UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Aprendizagem pelos Pares: Um contributo para a sua aplicação no Ensino Secundário

Ana Catarina Mendes Romano

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em

Ensino de Matemática

no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

(2.º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof.ª Doutora Patrícia Damas Beites

Covilhã, outubro de 2013

“Na Matemática, para saborear
com prazer o fruto é preciso
conhecer bem as suas raízes.”

Malba Tahan

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer de forma muito especial à minha orientadora, Professora Doutora Patrícia Damas Beites, pela orientação que prestou durante a elaboração do presente relatório e, sobretudo, pelo interesse que demonstrou no desenvolvimento deste trabalho, com as suas sugestões e críticas em todas as fases do mesmo. Desejo também manifestar a minha gratidão pelo encorajamento, sempre presente, nos momentos de desalento.

Aos colegas, professores de Matemática, pela disponibilidade em responderem ao questionário.

Aos ex-alunos, por aceitarem participar no meu estudo facultando-me as suas provas escritas.

À minha família, pelo estímulo, disponibilidade e paciência.

Ao meu marido, pelos incentivos constantes e paciência.

Às minhas filhas, pelas alegrias e energia constantes.

Por fim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste estudo.

Resumo

As aulas ditas tradicionais, essencialmente expositivas, caracterizam-se pela centralidade do papel do professor no processo de ensino-aprendizagem. Deste modo, em geral, os alunos têm uma atitude passiva e o professor, essencialmente, pratica a transferência de conhecimento. Estudos, de várias áreas que não só da Educação Matemática e da Didática da Matemática, apontam para as vantagens na mudança do paradigma do referido tipo de aulas. Concretamente, apela-se à centralidade do aluno no processo de ensino-aprendizagem e à sua aprendizagem ativa.

A Aprendizagem pelos Pares, designada originalmente por *Peer Instruction* nos trabalhos do Físico Eric Mazur, surge no contexto dessa mudança e ainda pela observação de falhas na aprendizagem conceptual dos alunos. O referido método de ensino-aprendizagem é centrado no aluno e pretende, por um lado, a substituição da transferência do conhecimento pela assimilação do mesmo e, por outro lado, a aprendizagem conceptual. Nas palavras de Mazur, "Ensinar é apenas ajudar a aprender" e o desafio é o de encontrar novas maneiras de chegar aos alunos.

Do referido método de ensino-aprendizagem fazem parte: o estudo prévio dos conteúdos pelos alunos; a proposta de questões conceptuais pelo professor; as votações dos alunos nestas; a discussão entre pares, neste caso, alunos. No mesmo foram adotados os princípios da Aprendizagem Cooperativa, com base na Teoria Socioconstrutivista de Vygotsky, a qual realça a importância das atividades sociais, nomeadamente da discussão entre alunos sobre o que se está a realizar, para a promoção da aprendizagem.

No âmbito deste trabalho, foi efetuado um estudo norteado pelas seguintes questões de investigação: 1 - Quais os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do 12.º ano?; 2 - Com base nos mesmos, que questões conceptuais podem ser construídas para aplicação da Aprendizagem pelos Pares nesse tema?; 3 – Que adaptações podem e/ou devem ser feitas à Aprendizagem pelos Pares na sua aplicação ao nível do Ensino Secundário?. No estudo utilizámos uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa, com recurso a um questionário dirigido a professores de Matemática e a testes de avaliação de alunos como instrumentos de recolha de dados.

Procurámos, em primeiro lugar, conhecer o método Aprendizagem pelos Pares e eventuais adaptações que podem ser feitas no Ensino Secundário. Em segundo lugar, procurámos identificar e compreender as dificuldades e os erros que experimentam os alunos do 12.º ano no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. Em terceiro lugar, também com o apoio da revisão de literatura feita, construímos questões conceptuais, criando recursos didáticos, para o tópico Regras Operatórias de Logaritmos selecionado do tema mencionado.

Por último, apresentamos uma planificação, para o tópico referido mas não implementada, de uma aula com o método de Aprendizagem pelos Pares. Para sustentar a mesma, para além das fundamentais questões conceptuais, apresentámos, descrevemos e analisámos um manual de 12.º ano. Elaborámos ainda um trabalho de casa associado ao estudo prévio do tópico pelos alunos. No futuro, com a reflexão após a implementação, haverá certamente aspetos (tarefas propostas, materiais utilizados, comunicação) da prática letiva do professor a melhorar.

Palavras-chave

Aprendizagem pelos Pares, Questão Conceptual, Cálculo Diferencial II, Regras Operatórias de Logaritmos.

Abstract

The so-called traditional lectures, mainly expository, are characterized by the centrality of the teacher's role in the teaching-learning process. Thus, in general, students have a passive attitude and the teacher, essentially, transfers knowledge to the students. Studies, in many fields other than Mathematics Education and Didactics of Mathematics, point to the benefits of shifting the paradigm of this type of classes. In particular, they call for the centrality of students in the teaching-learning process and for their active learning.

Peer Learning, originally named Peer Instruction in the works of the physicist Eric Mazur, arises in the context of that shift as well as from observing gaps in students' conceptual learning. This student-centred teaching-learning method aims, on the one hand, to replace knowledge transfer by its assimilation and, on the other hand, conceptual learning. In Mazur's own words, "Teaching is just helping students to learn" and the challenge is to find new ways to reach students.

This teaching-learning method comprises: pre-class study of contents by the students; the conceptual questions proposed by the teacher; the votings of the students on these; the discussion among peers, in this case, students. Moreover, it incorporates the principles of Cooperative Learning, based on Vygotsky's Social Constructivist Theory, that emphasizes the importance of social activities, namely the discussion among students of what is taking place, to promote learning.

In the context of this work, a study based on the following research questions was conducted: 1 – What mistakes arise from the main difficulties of students in Theme II – *Introduction to Differential Calculus II* of the 12th grade?; 2 – Based on these, what conceptual questions can be formulated to apply Peer Instruction to this theme?; 3 – What adjustments can and/or should be made to Peer Instruction in its implementation in High School?. In this study, a qualitative and interpretive methodology was used, involving a questionnaire aimed at teachers of Mathematics and student assessment tests as data collection tools.

In the first place, we sought to know the Peer Instruction method and possible adaptations that can be made in High School. Secondly, we sought to identify and to understand the difficulties and the mistakes experienced by the students of the 12th grade in Theme II - *Introduction to Differential Calculus II*. Thirdly, also based on the review of the literature, we formulated conceptual questions, creating teaching resources for the topic Logarithm Rules selected from the above theme.

Finally, we present an unimplemented lesson plan, for the mentioned topic, using the Peer Instruction method. In order to support it, beyond the fundamental conceptual questions, we presented, described and analysed a handbook of the 12th grade. Furthermore, we produced a homework assignment associated with students' pre-class study on the topic. In the future, by reflecting on its implementation, there will surely be aspects (proposed tasks, materials used, communication) of the teacher's classroom practice to be improved.

Keywords

Peer Instruction, Concept Question, Differential Calculus II, Logarithm Rules.

Índice

Agradecimentos v

Resumo vii

Abstract ix

Índice xi

Lista de Figuras xiii

Lista de Tabelas xv

Lista de Acrónimos xix

Lista de Acrónimos xx

Capítulo 1 - Introdução 1

1.1 Problema e Objetivos do Estudo 2

1.2 Questões Investigativas 2

1.3 Enquadramento Teórico 3

1.4 Estrutura do Trabalho 4

Capítulo 2 – Revisão de Literatura 7

2.1 Aprendizagem pelos Pares 8

2.1.1 Digressão Histórica 8

2.1.2 Descrição do Método 11

2.1.3 Votação e Recolha de Respostas 14

2.2 Dificuldades e Erros no Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* .. 21

Capítulo 3 – Metodologia de Estudo 31

3.1 Descrição do Estudo 31

3.1.1 Opções Metodológicas 31

3.1.2 Instrumentos de Recolha de Dados 32

3.1.3 Tratamento e Análise dos Dados 32

3.2 Algumas Questões Conceptuais para o Tema 38

Capítulo 4 - Uma aula com Aprendizagem pelos Pares 41
4.1 O manual *Novo Espaço 12* 43
4.1.1 Apresentação 43
4.1.2 Descrição 46
4.1.3 Análise 59
4.2 Planificação da Aula 62
Capítulo 5 – Considerações Finais 67
Bibliografia 73
Anexos 79
Anexo I – Pedido dirigido ao Júri Nacional de Exames 81
Anexo II – Questionário dirigido aos Professores de Matemática 85
Anexo III – Autorização de Participação no Estudo 89
Anexo IV – Trabalho para Casa 93

Lista de Figuras

Figura 1: David Hestenes em (University, 2010) 8

Figura 2: Eric Mazur em (DGC-USM, 2012) 10

Figura 3: Exemplo de um TPC usado pela docente Patrícia Beites em Álgebra Linear na UBI 12

Figura 4: Eric Mazur na conferência ALT-C 2012 em (Gramp, 2012) 12

Figura 5: Votação com as mãos em (Deubel, 2013) 14

Figura 6: Cartões de votação usados pela docente Patrícia Beites em Álgebra Linear na UBI 15

Figura 7: Votação por *clickers* em (Flynn, 2012) 15

Figura 8: TI-Nspire Navigator Systems (TexasInstruments, Manual de Instruções, 2011) 16

Figura 9: Uma das duas questões conceptuais em (Hallet, Robison, & Lomen, 2003, p. 3) 19

Figura 10: Questão Conceptual CQ5 em (Beites & Nicolás, 2013, p. 7) 20

Figura 11: Tipos de tarefas, em termos de dificuldade e de abertura, em (Ponte J. P., 2003, p. 5) 42

Figura 12: Capa dos dois volumes do manual Novo Espaço 44

Figura 13: Primeiras páginas do Tema 2 46

Figura 14: Nota recordatória do número de Neper em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 141) 48

Figura 15: Exercício proposto para mudança de base em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 141) 48

Figura 16: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 143)........... 49

Figura 17: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 144)........... 50

Figura 18: Nota sobre notação de logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 149) 51

Figura 19: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 149) 51

Figura 20: Definição de logaritmo em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 150) 51

Figura 21: Resolução de uma equação em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 150) 52

Figura 22: Quadro-resumo em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 154) 53

Figura 23: Algumas regras operatórias dos logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 157) 54

Figura 24: Cálculo de logaritmos na calculadora em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 158) 54

Figura 25: Resolução de uma equação envolvendo logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 160) 55

Figura 26: Resolução de uma inequação envolvendo logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 162) 55

Figura 27: Gráfico comparativo de funções lineares e funções logarítmicas de base $a > 1$ em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 165) 56

Figura 28: Limites em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 166) 57

Figura 29: Problema proposto em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 167) 57

Figura 30: Representação gráfica do modelo logístico em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 170) 58

Figura 31: Proposta 41 em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 187) 59

Lista de Tabelas

Tabela 1: Esquema de passos numa aula com PI elaborado com base em (Crouch & Mazur, 2001) 13

Tabela 2: Classificação de questões conceptuais, de Mazur, em (Beites & Nicolás, 2013, p. 16) 18

Tabela 3: Resultados obtidos com a aplicação da questão conceptual em (Beites & Nicolás, 2013) 20

Tabela 4: Análise tridimensional segundo (Sierra, González, & López, 2003, p. 24) 41

Tabela 5: Síntese das CQ na secção 3.2 65

Lista de Exemplos

Exemplo 1: Questão Conceptual de Cálculo 18

Exemplo 2: Questão Conceptual de Álgebra Linear 19

Lista de Acrónimos

CQ	Questão Conceptual
FCI	*Force Concept Inventory*
PI	*Peer Instruction* (Aprendizagem pelos Pares)
PM12	Programa de Matemática do 12.º Ano
TPC	Trabalho para Casa
UBI	Universidade da Beira Interior
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

Capítulo 1 - Introdução

A Educação procura responder a um grande desafio que é imposto à Escola. A esta pede-se-lhe "… que seja capaz de desenvolver nos estudantes competências para participar e interagir num mundo global, altamente competitivo que valoriza o ser-se flexível, criativo, capaz de encontrar soluções inovadoras para os problemas de amanhã, …" (Coutinho & Lisbôa, 2011, p. 5). É por isso indispensável atualizar, aprofundar e enriquecer os conhecimentos adaptando-os ao mundo em mudança.

A solução poderá passar por organizar a aprendizagem em torno de quatro aprendizagens fundamentais, que (Delors, et al., 1999, p. 90) definiu como "… os pilares do conhecimento: aprender a conhecer, isto é adquirir os instrumentos da compreensão; aprender a fazer, para poder agir sobre o meio envolvente; aprender a viver juntos, a fim de participar e cooperar com os outros em todas as atividades humanas; finalmente aprender a ser, via essencial que integra as três precedentes."

Como se defende em (Delors, et al., 1999), o ensino tradicional privilegia o aprender a conhecer em detrimento do aprender a fazer, e coloca as outras duas aprendizagens como extensões das duas primeiras. No entanto, aprender a fazer prende-se com "… ensinar o aluno a pôr em prática os seus conhecimentos …" (Delors, et al., 1999, p. 93). Assumindo essas extensões, os alunos podem aprender a viver juntos, "… desenvolvendo a compreensão do outro e a percepção das interdependências — realizar projetos comuns …" (Delors, et al., 1999, p. 102), e aprender a ser, "… para melhor desenvolver a sua personalidade e estar à altura de agir com cada vez maior capacidade de autonomia, de discernimento e de responsabilidade pessoal." (Delors, et al., 1999, p. 102).

É neste sentido, da promoção da autonomia dos alunos, da colocação em prática de conhecimentos e da cooperação (entre professor e alunos, reciprocamente, e ainda entre alunos), que se enquadra a Aprendizagem pelos Pares. Este método de ensino-aprendizagem, *Peer Instruction* (PI) no original, pretende dar resposta às necessidades de um sistema de ensino cada vez mais exigente e heterogéneo, numa sociedade competitiva e individualista.

1.1 Problema e Objetivos do Estudo

Com o presente estudo procuramos identificar e compreender as dificuldades e os erros que experimentam os alunos, que frequentam o 12.º ano de escolaridade, no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. Em particular, consideramos os que surgem no tópico das regras operatórias de logaritmos.

Após as referidas identificação e compreensão, com o apoio da revisão de literatura, construímos questões conceptuais com base nas dificuldades e nos erros manifestados pelos alunos. Com essas questões visamos criar recursos didáticos para aplicação futura da Aprendizagem pelos Pares.

Tentamos ainda indicar, após o conhecimento das características inerentes ao método de ensino-aprendizagem em causa, adaptações que podem ou devem ser feitas na aplicação da Aprendizagem pelos Pares ao nível do Ensino Secundário.

1.2 Questões Investigativas

Com este trabalho pretendemos dar resposta às seguintes questões investigativas.

1 - Quais os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do 12.º ano?

2 - Com base nos mesmos, que questões conceptuais podem ser construídas para aplicação da Aprendizagem pelos Pares no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do 12.º ano?

3 – Que adaptações podem e/ou devem ser feitas à Aprendizagem pelos Pares na sua aplicação ao nível do Ensino Secundário?

1.3 Enquadramento Teórico

Segundo (Díaz-Aguado, 2000, p. 9), "A nossa sociedade vive mudanças extremamente rápidas e intensas que exigem inovações educativas de envergadura semelhante. Entre os seus objectivos mais frequentemente reconhecidos destacam-se: lutar contra a exclusão e adaptar a educação à diversidade dos alunos e alunas, garantindo a igualdade de oportunidades na aquisição das competências necessárias para a sua integração activa num mundo cada mais complexo; respeitar o direito à própria identidade, tornando-o compatível com a igualdade de oportunidades, e progredir em relação aos direitos humanos …".

A cooperação é uma dessas competências, mas ensinar de modo cooperativo deverá levar a uma mudança significativa de mentalidades. De facto, "… o professor tem de reflectir no seu novo papel enquanto organizador do meio social e regulador das interacções em que decorre a aprendizagem. Toda esta filosofia do ensino, que faz parte da nossa tradição tem de ser substituída por uma filosofia da aprendizagem, centrada no aluno e nas interacções que se desenvolvem na turma." (Abreu & Custódio, 2001, p. 19).

A chamada Aprendizagem Cooperativa baseia-se na Teoria Socioconstrutivista de Lev Vygotsky, na qual "… a aquisição dos processos cognitivos superiores se produz através das atividades socias, nas quais cada indivíduo participa …" (Ribeiro, 2006, p. 3). Segundo Vygotsky, a aprendizagem decorre da interação social e a relação da primeira com o devenvolvimento é explicada pelo conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). A mencionada noção é definida como "… a distância entre o nível de desenvolvimento actual tal como é determinado pela solução independente dos problemas, e o nível de desenvolvimento potencial tal como está determinado pela solução de problemas com a ajuda de um adulto ou em colaboração com os colegas mais capacitados." (Díaz-Aguado, 2000, p. 136).

Em suma, a aprendizagem ocorre através de interferências do professor e de outros alunos na ZDP de um aluno, que é a distância entre o que o aluno já sabe, conhecimento real, e aquilo que pode aprender, conhecimento potencial. Assim, a discussão, gerada por questões conceptuais, entre alunos e professor, e, especialmente, entre alunos (pares) é fulcral para a assimilação do conhecimento que caracteriza a Aprendizagem pelos Pares — método de ensino-aprendizagem de Eric Mazur.

Objetivamente, a Teoria de Vygotsky fundamenta a PI devido aos pressupostos da Aprendizagem Cooperativa em que a mesma assenta. Concretamente, o conhecimento é construído socialmente, valorizando os papéis da escola, do professor como agente mediador, do aluno e dos seus pares (os outros alunos) em cooperação.

1.4 Estrutura do Trabalho

No sentido de facilitar a compreensão do tema abordado neste trabalho, organizámo-lo em partes distintas: a fundamentação teórica e a abordagem prática, resultante dos artigos científicos que analisamos. Estruturalmente, o trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos distintos, focalizados nos aspetos da sinopse seguinte de cada um.

Capítulo 1 – Introdução

Neste capítulo enunciamos o problema e os objetivos do estudo, as questões investigativas, o enquadramento e a relevância do estudo, e a estrutura do trabalho.

Capítulo 2 – Revisão de Literatura

Apresentamos uma revisão de literatura pautada de informação acerca da Aprendizagem Pelos Pares e, ainda, das dificuldades e dos erros dos alunos no Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*.

Elaboramos uma digressão histórica deste método de ensino-aprendizagem e descrevemos o mesmo. Indicamos, por último, possíveis adaptações ao Ensino Secundário.

Capítulo 3 – Metodologia de Estudo

Apresentamos a metodologia de investigação adotada e algumas questões conceptuais construídas. Iniciamos com uma breve descrição da componente empírica do estudo, dando indicações sobre as opções metodológicas, os instrumentos de recolha de dados e, também, o tratamento e a análise dos mesmos. Expomos ainda algumas questões conceptuais para o tópico Regras Operatórias de Logaritmos.

Capítulo 4 – Uma aula com Aprendizagem pelos Pares

Procedemos à planificação de uma aula com recurso ao método de ensino-aprendizagem descrito no Capítulo 2. Previamente, apreciamos, descrevemos pormenorizadamente e analisamos o ponto 1. Funções Exponenciais e Logarítmicas do manual *Novo Espaço 12*, que servirá de apoio à planificação.

Capítulo 5 – Considerações Finais

Neste capítulo procuramos dar resposta ao problema em estudo, focalizado nas dificuldades e nos erros dos alunos no Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, bem como nas características do método de ensino-aprendizagem sobre o qual incide o estudo. Apresentamos ainda uma reflexão sobre as potencialidades e as limitações do estudo.

Ultimando o trabalho, apresentamos as referências bibliográficas e os anexos necessários no decorrer da sua realização.

Capítulo 2 – Revisão de Literatura

Bonwell, em 1991, definiu a aprendizagem ativa, "… in the context of the college classroom, active learning envolves students in doing things and hinking about the things they are doing." (p. 2). Também (Dewey, 1979) referencia que aprendemos fazendo e também pensando no que fazemos. É neste contexto de aprender fazendo que se insere a aprendizagem pelos pares, designada originalmente por *Peer Instruction*.

A PI é um método que promove a aprendizagem ativa, visando a substituição da transferência de conhecimento pela assimilação do mesmo. A criação e respetiva implementação deste método de ensino-aprendizagem deve-se a Eric Mazur, Físico de Harvard. Este adaptou os princípios da aprendizagem cooperativa, os quais têm como referência a Teoria Socioconstrutivista de Vygotsky.

Mazur acredita que o desafio do século 21 é o de encontrar novas maneiras de alcançar mais alunos, para ajudá-los a aprender melhor (Hanford, 2011). Para a autora deste trabalho, a PI já constitui uma delas devido às suas características. De facto, ensinar é envolver o pensamento ativo sobre a temática a abordar, analisar e selecionar noções chave e, em seguida, envolver os conceitos nos próprios pensamentos.

Neste capítulo apresentamos ainda, com base em diversos estudos, as dificuldades e os erros revelados pelos alunos no Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. Neste tema são abordados conceitos como limite, continuidade e diferenciabilidade que, apesar de não serem desconhecidos dos alunos, foram apenas trabalhados de forma intuitiva até ao 12.º ano. O estudo de funções, iniciado no 10.º ano e também abordado no 11.º ano, é aplicado às logarítmicas e às exponenciais. Assim, como pré-requisitos temos: Funções e Gráficos do Tema II (10.º ano) e Introdução ao Cálculo Diferencial do Tema II (11.º ano), conforme Programa de Matemática do 12.º Ano (PM12).

Em suma, fazemos uma revisão de literatura sobre os assuntos supra referenciados.

2.1 Aprendizagem pelos Pares

2.1.1 Digressão Histórica

A origem da aprendizagem pelos pares remonta ao ano de 1970, sendo consequência das conversas de David Hestenes, professor na Universidade do Arizona, com um colega que lecionava Introdução à Física. Este confessou-lhe as preocupações que tinha com os seus alunos, pois, semestre após semestre, a média das classificações dos alunos nunca ultrapassava os 40%. Na opinião de Hestenes, estas classificações deviam-se a que as questões dos testes do seu colega eram maioritariamente qualitativas, exigindo a compreensão dos conceitos. Contrapondo com o facto de a maioria dos professores não testar o conhecimento conceptual, ou seja, "… students just had to solve problems to pass the exams." (Hanford, 2011, p. 1).

Figura 1: David Hestenes em (University, 2010)

A referida observação motivou uma série de conversas, entre Hestenes e o seu colega, sobre a diferença entre o aluno ser capaz de resolver um problema e realmente compreender os conceitos envolvidos no problema. Depreendemos ainda, de (Hanford, 2011), que aqui uma tarefa designada por problema é encarada com algo que pode ser resolvido algoritmicamente com cálculo.

Deste modo, Hestenes decidiu testar a sua teoria com a ajuda de Ibrahim Halloun, um dos seus alunos de pós-graduação. Para isso desenvolveram um teste de escolha múltipla, com questões conceptuais onde constam os erros comuns cometidos pelos alunos, agora conhecido por Force Concept Inventory (FCI), tal como referido em (Hestenes, Wells, & Swackhamer, 1992).

O teste desenvolvido foi dado a realizar a cerca de 1000 alunos de sete professores da unidade curricular de Introdução à Física, os quais lecionavam com recurso às aulas convencionais. Hestenes, dividiu os professores em três grupos: "O primeiro consistia em turmas com professores premiados. O segundo grupo compreendia turmas com professores com uma classificação muito baixa." e "… o terceiro grupo consistia em professores com turmas pequenas (até 20 alunos)." (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 19).

Os alunos realizaram o referido teste no início e no final do semestre e, apesar disso, na segunda aplicação, as suas classificações só cresceram catorze por cento. Ou seja, "… os alunos não aprendem muito numa aula convencional independentemente da forma como se ensina." (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 19). Estes resultados foram publicados em 1985 pelo *American Journal of Physics* (Hanford, 2011, p. 2).

Contudo, e apesar dos resultados obtidos por Hestenes, os seus colegas, mesmo os que participaram no estudo, não o levaram em consideração. Ele justificou este facto com uma ideia pré-concebida por todos nós que as aulas convencionais são o caminho pelo qual praticamente todos ensinam Física Introdutória. E pensar que havia algo errado com as aulas convencionais significava que os professores de Física teriam de realmente mudar "… the way they do things …" (Hanford, 2011, p. 2).

Foram necessários cinco longos anos, após a publicação dos resultados, para que Eric Mazur ressuscitasse os estudos e resultados de Hestenes. Para este, Mazur era incomum, "He was the first one who took it to heart." (Hanford, 2011, p. 2). Mazur leu os estudos mas estava cético, pois ele era professor na Universidade de Harvard e os resultados não se iriam aplicar aos seus alunos. De facto, os seus alunos tinham boas notas e ele considerava-se um bom professor. Contudo, para provar que os alunos dele eram diferentes, decidiu aplicar o FCI.

Figura 2: Eric Mazur em **(DGC-USM, 2012)**

Após a aplicação do FCI e perante os resultados, Mazur ficou chocado, pois, como ele próprio afirmou em (Hanford, 2011, p. 3), “They didn't do much better …”. Concretamente, Mazur referiu que “… vendo o teste era de esperar que os meus alunos tivessem 100 por cento e, por isso, fiquei perplexo. A minha primeira reacção foi pensar que havia algo de errado com o teste. Não sabia o que pensar. Por um lado, os meus alunos tinham boas notas em exames muito mais complexos, com integrações, derivações...” (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 20). Outro facto com que ele não contava foi que os alunos, perante as questões conceptuais, lhe perguntassem: “… How should I answer these questions? According to what you taught me, or according to the way I usually think about these things? …” (Hanford, 2011, p. 3).

As perguntas anteriormente formuladas pelos alunos começaram a despertar nele um sentimento de que algo estava errado, na forma como ele chegava aos alunos. Nas palavras de Mazur, “… ensinava tal como eu próprio tinha sido ensinado. Afinal, que outras formas há de ensinar? É natural, foi como nós aprendemos e, além disso, temos tendência para projetar a nossa própria experiência nas pessoas que nos rodeiam. O que pensamos é: "Eu aprendi assim e, por isso, eles também devem aprender assim.” (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 19). Foi então que ele decidiu mudar a sua forma de ensinar, inovando com a criação do método atualmente conhecido por *Peer Instruction*. Os resultados foram tão bons que ainda hoje mantém este método de ensino-aprendizagem e realiza, com os membros do grupo Mazur em (MazurGroup, 2013), investigação sobre o mesmo.

2.1.2 Descrição do Método

A aprendizagem pelos pares, tal como se apresenta em (Crouch & Mazur, 2001), consiste em envolver os alunos na sua aprendizagem durante todo o processo de ensino-aprendizagem, ou seja, os alunos são construtores do próprio conhecimento. Tal é conseguido com recurso a tarefas que exigem a cada aluno um estudo prévio às aulas, para que possa aplicar e discutir os conceitos estudados com os seus colegas. Ao contrário da aula tradicional em que a formulação de questões pelo professor envolve apenas alguns alunos, a PI visa todos os alunos.

As aulas com PI organizam-se numa sequência estrutural conforme (Mazur, 1997). Primeiro é solicitado aos alunos que, antes de cada aula, façam a leitura de um determinado conjunto de informação e resolvam um Trabalho para Casa (TPC). Depois, no início de cada aula, o professor coloca uma questão designada por teste de leitura. Trata-se de uma questão curta e que visa apenas testar se a leitura recomendada foi ou não efetuada. Mas é importante que esta questão não teste a compreensão da leitura, porque isso iria penalizar e desencorajar os alunos que fazem a leitura, mas que ainda são incapazes de dominar os conceitos apenas a partir da leitura.

Seguidamente o professor faz uma pequena abordagem ao tema. Esta tem em conta as dúvidas e questões que os alunos colocam aquando do TPC associado à leitura, dando-lhes respostas. De facto, cada TPC é constituído por três questões, em que as duas primeiras têm por base os aspetos difíceis da leitura, com a terceira para a escrita das dificuldades e dúvidas. Mazur acredita nas vantagens desta técnica, pois assim ele chega aos alunos pelas suas dúvidas reais.

Curso: **Número:** **Nome:**

T.P.C. 2: leitura das páginas 30 a 38 de gaalt00.pdf e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes

Entrega do T.P.C. 2: 19 de abril de 2012, no início da aula do turno em que está inscrito

1. Indique uma operação elementar por linhas.
2. Dada uma matriz de tipo 7×9, qual o número máximo de pivôs que pode ter a sua forma escalonada reduzida por linhas?
3. O que achou difícil ou confuso na leitura? Se nada foi difícil ou confuso, então diga o que lhe pareceu mais interessante.

A docente,

Patrícia Damas Beites

Figura 3: Exemplo de um TPC usado pela docente Patrícia Beites em Álgebra Linear na UBI

Após esta breve exposição, segue-se uma questão relacionada com um conceito e com várias opções, chamada questão conceptual (CQ). Os alunos dispõem então de cerca de dois minutos para pensarem e decidirem individualmente qual será a resposta correta. Decorrido esse tempo, eles vão responder recorrendo a *clickers* de resposta eletrónica. De referir que esta votação nem sempre foi nem sempre é eletrónica, (Mazur, 1997).

Figura 4: Eric Mazur na conferência ALT-C 2012 em (Gramp, 2012)

Após a contagem dos votos, os alunos discutem as suas respostas com os colegas mais próximos. Entretanto, o professor circula pela sala de aula, ouvindo e promovendo discussões frutíferas, e pede aos alunos que convençam os colegas que a resposta que deram é a correta explicando o raciocínio subjacente. Esta discussão dura entre dois a quatro minutos e voltam a votar. De acordo com (Crouch & Mazur, 2001), caso a percentagem de respostas corretas esteja entre 35% e 70% na primeira votação, então a percentagem de respostas corretas aumenta na segunda votação.

Por fim, o professor explica a resposta correta. Uma alternativa a este último passo de Mazur é solicitar a explicação a um aluno voluntário, (Beites & Nicolás, 2013). Segundo estes autores, para que os alunos não tenham receio de explicar em voz alta e de errar em frente dos seus pares, é importante que o professor diga primeiro a opção correta.

Acontecimento	**Duração (em minutos)**
1. Apresentação da CQ	
2. Tempo para os alunos pensarem	*1-2*
3. Primeira votação (dos alunos mas individual)	*1*
4. Discussão entre pares, enquanto o professor circula na sala	*2-4*
5. Segunda votação	*1*
6. Explicação da resposta correta	*2 ou mais*

Tabela 1: Esquema de passos numa aula com PI elaborado com base em (Crouch & Mazur, 2001)

Contudo, poder-se-á pensar-se, no período de discussão de uma pergunta conceptual, os alunos estão a conversar e que poderá ser difícil trazer o foco de volta para o professor. Nesta fase poderá parecer que o professor não tem controlo na sala, como se refere em (Beites & Nicolás, 2013). Mas é só o que parece, e, efetivamente, é esta discussão que permite a consolidação do conceito.

Para além da Física e da Matemática, este método de ensino-aprendizagem está a ser aplicado nas mais diversas áreas, nomeadamente na Filosofia (Butchart, Handfield, & Restall, 2009), na Química (Brook & Koretsky, 2011), na Informática (Simon & Cutts, 2012) e na Medicina (Cortright, Colins, & DiCarlo, 2005).

Salientamos que é também aplicado na Universidade da Beira Interior (UBI), na área de Álgebra pela Professora Dra. Patrícia Beites e na área de

Engenharia Eletrotécnica e de Computadores pelo Professor Dr. Rogério Serôdio. Este último, percursor da sua aplicação na UBI, foi distinguido pela universidade com o prémio de Mérito Pedagógico em 2012.

2.1.3 Votação e Recolha de Respostas

Podemos dizer que existem várias formas para recolher as respostas dadas pelos alunos numa votação relativa a uma questão conceptual.

Um dos métodos mais simples de votação é realizado com as mãos, ou seja, os alunos respondem colocando o braço no ar. Uma das grandes vantagens deste método é que não tem qualquer custo e pode ser aplicado em qualquer turma independentemente dos recursos da escola. Contudo, tem também associadas duas desvantagens que são: a falta de anonimato, isto porque o voto de um aluno pode ser visto por outros alunos; a votação de alguns alunos pode influenciar outros alunos, em vez destes pensarem por si próprios na questão.

Figura 5: Votação com as mãos em (Deubel, 2013)

Um outro método de votação consiste na utilização de cartões de votação, os quais têm baixo custo e, de várias cores associadas a opções A, B, C e D, facilitam a recolha das respostas dadas pelos alunos. Além disso, é muito mais anónimo do que a votação com as mãos, já que estes cartões só são coloridos na frente e o seu verso é branco. Com uma disposição escolar da sala de aula, durante a votação, os alunos não conseguem, tão facilmente, aperceber-se das respostas dadas pelos colegas que estão à sua volta.

Figura 6: Cartões de votação usados pela docente Patrícia Beites em Álgebra Linear na UBI

Os dois métodos já referidos têm também uma desvantagem sob o ponto de vista do professor, que é o facto de ser mais difícil ter uma noção sobre a evolução da aprendizagem de cada aluno. Neste sentido, o professor só consegue ter uma ideia geral da evolução da turma como um todo.

Já os *clickers*, sistemas de resposta pessoal, constituem um dos métodos mais dispendioso de votação eletrónica e recolha das respostas dos alunos. Contudo, têm uma série de vantagens muito práticas: o anonimato completo na votação, ou seja, os alunos não conseguem ter a perceção da votação dos colegas; a facilitação do trabalho do professor, uma vez que lhe permite um *feedback*, em tempo real e sem eventuais erros de contagem manual, das respostas dos alunos e guardá-las para analisar a evolução individualizada de cada aluno nas questões conceptuais.

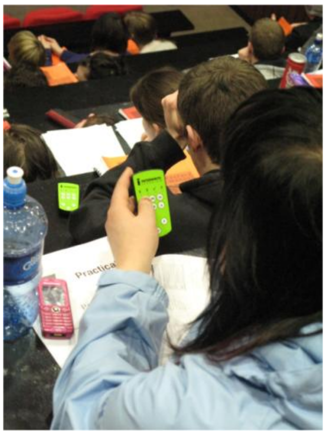


Figura 7: Votação por *clickers* em **(Flynn, 2012)**

Sobre os métodos de votação, foi realizado um estudo em (Lasry, 2008), em sala de aula, onde foram comparados os métodos de votação constituídos por cartões e por *clickers*. Segundo o que referiu o autor supracitado, do ponto de vista da perspetiva da aprendizagem dos alunos, a PI com *clickers* não oferece qualquer vantagem significativa em relação à PI com cartões. Como refere Lasry, na citada referência, “The pedagogy is not the technology by itself.” (p. 244).

No âmbito dos métodos eletrónicos de votação e de recolha de respostas dos alunos, podemos ainda considerar outro com recurso ao Navigator da TI-NSpire CX, o qual cria uma rede sem fios para as unidades portáteis de uma turma. Tendo em conta que no Ensino Secundário é exigido aos alunos que sejam possuidores de calculadora gráfica, numa situação ideal, todos os alunos teriam a sua própria calculadora, ou seja, o seu próprio instrumento de votação.

O software Navigator TI-Nspire CX fornece, por um lado, uma plataforma organizacional para as aulas, com o nome dos alunos inseridos com antecedência. Por outro lado, todas as calculadoras podem ser conectadas com o computador do professor, o que facilita a distribuição e a recolha de ficheiros, e, no que se refere à PI, o professor também consegue ter uma visão da evolução individual de cada aluno.

Figura 8: TI-Nspire Navigator Systems **(TexasInstruments, Manual de Instruções, 2011)**

O Navigator da TI-Nspire CX é uma ferramenta muito útil, pois permite, entre outras funcionalidades, capturar ecrãs e mostrar o trabalho de resolução de tarefas, e as respetivas etapas, de qualquer lugar na sala. Em particular, concretizando o que se reveste de interesse para a PI, salientamos algumas funcionalidades em (TexasInstruments, 1995): *Quick Poll*, que permite ao professor ter uma noção rápida do progresso da turma, uma visão em profundidade das respostas individuais e ainda salvar as respostas no computador; *Collaborative Questions*, que possibilita a avaliação da compreensão dos alunos em qualquer ponto de uma aula e a criação de questões, de escolha múltipla e de resposta livre.

De referir ainda um estudo piloto em sete escolas secundárias inglesas entre 2007 e 2008, realizado por Alison em (Clark-Wilson, 2009), onde se pretendia reunir um conjunto de evidências sobre os aspetos promotores de práticas pedagógicas desejáveis em sala de aula, com recurso à TI-Nspire CX. No referido estudo são exploradas as funcionalidades da TI-Nspire CX e é explicado como poderão ser usadas para desenvolver novas práticas de avaliação formativa e apoiar as já existentes, bem como permitir o desenvolvimento de tarefas matemáticas inovadoras.

Para mais informações sobre as funcionalidades mencionadas e outras, podem ser consultadas as referências (Clark-Wilson, 2009) e (TexasInstruments, Manual de Instruções, 2011).

2.1.4 Questões Conceptuais

A importância da construção de questões conceptuais não deve ser subestimada, pois delas depende o sucesso do método de ensino-aprendizagem PI. Assim, Mazur indica no seu manual, (Mazur, 1997, p. 26), algumas regras para a construção de questões conceptuais. Para ele, cada uma delas é mais do que uma simples questão de escolha múltipla e, portanto, tem de satisfazer critérios básicos:

- focar-se num só conceito;
- não se poder resolver com equações;
- ter opções boas;
- escrita de forma clara;
- ter dificuldade média.

Segundo (Mazur, 1997), todos estes critérios afetam diretamente o *feedback* para o professor. Se numa questão está envolvido mais de um conceito, então será difícil, para o professor, interpretar os resultados. Se os alunos puderem obter a resposta através de um mero cálculo, então a resposta não reflete necessariamente o seu entendimento da noção em causa.

Quanto à construção de boas opções, o ideal será que as incorretas reflitam os principais erros cometidos pelos alunos, os quais podem ser obtidos de momentos de avaliação de anos anteriores.

Tal como referenciado por (Beites & Nicolás, 2013), para Mazur, as questões conceptuais podem ser classificadas de acordo com a percentagem de respostas corretas na primeira votação. Na tabela seguinte, que resume a classificação, podemos também observar a relação da mesma com a escrita e com a dificuldade de uma certa CQ.

Percentagem *c* de respostas corretas antes da discussão, isto é, na primeira votação	**Classificação**
$c < 35\%$	*pode ser ambígua ou apenas alguns alunos compreendem os conceitos relevantes para ter uma discussão frutífera*
$35\% \leq c \leq 70\%$	*desafiadora, mas não excessivamente difícil*
$c > 70\%$	*pouco benéfica no sentido da discussão*

Tabela 2: Classificação de questões conceptuais, de Mazur, em (Beites & Nicolás, 2013, p. 16)

Apesar de inicialmente este tipo de questões terem sido construídas para melhorar a aprendizagem dos alunos na área da Física, nomeadamente por Eric Mazur, foram posteriormente construídas em diversas áreas. Vejamos agora dois exemplos de questões conceptuais, uma de Cálculo e outra de Álgebra Linear.

Exemplo 1: Questão Conceptual de Cálculo

Este exemplo foi retirado de (Hallet, Robison, & Lomen, 2003), focando-se no conceito de declive e apresentando uma estrutura diferente da que têm a generalidade das questões conceptuais. De facto, neste caso, não se pretende a escolha da opção correta, mas antes a ordenação, mediante um critério, das opções dadas.

1. Using the graph in Figure 1, arrange in ascending order:

   a) Slope where $x = 0.2$
   b) Slope where $x = 1.5$
   c) Slope where $x = 1.9$
   d) Slope of line connecting the points where $x = 1.5$ and $x = 1.9$
   e) The number 1

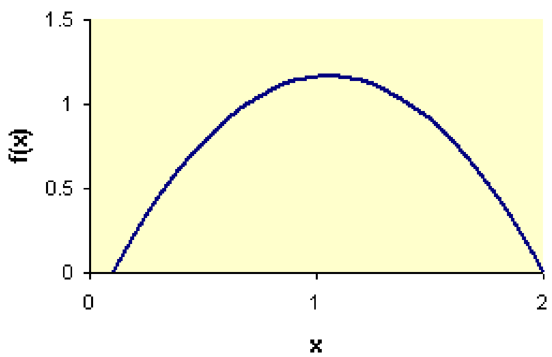


FIGURE 1.*Graph of function*

Figura 9: Uma das duas questões conceptuais em **(Hallet, Robison, & Lomen, 2003, p. 3)**

Dos autores mencionados, em conjunto com outros, (Hughes-Hallet, et al., 2010) é um livro onde se podem encontrar muitas questões conceptuais para o Cálculo.

Exemplo 2: Questão Conceptual de Álgebra Linear

Consideremos agora um outro exemplo, retirado de (Beites & Nicolás, 2013), aplicado pelos autores em contexto de Álgebra Linear. Na questão conceptual que se segue, o conceito envolvido é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz. Os erros mais frequentes cometidos pelos alunos, que ajudaram na sua construção, são:

- anular entradas só abaixo de um pivô;
- considerar um pivô de uma linha como primeiro elemento não nulo dessa linha e não como 1;
- não colocar as linhas nulas abaixo das linhas não nulas;
- o primeiro pivô tem de ser a entrada na posição 1,1.

Which of the following matrices is in the reduced row echelon form?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Figura 10: Questão Conceptual CQ5 em (Beites & Nicolás, 2013, p. 7)

Esta questão foi aplicada em dois turnos distintos, de uma unidade curricular de Álgebra Linear e Numérica, e os resultados obtidos foram os que se ilustram nas tabelas seguintes.

Turno 1	
Nº Votos	% Votos
a) 11	27
b) 18	44
c) 0	0
d) 12	29

Turno 2	
Nº Votos	% Votos
a) 12	44
b) 11	41
c) 1	4
d) 3	11

Turnos 1 e 2	
Nº Votos	% Votos
a) 23	34
b) 29	43
c) 1	2
d) 15	22

Tabela 3: Resultados obtidos com a aplicação da questão conceptual em (Beites & Nicolás, 2013)

Pela observação dos dados, podemos concluir que nem sempre a mesma questão aplicada a turnos diferentes conduz aos mesmos resultados. Reparemos que no turno 1 é uma questão ambígua, no sentido da Tabela 1, mas no turno 2 é considerada uma questão desafiadora. Tomando o número total de votos, podemos dizer que esta é uma questão conceptual quase desafiadora, pois a percentagem de respostas corretas na primeira votação está próxima de 35%.

2.2 Dificuldades e Erros no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*

As dificuldades e os erros, doravante citados, são elencados pelos autores dos estudos que compõem a revisão de literatura nesta secção. Sempre que possível, utilizamos as designações que constam nesses estudos. Caso contrário, designamo-los pelo conteúdo matemático incorretamente aplicado.

╠ (Allen, 2007)

Neste artigo, o autor refere que o pensamento do estudante é composto por: fórmulas, relevância, tédio e prazer. Indica que estas são parte das suas atitudes e pensamentos sobre a Matemática.

Para Allen, o conhecimento dos erros por parte dos professores deverá ser usado de modo construtivo, ou seja, os professores devem ajudar os alunos a reconstruir conceções corretas. Entre outros, apresenta os que se seguem.

- Erro da lei do cancelamento (*incorrect cancelling*)

$$\frac{ab+c}{b} = a+c$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

• Erro das funções lineares

$$(x+3)^2 = x^2 + 9$$

$$e^{a+b} = e^a + e^b$$

$$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(2x) = 2\ln x$$

• Erro de cálculo (*compute*)

$$-4^2 = 16$$

• Erro na definição de raiz quadrada (*square roots - definition*)

$$\sqrt{(-4)^2} = -4$$

• Erro de regra operatória

$$\log x - \log y = \frac{\log x}{\log y}$$

• Erro das funções multiplicativas

$$e^{a \times b} = e^a \times e^b$$

• Erro de não verificar se as soluções pertencem ao dominio (*forget to check if the answer is in the domain*)

$$\log_2(x-4) = 3 - \log_2(x+3) \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 8 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -4$$

• Erro de domínio

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \{x \in \Re : x \neq 1\}$$

╠ (Bagni, 2001)

Neste artigo, o autor analisa alguns estudos de caso de erros comuns cometidos por alunos do ensino secundário. Esta análise permite concluir que os alunos, às vezes, generalizam inadequadamente devido aos fracos conhecimentos (algébricos). Percebe-se ainda que o efeito dos contraexemplos nos alunos é extremamente fraco. Bagni salienta assim que os alunos não são capazes de interpretar corretamente o que os contraexemplos envolvem.

No que se refere aos erros no âmbito do tema em questão, consideramos pertinente salientar os subsequentes.

- Erro das funções lineares (*misconception of linear mappings*)

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a^4+9} = a^2 + 3$$

$$\log_e(x^2+7) = \log_e 7 \Rightarrow \log_e x^2 + \log_e 7 = \log_e 7$$

- Erro de equilíbrio (*balance misconception*)

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_e x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(Cury, 2003)

Este estudo teve início em 2001 e decorreu em, pelo menos, dois anos letivos. O foco do mesmo é a análise de erros cometidos em testes, trabalhos individuais e de grupo, de cerca de 450 alunos do 1.º ano do Curso de Engenharia Química, em turmas de Cálculo Diferencial e Integral I, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). O objetivo era analisar e classificar as dificuldades que propiciam os erros cometidos nos momentos de avaliação escrita, dificuldades essas que se prendem com:

- conteúdos de álgebra do ensino básico, ou seja, com simplificação, produtos notáveis, potenciação e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- o conceito de limite;
- lapsos de escrita ou de cálculo nas substituições;
- uma aplicação deficitária de regras de derivação, tanto de funções racionais, como da função composta.

No que diz respeito aos erros identificados pela autora elencamo-los seguidamente.

• Erro da lei do cancelamento

$$\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}=-6x-2$$

• Erro de cálculo

$$\sqrt{3}.\sqrt{3}=9$$

• Erro na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$(2x+3)(3x-5)=2x+3\times 3x-5=2x+9x-5$$

Com o propósito já mencionado, a autora, numa primeira fase, realizou um levantamento, seguido de uma categorização, das dificuldades e dos erros apresentados em cada uma das três provas semestrais. Numa segunda fase, no ano seguinte, testou as categorias e aplicou novamente provas verificando o aparecimento das mesmas dificuldades e dos mesmos erros do ano anterior.

╠ (Cury, 2006)

Neste trabalho, a autora refere um estudo realizado através de um projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), onde participaram os alunos de 1.º ano do 1.º semestre da área de Ciências Exatas, de nove Instituições de Ensino Superior gaúchas.

Os erros cometidos pelos alunos são exibidos, como o que segue.

• Erro de fatorização de expressões algébricas

$$x^2=2x\Leftrightarrow\frac{x^2}{x}=2\Leftrightarrow x=2$$

Os mesmos são precedidos da dificuldade associada. Para esta recolha de dados, foi realizada uma prova escrita no início do semestre letivo. Com a aplicação desta prova foi possível identificar algumas dificuldades sentidas pelos alunos, tais como:

• decompor um polinómio em fatores;

• dividir polinómios;
• simplificar expressões que definem funções racionais.

Para a autora, a análise de erros dos alunos pode ser uma metodologia de ensino, ou seja, a mesma permite compreender as dificuldades que eles apresentam, em determinado conteúdo, e, deste modo, planificar melhor as estratégias para a construção do conhecimento.

╠ (Cury & Cassol, 2004)

Neste estudo são apresentadas diferentes formas de focar as dificuldades que originam os erros cometidos pelos alunos em provas de Matemática. É relatada uma investigação, que foi realizada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral num curso de Engenharia Química, onde se salienta que as principais dificuldades reveladas pelos alunos são:

• no conceito de função;
• na derivada da função composta;
• no esboço gráfico de funções.

A referida investigação realizou-se no ano de 2003 e teve os objetivos que passamos a citar (Cury & Cassol, 2004, p. 29):

- analisar os erros cometidos por alunos ao resolverem problemas e exercícios, em trabalhos individuais ou grupais;

- detetar possíveis causas para os erros;

- a partir dos dados obtidos, propor estratégias para envolver os alunos na procura de soluções para as suas próprias dificuldades, atendendo-os em grupos ou individualmente.

Para dar cumprimento a estes objetivos, os alunos realizaram, numa primeira fase, um pré-teste que permite medir os níveis de aprendizagem do Ensino Secundário. Após isto, realizaram três provas de verificação da aprendizagem, durante o semestre, das quais foram selecionadas as que apresentavam um maior índice de erros cometidos pelos alunos. Estes erros foram posteriormente classificados e analisados, em particular o seguinte.

• Erro da lei do cancelamento

$$\frac{x^2+3}{x-1} = -(x+3)$$

Salientamos desta investigação algumas conclusões que as autoras referem, como por exemplo, o facto de os alunos revelarem dificuldades na transição para o Ensino Superior, devido a lacunas nos pré-requisitos. Também revelam falta hábitos de procura de informações em livros didáticos, assim como destacam que os alunos não refletem sobre as suas próprias aprendizagens, nomeadamente nos erros cometidos.

╠ (Dullius, Furlanetto, & Quartieri, 2011)

Este estudo foi realizado pela equipa de pesquisa “Metodologias para o ensino de Ciências Exatas” do Centro Universitário UNIVATES. Podemos dizer que é constituído por duas fases. Numa primeira fase, a equipa de pesquisa faz uma abordagem teórica onde refere as principais dificuldades e erros indicados nos estudos realizados por (Souza, 2002), (Astolfi, 1999) e (Radatz, 1979). Nestes salientam-se as seguintes dificuldades:

• uso e apropriação deficiente de conceitos;

• por falta de compreensão e domínio de procedimentos;

• por fragilidades nas organizações conceituais que impedem a integração de novos conceitos;

• causadas pela incompreensão do enunciado da atividade, que pode não ser tão “clara” como parece a quem escreveu;

• relacionadas com as operações intelectuais envolvidas;

• no caminho a seguir pelo estudante;

• originadas pela incompreensão de conceitos de outra disciplina;

• causadas pela complexidade do conteúdo;

• na linguagem (apresentadas na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática);

• devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos);

• devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio (causadas pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações);

• devido à aplicação de regras e ou estratégias irrelevantes (produzidas por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos).

Numa segunda fase, analisam e enquadram, de acordo com os autores (Souza, Astolfi e Radatz), os tipos de erros apresentados pelos alunos do Ensino Básico e Secundário, na 11.ª OMU (Olimpíada Matemática da Univates). Esta prova foi realizada em 2008 e teve uma amostra de 2384 alunos. Nomeadamente, surge o erro subsequente.

• Erro construtivo

$$330 = 10(n+1)4 \Leftrightarrow 330 - 10 = 4n + 4 \Leftrightarrow 320 - 4 = 4n \Leftrightarrow \frac{316}{4} = n$$

Um dos objetivos desta prova é estimular os alunos, explorando o gosto deles pelas competições, e desenvolver o raciocínio lógico-matemático com recurso à resolução de novos e desafiantes problemas.

╠ (Hirst, 2002)

Este artigo analisa alguns erros cometidos por alunos no ensino universitário, ao longo de um semestre, na área de cálculo. O autor refere que a maioria dos erros, designados por estruturais, surge por motivos relacionados com a generalização, a intuição, a inadequação de conceitos, incompreensão, problemas de linguagem e manipulação de símbolos.

Todos os exemplos seguidamente retratados foram retirados do artigo, no qual se podem encontrar explicações comentadas para a ocorrência dos erros descritos. O autor refere ainda que foram encontrados em trabalhos escritos dos alunos ou durante as aulas de resolução de problemas.

• Erro de extrapolação de procedimento (*procedural extrapolation*)

$$f(x) = e^{x+x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x+x^2} \Rightarrow f''(x) = e^{x+x^2}$$

$$f(x)=\ln(1+2x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+2x} \Rightarrow f''(x)=\frac{(1+2x)-2}{(1+2x)^2}$$

- Erro das funções pseudo lineares (*pseudolinearity*)

$$\ln(x+y)=\ln x+\ln y$$

$$e^{x+y}=e^x+e^y$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2$$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

╠ (Hoon, Singh, & Ayop, 2010)

Este artigo explora os resultados de um estudo em que um teste foi aplicado a cerca de 200 estudantes de quatro escolas secundárias da Malásia. O objetivo era investigar como os estudantes comunicam matematicamente através da apresentação das soluções para responder a perguntas que envolvem logaritmos. O autor conclui que os alunos são capazes de elaborar cálculos rotineiros que envolvem logaritmos, mas são menos capazes de resolver problemas que exigem pensamento cognitivo de nível mais elevado.

O processo de recolha de dados foi dividido em dois momentos. Num primeiro momento, os professores ajudaram os alunos a fazer alguma revisão sobre o tema dos logaritmos. Num segundo momento, os alunos tiveram 90 minutos para responder às perguntas, através de uma prova escrita. Posteriormente, os tipos de erros que os alunos fizeram foram agrupados pelo esquema de resposta e identificados. Apresentam-se alguns seguidamente.

- Erro das funções multiplicativas

$$\log_5 6=\log_5(2\times 3)=\log_5 2\times\log_5 3=0{,}43\times 0{,}68=0{,}2924$$

- Erro das funções aditivas

$$\log_p(5x-4)=2\log_p 3+\log_p 4 \Leftrightarrow \log_p(5x-4)=\log_p(3^2+4)$$

• Erro da indiferença do expoente na função ou no argumento da mesma

$$\text{se } \log_2 x = a \text{ e } \log_2 y = b \text{ então } \log_2\left(x^2 y\right) = \log_2 x^2 + \log_2 y = a^2 + b$$

$$\log_a\left(x^3 y^4 z^{-1}\right) = \log_a(x + x + x + y + y + y + y - z)$$
$$= \log_a 3x + \log_a 4y - \log_a z$$

• Erro da indiferença de trabalhar com uma função ou o seu argumento

$$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} 4} - \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} x^2} = \frac{\log_{10} x^3 - \log_{10} 32}{\log_{10} 4x^2} = \log_{10} x - \log_{10} 8 = \log_{10} \frac{x}{8}$$

• Erro da mudança de base

$$\log_4 x - \log_8 x^2 = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 4} - \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} x^2}$$

╟ (Liang & Wood, 2005)

Neste artigo, os autores analisam os erros cometidos por alunos do Ensino Secundário, no que diz respeito a tarefas que envolvem logaritmos, utilizando para isso uma prova escrita aplicada a 81 alunos de duas escolas de Singapura. Os dados recolhidos foram analisados para elencar os tipos de erros cometidos bem como as suas possíveis causas. Liang e Wood salientam que muitos erros não se devem a desconhecimento, mas parecem oriundos de "sobregeneralizações" de regras algébricas.

Os autores apresentam ainda, com base nos erros dos quais transcrevemos alguns seguidamente, sugestões para a prática letiva do professor.

• Erro de noção equivocada de fator comum (*mistaken notion of common factor*) ou Erro de extrapolação linear (*linear extrapolation*)

$$\frac{\log 16 - \log 8 + \log 4}{\log 3} = \frac{\log(16 - 8 + 4)}{\log 3}$$

$$\ln\left(7x - 12\right) = \ln\left(7x\right) - \ln 12$$

$$\frac{\log_2 27}{\log_2 9} = \log_2\left(27 \div 9\right) = \log_2 3$$

$$\frac{\log_2(27)}{\log_2 9} = \frac{27}{9} = 3$$

(Melis E. , 2005)

Este artigo relata as primeiras experiências, realizadas com os alunos de Ciências da Computação da Universidade de Saarland, no ambiente de aprendizagem ActiveMath. Neste apresentam-se erros cometidos por alunos, com o objetivo de, a longo prazo, melhorar a qualidade da aprendizagem ao nível cognitivo e metacognitivo.

A recolha de dados foi feita através de uma prova escrita e complementada com uma entrevista a professores. Segundo Melis, este artigo fornece uma base para se poderem estabelecer metas de aprendizagem e capacidades dos alunos. A autora salienta ainda que, de futuro, irá investigar em que situações os erros são benéficos e como se pode gerar um *feedback* útil com eles.

Reproduzimos agora alguns dos erros que a autora analisou neste artigo.

- Erro de aplicação de regras (*a rule was applied incorrectly*)

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2},\ para\ x \neq \frac{1}{2}$$

se $f = \frac{1}{g^2} = g^{-2}$, onde $g(x) = 1 - 2x$, então $f'(g) = (-2)g^3$

$$(f(g(x)))' = (f \circ g)'(x) = (-2).(1-2x)^3.(-2)$$

- Erro de procedimento da adição (*addition procedure*)

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{16}$$

Capítulo 3 – Metodologia de Estudo

Neste capítulo apresentamos a metodologia de investigação adotada. Começamos por uma descrição breve da componente empírica do estudo. Nomeadamente, explicitamos as opções metodológicas, os instrumentos de recolha de dados, o tratamento e a análise dos mesmos.

Com base na análise das dificuldades e dos erros que constituem os dados recolhidos, bem como através da revisão de literatura no Capítulo 2, construímos algumas questões conceptuais. As mesmas serão utilizadas, como tarefas propostas aos alunos, na planificação do Capítulo 4.

3.1 Descrição do Estudo

3.1.1 Opções Metodológicas

Segundo (Bogdan & Biklen, 2010), a investigação qualitativa apresenta várias características. Uma delas é o facto do ambiente natural constituir a fonte direta de dados, sendo o investigador o instrumento principal. Havendo uma preocupação com o contexto de investigação, a observação costuma ser o principal instrumento de recolha de dados. No entanto, tendo em conta que a autora não estava a lecionar em 2012/2013, os dados são obtidos por outros meios.

O presente estudo é de natureza qualitativa e interpretativa. Com o mesmo, procuramos identificar e compreender as dificuldades e os erros que experimentam os alunos do 12.º ano no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. As referidas compreensão e identificação visam a construção de recursos didáticos para implementação da Aprendizagem pelos Pares ao nível do Ensino Secundário.

Por um lado, a seleção do tema prende-se com questões de gosto pessoal relativamente aos possíveis temas do 12.º ano do PM12. Por outro lado, a escolha do ano de escolaridade está relacionado com a tentativa, depois frustrada, de utilizar os Exames Nacionais de 12.º ano, de Matemática, como instrumento de recolha de dados. Concretamente, não obtivemos resposta em tempo útil ao pedido (Anexo I), dirigido ao Júri Nacional de Exames, para podermos ter acesso às resoluções dos Exames Nacionais de Matemática do 12.º ano.

3.1.2 Instrumentos de Recolha de Dados

A recolha de dados desta investigação prende-se essencialmente com as dificuldades e os erros de alunos, decorrentes das mesmas, no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. Estes são: descritos por professores de Matemática num questionário (Anexo II) aplicado aos mesmos; revelados em resoluções de alguns alunos do 12.º ano, agora maiores de idade conforme Anexo III.

No que se refere ao questionário, este começou a ser aplicado em dezembro de 2012. Em particular, nesta primeira fase, a investigadora contactou o Delegado de Grupo de algumas escolas do concelho da Covilhã. O instrumento em questão, nos restantes casos, foi enviado por correio eletrónico. Aproximadamente, esta segunda fase decorreu nos meses de fevereiro e março de 2013.

Quanto às resoluções de alguns alunos, estas foram extraídas de testes recolhidos através de conhecimento pessoal dos alunos. Nomeadamente, a investigadora contactou, por diversos meios, ex-alunos e explicandos.

3.1.3 Tratamento e Análise dos Dados

A amostra desta recolha de dados, no que concerne ao questionário, é constituída por um total de 21 professores a lecionar no continente. Esta amostra, não probabilística, é considerada de conveniência. De facto, à solicitação de preenchimento responderam colegas das escolas do Concelho da Covilhã e colegas conhecidos com os quais temos contacto por correio eletrónico.

Após a recolha dos dados, o seu tratamento e a sua análise foram conseguidos através da separação dos mesmos em categorias de análise. Concretamente, consideramos as dificuldades e os erros como duas grandes categorias. No que se refere à segunda, esta é dividida nas seguintes subcategorias: erros de cálculo, de aplicação, de simplificação e de conceitos.

Os colegas, professores de matemática, que responderam ao questionário que visava aferir os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos do 12º ano no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, indicaram que os alunos apresentam dificuldades em:

- identificar o tipo de indeterminação, no cálculo de limites;
- aplicar as regras de derivação;
- interpretar os problemas de modelação;
- relacionar as resoluções gráficas e analíticas;
- relacionar declive com derivada de uma função;
- determinar o domínio da função logarítmica;
- resolver equações com a função exponencial;
- assimilar as regras de operações com potências;
- obter gráficos a partir da calculadora e interpretar os mesmos;
- resolver inequações com funções racionais;
- resolver inequações do segundo grau.

Listamos agora os erros retirados do referido questionário.

╠ Erros de Cálculo;

- Erro de resolução de inequações

$$\ln\left(\frac{2x}{4-3x}\right) \geq -1 \Leftrightarrow e^{-1} \geq \frac{2x}{4-3x}$$

$$2x + x^2 > 0 \Leftrightarrow x(2+x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 2 - x > 0$$

- Erro no cálculo de limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+3e^x}{x^4+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=1$$

- Erro nas prioridades das operações

$$40-32\times 2^{-0,05t}=36\Leftrightarrow 8\times 2^{-0,05t}=36$$

- Erro de resolução de inequações

$$\ln\left(\frac{2x}{4-3x}\right)\geq -1\Leftrightarrow e^{-1}\geq\frac{2x}{4-3x}$$

$$2x+x^2>0\Leftrightarrow x(2+x)>0\Leftrightarrow x>0\wedge 2-x>0$$

- Erro de operações com potências

$$4^{2x}\neq 2^{3x}$$

$$a^2=2a$$

$$3^2+4^2=7^2$$

$$a^2=2a$$

╠ Erros de Aplicação;

- Erro das regras de derivação

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)'=\frac{5(3x-1)-3(5x+2)}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{3x+2}{4}\right)'=\frac{3}{16}$$

- Erro de regra operatória de logaritmos

$$\log x-\log y=\frac{\log x}{\log y}$$

$$\log(x-y)=\frac{\log x}{\log y}$$

- Erro na aplicação dos casos notáveis da multiplicação

$$x^2 + 16 = (x+4)(x-4)$$

╠ Erros de Simplificação;

- Erro da lei do cancelamento

$$\frac{2x+7}{2x} = 7$$

$$\frac{x(2+x)}{6x+12} = \frac{2+x}{6+12}$$

- Erro de simplificação de expressões algébricas

$$1 + 8 \times 2^x = 9 \times 2^x \Leftrightarrow 18^x = 18^x$$

$$1 + 8 \times 2^x = 9 \times 2^x$$

╠ Erros de Conceito;

- Erro da derivada num ponto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & se\ x > 0 \\ -3x, & se\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2}, & se\ x > 0 \\ -3 & , se\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \begin{cases} -1, se\ x > 0 \\ -3, se\ x < 0 \end{cases}$$

- Erro das funções multiplicativas

$$f'(x) = \left(x^3 \times e^x\right)' = 3x^2 \times e^x$$

- Erro no conceito de limite

$$2^{-\infty} = -\infty$$

- Erro de potências

$$\sqrt{32} = 32^{-\frac{1}{2}}$$

• Erro na mudança de base

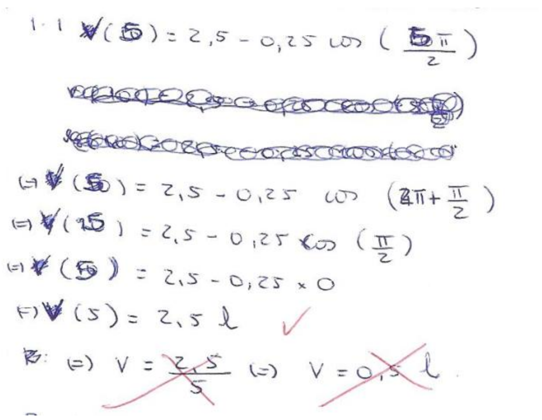
$$2^{-0,05t} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -0,05t = 2^{\frac{1}{8}}$$

$$10^{y-1} = 2x \Leftrightarrow 5^{y-1} = x$$

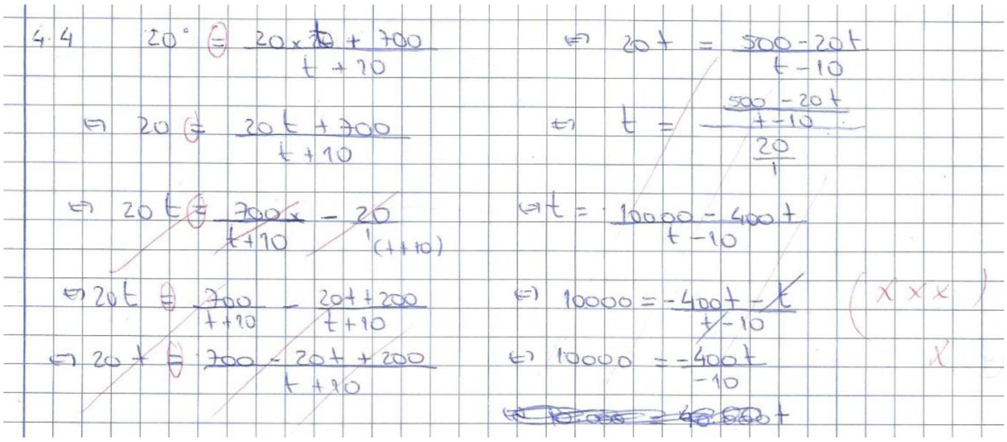
Relativamente ao segundo instrumento de recolha de dados, apresentamos agora os que foram retirados de testes de avaliação de dois alunos. Estes, designados por aluno A e aluno B, frequentaram a disciplina de Matemática A nos anos letivos 2007/2008 e 2010/2011, respetivamente.

╠ Aluno A

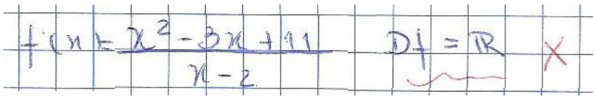
• Erro do conceito de função



• Erro da lei do cancelamento

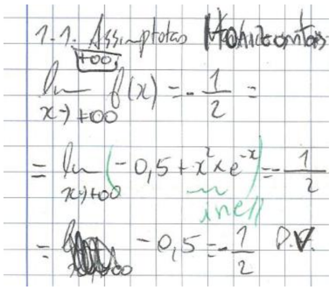


• Erro de domínio

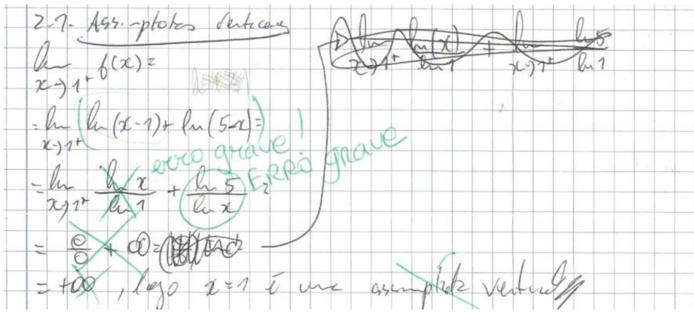


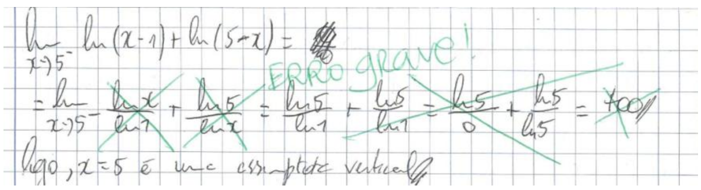
Aluno B

• Erro de fórmula

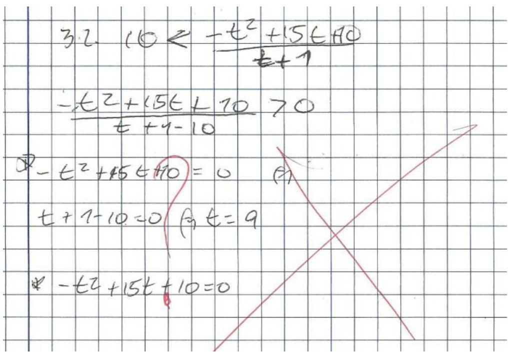


• Erro de regra operatória





• Erro de equivalência de inequações



3.2 Algumas Questões Conceptuais para o Tema

Aqui colocamos algumas questões conceptuais construídas para a planificação de uma aula do Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II* com PI. Em todas, o objetivo que traduz o que indica o PM12 é aplicar as regras operatórias de logaritmos no cálculo e em pequenas demonstrações.

CQ1

A expressão $\log_5(2\times 3)$ é igual a:

a) $\log_5 2\times\log_5 3$;

b) $\log_5 2+\log_5 3$;

c) $\log_5 2-\log_5 3$;

d) $\log_5 2\div\log_5 3$.

CQ2

A expressão $\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ é igual a:

a) $\frac{\ln(x-y)}{\ln(x+y)}$;

b) $\ln[(x-y)-(x+y)]$;

c) $\ln(x-y)-\ln(x+y)$;

d) $\frac{\frac{\ln(x)}{\ln(y)}}{\ln(x)\times\ln(y)}$.

CQ3

A expressão $\log_3\left(x^4y^2\right)$ é igual a:

a) $\log_3(8xy)$;

b) $\log_3(4x)+\log_3(2y)$;

c) $4\log_3 x+2\log_3 y$;

d) $4\times 2\log_3(xy)$.

CQ4

O valor de $\log_5(9)$ é igual ao valor de:

a) $\dfrac{\log_9 5}{\log_9 9}$;

b) $\dfrac{\ln 5}{\ln 9}$;

c) $\dfrac{\log_5 9}{\log_5 5}$;

d) $\dfrac{\log_5 5}{\log_5 9}$.

CQ5

Através das regras operatórias de logaritmos, o maior valor é representado pela expressão:

a) $\ln(30) - \ln(2)$;

b) $2\ln(4)$;

c) $\ln(3) + \ln(4)$;

d) $\dfrac{\ln(4)}{\ln(2)}$.

CQ6

Para todo o x pertencente a $\Re^+$, $\log_{\frac{1}{e}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é igual a

a) 0;

b) $\ln(x)$;

c) $-\ln(x)$;

d) ∞.

Capítulo 4 - Uma aula com Aprendizagem pelos Pares

Neste capítulo apresentamos e analisamos, no que diz respeito ao tópico Funções exponenciais e logarítmicas do Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, o manual de 12.º ano adotado pelas escolas da cidade da Covilhã. Temos em conta os artigos (Ponte, Salvado, Fraga, Santos, & Mosquito, 2007) e (Ponte J. P., 2004). Consideramos ainda o artigo (Sierra, González, & López, 2003), por ser o ponto de partida metodológico referido em (Ponte J. P., 2004).

Após o estudo dos artigos supracitados, decidimos considerar as seguintes categorias de apreciação do manual: Apresentação; Descrição e Análise. Na primeira tomamos em atenção os aspetos gerais do manual, o que inclui a caracterização física do mesmo. Na segunda narramos pormenorizadamente o tratamento do anteriormente referido tópico do Tema II no manual. Por último, na terceira, elaboramos uma análise tridimensional, (Sierra, González, & López, 2003): conceptual, didática-cognitiva e fenomenológica.

Análise conceptual	Análise didático-cognitiva	Análise fenomenológica
• Sequencia dos conteúdos. • Definições: tipo e papel que desempenham no texto. • Exemplos e exercícios. • Representações gráficas e simbólicas. • Aspetos materiais.	• Objetivos e intenções dos autores (expressas habitualmente no prólogo). • Teorias de ensino-aprendizagem subjacentes. • Capacidades que se querem desenvolver.	• Em torno da Matemática. • Em torno de outras ciências. • Fenómenos do dia a dia.

Tabela 4: Análise tridimensional segundo (Sierra, González, & López, 2003, p. 24)

Ao longo deste capítulo, adotamos a tipificação das tarefas conforme (Ponte J. P., 2003). Para este autor, tendo em conta o grau de dificuldade e a abertura, as tarefas classificam-se em exercícios, problemas, explorações e investigações. De modo completo, reproduzimos aqui o esquema da referida tipificação.

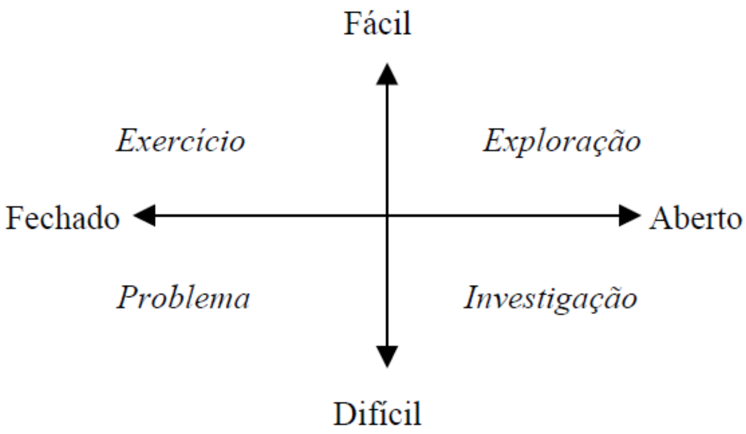


Figura 11: Tipos de tarefas, em termos de dificuldade e de abertura, em **(Ponte J. P., 2003, p. 5)**

Adotamos ainda a aprendizagem integrada em contextos com referências à Matemática pura, à semirrealidade e à realidade, as quais fazem parte dos ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose em (Skovsmose, 2000). Neste artigo, o autor defende que o ideal é conseguir que os alunos passem pelos diferentes tipos de tarefas, desde os exercícios até às investigações, nos vários contextos com as referências mencionadas, para se poderem desenvolver integralmente em Matemática.

Por último, elaboramos a planificação de uma aula com recurso à aplicação do método de ensino-aprendizagem referido no Capítulo 2. Do Tema II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, selecionamos o tópico Funções exponenciais e logarítmicas. A escolha deve-se, por um lado, a um gosto pessoal pelo tópico. Por outro lado, é também um tópico, incluído no tema mencionado, onde conseguimos um maior número de dados recolhidos no sentido dos erros.

Como a autora não esteve a lecionar no ano letivo 2012/13, nomeadamente 12.º ano, a planificação da aula que se segue apresenta o nome da escola e outros elementos fictícios. Pelo mesmo motivo, não houve recolha de TPC dos alunos. Assim, consideramos as dificuldades e os erros, detetados na revisão de literatura (Capítulo 2) e no questionário aplicado (Capítulo 3), nomeadamente nas questões conceptuais propostas.

4.1 O manual *Novo Espaço 12*

Esta secção está dividida em três subsecções: Apresentação, Descrição do manual no que diz respeito ao tópico Funções exponenciais e logarítmicas do tema *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do PM12 e, por último, Análise, do referido tópico no manual.

4.1.1 Apresentação

O *Novo Espaço 12* é um manual publicado em 2012 (1.ª edição), pela Porto Editora, sendo os seus autores Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, acerca de quem não são dadas informações. Este manual destina-se a alunos de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, como se destaca numa zona próxima do título.

O manual está dividido em dois volumes, designados por Parte 1 e Parte 2, sendo que o tema *Introdução ao Cálculo Diferencial II* encontra-se em ambos. As referidas partes distinguem-se ainda pelas designações parciais dos temas oficiais mencionados na capa de cada uma: Probabilidades (*Probabilidades e Combinatória* no PM12) e Funções (*Introdução ao Cálculo Diferencial II* no PM12); Funções e Trigonometria (*Trigonometria e Números Complexos* no PM12).

Na capa de cada parte utiliza-se o símbolo "ao", com a menção Acordo Ortográfico, informando estar de acordo com o mesmo. Tal é ainda reforçado na primeira folha de cada parte: "Este livro respeita a nova ortografia, considerando a calendarização definida pela Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricula (DGIDC) para aplicação do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, tendo-se mantido a ortografia anterior quando os critérios pedagógicos assim o exigiram." (Costa & Rodrigues, 2012, p. 1).

Figura 12: Capa dos dois volumes do manual Novo Espaço

Na Parte 1 temos o Tema 1 – Probabilidades e Combinatória (126 pp.) e o Tema 2 - Introdução ao Cálculo Diferencial II (54 pp.). A Parte 2 é constituída pela continuação do Tema 2 (120 pp.) e pelo Tema 3 – Trigonometria e Números Complexos (112 pp.). Excetuando a numeração árabe dos temas, as designações dos mesmos no manual são idênticas às utilizadas no PM12.

O facto de estar dividido em dois volumes torna, por um lado, a consulta mais acessível. Por outro lado, possibilita o transporte de uma só parte para as aulas de acordo com os tópicos que estão a ser trabalhados. Este último aspeto é referido, embora com pouco destaque, na contracapa de cada volume do manual: “A Porto Editora publicou esta obra em 2 partes para reduzir o peso a transportar pelos alunos.”

No início de ambas as partes do manual é referenciado que este foi concebido tendo em atenção o programa da disciplina de Matemática A para o 12.º ano, seguindo-se a reprodução do desenvolvimento do referido programa no que diz respeito aos conteúdos em cada parte. Não são reproduzidas as indicações metodológicas do PM12, associadas ao desenvolvimento, mas apresentam-se sugestões para orientar o trabalho do aluno. A designação desta secção do manual é curiosa: ““Programa” para o aluno”.

Previamente, mas depois do Prefácio (designado apresentação) e do Índice, apenas no primeiro volume, apresenta-se a estrutura do manual com as partes (““Programa” para o aluno”, temas e utilização da calculadora gráfica) em que assenta. Os autores destacam ainda dez componentes que aparecem em cada um dos temas:

- Apresentação, em página dupla, que indica que cada tema (designado por unidade didática) terá início, com menção dos objetivos a atingir;

- Nota histórica, que pretende enquadrar os conteúdos facilitando a compreensão da evolução dos mesmos;

- Recorda, onde salientam os pré-requisitos necessários para o conteúdo abordado;

- Exercícios, em banda lateral, que permitem a aplicação dos conteúdos;

- Para Saber Mais, que contém informações que complementam o tema;

- Desafios, para aplicar os conhecimentos de forma lúdica;

- Curiosidades, que visam aguilhoar a reflexão por parte dos alunos;

- Tarefas, utilizadas para diversos fins ("… introduzir conceitos, proporcionar a consolidação de conhecimentos, estabelecer conexões entre conteúdos, evidenciar aplicações de Matemática.", tal como descrito em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 5));

- Para Praticar, que são um conjunto de tarefas com grau de dificuldade diverso;

- Para Avaliar, que apresenta um teste global com uma estrutura idêntica à do exame nacional.

Cada um dos volumes que constituem o manual tem dimensões 19,9cm $\times$ 27,3cm. Apresentam ainda robustez suficiente para resistir a uma utilização normal. O texto está escrito de forma não densa, com letra normal e o entrelinhamento dilatado.

Há ainda a referir a existência de elementos complementares ao manual, quer para o professor, quer para os alunos. Para o primeiro os recursos adicionais são:

- Caderno Prático que, tal como o manual, está dividido em três temas, sendo proposto um conjunto variado de tarefas para cada um;

- Caderno do Professor, constituído por duas partes onde são apresentadas propostas de planificação, por tema e por conjunto de aulas, e ainda sugestões de exploração de recursos construídos e de resolução de todos as tarefas do manual;

- Recursos Digitais do Professor, cd que contém a versão digital do manual e aplicações dinâmicas, estas articuladas com o desenvolvimento no manual;

- Escola Virtual, de acesso gratuito com a adoção do manual, composta por BRIP (onde há animações, sequências de aprendizagem para projeção, vídeos e tarefas interativas), Banco de Questões (com o qual é também possível criar fichas e testes de forma instantânea), Ferramentas de Organização Profissional (permite, entre outros recursos, fazer avaliações, registos, relatórios e planos semanais) e Dicionários (entrada em 21 dicionários e num conversor do acordo ortográfico).

E para o aluno são disponibilizados o já referido Caderno Prático e os Recursos Digitais do Aluno. Estes vêm num cd que apenas contém o manual em versão digital.

4.1.2 Descrição

O *Novo Espaço 12* inicia o Tema 2 – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, num separador de duas páginas, com a apresentação dos objetivos do tema e uma imagem alusiva ao mesmo.

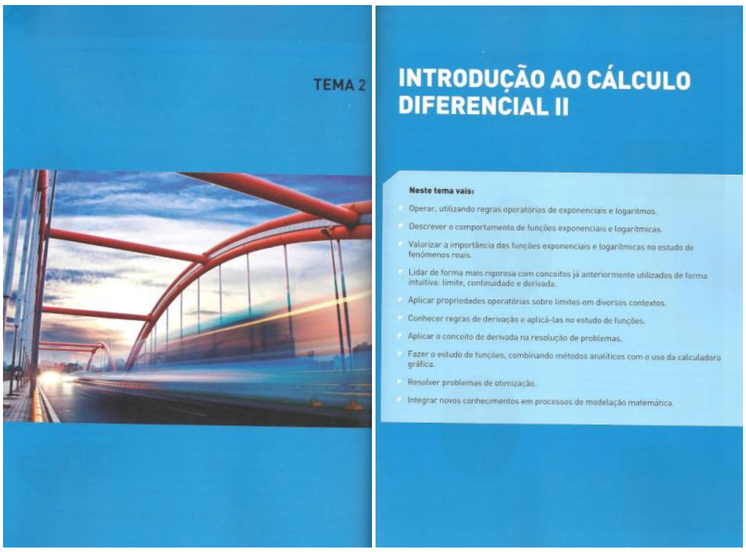


Figura 13: Primeiras páginas do Tema 2

O tema está dividido em três pontos e, no final de cada um, são apresentados um conjunto de tarefas para praticar, cada uma designada por proposta, seguido de um conjunto de tarefas para avaliar, compostas por questões de escolha múltipla e questões de desenvolvimento.

No que se segue, pelas razões já apresentadas, iremos apenas considerar o primeiro ponto: Ponto 1. Funções Exponenciais e Logarítmicas. Este ponto tem 53 páginas e está dividido em dois subpontos, o primeiro designado por "Função exponencial de base superior a 1; crescimento exponencial" (12 pp.) e o segundo denominado por "Função logarítmica de base superior a 1" (25 pp.).

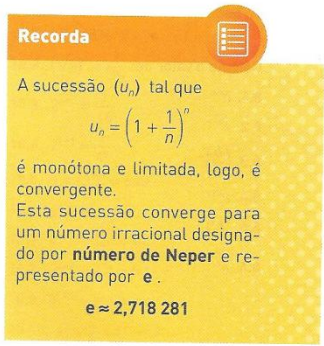
Para abertura do primeiro ponto apresenta-se uma introdução histórica, onde os autores referem a intervenção de Thomas Robert Malthus aquando do estudo de problemas relacionados com a demografia e a evolução das populações. Salienta-se a utilização, por parte deste economista, de funções lineares e de funções exponenciais. Mencionam-se ainda vários matemáticos que se destacaram ao longo dos tempos pelos seus contributos no Cálculo Diferencial, nomeadamente, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e José Anastácio da Cunha.

Segue-se uma pequena introdução ao primeiro subponto (1.1) com recurso a uma breve história sobre o inventor do jogo de xadrez, cujo segundo objetivo é recordar a soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão r. Após isto é sugerida uma tarefa de aplicação, em contexto com referência à semirrealidade, que introduz as funções exponenciais. Nesta presenciam-se vários tipos de representações (algébrica, gráfica, tabelar e verbal) e, num dos itens, solicita-se a utilização da calculadora gráfica.

O primeiro subponto de 1.1 começa com a definição de funções exponenciais de base a como sendo a família de funções do tipo $y = a^x$, $a \in \Re^+ \setminus \{1\}$. Para a fixo e superior a 1 procede-se ao estudo no que diz respeito a: representação gráfica, domínio, contradomínio, sinal, continuidade, injetividade, zeros, variação, assíntotas e paridade. O mesmo finaliza com o quadro-resumo do que foi feito.

Depois, no segundo subponto de 1.1, os autores exploram as potências de expoente racional e de expoente irracional, apresentando exemplos que provêm do cálculo algébrico de imagens de números reais pela função definida por $x \mapsto 2^x$.

Lateralmente, surgem tarefas com referência à Matemática pura, exercícios na sua maioria mas com vários tipos de representações, a acompanhar o corpo principal do texto. Recordam-se ainda, neste ou lateralmente, conteúdos de outros anos que estão relacionados com os das páginas em questão (como ilustram as figuras seguintes). Estes aspetos repetem-se ao longo de todo o Tema II.


Recorda

A sucessão (u_n) tal que

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é monótona e limitada, logo, é convergente.
Esta sucessão converge para um número irracional designado por **número de Neper** e representado por **e**.

$$\mathbf{e} \approx 2{,}718\ 281$$

Figura 14: Nota recordatória do número de Neper em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 141)

6. Transforma em potência, na base indicada, os seguintes números:

6.1. 0,001 (base 10)

6.2. $\frac{1}{49}$ (base 7)

6.3. $\sqrt{8}$ (base 2)

6.4. 0,0016 (base 5)

6.5. 0,0625 (base 4)

6.6. $\frac{1}{9}$ (base $\sqrt{3}$)

Figura 15: Exercício proposto para mudança de base em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 141)

Listam-se, sem demonstração, propriedades das operações com potências de expoente real. Também sem demonstração, refere-se que se pode provar "… que todas as regras operatórias para potências de expoente racional continuam válidas para potências de expoente irracional.” (Costa & Rodrigues, 2012, p. 142).

Segue-se, no terceiro subponto de 1.1, para a resolução de equações e inequações envolvendo exponenciais. A exploração deste item é realizada com recurso à apresentação de exercícios resolvidos.

No caso das equações, exemplificam-se várias técnicas de resolução, nomeadamente, com aplicação das propriedades, designadas operações:

$$a^x b^x = (ab)^x, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

para números reais apropriados (Costa & Rodrigues, 2012, p. 143). Num dos exercícios faz-se uma mudança de variável. Em todos aplicam-se, sem ser referido explicitamente, a injetividade de cada função dada por $y = a^x$, $a \in \Re^+$ e $a > 1$, e a univocidade da mesma.

EXERCÍCIO

Resolve a equação: $3 \times 9^x + 1 = 4 \times 3^x$.

Resolução:

$$3 \times 9^x + 1 = 4 \times 3^x \Leftrightarrow 3 \times (3^2)^x - 4 \times 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 \times (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 1 = 0$$

Esta equação pode ser encarada como uma equação do 2.º grau completa de incógnita 3^x.

Fazendo $3^x = y$, tem-se:

$$3y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = \frac{1}{3}$$

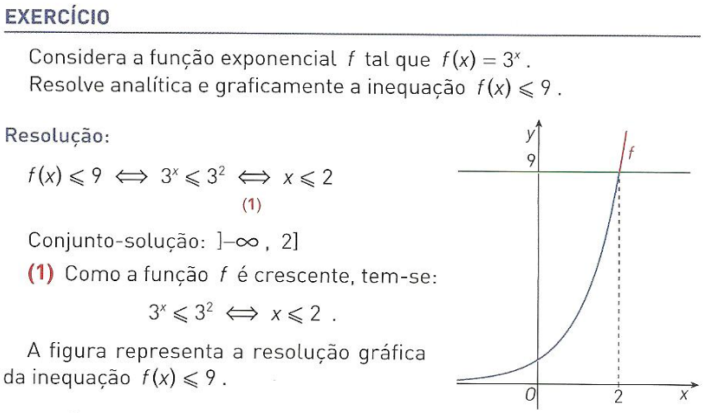
Como $3^x = y$, resulta:

$$3^x = 1 \vee 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \vee 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

O conjunto-solução da equação dada é $\{-1, 0\}$.

Figura 16: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 143)

Quanto às inequações, para além de algumas das técnicas anteriores, aplica-se o facto das exponenciais consideradas serem funções crescentes. Menciona-se isto mesmo num dos exercícios (ver figura subsequente).



EXERCÍCIO

Considera a função exponencial f tal que $f(x) = 3^x$.
Resolve analítica e graficamente a inequação $f(x) \leqslant 9$.

Resolução:

$f(x) \leqslant 9 \iff 3^x \leqslant 3^2 \underset{(1)}{\iff} x \leqslant 2$

Conjunto-solução: $]-\infty\,,\ 2]$

(1) Como a função f é crescente, tem-se:

$3^x \leqslant 3^2 \iff x \leqslant 2$.

A figura representa a resolução gráfica da inequação $f(x) \leqslant 9$.

Figura 17: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 144)

Após a proposta de duas tarefas de consolidação dos conteúdos abordados até aqui, compara-se o crescimento exponencial com o da potência. Esta comparação é feita através das representações gráficas das funções dadas por $y = 2^x$ e $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4$, sugerindo-se ainda uma representação tabelar.

Enuncia-se uma conjetura, embora sem se dizer explicitamente que o é, quando os autores escrevem "Por observação destas representações gráficas, poderíamos pensar que a partir de um certo valor de x as funções polinomiais apresentadas, à exceção de $y = x$, tomam valores superiores a 2^x.", (Costa & Rodrigues, 2012, p. 147). Incita-se a uma tarefa de exploração para apresentar contraexemplos: "… tal ideia não corresponde à verdade. Se utilizares a calculadora gráfica, por exemplo, podes pesquisar o comportamento destas funções à medida que o valor de x aumenta." (Costa & Rodrigues, 2012, p. 147).

Com este estudo feito, em grande parte de forma intuitiva, escreve-se que, para valores de x suficientemente grandes, $2^x > x^n$ com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Depois escreve-se o caso geral sem o demonstrar. Apresenta-se ainda o limite notável

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,\ a > 1,\ p \in \Re,$$

também sem demonstração. Mais uma vez, neste caso com cálculo de limites utilizando este notável, exibem-se exercícios resolvidos.

O segundo subponto (1.2), Função Logarítmica de base superior a 1, inicia-se com o primeiro subponto de (1.2), para abordar o logaritmo de um número. Começa com exemplos práticos para o cálculo do logaritmo de um número, recorrendo ao cálculo mental e às propriedades das potências já estudadas anteriormente. É salientado ainda, através de uma nota, as diferenças de notação do logaritmo decimal e do logaritmo neperiano.

Nota

Em alguns modelos de calculadoras, o logaritmo na base 10 (**logaritmo decimal**) é designado sem fazer referência à base. Isto é, usa-se $\log x$ em vez de $\log_{10} x$.

No caso da base ser **e** (número de Neper), designa-se por **logaritmo neperiano** ou **natural** e representa-se por $\ln x$.

Figura 18: Nota sobre notação de logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 149)

É ainda apresentado, através de um exercício resolvido, um exemplo do logaritmo de um mesmo número mas em diferentes bases, como se vê na figura posterior.

Qual é o valor de logaritmo de 16 na base 2 ? E na base 4 ? E na base $\sqrt{2}$?

Repara que:

$16 = 2^4$, $\quad 16 = 4^2 \quad$ e $\quad 16 = 2^4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 = (\sqrt{2})^8$.

Então, tem-se:

$\log_2 16 = 4$, $\quad \log_4 16 = 2 \quad$ e $\quad \log_{\sqrt{2}} 16 = 8$.

Figura 19: Exercício resolvido em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 149)

Segue-se a exibição da definição de logaritmo, conforme ilustra a figura seguinte. Realça-se ainda, tendo em conta a definição, que não faz sentido calcular logaritmos de números não positivos.

Dá-se o nome de **logaritmo** de um número positivo x na base a, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, ao número y tal que $a^y = x$.

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

Figura 20: Definição de logaritmo em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 150)

De seguida são apresentadas três equações resolvidas. Nestas, para além da lei do anulamento do produto, da fórmula resolvente, das propriedades das potências e da definição de logaritmo, salienta-se novamente a técnica da mudança de incógnita mas, contrariamente ao exemplo da Figura 16, de modo implícito (ver figura seguinte).

2. $e^x - 5 = 6e^{-x}$

$$e^x - 5 = 6e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 5 - 6e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 5 - \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5-7}{2} \vee e^x = \frac{5+7}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = -1 \vee e^x = 6 \qquad (e^x = -1 \text{ é uma condição impossível})$$

$$\Leftrightarrow e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$$

O conjunto-solução da equação dada é $\{\ln 6\}$.

Figura 21: Resolução de uma equação em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 150)

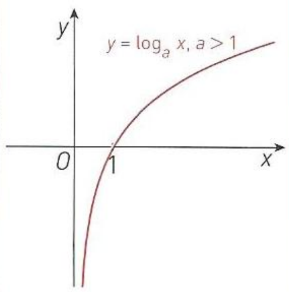
No segundo subponto de (1.2), Função logarítmica, os autores recordam que a função definida por $y = 2^x$ é injetiva, logo admite função inversa. Deste modo e com recurso a representações gráficas, algébricas e com diagramas sagitais, conclui-se que a função inversa, f^{-1}, é dada por $y = \log_2 x$. Salientam ainda que a segunda função é também a inversa da primeira e terminam com a escrita do caso geral:

$f(x) = a^x$, com $a \in \Re^+ \setminus \{1\}$, admite função inversa dada por $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Este subponto finda com a apresentação de algumas curiosidades sobre a história da invenção dos logaritmos. Nomeadamente, destaca-se o matemático escocês John Napier pela definição de logaritmo, bem como pelo cálculo logarítmico. Os autores mostram ainda uma breve tabela que permite calcular logaritmos na base 3, sem recorrer à calculadora. Referem ainda que foi o matemático inglês Henry Briggs que construiu tabelas completas de logaritmos na base 10.

O terceiro subponto de (1.2) inicia-se com um estudo da família de funções do tipo $y = \log_a x,\ a > 1$. Para tal os autores escolheram três exemplos ($y = \log_{1,5} x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$) e procederam ao estudo com o mesmo procedimento aquando do estudo das funções exponenciais, ou seja: representação gráfica, domínio, contradomínio, sinal, continuidade, injetividade, zeros, variação e assíntotas. Por fim é apresentado um quadro-resumo para as conclusões em termos gerais.

$f(x) = \log_a x$, $a > 1$



Função logarítmica de base $a > 1$	
Domínio	$\mathbb{R}^+$
Contradomínio	$\mathbb{R}$
Sinal	Positiva em $]1, +\infty[$ Negativa em $]0, 1[$
Continuidade	Contínua em $\mathbb{R}^+$
Injetividade	Injetiva
Zeros	1
Variação	Estritamente crescente
Assíntotas	Assíntota vertical: $x = 0$

Figura 22: Quadro-resumo em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 154)

Após este quadro são apresentados ainda dois exemplos de exercícios resolvidos. No primeiro, essencialmente algébrico, determinam-se o domínio e os zeros de uma função logarítmica de base e . No segundo, dada uma função cuja expressão analítica envolve uma exponencial de base 3, trabalham-se os conceitos de injetividade, pré-imagem e função inversa.

Por fim é proposta uma tarefa de exploração e investigação em contexto com referência à Matemática pura. Através de áreas e semiperímetros de retângulos, e de perímetros de polígonos regulares, pretende-se que os alunos enunciem duas conjeturas relativas a duas regras operatórias dos logaritmos.

No quarto subponto de (1.2), Regras operatórias dos logaritmos, são elencadas as regras e são devidamente demonstradas, conforme ilustra a figura seguinte.

Sejam $a > 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Propriedades que resultam diretamente da definição de logaritmo:

- $a^0 = 1 \implies \log_a 1 = 0$

$$\log_a 1 = 0$$

- $a^1 = a \implies \log_a a = 1$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (a^x) = x \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x$$

Outras propriedades

-

$$\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$$

Demonstração:

Os números reais x e y podem ser escritos na forma:

$$x = a^{\log_a x} \text{ e } y = a^{\log_a y}$$

Assim, tem-se:

$$x\,y = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Então, $\log_a (x\,y) = \log_a (a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$.

Daqui se conclui que:

$$\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$$

-

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Demonstração:

$$x = a^{\log_a x} \text{ e } y = a^{\log_a y}$$

Assim, tem-se:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Então, $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (a^{\log_a x - \log_a y}) = \log_a x - \log_a y$.

Donde se conclui que:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Figura 23: Algumas regras operatórias dos logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 157)

No final é colocada uma nota de esclarecimento de como calcular, por exemplo, $\log_3 7$ na calculadora recorrendo a mudança de base.

Nota

Para calcular, por exemplo, $\log_3 7$, nas calculadoras com logaritmos apenas na base 10 e na base e faz-se: $\dfrac{\log 7}{\log 3}$ ou $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$.

Figura 24: Cálculo de logaritmos na calculadora em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 158)

Segue-se uma tarefa contextualizada na Matemática pura onde se destaca a solicitação de duas pequenas demonstrações de igualdades com expressões logarítmicas.

No quinto subponto de (1.2), Resolução de equações e de inequações, são apresentados exercícios resolvidos envolvendo logaritmos com referência à Matemática pura, três de equações e quatro de inequações. Em dois dos casos das equações, para além da definição de logaritmo, aplicam-se regras operatórias dos logaritmos em conjunção com as restrições do domínio. No terceiro caso recorre-se à injetividade e à univocidade da função logarítmica de base $a > 1$.

EXERCÍCIO

Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\ln(x^2 - x) - \ln(6 - 2x) = 0$.

Resolução: $\ln(x^2 - x) - \ln(6 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - x) - \ln(6 - 2x) = 0 \ \wedge \ x^2 - x > 0 \ \wedge \ 6 - 2x > 0$ (*)

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - x) = \ln(6 - 2x) \ \wedge \ [(x < 0 \vee x > 1) \ \wedge \ x < 3]$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 6 - 2x \ \wedge \ x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \ \wedge \ x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[$

$\Leftrightarrow (x = 2 \ \vee \ x = -3) \ \wedge \ x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -3$

O conjunto-solução da equação dada é $\{-3, 2\}$.

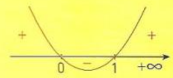
(*) Cálculos auxiliares

$x^2 - x > 0$

$x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$



$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$

$6 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 3$

Figura 25: Resolução de uma equação envolvendo logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 160)

Nas inequações, os dois primeiros exercícios trabalham domínios de funções com expressões analíticas envolvendo logaritmos e a aplicação da variação das mesmas. No terceiro exercício é colocada uma inequação com uma função definida à custa de um quociente de duas funções (dadas por $x \mapsto 4 - \log_2(x-1)$ e $x \mapsto 1 - 3^{1-x}$), pelo que para a apresentação do conjunto-solução os autores recorrem ao quadro de sinais, tal como figura subsequente. Contrariamente às resoluções essencialmente analíticas dos exercícios referidos anteriormente, o último é resolvido com calculadora gráfica.

EXERCÍCIO

Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{4 - \log_2(x - 1)}{1 - 3^{1-x}} > 0$.

Resolução:

O domínio da condição dada é:

$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0 \ \wedge \ 1 - 3^{1-x} \neq 0\}$

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $1 - 3^{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow 3^{1-x} \neq 1 \Leftrightarrow 1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D =]1, +\infty[$

Para obter o conjunto-solução da condição dada, pode recorrer-se à construção de um quadro de sinais.

- Zeros do numerador:

$4 - \log_2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x - 1) = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$

- Zeros do denominador:

$1 - 3^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 3^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		17		$+\infty$
$4 - \log_2(x-1)$				+	0	−	−
$1 - 3^{1-x}$	−	−	0	+	+	+	+
$\dfrac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}}$				+	0	−	−

Da análise do quadro resulta que:

$$\frac{4 - \log_2(x - 1)}{1 - 3^{1-x}} > 0 \Leftrightarrow x \in]1, 17[$$

O conjunto-solução da condição dada é $]1, 17[$.

Figura 26: Resolução de uma inequação envolvendo logaritmos em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 162)

Por último apresentam-se duas tarefas alusivas a temas do dia a dia, pelo que em contexto de semirrealidade. Presenciam-se, na primeira, exercícios e, na segunda, problemas.

No sexto subponto de (1.2), Comparação do crescimento logarítmico com o da potência, são apresentadas as representações gráficas de funções do tipo $y = \log_a x,\ a > 1$ com funções da família $y = kx,\ k > 0$. Para tal os autores representam graficamente a função logaritmo na base 2 e comparam-na com as funções dadas por $y = 0{,}2x$, $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}5x$ e $y = x$. Concluem intuitivamente que, para a mesma abcissa, as diferenças entre as ordenadas dos pontos aumentam à medida que $x \to +\infty$, como sugere a figura. Assim referem que uma função dada por $y = kx,\ k > 0$, cresce mais rápido do que uma função logarítmica de base $a > 1$.

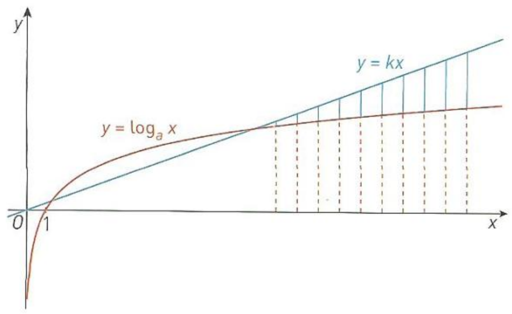


Figura 27: Gráfico comparativo de funções lineares e funções logarítmicas de base $a > 1$ em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 165)

Segue-se uma generalização onde os autores referem que as conclusões anteriores são as mesmas para funções do tipo $y = x^{\alpha};\ \alpha > 0$, pelo facto de, a partir de um certo ponto, estas funções crescerem mais rapidamente do que as funções lineares.

Após isto, são apresentados alguns resultados, embora sem demostração, de limites que resultam do estudo intuitivo realizado, e que se reproduzem na figura seguinte.

- $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, $a > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} kx = +\infty$, $k > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^p = +\infty$, $p > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$, $a > 1$ e $p > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1$ e $p > 0$

Figura 28: Limites em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 166)

Termina-se com a proposta de três tarefas com referência à semirrealidade, ilustradas com fotografias reais, e do tipo problemas. Saliente-se que numa destas tarefas é solicitado aos alunos a realização de uma composição matemática, tal como recomenda o PM12.

2. Admite que a concentração do fármaco "Saratex", em miligramas por litro de sangue, t horas após a administração a um doente, é dada pela função C tal que: $C(t) = t \times 1{,}05^{-2t}$.

2.1. Passadas duas horas após o fármaco ter sido administrado, qual é a sua concentração por litro de sangue?
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

2.2. Indica para que valor tende $C(t)$ quando t tende para $+\infty$.
Explica o seu significado no contexto apresentado.

2.3. O conjunto-solução da inequação $C(t) \geqslant 2{,}5$ é um intervalo fechado $[a\,,\ b]$.
Recorrendo à calculadora, determina, **graficamente**, valores para a e b, arredondados às décimas.

2.4. A conselho médico, um doente deve tomar um outro fármaco quando a concentração de "Saratex" for máxima. Para isso, o médico indicou ao doente o intervalo de tempo que deveria decorrer entre a administração dos dois fármacos.
Sabe-se que o doente tomou "Saratex" às 8:00 e o segundo medicamento às 15:00.
Numa **composição matemática**, explica o cumprimento ou não, por parte do doente, das recomendações dadas pelo médico.
Na composição deve ficar claro:
- o momento em que a concentração é máxima;
- o intervalo de tempo entre a administração dos dois fármacos;
- a hora a que o doente deveria ter tomado o segundo fármaco.

Figura 29: Problema proposto em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 167)

No sétimo subponto de (1.2), Modelo logístico, é apresentado o modelo do tipo

$$f(x) = \frac{c}{1 + ae^{-bx}}$$, onde a , b e c são constantes positivas

Os autores referem que este modelo é muito utilizado no crescimento populacional, na propagação de vírus, entre outras. Apresentam ainda o tipo de representação do modelo.

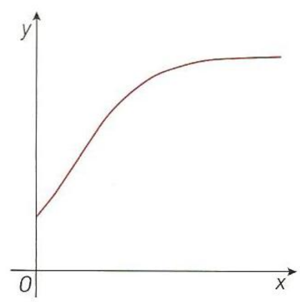


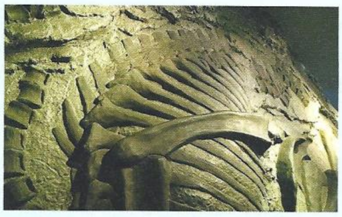
Figura 30: Representação gráfica do modelo logístico em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 170)

Segue-se um exemplo resolvido, onde é explorado o recurso à calculadora gráfica para obter um modelo que relacionasse duas variáveis (t - tempo em anos após a plantação e h - altura em metros) num estudo de crescimento de uma espécie de árvores. Conheciam-se dados previamente recolhidos relativos a estas variáveis, para os quais se fazem dois tipos de regressão.

Depois continua-se com a apresentação de duas tarefas de aplicação do modelo supra referenciado. As mesmas, em contexto de semirrealidade, são constituídas por exercícios.

No final do ponto surge uma bateria de tarefas para praticar que, na sua maioria, são exercícios em contexto de Matemática Pura. Contudo, existem também, apesar de minoritariamente, problemas em contexto de semirrealidade como salienta a figura subsequente.

As substâncias radioativas desintegram-se perdendo massa em função do tempo.
A rapidez de desintegração é usualmente medida através do período de tempo que a quantidade inicial demora a reduzir-se a metade, período esse vulgarmente designado por *semivida* da substância.



Assim, a quantidade Q de certo material radioativo é dada, em função do tempo t, em anos, por uma expressão do tipo:

$$Q(t) = Q_0\, e^{-kt}$$

sendo Q_0 a quantidade inicial da substância e k uma constante característica dessa substância.

1. O carbono-14 é um material radioativo utilizado na datação de fósseis e achados arqueológicos. Esta substância permanece numa quantidade estável num organismo enquanto este está vivo, deixando de haver reposição a partir da sua morte, iniciando-se assim um processo de decrescimento da quantidade de carbono-14 nesse organismo, admitindo-se que a quantidade existente respeita a seguinte expressão:

$$Q(t) = Q_0\, e^{-0{,}000\,121t}$$

1.1. Calcula a semivida do carbono-14.

1.2. Realizou-se uma descoberta arqueológica onde foi encontrado um organismo com 53 mg de carbono-14. Sabe-se que um exemplar vivo desse organismo possui 350 mg dessa substância.

Que conclusões se podem tirar acerca do tempo que decorreu desde a morte desse organismo?

1.3. Um fóssil com 20 000 anos foi encontrado contendo 12 mg de carbono-14. Que quantidade desta substância teria antes de morrer?

2. Admite que certa quantidade de uma substância radioativa se reduz a metade ao fim de 1500 anos.

2.1. Mostra que a expressão que traduz a quantidade desta substância num organismo, decorridos t anos, partindo de uma quantidade inicial Q_0, é dada, aproximadamente, por:

$$Q(t) = Q_0\, e^{-0{,}000\,462t}$$

2.2. Partindo de 45 g desta substância radioativa, daqui a quantos anos essa quantidade ficará reduzida a 25% ?

Figura 31: Proposta 41 em (Costa & Rodrigues, 2012, p. 187)

Por fim os autores apresentam o "Para Praticar" que tem por objetivo propor todo o tipo de tarefas, num teste global, e com uma estrutura semelhante à do Exame Nacional de Matemática do 12.º ano: questões de escolha múltipla e de resposta aberta.

4.1.3 Análise

● Conceptual

Em termos dos assuntos no *Novo Espaço 12* descritos anteriormente, podemos concluir que, em geral, a introdução dos conceitos é feita de forma construtiva, ou seja, os mesmos desenvolvem-se a partir de tarefas iniciais que são resolvidas pelos alunos com o objetivo de conduzir o estudo a generalizações. Com um nível médio de abstração e formalização, analisa diversos exemplos, apresentando as regras e técnicas para a resolução dos mesmos e, só depois, a formulação geral, raramente com a respetiva demonstração de resultados. Em suma, a lógica de tratamento dos assuntos vai do particular para o geral.

Os exemplos apresentados nem sempre assumem um caráter de Matemática Pura, ou seja, existem também exemplos em contexto de semirrealidade. O mesmo sucede com as tarefas propostas. O nível de complexidade destas, ao longo do manual, não é muito elevado. Contudo, no final de cada ponto são apresentadas diversas tarefas, designadas por propostas independentemente do grau de dificuldade (fácil ou difícil) e do contexto (Matemática Pura, realidade ou semirrealidade).

O grafismo é pouco sóbrio, apresentando diversas figuras e esquemas. Observa-se ainda a preocupação dos autores, sempre que possível, com a apresentação de vários tipos de representações: algébrica, gráfica, tabelar, verbal e através de diagramas sagitais.

Sob o ponto de vista da linguagem, podemos dizer que o nível de formalização desta não é muito elevado. Contudo, são apresentadas definições explícitas para conceitos como “funções exponenciais”, e “logaritmo”. Em geral, introduz um conceito a partir de um problema, explorando os exemplos num registo de monólogo.

Constatamos também que, na margem da maioria das páginas, se encontram exercícios de aplicação dos conteúdos descritos numa certa página. Estes permitem consolidar uma aplicação mais autónoma dos conteúdos. Também, nas margens, surgem breves revisões de assuntos já estudados anteriormente.

Os problemas e as tarefas de investigação ficam reservados para o fim de cada ponto, sendo designadas pelos autores por propostas. No final das propostas são apresentados um conjunto de exercícios de carater mais globalizante designados por “para avaliar”.

● Didática-cognitiva

No prefácio colocam-se diversos objetivos e intenções. Os autores referem que as suas experiências pedagógicas fazem com que "… aspetos relevantes no domínio da Didática e da Metodologia do ensino da Matemática tenham sido considerados na orientação dada ao desenvolvimento de cada um dos temas tratados." (Costa & Rodrigues, 2012, p. 2).

Ainda no prefácio, nomeadamente em "… conscientes de quanto é exigente ensinar e aprender …" (Costa & Rodrigues, 2012, p. 2) e pelo ""Programa" para o aluno", nota-se que os autores visam, para além do professor, os alunos.

Por fim, para além de mencionar que o manual está de acordo com o PM12, sintetiza-se a organização do mesmo. Destacam-se, em especial, os diferentes tipos de tarefas, em secções consideradas como momentos de avaliação, que os autores esperam que promovam a autonomia dos alunos.

● Fenomenológica

Antes de cada tema, nomeadamente para o II – *Introdução ao Cálculo Diferencial II*, apresenta-se uma breve perspetiva histórica de quando e onde surgiu o mesmo, referenciando também as pessoas que mais se destacaram nele. Referem ainda a aplicação prática dos conceitos em contexto real. Esta breve introdução revela o esforço, por parte dos autores, para motivar os alunos e humanizar a Matemática. Também ao longo do manual, como promotores da compreensão dos conceitos abordados, os autores apresentam ainda notas históricas dos mesmos e suas conexões com outras ciências.

As figuras são imagens de ilustrações reais, o que torna o manual mais próximo dos alunos, pois identificam claramente situações do dia a dia. Assim, a aplicabilidade em contexto real parece ser muito importante para os autores.

Os autores indicam ainda, de forma explícita, os procedimentos algébricos que se devem seguir para a resolução dos exercícios, na margem das páginas, em contexto de Matemática Pura. Para isso recorrem a exemplos e exercícios resolvidos por forma a ilustrar a aplicação dos conceitos na própria Matemática.

4.2 Planificação da Aula

Elaborámos a planificação que se segue em duas fases:

1.ª) TPC (Anexo IV) que seria proposto aos alunos e que estes deveriam entregar, via Moodle, até ao dia anterior à implementação da planificação;

2.ª) planificação propriamente dita.

Agrupamento de Escolas Serra e Mar

2012/13

Professora: Ana Romano

Turma: 12.º A	Data: 5 de dezembro de 2012

Planificação da aula n.º 32	**Duração:** 90 min

TEMA - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*

UNIDADE DIDÁTICA - *Função Logarítmica*

SUMÁRIO	Regras operatórias de logaritmos.
MATERIAL PROFESSOR	✶ Marcadores ✶ Manual ✶ Calculadora gráfica TI-NSpire CX Navigator ✶ Computador
MATERIAL ALUNO	✶ Caderno diário ✶ Material de escrita ✶ Calculadora gráfica TI-NSpire
OBJETIVOS O aluno deverá ser capaz de:	✶ ler e interpretar textos matemáticos; ✶ comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico; ✶ utilizar corretamente o vocabulário específico da linguagem Matemática; ✶ usar a simbologia da Matemática; ✶ resolver tarefas usando raciocínios lógicos, análise crítica, conjeturas; ✶ aplicar as regras operatórias de logaritmos no cálculo e em pequenas demonstrações.

PRÉ-REQUISITOS
O aluno deve saber:

- ✶ operar com potências;
- ✶ trabalhar com funções exponenciais;
- ✶ a definição de logaritmo;
- ✶ a definição do domínio de uma função logarítmica.

ESTRATÉGIAS

- ✶ Aprendizagem pelos Pares

AVALIAÇÃO

- ✶ Comportamento na sala de aula:
  - Interesse/ Empenho
  - Respeito pelo professor
  - Relação com os colegas
- ✶ Participação na aula:
  - Expressão oral
  - Expressão escrita
  - Iniciativa
- ✶ Fichas de Avaliação:

Técnica	Forma	Instrumento
Observação	Direta	* Ficha de Observação * Ficha de Ocorrências
Questões Conceptuais	Escrita e Oral	* TPC * Votações

ESTRATÉGIAS / DESENVOLVIMENTO

A aula será iniciada com a professora a colocar a questão teste de leitura.

CQ0

Atendendo ao valor lógico da proposição

para qualquer $a \in \Re^+ \setminus \{1\}$, $\log_a 1 = 0$,

esta classifica-se como:

a) verdadeira;

b) falsa.

Os alunos votarão, individualmente e uma só vez, e a professora guardará as respostas individuais no computador.

Após o teste de leitura, podemos dizer que a aula será, em geral, dividida em nove momentos por cada CQ proposta pela professora. Estruturalmente, para cada CQ, serão seguidos os passos subsequentes.

1. Curta apresentação oral sobre a regra operatória.
2. Proposta da CQ.
3. Tempo para os alunos pensarem (1-2 minutos).
4. Registo das respostas individuais dos alunos (primeira votação) e envio das mesmas para a professora, usando as unidades portáteis com os adaptadores sem fios do CX Navigator.
5. De acordo com a distribuição de respostas, passagem para o passo seis (quando a frequência de respostas corretas estiver entre 35% e 70%), ou, diretamente, para o passo nove (quando a frequência de respostas corretas for superior a 70%), ou explicação profunda sobre o conceito envolvido (quando a frequência de respostas corretas for inferior a 35%).
6. Discussão entre os alunos, enquanto o professor circula pela sala (2-4 minutos).

7. Segunda votação dos alunos, após terem convencido os colegas ou terem sido convencidos para alterar a resposta.

8. *Feedback* sobre as respostas, individuais e a partir das discussões dos alunos, e apresentação dos resultados aos alunos com a identificação da resposta correta.

9. Explicação da resposta correta por um aluno ou, não havendo um voluntário, pela professora.

10. Regresso ao primeiro passo.

Questões Conceptuais	
1. A expressão $\log_5(2\times 3)$ é igual a: a) $\log_5 2\times\log_5 3$; b) $\log_5 2+\log_5 3$; c) $\log_5 2-\log_5 3$; d) $\log_5 2\div\log_5 3$.	2. A expressão $\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ é igual a: a) $\frac{\ln(x-y)}{\ln(x+y)}$; b) $\ln[(x-y)-(x+y)]$; c) $\ln(x-y)-\ln(x+y)$; d) $\frac{\frac{\ln(x)}{\ln(y)}}{\ln(x)\times\ln(y)}$.
3. A expressão $\log_3(x^4y^2)$ é igual a: a) $\log_3(8xy)$; b) $\log_3(4x)+\log_3(2y)$; c) $4\log_3 x+2\log_3 y$; d) $4\times 2\log_3(xy)$.	4. O valor de $\log_5(9)$ é igual ao valor de: a) $\frac{\log_9 5}{\log_9 9}$; b) $\frac{\ln 5}{\ln 9}$; c) $\frac{\log_5 9}{\log_5 5}$;
5. Através das regras operatórias de logaritmos, o maior valor é representado pela expressão: a) $\ln(30)-\ln(2)$; b) $2\ln(4)$; c) $\ln(3)+\ln(4)$; d) $\frac{\ln(4)}{\ln(2)}$.	6. Para todo o x pertencente a $\Re^+$, $\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{x}\right)$ é igual a a) 0; b) $\ln(x)$; c) $-\ln(x)$; d) ∞.

Tabela 5: Síntese das CQ na secção 3.2

Por último, a professora solicitará a correção do TPC, no quadro, a dois alunos voluntários. Por um lado, os alunos terão a oportunidade de rever algumas regras operatórias e corrigir o que seja necessário nas resoluções do TPC. Por outro lado, a professora poderá reforçar o papel do contraexemplo na Matemática.

Capítulo 5 – Considerações Finais

Desde a infância que aprendemos por imitação, tal como referencia Aristóteles: "Imitar é natural ao homem desde a infância – e nisso difere dos outros animais, em ser o mais capaz de imitar e de adquirir os primeiros conhecimentos por meio da imitação – e todos têm prazer em imitar." (Aristóteles, Horácio, & Longino, 1990, p. 21).

Ora, se sempre aprendemos por imitação, então nada deveria colocar em causa o ensino tradicional por este se basear nesse princípio básico. Todos nós tivemos aulas tradicionais, ano após ano, onde, por um lado, se privilegiava a transferência de conhecimento do professor para o aluno em detrimento da assimilação do mesmo, nomeadamente com a sua resolução de tarefas com pouca comunicação entre os vários intervenientes no processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, nas referidas aulas não era habitual a preocupação com o conhecimento conceptual, notória nas tarefas propostas que visavam mais algo algorítmico do que um certo conceito.

Como vimos, a PI rompe completamente com estas ideias, promovendo um ambiente de cooperação e partilha onde o aluno é o elemento central da aula. De facto, a PI promove a assimilação do conhecimento tendo por base a partilha social de ideias, após um estudo reflexivo individual, que ocorre durante a discussão entre os pares e desencadeada por votações em questões conceptuais.

Poderemos, contudo, encontrar algum ceticismo em relação a este método de ensino-aprendizagem, pois existe a ideia pré-concebida que quantas mais tarefas forem resolvidas melhor. Mas com a PI, tal como refere (Mazur, 1997, p. 18), "Despite the reduced time devoted to problem-solving, the results convincingly show that conceptual understanding enhances student performance on conventional examinations".

Assim, trabalhar para poder promover um ensino de qualidade e não de quantidade de tarefas resolvidas num ambiente de partilha, de facto, aliciou-me bastante. A PI foi-me apresentada como um método de ensino-aprendizagem que assenta em pilares que quero presentes na minha prática letiva. Efetivamente, penso numa sala de aula como um ambiente de partilha de informação e de cooperação, entre professor e alunos, reciprocamente, e ainda entre alunos.

Ora, neste ambiente os alunos estão mais predispostos para assumirem um papel ativo, ainda mais se as votações forem anónimas. Além disso, é muito importante que assim seja, pois este método de ensino-aprendizagem tem como "pré-requisito" um aspeto que, para mim, é muito gratificante. De facto, podemos trabalhar com os erros cometidos pelos alunos, em TPC, em testes, ..., de forma construtiva. Os mesmos auxiliam a construção de melhores questões conceptuais, colocando de lado a carga negativa do erro que o ensino tradicional lhe confere.

Neste Relatório de Estágio, primeiro foi necessário apercebermo-nos de quais os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do 12.º ano. Assim, após a análise de vários artigos bem como do tratamento do questionário aplicado, gerou-se uma reflexão bastante útil e promotora de ideias para a construção de questões conceptuais.

Com base nos erros identificados e analisados, construímos algumas questões conceptuais para aplicação da Aprendizagem pelos Pares no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II* do 12.º ano. Apesar da nossa pretensão inicial de construir CQ para todo o tema, com a evolução do trabalho, foi necessário optar e, nesse sentido, construir apenas para o tópico Regras Operatórias de Logaritmos da planificação.

Com vista à elaboração da planificação, da revisão de literatura fizeram parte alguns artigos que nos permitiram concluir sobre adaptações ao método de ensino-aprendizagem PI na sua aplicação ao nível do Ensino Secundário. Concluímos que, na sua grande maioria, o referido método não sofre alterações de implementação apesar de ser aplicado a um nível de ensino diferente daquele em que o aplica Mazur.

Em relação ao estudo associado ao presente trabalho, importa ainda referir uma limitação do mesmo que se prende com o facto de não ter estar a lecionar no ano letivo 2012/13, o que me impediu de recolher dados das provas escritas dos alunos e implementar a planificação. Contudo, também poderia ter estado colocada e não ter o referido nível de ensino, o que nos poderia ter levado à escolha de outro tema dentro do PM12 ou até mesmo a optar pelo Ensino Básico.

Há também a salientar que o questionário é, atualmente, um instrumento de recolha de dados frequentemente utilizado. Trata-se, claramente, de uma desvantagem, pois as potenciais pessoas respondentes têm frequentemente solicitações de resposta a questionários em diversos âmbitos e, por isso, estão menos predispostas a colaborar. Efetivamente, esperávamos um maior número de respostas, bem como mais completas, ao mesmo. Ainda em relação ao questionário, uma vez que o plano de trabalhos foi elaborado para um ano, a sua aplicação começou a ser levada a cabo em dezembro de 2012. Apesar da referida razão, o sucesso do referido instrumento poderia ter sido maior caso a aplicação tivesse coincido com o momento de lecionação e de avaliação do Tema II do PM12.

Para além do já exposto em termos de limitações, os contactos com diversos ex-alunos, no sentido de recolher os testes que realizaram aquando do 12.º ano, também não surtiram o efeito desejado. De facto, por já se encontrarem a frequentar o Ensino Universitário, a esmagadora maioria já não os possuía.

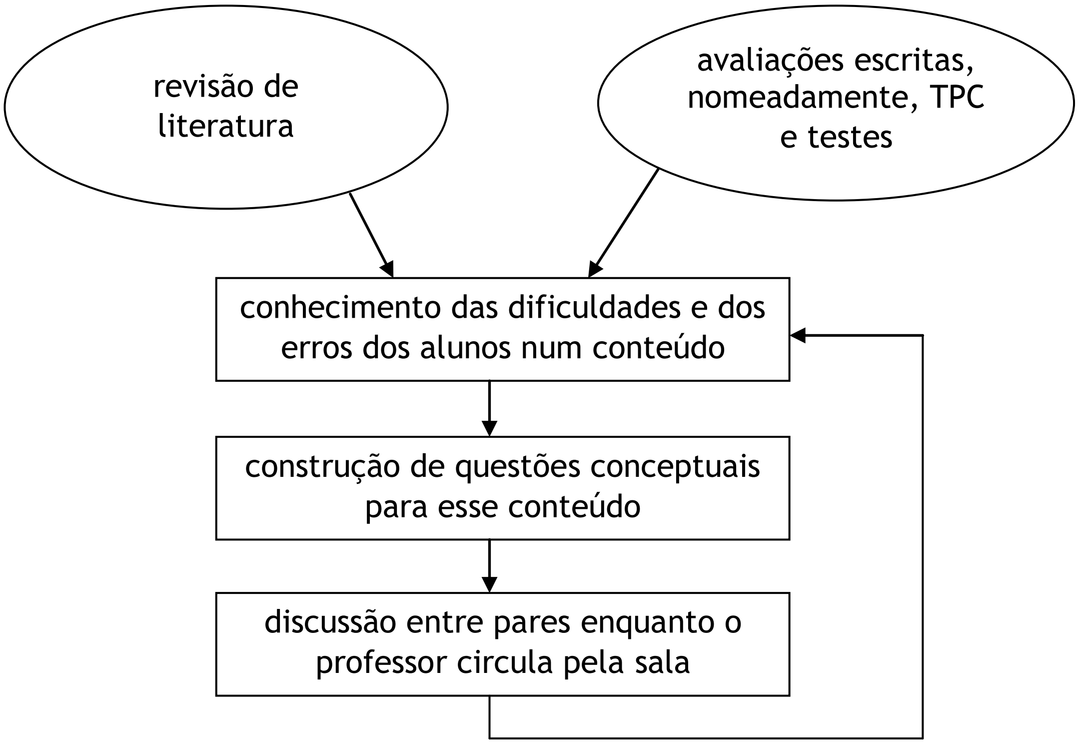
Apesar destes aspetos menos positivos, o presente trabalho permitiu-me evoluir pessoalmente e profissionalmente. Enquanto pessoa, porque como mãe, ao acompanhar uma das minhas filhas na escola, começo a dar por mim a aplicar a PI inconscientemente. De facto, questiono-a sobre o porquê dos erros e, quando estudo com ela, elaboro pequenas CQ para testar se ela está realmente a compreender o conceito envolvido. Enquanto professora, porque, apesar de não estar colocada, no decorrer da realização deste trabalho surgiu a oportunidade de lecionar cinquenta horas de formação profissional de Matemática e Realidade. Mesmo neste contexto difícil, a minha atitude mudou. Concretizando, após conhecer este método inovador de ensino-aprendizagem, a reflexão sobre a minha prática docente foi de tal ordem que já é praticamente impossível conseguir dar uma aula com ensino (totalmente) tradicional.

Obviamente que o processo de ensino-aprendizagem em causa requer preparação pois, no que concerne aos Ensinos Básico e Secundário, já para não falar do Ensino Profissional, o material disponível é escasso no que diz respeito, principalmente, às CQ. Contudo, é um desafio que pretendo travar. Concretamente, é minha pretensão, a longo prazo, conseguir construir CQ para os diversos temas. Para tal, por um lado, pretendo fazer revisões de literatura e, por outro lado, gostaria de contactar colegas para conhecer os erros dos alunos em momentos de avaliação que vão realizando ao longo do tempo.

Finalizando este trabalho, sinto vontade de continuar a investigar no contexto do método de ensino-aprendizagem PI. Especificamente, gostaria de levar a cabo um estudo temporal de três anos letivos. Neste caso iria iniciar-se no 10.º ano, com uma turma-piloto, onde seria implementada a PI, nomeadamente na disciplina de Matemática A, até ao 12.º ano. A turma, neste decorrer de tempo, seria normalmente sujeita aos momentos de avaliação externa, quer através dos Testes Intermédios, quer através do Exame Nacional. Após o términus do 12.º ano comparar-se-iam os resultados desta turma com as outras onde não se aplicaria a PI.

A minha convicção é que a PI seria promotora de sucesso escolar, pois os resultados dos alunos nos exames nacionais poderão dever-se ao facto de estes envolverem muito raciocínio matemático, cujo antecedente é, necessariamente, a aprendizagem conceptual. Será? Fica assim mais uma questão em aberto, que será merecedora da minha especial atenção, um dia que possa …

Para já, foram dados os primeiros passos: o conhecimento das características inerentes ao método de ensino-aprendizagem em causa; a noção das suas adaptações ao Ensino Secundário; o reconhecimento da importância da revisão de literatura para conhecer dificuldades e erros de alunos já identificados em estudos; a elaboração de uma planificação, contendo questões conceptuais e associada à análise de parte de um manual com o mesmo. Mas muito há a ganhar com a implementação em sala de aula, como destaco no esquema que se segue.



Concluo expressando a vontade que sinto de contínua melhoria da minha prática letiva, no que se refere aos grupos (tarefas propostas, materiais utilizados, comunicação na sala de aula) em (Ponte & Serrazina, 2004), com vista ao meu desenvolvimento profissional. Este, como refere (Saraiva, 2001), em estrita ligação com o conhecimento profissional do professor, deve ser considerado como um processo dinâmico.

Bibliografia

Abreu, M. D., & Custódio, I. (2001). Uma Mudança Irreversível. *Revista do Movimento da Escola Moderna, 5 (11)*, pp. 19-22.

Allen, D. G. (2007). *Misconceptions in Mathematics*. Obtido em 2012, de http://mtc.tamu.edu/9-12/index_9-12.htm?9-12M2L1.htm

Aristóteles, Horácio, & Longino. (1990). *A Poética Clássica*. São Paulo: Cultrix, Tradução direta do grego e do latim de Jaime Bruna.

Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Sevilla: Díada Editora.

Bagni, G. T. (2001). An investigation of some misconceptions in Hight Scool students' mistakes. *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology, I*, 3-24.

Beites, P. D., & Nicolás, A. P. (2013). *Peer Instruction in Linear Algebra*. ICERI2013 Proceedings, ISBN: 978-84-616-3847-5, aceite.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2010). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bonwell, C., & Eison, J. (1991). *Active Learning: creating excitement in the classroom*. The George Washington University, School of Education and Human Development, Washington D. C.: ASHE ERIC Higher Education Report Nº 1.

Brook, B., & Koretsky, M. (2011). The Influence of Group Discussion on Students' Responses and Confidence during Peer Instruction. *Journal of Chemical Education, 88 (11)*, 1477-1484.

Butchart, S., Handfield, T., & Restall, G. (2009). Using Peer Instruction to Teach Philosophy, Logic and Critical Thinking. *Teaching Philosophy, 32 (1)*, 1-40.

Center, D. B., Group, M., & Wilkinson, J. (2006). *Interactive Teaching [DVD]*. United States of America: Spectrum Media.

Clark-Wilson, A. (2009). *Connecting mathematics in the connected classroom: TI-Nspire™ Navigator™*. Obtido em 2013, de http://ti-researchlibrary.com/Lists/TI%20Education%20Technology%20%20Research%20Library/Attachments/124/Clark-Wilson%202009%20TI-Nspire%20Navigator%20final%20report.pdf

Cortright, R. N., Colins, H. L., & DiCarlo, S. E. (2005). Peer Instruction enhanced meaningful learning: ability to solve novel problems. *Advances in Physiology Education, 29 (2)*, 107-111.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço 12*. Porto: Porto Editora.

Coutinho, C., & Lisbôa, E. (2011). Sociedade da Informação, do conhecimento e da aprendizagem: desafios para a educação no século XXI. *Revista de Educação, XVIII (1)*, 5-22.

Crouch, C. H., & Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics, 69 (9)*, 970-977.

Cury, H. N. (2003). Análise de Erros em Cálculo Diferencial e Integral: Resultados de Investigações em Cursos de Engenharia. *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 31*, 10 pp.

Cury, H. N. (2006). A Análise de erros na Construção do Saber Matemático. *I Jornada Nacional De Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática*, 10 pp.

Cury, H. N., & Cassol, M. (2004). Análise de Erros em Cálculo: Uma Pesquisa para Embasar Mudanças. *Acta Scientiae, 6 (1)*, 27-36.

Delors, J., Al-Mufti, I., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., . . . Suhr, M. W. (1999). *Educação: Um Tesouro a Descobrir. Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI.* São Paulo: Cortez Editora.

DES. (2001). *Programa de Matemática A, 12.º*. Obtido em 2012, de http://www.dgidc.min-edu.pt

Deubel, P. (2013). *Student Role*. Obtido em 2013, de Computing Techonology for Math Excellence: http://www.ct4me.net/math_methodology_2.htm

Dewey, J. (1979). *Democracia e Educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

DGC-USM. (2012). *Expertos en docencia universitaria proponen cambios metodológicos e incorporar la "instrucción por pares"*. Obtido em 2012, de http://www.dgc.usm.cl/2012/08/28/expertos-en-docencia-universitaria-proponen-cambios-metodologicos-e-incorporar-la-"instruccion-por-pares"/

Díaz-Aguado, M. J. (2000). *Educação Intercultural e Aprendizagem Cooperativa*. Porto: Porto Editora.

Domínguez, Á. (2011). La TI-Nspire CX y su Navegador en Relación con Estrategias de Enseñanza. *Innovaciones Educativas, 11*, 16-17.

Dullius, M., Furlanetto, V., & Quartieri, M. (2011). Tipos de erros cometidos pelos estudantes em uma prova de Olimpíada Matemática. *VI Encuentro Iberoamericano de Coletivos Escolares y Redes de Maestras y Maestros que hacen Investigación e Innovación desde la Escuela*, 11 pp.

Fiolhais, C., & Pessoa, C. (2003). Ensinar é Apenas Ajudar a Aprender. *Gazeta de Física, 26 (Fascículo 1)*. Obtido em 2012, de http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/26_1/entrevista.pdf

Flynn, S. (2012). *The clicker experience at NUIG: Issues and concerns for staff*. Obtido em 2012, de http://learntechgalway.blogspot.pt/2012/02/clicker-experience-at-nuig-issues-and.html

Gramp, J. (2012). *Voting with PollEverywhere*. Obtido em 2012, de http://blogs.ucl.ac.uk/ele/category/tech-blogs/evs-blog/

Hallet, D., Robison, M., & Lomen, D. (2003). *Conceptests: Active Learning in Calculus*. Obtido em 2013, de http://math.arizona.edu/~dhh/NOVA/ConcepTest.doc

Hanford, E. (2011). *The problem with Lecturing*. Obtido em 2012, de http://americanradioworks.publicradio.org/features/tomorrows-college/lectures/problem-with-lecturing.html

Hestenes, D., Wells, M., & Swackhamer, G. (1992). Force Concept Inventory. *The Physics Teacher*, 30 (3), 141-158.

Hirst, K. E. (2002). Classifying students' Mistakes in Calculus. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, 440-445.

Hoon, T. S., Singh, P., & Ayop, S. K. (2010). Working with Logarithms. *Malaysian Education Dean's Council Journal, 6*, 6 pp.

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., Lock, P., Flath, D., Davidian, A., Flath, D., . . . Robinson, M. (2010). *Applied Calculus: ConcepTests*. United States of America: John Wiley & Sons.

Iverstine, W. (2010). *Application of Peer Instruction in the High School Setting*. Tese de Doutoramento, Southeastern Louisiana University.

Jenner, M. (2012). *Clickers, clickers, everywhere*. Obtido em 2012, de http://blogs.ucl.ac.uk/ele/category/tech-blogs/evs-blog/

Kullok, M. G. (2000). *Formação de professores para o próximo milênio: novo locus?*. São Paulo: Annablume.

Lasry, N. (2008). Clickers or Flashcards: Is There Really a Difference?. *The Physics Teacher*, 46 (4), 242-244.

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with logarithms: students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, 8 (2), 53-70.

Mazur, E. (1997). *Confessions of a Converted Lecturer*. Obtido em 2012, de http://www.math.upenn.edu/~pemantle/active-papers/Mazurpubs_605.pdf

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: a user's manual*. Upper River: Prentice-Hall.

MazurGroup. (2013). *Mazur Group*. Obtido em 2013, de http://mazur.harvard.edu

Melis, E. (2005). Design of Erroneous Examples for ACTIVEMATH. *Proceedings of the 2005 conference on Artificial Intelligence in Education: Supporting Learning through Intelligent and Socially Informed Technology* , 451-458.

Melis, E., Andrès, E., Budenbender, J., Frischauf, A., Goguadze, G., Libbrecht, P., . . . Ullrich, C. (2001). ActiveMath: A generic and adaptive web-based learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 1002 (4)*, 385-407.

Pilzer, S. (2001). Peer Instruction in Physics and Mathematics. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 11 (2)*, 185-192.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Atas do ProfMat 2003*, 25-39.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática, 4 (8)*, 149-170.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *In GTI (Ed) O Professor e o desenvolvimento curricular*, 11-34, APM, Lisboa.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13 (2)*, 51-74.

Ponte, J. P., Salvado, C., Fraga, A., Santos, T., & Mosquito, E. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao ínicio do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante, 16 (1)*, 111-145.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10 (3)*, 163-172.

Ribeiro, C. M. (2006). *Aprendizagem Cooperativa na Sala de Aula: Uma Estratégia para aquisição de algumas competências cognitivas e atitudinais definidas pelo Ministério da Educação.* Tese de Mestrado, Universidade De Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

Ruz, A. V. (2011). Mi experiencia con el TI - Navigator. *Innovaciones Educativas, 11*, 12-15.

Saraiva, M. J. (2001). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.* Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Savinainen, A. (2001). An Evaluation of Interactive Teaching Methods in Mechanics: Using the FCI to Monitor Student Learning. *Report Series of Research in Mathematics and Science Education*, 116-130.

Sierra, M. V., González, M. A., & López, C. E. (2003). El Concepto de Continuidad en Los Manuales Españoles de Ensenãnza Secundária de la Segunda Mitad del Siglo XX. *Educación Matemática, 15 (1)*, 21-49.

Simon, B., & Cutts, Q. (2 de 2012). Peer Instruction: A Theaching Method to Foster Deep Understanding. *Communications of the ACM, 55 (2)*, 27-29.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Souza, S. S. (2002). *Erros em Matemática: um estudo diagnóstico com alunos da 6ª série do Ensino Fundamental*. Dissertação de Pós-Graduação, Universidade Estadual Paulista.

Teixeira, G. (2003). *Como se processa a aprendizagem*. Obtido em 2012, de http://www.serprofessoruniversitario.pro.br/m%C3%B3dulos/ensino-e-aprendizagem/como-se-processa-aprendizagem

TexasInstruments. (1995). *Education Tecnology*. Obtido em 2013, de http://education.ti.com/en/us/products/ti-navigator-systems/ti-nspire-cx-navigator-system/features/features-summary

TexasInstruments. (1995). *Education Tecnology*. Obtido em 2013, de http://education.ti.com/en/us/nspire-family/navigator

TexasInstruments. (2011). Manual de Instruções. *Como começar com TI-Nspire™ Navigator™ Teacher Software*.

University, T. O. (2010). *Modeling Theory of Physics*. Obtido em 2012, de https://physics.osu.edu/events/physics-education-research-seminar-david-hestenes-professor-emeritus-arizona-state-university

Anexos

Anexo I – Pedido dirigido ao Júri Nacional de Exames

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

De: Patrícia Damas Beites (pbeites@ubi.pt)
e Ana Catarina Mendes Romano (anacatarinaromano@sapo.pt)

Para: Júri Nacional de Exames (jne@dge.mec.pt)

No presente ano letivo de 2012/2013, a Licenciada Ana Catarina Mendes Romano está matriculada no 2° Ciclo em Ensino de Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, na Universidade da Beira Interior. Os trabalhos com vista ao Relatório de Estágio para obtenção do grau de Mestre, sob a supervisão da Professora Doutora Patrícia Damas Beites, do Departamento de Matemática da referida universidade, já foram iniciados. A temática a abordar é a Aprendizagem pelos Pares, metodologia divulgada com a designação *Peer Instruction* por Eric Mazur, Físico da Harvard University. Uma das etapas preparatórias da mesma é a construção de questões conceptuais baseadas em erros, conceções errôneas, ..., observados em resoluções dos alunos, nomeadamente em exames. Neste sentido, solicitamos o acesso a uma cópia dos exames nacionais de Matemática (1ª e 2ª fases) do 12° ano, referentes ao ano lectivo 2011/2012, do concelho da Covilhã, sem cabeçalho, para realizar o referido trabalho de investigação. Informa-se ainda que os custos das cópias seriam suportados por Ana Romano.

Covilhã, Universidade da Beira Interior, 2 de outubro de 2012

Com os nossos melhores cumprimentos,

Patrícia Damas

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
DEP. MATEMÁTICA
6200 COVILHÃ

Patrícia Damas Beites
(Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior)

Ana Catarina Mendes Romano

Ana Catarina Romano
(Aluna do 2° Ciclo em Ensino de Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário)

Anexo II – Questionário dirigido aos Professores de Matemática

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

Exmo/a. Senhor/a Professor/a, caro/a colega

O meu nome é Ana Catarina Mendes Romano e sou aluna do Mestrado *Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário* da Universidade da Beira Interior (UBI). Presentemente estou a realizar trabalho de investigação sob a orientação da Professora Doutora Patrícia Damas Beites. A temática abordada é a Aprendizagem pelos Pares, aplicada em algumas unidades curriculares da UBI.

O referido método de ensino/aprendizagem, designado originalmente por Peer Instruction nos artigos de Eric Mazur, é centrado no aluno. Na sala de aula, pretende a substituição da transferência do conhecimento pela assimilação do mesmo. O trabalho desenvolvido por este investigador, para o qual "Ensinar é apenas ajudar a aprender", pode ser consultado em http://mazur.harvard.edu/.

Tem em mãos um questionário que visa aferir os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos do 12º ano no Tema II - *Introdução ao Cálculo Diferencial II*. Conhecendo os mesmos, será possível a elaboração de questões conceptuais para aplicação futura da Aprendizagem pelos Pares no referido tema do Ensino Secundário.

Para que possa levar a investigação a bom termo, careço da sua prestimosa colaboração. Na pergunta de resposta aberta 4. solicitava que fosse o mais pormenorizado/a possível.

Lembro-lhe que não existem nem boas nem más respostas. Apenas a sua opinião para mim é importante. As respostas são anónimas, confidenciais e serão usadas apenas no âmbito do estudo descrito.

4/12/2012 Obrigada pela sua colaboração!

Guarde uma cópia desta primeira página, pois a mesma atesta a sua participação numa investigação em Didática da Matemática.

1. Há quantos anos leciona Matemática?

   - menos de 5 anos
   - 5 a 9 anos
   - 10 a 14 anos
   - 15 ou mais anos

2. Enquanto docente, já lecionou Matemática A ao 12º Ano?

   - Sim
   - Não

   Se respondeu Não, então o questionário termina aqui.

3. No presente ano letivo leciona Matemática A ao 12º Ano?

   - Não
   - Sim. Qual o manual escolar adotado? Escreva, por favor, o título e a editora.

   ____

4. Na sua opinião, quais são os erros decorrentes das principais dificuldades dos alunos no Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial II do 12º Ano?

(Por favor, responda pormenorizadamente. Se possível, escreva erros concretos observados em provas de avaliação, em resoluções de problemas nas aulas, ... Para além do espaço abaixo, pode utilizar o verso desta folha e a folha seguinte.)

Anexo III – Autorização de Participação no Estudo

ESTUDO DE INVESTIGAÇÃO

Aprendizagem pelos Pares: Um contributo para a sua aplicação no Ensino Secundário

ESTUDO REALIZADO POR: ANA CATARINA MENDES ROMANO

SOB A ORIENTAÇÃO DE: PATRÍCIA DAMAS BEITES

Eu, abaixo assinado, fui informado sobre o estudo de investigação mencionado. Foi-me garantido que todos os dados relativos à identificação dos participantes neste estudo são confidenciais. Compreendi a informação que me foi dada, tive oportunidade de fazer perguntas e as minhas dúvidas foram esclarecidas. Aceito participar de livre vontade no estudo supracitado e autorizo a recolha dos dados que são importantes para o mesmo. Também autorizo a reprodução das minhas resoluções nas fichas de avaliação do 12.º ano, ano letivo 2011/2012, com a garantia do anonimato na divulgação científica do estudo.

Nome do participante no estudo:

Assinatura, / /2013

Nome da investigadora: Ana Catarina Mendes Romano

Assinatura, / /2013

Anexo IV – Trabalho para Casa

TPC: Leitura das páginas 156 a 158 de (Costa & Rodrigues, 2012) e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes.

Entrega do TPC: pelo Moodle, até às 22h do dia 3 de dezembro de 2012, de um ficheiro pdf com a digitalização da resolução escrita à mão.

1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, escreve $1-\log_3 5$ sob a forma de um único logaritmo. Em cada passo deves explicitar a regra utilizada.

2. Seja $a \in \Re^+ \setminus \{1\}$, fixo. Indica, justificando adequadamente, o valor lógico da proposição:

para quaisquer $x, y \in \Re^+$, $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.

Recorda que deves apresentar uma demonstração ou um contraexemplo consoante o valor lógico seja verdade ou falsidade, respetivamente.

3. O que achaste difícil ou confuso na leitura? Se nada foi difícil ou confuso, então diz o que te pareceu mais interessante. Por favor, sê o mais específico possível.

A docente, Ana Romano.