



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Faculdade de Ciências

Aplicação dos Números Complexos em Geometria

Versão final após defesa

Teresa da Conceição Mazissa Zinga

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2.º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, junho de 2018

Dedicatória

Aos meus filhos, Josué e Jesuina, por serem o âmago do meu esforço.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e por estar sempre me guiando principalmente nesta formação. A direção da minha instituição labora, por me confiarem esta missão e permitir que eu fizesse parte deste grupo. Aos meus professores do departamento de Matemática, da faculdade de ciências em especial o meu orientador Rui Miguel Nobre Martins Pacheco, pela enorme paciência e disponibilidade que teve em incetivar, ajudar e trabalhar incansavelmente neste projeto. Aos meus colegas e amigos, em especial aqueles que mais perto de mim estiveram desde o início a dar forças. Aos meu pais e irmãos que sempre estiveram presentes na minha formação, ao meu esposo Domingos Sumbo e aos meus filhos.

Resumo

Os números complexos são muito importantes em Matemática. Com muita frequência, eles têm tido uma abordagem puramente algébrica, deixando uma preocupação em como os mesmos podem ser aproveitados ou aplicados em outros contextos. Neste trabalho, procuramos explorar esta aplicação dos números complexos em geometria plana.

Palavras-chave

Números Complexos, Geometria, Plano Euclidiano, Transformações Geométricas.

Abstract

The complex numbers play a very important role in mathematics. In high school, it is common to present complex numbers as a purely algebraic and abstract device to solve quadratic and cubic equations. This approach forgets the geometrical aspects of complex numbers and may cause the impression that they are not really useful in other contexts. In this dissertation we will study different applications of complex numbers in plane geometry.

Keywords

Complex Numbers, Geometry, Euclidean Plane, Geometric Transformations.

Números Complexos em Geometria

Conteúdo

Introdução	1
1 Álgebra e geometria dos números complexos	3
1.1 Forma algébrica de números complexos	3
1.2 Forma trigonométrica e polar dos números complexos	6
1.2.1 Raízes de números complexos	9
1.3 Interpretação geométrica das operações com números complexos	11
1.3.1 Soma de números complexos	11
1.3.2 Multiplicação de números complexos	12
1.3.3 Conjugado de um número complexo	12
1.3.4 Inverso de um número complexo	13
1.4 Propriedades geométricas	13
1.4.1 Colinearidade, paralelismo e perpendicularidade	13
1.4.2 Quadriláteros cíclicos	15
1.4.3 Triângulos	17
1.4.4 Equação Cartesiana da reta	18
1.4.5 Equação da mediatriz de um segmento dado	18
1.4.6 Equação da reta perpendicular por um ponto	19
1.4.7 Equação da circunferência	19
1.4.8 Triângulos semelhantes	20
1.5 Pontos notáveis dos triângulos	21
1.5.1 Ortocentro	21
1.5.2 Centróide	23
1.5.3 Circuncentro	24
1.6 Polígonos regulares	26
2 Resolução de problemas geométricos no plano com números complexos	31
3 Inversões	43
3.1 Definição e propriedades das inversões	43
3.2 Teorema de Ptolomeu-Euler	47
3.3 Problemas com inversões	49
Bibliografia	51

Introdução

Os números complexos são muito importantes em Matemática. Com muita frequência, os números complexos têm tido uma abordagem puramente algébrica, deixando uma preocupação em como os mesmos podem ser aproveitados ou aplicados em outros contextos.

Uma abordagem do plano euclidiano com números complexos dá resultados significativos na resolução de problemas geométricos. Neste trabalho, procuramos explorar esta aplicação dos números complexos em geometria plana. O mesmo está constituído por três capítulos.

No primeiro capítulo, veremos a definição algébrica, a representação trigonométrica e polar de números complexos. Interpretamos geometricamente as operações com números complexos (soma, multiplicação, conjugado e inverso de números complexos). Falamos das raízes da unidade imaginária, com uma abordagem nas raízes quadradas, cúbicas e quartas. Apresentamos a caracterização de alguns objetos e propriedades geométricas em termos de números complexos: colinearidade, paralelismo, perpendicularidade, quadriláteros cíclicos, triângulos, equação cartesiana da reta, equações da mediatriz de um segmento dado, reta perpendicular por um ponto, circunferência e triângulos semelhantes. Abordamos um pouco sobre os pontos notáveis dos triângulos, com enfoque no ortocentro, centróide e circuncentro. Temos uma abordagem sobre os polígonos regulares.

No capítulo seguinte aplicamos os conceitos e resultados desenvolvidos no capítulo anterior na resolução de alguns problemas geométricos. A lista de problemas que apresentamos podem ajudar um professor a elaborar diferentes atividades que permitam aos alunos um melhor entendimento da natureza dos números complexos e da sua utilidade. Finalmente, no último capítulo, trazemos uma abordagem da inversão numa circunferência no domínio dos números complexos.

Este trabalho foi muito influenciado pelo livro de Lang-shin Hahn [4] sobre aplicações dos números complexos em geometria. No entanto, em muitas situações procurámos abordagens diferentes na apresentação de resultados, noutras aprofundámos com mais detalhe a explicação dos mesmos e completámos com problemas que encontramos dispersos em outros textos. Para os fundamentos de geometria euclidiana necessários ao entendimento deste trabalho, sugerimos o livro de P. V. Araújo [1]. Outros livros da bibliografia contêm informação sobre a álgebra dos números complexos e a sua aplicação à análise matemática.

Na escrita deste trabalho fizémos uso do sistema *Tex*, o que facilitou a elabora-

Números Complexos em Geometria

ção do texto, em conjunto com o programa de geometria dinâmica *Geogebra*, na elaboração das figuras.

Capítulo 1

Álgebra e geometria dos números complexos

A partir do trabalho de Bombelli, no século XVI, os números complexos começaram a ser utilizados devido à sua utilidade para resolver equações do terceiro grau. Mas, ao mesmo tempo, parecia óbvio que eles não podiam ter “existência real”. O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard. Os termos *real* e *imaginário* foram introduzidos pela primeira vez por René Descartes em 1637. A expressão *números complexos* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832.

Algumas questões realmente perturbadoras foram surgindo e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos, também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Foi somente nos finais do século XVIII e início do século XIX, com os trabalhos de Wessel (um agrimensor norueguês), em 1798, e do matemático suíço Argand, em 1806, que os números complexos passaram a ser compreendidos de um novo ponto de vista: eles começaram então a ser interpretados como pontos (ou vetores) do plano e foram desvendados os significados geométricos das suas operações de adição e multiplicação (translação, rotação e dilatação no plano).

1.1 Forma algébrica de números complexos

Definição 1. O conjunto \mathbb{C} dos números complexos é o conjunto \mathbb{R}^2 dos pares ordenados de números reais com as operações que se seguem. Para quaisquer $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$,

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (\text{operação soma})$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') \quad (\text{operação produto})$$

Observa-se facilmente que as operações soma e produto são comutativas, isto é, para quaisquer $(a, b), (a', b') \in \mathbb{C}$:

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b).$$

Vejamos os seguintes exemplos:

1. $(5, 4) + (3, 2) = (5 + 3, 4 + 2) = (8, 6)$.
2. $(2, 1) \cdot (-1, 6) = (2(-1) - 1 \cdot 6, 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-1)) = (-2 - 6, 12 - 1) = (-8, 11)$.

Para simplificar a notação, podemos identificar o número complexo $(a, 0) \in \mathbb{C}$ com o número real a . Definimos a *unidade imaginária* por $i = (0, 1)$. Logo temos que:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que $i^2 = -1$. De facto, $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Dado um número complexo $z = a + bi$, dizemos que a é a *parte real* de z e b é a *parte imaginária* de z . Denotamos $a = \operatorname{Re}(z)$ e $b = \operatorname{Im}(z)$. O *conjugado* de $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$. Se a parte real de z é zero, então dizemos que z é um *imaginário puro*. O *módulo* de um número complexo z , que denotamos por $|z|$, é a distância de z à origem do sistema de coordenadas. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 1. Se $z = 10 - 2i$, então $10 = \operatorname{Re}(z)$ e $-2 = \operatorname{Im}(z)$. Além disso, $\bar{z} = 10 + 2i$ e $|z| = \sqrt{104}$.

Podemos representar os números complexos no *plano de Argand*. Para um sistema de eixos cartesianos, identificamos o eixo horizontal com os números reais e o eixo vertical com os números imaginários puros, isto é, os números da forma $ai \in \mathbb{C}$, com $a \in \mathbb{R}$, tal como é ilustrado na Figura 1.1.

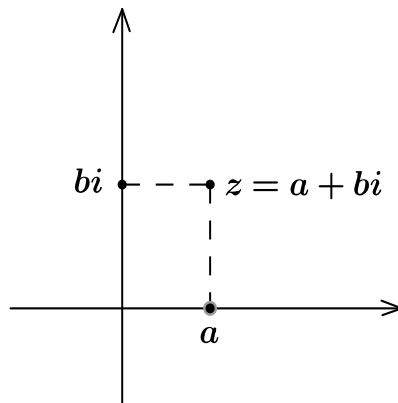


Figura 1.1: Representação dos números complexos no plano de Argand.

Vejamos algumas propriedades dos números complexos.

Proposição 1. Consideremos $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Então:

1. $a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$;

Números Complexos em Geometria

2. $b = \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
3. $z \in \mathbb{C}$ é real se, e só se, $\bar{z} = z$;
4. z é imaginário puro se, e só se, $\bar{z} = -z$;
5. $\bar{\bar{z}} = z$;
6. $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$;
7. $|z| = |\bar{z}|$;
8. O inverso de z é dado por $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$;
9. $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$.

Demonstração. 1. Uma vez que

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

temos

$$\text{Re}(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

2. Uma vez que

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi,$$

temos

$$\text{Im}(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3. O número z é real precisamente quando $\text{Im}(z) = 0$. Do ponto 2. resulta que isto acontece se, e só se, $\bar{z} = z$.

4. O número z é imaginário puro precisamente quando $\text{Re}(z) = 0$. Do ponto 1. resulta que isto acontece se, e só se, $\bar{z} = -z$.

5. Temos

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi.$$

6. Temos

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 + abi - abi = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

7. Temos

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

8. O inverso de z é o número z^{-1} que satisfaz $zz^{-1} = 1$. Como

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1,$$

concluimos que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

9. Por um lado, temos

$$\overline{z^{-1}} = \frac{\overline{\bar{z}}}{|\bar{z}|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Por outro lado, tendo em conta os pontos anteriores, temos

$$\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{\bar{z}}}{|\bar{z}|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Logo $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$. □

Proposição 2. *Dados dois números complexos z_1 e z_2 , temos:*

1. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
3. $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}$ para $z_2 \neq 0$.

Demonstração. Escrevemos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

1. Temos

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

2. Temos

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

3. Pelo ponto 1 desta proposição e o ponto 9. da proposição 1, temos

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1 z_2^{-1}} = \bar{z}_1 \bar{z}_2^{-1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

□

Exemplo 2. Se $z = 2 + i$, então $z^{-1} = \frac{(2-i)}{(4+1)} = \frac{(2-i)}{5}$.

1.2 Forma trigonométrica e polar dos números complexos

Dado $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever $z = r \cos \theta + r \sin \theta$, com $r \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, onde r é o módulo de z e θ é um *argumento* de z .

Números Complexos em Geometria

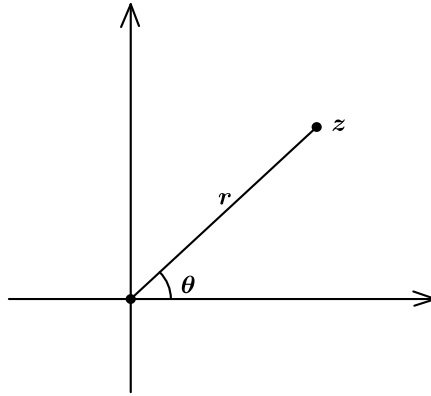


Figura 1.2: Módulo e argumento de um número complexo.

Tendo em conta a definição e a figura anterior, o argumento de um número complexo z não é único. De facto, podemos escrever também

$$z = r \cos(\theta + 2k\pi) + ir \sin(\theta + 2k\pi),$$

para qualquer inteiro k . Assim:

Proposição 3. Se $z_1 = z_2$, então $|z_1| = |z_2|$ e $\arg z_1 - \arg z_2 = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Da definição de argumento de um número complexo, resulta também o seguinte resultado.

Proposição 4. Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0 \\ -\arctan \frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0 \end{cases}.$$

onde \arctan denota uma qualquer inversa da função tangente.

Exemplo 3. Vamos determinar o módulo e o argumento do número complexo $z = 1 - i\sqrt{3}$. Pela fórmula $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2.$$

Como $a > 0$, então:

$$\arg z = \arctan \left(\frac{-\sqrt{3}}{1} \right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Definição 2. Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então define-se a exponencial de z por

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

.

Exemplo 4. Para $z = a + i.0 \in \mathbb{R}$ temos:

$$e^z = e^a(\cos 0 + i \sin 0) = e^a(1 + i.0) = e^a,$$

ou seja, se z é um número real, esta definição coincide com a exponencial de números reais já conhecida.

Exemplo 5. Para $z = i\pi$, temos:

$$e^z = e^{i\pi} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = 1(-1 + i0) = -1,$$

logo $e^{i\pi} + 1 = 0$. Esta igualdade é conhecida pela identidade mágica de Euler.

Usando as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de ângulos, é possível provar o seguinte:

Proposição 5. Dados dois números complexos $z, w \in \mathbb{C}$, temos $e^z e^w = e^{z+w}$.

Demonstração. Vamos escrever $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Sabemos, pela definição, que $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ e $e^w = e^c(\cos d + i \sin d)$. Assim,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^a(\cos b + i \sin b)e^c(\cos d + i \sin d) \\ &= e^{a+c}(\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\cos b \sin d + \sin b \cos d)) \\ &= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d)) = e^{a+c+i(b+d)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

□

Definição 3. Dado $z \in \mathbb{C}$ com módulo $r = |z|$ e argumento $\theta \in \mathbb{R}$, então podemos escrever z na sua forma polar: $z = re^{i\theta}$.

Exemplo 6. Se $z = 1 + i$, então $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, pelo que a forma polar de z é $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Podemos ainda escrever a multiplicação, o inverso e a divisão de números complexos na forma polar. Se $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, então

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Números Complexos em Geometria

Em particular, o inverso de um complexo $z = re^{i\theta}$ é $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$. Temos assim

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)},$$

para $z_2 \neq 0$.

Proposição 6. *A exponencial de números complexos verifica as seguintes propriedades:*

1. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$;
2. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
3. $(e^z)^k = e^{kz}$, com $k \in \mathbb{Z}$;
4. $e^{(z+i2k\pi)} = e^z$, com $k \in \mathbb{Z}$;
5. $z^k = |z|^k e^{ik\theta}$ (fórmula de Moivre).

Demonstração. A demonstração de cada uma destas propriedades resulta diretamente da definição de exponencial de um número complexo e da Proposição 5. □

1.2.1 Raízes de números complexos

Sabemos que, dentro do conjunto dos números reais, não podemos extrair as raízes quadradas de números negativos. Tal é sempre possível fazer com números complexos, ou seja, para qualquer $a + bi \in \mathbb{C}$, existe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = a + bi$. Com efeito, a equação $z^2 = a + bi$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Resolvendo o mesmo sistema, teremos que

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$$

e

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Como $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geq 0$ e $\sqrt{a^2 + b^2} - a \geq 0$, então x e y são números reais. Já os sinais dos radicais são escolhidos de maneira a que o produto xy tenha o mesmo sinal de b .

Deste modo, as raízes quadradas de $z = a + bi$ serão dadas por:

$$\sqrt{a + bi} = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), & \text{com } b > 0 \\ \pm \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), & \text{com } b < 0 \\ \pm\sqrt{a}, & \text{com } b = 0, a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{-a}, & \text{com } b = 0, a < 0 \end{cases} .$$

Podemos ver que todo número complexo não nulo possui duas raízes quadradas distintas. Em particular, podemos deduzir que toda equação do segundo grau, no conjunto dos números complexos, tem duas raízes, que podem ser iguais ou diferentes. As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, b e c complexos são dadas por: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para estudar as raízes de índice n de um complexo, com $n > 2$, é mais conveniente utilizar a representação polar dos números complexos. Qualquer número complexo não nulo tem n raízes de índice n distintas, que formam os vértices de um polígono regular de n lados centrado na origem. Obter as raízes n -ésimas da unidade imaginária implica determinar todos os números complexos que são soluções da equação $z^n - 1 = 0$.

Temos que $z_0 = 1$ é certamente uma das raízes desta equação. Por outro lado, sabemos pela identidade de Euler, que

$$e^{2ki\pi} = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Daí, utilizando a fórmula de Moivre, teremos:

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^n = e^{i2\pi} = 1.$$

Assim, as raízes n -ésimas da unidade imaginária serão dadas por:

$$z_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}},$$

com $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Pondo $w = z_1$, vemos que $z_k = w^k$, isto é, as raízes n -ésimas da unidade imaginária serão dadas por $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$.

Exemplo 7. *Passaremos a apresentar os casos das raízes n -ésimas para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, para melhor percepção deste conteúdo.*

1. Para $n = 2$, temos que a equação $z^2 - 1 = 0$ terá duas raízes distintas: -1 e 1 .

Números Complexos em Geometria

2. Para $n = 3$, as três raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ serão dadas por:

$$\begin{aligned}z_0 &= 1 \\z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

3. Para $n = 4$, as raízes da equação $z^4 - 1 = 0$ serão dadas por:

$$\begin{aligned}z_0 &= 1; \\z_1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \\z_2 &= e^{i\pi} = -1; \\z_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.\end{aligned}$$

1.3 Interpretação geométrica das operações com números complexos

Nesta secção trataremos da soma, multiplicação, conjugado e inverso de números complexos, com as suas representações geométricas, utilizando conceitos como os de rotação e reflexão.

1.3.1 Soma de números complexos

O vetor correspondente à soma de dois números complexos é a soma dos vetores correspondentes a esses números. Logo, o vetor correspondente a $z + w$ é determinado pela lei do paralelogramo, como representado na Figura 1.3.

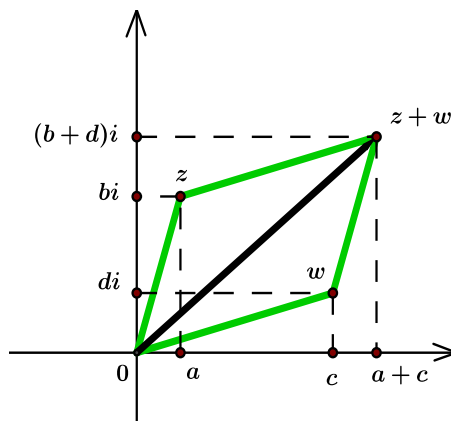


Figura 1.3: Soma de números complexos.

1.3.2 Multiplicação de números complexos

Se $w = |w| e^{i\alpha}$ e $z = |z| e^{i\theta}$, então.

$$w.z = |w| |z| e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Assim, a multiplicação por $w = |w| e^{i\alpha}$ corresponde a uma rotação de um ângulo α em torno da origem O seguida de uma homotetia de coeficiente $|w|$ e centro em O . Se $|w| > 1$, a homotetia é uma dilatação; se $|w| < 1$, a homotetia é uma contração.

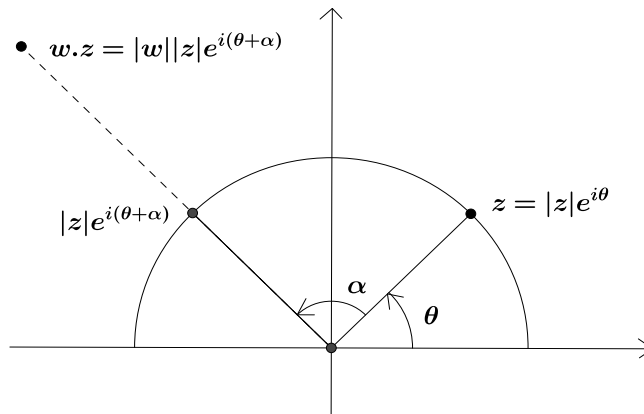


Figura 1.4: Multiplicação de números complexos.

1.3.3 Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, o seu conjugado é dado por $\bar{z} = a - bi$. Logo a operação de conjugação corresponde à reflexão no eixo horizontal.

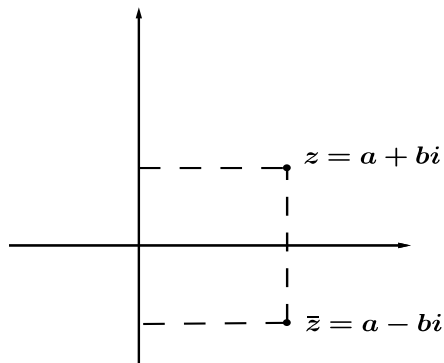


Figura 1.5: Conjugado de um número complexo.

Números Complexos em Geometria

1.3.4 Inverso de um número complexo

Dado um ponto Q no plano e uma circunferência $\mathcal{C}(O, r)$ de centro em O , o inverso de Q relativamente a $\mathcal{C}(O, r)$ é o único ponto Q' sobre a semireta OQ , com origem em O , que verifica

$$|OQ| |OQ'| = r^2$$

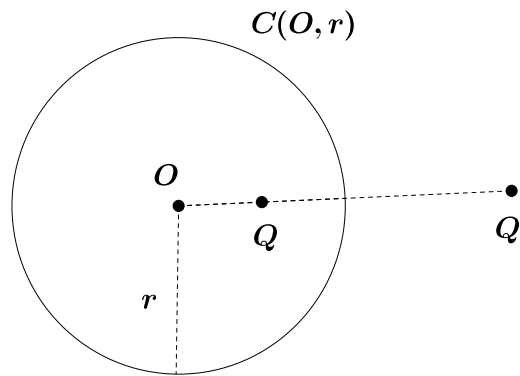


Figura 1.6: Inverso de Q relativamente à circunferência $\mathcal{C}(O, r)$.

Se $z = |z| e^{i\theta}$, então

$$\bar{z}^{-1} = \frac{1}{|z| e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{|z|}.$$

Uma vez que o argumento de \bar{z}^{-1} coincide com o argumento de z , o ponto correspondente a \bar{z}^{-1} está na semireta Oz . Por outro lado, $|z| |\bar{z}^{-1}| = 1$. Logo \bar{z}^{-1} é o inverso de z relativamente a circunferência de raio 1 centrada na origem.

No Capítulo 3, estudaremos este conceito com mais detalhe.

1.4 Propriedades geométricas

Apresentamos de seguida a caracterização de alguns objetos e propriedades geométricas em termos de números complexos que nos serão úteis na resolução dos problemas do capítulos seguinte.

1.4.1 Colinearidade, paralelismo e perpendicularidade

Proposição 7. *Dados quatro pontos distintos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, as retas ab e cd têm a mesma direção se e só se $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A reta ab tem a mesma direção da reta cd se e só se os vetores \vec{ab} e \vec{cd} forem proporcionais, isto é, se e só se existe uma constante real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{ab} = \lambda \vec{cd}$.

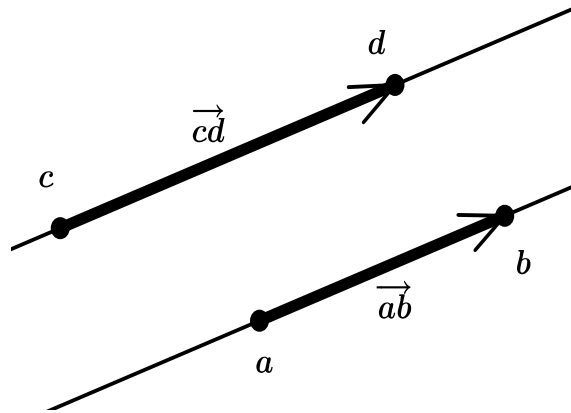


Figura 1.7: As retas ab e cd têm a mesma direção.

Uma vez que $\vec{ab} = b - a$ e $\vec{cd} = d - c$, temos

$$\lambda = \frac{b - a}{d - c} \in \mathbb{R}$$

□

Proposição 8. *Dados quatro pontos distintos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, as retas ab e cd são perpendiculares (denotamos $ab \perp cd$) se e só se $\frac{b-a}{d-c}$ é imaginário puro.*

Demonstração. As retas ab e cd são perpendiculares se e só se os vetores \vec{ab} e \vec{bc} forem perpendiculares. Isto acontece precisamente quando um dos vetores é obtido a partir do outro através de uma rotação de 90° seguida de multiplicação por um escalar real de forma a igualar os seus comprimentos. Ou seja, os vetores \vec{ab} e \vec{bc} são perpendiculares se e só se $\vec{ab} = \lambda i \vec{cd}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, uma vez que, tal como já tínhamos observado, a multiplicação por i corresponde a uma rotação de 90° .

Tendo em conta que $\vec{ab} = b - a$ e $\vec{cd} = d - c$, a igualdade $\vec{ab} = i\lambda \vec{cd}$ verifica-se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se e só se $\frac{b-a}{d-c}$ é imaginário. □

Exemplo 8. *Sejam $a = 2 - i, b = 1 + 3i, c = -1 + 4i$ e $d = 3 + 6i$. Temos*

$$\frac{b - a}{d - c} = \frac{(1 + 3i) - (2 - i)}{(3 + 6i) - (-1 + 4i)} = \frac{1 - 4i}{-4 - 2i} = \frac{1}{5} + \frac{9}{10}i,$$

onde multiplicámos e dividimos pelo conjugado do denominador de forma a obter a última igualdade. Como $\frac{b-a}{d-c}$ não é um imaginário, a reta ab não é perpendicular a cd .

Números Complexos em Geometria

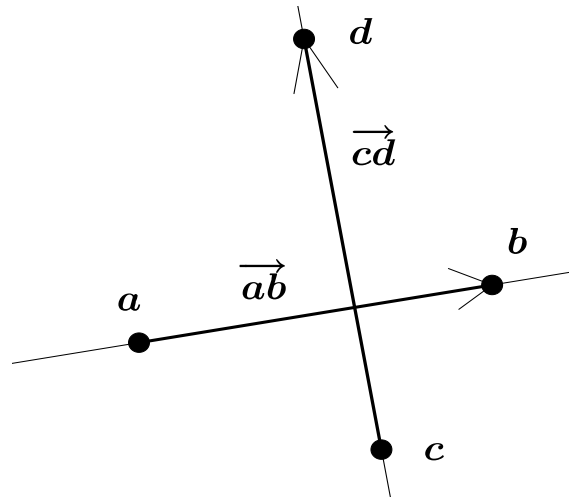


Figura 1.8: As retas ab e cd são perpendiculares.

Proposição 9. Três pontos distintos a, b, c são colineares se e só se $\frac{a-b}{b-c} \in \mathbb{R}$.

Demonstração. É um caso particular da Proposição 7, bastando apenas observar que a, b, c são colineares se e só se os vetores \vec{ab} e \vec{bc} forem proporcionais entre si. \square

Exemplo 9. Consideremos os números $a = 5 + 7i, b = -6 + 2i$ e $c = 3 + i$. Então:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{(5+7i) - (-6+2i)}{(-6+2i) - (3+i)} = \frac{11+5i}{-9+i} = -\frac{(47+28i)}{41}.$$

Logo a, b, c não são colineares.

Exemplo 10. Sejam $a = 1 + 2i, b = -i$ e $c = -1 - 4i$

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{(1+2i) - (-i)}{(-i) - (-1-4i)} = \frac{1+3i}{1+3i} = 1$$

Logo a, b, c são colineares.

1.4.2 Quadriláteros cíclicos

Recorde-se que um polígono diz-se *cíclico* se os seus vértices estiverem sobre uma mesma circunferência.

Proposição 10. Consideremos um quadrilátero convexo com vértices consecutivos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Então o quadrilátero é cíclico se e só se $\frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ é um número real negativo.

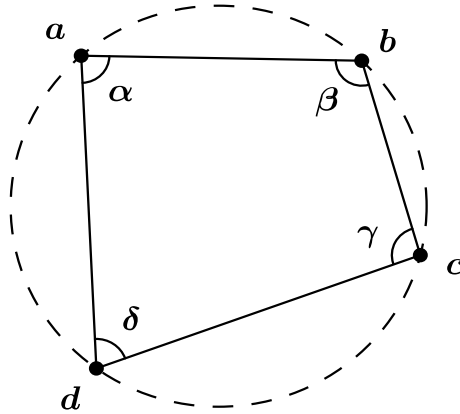


Figura 1.9: Quadrilátero convexo com vértices consecutivos a, b, c, d .

Demonstração. Pelo teorema do arco capaz¹, sabemos que um quadrilátero é cíclico se e só se os pares de ângulos internos opostos somam π , isto é, relativamente à figura 1.10, $\alpha + \gamma = \pi$ e $\beta + \delta = \pi$. Temos também

$$\vec{bc} = \lambda_1 e^{i\beta} \vec{ba} \quad \vec{da} = \lambda_2 e^{i\delta} \vec{dc},$$

com λ_1, λ_2 reais positivos. Logo

$$c - b = \lambda_1 e^{i\beta} (a - b) \quad a - d = \lambda_2 e^{i\delta} (c - d).$$

Multiplicando as duas equações, obtemos

$$(c - b)(a - d) = \lambda_1 \lambda_2 e^{i(\beta + \delta)} (a - b)(c - d).$$

Desta igualdade tiramos a conclusão pretendida. De facto, se o quadrilátero for cíclico, então $\beta + \delta = \pi$ e, uma vez que $e^{i\pi} = -1$, temos que $\frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ é real e negativo. Por outro lado, se $\frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$ é real e negativo, então, como λ_1, λ_2 são reais positivos, temos necessariamente $e^{i(\beta + \delta)} = -1$, ou seja, $\beta + \delta = \pi$ e, conseqüentemente, uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 2π , temos também $\alpha + \gamma = \pi$. Logo o quadrilátero é cíclico. \square

Exemplo 11. Consideremos os pontos

$$a = 2i, b = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, c = 2, d = -2i.$$

¹A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da amplitude do arco por ele subtendido.

Números Complexos em Geometria

Temos então

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 0,$$

logo a, b, c, d são os vértices de um quadrilátero cíclico. Na realidade, trata-se de um quadrilátero inscrito na circunferência de raio $r = 2$ centrado na origem.

1.4.3 Triângulos

Um triângulo diz-se *orientado* se for dada uma ordem para os seus vértices: se a ordem for no sentido anti-horário, a orientação é *positiva*; se a ordem for no sentido horário, a orientação é *negativa*. Dois ou mais triângulos possuem a mesma orientação se ambos forem horários ou anti-horários. Possuem orientação distinta se um for horário e outro anti-horário.

Proposição 11. *Seja a, b e c três pontos. Então, a área (com sinal) do triângulo $\triangle abc$ é dada por*

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Em particular, a, b e c são colineares se e só se o determinante se anula.

Demonstração. Escrevemos $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ e $c = c_1 + ic_2$. Então

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{i}{4} (a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{c} - \bar{b}c + c\bar{a} - a\bar{c}) \\ &= \frac{1}{2} (-a_2b_1 + a_1b_2 - b_2c_1 + b_1c_2 - c_2a_1 + c_1a_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que a área de um paralelogramo é dada pela norma do produto externo entre os vetores que o geram. Assim, a área do triângulo $\triangle abc$ é dada pela norma do vetor $\frac{\vec{ab} \times \vec{ac}}{2}$, pelo que a área com sinal do mesmo triângulo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} ((b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)) \\ &= \frac{1}{2} (-a_2b_1 + a_1b_2 - b_2c_1 + b_1c_2 - c_2a_1 + c_1a_2), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da proposição. □

Observemos que se o triângulo for orientado no sentido anti-horário, a área será positiva. Se o triângulo for orientado no sentido horário, a área será negativa.

1.4.4 Equação Cartesiana da reta

Proposição 12. *Dados dois pontos distintos a e b , um ponto z pertence à reta ab se, e só se,*

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2)$$

Demonstração. Três pontos a , b e z são colineares se, e só se, a área do triângulo $\triangle abz$ é nula. Assim, tendo em conta a Proposição 11, um ponto z pertence à reta ab se, e só se, verifica a igualdade (1.2), ou seja:

$$z(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{z}(b - a) = \bar{a}b - a\bar{b}. \quad (1.3)$$

□

Exercício 1. *Mostre que a equação da reta que passa pelo ponto z_0 e é paralela à reta de equação $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + \beta = 0$ é dada por*

$$z - z_0 = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

1.4.5 Equação da mediatriz de um segmento dado

Proposição 13. *Dados dois pontos distintos a e b , a equação da mediatriz do segmento \overline{ab} é dada por:*

$$z(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{z}(b - a) = |b|^2 - |a|^2. \quad (1.4)$$

Demonstração. O ponto médio $\frac{a+b}{2}$ pertence obviamente à mediatriz do segmento \overline{ab} . Outro ponto desta mediatriz pode ser obtido considerando a translação do ponto médio pelo vetor perpendicular a ab dado por $i\frac{a-b}{2}$, ou seja, o ponto

$$\frac{a+b}{2} + i\frac{a-b}{2}.$$

Assim, um ponto z pertence à mediatriz se, e só se,

$$\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} & 1 \\ \frac{a+b}{2} + i\left(\frac{a-b}{2}\right) & \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} - i\left(\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}\right) & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Números Complexos em Geometria

o que é equivalente a escrever

$$zi \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} + \bar{z}i \frac{b - a}{2} + \frac{i}{2}(a\bar{a} - b\bar{b}) = 0.$$

Dividindo por $\frac{i}{2}$ e lembrando que $a\bar{a} = |a|^2$ e $b\bar{b} = |b|^2$, resulta a equação (1.4). \square

1.4.6 Equação da reta perpendicular por um ponto

Vamos ver de seguida um caso mais geral.

Proposição 14. *A equação da reta perpendicular à reta z_1z_2 que passa por z_3 é dada por*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0. \quad (1.5)$$

Demonstração. Seja z um ponto arbitrário da reta perpendicular a z_1z_2 que passa por z_3 . Então, pela Proposição 8, $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$ é um imaginário puro. Logo, vale a equação (1.5). \square

1.4.7 Equação da circunferência

Proposição 15. *A equação*

$$z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0$$

define uma circunferência se, e só se, $b = \bar{a}$, c é real e $c < a\bar{a}$. Neste caso, a circunferência tem centro em $-\bar{a}$ e raio $\sqrt{a\bar{a} - c}$.

Demonstração. A equação de uma circunferência de centro em z_0 e raio r é dada por $|z - z_0|^2 = r^2$. Mas,

$$|z - z_0|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

O resultado sai imediatamente se fizermos

$$a = -\bar{z}_0, \quad b = -z_0, \quad c = z_0\bar{z}_0 - r^2.$$

\square

1.4.8 Triângulos semelhantes

Lema 1. Dados três pontos z_1, z_2 e z_3 , o ângulo $\angle z_2 z_1 z_3$ tem medida

$$\theta = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Demonstração. A medida do ângulo $\angle z_2 z_1 z_3$ é dada por

$$\theta = \alpha' - \alpha = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1).$$

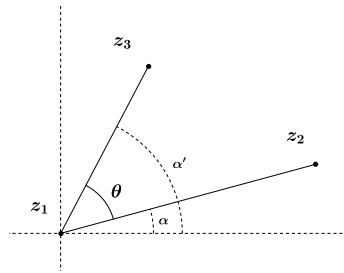


Figura 1.10: Quadrilátero convexo com vértices consecutivos a, b, c, d .

Por outro lado,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{|z_3 - z_1| e^{i \arg(z_3 - z_1)}}{|z_2 - z_1| e^{i \arg(z_2 - z_1)}} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} e^{i(\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1))}.$$

Daqui tiramos que

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \theta.$$

□

Proposição 16. Os triângulos $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle w_1 w_2 w_3$ são semelhantes e com a mesma orientação (escrevemos $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim_{ig} \triangle w_1 w_2 w_3$) se e só se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Demonstração. Usando o critério de semelhança LAL² e o lema anterior, vemos que $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim_{ig} \triangle w_1 w_2 w_3$ se, e só se, as duas igualdades seguintes forem

²Critério de semelhança LAL: se, em dois triângulos, ângulos iguais subtenderem lados proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Números Complexos em Geometria

satisfeitas:

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \right|, \quad \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}$$

Uma vez que dois números complexos são iguais precisamente quando tiverem o mesmo módulo e o mesmo argumento, concluímos que $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim_{ig} \triangle \omega_1 \omega_2 \omega_3$ se, e só se, valer a igualdade (1.6). □

Proposição 17. *Os triângulos $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle \omega_1 \omega_2 \omega_3$ são semelhantes e com a orientação oposta (escrevemos $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \triangle \omega_1 \omega_2 \omega_3$) se e só se*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

Demonstração. Suponha-se que temos dois triângulos $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle \omega_1 \omega_2 \omega_3$ com orientações opostas. Recorde-se que a reflexão de um ponto w em relação ao eixo dos números reais é dada por \bar{w} . Por outro lado, a reflexão é uma isometria que inverte a orientação. Assim, os triângulos $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ têm a mesma orientação. O enunciado resulta então de aplicar a proposição 16 a estes dois triângulos. □

1.5 Pontos notáveis dos triângulos

Nesta secção, estaremos resolvendo alguns problemas geométricos relacionados aos triângulos, com resolução no plano complexo. Cabe-nos ainda falar sobre o ortocentro, centroíde e circuncentro de um triângulo.

1.5.1 Ortocentro

Começemos por recordar que o *ortocentro* de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas do triângulo.

Proposição 18. *Seja $\triangle abc$ um triângulo inscrito na circunferência unitária centrada na origem. Então o seu ortocentro H é dado por*

$$H = a + b + c.$$

Demonstração. Sejam os pontos a, b e $c \in \mathbb{C}$. As alturas do triângulo $\triangle abc$ são

as retas

$$\begin{cases} X = a + ti(c - b), & t \in \mathbb{R} \\ X = b + si(a - c), & s \in \mathbb{R} \\ X = c + \mu i(b - a), & \mu \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

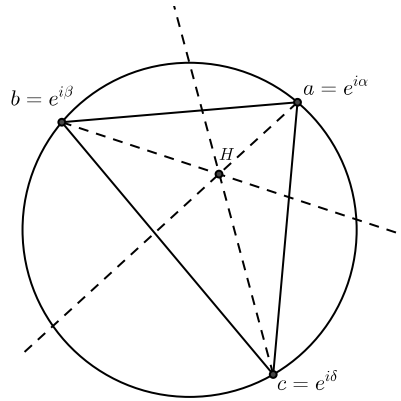


Figura 1.11: Ortocentro do triângulo inscrito na circunferência unitária.

Por outro lado, sabemos que os vértices do triângulo estão sobre a circunferência de raio $r = 1$ e centro na origem, que denotamos por S^1 . Em particular, temos:

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \quad \bar{b} = \frac{1}{b}, \quad \bar{c} = \frac{1}{c}. \quad (1.8)$$

Encontremos o ponto de intersecção das alturas por a e b . Igualando as respectivas equações paramétricas e tomando o seu conjugado, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + it(c - b) = b + si(a - c) \\ \bar{a} - it(\bar{c} - \bar{b}) = \bar{b} - si(\bar{a} - \bar{c}) \end{cases} .$$

Tendo em conta as igualdades (1.8), daqui resulta que

$$\begin{cases} a + it(c - b) = b + si(a - c) \\ \frac{1}{a} - it(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}) = \frac{1}{b} - si(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + it(c - b) = b + si(a - c) \\ \frac{cb}{a} + it(c - b) = c - si(\frac{cb}{a} - b) \end{cases} .$$

Subtraíndo a primeira equação pela segunda teremos

$$a - \frac{cb}{a} = b - c + si(a - c) + si(\frac{cb}{a} - b).$$

Daqui tiramos

$$s = \frac{a^2 - cb - ba + ca}{i(a^2 - ca + cb - ab)}.$$

Números Complexos em Geometria

Logo, o ortocentro H vem dado por

$$\begin{aligned} H &= b + si(a - c) = b + \frac{(a^2 - cb - ba + ca)}{a^2 - ca + cb - ab}(a - c) \\ &= b + \frac{a(a + c) - b(a + c)}{a - b} = a + b + c, \end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Observação 1. No caso geral, com $a, b, c \in \mathbb{C}$, o ortocentro do triângulo $\triangle abc$ não é necessariamente dado por $a + b + c$. Com efeito, consideremos

$$a = i, \quad b = 1 + i, \quad c = -2. \quad (1.9)$$

O ortocentro H deste triângulo está, por definição, sobre a altura por a , isto é, a reta de equação paramétrica

$$X = a + \lambda i(b - c), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Substituindo nesta equação a, b e c por (1.9), e supondo que o ponto $a + b + c$ está sobre esta altura, temos

$$i + \lambda i(3 + i) = -1 + 2i.$$

Logo

$$\lambda = \frac{-1 + i}{3i - 1} = \frac{(-1 + i)(-3i - 1)}{(3i - 1)(-3i - 1)} = \frac{2i + 4}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Como λ é complexo, concluímos que $a + b + c$ não pode pertencer à altura por a .

1.5.2 Centróide

Recorde-se que o centróide de um triângulo é o ponto de interseção das medianas.

Proposição 19. Seja $\triangle abc$ um triângulo qualquer. Então o seu centróide P é dado por

$$P = \frac{a + b + c}{3}. \quad (1.10)$$

Demonstração. As medianas do triângulo $\triangle abc$ são dadas parametricamente por

$$\begin{cases} X = a + \lambda\left(\frac{b+c}{2} - a\right), & \lambda \in \mathbb{R} \\ X = b + k\left(\frac{a+c}{2} - b\right), & k \in \mathbb{R} \\ X = c + \mu\left(\frac{b+a}{2} - c\right), & \mu \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Provaremos que as três retas passam por $\frac{a+b+c}{3}$. Tomando a mediana por a , temos de verificar que, para algum λ ,

$$a + \lambda\left(\frac{b+c}{2} - a\right) = \frac{a+b+c}{3}.$$

Daqui tiramos que

$$\lambda = \frac{2(-2a + b + c)}{3(-2a + b + c)} = \frac{2}{3},$$

o que significa que $\frac{a+b+c}{3}$ pertence à mediana por a , uma vez que λ é real.

Do mesmo modo, podemos verificar que $\frac{a+b+c}{3}$ pertence às outras duas medianas, com $s, k = \frac{2}{3}$. Assim, o centróide P do triângulo é dado por (1.10). \square

1.5.3 Circuncentro

As mediatrizes de um dado triângulo encontram-se num só ponto, designado por *circuncentro*. De seguida iremos escrever o circuncentro em termos dos respetivos vértices.

Proposição 20. *O circuncentro do triângulo $\triangle abc$ é dado por*

$$x = \frac{|a|^2(c-b) + |b|^2(a-c) + |c|^2(b-a)}{\bar{a}c - a\bar{c} + \bar{b}a - \bar{a}b + \bar{c}b - \bar{b}c}. \quad (1.11)$$

Demonstração. Tendo em conta a equação cartesiana da mediatriz (1.4), o circuncentro x do triângulo $\triangle abc$ verifica as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} x(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{x}(b - a) = |b|^2 - |a|^2 \\ x(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{x}(c - a) = |c|^2 - |a|^2 \end{cases} .$$

Assim sendo, isolamos \bar{x} para obter:

$$\bar{x} = \frac{|b|^2 - |a|^2 - (\bar{b} - \bar{a})x}{b - a}$$

Números Complexos em Geometria

Substituindo na segunda equação do sistema, ficamos com

$$\begin{aligned}(\bar{c} - \bar{a})x + (c - a)\frac{|b|^2 - |a|^2 - (\bar{b} - \bar{a})x}{b - a} &= |c|^2 - |a|^2 \\ \Leftrightarrow x\left\{\bar{c} - \bar{a} - \frac{(\bar{b} - \bar{a})(c - a)}{b - a}\right\} &= |c|^2 - |a|^2 - \frac{c - a}{b - a}\{|b|^2 - |a|^2\} \\ \Leftrightarrow x\left\{\frac{(\bar{c} - \bar{a})(b - a) - (\bar{b} - \bar{a})(c - a)}{b - a}\right\} &= |c|^2 - |a|^2 - \frac{c - a}{b - a}(|b|^2 - |a|^2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{|a|^2(c - b) + |b|^2(a - c) + |c|^2(b - a)}{\bar{a}c - a\bar{c} + \bar{b}a - \bar{a}b + \bar{c}b - \bar{b}c}\end{aligned}$$

□

1.6 Polígonos regulares

Nesta secção vamos obter uma caracterização algébrica para polígonos regulares. Começaremos tomando em consideração alguns resultados para triângulos equiláteros e quadrados, que nos levarão a perceber melhor o casos mais gerais.

Definição 4. *Um polígono convexo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, com os vértices orientados no sentido anti-horário, diz-se regular se os lados forem iguais e estiver inscrito numa circunferência.*

Assim sendo prestemos atenção ao lema que se segue, pois será útil para a demonstração de algumas proposições.

Lema 2. *Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $w = e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Então*

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{k-1} = 0.$$

Demonstração. Recorde-se que a soma dos k primeiros termos de uma sucessão geométrica $x_j = x_0 r^j$ de razão r é dada por

$$\sum_{j=0}^{k-1} x_j = x_0 \frac{1 - r^k}{1 - r}.$$

Fazendo $r = w$ e $x_0 = 1$, obtemos a seguinte igualdade

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} w^j = \frac{1 - w^k}{1 - w}.$$

Sabendo que $w^k = 1$, concluímos que $1 + w + w^2 + \dots + w^{k-1} = 0$ □

Proposição 21. *Um triângulo em \mathbb{C} , com os vértices a, b e c tomados no sentido anti-horário, é equilátero se e só se $a + wb + w^2c = 0$, com $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.*

Demonstração. Suponhamos que o triângulo é equilátero. Então, o vetor \vec{ac} é obtido por rotação de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ do vetor \vec{cb} .

Assim

$$c - a = w(b - c) \Leftrightarrow a + wb - (1 + w)c = 0.$$

Mas, pelo lema anterior, temos $w^2 = -(1 + w)$. Logo $a + wb + w^2c = 0$.

Reciprocamente, se $a + wb + w^2c = 0$, então podemos reverter todos os passos do procedimento anterior, para obter $\vec{ac} = w\vec{cb}$. Assim, pelo critério LAL, o triângulo $\triangle abc$ é necessariamente equilátero. □

Números Complexos em Geometria

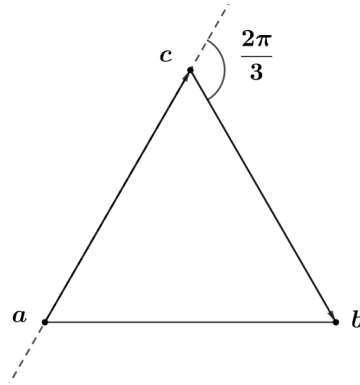


Figura 1.12: Triângulo equilátero.

Proposição 22. Se a, b, c e d são vértices de um quadrado, no sentido anti-horário, então

$$a + bw + cw^2 + dw^3 = 0, \quad (1.12)$$

com $w = e^{\frac{2\pi i}{4}}$.

Demonstração. Temos $w = i$, $w^2 = -1$ e $w^3 = -i$. Por outro lado, sabemos que \vec{db} e \vec{ca} são perpendiculares. Logo

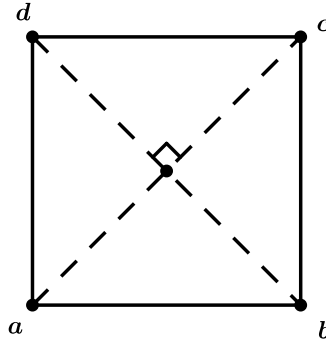


Figura 1.13: As diagonais de um quadrado são perpendiculares.

$$\begin{aligned} \vec{ca} = -i\vec{db} &\Leftrightarrow a - c = -i(b - d) \\ &\Leftrightarrow a + ib - c - id = 0 \\ &\Leftrightarrow a + wb + w^2c + w^3d = 0. \end{aligned}$$

□

Observação 2. O recíproco deste resultado não é válido. Por exemplo, os pontos

$$a = 0, \quad b = 2 - 3i, \quad c = 4, \quad d = 2 + i$$

verificam a igualdade (1.12) mas o quadrilátero com vértices a, b, c e d não é um quadrado. Mais geralmente, para qualquer quadrilátero em que as diagonais se cruzem perpendicularmente e tenham igual comprimento, como ilustrado na figura 1.14, os seus vértices verificam (1.12), uma vez que na demonstração apresentada apenas se usou este facto.

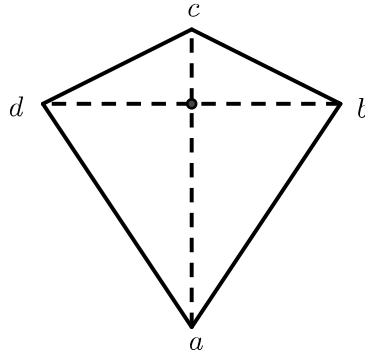


Figura 1.14: Quadrilátero com diagonais iguais e perpendiculares.

Proposição 23. Se $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ são vértices de um polígono regular, no sentido anti-horário, então

$$a_0 + a_1w + a_2w^2 + a_3w^3 + \dots + a_{n-1}w^{n-1} = 0, \quad (1.13)$$

com $w = e^{\frac{2\pi}{n}i}$.

Demonstração. Seja P o centro de simetria do polígono. Uma vez que, o vértice a_j é obtido por uma rotação, no sentido anti-horário e com ângulo $\frac{2\pi j}{n}$, a partir do vértice a_0 , temos

$$\begin{cases} (a_1 - P) = w(a_0 - P) \\ (a_2 - P) = w^2(a_0 - P) \\ \vdots \\ (a_{n-1} - P) = w^{n-1}(a_0 - P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_0w^0 - Pw^0 + P \\ a_1 = a_0w - Pw + P \\ a_2 = a_0w^2 - Pw^2 + P \\ \vdots \\ a_{n-1} = a_0w^{n-1} - Pw^{n-1} + P \end{cases} \quad (1.14)$$

Números Complexos em Geometria

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} a_i w^i &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_0 w^i - P w^i + P) w^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_0 (w^i)^2 - P (w^i)^2 + P w^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_0 w^{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} P w^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} P w^i \\ &= a_0 \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} - P \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} + P \sum_{i=0}^{n-1} w^i\end{aligned}$$

Tal como no lema 2, temos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} (w^2)^i = 0$$

logo

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i w^i = 0.$$

□

Proposição 24. Se a_0, a_1, \dots, a_{n-1} é um polígono regular, o centro da sua circunferência circunscrita \mathcal{C} é dado por

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{n}. \quad (1.15)$$

Demonstração. Tomando a soma das n igualdades do segundo sistema de (1.14), e tendo em conta o lema 2, obtemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i - P \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i + nP = nP,$$

de onde tiramos a igualdade (1.15).

□

Capítulo 2

Resolução de problemas geométricos no plano com números complexos

Nesta secção, mostraremos como os números complexos desempenham um papel importante na interpretação e resolução de problemas geométricos, partindo de alguns resultados já provados anteriormente.

Problema 1. *É dado um quadrado $ABCD$ com centro em O . Sejam P o ponto médio do segmento BO e Q o ponto médio de CD . Prove que o triângulo $\triangle APQ$ é rectângulo e isósceles.*

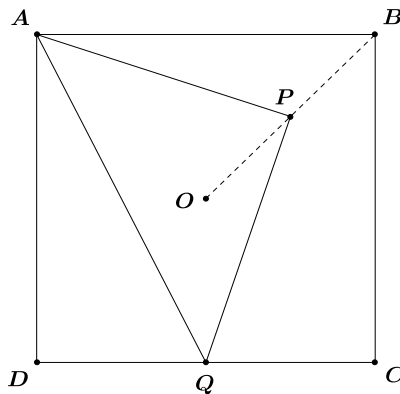


Figura 2.1: Representação do Problema 1.

Resolução. Consideremos o ponto O como a origem do plano complexo. Vamos usar a Proposição 8 para provar que o triângulo é retângulo. Podemos tomar as coordenadas dos pontos A , B , C e D respetivamente, como a , $-ai$, $-a$ e ai . E tendo em conta que $P = -\frac{ai}{2}$ e $Q = \frac{-a+ai}{2}$, temos

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{\frac{-1+i}{2} + \frac{i}{2}} = \frac{2+i}{-1+2i} = \frac{-(-1+2i)i}{-1+2i} = -i.$$

Uma vez que $\frac{PA}{PQ}$ é um imaginário puro, temos $PA \perp PQ$; e, portanto, $\triangle APQ$ é retângulo. Por outro lado, como $PA = -iPQ$, o vetor \vec{PA} é obtido por rotação de 90° , no sentido negativo, do vetor \vec{PQ} , logo o comprimento do lado PA é igual ao comprimento do lado PQ , ou seja, o triângulo $\triangle APQ$ é isósceles. \square

Problema 2. Sobre os lados ab e bc do triângulo $\triangle abc$, desenhe-se quadrados com centros em d e e , respectivamente, tais que os pontos c e d estejam do mesmo lado da reta ab e os pontos a e e , estejam em lados opostos da reta bc . Provar que o ângulo entre as retas ac e de mede 45° .

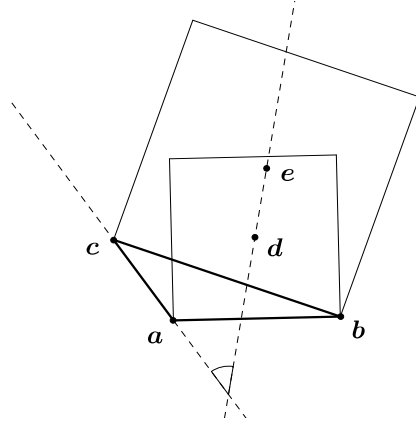


Figura 2.2: Representação do Problema 2.

Resolução. Tendo em conta que $|ec| = |eb|$ e como $ec \perp eb$, temos $b - e = (c - e)i$, logo

$$e = \frac{b - ci}{1 - i}.$$

Do mesmo modo, podemos deduzir que

$$d = \frac{b - ai}{1 - i}.$$

O ângulo formado entre as retas ac e de é igual a:

$$\begin{aligned} \arg \frac{c - a}{e - d} &= \arg \frac{c - a}{\frac{b - ci}{1 - i} - \frac{b - ai}{1 - i}} \\ &= \arg \frac{(c - a)(1 - i)}{b - ci - b + ai} \\ &= \arg \frac{1 - i}{-i} \\ &= \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

□

Problema 3. Sobre cada lado de um quadrilátero arbitrário é construído um quadrado exterior. Prove que os segmentos da reta juntando os centros dos quadrados opostos são perpendiculares e têm o mesmo comprimento.

Números Complexos em Geometria

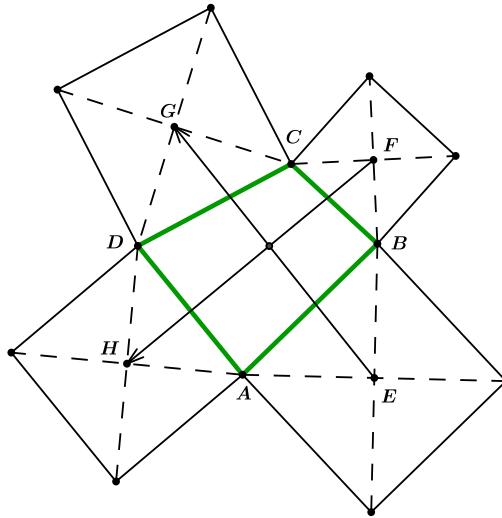


Figura 2.3: Representação geométrica do Problema 3.

Resolução. Provaremos que \overrightarrow{FH} e \overrightarrow{EG} são perpendiculares e de igual comprimento. Identificamos o plano euclidiano com o plano dos números complexos e cada ponto é representado pela letra minúscula correspondente. Seja M o ponto médio do lado \overline{AB} . Então, o vetor \overrightarrow{ME} é obtido através de uma rotação de 90° no sentido negativo do vetor $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$. Logo,

$$E = M + \overrightarrow{ME} = \frac{b + a - i(b - a)}{2}$$

Do mesmo modo

$$F = \frac{c + b - i(c - b)}{2}; G = \frac{c + d - i(d - c)}{2}; H = \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

Começemos por encontrar o vetor \overrightarrow{FH} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FH} &= \frac{(d + a)}{2} - \frac{i(a - d)}{2} - \frac{(c + b)}{2} + \frac{i(c - b)}{2} \\ &= \frac{(d + a - c - b)}{2} - \frac{i(a - d + b - c)}{2}. \end{aligned}$$

Vamos encontrar \overrightarrow{EG} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EG} &= \frac{(c + d)}{2} - \frac{i(d - c)}{2} - \frac{(b + a)}{2} + \frac{i(b - a)}{2} \\ &= \frac{(c + d - b - a)}{2} - \frac{i(d - c - b + a)}{2} = -i\overrightarrow{FH}. \end{aligned}$$

Como i corresponde a uma rotação de 90° , \overrightarrow{FH} e \overrightarrow{EG} são perpendiculares e têm o mesmo comprimento.

□

Problema 4. Um tesouro está escondido numa ilha. Nessa ilha, existem apenas duas árvores, uma palmeira P e um coqueiro C . Partindo do ponto D em que desembarcar, conte os seus passos com muito cuidado. Quando chegar à palmeira, vire 90 graus à direita e caminhe, sempre em linha reta, exatamente o mesmo número de passos que tinha dado do ponto de desembarque até a palmeira. Enterre aí uma estaca S_1 . Volte ao ponto de desembarque, caminhe na direção do coqueiro, conte os seus passos, vire 90 graus à esquerda e caminhe exatamente o mesmo número de passos que tinha dado desde o ponto de desembarque até ao coqueiro. Enterre aí a segunda estaca S_2 . O tesouro está escondido a meio caminho entre as estacas S_1 e S_2 . Quais são as coordenadas do tesouro?

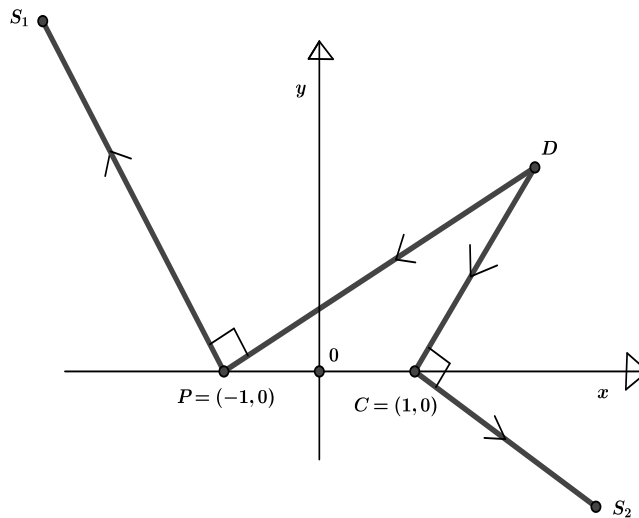


Figura 2.4: Representação geométrica do Problema 4.

Resolução. Queremos encontrar as coordenadas do tesouro. As coordenadas do ponto de desembarque são dadas por

$$D = a + bi.$$

O ponto onde a primeira estaca é colocada é dado por $S_1 = P + \overrightarrow{PS_1}$. Observe-se que $\overrightarrow{PS_1}$ é obtido de \overrightarrow{DP} por uma rotação de 90° no sentido anti-horário, ou seja, $\overrightarrow{PS_1} = i\overrightarrow{DP}$. Como

$$\overrightarrow{DP} = P - D = -1 - (a + bi) = (-1 - a) - bi,$$

temos

$$\overrightarrow{PS_1} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{DP} = -i((-1 - a) - bi) = i(1 + a) - b.$$

Números Complexos em Geometria

Logo,

$$S_1 = P + \overrightarrow{PS_1} = -1 + i(1 + a) - b = -(1 + b) + i(1 + a)$$

O ponto onde a segunda estaca é colocada é dado por $S_2 = C + \overrightarrow{CS_2}$. Observe-se que $\overrightarrow{CS_2}$ é obtido de \overrightarrow{DC} por uma rotação de 90° no sentido horário, ou seja, $\overrightarrow{CS_2} = -i\overrightarrow{DC}$. Como

$$\overrightarrow{DC} = C - D = 1 - (a + bi) = (1 - a) - bi,$$

temos

$$\overrightarrow{CS_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{DC} = i((1 - a) - bi) = i(1 - a) + b.$$

Logo,

$$S_2 = C + \overrightarrow{CS_2} = 1 + i(1 - a) + b = (1 + b) + i(1 - a).$$

Tendo os valores das coordenadas de S_1 e S_2 , então podemos encontrar o ponto médio P_m . Para tal, temos de somar S_1 e S_2 e dividir por 2, ou seja:

$$P_m = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{-1 - b + i + ai + 1 + b + i - ai}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Portanto, o ponto médio entre S_1 e S_2 é o imaginário i . E as coordenadas do tesouro são dadas por $(0, 1)$. \square

Problema 5. Dado um triângulo $\triangle ABC$, são construídos sobre os lados \overline{AC} e \overline{BC} dois triângulos retângulos isósceles, $\triangle ACE$ e $\triangle CBD$, rectângulos em E e D , respectivamente. Prove que o triângulo $\triangle DEM$ também é isósceles e retângulo em M , onde M é o ponto médio do lado \overline{AB} .

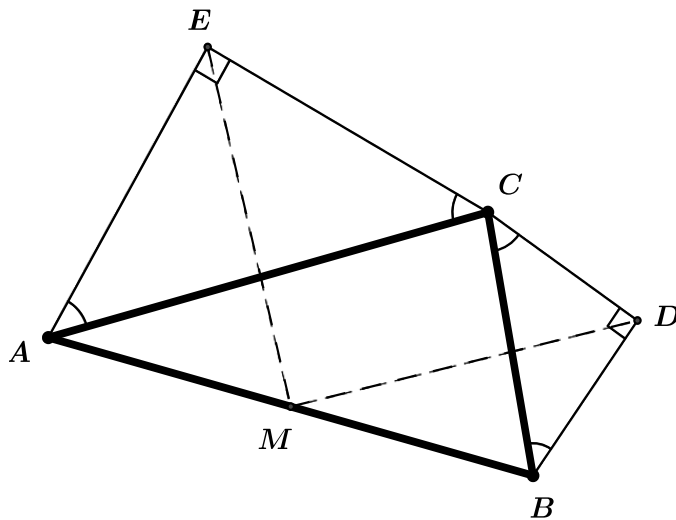


Figura 2.5: Representação geométrica do Problema 5.

Resolução. Vamos mostrar que \overrightarrow{ME} e \overrightarrow{MD} são perpendiculares e de igual comprimento. Identificamos o plano euclidiano com o plano dos números complexos e cada ponto é representado pela letra minúscula correspondente. Observe-se que o vetor \overrightarrow{CD} é obtido através de uma rotação de 45° do vetor \overrightarrow{CB} seguida de uma contração de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (de facto, como o triângulo isósceles $\triangle CBD$ é retângulo em D , pelo teorema de Pitágoras temos $|CB| = \sqrt{2}|CD|$). Assim,

$$D = c + e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{b-c}{\sqrt{2}} = c + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{b-c}{\sqrt{2}} = c + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(b-c).$$

Logo,

$$\overrightarrow{MD} = c + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(b-c) - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(c + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) + i\frac{b-c}{2} = \frac{c-a}{2} + i\frac{b-c}{2}.$$

Do mesmo modo,

$$E = c + e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(a-c)}{\sqrt{2}} = c + \frac{(a-c)}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = c + \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right)(a-c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EM} &= \frac{a+b}{2} - c - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)(a-c) = \frac{a+b}{2} - c - \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{i(a-c)}{2} \\ &= \frac{b-c}{2} + \frac{i(a-c)}{2} = -i\left(\frac{(c-a)}{2} + i\frac{(b-c)}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim, $\overrightarrow{ME} = i\overrightarrow{MD}$, ou seja, como i corresponde a uma rotação de 90° , \overrightarrow{ME} e \overrightarrow{MD} são perpendiculares e têm o mesmo comprimento. \square

Problema 6. Sobre cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero. Provar que os centróides (baricentros) desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero (este resultado é conhecido por Teorema de Napoleão).

Resolução. Seja $\triangle a_1 a_2 a_3$ o triângulo inicial, e temos que $\triangle w_1 a_3 a_2$, $\triangle a_3 w_2 a_1$ e $\triangle a_2 a_1 w_3$ são os triângulos construídos sobre os lados do triângulo inicial $\triangle a_1 a_2 a_3$. Denotemos por b_1 , b_2 e b_3 os centróides desses triângulos equiláteros, respetivamente, isto é,

$$b_1 = \frac{w_1 + a_3 + a_2}{3} \quad b_2 = \frac{a_3 + w_2 + a_1}{3} \quad b_3 = \frac{a_2 + a_1 + w_3}{3}.$$

Números Complexos em Geometria

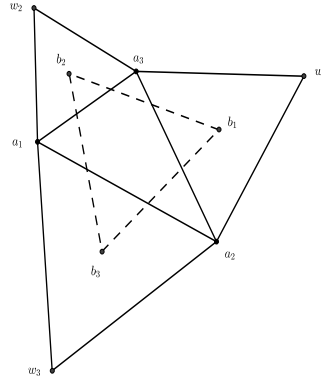


Figura 2.6: Teorema de Napoleão.

Sabemos pela Proposição 21 que

$$\begin{aligned}w_1 + wa_3 + w^2a_2 &= 0; \\a_3 + ww_2 + w^2a_1 &= 0; \\a_2 + wa_1 + w^2w_3 &= 0,\end{aligned}$$

Utilizamos a mesma proposição para provar que $\triangle b_1b_2b_3$ também é equilátero:

$$\begin{aligned}b_1 + wb_2 + w^2b_3 &= \frac{1}{3}\{(w_1 + a_3 + a_2) + w(a_3 + w_2 + a_1) + w^2(a_2 + a_1 + w_3)\} \\&= \frac{1}{3}\{(w_1 + wa_3 + w^2a_2) + (a_3 + ww_2 + w^2a_1) + (a_2 + wa_1 + w^2w_3)\} = 0,\end{aligned}$$

logo o triângulo $\triangle b_1b_2b_3$ é equilátero. \square

Problema 7. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles com $AB = AC$. Seja P um ponto no lado BC . Sejam ainda X um ponto no lado AB e Y um ponto no lado AC tais que*

$$PX \parallel AC \text{ e } PY \parallel AB.$$

Seja T o ponto médio do arco entre B e C contido na circunferência por A , B e C . Provar que $PT \perp XY$.

Resolução. Temos

$$\begin{cases} P = B + t_1(C - B) \\ X = B + t_2(A - B) \\ Y = C + t_3(A - C) \end{cases}$$

para certos $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\overrightarrow{PX} = X - P = t_2(A - B) - t_1(C - B) = (t_2 - t_1)(A - B) - t_1(C - A).$$

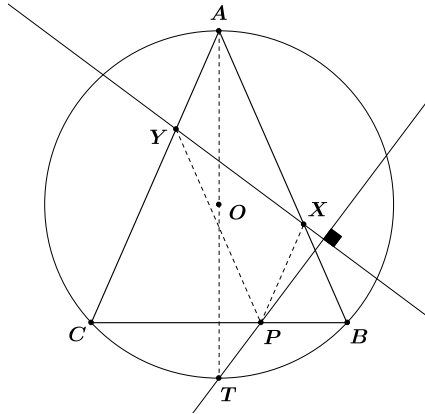


Figura 2.7: Representação do Problema 7.

Logo, para que PX seja paralela a AC é necessário que $t_2 = t_1$. Do mesmo modo, como

$$\overrightarrow{PY} = Y - P = C - B + t_3(A - C) - t_1(C - B) = (1 - t_1 - t_3)(C - B) + t_3(A - B),$$

para que PY seja paralela a AB é necessário que $t_3 = 1 - t_1$.

Então

$$\begin{cases} \overrightarrow{PX} = -t_1(C - A) \\ \overrightarrow{PY} = (1 - t_1)(A - B) \end{cases},$$

logo

$$\overrightarrow{XY} = (1 - 2t_1)A + (t_1 - 1)B + t_1C.$$

Temos agora que encontrar T . Sem perda de generalidade, podemos supor que $A = ic$, $B = 1$ e $C = -1$. Aplicando a fórmula (1.11), vemos que o circuncentro O do triângulo é dado por

$$O = \frac{i}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right).$$

Então

$$T = A + 2\overrightarrow{AO} = -\frac{i}{c}.$$

Agora que já temos P , T , X e Y , passaremos a provar pela Proposição 8 que PT e XY são perpendiculares. Assim;

$$\frac{P - T}{Y - X} = \frac{1 - 2t_1 + \frac{i}{c}}{(1 - 2t_1)ic - 1} = \frac{1}{ic},$$

onde multiplicamos e dividimos por ic de forma a obter a última igualdade. □

Problema 8. As retas l_1 , l_2 e l_3 são paralelas, com l_2 entre l_1 e l_3 . A distância entre l_1 e l_2 é a ; a distância entre l_2 e l_3 é b . Expressar a área de um triângulo

Números Complexos em Geometria

equilátero que tenha os três vértices sobre cada uma das três retas paralelas em termos de a e b .

Resolução. Sem perda de generalidade, podemos supor que uma das retas coincide com o eixo real.

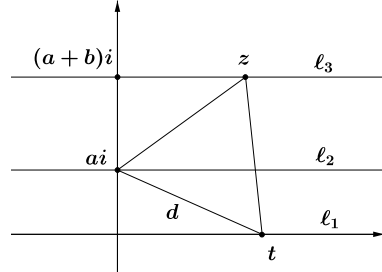


Figura 2.8: Triângulo equilátero sobre retas paralelas.

De acordo com a figura anterior, fixamos um vértice em ai e outro vértice sobre o eixo real, em t . O terceiro vértice denotamos por z . Sabemos pela Proposição 21 que

$$z + ai\omega + t\omega^2 = 0,$$

com

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\omega^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z &= -ai\omega - t\omega^2 \\ &= -ai\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - t\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2} + i\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2}(t + a\sqrt{3}) + \frac{i}{2}(a + \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

Como z está na reta l_3 , então $\text{Im } z = a + b$, e daí procuramos o valor de t :

$$\frac{1}{2}(a + \sqrt{3}t) = a + b \Rightarrow t = \frac{a + 2b}{\sqrt{3}}.$$

Seja d o lado do triângulo. Então

$$d^2 = (t - ai)(t + ai) = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Finalmente, podemos calcular a área do triângulo:

$$A = \frac{\text{lado} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}d^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

□

Problema 9. Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$, a circunferência que passa pelos pés das alturas passa também pelos pontos médios dos lados e pelos pontos médios dos segmentos \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} , onde H é o ortocentro do triângulo.

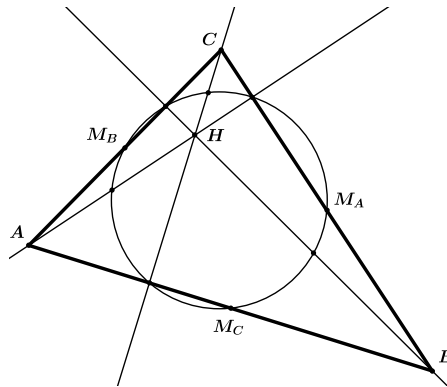


Figura 2.9: Circunferência dos nove pontos.

Resolução. Sem perda de generalidade, supomos que a circunferência circunscrita no triângulo $\triangle ABC$ é unitária e centrada na origem. Os pontos A , B e C são representados no plano complexo pelas letras minúsculas a , b e c , respectivamente, com $|a| = |b| = |c| = 1$.

Começemos por encontrar o centro da circunferência \mathcal{C} que passa pelos pontos médios do triângulo: $M_A = \frac{b+c}{2}$, $M_B = \frac{a+c}{2}$ e $M_C = \frac{a+b}{2}$. Esta circunferência tem centro no ponto

$$\frac{\delta}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

e raio $r = \frac{1}{2}$. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} |M_A - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2}; \\ |M_B - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{a+c}{2} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{b}{2} \right| = \frac{1}{2}; \\ |M_C - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{c}{2} \right| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vamos achar a distância de $\frac{\delta}{2}$ aos pontos médios H_a , H_b e H_c dos segmentos que

Números Complexos em Geometria

unem H , o ortocentro, aos vértices a , b e c , respectivamente.

$$\begin{aligned} |H_a - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{a + \delta}{2} - \frac{\delta}{2} \right| = \left| \frac{a + \delta - \delta}{2} \right| = \frac{1}{2}; \\ |H_b - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{b + \delta}{2} - \frac{\delta}{2} \right| = \left| \frac{b + \delta - \delta}{2} \right| = \frac{1}{2}; \\ |H_c - \frac{\delta}{2}| &= \left| \frac{c + \delta}{2} - \frac{\delta}{2} \right| = \left| \frac{c + \delta - \delta}{2} \right| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, os pontos médios H_a , H_b e H_c pertencem também à circunferência \mathcal{C} .

Logo passaremos a encontrar a distância de $\frac{\delta}{2}$ para os pés das alturas do triângulo $\triangle abc$. A reta bc tem equação paramétrica $x = b + t(c - b)$, com $t \in \mathbb{R}$. Tendo em conta a equação (1.5) da reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado, o pé da altura por a vai ser dado pelo sistema

$$\begin{cases} x = b + t(c - b) \\ \frac{x-a}{c-b} + \frac{\bar{x}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{b}} = 0 \end{cases}.$$

Assim, recordando que $\bar{z} = \frac{1}{z}$ quando z pertence à circunferência unitária com centro na origem, vamos ter

$$\begin{aligned} \frac{b + t(c - b) - a}{c - b} + \frac{\bar{b} + t(\bar{c} - \bar{b}) - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{b}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b + t(c - b) - a}{c - b} + \frac{\frac{1}{b} + t(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b + t(c - b) - a}{c - b} + \frac{c + t(b - c) - \frac{bc}{a}}{b - c} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b - c + 2t(c - b) - a + \frac{bc}{a}}{c - b} &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{a^2 - bc}{2a(c - b)} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o pé da altura por a é dado por

$$x = b + \left(\frac{a^2 - bc}{2a(c - b)} + \frac{1}{2} \right) (c - b) = \frac{b + c}{2} + \frac{a^2 - bc}{2a}.$$

Podemos finalmente encontrar distância de x ao centro $\frac{\delta}{2}$:

$$\left| x - \frac{\delta}{2} \right| = \left| \frac{cb}{2a} \right| = \frac{|c| |b|}{2|a|} = \frac{1}{2},$$

uma vez que $|a| = |b| = |c| = 1$. Assim, a circunferência \mathcal{C} passa pelo pé da altura por a . De forma análoga, podemos ver que \mathcal{C} também passa pelos pés das alturas

por b e por c . □

Terminamos este capítulo com algumas sugestões de exercícios sobre o tema em que temos vindo a trabalhar.

Exercício 2. *Mostre que a reta que une os pontos médios dos dois lados paralelos de um trapézio passa pelo ponto de intersecção das retas que contêm os outros dois lados e também pelo ponto de intersecção das diagonais.*

Exercício 3. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto D , sejam H , T e M os pés das perpendiculares de D aos lados BC , CA e AB , respetivamente. Então, os pontos H , T e M são colineares se, e só se, D está na circunferência circunscrita do triângulo $\triangle ABC$. Este resultado é conhecido por Teorema da Reta de Simson¹.*

Exercício 4. *Mostre que, em qualquer quadrilátero convexo, os pontos médios dos lados são os vértices de um paralelogramo.*

¹Robert Simson(1687-1768) foi um matemático escocês que publicou diversas edições críticas e comentadas sobre as obras dos antigos géometras.

Capítulo 3

Inversões

Começaremos por aprofundar o conceito de inversão em relação a uma circunferência e suas propriedades com base no uso dos números complexos. Como primeiro exemplo de aplicação das inversões, estudaremos uma demonstração do Teorema de Ptolomeu-Euler sobre quadriláteros cíclicos e terminaremos com a resolução de alguns problemas que envolvem também a aplicação de inversões.

3.1 Definição e propriedades das inversões

Já sabemos que a inversão na circunferência $\mathcal{C} := \mathcal{C}(A, r)$ de centro em A e raio r é a aplicação que envia cada ponto $X \neq A$ no único ponto X' na semireta \overrightarrow{AX} tal que $|AX||AX'| = r^2$.

Proposição 25. *A inversão relativamente a \mathcal{C} é a aplicação $I_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \setminus \{A\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$I_{\mathcal{C}}(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a.$$

Demonstração. Temos que provar que $z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$ satisfaz as seguintes condições:

1. $|z' - a||z - a| = r^2$;
2. z' pertence à semireta de origem em a por z , isto é, z' é da forma $z' = a + \lambda(z - a)$, com $\lambda > 0$.

Temos

$$|z' - a|^2 |z - a|^2 = \left| \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} \right|^2 |z - a|^2 = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} \frac{r^2}{z - a} (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^4,$$

logo $|z' - a||z - a| = r^2$.

Por outro lado,

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a = \frac{r^2}{|z - a|^2} (z - a) + a.$$

Logo $z' = a + \lambda(z - a)$, com $\lambda = \frac{r^2}{|z - a|^2} > 0$. □

Observação 3. Dada uma circunferência de centro em A , a inversão $I_C : \mathbb{C} \setminus \{A\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{A\}$ é uma involução, ou seja, I_C é a transformação inversa dela própria.

Vejamos como uma inversão atua sobre retas e circunferências.

Proposição 26. Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro P e raio r . A inversão I_C transforma:

1. uma circunferência que passa por P numa reta que não passa por P .
2. uma circunferência que não passa por P numa circunferência que não passa por P .
3. uma reta que não passa por P numa circunferência que passa por P .
4. uma reta que passa por P numa reta que passa por P .

Demonstração. Podemos supôr que P é a origem do referencial. Então a inversão I_C é dada por

$$I_C(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

e, além disso,

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = r^2\}.$$

Consideremos uma circunferência \mathcal{C}_1 de centro em α e raio s , isto é,

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = s^2\}.$$

Começamos por supor que \mathcal{C}_1 não passa pela origem e que $\alpha \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C}_1 &\Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = s^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{s^2}{z\bar{z}\alpha\bar{\alpha}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{z\bar{z}} - \frac{s^2}{z\bar{z}\alpha\bar{\alpha}}\right) - \frac{1}{z\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{z}\alpha} + \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{s^2}{\alpha\bar{\alpha}}}{z\bar{z}} - \frac{1}{z\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{z}\alpha} + \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{1}{z(\bar{\alpha} - \frac{s^2}{\alpha})} - \frac{1}{\bar{z}(\alpha - \frac{s^2}{\bar{\alpha}})} + \frac{1}{\alpha\bar{\alpha} - s^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\alpha - \frac{s^2}{\bar{\alpha}}}\right)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{\alpha} - \frac{s^2}{\alpha}}\right) - \frac{1}{(\alpha - \frac{s^2}{\bar{\alpha}})(\bar{\alpha} - \frac{s^2}{\alpha})} + \frac{1}{\bar{\alpha}\alpha - s^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{r^2}{z} - \frac{r^2}{\alpha - \frac{s^2}{\bar{\alpha}}}\right)\left(\frac{r^2}{\bar{z}} - \frac{r^2}{\bar{\alpha} - \frac{s^2}{\alpha}}\right) = \frac{r^4\alpha\bar{\alpha}}{(\alpha\bar{\alpha} - s^2)^2} - \frac{r^4}{\bar{\alpha}\alpha - s^2}. \end{aligned}$$

Números Complexos em Geometria

Assim, pondo $w = \frac{r^2}{\bar{z}} = I_C(z)$, temos que $z \in \mathcal{C}_1$ se, e só se,

$$(w - \beta)(\bar{w} - \bar{\beta}) = R^2$$

com

$$\beta = \frac{r^2}{\bar{\alpha} - \frac{s^2}{\alpha}}, \quad R^2 = \frac{s^2 r^4}{(\alpha \bar{\alpha} - s^2)^2}.$$

Assim, no caso em que \mathcal{C}_1 não passa pela origem e $\alpha \neq 0$, $I_C(\mathcal{C}_1)$ é uma circunferência de centro em β e raio R .

No caso em que \mathcal{C}_1 não passa pela origem e $\alpha = 0$, temos

$$z \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow z\bar{z} = s^2 \Leftrightarrow \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \frac{r^2}{z} \frac{r^2}{\bar{z}} = \frac{r^4}{s^2}.$$

Pondo $w = \frac{r^2}{\bar{z}} = I_C(z)$, temos que $z \in \mathcal{C}_1$ se, e só se,

$$w\bar{w} = \frac{r^4}{s^2}.$$

Ou seja, $I_C(\mathcal{C}_1)$ é uma circunferência de centro na origem e raio $\frac{r^2}{s}$.

Daqui concluímos que uma inversão transforma uma circunferência que não passa pelo centro de inversão numa circunferência que não passa pelo centro de inversão.

Supomos agora que \mathcal{C}_1 passa pela origem (necessariamente, $\alpha \neq 0$ e $s^2 = \alpha\bar{\alpha}$). Então,

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C}_1 \setminus \{P\} &\Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = s^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{z\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{z\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{z}\alpha} + \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{r^2}{z} + \bar{\alpha} \frac{r^2}{\bar{z}} = r^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez, pondo $w = \frac{r^2}{\bar{z}} = I_C(z)$, temos que $z \in \mathcal{C}_1 \setminus \{P\}$ se e só se

$$\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = r^2,$$

que é a equação de uma reta que não passa pela origem.

Finalmente, seja \mathcal{R} uma reta que passa pela origem, cuja equação será necessariamente da forma

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0.$$

Temos,

$$z \in \mathcal{R} \setminus \{P\} \Leftrightarrow \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}\frac{r^2}{\bar{z}} + \alpha\frac{r^2}{z} = 0.$$

Logo, $I_C(\mathcal{R} \setminus \{P\}) = \mathcal{R} \setminus \{P\}$.

□

Observe-se que, se \mathcal{C} é uma circunferência de centro z_0 (não necessariamente a origem) e raio r e \mathcal{C}_1 tiver centro em α e raio s , então o centro de $I_C(\mathcal{C}_1)$ é dado por

$$\beta = \frac{r^2(\alpha - z_0)}{|\alpha - z_0|^2 - s^2} + z_0. \quad (3.1)$$

Exemplo 12. Consideremos duas circunferências \mathcal{C} e \mathcal{E} que se intersectam em dois pontos distintos, A e B . Suponha-se que o centro P de \mathcal{C} está sobre \mathcal{E} . Como \mathcal{E} passa pelo centro de \mathcal{C} , $\mathcal{C}^* = I_C(\mathcal{E})$ é uma reta. Por outro lado, como a inversão I_C fixa os pontos que estão sobre \mathcal{C} , temos $I_C(A) = A$ e $I_C(B) = B$. Logo \mathcal{C}^* é a reta definida por A e B .

Proposição 27. Dadas duas circunferências distintas \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , temos:

1. se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não se intersectam, existe uma inversão que transforma \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em circunferências concêntricas;
2. se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 intersectam-se, existe uma inversão que transforma \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em retas;

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supôr que \mathcal{C}_1 tem centro em $\alpha_1 = 0$ e raio s_1 e \mathcal{C}_2 tem centro em $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ e raio s_2 . Queremos encontrar uma circunferência \mathcal{C} de centro em x e raio r de modo a que $I_C(\mathcal{C}_1)$ e $I_C(\mathcal{C}_2)$ sejam concêntricas. Obviamente, x também terá que estar sobre o eixo real. Assim, tendo em conta (3.1), temos de resolver a equação

$$\frac{x}{x^2 - s_1^2} = \frac{x - \alpha_2}{(x - \alpha_2)^2 - s_2^2},$$

que é equivalente à equação de segundo grau

$$\alpha_2 x^2 + x(s_2^2 - s_1^2 - \alpha_2^2) + \alpha_2 s_1^2 = 0.$$

Logo

$$x = \frac{s_1^2 - s_2^2 + \alpha_2^2 \pm \sqrt{(s_1^2 - s_2^2 + \alpha_2^2)^2 - 4s_1^2\alpha_2^2}}{2\alpha_2}. \quad (3.2)$$

Números Complexos em Geometria

Daqui concluímos que, se

$$(s_1^2 - s_2^2 + \alpha_2^2)^2 - 4s_1^2\alpha_2^2 > 0, \quad (3.3)$$

então a equação tem solução. Mas a condição (3.3) é precisamente a condição para que as duas circunferências não se interessem. Logo, se este for o caso, a inversão em qualquer circunferência de centro em x transforma \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em circunferências concêntricas.

Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 interessem-se, podemos tomar uma circunferência \mathcal{C} de centro num dos pontos de interseção e temos obviamente que a inversão $I_{\mathcal{C}}$ transforma \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 em retas. \square

3.2 Teorema de Ptolomeu-Euler

Começamos com o seguinte lema, que nos diz como as inversões transformam distâncias.

Lema 3. *Suponhamos que P^* e Q^* são inversos dos pontos P e Q , respectivamente, em relação à circunferência \mathcal{C} com o centro na origem O e raio r . Então,*

$$|P^*Q^*| = \frac{r^2|PQ|}{|OP||OQ|}, \quad |PQ| = \frac{r^2|P^*Q^*|}{|OP^*||OQ^*|}.$$

Demonstração. Por definição de inversão, temos

$$|OP||OP^*| = r^2, \quad |OQ||OQ^*| = r^2.$$

Logo, dividindo as duas igualdades, temos

$$\frac{|OP^*|}{|OQ^*|} = \frac{|OQ|}{|OP|}.$$

Pelo critério LAL de semelhança de triângulos, temos que $\triangle OP^*Q^*$ e $\triangle OQP$ são semelhantes.

Assim,

$$\frac{|P^*Q^*|}{|QP|} = \frac{|OP^*|}{|OQ|} = \frac{r^2}{|OP||OQ|}.$$

Logo

$$|P^*Q^*||OP||OQ| = r^2|QP| \Leftrightarrow |P^*Q^*| = \frac{r^2|QP|}{|OP||OQ|}.$$

A segunda igualdade resulta da primeira pelo facto da inversão ser uma involução. \square

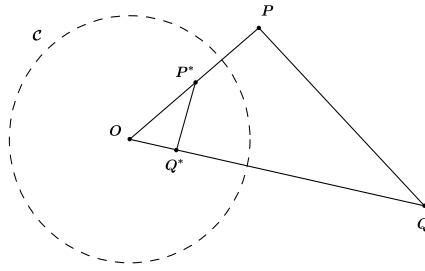


Figura 3.1: $\triangle OP^*Q^* \sim \triangle OQP$.

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu-Euler). *Para quatro pontos arbitrários A, B, C e D , vale a igualdade*

$$|AB||CD| + |BC||DA| \geq |AC||BD|$$

se, e só se, A, B, C e D , forem cocíclicos (estão sobre uma mesma circunferência).

Demonstração. Consideremos uma inversão tendo D como o centro. Pela desigualdade triangular, temos que

$$|A^*B^*| + |B^*C^*| \geq |A^*C^*|, \quad (3.4)$$

e vale a igualdade se, e só se, A^*, B^* e C^* forem colineares. Observe-se que, para que A^*, B^* e C^* sejam colineares, é necessário e suficiente que a circunferência circunscrita a A, B e C passe também por D , o centro de inversão, tendo em conta a Proposição 26

Pelo lema anterior, em termos de A, B, C e D , a condição (3.4) é equivalente a

$$\frac{r^2|AB|}{|AD||BD|} + \frac{r^2|BC|}{|BD||CD|} \geq \frac{r^2|AC|}{|AD||CD|}$$

Ou seja,

$$|AB||CD| + |BC||DA| \geq |AC||BD|$$

e, pelo que observámos, a igualdade vale se e só se A, B, C e D são cocíclicos. \square

3.3 Problemas com inversões

Problema 10. Considere um triângulo $\triangle ABC$, e seja \mathcal{C} uma circunferência por A e B , e seja \mathcal{D} outra circunferência por A e C , que se intersectam perpendicularmente. Qual é o lugar geométrico do outro ponto X de intersecção de \mathcal{C} com \mathcal{D} ?

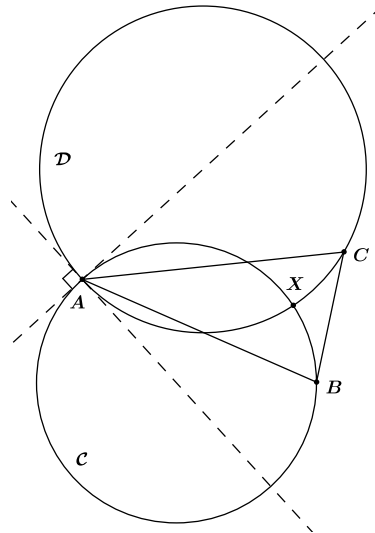


Figura 3.2: Representação do Problema 10.

Resolução. Vamos considerar uma inversão relativamente a uma circunferência \mathcal{E} com centro em A . Por meio desta inversão: a circunferência \mathcal{C} é transformada na reta \mathcal{C}^* definida pelos pontos de intersecção de \mathcal{C} e \mathcal{E} ; a circunferência \mathcal{D} é transformada na reta \mathcal{D}^* definida pelos pontos de intersecção de \mathcal{D} e \mathcal{E} .

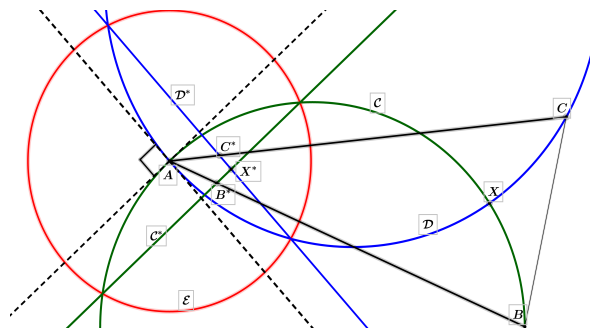


Figura 3.3: Ação de $I_{\mathcal{E}}$ sobre a figura 3.2.

Como consequência do teorema do arco capaz, sabemos que o lugar geométrico dos pontos X^* (os inversos de X) tais que $\angle C^*X^*B^*$ é um ângulo de 90° é a circunferência \mathcal{F} de diâmetro B^*C^* . Assim, se o ângulo $\angle C^*AB^*$ não for reto (isto é, $A \notin \mathcal{F}$), o lugar geométrico dos pontos $X = I_{\mathcal{E}}(X^*)$ é a circunferência

$I_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$, que passa por C e B . Se o ângulo $\angle C^*AB^*$ for reto (isto é, $A \in \mathcal{F}$), o lugar geométrico dos pontos $X = I_{\mathcal{E}}(X^*)$ é a reta $I_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$, que passa por C e B . □

Problema 11. *Seja \mathcal{C} uma circunferência no interior da circunferência \mathcal{D} . Construa-se uma sequência de circunferências de acordo com o seguinte procedimento: \mathcal{C}_1 é uma circunferência simultaneamente tangente a \mathcal{C} e \mathcal{D} , não contendo \mathcal{C} ; \mathcal{C}_2 uma circunferência simultaneamente tangente a \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{C}_1 , não contendo nenhuma das circunferências anteriores; \mathcal{C}_3 uma circunferência simultaneamente tangente a \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{C}_2 , não contendo nenhuma das circunferências anteriores; e assim sucessivamente. Provar que o menor número n para o qual \mathcal{C}_n intersecta \mathcal{C}_1 e o facto do anel de circunferências ser fechado (isto é, \mathcal{C}_n é tangente a \mathcal{C}_1) não dependem da circunferência \mathcal{C}_1 de partida considerada.*

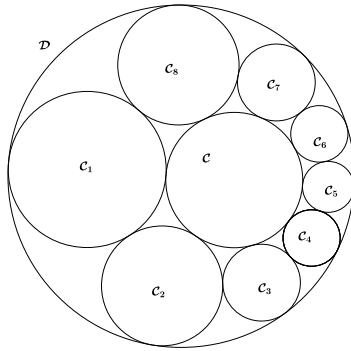


Figura 3.4: Um anel fechado com $n = 8$.

Resolução. Basta aplicar uma inversão de modo a que \mathcal{C}^* e \mathcal{D}^* sejam concêntricas, situação em que o resultado é trivial. □

Bibliografia

- [1] P. V. Araújo, Curso de Geometria. Gradiva. 1998.
- [2] L. Barreira, Análise Complexa e Equações Diferenciais. IST Press, pg. 5-13, setembro 2009.
- [3] P. M. Girão, Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais. IST Press. pg. 5-10, julho 2014.
- [4] Lang-shin Hahn, Complex numbers and Geometry, The Mathematical Association of America, 1994.
- [5] J. Sebastião, Compêndio de Matemática, Volume 1. GEP, pg. 59-73, março de 1975.
- [6] J. Sebastião, Compêndio de Matemática, Volume 2. GEP, pg.142-143, outubro de 1975.