

Cláudia Sofia Monteiro Antunes Craveiro Ramos

Teorema de Morley



Universidade da Beira Interior

Departamento de Matemática

Outubro 2010

Cláudia Sofia Monteiro Antunes Craveiro Ramos

Teorema de Morley



*Trabalho submetido ao Departamento de Matemática para avaliação dos Requisitos do Grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3º Ciclo e Ensino Secundário
Orientado pelo Doutor Henrique Cruz, Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal*

Universidade da Beira Interior

Departamento de Matemática

Outubro 2010

“A Geometria é a arte de raciocinar sobre figuras mal desenhadas.”

A. Poincaré

Agradecimentos

Próximo do fim de mais uma etapa, gostaria de agradecer a todos os que me apoiaram, ensinaram, aconselharam e ouviram durante esta etapa final.

Dedico este trabalho aos meus pais, irmã e família por todo o seu apoio, confiança e carinho.

Agradeço também a todos os professores que contribuíram para a minha formação científica e pedagógica ao longo de todos estes anos.

Ao meu orientador, Professor Henrique Cruz, pelo apoio e disponibilidade.

Aos meus amigos e colegas pela amizade e ajuda constante.

Ao meu namorado, pelo apoio, paciência e compreensão nas constantes ausências.

Conteúdo

Introdução	7
Biografia	9
Notação	11
Resultados Auxiliares.....	12
Capítulo 1	19
Teorema de Morley	19
Demonstração geométrica.....	20
Demonstração trigonométrica	23
Triângulos de Morley	27
Área do Triângulo de Morley.....	38
Capítulo 2.....	40
Versão do Teorema de Morley para Paralelogramos	40
Caso 1: Rectângulo	43
Caso 2: Losango	44
Área do Paralelogramo de Morley.....	45
Capítulo 3.....	49
Polígonos de Morley	49
Polígonos de Morley Ordiniais (triviais ou não triviais)	50
Polígonos de Morley “Snaggled”	55
Capítulo 4	59

Aplicação ao Ensino	59
Guia da Actividade para o professor	61
Ficha Orientadora para o aluno	67
Conclusão	74
Bibliografia	76
Apêndices	79
Apêndice 1	79
Construções geométricas	79
Construção da macro “trisseção do ângulo”	79
Construção do Triângulo de Morley	82
Construção do Paralelogramo de Morley	83
Apêndice 2	84
Demonstração geométrica	84

Introdução

A Matemática pode ser definida como uma ciência rigorosa e precisa que tem por objectivo medir grandezas e as suas propriedades. No entanto, também pode ser definida como a ciência do conhecimento e da aprendizagem. Apesar de ainda não haver um consenso quanto à sua definição, a Matemática está permanentemente em desenvolvimento e a evoluir cada vez mais. Segundo José Sebastião e Silva *“seria possível dizer o que é a matemática se esta fosse uma ciência morta, mas a matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência”*.

Um dos ramos mais antigos da matemática e que tem evoluído ao longo dos tempos, é a Geometria. Muitos foram os matemáticos que contribuíram para a sua evolução tais como Arquimedes, Pitágoras, Euclides. Mais recentemente, Guass, Riemann e outros matemáticos introduziram vários conceitos e diversos métodos na resolução de problemas interessantes da Geometria.

As construções geométricas com régua não graduada e compasso, são um dos temas mais antigos e importantes da Geometria de Euclides. Os três problemas clássicos da geometria são exemplos de alguns enigmas que desafiaram várias gerações de matemáticos.

Um resultado da Geometria Euclidiana que foi aparentemente ignorado pelos gregos, pela impossibilidade da trissecção do ângulo e que apenas foi descoberto no século XX, é o Teorema de Morley. O teorema afirma que os três pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero. Este resultado tem vindo a ser redescoberto por vários matemáticos, não só pela sua simplicidade e beleza, mas também pelo interesse que despertou no mundo da matemática.

O teorema descoberto pelo professor Frank Morley, não foi tornado público logo após a sua descoberta, mas pensa-se que foi por volta de 1900. A primeira vez que se mencionou o teorema na literatura foi num problema proposto por E. J. Ebdon, na

revista *The Educational Times* em 1908. Foram ainda publicadas três soluções na mesma revista, uma trigonométrica por M. Satyanarayana e duas envolvendo apenas geometria plana, uma apresentada por Naraniengar e outra por W. F. Beard.

Mais tarde, em 1913, F.G. Taylor e W. L. Marr publicaram na Sociedade Matemática de Edimburgo o artigo, “*Six trisectores of each of the angles of a triangle*”, onde provaram o teorema, apontando a descoberta deste ao professor Morley. Outros artigos interessantes surgiram no ano de 1923, J. M. Child apresentou uma prova geométrica e R. Bricant apresentou duas provas, uma baseada em conceitos elementares da geometria e outra usando números complexos. Apenas em 1924, Frank Morley publicou no jornal da Associação Matemática do Japão para o ensino secundário, o artigo “*On the intersections of the trisectores of the angles of a triangle*”. Ainda em 1927, Philip Franklin, relacionou a Recta de Simson, o Teorema de Morley e a hipociclóide de três cúspides de um triângulo.

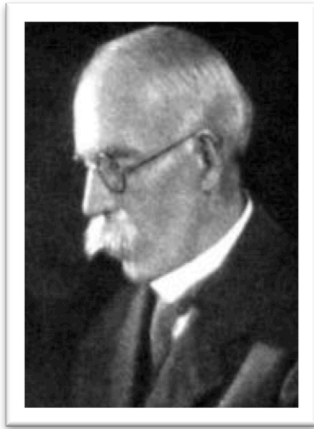
A demonstração do Teorema é apresentada em meia dúzia de linhas no livro *Inversive Geometry* em 1933, cujos autores são Frank Morley e seu filho F. V. Morley [1].

O presente trabalho tem como objectivo desenvolver o estudo realizado por Frank Morley. Numa fase inicial deste estudo, será abordada a vida e obra do matemático que deu nome ao teorema. Serão ainda analisados alguns resultados auxiliares ao estudo a ser desenvolvido.

No primeiro capítulo, iremos apresentar o teorema e serão analisadas duas possíveis demonstrações, sendo uma geométrica apresentada por M.T. Naraniengar e outra baseada em alguns conceitos básicos de trigonometria. Ainda neste capítulo iremos estudar algumas generalizações do teorema, bem como algumas propriedades interessantes.

No segundo capítulo, será apresentada e estudada outra versão do teorema, que envolve paralelogramos. No capítulo seguinte será apresentado um breve estudo sobre os Polígonos de Morley. Posteriormente, no último capítulo, será apresentada uma proposta de trabalho com o objectivo de aplicar o teorema ao ensino do 3º Ciclo da Matemática. Na fase final, será feita uma reflexão sobre o trabalho elaborado, aqui apresentado e analisado.

Biografia



Frank Morley

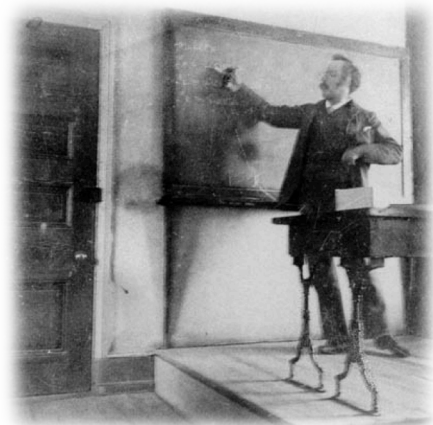
1860 – 1937

Foi um líder matemático, conhecido principalmente pelo seu método de ensino e investigações nas áreas da álgebra e da geometria. De entre essas investigações distingue-se a descoberta e prova matemática do célebre *Teorema da Trisseção de Morley*, teorema fundamental da geometria plana, que surgiu do estudo que este matemático fez sobre as cardióides. Frank nasceu a 9 de Setembro de 1860, na cidade de Woodbridge, em Suffolk, Inglaterra, filho de Muskett Elizabeth e Joseph Roberts Morley. Casou em 1889 com Lilian Janet Bird, do qual teve três filhos, Chistopher, Félix e Frank.

Obteve o grau de Bacherlato (*Bachelor of Arts degree*) no King's College, em 1884 e o seu grau de mestre (*Master of Arts degree*) em 1887.

Durante o período de 1884 a 1887, deu aulas no Bath College, Inglaterra. A sua carreira matemática nos Estados Unidos estende-se por um período de 50 anos, iniciando-se com uma nomeação para professor no Haverfor College em 1887. Em 1898, recebeu o seu grau de Doutoramento em Ciências (*Doctor of Science degree*) pela Universidade de Cambridge.

Deu aulas no *Haverford College* até 1900, quando se tornou Presidente do Departamento de Matemática da Universidade Johns Hopkins. Foi ainda professor na Universidade de Hopkins desde 1900 até se reformar em 1928. A fotografia é referente a uma aula de Morley no Haverford College.



Foi membro da New York Mathematical Society e da sua sucessora, American Mathematical Society, do qual foi editor entre 1895 e 1898. Tornou-se vice-presidente desta Sociedade em 1902 e presidente de 1919 a 1920. Foi ainda editor cooperante do Jornal Americano de Matemática de 1899 a 1900 e de 1929 a 1937. Foi também membro da Sociedade Americana de Londres, da Academia Americana de Artes e Ciências entre outras.

Em 1933, publicou com a colaboração do seu filho, Frank V. Morley, um volume notável, intitulado *Inversive Geometry*. Foi profundamente conhecedor da geometria projectiva e métrica, da invariável álgebra e da teoria física e cinemática, que constituía grande parte dos seus ensinamentos matemáticos.

Foi um grande professor e o seu talento incomum para a aplicação de ideias avançadas para tópicos mais elementares, bem como a tradução impressionante do abstrato para o concreto, permitiu-lhe estimular o interesse de todos os alunos que participavam nas suas palestras. Tinha uma forte convicção de que a geometria era o modo ideal para apresentar ideias matemáticas abstractas para o público em geral.

Uma influência importante na carreira escolar de Morley foi Airy Frank, que conheceu através da paixão comum pelo xadrez.

As suas publicações incluem *Elementary Treatise*, sobre teoria de funções (1893), com James Harkness e *Introdução à Teoria das Funções Analíticas* (1898), entre outras. Morreu em Baltimore, Maryland a 17 de Outubro de 1937 [2].

M. T. Naraniengar

1870 - 1940

Foi um dos professores da nova geração que juntou ao seu trabalho de pedagogo, ao trabalho de investigação. Nasceu na Índia e graduou-se em *Madras University*. Deu aulas de matemática no *Central College* até se reformar em 1925.

Foi presidente da *Indian Mathematical Society* de 1930 até 1932. Após uma breve doença, morreu a 9 de Outubro de 1940. [3]

Notação

$A \rightarrow$ Ponto A

$r \rightarrow$ Recta r

$AB \rightarrow$ Recta (definida pelos pontos A e B)

$[AB] \rightarrow$ Segmento (definido pelos pontos A e B)

$\overline{AB} \rightarrow$ Comprimento do segmento (definido por A e B)

$\angle AOB \rightarrow$ Ângulo (definido pelos pontos A, O e B)

$\sphericalangle AOB \rightarrow$ Amplitude do ângulo AOB

$\Delta[ABC] \rightarrow$ Triângulo definido pelos pontos A, B e C

$\widehat{AB} \rightarrow$ Arco de uma circunferência definido pelos pontos A e B

$A_{\Delta[ABC]} \rightarrow$ Área do triângulo de vértices A, B e C

$A_{[ABCD]} \rightarrow$ Área do polígono de vértices A, B, C, D

$\dot{A}B \rightarrow$ Semi-recta (origem A , contendo B)

$[ABCD] \rightarrow$ Polígono definido pelos pontos A, B, C, D [4]

Resultados Auxiliares

Nesta secção iremos fazer referência a alguns resultados necessários para as demonstrações que se apresentam nos capítulos seguintes. Alguns desses resultados serão analisados outros serão apenas enunciados, pois representam conceitos elementares da Geometria.

Teorema 1

O incentro I de um $\Delta[ABC]$ pertence à bissetriz do $\angle A$, relativamente ao lado BC , e o $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2}$. Inversamente, se um ponto P , interno ao triângulo, pertence à bissetriz do $\angle A$, relativamente ao lado BC e se $\sphericalangle BPC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2}$, então P é o incentro do $\Delta[ABC]$. [5]

Demonstração:

(\Rightarrow)

Considere $\Delta[ABC]$, a circunferência inscrita no triângulo e o seu incentro I

(Fig.0.1).

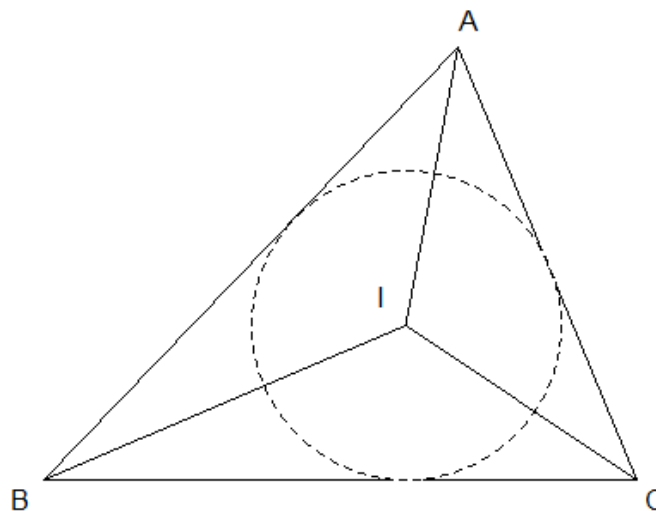


Figura 0.1

Se I é o incentro¹ do $\Delta[ABC]$ então, por definição, pertence às bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , temos que, no $\Delta[BIC]$

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \sphericalangle IBC - \sphericalangle ICB.$$

Por definição de bissetriz² de um ângulo, vem

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) \quad (0.1)$$

Da mesma forma, no $\Delta[ABC]$ temos que

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ$$

ou seja,

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle BAC. \quad (0.2)$$

Substituindo a expressão obtida em (0.2) na expressão (0.1), vem que

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BAC) = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2}.$$

(\Leftarrow)

Suponhamos que existe um outro ponto P tal que, $\sphericalangle BPC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2}$, e que esse ponto pertence à bissetriz do ângulo A . Consideremos dois casos, conforme a posição do ponto P relativamente ao ponto I (**Fig.0.2**).

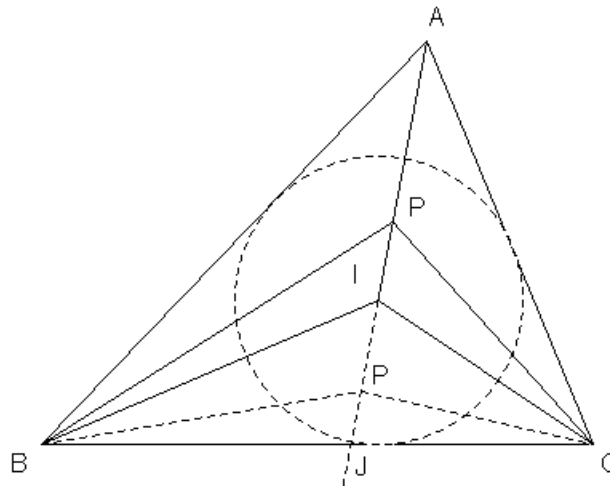


Figura 0.2

¹Definição [21] [pág. 78]: Ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo.

²Definição [21] [pág.76]: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados do ângulo.

Caso 1: P pertence ao $[AI]$

Aplicando as desigualdades seguintes

$$\sphericalangle PBC > \sphericalangle IBC \quad \text{e} \quad \sphericalangle PCB > \sphericalangle ICB$$

isto é,

$$\sphericalangle PBC > \frac{\sphericalangle B}{2}$$

$$\sphericalangle PCB > \frac{\sphericalangle C}{2}$$

então, a soma dos ângulos internos do $\Delta[PBC]$ é dada por

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB > \sphericalangle BPC + \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2}.$$

Como por hipótese, $\sphericalangle BPC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2}$, o segundo membro da desigualdade anterior toma o seguinte valor

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPC + \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2} &= 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2} = \\ &= 90^\circ + \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB > 180^\circ.$$

O que contradiz o resultado sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Logo, P é o incentro do $\Delta[ABC]$.

Caso 2: P pertence ao $[IJ]$

Por um processo semelhante ao que foi feito no caso anterior, e considerando que

$$\sphericalangle PBC < \sphericalangle IBC \quad \text{e} \quad \sphericalangle PCB < \sphericalangle ICB$$

chega-se ao resultado seguinte

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB < 180^\circ.$$

O que é uma contradição, logo P é o incentro do $\Delta[ABC]$.

Teorema 2:

Se os pontos A, B, C e D satisfazem as condições:

1. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$
2. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 180^\circ - 2\alpha > 60^\circ$

então, estes pontos estão sobre uma circunferência. Se um ponto P está no arco maior \widehat{AD} e $\sphericalangle APD = 3\alpha$ (**Fig.0.3**), então P está na mesma circunferência que os pontos A, B, C e D [6].

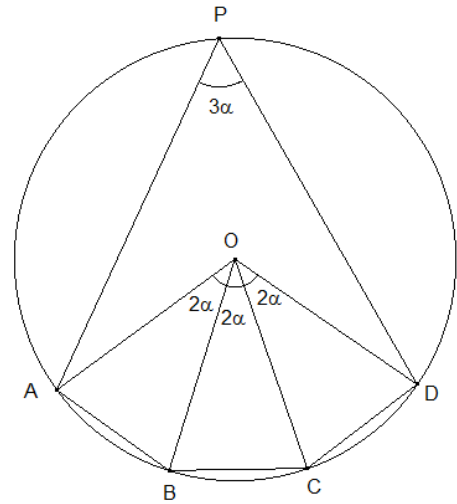


Figura 0.3

Demonstração:

Suponha-se que os pontos A, B, C e D satisfazem as condições do teorema. Seja O a intersecção das bissetrizes dos ângulos $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle BCD$. Tracem-se os segmentos $[OA]$ e $[OD]$ e considerem-se os triângulos $\Delta[AOB]$, $\Delta[BOC]$ e $\Delta[COD]$. Temos que, pelo critério LAL³, estes triângulos são congruentes (pois, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD$ e $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$). Portanto, e como o $\Delta[BOC]$ é isósceles, $\Delta[AOB]$ e $\Delta[BOC]$ também são isósceles.

Além disso, considerando que

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 180^\circ - 2\alpha$$

então, atendendo à definição de bissetriz

$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Por outro lado, no $\Delta[AOB]$ temos que

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle O = 180^\circ.$$

Como o triângulo é isósceles, $\sphericalangle A = \sphericalangle B (= \sphericalangle ABO)$, então

$$2(\sphericalangle ABO) + \sphericalangle O = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle O = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Pelo Teorema do arco capaz⁴, tem-se que P pertence ao \widehat{AD} (arco maior da circunferência), pelo que, $\sphericalangle AOD = 6\alpha$.

³ **Critério LAL** [19] [pág. 18]: Se, numa correspondência entre dois triângulos, dois lados de um dos triângulos e o ângulo por eles formado forem congruentes às partes correspondentes do outro triângulo, então essa correspondência é uma congruência.

⁴ **Teorema** [19] [pág. 28]: A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade do arco por ele subtendido.

Dedução da fórmula do arco triplo [7]

Seja x um ângulo qualquer

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} \right) = {}^5 \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{3} \right) \cos \left(\frac{x}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \cos \left(\frac{2x}{3} \right) = {}^6 \\
 &= \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \cos \left(\frac{x}{3} \right) \right] \cos \left(\frac{x}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[\cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right] = \\
 &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[\cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right] = \\
 &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[2 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right] = \\
 &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[3 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right] = {}^7 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[3 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - (1 - \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right)) \right] = \\
 &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[3 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - 1 + \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[4 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) - 1 \right] = {}^8 \\
 &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[4 \left(\frac{\cos \left(\frac{2x}{3} \right) + 1}{2} \right) - 1 \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[2 \left(1 + \cos \left(\frac{2x}{3} \right) \right) - 1 \right] = \\
 &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[2 + 2 \cos \left(\frac{2x}{3} \right) - 1 \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2x}{3} \right) \right] = \\
 &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[\frac{1}{2} + \cos \left(\frac{2x}{3} \right) \right] = {}^9 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[\cos \left(\frac{2x}{3} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] = {}^{10} \\
 &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2x}{3} + \frac{2\pi}{3}}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{2x}{3}}{2} \right) \right] = \\
 &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + \pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi - x}{3} \right) \right] = {}^{11} \\
 &= 4 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x + \pi}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\pi - \frac{\pi - x}{3} \right) =
 \end{aligned}$$

⁵ Seno da soma: $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

⁶ Seno do ângulo duplo: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Co-seno do ângulo duplo: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

⁷ Fórmula fundamental da trigonometria: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

⁸ Co-seno do ângulo duplo: $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + 1$

⁹ $\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$

¹⁰ Co-seno da diferença: $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

¹¹ Funções de ângulos suplementares: $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi-\pi+x}{3}\right) = \\
 &= 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi+x}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Então

$$\operatorname{sen}(x) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi+x}{3}\right),$$

donde vem,

$$\operatorname{sen}(3x) = 4 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+x\right).$$

Lei dos Senos¹²

Em qualquer triângulo, cada lado é o produto do diâmetro da circunferência circunscrita¹³ pelo seno do ângulo oposto (**Fig.0.4**). Chamando r ao circunraio de $\Delta[ABC]$, tem-se

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma.$$

Ou ainda,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r.$$

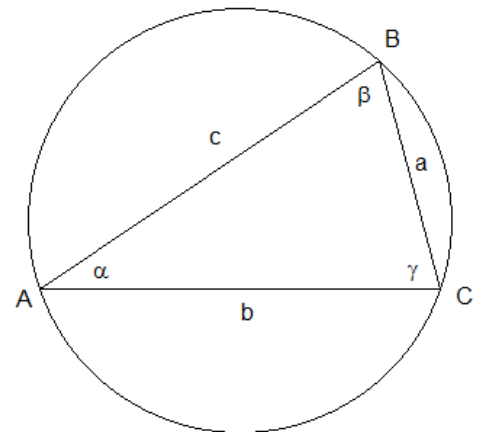


Figura 0.4: Ilustração do Teorema dos Senos

¹² [19] Pág.71

¹³ **Definição** [21] [pág. 40]: Circunferência de centro no incentro do triângulo (intersecção das mediatrizes do triângulo) e que passa pelos três vértices do triângulo.

Lei dos Co-senos¹⁴

Considere um triângulo qualquer

(Fig.0.5). Então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

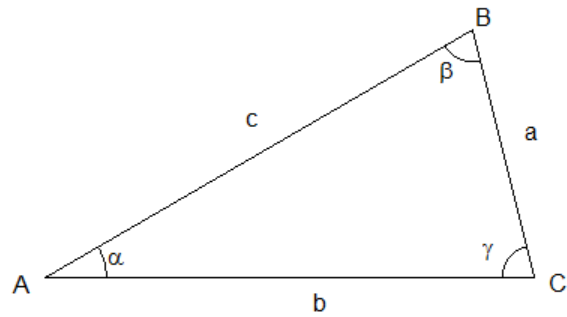


Figura 0.5: Ilustração do Teorema dos Co-senos

Propriedades dos paralelogramos¹⁵

Num quadrilátero convexo, as seguintes condições são equivalentes:

- i. Os ângulos opostos de um quadrilátero $[ABCD]$ são congruentes;
- ii. Os lados opostos de um quadrilátero $[ABCD]$ são paralelos;
- iii. Os lados opostos de um quadrilátero $[ABCD]$ são congruentes.

¹⁴ [19] Pág.69

¹⁵ [19] Pág.45

Capítulo 1

Teorema de Morley

O teorema de Morley afirma que em qualquer triângulo, os três pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes formam um triângulo equilátero, designado *Triângulo de Morley* (Fig.1.1).

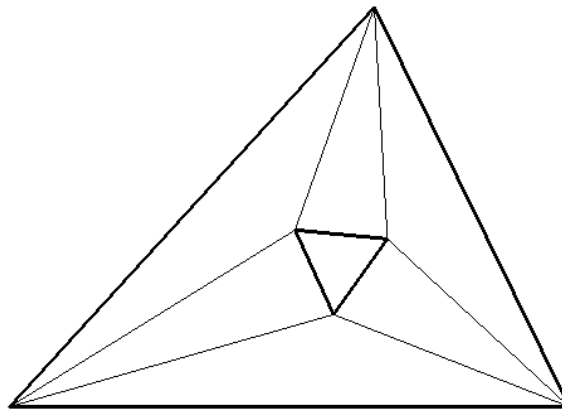


Figura 1.1: Ilustração do Teorema de Morley

Segundo Frank Morley,

“Considerem-se as cardióides¹⁶ tangentes aos lados de um triângulo central, isto é, considerem-se três conjuntos de três rectas paralelas que formam triângulos equiláteros. O locus (lugar geométrico) do centro modifica-se de um conjunto de rectas para outro, quando uma das rectas é uma tangente dupla. Assim, os vértices do seu triângulo equilátero são as intersecções das trissectrizes dos ângulos do triângulo inicial.” [8]

¹⁶ **Definição** [20]: Curva que pode ser reproduzida como um *locus* (lugar geométrico) – traçando-se o caminho de um dado ponto de um círculo, que rola sem cair ao redor de um outro círculo, que é fixo mas que tem o mesmo raio do círculo rolante.

Demonstração geométrica

Apresenta-se de seguida, o estudo da demonstração publicada, em 1919, por M. T. Naraniengar. [6]

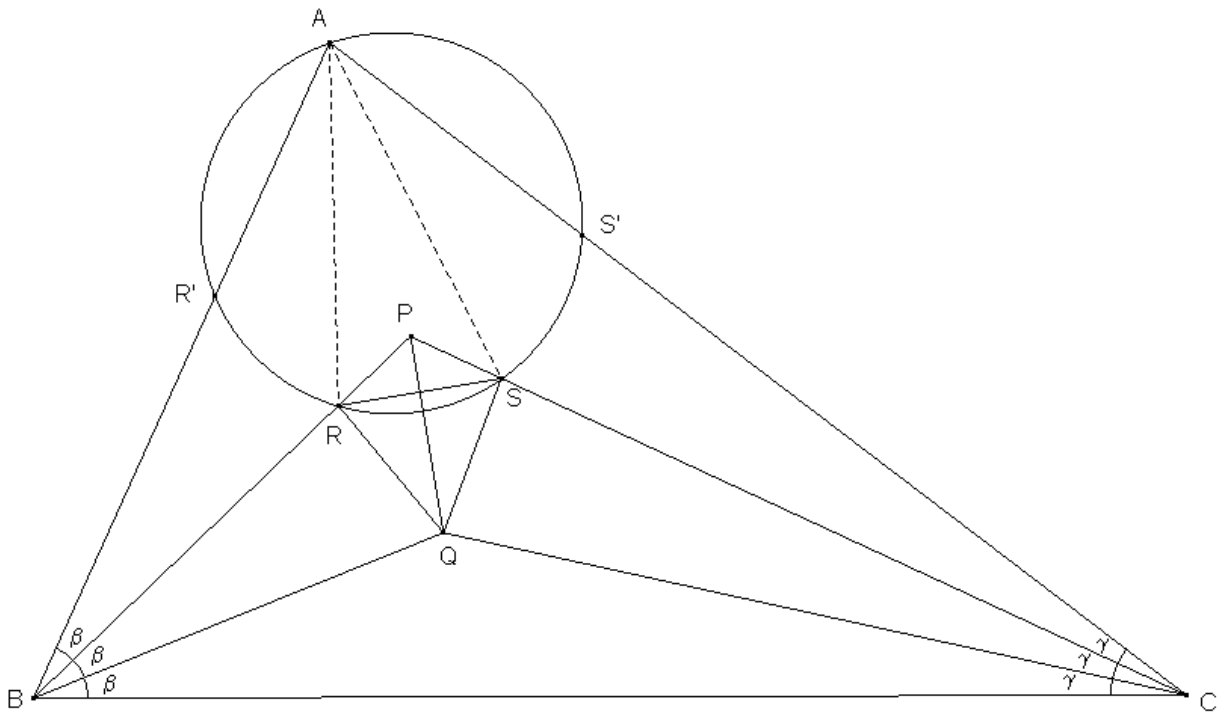


Figura 1.2: Ilustração da demonstração geométrica do Teorema de Morley

Consideremos o $\Delta[ABC]$ e as trissectrizes adjacentes dos ângulos $B = 3\beta$ e $C = 3\gamma$, que se intersectam nos pontos P e Q (**Fig.1.2**). No $\Delta[BPC]$, os ângulos B e C são bissectados por BQ e CQ, respectivamente, pelo que, Q é o incentro do $\Delta[BPC]$ (Lema 1). O ângulo P é bissectado por PQ (note-se que, PQ, BQ e CQ são as bissectrizes do $\Delta[BPC]$).

Marquem-se agora os pontos R e S em BP e CP, respectivamente, e tais que, $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PQS = 30^\circ$. Pelo critério ALA ¹⁷, $\Delta[PQR] \cong \Delta[PQS]$ (pois, por ção, $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PQS$, $\overline{QR} = \overline{QS}$ e $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PSQ$).

¹⁷ **Critério ALA** [19] [pág. 19]: Se, numa correspondência entre triângulos, um dos lados e os ângulos adjacentes a esse lado forem congruentes às partes correspondentes do outro triângulo, então essa correspondência é uma congruência.

Como $\sphericalangle RQS = 60^\circ$ e a lados iguais opõem-se ângulos iguais, considerando o $\Delta[RQS]$, vem que

$$\sphericalangle RQS + \sphericalangle QRS + \sphericalangle QSR = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 2\sphericalangle QRS = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle QRS = 60^\circ.$$

Então,

$$\sphericalangle RQS = \sphericalangle QRS = \sphericalangle QSR = 60^\circ.$$

e, $\overline{QR} = \overline{QS} = \overline{RS}$, pelo que, $\Delta[QRS]$ é equilátero.

Foi provado que $\Delta[QRS]$ é equilátero, prove-se agora que os pontos P, R e S são pontos de intersecção das trissectrizes dos ângulos internos deste triângulo.

Como o $\Delta[PRS]$ é isósceles, pois $\Delta[QPR] \cong \Delta[QPS]$, temos que $\sphericalangle R = \sphericalangle S$. Considerando os triângulos $\Delta[PBC]$ e $\Delta[PRS]$, temos

$$\sphericalangle P + \sphericalangle R + \sphericalangle S = 180^\circ$$

$$\sphericalangle P + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$$

pelo que,

$$\sphericalangle P + \sphericalangle R + \sphericalangle S = \sphericalangle P + \sphericalangle B + \sphericalangle C \Leftrightarrow \sphericalangle R + \sphericalangle S = \sphericalangle B + \sphericalangle C.$$

Tendo em conta que no $\Delta[PBC]$, $\sphericalangle B = 2\beta$ e $\sphericalangle C = 2\gamma$, então

$$\sphericalangle R + \sphericalangle S = 2\beta + 2\gamma.$$

Como no $\Delta[PRS]$, $\sphericalangle R = \sphericalangle S$, então

$$2\sphericalangle R = 2\beta + 2\gamma$$

ou seja, $\sphericalangle R = \beta + \gamma$ e $\sphericalangle S = \beta + \gamma$.

Seja $\sphericalangle A = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sphericalangle A}{3}$, então considerando o $\Delta[ABC]$, temos

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ,$$

isto é,

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 3(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \beta + \gamma = 60^\circ - \alpha.$$

Deste modo, $\sphericalangle SRP = 60^\circ - \alpha$, portanto,

$$\sphericalangle QRP = \sphericalangle QSP = \sphericalangle SRQ + \sphericalangle SRP = 60^\circ + (60^\circ - \alpha) = 120^\circ - \alpha.$$

De seguida, marquem-se os pontos R' e S' , em BA e AC respectivamente, tal que $\overline{BR'} = \overline{BQ}$ e $\overline{CS'} = \overline{CQ}$. Assim, temos que $\Delta[BRQ] \cong \Delta[BRR']$ e $\Delta[CSQ] \cong \Delta[CSS']$, logo, $\overline{RR'} = \overline{RQ} = \overline{QS} = \overline{SS'}$.

Por outro lado, como P está no prolongamento de BR , e $\Delta[BQP] \cong \Delta[BPR']$ (critério LAL¹⁸) e como temos $\Delta[PRQ] \cong \Delta[PRR']$ (critério LAL¹⁹), então

$$\begin{aligned} \sphericalangle SRR' &= \sphericalangle PRR' + \sphericalangle SRP \\ &= \sphericalangle QRP + \sphericalangle SRP \quad (\sphericalangle PRR' = \sphericalangle QRP) \\ &= (120^\circ - \alpha) + (60^\circ - \alpha) \\ &= 180^\circ - 2\alpha. \end{aligned}$$

De modo análogo, tem-se que $\sphericalangle RSS' = 180^\circ - 2\alpha$.

Pelo Lema 2, deduz-se que os pontos R' , R , S , S' e A são concíclicos (ou seja, estão todos sobre a mesma circunferência). Aplicando o Teorema do arco capaz temos que, $\sphericalangle R'AR = \sphericalangle RAS = \sphericalangle SAS' = \alpha$ (cordas $R'R$, RS e SS' têm o mesmo comprimento e portanto, as cordas iguais subtendem ângulos iguais), pelo que, $\sphericalangle A = 3\alpha$.

Desta forma, os pontos Q , R , S foram construídos artificialmente, de modo a que formem um triângulo equilátero. Portanto, estes pontos são de facto pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes que formam o Triângulo de Morley.

¹⁸ $\overline{BP} = \overline{BR} = \overline{BR'}$; $\overline{QR} = \overline{RR'}$; $\sphericalangle R'BR = \sphericalangle RBQ$

¹⁹ $\overline{RQ} = \overline{R'R}$; $\overline{R'P} = \overline{PQ}$; $\sphericalangle Q = R'$

Demonstração trigonométrica

Este teorema tem sido demonstrado por vários autores através de diferentes áreas da matemática. Recorrendo apenas a resultados elementares da trigonometria, apresentamos de seguida outra demonstração deste teorema [7].

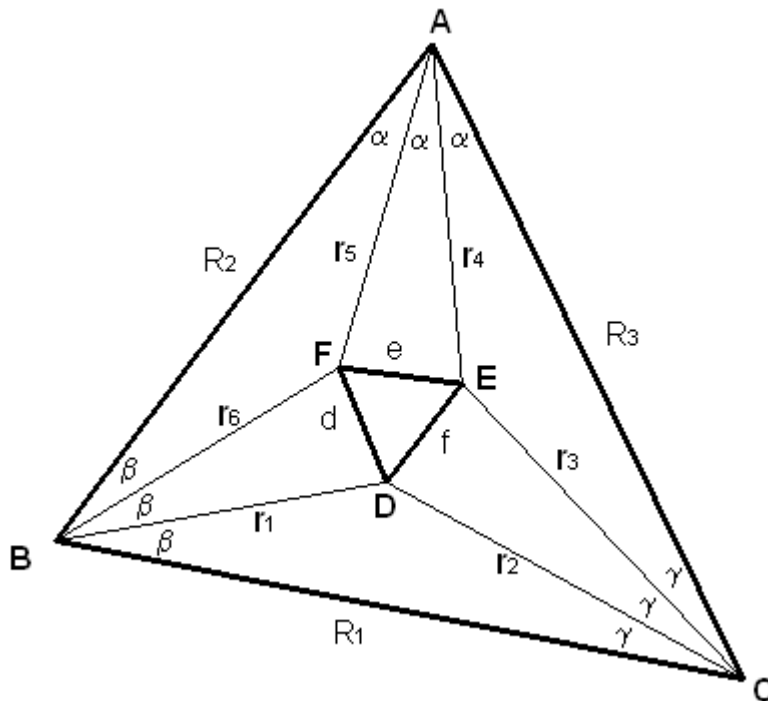


Figura 1.3: Ilustração da demonstração trigonométrica do Teorema de Morley

Sejam $a = \sphericalangle CAB$, $b = \sphericalangle ABC$, $c = \sphericalangle BCA$ e r o circunraio²⁰ do $\Delta[ABC]$. Aplicando a lei dos senos ao $\Delta[ABC]$, obtemos

$$R_1 = \overline{BC} = 2r \operatorname{sen}(a).$$

Pela fórmula do ângulo triplo

$$R_1 = 2r \left[4 \operatorname{sen} \left(\frac{a}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + a}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + a}{3} \right) \right] = 8r \operatorname{sen} \left(\frac{a}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + a}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi + a}{3} \right).$$

²⁰ **Definição [7]** : Raio da circunferência circunscrita no triângulo com centro no circuncentro do triângulo (intersecção das mediatrizes do triângulo)

Analogamente,

$$R_2 = \overline{BA} = 2r \operatorname{sen}(c) = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + c}{3}\right)$$

e

$$R_3 = \overline{AC} = 2r \operatorname{sen}(b) = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + b}{3}\right).$$

Consideremos o $\Delta[DBC]$. As amplitudes dos seus ângulos são dadas por

$$\sphericalangle DBC = \frac{b}{3},$$

$$\sphericalangle DCB = \frac{c}{3}$$

e

$$\sphericalangle BDC = \pi - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = \frac{3\pi - b - c}{3} = \frac{2\pi + (\pi - b - c)}{3} = \frac{2\pi + a}{3}.$$

Aplicando a lei dos senos ao $\Delta[DBC]$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right)} &= \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + a}{3}\right)} \Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + a}{3}\right)} \times \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{8r \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + a}{3}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + a}{3}\right)} \times \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{DC} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + a}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$r_2 = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a + \pi}{3}\right)$$

Analogamente, considerando os triângulos $\Delta[AEC]$ e $\Delta[AFB]$, verifica-se que

$$r_3 = \overline{EC} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b + \pi}{3}\right)$$

$$r_4 = \overline{AE} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{b + \pi}{3}\right)$$

$$r_5 = \overline{AF} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c + \pi}{3}\right)$$

$$r_6 = \overline{BF} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{c + \pi}{3}\right)$$

$$r_1 = \overline{BD} = 8r \operatorname{sen}\left(\frac{c}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+\pi}{3}\right).$$

Aplicando a lei dos co-senos aos triângulos $\Delta[DBF]$, $\Delta[EAF]$ e $\Delta[DCE]$, podemos escrever as seguintes relações

$$d^2 = r_1^2 + r_6^2 - 2r_1 r_6 \cos\left(\frac{b}{3}\right) \quad (1.1)$$

$$e^2 = r_5^2 + r_4^2 - 2r_5 r_4 \cos\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$f^2 = r_3^2 + r_2^2 - 2r_3 r_2 \cos\left(\frac{c}{3}\right).$$

Para facilitar os cálculos, vamos considerar $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$ e $c = 3\gamma$. Então, substituindo os comprimentos r_1 e r_6 em (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(8r \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right)^2 + \left(8r \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right)^2 - \\ &- 2 \left(64r^2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta)\right) \\ &= 64r^2 \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + 64r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \\ &\quad - 128r^2 \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta) \\ &= 64r^2 \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2(\alpha) \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta) \right]. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Sabemos que no $\Delta[BDF]$ de lados r_1 , d e r_6 , os ângulos têm amplitudes β , $\alpha + \frac{\pi}{3}$ e $\gamma + \frac{\pi}{3}$, pois $\beta + \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = 180$ ²¹.

Então, aplicando a lei dos senos a este triângulo, obtemos

$$r_1 = \overline{BD} = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + a}{3}\right) = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$d = \overline{FD} = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{b}{3}\right) = 2r \operatorname{sen}(\beta)$$

²¹ É possível construir o triângulo $[BDF]$ com as amplitudes seguintes: $(\alpha, \beta + \frac{\pi}{3}, \gamma + \frac{\pi}{3})$; $(\alpha + \frac{\pi}{3}, \beta, \gamma + \frac{\pi}{3})$; $(\alpha + \frac{\pi}{3}, \beta + \frac{\pi}{3}, \gamma)$; $(\alpha + \frac{2\pi}{3}, \beta, \gamma)$; $(\alpha, \beta + \frac{2\pi}{3}, \gamma)$; $(\alpha, \beta, \gamma + \frac{2\pi}{3})$; $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

$$r_6 = \overline{BF} = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + c}{3}\right) = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right).$$

Pela lei dos co-senos,

$$\begin{aligned} d^2 &= r_1^2 + r_6^2 - 2r_1 r_6 \cos(\beta) \Leftrightarrow 4r^2 \operatorname{sen}^2(\beta) = \\ &= 4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + 4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - 8r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4r^2 \operatorname{sen}^2(\beta) = \\ &= 4r^2 \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\beta) = \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos(\beta) \right]. \end{aligned}$$

(1.3)

Então, substituindo **(1.3)** em **(1.2)**, vem que

$$\begin{aligned} d^2 &= 64r^2 \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\beta) \Leftrightarrow d = \sqrt{64r^2 \operatorname{sen}^2(\gamma) \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\beta)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d = 8r \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta). \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que

$$e = 8r \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$f = 8r \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\gamma).$$

Portanto, tem-se que $d = e = f$, pelo que o $\Delta[DEF]$ é equilátero.

Triângulos de Morley

Os casos anteriores, envolvem apenas as trissectrizes dos ângulos internos do triângulo, como foi verificado. No entanto, este teorema pode apresentar várias generalizações, uma das quais envolve as trissectrizes dos ângulos externos. Podemos assim enunciar o seguinte resultado:

As trissectrizes adjacentes dos ângulos externos de um triângulo, intersectam-se formando um triângulo equilátero (exterior ao triângulo inicial). [9]

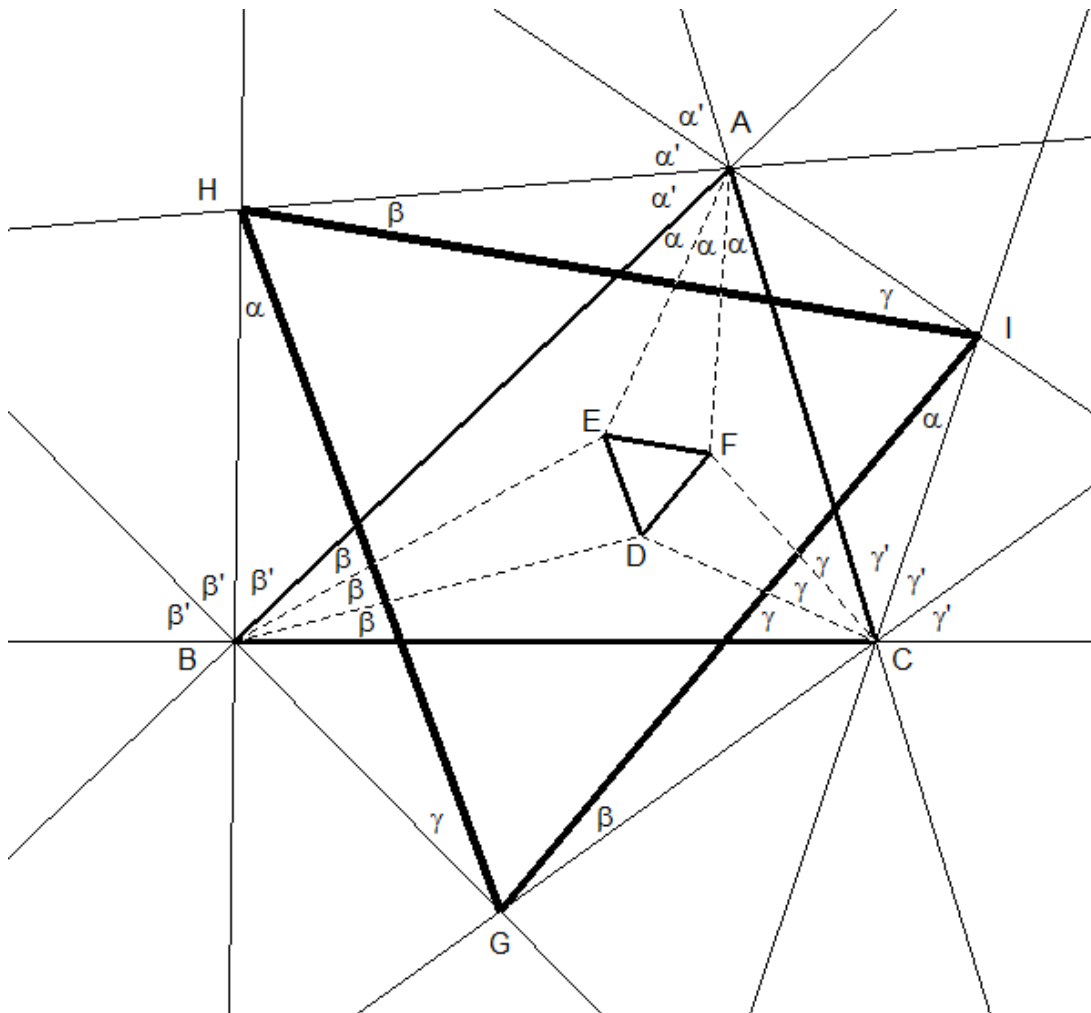


Figura 1.5: Ilustração do triângulo de Morley obtido através das intersecções das trissectrizes dos ângulos externos do $\Delta[ABC]$

Consideremos o $\Delta[ABC]$, e os seus ângulos internos de amplitudes $a = \sphericalangle BAC = 3\alpha$, $b = \sphericalangle ABC = 3\beta$ e $c = \sphericalangle BCA = 3\gamma$ e r o seu circunraio. Sejam $\sphericalangle A = 3\alpha'$, $\sphericalangle B = 3\beta'$ e $\sphericalangle C = 3\gamma'$ as amplitudes dos seus respectivos ângulos suplementares (ângulos externos).

Dos resultados anteriores, sabemos que

$$\overline{BC} = 8r \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\overline{CA} = 8r \sin\left(\frac{\beta}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right)$$

e

$$\overline{BA} = 8r \sin\left(\frac{\gamma}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right).$$

Por definição, a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer é 2π . Por outro lado, $\sphericalangle BAC$ e $\sphericalangle A$ são ângulos suplementares adjacentes²².

Então, temos que

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle C = \pi \quad \mathbf{(1.4)}$$

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle A = \pi \quad \mathbf{(1.5)}$$

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle B = \pi. \quad \mathbf{(1.6)}$$

Desenvolvendo **(1.4)**, obtemos

$$3\gamma + 3\gamma' = \pi \Leftrightarrow 3(\gamma + \gamma') = \pi \Leftrightarrow \gamma + \gamma' = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \gamma' = \frac{\pi}{3} - \gamma.$$

Da mesma forma **(1.5)** e **(1.6)** podem reescrever-se da seguinte forma, respectivamente

$$\alpha' = \frac{\pi}{3} - \alpha \quad \text{e} \quad \beta' = \frac{\pi}{3} - \beta.$$

Pelo que $\sphericalangle A = 3\alpha' = \pi - 3\alpha$, $\sphericalangle B = 3\beta' = \pi - 3\beta$ e $\sphericalangle C = 3\gamma' = \pi - 3\gamma$, são as amplitudes dos ângulos externos do $\Delta[ABC]$. Pretende-se provar que o $\Delta[GHI]$ é equilátero, isto é, que $\overline{HG} = \overline{GI} = \overline{IH}$.

²² **Definição** [22]: Ângulos suplementares são aqueles cujas amplitudes somam π .

Consideremos o $\Delta[BCG]$. As amplitudes dos seus ângulos são dadas por

$$\sphericalangle CBG = \frac{\pi}{3} - \beta,$$

$$\sphericalangle BCG = \frac{\pi}{3} - \gamma$$

e

$$\sphericalangle BGC = \pi - \frac{2\pi}{3} + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{2\pi}{3} - \alpha.$$

Aplicando a lei dos senos ao $\Delta[BCG]$ vem que

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{\overline{GC}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)} \Leftrightarrow$$

$$\overline{GC} = 8r \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} \Leftrightarrow^{23}$$

$$\overline{GC} = 8r \sin \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) \Leftrightarrow$$

$$\overline{GC} = 8r \sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right).^{24}$$

Analogamente, se considerarmos o $\Delta[ACI]$ obtemos

$$\overline{CI} = 8r \sin \beta \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right).$$

Consideremos agora o $\Delta[CIG]$. Aplicando a lei dos co-senos, vem

$$\overline{GI}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{GC}^2 - 2 \overline{CI} \times \overline{GC} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right) =$$

²³ $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

²⁴ $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = -\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{6} + \alpha\right) =$

$\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right)$

$$\begin{aligned}
&= \left(8r \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right)^2 + \left(8r \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right)\right)^2 - \\
&- 2 \left(64r^2 \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right)\right) \times \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right) \\
&= 64r^2 \sin^2 \beta \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + 64r^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) + \\
&\quad - 128r^2 \sin \beta \sin \alpha \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right) = \\
&= 64r^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \left[\sin^2 \beta \sin^2 \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right)\right]. \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Note-se que no $\Delta[CGI]$ as amplitudes dos seus ângulos internos são dadas por [9]

$$\sphericalangle C = 2\gamma' + 3\gamma = \frac{2\pi}{3} + \gamma,$$

$$\sphericalangle I = \alpha$$

e

$$\sphericalangle G = \beta.$$

Prove-se que de facto $\sphericalangle I = \alpha$ e $\sphericalangle G = \beta$. Consideremos que $\sphericalangle I = \theta$ e $\sphericalangle G = \phi$. Como os ângulos α', β', γ' são um terço dos ângulos suplementares de α, β, γ , respectivamente, então temos

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Por outro lado, considerando o $\Delta[BGC]$

$$\sphericalangle G + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \pi \Leftrightarrow \sphericalangle G + \beta' + \gamma' = \pi \Leftrightarrow \sphericalangle G = \pi - \frac{2\pi}{3} - \alpha' \Leftrightarrow \sphericalangle G = \frac{\pi}{3} + \alpha',$$

isto é,

$$\sphericalangle BGC = \frac{\pi}{3} + \alpha'.$$

Analogamente, temos que

$$\sphericalangle CIA = \frac{\pi}{3} + \gamma'$$

e

$$\sphericalangle AHB = \frac{\pi}{3} + \beta'. \quad (1.8)$$

²⁵ $\beta' + \gamma' = \frac{2\pi}{3} - \alpha'$

Considerando o $\Delta[GCI]$, temos

$$\begin{aligned} \sphericalangle GCI + \theta + \phi &= \pi \Leftrightarrow (3\gamma + 2\gamma') + \theta + \phi = \pi \Leftrightarrow \left(3\gamma + \left(\frac{2\pi}{3} - 2\gamma\right)\right) + \theta + \phi = \pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) + \theta + \phi = \pi \Leftrightarrow \theta + \phi = \pi - \frac{2\pi}{3} - \gamma \Leftrightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{3} - \gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - (\alpha + \beta)\right) \Leftrightarrow \theta + \phi = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta + \phi = \left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta + \phi = \frac{2\pi}{3} - (\alpha' + \beta'). \quad \text{(1.9)} \end{aligned}$$

Aplicando a lei dos senos ao $\Delta[ABC]$, vem

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\sphericalangle BGC)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(3\beta)} = r \quad \text{(1.10)}$$

Aplicando também a lei dos senos, nos triângulos $\Delta[CIA]$, $\Delta[BGC]$ e $\Delta[GCI]$, respectivamente, vem

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\sphericalangle BGC)} = \frac{\overline{GC}}{\sin \beta'} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{GC} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)}{\sin \beta'} \quad \text{(1.11)}$$

$$\frac{\overline{CI}}{\sin \alpha'} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\sphericalangle CIA)} \Leftrightarrow \overline{CA} = \overline{CI} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma'\right)}{\sin \alpha'}$$

e

$$\frac{\overline{CI}}{\sin \phi} = \frac{\overline{GC}}{\sin \theta} \Leftrightarrow \frac{\overline{GC}}{\overline{CI}} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi}. \quad \text{(1.12)}$$

Substituindo as igualdades (1.9) e (1.8) em (1.10) e usando a fórmula do ângulo triplo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\sin(3\alpha)} = r &\Leftrightarrow \frac{\overline{GC} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)}{\sin \beta'}}{\sin(3\alpha)} = r \Leftrightarrow \overline{GC} = r \sin(3\alpha) \times \frac{\sin \beta'}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{GC} = \frac{4r \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin \beta'}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overline{GC} &= \frac{4r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right)\right) \sin \beta'}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{GC} &= \frac{4r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha'\right) \sin \alpha' \sin \beta'}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{GC} &= 4r \sin \alpha' \sin \beta' \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right).^{26} \quad (1.13) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\overline{CI} = 4r \sin \alpha' \sin \beta' \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right). \quad (1.14)$$

Substituindo (1.13) e (1.14) em (1.12) vem

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{4r \sin \alpha' \sin \beta' \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right)}{4r \sin \alpha' \sin \beta' \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right)}. \quad (1.15)$$

Pelo que, por (1.15) e por (1.9) temos

$$\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \alpha' = \alpha$$

e

$$\sin \phi = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right) \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{3} - \beta' = \beta.^{27}$$

Analogamente, obtemos que

$$\sphericalangle HIA = \frac{\pi}{3} - \gamma' = \gamma$$

$$\sphericalangle AHI = \frac{\pi}{3} - \beta' = \beta$$

$$\sphericalangle BHG = \frac{\pi}{3} - \alpha' = \alpha$$

e

$$\sphericalangle BGH = \frac{\pi}{3} - \gamma' = \gamma.$$

²⁶ $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha'\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha'\right)$

²⁷ Como $\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha'\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \alpha' \vee \theta = \frac{2\pi}{3} + \alpha'$ e $\sin \phi = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta'\right) \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{3} - \beta' \vee \phi = \frac{2\pi}{3} + \beta'$, então $\sin \theta = \alpha$ e $\sin \phi = \beta$, pois os outros casos são contradições.

Voltando à demonstração e considerando o $\Delta[CGI]$, pela lei dos senos temos,

$$\begin{aligned}\overline{CI} &= 2r \sin \beta \\ \overline{CG} &= 2r \sin \alpha\end{aligned}$$

e

$$\overline{GI} = 2r \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right).$$

Aplicando a lei dos co-senos, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{GI}^2 &= \overline{CI}^2 + \overline{CG}^2 - 2\overline{CI} \times \overline{CG} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \Leftrightarrow 4r^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) = \\ &= 4r^2 \sin^2 \beta + 4r^2 \sin^2 \alpha - 2 \left(4r^2 \sin \beta \sin \alpha \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4r^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) &= 4r^2 \left(\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right) &= \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right). \quad (1.16)\end{aligned}$$

Então, substituindo (1.15) em (1.7) vem

$$\overline{GI}^2 = 64 r^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right)$$

pelo que

$$\begin{aligned}\overline{GI} &= \sqrt{64 r^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \gamma \right)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{GI} &= 8r \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right).\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{AI} &= 8r \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right) \\ \overline{AH} &= 8r \sin \gamma \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \\ \overline{HB} &= 8r \sin \gamma \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \\ \overline{BG} &= 8r \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right),\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\overline{HI} &= 8r \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \\ \overline{HG} &= 8r \cos \left(\frac{\pi}{6} + \gamma \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \beta \right).\end{aligned}$$

Então, $\overline{HG} = \overline{GI} = \overline{IH}$, pelo que o triângulo $[GHI]$ é equilátero²⁸.

Podemos considerar outra generalização do Teorema que pode ser obtida através das intersecções entre as trissectrizes internas e externas como revela a **figura (1.6)**. Mais generalizações pode ser consultadas nos seguintes artigos [10], [11], [12] e [13].

Tomando certas intersecções entre as trissectrizes dos ângulos externos e dos ângulos interiores, podemos obter mais três triângulos equiláteros (**Fig. 1.6**).

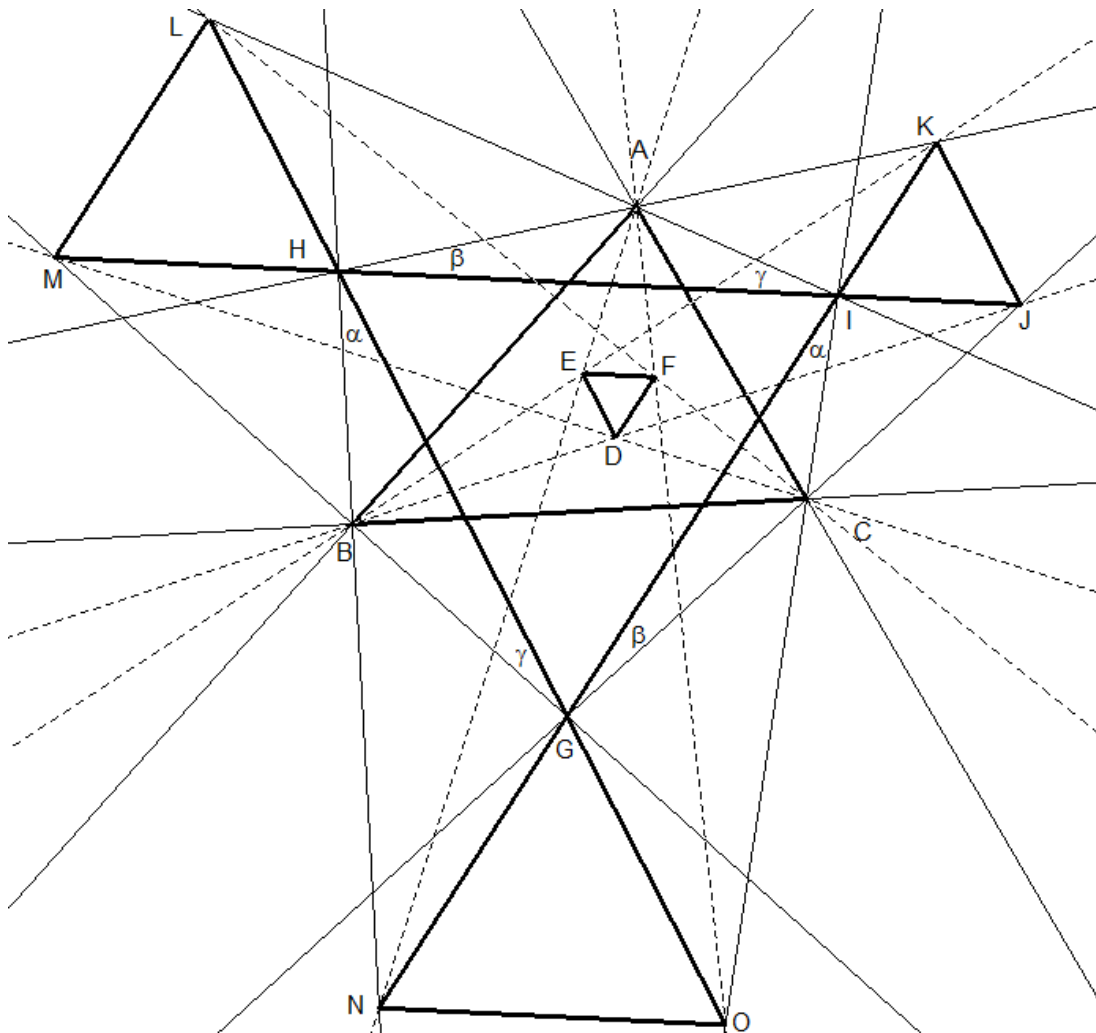


Figura 1.6: Ilustração dos triângulos de Morley obtidos através da intersecção das trissectrizes dos ângulos externos e internos do $\Delta[ABC]$

²⁸ De forma mais simples podemos mostrar que os ângulos do $\Delta[HIG]$ são iguais a $\frac{\pi}{3}$ [11]

Foi provado que o $\Delta[GHI]$ é equilátero, pelo que os seus ângulos internos medem cada um $\frac{\pi}{3}$. Por outro lado, os lados do $\Delta[HIG]$ estão no prolongamento dos triângulos $\Delta[HLM]$, $\Delta[IJK]$, $\Delta[NOG]$ (ver [10]) e como o vértice I é comum aos triângulos GHI e IJK , então os ângulos $\sphericalangle HIG$ e $\sphericalangle KIJ$ são verticalmente opostos²⁹. Da mesma forma, os pares de ângulos $\sphericalangle LHM$, $\sphericalangle GHI$ e $\sphericalangle HIG$, $\sphericalangle KIJ$ são verticalmente opostos.

Desta forma, temos

$$\sphericalangle KIJ = \sphericalangle OGN = \sphericalangle MHL = \frac{\pi}{3}$$

Como $\Delta[GHN]$ e $\Delta[GIO]$ são geometricamente iguais³⁰ (pelo critério LAL, $\overline{HG} = \overline{GI}$, $\sphericalangle HGN = \sphericalangle IGO$ e $\sphericalangle GHN = \sphericalangle GIO$), vem $\overline{GN} = \overline{GO}$. Por outro lado, $\sphericalangle IGN = \sphericalangle OGN = \frac{\pi}{3}$. Como num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, então $\sphericalangle O = \sphericalangle N$.

Considerando o $\Delta[GNO]$, temos

$$\sphericalangle G + \sphericalangle N + \sphericalangle O = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\sphericalangle N = \pi \Leftrightarrow 2\sphericalangle N = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \sphericalangle N = \frac{\pi}{3}.$$

Pelo que, $\sphericalangle O = \frac{\pi}{3}$. Portanto, $\Delta[NOG]$ tem os ângulos todos iguais, pelo que é equilátero. Analogamente, se prova que os $\Delta[IJK]$ e $\Delta[HML]$, também são equiláteros.

²⁹ **Definição** [24] [pág. 28]: Dois ângulos verticalmente opostos têm o mesmo vértice e os lados estão no prolongamento dos lados do outro.

³⁰ **Critério LAL**: $\sphericalangle HGN = \sphericalangle IGO$, $\sphericalangle H = \sphericalangle I$, e $\overline{HG} = \overline{GI}$

No entanto, podemos ainda considerar outro triângulo de Morley. Prolongando os segmentos $[ML]$, $[KJ]$ e $[NO]$, podemos observar que essas rectas se intersectam em três pontos, formando o $\Delta[PQR]$, como mostra a **figura (1.7)**.

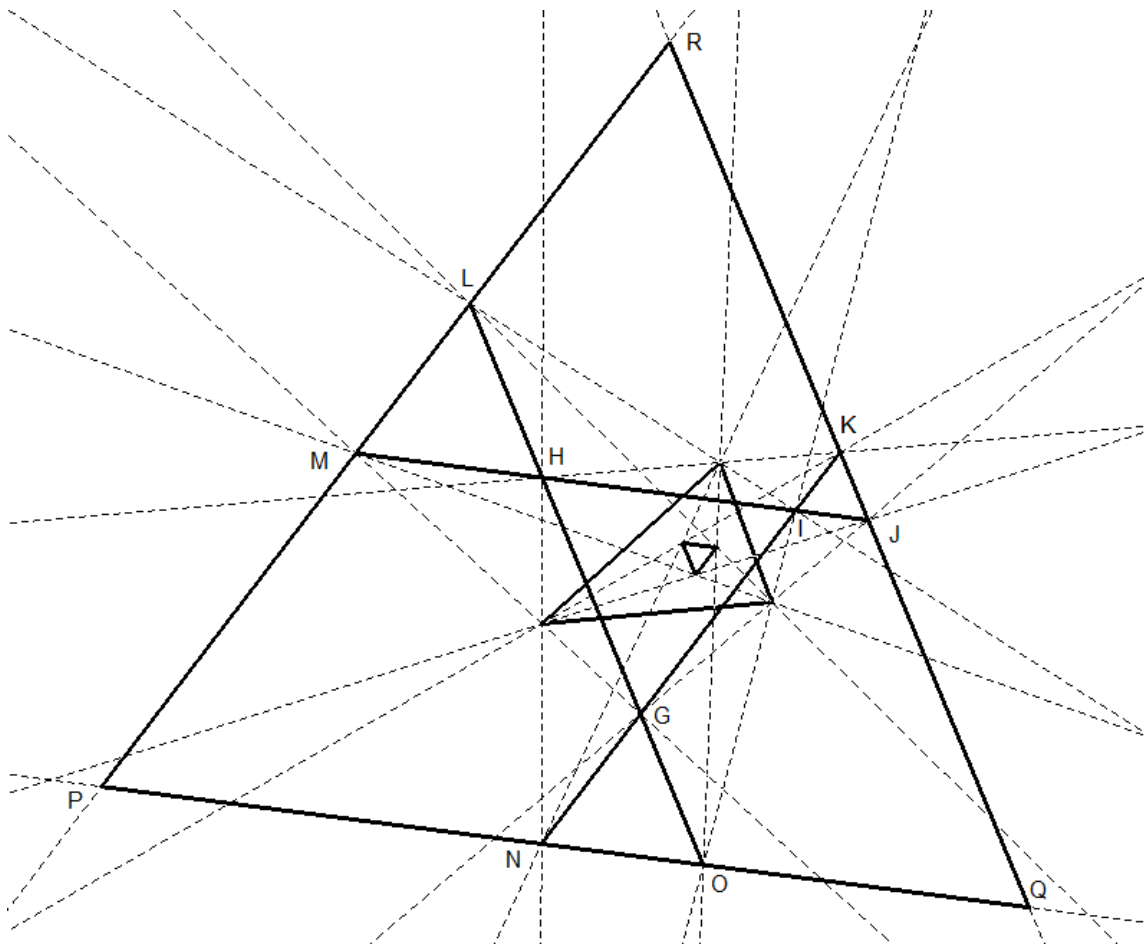


Figura 1.7: Ilustração dos triângulos de Morley obtidos através do prolongamento dos lados de outros três triângulos de Morley

É fácil mostrar que este triângulo também é equilátero. Note-se que os lados deste triângulo são paralelos aos lados dos triângulos $\Delta[DEF]$ e $\Delta[HIJ]$. Como a recta LO faz com as rectas MJ e PQ ângulos alternos congruentes³¹ ($\sphericalangle POL = \sphericalangle MHL$), então $MJ \parallel PQ$ ³². Da mesma forma, podemos concluir que $LO \parallel QR$ e $NK \parallel PR$. Então, temos que

³¹ **Definição** [24] [pág. 28]: Ângulos alternos internos, têm diferentes vértices, estão em lados diferentes da recta que intersecta duas rectas estritamente paralelas, e situam-se na região compreendida entre essas rectas.

³² **Proposição** [19][pág. 33]: Se uma recta l fizer com duas rectas l_1 e l_2 ângulos alternados congruentes, então l_1 e l_2 são paralelas ($l_1 \parallel l_2$).

$$\sphericalangle M = \sphericalangle Q = \sphericalangle R = \frac{\pi}{3}.$$

Pelo que podemos concluir que o $\Delta[PQR]$ é equilátero.

Obtemos assim seis triângulos de Morley distintos, e cujos lados são paralelos entre si. É possível estabelecer outras relações interessantes entre os triângulos de Morley, tal como a que foi estabelecida relativamente aos lados correspondentes dos triângulos DEF e HIG serem paralelos.

Uma relação interessante relativamente a esses triângulos é que são homotéticos³³, isto é, o $\Delta[HIG]$ é uma ampliação do $\Delta[DEF]$. Podemos verificar, pelo estudo feito, que os triângulos preservam os ângulos e que os segmentos (rectas) do $\Delta[HIG]$ foram transformados em segmentos (rectas) paralelos relativamente ao $\Delta[DEF]$. E por outro lado, as razões entre os segmentos de recta mantêm-se e, portanto,

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{DE}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

³³ **Definição** [25]: Homotetia significa ampliação ou redução das distâncias dos pontos de um espaço em relação a um ponto fixo. Uma homotetia, é definida pelo seu centro O e pela razão k de homotetia e é a aplicação afim tal que a cada ponto P faz corresponder o ponto P' tal que: $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$.

Área do Triângulo de Morley

Um facto interessante deste teorema diz respeito ao cálculo das respectivas áreas. O triângulo de Morley é obtido através da intersecção das trissectrizes dos ângulos internos de um certo triângulo. Desta forma, há uma infinidade de triângulos que dão origem ao mesmo triângulo equilátero. Assim, o valor da área do triângulo inicial não pode ficar determinado pelo valor da área do triângulo de Morley, pelo que as áreas não são directamente proporcionais.

Determine-se então a razão entre as áreas. Sabemos que a área de um triângulo é dada por

$$A = \frac{b \times h}{2}.$$

Se considerarmos um triângulo equilátero de comprimento l e altura $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, então

$$A = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2.$$

Consideremos o triângulo de Morley $\Delta[DEF]$, tal que, $l = 8r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, como foi determinado anteriormente. Então, a área do triângulo de Morley é dada por:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (8r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2 = 16\sqrt{3} r^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma. \quad (1.18)$$

Consideremos agora o $\Delta[ABC]$. Sejam $R_1 = 2r \sin(3\alpha)$, $R_2 = 2r \sin(3\beta)$ e $R_3 = 2r \sin(3\gamma)$, os comprimentos dos lados deste triângulo.

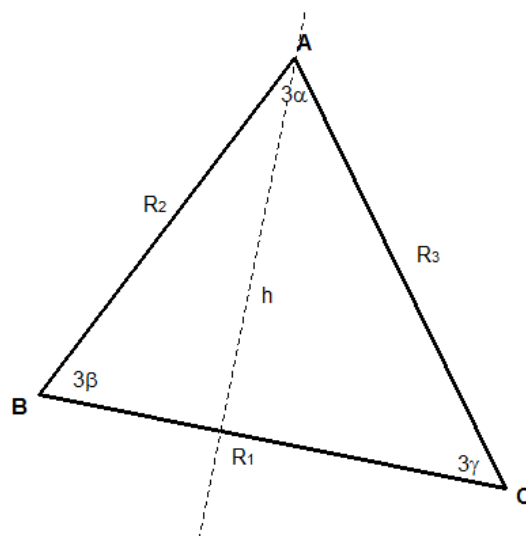


Figura 1.8: Representação da altura h do $\Delta[ABC]$, relativamente ao lado BC

Tomando como base do triângulo $[ABC]$ o lado \overline{BC} , então

$$\sin(3\gamma) = \frac{h}{2r \sin(3\beta)},$$

pelo que, a altura do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$h = 2r \sin(3\gamma) \sin(3\beta).$$

Assim, a área do $\Delta[ABC]$ é dada por

$$A = \frac{2r \sin(3\alpha) \times 2r \sin(3\gamma) \sin(3\beta)}{2} = 2r^2 \sin(3\alpha) \sin(3\gamma) \sin(3\beta). \quad (1.19)$$

Considerando (1.18) e (1.19), a razão entre as duas áreas é dada por

$$R = \frac{16\sqrt{3}r^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{2r^2 \sin(3\alpha) \sin(3\beta) \sin(3\gamma)} = \frac{8\sqrt{3} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin(3\alpha) \sin(3\beta) \sin(3\gamma)}.$$

Note-se que é possível demonstrar que o valor máximo da razão entre as áreas é $\frac{64}{3} \sin^6\left(\frac{\pi}{9}\right) \cong 0,0341$, relativamente ao caso do triângulo inicial ser equilátero. No entanto, esta demonstração não será abordada neste trabalho por envolver o estudo de funções, em particular, método dos multiplicadores de Lagrange. [7]

Capítulo 2

Versão do Teorema de Morley para Paralelogramos

No Capítulo 1 verificou-se que ao considerarmos as intersecções das trissectrizes adjacentes de um triângulo, obtemos sempre um triângulo equilátero, designado Triângulo de Morley. Consideremos agora os quatro pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes de um paralelogramo. Independentemente do paralelogramo inicial, o polígono obtido é sempre outro paralelogramo, à semelhança do que vimos.

Este paralelogramo é designado por Paralelogramo de Morley, representado na **figura (2.1)**.

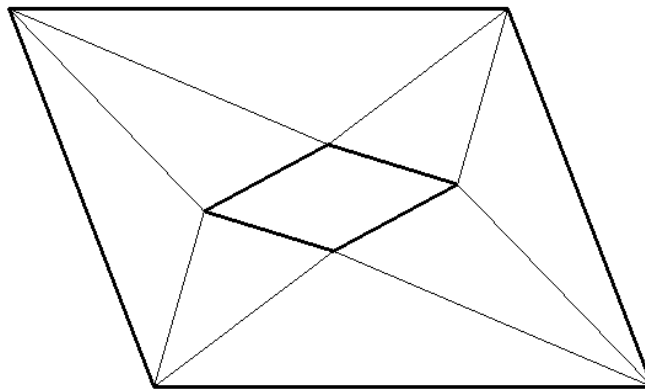


Figura 2.1: Ilustração do Paralelogramo de Morley

Construindo as intersecções das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos de um quadrilátero obtemos quatro pontos de intersecção. Unindo esses pontos podemos obter várias situações: os pontos são colineares ou são vértices de um outro paralelogramo. Se partirmos de um rectângulo, obtemos sempre um losango, e se partirmos de um losango, obtemos sempre um rectângulo. De seguida, iremos provar estes casos, supondo apenas que os quatro pontos obtidos não são colineares.

Construa-se um paralelogramo³⁴ $[ABCD]$ e os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes $E, F, G,$ e H . Una esses pontos consecutivamente, de modo a formar um quadrilátero $[14]$.

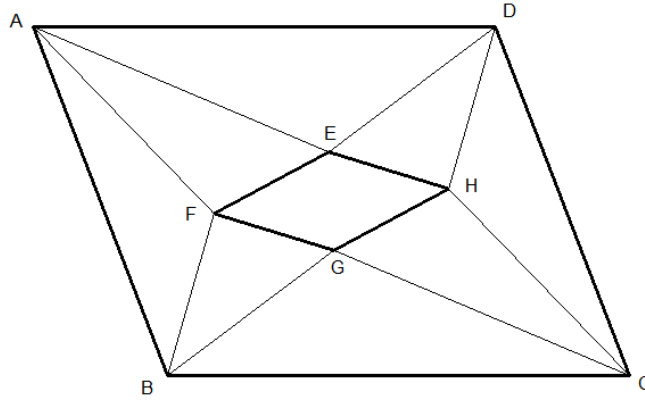


Figura 2.2: Ilustração do Paralelogramo de Morley obtido pela intersecção das trissectrizes dos ângulos internos

Consideremos os triângulos $\Delta[ADE]$ e $\Delta[BCG]$ (**Fig.2.2**). Como num paralelogramo (convexo³⁵) os ângulos opostos são congruentes, temos que $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$.

Por construção, as trissectrizes dividem cada um desses ângulos em três ângulos iguais. Por definição de paralelogramo, $AD \parallel BC$, então temos que $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CBG$. Da mesma forma, temos $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCG$.

Por outro lado, num paralelogramo os lados opostos são congruentes, pelo que, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Portanto, $\Delta[ADE] \cong \Delta[BCG]$ (critério ALA). Logo, $\overline{AE} = \overline{CG}$ e $\overline{DE} = \overline{BG}$. Analogamente, como $\sphericalangle ABF = \sphericalangle CDH$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle DCH$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, temos que, $\Delta[ABF] \cong \Delta[CDH]$ e, portanto, $\overline{AF} = \overline{CH}$ e $\overline{BF} = \overline{DH}$.

Como $\sphericalangle EAF = \sphericalangle GCH$, pelo critério LAL, $\Delta[EAF] \cong \Delta[GCH]$ (pois $\overline{AE} = \overline{CG}$, $\overline{AF} = \overline{CH}$). Logo, $\overline{EF} = \overline{GH}$. De forma análoga temos, $\overline{FG} = \overline{HE}$, pois $\Delta[FBG] \cong \Delta[HDE]$ ($\sphericalangle FBG = \sphericalangle HDE$, $\overline{BF} = \overline{DH}$ e $\overline{BG} = \overline{DE}$).

³⁴ **Definição** [21] [pág. 114]: Quadrilátero cujos lados opostos são paralelos (ângulos opostos são congruentes e lados opostos são iguais).

³⁵ **Definição** [23]: Polígono convexo, é um polígono construído de modo a que os prolongamentos dos lados nunca fiquem no interior do polígono.

Assim, conclui-se que o quadrilátero $[EFGH]$ tem os lados iguais dois a dois. Como os lados opostos deste quadrilátero são congruentes, então os ângulos opostos também são congruentes e conseqüentemente, os lados opostos são paralelos.

Portanto, o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo.

Note-se que se escolhermos outros pontos de intersecção das trissectrizes obtemos um resultado semelhante. Vejamos que escolhendo os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes de dois ângulos internos consecutivos, obtemos um losango, cujos pontos pertencem ao interior e ao exterior do polígono inicial, na **figura (2.3)** está representado pelo polígono $[HKJI]$.

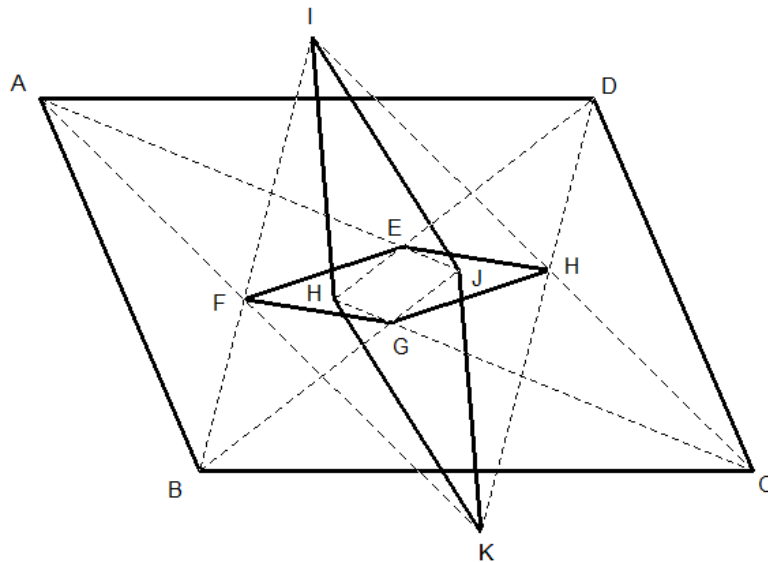


Figura 2.3

No entanto neste estudo iremos apenas analisar os casos em que os pontos pertencem ao interior do polígono inicial.

Considerem-se os dois casos particulares do paralelogramo:

Caso 1: Rectângulo

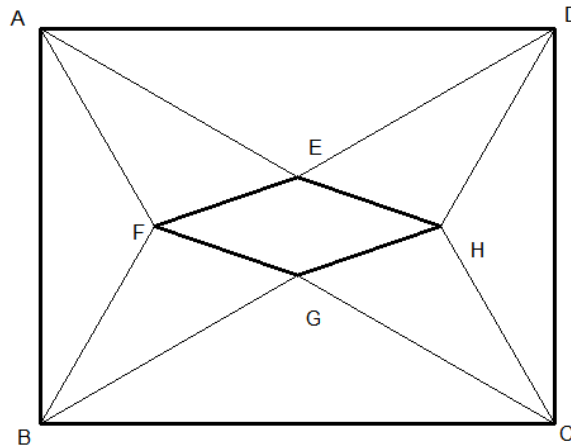


Figura 2.4

Considerando que $[ABCD]$ é um rectângulo³⁶, então todos os ângulos internos são rectos, pelo que são trissectados em ângulos de 30° . Então, os ângulos $\sphericalangle BAF$, $\sphericalangle ABF$, $\sphericalangle CBG$, $\sphericalangle BCG$, $\sphericalangle DCH$, $\sphericalangle CDH$, $\sphericalangle DAE$ e $\sphericalangle ADE$ são congruentes, pelo que, os triângulos $\Delta[AED]$, $\Delta[AFB]$, $\Delta[BGC]$ e $\Delta[CHD]$ são isósceles (**Fig.2.4**). Portanto, $\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{BG} = \overline{GC}$ e $\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{CH} = \overline{DH}$.

Como $\sphericalangle EAF = \sphericalangle FBG = 30^\circ$, $\overline{AE} = \overline{BG}$ e $\overline{AF} = \overline{BF}$, então, $\Delta[EAF] \cong \Delta[FBG]$ (critério LAL), logo $\overline{FE} = \overline{FG}$. Por outro lado, como $\Delta[EAF] \cong \Delta[GCH]$, vem que $\overline{FE} = \overline{HG}$ e da mesma forma, temos que, $\Delta[FBG] \cong \Delta[HDE]$, pelo que $\overline{FG} = \overline{HE}$.

Portanto, os lados do quadrilátero $[EFGH]$ são todos iguais, pelo que o polígono obtido é um losango.³⁷ [14]

³⁷ **Definição** [21] [pág. 114]: Quadrilátero cujos lados são todos iguais.

Caso 2: Losango

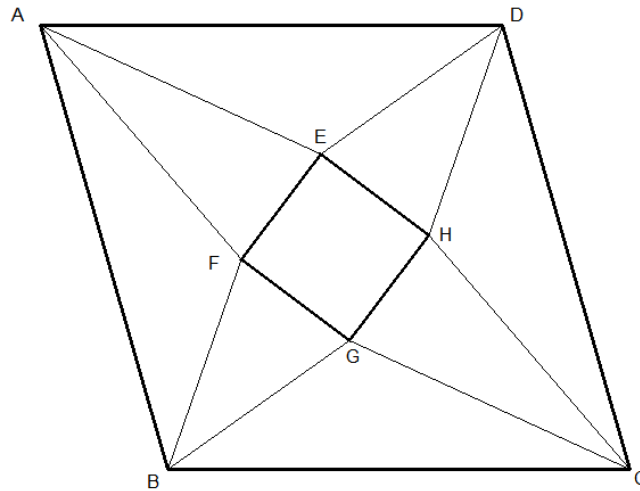


Figura 2.5

Suponhamos agora que $[ABCD]$ é um losango (**Fig.2.5**). Então $\overline{AD} = \overline{AB}$. Como $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$ e $\sphericalangle ADE = \sphericalangle FBA$ (por definição de trissectriz), então pelo critério ALA, $\Delta[ADE] \cong \Delta[ABF]$. Portanto, $\overline{AE} = \overline{AF}$. Como $\Delta[ADE] \cong \Delta[CBG]$ (pois $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCG$ e $\sphericalangle ADE \cong \sphericalangle CBG$) então os triângulos, $\Delta[ABF]$ e $\Delta[CBG]$ também são congruentes, e portanto, $\overline{BF} = \overline{BG}$. Desta forma, $\Delta[EAF]$ e $\Delta[FBG]$ são isósceles e conseqüentemente, $\Delta[GCH]$ e $\Delta[HDE]$ também são isósceles, pois são congruentes com os anteriores.

Por outro lado, temos que

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AFB = \sphericalangle BGC = \sphericalangle CHD \text{ (ângulos de quatro triângulos congruentes)}$$

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle AFE = \sphericalangle CGH = \sphericalangle CHG \text{ (ângulos de dois triângulos congruentes)}$$

$$\sphericalangle BFG = \sphericalangle BGF = \sphericalangle DHE = \sphericalangle DEH \text{ (ângulos de dois triângulos congruentes).}$$

Portanto, os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são iguais. Como a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é de 360° , conclui-se que todos os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são rectos, ou seja, $[EFGH]$ é um rectângulo. Obviamente, se $[ABCD]$ é um quadrado, então $[EFGH]$ também o é, pois $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BA} = \overline{CD}$. [14]

Área do Paralelogramo de Morley

De forma análoga ao que foi feito no Capítulo 1, podemos calcular a área do Paralelogramo de Morley. Relativamente à área deste polígono, o seu valor não fica determinado pelo valor do paralelogramo inicial, à semelhança do que acontece com a área do Triângulo de Morley.

Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ e o respectivo paralelogramo de Morley $[EFGH]$. [7]

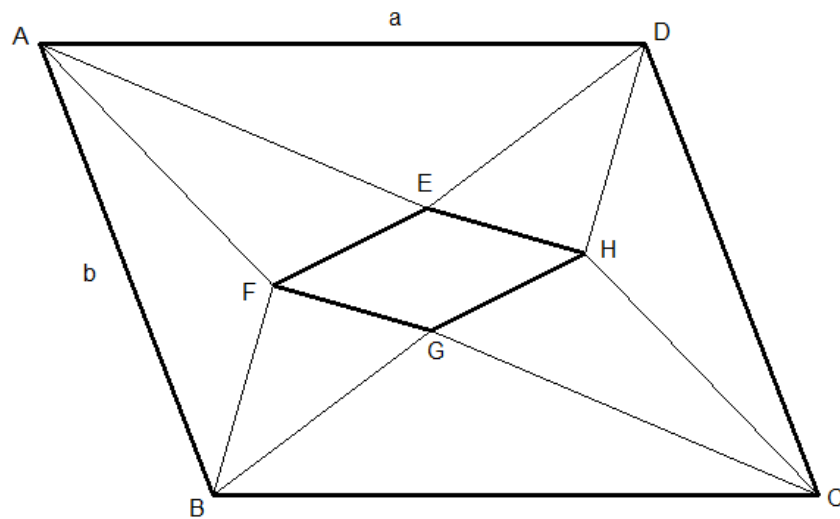


Figura 2.6

A área do paralelogramo de Morley pode ser obtida subtraindo a área do paralelogramo inicial às áreas dos triângulos $[AFB]$, $[BFG]$, $[BGC]$, $[CGH]$, $[CHD]$, $[DHE]$, $[DEA]$ e $[AEF]$. Suponha-se que os lados do paralelogramo $[ABCD]$ medem $a = \overline{AD}$ e $b = \overline{AB}$ e formam um ângulo de amplitude $\sphericalangle DAB = \alpha$ e $\sphericalangle ADC = \beta$, com $\alpha \in]0, \pi[$ e $\beta \in]0, \pi[$ (Fig.2.6). A área do paralelogramo $[ABCD]$ é dada por

$$A_{[ABCD]} = a \times b \sin \alpha. {}^{38}$$

Vamos agora calcular a área do $\Delta[ADE]$. Para isso determinem-se os lados \overline{AE} , \overline{DE} e a amplitude do ângulo AED .

³⁸ $\sin \alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \sin \alpha$

Temos que

$$\sphericalangle DAE = \frac{\sphericalangle DAB}{3} = \frac{\alpha}{3}$$

e

$$\sphericalangle ADE = \frac{\beta}{3} = \frac{\pi - \alpha}{3}.$$

pois, como soma dos ângulos internos do paralelogramo é 2π e os ângulos opostos são iguais, vem que

$$2(\alpha + \beta) = 2\pi \Leftrightarrow \beta = \alpha - \pi.$$

Relativamente ao triângulo $[ADE]$, e considerando que $\gamma = \sphericalangle DEA$, temos

$$\begin{aligned} \sphericalangle DAE + \sphericalangle AED + \sphericalangle EDA &= \pi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma + \frac{\pi - \alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} &= \pi \Leftrightarrow \gamma = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ADE]$, obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{AE}}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} \Leftrightarrow \overline{AE} = a \times \frac{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{DE}}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} \Leftrightarrow \overline{DE} = a \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

Então, a altura relativamente ao lado DA é dada por

$$h = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right),$$

pelo que a área do $\Delta[ADE]$ é dada por

$$A_{\Delta[ADE]} = \frac{a \times \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)}{2} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right).$$

De forma análoga temos que

$$A_{\Delta[ABF]} = \frac{b^2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right).$$

Como foi visto anteriormente, $\Delta[ADE] \cong \Delta[CBG]$ e $\Delta[ABF] \cong \Delta[CDH]$, logo as suas áreas são iguais. Portanto, temos que a soma das áreas destes triângulos é dada por

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right).$$

Considerem-se agora os triângulos $[AEF]$, $[DEH]$, $[CHG]$ e $[BGF]$. Pelo facto dos triângulos $[AEF]$ e $[CHG]$ serem congruentes, assim como os triângulos $[DEH]$ e $[BGF]$ temos $A_{\Delta[GCH]} = A_{\Delta[AEF]}$, bem como $A_{\Delta[DEH]} = A_{\Delta[BGF]}$.

Determinemos agora a área do $\Delta[AEF]$. Temos que a altura relativa ao lado EA é dada por

$$h = \frac{2b}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right),$$

pelo que, a área do $\Delta[AEF]$ é dada por

$$A_{\Delta[AEF]} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \times \frac{2b}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)}{2} = \frac{ab}{3} \sin^2\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

Da mesma forma obtemos

$$A_{\Delta[FBG]} = \frac{ab}{3} \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right).$$

Portanto, a soma das áreas destes triângulos é dada por

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{2}{3} ab \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \right) + 2 \left(\frac{2}{3} ab \sin^2\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right) = \\ & = \frac{4}{3} ab \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) + \frac{4}{3} ab \sin^2\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \\ & = \frac{4}{3} ab \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \left[\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{39} \frac{4}{3} ab \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \times 2 \sin\left(\frac{\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi - \alpha}{3}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi - \alpha}{3}}{2}\right) = \\
&= \frac{8}{3} ab \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{2\alpha - \pi}{6}\right) = \\
&= {}^{40} \frac{4}{3} ab \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\pi - \frac{\pi - \alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\alpha - \pi}{6}\right) = \\
&= \frac{1}{3} ab \times 4 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right) \\
&= {}^{41} \frac{1}{3} ab \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Ou seja, a soma das áreas dos triângulos é exactamente um terço da área do paralelogramo $[ABCD]$. Portanto, a área do paralelogramo $[FEHG]$ é dada por

$$\begin{aligned}
A_{[FEHG]} &= ab \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right) - \frac{1}{3} ab \sin \alpha \\
&= \frac{2}{3} ab \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right).
\end{aligned}$$

A razão entre as áreas do paralelogramo $[ABCD]$ e a área do paralelogramo $[FEHG]$ é dada por

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\frac{2}{3} ab \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)}{a \times b \sin \alpha} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)}{\sqrt{3}(a \times b \sin \alpha)} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2(a^2 + b^2) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{3}\right)}{4\sqrt{3} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right)} = \frac{2}{3} - \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right)}
\end{aligned}$$

³⁹ $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

⁴⁰ Redução ao 1º quadrante

⁴¹ Fórmula do ângulo triplo

Capítulo 3

Polígonos de Morley

O Teorema de Morley é designado por muitos como “*um dos mais surpreendentes teoremas da geometria elementar*” [15]. Ao longo deste trabalho fomos constatando que se trata sem dúvida de um resultado que pode ser explorado de diversas formas. Uma das razões da sua surpreendente beleza é o facto de obtermos sempre um triângulo equilátero, qualquer que seja o triângulo inicial, verificando-se um resultado análogo no caso dos paralelogramos. É ainda possível verificar que qualquer polígono regular é um Polígono de Morley, excepto no caso que foi visto anteriormente do rectângulo (não quadrado), que não é um quadrilátero de Morley.

Neste capítulo vamos generalizar o Teorema de Morley, explorando alguns Polígonos de Morley e caracterizando-os. Defina-se *Polígono de Morley*, por um polígono de n lados (não necessariamente regular), cujas trisectrizes internas adjacentes intersectam-se, formando um polígono regular com o mesmo número de lados [16]. Neste sentido, podemos distinguir dois tipos de Polígonos de Morley: Ordinais (triviais ou não triviais) e “Snnagled”. Vamos apenas apresentar o método de construção destes polígonos, a demonstração de que este método é válido, deixamos para estudos futuros [16].

Polígonos de Morley Ordiniais (triviais ou não triviais)

Segundo F.P. Callahan [16], é mais fácil partir do polígono regular e construir o polígono de Morley à sua volta, do que trissecar os seus ângulos internos, como tem sido feito nas construções aqui apresentadas. A construção destes polígonos baseia-se na escolha particular de três ângulos, designados por ângulos geradores, e no número de lados do polígono regular. Vejamos então como são construídos estes polígonos:

Consideremos um polígono regular de lado n , com n divisível por 3. Escolham-se três ângulos quaisquer α, β, γ , tais que

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \theta \\ \theta < \alpha < \frac{2\pi}{3} + \theta \\ \theta < \beta < \frac{2\pi}{3} + \theta \\ \theta < \gamma < \frac{2\pi}{3} + \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

e onde θ é definido por

$$\theta = \frac{\pi}{n}.$$

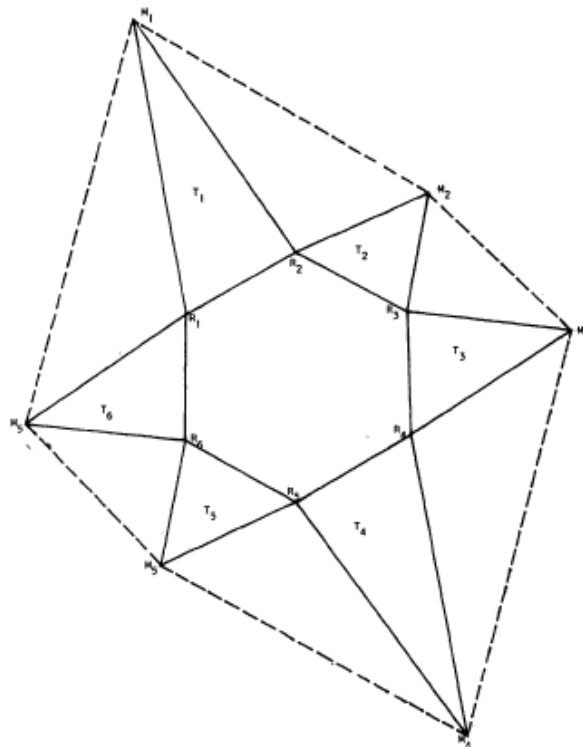
Depois, sobre os lados do polígono regular constroem-se triângulos cujos ângulos da base são respectivamente $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), \dots$ e assim sucessivamente, no sentido horário e com periodicidade de três. Unindo os vértices dos triângulos obtemos um polígono, designado *Polígono de Morley Ordinário não trivial* (não regular). Quando n não é divisível por três, a construção falha para os valores dos ângulos geradores α, β, γ , pelo facto de não se manter a periodicidade dos mesmos. Neste caso, a construção só é possível considerando

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi + \theta}{3}. \quad (3.2)$$

Este polígono também é designado *Polígono de Morley ordinário*, mais particularmente, *Polígono trivial* (regular) [16].

Vejamos alguns exemplos:

Os casos que foram estudados, no Capítulo 1 e 2, são dois exemplos de *Polígonos de Morley não triviais*, apesar de a construção não partir do polígono regular como é sugerido anteriormente. É fácil verificar que as condições anteriores são válidas, por exemplo para o hexágono apresentado na **figura (3.1)**, onde $n = 6$ (divisível por 3) e $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 55^\circ$.

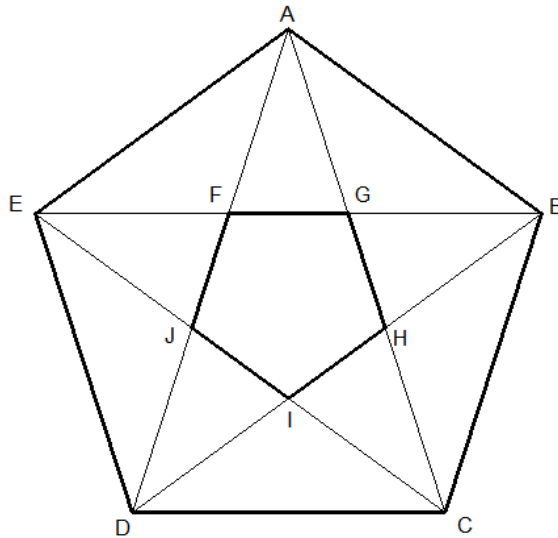


**Figura 3.1: Ilustração do Hexágono de Morley –
- Configuração ordinária não trivial [16]**

Vejamos mais alguns exemplos [16] de *polígonos de Morley triviais*, isto é, polígono regular cujos pontos de intersecção das trisectrizes formam um polígono regular:

Exemplo 1: Consideremos o pentágono, com $n = 5$. Vamos primeiro provar que o polígono $[FGHIJ]$ é regular.

Se dividirmos os seus ângulos internos em três partes iguais, obtemos um polígono regular com o mesmo número de lados, como se apresenta na **figura (3.2)**.



**Figura 3.2: Ilustração do pentágono de Morley –
- Configuração ordinal trivial**

Neste caso, temos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $108^{\circ 42}$, aplicando o critério LAL, temos

$$\Delta[AGB] \cong \Delta[BHC] \cong \Delta[CID] \cong \Delta[DJE] \cong \Delta[EFA] \quad (3.3)$$

pois, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$ e os ângulos adjacentes a esses lados são iguais, por serem obtidos através da trissecção dos ângulos internos do pentágono $\left(\frac{108^{\circ}}{3} = 36^{\circ}\right)$.

Além disso, estes triângulos são isósceles.

Por outro lado, pelo critério LAL, temos

$$\Delta[AFG] \cong \Delta[BGH] \cong \Delta[CHI] \cong \Delta[DIJ] \cong \Delta[EJF]$$

⁴² **Definição** [26]: Para um polígono regular de n lados, o ângulo formado por dois lados adjacentes é dado por: $\frac{(n-2)180^{\circ}}{n}$

dado que, todos estes triângulos têm um ângulo igual, obtido pela trissecção dos ângulos internos do pentágono e para além disso, os lados adjacentes a esse ângulos são iguais, isto é,

$$\overline{AG} = \overline{GB} = \overline{BH} = \overline{HC} = \overline{CI} = \overline{ID} = \overline{DJ} = \overline{JE} = \overline{EF} = \overline{FA}.$$

Visto que, por **(3.3)** são lados de triângulos congruentes, também são isósceles. Desta forma, $\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JF}$. Como os seus ângulos internos são iguais⁴³, então o polígono obtido é um pentágono regular.

De acordo com as condições referidas em **(3.1)**, podemos observar que como $n = 5$ não é divisível por 3, temos

$$\theta = \frac{\pi}{5} (= 36^\circ)$$

e

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi + \frac{\pi}{5}}{3} = \frac{6\pi}{15} (= 72^\circ),$$

pelo que, o pentágono de Morley é caracterizado como ordinal trivial.

Exemplo 2: Se considerarmos o caso do hexágono, $n = 6$ lados (**Fig. 3.3**), como n é divisível por 3, analogamente se prova que o polígono obtido é regular. Podemos observar que, neste caso,

$$\theta = \frac{\pi}{6} (= 30^\circ)$$

e

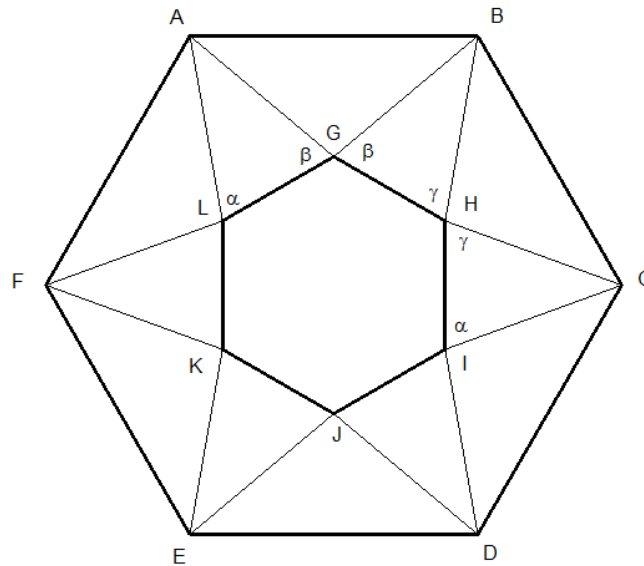
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{5\pi}{6}$$

⁴³ $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle G = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle G = 108^\circ$ e $180^\circ - \sphericalangle G = 72^\circ$, pelo que, $\sphericalangle FGH = 108^\circ$. Verifica-se que os ângulos internos do pentágono $[FGHIJ]$ medem todos 108° .

$$\frac{\pi}{6} < \gamma < \frac{5\pi}{6}.$$



**Figura 3.3: Ilustração do hexágono de Morley –
- Configuração ordinal trivial**

Mais geralmente, partindo de um polígono regular de n lados, vamos obter sempre outro polígono regular com o mesmo número de lados, mas de dimensão menor [14]. De forma análoga, partindo de um polígono qualquer de n lados (não necessariamente regular), obtemos sempre um polígono regular de n lados.

Polígonos de Morley “Snaggled”

Podemos obter outros polígonos através dos polígonos de Morley Ordinais, por um processo designado “snagging”. Este processo tem em conta algumas condições [16], como apresentamos de seguida.

Sejam,

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \beta < \frac{\pi}{2}$$

e

$$\gamma - \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma < \frac{\pi}{3} + \theta,$$

com,

$$\theta = \frac{\pi}{n}$$

os ângulos considerados de um polígono de Morley ordinal. Considerem-se os exemplos apresentados nas **figuras (3.4) e (3.5)**.

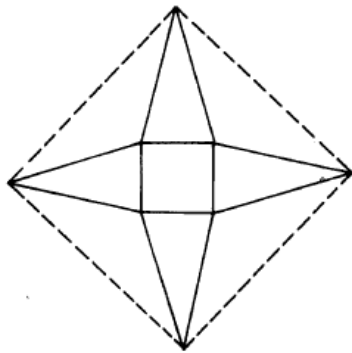


Figura 3.4: Ilustração do quadrado de Morley [16]

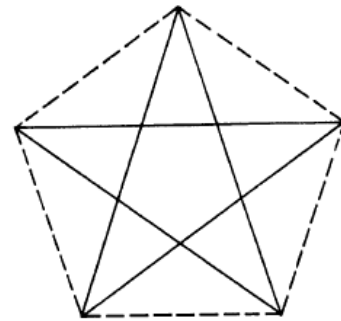


Figura 3.5: Ilustração do pentágono de Morley [16]

Seleccionando três “braços”⁴⁴ adjacentes e substituindo os ângulos da base por (β', γ') , (α', β') e (γ', α') onde α', β', γ' são as amplitudes dos ângulos dos novos braços do polígono, em que

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} + \theta - \beta$$

⁴⁴ Triângulos isósceles

$$\beta' = \frac{\pi}{2} + \theta - \alpha$$

$$\gamma' = \pi - \gamma$$

e considerando que

$$\theta = \frac{\pi}{n}$$

obtemos as seguintes configurações (Fig. 3.5 e Fig. 3.6).

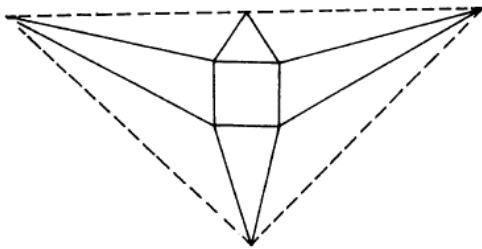


Figura 3.5: Ilustração do quadrado de Morley “snaggled” trivial [16]

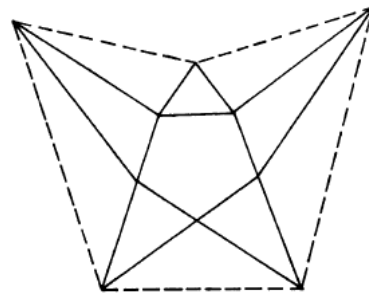


Figura 3.6: Ilustração do pentágono de Morley “snaggled” trivial [16]

Estas e outras configurações possíveis para os polígonos de Morley, são apresentadas na tabela seguinte [16]:

Tabela 3.1

n	Ângulos geradores				Ângulos “snaggled”		
	θ	α	β	γ	α'	β'	γ'
3	60°	80°	80°	80°	70°	70°	100°
4	45°	75°	75°	75°	60°	60°	105°
5	36°	72°	72°	72°	54°	54°	108°
6	30°	70°	70°	70°	50°	50°	110°
7	25,7°	68,6°	68,6°	68,6°	47,1°	47,1°	111,4°
8	22,5°	67,5°	67,5°	67,5°	45°	45°	112,5°

A configuração resultante depois do processo “snagging” ainda é uma configuração de Morley (Fig. 3.5 e Fig. 3.6). Este processo pode ser repetido várias vezes como é apresentado na figura (3.7).

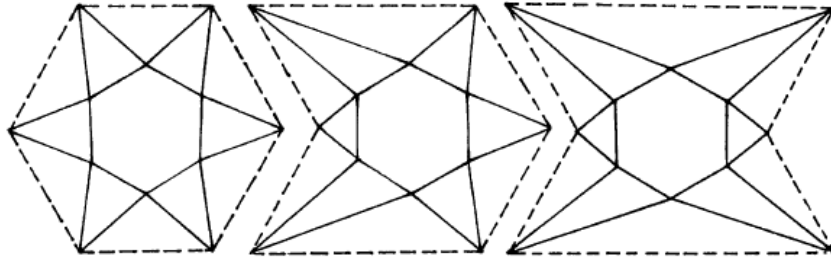


Figura 3.7: Ilustração do hexágono de Morely – configuração trivial ordinal e “snaggled” [16]

Outras configurações

Em alguns dos casos anteriores, usou-se apenas o facto de o polígono inicial ser regular e a divisão dos seus ângulos internos em três partes iguais dar origem a ângulos iguais. Se dividirmos qualquer um dos ângulos internos de um polígono regular em 3 partes, não necessariamente iguais, e repetirmos o processo para os restantes ângulos, continuamos a obter um polígono regular com o mesmo número de lados [7].

Considere-se o hexágono da **figura (3.3)**. Neste caso, podemos observar (**Fig. 3.8**) que o hexágono $[GHIJKL]$ sofre uma rotação⁴⁵ de centro no centro do hexágono $[ABCDEF]$ e amplitude $\alpha = 90^\circ$.

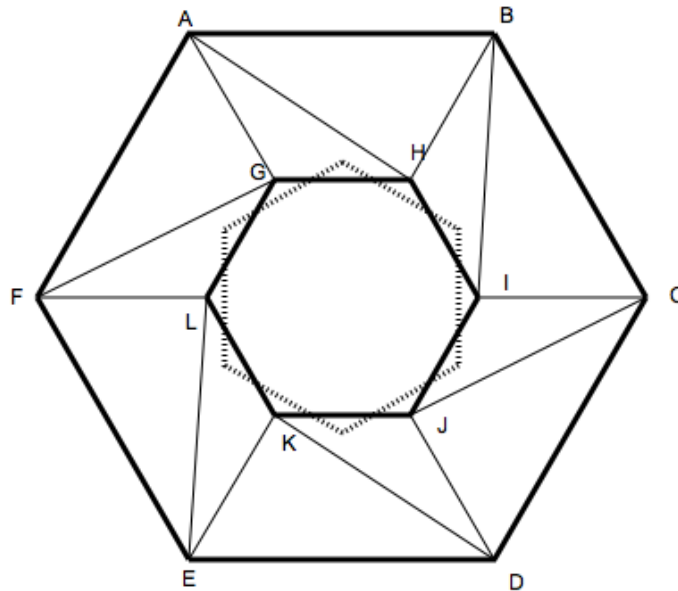


Figura 3.8: Ilustração do hexágono de Morley obtido pela divisão dos ângulos internos em três partes não iguais

Muitas mais configurações podem ser obtidas, basta considerar outras amplitudes para os ângulos e que deixamos em aberto para futuros estudos sobre este tema.

⁴⁵ **Definição:** Rotação é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura mantém as distâncias entre pontos, os ângulos mantêm a sua amplitude e os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais.

Capítulo 4

Aplicação ao Ensino

O Ensino da Geometria tem evoluído bastante com a introdução das Novas Tecnologias tendo como objectivo principal desenvolver no aluno a capacidade de explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, bem como a capacidade de formular e resolver problemas abstractos. Neste sentido, cabe ao professor propor actividades de construção e manipulação de modelos, ligadas a problemas históricos e que desenvolvam essas mesmas capacidades.

O Novo Programa de Matemática, além de dar importância à utilização das Novas Tecnologias, valoriza o conhecimento de problemas históricos propondo a resolução de pelo menos um desses problemas, como é o caso do Teorema de Pitágoras. O professor deve dar a conhecer um pouco da História da Geometria, à qual estão ligados os maiores matemáticos de todos os tempos, como Euclides, Arquimedes, Newton, entre muitos outros, não só pela sua verdadeira importância mas também para que os alunos conheçam as origens da matemática.

No entanto, a História de Geometria não se reduz à Geometria de Euclides e não se justifica que os alunos apenas conheçam o Teorema de Pitágoras, abordado no 8º ano, ou o Teorema de Tales, abordado no 7º ano.

O GTG (Grupo de Trabalho de Geometria) propõe em [17], o desenvolvimento de outros tópicos, tais como, experiências de Arquimedes na comparação de áreas e volumes, os problemas clássicos da geometria e uma lista de teoremas posteriores a Euclides, de enunciados simples e intrigantes, que podem ser redescobertos pelos alunos com recurso a um programa de geometria dinâmica e dos quais referem por exemplo, o Teorema de Ceva, Teorema de Napoleão, Teorema de Morley, entre outros.

Neste capítulo, propomos uma actividade didáctica de apoio ao professor e de orientação para o aluno, onde são apresentadas instruções de utilização do GeoGebra na abordagem dos conteúdos matemáticos apresentados. O Geogebra é um software de acesso livre e trata-se de uma aplicação que permite criar um ambiente de geometria dinâmica, abordando diversos conteúdos da geometria em todos os níveis de ensino. O

uso deste software, através da construção interactiva de figuras e objectos, permite aos alunos desenvolver a capacidade de compreensão, por meio da visualização e percepção dinâmica das propriedades, bem como a capacidade de dedução de conceitos.

Desta forma, a actividade proposta pode ser aplicada no 3º ciclo, mais especificamente no 9º ano, pois recorre fundamentalmente a conceitos abordados no 7º e 8º ano. Inicialmente é proposto, que o professor faça uma revisão do conceito de bissetriz, recorrendo ao GeoGebra. Este conceito é introduzido, essencialmente para que seja mais fácil ao aluno deduzir o conceito de *trissectriz de um ângulo*, conceito que não faz parte do programa, mas que pode ser introduzido como uma generalização da divisão de um ângulo em partes iguais.

Através da construção dinâmica do triângulo de Morley e de outras figuras geométricas, o aluno deve ser capaz de deduzir que esse triângulo é obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos do triângulo inicial.

Guia da Actividade para o professor

Actividade – Teorema de Morley [18]

Propósito da actividade:

A proposta seguinte pode ser aplicada no 9º ano, no capítulo **Isometrias**, com o objetivo de dar a conhecer ao aluno mais um resultado interessante da Geometria, o **Teorema de Morley**. Inicialmente, será revisto o conceito de *bissectriz de um ângulo*, introduzido no 6º ano, no capítulo **Circunferência – lugares geométricos**, e o conceito de *incentro*, introduzido no 8º ano, no capítulo, **Pontos notáveis de um triângulo**.

Através da construção de alguns exemplos, pretende-se que o aluno consiga estabelecer conceitos e deduzir conclusões acerca do teorema. Pretende-se ainda que desenvolvam a capacidade de observação, de comunicação e elaboração de estratégias na resolução da actividade.

Material:

- Computador com o software de Geometria Dinâmica, GeoGebra.
- Proposta de Actividade.

Pré-requisitos:

- conceito de bissectriz de um ângulo;
- incentro de um triângulo;
- conceito de rotação em torno de um ponto, com uma dada amplitude;
- triângulo equilátero;
- amplitude de um ângulo;
- rotação em torno de um ponto, com uma amplitude;
- conceito de semi-recta.

Apresentação:

O ficheiro cujo nome é “*bissectriz*”, criado pelos alunos através do GeoGebra, apresenta o incentro do triângulo $[ABC]$. O triângulo pode ser facilmente manipulado através do arraste com o rato dos seus vértices. Ao movimentar os vértices do $\Delta[ABC]$, a amplitude dos ângulos internos vai-se alterando. Desta forma, o aluno pode verificar que as semi-rectas traçadas (bissectrizes do triângulo) dividem os ângulos internos em dois ângulos iguais e que se intersectam num único ponto (incentro do triângulo).

De seguida, solicita-se ao aluno que crie outro ficheiro com o nome “*trissectriz*”. Este ficheiro apresenta um triângulo $[ABC]$ e as trissectrizes dos seus ângulos internos. De igual forma, os vértices do triângulo podem ser manipulados, permitindo ao aluno deduzir mais facilmente a definição de trissectriz.

Posteriormente, o aluno deve abrir o ficheiro “*trissectriz*”, criando um novo ficheiro com o nome “*morley*”. Este novo ficheiro apresenta dois triângulos, o $\Delta[ABC]$ e o $\Delta[EFG]$. O triângulo $[ABC]$ é manipulável, de forma a alterar as amplitudes dos seus ângulos internos e os comprimentos dos seus lados. Desta forma, o aluno facilmente consegue intuir que o triângulo $[EFG]$ é equilátero. Consequentemente, o aluno reconhecerá que alterando as amplitudes dos ângulos do $\Delta[ABC]$, $\Delta[EFG]$ mantém-se equilátero.

Para consolidação dos conhecimentos, solicita-se ao aluno que abra os ficheiros “*quadradormorley*” e “*pentagonomorley*”. Por observação destes exemplos, o aluno deve ser capaz de intuir que obtém um polígono regular, com o mesmo número de lados do polígono dado.

Guia de Utilização para a sala de aula:

1. Inicie o software GeoGebra.
2. Crie o ficheiro “*bissectriz*”, seguindo os passos da proposta apresentada.
3. Utilizando a seta para poder seleccionar objectos, coloque o cursor do rato sobre um vértice do triângulo e premindo sempre o botão esquerdo do rato arraste-o de forma a alterar a localização desse vértice. Pode executar o mesmo procedimento para qualquer um dos vértices do triângulo. A amplitude de cada ângulo do triângulo modifica-se, conforme a localização dos vértices.

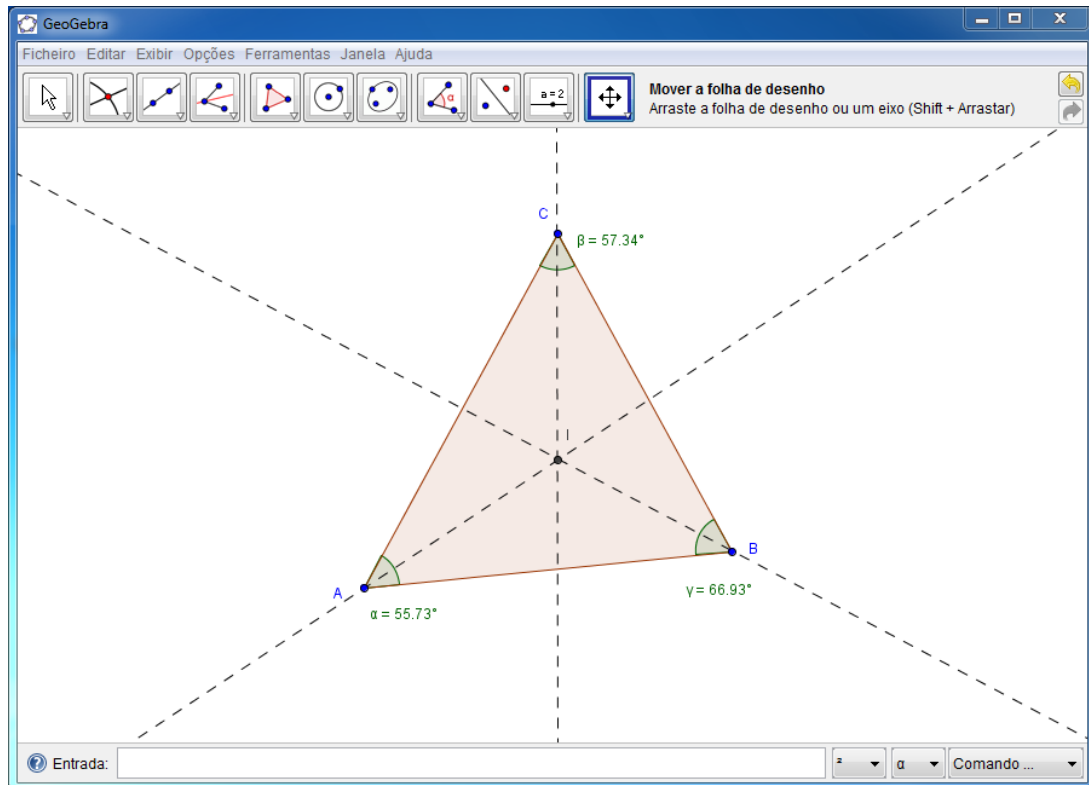


Figura 4.1: Construção do incentro do $\Delta[ABC]$

Pergunta aos alunos (P): Dado um triângulo qualquer, sabe-se que as bissetrizes (semi-rectas que dividem os ângulos internos de um triângulo em duas partes iguais) interseccionam-se num único ponto. Como se designa esse ponto?

Resposta esperada (Re): Incentro.

(P): O que acontece agora se dividirem os ângulos do triângulo em três partes iguais?

Vamos ver o que acontece:

4. Crie o ficheiro “*trissectriz*”, seguindo os passos da proposta apresentada. Clique em “*Nova Janela*” no menu “*Ficheiro*”.

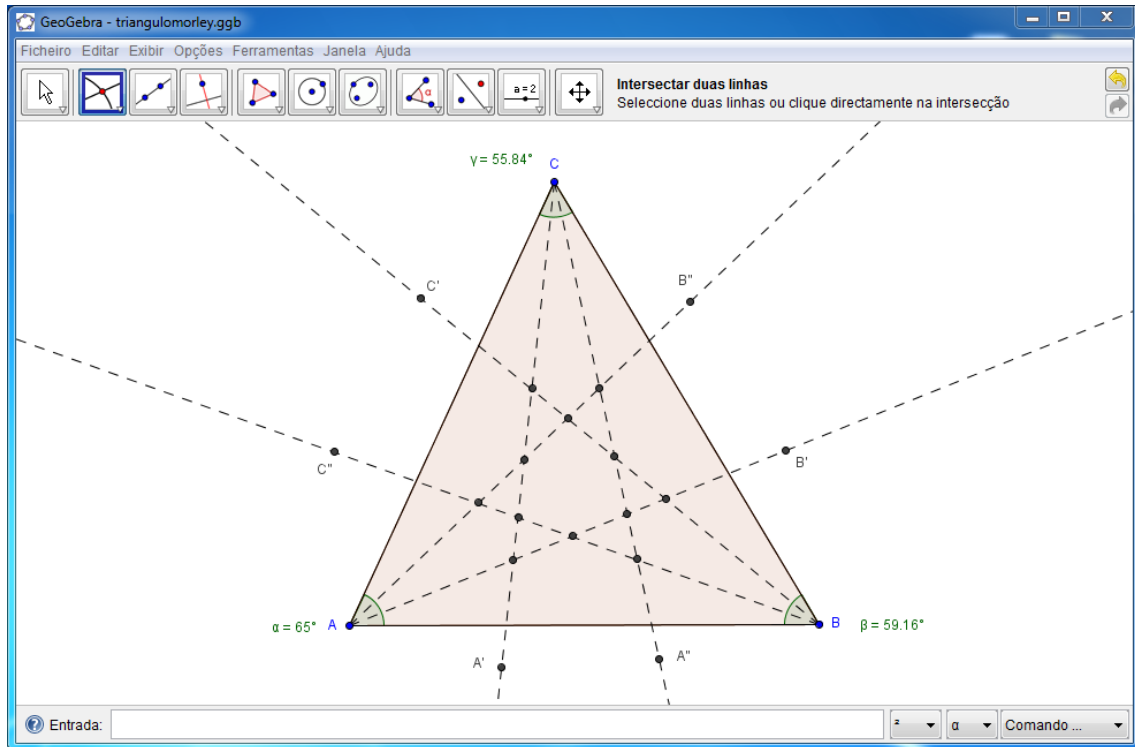


Figura 4.2: Construção das trissectrizes internas do $\Delta[ABC]$

(P): De acordo com a definição de bissectriz e considerando a construção anterior, podem escrever uma definição de trissectriz?

(Re): As trissectrizes de um ângulo são as semi-rectas que têm origem no vértice do ângulo que o divide em três partes iguais.

Afirmção:

Então, para cada vértice do triângulo $[ABC]$ temos duas trissectrizes distintas, que se intersectam em 12 pontos distintos.

- Abra o ficheiro com o nome “*trissectriz*”. Seguindo os passos da proposta apresentada, crie um novo ficheiro com o nome “*morley*”.

(P): O que acontece se unirem os pontos de intersecção obtidos pela intersecção das trissectrizes adjacentes?

(Re): Obtemos um triângulo.

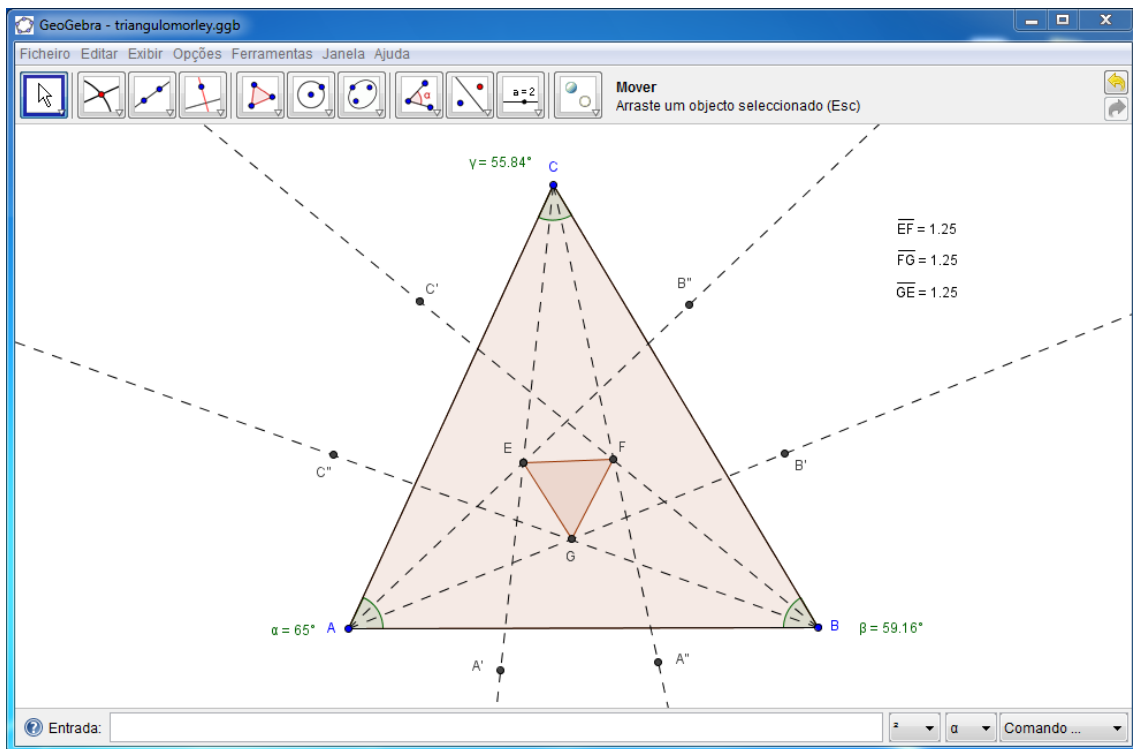


Figura 4.3: Construção do triângulo de Morley $\Delta[EFG]$

(P): Como classificas esse polígono?

(Re): Triângulo equilátero.

(P): Manipula o triângulo $[ABC]$. O que observas relativamente ao triângulo $[EFG]$?

(Re): Mantém-se equilátero.

A actividade será concluída com uma síntese do professor escrita no quadro para que os alunos tomem apontamentos:

O triângulo $[EFG]$ designado por **Triângulo de Morley**, pois é obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Para consolidares conhecimentos:

- Escolha no menu **Ficheiro** a opção **Abrir** e abra os ficheiros “**quadradoromorley**” e “**pentagonomorley**”.

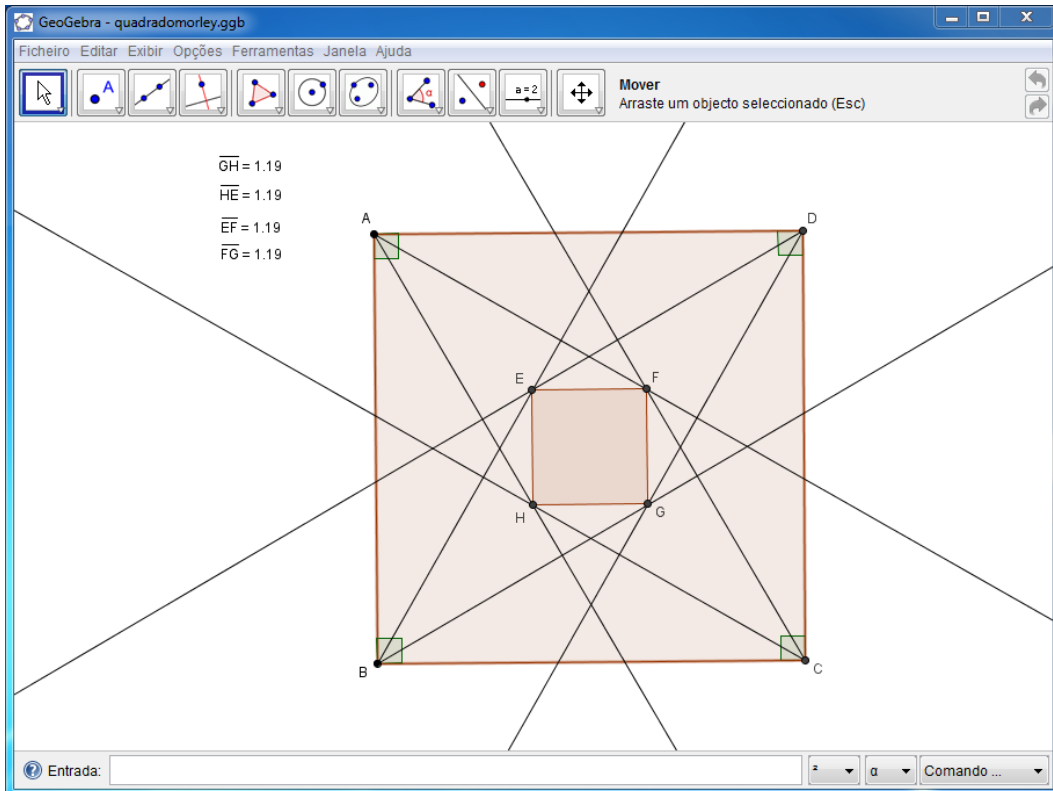


Figura 4.4: Construção do quadrado de Morley [EFGH]

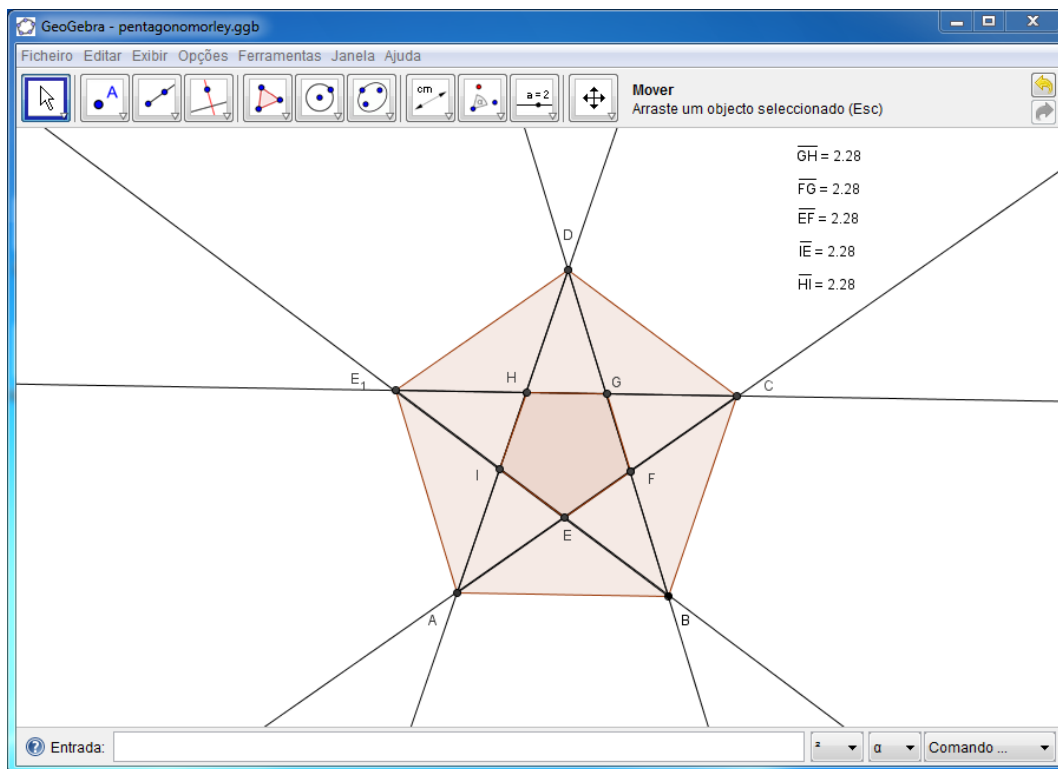


Figura 4.5: Construção do pentágono de Morley [EFGHI]

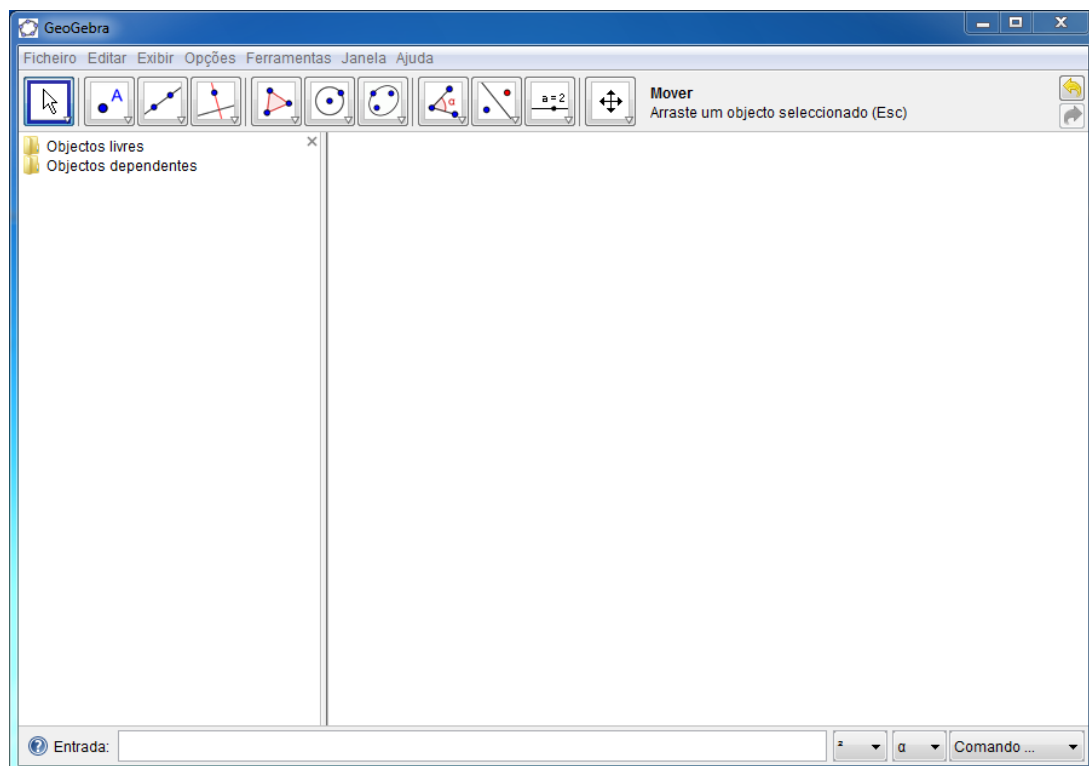
Ficha Orientadora para o aluno

Tarefas usando o programa GeoGebra

Nestas tarefas vai usar um programa de Geometria Dinâmica, o *GeoGebra*. Para isso, deve seguir as instruções dadas.

Reconhecimento do programa

Ao acessar ao programa, temos uma janela como a seguinte:

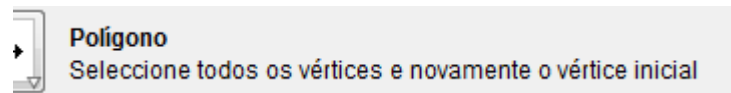


Observamos que a janela inicial está dividida em duas: à esquerda a *zona algébrica*, onde são descritos os objectos algebricamente e que pode ser fechada se necessário; à direita a *zona geométrica*, onde está representado o plano euclidiano e onde se situam os objectos a serem manipulados.

Na *barra de ferramentas* estão disponíveis nove menus e cada um deles dispõe de vários modos de trabalho. Em cada uma dos botões da barra de ferramentas existe uma pequena seta que permite visualizar todas as opções dessa categoria de ferramentas.



Na barra de estado, à direita da barra de ferramentas, o utilizador pode verificar o modo seleccionado, assim como obter algumas instruções do modo.



Instruções gerais

- No menu **Exibir**, esconda os *“Eixos coordenados”*.
- Para apagar um objecto “indesejado”, basta clicar sobre ele com o botão direito do rato e seleccionar *“Apagar”*.
- Após a realização de cada uma das actividades poderá observar os passos realizados através da selecção *“Protocolo de construção”* do menu **Exibir**
- Leia atentamente cada instrução até ao fim.

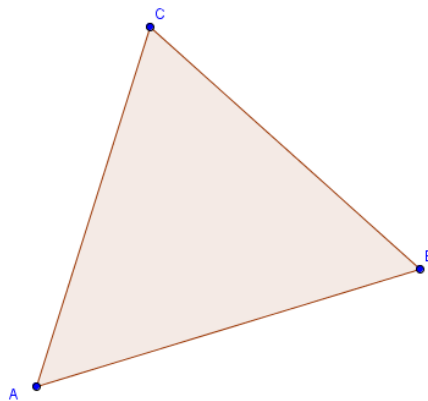
Tarefa – Teorema de Morley

- 1) Constrói o triângulo $[ABC]$.

Para isso:



Selecciona “*polígono*”, na caixa de ferramentas e constrói o triângulo $[ABC]$ seleccionando todos os vértices.



- 2) Traça as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Para isso:




Selecciona “*bissectriz*” na caixa de ferramentas e selecciona os três pontos que definem os respectivos ângulos internos do $\Delta[ABC]$.

- 3) Marca o ponto de intersecção das bissetrizes (ponto I) com ajuda da ferramenta



“*intersectar duas linhas*”.

- 4) Clica no botão  “*ângulo*” e mede as amplitudes dos ângulos internos do $\Delta[ABC]$.

- 5) Grava o ficheiro com o nome “*bissectriz*”.

Mantém a Janela do Geogebra aberta e responde às seguintes perguntas


a) Completa:

A _____ de um ângulo é a semi-recta que tem origem no _____ do ângulo e divide o ângulo em _____ ângulos iguais.

As _____ intersectam-se num ponto cujo nome é _____ do triângulo.


6) Cria um novo ficheiro, seleccionando **“Nova Janela”** no menu **“Ficheiro”**.

7) Constrói o $\Delta[ABC]$, como procedes te em 1).

8) Clica no botão  **“ângulo”** e mede as amplitudes dos ângulos internos do $\Delta[ABC]$.


9) Traça as trissectrizes dos ângulos internos do $\Delta[ABC]$. Determina a imagem do ponto B na rotação $R(A, \alpha/3)$ e a imagem do ponto B' na rotação $R(A, \alpha/3)$.

Para isso:


- Selecciona  **“rodar em torno de um ponto com uma amplitude”** e determina o ponto B' , imagem do ponto B .
- Analogamente, determina o ponto B'' , imagem do ponto B' (rotação do ponto B' em torno do ponto A com amplitude $\alpha/3$).

10) Determina a imagem do ponto A na rotação $R(C, \gamma/3)$ e a imagem do ponto A' na rotação $R(C, \gamma/3)$, pelo processo descrito no ponto anterior.

11) Repete o processo para determinares a imagem do ponto C na rotação $R(B, \beta/3)$ e a imagem do ponto C' na rotação $R(B, \beta/3)$.

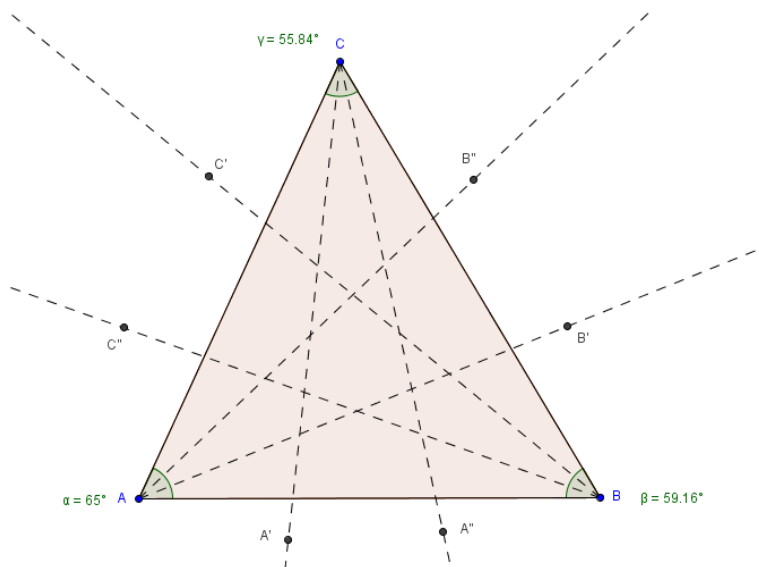
12) Clica em  **“semi-recta definida por dois pontos”** e traça as seguintes semi-rectas: $\hat{A}B', \hat{A}B'', \hat{B}C', \hat{B}C'', \hat{C}A', \hat{C}A''$.

13) Grava o ficheiro com o nome **“trissectriz”**.

- 14) Utilizando a seta  para poder seleccionar objectos, coloca o cursor do rato sobre um vértice do triângulo e premindo sempre o botão esquerdo do rato arrasta-o de forma a alterar a localização desse vértice. Podes executar o mesmo procedimento para qualquer um dos vértices do triângulo. A amplitude de cada ângulo do triângulo modifica-se, conforme a localização dos vértices.

Mantém a Janela do Geogebra aberta e responde às seguintes perguntas

b) Observe o triângulo $[ABC]$.



Complete:

$\sphericalangle BAC =$ _____

$\sphericalangle ACB =$ _____

$\sphericalangle CBA =$ _____

$\sphericalangle BAB' =$ _____

$\sphericalangle ACA' =$ _____

$\sphericalangle CBC' =$ _____

$\sphericalangle B'AB'' =$ _____

$\sphericalangle A'CA'' =$ _____

$\sphericalangle C'BC'' =$ _____

$\sphericalangle B''AC =$ _____

$\sphericalangle A''CB =$ _____

$\sphericalangle C''BA =$ _____

$\sphericalangle BAC =$ _____ \times $\sphericalangle BAB'$

$\sphericalangle ACB =$ _____ \times $\sphericalangle A'CA''$

$\sphericalangle CBA =$ _____ \times $\sphericalangle C''BA$

- c) Tendo em conta a definição de **bissetriz** e os resultados anteriores, completa a seguinte afirmação:


A trissectriz de um ângulo é _____ que têm origem no vértice do ângulo e _____ o ângulo em _____.

- 15) Abre o ficheiro "**trissectriz**", marca os pontos de intersecção das semi-rectas traçadas em 12), com ajuda do botão



"**intersectar duas linhas**", da seguinte forma:

- Intersecção de AB' com BC'' - ponto E
- Intersecção de BC' com CA'' - ponto F
- Intersecção de CA' com AB'' - ponto G


- 16) Une os pontos E, F, G , usando a ferramenta  "**segmento definido por dois pontos**".


- 17) Guarda o ficheiro com o nome "**morley**".

Mantém a Janela do Geogebra aberta e responde às seguintes perguntas

- d) Mede os ângulos internos do polígono $[EFG]$ e o comprimento dos seus lados, utilizando os botões



"**ângulo**" e  "**distância, comprimento ou perímetro**", respectivamente. Como classificas o polígono $[EFG]$?

- e) Com a opção de selecção activa , arraste os vértices do triângulo $[ABC]$, pontos A, B e C , para alterar a amplitude dos ângulos do triângulo, e o comprimento dos seus lados. O que observas relativamente aos triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$?

Conclusão

O triângulo $[EFG]$ é designado por **Triângulo de Morley**, pois é obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

A este resultado dá-se o nome de **Teorema de Morley**.

Para consolidares conhecimentos:

Escolhe no menu **Ficheiro** a opção **Abrir** e abre os ficheiros “**quadradomorley**” e “**pentagonomorley**”. Verifica se os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos formam um polígono regular como no caso do triângulo. Como classificas esses polígonos?

Sítios na Internet para pesquisares mais sobre o **Teorema de Morley**:

@ <http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>

@ <http://www.atractor.pt/mat/morley/index.htm>

Conclusão

Após terminado o estudo sobre o Teorema de Morley, concluímos que se trata de uma demonstração que envolve propriedades e conceitos básicos da Geometria e Trigonometria. Os objectivos traçados inicialmente foram atingidos, no entanto, o estudo deste tema não se limita ao estudo aqui apresentado, deixando algumas questões por estudar, resolver, desenvolver.

No Capítulo 1, foram apresentadas duas formas de provar a validade deste resultado, no entanto, através da Álgebra ou da Teoria de Grupos, podemos igualmente provar o teorema. A primeira demonstração apresentada, foi desenvolvida a partir do estudo elaborado por M. T. Naraniengar e apesar de envolver conceitos básicos da geometria elementar (critérios de semelhança de triângulos, ângulos internos de um triângulo), requer a aplicação de dois teoremas que não são tão elementares.

A demonstração trigonométrica, apesar de ser simples, envolve cálculos e desenvolvimento de fórmulas, tal como a fórmula do ângulo triplo, que exigem algum cuidado e atenção particulares. Ainda neste capítulo foi desenvolvido o estudo dos Triângulos de Morley, que é essencialmente uma generalização do teorema para os ângulos externos do triângulo inicial. Com este estudo, concluiu-se, no final deste capítulo, que não há apenas um triângulo equilátero, obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes do triângulo $[ABC]$.

No capítulo 2, verificou-se ainda a validade do teorema para paralelogramos, sendo por isso estudados dois casos particulares, do rectângulo e do losango, e onde foram apenas aplicadas propriedades básicas dos paralelogramos, na demonstração apresentada.

No capítulo 3, definiu-se Polígono de Morley e chegou-se à conclusão, contrariamente ao que foi deduzido nos capítulos anteriores, que o Polígono de Morley não é o que é obtido pela intersecção das trissectrizes, mas sim o polígono inicial. Foram apresentados alguns exemplos dos diferentes polígonos e as condições necessárias para a sua construção.

Finalmente, foram propostas algumas tarefas didáticas de aplicação do teorema ao ensino da Matemática. Foi apresentada uma ficha de orientação para o professor, onde se desenvolveu um conjunto de actividades sobre o Teorema de Morley, recorrendo ao GeoGebra, acompanhadas por um conjunto de questões e respostas esperadas pelos alunos, e que pode ser ajustada e adaptada caso o professor ache necessário.

Foi ainda apresentada uma ficha orientadora para o aluno, que contém um Guia rápido do GeoGebra e um documento de ampliação, onde são dadas instruções de orientação ao aluno, para o estudo do teorema. O objectivo principal desta ficha é dar a conhecer outro teorema interessante e que não faz parte do Programa de Matemática do 3º ciclo, mas que pode cativar os alunos na descoberta da Matemática

Ao longo de todo o trabalho, teve-se algum cuidado especial na apresentação de todas as justificações necessárias nas demonstrações, de modo a que a leitura do trabalho se torne acessível a todos os leitores. Teve-se ainda especial atenção em construir as imagens ilustrativas utilizadas ao longo das diferentes demonstrações, com excepção das imagens do capítulo 3. Recorreu-se a outro programa de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, na aplicação do teorema ao ensino, por ser um programa gratuito e acessível aos alunos do 3º ciclo de Ensino, aos quais se propõem aplicar a actividade apresentada.

Este trabalho permitiu alargar e consolidar conhecimentos numa área que gosto particularmente, a Geometria. Exigiu dispêndio de muitas horas de trabalho, na recolha, selecção e organização de informação, mas foi um trabalho que me deu gozo elaborar.

Não posso deixar de referir algumas questões que me foram sendo colocadas ao longo deste estudo. Qual a finalidade deste trabalho, como se pode aplicar, ou que utilidade tem a sua aplicação, foram algumas das mais pertinentes. Penso que, para quem não compreende a beleza presente na Matemática seja mais difícil obter uma resposta que tenha significado. No entanto, a Matemática não deve ser vista apenas como um conjunto de números e operações que são úteis no dia-a-dia, ou algo que se pode aplicar numa situação concreta. A matemática, no meu ponto de vista, deve ser encarada com divertimento e até com um certo “gozo”, não só pela curiosidade que pode despertar, mas também pela sua beleza.

Espero, por isso, que ao longo deste trabalho tenha despertado a curiosidade deste resultado pela sua beleza e não pela sua utilidade.

Bibliografia

- [1] J.W.Peters, "The Theorem of Morley," *National Mathematics Magazine*, vol. 16 n^o3, pp. 119-126, Dezembro 1941.
- [2] Arthur B. Coble, "Frank Morley - In Memoriam," *Bulletin of the American Mathematical Society*, pp. 167-170, 1938.
- [3] Indian Academy of Sciences. [Online]. <http://www.ias.ac.in/jarch/currsci/9/490.pdf>
- [4] Eduardo Veloso, "As notações em geometria," *Educação e Matemática*, vol. n^o42, pp. 35-36, Março 1997.
- [5] Approfondimenti di Geometria. [Online].
<http://web.mclink.it/MC2113/geometria/Morley.html>
- [6] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*.: The Mathematical Association of America, 1967.
- [8] Mathematics Department of the University of British Columbia. [Online].
<http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-o2b/projects/hui/index.html>
- [7] Associação Atrator. Atrator. [Online]. www.atractor.pt
- [9] W.R. Spickerman, "An extension of Morley's theorem," *Mathematics Magazine*, vol. n^o44, pp. 191-192, Setembro 1971.
- [10] W.J.Dobbs, "Morley's Triangle," *The Mathematical Gazette*, vol. 22 n^o248, pp. 50-57, Fevereiro 1938.

- [11] H.V. Mallison, "An Extension of Morley's Theorem ," *The Mathematical Gazette*, vol. 17 nº225, pp. 268-270, Outubro 1933.
- [12] Gino Loria, "Triangles équilatéraux dérivés d'un triangle quelconque," *The Mathematical Gazette*, vol. 23 nº256, pp. 364-372, Outubro 1939.
- [13] Haim Rose, "A simple Proof of Morley's Theorem," *The American Mathematical Monthly*, vol. 71 nº 7, pp. 771-773, Agosto-Setembro 1964.
- [14] Associação Atractor. [Online].
<http://www.atractor.pt/publicacoes/MorleyParalelogramos.pdf>
- [15] H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry.*: Wiley, New york, 1961.
- [16] Francis P. Callahan, "Morley Polygons," *The American Mathematical Monthly*, vol. 84 nº5, pp. 325-337, Maio 1977.
- [18] Antonio Leite, Luísa Faria, Pedro Rocha Almeida Maria Augusta Ferreira Neves, *Matemática 7 - Guia do Professor.*: Porto Editora, 2010.
- [17] GTG. www.apm.pt. [Online]. www.apm.pt/encontro/profmat2009.php?id=142654
- [19] Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria.*: Gradiva, 2002.
- [20] Wikipédia. [Online]. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cardioide>
- [21] António do Nascimento Palma Fernandes, *Elementos de Geometria para o 3º 4º e 5º anos dos liceu.*: Coimbra Editora Lda, 1967.
- [22] Barnett Rich, *Geometria - Curso Intensivo.*: McGraw-Hill, 2001.

- [23] Ulysses Sodré. Matemática Essencial - Ensino: fundamental, médio e superior.
[Online].

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-elem/geometr.htm>
- [24] Matilde Almeida Alexandra Conceição, *Matematicamente Falando 7 - antes de começar.*: Areal Editores, 2009.
- [25] Wikipédia. [Online]. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Homotetia>
- [26] Iolanda Centeno Passos, Olga Flora Correia Brigitte Thudichum, *Preparar o exame Matemática 9º ano.*: Lisboa Editora, 2009.

Apêndices

Apêndice 1

Construções geométricas

O *Cabri Geometry II* é uma ferramenta geométrica que facilita e possibilita a trisseção de um ângulo através de uma construção sintética. Apesar de haver limitações a nível de precisão numérica, este programa permite “investigar” o Teorema de Morley, que envolve a trisseção dos ângulos de um triângulo.

Construção da macro “trisseção do ângulo”

1. Marquem-se três pontos A, B e C, quaisquer (colineares dois a dois);
2. Trace o segmento $[BC]$ e a recta que passa por B e por A;
3. Construa a circunferência de centro B e raio \overline{BC} ;
4. Marque o ponto D, intersecção da recta BA com a circunferência construída em 3; encontre-se a bissetriz do ângulo $\angle DBC$ (que bissecta $\angle ABC$);
5. Marque o ponto E, intersecção da bissetriz de $\angle DBC$ com a circunferência construída em 3;
6. Construa o arco $[DEC]$ e meça-se o comprimento desse arco usando a ferramenta do Cabri, “Distância e Comprimento”;
7. Através da ferramenta “Calculadora”, seleccione o comprimento do arco construído no ponto 6 e divida-o por três; copie o resultado para a janela de construção;
8. Transfira esse resultado $\left(\frac{\overline{DC}}{3}\right)$ para a circunferência usando a ferramenta “Transferência de Medidas”; seleccione o primeiro resultado, de seguida seleccione a circunferência e depois o ponto C;
9. Usando a ferramenta “Reflexão”, reflecta-se o ponto F, relativamente à bissetriz $[BE]$ e marque-se esse ponto, G;
10. Trace-se BF e BG (trissectrizes do ângulo $\angle DBC$);
11. Crie-se agora a macro “trisseção do ângulo”, da seguinte forma:

- Selecciona a opção “Objecto Inicial” na caixa de ferramenta “Macro” e selecciona, por esta ordem, os pontos C, B e A;
- De seguida, selecciona a opção “Objecto Final”, na mesma caixa de ferramentas e selecciona os dois raios que trissectam os ângulos;
- Por fim, selecciona a opção “Definir Macro” e guarde a macro com o nome “trisseccção do ângulo”.

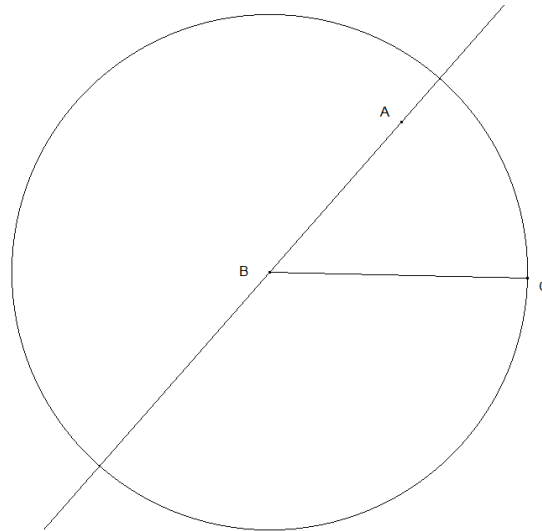


Ilustração 1

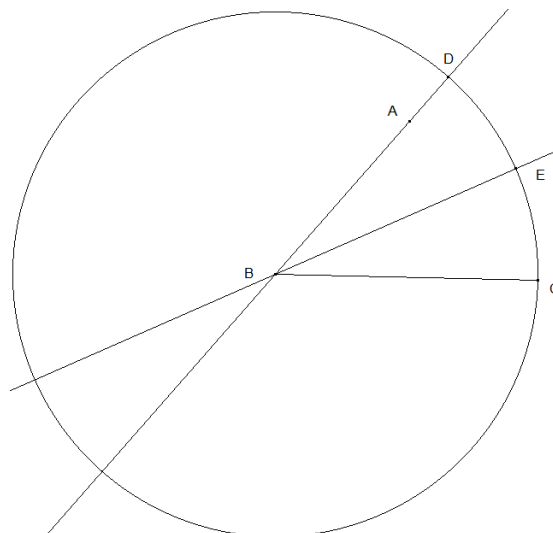


Ilustração 2

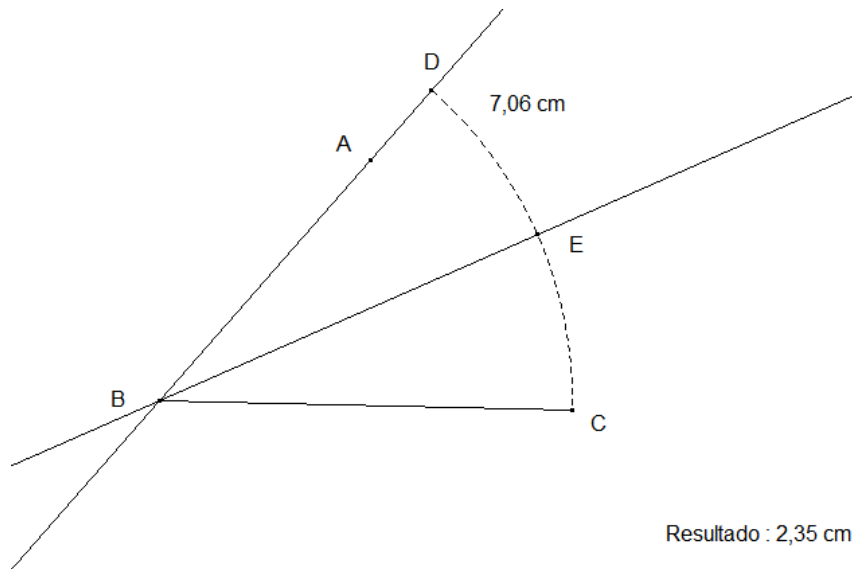


Ilustração 3

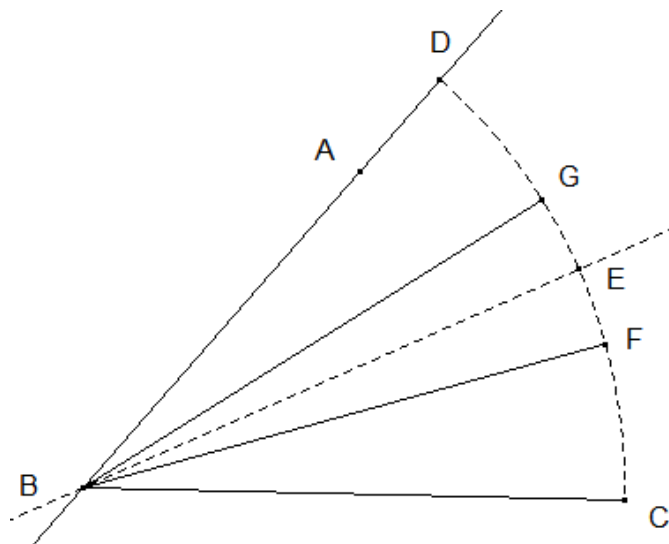


Ilustração 4

Construção do Triângulo de Morley

1. Construa um triângulo qualquer $\Delta[ABC]$;
2. Com o auxílio da ferramenta "Macro" (trisseção do ângulo), tracem-se as trissec-trizes dos ângulos internos do triângulo $\Delta[ABC]$;
3. Marque os pontos de intersecção das trissec-trizes adjacentes E, F e G;
4. Construa o triângulo $\Delta[EGF]$, unindo os pontos encontrados no ponto 3; verifique que é de facto um triângulo equilátero, através da ferramenta "Distância ou comprimento".

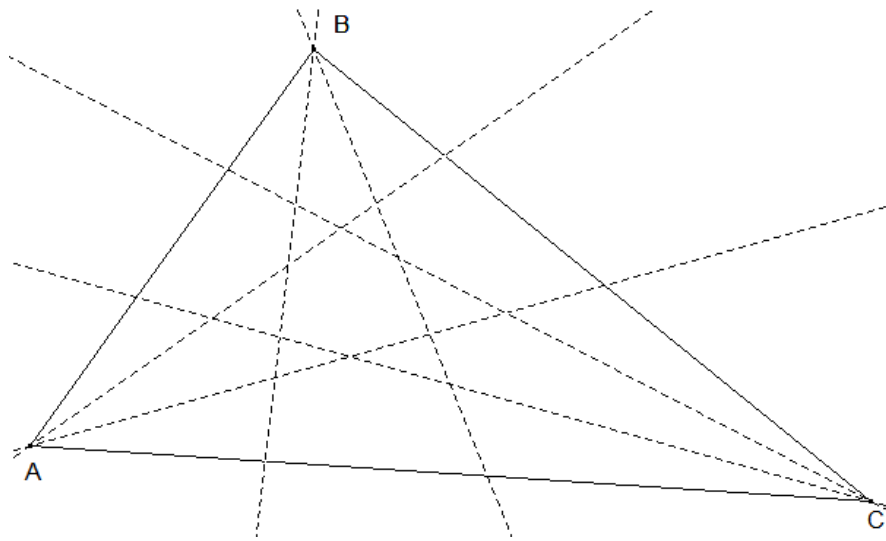


Ilustração 5

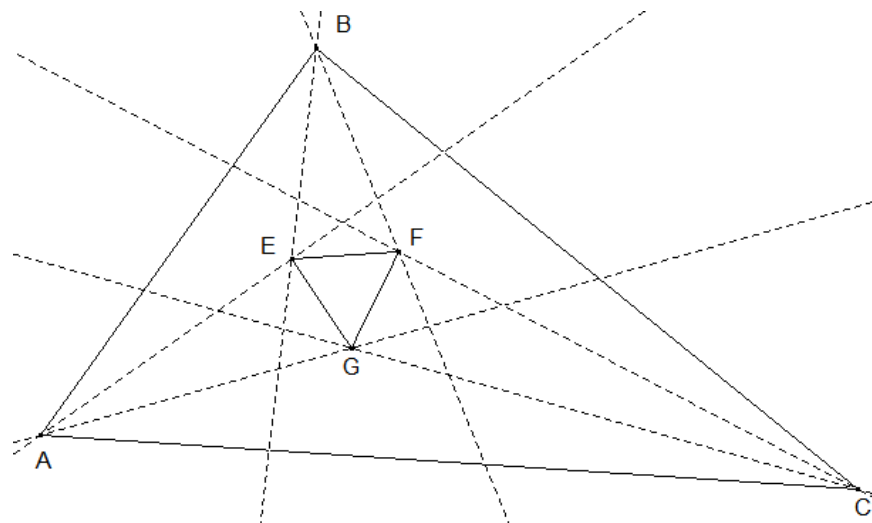


Ilustração 6

Construção do Paralelogramo de Morley

1. Marque um ponto qualquer A e trace uma recta r que passe por A;
2. Marque outro ponto, que não pertença a r , trace-se uma recta s , paralela a r ; marque um ponto B sobre a recta s ;
3. Trace uma recta pelos pontos A e B;
4. Trace uma recta t , paralela à recta AB, passando pelo ponto D, pertencente à recta r ; encontre o ponto C, de intersecção da recta t com a recta s ;
5. Construa o polígono $[ABCD]$;
6. Tracem-se as trissectrizes dos ângulos do polígono $[ABCD]$, com o auxílio da ferramenta "Macro" (trisseção do ângulo);
7. Marquem-se os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes E, F, G e H;
8. Construa o polígono $[EFGH]$ e verifique que de facto ambos os polígonos construídos são paralelogramos, através das ferramentas "Distância ou comprimento" e "Medida de um ângulo".

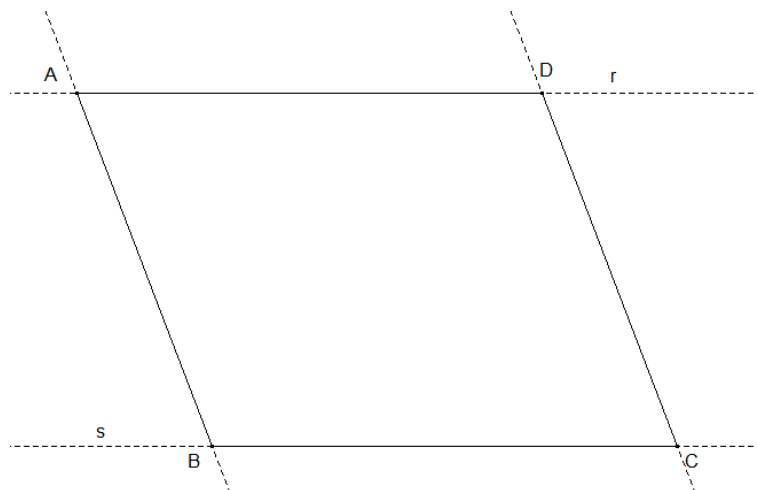


Ilustração 7

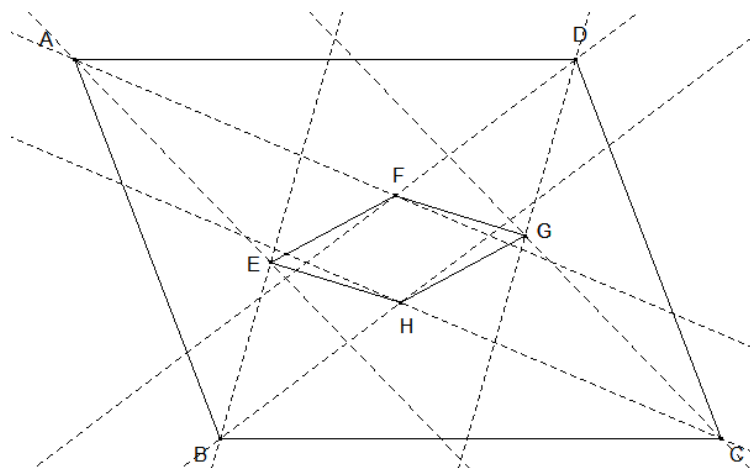


Ilustração 8

Apêndice 2

Demonstração geométrica⁴⁶

1. Construa-se um $\Delta[ABC]$;
2. Tracem-se as trissectrizes dos ângulos B e C através da Macro “trissecção do ângulo”. De seguida marque-se D, ponto de intersecção das trissectrizes adjacentes dos vértices B e C;
3. Marque-se o ponto E, intersecção entre as outras trissectrizes dos vértices B e C e trace-se $[BE]$;

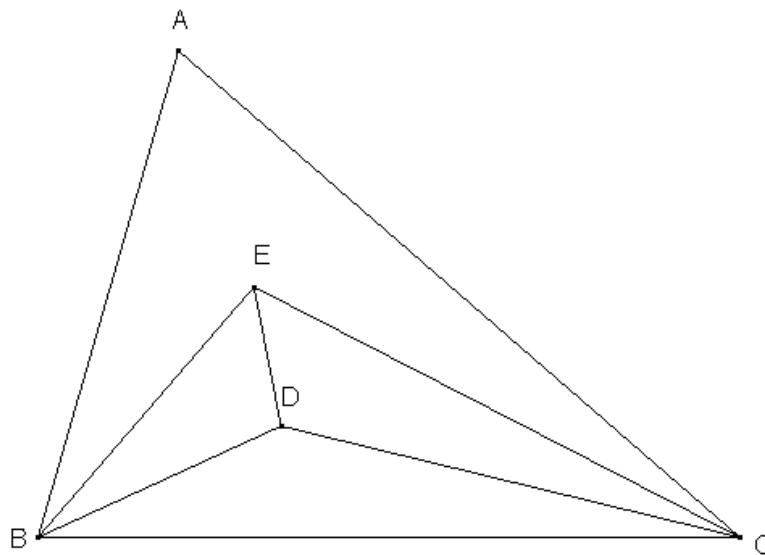


Ilustração 9

Considere-se $\Delta[BCD]$ e $\Delta[BCE]$. O ponto D é o incentro do $\Delta[BCE]$, cujas bissectrizes são as semi-rectas BD, CD e ED.

⁴⁶ Adaptado do sítio: <http://www.atractor.pt>

4. Marque-se o ponto F em $[BE]$, tal que, $\sphericalangle EDF = 30^\circ$ (circunferência de centro em D e raio \overline{DE} , divide-se em 12 partes iguais e marca-se F, ponto de intersecção de $[BE]$ com a recta que passa nos pontos D e F). Analogamente, marque-se o ponto G (ou por reflexão do ponto F), tal que, $\sphericalangle EDG = 30^\circ$. Trace-se o $\Delta[FDG]$;

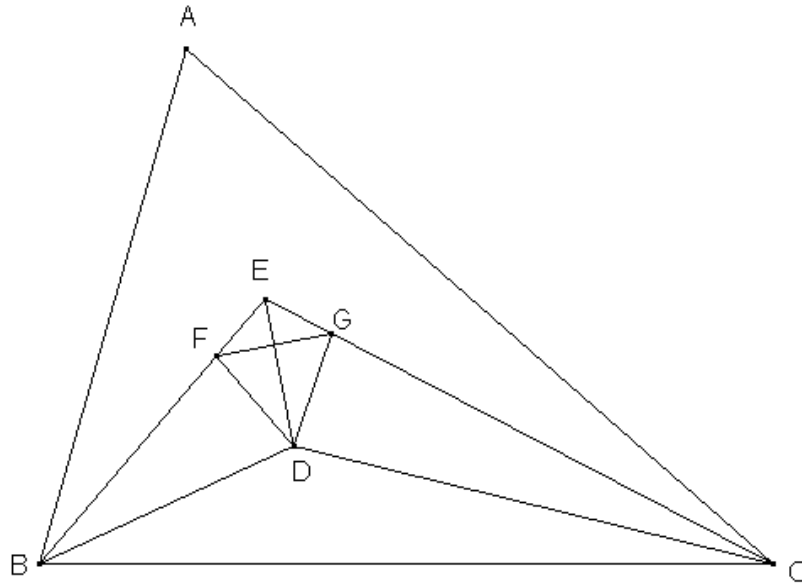


Ilustração 10

$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEG$ e $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDG$ e $\overline{FD} = \overline{DG} \Rightarrow \Delta[EDF] \cong \Delta[EDG]$ (Critério ALA), pelo que $\overline{DF} = \overline{DG}$. Como $\sphericalangle FDG = 60^\circ$, $\Delta[FDG]$ é necessariamente um triângulo equilátero.

5. Trace-se a circunferência de centro em B e raio \overline{BD} e marque-se o ponto de intersecção da circunferência com BA e, analogamente, marque-se o ponto I;

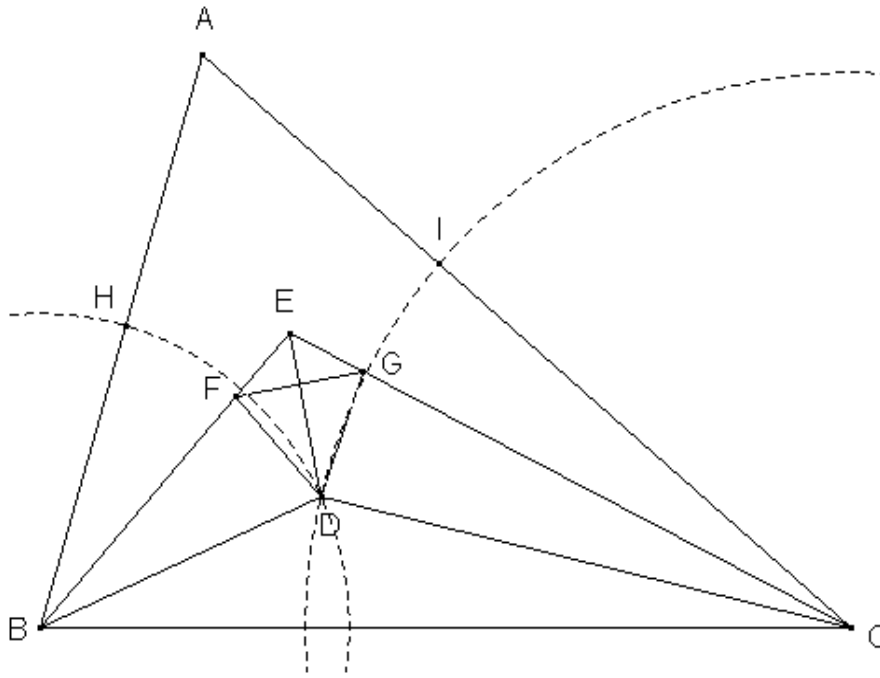


Ilustração 11

H é tal que $\overline{BH} = \overline{BD}$ e I é tal que $\overline{CI} = \overline{CD}$. Como $\sphericalangle DBF \cong \sphericalangle HBF$ e $\overline{BH} = \overline{BF} = \overline{BD} \Rightarrow \Delta[DBF] \cong \Delta[HBF]$ (Critério LAL), pelo que $\overline{HF} = \overline{FD}$. Analogamente, $\Delta[DCG] \cong \Delta[ICG]$, pelo que $\overline{DG} = \overline{GI}$. Como $\Delta[FDG]$ é equilátero, vem que $\overline{FD} = \overline{FG} = \overline{DG}$. Portanto, $\overline{HF} = \overline{FG} = \overline{GI}$.

6. Tracem-se as bissetrizes dos $\angle HFG$ e $\angle FGI$ e marque-se J, ponto de intersecção entre essas bissetrizes (só é possível para o caso em que os ângulos HFG e FGI não são rasos e as suas bissetrizes se situarem no semi-plano delimitado pela recta FG que contem A);

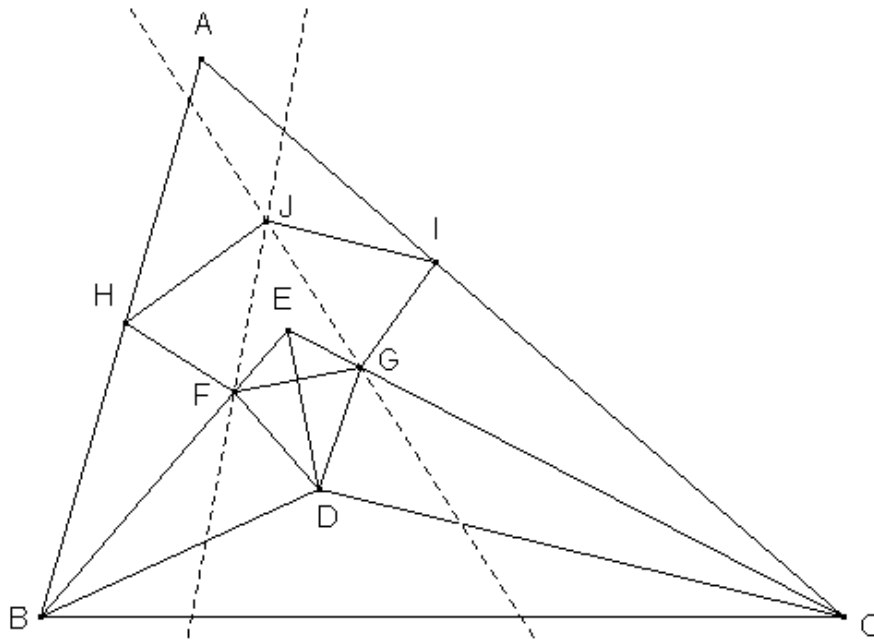


Ilustração 12

$$\sphericalangle HFE = 180^\circ - \sphericalangle HFB = 180^\circ - \sphericalangle DFB = \sphericalangle DFE = 60^\circ + \sphericalangle EFG$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle GEF &= \sphericalangle CEF = 180^\circ - \sphericalangle EBC - \sphericalangle BCE = 180^\circ - \frac{2}{3}\sphericalangle ABC - \frac{2}{3}\sphericalangle BCA \\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}(180^\circ - \sphericalangle CAB) = 60^\circ + \frac{2}{3}\sphericalangle CAB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle HFG &= \sphericalangle HFE + \sphericalangle EFG = 60^\circ + 2\sphericalangle EFG = 60^\circ + (180^\circ - \sphericalangle GEF) \\ &= 60^\circ + \left(120^\circ - \frac{2}{3}\sphericalangle CAB\right) = 180^\circ - \frac{2}{3}\sphericalangle CAB < 180^\circ \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\sphericalangle FGI = 180^\circ - \frac{2}{3}\sphericalangle CAB < 180^\circ$$

Como $\overline{HF} = \overline{FG}$ e $\sphericalangle HFJ = \sphericalangle GFJ$, então $\triangle HFJ \cong \triangle GFJ$ pelo que $\overline{FJ} = \overline{GJ}$. Analogamente, $\triangle GFH \cong \triangle GIJ$, pelo que $\overline{FJ} = \overline{IJ}$. Como $\sphericalangle JFG = \frac{1}{2}\sphericalangle HFG = \frac{1}{2}\sphericalangle FGI = \sphericalangle JGF$, então $\triangle FJG$ é isósceles com $\overline{FJ} = \overline{GJ}$. Portanto, $\overline{HJ} = \overline{FJ} = \overline{GJ} = \overline{IJ}$, ou seja, o ponto J é equidistante dos pontos H, G, F e I.

7. Construa-se a circunferência de centro em J e que passa por H, F, G e I.

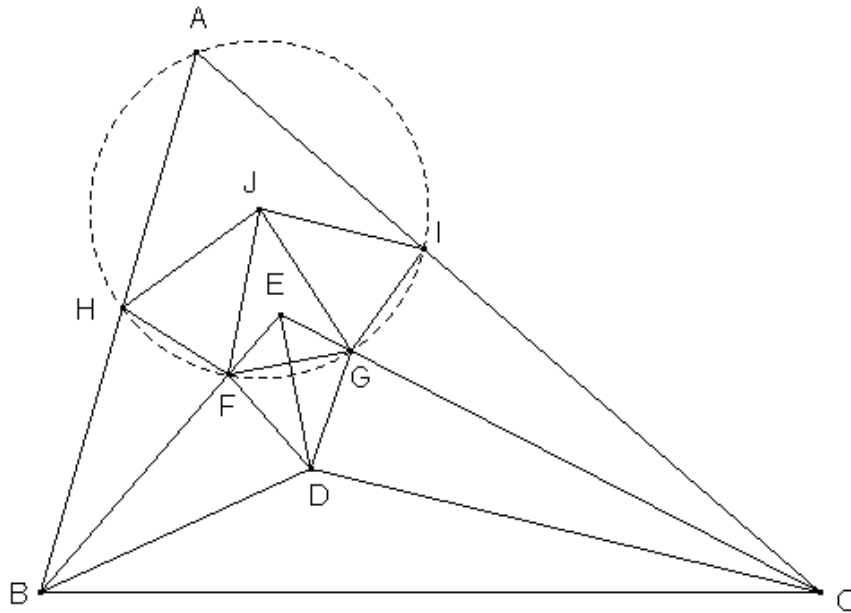


Ilustração 13

Como $\Delta[HFJ] \cong \Delta[GFJ] \cong \Delta[GJI]$, então $\sphericalangle HJF = \sphericalangle FJG = \sphericalangle GJI$, logo

$$\sphericalangle FJG = 180^\circ - 2\sphericalangle JFG = 180^\circ - \sphericalangle HFG = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{2}{3}\sphericalangle CAB\right) = \frac{2}{3}\sphericalangle CAB$$

$$\sphericalangle HJI = \sphericalangle HJF + \sphericalangle FJG + \sphericalangle GJI = 3\sphericalangle FJG = 2\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle HAI$$

Pelo que,

$$\sphericalangle HAI = \frac{1}{2}\sphericalangle HJI$$

A circunferência passa por A e como as cordas $[HF]$, $[FG]$ e $[GI]$ são congruentes temos que os respectivos arcos também o são, pelo que, $\sphericalangle HAF = \sphericalangle FAG = \sphericalangle GAI$, ou seja, AF e AG são trissectrizes do $\Delta[CAB]$.

