UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Funções Convexas

Hugo Alexandre Rodrigues Vicente

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em

Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor António Jorge Gomes Bento

Covilhã, Outubro de 2011

Agradecimentos

Na concretização deste trabalho, muitas pessoas contribuíram e influenciaram de forma directa e indirecta. Aqui desde já deixo a minha sincera gratidão, reconhecendo que este apoio foi fundamental e extremamente valoroso. Um agradecimento especial:

Aos meus pais e à Laura pelo incentivo e apoio dado ao longo de todo o trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor António Jorge Bento, por toda a orientação, apoio, amizade e companheirismo prestados durante a realização de todo o trabalho. Pela sua sinceridade e serenidade em avaliar e corrigir o trabalho.

Aos meus amigos pela amizade, companheirismo, disponibilidade e atenção prestada na realização do trabalho.

Resumo

Resumo:

A partir de conceitos de Análise Real, obteremos algumas propriedades importantes das funções convexas. No primeiro capítulo estudaremos a convexidade numa abordagem científica, bem como os pontos de inflexão. No segundo capítulo será desenvolvida uma abordagem pedagógica a nível do ensino secundário. Sempre que possível, ilustraremos este trabalho com exemplos a fim de consolidar os assuntos apresentados e no último capítulo apresentaremos alguns exercícios resolvidos.

Palavras-Chave:

Função convexa, função côncava, convexidade, ponto de inflexão.

Abstract

Abstract:

From concepts of Real Analysis, we obtain some important properties of convex functions. In the first chapter we study the convexity in a scientific approach, as well as the inflection points. In the second chapter will develop a pedagogical approach to secondary school. Whenever possible, we will illustrate this work with examples in order to consolidate the issues presented and in the last chapter we present some solved exercises.

Keywords:

Convex function, concave function, convexity, inflection point.

Índice

Introdução

As funções convexas formam uma importante classe de funções no contexto geralmente chamado de Análise Real. Elas são muito utilizadas em optimização e também em diversas áreas de Matemática Aplicada.

No primeiro capítulo deste trabalho vamos estudar algumas propriedades das funções convexas e côncavas numa abordagem científica. São apresentadas maneiras de identificar funções convexas além da definição. É possível fazer essa identificação através das suas propriedades. Por exemplo, sabemos que uma função com segunda derivada não negativa é convexa e descobrir qual é o sinal dessa derivada é, por vezes, uma tarefa muito simples. É também apresentada a noção de ponto de inflexão, sendo dadas duas definições de ponto de inflexão. Nenhuma delas é mais "válida" que a outra, mas podemos verificar que são definições diferentes, logo podem conduzir a resultados diferentes e, como tal, o conceito de ponto de inflexão leva à necessidade de clarificar qual a definição utilizada.

No segundo capítulo é apresentada, segundo o programa de matemática do Ensino Secundário, a matéria do Cálculo Diferencial relativa à aplicação das derivadas no estudo da determinação do tipo de concavidade e de pontos de inflexão. Alguns destes conceitos são introduzidos no 10º ano de escolaridade, mas é no 12º ano de escolaridade que se desenvolve a noção e aplicação da segunda derivada, permitindo assim a capacidade de resolver problemas práticos da vida real de uma forma completa, nomeadamente o estudo do sentido das concavidades e dos pontos de inflexão de variadas funções.

No terceiro capítulo deste trabalho são apresentados alguns exercícios resolvidos. Tendo em conta que os conceitos estudados neste trabalho são importantes noutras disciplinas, como por exemplo na Biologia e na Física, um dos exercícios resolvidos é sobre populações de bactérias e num outro é aplicado o conceito de concavidade na variação do raio de curvatura da trajectória de um determinado objecto.

Capítulo 1

Funções convexas e pontos de inflexão

As funções convexas formam uma importante classe de funções no contexto geralmente chamado de Análise Real. Elas são muito utilizadas em optimização e também em diversas áreas de Matemática Aplicada. Neste capítulo são apresentadas algumas propriedades da convexidade, bem como de pontos de inflexão e sempre que julguemos necessário serão apresentados exemplos para clarificar as propriedades em estudo.

Este capítulo está inspirado em Lages Lima (2002), Nápoles (2001) e Roberts & Varberg (1973).

§1.1 Funções convexas

Os intervalos formam exemplos particularmente simples de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é um intervalo se para quaisquer x e y pertencentes a I

$i)$ todos os pontos entre x e y pertencem a I;

o que é equivalente a

ii) para qualquer $\lambda \in [0,1]$, o ponto $\lambda x + (1-\lambda)y$ pertence a I.

Podemos classificar os intervalos do seguinte modo:

– os intervalos compactos: $I = [a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$;

– os intervalos limitados mas não fechados: $[a,b[$, $]a,b]$ e $]a,b[$ com $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

– os intervalos ilimitados: $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, $[a,+\infty[$ e $]a,+\infty[$.

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **convexa** em I, ou que tem a **concavidade voltada para cima** em I, se

$$f(\lambda b + (1-\lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1-\lambda)f(a)$$

para cada $a,b \in I$ e para cada $\lambda \in [0,1]$. A função f diz-se **côncava** em I, ou que tem a **concavidade voltada para baixo** em I, se

$$f(\lambda b + (1-\lambda)a) \geq \lambda f(b) + (1-\lambda)f(a)$$

para cada $a,b \in I$ e para cada $\lambda \in [0,1]$.

É evidente que uma função f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa. Também é óbvio que nas definições basta tomar $\lambda \in]0,1[$ em vez de $\lambda \in [0,1]$ e considerar apenas a, $b \in I$ tais que $a < b$ ou considerar apenas a, $b \in I$ tais que $b < a$.

Se $a \neq b$, a *recta* que liga os pontos (a,A) e (b,B) no plano $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)$$

ou equivalentemente

$$y = B + \frac{B-A}{b-a}(x-b).$$

Sejam $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto X de $\mathbb{R}$ e $a,b \in X$. O segmento de recta que une os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, pertencentes ao gráfico de f, designa-se por **secante** ab.

Teorema 1.1.1. *Seja I um intervalo. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e só se, para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,*

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.

Demonstração: Suponhamos que f é convexa e sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Se $a \leq x \leq b$, fazendo $\lambda = \dfrac{x - a}{b - a}$, temos $\lambda \in [0, 1]$ e

$$\lambda b + (1 - \lambda)a = \lambda(b - a) + a = x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \\ &\leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a) \\ &= f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \end{aligned}$$

o que mostra que se f é convexa em I, então o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$.

Suponhamos agora que o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, ou seja,

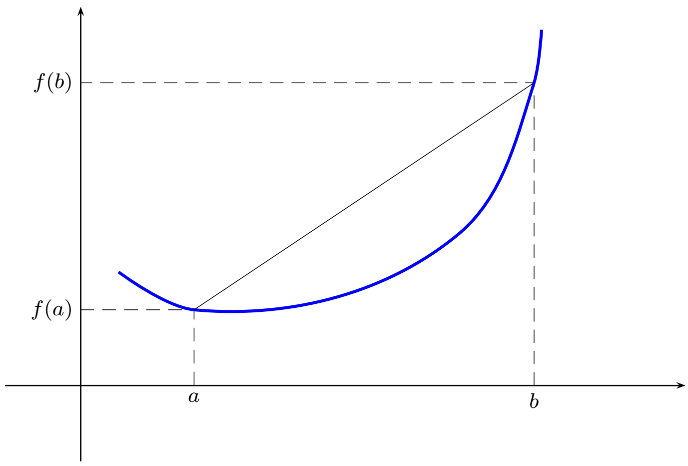
$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$. Então, como para cada $\lambda \in [0, 1]$ temos $\lambda b + (1 - \lambda)a \in [a, b]$, resulta

$$\begin{aligned} f(\lambda b + (1 - \lambda)a) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}[\lambda b + (1 - \lambda)a - a] \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}[\lambda(b - a)] \\ &= f(a) + \lambda\,(f(b) - f(a)) \\ &= \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a). \end{aligned}$$

Logo f é convexa. ∎

A figura que se segue ilustra o resultado do teorema anterior.



Tendo em conta que uma função f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa, do teorema resulta imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 1.1.2. *Seja I um intervalo. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é côncava se, e só se, para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está acima da secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$.

A desigualdade

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

é, para $x \in]a, b[$, equivalente à desigualdade

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Além disso, tendo em conta que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

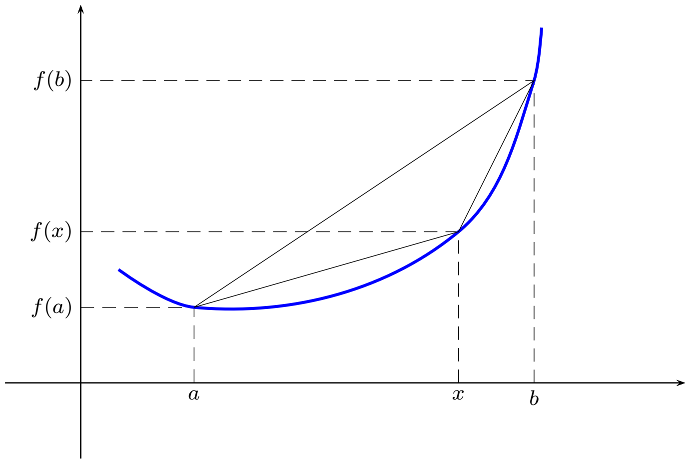
a mesma desigualdade também é, para $x \in]a, b[$, equivalente a

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e só se, para quaisquer $a, x, b \in I$ com $a < x < b$ se tem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \qquad (*)$$

Qualquer uma das duas desigualdades acima implica a outra. Elas significam que, para $a < x < b$, a secante ax tem inclinação menor que a secante ab e esta, por sua vez, tem uma inclinação menor do que a secante xb, como se pode verificar no gráfico abaixo.



Teorema 1.1.3. *Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função convexa em I. Se a é um ponto interior a I, então existem as derivadas laterais $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$ e*

$$f'_e(a) \le f'_d(a).$$

Além disso, se b é outro ponto interior a I tal que $a < b$, então

$$f'_e(a) \le f'_d(a) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f'_e(b) \le f'_d(b).$$

Demonstração: Tendo em conta as observações feitas acima, a função

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é monótona crescente no intervalo $J = I \cap]a, +\infty[$. Além disso, como a é um ponto interior a I, existe $c \in I$, com $c < a$. Portanto

$$\varphi_a(x) \ge \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

para todo $x \in J$. Assim, a função $\varphi_a \colon J \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Logo existe o limite à direita em a de $\varphi_a(x)$ e

$$\lim_{x \to a^+} \varphi_a(x) = f'_d(a).$$

De modo análogo concluímos que f tem a derivada à esquerda em a.

De $(*)$ resulta que se x, $y \in I$ são tais que $x < a < y$, então

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

pelo que fazendo $x \to a^-$ e $y \to a^+$ em

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

temos

$$f'_e(a) \leq f'_d(a).$$

Por outro lado, para qualquer $x \in [a, b]$ temos por $(*)$ que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

pelo que fazendo x tender para a^+ na primeira desigualdade vem

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e fazendo x tender para b^- na segunda desigualdade temos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_e(b),$$

o que termina a demonstração. ■

Usando novamente o facto de uma função f ser côncava se, e só se, $-f$ é convexa, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1.4. *Sejam I um intervalo e $f \colon I \to \mathbb{R}$ uma função côncava em I. Se a é um ponto interior a I, então existem as derivadas laterais $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$ e*

$$f'_d(a) \leq f'_e(a).$$

Além disso, se b é outro ponto interior a I tal que $a < b$, então

$$f'_d(b) \leq f'_e(b) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_d(a) \leq f'_e(a).$$

Corolário 1.1.5. *Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é convexa ou côncava em I e a é um ponto interior a I, então f é contínua em a.*

Demonstração: Basta observar que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'_d(a)\cdot 0 = 0$$

e

$$\lim_{x\to a^-} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'_e(a)\cdot 0 = 0,$$

o que implica

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Logo f é contínua em a. ■

A hipótese de a ser ponto interior é necessária pois a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $0 < x \leq 1$, é convexa, porém é descontínua no ponto $x = 0$.

Teorema 1.1.6. *Sejam I um intervalo aberto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. A função f é convexa se, e só se, existem uma função crescente $g\colon I \to \mathbb{R}$ e um ponto $a \in I$ tal que, para todo o $x \in I$, vem*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Demonstração: Seja a um ponto em I. Façamos $g = f'_e$ ou $g = f'_d$ que, pelo Teorema 1.1.3, existem e são crescentes. A monotonia de f'_e e de f'_d garante-nos que f'_e e f'_d são integráveis à Riemann em qualquer intervalo fechado contido em I. Dado $x \in I \cap\,]a, +\infty[$, vejamos que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_e(t)\,dt = \int_a^x f'_d(t)\,dt.$$

Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, x]$ com $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$. Usando novamente o Teorema 1.1.3 temos

$$f'_e(x_{k-1}) \leq f'_d(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_e(x_k) \leq f'_d(x_k),$$

o que, tendo em conta que

$$f(x) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})],$$

implica

$$\sum_{k=1}^{n} f'_e(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1}) \leq f(x) - f(a) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_e(x_k)\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

Logo

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_e(t)\,dt.$$

De modo semelhante conclui-se que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_d(t)\,dt.$$

Se $x \in I \cap]-\infty, a[$, considerando uma partição qualquer do intervalo $[x, a]$, demonstra-se do mesmo modo que também se tem

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_e(t)\,dt = \int_a^x f'_d(t)\,dt.$$

Suponha-se agora que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$$

acontece com g crescente. Então, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$ e para quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$, fazendo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ temos

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) \\
&= f(a) + \int_a^z g(t)\,dt - \lambda\left[f(a) + \int_a^x g(t)\,dt\right] - (1-\lambda)\left[f(a) + \int_a^y g(t)\,dt\right] \\
&= \lambda\left[\int_a^z g(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right] + (1-\lambda)\left[\int_a^z g(t)\,dt - \int_a^y g(t)\,dt\right] \\
&= \lambda \int_x^z g(t)\,dt + (1-\lambda)\int_y^z g(t)\,dt \\
&= \lambda \int_x^z g(t)\,dt - (1-\lambda)\int_y^z g(t)\,dt
\end{aligned}$$

e como $x \leq z \leq y$ e g é crescente tem-se

$$\lambda \int_x^z g(t)\,dt - (1-\lambda)\int_z^y g(t)\,dt \leq \lambda(z-x)g(z) - (1-\lambda)(y-z)g(z).$$

Ora

$$z - x = \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x)$$

e

$$y - z = y - \lambda x - (1-\lambda)y = \lambda(y-x),$$

pelo que

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_x^z g(t)\,dt + (1-\lambda)\int_y^z g(t)\,dt \\
&\leq \lambda(1-\lambda)(y-x)g(z) - (1-\lambda)\lambda(y-x)g(z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) \leq 0$$

para quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$ e para qualquer $\lambda \in [0,1]$, o que mostra que f é convexa. ■

Como f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa, do teorema anterior resulta imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 1.1.7. *Sejam I um intervalo aberto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. A função f é côncava se, e só se, existem uma função decrescente $g\colon I \to \mathbb{R}$ e um ponto $a \in I$ tal que, para todo o $x \in I$, vem*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Teorema 1.1.8. *Sejam I um intervalo, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ duas funções e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

a) Se f e g são convexas, então $f + g$ é convexa.

b) Se f e g são côncavas, então $f + g$ é côncava.

c) *Se* $\alpha \geq 0$ *e* f *é convexa, então* αf *é convexa.*

d) *Se* $\alpha \leq 0$ *e* f *é convexa, então* αf *é côncava.*

e) *Se* $\alpha \geq 0$ *e* f *é côncava, então* αf *é côncava.*

f) *Se* $\alpha \leq 0$ *e* f *é côncava, então* αf *é convexa.*

Demonstração: *a)* Se f e g são funções convexas, então

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

e

$$g[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

para quaisquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$. Então

$$\begin{aligned} f[\lambda x + (1-\lambda)y] + g[\lambda x + (1-\lambda)y] &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda[f(x) + g(x)] + (1-\lambda)[f(y) + g(y)] \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$, o que mostra que $f + g$ é convexa.

b) Basta ter em conta que f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa.

c) É óbvio que se $\alpha \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha f)\,[\lambda x + (1-\lambda)y] &= \alpha f[\lambda x + (1-\lambda)y] \\ &\leq \alpha[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \\ &= \lambda\,(\alpha f)\,(x) + (1-\lambda)\,(\alpha f)\,(y) \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$ e, portanto, αf é convexa.

A demonstração de *d)*, *e)* e *f)* é semelhante à de *c)*. ∎

Teorema 1.1.9. *Sejam* I *um intervalo e* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *são duas funções não negativas.*

a) *Se* f *e* g *são convexas e ambas crescentes ou ambas decrescentes, então* $f \cdot g$ *é convexa.*

b) *Se f e g são côncavas e uma delas crescente e a outra decrescente, então $f \cdot g$ é côncava.*

Demonstração: *a*) Sejam x, $y \in I$ tais que $x < y$. Então

$$[f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] \leq 0,$$

o que implica que

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y).$$

Assim, se $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq [\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)][\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)] \\
&= \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)[f(x)g(y) + f(y)g(x)] + (1-\lambda)^2 f(y)g(y) \\
&\leq \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)[f(x)g(x) + f(y)g(y)] + (1-\lambda)^2 f(y)g(y) \\
&= \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y).
\end{aligned}$$

Logo $f \cdot g$ é convexa.

b) A demonstração é análoga. ■

Teorema 1.1.10. *Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função.*

a) *Se f é côncava e positiva, então $\dfrac{1}{f}$ é convexa.*

b) *Se f é convexa e negativa, então $\dfrac{1}{f}$ é côncava.*

Demonstração: *a*) Para qualquer $x, y \in I$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

pelo que

$$\frac{1}{f(\lambda x + (1-\lambda)y)} \leq \frac{1}{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)}.$$

Como a função $g(x) = \dfrac{1}{x}$ é convexa em $]0, +\infty[$ temos

$$\frac{1}{f(\lambda x + (1-\lambda)y)} \leq \lambda \frac{1}{f(x)} + (1-\lambda)\frac{1}{f(y)},$$

o que mostra que $\dfrac{1}{f}$ é convexa.

A demonstração de $b)$ é semelhante à de $a)$. ■

Teorema 1.1.11. *Sejam I e J dois intervalos e $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(I) \subseteq J$.*

a) Se f é convexa e g é convexa e crescente, então $g \circ f$ é convexa.

b) Se f é côncava e g é côncava e crescente, então $g \circ f$ é côncava.

c) Se f é côncava e g é convexa e decrescente, então $g \circ f$ é convexa.

d) Se f é convexa e g é côncava e decrescente, então $g \circ f$ é côncava.

Demonstração: $a)$ Sejam $x, y \in I$ e $\lambda \in [0, 1]$. Como f é convexa temos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

donde, porque g é crescente e convexa, vem

$$\begin{aligned} g[f(\lambda x + (1-\lambda)y)] &\leq g[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \\ &\leq \lambda g[f(x)] + (1-\lambda)g[f(y)]. \end{aligned}$$

Logo $f \circ g$ também é convexa.

As demonstrações de $b)$, $c)$ e $d)$ são semelhantes à de $a)$. ■

É de notar que as hipóteses de monotonia no teorema anterior são necessárias. Por exemplo, as funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^{-x}$ são convexas, mas a sua composição $g \circ f$ não é convexa. Com funções semelhantes prova-se que as hipóteses de monotonia em $b)$, $c)$ e $d)$ também são necessárias.

Teorema 1.1.12. *Sejam I um intervalo e $f_\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ uma família de funções convexas e suponhamos que*

$$J = \left\{x \in I\colon \sup_\alpha f_\alpha(x) < \infty\right\}$$

é não vazio. Então J é um intervalo e a função $f\colon J \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$$

é convexa em J.

Demonstração: Se $\lambda \in [0,1]$ e $x, y \in J$, então

$$\begin{aligned}\sup_\alpha f_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \sup_\alpha [\lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda) f_\alpha(y)] \\ &\leq \lambda \sup_\alpha f_\alpha(x) + (1-\lambda) \sup_\alpha f_\alpha(y)\end{aligned}$$

o que mostra que J é um intervalo (uma vez que contém todos os pontos entre quaisquer dois dos seus pontos) e que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para quaisquer $x, y \in J$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$. Logo f é convexa em J. ■

Teorema 1.1.13. *Sejam I um intervalo e $f_\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ uma família de funções côncavas e suponhamos que*

$$J = \left\{x \in I\colon \inf_\alpha f_\alpha(x) < \infty\right\}$$

é não vazio. Então J é um intervalo e a função $f\colon J \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \inf_\alpha f_\alpha(x)$$

é côncava em J.

Demonstração: A demonstração é semelhante à do teorema anterior. ■

Teorema 1.1.14. *Sejam I um intervalo e $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções que converge pontualmente para uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$.*

a) Se as funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, são convexas, então f é convexa.

b) Se as funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, são côncavas, então f é côncava.

Demonstração: *a)* Se $\lambda \in [0,1]$ e $x, y \in I$, então

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Isto mostra que f é convexa.

b) A demonstração é análoga. ■

§1.2 Convexidade e diferenciabilidade

Teorema 1.2.1. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f é convexa;

b) a derivada $f'\colon I \to \mathbb{R}$ é monótona crescente;

c) para quaisquer x, $a \in I$ tem-se

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a),$$

ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer uma das suas rectas tangentes.

Demonstração: Vamos provar as implicações *a)* $\Rightarrow$ *b)*, *b)* $\Rightarrow$ *c)* e *c)* $\Rightarrow$ *a)*.

Suponhamos que $a)$ se verifica e sejam $a < x < b$ pertencentes a I. Fazendo $x \to a^+$ na primeira desigualdade de $(*)$ e fazendo $x \to b^-$ na segunda desigualdade de $(*)$, vem

$$f'(a) = f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_e(b) = f'(b).$$

Logo, se $a < b$, então $f'(a) \leq f'(b)$, o que mostra que $a) \Rightarrow b)$.

Suponhamos agora que $b)$ se verifica. Sejam $a < x$ em I. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in]a, x[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(z)(x - a).$$

Como f' é monótona crescente, temos $f'(z) \geq f'(a)$. Logo

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

No caso $x < a$ obtemos o mesmo resultado de forma análoga. Logo $b) \Rightarrow c)$.

Finalmente, suponhamos que $c)$ se verifica. Dados x, a, $b \in I$ tais que $a < x < b$, seja $\psi \colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Por hipótese

$$f(x) \geq f(t) + f'(t)\,(x - t)$$

para quaisquer $x, t \in I$. Fazendo $x = a$ na desigualdade anterior, concluímos que

$$\psi'(t) = \frac{f'(t)(t - a) - f(t) + f(a)}{(t - a)^2} \geq 0$$

para qualquer $t \in I \setminus \{a\}$. Assim, ψ é crescente e, portanto, $\psi(x) \leq \psi(b)$, ou seja,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o que mostra que f é convexa. Logo $c) \Rightarrow a)$. ■

Teorema 1.2.2. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f é côncava;

b) a derivada $f'\colon I \to \mathbb{R}$ é monótona decrescente;

c) para quaisquer x, $a \in I$ tem-se

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a),$$

ou seja, o gráfico de f está situado abaixo de qualquer uma das suas rectas tangentes.

Corolário 1.2.3. *Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável no intervalo I, é convexa (resp. côncava) se, e só se, $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) para todo o $x \in I$.*

Demonstração: Basta ter em conta que f' é monótona crescente se, e só se, $f''(x) \geq 0$ para cada $x \in I$ e que f' é monótona decrescente se, e só, se $f''(x) \leq 0$ para cada $x \in I$. ■

Corolário 1.2.4. *Todo o ponto crítico de uma função convexa (resp. côncava) é um ponto de mínimo (resp. máximo) absoluto.*

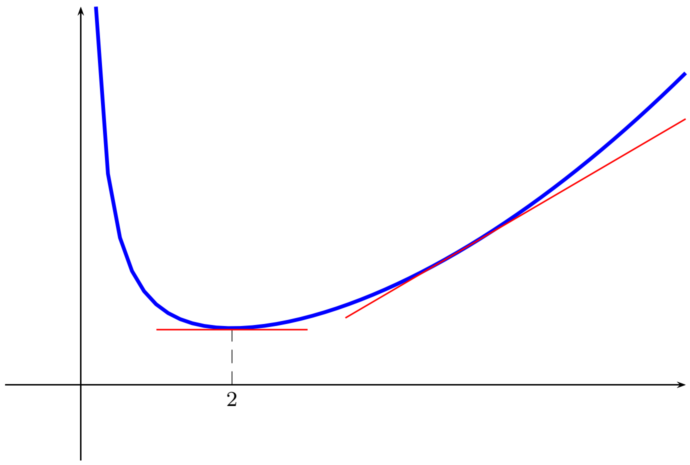
Demonstração: Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função convexa com um ponto crítico em $a \in I$, ou seja, $f'(a) = 0$. Como f é convexa a condição c) do teorema anterior assegura que $f(x) \geq f(a)$ para todo o $x \in I$. Logo a é ponto de mínimo absoluto para f.

A demonstração no caso em que f é côncava é análoga. ■

Na figura seguinte podemos observar que o gráfico da função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x}$$

situa-se acima de qualquer uma das suas tangentes, pelo que f deverá ser convexa.



De facto, temos

$$f'(x) = \frac{x}{8} - \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{8} + \frac{2}{x^4}$$

e como $f''(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, pelo Corolário 1.2.3, f é convexa. Além disso, o Corolário 1.2.4 garante-nos que o ponto crítico $x = 2$ é um mínimo absoluto.

Existem ainda as noções de função **estritamente convexa** onde se exige que

$$f(\lambda b + (1-\lambda)a) < \lambda f(b) + (1-\lambda) f(a)$$

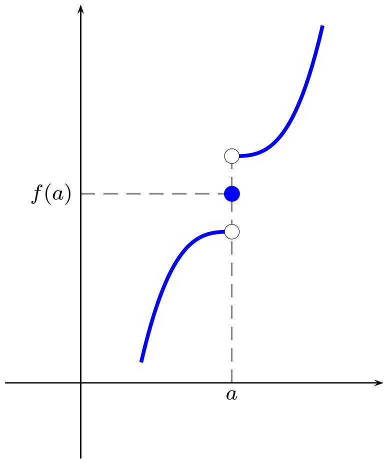
para quaisquer $a, b \in I$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$ e de função **estritamente côncava** colocando $>$ em vez de $<$ na desigualdade anterior. Com estas definições evita-se que o gráfico da função possua segmentos de recta.

Uma função diferenciável é estritamente convexa se, e só se, a sua derivada for estritamente crescente. Obviamente, uma função duas vezes diferenciável e com a segunda derivada positiva é estritamente convexa. No entanto, para funções duas vezes diferenciável a convexidade estrita não implica que a segunda derivada seja positiva. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x^4$ é estritamente convexa, mas a sua segunda derivada anula-se em $x = 0$.

§1.3 Ponto de Inflexão

O conceito de ponto de inflexão refere-se a uma mudança do sentido da concavidade do gráfico de uma função à esquerda e à direita desse ponto, isto é, uma função tem uma inflexão num ponto se nesse ponto se verifica a mudança do sentido de concavidade do seu gráfico.

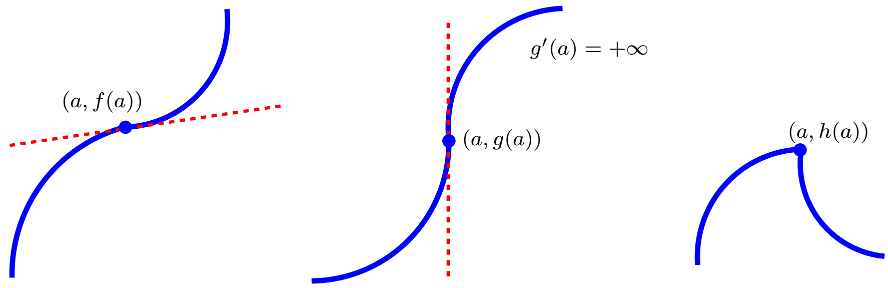
Como podemos verificar no gráfico seguinte, $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão.



Muitos autores definem ponto de inflexão apenas em pontos onde a função é contínua. Uma das definições de ponto de inflexão é apresentada a seguir.

Definição 1.3.1. *A função tem um* ***ponto de inflexão*** *para* $x = a$ *interior ao domínio, se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima (resp. para baixo) em* $]a - \varepsilon, a[$ *e voltada para baixo (resp. para cima) em* $]a, a + \varepsilon[$*, isto é, se o sentido da concavidade muda quando passamos de* $]a - \varepsilon, a[$ *para* $]a, a + \varepsilon[$.

Nas figuras seguintes podemos verificar alguns pontos de inflexão, de acordo com a definição anterior:



(1) (2) (3)

No caso (3) vemos claramente que não existe $h'(a)$, pelo que muitos autores não consideram neste caso a existência de ponto de inflexão. As figuras (1) e (2) sugerem que a existência de inflexão num ponto onde existe derivada (finita ou infinita) está relacionada com o facto de o gráfico da função "atravessar" a tangente nesse ponto. Assim, uma outra forma de definir ponto de inflexão é a que se segue.

Definição 1.3.2. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, a um ponto interior a I e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função com derivada no ponto a. Designe-se por t a tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.*

i) Se f tem derivada finita em a, o ponto $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico de f está acima (resp. abaixo) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico de f está abaixo (resp. acima) de t.

ii) Se f tem derivada infinita em a, o ponto $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico está à direita (resp. esquerda) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico está à esquerda (resp. direita) de t.

Comparem-se as definições 1.3.1 e 1.3.2. Será que as duas definições são equivalentes para funções diferenciáveis? Comecemos por ver que a definição 1.3.1 implica a definição 1.3.2.

Teorema 1.3.3. *Para funções diferenciáveis a definição* 1.3.1 *implica a definição* 1.3.2.

Demonstração: Suponhamos que f tem um ponto de inflexão em $(a, f(a))$, de acordo com a definição 1.3.1. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que em $]a-\varepsilon, a[$ e em $]a, a+\varepsilon[$ o sentido das concavidades é diferente. Sem perda de generalidade suponhamos que a função é convexa em $]a, a+\varepsilon[$ e côncava em $]a-\varepsilon, a[$. Então para quaisquer $x, y, z \in]a, a+\varepsilon[$ tais que $z < y < x$ por $(*)$ temos

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$$

e fazendo $z \to a^+$ temos

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pois a diferenciabilidade de f garante-nos que f é contínua (em $x = a$). Fazendo agora $y \to a^+$ temos

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ou seja,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

para qualquer $x \in]a, a + \varepsilon[$. Portanto, em $]a, a + \varepsilon[$, o gráfico de f está acima da tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

De modo análogo prova-se que, em $]a - \varepsilon, a[$, o gráfico de f está abaixo da tangente ao gráfico de f ponto $(a, f(a))$.

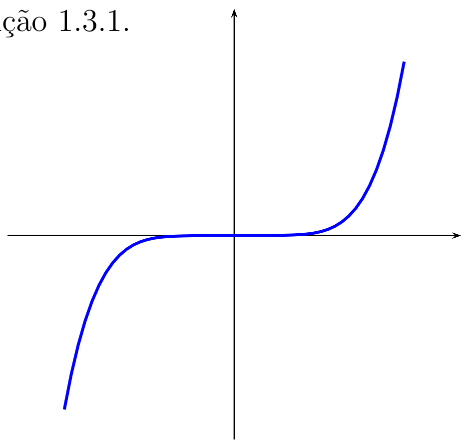
Logo o ponto $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão de acordo com a definição 1.3.2.

$\blacksquare$

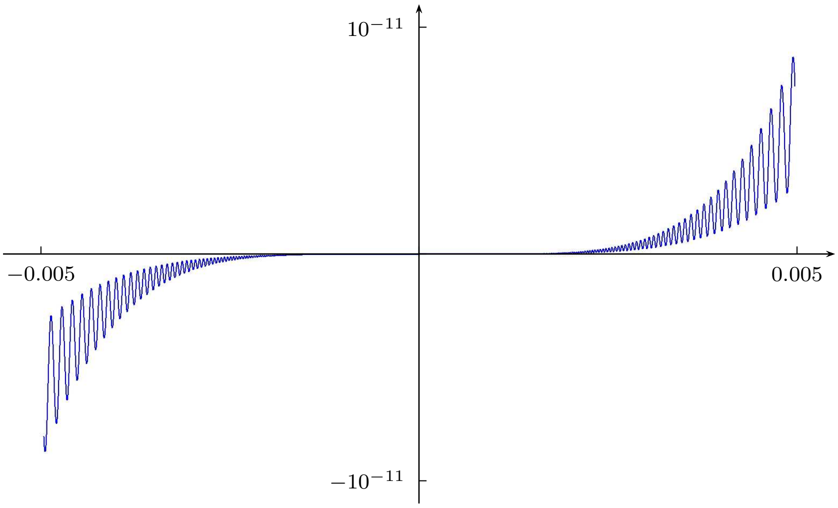
Vejamos que a definição 1.3.2 não implica a definição 1.3.1. Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2\right) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Uma análise precipitada das características da função a partir do seu gráfico, como ilustrado na figura seguinte, pode levar a concluir que em $(0, 0)$ temos um ponto de inflexão segundo a definição 1.3.1.



Mas a imagem seguinte, obtida para $x \in [-0.005, 0.005]$, já alerta para a possibilidade de não haver mudança do sentido da concavidade em nenhum intervalo $]-\varepsilon, 0[$ ou $]0, \varepsilon[$.



A função f é uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sendo f' dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\right)+x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e f'' dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\right)+8x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

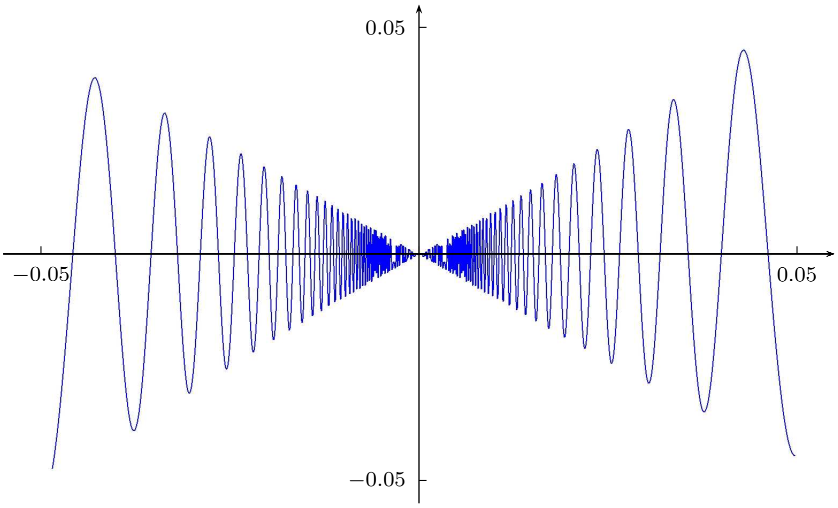
Fazendo

$$a_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2(n+1)\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

temos que as sucessões (a_n) e (b_n) convergem para zero e

$$f(a_n) = 40a_n^3 + 8a_n^2 > 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) = 60b_n^3 - b_n < 0$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, em qualquer intervalo da forma $]0, \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, a segunda derivada de f toma valores positivos e valores negativos. Logo f não tem um ponto de inflexão segundo a definição 1.3.1. Na figura que se segue temos o gráfico da função f'' no intervalo $[-0.05, 0.05]$.



O gráfico ilustra o facto de que f'' não é positiva ou negativa em algum intervalo $]-\varepsilon, 0[$ ou $]0, \varepsilon[$, isto é, não existe uma mudança de sentido da concavidade em (0,0).

Como $f'(0) = 0 = f(0)$, a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$ é o eixo das abcissas e claramente temos a função $f(x) > 0$ para $x > 0$ e $f(x) < 0$ para $x < 0$. Logo f tem um ponto de inflexão de acordo com a definição 1.3.2.

As definições dadas coincidem em algumas situações, mas são definições diferentes, podendo conduzir a conclusões diferentes. Devido a este facto, é essencial clarificar qual a definição de ponto de inflexão adoptada.

Teorema 1.3.4. *Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função é duas vezes derivável num ponto a interior a I. Se f tem um ponto de inflexão em $(a, f(a))$, no sentido da definição* 1.3.1 *ou da definição* 1.3.2*, então $f''(a) = 0$.*

Demonstração: Aplicando a fórmula de Taylor com resto de Peano, para qualquer $x \in I$, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \left[f''(a) + \alpha(x)\right](x-a)^2,$$

onde $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Considerando a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, ou seja, $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, temos

$$f(x) - t(x) = \left[f''(a) + \alpha(x)\right](x-a)^2.$$

Se $f''(a) \neq 0$, como $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ é possível escolher $\varepsilon > 0$ tal que em $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ o sinal de

$$[f''(a) + \alpha(x)]\,(x - a)^2$$

é o sinal de $f''(a)$. Mas isto contraria o facto de $(a, f(a))$ ser ponto de inflexão. Logo $f''(a) = 0$.

Para a definição 1.3.1 podemos dar uma demonstração alternativa. De facto, se a é um ponto de inflexão, então existe $\varepsilon > 0$ tal que f' é crescente num dos intervalos $]a - \varepsilon, a[$ e $]a, a + \varepsilon[$, e decrescente no outro. Como f é duas vezes derivável, f' é contínua em a. Assim, a é um ponto de extremo de f' e, portanto, temos de ter $f''(a) = 0$. ■

A condição expressa no Teorema 1.3.4 não é suficiente para a existência de ponto de inflexão. Por exemplo, para a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$ tem-se $f''(0) = 0$, mas f não tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$.

Capítulo 2

Funções convexas no Ensino Secundário

Neste capítulo é apresentada, segundo o programa de matemática do Ensino Secundário, a matéria do Cálculo Diferencial relativa à determinação do tipo de concavidade e de pontos de inflexão. As secções 2.1 e 2.2 são referenciadas, pela primeira vez, no 10º ano de escolaridade e a secção 2.3 é iniciada no 11º ano de escolaridade e desenvolvida no 12º ano de escolaridade.

Este capítulo está inspirado em Jorge *et al.* (2010), Brito & Aubyn (2005) e Soveral & Silva (2002). Foram também consultados os manuais Duarte & Filipe (2010) e Gomes *et al.* (2005).

§2.1 Estudo da função $y = x^2$

Consideremos a função real de variável real

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = x^2.$$

O domínio da função é $\mathbb{R}$ já que qualquer número real tem quadrado. Além disso, todo o número real tem imagem não negativa, isto é,

$$f(x) \geq 0,$$

para todo o x real, logo, a curva que representa a função f num referencial ortogonal encontra-se acima do eixo das abcissas e toca este eixo na origem do referencial uma vez que $0^2 = 0$, isto é,

$$f(0) = 0.$$

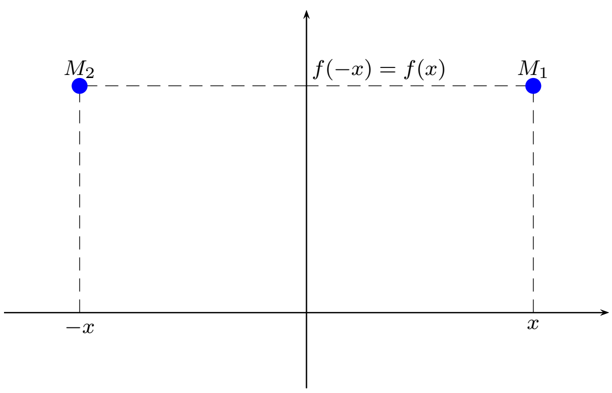
Assim, o contradomínio da função é $\mathbb{R}_0^+$ e o mínimo da função é zero.

À curva que representa a função chamamos **parábola** e ao ponto (0,0) chamamos **vértice** da parábola.

Como números simétricos têm o mesmo quadrado, podemos concluir que

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Diz-se, por este motivo, que a função é uma **função par**. Esta propriedade tem uma importante consequência que é ilustrada na figura que se segue.

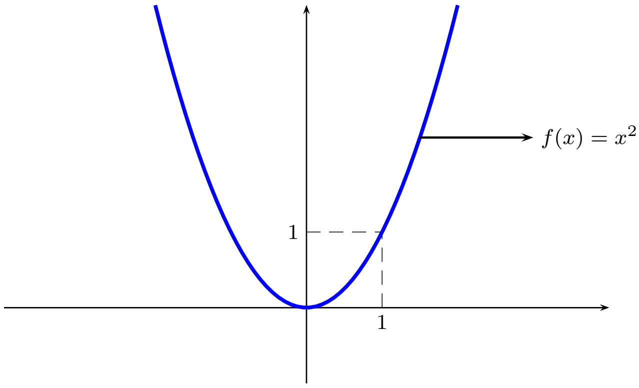


Os pontos M_1 de coordenadas $(x, f(x))$ e M_2 de coordenadas $(-x, f(-x))$ são pontos do gráfico e, como têm abcissas simétricas e a mesma ordenada, pois

$$f(-x) = f(x),$$

são **simétricos** em relação ao eixo das ordenadas.

Assim, tal como a figura seguinte sugere, diz-se que o eixo das ordenadas é **eixo de simetria** do gráfico de f.



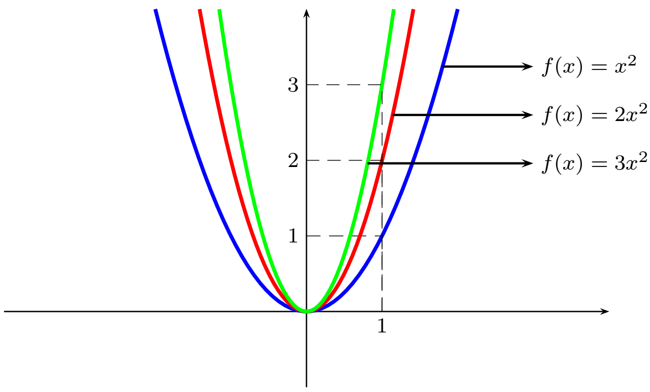
§2.2 Estudo das funções do tipo $y = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Após a representação de algumas funções do tipo

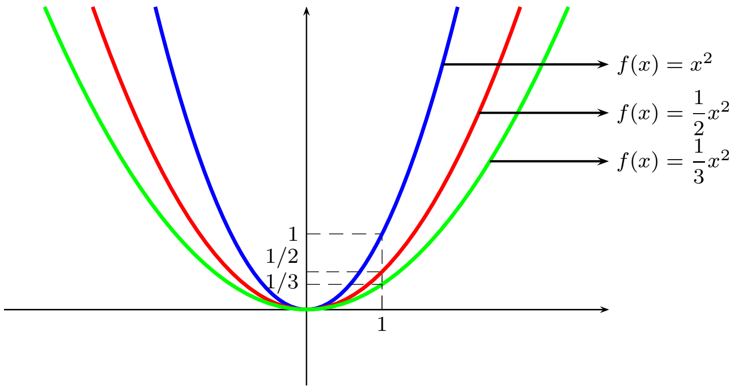
$$y = ax^2,$$

com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, procuraremos conjecturar a influência do valor do parâmetro a nos gráficos obtidos.

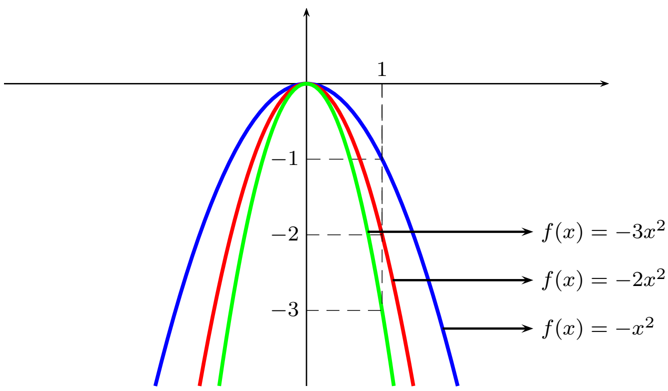
Quando $a \geq 1$ temos os gráficos apresentados na figura seguinte.



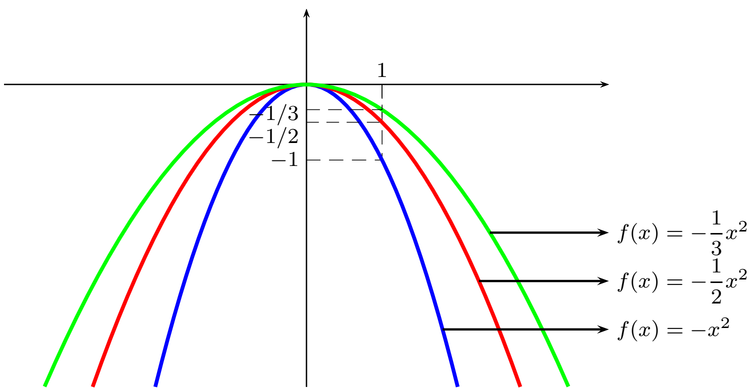
Se $0 < a \leq 1$, temos os gráficos apresentado na figura que se segue.



No caso de $a < 0$, obteremos gráficos simétricos dos gráficos anteriores em relação ao eixo das abcissas. Se $a \leq -1$ temos os gráficos que se seguem.



Finalmente, se $-1 \leq a < 0$ temos os gráficos apresentados na figura que se segue.



Da análise feita, podemos concluir que os gráficos das funções do tipo

$$y = ax^2, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

são parábolas com a concavidade voltada para cima se a é positivo e concavidade voltada para baixo se a é negativo.

§2.3 Segunda derivada e concavidade

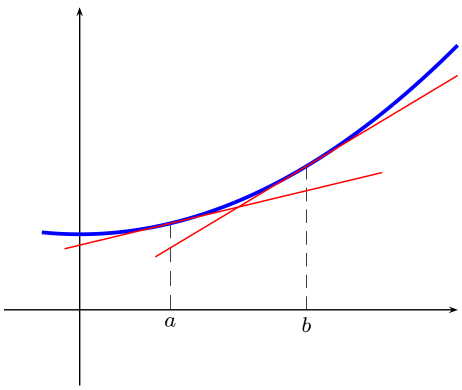
Vimos anteriormente que para funções de grau dois basta analisar o sinal do parâmetro a. Estas conclusões são mais difíceis de obter quando se estudam funções de grau superior a dois, mas a derivação de ordem dois é um método que permite obter o sentido da concavidade do gráfico.

Analisemos diferentes casos, verificando que a recta tangente à curva vai "rodando" de modo que o seu declive vai variando.

1) **Concavidade voltada para cima no intervalo** $]a, b[$

a) A função é crescente

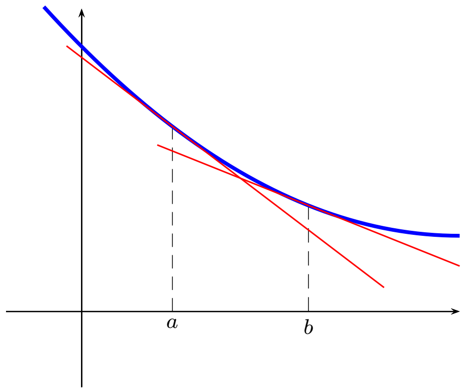
Na figura que se segue ilustramos este caso.



Se a função f é crescente, temos $f'(x) \geq 0$. No entanto, se considerarmos sucessivos valores entre a e b, verificamos que à medida que "caminhamos" no intervalo $]a, b[$, o declive das rectas tangentes vai aumentando, ou seja, $f'(x)$ é crescente e, por conseguinte, $f''(x) \geq 0$.

b) A função é decrescente

Podemos ilustrar este caso com a figura que se segue.



Como f é decrescente, temos $f'(x) \leq 0$. No entanto, se considerarmos sucessivos valores entre a e b, verificamos que à medida que "caminhamos" no intervalo $]a, b[$, o declive das rectas tangentes vai sendo cada vez menos negativo, isto é, vai aumentando, ou seja, $f'(x)$ é crescente. Logo $f''(x) \geq 0$

Em ambos os casos verificámos que no intervalo $]a, b[$, a curva está acima de qualquer das rectas tangentes e que

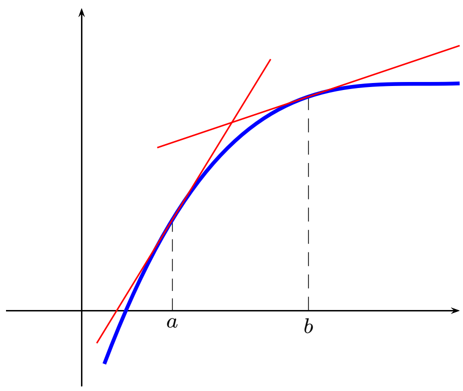
$$f''(x) \geq 0$$

para qualquer $x \in]a, b[$.

2) **Concavidade voltada para baixo no intervalo** $]a, b[$

a) A função é crescente

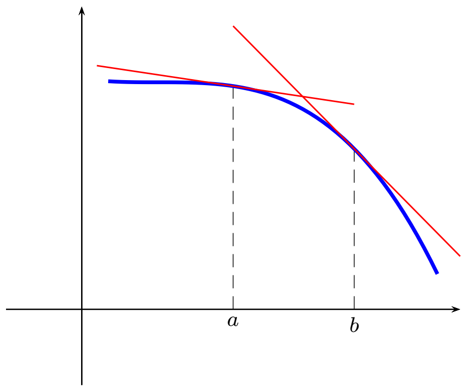
Comecemos por ilustrar este caso no gráfico que se segue.



A função f é crescente, como tal $f'(x) \geq 0$. No entanto, se considerarmos sucessivos valores entre a e b, verificamos que à medida que "caminhamos" no intervalo $]a, b[$, o declive das rectas tangentes vai diminuindo, ou seja, $f'(x)$ é decrescente e, portanto, logo $f''(x) \leq 0$.

$b)$ A função é decrescente

Analisemos o gráfico da figura que se segue.



A função f é decrescente e como tal $f'(x) \leq 0$. No entanto, se considerarmos sucessivos valores entre a e b, verificamos que à medida que "caminhamos" no intervalo $]a, b[$, o declive das rectas tangentes vai sendo cada vez mais negativo, isto é, vai diminuindo, ou seja, $f'(x)$ é decrescente. Assim, $f''(x) \leq 0$.

Em ambos os casos, no intervalo $]a, b[$ a curva está abaixo de qualquer das rectas tangentes e

$$f''(x) \leq 0$$

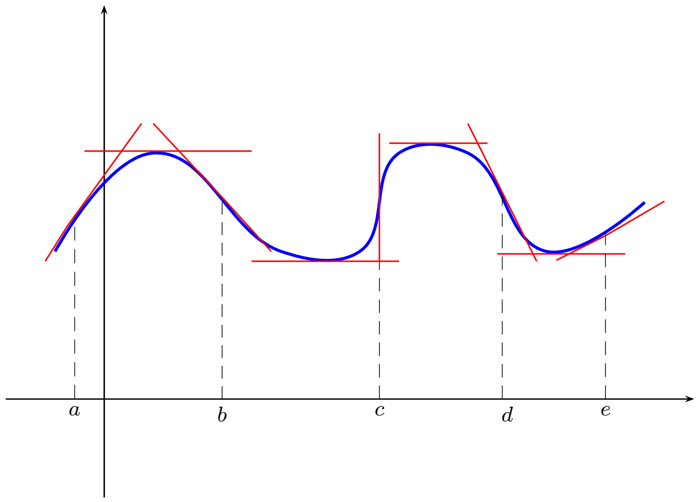
para qualquer $x \in]a, b[$.

A análise feita anteriormente leva-nos de forma intuitiva à seguinte definição de convexidade. Seja f uma função de domínio D com segunda derivada finita em todos os pontos de um intervalo $I \subset D$.

– Se $f''(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$, a concavidade do gráfico de f em I está voltada para cima.

– Se $f''(x) \leq 0$ para todo o $x \in I$, a concavidade do gráfico de f em I está voltada para baixo.

Vejamos um exemplo. Analisemos a figura que se segue.



É evidente que

- nos intervalos $]a, b[$ e $]c, d[$, à medida que a recta tangente à curva vai "rodando", verificamos que o seu declive passa de positivo para zero e depois para negativo, diminuindo sempre; assim, f' é decrescente, pelo que f'' é não positiva e, portanto, a concavidade está voltada para baixo;

- nos intervalos $]b, c[$ e $]d, e[$, à medida que a recta tangente à curva vai "rodando", verificamos que o seu declive passa de negativo para zero e depois para positivo, aumentando sempre; deste modo f' é crescente, o que implica f'' é não negativa e, consequentemente, a concavidade está voltada para cima;

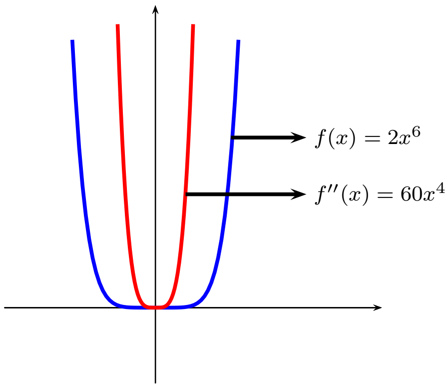
- nos pontos de abcissa b, c e d verifica-se que a curva muda o sentido da concavidade.

Os pontos onde se dá a mudança de sentido de concavidade chamam-se pontos de inflexão. Utilizando esta definição, podemos imediatamente dizer que b e d são pontos de inflexão do gráfico de f. Relativamente ao ponto c, apesar de a derivada de f no ponto ser infinita, podemos também afirmar que é ponto de inflexão.

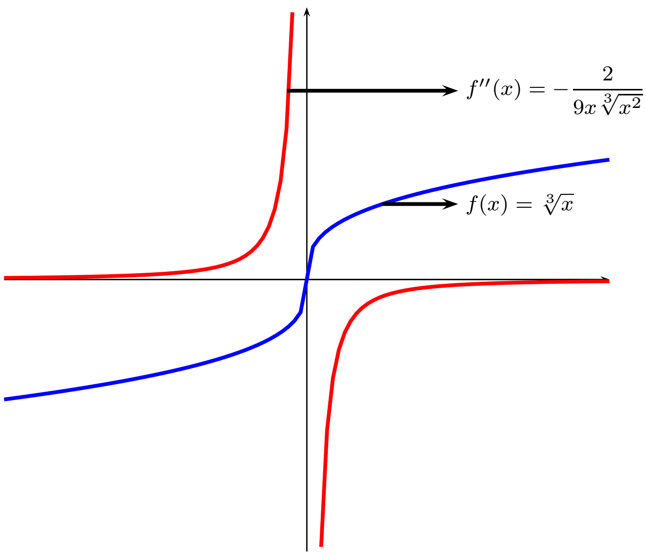
Verifica-se que, se existe segunda derivada, f'', num ponto de inflexão, esta é nula. Assim, no Ensino Secundário, o método que usualmente se utiliza para determinar os pontos de inflexão consiste em calcular os zeros da segunda derivada e analisar a mudança de sinal à esquerda e à direita desses pontos.

É de realçar que

– podem existir zeros da segunda derivada de uma função e o gráfico não ter pontos de inflexão, como por exemplo a função dada por $f(x) = 2x^6$;



– o gráfico de uma função pode ter, tal como já foi referido anteriormente, pontos de inflexão onde não existe derivada finita, como por exemplo a função dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



Capítulo 3

Exercícios resolvidos

Neste capítulo são apresentados alguns exercícios resolvidos onde é aplicada a segunda derivada e o sentido das concavidades na resolução de problemas práticos, com aplicações a situações reais de Biologia e de Física.

Exercício 3.1.1. *Estuda o sentido da concavidade da função g definida por*

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Proposta de resolução:

Para estudar a concavidade da função calculemos a primeira derivada da função

$$g'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

e a segunda derivada

$$g''(x) = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}.$$

De seguida vamos construir o quadro de sinais da segunda derivada. Para isso é necessário calcular os zeros do numerador e os zeros do denominador. Para o numerador temos

$$4x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

e o denominador não tem zeros pois a equação

$$(x^2+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

é impossível.

O quadro de sinais é o seguinte:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x(x^2-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cap$	ponto de inflexão	$\cup$	ponto de inflexão	$\cap$	ponto de inflexão	$\cup$

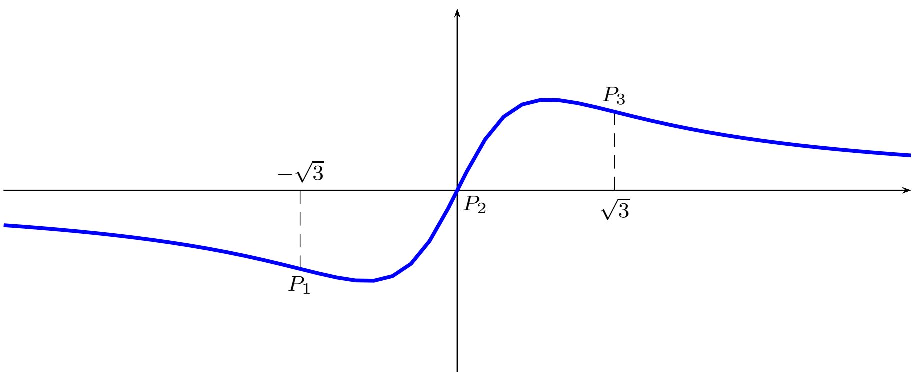
Tendo em conta que

$$g(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad g(0) = 0,$$

podemos então concluir que a função tem

- a concavidade voltada para cima nos intervalos $]-\sqrt{3}, 0[$ e $]\sqrt{3}, +\infty[$;
- a concavidade voltada para baixo nos intervalos $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e $]0, \sqrt{3}[$;
- como pontos de inflexão $P_1 = (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_2 = (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $P_3 = (0,0)$.

Para terminar, a representação gráfica de $g(x)$ é:



Exercício 3.1.2. ***Aplicação na Biologia***

O número de bactérias, em milhões de unidades, de uma dada cultura é dado, aproximadamente, por:

$$C(t) = C_0 e^{kt}, (t \geq 0)$$

onde C_0 *é o número inicial de bactérias em milhões de unidades,* t *representa o tempo em minutos que decorreu desde o início da contagem e* k *uma constante positiva. Considere que no décimo minuto se decidiu ministrar um medicamento à população de bactérias, com o objectivo de travar o seu crescimento. A partir daí, o seu número, em milhões, passou a ser dado aproximadamente por:*

$$D(t) = 2(t-10)^2 \cdot e^{-t+10} + 4, t \geq 10$$

Indique o instante em que a taxa de crescimento é máxima. Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades)

Proposta de resolução:

Começaremos a resolução, determinando a segunda derivada da função $D(t)$:

$$D'' = e^{-t+10}(2t^2 - 48t + 284)$$

De seguida é necessário calcular os zeros de D'' com o objectivo de determinar o quadro de sinais:

$$D''(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-t+10} = 0}_{\substack{\text{condição} \\ \text{impossível}}} \ \vee \ 2t^2 - 48t + 284 = 0 \Leftrightarrow t = 12 \pm \sqrt{2}.$$

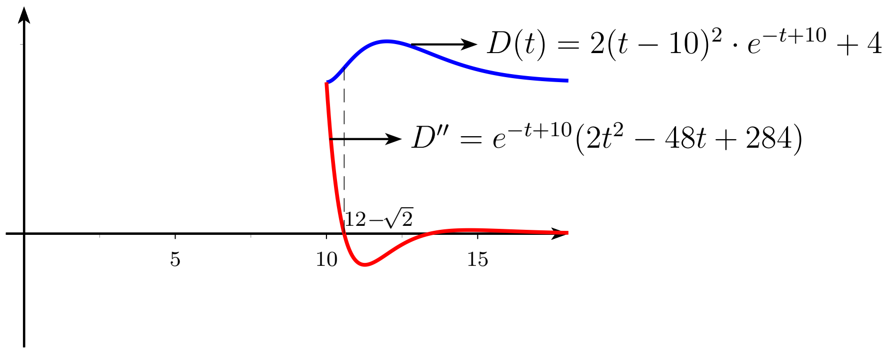
O respectivo quadro de sinais é:

t	10		$12-\sqrt{2}$		$12+\sqrt{2}$	$+\infty$
D''	+	+	0	$-$	0	+
D		$\bigcup$	ponto inflexão	$\bigcap$	ponto inflexão	$\bigcup$

Observando o quadro de sinais, podemos observar que o ponto pretendido é $12-\sqrt{2}$ pois é onde a taxa de crescimento é máxima e representa um dos pontos de inflexão da função D. Como

$$12 - \sqrt{2} \approx 10,5858 \approx 10 \text{ minutos e } 35 \text{ segundos},$$

para $t \approx 10$ minutos e 35 segundos, a taxa de crescimento atinge o valor máximo. Para terminar, as representações gráficas das funções D e D'' são:



Exercício 3.1.3. ***Aplicação na Física***

Uma partícula move-se durante 2 segundos de acordo com as seguintes equações paramétricas

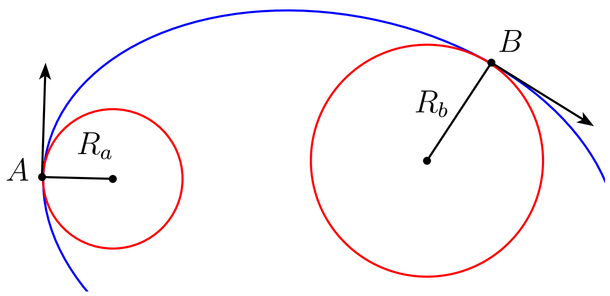
$$x = 2 - t \text{ e } y = 5 + 4t - 3,5t^2$$

Em que instante, $t = 0,3$ *ou* $t = 1,6$ *segundos o raio de curvatura da trajectória é maior? Justifica.*

NOTA: Numa trajectória circular, o raio de curvatura coincide com o raio da circunferência. Nas outras curvas, em cada ponto existe um raio de curvatura como se pode verificar na figura seguinte, e pode ser calculado da seguinte maneira:

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

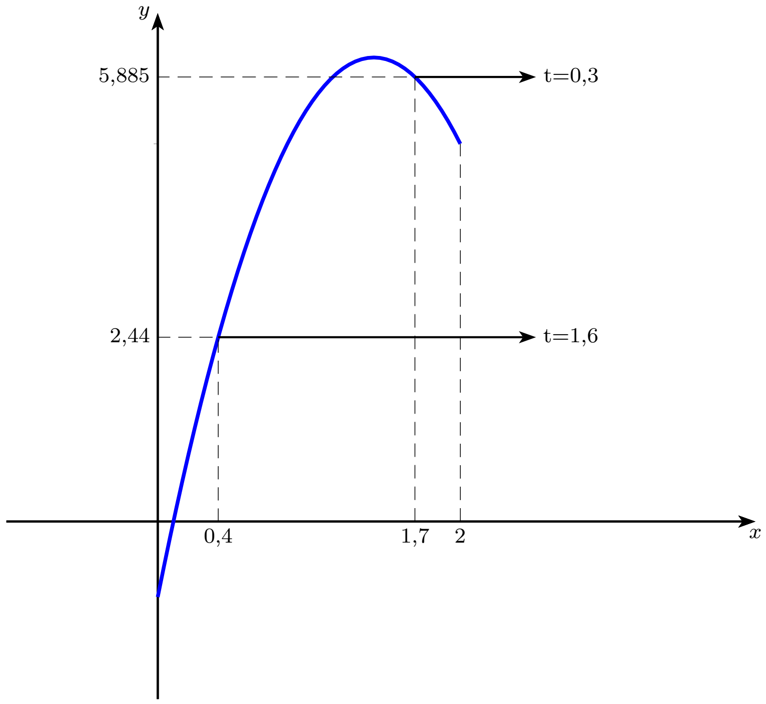
com a_n a aceleração normal e v o módulo da velocidade.



Proposta de Resolução: Calculando a equação da trajectória vem:

$$y = -3.5x^2 + 10x - 1, \text{ para } x \in [0, 2].$$

A partícula descreve uma trajectória parabólica como podemos observar no gráfico da trajectória que se apresenta abaixo:



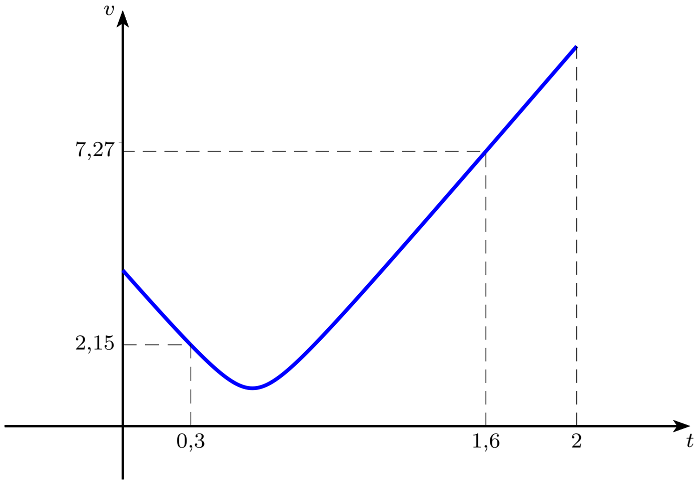
Analisando o gráfico, podemos observar que em $t = 0,3$ segundos, a curvatura é mais acentuada que em $t = 1,6$, ou seja, a curva é mais côncava, logo é de esperar que o raio de curvatura em $t = 0,3$ seja inferior ao raio de curvatura em $t = 1,6$. Para validar este resultado vamos calcular os respectivos raios de curvatura. Comecemos por calcular as equações da velocidade que representam as derivadas das equações paramétricas:

$$v_x = (x)' = (2 - t)' = -1,$$
$$v_y = (y)' = (5 + 4t - 3,5t^2)' = 4 - 7t.$$

O módulo da velocidade é:

$$v = \sqrt{(4 - 7t)^2 + 1},$$
$$= \sqrt{17 - 56t + 49t^2}.$$

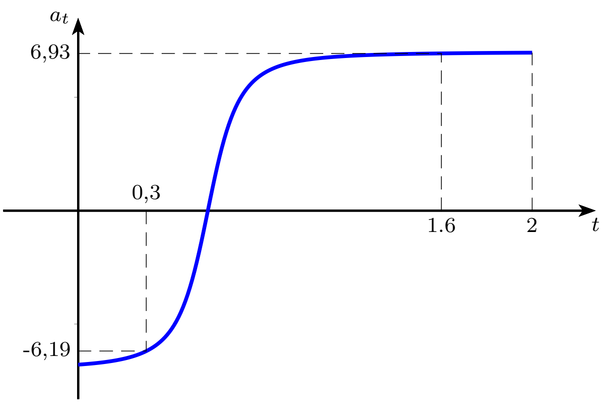
Observe-se agora o gráfico do módulo da velocidade e registem-se os valores da velocidade nos instantes $t = 0,3$ e $t = 1,6$.



Pode-se verificar que inicialmente o movimento é retardado e depois acelerado. O módulo da velocidade varia mais rapidamente quando a aceleração tangencial (a_t) é maior. Como $a_t = (v)'$ vem:

$$\begin{aligned} a_t &= (v)' \\ &= (\sqrt{17 - 56t + 49t^2})' \\ &= \frac{98t - 56}{2(\sqrt{17 - 56t + 49t^2})}. \end{aligned}$$

O gráfico de a_t é:



De seguida, é necessário calcular o módulo da aceleração (a). Para isso calculemos as derivadas das equações da velocidade:

$$a_x = (v_x)' = (-1)' = 0,$$
$$a_y = (v_y)' = (4 - 7t)' = -7.$$

O módulo da aceleração é:

$$a = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$$

e, calculando o módulo da aceleração normal (a_n), sabendo que

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2},$$

vem para $t = 0,3$:

$$a_n = \sqrt{7^2 - (-6,19)^2} \approx 3,27$$

e para $t = 1,6$:

$$a_n = \sqrt{7^2 - (6,93)^2} \approx 0,99.$$

Para finalizar vamos calcular raio de curvatura (R) da seguinte maneira:

$$R = \frac{v^2}{a_n},$$

pelo que para $t = 0,3$ temos

$$R = \frac{2,15^2}{3,27} \approx 1,41$$

e para $t = 1,6$ temos

$$R = \frac{7,27^2}{0,99} \approx 53,39.$$

No instante $t = 0,3$, o raio de curvatura é $1,41$ metros e no instante $t = 1,6$ o raio de curvatura é $53,39$ metros. Como já tínhamos observado, o gráfico da trajectória permite-nos concluir que o raio de curvatura no instante $t = 0,3$ é menor que o raio de curvatura no instante $t = 1,6$, pois a curva torna-se mais aberta à medida que o tempo passa e, portanto, o raio de curvatura aumenta.

Bibliografia

Brito, Cristina & Aubyn, Marinela. (2005). *MAT 12*. Lisboa Editora.

Campos Ferreira, J. (1988). *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Duarte, Teresa & Filipe, Jaime. (2010). *Matemática Dez*. Lisboa Editora.

Figueira, Mário S. R. (2001). *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Textos de Matemática. L. Trabucho.

Gomes, Francelino; Viegas, Cristina & Lima, Yolanda. (2005). *Xeq Mat 12º Ano*. Texto Editores.

Guerreiro, J. Santos. (1989). *Curso de Análise Matemática*. Escolar Editora.

Jorge, Ana Maria; Alves, Conceição; Cruchinho, Cristina; Fonseca, Graziela; Barbedo, Judite & Simões, Manuela. (2010). *Matemática A 10*. Areal Editores.

Lages Lima, E. (1992). *Curso de Análise*. Projecto Euclides, vol. 1. IMPA.

Lages Lima, E. (2002). *Análise Real*. Colecção Matemática Universitária, vol. 1. IMPA.

Nápoles, S. M. (2001). O que é um ponto de Inflexão? *Gazeta de Matemática*, **140**, 32–39.

Roberts, A.W. & Varberg, D.E. (1973). *Convex Functions.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press.

Sarrico, Carlos. (1997). *Análise Matemática.* Trajectos Ciência. Gradiva.

Silva, Jaime Carvalho; Fonseca, Maria; Martins, Arsélio; Fonseca, Cristina & Lopes, Ilda. (2002). *Programa de Matemática A do Ensino Secundário.* Ministério da Educação.

Soveral, Ana & Silva, Carmen. (2002). *Matemática 12º Ano.* Texto Editores.

Ventura, Graça; Fiolhais, Manuel; Fiolhais, Carlos & Paixão, José. (2009). *12 F - Física 12º Ano.* Texto Editores.