatura [12, 13, 14, 48, 99] como sendo ótimos dentro de um certo critério. No entanto, para estes conjuntos de pontos, que não têm coordenadas triangulares igualmente espaçadas, não se encontraram fórmulas para avaliar os polinómios básicos de Lagrange com um custo computacional reduzido. Estes são definidos recorrendo ao quociente do determinante de duas matrizes de Vandermonde generalizadas. Assim, para  $d = 2$ , o conjunto de nós de interpolação fica limitado aos pontos definidos em (2.18).

### 2.2.1.3 A aproximação global

Analise-se agora sobre a formulação global da aproximação  $Y_m$  da  $m$ -ésima variável dependente  $y_m$ . Note-se que não se exigem mais condições de regularidade a  $Y_m$  para além da continuidade, isto é,  $Y_m \in C^0(D_m(t))$ . Assim, o espaço de funções a que pertence a aproximação pode ser definido por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}_m} = \left\{ Y_m \in C^0(D_m) : Y_m|_{\Delta_{m,L}} \circ \mathcal{T}_{m,L} \in \mathbb{P}_r^d, \forall \Delta_{m,L} \in \mathcal{P}_m \right\}, \quad (2.22)$$

e a sua dimensão é igual ao número de *nós globais* da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ . Estes nós são numerados elemento a elemento, começando no primeiro e percorrendo todos os nós deste elemento finito seguindo a ordenação ilustrada na figura 2.7. De seguida, passa-se para  $\Delta_{m,2}$ , sem repetir os nós previamente numerados, e assim sucessivamente, até ao último nó de  $\Delta_{m,N_m}$ .

Seja  $\{\Phi_m^k : k = 1, \dots, \tilde{N}_m\}$  uma base para  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}_m}$ , constituída por funções que à partida satisfaçam as condições de continuidade exigidas à aproximação. Então, pode definir-se globalmente a aproximação  $Y_m$  por

$$Y_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_m} Y_m(\boldsymbol{\xi}_m^k, t) \Phi_m^k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_m(t), \quad (2.23)$$

onde  $Y_m(\boldsymbol{\xi}_m^k, t)$  representa o valor aproximado de  $y_m$  no respetivo nó global, em cada instante  $t$ , que coincide com o correspondente valor local  $Y_{m,L}^i(t) = Y_m \circ \mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^i, t)$ , para  $L$  e  $i$  satisfazendo  $\boldsymbol{\xi}_m^k = \mathbf{x}_{m,L}^i$ . A função interpoladora básica associada ao nó  $\boldsymbol{\xi}_m^k$  é contínua e verifica

$$\Phi_m^k(\boldsymbol{\xi}_m^j) = \delta_{kj}, \quad k, j \in \{1, 2, \dots, \tilde{N}_m\},$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

podendo ser definida por

$$\Phi_m^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \ell^{i_L}(\mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x})) & \text{se } \mathbf{x} \in \Delta_{m,L} \subseteq \text{supp}(\Phi_m^k) \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in D_m \setminus \text{supp}(\Phi_m^k) \end{cases}, \quad (2.24)$$

para algum  $i_L \in \{1, 2, \dots, f_r(d)\}$ , onde  $\text{supp}(\Phi_m^k)$  – *suporte da função*  $\Phi_m^k$  – é o fecho do conjunto  $\{\mathbf{x} \in D_m : \Phi_m^k(\mathbf{x}) \neq 0\}$ . Na figura 2.10, está representado o gráfico de duas funções básicas globais num domínio unidimensional. A primeira (à esquerda) está associada ao primeiro nó interior a  $\Delta_{m,L}$ , enquanto que a segunda (à direita) está associada ao nó de separação  $X_{m,L+1}$ . Usaram-se cores diferentes para o traçado do gráfico em cada elemento finito do respetivo suporte e, fora deste, o gráfico está traçado a cor vermelha.

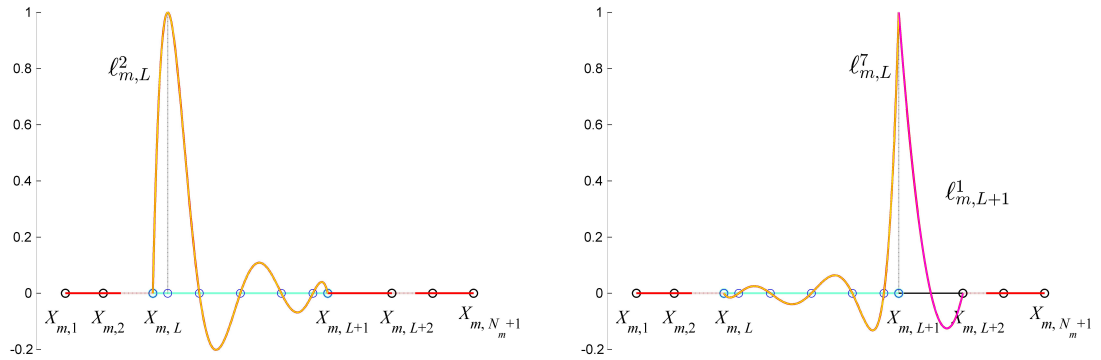


Figura 2.10: Representação gráfica de  $\Phi_m^k$ , associada a  $\mathbf{x}_{m,L}^2$  (à esquerda) e a  $X_{m,L+1}$  (à direita) ( $d=1$ )

Apontam-se, agora, algumas propriedades das funções básicas globais. Para cada  $m$ , tem-se que

- a função  $\Phi_m^k$ , com  $k = 1, \dots, \tilde{N}_m$ , não depende diretamente de  $t$ , mas a sua definição está associada aos vértices da malha  $\mathcal{P}_m$  que varia continuamente no tempo;
- para cada  $\mathbf{x} \in D_m$ ,  $\exists U = \text{int}(U)$  tal que  $\mathbf{x} \in U$  e todas, exceto um número reduzido de funções  $\Phi_m^k$ , são nulas em  $U$ . No entanto, a coleção  $\{\Phi_m^k : k = 1, \dots, \tilde{N}_m\}$  não constitui uma *partição finita da unidade* para  $D_m$  com funções de classe  $C^0$  [98] (porque  $\Phi_m^k(\mathbf{x}) < 0$  é possível, para algum  $k$ ), o que aconteceria se as  $\Phi_m^k$  fossem funções “chapéu”, isto é, se se usassem aproximações locais lineares;
- $\Phi_m^k$  é contínua em todo o domínio associado a  $y_m$ , mas não é diferenciável em todos os pontos do seu suporte;
- e para cada  $k$ ,  $\text{int}(\text{supp}(\Phi_m^k)) \cap \text{int}(\text{supp}(\Phi_m^j))$  é não vazio para um número reduzido de índices  $j$ .

O gráfico da aproximação  $Y_m$  obtém-se colecionando a representação gráfica de cada um dos polinómios locais  $Y_{m,L}$ , para  $L = 1, \dots, N_m$ , que origina uma função contínua, tal como ilustra a figura 2.11. Tem-se ainda que se  $y_m \in \mathcal{C}^0(D_m)$ , a função interpoladora global  $Y_m \simeq \mathcal{I}_{N_m} y_m$  converge uniformemente para  $y_m$  em  $\widetilde{D}_m$  [58].

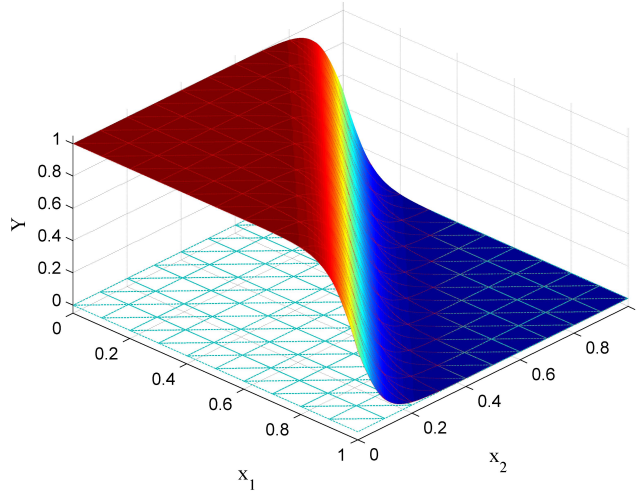


Figura 2.11: Aproximação seccionalmente de grau 3 de  $f(x_1, x_2) = (1 + \exp(20(x_1 + x_2 - 1)))^{-1}$ , com a malha projetada

Importa ainda deixar claro quais são os parâmetros efetivos de dependência da aproximação semi-discreta definida pela equação (2.23).  $Y_m$  é, para cada instante  $t$ , uma função contínua e seccionalmente polinomial que depende das *amplitudes nodais* (leia-se solução aproximada em todos os pontos de interpolação) e da posição dos vértices da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ , mas não depende da posição dos restantes nós globais. De facto, a posição de todos os  $\mathbf{x}_{m,L}^i$ , com  $i = 1, 2, \dots, f_r(d)$ , pode variar no tempo. No entanto, os pontos que não são nós de separação mantêm sempre a mesma posição relativa aos vértices do elemento finito  $\Delta_{m,L}$ . Assim, denotando por  $(X_I)_{m,j}$  a coordenada  $I$  do  $j$ -ésimo vértice da malha  $\mathcal{P}_m$ , pode escrever-se que

$$Y_m = Y_m \left( (X_I)_{m,j}(t), 1 \leq I \leq d, j = 1, \dots, N_{v_m}; Y_m^k(t), k = 1, \dots, \tilde{N}_m \right)^T. \quad (2.25)$$

É importante observar que não pertencem a esta lista de parâmetros efetivos todas as amplitudes em nós pertencentes a  $\partial D_m$ , para cada  $m$ , que sejam fixadas por uma condição de fronteira (de Dirichlet, por exemplo). Por outro lado, todas as coordenadas de vértices que se mantêm inalteradas durante a simulação, isto é, que não dependem de  $t$ , também deixam de constar na equação (2.25) (veja-se a figura 2.12). Note-se ainda que o movimento dos nós de uma fronteira móvel é definido por uma condição extra, externa ao MEFM. Consequentemente, cada uma destas condições retira um parâmetro ao método por cada vértice da fronteira móvel, que se pode escolher como sendo a coordenada  $X_I$  respetiva. Assim, as variáveis que

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

permanecerem na lista completa definida em (2.25), que se reescreve como

$$Y_m = Y_m \left( (X_I)_{m,j}(t), 1 \leq I \leq \mathbf{d}, j \in \Upsilon_{N_{v_m}}; Y_m^k(t), k \in \Upsilon_{\tilde{N}_m} \right)^T, \quad (2.26)$$

onde  $\Upsilon_M \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$  designa o conjunto dos índices (ou super-índices) “ativos”, constituem o conjunto dos parâmetros efetivos de dependência da aproximação  $Y_m$ . Note-se que  $\Upsilon_{N_{v_m}} = \Upsilon_{N_{v_m}}(I)$ , mas para não sobrecarregar a notação omitir-se-á esta dependência sempre que não gerar ambiguidade.

Na figura 2.12, está representado um sistema de elementos finitos num domínio retangular com uma fronteira móvel (representada a cor vermelha). Os vértices desta malha espacial inicial estão assinalados com diferentes cores, o que indica diferentes possibilidades para a direção do movimento das posições nodais. Os vértices marcados a cor:

- azul, podem mover-se em qualquer direção na vizinhança da posição inicial (ambas as coordenadas são parâmetros do MEFM);
- laranja, têm o seu movimento condicionado ao dos vértices do respetivo elemento finito pelo que as coordenadas da sua posição não integram a lista (2.26);
- verde, movem-se numa única direção que está assinalada a cor “magenta” (só um dos  $X_I(t)$  é parâmetro de dependência de  $Y_m$ ), porque um nó de  $\partial D_m(0)$  terá que pertencer a  $\partial D_m(t_*)$ , para  $0 < t_*$ ;
- preta, mantêm a sua posição inalterada no tempo;
- azul claro, movem-se numa única direção com velocidade dada pela condição que define o movimento da fronteira móvel, pelo que o parâmetro  $X_I(t)$  respetivo não faz parte da relação definida em (2.26).

### 2.2.2 Minimização dos resíduos

Uma vez escolhidas todas as funções  $Y_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , que aproximam, em cada instante, os elementos da solução  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ , do sistema de equações com derivadas parciais (1.1) no domínio espacial  $D_m$ , então os parâmetros de que dependem são ajustados, de modo a obter-se a função que mais se aproxima, dentro de um certo critério, da solução do problema. A solução  $\mathbf{y}$  pode ser considerada como uma variedade  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^{n+d}$  que evolui no tempo [70, 106], parametrizada pelo conjunto de parâmetros efetivos do método. Assim, os pontos do gráfico de cada função coordenada  $y_m$  de  $\mathbf{y}$  podem ser caracterizados pelo vetor posição

$$\mathbf{s}_m(\boldsymbol{\tau}, t) = (\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, t), y_m(\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, t), t)), \quad (2.27)$$

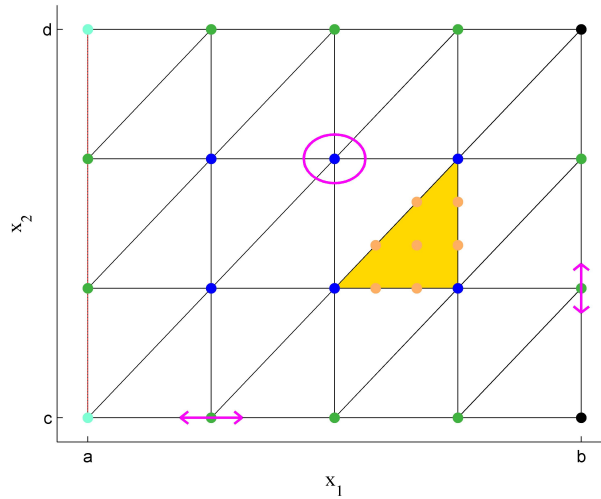


Figura 2.12: Ilustração das diferentes possibilidades para a direção do movimento nodal (d=2)

onde  $\tau$  é um parâmetro d-dimensional com domínio limitado. Na secção anterior, para cada  $t$ , construiu-se uma aproximação seccionalmente polinomial da variedade

$$\mathcal{S}_m = \{(\mathbf{x}, y_m(\mathbf{x}, \cdot)) : \mathbf{x} \in D_m\},$$

discretizando o domínio espacial de  $y_m$ . Como a aproximação  $Y_m$ , definida por (2.23), pertence a um subespaço linear de funções de dimensão finita, então lineariza-se  $y_m$  em torno de um ponto base  $s_{0m} = s_m(\tau_0, t_0)$  (fixando todos os parâmetros de  $y_m$ ).  $s_{0m}$  vai mudando com o avançar do tempo e pode ser constituído pelos vetores que geram a base do espaço linearizado calculados em  $t_0$ . Este subespaço linearizado, onde se projecta a solução  $y_m$ , é o espaço tangente a  $\mathcal{S}_m$ . Então,  $\partial Y_m / \partial t$  também pertence a este subespaço e, atendendo a (2.26), tem-se

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} = \sum_{I=1}^d \sum_{j \in \Upsilon_{N_{\nu m}}} \frac{\partial Y_m}{\partial (X_I)_{m,j}} (\dot{X}_I)_{m,j} + \sum_{k \in \Upsilon_{\tilde{N}_m}} \frac{\partial Y_m}{\partial Y_m^k} \dot{Y}_m^k, \quad (2.28)$$

onde  $\dot{(\cdot)}$  designa o operador  $d/dt(\cdot)$ .

A solução aproximada  $Y_m$  fica completamente determinada se, para cada instante, estiverem definidos todos os parâmetros da lista (2.25). Nesta formulação do MEFM, os parâmetros efetivos de dependência de  $Y_m$ , definidos em (2.26), são escolhidos de modo a que o resíduo da  $m$ -ésima equação discretizada do sistema (1.1), dado por

$$\mathcal{R}_m = \frac{\partial Y_m}{\partial t} - \mathcal{L}_m(\mathbf{Y}), \quad (2.29)$$

permaneça sempre ortogonal, em cada instante, ao subespaço tangente. Isto é equivalente a dizer que a distância de  $\mathcal{L}_m(\mathbf{Y})$  à sua projecção ortogonal  $\partial Y_m / \partial t$  deve ser mínima. Em

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

conclusão, significa que se pretende minimizar a soma dos quadrados da norma  $L^2$  dos resíduos das  $n$  equações com derivadas parciais discretizadas, com respeito a todas as possíveis escolhas das derivadas temporais dos parâmetros efetivos de dependência de  $Y$ , isto é,

$$\min_{(\dot{X}_I)_{l,j}, \dot{Y}_I^k} \sum_{m=1}^n |\mathcal{R}_m|_{L^2(D_m)}^2, \quad 1 \leq I \leq d, \quad (2.30)$$

para  $l = 1, \dots, n$ ,  $j \in \Upsilon_{N_{v_l}}$  e  $k \in \Upsilon_{\tilde{N}_l}$ . É importante realçar que, através deste processo, cada equação de derivadas parciais do sistema (1.1) origina um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e que esta minimização gera o movimento nodal de modo a otimizar a aproximação da solução em cada instante. Em particular, num sistema físico modelado por equações com derivadas parciais parabólicas em que o termo de difusão é dominante, a malha espacial tende para um estado estacionário, tornando-se localmente ótima no seguinte sentido: é a que produz o menor erro entre todas as possíveis malhas com a mesma conectividade [54, 69].

Neste momento, importa referir que, no MEFM, a maioria dos nós da malha tende a concentrar-se nas regiões em que a solução apresenta gradientes elevados seguindo as frentes abruptas no tempo, o que pode provocar distorções no sistema de elementos finitos com consequente perda de propriedades, originando singularidades na matriz do sistema de EDOs resultante da minimização do funcional (2.30). Assim, para prevenir o aparecimento destes problemas, é necessário adotar uma estratégia que evite que o movimento nodal seja completamente livre, reduzindo a influência na solução das regiões com grandes declives e penalizando as situações potencialmente geradoras de singularidades.

A possibilidade de o mesmo polinómio representar as funções interpoladoras locais em dois elementos finitos adjacentes de um dado sistema  $\mathcal{P}_m$  ou a degeneração da malha espacial por coalescência de dois nós de separação ou de um vértice com a aresta nodal oposta, originando decomposições não admissíveis de  $D_m$  são os dois tipos de singularidades inerentes ao MEFM e são ambos discutidos em [28, 105, 108]. Em qualquer uma destas duas situações, tem-se que a característica da matriz de “massa” é inferior à ordem.

Para evitar a possível indeterminação na solução do sistema de EDOs resultante da discretização por elementos finitos, adiciona-se um termo a (2.30) para cada  $m$  que penaliza o movimento relativo dos vértices. O valor absoluto destes termos é suficientemente pequeno de modo a que eles só têm um papel ativo no caso dos nós da malha estarem próximos de gerar elementos finitos degenerados. Considerando as penalizações do movimento nodal propostas por Miller [69], estabelecidas independentemente para cada sistema de elementos finitos,

obtém-se o problema de minimização modificado

$$\min_{(\dot{X}_I)_{l,j}, \dot{Y}_l^k} \sum_{m=1}^n |\mathcal{R}_m|_{L^2(D_m)}^2 + \sum_{L=1}^{N_m} \left( \epsilon_{m,L} \dot{Q}_{m,L} - S_{m,L} \right)^2, \quad (2.31)$$

com  $1 \leq I \leq d$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $j \in \Upsilon_{N_{v_l}}$  e  $k \in \Upsilon_{\tilde{N}_l}$ . A função  $\mathcal{Q}$  restringida a  $\Delta_{m,L}$ , originalmente, exprime a medida do respetivo elemento finito, isto é,  $Q_{m,L} = Z_{m,L}$ . Há outras possibilidades para este funcional, como a que foi usada por Wachter e Sobey em [106]:  $Q_{m,L}$  = ao perímetro de  $\Delta_{m,L}$  ao quadrado sobre  $Z_{m,L}$ . Na função objetivo (2.31),  $\epsilon_{m,L}$  e  $S_{m,L}$  representam os coeficientes correspondentes à viscosidade internodal e às forças do tipo mola desse elemento finito, respetivamente, e são definidos por

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{m,L} \\ S_{m,L} \end{pmatrix} = \left[ (Z_{m,L} - c_{m,L}^3)^{-1} \begin{pmatrix} c_{m,L}^2 \\ c_{m,L}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{m,L}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left( 1 + \frac{c_{m,L}^3}{Z_{m,L} - c_{m,L}^3} \right)^2. \quad (2.32)$$

Estes coeficientes dependem de três constantes, tais que  $0 < c_{m,L}^i \ll 1$ , a definir pelo utilizador para cada elemento de cada sistema de elementos finitos do problema que se pretende resolver. Note-se que  $c_{m,L}^3$  representa a medida mínima permitida de  $\Delta_{m,L}$ . Diferentes escolhas do valor destas constantes podem produzir diferentes movimentos da malha espacial, mas a opção tomada não interfere na qualidade da solução aproximada obtida com o MEFM [30].

### 2.2.3 Sistema de equações diferenciais ordinárias

O sistema de EDOs resultante da discretização por intermédio de elementos finitos é obtido do problema de minimização modificado (2.31). Os pontos de estacionaridade deste funcional (que se nota por)  $\mathcal{F}$  são definidos por

$$\dot{\Lambda} \mathcal{F} = \mathbf{0}, \quad \dot{\Lambda} = \left( \frac{\partial}{\partial (\dot{X}_1)_{l,j}}, \frac{\partial}{\partial (\dot{X}_d)_{l,j}}, \frac{\partial}{\partial \dot{Y}_l^k} \right)^T, \quad (2.33)$$

sendo  $l = 1, \dots, n$ ,  $j \in \Upsilon_{N_{v_l}}$  e  $k \in \Upsilon_{\tilde{N}_l}$ . Observe-se que, na definição de  $\dot{\Lambda}$ , a segunda coordenada só tem significado se  $d = 2$ . No caso  $d = 1$ , este operador reduz-se a  $\dot{\Lambda} = \left( \frac{\partial}{\partial (\dot{X}_1)_{l,j}}, \frac{\partial}{\partial \dot{Y}_l^k} \right)^T$ . Este sistema, que é uma aproximação do sistema de equações com derivadas parciais (1.1), permite determinar os parâmetros efetivos de que depende a aproximação  $Y$ . Uma vez que as amplitudes nodais não intervêm na função  $\mathcal{Q}$ , (que compõe a expressão que define os termos de penalização) aplicando a fórmula de Leibnitz, de (2.33), obtém-se

$$\sum_{m=1}^n \left( \int_{D_m} \mathcal{R}_m(\dot{\Lambda} \mathcal{R}_m) d\mathbf{x} + \sum_{L=1}^{N_m} \epsilon_{m,L} \left( \epsilon_{m,L} \dot{Q}_{m,L} - S_{m,L} \right) \left( \dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0 \right) \dot{\Lambda} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

interpretando  $\varphi \dot{\Lambda}$  como sendo

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial (\dot{X}_1)_{l,j}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial (\dot{X}_d)_{l,j}}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial \dot{Y}_l^k} \right)^T,$$

onde  $\varphi_i$  são as componentes de  $\varphi$ .

Observe-se que, no resíduo discretizado  $\mathcal{R}_m$  (2.29), o funcional  $\mathcal{L}_m$  não depende de nenhuma das variáveis do problema de minimização; apenas  $\partial Y_m / \partial t$  depende destas variáveis. Por outro lado, se um dado vértice (pertencente a uma fronteira móvel, por exemplo (veja-se a figura 2.5)) for comum a dois sistemas de elementos finitos  $\mathcal{P}_m$  e  $\mathcal{P}_l$ , as suas coordenadas apenas fazem parte da lista de parâmetros efetivos afeta a uma das duas funções aproximadas  $Y_m$  ou  $Y_l$ . Assim, a partir da equação (2.28), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \dot{v}} (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)^T = \frac{\partial Y_l}{\partial v} e_l, \quad (2.35)$$

para  $v = (X_I)_{l,j}$  ou  $v = Y_l^k$ , em que  $e_l$  designa o  $l$ -ésimo vetor da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Daqui, resulta que

$$\dot{\Lambda} \mathcal{R}_m = \Lambda Y_m \delta_{m,l}, \quad \text{com } \Lambda = \left( \frac{\partial}{\partial (X_1)_{l,j}}, \frac{\partial}{\partial (X_d)_{l,j}}, \frac{\partial}{\partial Y_l^k} \right)^T. \quad (2.36)$$

Então, reescrevendo o sistema (2.34) e utilizando o índice  $m$  em substituição de  $l$  (inclusive na definição dos operadores  $\Lambda$  e  $\dot{\Lambda}$ ), tem-se que

$$\int_{D_m} \mathcal{R}_m (\Lambda Y_m) d\mathbf{x} + \sum_{L=1}^{N_m} \epsilon_{m,L} \left( \epsilon_{m,L} \dot{Q}_{m,L} - S_{m,L} \right) \left( \dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0 \right) \dot{\Lambda} = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

com  $m = 1, \dots, n$ . Intuitivamente, pode interpretar-se o MEFM como uma generalização do método de Galerkin que obriga a que o resíduo da  $m$ -ésima equação com derivadas parciais seja ortogonal ao subespaço linear de funções gerado pelos elementos de (2.26).

Para se explicitar e simplificar cada uma destas equações (2.37), é necessário, por um lado, definir  $\Lambda Y_m$  e  $(\dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0) \dot{\Lambda}$  e, por outro, calcular os integrais, o que será feito na secção seguinte. A este sistema resultante da aplicação do MEFM, é necessário juntar ainda a equação discretizada que define o movimento de cada nó pertencente a uma fronteira móvel (relembre-se que este é definido por uma condição externa ao método). Obtém-se assim, para cada  $m$ , um sistema de EDOs de grande dimensão nas variáveis listadas em (2.25). Logo que sejam conhecidos os valores de todos os parâmetros para um dado instante  $t$ , pode definir-se a solução aproximada do problema.

## 2.3 Equações gerais do MEFM para um modelo com fronteiras móveis

Nesta secção, interessa definir todas as derivadas parciais que figuram no sistema (2.37) e explicitar as aproximações das derivadas espaciais de  $Y_m$  nos pontos do domínio espacial em que não existam. Posteriormente, desenvolvem-se e simplificam-se os integrais que intervêm nas equações que constituem o sistema de EDOs.

Primeiro define-se  $(\dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0)\dot{\Lambda}$ , considerando a função  $Q$  original, isto é,  $Q_{m,L} = Z_{m,L}$ . Atendendo à igualdade (2.9) e à definição da matriz da transformação (2.8), pode exprimir-se a medida de  $\Delta_{m,L}$  por

$$Z_{m,L} = \begin{cases} (X_1)_{m,L}^{(2)} - (X_1)_{m,L}^{(1)}, & \mathbf{d} = 1, \\ \frac{1}{2} \sum_{\sigma_p \in S_3} (X_1)_{m,L}^{(\sigma_p(1))} \left[ (X_2)_{m,L}^{(\sigma_p(2))} - (X_2)_{m,L}^{(\sigma_p(3))} \right], & \mathbf{d} = 2, \end{cases} \quad (2.38)$$

onde  $\sigma_p$  é uma permutação par de  $S_3$ , conjunto das permutações dos elementos de  $\{1, 2, 3\}$ .

Então, a derivada temporal da área de um elemento finito (caso  $\mathbf{d} = 2$ ) é dada por

$$\dot{Z}_{m,L} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_3} (\dot{X}_I)_{m,L}^{(\sigma(1))} \left[ (X_{3-I})_{m,L}^{(\sigma(2))} - (X_{3-I})_{m,L}^{(\sigma(3))} \right], \quad (2.39)$$

com  $I = 1$ , se  $\sigma$  é par, e  $I = 2$ , caso contrário. Daqui, resulta que

$$(\dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0)\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \left( (X_2)_{m,L}^{(\sigma_p(2))} - (X_2)_{m,L}^{(\sigma_p(3))}, (X_1)_{m,L}^{(\sigma_i(2))} - (X_1)_{m,L}^{(\sigma_i(3))}, 0 \right)^T, \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{X}_{m,j} = \mathbf{X}_{m,L}^{(\sigma(1))}$  e  $\sigma_i$  denota uma permutação ímpar de  $S_3$ . Tendo presente a observação do parágrafo imediatamente anterior à equação (2.35), tem-se  $(\dot{Q}_{m,L}, \dot{Q}_{m,L}, 0)\dot{\Lambda} = \mathbf{0}$ , se  $\mathbf{X}_{m,j}$  não é um vértice de  $\Delta_{m,L}$ . Num problema unidimensional, tem-se simplesmente

$$(\dot{Q}_{m,L}, 0)\dot{\Lambda} = ((-1)^i, 0)^T, \quad \text{com } \mathbf{X}_{m,j} = \mathbf{X}_{m,L}^{(i)}, \quad (2.41)$$

sempre que não se anular.

Pretende-se agora caracterizar  $\Lambda Y_m$  no domínio espacial onde não é identicamente nulo. Relativamente às derivadas em ordem a cada parâmetro efetivo “ativo”  $(X_I)_{m,j}$  (observe-se que  $Y_m$  só depende deste parâmetro nos elementos finitos que têm  $\mathbf{X}_{m,j}$  como um vértice), estas são localmente obtidas recorrendo à derivada espacial respetiva da solução aproximada [30],

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

por

$$\frac{\partial Y_m}{\partial (X_I)_{m,j}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_I}(\mathbf{x}, t) L^{(i_L)} \left( \mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Delta_{m,L}, \quad (2.42)$$

para algum  $i_L \in \{1, \dots, d+1\}$ , tal que  $\mathbf{X}_{m,j} = \mathbf{X}_{m,L}^{(i_L)}$ . No que respeita às derivadas parciais da aproximação  $Y_m$  em ordem a cada uma das amplitudes nodais, que são parâmetros efetivos inventariados em (2.26), obtém-se das equações (2.23) e (2.24) que

$$\frac{\partial Y_m}{\partial Y_m^k}(\mathbf{x}, t) = \Phi_m^k(\mathbf{x}) = \ell^{i_L} \left( \mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Delta_{m,L} \subseteq \text{supp}(\Phi_m^k), \quad (2.43)$$

para algum  $i_L \in \{1, 2, \dots, f_r(d)\}$  tal que  $\xi_m^k = \mathbf{x}_{m,L}^{i_L}$ .

Deste modo, fica então definido  $\Lambda Y_m$  e, no elemento finito  $\Delta_{m,L}$ , reduz-se a

$$\Lambda Y_m = \left( -\frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_1} L^{(j_L)} \circ \mathcal{T}_{m,L}^{-1}, -\frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_d} L^{(j_L)} \circ \mathcal{T}_{m,L}^{-1}, \ell^{i_L} \circ \mathcal{T}_{m,L}^{-1} \right)^T, \quad (2.44)$$

para alguns  $j_L \in \{1, \dots, d+1\}$ , tal que  $\mathbf{X}_{m,j} = \mathbf{X}_{m,L}^{(j_L)}$  e  $i_L \in \{1, 2, \dots, f_r(d)\}$ , tal que  $\xi_m^k = \mathbf{x}_{m,L}^{i_L}$ . Consequentemente, a derivada parcial de primeira ordem de  $Y_m$  em ordem à variável tempo, dada pela equação (2.28), restringida ao  $L$ -ésimo elemento finito, pode ser simplificada. Tem-se

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} \Big|_{\Delta_{m,L}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^d -\frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_I}(\mathbf{x}, t) \sum_{j=1}^{d+1} L^{(j)}(\mathbf{v}) (\dot{X}_I)^{(j)}_{m,L} + \sum_{i=1}^{f_r(d)} \ell^i(\mathbf{v}) \dot{Y}_{m,L}^i. \quad (2.45)$$

Recorde-se que  $\mathbf{v} = \mathcal{T}_{m,L}^{-1}(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Delta_{m,L}$  e que esta transformação foi definida em (2.8). Para que esta derivada fique completamente definida é necessário obter as derivadas espaciais de primeira ordem da função  $Y_m$ .

Para calcular  $\frac{\partial Y_m}{\partial x_I}$  num ponto interior a  $\Delta_{m,L}$ , atendendo a que  $\frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\Delta_{m,L}} \circ \mathcal{T}_{m,L} \in \mathbb{P}_r^d$ ,  $\forall \Delta_{m,L} \in \mathcal{P}_m$ , pode recorrer-se à fórmula interpoladora de Lagrange, utilizando exatamente os mesmos pontos de interpolação que se usam para definir a solução aproximada  $Y_m$  no respetivo elemento finito, desde que se conheçam as correspondentes derivadas em cada um dos nós de interpolação. Assim, para cada instante  $t$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_I}(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})) &= \sum_{i=1}^{f_r(d)} \frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_I}(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v}^i)) \ell^i(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{i=1}^{f_r(d)} \ell^i(\mathbf{v}) \sum_{k=1}^{f_r(d)} Y_{m,L}^k \frac{\partial \ell^k}{\partial x_I}(\mathbf{v}^i), \quad \mathbf{v} \in \text{int}(\Delta), \end{aligned} \quad (2.46)$$

sendo a última igualdade estabelecida a partir das equações (2.17) e (2.15) que definem a solução aproximada local. Mas, pela derivada de uma função composta e tendo em conta a

equação (2.10) que define a transformação  $\mathcal{T}_{m,L}^{-1}$ , pode escrever-se

$$\frac{\partial \ell^k}{\partial x_I} = \sum_{J=1}^d \frac{\partial \ell^k}{\partial v_J} \frac{\partial v_J}{\partial x_I} = (T^{-1}(:, I))^T \nabla \ell^k, \quad (2.47)$$

onde  $\nabla$  denota o operador gradiente. Então, reescrevendo a equação (2.46), obtém-se

$$\frac{\partial Y_{m,L}}{\partial x_I} (\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{f_r(d)} \ell^i(\mathbf{v}) (T^{-1}(:, I))^T \sum_{k=1}^{f_r(d)} Y_{m,L}^k \nabla \ell^k(\mathbf{v}^i), \quad \mathbf{v} \in \text{int}(\Delta). \quad (2.48)$$

Quanto à derivada espacial de segunda ordem  $\frac{\partial^2 Y_m}{\partial x_I^2}$ , que figura na expressão que define o resíduo discretizado  $\mathcal{R}_m$ , em analogia com o que foi feito para a derivada de primeira ordem, esta define-se por

$$\frac{\partial^2 Y_{m,L}}{\partial x_I^2} (\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{f_r(d)} \ell^i(\mathbf{v}) \sum_{k=1}^{f_r(d)} Y_{m,L}^k (T^{-1}(:, I))^T H^k(\mathbf{v}^i) T^{-1}(:, I), \quad \mathbf{v} \in \text{int}(\Delta), \quad (2.49)$$

sendo  $H^k$  a matriz hessiana da função  $\ell^k$ .

No entanto, para se obterem as derivadas espaciais de  $Y_m$  num ponto pertencente a  $\partial\Delta_{m,L}$  é preciso mais esforço. Interessa relevar que não foram exigidas condições suficientes de diferenciabilidade a  $Y_m$  e recorde-se que  $Y_m \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}_m}$  (2.32). Por conseguinte, é necessário definir aproximações das derivadas espaciais de  $Y_m$  em todos os pontos de  $D_m$  em que não existam.

### 2.3.1 Regularização da solução aproximada

Com o objetivo de regularizar cada função componente do vetor solução  $\mathbf{Y}$ , substitui-se a aproximação  $Y_m$  por um polinómio cúbico de Hermite na vizinhança dos nós de separação (em 1-D) ou das arestas nodais (em 2-D), numa secção perpendicular à aresta. Para economia de escrita, expõe-se esta técnica de regularização restringida ao caso unidimensional. Assim, para cada nó de separação  $X_{m,j}$ , com  $j = 1, \dots, N_{v_m}$ , considera-se uma sua vizinhança  $\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j}) = \{x \in D_m : X_{m,j} - \frac{\varepsilon_j}{2} < x < X_{m,j} + \frac{\varepsilon_j}{2}\}$ , com  $0 < \varepsilon_j \ll 1$  e define-se o polinómio cúbico de Hermite  $\mathcal{H}_j$  que satisfaz as seguintes condições

$$\mathcal{H}_j \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right) = Y_m \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right) \quad ; \quad \mathcal{H}'_j \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right) = \frac{\partial Y_m}{\partial x} \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right), \quad (2.50)$$

tal como apresentado na figura 2.13, à esquerda. Nesta figura, à direita, que ilustra a regularização de  $\partial Y_m / \partial x$ , o valor desta função nos dois elementos finitos consecutivos é  $m_{j-1}(x)$  e  $m_j(x)$ , respetivamente. Na vizinhança de amplitude  $\varepsilon_j$  de  $X_{m,j}$ , tem-se que o valor da derivada

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

especial da aproximação  $Y_m$ , traçada a cor vermelha, assume uma variação regular dada por  $\mathcal{H}'_j(x) = m_{\mathcal{H}_j}(x)$ .

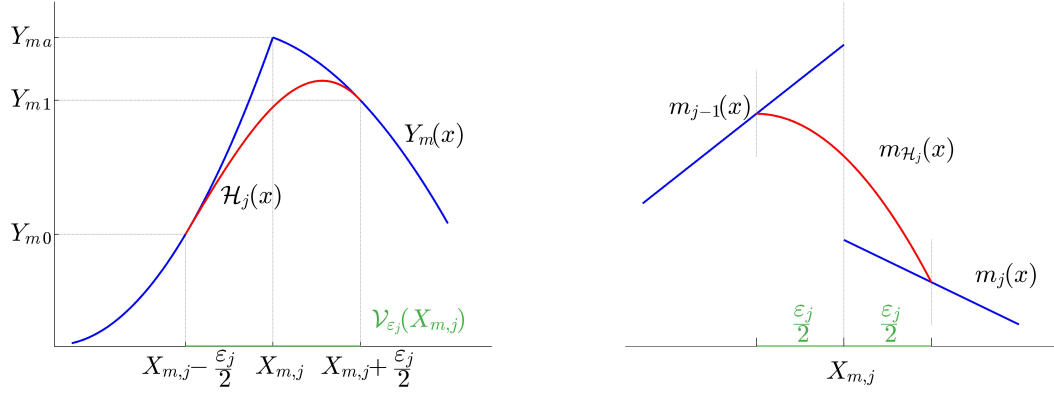


Figura 2.13: Aproximação cúbica de Hermite da função  $Y_m$  na vizinhança de um ponto angular  $X_{m,j}$  (à esquerda) e o valor de  $\partial Y_m / \partial x$  em  $\Delta_{m,j-1}$ ,  $\Delta_{m,j}$  e  $\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})$  (à direita)

A solução aproximada *regularizada*  $\tilde{Y}_m$ , definida em  $D_m(t)$ , fica caracterizada por

$$\tilde{Y}_m(x, t) = \begin{cases} Y_m(x, t), & x \in D_m \setminus \bigcup_{j=1}^{N_{v_m}} \mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j}) \\ \mathcal{H}_j(x), & x \in \mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j}), \quad j = 1, \dots, N_{v_m} \end{cases}. \quad (2.51)$$

Usando o desenvolvimento de  $Y_m$  e  $\frac{\partial Y_m}{\partial x}$  em série de Taylor em torno de  $X_{m,j}$ , nos intervalos  $[X_{m,j} - \frac{\varepsilon_j}{2}, X_{m,j}]$  e  $[X_{m,j}, X_{m,j} + \frac{\varepsilon_j}{2}]$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_j(X_{m,j}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^-) + \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^+) \right) + o_1(\varepsilon_j), \\ \mathcal{H}''_j(X_{m,j}) &= \frac{1}{\varepsilon_j} \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^+) - \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^-) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2}(X_{m,j}^-) + \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2}(X_{m,j}^+) \right) + o_2(\varepsilon_j), \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $o(\varepsilon_j)$  representa um infinitésimo com  $\varepsilon_j$  de primeira ordem, isto é,  $\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} o(\varepsilon_j) = 0$ .

Fazendo  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ,  $\forall j$ , tem-se que  $\tilde{Y}_m \rightarrow Y_m$ . Então,

$$\frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}) = \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}(X_{m,j}) = \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \mathcal{H}'_j(X_{m,j}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^-) + \frac{\partial Y_m}{\partial x}(X_{m,j}^+) \right). \quad (2.53)$$

No caso de se pretender simular um sistema físico modelado por equações com derivadas parciais, em que no operador  $\mathcal{L}$  figurem derivadas espaciais de ordem superior a dois, pode aperfeiçoar-se esta técnica de regularização aumentando o grau do polinómio de Hermite, de modo a conseguir boas aproximações das derivadas nos pontos angulosos. As condições suplementares

a impor para o conseguir poderão ser:

$$\mathcal{H}_j'' \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right) = \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \left( X_{m,j} \pm \frac{\varepsilon_j}{2} \right).$$

Finaliza-se esta subsecção, apresentando os resultados obtidos para definir o valor do limite de qualquer integral na vizinhança do ponto anguloso  $X_{m,j}$ , que eventualmente surja por aplicação do MEFM ao modelo considerado neste trabalho. Estes resultados, que serão usados na simplificação das equações que constituem o sistema de ODEs, estão sintetizados no parágrafo seguinte.

Seja  $f(x) = f(x, \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dx})$  uma função contínua e finita para todos os valores das suas variáveis de uma dada região de interesse  $S$ , que admite derivadas parciais contínuas e finitas de qualquer ordem em todos os pontos de  $S$ . Suponha-se que cada função  $u_m = u_m(x)$ ,  $m = 1, \dots, n$ , é contínua e finita em todo o seu domínio, é seccionalmente polinomial, podendo a sua representação gráfica apresentar um número finito de pontos angulosos  $X_{m,j}$ . Então (veja-se [80]),

$$(a) \quad \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})} f \left( x, \tilde{\mathbf{u}}, \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dx} \right) \left( \tilde{\psi}(x), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X_{m,j}} \right)^T dx = \mathbf{0},$$

$$(b) \quad \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})} f \left( x, \tilde{\mathbf{u}}, \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dx} \right) \frac{d^2 \tilde{u}_m}{dx^2} \left( \tilde{\psi}(x), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X_{m,j}} \right)^T dx \simeq$$

$$f(X_{m,j}) \left( \left. \frac{du_m}{dx} \right|_{X_{m,j}^+} - \left. \frac{du_m}{dx} \right|_{X_{m,j}^-} \right) \left( \psi(X_{m,j}), -\frac{\psi'(X_{m,j}^-) + \psi'(X_{m,j}^+)}{2} \right)^T,$$

onde  $\tilde{\psi}$  designa a aproximação da função  $\psi$ , em  $\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})$ , por um polinómio de terceiro grau que satisfaça as condições (2.50). Nas duas equações anteriores,  $\psi$  representa uma função contínua e seccionalmente polinomial em  $[X_{m,j} - \frac{\varepsilon_j}{2}, X_{m,j}]$  e  $[X_{m,j}, X_{m,j} + \frac{\varepsilon_j}{2}]$ .

Termina-se, referindo que só se assegura que não há erro de truncatura ao calcular os integrais na vizinhança de pontos angulosos, se forem do tipo (a) ou quando  $f$  não for função de  $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dx}$ . Se  $f$  for também função de  $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dx}$ , haverá um certo erro que depende da diferença das derivadas laterais de  $u_i$  em  $X_{m,j}$ , com  $i = 1, \dots, n$ . No entanto, há que notar o seguinte:

- se  $X_{m,j}$  não é um ponto anguloso para uma dada função  $u_i$ , então essa diferença é nula e, por isso, a maior parte dos termos das expressões dos erros são nulos também;
- como  $u_i$  é uma função polinomial em cada subdomínio limitado por dois pontos angulosos consecutivos, então a diferença referida deverá diminuir à medida que se aumentarem os graus dos polinómios que definem  $u_i$ , em cada um destes subdomínios.

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Pelas razões apontadas, consideram-se como razoáveis as aproximações obtidas para os integrais do tipo (b).

### 2.3.2 Desenvolvimento das equações e simplificação dos integrais

Nesta subsecção, apresenta-se com rigor, a simplificação dos integrais que aparecem nas equações do sistema (2.37), para cada  $m = 1, \dots, n$ , considerando a aproximação regularizada  $\tilde{Y}_m$  e decompondo-os de modo a fazer intervir as vizinhanças de todos os nós de separação (se  $d = 1$ ) ou de todas as arestas da malha espacial bidimensional (caso  $d = 2$ ). Assim, tem-se

$$\int_{D_m} \mathcal{R}_m(\Lambda Y_m) d\mathbf{x} = \sum_{L=1}^{N_m} \left( \lim_{\varepsilon_{m,L} \rightarrow 0} \int_{\Delta_{m,L}^\varepsilon} \mathcal{R}_m(\Lambda Y_m) d\mathbf{x} \right) + \sum_{K=1}^{N_{(\cdot)m}} \left( \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_{\varepsilon_K}} \tilde{\mathcal{R}}_m(\Lambda \tilde{Y}_m) d\mathbf{x} \right), \quad (2.54)$$

onde  $\varepsilon_{m,L} = (\varepsilon_{m,L}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{m,L}^{(d+1)})^T$  e  $\Delta_{m,L}^\varepsilon$  é um aberto contido no respetivo elemento finito definido por

$$\Delta_{m,L}^\varepsilon = \Delta_{m,L} \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} \mathcal{V}_{\varepsilon_{m,L}^{(i)}}.$$

No terceiro integral de (2.54),  $\tilde{\mathcal{R}}_m$  representa o resíduo da  $m$ -ésima equação discretizada, definido pela equação (2.29), em que a solução aproximada  $Y$  é substituída pela solução aproximada regularizada  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)^T$  e  $\mathcal{V}_{\varepsilon_K}$  denota a vizinhança de amplitude  $\varepsilon_K$ , do  $K$ -ésimo elemento nodal (uma aresta da malha espacial, se  $d = 2$ ). No caso  $d = 1$ , tem-se  $\mathcal{V}_{\varepsilon_K} = \mathcal{V}_{\varepsilon_K}(X_{m,K})$ .

Daquí em diante, apontam-se os pormenores da dedução para  $d = 2$ . No caso unidimensional, a simplificação dos integrais obtém-se de forma análoga. Começa-se por se considerar uma vizinhança aberta retangular de cada aresta nodal de  $\mathcal{P}_m$ , tal como ilustra a figura 2.14, para o  $L$ -ésimo elemento finito. Assim,  $\mathcal{V}_{\varepsilon_{m,L}^{(i)}}$  é o interior do conjunto constituído pelos pontos dos segmentos de reta de comprimento  $\varepsilon_{m,L}^{(i)}$ , centrados num ponto da  $i$ -ésima aresta de  $\Delta_{m,L}$  — que se passará a designar por  $\Gamma_{m,L}^{(i)}$  —, e perpendiculares à referida aresta, isto é,

$$\mathcal{V}_{\varepsilon_{m,L}^{(i)}} = \text{int} \left( \bigcup_{\hat{x} \in \Gamma_{m,L}^{(i)}} \left\{ \hat{x} + \lambda v_{m,L}^{(i)} : v_{m,L}^{(i)} \text{ é unitário e ortogonal a } \Gamma_{m,L}^{(i)} \wedge |\lambda| < \frac{\varepsilon_{m,L}^{(i)}}{2} \right\} \right).$$

Sejam  $\mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon$ , a transformação de  $\Delta$  em  $\Delta_{m,L}^\varepsilon$  definida por (2.8) e  $X_{m,L}^{(i)} + \omega^{(i)}(\varepsilon_{m,L})$ , o  $i$ -ésimo vértice de  $\Delta_{m,L}^\varepsilon$ , com  $\omega^{(i)}(\varepsilon) \neq 0$ . Pode provar-se, por um lado, que

$$\mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon(v) = \mathcal{T}_{m,L}(v) + \omega^{(1)}(\varepsilon_{m,L}) + M^\varepsilon \cdot v,$$

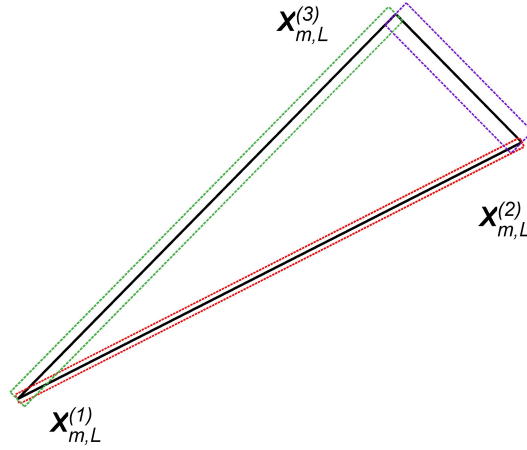


Figura 2.14: Ilustração da vizinhança aberta de cada aresta nodal de  $\Delta_{m,L}$  ( $d=2$ )

com  $M^\varepsilon(:, j) = \omega^{(j+1)}(\varepsilon_{m,L}) - \omega^{(1)}(\varepsilon_{m,L})$  e, por outro lado, que

$$\det(T^\varepsilon) = \mathbf{d} (Z_{m,L} + \varrho(\varepsilon_{m,L})),$$

onde  $T^\varepsilon$  é a matriz da transformação  $\mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon$ . Atendendo a que  $\lim_{\varepsilon_{m,L} \rightarrow 0} \omega^{(i)}(\varepsilon) = 0$ , obtém-se  $\lim_{\varepsilon_{m,L} \rightarrow 0} \varrho(\varepsilon_{m,L}) = 0$ . Daqui, resulta que

$$\lim_{\varepsilon_{m,L} \rightarrow 0} \int_{\Delta_{m,L}^\varepsilon} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon_{m,L} \rightarrow 0} \int_{\Delta} F(\mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon(\mathbf{v})) \det(T^\varepsilon) d\mathbf{v} = \mathbf{d} Z_{m,L} \int_{\Delta} F(\mathcal{T}_{m,L}(\mathbf{v})) d\mathbf{v}, \quad (2.55)$$

sendo  $F$  uma função contínua em  $\Delta_{m,L}$ .

Começa-se pelo primeiro somatório do segundo membro da equação (2.54). Tendo presente as equações (2.42) e (2.43), pode afirmar-se que todas as parcelas deste somatório são nulas, exceto as que se obtêm para os elementos finitos contidos no suporte da função básica associada ao nó global cuja posição ou amplitude é o parâmetro efetivo “ativo”. Assim, estabelece-se que  $X_{m,j}$  é o  $k_j$ -ésimo nó global e que o suporte da função  $\Phi_m^k$  é constituído por  $s_k$  elementos finitos da respetiva malha espacial, isto é,  $X_{m,j} = \xi_m^{k_j}$  e  $\text{supp}(\Phi_m^k) = \bigcup_{s=1}^{s_k} \Delta_{m,L_s}$ , respetivamente. Então, o somatório referido reduz-se a:

$$\sum_{s=1}^{s(\cdot)} \left( \lim_{\varepsilon_{m,L_s} \rightarrow 0} \int_{\Delta_{m,L_s}^\varepsilon} \mathcal{R}_m(\Lambda Y_m) d\mathbf{x} \right), \quad (2.56)$$

onde  $s(\cdot) = s_{k_j}$ , nas equações associadas às posições nodais, e  $s(\cdot) = s_k$ , nas equações associadas às amplitudes nos nós globais. Relembre-se que a definição de  $\Lambda Y_m$  num elemento finito é dada por (2.44).

Atendendo agora às equações (2.29) e (2.45) que definem o resíduo  $\mathcal{R}_m$  e a derivada

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

parcial de primeira ordem de  $Y_m$  em ordem à variável tempo, restringida ao  $L$ -ésimo elemento finito, respetivamente, substituindo (2.46) em (2.45), fixando o domínio de integração no elemento finito de referência, através da mudança de variável  $\mathbf{x} = \mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon(v)$  e usando (2.55), da equação (2.56) resulta para  $m = 1, \dots, n$ ,  $j \in \Upsilon_{N_{v_m}}(I)$  e  $k \in \Upsilon_{\tilde{N}_m}$ , que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon_{m,L_s} \rightarrow 0} \int_{\Delta_{m,L_s}^\varepsilon} \mathcal{R}_m(\Lambda Y_m) d\mathbf{x} = \\
 & = \mathbf{d} Z_{m,L_s} \sum_{M=1}^{d+1} \sum_{I=1}^d \sum_{i=1}^{f_r(d)} \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^i} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{f_r(d)} A_2(i, l, p_{M,j}) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ \sum_{l=1}^{f_r(d)} A_2(i, l, p_{M,j}) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_d} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ -A_1(i, i_s, M) \end{pmatrix} (\dot{X}_I)_{m,L_s}^{(M)} \\
 & + \mathbf{d} Z_{m,L_s} \sum_{i=1}^{f_r(d)} \begin{pmatrix} -\sum_{l=1}^{f_r(d)} A_1(i, l, j_s) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ -\sum_{l=1}^{f_r(d)} A_1(i, l, j_s) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_d} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ A(i, i_s) \end{pmatrix} \dot{Y}_{m,L_s}^i \\
 & - \mathbf{d} Z_{m,L_s} \begin{pmatrix} -\sum_{l=1}^{f_r(d)} B_{j_s}(l, L_s, m) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ -\sum_{l=1}^{f_r(d)} B_{j_s}(l, L_s, m) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_d} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \\ B(i_s, L_s, m) \end{pmatrix}, \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $f_r(d)$  e  $A_1, A_2$  são *arrays* tridimensionais com 3 e 9 páginas, respetivamente, definidos por

$$A(i, i_s) = \int_{\Delta} \ell^i(\mathbf{v}) \ell^{i_s}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$A_1(i, i_s, M) = \int_{\Delta} \ell^i(\mathbf{v}) L^{(M)}(\mathbf{v}) \ell^{i_s}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$A_2(i, i_s, p_{M,j}) = \int_{\Delta} \ell^i(\mathbf{v}) L^{(M)}(\mathbf{v}) \ell^{i_s}(\mathbf{v}) L^{(j_s)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

com  $p_{M,j} = M + 3(j_s - 1)$ , para alguns  $j_s \in \{1, \dots, d + 1\}$  e  $i_s \in \{1, 2, \dots, f_r(d)\}$ , tais que  $\mathbf{X}_{m,j} =$

$\mathbf{X}_{m,L_s}^{(j_s)}$  e  $\xi_m^k = \mathbf{x}_{m,L_s}^{i_s}$ . Na equação (2.57),  $B(i, L_s, m)$  e  $B_{j_s}(i, L_s, m)$  representam integrais do tipo

$$B(i, L_s, m) = \int_{\Delta} \mathcal{L}_m(\mathbf{Y})|_{\mathbf{x}=\mathcal{T}_{m,L_s}(\mathbf{v})} \ell^i(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$B_{j_s}(i, L_s, m) = \int_{\Delta} \mathcal{L}_m(\mathbf{Y})|_{\mathbf{x}=\mathcal{T}_{m,L_s}(\mathbf{v})} \ell^i(\mathbf{v}) L^{(j_s)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Considere-se agora um termo genérico do segundo somatório da equação (2.54), associado à  $K$ -ésima aresta da malha  $\mathcal{P}_m$ . Para o cálculo do respetivo integral, segue-se a estratégia proposta por Coimbra em [28], considerando uma mudança de coordenadas de modo a que, no novo sistema, a referida aresta esteja contida no semieixo positivo das ordenadas e com um extremo no ponto de coordenadas  $(0,0)^T$ . Assim, suponha-se que  $\Delta_{m,L_s}$  é o primeiro elemento finito que contém a  $K$ -ésima aresta global e que esta é a  $i$ -ésima aresta de  $\Delta_{m,L_s}$ , para algum  $i \in \{1, \dots, d+1\}$ . Interessa, neste momento, referir que, tal como as figuras 2.7 e 2.8 sugerem, a orientação definida para a aresta  $\Gamma_{m,L}^{(i)}$  é de  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$  para  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i+1)}$ , se  $i \leq d$ , ou de  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$  para  $\mathbf{X}_{m,L}^{(1)}$ , se  $i = d+1$ . Seja  $\varphi_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação de coordenadas definida pela composição da translação associada ao vetor de origem  $\mathcal{O}$  (ponto de coordenadas  $(0,0)^T$ ) e extremidade  $\mathbf{X}_{m,L_s}^{(i)}$ , seguida de uma rotação de amplitude  $\theta_K$  radianos, sendo  $\theta_K$  a medida do ângulo (no sentido positivo) que o semieixo positivo das ordenadas forma com o vetor constituído pela aresta  $\Gamma_{m,L_s}^{(i)}$  com a orientação introduzida. Então,

$$\mathbf{x} = \varphi_K(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{X}_{m,L_s}^{(i)} + R_{\theta_K}^T \boldsymbol{\eta}, \quad (2.58)$$

onde  $R_{\theta_K}$  é a matriz ortogonal da rotação, isto é,

$$R_{\theta_K} = \begin{pmatrix} \cos \theta_K & \sin \theta_K \\ -\sin \theta_K & \cos \theta_K \end{pmatrix}.$$

Tendo presente a definição de  $\tilde{\mathcal{R}}_m$ , apresentada imediatamente a seguir a (2.54), e efetuando a mudança de variável  $\mathbf{x} = \varphi_K(\boldsymbol{\eta})$ , definida por (2.58), visto que  $\det(R_{\theta_K}^T) = 1$ , pode

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

escrever-se

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}_{\varepsilon_K}} \tilde{\mathcal{R}}_m(\Lambda \tilde{Y}_m) d\mathbf{x} &= \int_0^{a_K} \left( \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} \left[ \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial t}(\Lambda \tilde{Y}_m) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 \right) d\eta_2 \\
 &- \int_0^{a_K} \left( \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} \left[ \sum_{I=1}^d (F_I)_m \left( \mathbf{x}, t, \tilde{Y}, \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_d} \right) \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial x_I^2}(\Lambda \tilde{Y}_m) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 \right) d\eta_2 \quad (2.59) \\
 &- \int_0^{a_K} \left( \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} \left[ g_m \left( \mathbf{x}, t, \tilde{Y}, \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_d} \right) (\Lambda \tilde{Y}_m) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 \right) d\eta_2,
 \end{aligned}$$

onde  $a_K$  denota o comprimento da  $K$ -ésima aresta da malha de elementos finitos  $\mathcal{P}_m$ ,

$$\frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial \eta_2} \end{pmatrix} R_{\theta_K}(:, I)$$

e

$$\frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial x_I^2} = (-1)^{3-I} \left( \sin(\theta_K + \frac{\pi}{2}I) \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \cos(\theta_K + \frac{\pi}{2}I) \frac{\partial}{\partial \eta_2} \right)^2 \tilde{Y}_m, \quad (2.60)$$

com  $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \tilde{Y}_m = \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}$ . Os resultados apresentados no final da subsecção anterior permitem concluir que o segundo e o quarto limites de (2.59) valem zero. Em relação ao terceiro limite da referida equação, substituindo (2.60) em (2.59), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} \left[ \sum_{I=1}^d (F_I)_m \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial x_I^2}(\Lambda \tilde{Y}_m) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 &= l_1 + l_2 + l_3 = \\
 \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} [(F_1)_m \cos^2 \theta_K + (F_2)_m \sin^2 \theta_K] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial \eta_1^2}(\Lambda \tilde{Y}_m) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 & \\
 + \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} \sum_{I=1}^d (-1)^I [(F_I)_m \sin(2\theta_K)] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}(\Lambda \tilde{Y}_m) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1 & \\
 + \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon_K}{2}}^{\frac{\varepsilon_K}{2}} [(F_1)_m \sin^2 \theta_K + (F_2)_m \cos^2 \theta_K] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} \frac{\partial^2 \tilde{Y}_m}{\partial \eta_2^2}(\Lambda \tilde{Y}_m) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(\eta)} d\eta_1. & \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

A  $m$ -ésima componente de  $\tilde{Y}$ , restringida a uma secção perpendicular a  $\Gamma_{m,L}^{(i)}$ , contida em  $\mathcal{V}_{\varepsilon_{m,L}}^{(i)}$ , é definida por um polinómio cúbico de Hermite nas condições (2.50) e coincide com  $Y_{m,L}$  em  $\Delta_{m,L}^\varepsilon$ . Fazendo uso, novamente, dos resultados estabelecidos na subsecção 2.3.1, conclui-se, a partir do caso do tipo (a), que são nulos o terceiro e quarto limites de (2.61) e, a partir do caso do tipo (b), que

$$l_1 \simeq [(F_1)_m \cos^2 \theta_K + (F_2)_m \sin^2 \theta_K] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(0,\eta_2)} \left( \frac{\partial Y_m}{\partial \eta_1} \Big|_{(0^+,\eta_2)} - \frac{\partial Y_m}{\partial \eta_1} \Big|_{(0^-,\eta_2)} \right) (\Lambda Y_m) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(0,\eta_2)}.$$

Assim, normalizando o intervalo de integração através de  $\eta_2 = a_K \nu$  de (2.59), resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_K \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon_K}} \tilde{\mathcal{R}}_m(\Lambda \tilde{Y}_m) d\mathbf{x} &\simeq -a_K \int_0^1 [(F_1)_m \cos^2 \theta_K + (F_2)_m \sin^2 \theta_K] \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(0, a_K \nu)} \\ &\times \sum_{I=1}^d \left[ \sin \left( I \frac{\pi}{2} - \theta_K \right) \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0^+, a_K \nu)} - \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0^-, a_K \nu)} \right) \right] (\Lambda Y_m) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(0, a_K \nu)} d\nu, \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde

$$(F_I)_m \Big|_{\mathbf{x}=\varphi_K(0, a_K \nu)} = (F_I)_m \left( \varphi_K(0, a_K \nu), t, \mathbf{Y} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_1} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_d} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)} \right),$$

e,  $\mathbf{Y} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)}$  e  $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)}$  representam a aproximação da solução e a sua derivada parcial de primeira ordem em ordem a  $x_I$ , respetivamente, calculadas num ponto genérico da  $K$ -ésima aresta global. O valor da  $l$ -ésima função componente do último vetor é determinado diretamente a partir de (2.48) se  $\varphi_K(0, a_K \nu)$  é um ponto interior a um dos elementos finitos de  $\mathcal{P}_l$  ou pela média entre as derivadas à esquerda e à direita em  $\varphi_K(0, a_K \nu)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_l}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y_l}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0^+, a_K \nu)} + \frac{\partial Y_l}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0^-, a_K \nu)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Y_{l, L_R}}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)} + \frac{\partial Y_{l, L_s}}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0, a_K \nu)} \right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

ainda definidas através da equação (2.48), no caso de  $\varphi_K(0, a_K \nu)$  pertencer a uma aresta nodal da malha espacial  $\mathcal{P}_l$ . Note-se que, na equação anterior que é obtida de (2.53),  $L_s$  e  $L_R$  representam os números do primeiro elemento finito e do outro elemento de  $\mathcal{P}_l$ , que contêm a  $K$ -ésima aresta global, respetivamente.

No entanto, atendendo a (2.44) que define  $\Lambda Y_m$  no elemento finito  $\Delta_{m, L}$  e, por um lado, em virtude de a  $j_L$ -ésima coordenada triangular ser nula numa aresta que não é incidente a  $\mathbf{X}_{m, L}^{(j_L)}$  e, por outro lado, devido a que a função interpoladora básica local associada a  $\mathbf{x}_{m, L}^i$  ser identicamente nula numa aresta de  $\Delta_{m, L}$  que não contém o referido nó, então as parcelas não nulas do segundo somatório de (2.54) correspondem a arestas incidentes a  $\mathbf{X}_{m, j}$  ou a arestas que contêm o nó global  $\xi_m^k$ . Assim, se a  $K$ -ésima aresta global não é incidente ao  $j$ -ésimo vértice, nem contém o  $k$ -ésimo nó de  $\mathcal{P}_m$ , tem-se que o segundo membro de (2.62) é identicamente nulo.

Por último, analisam-se os casos particulares que surgem quando a  $K$ -ésima aresta pertence à fronteira do domínio espacial  $D_m$ , para algum  $m$ . A orientação introduzida para as arestas no parágrafo imediatamente anterior a (2.58), é tal que, sempre que a aresta está

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

contida em  $\partial D_m$ , não existe o elemento finito designado por  $L_R$ . Assim, a avaliação de  $\frac{\partial Y_{m,L_R}}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0,a_K\nu)}$  efectua-se fazendo intervir a condição de fronteira ou é imposta externamente atendendo ao conhecimento que o utilizador tem (da solução) do problema específico que pretende resolver.

Com o intuito de exemplificar, suponha-se que a condição de fronteira existente não fixa o valor da amplitude em cada um dos pontos da  $K$ -ésima aresta, isto é, é do tipo

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_I} = F_p(x_J, t, y_m), \quad I, J \in \{1, 2\} \text{ e } J \neq I. \quad (2.64)$$

Então, esta condição é introduzida em cada EDO associada a um nó global pertencente à referida aresta, do seguinte modo:

$$\frac{\partial Y_{m,L_R}}{\partial x_I} \Big|_{\varphi_K(0,a_K\nu)} = F_p(x_J, t, Y_m) \Big|_{\varphi_K(0,a_K\nu)}.$$

No entanto, a derivada parcial em ordem a  $x_J$ , que também aparece na equação (2.62) e traduz o que se passa no lado exterior da fronteira, relativamente ao domínio da variável espacial, já não poderá ser expressa pela condição (2.64). Neste caso, pode encarar-se a hipótese de haver continuidade desta derivada, ou seja, admite-se que

$$\frac{\partial Y_{m,L_R}}{\partial x_J} \Big|_{\varphi_K(0,a_K\nu)} = \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_J} \Big|_{\varphi_K(0,a_K\nu)}.$$

Infelizmente, procedendo deste modo, pode perder-se informação relevante para a correta definição das EDOs associadas a um nó contido na  $K$ -ésima aresta. De facto, se  $D_m$  for um domínio retangular, todos os integrais (2.62) são nulos, esbatendo-se assim a contribuição para o sistema de EDOs dos integrais que provêm da regularização da solução. Em alternativa, o utilizador pode arbitrar esta derivada, impondo-a externamente de acordo com a solução do problema. Refira-se ainda que, se se tiver uma condição de fronteira de Dirichlet a dificuldade mencionada mantém-se, podendo mesmo ser necessário arbitrar valores para ambas as derivadas, em ordem a  $x_1$  e em ordem a  $x_2$ . Isto acontece quando a condição de fronteira fixa o valor de  $Y_m(\varphi_K(0, a_K\nu), t)$  numa constante.

### 2.3.3 O cálculo dos integrais

Nas EDOs deduzidas na subsecção anterior, aparecem alguns integrais que apresentam diferente tipologia e que se agrupam numa das três classes seguintes:

- integrais de polinómios, definidos imediatamente a seguir a (2.57) e que figuram na matriz do sistema simplificado de EDOs;

- integrais que envolvem as derivadas espaciais da solução aproximada, caracterizados imediatamente após a definição dos integrais do primeiro tipo e que surgem no segundo membro das EDOs;
- integrais sobre uma aresta da malha, que aparecem apenas no segundo membro do sistema de EDOs, no caso  $d = 2$ .

Como a função integranda dos integrais do primeiro grupo é um polinómio (de grau  $2r$ ,  $2r + 1$  ou  $2r + 2$ ), então estes integrais podem ser avaliados exatamente. Esta escolha obriga a catalogar o valor exato dos três tipos de integrais que constituem a matriz  $A$  (veja-se [55]) e os *arrays* tridimensionais  $A_1$  e  $A_2$ , respetivamente, para vários valores de  $r > 1$ . Todavia, os integrais inseridos nos outros dois grupos têm, por um lado, funções integrandas dependentes do tempo, pelo que têm que ser recalculados em cada instante e, por outro lado, uma maior complexidade que depende das funções  $(F_I)_m$  e  $g_m$ ,  $I = 1, d$ , que definem o operador  $\mathcal{L}_m(\mathbf{Y})$ , pelo que pode ser difícil obter o seu valor exato. Assim, optou-se pelo cálculo de todos os integrais recorrendo à integração numérica.

A implementação do MEFM para a simulação de problemas com domínio espacial bidimensional envolve o cálculo de alguns integrais no triângulo de referência, definido em (2.7). Para se avaliarem estes integrais por integração numérica, pode optar-se pelo uso de fórmulas de quadratura de Gauss simétricas [32, 110] ou quadraturas associadas a produtos tensoriais de fórmulas de integração de Gauss-Jacobi [49, 77].

As primeiras estão relacionadas com a geometria do domínio de integração e a possível simetria que ele apresenta e são invariantes para qualquer permutação das coordenadas bari-cêntricas, isto é, se  $\mathbf{v}^l = (L^{(1)}, \dots, L^{(d+1)})^T$  é um ponto de quadratura em  $\Delta$  com peso de quadratura  $\omega^l$ , então  $(L^{(\sigma(1))}, \dots, L^{(\sigma(d+1))})^T$ , com  $\sigma \in S_3$ , também é ponto de quadratura em  $\Delta$ , associado ao mesmo peso  $\omega^l$ . Para qualquer integral inserido no primeiro grupo, tem-se

$$\int_{\Delta} F_{A(\cdot)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^q \omega^l F_{A(\cdot)}(\mathbf{v}^l), \quad (2.65)$$

em que  $\omega_m^l$  é o peso da quadratura em  $\mathbf{v}^l$  e  $F_{A(\cdot)}$  denota a função integranda de um integral da matriz ou *array*  $A(\cdot)$ . Existem, na literatura, vários trabalhos que tratam do desenvolvimento de quadraturas de Gauss simétricas para o cálculo aproximado de integrais num domínio triangular [32, 35, 63, 107]. Nesta tese, usam-se as fórmulas de quadratura de Gauss descritas por Zhang em [110], com um número de pontos de quadratura suficiente para que os integrais que figuram na matriz de massa, do sistema de EDOs, sejam calculados sem erro de truncatura.

É importante relevar que toda a informação sobre as fórmulas de integração de Gauss simétricas, documentada nos trabalhos mencionados no parágrafo anterior, está limitada ao

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

grau de precisão 20. Então, para se obter uma maior precisão no cálculo dos integrais que envolvem as derivadas espaciais da solução aproximada, se for necessário, dependendo do operador  $\mathcal{L}_m(\mathbf{Y})$ , as estimativas destes integrais podem ser obtidas através do produto de duas quadraturas em 1-D, em alternativa à fórmula (2.65). Vários autores usaram esta abordagem com base na transformação do triângulo num quadrado, para obter, de certa forma por via indireta, uma quadratura para um domínio triangular [49, 62, 77, 92, 97]. Assim, seja  $\mathcal{U}$  a transformação do quadrado  $[0, 1]^2$  no elemento finito de referência, definida por  $\mathcal{U}(\zeta) = (\zeta_1 \zeta_2, \zeta_1(1 - \zeta_2))^T$  e ilustrada na figura 2.15. Usando a substituição  $\mathbf{v} = \mathcal{U}(\zeta)$  e  $q$  pontos de quadratura quer em  $\zeta_1$ , quer em  $\zeta_2$ , obtém-se

$$B_{(\cdot)} = \int_{\Delta} F_{B_{(\cdot)}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_0^1 \zeta_1 \left( \int_0^1 F_{B_{(\cdot)}}(\mathcal{U}(\zeta)) d\zeta_2 \right) d\zeta_1$$

$$\simeq \sum_{\iota=1}^q \bar{\omega}^{\iota} \zeta_1^{\iota} \sum_{\kappa=1}^q \bar{\omega}^{\kappa} F_{B_{(\cdot)}}(\mathbf{v}^{\iota, \kappa}),$$

onde  $\mathbf{v}^{\iota, \kappa} = \mathcal{U}\left(\left(\zeta_1^{\iota}, \zeta_2^{\kappa}\right)^T\right)$  e  $\bar{\omega}^{\iota}$  é o peso da quadratura de Gauss-Legendre em 1-D associada ao  $\iota$ -ésimo ponto de quadratura. Note-se que uma quadratura obtida através desta abordagem não

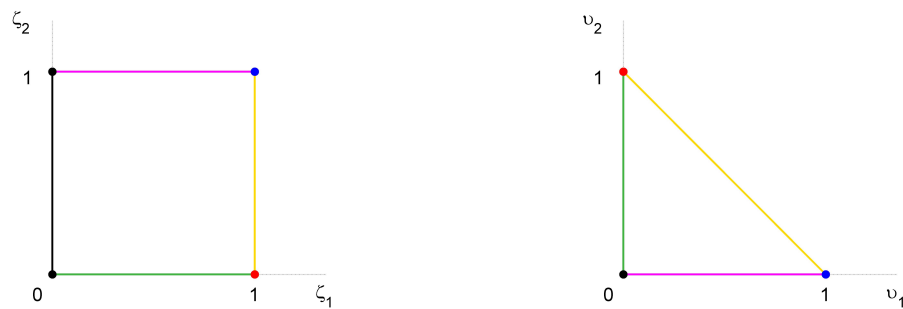


Figura 2.15: Quadrado  $[0, 1]^2$  (à esquerda) e o seu transformado  $\Delta$  por  $\mathcal{U}$  (à direita). Os elementos correspondentes estão à mesma cor

é simétrica, pois há uma maior densidade de pontos de quadratura junto de um dos vértices do triângulo. Utilizando a transformação  $\mathcal{U}$ , os pontos de quadratura vão concentrar-se na vizinhança da origem, vértice de  $\Delta$  assinalado a cor preta, rareando cada vez mais na proximidade da aresta oposta, assinalada a cor amarela (veja-se a figura 2.15).

Os integrais que constituem o terceiro grupo apresentam a seguinte tipologia:

$$C(i, K, m) = \int_0^1 [(F_1)_m \cos^2 \theta_K + (F_2)_m \sin^2 \theta_K] |_{\mathbf{x}} \\ \times \sum_{I=1}^d \left[ \sin \left( I \frac{\pi}{2} - \theta_K \right) \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}^+} - \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}^-} \right) \right] \ell^i \left( \mathcal{T}_{m, L_s}^{-1}(\mathbf{x}) \right) d\nu, \\ C_J(j_s, K, m) = \int_0^1 [(F_1)_m \cos^2 \theta_K + (F_2)_m \sin^2 \theta_K] |_{\mathbf{x}} \\ \times \sum_{I=1}^d \left[ \sin \left( I \frac{\pi}{2} - \theta_K \right) \left( \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}^+} - \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}^-} \right) \right] \left( - \frac{\partial Y_{m, L_s}}{\partial x_J} \Big|_{\mathbf{x}} L^{(j_s)} \left( \mathcal{T}_{m, L_s}^{-1}(\mathbf{x}) \right) \right) d\nu,$$

onde  $\mathbf{x} = \varphi_K(0, a_K \nu)$  e  $\mathbf{x}^\pm = \varphi_K(0^\pm, a_K \nu)$ . Calculam-se recorrendo à integração numérica, por quadratura de Lobatto, utilizando  $q_m$  pontos de quadratura. Assim, tem-se

$$C_{(\cdot)} \simeq \sum_{\iota=1}^{q_m} \omega_m^\iota F_{C_{(\cdot)}}(\nu_m^\iota),$$

em que  $\omega_m^\iota$  é o peso da quadratura em  $\nu_m^\iota$  e  $F_{C_{(\cdot)}}$  denota a função integranda de  $C_{(\cdot)}$ . Os pontos interiores de quadratura  $\nu^\iota$ , com  $\iota = 2, \dots, q_m - 1$ , são as raízes do polinómio de Jacobi de grau  $q_m - 2$  caracterizado pela função peso  $W(\nu) = \nu(1 - \nu)$  (Villadsen e Michelsen [103]).

Termina-se esta subsecção, apresentando uma síntese dos aspetos fundamentais do cálculo dos integrais, no caso em que  $D_m$  é unidimensional. Tal como no caso bidimensional, os integrais que constituem o primeiro grupo são calculados sem erro de truncatura, recorrendo a uma quadratura de Lobatto. Situações particulares surgem quando o extremo  $\mathbf{X}_{m,1}$ , ou  $\mathbf{X}_{m, N_m+1}$ , está fixo e não é usado como nó de nenhuma das malhas definidas no domínio espacial comum. Neste caso, usa-se uma quadratura de Radau à direita, no primeiro elemento finito, ou de Radau à esquerda, no último elemento finito, respetivamente. Os pontos interiores de quadratura são as raízes do polinómio de Jacobi de grau apropriado, caracterizado pela função peso  $W(v) = 1 - v$  ou  $W(v) = v$ , respetivamente [103].

No que se refere ao cálculo dos integrais do segundo grupo, o domínio espacial comum é decomposto numa malha única, mais fina, constituída pelos pontos de separação de todas as partições, de modo a assegurar o cálculo muito mais preciso dos integrais que envolvem as derivadas espaciais da aproximação  $Y_m$ , se o elemento finito em causa contiver frentes abruptas correspondentes a outras variáveis. É relevante referir ainda que não foi implementada uma estratégia análoga a esta no caso 2-D, devido à complexidade dos polígonos que se podem obter da intersecção de duas malhas triangulares.

### 2.3.4 Tratamento numérico da fronteira móvel

As várias abordagens existentes para a simulação de modelos matemáticos de sistemas físicos evolutivos com fronteira móvel diferem na forma de tratar esta fronteira. Como foi referido anteriormente, o MEFM determina a posição fronteira móvel como parte da solução, para cada instante em que se obtém a solução numérica do problema. Assim, represente-se por  $\Omega_t$  o domínio espacial do problema, definido por

$$\Omega_t = \bigcup_{m=1}^n D_m(t)$$

e considere-se que  $\partial D_m = \Gamma_M(t) \cup \Gamma_F$ , onde  $\Gamma_M(t)$  e  $\Gamma_F$  representam a fronteira móvel no instante  $t$  e a parte fixa da fronteira do domínio espacial associado a  $y_m$ , respetivamente. A técnica usada para localizar  $\Gamma_M$  consiste na introdução de um conjunto finito de nós  $\mathbf{X}_{s_j}(t)$  que descrevem a posição da *interface* móvel. Com esta estratégia, que está ilustrada na figura 2.16 para um problema de mudança de fases, com mais do que uma fase de interesse, implementa-se uma decomposição de  $\Omega_0$ .

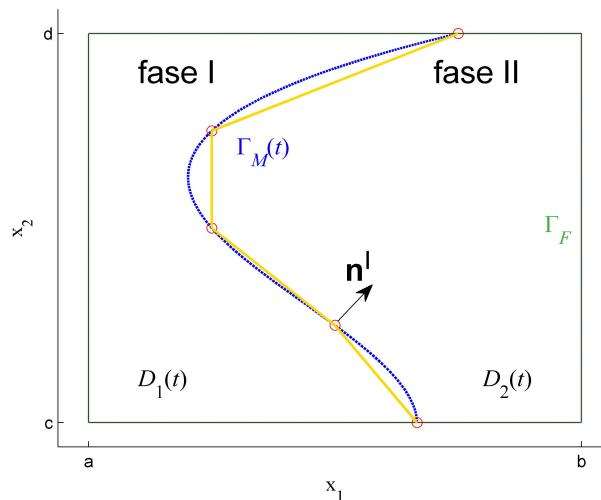


Figura 2.16: Aproximação seccionalmente linear de  $\Gamma_M$  definida pelos nós assinalados a cor vermelha

Além disso, e de acordo com o que foi dito na subsecção 2.2.1, no processo de discretização do domínio espacial bidimensional, o conjunto de nós  $\mathbf{X}_{s_j}(0)$  determina uma aproximação seccionalmente linear de  $\Gamma_M(0)$  e, conseqüentemente, vai induzir a partição do domínio da variável espacial de cada função componente de  $\mathbf{y}$ . Assim, há uma forte dependência entre a discretização de  $D_m(0)$ , por intermédio de elementos finitos, e a discretização de  $\Gamma_M(0)$ . É importante salientar ainda que uma partição não suficientemente fina, de uma *interface* móvel que desenvolve curvaturas acentuadas e vários extremos relativos (relembre-se que se admite a hipótese de que os pontos pertencentes a uma *interface* possam ser definidos por função da

variável de espaço, e que esta função pode desenvolver vários extremos no tempo), pode conduzir a erros na descrição poligonal da região associada a cada fase. Erros esses que podem ser determinantes para a qualidade da solução numérica.

Pormenoriza-se, agora, a implementação da condição que define o movimento da fronteira, para  $d = 2$ . Assume-se que a velocidade normal  $V$  da fronteira móvel é dada por

$$V = -\frac{\partial y_m}{\partial \mathbf{n}}, \quad t > 0.$$

É necessário discretizar esta equação para se poder incluí-la no sistema de EDOs que se obtém do problema de minimização (2.31). Assim, considerando que é nula a velocidade tangencial de um nó  $\mathbf{X}_{s_j} = \left( (X_1)_{s_j}, (X_2)_{s_j} \right)^T$ , obtém-se

$$\sum_{I=1}^d n_I|_{\mathbf{X}_{s_j}} (\dot{X}_I)_{s_j} = -\sum_{I=1}^d n_I|_{\mathbf{X}_{s_j}} \frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{X}_{s_j}}, \quad (2.66)$$

onde  $n_I|_{\mathbf{X}_{s_j}}$  representa a  $I$ -ésima coordenada do vetor normal à fronteira móvel, calculado em  $\mathbf{X}_{s_j}$ . Duas questões pertinentes se levantam neste momento: por um lado, como definir a aproximação do vetor normal a  $\Gamma_M$  em cada instante e, por outro lado, como calcular as derivadas espaciais presentes na equação (2.66) num vértice da malha  $\mathcal{P}_m$  que pertença a  $\Gamma_M$ .

Relativamente à primeira questão, considera-se como razoável a aproximação obtida normalizando o vetor resultante da soma dos vetores normais exteriores aos dois lados nodais (da fronteira móvel discretizada) incidentes ao respetivo vértice. Na figura 2.16, está representado o vetor normal exterior à fase I, no ponto de aplicação. Refira-se ainda que a aproximação de  $n|_{\mathbf{X}_{s_j}}$  obtida através desta estratégia, é tanto melhor quanto maior for o número de nós  $\mathbf{X}_{s_j}$ , considerados inicialmente.

Para o cálculo das derivadas espaciais presentes em (2.66), usa-se a seguinte estratégia:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{X}_{s_j}} = \frac{1}{s_{k_j}} \sum_{s=1}^{s_{k_j}} \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{X}_{s_j}}$$

é a média aritmética das derivadas locais.

Note-se que, por cada vértice  $\mathbf{X}_{s_j}$  em que é imposta uma condição (2.66), perde-se um parâmetro efetivo do método, que pode ser escolhido como sendo a  $I$ -ésima coordenada desse nó. Assim, incorpora-se a equação discretizada (2.66), que está associada a  $(X_I)_{s_j}$  e é externa ao MEFM, no sistema de EDOs resultante da discretização por intermédio de elementos finitos.

Sublinhe-se, por fim, que pode ser necessário estabelecer outra EDO associada à “segunda” coordenada de cada vértice da fronteira móvel, que é parâmetro de dependência da

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

aproximação  $Y$ . Esta EDO é dependente do problema a simular, podendo resultar do processo de minimização, se se pretender que  $(X_J)_{s_j}$  seja um parâmetro efetivo do método ou, em alternativa, ser imposta externamente, obrigando a que os nós  $X_{s_j}$  se movimentem segundo uma direção específica.

### 2.3.5 Equações gerais do MEFM

Neste trabalho, pretende-se determinar a solução numérica de problemas evolutivos com fronteira móvel, por aplicação do MEFM. Assim, foi considerado o seguinte modelo genérico de um sistema físico com uma, duas ou três fases, admitindo que a posição da fronteira do domínio espacial associado a cada fase, na totalidade ou apenas em parte, pode variar no tempo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial t} = \sum_{I=1}^d (\mathbf{F}_I)^i \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}^i, \frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial x_d} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{y}^i}{\partial x_I^2} + \mathbf{g}^i \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}^i, \frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}^i}{\partial x_d} \right) \\ i = I, II, III \end{cases}, \quad (2.67)$$

em que:

- $\mathbf{x}$  e  $t$  são as variáveis independentes de espaço e tempo, respetivamente;
- $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^I, \mathbf{y}^{II}, \mathbf{y}^{III})^T = (y_1^I, \dots, y_{n_I}^I, y_1^{II}, \dots, y_{n_{II}}^{II}, y_1^{III}, \dots, y_{n_{III}}^{III})^T = (y_1, \dots, y_n)^T$  é o vetor solução, das funções associadas quer à fase I, quer à fase II ou à fase III do sistema físico;
- $y_m = y_m(\mathbf{x}, t)$ , com  $t \geq 0$  e  $\mathbf{x} \in D_m(t) \subseteq \mathbb{R}^d$ , para  $m = 1, \dots, n$ .

Cada variável dependente do sistema anterior está sujeita a uma condição inicial, tendo-se para a  $m$ -ésima variável

$$y_m(\mathbf{x}, 0) = y_{0m}(\mathbf{x}), \quad \text{com } \mathbf{x} \in D_m(0) = \begin{cases} D^I(0) & \text{se } m \leq n_I \\ D^{II}(0) & \text{se } n_I < m \leq n_I + n_{II} \\ D^{III}(0) & \text{se } n_I + n_{II} < m \leq n \end{cases}. \quad (2.68)$$

Em  $\partial D_m$ , considerou-se a hipótese de poderem existir condições de fronteira de Dirichlet e, mais genericamente, condições de fronteira de Robin, visto que, em termos numéricos, o tratamento dado a cada uma delas é diferente. Assim, pode ter-se

$$\widetilde{\gamma}_m \frac{\partial y_m}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D_m} + \widetilde{\alpha}_m(t) y_m \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D_m} = \widetilde{\beta}_m(x_J, t) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D_m}, \quad I, J \in \{1, d\} \text{ e } J \neq I. \quad (2.69)$$

Finalmente, admitiu-se a hipótese de que os pontos pertencentes a uma *interface* possam ser definidos explicitamente por  $x_I = h^i(x_J, t)$ , para algum  $i \in \{I, II, III\}$ . Neste caso, o movimento

da fronteira móvel é definido através da relação,

$$\frac{\partial h^i}{\partial t} = w^i \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d} \right) \Big|_{x_I = h^i(x_J, t)}, \quad (2.70)$$

em vez da equação, mais geral,

$$V = -\frac{\partial y_m}{\partial \mathbf{n}}, \quad t > 0. \quad (2.71)$$

que determina a velocidade normal  $V$  da fronteira móvel. Note-se que a equação (2.70) é usada no algoritmo só depois de  $\mathbf{y}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d}$  terem sido substituídas pelas respetivas aproximações expressas em termos das diferentes variáveis que resultam da aplicação do MEFM. Assim, para cada nó  $\mathbf{X}_{s_j}$ , pertencente à fronteira móvel definida por  $x_I = h^i(x_J, t)$ , obtém-se

$$(\dot{X}_I)_{s_j} = \frac{\partial h^i}{\partial X_J} \Big|_{(X_I)_{s_j} = h^i((X_J)_{s_j}, t)} (\dot{X}_J)_{s_j} + w^i \left( \mathbf{X}_{s_j}, t, \mathbf{Y}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_d} \right) \Big|_{(X_I)_{s_j} = h^i((X_J)_{s_j}, t)}. \quad (2.72)$$

Então, têm-se as seguintes EDOs para descrever o MEFM quando aplicado ao modelo genérico descrito no início da presente subsecção:

1. equação associada a  $(X_J)_{m,j}$ ,  $J$ -ésima coordenada do  $j$ -ésimo vértice da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ , com  $1 \leq J \leq d$ ,  $j \in \Upsilon_{N_{v_m}}(J)$  e  $m = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{s_{k_j}} d Z_{m,L_s} \left[ \sum_{M=1}^{d+1} \sum_{I=1}^d \left( \sum_{i=1}^{f_r(d)} \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^i} \sum_{l=1}^{f_r(d)} A_2(i, l, p_{M,j}) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_J} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \right) (\dot{X}_I)_{m,L_s}^{(M)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{f_r(d)} \left( - \sum_{l=1}^{f_r(d)} A_1(i, l, j_s) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_J} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \right) \dot{Y}_{m,L_s}^i \right] \\ & + \sum_{s=1}^{s_{k_j}} \left[ \epsilon_{m,L_s}^2 \frac{(X_{3-J})_{m,L_s}^{(\sigma(2))} - (X_{3-J})_{m,L_s}^{(\sigma(3))}}{2} \sum_{M=1}^{d+1} \sum_{I=1}^d \left( \frac{(X_{3-I})_{m,L_s}^{(\sigma(2))} - (X_{3-I})_{m,L_s}^{(\sigma(3))}}{2} (\dot{X}_I)_{m,L_s}^{(M)} \right) \right] \\ & = \sum_{s=1}^{s_{k_j}} d Z_{m,L_s} \left( - \sum_{l=1}^{f_r(d)} B_{j_s}(l, L_s, m) \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_J} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^l} \right) + \sum_{s=1}^{s_{r_j}} a_{K_s} C_J(j_s, K_s, m) \\ & \quad + \sum_{s=1}^{s_{k_j}} \epsilon_{m,L_s} S_{m,L_s} \frac{(X_{3-J})_{m,L_s}^{(\sigma(2))} - (X_{3-J})_{m,L_s}^{(\sigma(3))}}{2}, \end{aligned}$$

com  $p_{M,j} = M + 3(j_s - 1)$ , para algum  $j_s \in \{1, \dots, d + 1\}$  tal que  $\mathbf{X}_{m,j} = \mathbf{X}_{m,L_s}^{(j_s)}$ , onde  $\sigma$  é uma permutação par de  $S_3$ , se  $J = 1$  (ou  $I = 1$ ), e denota uma permutação ímpar se  $J = 2$  (ou  $I = 2$ ), tal que  $\sigma(1) = j_s$  (ou  $\sigma(1) = M$ );

2. equação associada a  $Y_m(\xi_m^k)$ , amplitude no  $k$ -ésimo nó global de  $\mathcal{P}_m$ , com  $k \in \Upsilon_{\tilde{N}_m}$  e

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$$m = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{s_k} d Z_{m,L_s} \left[ \sum_{M=1}^{d+1} \sum_{I=1}^d \left( \sum_{i=1}^{f_r(d)} \frac{\partial Y_{m,L_s}}{\partial x_I} \Big|_{\mathbf{x}_{m,L_s}^i} (-A_1(i, i_s, M)) \right) (\dot{X}_I)_{m,L_s}^{(M)} + \sum_{i=1}^{f_r(d)} A(i, i_s) \dot{Y}_{m,L_s}^i \right] = \sum_{s=1}^{s_k} d Z_{m,L_s} B(i_s, L_s, m) + \sum_{s=1}^{s_k} a_{K_s} C(i_s, K_s, m),$$

para algum  $i_s \in \{1, 2, \dots, f_r(d)\}$ , tal que  $\xi_m^k = \mathbf{x}_{m,L_s}^{i_s}$ , onde  $s_k$  designa o número de arestas da malha que contém  $\xi_m^k$ .

3. equação associada a  $(X_I)_{s_j}$ ,  $I$ -ésima coordenada do  $s_j$ -ésimo vértice da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ , com  $\mathbf{X}_{s_j}$  pertencente a  $\Gamma_M$ , para algum  $m \in \{1, \dots, n\}$  e algum  $I \in \{1, d\}$ , com  $s_j \in \{1, \dots, N_{v_m}\} \setminus \Upsilon_{N_{v_m}}(I)$ ,

$$(\dot{X}_I)_{s_j} - \frac{\partial h^i}{\partial X_J} \Big|_{(X_I)_{s_j} = h^i((X_J)_{s_j}, t)} (\dot{X}_J)_{s_j} = w^i \left( \mathbf{X}_{s_j}, t, \mathbf{Y}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_d} \right) \Big|_{(X_I)_{s_j} = h^i((X_J)_{s_j}, t)},$$

com  $J \neq I$ , sendo a fronteira móvel definida por  $x_I = h^i(x_J, t)$ , para algum  $i \in \{I, II, III\}$ .

É de notar ainda que, alguns dos termos dos dois tipos de EDOs provenientes do MEFM assumem formas particulares no caso 1-D. Por exemplo, o último somatório da equação associada à amplitude num nó não tem significado para  $d = 1$ , pois não é necessário calcular integrais sobre uma aresta da malha de elementos finitos. Este termo é definido a partir dos resultados apresentados na subsecção 2.3.1, para definir o valor do limite de um integral na vizinhança de um ponto angular, nomeadamente a partir do caso do tipo (b).

Para se obter a discretização total do sistema de EDPs (2.67), o sistema de EDOs definido pelas equações que se acabaram de caracterizar, ao qual se devem incorporar as condições de fronteira, deve ser resolvido numericamente através de um integrador adequado. Esta formulação do MEFM deu origem a um algoritmo computacional, implementado em ambiente Matlab, cujo desempenho será objeto de reflexão no Capítulo 4.



## Capítulo 3

### Existência de solução forte para uma classe de problemas não locais com fronteira móvel

#### 3.1 Introdução

Um dos principais objetivos do presente capítulo é demonstrar a existência e unicidade de solução forte para uma classe de problemas parabólicos, modelados por um sistema de  $n$  equações do tipo

$$\mathbf{u}_t - A_d \cdot \mathbf{u}_{xx} = \mathbf{f},$$

sendo  $A_d$  uma matriz diagonal com  $a_{ii} = a_i \left( \int_{\Omega_t} u_{\sigma(i)}(x, t) dx \right)$ , definidas num domínio limitado  $Q_t = \Omega_t \times ]0, T[ \subset \mathbb{R}^2$ , com fronteira móvel. Na penúltima equação,  $\sigma$  representa uma permutação dos  $n$  primeiros números naturais. Está-se ainda interessado em estabelecer algumas propriedades da solução, como a taxa de decaimento exponencial da energia do sistema. Modelos matemáticos deste tipo têm aplicabilidade numa grande classe de modelos reais, nomeadamente na Biologia onde a solução  $u$  pode descrever a densidade populacional (de determinado tipo de bactérias, por exemplo) sujeita à propagação [23] e o problema é não local no sentido de que o coeficiente de difusão  $a_i$  é determinado por uma quantidade global, isto é, depende de toda a população no domínio.

Este tipo de coeficiente de difusão foi, inicialmente, proposto por Chipot e Lovat em [24] num domínio cilíndrico limitado. Os autores mostraram que o modelo, definido por uma única equação com derivadas parciais, possui solução global se a função  $a$  for contínua segundo Lipschitz, positiva e limitada. Corrêa *et al.* estabeleceram uma extensão destes resultados em [31] considerando  $a = a(l(u))$  e que a não-linearidade também aparece no segundo membro, onde se tem a função não linear  $f = f(u)$ . O comportamento assintótico das soluções para  $t$  arbitrariamente grande foi estudado por Zheng e Chipot [111] para uma equação parabólica não linear com duas classes de termos não locais, num domínio cilíndrico. Cavalcanti *et al.* [18] trabalharam com uma função dependente do tempo  $a = a \left( t, \int_{\Omega_t} |\nabla u(x, t)|^2 dx \right)$  para estabelecer a solvabilidade e o decaimento exponencial da energia da solução, para um problema descrito por uma equação hiperbólica-parabólica num subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$ , com fronteira móvel. Marinho *et al.* [64] provaram o decaimento exponencial para um problema não linear num domínio não cilíndrico usando o método de Nakao [72].

As referências sobre trabalhos que envolvam sistemas de equações diferenciais parciais não lineares, com termos não locais do tipo referido acima, não são tão abundantes na literatura. Raposo *et al.* [76], estudaram a existência, unicidade e decaimento exponencial das soluções para sistemas acoplados de reação-difusão da forma

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + f(u - v) = \alpha(u - v) & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ v_t - a(l(v))\Delta v - f(u - v) = \alpha(v - u) & \text{em } \Omega \times ]0, T], \end{cases}$$

com  $a(\cdot) > 0$ ,  $l$  uma forma linear contínua,  $f$  uma função Lipschitz contínua e  $\alpha$  um parâmetro positivo. Os autores calcularam, também, as soluções aproximadas destes sistemas utilizando diferenças finitas implícitas. Recentemente, Duque *et al.* [36] consideraram sistemas não lineares de equações parabólicas com um termo de difusão não local mais geral, que atua em duas formas lineares  $l_1$  e  $l_2$

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u = f_1(x, t) & \text{em } \Omega \times ]0, T], \\ v_t - a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v = f_2(x, t) & \text{em } \Omega \times ]0, T], \end{cases}$$

onde  $\lambda_i \geq 0$  e  $p > 1$ , estabelecendo resultados importantes relativos ao decaimento polinomial e exponencial, extinção das soluções em tempo finito e propriedades de localização, como o efeito do tempo de espera. Em [11], os autores investigaram a propagação de uma epidemia modelada por um sistema de três EDPs, onde a  $i$ -ésima equação é dada por

$$(u_i)_t - a_i \left( \int_{\Omega} u_j dx \right) \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, u_3),$$

num domínio físico  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ( $n = 1, 2, 3$ ).

Os problemas com fronteiras móveis surgem em muitas aplicações físicas que envolvem a difusão, tais como na transferência de calor que ocorre durante uma transição de fase; no transporte de humidade, tais como no inchaço de grãos ou de polímeros e nos problemas de meios porosos com domínios deformáveis, onde o deslocamento sólido é governado pela difusão. O estudo destes problemas tem ocupado os investigadores nas últimas décadas. Entre eles, pode citar-se Briozzo *et al.* [15], Santos *et al.* [91], Benabidallah e Ferreira [10] ou Ferreira e Lar'kin [38]. No entanto, estes não realizaram a análise numérica, nem fizeram a simulação do problema. Um outro objetivo a atingir neste capítulo é aplicar o algoritmo numérico baseado na formulação do MEFM com funções de base seccionalmente polinomiais de grau arbitrário e malhas adaptativas associadas a cada uma das variáveis dependentes, para estudar o comportamento da solução  $u$ , diretamente no problema original.

A organização do capítulo é a seguinte: na secção 3.2, apresenta-se a formulação do

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

problema e as hipóteses sobre os dados no caso de o modelo ser constituído por uma única equação. No caso de se ter um sistema, a formulação do problema obtém-se por analogia. Nas duas secções seguintes, usa-se a aproximação de Galerkin, o teorema de Aubin-Lions e o método da energia introduzido por Lions [61], para provar a existência global e unicidade de solução forte para uma única equação. O comportamento assintótico da solução global quando  $t \rightarrow \infty$  é investigado na secção 3.5. Seguidamente, nas secções 3.6 e 3.7 estuda-se a solubilidade global no tempo e o decaimento exponencial das soluções de um sistema acoplado com duas equações com derivadas parciais. A secção 3.8 é dedicada à discretização do problema, primeiro no espaço e depois no tempo, e à prova da convergência, quer da solução semidiscreta, quer da solução totalmente discreta. Por último, na secção 3.9, aplica-se o MEFM para se obter uma solução aproximada do problema e ilustram-se as propriedades estabelecidas.

### 3.2 Formulação do problema

Neste capítulo, quer estudar-se o problema unidimensional com fronteiras móveis definido por

$$(P_u) \begin{cases} u_t - a \left( \int_{\Omega_t} u(x, t) dx \right) u_{xx} = f(x, t), & \forall (x, t) \in Q_t \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0, & \forall t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega_0 = ]\alpha(0), \beta(0)[ \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde o domínio não retangular  $Q_t$  é definido por

$$Q_t = \Omega_t \times ]0, T[ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(t) < x < \beta(t), \quad 0 < t < T\},$$

$T$  é um tempo arbitrário positivo,  $u_t = \partial u / \partial t$ ,  $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$  e  $a$  designa uma função real positiva. A fronteira lateral de  $Q_t$  é dada por

$$\Sigma_t = \bigcup_{0 < t < T} (\{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}).$$

Assume-se que  $\alpha'(t) < 0$  e  $\beta'(t) > 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Então a projeção de  $]\alpha(t_1), \beta(t_1)[$  no subespaço  $\Omega_0$  está contida na projeção de  $]\alpha(t_2), \beta(t_2)[$  no mesmo subespaço, se  $t_2 > t_1$ . Isto significa ainda que a função real  $\beta(t) - \alpha(t)$  é crescente  $\forall t \in [0, T]$ . A geometria do domínio é apresentada na figura 3.1.

Mostra-se a existência e unicidade de soluções fortes para o problema  $(P_u)$ , recorrendo-se a uma transformação do problema dado, num outro, definido num domínio retangular com fronteiras do domínio espacial não dependentes do tempo. Para isso, usa-se uma mudança

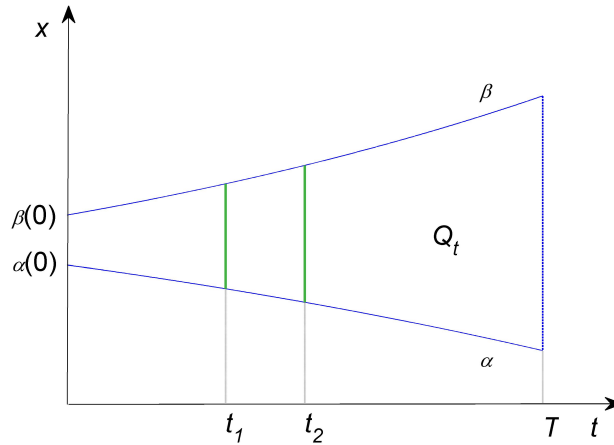


Figura 3.1: Domínio não retangular

de variáveis adequada e prova-se a existência e unicidade da solução para este novo problema. O resultado sobre a existência e unicidade de solução do problema  $(P_u)$  obtém-se usando a transformação inversa do difeomorfismo de classe  $C^2$  definido por

$$\begin{aligned} \tau : Q_t &\longrightarrow Q = \Omega \times ]0, T[ \\ (x, t) &\longmapsto \tau(x, t) = (y, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

através de  $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$ , onde  $\gamma$  representa a função dilatação definida por  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ , com  $\gamma(t) \neq 0$ . A função inversa  $\tau^{-1} : Q \longrightarrow Q_t$  é definida por

$$(y, t) \longmapsto \tau^{-1}(y, t) = (\alpha(t) + \gamma(t)y, t) = (x, t).$$

Assume-se que  $0 < \gamma_0 < \gamma(t) < \gamma_1 < \infty, \forall t \in [0, T]$ . Para  $x = \alpha(t)$ , tem-se  $y = 0$  e para  $x = \beta(t)$ , tem-se  $y = 1$ . Como

$$0 < y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} < 1,$$

então o domínio espacial  $\Omega = ]0, 1[$ . A figura seguinte ilustra a mudança de domínio.

Faça-se a mudança de variável  $u(x, t) = v(y, t)$ . Observe-se que

$$u_t(x, t) = v_t(y, t) + v_y(y, t) \frac{dy}{dt}. \tag{3.3}$$

Como  $y = (x - \alpha(t))/\gamma(t)$ ,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}$$

O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

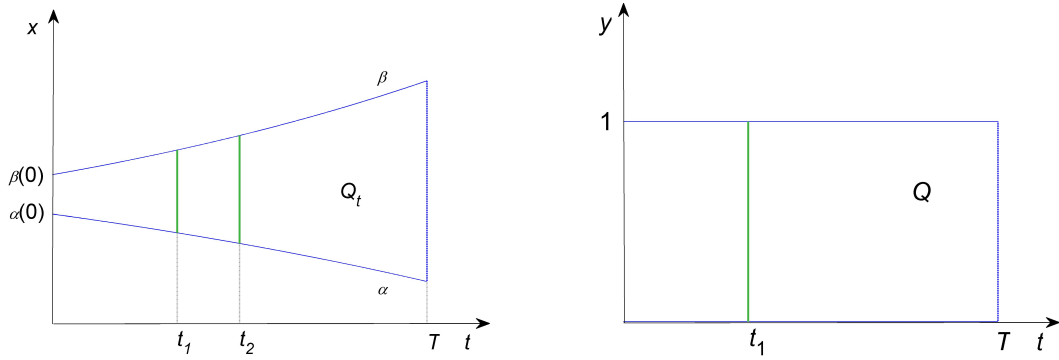


Figura 3.2: Domínio não retangular (à esquerda) e domínio transformado por  $\tau$  (à direita)

e a equação (3.3) vem

$$u_t = v_t - \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} v_y. \quad (3.4)$$

Tem-se ainda

$$u_{xx} = \frac{1}{(\gamma(t))^2} v_{yy}.$$

Denotando

$$b_1(y, t) = \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)}, \quad b_2(t) = \frac{1}{(\gamma(t))^2} \quad \text{e} \quad f(x, t) = g(y, t)$$

o problema  $(P_u)$  é transformado no seguinte problema:

$$(P_v) \begin{cases} v_t - b_1(y, t)v_y - a \left( \gamma(t) \int_0^1 v(y, t) dy \right) b_2(t)v_{yy} = g(y, t) & \text{em } Q \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad 0 < t < T \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad y \in ]0, 1[ \end{cases}, \quad (3.5)$$

onde  $v_0(y) = u_0(\alpha(0) + \gamma(0)y)$ . Omitem-se os parâmetros  $y$  e/ou  $t$  sempre que não gerar ambiguidade. Colocam-se agora hipóteses sobre as funções  $v_0$ ,  $\gamma$ ,  $a$  e  $g$  de modo a ter solução forte para o problema  $(P_v)$ . Tem-se

$$\begin{array}{ccc} & \tau & \\ & \longrightarrow & \\ Q_t & & Q \\ & \longleftarrow & \\ & \tau^{-1} & \\ u & \searrow & \swarrow v \\ & \mathbb{R} & \end{array}.$$

Assim, tomando  $v = u \circ \tau^{-1}$ , tem-se

$$\begin{aligned} v(y, t) &= u \circ \tau^{-1}(y, t) \\ &= u(\tau^{-1}(y, t)) \\ &= u(\alpha(t) + \gamma(t)y, t) \\ &= u(x, t). \end{aligned}$$

Como se está interessado em provar a existência de solução forte em  $Q_t$ , assumem-se, à priori, as hipóteses:

- (H1)  $\alpha, \beta \in C^2([0, T]; \mathbb{R})$  e  $0 < \gamma_0 < \gamma(t) < \gamma_1 < \infty, \forall t \in [0, T]$ ,  
 (H2)  $\alpha', \beta' \in L^1(]0, T[) \cap L^2(]0, T[)$ ,  
 (H3)  $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ ,  $\Omega_0 = ]\alpha(0), \beta(0)[$ ,  
 (H4)  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \cap L^1(0, T; L^2(\Omega_t))$ ,  $\Omega_t = ]\alpha(t), \beta(t)[$ ,  
 (H5)  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é contínua segundo Lipschitz com  $0 < m_a \leq a(s) \leq M_a, \forall s \in \mathbb{R}$ .

Note-se que o facto de  $a$  ser contínua e limitada inferiormente é suficiente para se provar a existência de solução e que a hipótese de a função  $a$  satisfazer a condição de Lipschitz é necessária para se provar a unicidade.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 3.1** *Sob as hipóteses (H1) – (H5), então existe uma única solução forte  $u : Q_t \rightarrow \mathbb{R}$  do problema  $(P_u)$ , isto é,*

$$u_t - a(l(u))u_{xx} = f(x, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$$

*e satisfazendo as seguintes condições (de regularidade):*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)), \\ u_t &\in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)), \end{aligned}$$

onde  $l : L^2(\Omega_t) \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma linear contínua definida por

$$l(u) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x, t) dx.$$

Observe-se que, da condição de regularidade sobre  $u$ , resulta que a solução tem traço zero na fronteira e que  $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$ .

### 3.3 Existência de solução do problema em domínio fixo

Com o intuito de se demonstrar a existência de solução no teorema 3.1, primeiramente prova-se a existência de solução do problema  $(P_v)$  e depois utiliza-se o difeomorfismo para estabelecer a existência de solução do problema original. Assim, considerem-se as seguintes hipóteses:

$$(H3') \quad v_0 \in H_0^1(\Omega),$$

$$(H4') \quad g \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

**Teorema 3.2** *Sob as hipóteses  $(H1) - (H2)$ ,  $(H3') - (H4')$  e  $(H5)$ , então existe  $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$  que é solução do problema  $(P_v)$ , isto é,*

$$v_t - b_1(y, t)v_y - a \left( \gamma(t) \int_0^1 v(y, t) dy \right) b_2(t)v_{yy} = g(y, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e valem as seguintes condições (de regularidade):

$$v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$

$$v_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

A demonstração deste teorema decorre de três etapas:

- usar o método de Faedo-Galerkin para construir soluções do problema (aproximado) num espaço de dimensão finita conveniente;
- estabelecer estimativas, à priori, sobre a sequência de soluções do problema aproximado;
- passar ao limite das sequências de soluções (aproximadas), mostrando que convergem, numa topologia adequada, para a solução do problema  $(P_v)$ ,

que, por simplicidade, se vão pormenorizar, separadamente, nas subsecções seguintes.

No que se segue, sempre que não gerar ambiguidades, denota-se por  $(\cdot, \cdot)$  e  $|\cdot|$  o produto escalar e a norma em  $L^2(\Omega)$  e por  $((\cdot, \cdot))$  e  $\|\cdot\|$  o produto escalar e a norma em  $H_0^1(\Omega)$ , respetivamente. Para simplificar a escrita, denota-se  $l_1(v) = \int_0^1 \gamma(t)v(y, t)dy$ .

#### 3.3.1 Problema aproximado

Constroem-se as aproximações de Galerkin, projetando o problema  $(P_v)$  num espaço de dimensão finita. Assim, seja  $\mathcal{B} = \{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  uma base de  $H_0^1(\Omega)$ , onde os  $w_j$  são solução do problema espectral

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_j}{dy^2} = \lambda_j w_j \\ w_j(0) = w_j(1) \end{cases},$$

onde  $\lambda_j$  é um valor próprio do operador  $d^2/dy^2$ . Note-se que a separabilidade do espaço de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  garante a existência desta base hilbertiana. Como  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ , então pode-se aproximá-la por uma combinação linear finita dos  $w_j$ , logo existe uma sucessão  $(v_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$  de termo geral

$$v_{0m} = \sum_{i=1}^m c_{im} w_i,$$

com  $w_i \in \mathcal{B}$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{0m} = v_0$  (porque  $\mathcal{B}$  é uma base de Schauder [57]). Na construção da solução do problema aproximado, considera-se o subespaço  $V_m$  gerado pelos primeiros  $m$  vetores de  $\mathcal{B}$ , isto é,

$$V_m = [w_1, \dots, w_m] \subset H_0^1(\Omega),$$

onde os  $w_i$  com  $i = 1, \dots, m$  são ortonormais em  $L^2(\Omega)$ . O problema aproximado associado ao problema  $(P_v)$  consiste em procurar uma solução  $v_m$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ) sob a forma

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m c_{im}(t) w_i(y) \in V_m, \quad 0 \leq t < t_m, \quad t_m < T,$$

sendo os coeficientes (de Fourier)  $c_{im}$  de classe  $C^2([0, t_m[)$ , determinados de modo a satisfazer o seguinte sistema:

$$(P_v^m) \begin{cases} \left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, w \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, w \right) - a(l_1(v_m)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, w \right) = (g, w), \quad \forall w \in V_m \\ v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0, \quad \text{forte em } H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.6)$$

Note-se que, se pode reescrever o problema  $(P_v^m)$  como um sistema de equações diferenciais ordinárias (não linear) em  $t$

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}.$$

Relativamente à função  $F$ , pode provar-se que

- $F(\cdot, X)$  é mensurável (em  $t$ ) para  $X$  fixo;
- $F(t, \cdot)$  é contínua (em  $X$ ) para  $t$  fixo;
- para cada compacto  $K$  contido no domínio de  $F$ , existe uma função real integrável  $h_K$ , tal que  $|F(t, X)| \leq h_K(t)$ ,  $\forall (t, X) \in K$ .

Assim, pelo teorema de Carathéodory (veja-se [27]), existe uma constante positiva  $t_m$ , tal que o problema  $(P_v^m)$  admite uma solução local  $v_m(t) \in C^2([0, t_m[)$ .

Agora, por intermédio da estimativa, à priori, seguinte, estende-se a solução a todo o intervalo  $[0, T]$ , independente de  $m$  e de  $t$ , obtendo-se uma subsucessão  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergente

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

para a solução do problema  $(P_v)$ .

### 3.3.2 Estimativas à priori

Para se provar a existência de solução global do problema aproximado é necessário estabelecer três estimativas:

#### 3.3.2.1 Primeira estimativa

Tomando  $w(t) = v_m(t)$  em  $(P_v^m)$  e como

$$\left( -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, w \right) = \left( \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

obtem-se

$$\left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m \right) + a(l_1(v_m)) b_2 \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial y} \right|^2 = (g, v_m). \quad (3.7)$$

Observe-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^2 = \left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m \right). \quad (3.8)$$

Mas, em  $H_0^1(\Omega)$ , as normas  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$  e  $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$  são equivalentes [23]. Assim, reescrevendo a equação (3.7), tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^2 - \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m \right) + a(l_1(v_m)) b_2 \|v_m(t)\|^2 = (g, v_m). \quad (3.9)$$

Analise-se agora o segundo termo desta equação. Tem-se

$$\left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m \right) = \int_0^1 b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m dy = \int_0^1 b_1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |v_m(y, t)|^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 b_1 \frac{\partial}{\partial y} |v_m(y, t)|^2 dy$$

e integrando por partes, usando as condições de fronteira e a definição da função  $b_1$ , obtém-se

$$\frac{1}{2} b_1 |v_m(y, t)|^2 \Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\gamma'}{\gamma} |v_m(y, t)|^2 dy = -\frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |v_m(t)|^2.$$

Concluindo,

$$-\left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m \right) = \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |v_m(t)|^2. \quad (3.10)$$

Aplicando a hipótese  $(H5)$ , tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |v_m(t)|^2 + m_a b_2 \|v_m(t)\|^2 \leq |(g, v_m)|. \quad (3.11)$$

Além disso, tem-se

$$|(g, v_m)| \leq |g(t)| |v_m(t)| \leq \frac{1}{2} \left( |g(t)|^2 + |v_m(t)|^2 \right). \quad (3.12)$$

Conjugando as inequações (3.11)-(3.12), multiplicando por 2 e integrando de 0 a  $t$ , obtém-se

$$|v_m(t)|^2 - |v_m(0)|^2 + \int_0^t \frac{\gamma'}{\gamma} |v_m(s)|^2 ds + 2m_a \int_0^t b_2 \|v_m(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |g(s)|^2 ds + \int_0^t |v_m(s)|^2 ds,$$

donde resulta

$$|v_m(t)|^2 + 2m_a \int_0^t b_2 \|v_m(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |g(s)|^2 ds + \int_0^t \left( 1 + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) |v_m(s)|^2 ds + |v_{0m}|^2.$$

Utilizando as hipóteses  $(H4')$ ,  $(H1) - (H2)$  e o facto de que  $v_{0m}$  converge (fortemente) para  $v_0$  em  $H_0^1(\Omega)$ , existem constantes positivas  $c_1, c_2$ , satisfazendo:

$$|v_m(t)|^2 + 2m_a \int_0^t b_2 \|v_m(s)\|^2 ds \leq c_1 + \left( 1 + \frac{c_2}{\gamma_0} \right) \int_0^t |v_m(s)|^2 ds + c_0. \quad (3.13)$$

Como  $b_2 > \frac{1}{\gamma_1^2}$ , tem-se

$$\int_0^t b_2 \|v_m(s)\|^2 ds > \frac{1}{\gamma_1^2} \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds$$

e de (3.13) resulta

$$|v_m(t)|^2 + \frac{2m_a}{\gamma_1^2} \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds \leq c_1 + c_0 + \left( 1 + \frac{c_2}{\gamma_0} \right) \int_0^t |v_m(s)|^2 ds. \quad (3.14)$$

Sejam  $c_3 = \min\{1, \frac{2m_a}{\gamma_1^2}\}$  e  $c_4 = \max\{\frac{c_1+c_0}{c_3}, \frac{1+c_2}{c_3}\}$ . Então,

$$|v_m(t)|^2 + \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds \leq c_4 + c_4 \int_0^t |v_m(s)|^2 ds, \quad (3.15)$$

que implica

$$|v_m(t)|^2 \leq c_4 + c_4 \int_0^t |v_m(s)|^2 ds.$$

Finalmente, pela desigualdade de Gronwall [74], obtém-se  $|v_m(t)| \leq C$  e, conseqüentemente,

$$\int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds \leq C_1,$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

sendo  $C$  e  $C_1$  constantes positivas, independentes de  $m$  e de  $t$ . Logo,

$$\begin{aligned} (v_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) , \\ (v_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então, pode estender-se a solução a todo o intervalo  $[0, T]$ .

### 3.3.2.2 Segunda estimativa

Pretende-se agora estimar a derivada  $\partial v_m / \partial t$ . Fazendo  $w(t) = \partial v_m(t) / \partial t$  em  $(\mathbf{P}_v^m)$ , obtém-se

$$\left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) + a(l_1(v_m)) \left( b_2 \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right) = \left( g, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right). \quad (3.17)$$

Analise-se agora cada um dos termos da equação diferencial anterior. O primeiro termo é igual a  $\left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial t} \right|^2$ . Pela hipótese (H1) e observando que

$$|b_1| \leq \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{|\gamma|} \leq \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0},$$

então, é fácil ver que

$$\left| \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right| \leq \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial t} \right| = \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \|v_m(t)\| \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial t} \right|. \quad (3.18)$$

Quer-se agora estimar o terceiro termo. Observe-se que, em analogia com (3.8), pode escrever-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial y} \right|^2 = \left( \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right). \quad (3.19)$$

Das hipóteses (H1), (H5) e de (3.19), obtém-se a desigualdade

$$a(l_1(v_m)) \left( b_2 \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right) = a(l_1(v_m)) b_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial y} \right|^2 \geq \frac{m_a}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial y} \right|^2. \quad (3.20)$$

Analogamente a (3.12) tem-se

$$\left| \left( g, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right| \leq \frac{1}{2} |g(t)|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial t} \right|^2. \quad (3.21)$$

Usando as desigualdades (3.18), (3.20) e (3.21) em (3.17), obtém-se

$$\frac{1}{4} \left| \frac{\partial v_m(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 \leq \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{2} |g(t)|^2.$$

Integrando de 0 até  $t$ , tem-se

$$\int_0^t \left| \frac{\partial v_m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \bar{c} \|v_m(t)\|^2 \leq \frac{4}{\gamma_0^2} \int_0^t (|\alpha'| + |\gamma'|)^2 \|v_m(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t |g(s)|^2 ds + \bar{c} \|v_{0m}\|^2, \quad (3.22)$$

onde  $\bar{c} = 2m_a/\gamma_1^2$ . Pela hipótese (H2), obtém-se

$$\int_0^t (|\alpha'| + |\gamma'|)^2 \|v_m(s)\|^2 ds \leq c_1 \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds.$$

Novamente, usando (H4') e a convergência dos dados iniciais, resulta que

$$\int_0^t \left| \frac{\partial v_m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \bar{c} \|v_m(t)\|^2 \leq \frac{4c_1}{\gamma_0^2} \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds + c_2 + c_3. \quad (3.23)$$

Denotando por  $c_4 = \min \{1, \bar{c}\}$  e por  $c_5 = \max \left\{ \frac{4c_1}{\gamma_0^2 c_4}, \frac{c_2 + c_3}{c_4} \right\}$ , de (3.23), finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} c_4 \left( \int_0^t \left| \frac{\partial v_m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \|v_m(t)\|^2 \right) &\leq \frac{4c_1}{\gamma_0^2} \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds + c_2 + c_3 \\ \Leftrightarrow \int_0^t \left| \frac{\partial v_m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \|v_m(t)\|^2 &\leq c_5 + c_5 \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtém-se  $\|v_m(t)\| \leq C$ ,

$$(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.25)$$

e

$$\left( \frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.26)$$

### 3.3.2.3 Terceira estimativa

Fazendo  $w(t) = -\partial^2 v_m(t)/\partial y^2$  em  $(P_v^m)$ , obtém-se

$$\left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) - a(l_1(v_m)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) = \left( g, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right). \quad (3.27)$$

Agora, observe-se que

$$\left( \frac{\partial v_m}{\partial t}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 \quad (3.28)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

e em analogia com (3.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \left( b_1 \frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) &\leq \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \|v_m(t)\| \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Além disso, tem-se

$$-a(l_1(v_m)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) = a(l_1(v_m)) b_2 \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2 \geq \frac{m_a}{\gamma_1^2} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2. \quad (3.30)$$

Usando a desigualdade de Schwarz e a “mesma” estimativa que em (3.29), resulta que

$$\left( g, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) \leq \left| -\left( g, \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) \right| \leq |g(t)| \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |g(t)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.28) a (3.31) em (3.27), vem

$$\frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 + \frac{2m_a}{\gamma_1^2} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2 \leq \varepsilon \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2 + \varepsilon |g(t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 + 2 \left( \frac{m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left| \frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2} \right|^2 \leq \varepsilon \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_m(t)\|^2 + \varepsilon |g(t)|^2. \quad (3.32)$$

Para  $\varepsilon > \gamma_1^2/m_a$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \|v_m(s)\|^2 ds + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \int_0^t \left| \frac{\partial^2 v_m(s)}{\partial y^2} \right|^2 ds &\leq \int_0^t \frac{2\gamma_1^2}{m_a} \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_m(s)\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{2\gamma_1^2}{m_a} |g(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analogamente, como na primeira e segunda estimativas, obtém-se

$$\int_0^t \frac{2\gamma_1^2}{m_a} |g(s)|^2 ds \leq c_0 \int_0^t |g(s)|^2 ds \leq c_1.$$

Procedendo-se literalmente como nas estimativas anteriores, conclui-se que

$$\int_0^t \left| \frac{\partial^2 v_m(s)}{\partial y^2} \right|^2 ds \leq C,$$

o que implica que

$$\left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.34)$$

e daqui resulta que  $(\frac{\partial v_m}{\partial y})_{m \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .

Usando as estimativas obtidas nesta secção, podem obter-se convergências e passar ao limite na equação diferencial do problema  $(P_v^m)$ .

### 3.3.3 Passagem ao limite

Considerando as limitações em (3.16), (3.25)-(3.26) e (3.34), então existe uma sub-sucessão de  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , que, por simplicidade, será designada ainda por  $(v_m)$ , tal que

$$\begin{aligned} v_m &\rightharpoonup v && \text{fracamente (ou na topologia fraca) em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) , \\ v_m &\overset{*}{\rightharpoonup} v && \text{fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) , \\ \frac{\partial v_m}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t} && \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) , \\ \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} &\rightharpoonup \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} && \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Da última convergência resulta que  $\frac{\partial v_m}{\partial y} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial y}$  fracamente em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Da teoria dos espaços de Sobolev, tem-se

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow L^2(\Omega) .$$

Observe-se que  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $v_m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e  $\frac{\partial v_m}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Então, pelo lema de compacidade de Aubin-Lions (veja-se [61]), existe uma sub-sucessão de  $(v_m)$ , a qual será denotada por  $(v_m)$ , tal que

$$v_m \rightarrow v \quad (\text{forte}) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) , \tag{3.36}$$

e, portanto,  $v_m$  converge pontualmente para  $v$  q.s. em  $\Omega \times ]0, T[$ .

Para se passar ao limite na parte não linear é necessário demonstrar o seguinte lema:

**Lema 3.1** Sabendo-se que  $l_1 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma linear contínua definida por

$$l_1(v) = \int_0^1 \gamma(t)v(y, t)dy ,$$

então  $a(l_1(v_m)) \rightarrow a(l_1(v))$  forte em  $L^2(]0, T[)$ .

**Demonstração:** Como a função  $a$  é contínua pela hipótese (H5), então basta verificar que  $l_1(v_m) - l_1(v) \rightarrow 0$ , em  $L^2(]0, T[)$ . De facto, tem-se

$$\int_0^T |l_1(v_m) - l_1(v)|^2 dt = \int_0^T |l_1(v_m - v)|^2 dt \leq C \int_0^T |v_m - v|^2 dt < \epsilon .$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

A última desigualdade decorre da convergência (3.36). Provou-se assim que, para cada  $T$  fixo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|l_1(v_m) - l_1(v)\|_{L^2(0,T)}^2 = 0,$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

*Observação 1:* Pela hipótese (H4'), tem-se que  $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Das estimativas estabelecidas na subsecção anterior, obtém-se que  $\frac{\partial v}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  estão em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e, usando a limitação superior das funções  $a$  e  $b_2$ , prova-se que

$$a \left( \gamma(t) \int_0^1 v(y, t) dy \right) b_2(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Consequentemente, a equação diferencial do problema  $(P_v)$  vale como igualdade no espaço de funções  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Usando as convergências (3.35) e o lema anterior, pode passar-se ao limite, quando  $m \rightarrow \infty$ , na equação diferencial do problema aproximado  $(P_v^m)$  e obter o seguinte:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} - a \left( \gamma(t) \int_0^1 v(y, t) dy \right) b_2(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g(y, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Para a verificação da condição inicial, parte-se da terceira convergência em (3.35), integra-se por partes e usa-se a segunda convergência de (3.35). Atendendo a que  $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{0m} = v_0$  em  $L^2(\Omega)$ , obtém-se  $v(0) = v_0$ . Conclui-se, assim, a demonstração do teorema 3.2. Na próxima secção, será tratada a unicidade da solução do problema  $(P_v)$ .

## 3.4 Unicidade da solução

A unicidade da solução global forte do problema em domínio fixo é garantida pelo teorema seguinte:

**Teorema 3.3** *Sejam  $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$  a solução global forte de  $(P_v)$  dada pelo teorema 3.2,  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$  e  $0 < T < \infty$ . Suponha-se que  $a$  é uma função Lipschitziana com constante  $L_a > 0$ , isto é,*

$$|a(s_1) - a(s_2)| \leq L_a |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

*Se valem as hipóteses (H1) e (H2), então a solução do problema  $(P_v)$  é única.*

**Demonstração:** Sejam  $v_1$  e  $v_2$  duas soluções do problema  $(P_v)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_1}{\partial y} - a(l_1(v_1)) b_2(t) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} &= g(y, t) \quad \text{e} \quad v_1(0, t) = v_1(1, t) = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_2}{\partial y} - a(l_1(v_2)) b_2(t) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} &= g(y, t) \quad \text{e} \quad v_2(0, t) = v_2(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro as duas equações diferenciais, tem-se que a função  $r = v_1 - v_2$  é solução de

$$\frac{\partial r}{\partial t} - b_1 \frac{\partial r}{\partial y} - a(l_1(v_1)) b_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + a(l_1(v_2)) b_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0,$$

em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , com  $r(y, 0) = v_0 - v_0 = 0$ . Multiplicando (escalarmente) a equação diferencial anterior por  $r$ , em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , tem-se

$$\left( \frac{\partial r}{\partial t}, r \right) - \left( b_1 \frac{\partial r}{\partial y}, r \right) - a(l_1(v_1)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, r \right) + a(l_1(v_2)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}, r \right) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |r(t)|^2 + a(l_1(v_1)) b_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) - a(l_1(v_2)) b_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.37)$$

Somando e subtraindo  $a(l_1(v_1)) b_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right)$ , vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |r(t)|^2 + a(l_1(v_1)) b_2 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] \\ = [a(l_1(v_2)) - a(l_1(v_1))] b_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando (H5), tem-se

$$\begin{aligned} a(l_1(v_1)) b_2 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] &= a(l_1(v_1)) b_2 \left( \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= a(l_1(v_1)) b_2 \left| \frac{\partial r(t)}{\partial y} \right|^2 = a(l_1(v_1)) b_2 \|r(t)\|^2 \geq \frac{m_a}{\gamma_1^2} \|r(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Note-se que o último termo de (3.38) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} |a(l_1(v_2)) - a(l_1(v_1))| |b_2| \left| \left( \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right| &\leq \frac{L_a}{\gamma_0^2} |l_1(v_2) - l_1(v_1)| \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial r(t)}{\partial y} \right| \\ &\leq \frac{L_a}{\gamma_0^2} c_0 |v_2(t) - v_1(t)| \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial r(t)}{\partial y} \right| = \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} |r(t)| \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right| \|r(t)\|. \end{aligned} \quad (3.40)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Usando (3.39) e (3.40) em (3.38) e multiplicando por 2, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |r(t)|^2 + \frac{\gamma'}{\gamma} |r(t)|^2 + \frac{2m_a}{\gamma_1^2} \|r(t)\|^2 &\leq 2 \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} |r(t)| \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right| \|r(t)\| \\ &\leq \varepsilon \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 |r(t)|^2 \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|r(t)\|^2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

sendo a última desigualdade obtida de  $2cd \leq c^2 + d^2$ , fazendo  $c = \sqrt{\varepsilon} \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} |r(t)| \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right|$  e  $d = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|r(t)\|$ , com  $\varepsilon > 0$ . Agora, passa-se o primeiro termo de (3.41) para o segundo membro, considera-se o seu módulo e o mínimo da função  $\gamma$ , e passa-se o último termo da referida condição para o primeiro membro. Tem-se, assim,

$$\frac{d}{dt} |r(t)|^2 + \left( \frac{2m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \|r(t)\|^2 \leq \varepsilon \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 |r(t)|^2 \left| \frac{\partial v_2(t)}{\partial y} \right|^2 + \frac{|\gamma'|}{\gamma_0} |r(t)|^2. \quad (3.42)$$

Para  $\varepsilon > \gamma_1^2/m_a/2$ , tem-se  $\left(2\frac{m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$ . Assim, faça-se  $\varepsilon = \gamma_1^2/m_a$ , por exemplo. Observando que  $\gamma' \in L^1(]0, T[)$ , pela hipótese (H2) e que  $\|v_2(t)\|^2 \leq C$ , conclui-se que  $|\gamma'|$  e  $|\partial v_2(t)/\partial y|^2$  são funções integráveis no tempo e limitadas localmente para cada  $t$ . Integrando de 0 a  $t$ , em ambos os membros de (3.42), resulta que

$$|r(t)|^2 - |r(0)|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \int_0^t \|r(s)\|^2 ds \leq \frac{\gamma_1^2}{m_a} \frac{L_a^2 c_0^2}{\gamma_0^4} \int_0^t \left| \frac{\partial v_2(s)}{\partial y} \right|^2 |r(s)|^2 ds + \frac{1}{\gamma_0} \int_0^t |\gamma'| |r(s)|^2 ds,$$

ou, equivalentemente,

$$|r(t)|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \int_0^t \|r(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \psi(s) |r(s)|^2 ds, \quad (3.43)$$

sendo a função  $\psi \in L^1(]0, T[)$ , definida por

$$\psi(s) = \frac{\gamma_1^2}{m_a} \frac{L_a^2 c_0^2}{\gamma_0^4} \left| \frac{\partial v_2(s)}{\partial y} \right|^2 + \frac{|\gamma'(s)|}{\gamma_0}.$$

Mas (3.43) implica que

$$|r(t)|^2 \leq \int_0^t \psi(s) |r(s)|^2 ds,$$

e pela desigualdade de Gronwall, obtém-se  $r = 0$ . Logo  $v_1 = v_2$ .  $\square$

Está-se agora em condições de demonstrar o teorema 3.1.

**Demonstração:** Seja  $v$  a solução do problema  $(P_v)$  com o dado inicial  $v_0(y)$ . Como  $u(x, t) = v(y, t)$ , onde  $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$ , então  $v_0(y) = u_0(\alpha(0) + \gamma(0)y)$ . Para se verificar que  $u$

dada pelo teorema 3.1 é solução do problema  $(P_u)$  é suficiente observar que a transformação

$$(x, t) \mapsto \left( \frac{x - \alpha}{\gamma}, t \right)$$

de  $Q_t \mapsto Q$  é (um difeomorfismo) de classe  $C^2$ . De facto, das igualdades (entre as derivadas)  $u_t = v_t - b_1(y, t)v_y$  e  $u_{xx} = b_2(t)v_{yy}$ , da existência de solução do problema  $(P_v)$  e da regularidade de  $v(y, t)$  dada pelo teorema 3.2, conclui-se que  $u(x, t)$  é solução de  $(P_u)$ . Finalmente, a unicidade da solução do problema  $(P_u)$  é uma consequência da unicidade da solução do problema  $(P_v)$ , porque  $u = v$ .  $\square$

### 3.5 Decaimento exponencial da solução

Nesta secção, investiga-se o comportamento assintótico da solução do problema  $(P_u)$ , quando  $t$  tende para infinito. Uma estratégia possível para efectuar este estudo consiste em trabalhar no domínio fixo  $\Omega$  com a energia aproximada e, via limite, mostrar-se o decaimento para  $\Omega_t$ . No presente trabalho, o decaimento exponencial da energia da solução do sistema, estabelecido no teorema seguinte, é obtido diretamente no domínio não retangular. Assim, introduz-se a função energia global do sistema, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.44)$$

**Teorema 3.4** *Sob as hipóteses do teorema 3.1, se  $f(x, t) = 0$  em  $(P_u)$ , então a função  $E$  satisfaz*

$$E(t) \leq E(0)e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0, \text{ com } \delta > 0.$$

De modo a demonstrar-se este teorema, vai, primeiramente, estabelecer-se a desigualdade de Poincaré em  $\Omega_t$ . Assim, tem-se

**Lema 3.2** *Se  $u \in H_0^1(\Omega_t)$ , então*

$$|u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq \gamma^2(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

**Demonstração:** O teorema fundamental do cálculo integral permite escrever

$$u(x, t) = \int_{\alpha(t)}^x \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) d\xi.$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Logo,

$$|u(x, t)|^2 \leq \left( \int_{\alpha(t)}^x \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t) \right| d\xi \right)^2 \leq \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t) \right| d\xi \right)^2$$

e usando a desigualdade de Schwarz, obtém-se

$$|u(x, t)|^2 \leq \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} 1 d\xi \right) \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t) \right|^2 d\xi \right) = \gamma(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

Integrando em  $\Omega_t$ , resulta que

$$|u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq \gamma^2(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad \square$$

Demonstra-se, agora, o teorema 3.4.

**Demonstração:** Considere-se a primeira equação do sistema (3.1) com  $f = 0$ . Multiplicando escalarmente por  $u(x, t)$  em  $L^2(\Omega_t)$ , obtém-se

$$(u_t, u)_{L^2(\Omega_t)} - a(l(u)) (u_{xx}, u)_{L^2(\Omega_t)} = 0. \quad (3.45)$$

Aplicando a fórmula de Leibnitz, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} |u(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} |u(x, t)|^2 dx + \beta'(t) |u(\beta(t), t)|^2 - \alpha'(t) |u(\alpha(t), t)|^2, \quad (3.46)$$

e usando as condições de fronteira, resulta

$$(u_t, u)_{L^2(\Omega_t)} = \int_{\Omega_t} u_t u dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} |u|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} |u(x, t)|^2 dx. \quad (3.47)$$

Além disso, tem-se

$$(u_{xx}, u)_{L^2(\Omega_t)} = \int_{\Omega_t} u_{xx} u dx = - \int_{\Omega_t} u_x u_x dx = - |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.47) e (3.48) em (3.45) e usando (3.44) que define a função  $E$ , obtém-se

$$\frac{d}{dt} E(t) + a(l(u)) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 = 0. \quad (3.49)$$

Atendendo a que  $a$  é uma função positiva, então da última equação resulta que  $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Assim, a energia  $E$  é uma função (não negativa) decrescente. Considerando a hipótese (H1), do lema 3.2, obtém-se a desigualdade

$$|u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq \gamma_1^2 |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

Portanto, da equação (3.49), resulta que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{m_a}{\gamma_1^2} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

e, conseqüentemente, que

$$\frac{d}{dt} \left( E(t) e^{2m_a t / \gamma_1^2} \right) \leq 0.$$

Integrando desde 0 até  $t$ , conclui-se que

$$E(t) \leq E(0) e^{-\delta t}, \quad (3.50)$$

com  $\delta = 2m_a / \gamma_1^2$ , o que prova o decaimento exponencial da solução quando a força de reação  $f(x, t)$  é nula.  $\square$

*Observação 2:* Pode demonstrar-se um resultado semelhante ao anterior, nomeadamente que a função energia satisfaz

$$E(t) \leq \frac{1}{m_a} \left( \frac{C_1^2}{2} + M_a \right) e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0 \text{ com } \delta > 0,$$

recorrendo ao lema de Nakao [72], onde  $C_1$  é tal que  $|\cdot|_{L^2(\Omega_t)} \leq C_1 \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega_t)}$ .

*Observação 3:* Quando  $f$  decai de forma adequada (veja-se [37]), pode obter-se o mesmo resultado que o do teorema 3.4 se  $f \neq 0$ .

*Observação 4:* Os resultados dos teoremas 3.1 e 3.4 podem ser generalizados para

$$u_t - a \left( \int_{\Omega_t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \Delta u = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_t \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

onde  $Q_t$  é um domínio não cilíndrico definido por  $Q_t = \bigcup_{0 < t < \infty} \Omega_t \times \{t\}$ , com fronteira lateral dada por  $\Sigma_t = \bigcup_{0 < t < \infty} (\partial\Omega_t \times \{t\})$ . Para mais detalhes, veja-se [38, 91].

### 3.6 Solubilidade global do sistema acoplado

Seja  $Q_t$  um domínio com fronteira móvel como o definido para o problema  $(P_u)$ . Considere-se o seguinte sistema acoplado de equações parabólicas não lineares

$$(S_u) \begin{cases} \mathbf{u}_t - A_d \cdot \mathbf{u}_{xx} = \mathbf{f}(x, t) & \text{em } Q_t \\ \mathbf{u}(\alpha(t), t) = \mathbf{u}(\beta(t), t) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \Omega_0 = ]\alpha(0), \beta(0)[ \end{cases}, \quad (3.51)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

onde  $\mathbf{u} = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$  é o vetor das variáveis dependentes,  $(\cdot)_t = \partial/\partial t$ ,  $(\cdot)_{xx} = \partial^2/\partial x^2$  e  $A_d$  é a matriz diagonal dos coeficientes dos termos de reação-difusão, definida por  $a_{ii} = a_i \left( \int_{\Omega_t} u_k dx \right)$ ,  $i, k = 1, 2$  e  $k \neq i$ . É nestes coeficientes com uma não linearidade do tipo não local que é feito o acoplamento das equações para esta classe de problemas. No que se segue, omite-se a indicação  $i = 1, 2$  e/ou a indicação  $k = 1, 2$  e  $k \neq i$ , sempre que não gerar ambiguidade.

*Observação 5:* Com o intuito de se provar a existência de solução forte em  $Q_t$ , para o problema anterior, sejam (H1)–(H2) como em  $(P_u)$  e supõe-se ainda que as seguintes hipóteses são verdadeiras:

$$(H3s) \quad \mathbf{u}_0^T \in H_0^1(\Omega_0) \times H_0^1(\Omega_0), \quad \Omega_0 = ]\alpha(0), \beta(0)[,$$

$$(H4s) \quad f_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \cap L^1(0, T; L^2(\Omega_t)), \quad \Omega_t = ]\alpha(t), \beta(t)[,$$

$$(H5s) \quad a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ é contínua segundo Lipschitz e } 0 < m_{a_i} \leq a_i(s) \leq M_{a_i}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Em analogia com o que se fez para o problema  $(P_u)$  (veja-se a secção 3.2), considera-se a mudança de variáveis  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(y, t)$  dada por  $v_i = u_i \circ \tau^{-1}$ , sendo  $\tau$  o difeomorfismo de classe  $C^2$  definido em (3.2). Por intermédio desta mudança de variáveis, o sistema  $(S_u)$  é transformado noutro equivalente definido num domínio retangular  $Q$

$$(S_v) \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_i}{\partial y} - a_i \left( \gamma(t) \int_0^1 v_k dy \right) b_2(t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = g_i(y, t), & i = 1, 2 \text{ em } Q \\ \mathbf{v}(0, t) = \mathbf{v}(1, t) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{v}(y, 0) = \mathbf{v}_0(y), & y \in \Omega = ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.52)$$

Relembre-se que:

- as derivadas parciais de  $u_i$  e  $v_i$  satisfazem as equações (3.4) e seguinte;
- $g_i(y, t) = f_i(\alpha + \gamma y, t)$ ;
- $\mathbf{v}_0(y) = \mathbf{u}_0(\alpha(0) + \gamma(0)y)$ ;
- as funções  $b_1$  e  $b_2$  são exactamente as mesmas que na secção 3.2.

Para mostrar a existência de solução global forte para o problema  $(S_u)$ , recorre-se a uma ideia idêntica à utilizada para o problema constituído por uma única equação. Assim, primeiramente, prova-se a existência de solução do sistema transformado  $(S_v)$  através da aplicação do método de Faedo-Galerkin, de um argumento de compacidade e de algumas ideias técnicas e, em seguida, usa-se o difeomorfismo  $\tau^{-1}$  para obter a existência de solução do problema inicial  $(S_u)$ .

**Teorema 3.5** Sob as hipóteses (H1) – (H2),

$$(H3s') \quad \mathbf{v}_0^T \in (H_0^1(\Omega))^2,$$

$$(H4s') \quad \mathbf{g}^T \in [L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, T; L^2(\Omega))]^2$$

e (H5s), então existe  $v_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2$ , solução do sistema  $(S_v)$ , isto é,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_i}{\partial y} - a_i \left( \gamma(t) \int_0^1 v_k dy \right) b_2(t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = g_i(y, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e satisfaz as seguintes condições de regularidade:

$$\mathbf{v}^T \in [L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))]^2,$$

$$(\mathbf{v}_t)^T \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2.$$

**Demonstração:** Tendo em conta a demonstração pormenorizada elaborada na secção 3.3, apresentam-se aqui apenas os aspetos fundamentais para se provar a existência de solução forte do sistema  $(S_v)$ . Saliente-se que as ferramentas principais usadas são o método de Faedo-Galerkin e o lema de Aubin-Lions.

Assim, sejam  $\mathcal{B} = \{w_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma base hilbertiana de  $H_0^1(\Omega)$  e  $V_m$  o subespaço gerado pelos primeiros  $m$  vetores de  $\mathcal{B}$ , com  $m = 1, 2, \dots$ . Se  $v_i^m(t) \in V_m$ , então pode ser representada por

$$v_i^m(t) = \sum_{j=1}^m c_{ij}^m(t) w_j(y), \quad 0 \leq t < t_m, \quad t_m < T,$$

onde  $\mathbf{v}^m$  é a solução do sistema não linear de EDOs na variável  $t$

$$(S_v^m) \begin{cases} \left( \frac{\partial v_i^m}{\partial t}, w \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_i^m}{\partial y}, w \right) - a_i (l_1(v_k^m)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2}, w \right) = (g_i, w), \quad \forall w \in V_m \\ v_i^m(0) = v_{i0}^m \rightarrow v_{i0}, \quad \text{forte em } H_0^1(\Omega) \end{cases}, \quad (3.53)$$

em que  $l_1 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma linear contínua definida por  $l_1(\chi) = \int_0^1 \gamma(t) \chi(y, t) dy$ . Reescrevendo o sistema anterior como  $Y' = F(t, Y) \wedge Y(0) = Y_0$ , pode provar-se que  $F(\cdot, Y)$  é mensurável (em  $t$ ) para  $Y$  fixo;  $F(t, \cdot)$  é contínua (em  $Y$ ) para  $t$  fixo e, para cada conjunto compacto  $K$  contido no domínio de  $F$ , existe uma função real integrável  $h_K$ , tal que  $|F(t, Y)| \leq h_K(t)$ ,  $\forall (t, Y) \in K$ . Então, pelo teorema de Carathéodory (veja-se [27]), o sistema (3.53) tem uma solução local  $(v_1^m(t), v_2^m(t))^T$  no intervalo  $[0, t_m[$ , para algum  $t_m$ , tal que  $0 < t_m < T$ . A seguinte estimativa, à priori, permite a extensão das soluções para o intervalo  $[0, T]$  e a tomada de limites nas soluções aproximadas de  $(S_v^m)$ .

*Estimativa I:* Fazendo  $w(t) = v_i^m(t)$  na  $i$ -ésima equação de  $(S_v^m)$  e tendo em atenção as

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

equações (3.7)-(3.10), obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_i^m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |v_i^m(t)|^2 + a_i (l_1(v_k^m)) b_2 \|v_i^m(t)\|^2 = (g_i, v_i^m). \quad (3.54)$$

Somando membro a membro com  $i = 1, 2$ , denotando  $m_a = \min\{m_{a_1}, m_{a_2}\}$  e usando a desigualdade de Schwarz em cada um dos termos do segundo membro, do sistema de equações diferenciais ordinárias anterior, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum |v_i^m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} \sum |v_i^m(t)|^2 + m_a b_2 \sum \|v_i^m(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum |g_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \sum |v_i^m(t)|^2, \quad (3.55)$$

onde  $\sum \chi_i = \chi_1 + \chi_2$ . Integrando de 0 a  $t$ , tem-se

$$\begin{aligned} \sum \left[ |v_i^m(t)|^2 - |v_i^m(0)|^2 + \int_0^t \frac{\gamma'}{\gamma} |v_i^m(s)|^2 ds + 2m_a \int_0^t b_2 \|v_i^m(s)\|^2 ds \right] \\ \leq \sum \left[ \int_0^t |g_i(s)|^2 ds + \int_0^t |v_i^m(s)|^2 ds \right], \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \sum \left[ |v_i^m(t)|^2 + 2m_a \int_0^t b_2 \|v_i^m(s)\|^2 ds \right] \\ \leq \sum \left[ \int_0^t |g_i(s)|^2 ds + \int_0^t \left( 1 + \frac{|\gamma'|}{|\gamma|} \right) |v_i^m(s)|^2 ds + |v_{i0}^m|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Das hipóteses (H1) – (H2) e da convergência forte em (3.53), resulta que

$$\sum |v_i^m(t)|^2 + \int_0^t \sum \|v_i^m(s)\|^2 ds \leq C_4 + C_4 \int_0^t \sum |v_i^m(s)|^2 ds, \quad (3.57)$$

sendo  $C_3 = \min\{1, \frac{2m_a}{\gamma_i^2}\}$  e  $C_4 = \max\{\frac{\sum(C_{i1}+C_{i0})}{C_3}, \frac{1+C_2}{C_3}\}$ . Usando a desigualdade de Gronwall, obtém-se

$$\sum |v_i^m(t)|^2 \leq C,$$

e, conseqüentemente, que

$$\sum \int_0^t \|v_i^m(s)\|^2 ds \leq \bar{C},$$

onde  $C$  e  $\bar{C}$  são constantes positivas, independentes de  $m$  e de  $t$ . Concluindo,

$$\begin{aligned} (v_i^m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ (v_i^m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Então, é possível estender a solução a todo o intervalo  $[0, T]$ . Mas, para se poder passar

ao limite quando  $m \rightarrow \infty$ , são necessárias mais duas estimativas.

*Estimativa II:* Quer-se agora estimar as derivadas  $\partial v_i^m / \partial t$ . Pondo  $w(t) = \partial v_i^m(t) / \partial t$  na equação  $i$  de  $(S_\gamma^m)$ , obtém-se

$$\left( \frac{\partial v_i^m}{\partial t}, \frac{\partial v_i^m}{\partial t} \right) - \left( b_1 \frac{\partial v_i^m}{\partial y}, \frac{\partial v_i^m}{\partial t} \right) + a_i (l_1(v_k^m)) b_2 \left( \frac{\partial v_i^m}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_i^m}{\partial t} \right) \right) = \left( g_i, \frac{\partial v_i^m}{\partial t} \right). \quad (3.59)$$

Usando as desigualdades (3.18), (3.20) e (3.21) e atendendo a que  $m_a = \min \{m_{a_1}, m_{a_2}\}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \sum \left[ \left| \frac{\partial v_i^m(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial v_i^m(t)}{\partial y} \right|^2 \right] \\ \leq \sum \left[ \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \|v_i^m(t)\| \left| \frac{\partial v_i^m(t)}{\partial t} \right| + \frac{1}{2} |g_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_i^m(t)}{\partial t} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (3.60), obtém-se

$$\sum \left[ \frac{1}{4} \left| \frac{\partial v_i^m(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_i^m(t)\|^2 \right] \leq \sum \left[ \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_i^m(t)\|^2 + \frac{1}{2} |g_i(t)|^2 \right]. \quad (3.61)$$

Integrando de 0 até  $t$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \sum \left[ \int_0^t \left| \frac{\partial v_i^m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \frac{2m_a}{\gamma_1^2} \|v_i^m(t)\|^2 \right] \leq \sum \left[ \frac{4}{\gamma_0^2} \int_0^t (|\alpha'| + |\gamma'|)^2 \|v_i^m(s)\|^2 ds \right. \\ \left. + 2 \int_0^t |g_i(s)|^2 ds + \frac{2m_a}{\gamma_1^2} \|v_{i0}^m\|^2 \right]. \end{aligned}$$

De (H2), pode garantir-se que

$$\int_0^t (|\alpha'| + |\gamma'|)^2 \|v_i^m(s)\|^2 ds \leq c_{i1} \int_0^t \|v_i^m(s)\|^2 ds.$$

Portanto, em analogia com o que se fez para a primeira estimativa, existe uma constante positiva  $C$ , que não depende de  $t$  nem de  $m$ , tal que

$$\int_0^t \sum \left| \frac{\partial v_i^m(s)}{\partial s} \right|^2 ds + \sum \|v_i^m(t)\|^2 \leq C + C \int_0^t \sum \|v_i^m(s)\|^2 ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtém-se

$$\sum \|v_i^m(t)\|^2 \leq C_1,$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

e daqui resulta que

$$\int_0^t \sum \left| \frac{\partial v_i^m(s)}{\partial s} \right|^2 ds \leq C_2.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (v_i^m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \left(\frac{\partial v_i^m}{\partial t}\right)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.62)$$

*Estimativa III:* Fazendo  $w(t) = -\partial^2 v_i^m(t)/\partial y^2$  na  $i$ -ésima equação diferencial de  $(S_V^m)$ , obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_i^m(t)\|^2 - \left( b_1 \frac{\partial v_i^m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} \right) - a_i (l_1(v_k^m)) b_2 \left( \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} \right) = \left( g_i, -\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} \right).$$

Adicionando membro a membro com  $i = 1, 2$ , obtém-se

$$\sum \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_i^m(t)\|^2 - \left( b_1 \frac{\partial v_i^m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} \right) + a_i (l_1(v_k^m)) b_2 \left| \frac{\partial^2 v_i^m(t)}{\partial y^2} \right|^2 \right] = \sum \left( g_i, -\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} \right).$$

Usando desigualdades similares a (3.29), (3.30) e (3.31), resulta que

$$\begin{aligned} \sum \left[ \frac{d}{dt} \|v_i^m(t)\|^2 + 2 \left( \frac{m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left| \frac{\partial^2 v_i^m(t)}{\partial y^2} \right|^2 \right] \\ \leq \sum \left[ \varepsilon \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_i^m(t)\|^2 + \varepsilon |g_i(t)|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

para todo o  $\varepsilon > 0$ , onde  $m_a = \min \{m_{a_1}, m_{a_2}\}$ . Observe-se que, para  $\varepsilon > \gamma_1^2/m_a$ , se tem

$$\frac{m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

Assim, seja  $\varepsilon = 2\gamma_1^2/m_a$ . Integrando de 0 até  $t$  (3.63), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum \left[ \|v_i^m(t)\|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \int_0^t \left| \frac{\partial^2 v_i^m(s)}{\partial y^2} \right|^2 ds \right] \\ \leq \frac{2\gamma_1^2}{m_a} \sum \left[ \int_0^t \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 \|v_i^m(s)\|^2 ds + \int_0^t |g_i(s)|^2 ds \right] + \sum \|v_{i0}^m\|^2. \end{aligned}$$

Usando  $(H4s')$  e as convergências fortes em  $H_0^1(\Omega)$ ,  $v_i^m(0) = v_{i0}^m \rightarrow v_{i0}$ , com  $i = 1, 2$ , tem-se que

$$\sum \|v_i^m(t)\|^2 + \int_0^t \sum \left| \frac{\partial^2 v_i^m(s)}{\partial y^2} \right|^2 ds \leq C + C \int_0^t \sum \|v_i^m(s)\|^2 ds, \quad (3.64)$$

onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $t$  nem de  $m$ . Usando a desigualdade de

Gronwall, pode concluir-se que

$$\left(\frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2}\right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) . \quad (3.65)$$

Usando as estimativas obtidas em (3.58), (3.62) e (3.65), podem extrair-se subsucessões de  $(v_1^m)$  e  $(v_2^m)$  que, por simplicidade, continuarão a ser designadas por  $(v_1^m)$  e  $(v_2^m)$ , respetivamente, tais que

$$\begin{aligned} v_i^m &\rightharpoonup v_i \quad \text{fracamente (ou na topologia fraca) em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) , \\ v_i^m &\overset{*}{\rightharpoonup} v_i \quad \text{fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) , \\ \frac{\partial v_i^m}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) , \\ \frac{\partial^2 v_i^m}{\partial y^2} &\rightharpoonup \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) . \end{aligned} \quad (3.66)$$

Então, pelo lema de compacidade de Aubin-Lions (veja-se [61]), como  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , tem-se

$$v_1^m \rightarrow v_1 \quad \text{e} \quad v_2^m \rightarrow v_2 \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) . \quad (3.67)$$

Assim, passando, se necessário, para uma subsucessão (indicada ainda pelo mesmo símbolo), tem-se

$$v_1^m \rightarrow v_1 \quad \text{e} \quad v_2^m \rightarrow v_2 \quad \text{q.s. em } \Omega \times ]0, T[ . \quad (3.68)$$

Agora, passa-se ao limite com  $m \rightarrow \infty$ . Pelo lema 3.1, tem-se que

$$a_i(l_1(v_k^m)) \rightarrow a_i(l_1(v_k)) \quad \text{em } L^2(]0, T[) , \quad (3.69)$$

que é necessário para passar ao limite na parte não linear. Usando as convergências em (3.66) e (3.69), pode passar-se ao limite com  $m \rightarrow \infty$  no problema aproximado  $(S_V^m)$  e obtém-se o seguinte:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_i}{\partial y} - a_i(l_1(v_k)) b_2(t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = g_i(y, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) .$$

Agora, verificam-se as condições iniciais. De facto, usando o resultado de regularidade, tem-se

$$v_i \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) .$$

Desta forma, faz sentido calcular  $v_i(0)$ . Considere-se  $z \in C^1(0, T; \mathbb{R})$ , com  $z(0) = 1$  e  $z(T) = 0$ .

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Uma vez que a terceira convergência em (3.66) implica que

$$\int_0^T \left( \frac{\partial v_i^m}{\partial t}, \vartheta \right) z dt \rightarrow \int_0^T \left( \frac{\partial v_i}{\partial t}, \vartheta \right) z dt, \quad \vartheta \in L^2(\Omega),$$

integrando por partes, obtém-se

$$-(v_i^m(0), \vartheta) - \int_0^T (v_i^m, \vartheta) \frac{\partial z}{\partial t} dt \rightarrow -(v_i(0), \vartheta) - \int_0^T (v_i, \vartheta) \frac{\partial z}{\partial t} dt. \quad (3.70)$$

De (3.70) e usando a segunda convergência em (3.66), obtém-se  $(v_i^m(0), \vartheta) \rightarrow (v_i(0), \vartheta)$ , para todo o  $\vartheta \in H_0^1(\Omega)$ . Mas  $v_i^m(0)$  converge fortemente para  $v_{i0}$  em  $L^2(\Omega)$  e, conseqüentemente, também converge fracamente em  $L^2(\Omega)$ . Portanto,  $(v_i^m(0), \vartheta) \rightarrow (v_{i0}, \vartheta)$  para todo o  $\vartheta \in H_0^1(\Omega)$ . Da unicidade do limite resulta que  $(v_i(0), \vartheta) \rightarrow (v_{i0}, \vartheta)$ , para todo o  $\vartheta \in H_0^1(\Omega)$ . Assim,  $v_i(0) = v_{i0}$ . Logo, o problema  $(S_V)$  possui solução.  $\square$

A unicidade da solução forte, global no tempo, para o problema transformado com fronteira fixa é garantida pelo seguinte teorema:

**Teorema 3.6** *Sejam  $v_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2$ , a solução global forte de  $(S_V)$  dada pelo teorema 3.5,  $(v_{10}, v_{20}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  e  $0 < T < \infty$ . Suponha-se que  $a_i$  é uma função Lipschitziana com constante  $L_{a_i} > 0$ , isto é,*

$$|a_i(s_1) - a_i(s_2)| \leq L_{a_i} |s_1 - s_2|, \quad \text{para quaisquer } s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

*Se valem as hipóteses (H1) e (H2), então a solução do problema  $(S_V)$  é única.*

**Demonstração:** Sejam  $(v_1, v_2)$  e  $(\omega_1, \omega_2)$  duas soluções do problema  $(S_V)$ , isto é,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial v_i}{\partial y} - a_i(l_1(v_k)) b_2(t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = g_i(y, t), \quad (3.71)$$

com  $v_i(0, t) = v_i(1, t) = 0$ , e

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} - b_1(y, t) \frac{\partial \omega_i}{\partial y} - a_i(l_1(\omega_k)) b_2(t) \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} = g_i(y, t), \quad (3.72)$$

com  $\omega_i(0, t) = \omega_i(1, t) = 0$ ,  $i, k = 1, 2$  e  $k \neq i$ . Subtraindo membro a membro a equação (3.72) da equação (3.71), obtém-se

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - b_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right) - a_i(l_1(v_k)) b_2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + a_i(l_1(\omega_k)) b_2 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} = 0,$$

e segue-se que  $r_i = v_i - \omega_i$  é solução de

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} - b_1 \frac{\partial r_i}{\partial y} - a_i (l_1(v_k)) b_2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + a_i (l_1(\omega_k)) b_2 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial y^2} = 0,$$

em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , com  $r_i(0) = 0$ . Tomando o produto interno em  $L^2(\Omega)$ , com  $r_i$ , e adicionando e subtraindo  $a_i (l_1(v_k)) b_2 \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial y}, \frac{\partial r_i}{\partial y} \right)$  na equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |r_i(t)|^2 + a_i (l_1(v_k)) b_2 \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial y}, \frac{\partial r_i}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial y}, \frac{\partial r_i}{\partial y} \right) \right] \\ = [a_i (l_1(\omega_k)) - a_i (l_1(v_k))] b_2 \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial y}, \frac{\partial r_i}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Adicionando as equações com  $i = 1, 2$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \sum \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |r_i(t)|^2 + a_i (l_1(v_k)) b_2 \left| \frac{\partial r_i(t)}{\partial y} \right|^2 \right] \\ = \sum \left[ [a_i (l_1(\omega_k)) - a_i (l_1(v_k))] b_2 \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial y}, \frac{\partial r_i}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Observe-se que

$$a_i (l_1(v_k)) b_2 \left| \frac{\partial r_i(t)}{\partial y} \right|^2 = a_i (l_1(v_k)) b_2 \|r_i(t)\|^2 \geq \frac{m_{a_i}}{\gamma_1^2} \|r_i(t)\|^2 \quad (3.74)$$

e

$$\frac{L_{a_i}}{\gamma_0^2} |l_1(\omega_k) - l_1(v_k)| \left| \frac{\partial \omega_i(t)}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial r_i(t)}{\partial y} \right| \leq \frac{L_{a_i} c_0}{\gamma_0^2} |r_k(t)| \left| \frac{\partial \omega_i(t)}{\partial y} \right| \|r_i(t)\|. \quad (3.75)$$

Substituindo (3.74) e (3.75) na equação (3.73), obtém-se

$$\sum \frac{d}{dt} |r_i(t)|^2 + \left( \frac{2m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \sum \|r_i(t)\|^2 \leq \varepsilon \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 \sum |r_k(t)|^2 \left| \frac{\partial \omega_i(t)}{\partial y} \right|^2 + \frac{|\gamma'|}{\gamma_0} \sum |r_i(t)|^2,$$

para algum  $\varepsilon > \gamma_1^2/m_a/2$ , onde  $L_a = \max\{L_{a_1}, L_{a_2}\}$ . Relembre-se que  $m_a = \min\{m_{a_1}, m_{a_2}\}$ .

Pondo  $\varepsilon = \gamma_1^2/m_a$  e integrando de 0 até  $t$  em ambos os membros da última desigualdade, segue-se que

$$\sum |r_i(t)|^2 \leq \int_0^t \varphi(s) \sum |r_i(s)|^2 ds, \quad (3.76)$$

onde a função  $\varphi \in L^1(]0, T[)$  é definida por

$$\varphi(s) = \frac{\gamma_1^2}{m_a} \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 \sum \left| \frac{\partial \omega_i(s)}{\partial y} \right|^2 + \frac{|\gamma'(s)|}{\gamma_0}.$$

Finalmente, pela desigualdade de Gronwall, obtém-se  $\sum |r_i(t)|^2 = 0$ , que é equivalente a

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$r_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Logo,  $v_1 = \omega_1$  e  $v_2 = \omega_2$ .  $\square$

Agora, está-se em condições de provar o teorema principal desta secção.

**Teorema 3.7** *Sob as hipóteses (H1) – (H2) e (H3s) – (H5s), então existe uma única solução forte  $u_i : Q_t \rightarrow \mathbb{R}$  para o problema  $(S_u)$ , isto é,*

$$\begin{aligned}(u_1)_t - a_1(l(u_2))(u_1)_{xx} &= f_1(x, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega_t)), \\ (u_2)_t - a_2(l(u_1))(u_2)_{xx} &= f_2(x, t) \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega_t)),\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições de regularidade:

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) &\in [L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t))]^2, \\ ((u_1)_t, (u_2)_t) &\in [L^2(0, T; L^2(\Omega_t))]^2,\end{aligned}$$

onde  $l : L^2(\Omega_t) \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma linear contínua definida por  $l(\phi) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \phi(x, t) dx$ .

**Demonstração:** Seja  $(v_1, v_2)$  a solução do problema  $(S_v)$  com dados iniciais

$$v_{i0}(y) = u_{i0}(\alpha(0) + \gamma(0)y), \quad i = 1, 2.$$

Como  $u(x, t) = v(y, t)$ , onde  $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$ , para se verificar que  $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ , dada pelo teorema 3.7, é solução do problema  $(S_u)$ , é suficiente observar que a transformação  $\tau : Q_t \rightarrow Q$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$ . De facto, das igualdades  $(u_i)_t = (v_i)_t - b_1(y, t)(v_i)_y$  e  $(u_i)_{xx} = b_2(t)(v_i)_{yy}$ , da existência de solução para o problema  $(S_v)$  e da regularidade de  $(v_1(y, t), v_2(y, t))$  dada pelo teorema 3.5, pode concluir-se que  $(u_1(x, t), u_2(x, t))$  é solução de  $(S_u)$ . Finalmente, a unicidade da solução para  $(S_u)$  é uma consequência da unicidade da solução para  $(S_v)$ , porque  $u_i = v_i$ .  $\square$

## 3.7 Decaimento exponencial da solução do sistema

Um grande número de autores estuda a existência de soluções fracas ou soluções regulares para equações parabólicas ou hiperbólicas com fronteira móvel. No problema apresentado isto traz dificuldades acrescidas, porque a geometria do domínio influencia a exatidão do problema correspondente (veja-se [59]).

O objetivo desta secção é estabelecer uma taxa de decaimento para a energia associada ao problema  $(S_u)$ . Assim, obtém-se o comportamento assintótico para  $t$ , arbitrariamente

grande, da energia natural do sistema, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( |u_1(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 + |u_2(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \right), \quad (3.77)$$

no interior do domínio não cilíndrico  $Q_t$ . Assim, pode enunciar-se o seguinte resultado:

**Teorema 3.8** *Sob as hipóteses do teorema 3.7, se  $f_1(x, t) = f_2(x, t) = 0$  em  $(S_u)$ , então a função  $E$  satisfaz*

$$E(t) \leq E(0)e^{-\delta t}, \quad \text{para qualquer } t \geq 0, \text{ com } \delta > 0.$$

**Demonstração:** Considerem-se as duas equações diferenciais associadas a  $(S_u)$ , com  $f_i = 0$ . Multiplicando escalarmente a  $i$ -ésima equação por  $u_i(x, t)$ , em  $L^2(\Omega_t)$ , obtém-se

$$((u_i)_t, u_i)_{L^2(\Omega_t)} - a_i(l(u_k)) ((u_i)_{xx}, u_i)_{L^2(\Omega_t)} = 0. \quad (3.78)$$

Aplicando a fórmula de Leibnitz em (3.78) e usando as condições de fronteira, resulta

$$((u_i)_t, u_i)_{L^2(\Omega_t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} |u_i(x, t)|^2 dx. \quad (3.79)$$

Integrando por partes no segundo termo de (3.78) e pelas condições de fronteira, obtém-se

$$((u_i)_{xx}, u_i)_{L^2(\Omega_t)} = - |(u_i)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.80)$$

Substituindo (3.79) e (3.80) em (3.78), somando as duas equações para  $i = 1, 2$  e usando (3.77) que define a função  $E$ , obtém-se

$$\frac{d}{dt} E(t) + a_1(l(u_2)) |(u_1)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 + a_2(l(u_1)) |(u_2)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 = 0. \quad (3.81)$$

Atendendo à hipótese  $(H5s)$ , como  $m_a = \min\{m_{a_1}, m_{a_2}\}$ , então, da última equação, resulta que

$$\frac{d}{dt} E(t) + m_a \left( |(u_1)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 + |(u_2)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \right) \leq 0. \quad (3.82)$$

Desta desigualdade, obtém-se que  $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$ , para todo o  $t \geq 0$ , porque  $m_a > 0$ . Assim, a energia  $E$  é uma função (não negativa) decrescente. Considerando a hipótese  $(H1)$ , a partir do lema 3.2, obtém-se a desigualdade de Poincaré

$$|u_i(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq \gamma_1^2 |(u_i)_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Assim, usando esta última desigualdade, da equação (3.82), resulta que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \left( |u_1(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 + |u_2(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \right) \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

e, conseqüentemente, que

$$\frac{d}{dt} \left( E(t) e^{2m_a t / \gamma_1^2} \right) \leq 0.$$

Integrando desde 0 até  $t$ , conclui-se que

$$E(t) \leq E(0) e^{-\delta t},$$

com  $\delta = 2m_a / \gamma_1^2$ , o que prova o decaimento exponencial da solução quando ambas as forças de reação,  $f_1(x, t)$  e  $f_2(x, t)$ , são nulas.  $\square$

*Observação 6:* Quando  $f_1$  e  $f_2$  apresentam um decaimento adequado (veja-se [37]), pode obter-se o mesmo resultado que o do teorema 3.8 se  $f_1(x, t) \neq 0$  e  $f_2(x, t) \neq 0$ .

*Observação 7:* Os resultados dos teoremas 3.7 e 3.8 podem ser generalizados para

$$\begin{cases} (u_1)_t - a_1 \left( \int_{\Omega_t} u_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \Delta u_1 = f_1(\mathbf{x}, t), & \text{em } Q_t, \\ (u_2)_t - a_2 \left( \int_{\Omega_t} u_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \Delta u_2 = f_2(\mathbf{x}, t), & \text{em } Q_t, \end{cases}$$

onde  $Q_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) é um domínio não cilíndrico definido por

$$Q_t = \bigcup_{0 < t < \infty} \Omega_t \times \{t\},$$

com fronteira lateral dada por  $\Sigma_t = \bigcup_{0 < t < \infty} (\partial\Omega_t \times \{t\})$ . Para mais detalhes, veja-se [38, 91].

*Observação 8:* É possível recorrer às técnicas aqui apresentadas para provar a existência e unicidade, bem como o decaimento exponencial das soluções, para um sistema do tipo

$$\begin{cases} (u_i)_t - a_i \left( \int_{\Omega_t} u_{\sigma(i)}(x, t) dx \right) (u_i)_{xx} = f_i(x, t), & \text{em } Q_t, \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

onde  $\sigma$  é uma permutação dos elementos de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , generalizando assim os resultados dos teoremas 3.7 e 3.8.

### 3.8 Estimativas do erro

Para finalizar o estudo teórico dos problemas não locais com fronteira móvel, nesta secção, primeiramente, discretiza-se a variável espacial do problema transformado  $(S_v)$  e obtêm-se estimativas do erro para a solução semidiscreta. Em seguida, discretiza-se o mesmo também no tempo e procuram-se estimativas do erro para essa discretização. A formulação do problema semidiscreto assenta na seguinte definição de solução fraca:

**Definição 3.1** Diz-se que o par de funções  $v = (v_1, v_2)^T$  é uma solução fraca do problema  $(S_v)$  se, para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$v_i \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.83)$$

a seguinte igualdade em  $\mathcal{D}'(]0, T[)$  é verdadeira para qualquer  $w \in H_0^1(\Omega)$  e  $t \in ]0, T[$ ,

$$\int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial t} w \, dy - \int_0^1 b_1 \frac{\partial v_i}{\partial y} w \, dy + a_i(l_1(v_k)) b_2 \int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \, dy = \int_0^1 g_i w \, dy \quad (3.84)$$

e

$$v_i(y, 0) = v_{i0}(y), \quad y \in \Omega. \quad (3.85)$$

A partir de agora, assume-se que  $v$  tem a regularidade necessária para realizar todos os cálculos que se seguem.

#### 3.8.1 Solução semidiscreta

Considere-se uma partição  $\mathcal{P}_h$  do domínio espacial  $\Omega$  em intervalos disjuntos  $\Delta_L$ ,  $L = 1, \dots, N$ , tal que  $h = \max\{Z_L : L = 1, \dots, N\}$ . Seja  $S_h^r$  o conjunto das funções contínuas em  $\bar{\Omega}$ , seccionalmente polinomiais de grau  $r$  em cada elemento finito  $\Delta_L$  e que valem zero na fronteira de  $\Omega$ , isto é,

$$S_h^r = \left\{ U \in C_0^0(\bar{\Omega}) : U|_{\Delta_L} \circ \mathcal{T}_L \in \mathbb{P}_r^1, \quad \forall \Delta_L \in \mathcal{P}_h \right\}.$$

Se  $\{\Phi^k : k = 1, \dots, \tilde{N}\}$  é uma base para  $S_h^r$ , então pode definir-se cada elemento  $U \in S_h^r$  por

$$U(y, t) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} U(\xi^k, t) \Phi^k(y), \quad y \in \Omega.$$

Para cada função  $u$  definida em  $\Omega$ , que se anula em  $\partial\Omega$ , defina-se a função interpoladora de  $u$ , que se denota por  $\mathcal{I}_h u$ , como sendo o elemento de  $S_h^r$  que coincide com  $u$  nos nós globais

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$\{\xi^k : k = 1, \dots, \tilde{N}\}$ . Assim, tem-se,

$$(\mathcal{I}_h u)(y) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} u(\xi^k) \Phi^k(y), \quad y \in \Omega.$$

Pode enunciar-se o seguinte resultado:

**Lema 3.3** Se  $u \in H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , então

$$|\mathcal{I}_h u - u| + h|\nabla(\mathcal{I}_h u - u)| \leq Ch^{r+1}\|u\|_{H^{r+1}(\Omega)},$$

sendo  $C$  uma constante positiva independente de  $h$  e de  $r$ .

A demonstração deste lema, bem como a do seguinte encontra-se em [100].

**Definição 3.2** Uma função  $\tilde{U} \in \mathcal{S}_h^r$  diz-se a projeção de Ritz de  $u \in H_0^1(\Omega)$  sobre  $\mathcal{S}_h^r$ , se satisfaz a igualdade

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla U \, dy = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla U \, dy, \quad \forall U \in \mathcal{S}_h^r.$$

**Lema 3.4** Se  $u \in H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , então

$$|\tilde{U} - u| + h|\nabla(\tilde{U} - u)| \leq Ch^{r+1}\|u\|_{H^{r+1}(\Omega)},$$

sendo  $C$  uma constante positiva independente de  $h$  e de  $r$ .

O problema semidiscreto, baseado na definição 3.1, consiste em determinar a função vectorial  $\mathbf{V} = (V_1, V_2)^T$ , pertencente a  $(\mathcal{S}_h^r)^2$  para  $t \geq 0$ , tal que para todo o  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$  com componentes em  $\mathcal{S}_h^r$  e  $t \in ]0, T[$ :

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{\partial V_i}{\partial t} U_i \, dy - \int_0^1 b_1 \frac{\partial V_i}{\partial y} U_i \, dy + a_i(l_1(V_k))b_2 \int_0^1 \frac{\partial V_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} \, dy = \int_0^1 g_i U_i \, dy \\ V_i(0) = \mathcal{I}_h v_{i0}, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.86)$$

Note-se que, se pode reescrever o problema (3.86) como um sistema de EDOs (não linear) em  $t$ . A demonstração de existência de solução para este sistema resulta do teorema de Carathéodory (veja-se [27]) e pode provar-se a unicidade da solução, usando argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do teorema 3.6.

**Teorema 3.9** Se  $v$  é solução do problema  $(S_v)$  e  $\mathbf{V}$  é solução do sistema (3.86), então

$$|V_i(t) - v_i(t)| \leq Ch^{r+1}, \quad t \in ]0, T], \quad i = 1, 2,$$

sendo  $C$  uma constante positiva independente de  $h$ ,  $r$  e  $i$ .

**Demonstração:** A diferença  $V_i(y, t) - v_i(y, t)$  pode ser escrita como

$$(V_i(y, t) - \check{V}_i(y, t)) + (\check{V}_i(y, t) - v_i(y, t)) = \vartheta_i(y, t) + \rho_i(y, t),$$

onde  $\check{V}_i \in \mathcal{S}_h^r$  representa a projeção de Ritz da função  $v_i$ . Então

$$|V_i(t) - v_i(t)| \leq |\vartheta_i(t)| + |\rho_i(t)|$$

e, pelo lema 3.4, obtém-se

$$|\rho_i(t)| \leq Ch^{r+1} \|v_i(t)\|_{H^{r+1}(\Omega)}. \quad (3.87)$$

Em seguida, determina-se um limite superior para  $|\vartheta_i(t)|$ . Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} U_i dy - \int_0^1 b_1 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(V_k)) b_2 \int_0^1 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\partial V_i}{\partial t} U_i dy - \int_0^1 b_1 \frac{\partial V_i}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(V_k)) b_2 \int_0^1 \frac{\partial V_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ & \quad - \int_0^1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial t} U_i dy + \int_0^1 b_1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} U_i dy - a_i(l_1(V_k)) b_2 \int_0^1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ &= \int_0^1 g_i U_i dy - \int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial t} U_i dy + \int_0^1 b_1 \frac{\partial v_i}{\partial y} U_i dy - a_i(l_1(v_k)) b_2 \int_0^1 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ & \quad + \int_0^1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial \check{V}_i}{\partial t} \right) U_i dy + \int_0^1 b_1 \left( \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) U_i dy \\ & \quad + [a_i(l_1(v_k)) - a_i(l_1(V_k))] b_2 \int_0^1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial \rho_i}{\partial t} U_i dy + \int_0^1 b_1 \frac{\partial \rho_i}{\partial y} U_i dy + [a_i(l_1(v_k)) - a_i(l_1(V_k))] b_2 \int_0^1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Fazendo  $U_i(t) = \vartheta_i(t)$  na equação anterior e tendo em atenção as equações (3.8) e (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vartheta_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |\vartheta_i(t)|^2 + a_i(l_1(V_k)) b_2 \left| \frac{\partial \vartheta_i(t)}{\partial y} \right|^2 \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \vartheta_i dy + \int_0^1 b_1 \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \vartheta_i dy + [a_i(l_1(v_k)) - a_i(l_1(V_k))] b_2 \int_0^1 \frac{\partial \check{V}_i}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Integrando por partes o segundo termo do segundo membro da equação anterior, obtém-se

$$\int_0^1 b_1 \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \vartheta_i dy = - \frac{\gamma'}{\gamma} \int_0^1 \rho_i \vartheta_i dy - \int_0^1 b_1 \rho_i \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} dy. \quad (3.89)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Substituindo (3.89) em (3.88), somando membro a membro com  $i = 1, 2$  e usando a desigualdade de Schwarz em cada um dos termos do segundo membro, do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.88), resulta

$$\begin{aligned} \sum \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vartheta_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} |\vartheta_i(t)|^2 + m_a b_2 \|\vartheta_i(t)\|^2 \right] &\leq \sum \left[ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |\vartheta_i(t)|^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} (|\rho_i(t)|^2 + |\vartheta_i(t)|^2) + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma_0} \right)^2 |\rho_i(t)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\vartheta_i(t)\|^2 \\ &\left. + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 |v_k(t) - V_k(t)|^2 \left| \frac{\partial \check{V}_i(t)}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\vartheta_i(t)\|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.90)$$

para todo o  $\varepsilon > 0$ , onde  $\sum \chi_i = \chi_1 + \chi_2$ ,  $m_a = \min \{m_{a_1}, m_{a_2}\}$ ,  $M_a = \max \{M_{a_1}, M_{a_2}\}$  e  $L_a = \max \{L_{a_1}, L_{a_2}\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sum \left[ \frac{d}{dt} |\vartheta_i(t)|^2 + 2 \left( \frac{m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \|\vartheta_i(t)\|^2 \right] &\leq \sum \left[ \left| \frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} \right|^2 + |\vartheta_i(t)|^2 \right. \\ &\left. + \left( \frac{\gamma'}{\gamma} + \varepsilon \frac{(|\alpha'| + |\gamma'|)^2}{\gamma_0^2} \right) |\rho_i(t)|^2 + \varepsilon \left( \frac{L_a c_0}{\gamma_0^2} \right)^2 \left| \frac{\partial \check{V}_i(t)}{\partial y} \right|^2 |v_k(t) - V_k(t)|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.91)$$

Observe-se que

$$\left| \frac{\partial \check{V}_i(t)}{\partial y} \right| \leq \left| \frac{\partial v_i(t)}{\partial y} \right| \quad (3.92)$$

e

$$|v_k(t) - V_k(t)|^2 \leq (|v_k(t)| + |V_k(t)|)^2 \leq 2 \left( |v_k(t)|^2 + |V_k(t)|^2 \right). \quad (3.93)$$

Substituindo (3.92) e (3.93) em (3.91) e pondo  $\varepsilon = 2\gamma_1^2/m_a$ , segue-se que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum |\vartheta_i(t)|^2 \right) \leq \sum \left| \frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} \right|^2 + C_1 \sum |\vartheta_i(t)|^2 + C_2 \sum |\rho_i(t)|^2.$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtém-se

$$\sum |\vartheta_i(t)|^2 \leq C \sum |\vartheta_i(0)|^2 + C \int_0^t \sum \left| \frac{\partial \rho_i(s)}{\partial t} \right|^2 ds + C \int_0^t \sum |\rho_i(s)|^2 ds. \quad (3.94)$$

Das hipóteses do teorema, obtém-se

$$\begin{aligned} |\vartheta_i(0)|^2 &\leq |V_i(0) - v_{i0}|^2 \leq Ch^{2(r+1)} \|v_{i0}\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2, \\ \int_0^t |\rho_i(s)|^2 ds &\leq CT h^{2(r+1)} \|v_i(t)\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

e

$$\int_0^t \left| \frac{\partial \rho_i(s)}{\partial t} \right|^2 ds \leq CT h^{2(r+1)} \left\| \frac{\partial v_i(t)}{\partial t} \right\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2,$$

para cada  $i \in \{1, 2\}$ . Então,

$$\sum |\vartheta_i(t)|^2 \leq C \left( \sum \|v_{i0}\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2 + \sum \|v_i(t)\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2 + \sum \left\| \frac{\partial v_i(t)}{\partial t} \right\|_{H^{r+1}(\Omega)}^2 \right) h^{2(r+1)},$$

que implica

$$|\vartheta_i(t)| \leq Ch^{r+1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.95)$$

Adicionando as estimativas (3.87) e (3.95), termina-se a demonstração.  $\square$

### 3.8.2 Problema totalmente discreto

Seja  $\delta > 0$  e considere-se a partição de  $]0, T]$  determinada por

$$0 = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(n_T-1)} < t^{(n_T)} = T,$$

com  $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \delta$ . A discretização no tempo é feita utilizando o método de Crank-Nicolson.

Seja  $\mathbf{V}^{(n)}(y)$  a aproximação de  $\mathbf{v}(y, t^{(n)})$ , no espaço  $(S_h^r)^2$ . Neste método, a equação diferencial do problema semidiscreto (3.86) é avaliada nos pontos  $t^{(n-1/2)} = \frac{t^{(n)} + t^{(n-1)}}{2}$ , com  $n = 1, \dots, n_T$ , e usam-se as aproximações

$$\mathbf{V}(y, t^{(n-1/2)}) \simeq \frac{\mathbf{V}^{(n)}(y) + \mathbf{V}^{(n-1)}(y)}{2} = \hat{\mathbf{V}}^{(n)}(y)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(y, t^{(n-1/2)}) \simeq \frac{\mathbf{V}^{(n)}(y) - \mathbf{V}^{(n-1)}(y)}{\delta} = \bar{\partial} \hat{\mathbf{V}}^{(n)}(y).$$

O problema totalmente discreto consiste em determinar a função vectorial  $\mathbf{V}^{(n)} = (V_1^{(n)}, V_2^{(n)})^T$ , pertencente a  $(S_h^r)^2$  para  $n \geq 1$ , que satisfaça

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \bar{\partial} \hat{V}_i^{(n)} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(n-1/2)} \frac{\partial \hat{V}_i^{(n)}}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(\hat{V}_k^{(n)})) b_2^{(n-1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(n)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ \quad = \int_0^1 g_i^{(n-1/2)} U_i dy, \\ V_i^{(0)} = \mathcal{I}_h v_{i0}, \quad i = 1, 2, \end{array} \right. \quad (3.96)$$

para todo o  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$  com componentes em  $S_h^r$ , onde  $\varphi^{(n-1/2)} = \varphi(t^{(n-1/2)})$ .

O sistema de equações algébricas (3.96) é não linear, devido à presença de  $a_i(l_1(\hat{V}_k^{(n)}))$ . A utilização de um método iterativo, como o de Newton, por exemplo, para o solucionar em

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

cada instante  $t^{(n)}$ , acarreta custos computacionais adicionais. Assim, nesta tese, opta-se por uma estratégia de linearização do coeficiente de difusão e, de acordo com [100], substitui-se  $\hat{V}_k^{(n)}$  por  $\bar{V}_k^{(n)} = \frac{3}{2}V_k^{(n-1)} - \frac{1}{2}V_k^{(n-2)}$ . Então, o problema totalmente discreto será, neste caso, calcular a função  $\mathbf{V}^{(n)}$ , para  $n \geq 2$ , pertencente a  $(S_h^r)^2$ , que satisfaça

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \bar{\partial} \hat{V}_i^{(n)} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(n-1/2)} \frac{\partial \hat{V}_i^{(n)}}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(\bar{V}_k^{(n)})) b_2^{(n-1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(n)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\ \quad = \int_0^1 g_i^{(n-1/2)} U_i dy, \\ V_i^{(0)} = \mathcal{I}_h v_{i0}, \quad i = 1, 2, \end{array} \right. \quad (3.97)$$

para todo o  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$  com componentes em  $S_h^r$ . Desta forma, tem-se um método linear de passo múltiplo que requer duas estimativas iniciais  $\mathbf{V}^{(0)}$  e  $\mathbf{V}^{(1)}$ . A estimativa  $\mathbf{V}^{(0)}$  é obtida da condição inicial. Para se calcular  $\mathbf{V}^{(1)}$  com a mesma precisão, usa-se o seguinte método estimador-corretor [100]:

$$\int_0^1 \frac{V_i^{(1,0)} - V_i^{(0)}}{\delta} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_i^{(1,0)} + V_i^{(0)}}{2} \right) U_i dy \\ + a_i(l_1(V_k^{(0)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_i^{(1,0)} + V_i^{(0)}}{2} \right) \frac{\partial U_i}{\partial y} dy = \int_0^1 g_i^{(1/2)} U_i dy, \quad i = 1, 2. \quad (3.98)$$

$$\int_0^1 \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} U_i dy \\ + a_i \left( l_1 \left( \frac{V_k^{(1,0)} + V_k^{(0)}}{2} \right) \right) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy = \int_0^1 g_i^{(1/2)} U_i dy, \quad i = 1, 2. \quad (3.99)$$

Esta secção termina com a estimativa do erro para a aproximação totalmente discreta da solução do problema  $(S_v)$ .

**Teorema 3.10** *Se  $v$  é solução do problema  $(S_v)$  e  $\mathbf{V}^{(n)}$  é solução do problema (3.97)-(3.99), então*

$$\left| V_i^{(n)}(y) - v_i(y, t^{(n)}) \right| \leq C(h^{r+1} + \delta^2), \quad t \in ]0, T], \quad n = 1, \dots, n_T, \quad i = 1, 2,$$

sendo  $C$  uma constante positiva independente de  $h$ ,  $r$  e  $\delta$ .

**Demonstração:** Em primeiro lugar determina-se a estimativa para  $n = 1$ . Sejam  $\vartheta_i^{(1,0)} = V_i^{(1,0)} - \check{V}_i^{(1)}$ ,  $\hat{\vartheta}_i^{(1,0)} = \frac{\vartheta_i^{(1,0)} + \vartheta_i^{(0)}}{2}$  e  $\bar{\partial} \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} = \frac{\vartheta_i^{(1,0)} - \vartheta_i^{(0)}}{\delta}$ . Analogamente, como na demonstração

do teorema 3.9, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \bar{\partial} \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(V_k^{(0)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &= \int_0^1 \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1,0)} U_i dy - \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial \hat{V}_i^{(1,0)}}{\partial y} U_i dy + a_i(l_1(V_k^{(0)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(1,0)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &\quad - \int_0^1 \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} U_i dy + \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} U_i dy - a_i(l_1(V_k^{(0)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &= \int_0^1 g_i^{(1/2)} U_i dy - \int_0^1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} U_i dy + \int_0^1 b_1^{(1/2)} \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} U_i dy \\
 &\quad - a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &\quad + \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right] U_i dy + \int_0^1 b_1^{(1/2)} \left( \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} \right) U_i dy \\
 &\quad + b_2^{(1/2)} \int_0^1 \left[ a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - a_i(l_1(V_k^{(0)})) \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right] \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right] U_i dy + \int_0^1 b_1^{(1/2)} \left( \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} \right) U_i dy \\
 &\quad + a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \left[ \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right] \frac{\partial U_i}{\partial y} dy \\
 &\quad + \left[ a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) - a_i(l_1(V_k^{(0)})) \right] b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} dy.
 \end{aligned}$$

Tomando  $U_i = \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{(\gamma')^{(1/2)}}{\gamma^{(1/2)}} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 + a_i(l_1(V_k^{(0)})) b_2^{(1/2)} \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} \right|^2 \\
 &= \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right] \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} dy + \int_0^1 b_1^{(1/2)} \left( \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} \right) \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} dy \\
 &\quad + a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) b_2^{(1/2)} \int_0^1 \left[ \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right] \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} dy \\
 &\quad + \left[ a_i(l_1(v_k^{(1/2)})) - a_i(l_1(V_k^{(0)})) \right] b_2^{(1/2)} \int_0^1 \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} dy.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Integrando por partes o segundo termo do segundo membro da equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 b_1^{(1/2)} \left( \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} \right) \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} dy &= -\frac{(\gamma')^{(1/2)}}{\gamma^{(1/2)}} \int_0^1 \left( \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right) \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} dy \\ &\quad - \int_0^1 b_1^{(1/2)} \left( \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right) \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Então, usando as desigualdades de Schwarz e de Poincaré, pode concluir-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} \right|^2 &\leq C \left( \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right| + \left| \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right| + \left| v_k^{(1/2)} - V_k^{(0)} \right| \right) \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} \right|, \end{aligned} \quad (3.102)$$

e, consequentemente, que

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 + \left( \frac{2m_a}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1,0)}}{\partial y} \right|^2 &\leq \varepsilon C^2 \left( \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right| + \left| \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right| + \left| v_k^{(1/2)} - V_k^{(0)} \right| \right)^2, \end{aligned}$$

para todo o  $\varepsilon > 0$ . Para  $\varepsilon > \gamma_1^2/m_a/2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 &\leq C \left( \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right|^2 + \left| \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right|^2 + \left| v_k^{(1/2)} - V_k^{(0)} \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Além disso, as estimativas seguintes são verdadeiras para cada  $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right| &\leq \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{v}_i^{(1)} \right| + \left| \bar{\partial} \hat{v}_i^{(1)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right| \leq C\delta^2 + Ch^{r+1}, \\ \left| \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right| &\leq \left| \hat{V}_i^{(1)} - \check{V}_i^{(1/2)} \right| + \left| \check{V}_i^{(1/2)} - v_i^{(1/2)} \right| \leq C\delta^2 + Ch^{r+1}, \\ \left| \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right| &\leq C\delta \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} \left| \frac{\partial^3 v_i}{\partial y \partial t^2} \right| dt \leq C\delta^2, \end{aligned}$$

e

$$\left| v_k^{(1/2)} - V_k^{(0)} \right| \leq \left| v_k^{(1/2)} - v_k^{(0)} \right| + \left| v_k^{(0)} - V_k^{(0)} \right| \leq C\delta + Ch^{r+1}.$$

Daqui, resulta que

$$\bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1,0)} \right|^2 \leq C(h^{r+1} + \delta)^2,$$

e, finalmente, obtém-se

$$\left| \vartheta_i^{(1,0)} \right|^2 \leq \left| \vartheta_i^{(0)} \right|^2 + C\delta(h^{r+1} + \delta)^2 \leq C(h^{2(r+1)} + \delta^3), \quad i = 1, 2. \quad (3.104)$$

Repetindo esse processo para a equação (3.99), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1)} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1)}}{\partial y} \right|^2 &\leq C \left( \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(1)} \right| + \left| \hat{V}_i^{(1)} - v_i^{(1/2)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(1)}}{\partial y} \right| + \left| v_k^{(1/2)} - \frac{V_k^{(1,0)} + V_k^{(0)}}{2} \right| \right) \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(1)}}{\partial y} \right|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Neste caso, usa-se a estimativa seguinte

$$\begin{aligned} \left| v_k^{(1/2)} - \frac{V_k^{(1,0)} + V_k^{(0)}}{2} \right| &\leq \left| v_k^{(1/2)} - \hat{V}_k^{(1)} \right| + \left| \hat{V}_k^{(1)} - \frac{V_k^{(1,0)} + V_k^{(0)}}{2} \right| \\ &\leq \left| v_k^{(1/2)} - \hat{V}_k^{(1)} \right| + \frac{1}{2} \left| \vartheta_k^{(1,0)} \right| + \frac{1}{2} \left| \vartheta_k^{(0)} \right| \\ &\leq C(h^{r+1} + \delta^2) + C(h^{r+1} + \delta^{3/2}) + Ch^{r+1} \\ &\leq C(h^{r+1} + \delta^{3/2}). \end{aligned}$$

Então, usando a desigualdade (3.12) em (3.105), obtém-se

$$\bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(1)} \right|^2 \leq C(h^{2(r+1)} + \delta^3),$$

o que implica que

$$\left| \vartheta_i^{(1)} \right|^2 \leq \left| \vartheta_i^{(0)} \right|^2 + C\delta(h^{2(r+1)} + \delta^3) \leq C(h^{2(r+1)} + \delta^4), \quad i = 1, 2. \quad (3.106)$$

Para concluir a demonstração, obtém-se o resultado para  $n \geq 2$ . Procedendo literalmente como na estimativa para  $n = 1$ , conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial} \left| \hat{\vartheta}_i^{(n)} \right|^2 + \frac{m_a}{\gamma_1^2} \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(n)}}{\partial y} \right|^2 &\leq C \left( \left| \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^{(n-1/2)} - \bar{\partial} \hat{V}_i^{(n)} \right| + \left| \hat{V}_i^{(n)} - v_i^{(n-1/2)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_i^{(n-1/2)}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{V}_i^{(n)}}{\partial y} \right| + \left| v_k^{(n-1/2)} - \bar{V}_k^{(n)} \right| \right) \left| \frac{\partial \hat{\vartheta}_i^{(n)}}{\partial y} \right|. \end{aligned} \quad (3.107)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Agora, usa-se a estimativa

$$\begin{aligned} \left| v_k^{(n-1/2)} - \bar{V}_k^{(n)} \right| &\leq \left| v_k^{(n-1/2)} - \bar{v}_k^{(n)} \right| + \left| \bar{v}_k^{(n)} - \bar{V}_k^{(n)} \right| \\ &\leq \left| v_k^{(n-1/2)} - \bar{v}_k^{(n)} \right| + \left| \bar{\rho}_k^{(n)} \right| + \left| \bar{\vartheta}_k^{(n)} \right| \\ &\leq C\delta^2 + Ch^{r+1} + C \left( \left| \vartheta_k^{(n-1)} \right| + \left| \vartheta_k^{(n-2)} \right| \right), \end{aligned}$$

para se provar que

$$\bar{\vartheta} \left| \vartheta_i^{(n)} \right|^2 \leq C \left| \vartheta_k^{(n-1)} \right|^2 + C \left| \vartheta_k^{(n-2)} \right|^2 + C (h^{r+1} + \delta^2)^2, \quad i = 1, 2.$$

Somando membro a membro, com  $i = 1, 2$ , segue-se que

$$\bar{\vartheta} \sum \left| \vartheta_i^{(n)} \right|^2 \leq C \sum \left| \vartheta_i^{(n-1)} \right|^2 + C \sum \left| \vartheta_i^{(n-2)} \right|^2 + C (h^{r+1} + \delta^2)^2.$$

Iterando sucessivamente, chega-se a

$$\begin{aligned} \sum \left| \vartheta_i^{(n)} \right|^2 &\leq (1 + C\delta) \sum \left| \vartheta_i^{(n-1)} \right|^2 + C\delta \sum \left| \vartheta_i^{(n-2)} \right|^2 + C\delta (h^{r+1} + \delta^2)^2 \\ &\leq C \sum \left| \vartheta_i^{(1)} \right|^2 + C \sum \left| \vartheta_i^{(0)} \right|^2 + C\delta (h^{r+1} + \delta^2)^2, \end{aligned}$$

e tendo em conta as estimativas para  $\left| \vartheta_i^{(0)} \right|$ ,  $\left| \vartheta_i^{(1)} \right|$  e  $\left| \rho_i^{(n)} \right|$ , termina-se a demonstração.  $\square$

O método exposto na presente secção foi implementado em ambiente Matlab e aplicado em [3] à resolução de um sistema acoplado de EDPs parabólicas com solução exacta. Fez-se, ainda, um estudo das taxas de convergência, simulando o problema referido para diferentes combinações de  $r$ ,  $h$  e  $\delta$  e, como esperado, os resultados obtidos estão de acordo com a teoria. Por fim, comparou-se a solução numérica do problema totalmente discreto com a solução aproximada obtida com o MEFM. Em ambas as simulações consideraram-se aproximações locais de grau cinco e uma malha espacial inicial, uniforme, com quatro elementos finitos. É relevante referir ainda que os resultados obtidos com o MEFM têm uma precisão semelhante à solução numérica do problema discretizado utilizando o método de Galerkin no espaço e um método linearizado de Crank-Nicolson no tempo.

### 3.9 Estudo numérico

O objetivo desta secção é determinar a solução aproximada dos problemas com fronteira móvel,  $(P_u)$  e  $(S_u)$ , usando o MFEM com aproximações locais de grau arbitrário. Este método

pode ser aplicado para simular os modelos referidos no domínio cilíndrico, assim como o fizeram alguns autores. Além disso, o algoritmo numérico permite resolver o problema imediatamente no domínio não cilíndrico. A manifestação das propriedades da solução como o decaimento exponencial, a velocidade finita de propagação ou a ocorrência de “blow-up” está dependente dos dados iniciais. Assim, estudar-se-ão os problemas referidos para diferentes funções  $a_i, f_i, u_{i0}, \alpha$  e  $\beta$ , para ilustrar o decaimento exponencial da energia do sistema e a regularidade da solução, em particular na vizinhança da fronteira móvel.

Os resultados numéricos aqui apresentados são obtidos no ambiente Matlab usando um computador com um processador Intel Core i7 – 3960X a 3.30 GHz.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de dilatações  $\gamma$  que satisfazem as hipóteses (H1) – (H2) sobre o domínio  $Q_t \subset \mathbb{R}^2$ .

Assume-se que  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ ,  $-\alpha'(t) > 0$  e  $\beta'(t) > 0$ . Assim, considerando uma variação limitada da posição de ambas as fronteiras móveis, deve ter-se

$$0 < -\alpha'(t) \leq K, \quad 0 < \beta'(t) \leq K, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.108)$$

Seja

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha(0) - \alpha_1 \Psi_i(t), & 0 < \alpha_1, \\ \beta(t) = \beta(0) + \beta_1 \Psi_j(t), & 0 < \beta_1, \end{cases} \quad (3.109)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  podem ser iguais ou não.

Exemplos de funções  $\Psi$ .

1. Integrando cada uma das desigualdades (3.108) de 0 até  $t$ , obtém-se  $Q_t$  definido por (3.109) com

$$\Psi_1(t) = t, \quad \alpha_1 \leq K, \quad \beta_1 \leq K.$$

Note-se que, neste caso, se têm fronteiras lineares.

2. A fronteira de  $Q_t$  dada por

$$\Psi_2(t) = (t + K_0)^{1/n} - (K_0)^{1/n},$$

para  $n = 2, 3, \dots$  e  $K_0 = \left(\frac{\alpha_1}{nK}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ , ou  $K_0 = \left(\frac{\beta_1}{nK}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ , não é linear.

3. Este exemplo mostra que, quando  $t \rightarrow \infty$ , o domínio  $Q_t$  é assintótico a um cilindro

$$\Psi_3(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{K_0}} - \frac{1}{\sqrt[n]{t + K_0}},$$

com  $\alpha_1 = \beta_1 = 1$  e  $1/K_0 = (nK)^{n/(3n-1)}$ .

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

Exemplo 1: Seja  $u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi\eta) \cos(\pi t)$ , onde  $\eta = \frac{(t+1)x+t}{3t+1}$ , a solução exata do problema  $(P_u)$  para uma escolha apropriada de  $f(x, t)$  com  $a$  uma função constante. O objetivo é comparar a solução exata com a solução numérica. Considere-se que as fronteiras móveis são definidas por

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1},$$

e a condição inicial é  $u_0(x) = u(x, 0)$ . Estes dados satisfazem as hipóteses do teorema 3.1.

Usa-se  $a = 1.71$ , quatro elementos finitos e aproximações polinomiais locais de grau cinco. A figura 3.3 mostra a solução numérica, no domínio não cilíndrico  $Q_t$  para  $t \leq 1$ .

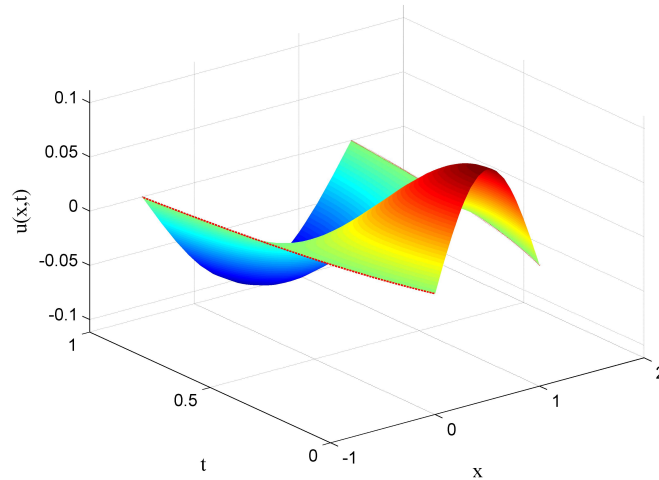


Figura 3.3: Solução aproximada em  $\Omega_t \times [0, 1]$

Tempo ( $t$ )	$ E _{L^2(\Omega_t)}$
0.0	3.6e-10
0.2	7.0e-09
0.4	2.1e-08
0.6	2.5e-08
0.8	1.7e-08
1.0	1.4e-08

Tabela 3.1: Erros obtidos em vários instantes

O erro da solução numérica  $U(x, t)$ , na norma  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ , é definido por

$$\begin{aligned} E_{L^\infty} &= \max_{0 \leq t_k \leq T} \left( |u(x, t_k) - U(x, t_k)|_{L^2(\Omega_{t_k})} \right) \\ &= \max_{0 \leq t_k \leq T} \left( \int_{\Omega_{t_k}} |u(\xi^j, t_k) - U(\xi^j, t_k)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde  $U(\xi^j, t_k)$  representa a solução aproximada no  $j$ -ésimo ponto de interpolação global de

$\Omega_{t_k}$  e  $t_k \in \{0, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Na tabela 3.1, apresentam-se os erros, entre a solução aproximada obtida com o MEFM e a solução exata, calculados em diferentes instantes. Estes resultados demonstram que o MEFM pode produzir aproximações com uma boa precisão, utilizando um número reduzido de nós e de tempo de cálculo.

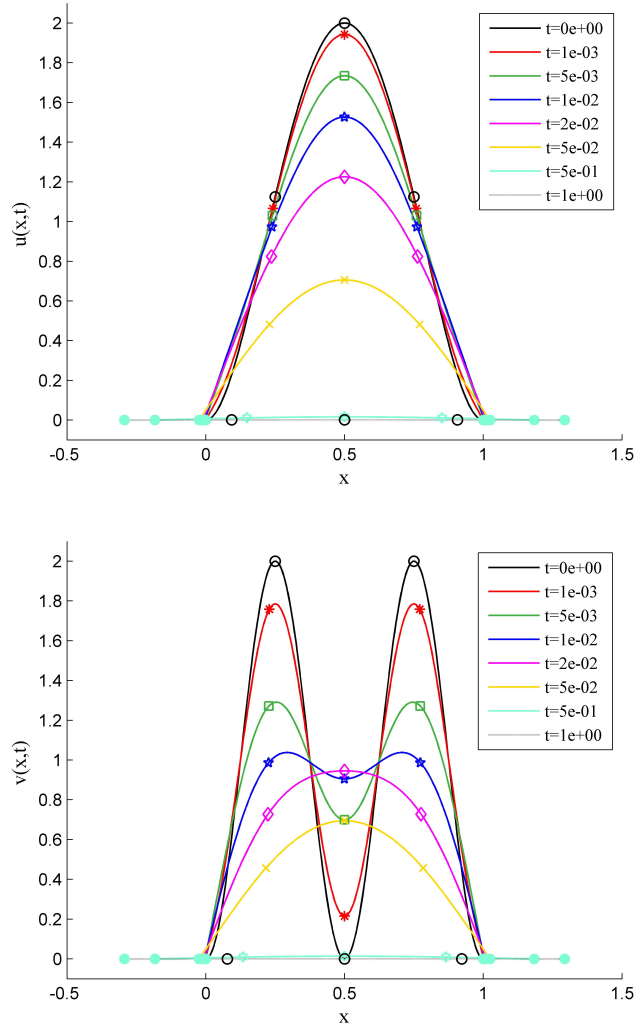


Figura 3.4: Perfis da solução em diferentes instantes para  $u$  (em cima) e para  $v$  (em baixo)

Exemplo 2: Seja  $Q_t$  definido por

$$\alpha(t) = \alpha(0) - \Psi_3(t), \quad \beta(t) = \beta(0) + \Psi_3(t), \quad t \geq 0,$$

com  $n = 2$  e  $K_0 = 1$ . De modo a ilustrar o comportamento assintótico das soluções de acordo com as hipóteses  $(H3s) - (H5s)$ , considerou-se o sistema  $(S_u)$ , com  $\Omega_0 = ]0, 1[$ ,

$$a_1(s) = 1 + \sin(2s), \quad a_2(s) = 1 + \frac{1}{1 + s^2},$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

e

$$f_1(x, t) = \frac{0.1e^{-x}}{(1+t)^{10}}, \quad f_2(x, t) = \frac{0.01x}{(1+t)^2}.$$

A hipótese ( $H5s$ ) é satisfeita com  $m_a = 0$ , com  $M_a = \max\{M_{a_1}, M_{a_2}\} = 2$  e com a seguinte constante de Lipschitz:  $L_a \geq \max\{L_{a_1}, L_{a_2}\} = 2$ . Além disso, as fontes externas  $f_1$  e  $f_2$  satisfazem ( $H4s$ ). Realizou-se a simulação numérica usando as seguintes condições iniciais:

$$u_0(x) = 32(\alpha(0) - x)^2(x - \beta(0))^2 \quad \text{e} \quad v_0(x) = 1 - \cos(4\pi x),$$

que satisfazem ( $H3s$ ). Considerando que a solução  $(u, v)$  descreve as densidades de duas populações que interagem num meio físico que evolui com o tempo, então inicialmente, a população da primeira espécie está concentrada no centro de  $\Omega_0$  e os indivíduos da segunda espécie constituem dois grupos, cada um em metade do domínio espacial.

A solução numérica foi obtida em vários instantes desde  $t = 0$  até  $t = 1$ , com aproximações polinomiais locais de grau cinco em cada um dos quatro elementos finitos da malha associada a cada uma das variáveis dependentes. As posições iniciais dos nós constituem malhas uniformes em  $\Omega_0$ .

Na figura 3.4, observa-se a extinção de ambas as espécies, o que é consistente com o decaimento exponencial da solução. No entanto, o comportamento das soluções até à extinção é diferente: vê-se na figura 3.4 (em cima), uma elevada taxa de decaimento da densidade de população da primeira espécie (a morte dos indivíduos), sem haver uma difusão significativa. Mas a figura 3.4 (em baixo) mostra a mobilidade para a região central, de um grande número de indivíduos da segunda espécie, nos instantes iniciais.

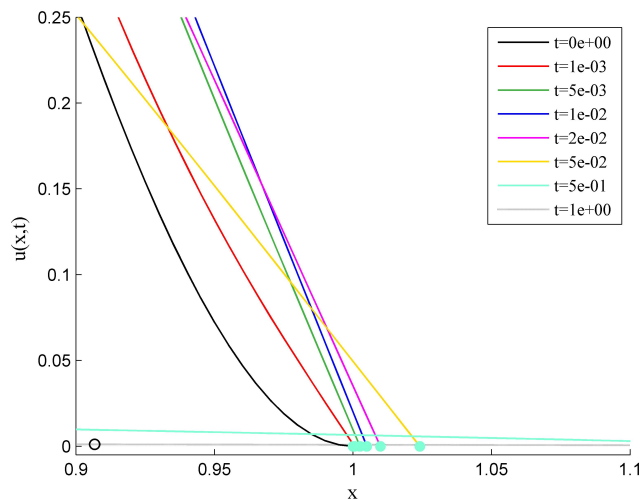


Figura 3.5: Ampliação da figura 3.4 na região centrada em  $(\beta(t), 0)$ , para  $u$

Para se visualizar melhor a regularidade da solução na vizinhança da fronteira móvel,

na figura 3.5, apresenta-se uma ampliação dos perfis da função  $u$ , centrada em  $(\beta(t), 0)$ . Na figura 3.6, traça-se o gráfico de  $X_{2,j}(t)$  versus  $v(X_{2,j}(t), t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$ . Observam-se as trajetórias descendentes dos nós interiores de separação e verifica-se que a evolução das malhas adaptativas se processa com suavidade, apesar da situação inicial, em que a solução apresentava variações bruscas.

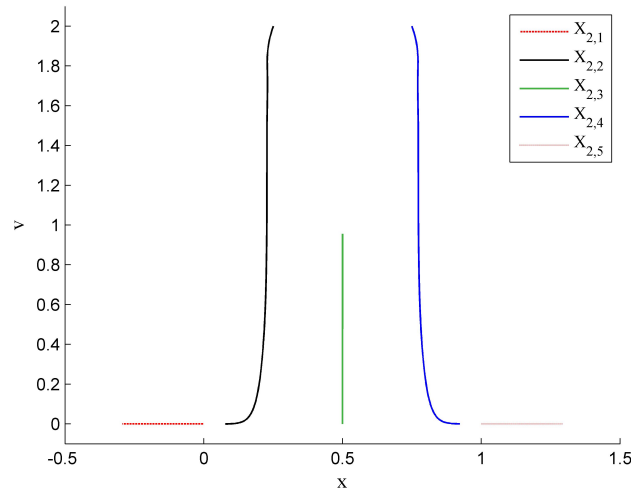


Figura 3.6: Trajetórias dos nós de separação da malha associada a  $v$

Como se usam aproximações locais de grau elevado, o MEFM não tem que recolocar os nós rapidamente. Obtiveram-se trajetórias suaves, semelhantes, dos nós da malha associada a  $u$ .

A solução numérica aproximada é apresentada no gráfico 3-D da figura 3.7. Observa-se a diminuição da densidade de ambas as populações com o aumento do tempo. Finalmente, na figura 3.8, representam-se histórias de valores de  $u$  (à esquerda) e de  $v$  (à direita) em dois pontos fixos do domínio espacial,  $x_1 = 0.25$  e  $x_2 = 0.5$ . Observa-se uma alta taxa de decaimento dos valores de  $u(x_k, t)$  e de  $v(x_k, t)$ ,  $k = 1, 2$ , com o aumento de  $t$ , conduzindo a um decaimento exponencial da energia das soluções.

Exemplo 3: Neste terceiro exemplo, usa-se uma dilatação  $\gamma$  diferente, definida por  $\Psi_2$ , com  $n = 3$ ,  $K = 1/2$  e  $\alpha_1 = 1$ , isto é

$$\alpha(t) = \sqrt{2/3} - \sqrt[3]{t + (2/3)^{3/2}}, \quad \beta(t) = 1 - \alpha(t), \quad t \geq 0.$$

Quer ilustrar-se que o decaimento exponencial da solução depende de uma taxa adequada de decaimento das funções  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Assim, considera-se

$$a_1(s) = 2 - \frac{1}{1 + s^2}, \quad a_2(s) = e^{-s^2},$$

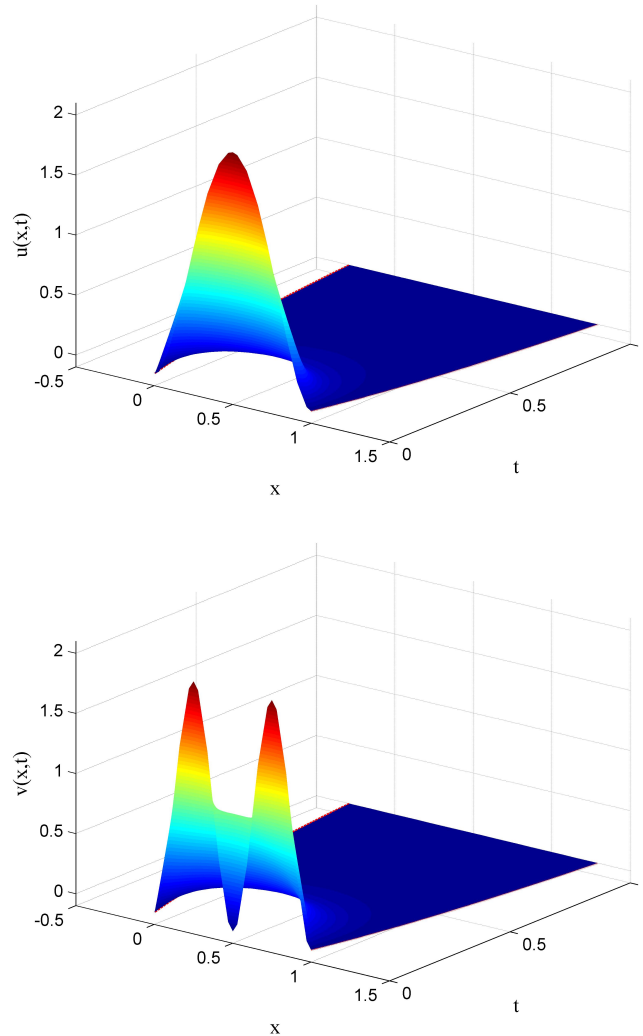


Figura 3.7: Evolução da solução aproximada  $u$  (em cima) e  $v$  (em baixo) no domínio do espaço-tempo

e as forças de reação

$$f_1(x, t) = \frac{0.1x}{(1+t)^4} \quad \text{e} \quad f_2(x, t) = \frac{e^{-x^2}}{(1+t)^6}. \quad (3.110)$$

As condições iniciais são dadas por  $u(x, 0) = \mathcal{S}_3(x)$  e  $v(x, 0) = \bar{\mathcal{S}}_3(x)$ , onde  $\mathcal{S}_3, \bar{\mathcal{S}}_3$  representam as funções splines cúbicas naturais, que interpolam os pontos de coordenadas

$$\{(0, 0), (0.2, 1), (0.5, 0.5), (1, 0)\} \quad \text{e} \quad \{(0, 0), (0.6, 0.65), (0.8, 1), (1, 0)\},$$

respetivamente. Estes dados satisfazem as hipóteses do teorema 3.7.

As simulações numéricas são realizadas utilizando malhas iniciais independentes, com cinco pontos. De acordo com as condições iniciais, concentram-se os nós de separação interiores na metade esquerda do domínio espacial, para  $u$ , e perto da extremidade direita de  $\Omega_0$ , para  $v$ . As partições iniciais de  $\Omega_0$  são determinados pelos pontos 0, 0.1, 0.25, 0.5 e 1, para a malha associada a  $u$  e por 0, 0.5, 0.75, 0.9 e 1, para a malha associada a  $v$ . A solução aproximada

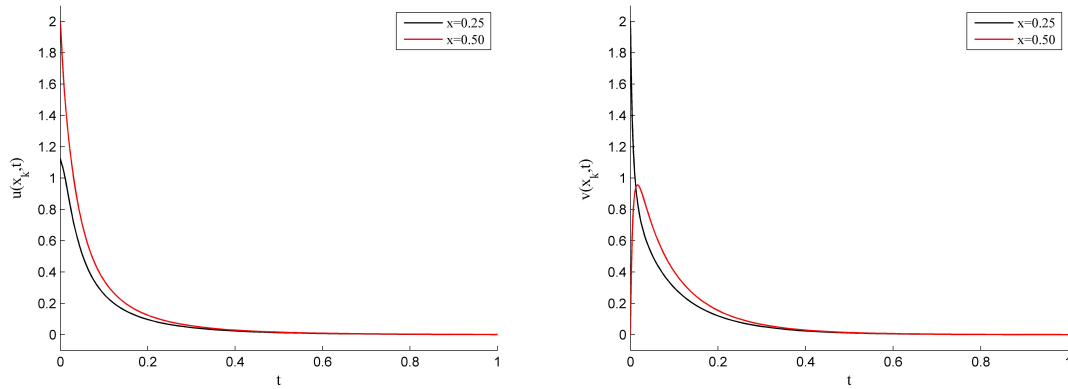


Figura 3.8: Comportamento assintótico das soluções  $u$  (à esquerda) e  $v$  (à direita)

foi obtida com aproximações de grau quatro em cada elemento finito de ambas as malhas. O intervalo de tempo de integração considerado foi  $[0, 1]$ .

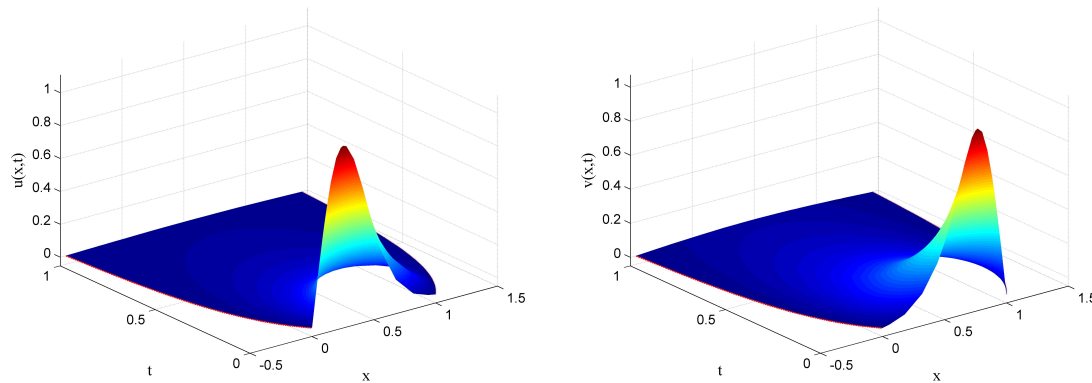


Figura 3.9: Solução aproximada  $u$  (à esquerda) e  $v$  (à direita) em  $\Omega_t \times ]0, 1[$

A distribuição das duas densidades populacionais, no domínio não cilíndrico  $Q_t$  para  $t \leq 1$ , está apresentada na figura 3.9. Como esperado, observa-se que a extinção da população de ambas as espécies ocorre num tempo finito. Na figura 3.10, veem-se os resultados obtidos para  $u(x, t_k)$  (em cima) e  $v(x, t_k)$  (em baixo), calculados em vários instantes  $t_k$ . Observa-se o mesmo comportamento das duas espécies: uma redução no tempo de ambas as populações, em conjunto com uma redistribuição mais uniforme no meio ambiente de cada espécie, devido à mobilidade de um grande número de indivíduos.

O MEFM reposiciona automaticamente os nós, de modo a concentrá-los nas regiões em que a solução tem perfis abruptos. Como se utilizam aproximações locais de grau cinco, o método é capaz de mover os nós com suavidade. Isto pode ser visto na figura 3.11, onde se apresenta o movimento das duas fronteiras e dos nós de separação interiores associados a  $u$ . Obteve-se um movimento suave regular análogo, para a malha associada a  $v$ .

Neste exemplo, também se estuda a taxa de decaimento da energia das soluções do

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

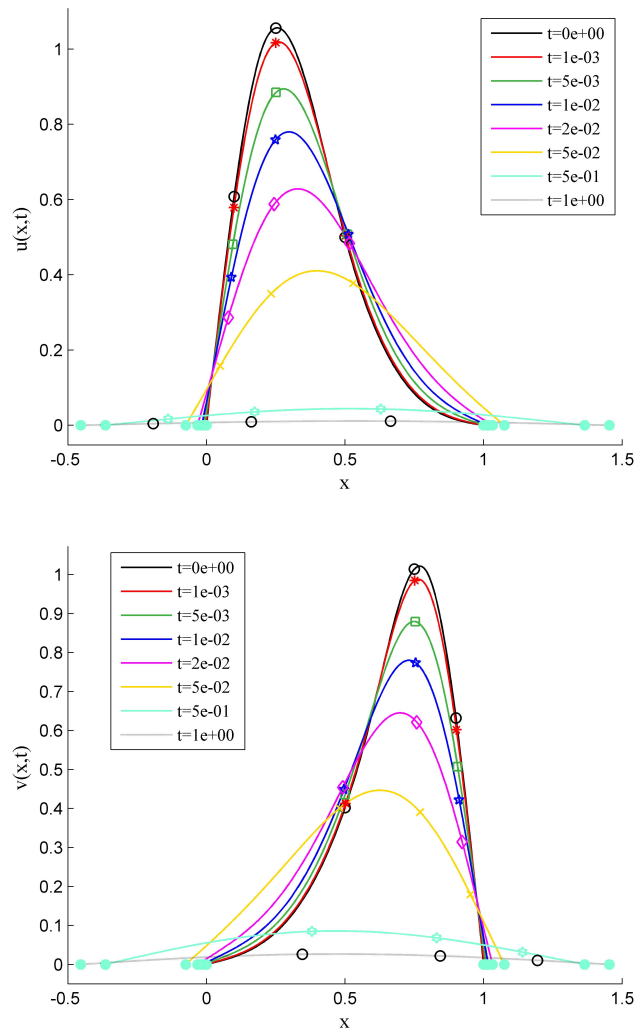


Figura 3.10: Evolução da densidade populacional em diferentes instantes,  $u$  (em cima) e  $v$  (em baixo)

sistema. Assim, na figura 3.12, traçou-se o gráfico da função  $v(x, \cdot)$  versus  $t$  para duas forças de reação diferentes associadas à segunda EDP:  $f_2$  definida em (3.110) e uma função diferente  $\bar{f}_2(x, t) = te^{-x^2}$ , em dois valores fixos da variável espacial  $x$ . Observa-se uma elevada taxa de decaimento, no tempo, dos valores historiados para  $f_2$  (veja-se a figura 3.12 (à esquerda)). Pelo contrário, na figura 3.12 (à direita), vê-se que a função  $\bar{f}_2$  não tem um decaimento adequado que conduza a um comportamento assintótico da solução.

De modo a verificar o comportamento assintótico da solução do sistema, para  $f_2$ , na figura 3.13, (à esquerda) traçou-se o gráfico da função energia global. Para se mostrar que a energia decai exponencialmente, na figura 3.13 (à direita), usou-se uma escala logarítmica no segundo eixo coordenado do sistema de referência, para se efectuar uma comparação dos valores de  $E$  com o majorante obtido no teorema 3.8, traçado a cor vermelha. Observou-se o decaimento assintótico da energia do sistema (à esquerda), o que está de acordo com os

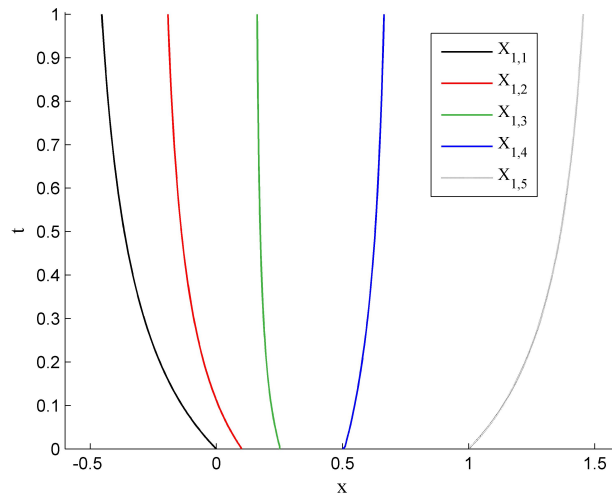


Figura 3.11: Movimento da malha, associada a  $u$

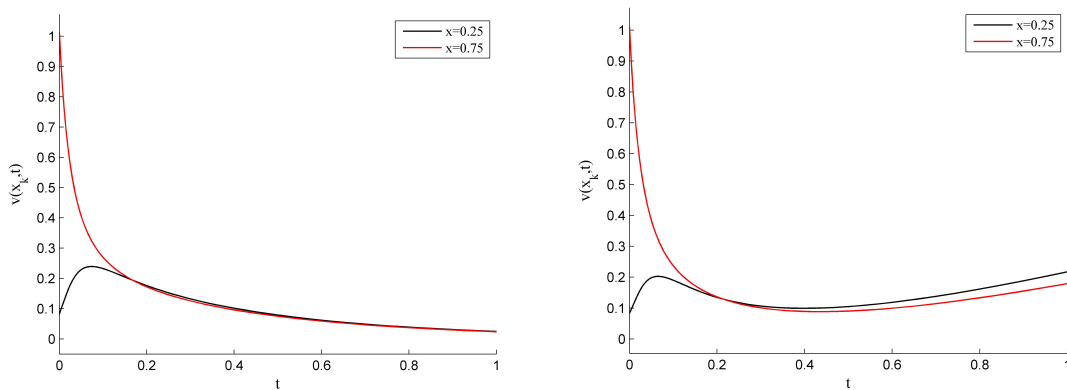


Figura 3.12: Histórias de  $v(x, t)$  em dois valores fixos de  $x$  para as funções  $f_2$  (à esquerda) e  $\bar{f}_2$  (à direita)

resultados teóricos, verificando-se a desigualdade

$$\log(E(t)) \leq \log(E(0)) - \frac{\delta}{\ln(10)} t, \quad t \leq 0,$$

sendo  $\delta$  como no teorema 3.8 (à direita).

Finalmente, na figura 3.14, representam-se as funções  $a_1$  e  $a_2$ , que definem os coeficientes não locais de difusão. A figura mostra taxas de difusão não lineares relativamente à massa total de cada população.

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

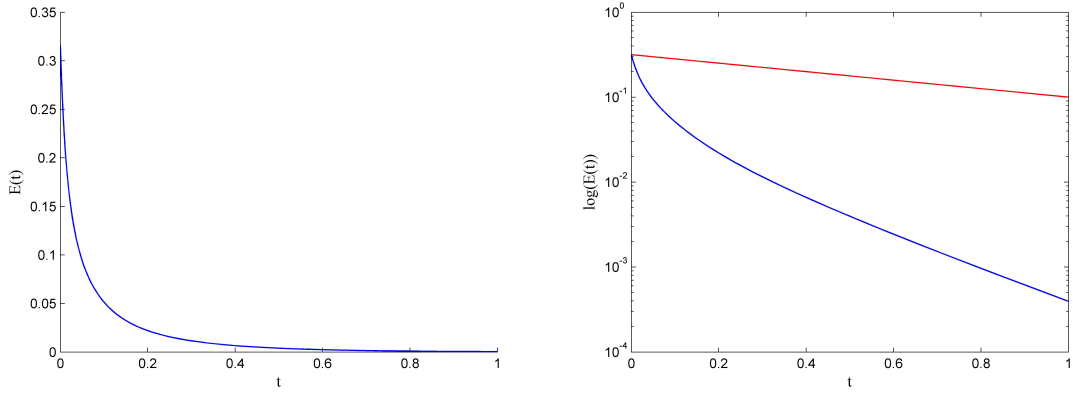


Figura 3.13: Energia do sistema com  $f_2$  (à esquerda) e comparação com o majorante estabelecido no teorema 3.8 (à direita)

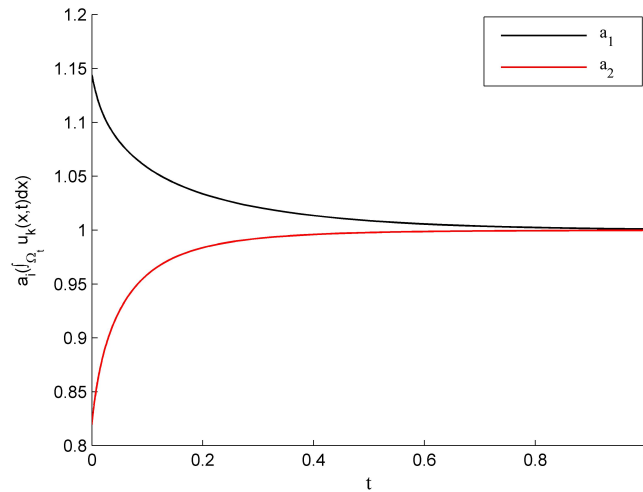


Figura 3.14: Evolução, no tempo, dos termos de difusão  $a_1$  e  $a_2$

Exemplo 4: Considere-se agora o problema  $(S_u)$  com coeficientes de difusão mais gerais (veja-se [3]), constituído por duas equações parabólicas não lineares definidas em  $Q_t$ ,

$$\begin{cases} u_t - a_1 \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x,t) dx, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} v(x,t) dx \right) u_{xx} = f_1(x,t) \\ v_t - a_2 \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x,t) dx, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} v(x,t) dx \right) v_{xx} = f_2(x,t) \end{cases} \quad (3.111)$$

Para se obter a solução aproximada deste sistema acoplado, com condições de fronteira de Dirichlet nulas, usa-se

$$a_1(s_1, s_2) = 2 - \frac{1}{1+s_1^2} + \frac{1}{1+s_2^2}, \quad a_2(s_1, s_2) = 3 + \frac{2}{1+s_1^2} - \frac{1}{1+s_2^2}$$

e

$$\alpha(t) = -\frac{t}{1+t}, \quad \beta(t) = 1 + \frac{t}{1+2t}, \quad t \geq 0.$$

Neste exemplo, as funções  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$ ,  $u_0(x, t)$  e  $v_0(x, t)$  são escolhidas de modo a que

$$u(x, t) = \frac{1}{t+1} \left( \frac{611}{70}\eta - \frac{10513}{210}\eta^2 + \frac{646}{7}\eta^3 - \frac{1070}{21}\eta^4 \right) \quad (3.112)$$

e

$$v(x, t) = e^{-t} \left( \frac{2047}{140}\eta - \frac{27701}{420}\eta^2 + \frac{691}{7}\eta^3 - \frac{995}{21}\eta^4 \right), \quad (3.113)$$

com  $\eta = \frac{(2t+1)(x+tx+t)}{5t^2+5t+1}$  sejam as soluções exatas do sistema (3.111).

As simulações numéricas são realizadas utilizando malhas iniciais independentes, com cinco pontos uniformemente distribuídos no domínio espacial  $\Omega_0 = [0, 1]$ . A solução aproximada foi obtida com aproximações de grau quatro em cada elemento finito de ambas as malhas.

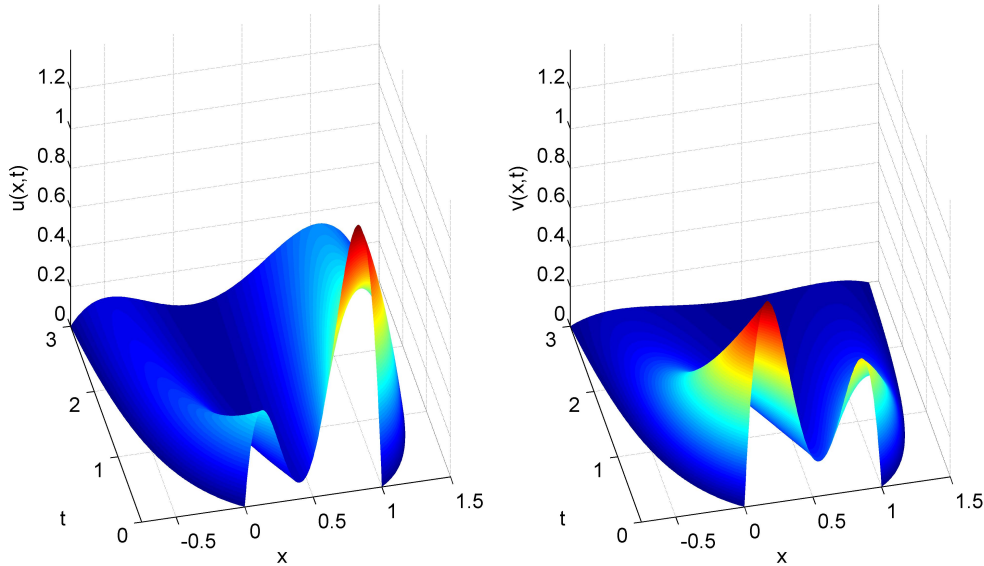


Figura 3.15: Soluções aproximadas em  $\Omega_t \times ]0, 3[$

A evolução das duas densidades populacionais  $(u, v)$ , no domínio não cilíndrico  $Q_t$  para  $t \leq 3$ , está apresentada na figura 3.15. Observa-se que, inicialmente, cada população concentra-se principalmente em duas regiões e, com o decorrer do tempo, há uma diminuição acentuada da população da segunda espécie e uma redistribuição mais uniforme no meio ambiente dos indivíduos da primeira espécie.

Comparou-se a solução aproximada obtida com o MEFM com a solução numérica do problema discretizado utilizando o método de Galerkin no espaço e um método linearizado de Crank-Nicolson no tempo, tal como referido no último parágrafo da subsecção 3.8.2. Na tabela 3.2 apresentam-se os erros nas soluções aproximadas,  $U(x, t)$  e  $V(x, t)$  obtidas com cada

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$t_k$	$\max_{j=1,\dots,\tilde{N}} \{ u(\xi^j, t_k) - U(\xi^j, t_k) \}$		$\max_{j=1,\dots,\tilde{N}} \{ v(\xi^j, t_k) - V(\xi^j, t_k) \}$	
	MFEM	Galerkin Crank-Nicolson	MFEM	Galerkin Crank-Nicolson
0.001	7.3e-08	2.7e-10	4.2e-08	6.4e-10
0.005	8.9e-08	1.0e-09	5.2e-08	1.4e-09
0.01	2.8e-08	1.5e-09	1.6e-08	1.8e-09
0.02	1.3e-08	1.8e-09	7.7e-09	2.0e-09
0.05	7.3e-08	2.1e-09	4.2e-08	2.2e-09
0.5	1.9e-08	1.1e-09	1.1e-08	1.1e-09
1	2.1e-08	5.1e-10	9.3e-09	5.6e-10

Tabela 3.2: Comparação dos erros obtidos em vários instantes

uma das duas técnicas numéricas. Ambas as simulações foram feitas com aproximações de grau cinco e quatro elementos finitos. Fixaram-se em  $10^{-10}$  as tolerâncias do integrador, na simulação realizada com o MEFM e usou-se o passo temporal  $\delta = 10^{-4}$  na outra simulação tabelada.

Como se conhece a solução exata deste problema, então é possível confirmar numericamente os resultados teóricos demonstrados na secção 3.8. De modo a analisar as taxas de convergência das soluções aproximadas obtidas com o método de Galerkin no espaço e um método linearizado de Crank-Nicolson no tempo, este problema foi simulado com diferentes combinações de  $r$  (grau da aproximação local),  $h$  (comprimento máximo de um elemento finito) e  $\delta$  (passo temporal) e os resultados de erro estão representados nas figuras 3.16 e 3.17.

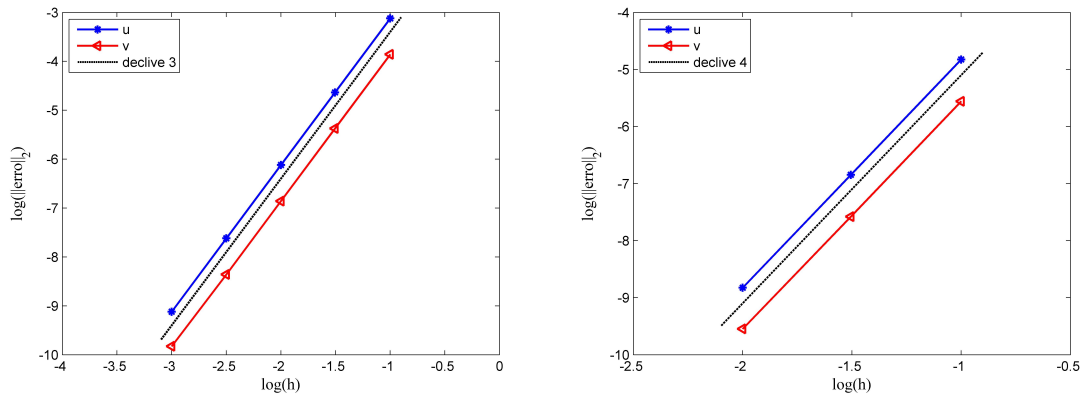


Figura 3.16: Estudo da convergência em função de  $h$  com aproximações de grau 2 (à esquerda) e de grau 3 (à direita)

O erro foi calculado em  $t = T$  usando a norma  $L^2(\Omega_t)$  na variável espacial. Na figura 3.16 representa-se o gráfico do logaritmo do erro versus o logaritmo de  $h$ , para as simulações realizadas usando  $\delta = 10^{-4}$  e aproximações locais de grau dois (à esquerda) e de grau três (à direita). A figura 3.17 mostra o gráfico do logaritmo do erro versus o logaritmo de  $\delta$ . Nestas simulações usaram-se aproximações seccionalmente polinomiais de grau dois e  $h = 10^{-3}$ . Como esperado, observa-se que os resultados numéricos obtidos estão de acordo com as ordens de convergência para  $h$  e para  $\delta$ , como foi demonstrado no teorema 3.10.

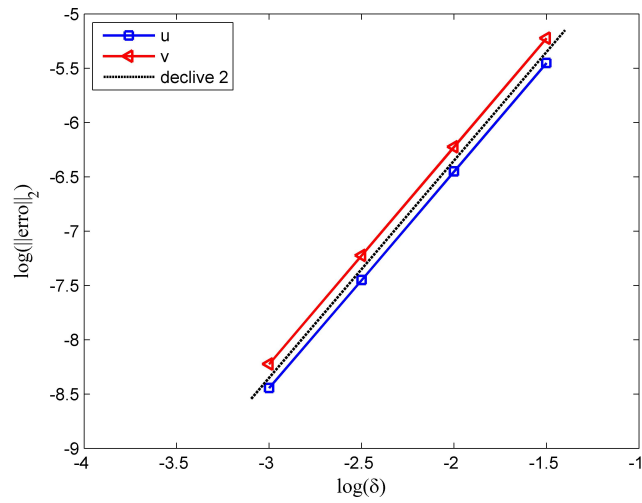


Figura 3.17: Estudo da convergência em função de  $\delta$  com aproximações de grau 2

## Capítulo 4

### Aplicações do MEFM a sistemas com fronteiras móveis em 1-D e 2-D

#### 4.1 Introdução

Como foi referido anteriormente, um dos objetivos deste trabalho é a simulação numérica de sistemas físicos com fronteira móvel, descritos por um sistema de EDPs parabólicas do tipo (1.1). A solução numérica de um sistema de EDPs, através do MEFM, é obtida em duas etapas distintas: a discretização espacial por intermédio de elementos finitos e consequente aproximação das derivadas espaciais e a integração no tempo do sistema de EDOs resultante. Depois de, no Capítulo 2, se ter desenvolvido o algoritmo numérico baseado na formulação do MEFM com funções de base seccionalmente polinomiais de grau arbitrário e malhas adaptativas associadas a cada uma das variáveis dependentes e de se ter deduzido o sistema de EDOs na variável tempo que resulta da discretização espacial através de elementos finitos vai-se, no presente capítulo, centrar a atenção na segunda etapa do processo que conduz à discretização total do sistema de EDPs e que consiste apenas na utilização de um integrador de EDOs adequado.

O sistema de EDOs que permite implementar o MEFM, definido pelas equações do tipo 1. a 3., apresentadas no final do Capítulo 2, é implícito e constitui um problema de valor inicial. Para o resolver, utiliza-se um integrador adequado para sistemas *stiff* de EDOs. O Matlab é um poderoso ambiente de trabalho usado para implementar e analisar algoritmos numéricos e é cada vez mais utilizado na simulação de modelos matemáticos em diversas áreas da investigação científica [2, 90, 93]. Assim, a fase de integração do sistema semi-discreto de EDOs, é efetuada recorrendo ao integrador `ode15s` do Matlab [96], que é apropriado para resolver sistemas *stiff* de EDOs. Foi desenvolvido um conjunto de funções que implementam o algoritmo numérico do MEFM para simular sistemas físicos definidos num domínio de  $\mathbb{R}^{d+1}$  ( $d = 1, 2$ ), com fronteira móvel, incluindo sistemas com mudança de fases. O código foi escrito em linguagem Matlab permitindo, a um utilizador com conhecimentos básicos deste *software*, a determinação da solução aproximada do problema em instantes pré-estabelecidos, a sua visualização e a validação dos resultados.

Uma das tarefas principais a concretizar, no presente capítulo, é complementar o integrador `ode15s` preparando, em particular, as funções exigidas por este por forma a constituir-se,

no conjunto, um “integrador” de um sistema de EDPs evolutivas através do MEFM. Assim, na secção 4.2, descreve-se a estrutura da aplicação computacional em Matlab, que implementa o algoritmo numérico, indicando como se deve utilizar o “integrador” de um sistema de EDPs dependentes do tempo, em domínios espaciais com fronteira móvel. O objetivo principal desta implementação do MEFM é que possa ser utilizada, de modo simples, por um utilizador que não domine as técnicas de programação, para resolver de modo eficiente uma grande variedade de problemas evolutivos com fronteira fixa e/ou móvel.

Na terceira secção, o código computacional desenvolvido é aplicado à resolução de um conjunto de problemas da ciência e da engenharia, de modo a ilustrar a eficácia e desempenho do MEFM. O primeiro é um problema em 1-D e os três últimos estão definidos num domínio espacial 2-D. Realizaram-se todas as simulações em ambiente Matlab, num computador com um processador Intel Core i7-3960X a 3.30 GHz.

Por último, na quarta secção, serão indicadas algumas conclusões sobre a forma como se pode utilizar o método, fruto da experiência obtida na resolução dos problemas apresentados.

## 4.2 Desenvolvimento da aplicação computacional

Nesta secção, descrevem-se as características fundamentais da codificação Matlab do algoritmo que permite resolver, numericamente, problemas de evolução com fronteira móvel. O sistema de EDOs, na variável tempo, resultante da discretização da variável espacial por aplicação do MEFM, depois de introduzidas as equações que definem o movimento dos nós da fronteira móvel e incorporadas as condições de fronteira, é reescrito na forma matricial,

$$M(t, Y_v) \dot{Y}_v = f(t, Y_v), \quad Y_v(0) = Y_{v0}, \quad (4.1)$$

onde o vetor  $Y_v = Y_v(t)$  contém todas as amplitudes nodais que não são fixadas por condições de fronteira de Dirichlet e as coordenadas dos vértices da malha que variam continuamente no tempo. A solução deste problema de valor inicial, que aproxima a solução do problema inicial que se pretende resolver, pode ser obtida por um integrador apropriado de ODEs.

Neste trabalho, usou-se a função `ode15s` do Matlab [96] que é um integrador de ordem e passo temporal variáveis, recomendado para sistemas *stiff* de EDOs de primeira ordem e é o que tem melhor ordem de precisão, entre todos os integradores disponíveis no pacote ODE. Para executar a integração de (4.1), seleccionou-se a nova família de fórmulas de diferenciação numérica (NDFs), proposta em [96] que, de acordo com os autores, são, geralmente, mais eficientes do que as bem conhecidas fórmulas BDFs (fórmulas de diferenciação regressiva). No

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

entanto, as fórmulas NDFs utilizam passos temporais de menor tamanho para obter a mesma precisão que as fórmulas BDFs. A ordem máxima possível de uma fórmula é cinco e não se recorreu às propriedades opcionais do integrador para reduzir este valor. Deste modo, o integrador não só pode escolher as fórmulas mais estáveis a serem utilizadas para calcular a solução, mas também o passo inicial a ser testado. Além disso, também não se modificou o limite superior do passo temporal que é 10% do comprimento do intervalo de integração.

O utilizador deste integrador é obrigado a fornecer duas funções, onde define a matriz  $M(t, Y_v)$  e o vetor  $f(t, Y_v)$  do segundo membro do sistema a integrar, respetivamente. Uma terceira função que define a matriz jacobiana de  $f$  é opcional. Como a definição analítica desta é uma tarefa muito difícil de concretizar, optou-se por ser o próprio integrador a calculá-la numericamente. Note-se que a opção tomada não interfere com a qualidade dos resultados, apenas pode incrementar o número de etapas para os obter. Foi ainda desenvolvido um conjunto de rotinas do Matlab que são usadas nas funções que definem o sistema de EDOs (4.1) ou na visualização dos resultados. O núcleo central da estrutura do código é formado pelo conjunto de funções do Matlab que foram desenvolvidas para discretizar no espaço com o MFEM. Estas rotinas implementam a discretização espacial baseada no MFEM e transformam cada PDE num conjunto de EDOs. Apresentam-se, agora, os factos mais importantes destas funções, começando por aquelas que mudam de um problema para outro e, portanto, têm que ser redefinidas pelo utilizador.

### 4.2.1 Funções fornecidas pelo utilizador

Inicia-se esta subsecção, realçando a simplicidade e a efetiva redução do trabalho necessário para utilizar este novo *software*. O utilizador deste código tem somente que caracterizar o problema que pretende resolver, isto é, tem que definir as condições iniciais das várias variáveis dependentes que figuram no sistema (4.1) e fornecer as três rotinas em linguagem Matlab com:

- as  $n$  funções  $(F_I)_m$  e  $g_m$ , com  $I = 1, d$ , que caracterizam o sistema de EDPs (2.67);
- as condições de fronteira dadas pelas equações (2.69) que existirem para o modelo matemático que se pretende resolver;
- as funções  $w^j$  do segundo membro de (2.70) que definem a velocidade dos nós pertencentes à fronteira móvel.

Em relação às condições iniciais, saliente-se que o utilizador não tem que definir o vetor  $Y_{v0}$ , mas apenas indicar a solução inicial nos vértices de cada malha. No ficheiro através do qual

são introduzidas as condições iniciais, o utilizador deve ainda especificar o tipo de condição de fronteira existente, as tolerâncias absoluta e relativa a usar pelo integrador e alguns parâmetros do método, tais como: o grau das aproximações locais, a malha espacial inicial associada a cada função componente do vetor solução ou a medida mínima admissível para um elemento finito.

### 4.2.2 Programa principal e funções gerais da implementação do MEFM

A principal tarefa a ser realizada pelo programador é a discretização espacial. Para executar este passo, que conduz à construção do sistema de EDOs, constrói-se um conjunto de funções do Matlab que implementam o algoritmo numérico. O programa principal estabelece a ligação entre todas as funções que constituem o código e, após a inicialização do vetor  $Y_v$ , realiza a integração do sistema de EDOs (4.1). Tanto a posição inicial dos vértices da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ , para  $m = 1, \dots, n$ , como as amplitudes iniciais da função  $y_m$  nestes nós, são especificados pelo utilizador no ficheiro de entrada de dados. No entanto, as amplitudes nodais, nos outros pontos de interpolação que não são vértices de  $\mathcal{P}_m$ , não são definidos pelo utilizador e devem ser calculadas inicialmente no programa principal. Normalmente, estes valores são obtidos por interpolação linear em cada elemento finito ou através de uma função da variável de espaço que pode ser a solução exata, se existir.

Para além do integrador `ode15s`, o programa principal utiliza também uma função “inicializadora”, bem como as funções que traçam os gráficos com os resultados numéricos. A função “inicializadora” tem como objetivos:

- efetuar um controlo dos dados fornecidos pelo utilizador, nomeadamente através do ficheiro com as condições iniciais;
- definir a posição absoluta de cada um dos elementos que formam a malha espacial associada (vértices, arestas e elementos finitos) e estabelecer as ligações entre eles;
- ordenar os elementos finitos que constituem o suporte de cada função básica global e as arestas incidentes a um dado vértice;
- estabelecer a correspondência entre posição absoluta de cada um dos nós globais e a sua posição relativa em cada elemento finito do suporte respetivo;
- definir a posição absoluta no vetor  $Y_v$ , de cada um dos parâmetros de dependência da aproximação  $Y$ ;
- definir todos os parâmetros necessários para determinar os nós de interpolação em cada um dos elementos finitos, as derivadas de primeira e segunda ordem das funções básicas

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

locais da interpolação de Lagrange, os pontos de quadratura e respectivos pesos e os valores das funções básicas de interpolação nos diferentes pontos de quadratura;

- calcular todos os integrais que figuram na matriz do sistema (4.1).

As amplitudes nos pontos de interpolação, e as coordenadas das posições nodais encontram-se intercaladas no vetor  $Y_v$ , ordenadas de modo a conferir a melhor estrutura possível à matriz dos coeficientes do sistema de EDOs. As componentes de  $Y_v$ , relativas a  $\Delta_{m,L}$ , são ordenadas como se segue:

$$(X_1)_{m,L}^{(1)}, (X_d)_{m,L}^{(1)}, Y_{m,L}^1, Y_{m,L}^2, \dots, Y_{m,L}^{r+1}, \quad (X_1)_{m,L}^{(2)}, (X_d)_{m,L}^{(2)}, Y_{m,L}^{r+2}, Y_{m,L}^{r+3}, \dots, Y_{m,L}^{2r+1},$$

$$(X_1)_{m,L}^{(d+1)}, (X_d)_{m,L}^{(d+1)}, Y_{m,L}^{2r+2}, Y_{m,L}^{2r+3}, \dots, Y_{m,L}^{3r}, \quad Y_{m,L}^{3r+1}, \dots, Y_{m,L}^{f_r(d)}.$$

Percorrendo a malha  $\mathcal{P}_m$ , para  $m = 1, \dots, n$ , elemento finito a elemento finito, retirando da lista anterior todos os que não são parâmetros do problema específico que se pretende simular e eliminando as repetições, define-se assim, completamente,  $Y_v$ . Construindo o vetor  $Y_v$  desta maneira, obtêm-se sempre matrizes  $M$  quase-diagonais por blocos, num problema com variável espacial unidimensional. A figura 4.1 apresenta a mancha de elementos possivelmente não nulos da matriz  $M$ , para um problema definido por uma única EDP, sujeita a condições de Dirichlet em ambas as fronteiras móveis do domínio espacial 1-D e cuja solução é aproximada localmente por polinómios de grau quatro, em cada um dos cinco elementos finitos que constituem a malha.

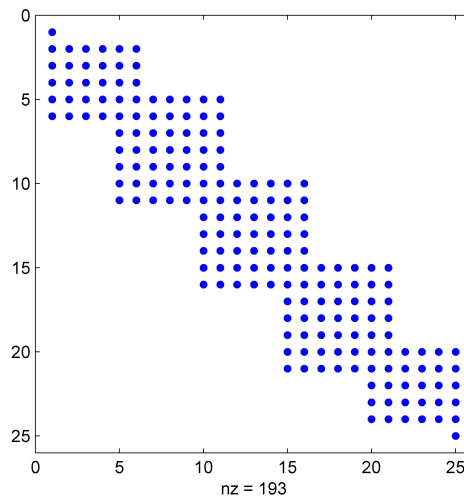


Figura 4.1: Blocos não-zero da matriz  $M$ , para  $n = 1$ ,  $N_m = 5$  e  $r = 4$

A formulação do MEFM apresentada origina matrizes de massa  $M(t, Y_v)$  com grau de esparsidade elevado e fortemente dependentes de  $Y_v$ . No exemplo particular que a figura 4.1 ilustra, a matriz  $M$  tem densidade máxima igual a 0.3088. Assim, de modo a reduzir significativamente o número de avaliações da matriz do sistema (4.1) e da função  $f$ , é fornecido ao

integrador, através de duas funções do Matlab, o padrão de esparsidade das matrizes  $\frac{\partial M(t, Y_v) \cdot v}{\partial Y_v}$  e  $\frac{\partial f(t, Y_v)}{\partial Y_v}$ , respetivamente.

Durante o ciclo de integração, e após se atingir com sucesso cada um dos tempos de saída de resultados, faz-se a conversão das variáveis  $Y_v$  nas variáveis que definem as amplitudes e posições nodais e escreve-se a lista completa de resultados num ficheiro de texto. São ainda armazenados os resultados numéricos obtidos em todos os passos intermédios da integração, sem haver necessidade de intervenção do utilizador. Finda a integração, procede-se à visualização dos resultados. Opcionalmente, a solução aproximada, obtida com o MEFM, num dado instante  $t_*$ , pode ser visualizada logo após se atingir, com sucesso, este tempo de saída de resultados. Para cada função componente do vetor solução, é traçado um gráfico com os perfis, nos valores da variável tempo definidos inicialmente pelo utilizador. Se o problema (2.67) a (2.70) tiver solução exata, que tenha sido definida inicialmente, então é ainda calculada a norma máxima do vetor erro considerando todos os nós de colocação, incluindo os nós interiores. Outras três funções do Matlab produzem gráficos que mostram o movimento da malha espacial, as trajectórias dos nós de separação e as histórias num conjunto discreto de pontos do domínio espacial. Se a variável espacial for unidimensional, então é também representada a solução aproximada  $Y_m$ , no domínio espaço-tempo. Durante todo este procedimento, é solicitada, uma única vez, a intervenção do utilizador, no sentido de redefinir as concretizações da variável espacial onde pretende historiar os valores das variáveis dependentes do sistema (2.67). As restantes rotinas do Matlab executam tarefas específicas e são usadas pelas funções descritas anteriormente.

### 4.3 Problema de Stefan com duas fronteiras móveis

O MEFM foi aplicado na resolução de problemas de convecção-difusão-reação definidos num domínio com fronteira móvel. O código Matlab resultante da implementação do algoritmo numérico foi testado na simulação de um problema de Stefan, com domínio espacial unidimensional e uma só fase de interesse. Os integrais que envolvem as derivadas espaciais da solução aproximada são calculados através da quadratura de Lobatto, usando 11 pontos interiores em cada elemento finito. Usaram-se valores de referência para as constantes das funções de penalização do movimento nodal definidas por (2.32), que são  $c_{m,L}^1 = 10^{-5}$ ,  $c_{m,L}^2 = 10^{-3}$  e  $c_{m,L}^3 = 10^{-7}$ , e fixaram-se as tolerâncias do integrador em  $10^{-5}$ .

A dilatação de grãos e polímeros pode ser modelada por uma equação de difusão não linear com duas fronteiras móveis. Este problema está descrito em [8] e é definido, na forma

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

adimensional, por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( d(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad S(t) < x < R(t), \quad (4.2)$$

onde  $u$  representa o teor de humidade, com o movimento das fronteiras dirigido pelas equações

$$\frac{dR}{dt} = a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=R}, \quad \frac{dS}{dt} = -b \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S}, \quad (4.3)$$

que dependem de dois parâmetros  $a$  e  $b$ . As condições de fronteira são  $u(x = S, t) = 0$ ,  $u(x = R, t) = 1$  e, inicialmente, tem-se  $R(0) = S(0) = 0$ . O sistema possui geometria plana. A fase I é constituída por um material sólido poroso por dilatar e a fase II pelo sólido dilatado, como mostra a figura 4.2. Este sistema encontra-se em contacto com um fluido que é absorvido a partir da fronteira exterior, em  $x = R(t)$ . A difusão ocorre entre as duas fronteiras  $x = S(t)$  e  $x = R(t)$ , que se movem em sentidos opostos. Este modelo também foi estudado por Rodrigues [87].



Figura 4.2: Representação do sistema com geometria plana

Por forma a adaptar-se este problema à situação para a qual o código foi desenvolvido, há que considerar uma fase II com comprimento relativamente pequeno. Assim, inicia-se a simulação do sistema físico partindo de  $R(0) = -S(0) = \epsilon$ , com  $\epsilon = 10^{-6}$ . Os resultados numéricos foram obtidos considerando quatro elementos finitos com quatro nós interiores cada um. As posições iniciais dos nós de separação definem uma malha uniforme no intervalo  $[-\epsilon, \epsilon]$ .

Nesta primeira simulação, considerou-se a função de difusão não linear, definida por  $d(u) = e^{-\beta(1-u)}$  e usou-se  $\beta = 2$  e  $a = b = 10$ . O intervalo de tempo considerado foi  $0 \leq t \leq 2$ . Os resultados obtidos, em diferentes, instantes são apresentados na figura 4.3, à esquerda. Os nós de separação estão assinalados em cada um dos perfis, encontrando-se as fronteiras móveis representadas a cor azul marinho. A solução numérica obtida com o MEFM está em concordância

com [8]. A figura 4.3, à direita, mostra a variação da posição dos nós ao longo do tempo. Pode constatar-se o movimento regular dos nós de separação, distribuindo-se no domínio espacial por forma a melhor representarem a solução.

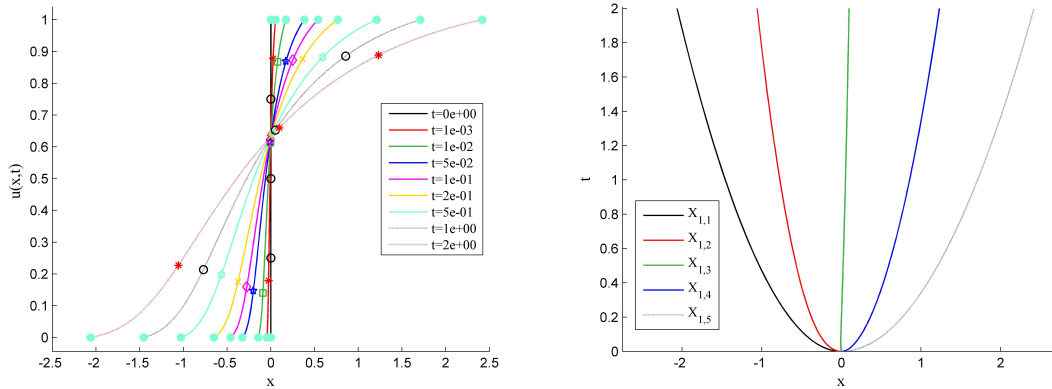


Figura 4.3: Solução em vários valores de  $t$  (à esquerda) e movimento nodal (à direita)

A figura 4.4, à esquerda, apresenta a distribuição dos valores da solução no domínio espaço-tempo. Os valores da variável dependente foram ainda historiados em dois pontos do domínio espacial. Estas duas histórias podem ser observadas na figura 4.4, à direita.

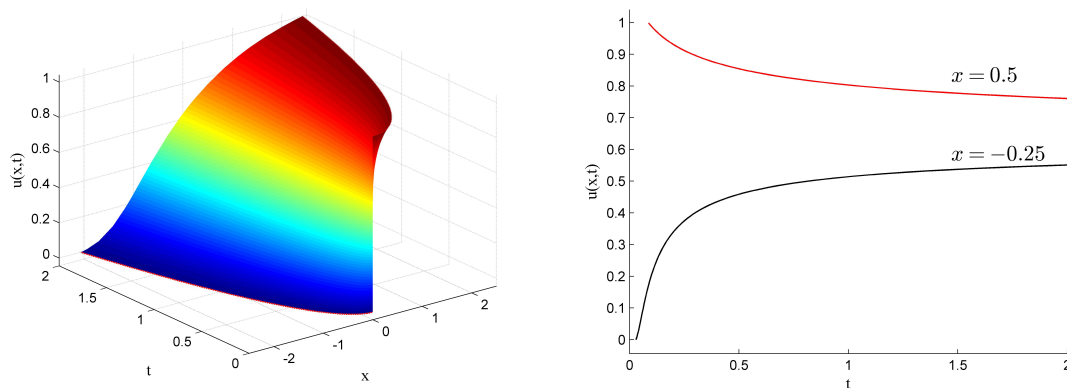


Figura 4.4: Distribuição dos valores de  $u$  (à esquerda) e histórias do teor de humidade (à direita)

A figura 4.5 ilustra os diferentes comportamentos da solução no instante  $t = 1$ , para vários valores dos parâmetros do modelo. Observa-se que quanto menor é o valor de  $a$ , maior é a dificuldade para o líquido ser absorvido através da *interface* exterior do sistema físico, antes de se difundir no meio poroso e obrigar ao movimento da *interface* sólido-sólido dilatado. Para valores de  $a, b > 1$ , há menor resistência à absorção do fluido em  $x = R(t)$  e a velocidade das fronteiras aumenta. Comparativamente com o processo de difusão, o movimento das fronteiras é tão rápido, que se observam as condições de fronteira  $u(S, t) = 0$  e  $u(R, t) = 1$  a serem ainda satisfeitas numa vizinhança da respetiva fronteira, enquanto que o processo de difusão domina a região central da fase II.

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

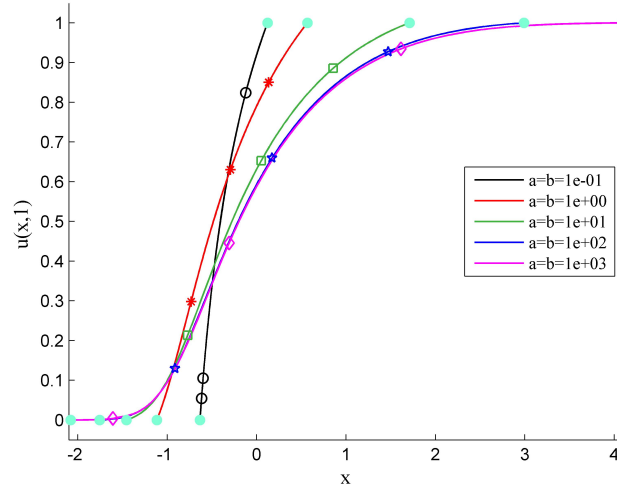


Figura 4.5: Solução aproximada em  $t = 1$ , para diferentes valores dos parâmetros do modelo

Na tabela 4.1, apresenta-se o tempo de computação gasto até  $t = 2$ , bem como alguns dados sobre o desempenho do integrador para três das corridas efetuadas. Como se pode ver, com o aumento do valor dos parâmetros, é necessário mais esforço para realizar a integração. É importante referir que o custo computacional para o `ode15s` realizar a integração até  $t = 0.001$  é, para a segunda corrida tabelada, por exemplo, superior a 90% do custo final. Isto pode ser explicado pela difícil situação inicial, com um domínio espacial com comprimento muito reduzido e onde a solução apresenta uma variação acentuada. Em relação ao número excessivo de avaliações da função  $f$  (comparativamente às avaliações da matriz jacobiana desta função), salienta-se que a diferença reflete a quantidade de avaliações de  $f$  exigidas pelo integrador para calcular todas as colunas da referida matriz jacobiana e pode aumentar, significativamente, o tempo de computação. Durante a integração do sistema de EDOs, na simulação com  $a = b = 10$ , o `ode15s` efetuou 1872 factorizações  $LU$  e resolveu 5498 sistemas de equações lineares algébricas.

$a (= b)$	tempo comp.	nº passos	nº passos f.	nº $f$	nº Jac.	nº $LU$	nº Sist. Lineares
0.1	37 s	876	547	9757	289	764	2532
10	71 s	1843	1366	18898	536	1872	5498
1000	150 s	4046	2910	40379	11384	3981	11929

Tabela 4.1: Comparação de algumas estatísticas computacionais do integrador

Nesta última simulação, procurou resolver-se o problema (4.2)-(4.3), apresentado no início desta subsecção, para valores distintos dos parâmetros  $a$  e  $b$  do modelo. Assim, de acordo com [34], usaram-se  $d(u) = 1.43 \times 10^{-7} e^{15.66u}$ ,  $a = 3$  e  $b = 0.15$ . Para estes valores de  $a$  e  $b$ , os perfis do teor de humidade são bastante abruptos na vizinhança da *interface* sólido-sólido dilatado, como se pode verificar na figura 4.6. Neste caso, como  $b$  é bem menor do que  $a$ , a

maioria do fluido que entra no meio, absorvido através de  $x = R(t)$ , vai forçar o movimento da *interface* sólido dilatado-líquido, enquanto que a fronteira em  $x = S(t)$ , praticamente, permanece fixa.

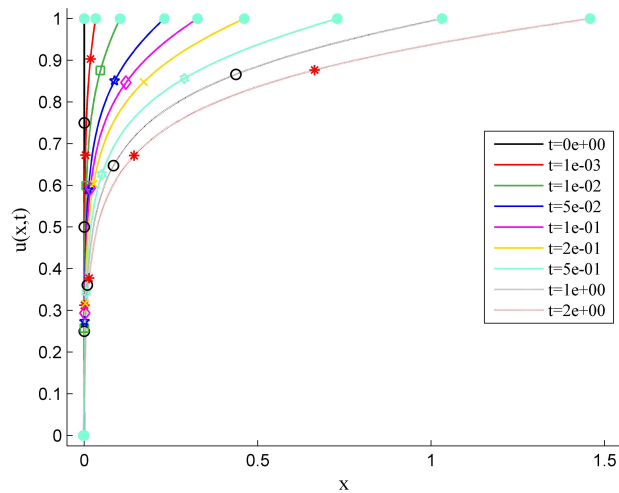


Figura 4.6: Perfis do teor de umidade, para  $d(u) = 1.43 \times 10^{-7} e^{15.66u}$ ,  $a = 3$  e  $b = 0.15$

A discretização espacial de  $D(0) = [-10^{-6}, 10^{-6}]$  foi realizada com quatro elementos finitos com aproximação polinomial de grau cinco em cada elemento finito. Na figura 4.7, podem visualizar-se as trajetórias dos nós de separação, que mostra que eles se movem suavemente para  $t > 10^{-3}$ . O tempo de computação para completar a integração com  $t \in [0, 2]$  foi uma hora, quarenta e seis minutos e trinta segundos, o que reflete a grande dificuldade do integrador nos instantes iniciais em que a solução aproximada apresenta declives muito acentuados.

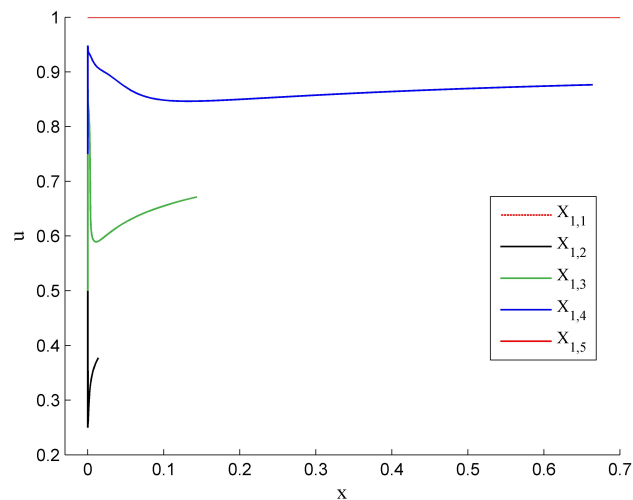


Figura 4.7: Trajetórias dos nós de separação para  $a = 3$ ,  $b = 0.15$  e  $d(u) = 1.43 \times 10^{-7} e^{15.66u}$

## 4.4 Problema das esferas de Frank

Considere-se o problema proposto por Frank, em 1950 [40], que, como tem solução analítica, tem sido usado por vários autores [5, 7, 21, 22, 75] para testar a precisão da solução numérica obtida com os seus algoritmos. Trata-se de um problema de solidificação modelado pela equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \nabla^2 u, \quad s \geq S, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

onde  $u$  representa a temperatura na fase líquida;  $d$  é o coeficiente de difusão e  $s = rd^{-1/2}t^{-1/2}$ , com  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ , sujeita a condições de fronteira de Dirichlet

$$u|_{s=S} = 0 \quad ; \quad u_\infty < 0, \quad t > 0, \quad (4.5)$$

onde  $u_\infty$  designa o valor de  $u$ , quando  $s$  tende para infinito. A velocidade normal  $V$  da fronteira móvel é dada por

$$V(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_M(t), \quad t > 0, \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal exterior à fronteira do domínio espacial relevante e  $\partial u / \partial \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ . O objetivo de se apresentar este exemplo, que possui simetria esférica, pelo que pode ser considerado como um problema 1-D no espaço, é validar os resultados obtidos com o algoritmo numérico baseado no MEFM apresentado, por comparação com a solução analítica. A solução deste problema de Stefan com uma única fase é

$$u(r, t) = \begin{cases} u_\infty \left( 1 - \frac{E_1(s^2/4)}{E_1(S^2/4)} \right), & s \geq S, \\ 0, & s < S, \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo  $E_1$  a função exponencial integral definida por  $E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ . O raio exato da *interface* móvel é definido por  $R(t) = S\sqrt{dt}$ . O parâmetro  $S$  do modelo é a solução da equação

$$u_\infty = -\frac{S^2}{4} e^{\frac{S^2}{4}} E_1\left(\frac{S^2}{4}\right). \quad (4.8)$$

De acordo com [5, 7, 22], sejam  $d = 1$  e  $u_\infty = -0.5$ . Da equação (4.8), obtém-se  $S \simeq 1.5621239$ .

Inicialmente, o líquido ocupa todo o  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , isto é, a fronteira móvel expande-se a partir da origem, que constitui a fase sólida. Assim, por um lado, para evitar esta singularidade em  $t = 0$  e, por outro lado, atendendo à geometria do domínio espacial ocupado pelo sólido em

$t > 0$ , iniciam-se as simulações num instante  $t_0 > 0$ , com um domínio espacial limitado

$$D(t_0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : R(t_0) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R_F \right\},$$

uma coroa circular em que a circunferência interior define a *interface* líquido-sólido. Os resultados numéricos foram obtidos numa malha de elementos finitos que aproxima, em cada instante, a coroa circular  $D(t)$ , contida em  $D(t_0)$ , com  $t > t_0$ . Na figura 4.8, está representada a malha espacial que define o domínio computacional  $\tilde{D}(t_0)$ , para  $R(t_0) = 0.5$  e  $R_F = 2$ . Observe-se que as arestas nodais que constituem a fronteira interior de  $\tilde{D}(t_0)$  (traçadas a cor vermelha) não pertencem a  $D(t_0)$ , pelo que estamos a introduzir um erro inicial, incluindo na região líquida alguns pontos que efetivamente pertencem à região ocupada pelo sólido.

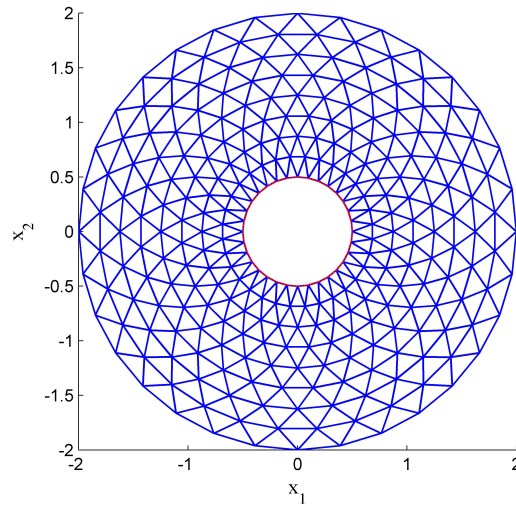


Figura 4.8: Decomposição triangular do domínio computacional  $\tilde{D}(t_0)$ , com  $R(t_0) = 0.5$  e  $R_F = 2$

Supondo que  $V(\mathbf{X}_{s_j}) = \dot{\mathbf{X}}_{s_j} \cdot \mathbf{n}$  (é nula a velocidade tangencial de um nó  $\mathbf{X}_{s_j} \in \Gamma_M(t)$ ), então a equação (4.6), que define a velocidade da fronteira móvel, pode ser discretizada da forma (2.66). Esta equação (2.66), que está associada a  $(X_I)_{s_j}$  e é externa ao MEFM, é adicionada ao sistema de EDOs resultante da discretização por intermédio de elementos finitos. A EDO associada à segunda coordenada de  $\mathbf{X}_{s_j}$  é imposta externamente, exigindo que os vértices da fronteira móvel se movimentem segundo retas que passam na origem. Assim, para que o vértice  $\mathbf{X}_{s_j}$  tenha um movimento radial, as suas coordenadas têm que satisfazer a equação

$$\sum_{I=1}^2 (-1)^{I-1} (X_{3-I})_{s_j} (\dot{X}_I)_{s_j} = 0. \quad (4.9)$$

Neste exemplo, consideraram-se aproximações quadráticas em cada um dos 512 elementos finitos da malha espacial inicial, apresentada na figura 4.8. Esta discretização origina

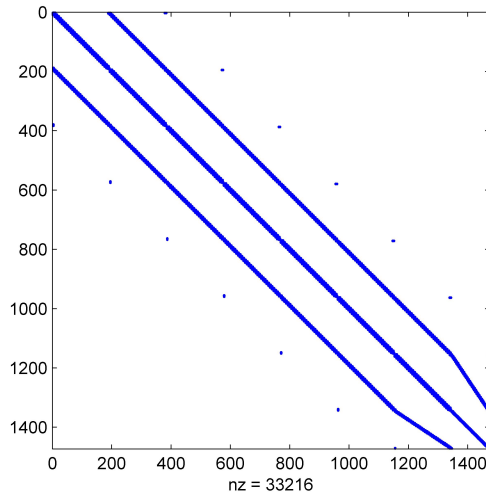


Figura 4.9: Padrão da matriz do sistema de EDOs

um sistema de 1472 EDOs, na variável independente tempo, que possibilita a determinação da solução aproximada do problema descrito no início da presente secção. A matriz dos coeficientes deste sistema apresenta a configuração que a figura 4.9 ilustra e tem grau de esparsidade superior a 98.4%. Como foi referido anteriormente, é fornecido, ao integrador, o padrão dos elementos não nulos desta matriz, o que permite diminuir, substancialmente, o volume de cálculo envolvendo zeros. Saliente-se ainda que a estrutura, patenteada pela matriz do sistema de EDOs, só é possível de obter devido à estratégia utilizada na ordenação das componentes do vetor  $Y_v$ , no qual se intercalaram as amplitudes nos pontos de interpolação e as coordenadas das posições nodais.

Os valores de tolerância (absoluta e relativa) para o integrador `ode15s` foram fixados em  $10^{-7}$ ; o intervalo de tempo considerado foi  $0 \leq T \leq 0.1$ , com  $T = t - t_0$  e as constantes de penalização usadas foram  $c_{m,L}^1 = 10^{-6}$ ,  $c_{m,L}^2 = 10^{-3}$  e  $c_{m,L}^3 = 10^{-7}$ . Para obter a solução numérica, o integrador deu 375 passos; tentou, sem sucesso, 163 passos temporais; requereu 7022 avaliações da função  $f$  (que define o segundo membro do sistema de EDOs); definiu 123 jacobianos de  $f$  e resolveu 1096 sistemas de equações lineares algébricas, efetuando 254 factorizações  $LU$ . O tempo de computação gasto para completar todos os cálculos foi uma hora e quarenta e seis minutos.

As figuras 4.10 e 4.11 apresentam os perfis da solução e a evolução da malha espacial em diferentes instantes. Pode observar-se que os vértices situados em duas circunferências consecutivas, interiores ao domínio espacial, começam a rodar em sentidos opostos. Este movimento inicia-se nos nós interiores mais próximos da fronteira móvel e vai-se propagando, no tempo, aos vértices situados em circunferências cada vez mais afastadas de  $\Gamma_M(t)$ , o que pode levar a que a malha se torne progressivamente menos adaptativa.

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

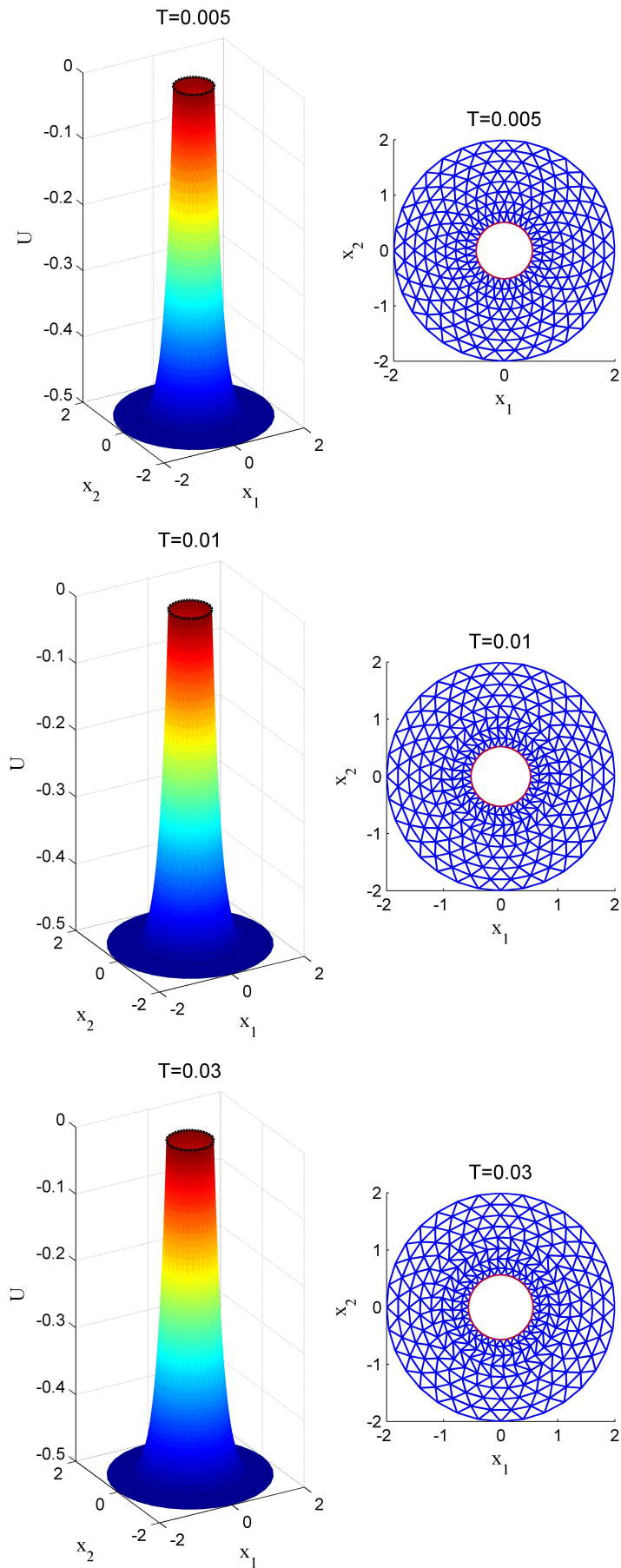


Figura 4.10: Solução em diferentes instantes e malha na qual está representada

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

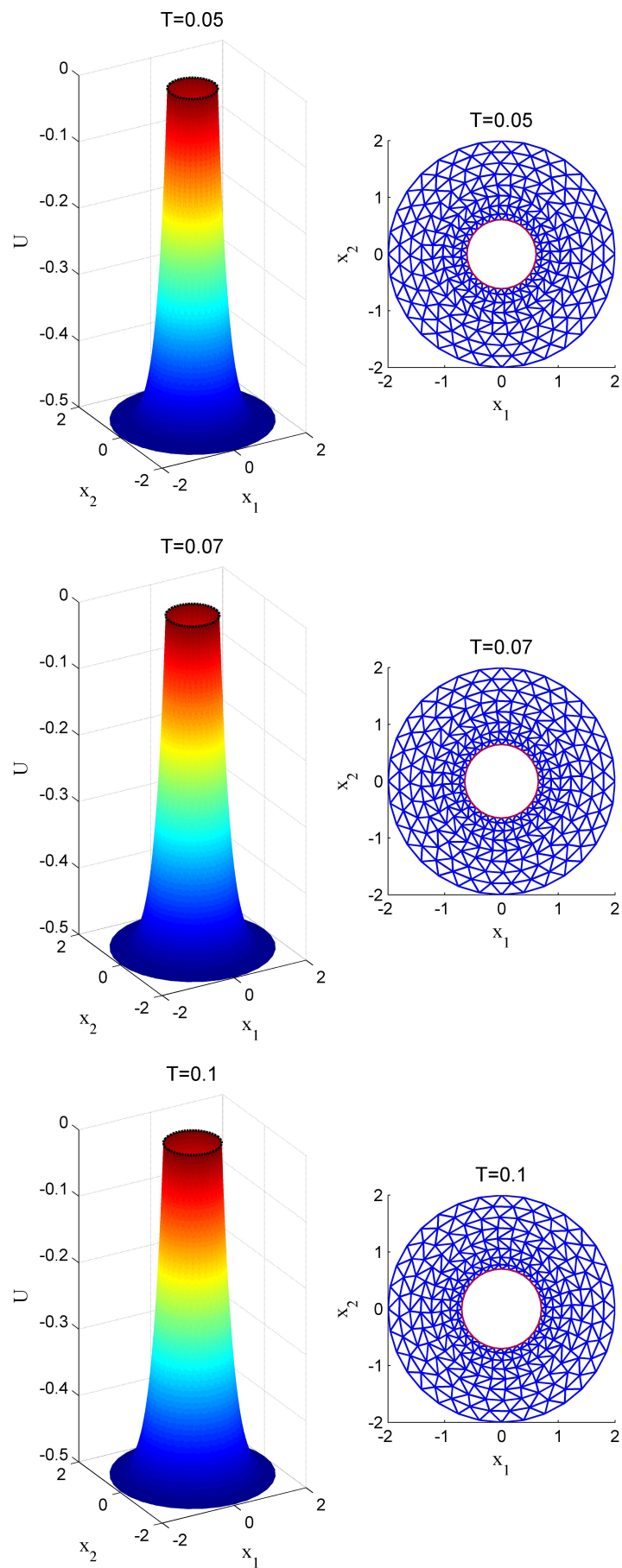


Figura 4.11: Solução em diferentes instantes e malha na qual está representada (cont.)

Na figura 4.12 (à esquerda), podem observar-se cortes da solução segundo o semi-plano de equação  $x_2 = 0$ , com  $x_1 > 0$ , em três momentos distintos da simulação e a figura 4.12 (à direita) mostra a evolução da *interface* líquido-sólido. A solução numérica obtida através do MEFM e traçada com uma linha contínua, coincide praticamente com a curva correspondente obtida analiticamente, que está representada a tracejado vermelho.

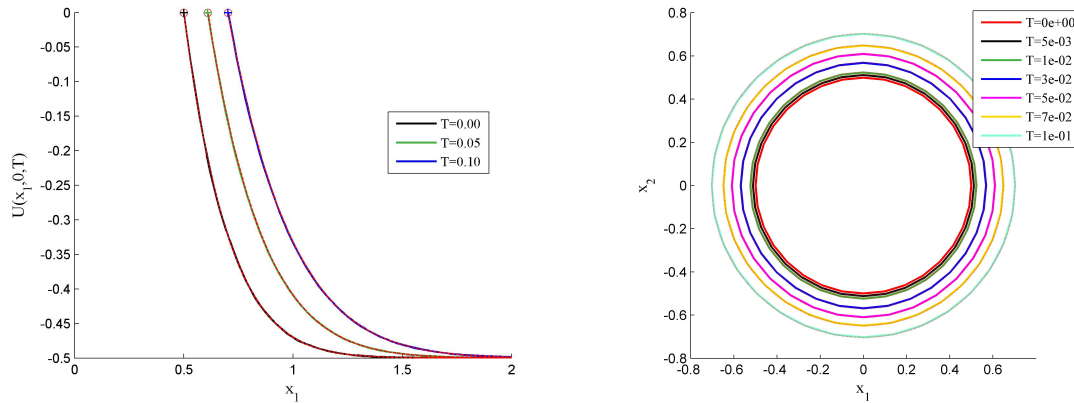


Figura 4.12: Cortes segundo  $x_2 = 0$  (à esquerda) e *interface* líquido-sólido (à direita), em diferentes instantes

A tabela 4.2 mostra a precisão dos resultados obtidos em função do número de elementos finitos da malha espacial. As derivadas espaciais presentes na equação discretizada (2.66) foram estimadas através da média aritmética das derivadas locais nos elementos finitos incidentes no (ou que constituem o suporte associado ao) vértice. Refira-se que estas derivadas locais podem diferir entre si em várias ordens de grandeza. Assim, na equação (2.66) usou-se ainda o valor de  $\left. \frac{\partial U}{\partial x_I} \right|_{\mathbf{x}_{s_j}}$  dado pela derivada da solução exata. Para cada instante  $T \in \{0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1\}$ , a precisão foi avaliada calculando-se o erro da solução aproximada na norma  $L^\infty$ . Na terceira e quarta colunas da tabela apresenta-se o máximo destes valores, considerando todos os nós de interpolação e apenas os vértices, respetivamente. Da análise dos resultados tabelados, pode concluir-se que o erro máximo diminui com o aumento do número de elementos finitos. Assim, a escolha de uma malha inicial de elementos finitos com “boa definição” na vizinhança da fronteira móvel pode ser determinante para a qualidade da solução numérica. Na última coluna, apresenta-se o erro máximo no raio  $R(t_0 + T)$ , calculado em todos os vértices pertencentes à fronteira móvel. Observa-se que o erro é inferior à tolerância exigida ao integrador, quando  $\partial U / \partial x_I$  é obtida a partir da solução analítica do problema e que o erro é da mesma ordem de grandeza dos valores obtidos para o erro máximo nos nós globais e nos vértices da malha, nas duas simulações com as derivadas espaciais estimadas.

Averiguou-se ainda se a posição da fronteira fixa do domínio espacial usado na simulação

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

nº EFs	$\frac{\partial U}{\partial x_I}$	$ u(\xi^k, \cdot) - U(\xi^k, \cdot) _{L^\infty}$	$ u(X_j, \cdot) - U(X_j, \cdot) _{L^\infty}$	$E_\infty(\text{raio})$
32	exata	2.03e-2	1.72e-2	1.94e-8
128	exata	1.61e-2	7.28e-3	1.17e-8
288	exata	6.96e-3	4.24e-3	2.05e-8
512	estimada	9.80e-3	8.19e-3	4.30e-3
512	exata	3.00e-3	2.04e-3	4.10e-8
800	estimada	7.02e-3	6.24e-3	3.49e-3
800	exata	2.06e-3	1.47e-3	8.68e-8

Tabela 4.2: Precisão dos resultados obtidos em função do número de elementos finitos

afeta o movimento da fronteira móvel. Assim, efetuaram-se várias simulações considerando  $R_F$  cada vez maior. O valor máximo do erro da solução aproximada obtida através do MEFM melhora ligeiramente. Por exemplo, usando os mesmos dados iniciais da terceira corrida tabelada em 4.2 e alterando apenas o raio da fronteira fixa para quatro, o valor máximo do erro é  $5.06 \times 10^{-3}$ . Então, pode concluir-se que, pelo menos para as simulações registadas na tabela 4.2, a influência da posição de  $\Gamma_F$  no movimento da *interface* líquido-sólido é pouco significativa.

Por último, analisou-se a relação entre o erro na solução e o grau da aproximação local. Na figura 4.13, apresenta-se a solução aproximada, seccionalmente de grau três, com a malha de 512 elementos projetada nela. Os restantes dados iniciais são exatamente os mesmos que se consideraram na primeira corrida apresentada. O tempo de computação foi quarenta e uma horas, trinta e nove minutos e vinte e dois segundos. Ao passar de aproximações quadráticas para cúbicas, o erro máximo não diminui, pelo que o grau dois parece ser suficiente para descrever a solução em cada instante.

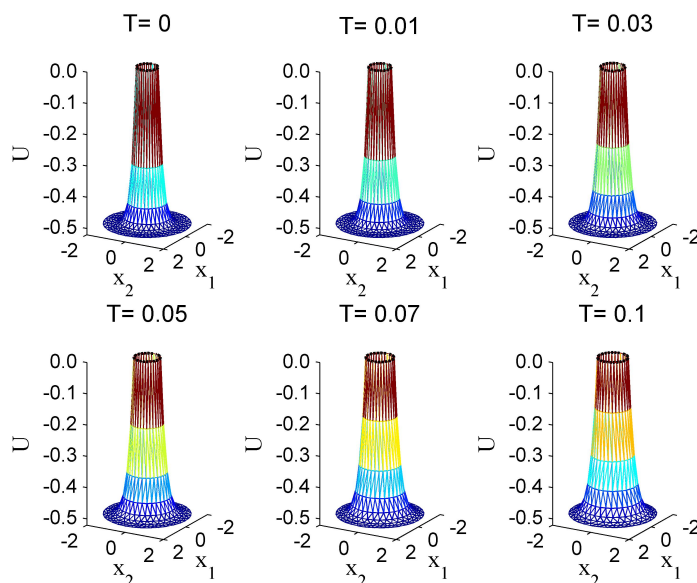


Figura 4.13: Solução em diferentes instantes, com a malha projetada; aproximação local de grau 3

## 4.5 Modelo bifásico num domínio retangular

O problema que está descrito em [45] é definido, na forma adimensional, pelo sistema de equações (4.10).

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \alpha_l \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in D_l(t), \quad t > 0, \quad l = s, l, \quad (4.10)$$

onde  $T_s$  e  $T_l$  representam a temperatura na fase sólida e a temperatura na fase líquida, respetivamente, com

$$D_s(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < R(y, t) \wedge -a < y < a\}, \quad (4.11)$$

$$D_l(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R(y, t) < x < 1 \wedge -a < y < a\},$$

sujeito a  $\frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_p(y, t)$ , ou a  $T \Big|_{x=0} = T_p(y, t)$ ,  $t > 0$ , e a condições de fronteira de Neumann nas outras fronteiras fixas do sistema físico. Na *interface* sólido-líquido, que é definida por  $x = R(y, t)$ , tem-se  $T_s = T_l = 1$  e

$$\lambda \frac{\partial R}{\partial t} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} - \beta \frac{\partial T_l}{\partial x} \right), \quad t > 0. \quad (4.12)$$

As condições iniciais são  $T_l \Big|_{t=0} = h(x, y)$ , com  $h(x, y) \Big|_{x=0} = 1$  e  $R(y, 0) = 0$ . Nas simulações usou-se a temperatura inicial  $h(x, y) = 1 + 0.1x + 0.1x^2y^2$  e os valores seguintes dos parâmetros do modelo:  $a = 1$ ,  $\alpha_s = 0.7$ ,  $\alpha_l = 0.6$ ,  $\beta = 0.8$  e  $\lambda = 0.15$ , de acordo com [45].

Para este problema, em que a mudança de fases ocorre a uma temperatura fixa, admitem-se três hipóteses distintas:

- assume-se um fluxo de calor constante em  $x = 0$ . Neste caso, a frente móvel é planar e visa comparar os resultados obtidos através do MEFM com os apresentados por Xu [109];
- a temperatura é fixada por uma condição de Dirichlet em  $x = 0$ . Com esta simulação, testou-se a localização de uma *interface* com curvatura;
- considerou-se um fluxo de calor variável em  $x = 0$ . Esta situação foi corrida para ser testada a definição da posição de uma fronteira móvel (onde ocorre a mudança de fase) em que a função  $R(\cdot, t)$  possui curvaturas acentuadas e vários máximos e mínimos locais.

Neste problema de solidificação numa região retangular, o domínio espacial inicial é totalmente ocupado pelo líquido. Subitamente, no instante  $t = 0$ , a temperatura do meio adjacente à fase fluída, em  $x = 0$ , desce para valores inferiores à temperatura de fusão, pelo que começa a formar-se sólido. Assim, para  $t > 0$ , o domínio espacial  $\Omega_t = [0, 1] \times [-1, 1]$  é dividido em duas regiões pela *interface* sólido-líquido. Na figura 4.14, que ilustra esta situação,

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

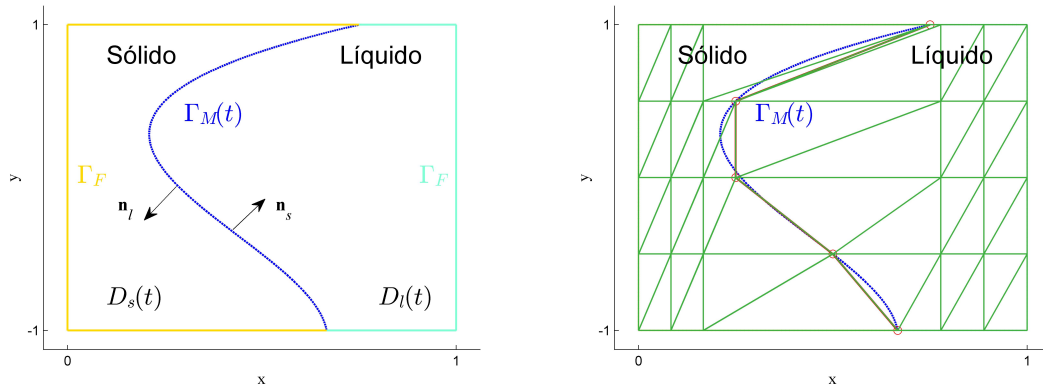


Figura 4.14: Geometria do domínio espacial (à esquerda) e tratamento numérico da *interface* (à direita)

a fronteira móvel está representada a cor azul e a fronteira fixa do domínio ocupado pelo sólido e do domínio da região fluída estão assinaladas a cor amarela e a azul claro, respetivamente. A fronteira móvel surge junto da fronteira fixa definida por  $x = 0$  e move-se, com o tempo, da esquerda para a direita do domínio espacial.

Por forma a adaptar este problema à situação para a qual o código foi desenvolvido, há que considerar, sempre, as duas fases de interesse que irão coexistir prematuramente. Assim, iniciam-se todas as simulações com uma fase sólida muito pequena, com largura  $R(y, 0) = 1.5 \times 10^{-4}$ . Com esta estratégia, introduz-se um erro inicial na posição da fronteira móvel. Atendendo a que a *interface* móvel pode, no decorrer da simulação, desenvolver curvatura (que em certos casos pode ser acentuada), então a malha de elementos finitos que cobre  $\Omega_t$  deve ser suficientemente fina para que haja uma boa descrição da posição da *interface* ao longo do tempo. Note-se ainda que a discretização da região ocupada por cada uma das fases é fortemente dependente do número de nós da partição inicial da *interface*. Esta é aproximada por uma função seccionalmente linear que induz uma aproximação poligonal de cada conjunto (4.11). A figura 4.14 (à direita) mostra uma possível, mas não adequada, partição da *interface* e, conseqüente, má definição de cada conjunto  $D_m$ . É importante salientar a dificuldade numérica para, por um lado, se obter uma boa descrição da *interface*, que se consegue aumentando o número de nós da malha e, por outro, a necessidade imperiosa (nos instantes iniciais) de se usar um reduzido número de elementos finitos na fase sólida.

A simulação do sistema físico de mudança de fase termina no primeiro instante em que algum ponto da fronteira móvel atinge a vizinhança da fronteira fixa em  $x = 1$ , isto é, usa-se como critério de paragem  $R(y, \cdot) > R_{max}$ , sendo  $R_{max}$  o valor máximo admissível para a abcissa de algum ponto da fronteira móvel, e que é inferior a um.

Trata-se agora a discretização da equação (4.12) que define a velocidade dos pontos da fronteira móvel. Utilizaram-se técnicas distintas para calcular as derivadas espaciais presentes

em (4.12). A derivada  $\frac{\partial R}{\partial y}(\cdot, t_*)$  foi aproximada recorrendo:

- ao polinómio que interpola a curva  $x = R(y, t_*)$  em todos os vértices da *interface*;
- à interpolação linear segmentada;
- ao spline cúbico natural.

Obtiveram-se melhores resultados com a terceira estratégia apontada. Em relação às estimativas das derivadas  $\frac{\partial T_s}{\partial x}(\cdot, t_*)$  e  $\frac{\partial T_l}{\partial x}(\cdot, t_*)$ , usaram-se

- a média aritmética das derivadas locais nos elementos finitos que constituem o suporte da função básica global associada ao vértice;
- apenas a derivada no elemento que contém a derivada dirigida segundo um vetor paralelo ao eixo  $\mathcal{O}x$ .

Por fim, vamos referir a forma que se usou para adicionar a equação (4.12), discretizada, ao sistema de EDOs. Derivando em ordem a  $t$  ambos os membros da equação  $x = R(y, t)$ , resulta

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Assim, por cada vértice  $\mathbf{X}_{s_j} = \left( (X_1)_{s_j}, (X_2)_{s_j} \right)^T$ , vamos incorporar no sistema de EDOs resultante da discretização por intermédio de elementos finitos, a equação

$$(\dot{X}_1)_{s_j} - \frac{\partial R}{\partial X_2} \Big|_{\mathbf{X}_{s_j}} (\dot{X}_2)_{s_j} = \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_{s_j}}, \quad (4.13)$$

onde a derivada parcial do segundo membro é definida a partir de (4.12). Esta equação está associada à abcissa do nó  $\mathbf{X}_{s_j}$  e substitui a equação (2.66).

#### 4.5.1 Fluxo de calor constante

A condição de fronteira em  $x = 0$  é definida por  $F_p(y, t) = 1$ . Neste caso, a frente onde se processa a solidificação permanece planar durante toda a simulação. Assim, para cada tempo, pode testar-se a precisão dos resultados, calculando as diferenças entre as abcissas dos nós que pertencem à *interface*.

Neste exemplo, considerou-se uma malha inicial com  $4 \times 7$  nós uniformemente distribuídos no domínio espacial ocupado por cada uma das fases e obrigou-se a que o movimento dos vértices pertencentes à fronteira móvel fosse segundo retas paralelas ao eixo das abcissas. Quanto à “condição inicial” na fase sólida, definiu-se para todos os pontos uma temperatura constante igual a um. A simulação decorreu no intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 0.5$ . Para

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

valores das tolerâncias do integrador `ode15s`, considerou-se  $10^{-7}$  e usaram-se os valores referência para as constantes de penalização do movimento nodal, exceto o valor de  $c_{m,L}^1$  que foi modificado para  $10^{-6}$ .

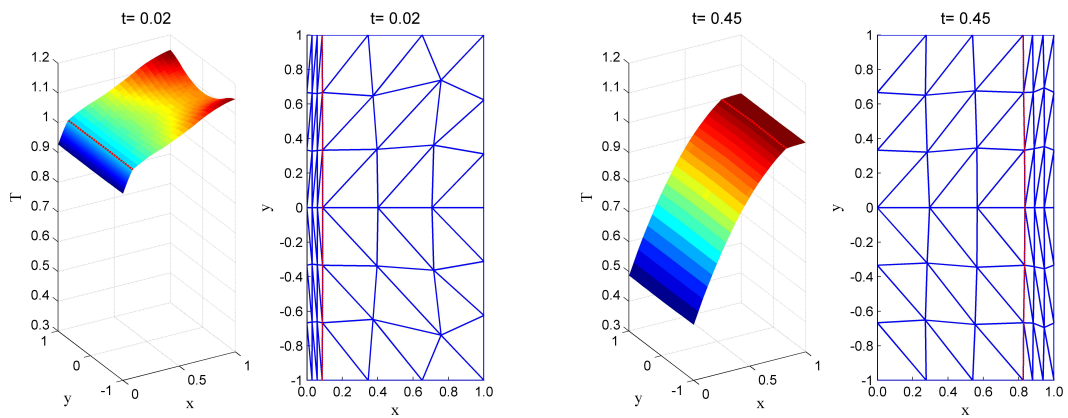


Figura 4.15: Solução e malha em que está representada em  $t = 0.02$  (à esquerda) e no instante  $t = 0.45$  (à direita)

Na figura 4.15, estão apresentados os perfis da solução interpolada em dois instantes,  $t = 0.02$  e  $t = 0.45$  e a malha espacial na qual a solução está representada. A fronteira móvel está traçada a cor vermelha. Verifica-se que a malha de elementos finitos mantém a simetria relativamente ao eixo  $Ox$ , durante a simulação. Resolveu-se ainda este problema, tendo por origem uma partição inicial distinta do domínio espacial associado a cada fase, mas definida com base nos mesmos  $4 \times 7$  nós. A solução obtida com o MEFM está apresentada na figura 4.16, para os mesmos dois instantes. Os resultados numéricos mostram que a posição da frente de solidificação é determinada com precisão, mesmo com um número reduzido de vértices na malha espacial. A solução aproximada, seccionalmente polinomial de grau dois, apresenta um grau de concordância razoável com os resultados existentes na literatura [109]. A diferença máxima entre as abcissas dos vértices pertencentes à fronteira móvel é inferior a  $9.6 \times 10^{-3}$ , isto é, tem-se

$$\max(R(y_i, \cdot)) - \min(R(y_i, \cdot)) \leq 9.6 \times 10^{-3},$$

em ambas as simulações apresentadas. Assim, neste exemplo, a malha espacial não é determinante para a qualidade dos resultados numéricos obtidos.

### 4.5.2 Temperatura fixada por uma condição de Dirichlet

A condição de fronteira em  $x = 0$  é definida por  $T_p(y, t) = 0.8 - 0.5y^2$ . Os resultados numéricos foram obtidos considerando uma decomposição inicial de cada subdomínio espacial em trinta e seis elementos finitos com área igual e aproximações locais quadráticas. Como já foi referido atrás, o programa foi desenvolvido para sistemas físicos bifásicos, em que ambas

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

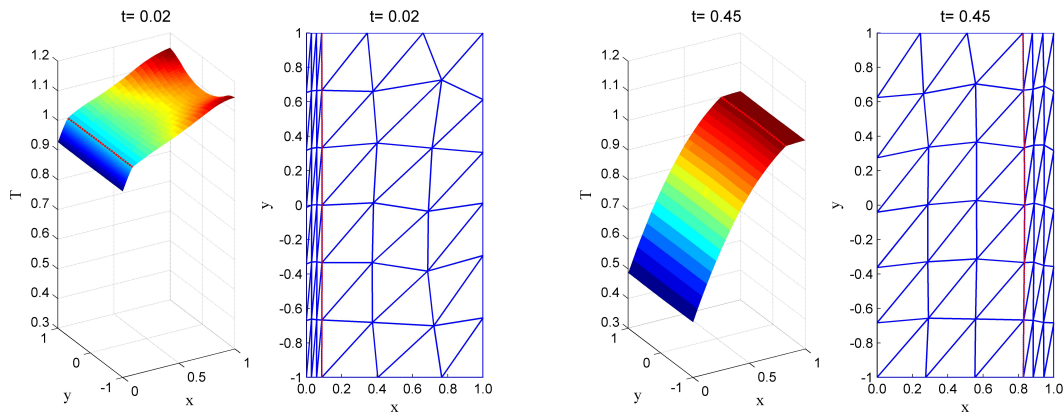


Figura 4.16: Solução aproximada e malha representativa em  $t = 0.02$  (à esquerda) e em  $t = 0.45$  (à direita)

as fases coexistem em qualquer momento, pelo que se impõe terminar a simulação quando a *interface* móvel atinge um determinado valor máximo, na vizinhança de  $x = 1$ , mas inferior a um. Assim, e de acordo com [45], o intervalo de integração considerado foi  $0 \leq t \leq 0.4312$ . Os restantes dados iniciais usados foram exatamente os mesmos que nas simulações da subsecção anterior.

Nas figuras 4.17 e 4.18 (à esquerda), representa-se a solução aproximada obtida com o MEFM em diversos instantes do intervalo de simulação. É importante notar que, apesar da não conformidade entre a solução inicial definida na fase sólida e a condição na fronteira em  $x = 0$ , o método produz soluções numéricas de qualidade. Nas mesmas figuras (à direita), apresenta-se a evolução da malha espacial que serve de suporte à definição da solução numérica em cada um dos instantes considerados. Pode observar-se que a malha de elementos finitos preserva a simetria em relação ao eixo das abcissas.

Na figura 4.19, apresenta-se a evolução da *interface* interpolada no tempo, que mostra que a curvatura, por ela desenvolvida, é mantida durante a simulação. Na figura 4.20, podem observar-se cortes da solução, em  $t = 0.2$ , segundo planos paralelos ao plano coordenado  $xOz$ .

Nas figuras 4.21 e 4.22 (à esquerda), a solução aproximada obtida com o MEFM, em diversos instantes do intervalo de simulação, está representada numa malha espacial que não é simétrica. Esta decomposição inicial não favorece a obtenção de soluções numéricas de qualidade, visto que os elementos finitos têm mais dificuldade em se arrumar no domínio ocupado pelo fluido nos instantes finais da simulação.

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

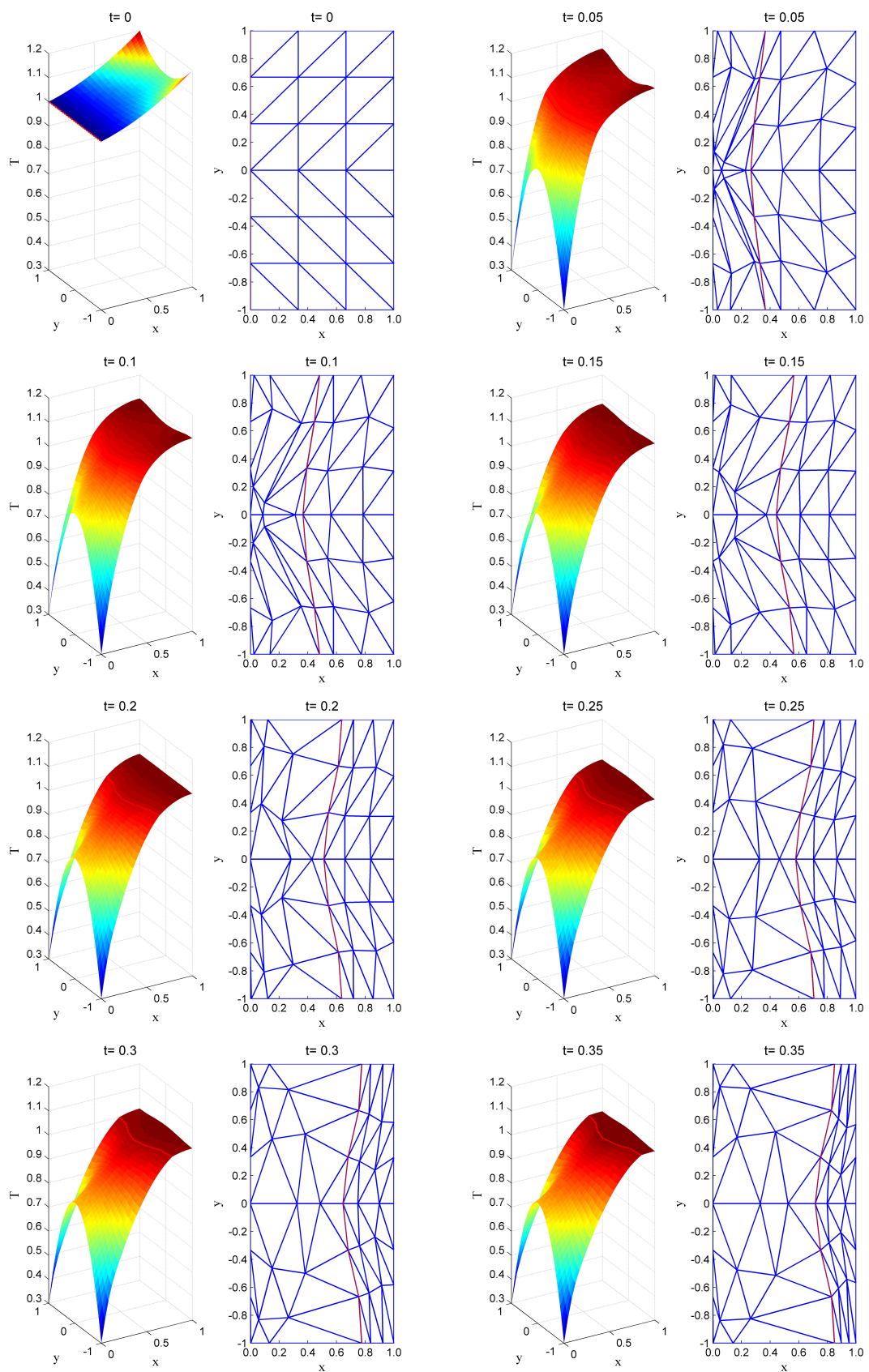


Figura 4.17: Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

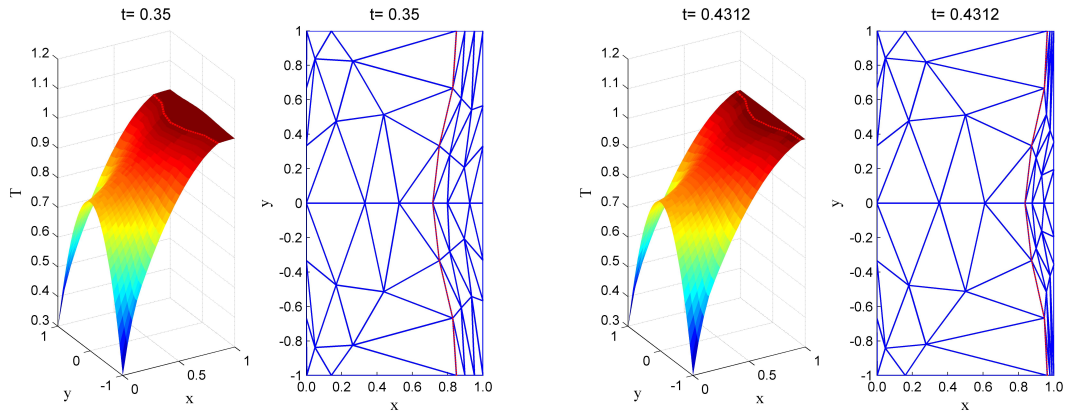


Figura 4.18: Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha (cont.)

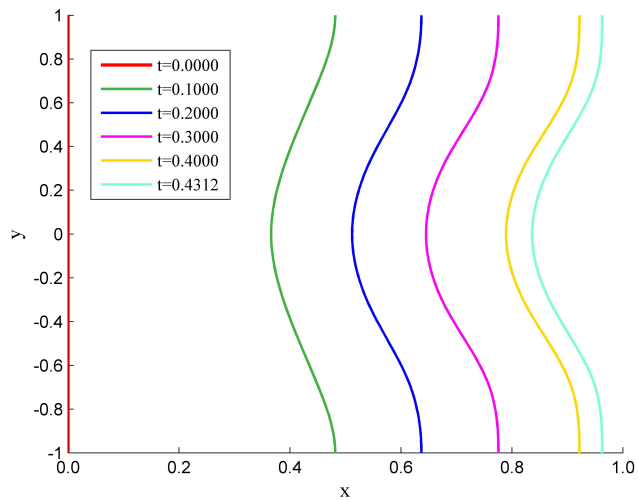


Figura 4.19: Evolução da *interface* sólido-líquido

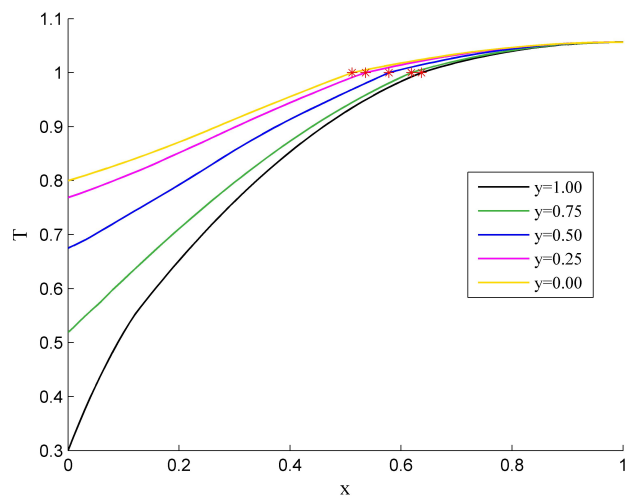


Figura 4.20: Temperatura, nas duas fases, para diferentes valores de  $y$ , em  $t = 0.2$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

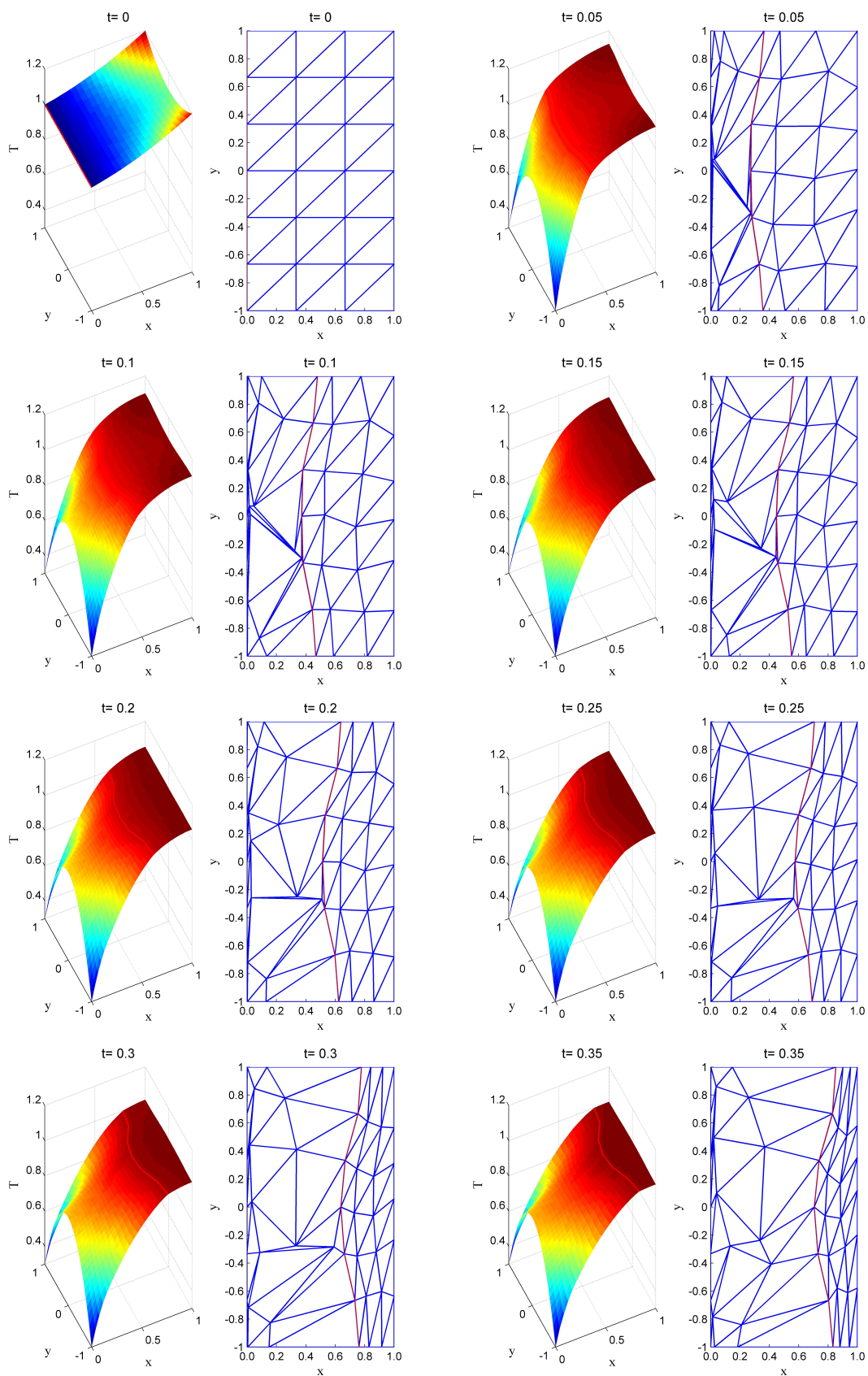


Figura 4.21: Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha

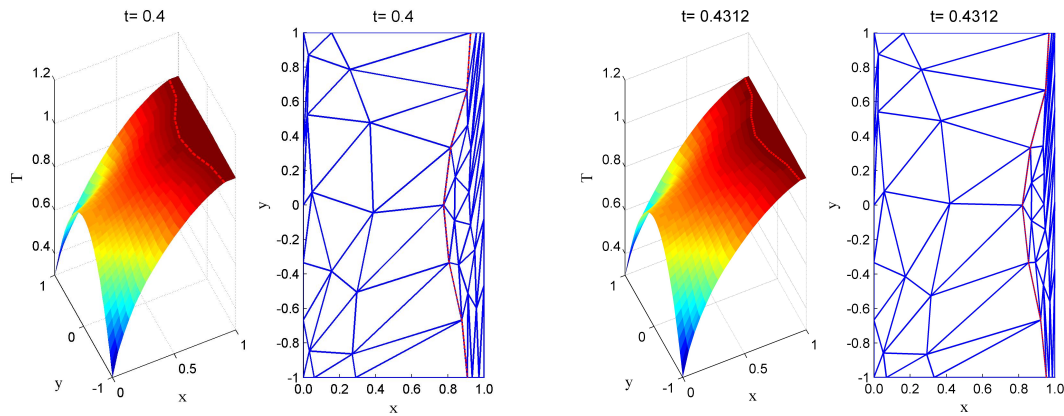


Figura 4.22: Solução aproximada em diferentes instantes e evolução da malha (cont.)

### 4.5.3 Fluxo de calor variável

Por último, considerou-se uma condição de Robin em  $x = 0$  dada por  $F_p(y, t) = 1 - 0.8 \sin(2\pi y)$ . Para a função indicada a *interface* desenvolve, no tempo, vários pontos em que a derivada  $\frac{\partial R}{\partial y}$  se anula. Para se obter uma boa descrição da posição destes pontos, extremos da curva  $x = R(\cdot, t_*)$ , é necessário considerar uma partição inicial suficientemente fina “em  $y$ ”. Assim, neste exemplo, usou-se uma malha espacial com noventa e seis elementos finitos em cada uma das duas fases e com um maior número de nós na *interface*. Inicialmente, os elementos finitos, constituem uma malha uniforme em cada subdomínio  $D_m$ , como ilustra a figura 4.23. O intervalo de integração considerado foi  $0 \leq t \leq 0.5$ . Os restantes dados iniciais e valores dos parâmetros do método usados foram exatamente os mesmos que nas simulações anteriores incluídas na presente secção.

Nas figuras 4.23 e 4.24 (à esquerda), representam-se os perfis da solução aproximada obtida com o MEFM em alguns instantes do intervalo de simulação. A fronteira móvel está assinalada a cor preta. Nas mesmas figuras (à direita), apresenta-se a evolução da malha espacial que serve de suporte à definição da solução numérica em cada um dos instantes considerados. A fronteira móvel está traçada a cor vermelha. Pode observar-se a grande atividade dos vértices da malha de elementos finitos associada à fase sólida, reposicionando-se, no tempo, de modo a que a solução seja convenientemente representada.

A figura 4.25, ilustra a evolução da *interface* interpolada no tempo. Podem observar-se as diferentes curvaturas desenvolvidas pela função  $R(\cdot, t)$  e os vários extremos relativos, que são mantidos durante um período do intervalo de integração. Finalmente, na figura 4.26, apresentam-se cortes da solução, em  $t = 0.1$ , segundo planos paralelos ao plano coordenado  $xOz$ .

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

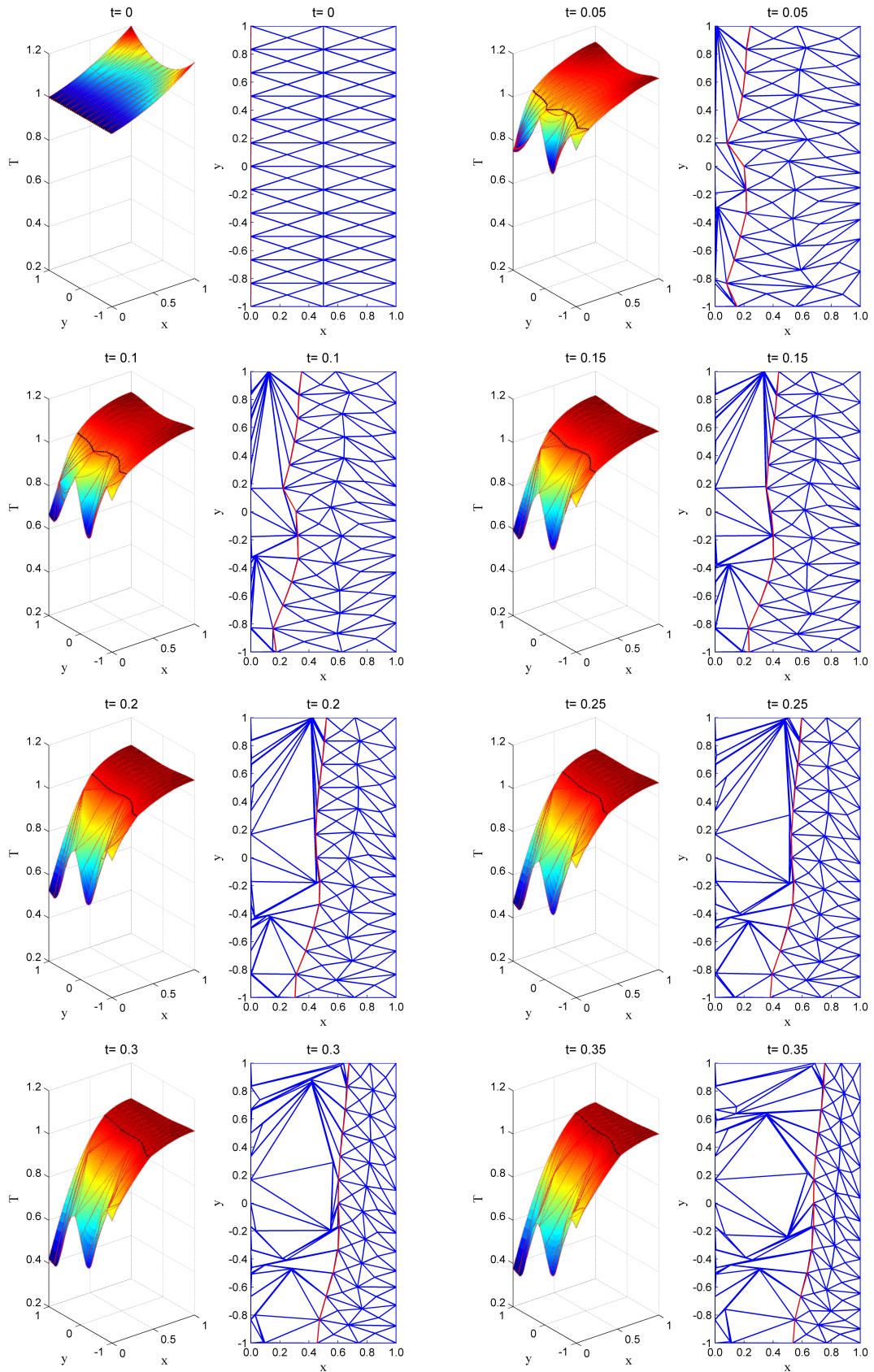


Figura 4.23: Fluxo de calor variável em  $x = 0$ , perfis de temperatura (à esquerda) e evolução da malha (à direita)

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

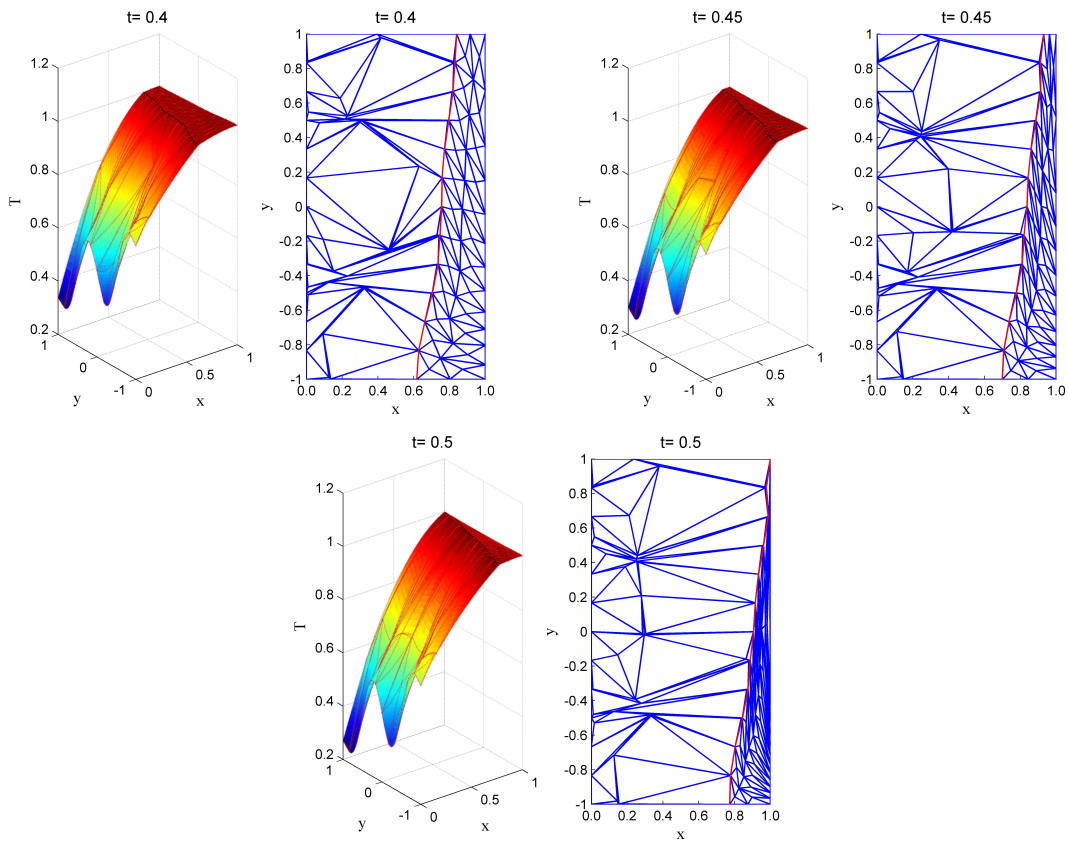


Figura 4.24: Fluxo de calor variável em  $x = 0$ , perfis de temperatura e evolução da malha (cont.)

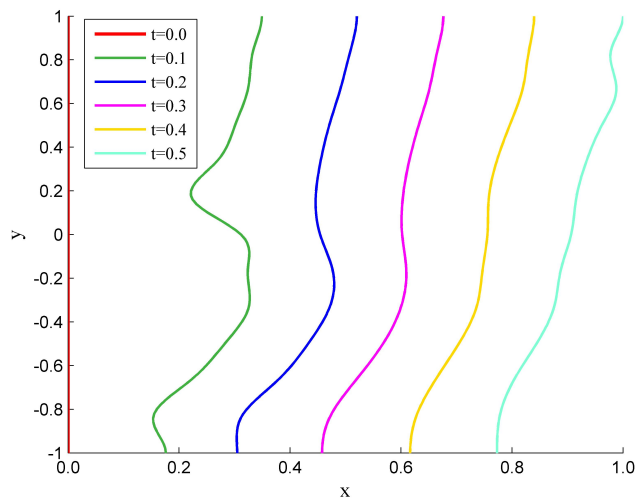


Figura 4.25: Fluxo de calor variável em  $x = 0$ , evolução da *interface* sólido-líquido

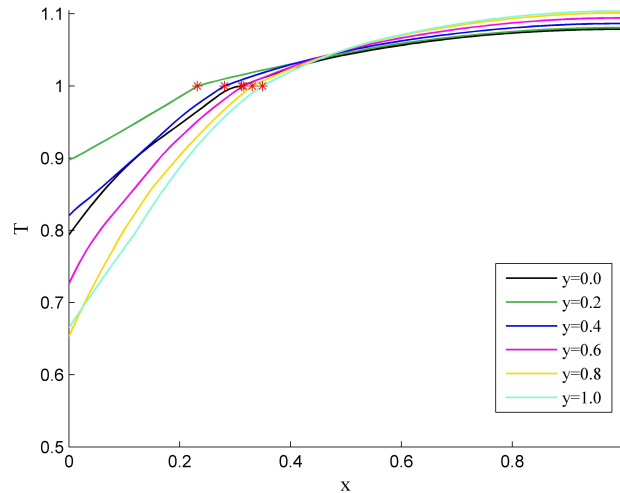


Figura 4.26: Fluxo de calor variável em  $x = 0$ , temperatura, nas duas fases, para diferentes valores de  $y$ , em  $t = 0.1$

## 4.6 Problema com duas fronteiras móveis em 2-D

Por fim, utiliza-se o MEFM na simulação de um sistema de mudança de fases fluido  $\rightarrow$  “mushy”  $\rightarrow$  sólido, recorrendo ao modelo bidimensional de solidificação apresentado por Gupta [45]. Neste modelo considera-se que a transição do fluido para o sólido ocorre ao longo de uma faixa de temperatura de transição  $[1, T_{ml}]$ , com  $T_{ml} > 1$ . Se a temperatura do material num dado ponto do domínio espacial é menor que um então este está no estado sólido; se a temperatura é maior do que um, mas menor que  $T_{ml}$ , então há uma coexistência instável de ambas as fases, líquida e sólida e se a temperatura é superior a  $T_{ml}$  então o material está no estado fluido. Admita-se ainda que o sistema possui geometria plana. Inicialmente, o domínio espacial

$$\Omega_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -a \leq y \leq a\},$$

está ocupado pelo fluido e pelo material em fase de transição. Subitamente, no instante  $t = 0$ , a temperatura do meio ambiente adjacente à fronteira em  $x = 0$  desce para valores inferiores à temperatura de fusão, pelo que começa a formar-se sólido. A *interface* sólido-“mushy”, que se assume definida por  $x = R_1(y, t)$ , separa a região sólida da região constituída pelo material em fase de transição e a *interface* líquido-“mushy”, definida pela curva  $x = R_2(y, t)$ , é a fronteira entre a região de transição e a região ocupada pelo fluido. Assim, o modelo matemático deste problema de solidificação trifásico é definido, na forma adimensional, pelas equações seguintes:

Na região sólida:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < R_1(y, t), \quad t > 0, \quad (4.14)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_{x=0} = F_p(y, t), \quad t > 0, \quad (4.15)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{y=a} = 0, \quad 0 < x < R_1(a, t), \quad t > 0, \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{y=-a} = 0, \quad 0 < x < R_1(-a, t), \quad t > 0. \quad (4.17)$$

Na região de transição ou “mushy”:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \alpha_m \left( \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{\beta_1} \frac{\partial f_s}{\partial t} \right), \quad R_1(y, t) < x < R_2(y, t), \quad t > 0, \quad (4.18)$$

$$\left. \frac{\partial T_m}{\partial y} \right|_{y=a} = 0, \quad R_1(a, t) < x < R_2(a, t), \quad t > 0, \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{\partial T_m}{\partial y} \right|_{y=-a} = 0, \quad R_1(-a, t) < x < R_2(-a, t), \quad t > 0, \quad (4.20)$$

$$T_m|_{t=0} = g(x, y) \leq T_{ml}, \quad 0 \leq x \leq R_2(y, 0), \quad g(0, y) = 1. \quad (4.21)$$

Na região líquida:

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \alpha_l \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right), \quad R_2(y, t) < x < 1, \quad t > 0, \quad (4.22)$$

$$T_l|_{t=0} = g(x, y) \geq T_{ml}, \quad x \geq R_2(y, 0), \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad t > 0, \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial y} \right|_{y=a} = 0, \quad R_2(a, t) < x < 1, \quad t > 0, \quad (4.25)$$

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial y} \right|_{y=-a} = 0, \quad R_2(-a, t) < x < 1, \quad t > 0. \quad (4.26)$$

Na *interface* sólido-“mushy”,  $x = R_1(y, t)$ :

$$T_s = T_m = 1, \quad (4.27)$$

$$\lambda C_1 \frac{\partial R_1}{\partial t} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_1}{\partial y} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} - \beta_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} \right). \quad (4.28)$$

Na *interface* líquido-“mushy”,  $x = R_2(y, t)$ :

$$T_m = T_l = T_{ml}, \quad (4.29)$$

$$\lambda C_2 \frac{\partial R_2}{\partial t} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left( \beta_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial T_l}{\partial x} \right), \quad (4.30)$$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$$g(R_2(y, 0), y) = T_{ml}. \quad (4.31)$$

Resolveu-se este problema para a temperatura inicial  $g(x, y) = 1 + 0.2x + 0.05xy + 0.1x^2y^2$ , considerando  $F_p(y, t) = 1 - 0.5y^2$  e

$$f_s(x, y, t) = \frac{C_1 (T_{ml} - T_m(x, y, t)) - C_2 (1 - T_m(x, y, t))}{T_{ml} - 1}.$$

Usaram-se os seguintes valores para os diversos parâmetros do modelo:  $C_1 = 0.9$ ,  $C_2 = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $\alpha_s = 0.6$ ,  $\alpha_m = 0.48$ ,  $\alpha_l = 0.42$ ,  $\beta_1 = 0.8$ ,  $\beta_2 = 0.7$ ,  $\lambda = 0.6$  e  $T_{ml} = 1.05$ , de acordo com [45].

O programa foi desenvolvido para sistemas físicos trifásicos, em que as três fases coexistem em qualquer momento. Assim, por um lado, em analogia com o que se fez para o problema bifásico (veja-se a secção 4.5), há que considerar, inicialmente, uma fase sólida muito pequena, com largura  $R_1(y, 0) = 1.5 \times 10^{-4}$ . Por outro lado, atendendo a que ambas as fronteiras móveis se movem, com o tempo, da esquerda para a direita do domínio espacial, impõe-se terminar a simulação quando a *interface* líquido-“mushy” atinge um determinado valor máximo, na vizinhança de  $x = 1$ , mas inferior a um. Obrigou-se a que o movimento dos vértices pertencentes a uma fronteira móvel fosse segundo retas paralelas ao eixo das abcissas. Quanto à “condição inicial” na fase sólida, definiu-se para todos os pontos uma temperatura constante igual a um.

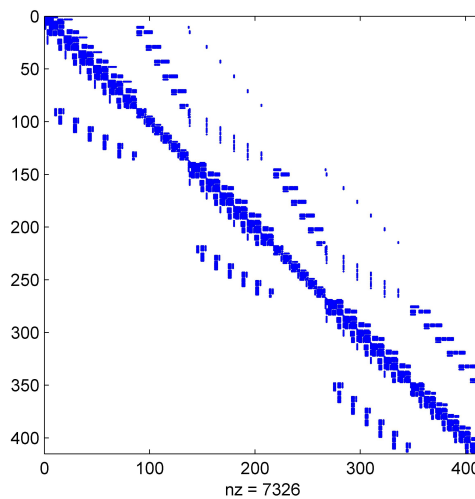


Figura 4.27: Mancha de elementos não nulos da matriz dos coeficientes do sistema de EDOs

Os resultados numéricos foram obtidos no intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 1.34$ , considerando aproximações quadráticas em cada um dos 144 elementos finitos da malha espacial inicial. Esta discretização é definida à custa de 33 nós uniformemente distribuídos no domínio espacial ocupado por cada uma das fases e origina um sistema de 414 EDOs na variável independente tempo. A matriz dos coeficientes deste sistema apresenta a configuração que a

figura 4.27 ilustra e tem um grau de esparsidade superior a 95.7%.

Os valores de tolerância (absoluta e relativa) para o integrador `ode15s` foram fixados em  $10^{-7}$  e as constantes de penalização usadas foram  $c_{m,L}^1 = 10^{-6}$ ,  $c_{m,L}^2 = 10^{-3}$  e  $c_{m,L}^3 = 10^{-7}$ . Para obter a solução numérica, o integrador deu 4709 passos; tentou, sem sucesso, 2371 passos temporais; requereu 45729 avaliações da função  $f$  (que define o segundo membro do sistema de EDOs); definiu 797 jacobianos de  $f$  e resolveu 12045 sistemas de equações lineares algébricas, efetuando 3451 factorizações  $LU$ . O tempo de computação gasto para completar todos os cálculos foi duas horas e vinte minutos.

Nas figuras 4.28 e 4.29 (à esquerda), representa-se a solução aproximada, seccionalmente polinomial de grau dois, obtida com o MEFM em diferentes instantes do intervalo de simulação. Nas mesmas figuras (à direita), apresenta-se a evolução dos nós da malha espacial que serve de suporte à definição da solução numérica em cada um dos instantes considerados. Ambas as fronteiras móveis estão assinaladas a cor vermelha. Pode observar-se a pouca mobilidade dos nós interiores à região de transição ao longo da integração, cuja atividade espacial é, praticamente, consequência direta do movimento das duas *interfaces* e que a malha de elementos finitos tem um comportamento fortemente adaptativo na região sólida, onde a solução apresenta maior variação.

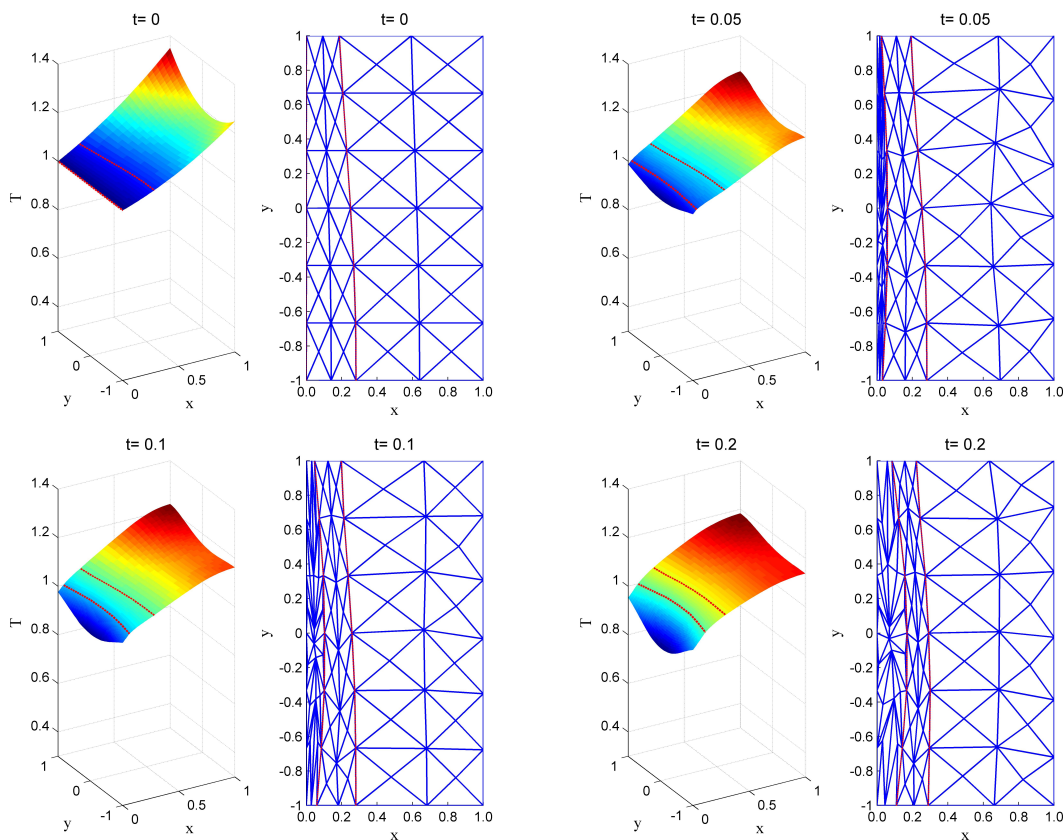


Figura 4.28: Perfis de temperatura nas três fases (à esquerda) e evolução da malha (à direita)

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

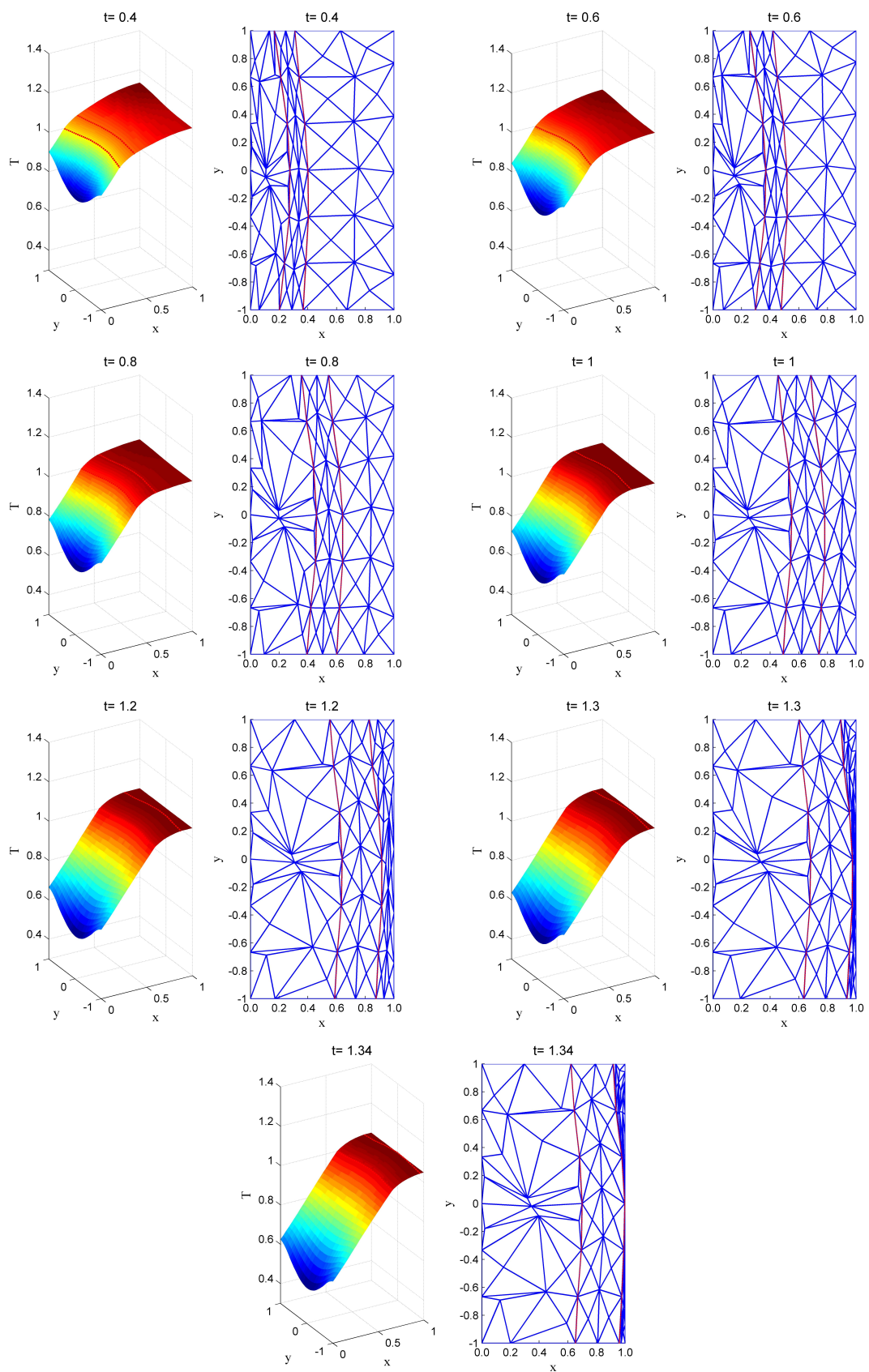


Figura 4.29: Perfis de temperatura nas três fases (à esquerda) e evolução da malha (à direita) (cont.)

Na figura 4.30 apresenta-se a evolução da *interface* interpolada sólido-“mushy” e a figura 4.31 mostra a *interface* interpolada líquido-“mushy”, em diferentes instantes do intervalo de integração. Os resultados obtidos mostram que o MEFM consegue descrever, eficientemente, a posição das duas fronteiras móveis.

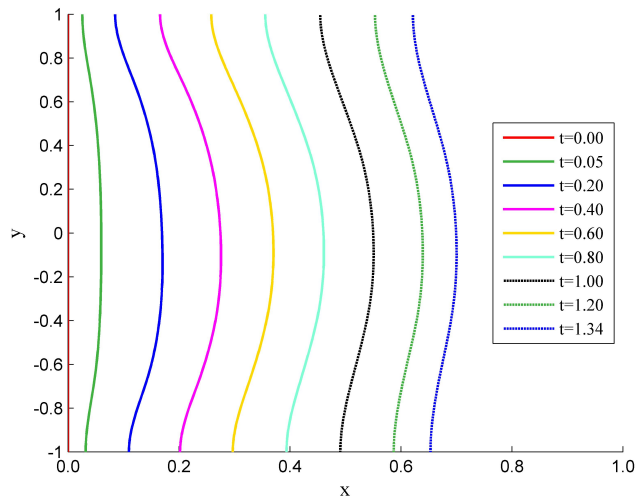


Figura 4.30: *Interface* sólido-“mushy” em diferentes instantes

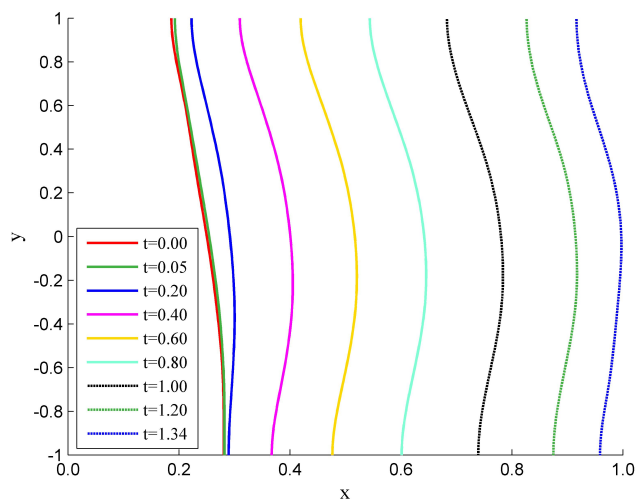


Figura 4.31: Evolução da *interface* líquido-“mushy”

Na figura 4.32 podem observar-se cortes da solução aproximada no instante  $t = 1$ , segundo planos de equação  $y = k$ , com  $k \in \{0, 0.3, 0.5, 0.7, 1\}$ . A posição da frente de solidificação está assinalada pelos asteriscos e os círculos marcam a separação entre o fluido e a fase intermédia de transição.

Por último, apresentam-se na figura 4.33 as histórias de temperatura em três pontos do domínio espacial: no ponto médio da fronteira onde se inicia a solidificação e nos dois extremos da fronteira definida por  $x = 1$ . Nestes dois últimos pontos, situados na fase líquida,

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

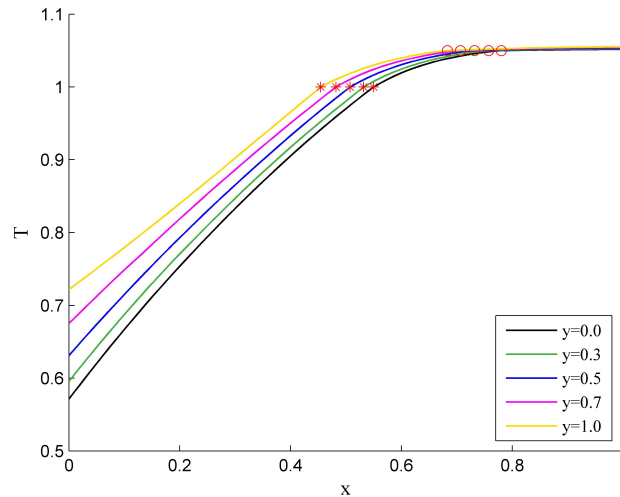


Figura 4.32: Temperatura, nas três fases, para diferentes valores de  $y$ , em  $t = 1$

há um decréscimo acentuado da temperatura nos instantes iniciais da simulação, variação esta que se vai atenuando no tempo, tendendo a temperatura para a constante  $T_{ml}$ . No ponto de coordenadas  $(0,0)^T$ , a temperatura sofre uma variação inicial e depois mantém um decréscimo praticamente linear até ao fim da simulação.

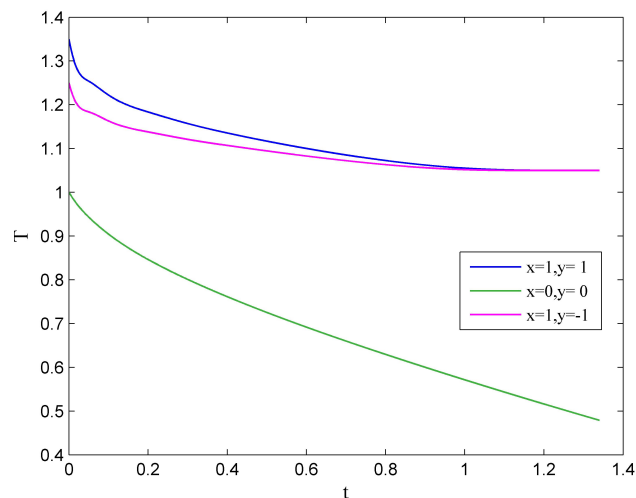


Figura 4.33: Histórias de temperatura em três pontos do domínio espacial

## 4.7 Algumas considerações

O conjunto de simulações realizadas permite retirar algumas ilações sobre o funcionamento do método. O MEFM mostrou-se eficaz na resolução de problemas com fronteira móvel, em espaços bidimensionais, mas a sua aplicação é bem mais complexa do que em 1-D, uma vez que a distorção da malha é mais frequente e a malha inicial escolhida pode ser determinante

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

para a qualidade da solução obtida com o MEFM. Assim, é necessário que o utilizador tenha uma ideia sobre a solução do sistema a simular para que defina, inicialmente, uma distribuição de elementos finitos adequada ao problema que se vai resolver. Relativamente ao grau da aproximação polinomial a utilizar em cada uma das fases, verificou-se que a variação na solução é muito pequena em corridas com graus distintos. Uma malha inicial ajustada ao sistema físico permite a obtenção de soluções de elevada precisão com um número reduzido de elementos finitos. Embora, a cada fase esteja associada uma malha de elementos finitos distinta, não foi possível a completa desanexação das malhas, pois tem que haver partilha dos nós globais resultantes da discretização da fronteira móvel e, conseqüentemente, dos segmentos nodais (entre eles) que definem a aproximação da fronteira móvel.

# Capítulo 5

## Conclusões

### 5.1 Considerações finais

Nesta tese, investiga-se a solubilidade global do sistema de equações parabólicas definidas num domínio limitado e conexo com fronteira móvel, em que a  $m$ -ésima equação, com  $m = 1, \dots, n$ , é caracterizada por

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} - a_m \left( \int_{\Omega_t} y_{\sigma(m)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \sum_{I=1}^d \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_I^2} = g_m(\mathbf{x}, t),$$

onde  $\mathbf{x} \in \Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ , ( $d = 1, 2$ ) e  $\sigma$  é uma permutação dos elementos de  $\{1, \dots, n\}$ . Demonstrou-se a existência e unicidade de soluções fortes para  $n = 1, 2$ , podendo usar-se as mesmas técnicas para garantir a solubilidade do problema para qualquer número finito de equações. O resultado relativo ao decaimento exponencial das soluções foi obtido diretamente no domínio não cilíndrico com  $d = 1$ . Adicionalmente, o algoritmo numérico baseado no MEFM permitiu determinar a solução aproximada do problema inicial, sem haver necessidade de o transformar, previamente, noutro problema equivalente definido num domínio cilíndrico. Refira-se que, neste último problema, obtido através de uma mudança de variável para fixar a fronteira do domínio espacial, cada EDP tem mais um termo e é mais complexa que a original. Assim, recorrendo ao MEFM, é possível evitar o esforço computacional acrescido inerente à simulação do problema transformado. Os exemplos numéricos apresentados mostram a influência dos dados iniciais no comportamento assintótico das soluções. Tanto quanto é possível saber, estes resultados são os primeiros nesta direção para equações com um termo difusivo não local do tipo apresentado.

Desenvolveu-se uma formulação do MEFM com aproximações locais de grau arbitrário para determinar a solução numérica de uma vasta classe de problemas com fronteira móvel, modelados por um sistema de EDPs parabólicas do tipo

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \sum_{I=1}^d \mathbf{F}_I \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_I^2} + \mathbf{g} \left( \mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_d} \right),$$

definidas em domínios espaciais de  $\mathbb{R}^d$ , com  $d = 1, 2$ , que constitui uma extensão do trabalho de Coimbra [28]. Admitem-se as seguintes hipóteses:

- existem condições de fronteira não lineares numa fronteira móvel;

- cada função coordenada do vetor das incógnitas  $\mathbf{y}(\cdot, t)$  tem associado um domínio  $D_m(t)$ , contido no domínio espacial do problema que, no caso bidimensional, pode possuir uma fronteira não poligonal;
- a discretização de  $D_m(0)$  é independente das outras malhas espaciais, podendo não o ser completamente;
- podem existir duas (ou mais) *interfaces* que evoluem continuamente no tempo.

Estas novas hipóteses que, por um lado, introduzem mais complexidade no desenvolvimento e implementação do algoritmo numérico, permitem, por outro lado, a simulação de um leque alargado, bem geral, de problemas com fronteira totalmente ou parcialmente móvel, incluindo problemas com mudança de fases, com uma ou mais fases de interesse, e problemas cujas soluções apresentam declives abruptos, que evoluem no tempo. O facto de se considerar a possibilidade de existirem múltiplas *interfaces* móveis, no desenvolvimento do algoritmo numérico, é inovador em problemas com domínios espaciais bidimensionais.

O algoritmo computacional foi desenvolvido em ambiente Matlab. Foram construídas funções do Matlab absolutamente gerais, que implementam a discretização espacial baseada no MEFM com funções de base seccionalmente polinomiais de grau arbitrário. Estudaram-se malhas bidimensionais possuindo diferentes tipos de simetria e a sua adaptabilidade no tempo. É de salientar que, o código assim desenvolvido pode ser usado por um utilizador com conhecimentos básicos desta linguagem de programação, para resolver, de modo eficiente, uma grande variedade de problemas evolutivos do tipo apresentado, o que inclui a determinação da posição da fronteira num dado instante. A intervenção do utilizador foi reduzida ao mínimo: é necessária apenas para caracterizar o problema a ser resolvido. O MEFM foi aplicado, com sucesso, a vários problemas da ciência e da engenharia, que possuem fronteira móvel. Os resultados numéricos obtidos permitem concluir que é possível alcançar boas soluções de problemas difíceis com um reduzido número de elementos finitos, usando aproximações seccionalmente polinomiais de grau elevado. Numa outra perspetiva, o MEFM dá uma resposta adequada à questão da localização das *interfaces* móveis ao longo do tempo, permitindo descrever eficientemente as posições de todas as fronteiras móveis.

Em conclusão, pensa-se que o algoritmo computacional desenvolvido constitui uma importante contribuição para a resolução de problemas com fronteira móvel. No entanto, há que apontar alguns aspetos que podem influenciar de algum modo a qualidade das soluções obtidas, nomeadamente, em domínios espaciais bidimensionais:

- para se obter uma boa definição da posição da fronteira móvel é necessário definir, de forma adequada, o número e a distribuição inicial dos nós, especialmente, quando esta

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

desenvolve curvaturas acentuadas e/ou vários extremos relativos, pelo que o utilizador deste método deve possuir algum conhecimento da forma como a fronteira móvel deverá evoluir;

- na simulação de um modelo em que, prematuramente, coexistam duas fases, mas não inicialmente, é necessário a introdução de uma fase inicial relativamente pequena, requerendo a definição de uma malha suficientemente fina para que haja uma boa descrição da solução, mas minimizando a probabilidade desta degenerar;
- a escolha da malha inicial pode revelar-se decisiva para a obtenção de soluções de qualidade em todo o intervalo de integração no caso da solução e/ou a fronteira móvel apresentar algum tipo de simetria, sendo necessário que o utilizador tenha alguma experiência numérica na definição de estratégias para correção de situações em que haja desajustamento da malha a partir de um dado instante.

## 5.2 Perspetivas de trabalho futuro

Por um lado, apesar das potencialidades reveladas pelo MEFM, é necessário desenvolver-se ainda muito trabalho no sentido do seu aperfeiçoamento. Assim, em relação ao trabalho futuro, desenham-se as seguintes perspetivas:

1. Simular outros tipos de problemas para testar as performances do método;
2. Reduzir a complexidade do código, com a vetorização de todas as funções, por forma a reduzir os custos computacionais utilizando todas as capacidades do integrador;
3. Em termos de tratamento teórico, generalizar o MEFM de modo a permitir a simulação de sistemas físicos descritos por um sistema de EDPs de formulação geral com fronteira móvel em domínios espaciais tridimensionais.

Por outro lado, o trabalho aqui desenvolvido para se demonstrarem os resultados teóricos, poderá vir a ser continuado, nomeadamente, ainda se poderá estudar a solubilidade global do sistema

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u = f_1(x, t), \\ v_t - a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v = f_2(x, t), \end{cases}$$

num domínio com fronteira móvel  $\Omega_t \times ]0, T]$ , assumindo que  $l_1, l_2 : L^2(\Omega_t) \rightarrow \mathbb{R}$  são formas lineares contínuas,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  e  $p \geq 1$ .



## Bibliografia

- [1] S. G. Ahmed and S. A. Meshrif. A new numerical algorithm for 2D moving boundary problems using a boundary element method. *Comput. Math. Appl.*, 58(7):1302-1308, 2009. 3
- [2] J. Albery, C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose. Matlab implementation of the finite element method in elasticity. *Computing*, 69(3):239-263, 2002. 105
- [3] R. M. P. Almeida, J. C. M. Duque, J. Ferreira, and R. J. Robalo. Convergence of the Crank-Nicolson-Galerkin finite element method for a class of nonlocal parabolic systems with moving boundaries. <http://arxiv.org/abs/1401.8220>, 2013. 8, 91, 101
- [4] R. M. P. Almeida, J. C. M. Duque, J. Ferreira, and R. J. Robalo. The Crank-Nicolson-Galerkin finite element method for a nonlocal parabolic equation with moving boundaries. [http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/Jorge\\_Ferreira\\_Almeida\\_Duque\\_\\_preprint\\_017\\_2013.pdf](http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/Jorge_Ferreira_Almeida_Duque__preprint_017_2013.pdf), 2013. 8
- [5] R. Almgren. Variational algorithms and pattern formation in dendritic solidification. *J. Comput. Phys.*, 106(2):337-354, 1993. 115
- [6] G. B.-Ferraris and F. Manenti. Improving the selection of interior points for one-dimensional finite element methods. *Comput. Chem. Engrg.*, 40:41-44, 2012. 10, 21
- [7] M. J. Baines, M. E. Hubbard, and P. K. Jimack. A moving mesh finite element algorithm for the adaptive solution of time-dependent partial differential equations with moving boundaries. *Appl. Numer. Math.*, 54(3-4):450-469, 2005. 3, 4, 115
- [8] S. I. Barry and J. Cauce. Exact and numerical solutions to a Stefan problem with two moving boundaries. *Appl. Math. Modelling*, 32(1):83-98, 2008. 3, 4, 110, 112
- [9] G. Beckett, J. A. Mackenzie, and M. L. Robertson. A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional Stefan problems. *J. Comput. Phys.*, 168(2):500-518, 2001. 4
- [10] R. Benabidallah and J. Ferreira. On hyperbolic-parabolic equations with nonlinearity of Kirchhoff-Carrier type in domains with moving boundary. *Nonlinear Anal.*, 37(3, Ser. A: Theory Methods):269-287, 1999. 1, 52
- [11] M. Bendahmane and M. A. Sepúlveda. Convergence of a finite volume scheme for nonlocal reaction-diffusion systems modelling an epidemic disease. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 11(4):823-853, 2009. 6, 52

- [12] L. P. Bos. Bounding the Lebesgue function for Lagrange interpolation in a simplex. *J. Approx. Theory*, 38(1):43-59, 1983. 22
- [13] J. P. Boyd. A numerical comparison of seven grids for polynomial interpolation on the interval. *Comput. Math. Appl.*, 38(3-4):35-50, 1999. 22
- [14] M. Briani, A. Sommariva, and M. Vianello. Computing Fekete and Lebesgue points: simplex, square, disk. *J. Comput. Appl. Math.*, 236(9):2477-2486, 2012. 22
- [15] A. C. Briozzo, M. F. Natale, and D. A. Tarzia. Explicit solutions for a two-phase unidimensional Lamé-Clapeyron-Stefan problem with source terms in both phases. *J. Math. Anal. Appl.*, 329(1):145-162, 2007. 1, 52
- [16] L. A. Caffarelli and L. C. Evans. Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 81(3):199-220, 1983. 1
- [17] N. N. Carlson and K. Miller. Design and application of a gradient-weighted moving finite element code. II. In two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(3):766-798, 1998. 3
- [18] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, J. Ferreira, and R. Benabidallah. On global solvability and asymptotic behaviour of a mixed problem for a nonlinear degenerate Kirchhoff model in moving domains. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 10(2):179-196, 2003. 51
- [19] N.-H. Chang and M. Chipot. On some mixed boundary value problems with nonlocal diffusion. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14(1):1-24, 2004. 6
- [20] L.-S. Chao and H.-C. Peng. Adaptive time stepping strategy for solidification processes based on modified local time truncation error. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 79(10):1245-1263, 2009. 3
- [21] H. Chen, C. Min, and Gibou F. A numerical scheme for the Stefan problem on adaptive Cartesian grids with supralinear convergence rate. *J. Comput. Phys.*, 228(16):5803-5818, 2009. 3, 115
- [22] S. Chen, B. Merriman, S. Osher, and P. Smereka. A simple level set method for solving Stefan problems. *J. Comput. Phys.*, 135(1):8-29, 1997. 115
- [23] M. Chipot. *Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. 51, 59
- [24] M. Chipot and B. Lovat. Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems. In *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 7 (Athens, 1996)*, volume 30, pages 4619-4627, 1997. 6, 51

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

- [25] M. Chipot and B. Lovat. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity*, 3(1):65-81, 1999. 6
- [26] M. Chipot and L. Molinet. Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems. *Appl. Anal.*, 80(3-4):279-315, 2001. 6
- [27] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955. 58, 72, 83
- [28] M. D. C. Coimbra. *Método dos Elementos Finitos Móveis: Aplicação a sistemas de equações de derivadas parciais bidimensionais*. PhD thesis, 2000. Tese de Doutoramento-Universidade do Porto (Portugal). 4, 27, 38, 141
- [29] M. D. C. Coimbra, C. Sereno, and A. E. Rodrigues. A moving finite element method for the solution of two-dimensional time-dependent models. *Appl. Numer. Math.*, 44:449-469, 2003. 4, 10
- [30] M. D. C. Coimbra, C. Sereno, and A. E. Rodrigues. Moving finite element method: applications to science and engineering problems. *Comput. Chem. Engng.*, 28:597-603, 2004. 3, 4, 10, 28, 30
- [31] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes, and J. Ferreira. On a class of problems involving a nonlocal operator. *Appl. Math. Comput.*, 147(2):475-489, 2004. 6, 51
- [32] G. R. Cowper. Gaussian quadrature formulas for triangles. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 7:405-408, 1973. 42
- [33] J. Crank. *Free and moving boundary problems*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1987. 1, 2, 3, 4, 9
- [34] M. J. Davey, K. A. Landman, M. J. McGuinness, and H. N. Jin. Mathematical modeling of rice cooking and dissolution in beer production. *AIChE J.*, 48(8):1811-1826, 2002. 113
- [35] D. A. Dunavant. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 21(6):1129-1148, 1985. 42
- [36] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, S. N. Antontsev, and J. Ferreira. A reaction-diffusion model for the nonlinear coupled system: existence, uniqueness, long time behavior and localization properties of solutions. [http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint\\_2013\\_08\\_Antontsev.pdf](http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint_2013_08_Antontsev.pdf), 2013. 52
- [37] J. Ferreira. On weak solutions of a nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential equation. *Mat. Apl. Comput.*, 14(3):269-283, 1995. 70, 81

- [38] J. Ferreira and N. A. Lar'kin. Decay of solutions of nonlinear hyperbolic-parabolic equations in noncylindrical domains. *Commun. Appl. Anal.*, 1(1):75-81, 1997. 52, 70, 81
- [39] E. Feulvarch, J. M. Bergheau, and J. B. Leblond. An implicit finite element algorithm for the simulation of diffusion with phase changes in solids. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 78(12):1492-1512, 2009. 4
- [40] F. C. Frank. Radially symmetric phase growth controlled by diffusion. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 201:586-599, 1950. 115
- [41] A. Friedman and B. Hu. A Stefan problem for multidimensional reaction-diffusion systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(5):1212-1234, 1996. 1
- [42] A. Ghoneim and O. A. Ojo. Numerical modeling and simulation of a diffusion-controlled liquid-solid phase change in polycrystalline solids. *Comput. Mater. Sci.*, 50(3):1102-1113, 2011. 3
- [43] V. Gülkaç. On the finite differences schemes for the numerical solution of two-dimensional moving boundary problem. *Appl. Math. Comput.*, 168(1):549-556, 2005. 3
- [44] R. S. Gupta and A. Kumar. Treatment of multi-dimensional moving boundary problems by coordinate transformation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28:1355-1366, 1985. 3
- [45] S. C. Gupta. A moving grid numerical scheme for multi-dimensional solidification with transition temperature range. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 189(2):525-544, 2000. 122, 126, 133, 135
- [46] S. C. Gupta. *The classical Stefan problem*, volume 45 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2003. Basic concepts, modelling and analysis. 2
- [47] N. Hannoun, V. Alexiades, and T. Z. Mai. A reference solution for phase change with convection. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 48(11):1283-1308, 2005. 4
- [48] W. Heinrichs. Improved Lebesgue constants on the triangle. *J. Comput. Phys.*, 207(2):625-638, 2005. 22
- [49] P. Hillion. Numerical integration on a triangle. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 11(5):797-815, 1977. 42, 43
- [50] A. C. Hindmarsh. Lsode and lsodi, two new initial value ordinary differential equation solvers. *ACM-SIGNUM Newsletter*, 15(4):10-11, 1980. 7

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

- [51] W. Huang and R. D. Russell. A high-dimensional moving mesh strategy. In *Proceedings of the International Centre for Mathematical Sciences Conference on Grid Adaptation in Computational PDEs: Theory and Applications (Edinburgh, 1996)*, volume 26, pages 63-76, 1998. 3
- [52] W. Huang and R. D. Russell. *Adaptive moving mesh methods*, volume 174 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2011. 4, 12
- [53] M. E. Hubbard, M. J. Baines, and P. K. Jimack. Consistent Dirichlet boundary conditions for numerical solution of moving boundary problems. *Appl. Numer. Math.*, 59(6):1337-1353, 2009. 4
- [54] P. K. Jimack. On steady and large time solutions of the semi-discrete moving finite element equations for one-dimensional diffusion problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 12(4):545-564, 1992. 27
- [55] I. N. Katz. Integration of triangular finite elements containing corrective rational functions. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 11(1):107-114, 1977. 42
- [56] C.-J. Kim and M. Kaviany. A numerical method for phase-change problems with convection and diffusion. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35(2):457-467, 1992. 3
- [57] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978. 58
- [58] R. P. Kulkarni. Approximate solution of multivariable integral equations of the second kind. *J. Integral Equations Appl.*, 16(4):343-374, 2004. 24
- [59] N. A. Lar'kin. Global solvability of a boundary value problems for a class of quasi-linear hyperbolic equations. *Siberian Math. J.*, 1:82-88, 1981. 79
- [60] X.-P. Lian, X.-L. Cheng, and W.-M. Han. Two algorithms for two-phase Stefan type problems. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 24(3):298-308, 2009. 4
- [61] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969. 53, 64, 76
- [62] J. N. Lyness and R. Cools. A survey of numerical cubature over triangles. In *Mathematics of Computation 1943-1993: a half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 127-150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. 43

- [63] J. N. Lyness and D. Jespersen. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Math. Appl.*, 15:19-32, 1975. 42
- [64] A. O. Marinho, O. A. Lima, and A. T. Lourêdo. Exponential decay for nonlinear problem in non cylindrical domain. *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, 4(33-36):1647-1654, 2010. 51
- [65] V. Mazhukin and M. Chuiko. Solution of the multi-interface Stefan problem by the method of dynamic adaptation. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2(3):283-294, 2002. 3
- [66] A. M. Meirmanov. *The Stefan problem*, volume 3 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992. Translated from the Russian by Marek Niezgodka and Anna Crowley, With an appendix by the author and I. G. Götz. 2
- [67] J. Mencinger. Numerical simulation of melting in two-dimensional cavity using adaptive grid. *J. Comput. Phys.*, 198(1):243-264, 2004. 4
- [68] G. H. Meyer. Multidimensional Stefan problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10:522-538, 1973. 2
- [69] K. Miller. Moving finite elements. II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1033-1057, 1981. 4, 9, 27
- [70] K. Miller. A geometrical-mechanical interpretation of gradient-weighted moving finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(1):67-90, 1997. 25
- [71] K. Miller and R. N. Miller. Moving finite elements. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1019-1032, 1981. 4, 9
- [72] M. Nakao. Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 30(2):257-265, 1976. 51, 70
- [73] R. H. Nochetto, M. Paolini, and C. Verdi. A fully discrete adaptive nonlinear Chernoff formula. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(4):991-1014, 1993. 2
- [74] A. Novotný and I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, volume 27 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004. 60
- [75] J. Papac, F. Gibou, and C. Ratsch. Efficient symmetric discretization for the Poisson, heat and Stefan-type problems with Robin boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 229(3):875-889, 2010. 115

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

- [76] C. A. Raposo, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán, D. C. Pereira, and M. L. Santos. Solution and asymptotic behaviour for a nonlocal coupled system of reaction-diffusion. *Acta Appl. Math.*, 102(1):37-56, 2008. 6, 52
- [77] H. T. Rathod, K. V. Nagaraja, and B. Venkatesudu. Symmetric Gauss Legendre quadrature formulas for composite numerical integration over a triangular surface. *Appl. Math. Comput.*, 188(1):865-876, 2007. 42, 43
- [78] P. Rattanadecho and S. Wongwises. Simulation of freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity under multiple heat sources with different temperature using a combined transfinite interpolation and pde methods. *Comput. Chem. Eng.*, 31(4):318-333, 2007. 3
- [79] M. A. Rincon and M. O. Lacerda. Error analysis of thermal equation with moving ends. *Math. Comput. Simulation*, 80(11):2200-2215, 2010. 1
- [80] R. J. Robalo. Método dos elementos finitos móveis: Aplicação a sistemas com fronteiras móveis, 1998. Dissertação de Mestrado-Universidade da Beira Interior (Portugal). 34
- [81] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and J. Ferreira. Global solvability, exponential decay and mfem approximate solution of a nonlinear coupled system with moving boundary. [http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint%20015\\_CMAF\\_Jorge\\_Ferreira.pdf](http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint%20015_CMAF_Jorge_Ferreira.pdf), 2013. 8
- [82] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and J. Ferreira. A reaction-diffusion model for a class of nonlinear parabolic equations with moving boundaries: existence, uniqueness, exponential decay and simulation. *Appl. Math. Modelling*, a publicar, 2014. doi:10.1016/j.apm.2014.04.045. 8
- [83] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and A. E. Rodrigues. A Matlab implementation of the moving finite element method for simulation of pulp washing problems. In *MAMERN13: 5th International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources*, April 2013. ISBN: 978-84-338-5505-3. 8
- [84] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and A. E. Rodrigues. A Matlab implementation of the mfem for the solution of time-dependent models. In *Book of Abstracts - 6th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation - 3rd Portuguese Polish Workshop on Biometry*, July 2012. ISBN: 978-972-9473-62-3. 8

- [85] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and A. E. Rodrigues. Implementação Matlab do método dos elementos finitos móveis para a resolução de problemas de convecção-difusão-reacção. In *Métodos Numéricos em Engenharia 2011*, page 263, June 2011. 7, 8
- [86] R. J. Robalo, R. M. P. Almeida, M. D. C. Coimbra, and A. E. Rodrigues. The numerical solution of diffusion model using the moving finite element method. In *International Conference on Engineering UBI2011*, November 2011. ISBN: 978-989-654-079-1. 8
- [87] J. D. Rodrigues. *Desenvolvimento do Método de Elementos Finitos Móveis para a simulação de processos*. PhD thesis, 2010. Tese de Doutoramento-Universidade do Porto (Portugal). 3, 111
- [88] M. E. Rose. An enthalpy scheme for Stefan problems in several dimensions. *Appl. Numer. Math.*, 12(1-3):229-238, 1993. Special issue to honor Professor Saul Abarbanel on his sixtieth birthday (Neveh, 1992). 2
- [89] L. I. Rubenstein. *The Stefan problem*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by A. D. Solomon, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27. 2
- [90] B. Sangar, O. Diallo, and L. Som. A new MATLAB implementation and analysis of a moving grid method for systems of one-dimensional time-dependent partial differential equations based on the equidistribution principle. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, 25(1):66-85, 2012. 105
- [91] M. L. Santos, J. Ferreira, and C. A. Raposo. Existence and uniform decay for a nonlinear beam equation with nonlinearity of Kirchhoff type in domains with moving boundary. *Abstr. Appl. Anal.*, (8):901-919, 2005. 1, 52, 70, 81
- [92] J. Sarada and K. V. Nagaraja. Generalized Gaussian quadrature rules over two-dimensional regions with linear sides. *Appl. Math. Comput.*, 217(12):5612-5621, 2011. 43
- [93] P. Saucez, L. Some, and A. V. Wouwer. Matlab implementation of a moving grid method based on the equidistribution principle. *Appl. Math. Comput.*, 215(5):1821-1829, 2009. 105
- [94] C. Sereno, A. E. Rodrigues, and J. Villadsen. The moving finite element method with polynomial approximation of any degree. *Comput. Chem. Engrg.*, 15:25-33, 1991. 4
- [95] C. Sereno, A. E. Rodrigues, and J. Villadsen. Solution of partial differential equations systems by the moving finite element method. *Comput. Chem. Engrg.*, 16(6):583-592, 1992. 4

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

- [96] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. The MATLAB ODE suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1):1-22, 1997. Dedicated to C. William Gear on the occasion of his 60th birthday. 7, 105, 106
- [97] P. Silvester. Symmetric quadrature formulae for simplexes. *Math. Comp.*, 24:95-100, 1970. 43
- [98] M. Spivak. *Cálculo en Variedades*. Editorial Reverté, s.a., 1988. 23
- [99] M. A. Taylor, B. A. Wingate, and R. E. Vincent. An algorithm for computing Fekete points in the triangle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5):1707-1720 (electronic), 2000. 22
- [100] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. 83, 87
- [101] C. Verdi. Numerical methods for phase transition problems. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 1(1):83-108, 1998. 2
- [102] C. Verdi. Stefan problems and numerical analysis. In *Analysis and numerics of partial differential equations*, volume 4 of *Springer INdAM Ser.*, pages 37-45. Springer, Milan, 2013. 2
- [103] J. Villadsen and M. L. Michelsen. Solution of differential equation models by polynomial approximation. Prentice-Hall International Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1978. 44
- [104] A. Visintin. Introduction to Stefan-type problems. In *Handbook of differential equations: evolutionary equations. Vol. IV*, Handb. Differ. Equ., pages 377-484. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008. 2
- [105] A. Wachter. A comparison of the string gradient weighted moving finite element method and a parabolic moving mesh partial differential equation method for solutions of partial differential equations. *Cent. Eur. J. Math.*, 11(4):642-663, 2013. 4, 27
- [106] A. Wachter and I. Sobey. String gradient weighted moving finite elements in multiple dimensions with applications in two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2):459-480 (electronic), 2007. 3, 25, 28
- [107] S. Wandzura and H. Xiao. Symmetric quadrature rules on a triangle. *Comput. Math. Appl.*, 45(12):1829-1840, 2003. 42

- [108] A. J. Wathen and M. J. Baines. On the structure of the moving finite-element equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 5(2):161-182, 1985. 27
- [109] X. Xu. *Moving mesh methods for moving boundary problems and higher order partial differential equations*. PhD thesis, 2008. Thesis (Ph.D.)-Simon Fraser University (Canada). 9, 122, 125
- [110] L. Zhang, T. Cui, and H. Liu. A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra. *J. Comput. Math.*, 27(1):89-96, 2009. 42
- [111] S. Zheng and M. Chipot. Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms. *Asymptot. Anal.*, 45(3-4):301-312, 2005. 6, 51

## Notação

### Letras minúsculas

- $a_K$  – comprimento da  $K$ -ésima aresta da malha de elementos finitos
- $a_m$  – função contínua segundo Lipschitz, positiva e limitada, que define o coeficiente do termo de difusão da  $m$ -ésima EDP dos modelos estudados no Capítulo 3
- $b_1, b_2$  – funções reais definidas imediatamente antes do problema  $(P_v)$
- $c_{im}(t)$  – coeficientes da combinação linear que define  $v_m(t)$
- $c_{m,L}^i, i = 1, 2, 3$  – constantes positivas utilizadas na definição dos termos de penalização do movimento dos nós.  $c_{m,L}^3$  representa a medida mínima permitida de  $\Delta_{m,L}$
- $d$  – número de componentes de  $\mathbf{x}$
- $e_l$  –  $l$ -ésimo vetor da base canónica de  $\mathbb{R}^n$
- $\mathbf{f}$  – função vetorial que define o segundo membro do sistema (4.1)
- $f_r(d)$  – número de pontos de interpolação ou nós locais no elemento finito  $\Delta$
- $g_m$  – função real associada à  $m$ -ésima EDP do sistema (1.1)
- $\mathbf{g}^i$  – vetor de funções reais associado à fase  $i$  do sistema (2.67)
- $h^i$  – função real que define a fronteira móvel de  $D^i$
- $i_s$  – número local em  $L_s$ , do  $k$ -ésimo nó global
- $j_s$  – número local em  $L_s$ , do  $j$ -ésimo vértice da malha
- $\ell^i(\mathbf{v})$  –  $i$ -ésimo polinómio da base local da interpolação de Lagrange em termos da variável “normalizada”, definido por (2.14)
- $\ell^i(\mathbf{x})$  – polinómio da base de Lagrange associado ao  $i$ -ésimo nó de  $\Delta_{m,L}$
- $l : L^2(\Omega_t) \rightarrow \mathbb{R}$  – forma linear contínua definida no teorema 3.1
- $l_1$  – forma linear contínua definida por  $l_1(v) = \int_0^1 \gamma(t)v(y, t)dy$
- $m_{a_i}$  – mínimo dos valores da função positiva  $a_i$
- $\mathbf{n}$  – vetor normal unitário exterior
- $n$  – número de EDPs do sistema (1.1), ou um número natural quando em  $\mathbb{R}^n$  ou  $( )^{(n)}$
- $q$  – número de pontos em  $\Delta$  da quadratura de Gauss simétrica para o cálculo dos integrais duplos ou, número de pontos de quadratura quer em  $\zeta_1$ , quer em  $\zeta_2$  para o cálculo dos integrais do segundo grupo através de um produto de duas quadraturas de Gauss-Legendre em 1-D
- $q_m$  – número de pontos da quadratura de Lobatto para o cálculo dos integrais do terceiro grupo
- $r$  – grau da aproximação local em  $\Delta_{m,L}$ ,  $r = r(m, L) > 1$ , exceto no Capítulo 3
- $s_k$  – número de elementos finitos do suporte associado à  $k$ -ésima função básica global

- $s_{kj}$  — número de elementos finitos do suporte da função básica associada a  $\mathbf{X}_{m,j}$
- $\mathbf{s}_m(\tau, t)$  — vetor posição dos pontos do gráfico de  $y_m$ , definido por (2.27)
- $\mathbf{s}_{0m}$  — ponto base obtido fixando todos os parâmetros de dependência de  $y_m$
- $t$  — variável independente de tempo
- $t_*$  — valor particular de variável tempo
- $\mathbf{u}$  — solução do problema ( $S_u$ )
- $u$  — solução do problema ( $P_u$ )
- $\mathbf{v}$  — solução do problema ( $S_v$ ), no Capítulo 3
- $v$  — solução do problema ( $P_v$ )
- $\mathbf{v}^m$  — solução do sistema não linear de EDOs na variável  $t$ , ( $S_v^m$ )
- $v_m(t)$  — solução do problema ( $P_v^m$ )
- $w^i$  — função real que define a derivada parcial de  $h^i$ , em ordem a  $t$
- $w_j(y)$  —  $j$ -ésima função da base  $\mathcal{B}$
- $\mathbf{x}$  — variável independente de espaço,  $d$ -dimensional, com  $d = 1, 2$
- $x_I$  —  $I$ -ésima coordenada cartesiana da variável de espaço  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}_{m,L}^i$  —  $i$ -ésimo nó de interpolação em  $\Delta_{m,L}$ , é igual a  $\mathcal{T}_{m,L}(v^i)$
- $\mathbf{y}$  — solução do modelo matemático constituído pelo sistema de EDPs (1.1)
- $\mathbf{y}^i$  — vetor solução das funções associadas à fase  $i$  do modelo matemático constituído pelo sistema de EDPs (2.67)
- $y$  — variável de espaço unidimensional, nos problemas ( $P_v$ ) e ( $S_v$ )
- $y_m$  — função das variáveis  $\mathbf{x}$  e  $t$ , que é a  $m$ -ésima componente da solução  $\mathbf{y}$  do modelo matemático constituído pelo sistema de EDPs (1.1)

## Letras maiúsculas

- $\mathcal{B}_r$  — base do espaço  $\mathbb{P}_r^d(\Delta)$
- $\mathcal{B} = \{w_j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  — base do espaço  $H_0^1([0, 1])$
- $\overline{D}$  — fecho do conjunto  $D$
- $D_{0m}$  — domínio espacial conexo inicial da função  $y_m$ ,  $D_{0m} \subset \mathbb{R}^d$
- $D_m(t)$  — domínio espacial da função  $y_m$ , no instante  $t$
- $D^i$  — domínio espacial associado à fase  $i$  do sistema físico
- $\widetilde{D}_m(t)$  — união dos elementos (finitos) de  $\mathcal{P}_m$ , define o domínio computacional associado à função  $y_m$ , no instante  $t$
- $E(t)$  — função energia global do sistema
- $E_{\mathcal{P}_m}$  — conjunto das arestas (nodais) da malha espacial  $\mathcal{P}_m$
- $\mathcal{F}$  — função objetivo definida pela expressão (2.31)

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$F_p$  – função real que define o segundo membro de uma condição de fronteira de Robin

$(F_I)_m, I = 1, d$  – função real associada à  $m$ -ésima EDP do sistema (1.1)

$(\mathbf{F}_I)^i$  – matriz diagonal de funções reais associada à fase  $i$  do sistema (2.67)

$G_{\mathcal{P}_m} = (V_{\mathcal{P}_m}, E_{\mathcal{P}_m})$  – grafo simples conexo planar que define a malha  $\mathcal{P}_m$

$\mathcal{H}_j$  – aproximação cúbica de Hermite da função  $Y_m$  na vizinhança de  $X_{m,j}$

$\mathcal{I}_{N_m}$  – operador interpolante definido por (2.16)

$L^{(i)}$  –  $i$ -ésima coordenada triangular (ou baricêntrica) de um ponto de  $\Delta, i = 1, \dots, d + 1$

$L_R$  – número do segundo elemento finito que contém a  $K$ -ésima aresta global, se esta não está contida em  $\partial D_m$

$L_s$  – número do primeiro elemento finito que contém a  $K$ -ésima aresta global

$L_{a_i}$  – constante de Lipschitz associada à função  $a_i$

$\mathcal{L}_m(\mathbf{Y})$  – operador diferencial de segunda ordem no espaço utilizado na eq. (2.29)

$M_{a_i}$  – máximo dos valores da função positiva  $a_i$

$N_m$  – número de elementos finitos (ou faces) que constituem a  $m$ -ésima malha espacial

$N_{v_m}$  – número de vértices que constituem a  $m$ -ésima malha espacial

$N_{e_m}$  – número de elementos de  $E_{\mathcal{P}_m}$

$N_{(\cdot)_m}$  – é igual a  $N_{v_m}$ , se  $d = 1$  e é igual a  $N_{e_m}$ , se  $d = 2$

$\tilde{N}_m$  – número de nós globais associados à malha espacial  $\mathcal{P}_m$

$\mathcal{O}$  – ponto de coordenadas  $(0, 0, \dots, 0)^T$ , que é a origem do sistema de referência

$\mathcal{P}_m$  – malha espacial ou conjunto dos elementos finitos associados a  $y_m$ , e é dependente do tempo

$Q = \Omega \times ]0, T[$  – domínio transformado de  $Q_t$  por  $\tau$

$Q_t = \Omega_t \times ]0, T[$  – domínio não cilíndrico do problema que se pretende resolver

$\mathcal{Q}_{m,L}$  – função de  $(X_I)_{m,L}^{(i)}$ , presente na definição das penalizações do movimento nodal

$\mathcal{R}_m$  – resíduo da  $m$ -ésima equação discretizada do sistema (1.1), definido por (2.29)

$\tilde{\mathcal{R}}_m$  – resíduo da  $m$ -ésima equação discretizada, em que  $Y$  é substituído por  $\tilde{Y}$

$\mathcal{S}_m$  – conjunto dos pontos do gráfico de  $y_m$  num dado instante

$\mathcal{S}_k$  – conjunto das permutações dos elementos de  $\{1, 2, \dots, k\}$

$\mathcal{S}_{m,L}$  – termo de penalização correspondente às forças do tipo mola para  $\Delta_{m,L}$ , definido por (2.32)

$T$  – tempo arbitrário positivo, usado no Capítulo 3

$\mathcal{T}_{m,L}$  – transformação afim do elemento finito  $\Delta$  com valores em  $\Delta_{m,L}$ , definida em (2.8)

$\mathcal{T}_{m,L}^e$  – transformação de  $\Delta$  em  $\Delta_{m,L}^e$ , definida por (2.8)

$\mathcal{T}_{m,L}^{-1}$  – inversa da transformação afim  $\mathcal{T}_{m,L}$

$\mathcal{U}$  – transformação do quadrado  $[0, 1]^2$  no elemento finito de referência bidimensional

- $V$  – velocidade normal da fronteira móvel
- $V_m$  – subespaço de  $H_0^1(]0, 1[)$  gerado pelos primeiros  $m$  vetores de  $\mathcal{B}$
- $V_{\mathcal{P}_m}$  – conjunto dos vértices (ou nós de separação) da malha espacial  $\mathcal{P}_m$
- $\mathcal{V}_{\varepsilon_j}(X_{m,j})$  – vizinhança de  $X_{m,j}$  de amplitude  $\varepsilon_j$
- $\mathcal{V}_{\varepsilon_k}$  – vizinhança de amplitude  $\varepsilon_k$ , do  $k$ -ésimo elemento nodal
- $\mathcal{V}_{\varepsilon_{m,L}}^{(i)}$  – vizinhança retangular da  $i$ -ésima aresta de  $\Delta_{m,L}$ , de largura  $\varepsilon_{m,L}^{(i)}$
- $W$  – função peso que caracteriza a família dos polinómios de Jacobi de um dado grau
- $\mathbf{X}_{m,j}$  –  $j$ -ésimo vértice da malha espacial  $\mathcal{P}_m$ , e é dependente do tempo
- $(X_I)_{m,j}(t)$  –  $I$ -ésima coordenada do vértice  $\mathbf{X}_{m,j}$ , no instante  $t$
- $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$  – representa o  $i$ -ésimo vértice de  $\Delta_{m,L}$ , com  $1 \leq i \leq d + 1$
- $(X_I)_{m,L}^{(i)}$  – representa a  $I$ -ésima coordenada do vértice  $\mathbf{X}_{m,L}^{(i)}$
- $\mathbf{X}_{s_j}$  – nó de separação pertencente a  $\Gamma_M$ , que é o  $s_j$ -ésimo vértice de  $\mathcal{P}_m$ , para algum  $m$
- $[\mathbf{X}_{m,j_i}, \mathbf{X}_{m,j_k}]$  – aresta nodal ou segmento de reta incidente aos vértices  $\mathbf{X}_{m,j_i}$  e  $\mathbf{X}_{m,j_k}$
- $[\mathbf{X}_{m,i}, \mathbf{X}_{m,j}, \mathbf{X}_{m,k}]$  – elemento finito triangular, definido pelos vértices  $\mathbf{X}_{m,i}$ ,  $\mathbf{X}_{m,j}$  e  $\mathbf{X}_{m,k}$  de  $\mathcal{P}_m$
- $Y$  – aproximação de  $y$
- $Y_v$  – vetor das incógnitas do sistema (4.1)
- $\tilde{Y}$  – solução aproximada regularizada
- $Y_m$  – uma aproximação de  $y_m$  seccionalmente polinomial, que é a  $m$ -ésima componente de  $Y$
- $\tilde{Y}_m$  – aproximação regularizada de  $y_m$
- $Y_{m,L} = Y_m|_{\Delta_{m,L}}$  – restrição da função  $Y_m$  a  $\Delta_{m,L}$
- $Y_m^k(t)$  – valor da função  $Y_m$  no  $k$ -ésimo nó global de  $\mathcal{P}_m$ , no instante  $t$
- $Y_{m,L}^i(t)$  – valor da função  $Y_m$  no  $i$ -ésimo nó de  $\Delta_{m,L}$ , no instante  $t$
- $Z_{m,L}$  – medida da área (ou do comprimento, se  $d = 1$ ) do elemento finito  $\Delta_{m,L}$

## Letras gregas

- $\alpha$  – função real da variável tempo, estritamente decrescente em  $[0, T]$
- $\tilde{\alpha}_m$  – função real associada à condição de fronteira para  $y_m$ , definida por (2.69)
- $\beta$  – função real da variável tempo, estritamente crescente em  $[0, T]$
- $\tilde{\beta}_m$  – função real associada à condição de fronteira para  $y_m$ , definida por (2.69)
- $\gamma$  – função dilatação definida por  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$
- $\gamma_0$  – ínfimo da função  $\gamma$  no intervalo  $[0, T]$
- $\gamma_1$  – supremo da função  $\gamma$  no intervalo  $[0, T]$
- $\tilde{\gamma}_m$  – parâmetro da condição de fronteira para  $y_m$ , definida por (2.69)
- $\delta_{i,j}$  – designa a função delta de Kronecker
- $\epsilon_{m,L}$  – termo de penalização correspondente às forças viscosas para  $\Delta_{m,L}$ , definido por (2.32)

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$\varepsilon_{m,L}^{(i)}$  – largura da vizinhança retangular de  $\Gamma_{m,L}^{(i)}$

$\zeta$  – variável de espaço relacionada com  $v$  através de  $v = \mathcal{U}(\zeta)$

$\eta$  – variável de espaço relacionada com  $\mathbf{x}$  através de (2.58)

$\theta_K$  – medida da amplitude do ângulo da rotação associada a  $\varphi_K$

$\nu$  – variável unidimensional de espaço normalizada

$\nu_m^\iota$  –  $\iota$ -ésimo ponto da quadratura de Lobatto

$\xi_m^k$  –  $k$ -ésimo nó global da malha espacial  $\mathcal{P}_m$

$\sigma$  – elemento de  $S_k$

$\sigma_i$  – permutação ímpar de  $S_3$

$\sigma_p$  – permutação par de  $S_3$

$\tau$  – parâmetro d-dimensional da função  $s_m$ , com domínio limitado

$\tau$  – difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^2$  definido por (3.2)

$v$  – variável “normalizada” de espaço, definida em (2.7)

$v_I$  –  $I$ -ésima coordenada da variável “normalizada” de espaço  $v$

$v^i$  –  $i$ -ésimo ponto de interpolação em  $\Delta$

$v^\iota$  –  $\iota$ -ésimo ponto em  $\Delta$  da quadratura de Gauss simétrica para o cálculo dos integrais duplos

$v^{(j)}$  –  $j$ -ésimo vértice de  $\Delta$

$v^{\iota,\kappa}$  – ponto de quadratura em  $\Delta$  correspondente de  $(\zeta_1^\iota, \zeta_2^\kappa)^T$  no quadrado  $[0, 1]^2$

$\varphi_K$  – transformação de coordenadas definida por (2.58), associada à  $K$ -ésima aresta global

$\omega^\iota$  – peso da quadratura de Gauss simétrica em  $v^\iota$

$\bar{\omega}^\iota$  – peso da quadratura de Gauss-Legendre em 1-D associada a  $\zeta_I^\iota$

$\omega_m^\iota$  – peso da quadratura de Lobatto associado a  $\nu_m^\iota$

$\Gamma_F$  – fronteira fixa do domínio espacial associado a  $y_m$

$\Gamma_M(t)$  – fronteira móvel do domínio espacial associado a  $y_m$ , no instante  $t$

$\Gamma_{m,L}^{(i)}$  –  $i$ -ésima aresta de  $\Delta_{m,L}$  no caso bidimensional

$\Lambda$  – operador diferencial definido em (2.36)

$\hat{\Lambda}$  – operador diferencial definido em (2.33)

$\Sigma_t$  – fronteira lateral de  $Q_t$

$\Upsilon_M$  – subconjunto de  $\{1, 2, \dots, M\}$

$\Phi_m^k$  – função interpoladora básica global associada ao nó  $\xi_m^k$  definida em (2.24)

$\Omega$  – domínio espacial com fronteira fixa

$\Omega_t$  – domínio espacial do problema que se pretende resolver, no instante  $t$

## Matrizes

$\mathbf{0}$  – matriz nula, de dimensão adequada

$\mathbf{1}_{n_l \times n_c}$  – matriz de uns com  $n_l$  linhas, por  $n_c$  colunas

$A$  – matriz quadrada de ordem  $f_r(d)$ , definida imediatamente a seguir a (2.57)

$A_1, A_2$  – *arrays* tridimensionais com 3 e 9 páginas, respetivamente, definidos a seguir a (2.57)

$A_d$  – matriz diagonal dos coeficientes de difusão, definida por  $a_{ii} = a_i \left( \int_{\Omega_t} u_{\sigma(i)}(x, t) dx \right)$

$A_{G_{\mathcal{P}_m}}$  – matriz de adjacência que define o grafo  $G_{\mathcal{P}_m}$

$B, B_{j_s}$  – *arrays* tridimensionais cujos elementos são integrais do segundo grupo, definidos imediatamente a seguir aos integrais do primeiro grupo

$C, C_J$  – *arrays* tridimensionais cujos elementos são integrais do terceiro grupo

$H^k$  – matriz hessiana da função  $\ell^k$

$M$  – matriz do sistema de EDOs (4.1), que é dependente do tempo e de  $Y_v$

$M^T$  – transposta da matriz  $M$

$R_{\theta_K}$  – matriz da (rotação associada à) transformação  $\varphi_K$

$T(t)$  – matriz da transformação  $\mathcal{T}_{m,L}$ , definida por (2.8)

$T^\varepsilon$  – matriz da transformação  $\mathcal{T}_{m,L}^\varepsilon$

$T(i, j)$  – designa o elemento da posição  $(i, j)$  da matriz  $T$

$T(i, :)$  – designa a linha  $i$  da matriz  $T$

$T(:, j)$  – designa a coluna  $j$  da matriz  $T$

$T^{-1}$  – inversa da matriz  $T$

## Outros símbolos

$\det(T)$  – determinante da matriz quadrada  $T$

$\text{int}(D)$  – conjunto dos pontos interiores a  $D$

q.s. – leia-se, quase sempre

$\text{supp}(\Phi_m^k)$  – suporte da função  $\Phi_m^k$ , que é o fecho do conjunto  $\{\mathbf{x} \in D_m : \Phi_m^k(\mathbf{x}) \neq 0\}$

$\partial D_m$  – fronteira do domínio espacial  $D_m$

$\nabla$  – denota o operador gradiente

$\triangle$  – elemento finito de referência ou unitário, definido por (2.7)

$\triangle_{m,L}(t)$  –  $L$ -ésimo elemento finito da malha espacial associada a  $y_m$ , no instante  $t$

$\triangle_{m,L}^\varepsilon$  – aberto contido no respetivo elemento finito e definido a seguir a (2.54)

$\forall$  – quantificador universal

$\exists$  – quantificador existencial

$\circ$  – composição de funções

$(\dot{\phantom{x}})$  – designa o operador  $d/dt(\phantom{x})$ , com a exceção de  $\dot{\Lambda}$

$(\phantom{x})_t$  – designa o operador  $\partial/\partial t(\phantom{x})$ , com a exceção de  $Q_t, \Sigma_t$  e  $\Omega_t$

$(\phantom{x})_{xx}$  – designa o operador  $\partial^2/\partial x^2(\phantom{x})$

## O MEFM para problemas evolutivos com fronteira móvel

$(P_u)$  – problema unidimensional com fronteiras móveis definido em (3.1)

$(P_v)$  – problema transformado de  $(P_u)$  por  $\tau$  e definido em (3.5)

$(S_u)$  – problema unidimensional com fronteiras móveis definido em (3.51)

$(S_v)$  – problema transformado de  $(S_u)$  por  $\tau$  e definido em (3.52)

$(P_v^m)$  – problema aproximado associado a  $(P_v)$  e definido em (3.6)

$(v_m)_{m \in \mathbb{N}} = (v_m)$  – sucessão de termo geral  $v_m$

$(u, w)_{L^2(D)}$  – produto escalar das funções  $u$  e  $w$  no espaço  $L^2(D)$

$|\cdot|$  – módulo de um número real ou simplificação de  $|\cdot|_{L^2(]0,1])}$ , consoante o contexto

$|u|_{L^2(D)}$  – norma da função  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  no espaço  $L^2(D)$

$\|\cdot\|$  – denota a norma no espaço  $H_0^1(]0, 1])$

$\rightarrow$  – indica uma convergência

$\rightharpoonup$  – denota uma convergência fraca ou na topologia fraca

$\rightharpoonup^*$  – denota uma convergência fraca estrela

$\hookrightarrow$  – denota uma imersão contínua

$\hookrightarrow^c$  – denota uma imersão compacta

$\square$  – denota o fim de uma demonstração

## Espaços de funções

$C^k(D) = C^k(D; \mathbb{R})$  – conjunto das funções reais  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis em  $D$

$E'$  – representa o dual do espaço de funções  $E$

$\mathcal{E}_{P_m}$  – subconjunto de  $C^0(D_m)$  definido por (2.22)

$H^1(D)$  – conjunto das funções reais com derivada fraca em  $L^2(D)$

$H_0^1(D)$  – conjunto das funções reais  $u \in H^1(D)$  e que valem zero em  $\partial D$

$L^p(D)$  – conjunto das funções reais mensuráveis  $u$  com  $\int_D |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}$  finito, para  $1 \leq p < \infty$

$L^\infty(D)$  – conjunto das funções reais mensuráveis  $u$  com  $\text{ess sup}_{\mathbf{x} \in D} |u(\mathbf{x})|$  finito

$L^p(a, b; \mathcal{X})$  – conjunto das funções mensuráveis  $u : ]a, b[ \rightarrow \mathcal{X}$ , com  $\int_a^b |u(t)|_{\mathcal{X}}^p dt$  finito, para  $1 \leq p < \infty$ , ou com  $\text{ess sup}_{t \in [a, b]} |u(t)|_{\mathcal{X}}$  finito, para  $p = \infty$

$\mathbb{P}_r^d(\Delta_{m,L})$  – conjunto dos polinómios em  $d$  variáveis de grau menor ou igual a  $r$ , com coeficientes reais, definidos em  $\Delta_{m,L}$

