



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Secção Rectangular Vazada à Torção com base no SMMT

Maria Inês Ramos da Ponte Simão

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil - Estruturas e Construção
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, Outubro de 2011

Aos meus pais, ao meu irmão e ao Professor Luís Bernardo

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem a colaboração de algumas pessoas às quais quero deixar a minha mais sincera gratidão.

Em especial ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador científico deste trabalho, um professor e um amigo exemplar, único e incomparável que jamais encontrarei igual ao longo desta vida, sem ele nada teria feito sentido nem este trabalho teria sido realizado. Por ser a pessoa que sempre foi comigo, pela sua paciência, boa disposição e por tudo o que me ensinou ao longo desta jornada, um sincero obrigada.

Agradeço também ao Professor Doutor Jorge Miguel Almeida Andrade a sua constante disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas relacionadas com a utilização do software Excel que foi utilizado para a implementação do modelo.

Aos meus pais por todo o sacrifício que fizeram para eu chegar a este patamar e um agradecimento muito especial ao meu irmão que de alguma forma foi quem mais se sacrificou para que eu tivesse esta oportunidade. Espero, futuramente, poder compensar-te por todo o teu esforço, carinho e compreensão.

Ao João Rodrigues que me ajudou bastante e sempre me incentivou na realização deste trabalho.

A todos os meus amigos que sempre estiveram presentes e me apoiaram nas fases boas e menos boas desta vida académica e um muito obrigada pelo apoio prestado na recta final deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção. São incluídas neste estudo vigas com secção vazada de resistência normal e de alta resistência. O estudo teórico teve por base o modelo de membrana para o corte (SMM). Numa primeira fase, foi utilizado este modelo modificado para vigas sujeitas à torção (SMMT), onde é incorporado um factor de correcção que tem em conta o gradiente de extensão, e numa segunda fase foi utilizado o modelo na sua formulação original (SMM). Em ambas as fases, foram analisadas as duas fases comportamentais (Estado I e Estado II), desde o início do carregamento até à rotura. Posteriormente, foi encontrado um novo factor de correcção de modo a melhorar o valor do momento torsor de fissuração obtido através do modelo de membrana para a torção.

Para apoiar os resultados obtidos através dos três modelos, as suas previsões foram comparadas com resultados obtidos experimentalmente provenientes de estudos realizados por diversos autores e encontrados na bibliografia consultada.

Palavras-chave

Betão Armado

Vigas

Secção Vazada

Torção

Modelos Teóricos

Abstract

The global behavior of reinforced concrete beams under pure torsion is studied in this thesis. This study includes beams with rectangular hollow cross section. Both normal and high strength concrete beams are concerned. The theoretical study is based on the Softened Membrane Model (SMM). This model was initially applied in its modified formulation that includes a factor to take into account of the strain gradient (Softened Membrane Model for Torsion - SMMT) and afterwards the model was also applied in its original formulation.

The theoretical models were analyzed to characterize the pre-cracking and post-cracking responses of the beams under torsion. After this, a new factor was calculated for SMMT to improve the prediction of the cracking torque.

In order to evaluate the results for the three theoretical models, their predictions were compared with several experimental results from studies found in bibliography.

Keywords

Reinforced Concrete

Beams

Hollow Cross Section

Torsion

Theoretical Models

Índice Geral

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Palavras-chave	vii
Abstract	ix
Keywords	ix
Índice Geral	xi
Índice de Figuras	xiii
Índice de Tabelas	xvii
Simbologia	xix
Lista de Acrónimos	xxvii
Capítulo 1. Enquadramento e objectivos do trabalho	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. Classificação dos Efeitos da Torção	2
1.3. Exemplos Práticos de Torção em Estruturas	3
1.4. Torção em Vigas de Betão Armado	5
1.5. Modelos Teóricos	7
1.6. Objectivos e Justificação do Trabalho	11
Capítulo 2. Modelos Teóricos	13
2.1. Considerações Gerais	13
2.2. Treliça Espacial de Rausch	13
2.3. A Treliça Espacial com Ângulo Variável de Hsu e Mo	16
2.3.1. Considerações Gerais	16
2.3.2. Formulação do MTEAV para Vigas de Betão Armado	17
2.3.3. Implementação das Relações $\sigma - \varepsilon$ e Cálculo da Curva $T - \theta$	25
2.4. O Modelo de Comportamento Global de Bernardo e Lopes	28
2.4.1. Considerações Gerais	28
2.4.2. Modelação da Zona Comportamental 1	28
2.4.3. Modelação da Zona Comportamental 2.b.	31
2.4.4. Modelação da Zona Comportamental 3	33
2.4.5. Critérios de Transição entre as Várias Fases Comportamentais	35
2.5. O MTEAV modificado por Andrade	37
2.5.1. Considerações Gerais	37
2.5.2. Modelação da Zona Comportamental 1	38
2.5.3. Modelação da Transição da Zona Comportamental 2.a	41
2.5.4. Modelação da Zona Comportamental 2.b e 3	43
2.6. Notas Finais	44

Capítulo 3. Modelo de Membrana para Elementos de Betão Armado Sujeitos à	
Torção	47
3.1. Considerações gerais	47
3.2. Equações de Equilíbrio	47
3.3. Equações de Compatibilidade	49
3.4. Relações entre Extensões Biaxiais e Uniaxiais	50
3.5. Relação Constitutiva do Betão à Compressão	51
3.6. Relação Constitutiva do Betão à Tracção	52
3.7. Relações Constitutivas do Aço em Tracção no Betão	54
3.8. Relações Constitutivas do Betão ao Corte	54
3.9. Algoritmo de Solução	54
3.10. Modificação da Razão Hsu/Zhu para a Torção	55
3.11. Comparação do Modelo Membrana para a Torção (SMMT) com a	
Previsão Teórica para a Torção	57
3.12. Notas Finais	57
Capítulo 4. Análise Comparativa	59
4.1. Considerações Gerais	59
4.2. Zona Comportamental 1	60
4.3. Zona Comportamental 2.b.	67
4.4. Zona Comportamental 3	69
4.5. Curvas $T - \theta$	71
Capítulo 5. Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	83
5.1. Introdução	83
5.2. Conclusões	83
5.3. Recomendações para Estudos Futuros	85
Capítulo 6. Referências Bibliográficas	87
Anexos	93

Índice de Figuras

Figura 1 - Exemplos de estruturas com: (a) e (b) torção de compatibilidade; (c) e (d) torção de equilíbrio [4]	3
Figura 2 - (a) Torção Circulatória; (b) Torção com empenamento [4]	3
Figura 3 - Edifício com varandas [4]	4
Figura 4 - Vigas Curvas no plano horizontal [4]	4
Figura 5 - Vigas com carregamento excêntrico [4]	4
Figura 6 - Curva $T - \theta$ típica para vigas de betão armado à torção [10]	5
Figura 7 - Análise comparativa para a viga M2 [24]	8
Figura 8 - Exemplos de previsões obtidas por Bernardo e Lopes (para vigas de secção vazada) [4]	9
Figura 9 - Curva $T - \theta$ obtida através do modelo SMMT, SMM e respectiva curva experimental [37]	11
Figura 10 - Analogia da treliça espacial de Raush [4]	14
Figura 11 - Análise de uma viga com base no método de treliça [27]	18
Figura 12 - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [27]	19
Figura 13 - Flexão de uma escora de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [27]	21
Figura 14 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [27]	22
Figura 15 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o <i>softening effect</i> [51]	22
Figura 16 - Integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras [4]	23
Figura 17 - Exemplo de um diagrama de fluxo para o cálculo da Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado [4]	27
Figura 18 - Parâmetros geométricos para uma secção rectangular cheia e vazada [10]	31
Figura 19 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime não fissurado (Estado I) - [10]	31
Figura 20 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fendilhado (Estado II) [10]	33
Figura 21 - Traçado teórico da fase não linear da Curva $T - \theta$ [11]	34
Figura 22 - Transição entre as zonas 1 e 2: (a) secção cheia, (b) secção vazada [11]	35
Figura 23 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura dúctil [11]	36
Figura 24 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura dúctil [11]	37
Figura 25 - definição da secção vazada equivalente para o Estado I [4]	39

Figura 26 - Forças totais para o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal [4]	40
Figura 27 - Definição das dimensões exteriores no núcleo e do betão interior [4]	41
Figura 28 - Modelação Teórica da Subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]	42
Figura 29 - Desvios entre as Curvas $T - \theta$ experimental e teórica e correcção (Zona 2.b) [4]	44
Figura 30 - Secção de betão armado sujeita à torção: (a) fluxo de corte da secção; (b) estado de tensão do elemento A [37]	48
Figura 31 - Flexão da escora e do tirante: (a) Estado de tensão e deformação; (b) Superfície parabolóide hiperbólica [37]	50
Figura 32 - Relações constitutivas dos materiais: (a) betão à compressão [37]	52
Figura 33 - Relações constitutivas dos materiais: (b) betão à tracção [37]	54
Figura 34 - Relações constitutivas dos materiais: (c) aço traccionado no betão [37]	54
Figura 35 - Algoritmo de solução do modelo membrana para a torção (SMMT) [37]	56
Figura 36 - Comparação dos resultados analíticos obtidos pelos modelos SMMT e RA-STM com os resultados experimentais para a Curva $T - \theta$ [37]	57
Figura 37 - Exemplo de uma Curva $T - \theta$ para o modelo SMMT de Jeng e Hsu	59
Figura 38 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 (Bernardo 2003 [10])	62
Figura 39 - Semelhança de triângulos	63
Figura 40 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 (Bernardo 2003 [10])	64
Figura 41 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 - Bernardo (2003)	72
Figura 42 - Curva $T - \theta$ para a viga A3 - Bernardo (2003)	72
Figura 43 - Curva $T - \theta$ para a viga A4 - Bernardo (2003)	73
Figura 44 - Curva $T - \theta$ para a viga A5 - Bernardo (2003)	73
Figura 45 - Curva $T - \theta$ para a viga B2 - Bernardo (2003)	74
Figura 46 - Curva $T - \theta$ para a viga B3 - Bernardo (2003)	74
Figura 47 - Curva $T - \theta$ para a viga B4 - Bernardo (2003)	75
Figura 48 - Curva $T - \theta$ para a viga B5 - Bernardo (2003)	75
Figura 49 - Curva $T - \theta$ para a viga C2 - Bernardo (2003)	76
Figura 50 - Curva $T - \theta$ para a viga C3 - Bernardo (2003)	76
Figura 51 - Curva $T - \theta$ para a viga C4 - Bernardo (2003)	77
Figura 52 - Curva $T - \theta$ para a viga C5 - Bernardo (2003)	77
Figura 53 - Curva $T - \theta$ para a viga C6 - Bernardo (2003)	78
Figura 54 - Curva $T - \theta$ para a viga D4 - Hsu (1968)	78
Figura 55 - Curva $T - \theta$ para a viga T2 - Lampert et al (1968)	79
Figura 56 - Curva $T - \theta$ para a viga T1 - Lampert et al (1969)	79

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Características para a verificação das vigas de referência de betão armado [4]	60
Tabela 2 - Valores experimentais e teóricos de θ_{cr} , T_{cr} e K_t^I para o modelo SMMT com correcção e para o modelo SMMT sem correcção	61
Tabela 3 - Valores médios para a relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ para o modelo SMMT com correcção e o modelo SMMT sem correcção.	63
Tabela 4 - Valores experimentais e teóricos de θ_{cr} , T_{cr} e K_t^I para o modelo SMMT com o factor de correcção $C = 1,24$.	65
Tabela 5 - Relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ para o modelo SMMT com correcção, SMMT sem correcção e SMMT com factor de correcção $C = 1,24$.	66
Tabela 6 - Relação $K_{t,exp}^I/K_{t,th}^I$ para o modelo SMMT com correcção, SMMT sem correcção e SMMT com factor de correcção $C = 1,24$.	67
Tabela 7 - Relação $K_{t,exp}^{II}/K_{t,th}^{II}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.	68
Tabela 8 - Relação $T_{0,exp}/T_{0,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.	69
Tabela 9 - Relação $T_{n,exp}/T_{n,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.	70
Tabela 10 - Relação $\theta_{n,exp}/\theta_{n,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.	71

Simbologia

Alfabeto Latino

- A - Área da secção transversal / Área limitada pela linha média da parede de um tubo / Área limitada pela linha média da armadura transversal / Área limitada pela linha média do fluxo de corte
- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
- $A_{cl,eq}$ - Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção longitudinal
- A_{cp} - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
- $A_{ct,eq}$ - Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção transversal
- \hat{A}_l - Área total da armadura longitudinal
- A_l - Área da secção transversal de uma barra da armadura longitudinal / Área total da armadura longitudinal
- A_{lh} - Área de aço homogeneizado para a armadura longitudinal
- A_o - Área limitada pela linha média do fluxo de corte
- A_t - Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
- A_{th} - Área de aço homogeneizado para a armadura transversal
- A_v - Área de armadura transversal
- C - Factor de rigidez de torção / Factor de correcção
- D - Força de compressão absorvida pela escora de betão
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- $F_{l,tot}$ - Força longitudinal total
- $F_{t,tot}$ - Força transversal total distribuída

G - Módulo de distorção

$(GC)^I$ - Rigidez de torção em Estado I

$(GC)^{II}$ - Rigidez de torção em Estado II

K - Factor de redução

K_t^I - Rigidez de torção efectiva (Estado I)

$K_{t,exp}^I$ - Valor experimental da rigidez de torção efectiva (Estado I)

$K_{t,th}^I$ - Valor teórico da rigidez de torção efectiva (Estado I)

K_t^{II} - Rigidez de torção efectiva (Estado II)

$K_{t,exp}^{II}$ - Valor experimental da rigidez de torção efectiva (Estado II)

$K_{t,th}^{II}$ - Valor teórico da rigidez de torção efectiva (Estado II)

M - Momento flector

\bar{N} - Força de tracção absorvida pela armadura longitudinal

N_b - Força na corda inferior da treliça plana

N_t - Força na corda superior da treliça plana

Q - Carga concentrada

R - Factor de redução para a relação Hsu/Zhu v_{12}

T - Momento torsor

T_{cr} - Momento torsor de fissuração

$T_{cr,ef}$ - Momento torsor de fissuração efectivo

$T_{cr,exp}$ - Valor experimental do momento torsor de fissuração

$T_{cr,th}$ - Valor teórico do momento torsor de fissuração

T_e - Momento torsor resistente elástico

- T_0 - Ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
- $T_{0,exp}$ - Valor experimental da ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
- $T_{0,th}$ - Valor teórico da ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
- T_{pl} - Momento torsor resistente plástico
- T_n - Valor nominal do momento torsor resistente
- $T_{n,exp}$ - Valor experimental do momento torsor resistente
- $T_{n,th}$ - Valor teórico do momento torsor resistente
- T_y - Momento torsor de cedência
- V - Esforço transversal
- d_v - Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana
- f'_c - Resistência à compressão uniaxial do betão
- f_{ck} - Valor característico da resistência à compressão do betão
- f_{cr} - Tensão de rotura do betão
- f_{c2} - Tensão de compressão no betão tendo em conta o *softening effect*
- f_l - Tensão da armadura longitudinal
- f_{ly} - Tensão de cedência da armadura longitudinal
- f_r - Módulo de rotura do betão
- f_{sty} - Tensão de cedência da armadura transversal ordinária
- f_{sy} - Tensão de cedência da armadura ordinária
- f_t - Tensão da armadura transversal
- f_v - Tensão na armadura transversal
- f_y - Tensão de cedência da armadura ordinária

- h - Altura da secção transversal / Espessura da parede da secção
- h_e - Espessura efectiva da parede para a análise em Estado II
- h_{eq} - Espessura equivalente da parede da secção
- k_1 - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
- k_{1c} - Quociente entre a tensão média de compressão e a tensão máxima de compressão na escora de betão tendo em conta a participação do betão à tracção
- k_{1t} - Quociente entre a tensão média de tracção e a tensão máxima de tracção no tirante de betão
- l_q - Comprimento da porção recta da linha média do fluxo de corte
- n - Número de varões longitudinais / Coeficiente de homogeneização / Número de valores da amostragem
- n_v - Força uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento
- p_c - Perímetro da linha média do fluxo de corte
- p_{cp} - Perímetro exterior de uma secção transversal de betão
- p_o - Perímetro da linha média do fluxo de corte
- q - Fluxo de corte
- s - Espaçamento das barras longitudinais / Espaçamento longitudinal da armadura transversal (cintas ou estribos) / Desvio padrão amostral
- t - Momento torsor distribuído / Espessura da escora de betão / Espessura da parede
- t_{ef} - Espessura efectiva da parede
- u - Perímetro da linha média da parede de um tubo / Perímetro da linha média de uma cinta / Perímetro exterior da secção transversal
- w - Deslocamento perpendicular ao plano $x - y$ / Deslocamento fora do plano na direcção normal para um elemento membrana
- x - Dimensão menor de uma secção transversal rectangular

- x_1 - Dimensão menor de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
- y - Dimensão maior de uma secção transversal rectangular
- y_1 - Dimensão maior de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
- z - Comprimento da parede referida à linha média / Distância entre duas secções ao longo do eixo de uma viga

Alfabeto Grego

- $\Delta\theta\theta$ - Extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- $\Delta\theta\theta_{cr,exp}$ - Valor experimental da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- $\Delta\theta\theta_{cr,th}$ - Valor teórico da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- α - Ângulo de rotação por torção / Ângulo de inclinação das escoras / Coeficiente de St. Venant
- α_2 - Ângulo entre a direcção de aplicação da tensão de compressão (direcção 2) e a direcção da armadura longitudinal (direcção 1)
- β - Coeficiente de St. Venant / Ângulo de desvio
- β_σ - Factor de redução para as tensões
- β_ε - Factor de redução para as extensões
- ε - Extensão
- ε_{cr} - Extensão de rotura do betão
- ε_{cu} - Extensão última do betão
- ε_d - Extensão na escora diagonal de betão
- ε_{ds} - Extensão máxima de compressão à superfície da escora de betão
- ε_l - Extensão na armadura longitudinal / Extensão na direcção longitudinal

- ε_0 - Extensão correspondente ao pico de tensão
- ε_p - Extensão correspondente ao pico de tensão σ_p
- ε_t - Extensão na armadura transversal / Extensão na direcção transversal
- ε_s - Extensão de tracção nas armaduras de torção
- ε_{sf} - Extensão média uniaxial da armadura ordinária que atinge em primeiro a cedência, tendo em conta as razões Hsu/Zhu
- ε_{su} - Extensão última convencional da armadura ordinária
- $\bar{\varepsilon}_1$ - Extensão uniaxial média na direcção 1
- $\bar{\varepsilon}_{1s}$ - Máxima extensão uniaxial na superfície na direcção 1
- ε_1 - Extensão na direcção 1
- $\bar{\varepsilon}_2$ - Extensão uniaxial média na direcção 2
- $\bar{\varepsilon}_{2s}$ - Máxima extensão uniaxial na superfície na direcção 2
- ε_2 - Extensão na direcção 2
- Φ - Ângulo total de torção / Ângulo da fissura de torção com o eixo da viga / Factor redutor de resistência
- ζ - Coeficiente de redução para o betão à compressão
- γ - Distorção / Factor de pré-esforço
- γ_{lt} - Distorção média nas coordenadas l - t das armaduras
- γ_{21} - Distorção média nas coordenadas 1 - 2 das tensões aplicadas
- η - Relação ente as forças resistentes nas armaduras na direcção longitudinal e transversal
- λ - Coeficiente de eficiência de Cowan / Coeficiente de redução para ter em conta o softening effect

- θ - Ângulo entre a escora de betão e a direcção longitudinal / Ângulo de torção por unidade de comprimento
- θ_{cr}^I - Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
- $\theta_{cr,exp}^I$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{cr,exp}$ em Estado I
- $\theta_{cr,th}^I$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{cr,th}$ em Estado I
- θ_{cr}^{II} - Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado II
- $\theta_{cr,exp}^{II}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{cr,exp}$ em Estado II
- $\theta_{cr,th}^{II}$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{cr,th}$ em Estado II
- θ_n - Rotação de torção correspondente a T_n
- $\theta_{n,exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{n,exp}$
- $\theta_{n,th}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{n,th}$
- ρ_l - Taxa de armadura longitudinal
- ρ_t - Taxa de armadura transversal
- ρ_{tot} - Taxa total de armadura (incluindo a armadura de pré-esforço)
- σ - Tensão normal
- σ_d - Tensão na escora diagonal de betão
- σ_l - Tensão normal na direcção longitudinal
- σ_p - Tensão máxima de compressão no betão tendo em conta o *softening effect*
- σ_t - Tensão normal na direcção transversal
- σ_1^c - Tensão normal média do betão segundo a direcção 1
- σ_2^c - Tensão normal média do betão segundo a direcção 2
- τ - Tensão tangencial

τ_{lt} - Tensão tangencial de corte na direcção longitudinal e transversal

τ_{21}^c - Tensão tangencial média do betão nas coordenadas 1 - 2

ν_{12} - Relação Hsu/Zhu usado no modelo de membrana para o corte

ν_{21} - Relação Hsu/Zhu usado no modelo de membrana para o corte

$(\nu_{12,Corte})$ - Relação Hsu/Zhu usado no modelo de membrana para o corte

$(\nu_{12,torção})$ - Relação modificada de Hsu/Zhu para o modelo de membrana para a torção

φ - Curvatura dos estribos ao longo da direcção 1

Ψ - Função de empenamento / Curvatura da escora de betão

Lista de Acrónimos

ACI - American Concrete Institute

ELU - Estados Limites Últimos

REBAP - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado

EC2 - Eurocódigo 2

Capítulo 1

Enquadramento e objectivos do trabalho

1.1. Considerações Gerais

No século XX, o betão armado assumiu uma grande importância na concepção de estruturas. Os esforços de torção, até à década de 60, eram desprezados para efeito de dimensionamento, inclusive, não eram referidos nos documentos normativos que se baseavam no método das tensões admissíveis. Ainda nesta época existia o caso excepcional das “estacas-parafuso”.

Em 1956, Armstrong [5] mencionou dois casos reais onde os esforços de torção foram considerados no processo de dimensionamento: a Ponte de *Waterloo* e o *Royal Festival Hall* em Londres. Ambas as estruturas foram imprescindíveis para denotar a problemática da torção.

A partir da década de 60, o desenvolvimento dos processos gerais de dimensionamento levou a que os elevados factores de segurança começassem a ser reduzidos devido à adopção do método de dimensionamento baseado na Teoria dos Estados Limites Últimos (ELU).

Após a segunda grande guerra, meados da década de 40, surge o conceito de arquitectura moderna. Os problemas mais marcantes associados à insuficiência de resistência por torção surgem nesta época, onde o cálculo dos efeitos torsionais em estruturas hiperestáticas era extremamente moroso e monótono [10].

Em 1958 foi criada a Comissão 438 do *American Concrete Institute* (ACI 438) de modo a estudar o problema da torção. O código de 1971 (ACI 318-71 [1]) representa o primeiro documento americano que incluía procedimentos para o dimensionamento à torção, passando a ser obrigatório a consideração da torção no dimensionamento de qualquer estrutura. Em Portugal, surge o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (REBAP) em 1983 [36].

O dimensionamento e verificação de elementos de betão armado e pré-esforçado à torção foi e continua a ser baseado em procedimentos semi-empíricos e mesmo empíricos [27]. Além disso, o cálculo e verificação do comportamento à torção sofrem algumas lacunas já que apenas para o Estado Limite Último existem procedimentos explícitos, sendo os Estados Limites de Serviço omissos relativamente a verificação directa [4].

A problemática do estudo da torção é agravada com o desenvolvimento de técnicas construtivas e também com o aparecimento de novos materiais estruturais, como por exemplo betões de alta resistência, os betões leves e os betões com fibras.

No presente trabalho pretende-se estudar os efeitos torsionais globais de vigas de betão armado de secção vazada sujeitas à torção pura através do modelo de membrana para a torção que será apresentado ao longo deste trabalho.

1.2. Classificação dos Efeitos da Torção

Nos casos práticos em que o esforço de torção é requerido na análise estrutural, salientam-se várias classificações elementares, dependendo: das condições em que a torção surge na estrutura, das consequências de ser desprezada aquando da verificação da segurança e da forma como o esforço de torção é absorvido pela secção transversal. Distinguem-se por isso dois tipos de torção: Torção de Compatibilidade e Torção de Equilíbrio [4].

Denomina-se por torção de compatibilidade aquela que resulta para um elemento de uma estrutura em virtude de condições de compatibilidade de deformação. Se a resistência à torção for nula, podem ocorrer grandes deformações e fissuração excessiva, no entanto a estrutura não entra em rotura. Em muitos casos, a torção pode constituir uma acção secundária resultante das exigências de compatibilidade de deformação, pelo que pode ser desprezada no dimensionamento desde que seja garantida uma armadura mínima para o controlo de fissuração.

Para o caso da torção de equilíbrio, é fundamental assegurar a resistência à torção para que o equilíbrio se verifique. Na falta da resistência à torção de equilíbrio, a estrutura, ou parte dela, torna-se instável.

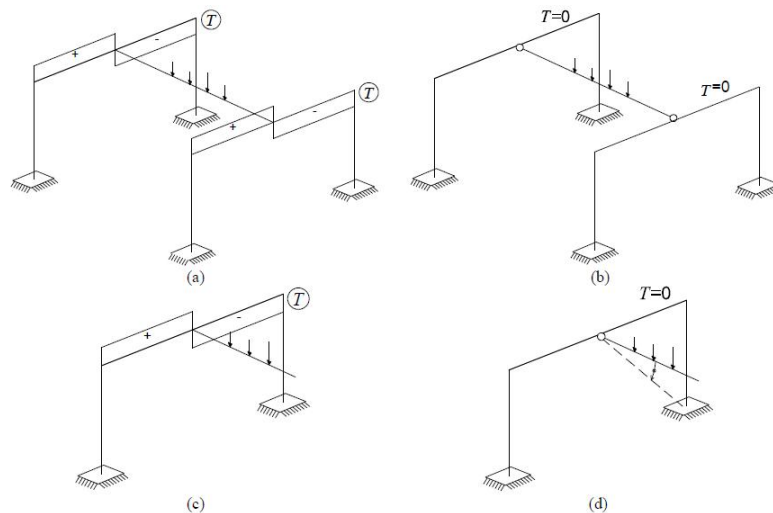


Figura 1 - Exemplos de estruturas com: (a) e (b) torção de compatibilidade; (c) e (d) torção de equilíbrio [4]

A secção transversal assume um papel muito importante na resistência aos esforços de torção. No caso das secções cheias e vazadas, os esforços de torção são especialmente resistidos por um fluxo de tensões tangenciais (*Torção Circulatória* ou *Torção de St. Venant*). Nas secções abertas a torção é praticamente resistida por momentos adicionais (*Torção com Empenamento*). No caso de estruturas como pontes, optar por secções em caixão é a solução mais vantajosa do ponto de vista económico.

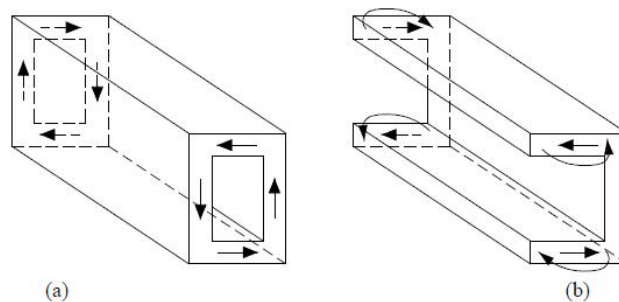


Figura 2 - (a) Torção Circulatória; (b) Torção com empenamento [4]

1.3. Exemplos Práticos de Torção em Estruturas

Da Fig.3 à Fig.5 ilustram-se casos correntes de estruturas com esforços de torção. A Fig.3 ilustra o caso de um edifício onde existe o prolongamento para o exterior de lajes de pavimento, funcionando estas em consola. A viga de apoio em “L” fica sujeita a momentos torsores [4].



Figura 3 - Edifício com varandas [4]

A Fig.4 (a) ilustra o caso de vigas com desenvolvimento curvo em planta, em que a rotação transversal da secção se encontra restringida nos apoios. Nestes caso, qualquer carregamento vertical a actuar sobre o eixo da viga, gera o aparecimento de momentos torsores. Este carregamento pode ser resultante, por exemplo, da reacção de lajes de pavimento ou de paredes exteriores, como está ilustrado na Fig.4 (b) [4].

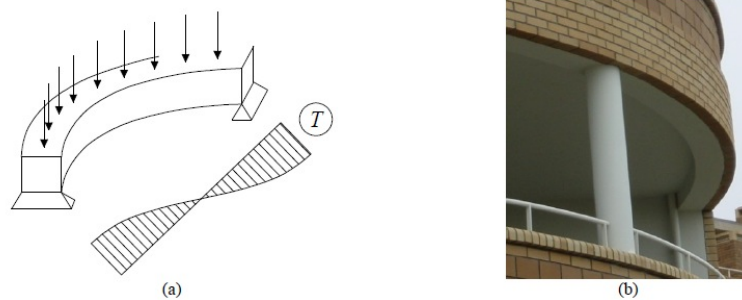


Figura 4 - Vigas Curvas no plano horizontal [4]

A Fig.5 ilustra os casos de cargas excêntricas em vigas. As cargas são transmitidas às vigas por intermédio de abas que funcional como consolas curtas. Na Fig.5 (a) qualquer assimetria entre as reacções provoca o aparecimento de momentos torsores na viga de apoio. A Fig.5 (b) ilustra o caso de uma parede de alvenaria a apoiar excentricamente, por intermédio de uma aba superior, numa viga. O peso próprio correspondente à parede provoca esforços de torção na viga de apoio [4].

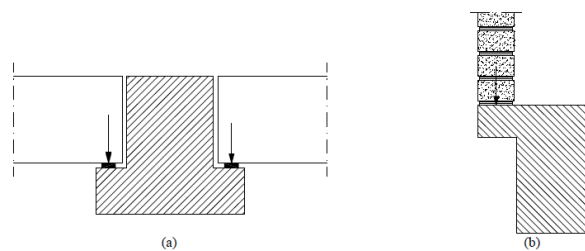


Figura 5 - Vigas com carregamento excêntrico [4]

1.4. Torção em Vigas de Betão Armado

A partir da observação experimental de uma curva de comportamento momento torsor (T) - ângulo de torção (θ) típica para uma viga de betão armado, com secção rectangular cheia e com taxas moderadas e equilibradas para a armadura longitudinal e transversal, pode ser desenhada na forma ilustrada na Fig.6 [10]. De um modo geral, a Curva $T - \theta$ apresentada pode ser dividida em três zonas comportamentais distintas (Zona 1, 2 e 3) relacionadas com as fases de comportamento da viga ao longo do seu historial de carregamento.

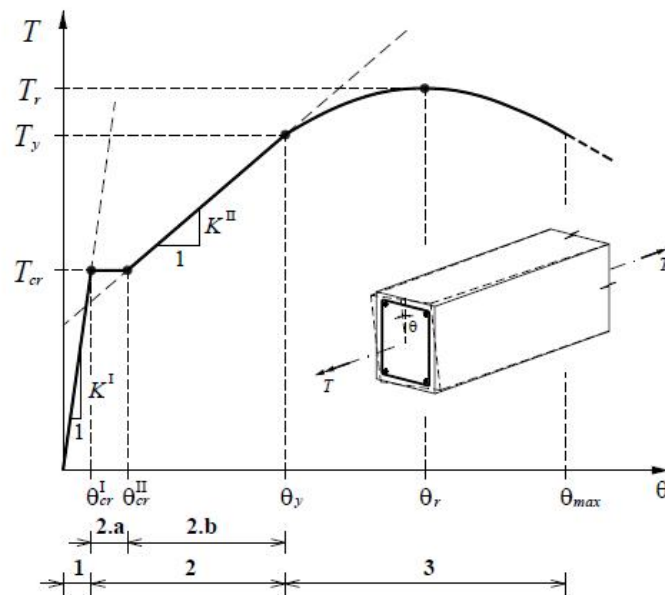


Figura 6 - Curva $T - \theta$ típica para vigas de betão armado à torção [10]

A Zona 1 da Curva $T - \theta$ da Fig.6 corresponde ao Estado I (não fendilhado) da viga, ou seja, à zona comportamental antes de ser atingido o momento torsor de fissuração (T_{cr}). Em tal zona, o declive da curva $T - \theta$ representa a rigidez elástica de torção em Estado I (K_t^I), considerando-se geralmente válida nesta fase a Teoria de St. Venant [48] para a sua estimativa. Nesta mesma fase, a curva $T - \theta$ pode ser aproximada a uma recta que tem início no ponto de coordenadas (0;0) e termina no ponto de coordenadas ($\theta_{cr}^I; T_{cr}$), onde θ_{cr}^I representa o ângulo de torção, por unidade de comprimento da viga e T_{cr} o momento torsor correspondente. Esta aproximação da curva $T - \theta$ a uma recta, apesar de ser geralmente aceite, deve ser encarada como uma hipótese simplificativa. Em alguns estudos anteriores [14], é considerado que imediatamente antes de alcançar o momento torsor de fissuração, a viga apresenta já um comportamento não linear em resultado de microfissurações no betão que se desenvolvem na área mais externa da secção. Ainda assim, tendo em conta que as rotações são muito pequenas nesta fase comportamental, é geralmente aceite que a caracterização da zona 1 com base numa análise elástico-linear em regime não fissurado

constitui uma aproximação bastante aceitável. Para o cálculo do momento torsor de fissuração (T_{cr}) pode usada a Teoria da Elasticidade [48], a Teoria da Flexão Enviada [23] ou a Teoria do Tubo Fino de Bredt [13]. Na fase comportamental em análise a armadura de torção tem pouca influência na rigidez da viga, contribuindo apenas para aumentar ligeiramente o momento torsor de fissuração, tal como observado experimentalmente (Hsu em 1968 [24] e Bernardo em 2003 [10]).

Quando a viga atinge o momento torsor de fissuração, a curva $T - \theta$ sofre um aumento brusco da rotação para um momento torsor constante e igual a T_{cr} , o momento torsor correspondente. A Subzona 2.a da curva de comportamento corresponde ao incremento brusco da rotação referido anteriormente e a Subzona 2.b corresponde a um desenvolvimento aproximadamente recto da curva $T - \theta$, cujo declive representa a rigidez de torção pós-fendilhação (K_t^{II}), ou seja, em Estado II.

Os resultados experimentais mostram que em vigas com secção vazada de parede fina (por exemplo, nos estudos de Lampert e Thurlimann em 1969 [38] e também Bernardo em 2003 [10]), a subzona 2.a representada na Fig.6 não é visualizada, comparativamente a vigas com secção cheia. Neste último tipo de vigas, a subzona 2.a é maioritariamente observada nas vigas com menores taxas de armaduras e o seu comprimento, medido em termos de deformação, é tanto maior quanto menor for a taxa de armadura de torção (Hsu em 1968 [24]). Bernardo em 2003 [10] adiantou uma explicação para a observação do referido patamar horizontal no caso das vigas com secção cheia, fazendo intervir a influência do núcleo de betão da secção. Segundo este autor, imediatamente a seguir à fissuração das vigas ocorre uma redistribuição transversal das tensões tangenciais dirigida para o interior da secção, com a consequente deformação associada na forma de um aumento brusco do ângulo de torção, até que as armaduras sejam mobilizadas. Nas vigas com secção vazada de parede fina, tal mobilização é imediata dada a não existência de capacidade para a referida redistribuição.

Para caracterizar a viga em Estado II adopta-se uma análise elástico-linear em regime fissurado mediante uma analogia de treliça espacial com ângulo constante de 45° e comportamento elástico-linear dos materiais, estabelecido por Hsu em 1973 [26] e adoptado por Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [11]. Esta hipótese constitui uma aproximação aceitável enquanto as armaduras de torção não entrarem em cedência.

A partir de um dado ponto a curva $T - \theta$ evidencia um comportamento não linear. Esta situação pode acontecer em duas situações distintas relacionadas com o comportamento último da viga. Para a primeira situação, o ponto corresponde ao instante em que pelo menos uma das armaduras de torção (armadura longitudinal ou transversal) entra em cedência. Para a segunda situação, o ponto corresponde ao momento em que o betão comprimido nas escoras das vigas começa a apresentar um comportamento não linear devido às tensões elevadas instaladas, podendo ocorrer este comportamento inclusive antes da cedência das

armaduras de torção. Esta segunda situação pode ocorrer em vigas com elevadas taxas de armaduras de torção, tal como observado experimentalmente por Bernardo em 2003 [10]. Para qualquer um dos casos referidos, o comportamento da viga passa a ser marcadamente não linear até atingir o momento torsor máximo, constituindo assim a zona 3 (Fig.6) da curva de comportamento.

1.5. Modelos Teóricos

Desde o início do século XX foram desenvolvidos estudos com o objectivo de compreender o comportamento e principalmente prever a resistência última à torção de vigas de betão armado. Os modelos teóricos adoptados em documentos normativos podem dividir-se em duas grandes teorias: a Teoria da Flexão Enviesada (*Skew-Bending Theory*), sendo esta a base do código americano entre 1971 e 1995 e o Modelo de Treliça Espacial (*Space Truss Analogy*) que constitui a base do modelo europeu desde 1978 e também do código americano desde 1995. O modelo teórico mais recente é o Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (*Variable Angle Truss-Model*) apresentado por Hsu e Mo em 1985 [31][32][33]. Neste modelo, o Modelo de Treliça Espacial, é complementado com a influência das extensões transversais de tracção no comportamento do betão comprimido nas escoras, principalmente no estado fissurado. É o chamado *Softening Effect*. Os autores utilizaram uma Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras que tem em conta o *Softening Effect*, em detrimento de uma Curva $\sigma - \varepsilon$ convencional que caracteriza o betão à compressão uniaxial.

O modelo de treliça espacial com o ângulo variável pode ainda ser dividido na Teoria da Plasticidade do Campo de Compressões (*Plasticity Compression Field Theory* - Lampert e Thurlimann, Elfgren) e na Teoria da Compatibilidade do Campo de Compressões (*Compatibility Compression Field Theory* - Collins, Hsu e Mo).

O mesmo autor, Hsu em 1984 [27], desenvolveu um estudo baseado no Modelo de Treliça Espacial com o objectivo de calcular o traçado da curva teórica $T - \theta$ e compará-la com os resultados experimentais de vigas de resistência normal e secção cheia, tendo concluído que os valores obtidos se aproximam muito dos valores experimentais na parte última da curva (Fig.7). O mesmo foi observado para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme.

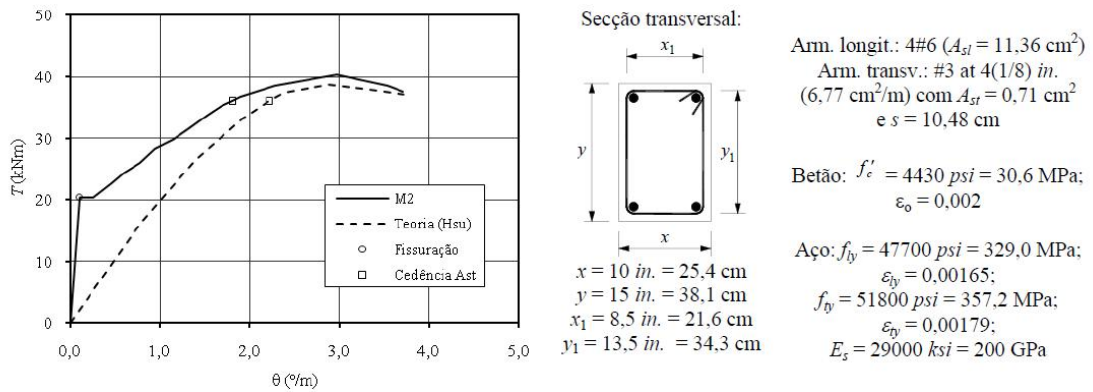


Figura 7 - Análise comparativa para a viga M2 [24]

Usando o modelo de treliça espacial com ângulo variável obtêm-se melhores resultados para cargas mais elevadas visto que o betão se encontra extensivamente fissurado. Para cargas mais baixas, as previsões teóricas da Curva $T - \theta$ afastam-se dos valores obtidos experimentalmente [4]. Isto sucede porque o betão armado ainda não está fissurado ou não extensivamente fissurado. Com estas observações, conclui-se que a aplicação da teoria da treliça espacial só pode ser considerada válida quando a viga atinge o estado mais acentuado de fissuração [4].

Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [11] elaboraram um procedimento de cálculo de modo a prever teoricamente o comportamento global de vigas de betão armado, incluindo vigas pré-esforçadas longitudinalmente e vigas de alta resistência, à torção pura através do cálculo das curvas $T - \theta$. O estudo realizado por estes autores foi inicialmente dividido por fases caracterizadas por varias teorias separadas, nomeadamente:

- Análise elástico-linear em regime não fissurado (Estado I): Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviada e Teoria do Tubo Fino de Bredt;
- Análise elástico-linear em regime fissurado (Estado II): Analogia da Treliça Espacial com um ângulo de 45° para escoras de betão, tendo em conta o comportamento linear dos materiais;
- Análise não linear: Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais e o *softening effect*.

Para realizar a transição entre as várias análises, Bernardo e Lopes adoptaram critérios de ajustamentos semi-empíricos baseados em resultados experimentais obtidos por ensaios realizados por outros autores e também pelos próprios. De uma forma geral, o procedimento usado pelos autores revelou-se adequado para a previsão global da curva de comportamento $T - \theta$.

O modelo de Bernardo e Lopes foi revisto e corrigido de modo a adicionar as relações constitutivas para os betões de alta resistência pois estes possuem características e propriedades diferentes às de um betão normal. A Curva $\sigma - \varepsilon$ para um betão de alta resistência muda drasticamente quando comparada com a de um betão normal, não sendo, assim, possível utilizar os mesmos modelos para betões de alta resistência. O objectivo foi realizar novamente um procedimento de cálculo para prever o comportamento à torção de vigas de alta resistência com secções rectangulares cheias ou vazadas. As previsões teóricas foram comparadas com os poucos resultados experimentais referentes a ensaios à torção pura de vigas de alta resistência, nomeadamente os ensaios realizados pelos próprios autores [10] [12] com vigas de secção vazada. Para corrigir os modelos teóricos foi inserido um factor corrector para calcular o módulo de rotura em torção, baseado na introdução de uma nova lei de comportamento $\sigma - \varepsilon$ para o betão de alta resistência comprimido nas escoras e na introdução de coeficientes empíricos de correcção coeficientes de redução (*softening effect*). Os autores puderam assim concluir que o procedimento de cálculo desenvolvido e corrigido, respectivamente, na primeira e na segunda fase, permitiu obter boas previsões do comportamento global à torção. Por último, na terceira fase de estudo, Bernardo e Lopes corrigiram os modelos para vigas de resistência normal e de alta resistência com pré-esforço longitudinal [10]. As correcções efectuadas consistiram na introdução de factores de pré-esforço e na modificação das equações de equilíbrio longitudinal para a fase não linear de modo a contabilizarem a força na armadura de pré-esforço.

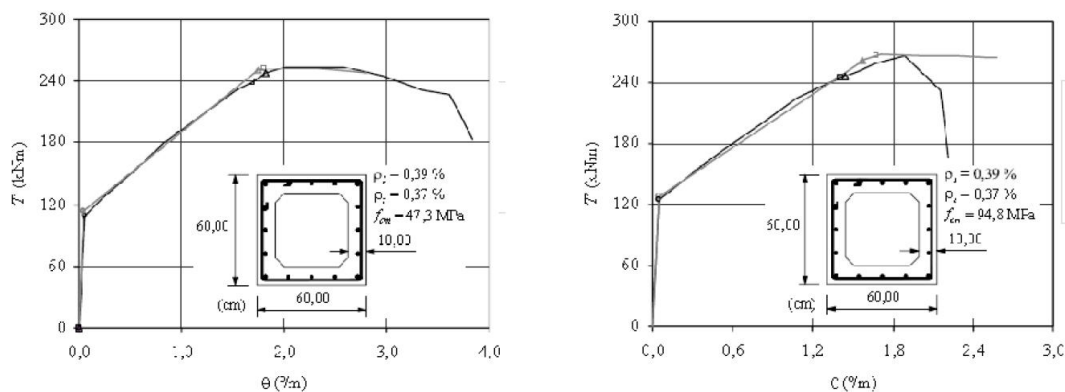


Figura 8 - Exemplos de previsões obtidas por Bernardo e Lopes (para vigas de secção vazada)

[4]

No entanto, o modelo de Bernardo e Lopes não é muito consistente pois utiliza três teorias diferentes, com formulações próprias para analisar o comportamento à torção nas três fases comportamentais (fissurada, não fissurada e não linear). Assim, foram adoptados critérios de modo a realizar a transição entre as diversas fases com o objectivo de obter uma curva comportamental completa. Os critérios semi-empíricos foram baseados nas tipologias de transição entre as fases comportamentais observadas experimentalmente.

Para vigas de resistência normal e para caracterizar o comportamento do betão comprimido nas escoras, Bernardo e Lopes utilizaram a curva $\sigma - \varepsilon$ de Vecchio e Collins de 1982 [52] realizada a partir de ensaios ao corte de placas de resistência normal. Posteriormente, os autores verificaram que o modelo criado não fornecia bons resultados em relação ao comportamento à torção de vigas de alta resistência e para a fase não linear, então, tentaram incorporar a lei proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [7] a partir do ensaio ao corte de placas de alta resistência. Para as armaduras traccionadas foi usada a lei bilinear proposta pelo EC2 [41] e para as armaduras de pré-esforço foi usada a lei constitutiva não linear proposta por Rao e Warwaruk em 1973 [44].

Em 2010, Andrade [4] desenvolveu um novo procedimento de modo a prever o comportamento global de vigas à torção. O autor modificou o modelo de treliça espacial com ângulo variável com o objectivo de adaptá-lo à fase comportamental pré-fissuração, introduzindo algumas correcções. Comparativamente ao modelo apresentado por Bernardo e Lopes, o modelo de Andrade, do ponto de vista teórico, é mais consistente. O trabalho desenvolvido por este autor foi dividido em três fases. Na primeira fase o autor analisou vários modelos teóricos para a previsão do comportamento global de vigas sujeitas à torção, de modo a encontrar o modelo com melhores resultados. Na segunda fase foi corrigido o método considerado na fase anterior de forma a prever a fase última de comportamento e o comportamento global. Finalmente, na terceira fase, Andrade desenvolveu um programa computacional para apoio à investigação, possibilitando a modificação e/ou a substituição das leis constitutivas para os materiais e comparar os resultados teóricos com os experimentais. O autor criou também um pequeno aplicativo computacional para apoiar o desenvolvimento de projectos, ajudando na previsão do comportamento global para cargas últimas ou de serviço da secção de betão armado e pré-esforçado sujeitas à torção.

Hsu [35] desenvolveu uma nova teoria para elementos de betão armado sujeitos ao corte e denominou a mesma de modelo de membrana (Softened Membrane Model - SMM). Baseado desta teoria foi obtido um novo modelo membrana para elementos de betão armado sujeitos à torção (Softened Membrane Model for Torsion - SMMT) apresentado por Jeng e Hsu [37]. Este modelo é capaz de prever a curva Torção (T) - Rotação (θ), incluindo as respostas em fase pré e pós-fissurada, assim como os tramos pré e pós-rotura. No modelo de membrana para elementos sujeitos à torção são necessárias duas modificações nas relações constitutivas de modo a considerar o gradiente de extensão, provocado pelos momentos na estrutura de betão na zona de fluxo de corte. O gradiente de extensão aumenta a força de tracção do betão e diminui as razões Hsu/Zhu.

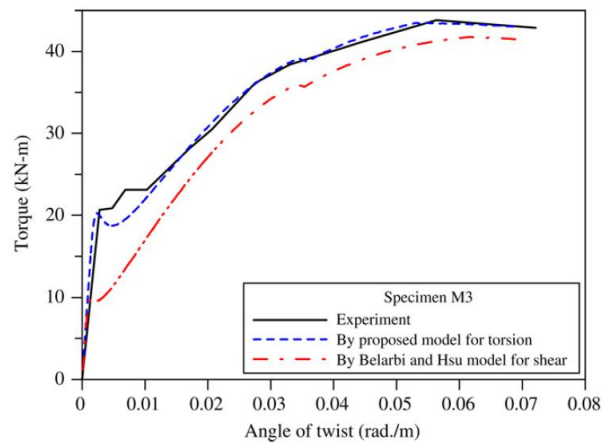


Figura 9 - Curva $T - \theta$ obtida através do modelo SMMT, SMM e respectiva curva experimental [37]

No modelo de membrana para a torção foi utilizado um algoritmo de solução de modo a prever a resposta de um determinado tipo de vigas através de vários carregamentos e o seu desenvolvimento ao longo do tempo. Os resultados teóricos para a curva $T - \theta$, resultantes de um programa computacional baseado na solução do algoritmo, foram comparados com resultados experimentais e posteriormente comparados com o modelo de treliça espacial com ângulo variável. No entanto, os autores Jeng e Hsu não apresentam o resultado das curvas $T - \theta$ do modelo de membrana para a torção em vigas com secção vazada sem justificação aparente.

1.6. Objectivos e Justificação do Trabalho

Do exposto ao longo deste capítulo, ressaltou um aspecto que contribuiu para a escolha do tema deste trabalho e a sua importância.

- A análise e comparação dos resultados teóricos do modelo SMMT com resultados experimentais e resultados teóricos de outros modelos já existentes, para vigas de betão armado com secção vazada, uma vez que Jeng e Hsu [37] no seu estudo original não incluíram este tipo de vigas nas suas análises. Uma vez que os esforços de torção são predominantes em pontes com curvaturas pronunciadas no plano horizontal, e sendo também a secção em caixão (secção vazada) uma solução típica neste tipo de estruturas, a análise do comportamento em torção pura de vigas em caixão de betão de alta resistência é extremamente importante.

A realização deste trabalho teve como base o artigo elaborado por Jeng e Hsu [37], onde os mesmos apresentaram o modelo de membrana para a torção (SMMT), e posteriormente ao cálculo da curva $T - \theta$ por este mesmo modelo procedeu-se à comparação de resultados com os obtidos através do modelo de treliça espacial com ângulo variável (MTEAV).

O objectivo deste trabalho foi calcular a curva $T - \theta$ de vigas de secção vazada através do modelo SMMT e posteriormente comparar com a curva $T - \theta$ obtida experimentalmente para as referidas vigas. No final serão comparadas as curvas $T - \theta$ para cada uma das vigas de referência com o modelo de treliça de ângulo variável modificado por Andrade (MTEAVmod) [4] de modo a concluir qual dos dois modelos melhor se adequa na previsão do comportamento de elementos de betão armado sujeitos à torção.

Capítulo 2

Modelos Teóricos

2.1. Considerações Gerais

Nas últimas décadas, muitas teorias foram desenvolvidas para calcular a resistência à torção pura de vigas de betão armado. Estas teorias podem ser divididas em três tipos: a Analogia da Treliça Espacial, a Teoria da Flexão Desviada e o Modelo de Membrana. As três teorias mais marcantes foram desenvolvidas por Rausch em 1929 [45], Cowan em 1950 [20] e Hsu em 1968 [25]. As duas primeiras teorias referidas pertencem a Analogia da Treliça Espacial e a última baseia-se na Teoria da Flexão Enviada. Posteriormente outros autores desenvolveram outras teorias com base nas duas teorias previamente mencionadas e que são a base do modelo europeu de 1978 [16], Lampert e Thurlimann em 1969 [38], Elfgren em 1972 [21] e Collins em 1973 [17].

2.2. Treliça Espacial de Rausch

Ritter em 1899 [47] e Morsh em 1902 [40] simularam a fase pós-fissurada de um elemento de betão armado através de um modelo de treliça. Quando uma viga de betão armado é sujeita ao esforço transversal, ocorre fissuração diagonal que divide o betão em escoras, funcionando a viga como uma treliça no plano de carregamento. As barras longitudinais superiores e inferiores constituem as cordas da treliça, as barras transversais e as escoras de betão constituem elementos de equilíbrio da alma. A inclinação das escoras de betão foi adoptada como sendo igual a 45°. A teoria destes autores foi denominada de *analogia da treliça a 45°*.

A primeira teoria para prever a resistência última de elementos de betão armado sujeitos à torção foi elaborada por Rausch em 1929 [45] tendo por base a extensão do campo de aplicação da analogia de treliça a 45°. Esta teoria estipula que um elemento de betão armado fissurado com armadura longitudinal e transversal constituída por cintas fechadas funciona como um tubo com uma espessura h , onde o momento torsor externo T é resistido por um fluxo circulatório de corte τ nas paredes desse tubo. A teoria estabelece também que o betão, após fissurar, é separado por fissuras orientadas a 45° numa série de elementos helicoidais que interagem com a armadura longitudinal e transversal formando uma treliça espacial para resistir ao fluxo circulatório de corte.

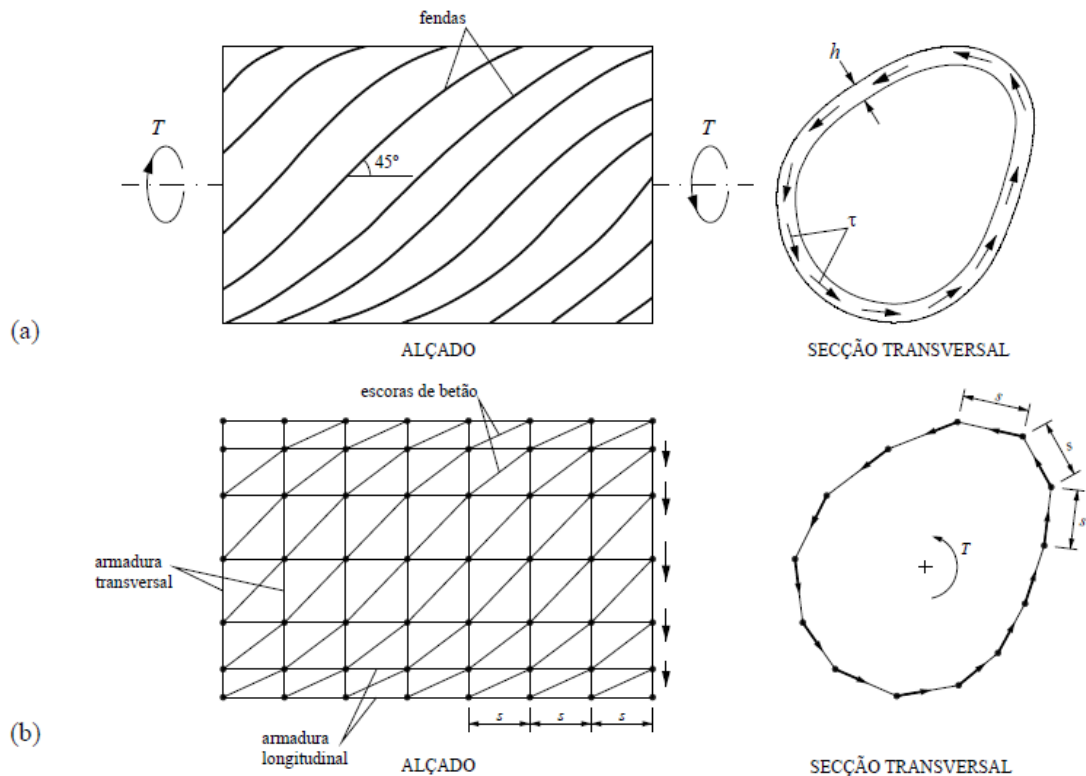


Figura 10 - Analogia da treliça espacial de Rausch [4]

Cada um dos elementos helicoidais é idealizado numa série de escoras curtas, rectas e ligadas nos nós da treliça. A força de compressão nas escoras origina, em cada nó, uma força radial direccionada para fora que será resistida pela armadura transversal. A armadura transversal, que é constituída por cintas, é idealizada como uma série de barras curtas e rectas, ligadas às escoras de betão nos nós da treliça. A série de escoras diagonais de betão e a série de barras da armadura transversal formam um mecanismo que tende a sofrer um alongamento quando sujeito a um momento torsor externo que é contrariado pela armadura longitudinal. Cada barra longitudinal é assumida como constituída por uma série de barras curtas ligadas nos nós da treliça às escoras diagonais e às barras da armadura transversal.

O modelo de Rausch permite derivar uma expressão para o cálculo do momento torsor externo resistente T_n , sendo este equilibrado pelas forças internas máximas instaladas nas barras que constituem a treliça espacial. Esta expressão é obtida através das considerações de equilíbrio e utilizando o conceito de resistência última:

$$T_n = \frac{2A A_t f_{st} y}{s}, \text{ ou} \quad (1)$$

$$T_n = \frac{2A A_l f_{st} y}{s} = \frac{2A \hat{A}_l f_{ty}}{u} \quad (2)$$

Nas equações anteriores, A_t representa a área da secção transversal de uma barra de uma cinta transversal, f_{sty} é a tensão de cedência da armadura transversal, A_l é a área da secção transversal de uma barra longitudinal, f_{sly} é a tensão de cedência da armadura longitudinal, $\hat{A}_l = nA_l$ a área total da armadura longitudinal, s o espaçamento longitudinal entre cintas e u é o perímetro da área limitada pela linha média de uma cinta fechada (A) que contém a parte oca.

As equações 1 e 2 podem ser igualadas de modo a relacionar a área total da armadura longitudinal, \hat{A}_l , com a área de uma barra da armadura transversal, A_t . Igualando $f_{ly} = f_{sy} = f_y$ obtém-se uma relação utilizada como método de dimensionamento:

$$\hat{A}_l s = A_t u \quad (3)$$

Esta equação significa que, volumetricamente, a quantidade de armadura longitudinal deve ser igual à quantidade de armadura transversal, sendo esta condição denominada por *princípio da igualdade de volume*.

Posteriormente verificou-se que a equação de Rausch (Eq.1) para a resistência à torção não era conservativa [20]. O modelo do autor não considera mecanismos como a resistência ao corte da escora, a resistência ao corte provocada pelo efeito de “ferrolho” nas barras transversais e longitudinais, a contribuição do núcleo de betão nem a resistência à tracção do betão. Como a equação de Rausch não incorporava a contribuição do betão, esta foi modificada de modo a melhorar a sua precisão. As modificações podem ser classificadas em três aproximações.

A primeira aproximação assume que a armadura é parcialmente eficiente. Andersen [3], em 1935, apontou o facto da treliça de Rausch assumir uma tensão uniforme ao longo de toda a armadura de uma viga sujeita a torção [1]. Ao contrário de St. Venant, a analogia de Rausch considera a uniformidade de tensões e, conseqüentemente, Andersen sugeriu que a equação de Rausch deveria ter em conta um coeficiente para a armadura, λ , variando entre 2/3 a 1, dependendo este da secção transversal e do número de barras da armadura. Andersen sugeriu também que o betão deveria contribuir para a resistência à torção e por isso a equação do autor possui um termo adicional, T_e , que representa a resistência à torção da viga sem armadura:

$$T_n = T_e + \lambda \frac{2A A_t f_{sy}}{s} \quad (4)$$

Esta aproximação é simplista, no entanto, o conceito do coeficiente de Andersen foi largamente usado.

Na segunda aproximação foi reduzida a área A assumindo uma definição arbitrária para a linha média do fluxo de corte. Esta aproximação foi sugerida por Lampert e Thurlimann em 1969 [38] e adoptada pelo código modelo europeu de 1978 [16].

A terceira aproximação indicada por Collins e Mitchell em 1980 [18] consiste também na redução da área A assumindo que a linha média do fluxo de corte coincide com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras de betão. Porém, a formulação apresentada entra em conflito com a resistência total do betão à compressão uniaxial medida em provetes cilíndricos padrão e, segundo alguns autores [27], constitui um erro porque a resistência das escoras de betão é reduzida pela fissuração diagonal (*softening effect*).

Todas as aproximações foram consideradas deficientes pois eram apenas aplicáveis a vigas rectangulares com dimensões típicas usadas em edifícios e também os métodos empíricos de modificação da equação de Rausch não eram satisfatórios ao nível teórico.

2.3. A Treliza Espacial com Ângulo Variável de Hsu e Mo

2.3.1. Considerações Gerais

O modelo teórico mais consensual, com o objectivo de unificar o dimensionamento à torção, é o modelo de treliza espacial com ângulo variável (MTEAV).

Lampert e Thurlimann em 1969 [38] utilizaram o modelo de treliza de uma forma mais generalizada. Estes autores assumiram que o ângulo de inclinação das escoras de betão podia desviar-se de 45° e que a teoria da plasticidade poderia ser aplicada aos elementos de betão armado. Assim, foi possível explicar o facto de que as armaduras (transversal e longitudinal) podiam entrar em cedência, mesmo se estas não respeitavam o princípio da igualdade de volume. Como o ângulo das escoras de betão podia afastar-se de 45° , os autores designaram a sua teoria de *Modelo de Treliza com Ângulo Variável* (MTEAV). Foram derivadas três equações de equilíbrio que incorporam o ângulo variável das escoras de betão, o qual era determinado pela magnitude relativa das forças de cedência nas armaduras transversais e longitudinais. No entanto, no processo de dimensionamento, este ângulo podia ser escolhido de modo a se conseguir a máxima economia nas áreas de armadura transversal e longitudinal, desde que garantidas as condições em serviço.

Lampert e Thurlimann em 1969 [38], ao estudar a deformação de vigas sujeitas à torção, verificaram que as superfícies inicialmente planas das vigas transformavam-se numa superfície hiperbólica após a deformação por torção. Por este motivo, uma escora diagonal de betão sofreria flexão em adição à compressão. Os autores derivaram duas condições de compatibilidade, a partir de considerações geométricas, uma relacionando a curvatura de flexão da escora de betão com o ângulo de torção da viga e outra relacionando a mesma curvatura com a extensão máxima de compressão à superfície da referida escora.

O MTEAV foi estudado por Elfgren em 1972 [21] que observou que este modelo era análogo à teoria do campo de tracções apresentado por Wagner em 1929 [53] para uma viga em perfil metálico de alma fina. Após ocorrer a encurvadura da alma por corte, uma viga metálica comporta-se como uma treliça, a alma absorve apenas tensões de tracção na direcção diagonal. Por analogia, numa viga de betão armado é assumido que a alma, após fissuração, absorve apenas tensões de compressão. Elfgren designou a sua teoria de *Teoria do Campo de Tensões de Compressão*. A equação derivada pelo autor para determinar este ângulo foi baseada na teoria da plasticidade.

A teoria de Lampert e Thurlimann e a teoria de Elfgren podem ser designadas de *Teoria da Plasticidade do Campo de Tensões de Compressões*, que é a base do método exacto do código modelo europeu desde 1978 (MC 78 [16]).

Collins em 1973 [17] desenvolveu de uma forma diferente o MTEAV. Em vez de utilizar a teoria da plasticidade, o referido autor usou a compatibilidade de deformações no modelo de treliça. O autor derivou uma equação de compatibilidade com o objectivo de determinar o ângulo do campo de tensões de compressão que permitiu estabelecer as condições de deformação utilizando o círculo de Mohr. A teoria de Collins pode ser designada de *Teoria da Compatibilidade do Campo de Compressões*.

Para caracterizar o comportamento do betão à compressão nas escoras é necessário introduzir a Curva $\sigma - \varepsilon$, tendo em conta o *softening effect*, no MTEAV. Hsu e Mo em 1985 [31][32] resolveram este problema.

As vantagens do MTEAV podem ser resumidas da seguinte forma:

- A teoria fornece um conceito claro de como uma viga de betão armado resiste à torção pura após a fissuração;
- O efeito do pré-esforço pode ser incluído de uma forma lógica no equilíbrio da treliça;
- O MTEAV prevê a deformação de uma viga à torção ao longo do historial da carga;
- O método fornece uma boa previsão da resistência de vigas à torção quando comparada com os resultados de ensaios experimentais.

2.3.2. Formulação do MTEAV para Vigas de Betão Armado

As equações básicas de equilíbrio para a torção utilizando o MTEAV são, em parte, derivadas a partir do modelo de treliça plano aplicado ao caso do problema de esforço transversal em vigas. É considerado o equilíbrio de uma viga de betão armado de alma fina sujeita à acção combinada do esforço transversal e da flexão, assumindo um modelo de treliça como o ilustrado na Fig.11 (a).

O equilíbrio de um elemento da viga A de comprimento $d_v \cot \alpha$ (Fig.11 (a) e (b)), após decomposição da força de corte V nas forças \bar{N} (dividida entre a armadura longitudinal superior e inferior, com valor $\frac{\bar{N}}{2} = \frac{V \cot \alpha}{2}$) e D (absorvida pelas escoras diagonais de betão, com valor $D = \frac{V}{\sin \alpha}$), conduz ao estabelecimento da seguinte equação para o cálculo da tensão nas escoras diagonais de betão, σ_d :

$$\sigma_d = \frac{D}{t d_v \cos \alpha} = \frac{V}{t d_v \sin \alpha \cos \alpha} \quad (5)$$

onde:

t - espessura da parede.

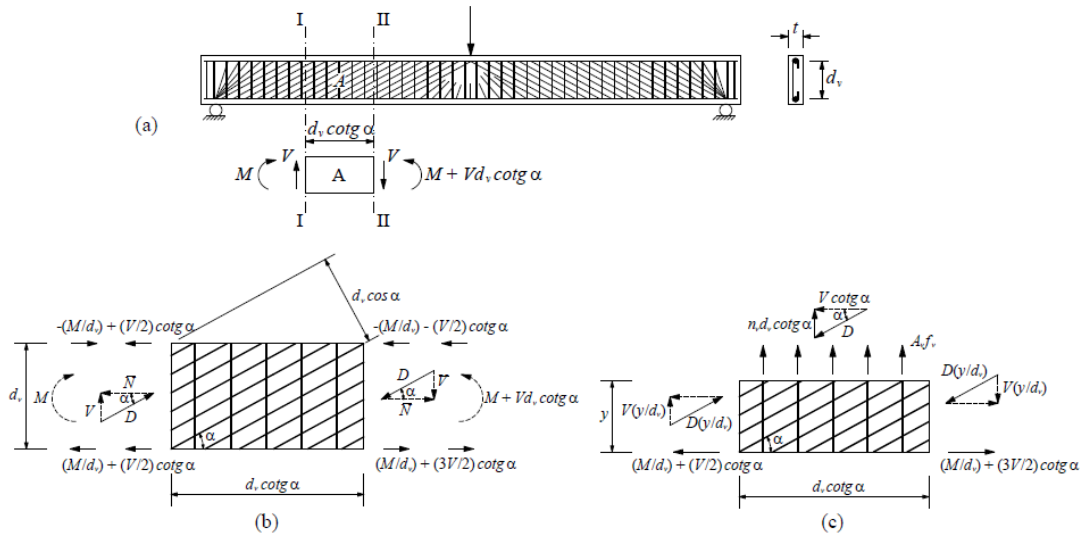


Figura 11 - Análise de uma viga com base no método de treliça plana [27]

Para o cálculo das forças nas armaduras longitudinais, é necessário ter em conta que, em adição à força $\bar{N}/2$ provocada pela força de corte V na corda superior e inferior, o momento M provoca um força $\pm M/d_v$ na face esquerda e de $\pm(M + V d_v \cot \alpha)/d_v$ na face direita do elemento A (Fig.11 (b)). Ao efectuar a soma, as forças na corda superior e inferior, N_t e N_b , são:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (6)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (7)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (8)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (9)$$

A força da armadura transversal é obtida efectuando um corte horizontal no elemento de viga A (Fig.11 (c)). O equilíbrio horizontal do corpo livre resultante implica a existência de uma força horizontal $V \cot \alpha$ na superfície de corte, que pode ser decomposta em duas forças, D e $n_v d_v \cot \alpha$ sendo esta última uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento, n_v . A partir do triângulo de forças superior ilustrado na Fig.11 (c) e sendo $n_v = A_v f_v / s$ vem:

$$n_v d_v = V \tan \alpha \Leftrightarrow A_v f_v = V \frac{s}{d_v} \tan \alpha \quad (10)$$

O ângulo das bielas de betão, α , encontra-se governado pela relação entre o volume de armadura longitudinal e transversal, não sendo necessariamente igual a 45° .

A Fig.12 apresenta um modelo de treliça espacial com ângulo variável para uma viga com secção rectangular vazada, sujeita à torção pura. A secção é armada com quatro barras de canto idênticas e cintas espaçadas uniformemente (s).

Na Fig.12 (a), na secção transversal interior pode observar-se duas forças: as forças nas barras longitudinais de canto e as forças nas escoras diagonais com um ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A resultante das forças constitui o fluxo de corte q no plano da secção transversal. Este fluxo de corte, circulatório e constante, é induzido por um momento torsor aplicado e tem o valor de:

$$q = \frac{T}{2A_o} \quad (11)$$

O parâmetro A_o é a área limitada pela linha média do fluxo de corte (Fig.12 (b)), sendo esta assumida como coincidindo com a linha média da parede com espessura t .

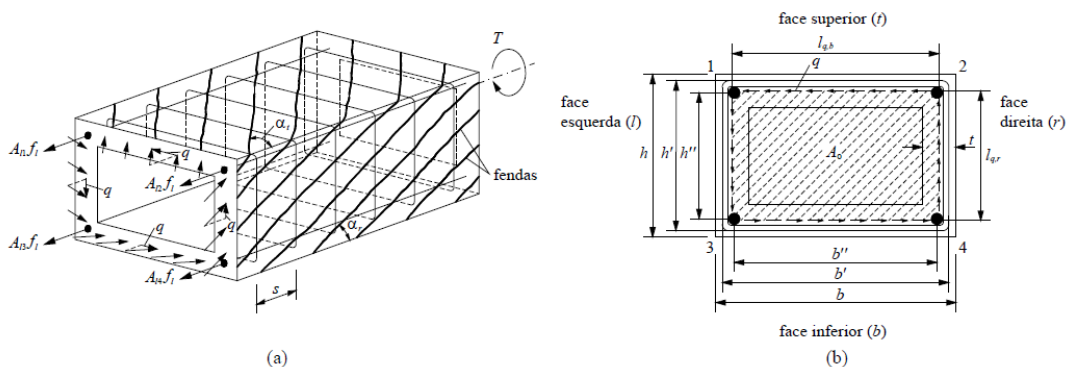


Figura 12 - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [27]

O efeito de uma força de corte actuando numa parede recta de uma viga com secção vazada é idêntico ao de uma força de corte a actuar na alma de uma viga regular. Considerando l_q a altura da parede, a força de corte na parede recta é $V = ql_q$ e a força longitudinal na armadura de uma parede é $\bar{N} = V \cot \alpha = ql_q \cot \alpha$ (Fig.11). Ao definir $p_o = \sum l_q$ como sendo o perímetro da linha média do fluxo de corte, a força total nas barras longitudinais da secção $\Delta N = A_l f_l$, onde A_l e f_l representam a área total e a tensão da armadura longitudinal, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_o \cot \alpha = A_l f_l \quad (12)$$

Introduzindo q da Eq.11 na equação anterior vem:

$$A_l f_l = \frac{T p_o}{2A_o} \cot \alpha \quad (13)$$

A força em cada ramo da cinta pode ser derivada a partir da Eq.10 com $q = V/d_v$ e inserindo a Eq.11, então:

$$A_t f_t = q \times s \tan \alpha = \frac{T \times s}{2A_o} \tan \alpha \quad (14)$$

A área de uma barra transversal é representada por A_t e a respectiva tensão por f_t .

A tensão na escora diagonal de betão obtém-se utilizando a Eq.5 simultaneamente com a Eq.11:

$$\sigma_d = \frac{q}{t \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{T}{2A_o t \sin \alpha \cos \alpha} \quad (15)$$

As Eqs.11, 13, 14 e 15 constituem as quatro equações básicas de equilíbrio para a torção no MTEAV. Estas também são válidas para secções rectangulares cheias, tendo Hsu em 1968 [24] observado que a resistência última experimental de uma viga com secção cheia é semelhante ao de uma viga com secção vazada com dimensões exteriores, material, quantidade e disposição de armaduras iguais. O núcleo de betão não é efectivo aquando da rotura, sendo o momento torsor resistido principalmente pela casca exterior do elemento.

Se a armadura longitudinal e transversal entrarem em cedência ($f_l = f_{ly}$ e $f_t = f_{ty}$), as Eqs.13 e 15 estabelecem o equilíbrio da treliça para o momento torsor resistente último.

A geometria que resulta da flexão de uma escora de betão encontra-se ilustrada na Fig.13 (a) para a parede superior de uma viga com secção vazada sujeita à torção. A parede é ilustrada pela superfície plana OABC ao nível médio do fluxo de corte q . A linha diagonal OB (Fig.13 (b)) representa uma escora com ângulo de inclinação α , em relação à direcção longitudinal.

Ao impor à viga caixão um ângulo de torção θ , o lado CB roda para a posição CD com ângulo $\theta l_q \cotg \alpha$ (Fig.13 (b)). A superfície OADC é um parabolóide hiperbólico e a escora de betão OD fica curva. De modo a obter a curvatura da escora, a superfície parabólica hiperbólica é traduzida pela equação do deslocamento w :

$$w = \theta xy \quad (16)$$

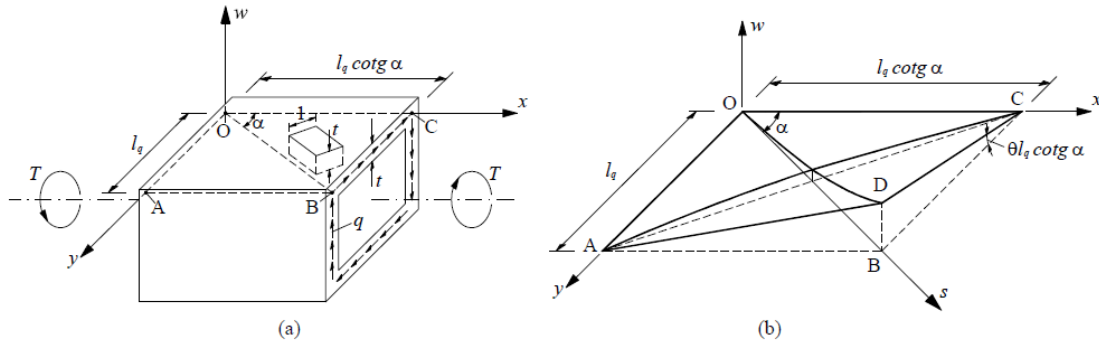


Figura 13 - Flexão de uma escora de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [27]

A inclinação da escora de betão pode ser obtida derivando a Eq.16 em relação a s , segundo a direcção da escora diagonal:

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta y) \cos \alpha + (\theta x) \sin \alpha \quad (17)$$

A curvatura da escora, Ψ , é dada pela segunda derivada de w em relação a s :

$$\Psi = \frac{d^2w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin 2\alpha \quad (18)$$

Devido à flexão da escora de betão é possível que ocorram tracções junto à face inferior, sendo que, nestas condições, a área da escora deve ser desprezada no cálculo. Apenas a área da escora em compressão, com profundidade, t_d (valor determinado pelas equações de equilíbrio e propriedades do bloco de tensões), é considerada efectiva. Assumindo uma distribuição de extensões linear, a extensão máxima de compressão à superfície, ε_{ds} , é:

$$\varepsilon_{ds} = \Psi t_d \quad (19)$$

As Eqs.18 e 19 são as duas equações de compatibilidade para a flexão das escoras de betão devido à torção.

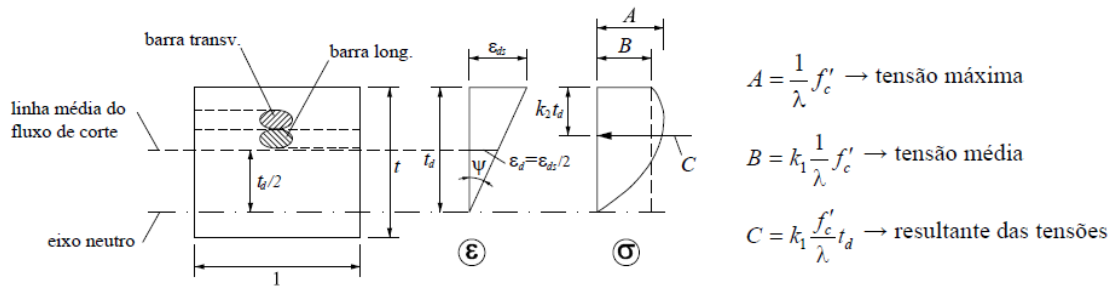


Figura 14 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [27]

O diagrama das tensões ao longo da profundidade efectiva t_d da escora de betão (Fig.14) deve ser baseado numa Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido na direcção principal de compressão tendo em conta o *softening effect*. De modo a compreender o método usado para incorporar a Curva $\sigma - \varepsilon$ no MTEAV, considere-se uma versão simplificada da Curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Vecchio e Collins em 1981 [51] apresentada na Fig.15. A referida curva foi proposta a partir dos resultados do ensaio de placas de resistência normal ao corte.

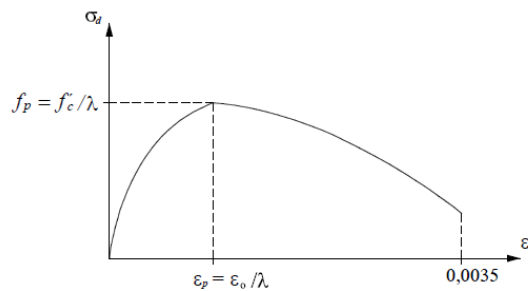


Figura 15 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o *softening effect* [51]

A Curva $\sigma - \varepsilon$ apresentada na Fig.15 é traduzida pelas seguintes equações:

$$\sigma_d = f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_o} \right) - \lambda \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] \text{ se } \varepsilon_d \leq \varepsilon_p \quad (20)$$

$$\sigma_d = f_p (1 - \eta^2) \text{ se } \varepsilon_d > \varepsilon_p \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varepsilon_t + \varepsilon_d}}{\sqrt{\varepsilon_d} \cos \alpha} \quad (22)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{2\varepsilon_o - \varepsilon_p} \quad (23)$$

onde:

η - relação ente as forças resistentes nas armaduras na direcção longitudinal e transversal;

ε_t - extensão na armadura transversal / extensão na direcção transversal.

O parâmetro f'_c representa a resistência à compressão uniaxial do betão obtida em provetes cilíndricos padrão e ε_0 é a extensão correspondente. Os parâmetros ε_l e ε_d representam a extensão longitudinal e diagonal da placa, respectivamente.

O coeficiente empírico $1/\lambda$ traduz o efeito da fissuração diagonal (*softening effect*) que reduz a resistência do betão comprimido nas escoras a partir do valor padrão, f'_c para $\varepsilon\sigma_p = f'_c/\lambda$, bem como a extensão correspondente ε_0 para $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\lambda$. Por isso, $1/\lambda$ é denominado de factor ou coeficiente de redução (*softening parameter*).

Para calcular a tensão média do diagrama de tensões de compressão na escora B e a sua resultante C, é fundamental calcular o coeficiente k_1 (quociente entre a tensão média e o pico de tensão, Fig.14). Este coeficiente pode ser calculado integrando as Eqs.20 e 21 numericamente ou analiticamente. As expressões matemáticas são (onde $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\lambda$):

$$k_1 = \lambda \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} \right)^2 \text{ para } \varepsilon_{ds} \leq \varepsilon_0/\lambda \quad (24)$$

$$k_1 = \left(1 - \frac{1}{(2\lambda-1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} \right) + \frac{1}{(2\lambda-1)^2} \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \right) \text{ para } \varepsilon_{ds} > \varepsilon_0/\lambda \quad (25)$$

As Figs.16 (a) e (b) representam o processo de integração para a obtenção do coeficiente k_1 :

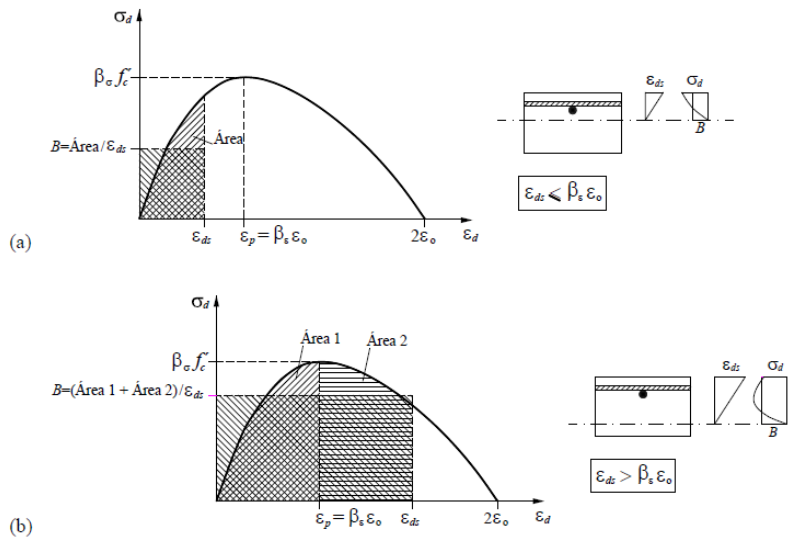


Figura 16 - Integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras [4]

Quando a viga atinge a rotura, a profundidade do diagrama de tensões de compressão pode ser obtida através da Eq.15, considerando $t = t_d$, $\sigma_d = \frac{k_1 f'_c}{\lambda}$ e $T = T_n$:

$$t_d = \frac{T_n}{2A_o(k_1 f'_c / \lambda) \sin \alpha \cos \alpha} \quad (26)$$

Usualmente, assume-se que a linha média do fluxo de corte se encontra a meia profundidade do diagrama de tensões (Fig.14) e, conseqüentemente, o perímetro da linha média do fluxo de corte, p_o , e a área limitada pela mesma linha média, A_o , podem ser obtidos por:

$$p_o = p_c - 4t_d \quad (27)$$

$$A_o = A_c - \left(\frac{t_d}{2}\right) p_c \quad (28)$$

onde p_c é o perímetro exterior da secção transversal e A_c é a área da secção transversal limitada pelo mesmo perímetro.

O MTEAV permite calcular, também, a evolução dos vários parâmetros caracterizadores do estado das vigas ao longo de todo o historial de carga a partir de um método computacional, uma vez que este modelo é não linear e contém uma série de variáveis interdependentes inicialmente desconhecidas. Assim, é necessário recorrer a um procedimento iterativo de cálculo.

Para determinar a curva teórica $T - \theta$ com base no MTEAV são necessárias três equações de equilíbrio para calcular o momento torsor T , a espessura efectiva t_d e o ângulo α das bielas de compressão. O momento torsor é calculado pela Eq.15 com $t = t_d$:

$$T = 2A_o t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha \quad (29)$$

O ângulo α pode ser obtido por substituição de T a partir da equação anterior na Eq.13 ou 14:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_l f_l}{p_o \sigma_d t_d}, \text{ ou} \quad (30)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_t f_t}{s \sigma_d t_d} \quad (31)$$

Somando as equações, a espessura efectiva, t_d , é:

$$t_d = \frac{A_l f_l}{p_o \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (32)$$

As Eqs.29, 30 (ou 31) e 32 constituem as três equações de equilíbrio do MTEAV.

As equações para determinar as extensões na armadura transversal (ε_t) e longitudinal (ε_l) e o ângulo de torção (θ) podem ser obtidas utilizando as Eqs.18 e 19:

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_l + \varepsilon_d) \cot \alpha \quad (33)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_t + \varepsilon_d) \tan \alpha \quad (34)$$

$$\theta = \frac{p_o}{2A_o} \gamma \quad (35)$$

As Eqs.33 e 34 são derivadas a partir do círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte [27]. A Eq.35 é proveniente da teoria do tubo fino de Bredt [13], onde $\gamma = \tau/G$ (G - módulo de distorção) é uma constante e $p_o = \oint ds$ é o perímetro da linha média do fluxo de corte. Substituindo a Eq.34 na Eq.35, esta última na Eq.18 e por último a Eq.18 na Eq.19, vem:

$$\varepsilon_{ds} = \frac{2p_o t_d}{A_o} (\varepsilon_t + \varepsilon_d) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (36)$$

A extensão da armadura na direcção transversal pode ser obtida substituído t_d a partir da Eq.29 na Eq.36 e considerando $\varepsilon_d = \varepsilon_{ds}/2$ (Fig.14):

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_o^2 \sigma_d}{p_o T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (37)$$

A extensão da armadura na direcção longitudinal é:

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_o^2 \sigma_d}{p_o T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (38)$$

Eliminando Ψ a partir das Eqs.18 e 19, o ângulo de torção é dado por:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (39)$$

As Eqs.37, 38 e 39 constituem as três equações de compatibilidade do MTEAV.

2.3.3. Implementação das Relações $\sigma - \varepsilon$ e Cálculo da Curva $T - \theta$

A tensão nas escoras diagonais de betão, σ_d , é definida como sendo a tensão média de um diagrama de tensões de compressão não uniforme (Fig.14):

$$\sigma_d = k_1 \beta_\sigma f'_c \quad (40)$$

Na equação anterior, β_σ é o factor de redução para as tensões para ter em conta o *softening effect*.

Os parâmetros A, B, e C correspondentes ao pico de tensão, à tensão média e à resultante do diagrama de tensões (Fig.14), são obtidos a partir de:

$$A = \beta_\sigma f'_c \quad (41)$$

$$B = k_1 \beta_\sigma f'_c \quad (42)$$

$$C = k_1 \beta_\sigma f'_c t_d \quad (43)$$

Nas equações anteriores, o parâmetro k_1 representa o quociente entre a tensão média e o pico de tensão do diagrama de tensões na escora de betão (Fig.14), sendo obtido, para cada extensão ε_{ds} , a partir da integração das equações que descrevem a Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras. Para definir matematicamente a Curva $\sigma - \varepsilon$ existem diferentes propostas de vários autores, tal como foi observado por Costa em 2005 [19]. Tal facto ilustra a dificuldade em escolher qual a relação mais apropriada. Refere-se que em 2010, Andrade [4] efectuou um estudo exaustivo no sentido de avaliar, utilizando o MTEAV e realizando análises comparativas com resultados experimentais, qual a relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras mais apropriada para o caso da torção. Neste estudo foi também englobada a classe das vigas de alta resistência.

No que se refere às armaduras ordinárias e de pré-esforço traccionadas, é necessário incorporar no modelo as expressões matemáticas das suas relações $\sigma - \varepsilon$ e para as quais existem também várias propostas, desde relações $\sigma - \varepsilon$ bilineares estabelecidas uniaxialmente até relações médias não lineares tendo em conta o *stiffening effect*. Andrade em 2010 [4] também incorporou o estudo destas relações nas suas análises.

Com base nas equações expostas ao longo das Secções 2.3.1 e 2.3.2 e tendo por base o exposto anteriormente nesta secção, é possível estabelecer métodos iterativos, na forma de simples algoritmos, para a construção da curva teórica $T - \theta$. Nesses métodos, são usualmente tomadas como parâmetros desconhecidos ε_{ds} , t_d , β_σ e β_ε , sendo habitual no início seleccionar ε_{ds} e estimar os restantes parâmetros. Os valores finais obtidos em cada iteração para estes mesmos parâmetros são comparados com os inicialmente tomados, constituindo este procedimento o critério de convergência. Seleccionando sucessivos valores para ε_{ds} e repetindo o cálculo do algoritmo é possível calcular pares de valores $(\theta; T)$ para traçar integralmente a curva teórica $T - \theta$. A rotura teórica da viga é geralmente definida impondo extensões convencionais de rotura para os materiais (betão e aço das armaduras). A título ilustrativo, a Fig.17 ilustra o diagrama de fluxo com a estrutura exemplificativa de um algoritmo para o cálculo da curva teórica $T - \theta$, para uma viga de betão armado à torção e para o caso genérico em que devem ser atribuídos valores iniciais para ambos os factores de redução β_σ e β_ε .

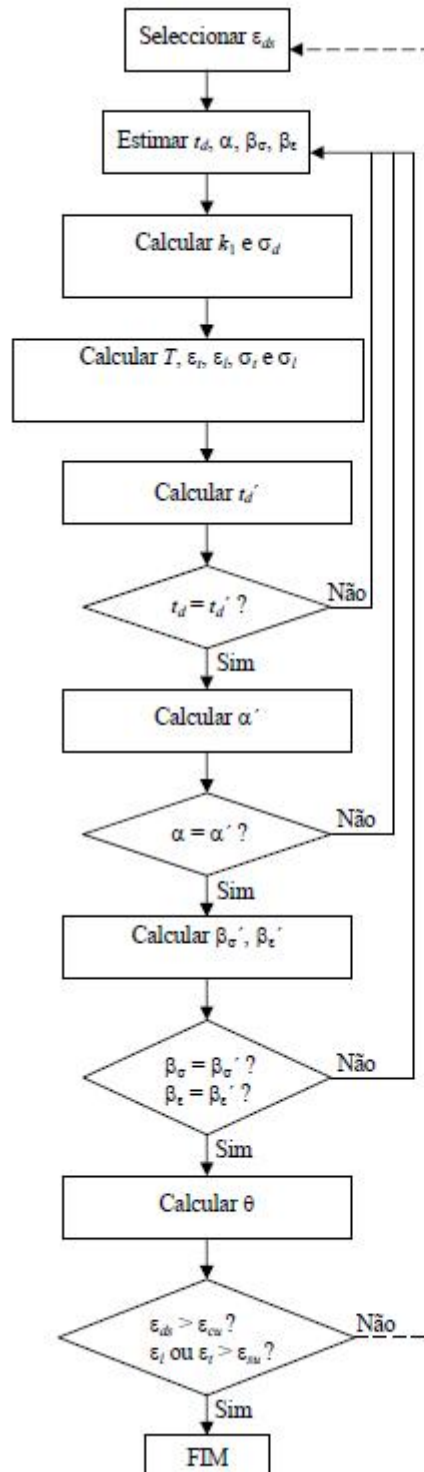


Figura 17 - Exemplo de um diagrama de fluxo para o cálculo da Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado [4]

2.4. O Modelo de Comportamento Global de Bernardo e Lopes

2.4.1. Considerações Gerais

Tendo por base as limitações do MTEAV referidas na secção 2.3.1, Bernardo e Lopes em 2008 [11] definiram um modelo teórico global com vista à previsão do comportamento de vigas sujeitas à torção mediante o traçado das curvas de comportamento $T - \theta$ em todas as suas fases comportamentais. A aproximação teórica realizada foi dividida por fases, cada uma delas identificando-se com uma fase particular do comportamento das vigas à torção retratada na Fig.6 ilustrada no Capítulo 1, secção 1.4. Cada fase foi apresentada com o recurso a uma dada teoria que foi devidamente comprovada após uma análise paramétrica baseada em abundantes resultados experimentais, designadamente:

- Fase 1: análise elástico-linear em regime não fissurado (Estado I);
- Fase 2b: análise elástico-linear em regime fissurado (Estado II);
- Fase 3: análise não linear.

Após a caracterização de cada fase, os autores deliberaram critérios de transição entre as diversas teorias para a construção da Curva $T - \theta$ final, permitindo a comparação com resultados experimentais e validar o modelo.

2.4.2. Modelação da Zona Comportamental 1

Desenvolvendo algumas correcções, Bernardo e Lopes [11] usaram diferentes teorias base para caracterizar o comportamento à torção de uma viga na fase não fendilhada (Estado I), designadamente: a teoria da St. Venant [48], a teoria da flexão enviesada de Hsu [23] e a teoria do tubo fino de Bredt [13]. Numa das correcções foi necessário utilizar um factor minorativo para o cálculo da rigidez de torção segundo a teoria da elasticidade, em virtude de, imediatamente antes de atingir a fissuração, os ensaios experimentais mostrarem que a queda de rigidez de torção nas vigas de betão armado é já cerca de 20 a 40 % em relação ao valor elástico [14].

Tendo por base uma análise comparativa com resultados experimentais, Bernardo e Lopes [11], assim como também posteriormente Andrade em 2010 [4], mostraram que o momento torsor de fissuração para vigas com secção cheia ou vazada podia ser calculado de forma razoável com base na Teoria do Tubo Fino de Bredt [12]. Para tal, os autores usaram uma formulação variante proposta por Hsu e Mo em 1985 [31] baseada na teoria original de Bredt e aplicável a vigas de betão armado com secção rectangular vazada (f'_c em *psi*, t em *in.* e A_c em *in.²*):

$$T_{cr} = 2A_c t (2,5\sqrt{f'_c}) \quad (44)$$

A área limitada pelo perímetro exterior da secção é dada por A_c e t representa a espessura da parede de secção vazada. A Eq.44 pode ser aplicada no caso de secções rectangulares, onde $t = 1,2 A_c/p_c$ em que p_c (em in.) é o perímetro exterior da secção transversal [27].

A Eq.44 é formulada em função de uma determinada percentagem do designado módulo de rotura do betão, f_r , que deve constituir uma medida da sua resistência à tracção em torção. O cálculo deste módulo de rotura é feito por correlação com a resistência à compressão do betão. Hsu em 1968 [23] propôs o módulo de rotura para a torção $f_r = 21(1 + 10/x^2)^3 \sqrt{f'_c}$, valido para $x \geq 4$ in (10,2cm). Ao realizar análises comparativas baseadas nos resultados de ensaios com vigas de alta resistência, Bernardo em 2003 [10] observou que a Eq.44 sobrestimava o momento torsor de fissuração das vigas analisadas entre 15% a 20%. Devido a esta observação, e após realizar um estudo de correlação com base nos resultados experimentais utilizados, Bernardo propôs multiplicar a referida equação, por um factor minorativo de 0,85 quando $f_{ck} > 50$ MPa (f_{ck} corresponde ao valor característico da resistência do betão à compressão).

A observação experimental mostra que a presença de armaduras atrasa ligeiramente a fissuração. Em 1968, Hsu [25] propôs a seguinte equação empírica para o cálculo do momento torsor de fissuração efectivo $T_{cr,ef}$:

$$T_{cr,ef} = (1 + 4\rho_{tot})T_{cr} \quad (45)$$

A percentagem total de armadura de torção, ρ_{tot} , é calculada através da soma das percentagens de armadura longitudinal (ρ_l) e transversal (ρ_t), calculadas a partir de:

$$\rho_l = \frac{A_l}{A_c} \quad (46)$$

$$\rho_t = \frac{A_t u}{A_c s} \quad (47)$$

onde:

A_l - área total de armadura longitudinal;

A_t - área de um ramo da cinta transversal;

A_c - área da secção transversal limitada pelo perímetro exterior (incluindo a parte oca);

s - espaçamento longitudinal entre cintas;

u - perímetro da linha média das cintas.

A rotação unitária correspondente a T_{cr} , em unidades rad/m , é obtida através da equação:

$$\theta_{cr}^I = \frac{T_{cr,ef}}{K_t^I} \quad (48)$$

onde:

K_t^I - rigidez de torção (Estado I) minorada: $K_t^I = K(GC)^I$;

$(GC)^I$ - rigidez de torção (Estado I) calculada pela teoria da elasticidade;

K - factor minorativo ($K \approx 0,7$);

G - módulo de distorção: $G = E_c/[2(1 + \nu)]$ (sendo E_c o módulo de elasticidade do betão e $\nu \approx 0,2$ o coeficiente de Poisson para o betão);

C - factor de rigidez de torção.

O factor minorativo K tem em conta que, conforme verificado por observações experimentais [14], antes de ser atingida a fissuração, a queda de rigidez é já cerca de 20 a 40 % em relação ao valor elástico. O valor de $K = 0,7$ foi proposto por Bernardo e Lopes [11] tendo por base análises comparativas com bastantes resultados experimentais.

Para secções rectangulares, o factor de rigidez de torção C é calculado pelas equações:

$$C = \beta x^3 y \text{ (secção cheia)} \quad (49)$$

$$C = 4A^2 h/u \text{ (secção vazada)} \quad (50)$$

em que:

x, y - menor e maior dimensão da secção cheia, respectivamente (Fig.18);

β - Coeficiente de St. Venant;

A - área limitada pela linha média da parede da secção vazada ($A = x_1 y_1$, em que x_1 e y_1 representam a menor e maior dimensão da linha média da parede, respectivamente (Fig.18));

u - perímetro da linha média da parede da secção vazada: $u = 2x_1 + 2y_1$ (Fig.18);

h - espessura da parede da secção vazada.

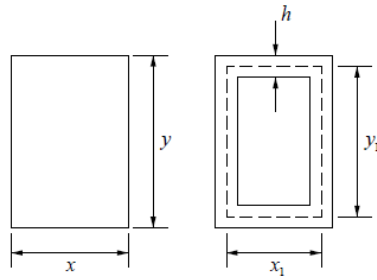


Figura 18 - Parâmetros geométricos para uma secção rectangular cheia e vazada [10]

A Figura seguinte ilustra a parte da Curva $T - \theta$ que corresponde à Zona I da Fig.6 (ilustrada no Capítulo 1, secção 1.4), cuja curva pode ser aproximada a uma recta que une a origem do referencial $(0; 0)$ ao ponto $(\theta_{cr}^I; T_{cr,ef})$.

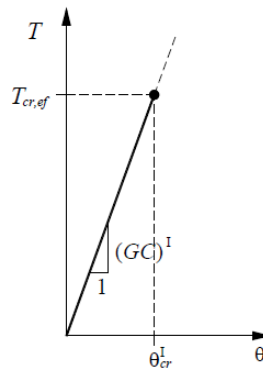


Figura 19 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime não fissurado (Estado I) [10]

2.4.3. Modelação da Zona Comportamental 2.b

Para a fase comportamental em estudo nesta secção, Bernardo e Lopes [11] assumiram que a Curva $T - \theta$ podia ser aproximada a uma recta, cuja inclinação era definida pela rigidez de torção após a fissuração $((GC)^{II})$. Para calcular esta última, os autores utilizaram uma expressão proposta por Hsu em 1973 [26] que foi derivada considerando que, nesta fase, a viga podia ser assimilada a um tubo de betão armado. A validade desta analogia foi comprovada por Hsu por intermédio de resultados de ensaios experimentais que mostraram que o comportamento torsional pós-fissuração não é afectado pelo núcleo de betão da secção. O referido autor combinou a teoria de Bredt para tubos de parede fina [13] com a analogia da treliça espacial de Rausch (Secção 2.2.) para simular o elemento após a fissuração.

A partir do equilíbrio e da compatibilidade de deformações de uma célula básica da treliça espacial, constituída por uma escora diagonal de betão e pelos varões das armaduras

envolventes, Hsu derivou a seguinte equação para o cálculo da rigidez de torção pós-fissuração para vigas com secção rectangular:

$$(GC)^{II} = \frac{E_s x_1^2 y_1^2 xy}{(x_1 + y_1)^2 \left[\frac{2nxy}{(x_1 + y_1)h} + \frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_t} \right]} \quad (51)$$

onde:

x_1, y_1 - menor e maior dimensão externa das cintas rectangulares, referida aos eixos dos varões, respectivamente (Fig.18);

E_s - módulo de elasticidade das armaduras;

n - coeficiente de homogeneização: $n = E_s/E_c$;

E_c - módulo de elasticidade do betão;

h - espessura da parede do tubo equivalente de betão armado.

As Eqs.46 e 47 permitem calcular a taxa de armadura longitudinal ρ_l e transversal ρ_t , respectivamente.

Os três termos constituintes do denominador da Eq.51 representam, sequencialmente, as contribuições para a rigidez pós-fissuração das escoras de betão, da armadura longitudinal e da armadura transversal.

Para introduzir a espessura h na Eq.51, Hsu propôs a adopção de uma espessura efectiva, h_e , baseada em resultados experimentais. O autor observou que a relação adimensional h_e/x era aproximadamente proporcional à taxa total de armadura $\rho_l + \rho_t$:

$$h_e = 1,4(\rho_l + \rho_t)x \quad (52)$$

A Fig.20 ilustra a parte da Curva $T - \theta$ correspondente à fase elástico-linear em regime fendilhado (Zona 2.b da Fig.6 ilustrada no capítulo 1, secção 1.4). Essa curva, aproximada a uma recta com um declive correspondente à rigidez de torção em estado fissurado $((GC)^{II})$, terá início no ponto $(\theta_{cr}^{II}; T_{cr})$ e acaba no ponto onde a viga começa a evidenciar um comportamento não linear (devido à cedência de pelo menos uma das armaduras de torção ou devido à não linearidade do comportamento do betão à compressão nas escoras).

O prolongamento inferior da recta na Fig.20 intersecta o eixo das ordenadas num determinado ponto, cujo conhecimento permite definir a posição, no referencial, da recta de comportamento em estudo. Hsu estabeleceu, igualmente a partir de resultados

experimentais, que a ordenada na origem do referido ponto podia ser obtida a partir de ηT_c , sendo η um coeficiente e T_c um momento torsor dado por (f'_c em *psi*, x e y em *in*):

$$T_c = \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f'_c} \quad (53)$$

Com base na observação experimental, Hsu conseguiu relacionar o parâmetro η com h/x , tendo estabelecido:

$$\eta = 0,57 + 2,86 h/x \quad (54)$$

Para uma secção cheia, $\eta = 2$ uma vez que $h/x = 0,5$.

A relação $T - \theta$ pós-fissuração pode então ser expressa através da expressão:

$$T = \eta T_c + (GC)^{II} \theta \quad (55)$$

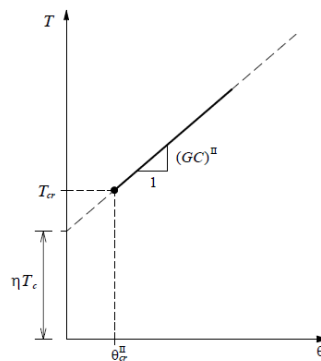


Figura 20 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fendilhado (Estado II)
[10]

Para as vigas de alta resistência ($f_{ck} > 50$ MPa), uma vez que o cálculo de T_c , através da Eq.53 depende de uma percentagem do módulo de rotura, Bernardo em 2003 [10] propôs, à semelhança do efectuado para o Estado I para o cálculo do momento torsor de fissuração, multiplicar a Eq.53 pelo factor 0,85.

Apesar do carácter semi-empírico do modelo de Hsu de 1973 [26] para caracterizar o Estado II, Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [11] verificaram que este modelo se ajusta bastante bem com as observações experimentais, incluindo com os resultados de vigas de alta resistência.

2.4.4. Modelação da Zona Comportamental 3

Bernardo e Lopes [11] assumiram que, a partir do momento em que pelo menos uma das armaduras de torção entra em cedência ou quando o betão comprimido nas escoras entra

numa fase de comportamento não linear, deixa de ser válida a análise elástico-linear em regime fendilhado (Estado II) descrita na secção 2.4.3. Para caracterizar o comportamento não linear de uma viga de betão armado à torção os referidos autores utilizaram o MTEAV tendo em conta o *softening effect*. Com base neste modelo, os referidos autores calcularam integralmente a Curva $T - \theta$, considerando-a válida apenas a partir dos pontos anteriormente referidos.

A Fig.21 ilustra esquematicamente a parte considerada "válida" da curva teórica $T - \theta$, calculada com base no MTEAV, para duas situações prováveis de ocorrer em termos de rotura da viga. A Fig.21 (a) ilustra o caso em que pelo menos uma das armaduras de torção entra em cedência antes da rotura do betão comprimido nas escoras (rotura do tipo dúctil). Para este caso, a região considerada válida do MTEAV começa no ponto onde ocorre a cedência das armaduras ($T = T_y$). A Fig.21 (b) ilustra o caso em que as armaduras não entram em cedência (rotura do tipo frágil). Para este caso, a validade do MTEAV começa no ponto onde o nível de tensões de compressão no betão nas escoras seja tal que a viga passe a evidenciar um comportamento não linear. O ponto de perda de linearidade, identificado com $T = T_{pl}$ na Fig.21 (b), foi definido por Bernardo e Lopes com base em critérios explicados na Secção 2.4.5.

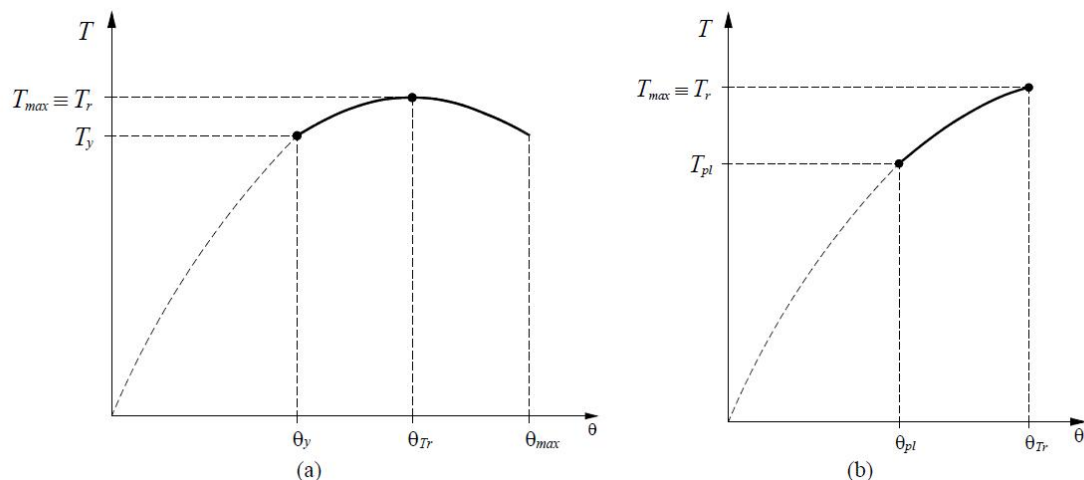


Figura 21 - Traçado teórico da fase não linear da Curva $T - \theta$ [11]

A rotura teórica da viga é definida com base nas extensões convencionais de rotura habitualmente usadas para os materiais (betão e aço das armaduras). Assim, foi considerado que a rotura da viga à torção ocorre quando a extensão máxima de compressão à superfície das escoras de betão (Fig.14), ε_{ds} , alcança o seu valor convencional de rotura (ε_{cu}) ou quando a extensão de tracção nas armaduras de torção, ε_s , alcança o seu valor convencional de rotura (ε_{su}). Para tais valores, Bernardo e Lopes [11] adoptaram o disposto no código europeu EC2 [41].

2.4.5. Critérios de Transição entre as Várias Fases Comportamentais

Uma vez que as várias fases comportamentais foram modeladas separadamente com recurso a modelos teóricos diferentes, Bernardo e Lopes [11] assumiram critérios para realizar a transição entre as respectivas Curvas $T - \theta$ previstas pelos modelos para construir integralmente a curva de comportamento.

A Fig.22 (a) ilustra o traçado da curva teórica $T - \theta$ na transição entre as fases elástico-linear em regime não fendilhado e fendilhado (Zonas 1 e 2 da Fig.6) para as vigas com secção cheia, para as quais a observação experimental aponta em geral a existência de um patamar horizontal de transição. Para as vigas com secção vazada, visto não ser em geral observado o referido patamar horizontal de transição, Bernardo e Lopes [11] assumiram que a recta correspondente à fase elástico-linear em Estado II deverá sempre começar no ponto de coordenadas $(\theta_{cr}^I; T_{cr})$. Para este caso, a Fig.22 (b) ilustra a necessária translação da curva $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fendilhado de modo a respeitar a premissa anterior. Bernardo e Lopes verificaram, com base em análises comparativas com resultados experimentais, que a translação necessária $\Delta\theta = |\theta_{cr}^{II} - \theta_{cr}^I|$ para vigas com secção vazada mostrou ser sempre muito pequena, validando o critério.

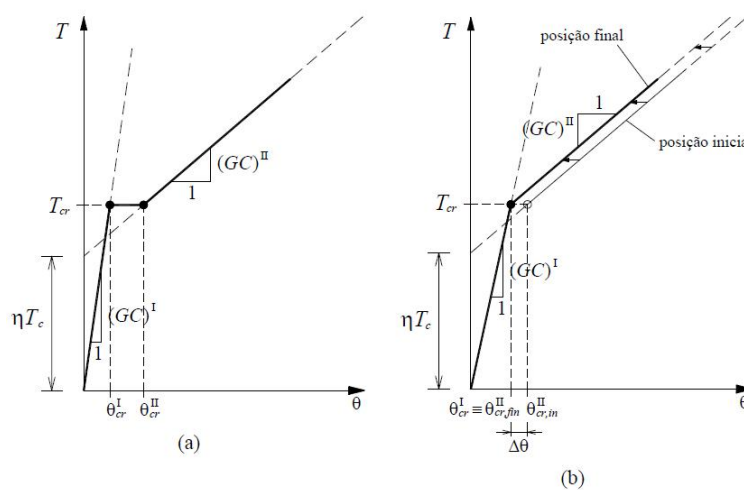


Figura 22 - Transição entre as zonas 1 e 2: (a) secção cheia, (b) secção vazada [11]

As Figs.23 e 24 mostram o traçado da curva teórica $T - \theta$ na transição entra as fases elástico-linear em regime fendilhado e não linear (Zonas 2 e 3 da Fig.6) para as duas situações possíveis de ocorrer no que se refere ao tipo de rotura: rotura do tipo dúctil e rotura do tipo frágil, respectivamente.

Como o cálculo da Curva $T - \theta$ na fase não linear foi realizada com base no MTEAV, Bernardo e Lopes [11] esperavam que as rotações calculadas para a fase comportamental última seriam

sobrestimadas. Esta hipótese conduziu os referidos autores à escolha dos critérios de transição ilustrados nas Figs.23 e 24.

Para as vigas com rotura do tipo dúctil (Fig.23), a metodologia adoptada por Bernardo e Lopes [11] consistiu em deslocar horizontalmente para a esquerda a curva teórica $T - \theta$ correspondente à análise não linear (unicamente o troço correspondente à pós-cedência das armaduras) segundo o eixo das rotações e de um valor igual à translação necessária $\Delta\theta$, unindo-se assim à curva da fase elástico-linear em Estado II no ponto correspondente à cedência das armaduras. Este deslocamento da curva da fase não linear provoca uma pequena redução das rotações respectivas ($\Delta\theta$), o que podia ser entendido, segundo os referidos autores como uma pequena correcção das rotações.

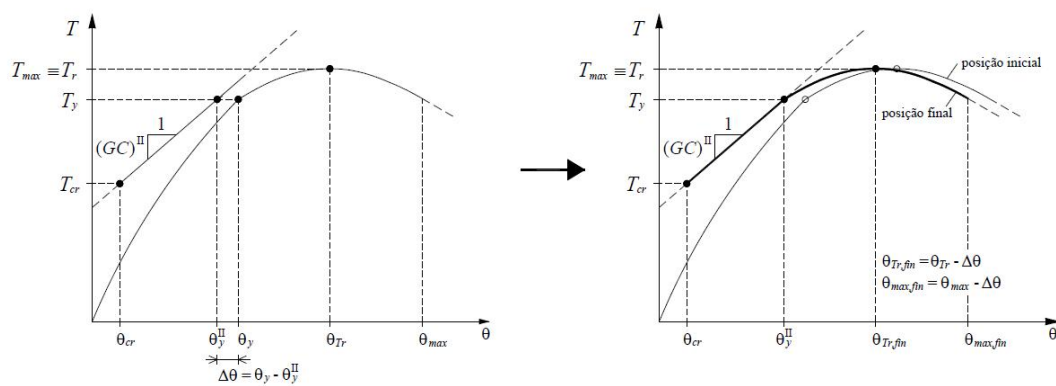


Figura 23 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura dúctil [11]

Para as vigas com rotura do tipo frágil (Fig.24), Bernardo e Lopes definiram um novo critério para localizar o limite superior de validade da curva elástico-linear em Estado II. Os autores fizeram corresponder esse limite ao ponto, correspondente a um determinado momento torsor a calcular, a partir do qual se verifique que o declive da curva não linear passe a ser superior ao da curva elástico-linear. Esse ponto encontra-se identificado na Fig.24 com o momento torsor T_A , correspondendo-lhes duas rotações: θ_A^II e θ_A . A diferença entre estas rotações, $\Delta\theta$, corresponderá ao deslocamento horizontal para a esquerda que a curva não linear, no seu troço acima do Ponto A, terá de sofrer, para que tal ponto seja comum às duas curvas.

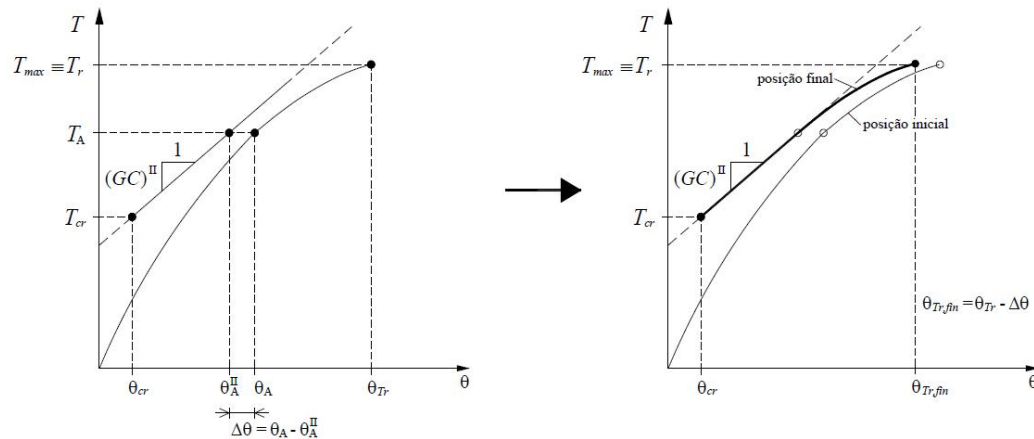


Figura 24 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura dúctil [11]

Nos casos ilustrados nas Figs. 23 e 24, os critérios adoptados foram sempre no sentido de, quando necessário, deslocar unicamente no sentido das rotações a curva não linear, em detrimento da curva elástico-linear cuja posição não é alterada. Esta escolha não é arbitrária, devendo-se essencialmente ao facto dos autores esperarem que as rotações correspondentes à curva não linear estarem um pouco sobrestimadas devido ao facto do MTEAV assumir um estado plenamente fendilhado desde o início do carregamento. Além disto, a validade da teoria usada para o cálculo do posicionamento da curva elástico-linear (fase 2) foi confirmada por Hsu em 1973 [26] com base em resultados experimentais.

A hipótese das rotações correspondentes à curva não linear estarem um pouco sobrestimadas foi comprovada experimentalmente por Bernardo e Lopes, embora o nível de sobrestimação se tenha revelado em geral bastante baixo. Tal também foi confirmado pelos autores mediante os valores calculados para a translação da curva $\Delta\theta$, a qual era sempre em geral baixa em todos os casos analisados pelos autores. Desta forma, o deslocamento da curva teve, no geral, pouco impacto nas rotações finais.

Apesar do carácter arbitrário dos critérios de transição, Bernardo e Lopes [11] confirmaram a validade do seu modelo global proposto com base em análises referentes à construção de curvas teóricas $T - \theta$ e à sua comparação com as respectivas curvas experimentais de vigas ensaiadas e cujos resultados foram encontrados na literatura.

2.5. O MTEAV modificado por Andrade

2.5.1. Considerações Gerais

Com o objectivo de implementar um procedimento de cálculo baseado apenas no MTEAV para prever o comportamento global de vigas à torção, Andrade em 2010 [4] modificou o MTEAV de forma a tentar adaptá-lo à fase comportamental pré-fissuração, introduzindo algumas correcções no formalismo original do modelo. As correcções foram feitas com o objectivo de

manter, na generalidade, a estrutura da formulação do MTEAV bem como a metodologia de cálculo. Tal modelo global, comparativamente ao anteriormente apresentado e proposto por Bernardo e Lopes [11] pode assim ser considerado mais consistente do ponto de vista teórico.

2.5.2. Modelação da Zona Comportamental 1

Para corrigir a formulação original do MTEAV para a modelação da fase pré-fissuração ou Estado I (zona comportamental 1 da Fig.6), Andrade em 2010 [4] estabeleceu primeiro que o limite de validade dessa fase comportamental (momento torsor de fissuração) podia ser calculado tendo por base a teoria do tubo fino de Bredt [13] com base no disposto na Secção 2.4.2 e tal como adoptado também por Bernardo e Lopes [11].

Andrade optou por tentar calcular a rigidez de torção em Estado I directamente com base no MTEAV. O objectivo era que o MTEAV conseguisse simular posteriormente a passagem da viga do Estado I para o Estado II. Tal passagem deve-se à perda instantânea da rigidez da viga devido à fissuração do betão. Para tal, o modelo teórico devia incorporar de alguma forma, na sua formulação, a contribuição do betão traccionado no Estado I. Se tal fosse conseguido, a passagem do Estado I para o Estado II poderia ser facilmente simulada pela perda instantânea dessa contribuição no modelo.

Neste sentido, Andrade decidiu que as modificações a realizar na formulação do MTEAV deveriam ser no sentido de repor o estado não fendilhado da secção, mediante a consideração de toda a secção de betão traccionado como sendo efectiva. Além disso, o núcleo de betão nas vigas com secção cheia devia ser incorporado, particularmente para o cálculo da rigidez.

Em primeiro lugar, para manter a consistência com as hipóteses formuladas para o estabelecimento do MTEAV, Andrade definiu uma secção vazada equivalente também para a fase pré-fissuração (Fig.25). Para as vigas com secção cheia, o autor seguiu as recomendações do ACI 318R-05 [2] que, ao adoptar também a teoria do tubo fino de Bredt para o cálculo do momento torsor de fissuração, especifica a consideração de uma espessura equivalente (h_{eq}) de parede igual a $0,75A_{cp} / p_{cp}$, sendo A_{cp} a área limitada pelo perímetro exterior da secção e p_{cp} o perímetro exterior da secção. Para as vigas com secção vazada, Andrade adoptou o mesmo critério, com a ressalva de que a espessura equivalente deve ser inferior ou igual à real, adoptando a espessura real caso esta condição seja violada. Tal espessura equivalente foi usada para calcular algumas propriedades da secção, não sendo esta atribuída ao parâmetro t_d (valor de cálculo da espessura das escoras) cujo valor será calculado de acordo com a formulação geral do MTEAV a partir das condições de equilíbrio e de compatibilidade do modelo para cada incremento de deformação ε_{ds} em estudo.

Assumindo que na fase comportamental em estudo a existência de armaduras não condiciona o posicionamento da linha média do fluxo de corte, Andrade definiu A_0 (área limitada pela

linha média do fluxo de corte) como sendo a área limitada pela linha média da parede equivalente (para as vigas com secção vazada adoptou o mesmo critério com a ressalva de que se a área fosse superior à real adoptar-se-ia a área real) e p_o (perímetro da linha média do fluxo de corte) o perímetro dessa mesma área:

$$A_o = (x - h_{eq})(y - h_{eq}) \quad (56)$$

$$p_o = 2(x - h_{eq}) + 2(y - h_{eq}) \quad (57)$$

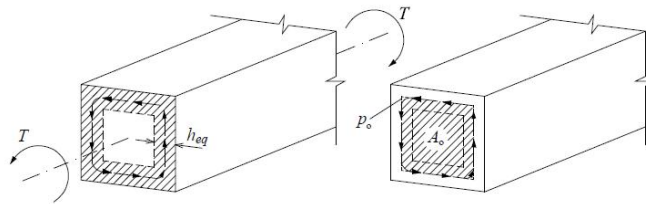


Figura 25 - definição da secção vazada equivalente para o Estado I [4]

Apesar de na fase comportamental em estudo, em virtude das armaduras terem uma pequena influência, ser habitual considerar para as trajectórias dos campos de tensões um ângulo de $\alpha = 45^\circ$, Andrade assumiu que o ângulo das escoras de betão era uma variável a ser calculada pelo MTEAV para cada incremento de deformação ε_{ds} .

Na sua formulação original, o MTEAV, ao estabelecer o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal, admite que as respectivas forças são absorvidas apenas pelas armaduras longitudinais e transversais na fase comportamental em estudo. Andrade contabilizou o betão traccionado nas referidas direcções, optando por homogeneizar a secção na direcção longitudinal e transversal, tomando como espessura de betão participativo juntamente com as armaduras o correspondente à espessura equivalente (h_{eq}) anteriormente definida. Uma vez que as equações de equilíbrio originais do MTEAV estão escritas em função das forças nas armaduras ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t/s$ para as armaduras transversais), a área de betão considerado participativo foi “transformado” em área equivalente de aço. Desta forma, designando por $F_{l,tot}$ e $F_{t,tot}$ a força longitudinal total e a força transversal total distribuída (tendo em conta a participação do betão traccionado), respectivamente, vem:

$$F_{l,tot} = A_l h f_l = (A_l + nA_{cl,eq})f_l \quad (58)$$

$$F_{t,tot} = A_t h f_t/s = (A_t + nA_{ct,eq})f_t/s \quad (59)$$

$$A_{cl,eq} = xy - (x - h_{eq})(y - h_{eq}) \quad (60)$$

$$A_{ct,eq} = sh_{eq} \quad (61)$$

Nas equações anteriores, $n = E_c/E_s$ é o coeficiente de homogeneização, A_{lh} e A_{th} são as áreas de aço homogeneizadas na direcção longitudinal e transversal, respectivamente, $A_{cl,eq}$ e $A_{ct,eq}$ são as áreas equivalentes de betão considerado “participante” para a armadura longitudinal total e para uma unidade da armadura transversal.

A definição das áreas de betão participativas para o cálculo das forças totais de equilíbrio na direcção longitudinal e transversal e as respectivas forças nessas direcções encontra-se ilustrada na Fig.26 (a) e (b), respectivamente.

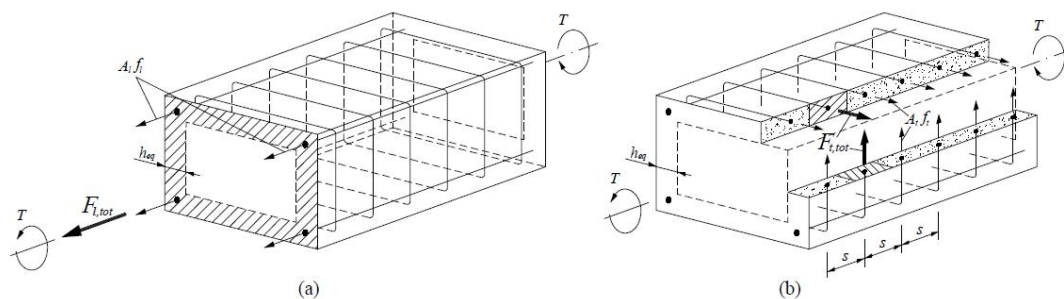


Figura 26 - Forças totais para o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal [4]

A necessidade de considerar as forças totais na direcção longitudinal e transversal tal como anteriormente definido obriga a que os parâmetros t_d e α sejam considerados variáveis de cálculo pois a utilização do método de cálculo iterativo e do respectivo formalismo original do MTEAV conduz a que os parâmetros anteriormente definidos continuam a depender das referidas forças. A atribuição de valores constantes aos parâmetros t_d e α implicaria a não consideração das forças referidas.

Tendo por base o exposto anteriormente e a formulação geral do MTEAV, Andrade formulou um novo algoritmo para o cálculo dos pontos da curva teórica $T - \theta$ para a fase comportamental 1 (Estado I), implementando-o computacionalmente. Para tal, escolheu relações matemáticas não lineares $\sigma - \varepsilon$ adequadas para caracterizar o comportamento do betão comprimido nas escoras e das armaduras traccionadas.

Para considerar a participação do núcleo de betão nas secções cheias ou do eventual betão interior “sobrante” para as secções vazadas para o cálculo da rigidez, Andrade optou por, sem alterar o conceito do modelo de cálculo assumido (tubo equivalente), “somar” à rigidez de torção da secção vazada equivalente a rigidez à torção do seu núcleo ou betão interior, recorrendo assim ao conceito de sobreposição de efeitos. Esta rigidez suplementar foi calculada através da teoria da elasticidade [48]. Para calcular as dimensões correspondentes

ao núcleo de betão (secções cheias) e ao eventual betão interior (secções vazadas), Andrade começou por definir tais dimensões a partir das dimensões exteriores da secção real, às quais deve ser subtraída duas vezes a espessura equivalente (Fig.27 (a)). Nesta hipótese não é considerada a existência de sobreposição entre a secção equivalente considerada no modelo de cálculo e o núcleo de betão, sendo assumido que o tubo equivalente e o núcleo se encontram “desligados”, o que não corresponde à realidade. Após várias simulações e análises comparativas com resultados experimentais Andrade verificou que tal opção não era adequada. Para corrigir esta situação, Andrade adoptou um segundo critério que consistiu em sobrepor a secção real e o núcleo (ou betão interior) até à linha média do fluxo de corte, considerada a uma profundidade de $h_{eq}/2$ medida do exterior (Fig.27 (b)). Tal opção mostrou ser mais adequada do que o primeiro critério.

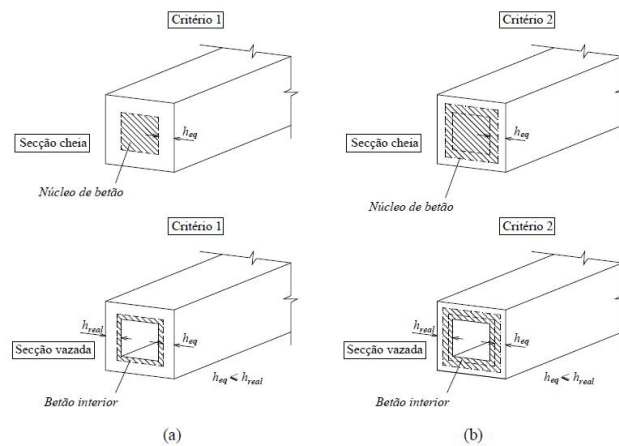


Figura 27 - Definição das dimensões exteriores no núcleo e do betão interior [4]

2.5.3. Modelação da Transição da Zona Comportamental 2.a

A modelação da subzona 2.a (Fig.6), utilizando o método do MTEAV modificado de acordo com o exposto anteriormente, tem como premissa básica o facto do betão fissurar. Assim, após ser atingido o momento torsor de fissuração, Andrade [4] considerou que, de forma instantânea, deixa de ser contabilizada a participação do betão traccionado na direcção longitudinal e transversal para o equilíbrio do modelo. Desta forma, as equações de equilíbrio do modelo de treliça ficam novamente escritas apenas com as forças nas armaduras ordinárias ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t/s$ para as armaduras transversais).

$$F_{l,tot} = A_l f_l \quad (62)$$

$$F_{t,tot} = A_t f_t / s \quad (63)$$

Teoricamente, o desaparecimento da participação do betão traccionado mantendo o mesmo nível de carregamento da viga, correspondente ao momento torsor de fissuração, provoca um

incremento instantâneo da rotação observado experimentalmente para as vigas com secção cheia. Nas vigas com secção vazada as observações experimentais não mostram a existência do referido incremento. Para estas vigas, Andrade assumiu a não existência da subzona 2.a.

Bernardo em 2003 [10] mostrou que o núcleo das secções cheias influencia o comportamento das vigas em Estado II, especialmente a rigidez de torção. Desta forma, Andrade assumiu a influência do núcleo no procedimento de cálculo para modelar a subzona 2.a, ou seja, o núcleo continua a influenciar o comportamento da viga, designadamente a rigidez, aquando da passagem para o estado fendilhado.

Uma vez que a viga se encontra agora no estado fendilhado, a espessura da escora de betão é definida pelo parâmetro t_d cujo valor é calculado de acordo com a formulação do MTEAV. Desta forma, os parâmetros A_0 (área limitada pela linha média do fluxo de corte) p_0 (perímetro da linha média do fluxo de corte) voltam a ser definidos em função de t_d , assumindo que a linha média do fluxo coincide com a linha média de uma parede com espessura t_d .

A Fig.28 ilustra a passagem do Estado I para o Estado II de acordo com a metodologia adoptada por Andrade. Como pode ser observado na Fig.28, a subzona 2.a aparece “naturalmente”, correspondendo assim a um patamar horizontal, com momento torsor constante e igual a T_{cr} , e limitado num intervalo de deformações $\theta_{cr}^I \leq \theta \leq \theta_{cr}^{II}$. O valor de θ_{cr}^I corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre o patamar horizontal para $T = T_{cr}$ e o MTEAV modificado por Andrade (com a participação do betão à tracção). O valor de θ_{cr}^{II} corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre o patamar horizontal para $T = T_{cr}$ e o MTEAV tendo em conta a influência do núcleo de betão (ou betão interior) na rigidez de torção.

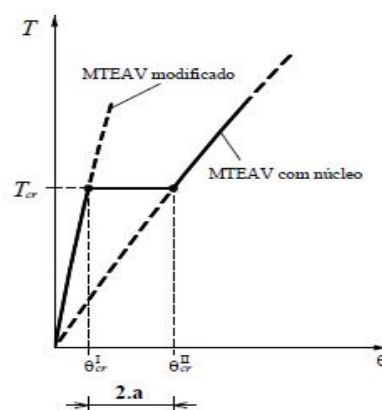


Figura 28 - Modelação Teórica da Subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]

2.5.4. Modelação da Zona Comportamental 2.b e 3

Depois de a viga atingir o momento torsor de fissuração, esta entra no estado fendilhado e, por isso, o MTEAV, passaria a ser válido. Tendo por base análises comparativas com numerosos resultados experimentais, Andrade verificou que a Curva $T - \theta$ teórica, calculada com base no MTEAV para a Fase b, e particularmente para as vigas com secção cheia, encontra-se deslocada para a direita em relação à curva experimental. Este desfasamento é maior para os níveis mais baixos de carregamento na fase de comportamento 2.b, tendendo a diminuir à medida que a viga caminha para a sua fase comportamental última. Tal observação é aceitável dado que o MTEAV assume um estado plenamente fendilhado desde o início do carregamento, o que não corresponde à realidade. A observação de maiores desvios para as vigas com secção cheia foi justificado por Andrade pelo facto do modelo de treliça espacial com ângulo variável desprezar por completo qualquer influência do núcleo de betão na rigidez de torção pós-fissuração, sendo que na realidade, e como já foi referido anteriormente, tal influência existe na realidade.

As observações de Andrade permitem caracterizar, no geral, os desvios observados entre as Curvas $T - \theta$ teórica e experimental de acordo com a Fig.29 (a). Deste modo e tendo em conta os resultados para as fases comportamentais anteriores, Andrade optou por corrigir a Curva $T - \theta$ calculada com base no MTEAV para aproximar os resultados teóricos aos experimentais. Tal correcção deveria incidir particularmente no troço da Curva $T - \theta$ correspondente à Fase 2b (Fig.6).

Andrade teve por base as conclusões de Bernardo e Lopes, que verificaram no seu modelo que a translação $\Delta\theta$ era em geral pequena na transição entre as fases comportamentais 2b e 3. Assim, Andrade escolheu, como critério de correcção, manter fixo todos os pontos da curva teórica $T - \theta$, obtida com o MTEAV, localizados à direita do ponto de coordenadas $(\theta_n; T_n)$, e proceder ao ajustamento da mesma curva teórica $T - \theta$ desde o ponto correspondente ao início do comportamento em estado fendilhado (Fase b da Fig.6), ponto com coordenadas $(\theta_{cr}^II; T_{cr})$, até ao ponto referido anteriormente $(\theta_n; T_n)$. A coordenada θ_{cr}^II é determinada com base no MTEAV modificado. A correcção é feita apenas no eixo das rotações dado que as previsões teóricas obtidas com base no MTEAV para os diferentes níveis de momentos torsores são bastante boas. Recorde-se que o MTEAV é estabelecido com a premissa de que a viga se encontra extensivamente fendilhada logo desde o início do carregamento. Tal premissa, associada à não incorporação de qualquer influência do núcleo de betão para as vigas com secção cheia, constitui muito provavelmente a causa da maior dificuldade do MTEAV prever correctamente as rotações com o mesmo grau de precisão obtido para os níveis últimos dos momentos torsores. Segundo Andrade, este aspecto justifica a opção referida anteriormente em proceder ao ajustamento apenas das rotações na fase comportamental 2.b.

A metodologia escolhida pelo autor para proceder à correcção da curva teórica $T - \theta$ para a fase b encontra-se ilustrada na Fig.29 (b), sendo considerada válida para vigas com secção vazada e para vigas com secção cheia. De acordo com a Fig.29 (b), a rotação obtida através do MTEAV e correspondente ao momento tursor de fissuração (T_{cr}) é corrigida mediante uma translação $\Delta\theta_{cr}$ de forma a coincidir com o valor de θ_{cr}^{II} . Entre a rotação correspondente a T_{cr} (que sofre a correcção anterior) e a rotação θ_n correspondente a T_n (que não sofre correcção), as rotações são corrigidas simplifcadamente com base na variação linear ilustrada no triângulo das translações da Fig.29 (b).

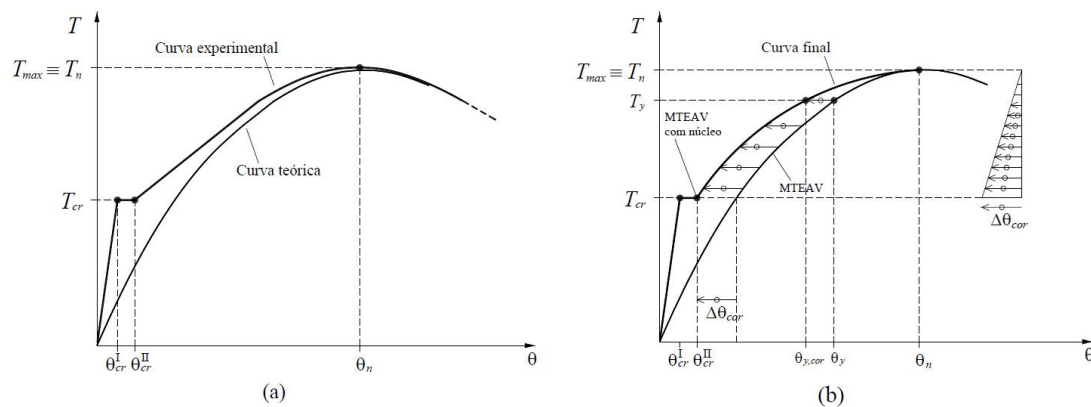


Figura 29 - Desvios entre as Curvas $T - \theta$ experimental e teórica e correcção (Zona 2.b) [4]

Como foi mencionado anteriormente, uma vez que os desvios entre a Curva $T - \theta$ teórica e experimental para a zona 2.b são maiores para as vigas com secção cheia, o método de correcção anteriormente apresentado tem maiores repercussões para este tipo de vigas. Do ponto de vista físico, o método de correcção ilustrado na Fig.29 (b) pode ser entendido, segundo Andrade, como uma forma simples e indirecta de entrar com a influência no núcleo de betão na rigidez de torção entre os pontos extremos de coordenadas $(\theta_{cr}^{II}; T_{cr})$ e $(\theta_n; T_n)$. Tal influência é considerada máxima para o primeiro ponto, considerando-se uma variação linear entre os mesmos.

Tendo por base numerosos resultados experimentais, Andrade [4] verificou que o critério de correcção das rotações anteriormente descrito é bastante adequado.

2.6. Notas Finais

Os estudos do comportamento à torção de vigas de betão armado conduziram a duas teorias principais, as quais influenciaram significativamente a regulamentação internacional sobre esta problemática.

Dadas as hipóteses assumidas para o estabelecimento do MTEAV, designadamente a não consideração da resistência à tracção do betão e o assumir de um estado plenamente

fendilhado da viga desde o início do carregamento, este modelo fornece boas previsões do comportamento à torção apenas para a fase última comportamental tendo sido comprovado através da observação experimental. Para baixos níveis de carregamento, o MTEAV mostra-se bastante inadequado.

Tendo em conta a limitação do MTEAV, Bernardo e Lopes [11] desenvolveram um modelo que reúne várias teorias, designadamente a analogia da treliça espacial para a fase pós-fissuração, para caracterizar cada fase comportamental das vigas à torção. Para construir a curva teórica $T - \theta$ foi necessário os autores estabelecerem alguns critérios de transição.

Apesar da base um pouco empírica para o estabelecimento dos referidos critérios, Bernardo e Lopes [11] confirmaram a validade do seu modelo global comparando as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com numerosos resultados experimentais. No entanto, o facto do modelo global incorporar tais critérios bem como teorias diferentes torna este modelo teoricamente não satisfatório.

O MTEAV modificado de Andrade [4], que incluiu relações constitutivas recentes e comprovadas para os materiais (incluindo o *softening effect* e o *stiffening effect*), constitui uma tentativa para generalizar o MTEAV a todo o domínio comportamental de uma viga à torção. Este modelo foi testado comparando as previsões do comportamento global obtidas com os resultados experimentais de diversos autores, tendo o autor comprovado a validade do mesmo e tendo demonstrado níveis de previsão idênticos aos obtidos pelo modelo de Bernardo e Lopes [11]. Ainda que no MTEAV haja a necessidade de utilizar um critério de correcção para as rotações em Estado II e não apresente previsões adequadas para o momento torsor de fissuração, tal modelo pode ser considerado mais aceitável do que o proposto por Bernardo e Lopes, constituindo assim um avanço na procura do estabelecimento de um modelo evolutivo único baseado no MTEAV para caracterizar todas as fases comportamentais das vigas à torção.

Capítulo 3

Modelo de Membrana para Elementos de Betão Armado Sujeitos à Torção

3.1. Considerações gerais

Desde a evolução do modelo treliça por Ritter [47] e Mörsch [40] para o betão armado sujeito ao corte, muitos modelos teóricos para elementos membrana foram desenvolvidos e aperfeiçoados. Os modelos racionais que satisfazem o equilíbrio, compatibilidade e não linearidade das relações constitutivas incluem: a teoria do campo de compressões (Compression Field Theory - CFT) [18][50], o modelo de treliça com ângulo variável (Rotating-Angle Softened Truss Model - RA-STM) [42][9][43] e o modelo de treliça com ângulo fixo (Fixed-Angle Softened Truss Model - FA-STM) [43][34]. O modelo de membrana (Softened Membrane Model - SMM) [35] considera o efeito de Poisson em estado fendilhado caracterizado por duas relações Hsu/Zhu [56]. Este modelo prevê na totalidade as curvas carga-deformação, incluindo os ramos ascendente e descendente e também os resultados antes e pós-fissuração.

Utilizando o modelo de membrana para o corte desenvolvido por Hsu e Zhu, foi possível obter um novo modelo de membrana para elementos sujeitos à torção (Softened Membrane Model for Torsion - SMMT) capaz de prever a Curva $T - \theta$, incluindo as respostas em fase pré e pós-fissurada, assim como os tramos pré e pós-rotura. Neste novo modelo são necessárias duas modificações nas relações constitutivas de modo a considerar o gradiente de extensão (*strain gradient*), provocado pelos momentos na estrutura de betão na zona de fluxo de corte. O gradiente de extensão aumenta a força de tracção do betão e diminui as razões Hsu/Zhu.

Jeng e Hsu [37] publicaram um artigo onde realçam as boas previsões do modelo SMMT para os valores do momento torsor de fendilhação, o momento torsor máximo e os respectivos valores das rotações. No entanto os autores apresentam análises comparativas apenas para vigas de betão armado de secção cheia sujeitas à torção.

3.2. Equações de Equilíbrio

Quando um elemento prismático de betão armado é sujeito a um momento torsor externo (T) como ilustrado na Fig.30 (a), esta mesma acção é suportada por uma acção interna formada por um fluxo de corte q . Este fluxo de corte ocupa a zona de fluxo de corte [28][29] com uma espessura efectiva t_d . O elemento A na zona de fluxo de corte está sujeito a uma tensão de corte (Fig.30 (b)). No plano de equilíbrio deste elemento segundo o SMM [35], devem ser satisfeitas três equações algébricas que podem ser descritas através da seguinte matriz:

$$\{\sigma_l \sigma_t \tau_{lt}\}^T = [T(\alpha_2)]\{\sigma_2^c \sigma_1^c \tau_{21}^c\}^T + \{\rho_l f_l \rho_t f_t \ 0\}^T \quad (64)$$

onde:

σ_l , σ_t - tensão normal na direcção longitudinal e transversal, respectivamente;

τ_{lt} - tensão tangencial de corte na direcção longitudinal e transversal;

α_2 - Ângulo entre a direcção de aplicação da tensão de compressão (direcção 2) e a direcção da armadura longitudinal (direcção 1);

σ_1^c , σ_2^c - Tensão normal média do betão segundo a direcção 1 e direcção 2, respectivamente;

τ_{21}^c - tensão tangencial média do betão nas coordenadas 1 - 2.

A matriz de transformação $[T(\alpha_2)]$ é dada por:

$$[T(\alpha_2)] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

onde $c = \cos(\alpha_2)$, $s = \sin(\alpha_2)$. Em torção pura, o elemento A está sujeito ao corte puro com $\sigma_l = \sigma_t = 0$ e $\alpha_2 = 45^\circ$. Aplicando a teoria do tubo fino de Bredt, é usada uma quarta equação [13] para descrever o equilíbrio ao longo da secção.

$$T = 2A_0q = 2A_0t_d\tau_{lt} \quad (66)$$

$$A_0 = A_c - 0,5p_c t_d + t_d^2 \quad (67)$$

$$p_0 = p_c - 4t_d \quad (68)$$

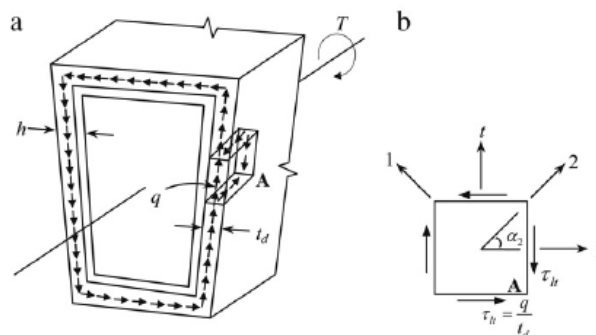


Figura 30 - Secção de betão armado sujeita à torção: (a) fluxo de corte da secção; (b) estado de tensão do elemento A [37]

3.3. Equações de Compatibilidade

No plano de compatibilidade do elemento A sujeito ao corte (Fig.30 (b)) devem ser satisfeitas três equações [35] expressas por:

$$\{\varepsilon_l \ \varepsilon_t \ \gamma_{lt}/2\}^T = [T(\alpha_2)]\{\varepsilon_2 \ \varepsilon_1 \ \gamma_{21}/2\}^T \quad (69)$$

onde:

γ_{lt} - distorção média nas coordenadas l - t das armaduras;

ε_2 - extensão na direcção 2;

ε_1 - extensão na direcção 1;

γ_{21} - tensão média de corte na direcção 2 e 1.

A quarta e a quinta equação de compatibilidade são [29]:

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma_{lt} \quad (70)$$

$$\Phi = \theta \sin 2\alpha_2 \quad (71)$$

Deve ser mencionado que a Eq.69 foi inicialmente expressa em relação ao ângulo de rotação α em teorias anteriores [29]. Como a equação é derivada exclusivamente da geometria, a mesma mantém-se quando o ângulo ϕ é substituído pelo ângulo fixo α_2 .

Na Eq.69, a curvatura ϕ resulta numa distribuição não uniforme de extensões ou num gradiente de extensão ao longo da espessura t_d (diagrama triangular da Fig.31 (a)). O gradiente de extensão é ilustrado na Fig.31 (a) através do diagrama triangular de extensão nas duas direcções principais. Tal como nas teorias do ângulo de rotação, a distribuição da extensão assume-se como linear e a profundidade da zona de compressão na estrutura assume-se como a espessura da zona de fluxo de corte t_d . Então, vem:

$$t_d = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\phi} \quad (72)$$

A extensão uniaxial média $\bar{\varepsilon}_2$ relaciona-se com a máxima extensão uniaxial $\bar{\varepsilon}_{2s}$ na superfície através de $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_{2s}/2$ [29].

Substituindo e alterando as Eqs.68-70 e as equações para calcular p_0 e A_0 da secção rectangular, é possível obter a expressão para calcular a espessura efectiva t_d da zona de fluxo de corte:

$$t_d = \frac{1}{2(Q+4)} \times \left[p_0 \left(1 + \frac{Q}{2} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{Q}{2} \right)^2 p_0^2 - 4Q(Q+4)A_0} \right] \quad (73)$$

onde

$$Q = \frac{2\bar{\varepsilon}_{2s}}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha_2} = \frac{4\bar{\varepsilon}_2}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha_2} \quad (74)$$

As Eqs.71 e 72 são derivadas para simplificar a solução do algoritmo evitando uma série de ciclos de cálculo iterativos para t_d .

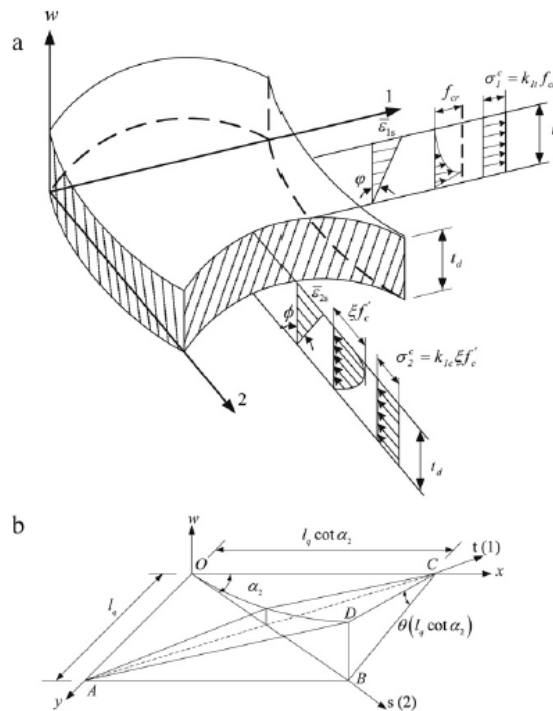


Figura 31 - Flexão da escora e do tirante: (a) Estado de tensão e deformação; (b) Superfície parabolóide hiperbólica [37]

3.4. Relações entre Extensões Biaxiais e Uniaxiais

As relações entre extensões biaxiais e uniaxiais foram apresentadas por Hsu e Zhu [35] de modo algébrico. Essas relações são dadas por:

$$\{\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_1, \gamma_{21}/2\}^T = [V]\{\varepsilon_2, \varepsilon_1, \gamma_{21}/2\}^T \quad (75)$$

onde $[V]$ é a matriz de conversão

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

e

$\bar{\varepsilon}_1$ - extensão uniaxial média na direcção 1.

E as extensões uniaxiais nas direcções longitudinal e transversal são dadas por:

$$\{\bar{\varepsilon}_l, \bar{\varepsilon}_t, \gamma_{lt}/2\}^T = [T(\alpha_2)]\{\varepsilon_2, \varepsilon_1, \gamma_{21}/2\}^T \quad (77)$$

As razões Hsu/Zhu ν_{12} e ν_{21} propostas por Zhu e Hsu [56] para elementos membrana de betão armado sujeitos ao corte e são calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\nu_{12} = 0,2 + 850\varepsilon_{sf} \quad \text{para} \quad \varepsilon_{sf} \leq \varepsilon_y \quad (78)$$

$$\nu_{12} = 1,9 \quad \text{para} \quad \varepsilon_{sf} > \varepsilon_y \quad (79)$$

$$\nu_{21} = 0 \quad (80)$$

onde:

ε_{sf} - Extensão média uniaxial da armadura ordinária que atinge em primeiro a cedência, tendo em conta as razões Hsu/Zhu.

3.5. Relação Constitutiva do Betão à Compressão

Tal como no modelo de membrana, a relação $\sigma - \varepsilon$ de compressão do betão [54] é aplicada e ilustrada na Fig.32 (a). O coeficiente de redução ζ na Fig.32 (a), que representa a redução da tensão de compressão do betão, é expressa em função de três variáveis: a extensão de tracção $\bar{\varepsilon}_1$ na direcção principal, a resistência do betão f'_c e o ângulo de desvio β . Este último parâmetro representa o ângulo entre a direcção principal e a direcção de aplicação do carregamento e é dado por:

$$2\beta = \tan^{-1}(\gamma_{21}/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)) \quad (81)$$

No modelo de treliça com ângulo variável (RA-STM) para a torção [29], um factor de tensão médio, k_{1c} , é usado no cálculo da tensão média de compressão em estruturas de betão.

$$\sigma_2^c = k_{1c}\zeta f'_c \quad (82)$$

O factor de tensão médio k_{1c} é obtido integrando as equações da Fig.32 (a):

$$k_{1c} = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s})^2}{3(\zeta \varepsilon_0)^2} \quad \text{para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1$$

$$= 1 - \frac{\zeta \varepsilon_0}{3\bar{\varepsilon}_{2s}} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s} - \zeta \varepsilon_0)^3}{3\bar{\varepsilon}_{2s}(4\varepsilon_0 - \zeta \varepsilon_0)^2} \quad \text{para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad (83)$$

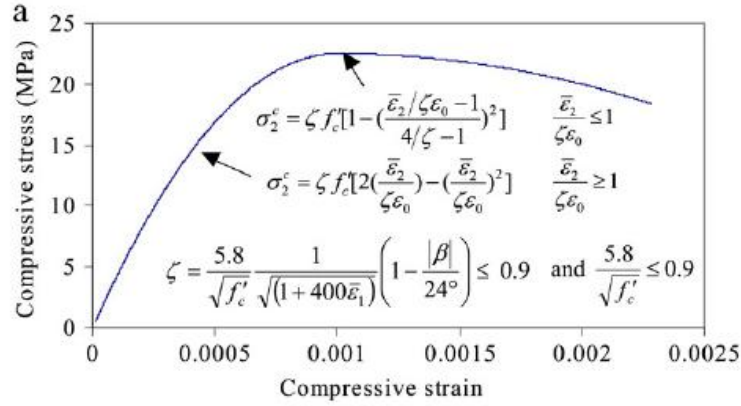


Figura 32 - Relações constitutivas dos materiais: (a) betão à compressão [37]

3.6. Relação Constitutiva do Betão à Tracção

Nas diversas teorias para a torção [18][30][33][6][39][22], a tensão de tracção é ignorada. Nenhum destes modelos consegue prever o momento torsor de fendilhação, T_{cr} , ou a rigidez dos troços pré e pós-fissuração da resposta $T - \theta$. Esta limitação é ultrapassada no SMMT, uma vez que incorpora este efeito.

O elemento A da Fig.30 está sujeito a um estado biaxial de tensão no plano de deformação. O elemento de betão é esquematicamente ilustrado na Fig.31 (a) com a hipótese de uma distribuição normal de extensão. A flexão da escora e do tirante cria uma parábola hiperbólica à superfície, ilustrado na Fig.31 (b) [29]. A curvatura ϕ da curva OD é a segunda derivada de w segundo a direcção principal de compressão (direcção 2) e foi relacionado com o ângulo de rotação θ e o ângulo fixo α_2 através da Eq.69. Simultaneamente numa direcção, pode ser derivada a curvatura φ da curva AC como sendo a derivada de w segundo a direcção principal de tracção (direcção 1).

$$\varphi = \frac{d^2w}{dt^2} = -\sin 2\alpha_2 = -\phi \quad (84)$$

Esta curvatura φ produz a distribuição de extensões de tracção e tensões no betão na zona de fluxo de corte como mostra a Fig.31 (a). Assumindo que a curvatura φ resulta numa distribuição linear da extensão de tracção ao longo da espessura efectiva t_d para a zona de tracção, tal como para a zona de compressão, a máxima extensão de tracção $\bar{\varepsilon}_{1s}$ pode ser calculada por:

$$\bar{\varepsilon}_{1s} = \varphi t_d \quad (85)$$

A extensão média de tracção uniaxial $\bar{\varepsilon}_1$ está relacionada com a máxima extensão de tracção $\bar{\varepsilon}_{1s}$ à superfície através de $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_{1s}/2$.

As relações constitutivas para o betão à tracção podem agora ser estabelecidas. Da mesma forma como para a relação $\sigma - \varepsilon$ de compressão, é necessário definir um factor médio de tensão para introduzir a relação constitutiva de tracção do betão. Para distinguir a relação de compressão da relação de tracção, o símbolo 'c' é anexado ao factor k_1 nas Eqs.82 e 83 para o betão à compressão e o símbolo 't' é anexado ao factor k_1 para o betão à tracção. Assim:

$$\sigma_1^c = k_{1t} f_{cr} \quad (86)$$

onde k_{1t} é definido como a razão da tensão média à tracção com o pico de tensão f_{cr} . Tal como k_{1c} , o factor k_{1t} pode ser obtido por integração das equações que definem a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tracção:

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{cr}} \quad \text{para} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} \leq 1$$

$$= \frac{\varepsilon_{cr}}{2\bar{\varepsilon}_{1s}} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{\bar{\varepsilon}_{1s}(0,6)} [(\bar{\varepsilon}_{1s})^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,6}] \quad \text{para} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} > 1 \quad (87)$$

onde:

ε_{cr} - extensão de rotura do betão.

Jeng e Hsu [37] descobriram, mediante análises comparativas com resultados experimentais, que a tensão de rotura do betão à tracção (f_{cr}) e o módulo de elasticidade do betão (E_c) de Belarbi e Hsu eram demasiado pequenos quando aplicados a problemas de torção. Os autores verificaram que f_{cr} e E_c de Belarbi e Hsu eram cerca de metade dos valores experimentais.

Jeng e Hsu [37] explicaram esta observação como sendo o efeito do gradiente de extensão. O modelo de membrana dos autores foi baseado em testes realizados em painéis sujeitos ao corte com extensão uniforme ao longo da espessura. Para ter em conta o efeito do gradiente de extensão, f_{cr} e E_c para a torção devem ser multiplicados por um factor de 1,45. Este valor foi obtido tendo por base a calibração do SMMT para baixos níveis de carregamento mediante análises comparativas da resposta $T - \theta$ teórica com numerosos resultados experimentais relativos a vigas sujeitas à torção.

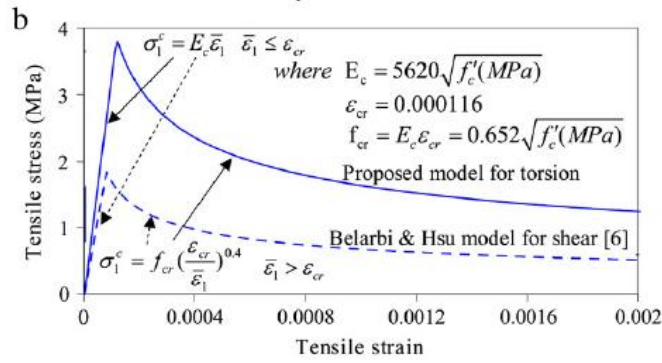


Figura 33 - Relações constitutivas dos materiais: (b) betão à tracção [37]

3.7. Relações Constitutivas do Aço em Tracção no Betão

A relação $\sigma - \varepsilon$ média para os varões de aço em tracção envolvidos em betão é ilustrada na Fig.34.

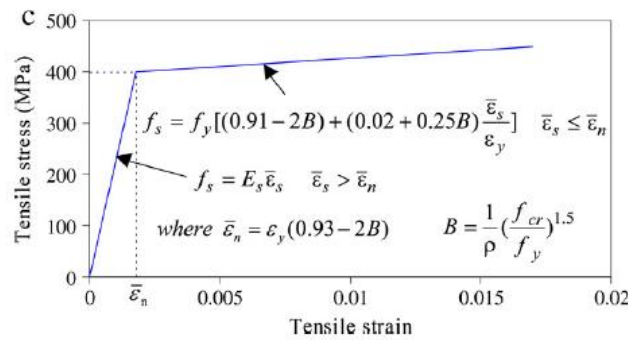


Figura 34 - Relações constitutivas dos materiais: (c) aço traccionado no betão [37]

3.8. Relações Constitutivas do Betão ao Corte

Jeng e Hsu [37] adoptaram um módulo de corte racional [57] para o SMMT de modo a relacionar a tensão de corte do betão com a extensão de corte (distorção).

$$\tau_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \gamma_{21} \quad (89)$$

3.9. Algoritmo de Solução

A solução do algoritmo proposto por Jeng e Hsu [37] para o SMMT constitui uma extensão do modelo SMM. Como critério de convergência, as duas primeiras equações de equilíbrio na Eq.64 são somadas e substituídas para obter as seguintes equações, usadas no processo de resolução:

$$\rho_l f_l + \rho_t f_t = (\sigma_l + \sigma_t) - (\sigma_2^c + \sigma_1^c) \quad (90)$$

$$\rho_l f_l - \rho_t f_t = (\sigma_l - \sigma_t) - (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \cos 2\alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin 2\alpha_2 \quad (91)$$

3.10. Modificação da Razão Hsu/Zhu para a Torção

As relações Hsu/Zhu propostas por Zhu e Hsu [56] foram obtidas através de testes em elementos membrana de betão armado sujeitos ao corte. O elevado valor (1,9) de v_{12} deve-se principalmente à extensa fissuração do betão. O elemento A para uma viga sujeita à torção (Fig.30) está sujeito a um momento fora do plano, resultando num gradiente de extensão na zona de fluxo de corte (Fig.31). Comparada com a tensão uniforme nos elementos membrana sujeitos ao corte, o gradiente de tensão nos suportes de vigas de betão armado sujeitos à torção deve diminuir a fissuração do betão e também diminuir a razão Hsu/Zhu v_{12} para a torção. É de referir que $(v_{12})_{Torção}$ seja a razão Hsu/Zhu para a torção, pode assumir-se que

$$(v_{12})_{Torção} = R \cdot (v_{12})_{Corte} \quad (92)$$

onde $(v_{12})_{Corte}$ é a razão Hsu/Zhu proposta por Zhu e Hsu [56] para elementos membrana sujeitos ao corte uniforme e R é o factor de redução.

Foi realizado um estudo sistemático e compreensivo do factor de redução R , com todos os dados experimentais de torção e rotação, no qual resultou um valor óptimo $R = 0,8$. Então, a razão Hsu/Zhu para o modelo SMMT pode ser traduzida como:

$$(v_{12})_{Torção} = 0,8(v_{12})_{Corte} \quad (93)$$

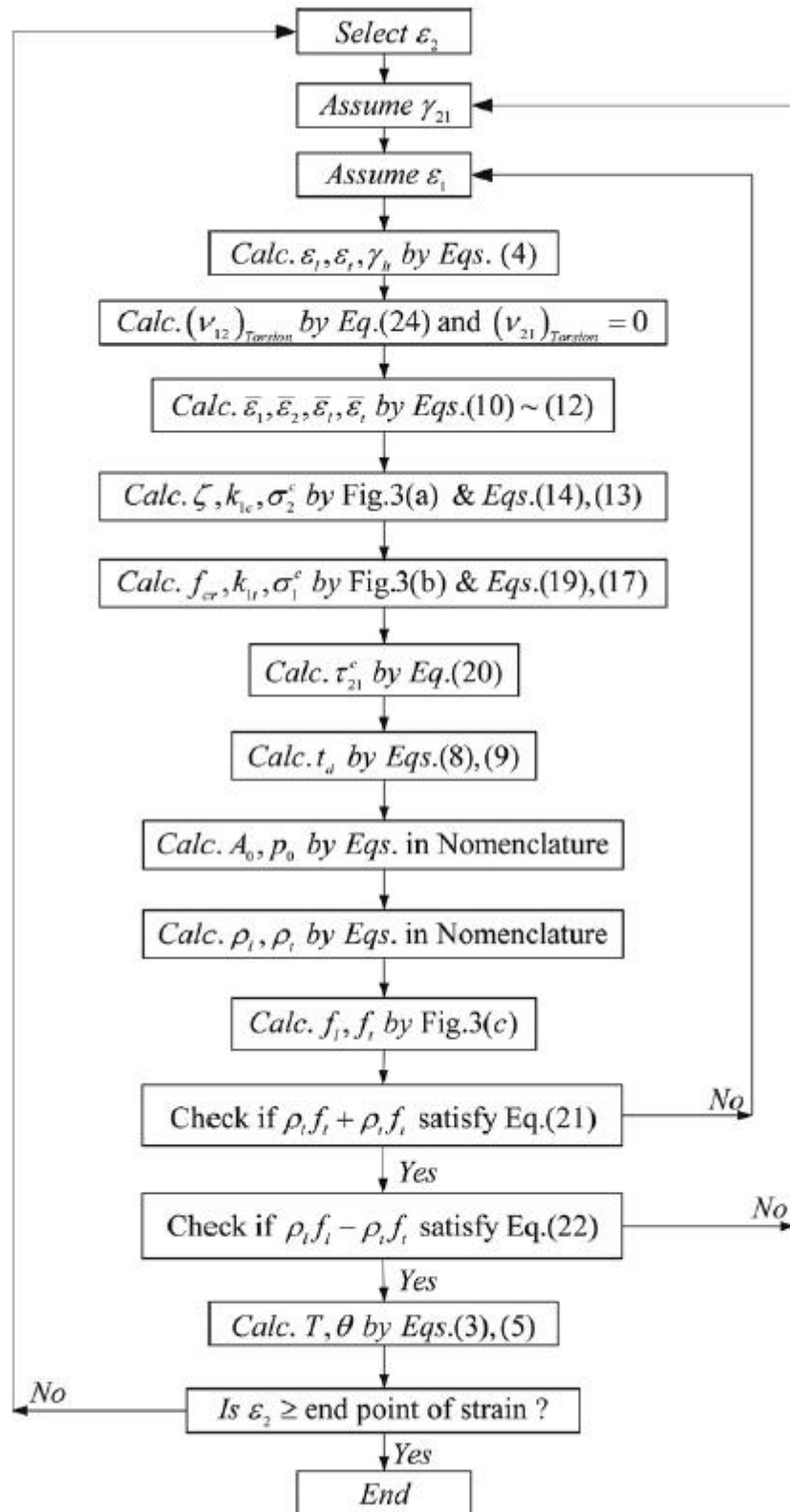


Figura 35 - Algoritmo de solução do modelo membrana para a torção (SMMT) [37]

3.11. Comparação do Modelo Membrana para a Torção (SMMT) com a Previsão Teórica para a Torção

Jeng e Hsu [37] ao comparar os resultados experimentais com os resultados teóricos, observaram que o modelo SMMT consegue obter melhor resultados teóricos do que as previsões do modelo RA-STM em termos do estado último de tensão e respectivo ângulo de rotação.

Na Fig.36 encontra-se representada a curva experimental $T - \theta$ para resultados experimentais e duas curvas analíticas $T - \theta$ previstas pelo modelo SMMT e o modelo RA-STM para a torção. É possível verificar que a principal superioridade do modelo SMMT em relação ao modelo RA-STM é a capacidade que o primeiro modelo tem de prever a zona pré-rotura e pós-rotura das curvas $T - \theta$.

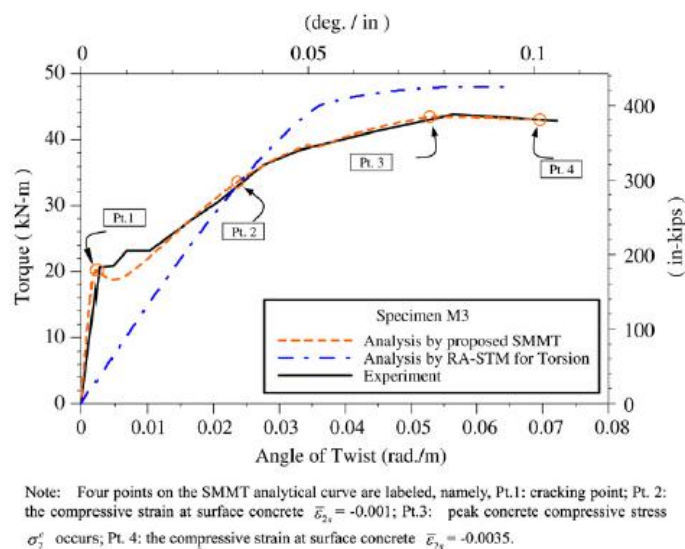


Figura 36 - Comparação dos resultados analíticos obtidos pelos modelos SMMT e RA-STM com os resultados experimentais para a Curva $T - \theta$ [37]

3.12. Notas Finais

O novo modelo proposto, SMMT, é capaz de prever toda a resposta $T - \theta$, incluindo a resistência à torção e a rotação correspondente, assim como o momento torsor de fendilhação e a respectiva rotação. Os resultados analíticos mostram-se próximos dos resultados experimentais. No entanto os autores, Jeng e Hsu [37], não apresentaram outros pontos chave nem propriedades das curvas $T - \theta$, nomeadamente o valor do momento torsor e respectiva rotação quando a armadura entra em cedência, a rigidez de torção em estado fendilhado e não fendilhado e ductilidade. Os autores fizeram apenas análises comparativas para vigas de secção cheia, excluindo as vigas de secção vazada argumentando que estas últimas possuem valores inferiores relativamente ao momento torsor de fendilhação e

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Secção Rectangular Vazada à Torção com base no SMMT

respectiva rotação quando comparadas com os resultados dos mesmos parâmetros para vigas de secção cheia.

Capítulo 4

Análise Comparativa

4.1. Considerações Gerais

No presente capítulo serão apresentados e comparados os resultados teóricos obtidos a partir do modelo SMMT com resultados experimentais relativos a vigas de secção vazada sujeitas a torção. Na totalidade apresentam-se resultados para 17 vigas com secção vazada de betão de normal e alta resistência. As principais características das referidas vigas estão apresentadas nesta secção na tabela 1. Os resultados teóricos foram obtidos a partir do modelo proposto por Jeng e Hsu [37] onde os valores de f_{cr} e E_c foram multiplicados por um factor de 1,45 de modo a ter em conta o efeito do gradiente de extensão. Foram também calculadas as curvas $T - \theta$ para o modelo inicial proposto por Hsu [35] sem o factor de correcção de 1,45.

Para traçar a curva teórica $T - \theta$ foi elaborada uma folha de cálculo baseada no modelo SMMT, onde foi necessário convergir os valores da distorção (γ_{21}) e da extensão na direcção 1 (ϵ_1). Para ser possível convergir em tempo útil os pontos, em algumas das vigas, foi fundamental considerar o valor de $\gamma_{21} = 0$ uma vez que verificou-se que desde o início do carregamento da viga os valores de γ_{21} eram muito pequenos.

A Fig.37 representa um exemplo de uma Curva $T - \theta$ obtida a partir do modelo SMMT de Jeng e Hsu [37].

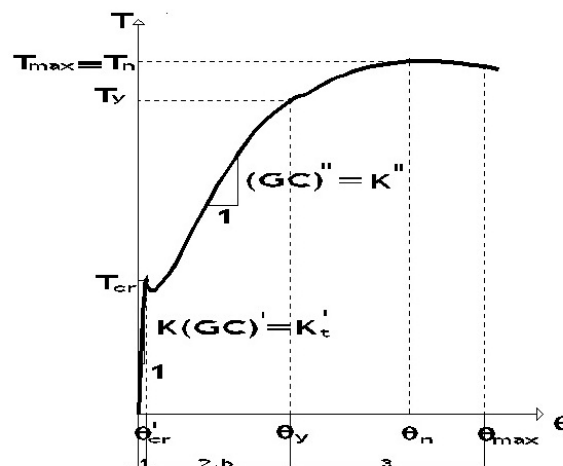


Figura 37 - Curva $T - \theta$ genérica obtida a partir do modelo SMMT

As características das vigas de referência são apresentadas na tabela 1.

Vigas	x (cm)	y (cm)	$t_{ef}=t$ (cm)	A (cm ²)	u (cm)	A _t (cm ²)	s (cm)	A _{i,par} (cm ²)	f _c (Mpa)	f _{c2} (Mpa)	f _{ty} (Mpa)	f _{ly} (Mpa)	z (cm)
D4 - Hsu (1968) - NSC	25,4	38,1	6,35	967,74	127	1,29	9,21	7,74	30,62	16,71	333,1	330,35	31,8
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	50	50	8	2500	200	1,16	11	5,66	25,6	14,28	357,08	357,08	42
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	50	50	8	2500	200	1,13	11	5,66	35,38	18,9	356,72	356,72	42
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	32,4	32,4	6,5	1049,8	129,6	0,28	10	1,74	17,17	9,92	447,34	447,34	25,9
A2 - Bernardo (2003) - NSC	60	60	10,67	0,36	2,4	0,5	8	4,62	47,34	23,93	695,9	672,42	49,3
A3 - Bernardo (2003) - NSC	60	60	10,9	0,36	2,4	0,79	9,5	5,65	46,15	23,46	714,83	672,42	49,1
A4 - Bernardo (2003) - NSC	60	60	10,43	0,36	2,4	0,79	7	7,95	54,78	26,72	714,83	723,89	49,6
A5 - Bernardo (2003) - NSC	60	60	10,41	0,36	2,4	1,13	8	9,68	53,1	26,11	672,42	723,89	49,6
B2 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,8	0,36	2,4	0,5	7,5	4,78	69,78	31,52	695,9	672,42	49,2
B3 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,9	0,36	2,4	0,79	7	7,95	77,82	33,65	714,83	723,89	49,1
B4 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	11,23	0,36	2,4	1,13	7,5	10,05	79,8	34,13	672,42	723,89	48,8
B5 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	11,67	0,36	2,4	1,13	6	12,06	76,39	33,3	672,42	723,89	48,3
C2 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,04	0,36	2,4	0,5	8	4,62	94,81	37,13	695,9	672,42	50
C3 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,25	0,36	2,4	0,79	7,5	7,95	91,57	36,58	714,83	723,89	49,8
C4 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,29	0,36	2,4	1,13	8	9,68	91,38	36,54	672,42	723,89	49,7
C5 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,38	0,36	2,4	1,13	6,5	12,32	96,68	37,43	672,42	672,42	49,6
C6 - Bernardo (2003) - HSC	60	60	10,38	0,36	2,4	1,13	5	14,07	87,48	35,8	723,89	723,89	49,6

Tabela 1 - Características para a verificação das vigas de referência de betão armado [4]

4.2. Zona Comportamental 1

Inicialmente foi calculada a curva $T - \theta$ para as 17 vigas a partir do modelo de Jeng e Hsu [37]. Nesta fase da curva é importante retirar apenas os valores do momento torsor de fissuração, T_{cr} , a respectiva rotação, θ_{cr} , e ainda o valor da rigidez de torção em Estado I, K_t^I . O cálculo destes valores é de relevante importância pois permite analisar a pertinência da correcção realizada por Jeng e Hsu (multiplicar os valores de f_{cr} e E_c por 1,45) para o caso de vigas de secção vazada. Esta correcção só afecta substancialmente o comportamento da viga no estado não fendilhado.

O mesmo procedimento foi feito para calcular a curva $T - \theta$ mas sem considerar o efeito do gradiente de extensão, ou seja, sem realizar a correcção anteriormente referida.

Após calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ e por consequência os pontos fulcrais das mesmas, foram comparados os resultados teóricos com os experimentais. Os valores do momento torsor de fissuração T_{cr} , o respectivo valor de rotação θ_{cr} e o valor da rigidez de torção em Estado I K_t^I encontram-se registados na tabela 2.

Vigas	Valores Experimentais			SMMT com correcção			SMMT sem correcção		
	$\Theta_{cr,exp}$ [rad]	$T_{cr,exp}$ [kN.m]	$K_t^{I,exp}$ [kN.m/rad]	$\Theta_{cr,th}$ [rad]	$T_{cr,th}$ [kN.m]	$K_t^{I,th}$ [kN.m/rad]	$\Theta_{cr,th}$ [rad]	$T_{cr,th}$ [kN.m]	$K_t^{I,th}$ [kN.m/rad]
D4 - Hsu (1968) - NSC	0,0020595	15,824	7683,46114	0,002704	20,56782	7605,14451	0,003247	11,20826	3452,2633
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	0,0010297	46,673	45324,8461	0,001762	66,92817	37986,2582	0,0021	33,77514	16083,401
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	0,0007505	47,989	63943,4224	0,001448	78,12517	53968,0461	0,001328	38,02815	28635,6581
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	0,0021468	11,991	5585,63977	0,003519	14,6597	4166,44149	0,001883	7,101548	3771,96997
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,001117	109,495	98025,0215	0,000656	144,7718	220610,142	0,000328	62,55945	190898,031
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,0009948	113,272	113859,781	0,000925	162,0916	175301,751	0,000743	78,67414	105839,649
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,0010996	120,874	109929,683	0,001089	174,7835	160444,765	0,000777	84,72504	109088,031
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,0007679	120,933	157476,148	0,000948	171,7902	181256,902	0,000621	84,51313	136071,628
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,0007679	116,717	151986,17	0,000737	189,5683	257360,937	0,000353	82,19362	233025,602
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,0007854	130,451	166095,372	0,000763	204,4436	267970,644	0,000358	88,57206	247658,775
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,0012217	142,93	116989,797	0,000766	210,8461	275239,944	0,000907	95,09646	104885,797
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,001117	146,256	130935,18	0,0015	210,575	140383,353	0,00079	102,3125	129509,52
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,0008552	124,456	145526,603	0,000602	198,014	328860,381	0,000395	99,48729	252047,922
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,001117	131,935	118114,354	0,000901	221,8066	246314,236	0,000375	96,79917	258079,25
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,0008901	132,604	148973,521	0,000869	221,7789	255199,775	0,000372	96,6418	259566,894
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,0008901	138,34	155417,611	0,000947	232,741	245715,044	0,000382	101,9898	267198,2
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,0009425	139,091	147580,135	0,001499	224,7591	149899,808	0,000793	110,7216	139565,05

Tabela 2 - Valores experimentais e teóricos de Θ_{cr} , T_{cr} e K_t^I para o modelo SMMT com correcção e para o modelo SMMT sem correcção

Na Figura 37 está representado o ponto correspondente ao momento tissor de fissuração T_{cr} e o seu respectivo valor de rotação de torção Θ_{cr} . O declive deste troço da curva $T - \Theta$ representa a rigidez elástica de torção ($(GC)^I \equiv K_t^I$). Para o cálculo de $(GC)^I$, a curva $T - \Theta$ nesta fase pode ser aproximada a uma recta que tem início no ponto de coordenadas (0; 0) e termina no ponto de coordenadas $(\Theta_{cr}; T_{cr})$. Desta forma o $(GC)^I$ será uma rigidez secante.

Ao analisar a tabela 2 verifica-se que os valores teóricos de T_{cr} para o modelo SMMT com correcção são relativamente elevados quando comparados com os experimentais, o contrário se verifica para o modelo SMMT sem correcção que subestima o momento tissor de fissuração T_{cr} . Em relação ao valor da rotação Θ_{cr} , este é maior para o modelo SMMT sem correcção. Assim, a rigidez de torção em Estado I (K_t^I) é maior para o modelo SMMT com correcção uma vez que este valor é directamente proporcional ao momento tissor de fissuração T_{cr} e é calculada através da fórmula $K_t^I = \frac{T_{cr}}{\Theta_{cr}}$. Estes resultados mostram que em vigas de secção vazada o gradiente de extensão não é tão acentuado como em vigas de secção cheia.

Ao analisar os valores referidos anteriormente, pensou-se numa solução para obter valores teóricos mais próximos dos valores experimentais para o modelo SMMT com e sem correcção. No gráfico 1 está representada a curva $T - \Theta$ para uma das vigas de referência (A2 - Bernardo 2003 [10]) calculada através do modelo SMMT com correcção e o modelo SMMT sem correcção, assim como a curva experimental. Verifica-se que o valor do momento tissor de fissuração (T_{cr}) dos dois modelos afasta-se do valor experimental, tal como já tinha sido referido e observa-se também que é apenas para esta fase da curva que os valores se distanciam consideravelmente.

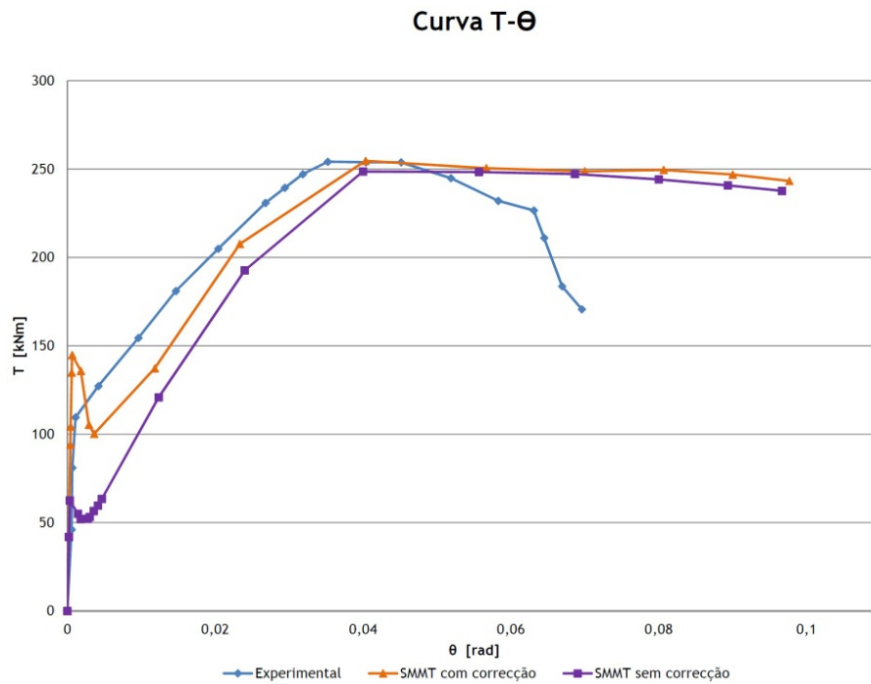


Figura 38 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 (Bernardo 2003 [10])

Este factor de correcção foi obtido através de uma análise dos valores médios para a relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ do modelo SMMT com correcção e do modelo SMMT sem correcção (sem ter em conta o efeito do gradiente de extensão) de modo a achar um valor intermédio, especialmente para a zona comportamental 1. Posteriormente através de uma análise por semelhança de triângulos, chegou-se ao valor de 1,24. Este método para obter o factor de correcção é empírico, à semelhança do realizado por Jeng e Hsu [37] para vigas de secção cheia.

	SMMT com correcção	SMMT sem correcção
Vigas	$T_{cr,exp}/T_{cr,th}$	$T_{cr,exp}/T_{cr,th}$
D4 - Hsu (1968) - NSC	0,769357035	1,41181635
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	0,697359581	1,381874272
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	0,614257851	1,261933462
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	0,817956626	1,688505002
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,756328382	1,750255212
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,698814576	1,439761549
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,691564197	1,426662108
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,703957635	1,43093741
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,615698932	1,420024989
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,638078207	1,472823392
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,677887805	1,503000281
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,694555286	1,429502455
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,628521308	1,250973864
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,594820022	1,362976535
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,597910739	1,372118429
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,594394696	1,356410144
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,618844843	1,25622274
$\bar{x} =$	0,677887805	1,420024989

Tabela 3 - Valores médios para a relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ para o modelo SMMT com correcção e o modelo SMMT sem correcção

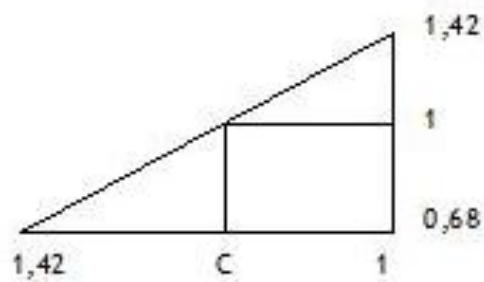


Figura 39 - Semelhança de triângulos

Assim:

$$\frac{1,42-0,68}{1-1,42} = \frac{1-0,68}{C-1,42} \Leftrightarrow C = 1,24 \quad (94)$$

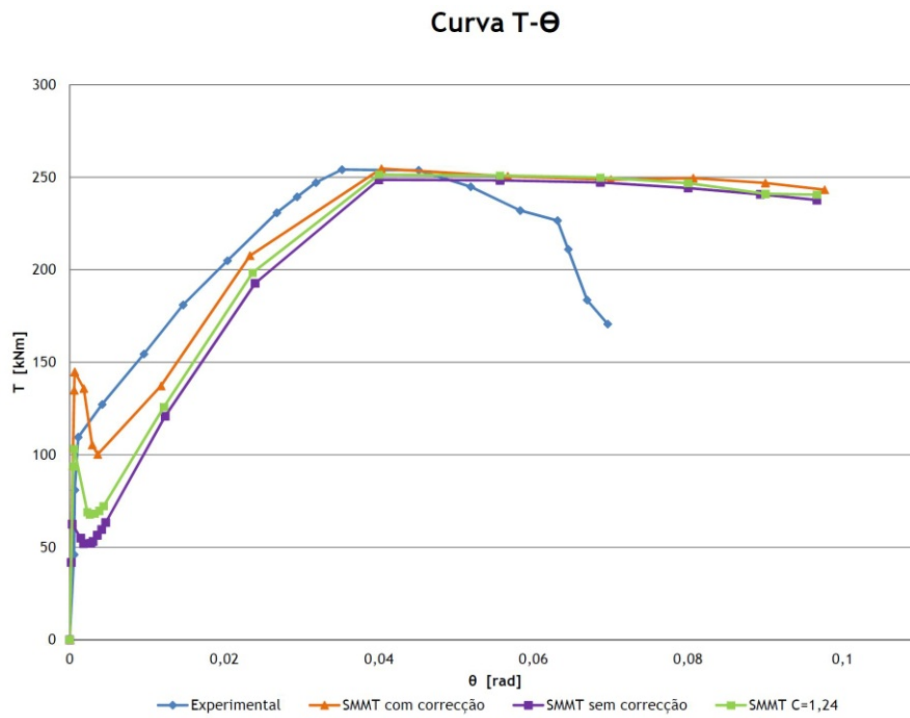


Figura 40 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 (Bernardo 2003 [10])

Depois de o valor do factor de correcção estar calculado e incorporado na folha de cálculo (os valores de tensão de rotura do betão à tracção (f_{cr}) e o módulo de elasticidade do betão (E_c) foram multiplicados pelo factor de correcção de valor 1,24) foram obtidas as curvas $T - \theta$ para as referidas vigas.

Vigas	Valores Experimentais			SMMT (com C=1,24)		
	$\Theta_{cr,exp}$ [rad]	$T_{cr,exp}$ [kN.m]	$K_{t,exp}^I$ [kN.m/rad]	$\Theta_{cr,th}$ [rad]	$T_{cr,th}$ [kN.m]	$K_{t,th}^I$ [kN.m/rad]
D4 - Hsu (1968) - NSC	0,002059489	15,824	7683,461144	0,003401051	14,1420245	4158,133935
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	0,001029744	46,673	45324,84605	0,001528571	45,113354	29513,40914
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	0,000750492	47,989	63943,4224	0,001080952	51,8304853	47948,90706
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	0,002146755	11,991	5585,639774	0,001166795	10,2602813	8793,556774
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,001117011	109,495	98025,02153	0,000588688	103,116165	175162,5493
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,000994838	113,272	113859,7814	0,000576782	102,416182	177564,778
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,001099557	120,874	109929,6834	0,000608836	111,504819	183144,2645
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,000767945	120,933	157476,1478	0,000581569	108,753149	186999,6069
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,000767945	116,717	151986,1704	0,00042565	109,548336	257366,9247
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,000785398	130,451	166095,3719	0,001036667	129,413243	124835,9253
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,00122173	142,93	116989,7967	0,000889891	145,529053	163535,7581
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,001117011	146,256	130935,1801	0,001423333	125,768506	88361,94806
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,000855211	124,456	145526,6028	0,000464412	132,596518	285515,1305
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,001117011	131,935	118114,3542	0,000449045	129,242983	287817,2956
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,000890118	132,604	148973,5205	0,000446993	129,092919	288803,2849
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,000890118	138,34	155417,6105	0,001106667	142,800129	129036,2609
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,000942478	139,091	147580,1346	0,000737606	148,058137	200727,9989

Tabela 4 - Valores experimentais e teóricos de Θ_{cr} , T_{cr} e K_t^I para o modelo SMMT com o factor de correcção $C = 1,24$

Como é possível observar na tabela 4 os valores teóricos obtidos a partir do modelo SMMT com o factor de correcção de 1,24 aproximam-se dos valores experimentais (relativamente ao valor de T_{cr} e Θ_{cr}). Verifica-se também que a curva $T - \Theta$ para o modelo SMMT com $C = 1,24$ apresenta valores para a zona comportamental 2.b e 3 semelhantes aos valores dos modelos SMMT com correcção e SMMT sem correcção. Por este motivo, as comparações apresentadas ao longo deste capítulo para as zonas comportamentais indicadas irão apenas incidir sobre os modelos SMMT com correcção e sem correcção.

Para os vários modelos e para cada uma das vigas são apresentados os valores da relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ e $K_{t,exp}^I/K_{t,th}^I$. Finalmente, para cada uma das teorias são também apresentados o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv) para ambas as relações mencionadas.

	SMMT com correcção	SMMT sem correcção	SMMT (com C=1,24)
Vigas	$T_{cr,exp}/T_{cr,th}$	$T_{cr,exp}/T_{cr,th}$	$T_{cr,exp}/T_{cr,th}$
D4 - Hsu (1968) - NSC	0,769357035	1,41181635	1,118934562
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	0,697359581	1,381874272	1,034571715
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	0,614257851	1,261933462	0,925883672
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	0,817956626	1,688505002	1,168681408
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,756328382	1,750255212	1,061860667
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,698814576	1,439761549	1,105997102
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,691564197	1,426662108	1,084024893
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,703957635	1,43093741	1,111995386
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,615698932	1,420024989	1,065438364
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,638078207	1,472823392	1,008018943
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,677887805	1,503000281	0,982140661
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,694555286	1,429502455	1,162898444
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,628521308	1,250973864	0,938606847
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,594820022	1,362976535	1,020829119
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,597910739	1,372118429	1,027198093
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,594394696	1,356410144	0,968766634
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,618844843	1,25622274	0,939435027
$\bar{x} =$	0,677887805	1,420024989	1,034571715
$s =$	0,066628932	0,132908816	0,076565785
$cv[\%] =$	9,828902627	9,35961104	7,400722824

Tabela 5 - Relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$ para o modelo SMMT com correcção, SMMT sem correcção e SMMT com factor de correcção $C = 1,24$

	SMMT com correcção	SMMT sem correcção	SMMT (com C=1,24)
Vigas	$K_{t,exp}^I / K_{t,th}^I$	$K_{t,exp}^I / K_{t,th}^I$	$K_{t,exp}^I / K_{t,th}^I$
D4 - Hsu (1968) - NSC	1,010297849	2,225630108	1,847814732
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	1,193190597	2,81811328	1,535737395
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	1,184838566	2,232999924	1,333574138
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	1,340625997	1,480828272	0,635196874
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,444335971	0,513494146	0,559623173
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,649507383	1,075776259	0,641229542
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,685155936	1,007715354	0,600235469
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,868800834	1,157303328	0,842120208
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,590556484	0,652229493	0,590542746
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,619826745	0,670662172	1,330509398
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,42504658	1,115401704	0,715377469
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,932697341	1,011008147	1,481805042
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,442517892	0,577376721	0,509698391
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,479527111	0,457666993	0,410379626
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,583752554	0,57393113	0,515830423
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,632511578	0,581656653	1,204449117
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,984525172	1,057429022	0,73522446
\bar{x} =	0,649507383	1,011008147	0,715377469
s=	0,291921582	0,689870981	0,443545031
cv[%]=	44,94507526	68,23594681	62,00153765

Tabela 6 - Relação $K_{t,exp}^I/K_{t,th}^I$ para o modelo SMMT com correcção, SMMT sem correcção e SMMT com factor de correcção $C = 1,24$

Segundo a tabela 5 é possível verificar que os valores obtidos a partir do modelo SMMT de Jeng e Hsu com o factor de correcção de 1,24 apresenta previsões com menor dispersão ($cv = 7,4\%$) tendo um valor médio de 1,03 para a relação $T_{cr,exp}/T_{cr,th}$. Para a relação $K_{t,exp}^I/K_{t,th}^I$ o modelo que apresenta melhor valor médio é o SMMT sem correcção ($\bar{x} = 1,01$) no entanto o coeficiente de variação possui um valor elevado ($cv = 68,3\%$) devido a relação $K_{t,exp}^I/K_{t,th}^I$ de algumas das vigas, nomeadamente as vigas D4, T2, T1 e VH1, ter valor bastante superior a 1. Uma vez que as rotações têm valores muito pequenos no Estado I, os resultados menos bons obtidos para a rigidez K_t^I com o modelo SMMT com $C = 1,24$ perdem alguma importância.

4.3. Zona Comportamental 2.b.

Para o cálculo da rigidez de torção após fissuração (K_t^{II}) foi tido em conta o princípio do modelo de Hsu [26] apresentada no capítulo 2, na secção 2.4.3. Segundo este modelo, a curva $T - \theta$ pós-fissuração é aproximada a uma recta com um declive correspondente à rigidez de torção em estado fissurado, permitindo também calcular o valor da ordenada na origem (T_0). O valor de K_t^{II} permite avaliar a inclinação da curva $T - \theta$ no Estado II e o valor de T_0 permite avaliar a posição no gráfico da curva $T - \theta$ no Estado II. Estes valores foram obtidos através de uma regressão linear com os pontos que definem a referida curva.

Vigas	$K_{t,exp}^{II}$ [kN.m/rad]	SMMT com correcção		SMMT sem correcção	
		$K_{t,th}^{II}$ [kN.m/rad]	$K_{t,exp}^{II} / K_{t,th}^{II}$	$K_{t,th}^{II}$ [kN.m/rad]	$K_{t,exp}^{II} / K_{t,th}^{II}$
D4 - Hsu (1968) - NSC	864,93	718,84	1,203230204	1239	0,698087167
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	4493,3	2529	1,776710162	4882,6	0,92026789
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	4460,2	3790,3	1,176740627	5030	0,886719682
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	213,69	343,18	0,622676147	412,02	0,518639872
A2 - Bernardo (2003) - NSC	4304,1	4296,1	1,001862154	5199,2	0,827838898
A3 - Bernardo (2003) - NSC	5715,4	6487,9	0,880932197	7379,7	0,774475927
A4 - Bernardo (2003) - NSC	7311,9	7083,3	1,032273093	7759,8	0,94227944
A5 - Bernardo (2003) - NSC	8087	7892,3	1,024669615	8793,6	0,919646106
B2 - Bernardo (2003) - HSC	5109,9	6173,2	0,827755459	7484,7	0,682712734
B3 - Bernardo (2003) - HSC	7833	9005,8	0,869772813	9910,1	0,790405748
B4 - Bernardo (2003) - HSC	11491	9342,1	1,230023228	13020	0,882565284
B5 - Bernardo (2003) - HSC	12766	10129	1,260341593	14139	0,902892708
C2 - Bernardo (2003) - HSC	5072,5	6688,5	0,758391269	7980	0,635651629
C3 - Bernardo (2003) - HSC	8352,6	9165,4	0,911318655	10034	0,832429739
C4 - Bernardo (2003) - HSC	11360	10115	1,123084528	11144	1,019382627
C5 - Bernardo (2003) - HSC	14767	10588	1,394692104	11414	1,293762047
C6 - Bernardo (2003) - HSC	16506	14828	1,113164284	19327	0,854038392
		$\bar{x} =$	1,032273093	$\bar{x} =$	0,854038392
		$s =$	0,20113958	$s =$	0,118548498
		$cv[\%] =$	19,48511317	$cv[\%] =$	13,88093314

Tabela 7 - Relação $K_{t,exp}^{II}/K_{t,th}^{II}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.

A análise da tabela 7 mostra que, em termos de valor médio, a rigidez de torção em Estado II K_t^{II} apresenta um valor óptimo ($\bar{x} = 1,03$) para o modelo SMMT com correcção. No entanto o valor do coeficiente de variação global ($cv = 19,5\%$) é o mais elevado dos três resultados, porém pode considerar-se que os resultados são ainda aceitáveis para ambos os modelos.

Vigas	$T_{0,exp}$ kN.m/m	SMMT com correcção		SMMT sem correcção	
		$T_{0,th}$ kN.m/m	$T_{0,exp}/T_{0,th}$	$T_{0,th}$ kN.m/m	$T_{0,exp}/T_{0,th}$
D4 - Hsu (1968) - NSC	15,666	19,517	0,802684839	7,3335	2,136224177
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	30,069	64,214	0,468262373	22,135	1,358436865
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	29,781	61,482	0,484385674	25,271	1,178465435
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	11,362	8,2992	1,369047619	3,9703	2,861748482
A2 - Bernardo (2003) - NSC	111,34	89,925	1,238142897	51,045	2,181212656
A3 - Bernardo (2003) - NSC	112,9	90,341	1,249709434	46,941	2,405146887
A4 - Bernardo (2003) - NSC	120,56	118,69	1,015755329	75,646	1,593739259
A5 - Bernardo (2003) - NSC	133,57	135,72	0,984158562	86,105	1,551245572
B2 - Bernardo (2003) - HSC	116,68	83,237	1,401780458	37,408	3,119118905
B3 - Bernardo (2003) - HSC	126,51	113,43	1,115313409	64,199	1,970591442
B4 - Bernardo (2003) - HSC	120,54	152,61	0,789856497	68,303	1,764783392
B5 - Bernardo (2003) - HSC	132,41	177,39	0,74643441	83,017	1,594974523
C2 - Bernardo (2003) - HSC	124,55	78,501	1,586603992	32,927	3,782610016
C3 - Bernardo (2003) - HSC	124,03	112,53	1,10219497	63,569	1,951108245
C4 - Bernardo (2003) - HSC	125,65	123,73	1,015517659	71,132	1,766434235
C5 - Bernardo (2003) - HSC	100,18	170,57	0,587324852	117,13	0,855288995
C6 - Bernardo (2003) - HSC	124,98	164,98	0,757546369	73,381	1,70316567
		\bar{x} =	1,015517659	\bar{x} =	1,766434235
		s=	0,326493208	s=	0,729464003
		cv[%]=	32,15042149	cv[%]=	41,29584836

Tabela 8 - Relação $T_{0,exp}/T_{0,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.

Observando a tabela 8, verifica-se que as previsões da ordenada na origem T_0 para o modelo SMMT com correcção apresentam valores médios óptimos ($\bar{x} = 1,02$) ainda que a dispersão seja elevada ($cv = 32,1\%$).

4.4. Zona Comportamental 3

Os valores para o momento torsor de rotura (T_n) assim como a respectiva rotação (θ_n) também são apresentados na tabela 9.

Vigas	$T_{n,exp}$ kN.m/m	$T_{n,th}$ kN.m/m	SMMT com correcção		SMMT sem correcção	
			$T_{n,exp}/T_{n,th}$	$T_{n,th}$ kN.m/m	$T_{n,exp}/T_{n,th}$	
D4 - Hsu (1968) - NSC	47,925	53,261081	0,89981276	50,842306	0,942620495	
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	132,906	142,77066	0,930905545	138,56781	0,959140487	
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	140,006	144,85202	0,966545051	141,19415	0,991585023	
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	21,793	22,158813	0,983491306	21,247256	1,025685396	
A2 - Bernardo (2003) - NSC	254,079	254,62491	0,997856019	248,61183	1,021990782	
A3 - Bernardo (2003) - NSC	299,915	320,56685	0,935577088	316,13387	0,948696182	
A4 - Bernardo (2003) - NSC	368,218	418,26255	0,880351342	408,05317	0,902377507	
A5 - Bernardo (2003) - NSC	412,236	454,12948	0,907749922	435,24082	0,947144613	
B2 - Bernardo (2003) - HSC	273,275	270,41424	1,010579181	266,88878	1,023928408	
B3 - Bernardo (2003) - HSC	355,845	437,75466	0,812886832	431,7281	0,824234043	
B4 - Bernardo (2003) - HSC	437,853	534,86736	0,818619772	513,56806	0,852570542	
B5 - Bernardo (2003) - HSC	456,192	564,58947	0,808006566	540,70875	0,843692657	
C2 - Bernardo (2003) - HSC	266,138	261,64657	1,017166023	257,34306	1,034175938	
C3 - Bernardo (2003) - HSC	351,165	430,00387	0,816655445	422,29709	0,831559127	
C4 - Bernardo (2003) - HSC	450,305	477,50684	0,943033618	476,14614	0,945728549	
C5 - Bernardo (2003) - HSC	467,26	596,92576	0,782777403	577,89333	0,808557521	
C6 - Bernardo (2003) - HSC	521,331	623,56369	0,83605093	598,2047	0,871492655	
			$\bar{x}=$ 0,907749922		$\bar{x}=$ 0,945728549	
			$s=$ 0,078567126		$s=$ 0,077528056	
			$cv[\%]=$ 8,655150946		$cv[\%]=$ 8,197707081	

Tabela 9 - Relação $T_{n,exp}/T_{n,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.

Os valores do momento torsor de rotura T_n para ambos os métodos são semelhantes apresentando um valor médio aceitável de 0,91 para o SMMT com correcção e um valor de 0,95 para o SMMT sem correcção. Com este resultado pode concluir-se que a grande diferença destes modelos verifica-se para o Estado I. A mesma conclusão aplica-se aos valores da rotação, θ_n , apresentados na tabela 10.

Vigas	$\theta_{n,exp}$ [rad]	SMMT com correcção		SMMT sem correcção	
		$\theta_{n,th}$ [rad]	$\theta_{n,exp} / \theta_{n,th}$	$\theta_{n,th}$ [rad]	$\theta_{n,exp} / \theta_{n,th}$
D4 - Hsu (1968) - NSC	0,0518363	0,075891889	0,683027919	0,076547	0,677182491
T2 - Lampert et al (1968) - NSC	0,0365297	0,0328	1,113711623	0,0324	1,12746115
T1 - Lampert et al (1969) - NSC	0,0404218	0,0412	0,981112269	0,0408	0,990731017
VH1 - Leonhardt et al (1974) - NSC	0,0500037	0,058024691	0,861765602	0,057407	0,871031899
A2 - Bernardo (2003) - NSC	0,0352382	0,040333333	0,873674321	0,04	0,88095494
A3 - Bernardo (2003) - NSC	0,0366694	0,046666667	0,785772163	0,046	0,797160165
A4 - Bernardo (2003) - NSC	0,0400553	0,050666667	0,790565257	0,059	0,678903497
A5 - Bernardo (2003) - NSC	0,0375944	0,055333333	0,679416724	0,0557	0,674944203
B2 - Bernardo (2003) - HSC	0,0311189	0,044333333	0,703512039	0,060333	0,51694531
B3 - Bernardo (2003) - HSC	0,03111367	0,045333333	0,686838394	0,044667	0,697089713
B4 - Bernardo (2003) - HSC	0,0280125	0,057666667	0,485766494	0,058	0,482974733
B5 - Bernardo (2003) - HSC	0,0266337	0,054333333	0,490191246	0,054733	0,48660885
C2 - Bernardo (2003) - HSC	0,032882	0,051666667	0,636425867	0,051	0,644745159
C3 - Bernardo (2003) - HSC	0,0286583	0,035033333	0,818029676	0,047333	0,605457176
C4 - Bernardo (2003) - HSC	0,0295484	0,045333333	0,651803476	0,044333	0,66650581
C5 - Bernardo (2003) - HSC	0,0277507	0,048866667	0,567886803	0,057333	0,48402445
C6 - Bernardo (2003) - HSC	0,025412	0,053333333	0,476474886	0,053667	0,473515414
		$\bar{x} =$	0,686838394	$\bar{x} =$	0,674944203
		$s =$	0,175327167	$s =$	0,189780997
		$cv[\%] =$	25,52669861	$cv[\%] =$	28,11802757

Tabela 10 - Relação $\theta_{n,exp}/\theta_{n,th}$ para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção.

Observando a tabela 10 é possível verificar que para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção os valores das rotações são muito elevados comparativamente com os valores experimentais das mesmas.

4.5. Curvas $T - \theta$

Nesta secção serão apresentados os gráficos referentes à curva $T - \theta$ para as vigas de referência, para cada uma delas estará representada a curva $T - \theta$ obtida experimentalmente, através do SMMT com $C = 1,24$ e através do MTEAV modificado por Andrade [4] (TORQUE). O objectivo desta secção é comparar as curvas obtidas através dos dois modelos com a curva obtida experimentalmente.

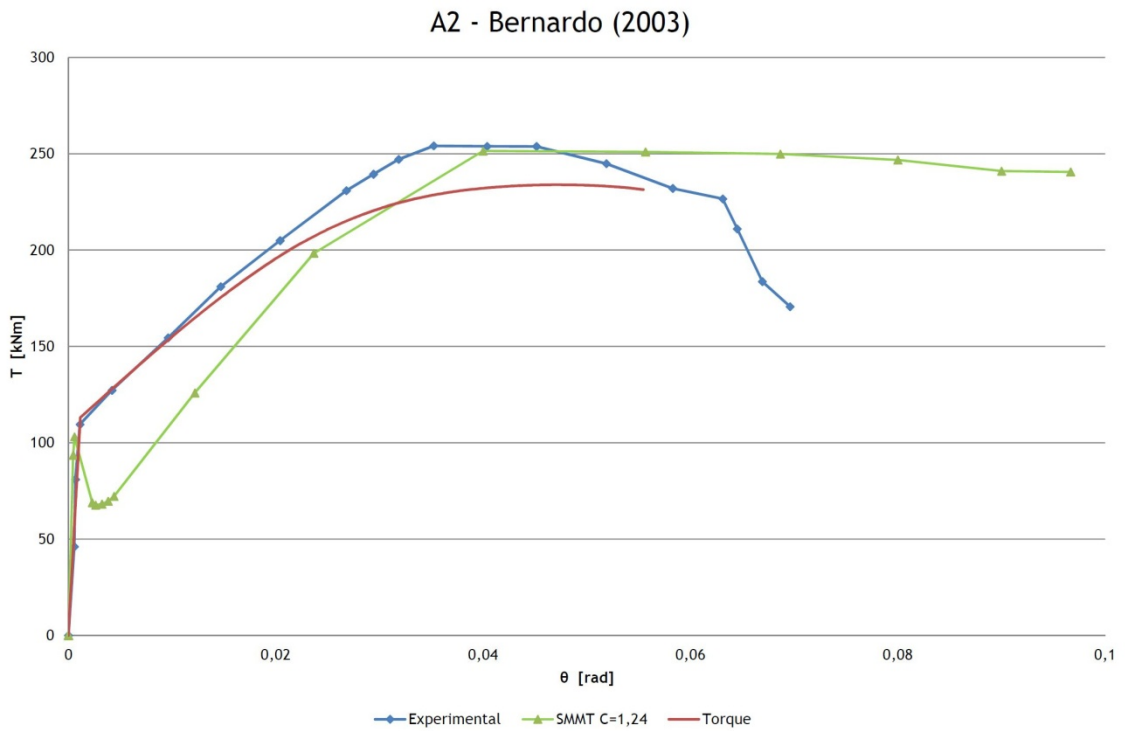


Figura 41 - Curva $T - \theta$ para a viga A2 - Bernardo (2003)

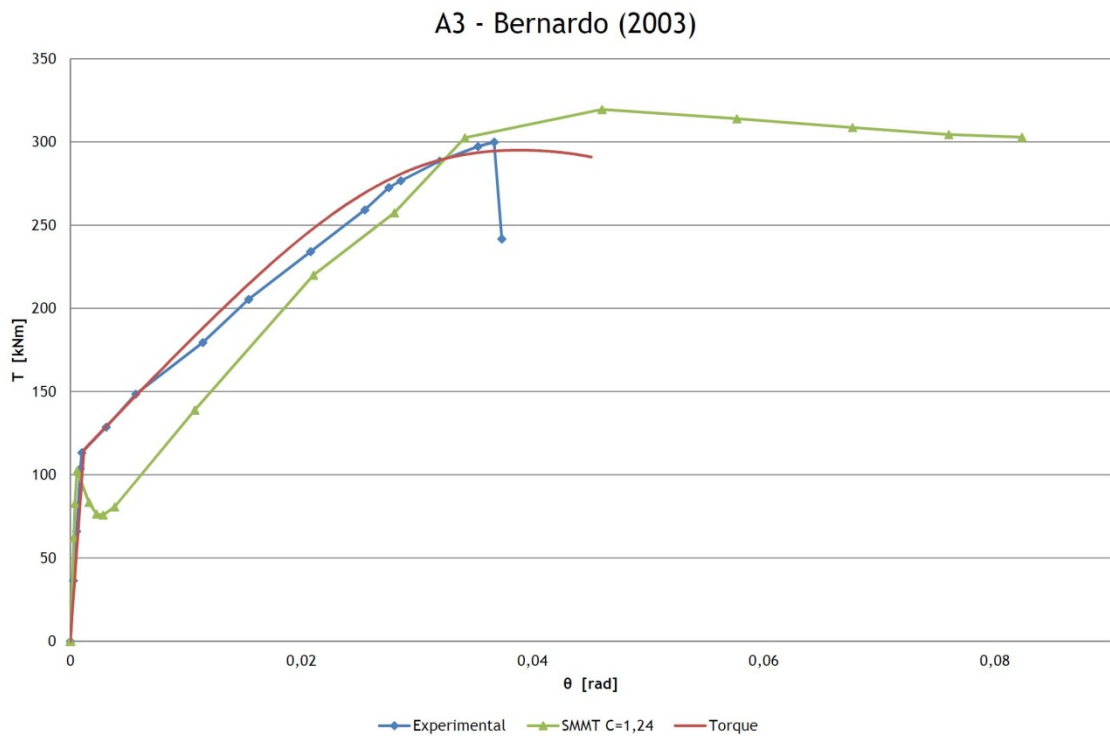


Figura 42 - Curva $T - \theta$ para a viga A3 - Bernardo (2003)

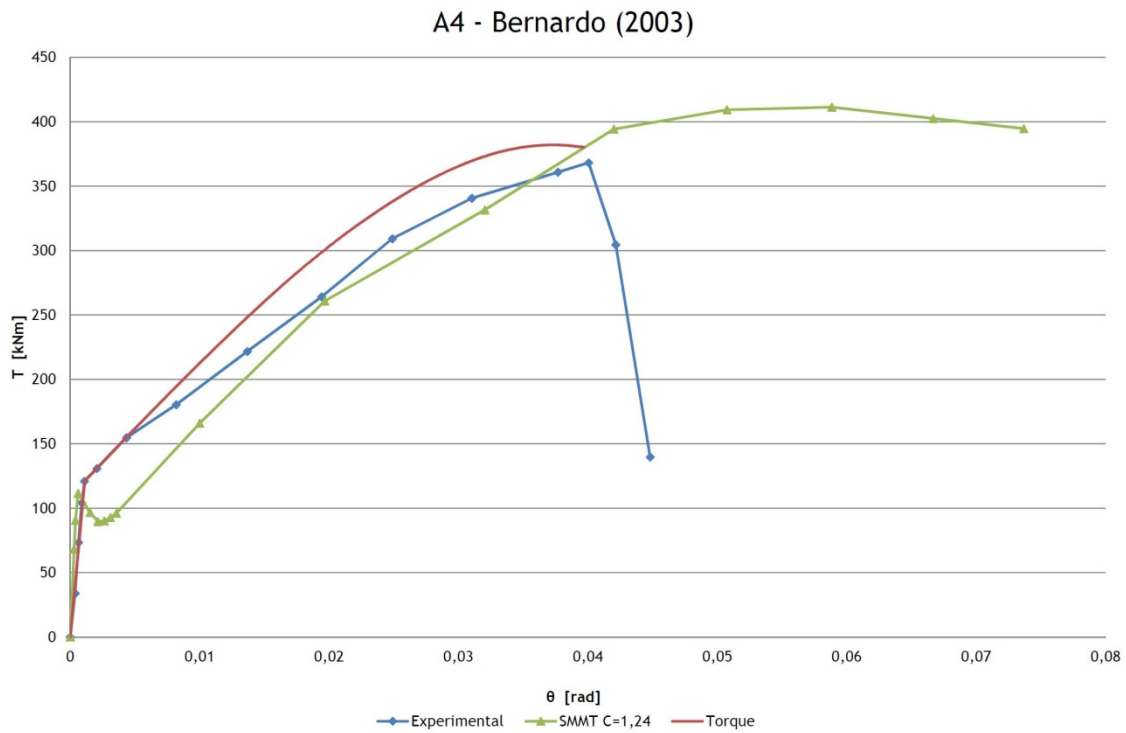


Figura 43 - Curva $T - \theta$ para a viga A4 - Bernardo (2003)

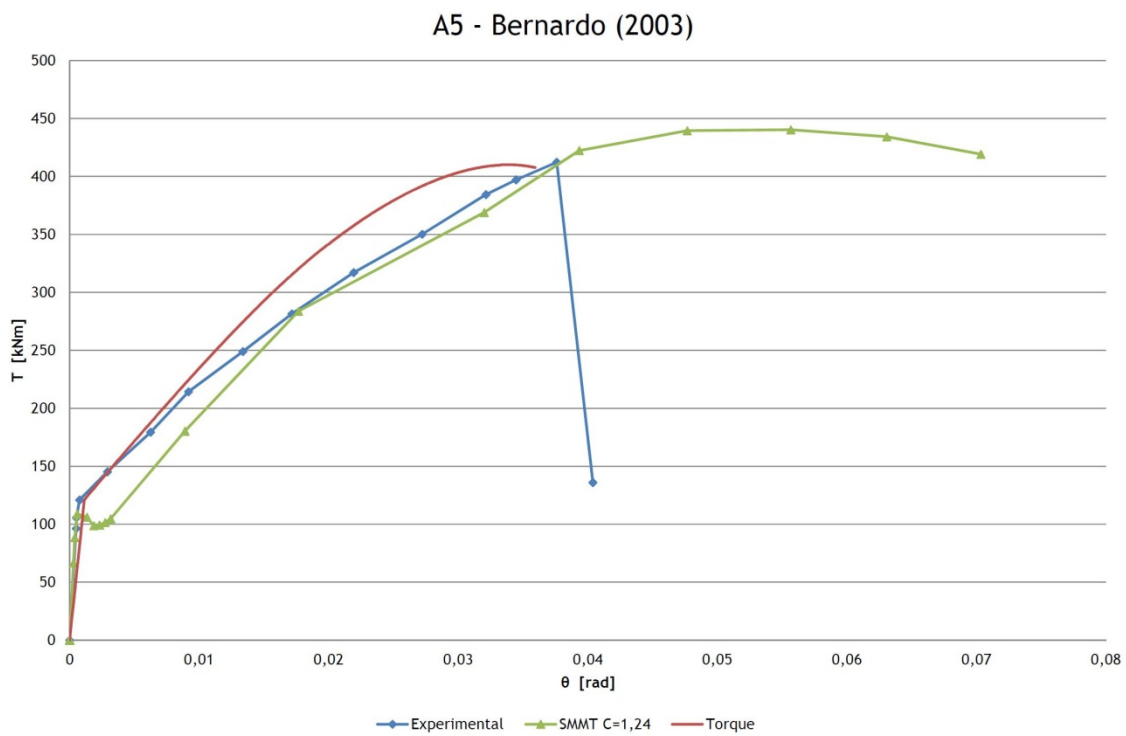


Figura 44 - Curva $T - \theta$ para a viga A5 - Bernardo (2003)

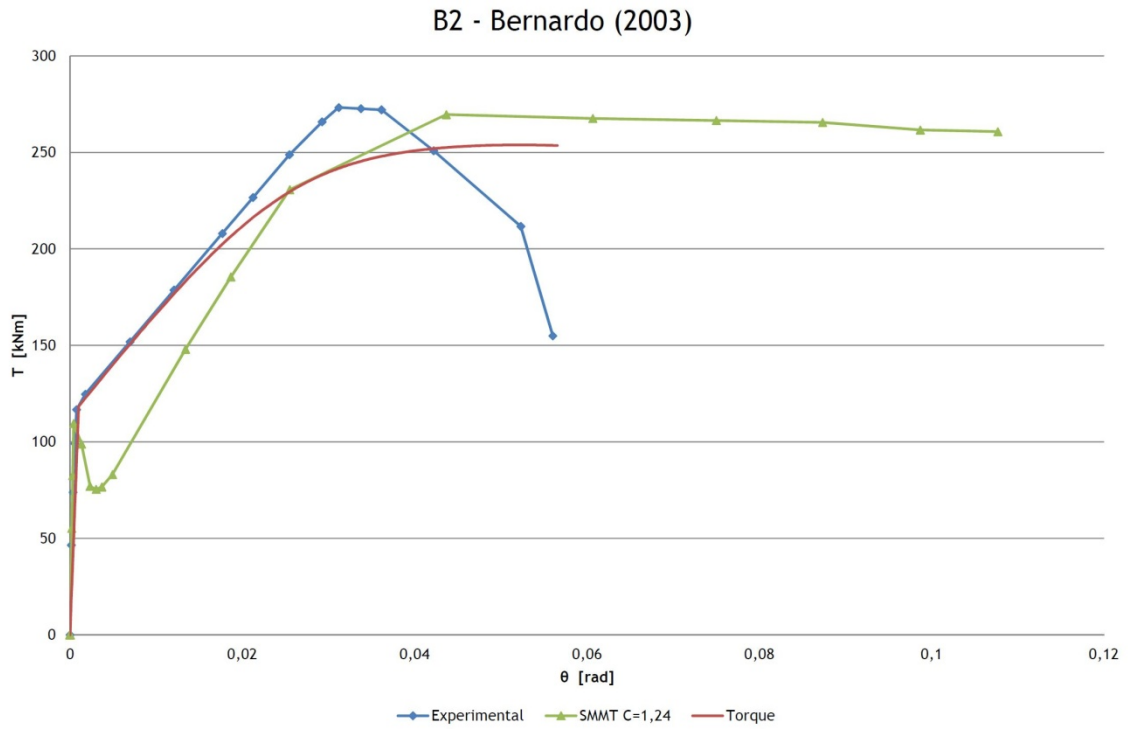


Figura 45 - Curva $T - \theta$ para a viga B2 - Bernardo (2003)

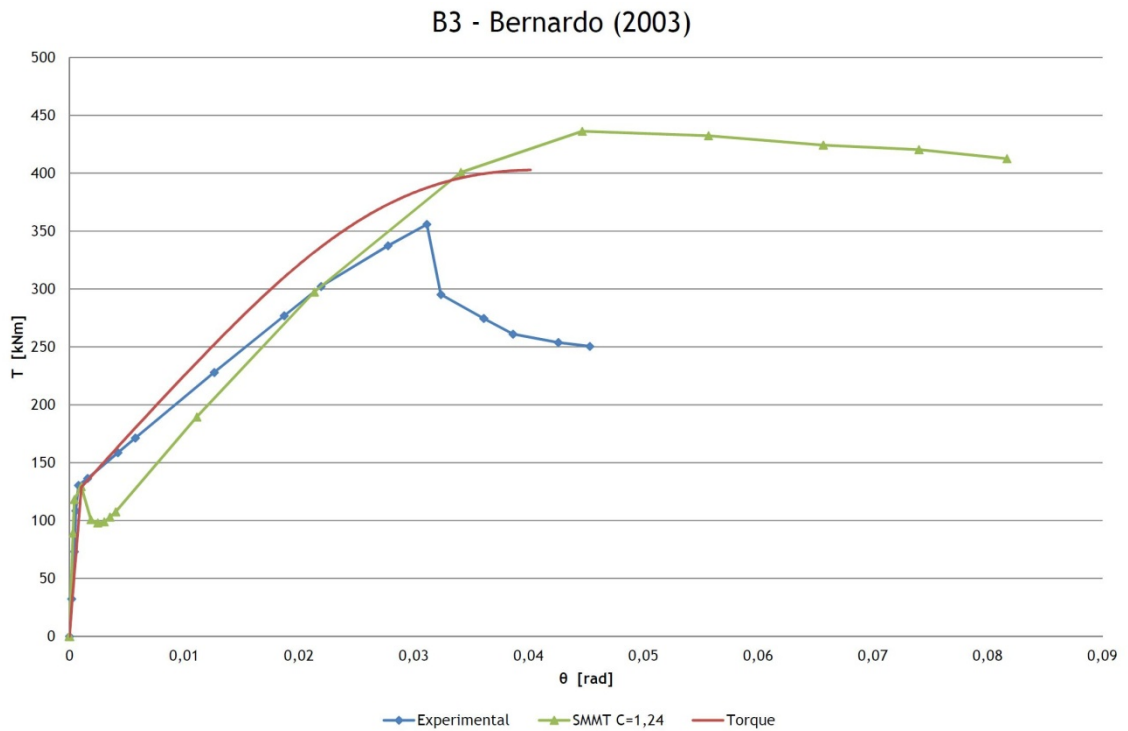


Figura 46 - Curva $T - \theta$ para a viga B3 - Bernardo (2003)

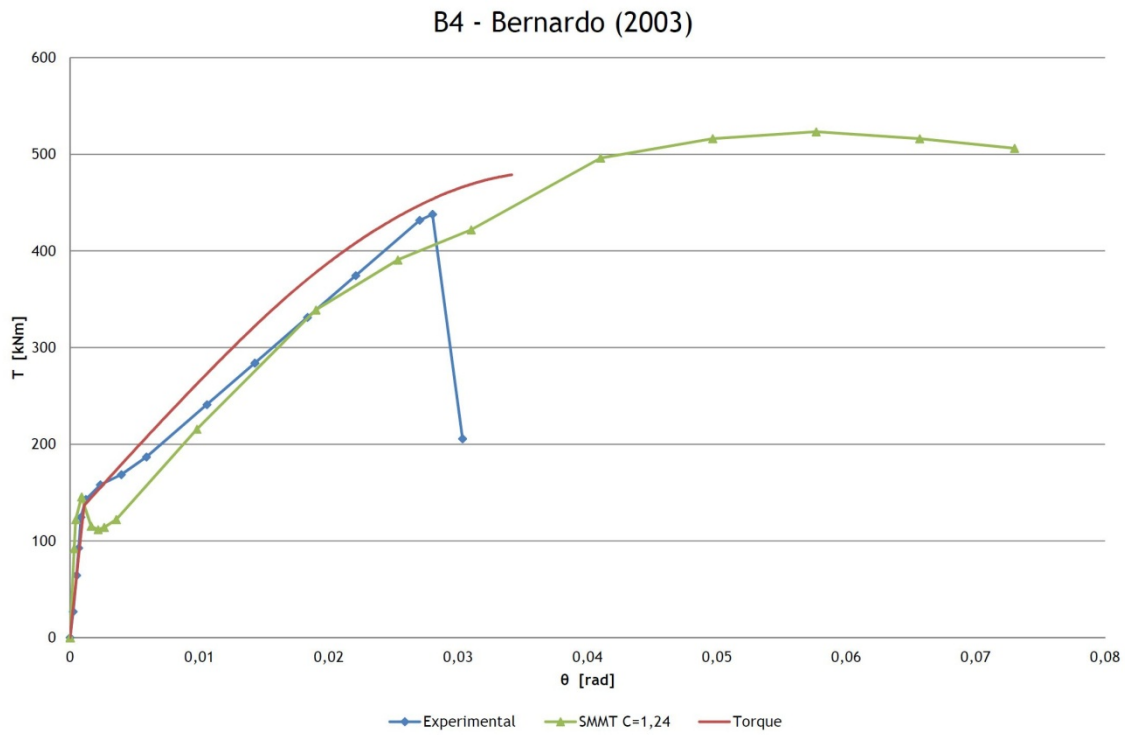


Figura 47 - Curva $T - \theta$ para a viga B4 - Bernardo (2003)

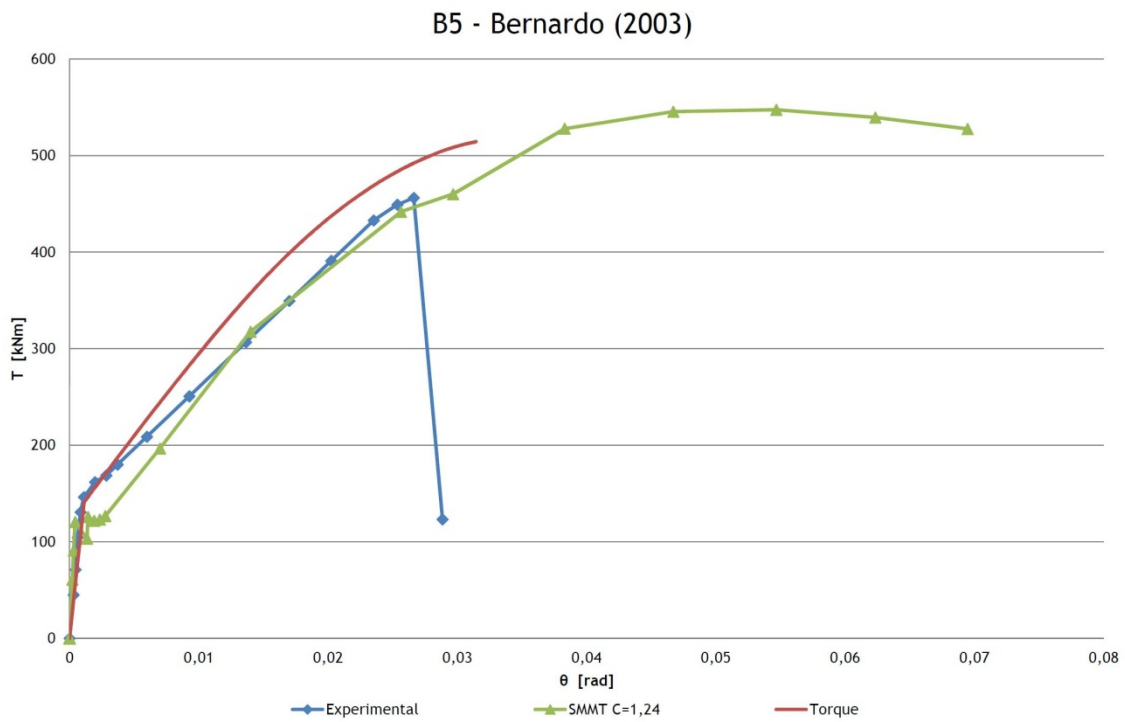


Figura 48 - Curva $T - \theta$ para a viga B5 - Bernardo (2003)

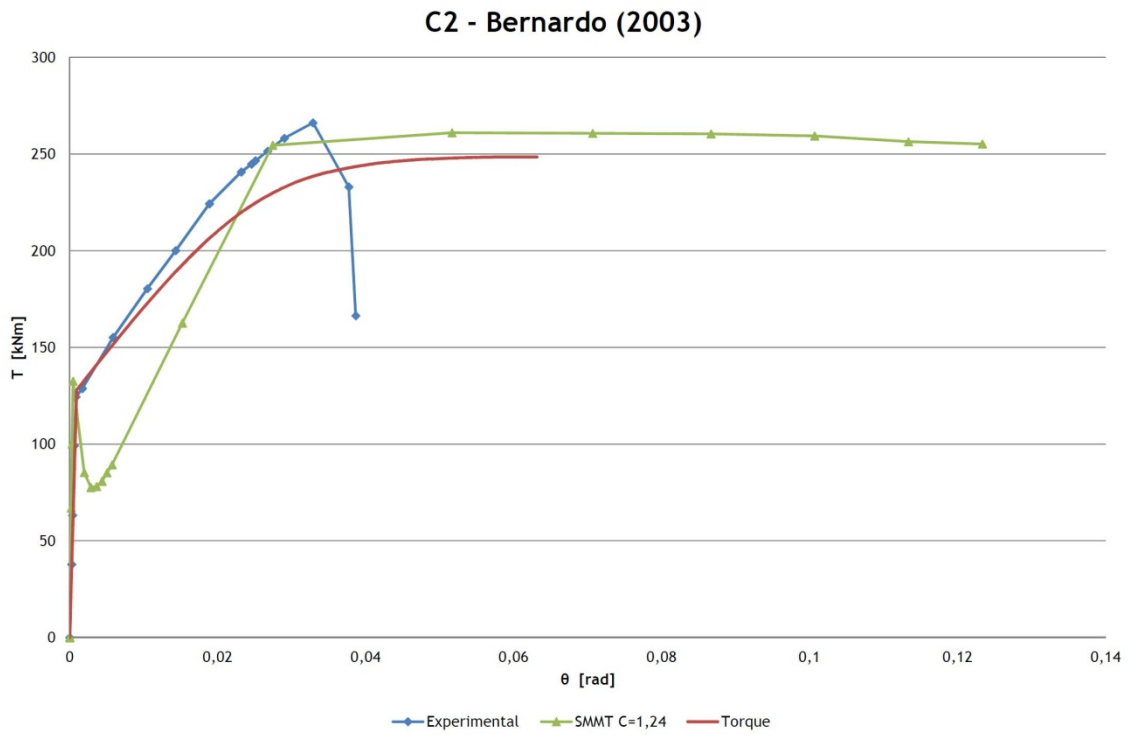


Figura 49 - Curva $T - \theta$ para a viga C2 - Bernardo (2003)

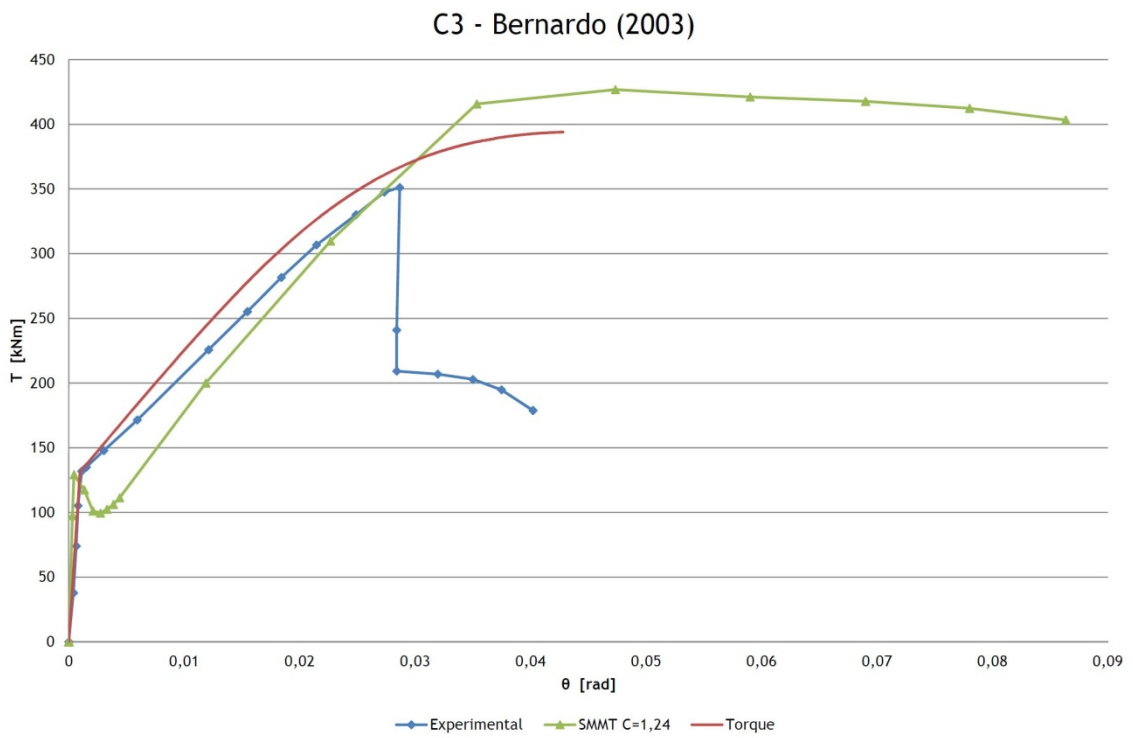


Figura 50 - Curva $T - \theta$ para a viga C3 - Bernardo (2003)

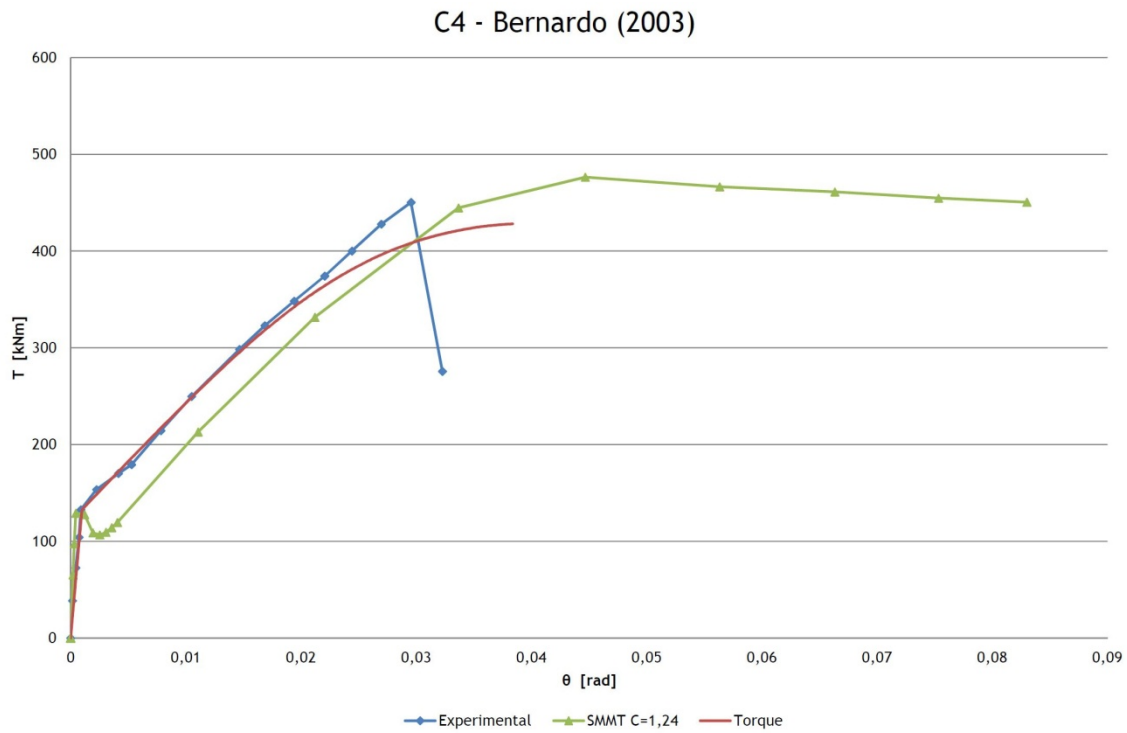


Figura 51 - Curva $T - \theta$ para a viga C4 - Bernardo (2003)

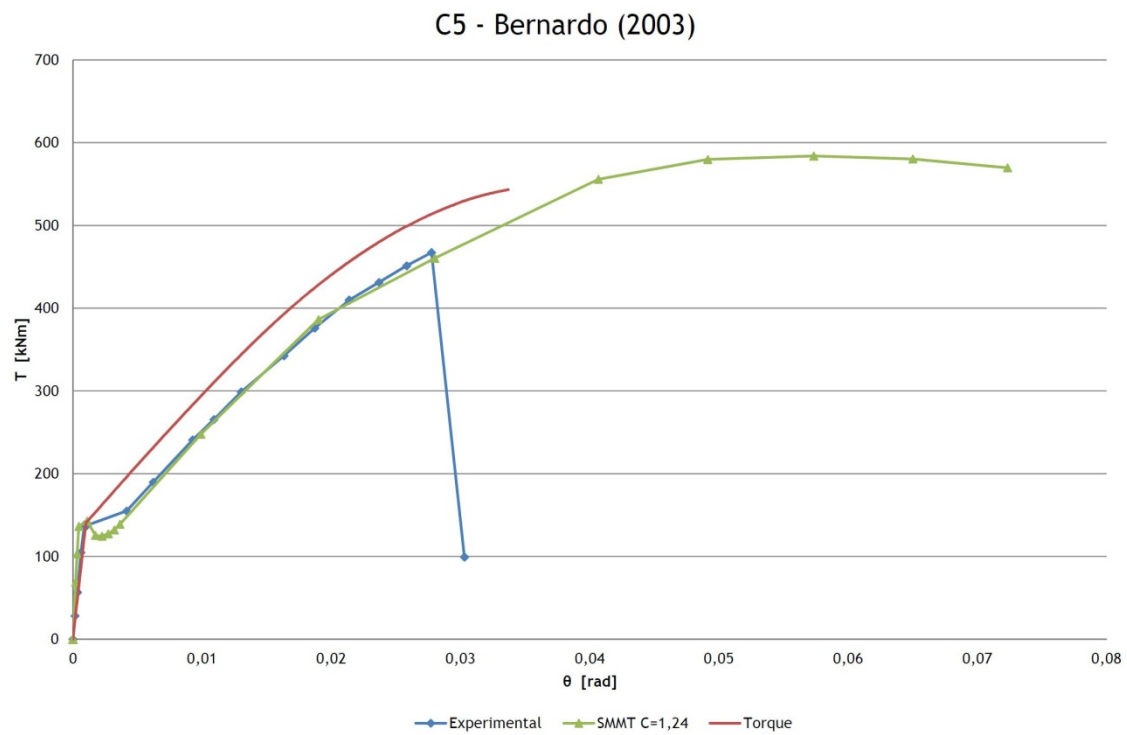


Figura 52 - Curva $T - \theta$ para a viga C5 - Bernardo (2003)

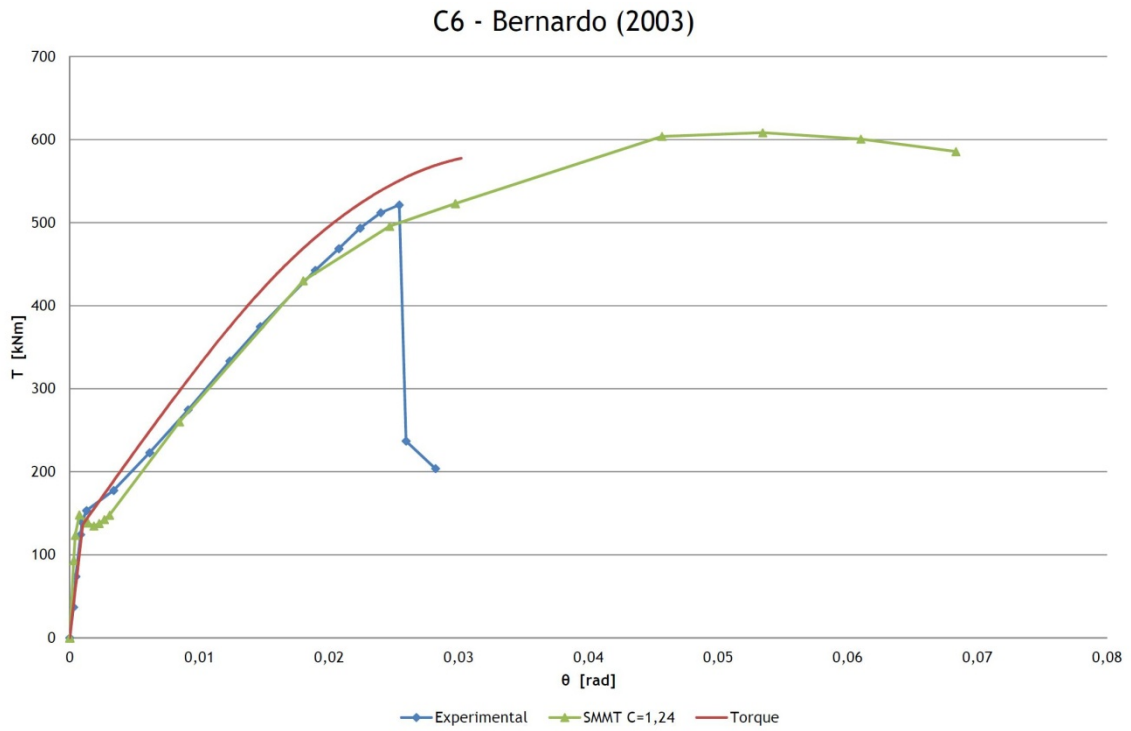


Figura 53 - Curva $T - \theta$ para a viga C6 - Bernardo (2003)

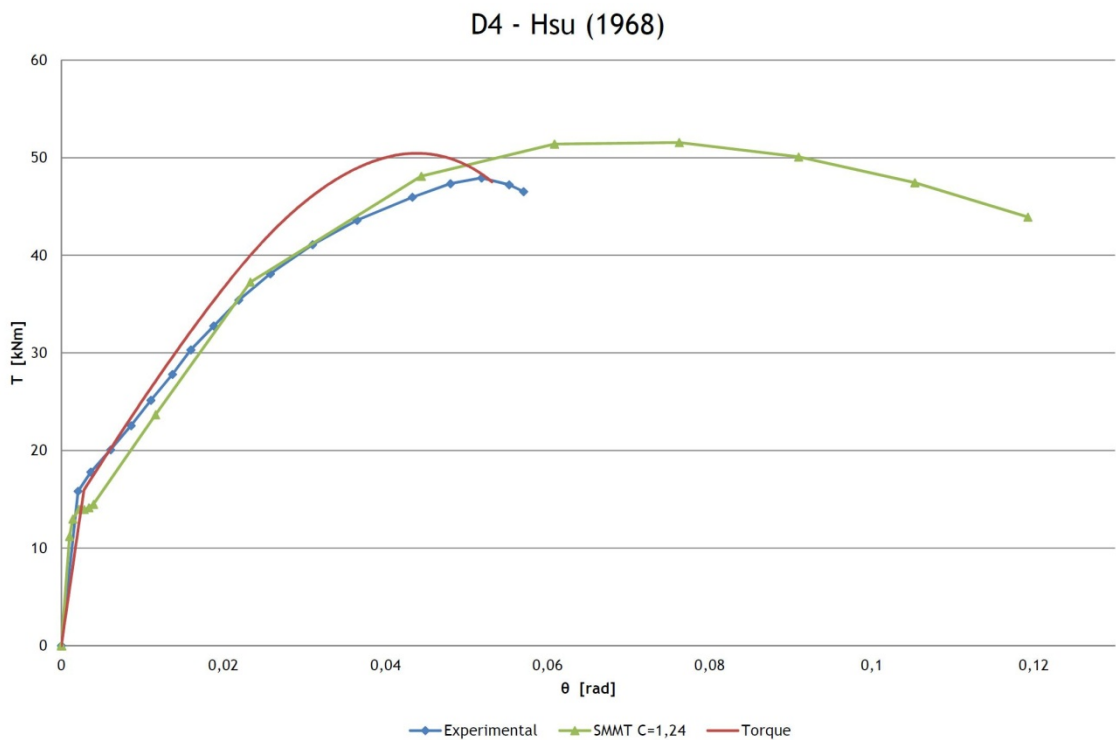


Figura 54 - Curva $T - \theta$ para a viga D4 - Hsu (1968)

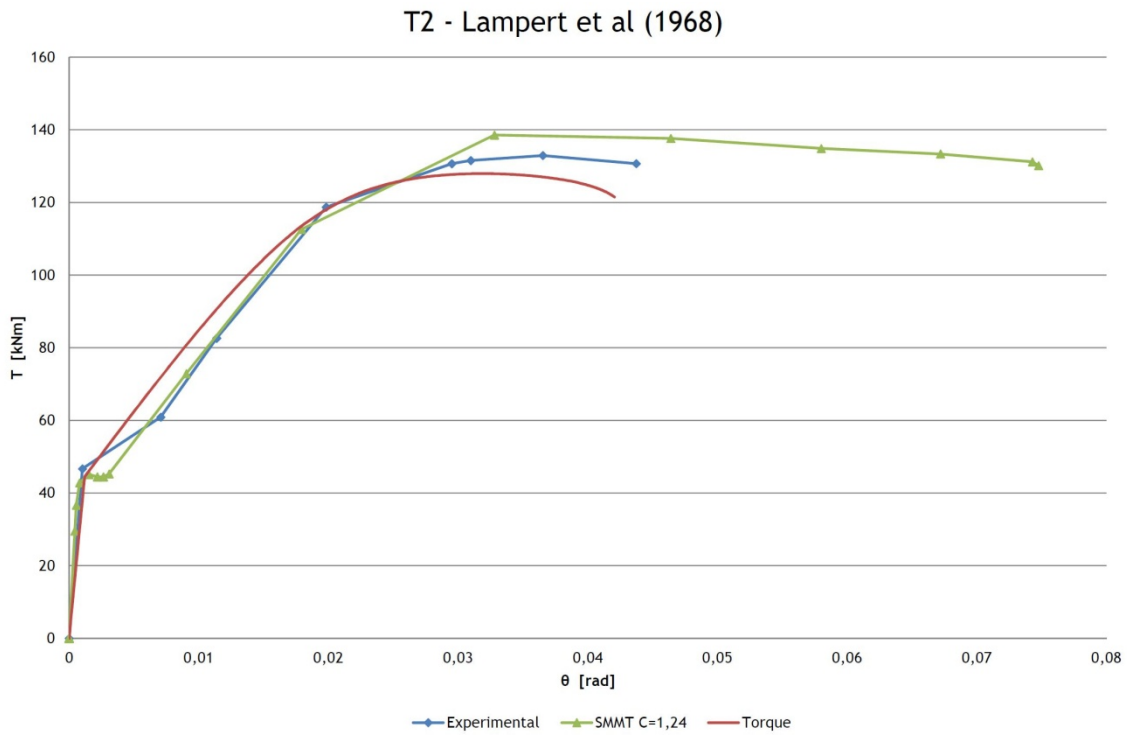


Figura 55 - Curva $T - \theta$ para a viga T2 - Lampert et al (1968)

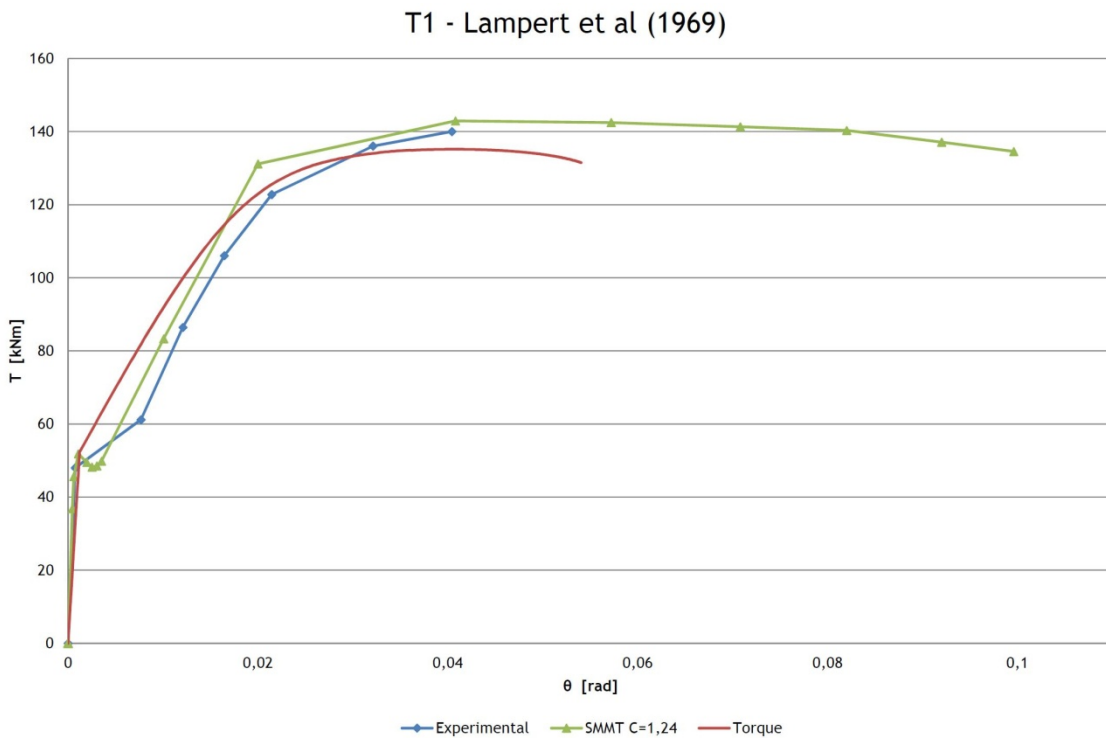


Figura 56 - Curva $T - \theta$ para a viga T1 - Lampert et al (1969)

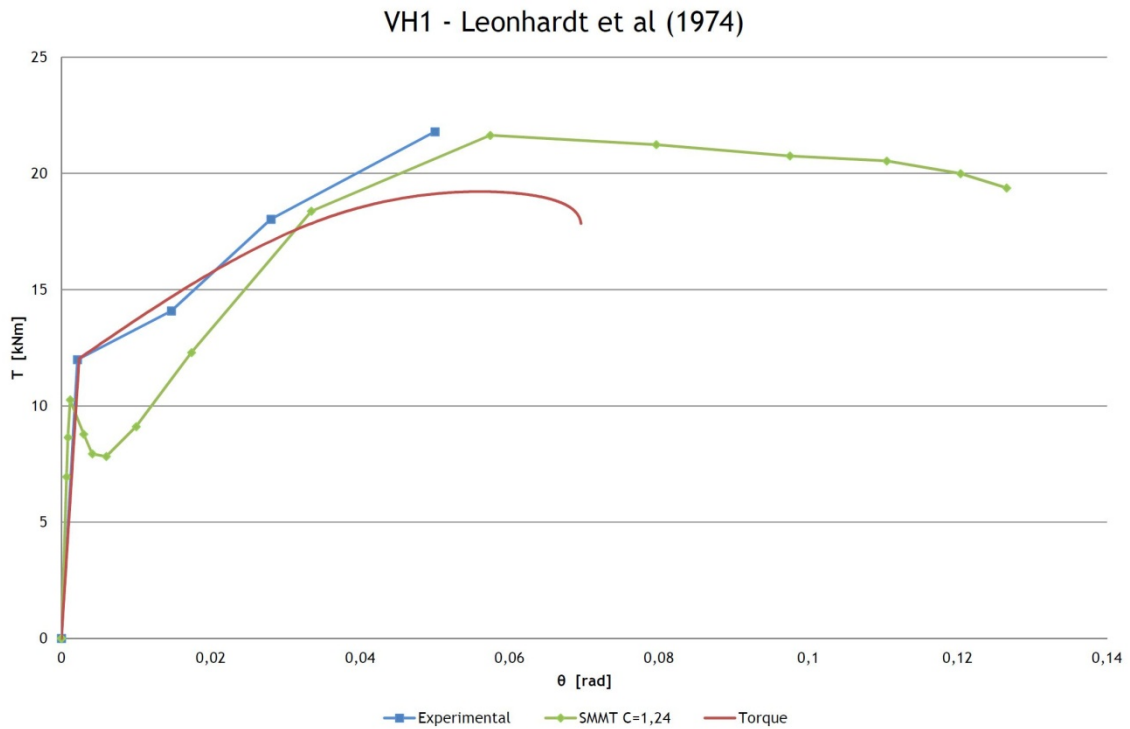


Figura 57 - Curva $T - \theta$ para a viga VH1 - Leonhardt et al (1974)

De um modo geral, para a zona comportamental 1, o MTEAV modificado por Andrade e o SMMT com $C = 1,24$ aproximam-se dos resultados obtidos experimentalmente ainda que para a maioria das vigas de referência o valor do momento torsor de fissuração T_{cr} seja menor para o modelo SMMT com $C = 1,24$.

O modelo SMMT não simula adequadamente a passagem do Estado I para o Estado II na curva $T - \theta$ uma vez que o decréscimo instantâneo do momento torsor observado teoricamente após fissuração é experimentalmente observado.

No início da fase comportamental 2.b a curva teórica $T - \theta$ do modelo MTEAV modificado segue o mesmo traçado da curva experimental, no entanto os valores do momento torsor são maiores comparativamente aos valores experimentais. O SMMT com $C = 1,24$ também apresenta resultados semelhantes na parte inicial da curva para a fase comportamental 2.b, aproximando-se da curva experimental. Contudo, este último modelo apresenta uma fase de transição entre a fase comportamental 1 e a fase comportamental 2.b que na realidade não existe, sendo este um dos aspectos a melhorar neste modelo.

Para a fase última da curva $T - \theta$ o MTEAV modificado e o SMMT com $C = 1,24$ apresentam resultados bastante satisfatórios, no entanto o modelo SMMT com $C = 1,24$ sobrestima o valor do momento torsor de rotura T_n assim como o valor da rotação θ_n , prolongando excessivamente o valor das rotações últimas.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Secção Rectangular Vazada à Torção com base no SMMT

É possível, assim, considerar que o modelo MTEAV modificado por Andrade [4] é mais satisfatório, uma vez que se aproxima mais das curvas experimentais. Tal demonstra que o SMMT requer ainda algum desenvolvimento para o tipo de vigas em análise neste trabalho.

Capítulo 5

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

5.1. Introdução

Resumem-se, neste capítulo, as conclusões principais do trabalho realizado e apresentam-se propostas de desenvolvimento futuras dentro do tema abordado.

No que se refere a procedimentos de cálculo pode considerar-se que estes permitiram simular convenientemente os problemas estudados com um grau de precisão aceitável embora com alguns resultados considerados menos próximos da realidade.

Pode, então, afirmar-se que os objectivos propostos no início deste trabalho foram alcançados.

5.2. Conclusões

Na primeira parte do trabalho fez-se uma descrição e análise de um modelo teórico baseado no modelo de membrana para elementos de betão armado sujeitos à torção (SMMT) com vista ao cálculo e traçado das curvas de comportamento momento torsor (T) - rotação (θ) para a fase última comportamental de vigas de betão armado com secção vazada sujeitas à torção pura até à rotura. O comportamento dos materiais foi tido em conta mediante a incorporação de leis constitutivas tensão (σ) - extensão (ε) adequadas. Para o betão à compressão foi introduzido um factor de redução ζ que representa a redução da tensão de compressão do betão (*Softening Effect*) devido ao efeito das extensões transversais de tracção. Neste modelo é incorporado uma relação do betão à tracção que tem em conta o efeito do gradiente de extensão. Para incorporar este efeito os valores da tensão de rotura do betão à tracção (f_{cr}) e o módulo de elasticidade do betão (E_c) são multiplicados por um factor de 1,45.

Uma análise comparativa global dos valores obtidos a partir do modelo SMMT [37] para as resistências teóricas com os resultados experimentais das vigas de referência e ainda os resultados obtidos a partir do modelo de treliça espacial com ângulo variável modificado por Andrade [4] (MTEAVmod), permitiu estabelecer que é notável a variação de resultados observada entre estes dois modelos teóricos.

Foi possível observar que, no modelo SMMT, a introdução de um factor de 1,45 na relação do betão à tracção aumenta bastante o valor do momento torsor de fissuração (T_{cr}) quando comparado com o valor experimental. Por este motivo foram então calculadas as curvas $T - \theta$ para as vigas de referência sem este factor de correcção (SMMT sem correcção), o que

permitiu concluir que o valor de T_{cr} diminui tendo um valor muito baixo comparado com o valor de T_{cr} obtido experimentalmente. Como tal, foi necessário encontrar um novo valor do factor de redução tendo em conta o valor médio da relação entre o valor do momento torsor de fissuração experimental ($T_{cr,exp}$) com o mesmo valor mas obtido teoricamente ($T_{cr,th}$) para o modelo SMMT com correcção e SMMT sem correcção de modo a corrigir esta situação. Obteve-se um valor final de 1,24 ($C = 1,24$) para o factor de correcção e foram calculadas novamente as curvas $T - \theta$ para as vigas de referência e comprovou-se que este factor aproxima o valor de T_{cr} teórico ao valor de T_{cr} experimental. No entanto, este factor de 1,24 não altera o traçado da curva $T - \theta$ para a zona comportamental 2.b e 3.

No que se refere ao valores da rotação correspondente ao momento torsor resistente, observou-se que o valor deste parâmetro é muito elevado quando comparado com o valor experimental. Deste modo conclui-se que o SMMT apresenta grande dificuldade em estimar a deformação das vigas de referência para elevados níveis de carregamento.

Na primeira fase da curva $T - \theta$ (Estado I - zona comportamental 1), fazendo uma análise comparativa entre o modelo SMMT com correcção, o SMMT sem correcção e o SMMT com factor de correcção $C = 1,24$ é possível concluir que este último modelo apresenta valores aceitáveis para o valor de T_{cr} comparativamente com o obtido experimental para cada uma das vigas de referência. Os valores da rotação correspondente ao momento torsor de fissuração θ_{cr} obtidos a partir deste modelo com o factor de correcção $C = 1,24$ são idênticos aos valores obtidos através dos outros dois modelos. Os melhores resultados para a rigidez de torção em Estado I (K_t^I) foram obtidos a partir do modelo SMMT sem correcção embora tenha valores de dispersão bastante elevados.

Para o Estado II da curva $T - \theta$ para a zona comportamental 2.b e 3 apenas foram comparados os valores obtidos através dos modelos SMMT com correcção e SMMT sem correcção uma vez que, tal como foi referido anteriormente, os valores do modelo SMMT com $C = 1,24$ são semelhantes aos obtidos a partir destes dois modelos. De um modo geral, são os valores obtidos a partir do modelo SMMT os que se aproximam mais dos valores experimentais, acontecendo o mesmo para o valor da ordena na origem (T_0). Na zona comportamental 3, obtiveram-se valores para o momento torsor de rotura (T_n) e respectivo valor de rotação (θ_n) muito semelhantes entre os dois modelos, no entanto o valor de T_n , comparativamente aos resultados experimentais, é relativamente mais elevado mas é no valor da rotação θ_n onde se nota maior discrepância de valores. O SMMT com correcção e o SMMT sem correcção apresentam valores para θ_n muito elevados e estendem demasiado os valores de rotação sem nenhuma justificação física para este resultado.

Numa última fase foram comparados os modelos SMMT com $C = 1,24$ e MTEAVmod com os resultados experimentais com base numa análise visual dos gráficos $T - \theta$. Foi observado que os dois modelos apresentam uma grande diferença no traçado da curva $T - \theta$ relativamente à

passagem do Estado I para o Estado II. O modelo SMMT logo após o momento torsor de fissuração T_{cr} sofre um “abaixamento” que não acontece na realidade. Apesar disso, as previsões obtidas para ambos os modelos consideram-se aceitáveis em relação ao Estado II embora o modelo MTEAVmod apresente valores mais próximos dos obtidos experimentalmente.

Para concluir, pode referir-se que o trabalho desenvolvido nesta tese constitui um avanço importante no que diz respeito ao desenvolvimento do modelo SMMT para vigas de secção vazada com vista a melhorá-lo na previsão do comportamento global de vigas sujeitas à torção em todas as suas fases comportamentais.

O trabalho deve no entanto prosseguir de modo a melhorar a previsão teórica global do comportamento das vigas com secção vazada à torção. Tal trabalho é importante antes de se proceder a um avanço na generalização do modelo para outros casos de estudo, como por exemplo para a situação de utilização de novos materiais estruturais ou outros casos de interacção de esforços ou ainda a utilização de betão pré-esforçado.

5.3. Recomendações para Estudos Futuros

Futuramente, será interessante desenvolver os seguintes estudos adicionais:

- Tentar “corrigir” de uma forma parametricamente mais satisfatória os resultados obtidos através do modelo SMMT relativamente ao momento torsor de fissuração;
- Tentar “corrigir” os resultados obtidos através do modelo SMMT no que se refere à passagem do Estado I para o Estado II;
- Reformular o modelo de membrana para a torção de forma a ter em conta outras situações de interacção de esforços e a utilização de novos materiais.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

1. ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71), Detroit, MI: American Concrete Institute, 1971 (citado em [4]).
2. ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05), American Concrete Institute, Detroit, MI, 2005.
3. Andersen, P., “Experiments with Concrete in Torsion,” Transactions, ASCE, Vol. 100, 1935, pp. 949-983.
4. Andrade, J. M. A., “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção. Generalização da Analogia da Treliça Espacial com Ângulo Variável,” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2003.
5. Armstrong, S., “The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion,” Proceedings of a Symposium of the Strength of Concrete Structures, Session B: Paper 2. Cement and Concrete Association, London, May 1956, pp. 101-122 (citado em [4]).
6. Ashour S. A., Samman T. A., Radain T. A., “Torsional behavior of reinforced high strength concrete deep beams,” ACI Struct J, 1999;96(6):1049_58 (citado em [37]).
7. Belarbi, A. and Hsu. T. C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression,” Research Report UHCEE 91-2, Univ. of Houston, Houston, Texas, 1991 (citado em [49]).
8. Belarbi A. and Hsu T. T. C., “Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete,” ACI Struct J, 1994;91(4):465_74.
9. Belarbi A. and Hsu T. T. C., “Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension_compression,” ACI Struct J, 1995;92(5):562_73.
10. Bernardo, L. F. A., “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência,” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003.

11. Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R., 2008 “Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams”, Journal Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, July, 2008, ISSN: 1359-5997/03, pp. 1143-1167.
12. Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R. Torsion in HSC Hollow Beams: Strength and Ductility Analysis,” ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A. Jan/Feb 2009, Vols. 106, Issue 1, pp. 39-48.
13. Bredt, R., “Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat,” Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Band 40, No. 28, July 11, 1896, pp. 785-790; No. 29, July 18, 1896, pp. 813-817 (em Alemão, citado em [27]).
14. CEB, “Torsion”, Bulletin d’Information N.º 71, Mars, 1969.
15. CEB, “Shear and Torsion,” Bulletin d’Information N.º 126, Juin, 1978.
16. CEB-FIP, “Model Code for Concrete Structures,” CEB-FIP International Recommendations, third edition, Paris, 1978, 348 pp.
17. Collins, M. P., “Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams,” Inelasticity and Non- Linearity in Structural Concrete, Study No. 8, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, Canada, 1973, pp. 211-232.
18. Collins, M. P. and Mitchell, D., “Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams,” Journal of the Prestressed Concrete Institute, Proc., V. 25, No. 5, September-October 1980, pp. 32-100.
19. Costa, R. J. T., “Placas de Betão Armado Submetidas a Estados Bidimensionais de Tensão,” Master Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005.
20. Cowan, H. J., “Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams,” Magazine of Concrete Research, Vol. 2, No. 4, July 1950, London, pp. 3-8.
21. Elfgren, L., “Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear,” Publication 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1972, 249 pp.
22. Fu CC, Tang Y., “Torsional analysis for prestressed concrete multiple cell box,” J Eng Mech ASCE 2001;127(1):45_51.

23. Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Plain Concrete Rectangular Sections," Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 203-238.
24. Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members," Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306.
25. Hsu, T. T. C., "Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, ST 2, February 1968, pp. 485-510.
26. Hsu, T. T. C., "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections," Journal of the American Concrete Institute, Proc., Vol. 70, No. 5, May 1973, pp. 352-360.
27. Hsu, T. T. C., "Torsion of Reinforced Concrete," Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
28. Hsu T. T. C., "Shear flow zone in torsion of reinforced concrete," J Struct Eng ASCE 1990;116(1):3206_26.
29. Hsu T. T. C., "Unified theory of reinforced concrete," Boca Raton (FL): CRC Press; 1993.
30. Hsu T. T. C. and Mo Y. L., "Softening of concrete in torsional members - Theory and tests," ACI J Proc 1985;82(3):290_303.
31. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests," Journal of the American Concrete Institute, Proc. May-June 1985, Vols. 82, No. 3, pp. 290-303.
32. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations," Journal of the American Concrete Institute, Proc., July-August 1985, Vols. 82, No. 4, pp. 443-452.
33. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Prestressed Concrete," Journal of the American Concrete Institute, Proc. September-October 1985, Vols. 82, No. 5, pp. 603-615.
34. Hsu T. T. C. and Zhang L. X., "Nonlinear analysis of membrane elements by fixed-angle softened-truss model," ACI Struct J 1997;94(5):483_92.
35. Hsu T. T. C., and Zhu R. R. H., "Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear," ACI Struct J. 2002; 99(4):460-9.

36. INCM, “Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado,” Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa, 1983.
37. Jeng, C. H. and Hsu T. T. C., “A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members,” *Engineering Structures* 31, 2009. 1944-1954.
38. Lampert, P. und Thurlimann, B., “Torsionsversuche an Stahlbetonbalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams),” Bericht, Nr. 6506-2, Institut für Baustatik, ETH, Zurich, 1969, 101 pp. (em Alemão, citado em [15]).
39. Mo Y. L., Jeng C. H., Chang Y.S., “Torsional behavior of prestressed concrete boxgirder bridges with corrugated steel web,” *ACI Struct J* 2000;97(6):849_59.
40. Mörsh, E., “Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie,” 1st ed., Wayss and Freytag, A. G., Im selbstverlag der Firma, Neustadt a. d. Haardt, May 1902, 118 pp.; “Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung,” 2nd ed., Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart, 1906, 252 pp.; 3rd ed. (traduzido para Inglês por E. P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.), (citado em [33]).
41. NP EN 1992-1-1, “Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Part 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios,” Março, 2010.
42. Pang X. B. and Hsu T. T. C., “Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear,” *ACI Struct J* 1995;92(6):665_79.
43. Pang X. B. and Hsu T. T. C., “Fixed-angle softened-truss model for reinforced concrete,” *ACI Struct J* 1996;93(2):197_207.
44. Rao, D. L. N. and Warwaruk J., “Prestressed Concrete I-Beams Subjected to Combined Loadings,” *Structural Engineering Report No. 46*, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton. November 1973 (citado em [33]).
45. Rausch, E., “Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion),” Ph.D. Thesis, Berlin, 1929, 53 pp. (em Alemão, citado em [27]).
46. Ritter, W., “Die Bauweise Hennebique,” *Schweizerische bauzeitung*, Zurich, February 1899 (em Alemão, citado em [27]).
47. Ritter, W., “Die Bauweise Hennebique,” *Schweizerische Bauzeitung*, Zurich, February 1899 (em Alemão, citado em [27]).

48. Saint-Venant, B. de, “Mémoire sur la torsion des prismes,” (lu à l’Académie le 13 juin 1853), Mémoires des savants étrangers, Mémoires présentés pas divers savants à l’Académie des Sciences, de l’Institut Impérial de France et imprimé par son ordre, Vol. 14, imprimerie Impériale, Paris, 1856, pp. 233-560 (citado em [27]).
49. Vecchio, F. J. and Collins, M. P., “Compression Response of Cracked Reinforced Concrete,” Journal of Structural Engineering, ASCE, 119(12). 1993, pp. 3590-3610.
50. Vecchio F. J. and Collins, M. P., “Modified compression-field theory for reinforced concrete element subjected to shear,” ACI Struct J 1986;83(2):219_31.
51. Vecchio, F. J. and Collins, M. P., “Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear,” IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced concrete, Delft, 1981, Final Report, pp. 211-225.
52. Vecchio, F. J. and Collins, M. P., “The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Forces,” Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto. March 1982. (citado em [55]).
53. Wagner, H., “Ebene Blechwandtrager mit Sehr Dunnem Stegblech (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web),” Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Vol. 20, No. 8 to 12, Berlin, 1929 (em Alemão, citado em [27]).
54. Wang J., “Constitutive relationships of prestressed concrete membrane elements,” PhD dissertation, Houston (TX, USA): University of Houston; 2006.
55. Zhang, L. X. and Hsu, T. C., “Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements,” Journal of Structural Engineering, ASCE, January-February 1998, Vols. 124, No. 1, pp. 24-34.
56. Zhu R. R. H., Hsu T. T. C., “Poisson effect in reinforced concrete membrane elements,” ACI Struct J 2002;99(5):631_40.
57. Zhu R. R. H., Hsu T. T. C., Lee J. Y., “Rational shear modulus for smeared crack analysis of reinforced concrete,” ACI Struct J 2001;98 (4):343_50.

Anexos