

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR



**UBI**  
Covilhã  
Portugal

# **RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES 3D POR APROXIMAÇÃO MULTIQUÁDRICA**

Elaborado Por

André Silva

Orientado Por

Prof. Kouamana Bousson

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

Na

Faculdade de Engenharia

Departamento de Ciências Aeroespaciais

25 de Junho de 2010

*“É imprudente colocar dados na primeira técnica de interpolação disponível, sem cuidadosamente considerar como é que os resultados serão afectados pelos pressupostos inerentes ao método.”*

Burrough (1986)

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

## *Abstract*

Faculdade de Engenharia  
Departamento de Ciências Aeroespaciais

André Silva

Progress in the wider areas of technology has grown strongly in recent years. Areas such as aeronautics, meteorology, geological modeling, geology, climate patterns, stellar spectra, or human gene distributions, are regularly confronted with problems of surface reconstruction in various applications. The real numerical data is usually difficult to analyze. Any function that effectively correlate the actual data is difficult to obtain and of difficult interaction. There are many methods to reconstruct a continuous surface from scattered data or regularly spaced in the domain. In this thesis, the idea of the basic theory of Hardy multiquadric approach to surface reconstruction has been developed to approximate a given data set. This method is part of a class of methods known as methods of radial basis functions and we show its superiority in terms of accuracy and smoothness desired, and even with the reduced total number of data needed for reconstruction of the surface. The applications examples in this thesis are to digital terrain elevation (DEM), 3D surface reconstruction, but this method is easily extended to other areas in any dimension. We discuss its implementation, its performance and provide numerical simulations.

Keywords: Approximation, Hardy, Multiquadrics, Reconstruction, Surfaces.

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

## *Resumo*

Faculdade de Engenharia  
Departamento de Ciências Aeroespaciais

André Silva

O progresso nas mais vastas áreas de tecnologia tem crescido intensamente nos últimos anos. Áreas como a aeronáutica, a meteorologia, a modelação geológica, a geologia, os padrões climáticos, os espectros estelares, ou distribuições de genes humanos, confrontam-se regularmente com problemas de reconstrução de superfícies nas mais variadas aplicações. Os dados numéricos reais são usualmente difíceis de analisar. Qualquer função que efectivamente correlacione os dados reais é difícil de obter e de difícil interacção. Existem muitos métodos para reconstruir a superfície contínua a partir de dados dispersos ou regularmente espaçados no domínio. Nesta dissertação, a ideia da teoria básica de aproximação multiquádrica de Hardy para reconstrução de superfícies foi desenvolvida para aproximar um determinado conjunto de dados. Este método faz parte de uma classe de métodos conhecidos como métodos de funções de base radial, e mostramos a sua superioridade em termos de precisão e suavidade pretendidas, ainda como a redução do número total de dados necessários para a reconstrução da superfície. Os exemplos de aplicação nesta dissertação são para elevação digital do terreno (DEM), reconstrução de superfícies 3D, mas este método é facilmente estendido para outras áreas em qualquer dimensão. Discutimos a sua implementação, o seu desempenho e providenciamos simulações numéricas.

Palavras-chave: Aproximação, Hardy, Multiquádricas, Reconstrução, Superfícies.

## *Agradecimentos*

Ao Professor K. Bousson por todo o apoio e disponibilidade que me facultou ao longo de todo este trabalho e ao seu fascínio pelo tema tratado, que muita motivação me transmitiu. Aos meus colegas por todo o seu companheirismo e apoio que me deram ao longo destes tempos na UBI. A todos os professores do UBI que contribuíram para a minha formação quer académica quer pessoal. À minha família e amigos por todos os conselhos, motivações extra proporcionadas e palavras de conforto nas alturas menos boas.

André Silva

# Conteúdo

<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Interpolação e Aproximação . . . . .	2
1.2.1 Contexto Geral . . . . .	2
1.2.2 Funções de Base Radial . . . . .	3
1.2.3 Matrizes e Funções Positivas . . . . .	4
1.2.4 Métodos Locais e Globais . . . . .	5
1.2.5 Métodos Estocásticos e Determinísticos . . . . .	5
1.2.6 Número de Condicionamento . . . . .	5
1.2.7 Precisão Numérica . . . . .	6
1.2.8 Tempo de Processamento . . . . .	6
1.3 Métodos de Aproximação . . . . .	6
1.3.1 Funções Multiquádricas de Hardy . . . . .	6
1.3.2 Exemplo de Aplicação . . . . .	11
1.3.3 Aproximação por Polinómios . . . . .	16
1.3.4 Exemplo de Aplicação - Método Bi-Linear . . . . .	20
1.3.5 Aproximação por B-splines . . . . .	22
1.3.6 Função de Lebesgue em Funções de Base Radial . . . . .	26
1.4 Síntese . . . . .	29
<b>2 Aproximação Multiquádrica baseada em Densificação do Domínio</b>	<b>32</b>
2.1 Método . . . . .	32
2.1.1 Densificação . . . . .	32

---

2.1.2	Factor de Forma . . . . .	34
2.1.3	Sub-Conjuntos . . . . .	35
2.1.4	Função de Interpolação . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Validação do Método</b>	<b>39</b>
3.1	Aplicação . . . . .	39
3.1.1	Função de Franke . . . . .	39
3.1.2	Superfície 1 . . . . .	43
3.1.3	Superfície 2 . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Análise de Resultados</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>
	<b>Anexos</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

1.1	Altura $z_{j,i}$ numa quádrica centrada em $i$ .	7
1.2	Aplicação - Superfície Exacta.	12
1.3	Aplicação - Superfície Aproximada, $c = 0$ .	12
1.4	Aplicação - Superfície Aproximada, $c = 2$ .	14
1.5	Aplicação - Superfície Aproximada, $c = 5$ .	14
1.6	Aplicação - Superfície Aproximada, $c = 0$ .	15
1.7	Aplicação - Superfície Aproximada, $c = 0.5$ .	15
1.8	Aplicação - Superfície Exacta.	20
1.9	Aplicação - Superfície Aproximada.	21
2.1	Factor de Forma.	35
2.2	Escolha Aleatória dos Dados.	36
2.3	Treino da Função de Interpolação.	38
3.1	Configuração da Malha de Controlo - $N = 50$ .	40
3.2	Função Teste - Superfície Exacta.	40
3.3	Função Teste - $N_c = 25$ centros.	41
3.4	Função Teste - $N_c = 250$ centros.	41
3.5	Função Teste - $N_c = 500$ centros.	42
3.6	Superfície 1 - Superfície Exacta.	44
3.7	Superfície 1 - $N_c = 25$ centros.	44
3.8	Superfície 1 - $N_c = 250$ centros.	45
3.9	Superfície 1 - $N_c = 500$ centros.	45
3.10	Superfície 2 - Superfície Exacta.	47
3.11	Superfície 2 - $N_c = 25$ centros.	48
3.12	Superfície 2 - $N_c = 250$ centros.	48
3.13	Superfície 2 - $N_c = 500$ centros.	49

# Lista de Tabelas

1.1	Aplicação - Erros Numéricos. . . . .	13
1.2	Aplicação - Tempo de Processamento. . . . .	13
1.3	Método Bi-Linear - Erros Numéricos. . . . .	21
1.4	Método Bi-Linear - Tempo de Processamento. . . . .	21
3.1	Função Teste - Erros Numéricos. . . . .	42
3.2	Função Teste - Tempo de Processamento. . . . .	43
3.3	Superfície 1 - Erros Numéricos. . . . .	46
3.4	Superfície 1 - Tempo de Processamento. . . . .	46
3.5	Superfície 2 - Erros Numéricos. . . . .	49
3.6	Superfície 2 - Tempo de Processamento. . . . .	50

# Nomenclatura

$s$	Função de Interpolação
$F$	Função Real (Dados Conhecidos)
$A$	Matriz de Interpolação
$a_{ij}$	Elemento $(i, j)$ da matriz $A$
$p$	Polinómio de Interpolação
$x_i$	Pontos de Controlo
$c$	Factor de Forma
$X$	Vector de Incógnitas
$b$	Vector de Termos Absolutos
$S$	Espaço
$d$	Dimensão do Espaço
$N_{cond}$	Número de Condicionamento
$RMS.E$	Erro Root Mean Square
$ABS.E$	Erro Absoluto Médio
$REL.E$	Erro Relativo Médio
$TT$	Tempo de Processamento Total
$TF$	Tempo de Processamento do Treino da Função de Interpolação
$OP$	Tempo de Processamento de Outros Processos
$N$	Número Total de Dados
$Z$	Altura de uma Superfície Multiquádrica
$L$	Ordem do Polinómio de Interpolação
$T$	Número de Dados - Sub-Conjunto $I$
$N_c$	Número Dados de Controlo
$p$	Polinómio
$(u_i, v_i)$	$i$ -ésimo Elemento da Função Parametrizada

---

$B$	Função de Base B-Spline
$f$	Função de Interpolação B-Spline
$h$	Curva de Densificação
$D$	Diâmetro Mínimo que Abrange Todos os Dados
$d$	Distância Média entre Todos os Dados
$J$	Função de Custo
$\alpha$	Coefficientes da Função de Base
$\beta$	Coefficientes do Polinómio de Interpolação
$\varphi$	Função de Base
$\Lambda_{\Gamma}$	Constante de Lebesgue
$\tau$	Vector de Centros B-Spline
$\xi$	Centros Densificados
$\eta$	Coefficientes da Função de Interpolação
$\lambda$	Factor de Tikhonov

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

Hoje, há muitas abordagens interessantes para a reconstrução de superfícies de qualquer dimensão utilizando dados dispostos uniformemente ou não uniformemente. A reconstrução de superfícies tornou-se uma ferramenta muito popular para utilização em projectos de optimização multidisciplinares. O problema da reconstrução de superfícies e a necessidade da estimação de dados espaciais surge em muitos campos da ciência e da engenharia como a aeronáutica, a meteorologia, a cartografia, a modelação geológica, geologia, etc.

A reconstrução de uma superfície de um conjunto de dados é simples no conceito, mas complicado quando entramos em detalhe. Uma vez que o mundo real é constituído por superfícies contínuas, e não por dados discretos, queremos criar uma superfície contínua utilizando esses mesmos dados. Os métodos sem malha tais como as funções de base radial têm possibilitado progressos notáveis nesta área. A reconstrução de superfícies ou estimação de dados é um problema de interpolação ou aproximação e consiste na construção de uma função contínua de duas ou mais variáveis independentes que estima os valores de dados conhecidos em quaisquer pontos.

O impulso por trás da nossa investigação é obter de uma aproximação de uma superfície com finalidade de ser utilizada em qualquer tipo de aplicações de uma forma geral. Uma vez obtida, esta aproximação deve ser capaz de ser utilizada eficientemente. De facto, um problema de aproximação tem um erro relativamente pequeno. Para aplicações práticas, este método é mais importante que o método de interpolação (que tem um erro residual igual a zero), uma vez que os dados reais são medidos por instrumentos e têm erros associados e este modo a reconstrução exacta não é adequada [1]. Nesta dissertação, investigamos o uso das funções multiquádricas [2] para a reconstrução de superfícies e optimização de projectos multi-disciplinares.

As funções multiquádricas foram introduzidas por Hardy em 1971. Estas foram utilizadas para aproximar superfícies e anomalias magnéticas e gravitacionais. Foram praticamente desconhecidas para matemáticos até à publicação de um artigo de comparação entre diferentes métodos de aproximação por Franke em [3]. Franke estudou diversos métodos e concluiu que em termos de aptidão de ajuste e suavidade visual nos testes realizados, o melhor método foi o das funções multiquádricas de Hardy.

No presente Capítulo 1, apresentamos os aspectos fundamentais que caracterizam a importância do problema de representação e reconstrução de superfícies. Dada a quantidade de aplicações e possibilidade de soluções, o método deverá ter as seguintes características: custo computacional aceitável, simplicidade no que diz respeito à compreensão e codificação, habilidade de trabalhar com qualquer tipo de dados, capacidade de gerar informação mesmo onde não exista nenhuma, precisão e suavidade. No Capítulo 2 contextualizamos a reconstrução de superfícies por meio de uma revisão bibliográfica, características e conceitos utilizados. No Capítulo 3 desenvolvemos o método proposto para reconstrução de superfícies. No Capítulo 4 fazemos a análise de resultados e por último no Capítulo 5 as conclusões e o trabalho futuro .

## **1.2 Interpolação e Aproximação**

### **1.2.1 Contexto Geral**

Os métodos de interpolação e de aproximação permitem fazer a reconstrução de uma função ou superfície, conhecendo apenas alguns dados [4]. São métodos que permitem reconstruir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais conhecidos, que em engenharia e ciência geralmente são obtidos a partir de uma amostragem ou ensaio. Estes métodos permitem ainda a simplificação de funções. Suponhamos que existe uma função matematicamente ou computacionalmente difícil de avaliar de forma eficiente. Podemos então, escolher alguns dados pontuais dessa função e tentar interpolar ou aproximar estes dados para construir uma função simplificada. Obviamente, quando utilizamos uma função mais simples para re-calcular novos dados, normalmente não se obtém o mesmo resultado da função original, mas dependendo do domínio do problema e do método de interpolação ou aproximação utilizado, o ganho de simplicidade pode compensar o erro.

Isto significa que de facto a interpolação e a aproximação não são a mesma coisa. Quando se faz uma interpolação sobre certas condições estamos a dizer que vamos determinar uma função pela qual acharemos o valor exacto do conjunto de dados conhecidos. A aproximação é utilizada para mostrar que o mapeamento de uma função modela aproximadamente um conjunto de dados pretendidos.

Como exemplo, os polinómios apenas interpolam um modelo se o sistema de equações associado é estritamente determinado. Se contudo o sistema de equações for sobre-determinado, os polinómios apenas aproximam as localizações dos dados desse mesmo modelo. Uma prática comum é utilizar um método de mínimos quadrados para aproximar o modelo com polinómios. O método de elementos finitos é um método de interpolação que representa o modelo passando através de pontos de controlo, também muitas vezes denominados por nós. Contudo, a interpolação introduz sempre erros variáveis no espaço que se propagam através de sucessivos modelos e decisões. Deste modo é preciso ter em conta o objectivo ou a finalidade que terá a função interpolada ou aproximada e de que forma esta é afectada por erros, para que possamos avaliar a fiabilidade das saídas do modelo [5].

A interpolação ou aproximação torna-se necessária sempre que ocorre uma das seguintes situações [6]:

- Uma superfície apresenta uma resolução espacial (nível de detalhe) diferente do pretendido;
- Uma superfície contínua é expressa por um modelo de dados diferente do requerido;
- A informação disponível é recolhida por amostragem e consequentemente não cobre todo o domínio espacial de interesse.

### 1.2.2 Funções de Base Radial

As aplicações de problemas de aproximação que utilizam dados dispostos uniformemente ou não, é um dos problemas fundamentais da teoria de aproximação e modelação em geral. A utilização de funções de base radial permite que tais questões sejam abordadas conjuntamente, de forma simples, elegante e de fácil implementação [1]. As funções de base radial têm a seguinte forma (no plano  $xz$ ):

$$s(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad (1.1)$$

onde  $\alpha_i$  são os coeficientes da função de base radial,  $x_i$  são os pontos de controlo também denominados centros,  $\|\cdot\|$  a norma euclidiana e  $\varphi$  a função de base. A função  $\varphi$  é univariada e radialmente simétrica com respeito à norma, no sentido que tem simetria em  $\mathbb{R}^d$ . Os coeficientes  $\alpha_i$  são escolhidos de forma a que as condições da aproximação sejam satisfeitas.

Escolhas úteis [7] da função de base  $\varphi$ , com  $r = \|x - x_i\|$ , incluem:

- A Função Gaussiana:

$$\varphi(r) = e^{-cr^2}, (c > 0) \quad (1.2)$$

- A Distância Euclidiana:

$$\varphi(r) = r \quad (1.3)$$

- A Função Multiquádrica:

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2} \quad (1.4)$$

- A Inversa Multiquádrica:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad (1.5)$$

- A Thin-Plate Spline:

$$\varphi(r) = r^2 \log r \quad (1.6)$$

Utilizando uma notação matricial, resolver um problema de aproximação com uma função de base radial resolvendo um sistema linear de equações:

$$A\alpha = F \quad (1.7)$$

onde  $A$  é a matriz de interpolação:

$$A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|) \quad (1.8)$$

com  $\alpha$  o vector de coeficientes  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$  e  $F$  é o vector de valores da função  $(F_1, \dots, F_N)^T$ .

Deste modo, aproximamos uma função  $F(x)$  por outra  $s(x)$ , ver Equação 1.1, dados os valores conhecidos nos pontos  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^d$ . Podemos observar que uma função de base radial, é unicamente uma soma ponderada de  $N$  funções de base. As funções de base radial são populares para aproximação de dados uma vez que o sistema de equações associado é garantido ser invertível [8].

### 1.2.3 Matrizes e Funções Positivas

Como se pretende uma formulação de um problema bem condicionado entramos nos conceitos de matrizes positivas definidas e funções estritamente positivas definidas.

Uma matriz real simétrica,  $A$ , é chamada semi-definida positiva se a sua forma quadrática a que está associada é não negativa [8], isto é:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0 \quad (1.9)$$

para quaisquer  $N$  pontos diferentes  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^d$ , e  $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ . A função  $\Phi$  é estritamente definida positiva em  $\mathbb{R}^d$  se apenas o vector  $c$  que torna a Equação 1.9 numa igualdade, é o vector zero. Uma explicação mais detalhada sobre este assunto é desenvolvida no Capítulo 1.3.6.

### 1.2.4 Métodos Locais e Globais

Uma transformação global significa que todos os pontos de controlo (centros) são utilizados para derivar um único modelo matemático. Uma mudança apenas num valor afecta todo o modelo ou superfície. Os métodos globais também têm uma tendência em produzir superfícies muito mais suaves e sem mudanças bruscas, e são muito utilizados para formar hipóteses ou mesmo reconstruir superfícies. Os métodos locais por sua vez utilizam sub-conjuntos de dados. Aplicam repetidamente um algoritmo a uma pequena porção do domínio e uma mudança nalgum valor, apenas afecta os dados dentro dessa parte do domínio [9].

### 1.2.5 Métodos Estocásticos e Determinísticos

Os métodos estocásticos têm no seu modelo o conceito de probabilidade. A superfície aproximada é conceptualizada como uma de muitas que pode ter sido observada, tendo todas elas podido ter produzido os valores reais ou conhecidos. Estes métodos permitem uma análise probabilística das incertezas dos valores estimados a serem calculados. Os métodos determinísticos não a utilizam a teoria da probabilidade [10].

### 1.2.6 Número de Condicionamento

Nesta secção devemos entender como é que o número de condicionamento,  $N_{cond}$ , da matriz de interpolação se altera com a dimensão do conjunto de dados. Para os métodos globais o  $N_{cond}$  aumenta com o número de dados, ou seja, está directamente relacionado com o número de equações do sistema que é necessário resolver para encontrarmos os coeficientes associados. Para um método local não temos problema com o número de condicionamento pois resolvemos um sistema linear de equações de ordem reduzida [9].

### 1.2.7 Precisão Numérica

A precisão numérica é quantitativamente analisada utilizando o erro root mean square ( $RMS.E$ ), o erro absoluto médio ( $ABS.E$ ) e o erro relativo médio ( $REL.E$ ). Esta dissertação inclui ainda uma discussão dos problemas de implementação tais como a complexidade computacional e a análise numérica. O processo de simulação foi realizado considerando a precisão, o comportamento gráfico da interpolação e o tempo de processamento. Além disso, temos em conta a eficiência computacional e a sensibilidade relativamente às amostras [5]:

- Erro Root Mean Square

$$RMS.E = \sqrt{\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^N (s_i - F_i)^2} \quad (1.10)$$

- Erro Absoluto Médio

$$ABS.E = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^N |s_i - F_i| \quad (1.11)$$

- Erro Relativo Médio

$$REL.E = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^N \left| \frac{s_i - F_i}{F_i} \right| \quad (1.12)$$

onde  $N$  é o número total de dados da amostra e  $s_i$  e  $F_i$  são o valor da aproximação e o valor exacto da função em simulação, respectivamente.

### 1.2.8 Tempo de Processamento

Quando aumentamos o número de dados de um conjunto,  $N$ , também aumentamos o tempo de processamento. Dependendo do método, podemos ter um aumento insuportável ou elevado de tempo utilizado para simulação ou realização de processos. Isto é devido à resolução de um sistema linear de equações de matriz completa de ordem  $N$  e depois na verificação da qualidade da aproximação [11].

## 1.3 Métodos de Aproximação

### 1.3.1 Funções Multiquádricas de Hardy

Este método utiliza funções de quádricas para adaptar uma superfície ao conjunto de pontos amostrais [2, 12, 13].

A altura de uma superfície multiquádrica  $Z$ , num ponto particular do plano  $(x,y)$  é dada pela soma das alturas  $z_{j,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), de  $N$  superfícies quábricas individuais. Cada quábrica é colocada no seu centro ou vértice do ponto  $i$ , no qual as coordenadas da superfície  $(x_i, y_i, z_i)$  foram especificadas, como apresentado na Figura 1.1:

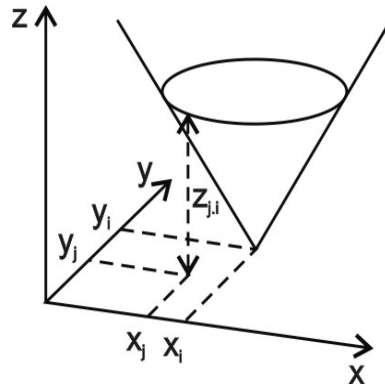


FIGURA 1.1: Altura  $z_{j,i}$  numa quábrica centrada em  $i$ .

De modo a resolver  $N$  quábricas com  $N$  conjuntos de coordenadas, a forma de cada superfície quábrica tem de ser definida com apenas um parâmetro. A quábrica central mais utilizada é a quábrica hiperbolóide elíptica de duas folhas. Esta superfície é obtida através da seguinte equação:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.13}$$

Neste caso as raízes de  $z^2$  definem duas superfícies separadas que podem ser geradas através da rotação de um par de hipérbolas sobre o eixo  $z$ . Cada superfície de revolução tem então o seu vértice a uma distância  $c$  acima ou abaixo do plano conjugado,  $z = 0$ . A hiperbolóide de duas folhas tem extensão infinita no plano, no infinito esta aproxima-se de uma superfície assintótica gerada pela rotação da linha  $z = (c/a)x$  sobre o eixo  $z$ . Essa superfície assintótica é um cone circular com o seu vértice na origem. Esta superfície de parâmetro único é uma superfície quábrica degenerada quando o lado esquerdo da Equação (1.13) é igual a zero:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{1.14}$$

Uma vez que as parabolóides são de extensão infinita no plano e as suas equações são facilmente integráveis, é possível a criação de uma superfície multiparabolóide ou multiquádrica. Deste modo, um tipo de superfície multiquádrica multivariada pode ser representado pela série:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j [q(x_j, y_j, x, y)] = z \tag{1.15}$$

Na Equação (1.15),  $z$  é função de  $x$  e  $y$  resultando na soma de uma única classe de superfícies quádricas  $q$ . Uma vez que é assumido que cada quádrica está posicionada no seu centro ou vértice do ponto  $(x_i, y_i)$ , é necessário que seja especificado apenas outro ponto  $(x_j, y_j, z_{i,j})$ , para definir a superfície completamente:

$$Z = \sum_{j=1}^N z_{i,j} \quad (1.16)$$

O termo do eixo vertical de simetria de cada quádrica está localizado numa posição horizontal  $(x_i, y_i)$ . O coeficiente associado  $\alpha_j$ , determina o sinal algébrico e o achatamento da quádrica. Um exemplo particular de uma superfície multiquádrica, é derivada da forma geral da Equação (1.15), é o somatório de uma série de hiperbolóides circulares de duas folhas. Assim, a Equação (1.15) fica deste modo:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2 \right]^{(1/2)} = z \quad (1.17)$$

para o caso particular da hiperbolóide, o cone com  $c = 0$ , a Equação (1.17) reduz-se a:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{(1/2)} = z \quad (1.18)$$

e para uma secção definida no plano  $xz$ , torna-se:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ (x_i - x_j)^2 + c^2 \right]^{(1/2)} = z \quad (1.19)$$

Um exemplo característico da aplicação da teoria de superfícies multiquádricas de Hardy é na área da topografia. O problema topográfico para o qual temos um conjunto de coordenadas cartesianas de uma superfície,  $(x_1, y_1, z_1)$  a  $(x_N, y_N, z_N)$ , é que os termos quádricos  $\alpha_1$  a  $\alpha_N$  são desconhecidos. Assim, substituindo as coordenadas cartesianas de  $N$  pontos na Equação (1.18), temos que os coeficientes  $\alpha_j$  são incógnitas. Ficamos com uma notação matricial reduzida sob a forma conhecida:

$$AX = b$$

onde  $X$  e  $b$  são o vector das incógnitas e o vector dos termos absolutos respectivamente.

Estes obtêm-se da seguinte forma:

$$X = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, b = z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

e ainda cada elemento  $a_{ij}$  contido na matriz  $A$  de dimensões  $N \times N$  é dado por:

$$A = a_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{(1/2)}$$

Como é usual, a solução é:

$$X = A^{-1}b$$

As características [8] que são de extrema importância para a análise deste sistema são:

- (a) A matriz  $A$  é sempre invertível (é de ordem  $N$ );
- (b) A matriz  $A$  tem um valor próprio positivo e  $(N - 1)$  valores próprios negativos;
- (c) A matriz  $B = [1/a_{ij}]$  (os elementos da matriz  $B$  são os inversos dos elementos da matriz  $A$ ) é definida estritamente positiva;
- (d) O número de condicionamento da matriz  $A$  cresce monotonicamente com o parâmetro  $c$ .
  1. A propriedade (a) garante a existência e unicidade da aproximação multiquádrica para um dado conjunto de dados e  $c$ ;
  2. A propriedade (d) implica que não se deve usar  $c$  muito grande.

Depois de resolvido o sistema, obtemos os coeficientes  $\alpha$ , substituímos na Equação (1.18) e temos a equação final que se ajusta aos pontos de forma exacta e fornece uma interpolação lógica nos pontos intermédios. Resultados experimentais obtidos através de cones e hiperbolóides circulares são apropriados mas não necessariamente óptimos. O coeficiente  $\alpha_j$  associado a cada ponto é o declive assintótico do cone relativo ao plano  $xy$ . O sinal algébrico de  $\alpha_j$  determina qual a superfície do cone de duas folhas que é escolhida para ser aplicada no somatório e a magnitude do coeficiente influencia o achatamento da mudança de inclinação da superfície.

Todos os cones causam uma mudança de declive da superfície multiquádrica, devido ao seu achatamento. A geometria analítica do somatório causa mudanças significativas nas superfícies matemáticas respondendo directamente a entrada de dados. Em áreas sem dados, ou seja, entre os pontos, as equações tratam a superfície como neutra. A suavidade e a forma da transição entre os pontos são controladas principalmente pelas características da quádrlica utilizada no somatório e pelo parâmetro  $c$  (factor de forma).

A solução do sistema de equações representado pela Equação (1.19) ilustra um modo de colocação numa perspectiva de análise multiquádrica, onde o  $z$  da equação coincide com o  $z$  real nos pontos especificados. Num outro método [2] é feito o mapeamento de todas as coordenadas das posições horizontais onde temos declives zero (por exemplo em topografia, montes, depressões, etc.). O objectivo principal deste mapeamento é minimizar os possíveis deslocamentos verticais e horizontais dos pontos máximos e mínimos na equação multiquádrica. A não ser que  $c = 0$ , ou  $c$  muito pequeno o suficiente para que a quádrlica rapidamente neutralize o declive prevaiente existentes nos máximos ou mínimos, podem ocorrer deslocamentos excessivos.

O controlo dos máximos e mínimos só é conseguido abdicando de uma adaptação perfeita em muitos pontos de controlo ou significantes. Esta perda pode ou não ser uma séria deficiência no resultado final dependendo apenas precisão pretendida. Deste modo surge um método tangencial ou osculante que envolve a combinação do somatório das multiquádricas com uma série polinomial. Com esta combinação não apenas se coloca os pontos da superfície como também se consegue que algumas tangentes à superfície coincidam em pontos específicos. Considerando a Equação (1.19) e adicionando um termo polinomial ficamos com:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ (x_i - x_j)^2 + c^2 \right]^{(1/2)} + \sum_{p=1}^L \beta_p x^p = z \quad (1.20)$$

Diferenciando a Equação (1.20), e igualando a zero temos:

$$- \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ (x_i - x_j)^2 + c^2 \right]^{(1/2)} (x_i - x_j) + \sum_{p=1}^L p \beta_p x^{p-1} = z \quad (1.21)$$

As Equações (1.20) e (1.21), são combinadas para formar um sistema de  $(N + L)$  equações com  $(N + L)$  incógnitas. O sistema completo consiste em  $N$  equações de dados e  $L$  equações de declive tendo  $N$  incógnitas  $\alpha$  e  $L$  incógnitas  $\beta$ . Após resolvidas as equações para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , estes coeficientes são substituídos na Equação (1.20) para formar um modo de perfil hiperbólico osculante. O perfil de superfície resultante é uma solução multiquádrica em que os efeitos do polinómio são impostos para reduzir o declive para zero nos máximos e mínimos desejados.

As funções multiquádricas de Hardy são um método exacto de interpolação e é um método elegante para obtermos uma superfície contínua através da interpolação de dados. Entre todas as funções de base radial [3], as funções multiquádricas de Hardy são as que melhores resultados dão em termos de avaliação estatística e visual da superfície modelada. As equações de Hardy foram utilizadas sobretudo para aproximar superfícies geográficas, mas têm um potencial muito maior do que este e podem até ser utilizadas para a construção de uma superfície multivariada [14, 15]. No entanto, apesar do excelente desempenho das equações multiquádricas, uma desvantagem deste método prende-se com o facto de termos que resolver um sistema linear, este sistema aumenta com o número de dados e logo o tempo para a sua resolução.

Também o parâmetro  $c$ , muitas vezes referido na bibliografia como factor de forma, pode afectar a precisão da aproximação. Ajustando este parâmetro, a precisão da aproximação pode ser consideravelmente melhorada. Aumentando o factor de forma  $c$ , o  $RMS.E$  (erro root mean square) cai para um mínimo e depois cresce rapidamente e a matriz de interpolação,  $A$ , torna-se mal condicionada [16]. Assim, podemos afirmar que existe um valor de  $c$  óptimo, de tal modo que  $RMS.E$  é mínimo e que influencia o número de condicionamento,  $N_{cond}$ , da matriz  $A$ . Desta forma é possível aumentar a precisão da interpolação multiquádrica ao variar o factor de forma, de modo a achar um número de condicionamento de  $A$  pequeno. As quádricas que não sejam cones tendem a deslocar os máximos e mínimos a menos sejam utilizadas conjuntamente com um polinómio de baixo grau. Este método sobrepõe um polinómio em pontos pretendidos de modo a minimizar deslocamentos existentes e melhorar a precisão.

### 1.3.2 Exemplo de Aplicação

Nesta secção mostrámos o efeito de alguns parâmetros nas funções multiquádricas tais como o factor de forma e o número de centros. O problema é dado um conjunto de dados, obter a melhor superfície com a melhor precisão possível, aliada a um aspecto visual suave. Utilizando as seguintes condições:

$$N = T = N_c = 625$$

onde  $N$ ,  $T$  e  $N_c$  são os conjuntos de dados total, de treino da função de interpolação e de centros.

A superfície exacta Figura 1.2, corresponde a um conjunto de dados de altitude reais dispostos uniformemente:

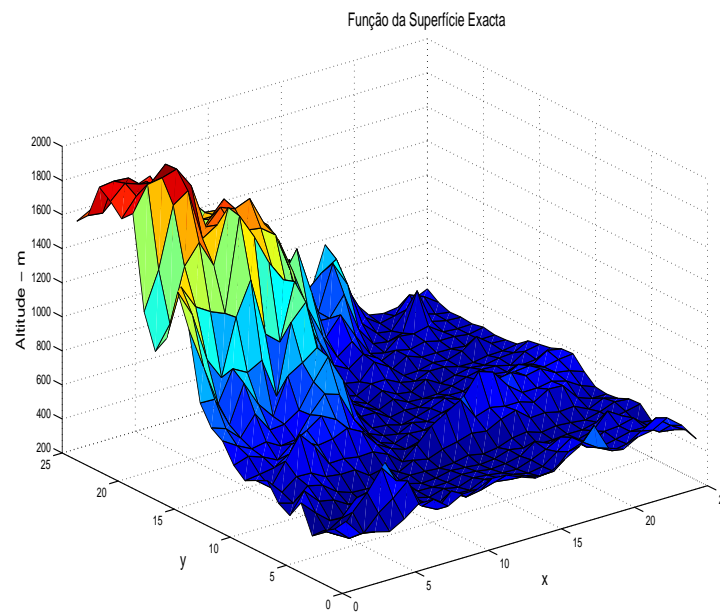


FIGURA 1.2: Exemplo - Superfície Exacta.

A superfície aproximada Figura 1.3, foi estimada pelas funções multiquádricas de Hardy, utilizando um factor de forma igual a zero:

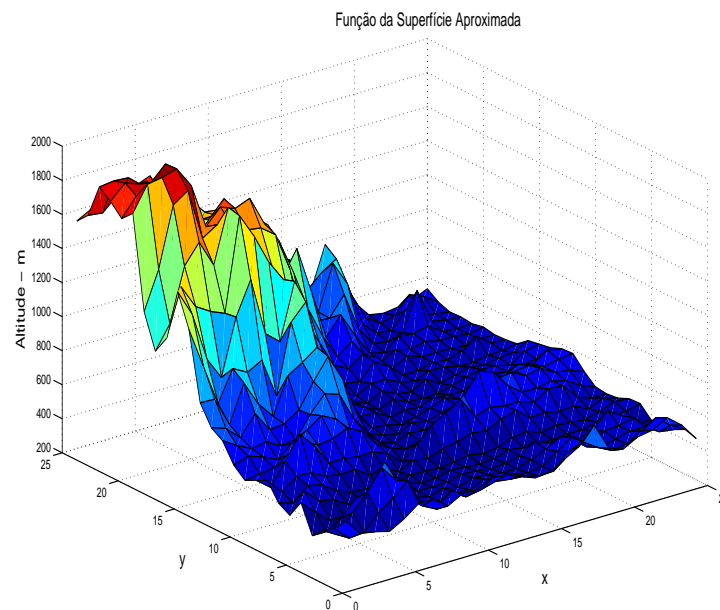


FIGURA 1.3: Exemplo - Superfície Aproximada,  $c = 0$ .

O erro cometido nesta aproximação é relativamente zero. De facto, quando utilizámos  $c = 0$  estamos a utilizar um caso especial das funções multiquádricas de Hardy, uma interpolação exacta dos pontos reais, mas como podemos observar a Figura 1.3, não é uma superfície suave.

Para analisar e validar este método calculámos os Erros e o Tempo de Processamento. A análise de Erros neste exemplo de aplicação consta do *RMS.E* (erro root mean square) e do *REL.E* (erro relativo máximo):

Erros:

TABELA 1.1: Aplicação - Erros Numéricos.

Erros Numéricos		
$N = T = N_c = 625$		
<i>RMS.E</i>	1.95E-06	m
<i>REL.E</i>	1.01E-05	%

Tempo de Processamento:

TABELA 1.2: Aplicação - Tempo de Processamento.

Tempo de Processamento		
$N = T = N_c = 625$		
Tempo Total	1.29	s

Agora mostramos o efeito da variação do número de dados com a variação do factor de forma:

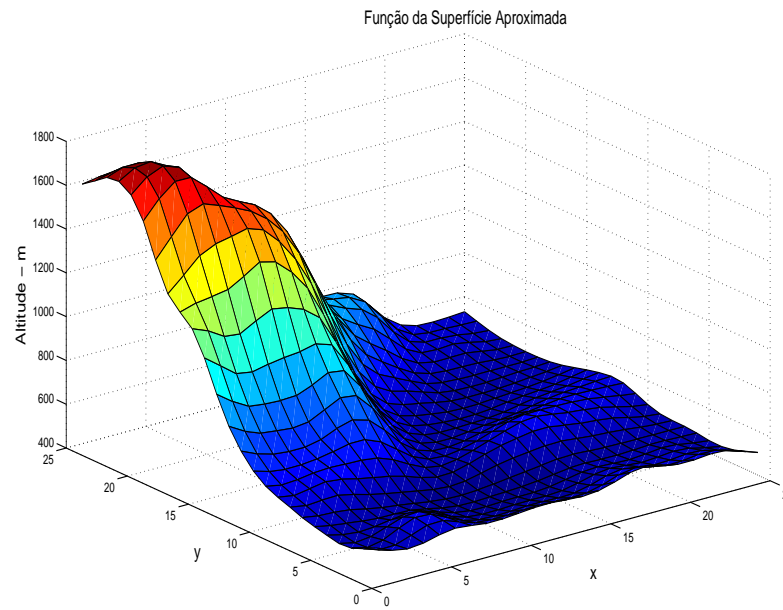


FIGURA 1.4: Aplicação - Superfície Aproximada,  $c = 2$ .

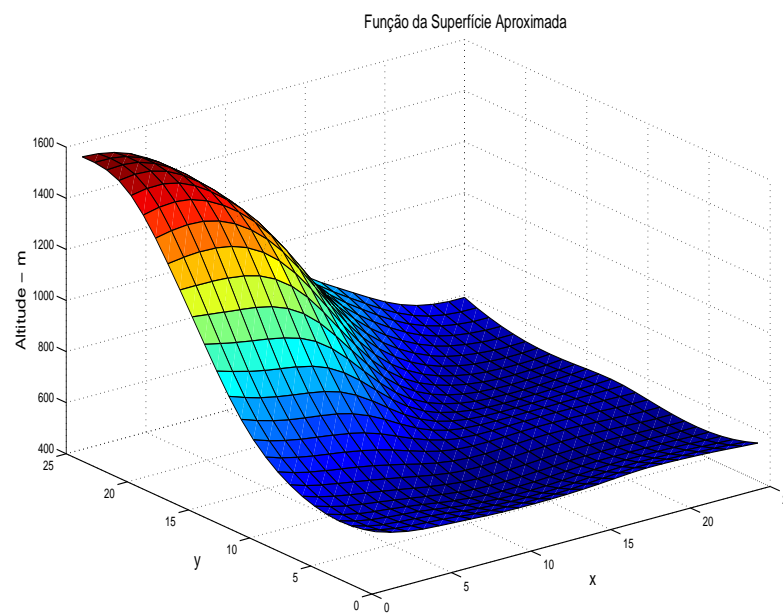


FIGURA 1.5: Aplicação - Superfície Aproximada,  $c = 5$ .

E o efeito da variação do número de centros com a variação do factor de forma:

$$N = 625$$

$$T = N_c = 105$$

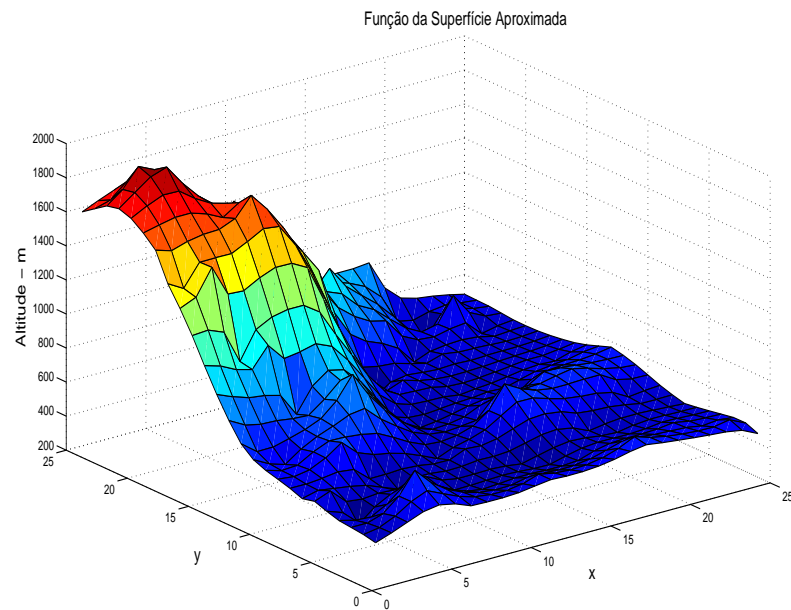


FIGURA 1.6: Aplicação - Superfície Aproximada,  $c = 0$ .

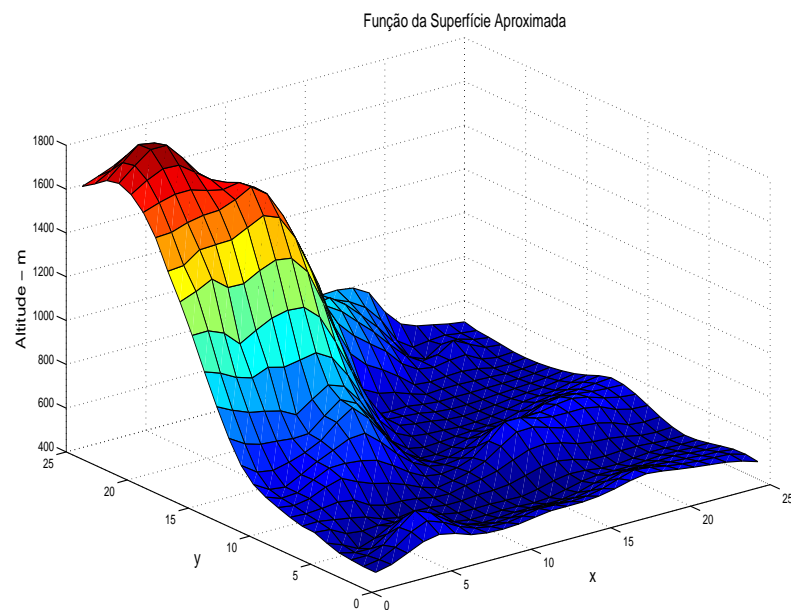


FIGURA 1.7: Aplicação - Superfície Aproximada,  $c = 0.5$ .

Como podemos observar, podemos obter excelentes resultados dependendo do tipo de solução que pretendemos de forma rápida e precisa. É possível obter um compromisso entre precisão e suavidade mediando o número de centros e o factor de forma, mas não de uma forma otimizada.

### 1.3.3 Aproximação por Polinómios

A interpolação é um método de estimação exacto que opera globalmente. Para um conjunto de  $N$  observações, é possível achar um polinómio que define uma curva ou superfície contínua e intersekte as  $N$  observações consideradas. Quando  $N$  é grande e o polinómio possui um grau elevado, a solução do sistema de equações que possibilita o cálculo dos coeficientes pode não ser precisa, pelo que o método é muitas vezes desaconselhado para um elevado número de observações. Obter representações para curvas e superfícies com determinado aspecto e propriedades é resultado duma modelagem que muitas vezes é dada na forma paramétrica. A parametrização permite que a curva ou superfície seja interpolada facilmente e uma manipulação algébrica mais simples.

A aproximação polinomial [17] parte do pressuposto que a superfície é sempre mais suave do que a superfície sugerida pela variação dos pontos amostrais, uma vez que alguns desses pontos podem conter erros nos valores atribuídos à dimensão  $Z$ . Como a distribuição destes erros não é conhecida, emprega-se uma aproximação que minimiza a soma dos desvios da nova superfície. Seja o conjunto de pontos  $(x_i, y_i, z_i)$  em  $(i = 1, \dots, N)$ , dados no espaço  $d = 3$ . O objectivo é tentar encontrar algum tipo de superfície de tal modo que a soma do quadrado das distâncias ortogonais dos pontos dados, nessa superfície, seja mínima. Esta superfície pode ser dada através duma representação paramétrica [18]:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \alpha \leq u \leq \beta \leq \infty \\ -\infty &\leq \gamma \leq v \leq \delta \leq \infty \end{aligned}$$

O caso mais simples é o caso das funções bi-lineares:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2u + a_3v + a_4uv \\ y &= b_1 + b_2u + b_3v + b_4uv \\ z &= c_1 + c_2u + c_3v + c_4uv \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$-\infty \leq u, v \leq \infty$$

$$a = (a_1, \dots, a_4)^T, b = (b_1, \dots, b_4)^T, c = (c_1, \dots, c_4)^T$$

$$u = (u_1, \dots, u_N)^T, v = (v_1, \dots, v_N)^T$$

A função a ser minimizada é no seu caso geral:

$$s(a, b, c, u, v) = \sum_{i=1}^N \min_{u, v} \left[ (x(u, v) - x_i)^2 + (y(u, v) - y_i)^2 + (z(u, v) - z_i)^2 \right] \quad (1.24)$$

Uma função é dita bi-linear se é linear em respeito a cada uma das suas variáveis. A ideia geral da interpolação bi-linear é fazer a interpolação linear em primeiro numa direcção e depois novamente na outra. As condições necessárias para a Equação (1.24) ser mínima, utilizando a Equação (1.23), são que todas as derivadas parciais desaparecem:

$$\frac{\partial s}{\partial u}, \frac{\partial s}{\partial v}, \frac{\partial s}{\partial a}, \frac{\partial s}{\partial b}, \frac{\partial s}{\partial c}$$

Considerando  $\partial s/2\partial a$  (mesmo raciocínio para  $\partial s/2\partial b$  e  $\partial s/2\partial c$ ) e se designarmos por  $(u_i, v_i)$  o mínimo do  $i$ -ésimo termo da Equação (1.24) com respeito a  $(u, v)$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^N (a_1 + a_2 u_i + a_3 v_i + a_4 u_i v_i - x_i) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^N u_i (a_1 + a_2 u_i + a_3 v_i + a_4 u_i v_i - x_i) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial a_3} &= \sum_{i=1}^N v_i (a_1 + a_2 u_i + a_3 v_i + a_4 u_i v_i - x_i) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial a_4} &= \sum_{i=1}^N u_i v_i (a_1 + a_2 u_i + a_3 v_i + a_4 u_i v_i - x_i) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Definindo a matriz  $A$  de dimensões  $N \times 4$  por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 & u_1 v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 & u_2 v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 & u_3 v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_N & v_N & u_N v_N \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes de  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  na Equação (1.25) é  $A^T A$  e no lado direito do sistema temos  $A^T x$  onde  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Deste modo, a Equação (1.25) pode ser reescrita como:

$$A^T A a = A^T x \quad (1.26)$$

E daqui obtemos a solução para o problema em questão:

$$\begin{aligned} \|Aa - x\|_2^2 &\rightarrow \min \\ \|Ab - y\|_2^2 &\rightarrow \min \\ \|Ac - z\|_2^2 &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$y = (y_1, \dots, y_N)^T, z = (z_1, \dots, z_N)^T$$

Isto significa que podemos resolver a Equação (1.25) resolvendo os coeficiente  $a$ ,  $b$  e  $c$  da Equação (1.27), para um  $u$  e  $v$  dado. Uma vez que a matriz de coeficientes é a mesma, só é necessário uma ortogonalização das colunas de  $A$ . Considerando agora a minimização do  $i$ -ésimo termo da Equação (1.24) com respeito a  $(u, v)$ , temos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial v} = 0$$

donde obtemos:

$$\begin{aligned} (a_2 + a_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - x_i) &= 0 \\ (b_2 + b_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - y_i) &= 0 \\ (c_2 + c_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

e

$$\begin{aligned} (a_3 + a_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - x_i) &= 0 \\ (b_3 + b_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - y_i) &= 0 \\ (c_3 + c_4 v)(a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u v - z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Conhecendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $(v = v_i)$  a Equação (1.28) pode ser resolvida para  $(u_i = u)$ :

$$\begin{aligned} u = - \left[ (a_2 + a_4 v)(a_1 + a_3 v - x_i) + (b_2 + b_4 v)(b_1 + b_3 v - y_i) \right. \\ \left. + (c_2 + c_4 v)(c_1 + c_3 v - z_i) \right] \\ \left/ \left[ (a_2 + a_4 v)^2 + (b_2 + b_4 v)^2 + (c_2 + c_4 v)^2 \right] \right. \end{aligned} \quad (1.30)$$

e com  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $(u = u_i)$  o sistema de Equações (1.29) pode ser resolvido para  $(v_i = v)$ :

$$v = - \frac{[(a_3 + a_4u)(a_1 + a_2u - x_i) + (b_3 + b_4v)(b_1 + b_2u - y_i) + (c_3 + c_4v)(c_1 + c_2u - z_i)]}{[(a_3 + a_4u)^2 + (b_3 + b_4u)^2 + (c_3 + c_4u)^2]} \quad (1.31)$$

O caso bi-quadrático é uma extensão de ordem superior do caso bi-linear:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2u + a_3v + a_4uv + a_5u^2 + a_6v^2 \\ y &= b_1 + b_2u + b_3v + b_4uv + b_5u^2 + b_6v^2 \\ z &= c_1 + c_2u + c_3v + c_4uv + c_5u^2 + c_6v^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_6)^T, \quad b = (b_1, \dots, b_6)^T, \quad c = (c_1, \dots, c_6)^T \\ u &= (u_1, \dots, u_N)^T, \quad v = (v_1, \dots, v_N)^T \end{aligned}$$

A matriz  $A$  é agora:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 & u_1v_1 & u_1^2 & v_1^2 \\ 1 & u_2 & v_2 & u_2v_2 & u_2^2 & v_2^2 \\ 1 & u_3 & v_3 & u_3v_3 & u_3^2 & v_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_N & v_N & u_Nv_N & u_N^2 & v_N^2 \end{bmatrix}$$

e utilizando as condições:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial v} = 0,$$

para  $(u, v) = (u_i, v_i)$ , com  $(i = 1, \dots, N)$ , de modo a que:

$$\begin{aligned} &(a_2 + a_4v + 2a_5u)(a_1 + a_2u + a_3v + a_4uv + a_5u^2 + a_6v^2 - x_i) \\ &+ (b_2 + b_4v + 2b_5u)(b_1 + b_2u + b_3v + b_4uv + b_5u^2 + b_6v^2 - y_i) \\ &+ (c_2 + c_4v + 2c_5u)(c_1 + c_2u + c_3v + c_4uv + c_5u^2 + c_6v^2 - z_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} &(a_3 + a_4v + 2a_6u)(a_1 + a_2u + a_3v + a_4uv + a_5u^2 + a_6v^2 - x_i) \\ &+ (b_3 + b_4v + 2b_6u)(b_1 + b_2u + b_3v + b_4uv + b_5u^2 + b_6v^2 - y_i) \\ &+ (c_3 + c_4v + 2c_6u)(c_1 + c_2u + c_3v + c_4uv + c_5u^2 + c_6v^2 - z_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ambas as Equações (1.33) e (1.34) têm um grau máximo igual a três para ambas as variáveis  $u$  e  $v$ . Fixando  $u$  e  $v$  nestas equações, resulta na obtenção de uma equação polinomial de terceiro grau em  $u$  e  $v$ , e deste modo temos uma ou três raízes para serem inseridas nas equações seguintes. Seleccionamos a combinação que de facto minimiza a Equação (1.32). O método de interpolação [18] no caso bi-linear é um algoritmo bem conhecido para aplicação à reconstrução de uma superfície. É um método fácil de entender matematicamente e utiliza pouca processamento para baixas ordens, sendo fiel aos dados originais. Contudo não é suave. Para grandes quantidades de dados ou ordens de interpolação maiores como o caso bi-quadrático, a superfície gerada também é interpolada com precisão mas a superfície continua a não ser suficientemente suave e temos um acréscimo de complexidade computacional. Uma vez que não temos um factor de forma ou maneira de suavizar a superfície, este método apesar de ter as suas vantagens torna-se frágil quando temos de fazer uma aproximação suave e com precisão dessa superfície com largos números de pontos. De qualquer forma é um método de interpolação para funções de ordens baixas, de forma expedita.

### 1.3.4 Exemplo de Aplicação - Método Bi-Linear

Nesta secção mostrámos uma aplicação do método bi-linear, onde a representação da superfície exacta com  $N = 625$ , é a Figura 1.8:

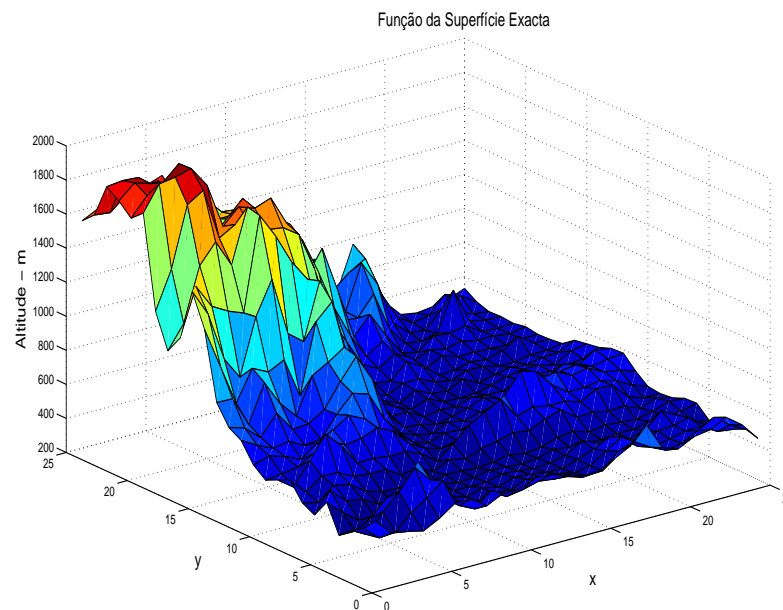


FIGURA 1.8: Aplicação - Superfície Exacta.

A superfície aproximada é a seguinte:

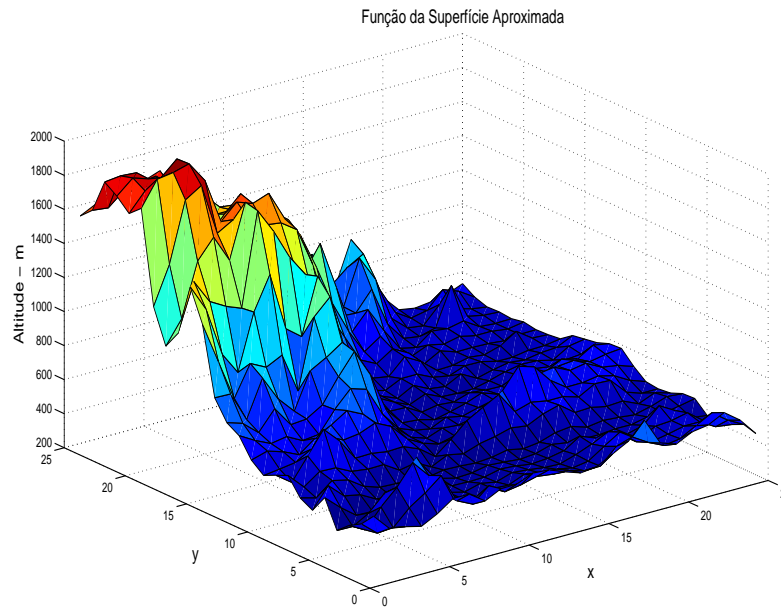


FIGURA 1.9: Aplicação - Superfície Aproximada.

Erros:

TABELA 1.3: Método Bi-Linear - Erros Numéricos.

Erros Numéricos		
$N = 625$		
RMSE	1.30E-02	m
REL RMSE	6.73E-02	%

Tempo de Processamento:

TABELA 1.4: Método Bi-Linear - Tempo de Processamento.

Tempo de Processamento		
$N = 625$		
Tempo Total	1.12	s

Podemos obter excelentes resultados dependendo do tipo de solução que pretendemos de forma rápida e precisa. Contudo, comparando o método de interpolação bi-linear com as equações multiquádricas de Hardy, este método tem um erro *RMSE* maior e a superfície aproximada é menos suave.

### 1.3.5 Aproximação por B-splines

As splines são uma classe de funções úteis para interpolar dados entre valores conhecidos ou medidos, criação de curvas e criação de superfícies. As splines cúbicas são as mais utilizadas em interpolação. Uma spline cúbica consiste num conjunto de curvas cúbicas, isto é, funções polinomiais com  $d = 3$ , unidas de forma suave e de tal modo que as primeiras e as segundas derivadas são contínuas. Estas curvas unem-se em posições conhecidas, ou nós, que podem estar colocados nos pontos conhecidos no caso em que a spline aproxima exactamente o valor, ou noutros pontos quaisquer. No segundo caso a spline ajusta-se de tal modo que a soma do quadrado dos desvios dos valores conhecidos, ou outro qualquer método de minimização, seja mínima. O número e posição dos nós afectam a forma e o ajuste da curva ou superfície interpolada [19, 20].

Uma aproximação por B-splines é feita mediante um compromisso entre a suavidade e a exactidão da função de aproximação. Deste modo um outro método, a aproximação Multilevel B-spline [21], onde a função resultante é suave e aproxima os dados pretendidos. Este método tem como dados de entrada, um conjunto de pontos dispersos e produz uma superfície B-spline. Esta superfície é uma função spline que tem o mínimo de suporte em relação a um determinado grau, suavidade e partição do domínio. O algoritmo corre numa definição multi-resolucional sobre partições uniformes tal que a superfície final  $f$  é composta por uma sequência de superfícies a escalas uniformes:

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_k$$

onde  $f_i \in S_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ), e  $S_0, S_1, \dots, S_k$  é uma sequência de sub-espacos de  $S_k$ :

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k$$

Seja dado um conjunto de pontos  $P = \{P_i\}_{i=1}^N$ , com  $P_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$  e seja  $\Omega$  um domínio rectangular no eixo  $xy$  tal que  $(x_i, y_i)$  é um ponto em  $\Omega$  e  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x < m_x, 0 \leq y < m_y\}$ . A grelha de controlo  $\Phi$  é um vector uniforme sobre o domínio  $\Omega$ . O número inicial de pontos na grelha é  $N_x = m_x/h_x$  no eixo  $xx$  e  $N_y = m_y/h_y$  no eixo  $yy$ . Estes pontos ou nós estão definidos num intervalo uniforme  $h_x$  e  $h_y$ . Para o caso de uma B-spline bi-cúbica uniforme, com  $d = 3$ , o vector dos nós está definido como:

$$\tau_x = \{-dh_x, \dots, 0, h_x, \dots, N_x h_x, \dots, (N_x + d)h_x\}$$

$$\tau_y = \{-dh_y, \dots, 0, h_y, \dots, N_y h_y, \dots, (N_y + d)h_y\}$$

Seja  $c_{ij}$  o valor do  $ij$ -ésimo ponto de controlo na grelha  $\Phi$ , localizado em  $(ih_x, jh_y)$ , para  $(i = -1, 0, 1, \dots, N_x + 1)$  e  $(j = -1, 0, 1, \dots, N_y + 1)$ . A aproximação da função  $f$  é definida em termos dos pontos de controlo nas posições  $(x, y) \in \Omega$ :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_y+1} c_{ij} B_{i,d}(x) B_{j,d}(y) \quad (1.35)$$

onde  $B_{i,d}$  e  $B_{j,d}$  são B-splines cúbicas e uniformes, de grau igual a três e os vectores dos nós dados por:

$$\begin{aligned} \tau_x &= \{(i-2)h_x, (i-1)h_x, ih_x, (i+1)h_x, (i+2)h_x\} \\ \tau_y &= \{(j-2)h_y, (j-1)h_y, jh_y, (j+1)h_y, (j+2)h_y\} \end{aligned}$$

As funções de base B-spline cúbicas e uniformes  $B_{i,d}$  e  $B_{j,d}$  servem para pesar a contribuição de cada ponto de controlo na Equação (1.35), baseando-se na distância a  $(x, y)$ . A aproximação por B-spline por níveis usa uma hierarquia de grelhas de controlo para gerar uma função  $f_i$  onde a função de aproximação final  $f$  é definida pela soma dessas funções  $f_i$ :

$$f = \sum_{i=1}^k f_i \quad (1.36)$$

Para otimizar este processo, é utilizada uma refinação para reduzir a soma destas funções numa única função equivalente B-spline. Deste modo a aproximação inicial é  $f_0$  com  $\Delta^0 P = P$  para  $\Phi_0 = \Phi$ , aplicando na primeira aproximação um algoritmo B-spline. A grelha  $\Phi_0$  é uma grelha com poucos centros ou grosseira. A primeira aproximação deixa um desvio muito grande definido por:

$$\Delta^1 z_i = z_i - f_0(x_i, y_i), i = 0, \dots, N$$

A próxima grelha, mais fina,  $\Phi_1$  é usada para obter  $f_1$  que aproxima  $\Delta^1 P = \{x_i, y_i, \Delta^1 z_i\}$ . A soma  $f_0 + f_1$  deixa um desvio mais pequeno para cada  $(x_i, y_i) \in \Omega$ :

$$\Delta^2 z_i = z_i - f_0(x_i, y_i) - f_1(x_i, y_i), i = 0, \dots, N$$

No geral, para cada nível  $k$  na hierarquia, o conjunto de pontos  $\Delta^k P = \{x_i, y_i, \Delta^k z_i\}$  é aproximado por uma função  $f_k$  definida pela grelha de controlo  $\Phi_k$ , onde:

$$\Delta^k z_i = z_i - \sum_{l=0}^{k-1} f_l(x_i, y_i) = \Delta^{k-1} - f_{k-1}(x_i, y_i) \quad (1.37)$$

e  $\Delta^0 z_i = z_i$ . Este processo começa com  $\Phi_0$ , onde a selecção dos nós é:

$$\begin{aligned} \tau_x^k &= \left\{ -d \frac{h_x}{2^k}, \dots, 0, \frac{h_x}{2^k}, \dots, 2^k N_x \frac{h_x}{2^k}, \dots, (2^k N_x + d) \frac{h_x}{2^k} \right\} \\ \tau_y^k &= \left\{ -d \frac{h_y}{2^k}, \dots, 0, \frac{h_y}{2^k}, \dots, 2^k N_y \frac{h_y}{2^k}, \dots, (2^k N_y + d) \frac{h_y}{2^k} \right\} \end{aligned}$$

Dada a função  $f$ , o problema básico de aproximação por splines é determinar os coeficientes  $(c_i)_{i=1}^N$  tal que:

$$Pf = \sum_{i=1}^N c_i B_{i,d} \quad (1.38)$$

seja uma aproximação razoável de  $f$ . Uma vez que é possível com este método fazer a reconstrução de uma superfície, o desafio é agora encontrar um novo procedimento para calcular esses coeficientes [22].

Assume-se que  $f$  está definida num intervalo  $[a, b]$  mas quando se determina  $c_k$  podemos estar no sub-intervalo  $I = [t_u, t_v]$  da nossa escolha. Podemos também escolher o método de aproximação. Uma classe geral de métodos de aproximação é deixar  $P_I$  ser dado como:

$$\lambda_{k,j} f = f(x_{k,j}), i = 1, \dots, N_k \quad (1.39)$$

onde  $N_k = v - u + d$  e  $(x_{k,1}, \dots, x_{k,N_k})$  são pontos dados. Se  $B_{u-d-1+j,d}(x_{k,j}) > 0, j = 1, \dots, N_k$ , obtemos:

$$c_k = \lambda_k f = \sum_{j=1}^{N_k} \omega_{k,j} f(x_{k,j}) \quad (1.40)$$

Para um vector  $\omega_k = (\omega_{k,j})$ , resolvemos o sistema linear e encontramos  $\omega_k$ :

$$\delta_{i,k} = \lambda_k B_{i,d} = \sum_{j=1}^{N_k} \omega_{k,j} B_{i,d}(x_{k,j}) \quad (1.41)$$

para  $(i = u - d, \dots, v - 1)$ ,  $\delta_{i,k} = 1$  se  $i = k$  e  $\delta_{i,k} = 0$  se  $i \neq k$ .

Este método de aproximação Multilevel B-splines está bem adaptado para aproximação e interpolação. O método apresentado é usado para gerar uma malha onde o número de pontos de controlo desta malha aumenta consoante se aumenta o seu nível  $k$ . A soma das funções de interpolação B-splines para cada malha é a função final de interpolação dos dados pretendidos, sendo ainda possível uma refinação que retorna uma única função equivalente à soma de todas as funções hierárquicas. O objectivo é sempre a redução do erro de aproximação. O método é local e por isso mesmo nas malhas mais finas cada coeficiente B-Spline depende apenas dos pontos na vizinhança e conseqüentemente é um método rápido.

Um novo método para calcular os coeficientes utilizando quasi-interpolação tornam ainda mais rápido os algoritmos para interpolação e aproximação, conseguindo manter a precisão. Esta superfície tem continuidade  $C^2$  para interpolação mesmo de um conjunto muito grande de dados, o problema é que utilizando este esquema de quasi-interpolação [23] temos de resolver um sistema linear de equações para determinação dos coeficientes o que torna o sistema muito improvável para utilização em tempo real. Se os dados não estão distribuídos uniformemente sobre o domínio podem acontecer irregularidades indesejadas junto da localização de conjuntos de pontos na superfície final  $f$  [24] ou seja, o algoritmo vai produzir anomalias perto dos conjuntos de dados interpolados, se a malha de coeficientes B-spline é densa e ou esses conjuntos de dados estão desigualmente distribuídos no domínio.

O espaço hierárquico de B-splines é desenvolvido como o espaço linear do produto externo de B-splines em diferentes malhas. Este espaço é instável e tem um erro superior para baixas hierarquias. Outra principal limitação desta técnica é que esta é baseada num produto vectorial B-spline para aproximação de curvas ou superfícies, ou seja, os pontos de controlo da superfície têm de ser distribuídos uniformemente sobre uma malha e requer administração dos intervalos desses pontos ou nós. Se estes não forem uniformes temos um problema que aumenta de complexidade. A forma de uma superfície B-spline de ordem fixa é controlada pela localização da rede de nós. O número de nós para um determinado ponto da malha é representado pelo vector de nós e deste modo, múltiplos nós implica múltiplos vectores de nós. Também a continuidade  $C^2$  de uma superfície bi-cúbica B-spline não pode ser garantida fora dos limites do domínio espacial de dados. Outro problema é que aumentar ou diminuir a matriz de pesos não afecta a continuidade  $C^2$ , mas surgem imperfeições na superfície quando vista com pouco detalhe. Isto pode levar ao não respeito da propriedade de convexidade, que não é nada mais que a curva ou superfície estar dentro da área de vizinhança a todos os pontos de controlo. Além disso a interpolação de um ponto em que os nós na vizinhança têm uma baixa contribuição para a função de interpolação pode afectar o valor da aproximação.

### 1.3.6 Função de Lebesgue em Funções de Base Radial

A constante de Lebesgue, dependendo de um conjunto de nós e do seu tamanho, dá uma ideia da quão boa é a interpolação de uma função nos pontos fornecidos, em comparação com a melhor aproximação da função. A constante de Lebesgue para um conjunto de  $N$  nós é geralmente indicada por  $\Lambda_\Gamma$ . Sabe-se também que esta constante está relacionada com o cálculo dos polinómios de Lagrange. Estuda-se a função de Lebesgue e a constante de Lebesgue para interpolação multivariada de funções de base radial condicionalmente positivas definidas [7]. A forma de Lagrange para interpolação multivariada por funções de base radial nos nós  $(x_1, \dots, x_N)$  é definida por:

$$s(x) = \sum_{k=1}^N f_k \frac{D(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)}{D(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)} \quad (1.42)$$

A função de Lebesgue para este tipo de interpolação é definida por:

$$\Lambda(x) = \sum_{k=1}^N |\ell_k(x)| \quad (1.43)$$

onde  $\ell_k(x)$  é:

$$\ell_k(x) = \left| \frac{D(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)}{D(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)} \right|$$

Esta forma de interpolação não consegue reproduzir funções simétricas constantes e deste modo pode-se mudar a forma do interpolante para que este também reproduza polinómios de uma determinada ordem. Para este tipo de interpolante são necessárias definições que generalizam as funções positivamente definidas. Uma função contínua e simétrica  $\Phi$  é designada condicionalmente positiva definida de ordem  $l$  em  $\mathbb{R}^d$  se:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0$$

para quaisquer  $N$  pontos  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^d$ , e  $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$  satisfazendo:

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^\alpha = 0, |\alpha| < l, \alpha \in N_0^d$$

Uma função  $\Phi$  é chamada condicionalmente positiva definida [8], de ordem  $l$  em  $\mathbb{R}^d$  se os pontos  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^d$  são distintos, e deste modo  $c \neq 0$  implica a desigualdade.

A matriz  $A$ , com  $A_{jk} = \Phi(x_j - x_k)$  correspondendo a uma função real e estritamente condicionada positiva definida simétrica de ordem  $l$  também pode ser interpretada como sendo positiva definida no espaço de vectores  $c$  tal que:

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^\alpha = 0, |\alpha| < l$$

Seja  $V$  o seguinte:

$$V = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0, p \in \Pi^l(\mathbb{R}^d) \right\} \quad (1.44)$$

onde  $\Pi^l(\mathbb{R}^d)$  é o espaço polinomial  $d$ -variado de ordem não superior a  $l$ . A dimensão de  $\Pi^l(\mathbb{R}^d)$  é  $\binom{l-1+d}{d}$ .

Seja  $(p_1, \dots, p_L)$  a base para  $\Pi^l(\mathbb{R}^d)$  onde  $L = \binom{l-1+d}{d}$ , a interpolação condicionalmente positiva definida é a seguinte. Supondo que os valores  $(f_1, \dots, f_N)$  em  $N$  nós distintos  $X$  são dados, onde  $X$  é  $\Pi^l(\mathbb{R}^d)$  com solução única, a interpolação por uma função de base radial  $\phi$  é resolvida por um sistema linear  $(N+L)(N+L)$ :

$$\begin{aligned} A\alpha + P\beta &= f \\ P^T\alpha + 0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

onde  $L = \dim(\Pi^l(\mathbb{R}^d))$  e  $P = (p_i(x_j))_{1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq L}$ . Se assumirmos que a ordem de  $P = L \leq N$  temos que o sistema linear tem solução única e o interpolante resultante tem a seguinte forma:

$$s_{\phi, X}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\|x - x_j\|) + \sum_{i=1}^L \beta_i p_i(x) \quad (1.46)$$

com a condição adicional de  $\alpha \in V$ . Para simplificação defini-se:

$$D_L(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) = \det \begin{bmatrix} [\phi(\|x - x_j\|)]_{j,k=1}^N & P \\ P^T & S \end{bmatrix}_{(N+L)(N+L)}$$

onde  $P = [p_i(x_j)]_{j=1, i=1}^{N, L}$  e  $S = [0]_{L \times L}$ .

Para um conjunto de dados  $\{(x_k, f_k)\}_{k=1}^N$ , o interpolante de base radial torna-se:

$$s(x) = \sum_{k=1}^N f_k \frac{D_L(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)}{D_L(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)}$$

A função de Lebesgue é agora definida como:

$$\Lambda(x) = \sum_{k=1}^N |\ell_k(x)| \quad (1.47)$$

onde  $\ell_k(x)$  é:

$$\ell_k(x) = \frac{D_L(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)}{D_L(\phi; x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)}, (1 \leq k \leq N)$$

A constante de Lebesgue neste caso é:

$$\Lambda_\Gamma = \max_{x \in \Gamma} \Lambda(x) \quad (1.48)$$

Sabendo que  $s$  é uma projecção e também um operador linear. Verifica-se agora que  $s$  é delimitado. Sejam dados  $N$  nós distintos  $(x_1, \dots, x_N)$  num domínio fechado e delimitado  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ . Seja  $f$  dado em  $N$  pontos distintos  $X_N = (x_1, \dots, x_N) \subseteq X$  onde  $X$  é um sub-domínio fechado e delimitado de  $\mathbb{R}^d$ . Temos que:

$$|f(x) - s(x)| \leq \Lambda(x) \max_{x_j \in X_N} |f(x) - f(x_j)|, (x \in X)$$

A norma  $\|L_N\|$  do operador de interpolação de Lagrange é mínima se para todo o  $(i = 1, \dots, N)$  os valores:

$$\lambda_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \Lambda(t)$$

são iguais, onde  $(t_1 \leq \dots \leq t_{N+1})$  são os nós de interpolação correspondentes a  $L_N$  (Bernstein, 1954). Estes nós são unicamente determinados (Erdős, 1961). Considerando a região  $\Gamma = [-1 \ 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  e  $(x_1, \dots, x_N)$  dados, dividindo a região  $\Gamma$  em  $(N - 1)$  sub-regiões  $\Gamma_i, (1 \leq i \leq N - 1)$ , tal que  $\text{int}(\Gamma_j) \cap \text{int}(\Gamma_k) = \emptyset (j \neq k)$  então:

$$\lambda_i = \max_{t \in \Gamma_i} \Lambda(t) \quad (1.49)$$

Seja  $L_N$  o operador Lagrangiano para interpolação por funções de base radial em  $N$  nós distintos, temos que a norma  $\|L_N\|$  é mínima se para todo o  $i \in (1, \dots, N)$ , os valores  $\lambda_i$  são os mesmos, e  $(x_1, \dots, x_N)$  são os nós de interpolação correspondendo a  $L_N$ .

É adicionado à função de interpolação um polinómio que se sobrepõe à função de base radial para reduzir o erro médio nos pontos desejados obtendo-se vantagens notórias quando existe desvios excessivos. Deste modo, é possível resolver o problema de interpolação por funções de base radial resolvendo a Equação (1.46), onde o polinómio tem um grau  $< l$ . De facto com esta equação pode-se verificar como calcular os coeficientes para a criação da função interpolante com utilização de funções de base radial.

A qualidade da aproximação pela Equação (1.46) pode ser verificada através da constante de Lebesgue. A constante de Lebesgue é um parâmetro, ou uma medida, que permite determinar o erro máximo que pode ser obtido para um tipo de função de base radial em relação ao número de pontos  $(x_1, \dots, x_N)$ . Verifica-se que para um conjunto de seis nós e comparando as diversas funções de base radial com  $d = 1$ , a Thin Plate Spline ( $TPS_2$ ) apresenta o valor para a constante de Lebesgue mais baixo. Isto significa que a utilização desta função de base radial na função de interpolação tem um erro máximo mais pequeno do que aquele que por exemplo podemos cometer, se utilizarmos a função de base radial Gaussiana.

É preciso verificar para funções de ordem superior a um e outro número de nós, o comportamento das funções de base radial em relação à constante de Lebesgue e dessa forma analisar ou quantificar o erro máximo cometido pela utilização destas funções. Sugere-se ainda a divisão do domínio de estudo, para determinar a posição dos nós onde a norma do operador de interpolação por funções de base radial é mínima, em  $(N - 1)$  sub-regiões e encontrar nestas os nós de tal modo que  $\lambda_i = \max_{t \in \Gamma_i} \Lambda(t)$  sejam igual para todas as sub-regiões e então garantir a minimização do operador de interpolação. No caso da interpolação polinomial de Lagrange em  $\text{dim} = 1$ , os zeros da expansão de Chebyshev estão próximos dos nós óptimos. É preciso também determinar quais são os nós óptimos para uma dimensão qualquer e ainda determinar a melhor forma de encontrar o  $\lambda_i$  em todas as sub-regiões.

## 1.4 Síntese

Durante as últimas décadas as funções de base radial têm vindo a ser aplicadas com sucesso na interpolação de conjuntos de dados dispersos (plano  $xz$ ):

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\|x - x_j\|) \quad (1.50)$$

Neste tipo de funções os centros,  $x_j$ , podem ser escolhidos arbitrariamente do domínio de interesse e o dependendo do tipo de função pode conter ou não, um parâmetro,  $c$ , também denominado por factor de forma.

As funções multiquádricas de Hardy são entre todas as funções de base radial as que melhores resultados dão em termos de avaliação estatística e visual da superfície modelada [3]. Além disso, este tipo de funções contém o factor de forma:

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x-x_j)^2 + c_j^2} \quad (1.51)$$

Para melhorar a precisão das funções multiquádricas de Hardy pode ser adicionado um polinómio à Equação (1.51) e deste modo diminuir o erro médio:

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x-x_j)^2 + c_j^2} + \sum_{l=1}^L \beta_l p_l(x) \quad (1.52)$$

O *uncertainty principle* [25], diz que não se pode obter bom condicionamento e boa precisão simultaneamente. Em geral, utilizar valores pequenos para o factor de forma produz os resultados mais precisos, mas também estão associados a matrizes de interpolação mal condicionadas. E este mau condicionamento da matriz é maior quanto maior for o número de centros. Deste modo alguns investigadores tentaram encontrar um algoritmo que especifica o factor de forma óptimo, ou seja, o valor que produz a melhor precisão mantendo a estabilidade numérica. Contudo, a determinação deste factor de forma óptimo é ainda uma questão em aberto [26] uma vez que é quase sempre escolhido por força bruta. Ou seja, escolhido de maneira a que a matriz de interpolação tenha o seu número de condicionamento sempre abaixo de um valor estipulado.

A matriz dos coeficientes de todo o sistema de equações é completa e deste maneira para um conjunto de pontos alargado a resolução deste sistema não é aceitável. Pode-se observar que de facto existe um conjunto de parâmetros que afectam a criação de uma função que represente uma determinada superfície. Esses parâmetros, ver Equação (1.52), que definem uma superfície multiquádrica são os centros da multiquádrica  $(x_1, \dots, x_N)^T$ , os coeficientes da multiquádrica  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ ,  $(c_1, \dots, c_N)^T$ , e os coeficientes do polinómio  $(\beta_1, \dots, \beta_L)^T$ . Para aliviar estes problemas, é então proposto um método eficiente para calcular os parâmetros óptimos para a reconstrução de uma superfície pelas funções multiquádricas de Hardy.

A interpolação multiquádrica para uma superfície regular com continuidade  $C^2$  também atinge uma convergência de segunda ordem e tem excelentes propriedades de localização, mas estudos numéricos [27] sugerem que se o domínio é finito então a convergência diminui para primeira ordem nos limites deste domínio. Também está provado que pode-se recuperar esta convergência adicionando o polinómio à função multiquádrica.

A interpolação polinomial numa forma parametrizada [18] permite que a superfície seja interpolada facilmente com uma manipulação algébrica simples. O método de interpolação bi-linear é capaz de interpolar a superfície linearmente sendo fiel aos dados originais com um erro médio muito pequeno. A interpolação feita não é suave uma vez que não existe um factor de forma ou maneira de suavizar a superfície, mas este método para o propósito de interpolação de uma superfície em pontos desejados é expedito e preciso. Uma vez que necessitamos de um polinómio para a Função (1.52) e existe problemas de convergência nos limites do domínio, pode-se aplicar o método bilinear a todo o conjunto de pontos intermédios, e o método biquadrático ao conjunto de pontos nos limites para efectivamente forçar a convergência.

A constante de Lebesgue, dependendo de um conjunto e número de centros, dá uma ideia da quão boa é a interpolação de uma função nos pontos fornecidos, em comparação com a melhor aproximação da função. A constante de Lebesgue para interpolação por funções de base radial neste caso é:

$$\Lambda_{\Gamma} = \max_{x \in \Gamma} \Lambda(x) \quad (1.53)$$

Desta forma utilizando a função e a correspondente constante de Lebesgue para interpolação por funções de base radial, pode-se achar o erro máximo [7] que se pode obter com as equações multiquádricas de Hardy para vários conjuntos e números de centros pela seguinte definição:

$$|f(x) - s(x)| \leq \Lambda(x) \max_{x_j \in X_N} |f(x) - f(x_j)|, (x \in X)$$

Existe muitas formas de fazer a reconstrução de uma superfície. Tal reconstrução pode ser feita pela interpolação ou aproximação de conjuntos de pontos conhecidos. O método utilizado influencia por isso várias características que podem ser desejadas ou não. Por exemplo a precisão e a suavidade são duas características que se podem encontrar nas funções multiquádricas de Hardy [2], mas na aproximação polinomial não existe suavidade. Noutros métodos podem surgir imperfeições na superfície ou serem demasiado complexos computacionalmente o que impossibilita o uso em tempo real. Todas estas características têm de ser equacionadas para a aplicação em questão. Neste caso da reconstrução de uma superfície, as equações multiquádricas de Hardy, permitem atingir as qualidades pretendidas, precisão e suavidade em qualquer dimensão.

## Capítulo 2

# Aproximação Multiquádrica baseada em Densificação do Domínio

### 2.1 Método

No presente capítulo vai ser apresentado um método para criação de um método baseado nas funções multiquádricas de Hardy. Para a criação deste método precisamos das ferramentas abaixo descritas. O objectivo da criação deste modelo é a reconstrução e aproximação de superfícies de uma forma o mais generalizada possível, de modo a ser aplicado nas mais variadas áreas.

#### 2.1.1 Densificação

Aplicar um procedimento de densificação no domínio permite-nos aproximar qualquer função multi-dimensional por uma mono-dimensional. Este método reduz o número de variáveis do problema original e ainda requer menos avaliações da função [28]. Investigadores que trabalham com muito grandes conjuntos de dados de qualquer dimensão, em áreas tão diversas como a geologia, a meteorologia, a modelação geológica, a aeronáutica, os padrões climáticos, os espectros estelares, ou distribuições de genes humanos como em [13, 29–32], confrontam-se regularmente com o problema de redução da dimensão do problema em estudo. Aqui descrevemos uma aproximação baseada nas funções multiquádricas para resolver um problema de redução de dimensão que usa simples medições métricas locais para aprender a geometria do conjunto global de dados.

Os avanços na colecção de dados e capacidades de armazenamento durante as últimas décadas tem levado a uma sobrecarga de informação na maioria das ciências. Investigadores que trabalham em áreas diversas como as acima referidas deparam-se com grandes e cada vez maiores

observações e simulações no seu dia-a-dia. Tais conjuntos de dados em contraste com mais pequenos e mais tradicionais conjuntos que foram estudados no passado apresentam novos desafios para a análise de dados.

Matematicamente, o problema é dado uma  $N$ -dimensional variável aleatória  $x = (x_1, \dots, x_N)$  encontrar uma representação mais pequena desta,  $s = (s_1, \dots, s_K)$  com  $K \leq N$  que conserve o conteúdo dos dados originais de acordo com algum critério. Como exemplo, um LiDAR [33, 34], fornece uma forma de adquirir dados topográficos a altas densidades e com grande precisão.

Tendo uma fonte de dados de terreno topográfico podemos usar estes dados em variadas áreas como detecção de edifícios, modelação 3D de zonas urbana, modelagem hidrológica, controlo de glaciares, ou a classificação do relevo do solo, rio ou gestão costeira entre outras aplicações já acima referidas. A precisão e densidade com que se consegue obter tais dados topográficos, é muito apetecível para uso em mapeamentos de altas resoluções. Contudo esta grande densidade de dados leva a um grande aumento de volume de dados, impondo desafios no que diz respeito ao armazenamento, processamento e manipulação dos mesmos. Estratégias para trabalhar com grandes volumes de dados topográficos sem sacrificar a precisão são deste modo necessárias, e através da redução de dados é possível uma melhor gestão e operacionalidade do novo mapa do novo conjunto de dados para modelação.

Deste modo pretende-se utilizar um método de densificação que reduz a dimensão de dados adquiridos e mantenha precisão dos mesmos durante a modelação. Com isto pretende-se um processamento de dados mais eficiente em termos de armazenamentos e tempo de processamento.

Seja  $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$  ser uma caixa (domínio) ou hyper-rectângulo e  $J = [a, b]$  ser um intervalo real. Então uma função  $h : J \rightarrow B$  é dita ser uma curva  $\alpha$ -densa em  $B$ , se  $\forall x \in B$ ,  $\exists t \in J : \|h(t) - x\| \geq \alpha$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ . Agora vamos considerar  $h : J = [0, 1] \rightarrow B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  definindo como  $\theta \in J$ ,  $h(\theta) = (h_1(\theta), (\theta_1), \dots, (\theta_n))$ , onde  $h_n$  é  $\alpha_n = \mu^{n-1} 2^n \pi$  densa:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(a_1 - b_1)}{2} \cos \alpha_1 \theta + \frac{(a_1 + b_1)}{2} \\ &\vdots \\ h_n &= \frac{(a_n - b_n)}{2} \cos \alpha_n \theta + \frac{(a_n + b_n)}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

A curva obtida por este método [28] tem uma representação co-seno. Isto significa que todos os eixos são preenchidos com funções periódicas, tendo diferentes períodos. O parâmetro  $\mu$  controla a distância entre todos os pontos no espaço.

### 2.1.2 Factor de Forma

Uma função suavizada é muito mais fácil de visualizar do que os dados puramente reais. À muito que foi reconhecido que o factor de forma  $c$ , tem uma grande influência na performance das funções multiquádricas [13, 35]. Sem retirar mérito ao excelente desempenho das funções multiquádricas, a escolha deste parâmetro pode afectar grandemente a precisão da aproximação. Ajustando este parâmetro, a precisão pode aumentar consideravelmente. Foi verificado que aumentando este parâmetro [16], o  $RMS.E$  (erro root mean square) da estimação cai para um mínimo e depois cresce rapidamente. Assim, verificámos que existe um parâmetro óptimo que está associado a um  $RMS.E$  mínimo para a função estimada.

Existem algumas fórmulas para calcular o factor de forma, mas não existe nenhuma aceite universalmente. Quase todos os métodos são antigos e foram deduzidos experimentalmente. Para as funções multiquádricas, a escolha óptima de  $c$  é um problema em aberto. Existem algumas sugestões, como por exemplo métodos baseados na distribuição de pontos. O autor em [36] sugere um valor de  $c$  que toma em conta o espaçamento, para o caso bi-dimensional, dos pontos distribuídos segundo a direcção  $x$  e  $y$ :

$$c = \sqrt{\frac{1}{10} \max \left\{ \max_{i,j} |x_i - x_j|, \max_{i,j} |y_i - y_j| \right\}} \quad (2.2)$$

ou Hardy em [2] sugere:

$$c = 0.851d \quad (2.3)$$

onde  $d$  é a distância média dos pontos para os pontos vizinhos. Franke [37], substituiu  $d$  por  $D/\sqrt{N}$ , onde  $D$  é o diâmetro do círculo mínimo que abrange todos os pontos e sugeriu:

$$c = \frac{1.25D}{\sqrt{N}} \quad (2.4)$$

Todas estas maneiras de calcular o factor de forma podem ser trivialmente estendidas para qualquer dimensão e conseguem fornecer boa precisão e boas características visuais [11]. Contudo este parâmetro é fixo e um dos objectivos desta dissertação é também apresentar um método para calcular este parâmetro de maneira a termos o melhor desempenho quando utilizamos uma aproximação com funções multiquádricas. Assim, depois de seleccionados ou encontrados todos os centros pelo método da densificação, podemos encontrar o seu factor de forma correspondente.

Deste modo, não temos apenas um único factor de forma comum a todos os centros, mas um número proporcional ao número de centros  $N_c$ . A forma como encontramos os seus valores é calculando a distância máxima entre os centros vizinhos correspondente a cada centro, ver Figura 2.1:

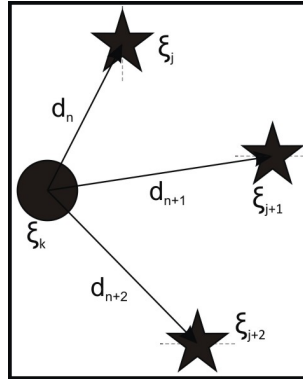


FIGURA 2.1: Factor de Forma.

Deste modo, o primeiro passo é encontrar os centros vizinhos  $(\xi_j, \dots, \xi_{j+n})^T$  e calcular a distância  $(d_j, \dots, d_{j+n})^T$  entre o centro em questão  $\xi_k$  e os centros vizinhos. Depois, o valor do factor de forma correspondente a cada centro  $c_k$ , é a distância máxima entre todas as distâncias encontradas tal como na Equação (2.5):

$$\forall \xi_k \rightarrow c_k^2 = \max \{ \|\xi_k - \xi_j\|, k \neq j \} \quad (2.5)$$

onde  $\xi_j$  são os centros vizinhos correspondentes ao centro  $\xi_k$ . Desta forma podemos encontrar o valor de  $c$  de forma expedita, eficiente e de forma otimizada.

### 2.1.3 Sub-Conjuntos

Procedemos a uma escolha aleatória do número total de dados de forma a também reduzir este número e a complexidade do problema de reconstrução de superfícies [38]. Ou seja, procede-se a uma selecção do conjunto total de dados para que aleatoriamente sejam seleccionados um número  $T$  de dados de forma a satisfazer a seguinte condição:

$$T > \frac{N_i}{2} \quad (2.6)$$

onde  $N_i$  é o número total de dados.

Todos os dados pertencentes ao conjunto total tem a mesma probabilidade de serem seleccionados para formar o primeiro sub-conjunto  $I$  de dados,  $T$ , que depois são utilizados para treinar uma função de interpolação  $s(x, y)$ .

Os outros dados ( $N_i - T$ ) serão colocados noutra sub-conjunto  $II$  que serve apenas para validação da função de interpolação treinada. É importante referir que todos os dados têm igual probabilidade de serem seleccionados. O esquema da Figura 2.2 representa o raciocínio tomado em conta para este efeito:

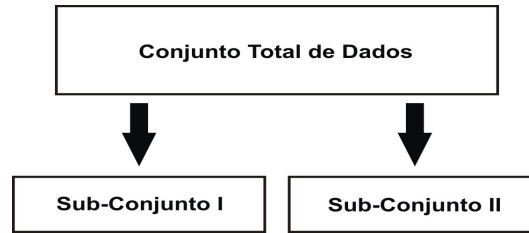


FIGURA 2.2: Escolha Aleatória dos Dados.

O objectivo desta selecção aleatória dos dados em sub-conjuntos tem como finalidade reduzir a dimensão do problema para a criação da função de interpolação, ou seja, reduzindo o número de dados iniciais resolvemos um sistema de equações lineares mais pequeno e logo reduzimos a complexidade do problema em vários níveis como o tempo de processamento e estabilidade numérica, e ainda tem como propósito fazer a validação do método.

#### 2.1.4 Função de Interpolação

A aprendizagem é equivalente a encontrar uma superfície num espaço multi-dimensional que fornece a melhor estimacção para os dados utilizados para treinar a função. Vamos utilizar  $T$  dados para treinar a seguinte equação de interpolação multivariada:

$$s(x, y) = \sum_{k=1}^{N_c} \alpha_k \varphi_k(x, y) + \sum_{l=1}^L \beta_l p_l(x, y) \quad (2.7)$$

onde  $\varphi_k(x, y)$  é a função de base multiquádrica dada por:

$$\varphi_k(x, y) = \sqrt{c_k^2 + \|x - \xi_k^x\|^2 + \|y - \xi_k^y\|^2} \quad (2.8)$$

$p_l(x, y)$  é o polinómio acrescentado na seguinte forma:

$$p_l(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}^T \quad (2.9)$$

e  $(\xi_k^x, \xi_k^y) \in N_c$  são as componentes segundo o eixo  $x$  e  $y$  dos centros (nós) e  $(x, y) \in T$  são os dados de treino seleccionados aleatoriamente.

Para resolver este problema de treino da função de interpolação é necessário resolver um problema de minimização com todo o sub-conjunto  $I$ , com  $T$  dados de treino, utilizando a seguinte função de custo:

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{t=1}^T \left( \left\| \sum_{k=1}^{N_c} \alpha_k \varphi_k(x_t, y_t) + \sum_{l=1}^L \beta_l p_l(x_t, y_t) - F(x_t, y_t) \right\|^2 \right) \quad (2.10)$$

e resolver a Equação (2.10) em função dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ . Após termos achado estes valores podemos aplicar a função de interpolação dada pela Equação (2.7) para aproximar qualquer valor no domínio. Outra resolução para este problema, é achar a solução analítica utilizando para isso um método de mínimos quadrados neste caso o método da pseudo-inversa para resolução do seguinte sistema sobre-determinado:

$$A\eta = F \quad (2.11)$$

onde  $A$  é a matriz de interpolação e é obtida por:

$$A = a_{t,k} = \sqrt{c_k^2 + \|x_t - \xi_k^x\|^2 + \|y_t - \xi_k^y\|^2} + p_l(x_t, y_t) \quad (2.12)$$

e  $(\xi_k^x, \xi_k^y) \in N_c$  são as componentes segundo o eixo  $x$  e  $y$  dos centros e  $(x, y) \in T$  são os dados de treino seleccionados aleatoriamente. Finalmente, podemos obter os coeficientes  $\eta = (\alpha \ \beta)^T$  aplicando a pseudo-inversa:

$$\eta = (A^T A)^{-1} A^T F \quad (2.13)$$

Acontece que a matriz  $A^T A$  pode ser singular, o que implica que quando se procede ao cálculo dos coeficientes é necessário achar a sua inversa tal não vai ser possível e ainda, também pode acontecer que  $A^T A$  seja mal condicionada. Estes factos indicam que estamos perante um problema mal-colocado e não é possível o cálculo da inversa sem recorrer à Regularização [39] que torna um problema mal condicionado num problema bem condicionado. Existem vários métodos de regularização e dos métodos existentes, foi escolhida a Regularização de Tikhonov [39].

Para a resolução de sistemas de equações lineares sobre-determinados, normalmente é utilizado:

$$A\eta = F \quad (2.14)$$

Se  $A$  for mal-condicionada ou singular, transforma-se a Equação (2.14) na seguinte:

$$J(x) = \|A\eta - F\|^2 + \|\lambda\eta\|^2 \quad (2.15)$$

onde  $\lambda$  é um escalar, que tem como solução:

$$\eta_{opt} = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T F \quad (2.16)$$

O escalar  $\lambda$  é escolhido de forma a que o sistema consiga acompanhar os valores de saída referentes aos coeficientes. A este factor  $\lambda$  dá-se o nome de factor de Tikhonov. Deste modo, é possível calcular um valor de  $\lambda$ , que melhor satisfaz as condições desejadas, e consiste no ponto de viragem de uma curva em  $L$  (método L-curve) [40].

O algoritmo para a criação da função de interpolação está esquematizado abaixo, onde  $N_i$  e  $N_c$  são o número total de pontos e o número de centros respectivamente:

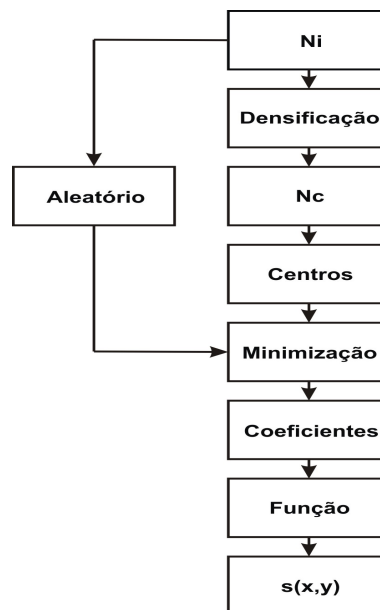


FIGURA 2.3: Treino da Função de Interpolação.

## Capítulo 3

# Validação do Método

### 3.1 Aplicação

No presente capítulo é feita a aplicação numérica e validação do método desenvolvido no Capítulo 2. Deste modo analisámos 3 conjuntos de dados que correspondem a superfícies morfológicamente distintas.

#### 3.1.1 Função de Franke

Para validar o método proposto implementámos uma função teste de Franke, (Franke, 1982):

$$\begin{aligned} F(x, y) = & 0.75 \exp(-(((9x - 2)^2 + (9y - 2)^2)/4)) + \\ & 0.75 \exp(-((9x + 1)^2)/49 - ((9y + 1)/10)) + 0.5 \exp(-(((9x - 7)^2 + \\ & (9y - 3)^2)/4)) - 0.2 \exp(-(9x - 4)^2 - (9y - 1)^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esta validação foi realizada segundo as seguintes condições:

$$N_i = 2500$$

$$T = 1750$$

$$N_c = [25, 250, 500]$$

sendo  $N_i$ ,  $T$  e  $N_c$ , o número total de dados, o número de dados de treino e o número de centros respectivamente. Isto é, utilizámos 2500 dados espaçados uniformemente numa grelha 50x50, ver Figura 3.1.

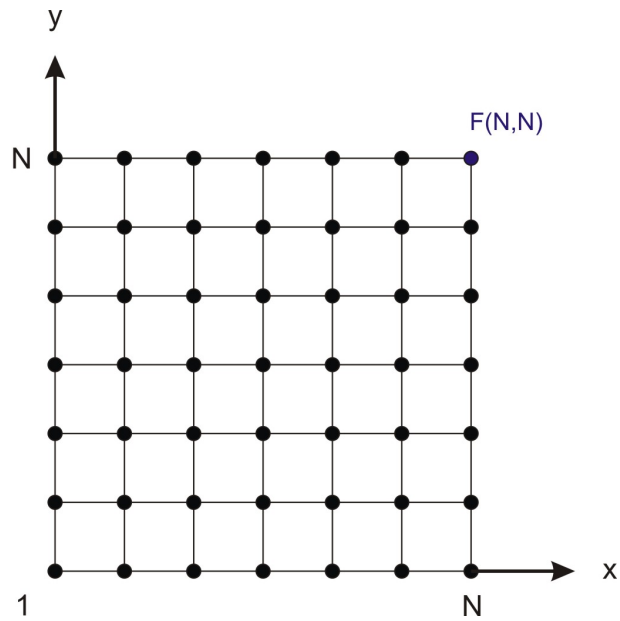


FIGURA 3.1: Configuração da Malha de Controle -  $N = 50$ .

Para treinarmos a função de interpolação  $s(x,y)$  utilizámos apenas 1750 dados (conjunto  $I$ ) sorteados aleatoriamente de  $N_i$  como documentado no Capítulo 2. Após criada a função de interpolação verificámos a precisão desse mesmo sub-conjunto, do sub-conjunto  $II$  e ainda todo o conjunto de dados  $I + II$ . Abaixo podemos encontrar as superfícies geradas para os três diferentes números de centros  $N_c$  para esta função de teste.

A superfície exacta, Figura 3.2, é:

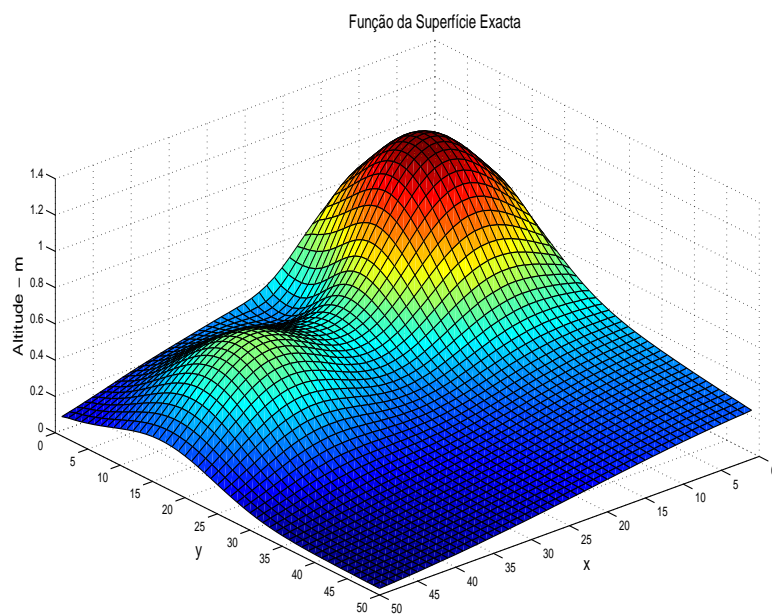


FIGURA 3.2: Aplicação 1 - Função Teste - Superfície Exacta.

Para  $N_c = 25$  centros:

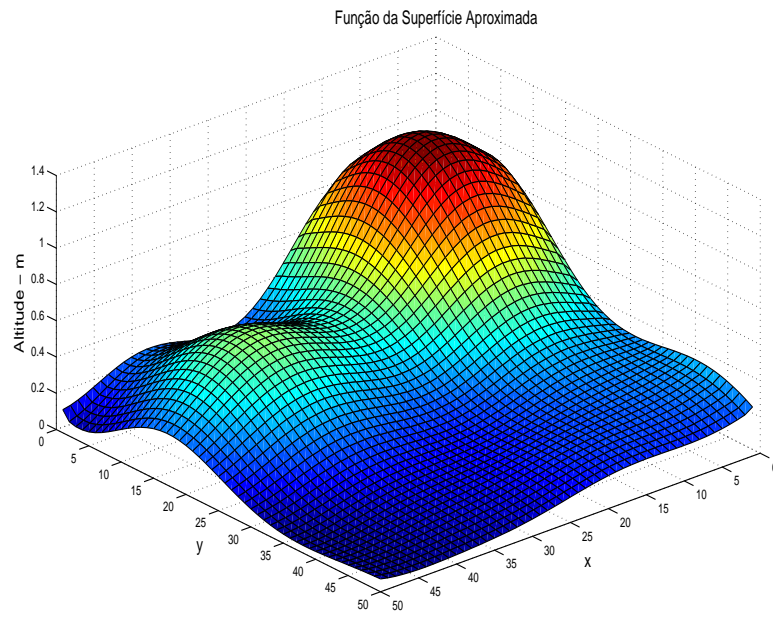


FIGURA 3.3: Função Teste -  $N_c = 25$  centros.

Para  $N_c = 250$  centros:

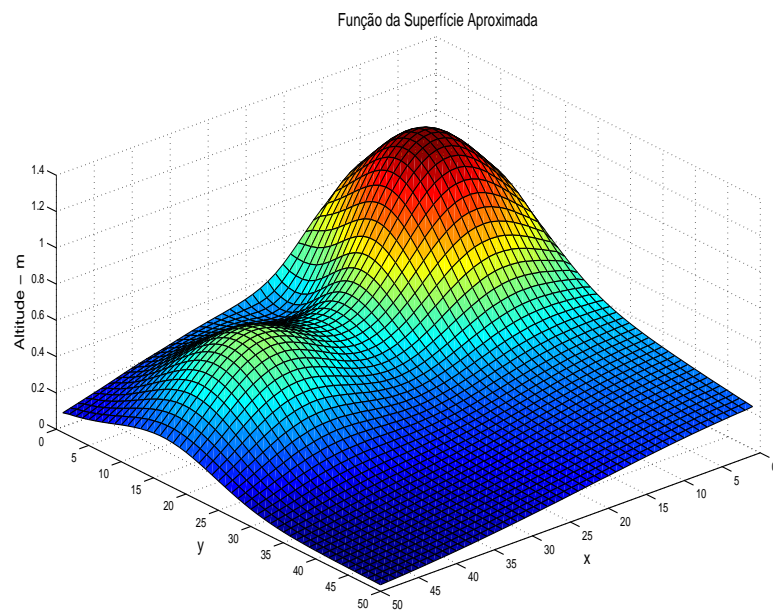


FIGURA 3.4: Função Teste -  $N_c = 250$  centros.

Para  $N_c = 500$  centros:

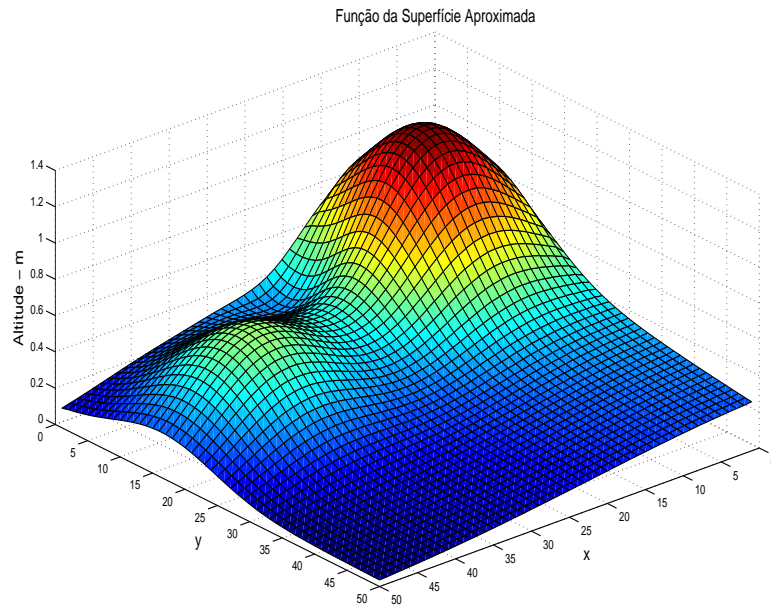


FIGURA 3.5: Função Teste -  $N_c = 500$  centros.

Para analisar e validar este método calculámos os Erros e o Tempo de Processamento. A análise de Erros consta do *RMS.E* (erro root mean square), *REL.E1* (erro relativo máximo), *ABS.E* (erro absoluto médio), *REL.E2* (erro relativo médio), *RMS.I* (erro root mean square do sub-conjunto *I*) e *RMS.II* (erro root mean square do sub-conjunto *II*). O tempo de processamento total (*TT*) é a soma do tempo de processamento do treino da função de interpolação (*TF*) e o tempo de processamento de outros processos (*OP*):

Análise de Erros:

TABELA 3.1: Função Teste - Erros Numéricos.

Erros Numéricos				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
RMS.E	2.52E-02	6.47E-04	3.51E-05	
REL.E1	6.31	1.62E-01	8.79E-03	%
ABS.E	5.04E-04	1.29E-05	7.03E-07	
REL.E2	3.83E-02	3.20E-04	7.42E-05	%
RMS.I	2.54E-02	6.64E-04	3.48E-05	
RMS.II	2.48E-02	6.07E-04	3.59E-05	

Tempo de Processamento:

TABELA 3.2: Função Teste - Tempo de Processamento.

Tempo de Processamento				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
TF	0.17	3.43	7.42	s
OP	0.05	0.10	0.15	s
TT	0.23	3.53	7.57	s

Análise Visual:

Neste caso a superfície exacta também é muito suave. Não podemos concluir com respeito a diferença de suavidade a não ser verificar que de facto a superfície aproximada tem boas características visuais por comparação com a superfície exacta.

Análise da Superfície de Teste:

Pela análise de resultados podemos verificar que erro cometido é muito baixo, sendo este erro aquele que está associado também à simulação numérica do método, ou seja, a utilização de MATLAB<sup>TM</sup> ou rotinas deste para cálculo numérico de grandes conjuntos de dados. O erro diminuiu com o aumento do número de centros pois introduzimos mais pontos de controlo no domínio, como esperávamos que acontecesse. Visualmente a superfície também é aceitável como já podemos referir, a superfície exacta e a superfície aproximada são muito semelhantes senão iguais, de forma que não podemos fazer uma grande distinção. É uma superfície muito suave.

### 3.1.2 Superfície 1

O primeiro teste depois da validação e tendo em conta aplicação, elevação digital do terreno, foi para uma zona morfologicamente com dois tipos de relevo, montanha e planície como é o caso da Covilhã (Portugal). As condições de simulação são as mesmas:

$$N_i = 2500$$

$$T = 1750$$

$$N_c = [25, 250, 500]$$

A superfície exacta não é uma superfície suave e existe uma grande diferença entre o tipo de relevo, tal como o gradiente que podemos encontrar num curto espaço de terreno.

A superfície exacta é deste modo:

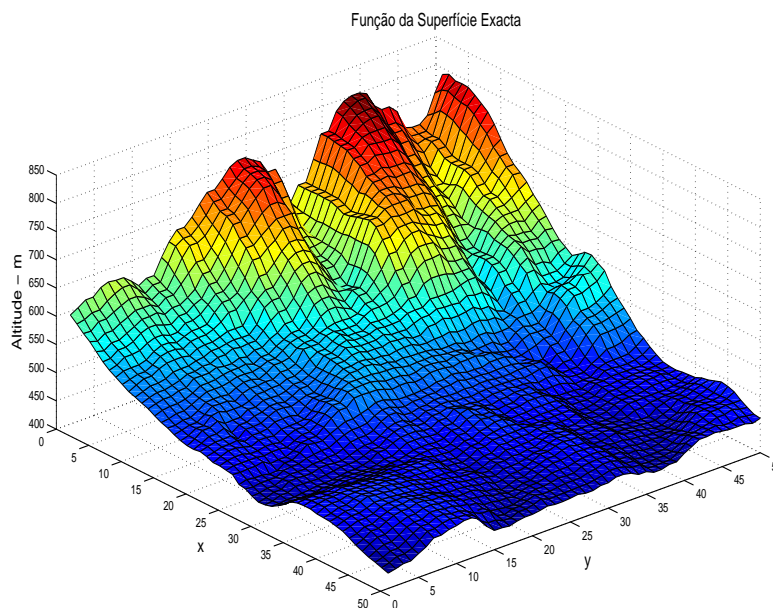


FIGURA 3.6: Superfície 1 - Superfície Exacta.

A superfície aproximada para o número mais baixo de centros testado é:

Para  $N_c = 25$  centros:

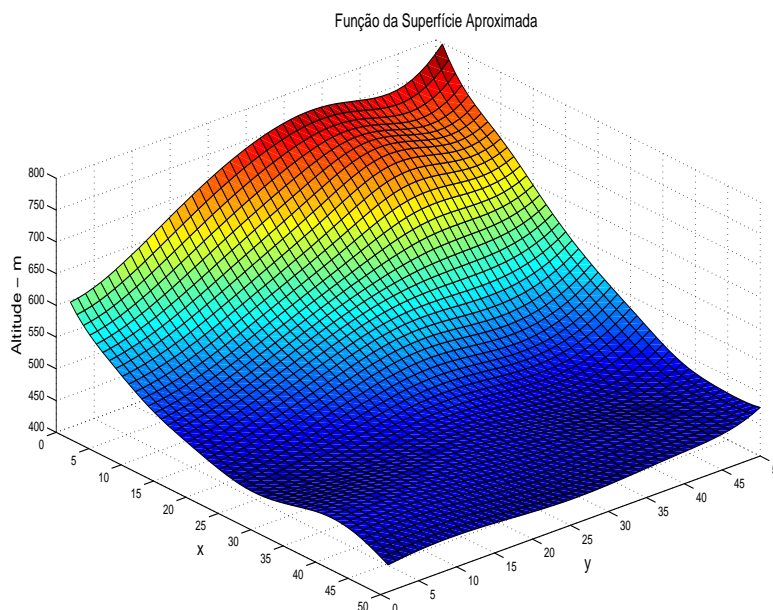


FIGURA 3.7: Superfície 1 -  $N_c = 25$  centros.

Para  $N_c = 250$  centros:

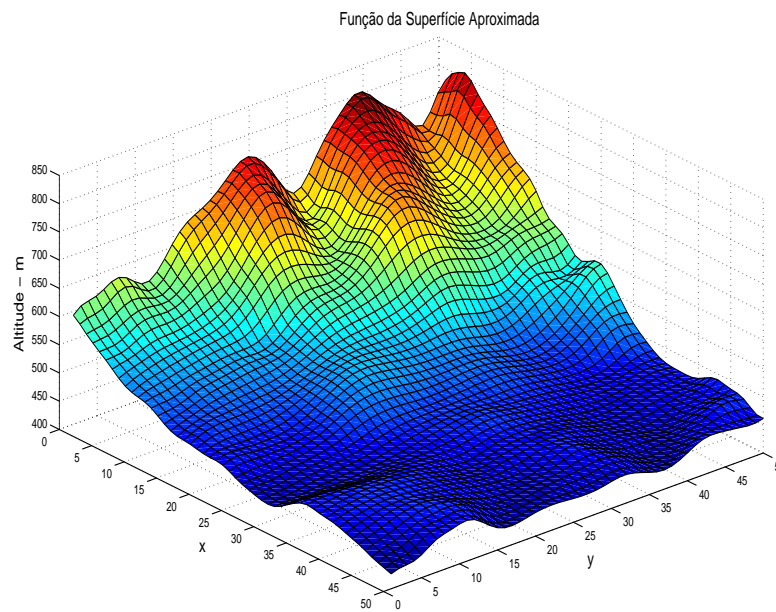


FIGURA 3.8: Superfície 1 -  $N_c = 250$  centros.

Para  $N_c = 500$  centros:

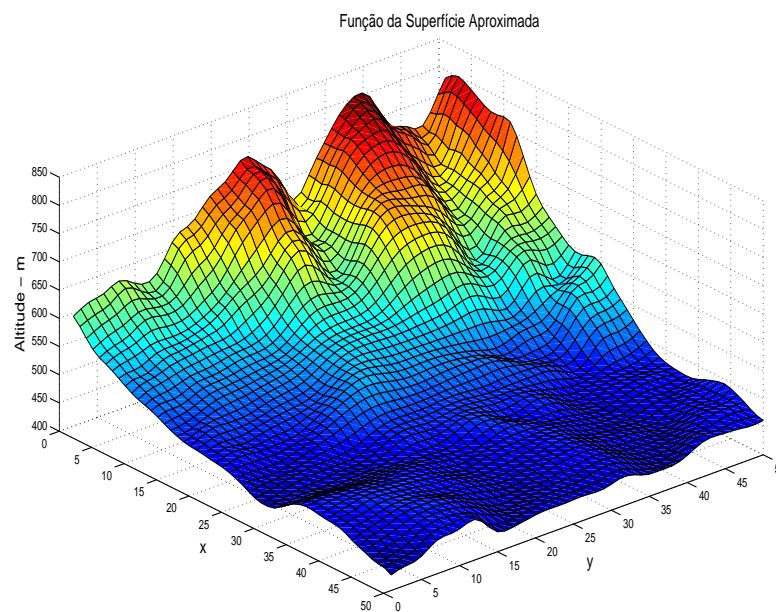


FIGURA 3.9: Superfície 1 -  $N_c = 500$  centros.

Para analisar e validar esta superfície, calculámos os Erros e o Tempo de Processamento. A análise de Erros consta do  $RMS.E$  (erro root mean square),  $REL.E1$  (erro relativo máximo),  $ABS.E$  (erro absoluto médio),  $REL.E2$  (erro relativo médio),  $RMS.I$  (erro root mean square do sub-conjunto  $I$ ) e  $RMS.II$  (erro root mean square do sub-conjunto  $II$ ). O tempo de processamento total ( $TT$ ) é a soma do tempo de processamento do treino da função de interpolação ( $TF$ ) e o tempo de processamento de outros processos ( $OP$ ):

Erros:

TABELA 3.3: Superfície 1 - Erros Numéricos.

Erros Numéricos				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
RMS.E	1.71E+01	6.10	4.31	m
REL.E1	3.19	1.14	0.80	%
ABS.E	3.42E-01	1.22E-01	8.62E-02	m
REL.E2	1.34E-03	2.53E-05	2.53E-05	%
RMS.I	16.71	5.71	3.82	m
RMS.II	18.04	6.92	6.27	m

Tempo de Processamento:

TABELA 3.4: Superfície 1 - Tempo de Processamento.

Tempo de Processamento				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
TF	0.16	3.35	7.13	s
OP	0.05	0.10	0.14	s
TT	0.21	3.45	7.27	s

Análise Visual:

A superfície aproximada é muito mais suave em qualquer um dos casos com qualquer número de centros em relação à superfície exacta. A utilização destas superfícies depende apenas da precisão pretendida.

Análise da Superfície 1:

O erro cometido é agora um erro que podemos medir ou analisar, ou seja, agora obtemos um erro que por comparação com a altura máxima do conjunto de dados ( $REL.E1$ ) é um erro baixo. Ou seja, estamos a analisar superfícies que têm um erro máximo de 3.19% metros para o pior caso, neste caso,  $N_c = 25$  centros. Com 25 centros podemos aproximar qualquer dado com um

erro máximo conhecido. Para um número maior de centros o erro máximo diminui. Quanto ao tempo de processamento, com o aumento de número de centros aumentamos também o tempo de processamento da função de interpolação. É de focar que a utilização de Matlab™ também não ajuda este processo. A validação do número total de dados é um processo muito rápido.

### 3.1.3 Superfície 2

Por último, uma zona geográfica morfologicamente mista, ou seja uma elevação digital de terreno com uma altitude máxima menor que a aplicação anterior, mas muito mais acidentada. As condições de simulação são as mesmas:

$$\begin{aligned}N_i &= 2500 \\T &= 1750 \\N_c &= [25, 250, 500]\end{aligned}$$

Podemos verificar que a superfície exacta não é uma superfície suave. O relevo é muito acidentado o que torna ainda mais complicado a modelação deste tipo de terreno ou superfície. A superfície exacta é deste modo representada na Figura 3.10:

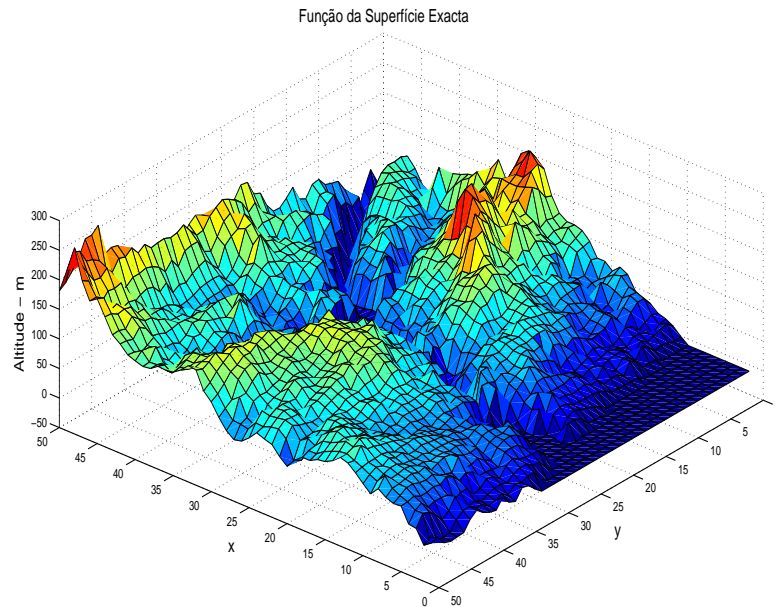


FIGURA 3.10: Superfície 2 - Superfície Exacta.

Para  $N_c = 25$  centros:

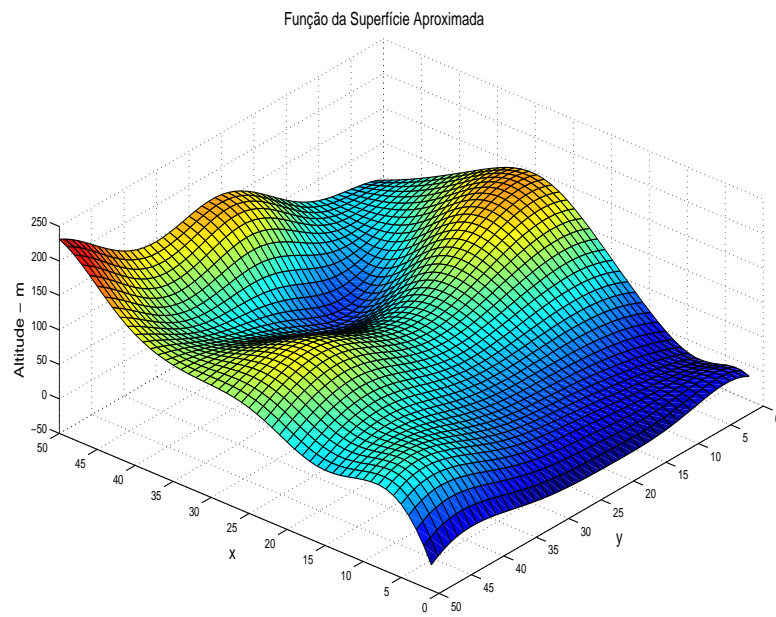


FIGURA 3.11: Superfície 2 -  $N_c = 25$  centros.

Para  $N_c = 250$  centros:

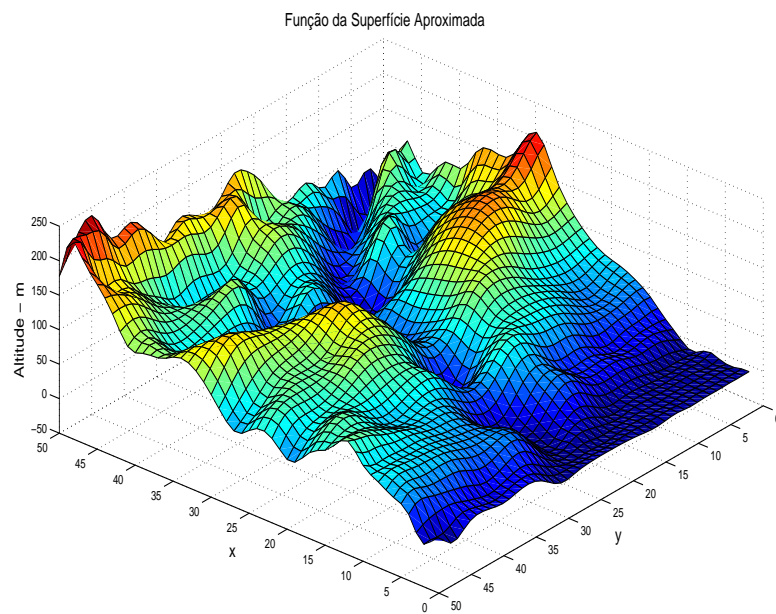


FIGURA 3.12: Superfície 2 -  $N_c = 250$  centros.

Para  $N_c = 500$  centros:

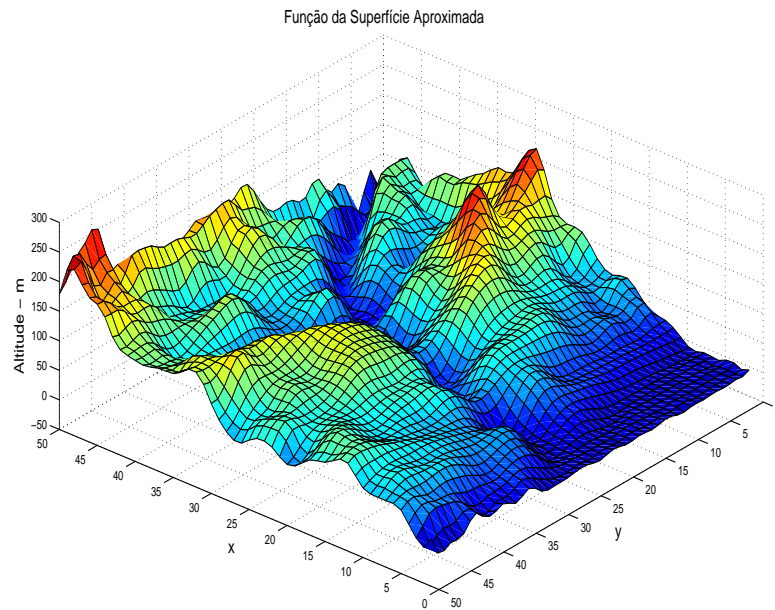


FIGURA 3.13: Superfície 2 -  $N_c = 500$  centros.

Para analisar e validar esta superfície, calculámos os Erros e o Tempo de Processamento. A análise de Erros consta do  $RMS.E$  (erro root mean square),  $REL.E1$  (erro relativo máximo),  $ABS.E$  (erro absoluto médio),  $REL.E2$  (erro relativo médio),  $RMS.I$  (erro root mean square do sub-conjunto  $I$ ) e  $RMS.II$  (erro root mean squares do sub-conjunto  $II$ ). O tempo de processamento total ( $TT$ ) é a soma do tempo de processamento do treino da função de interpolação ( $TF$ ) e o tempo de processamento de outros processos ( $OP$ ):

Erros:

TABELA 3.5: Superfície 2 - Erros Numéricos.

Erros Numéricos				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
$RMS.E$	22.93	12.40	9.89	m
$REL.1$	28.45	15.38	12.27	%
$ABS.E$	0.46	0.25	0.20	m
$REL.2$	1.10E-02	1.39E-04	7.41E-05	%
$RMS.I$	22.88	12.75	9.22	m
$RMS.II$	23.74	11.52	11.29	m

Tempo de Processamento:

TABELA 3.6: Superfície 2 - Tempo de Processamento.

Tempo de Processamento				
	$N_c = 25$	$N_c = 250$	$N_c = 500$	
<i>TF</i>	0.16	3.43	7.21	s
<i>OP</i>	0.06	0.10	0.16	s
<i>TT</i>	0.22	3.52	7.36	s

Análise Visual:

A superfície aproximada em comparação com a superfície exacta é uma superfície visualmente muito mais suave. Podemos verificar que para qualquer número de centros podemos identificar a superfície pretendida. Contudo, com  $N_c = 25$ ,  $N_c = 250$  e  $N_c = 500$  centros a superfície com mais definição é a última superfície, a Figura 3.13.

Análise da Superfície 2:

O erro máximo atingido para este tipo de relevo, muito acidentado, e um erro aceitável. Para o pior caso com  $N_c = 25$  centros, podemos verificar que temos um erro associado *RMS.E* de 22.93 metros, que diminui até *RMS.E* com  $N_c = 500$  para 9.89 metros. O tempo de processamento aumenta com o número de centros, isto é, devido à criação ou treino da função de interpolação para a qual é necessário resolver um sistema linear de equações tão grande quanto o número de dados e centros.

## Capítulo 4

# Análise de Resultados

Neste capítulo analisámos todos os resultados obtidos nesta dissertação. Desde o primeiro capítulo, podemos observar que de facto para a reconstrução de uma superfície de qualquer dimensão as funções multiquádricas de Hardy são óptimas. Podemos observar no Capítulo 1, que em comparação com o método de aproximação por polinómios as funções multiquádricas de Hardy são superiores. Contudo, também se entende que estas funções são afectadas pelo factor de forma, pelo número de centros e pelo número de dados para treino da função de interpolação.

A função teste de Franke, Capítulo 3, é um excelente exemplo de como podemos verificar e validar o método proposto nesta dissertação. Mantendo o número total de pontos fixo e utilizando 70% deste valor para o treino da função de interpolação, conseguimos obter um excelente desempenho mesmo para um número de centros mínimo ( $N_c = 25$ ) com um erro  $RMS.E$  igual a  $2.52E-02$ . Quando aumentamos o número de centros para 250 e 500 conseguimos melhorar a prestação deste método reduzindo o erro para  $6.47E-04$  e  $3.51E-05$  respectivamente. Observando a superfície que corresponde a melhor aproximação, Figura 3.5, vemos que esta é muito suave e tem um erro médio em relação ao valor real máximo de  $8.79E-03\%$ . Podemos reparar, Tabela 3.1, que o erro cometido quando estimado o erro do sub-conjunto  $I$  ( $RMS.I$ ) ou seja o sub-conjunto do treino da função de interpolação é muito próximo do erro do sub-conjunto  $II$  ( $RMS.II$ ), o erro cometido pelo sub-conjunto de validação. Estes são mais um indicador da boa aproximação realizada. O tempo de processamento, Tabela 3.2, aumenta com o número de centros uma vez que é necessário resolver um sistema de equações  $T \times N_c$ .

A segunda superfície testada tem características diferentes da superfície teste de Franke, porque agora temos dados reais e com uma variação muito maior de valores. A escolha não foi aleatória, de facto a morfologia deste tipo de superfície onde temos elevadas e baixas altitudes, Figura 3.6, é muito difícil de modelar, pois um método que se adequa por exemplo a grandes altitude como é o caso, geralmente não se adequa a baixas altitudes e vice-versa.

Deste modo, utilizando as mesmas condições que a superfície teste de Franke, podemos observar, Figuras 3.7, 3.8 e 3.9, que as superfícies são suaves. A superfície mais precisa é a superfície que utiliza 500 centros, o erro  $RMS.E$  é 4.31 metros. O tempo de processamento correspondente, Tabela 3.4 é de 7.13 segundos, não é um tempo elevado para esta quantidade de pontos e uma vez que o objectivo era fazer o cálculo off-line esta superfície seria a melhor opção para obter um compromisso entre suavidade e precisão. Podemos reparar, Tabela 3.3, que o erro cometido quando estimado o erro do sub-conjunto  $I$  ( $RMS.I$ ) é muito próximo do erro do sub-conjunto  $II$  ( $RMS.II$ ), o erro cometido pelo sub-conjunto de validação. Estes são mais um indicador da boa aproximação realizada. O tempo de processamento, Tabela 3.4, aumenta com o número de centros uma vez que é necessário resolver um sistema de equações  $T \times N_c$ .

A terceira superfície na Figura 3.10, é outro tipo de modelação onde não existe grande variação entre o máximo e o mínimo dos valores reais, mas existe uma variação média elevada devido à morfologia do terreno que é muito acidentado. Deste modo com 2500 dados dispostos uniformemente donde são retirados aleatoriamente 70% dos valores para treino da função de interpolação, para um número de centros de 25, 250 e 500 temos um erro  $RMS.E$  de 22.93, 12.40 e 9.89 metros respectivamente, ver Tabela 3.5. O tempo de processamento total, Tabela 3.6 é 0.22, 3.52 e 7.36 segundos ou seja, quanto maior o número de centros maior é a precisão e o tempo de processamento. Um bom compromisso entre tempo de processamento e a precisão tendo em conta estas simulações, seria o número de centros igual a 250 centros. A suavidade de qualquer uma das superfícies para este conjunto de dados é bem evidente. Também o erro  $RMS.I$  e  $RMS.II$  entre o sub-conjunto  $I$  e o sub-conjunto  $II$  são muito próximo o que indica uma boa aproximação ou estimação dos dados.

## Capítulo 5

# Conclusão

As funções multiquádricas de Hardy constituem um método poderoso para a aproximação multivariada. Nesta dissertação demonstramos que o nosso método de aproximação multiquádrica é altamente preciso e é computacionalmente eficiente.

Nas aplicações desta dissertação utilizamos dados espaçados uniformemente numa malha  $50 \times 50$  para mostrar e confirmar a vantagem desta técnica. Com os resultados obtidos concluímos que a morfologia do terreno ou da superfície, a densidade do conjunto de dados observados (reais) e o método de interpolação têm grande importância na precisão das aproximações. Na função de base multiquádrica de Hardy, o valor do factor de forma e o número e a distribuição espacial dos centros influenciam directamente a precisão da aproximação.

O método original (Hardy, 1971) utiliza o factor de forma constante. Investigadores que trabalham esta teoria, também tendem a utilizar este parâmetro fixo, afastando-se da complexidade de encontrar um factor de forma variável que satisfaça os seus critérios. Neste trabalho o factor de forma foi considerado variável e encontramos um factor de forma variável otimizado correspondente a cada centro. Utilizando a densificação para selecção e colocação dos centros podemos aproximar uma solução particular precisa das superfícies, reduzindo ainda a dimensão da matriz de interpolação e logo reduzindo o tempo de processamento.

Por a aproximação espacial de dados ser um processo muito importante em muitas áreas de investigação e indispensável no processo de construção da elevação digital de terreno (DEM), este método foi aplicado em vários tipos de terreno, com sucesso, sendo bem visível a suavidade em qualquer uma das superfícies reconstruídas. As funções multiquádricas de Hardy, provaram ser mais precisas que outras funções em suavidade e precisão.

Concluindo, os algoritmos utilizados neste novo método melhoraram a prestação do método original. Este modelo por ser o mais genérico possível é facilmente estendido a qualquer dimensão e pode ser aplicado nas mais variadas áreas. Esta ferramenta é muito atraente para reconstruir qualquer tipo de superfície.

Esta conclusão não significa de forma alguma que esta área de investigação acaba aqui com esta dissertação. Existe um número de direcções nas quais o tema desenvolvido pode seguir. No futuro podemos fazer a medição da suavidade ou da curvatura da superfície e relacionar com o erro de aproximação nos pontos estimados, à medida que adicionávamos centros, com um algoritmo destes teríamos o controlo de parar a adição de centros ao modelo. Nas aplicações, as superfícies reconstruídas parecem ser adequadamente suaves, mas a estimação do seu valor será testada em futuras aplicações.

Outro objectivo para por um algoritmo para selecção dos pontos de treino da função de interpolação e de validação do modelo. Também a optimização da colocação dos centros e o cálculo do factor de forma, mantendo este parâmetro variável, é um caminho de estudo. Para problemas em tempo real é necessário reduzir o número de dados para criação da função de interpolação. Esta redução de dados teria como implicação uma redução da quantidade de processamento necessária.

Deste modo o método deverá ser adaptativo o suficiente para permitir seleccionar um compromisso entre os parâmetros desejados: suavidade, precisão e tempo de computação para aplicação nas mais variadas áreas. Portanto de uma forma compacta, a curto prazo os caminhos a seguir são os seguintes:

- Tempo de Computação Reduzido;
- Estabilidade Numérica e Robustez;
- Capacidade de lidar com dados massivos e ruidosos;
- Estudo de Garantias de Reconstrução.

# Bibliografia

- [1] Alfeld P. Scattered Data Interpolation in Three or More Variables. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pages 1–33, 1989.
- [2] Hardy R. L. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76(8):1905–1915, 1971.
- [3] Franke R. A Critical Comparison of Some Methods for Interpolation of Scattered Data. *Technical Report NPS*, pages 53–79, 1979.
- [4] Schaback R. et al. Interpolation by Basis Functions of Different Scales and Shapes. *Calcolo*, 41(2):77–87, 2004.
- [5] Thieken H. Estimating Daily Regional Rainfall Fields by Multiquadric Functions: Accuracy of Interpolation and Decision Making. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, 2(2):168–181, 1998.
- [6] Burrough A. e McDonnell A. *Principles of Geographical Information Systems*. 1998.
- [7] S. Mehri, B. e Jokar. Lebesgue Function for Multivariate Interpolation by Radial Basis Functions. *Applied Mathematics and Computation*, 187(1):306–314, 2007.
- [8] Micchelli C. Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions. *Constructive Approximation*, 2(1):1905–1915, 1986.
- [9] Powell M. J. D. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- [10] Buhmann M. D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, 2003.
- [11] Bozzini M. e Rossini M. Testing Methods for 3D Scattered Data Interpolation. *Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza.*, 20:111–135, 2002.
- [12] Hardy R. L. Theory and Applications of the Multiquadric Biharmonic Method: 20 Years of Discovery. *Computers and Mathematics with Applications*, 10(8–9):1905–1915, 1990.

- [13] Hardy R. L. The Application of Multiquadric Equations and Point Mass Anomaly Models to Crustal Movement Studies. Technical report, Department of Commerce, United States, 1978.
- [14] McDonald D. B. et al. Global and Local Optimization using Radial Basis Function Response Surface Models. *Applied Mathematical Modelling*, 31(10):2095–2110, 2001.
- [15] Jin R. et al. Comparative Studies of Metamodeling Techniques under Multiple Modeling Criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23:1–13, 2001.
- [16] Kansa E. J. Multiquadrics - a Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics. *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8–9):127–145, 1990.
- [17] Peucker T. K. The Impact of Different Mathematical Approaches to Contouring. *Cartographica*, 17(2):73–95, 1980.
- [18] Späth H. Fitting Data in Space by Surfaces in Parametric Representation with Polynomial Components. *Mathematical Communications*, 12:239–245, 2007.
- [19] Charles T. L. Generalized B-Spline Surfaces of Arbitrary Topological Type. pages 239–245, 1992.
- [20] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. 1990.
- [21] Lee S. Y. et al. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(3):228–244, 1997.
- [22] Narcowicha F. J. et al. Multilevel Interpolation and Approximation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 7(3):243–261, 1999.
- [23] Byung-G. Lee et al. Quasi-Interpolants Based Multilevel B-Spline Surface Reconstruction from Scattered Data. *Computer Graphics and Geometric Modeling*, pages 1209–1218, 2005.
- [24] Øyvind H. Approximation of Scattered Data with Multilevel B-Splines. Technical report, SINTEF Applied Mathematics, Oslo, 2001.
- [25] Schaback R. Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3:251–264, 1995.
- [26] Sarra S. A. Integrated Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 51(8):1283–1296, 2006.
- [27] Beatson R. K. e Powell M. J. D. Univariate Multiquadric Approximation: Quasi-Interpolation to Scattered Data. *Constructive Approximation*, 3:275–288, 2005.

- [28] Bousson K. e Correia S. D. Optimization Algorithm Based on Densification and Dynamic Canonical Descent. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 191(2):269–279, 2006.
- [29] Lee P. S. et al. Comparison of Multiquadric Surfaces for the Estimation of Areal Rainfall. *Bulletin des Sciences Hydrologiques*, 19(3):303–317, 1974.
- [30] Wielgosz P. et al. Regional Ionosphere Mapping with Kriging and Multiquadric Methods. *Journal of Global Positioning Systems*, 2(1):48–55, 2003.
- [31] S. K. Sinha et al. Meteorological Objective Analysis using Multiquadric Interpolation Scheme over India and Adjoining Region. *Atmósfera*, 15(4):209–222, 2002.
- [32] Ferreira A. J. M. A Formulation of the Multiquadric Radial Basis Function Method for the Analysis of Laminated Composite Plates. *Composite Structures*, 59(3):385–392, 2002.
- [33] Liu X. e Zhang Z. Lidar Data Reduction for Efficient and High Quality DEM Generation. Technical report, University of Southern Queensland, Australia, 2008.
- [34] McGwire K. C. Mosaicking Airborne Scanner Data with the Multiquadric Rectification Technique. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing.*, 64(6):602–606, 1998.
- [35] Wang B. P. Parameter Optimization in Multiquadric Response Surface Approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(3–4):219–223, 2004.
- [36] Stead S. E. Estimation of Gradients from Scattered Data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14(1):265–279, 1984.
- [37] Franke R. Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. *Mathematics of Computation*, 38(157):181–200, 1982.
- [38] Morandi R. e Sestini A. Data Reduction in Surface Approximation. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces.*, pages 315–324, 2001.
- [39] Tikhonov A. N. e Arsenin V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. 1977.
- [40] Hansen P. C. e O’Leary D. P. The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(6):1487–1503, 1993.

# Anexos

Artigo aceite para publicação na 1<sup>st</sup> International Conference on Modelling and Simulations (ICOMOS 2010 - VF) - Virtual Forum.

Multiquadric Approximation for Geodetic Location by Airborne Camera

André F. B. Silva, José C. M. Novais, K. Bousson

Avionics and Control Laboratory

Department of Aerospace Sciences

University of Beira Interior

6201-001 Covilhã

Portugal

e-mail: andresilva.aero@gmail.com, j\_novais1@hotmail.com, k1bousson@yahoo.com