



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**  
**Engenharia**

# **Controlo Ótimo de Trajetórias Explícitas de Reentrada Atmosférica**

**Leonor Domingues dos Afeitos**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Aeronáutica**

(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**Covilhã, outubro de 2014**



Para os meus pais



# ***Agradecimentos***

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus pais e familiares por todo o apoio durante todos estes anos, porque sem o apoio deles nada disto seria possível.

Aos meus amigos, que estiveram sempre presentes e me ampararam nos momentos mais difíceis, e que para mim são uma família.

Um especial agradecimento ao Prof. Doutor Kouamana Bousson, pelo acompanhamento, disponibilidade, paciência e orientação científica, bem como pela sua componente humana, que ao longo destes anos me permitiram prosseguir com este trabalho.



## **Resumo**

A reentrada atmosférica é classificada como a fase mais crítica do trajeto realizado por um veículo durante uma missão aeroespacial. Esta fase envolve um elevado risco, pondo em causa a integridade estrutural do veículo bem como a vida dos tripulantes.

Para que esta fase seja bem-sucedida, numa primeira abordagem ao problema tem que se delimitar muito bem a área através da qual a aeronave poderá descrever uma possível trajetória de reentrada, sem que daí possam advir quaisquer problemas, ou seja, desenvolver um corredor de reentrada. Sendo englobadas nestes limites as variáveis referentes à atitude do veículo, pois é através destas que se consegue controlar toda a trajetória e minimizar possíveis riscos subjacentes.

Tendo por base esta linha de pensamentos, ao longo deste trabalho, foram desenvolvidos dois métodos, um que se baseia num controlador integral (seguimento indireto) e o outro utilizando um controlo de seguimento direto do vetor de estado.

Contudo, neste trabalho foram aplicados ambos os métodos, caso contrário, não seria possível controlar todas as variáveis de controlo. Para além disso, permitiu comparar os resultados e com isso salientar as lacunas e capacidades inerentes a cada um deles.

Por fim, considerando que os objetivos foram alcançados, é possível afirmar que esta simulação pode ser aplicada a um caso real.

## **Palavras-chave**

Reentrada atmosférica, Corredor de Reentrada, Trajetória, Atitude do Veículo, Controladores.



## ***Abstract***

The atmospheric reentry is classified as the most critical phase of the vehicle journey during an aerospace mission. This phase involves a high risk, threatening the structural integrity of the vehicle as well as the crew safety.

For this phase to be well succeeded, the interval in which the aircraft could describe a possible trajectory needs to be well defined (with strict boundaries), in order to avoid any kind of possible conflict, such as developing an entry corridor. The aircraft control variables must be in accordance with the boundaries mentioned before, since they control the trajectory and can minimize damage and possible risks.

According to this line of thought, two control methods were developed, the first based on an integral controller (direct tracking) and the second using a direct tracking control of the state vector.

However, both methods were applied in this work, otherwise it wouldn't be possible to control all of the control variables. Furthermore, it's allowed to compare results between both methods and reveal the pros and cons of each one.

Lastly, taking in account that all of the objectives were achieved, it is possible to claim that this simulation can be applied in a real case study.

## **Keywords**

Atmospheric re-entry, Entry corridor, Trajectory, Vehicle attitude, Controllers.



# Índice

<b>Agradecimentos</b> .....	v
<b>Resumo</b> .....	vii
<b>Abstract</b> .....	ix
<b>Lista de Figuras</b> .....	xiii
<b>Lista de Acrónimos</b> .....	xv
<b>1. Introdução</b> .....	1
1.1. Tipos/métodos de reentrada terrestre .....	7
1.1.1. Reentrada balística.....	7
1.1.2. Reentrada de voo planado (glide).....	8
1.1.3. Reentrada de voo skip .....	8
1.2. Limitações dos métodos .....	10
1.3. Limitações do intervalo de reentrada.....	14
1.4. Descretização do modelo matemático .....	16
1.4.1. Equações gerais do movimento.....	16
1.4.2. Equações da atitude.....	21
1.5. Objectivos da dissertação .....	22
<b>2. Métodos de controlo</b> .....	23
2.1. Controlabilidade e observabilidade .....	23
2.2. Dimensionamento do controlador integral (seguimento indireto) .....	25
2.3. Dimensionamento do controlador de seguimento direto.....	29
<b>3. Aplicações Numéricas</b> .....	31
3.1. Simulação do controlador integral (seguimento indireto) .....	31
3.2. Simulação do controlador de seguimento direto .....	39
<b>4. Conclusões</b> .....	47
<b>Bibliografia</b> .....	49
<b>Anexos - Artigo</b> .....	53



# Lista de Figuras

Figura 1.1 - Referencial de coordenadas de reentrada.

Figura 1.2 - Forças exercidas no veículo no momento da reentrada terrestre.

Figura 1.3 - Fronteiras delimitantes de um típico corredor de reentrada.

Figura 1.4 - Reentrada balística.

Figura 1.5 - Reentrada de voo planado.

Figura 1.6 - Reentrada de voo skip.

Figura 1.7 - Representação pormenorizada de uma órbita elíptica.

Figura 1.8 - Sistema de coordenadas durante a reentrada.

Figura 2.3 - Gráficos obtidos através da implementação do método LQR.

Figura 3.1 - Gráficos obtidos para a primeira simulação do controlador linear ótimo.

Figura 3.2 - Gráficos da altitude em função do tempo após a implementação de  $r(t)$ .

Figura 3.3 - Gráficos do ângulo de arfagem em função do tempo após a implementação de  $r(t)$ .

Figura 3.4 - Gráficos obtidos para a segunda simulação do controlador linear ótimo.

Figura 3.5 - Gráficos obtidos através da primeira simulação para o controlador para rastreamentos de variáveis.

Figura 3.6 - Gráficos obtidos após a substituição de  $t_{final} = 900s$  e  $n=9$ .

Figura 3.7 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando de  $t_{final} = 900s$  e  $n=9$ .

Figura 3.8 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando de  $t_{final} = 900s$  e  $n=2$ .

Figura 3.9 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando de  $t_{final} = 900s$  e  $n=6$ .

Figura 3.10 - Gráficos obtidos para o segundo caso (3.2.2) considerando  $t_{final} = 900s$  e  $n=9$ .



# Lista de Acrónimos

$X$	vetor do plano horizontal
$Z$	vetor do plano vertical
$V$	vetor velocidade
$r_p$	raio do perigeu
$r_a$	raio do apogeu
$h_p$	distância do corpo no perigeu
$h_a$	distância do corpo no apogeu
$a$	semieixo maior
$b$	semieixo menor
$e$	excentricidade
$p$	semi lado reto $p$
$h$	altura do corpo
$A_e$	área da elipse
$T$	período
$r_o$	distância do corpo à órbita (Km)
$\theta_e$	ângulo entre o eixo dos $xx$ o posicionamento do corpo na elipse
$t$	tempo (s)
$\xi_x(t), \xi_y(t)$	ruído associado introduzido
$\sigma_x, \sigma_y$	tolerância do ruído
$R_e$	raio da Terra
$g$	aceleração gravítica
$g_0$	aceleração gravítica ao nível do mar
$Z$	altitude geométrica realista
$z_i$	altitude geométrica em cada valor de $i$
$i$	representa a camada atmosférica da posição atual do veículo ( $0 \leq i \leq 7$ )
$L_{z_i}$	taxa de lapso térmico
$T_{M_i}$	temperatura molecular
$\rho_i$	densidade em $i$
$a_g$	valor da aceleração
$R$	constante universal dos gases perfeitos
$\rho$	densidade atmosférica
$L$	sustentação
$D$	arrasto
$m$	massa do veículo
$A$	área de referência
$V$	velocidade do veículo

$C_L$	coeficiente de sustentação
$C_D$	coeficiente de arrasto
$C_{D0}$	coeficiente de arrasto parasita
$\alpha$	ângulo de ataque
$\varepsilon$	rácio entre a densidade a montante do choque com a densidade jusante do choque
$\phi_1$	ângulo de cone do nariz do veículo
$R_d$	distância desde o centro da Terra até ao veículo
$\varphi$	latitude
$\lambda$	longitude
$\phi_1$	ângulo de cone do nariz do veículo
$\gamma$	ângulo do plano de voo
$\sigma$	ângulo de pranchamento
$\Psi$	ângulo de azimute do plano de voo
$\Omega_E$	velocidade rotacional da Terra
$\dot{\Psi}_\omega, \dot{\gamma}_\omega, \dot{V}_\omega$	efeitos rotacionais da Terra
$u$	velocidade longitudinal
$w$	velocidade vertical
$q$	taxa de arfagem
$S$	superfície de referência
$\bar{c}$	valor da corda média do veículo
$C_m$	coeficiente do momento de arfagem
$I_y$	momento de inércia em torno de $y$
$\theta$	ângulo de arfagem
$\psi$	ângulo de guinada
$\phi$	ângulo de rolamento
$p$	taxa de rolamento
$q$	taxa de arfagem
$r$	taxa de guinada
$I$	matrix de inércia
$N$	torque aerodinâmico
$\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$	representam as velocidades angulares.
$r(t) \in R^n$	referência da trajetória explícita
$x_p(t) \in R^{m_p}$	vetor de estado
$x_e(t) \in R^n$	estado integrador
$\beta$	ângulo de derrapagem
$p$	taxa de rolamento
$r$	taxa de guinada
$\phi$	ângulo de rolamento

$de$	deflexão do elevator
$dr$	deflexão do rudder
$el$	servo comando do elevator
$ru$	servo comando do rudder
$r_{final}$	altitude referente à posição do veículo no final da trajetória
$h_{inicial}$	altitude referente à posição inicial do veículo, limite superior da atmosfera
$t_{final}$	instante no qual o veículo atinge $r_{final}$
$\tau$	fator que atua sobre as variáveis de controle
$\eta$	representa um valor real positivo



# 1. Introdução

A reentrada de um veículo na atmosfera terrestre é uma das fases mais críticas do voo aeroespacial. Desta forma, quando nos debruçamos mais aprofundadamente sobre esta temática, temos que ter em atenção todos os fenómenos físicos envolventes, bem como toda a sua complexidade. Isto porque estes diferem dos que estamos habituados a utilizar na superfície terrestre.

Neste caso, o sistema de coordenadas difere do utilizado normalmente para o caso de uma aeronave a operar na atmosfera. Para que se torne um pouco mais fácil a nossa análise, centraremos o referencial no centro de gravidade da aeronave.

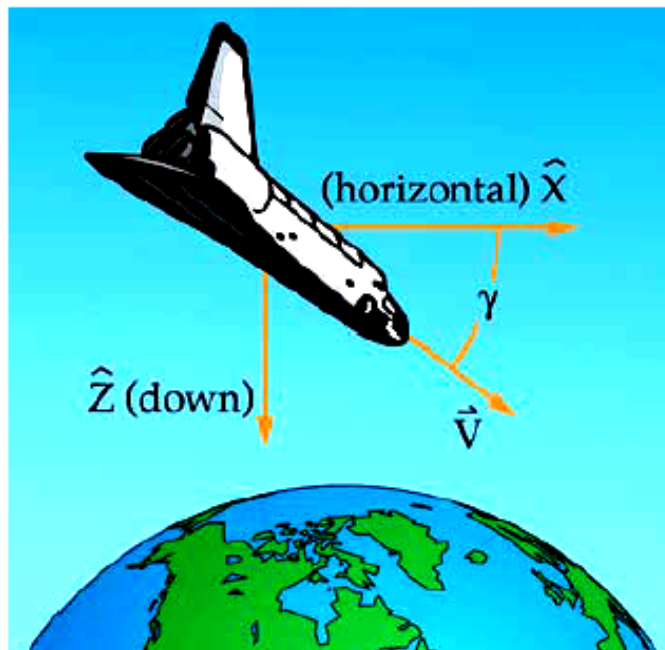


Figura 1.1 - Referencial de coordenadas de reentrada [5].

Na figura 1.1, acima ilustrada, podemos observar de forma muito simplificada o sistema de coordenadas utilizado. Assim, o vetor  $X$  representa o plano horizontal,  $Z$  o plano vertical e  $V$  o vetor de velocidade. Por fim,  $\gamma$  trata-se do ângulo formado pelo plano de voo durante a reentrada, ou seja, o ângulo entre o plano horizontal e o vetor de velocidade. Este último é um dos fatores mais relevantes em todo este processo de reentrada, pois se o valor atribuído a este ângulo não for o mais correto, a aeronave poderá desintegrar-se logo que atinga o limite superior da atmosfera terrestre [5].

A atmosfera terrestre, como sabemos, é uma camada que envolve o nosso planeta e que nos protege do ambiente exterior, permitindo deste modo que o nosso planeta seja habitável. Para que isto seja possível, essa camada protetora possui determinadas características muito distintas das que se fazem sentir na zona que habitamos, como é o caso da sua densidade, da sua constituição química, entre outras. Estas características variam consoante a latitude e a altitude a que nos encontramos na atmosfera e, conseqüentemente, esta encontra-se dividida numa série de regiões muito bem delimitadas.

Porém, a Terra não possui uma forma regular/simétrica, sendo esta elíptica e não esférica, o que conseqüentemente irá interferir diretamente com as suas características ao longo de todas as regiões mencionadas anteriormente. Não sendo estas propriedades constantes ao longo de toda uma região, como por exemplo ao longo de toda a estratosfera ou da termosfera, teremos que considerar todas estas diferenciações sem nenhuma exceção, para que desta forma possamos obter uma melhor aproximação do que se verifica na realidade. Para uma melhor compreensão e análise deste fenómeno foi elaborado um modelo atmosférico, o qual combina modelos matemáticos e físicos desenvolvidos ao longo dos tempos, que nos permitem ter uma ideia base do desenvolvimento destas propriedades ao longo de toda a atmosfera [1].

Desta forma, tendo em conta todos os fatores, temos que pensar nas conseqüências que podem advir da interação de um veículo com essas mesmas diferentes propriedades. Deste modo, poderemos facilmente compreender que se o ângulo  $\gamma$  não for o mais indicado, aquando da entrada do veículo na atmosfera, esta interação poderá ser fatal para a estrutura do veículo. Pois este deparar-se-á com um meio no qual as propriedades são de tal forma distintas que não resistira a esse impacto.

Este fenómeno deve-se ao facto de o veículo, quando se encontra em órbita não se encontrar sujeito a quaisquer tipos de força, porque ao “deambular” pelo espaço não sofre ação de qualquer tipo de força, como por exemplo do atrito ou da gravidade. Contudo, à medida que este se aproxima da superfície terrestre, estas interações começam-se a fazer sentir de uma forma tão abrupta e repentina que a integridade da estrutura estará em causa, bem como os tripulantes no seu interior [1].

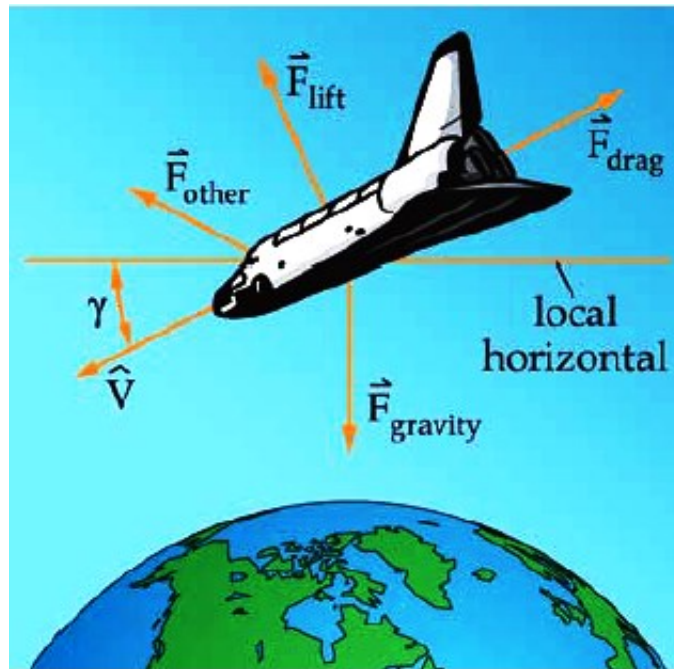


Figura 1.2 - Forças exercidas no veículo no momento da reentrada terrestre [5].

Neste seguimento ideológico, poderemos verificar que na ilustração 1.2 se encontra representado um caso específico das forças exercidas sobre a estrutura do veículo numa trajetória de reentrada, sendo estas: a força da gravidade, o arrasto, a sustentação, entre outras.

Assim, o arrasto é a força de resistência ao movimento, provocada por um objeto ao deslocar-se num fluido, neste caso a atmosfera. Sendo esta uma força de resistência, a sua direção é contrária a direção do movimento do veículo.

A força da gravidade, por sua vez, é a força de atração exercida por corpos com massas entre eles. Neste caso esta força é denominada pelo peso da aeronave, ou seja, uma força que se deve principalmente à interação da massa do avião com a massa da Terra. Esta é aplicada no centro de gravidade da aeronave e é direcionada para o centro da Terra.

Por outro lado, a sustentação trata-se de uma das componentes mais importantes em todo o processo de voo, pois esta é a força que tem como principal objetivo o de compensar a força que o peso exerce sobre a estrutura. Esta força é gerada tendo como base dois princípios, o movimento da aeronave através do ar e a interação deste mesmo ar com as suas asas. Porque, somente através destes dois princípios é que será possível criar sustentação suficiente para sustentar uma aeronave no ar. Esta força tem sempre a direção perpendicular à direção do escoamento do ar através da aeronave [5].

Após esta breve explicação podemos concluir que este processo é bastante complexo. Assim, quando analisamos este fenómeno, temos que ter em conta uma vasta gama de aspetos. Desde o meio no qual nos deslocamos, à estrutura do próprio veículo, bem como as forças que neste serão exercidas, entre outros.

Deste modo, para conseguirmos contornar melhor forma esta problemática, temos que ter em conta todas as etapas e princípios fundamentais da reentrada e, posteriormente, analisá-los cautelosamente, por forma a conseguir otimizar e melhorar todo este processo.

Os princípios fundamentais a ter em conta são: a desaceleração, o aquecimento em demasia e a aterragem/impacto na superfície terrestre do veículo em questão.

A desaceleração consiste fundamentalmente, na perda progressiva de velocidade ao longo de um certo período de tempo, desde que o veículo entra na atmosfera até ao ponto em que este faz a aproximação ao local de aterragem. Todavia, como o meio de interação nesta fase possui propriedades muito específicas, como é o caso da viscosidade, da densidade, da condutividade térmica, entre outras, temos que ter em conta alguns parâmetros que noutras situações não seriam considerados.

Um desses parâmetros, ao qual temos que dar mais ênfase, é o da força máxima exercida na fase de desaceleração, mais propriamente aos g's exercidos, tanto na estrutura da aeronave bem como nos tripulantes. A estrutura do veículo, como sabemos, pode aguentar pressões muito elevadas, enquanto pelo contrário o corpo humano já não consegue suportar uma gama tão elevada de forças. Desta forma, aquando da reentrada, devemos ter sempre a preocupação de nunca ultrapassar o limite máximo de desaceleração, que se estima ser de 12 g's, ou seja, até 12 vezes o peso do corpo humano [5].

Contudo, nesta fase, para além das forças, temos que também ter em atenção à forma como se dá esta desaceleração. Ou seja, se esta for demasiado rápida, o veículo pode não conseguir atingir a superfície terrestre e, conseqüentemente, voltar para o espaço, enquanto que se esta se processar de uma forma demasiado lenta o veículo pode colidir com a superfície terrestre. Não sendo possível em nenhum destes casos atingir com sucesso a superfície terrestre.

Um outro fator a ter em conta, é o aquecimento em demasia do veículo, durante a fase de reentrada. Como o ar da atmosfera possui uma densidade superior, as moléculas que a constituem ao interagirem com a superfície do veículo, na camada limite, por fricção, provocam um aumento de energia, um incremento que se dá ao nível tanto da energia cinética como da energia potencial do sistema em questão. Este aumento de energia do sistema traduzir-se-à num aumento de temperatura, aquecimento aerodinâmico, tanto a nível dos materiais que constituem a fuselagem da aeronave como do ar envolvente dessa mesma estrutura. Se esse aumento de temperatura for em demasia, a estrutura poderá não aguentar tanto esforço e ceder, o que poderá provocar uma desintegração total do veículo e, conseqüentemente, morte dos tripulantes [2].

Do mesmo modo, para essa temperatura está estabelecido um valor máximo que pode ser atingido. Porque, embora a estrutura exterior consiga suportar elevadas temperaturas, os tripulantes não o conseguem.

Para combater este fenómeno existem diversas formas, como por exemplo, a utilização de materiais mais resistentes a elevadas temperaturas, bem como materiais que isolam a cápsula interior do ambiente exterior.

Por último, mas não menos importante, é a fase de aterragem/impacto do veículo no solo terrestre. Visto que todos os veículos quando fazem uma aproximação a uma pista têm o objetivo de aterrar, neste caso o princípio é o mesmo. Dessa forma, devemos ter em conta o sítio onde é pretendido executar a aterragem, porque se for um sítio com uma pista de tamanho satisfatório não temos que nos preocupar, contudo, se o tamanho de pista for reduzido, ao programarmos a trajetória de aproximação é um dos princípios essenciais a ter em conta.

As trajetórias, no caso de aproximação terrestre, devem possuir uma forma elíptica. Este facto deve-se ao estudo das leis de Kepler, leis de movimento planetário, em que qualquer aproximação planetária deve seguir esta trajetória, de forma a facilitar a reentrada. Neste seguimento, podemos observar a figura 1.3, a qual representa esquematicamente os limites que têm que ser respeitados para o caso de uma reentrada terrestre. Caso estes limites aqui delineados não sejam cumpridos, ou seja, que a aproximação não seja efetuada pelo corredor de reentrada, toda a integridade da operação é posta em causa [4].

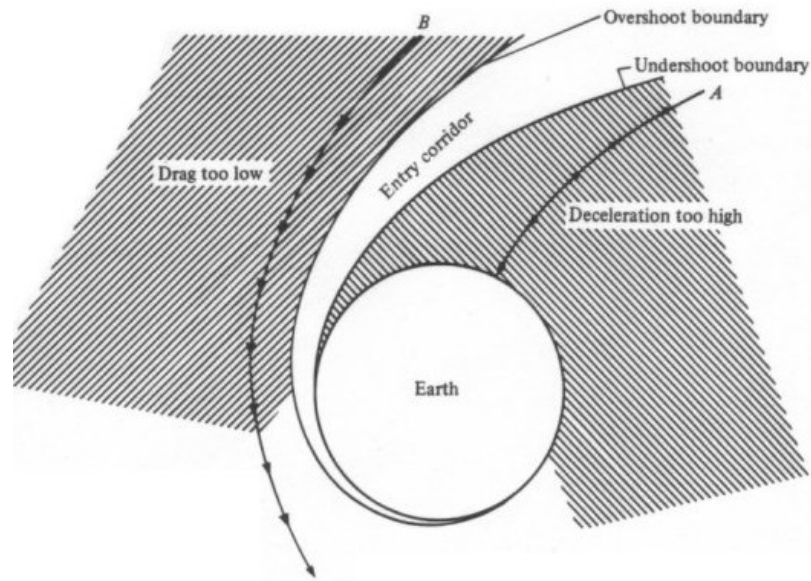


Figura 1.3 - Fronteiras delimitantes de um típico corredor de reentrada [4].

Como podemos observar, na ilustração encontra-se esquematizado a forma correta que toma um corredor de reentrada. Este esquema tem como base os três parâmetros descritos posteriormente, pois são estes que fazem com que o veículo não aqueça em demasia ou que não saia da rota pretendida.

Por exemplo, se o veículo iniciar a trajetória na zona abaixo da delimitação de “undershoot”, a fase de desaceleração poderá ser muito rápida, o que poderá, por sua vez, provocar um sobreaquecimento e conseqüentemente desintegração total da aeronave. Ou por outro lado, se este iniciar a aproximação na zona acima da delimitação de “overshoot”, a força de arrasto evidenciada na aeronave poderá ser demasiado baixa e não conseguir “travar” o suficiente, o que poderá levar a que a trajetória de aproximação seja feita de uma forma muito afastada da superfície da Terra, fazendo com que o veículo volte a entrar em órbita.

## 1.1. Tipos/métodos de reentrada terrestre

### 1.1.1. Reentrada balística

Este tipo de reentrada é a mais comumente utilizada neste tipo de aproximações à superfície terrestre.

Podemos observar, que neste caso o veículo deixa-se “cair” pela atmosfera, ou seja, o veículo durante a manobra de reentrada possui muito pouco ou até mesmo nenhuma sustentação. Recorre desta forma, ao arrasto de alta intensidade provocado pela própria estrutura e à influência da gravidade existente a partir do momento em que penetramos na atmosfera para conseguir realizar a trajetória. É devido a estes parâmetros que se dá o decréscimo de velocidade durante esta fase. Permitindo, assim, conseguir realizar alguma poupança de combustível, pois como este tipo de reentrada utiliza somente a gestão eficiente das forças que são exercidas na estrutura da aeronave, não é necessária a ação dos motores.

Para conseguirmos compreender melhor este tipo de reentrada, podemos observar a ilustração 1.4, onde vemos que o veículo “cai” através da atmosfera, sem sofrer grandes alterações na sua trajetória.

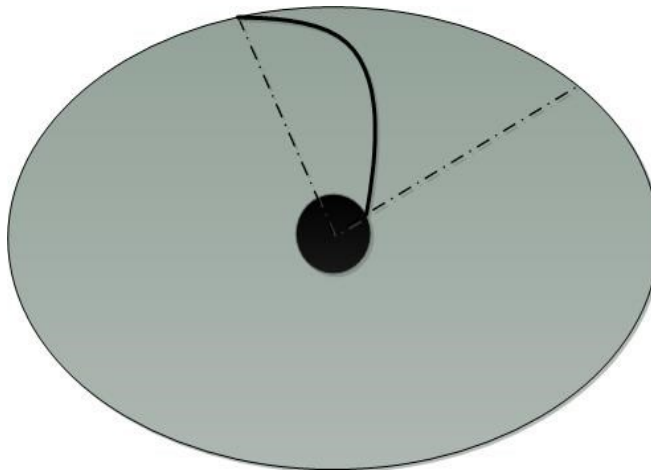


Figura 1.4 - Reentrada balística.

Contudo, se tanto a aproximação com a própria trajetória de reentrada não forem projetadas nem executadas corretamente, como neste não são utilizados quaisquer meios propulsivos, nem qualquer atuação por parte do piloto, uma programação menos cuidada poderá levar a um descontrolo do veículo [3] [4].

### 1.1.2. Reentrada de voo planado (glide)

Neste caso, o veículo entra na atmosfera com um ângulo de ataque elevado, 30° ou mais, procurando, assim, um equilíbrio entre as forças de sustentação e de gravidade, permitindo que a força de arrasto se encarregue de fazer com que a aeronave diminua a sua velocidade. Neste tipo de reentrada o piloto consegue possuir algum controle sobre a aeronave.

Este método é muito semelhante ao anterior, contudo necessita de superfícies aerodinamicamente controláveis, para que desta forma o piloto possa controlar as forças de sustentação e de gravidade exercidas na estrutura.

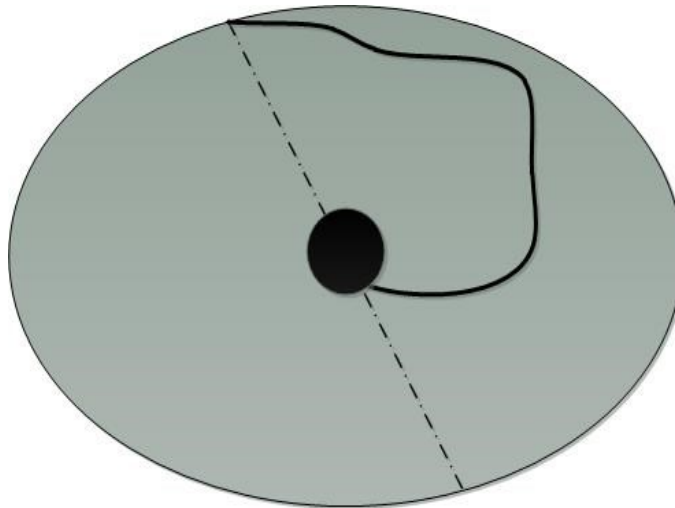


Figura 1.5 - Reentrada de voo planado.

Na figura 1.5 podemos observar de uma forma esquemática muito simples este tipo de reentrada. Contudo, face à figura 1.4, podemos denotar algumas diferenças, como é o caso de já serem utilizadas superfícies de controle para executar pequenas correções a nível aerodinâmico, por forma a um maior equilíbrio das forças exercidas no veículo, sofrendo a trajetória algumas alterações. Estas correções, na maioria das vezes, tornam-se necessárias para que a aproximação se torne o mais subtil e estável possível [3] [4].

### 1.1.3. Reentrada de voo skip

O veículo, neste caso, gera um rácio L/D (sustentação/arrasto) de 1 a 4, ou seja, utilizando esta gama de valores para o fator de eficiência aerodinâmica, irá permitir que este consiga “roçar” na atmosfera e conseqüentemente diminuir a sua velocidade. Como consequência desta variação o veículo sobe um pouco e posteriormente volta a descer, como

se verifica no efeito do salto de uma pedra sobre a água de um lago. Ao realizar este movimento de forma sistemática, o veículo atinge uma velocidade tão reduzida que penetra a atmosfera e aterriza na superfície terrestre.

Contudo, este método possui uma limitação proveniente deste sucessivo “sobe e desce”, sendo ela um aquecimento excessivo da estrutura da aeronave. Por este motivo não é um método comumente utilizado para a realização da reentrada terrestre. Pelo contrário, a diminuição da velocidade é efetuada de um modo mais gradual do que a observada em qualquer outro método.

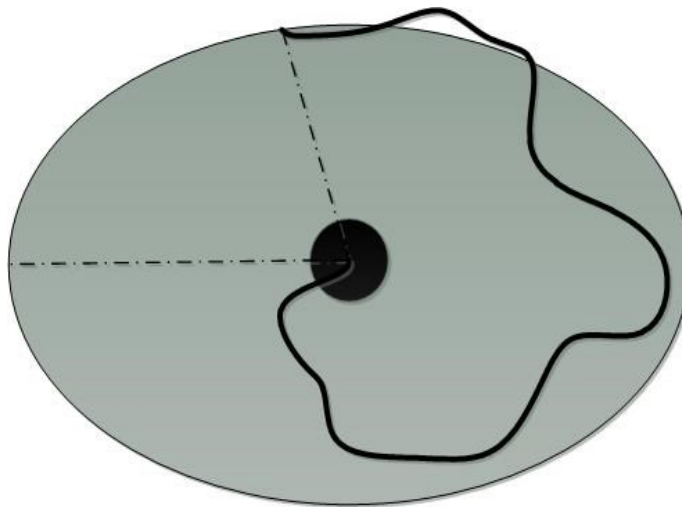


Figura 1.6 - Reentrada de voo skip.

Como referido anteriormente, podemos observar que este tipo de reentrada se trata de um fenómeno menos estável, pois sofre vários desvios ao longo de toda a sua trajetória [3] [4].

## 1.2. Limitações dos métodos

Uma das principais problemáticas da abrangência do tema, não se trata do facto de não se compreender o fenómeno físico e matemático envolvente, mas sim, de como agrupar e tratar toda essa informação. Pois, quando o veículo se prepara para realizar a aproximação à superfície terrestre, este depara-se com dois meios quase que distintos, o primeiro, fora da atmosfera onde as forças aerodinâmicas são menos perceptíveis comparativamente com o campo gravitacional e um segundo, já dentro da atmosfera, onde as forças aerodinâmicas se fazem sentir acentuadamente, tanto na estrutura como nos ocupantes.

A problemática de reentrada trata-se da solução de problemas, recorrendo à resolução de um sistema de equações diferenciais não lineares, com base em integrações numéricas. Os sistemas menos complexos, que recorrem a soluções analíticas, servem como base à compreensão e resolução de problemas mais complexos, que envolvem demasiadas incógnitas, tais como, por exemplo, problemas de guidance e controlo [5].

Desta forma, atualmente, apenas conseguimos obter resultados para problemas pouco divergentes, otimizando somente alguns parâmetros de modo isolado, ou seja, considerando numa primeira fase de abordagem casos dimensionados num plano (2D), passando posteriormente para o espaço (3D). Permitindo, assim, que a fase de reentrada possa ser executada de uma forma mais rentável e otimizada possível.

Uma das principais áreas a que devemos dar a máxima importância é, sem dúvida, a fase inicial do projeto, mais propriamente ao design e conceção do todo veículo. Aqui, o dimensionamento da estrutura e a forma do próprio veículo possuem uma importante relevância, porque, se esta etapa não for tratada de forma cuidada, ou seja, se o veículo não possuir uma forma adequada, poderão existir futuramente problemas de instabilidade estática e dinâmica. Temos, por exemplo o caso do dimensionamento do nariz da aeronave, tamanho e formato. Se este não possuir um formato aerodinâmico correto e uma estrutura capaz de suportar as elevadas temperaturas e as forças exercidas nele, poderá colocar em risco a integridade de todo o veículo.

Porém, nem só o formato do nariz é importante, toda a aeronave deverá ser exaustivamente estudada e testada, não só por causa do aquecimento excessivo que esta terá que suportar no momento de reentrada, como os fenómenos físicos que serão exercidos sobre ele. Assim, conforme o veículo possua arestas mais ou menos vivas, as suas interfaces de ligação entre os vários componentes possuam ligações mais ou menos abruptas, as suas asas serem ou não capazes de produzir sustentação, o sistema de proteção térmica seja mais ou

menos eficaz, este tem que funcionar corretamente para que consiga suportar o tipo de operações para o qual está a ser projetado.

Só tendo como base um pré-concebido protótipo é que os projetistas conseguem prosseguir, ou seja, para o caso de uma reentrada balística, calcular o valor exato do coeficiente balístico, do ângulo do plano de voo e a determinação do valor do rácio de L/D [6] [7] [8]. Estes são os parâmetros cruciais para a concretização desta manobra, pois se algo não estiver bem dimensionado, a integridade da operação, ou seja, do veículo e dos ocupantes, será posta em causa. Pois, para cada veículo que seja projetado existem limites que não podem ser ultrapassados. Por exemplo, elevados coeficientes balísticos podem levar a que o ângulo de ataque aumente, e que conseqüentemente se dê um aumento do arrasto que, por sua vez, provoque falhas estruturais.

Por isso, é que grandes intelectuais desta área se debruçaram sobre este assunto. Através da aplicação de certos elementos matemáticos e físicos, tentaram minimizar os riscos e potenciais erros que levariam a conseqüências catastróficas. Como é o caso, da implementação/integração dos Ângulos de Euler na descrição do movimento de reentrada, com o principal objetivo de se conseguir definir com maior precisão os coeficientes aerodinâmicos, bem como a convergência do ângulo de ataque neste período e assim, prever o comportamento de todo o veículo ao longo de todo o processo. Tudo isto permite um conhecimento mais pormenorizado que conduz à aplicação de diferentes métodos. Por exemplo, a possibilidade de alterar o posicionamento do CG da aeronave, durante esta fase, tendo como base a movimentação deliberada de carga por toda a estrutura do veículo, ou conseguir alterar o valor do ângulo de ataque, entre outros [8].

Contudo, se este possuir entre outros parâmetros anómalos uma forma muito assimétrica com arestas vivas, a aeronave poderá sofrer de graves problemas de instabilidade, como por exemplo problemas de ressonância quando verificado rolamento dinâmico. Estas anomalias verificam-se devido aos materiais utilizados na construção da estrutura do veículo [9].

Outra perspetiva de abordar o tema será através do tratamento de forma diferenciada do que se passa dentro e fora da atmosfera, tendo por base as forças aerodinâmicas e a interação do campo gravitacional. Por espaço fora da atmosfera, foi considerado pelo autor do trabalho, uma região perto do espaço mas não se inserindo nele, ou seja, perto do vácuo onde a força predominante é a força da gravidade. Por outro lado, o espaço dentro da atmosfera foi definido como uma zona onde as forças aerodinâmicas são predominantes. Todavia, existe uma zona limiar entre as duas anteriores, zona na qual as condições verificadas nas duas regiões mencionadas anteriormente possuem igual predominância, ou seja, o veículo sofrerá de igual forma das aplicações das forças aerodinâmicas e da força da

gravidade. Este método, numa primeira abordagem, foi estudado de uma forma muito simplificada, verificando o que aconteceria fora, dentro e no limiar da atmosfera, aplicando somente métodos numéricos para conseguir obter os valores desejados. Numa segunda fase, através do sistema obtido, tendo por base a análise da zona limiar, pode-se agrupar num só sistema tudo o que foi estudado anteriormente, permitindo, assim, a descrição matemática de um métodos tridimensional do problema de reentrada. Com este método foi possível obter soluções mais simplificadas que vieram melhorar e otimizar problemas relacionados com guidance e controlo, com carga útil e peso de combustível e também a determinação de algumas variáveis antes desconhecidas [5].

Com o avanço tecnológico passou-se para outro patamar, podendo quase que automatizar todo o processo. De uma forma muito generalista, através da aquisição e tratamento de dados torna-se possível obter e redimensionar, se necessário, a trajetória quase que em tempo real, divergindo apenas em pequenos intervalos de tempo [9] [10] [11].

Na literatura, existe um sem número de referências, cada uma com as suas vantagens e desvantagens. Porém, para a realização deste trabalho serão seguidas as linhas de pensamento mais detalhadas de trabalhos que vão ao encontro da linha de pensamentos proposta para este trabalho.

Deste modo, um dos trabalhos analisados tem como principal objetivo definir um corredor de reentrada, através do qual o veículo irá executar a sua abordagem à superfície terrestre. Este será projetado, numa fase inicial, tendo por base os valores obtidos da taxa de aquecimento, da aceleração, o valor da pressão dinâmica exercida na estrutura e os limites de controlabilidade da mesma. Esta fase inicial do projeto tem por finalidade fornecer os dados de base para que possamos começar, construindo, assim, um algoritmo de aproximação de referência.

Após definir-se o corredor, passa-se para a fase seguinte, na qual será desenvolvido um modelo matemático, englobando os dados iniciais e os dados adquiridos durante o momento de reentrada, utilizando a conceito de “flatness”. Este conceito trata-se de uma propriedade de um sistema, que tem por objetivo estender a noção que temos de controlabilidade, no caso de um sistema linear e de um sistema não linear. Dessa aplicação surgem os outputs fictícios que serão utilizados posteriormente como inputs para gerar um modelo de referência do plano de voo. Com a transformação dos outputs será calculada a dinâmica dos erros subjacentes à trajetória, o que conjuntamente com o modelo de referência, permite obter dados suficientes para criar um controlador LPV (Linear Parameter Varying). Garantindo desta forma, a estabilidade e performance desejadas do sistema de reentrada. Com este trabalho consegue-se ter uma percepção da importância da

incrementação dos erros na simulação da trajetória e como estes podem ser construídos, através dos dados da própria trajetória [9].

Outra forma, ainda, de abordar o tema será o de definir, desde o início, o local de aterragem do veículo e, com base nessas coordenadas, dimensionar toda a trajetória, desde o momento de aproximação ao limite superior da atmosfera até atingir a superfície terrestre. Esta simulação engloba também o dimensionamento de um corredor de reentrada, tendo como base os dados iniciais do veículo e a aquisição de dados realizada durante todo o percurso. O dimensionamento da órbita de reentrada, neste caso, encontra-se diretamente relacionada com a inclinação do local de aterragem, pois esta terá que possuir uma inclinação que seja coerente com a do local, para que a aterragem seja o mais suave possível. Este trabalho, embora não se trate propriamente de um projeto para um spacecraft, mas sim de um módulo, a determinação do modelo de reentrada terá como base as mesmas equações. Através da sua análise, puderam demonstrar que as principais lacunas deste método, passaram por não existir um modelo capaz de analisar os erros e com isso definir uma nova trajetória com base nas incertezas e perturbações, e pela análise detalhada de um sistema de proteção termal tendo por base este método, como mencionado na conclusão do trabalho [10].

Como foi visto anteriormente, neste momento, os veículos espaciais quando do momento de reentrada terrestre conseguem realizar a aquisição de dados em tempo real e com esses dados é-lhes permitido desenvolver a trajetória do próprio veículo. Contudo, nem todos os métodos são exatamente os mesmos. Uma outra forma, será criar um algoritmo capaz de definir a trajetória recorrendo à utilização de waypoints, sendo estes definidos com base no tratamento de dados adquiridos ao longo do tempo de reentrada. Para isso, o ângulo de ataque e o ângulo do plano de voo tornam-se uma das principais constantes a ser tomadas em conta neste modelo, por forma a poder estimar um modelo de guidance para o veículo. Deste modo, estes ângulos serão ajustados durante toda a trajetória de reentrada, tendo como base os dados referentes à atitude e à resposta da aeronave às modificações de trajetória a que esta é sujeita. Numa primeira fase, todas estas incógnitas serão tratadas num plano bidimensional e posteriormente passadas para um plano tridimensional. Neste trabalho, foi considerado um sistema baseado na teoria de linearização “feedback”, com o objetivo de conseguir obter uma forma de desenhar a trajetória ao longo do tempo, recorrendo à utilização dos dados reais. O sobre aquecimento é também uma questão a ter em conta, assim, de modo a contrariar este fenómeno, os autores deste trabalho pensaram em variar o ângulo de ataque, tendo por base a temperatura demonstrada pela estrutura ao longo deste momento [11].

Atualmente, para a construção do algoritmo matemático que define a trajetória, os investigadores baseiam-se na aproximação inversa ao problema, ou seja, elaboram um

algoritmo capaz de “prever” os controlos compatíveis com a trajetória já definida. Inicialmente, definem-se os pontos por onde o veículo tem obrigatoriamente que passar e somente após estes estarem definidos é que se passa ao cálculo e análise dos valores necessários à descrição da mesma, tendo por base os constrangimentos referidos anteriormente. Este método inverso é muito utilizado para o caso dos pilotos automáticos não-lineares e para a definição dos algoritmos de guidance [12] [13] [14].

### 1.3. Limitações do intervalo de reentrada

Neste caso, para que a reentrada se torne possível e que os limites físicos e estruturais não sejam ultrapassados, uma das aproximações possível será o de conseguir recriar “orbitas” em torno do planeta Terra. Orbitas estas que nos permitem delimitar um corredor de reentrada constituindo um funél, tendo por base os limites previamente mencionados. Estas órbitas, matematicamente, não são mais do que simples elipses que tem como foco a Terra.

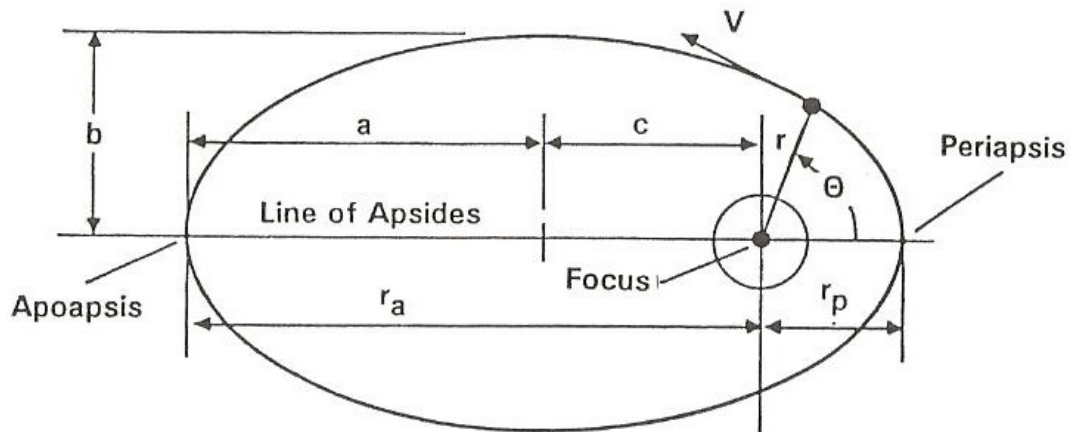


Figura 1.7 - Representação pormenorizada de uma órbita elíptica [15].

Contudo para o dimensionamento das elipses torna-se necessários atribuir valores a alguns parâmetros para que seja possível obter os restantes. E estes são,  $h_p$ ,  $h_a$  e  $R_e$  [15] [16].

Desta forma obtemos:

$$r_p = h_p + R_e \quad (1.1)$$

$$r_a = h_a + R_e \quad (1.2)$$

$h_p$  - distância do corpo no perigeu

$h_a$  - distância do corpo no apogeu

$R_e$  - raio da Terra

E conseqüentemente:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (1.3)$$

$$b = \sqrt{r_p r_a} \quad (1.4)$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (1.5)$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (1.6)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (1.7)$$

$$A_e = \pi * a * b \quad (1.8)$$

$$T = \frac{2A_e}{h} \quad (1.9)$$

Tendo como base os valores calculados anteriormente, procedemos à implementação das seguintes expressões matemáticas:

$$x(t) = r_o(\theta_e) * \cos \frac{2\pi}{T} * t + \xi_x(t) \quad (1.10)$$

$$y(t) = r_o(\theta_e) * \sin \frac{2\pi}{T} * t + \xi_y(t) \quad (1.11)$$

Com,

$$\theta_{e(t)} = \frac{2\pi}{T} * t \quad (1.12)$$

$$r_o(\theta_e) = \frac{p}{1 + e * \cos \theta_e} \quad (1.13)$$

$r_o$  - distância do corpo à órbita (Km)

$\theta_e$  - ângulo entre o eixo dos xx o posicionamento do corpo na elipse

$t$  - tempo (s)

$$\xi_x(t) = N(0, \sigma_x) \quad (1.14)$$

$$\xi_y(t) = N(0, \sigma_y) \quad (1.15)$$

$\xi_x(t)$ ,  $\xi_y(t)$ , no sistema, representam o ruído associado introduzido, permitindo assim que o sistema se aproxime da realidade. Como pode ser observado nas equações 1.14 e 1.15, o ruído toma a forma de uma distribuição normal, especificada pelos seguintes parâmetros  $(\mu, \sigma)$ , onde  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio padrão. Para este caso específico,  $\mu$  toma o valor 0 e  $\sigma_x, \sigma_y$  representa a tolerância do ruído específica.

Estas expressões permitem que seja possível desenhar no espaço uma elipse tendo como base o tempo desejado( $t$ ) e o valor do ângulo teta ( $\theta$ ) [15]. O mesmo se passa para a trajetória, a qual podemos dimensionar recorrendo aos valores delimitativos do funél. Isto é, através das elipses que foram dimensionadas anteriormente calculamos uma órbita, intermédia pertencente a esses mesmos intervalos, e conseguimos encontrar a trajetória óptima do veículo [15] [16].

Por outro lado, a manobra de reentrada inicia-se a partir do ponto com menos altitude da atmosfera terrestre, ou seja, do perigeu da órbita, situando-se este a 120 Km da Terra. Nesta parte da trajetória o veículo necessita da ação direta dos motores rocket existentes na aeronave. No entanto, abaixo desse limite, estes deixam de ser utilizados e a trajetória passa somente a ser influenciada pela força da gravidade [10].

#### 1.4. **Descretização do modelo matemático**

Neste subcapítulo será descrito de forma sucinta um modelo matemático, a partir do qual é permitido obter uma estimativa da posição atual do veículo durante toda a reentrada [10].

##### 1.4.1. **Equações gerais do movimento**

Considerando que o planeta Terra possui uma forma esferica, obtém-se valores para o campo gravitacional através de [1]:

$$g = g_0 \left[ \frac{R_e^2}{(R_e + Z)^2} \right] \quad (1.16)$$

Com:

$g$  - aceleração gravítica [ $m/s^2$ ]

$g_0$  - aceleração gravítica ao nível do mar [ $m/s^2$ ]

$Z$  - altitude geométrica realista

O modelo da atmosfera padrão em função da altitude, de 1976, só é considerado abaixo do 120Km de atmosfera, ou seja, somente a partir do momento em que as propriedades da atmosfera se fazem sentir. Acima desse valor, este método não é aplicável devido à carga aerodinâmica nessa altitude ser nula. Isto é descrito através do seguinte modelo[10]:

$$\rho = \rho_i \left[ \left( \frac{L_{zi}}{RT_{M_i}} \right) (Z - Z_i) + 1 \right]^{a_g} e^{\left\{ \left( \frac{g_0 b}{RL_{zi}} \right) (Z - Z_i) \right\}} \quad (1.20)$$

Onde,

$$a_g = - \left\{ \left( \frac{g_0}{RL_{zi}} \right) \left[ \frac{RL_{zi}}{g_0} + 1 + b \left( \frac{T_{M_i}}{L_{zi}} - Z_i \right) \right] \right\} \quad (1.21)$$

$\rho$ - densidade atmosférica [Kg/m<sup>3</sup>]

$\rho_i$  - densidade em  $i$  [Kg/m<sup>3</sup>]

$Z$ - altitude geométrica realista [Km]

$z_i$ - altitude geométrica em cada valor de  $i$  [Km]

$L_{zi}$ - taxa de lapso térmico [K/Km]

$T_{M_i}$ - temperatura molecular [K]

$b = 2/R_e$  [1]

$a_g$  -valor da aceleração [m/s<sup>2</sup>]

$R$ - constante universal dos gases perfeitos [J/Kg-mole-K]

$i$  - representa a camada atmosférica da posição atual do veículo ( $0 \leq i \leq 7$ ) [1].

No momento de reentrada, a componente das forças de arrasto e de sustentação é uma parte fulcral a ter em conta no dimensionamento de toda trajetória. Estas forças calculam-se da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{A}{m} \right) C_L \quad (1.22)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{A}{m} \right) C_D \quad (1.23)$$

Com:

$L$ - força de sustentação [N]

$D$ - força de arrasto [N]

$m$ - massa do veículo [Kg]

$A$ - área de referência [m<sup>2</sup>]

$V$ - velocidade do veículo [m/s]

$C_L$ - coeficiente de sustentação

$C_D$  - coeficiente de arrasto

Onde  $C_L$  e  $C_D$  se calculam recorrendo as seguintes expressões da teoria Newtoniana:

$$C_L = \left[ 2(1 - C_{D0}) - \left( 3 - \frac{5}{2} C_{D0} \right) \sin^2(\alpha) \right] \sin(\alpha) \quad (1.24)$$

$$C_D = C_{D0} + 12(1 - C_{D0}) \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 6(6 - 6C_{D0}) \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4(6 - 5C_{D0}) \sin^6 \frac{\alpha}{2} \quad (1.25)$$

$$C_{D0} = (2 - \varepsilon) \frac{(1 + \cos^2 \phi_1)}{2} \quad (1.26)$$

Onde:

$C_{D0}$  - coeficiente de arrasto parasita

$\alpha$  - ângulo de ataque [deg]

$\varepsilon$  - rácio entre a densidade a montante do choque com a densidade jusante do choque

$\phi_1$  - ângulo de cone do nariz do veiculo [deg]

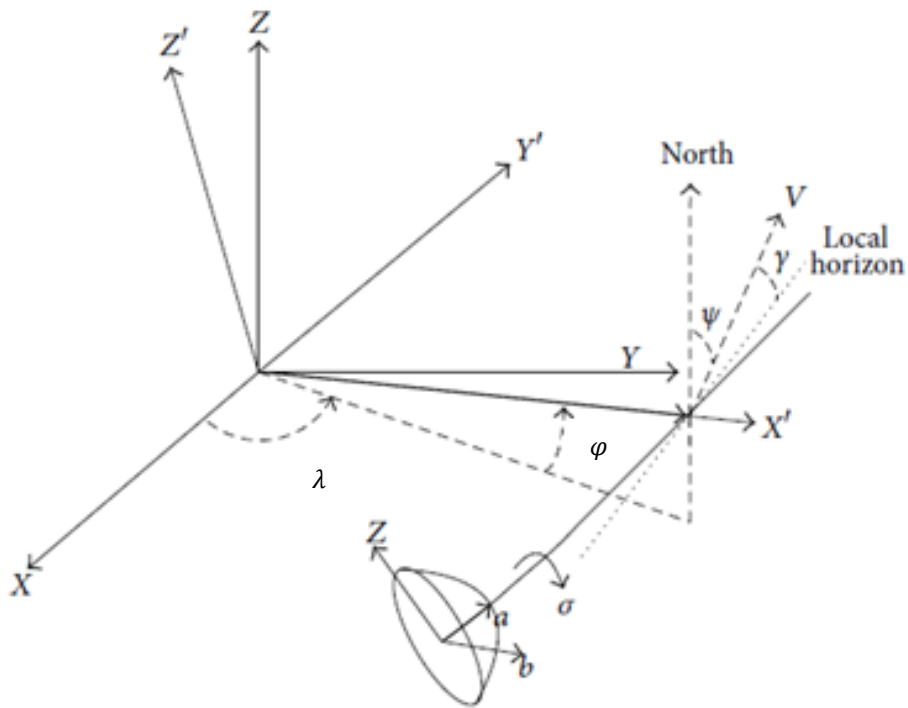


Figura 1.8 - Sistema de coordenadas durante a reentrada [11].

O modelo generalizado para a dinâmica rotativa da Terra, com três graus de liberdade é dado através das seguintes equações dinâmicas[17]:

$$\dot{r} = -\sin(\gamma) * V \quad (1.27)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\cos(\gamma) \cos(\Psi)}{R_d \cos(\varphi)} * V \quad (1.28)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\cos(\gamma) \sin(\Psi)}{R_d} * V \quad (1.29)$$

$$\dot{V} = -D + g \sin(\gamma) + \dot{V}_\omega \quad (1.30)$$

$$\dot{\gamma} = \left( g - \frac{V^2}{R_d} \right) * \frac{\cos(\gamma)}{V} - \frac{L \cos(\sigma)}{V} + \dot{\gamma}_\omega \quad (1.31)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{\cos(\gamma) \cos(\Psi) \tan(\varphi)}{R_d} * V + \frac{L \cos(\gamma) \sin(\sigma)}{V} + \dot{\Psi}_\omega \quad (1.32)$$

Com:

$R_d$ - distância desde o centro da Terra até ao veículo

$\varphi$ - latitude

$\lambda$ - longitude

$\phi_1$ - ângulo de cone do nariz do veiculo

$\gamma$  - ângulo do plano de voo

$\sigma$ - ângulo de pranchamento

$\Psi$ - ângulo de azimute do plano de voo

Por fim, os efeitos rotacionais da Terra na dinâmica do movimentos traduzem-se sob a seguinte forma:

$$\dot{\Psi}_\omega = -2\Omega_E (\tan(\gamma) \cos(\varphi) \sin(\Psi)) + \sin(\varphi) - \frac{\omega^2 R_d}{\cos(\gamma)} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \cos(\Psi) \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_\omega &= 2\Omega_E \cos(\varphi) \cos(\Psi) + \frac{\Omega_E^2 R_d}{V} \cos(\varphi) \cos(\gamma) \cos(\varphi) \\ &\quad - \frac{\Omega_E^2 R_d}{V} \cos(\varphi) \sin(\gamma) \sin(\varphi) \sin(\Psi) \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\dot{V}_\omega = -\Omega_E^2 R_d \cos(\varphi) \sin(\gamma) \cos(\varphi) - \Omega_E^2 R_d \cos(\varphi) \cos(\gamma) \sin(\varphi) \sin(\Psi) \quad (1.35)$$

Onde:

$\Omega_E$ - velocidade rotacional da Terra (rad/seg).

$\dot{\Psi}_\omega, \dot{\gamma}_\omega, \dot{V}_\omega$ - efeitos rotacionais da Terra

A escolha/cálculo do ângulo de trajetória ( $\gamma$ ) tem que ter por base o local onde se pretende que aterre o veículo, para que assim o valor do ângulo seja igual ou superior à inclinação do local de aterragem, de forma a suavizar a mesma [10].

Contudo, para este caso não teremos em conta os efeitos rotacionais da Terra, pois consideramos  $\Omega_E = 0$ . O sistema de equações gerais do movimento demonstrado anteriormente, trata-se de um sistema geral tendo como base a referência do veículo. Porém, para esta aplicação efetuou-se a transformação para a referência aerodinâmica. Esta

transformação deve-se a uma simples observação da atitude do veículo, pois, como o rumo ao longo de toda a trajetória se mantém constante, pode-se simplificar o sistema inicial. Desta forma obtemos um conjunto de equações que representam o modelo de voo longitudinal [18]:

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} \quad (1.36)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{m} (0.5\rho(h)Su^2(1 + \tan^2\alpha)(C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha)) - g \sin \theta - qw \quad (1.37)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m} (0.5\rho(h)Su^2(1 + \tan^2\alpha)(C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha)) + g \cos \theta + qu \quad (1.38)$$

$$\dot{q} = \frac{\rho(h)u^2(1+\tan^2\alpha)S\bar{c}C_m}{2I_y} \quad (1.39)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (1.40)$$

Considerando o cálculo auxiliar:

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (1.41)$$

Onde:

$u$  - velocidade longitudinal

$w$  - velocidade vertical

$q$  - taxa de arfagem

$S$  - superfície de referência

$\bar{c}$  - valor da corda média do veículo

$C_m$ - coeficiente do momento de arfagem

$I_y$ - momento de inércia em torno de  $y$

As equações 1.38, 1.39, 1.40, 1.41 permitem que seja possível determinar os controles subjacentes ao dimensionamento da trajetória, principalmente os ângulos de ataque e de trajetória, como funções do vetor de estado  $x = [u \ w \ q \ \theta]^T$  e da altitude  $h$  [18]. Isto permite, assim, que a aeronave siga uma trajetória correta, ou seja, que se encontre dentro dos limites anteriormente delimitados, sendo estes considerados como seguros para uma aproximação deste tipo.

### 1.4.2. Equações da atitude

A atitude de qualquer aeronave é descrita através dos ângulos de Euler, ou seja, através dos três ângulos seguintes:  $\theta$  (ângulo de arfagem),  $\phi$  (ângulo de rolamento) e  $\psi$  (ângulo de guinada) [19]. Permitindo obter assim mais facilmente o valor dos coeficientes aerodinâmicos inerentes ao cálculo da trajetória de um veículo. Os quais são expressos recorrendo às seguintes expressões:

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) * \tan \theta \quad (1.42)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi + r \sin \phi \quad (1.43)$$

$$\dot{\psi} = \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \quad (1.44)$$

Sendo:

$p$  - taxa de rolamento

$q$  - taxa de arfagem

$r$  - taxa de guinada

Contudo, para se poder obter a atitude da aeronave ao longo da trajetória, este método descrito em 1.43, 1.44 e 1.45 é limitado, pois existem algumas particularidades para certos ângulos de inclinação. Consequentemente, uma solução possível para este problema, será o de substituir os ângulos de Euler pelos quaterniões ( $q$ ), pois estes, como são variáveis matemáticas mais simples e estáveis permitem uma maior eficiência em termos de resultados [18].

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4) \quad (1.45)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(-\omega_3 q_1 + \omega_1 q_3 + \omega_2 q_4) \quad (1.46)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4) \quad (1.47)$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2}(-\omega_1 q_1 - \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) \quad (1.48)$$

As equações 1.46, 1.47, 1.48 e 1.49, tratam-se de equações da dinâmica da atitude de um veículo, que demonstram a dependência da velocidade angular com os torques aplicados [20]:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega} \times I\vec{\omega} \quad (1.49)$$

$I$ - matrix de inércia

$N$ - torque aerodinâmico

Na equação 1.49 o símbolo  $\times$ , representa o produto vetorial.

Através desta relação, podemos concluir que as equações da atitude de uma aeronave são expressas, recorrendo às seguintes equações:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{N_1 + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3}{I_1} \quad (1.50)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{N_2 + (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1}{I_2} \quad (1.51)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{N_3 + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2}{I_3} \quad (1.52)$$

$\dot{\omega}_1$ ,  $\dot{\omega}_2$ ,  $\dot{\omega}_3$  representam as velocidades angulares.

## 1.5. Objectivos da dissertação

Este trabalho tem como objetivo controlar a fase de reentrada atmosférica de um veículo, ou seja, permitir que o veículo transponha todas as camadas da atmosfera ao longo de uma trajetória previamente definida sem que os seus limites estruturais sejam ultrapassados.

Por forma a controlar o veículo, serão projetados dois controladores, um que se baseia num controlador integral (seguimento indireto) e o outro utilizando um controlo de seguimento direto do vetor de estado.

Desta forma permitindo comparar a performance de ambos os controladores e conseguir observar a influência de cada um dos métodos no comportamento de cada variável.

## 2. Métodos de controlo

### 2.1. Controlabilidade e observabilidade

O modelo geral de um sistema controlado de uma aeronave é:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

$$y = h(x, u) \quad (2.2)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  é o vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vector de controlo,  $y \in \mathbb{R}^r$  é o vector de observação.

O modelo descrito por 2.1 e 2.2, pode ser linearizado em torno do controlo e estado de equilíbrio do sistema, tomando a seguinte forma:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (2.3)$$

$$y = C\bar{x} + D\bar{u} \quad (2.4)$$

Sendo A, B, C e D matrizes jacobianas.

Após definir-se o sistema, é-nos permitido matematicamente verificar a controlabilidade e observabilidade do sistema.

“Um sistema é de estado controlável se se pode guiar o sistema para ir de um qualquer estado até atingir um outro estado dentro de um prazo finito.” [19]

#### **Caracterização de controlabilidade**

Matriz de controlabilidade de estado:

$$\Delta = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.5)$$

Desta forma, o sistema considera-se controlável se a característica da matriz de controlabilidade for igual a  $n$  (dimensão do espaço de estado):

$$\text{caract}(\Delta) = n \quad (2.6)$$

“Um sistema é observável se os valores do vetor de observação nos tempos  $t^*, t^* + \Delta t, \dots, t^* + n\Delta t$ , (com  $n \geq 1$ ,  $\Delta t$  sendo o passo de observação), permitem ter uma estimativa fiável do valor do vetor de estado nos tempo  $t^*$ .” [19]

### **Caracterização de observabilidade**

Matriz de observabilidade:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Do mesmo modo, como em 2.6, o sistema diz-se observável se a característica da matriz de observabilidade for igual a  $n$ :

$$\text{caract}(\Theta) = n \quad (2.8)$$

### **Teorema da dualidade de Kalman**

$(\Sigma)$  controlável  $\Leftrightarrow (\Sigma^*)$  é observável

$(\Sigma)$  observável  $\Leftrightarrow (\Sigma^*)$  é controlável

Isto corresponde a que, todo o sistema controlável no seu estado primal será observável no seu correspondente espaço dual, e que, qualquer sistema observável no estado primal é controlável no seu estado dual. O mesmo, mas para sentidos opostos, também se verifica [19].

## 2.2. Dimensionamento do controlador integral (seguimento indireto)

Neste subcapítulo, será descrito o modelo matemático correspondente a um sistema de controlo linear ótimo, ou seja, um método que considerando um sistema multivariável independente do tempo consiga satisfazer as especificações pretendidas [21].

Considerando-se o seguinte sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_r r(t) \quad (2.9)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.10)$$

Com,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \quad 0]$$

$$x(t) = [x_p^T(t), x_e^T(t)]^T \quad (2.11)$$

$$x_e^T(t) = \int_0^t [y(t) - r(t)] dt \quad (2.12)$$

Onde:

$r(t) \in R^n$  - referência da trajetória explícita

$x_p(t) \in R^{m_p}$  - vetor de estado

$x_e(t) \in R^n$  - estado integrador

0 - matriz de zeros com dimensões apropriadas a cada caso;

I - matriz identidade com as dimensões apropriadas a cada matriz.

Assumindo como condição inicial do estado  $t=0$  donde provem  $x(0) = x_0$ .

Como principal objetivo da aplicação dos método pretende-se calcular a matrix  $F = [F_1 \ F_2]$ , de modo a minimizar ao máximo o critério de desempenho escolhido. Para isso inicialmente consideramos a seguinte lei do controlo:

$$u(t) = -Fx(t) = -F_1 x_p(t) - F_2 x_e(t) \quad (2.13)$$

$u(t)$  será aplicado de modo a minimizar o seguinte critério de desempenho quadrático:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (2.14)$$

Onde  $Q$  (matriz de estado de espera) é uma matriz simétrica, positivamente semi-definida, e  $R$  (matriz de controlo de espera) é uma matriz positivamente definida.

Por forma a que exista um controlador que siga a lei de controlo acima descrita, têm que se verificar algumas condições, tais como: o par (A,B) tem que ser completamente controlável e o par (A,M) tem que ser completamente observável. Se estas condições forem satisfeitas, o ganho de F é dado através de:

$$F = R^{-1}B^T P \quad (2.15)$$

Onde  $P$  representa uma matriz simétrica positivamente definida. Sendo estas a única solução positiva da equação de Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (2.16)$$

Quando utilizamos 2.9, 2.10 e 2.11 e consideramos os resultados de 2.13 e 2.14, obtemos o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + B_r r(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.17)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.18)$$

Para esta aplicação as matrizes de espera são escolhidas de modo a enquadrar-se na seguinte estrutura:

$$R = I \quad (2.19)$$

$$Q = \text{diag}(g_1^2, g_2^2, \dots, g_m^2) \quad (2.20)$$

Com  $\{g_i\}$  sendo um número real.

Contudo, para este trabalho, o modelo implementado sofreu alterações em relação ao original referenciado. Desta forma, ao implementar computacionalmente o algoritmo foi utilizado como base o modelo LQR clássico [22], função pré existente no programa Matlab, sobre o qual foram implementadas modificações de modo a ajustar-se ao caso de estudo.

**Exemplo ilustrativo [21]**

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad (2.21)$$

$$y(t) = C_p x_p(t) \quad (2.22)$$

Onde:

$$A_p = \begin{bmatrix} -8.527 * 10^{-2} & -1.423 * 10^{-4} & -0.9994 & 4.142 * 10^{-2} & 0 & 0.1862 \\ -46.86 & -2.757 & 0.3896 & 0 & -124.3 & 128.6 \\ -0.4248 & -6.224 * 10^{-2} & -6.714 * 10^{-2} & 0 & -8.792 & 20.46 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Para a simulação, foi considerado o seguinte vetor de estado [21]:

$$x_p(t) = -[\beta(t), p(t), r(t), \phi(t), de(t), dr(t), el(t), ru(t)]^T \quad (2.26)$$

$\beta$ - ângulo de derrapagem

$p$ - taxa de rolamento

$r$ - taxa de guinada

$\phi$ - ângulo de rolamento

$de$ - deflexão do elevador

$dr$ - deflexão do rudder

$el$ - servo comando do elevador

$ru$ - servo comando do rudder

$r(t) = [\phi_c, \beta_c]^T$ , toma esta forma, ao contrário das restantes variáveis, onde  $\phi_c$  representa o comando referente ao ângulo de rolamento e  $\beta_c$  o comando do ângulo de derrapagem.

A particularidade deste algoritmo em relação ao modelo LQR clássico, diferencia-se na introdução de mais este input ao sistema ( $B_r r(t)$ ), como descrito em 2.9.

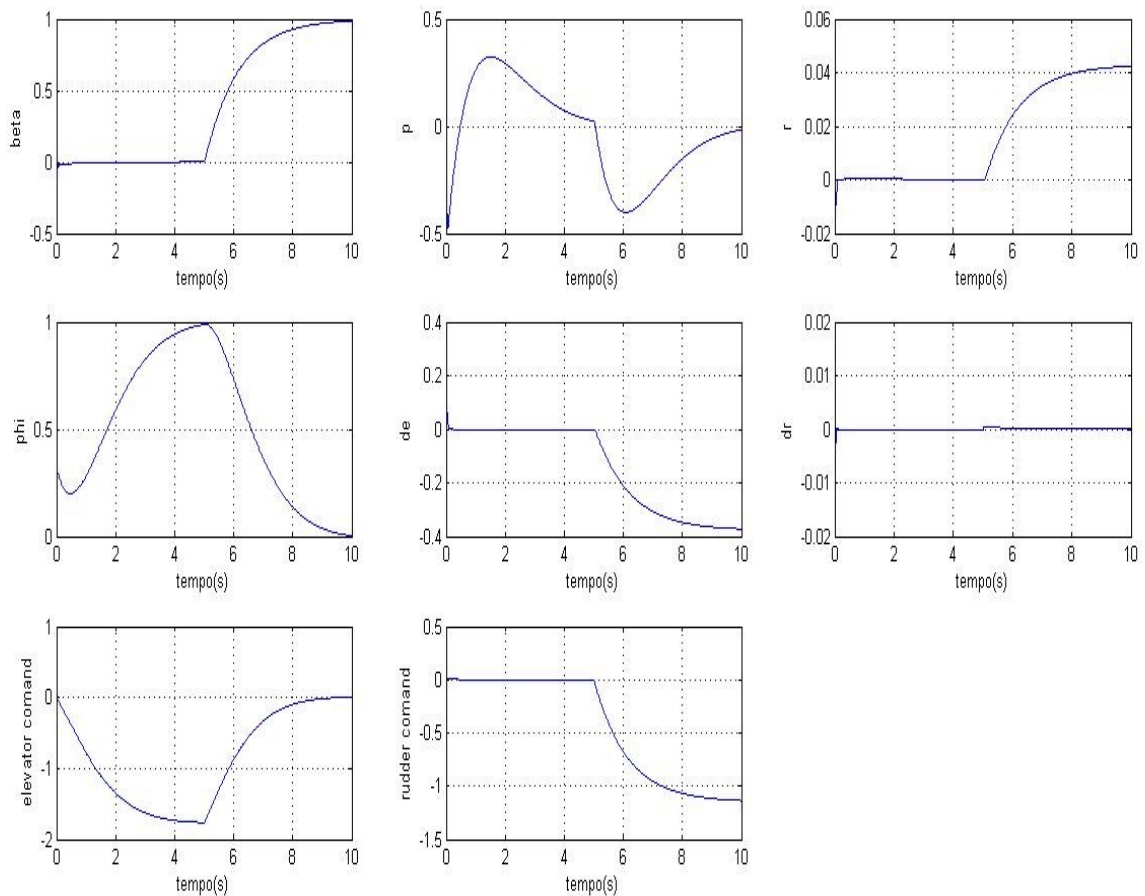
Neste exemplo em concreto, para além de todas as outras variáveis, fez-se variar o vetor  $r(t)$ ,  $[0,1]^T$  e  $[1,0]^T$ , por forma a permitir uma melhor visualização da atuação da implementação do modelo.

Para a simulação do algoritmo foi necessário recorrer ao método iterativo de Butcher [23].

Desta forma foi obtida seguinte matriz de ganho  $F$  [21]:

$$F = \begin{bmatrix} 2.0025 & -0.36386 & -0.43114 & -2.3539 & 1.3607 & -0.57350 & -6.4614 & 1.7067 \\ 1.47177 & 0.25438 & -0.58216 & 1.6123 & -0.57350 & 2.2278 & 4.3964 & 2.5083 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Bem como os seguintes gráficos:



**Figura 2.3 - Gráficos obtidos através da implementação do método LQR [21].**

Através dos gráficos apresentados na figura 2.3, pode-se concluir que o método converge para os valores previamente estabelecidos. Ou seja, o método converge de forma a estabilizar nos valores de input introduzidos.

### 2.3. Dimensionamento do controlador de seguimento direto

Este modelo matemático tem como principal objetivo, controlar um sistema linear para que este satisfaça as condições iniciais impostas. Este modelo tem por base os mesmos princípios que o modelo descrito no subcapítulo 2.2 [21], apenas diverge nos seguintes parâmetros: nas matrizes que são utilizadas como base ao modelo LQR clássico [22] e na criação do vetor de estado e de controlo. Tratando-se este de uma outra aproximação ao problema, tendo em conta que o “output” será comandado para rastrear assintoticamente uma trajetória definida [24].

Considerando o seguinte sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.29)$$

Considerando  $y_d$  como a constante representativa do valor do output de  $y(t)$  utilizada para o rastreamento assintótico. Assumindo que  $y_d \neq 0$ , sabemos que o valor de  $x(t)$  nunca poderá tomar o valor 0, desta forma tendo por base a lei de controlo temos noção que  $x$  e  $u$  convergem para um valor de estado estacionário como é o caso de  $t \rightarrow \infty$ . O que podemos escrever:

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (2.30)$$

$$u^* = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \quad (2.31)$$

Para um rastreamento assintótico,  $x^*$  e  $u^*$  tem que satisfazer a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (2.32)$$

Onde 0 representa uma matriz de zeros,  $I$  a matriz identidade e  $r$  sendo a referência da trajetória que se deve seguir.

O sistema representado por 2.24 e 2.25, só poderá ser resolvido se a matriz  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  for não singular, ou seja, esta matriz admite uma inversa e o seu determinante não é nulo. Assumindo que isto se verifica, podemos representar o sistema sob a seguinte forma:

$$x^* = M_x r \quad (2.33)$$

$$u^* = M_u r \quad (2.34)$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Com  $\Delta x = x - x^*$ ,  $\Delta u = u - u^*$ , e  $\Delta r = y - Cx^* = y - r$ , podemos escrever a seguinte equação diferencial para  $\Delta x$ :

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u \quad (2.36)$$

$$\Delta r = C\Delta x \quad (2.37)$$

Onde se consegue obter a seguinte lei de controlo, segundo o modelo LQR clássico [22]:

$$\Delta u = -K\Delta x \quad (2.38)$$

Através de 2.32 conseguimos obter a matriz K, resultante da aplicação do método. O passo seguinte trata-se da aplicação do algoritmo recorrendo ao método de Bucher [23], onde se aplica o sistema representado em 2.30 e 2.31. Este diverge do modelo LQR clássico apenas no passo através do qual se calcula o vetor de controlo  $u$  em 2.30 [24], enquanto que o modelo anterior acrescenta ( $B_r r(t)$ ) ao sistema. Então, tendo por base o trabalho citado, calcula-se  $u$ , da seguinte forma:

$$u = u^* - K(x - x^*) \quad (2.39)$$

### 3. Aplicações Numéricas

Este capítulo destina-se à simulação de cenários possíveis para uma reentrada atmosférica. Ou seja, tendo por base o modelo descrito em 2.2 e os valores definidos inicialmente, proceder-se-à a uma simulação computacional de modo a verificar a atuação dos métodos de controlo numa situação real.

#### 3.1. Simulação do controlador integral (seguimento indireto)

Este subcapítulo, destina-se ao comentário dos resultados obtidos através da implementação do algoritmo descrito em 2.2.

##### 3.1.1. Exemplo 1

O vetor de estado é definido através das seguintes variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \\ de \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Modelo e dados:

$$A_p = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A trajetória de referência é modelada da seguinte forma:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{inicial}) \quad (3.5)$$

Sendo,

$r_{final}$  - altitude referente à posição do veículo no final da trajetória

$h_{inicial}$  - altitude referente à posição inicial do veículo, limite superior da atmosfera

$t_{final}$  - instante no qual o veículo atinge  $r_{final}$

$\tau$  - fator que atua sobre as variáveis de controle

Para ser possível encontrar o valor exato de  $\tau$ , temos que considerar e desenvolver a seguinte condição:

$$e^{-\frac{t_{final}}{\tau^*}} * (-r_{final} + h_{inicial}) = 10^{-3} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_{final}}{\tau^*} + \log(h_{inicial} - r_{final}) = -3 \log 10 \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_{final}}{\tau^*} = 3 \log 10 + \log(h_{inicial} - r_{final}) \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \tau^* = \frac{t_{final}}{3 \log 10 + \log(h_{inicial} - r_{final})} \quad (3.9)$$

Por fim, considerando-se a expressão 3.9, pode-se calcular e substituir  $\tau$  na equação 3.5 por:

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (3.10)$$

$\eta$  - representa um valor real positivo

Condições iniciais:

$$x = \begin{bmatrix} 3750 \\ -150 \\ 120 * \pi / 180 \\ -2.5 * \pi / 180 \\ 6520 * 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Tendo por base 3.3, 3.4 e 3.5, como sendo as matrizes iniciais de base, para que se torne possível aplicar o método descrito em 2.2, é necessário redimensionar estas mesmas matrizes. Este ajustamento baseia-se numa expansão das matrizes  $A_p, B_p, C_p$ , ou seja, tendo por base o descrito em 2.11 e as matrizes iniciais, consegue-se redimensionar as matrizes de modo a permitir aplicar o método.

Antes de prosseguir na simulação do controlador, tem que se verificar a controlabilidade e a observabilidade do sistema (2.6 e 2.8), como descrito no subcapítulo 2.1.

Porém, ao serem verificadas ambas as condições, pode-se concluir que o sistema não é controlável nem observável. O que não permitiu prosseguir com a simulação.

Contudo, após ser verificado todo o algoritmo, conseguir-se encontrar o erro que não permitia que o sistema fosse controlável, devia-se ao fato da matriz  $C_p$ , utilizada no trabalho referenciado no subcapítulo 2.2 [21], não ter as dimensões corretas para esta aplicação. Pois, com a matriz descrita em 3.5, o sistema possuía um só input para o cálculo de duas variáveis, o que tornava o sistema impossível. Desta forma, ao redimensionar a matriz  $C_p$ , conseguiu-se obter um sistema que fosse observável e controlável, permitindo continuar com a simulação. Assim nova matriz  $C_p$ :

$$C_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.12)$$

## Resultados

Depois de o sistema possuir as condições necessárias de ser aplicado, foi possível obter os seguintes resultados:

A matriz de ganho do controlo (F)

$$F = [-2.7364 \ 2.3738 \ 2.9459 \ 6.2853 \ 5.4903 \ 3.1623] \quad (3.13)$$

E o seguinte vetor dos valores próprios

$$e = \begin{bmatrix} -1.5181 \\ -0.1101 \\ -0.0084 + 0.0081i \\ -0.0084 - 0.0081i \\ -0.0118 + 0.0034i \\ -0.0118 - 0.0034i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Após obtido F (3.7), podemos proceder à simulação de todo o algoritmo recorrendo ao método de Buchter [23] .

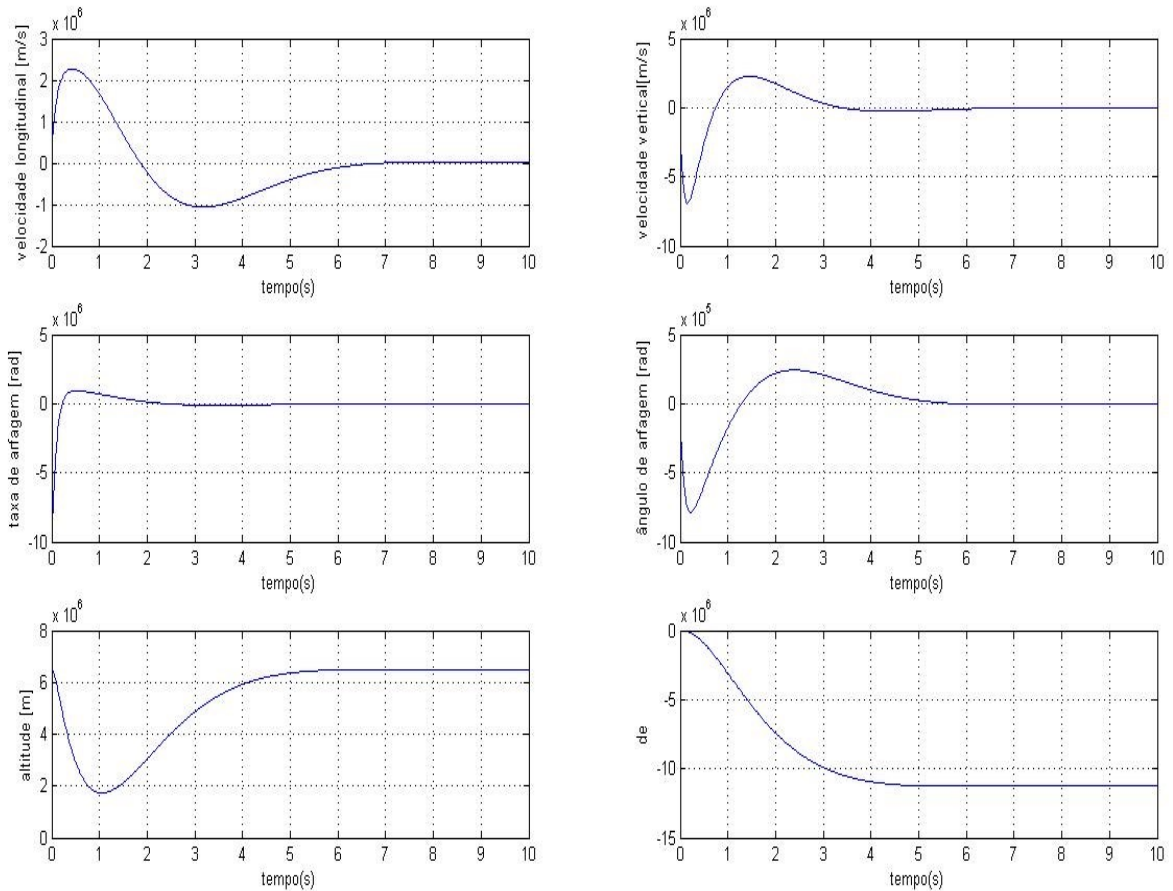


Figura 3.1 - Gráficos obtidos para a primeira simulação do controlador linear ótimo.

Ao olhar com atenção para a figura 3.1, podemos concluir que as variáveis  $u$ ,  $w$  e  $q$ , (referentes à velocidade longitudinal, velocidade vertical e taxa de arfagem), tomam valores um pouco instáveis, contudo coerentes com os dados iniciais, em média até aos seis segundos. Estabilizando em torno do valor zero após os seis segundos, o qual se deve ao fato do veículo atingir uma fase mais estável de voo, até ao momento que exista alguma alteração na sua trajetória.

Contudo, o ângulo de arfagem, tendo como referência os valores iniciais toma valores não muito coerentes nem expeáveis durante o primeiro segundo.

À semelhança do que se passa em  $\theta$ , no gráfico de  $h$ , o comportamento observado ao longo do intervalo de tempo considerado não é muito fidedigno, pois a variação desta componente entre os 0 e 4 segundos não é representativa de uma situação real. Visto que, ao 1 segundo a aeronave desce até aos 2000 Km, aproximadamente, tendo em conta que o raio

da Terra é igual a 6400 Km, nesse instante, o veículo desintegrava-se antes de atingir tal altitude.

Como, o resultado para a variação da altitude não coincide com a realidade teve-se que rever o método, e recorrer a algumas alterações. Uma das primeiras foi tentar alterar o peso de  $r(t)$  no sistema, descrito na equação 2.9, pela equação 3.5. Permitindo assim o sistema tivesse oscilações mais suaves, e principalmente para que o valor da altitude e do ângulo de arfagem respeitassem o intervalo de valores definidos.

A introdução desta modificação no algoritmo não se traduziu de forma esperada, ou seja, após a simulação não foi verificada qualquer alteração nos resultados. O que se pode observar nas figuras 3.2 e 3.3, que comparativamente com a figura 3.1, nada se alterou no que diz respeito ao comportamento das variáveis em estudo ao longo do tempo. Podendo concluir que esta alteração não teve qualquer peso no desempenho da simulação do algoritmo.

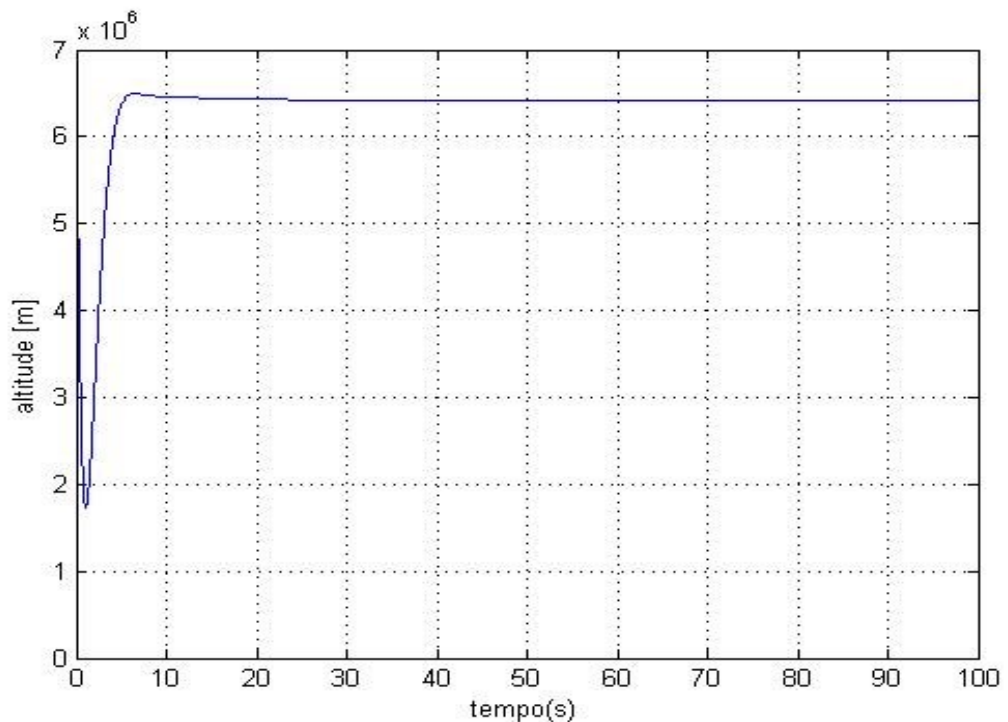


Figura 3.2 - Gráficos da altitude em função do tempo após a implementação de  $r(t)$  .

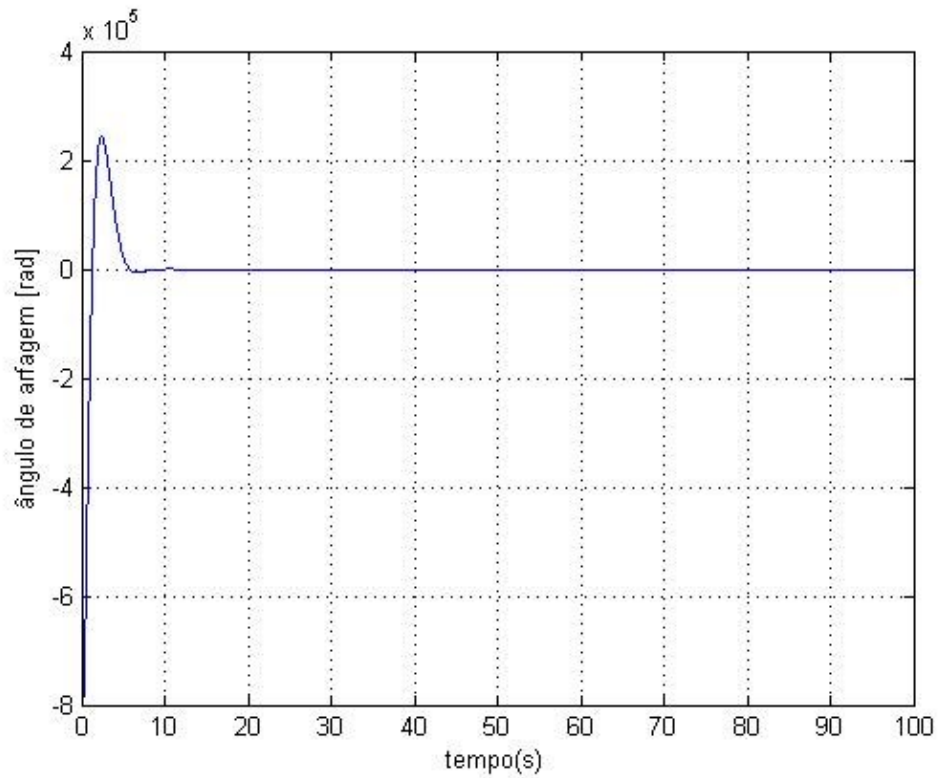


Figura 3.3 - Gráficos do ângulo de arfagem em função do tempo após a implementação de  $r(t)$ .

### 3.1.2. Exemplo 2

O vetor de estado é definido através das seguintes variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \\ de \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Modelo e dados:

$$A_p = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$C_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.18)$$

A trajetória de referência é modelada da seguinte forma:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{inicial}) \quad (3.19)$$

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (3.20)$$

Condições iniciais:

$$x = \begin{bmatrix} 5500 \\ -50 \\ 50 * \pi / 180 \\ -3 * \pi / 180 \\ 6520 * 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

## Resultados

Depois de o sistema possuir as condições necessárias de ser aplicado, foi possível obter os seguintes resultados:

A matriz de ganho do controle (F)

$$F = [-2.7364 \ 2.3738 \ 2.9459 \ 6.2853 \ 5.4903 \ 3.1623] \quad (3.22)$$

E o seguinte vetor dos valores próprios

$$e = \begin{bmatrix} -1.5181 \\ -0.1101 \\ -0.0084 + 0.0081i \\ -0.0084 - 0.0081i \\ -0.0118 + 0.0034i \\ -0.0118 - 0.0034i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Desta forma, obtiveram-se os resultados mostrados na figura 3.4.

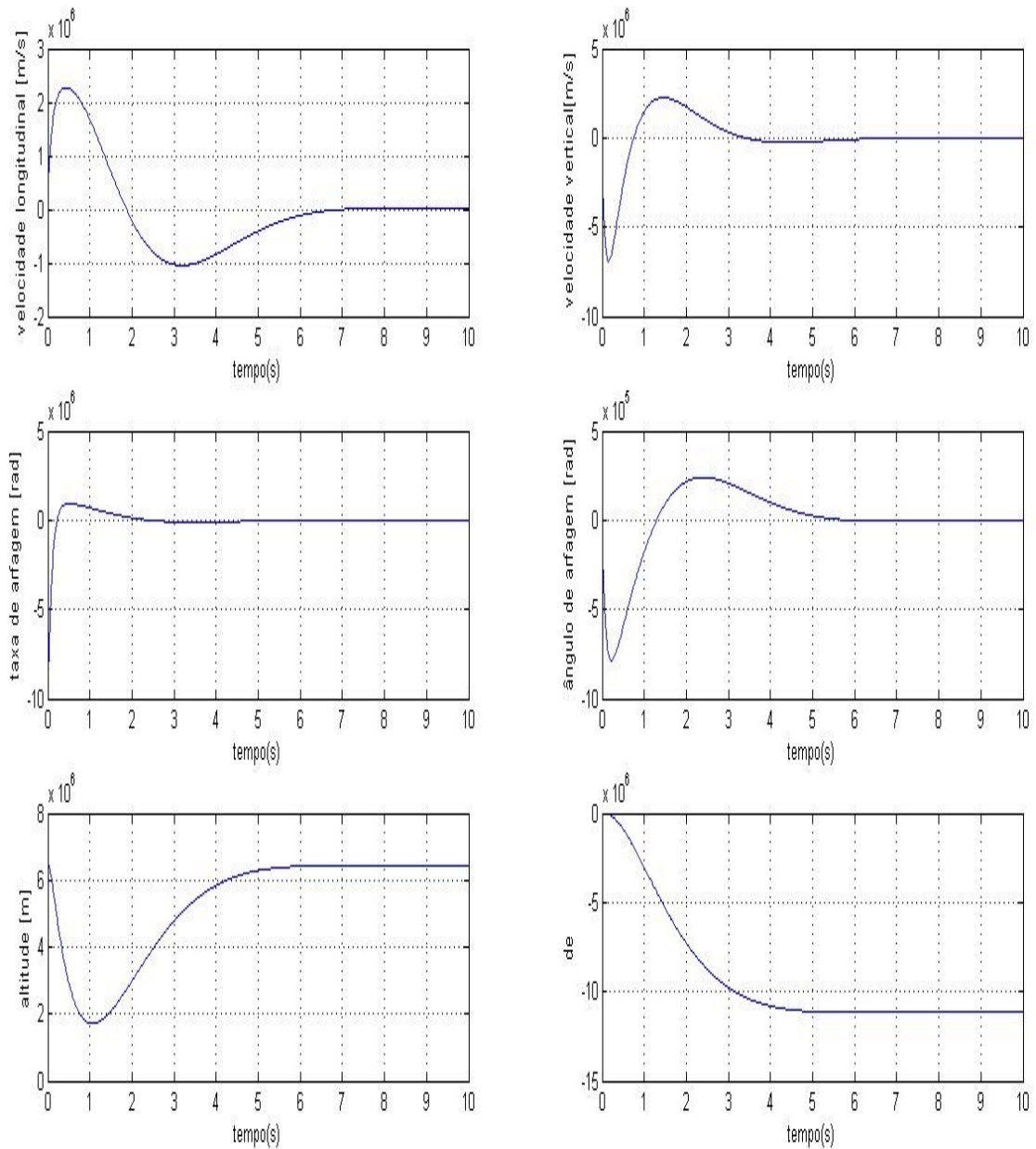


Figura 3.4 - Gráficos obtidos para a segunda simulação do controlador linear ótimo.

Ao comparar os gráficos da figura 3.4 e a matriz de ganho do controlador em 3.22, com os resultados obtidos na figura 3.1 e a matriz de ganho representada na matriz em 3.13, podemos concluir que as alterações foram mínimas ou quase inexistentes. O que permitiu concluir que os dados considerados inicialmente, se ambos se encontrarem dentro do mesmo nível de grandeza, não provocam alterações que sejam substanciais no comportamento do sistema. Do mesmo modo, a alteração feita em  $r(t)$ , para este controlador específico não inferiu qualquer alteração nos resultados.

### 3.2. Simulação do controlador de seguimento direto

Este subcapítulo, semelhante ao 3.1, destina-se ao comentário dos resultados obtidos através da implementação do algoritmo descrito em 2.3.

#### 3.2.1. Exemplo 1

O vetor de estado, neste caso, é definido pelas seguintes variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Modelo e dados:

$$A = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.27)$$

A trajetória de referência é modelada da seguinte forma:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{inicial}) \quad (3.28)$$

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (3.29)$$

O qual assume as seguintes condições iniciais:

$$x = \begin{bmatrix} 3750 \\ -150 \\ 120 * \pi/180 \\ -2.5 * \pi/180 \\ 6520 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

São consideradas as matrizes  $A$  ,  $B$  e  $C$  para a implementação do modelo LQR Clássico [22].

Em primeiro lugar, antes de aplicar o modelo, tem que se verificar a observabilidade e controlabilidade do sistema (2.6 e 2.8). Para este caso, não foi constatado qualquer contratempo, como as condições foram confirmadas pode-se prosseguir na simulação do algoritmo. Através do qual obteve-se a seguinte matriz de ganho  $K$ :

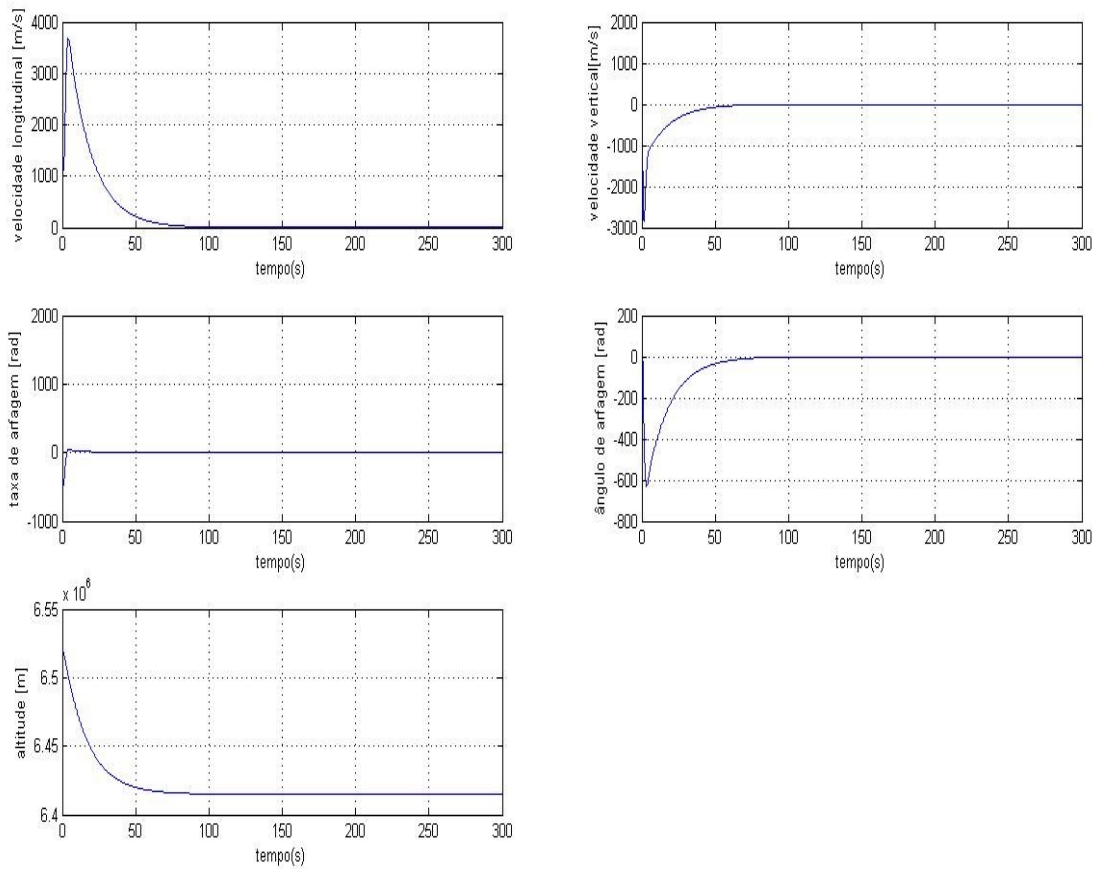
$$K = [-0.6773 \quad 0.6178 \quad 0.9253 \quad 2.5770 \quad 1.0000] \quad (3.31)$$

E o seguinte vetor de valores próprios:

$$e = \begin{bmatrix} -47.3750 \\ -11.2118 \\ -1.4711 \\ -0.9011 + 0.7568i \\ -0.9011 - 0.7568i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Após ter sido obtido  $K$ , podemos passar a implementação do algoritmo recorrendo ao método de Buchter [23].

Ao aplicarmos o algoritmo obteve-se:



**Figura 3.5 - Gráficos obtidos através da primeira simulação para o controlador para rastreamentos de variáveis.**

Ao observarmos o gráfico da figura 3.4, no que diz respeito à altitude, pode-se concluir que os valores vão de encontro ao esperado e que a utilização de  $r(t)$  foi benéfica, pois permitiu que para além dos valores se encontrarem dentro do intervalo estabelecido, a oscilação representativa da ação do controlador deu-se de forma menos abrupta, levando ao um menor esforço por parte deste para estabilizar a variável.

No que diz respeito aos restantes gráficos, à exceção do ângulo de arfagem, os valores de  $u$ ,  $w$  e  $q$  encontram-se dentro do intervalo esperado.

O intervalo de tempo necessário para a velocidade longitudinal e vertical estabilizarem é de aproximadamente 100 segundos, tendo em conta os 300 segundos necessários para uma simulação completa, não é muito, querendo isto dizer que a estabilização é feita de uma forma rápida. E como as curvas não são muito acentuadas, não é necessário muito esforço por parte do controlador. Enquanto a taxa de arfagem estabiliza logo após alguns segundos do início da reentrada.

Por outro lado, como já foi mencionado anteriormente, durante a discussão dos resultados na secção 3.1.2, os valores para o ângulo de arfagem não são muito coerentes.

Pode-se verificar que ao simular diversas vezes, consequentemente alterando os valores, a solução ao problema estaria na otimização de  $r(t)$ (3.17). Como as variáveis consideradas na implementação da expressão 3.17 tomavam na sua maioria, valores constante à exceção de  $\tau$ , modificar o valor dessa variável será o próximo passo no qual se centrará as atenções para a resolução do erro.

No caso da simulação referente à figura 3.4, o fator  $\tau$ , não infligiu grandes perturbações nos resultados, contudo o que se pretende com esta ação é o contrário. Desse modo, se o fator for multiplicado por um número real positivo ( $\eta$ ), o seu peso é amplificado, consequentemente exercerá uma maior influência sobre os resultados do sistema. Ao considerar  $t_{final} = 900 s$  e  $\eta = 9$ , obteve-se

$$\tau = 438.5616 \quad (3.33)$$

Considerou-se o tempo final da trajetória igual a 900 segundos (15min), porque trata-se do tempo que leva desde que o veículo entra na atmosfera até que este aterra na superfície da Terra. E o valor de  $\eta$  foi escolhido de forma aleatória.

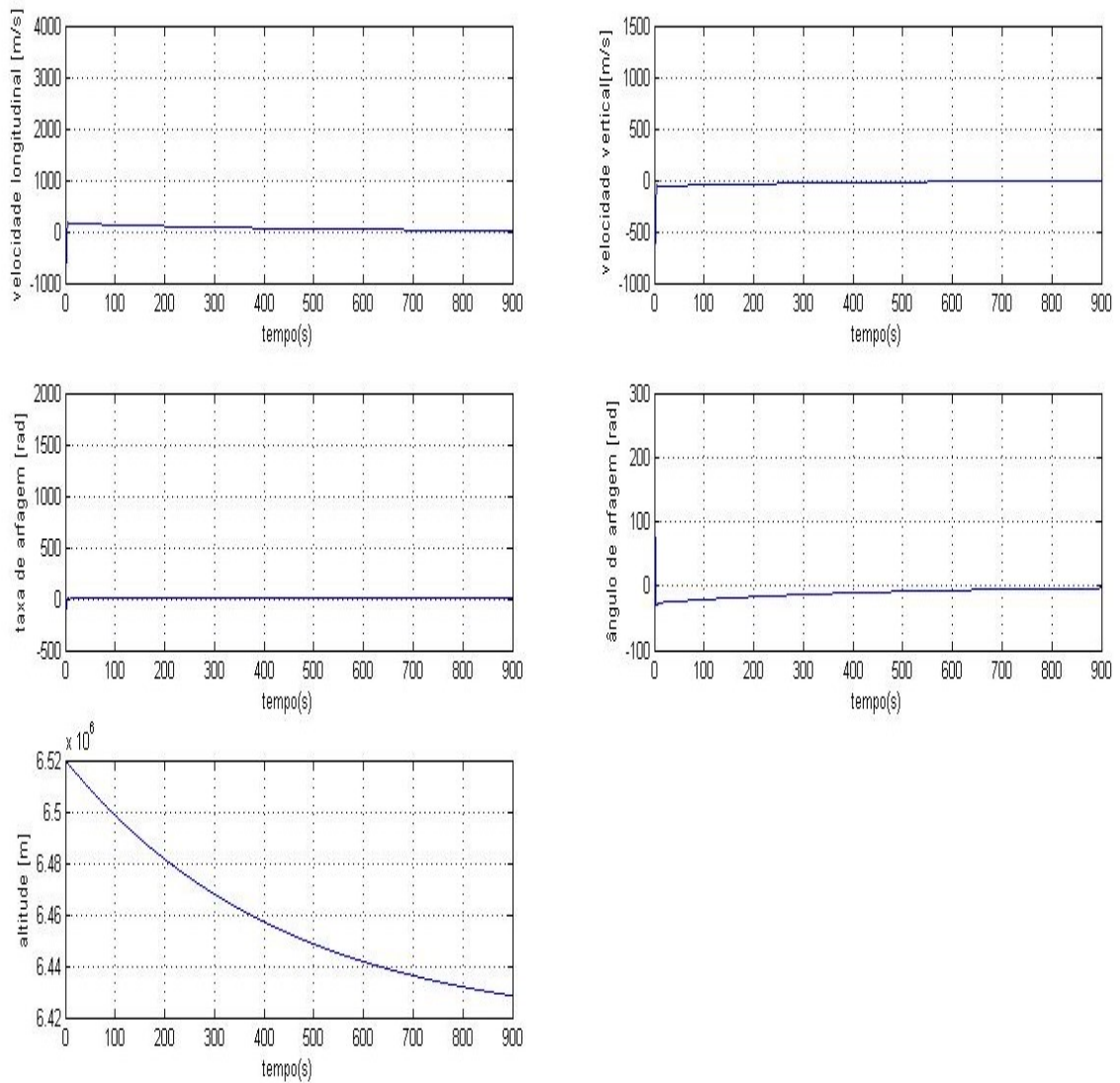


Figura 3.6 - Gráficos obtidos após a substituição de  $t_{final}=900$  s e  $n=9$ .

Confrontando os gráficos da figura 3.4 e da figura 3.5, para além de constatar alterações em todas as variáveis, o que chama mais a atenção e que nesta simulação o ângulo de arfagem toma valores distintos de todas as outras realizadas anteriormente. O que significa, que ao alterar-se o valor de  $\tau$  consegue-se afetar diretamente o valor de  $\theta$ .

Num caso real, esta atuação de  $\tau$  sobre o sistema, representa um fator preponderante na atuação do próprio controlador, por outras palavras, ao alterar-se o valor tomado por este fator é possível controlar amplitude da variação verificada por cada uma das variáveis ao longo de toda a reentrada. Quanto maior for o valor assumido por  $\tau$ , menor sera o esforço que

o controlador terá que realizar para estabilizar o sistema, fazendo com que a trajetória seja descrita de uma forma mais suave e que as forças exercidas no veículo sejam menores.

O que pode ser comprovado através dos gráficos mostrados abaixo.

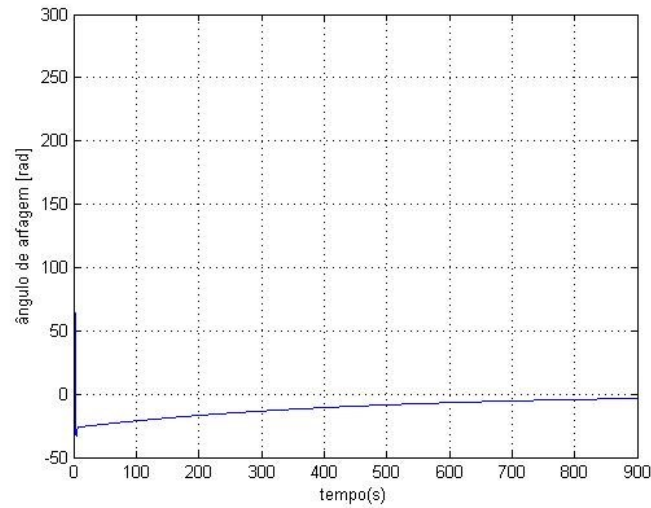


Figura 3.7 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando  $t_{final} = 900s$  e  $n=9$ .

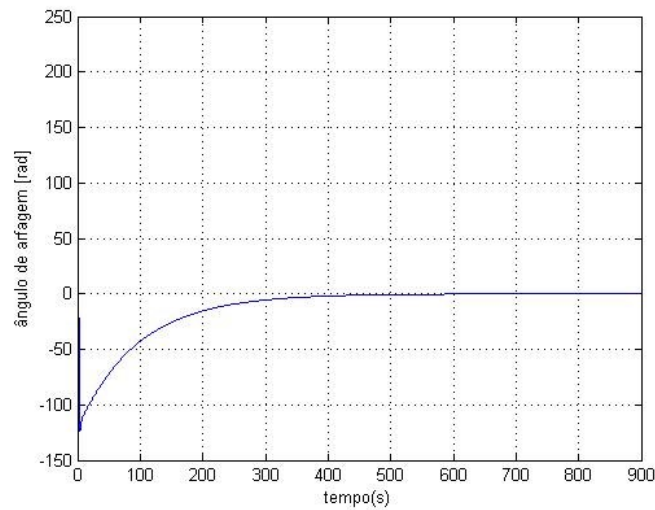


Figura 3.8 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando  $t_{final} = 900s$  e  $n=2$ .

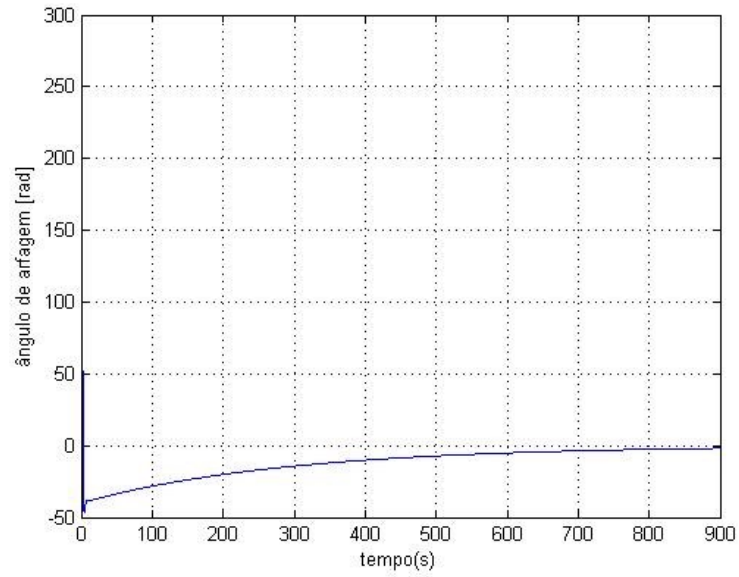


Figura 3.9 - Gráfico obtido para o ângulo de arfagem considerando  $t_{final} = 900s$  e  $n=6$ .

### 3.2.2. Exemplo 2

O vetor de estado, neste caso, é definido pelas seguintes variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Modelo e dados:

$$A = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (3.37)$$

A trajetória de referência é modelada da seguinte forma:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{inicial}) \quad (3.38)$$

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (3.39)$$

O qual assume as seguintes condições iniciais:

$$x = \begin{bmatrix} 5500 \\ -50 \\ 50 * \pi/180 \\ -3 * \pi/180 \\ 6520 * 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Desta forma, os resultados obtidos foram os seguintes:

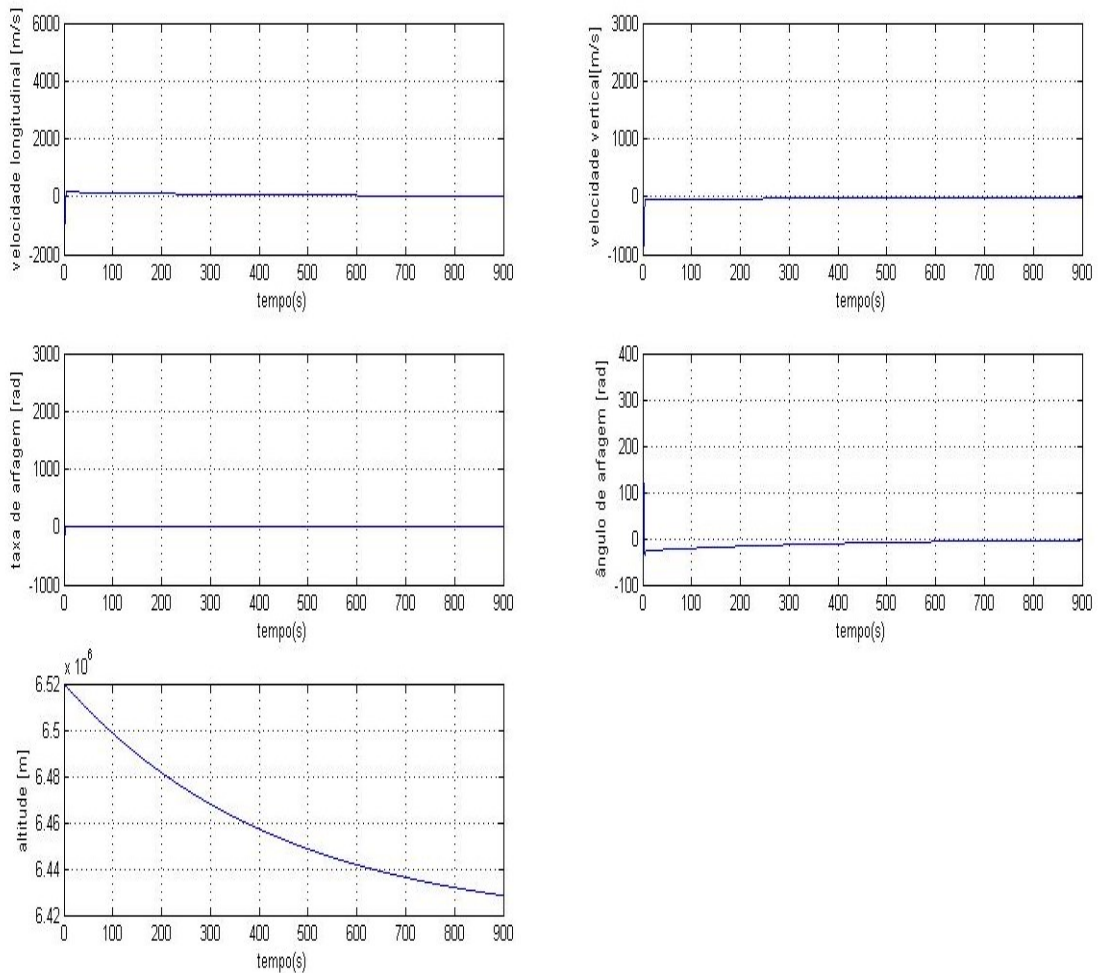


Figura 3.10 - Gráficos obtidos para o segundo caso (3.2.2) considerando  $t_{final} = 900s$  e  $n=9$ .

Ao comparar as figuras 3.6 e 3.10, podemos concluir que as alterações verificadas nos resultados, após se alterar os valores iniciais das variáveis, foram inexistentes.

## 4. Conclusões

A reentrada atmosférica é um tema muito delicado e complexo, pois leva-nos a pensar de uma forma completamente diferente do que estamos habituados para o controlo de uma aeronave. Porque trata-se de uma fase crítica e difícil de ser descrita, quer física quer matematicamente, visto que esta fase engloba um elevado número de parâmetros muito específicos e complexos. Por conseguinte, a revisão bibliográfica e a explicação de cada passo, torna-se tão extensa e morosa.

A partir do momento em que se percebe todo o processo por detrás do momento de reentrada, pode-se prosseguir para a parte objetiva do trabalho, ou seja, controlar a atitude do veículo ao longo de toda uma trajetória previamente definida. Para isso foram projetados dois controladores, um que se baseia num controlo integral (seguimento indireto) e outro utilizando um controlo de seguimento direto.

O primeiro método, controlador de seguimento indireto, baseia-se no modelo LQR Clássico, porém as matrizes de dados não serão as matrizes utilizadas na aplicação do método propriamente dito. Ou seja, numa primeira abordagem, estas serão ampliadas para permitir obedecer aos requisitos do sistema. Após esta amplificação, pode-se proceder a aplicação do modelo LQR Clássico.

Por outro lado, o segundo método (controlador de seguimento direto), baseia-se na aplicação direta das matrizes de dados através do modelo LQR Clássico. Ambos os métodos possuem alterações no sistema linear base, inerente à aplicação do método em si.

Durante a realização deste trabalho, observou-se que nem todos os métodos de controlo são aplicáveis a situações extremas, uma vez que ao aplicar-se o primeiro método, foi possível observar que para esta situação, de reentrada atmosférica, o método não é capaz de controlar todas as variáveis de controlo, ou seja não permite que a trajetória seja cumprida.

Contudo, através da aplicação do segundo método, conseguiu-se um feedback positivo, pois o controlador foi capaz de controlar as variáveis referentes à atitude do veículo de forma correta. Ou seja, a aeronave é capaz de descrever a trajetória previamente definida sem que os limites desta sejam ultrapassados.

De um ponto de vista geral, a apreciação do trabalho foi bastante positiva, embora durante a sua realização foram encontrados alguns problemas inerentes aos métodos aplicados, os objetivos foram atingidos.

Neste trabalho foi somente estudada e analisada a fase de reentrada atmosférica, e a sua controlabilidade, porém não foi englobado a parte de aterragem do veículo, o que seria interessante de analisar em trabalhos futuros. Tendo como base o trabalho desenvolvido ao longo da dissertação, seria interessante aplicar este método de controlo a uma trajetória baseada numa reentrada real, visto que este teoricamente o consegue. E posteriormente comparar resultados, podendo assim salientar as diferenças observadas, e permitir que o modelo possa vir a ser implementado.

Outra possível abordagem futura ao trabalho poderia consistir em estudar o peso das matrizes  $Q$  e  $R$  no modelo LQR Clássico e assim, sem recorrer a otimizações e manipulações, conseguir uma melhor atuação do controlador, alterando somente os dados considerados inicialmente.

## Bibliografia

- [1] Regan, F.J. and Anandkrishnan, S.M., *Dynamics of Atmospheric Re-Entry*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1993 (capítulos 1 e 2).
- [2] Hankey, W.L., *Re-Entry Aerodynamics*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1988 (capítulos 1 e 2).
- [3] Guedes, U.T.V, Souza,M.L.O. and Kuga, H.K, *A conquista do espaço do Sputnik à missão centenária*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007 (capitulo 8).
- [4] Anderson, J.D., *Introduction to Flight*, McGraw-Hill, Avenue of the Americas, New York, International Edition 2008 (capítulo 8)
- [5] Naidu, D.S., “Aeroassisted Orbital Transfer”, *Lecture Notes in Control and Information Science*, VOL. 188, 1994, pp.10-29.
- [6] [www.faa.gov](http://www.faa.gov), *Returning from space: Re-entry* (consultada em Novembro de 2013)
- [7] Adams, J.C.Jr., *Atmospheric Re-Entry*, Arnold Engineering Development Center, June 2003.
- [8] Platus, D.H, “Ballistic Re-Entry Vehicle Flight Dynamics”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol 5, no 1, 1981,pp.4-16.
- [9] Zerar, M., azaurang, F. and Zolghadri, A., “LPV Modling of atmospheric Re-entry Demonstrator for Guidance Re-Entry Problem”, *44th IEEE Conferenc on Decision and Control, and the European Control Conference*, Spain, 2005.
- [10] Chung, T.J. and Lee, N.Y., “Trajectory Simulation of the Small Atmospheric Re-Entry Module”, *SICE-ICASE International Joint Conference*, Korea, 2006.
- [11] Bharadwaj, S., Rao, A.V., Mease, K.D., “Entry Trajectory Tracking Law via Feedback Linearization”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol 21, no 5, 1998, pp. 726-732.
- [12] Abbasi, D., Mortazavi, M., “A New Concept for Atmospheric Reentry Optimal Guidance: An Inverse Problem Inspired Approach”, *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engeneering*, vol.2013, <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/419409/> (visitado em Março de 2013).

- [13] Naghash, A., Esmaelzadeh, R., Mortazavi, M., Jamilnia, R., “Near optimal guidance law for descent to a point using inverse problem approach”, *Aerospace Science and Technology*, no 12, 2008, pp. 241-247.
- [14] Cai, W., Yang, L., Zhu, Y., Zhang, Y., “Closed-form analytical solution based on feasible trajectory generation for hypersonic re-entry guidance” <http://www.dycoss.com/program/final/IAA-AAS-DyCoSS2-14-12-05.pdf> (visitada em Março de 2013)
- [15] Bronw, C.D., *Spacecraft Mission Design*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1992 (capítulos 2).
- [16] Larson, W.J., Wertz, J.R., *Space Mission Analysis and Design*, Space Technology Library, Microcosm Press, California, 1999 (capítulos 6).
- [17] Kipp, D.M., Dec, J.A., Wells, G.W., Braun, R.D., “Development of a Planetary Entry Systems Synthesis Tool for Conceptual Design and Analysis”, [https://solarsystem.nasa.gov/docs/26\\_kipp.pdf](https://solarsystem.nasa.gov/docs/26_kipp.pdf) (consultada em Outubro de 2014)
- [18] Gonçalves, M., *Controlo de altitude na Fase de Reentrada Atmosférica*, Graduate thesis, Department of Aerospace Sciences, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2010.
- [19] Bousson, K., Apontamentos da disciplina de Dinâmica e Controlo de Voo, 2012 (capítulo 1 e 5).
- [20] Saldia, J.P., Cimino, A., Schulz, W., Elaskar, S., Costa, A., “Atmospheric Reentry Dynamics of Conic Objects”, *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, vol 2009, <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2009/859678/> (visitado em Junho de 2014).
- [21] Frangos, C., Yavin, Y., “Design Methodology for Linear Optimal Control Systems”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol 15, no 5, 1991, pp.1302-1304.
- [22] Levine, W.S., *The control Handbook*, IEEE Press, CRC Press LLC, Florida, 1996 (capítulos 39).
- [23] Sekar, S., “Analysis of Linear and Nonlinear Stiff Problems Using the RK-Butcher Algorithm”, *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, vol 2006, pp.1-15.

[24] “Chapter 5: Control Design for Set Point Tracking”  
<http://www.control.utoronto.ca/people/profs/kwong/ece410/2008/notes/chap5.pdf>  
(consultada em Outubro de 2014)



## **Anexos - Artigo**

# **Optimal control of explicit trajectories of atmosphere re-entry**

Leonor Domingues dos Afeitos

*Artigo realizado no âmbito do trabalho da Dissertação do curso de Mestrado Integrado em Engenharia Aeronáutica*

**Covilhã e UBI, Outubro de 2014**



# Optimal control of explicit trajectories of atmosphere re-entry

Leonor Domigues dos Afeitos

University of Beira Interior, Covilhã

The atmospheric re-entry is classified as the most critical phase of the vehicle journey during an aerospace mission [1]. This phase involves a high risk, threatening the structural integrity of the vehicle as well as the crew safety [2]. For this phase to be well succeeded, it is necessary to control the vehicle attitude during the entire trajectory. For this it was applied two control methods, one based on an integral controller (direct tracking) and other using a direct tracking control of the state vector.

Keywords: Atmospheric re-entry, Trajectory, Vehicle attitude, Controllers.

## 1. Introduction

A space mission aims to send a vehicle for space and permits it can come back safely. In order to do this, it is necessary to conceive an algorithm capable of englobing all the necessary parameters [2].

In the first place it is crucial to know that the re-entry phase is divided in two main parts: before and after 120 Km. Such delimitation represents the moment when the space vehicle enters the atmosphere. During this transitional phase, the structure experiences the results of the interactions with the atmosphere, such as, the heating, the drag influence, the instability related with the high speed, the G forces, and other [3] [4].

If this kind of forces isn't controlled, they can destabilize the trajectory of the

vehicle. To antagonize this action, was limited a range where the mission can be completed without any problems, called entry corridor.

The corridor has an upper limit, overshoot boundary, and a under limit, undershot boundary, that were projected taking into account the limits established in the literature [5].

According to this line of thought, was projected two control methods (an integral controller and direct tracking control of the state vector), from which it is possible to apply a system capable of controlling the variables previously defined by the user [6] [7].

## 2. Simulations methods

### 2.1. Dimensioning indirect tracking [6]

Consider the augmented system:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_r r(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

Where:

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \quad 0]$$

$$x(t) = [x_p^T(t), x_e^T(t)]^T; x_e^T(t) = \int_0^t [y(t) - r(t)] dt$$

$x(t) \in R^m$  represents the system state,  $y(t) \in R^n$  is the system controlled output,  $u(t) \in R^q$  is the control input,  $r(t) \in R^n$  is the reference input,  $x_p(t) \in R^{m_p}$  is the plant state,  $x_e(t) \in R^n$  is the integrater state.

The main point in this paper is to calculate the  $F$  matrix to minimize the performance of the method. The matrix is obtained through the following control law:

$$u(t) = -Fx(t) = -F_1 x_p(t) - F_2 x_e(t) \quad (3)$$

$u(t)$  will be applied to minimize the quadratic performance criteria:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (4)$$

$Q$  represents the state weighting matrix and  $R$  is the control weighting matrix.

The gain  $F$  is given by:

$$F = R^{-1} B^T P \quad (5)$$

Where  $P$  represents the only positive solution of the algebraic Riccati equation [8]:

$$A^T P + PA + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (6)$$

Taking into account equations 1-3 and the results from 5 and 6, it can be described the system as:

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + B_r r(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8)$$

In this paper the weighting matrix are given by:

$$R = I \quad (9)$$

$$Q = \text{diag}(g_1^2, g_2^2, \dots, g_m^2) \quad (10)$$

### 2.2. Dimensioning direct tracking [7]

Consider the linear system:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (11)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (12)$$

Considering  $y_d$  like a constant which represents the output value of  $y(t)$  to track asymptotically. When we assume  $y_d \neq 0$ , it is known that the value of  $x(t)$  cannot be 0, so based in control law  $x$  e  $u$  converge to a steady state value. What we can describe as:

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (13)$$

$$u^* = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \quad (14)$$

For an asymptotic tracking,  $x^*$  and  $u^*$  have to satisfy the following equation:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (15)$$

Where 0 is the zeros matrix,  $I$  the identity matrix and  $r$  represents the reference trajectory.

If  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  is non-singular, it can be written the system as:

$$x^* = M_x r \quad (16)$$

$$u^* = M_u r \quad (17)$$

Where:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (18)$$

With  $\Delta x = x - x^*$ ,  $\Delta u = u - u^*$ , and

$\Delta r = y - y^*$ ,  $Cx^* = y - r$ , can be written:

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \quad (19)$$

$$\Delta r = C\Delta x \quad (20)$$

And the control law:

$$\Delta u = -K\Delta x \quad (21)$$

However, the control vector in equation 14, is determined by the following expression:

$$u = u^* - K(x - x^*) \quad (22)$$

### 3. Simulations

Considering the state vector:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \\ de \end{bmatrix} \quad (23)$$

The model and data:

$$A_p = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$C_p = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (26)$$

The reference trajectory is model by the following equation:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{initial}) \quad (27)$$

Where:

$$e^{-\frac{t_{final}}{\tau^*}} * (-r_{final} + h_{initial}) = 10^{-3} \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \tau^* = \frac{t_{final}}{3 \log_{10} + \log(h_{initial} - r_{final})} \quad (29)$$

Finally  $\tau$  is given by:

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (30)$$

$\eta$  represents a positive real number.

Considering the initial conditions:

$$x = \begin{bmatrix} 3750 \\ -150 \\ 120 * \pi / 180 \\ -2.5 * \pi / 180 \\ 6520 * 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

The results obtained with these conditions are shown below:

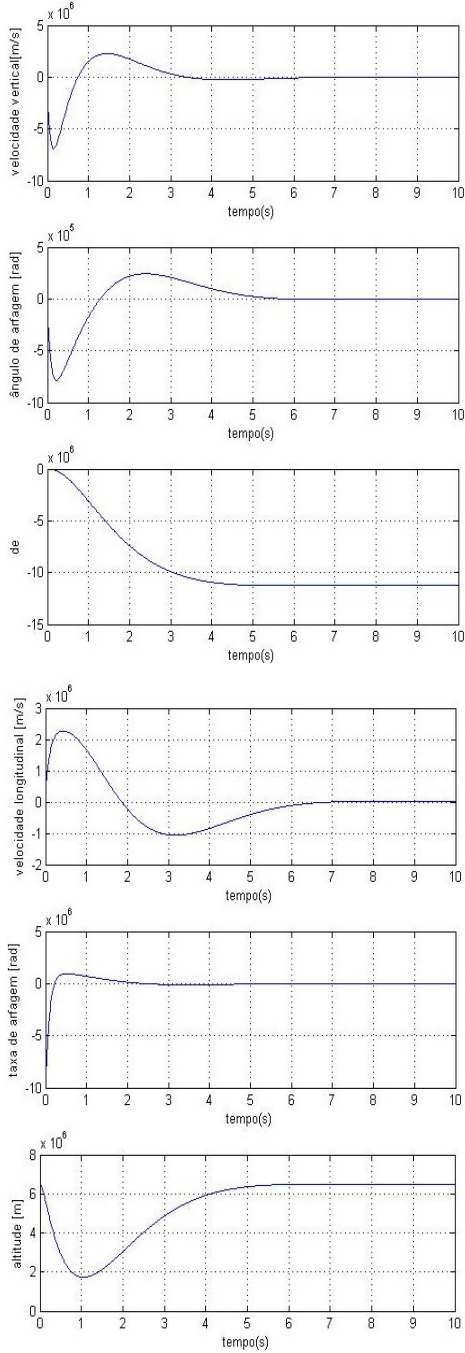


Figure 1 - graphics obtained for the behaviour of control variables presents at (26).

According to figure 1, it can be concluded that the control method didn't work very well in this case of study, because the controller couldn't control all the variables, such as the altitude and the pitch angle, even after we have applied the 11 and 13 equations. These two variables take unexpected and unrealistic

values for their possible behaviour along the trajectory according to figure 1. Consequently it is necessary apply the second method.

For the application of the second method it was considered:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} \quad (32)$$

The model and data:

$$A = \begin{bmatrix} -1.4712 & 0.3552 & -1.9276 & -9.6218 & 0 \\ -0.8260 & -1.8717 & 9.8125 & -1.8951 & 0 \\ 0.7020 & -3.5735 & -11.3920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.7436 \\ 3.7855 \\ 47.9170 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (35)$$

The reference trajectory is model by the following equation:

$$r(t) = r_{final} - e^{-\frac{t_{final}}{\tau}} * (r_{final} - h_{inicial}) \quad (36)$$

Where:

$$\Leftrightarrow \tau^* = \frac{t_{final}}{3 \log 10 + \log(h_{inicial} - r_{final})} \quad (37)$$

Finally  $\tau$  is given by:

$$\tau = \eta * \tau^* \quad (38)$$

$\eta$  represents a positive real number.

Considering the initial conditions:

$$x = \begin{bmatrix} 3750 \\ -150 \\ 120 * \pi / 180 \\ -2.5 * \pi / 180 \\ 6520 * 10^3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

The results are shown below:

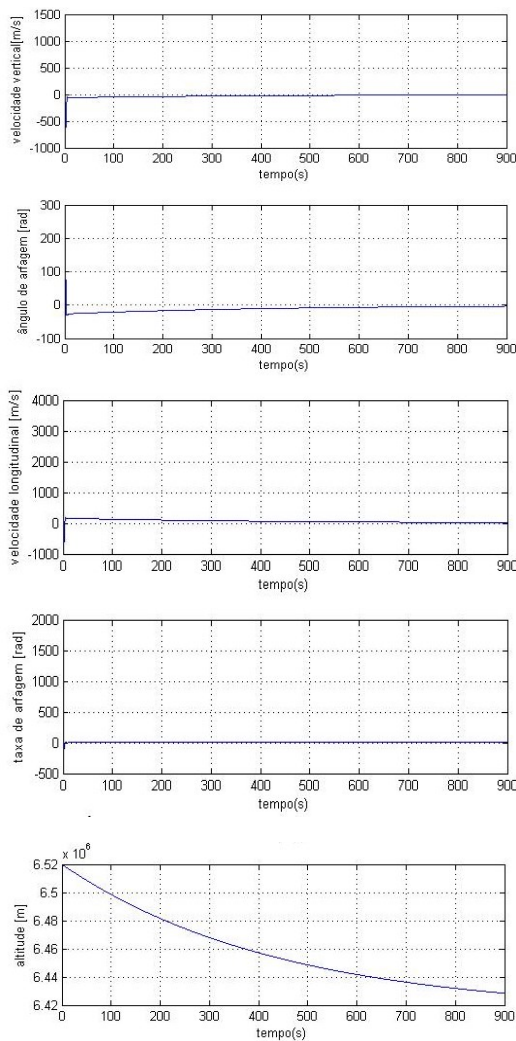


Figure 1- Graphics obtained for the behaviour of control variables presents at (30) with  $t = 900s$  e  $n = 9$ .

Through analysis of the results, it can be said that, for this case, the control method worked pretty well and it is capable of controlling all the variables during the re-entry trajectory without problems.

#### 4. Conclusions

With this work it was intended to control the variables integrated in state vector along all the re-entry phase. However, some problems have appeared and it was necessary to apply some alterations in order to achieve the final results as shown in figure 2.

In the reference work consulted at 2.2, authors didn't mention equation 26, which is the major modification that was implemented to make the algorithm work. The constant  $n$ , in equation 26, is a factor of amplification, so it is concluded that the greater the value of  $n$ , the larger the final value of  $\tau$ .

The value assumed for  $\tau$  is related to the controller action, because a larger value of  $\tau$  comes from a softer action by the controller.

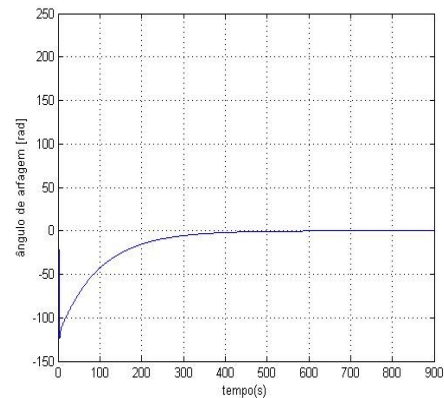


Figure 3- Graphic obtained for the behaviour of pitch angle with  $t = 900s$  e  $n = 2$ .

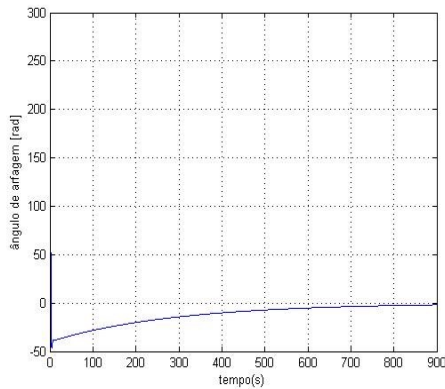


Figure 4- Graphic obtained for the behaviour of pitch angle with  $t = 900s$  e  $n=6$ .

## 5. References

[1] Gonçalves, M., *Controlo de altitude na Fase de Reentrada Atmosférica*, Graduate thesis, Department of Aerospace Sciences, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal, 2010.

[2] Regan, F.J. and Anandakrishnan, S.M., *Dynamics of Atmospheric Re-Entry*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1993 (chapter 1 and 2).

[3] Hankey, W.L., *Re-Entry Aerodynamics*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1988 (chapter 1 and 2).

[4] Naidu, D.S. (PhD), "Aeroassisted Orbital Transfer", *Lecture Notes in Control and Information Science*, vol 188, 1994, pp.10-29.

[5] Anderson, J.D., *Introduction to Flight*, McGraw-Hill, Avenue of the Americas, New York, International Edition 2008 (chapter 8).

[6] Frangos, C., Yavin, Y., "Design Methodology for Linear Optimal Control Systems", *Journal of Guidance*, vol. 15, no. 5, 1991, pp.1302-1304.

[7] "Chapter 5: Control Design for Set Point Tracking"  
<http://www.control.utoronto.ca/people/profs/kwong/ece410/2008/notes/chap5.pdf>  
 (visited at October 2014)

[8] Levine, W.S., *The control Handbook*, IEEE Press, CRC Press LLC, Florida, 1996 (chapter 39).