



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Estudo da Forma de Barragens Abóbada sob a Acção da Pressão Hidrostática e de Variações de Temperatura

João Miguel de Freitas Cerdeira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil - Estruturas e Construção
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor João António Saraiva Pires da Fonseca

Covilhã, Outubro de 2011

À minha família
À Mariana

Agradecimentos

O autor agradece ao Professor João Fonseca, orientador científico deste trabalho, por toda a sua disponibilidade e abertura para discutir todos os temas que serão expostos seguidamente, assim como por todas as sugestões e correcções relativas ao texto.

À Universidade da Beira Interior, o autor agradece as condições que lhe foram facultadas e que possibilitaram a sua formação em Engenharia Civil, que culmina com a realização deste trabalho.

O autor agradece ainda ao Professor Clemente Pinto, pelas intermináveis conversas sobre estruturas, ao Professor Martin Höck, pelas valiosas sugestões durante as medições efectuadas na técnica experimental do método da membrana e a todos aqueles que directa ou indirectamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Por último, o autor agradece ao avô António, pela ajuda prestada na construção de uma montagem para determinação de superfícies funiculares, utilizada neste trabalho.

Resumo

A procura de uma forma para as barragens abóbada que potencie as características resistentes do material de construção, o betão, conduziu ao estabelecimento de superfícies médias com dupla curvatura, habitualmente com a convexidade da linha média do perfil central voltada para montante. Estas formas faziam também diminuir o raio das curvas de nível com a profundidade. O plano de inserção da barragem no vale está contido num plano com inclinação para jusante, em relação à vertical, possibilitando desta forma o crescimento isolado dos blocos. O facto da pressão hidrostática não estar contida nos planos definidos pelas linhas de curvatura da superfície conduz ao aparecimento de tracções ao longo da direcção tangencial à linha média do perfil central. Este problema era habitualmente resolvido com recurso ao aumento da espessura da barragem, o que provoca um agravamento dos esforços e tensões provocados pela retracção e pelas variações de temperatura. A solução do problema reside no estabelecimento de uma superfície média cujas linhas de curvatura definem planos paralelos à direcção da pressão hidrostática, sendo a espessura da barragem condicionada apenas por esta acção, o que possibilita o atenuamento dos efeitos das variações de temperatura. Os efeitos da variação uniforme de temperatura tendem a ser mais significativos em cascas mais abatidas e mais espessas.

Palavras-chave

Barragem abóbada, casca, forma, temperatura, pressão hidrostática.

Abstract

The search for arch dam shapes usually concerns to take advantage of the compressive strength of the concrete. Most arch dams have double-curvature middle surfaces where the central cantilever blocks are curved: upstream overhang at the base and downstream overhang at the top. Usually, the radius of the horizontal arches of the dam decreases with depth. The individual stability of blocks during construction is ensured by the downstream overhang of the line of centers of the horizontal arches. As a result, the lines of curvature on the middle surface do not match with the direction of the hydrostatic pressure. Tensile stresses will appear in the direction tangent to the central cantilever. If the thickness of the dam is increased, those tensile stresses will decrease, but stresses due to thermal loads will increase. To avoid this, the lines of curvature on the middle surface must coincide with the direction of the hydrostatic pressure such that the thickness of the dam is chosen according to the level of compression stresses. If the dam is thin, the stresses due to thermal loads are not so high. The analysis of shells of revolution indicates that a uniform variation of temperature produces greater stresses in flat and thicker shells.

Keywords

Arch dam, shell, shape, thermal loads, hydrostatic pressure.

Índice

1 Introdução	1
1.1 Enquadramento do tema	1
1.2 Definições	5
1.3 Objectivos e formulação do problema	13
1.4 Hipóteses	13
1.5 Organização do trabalho	14
2 Revisão da Literatura	15
2.1 Evolução da forma das barragens abóbada	15
2.1.1 Barragens de gravidade e barragens arco	15
2.1.2 Fórmula dos tubos	18
2.1.3 Barragens de centro variável	21
2.1.4 Barragem experimental de “Stevenson Creek”	26
2.1.5 Dispositivos de apoio no pé de montante - “berços”	28
2.1.6 Curvatura na direcção vertical	29
2.1.7 Junta perimetral e soco de fundação	30
2.1.8 Desenvolvimento dos métodos de cálculo na segunda metade do século XX	34
2.2 Forma das curvas de nível da abóbada	36
2.2.1 Arco circular	36
2.2.2 Arco parabólico	37
2.2.3 Arco em espiral logarítmica	40
2.3 Teoria de elasticidade das cascas em equilíbrio de membrana	45
2.3.1 Equilíbrio de membrana	45
2.3.2 Esforços de membrana em cascas de revolução	47
2.3.3 Casca de revolução esférica	58
2.4 Métodos da membrana	61
2.5 Métodos de optimização	65
2.6 Ensaios sobre modelos e métodos numéricos de análise de estruturas	66
2.7 Influência do processo construtivo na forma final de uma barragem abóbada	66
2.8 Variações de temperatura nas barragens abóbada	68
2.8.1 Generalidades	68
2.8.2 Resultados da observação do estado térmico da barragem abóbada do Cabril	70
2.9 Retracção	78
2.10 Calor de hidratação	82

2.11 Arcos planos parabólicos solicitados por variações uniformes de temperatura	84
2.12 Modelação matemática da geometria das barragens abóbada	86
2.12.1 Definição da superfície média	87
2.12.2 Quadrática mais provável	90
2.12.3 Métodos para estimar a espessura	92
2.12.4 Parâmetros para comparação de formas	95
2.13 Geometria diferencial	98
2.13.1 Relação entre a curvatura e os esforços membrana numa casca	98
2.13.2 Curvas espaciais	99
2.13.3 Curvas de superfície	101
2.13.4 Curvatura e torção num ponto de uma superfície	102
2.13.5 Círculo de Mohr para a curvatura e torção num ponto de uma superfície	104
3 Metodologia	107
3.1 Cálculo numérico das curvaturas principais numa superfície	107
3.2 Técnica experimental do método da membrana	108
3.3 Cascas de revolução	109
3.4 Barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares	111
4 Cálculo Numérico das Curvaturas Principais numa Superfície	119
4.1 Entrada de dados	119
4.2 Ligações nodais	119
4.3 Curvatura normal e torção geodésica	120
4.3.1 Determinação do vector normal à superfície	120
4.3.2 Formulação isoparamétrica	124
4.3.3 Direcções principais de curvatura	128
5 Técnica Experimental do Método da Membrana	129
5.1 Equipamento	129
5.2 Membranas	130
5.3 Procedimentos	131
5.4 Resultados	133
6 Análise Numérica de Cascas de Revolução	149
6.1 Modelos	149
6.1.1 Cascas de revolução esféricas com um bordo livre	149
6.1.2 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo	150
6.2 Acções	151
6.2.1 Variação uniforme de temperatura	151
6.3 Condições de apoio	151
6.4 Propriedades dos materiais	151
6.5 Resultados	152

6.5.1 Modelo CASCA1	152
6.5.2 Modelo CASCA2	153
6.5.3 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo	154
7 Geração Parametrizada da Geometria de Barragens de Ângulo Constante com Curvas de Nível Circulares	157
7.1 Dimensionamento dos arcos	157
7.2 Organização espacial dos arcos em função do equilíbrio no crescimento isolado dos blocos	161
7.3 Geometria da superfície média das barragens	173
7.3.1 Barragem DAM1	173
7.3.2 Barragem DAM2	175
7.3.3 Barragem DAM3	176
7.3.4 Barragem DAM4	177
8 Análise Numérica de Barragens de Ângulo Constante com Curvas de Nível Circulares	181
8.1 Modelos	181
8.2 Acções	183
8.2.1 Pressão hidrostática	183
8.2.2 Peso próprio	183
8.2.3 Variações de temperatura	183
8.3 Condições de apoio	183
8.4 Propriedades dos materiais	183
8.5 Resultados	184
8.5.1 Modelo DAM1	184
8.5.2 Modelo DAM1.1	190
8.5.3 Modelo DAM2	191
8.5.4 Modelo DAM3	192
8.5.5 Modelo DAM4	194
8.5.6 Quadros resumo	194
9 Discussão de Resultados	199
9.1 Cálculo numérico das curvaturas principais numa superfície	199
9.2 Técnica experimental do método da membrana	199
9.3 Análise numérica de cascas de revolução	200
9.3.1 Cascas de revolução esféricas com um bordo livre	200
9.3.2 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo	201
9.4 Barragens de Ângulo Constante com Curvas de Nível Circulares	201
9.4.1 Modelo DAM1	201
9.4.2 Modelo DAM1.1	203
9.4.3 Modelo DAM2	203
9.4.4 Modelo DAM3	204

9.4.5 Modelo DAM4	204
10 Conclusão	205
Referências Bibliográficas	213
Anexos	217
A.1 Notação	217
A.2 Glossário	229
A.3 Fluxogramas da rotina de cálculo PCURV	233

Lista de Acrónimos

UBI	Universidade da Beira Interior
EUA	Estados Unidos da América
EC2	Eurocódigo 2
USBR	United States Bureau of Reclamation
NMC	Nível de máxima cheia

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento do tema

Na análise de barragens é usual identificar três elementos: a barragem, a massa de água confinada por esta, também designada por reservatório ou albufeira, e o maciço de fundação (natural ou artificial). Face às condicionantes de natureza topográfica e geológica do local, o projecto de obras deste tipo compreende a escolha do tipo de barragem, suas dimensões, orientação e forma [12].

Existem várias formas de classificar os diversos tipos de barragens. A que por ventura melhor serve o propósito deste trabalho é aquela que agrupa as barragens de acordo com o seu tipo de estrutura, ou seja, segundo a forma como a matéria é organizada para resistir às acções exteriores, particularmente à acção preponderante, a pressão hidrostática. De acordo com esta classificação, destacam-se aqui alguns tipos de barragens: barragens de aterro, barragens de gravidade, barragens de contrafortes e barragens abóbada. Podem existir mais tipos de barragens e até algumas conjugações de mais do que um dos tipos enumerados. As barragens de aterro podem ser realizadas em terra e/ou enrocamento ou em betão compactado por cilindros. As barragens de gravidade e de contrafortes são habitualmente executadas em betão ou em alvenaria. As barragens abóbada são maioritariamente de betão.

Uma estrutura do tipo casca está incluída na família das estruturas laminares. A designação laminar é atribuída a uma estrutura que, para efeitos de análise de tensões, pode ser representada matematicamente por uma superfície. As estruturas laminares dividem-se em dois grupos: estruturas representadas por uma superfície plana e representadas por uma superfície curva, estas últimas também designadas por cascas. Uma casca pode ser definida como uma estrutura que, com o propósito da análise de tensões, é modelada como uma superfície curva, sendo a sua espessura inferior às outras dimensões da peça [13]. A sua espessura pode ser constante ou variável, sendo medida perpendicularmente à superfície média. Uma casca é limitada por duas superfícies curvas: as faces [13]. Designa-se por superfície média, ou folheto médio, a superfície que passa equidistante entre as duas faces [13]. Uma casca fica completamente definida, em termos mecânicos, pela superfície média e pela espessura em todos os pontos, da mesma forma que uma barra é definida pelo seu eixo e pela secção transversal [13]. No estudo das equações de equilíbrio elástico de cascas finas é válida a hipótese de Kirchhoff [11]. Esta hipótese estabelece que um segmento de recta normal à superfície média, formado por dois pontos simetricamente dispostos em relação àquela superfície, permanece recto, de comprimento indeformável e normal à superfície média deformada [11].

O facto da hipótese de Kirshhoff introduzir erros na análise de uma casca exige o estabelecimento de uma espessura limite, a partir da qual tais erros começam a ser significativos. Para um erro admissível, introduzido pela adopção da hipótese de Kirshhoff, da ordem de grandeza de 10%, a relação t/R não deve ser superior a 0,10, sendo t a espessura da casca e R o menor raio de curvatura medido no plano osculador definido por uma das direcções principais de curvatura [11].

As barragens abóbada são estruturas que apresentam dupla curvatura, tendo as curvaturas principais de cada ponto o mesmo sinal. Estas estruturas podem ser englobadas no grupo de estruturas do tipo casca, desde que a relação entre a sua espessura e as restantes dimensões se mantenha inferior a um determinado limite. A designação de barragens arco é habitualmente atribuída às estruturas de barragens com curvatura numa só direcção. Alguns autores [11] propõem a diferenciação entre as designações barragem casca, abóbada espessa ou abóbada delgada com base no volume específico da barragem.

A teoria das cascas pressupõe a continuidade, isotropia e propriedades elásticas do material [11] [13]. As cascas podem resultar em estruturas muito económicas, consumindo pouco material se forem bem dimensionadas [11].

As barragens abóbada apresentam, na generalidade, grandes dimensões e uma geometria complexa [9]. Ao longo dos tempos, a procura de formas mais eficientes para este tipo de estruturas foi acompanhada pela evolução dos métodos de análise estrutural: experimentais, analíticos e numéricos [9]. A forma curva das pequenas barragens é bastante remota e difícil de situar no tempo [12]. A decisão de voltar a convexidade para montante resultou provavelmente de uma engenhosa intuição, com o objectivo de melhorar a resistência de um conjunto de pedras colocadas no leito de um rio [12]. O estudo analítico e o traçado racional deste tipo de obras só deverá ter acontecido muito tempo depois. O aligeiramento de barragens mostrou-se bastante importante, pois a economia do material pode chegar à ordem de grandeza das centenas de milhar de metros cúbicos de betão [12].

A forma curva atribuída a estas estruturas encontra alguns inconvenientes no que toca aos custos adicionais dos trabalhos de cofragem. No fim da década de 80 do século XX, na Europa, o custo real do metro quadrado de cofragem era aproximadamente igual ao do metro cúbico de betão [18]. Cerca de 25 anos antes, o primeiro correspondia apenas a um quarto do segundo [18].

Na tabela seguinte é apresentada uma estatística do peso relativo de cada fase de trabalho no custo final de uma barragem em França (excluindo o custo do equipamento electromecânico), no final dos anos 80 do século XX.

Fase de trabalho	Peso relativo ao custo total [%]
Estaleiro	14
Escavações	10
Betão	48
Cofragens e juntas	17
Injecção de drenos/monitorização de poços	11
Total	100

Quadro1.1 - Estimativa do peso relativo dos vários tipos de trabalhos envolvidos na construção de barragens em França (adaptado de [18]).

A observação dos dados que constam do quadro 1.1 permite concluir que a optimização do volume de betão pode não corresponder directamente à optimização do custo total da barragem [18]. A melhoria das condições de trabalho nos países desenvolvidos veio retirar ao custo dos materiais o peso que tinha outrora no custo final da obra. Outro aspecto a ter em conta é a distribuição da carga de mão de obra ao longo de todo o período de execução dos trabalhos. Barragens que apresentam formas mais complexas e menos susceptíveis de execução de tarefas repetitivas podem provocar uma concentração da mão-de-obra em determinado período, resultando num custo total maior do que aquele que teria uma barragem com formas mais simples e maior consumo de betão [18].

Todas estas questões devem ser alvo de reflexão durante o projecto de uma barragem, com igual importância à questão da forma, com a vantagem de que o custo de estudos adicionais corresponde, em média, a 1% do custo total [18]. No entanto, é possível afirmar que para barragens de moderada dimensão, com uma altura inferior a 50 metros, uma forma cilíndrica é muitas vezes preferível face a uma de dupla curvatura [18]. No que toca a barragens de maior dimensão, com uma altura superior a 100 metros, a forma com dupla curvatura apresenta vantagem, em termos globais, relativamente às restantes formas mais simples [18]. Tão importante como a restrição económica a que uma obra deve estar sujeita, é o facto da concepção da estrutura assegurar o seu correcto funcionamento, ou seja, a estrutura a conceber deve ter um custo mínimo mas também deve resistir às diversas acções da maneira mais eficaz, durável e segura possível.

A forma das barragens abóbada foi sendo aperfeiçoada ao longo dos tempos, tendo-se atingido um nível de aligeiramento significativo. A análise elástica de esforços, deformações e tensões em estruturas do tipo casca apenas ficou consolidada, para uma grande gama de formas e condições de apoio, com a automatização da análise de estruturas, como aconteceu com a aplicação do método dos elementos finitos, uma vez que, pela via analítica nem sempre se conhece a solução para as de equações diferenciais de equilíbrio.

Não obstante, desde cedo se percebeu que o recurso a superfícies com dupla curvatura permitia a construção de estruturas muito eficientes, pois as cascas mobilizam as três dimensões na absorção de forças exteriores. Resolvida a questão do cálculo dos esforços, pelo menos no domínio elástico, a discussão recentra-se na escolha adequada da forma da estrutura, tentando-se decifrar o funcionamento estrutural da casca, ou seja, de que forma esta reage à actuação das diversas solicitações e quais as consequências desta reacção ao nível tensional. A estrutura do tipo casca de uma barragem abóbada, em termos de condições de apoio, constitui também um caso muito particular, pois apresenta um bordo livre no coroamento, estando os outros bordos de alguma forma restringidos devido ao seu contacto com o vale.

A hiperstaticidade inerente a este tipo de estruturas possibilita que a larga margem de segurança existente permita acomodar um espectro alargado de formas [18]. Por este motivo, ainda não existe um consenso alargado sobre qual a forma exacta que se deve atribuir a uma barragem abóbada [18]. A concepção das primeiras barragens obedeceu a raciocínios relativamente simples, baseados no comportamento isolado dos vários elementos que se julgava representarem a casca: os arcos e as consolas. A evolução da forma preocupou-se também, durante a maior parte do tempo, com a acção preponderante neste tipo de estruturas, a pressão hidrostática. No presente, poderíamos afirmar que a procura de formas para barragens abóbada está maioritariamente concentrada na aplicação dos métodos de membrana e dos métodos de optimização. Também há barragens que foram dimensionadas com base na comparação com outras obras já construídas, existindo mesmo metodologias para o dimensionamento de barragens abóbada com recurso a dados estatísticos recolhidos em obras anteriores [2].

Os métodos da membrana consistem em determinar, pela via experimental [12] ou numérica [36], a forma de uma superfície traccionada, fixa num plano de inserção, face às forças generalizadas equivalentes às que actuam na barragem abóbada, mas com sentido contrário. Por sua vez, os métodos de optimização [40] visam obter o valor de determinados parâmetros que controlam a forma predefinida da estrutura, com base no cálculo do mínimo de funções que relacionam esses parâmetros com outros, como por exemplo, o volume e o custo do betão da estrutura ou o volume e o custo das escavações necessárias à execução das fundações.

Neste método também pode ser imposto um conjunto de restrições às funções referidas, relacionadas com tensões limite, com os limites geométricos admissíveis para a forma da barragem ou até mesmo com questões de estabilidade.

As variações de temperatura constituem uma acção importante na estrutura de uma barragem abóbada, logo a seguir à pressão hidrostática e ao peso próprio [11].

Enquanto que os fenómenos de retracção e de calor de hidratação são, pelo menos em parte, atenuados pelo facto da barragem ser construída através do crescimento isolado de blocos, sendo as juntas injectadas posteriormente, o estudo das variações térmicas não tem constituído uma influência determinante na forma final da barragem abóbada. A restrição existente no contorno de inserção da barragem no vale e o facto de, na maioria dos casos, os arcos da abóbada aumentarem a espessura em direcção aos encontros, por forma a precaverem as tensões de tracção resultantes da flexão da casca, quando esta está encastrada ao longo dos seus bordos (à excepção do coroamento), agravam os efeitos provocados pelas variações térmicas.

1.2 Definições

No âmbito do presente trabalho foi estabelecido um conjunto de terminologias relacionado com as barragens abóbada e que se julga útil para a compreensão do mesmo. A terminologia que se apresenta em anexo está limitada ao presente trabalho (A.2).

Importa também definir o tipo de esforços e tensões que ocorre numa estrutura do tipo casca, uma vez que esta será o objecto de estudo do presente trabalho. Para tal, admita-se um sistema de coordenadas definido ao longo da superfície média, em que uma linha de abscissa constante intersecta uma linha de ordenada constante num ângulo recto. Um elemento de casca (figura 1.1) pode ser definido por dois pares de linhas adjacentes do tipo indicado.

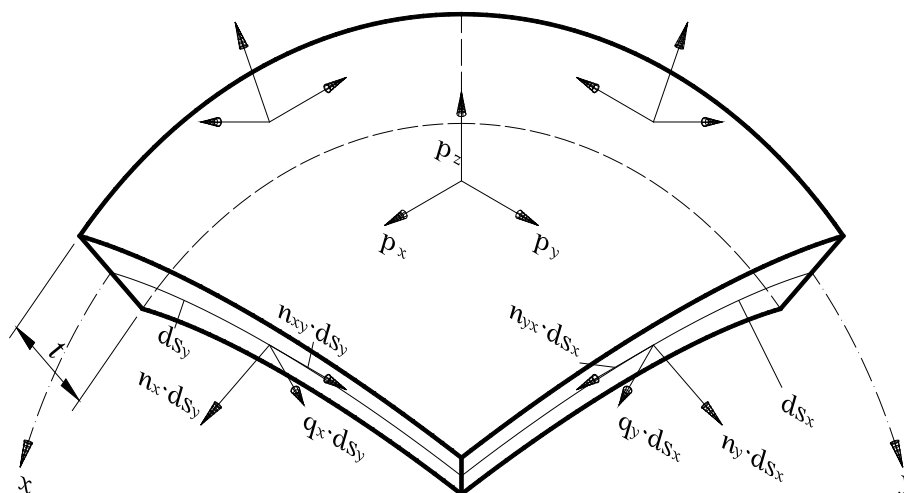


Figura 1.1 - Resultantes de esforços e forças exteriores actuantes num elemento de casca (adaptado de [13]).

As quatro secções do elemento são perpendiculares à superfície média da casca [13]. As distâncias ds_x ou ds_y , medidas ao longo da superfície média entre secções opostas do elemento de casca, podem não ter o mesmo valor em todos os pontos, pois duas secções opostas podem ter larguras diferentes [13]. Esta diferença será, no entanto, desprezada.

A área da secção resultante de um corte segundo uma abcissa constante e uma ordenada constante é igual a $ds_y \cdot t$ e $ds_x \cdot t$, respectivamente. As resultantes das tensões que actuam em cada uma destas secções dependem do comprimento ds_y ou ds_x [13]. Por esta razão, os esforços numa casca são expressos numa unidade de força por comprimento, à semelhança do que acontece na teoria das lajes. A designação de resultante de esforços numa secção refere-se ao produto do esforço pelo comprimento da respectiva secção, medido segundo o sistema de coordenadas anteriormente estipulado.

O referencial escolhido para projectar as componentes da resultante do esforço em cada secção é habitualmente definido [13] por uma recta tangente à linha ds (contida no plano da secção), uma outra recta tangente à superfície média formando um ângulo de 90° com a recta anterior (ou seja, perpendicular à secção) e, por último, uma recta perpendicular à superfície média da casca. Desta forma, podemos definir esforço normal, n_x ou n_y , como a força na direcção x ou y , por unidade de comprimento da secção (medida ao longo da superfície média) onde a abcissa ou a ordenada são constantes, respectivamente [13]. Normalmente, se o esforço normal for de compressão é considerado negativo e se for de tracção é considerado positivo [13].

Na secção de abcissa ou ordenada constante, o esforço por unidade de comprimento na direcção y ou x , respectivamente, é designado por esforço tangencial (n_{xy} ou n_{yx}). O sinal do esforço tangencial é positivo se este, na face orientada segundo o sentido positivo do eixo normal, apontar no sentido positivo do eixo y ou x , conforme se trate de n_{xy} ou n_{yx} , respectivamente [13].

Os esforços normais à superfície média, por unidade de comprimento medido ao longo desta superfície, são designados por esforços transversos, sendo q_x aquele que actua nas secções de abcissa constante e q_y aquele que actua nas secções de ordenada constante [13].

As tensões que actuam numa secção (figura 1.2) compreendem uma componente normal (σ_x , σ_y), uma componente tangencial, paralela à superfície média ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) e uma componente tangencial à secção e normal à superfície média (τ_{xz} , τ_{yz}). Sempre que uma casca é constituída por um material sólido limitado por duas faces, é possível relacionar tensões que actuam numa secção com resultantes de esforços, exprimindo estes como integrais das primeiras [13].

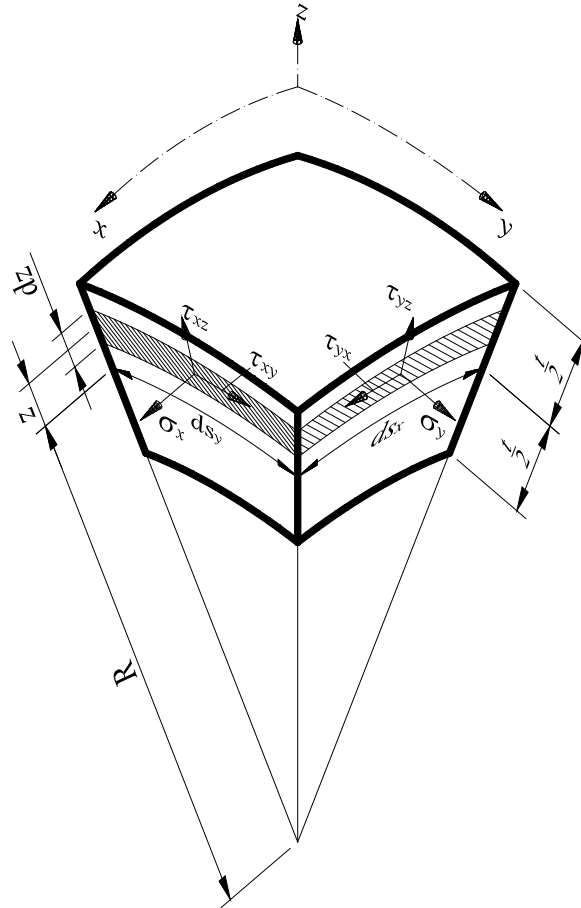


Figura 1.2 - Tensões actuantes num elemento de casca (adaptado de [13]).

Na secção de abcissa constante, a resultante do esforço normal, $n_x \cdot ds_y$, é uma consequência da actuação da tensão σ_x na área desta secção. A variação desta tensão ao longo da largura ds_y pode ser desprezada, não sendo possível proceder da mesma forma em relação à variação da tensão ao longo da espessura da casca [13]. Devido à curvatura da casca, a largura da secção não é constante e igual a ds_y , mas sim variável ao longo da espessura da casca [13], obedecendo à expressão:

$$ds_y \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \quad (1.1)$$

onde ds_y é o comprimento da linha que resulta da intersecção da superfície média com uma secção de abcissa constante, R_y é o raio de curvatura desta linha e z é a coordenada medida segundo a perpendicular à superfície média, sendo nula sobre esta superfície.

A resultante da tensão σ_x na faixa de espessura elementar dz , representada na figura 1.2, é igual a:

$$\sigma_x \cdot ds_y \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot dz \quad (1.2)$$

onde σ_x é a tensão normal, ds_y é o comprimento da linha que resulta da intersecção da superfície média com uma secção de abcissa constante, R_y é o raio de curvatura desta linha, z é a coordenada medida segundo a perpendicular à superfície média, sendo nula sobre esta superfície, e dz é a espessura elementar da faixa em que se calcula a resultante da tensão.

A resultante do esforço normal, $n_x \cdot ds_y$, na secção de área $ds_y \cdot t$, é calculada integrando a expressão anterior entre os limites $-t/2$ e $t/2$:

$$n_x \cdot ds_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot ds_y \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot dz \quad (1.3)$$

em que n_x é o esforço normal, ds_y é o comprimento da linha que resulta da intersecção da superfície média com uma secção de abcissa constante, σ_x é a tensão normal, R_y é o raio de curvatura da linha ds_y , dz é o comprimento elementar ao longo da coordenada z e t é a espessura da casca.

Na equação anterior, o termo ds_y pode ser simplificado. De um modo análogo, é possível obter as relações entre os restantes esforços e tensões na secção de abcissa constante:

$$n_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot dz \quad (1.4)$$

$$n_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot dz \quad (1.5)$$

$$q_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot dz \quad (1.6)$$

onde n_x é o esforço normal, n_{xy} é o esforço tangencial, q_x é o esforço transversal, σ_x é a tensão normal, τ_{xy} é a tensão tangencial à superfície média, τ_{xz} é a tensão tangencial à secção e normal à superfície média, R_y é o raio de curvatura da linha da superfície média na

secção, dz é o comprimento elementar ao longo da coordenada z e t é a espessura da casca.

Na última expressão, o sinal negativo determina que o sentido positivo do esforço transversal deve ser aquele estipulado na figura 1.1, que é oposto ao sentido positivo da tensão tangencial τ_{xz} [13].

Aplicando o mesmo raciocínio aos esforços e tensões na secção de ordenada constante, obtêm-se as seguintes relações:

$$n_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot \frac{R_x + z}{R_x} \cdot dz \quad (1.7)$$

$$n_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \cdot \frac{R_x + z}{R_x} \cdot dz \quad (1.8)$$

$$q_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \cdot \frac{R_x + z}{R_x} \cdot dz \quad (1.9)$$

onde n_y é o esforço normal, n_{yx} é o esforço tangencial, q_y é o esforço transversal, σ_y é a tensão normal, τ_{yx} é a tensão tangencial à superfície média, τ_{yz} é a tensão tangencial à secção e normal à superfície média, R_x é o raio de curvatura da linha da superfície média na secção, dz é o comprimento elementar ao longo da coordenada z e t é a espessura da casca.

Repare-se que a igualdade das tensões tangenciais, τ_{xy} e τ_{yx} , não implica que os esforços tangenciais, n_{xy} e n_{yx} , sejam iguais [13]. A igualdade entre esforços tangenciais só se verifica se os raios de curvatura, R_x e R_y , forem iguais ou se a tensão tangencial τ_{xy} não depender da coordenada z [13]. Em cascas de espessura reduzida, os valores de t e z , nas expressões anteriores, serão muito reduzidos por comparação com os raios de curvatura, R_x e R_y , e a diferença entre esforços tangenciais n_{xy} e n_{yx} pode ser negligenciada, sem prejuízo da apreciação global dos esforços [13].

Sempre que a distribuição de tensões na espessura da casca não for constante, surgirão momentos em relação ao centro geométrico da secção.

À semelhança do que aconteceu com os esforços, a designação de resultante do momento refere-se ao produto do momento pela distância ds_y da secção onde este está aplicado. O momento será expresso numa unidade de força, comprimento por unidade de comprimento da secção (por exemplo, kN.m/m) [13]. A distribuição não uniforme da tensão normal σ_x resultará num momento flector m_x , cuja direcção é tangente à linha ds_y , que resulta da intersecção da superfície média com uma secção de abcissa constante. Uma distribuição não uniforme da tensão tangencial τ_{xy} , ao longo da espessura da casca, resultará num momento em relação ao eixo que é normal à secção e passa pelo centro da linha ds_y . A resultante deste momento é igual a $m_{xy} \cdot ds_y$, sendo m_{xy} designado por momento torsor.

As relações entre os momentos e as tensões, na secção de abcissa constante, podem ser estabelecidas da seguinte forma:

$$m_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot z \cdot dz \quad (1.10)$$

$$m_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot \frac{R_y + z}{R_y} \cdot z \cdot dz \quad (1.11)$$

onde m_x é o momento flector, m_{xy} é o momento torsor, σ_x é a tensão normal, τ_{xy} é a tensão tangencial à superfície média, R_y é o raio de curvatura da linha da superfície média na secção, dz é o comprimento elementar ao longo da coordenada z , referida à superfície média, e t é a espessura da casca.

O sinal negativo presente nas relações entre as tensões e os momentos pretende estabelecer uma concordância entre os sentidos positivos arbitrados para as tensões (figura 1.2) e aqueles arbitrados para as resultantes dos momentos (figura 1.3) [13].

Analogamente, na secção de ordenada constante, a relação entre as tensões e os momentos é dada pelas expressões:

$$m_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot \frac{R_x + z}{R_x} \cdot z \cdot dz \quad (1.12)$$

$$m_{yx} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \cdot \frac{R_x + z}{R_x} \cdot z \cdot dz \quad (1.13)$$

onde m_y é o momento flector, m_{yx} é o momento torsor, σ_y é a tensão normal, τ_{yx} é a tensão tangencial à superfície média, R_x é o raio de curvatura da linha da superfície média na secção, dz é o comprimento elementar ao longo da coordenada z , referida à superfície média, e t é a espessura da casca.

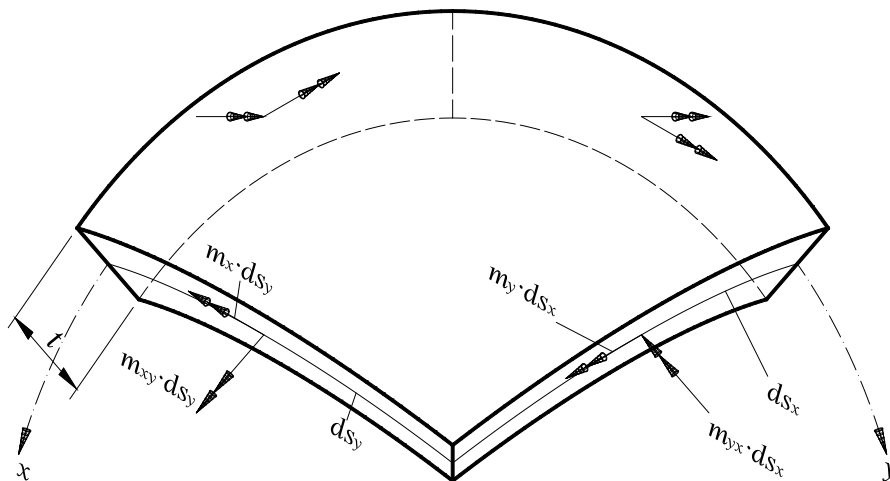


Figura 1.3 - Resultantes de momentos actuantes num elemento de casca (adaptado de [13]).

Uma vez mais, a igualdade entre tensões tangenciais τ_{xy} e τ_{yx} não garante a igualdade entre momentos torsores m_{xy} e m_{yx} [13]. Esta diferença pode ser desprezada para cascas de espessura reduzida [13]. De facto, mesmo quando as tensões são independentes de z , ou seja, quando a sua distribuição é uniforme ao longo da espessura, os momentos não são nulos devido à curvatura da casca, que é tida em conta através dos factores $(R_x + z)/R_x$ e $(R_y + z)/R_y$ [13]. Devido à curvatura do sólido que constitui a casca, as secções ao longo de abcissas ou ordenadas constantes não são rectangulares e o seu centróide não está contido na superfície média [13].

Face às considerações que têm sido feitas até agora, particularmente aquela que estipulou que se pode considerar a tensão constante ao longo da largura da faixa de espessura infinitesimal, as tensões tangenciais τ_{xz} e τ_{yz} não provocam momento flector.

Numa casca fina, constituída por um material homogéneo, a distribuição de tensões é aproximadamente linear [13]. Nestas condições, as tensões numa secção do elemento de casca podem ser calculadas como numa barra de secção rectangular sujeita à flexão composta:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} - \frac{12 \cdot m_x \cdot z}{t^3} \quad (1.14)$$

$$\sigma_y = \frac{n_y}{t} - \frac{12 \cdot m_y \cdot z}{t^3} \quad (1.15)$$

onde σ_x e σ_y são as tensões normais, n_x e n_y são os esforços normais, m_x e m_y são os momentos flectores, z é a coordenada medida segundo a perpendicular à superfície média, sendo nula sobre esta superfície, e t é a espessura da casca.

De forma análoga e respeitando as mesmas condicionantes, as tensões tangenciais podem ser obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\tau_{xy} = \frac{n_{xy}}{t} - \frac{12 \cdot m_{xy} \cdot z}{t^3} \quad (1.16)$$

$$\tau_{yx} = \frac{n_{yx}}{t} - \frac{12 \cdot m_{yx} \cdot z}{t^3} \quad (1.17)$$

onde τ_{xy} e τ_{yx} são as tensões tangenciais à superfície média, n_{xy} e n_{yx} são os esforços tangenciais, m_{xy} e m_{yx} são os momentos torsores, z é a coordenada medida segundo a perpendicular à superfície média, sendo nula sobre esta superfície, e t é a espessura da casca.

O resultado das duas expressões anteriores não é necessariamente igual, o que demonstra que a consideração de um campo de tensões linear é uma simplificação que, no entanto, pode ser efectuada para cascas de espessura reduzida [13].

Se a distribuição de tensões normais e de tensões tangenciais à superfície média for linear, como anteriormente assumido, a distribuição de tensões tangenciais à secção, mas normais à superfície média (τ_{xz} e τ_{yz}), será parabólica, à semelhança do que acontece numa viga de secção rectangular [13]. O cálculo destas tensões pode ser efectuada da seguinte forma:

$$\tau_{xz} = -\frac{3 \cdot q_x}{2 \cdot t} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{t^2}\right) \quad (1.18)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3 \cdot q_y}{2 \cdot t} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{t^2}\right) \quad (1.19)$$

onde τ_{xz} e τ_{yz} são as tensões tangenciais à secção e normais à superfície média, q_x e q_y são os esforços transversos, z é a coordenada medida segundo a perpendicular à superfície média, sendo nula sobre esta superfície, e t é a espessura da casca.

1.3 Objectivos e formulação do problema

Relevando para segundo plano os métodos de optimização, no presente trabalho será explorado o método da membrana, no sentido de averiguar quais as principais conclusões relativas à forma que advêm da sua aplicação, admitindo no entanto as suas limitações. Pretende-se avaliar alguns princípios que até aqui têm orientado a escolha da geometria das barragens abóbada, percebendo o comportamento destas estruturas e estabelecendo metodologias alternativas para a determinação da forma, com a preocupação, numa primeira fase, de resistir adequadamente à acção preponderante, a pressão hidrostática, e de obter formas geométricas exequíveis, face ao estado actual da tecnologia de construção.

Pretende-se também averiguar a importância das variações de temperatura nestas barragens. Numa primeira fase, serão estudadas cascas de revolução quando submetidas a variações térmicas. Seguidamente, o objecto de estudo passa a ser as barragens abóbada. Desta forma, pretende-se averiguar a importância e o tipo dos esforços e tensões que surgem numa barragem abóbada, sob a acção de variações de temperatura.

O trabalho desenvolvido centra-se em duas questões principais. A primeira relaciona-se com a procura de uma forma para a barragem abóbada que resista adequada e eficazmente à solicitação preponderante: a pressão hidrostática. Com base nesta forma, a segunda questão pretende averiguar o efeito das variações térmicas nestas estruturas, identificando as principais causas dos esforços e tensões originados.

1.4 Hipóteses

Tendo-se definido dois objectivos principais, é também possível formular duas hipóteses relacionadas com aqueles.

A primeira hipótese a ser testada é a relação entre as curvaturas principais da casca e os esforços de membrana que ocorrem quando a acção é a pressão hidrostática. A procura de uma forma eficiente para a casca de dupla curvatura poderá ter por base o princípio de que as curvaturas principais numa casca indicam o caminho dos esforços principais de um equilíbrio de membrana.

A segunda hipótese está relacionada com o efeito das variações térmicas na casca. Quanto menos abatida e mais fina for a casca, em princípio, menor será a sua susceptibilidade às variações térmicas.

1.5 Organização do trabalho

No capítulo 2 é apresentada uma síntese do estado de arte relativa à procura de formas eficientes para barragens abóbada. Inicialmente é descrita a evolução da forma destas estruturas ao longo dos tempos, reflectindo-se sobre as modificações geométricas, a introdução de dispositivos de apoio e o desenvolvimento paralelo de métodos de cálculo de estruturas. Seguidamente abordam-se algumas formas atribuídas às curvas de nível da abóbada, procurando-se as principais diferenças entre estas e quais as razões que levaram à preferência de algumas delas em detrimento de outras. Apresenta-se a teoria elástica do equilíbrio de membrana. Seguidamente, são apresentadas as principais vantagens e limitações dos métodos de membrana e de optimização. São analisadas as condicionantes impostas à forma das barragens abóbada, derivadas da actuação do peso próprio enquanto a pressão hidrostática não actua. Ainda neste capítulo, são referidas algumas conclusões decorrentes da observação dos fenómenos de variações térmicas, retracção e calor de hidratação nalgumas barragens. Referem-se também algumas conclusões relativas à actuação de variações uniformes de temperatura em arcos parabólicos e circulares. O capítulo é encerrado com uma breve revisão dos conceitos relacionados com a geometria diferencial e com o cálculo de curvaturas em pontos de superfícies.

No capítulo referente à metodologia, é indicada a forma como foram conduzidos os principais estudos realizados, com vista ao cumprimento dos objectivos estipulados.

No capítulo 4 é realizada uma descrição sumária do programa de cálculo numérico das magnitudes e direcções das curvaturas principais numa superfície. No capítulo 5 é descrita a técnica experimental do método de membrana realizada, apresentando também os resultados obtidos. Os resultados referentes à análise de cascas de revolução, submetidas a variações uniformes de temperatura, são apresentados no capítulo 6. No capítulo 7 é descrito um método para gerar a geometria da superfície média e a espessura de barragens abóbada de ângulo constante com curvas de nível circulares, inseridas em vales em “V”. Os resultados obtidos na análise destas estruturas, solicitadas pelas diversas acções consideradas, são expostos no capítulo 8.

No capítulo 9 é realizada a discussão dos resultados, expostos nos capítulos anteriores, referentes aos estudos realizados. A conclusão do trabalho é apresentada no capítulo 10.

As referências bibliográficas são apresentadas seguidamente. Por último, nos anexos, constam a listagem da notação utilizada, o glossário (limitado ao presente trabalho) referente à terminologia relacionada com barragens abóbada e a listagem do programa PCURV.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Evolução da forma das barragens abóbada

2.1.1 Barragens de gravidade e barragens arco

A evolução do forma partiu do ponto em que o perfil transversal das grandes barragens abóbada era idêntico ao perfil triangular das barragens de gravidade [12]. A forma das barragens de gravidade é estabelecida de maneira que a estabilidade dos elementos verticais isolados, face ao impulso das águas, seja assegurada pela actuação do peso próprio [12]. Simplificadamente, o impulso das águas gera um momento instabilizante enquanto que o peso próprio actua como força estabilizante do perfil, em relação a um eixo de rotação [38]. Por este motivo, as barragens de gravidade apresentam normalmente um desenvolvimento recto em planta e um perfil transversal triangular (figura 2.1), diminuindo a espessura da base para o topo, ou seja, proporcionalmente à magnitude da acção da pressão hidrostática. Desta forma, o ponto de aplicação da força resultante do peso próprio (no centro de gravidade do perfil), situa-se mais afastado do eixo de rotação, possibilitando um aumento do braço do momento estabilizante [38].

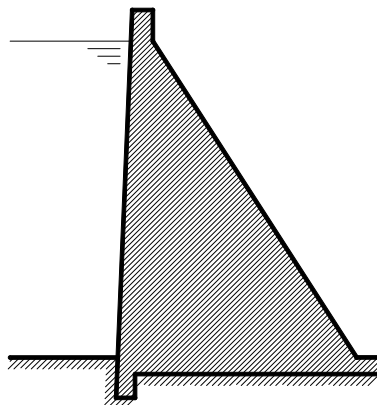


Figura 2.1 - Perfil transversal triangular (esquemático) típico de uma barragem de gravidade (adaptado de [12]).

Neste tipo de estruturas, a largura da base é habitualmente igual ou superior a 0,8 da altura [12]. Figurando o impulso da água como a acção principal e tendo esta acção uma direcção predominantemente horizontal, a resolução do problema recorrendo à actuação de forças verticais, como o peso próprio, e de uma força horizontal na base, a força de atrito, só poderá ser justificável com a utilização de materiais de elevado peso volúmico e baixo custo [38].

No início, a forma das barragens em arco foi mais uma melhoria das condições de segurança da obra do que uma potencial forma de aligeiramento da estrutura [12]. As barragens abóbada do tipo gravidade (abóbada-gravidade) são geradas pela revolução de um perfil triangular, sendo os paramentos superfícies cilíndricas ou cónicas [12]. A utilização de um perfil triangular corresponde a um baixo aproveitamento da resistência do material. Quando a albufeira está vazia, a zona próxima do paramento de montante é a mais solicitada, absorvendo as tensões devidas ao peso próprio, e na situação de albufeira cheia só a zona próxima do paramento de jusante contribui para o equilíbrio (considerando que o material só suporta tensões de compressão) [12]. O núcleo da barragem é praticamente desaproveitado e surgem ainda problemas relacionados com as tensões endógenas, uma vez que os maciços de betão estão impossibilitados de efectuar trocas de humidade e calor com o exterior [12]. Quando o vale não permite o traçado em abóbada, as barragens do tipo gravidade aligeirada (celulares) mostram-se mais racionais e com idênticas condições de estabilidade [12].

A consideração da estabilidade e equilíbrio de elementos verticais isolados poderá não ser suficiente para a análise deste tipo de estruturas. As barragens abóbada, como as barragens de gravidade, são estruturas que mobilizam as três dimensões para resistir às solicitações e quanto mais estreito for o vale, mais importante é o papel desempenhado pela continuidade horizontal da barragem [12].

Tanto as barragens abóbada como as barragens de gravidade necessitam de boas fundações, sendo que as primeiras têm uma configuração estrutural que permite garantir o equilíbrio estático, mesmo no caso da cedência da rocha nalguns pontos, pois uma casca é, internamente, uma estrutura estaticamente redundante [12]. O maior volume das barragens de gravidade não representa por si só uma segurança face às barragens abóbada, tendo Vogt afirmado que uma barragem de gravidade sobre uma má fundação é uma perigosa estrutura que deve ser evitada [12].

O polígono funicular é a configuração geométrica assumida por um fio inextensível e sem massa, com um determinado comprimento e ancorado nas duas extremidades [22], quando se lhe aplica um sistema de forças coplanares. O funicular de uma carga uniformemente distribuída por unidade de comprimento de desenvolvimento horizontal corresponde à forma de uma parábola (figura 2.2.a). Por sua vez, o funicular de uma solicitação do tipo pressão radial uniforme sobre um arco de círculo é também um arco de círculo (figura 2.2.b).

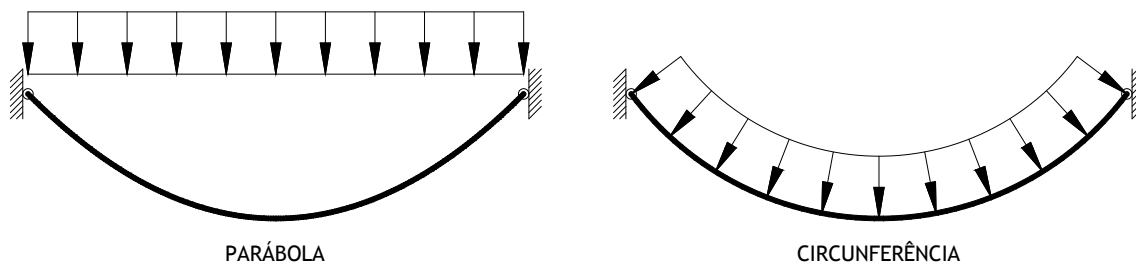


Figura 2.2 (a) e (b) - Curvas funiculares (parabólica (a) e circular (b)) para diferentes cargas (adaptado de [17]).

Surgiu então a ideia de dar a forma do antifunicular das pressões hidrostáticas radiais uniformes (figura 2.3) às curvas de nível das barragens arco [12].

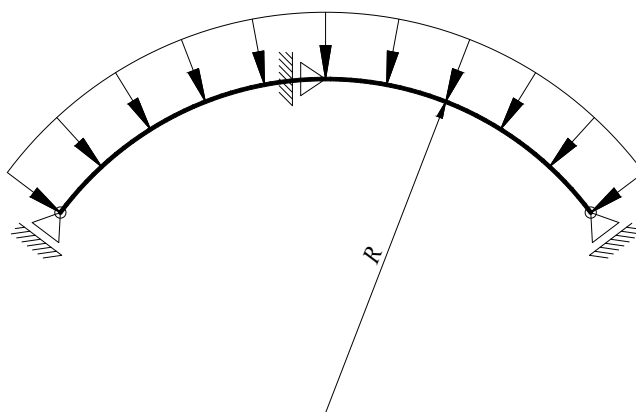


Figura 2.3 - Arco circular com apoios radiais deslizantes submetido a uma pressão radial uniforme (adaptado de [12]).

No entanto, a linha resultante de compressões só é coincidente com o eixo da peça se, depois da deformação, este continuar a ter a forma de um arco de círculo [12]. Esta situação só se verifica se a rigidez axial da peça for muito grande ou se os apoios forem radiais e de rolamento, por forma a imporem reacções exclusivamente tangenciais ao eixo da peça [12].

No caso de uma barragem, para que a forma dos arcos corresponda ao antifunicular da pressão hidrostática, é também necessário que os elementos horizontais possam deslizar uns sobre os outros [12].

Respeitando os pressupostos estabelecidos, o engenheiro espanhol Peña Boeuf ensaiou o esquema estrutural na ensecadeira construída no Rio Turia (Pantano del Generalíssimo), no entanto, os resultados não foram satisfatórios, uma vez que a impermeabilização entre os diferentes anéis se mostrou ineficaz e a inércia e atrito dos dispositivos de rolamento impediram o funcionamento independente dos elementos horizontais [12].

Outro engenheiro espanhol, Eduardo Torroja, construiu uma pequena barragem abóbada em Llauset com uma forma cilíndrica (figura 2.4).

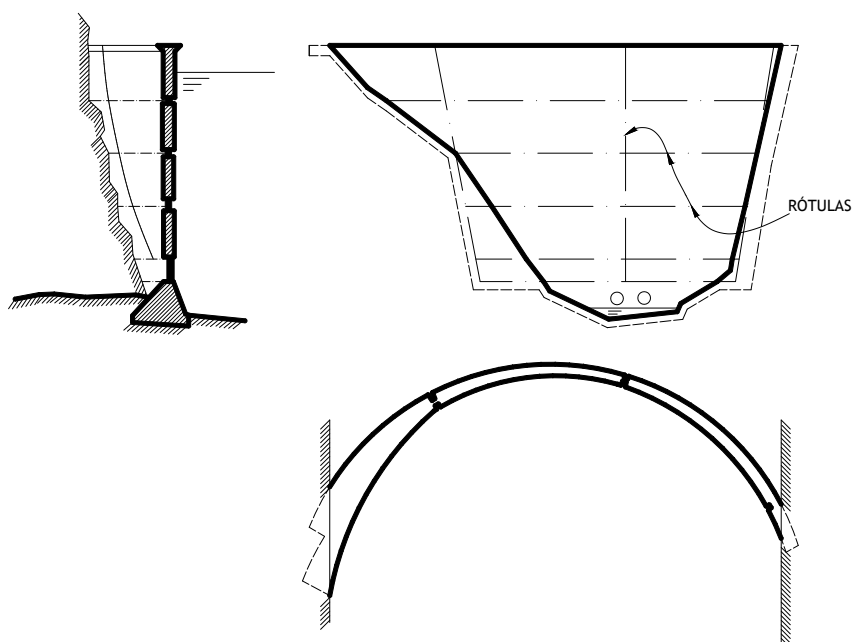


Figura 2.4 (a), (b) e (c) - Barragem de Llauset (esquemática): corte em alçado lateral esquerdo (a), alçado principal de jusante (b) e planta (c) (adaptado de [38]).

Cada um dos arcos que constituía a barragem era um arco triarticulado em planta [38]. Em alçado, todos os elementos horizontais eram articulados na base e no topo. Os perfis da barragem eram sempre rectos e verticais e o elemento horizontal na base era basicamente um muro delgado para suavizar os efeitos de torção devido à rotação relativa das arestas articuladas no topo e na base do mesmo [38]. Desta forma, o efeito perturbador causado pelo encastramento da barragem na base era atenuado, no entanto, o esquema estrutural mostrou-se limitado a obras de pequena dimensão [38].

2.1.2 Fórmula dos tubos

Outro raciocínio importante pode ser estabelecido a partir da análise do equilíbrio do antifunicular da pressão radial uniforme. A estrutura da barragem, em termos de cálculo, pode ser dividida numa série de arcos horizontais sujeitos a uma pressão hidrostática variável de acordo com a profundidade do arco [8] em relação ao nível de máxima cheia (NMC), ou seja, em relação ao nível do coroamento. A tensão na secção transversal de um arco circular (figura 2.5), quando submetido à pressão radial uniforme, pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{p \cdot b \cdot R}{A} \quad (2.1)$$

em que σ é a tensão normal uniforme ao longo de qualquer secção transversal de área A , $p \cdot b$ é o carregamento radial uniformemente distribuído ao longo do eixo do arco e contido no mesmo plano deste, resultante da pressão hidrostática sobre um elemento horizontal da barragem de largura b e R é o raio do arco circular.

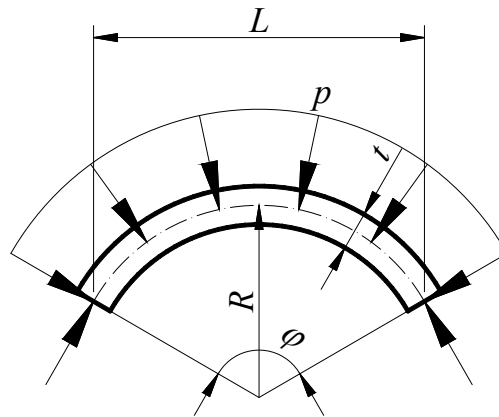


Figura 2.5 - Arco circular submetido a uma pressão radial uniforme (adaptado de [12] e [8]).

O arco circular, desde que respeite os pressupostos estabelecidos, quando submetido à solicitação da pressão hidrostática radial uniforme, não apresenta momento flector, pelo que as tensões que se verificam numa secção transversal são constantes ao longo da espessura.

A análise da expressão (2.1) permite concluir que para manter espessuras e tensões sensivelmente constantes, os raios de curvatura devem variar na razão inversa da pressão hidrostática [12]. Considerando $A = t \cdot b$, a expressão resultante é:

$$\sigma = \frac{p \cdot b \cdot R}{t \cdot b} \Leftrightarrow \sigma \cdot t = p \cdot R \quad (2.2)$$

em que σ é tensão normal uniforme ao longo de qualquer secção transversal de área A , $p \cdot b$ é o carregamento radial uniformemente distribuído ao longo do eixo do arco e contido no mesmo plano deste, resultante da pressão hidrostática sobre um elemento horizontal da barragem, R é o raio do arco circular, t é a espessura e b é a largura da secção do arco.

A expressão (2.2) é habitualmente denominada fórmula dos tubos [12] [8].

Uma das primeiras barragens em que foi visível a importância da análise estrutural na determinação da forma foi a barragem Zola, concluída em 1854, em França [18]. As tensões foram estimadas usando a fórmula dos tubos e a barragem apresentava uma relação corda/altura (L/H) de 1,7.

Segundo a fórmula dos tubos, uma vez que a pressão hidrostática aumenta com a profundidade, o raio de curvatura deve diminuir, ou seja, os arcos devem ser mais curvos com o aumento da profundidade, mantendo desta forma sensivelmente constante a tensão e a espessura [12].

O volume de um arco, cuja secção tem altura unitária, pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$V = R \cdot \varphi \cdot t \quad (2.3)$$

onde V é o volume, R é o raio de curvatura, φ é o ângulo de abertura ao centro e t é a espessura do arco circular.

O raio de curvatura do arco circular pode ser expresso em função do comprimento de corda do arco e do ângulo de abertura ao centro:

$$R = \frac{L}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (2.4)$$

em que R é o raio, L é o comprimento da corda e φ é o ângulo de abertura ao centro do arco circular.

A espessura do arco circular pode ser deduzida a partir das expressões (2.2) e (2.4):

$$t = \frac{p \cdot R}{\sigma} \Leftrightarrow t = \frac{p \cdot L}{\sigma \cdot 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (2.5)$$

sendo t a espessura, p a pressão hidrostática à profundidade do arco, L o comprimento da corda, σ a tensão normal uniforme ao longo de qualquer secção transversal, R o raio e φ o ângulo de abertura ao centro do arco circular.

A expressão (2.3) pode então ser reescrita, inserindo nesta os resultados das expressões (2.4) e (2.5):

$$V = \frac{L}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \varphi \cdot \frac{p \cdot L}{\sigma \cdot 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \Leftrightarrow V = \frac{p \cdot L^2}{4 \cdot \sigma} \cdot \frac{\varphi}{\text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (2.6)$$

onde V é o volume, p é a pressão hidrostática à profundidade do arco, L é o comprimento da corda, σ é a tensão normal uniforme ao longo de qualquer secção transversal e φ é o ângulo de abertura ao centro do arco circular.

Deduz-se que, para uma determinada pressão hidrostática, um determinado comprimento de corda e um determinado limite de tensão normal a que as secções transversais do arco circular estão sujeitas, existe um ângulo de abertura ao centro que minimiza o volume do arco circular para a solitação considerada. Este ângulo é determinado encontrando o mínimo da função $F(\varphi) = \varphi / \text{sen}^2(\varphi/2)$ no intervalo $[0, \pi]$ (gráfico 2.1).

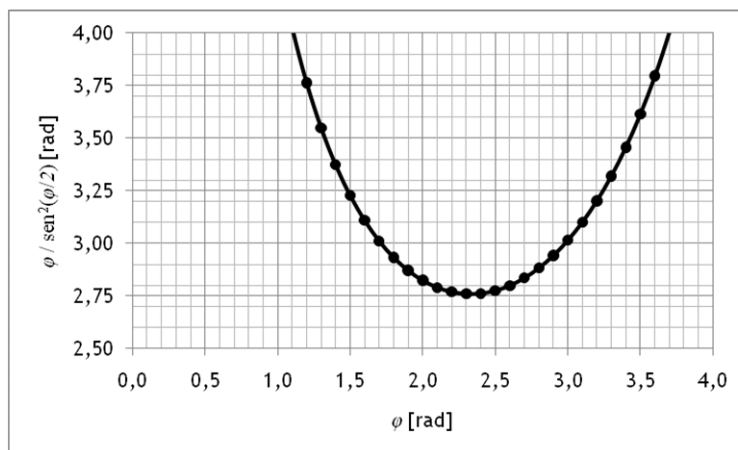


Gráfico 2.1 - Função $F(\varphi) = \varphi / \text{sen}^2(\varphi/2)$ (adaptado de [8]).

No intervalo $[0, 180^\circ]$, o mínimo da função representada no gráfico 2.1 é atingido para $\varphi = 133,56^\circ$.

2.1.3 Barragens de centro variável

Partindo destes princípios, foi estabelecido que, se a barragem se insere num vale que aperta no sentido do talvegue, os arcos devem variar de raio e de centro, diminuindo o raio do coroamento para a base e mantendo sensivelmente constante a abertura ao centro, tão próximo quanto possível do valor óptimo ($\varphi = 133^\circ$) [11]. Como resultado, nos diversos arcos, supostos isolados, obtém-se uma melhor distribuição de tensões, sendo que o volume da barragem também é minimizado para um limite máximo de tensões [11]. Esta técnica de traçado, conhecida como “Constant-Angle Arch Dams”, ou barragens de centro variável, foi objecto de uma patente nos EUA, no início do século XX, por parte de Lars Jorgensen [11] [12].

Repare-se que numa barragem cilíndrica de espessura constante (figura 2.6), o crescimento dos blocos pode ser feito individualmente, uma vez que todos os perfis são sensivelmente verticais. O contorno da inserção da superfície média desta barragem no vale resulta, porém, numa linha curva.

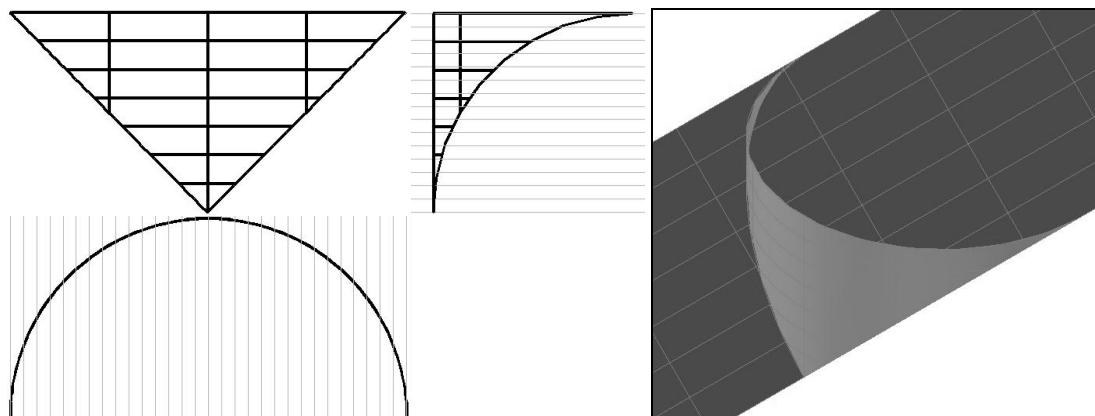


Figura 2.6 (a), (b), (c) e (d) - Superfície média de uma barragem cilíndrica num vale em “V” - alçado principal de jusante (a), alçado lateral direito (b), planta (c) e perspectiva (d).

A superfície média de uma barragem de centro variável, com ângulo constante ao centro de $\varphi = 133^\circ$, pode apresentar diversas configurações. Imagine-se uma superfície média com a mesma forma da superfície de um cone de eixo vertical, ou seja, onde todos os arcos horizontais são concêntricos (figura 2.7). Nesta situação, todas as consolas estão inclinadas para montante, o que pode não ser exequível. A linha de inserção da barragem no terreno está contida num plano que também cai para montante.

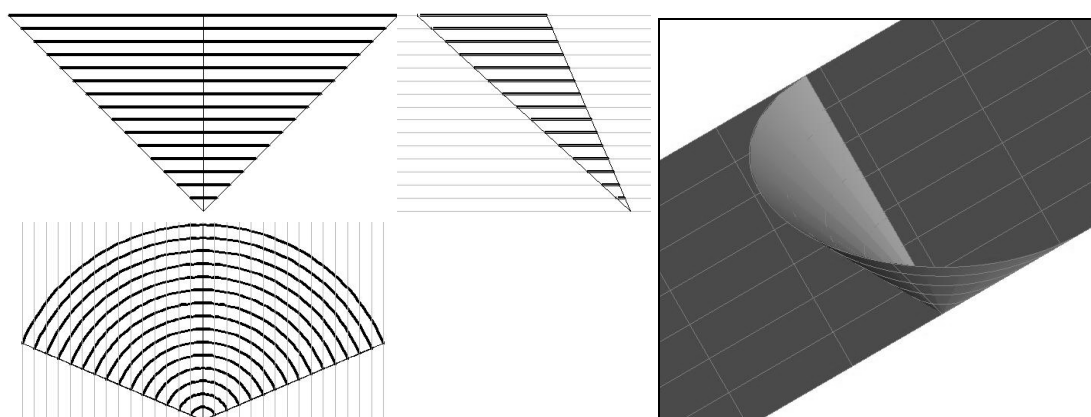


Figura 2.7 (a), (b), (c) e (d) - Superfície média de uma barragem cónica de eixo vertical num vale em “V” - alçado principal de jusante (a), alçado lateral direito (b), planta (c) e perspectiva (d).

De outra forma, a superfície média da barragem de centro variável pode ser definida impondo que a linha média da secção central seja uma recta vertical (figura 2.8). Nesta situação, embora o perfil central seja vertical, as consolas mais afastadas do fecho dos arcos estão inclinadas para montante, contudo, não tanto como na situação anterior. A linha de inserção da barragem no vale está contida num plano que cai para jusante. A superfície deixa de ser cónica, uma vez que, quando o eixo do cone não é mais vertical, as curvas de nível da superfície passam a ser elipses e não circunferências. O eixo que une o centro dos arcos passa a estar inclinado para jusante.

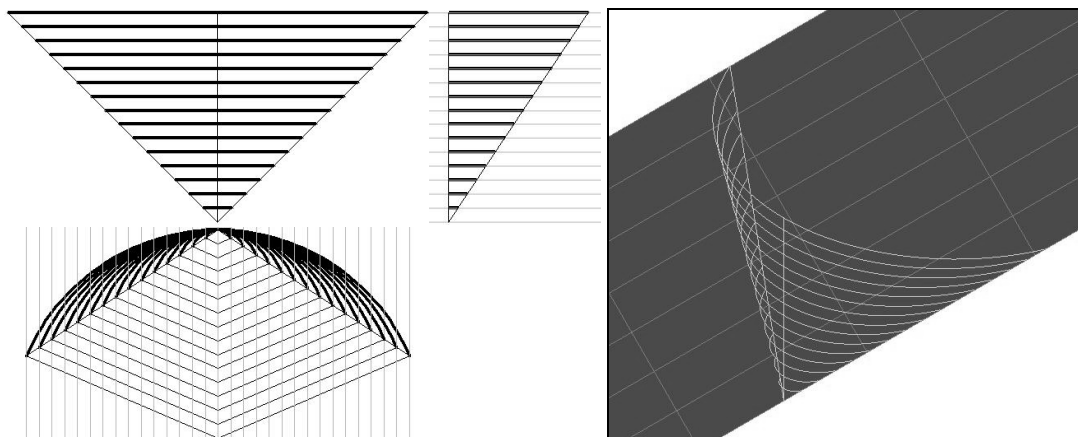


Figura 2.8 (a), (b), (c) e (d) - Superfície média de uma barragem de centro variável com perfil central vertical, num vale em “V” - alçado principal de jusante (a), alçado lateral direito (b), planta (c) e perspectiva (d).

A compatibilização dos princípios estabelecidos para as barragens de centro variável (e de ângulo constante) com a necessidade de obter perfis verticais estáveis quando construídos isoladamente, resultará em superfícies de dupla curvatura com convexidade voltada para montante [11] [12]. A dupla curvatura permite uma optimização do material, uma vez que se adapta a uma grande variedade de forças e à forma do vale [8]. A barragem de Pacoima, nos EUA, foi uma das mais altas barragens dimensionada por este método [12].

As barragens do tipo ângulo constante (ou centro variável) ganharam assim grande popularidade, desde a conclusão em 1914 da barragem de Salmon Creek, nos EUA, dimensionada por Lars Jorgenson [18]. O facto do betão retrair enquanto arrefece levou a que esta barragem fosse dividida em três partes, através de juntas verticais [18], procedimento inovador à época.

O valor óptimo da abertura ao centro ($\varphi = 133^\circ$) representa, no entanto, um limite difícil de atingir, pelo facto de haver necessidade de garantir que a dissipação dos impulsos dos arcos é feita em boas condições [12]. Com o intuito de assegurar uma transmissão adequada da pressão de água às encostas do vale, a incidência dos arcos nas encostas deve ser tão perpendicular quanto possível [8]. Para valores de $\varphi = 120^\circ$, já a incidência das curvas de nível da abóbada nas curvas de nível do vale é demasiado tangente, sendo que se consideram aceitáveis valores de $\varphi = 100^\circ$ a $\varphi = 120^\circ$ e incidências de 45° a 30° (figura 2.9). Estes valores permitem uma distribuição de tensões no arco próxima da ideal, tirando simultaneamente partido da topografia do vale [12]. A adopção de arcos de curvatura variável, com ângulos ao centro de 80° ou 90° , pode proporcionar melhores ângulos de incidência no terreno, quando comparados com arcos circulares com o mesmo raio de curvatura no fecho [18].

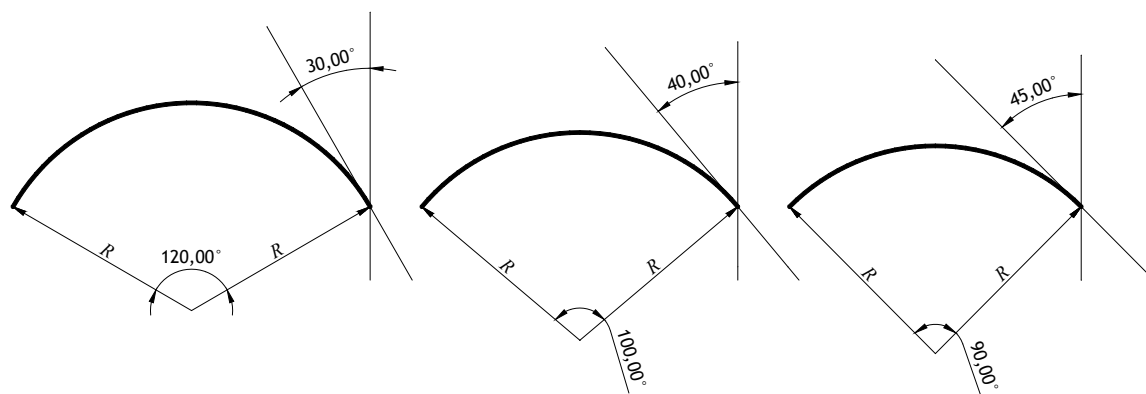


Figura 2.9 (a), (b) e (c) - Três arcos com diferentes ângulos ao centro (120° (a), 100° (b) e 90° (c)) e consequentemente com diferentes ângulos de incidência (30° (a), 40° (b) e 45° (c)) sobre a curva de nível.

Na figura 2.10.a está representado o perfil central típico de uma barragem abóbada dimensionada pelo método preconizado por Lars Jorgensen, sendo possível visualizar a localização dos centros das curvas de nível da abóbada nas faces de intradorso e extradorso, em determinadas cotas. Na figura 2.10.b está representada a planta da mesma barragem. Verifica-se que os centros das curvas de nível de ambos os paramentos vão avançando para montante à medida que aumenta a profundidade, o que resulta numa diminuição dos raios dos arcos circulares com o aumento da profundidade [12].

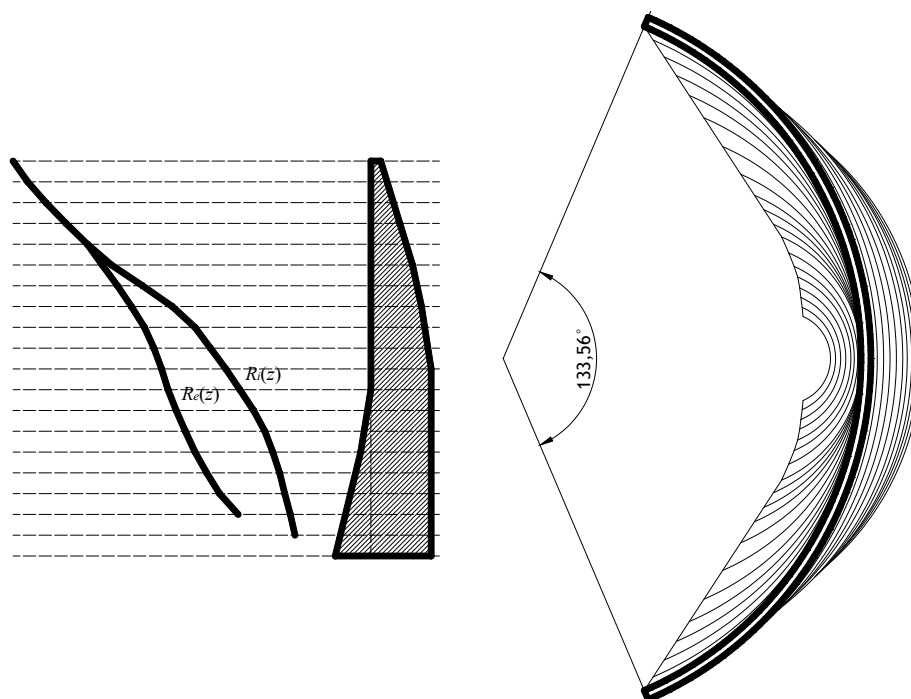


Figura 2.10 (a) e (b) - Perfil central com variação dos raios (a) e vista em planta (b) de uma barragem abóbada (esquemática) de centro variável e ângulo constante (adaptado de [12]).

Devido ao encastramento dos arcos circulares nas margens, a distribuição de tensões deixa de ser uniforme ao longo da secção, uma vez que ocorrem momentos flectores resultando num descentramento da linha resultante de compressões para montante no fecho e para jusante nos encontros [12].

Este facto levou a que, a partir de uma determinada cota, as curvas de nível do intradorso e do extradorso deixassem de ser concêntricas [12]. Desta forma, os arcos circulares passaram a ter inércia variável (figura 2.11), aumentando a secção junto aos apoios, por forma a garantir que a linha de pressões se encontra dentro da secção e, eventualmente, do núcleo central. A concentração de tensões perto dos encontros era compensada com o aumento de material nessa região [18]. Outro argumento, para justificar o aumento de espessura do arco junto aos encontros, baseava-se no benefício que decorre desta acção no caso do solo de fundação ser mais desfavorável [18], uma vez que a reacção de apoio não actua numa área tão concentrada como no caso de um arco mais fino.

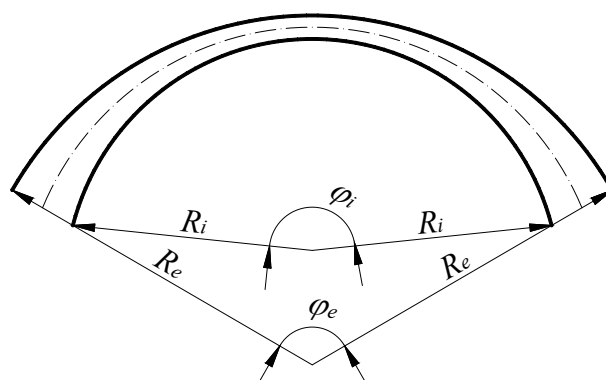


Figura 2.11 - Arco de inércia variável obtido a partir do afastamento dos centros das curvas dos paramentos de montante e jusante.

O terço mais profundo da barragem era, normalmente, a zona onde ocorria o mais importante aumento de espessura do fecho para as nascenças dos arcos, pelo facto de ser a zona com maior concentração de esforços [18]. Por sua vez, o coroamento da barragem podia ser constituído por um arco de espessura constante. Várias análises indicam que este arco poderia diminuir a espessura do fecho para os encontros [18], contrariamente ao que ocorria nos arcos mais solicitados.

Os arcos circulares eram calculados isoladamente para uma pressão radial uniforme, correspondente a uma determinada profundidade [12]. Este procedimento de cálculo ficou conhecido como o método dos arcos independentes [34]. As correcções que houvesse a fazer no traçado, com o intuito de melhorar a distribuição de tensões, eram efectuadas nas curvas de intradorso, introduzindo uma maior curvatura junto aos encontros a partir de uma determinada cota, através de ramos circulares de menor raio, tangentes ao arco circular central [12] (figura 2.12).

Outra característica do tipo de traçado representado na figura 2.10 é o compromisso geométrico que obriga a uma inclinação da parte superior do perfil central para jusante, resultante da necessidade de evitar que os perfis laterais caiam demasiadamente para montante [12]. A barragem de Gurzia, com 50 metros de altura, construída na Itália em 1925, optou por seguir este procedimento de inclinar a parte superior do perfil central para jusante [18].

No entanto, constatou-se o aparecimento de fissuras no pé de montante da consola central [18].

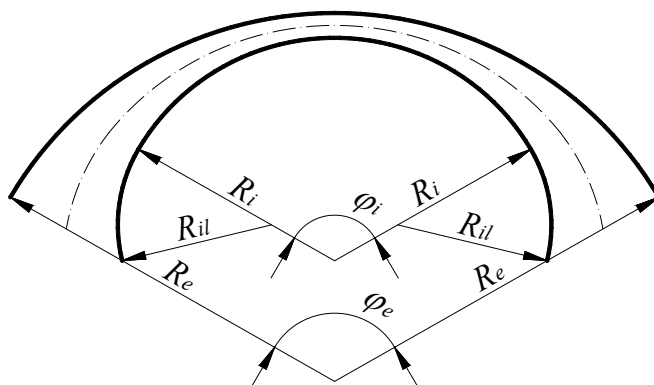


Figura 2.12 - Arco de inércia variável, cuja curva de intradorso é um arco de três centros.

Nas barragens de centro variável não se tirava partido do peso próprio para compensar as tensões de tracção verticais originadas pela pressão hidrostática [12]. Por este motivo, os perfis daquelas barragens não apresentavam curvatura significativa na direcção vertical [12]. A pequena curvatura na vertical, que se verificava nestas barragens, derivava de raciocínios de estabilidade dos blocos considerados independentes, uma vez que os métodos construtivos que vigoravam faziam os blocos crescer isoladamente [12]. O perfil central era construído por forma a centrar as cargas do peso próprio, mas devido à queda da parte superior do perfil para jusante era necessário que, junto à fundação, se estabelecesse um crescimento da secção da base para jusante, evitando o aparecimento de tracções na zona inferior do paramento de montante [12] (figura 2.10.a).

2.1.4 Barragem experimental de “Stevenson Creek”

Criado nos EUA, o “Committee on Arch Dam Investigation” ensaiou, em 1926, uma barragem experimental construída em Stevenson Creek, com 18 metros de altura [12] [11] [18]. Tratava-se de uma barragem cilíndrica com um perfil sensivelmente triangular [18]. Na figura 2.13 está representada a abertura de fendas verificada nos paramentos de montante e jusante daquela barragem.

A abertura de fendas do tipo (1) ocorreu de forma quase ininterrupta ao longo do contorno de inserção da barragem com a rocha de fundação no lado de montante, sendo causada pelo efeito da pressão hidrostática [12]. A fenda vertical do tipo (2) ocorreu ao longo de toda a espessura da barragem, como consequência do fenómeno de retracção do betão, e quando o nível da água atingiu a cota do coroamento, os arcos nesta zona entraram em compressão e esta fenda vertical fechou [12]. A fenda horizontal do tipo (3) ocorreu no paramento de jusante, ao longo das juntas de espera de betonagem, que abriram quando o nível de água começou a subir [12].

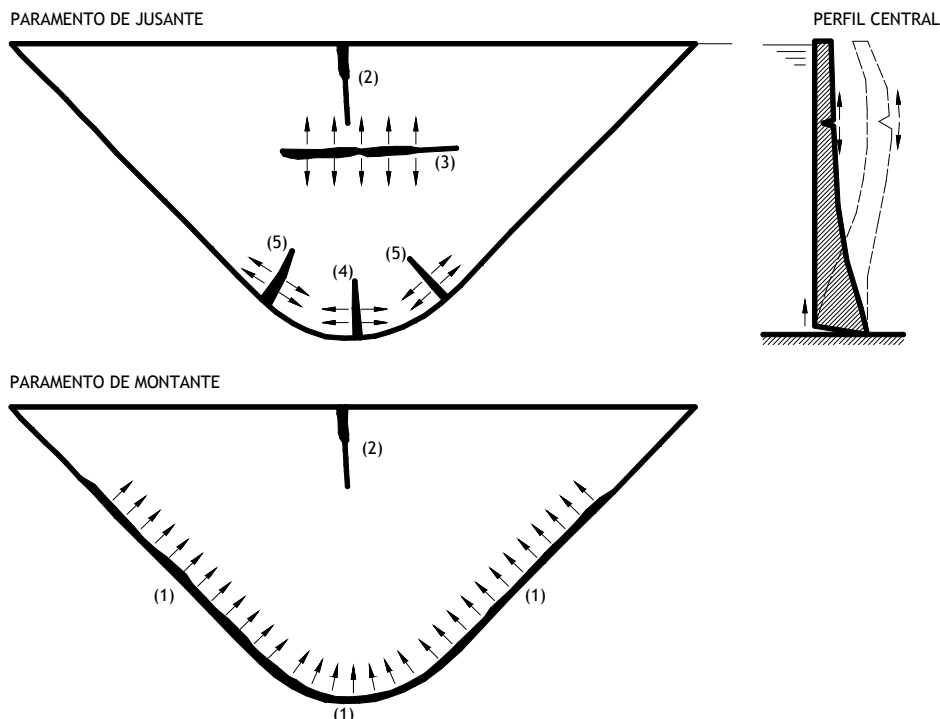


Figura 2.13 (a), (b) e (c) - Abertura de fendas (esquematisada) no paramento de jusante (a), no paramento de montante (b) e no perfil central (c) da barragem de Stevenson Creek (adaptado de [12]).

As fendas oblíquas do tipo (4) e (5) ocorreram na zona inferior do paramento de jusante, aproximadamente na direcção perpendicular ao contorno de inserção da barragem no vale, sendo que se constatou que estas fendas são frequentes em barragens abóbada com pouca curvatura na direcção vertical [12].

No início do século XX foi feito um grande esforço para melhorar a análise de tensões e deformações, o que conduziu a uma evolução na forma das barragens abóbada [18]. No dimensionamento da barragem de Buffalo Bill, concluída em 1910 nos EUA, foi considerada pela primeira vez a independência entre dois sistemas de elementos de espessura unitária, os elementos horizontais (arcos) e os elementos verticais radiais (consolas) [18]. As solicitações foram divididas, num processo por tentativas, entre os arcos e a consola, de modo tal que o deslocamento radial da consola central fosse igual ao deslocamento radial dos arcos nos seus pontos de intersecção [18]. A barragem atingiu uma altura perto dos 100 metros [18]. Nos anos 20 do século XX, Alfred Stucky viria a introduzir melhorias significativas no método de ajustamento de arcos e consolas, considerando várias consolas para além da consola central [18].

Os resultados obtidos no ensaio de carga da barragem de Stevenson Creek foram comparados com os de um ensaio sobre um modelo de celulóide, executado por Beggs e proposto por Noetzli [11]. Estes ensaios vieram apoiar o método de cálculo iterativo em que se repartia a carga por um conjunto de arcos e consolas que materializavam a barragem, tendo passado a designar-se este método por “trial load” [11]. Foram introduzidas várias melhorias ao método dos ajustamentos, como o ajustamento de outros deslocamentos para além do radial [34].

Os deslocamentos de um ponto da barragem podem ter uma componente radial, uma tangencial, perpendicular à anterior, e uma vertical [34]. As rotações, por sua vez, podem ter uma componente sobre o eixo radial, sobre o eixo tangencial e uma outra sobre o eixo vertical [34]. Nesta fase, eram realizados ajustamentos dos deslocamentos radial e tangencial e da torção de eixo vertical, que eram os mais importantes [34].

Em 1926, o desastre ocorrido na barragem de Lake Lanier, nos EUA, onde esta perdeu cerca de dois terços de um encontro sem ter comprometido a estabilidade global da estrutura, veio comprovar a margem de segurança das barragens abóbada e também o facto de existir uma importante concentração de tensões junto à zona de descarga dos impulsos dos arcos [18].

2.1.5 Dispositivos de apoio no pé de montante - “berços”

Em 1935, em França, foi construída a barragem de Marèges, projectada por André Coyne [18], onde se procurou compensar as tracções que provocam o tipo de fenda (1) (figura 2.13), por meio de uma reentrância do perfil a montante (figura 2.14). Desta forma, o efeito do peso próprio da reentrância a montante induzia um estado de pré-compressão, que eliminava as tracções provocadas pela actuação da pressão hidrostática [12].

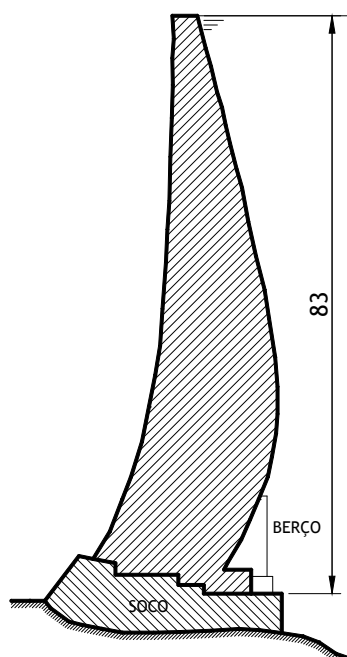


Figura 2.14 - Perfil central (esquemático) da barragem de Marèges (adaptado de [12]).

No entanto, durante a fase de construção dos blocos mais reentrantes, o descentramento do peso próprio originava tensões de tracção na face de jusante, que eram evitadas pela construção de um “berço” de betão armado para escorar a face de montante [12]. Os “berços” estavam rigidamente ligados ao corpo da barragem e quando a pressão hidrostática actuava estes acompanhavam a deformação daquele, impedindo a fissuração da base da barragem na face de montante [12].

Quando os blocos caíam demasiado para montante verificava-se a abertura de juntas radiais, resultantes das tensões de tracção na fase de jusante, o que poderia comprometer a estabilidade da estrutura em vazio, obrigando a dispositivos especiais, como o “berço” utilizado na barragem de Marèges [12]. Uma vez mais, este raciocínio baseava-se na consideração da construção por blocos isolados e independentes, usual na técnica de betonagem de barragens de gravidade [12]. Na verdade, as juntas entre os blocos já estão injectadas quando a pressão hidrostática actua [12]. Por este motivo, quando o “berço” levanta por actuação desta solicitação, o estado de tensão que se verifica no bloco isolado já não corresponde àquele a que a estrutura contínua da barragem está sujeita [12]. Por conseguinte, o raciocínio que levou ao estabelecimento do “berço” também perde a sua validade [12].

Paralelamente ao aparecimento de novas geometrias por parte dos principais projectistas de barragens, Westergaard desenvolveu um método de cálculo baseado na teoria das cascas [11]. Em 1937, Tölke obtinha a solução exacta das equações diferenciais de equilíbrio de uma casca para uma barragem cilíndrica de revolução [11]. Este método de cálculo não conseguia, porém, responder à crescente complexidade de formas ditada pela evolução das barragens abóbada [11], como é possível observar na geometria da barragem de Marèges.

2.1.6 Curvatura na direcção vertical

O passo seguinte na evolução do traçado foi o aumento da curvatura na direcção vertical, que possibilitou descentrar a linha de pressões do peso próprio, de modo a que nas diversas secções de um perfil exista um estado de tensão vertical, que somado ao da pressão hidrostática, resulte fundamentalmente em compressões [12]. A construção da barragem de Osiglietta, com 77 metros de altura, em Itália, no ano de 1939, obedecendo aos princípios enunciados, permitiu a obtenção de um perfil central (figura 2.15) com acentuada curvatura na direcção vertical [12] [18].

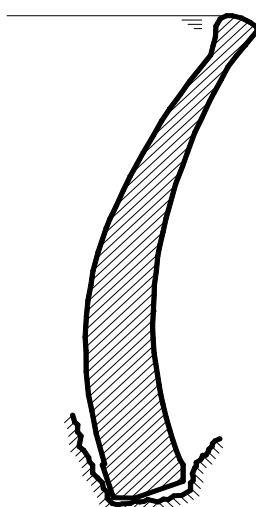


Figura 2.15 - Perfil central (esquemático) da barragem de Osiglietta (adaptado de [12]).

Estudos levados a cabo por Guido Oberti permitiram concluir que a curvatura vertical dos perfis poderia diminuir as tensões verticais de tracção no paramento de jusante, provocadas pela pressão hidrostática (fendas do tipo (3) na figura 2.13) [12]. O perfil central não contemplava apenas uma queda da parte superior para jusante, como acontecia nas primeiras barragens de centro variável. A zona inferior dos perfis sofria uma inclinação para montante, enquanto que a zona superior sofria uma queda para jusante. Desta forma, eram reduzidas as tracções que se verificavam na zona inferior da face de montante e na zona superior da face de jusante, quando a abóbada era solicitada pela pressão hidrostática [12]. As barragens dimensionadas com base nestes critérios eram designadas por barragens abóbada-cúpula.

O peso próprio da cúpula introduzia compressões em determinadas zonas, melhorando o comportamento da estrutura quando actuava também a pressão hidrostática, devido ao aumento da curvatura na parte superior dos perfis [12].

Ensaio sobre o modelo da barragem de Osiglietta demonstraram ainda que a curvatura dos perfis verticais poderia diminuir as tensões resultantes da flexão da estrutura laminar da barragem, desde que a forma da superfície média correspondesse ao antifunicular das cargas do peso próprio e da pressão hidrostática [12]. Dentro dos infinitos equilíbrios funiculares possíveis, era então necessário escolher um que fosse construtivamente exequível [12]. A curvatura da abóbada na vertical não podia comprometer a estabilidade da barragem em vazio, considerando a inexistência de contrafortes no pé de montante, solução com pouco significado estrutural [12]. Um dos critérios orientadores para garantir a exequibilidade do perfil baseava-se no estabelecimento duma inclinação máxima dos paramentos sobre a vertical de 30° [12].

As inclinações das faces da barragem devem também ter em conta o custo adicional devido aos trabalhos de cofragem. Se o arranque de uma face inclinada fizer com a vertical um ângulo de 45°, o custo de cofragem pode aumentar em 30% [18]. Se a queda para jusante do topo da barragem não permitir o crescimento isolado dos blocos, estes terão que ser construídos com pequenas diferenças de nível, por forma a possibilitar que o peso próprio seja absorvido pelos arcos [18]. Esta restrição construtiva pode aumentar a quantidade de execução de tarefas, resultando num prazo de construção mais alargado [18]. É necessário obter um bom compromisso entre o adequado funcionamento estrutural e o processo tecnológico utilizado na construção da estrutura.

2.1.7 Junta perimetral e soco de fundação

A barragem de Osiglietta testemunha também a tradição italiana na criação da junta perimetral e do soco de fundação (“pulvino”) [12] [18].

Carlo Semenza foi um defensor da ideia de manter a simetria da forma da barragem, de maneira a não obter deslocamentos assimétricos nos encontros [18].

A obtenção de formas simétricas permite uma distribuição uniforme de tensões na casca, no entanto, pode resultar em custos adicionais de construção derivados da escavação e da execução do soco de fundação [18]. A obtenção de uma forma simétrica pode-se tornar indispensável no caso da consideração da solicitação sísmica [18]. Sempre que o vale não fosse simétrico, efectuavam-se escavações e enchimentos, por forma a obter-se uma inserção que receberia uma barragem com geometria simétrica [12]. Sobre esta inserção regularizada, também designada de “pulvino”, que por vezes resultava numa barragem tampão, era construída a abóbada fundamental [12].

A construção da barragem Piave de Cadore, em Itália, em 1949, exigiu a construção de um tamponamento do talvegue de 55 metros de altura [12]. Esta barragem demonstrou também a possibilidade de uma só abóbada vencer grandes vãos, apresentando uma razão corda/altura (L/H) de aproximadamente 5,5 [12].

Quanto menor for o valor médio da relação t/R de uma barragem abóbada, maior será concentração de tensões no maciço de fundação onde esta se apoia [11]. Por exemplo, na barragem do Cabril, a abóbada assenta sobre uma fundação de granito por intermédio de um soco, o que permite uma melhor distribuição de tensões e uma diminuição da influência das variações da deformabilidade da fundação, possibilitando também a simetria da abóbada [32]. Nesta barragem, não existe qualquer junta entre o soco e a rocha de fundação [32].

Sempre que a barragem se encontra encastrada ao longo do contorno de inserção, quando actua a pressão hidrostática, surgem, na base do paramento de montante, importantes tracções na direcção tangente à linha média dos perfis [11]. Normalmente, ocorre uma rotura nesta zona, devido à fraca resistência à tracção da ligação entre a rocha e o betão [11]. O soco de fundação, também designado por pulvino, pode melhorar as zonas de rocha deterioradas e reduzir as tensões de compressão no maciço, através do alargamento da zona de contacto [28]. O estabelecimento de uma junta perimetral aumenta a flexibilidade desta ligação, possibilitando que as tensões normais à superfície da junta sejam maioritariamente de compressão [11]. Uma vez que a superfície da junta perimetral possui, habitualmente, armadura em ambos os lados, bem como isolamento a montante, esta zona será muito mais duradoura do que um conjunto de fissuras ramificadas, que mesmo quando injectadas continuam a ter alguma tendência para abrir [28].

A junta perimetral poderá separar por completo a abóbada do soco de fundação (figura 2.16) ou apenas contemplar a zona do paramento de montante, junto à base (figura 2.17), que habitualmente está traccionada quando actua a pressão hidrostática [28].

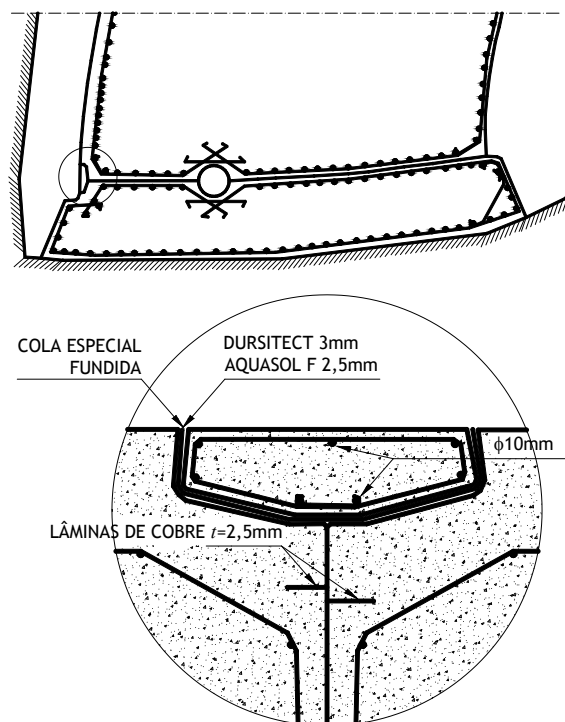


Figura 2.16 (a) e (b) - Vista em corte (esquemática) de um perfil da barragem de Lumiei com junta perimetral (a) e pormenor (esquemático) dos dispositivos de estanquidade (b) (adaptado de [28] e [12]).

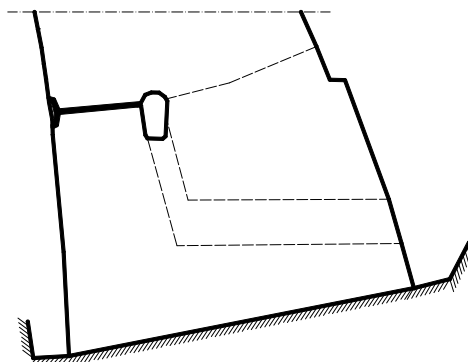


Figura 2.17 - Vista em corte (esquemática) do perfil da barragem de Val Gallina, cuja junta perimetral incide apenas na zona próxima do paramento de montante (adaptado de [28]).

Os graves danos sofridos na barragem de Zeuzier, com 156 metros de altura, quando ocorreu a formação espontânea de fissuras junto à base, como consequência de um abaixamento inesperado do nível freático no maciço rochoso, através de uma galeria de prospecção, vieram demonstrar a importância da existência de uma junta perimetral, que poderia ter evitado este acidente [28]. Esta barragem, de assimetria bastante pronunciada, começou a sofrer uma certa contracção resultante da aproximação das duas encostas do vale [28]. Enquanto na face de montante se abriram fissuras nas juntas entre blocos, na face de jusante a fissuração principal ocorreu ao longo do que seria o andamento da junta perimetral, caso esta existisse [28]. As fissuras ocorridas permitiram concluir que uma barragem abóbada com junta perimetral tem a capacidade de experimentar maiores deformações do que a mesma barragem sem junta [28].

A barragem abóbada de Kölnbrein, na Austria, foi implantada sobre três zonas distintas de rochas, cujo módulo de elasticidade varia entre 17 e 30 GPa [28]. Por sua vez, o betão da barragem apresentava um módulo de elasticidade que variava entre 16 e 23 GPa. Com o avanço da idade do betão a sua resistência aumentou, mas o módulo de elasticidade, ao contrário do esperado, manteve-se constante [28].

A tensão vertical na base do paramento de montante depende da acção do peso próprio, que provoca compressão nesta zona, não dependendo o seu valor da relação entre os módulos de elasticidade do betão e da rocha, e depende também da acção da pressão hidrostática, cujo valor da tensão de tracção provocada nesta zona deriva da relação entre os módulos de elasticidade referidos [28]. Quanto menor for a relação entre os módulos de elasticidade do betão e da rocha (E_c/E_r), maior será a tensão de tracção devido à flexão induzida pela pressão hidrostática na base do paramento de montante [28].

Os cálculos da barragem foram realizados para uma relação E_c/E_r na zona central do vale igual a 1,28, no entanto, nas medições realizadas foi aferida uma relação E_c/E_r igual a 0,8 [28]. A tensão de tracção na direcção vertical junto à base do paramento de montante não era igual ao valor previsto de 0,78 MPa, mas sim a 3 MPa [28].

Na barragem em questão ocorreu a fissura ilustrada na figura 2.18, quando se atingiu o nível máximo de água na albufeira, resultante da necessidade da estrutura diminuir a sua rigidez à flexão, originando uma liberdade de movimento que não existia antes [28].

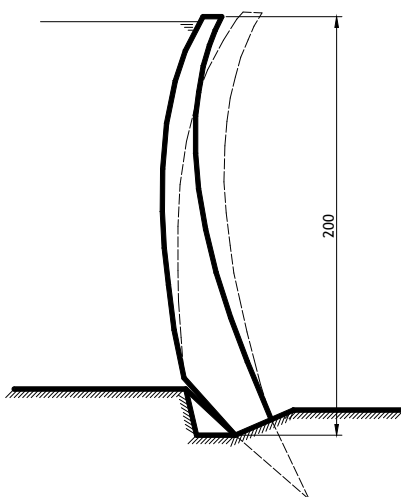


Figura 2.18 - Fissura, desde a superfície de implantação até ao paramento de montante, e deformação (esquemáticas), num perfil da barragem abóbada de Kölnbrein, (adaptado de [28]).

É recomendável o estabelecimento de uma junta perimetral, numa barragem abóbada, nas seguintes situações [28]:

- quando não se conhecem, com precisão suficiente, as características mecânicas do maciço de fundação;
- sempre que exista uma concentração de tensões verticais de tracção na zona inferior do paramento de montante, quando a barragem é considerada encastrada ao longo do contorno de inserção;
- quando não se exclui a possibilidade de deslocamentos relativos das encostas do vale (contração ou expansão);
- quando o vale apresenta um contorno assimétrico.

2.1.8 Desenvolvimento dos métodos de cálculo na segunda metade do século XX

Embora as novas formas das barragens correspondessem a verdadeiras cascas de dupla curvatura, a teoria das cascas não conseguia resolver o equilíbrio de formas que não fossem geradas por revolução [11]. O método de cálculo disponível para análise destas estruturas laminares era o “trial load”, no entanto, conforme os ensaios sobre modelos comprovavam, já não eram desprezáveis determinadas componentes do deslocamento dos nós da grelha de arcos e consolas [11]. O desprezo da componente vertical dos deslocamentos lineares tinha implicações importantes no caso das variações anuais de temperatura, da fluência do betão e da curvatura acentuada da barragem na direcção vertical [34]. Na verdade, uma análise completa com o método “trial load” era incomportável no caso de barragens assimétricas, fundações irregulares e arcos de formas diferentes da forma circular simples [34]. Nalgumas zonas singulares da barragem, como juntas abertas ou encontros artificiais, o método também não fornecia resultados satisfatórios [34]. O único método de análise viável resumia-se muitas vezes aos ensaios de modelo experimental [34].

Em 1949, Bosshard aperfeiçoa um método de cálculo de grelha, dando continuidade a um trabalho de Ritter, onde um sistema de equações algébricas lineares consegue exprimir a compatibilidade de deslocamentos entre um conjunto de arcos circulares horizontais e um conjunto de consolas rectas verticais [11]. Os trabalhos de Tonini e Bosshard permitiram substituir o processo iterativo do “trial load” pelo estabelecimento de um sistema de equações, para determinação de incógnitas hiperstáticas, no entanto, não resolveram o problema da dupla curvatura [11].

Novas formas estruturais substituíram a forma circular dos arcos por parábolas ou elipses, o que constituiu uma dificuldade acrescida para a aplicação de certos métodos de cálculo [11]. Em 1955, Lombardi desenvolveu um método de cálculo baseado na teoria das cascas para barragens cilíndricas de espessura variável, considerando que o mesmo era generalizável a pequenas barragens de dupla curvatura [11].

O método de Lombardi baseava-se na simplificação das equações diferenciais de equilíbrio estabelecidas por Flügge [13] para cascas cilíndricas, sem desprezar o efeito da torção [34], aplicando na sua resolução o método das diferenças finitas, que resultava num sistema de equações lineares [11]. A malha em que se aplicava o método das diferenças finitas era a rede de arcos horizontais e consolas verticais do método “trial load”, que só era ortogonal no caso dum cilindro vertical [11]. Os métodos desenvolvidos por Lombardi e Herzog, baseados na teoria das cascas, só produziam resultados satisfatórios se a malha a que se aplicava as diferenças finitas fosse ortogonal, no entanto, os seus trabalhos chamaram a atenção para a importância dos diferentes esforços de casca numa barragem delgada [11]. As formulações como grelha ou como casca conduziam à resolução de um sistema de equações lineares [11].

Nos anos 60 do século XX, em França, os trabalhos de Maurice Leroy indicavam que a forma dos arcos horizontais da barragem abóbada devia ser uma curva de espiral logarítmica [18]. A escolha desta forma baseava-se na distribuição não uniforme das forças ao longo das curvas de nível da abóbada [18]. Para além disso, a espiral logarítmica não apresentava singularidades e permitia uma transição de uma zona de fecho mais curva e menos espessa para uma zona junto aos encontros mais espessa e com menor curvatura [18]. Nas barragens em vales abertos, os perfis junto aos encontros assemelhavam-se aos das barragens de gravidade [18]. Anos mais tarde, com recurso a modelos matemáticos de optimização, num estudo comparativo de várias formas para os arcos da abóbada - circular de vários centros, parábola, elipse, hipérbole e espiral logarítmica - comprovou-se a vantagem desta última forma face às restantes [40]. Em Portugal, obtendo formas para barragens abóbada de eficiência semelhante, foram preferidos arcos de três centros ou elípticos [18].

O aparecimento de computadores permitiu a resolução de sistemas de equações de elevada ordem, sendo que Beaujoint, entre 1955 e 1960, foi um dos pioneiros na programação da formulação das grelhas considerando cinco ajustamentos de compatibilidade [11]. No entanto, continuou a desprezar a obliquidade do cruzamento de arcos com consolas [11].

Em 1964, na realização do “symposium on the theory of arch dams”, na Universidade de Southampton, foi proposta pela primeira vez a formulação em elementos finitos no cálculo de barragens abóbada, impulsionada por trabalhos anteriores de Zienkiewicz, Clough e Adini [11]. Esta formulação dividia a barragem em elementos discretos (finitos) planos, triangulares ou quadrangulares, que contactavam nos vértices existentes sobre a superfície média da barragem [11]. As solicitações estavam também concentradas nos vértices de contacto entre os vários elementos [11]. Tendo-se estabelecido em cada elemento a sua rigidez, isto é, a relação entre os esforços e deslocamentos dos nós, é possível formular as condições de equilíbrio de cada nó [11]. Era obtido um sistema de equações onde as incógnitas eram os deslocamentos dos nós [11]. Iniciava-se, desta forma, a aplicação do método dos elementos finitos ao cálculo de barragens abóbada.

2.2 Forma das curvas de nível da abóbada

2.2.1 Arco circular

Um arco de circunferência, em relação a um referencial ortonormado, fica completamente definido a partir das coordenadas do centro e do comprimento do raio, através da seguinte expressão:

$$Y = Y_0 \pm \sqrt{R^2 - (X - X_0)^2} \quad (2.7)$$

em que R é o raio da circunferência e (X_0, Y_0) são as coordenadas do seu centro no referencial XOY .

O arco circular foi escolhido para a forma das curvas de nível da abóbada pelo facto de constituir o funicular de uma pressão radial uniforme. Para além disso, as primeiras barragens abóbada resultavam da revolução de um perfil triangular em torno de um eixo vertical, o que resultava em arcos circulares. A fórmula dos tubos foi também deduzida com base num arco circular. No entanto, a partir de uma certa altura, o arco circular começou a ser abandonado progressivamente [34]. Interessa, porém, sublinhar as principais diferenças geométricas entre esta forma e as restantes.

A principal diferença, em termos geométricos, entre um arco circular e um arco parabólico é o facto do primeiro apresentar curvatura constante, enquanto que o segundo apresenta curvatura decrescente do fecho para as nascentes.

Um arco circular e um arco parabólico podem intersectar os mesmos três pontos (figura 2.19), tendo em comum o vão que atravessam. Neste caso, o raio da parábola no topo do arco é inferior ao do arco circular, relacionando-se com este de acordo com a seguinte expressão:

$$R_{PAR,f} = R_{CIR} \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2} \quad (2.8)$$

onde $R_{PAR,f}$ é o raio de curvatura da parábola no fecho do arco, R_{CIR} é o raio do arco circular e φ é o ângulo de abertura ao centro do arco circular.

O arco parabólico também pode apresentar um raio de curvatura no fecho igual ao do arco circular, mas neste caso os dois arcos só terão um ponto em comum (figura 2.20).

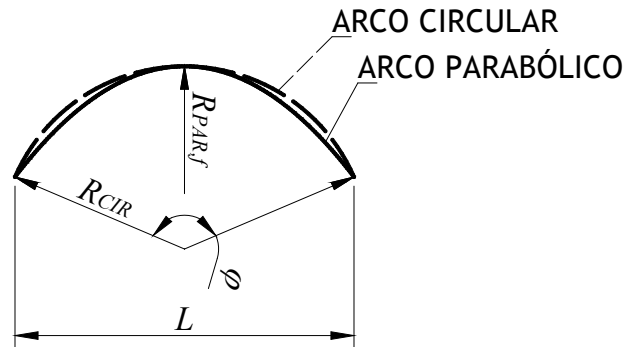


Figura 2.19 - Arco circular e arco parabólico que passam nos mesmos três pontos.

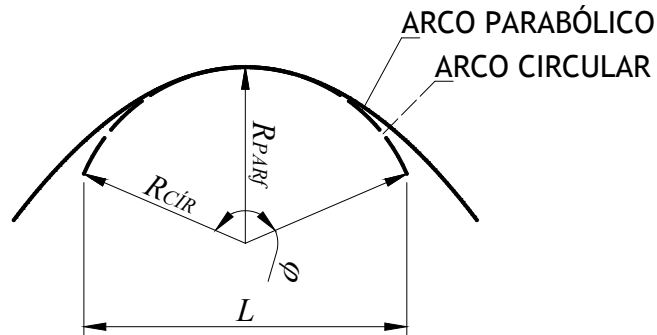


Figura 2.20 - Arco circular e arco parabólico com o mesmo raio de curvatura no fecho.

2.2.2 Arco parabólico

Mais tarde, as formas das curvas de nível da abóbada evoluíram para arcos elípticos ou parabólicos, sendo que os dois últimos permitiam expressões analíticas mais simples, assegurando simultaneamente uma variação contínua dos raios de curvatura [11]. Um arco parabólico, em relação a um referencial ortonormado, fica completamente definido a partir das coordenadas do vértice e do valor do parâmetro que controla a abertura da parábola, através da seguinte expressão:

$$Y = c_2 \cdot (X - X_V)^2 + Y_V \quad (2.9)$$

em que c_2 é o parâmetro que controla a abertura da parábola e (X_V, Y_V) são as coordenadas do vértice da parábola no referencial XOY .

No caso de um arco parabólico, se o vértice da parábola coincidir com o fecho do arco, a partir das coordenadas do vértice e de um dos encontros é possível definir o coeficiente c_2 da função que descreve a parábola.

Com base na hipótese de que a força transmitida pelo arco ao maciço de fundação tem orientação tangente ao arco na secção da nasença, do ponto de vista estático da força descarregada nos encontros, o arco do tipo parabólico tem vantagem sobre o arco circular [29], pelo facto de, no primeiro caso, a reacção de apoio ter uma direcção mais próxima da perpendicular às curvas de nível do terreno.

Contudo, se a hipótese em que se baseia a afirmação anterior correspondesse à realidade, tendo em conta a estabilidade do encontro, seria vantajoso que nas nascenças do arco se registassem valores máximos do raio de curvatura (curvatura mínima), por forma a que a força que o arco descarrega no encontro estivesse dirigida para o interior do maciço [29]. Desta forma, garantindo que o impulso do arco incide o mais perpendicular possível nas curvas de nível do vale, mesmo que o maciço tenha uma falha ou um plano de corte, a incidência do impulso pode ser benéfica à estabilidade da fundação [18].

Para comparar resultados entre arcos circulares e parabólicos é necessário que ambos sejam equivalentes, isto é, tenham o mesmo vão, flecha e área total, o que os torna economicamente idênticos. Comparando dois arcos nestas condições, a orientação da força que o arco descarrega no encontro é aproximadamente a mesma para os dois tipos de traçado, tanto para pressões uniformes como triangulares [29]. No entanto, quando é necessário aprofundar as escavações, de modo a encontrar um melhor solo de fundação, o traçado parabólico parece menos susceptível de alterar a definição e o comportamento estrutural da abóbada [29]. No caso do arco parabólico, o valor do ângulo entre a tangente nas nascenças e a corda é menor que no caso do arco circular. Por esta razão, o prolongamento do arco circular pode gerar dificuldades ao sair demasiado tangencial para o lado jusante da fundação (figura 2.21) [29]. O decréscimo da curvatura do arco parabólico, do fecho para as nascenças, pode assim reduzir os riscos de ângulos de incidência desfavoráveis, no caso de ser necessário aprofundar as escavações [18].

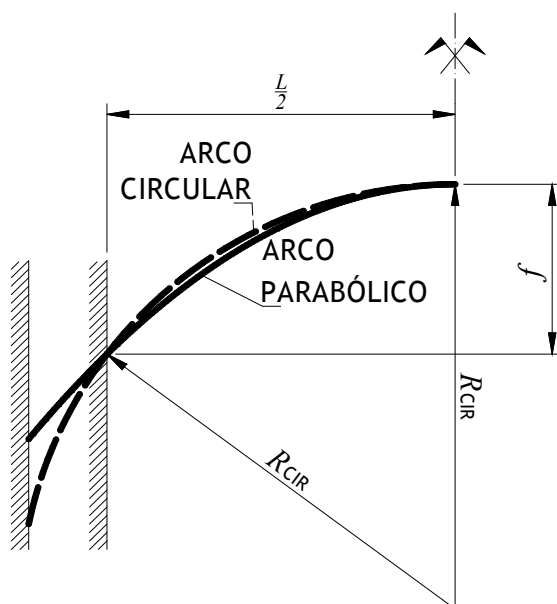


Figura 2.21 - Prolongamento do arco circular, a traço interrompido, e do arco parabólico, a traço contínuo, quando é necessário fundar o arco a maior profundidade.

A maioria das barragens abóbada estudadas na década de 60 do século XX era do tipo parabólico [29]. Num estudo sobre barragens do tipo abóbada parabólica [29], efectuou-se uma análise estática, para diferentes tipos de solicitação, de um arco perfeitamente encastrado, de eixo parabólico e de momento de inércia reduzido constante, ou seja:

$$t^3 \cdot \cos \psi = t_f^3 \quad (2.10)$$

sendo t_f a espessura no fecho e t a espessura da secção que faz com aquela o ângulo ψ , conforme ilustrado na figura 2.22.

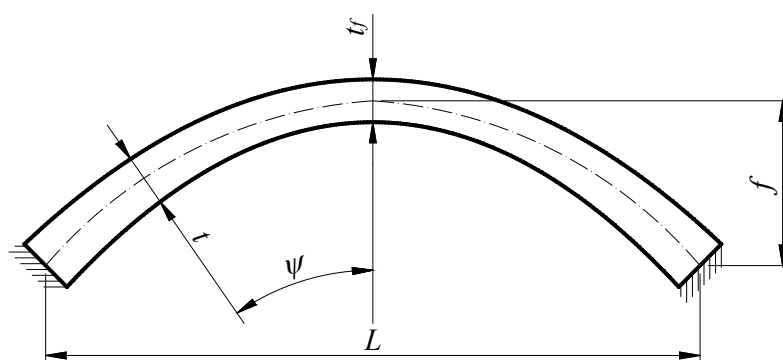


Figura 2.22 - Arco parabólico, perfeitamente encastrado, com momento de inércia reduzido constante (adaptado de [29]).

O estudo do arco parabólico de inércia variável [29], sob a solicitação da pressão hidrostática uniforme, permitiu concluir que é possível reduzir o momento flector no fecho e nas nascenças, através da escolha adequada das razões t_f/L e $K = f/L$. Desta forma, para um dado comprimento de corda L , é possível fixar uma espessura no fecho t_f e determinar a flecha f que corresponde ao melhor aproveitamento do arco, ou seja, momento flector o mais reduzido possível nas nascenças e no fecho [29]. A expressão que permite anular o momento flector no fecho e reduzir o momento flector nas nascenças [29], no arco representado anteriormente, e que depende das razões t_f/L e $K = f/L$, é apresentada seguidamente:

$$\left(\frac{t_f}{L}\right)^2 = \frac{768 \cdot K^5}{40 \cdot K \cdot (35 - 14 \cdot K^2) - 5 \cdot (35 + 168 \cdot K^2) \cdot \tan^{-1}(4 \cdot K)} \quad (2.11)$$

sendo t_f a espessura no fecho, L o comprimento de corda e K a razão entre f , a flecha do arco parabólico e L .

No mesmo estudo anteriormente referido [29], foi efectuada uma análise comparativa entre o arco parabólico de inércia variável da figura 2.22 e um arco circular equivalente de espessura constante.

Quando submetidos a pressão hidrostática constante, os arcos parabólicos de momento de inércia reduzido constante, perfeitamente encastrados, apresentam menores valores de esforço axial, tanto no fecho como nas nascenças, comparativamente com os arcos circulares equivalentes de espessura constante [29]. Esta diferença é, porém, reduzida. Por sua vez, o esforço transversal nas nascenças é maior nos arcos parabólicos do que nos arcos circulares equivalentes [29]. Relativamente ao momento flector, apresenta-se com valores mais elevados nas nascenças e menores no fecho dos arcos parabólicos [29].

De acordo com o método de cálculo “trial load”, em barragens abóbada localizadas em vales em “V” algo abertos, para as mesmas deformações normais, as consolas centrais suportam menores cargas que as laterais, por terem maior balanço, ou seja, menor rigidez [29]. De acordo com este raciocínio, os diagramas de carregamento exercido pela água a atribuir aos arcos devem ser do tipo trapezoidal, com carga decrescente do fecho para as nascenças [29]. A linha resultante de compressões é, em geral, mais centrada em arcos do tipo parabólico com momento de inércia reduzido constante, perfeitamente encastrados, do que em arcos circulares equivalentes de espessura constante, sujeitos às mesmas condições, para a solicitação de pressão trapezoidal descrita [29].

2.2.3 Arco em espiral logarítmica

Um outro método para o traçado das curvas de nível da abóbada, proposto por Maurice Leroy, em 1962, centra-se numa outra forma geométrica, a espiral logarítmica [18]. Arcos horizontais, cujo eixo tem a forma de uma espiral logarítmica, permitem uma variação regular da curvatura da curva [18].

A equação da espiral logarítmica [18] (figura 2.23), expressa em coordenadas polares, tem a seguinte forma:

$$\rho(\lambda) = \rho_0 \cdot e^{a \cdot \lambda} \quad (2.12)$$

onde ρ é o comprimento do vector raio num ponto da espiral, ρ_0 é o comprimento do vector raio do ponto da espiral associado ao ângulo $\lambda = 0$, e é o número de Euler, a é a cotangente do ângulo ζ , entre o vector raio e a tangente à espiral num ponto, e λ é o ângulo entre o vector raio e o vector raio na origem do referencial.

As coordenadas polares na espiral logarítmica referem-se ao centro da espiral, sendo o vector raio na origem (ρ_0) a referência para a medição do ângulo λ .

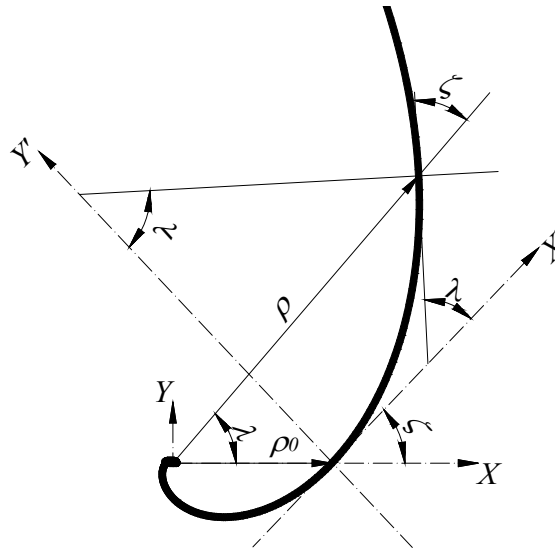


Figura 2.23 - Espiral logarítmica e respectivos parâmetros com indicação do referencial em relação ao qual é expressa a equação polar da espiral (X, Y) e do referencial cujo eixo das abcissas é tangente ao arco na zona de fecho (X', Y') (adaptado de [18]).

Os parâmetros ρ_0 e a definem por completo a espiral logarítmica. Quando $\lambda = 0$, $\rho = \rho_0$, ou seja, o raio é igual ao raio no fecho do arco. A espiral logarítmica apresenta outra propriedade: o ângulo ζ entre a linha radial e a tangente num determinado ponto da espiral é constante.

Com efeito, verifica-se a seguinte relação:

$$a = \frac{1}{\tan(\zeta)} \quad (2.13)$$

onde ζ é o ângulo entre a linha radial e a tangente à espiral logarítmica e a é o parâmetro que regula a abertura e o sentido da espiral.

O parâmetro a é nulo, quando o ângulo $\zeta = 90^\circ$, ou seja, quando a curva é circular. À medida que a aumenta, ζ diminui, e a espiral afasta-se da forma da circunferência [18]. O parâmetro a comanda assim a variação de curvatura da espiral.

Recorde-se novamente o raciocínio da distribuição do carregamento da pressão hidrostática entre um conjunto de arcos horizontais e de consolas verticais, que representa o corpo da barragem. Num vale estreito e profundo ($L/H \leq 1$), os arcos horizontais são muito mais rígidos do que as consolas verticais e por esta razão, os primeiros resistem à maioria das solicitações externas [18]. Nesta situação, o carregamento radial é constante ao longo do arco e a forma circular é a mais indicada ($a = 0$) [18].

Por outro lado, num vale mais aberto, as consolas laterais ao diminuírem de altura tornam-se mais rígidas, sendo tanto mais rígidas quanto mais perto estiverem dos encontros [18]. O aumento de rigidez nas consolas permite que parte da carga seja absorvida por estas. Os arcos, junto às zonas onde as consolas são mais rígidas, devem reduzir a sua curvatura [18]. O parâmetro a deve, então, ser proporcional à abertura do vale [18]. Um exemplo da distribuição da pressão hidrostática entre os arcos horizontais e as consolas verticais pode ser visualizado no resumo do cálculo, pelo método “trial load”, da barragem do Cabril (figura 2.24).

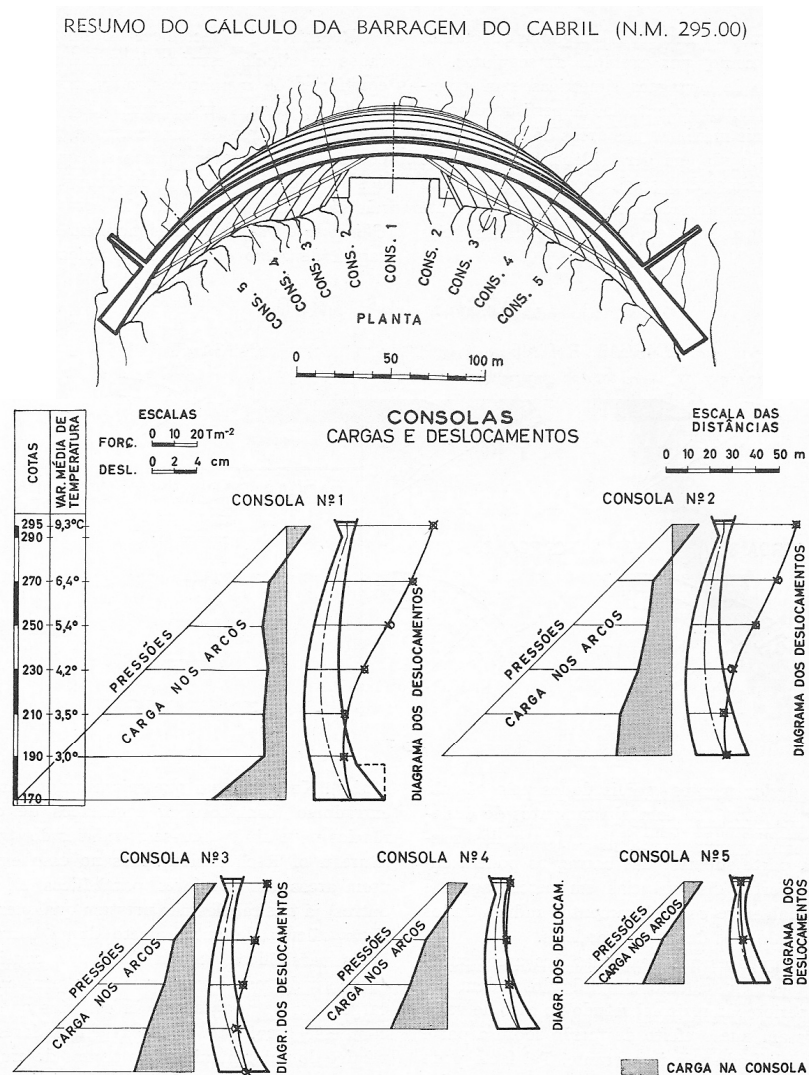


Figura 2.24 - Distribuição da pressão hidrostática pelos arcos horizontais e consolas verticais, radiais, da barragem do Cabril, com indicação das deformadas das consolas [34].

O fecho dos arcos no topo da barragem, pouco solicitados pelo facto da pressão hidrostática não ser muito elevada nesta zona, sofre uma deformação para jusante devido principalmente às deformações das consolas centrais [18]. A rigidez destes arcos contraria a deformação do topo da consola, o que equivale a considerar que o topo da consola central está solicitado por forças que actuam de jusante para montante. A uma maior profundidade, arcos e consola dividem a solicitação entre si.

Uma vez que a rigidez da consola aumenta com a profundidade, a sua influência na absorção da pressão hidrostática também aumenta. A influência da consola relativamente aos arcos, na absorção da solicitação, é também mais elevada nas consolas mais curtas.

A abertura do vale não é, no entanto, o único factor a influenciar a variação da curvatura dos arcos. A forma do vale (“U” ou “V”) é também importante na definição do parâmetro a [18]. Para a mesma relação L/H , um vale em “V” apresenta consolas junto aos encontros mais rígidas do que um vale em “U” e, como consequência, as consolas mais rígidas dispensarão a curvatura dos arcos nessas zonas [18]. O parâmetro a deve ser mais elevado em arcos de barragens inseridas em vales em “V”, por comparação com os arcos de barragens nas mesmas condições, mas inseridos em vales em “U”.

Sempre que as condições topográficas ou geológicas obriguem a um aumento da espessura dos arcos junto aos encontros, a rigidez relativa entre estes e as consolas pode também se alterar nesta zona, modificando também a variação de curvatura ideal para o arco [18]. Existe então a necessidade de estabelecer um critério mais preciso para a determinação do parâmetro a , que será a deformação do arco [18].

Num arco cuja curvatura tenha sido criteriosamente escolhida, em função da configuração do carregamento externo (forma antifunicular), e em que as condições de apoio induzam exclusivamente esforços tangenciais ao eixo do arco (figura 2.3), não existirão momentos flectores. A deformação sofrida pelo arco (figura 2.25) será apenas consequência do encurtamento do material, submetido unicamente a tensões uniformes de compressão [18]. No caso da pressão hidrostática uniforme, o arco circular estabelece a curvatura adequada para se verificarem as condições anteriores.

No entanto, se os encontros do arco estiverem encastrados, nestas zonas surgem momentos flectores e a deformação (figura 2.26), na mesma zona, é menor do que no fecho [18]. Sempre que os encontros passam a ser encastrados, o surgimento de momentos flectores é inevitável. Uma deformação aceitável para um arco bi-encastrado, solicitado por um determinado carregamento, corresponderia a uma zona central com deslocamentos radiais aproximadamente constantes, ocorrendo depois uma transição suave para a zona próxima do encastramento [18]. Esta situação verifica-se na deformação do arco da figura 2.26. O arco passa a estar encastrado nas extremidades, mas se a forma do antifunicular for mantida, os momentos flectores, apesar de existirem, são reduzidos.

Se a forma do arco for alterada para uma parábola, mantendo o mesmo vão, carregamento, condições de apoio e secção, a deformada (figura 2.27) é muito mais desfavorável e os momentos flectores serão mais elevados. O parâmetro a pode então ser escolhido de maneira a estabelecer uma determinada variação de curvatura ao longo do arco, que favoreça a obtenção da deformada pretendida [18].

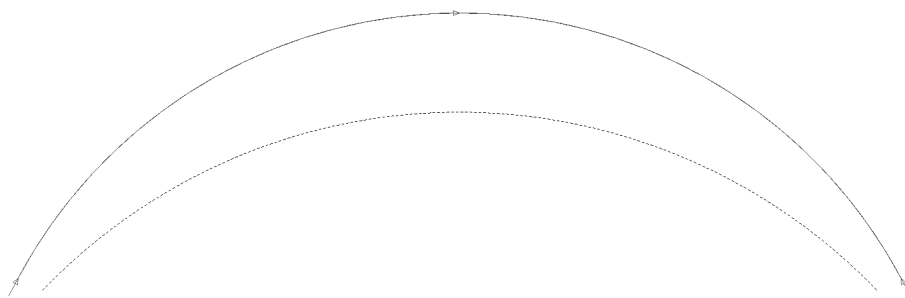


Figura 2.25 - Deformada típica (ampliada) , a traço interrompido, de um arco circular de inércia constante, com apoios radiais deslizantes nos dois encontros (à semelhança daquele representado na figura 2.3), quando submetido à acção de uma pressão radial uniforme.

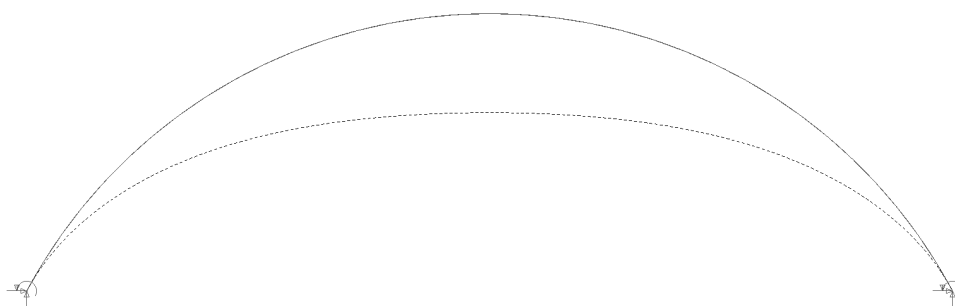


Figura 2.26 - Deformada típica (ampliada), a traço interrompido, de um arco circular de inércia constante, encastrado nos dois encontros, quando submetido à acção de uma pressão radial uniforme.

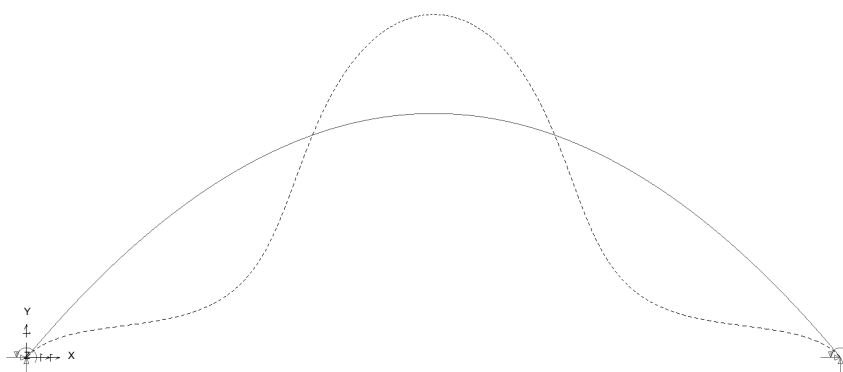


Figura 2.27 - Deformada típica (ampliada), a traço interrompido, de um arco parabólico de inércia constante, encastrado nos dois encontros, quando submetido à acção de uma pressão radial uniforme.

O comprimento do vector raio no fecho (ρ_0) influencia directamente o ângulo de incidência das nascenças do arco nas encostas do vale [18]. Para um determinado valor do parâmetro a , quanto maior for ρ_0 , mais favorável será o ângulo de incidência no terreno [18]. No entanto, o aumento de ρ_0 , originando um arco mais abatido, provoca um aumento do esforço normal no arco e também valores de impulsos nas nascenças mais elevados [18]. Um grande aumento do esforço de compressão poderá conduzir à necessidade de aumentar a espessura do arco para reduzir as tensões de compressão, o que provocará um aumento de rigidez da peça e conseqüente agravamento dos esforços [18]. É então necessário estabelecer um compromisso entre estes factores.

Habitualmente, nos arcos do topo da barragem, ρ_0 é determinado impondo um ângulo de incidência de 45° [18]. Nos arcos a uma maior profundidade, é possível manter e até melhorar este ângulo de incidência [18]. No entanto, o ângulo de incidência do arco no terreno pode ser maior do que o ângulo da reacção de apoio do arco com a curva de nível, pelo facto de existir a possibilidade da reacção de apoio não ser tangente ao eixo do arco nas nascenças [18]. Isto poderá acontecer sempre que a resultante de compressões não seja coincidente com o eixo do arco. Na verdade, o verdadeiro ângulo de incidência do impulso do arco no terreno pode não estar contido num plano horizontal, pois a direcção do impulso será coincidente com uma das direcções principais dos esforços na casca, quando solicitada pelas acções externas. O estabelecimento de um ângulo de incidência dentro de limites razoáveis permite precaver a outra situação, descrita anteriormente, relacionada com a necessidade de aprofundar as fundações do arco.

Outro factor importante para a escolha de ρ_0 , em cada um dos arcos, é a necessidade de obter consolas que possam crescer isoladamente, não colocando em causa os custos e a execução de trabalhos na obra [18]. Ao mesmo tempo, a distribuição do peso próprio da barragem deve ser tal que, quando combinada com a pressão hidrostática, resulte num estado de tensão fundamentalmente de compressão.

Se a barragem não for simétrica, o estabelecimento de ângulos de incidência adequados aos dois encontros poderá conduzir à necessidade de estabelecer diferentes raios no fecho para as duas metades do arco [18]. Nesta situação, deverá garantir-se a mesma curvatura para as duas espirais na secção de fecho [18].

2.3 Teoria de elasticidade das cascas em equilíbrio de membrana

2.3.1 Equilíbrio de membrana

Numa casca cuja superfície fechada corresponda à forma de um cilindro, a actuação de uma força concentrada, com direcção radial, é suficiente para provocar uma deformação acentuada, onde momentos flectores e torsões são mobilizados [13].

Por sua vez, uma casca de ovo é capaz de resistir a forças distribuídas ao longo da sua superfície, sem evidenciar uma deformação acentuada [13]. Neste caso, os esforços mobilizados correspondem maioritariamente aos esforços normais e tangenciais, contidos no plano tangente à superfície média da casca (n_x , n_y , n_{xy} e n_{yx}) [13]. A pequena deformação ocorrida não mobilizará importantes momentos flectores e torsões, desde que a espessura da casca se mantenha inferior a um determinado limite [13]. Esta situação configura aquilo que se designa por equilíbrio de membrana.

Por exemplo, numa cúpula esférica de revolução, suficientemente delgada e com condições de apoio que não introduzam momentos flectores e torsões e esforços transversos, quando submetida a uma pressão hidrostática constante, estabelece-se um equilíbrio de membrana [11]. O mesmo acontece quando a mesma cúpula é submetida à actuação do seu peso próprio. Por sua vez, quando a solicitação é uma força concentrada ou uma carga distribuída ao longo de uma curva contida na superfície, o equilíbrio de membrana não será válido em toda a extensão da cúpula, ocorrendo a necessidade da existência de momentos flectores e esforços transversos na vizinhança do ponto ou da curva em que as forças estão aplicadas [11]. No caso de um cone, é possível estabelecer-se um equilíbrio de membrana quando actua uma força concentrada no vértice deste [11]. Existe uma relação entre a geometria da superfície média e a tipologia da solicitação que torna possível o estabelecimento de um equilíbrio de membrana [11].

O equilíbrio de membrana, face à distribuição contínua das forças da pressão hidrostática e do peso próprio, pode sempre estabelecer-se numa barragem abóbada, desde que as ligações ao contorno o possibilitem, ou seja, desde que as reacções de apoio estejam contidas ao longo dos bordos e em planos tangentes à superfície média da casca [11]. Este equilíbrio, que mobiliza os esforços normais contidos no plano tangente à superfície média, pode-se estabelecer só com esforços de tracção, só de compressão ou, num caso geral, de compressão e tracção [11].

Se as condições ilustradas se verificarem, pode-se desprezar a existência de momentos flectores e torsões na análise da casca. Esta simplificação da teoria das cascas originou a teoria de membrana das cascas [13]. Sempre que as condições de apoio em determinada zona da casca não possibilitem o estabelecimento de um equilíbrio de membrana, a perturbação introduzida por estas será tanto maior quanto mais espessa for a casca [11].

Num equilíbrio de membrana existem apenas os esforços ilustrados na figura 1.1. Considere-se a actuação de uma solicitação externa (p_x , p_y e p_z), proporcional à área da superfície média do elemento ($ds_x \cdot ds_y$), e com ponto de aplicação no centro do mesmo, ao nível da superfície média. Analisando o equilíbrio de momentos em torno de um eixo z , que passa pelo ponto de aplicação descrito e é perpendicular à superfície média, apenas as resultantes dos esforços tangenciais provocam rotações, obtendo-se a seguinte expressão:

$$n_{xy} \cdot ds_y \cdot ds_x = n_{yx} \cdot ds_x \cdot ds_y \quad (2.14)$$

em que n_{xy} e n_{yx} são os esforços tangenciais, e ds_x e ds_y são os comprimentos das linhas que resultam da intersecção da superfície média com uma secção de ordenada ou abcissa constante, respectivamente.

Cada par de resultantes de esforço tangencial forma um binário [13]. Como os binários têm sentidos de rotação opostos e braços iguais, por simplificação da expressão anterior, obtém-se:

$$n_{xy} = n_{yx} \quad (2.15)$$

onde n_{xy} e n_{yx} são os esforços tangenciais.

Analisando o equilíbrio de momentos em torno do eixo coincidente com a força p_y , tangente à curva que resulta da intersecção de uma secção de abcissa constante com a superfície média, concluí-se que apenas as resultantes de esforço transversal $q_x \cdot ds_y$, que formam um binário de braço ds_x , provocam rotação [13]. Daqui se conclui que o esforço transversal na secção de abcissa constante é nulo ($q_x = 0$). O mesmo raciocínio pode ser aplicado no equilíbrio de momentos em torno do eixo com a direcção da força p_x , concluindo-se que o esforço transversal na secção de ordenada constante é nulo ($q_y = 0$).

A teoria de membrana permitiu uma simplificação da teoria das cascas, passando de dez esforços desconhecidos para apenas três: n_x , n_y e $n_{xy} = n_{yx}$ [13]. Três equações de equilíbrio serão necessárias e suficientes para a determinação dos três esforços desconhecidos [13]. A determinação destes esforços permite calcular as deformações, que avaliarão a validade da teoria da membrana na análise da casca [13].

A determinação dos esforços internos numa casca, onde ocorre um equilíbrio de membrana, é um problema estaticamente determinado, como demonstrado anteriormente, cujas equações diferenciais de equilíbrio exigem que a superfície média e a solitação não apresentem singularidades [11].

2.3.2 Esforços de membrana em cascas de revolução

Uma superfície de revolução é gerada pela rotação de uma curva contida num plano, em torno de um eixo, também contido nesse plano [13]. A curva revolvida em torno de um eixo recebe a designação de meridiano [13]. Um ponto na superfície média da casca pode ser localizado a partir do meridiano que o contém e de uma segunda coordenada, que varia ao longo do meridiano, mas que é constante em torno de uma circunferência com centro no eixo de revolução [13]. Uma vez que estas circunferências coincidem com as curvas de nível, sendo paralelas entre si, recebem a designação de círculos paralelos.

Um sistema de coordenadas angulares pode ser estabelecido para identificar o meridiano e o círculo paralelo que contém um ponto na superfície média da casca.

O meridiano é localizado pela distância angular θ , entre si e o meridiano de referência [13]. No plano do meridiano, o ângulo ϕ , entre a normal à superfície média da casca no ponto e o eixo de revolução, identifica o círculo paralelo [13].

A figura seguinte ilustra um meridiano genérico da superfície média de uma casca de revolução. A distância R é medida entre um ponto do meridiano e o eixo de revolução, perpendicularmente a este eixo. Os raios R_I e R_{II} são medidos nos planos osculadores que contêm as direcções principais de curvatura da casca. Como se trata de uma casca de revolução, R_I é o raio de curvatura do meridiano, enquanto que R_{II} é o raio de curvatura no plano que contém a direcção perpendicular ao meridiano, medido a partir do eixo de revolução. O raio R_{II} constitui o raio de curvatura, num ponto da superfície média da casca, na direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, uma vez que este plano contém a outra direcção principal de curvatura, cujo raio de curvatura é R_I .

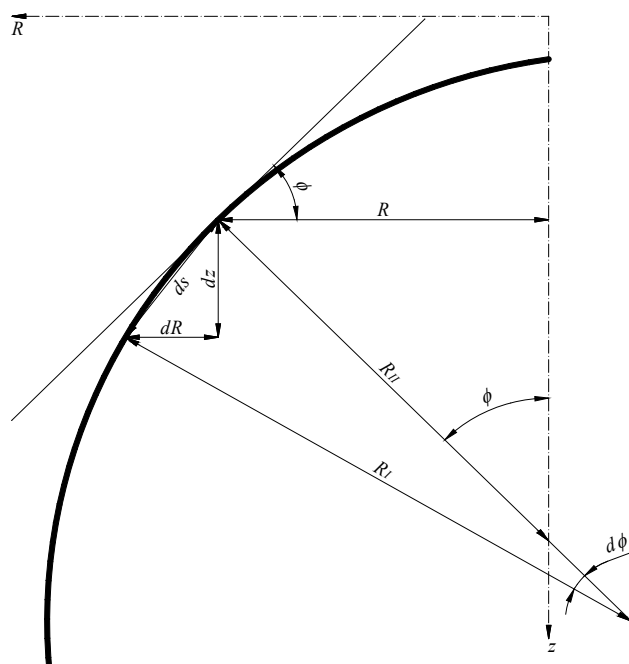


Figura 2.28 - Meridiano de uma casca de revolução (adaptado de [13]).

Observando a figura anterior, a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$R = R_{II} \cdot \text{sen}\phi \quad (2.16)$$

em que R é a distância entre um ponto do meridiano e o eixo de revolução, na direcção perpendicular a este, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano no mesmo ponto.

A distância elementar ds pode ser relacionada com o raio de curvatura R_I , através da seguinte expressão:

$$ds = R_I \cdot d\phi \quad (2.17)$$

onde R_I é o raio de curvatura do meridiano e $d\phi$ é a distância angular elementar entre dois destes raios de curvatura, infinitamente próximos, que limitam a distância elementar ds , ao longo do meridiano.

Podem ainda ser estabelecidas as seguintes relações:

$$dR = ds \cdot \cos \phi \quad (2.18)$$

$$dz = ds \cdot \text{sen} \phi \quad (2.19)$$

em que dR , ds , dz são as distancias elementares ao longo dos eixos R , s e z , respectivamente, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano num determinado ponto.

Com base nas relações anteriores, as seguintes equações podem ser estabelecidas:

$$\frac{dR}{d\phi} = R_I \cdot \cos \phi \quad (2.20)$$

$$\frac{dz}{d\phi} = R_I \cdot \text{sen} \phi \quad (2.21)$$

onde dR e dz são as distâncias elementares ao longo dos eixos R e z , respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano num determinado ponto.

Com base nas expressões (2.16) e (2.20), concluí-se que:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\phi} = \frac{R_I}{R_{II}} \cdot \frac{1}{\tan \phi} \quad (2.22)$$

em que dR é a distância elementar ao longo do eixo R , $d\phi$ é a distância angular elementar, R é a distância entre um ponto do meridiano e o eixo de revolução, na direcção perpendicular a este, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da

superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano no mesmo ponto.

Analise-se seguidamente o equilíbrio de um elemento da superfície média da casca (figura 2.29). Este elemento é limitado por pares infinitamente próximos de meridianos e círculos paralelos [13]. Recorde-se que se pretende obter um sistema de três equações de equilíbrio que permita a determinação dos três esforços de membrana: n_x , n_y e $n_{xy} = n_{yx}$.

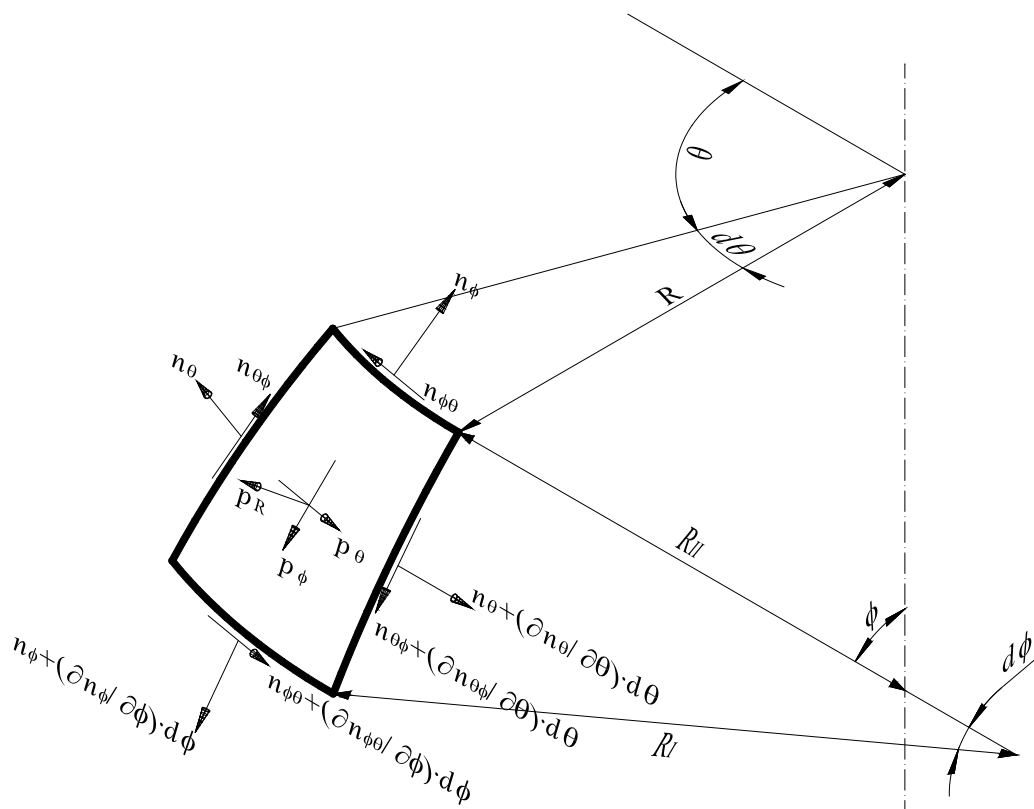


Figura 2.29 - Elemento de casca de revolução (adaptado de [13]).

As resultantes de esforços que actuam segundo a tangente ao meridiano são $n_{\theta\phi} \cdot R_I \cdot d\phi$ e,

no bordo oposto, $\left(n_{\theta\phi} + \frac{\partial n_{\theta\phi}}{\partial \theta} \cdot d\theta \right) \cdot R_I \cdot d\phi$. Uma vez que estas forças são opostas, a sua

resultante é $\frac{\partial n_{\theta\phi}}{\partial \theta} \cdot R_I \cdot d\theta \cdot d\phi$.

Ao longo do meridiano existem também duas forças na direcção em estudo. Neste caso, é necessário levar em consideração que tanto o esforço por unidade de comprimento da secção, n_ϕ , como o comprimento da própria secção, $R \cdot d\theta$, variam com o ângulo ϕ [13]. Desta

forma, a resultante a considerar na equação de equilíbrio é $\frac{\partial}{\partial \phi}(R \cdot n_\phi) \cdot d\phi \cdot d\theta$.

Na direcção em análise, existe ainda uma componente da resultante do esforço $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi$, que actua em duas faces opostas e contribuiu para o equilíbrio [13]. As resultantes de esforços referidas estão contidas num plano onde se estabelece um segmento de um círculo paralelo (figura 2.30), cujo ângulo de abertura ao centro é $d\theta$ [13].

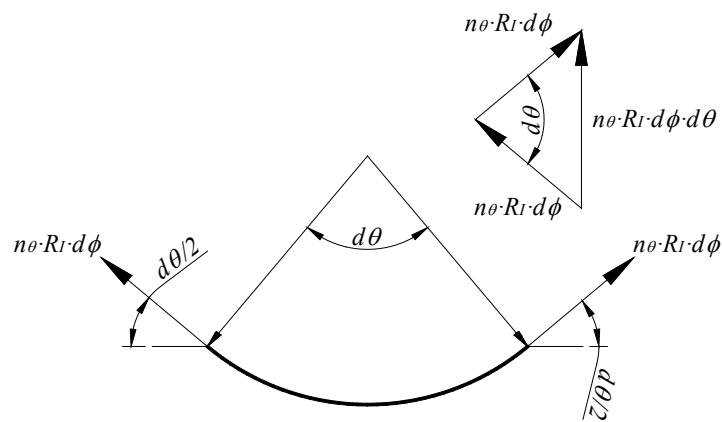


Figura 2.30 - Resultante do sistema de forças estabelecido pelos esforços normais ao longo de um círculo paralelo, num elemento de uma casca de revolução.

A resultante do sistema de forças descrito é $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi \cdot d\theta$, está contida no mesmo plano dos esforços ao longo do círculo paralelo e aponta em direcção ao eixo de revolução da casca [13]. No plano do meridiano, a força $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi \cdot d\theta$ tem duas componentes: uma sobre a normal e outra sobre a tangente ao meridiano [13]. A componente tangencial ao meridiano é $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \cos \phi$.

A contribuição da força externa para o equilíbrio na direcção tangencial ao meridiano é dada por $p_\phi \cdot R_I \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$. A área do elemento é dada por $R_I \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$ [13].

Tendo em conta os sentidos das forças analisadas, a equação de equilíbrio ao longo da direcção tangente ao meridiano resulta:

$$\frac{\partial n_{\theta\phi}}{\partial \theta} \cdot R_I \cdot d\theta \cdot d\phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (R \cdot n_\phi) \cdot d\phi \cdot d\theta - n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \cos \phi + p_\phi \cdot R_I \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (2.23)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, $n_{\theta\phi}$ é o esforço tangencial, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_ϕ é a componente da força externa tangente ao meridiano, por unidade de área do elemento de casca, $d\theta$ e $d\phi$ são as distâncias elementares angulares, ao longo das coordenadas θ e ϕ , respectivamente, sendo ϕ o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Dividindo a equação anterior pelo produto das duas quantidades diferenciais $d\theta \cdot d\phi$ [13], obtém-se a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (R \cdot n_\phi) + R_I \cdot \frac{\partial n_{\theta\phi}}{\partial \theta} - R_I \cdot n_\theta \cdot \cos \phi + p_\phi \cdot R \cdot R_I = 0 \quad (2.24)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, $n_{\theta\phi}$ é o esforço tangencial, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_ϕ é a componente da força externa tangente ao meridiano, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Analisando as forças na direcção do círculo paralelo, a resultante dos esforços tangenciais nos bordos horizontais do elemento de casca, tendo em conta a variação do comprimento da secção, é igual a

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (R \cdot n_{\phi\theta}) \cdot d\phi \cdot d\theta.$$

Os esforços ao longo da direcção do círculo paralelo, normais às secções meridionais, têm como resultante $\frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} \cdot R_I \cdot d\theta \cdot d\phi$.

As resultantes de esforços tangenciais $n_{\theta\phi} \cdot R_I \cdot d\phi$, que actuam em dois lados opostos, também contribuem para o equilíbrio na direcção em estudo, uma vez que a direcção destas forças não é exactamente paralela [13]. As referidas forças estão contidas nos planos dos respectivos meridianos e têm direcção tangente a estes.

Este sistema de forças pode ser projectado numa direcção que faz um ângulo ϕ com as direcções tangentes aos meridianos (figura 2.31), multiplicando cada uma das forças por $\cos \phi$.

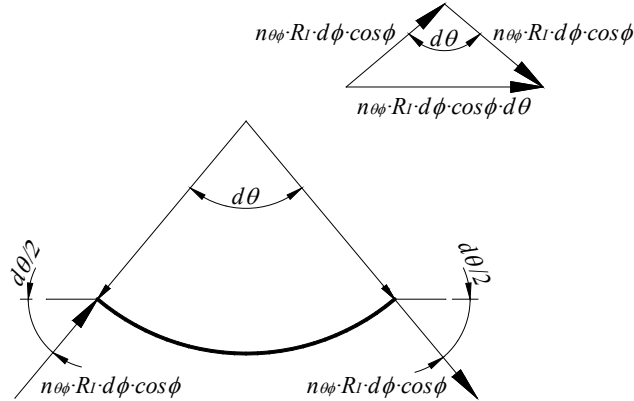


Figura 2.31 - Resultante do sistema de forças estabelecido pelas projecções das resultantes dos esforços tangenciais aos meridianos, $n_{\theta\phi} \cdot R_1 \cdot d\phi \cdot \cos \phi$, num elemento de uma casca de revolução.

A resultante do sistema de forças representado na figura 2.31 é igual a $n_{\theta\phi} \cdot R_1 \cdot d\phi \cdot \cos \phi \cdot d\theta$ e tem direcção tangente ao círculo paralelo [13].

A força externa, na direcção da tangente ao círculo paralelo, apresenta uma componente cuja resultante na área do elemento de casca é $p_\theta \cdot R_1 \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$.

Tendo em conta o sentido das diversas forças na direcção tangente ao círculo paralelo, a equação diferencial parcial de equilíbrio [13], simplificando o factor $d\theta \cdot d\phi$, é:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (R \cdot n_{\phi\theta}) + R_1 \cdot \frac{\partial n_\theta}{\partial \theta} + R_1 \cdot n_{\theta\phi} \cdot \cos \phi + p_\theta \cdot R \cdot R_1 = 0 \quad (2.25)$$

em que n_θ é o esforço normal ao longo do círculo paralelo, $n_{\theta\phi}$ e $n_{\phi\theta}$ são os esforços tangenciais ao meridiano e ao círculo paralelo, respectivamente, R_1 é o raio de curvatura do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_θ é a componente da força externa tangente ao círculo paralelo, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

A terceira direcção em que se pretende estabelecer uma equação de equilíbrio é a direcção normal à superfície média do elemento de casca [13]. Tanto os esforços normais ao longo do meridiano, n_ϕ , como os esforços normais ao longo do círculo paralelo, n_θ , têm componentes que contribuem para o equilíbrio nesta direcção [13].

As forças $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi$, que actuam na direcção normal a dois meridianos opostos, têm uma componente, no seu plano, dirigida para o eixo de revolução da casca, conforme evidenciado na figura 2.30. A projecção desta resultante, na direcção normal à superfície média do elemento de casca, é dada por $n_\theta \cdot R_I \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \text{sen}\phi$ e aponta no sentido do interior da casca [13]. De forma análoga, as forças $n_\phi \cdot R \cdot d\theta$, resultantes da actuação do esforço na direcção normal a círculos paralelos opostos no elemento de casca, pelo facto de estarem contidas no plano de um meridiano cujo ângulo de abertura ao centro é $d\phi$, geram uma força contida no mesmo plano e que aponta para o eixo de revolução da casca [13]. Esta força é igual a $n_\phi \cdot R \cdot d\theta \cdot d\phi$, tem direcção normal à superfície média do elemento de casca e aponta para o interior desta.

A força externa tem também uma componente segundo a direcção em estudo, cuja resultante na área do elemento de casca é $p_R \cdot R_I \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta$, apontando para o exterior da casca.

A equação de equilíbrio nesta direcção [13], tendo em conta o sentido das forças e simplificando o factor $d\theta \cdot d\phi$, é dada por:

$$n_\theta \cdot R_I \cdot \text{sen}\phi + n_\phi \cdot R - p_R \cdot R \cdot R_I = 0 \quad (2.26)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_R é a componente da força externa normal à superfície média da casca, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Dividindo a equação anterior por $R \cdot R_I$ e utilizando a relação geométrica (2.16), obtém-se:

$$\frac{n_\phi}{R_I} + \frac{n_\theta}{R_{II}} = p_R \quad (2.27)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano e p_R é a componente da força externa normal à superfície média da casca, por unidade de área do elemento de casca.

Repare-se que a validade desta equação não se limita a cascas de revolução, podendo ser estendida a qualquer casca em que as linhas, ao longo de coordenadas angulares θ e ϕ constantes, coincidam com as linhas de curvatura da superfície da casca [13]. Esta equação também não contém qualquer derivada das incógnitas, ou seja, dos esforços [13]. Como tal, poderá ser usada para determinar um dos esforços normais, reduzindo o problema a duas equações diferenciais com duas incógnitas: o outro esforço normal e o esforço tangencial [13].

Sempre que as forças externas apresentem uma simetria igual à da casca, os esforços serão independentes da coordenada angular θ [13]. Nestas condições, as derivadas em ordem à coordenada θ deixarão de figurar nas equações de equilíbrio anteriormente estabelecidas:

$$\frac{d}{d\phi}(R \cdot n_{\phi}) - R_I \cdot n_{\theta} \cdot \cos\phi = -p_{\phi} \cdot R \cdot R_I \quad (2.28)$$

$$\frac{n_{\phi}}{R_I} + \frac{n_{\theta}}{R_{II}} = p_R \quad (2.29)$$

em que n_{θ} e n_{ϕ} são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_{ϕ} e p_R são as componentes da força externa tangente ao meridiano e normal à superfície média da casca, respectivamente, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

A outra equação de equilíbrio torna-se independente destas duas [13], pelo facto de apenas conter a incógnita que diz respeito ao esforço tangencial:

$$\frac{d}{d\phi}(R \cdot n_{\phi\theta}) + R_I \cdot n_{\theta\phi} \cdot \cos\phi = -p_{\theta} \cdot R \cdot R_I \quad (2.30)$$

em que $n_{\theta\phi}$ e $n_{\phi\theta}$ são os esforços tangenciais ao meridiano e ao círculo paralelo, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_{θ} é a componente da força externa tangente ao círculo paralelo, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Esta última equação exprime a torção da casca em torno do seu eixo de revolução e permite concluir que, desde que a componente p_θ da força externa seja nula, os esforços tangenciais $n_{\theta\phi}$ e $n_{\phi\theta}$ também o são [13]. Resolvendo a equação (2.29) em ordem a n_θ e substituindo pelo respectivo resultado na equação (2.28), multiplicando esta última por $\text{sen}\phi$, obtém-se:

$$\frac{d(R \cdot n_\phi)}{d\phi} \cdot \text{sen}\phi + R \cdot n_\phi \cdot \cos\phi = R_I \cdot R_{II} \cdot p_R \cdot \cos\phi \cdot \text{sen}\phi - R_I \cdot R_{II} \cdot p_\phi \cdot \text{sen}^2\phi \quad (2.31)$$

onde n_ϕ é o esforço normal ao longo do meridiano, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo, p_ϕ e p_R são as componentes da força externa tangente ao meridiano e normal à superfície média da casca, respectivamente, por unidade de área do elemento de casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Esta equação é uma equação diferencial de primeira ordem para a incógnita do esforço normal n_ϕ [13]. Os dois termos do lado esquerdo podem ser combinados de maneira a obter-se uma derivada total:

$$\frac{d(R \cdot n_\phi)}{d\phi} \cdot \text{sen}\phi + R \cdot n_\phi \cdot \cos\phi = \frac{d}{d\phi} \cdot (R \cdot n_\phi \cdot \text{sen}\phi) = \frac{d}{d\phi} \cdot (R_{II} \cdot n_\phi \cdot \text{sen}^2\phi) \quad (2.32)$$

onde n_ϕ é o esforço normal ao longo do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, R é o raio de curvatura do círculo paralelo e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

O esforço normal n_ϕ pode ser encontrado através da integração descrita na seguinte expressão:

$$n_\phi = \frac{1}{R_{II} \cdot \text{sen}^2\phi} \cdot \left[\int R_I \cdot R_{II} \cdot (p_R \cdot \cos\phi - p_\phi \cdot \text{sen}\phi) \cdot \text{sen}\phi \cdot d\phi + c \right] \quad (2.33)$$

onde n_ϕ é o esforço normal ao longo do meridiano, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que

contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, p_ϕ e p_R são as componentes da força externa tangente ao meridiano e normal à superfície média da casca, respectivamente, por unidade de área do elemento de casca, ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano e c é uma constante de integração.

Esta última equação pode ser interpretada com uma condição de equilíbrio para a porção da superfície média da casca acima de um círculo paralelo, ao longo do qual a coordenada angular ϕ é constante [13]. Se a superfície média da casca fosse cortada ao longo deste círculo paralelo, o perímetro deste seria $2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot R_{II} \cdot \text{sen} \phi$ [13]. A resultante vertical dos esforços internos, transmitidos por esta secção, seria igual a $2 \cdot \pi \cdot R_{II} \cdot \text{sen}^2 \phi \cdot n_\phi$ [13]. Multiplicando o integral da equação (2.33), dentro de um determinado limite de integração, por $2 \cdot \pi$, obtém-se a resultante da força distribuída aplicada na porção de casca acima daquele círculo paralelo [13]. O limite superior do integral será o valor da coordenada angular ϕ correspondente ao círculo paralelo em questão [13]. Por sua vez, o limite inferior do integral corresponderá ao valor da coordenada angular ϕ do ponto em que o meridiano se inicia ($\phi = \phi_0$) [13]. Em cascas fechadas, em que o meridiano se inicia no eixo de revolução, o valor do limite inferior do integral é nulo ($\phi_0 = 0$).

A constante c tem em conta o efeito das forças que actuam acima do círculo paralelo em que $\phi_0 = 0$ [13]. O valor da constante c multiplicado por $2 \cdot \pi$ é igual à resultante dessas forças [13]. Se se tratar de uma casca fechada no vértice, a única força que pode actuar acima do círculo paralelo, em que $\phi = \phi_0$, é uma força G concentrada no próprio vértice. No caso em que não existem outras forças externas, as seguintes expressões seriam válidas:

$$p_R = p_\phi = 0 \quad (2.34)$$

$$2 \cdot \pi \cdot c = -G \quad (2.35)$$

onde p_ϕ e p_R são as componentes da força externa tangente ao meridiano e normal à superfície média da casca, respectivamente, por unidade de área do elemento de casca, c é uma constante de integração e G é uma força concentrada no vértice da casca.

Os esforços normais, por unidade de comprimento, ao longo do meridiano e do círculo paralelo, resultam directamente das expressões (2.33) e (2.29), respectivamente:

$$n_{\phi} = \frac{-G}{2 \cdot \pi \cdot R_{II} \cdot \text{sen}^2 \phi} \quad (2.36)$$

$$n_{\theta} = \frac{-G}{2 \cdot \pi \cdot R_I \cdot \text{sen}^2 \phi} \quad (2.37)$$

em que n_{θ} e n_{ϕ} são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano, R_{II} é o raio de curvatura da superfície média da casca, medido no plano osculador que contém a direcção principal de curvatura perpendicular ao plano do meridiano, ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano e G é uma força concentrada no vértice da casca.

Repare-se que no topo da casca, quando $\phi = \phi_0 = 0$, tanto o esforço normal ao longo do meridiano, como o esforço normal ao longo do círculo paralelo, apresentam uma singularidade de segunda ordem, ou seja, ambos os valores tendem para infinito na proporção de ϕ^{-2} [13]. Esta aparente contradição revela que nas proximidades do ponto de aplicação da força concentrada, o equilíbrio de membrana não fornece valores realísticos. Nesta zona, estabelecem-se importantes momentos para que o equilíbrio seja possível, no entanto, nos pontos afastados da singularidade, o equilíbrio de membrana é representativo do estado de tensão que ocorre na casca [13].

2.3.3 Casca de revolução esférica

Imagine-se uma cúpula esférica (figura 2.32), sujeita exclusivamente ao seu próprio peso. O peso próprio é uma força p por unidade de área da superfície média da casca [13]. O peso próprio da casca pode ser decomposto nas componentes tangencial e normal à superfície média da casca:

$$p_{\phi} = p \cdot \text{sen} \phi \quad (2.38)$$

$$p_R = -p \cdot \text{cos} \phi \quad (2.39)$$

onde p é o peso próprio, por unidade de área da superfície média da casca, p_{ϕ} e p_R são as componentes de p na direcção tangente ao meridiano e na direcção normal à superfície média da casca, respectivamente, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

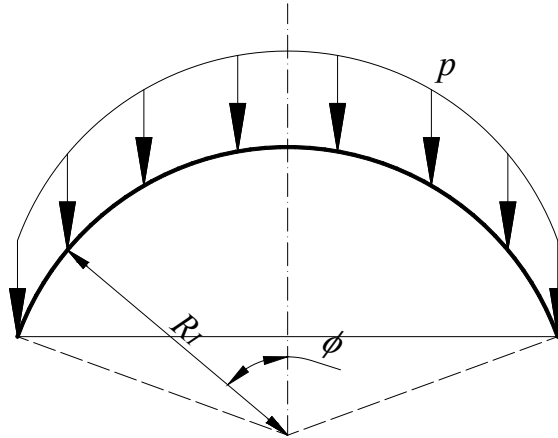


Figura 2.32 - Corte ao longo de um meridiano de uma casca de revolução esférica (adaptado de [13]).

Os raios de curvatura principais numa esfera são iguais, pelo que se designará genericamente o raio por R_l . Substituindo na equação (2.33) obtém-se:

$$n_\phi = -\frac{1}{R_l \cdot \text{sen}^2\phi} \cdot \int_0^\phi R_l^2 \cdot p \cdot \text{sen}\phi \cdot d\phi = -p \cdot R_l \cdot \frac{1 - \cos\phi}{\text{sen}^2\phi} \quad (2.40)$$

onde n_ϕ é o esforço normal ao longo do meridiano, R_l é o raio de curvatura do meridiano, p é o peso próprio, por unidade de área da superfície média da casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Repare-se que a constante c é nula neste caso, pelo facto de não existirem forças concentradas acima do topo do meridiano. Usando relações trigonométricas e levando também em consideração a equação (2.29), obtém-se as seguintes expressões para os esforços normais ao longo dos meridianos e círculos paralelos da casca:

$$n_\phi = \frac{-p \cdot R_l}{1 + \cos\phi} \quad (2.41)$$

$$n_\theta = p \cdot R_l \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos\phi} - \cos\phi \right) \quad (2.42)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_l é o raio de curvatura do meridiano, p é o peso próprio, por unidade de área da superfície média da casca, e ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Quando a distância angular ϕ é nula, ambos os esforços têm o mesmo valor $n_\phi = n_\theta = -p \cdot R_I / 2$ [13]. Neste ponto da casca, a solicitação externa é absorvida na mesma proporção pelas duas direcções principais de curvatura. De acordo com a expressão (2.41), o esforço normal n_ϕ é sempre negativo, ou seja, de compressão, ao longo do meridiano [13]. Por sua vez, o esforço normal n_θ decresce em módulo, com o aumento do ângulo ϕ , até que para o valor da distância angular $\phi = 51,83^\circ$ inverte o seu sinal, passando a ser um esforço de tracção. Este valor é obtido a partir da resolução da seguinte equação:

$$\cos^2 \phi + \cos \phi - 1 = 0 \quad (2.43)$$

onde ϕ é o ângulo entre o eixo de revolução e a normal ao meridiano.

Sempre que a casca esférica deixa de ser abatida, ultrapassando o valor de $\phi = 51,83^\circ$ para a metade do ângulo de abertura ao centro do meridiano, surgem esforços de tracção nos círculos paralelos. Isto significa que, a partir de um determinado nível ($\phi > 51,83^\circ$), a deformação no plano do meridiano obriga a que os círculos paralelos nessa zona estejam traccionados, contrariamente ao que acontece no topo da casca ($\phi < 51,83^\circ$), em que tanto os meridianos como os círculos paralelos estão comprimidos.

Numa casca suficientemente abatida, em que a distância angular ϕ não exceda aquele limite, os esforços de membrana normais, tanto na direcção do meridiano como na direcção do círculo paralelo, serão sempre de compressão [13]. Para que o equilíbrio de membrana se estabeleça na casca em estudo, ao longo do bordo inferior será necessário fornecer uma reacção com direcção tangente aos meridianos [13]. Para além de uma reacção vertical contínua ($n_\phi \cdot \text{sen} \phi$), seria necessário um anel para resistir à componente horizontal de n_ϕ , que estaria submetido a um esforço de tracção ($n_\phi \cdot R_I \cdot \text{sen} \phi \cdot \cos \phi$). A existência de uma viga circular, ligada à casca ao longo do seu bordo interior, irá introduzir uma descontinuidade de rigidez, que obrigará ao aparecimento de momentos para que o equilíbrio seja restabelecido.

Se a mesma casca estivesse sujeita a uma pressão hidrostática uniforme, constantemente perpendicular à superfície média da casca, a solicitação externa teria apenas uma componente segundo aquela direcção:

$$p_R = -p \quad (2.44)$$

onde p_R é a componente da força externa com direcção normal à superfície média da casca por unidade de área, e p é a pressão hidrostática uniforme, por unidade de área da superfície média da casca.

Resolvendo o sistema de equações (2.33) e (2.29), obtém-se a seguinte expressão para os esforços normais ao longo do meridiano e do círculo paralelo da casca:

$$n_\phi = n_\theta = \frac{-p \cdot R_I}{2} \quad (2.45)$$

em que n_θ e n_ϕ são os esforços normais ao longo do círculo paralelo e do meridiano, respectivamente, R_I é o raio de curvatura do meridiano e p é a pressão hidrostática uniforme, por unidade de área da superfície média da casca.

Neste caso, em todos os pontos da casca, a pressão hidrostática é repartida na mesma medida pelo meridiano e pelo círculo paralelo.

2.4 Métodos da membrana

A construção de barragens mais delgadas implica que o betão seja utilizado de uma forma mais eficiente [8]. O método da membrana constitui um dos caminhos possíveis para a obtenção de formas mais eficientes.

A superfície funicular, quando solicitada por um determinado campo de forças, mobiliza um equilíbrio membrana só com esforços de tracção [11]. Uma vez que o material de construção habitualmente utilizado na construção de barragens apresenta um bom desempenho quando solicitado à compressão, interessa dotar estas estruturas de formas que se aproximem do antifunicular das cargas aplicadas. Nesta situação, não existiriam momentos flectores instalados (caso contrário o nível de tensões variaria ao longo da espessura da casca), a barragem teria a forma de um antifunicular das cargas aplicadas - pressão hidrostática e peso próprio - e a espessura variaria de acordo com os esforços axiais da membrana [36]. No entanto, contrariamente ao que acontece na situação de forças distribuídas ao longo de uma linha, no caso de forças distribuídas numa superfície, existe uma infinidade de formas funiculares [36], que dependem dos esforços de tracção aplicados na membrana [11].

Antes do advento do computador, o método da membrana foi utilizado experimentalmente. O ensaio experimental consistia numa membrana de borracha ou caucho, inicialmente plana, fixa numa moldura com a forma da fundação da barragem nas encostas do vale, carregada através da pressão de um líquido que actuava na face de jusante (simulando a pressão hidrostática) e de forças verticais actuando de baixo para cima, através de um sistema de roldanas, correspondendo ao peso próprio da barragem [12] [11] [36] (figura 2.33).

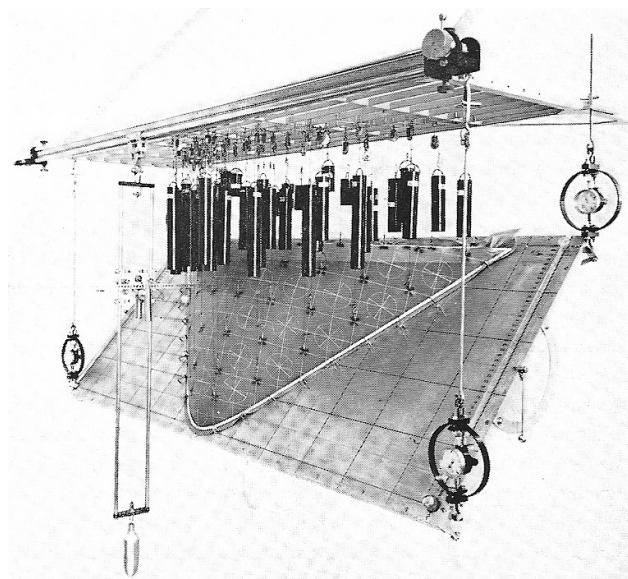


Figura 2.33 - Método experimental para determinação da superfície funicular do campo de forças da pressão hidrostática e do peso próprio da barragem [11].

A forma obtida a partir da membrana deformada corresponde ao funicular do carregamento, se a sua rigidez de flexão for nula [36]. Ao inverter o sentido das forças, o equilíbrio entre as cargas aplicadas e os esforços internos só é possível, se as tracções forem substituídas por compressões. Contudo, juntos aos apoios, particularmente se estes forem considerados encastramentos perfeitos, aparecem geralmente tensões de tracção devidas à rigidez de flexão da casca [36]. Para além disso, no momento de inversão do campo de forças, as deformações sofridas por uma estrutura rígida, cuja superfície média tem a forma da membrana deformada, origina o aparecimento de pequenos momentos flectores e consequentemente de variações das tensões ao longo da espessura da casca [12].

Esta acção perturbadora é máxima se a ligação for um encastramento perfeito e mínima se a ligação for feita através de um apoio que desliza paralelamente à abóbada, sem atrito, sobre uma junta constantemente perpendicular à superfície média [12]. Nesta última hipótese, as condições de apoio no contorno só introduzem esforços contidos no plano tangente à superfície média da casca, ou seja, esforços normais e tangenciais, não alterando as condições de equilíbrio de membrana [12].

O modelo experimental permitia a determinação da forma do funicular das cargas aplicadas, das tensões a que a membrana estava sujeita, do andamento das isostáticas em determinados pontos e do valor da impulsão hidrostática total sobre a membrana [12]. A espessura da barragem era obtida por aproximações sucessivas, sendo aperfeiçoada por tentativas, até se obter um estado de tensão inferior a um determinado limite [11]. O estabelecimento da espessura da barragem, que tinha como consequência a magnitude do peso próprio materializado em diversos pontos da membrana, visava obter no corpo da barragem uma melhor distribuição de tensões [12].

O aumento de tensões devido à deformação do antifunicular era salvaguardado, impondo um limite máximo de tensões, habitualmente 5 MPa [12]. Para além disso, dos infinitos equilíbrios funiculares possíveis, era necessário obter um que fosse construtivamente exequível [12]. Como já foi referido, a inclinação máxima admissível dos paramentos sobre a vertical era de 30° [12].

O receio de se obter, por este método, formas cujas espessuras fossem extraordinariamente pequenas, originando fenómenos de instabilidade, não se justificava, pelo facto de se limitar a tensão máxima de compressão do betão a valores relativamente moderados [12]. Para além disso, o facto das superfícies possuírem dupla curvatura elevava bastante as tensões críticas de instabilidade [12].

O estudo de modelos experimentais, para determinação do funicular da pressão hidrostática e do peso próprio, permitiu concluir que, numa barragem em que o contorno de inserção, apoiado numa junta perimetral, está contido num plano inclinado para jusante, a zona onde se verificam os esforços máximos não ocorre junto do contorno de inserção, mas sim a uma distância sensivelmente igual a 2/5 da altura da barragem, contada a partir da base [12]. Por esta razão, alguns autores [12] propuseram que a espessura da barragem diminuísse do centro para o contorno. A explicação deste facto é semelhante à razão pela qual a espessura dos arcos articulados deve diminuir do fecho para a nasçença [12].

Num arco articulado nos dois apoios, cuja forma é o antifunicular de uma carga com uma determinada variação, contida no mesmo plano daquele, as deformações causadas pela solicitação alteram a configuração inicial e conseqüentemente surgem momento flectores, pelo facto da forma se ter afastado do antifunicular [12]. Por exemplo, no caso de um arco parabólico naquelas condições, sujeito a uma carga uniformemente distribuída por unidade de comprimento horizontal, após ocorrerem pequenas deformações relativamente à configuração inicial, surgem momentos flectores nulos no apoio e máximos no fecho. A espessura do arco deverá crescer dos apoios para o fecho, aumentando o núcleo central das secções de fecho, por forma a incluírem a linha resultante de compressões.

Na hipótese em que a barragem está encastrada no terreno, a espessura era aumentada junto das nasçenças da abóbada, pela mesma justificação do que acontece no arco, ao surgirem momentos flectores nesta zona resultantes da perturbação da ligação [12]. O aumento de espessura nos encontros visava diminuir as tensões de tracção, permitindo que a resultante de compressões se localizasse no interior do núcleo central da secção.

A utilização experimental do método da membrana veio suprir a grande dificuldade na determinação, pela via analítica, de superfícies funiculares de um determinado campo de forças [12].

Mesmo nos casos mais simples, este problema mostrava-se bastante complexo, havendo necessidade de se adoptar hipóteses simplificativas para tornar possível a integração das equações diferenciais de equilíbrio [12]. No entanto, o método experimental não levava em conta o facto dos arcos horizontais da barragem estarem, habitualmente, encastrados nos encontros, nem a possibilidade dos arcos horizontais e as consolas verticais possuírem rigidez relativa diferente, nem tão pouco previa a possibilidade da barragem estar assente sobre uma fundação elástica [18].

A membrana de caucho pode ser tendida em diferentes níveis e pode variar de espessura, mas a forma obtida é sempre a materialização de uma superfície funicular do campo de forças actuante [12]. Dentro dos infinitos equilíbrios funiculares possíveis poderão existir soluções mais económicas do que outras. A forma final obtida depende da maneira como a membrana é fixada (configuração do contorno de inserção), da sua espessura e do comportamento reológico do material [36]. Uma outra limitação da técnica experimental exibida na figura 2.33 é o facto do contorno de inserção estar obrigatoriamente contido num plano, ou seja, era impossível modelar um contorno de inserção como uma curva espacial.

Outras desvantagens da modelação física do método da membrana prendem-se com o tempo dispendido e os custos associados [36]. A simulação computacional do método da membrana veio suprir esta última desvantagem, permitindo também manipular parâmetros do problema com relativa facilidade, como a lei constitutiva do material, delegando para segundo plano a determinação experimental [36]. No entanto, as restantes debilidades apontadas ao método experimental da membrana mantêm-se na simulação computacional.

A posição inicial e a espessura da membrana, assim como o módulo de elasticidade do material e a geometria do contorno de inserção da membrana no vale, são parâmetros necessariamente arbitrados e que permitem a existência de uma infinidade de soluções. O módulo de elasticidade do material e a espessura da membrana podem ser escolhidos com base na inclinação máxima pretendida para as faces da barragem e no valor máximo permitido para as tensões principais, beneficiando da facilidade dos meios informáticos para a procura de uma solução convergente [39]. Relativamente à posição inicial da membrana, para um contorno de inserção previamente estabelecido, usualmente eram testadas três diferentes hipóteses para a forma inicial do perfil central, das quais resultavam três diferentes formas finais com volumes distintos [39]. A partir das três posições iniciais e dos três volumes finais era traçada uma curva quadrática de tendência, onde se procurava encontrar a posição inicial do perfil central que conduzia a um volume mínimo [39].

2.5 Métodos de optimização

Na generalidade, as barragens abóbada eram dimensionadas por processos de tentativa e erro [40] [18]. Se a forma inicialmente analisada satisfizesse os requisitos do dimensionamento era adoptada, caso contrário, a forma era modificada e reanalisada [40]. A forma final obtida podia ser adequada, mas não era necessariamente a mais optimizada [40]. A necessidade de um número elevado de iterações levou a que os projectistas procurassem outros métodos [18].

Outro método para encontrar a forma de uma barragem consistia na análise de um conjunto de diferentes formas inicialmente estabelecidas, seleccionando a melhor solução [40]. Uma vez mais, a forma encontrada podia ser a melhor solução entre as propostas, mas não seria necessariamente a mais optimizada [40].

O surgimento de métodos de optimização automática veio suprir a grande quantidade de trabalho e tempo consumida pelas diversas tentativas necessárias ao refinamento de uma forma, no entanto, estes métodos não podem substituir os métodos convencionais, apenas complementá-los [18]. Os métodos de optimização automática não podem encontrar formas óptimas partindo unicamente dos dados topográficos, critérios de dimensionamento e restrições de construção, pois necessitam também de uma forma inicial que se pretenda refinar [18].

Os programas de optimização incorporam normalmente um módulo para análise de tensões da barragem, cuja forma se pretende optimizar. Paralelamente, a optimização das variáveis de dimensionamento é realizada minimizando funções. A optimização é executada, por exemplo, minimizando o volume de betão para um limite máximo de tensões estabelecido e para um conjunto de restrições construtivas [18]. As formas obtidas por estes métodos não diferem acentuadamente daquelas obtidas pelos métodos convencionais [18].

As ferramentas de optimização automática conduzem, na sua generalidade, a um aumento da inclinação para montante da base das consolas centrais, por forma a minimizarem o volume de betão, por decréscimo do nível de tensões instalado [18]. Este resultado vem confirmar o benefício da inclinação para montante no arranque dos perfis de uma barragem abóbada, tal como foi constatado na barragem de Marèges (figura 2.14).

2.6 Ensaios sobre modelos e métodos numéricos de análise de estruturas

Habitualmente, o estudo do comportamento de uma barragem pode incidir sobre cenários correntes de exploração ou sobre cenários de rotura. Um cenário corrente de exploração corresponde, por exemplo, à consideração de um comportamento elástico do material, tendo em conta a actuação do peso próprio da barragem e da pressão hidrostática correspondente ao NMC [6]. São exemplos de cenários de rotura [6] o enfraquecimento uniforme da resistência do betão, a diminuição da resistência ao deslizamento e o deslocamento relativo entre as duas encostas do vale.

Num estudo sobre o comportamento de uma barragem abóbada [6], considerando um cenário corrente e um cenário de rotura (enfraquecimento uniforme da resistência do betão), concluiu-se que os ensaios em modelos físicos e os estudos com modelos matemáticos, recorrendo ao método dos elementos finitos, conduzem a resultados semelhantes para ambos os cenários. Em consequência desta constatação, no estudo do comportamento estrutural de uma barragem abóbada, o recurso a modelos numéricos em detrimento dos modelos físicos é justificável, sendo possível usufruir da facilidade de aplicação dos primeiros.

No que concerne os cenários correntes de exploração, a acção que condiciona os campos de tensão e deslocamentos, verificados em barragens abóbada, é o efeito da pressão hidrostática que actua no paramento de montante [6].

2.7 Influência do processo construtivo na forma final de uma barragem abóbada

A evolução da construção da barragem tem influência no estado de tensão que se verifica quando a solicitação preponderante na barragem é o peso próprio, ou seja, quando a barragem ainda não entrou em carga [11].

A construção de uma barragem de dupla curvatura é usualmente feita por blocos, separados por juntas de contracção, que vão crescendo de acordo com um plano de execução [11]. A injeção das juntas é feita numa determinada altura, garantindo o funcionamento monolítico da obra [11]. Desta forma, o estado de tensão instalado devido ao peso próprio depende do funcionamento isolado do bloco (juntas abertas) ou do funcionamento integrado de um conjunto de blocos que intervêm na absorção da solicitação (juntas fechadas) [11].

Nas barragens com acentuada curvatura na direcção vertical, só é possível fazer crescer os blocos isoladamente até uma determinada altura [11]. Esta altura é determinada a partir do estabelecimento de tensões de tracção máximas admissíveis nos paramentos de montante e jusante, durante o processo construtivo [11].

A forma do perfil central de uma barragem abóbada tem, usualmente, uma inclinação para montante na zona inferior e uma queda para jusante na zona superior. Alguns projectistas tendem a limitar a queda para jusante da zona superior para garantir a estabilidade isolada dos blocos [18]. Outros, porém, preferem assegurar a não existência de tracções na zona superior da face de jusante, quando a barragem entra em carga, tirando partido dessa queda do perfil para jusante [18]. Esta decisão depende do processo construtivo adoptado. Se a construção for realizada de forma a limitar a diferença de níveis entre o crescimento dos diferentes blocos, o peso próprio pode ser absorvido por efeito cúpula, enquanto a barragem não entrar em carga [18].

Os perfis junto aos encontros, que sofrem uma queda para montante na zona inferior, devem também ter uma configuração que não provoque o aparecimento de tensões de tracção acima de um determinado nível na biqueira (base do intradorso) do perfil, quando a barragem está em vazio [18]. Esta zona dos perfis laterais tem alguma tendência a fissurar, logo que ocorram variações térmicas ou expansão do betão [18].

Outro aspecto relevante é a diferença que existe entre considerar que a carga devida ao peso próprio actua instantaneamente sobre a barragem abóbada e o que acontece na realidade [27], pois como foi explicado anteriormente, a barragem não é betonada monoliticamente, mas sim por blocos, que podem funcionar em conjunto ou não. Quando a injeção das juntas é realizada só no fim da construção, no método “trial load”, a acção do peso próprio era considerada exclusivamente nas consolas [34]. Se a construção é feita por blocos, estes sofrem deformações e instala-se um estado de tensão devido ao seu peso próprio. Quando as juntas são injectadas, o estado de tensão que se verifica na casca não é igual àquele que se verifica quando actua uma força distribuída com a magnitude do peso próprio sobre a mesma casca.

As juntas de contracção entre os blocos possibilitam o seu crescimento individual e também o seu arrefecimento [27]. Para a forma usual das barragens abóbada (perfis com uma inclinação para montante junto à base e uma inclinação para jusante no topo), o crescimento isolado do bloco provoca usualmente uma deformação para montante (figura 2.34) durante a construção da zona junto à base, o que favorece a abertura de juntas [27]. Quando o crescimento individual do bloco atinge a zona junto ao topo, a deformação do mesmo é para montante, junto à base, e para jusante, junto ao topo, o que favorece o fecho das juntas [27]. Em barragens cujos perfis têm uma acentuada queda do topo para jusante, as juntas entre os blocos podem fechar antes da actuação plena da carga devida ao peso próprio [27], ou seja, antes da barragem funcionar como uma estrutura monolítica.

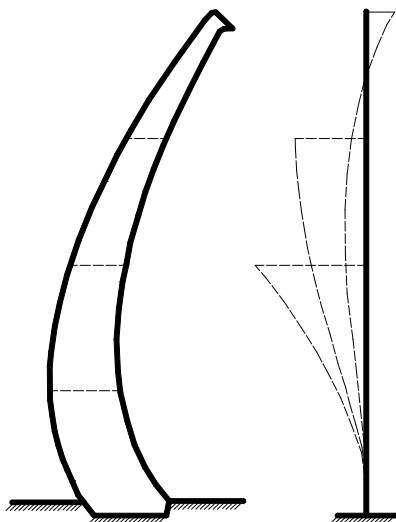


Figura 2.34 (a) e (b) - Crescimento isolado de um perfil de uma barragem abóbada (a) e deformações (b) (esquemáticas), a traço interrompido, durante o crescimento do bloco nas diferentes fases de construção (adaptado de [27]).

O pré-esforço introduzido pela injeção das juntas é usualmente dissipado pela ocorrência de fenómenos de fluência do betão [27]. Para além disso, os fenómenos de retracção e de acentuadas variações negativas de temperatura tendem a provocar a abertura de juntas entre blocos [27].

2.8 Variações de temperatura nas barragens abóbada

2.8.1 Generalidades

A observação de barragens de betão em serviço permitiu constatar que a acção das variações de temperatura provoca tensões muito importantes [30]. O efeito da temperatura faz-se sentir, em larga escala, em barragens de betão. Em barragens espessas são, várias vezes, medidas extensões muito elevadas devidas a esta acção [30]. Em barragens abóbada delgadas, variações anuais e diárias do estado térmico podem conduzir a grandes deslocamentos [30]. A fissuração que aparece nas juntas entre blocos, na face de jusante, tem origem muito provavelmente nas tensões devidas à retracção e devidas à temperatura na superfície de betão, depois de terem sido retirados os moldes [30].

Durante a construção da barragem, podem ocorrer importantes elevações da temperatura do betão, devido ao calor de hidratação do cimento, e posteriormente ocorre um arrefecimento dos blocos [30]. Alguns progressos na atenuação deste efeito, como o arrefecimento prévio e posterior do betão, o fechamento das juntas e o uso de cimentos especiais, levou a que este problema de tensões iniciais fosse desprezado na maioria dos ensaios de modelo [30].

A distribuição de temperaturas numa barragem abóbada, após ocorrer a dissipação do calor de hidratação do cimento, depende: da forma da barragem, do clima local, das características térmicas da fundação, da orientação e exposição da barragem ao sol, da cota da água armazenada e da distribuição da temperatura na própria albufeira [30].

Todos estes factores podem variar muito de um caso de estudo para outro [30]. Por exemplo, em regiões árticas, as amplitude térmicas anuais são muito maiores do que nas regiões subtropicais, no entanto, as variações diárias de temperatura são mais significativas nestas últimas [30]. As variações de temperatura constituem uma acção também dependente das condições físicas que envolvem a barragem. Por exemplo, durante o inverno, o arrefecimento é tanto mais significativo quanto mais vazia se encontrar a albufeira [27].

A secagem e consequente retracção do betão é um outro fenómeno importante que está intimamente ligado às variações de temperatura [30]. Estes fenómenos dependem das condições climáticas e de exposição [30].

A determinação exacta do estado térmico a que uma barragem está sujeita é uma tarefa complexa [30]. No dimensionamento das barragens de gravidade de betão e de contrafortes, o cálculo das tensões devidas a variações de temperatura é usualmente desprezado ou considerado como secundário [30]. Arredi determinou, em 1945, pela via analítica, a solução de problemas simplificados de tensões de origem térmica em barragens de gravidade [30]. Em 1955, foi publicado um trabalho de Zienkiewicz, onde as tensões de origem térmica em estruturas maciças de betão eram determinadas por métodos de relaxação, para alguns diagramas de variação de temperatura [30].

No dimensionamento de barragens abóbada, dividindo a mesma num conjunto de arcos e consolas, a variação de temperatura atribuída aos arcos tinha um determinado valor, que segundo alguns autores, devia depender da espessura dos arcos [30]. Mais tarde, começaram a ser consideradas variações não lineares de temperatura, tendo Arredi apresentado um método de cálculo de tensões devidas a variações sinusoidais de temperatura, actuantes nos paramentos de barragens abóbada [30]. No método “trial load”, eram habitualmente tidos em conta os valores médios do abaixamento de temperatura em cada nível, considerando que estas eram as condições mais desfavoráveis [34].

De facto, a distribuição real de temperaturas numa barragem é difícil de determinar analiticamente, porque não se verificam, na generalidade, variações uniformes da temperatura exterior [30]. Por outro lado, as propriedades mecânicas do betão dependem da temperatura e poderá ocorrer uma relaxação de tensões com o aumento de temperatura do betão [30]. Contrariando esta hipótese, ensaios realizados no LNEC, em prismas de betão em massa, carregados aos oito dias de idade e mantidos a uma temperatura de 20°C e 45°C, revelaram que as extensões de fluência não sofrem um aumento significativo e que o módulo de elasticidade não sofre um abaixamento relevante, face ao aumento de temperatura [30].

2.8.2 Resultados da observação do estado térmico da barragem abóbada do Cabril

Tendo em vista a interpretação de resultados, é fundamental que na observação de barragens se determinem as solicitações exteriores, pelo que devem ser registados, se possível continuamente, a temperatura do ar, a temperatura da água da albufeira, a várias profundidades, e a radiação solar, através da medição de temperaturas nos paramentos da barragem [32]. A medição rigorosa de temperaturas nas barragens é fundamental, mesmo pelo facto da maior parte dos fenómenos que ocorrem na barragem dependerem das variações de temperatura [32]. A monitorização desta solicitação permite ainda escolher a melhor altura para injectar as juntas, caso estas existam [32].

A medição de extensões, feita através de extensómetros colocados criteriosamente em vários pontos da barragem, deve respeitar um programa de leituras previamente elaborado [32]. A medição deve ser feita muito frequentemente até o betão atingir a temperatura mais elevada e, posteriormente, devem ser realizadas leituras quinzenais, por forma a se obter resultados com algum grau de confiança [32]. Em barragens mais delgadas, os registos devem ser contínuos, pelo facto das variações diárias serem significativas [32]. Após a medição das extensões, há que compatibilizá-las e corrigi-las devido às variações de volume do betão e devido ao coeficiente de Poisson, sendo possível calcular as tensões a partir delas [32].

A barragem do Cabril (figura 2.35) é uma barragem abóbada com 135 metros de altura, 292 metros de desenvolvimento no coroamento e com uma espessura que varia desde 4,5 metros no coroamento até 19 metros na base [32]. A barragem foi concluída em Dezembro de 1953 [32]. O primeiro enchimento iniciou-se no seguinte mês de Fevereiro (figura 2.36), atingindo o seu pico em Maio de 1954, a partir do qual se seguiu um esvaziamento intermédio da albufeira [32]. Em Outubro do mesmo ano, com um nível de água na Albufeira sensivelmente à cota de 200 metros, foi possível concluir as operações de injeção de juntas e iniciou-se um novo processo de enchimento, que durou até Março de 1955.

Foi observada uma abertura das juntas quando, no final de 1953 e início de 1954, a metade superior da barragem do Cabril sofreu um arrefecimento [32]. A abertura de juntas manifestou-se com maior intensidade junto dos encontros [32]. Esta situação tem justificação no balanço da parte central da barragem, que permite que a contracção dos blocos centrais se acumule nas juntas laterais [32].

A primeira campanha de injeções, em Fevereiro de 1954, incidiu somente nas juntas que tinham sofrido uma maior abertura, ou seja, naquelas junto aos encontros [32]. A partir desta altura não se verificaram grandes aberturas, apenas pequenos movimentos em juntas simétricas [32]. A conclusão da injeção das juntas ocorreu em Novembro e Dezembro de 1954 [32].

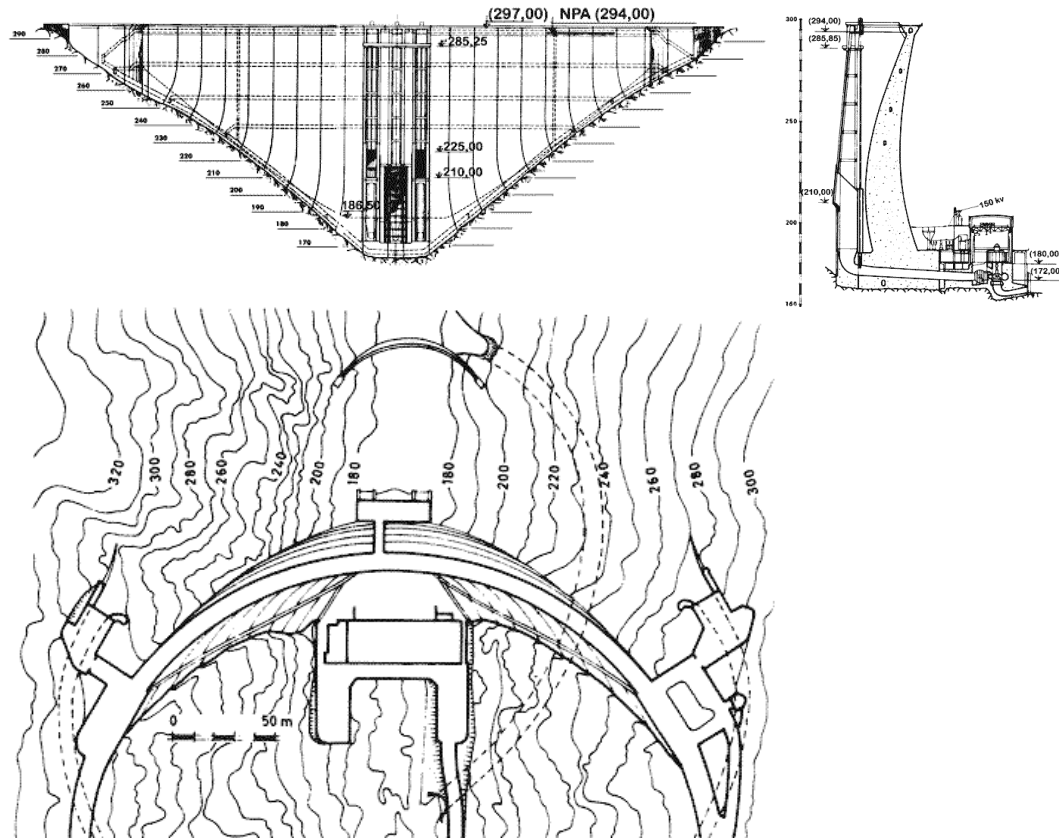


Figura 2.35 (a) (b) e (c) - Alçado principal de jusante (a), perfil central (b) e planta (c) da barragem do Cabril [26].

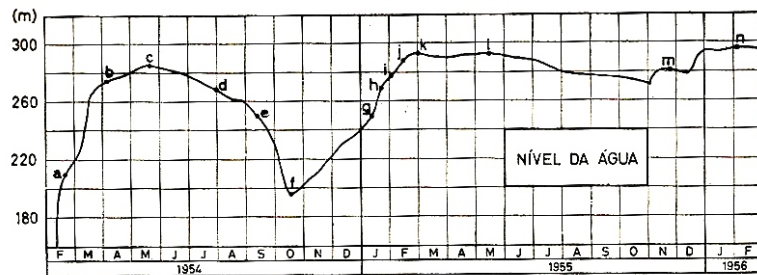


Figura 2.36 - Evolução do nível de água na albufeira da barragem do Cabril, entre Fevereiro de 1954 e Fevereiro de 1956 [32].

Na figura 2.37 observa-se a evolução do estado térmico da barragem do Cabril, após a sua conclusão, com indicação do nível de água na albufeira em cada momento. Na zona interior, junto à base da barragem, ocorreu um importante arrefecimento durante o primeiro ano de funcionamento. Abaixo da cota de 240 metros, a temperatura sofreu um decréscimo de 8°C entre Fevereiro de 1954 e Fevereiro de 1955 [32]. Só perto do fim do ano de 1956 se atingiu o equilíbrio térmico com a envolvente exterior [32]. O núcleo da barragem demorou mais tempo a arrefecer, pelo facto de estar impedido de efectuar trocas de calor com o exterior e também pelo facto de ter sido utilizado um cimento que desenvolve calor para idades avançadas do betão [32].

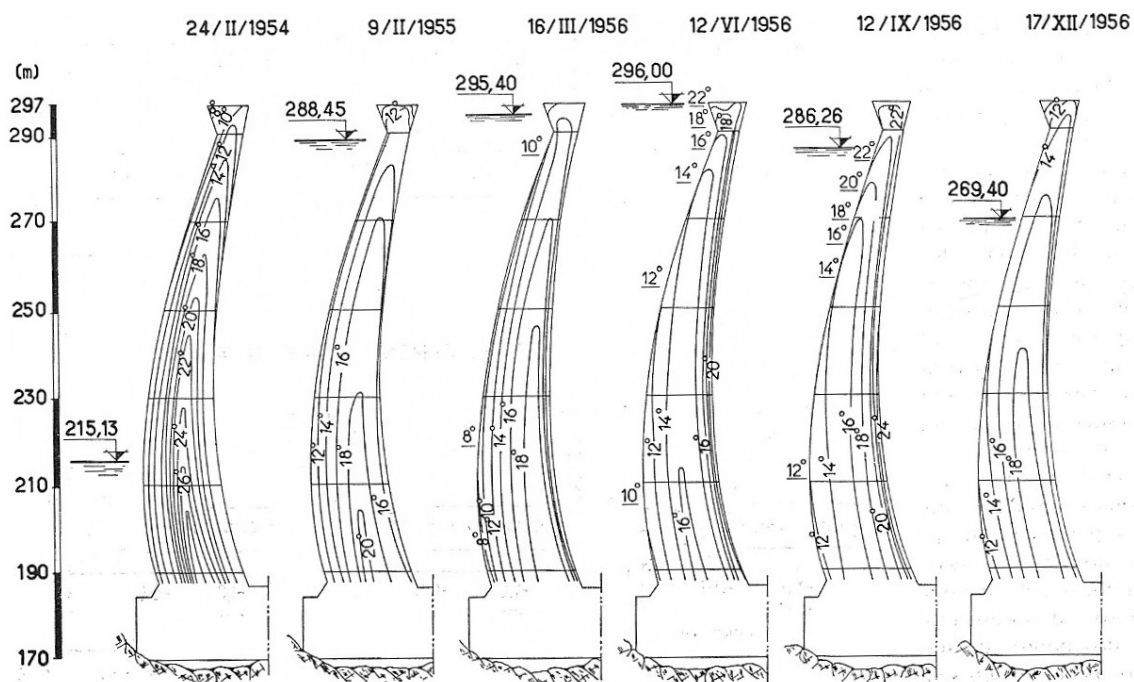


Figura 2.37 (a), (b), (c), (d), (e) e (f) - Isotérmicas na consola central da barragem do Cabril, em Fevereiro de 1954 (a), em Fevereiro de 1955 (b), em Março (c), Junho (d), Setembro (e) e Dezembro (f) de 1956, com indicação do respectivo nível de água na albufeira [32].

Na parte superior da barragem foi usado um cimento Portland normal [31]. A temperatura máxima devido ao calor de hidratação foi atingida três meses depois da betonagem, na parte inferior da barragem, e três dias depois da betonagem, na parte superior da barragem [31]. O betão utilizado na barragem, tanto na parte inferior como na parte superior, era constituído por 250 quilogramas de cimento por metro cúbico de betão [31].

É também perceptível a maior susceptibilidade da zona do coroamento às variações de temperatura, justificável pela menor espessura que caracteriza esta zona e também pelo facto das trocas de calor, no topo da barragem, ocorrerem através das superfícies dos paramentos de montante, jusante e da superfície da faixa de rodagem [32]. Estas observações reforçam a ideia de que as variações de temperatura são uma importante acção para a estrutura da barragem [32].

Na figura 2.38 e 2.39 estão representadas as isotérmicas nas superfícies a um metro dos paramentos de jusante e de montante e também os diagramas da temperatura da água na albufeira. As isotérmicas nas superfícies a um metro dos paramentos (figura 2.38) revelam um comportamento aproximadamente simétrico [32]. Comprovou-se que a exposição solar influencia determinantemente as amplitudes das variações térmicas na superfície a um metro do paramento de jusante (figura 2.38 (b), (d) e (f)) [32]. Nesta superfície registaram-se diferenças de temperatura próximas de 10°C entre o ar e a superfície de betão, devidas à radiação solar [32].

Estudo da Forma de Barragens Abóbada sob a Acção da Pressão Hidrostática e de Variações de Temperatura

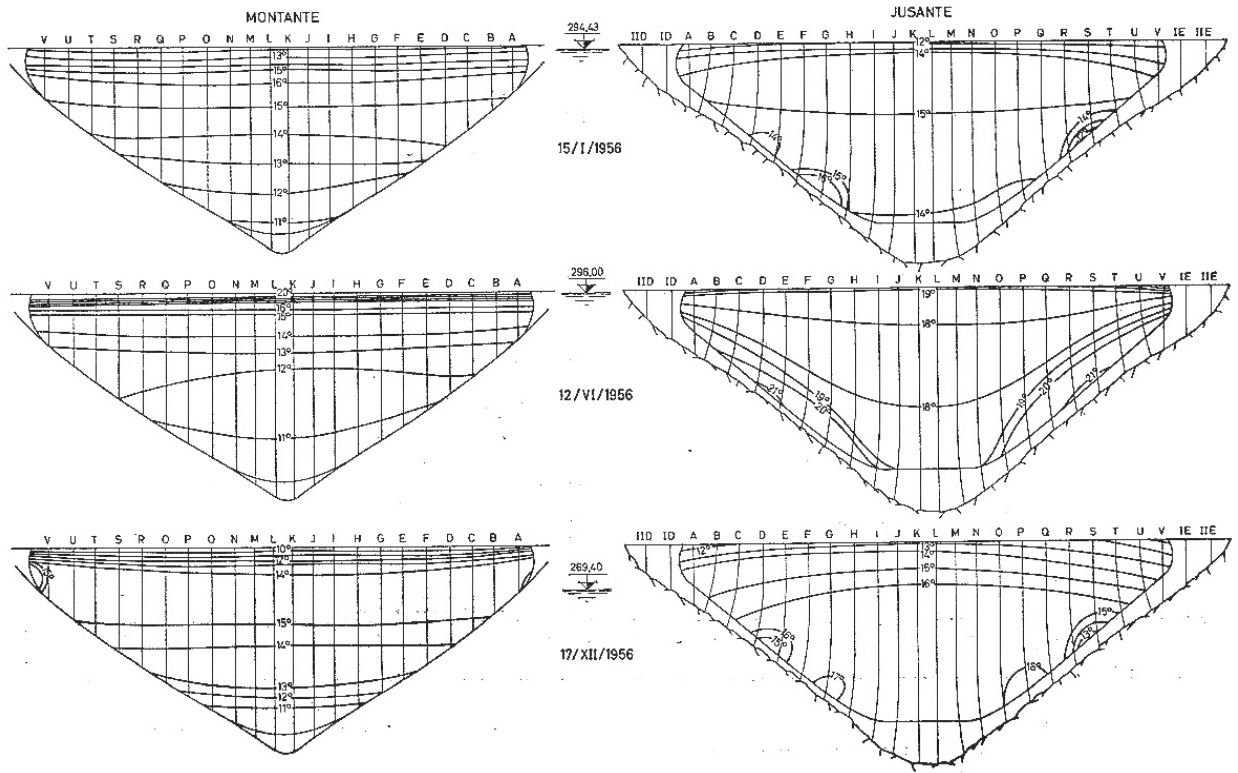


Figura 2.38 (a), (b), (c), (d), (e) e (f) - Isotérmicas nas superfícies da barragem do Cabril a um metro dos paramentos: de montante (a) e de jusante (b) em Janeiro de 1956, de montante (c) e de jusante (d) em Junho de 1956 e de montante (e) e de jusante (f) em Dezembro de 1956, com indicação do respectivo nível de água na albufeira [32].

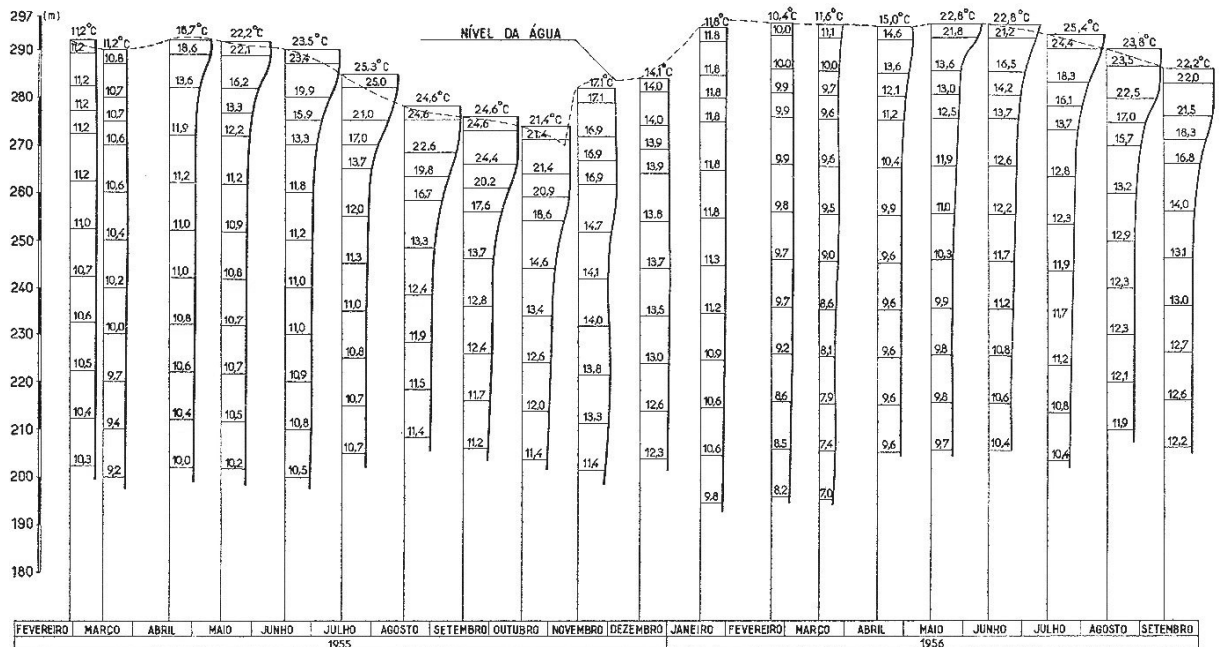


Figura 2.39 - Temperaturas da água na albufeira da barragem do Cabril, a várias profundidades e em várias épocas, com indicação do respectivo nível da água [32].

Comparando as isotérmicas das superfícies a um metro do paramento de montante (figura 2.38 (a), (c) e (e)) com os diagramas da temperatura da água na albufeira (figura 2.39), nas mesmas épocas, verifica-se que a temperatura na superfície é sempre superior à temperatura da água, sendo as trocas de calor no sentido betão-água [32]. Esta situação é, provavelmente, consequência do arrefecimento a que o betão da barragem ainda está sujeito, nos meses em que as observações foram realizadas.

O estado térmico que envolve uma barragem pode ser descrito de forma diferente nas superfícies em contacto com o ar e naquelas em contacto com a água da albufeira. Os resultados da observação da barragem do Cabril, contidos na figura 2.38, podem ser organizados nos seguintes quadros.

Cota [m]	297,3	250	190				
Z [m]	107,3	60	0	Média [°C]	Máximo [°C]	Mínimo [°C]	Amplitude [°C]
15-01-1956	12	15	14	14	15	12	3
12-06-1956	19	18	19	19	19	18	1
17-12-1956	13	16	17	15	17	13	4
Média anual [°C]	15	16	16				
Máximo anual [°C]	19	18	19				
Mínimo anual [°C]	12	15	14				
Amplitude anual [°C]	7	3	5				

Quadro 2.1 - Temperaturas registadas a um metro do paramento de jusante da barragem do Cabril, junto do perfil central, nos meses de Janeiro, Junho e Dezembro de 1956 e respectivo tratamento estatístico.

Cota [m]	290	285	275	270	250	230	210	190				
Z [m]	100	95	85	80	60	40	20	0	Média [°C]	Máximo [°C]	Mínimo [°C]	Amplitude [°C]
15-01-1956	12	15	16	15	14	13	12	11	14	16	11	5
12-06-1956	20	15	16	13	12	13	11	10	14	20	10	10
17-12-1956	10	13	14	15	15	14	13	11	13	15	10	5
Média anual [°C]	14	14	15	14	14	13	12	11				
Máximo anual [°C]	20	15	16	15	15	14	13	11				
Mínimo anual [°C]	10	13	14	13	12	13	11	10				
Amplitude anual [°C]	10	2	2	2	3	1	2	1				

Quadro 2.2 - Temperaturas registadas a um metro do paramento de montante da barragem do Cabril, junto do perfil central, nos meses de Janeiro, Junho e Dezembro de 1956 e respectivo tratamento estatístico.

Optou-se por analisar apenas as temperaturas registadas junto ao perfil central, pelo facto das isotérmicas nas superfícies a um metro dos paramentos apresentarem um comportamento aproximadamente simétrico. Para além disso, no período em análise, a albufeira não foi alvo de operações de enchimento e esvaziamento, mantendo um nível de água que oscilou entre 296,43 metros e 269,40 metros.

Nos quadros anteriormente apresentados, determinou-se a média e a amplitude térmica anual de cada um dos pontos monitorizados. Determinou-se também a média e a amplitude térmica dos vários pontos numa mesma superfície, nos vários momentos de medição.

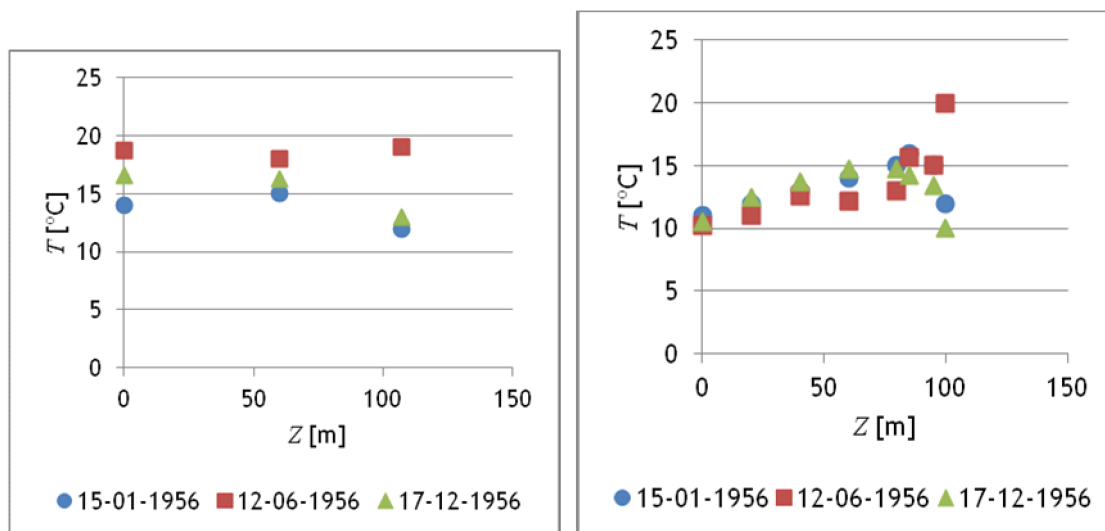


Gráfico 2.2 (a) e (b) - Temperatura em função da cota, para vários pontos nas superfícies a um metro do paramento de jusante (a) e a um metro do paramento de montante (b), na barragem do Cabril, em três instantes de tempo distintos: Janeiro, Junho e Dezembro de 1956.

Da análise do gráfico 2.2.a é visível que os três pontos junto ao perfil central do paramento de jusante, em cada uma das épocas em análise, mantêm uma temperatura muito próxima. A amplitude máxima registada, entre os diferentes pontos numa mesma época, varia entre 1°C e 4°C .

No caso do paramento de montante (gráfico 2.2.b), o mesmo não acontece. Nas três diferentes épocas em análise, a amplitude térmica entre os pontos junto ao perfil central do paramento de montante, varia entre 5°C e 10°C , o que indicia que neste caso não é realístico considerar temperaturas constantes ao longo de toda a face.

No que diz respeito às variações anuais, a superfície de jusante apresenta maiores amplitudes térmicas ao longo do ano (entre 3°C e 7°C) do que a superfície de montante (entre 1°C e 2°C). Apenas a zona da face de montante que não se encontra submersa apresenta uma amplitude térmica anual maior (10°C). Estes resultados permitem apontar a exposição solar como um dos principais factores que influenciam as variações térmicas nos paramentos da barragem expostos. Os dois gráficos denunciam a zona do coroamento como aquela em que ocorrem variações sazonais de temperatura mais importantes.

A análise do gráfico 2.2.b permite ainda concluir que as temperaturas junto ao perfil central da face de montante, abaixo do nível de água, diminuem com a profundidade. No verão, a zona da face de montante acima do nível de água é a mais quente desta face, ocorrendo depois uma diminuição de temperatura com a profundidade. No inverno, a zona com temperatura mais elevada na face de montante localiza-se um pouco abaixo do nível de água

da albufeira. Na verdade, a zona da face de montante que se encontra submersa parece apresentar uma temperatura mais elevada nos meses de inverno do que nos de verão.

De um modo geral, conclui-se que a temperatura na face de jusante pode ser considerada constante, enquanto que a temperatura na face de montante deve diminuir com a profundidade. Importa também analisar as variações diferenciais de temperatura, pelo que se apresenta um conjunto de gráficos com a comparação da temperatura nas duas faces, numa mesma época.

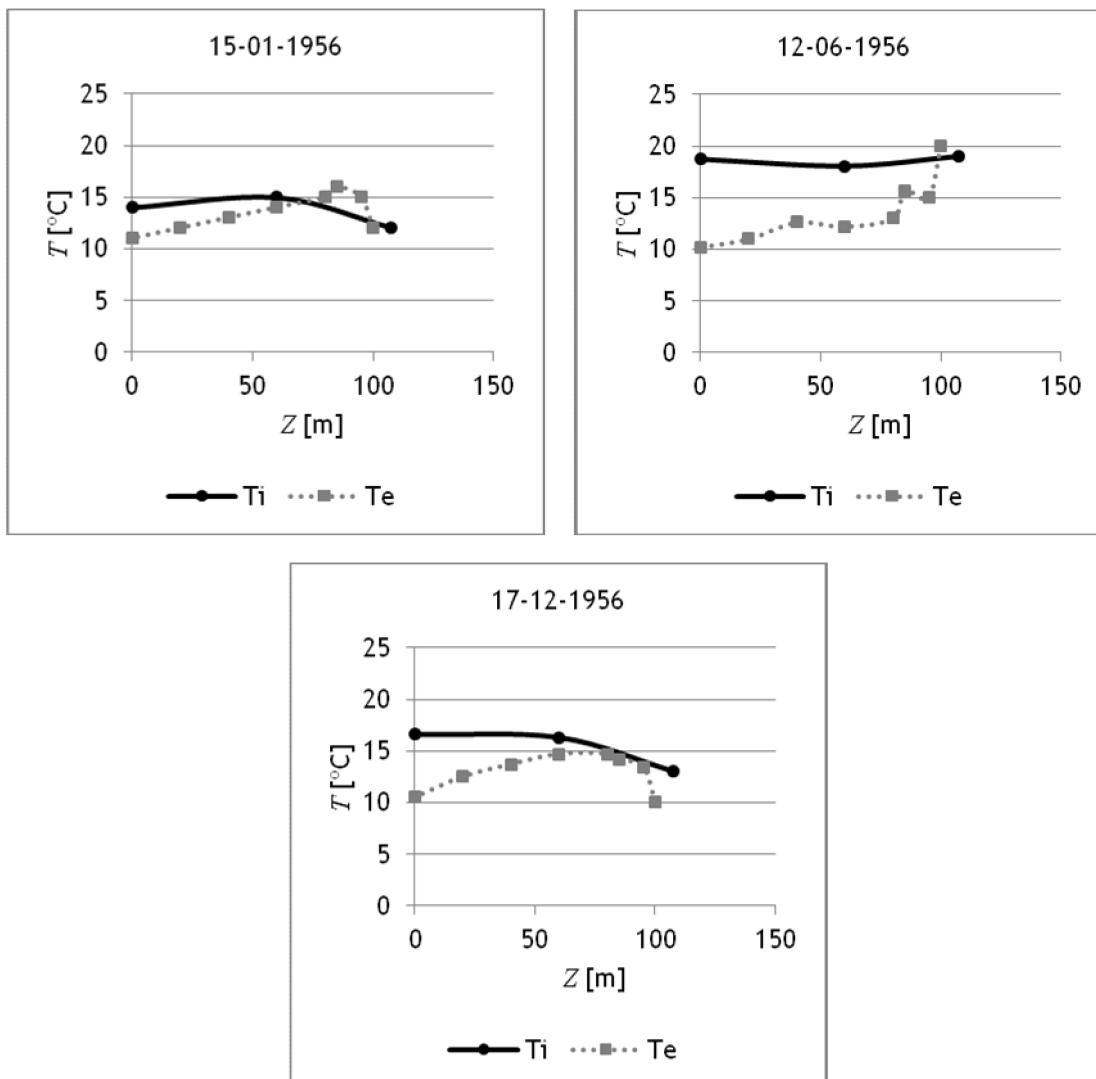


Gráfico 2.3 (a), (b) e (c) - Temperatura em função da cota, para vários pontos nas superfícies a um metro dos paramentos de montante (T_e) e de jusante (T_i), na barragem do Cabril, em Janeiro (a), em Junho (b) e em Dezembro de 1956 (c).

Da observação dos gráficos anteriores, constata-se que as maiores variações diferenciais ocorrem no mês de Junho, à excepção da zona do coroamento, que parece ter apresentado uma diferença entre temperaturas de jusante e montante mais significativa no mês de Dezembro.

Este acontecimento poderá ter justificação no facto do nível de água na albufeira, no mês de Dezembro, ser um pouco inferior ao que ocorreu nos meses de Janeiro e Junho, o que poderá ter colocado a zona do coroamento a uma maior exposição.

De um modo geral, pode-se afirmar que a época mais desfavorável para as variações de temperatura corresponde aos meses de verão, no caso da barragem do Cabril. Nesta época, a face de jusante tem uma temperatura aproximadamente uniforme em toda a superfície, igual a 19°C. A zona da face de montante, que não está submersa, é solicitada pela mesma temperatura de 19°C. Alguns autores [1] indicam que os meses mais desfavoráveis para a acção da temperatura numa barragem abóbada são os de Fevereiro e Agosto.

No gráfico seguinte é possível verificar a temperatura da água da albufeira, a várias profundidades no mês de Junho de 1956.

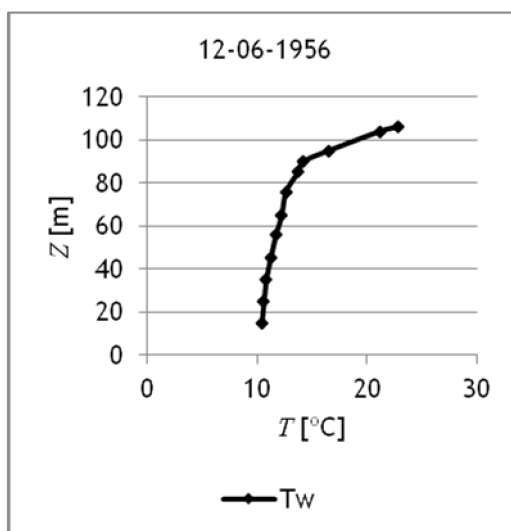


Gráfico 2.4 - Temperatura da água em função da cota na albufeira da barragem do Cabril, em Junho de 1956.

No gráfico anterior é visível que o diagrama de temperatura da água na albufeira apresenta duas rectas de inclinação diferente. A primeira recta apresenta uma inclinação aproximadamente de 1,9, enquanto que, a segunda apresenta uma inclinação aproximada de 19,7. O diagrama de temperaturas ilustrado na figura anterior é aproximadamente igual ao que ocorre na face de montante da barragem.

A medição de extensões com recurso a correctores, que são aparelhos que medem todas as variações de volume do betão que não são causadas por tensões (variações de temperatura, de humidade e aumento do volume do betão), permitiu tirar conclusões sobre o coeficiente de dilatação térmica linear do betão [32]. Para tal, foram instalados correctores de três grupos colocados à mesma cota, localizando-se cada um destes a um metro do paramento de jusante, a um metro do paramento de montante e no meio da espessura do bloco, cuja base se encontra à cota de 230 metros [32].

A comparação das mediações efectuadas, em vários pontos da barragem, permitiu concluir que as extensões nos correctores são, maioritariamente, devidas às variações de temperatura [32], pois as primeiras apresentam um andamento, ao longo do tempo, muito semelhante ao das segundas. O traçado dos diagramas de extensões, em função das temperaturas, apresenta um gráfico semelhante ao apresentado na figura 2.40.

A inclinação aproximadamente constante do troço final (α_2) corresponde ao coeficiente de dilatação térmica linear do betão que envolve o grupo [32]. Entre os dois primeiros instantes de tempo, constata-se uma expansão do betão, devida ao calor de hidratação do cimento.

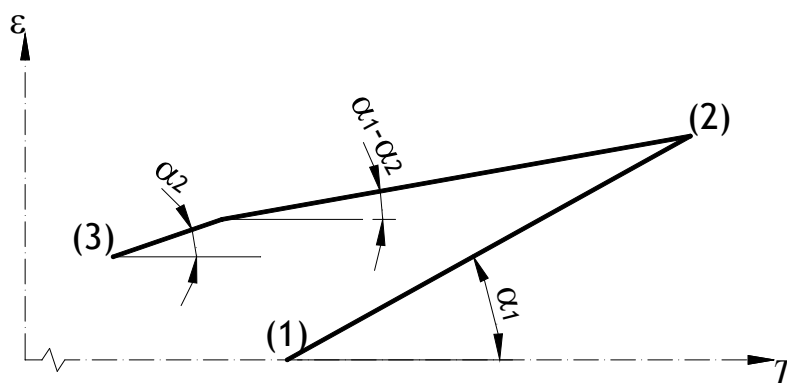


Figura 2.40 - Diagrama típico (esquematizado) das variações de comprimento medidas pelos correctores de três grupos colocados à mesma cota, em função da temperatura nos mesmos pontos, na barragem do Cabril, com indicação de três instantes de tempo distintos, em que (1) e (2) distam entre si aproximadamente três meses e (2) e (3) compreendem uma duração de aproximada de três anos (adaptado de [32]).

Esta expansão decorre aproximadamente durante três meses e ocorre a uma taxa superior ao coeficiente de dilatação térmica linear do betão [32]. Quando a temperatura máxima é atingida, segue-se um decréscimo de volume, designado por retracção, cuja taxa de ocorrência corresponde à diferença entre a taxa de ocorrência da expansão inicial e o coeficiente de dilatação térmica linear do betão ($\alpha_1 - \alpha_2$).

A expansão do betão nos pontos considerados é da ordem de 0,25‰ [32], representando uma variação de volume importante, que não provoca tensões significativas, pelo facto da restrição ser pequena nesta altura e também porque o módulo de elasticidade do betão para idades jovens é reduzido, sendo também muito importante a relaxação de tensões [32]. Para uma variação média de temperatura de 20°C, a taxa de ocorrência da expansão inicial (α_1) é aproximadamente $1,25 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

2.9 Retraccção

A retracção é um fenómeno que consiste na contracção do betão durante o processo de endurecimento [20]. O betão contém mais água do que aquela estritamente necessária para a hidratação do cimento, recebendo esta água a designação de água livre [20] [21].

A perda de água livre poderá ocorrer por evaporação ou por hidratação dos grãos de cimento que ainda não tenham reagido [20]. Esta perda resulta num encurtamento gradual da peça de betão armado [21].

Vários factores influenciam a retracção, como a quantidade e tipo de cimento [20], a quantidade de água da amassadura [20], a humidade relativa e a temperatura ambiente [21], a natureza dos agregados [20] ou a forma e o tamanho da peça estrutural [21].

Betões mais ricos em cimento, ou compostos por cimentos activos de alta resistência ou aluminosos, têm uma retracção mais acentuada [20]. Uma relação água-cimento mais elevada também conduz a retracções mais pronunciadas [20].

No que toca aos agregados, areias finas e rochas porosas aumentam também o efeito da retracção [20]. A influência dos agregados no fenómeno de retracção do betão é maior, se a rigidez destes for também maior [20]. A utilização de adjuvantes hidráulicos e aceleradores de endurecimento na composição do betão, como o cloreto de sódio, aumentam a retracção [20]. A acção de compressões prolongadas acelera o fenómeno de retracção, enquanto que tracções de longo termo atrasam o mesmo fenómeno [20]. A retracção não depende, no entanto, da intensidade das forças aplicadas [21].

Em termos mecânicos, a retracção é equivalente a uma extensão de encurtamento do material [21]. A extensão de retracção num betão, em condições ambientais constantes, tem uma evolução no tempo semelhante àquela descrita na figura 2.41.

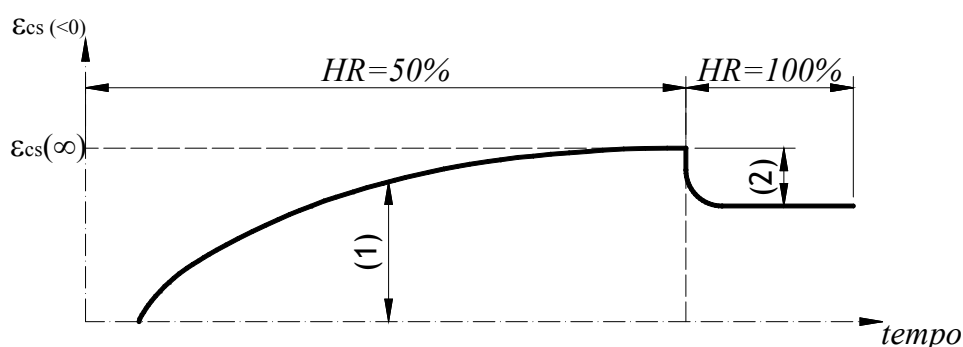


Figura 2.41 - Curva retracção-tempo típica (esquemática) de um betão - (1) retracção - (2) entumescimento (adaptado de [15] e [21]).

As deformações devidas à retracção ocorrem numa taxa decrescente com o tempo e iniciam-se no instante em que o betão é exposto a um ambiente com humidade relativa abaixo de 100% [15]. A taxa de crescimento da extensão de retracção é mais elevada para idades jovens do betão e aproxima-se assintoticamente da extensão última de retracção [21].

A retracção pode ser atenuada através da escolha judiciosa da composição do betão e da hidrometria do ambiente que rodeia o tratamento térmico do seu processo de fabricação [20]. Caso o endurecimento ocorra ao ar livre, é usual humidificar a superfície do betão, reduzindo desta forma a retracção [20].

Sempre que o fenómeno de retracção ocorre, nunca se seguirá uma recuperação completa, mesmo que a peça de betão seja mergulhada em água [21]. Quando o processo de endurecimento do betão tem lugar dentro de água, ocorre um fenómeno de expansão de volume designado por entumescimento, que é, em média, três vezes mais fraco do que a retracção [20].

De acordo com [23], na cláusula 3.1.4(6), a extensão total de retracção é a soma das componentes da extensão de retracção por secagem e da extensão de retracção autogénea:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \quad (2.46)$$

em que ε_{cs} é a extensão total de retracção, ε_{cd} é a extensão de retracção por secagem e ε_{ca} é a extensão de retracção autogénea do betão.

A extensão de retracção por secagem está ligada à migração da água livre do betão endurecido, pelo que se desenvolve lentamente [23]. O valor final da retracção por secagem [23] é dado pela expressão:

$$\varepsilon_{cd}(\infty) = k_t \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (2.47)$$

onde $\varepsilon_{cd}(\infty)$ é a extensão final da retracção por secagem, k_t é o coeficiente que depende da espessura equivalente, t_0 , e $\varepsilon_{cd,0}$ é a extensão de retracção por secagem de referência.

Os valores do coeficiente k_t , que depende da espessura equivalente t_0 , estão contidos no quadro 2.3.

t_0 [mm]	k_t [-]
100	1,00
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

Quadro 2.3 - Valores do coeficiente k_t , que depende da espessura equivalente t_0 [23].

A espessura equivalente da secção transversal [23] é calculada pela seguinte expressão:

$$t_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} \quad (2.48)$$

onde t_0 é a espessura equivalente da secção transversal, A_c é área da secção transversal do betão e u é o perímetro da parte da secção transversal exposta à secagem.

A espessura equivalente, no caso de uma laje em que apenas as faces superior e inferior estão expostas, corresponde à espessura da laje.

O valor médio, com um coeficiente de variação da ordem de 30%, da extensão de retracção por secagem, para betões utilizados em edifícios, está contido no quadro 2.4.

$f_{ck} / f_{ck,cube}$ [MPa]	Humidade relativa (HR) [%]					
	20	40	60	80	90	100
20/25	-0,62	-0,58	-0,49	-0,30	-0,17	0,00
40/50	-0,48	-0,46	-0,38	-0,24	-0,13	0,00
60/75	-0,38	-0,36	-0,30	-0,19	-0,10	0,00
80/95	-0,30	-0,28	-0,24	-0,15	-0,08	0,00
90/105	-0,27	-0,25	-0,21	-0,13	-0,07	0,00

Quadro 2.4 - Valores nominais da retracção livre por secagem ($\varepsilon_{cd,0}$), em ‰, para o betão com cimentos CEM da classe N (adaptado de[23]).

A extensão de retracção autogénea ocorre durante o processo de endurecimento do betão, logo desenvolve-se maioritariamente nos primeiros dias que se seguem à colocação do mesmo [23]. Sendo função linear da resistência do betão, o valor final da extensão de retracção autogénea [23] é dado pela expressão:

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = -2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} \quad (2.49)$$

em que $\varepsilon_{ca}(\infty)$ é a extensão final de retracção autogénea e f_{ck} é o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade, referido a provetes cilíndricos, em MPa.

Repare-se que o valor da extensão final de retracção autogénea, para um betão C20/25, é igual a -0,025‰. Este valor tem uma influência diminuta comparativamente com os valores contidos no quadro 2.4, para a mesma classe de resistência do betão. O valor da extensão autogénea assume maior importância para betões com classes de resistência mais elevadas.

Da observação do quadro 2.4 também se conclui que, quanto maior o valor da humidade relativa, menor o efeito da retracção. A retracção livre por secagem é, porém, mais significativa para betões com classes de resistência mais baixas. Isto acontece porque os betões de alta resistência são, por norma, menos porosos, ou seja, mais compactos, o que atenua o fenómeno da retracção. Os valores contidos no quadro 2.4 dizem respeito a betões para estruturas de edifícios. No caso das barragens, é necessário levar em conta que o fabrico do betão é, normalmente, mais cuidado.

O valor equivalente de abaixamento de temperatura é obtido dividindo a extensão de retracção pelo coeficiente de dilatação térmica linear do betão, indicado na cláusula 3.1.3(5) de [23], como sendo igual a $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Numa barragem abóbada são habitualmente utilizados betões de classe de resistência baixa, sendo a espessura equivalente do perfil central habitualmente superior a 500 mm, pelo que poderá ser tomado, em primeira aproximação e considerando uma humidade relativa de 90%, um valor de extensão final de retracção total igual a:

$$\varepsilon_{cs}(\infty) \approx 0,7 \cdot -0,17 \approx -0,119\%_{00} \Leftrightarrow T_0 \approx -12^\circ\text{C} \quad (2.50)$$

onde ε_{cs} é a extensão final de retracção total e T_0 é a variação uniforme de temperatura equivalente.

Existem autores [11] que defendem que a retracção em barragens abóbada corresponde a um abaixamento de temperatura de 40°C , advertindo no entanto que este fenómeno é parcialmente reversível, devido à humidade elevada que se verifica no ambiente que rodeia a barragem. Os efeitos da retracção eram mesmo desprezados na análise estrutural, desde que existissem juntas de contracção convenientemente espaçadas. O mesmo autor [11] refere que a expansão do betão por embebição deve ser considerada no cálculo, considerando este fenómeno equivalente a uma elevação uniforme de temperatura de 10°C .

2.10 Calor de hidratação

O calor de hidratação é um fenómeno que ocorre no betão fresco e que é consequência da reacção química exotérmica da hidratação do cimento [3]. A baixa condutividade do betão leva a que elevados gradientes possam ocorrer entre o interior e a superfície dos elementos [3]. Este fenómeno pode originar tracções superiores àquelas que o betão jovem consegue resistir [3]. A atenuação deste fenómeno poderá ser efectuada através dum pré-arrefecimento do betão, do embutimento de tubagens de arrefecimento no interior deste ou da utilização de cimentos com baixo calor de hidratação [3].

Num estudo sobre esta temática [3], foi observada a evolução da temperatura num bloco da barragem de Mousakelle.

Esta barragem apresenta um volume total de betão de 100000 metros cúbicos, uma altura de 36 metros e uma largura de 41 metros na zona mais baixa da barragem [3].

O bloco em estudo, com 1,4 metros de largura e 4,725 metros de altura, foi modelado como uma malha de elementos finitos, tendo sido criadas três camadas, correspondentes a três fases de betonagem. Na malha de elementos finitos existe um ponto que simula a temperatura do tubo de arrefecimento. Cada camada de betão foi betonada a uma temperatura de 22°C [3]. No intervalo de tempo entre uma fase de betonagem e outra, a superfície da camada é sujeita a trocas de calor, por forma a atingir um equilíbrio térmico com o exterior, antes da próxima fase de betonagem [3]. A libertação do calor de hidratação provoca uma temperatura máxima poucos dias após a colocação do betão, seguindo-se um arrefecimento que só é interrompido quando uma nova camada é betonada sobre a anterior. Com base no modelo numérico, foi possível analisar o efeito dos tubos de arrefecimento e do prévio arrefecimento dos materiais [3].

A simulação da presença dos tubos de água é efectuada impondo uma temperatura fixa num dos nós da malha de elementos finitos, igual à temperatura da água de arrefecimento [3]. Foram analisadas duas temperaturas de arrefecimento (5°C e 10°C) e os resultados estão apresentados na figura 2.42.

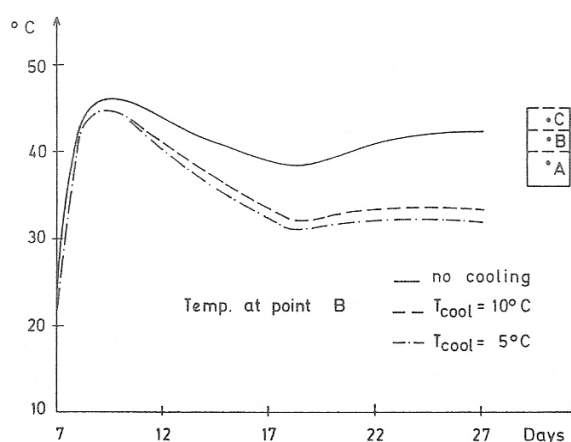


Figura 2.42 - Evolução da temperatura no ponto B da segunda camada, betonada sete dias após a primeira, com indicação dos resultados sem arrefecimento e com uma temperatura da água de arrefecimento de 5°C e 10°C [3].

Este procedimento permitiu uma redução de 2°C da temperatura máxima atingida, sendo mais significativa esta redução com o decorrer do processo de endurecimento do betão [3].

A evolução das temperaturas nos três nós, com um prévio arrefecimento do material de construção para 10°C, está indicada na figura 2.43.

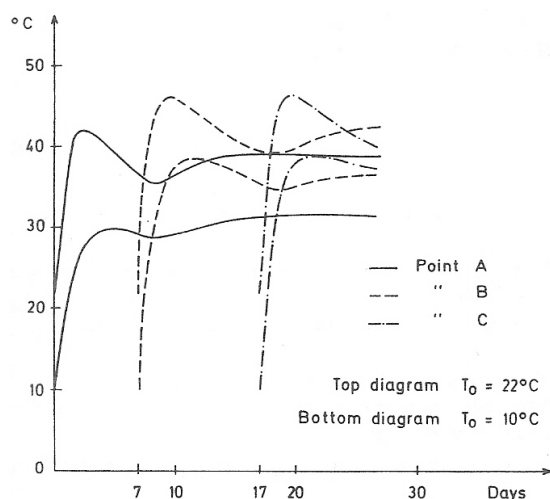


Figura 2.43 - Evolução da temperatura em três pontos nas diferentes camadas, quando os materiais de construção foram alvo de um arrefecimento prévio para 10°C [3].

Esta técnica de arrefecimento mostrou-se eficaz, sendo que no ponto A ocorre um decréscimo da temperatura máxima da ordem dos 10°C e no ponto B o mesmo decréscimo é aproximadamente 8°C [3]. Para as técnicas de construção utilizadas no presente, o fenómeno do calor de hidratação pode ser atenuado e, conseqüentemente, desprezado no cálculo.

2.11 Arcos planos parabólicos solicitados por variações uniformes de temperatura

Num estudo sobre barragens do tipo abóbada parabólica [29], efectuou-se uma análise estática de um arco parabólico perfeitamente encastrado (figura 2.22), de espessura variável, com momento de inércia reduzido constante, e de um outro arco, também parabólico, mas de espessura constante (figura 2.44).

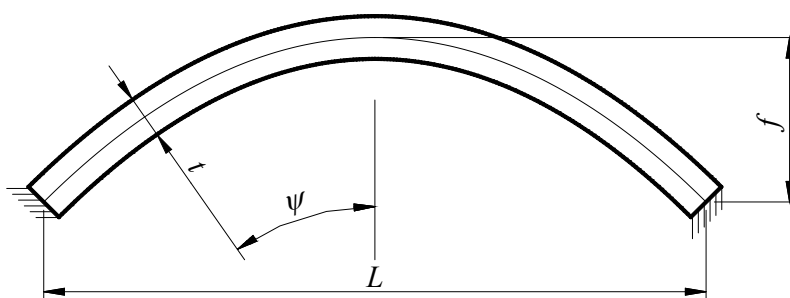


Figura 2.44 - Arco parabólico, perfeitamente encastrado, de espessura constante (adaptado de [29]).

Os seguintes gráficos ilustram a variação do impulso no fecho dos arcos parabólicos de espessura variável e constante, em função da relação K , entre a flecha f e o vão L do arco, para diferentes relações entre a espessura no fecho t_f e o vão. A variável t é a espessura em qualquer secção transversal do arco parabólico de espessura constante.

O coeficiente de dilatação térmica linear do material é α e T_0 é a variação uniforme e positiva da temperatura.

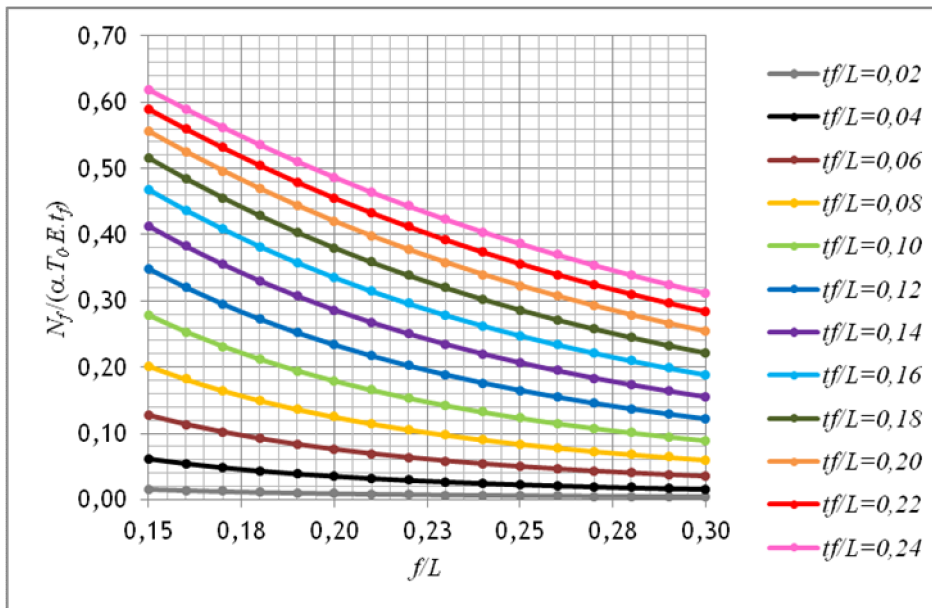


Gráfico 2.5 - Variação do esforço axial no fecho de um arco parabólico, perfeitamente encastrado, de espessura variável, em função da relação entre a flecha e o vão, para diferentes relações entre a espessura no fecho e o vão, quando solicitado por uma variação de temperatura uniforme e positiva (adaptado de [29]).

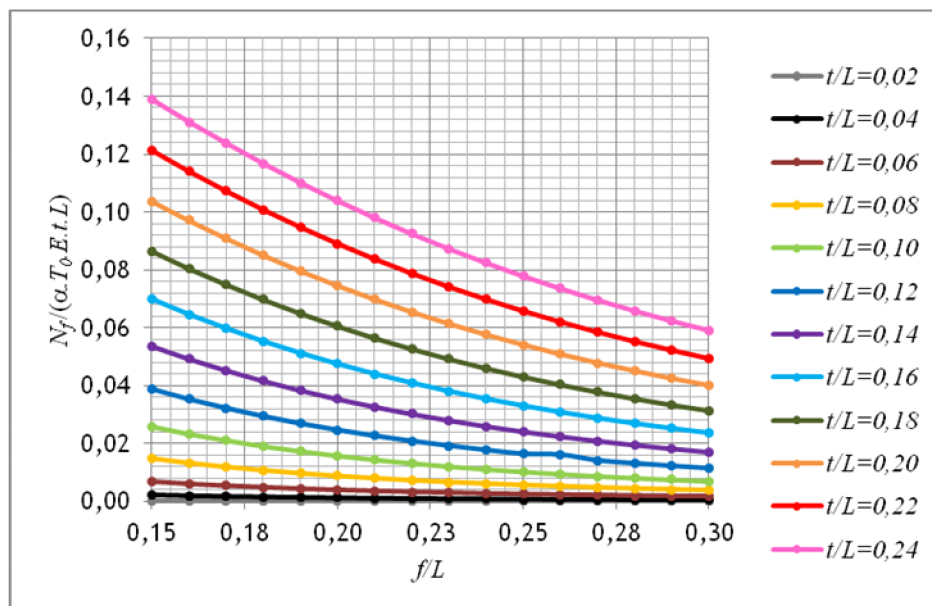


Gráfico 2.6 - Variação do esforço axial no fecho de um arco parabólico, perfeitamente encastrado, de espessura constante, em função da relação entre a flecha e o vão, para diferentes relações entre a espessura e o vão, quando solicitado por uma variação de temperatura uniforme e positiva (adaptado de [29]).

Através dos resultados obtidos, concluiu-se que um arco parabólico, de espessura constante ou variável, com uma determinada relação flecha - vão ($K = f/L$), solicitado por uma variação uniforme de temperatura, apresenta um impulso no fecho tanto menor quanto mais esbelto for (menor relação t_f/L).

A análise dos resultados permite ainda concluir que um arco parabólico com uma determinada relação espessura - vão (t_f/L), solicitado por uma variação uniforme de temperatura, apresenta um impulso no fecho tanto maior, quanto mais abatido for (menor relação $K = f/L$). Esta situação é evidenciada na figura 2.45, onde são ilustrados os diagramas de esforço axial de dois arcos parabólicos, idênticos no momento de inércia e no vão, mas com flechas diferentes, quando solicitados por uma variação uniforme positiva de temperatura.

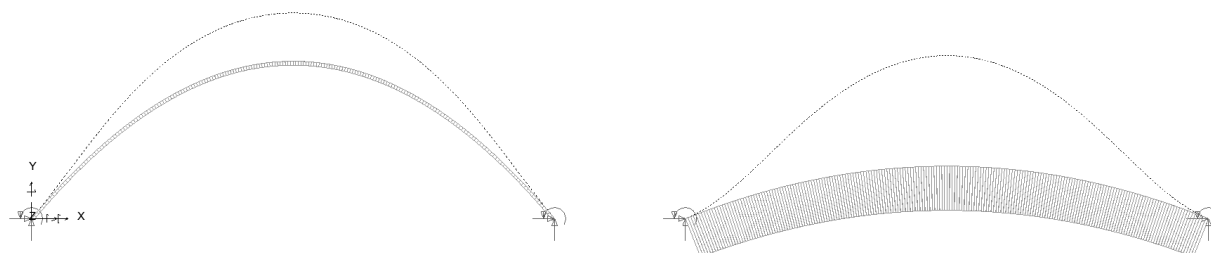


Figura 2.45 (a) e (b) - Diagrama de esforço axial, a tracejado, e deformação ampliada, a traço interrompido, de dois arcos parabólicos, perfeitamente encastrados, de espessura constante, constituídos pelo mesmo material e com a mesma secção transversal, submetidos à mesma variação uniforme positiva de temperatura, mas com uma relação flecha - vão ($K = f/L$) diferente - arco mais elevado (a) e arco mais abatido (b).

2.12 Modelação matemática da geometria das barragens abóbada

Para efectuar uma análise estrutural de uma barragem é necessário definir geometricamente a sua estrutura. A geometria de uma barragem abóbada fica completamente definida a partir da equação da sua superfície média ($F(X, Y, Z) = 0$), do valor da espessura em todos os pontos ($t = t(X, Y, Z)$) e das curvas que limitam a superfície ao longo do coroamento e da linha de inserção da superfície média no vale [11].

Tradicionalmente, a geometria das barragens abóbada era definida de outra forma. Inicialmente, determinava-se um perfil-tipo da secção central, que servia também de directriz das curvas de nível geradoras dos paramentos de montante e de jusante [11]. As curvas de nível eram arcos circulares (de um ou mais centros), elípticos ou parabólicos, sendo que os dois últimos permitiam expressões analíticas mais simples, assegurando também uma variação contínua dos raios de curvatura [11]. Com base na fórmula dos tubos, o raio de curvatura dos arcos diminuía no sentido descendente, ou seja, do coroamento para a base. As superfícies eram, no entanto, definidas por expressões analíticas muito laboriosas, apresentando por vezes singularidades geométricas difíceis de detectar no traçado [11].

Uma vez que no caso das barragens abóbada a espessura é pequena, quando comparada com as restantes dimensões da casca, a definição das superfícies de montante e jusante pode ser feita em relação à superfície média, equidistante daquelas duas, através da função que indica a variação de espessuras [11].

2.12.1 Definição da superfície média

Existem vários métodos para definir a geometria da superfície média das barragens abóbada. Esta superfície pode ser gerada por um perfil revolvido em torno de um eixo ou por um conjunto de cónicas que se apoiam em determinadas directrizes. A superfície pode ainda ser definida como uma superfície quadrática, que intersecta ou se aproxima de um número finito de pontos.

Entenda-se por cónica, a curva gerada pela intersecção de um cone por um plano. Dependendo da posição relativa do plano e do cone, a curva que resulta da intersecção destes dois pode ser um circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. Uma quadrática é uma superfície cujos pontos contidos nela podem ser expressos por um polinómio de segundo grau, de três variáveis.

A superfície média pode ser definida como uma superfície de revolução (figura 2.46) em torno de um eixo vertical, o eixo de revolução. Neste caso, os meridianos têm a forma da linha média da secção central.

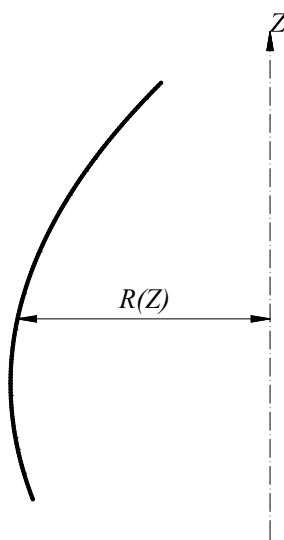


Figura 2.46 - Revolução de um perfil em torno de um eixo vertical (adaptado de [11]).

Estabelecendo um sistema de coordenadas cilíndricas, a equação do meridiano é também a equação da superfície média da barragem [11], sendo expressa em função da coordenada vertical Z :

$$R = R(Z) \quad (2.51)$$

em que $R(Z)$ é o raio de um círculo paralelo da superfície, numa determinada coordenada vertical Z .

As curvas de nível da barragem são obrigatoriamente circulares, possuindo um único centro [11]. Este processo de definição da superfície média é utilizado para barragens abóbada de pequenas dimensões [11]. A superfície média pode também ser gerada a partir de uma cónica horizontal apoiada num determinado número de directrizes [11].

Quando a superfície média é gerada por cónicas, a expressão analítica geral destas [11], em relação ao sistema de eixos de referência $OXYZ$, é a seguinte:

$$c_1 \cdot X^2 + c_2 \cdot Y^2 + 2 \cdot c_3 \cdot X \cdot Y + 2 \cdot c_4 \cdot X + 2 \cdot c_5 \cdot Y - 1 = 0 \quad (2.52)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 , c_4 e c_5 são os coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da cónica.

As cónicas podem ser equiparadas a curvas de nível, uma vez que estão contidas num plano horizontal paralelo ao plano coordenado XOY .

Após a determinação de cinco directrizes, para cada cota Z são conhecidos cinco pontos distintos, logo os coeficientes da expressão (2.52) podem ser determinados e, desta forma, fica definida a cónica que intersecta as cinco directrizes de apoio nesse nível [11]. Em qualquer cota em que se conheça o valor das cinco directrizes, é possível determinar a cónica que intersecta as mesmas, nesse nível. As cinco directrizes, pelas quais são obrigadas a passar as cónicas geratrizes da superfície média, podem incluir a linha média da secção central e as curvas que definem o contorno de inserção da superfície média no vale [11].

Se a superfície média apresentar um plano de simetria (figura 2.47), designadamente o plano coordenado YOZ , a expressão das curvas de nível [11] toma a seguinte forma:

$$c_1 \cdot X^2 + c_2 \cdot Y^2 + 2 \cdot c_5 \cdot Y - 1 = 0 \quad (2.53)$$

onde c_1 , c_2 e c_5 são os coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da cónica.

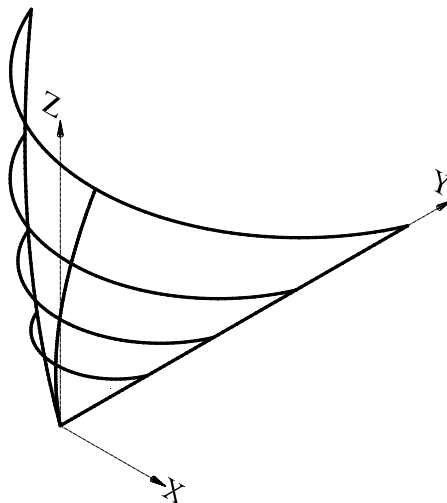


Figura 2.47 - Superfície média obtida por cónicas geratrizes apoiadas num determinado número de directrizes (adaptado de [11]).

As curvas geratrizes podem ser do tipo elipse, hipérbole, parábola ($c_2 = 0$) ou circular ($c_1 = c_2$). No caso das curvas geratrizes serem parábolas ou circunferências, além da condição de simetria em relação ao plano YOZ , são necessárias e suficientes duas directrizes [11]. Nestes casos, as expressões analíticas são mais simples.

Uma outra via para definir a superfície média passa pelo estabelecimento de uma quadrática [11] de expressão geral:

$$c_1 \cdot X^2 + c_2 \cdot Y^2 + c_3 \cdot Z^2 + 2 \cdot c_4 \cdot X \cdot Y + 2 \cdot c_5 \cdot X \cdot Z + 2 \cdot c_6 \cdot Y \cdot Z + 2 \cdot c_7 \cdot X + 2 \cdot c_8 \cdot Y + 2 \cdot c_9 \cdot Z - 1 = 0 \quad (2.54)$$

em que os nove coeficientes, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ e c_9 , podem ser obtidos a partir da obrigatoriedade do contacto da superfície com nove pontos distintos.

Este método preconiza o estabelecimento de uma equação, que descreve uma superfície obrigada a incluir um determinado número de pontos. Os parâmetros da quadrática são determinados através do estabelecimento de nove equações algébricas lineares com nove incógnitas, conhecendo previamente as coordenadas dos pontos de contacto obrigatório com a superfície $(X_1, Y_1, Z_1); (X_2, Y_2, Z_2); \dots; (X_9, Y_9, Z_9)$ [11]. Estes pontos são estabelecidos por forma a obrigar a quadrática a aproximar-se da curva de inserção nas fundações e a conter pontos de perfis previamente definidos [11]. O resultado da intersecção da superfície quadrática com um plano horizontal é uma cónica.

Se o plano coordenado YOZ for um plano de simetria, escolhendo o ponto O da quadrática situada naquele plano para origem do sistema de referência, a expressão analítica da superfície média [11] é:

$$c_1 \cdot X^2 + c_2 \cdot Y^2 + c_3 \cdot Z^2 + 2 \cdot c_6 \cdot Y \cdot Z + 2 \cdot c_8 \cdot Y + 2 \cdot c_9 \cdot Z = 0 \quad (2.55)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 , c_6 , c_8 e c_9 são os coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da quadrática.

Os cinco parâmetros, c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1 , são agora determinados pela obrigatoriedade de passagem da superfície média por cinco pontos distintos [11].

A linha média do perfil central, curva que é uma cónica existente no plano de simetria YOZ [11], é obtida intersectando a quadrática (2.55) com o plano de simetria $X = 0$, resultando a expressão:

$$c_2 \cdot Y^2 + c_3 \cdot Z^2 + 2 \cdot c_6 \cdot Y \cdot Z + 2 \cdot c_8 \cdot Y + 2 \cdot c_9 \cdot Z = 0 \quad (2.56)$$

sendo que c_2 , c_3 , c_6 , c_8 e c_9 são coeficientes, obtidos a partir da obrigatoriedade de contacto da superfície com determinados pontos.

As curvas de nível de uma superfície média, definida pelo processo indicado, são do tipo elipse, hipérbole, parábola ($c_2 = 0$) ou circunferência ($c_1 = c_2$), tendo uma expressão idêntica a (2.53) [11].

2.12.2 Quadrática mais provável

O número de pontos pelo qual se pode fazer passar uma quadrática é em geral igual a nove, reduzindo-se para cinco se houver simetria em relação ao plano coordenado YOZ . No entanto, este número de pontos é, em geral, insuficiente para obrigar a superfície média a possuir uma determinada geometria [11].

A definição da quadrática que mais se aproxima de uma determinada geometria (quadrática mais provável) é obtida pelo método dos mínimos quadrados [11]. Admita-se que a quadrática tem um plano de simetria YOZ e que os pontos aos quais a quadrática se deve aproximar são $P_1(X_1, Y_1, Z_1), \dots, P_j(X_j, Y_j, Z_j), \dots, P_k(X_k, Y_k, Z_k)$ e que $k \geq 5$.

De acordo com a expressão (2.55), a equação geral da quadrática que apresenta um plano de simetria será:

$$X^2 + \frac{c_2}{c_1} \cdot Y^2 + \frac{c_3}{c_1} \cdot Z^2 + 2 \cdot \frac{c_6}{c_1} \cdot Y \cdot Z + 2 \cdot \frac{c_8}{c_1} \cdot Y + 2 \cdot \frac{c_9}{c_1} \cdot Z = 0 \quad (2.57)$$

sendo c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1 os coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da quadrática, simétrica em relação ao plano coordenado YOZ .

Os coeficientes referidos são encontrados por forma a minimizar o resíduo quadrático:

$$\min \sum_{j=1}^k (0 - \Phi_j)^2 = \min \sum_{j=1}^k \Phi_j^2 = \min S \quad (2.58)$$

em que S é o somatório do quadrado dos resíduos Φ_j das coordenadas dos k pontos P_j .

Para as coordenadas genéricas do ponto $P_j(X_j, Y_j, Z_j)$, o resíduo da quadrática [11] tem a seguinte expressão:

$$\Phi_j = X_j^2 + \frac{c_2}{c_1} \cdot Y_j^2 + \frac{c_3}{c_1} \cdot Z_j^2 + 2 \cdot \frac{c_6}{c_1} \cdot Y_j \cdot Z_j + 2 \cdot \frac{c_8}{c_1} \cdot Y_j + 2 \cdot \frac{c_9}{c_1} \cdot Z_j \quad (2.59)$$

em que Φ_j é o resíduo da quadrática, simétrica em relação ao plano YOZ , no ponto genérico $P_j(X_j, Y_j, Z_j)$; c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1 os coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da quadrática.

Conforme já referido, a quadrática mais provável [11] é a que minimiza o somatório (S) do quadrado dos resíduos das coordenadas dos k pontos $P_j(X_j, Y_j, Z_j)$, logo o seguinte sistema pode ser estabelecido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial(c_2/c_1)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial(c_3/c_1)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial(c_6/c_1)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial(c_8/c_1)} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial(c_9/c_1)} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Y_j^2 = 0 \\ 2 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Z_j^2 = 0 \\ 4 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Y_j \cdot Z_j = 0 \\ 4 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Y_j = 0 \\ 4 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Z_j = 0 \end{array} \right. \quad (2.60)$$

em que Φ_j é o resíduo da quadrática, simétrica em relação ao plano YOZ , no ponto

genérico $P_j(X_j, Y_j, Z_j)$; $S = \sum_{j=1}^k \Phi_j^2$; c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1 são os

coeficientes de cada um dos termos da expressão analítica da quadrática.

Inserindo no sistema (2.60) a expressão para o resíduo Φ_j (2.59) e isolando os termos independentes, obtém-se o seguinte sistema de cinco equações e cinco incógnitas (c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1):

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k Y_j^4 & \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^3 \cdot Z_j & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^3 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j \\ \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j^2 & \sum_{j=1}^k Z_j^4 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^3 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Z_j^3 \\ \sum_{j=1}^k Y_j^3 \cdot Z_j & \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^3 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^2 \\ \sum_{j=1}^k Y_j^3 & \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j \\ \sum_{j=1}^k Y_j^2 \cdot Z_j & \sum_{j=1}^k Z_j^3 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j^2 & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Y_j \cdot Z_j & 2 \cdot \sum_{j=1}^k Z_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{c_2}{c_1} \\ c_1 \\ \frac{c_3}{c_1} \\ c_1 \\ \frac{c_6}{c_1} \\ c_1 \\ \frac{c_8}{c_1} \\ c_1 \\ \frac{c_9}{c_1} \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j^2 \\ -\sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Z_j^2 \\ -\sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j \cdot Z_j \\ -\sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j \\ -\sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Z_j \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde (X_j, Y_j, Z_j) são as coordenadas dos k pontos P_j e c_2/c_1 , c_3/c_1 , c_6/c_1 , c_8/c_1 e c_9/c_1 são os coeficientes dos termos da expressão da quadrática, simétrica em relação ao plano YOZ .

2.12.3 Métodos para estimar a espessura

Para além da geometria da superfície média e da definição das curvas que limitam essa superfície, é igualmente importante o conhecimento das espessuras, possibilitando a localização dos pontos dos paramentos de montante e de jusante [11]. A espessura nos diversos pontos está, no entanto, dependente da geometria da superfície média e das tensões máximas admissíveis [11].

Quando o método da membrana é utilizado, a espessura da barragem é escolhida por forma a se obter uma melhor distribuição de tensões no corpo da barragem, quando actua o peso próprio, em simultâneo com a pressão hidrostática [12]. Na maioria dos casos, a espessura nos diversos pontos era determinada por comparação com obras de geometria semelhante já existentes [11].

Após o cálculo da barragem, se as tensões calculadas excedessem as máximas admissíveis, o dimensionamento era revisto [11]. No entanto, é possível determinar previamente a espessura através de métodos expeditos [11].

A determinação da espessura em barragens aproximadamente cilíndricas foi realizada com base na fórmula dos tubos (2.2), que deixou de ter validade quando se verificou um acentuado aumento da curvatura na direcção vertical [11].

Se a barragem for definida por um conjunto de arcos horizontais, existem já expressões que estimam a variação de espessuras ao longo de cada arco. No caso de arcos cujo eixo tem a forma de uma espiral logarítmica, o estabelecimento dos parâmetros ρ_0 e a , em cada nível da barragem, é efectuado tendo em conta os ângulos de incidência dos arcos no terreno, a estabilidade isolada dos blocos sob a acção do seu peso próprio e o funcionamento conjunto dos arcos horizontais e consolas verticais, quando actua o peso próprio e simultaneamente a pressão hidrostática [18]. Para efectuar o estudo de todos estes parâmetros é necessário conhecer à priori a espessura da barragem [18]. Como estimativa inicial, uma vez que a zona de fecho dos arcos é habitualmente a mais curva, poderá ser usada a fórmula dos tubos para obter a espessura dos arcos nesta zona [18].

A variação de espessura de um arco horizontal da barragem [18] tem, geralmente, a seguinte expressão:

$$t(s) = t_f + w \cdot s^2 \quad (2.62)$$

em que t é a espessura do arco no ponto de abcissa curvilínea s , t_f é a espessura no fecho, w é uma constante relativa à metade do arco e que varia ao longo da cota e s é a abcissa curvilínea, medida a partir da secção de fecho.

No arco do coroamento da barragem, o parâmetro w é usualmente nulo [18]. Uma variação muito acentuada da espessura, do fecho para os encontros dos arcos, poderá fazer aumentar significativamente os momentos flectores junto ao encastramento [18]. Um acréscimo de espessura de 20% a 25% na zona dos encontros, em relação ao fecho dos arcos, é habitualmente suficiente [18].

O “United States Bureau of Reclamation” (USBR) preconiza um método para estimar as espessuras ao longo do perfil central de barragens com dupla curvatura [2]. O método deve ser usado apenas como estimativa inicial de uma análise mais exacta e está limitado a barragens abóbada inseridas em vales em “V” ou em “U”, com uma altura máxima (H) compreendida entre 30 e 365 metros, um comprimento de corda no coroamento (L) compreendido entre 30 e 1828 metros e um comprimento de corda a uma altura de $0,15 \cdot H$

($L_{0,15H}$), contada a partir da base, compreendida entre 5 e 365 metros. No referido método, a espessura é medida na direcção horizontal perpendicular às curvas de nível da abóbada.

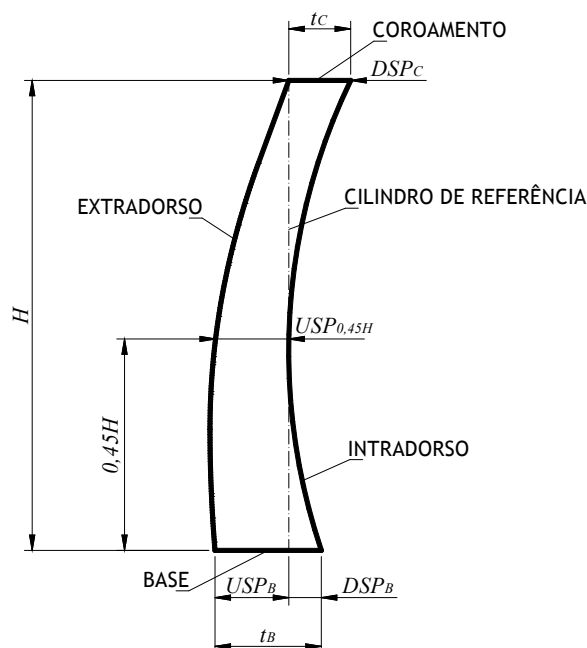


Figura 2.48 - Parâmetros geométricos intervenientes no método proposto pelo USBR (adaptado de [2]).

Uma análise estatística das barragens abóbada existentes permitiu a obtenção das seguintes fórmulas empíricas [2], onde todos os parâmetros devem figurar em metros:

$$t_C = 0,01 \cdot [H + 1,2 \cdot L] \quad (2.63)$$

$$t_B = \sqrt[3]{0,0012 \cdot H \cdot L \cdot L_{0,15H} \cdot \left(\frac{H}{121,92}\right)^{\frac{H}{121,92}}} \quad (2.64)$$

$$t_{0,45H} = 0,95 \cdot t_B \quad (2.65)$$

em que t_C , t_B e $t_{0,45H}$ são as espessura do perfil central no coroamento, na base e a uma altura de $0,45 \cdot H$ da base, respectivamente, L e $L_{0,15H}$ são os comprimentos de corda no coroamento e a uma altura de $0,15 \cdot H$ da base, respectivamente, e H é a altura máxima da barragem.

As projecções de montante e de jusante [2], do perfil central, são calculadas pelas seguintes expressões:

$$USP_C = 0 \quad (2.66)$$

$$DSP_C = t_C \quad (2.67)$$

$$USP_B = 0,67 \cdot t_B \quad (2.68)$$

$$DSP_B = 0,33 \cdot t_B \quad (2.69)$$

$$USP_{0,45H} = t_{0,45H} \quad (2.70)$$

$$DSP_{0,45H} = 0 \quad (2.71)$$

onde t_C , t_B e $t_{0,45H}$ são as espessuras do perfil central no coroamento, na base e a uma altura de $0,45 \cdot H$ da base, respectivamente, e USP_C , DSP_C ; USP_B , DSP_B e $USP_{0,45H}$, $DSP_{0,45H}$ são as projecções de montante e de jusante do perfil central no coroamento, na base e a uma altura de $0,45 \cdot H$ da base, respectivamente.

O método proposto pelo USBR permite ainda estimar o volume da barragem [2]:

$$V = 5,4031 \cdot 10^{-5} \cdot H^2 \cdot L_{0,15H} \cdot \frac{(H + 0,8 \cdot L)^2}{0,3048 \cdot (L - L_{0,15H})} + 1,0806 \cdot 10^{-2} \cdot L \cdot (H - 1,1 \cdot L) \quad (2.72)$$

em que L e $L_{0,15H}$ são os comprimentos de corda no coroamento e a uma altura de $0,15 \cdot H$ da base, respectivamente, H é a altura máxima da barragem e V é o volume da barragem.

2.12.4 Parâmetros para comparação de formas

Para uma determinada forma do vale, altura da barragem e nível máximo de tensões instaladas, existe uma infinidade de formas possíveis, sendo que algumas correspondem a barragens abóbada com um melhor aproveitamento do betão [11]. No caso em que a forma do vale ou a altura da barragem não são idênticas, mesmo que o nível máximo de tensões instaladas sejam o mesmo, não é possível comparar diferentes formas estruturais, tendo exclusivamente em conta a medida do volume [11]. Por este motivo, foi necessário estabelecer parâmetros para a comparação da forma [11].

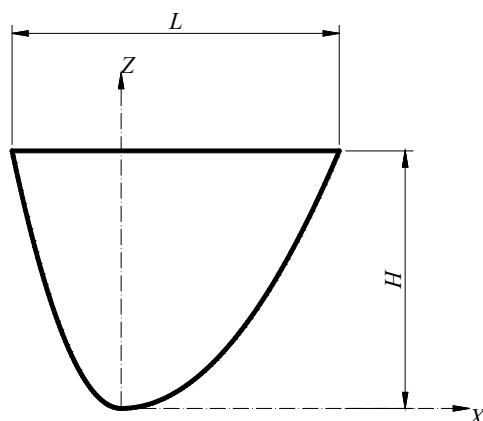


Figura 2.49 - Projecção frontal ou alçado de uma barragem, no plano XOZ (adaptado de [11]).

O coeficiente adimensional Ω , também designado por coeficiente de abertura [11], avalia as características geométricas do contorno da inserção da barragem no vale:

$$\Omega = \frac{L}{H} \quad (2.73)$$

em que Ω é o coeficiente de abertura, L é o comprimento de corda e H é a altura máxima da barragem (figura 2.49).

O coeficiente adimensional Γ , também designado por coeficiente de forma [11], é dado pela seguinte expressão:

$$\Gamma = \frac{\int_0^H (H - Z) \cdot [F_1(Z) - F_2(Z)] dZ}{L \cdot H^2} \quad (2.74)$$

onde Γ é o coeficiente de forma, L é o comprimento de corda, H é a altura máxima da barragem, Z é a cota, $X_1 = F_1(Z)$ e $X_2 = F_2(Z)$ são as expressões dos dois ramos da projecção do contorno da inserção, no plano XOZ .

O coeficiente Γ é, então, a relação entre a impulsão hidrostática sobre a projecção do contorno no plano XOZ e o dobro da impulsão hidrostática sobre o rectângulo onde a projecção está inscrita.

No quadro 2.5 são indicados os valores do coeficiente Γ para alguns tipos de contornos de inserção.

Tipo de contorno da inserção da barragem	Γ
Rectangular	0,50
Parabólico cúbico	0,32
Parabólico 2º grau	0,27
Triangular	0,17
Parabólico semi-cúbico	0,11

Quadro 2.5 - Valor do coeficiente Γ para diferentes tipos de contorno da inserção da barragem no vale (adaptado de [11]).

O volume específico (V_{esp}) [11] avalia a esbelteza estrutural de uma barragem:

$$V_{esp} = \frac{V}{\Omega \cdot \Gamma \cdot H^4} \quad (2.75)$$

onde V_{esp} é o volume específico, V é o volume do corpo da barragem, H é a sua altura máxima, Ω e Γ são os coeficientes de abertura e de forma, respectivamente.

Para alturas máximas (H) entre 60 e 80 metros, existem já valores determinados do volume específico (V_{esp}), para alguns tipos de barragens (Quadro 2.6).

Tipo de barragem	Intervalo de valores do volume específico (V_{esp}) [m^{-1}]
Abóbada espessa	5×10^{-3} a 8×10^{-3}
Abóbada delgada	3×10^{-3} a 5×10^{-3}
Casca	$\leq 3 \times 10^{-3}$

Quadro 2.6 - Valores do volume específico (V_{esp}) para diferentes tipos de barragens com alturas máximas (H) da ordem dos 60 a 80 metros (adaptado de [11]).

Para uma barragem de um determinado tipo, se se aumentar a altura máxima (H), o volume específico (V_{esp}) diminuirá, ocorrendo, no entanto, um aumento das tensões de trabalho do betão [11]. Isto significa que, uma barragem que possui um menor volume específico em relação a outra poderá não corresponder ao melhor aproveitamento do betão, uma vez que esta diminuição poderá resultar de um aumento das tensões de compressão do betão [11]. Por este motivo, torna-se necessário o estabelecimento de um coeficiente de aproveitamento [11] (C_{apr}):

$$C_{apr} = V_{esp} \cdot \sigma_{máx} \cdot 10^2 \quad (2.76)$$

onde C_{apr} é o coeficiente de aproveitamento, V_{esp} é o volume específico e $\sigma_{máx}$ é a tensão de compressão máxima no betão da barragem, em MPa.

2.13 Geometria diferencial

2.13.1 Relação entre a curvatura e os esforços membrana numa casca

Imagine-se uma casca, cuja superfície média possui simples ou dupla curvatura, e em que actua um sistema de forças sistematicamente perpendicular à superfície em todos os pontos. Considere-se também que as condições de contorno, a geometria da superfície média e o tipo de solitação possibilitam o estabelecimento de um equilíbrio de membrana, ou seja, de um equilíbrio em que apenas são mobilizados os esforços internos contidos no plano tangente à superfície média da casca, em qualquer ponto.

Num ponto da superfície média, desta ou de outra qualquer casca que não apresente pontos singulares, existe uma infinidade de redes de curvas ortogonais que nele se cruzam [11]. Os esforços de membrana da casca idealizada, em cada ponto, dependem da direcção considerada, existindo uma infinidade de valores de esforços de membrana num ponto, tantos quanto o número de curvas ortogonais que nele se cruzam [11]. Das infinitas redes de curvas ortogonais que se cruzam num ponto, existe uma, cujo par de curvas ortogonais que a constitui possui a maior e menor curvatura possível. As direcções das tangentes às referidas curvas, no ponto em questão, constituem as direcções principais de curvatura, contidas num plano cuja normal coincide com o vector normal à superfície média neste ponto.

Dos infinitos pares de esforços de membrana que existem num ponto da superfície média da casca idealizada, face à actuação de forças perpendiculares em todos os pontos, existe um em que os valores dos esforços atingem um máximo e um mínimo. As direcções destes esforços principais de membrana, também designadas por direcções principais do equilíbrio de membrana [11], contidas num plano tangente à superfície média no ponto em questão, são coincidentes com as direcções principais de curvatura no mesmo ponto.

Conforme estipulado pela equação de equilíbrio (2.27), cuja validade não se limita a cascas de revolução, a magnitude dos esforços normais ao longo das direcções principais, responsáveis pelo equilíbrio da força externa perpendicular à superfície média da casca, é proporcional à curvatura da casca segundo as mesmas direcções.

Posto isto, é de grande interesse, na análise de cascas em que se estabelecem equilíbrios de membrana, a determinação das direcções e magnitudes das curvaturas principais em vários pontos da superfície média. A rede de curvas ortogonais, tangente em cada ponto às direcções principais dos esforços de membrana, constitui a rede de isostáticas do equilíbrio de membrana [11] e o andamento desta pode ser avaliado visualizando as direcções principais de curvatura em vários pontos da superfície média da casca.

Em estruturas cuja relação t/R não ultrapasse 0,01 [11], quando as condições de contorno ou de ligação não possibilitem o estabelecimento de um equilíbrio de membrana, a

perturbação causada pela introdução destas condições de contorno será tanto maior quanto maior for a relação t/R , sendo realístico considerar que fora da zona de perturbação o equilíbrio de membrana é representativo dos esforços que ocorrem na casca. Na relação t/R , t é a espessura da casca e R é o menor raio de curvatura, medido no plano osculador definido por uma das direcções principais de curvatura.

2.13.2 Curvas espaciais

Num espaço bidimensional, a curvatura é definida por um escalar [16]. Num espaço tridimensional, por sua vez, a curvatura é descrita por um vector, cuja intensidade e magnitude indicam em que medida a superfície se afasta de uma superfície plana [16]. A magnitude do vector depende da direcção da curva considerada [16]. Por este motivo, a curvatura, num ponto da superfície, é um tensor de segunda ordem [16]. Interessa, porém, iniciar o estudo da curvatura com base em curvas espaciais, que não estejam ligadas a nenhuma superfície em particular.

Uma curva que exista no espaço, mas que não esteja contida em nenhum plano, recebe a designação de curva espacial [16]. Em cada ponto ao longo da curva espacial, pode ser definido um referencial local com três eixos coordenados (figura 2.50) [16]. Este referencial é definido por três vectores unitários.

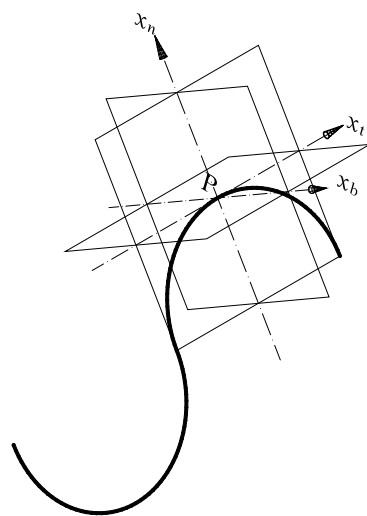


Figura 2.50 - Curva espacial e triedro móvel sobre a curva no ponto P (adaptado de [16]).

O primeiro vector unitário (x_t) tem direcção tangente à curva num ponto P e, por isso, é designado por vector tangente [16]. O segundo vector (x_n) é perpendicular a este e está contido num plano que, localmente, contém a curva na vizinhança do ponto P [16]. Este plano recebe, usualmente, a designação de plano osculador [16] e é definido por dois pontos da curva que se aproximam infinitamente, por lados opostos, do ponto P . O vector x_n é

designado por vector normal [16]. Perpendicular ao plano osculador, o terceiro vector (x_b) completa o triedro móvel ao longo da curva e é denominado por vector binormal [16].

A curvatura de uma curva espacial (χ) corresponde à taxa de variação da direcção do vector tangente, ao longo da distância s , medida ao longo da curva [16]. Por outras palavras, a curvatura é uma medida do desvio da curva em relação a uma linha recta, num determinado ponto [16]. No plano osculador, a curva espacial, nas vizinhanças do ponto P , é um arco de círculo (figura 2.51) cujo raio, também inscrito no plano osculador, é denominado por raio de curvatura [16].

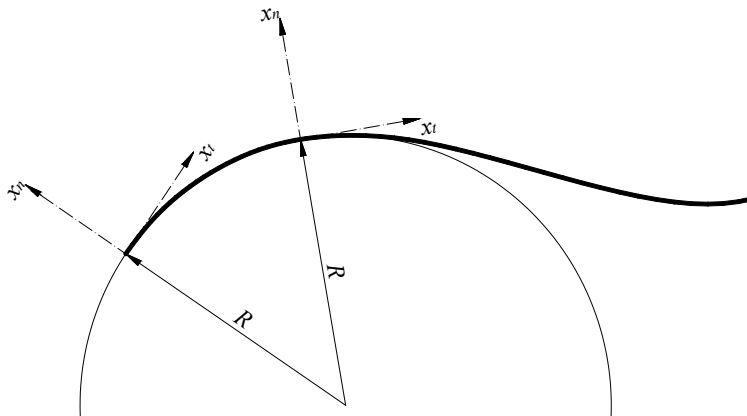


Figura 2.51 - Arco de círculo inscrito no plano osculador, nas vizinhanças de um determinado ponto da curva espacial, e indicação da variação do vector x_t ao longo de s . (adaptado de [16]).

A curvatura pode então ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\chi = \frac{dx_t}{ds} = \frac{1}{R} \quad (2.77)$$

em que χ é a curvatura e R é o raio de curvatura, x_t é o vector unitário com direcção tangente à curva e s é a coordenada ao longo da curva.

O sinal da curvatura é positivo, se o centro do arco de círculo se localizar no lado negativo do eixo normal à curva, definido pelo vector x_n .

A torção de uma curva espacial (Ψ) é a taxa de variação da direcção do vector perpendicular ao plano osculador, ao longo da distância s , medida ao longo da curva [16]:

$$\frac{dx_b}{ds} = -\Psi \cdot x_n \quad (2.78)$$

onde x_b e x_n são os vectores binormal e normal, respectivamente, s é a coordenada ao longo da curva e Ψ é a torção da curva espacial.

Se a torção for nula, a curva está contida num plano [16].

2.13.3 Curvas de superfície

Na análise de curvas contidas numa superfície, é usual estabelecer um outro referencial (figura 2.52). Este referencial é definido por um vector tangente à curva, x_t , por um vector normal à superfície, x_N , e por um vector perpendicular aos dois anteriores, x_T [16]. O plano formado pelos vectores x_t e x_T é o plano tangente à superfície no ponto em questão (figura 2.52.a) [16].

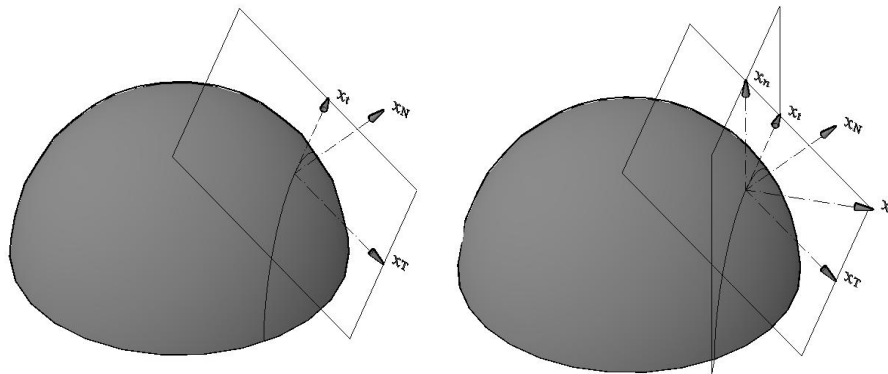


Figura 2.52 (a) e (b) - Curva de superfície, com representação do plano tangente à superfície (a) e com representação daquele plano e do plano osculador da curva (b) (adaptado de [16]).

Numa curva de superfície, existem sempre duas formas de descrever as suas propriedades locais: através do referencial de curva de superfície ou através do referencial de curva espacial. Estes dois referenciais têm um eixo em comum, aquele definido pelo vector x_t [16]. Por este motivo, um referencial pode ser obtido a partir do outro, por uma rotação em torno do eixo x_t (figura 2.53.a) [16].

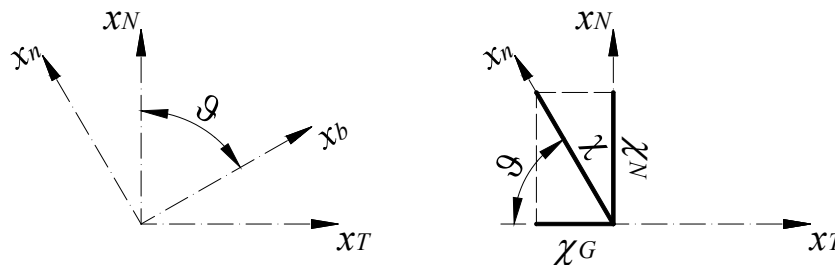


Figura 2.53 (a) e (b) - Referenciais de curva espacial e de curva de superfície (a) e componentes da curvatura neste último referencial (b) (adaptado de [16]).

O ângulo \mathcal{G} corresponde à rotação necessária, para que o eixo normal à superfície coincida com o eixo binormal do referencial de curva espacial [16]. Se $\mathcal{G} = 90^\circ$, o plano osculador da curva contém a normal à superfície. Se $\mathcal{G} = 0^\circ$, a superfície em estudo é plana.

A curvatura pode ser decomposta, no referencial de curva de superfície, em duas componentes (figura 2.53.b). A componente segundo o eixo normal à superfície, χ_N , é a curvatura normal [16]. Por seu turno, a componente segundo o eixo x_T , χ_G , é designada por curvatura geodésica. Esta componente corresponde à projecção da curvatura no plano tangente à superfície [16]. Com base nas definições anteriores, podem ser estabelecidas as seguintes relações:

$$\chi_N = \chi \cdot \text{sen } \mathcal{G} \quad (2.79)$$

$$\chi_G = \chi \cdot \text{cos } \mathcal{G} \quad (2.80)$$

$$\chi^2 = \chi_N^2 + \chi_G^2 \quad (2.81)$$

em que χ_N e χ_G são as componentes normal e geodésica da curvatura χ e \mathcal{G} é o ângulo entre o eixo normal à superfície e o eixo binormal do referencial de curva espacial.

A torção de uma curva de superfície (Ψ_G), também designada por torção geodésica [16], é dada pela seguinte expressão:

$$\Psi_G = \Psi + \frac{d\mathcal{G}}{ds} \quad (2.82)$$

onde Ψ_G é a torção geodésica, Ψ é a torção da curva espacial, \mathcal{G} é o ângulo entre o eixo normal à superfície e o eixo binormal do referencial de curva espacial e s é a coordenada ao longo da curva.

A torção geodésica corresponde à soma da torção da curva espacial com a variação da rotação relativa dos dois triedros, por unidade de comprimento medido ao longo da curva.

2.13.4 Curvatura e torção num ponto de uma superfície

A curvatura e a torção de um ponto numa superfície referem-se, usualmente, às mesmas grandezas medidas em curvas da superfície que existem em planos que contém a normal à superfície no mesmo ponto [16].

Um ponto P de uma superfície é intersectado por infinitas curvas existentes em planos que contêm a normal à superfície, também designados por secções normais (figura 2.54).



Figura 2.54 - Ponto de uma superfície intersectado por várias curvas existentes em planos que contêm a normal à superfície, no mesmo ponto.

Uma vez que todas estas curvas estão contidas em planos, segundo a análise como curvas espaciais, têm torção (Ψ) nula [16]. Pelo facto do plano osculador das curvas conter o vector normal à superfície no ponto P , a curvatura é igual à curvatura normal neste ponto ($\mathcal{G} = 90^\circ$) [16]. Nos pontos ao longo destas curvas, afastados do ponto P , o plano osculador pode não conter o vector normal à superfície. Nestas curvas, embora a torção (Ψ) seja nula, a torção geodésica (Ψ_G) não o será, pelo facto do ângulo entre os triedros (\mathcal{G}) variar ao longo das mesmas. Existirão apenas duas curvas ortogonais que intersectam P e que, simultaneamente, apresentam torção geodésica nula [16]. Ao longo de cada uma destas duas curvas, o plano osculador contém sempre a normal à superfície.

Os valores extremos de curvatura estão associados às direcções ortogonais destas duas curvas, que recebem a designação de direcções principais de curvatura [16]. As curvaturas nestas direcções são as curvaturas principais, χ_I e χ_{II} , sendo $\chi_I \geq \chi_{II}$. Os valores das curvaturas principais podem apresentar sinais opostos. A rede de curvas ortogonais sobre a superfície, tangente em cada ponto às direcções principais de curvatura, é denominada por linhas de curvatura da superfície [11]. As direcções principais de curvatura, em cada ponto da superfície, definem a direcção dos planos osculadores que contêm os raios de curvatura principais. Estes planos osculadores são também designados por secções normais principais da superfície [11]. Conforme referido, as curvas que definem as direcções principais, num ponto da superfície, apresentam torção geodésica nula.

Sempre que um determinado ponto de uma superfície apresentar valores de curvaturas principais com o mesmo sinal, a superfície nas imediações do ponto é côncava ou convexa [16]. Se as curvaturas principais tiverem sinais opostos, o ponto está localizado numa superfície do tipo sela [16].

Se uma das curvaturas principais for nula e a outra for diferente de zero, a superfície nas imediações do ponto é cilíndrica [16]. Os pontos em que as curvaturas principais apresentam valores e sinais iguais recebem a designação de pontos umbílicos ou isotrópicos de curvatura [11]. Nestes pontos, o valor da curvatura normal é independente da direcção da secção normal considerada [11]. Todos os pontos de uma esfera cumprem esta condição.

O teorema de Euler [11] [16] configura a seguinte expressão:

$$\chi_N = \chi_I \cdot \cos^2 \zeta + \chi_{II} \cdot \sin^2 \zeta \quad (2.83)$$

em que χ_N é a curvatura normal, no ponto P , de uma curva contida numa secção normal, que faz o ângulo ζ com a secção normal principal onde se atinge a curvatura principal χ_I , no mesmo ponto, sendo χ_{II} a outra curvatura principal.

A torção de uma curva contida numa secção normal é nula, no entanto, a torção geodésica pode ser obtida pela seguinte expressão, conhecida como a fórmula de Sophie Germain [16]:

$$\Psi_G = (\chi_{II} - \chi_I) \cdot \sin \zeta \cdot \cos \zeta \quad (2.84)$$

onde Ψ_G é a torção geodésica de uma de uma curva contida numa secção normal, que faz o ângulo ζ com a secção normal principal onde se atinge a curvatura principal χ_I , sendo χ_{II} a outra curvatura principal.

2.13.5 Círculo de Mohr para a curvatura e torção num ponto de uma superfície

As equações anteriores podem ser reescritas para um argumento igual a $2 \cdot \zeta$, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\chi_N = \frac{1}{2} \cdot (\chi_I + \chi_{II}) + \frac{1}{2} \cdot (\chi_I - \chi_{II}) \cdot \cos(2 \cdot \zeta) \quad (2.85)$$

$$\Psi_G = -\frac{1}{2} \cdot (\chi_I - \chi_{II}) \cdot \sin(2 \cdot \zeta) \quad (2.86)$$

em que χ_N é a curvatura normal e Ψ_G é a torção geodésica, no ponto P , de uma curva contida numa secção normal, que faz o ângulo ζ com a secção normal principal onde se atinge a curvatura principal χ_I , no mesmo ponto, sendo χ_{II} a outra curvatura principal.

Estas equações exprimem as coordenadas (χ_N, Ψ_G) , em função do ângulo ζ , de um ponto contido no círculo de Mohr para a curvatura e torção num ponto da superfície (figura 2.55).

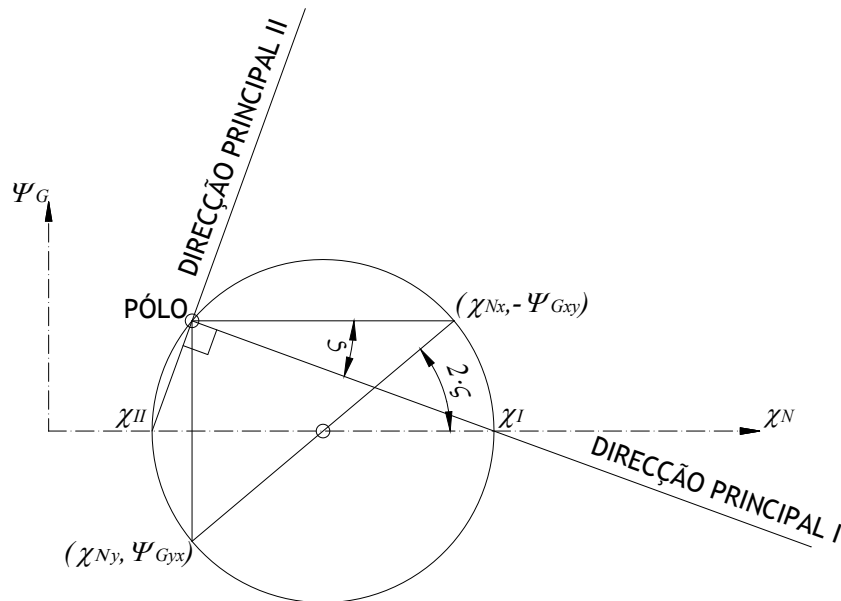


Figura 2.55 - Círculo de Mohr para a curvatura e torção num ponto de uma superfície (adaptado de [16]).

Como é visível no círculo de Mohr, os pontos correspondentes às curvaturas principais, que são também os pontos em que se atingem os valores extremos para a curvatura normal, apresentam torção geodésica nula. As curvas com maior torção geodésica, num ponto da superfície, estão contidas em secções normais que formam um ângulo de 45° com as secções normais principais [16]. O círculo de Mohr, para um ponto umbílico de curvatura, corresponde a um único ponto.

O centro do círculo de Mohr é dado pela seguinte expressão:

$$C = \left(\frac{\chi_I + \chi_{II}}{2}, 0 \right) = \left(\frac{\chi_{Nx} + \chi_{Ny}}{2}, 0 \right) \quad (2.87)$$

onde C são as coordenadas do centro do círculo de Mohr, χ_I e χ_{II} são as curvaturas principais e χ_{Nx} e χ_{Ny} são as curvaturas normais das curvas contidas nas secções normais com direcção x e y , respectivamente, sendo estas direcções ortogonais entre si.

Por sua vez, o raio do círculo de Mohr pode ser obtido da seguinte forma:

$$R = \frac{\chi_I - \chi_{II}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\chi_{Nx} - \chi_{Ny}}{2} \right)^2 + \Psi_{Gxy}^2} \quad (2.88)$$

em que R é o raio do círculo de Mohr, χ_I e χ_{II} são as curvaturas principais, χ_{Nx} e χ_{Ny} são as curvaturas normais das curvas contidas nas secções normais com direcção x e y , respectivamente, sendo estas direcções ortogonais entre si e Ψ_{Gxy} é a torção geodésica destas últimas curvas.

O pólo do círculo de Mohr permite relacionar as direcções principais de curvatura com as direcções das secções normais que contêm as outras curvas. Se se conhecerem as curvaturas normais e as torções geodésicas de duas curvas ortogonais, contidas nas secções normais segundo x e y , que intersectam o ponto P , é possível traçar o círculo de Mohr. Associando ao ponto de curvatura χ_{Nx} um valor simétrico da torção geodésica, o pólo é facilmente encontrado traçando uma recta horizontal a partir deste ponto. A intersecção desta recta com o círculo de Mohr resulta no pólo. Unindo o pólo com o ponto correspondente à curvatura máxima χ_I , o sentido e o valor do ângulo ζ é a rotação que permite obter a direcção principal de curvatura χ_I , no plano tangente à superfície no ponto em estudo, em relação à direcção da secção normal que contém a curva com curvatura normal χ_{Nx} . Repare-se que as torções geodésicas de duas curvas ortogonais que cruzam um ponto devem ser simétricas.

As curvaturas principais e o ângulo ζ podem ser obtidos a partir das seguintes expressões:

$$\chi_I = \frac{\chi_{Nx} + \chi_{Ny}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\chi_{Nx} - \chi_{Ny}}{2}\right)^2 + \Psi_{Gxy}^2} \quad (2.89)$$

$$\chi_{II} = \frac{\chi_{Nx} + \chi_{Ny}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\chi_{Nx} - \chi_{Ny}}{2}\right)^2 + \Psi_{Gxy}^2} \quad (2.90)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\Psi_{Gxy}}{\frac{\chi_{Nx} - \chi_{Ny}}{2}} \right) \quad (2.91)$$

em que χ_I e χ_{II} são as curvaturas principais, χ_{Nx} e χ_{Ny} são as curvaturas normais das curvas contidas nas secções normais com direcção x e y , respectivamente, sendo estas direcções ortogonais entre si, Ψ_{Gxy} é a torção geodésica destas últimas curvas e ζ é o ângulo entre a secção normal principal onde se atinge a curvatura principal χ_I e a secção normal que contém a curva com curvatura χ_{Nx} .

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo é descrita a metodologia adoptada nos diversos estudos realizados. Inicialmente, é apresentada a metodologia utilizada na elaboração do programa de cálculo numérico de curvaturas principais. Seguidamente, é descrito como foi conduzida a técnica experimental do método da membrana. Por último, é indicada a metodologia adoptada na análise de cascas de revolução e de barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares.

3.1 Cálculo numérico das curvaturas principais numa superfície

Dada a relação existente entre as curvaturas de uma superfície e a rede de isostáticas do equilíbrio de membrana, que se pode estabelecer na mesma superfície para um determinado carregamento e determinadas condições de apoio, o cálculo das direcções e da magnitude das curvaturas principais, em vários pontos da superfície, pode revelar-se bastante útil. No presente trabalho foi estabelecida uma rotina de cálculo numérico das curvaturas principais a partir de um conjunto de pontos organizado numa malha ortogonal. A linguagem de programação utilizada foi o Scilab [33].

Cada ponto da malha ortogonal constitui o ponto central de um elemento delimitado pelo conjunto de oito pontos à volta daquele. Com base em três pontos contidos no mesmo plano é possível traçar uma curva. Obtendo duas curvas ortogonais, as tangentes destas curvas no ponto central do elemento permitem a determinação da normal à superfície nesse ponto. O vector normal à superfície, no ponto central do elemento, é obtido pelo produto externo dos dois vectores tangentes à superfície no mesmo ponto.

Um novo referencial pode ser estabelecido com base num dos vectores tangente à superfície, no vector normal à superfície e num terceiro vector, perpendicular ao plano formado por estes dois. Todas as coordenadas dos pontos pertencentes a cada elemento podem ser referidas a cada um dos referenciais associados aos respectivos pontos centrais. Repare-se que estes referenciais são sempre perpendiculares à superfície, no ponto central do respectivo elemento.

A partir daqui, o cálculo da curvatura normal e da torção geodésica, de duas curvas ortogonais que se cruzam no ponto central do elemento, pode ser realizado com recurso às funções de forma da família “Serendipity”, para um elemento isoparamétrico de oito nós, habitualmente utilizado no método dos elementos finitos.

Conhecendo a curvatura normal e a torção geodésica de duas curvas ortogonais, as direcções principais de curvatura, no ponto de intersecção das curvas, podem então ser determinadas recorrendo ao círculo de Mohr. A rotina de cálculo estabelecida tem um último módulo que representa as direcções principais de curvatura nos pontos utilizados no cálculo.

3.2 Técnica experimental do método da membrana

A técnica experimental do método da membrana, apesar das condicionantes a que está sujeita, constitui um caminho de obtenção de uma superfície funicular das cargas actuantes, ou seja, uma superfície em que o equilíbrio se estabelece exclusivamente à custa de esforços de tracção. Habitualmente, esta técnica levava em conta a acção da pressão hidrostática e do peso próprio. Para além disso, o equilíbrio funicular era estudado para uma determinada inclinação do plano que continha a linha do contorno de inserção da barragem no vale. Esta inclinação ocorria normalmente para o lado de jusante [12].

Uma vez que a pressão hidrostática é a acção maioritariamente responsável pelas tensões máximas verificadas na superfície média de uma barragem abóbada, é de prever que uma casca especialmente concebida para resistir por compressão a esta acção apresente uma espessura tal que o peso próprio não constitua uma acção relevante. É de todo o interesse utilizar a técnica experimental do método da membrana para determinar qual a forma da superfície funicular da pressão hidrostática, averiguando também como é que esta varia em função da inclinação do plano que contém o contorno de inserção da superfície no vale.

No presente trabalho, sempre que se analisam barragens abóbada, o sistema de eixos utilizado, $OXYZ$, é ortonormado e tem origem no ponto mais baixo da geometria da superfície média (figura 3.1). A geometria da superfície média é delimitada pelo coroamento e pela linha de inserção da barragem no vale. O eixo Z tem direcção vertical e o sentido positivo ascendente. O eixo Y , com direcção coincidente com a linha de talvegue, tem sentido positivo para jusante. O plano YOZ é, em geral, um plano de simetria da barragem. O eixo X , perpendicular aos dois anteriores, tem sentido positivo por forma a que o produto externo entre um versor positivo com direcção deste eixo e um versor positivo com direcção do eixo Y , resulte num vector com direcção do eixo Z e sentido positivo. A identificação da margem esquerda e da margem direita do rio é realizada visualizando uma projecção da barragem no plano XOY , com o sentido positivo do eixo Y (sentido de jusante) voltado para cima.

Com o intuito de avaliar os parâmetros anteriormente referidos foi construída uma montagem adequada para o efeito e foram realizadas medições das superfícies funiculares obtidas, com recurso a um teodolito electrónico. As superfícies funiculares foram obtidas sempre para o NMC.

No que se refere à inclinação do plano de inserção foram abordadas três situações distintas: um plano vertical, um plano com uma inclinação para jusante de 45° com a vertical e, por último, um plano com uma inclinação para montante de 25° com a vertical.

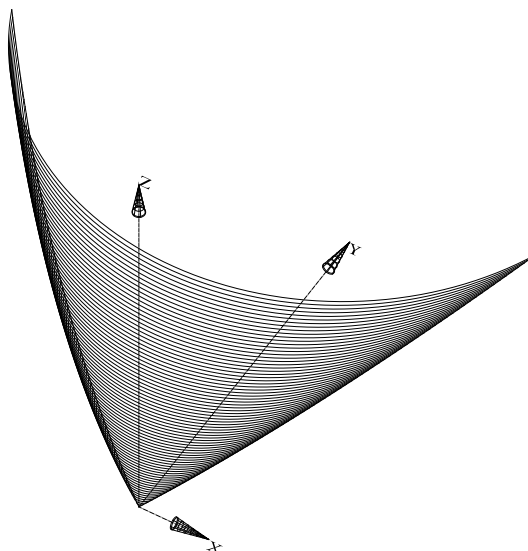


Figura 3.1 - Sistema de eixos utilizado nas barragens em estudo.

Pretende-se averiguar qual a forma das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática e de que modo varia a curvatura destas curvas com a profundidade, em relação ao nível máximo de água.

3.3 Cascas de revolução

Com o intuito de averiguar o efeito das variações uniformes de temperatura em cascas de dupla curvatura, foram analisados dois conjuntos de cascas de revolução.

O primeiro conjunto consiste numa casca esférica de revolução, cuja geometria da superfície média é um quarto de esfera. O raio da esfera em questão é de 50 metros. A casca está unicamente apoiada num bordo, encontrando-se o bordo superior livre, como numa barragem. Desta forma, a estrutura em estudo é semelhante à estrutura de uma barragem, cujo contorno de inserção num vale cilíndrico está contido num plano vertical.

Dentro deste grupo, as duas cascas analisadas, encontram-se ambas encastradas no terreno, mas uma possui uma espessura uniforme de um metro e a outra uma espessura uniforme de três metros. Desta forma será possível avaliar o efeito do espessamento quando actuem variações uniformes de temperatura.

O segundo conjunto analisado é composto por cascas de revolução com meridianos circulares e parabólicos, encastradas ao longo da totalidade dos respectivos bordos. Uma das cascas é constituída por meridianos com a forma de um círculo, cuja abertura ao centro é de 180° . Os meridianos circulares da outra casca possuem uma abertura ao centro de $133,56^\circ$.

Esta última casca é mais abatida do que a anterior e possui um ângulo de abertura ao centro igual àquele que permite otimizar o volume de um arco circular, para a acção de uma pressão radial uniforme. O raio da esfera que coincide com a superfície média das referidas cascas é de 50 metros. Por último, a casca com o meridiano parabólico tem o mesmo vão e a mesma elevação da casca com o meridiano esférico com uma abertura ao centro de $133,56^\circ$. Com este conjunto de cascas pretende-se averiguar os efeitos da temperatura uniforme em cascas de revolução com diferentes formas para o meridiano. Estão em estudo duas cascas esféricas com elevações diferentes e duas cascas com o mesmo vão e a mesma elevação, mas com curvas meridionais distintas.

O sistema de eixos ortonormado $OXYZ$ é definido de maneira a que o eixo de revolução coincida com eixo Y . O sentido positivo deste eixo aponta para a convexidade do folheto médio da casca. O primeiro quadrante do plano XOY é aquele que contém o meridiano gerador da superfície média.

Em termos de condições de apoio, considera-se este conjunto de cascas encastrado ao longo dos bordos, porque na situação de restrição exclusiva de deslocamentos lineares nos bordos, segundo as direcções perpendicular e tangencial contidas no plano tangente à superfície média da casca, não se verifica qualquer esforço quando actuam variações uniformes de temperatura, pelo facto da casca não se encontrar restringida, podendo-se deformar livremente. As cascas em estudo possuem uma espessura uniforme, mas foram abordadas duas situações: espessuras uniformes de um metro e de três metros.

Com o intuito de analisar numericamente os esforços, deslocamentos e tensões nas cascas recorreu-se ao programa de cálculo automático LUSAS Version 14. A variação uniforme de temperatura considerada corresponde a um abaixamento de 20°C . As cascas anteriormente descritas são designadas conforme se indica no Quadro 3.1.

Designação	Características
CASCA1	Casca de revolução esférica, com um bordo livre, encastrada nos restantes bordos e com um metro de espessura.
CASCA2	Casca de revolução esférica, com um bordo livre, encastrada nos restantes bordos e com três metros de espessura.
CASCA3	Casca de revolução esférica, encastrada em todos os bordos, com meridianos circulares com uma abertura ao centro de 180° e com um metro de espessura.
CASCA4	Casca de revolução esférica, encastrada em todos os bordos, com meridianos circulares com uma abertura ao centro de 180° e com três metros de espessura.
CASCA5	Casca de revolução esférica, encastrada em todos os bordos, com meridianos circulares com uma abertura ao centro de $133,56^\circ$ e com um metro de espessura.

Designação	Características
CASCA6	Casca de revolução esférica, encastrada em todos os bordos, com meridianos circulares com uma abertura ao centro de $133,56^\circ$ e com três metros de espessura.
CASCA7	Casca de revolução, encastrada em todos os bordos, com meridianos parabólicos e com um metro de espessura.
CASCA8	Casca de revolução, encastrada em todos os bordos, com meridianos parabólicos e com um três metros de espessura.

Quadro 3.1 - Designação e características diferenciadoras das cascas de revolução em estudo.

3.4 Barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares

O presente trabalho limitou o estudo de formas de barragens abóbada àquelas que se situam em vales em “V”. Para tal, foi necessário estabelecer uma metodologia para obtenção de formas geométricas. As estruturas, com formas geométricas determinadas a partir dessa metodologia, foram posteriormente alvo de uma análise de esforços, deformações e tensões. As barragens cuja geometria foi determinada no presente trabalho têm em comum a altura máxima, de 75 metros, e a tipologia do vale em que se inserem, um vale em “V” cujas encostas apresentam uma inclinação de 45° com a vertical. Dadas as condições topográficas, todas as barragens são simétricas em relação a um plano vertical que contém o perfil central.

O método da membrana, quer pela via experimental quer pela via numérica, permite obter uma forma geométrica que, quando submetida às acções da pressão hidrostática e do peso próprio, apresenta somente compressões ao longo das direcções principais dos esforços, desde que as condições de apoio introduzam apenas esforços contidos no plano tangente à superfície média da casca. O arbítrio de vários parâmetros e a necessidade de recorrer ao peso próprio para obter uma superfície funicular poderá condicionar a forma final obtida. O estabelecimento das espessuras é realizado com base em barragens anteriormente construídas ou por forma a que o estado de tensão originado pela actuação do peso próprio, somado àquele provocado pela pressão hidrostática, resulte em compressões generalizadas, cujo valor não ultrapassa um determinado limite.

Os métodos de optimização dependem sempre da forma inicial atribuída à barragem, pelo que estão condicionados logo à partida na procura de novas formas.

O dimensionamento de barragens através de fórmulas estatísticas, estabelecidas com base em obras anteriores, não tem em conta de forma directa nenhuma das acções que actuam na barragem que está a ser projectada, pelo que, não poderá ser este o caminho seguido para o estudo de novas formas geométricas para a barragem abóbada.

No presente trabalho não foi adoptada nenhuma das vias anteriormente mencionadas, estabelecendo-se uma metodologia, para obtenção de formas geométricas para a barragem, condicionada pela topografia do vale em estudo, pelas acções exteriores preponderantes e por razões relacionadas com a tecnologia de construção.

O facto de um vale em “V” “apertar” no sentido do talvegue é benéfico para a estrutura, pois a pressão hidrostática aumenta com a profundidade e a zona da barragem sujeita a pressões mais elevadas é também a menos extensa. É o mesmo raciocínio utilizado na concepção de uma torre que estreita à medida que cresce em altura, expondo uma menor área à elevada magnitude da força do vento que actua no topo da torre.

A fórmula dos tubos permite calcular a espessura de um arco, por forma a obter uma secção resistente à acção exterior da pressão hidrostática. Paralelamente, o estabelecimento da abertura ao centro do arco com um valor igual a $133,56^\circ$ permite obter o volume mínimo para vencer um determinado vão, para um determinado valor da tensão limite. A utilização da fórmula dos tubos, como critério de pré-dimensionamento da espessura da barragem, pressupõe que esta é uma estrutura composta por um conjunto de arcos independentes, o que não corresponde à realidade no caso de uma superfície média com dupla curvatura, no entanto, esta é a única via, de entre aquelas mencionadas no capítulo anterior, que tem em conta a magnitude das acções exteriores na determinação da espessura.

Outra questão pertinente é qual a forma a atribuir às curvas de nível da abóbada. No capítulo anterior verificou-se que a forma circular foi progressivamente abandonada, dando lugar a curvas em que a curvatura diminui do fecho dos arcos para os encontros. A razão de tal decisão prende-se maioritariamente com o facto das consolas verticais do método “trial-load” aumentarem de rigidez quanto mais afastadas estiverem do perfil central, no caso de um vale em “V”. O problema do fundamento desta decisão é o facto de se basear numa rede de arcos horizontais e consolas verticais que, na realidade, pode não corresponder às direcções principais dos esforços de membrana da casca. Resolveu-se então adoptar arcos circulares, uma vez que esta forma é efectivamente o antifunicular de uma pressão radial constante.

A geometria da barragem de arcos circulares foi obtida por forma a que a intersecção do arco com as encostas do vale, em todas as cotas, resultasse num ângulo de abertura ao centro de $133,56^\circ$.

Com base nestes pressupostos, foi possível definir o raio dos arcos a diferentes cotas. Com o intuito de estudar a sobreposição espacial dos vários arcos foi necessário estimar a espessura de cada um deles. Para tal, recorreu-se à fórmula dos tubos, estabelecendo-se uma tensão máxima de compressão do betão ($\sigma_{m\acute{a}x}$) de 5MPa. A partir da cota em que se atingiu a espessura máxima, até à base da barragem, foi adoptada sempre a mesma espessura, para facilitar o estudo do crescimento isolado dos blocos.

Consideraram-se arcos de espessura constante. Neste caso, a espessura é medida na direcção horizontal perpendicular às curvas de nível da superfície e não na direcção perpendicular à superfície média da barragem.

Com base nos parâmetros geométricos reunidos (R , φ , t), foi possível estudar o equilíbrio do crescimento isolado dos blocos, primeiro nas consolas laterais e por último na consola central. O critério que se seguiu consiste em verificar a limitação de tracções a 1 MPa nas secções críticas dos perfis e em limitar a inclinação máxima do eixo do perfil com a vertical a 45°. Para que o último objectivo seja atingido é recomendável que os perfis laterais tenham uma queda para montante o mais acentuada possível, por forma a não condicionar a queda para jusante do topo do perfil central.

O método inicialmente utilizado conduziu à obtenção de geometrias para as linhas médias dos perfis definidas por funções contínuas, mas com vários pontos de inflexão. Apenas o perfil mais próximo do encontro, que foi o primeiro a ser definido, não apresenta pontos de inflexão. Todos os restantes perfis, em que parte do seu traçado é condicionado pelos perfis anteriormente definidos, apresentam pontos de inflexão, o que não é conveniente. Esta situação deve-se ao facto de existirem várias variáveis de escolha arbitrária a influenciar a forma final de cada perfil e, conseqüentemente, a geometria final da barragem.

Um outro caminho para obtenção da geometria da superfície média da barragem, de arcos circulares de abertura constante, consistiu em definir a forma do perfil central e verificar o nível de tensões nas diferentes secções dos restantes perfis mais perto dos encontros. Desta forma, o perfil central foi definido como uma curva, onde se impõem o ângulo tangente na base e a excentricidade do ponto no topo, em relação ao ponto da base. Para a forma da curva da linha média do perfil central foi escolhida a parábola, pelo facto de ter uma expressão analítica simples, facilmente manipulável a partir do ângulo tangente numa extremidade e da excentricidade da outra extremidade.

Uma terceira via para definir a geometria da barragem foi testada. Consistia em definir a projecção no plano YOZ da linha de inserção da barragem no terreno. Se esta linha fosse uma parábola, bastaria escolher a flecha e o comprimento para defini-la e toda a geometria da superfície média da barragem ficaria também definida, uma vez que a linha de inserção determina as coordenadas das nascenças dos arcos, encontrando-se os raios e a abertura dos mesmos já definidos anteriormente.

Esta forma de definir a geometria da barragem mostrou-se pouco conveniente, pelo facto dos parâmetros utilizados não actuarem directamente na geometria de um dos perfis.

Foram estudadas quatro diferentes barragens de ângulo constante de curvas de nível circulares, tendo sido determinada a sua geometria com o auxílio de uma rotina numérica criada para esse efeito. No quadro 3.2 estão indicadas as características geométricas diferenciadoras destas barragens.

Designação	Ângulo de inclinação com a vertical da tangente à linha média do perfil central na base [°] β_B	Excentricidade do centro de gravidade do elemento ao nível do coroamento, em relação ao centro de gravidade do elemento da base do perfil central [m] d_C
DAM1	11,00	14,00
DAM2	0,00	0,00
DAM3	47,42	-81,61
DAM4	-15,00	-18,00

Quadro 3.2 - Designação e parâmetros geométricos diferenciadores das barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares.

Os sentidos positivos de β_B e d_C são indicados na figura 3.2.

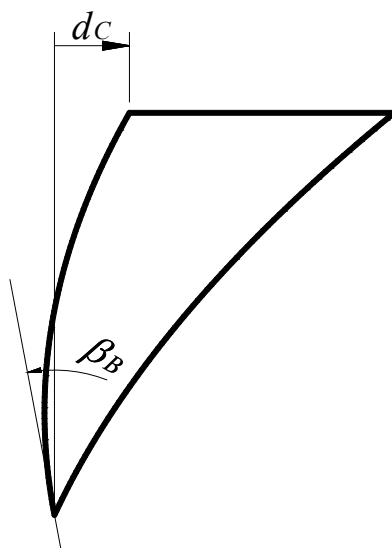


Figura 3.2 - Projecção no plano YOZ de uma barragem abóbada genérica, com indicação dos sentidos positivos de β_B e d_C .

A barragem DAM1 apresenta uma superfície média que segue os princípios gerais de concepção da maioria das barragens abóbada construídas até agora, ou seja, apresenta uma queda da base dos perfis para montante e uma inclinação do topo destes para jusante.

A geometria da barragem DAM2 segue os mesmos princípios de concepção da barragem anterior, mas apresenta uma linha média do perfil central recta. Ao colocar a linha média do perfil central da barragem do modelo DAM2 recta, pretendeu-se averiguar até que ponto esta alteração poderia colocar as curvaturas principais da superfície média ao longo das curvas de nível.

A barragem DAM3 apresenta uma superfície média cónica, cujo eixo de revolução é vertical. Embora esta barragem não seja exequível, o seu estudo pretende averiguar como se comporta uma casca, face às forças perpendiculares à sua superfície média, quando as curvaturas principais são tangentes às curvas de nível.

A barragem DAM4, com uma linha média do perfil central com convexidade voltada para jusante, possui uma geometria não usual para este tipo de estruturas, pretendendo-se estudar como se comporta uma casca cuja superfície média tem uma curvatura total (produto das duas curvaturas principais) negativa, face à acção da pressão hidrostática. Pretende-se também averiguar até que ponto esta geometria possibilita que a pressão hidrostática actue nos planos que contêm as linhas de curvatura.

As quatro barragens anteriormente descritas têm em comum a forma circular, a abertura constante e os raios das curvas de nível da superfície média, assim como a de espessura previamente determinada pela fórmula dos tubos.

Com o intuito de analisar numericamente os esforços, deslocamentos e tensões, nos modelos das barragens, cuja geometria foi previamente determinada, recorreu-se ao programa de cálculo automático LUSAS Version 14. As acções consideradas foram a pressão hidrostática para o NMC, o peso próprio e as variações de temperatura, incluindo também uma determinada variação de temperatura que simula o fenómeno da retracção. As acções térmicas foram apenas consideradas na barragem DAM1. Nesta casca foi também analisado o efeito do espessamento, tendo sido criado um modelo com a mesma geometria da superfície média de DAM1, mas com o triplo da espessura. Este modelo será designado por DAM1.1.

Considerar que as condições de apoio apenas introduzem esforços contidos no plano tangente à superfície média da casca pode não corresponder às restrições a que maioria das estruturas de barragens abóbada está sujeita. O estabelecimento de uma junta perimetral permite diminuir a rigidez da ligação do contorno de inserção da barragem no vale, no entanto, dificilmente possibilitará a reprodução das condições de apoio que ocorrem num equilíbrio de membrana da casca, pelo facto da junta perimetral não libertar as rotações em torno do eixo normal à linha de inserção, contido no plano tangente à superfície média da casca, e em torno do eixo perpendicular à superfície média da casca. Mesmo as rotações em torno da linha de inserção estão parcialmente restringidas, devido à espessura da barragem nesta zona.

Por este motivo, as quatro barragens de ângulo constante de arcos circulares foram analisadas com o contorno de inserção encastrado no vale.

No presente trabalho, a acção do peso próprio foi considerada como uma carga distribuída em toda a casca. O processo construtivo usual de uma barragem abóbada pressupõe o crescimento de vários blocos ou consolas individuais, que poderão estar ou não solidarizados uns com os outros. A injeção das juntas de contracção permite o funcionamento monolítico da casca. O estado de tensão instalado na casca, imediatamente depois das juntas serem injectadas, não é igual àquele que se verifica no modelo quando actua uma força distribuída com a magnitude do peso próprio sobre a mesma casca, pois o crescimento isolado dos blocos determinou previamente um estado de tensão. Esta situação não é contemplada neste trabalho, admitindo-se que o estado de tensão introduzido pelo peso próprio é aquele obtido pela actuação de uma força distribuída no modelo de casca completa.

A retracção foi considerada como uma variação uniforme negativa de temperatura de 10°C. O valor adoptado tem em conta que o fenómeno de retracção ocorre num ambiente com uma humidade relativa elevada. Para além disso, a fabricação e a composição do betão utilizado nas barragens abóbada é cuidada, tendo-se especial atenção aos fenómenos do calor de hidratação e da retracção. O calor de hidratação não foi considerado, pela existência de técnicas para atenuar este efeito e também pelo facto das juntas entre blocos só serem fechadas algum tempo depois da betonagem.

Com o intuito de encontrar o valor das reacções ao longo da direcção tangente ao contorno de inserção da barragem DAM1 e ao longo da direcção perpendicular àquela, contida no plano tangente à casca, quando actua a variação uniforme de temperatura equivalente á acção da retracção, foi necessário definir referenciais locais. Estas direcções coincidem com as reacções de apoio que introduzem apenas esforços contidos no plano tangente à superfície ilustrada na figura 3.3. Esta superfície é limitada por duas curvas, em níveis diferentes, excêntricas e com raios diferentes. Cada curva tem um ângulo de abertura ao centro idêntico (133,56°). Esta superfície é equivalente a uma fatia da barragem de ângulo constante, limitada por duas curvas de nível circulares.

O plano tangente à superfície média, junto de um dos bordos laterais, contém as duas rectas perpendiculares a cada um dos raios das semi-circunferências no plano destas. Desta forma, é possível definir um referencial em que a direcção do eixo X é tangente ao bordo e a direcção do eixo Y é normal ao bordo e está contida no plano tangente à superfície média. O eixo Z , representado na figura 3.3.d, é normal à superfície média.

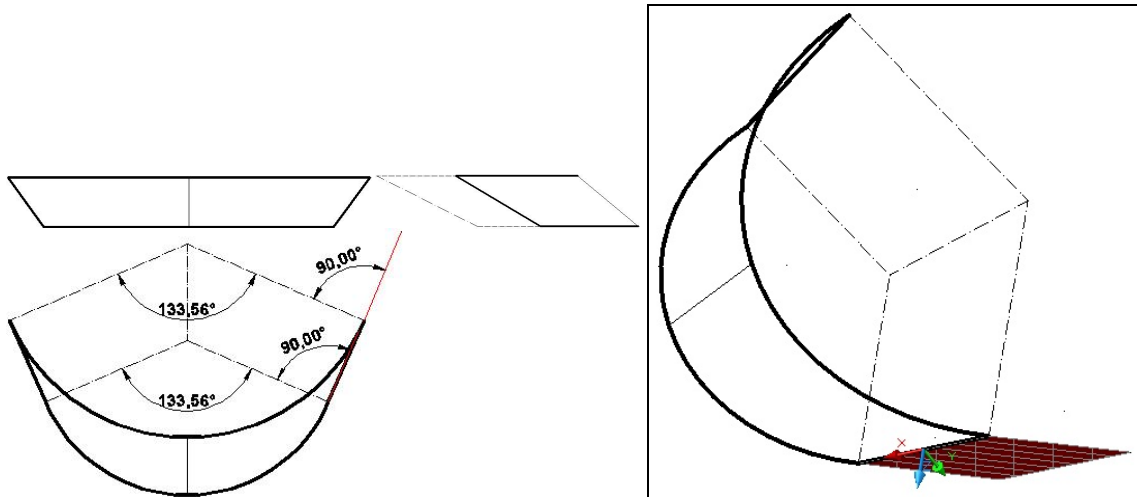


Figura 3.3 (a), (b), (c) e (d) - Superfície média da barragem de ângulo constante, delimitada por duas curvas de nível circulares - alçado principal frontal(a), alçado lateral esquerdo (b), planta com contagem de ângulos (c) e perspectiva com indicação do plano tangente à superfície no bordo e das direcções das reacções tangencial (X), normal (Y) e transversa (Z) (d).

A acção da temperatura, devida às condições ambientais que rodeiam a barragem, foi considerada tendo em conta os resultados obtidos na observação da barragem do Cabril [32], conforme exposto no capítulo anterior, tendo-se considerado que a temperatura do betão, no momento do fecho das juntas, era igual a 10°C . Tendo em consideração o capítulo anterior (c. 2.8.2), o diagrama de variações de temperatura nas faces de montante e de jusante, no mês de Junho de 1956, é ilustrado na figura 3.4.

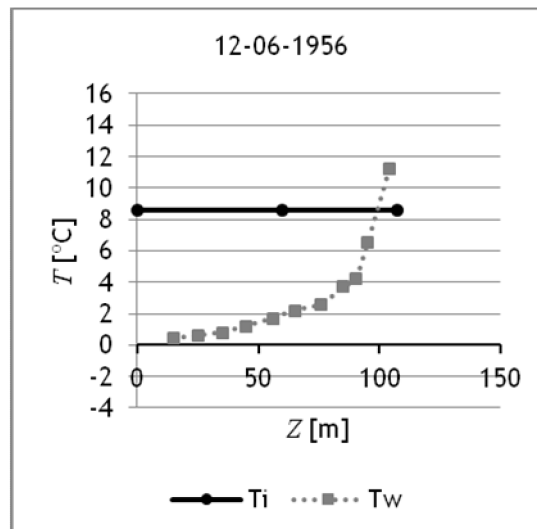


Figura 3.4 -Variações de temperatura, em função da cota, para vários pontos na superfície a um metro do paramento de jusante (T_i) e na água da albufeira da barragem do Cabril (T_w), em Junho de 1956.

Com base na figura anterior, considerou-se um diagrama de variações de temperatura, nas faces de montante e de jusante da barragem DAM1, igual àquele ilustrado na figura 3.5.

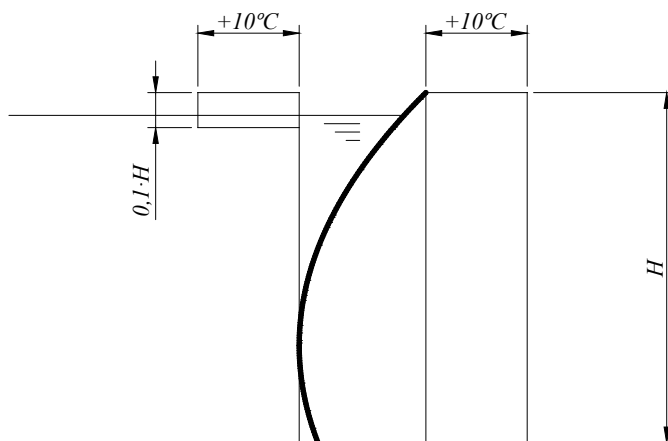


Figura 3.5 - Diagrama adoptado para as variações de temperatura nas faces de montante e de jusante de uma barragem.

Paralelamente, uma malha de pontos ortogonal em planta, coincidente com a geometria da superfície média de cada uma das barragens em estudo, foi introduzida no programa de cálculo numérico de curvaturas PCURV, com o intuito de avaliar as curvaturas principais da casca.

Capítulo 4

Cálculo Numérico das Curvaturas Principais numa Superfície

4.1 Entrada de dados

O programa PCURV só calcula as curvaturas nos pontos de uma superfície representada por uma malha de pontos ortogonal, quando vista em planta. O fluxograma do programa de cálculo numérico de curvaturas principais pode ser consultado em anexo (A.3).

O conjunto de dados a ser introduzido pelo utilizador corresponde às coordenadas dos pontos, aos números de linhas e colunas da malha e aos valores extremos das coordenadas X e Y . As coordenadas X e Y são aquelas que definem a planta da malha de pontos, sendo Z a coordenada ortogonal ao plano XOY .

As coordenadas dos pontos devem ser introduzidas no programa segundo uma ordem específica. A cada ponto deve corresponder um número que identifica a sua posição na sequência que a seguir se apresentará. As primeiras coordenadas deverão corresponder ao ponto que, visto em planta (projecção no plano XOY), esteja localizado no canto inferior esquerdo. A este ponto corresponderá o índice número um. A partir daqui, a ordem de introdução de coordenadas deverá prosseguir para os pontos imediatamente à direita. Finda a primeira linha, as coordenadas a introduzir correspondem às do ponto mais à esquerda da linha imediatamente acima. Deverá proceder-se desta forma até ao último ponto.

Existem superfícies cuja projecção no plano XOY não corresponde a um quadrilátero rectângulo (um quadrado ou um rectângulo), como é por exemplo o caso da esfera. Nestes casos, a malha ortogonal de pontos deve ser estabelecida na mesma, sendo atribuído um índice negativo, mas cujo módulo respeita a sequência, a todos os pontos que estejam contidos na malha, mas que não façam parte da superfície em estudo. A estes pontos são atribuídas as coordenadas X e Y correspondentes e uma coordenada Z nula.

4.2 Ligações nodais

A subrotina designada por POSIT ordena os índices dos pontos numa matriz (LPOSI). A disposição dos índices nesta matriz é igual à disposição dos correspondentes pontos na malha ortogonal. Este procedimento prepara todos os dados necessários para a criação da matriz LNODS. Esta matriz agrupa os índices dos pontos por cada elemento. Cada linha da matriz contém os nós que constituem um elemento.

A numeração dos nós de um elemento segue uma ordem específica, descrita na figura 4.1.

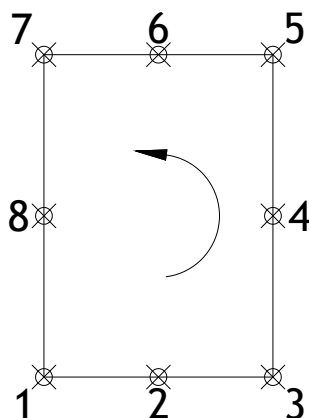


Figura 4.1 - Sequência de numeração dos nós de um elemento.

Todos os elementos nos bordos da malha de pontos possuem nós aos quais não corresponde ponto algum. Nestes casos, aos nós em questão, é-lhes atribuído um ponto de índice 0.

4.3 Curvatura normal e torção geodésica

4.3.1 Determinação do vector normal à superfície

A subrotina CURVE calcula a curvatura normal e a torção geodésica de duas curvas ortogonais no ponto central de cada elemento. Os elementos considerados são aqueles que não contêm nós identificados por um índice nulo ou menor do que zero. Desta forma, todos os pontos que pertencem à malha, mas não fazem parte da superfície, são excluídos do cálculo.

Inicialmente é necessário referir as coordenadas dos nós do elemento ao ponto central do mesmo. Esta operação é efectuada subtraindo as coordenadas do ponto central, às coordenadas dos nós do elemento. Num caso mais geral, uma transformação linear de coordenadas, incluindo rotação dos eixos e translação da origem do sistema de referência, é efectuada de acordo com a seguinte operação:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(e_{X'} \wedge e_X) & \cos(e_{X'} \wedge e_Y) & \cos(e_{X'} \wedge e_Z) \\ \cos(e_{Y'} \wedge e_X) & \cos(e_{Y'} \wedge e_Y) & \cos(e_{Y'} \wedge e_Z) \\ \cos(e_{Z'} \wedge e_X) & \cos(e_{Z'} \wedge e_Y) & \cos(e_{Z'} \wedge e_Z) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{O'} \\ Y_{O'} \\ Z_{O'} \end{bmatrix} \right) \quad (4.1)$$

em que (X', Y', Z') são as coordenadas de um ponto no referencial $O'X'Y'Z'$, (X, Y, Z) são as coordenadas do mesmo ponto no referencial $OXYZ$, $(X_{O'}, Y_{O'}, Z_{O'})$ são as coordenadas da origem do referencial $O'X'Y'Z'$, em relação ao referencial $OXYZ$, $e_{X'}$, $e_{Y'}$ e $e_{Z'}$ são os versores do referencial $O'X'Y'Z'$ e e_X , e_Y e e_Z são os versores do referencial $OXYZ$.

A matriz do sistema anterior, em que todos os seus elementos correspondem ao cosseno de um ângulo, pode ser interpretada como uma matriz que em cada linha apresenta as componentes dos versores do novo referencial, em relação ao sistema de referência antigo. Por exemplo, os três elementos da primeira linha correspondem às componentes de $e_{X'}$, segundo os eixos X , Y e Z . A subrotina CHUCS é responsável por transformações lineares de coordenadas.

Com o intuito de se obter um vector normal à superfície, no ponto central de cada elemento, foram definidos planos que contêm três pontos que serão interpolados por parábolas ou circunferências (figura 4.2).

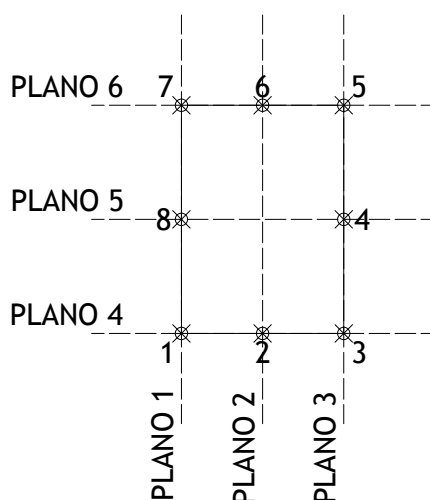


Figura 4.2 - Planos nos quais serão interpolados três pontos através de parábolas ou circunferências.

O critério de selecção da parábola ou da circunferência, como funções interpoladoras, é descrito na figura seguinte.

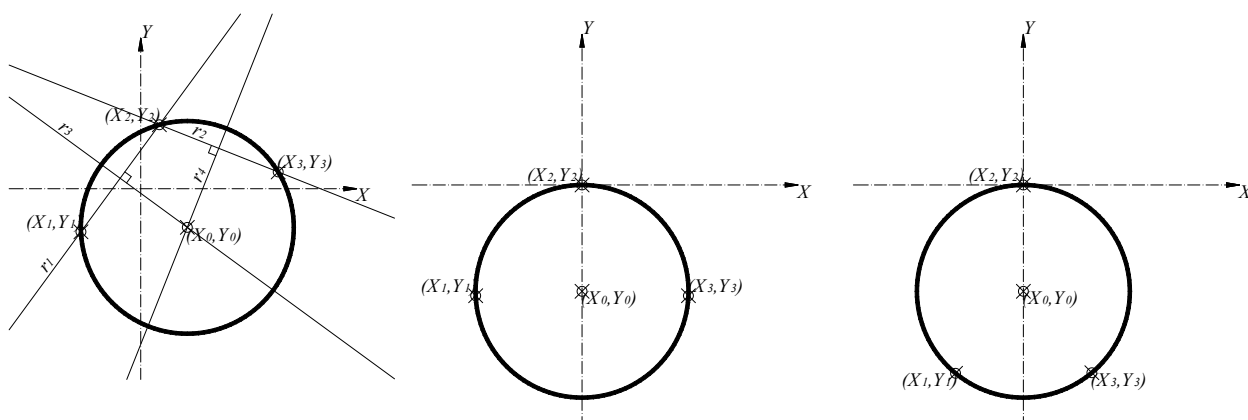


Figura 4.3 (a), (b) e (c) - Situações em que a circunferência é utilizada como função interpoladora ((a) e (b)), sendo que (b) representa a condição limite para a utilização da circunferência, e situação em que a parábola é utilizada como função interpoladora (c).

A intersecção de três pontos por uma circunferência, conforme ilustrado na figura 4.3.a, é descrita seguidamente [16], tendo dado origem à subrotina CIRCL.

Considerem-se três pontos num espaço bidimensional, que não formam uma recta e cujas coordenadas são (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) . As equações das rectas representadas na figura 4.3.a, no referencial XOY , são:

$$r_1 : Y = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_1 + Y_2 - \frac{(Y_2 - Y_1) \cdot (X_1 + X_2)}{X_2 - X_1} \right) \quad (4.2)$$

$$r_2 : Y = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_2 + Y_3 - \frac{(Y_3 - Y_2) \cdot (X_2 + X_3)}{X_3 - X_2} \right) \quad (4.3)$$

$$r_3 : Y = -\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_1 + Y_2 + \frac{(X_2 - X_1) \cdot (X_1 + X_2)}{Y_2 - Y_1} \right) = -\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_1 + Y_2 + \frac{X_2^2 - X_1^2}{Y_2 - Y_1} \right) \quad (4.4)$$

$$r_4 : Y = -\frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_2 + Y_3 + \frac{(X_3 - X_2) \cdot (X_2 + X_3)}{Y_3 - Y_2} \right) = -\frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_2 + Y_3 + \frac{X_3^2 - X_2^2}{Y_3 - Y_2} \right) \quad (4.5)$$

em que r_1 , r_2 , r_3 e r_4 são as equações das rectas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, e (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) são as coordenadas do ponto 1, 2 e 3, respectivamente, no referencial XOY . Os pares de rectas r_1 , r_3 e r_2 , r_4 são perpendiculares entre si e intersectam-se a meia distância entre os pontos 1,2 e 2,3, respectivamente.

Igualando as equações das rectas r_3 e r_4 é possível determinar a abcissa X_0 do centro da circunferência:

$$X_0 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(Y_2 + Y_3 + \frac{X_3^2 - X_2^2}{Y_3 - Y_2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(Y_1 + Y_2 + \frac{X_2^2 - X_1^2}{Y_2 - Y_1} \right)}{-\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} + \frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(Y_3 - Y_1 + \frac{X_3^2 - X_2^2}{Y_3 - Y_2} - \frac{X_2^2 - X_1^2}{Y_2 - Y_1} \right)}{-\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} + \frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2}} \quad (4.6)$$

onde (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) são as coordenadas do ponto 1, 2 e 3, respectivamente, e X_0 é a abcissa do centro da circunferência no referencial XOY .

Sempre que a ordenada do primeiro ponto é igual à do segundo ($Y_1 = Y_2$), a abcissa do centro da circunferência deve ser calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad (4.7)$$

em que X_0 é a abcissa do centro da circunferência, X_1 é a abcissa do ponto 1 e X_2 é a abcissa do ponto 2, no referencial XOY .

Se, por sua vez, a ordenada do segundo ponto for igual à do terceiro ($Y_2 = Y_3$), a abcissa do centro da circunferência deve ser calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$X_0 = \frac{X_2 + X_3}{2} \quad (4.8)$$

em que X_0 é a abcissa do centro da circunferência, X_2 é a abcissa do ponto 2 e X_3 é a abcissa do ponto 3, no referencial XOY .

A determinação da ordenada do centro da circunferência é realizada a partir da equação da recta 3 ou da recta 4, conhecendo previamente a abcissa X_0 :

$$Y_0 = -\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \cdot X_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_1 + Y_2 + \frac{X_2^2 - X_1^2}{Y_2 - Y_1} \right) \quad (4.9)$$

$$Y_0 = -\frac{X_3 - X_2}{Y_3 - Y_2} \cdot X_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(Y_2 + Y_3 + \frac{X_3^2 - X_2^2}{Y_3 - Y_2} \right) \quad (4.10)$$

em que (X_0, Y_0) são as coordenadas do centro da circunferência, (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) são as coordenadas do ponto 1, 2 e 3, respectivamente.

O raio da circunferência é determinado a partir da distância entre um dos pontos que é intersectado e o centro da circunferência:

$$R = \sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2} \quad (4.11)$$

onde R é o raio da circunferência, (X_0, Y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e (X_2, Y_2) são as coordenadas do ponto 2.

A equação da circunferência no referencial XOY , conforme indicada em (2.7), pode agora ser estabelecida.

Para intersectar três pontos com uma parábola foi utilizado o polinómio interpolador de Newton, cuja demonstração não será exposta no presente trabalho, podendo ser consultada, por exemplo, em [10]. Poderia, no entanto, ter sido utilizado outro qualquer método de interpolação com funções de segundo grau. Esta subrotina é designada por PINEW.

O vector normal à superfície é obtido pelo produto externo dos vectores tangentes às curvas contidas nos planos 2 e 5, no ponto central do elemento. O novo referencial é definido pelo vector normal à superfície, por um dos vectores tangente e pelo vector que resulta do produto externo destes dois. Sempre que as curvas apresentem, simultaneamente, rectas tangentes ao ponto central do elemento com inclinação nula, o vector perpendicular à superfície no mesmo ponto tem direcção vertical. Neste caso, a curvatura das duas curvas ortogonais, no ponto central do elemento, é igual aos raios de curvatura das circunferências. Se a função interpoladora for a parábola, a curvatura é igual à segunda derivada da função no mesmo ponto. As curvaturas normais e a torção geodésica de duas curvas ortogonais num ponto estão, neste caso, determinadas.

4.3.2 Formulação isoparamétrica

Sempre que o vector normal à superfície, no ponto central do elemento, não tenha direcção vertical, pelo menos uma das curvas consideradas nos planos 2 e 5 não está inscrita num plano que contem a normal à superfície. Nesta situação, a curvatura medida não corresponde à curvatura normal. É necessário calcular a curvatura das curvas inscritas nos planos definidos pelos eixos x e y do referencial que tem um eixo perpendicular à superfície. No entanto, os planos xoz e $yozy$, definidos por este novo referencial, podem não ser paralelos às direcções ortogonais da malha de pontos inicialmente estabelecida. Para ultrapassar este problema, é proposta a utilização das funções de forma da família “Serendipity”, para um elemento isoparamétrico de oito nós (figura 4.4).

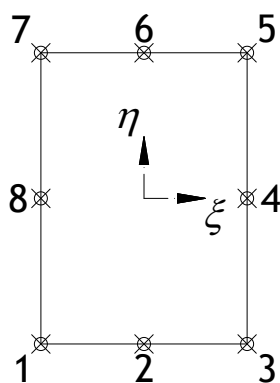


Figura 4.4 - Elemento “Serendipity” de oito nós (adaptado de [24]).

As coordenadas isoparamétricas dos nós, representados na figura anterior, são definidas no quadro 4.1.

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
η	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

Quadro 4.1 - Coordenadas isoparamétricas dos nós de um elemento “Serendipity” de oito nós (adaptado de [24]).

As funções de forma [24] deste elemento são dadas pelas expressões:

$$N_j^{(el)} = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_j) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_j) \cdot (\xi \cdot \xi_j + \eta \cdot \eta_j - 1), \quad j = 1,3,5,7 \quad (4.12)$$

$$N_j^{(el)} = \frac{\xi_j^2}{2} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_j) \cdot (1 - \eta^2) + \frac{\eta_j^2}{2} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_j) \cdot (1 - \xi^2), \quad j = 2,4,6,8 \quad (4.13)$$

em que $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j do elemento, cujas coordenadas isoparamétricas são (ξ_j, η_j) , para um ponto genérico de coordenadas isoparamétricas (ξ, η) .

As funções de forma deste elemento são funções quadráticas de duas variáveis (ξ, η) . Considerando o referencial cartesiano $oxyz$, com origem no ponto central do elemento e com o eixo z perpendicular à superfície no mesmo ponto, as coordenadas de um qualquer ponto, contido no elemento, podem ser calculadas com base nas coordenadas dos nós, através do seguinte sistema [24]:

$$\begin{bmatrix} x^{(el)} \\ y^{(el)} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} N_j^{(el)} & 0 \\ 0 & N_j^{(el)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_j^{(el)} \\ y_j^{(el)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

em que $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j , cujas coordenadas cartesianas são $(x_j^{(el)}, y_j^{(el)})$, num ponto contido no elemento com coordenadas cartesianas $(x^{(el)}, y^{(el)})$, sendo k o número de nós.

A matriz Jacobiana [24] da transformação de coordenadas pode obter-se com:

$$J^{(el)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \xi} \cdot x_j^{(el)} & \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \xi} \cdot y_j^{(el)} \\ \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \eta} \cdot x_j^{(el)} & \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \eta} \cdot y_j^{(el)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

em que $J^{(el)}$ é a matriz Jacobiana, $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j , cujas coordenadas cartesianas são $(x_j^{(el)}, y_j^{(el)})$, num ponto contido no elemento com coordenadas cartesianas $(x^{(el)}, y^{(el)})$, sendo k o número de nós.

A inversa da matriz Jacobiana [24], pode ser calculada da seguinte forma:

$$[J^{(el)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J^{(el)})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

em que $J^{(el)}$ é a matriz Jacobiana, $\det(J^{(el)})$ é o Jacobiano, (x, y) são as coordenadas cartesianas e (ξ, η) são as coordenadas isoparamétricas.

Sendo a superfície representada explicitamente pela função $z = z(x, y)$, as derivadas de primeira ordem desta função podem ser obtidas através das seguintes expressões:

$$\frac{\partial z^{(el)}}{\partial x} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial x} \cdot z_j^{(el)} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial z^{(el)}}{\partial y} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial y} \cdot z_j^{(el)} \quad (4.18)$$

onde $z = z(x, y)$ é uma função explícita que representa a superfície e $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j , cujas coordenadas cartesianas são $(x_j^{(el)}, y_j^{(el)}, z_j^{(el)})$, num ponto contido no elemento com coordenadas cartesianas $(x^{(el)}, y^{(el)}, z^{(el)})$, sendo k o número de nós.

As derivadas cartesianas das funções de forma [24] podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial x} = \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial y} = \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.20)$$

em que $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j , (x, y) são as coordenadas cartesianas e (ξ, η) são as coordenadas isoparamétricas.

Os termos $\partial \xi / \partial x$, $\partial \eta / \partial x$, $\partial \xi / \partial y$ e $\partial \eta / \partial y$, presentes nas equações anteriores, podem ser obtidos pela inversa da matriz Jacobiana [24]. Com os resultados das expressões (4.19) e (4.20), é possível calcular as primeiras derivadas da função $z = z(x, y)$ ($\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$). Calculando o valor destas derivadas em todos os nós de um elemento, as derivadas de segunda ordem da função $z = z(x, y)$ podem ser calculadas numericamente, conforme demonstrado seguidamente:

$$\frac{\partial^2 z^{(el)}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z^{(el)}}{\partial x} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial z_j^{(el)}}{\partial x} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 z^{(el)}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z^{(el)}}{\partial y} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial z_j^{(el)}}{\partial y} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 z^{(el)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z^{(el)}}{\partial y} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial z_j^{(el)}}{\partial y} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial^2 z^{(el)}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z^{(el)}}{\partial x} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial N_j^{(el)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial z_j^{(el)}}{\partial x} \quad (4.24)$$

em que $N_j^{(el)}$ são as funções de forma correspondentes ao nó j , cujas coordenadas cartesianas são $(x_j^{(el)}, y_j^{(el)}, z_j^{(el)})$, num ponto contido no elemento com coordenadas cartesianas $(x^{(el)}, y^{(el)}, z^{(el)})$, sendo k o número de nós.

Desta forma, podem ser determinadas as curvaturas normais e a torção geodésica de duas curvas ortogonais no ponto central do elemento, estando estas curvas inscritas nos planos xoz e $yozy$ do referencial que tem um eixo perpendicular à superfície:

$$\chi_x = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (4.25)$$

$$\chi_y = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (4.26)$$

$$\Psi_{xy} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{2} \quad (4.27)$$

em que χ_x e χ_y são as curvaturas normais das curvas contidas em planos xoz e $yozy$, respectivamente e Ψ_{xy} é a torção geodésica das mesmas curvas.

A subrotina SFR02 gera as funções de forma e as suas derivadas em relação às variáveis isoparamétricas. Por sua vez, a subrotina JACOB calcula a matriz Jacobiana e a sua inversa, determinando também as derivadas cartesianas das funções de forma. A subrotina CURVE calcula as curvaturas normais e a torção geodésica de duas curvas ortogonais no ponto central de cada elemento.

4.3.3 Direcções principais de curvatura

Conhecendo a curvatura normal e a torção geodésica de duas curvas de superfície contidas em planos ortogonais num ponto, a determinação da magnitude e da direcção das curvaturas principais pode ser realizada com o auxílio do círculo de Mohr (c. 2.13.5). A subrotina MOHRC efectua esta operação.

As direcções principais de curvatura, num ponto da superfície, devem ser representadas no plano cuja normal coincide com a normal à superfície no mesmo ponto. A subrotina que prepara os dados necessários para a concepção do ficheiro de saída gráfica é designada por DWPAR. As subrotinas P2TXT e P2DXF são responsáveis pela criação dos ficheiros de saída de resultados, como texto e como gráfico, respectivamente.

Capítulo 5

Técnica experimental do método da membrana

5.1 Equipamento

A montagem da figura 5.1 consiste em duas placas unidas por dobradiças, de maneira a ser possível alterar a inclinação do plano que contém o contorno de inserção da superfície no vale. A placa onde está inserida a membrana é dotada de um transferidor, que possibilita estimar o ângulo de inclinação do plano de inserção com a vertical. A membrana é constituída por um balão, estando ligada à placa através de fita-cola, simulando determinadas condições de apoio em que as rotações em torno do eixo de inserção não estão impedidas.

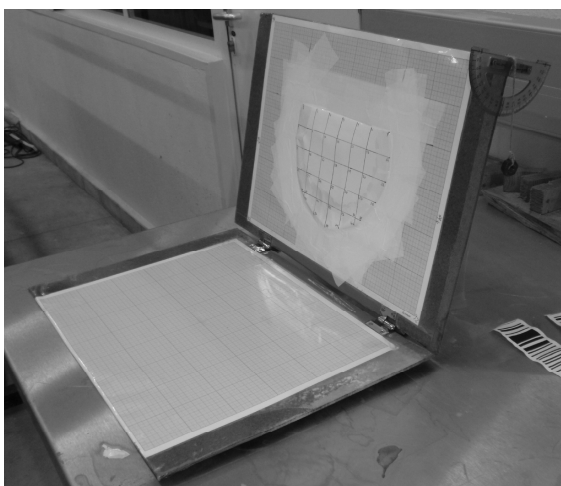


Figura 5.1 - Fotografia da montagem para obtenção das superfícies funiculares da pressão hidrostática.

A medição das coordenadas da superfície da membrana deformada foi efectuada com recurso a um teodolito electrónico (Leica TCR307), que possibilita a medição de distâncias com laser.



Figura 5.2 -Equipamentos utilizados no ensaio experimental.

5.2 Membranas

A membrana utilizada consiste numa superfície de um balão, de comportamento sensivelmente isotrópico, fixa à placa de inserção em todos os bordos menos no superior. As dimensões aproximadas do balão estão indicadas na figura 5.3. O contorno de inserção apresenta uma forma circular, tirando-se partido da geometria proporcionada pelo fabricante do balão. Impor outra forma para o contorno de inserção implicaria cortar o balão e voltar a uni-lo nalgumas zonas, o que poderia comprometer a estanquidade do mesmo.

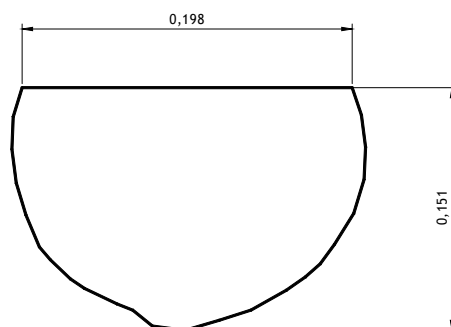


Figura 5.3 - Dimensões, em metros, do balão utilizado como membrana numa projecção ortogonal frontal.

A malha de pontos inscrita na superfície da membrana, que serviu de referência para as medições efectuadas, apresentava um espaçamento aproximado de dois centímetros (figura 5.4), no caso da membrana fixa num plano vertical, e um espaçamento aproximado de três centímetros (figura 5.5), no caso das membranas fixas em planos inclinados. Sempre que a malha de pontos intersectava o contorno de inserção, era definido um ponto nessa intersecção. Depois da primeira medição, concluiu-se que o número de pontos inicialmente previsto era, porventura, excessivo.

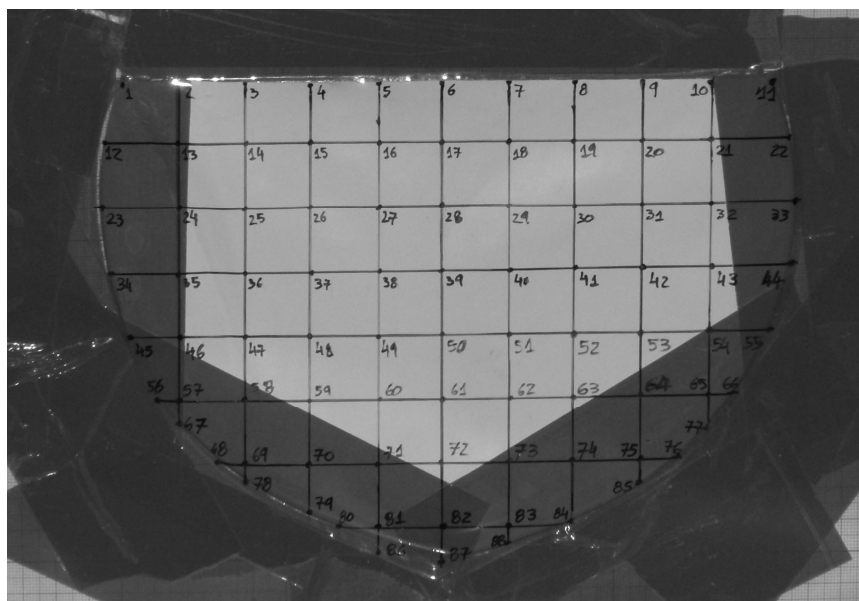


Figura 5.4 - Malha de pontos levantados no ensaio em que a membrana está fixa num plano de inserção vertical.

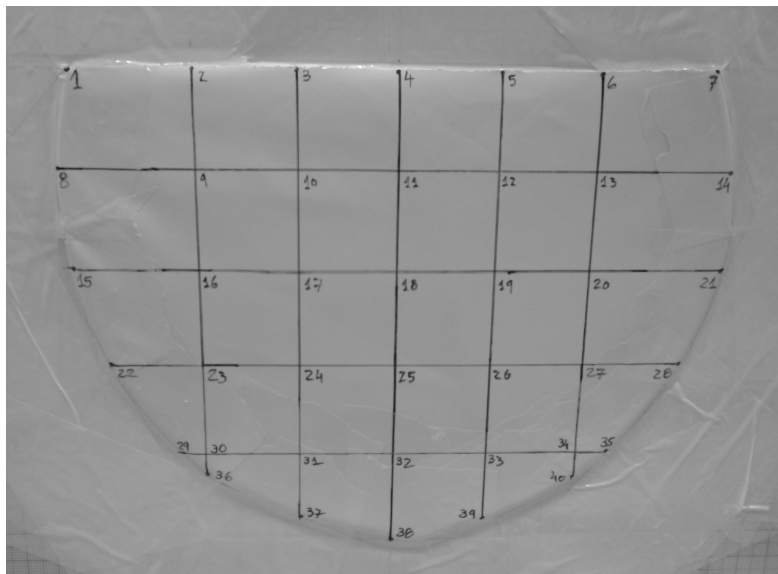


Figura 5.5 - Malha de pontos levantados no ensaio em que a membrana está fixa num plano de inserção inclinado em relação à vertical.

5.3 Procedimentos

Todos os estacionamentos do teodolito electrónico foram realizados na mesma estação. Houve o cuidado de colocar a linha de visada horizontal ao nível da membrana. Desta forma, são minimizados os erros nas medições efectuadas, uma vez que se trabalha muito próximo de um ângulo zenital nulo. A placa de inserção das membranas foi também colocada numa posição aproximadamente perpendicular à linha de visada horizontal.

Sempre que o aparelho era estacionado na estação E101, era visado um ponto fixo, designado por 102. Este procedimento permitiu definir um ângulo azimutal de referência (165,2935^g para 102) para as medições efectuadas em estacionamentos diferentes. Desta forma, foi também possível descontar a altura do aparelho nos diferentes estacionamentos. De uma forma simplificada, foi possível relativizar todas as medições em relação ao ponto fixo 102. Foi ainda considerado um outro ponto de calibração do ângulo azimutal de referência, designado por 103.

A preparação da montagem experimental consistia em encher a membrana (balão) de água, ajustando-se seguidamente o ângulo pretendido para a inclinação da placa com a vertical. Por último, era possível ajustar o nível de água na membrana, por forma a atingir o nível máximo.

Inicialmente eram visados seis pontos da placa de inserção e só depois se iniciavam as medições da membrana deformada. No final destas medições, eram novamente visados quatro pontos da placa de inserção, que já tinham sido visados anteriormente. Ao índice dos pontos visados mais do que uma vez, num mesmo estacionamento, era acrescentado o algarismo zero ou um no final, por forma a diferenciar a medição inicial da final, respectivamente.

A diferenciação dos pontos medidos nas diferentes posições da placa de inserção é realizada através do primeiro algarismo do seu índice: dois para o plano de inserção vertical, três para o plano de inserção inclinado 45° para jusante e quatro para o plano de inserção inclinado 25° para montante. Os ângulos de inclinação estão referidos ao plano vertical.

Em todos os pontos visados foram registados os ângulos azimutal (H_z) e zenital (V_z), assim como a distância oblíqua (DI). Com base nestes dados, foi possível determinar as distâncias horizontal e vertical, através das seguintes expressões:

$$DH = DI \cdot \text{sen}(V_z) \quad (5.1)$$

em que DH é a distância horizontal, DI é a distância oblíqua e V_z é o ângulo zenital.

$$DV = DI \cdot \text{cos}(V_z) \quad (5.2)$$

em que DV é a distância vertical, DI é a distância oblíqua e V_z é o ângulo zenital.

O desnível entre o ponto visado e a estação pode ser calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$DN = h_a + DV - h_p \quad (5.3)$$

onde DN é o desnível, h_a é a altura do aparelho, h_p é a altura do prisma e DV é a distância vertical.

A cota de um ponto visado pode então ser determinada pela expressão:

$$Z_F = Z_E + h_a + DV - h_p \quad (5.4)$$

em que Z_F é a cota do ponto F visado, Z_E é a cota da estação, h_a é a altura do aparelho, h_p é a altura do prisma e DV é a distância vertical.

As coordenadas planimétricas M e P (figura 5.6) são calculadas a partir do rumo, conforme se demonstra na expressão seguinte:

$$M_F = M_E + DH \cdot \text{sen}(EF) \quad (5.5)$$

$$P_F = P_E + DH \cdot \text{cos}(EF) \quad (5.6)$$

onde M_F e P_F são as coordenadas planimétricas do ponto F, M_E e P_E são as coordenadas planimétricas da estação E, DH é a distância horizontal entre os dois pontos e (EF) é o rumo de E para F.

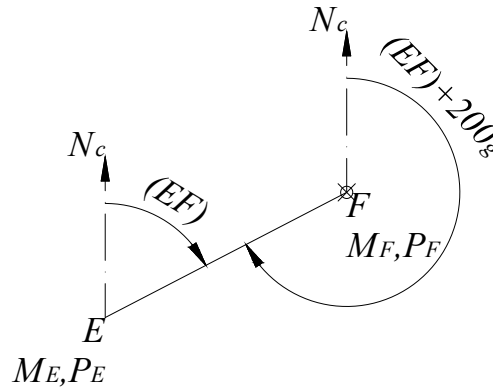


Figura 5.6 - Vista em planta da estação E e do ponto F, com indicação do rumo (EF) de E para F, do rumo (FE) , de F para E e do norte cartográfico (N_c).

5.4 Resultados

Nos seguintes quadros estão registados os dados obtidos em cada estacionamento e as coordenadas posteriormente calculadas.

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
101	-	-	-	-	-	-	-	0,000	-3,295	0,089
2500	-	0,089	0,0415	102,9805	3,255	-0,006	3,259	0,002	-0,040	-0,006
2910	-	0,089	3,9775	99,3315	3,304	0,181	3,304	0,206	0,003	0,181
2920	-	0,089	3,9200	105,1685	3,306	-0,123	3,317	0,203	0,005	-0,123
2930	-	0,089	396,1125	105,1375	3,282	-0,119	3,293	-0,201	-0,019	-0,119
2940	-	0,089	396,1715	99,2575	3,277	0,184	3,277	-0,197	-0,024	0,184
201	-	0,089	398,1535	101,2855	3,275	0,080	3,275	-0,095	-0,021	0,080
202	-	0,089	398,4800	101,3005	3,273	0,079	3,274	-0,079	-0,023	0,079
203	-	0,089	398,8875	101,3915	3,271	0,075	3,272	-0,058	-0,024	0,075
204	-	0,089	399,2825	101,4545	3,268	0,071	3,268	-0,037	-0,027	0,071
205	-	0,089	399,6805	101,4760	3,267	0,070	3,268	-0,017	-0,028	0,070
206	-	0,089	0,0485	101,4825	3,266	0,070	3,266	0,002	-0,029	0,070
207	-	0,089	0,4350	101,4825	3,270	0,070	3,271	0,022	-0,025	0,070
208	-	0,089	0,8065	101,4750	3,274	0,070	3,275	0,041	-0,021	0,070
209	-	0,089	1,1950	101,4335	3,279	0,072	3,279	0,061	-0,017	0,072
210	-	0,089	1,6070	101,3645	3,283	0,076	3,284	0,082	-0,013	0,076
211	-	0,089	1,9760	101,3285	3,288	0,077	3,289	0,102	-0,009	0,077
212	-	0,089	398,0435	101,6275	3,276	0,062	3,277	-0,101	-0,021	0,062
213	-	0,089	398,4470	101,6480	3,267	0,061	3,268	-0,080	-0,029	0,061
214	-	0,089	398,8510	101,7145	3,262	0,058	3,263	-0,059	-0,034	0,058
215	-	0,089	399,2490	101,7725	3,259	0,055	3,261	-0,039	-0,036	0,055

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
216	-	0,089	399,6680	101,8260	3,259	0,053	3,260	-0,017	-0,036	0,053
217	-	0,089	0,0500	101,8405	3,259	0,052	3,261	0,002	-0,036	0,052
218	-	0,089	0,4600	101,8335	3,262	0,052	3,263	0,023	-0,033	0,052
219	-	0,089	0,8510	101,8095	3,265	0,053	3,266	0,043	-0,030	0,053
220	-	0,089	1,2600	101,7530	3,270	0,056	3,271	0,064	-0,026	0,056
221	-	0,089	1,6645	101,6860	3,276	0,059	3,277	0,085	-0,020	0,059
222	-	0,089	2,0765	101,6685	3,289	0,060	3,290	0,107	-0,008	0,060
223	-	0,089	398,0220	102,0190	3,277	0,042	3,278	-0,102	-0,020	0,042
224	-	0,089	398,4400	102,0455	3,267	0,041	3,269	-0,080	-0,029	0,041
225	-	0,089	398,8230	102,1080	3,260	0,038	3,262	-0,061	-0,036	0,038
226	-	0,089	399,2095	102,1555	3,255	0,036	3,257	-0,041	-0,040	0,036
227	-	0,089	399,6565	102,1945	3,253	0,034	3,254	-0,018	-0,042	0,034
228	-	0,089	0,0520	102,2065	3,253	0,033	3,255	0,002	-0,042	0,033
229	-	0,089	0,4785	102,2065	3,255	0,033	3,257	0,024	-0,040	0,033
230	-	0,089	0,8830	102,1820	3,259	0,034	3,261	0,045	-0,036	0,034
231	-	0,089	1,2920	1020,1345	3,266	0,036	3,268	0,066	-0,030	0,036
232	-	0,089	1,6810	102,0785	3,277	0,039	3,278	0,086	-0,019	0,039
233	-	0,089	2,1170	102,0495	3,290	0,040	3,292	0,109	-0,007	0,040
234	-	0,089	398,0655	102,4235	3,278	0,021	3,280	-0,100	-0,019	0,021
235	-	0,089	398,4350	102,4450	3,269	0,020	3,272	-0,081	-0,027	0,020
236	-	0,089	398,8115	102,5015	3,261	0,018	3,263	-0,061	-0,035	0,018
237	-	0,089	399,2115	102,5550	3,255	0,015	3,257	-0,041	-0,040	0,015
238	-	0,089	399,6415	102,5880	3,252	0,014	3,254	-0,019	-0,043	0,014
239	-	0,089	0,0510	102,6025	3,251	0,013	3,254	0,002	-0,044	0,013
240	-	0,089	0,4860	102,6010	3,254	0,013	3,256	0,024	-0,041	0,013
241	-	0,089	0,8925	102,5710	3,258	0,014	3,261	0,045	-0,037	0,014
242	-	0,089	1,2990	102,5305	3,266	0,016	3,269	0,066	-0,030	0,016
243	-	0,089	1,6800	102,4750	3,278	0,019	3,280	0,086	-0,018	0,019
244	-	0,089	2,0920	102,4310	3,291	0,020	3,293	0,108	-0,006	0,020
245	-	0,089	398,1730	102,8085	3,277	0,001	3,281	-0,094	-0,019	0,001
246	-	0,089	398,4470	102,8265	3,272	0,001	3,275	-0,080	-0,024	0,001
247	-	0,089	398,8075	102,8855	3,264	-0,002	3,268	-0,062	-0,032	-0,002
248	-	0,089	399,1975	102,9360	3,258	-0,004	3,261	-0,041	-0,037	-0,004
249	-	0,089	399,6320	102,9795	3,254	-0,006	3,258	-0,019	-0,041	-0,006
250	-	0,089	0,0450	102,9870	3,253	-0,007	3,257	0,002	-0,042	-0,007
251	-	0,089	0,4845	102,9870	3,256	-0,007	3,260	0,024	-0,039	-0,007
252	-	0,089	0,8845	102,9620	3,262	-0,006	3,265	0,045	-0,033	-0,006
253	-	0,089	1,2760	102,9195	3,270	-0,004	3,273	0,065	-0,026	-0,004
254	-	0,089	1,6375	102,8590	3,281	-0,001	3,284	0,084	-0,015	-0,001
255	-	0,089	1,9675	102,8360	3,290	-0,001	3,293	0,101	-0,007	-0,001
256	-	0,089	398,3225	103,1975	3,279	-0,019	3,283	-0,087	-0,017	-0,019
257	-	0,089	398,4545	103,2035	3,277	-0,019	3,281	-0,080	-0,019	-0,019
258	-	0,089	398,8285	103,2375	3,272	-0,021	3,276	-0,061	-0,024	-0,021

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
259	-	0,089	399,1980	103,2930	3,266	-0,023	3,270	-0,042	-0,029	-0,023
260	-	0,089	399,6245	103,3380	3,261	-0,025	3,265	-0,020	-0,034	-0,025
261	-	0,089	0,0320	103,3590	3,260	-0,026	3,265	0,001	-0,035	-0,026
262	-	0,089	0,4660	103,3495	3,263	-0,026	3,268	0,023	-0,032	-0,026
263	-	0,089	0,8530	103,3115	3,269	-0,024	3,274	0,043	-0,026	-0,024
264	-	0,089	1,2250	103,2595	3,278	-0,022	3,283	0,063	-0,018	-0,022
265	-	0,089	1,6005	103,2310	3,286	-0,021	3,291	0,082	-0,010	-0,021
266	-	0,089	1,7380	103,2140	3,290	-0,020	3,294	0,089	-0,006	-0,020
267	-	0,089	398,4475	103,3470	3,279	-0,027	3,283	-0,080	-0,017	-0,027
268	-	0,089	398,6745	103,5845	3,281	-0,039	3,286	-0,069	-0,015	-0,039
269	-	0,089	398,8365	103,6065	3,278	-0,040	3,284	-0,060	-0,018	-0,040
270	-	0,089	399,1895	103,6335	3,275	-0,041	3,280	-0,042	-0,020	-0,041
271	-	0,089	399,6200	103,6560	3,272	-0,042	3,278	-0,020	-0,023	-0,042
272	-	0,089	0,0150	103,6780	3,271	-0,043	3,276	0,000	-0,024	-0,043
273	-	0,089	0,4330	103,6585	3,274	-0,042	3,279	0,022	-0,021	-0,042
274	-	0,089	0,8105	103,6430	3,279	-0,042	3,284	0,041	-0,016	-0,042
275	-	0,089	1,1940	103,6245	3,285	-0,041	3,290	0,061	-0,011	-0,041
276	-	0,089	1,3940	103,6060	3,289	-0,040	3,294	0,072	-0,007	-0,040
277	-	0,089	1,5680	103,4350	3,290	-0,032	3,294	0,081	-0,006	-0,032
278	-	0,089	398,8355	103,7030	3,281	-0,045	3,286	-0,060	-0,015	-0,045
279	-	0,089	399,2130	103,8945	3,281	-0,055	3,287	-0,041	-0,014	-0,055
280	-	0,089	399,3945	103,9795	3,281	-0,059	3,288	-0,032	-0,014	-0,059
281	-	0,089	399,6240	104,0020	3,280	-0,060	3,287	-0,020	-0,015	-0,060
282	-	0,089	0,0095	104,0090	3,279	-0,061	3,285	0,000	-0,016	-0,061
283	-	0,089	0,4015	104,0040	3,283	-0,061	3,289	0,020	-0,012	-0,061
284	-	0,089	0,7630	103,9780	3,286	-0,060	3,293	0,039	-0,009	-0,060
285	-	0,089	1,1735	103,7520	3,288	-0,048	3,293	0,060	-0,008	-0,048
286	-	0,089	399,6170	104,1545	3,283	-0,069	3,290	-0,020	-0,012	-0,069
287	-	0,089	399,9960	104,2160	3,282	-0,072	3,289	-0,001	-0,013	-0,072
288	-	0,089	0,3955	104,0950	3,285	-0,066	3,292	0,020	-0,010	-0,066
2911	-	0,089	3,9655	99,3295	3,304	0,181	3,304	0,205	0,003	0,181
2921	-	0,089	3,9210	105,1690	3,306	-0,123	3,317	0,203	0,005	-0,123
2931	-	0,089	396,1145	105,1355	3,282	-0,119	3,293	-0,201	-0,019	-0,119
2941	-	0,089	396,1710	99,2540	3,276	0,184	3,277	-0,197	-0,025	0,184
102	-	0,089	165,2935	104,7220	16,297	-1,065	16,342	8,451	-17,230	-1,065
103	-	0,089	237,0510	97,9765	13,516	0,576	13,523	-7,430	-14,586	0,576

Quadro 5.1 - Dados registados no estacionamento 1 na estação E101, durante a observação da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical, e coordenadas calculadas a partir destes.

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
101	-	-	-	-	-	-	-	0,000	-3,294	0,089
102	-	0,089	165,2935	104,7195	16,296	-1,064	16,341	8,450	-17,228	-1,064
103	-	0,089	237,0595	97,9770	13,516	0,576	13,523	-7,432	-14,584	0,576
3180	-	0,089	0,0630	103,0480	3,387	-0,016	3,391	0,003	0,093	-0,016
3910	-	0,089	3,6955	101,2640	3,534	0,076	3,534	0,205	0,234	0,076
3920	-	0,089	3,9350	105,3555	3,314	-0,133	3,326	0,204	0,013	-0,133
3930	-	0,089	396,1610	105,2425	3,309	-0,127	3,321	-0,200	0,009	-0,127
3940	-	0,089	396,4070	101,0825	3,526	0,086	3,526	-0,199	0,226	0,086
3950	-	0,089	396,2620	103,5100	3,394	-0,041	3,399	-0,200	0,094	-0,041
3960	-	0,089	3,8350	103,6545	3,401	-0,049	3,407	0,204	0,101	-0,049
301	-	0,089	398,2830	102,4380	3,445	0,014	3,448	-0,093	0,149	0,014
302	-	0,089	398,9410	102,4915	3,443	0,011	3,445	-0,058	0,148	0,011
303	-	0,089	399,5055	102,5215	3,443	0,010	3,446	-0,027	0,149	0,010
304	-	0,089	0,0565	102,5530	3,441	0,008	3,443	0,003	0,147	0,008
305	-	0,089	0,6080	102,5420	3,445	0,008	3,447	0,032	0,151	0,008
306	-	0,089	1,1590	102,5185	3,448	0,010	3,451	0,062	0,153	0,010
307	-	0,089	1,8110	102,4990	3,451	0,010	3,454	0,098	0,155	0,010
308	-	0,089	398,1770	102,8140	3,425	-0,006	3,429	-0,099	0,129	-0,006
309	-	0,089	398,9115	102,6945	3,416	0,001	3,419	-0,059	0,121	0,001
310	-	0,089	399,4900	102,6980	3,413	0,001	3,416	-0,028	0,119	0,001
311	-	0,089	0,0515	102,7150	3,413	0,000	3,416	0,002	0,119	0,000
312	-	0,089	0,6280	102,7300	3,415	-0,001	3,418	0,033	0,121	-0,001
313	-	0,089	1,2120	102,7600	3,419	-0,002	3,423	0,065	0,124	-0,002
314	-	0,089	1,9720	102,9050	3,430	-0,011	3,434	0,106	0,134	-0,011
315	-	0,089	398,2100	103,2390	3,404	-0,027	3,409	-0,096	0,108	-0,027
316	-	0,089	398,8945	103,1125	3,394	-0,020	3,398	-0,059	0,099	-0,020
317	-	0,089	399,4725	103,0745	3,389	-0,018	3,393	-0,029	0,095	-0,018
318	-	0,089	0,0660	103,0720	3,389	-0,018	3,393	0,003	0,095	-0,018
319	-	0,089	0,6535	103,0940	3,391	-0,019	3,395	0,034	0,097	-0,019
320	-	0,089	1,2195	103,1555	3,397	-0,022	3,401	0,065	0,102	-0,022
321	-	0,089	1,9920	103,3255	3,409	-0,032	3,414	0,106	0,113	-0,032
322	-	0,089	398,3715	103,6705	3,383	-0,049	3,388	-0,087	0,088	-0,049
323	-	0,089	398,8970	103,5950	3,377	-0,045	3,382	-0,059	0,082	-0,045
324	-	0,089	399,4720	103,5235	3,371	-0,041	3,376	-0,028	0,077	-0,041
325	-	0,089	0,0655	103,5105	3,369	-0,040	3,374	0,003	0,075	-0,040
326	-	0,089	0,6535	103,5410	3,371	-0,042	3,376	0,034	0,077	-0,042
327	-	0,089	1,2160	103,6235	3,378	-0,046	3,383	0,064	0,083	-0,046
328	-	0,089	1,7980	103,7370	3,387	-0,053	3,392	0,095	0,091	-0,053
329	-	0,089	398,7635	104,1010	3,361	-0,071	3,368	-0,066	0,066	-0,071
330	-	0,089	398,9070	104,0825	3,360	-0,070	3,367	-0,058	0,065	-0,070
331	-	0,089	399,4775	104,0455	3,357	-0,068	3,364	-0,028	0,063	-0,068
332	-	0,089	0,0555	104,0390	3,356	-0,067	3,363	0,002	0,062	-0,067
333	-	0,089	0,6415	104,0600	3,358	-0,068	3,365	0,033	0,064	-0,068

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
334	-	0,089	1,2000	104,1100	3,362	-0,071	3,369	0,063	0,067	-0,071
335	-	0,089	1,3945	104,1385	3,364	-0,073	3,371	0,073	0,069	-0,073
336	-	0,089	398,9035	104,2075	3,357	-0,076	3,364	-0,058	0,062	-0,076
337	-	0,089	399,4735	104,4160	3,345	-0,086	3,354	-0,028	0,051	-0,086
338	-	0,089	0,0550	104,5520	3,340	-0,093	3,348	0,002	0,046	-0,093
339	-	0,089	0,6330	104,4385	3,345	-0,088	3,353	0,033	0,051	-0,088
340	-	0,089	1,1935	104,2540	3,357	-0,079	3,365	0,062	0,062	-0,079
3911	-	0,089	3,6935	101,2690	3,534	0,076	3,535	0,204	0,234	0,076
3921	-	0,089	3,9350	105,3525	3,315	-0,133	3,326	0,204	0,014	-0,133
3931	-	0,089	396,1560	105,2435	3,309	-0,127	3,321	-0,200	0,009	-0,127
3941	-	0,089	396,4055	101,0855	3,526	0,086	3,526	-0,199	0,226	0,086

Quadro 5.2 - Dados registados no estacionamento 2 na estação E101, durante a observação da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 45° para jusante, em relação à vertical, e coordenadas calculadas a partir destes.

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
101	-	-	-	-	-	-	-	0,000	-3,294	0,089
102	-	0,089	165,2935	104,7195	16,296	-1,064	16,341	8,450	-17,228	-1,064
103	-	0,089	237,0595	97,9770	13,516	0,576	13,523	-7,432	-14,584	0,576
4180	-	0,089	0,1045	103,3390	3,181	-0,021	3,186	0,005	-0,113	-0,021
4910	-	0,089	4,2215	100,0255	3,146	0,145	3,146	0,208	-0,155	0,145
4920	-	0,089	3,9745	105,2365	3,284	-0,125	3,295	0,204	-0,017	-0,125
4930	-	0,089	396,1175	105,2390	3,275	-0,124	3,268	-0,200	-0,025	-0,124
4940	-	0,089	396,0225	100,1035	3,128	0,141	3,128	-0,196	-0,172	0,141
4950	-	0,089	396,0795	103,2505	3,216	-0,018	3,220	-0,198	-0,084	-0,018
4960	-	0,089	4,0685	103,2025	3,229	-0,017	3,233	0,206	-0,072	-0,017
401	-	0,089	398,1900	101,9750	3,173	0,048	3,174	-0,091	-0,123	0,048
402	-	0,089	398,9085	102,1115	3,170	0,041	3,172	-0,055	-0,125	0,041
403	-	0,089	399,5115	102,2240	3,164	0,035	3,166	-0,025	-0,130	0,035
404	-	0,089	0,1130	102,2610	3,162	0,034	3,164	0,005	-0,132	0,034
405	-	0,089	0,7135	102,2105	3,167	0,036	3,169	0,035	-0,127	0,036
406	-	0,089	1,3085	102,0885	3,174	0,042	3,176	0,065	-0,121	0,042
407	-	0,089	2,0095	101,8985	3,180	0,051	3,182	0,100	-0,116	0,051
408	-	0,089	398,0850	102,4470	3,186	0,023	3,188	-0,096	-0,110	0,023
409	-	0,089	398,8365	102,6595	3,172	0,013	3,175	-0,058	-0,123	0,013
410	-	0,089	399,4730	102,7840	3,167	0,007	3,170	-0,027	-0,127	0,007
411	-	0,089	0,1165	102,8155	3,166	0,006	3,169	0,005	-0,128	0,006
412	-	0,089	0,7540	102,7550	3,170	0,009	3,173	0,037	-0,124	0,009
413	-	0,089	1,3675	102,6120	3,178	0,016	3,181	0,068	-0,117	0,016
414	-	0,089	2,1540	102,4035	3,195	0,025	3,197	0,108	-0,101	0,025
415	-	0,089	398,1355	102,9550	3,202	-0,003	3,205	-0,094	-0,094	-0,003
416	-	0,089	398,8335	103,1625	3,189	-0,012	3,192	-0,059	-0,106	-0,012
417	-	0,089	399,4560	103,3130	3,182	-0,020	3,187	-0,028	-0,112	-0,020
418	-	0,089	0,1065	103,3465	3,180	-0,021	3,185	0,005	-0,114	-0,021

Ponto	h_a [m]	h_p [m]	H_z [g]	V_z [g]	DH [m]	DV [m]	DI [m]	M [m]	P [m]	Z [m]
419	-	0,089	0,7615	103,2885	3,184	-0,019	3,188	0,038	-0,110	-0,019
420	-	0,089	1,3600	103,1480	3,192	-0,012	3,196	0,068	-0,103	-0,012
421	-	0,089	2,1510	102,9245	3,210	-0,002	3,213	0,108	-0,086	-0,002
422	-	0,089	398,3135	103,4605	3,217	-0,029	3,222	-0,086	-0,078	-0,029
423	-	0,089	398,8570	103,5750	3,209	-0,034	3,215	-0,058	-0,086	-0,034
424	-	0,089	399,4620	103,7330	3,202	-0,042	3,208	-0,028	-0,092	-0,042
425	-	0,089	0,0995	103,7855	3,200	-0,045	3,206	0,005	-0,094	-0,045
426	-	0,089	0,7370	103,7315	3,204	-0,042	3,209	0,037	-0,090	-0,042
427	-	0,089	1,3280	103,5970	3,213	-0,035	3,218	0,067	-0,082	-0,035
428	-	0,089	1,9150	103,4425	3,223	-0,028	3,228	0,096	-0,073	-0,028
429	-	0,089	398,7350	103,9660	3,233	-0,056	3,239	-0,065	-0,062	-0,056
430	-	0,089	398,8845	103,9845	3,231	-0,056	3,237	-0,057	-0,064	-0,056
431	-	0,089	399,4725	104,0375	3,227	-0,059	3,234	-0,027	-0,067	-0,059
432	-	0,089	0,0785	104,0575	3,226	-0,060	3,233	0,003	-0,068	-0,060
433	-	0,089	0,6830	104,0325	3,228	-0,059	3,235	0,034	-0,066	-0,059
434	-	0,089	1,2670	103,9735	3,233	-0,056	3,239	0,064	-0,062	-0,056
435	-	0,089	1,4710	103,9465	3,236	-0,055	3,242	0,074	-0,059	-0,055
436	-	0,089	398,8845	104,0930	3,236	-0,062	3,243	-0,057	-0,059	-0,062
437	-	0,089	399,4705	104,3425	3,244	-0,076	3,251	-0,027	-0,050	-0,076
438	-	0,089	0,0695	104,4800	3,248	-0,083	3,257	0,003	-0,046	-0,083
439	-	0,089	0,6695	104,3525	3,245	-0,076	3,252	0,034	-0,049	-0,076
440	-	0,089	1,2575	104,1055	3,240	-0,063	3,246	0,064	-0,055	-0,063
4911	-	0,089	4,2155	100,0405	3,144	0,144	3,144	0,208	-0,157	0,144
4921	-	0,089	3,9790	105,2355	3,284	-0,125	3,295	0,205	-0,017	-0,125
4931	-	0,089	396,1200	105,2405	3,275	-0,124	3,286	-0,200	-0,025	-0,124
4941	-	0,089	396,0180	100,1200	3,127	0,140	3,127	-0,196	-0,173	0,140

Quadro 5.3 - Dados registados no estacionamento 2 na estação E101, durante a observação da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 25° para montante, em relação à vertical, e coordenadas calculadas a partir destes.

Inicialmente todas as coordenadas obtidas nos vários estacionamentos foram relacionadas com o ponto fixo 102. As próprias coordenadas da estação, em cada estacionamento, foram calculadas em relação a este ponto. As coordenadas dos pontos foram depois alvo de uma transformação linear, de forma a que todos os pontos de cada uma das superfícies estivesse referido ao sistema de eixos ortonormado $OXYZ$, com origem no ponto mais baixo da superfície da membrana. Com base nessas coordenadas, podem ser apresentadas as imagens seguintes.

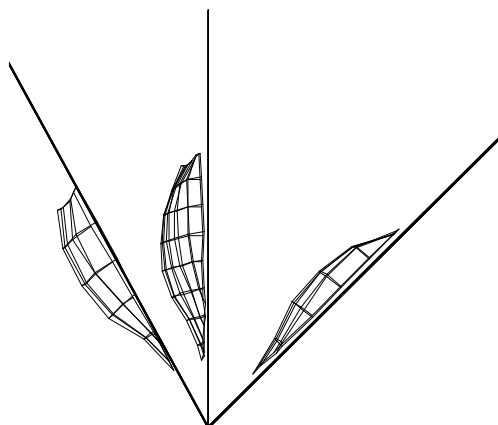


Figura 5.7 - Alçado lateral direito das superfícies funiculares da pressão hidrostática em três planos de inserção distintos (15° para montante, vertical e 45° para jusante).

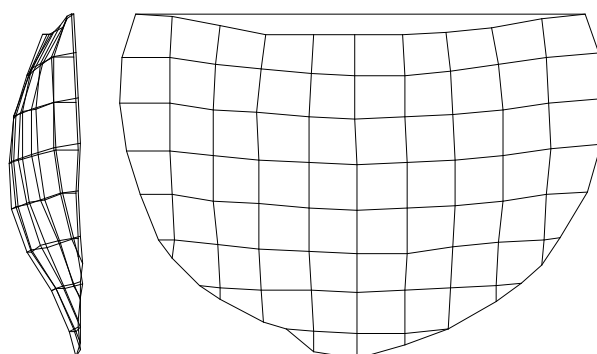


Figura 5.8 (a) e (b) - Alçado lateral direito (a) e alçado principal de montante (b) da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical.

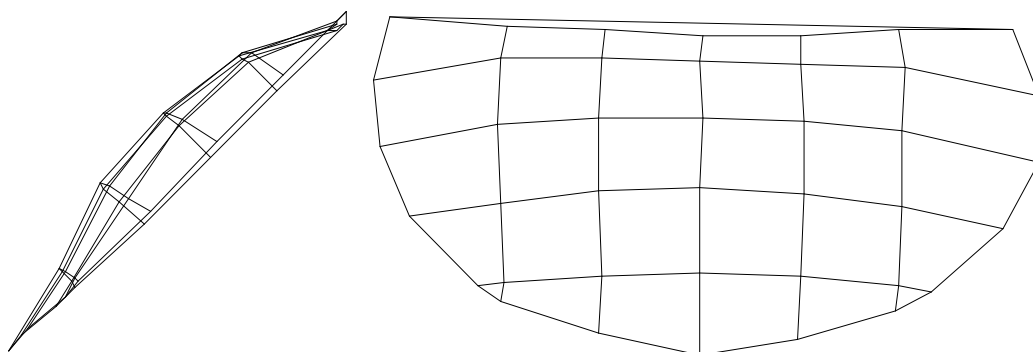


Figura 5.9 (a) e (b) - Alçado lateral direito (a) e alçado principal de montante (b) da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 45° para jusante em relação à vertical.

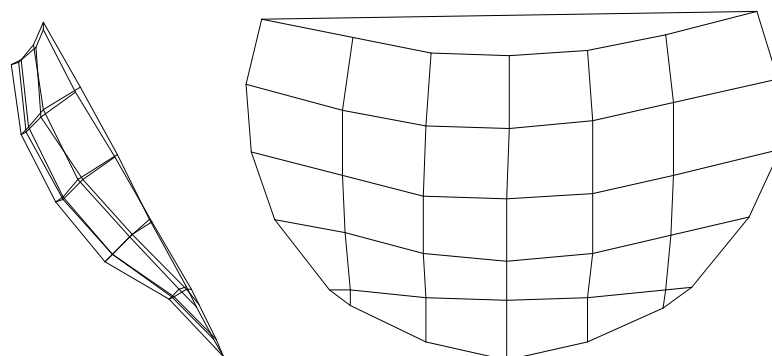


Figura 5.10 (a) e (b) - Alçado lateral direito (a) e alçado principal de montante (b) da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 25° para montante em relação à vertical.

Para estudar a forma das curvas de nível das superfícies obtidas, as coordenadas de alguns pontos foram estimadas recorrendo à interpolação linear entre dois pontos, cujas coordenadas eram conhecidas do ensaio experimental.

Imagine-se que se conhecem as coordenadas de dois pontos, 1 e 2, e que se pretende estimar as coordenadas de um ponto j , cuja cota é conhecida e se situa entre as cotas daqueles dois. As coordenadas do ponto j podem ser estimadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_j &= X_1 + \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}} \cdot \frac{(Z_j - Z_1) \cdot \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}{Z_2 - Z_1} = \\ &= X_1 + \frac{(X_2 - X_1) \cdot (Z_j - Z_1)}{Z_2 - Z_1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} Y_j &= Y_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}} \cdot \frac{(Z_j - Z_1) \cdot \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}{Z_2 - Z_1} = \\ &= Y_1 + \frac{(Y_2 - Y_1) \cdot (Z_j - Z_1)}{Z_2 - Z_1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} Z_j &= Z_1 + \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}} \cdot \frac{(Z_j - Z_1) \cdot \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}{Z_2 - Z_1} = \\ &= Z_1 + Z_j - Z_1 = Z_j \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que X_j, Y_j, Z_j são as coordenadas do ponto j , X_1, Y_1, Z_1 são as coordenadas do ponto 1 e X_2, Y_2, Z_2 são as coordenadas do ponto 2.

Com o intuito de aproximar uma função polinomial a um conjunto de pontos poderá utilizar-se o método dos mínimos quadrados. Este método permite encontrar os coeficientes do polinómio, expresso numa base (por exemplo a base canónica: $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n\}$), que melhor se aproxima de um número finito de pontos [10].

A determinação dos coeficientes é realizada por forma a que o polinómio resultante minimize o resíduo quadrático [10]:

$$\min \sum_{j=0}^k [Y_j - F(X_j)]^2 \quad (5.10)$$

onde (X_j, Y_j) são as coordenadas de um dos k pontos em relação aos quais o polinómio F se deve aproximar.

Para a base canónica $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n\}$, o polinómio fica da forma:

$$F_n(X) = c_0 + c_1 \cdot X + c_2 \cdot X^2 + \dots + c_n \cdot X^n \quad (5.11)$$

onde $F_n(X)$ é um polinómio de grau n e c_0, c_1, c_2, c_n são os coeficientes dos termos da base canónica $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n\}$.

Os coeficientes do polinómio, que se aproxima de um conjunto finito de pontos, são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k 1 & \sum_{j=0}^k X_j & \sum_{j=0}^k X_j^2 & \dots & \sum_{j=0}^k X_j^n \\ \sum_{j=0}^k X_j & \sum_{j=0}^k X_j^2 & \sum_{j=0}^k X_j^3 & \dots & \sum_{j=0}^k X_j^{n+1} \\ \sum_{j=0}^k X_j^2 & \sum_{j=0}^k X_j^3 & \sum_{j=0}^k X_j^4 & \dots & \sum_{j=0}^k X_j^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^k X_j^n & \sum_{j=0}^k X_j^{n+1} & \sum_{j=0}^k X_j^{n+2} & \dots & \sum_{j=0}^k X_j^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k Y_j \\ \sum_{j=0}^k Y_j \cdot X_j \\ \sum_{j=0}^k Y_j \cdot X_j^2 \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^k Y_j \cdot X_j^n \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

onde (X_j, Y_j) são as coordenadas de um ponto genérico de índice j , c_0, c_1, c_2, c_n são os coeficientes dos termos da base canónica $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n\}$, k é o número de pontos e n é o grau do polinómio.

Para um polinómio de segundo grau, o sistema anterior é constituído por três equações e três incógnitas.

O raio de curvatura de uma curva no referencial XOY , dada de forma explícita pela expressão $Y = F(X)$, é obtido da seguinte forma:

$$R(X) = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}} \quad (5.13)$$

onde $R(X)$ é o raio de curvatura num determinado ponto da curva e $\frac{\partial Y}{\partial X}$ e $\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}$ são, respectivamente, a primeira e segunda derivada da função explícita da curva em ordem a X .

No caso de uma função polinomial de segundo grau, a expressão anterior toma a forma:

$$R(X) = \frac{(1 + (c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot X)^2)^{3/2}}{2 \cdot c_2 \cdot X} \quad (5.14)$$

onde $R(X)$ é o raio de curvatura num determinado ponto da curva, c_1 e c_2 são os coeficientes dos termos da função polinomial $Y(X) = F_2(X) = c_0 + c_1 \cdot X + c_2 \cdot X^2$.

No caso discreto, o erro cometido, também designado por erro padrão, pode ser estimado pela seguinte expressão [10]:

$$ER = \frac{1}{k+1} \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^k (Y_j - F(X_j))^2} \quad (5.15)$$

em que ER é o erro padrão, (X_j, Y_j) são as coordenadas de um ponto genérico de índice j , k é o número de pontos e n é o grau do polinómio.

O método dos mínimos quadrados também pode ser usado no caso da função que se aproxima de um determinado número de pontos corresponder a uma circunferência. Uma circunferência apresenta a seguinte expressão analítica geral:

$$c_1 \cdot X^2 + c_1 \cdot Y^2 + c_2 \cdot X + c_3 \cdot Y + 1 = 0 \quad (5.16)$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são os coeficientes dos termos da expressão de uma circunferência no referencial XOY .

Conforme referido anteriormente, a escolha dos coeficientes é feita por forma a minimizar o resíduo quadrático, ou seja:

$$\min \sum_{j=1}^k [0 - \Phi_j]^2 = \min \sum_{j=1}^k \Phi_j^2 = \min S \quad (5.17)$$

em que Φ_j é o resíduo da cónica que se deve aproximar de k pontos e $S = \sum_{j=1}^k \Phi_j^2$.

O resíduo da cónica, para um ponto genérico de coordenadas (X_j, Y_j) , é dado pela expressão:

$$\Phi_j = c_1 \cdot X_j^2 + c_1 \cdot Y_j^2 + c_2 \cdot X_j + c_3 \cdot Y_j + 1 \quad (5.18)$$

em que Φ_j é o resíduo da cônica num ponto genérico de coordenadas (X_j, Y_j) e c_1 , c_2 e c_3 são os coeficientes dos termos da expressão de uma circunferência no referencial XOY .

O mínimo da expressão anterior pressupõe que as derivadas parciais de S , em relação a cada um dos coeficientes, sejam nulas, originando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \sum_{j=1}^k [\Phi_j \cdot (X_j^2 + Y_j^2)] = 0 \\ 2 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot X_j = 0 \\ 2 \cdot \sum_{j=1}^k \Phi_j \cdot Y_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k X_j^4 + \sum_{j=1}^k Y_j^4 + 2 \cdot \sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j^2 & \sum_{j=1}^k X_j^3 + \sum_{j=1}^k X_j \cdot Y_j^2 & \sum_{j=1}^k Y_j^3 + \sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j \\ \sum_{j=1}^k X_j^3 + \sum_{j=1}^k X_j \cdot Y_j^2 & \sum_{j=1}^k X_j^2 & \sum_{j=1}^k X_j \cdot Y_j \\ \sum_{j=1}^k Y_j^3 + \sum_{j=1}^k X_j^2 \cdot Y_j & \sum_{j=1}^k X_j \cdot Y_j & \sum_{j=1}^k Y_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^k X_j^2 - \sum_{j=1}^k Y_j^2 \\ -\sum_{j=1}^k X_j \\ -\sum_{j=1}^k Y_j \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

em que (X_j, Y_j) são as coordenadas de um dos k pontos em relação aos quais a cônica se deve aproximar e c_1 , c_2 e c_3 são os coeficientes dos termos da expressão analítica de uma circunferência.

O raio da circunferência obtida é dado pela seguinte expressão [5]:

$$R^2 = \frac{c_2^2 + c_3^2 - 4 \cdot c_1}{4 \cdot c_1^2} \quad (5.20)$$

onde R é o raio e c_1 , c_2 e c_3 são os coeficientes dos termos da expressão analítica de uma circunferência.

A determinação das coordenadas dos vários pontos ao longo das curvas de nível da superfície da membrana permitiu a estipulação de circunferências e parábolas que se aproximam daqueles pontos. Seguidamente são apresentados os resultados da aproximação realizada com parábolas e circunferências, para conjuntos de pontos localizados à mesma cota.

Z [m]	ER [m]		R_{PAR} [m]	R_{CIR} [m]
	Parábola	Circunferência		
0,142	3,108E-04	3,125E-04	0,429	0,426
0,124	3,512E-04	3,262E-04	0,253	0,263
0,105	1,546E-04	1,418E-04	0,186	0,200
0,086	1,842E-04	2,385E-04	0,164	0,179
0,066	2,592E-04	3,423E-04	0,152	0,165
0,046	4,011E-04	4,507E-04	0,154	0,163
0,030	1,566E-04	1,657E-04	0,175	0,181
0,011	1,970E-04	2,112E-04	0,136	0,128

Quadro 5.4 - Quadro resumo do erro padrão cometido pela aproximação, de uma função polinomial e da expressão geral analítica de uma circunferência, aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical, com indicação dos raios de curvatura das respectivas parábolas e circunferências em cada uma das cotas (a sombreado o menor valor do erro padrão em cada uma das cotas).

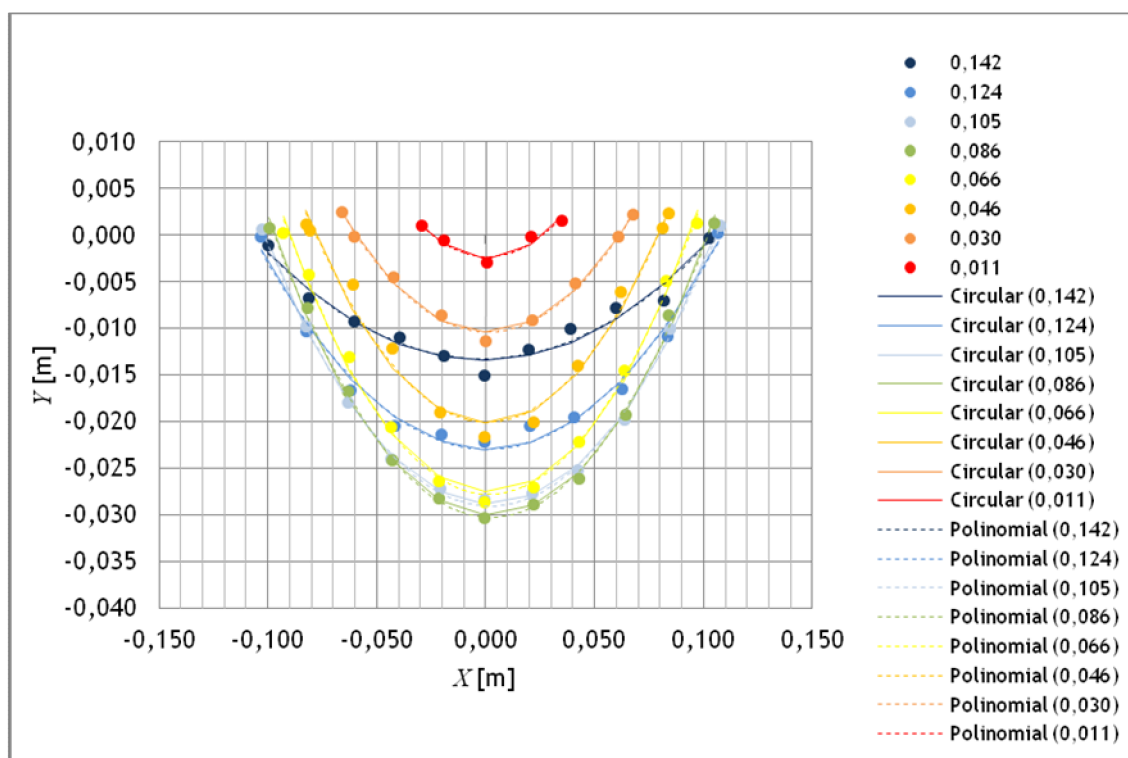


Gráfico 5.1 - Representação em planta das funções de aproximação aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical.

Apresenta-se de seguida o mesmo quadro resumo do erro padrão e dos raios de curvatura, mas efectuando uma aproximação apenas aos pontos medidos no ensaio experimental que não estejam localizados nas zonas em que a fita cota restringiu a deformação.

Esta acção consiste em desprezar a existência dos dois pontos junto aos bordos nas cinco curvas de nível mais elevadas. Na curva de nível imediatamente abaixo destas desprezou-se a existência dos três pontos junto aos bordos. As curvas de nível às cotas mais baixas não foram consideradas, pelo facto de se encontrarem, praticamente na sua totalidade, dentro de uma zona cuja deformação foi restringida pelo uso de fita-cola.

Z [m]	ER [m]		R_{PARf} [m]	R_{CIR} [m]
	Parábola	Circunferência		
0,142	2,847E-04	2,872E-04	0,335	0,331
0,124	1,688E-04	1,687E-04	0,375	0,376
0,105	1,056E-04	9,711E-05	0,210	0,215
0,086	1,067E-04	9,687E-05	0,168	0,175
0,066	5,344E-05	8,372E-05	0,136	0,143
0,046	7,029E-05	7,598E-05	0,104	0,109

Quadro 5.5 - Quadro resumo do erro padrão cometido pela aproximação, de uma função polinomial e da expressão geral analítica de uma circunferência, aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical, com indicação dos raios de curvatura das respectivas parábolas e circunferências em cada uma das cotas, na situação em que se desprezaram os pontos localizados em zonas da membrana cuja deformação foi restringida pela fita-cola (a sombreado o menor valor do erro padrão em cada uma das cotas).

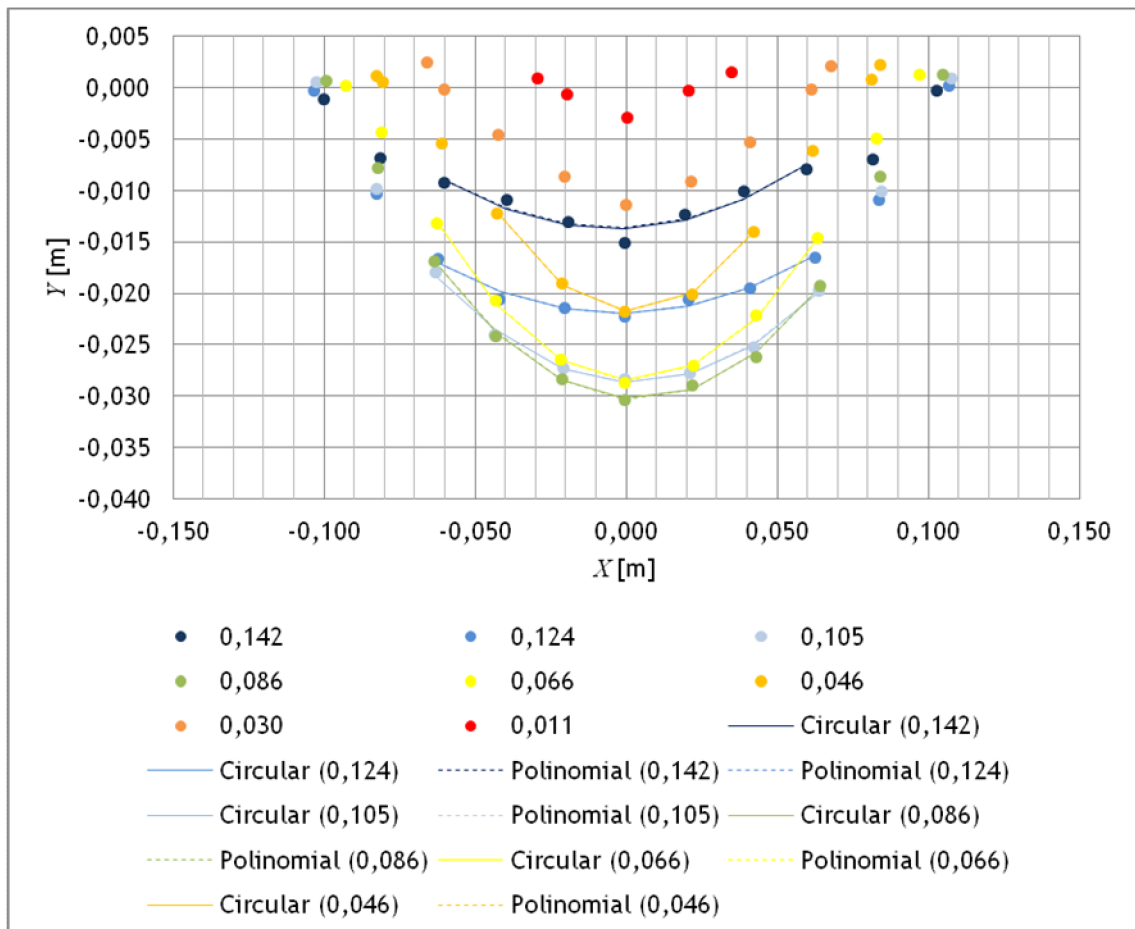


Gráfico 5.2 - Representação em planta das funções de aproximação aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção vertical, na situação em que se desprezaram os pontos localizados em zonas da membrana cuja deformação foi restringida pela fita-cola.

No caso em que o plano de inserção está inclinado 45° para jusante, a análise realizada com base nas funções de aproximação é ilustrada no quadro e no gráfico seguintes.

Z [m]	ER [m]		R _{PARf} [m]	R _{CIR} [m]
	Parábola	Circunferência		
0,101	7,332E-04	7,338E-04	2,036	1,906
0,087	4,228E-04	3,806E-04	0,211	0,224
0,066	7,213E-05	8,659E-05	0,190	0,205
0,044	2,030E-04	2,250E-04	0,201	0,212
0,022	8,429E-05	8,317E-05	0,271	0,276

Quadro 5.6 - Quadro resumo do erro padrão cometido pela aproximação, de uma função polinomial e da expressão geral analítica de uma circunferência, aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 45° para jusante, em relação à vertical, com indicação dos raios de curvatura das respectivas parábolas e circunferências em cada uma das cotas (a sombreado o menor valor do erro padrão em cada uma das cotas).

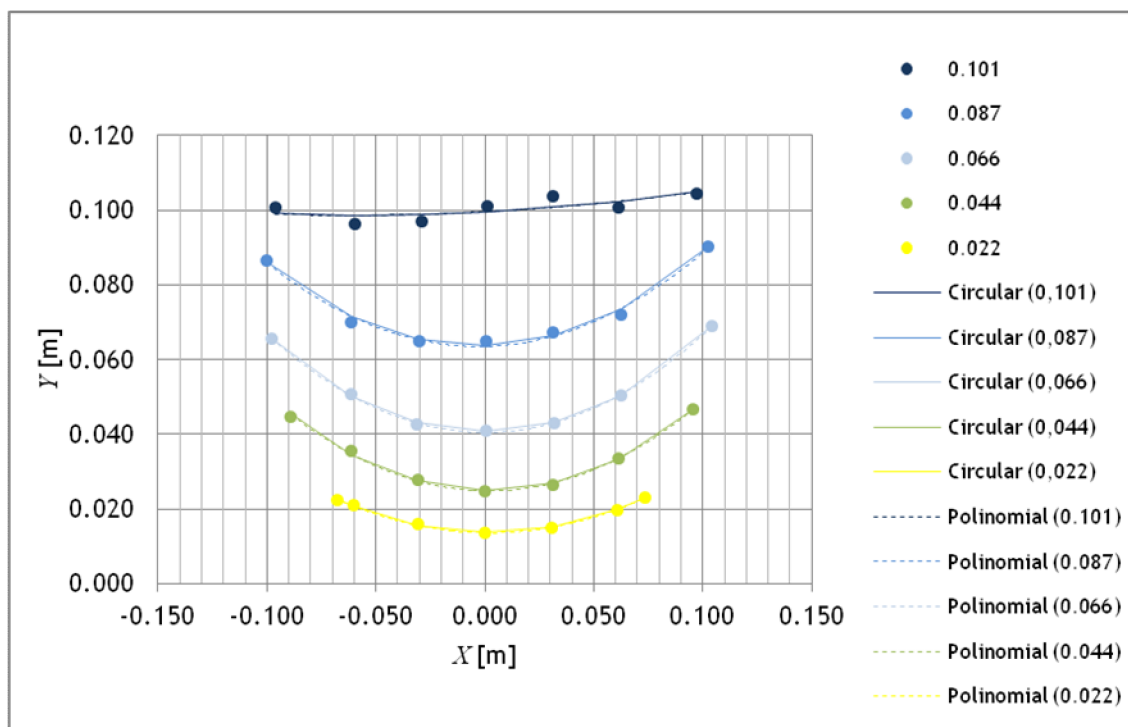


Gráfico 5.3 - Representação em planta das funções de aproximação aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 45° para jusante, em relação à vertical.

No caso em que o plano de inserção está inclinado 25° para montante, o mesmo tipo de análise realizada anteriormente conduz aos resultados expostos a seguir.

Z [m]	ER [m]		R_{PARF} [m]	R_{CIR} [m]
	Parábola	Circunferência		
0,117	3,415E-04	3,686E-04	0,244	0,254
0,089	2,906E-04	3,518E-04	0,155	0,173
0,062	4,635E-04	6,225E-04	0,128	0,146
0,038	5,470E-04	6,697E-04	0,113	0,126
0,023	4,061E-05	4,371E-05	0,200	0,206

Quadro 5.7 - Quadro resumo do erro padrão cometido pela aproximação, de uma função polinomial e da expressão geral analítica de uma circunferência, aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 25° para montante, em relação à vertical, com indicação dos raios de curvatura das respectivas parábolas e circunferências em cada uma das cotas (a sombreado o menor valor do erro padrão em cada uma das cotas).

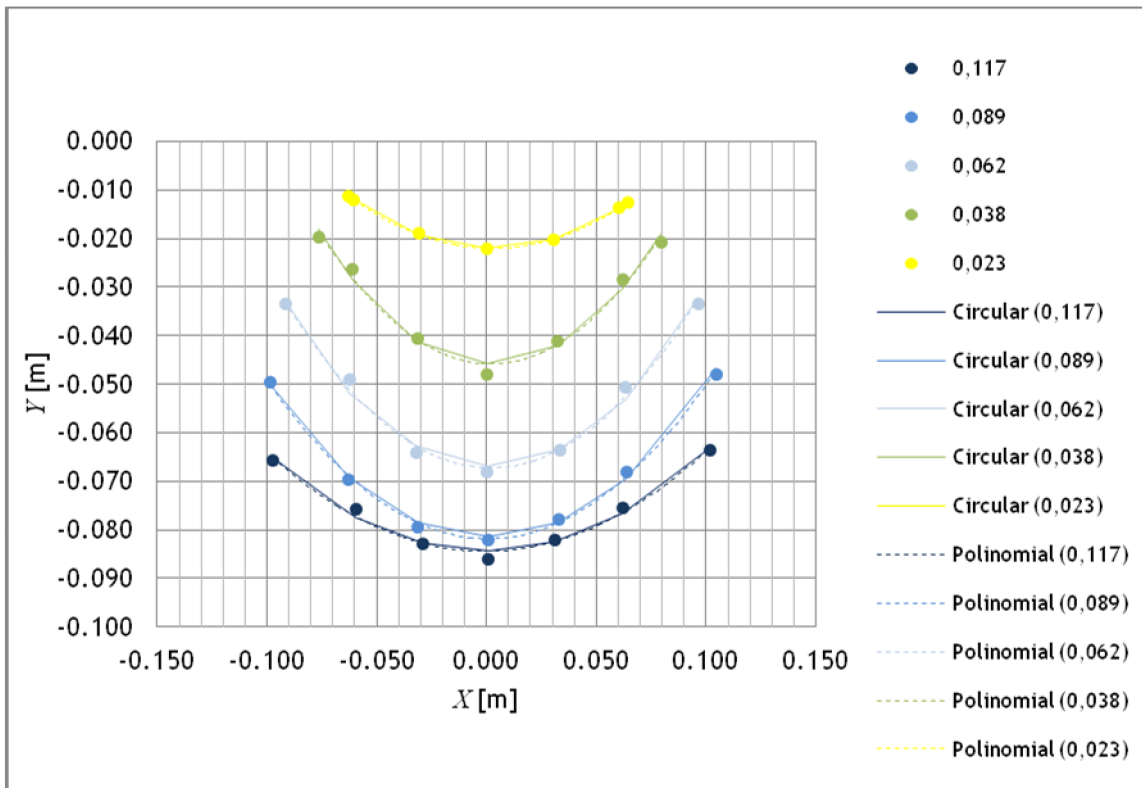


Gráfico 5.4 - Representação em planta das funções de aproximação aos pontos das curvas de nível da superfície funicular da pressão hidrostática num plano de inserção inclinado 25° para montante, em relação à vertical.

Capítulo 6

Análise Numérica de Cascas de Revolução

6.1 Modelos

6.1.1 Cascas de revolução esféricas com um bordo livre

A geometria da superfície média das cascas de revolução esféricas com um bordo livre foi modelada através de arcos de raio igual a 50 metros. A partir destes arcos foi possível criar a superfície correspondente a um quarto de esfera (figura 6.1).

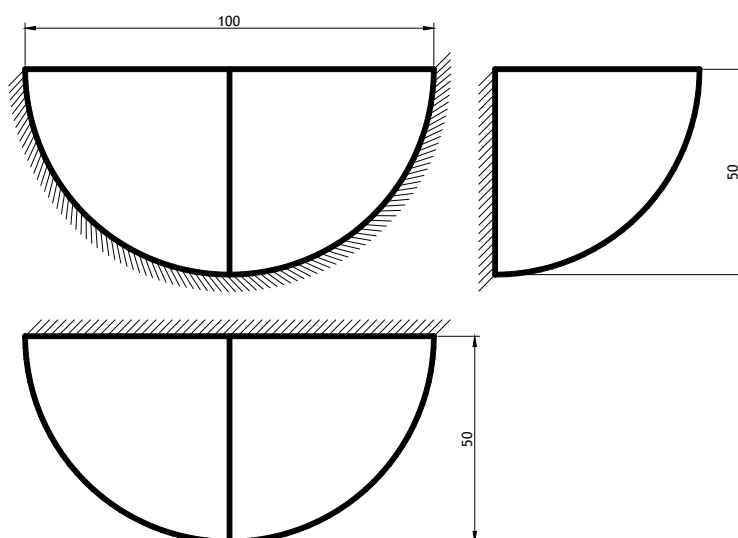


Figura 6.1 (a), (b) e (c) - Geometria da casca de revolução esférica com um bordo livre, numa vista em alçado principal de montante (a), alçado lateral esquerdo (b) e em planta (c), com cotagem em metros.

A malha de elementos finitos quadrangulares (figura 6.2) foi gerada automaticamente, dividindo cada um dos arcos em 10 segmentos. Cada um destes segmentos constitui uma aresta de um elemento finito. Os elementos finitos utilizados são do tipo QSL8, sendo de segundo grau a ordem de interpolação.

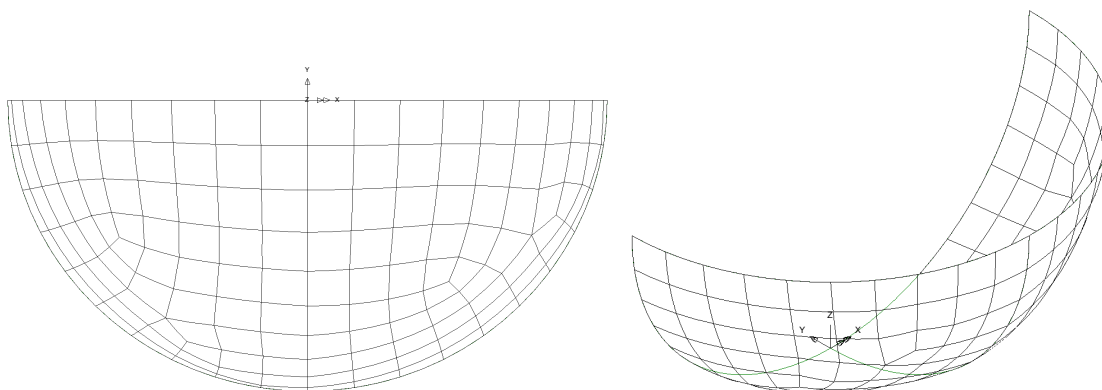


Figura 6.2 (a) e (b) - Modelo de elementos finitos da casca de revolução esférica com um bordo livre, numa vista em alçado principal de montante (a) e em perspectiva (b).

O eixo dos referenciais locais, ligados a cada elemento finito, perpendicular à superfície média da casca, aponta sempre para jusante. A espessura atribuída à superfície é constante e igual a um metro, num dos casos, e igual a três metros, no outro caso.

6.1.2 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo

A geometria da superfície média das cascas (figura 6.3) é definida pela revolução de um meridiano em torno de um eixo vertical.

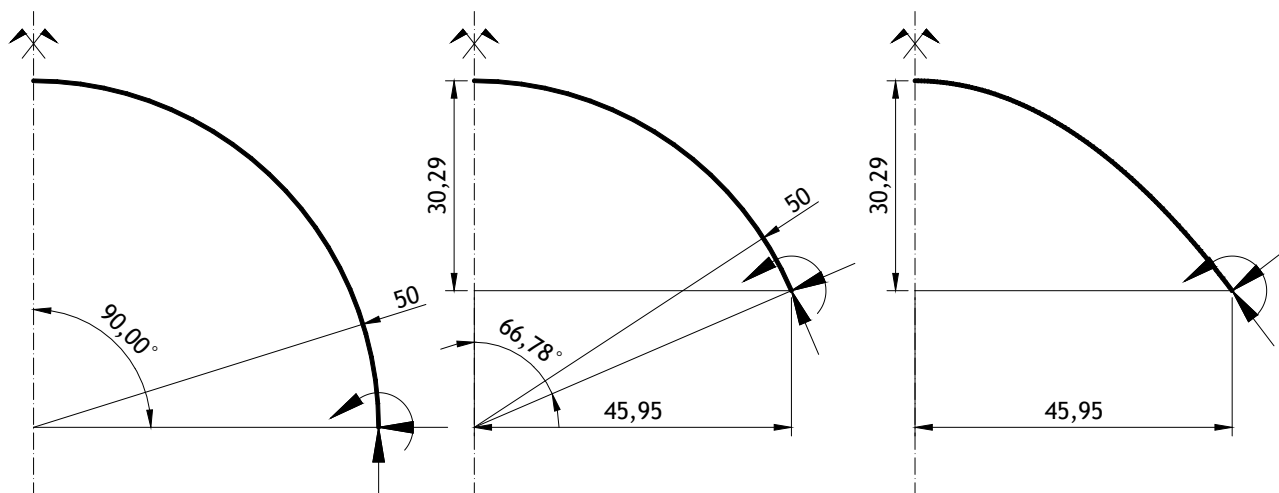


Figura 6.3 (a), (b) e (c) - Geometria das cascas de revolução encastradas em todo o bordo, com um meridiano circular com uma abertura angular ao centro de 180° (a), ou de $133,56^\circ$ (b) ou com um meridiano parabólico (c) (cotagem em metros).

Os modelos utilizaram elementos finitos bidimensionais axissimétricos do tipo BXS3. Foi realizada uma interpolação quadrática. Cada um dos arcos dos meridianos foi dividido em 20 elementos finitos.

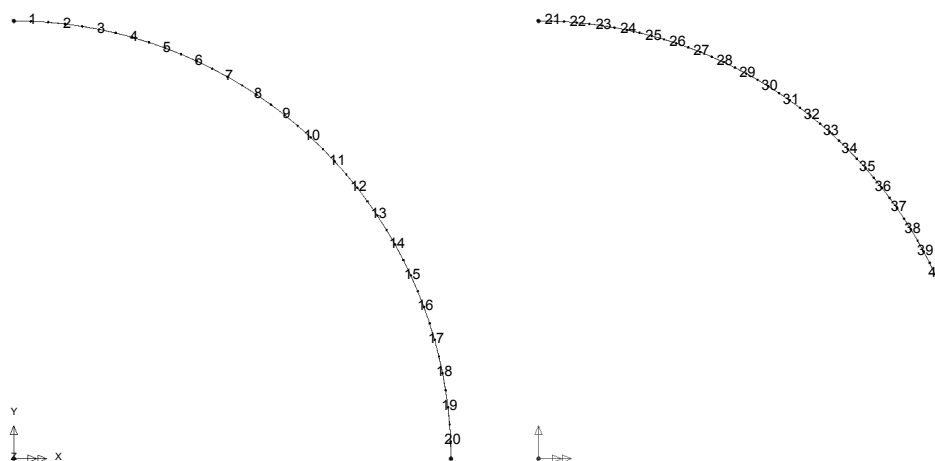


Figura 6.4 (a) e (b) - Malha de elementos finitos e nós, com indicação da numeração dos elementos, dos modelos numéricos das cascas de revolução esféricas (com uma abertura angular ao centro de 180° (a) e de $133,56^\circ$ (b)) encastradas em todo o bordo, numa projecção ortogonal do meridiano circular no plano XOY .

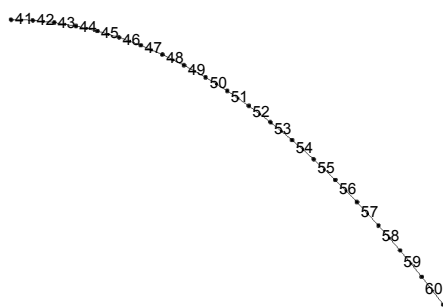


Figura 6.5 - Malha de elementos finitos e nós, com indicação da numeração dos elementos, do modelo numérico da casca de revolução com meridiano parabólico, encastrada em todo o bordo, numa projecção ortogonal do meridiano no plano XOY .

O referencial local das linhas que constituem os meridianos tem o eixo X com direcção tangente ao arco e com sentido positivo que aponta para os bordos da casca. Por sua vez, o eixo Y é perpendicular ao eixo anterior e o seu sentido positivo aponta para o exterior da casca.

A espessura atribuída às superfícies é constante e igual a um metro, no caso das casca mais finas, e igual a três metros, no caso das cascas mais espessas.

6.2 Acções

6.2.1 Variação uniforme de temperatura

Foi considerada, em todas as cascas em estudo, uma variação uniforme negativa de temperatura de 20°C .

6.3 Condições de apoio

O primeiro conjunto de cascas está encastrado no terreno ao longo de um bordo, possuindo um outro bordo superior livre. O segundo conjunto de cascas está encastrado ao longo de todo o bordo.

6.4 Propriedades dos materiais

Considera-se um comportamento elástico linear do betão. O módulo de elasticidade do betão considerado nas análises realizadas é de 27 GPa , enquanto que o coeficiente de Poisson é igual a $0,2$. O coeficiente de dilatação térmica do betão é igual a $10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

6.5 Resultados

6.5.1 Modelo CASCA1

Os diagramas de esforços principais de membrana, que se referem aos modelos CASCA1 e CASCA2, obedecem à escala ilustrada na figura 6.6. Os esforços referidos são representados em planos tangentes à superfície média da casca e os diagramas são apresentados numa vista em planta das estruturas, ou seja, numa projecção no plano XOY . Foram escolhidos três pontos de Gauss, entre os elementos do modelo numérico, apresentando-se o valor dos esforços nestes pontos no quadro 6.1.

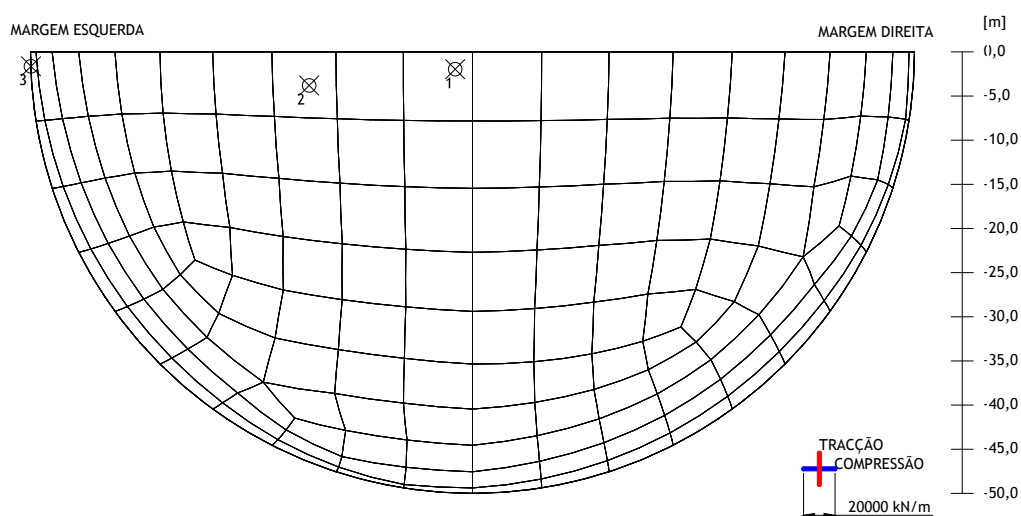


Figura 6.6 - Diagrama de escalas aproximadas, numa vista em planta, para os resultados dos esforços de membrana dos modelos CASCA1 e CASCA2 e indicação dos pontos de Gauss utilizados para comparar resultados.

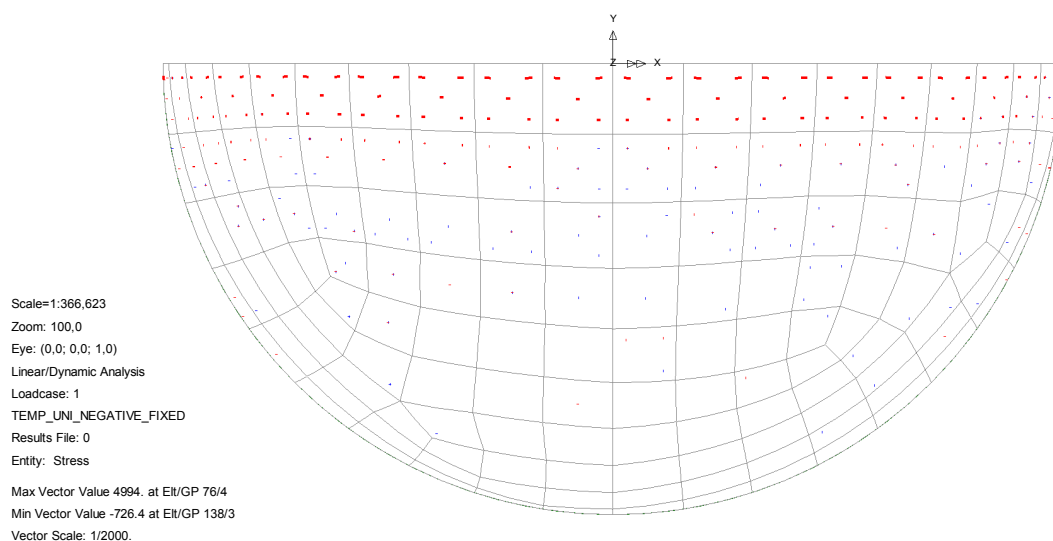


Figura 6.7 - Esforços de membrana principais, em kN/m (compressões a azul e tracções a vermelho), nos pontos de Gauss da superfície média do modelo CASCA1, numa vista em planta, quando a casca está encastrada ao longo do contorno de inserção no vale e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C.

6.5.2 Modelo CASCA2

Nesta estrutura, para além do diagrama de esforços principais de membrana visto em planta, é também apresentado o mesmo diagrama visto em alçado lateral esquerdo. Adicionalmente, é apresentada a deformada da estrutura para a acção em estudo.

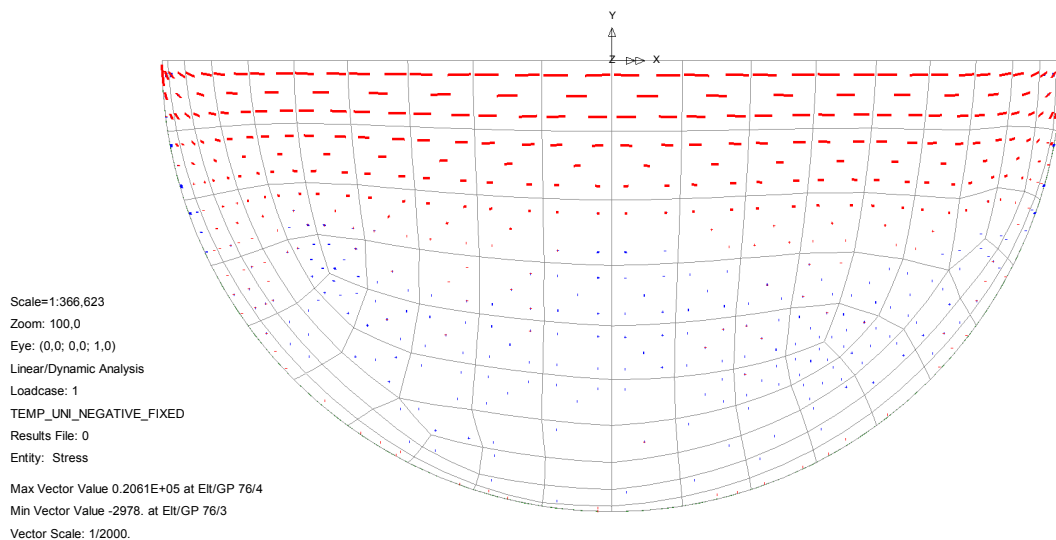


Figura 6.8 - Esforços de membrana principais, em kN/m (compressões a azul e tracções a vermelho), nos pontos de Gauss da superfície média do modelo CASCA2, numa vista em planta, quando a casca está encastrada ao longo do contorno de inserção no vale e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C.

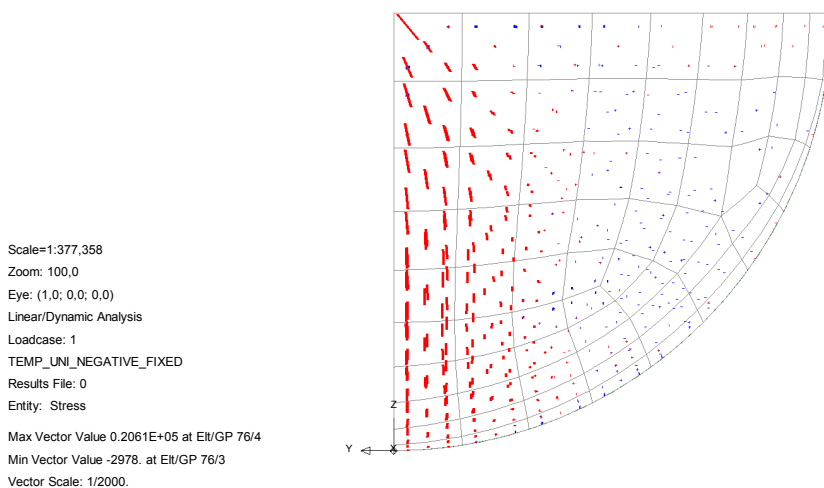


Figura 6.9 - Esforços de membrana principais, em kN/m (compressões a azul e tracções a vermelho), nos pontos de Gauss da superfície média do modelo CASCA2, numa vista em alçado lateral esquerdo, quando a casca está encastrada ao longo do contorno de inserção no vale e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C.

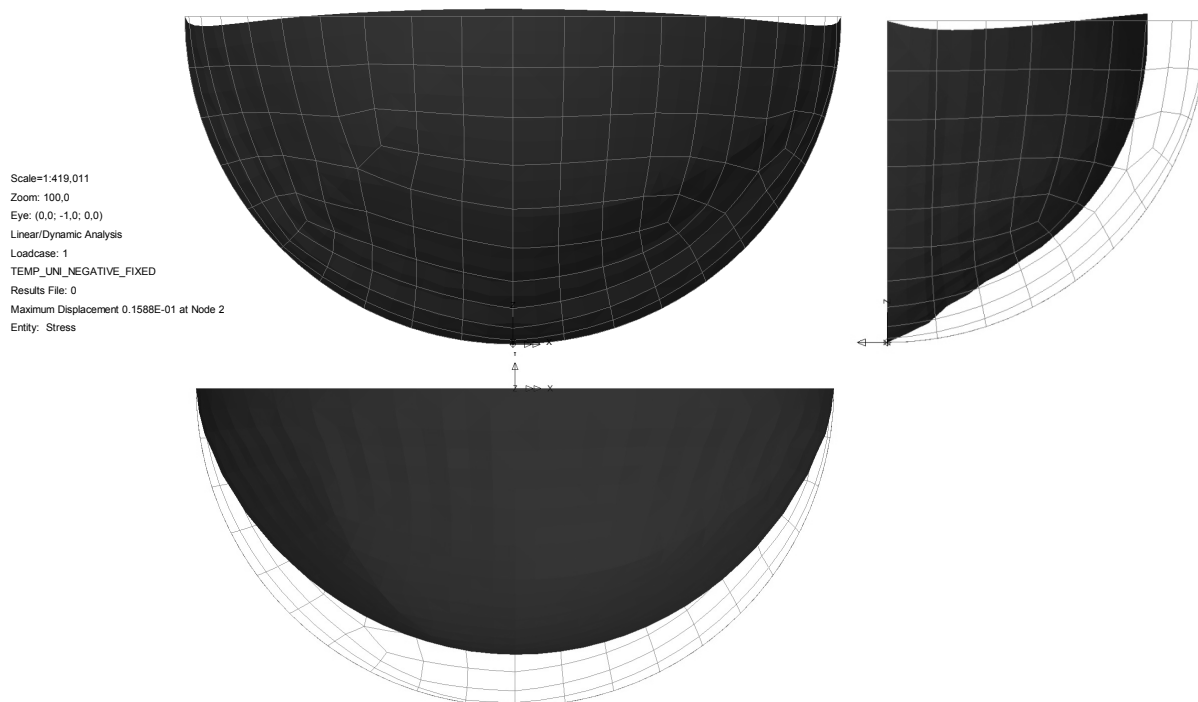


Figura 6.10 (a), (b) e (c) - Deformada, em m, da superfície média da CASCA2, numa vista em alçado principal de montante (a), numa vista lateral esquerda (b) e numa vista em planta (c), quando a casca está encastrada ao longo do contorno de inserção no vale e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C.

Designação	Esforço principal de membrana (valor máximo de tracção) no ponto [kN/m]		
	1	2	3
CASCA 1	4569	2804	4994
CASCA 2	15496	13314	20611

Quadro 6.1 - Esforços principais de membrana (valor máximo de tracção) nos pontos de Gauss das estruturas CASCA1 e CASCA2.

6.5.3 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo

Os modelos CASCA3, CASCA5 e CASCA7 têm em comum a espessura. O mesmo acontece com os modelos CASCA4, CASCA6 e CASCA8. Estes dois conjuntos de modelos, para a solicitação em estudo, apresentam diagramas de esforços com um andamento semelhante, mas com magnitudes diferentes. Por este motivo, apenas serão apresentados os diagramas de esforço normal e de momento flector nos meridianos do primeiro conjunto de modelos. No quadro 6.2 estão resumidos os valores dos esforços em determinados nós para todas as cascas.

Estudo da Forma de Barragens Abóbada sob a Acção da Pressão Hidrostática e de Variações de Temperatura

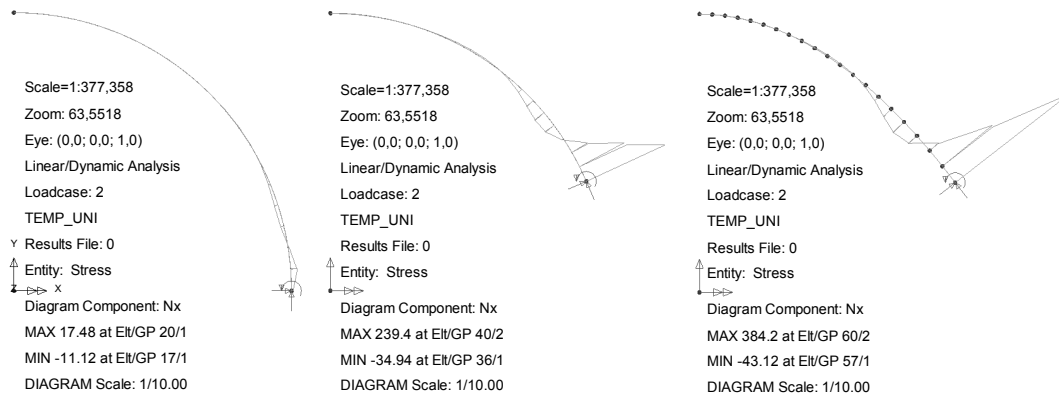


Figura 6.11 (a), (b) e (c) - Esforço normal ao longo do meridiano, em kN/m (compressões negativas e tracções positivas), nos nós dos modelos CASCA3 (a), CASCA5 (b) e CASCA7 (c), numa projecção ortogonal no plano XOY , quando a casca está encastrada em todo o bordo e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C .

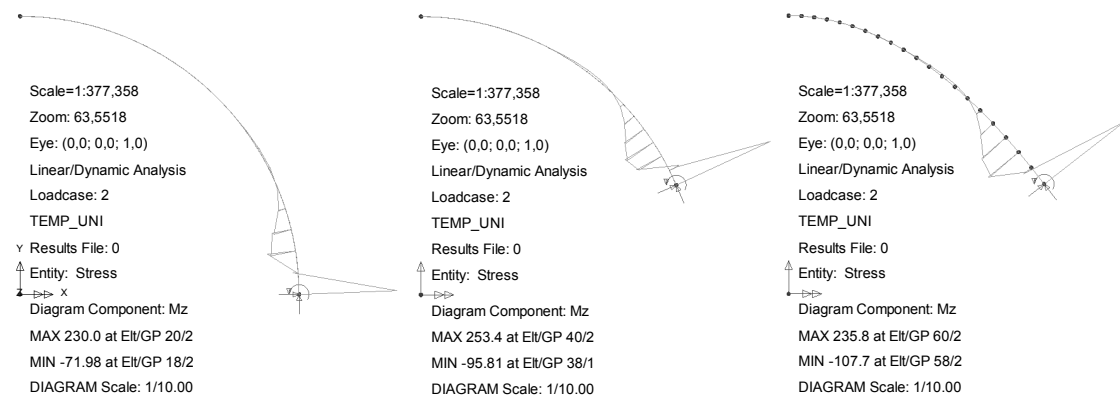


Figura 6.12 (a), (b) e (c) - Momento flector segundo o eixo perpendicular ao plano do meridiano, em kN.m/m, nos nós dos modelos CASCA3 (a), CASCA5 (b) e CASCA7 (c), numa projecção ortogonal no plano XOY , quando a casca está encastrada em todo o bordo e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C .

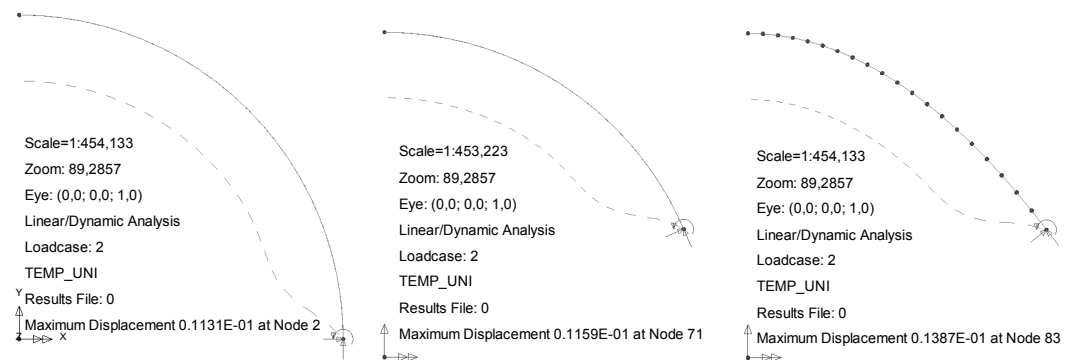


Figura 6.13 (a), (b) e (c) - Deformada, em m, nos nós dos modelos CASCA3 (a), CASCA5 (b) e CASCA7 (c), numa projecção ortogonal no plano XOY , quando a casca está encastrada em todo o bordo e actua a variação negativa uniforme de temperatura de 20°C .

Designação	Esforço normal ao longo do meridiano n_{ϕ} [kN/m]	Momento flector no paralelo m_{ϕ} [kN/m]
CASCA3	-5	296
CASCA4	16	2830
CASCA5	262	314
CASCA6	1403	3013
CASCA7	435	307
CASCA8	2354	2986

Quadro 6.2 - Esforço normal (compressões negativas e tracções positivas) e momento flector no paralelo, no nó da extremidade encastrada, dos modelos numéricos das cascas de revolução encastradas em todo o bordo.

Capítulo 7

Geração Parametrizada da Geometria de Barragens de Ângulo Constante com Curvas de Nível Circulares

7.1 Dimensionamento dos arcos

A obtenção de espessuras dos diversos arcos circulares que compõem a barragem foi realizada com recurso à fórmula dos tubos. Na figura 7.1 é possível visualizar um dos arcos circulares de uma barragem de ângulo constante.

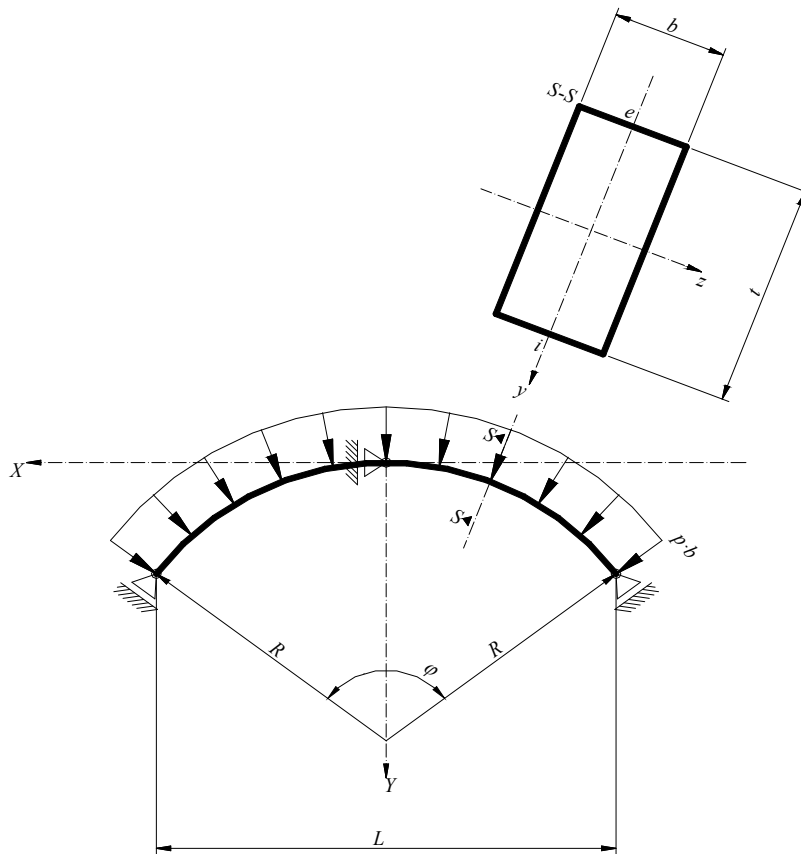


Figura 7.1 - Vista em planta da geometria de um arco, de uma barragem de ângulo constante, e secção transversal do mesmo, com indicação dos parâmetros que intervêm na geração da geometria da barragem.

As expressões que se apresentam a seguir serviram de base para o cálculo do raio e da espessura de cada arco:

$$\frac{L_j}{2} = Z_j \cdot \tan(45^\circ) \quad (7.1)$$

$$R_j = \frac{L_j}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\varphi_j}{2}\right)} \quad (7.2)$$

$$b_j = \frac{Z_{j-1} - Z_{j+1}}{2} \quad (7.3)$$

$$[(H - Z)_t]_j = H - \left(Z_j + \frac{b_j}{2}\right) \quad (7.4)$$

$$[(H - Z)_b]_j = H - \left(Z_j - \frac{b_j}{2}\right) \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} [(H - Z)_m]_j &= \frac{[(H - Z)_t]_j + [(H - Z)_b]_j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[H - \left(Z_j + \frac{b_j}{2}\right) + H - \left(Z_j - \frac{b_j}{2}\right) \right] = \quad (7.6) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot H - 2 \cdot Z_j] = H - Z_j \end{aligned}$$

$$p_j = \gamma_w \cdot [(H - Z)_m]_j \quad (7.7)$$

$$(t_d)_j = \frac{p_j \cdot R_j}{\sigma_{m\acute{a}x}} = \frac{\gamma_w \cdot (H - Z_j) \cdot Z_j \cdot \tan(45^\circ)}{\text{sen}\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \cdot \sigma_{m\acute{a}x}} = \frac{\gamma_w}{\text{sen}\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \cdot \sigma_{m\acute{a}x}} \cdot (H \cdot Z_j - Z_j^2) \quad (7.8)$$

onde L é o vão, Z é a cota em relação à base da barragem, R é o raio, φ é o ângulo de abertura ao centro, b é a largura, t_d é a espessura de cálculo, $(H - Z)_t$, $(H - Z)_b$ e $(H - Z)_m$ são, respectivamente, as profundidades em relação ao coroamento da barragem no topo, na base e no eixo do arco circular no nível j , H é a altura máxima da barragem, p é a pressão hidrostática, γ_w é o peso volúmico da água e $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão máxima de compressão no betão.

O produto do raio pela pressão hidrostática não é constante ao longo da coordenada Z .

O raio do arco num determinado nível (7.2) depende do ângulo de abertura ao centro (φ), que é constante ao longo de Z , e do comprimento do vão do arco (7.1), que varia linearmente ao longo de Z . A pressão hidrostática (7.7) varia linearmente ao longo da coordenada Z . Na verdade, o produto da pressão hidrostática (p) pelo raio (R), nos diferentes níveis, não é constante, mas sim uma função quadrática em Z :

$$p \cdot R = \gamma_w \cdot (H - Z) \cdot \frac{Z \cdot \tan(45^\circ)}{\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\gamma_w}{\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot (Z \cdot H - Z^2) \quad (7.9)$$

onde p é a pressão hidrostática, γ_w é o peso volúmico da água, H é a altura máxima da barragem, Z é a cota a partir da base da barragem, R é o raio e φ é o ângulo de abertura ao centro do arco circular. Por esta razão, a espessura calculada pela fórmula dos tubos não é constante em toda a barragem, variando na mesma proporção do produto $p \cdot R$ ao longo de Z .

Na tabela seguinte são apresentados os valores dos parâmetros que permitiram calcular a espessura dos arcos.

Z [m]	$L/2$ [m]	$\varphi/2$ [rad]	R [m]	b [m]	$(H-Z)_t$ [m]	$(H-Z)_b$ [m]	$(H-Z)_m$ [m]	p [kN/m ²]	$p \cdot R$ [kN]	t_{calc} [m]	t [m]
75,00	75,00	1,17	81,61	0,50	0,00	0,50	0,25	2,5	204,0	0,04	0,10
74,00	74,00	1,17	80,52	1,00	0,50	1,50	1,00	10,0	805,2	0,16	0,20
73,00	73,00	1,17	79,43	1,00	1,50	2,50	2,00	20,0	1588,7	0,32	0,40
72,00	72,00	1,17	78,35	1,00	2,50	3,50	3,00	30,0	2350,4	0,47	0,50
71,00	71,00	1,17	77,26	1,00	3,50	4,50	4,00	40,0	3090,3	0,62	0,70
70,00	70,00	1,17	76,17	1,00	4,50	5,50	5,00	50,0	3808,4	0,76	0,80
69,00	69,00	1,17	75,08	1,00	5,50	6,50	6,00	60,0	4504,8	0,90	1,00
68,00	68,00	1,17	73,99	1,00	6,50	7,50	7,00	70,0	5179,5	1,04	1,10
67,00	67,00	1,17	72,90	1,00	7,50	8,50	8,00	80,0	5832,4	1,17	1,20
66,00	66,00	1,17	71,82	1,00	8,50	9,50	9,00	90,0	6463,5	1,29	1,30
65,00	65,00	1,17	70,73	1,00	9,50	10,50	10,00	100,0	7072,8	1,41	1,50
64,00	64,00	1,17	69,64	1,00	10,50	11,50	11,00	110,0	7660,4	1,53	1,60
63,00	63,00	1,17	68,55	1,00	11,50	12,50	12,00	120,0	8226,2	1,65	1,70
62,00	62,00	1,17	67,46	1,00	12,50	13,50	13,00	130,0	8770,3	1,75	1,80
61,00	61,00	1,17	66,38	1,00	13,50	14,50	14,00	140,0	9292,6	1,86	1,90
60,00	60,00	1,17	65,29	1,00	14,50	15,50	15,00	150,0	9793,2	1,96	2,00
59,00	59,00	1,17	64,20	1,00	15,50	16,50	16,00	160,0	10271,9	2,05	2,10
58,00	58,00	1,17	63,11	1,00	16,50	17,50	17,00	170,0	10728,9	2,15	2,20
57,00	57,00	1,17	62,02	1,00	17,50	18,50	18,00	180,0	11164,2	2,23	2,30
56,00	56,00	1,17	60,94	1,00	18,50	19,50	19,00	190,0	11577,7	2,32	2,40

Z [m]	L/2 [m]	$\varphi/2$ [rad]	R [m]	b [m]	(H-Z) _i [m]	(H-Z) _b [m]	(H-Z) _m [m]	p [kN/m ²]	p.R [kN]	t _{calc} [m]	t [m]
55,00	55,00	1,17	59,85	1,00	19,50	20,50	20,00	200,0	11969,4	2,39	2,40
54,00	54,00	1,17	58,76	1,00	20,50	21,50	21,00	210,0	12339,4	2,47	2,50
53,00	53,00	1,17	57,67	1,00	21,50	22,50	22,00	220,0	12687,6	2,54	2,60
52,00	52,00	1,17	56,58	1,00	22,50	23,50	23,00	230,0	13014,0	2,60	2,70
51,00	51,00	1,17	55,49	1,00	23,50	24,50	24,00	240,0	13318,7	2,66	2,70
50,00	50,00	1,17	54,41	1,00	24,50	25,50	25,00	250,0	13601,6	2,72	2,80
49,00	49,00	1,17	53,32	1,00	25,50	26,50	26,00	260,0	13862,7	2,77	2,80
48,00	48,00	1,17	52,23	1,00	26,50	27,50	27,00	270,0	14102,1	2,82	2,90
47,00	47,00	1,17	51,14	1,00	27,50	28,50	28,00	280,0	14319,8	2,86	2,90
46,00	46,00	1,17	50,05	1,00	28,50	29,50	29,00	290,0	14515,6	2,90	3,00
45,00	45,00	1,17	48,97	1,00	29,50	30,50	30,00	300,0	14689,7	2,94	3,00
44,00	44,00	1,17	47,88	1,00	30,50	31,50	31,00	310,0	14842,1	2,97	3,00
43,00	43,00	1,17	46,79	1,00	31,50	32,50	32,00	320,0	14972,6	2,99	3,00
42,00	42,00	1,17	45,70	1,00	32,50	33,50	33,00	330,0	15081,5	3,02	3,10
41,00	41,00	1,17	44,61	1,00	33,50	34,50	34,00	340,0	15168,5	3,03	3,10
40,00	40,00	1,17	43,53	1,00	34,50	35,50	35,00	350,0	15233,8	3,05	3,10
39,00	39,00	1,17	42,44	1,00	35,50	36,50	36,00	360,0	15277,3	3,06	3,10
38,00	38,00	1,17	41,35	1,00	36,50	37,50	37,00	370,0	15299,1	3,06	3,10
37,00	37,00	1,17	40,26	1,00	37,50	38,50	38,00	380,0	15299,1	3,06	3,10
36,00	36,00	1,17	39,17	1,00	38,50	39,50	39,00	390,0	15277,3	3,06	3,10
35,00	35,00	1,17	38,08	1,00	39,50	40,50	40,00	400,0	15233,8	3,05	3,10
34,00	34,00	1,17	37,00	1,00	40,50	41,50	41,00	410,0	15168,5	3,03	3,10
33,00	33,00	1,17	35,91	1,00	41,50	42,50	42,00	420,0	15081,5	3,02	3,10
32,00	32,00	1,17	34,82	1,00	42,50	43,50	43,00	430,0	14972,6	2,99	3,10
31,00	31,00	1,17	33,73	1,00	43,50	44,50	44,00	440,0	14842,1	2,97	3,10
30,00	30,00	1,17	32,64	1,00	44,50	45,50	45,00	450,0	14689,7	2,94	3,10
29,00	29,00	1,17	31,56	1,00	45,50	46,50	46,00	460,0	14515,6	2,90	3,10
28,00	28,00	1,17	30,47	1,00	46,50	47,50	47,00	470,0	14319,8	2,86	3,10
27,00	27,00	1,17	29,38	1,00	47,50	48,50	48,00	480,0	14102,1	2,82	3,10
26,00	26,00	1,17	28,29	1,00	48,50	49,50	49,00	490,0	13862,7	2,77	3,10
25,00	25,00	1,17	27,20	1,00	49,50	50,50	50,00	500,0	13601,6	2,72	3,10
24,00	24,00	1,17	26,12	1,00	50,50	51,50	51,00	510,0	13318,7	2,66	3,10
23,00	23,00	1,17	25,03	1,00	51,50	52,50	52,00	520,0	13014,0	2,60	3,10
22,00	22,00	1,17	23,94	1,00	52,50	53,50	53,00	530,0	12687,6	2,54	3,10
21,00	21,00	1,17	22,85	1,00	53,50	54,50	54,00	540,0	12339,4	2,47	3,10
20,00	20,00	1,17	21,76	1,00	54,50	55,50	55,00	550,0	11969,4	2,39	3,10
19,00	19,00	1,17	20,67	1,00	55,50	56,50	56,00	560,0	11577,7	2,32	3,10
18,00	18,00	1,17	19,59	1,00	56,50	57,50	57,00	570,0	11164,2	2,23	3,10
17,00	17,00	1,17	18,50	1,00	57,50	58,50	58,00	580,0	10728,9	2,15	3,10
16,00	16,00	1,17	17,41	1,00	58,50	59,50	59,00	590,0	10271,9	2,05	3,10
15,00	15,00	1,17	16,32	1,00	59,50	60,50	60,00	600,0	9793,2	1,96	3,10
14,00	14,00	1,17	15,23	1,00	60,50	61,50	61,00	610,0	9292,6	1,86	3,10
13,00	13,00	1,17	14,15	1,00	61,50	62,50	62,00	620,0	8770,3	1,75	3,10

Z [m]	L/2 [m]	$\varphi/2$ [rad]	R [m]	b [m]	$(H-Z)_t$ [m]	$(H-Z)_b$ [m]	$(H-Z)_m$ [m]	p [kN/m ²]	p.R [kN]	t _{calc} [m]	t [m]
12,00	12,00	1,17	13,06	1,00	62,50	63,50	63,00	630,0	8226,2	1,65	3,10
11,00	11,00	1,17	11,97	1,00	63,50	64,50	64,00	640,0	7660,4	1,53	3,10
10,00	10,00	1,17	10,88	1,00	64,50	65,50	65,00	650,0	7072,8	1,41	3,10
9,00	9,00	1,17	9,79	1,00	65,50	66,50	66,00	660,0	6463,5	1,29	3,10
8,00	8,00	1,17	8,71	1,00	66,50	67,50	67,00	670,0	5832,4	1,17	3,10
7,00	7,00	1,17	7,62	1,00	67,50	68,50	68,00	680,0	5179,5	1,04	3,10
6,00	6,00	1,17	6,53	1,00	68,50	69,50	69,00	690,0	4504,8	0,90	3,10
5,00	5,00	1,17	5,44	1,00	69,50	70,50	70,00	700,0	3808,4	0,76	3,10
4,00	4,00	1,17	4,35	1,00	70,50	71,50	71,00	710,0	3090,3	0,62	3,10
3,00	3,00	1,17	3,26	1,00	71,50	72,50	72,00	720,0	2350,4	0,47	3,10
2,00	2,00	1,17	2,18	1,00	72,50	73,50	73,00	730,0	1588,7	0,32	3,10
1,00	1,00	1,17	1,09	1,00	73,50	74,50	74,00	740,0	805,2	0,16	3,10
0,00	0,00	1,17	0,00	0,50	74,50	75,00	74,75	747,5	0,0	0,00	3,10

Quadro 7.1 - Cálculo da espessura dos arcos da barragem com base na fórmula dos tubos (a sombreado os valores calculados para arcos de cinco em cinco metros).

7.2 Organização espacial dos arcos em função do equilíbrio no crescimento isolado dos blocos

Na seguinte figura estão indicados os perfis em que foi realizado o estudo do equilíbrio do crescimento isolado dos blocos. A primeira tentativa de sobreposição espacial dos vários arcos analisou o equilíbrio dos blocos, partindo da definição dos perfis mais laterais para o central.

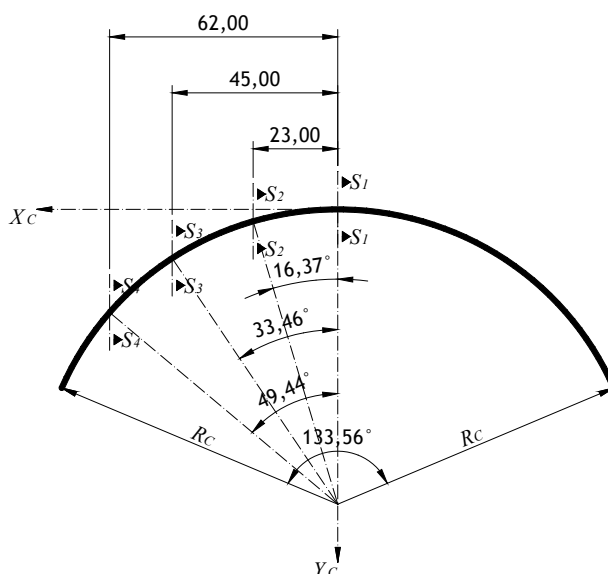


Figura 7.2 - Vista em planta do arco do coroamento e localização dos perfis utilizados no estudo do equilíbrio do crescimento isolado dos blocos.

Uma vez que o estudo do equilíbrio das consolas incidiu sobre perfis paralelos às linhas de cota do vale, e não com direcção radial, foi necessário corrigir a espessura dos elementos (figura 7.3).

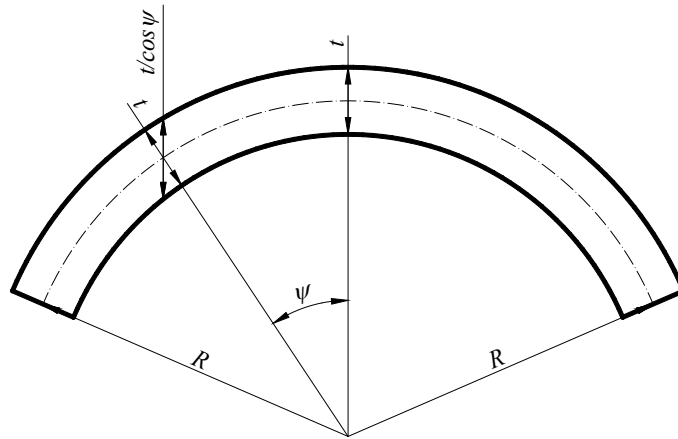


Figura 7.3 - Vista em planta de um arco da barragem, com indicação da espessura de um perfil medida na direcção radial e na direcção paralela às curvas de nível do vale.

As expressões seguintes serviram de base ao estudo das tensões na secção transversal da consola vertical, sendo n o índice do nível da secção da consola onde se pretende calcular as tensões nas faces de intradorso e extradorso (figura 7.4):

$$\psi_j = \text{sen}^{-1} \left(\frac{X_{CS}}{R_j} \right) \quad (7.10)$$

$$A_j = l_j \cdot \frac{t_j}{\cos \psi_j} \quad (7.11)$$

$$W_j = \gamma_{sc} \cdot b_j \cdot l_j \cdot \frac{t_j}{\cos \psi_j} \quad (7.12)$$

$$(W_{ac})_j = \sum_{k=j}^n W_k \quad (7.13)$$

$$(N_{ac})_j = -(W_{ac})_j \quad (7.14)$$

$$\mu_j = \frac{\sum_{k=j}^n W_k \cdot d_k}{\sum_{k=j}^n W_k} \quad (7.15)$$

$$(M_{ac})_j = -(W_{ac})_j \cdot \mu_j \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
 ((\sigma_e)_n)_j &= \frac{(N_{ac})_j}{A_n} + \frac{(M_{ac})_j}{(I_z)_n} \cdot \left(-\frac{t_n}{2 \cdot \cos \psi_n} \right) = \\
 &= \frac{-\sum_{k=j}^n \gamma_{sc} \cdot b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k}}{l_n \cdot \frac{t_n}{\cos \psi_n}} + \frac{-\sum_{k=j}^n W_k \cdot \frac{\sum_{k=j}^n W_k \cdot d_k}{\sum_{k=j}^n W_k}}{l_n \cdot \left(\frac{t_n}{\cos \psi_n} \right)^3} \cdot \left(-\frac{t_n}{2 \cdot \cos \psi_n} \right) = \\
 &= \frac{-\sum_{k=j}^n \gamma_{sc} \cdot b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k}}{l_n \cdot \frac{t_n}{\cos \psi_n}} + \frac{-\sum_{k=j}^n \gamma_{sc} \cdot b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k} \cdot d_k}{l_n \cdot \left(\frac{t_n}{\cos \psi_n} \right)^3} \cdot \left(-\frac{t_n}{2 \cdot \cos \psi_n} \right) = \\
 &= -\frac{\gamma_{sc}}{l_n \cdot \frac{t_n}{\cos \psi_n}} \cdot \left(\sum_{k=j}^n b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k} - \frac{6 \cdot \sum_{k=j}^n b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k} \cdot d_k}{\frac{t_n}{\cos \psi_n}} \right) \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((\sigma_i)_n)_j &= \frac{(N_{ac})_j}{A_n} + \frac{(M_{ac})_j}{(I_z)_n} \cdot \frac{t_n}{2 \cdot \cos \psi_n} = \\
 &= -\frac{\gamma_{sc}}{l_n \cdot \frac{t_n}{\cos \psi_n}} \cdot \left(\sum_{k=j}^n b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k} + \frac{6 \cdot \sum_{k=j}^n b_k \cdot l_k \cdot \frac{t_k}{\cos \psi_k} \cdot d_k}{\frac{t_n}{\cos \psi_n}} \right) \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

$$A_n = l_n \cdot \frac{t_n}{\cos \psi_n} \quad (7.19)$$

$$(I_z)_n = \frac{l_n \cdot \left(\frac{t_n}{\cos \psi_n} \right)^3}{12} \quad (7.20)$$

e onde t é a espessura, b é a largura, l é o comprimento, I_z é momento de inércia de segunda ordem da área A da secção transversal e W é o peso próprio, como uma força concentrada, de um elemento comum ao perfil e a um arco num determinado nível j da consola vertical; ψ é o ângulo entre as direcções radiais coincidentes com o fecho e o perfil

(de abcissa X_{CS}) em estudo num determinado nível; γ_{sc} é o peso volúmico do betão; W_{ac} , N_{ac} e M_{ac} são, respectivamente, o peso próprio, o esforço normal e o momento flector acumulados sobre a secção transversal em que se pretende estimar as tensões normais na face de montante (σ_e) e de jusante (σ_i), sendo que d e μ são as excentricidades das forças concentradas W e W_{ac} , respectivamente, em relação ao centro de gravidade da mesma secção transversal.

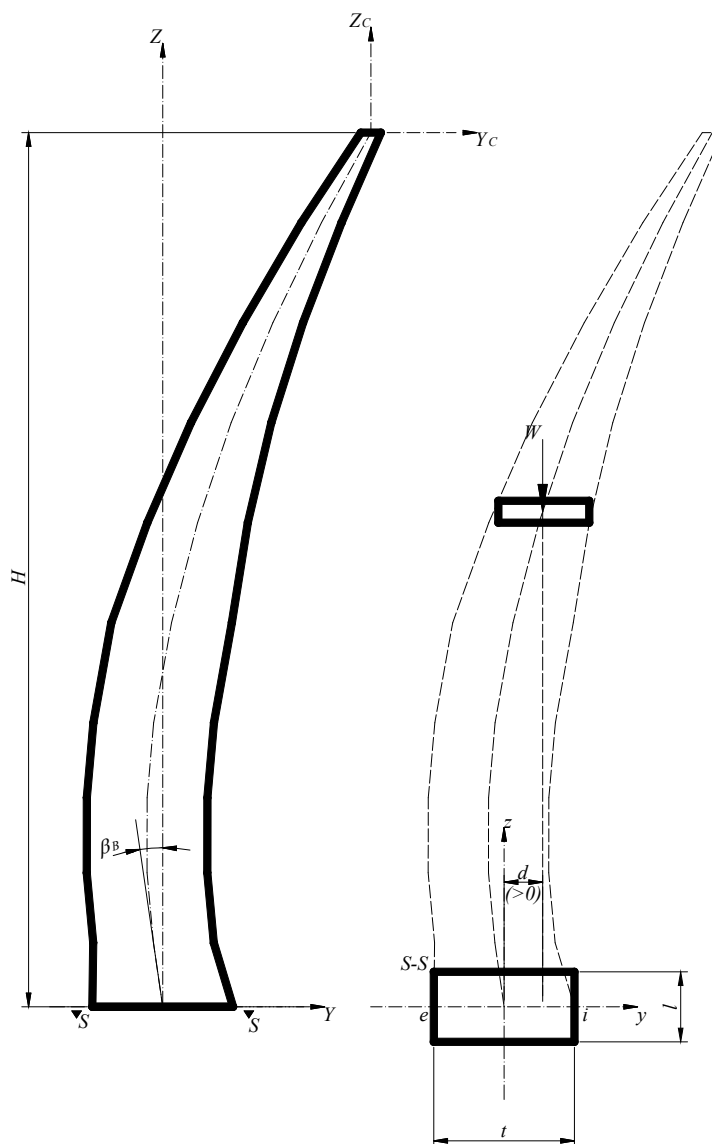


Figura 7.4 - Vista em corte da configuração geométrica e parâmetros do perfil central e da secção transversal da base da barragem.

A linha média dos perfis em estudo corresponde à forma de uma parábola (figura 7.5).

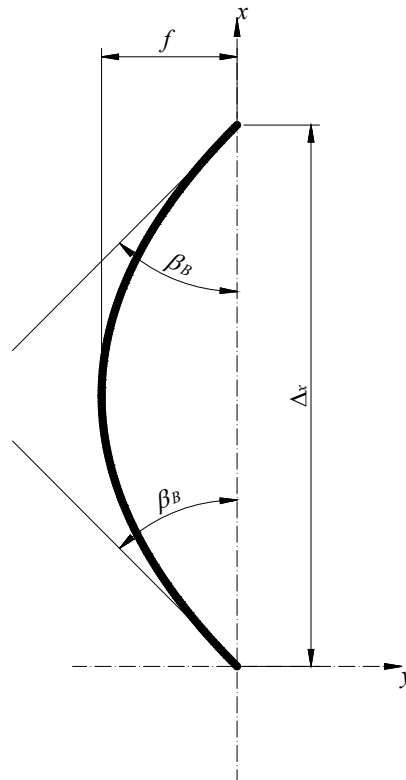


Figura 7.5 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma parabólica da linha média de um perfil da barragem.

A equação de uma parábola, referida ao centro de gravidade da secção transversal da base do perfil onde se pretende estimar as tensões nas faces de intradorso e extradorso, pode ser definida recorrendo, por exemplo, ao método interpolador de Hermite [10] e apresenta a seguinte expressão:

$$y = \frac{\tan \beta_B}{\Delta x} \cdot x^2 - \tan \beta_B \cdot x = \frac{4 \cdot f}{(\Delta x)^2} \cdot x^2 - \frac{4 \cdot f}{\Delta x} \cdot x \quad (7.21)$$

em que x , y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil, β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à parábola na base do perfil, f é a flecha e Δx é o comprimento da parábola.

A flecha da parábola pode ser relacionada com o ângulo tangente à parábola na origem do referencial, através da seguinte expressão:

$$f = \frac{\tan \beta_B \cdot \Delta x}{4} \quad (7.22)$$

onde β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à parábola nos pontos extremos, f é a flecha e Δx é o comprimento da parábola.

De seguida, apresenta-se a expressão para definição da linha média do perfil como uma recta (figura 7.6):

$$y = -\tan \beta_B \cdot x \quad (7.23)$$

onde x , y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil e β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da linha média do perfil.

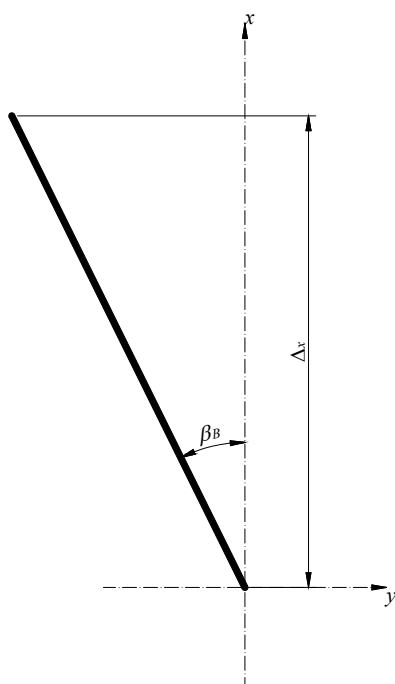


Figura 7.6 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma recta da linha média dum perfil da barragem.

No caso de um perfil central com forma de uma circunferência (figura 7.7), a expressão é a seguinte:

$$y = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \quad (7.24)$$

onde x , y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil, R é o raio e x_0 , y_0 são as coordenadas do centro do círculo.

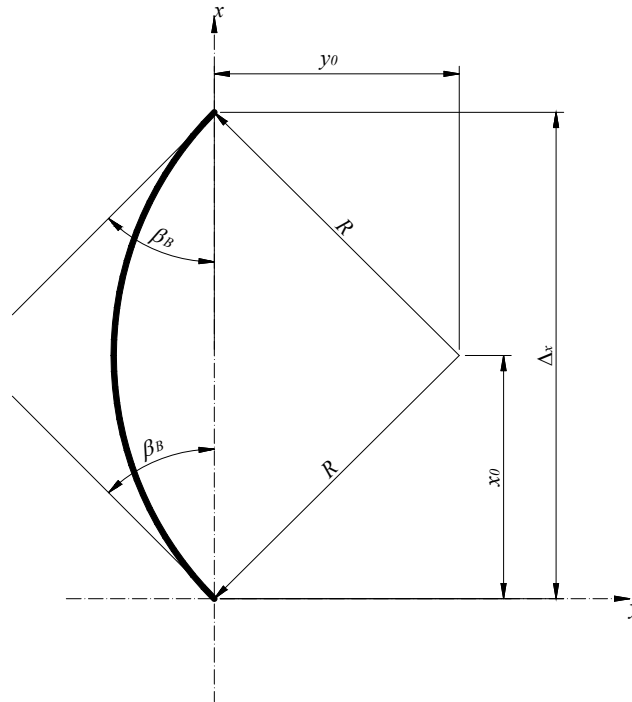


Figura 7.7 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma circular da linha média de um perfil da barragem.

Os parâmetros intervenientes na expressão anterior podem ser calculados da seguinte forma:

$$x_0 = \frac{\Delta x}{2} \quad (7.25)$$

$$y_0 = \frac{\Delta x}{2 \cdot \tan \beta_B} \quad (7.26)$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (7.27)$$

em que x_0 , y_0 são as coordenadas do centro do círculo, R é o raio do círculo, β é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente ao círculo nos pontos extremos do arco e Δx é a corda do arco circular.

Seguidamente, apresenta-se a expressão que define o comprimento de uma parábola a partir de ângulos tangente diferentes (figura 7.8):

$$\Delta x = \frac{2 \cdot \tan \beta_B \cdot \Delta x_j}{\tan \beta_j + \tan \beta_B} \quad (7.28)$$

em que β_B e β_j são, respectivamente, os ângulos de inclinação com a vertical das rectas tangentes à parábola na base do perfil e a uma altura Δx_j da base e Δx é o comprimento da parábola.

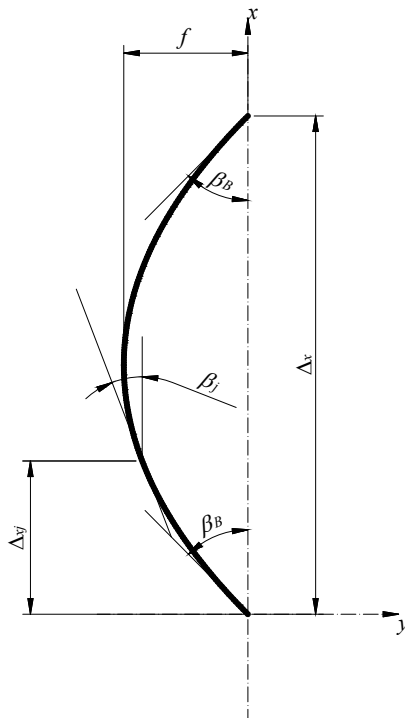


Figura 7.8 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma de uma parábola definida por ângulos tangente diferentes.

Após serem estipulados os ângulos β_B e β_j e o comprimento Δx_j , é possível determinar o comprimento da parábola (Δx) que satisfaz as condições impostas, através da expressão (7.28). A equação da parábola pode ser obtida pela expressão (7.21).

Como referido, o primeiro perfil em estudo foi o perfil mais próximo dos encontros. Nos perfis seguintes, o traçado foi compatibilizado com a geometria consequente da configuração dos perfis mais laterais. Para realizar esta operação foi necessário obter as coordenadas dos arcos definidos no perfil em estudo, condicionadas pela disposição dos mesmos num perfil mais lateral (figura 7.9). Uma vez que as curvas de nível da superfície são circulares, a localização do centro e o comprimento do raio de cada arco permite definir as coordenadas deste em qualquer perfil. Sendo a barragem simétrica em relação a um plano vertical que contém o perfil central, o plano dos centros é coincidente com este plano de simetria. A determinação da coordenada Y_C dos centros dos arcos, em relação ao referencial no coroamento da linha média do perfil central, é realizada através das seguintes expressões:

$$(Y_{C0})_j = Y_C(X_{CS}) + R_j \cdot \cos\psi_j + d_j - d_C \quad (7.29)$$

$$Y_C(X_{CS}) = (Y_{C0})_C - \sqrt{R_C^2 + (X_{CS} - (X_{C0})_C)^2} \quad (7.30)$$

em que $(Y_{C0})_j$ é a ordenada do centro do arco de raio R_j no nível j ; ψ_j é o ângulo entre o fecho deste arco e a direcção radial coincidente com o perfil $S-S$; $Y_C(X_{CS})$ é a ordenada do arco circular do coroamento, de raio R_C e centro $(X_{C0})_C, (Y_{C0})_C$, para a abcissa X_{CS} do perfil $S-S$; d_j e d_C são as distâncias entre o centro de gravidade da secção transversal na base do perfil e o centro de gravidade da secção de um elemento no nível j e no coroamento, respectivamente.

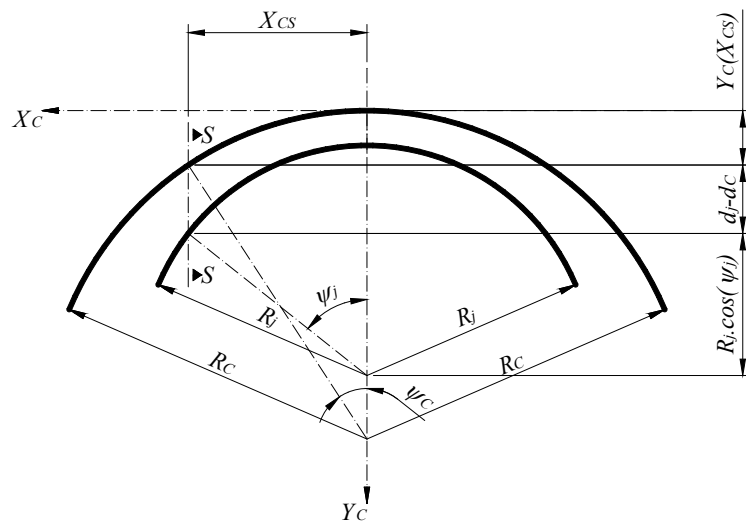


Figura 7.9 - Vista em planta de dois arcos circulares, da barragem de ângulo constante, a diferentes níveis.

Dada a existência de pontos de inflexão nos perfis determinados na primeira tentativa de sobreposição espacial, uma outra forma de definição foi estudada, consistindo na determinação da forma da linha média do perfil central.

A equação de uma parábola, estabelecida pelo ângulo tangente na base e pela distância horizontal e vertical entre extremos (figura 7.10), é apresentada seguidamente:

$$y = \frac{d_C + \Delta x \cdot \tan \beta_B}{\Delta x^2} \cdot x^2 - \tan \beta_B \cdot x \quad (7.31)$$

em que x, y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil, β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à

parábola na base do perfil, d_c e Δx são, respectivamente as distâncias horizontal e vertical entre os extremos da parábola.

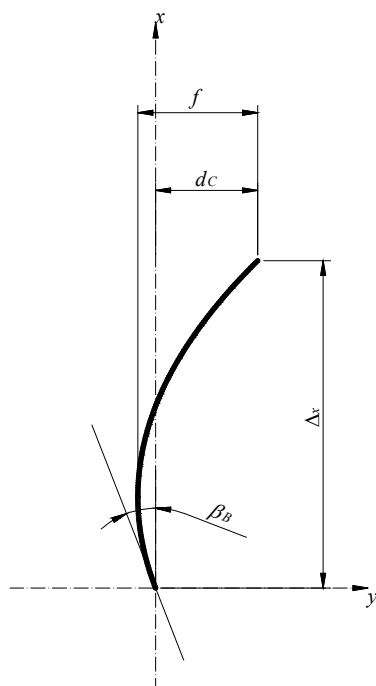


Figura 7.10 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma de uma parábola definida pelo ângulo tangente num extremo da parábola e pela distância horizontal e vertical entre extremos.

Através do estabelecimento dos mesmos parâmetros é possível encontrar a equação de um arco circular (figura 7.11).

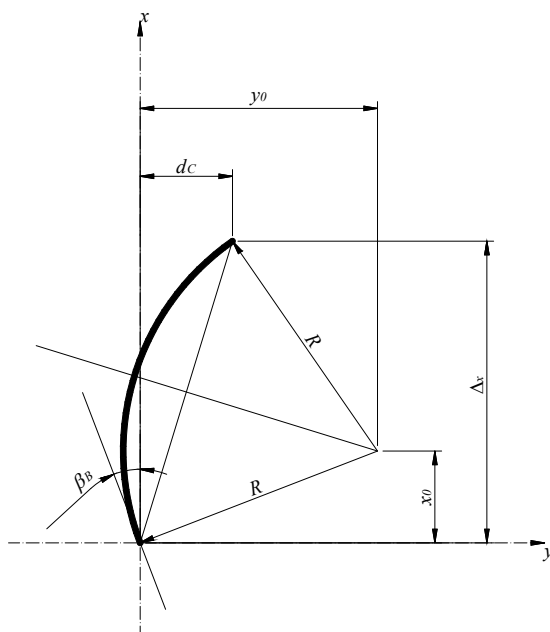


Figura 7.11 - Parâmetros geométricos relacionados com a forma de um círculo definido pelo ângulo tangente num extremo do arco e pela distância horizontal e vertical entre extremos.

As equações que definem a recta tangente na base do perfil e a recta que une os dois extremos são as seguintes:

$$\begin{cases} y = -\tan \beta_B \cdot x \\ y = \frac{d_C}{\Delta x} \cdot x \end{cases} \quad (7.32)$$

em que x , y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil, β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à parábola na base do perfil, d_C e Δx são, respectivamente, as distâncias horizontal e vertical entre os extremos da parábola.

A intersecção das perpendiculares às duas rectas anteriores permite a obtenção do centro do círculo. Estas duas rectas são definidas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\tan \beta_B} \cdot x \\ y = -\frac{\Delta x}{d_C} \cdot x + \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot d_C} \end{cases} \quad (7.33)$$

onde x , y são as coordenadas cartesianas com origem no centro de gravidade da secção transversal da base do perfil, β_B é o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à parábola na base do perfil, d_C e Δx são, respectivamente as distâncias horizontal e vertical entre os extremos da parábola.

As coordenadas do centro do círculo são expressas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \beta_B} \cdot x_0 &= -\frac{\Delta x}{d_C} \cdot x_0 + \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot d_C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tan \beta_B} \cdot x_0 + \frac{\Delta x}{d_C} \cdot x_0 &= \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot d_C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d_C + \Delta x \cdot \tan \beta_B}{d_C \cdot \tan \beta_B} \cdot x_0 &= \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot d_C} \Leftrightarrow \quad (7.34) \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot d_C} \cdot \frac{d_C \cdot \tan \beta_B}{d_C + \Delta x \cdot \tan \beta_B} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{\tan \beta_B \cdot (d_C^2 + \Delta x^2)}{2 \cdot (d_C + \Delta x \cdot \tan \beta_B)} \end{aligned}$$

$$y_0 = \frac{1}{\tan \beta_B} \cdot x_0 = \frac{d_C^2 + \Delta x^2}{2 \cdot (d_C + \Delta x \cdot \tan \beta_B)} \quad (7.35)$$

sendo x_0 , y_0 as coordenadas cartesianas do centro do círculo, β_B o ângulo de inclinação com a vertical da recta tangente à parábola na base do perfil, d_C e Δx as distâncias horizontal e vertical, respectivamente, entre os extremos da parábola.

A equação do círculo pode ser obtida através da expressão (7.24), sendo o raio obtido pela expressão (7.27). Se o ângulo β_B for negativo, na expressão (7.24) o sinal que antecede a raiz quadrada deve passar a ser positivo.

Após o estabelecimento da linha média do perfil central, com a forma circular ou parabólica, é possível calcular as coordenadas dos centros de todos os arcos, ficando a geometria da superfície média completamente definida:

$$(X_0)_j = 0 \quad (7.36)$$

$$(Y_0)_j = d_j + R_j \quad (7.37)$$

$$(Z_0)_j = Z_j \quad (7.38)$$

em que $(X_0)_j$, $(Y_0)_j$, $(Z_0)_j$ são as coordenadas, em relação ao referencial $OXYZ$, do centro do arco circular de raio R_j no nível j , Z_j é a cota do plano que contém o referido arco circular e d_j é a excentricidade do centro de gravidade de um elemento num determinado nível j , em relação ao centro de gravidade do elemento na base da consola central.

A coordenada Y , correspondente a uma determinada abcissa X , de um dado arco, pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$Y = (Y_0)_j \pm \sqrt{R_j^2 - (X - (X_0)_j)^2} \quad (7.39)$$

onde X , Y são as coordenadas cartesianas com origem na base da linha média do perfil central, R_j é o raio do arco circular no nível j cujas coordenadas do centro são $(X_0)_j$, $(Y_0)_j$.

A obtenção da coordenada Y do contorno da inserção da barragem no terreno, nos diferentes níveis, é realizada através do cálculo da coordenada de cada arco correspondente à coordenada X da sua nascença.

7.3 Geometria da superfície média das barragens

7.3.1 Barragem DAM1

Na barragem designada por DAM1, o perfil central foi definido como uma parábola com ângulo tangente na base de 11° e excentricidade do topo em relação à base de 14 metros. No gráfico 7.1 estão representadas as projecções no plano YOZ dos quatro perfis anteriormente definidos na figura 7.2.

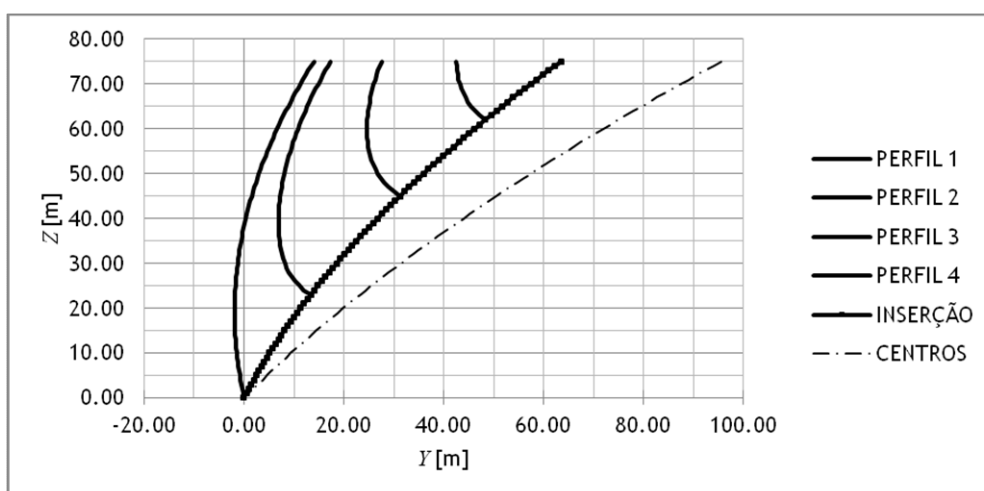


Gráfico 7.1 - Projecção no plano YOZ dos perfis cujo equilíbrio, durante o crescimento isolado dos blocos, foi analisado, da linha de inserção e da linha dos centros da barragem de ângulo constante de curvas de nível circulares DAM1.

Na figura 7.12 está representada a superfície do sólido coincidente com a superfície média da barragem em estudo.

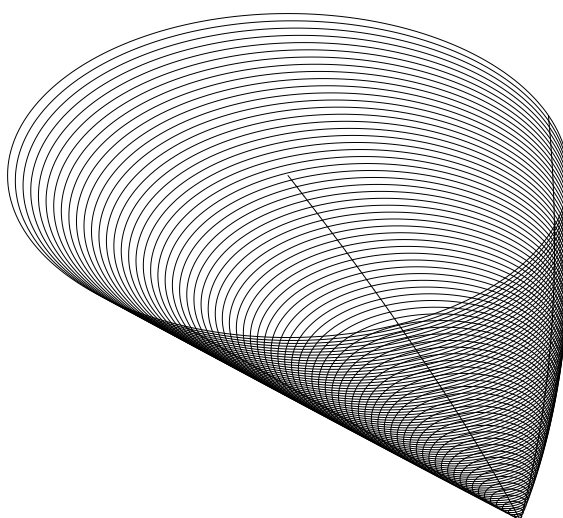


Figura 7.12 - Superfície do sólido que coincide com a superfície média da barragem DAM1, com indicação da linha dos centros e do contorno de inserção.

No gráfico 7.2 está representada a evolução do nível de tensões na base dos quatro perfis, em função do crescimento isolado dos blocos. O nível de tensões máximo verificado é aproximadamente de 4 MPa e 1,3 MPa em compressão e tracção, respectivamente.

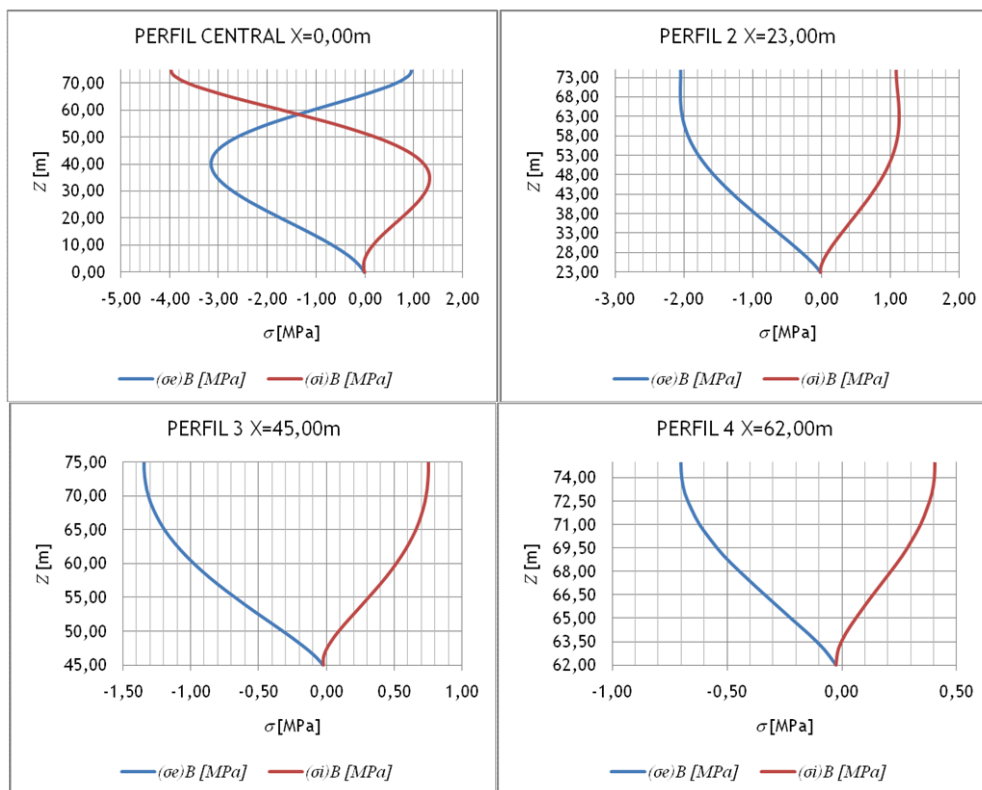


Gráfico 7.2 (a), (b), (c) e (d) - Evolução do nível de tensões no intradorso e extradorso da base dos quatro perfis em estudo, durante a contração das respectivas consolas verticais, supostas isoladas, da barragem DAM1.

No gráfico 7.3 está representada a evolução da magnitude das tensões no nível do perfil central em que se verifica a excentricidade máxima para montante, em relação ao centro de gravidade da secção da base, em função do crescimento isolado do bloco acima deste nível. No mesmo gráfico, está também representada a evolução das tensões no nível do perfil 2 em que se verifica a excentricidade máxima para montante, em relação ao centro de gravidade da secção da base do respectivo perfil.

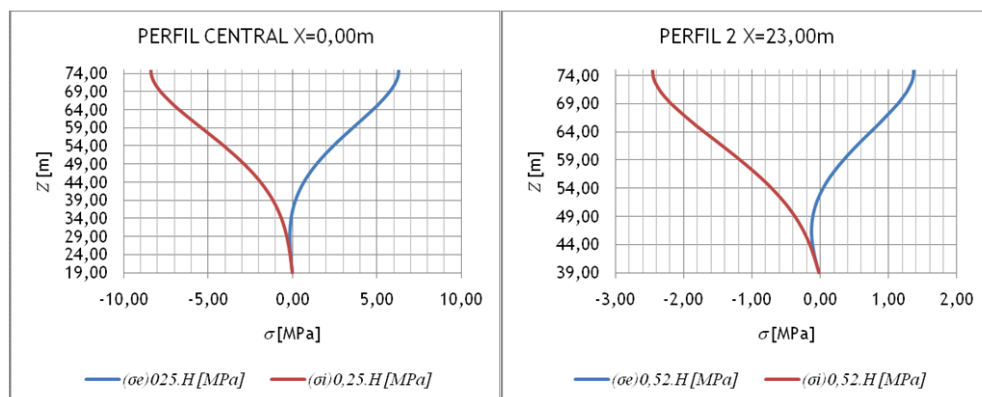


Gráfico 7.3 (a) e (b) - Evolução do nível de tensões no intradorso e extradorso da secção em que se verifica a excentricidade máxima para montante, em relação ao centro de gravidade da base dos respectivos perfis, da barragem DAM1.

Embora na secção em estudo do perfil 2 (gráfico 7.3.b) os valores admissíveis de tensões não tenham sido ultrapassados, na secção mais excêntrica para montante do perfil central (gráfico 7.3.a), na fibra de extradorso, verificam-se tracções muito elevadas. Esta situação impediria o crescimento isolado do perfil central a partir de determinado nível, sendo necessário a colaboração dos blocos adjacentes. O desnível entre os blocos deve ser estabelecido com base no estabelecimento de um limite máximo de tensões de tracção [11]. A colaboração dos blocos adjacentes na absorção do peso próprio dos diferentes elementos acima de um determinado nível de um bloco não pode ser estimada com base nas expressões apresentadas anteriormente, necessitando uma metodologia mais aprofundada que não será desenvolvida no presente trabalho.

7.3.2 Barragem DAM2

A barragem designada por DAM2, cuja linha média do perfil central é uma recta vertical (gráfico 7.4), corresponde a uma superfície de um sólido aproximadamente cónico (figura 7.13) mas cujo eixo não cai tanto para jusante como na barragem designada por DAM1.

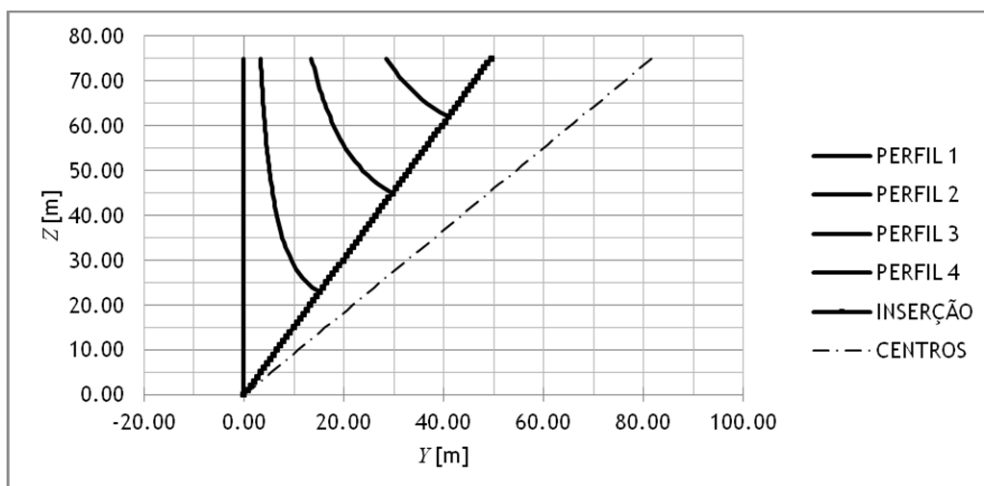


Gráfico 7.4 - Projecção no plano YOZ dos perfis cujo equilíbrio, durante o crescimento isolado dos blocos, foi analisado, da linha de inserção e da linha dos centros da barragem de ângulo constante de curvas de nível circulares DAM2.

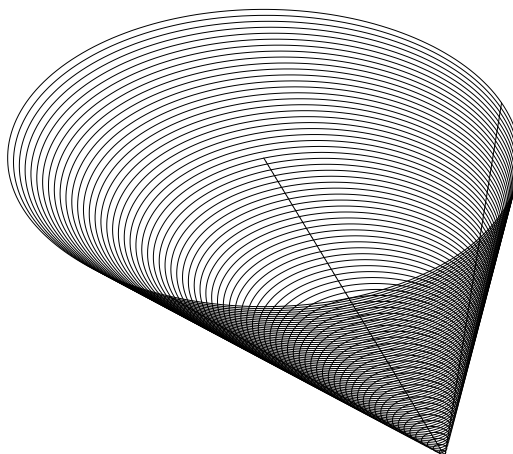


Figura 7.13 - Superfície do sólido que coincide com a superfície média da barragem DAM2, com indicação da linha dos centros e do contorno de inserção.

No gráfico 7.5 está representada a evolução do nível de tensões na base dos quatro perfis, em função do crescimento isolado dos blocos. O nível de tensões máximo verificado é aproximadamente de 2,6 MPa e 2,2 MPa em compressão e tracção, respectivamente.

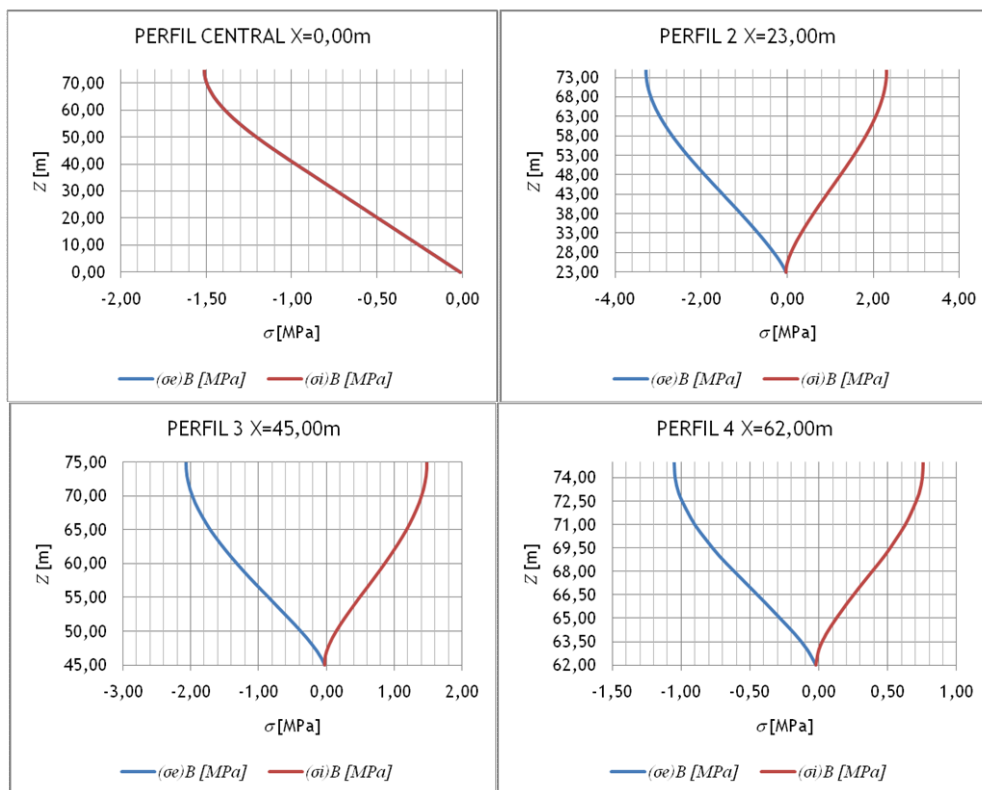


Gráfico 7.5 (a), (b), (c) e (d) - Evolução do nível de tensões no intradorso e extradorso da base dos quatro perfis em estudo, durante a construção das respectivas consolas verticais, supostas isoladas, da barragem DAM2.

Nesta barragem, o perfil central poderia ser construído até ao topo sem se verificarem tracções na base. Os perfis mais críticos são os adjacentes ao perfil central, como por exemplo o perfil 2. A construção deste perfil não necessita, no entanto, de ser realizada isoladamente, sendo possível a colaboração dos blocos adjacentes.

7.3.3 Barragem DAM3

A barragem DAM3 apresenta uma superfície média coincidente com a superfície de um cone de eixo vertical (figura 7.14), sendo manifestamente impossível a sua construção através do crescimento isolado de blocos. A determinação da geometria desta barragem (gráfico 7.6), embora se trate de uma estrutura não exequível para as técnicas de construção vigentes, tem por objectivo estudar a distribuição de esforços numa casca com esta superfície média.

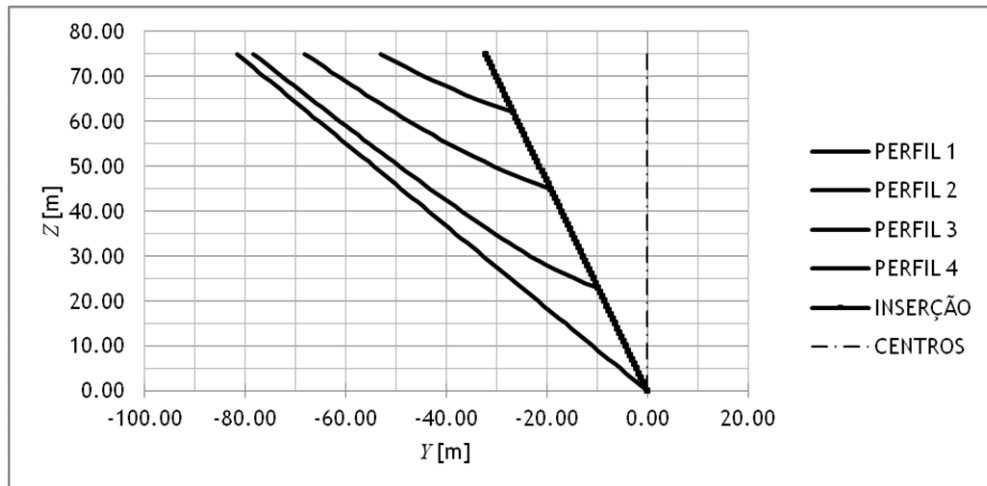


Gráfico 7.6 - Projecção no plano YOZ dos perfis, da linha de inserção e da linha dos centros da barragem de ângulo constante de curvas de nível circulares DAM3.

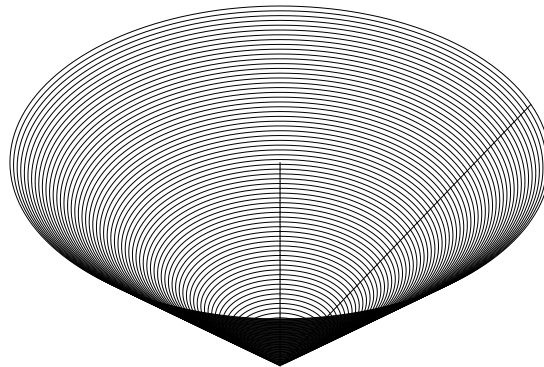


Figura 7.14 - Superfície do sólido da barragem cônica de eixo vertical, DAM3, com indicação da linha dos centros e do contorno de inserção.

7.3.4 Barragem DAM4

A barragem DAM4 apresenta uma superfície média (figura 7.15) de dupla curvatura, mas cuja convexidade do perfil central está voltada para jusante. A projecção desta superfície no plano YOZ é apresentada seguidamente.

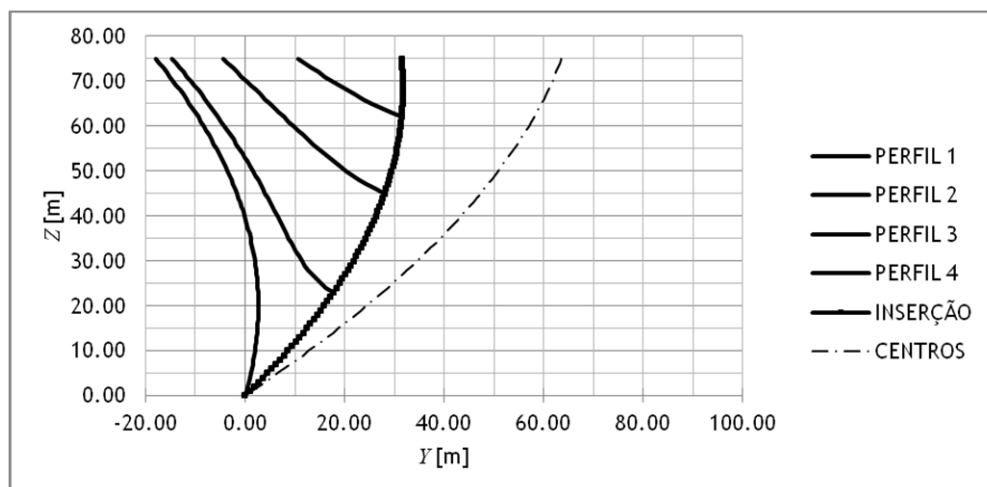


Gráfico 7.7 - Projecção no plano YOZ dos perfis cujo equilíbrio, durante o crescimento isolado dos blocos, foi analisado, da linha de inserção e da linha dos centros da barragem de ângulo constante de curvas de nível circulares DAM4.

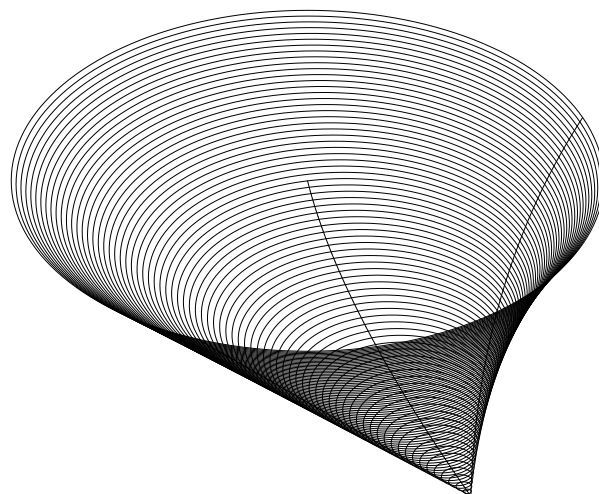


Figura 7.15 - Superfície do sólido que coincide com a superfície média da barragem DAM4, com indicação da linha dos centros e do contorno de inserção.

O nível de tensões máximo verificado, durante o crescimento dos blocos isolados, é aproximadamente de 4,8 MPa e 2,6 MPa em compressão e tracção, respectivamente.

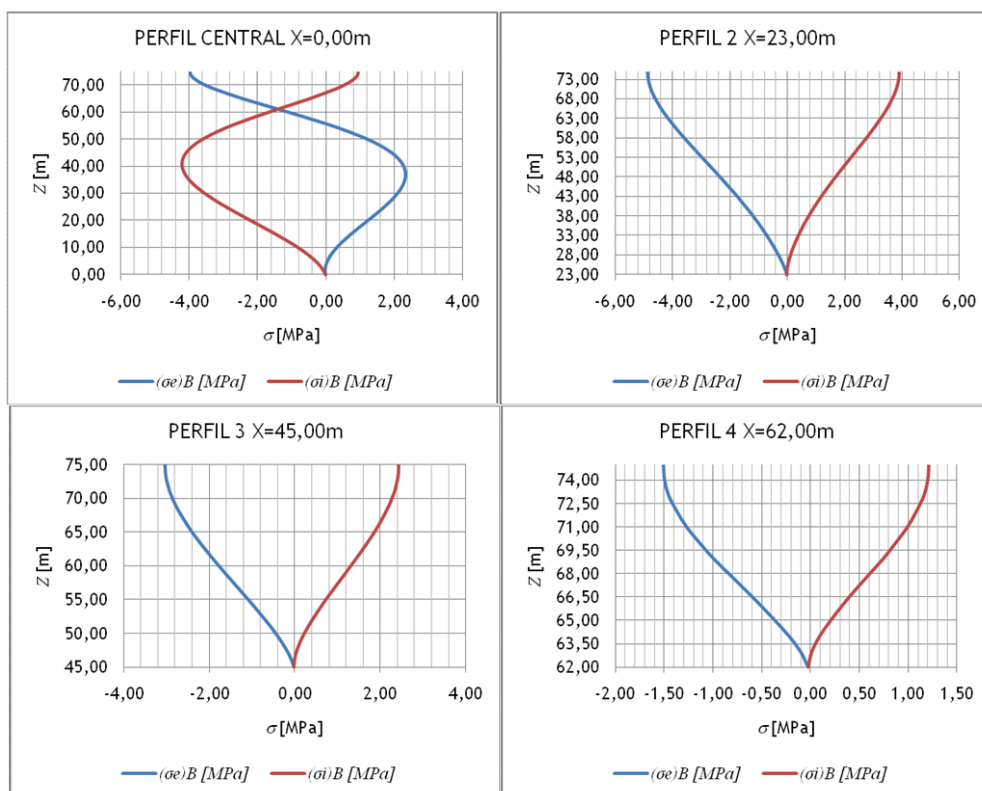


Gráfico 7.8 (a), (b), (c) e (d) - Evolução do nível de tensões no intradorso e extradorso da base dos quatro perfis em estudo durante a contrução das respectivas consolas verticais, supostas isoladas, da barragem DAM4.

As tensões máximas de tracção e compressão ocorrem na base do perfil 2, pelo facto deste apresentar uma inclinação excessiva para montante. Na base do perfil central, as tensões estão sensivelmente controladas, uma vez que a máxima tracção é aproximadamente 2 MPa.

A forma geométrica da superfície média em estudo apresenta a particularidade da convexidade apontar para jusante, o que poderá trazer alguns problemas no que diz respeito à construção apoiada dos vários blocos. Analise-se a evolução de tensões na secção do perfil central a uma altura de 20 metros, durante o crescimento isolado deste bloco.

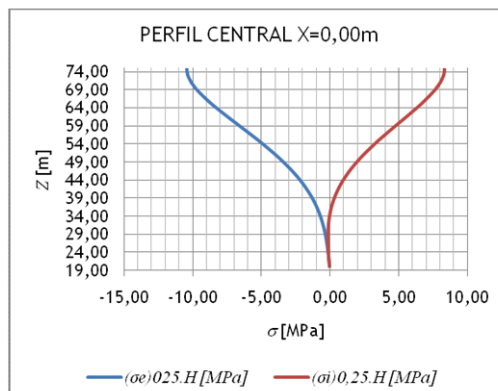


Gráfico 7.9 - Evolução do nível de tensões no intradorso e extradorso da secção em que se verifica a excentricidade máxima para jusante, em relação ao centro de gravidade da base do perfil central, da barragem DAM4.

A análise do gráfico 7.9 permite concluir que a construção do perfil central só pode ser realizada individualmente até uma altura de 50 metros, aproximadamente. O perfil central construído até uma altura de 50 metros, poderia servir de apoio a parte do perfil 2. O perfil 2, que arranca da cota de 23 metros, atinge sensivelmente metade da sua altura à cota de 50 metros. A partir desta cota resta a construção de 25 metros de altura de ambos os perfis, o que poderá ser exequível. Estes raciocínios carecem de uma análise mais delicada, pelo que, se aceitará a exequibilidade da superfície em estudo, sendo necessária uma avaliação mais rigorosa posteriormente.

Capítulo 8

Análise Numérica de Barragens de Ângulo Constante com Curvas de Nível Circulares

8.1 Modelos

A geometria das barragens casca de ângulo constante com curvas de nível circulares foi estabelecida através de arcos de cinco em cinco metros, desde o coroamento até ao ponto mais baixo da barragem. Estes arcos, correspondentes às curvas de nível da casca, eram limitados pelas linhas que definem o contorno de inserção da barragem no terreno. As superfícies foram definidas a partir de dois arcos sucessivos e das respectivas linhas que unem as nascenças desses arcos. Cada modelo possui 15 arcos e 15 superfícies.

A malha de elementos finitos quadrangulares e triangulares foi gerada dividindo os arcos num determinado número de segmentos. O arco do coroamento tem 15 divisões, cada uma das quais constitui uma aresta de um elemento finito. Por cada arco em direcção à base da barragem, foi eliminada uma divisão (figura 8.1). O elemento finito utilizado é um elemento de casca quadrilátero de oito nós (QSL8). A interpolação é quadrática.

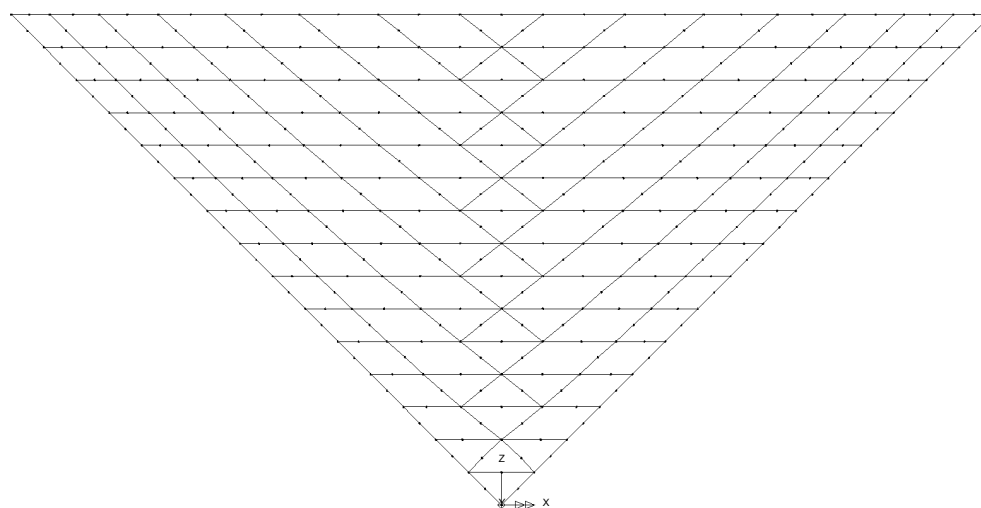


Figura 8.1 - Malha de elementos finitos e nós, do modelo numérico DAM1.

Pelo facto do elemento triangular na base ser demasiado curvo e rígido, não fornecendo resultados fiáveis, foi-lhe atribuído um módulo de elasticidade nulo.

O eixo dos referenciais locais, perpendicular às superfícies, aponta sempre para jusante.

A espessura atribuída às superfícies está de acordo com aquela que foi calculada pela fórmula dos tubos, no entanto, no modelo, esta espessura é atribuída segundo a direcção perpendicular àquelas superfícies. As superfícies têm uma espessura de acordo com o quadro 8.1.

Cotas entre as quais está compreendida a superfície [m]	Espessura da superfície [m]
70 a 75	0,38
65 a 70	1,08
60 a 65	1,70
55 a 60	2,20
50 a 55	2,58
45 a 50	2,88
40 a 45	3,04
0 a 40	3,10

Quadro 8.1 - Espessura das superfícies dos modelos numéricos das barragens de ângulo constante de arcos circulares.

Nas barragens de ângulo constante de arcos circulares em que se pretendeu analisar o efeito do espessamento (DAM1.1), foi adoptada uma espessura três vezes superior àquela que consta no quadro 8.1.

Cotas entre as quais está compreendida a superfície [m]	Espessura da superfície [m]
70 a 75	1,14
65 a 70	3,24
60 a 65	5,10
55 a 60	6,60
50 a 55	7,74
45 a 50	8,64
40 a 45	9,12
0 a 40	9,30

Quadro 8.2 - Espessura das superfícies dos modelos numéricos das barragens de ângulo constante de arcos circulares em que se pretendeu analisar o efeito do espessamento face às acções consideradas.

A malha ortogonal de pontos, coincidente com a superfície média de cada uma das barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares, utilizada na rotina PCURV, vista no alçado principal de montante apresenta 16 linhas e 15 colunas.

8.2 Acções

8.2.1 Pressão hidrostática

A pressão hidrostática, face ao nível de máxima cheia na albufeira, foi modelada em todos os nós da malha de elementos finitos como uma força perpendicular às superfícies definidas, com magnitude dada pela expressão:

$$p = 9,81 \cdot (H - Z) \quad (8.1)$$

em que p é a pressão hidrostática num determinado nível Z , medido em relação ao ponto mais baixo da superfície média da barragem, cuja altura máxima é H .

8.2.2 Peso próprio

O peso próprio foi modelado atribuindo uma aceleração linear de $9,81 \text{ m/s}^2$ ao longo do eixo Z , com sentido descendente, a todos os elementos dos modelos.

8.2.3 Variações de temperatura

A acção da retracção foi considerada equivalente a uma variação uniforme negativa de temperatura de 10°C . A outra acção da temperatura, considerada na barragem DAM1, foi modelada de acordo com o estipulado na figura 3.4 (quadro 8.3).

Cotas entre as quais está compreendida a superfície [m]	T_0 [$^\circ\text{C}$]	$\Delta T = T_i - T_e$ [$^\circ\text{C}$]
65 a 75	10	0
0 a 65	5	10

Quadro 8.3 - Variações uniformes (T_0) e variações diferenciais de temperatura (ΔT), atribuídas à superfície média do modelo DAM1.

8.3 Condições de apoio

Cada um dos modelos das barragens de ângulo constante de arcos circulares apresenta o contorno de inserção da barragem no terreno encastrado (restrição de deslocamentos lineares e rotações ao longo das três direcções X , Y e Z).

8.4 Propriedades dos materiais

Considera-se um comportamento elástico linear do betão. A tensão máxima de compressão admissível é de 5 MPa . Por sua vez, a tensão máxima de tracção admissível é de 1 MPa . O módulo de elasticidade do betão considerado nas análises realizadas é de 27 GPa , enquanto que o coeficiente de Poisson é igual a $0,2$. O coeficiente de dilatação térmica do betão é igual a $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

8.5 Resultados

8.5.1 Modelo DAM1

As direcções principais de curvatura, obtidas a partir do programa numérico PCURV, estão indicadas na seguinte figura.

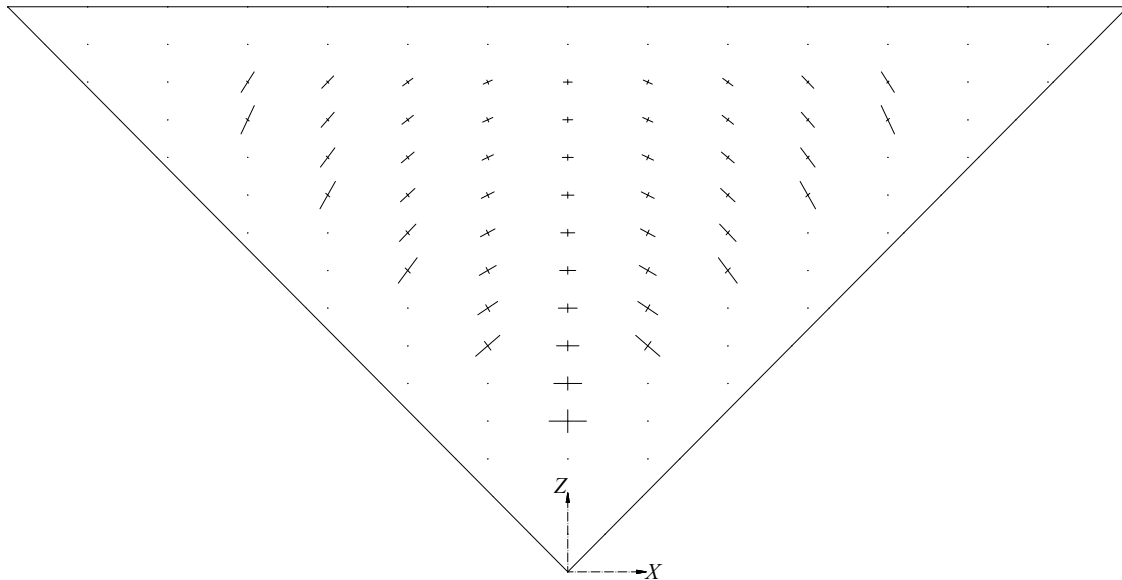


Figura 8.2 - Direcções principais de curvatura da superfície média da barragem DAM1, no alçado principal de montante.

Os resultados de esforços e tensões são apresentados num alçado principal de montante (projectão no plano XOZ) da superfície média barragem em estudo, de acordo com as escalas apresentadas seguidamente. Relativamente ao modelo DAM1, apresenta-se seguidamente os resultados respeitantes à acção da pressão hidrostática.

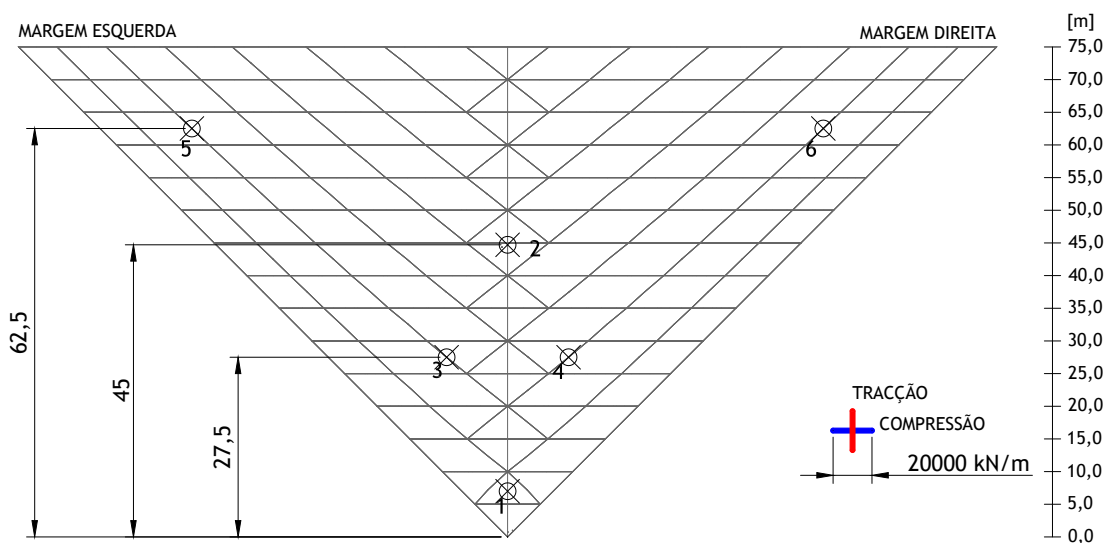


Figura 8.3 - Diagrama de escalas aproximadas, em alçado principal de montante, para os resultados dos esforços de membrana e indicação dos pontos utilizados para comparar resultados.

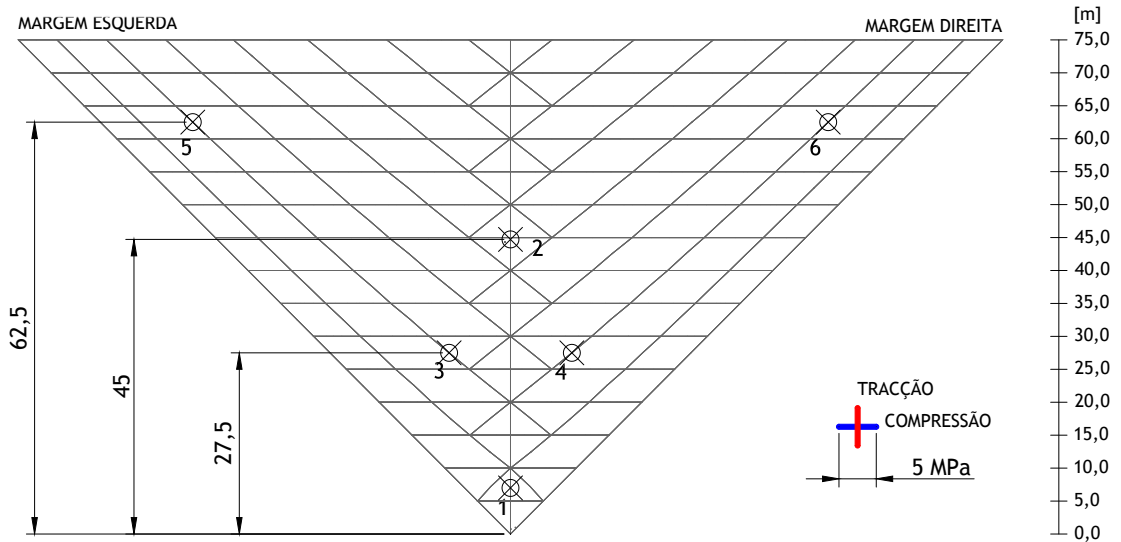


Figura 8.4 - Diagrama de escalas aproximadas, em alçado principal de montante, para os resultados das tensões e indicação dos pontos utilizados para comparar resultados.

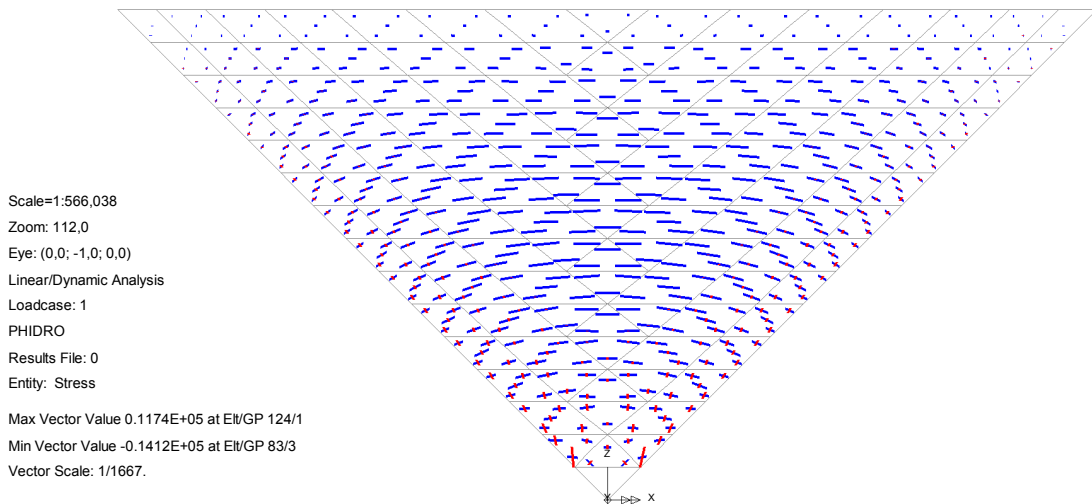


Figura 8.5 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1, sob a acção da pressão hidrostática.

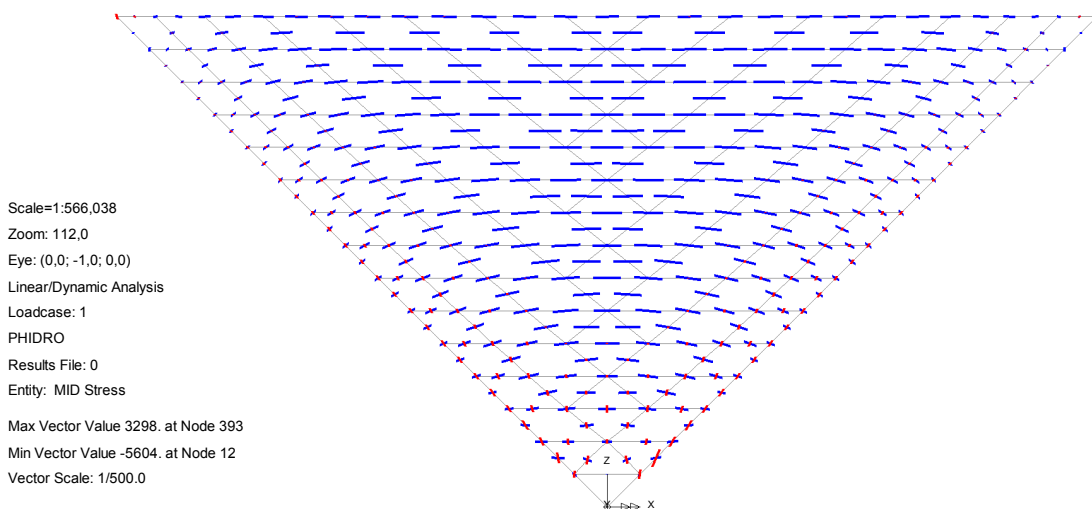


Figura 8.6 - Tensões principais, em kPa, nos nós da superfície média do modelo DAM1, sob a acção da pressão hidrostática.

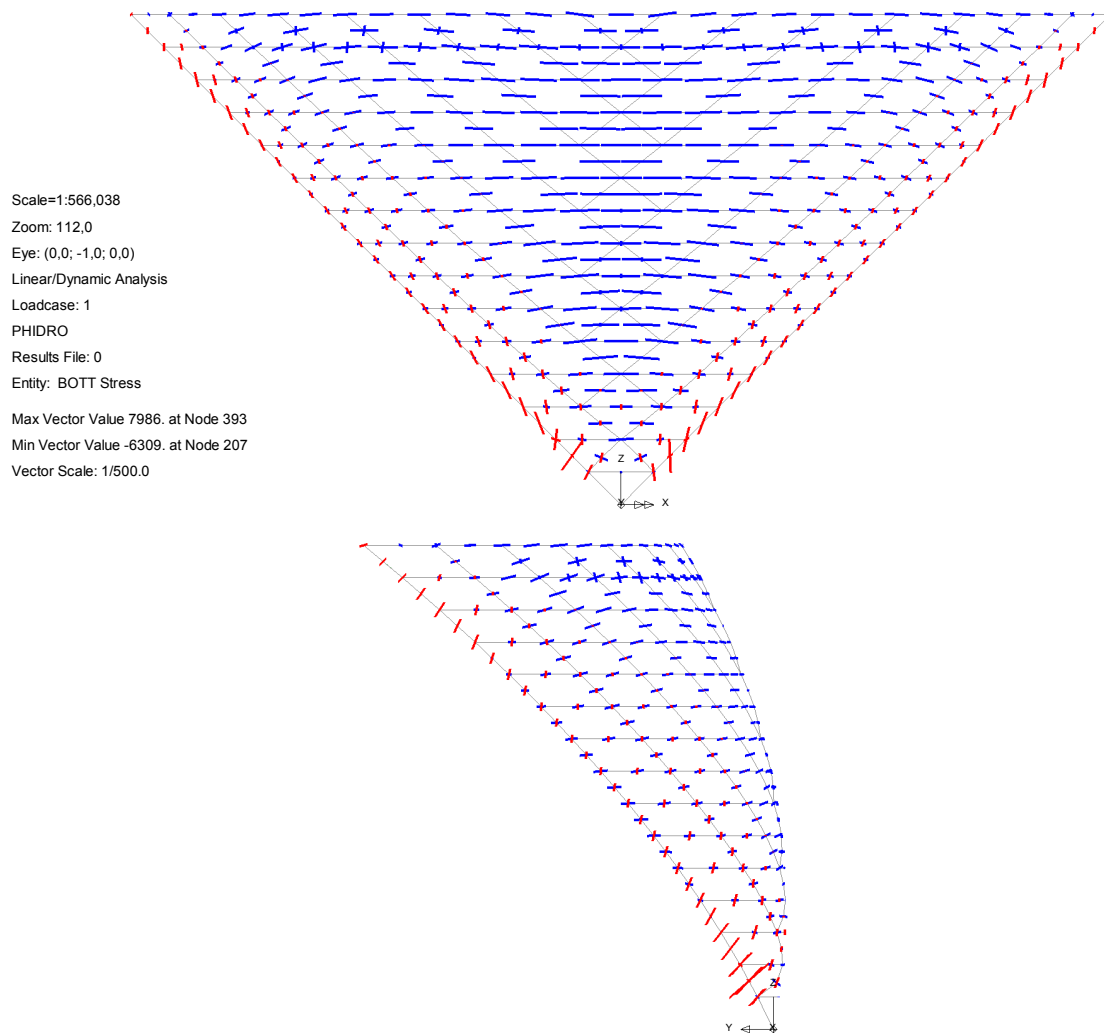


Figura 8.7 (a) e (b) - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de montante da barragem DAM1, sob a acção da pressão hidrostática, em alçado principal de montante (a) e em alçado lateral esquerdo (b).

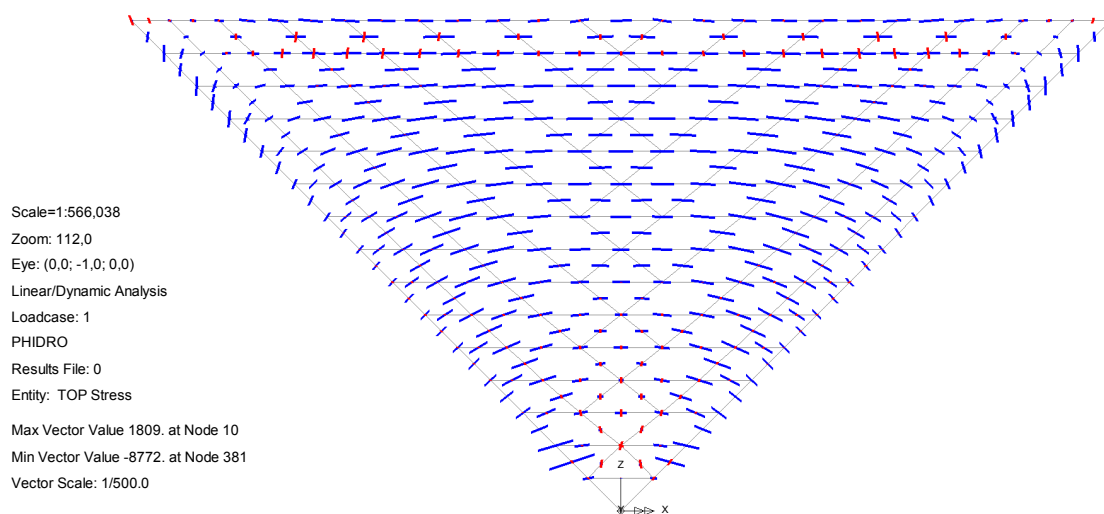


Figura 8.8 - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de jusante da barragem DAM1, sob a acção da pressão hidrostática.

Estudo da Forma de Barragens Abóbada sob a Acção da Pressão Hidrostática e de Variações de Temperatura

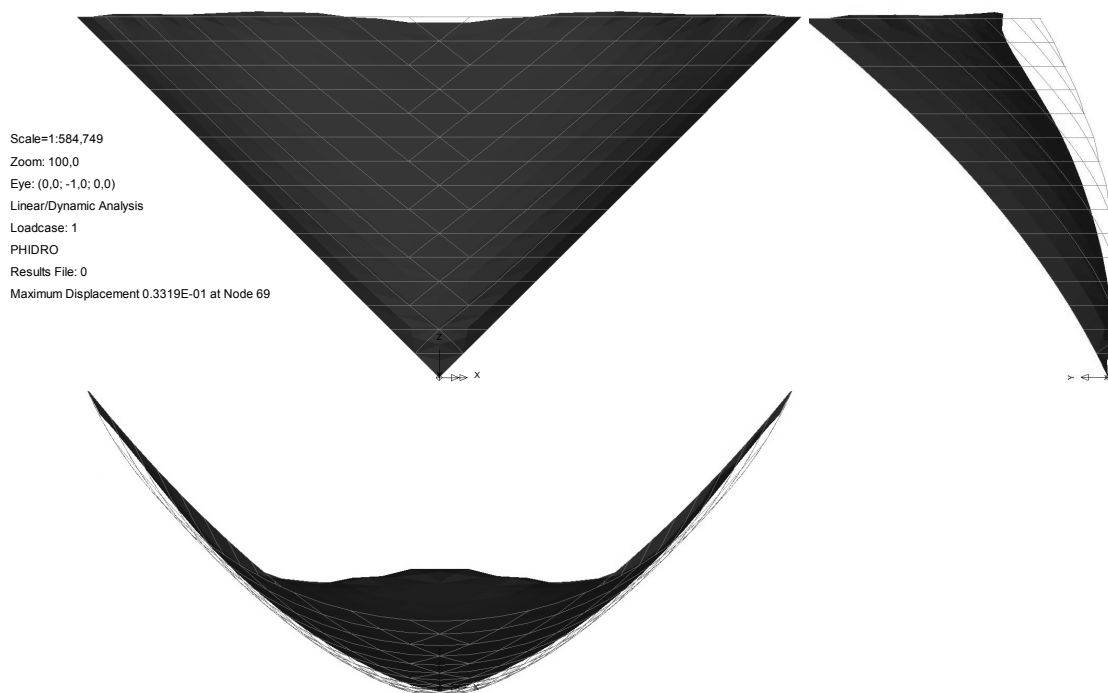


Figura 8.9 (a) (b) e (c) - Deformada, em m, da superfície média da barragem DAM1, em alçado principal de montante (a), em alçado lateral esquerdo (b) e em planta (c), sob a acção da pressão hidrostática.

De seguida, apresentam-se os esforços membrana relativos à acção da pressão hidrostática e do peso próprio, no modelo DAM1.

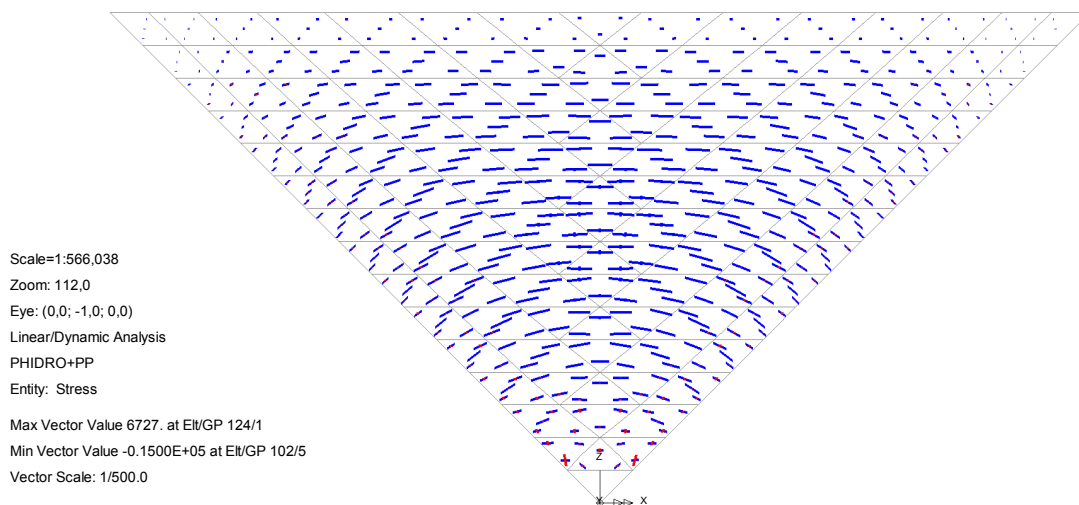


Figura 8.10 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1, sob a acção da pressão hidrostática e do peso próprio.

Os esforços principais de membrana, quando actua a variação uniforme negativa de temperatura, que simula o fenómeno da retracção, e quando actuam as variações uniformes e diferenciais de temperatura que simulam o estado térmico da barragem DAM1, são ilustrados seguidamente.

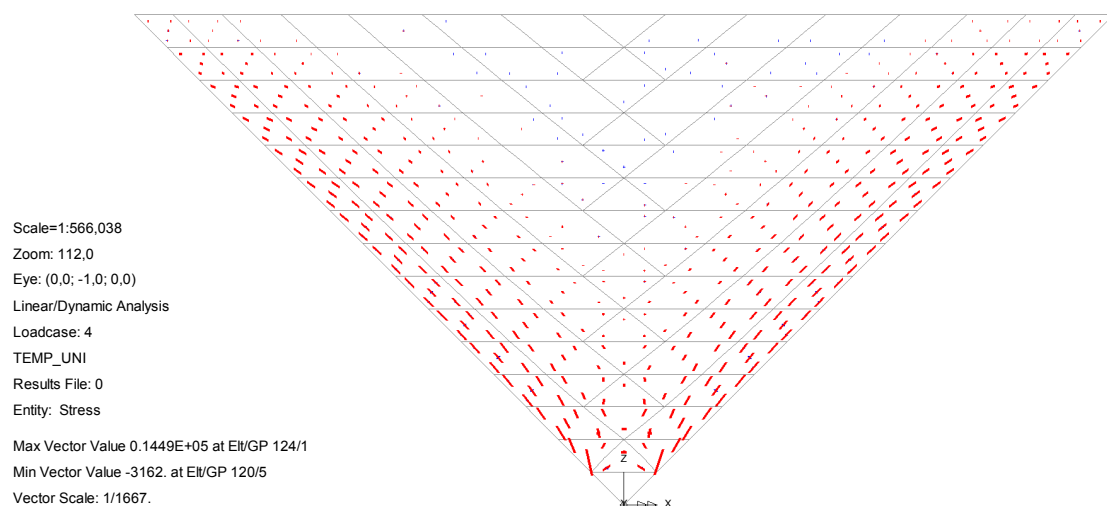


Figura 8.11 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1, sob a acção da variação uniforme negativa de temperatura.

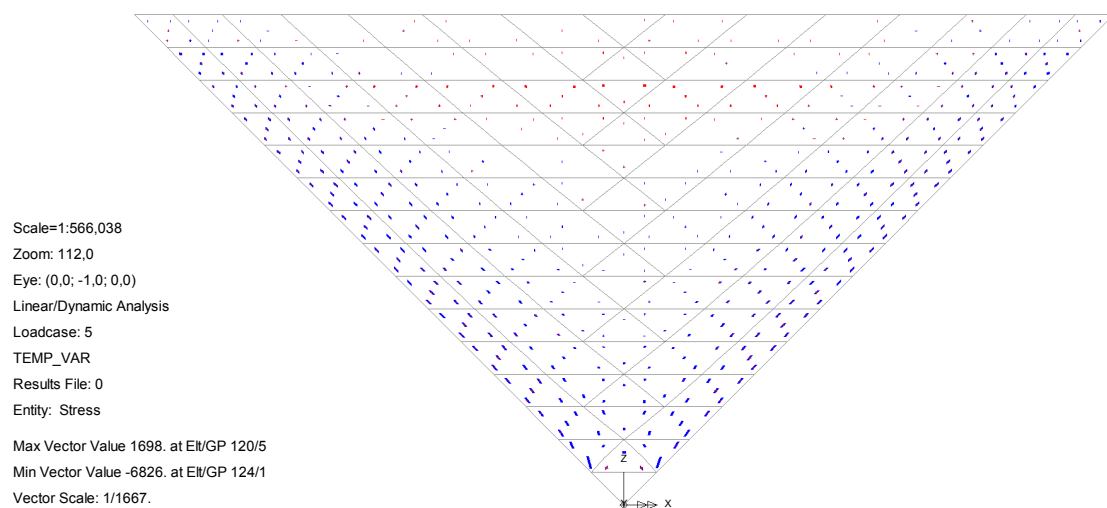


Figura 8.12 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1, sob a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

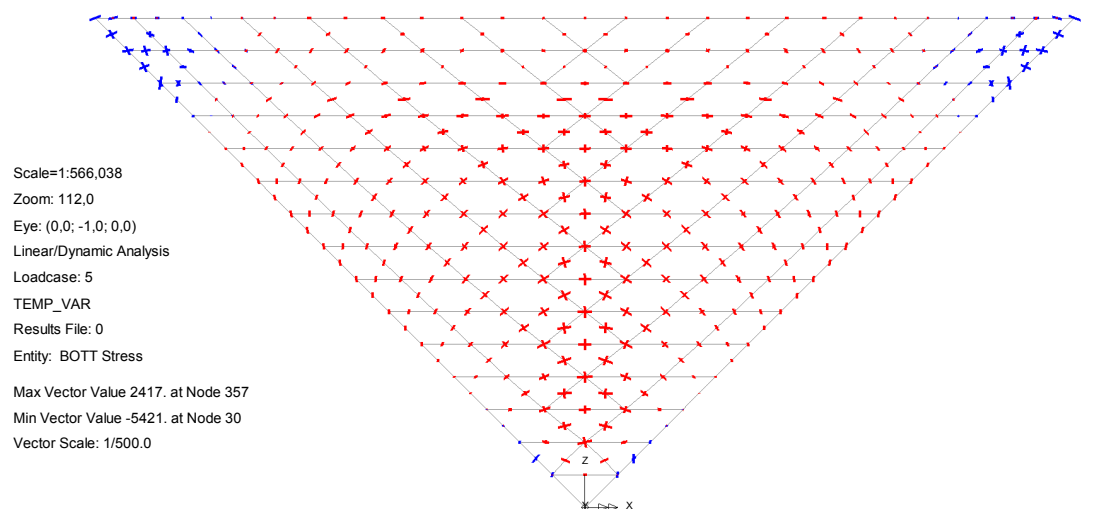


Figura 8.13 - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de montante da barragem DAM1, sob a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

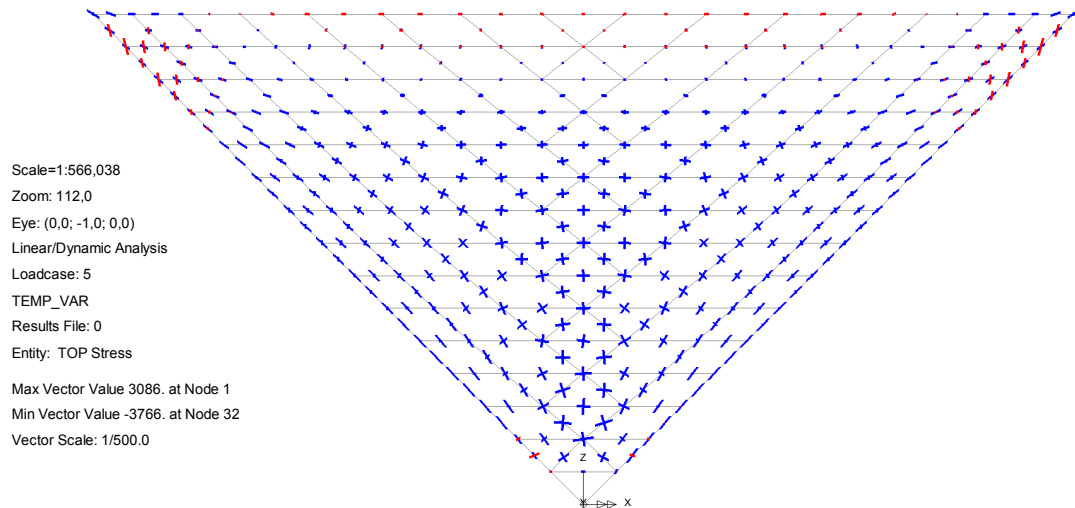


Figura 8.14 - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de jusante da barragem DAM1, sob a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

As reacções contidas na superfície média da casca DAM1, por unidade de comprimento da linha de inserção, segundo as direcções tangencial e normal a esta, quando actua a variação uniforme de temperatura de -10°C , estão ilustradas nos gráficos seguintes.

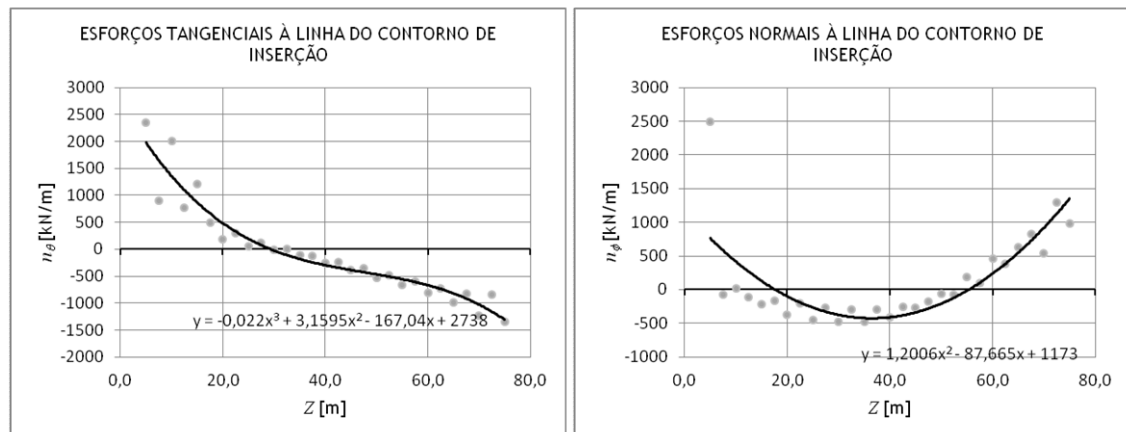


Gráfico 8.1 (a) e (b) - Diagramas das reacções tangenciais (a) e normais (b), por unidade de comprimento da linha de inserção da barragem DAM1 no vale, contidas num plano tangente à superfície média da casca, quando actua uma variação uniforme de temperatura de -10°C .

Os valores das reacções obtidos numericamente foram aproximados por funções polinomiais. Através do integral destas funções, dentro de determinados intervalos, foi possível estimar as áreas correspondentes aos esforços positivos e negativos.

$\int_0^{29,4} n_{\theta} dZ$ [kN]	$\int_{29,4}^{75} n_{\theta} dZ$ [kN]
30956	-25195

Quadro 8.4 - Valor das áreas do diagrama das reacções tangenciais à linha de inserção da barragem DAM1, quando actua uma variação uniforme de temperatura de -10°C .

$\int_0^{17,6} n_{\phi} dZ$ [kN]	$\int_{17,6}^{55,4} n_{\phi} dZ$ [kN]	$\int_{55,4}^{75} n_{\phi} dZ$ [kN]
9249	-10747	11750

Quadro 8.5 - Valor das áreas do diagrama das reacções normais à linha de inserção da barragem DAM1, quando actua uma variação uniforme de temperatura de -10°C.

8.5.2 Modelo DAM1.1

Seguidamente são apresentados os resultados referentes ao modelo DAM1.1, geometricamente idêntico ao modelo DAM1, à excepção da espessura que passa a ser o triplo.

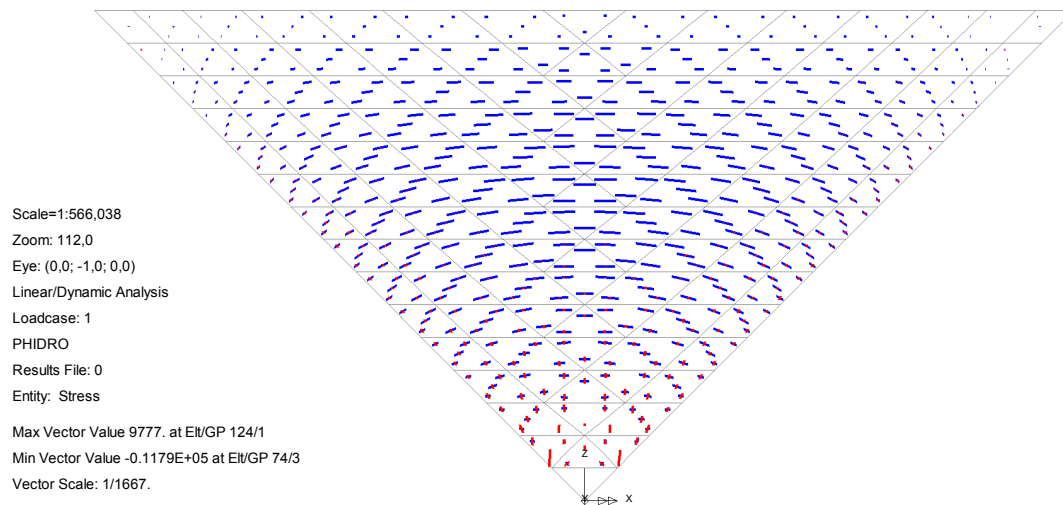


Figura 8.15 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1.1, sob a acção da pressão hidrostática.

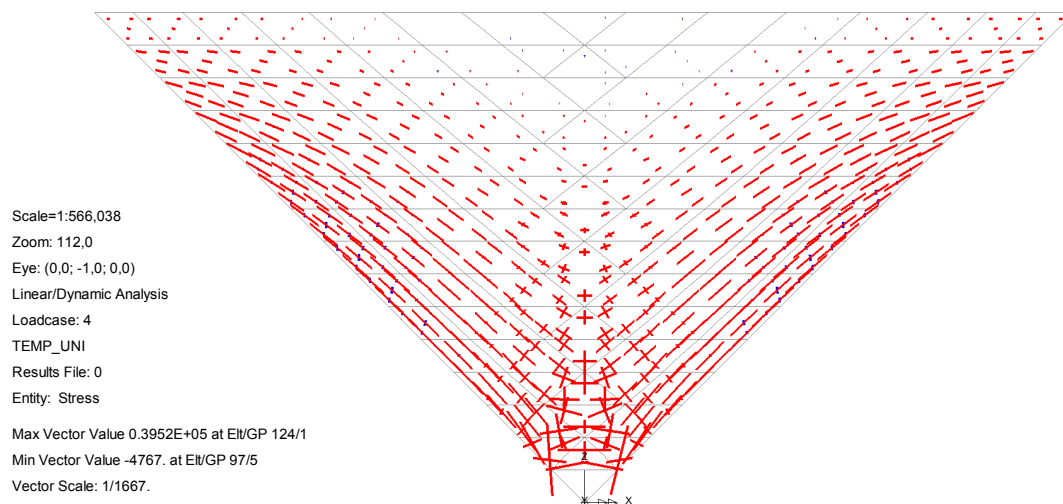


Figura 8.16 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM1.1, sob a acção da variação uniforme negativa de temperatura.

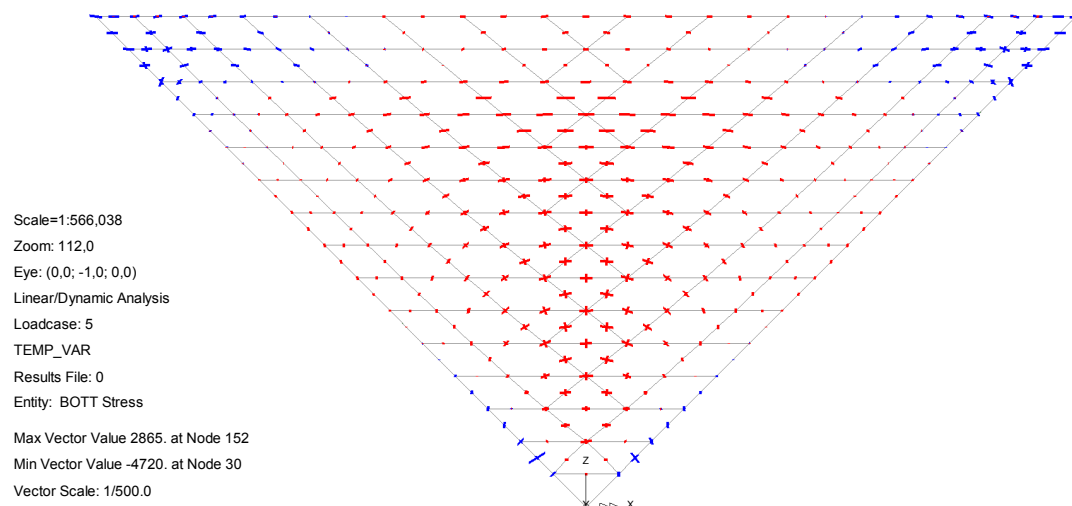


Figura 8.17 - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de montante da barragem DAM1.1, sob a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

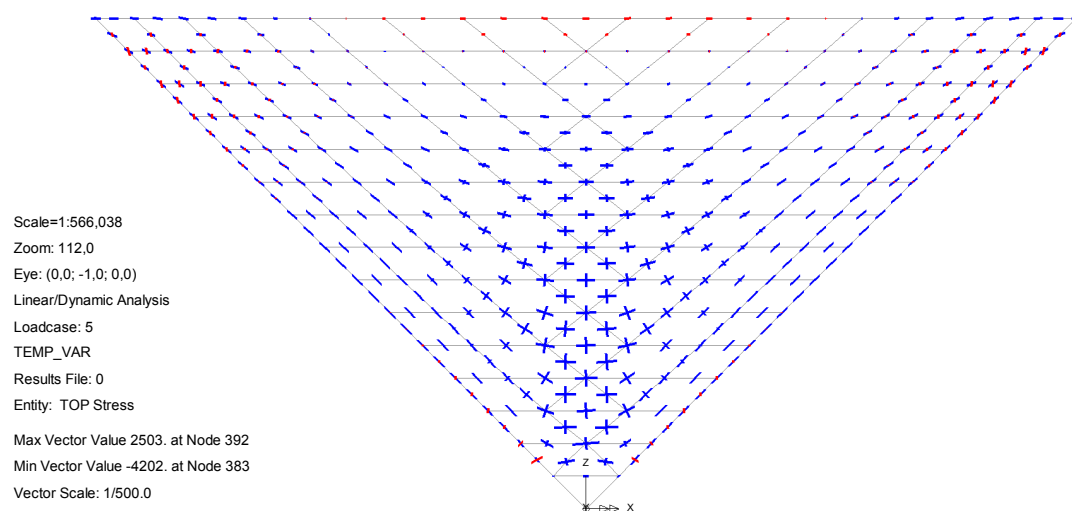


Figura 8.18 - Tensões principais, em kPa, nos nós do paramento de jusante da barragem DAM1.1, sob a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

8.5.3 Modelo DAM2

As direcções principais de curvatura, obtidas a partir do programa numérico PCURV, estão indicadas na figura seguinte.

Posteriormente, são ilustrados os esforços principais de membrana na superfície média da barragem DAM2, quando actua a pressão hidrostática.

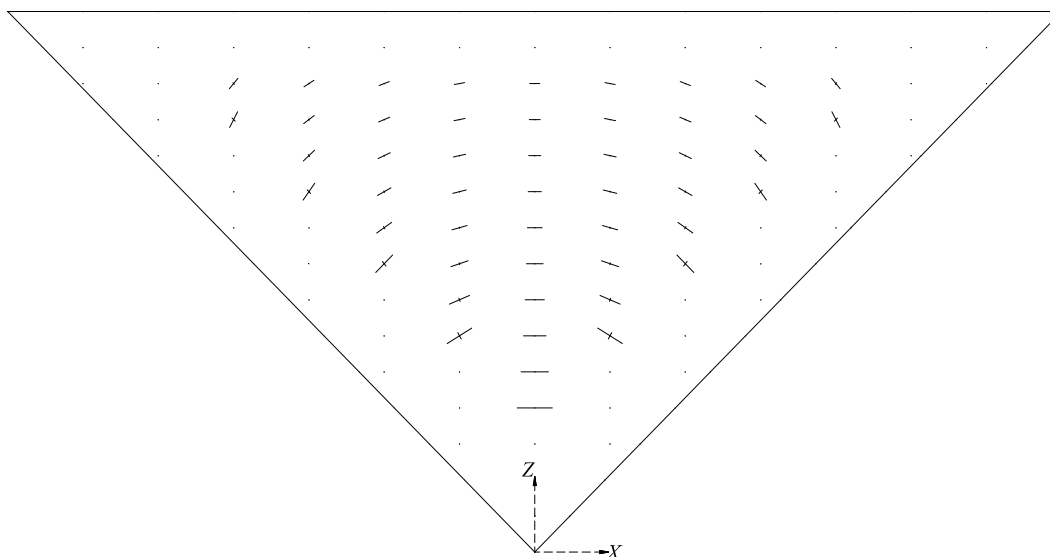


Figura 8.19 - Curvaturas principais da superfície média da barragem DAM2, no alçado principal de montante.

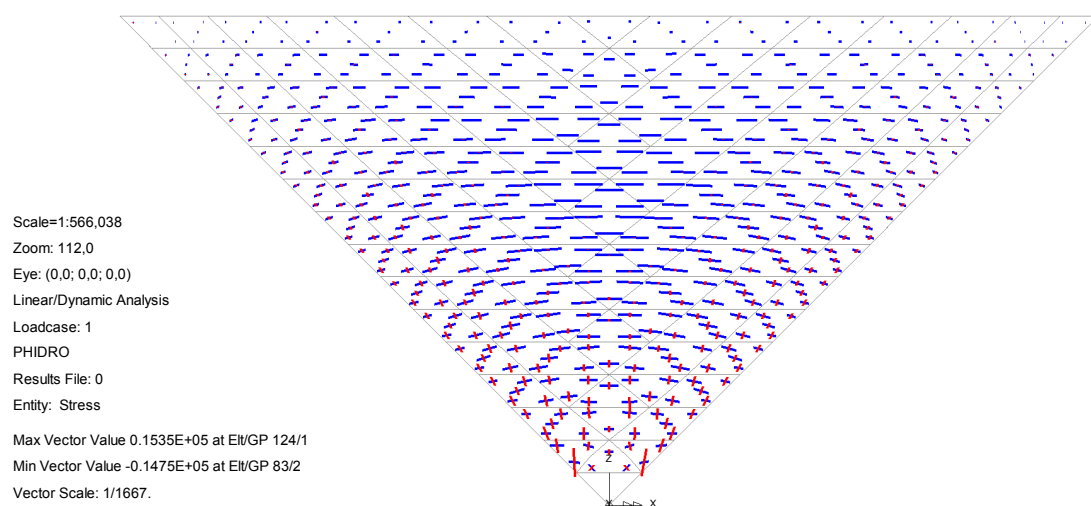


Figura 8.20 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM2, sob a acção da pressão hidrostática.

8.5.4 Modelo DAM3

Relativamente ao modelo DAM3, são apresentadas as curvaturas principais da superfície média, os esforços principais de membrana e a deformada da superfície média quando actua a pressão hidrostática.

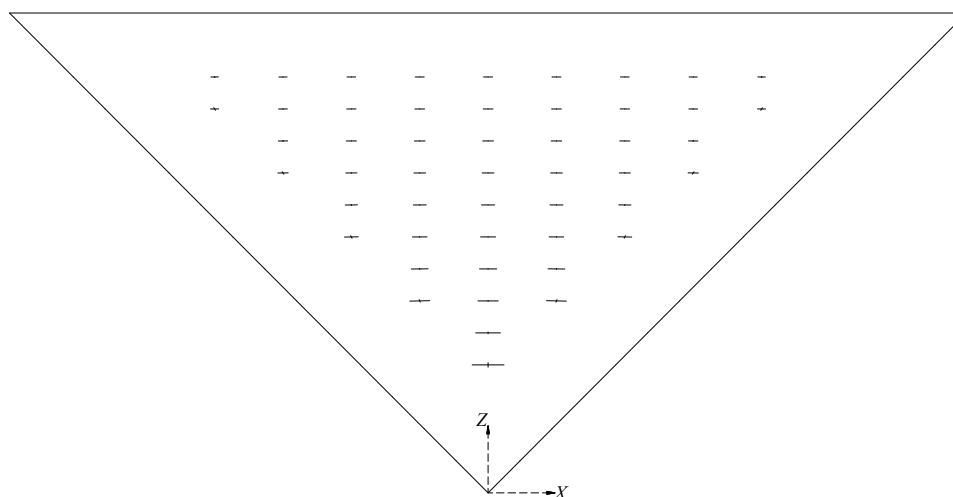


Figura 8.21 - Curvaturas principais da superfície média da barragem DAM3, no alçado principal de montante.

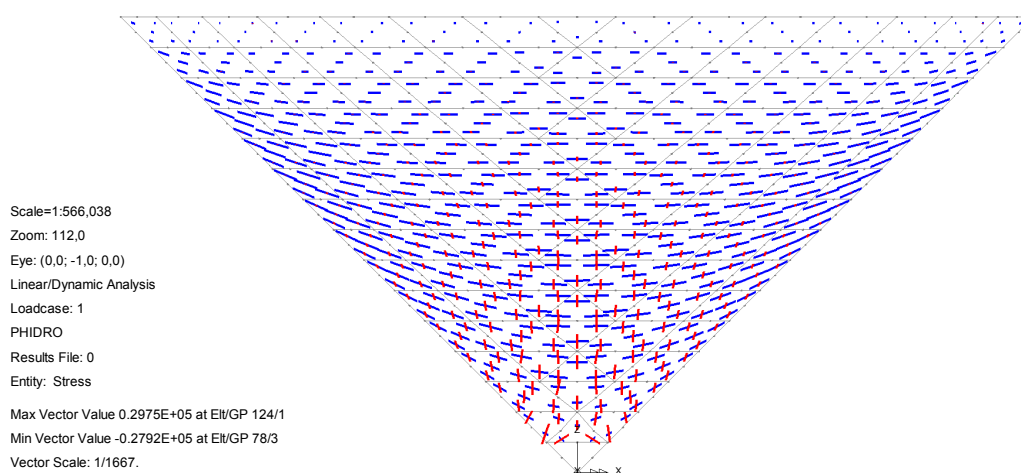


Figura 8.22 - Esforços principais de membrana (não respeitando a escala estabelecida), em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM3, sob a acção da pressão hidrostática.

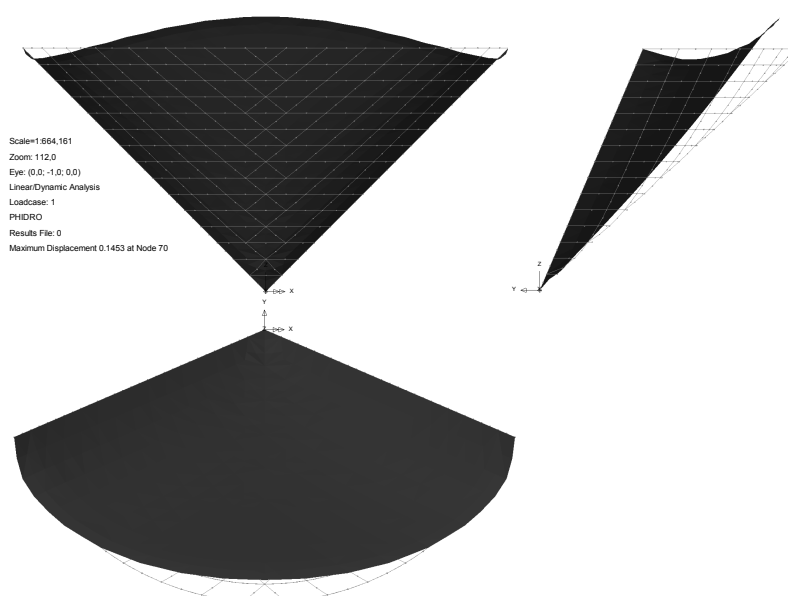


Figura 8.23 (a) (b) e (c) - Deformada, em m, da superfície média da barragem DAM3, em alçado principal de montante (a), em alçado lateral esquerdo (b) e em planta (c), sob a acção da pressão hidrostática.

8.5.5 Modelo DAM4

Os resultados que dizem respeito ao modelo DAM4 (curvaturas principais e esforços principais de membrana sob a acção da pressão hidrostática) são apresentados seguidamente.

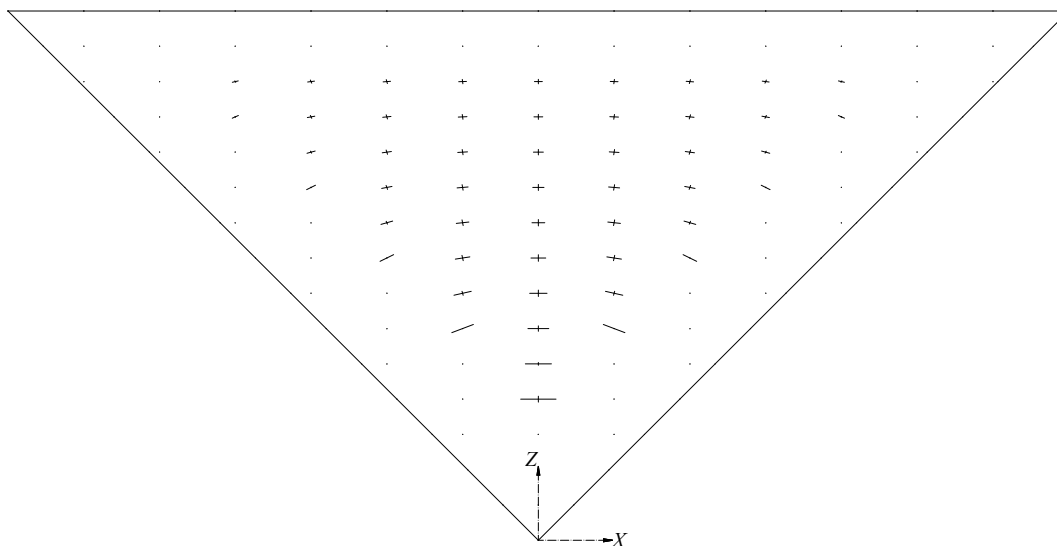


Figura 8.24 - Curvaturas principais da superfície média da barragem abóbada de ângulo constante de arcos circulares DAM4, no alçado principal de montante.

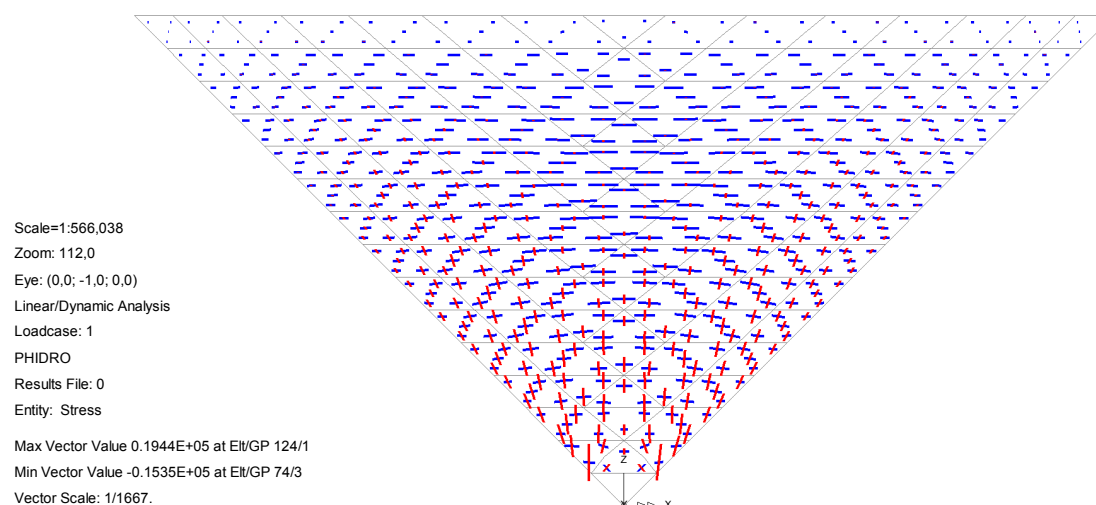


Figura 8.25 - Esforços principais de membrana, em kN/m, nos pontos de Gauss da superfície média do modelo DAM4, sob a acção da pressão hidrostática.

8.5.6 Quadros resumo

Com o intuito de comparar os valores dos esforços e tensões principais, nos diferentes modelos analisados, para os pontos indicados nos diagramas de escala, apresentam-se os quadros seguintes.

Acções: pressão hidrostática									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1	1	2,2	-4,1	1,6	-1,6	1,8	-2,5	1,4	-0,7
	2	-1,1	-13,7	-0,5	-4,5	-0,8	-6,3	-0,1	-2,7
	3	0,6	-12,7	0,3	-4,0	0,1	-4,6	0,5	-3,4
	4	0,6	-12,7	0,3	-4,0	0,1	-4,6	0,5	-3,4
	5	0,9	-4,4	0,1	-3,5	0,3	-3,4	0,0	-3,5
	6	0,9	-4,4	0,1	-3,5	0,3	-3,4	0,0	-3,5

Quadro 8.6 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1, quando actua a pressão hidrostática.

Acções: pressão hidrostática + peso próprio									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1	1	2,2	-3,6	0,9	-1,5	1,4	-2,3	0,5	-0,8
	2	-2,3	-13,2	-0,8	-4,3	-0,9	-7,0	-0,7	-1,6
	3	-0,6	-11,9	-0,1	-3,7	-0,1	-4,2	0,0	-3,4
	4	-0,6	-11,9	-0,1	-3,8	-0,1	-4,2	0,0	-3,4
	5	0,5	-4,2	0,0	-3,3	0,3	-3,0	-0,2	-3,5
	6	0,5	-4,2	0,0	-3,3	0,3	-3,0	-0,2	-3,5

Quadro 8.7 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1, quando actuam a pressão hidrostática e o peso próprio.

Acções: variação uniforme negativa de temperatura					
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1	1	3,2	1,8	1,8	0,5
	2	0,2	0,0	0,1	-0,1
	3	2,5	-0,3	0,8	-0,1
	4	2,5	-0,3	0,8	-0,1
	5	3,7	0,3	1,6	-0,1
	6	3,7	0,3	1,6	-0,1

Quadro 8.8 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1, para a acção da variação uniforme negativa de temperatura.

Acções: variações uniformes e diferenciais de temperatura									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1	1	-0,7	-2,1	-0,2	-0,9	1,6	0,4	-1,8	-2,4
	2	0,0	-0,3	0,0	-0,1	1,9	1,8	-1,8	-2,1
	3	0,2	-1,3	0,1	-0,4	2,0	1,3	-1,9	-2,2
	4	0,2	-1,3	0,1	-0,4	2,0	1,4	-1,9	-2,3
	5	-0,5	-1,6	0,3	-0,6	1,4	-0,1	-0,2	-1,9
	6	-0,5	-1,6	0,3	-0,6	1,4	-0,1	-0,2	-1,9

Quadro 8.9 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1, para a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

Acções: pressão hidrostática									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1.1	1	2,8	0,8	0,5	-0,1	0,9	-0,4	0,4	0,0
	2	0,0	-11,1	-0,1	-1,2	-0,2	-2,2	0,2	-0,2
	3	1,4	-8,9	0,2	-0,9	0,2	-1,3	0,2	-0,5
	4	1,4	-8,9	0,2	-0,9	0,2	-1,3	0,2	-0,5
	5	0,1	-4,1	0,0	-0,9	0,2	-0,6	-0,1	-1,3
	6	0,1	-4,1	0,0	-0,9	0,2	-0,6	-0,1	-1,3

Quadro 8.10 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1.1, quando actua a pressão hidrostática.

Acções: pressão hidrostática + peso próprio									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1.1	1	0,5	-2,7	-0,1	-0,3	0,4	-0,3	-0,1	-0,8
	2	-3,1	-10,4	-0,4	-1,1	-0,3	-2,2	-0,1	-0,4
	3	-2,6	-8,9	-0,3	-0,9	-0,1	-1,0	-0,1	-1,2
	4	-2,6	-8,9	-0,3	-0,9	-0,1	-1,0	-0,1	-1,2
	5	-0,6	-3,4	-0,1	-0,7	0,1	-0,3	-0,3	-1,2
	6	-0,6	-3,4	-0,1	-0,7	0,1	-0,3	-0,3	-1,2

Quadro 8.11 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1.1, quando actuam a pressão hidrostática e o peso próprio.

Acções: variação uniforme negativa de temperatura					
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1.1	1	27,0	9,0	2,8	1,4
	2	4,8	3,3	0,5	0,4
	3	12,6	3,8	1,4	0,5
	4	12,6	3,8	1,4	0,5
	5	12,6	-0,5	2,1	-0,1
	6	12,6	-0,5	2,1	-0,1

Quadro 8.12 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1.1, para a acção da variação uniforme negativa de temperatura.

Acções: variações uniformes e diferenciais de temperatura									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM1.1	1	-4,0	-12,6	-0,6	-1,2	0,8	-0,1	-1,3	-3,0
	2	-2,3	-2,8	-0,2	-0,3	2,1	1,3	-1,8	-2,8
	3	-2,3	-6,9	-0,3	-0,8	1,7	1,1	-2,1	-2,7
	4	-2,3	-6,9	-0,3	-0,8	1,7	1,2	-2,1	-2,8
	5	0,5	-5,0	0,2	-0,7	0,8	-0,3	0,4	-2,1
	6	0,5	-5,0	0,2	-0,7	0,8	-0,3	0,4	-2,1

Quadro 8.13 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM1.1, para a acção das variações de temperatura indicadas no quadro 8.3.

Acções: pressão hidrostática									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM2	1	2,9	-4,5	2,1	-1,7	2,1	-2,8	2,2	-0,6
	2	0,3	-14,5	0,1	-4,7	-0,9	-5,5	1,0	-3,9
	3	2,5	-12,8	0,9	-4,0	0,5	-4,7	1,4	-3,4
	4	2,5	-12,8	0,9	-4,1	0,5	-4,8	1,4	-3,4
	5	0,9	-5,2	0,2	-3,9	0,5	-4,6	0,1	-3,1
	6	0,9	-5,2	0,2	-3,9	0,5	-4,6	0,1	-3,1

Quadro 8.14 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM2, quando actua a pressão hidrostática.

Acções: pressão hidrostática									
Modelo	Localização	N_I [MN/m]	N_{II} [MN/m]	Superfície média		Face de Montante		Face de Jusante	
				σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]
DAM4	1	3,3	-5,3	2,8	-1,8	2,3	-3	3,4	-0,6
	2	2,6	-14,4	0,9	-4,6	0,3	-4,2	1,5	-5
	3	6,1	-11,3	2,1	-3,6	1,8	-4,1	2,6	-3,1
	4	6,1	-11,3	2,2	-3,6	1,8	-4,1	2,6	-3,2
	5	1,1	-7	0,6	-4,8	0,7	-6,5	0,7	-3,2
	6	1,1	-7	0,6	-4,8	0,7	-6,5	0,7	-3,2

Quadro 8.15 - Valores de esforços e tensões nos pontos do modelo DAM4, quando actua a pressão hidrostática.

Capítulo 9

Discussão de Resultados

9.1 Cálculo numérico das curvaturas principais numa superfície

A rotina de cálculo PCURV fornece resultados satisfatórios, desde que o espaçamento da malha ortogonal de pontos seja convenientemente escolhido. Usualmente, o cálculo numérico descrito fornece valores de curvaturas principais ligeiramente superiores aos valores do cálculo analítico. A diminuição do espaçamento da malha ortogonal de pontos reduz o erro cometido.

9.2 Técnica experimental do método da membrana

A fita-cola, utilizada para fixar a membrana no plano de inserção, originou inevitavelmente uma zona mais rígida na membrana.

A observação da forma das membranas deformadas permite visualizar que esta deformação é tanto mais acentuada quanto mais para montante está inclinado o plano de inserção. A uma profundidade de 15 centímetros, a pressão hidrostática não é muito significativa, sendo que o peso da membrana, embora muito reduzido, pode exercer alguma influência na forma final obtida, principalmente na situação em que o plano de inserção se inclina para jusante. Nesta situação, o peso próprio da membrana contraria, em parte, a acção da pressão hidrostática e, por isso, a deformação da membrana é menos perceptível. Os alçados das três superfícies funiculares, orientados por forma a que o plano de inserção esteja na posição vertical, podem ser visualizados na figura seguinte. Repare-se que da observação das três superfícies funiculares analisadas (figura 9.1), constata-se que todas apresentam dupla curvatura.

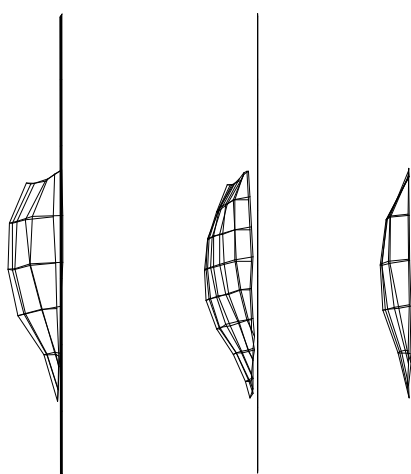


Figura 9.1 (a), (b) e (c) - Alçado lateral direito, de cada uma das três superfícies (15° para montante (a), vertical (b) e 45° para jusante (c)), orientado por forma a que o plano de inserção esteja na posição vertical.

A comparação da eficiência da aproximação, quando se recorre a circunferências e parábolas, não foi conclusiva, no entanto, verificou-se que o raio de curvatura das curvas de nível diminui com a profundidade, independentemente da forma geométrica da função de aproximação e da inclinação do plano de inserção.

No caso em que o plano de inserção é vertical, o raio de curvatura das curvas de nível diminui com a profundidade em relação ao nível máximo de água na membrana, no entanto, as curvas de nível mais baixas, próximas do ponto mais baixo da membrana, contrariam esta tendência. A causa provável deste desvio reside no facto da fita-cola originar uma zona mais rígida junto aos bordos, o que restringe parcialmente a deformação nesta zona. Como consequência, a curvatura das curvas de nível nesta zona não é tão acentuada como seria de esperar.

Relativamente à membrana fixa num plano de inserção inclinado 45° para jusante, os resultados obtidos na curva de nível mais elevada não têm significado, uma vez que as coordenadas dos pontos medidos formam praticamente uma recta. Nas outras cotas, tanto a circunferência como a parábola ajustam-se aos pontos medidos, não sendo possível eleger a forma que melhor retrata o que foi observado na experiência. O raio das curvas de nível diminui com a profundidade apenas até uma determinada cota, pela razão já referida anteriormente.

Quando a placa de inserção tem uma inclinação em relação à vertical de 25° para montante, a parábola é a curva que melhor se adapta aos pontos das curvas de nível da membrana, no entanto, a diferença entre o erro cometido pela circunferência e pela parábola não é significativa. O raio de curvatura diminui com a profundidade, à excepção da curva de nível mais baixa, que se encontra numa zona mais rígida da membrana.

Note-se que o arco do coroamento, na situação do plano de inserção vertical, não corresponde a uma curva de nível. Para que se verifique tracção neste arco, este tem que abandonar o plano das curvas de nível, passando a estar contido num plano inclinado.

9.3 Análise numérica de cascas de revolução

9.3.1 Cascas de revolução esféricas com um bordo livre

Os resultados obtidos nos modelos CASCA1 e CASCA2 permitem concluir que a variação uniforme de temperatura tem um efeito local, junto dos bordos encastrados. Nestas cascas de revolução, que apresentam um bordo livre, a análise dos esforços e deformações demonstra que as tensões são resultantes do impedimento a que as cascas estão sujeitas. Nas zonas afastadas dos bordos encastrados a casca pode deformar-se, não acontecendo o mesmo junto aos referidos bordos. A direcção dos esforços principais máximos é paralela ao plano onde a casca está encastrada. Na casca mais espessa ocorrem esforços maiores, uma vez que a sua rigidez também é maior.

9.3.2 Cascas de revolução encastradas em todo o bordo

Na análise das cascas com eixo de revolução vertical e encastradas ao longo de todos os bordos, confirma-se que o efeito da variação negativa uniforme de temperatura tem mais preponderância junto dos bordos restringidos.

O aumento da espessura também agrava a magnitude dos esforços e a extensão da zona da casca em que ocorre a transição da parte que se pode deformar com alguma liberdade, para os bordos, onde é imposta uma restrição.

Analisando os resultados das cascas que apresentam a mesma espessura, diferindo apenas a forma do meridiano, constata-se que as cascas mais abatidas produzem esforços maiores devido à acção da temperatura, principalmente no que diz respeito ao esforço axial ao longo do meridiano. O valor máximo do momento flector paralelo ao eixo normal ao plano do meridiano é sensivelmente igual para as três formas de meridiano analisadas. A casca de revolução com o meridiano parabólico apresenta um valor máximo de esforço normal aproximadamente 1,6 vezes superior ao mesmo esforço da casca de revolução esférica com o mesmo vão e elevação.

9.4 Barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares

9.4.1 Modelo DAM1

Relativamente ao crescimento isolado dos blocos, não se verifica qualquer valor que exceda a tensão máxima admissível nas secções da base dos perfis. Nas secções que possuem excentricidade máxima para montante, em relação ao centro de gravidade da secção da base do respectivo perfil, o mesmo não acontece. Esta situação não é condicionante pelo facto dos perfis laterais, que podem ser construídos até ao topo, poderem auxiliar no equilíbrio dos blocos junto do perfil central da barragem, cujo crescimento isolado não seria possível.

O sólido que coincide com a superfície média da barragem resulta do descentramento das curvas de nível do cone, passando o eixo a ser curvo, inclinado para jusante. A forma da superfície média obtida corresponde ao deslizamento das curvas de nível do cone ao longo do eixo Y .

As linhas de curvatura da superfície média da barragem DAM1 estão contidas em planos inclinados em relação à direcção horizontal. As curvaturas principais da superfície média não estão ao longo das curvas de nível, o que invalida a utilização da fórmula dos tubos. Mesmo no perfil central, embora as curvas de nível correspondam a uma das direcções principais de curvatura, na direcção vertical também existe curvatura, o que indica que, mesmo nesta zona, nem todo o carregamento é absorvido pelos arcos horizontais.

Nos pontos que se afastam do perfil central, as curvaturas principais da superfície não têm a direcção dos arcos horizontais nem das consolas verticais. Junto aos encontros, uma das curvaturas principais toma aproximadamente a direcção das consolas verticais e é, efectivamente, muito mais significativa do que a curvatura dos arcos nesta zona.

A modelação da barragem DAM1 no programa de cálculo automático permitiu visualizar os esforços principais de membrana na superfície média da casca, quando actua a pressão hidrostática. Confirma-se que nenhuma das direcções principais dos esforços de membrana é coincidente com os arcos horizontais. A rede de isostáticas do equilíbrio de membrana está bastante próxima das linhas de curvatura da superfície. As tracções ocorrem maioritariamente na direcção tangente à linha média do perfil central, enquanto que as compressões ocorrem ao longo dos arcos contidos em planos inclinados.

A observação das tensões na face de montante, sob a acção da mesma solicitação, permite concluir que as tracções ocorrem maioritariamente na zona do contorno de inserção da barragem no vale. As tensões de tracção com maior valor, na zona em questão, ocorrem junto do coroamento e da base da barragem, numa direcção aproximadamente perpendicular ao bordo e tangente à superfície média da casca. As tensões na face de jusante são maioritariamente de compressão.

A acção conjunta do peso próprio e da pressão hidrostática permite diminuir a magnitude dos esforços principais de tracção e das tensões principais de tracção na mesma direcção, na zona mais baixa da barragem. Efectivamente, o peso próprio contraria, em parte, a acção da pressão hidrostática.

A variação uniforme de temperatura, que simula o fenómeno da retracção, tem um efeito mais acentuado junto aos bordos encastrados, particularmente no que toca aos esforços de tracção na direcção paralela ao contorno de inserção. Ao longo desta direcção, as tensões de tracção podem atingir os 3 MPa, para uma variação uniforme de -10°C . Os diagramas das reacções, segundo as direcções tangente e normal à linha do contorno de inserção, permitem verificar que a diminuição de temperatura provoca reacções com diferentes sentidos segundo cada uma daquelas direcções. Segundo a direcção tangencial, existem dois conjuntos de reacções com sentido oposto, que contrariam a deformação que a casca experimental, caso não estivesse impedida de se deformar.

A acção da temperatura que simula o estado térmico da barragem, na altura do ano mais desfavorável em termos de variações diferenciais, não provoca tensões muito elevadas na superfície média da casca. Tensões mais elevadas ocorrem na face de montante (maioritariamente de tracção) e na face de jusante (maioritariamente de compressão).

9.4.2 Modelo DAM1.1

O aumento da espessura da barragem DAM1 conduziu, por regra, a uma diminuição do valor dos esforços principais de membrana, sob a acção da pressão hidrostática. Uma vez que a casca DAM1.1 é mais espessa, logo mais rígida, os esforços de membrana não têm tanta preponderância na absorção da carga externa, como no caso da casca mais fina DAM1.

No entanto, o aumento de espessuras permitiu a diminuição generalizada da magnitude das tensões principais na superfície média e nas faces de montante e de jusante do modelo DAM1.1, quando a solicitação corresponde á pressão hidrostática e ao peso próprio. Para além do aumento das secções, o aumento da magnitude do peso próprio permite que as tensões de tracção sejam menores do que no caso do modelo DAM1.

Contudo, no que toca às variações uniformes de temperatura, tanto os esforços principais de membrana como as tensões principais na superfície média apresentam valores superiores, no caso da barragem mais espessa. Registam-se valores de tensões de tracção que rondam os 3 MPa, quando actua a variação uniforme negativa de temperatura.

9.4.3 Modelo DAM2

Verificou-se que, face à metodologia adoptada para determinar a forma de barragens de ângulo constante com curvas de nível circulares, se a projecção no plano *YOZ* da linha de inserção da barragem for uma recta, o perfil central também é uma recta, uma vez que os raios dos arcos variam linearmente com a cota. Uma recta na projecção no plano *YOZ* da linha de inserção resulta numa linha dos centros recta e, por consequência, num perfil central recto.

A decisão de adoptar uma linha média do perfil central recta não evitou a inclinação das curvaturas principais. As curvaturas principais da superfície média da barragem DAM2 são, de um modo geral, idênticas àquelas da superfície média da barragem DAM1.

Constata-se que os arcos que efectivamente estão segundo as direcções principais não correspondem às curvas de nível da abóbada, mas sim a arcos inclinados, situação que pode ser observada numa barragem semelhante, na figura 9.2.

A análise de esforços principais de membrana do modelo DAM2 permite concluir que, de um modo geral e face à acção da pressão hidrostática, esta solução não é melhor do que aquela testada no modelo DAM1, pelo facto da magnitude dos esforços e tensões ser superior às mesmas grandezas medidas na barragem DAM1.

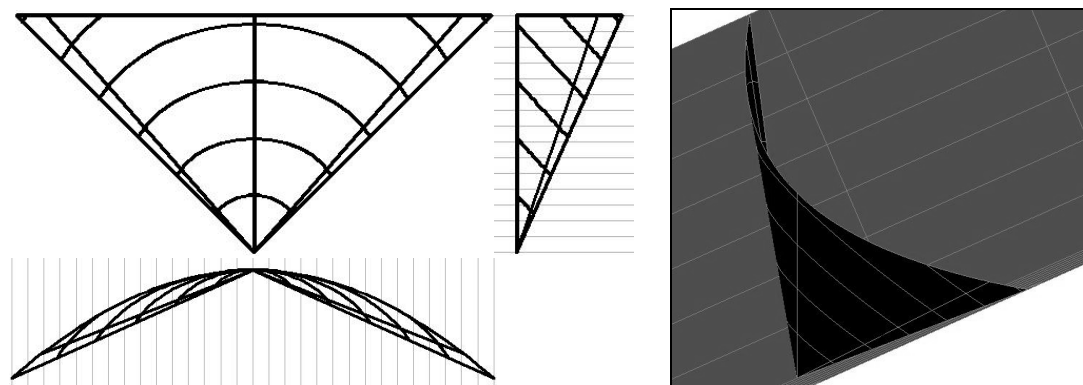


Figura 9.2 (a), (b), (c) e (d) - Superfície média de uma barragem cónica, cujo eixo se inclina para jusante, num vale em “V”, com indicação das linhas de curvatura - alçado principal de jusante (a), alçado lateral direito (b), planta (c) e perspectiva (d).

9.4.4 Modelo DAM3

As linhas de curvatura da superfície média da barragem DAM3 coincidem com as curvas de nível. Esta superfície é coincidente com a superfície de um cone de eixo vertical. A queda bastante acentuada dos perfis para montante tornaria impossível o crescimento isolado dos blocos.

Analisando os esforços principais de membrana, quando actua a pressão hidrostática perpendicularmente a todos os pontos da superfície média, constata-se que continuam a ocorrer tracções na direcção vertical, mesmo quando as linhas de curvatura coincidem com as curvas de nível. Observando a deformada da estrutura, face à mesma acção, concluí-se que a componente vertical da pressão hidrostática e o facto do coroamento se encontrar livre tornam inevitável o aparecimento de tracções na direcção tangente à linha média do perfil central da barragem.

9.4.5 Modelo DAM4

A geometria da superfície média da barragem DAM4 permitiu que as linhas de curvatura estivessem mais próximas das curvas de nível do que no caso da barragem DAM1. O estudo do equilíbrio do crescimento isolado dos blocos permitiu concluir que o perfil central desta barragem não pode ser apoiado, durante a sua construção, nos blocos mais próximos dos encontros que já estejam construídos até ao topo. A inversão da curvatura dos perfis, mantendo-se a curvatura das curvas de nível, tem este inconveniente. Ainda assim, a geometria atribuída à barragem DAM4 permite a construção isolada dos blocos na sua quase totalidade.

O valor dos esforços principais de membrana e das tensões principais no modelo DAM4, sob a acção da pressão hidrostática, revelaram que estes valores são, por regra, superiores àqueles do modelo DAM1. Registam-se alguns valores de tensões de tracção superiores a 3 MPa, mesmo na superfície média da barragem. Efectivamente, o facto das linhas de curvatura se aproximarem das curvas de nível não surtiu o efeito desejado, tendo já o mesmo acontecido no caso do modelo DAM3.

Capítulo 10

Conclusão

A procura de uma forma eficiente para uma barragem abóbada deve-se iniciar com a preocupação de potenciar as características resistentes do material de construção quando na estrutura actua a pressão hidrostática. A geometria escolhida não pode ser incompatível com construção da estrutura da barragem, através do crescimento isolado dos blocos, técnica mais usual no panorama actual da tecnologia de construção.

Encontrando-se a geometria da estrutura maioritariamente condicionada pela acção preponderante, a preocupação seguinte é evitar o aparecimento de tensões resultantes da retracção e de variações de temperatura.

O método da membrana constitui um dos caminhos possíveis para a obtenção de uma forma que, sob a acção conjunta da pressão hidrostática e do peso próprio, potencie as referidas capacidades resistentes do material de construção. A experiência realizada no presente trabalho, onde apenas se considerou a acção da pressão hidrostática, não permitiu concluir qual a forma exacta das curvas de nível da superfície funicular, quando o plano de inserção apresenta diferentes inclinações. O aumento da curvatura das curvas de nível da superfície funicular com a profundidade, ou seja, com o aumento da magnitude da pressão hidrostática, verificou-se na experiência realizada e, efectivamente, este principio estabelece que a curvatura das curvas de nível é proporcional à magnitude das cargas. Esta decisão, que parece responder correctamente à configuração da solicitação, terá uma implicação na geometria da superfície média.

A maioria das obras construídas até à data apresenta um plano de inserção com inclinação para jusante. Esta decisão parece constituir um bom princípio, uma vez que possibilita a execução de uma superfície de dupla curvatura. Repare-se que se o plano de inserção fosse vertical, ou com inclinação para montante, o crescimento isolado dos blocos da barragem seria muito mais difícil de realizar, considerando a inexistência de aparelhos temporários de apoio.

Na experiência realizada, as superfícies funiculares obtidas apresentaram sempre dupla curvatura, no entanto, as linhas de curvatura não coincidiam com as curvas de nível da abóbada. Para além das curvas de nível, o perfil central das superfícies também é curvo. O facto do coroamento não estar restringido da mesma maneira que os outros bordos, também influencia a forma da superfície funicular.

Quando o plano de inserção é vertical, para que o arco do coroamento da superfície funicular esteja traccionado, sob a acção da pressão hidrostática do lado de jusante, este está geralmente contido num plano inclinado (figura 9.1) e não num plano horizontal, como uma curva de nível. Quando o sentido do campo de forças é invertido, o coroamento devia manter esta configuração, o que implicaria que a água na albufeira da barragem não pudesse atingir o nível máximo, não podendo ultrapassar a zona mais baixa do arco do coroamento. Quando o plano de inserção está inclinado para jusante, a arco do coroamento está mais próximo do plano de uma curva de nível, atenuando o condicionamento atrás descrito.

Se a pressão hidrostática fosse constante ao longo da profundidade, as linhas de curvatura estariam solicitadas por forças de magnitude constante. No caso da superfície funicular na placa de inserção inclinada para jusante, em relação à vertical, os arcos das linhas de curvatura estão mais solicitados junto às nascenças do que no fecho. Portanto, a forma final destes arcos e a maneira como esta influencia a forma das curvas de nível da superfície não é tão fácil de analisar como no caso de uma pressão constante.

Imagine-se uma superfície fechada, de comportamento isotrópico, solicitada no seu interior por uma pressão de valor constante e sistematicamente perpendicular à superfície, ou seja, um balão com ar no seu interior. A superfície funicular desta solicitação corresponde à superfície de uma esfera (figura 10.1). Cada uma das curvas fechadas, contida num plano radial, como aquela representada na figura 10.2, está sujeita a uma pressão radial uniforme. A forma funicular plana deste tipo de solicitação é, precisamente, uma circunferência.

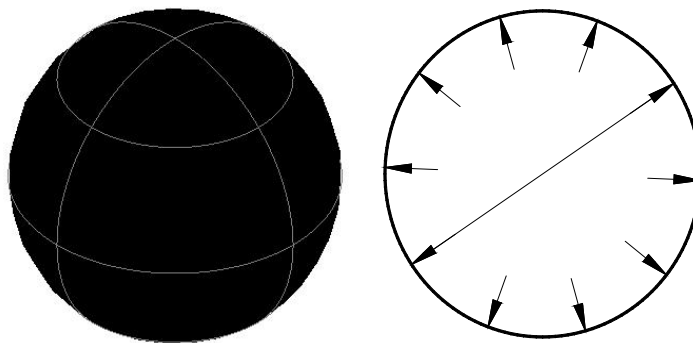


Figura 10.1 (a) e (b) - Superfície funicular de uma pressão de valor constante e sistematicamente perpendicular à superfície, em perspectiva (a) e em corte (b).

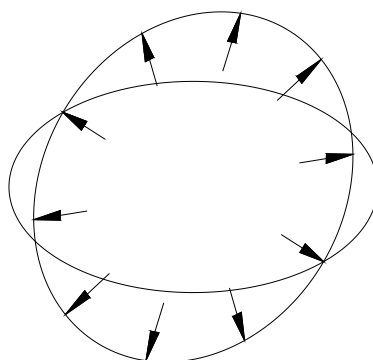


Figura 10.2 - Curva funicular de uma pressão radial uniforme.

Como o valor da pressão é igual em todas as circunferências, o raio destas é sempre o mesmo. A organização espacial de várias circunferências contidas em diferentes planos, mas todas com o mesmo centro e com o mesmo raio, resulta numa superfície esférica. Na superfície funicular da pressão hidrostática, o raciocínio anterior não é tão fácil de estabelecer, pelo facto da pressão não ser constante e porque as linhas de curvatura da superfície não coincidem com as curvas de nível, como resultado da dupla curvatura.

A discussão em torno das curvas de nível da abóbada não aborda o problema de forma directa. As linhas de curvatura são coincidentes com a rede de isostáticas de equilíbrio de membrana quando a carga externa é perpendicular à superfície, logo, a forma e a disposição destas curvas é que interessa analisar. A forma das curvas de nível será sempre consequência da forma das linhas de curvatura.

A procura da forma da barragem abóbada, com base no método da membrana, utilizava a acção do peso próprio para garantir que a superfície funicular estava traccionada em todos os pontos. Embora não seja visível na experiencia realizada no presente trabalho, devido à rigidez no plano da superfície do balão utilizado, a obtenção de uma forma funicular devida à acção exclusiva da pressão hidrostática é, provavelmente, muito difícil. Sempre que a membrana apresente rugas nalguma zona, o que tem alguma tendência a acontecer junto dos bordos, a solução passa por utilizar a acção do peso próprio para garantir que todas as zonas da membrana estão traccionadas. A utilização do peso da barragem para resolver este problema poderá ter consequências quando ocorrem outras acções.

As barragens abóbada analisadas confirmam que as linhas de curvatura de uma superfície coincidem com a rede de isostáticas do equilíbrio de membrana, quando a força exterior é perpendicular à superfície média da casca. As tracções que surgem numa barragem abóbada, com uma forma do perfil central com convexidade a apontar para montante, têm direcção tangente à linha média do perfil central e devem-se ao facto da pressão hidrostática não estar contida no plano dos arcos definidos pelas linhas de curvatura (figura 10.3). Quando a força externa não está contida no plano dos arcos das linhas de curvatura, existe uma componente desta força que não é absorvida pela compressão desses arcos. Esta componente, uma vez que o coroamento não está restringido, origina o aparecimento de uma força na base da barragem, tangente ao perfil central, que provoca as referidas tracções.

A situação também ocorre na barragem cuja superfície média corresponde à superfície de um cone de eixo vertical (figura 10.4.b). Se o cone do eixo se inclinar para jusante (figura 10.4.a), o mesmo continua a ocorrer. Conclui-se que o facto da curvatura das curvas de nível diminuir com a profundidade, configurando à superfície uma forma cónica, tem como implicação o facto da direcção da pressão hidrostática não ser paralela aos planos das linhas de curvatura da mesma superfície.

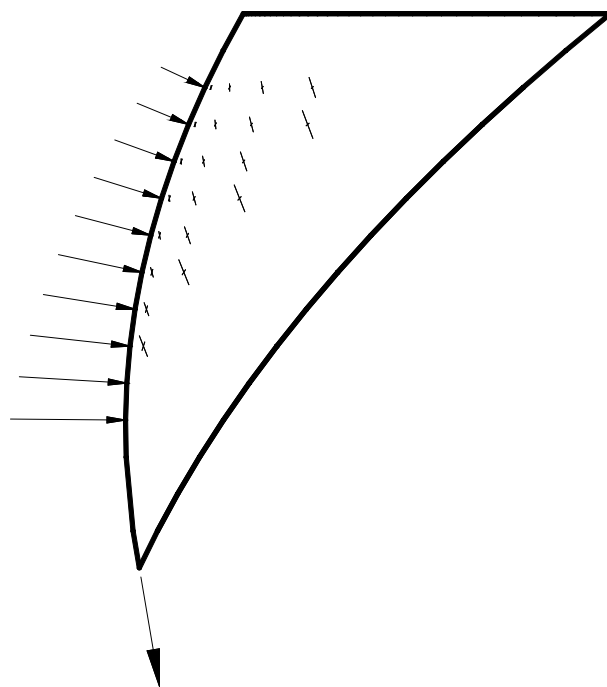


Figura 10.3 - Direcção da pressão hidrostática e curvaturas principais da superfície média da barragem abóbada DAM1, em alçado lateral direito.

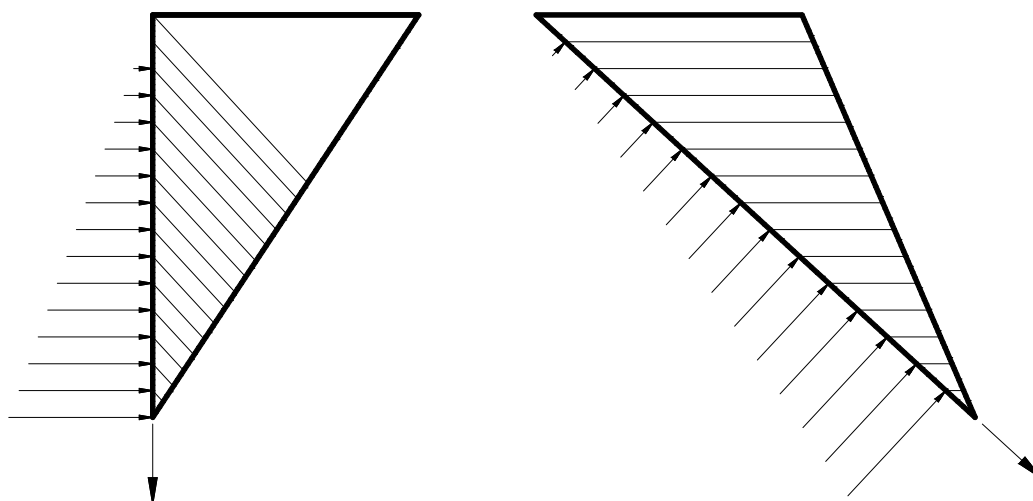


Figura 10.4 (a) e (b) - Direcção da pressão hidrostática e curvaturas principais da superfície média da barragem DAM2 (a), cuja linha dos centros está inclinada para jusante, e da superfície cónica com eixo vertical (b), em alçado lateral direito.

A forma para a superfície média da barragem abóbada, com objectivo de evitar o aparecimento de tracções quando actua a pressão hidrostática, tem de procurar incluir a força exterior no plano das linhas de curvatura da superfície média. Desta forma, a acção da pressão hidrostática será absorvida por compressão, segundo as linhas de curvatura da superfície, até aos apoios, não ocorrendo a necessidade do estabelecimento de esforços de tracção na direcção tangente aos perfis.

A comparação dos resultados dos modelos DAM1 e DAM2 indicia que, a primeira barragem apresenta um comportamento mais favorável do que a segunda, face à acção da pressão hidrostática. Os esforços de tracção na superfície média de barragens abóbada, cujo perfil central tem uma queda para montante na base e sofre uma inclinação para jusante no topo, decrescem sempre que a inclinação para jusante é mais acentuada. O esforço principal de tracção na direcção tangente ao perfil central na base da barragem é de 2,9 MN/m no caso do modelo DAM2 e de 2,2 MN/m no caso do modelo DAM1. Pode-se concluir que a componente vertical da pressão hidrostática que actua na zona superior da barragem provoca esforços de compressão nas restantes zonas.

A forma das curvas de nível e das curvas ao longo das linhas de curvatura não constitui, desta forma, o aspecto mais importante na procura da geometria da superfície média da barragem abóbada. Outra característica das estruturas do tipo casca é revelada pela possibilidade de uma cúpula esférica de espessura constante apresentar apenas esforços de compressão quando submetida à acção do seu peso próprio. Repare-se que o meridiano da casca não tem a forma do antifunicular da carga, no entanto, a existência de uma outra direcção para equilibrar a força exterior possibilita que apenas ocorram esforços de compressão.

Quando a forma da barragem possibilitar a eliminação das tracções, ou pelo menos uma redução drástica, sob a acção da pressão hidrostática, a espessura da barragem não terá que ser acrescida para compensar o aparecimento daqueles esforços e tensões.

A análise das variações uniformes de temperatura em cascas de revolução permitiu concluir que os efeitos desta acção têm uma maior preponderância junto aos bordos restringidos. As zonas da casca de revolução que se podem deformar com alguma liberdade não apresentam esforços significativos. Por seu turno, as zonas próximas dos bordos restringidos são aquelas em que os esforços são mais elevados, pois é nestas zonas que ocorre a restrição das deformações livres. O aumento da espessura da casca é sempre nefasto face ao efeito da variação uniforme de temperatura. Numa estrutura em que uma variação de comprimento, consequência de uma variação de temperatura, é restringida pelas ligações ao exterior, um aumento da rigidez axial e da rigidez de flexão conduzirá a esforços mais elevados.

Variações uniformes de temperatura produzem também esforços superiores em cascas de revolução mais abatidas. Esta constatação vem extrapolar para as três dimensões aquilo que acontece num arco, quando sujeito a variações uniformes de temperatura. Um arco mais abatido apresenta esforços axiais mais elevados (figura 2.45), quando solicitado por uma variação uniforme de temperatura. Uma viga de eixo recto encastrada nas duas extremidades, quando submetida à acção de uma variação uniforme de temperatura, apresenta um determinado esforço normal, não ocorrendo qualquer deformação.

Se o eixo da peça apresentar alguma curvatura, passando a designar-se por arco, nas mesmas condições, o esforço axial será inferior relativamente ao primeiro caso, pelo facto da estrutura ter a possibilidade de se deformar.

Numa casca de revolução, quanto mais a forma do meridiano se aproximar de uma recta horizontal, mais abatida será a casca e maiores serão esforços axiais quando sujeita a variações uniformes de temperatura. Por esta razão, o meridiano parabólico não tem vantagem sobre o meridiano circular equivalente, no que toca às variações uniformes de temperatura. O primeiro aproxima-se mais de uma forma plana horizontal do que o segundo. Estas constatações vêm sugerir que a diminuição da curvatura do fecho para os encontros dos arcos horizontais da barragem poderá não ser benéfica, face à solicitação da variação uniforme de temperatura.

A variação uniforme negativa de temperatura, que simula o efeito da retracção em barragens abóbada, provoca esforços essencialmente junto da zona dos bordos restringidos. Uma análise das reacções tangenciais e normais ao bordo, contidas no plano tangente à superfície média da casca, permite constatar aquilo que se ilustra na figura seguinte.

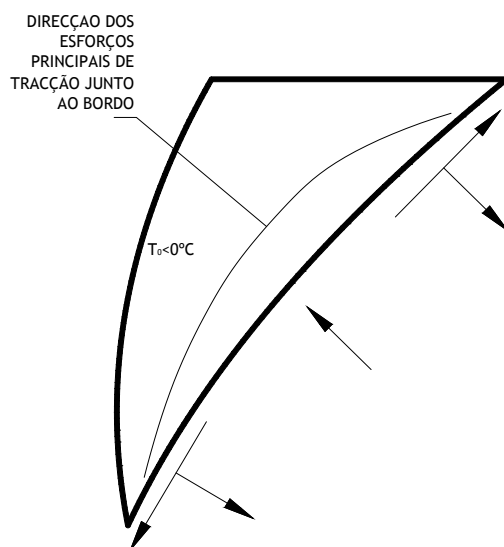


Figura 10.5 - Direcção das reacções, em alçado lateral direito, segundo a tangente e a normal, por unidade de comprimento da linha de inserção, que ocorrem na barragem DAM1 quando solicitada por uma variação uniforme negativa de temperatura.

As reacções tangenciais, que se desenvolvem ao longo dos bordos encastrados da barragem DAM1, resultam do impedimento da deformação de encurtamento que o corpo da barragem experimentaria caso não estivesse restringido. A trajectória dos esforços principais de tracção junto dos bordos, evidenciada na figura anterior, resulta da existência de reacções normais á superfície média da casca junto da linha de inserção da barragem.

Os esforços e as tensões que se verificam na superfície média da barragem DAM1, sob a acção da variação uniforme negativa de temperatura, são significativamente agravados com o aumento da espessura da barragem. O aumento da espessura para o triplo conduziu a um aumento médio das tensões principais de tracção na superfície média de 1,5 vezes. O aumento da espessura da barragem abóbada, que possibilita diminuir as tensões sob a acção da pressão hidrostática e do peso próprio, pelo facto de ocorrer um aumento das secções e um aumento da preponderância desta última acção, tem um efeito contrário quando a acção corresponde a uma variação uniforme de temperatura.

Os modelos que simulam o estado térmico de uma barragem abóbada atribuem, usualmente, uma temperatura constante à face de jusante e uma temperatura decrescente com a profundidade na face de montante. Nos meses de verão, altura do ano em que ocorrem as variações diferenciais de temperatura mais significativas, a face de jusante da barragem do Cabril encontra-se a uma temperatura superior à face de montante. Esta variação de temperatura, face às magnitudes consideradas no presente trabalho, não apresentou tensões significativas na superfície média da barragem. Estas tensões são devidas à variação uniforme de temperatura.

As tensões nas faces de montante e de jusante mostraram-se mais significativas. Isto deve-se ao facto da variação diferencial de temperatura ser mais preponderante do que a variação uniforme. Encontrando-se a face de jusante a uma temperatura superior à da face de montante, as tensões na primeira face são maioritariamente de compressão, enquanto que, as tensões na segunda face são maioritariamente de tracção. O fenómeno que ocorre é similar ao que acontece num arco encastrado nas duas extremidades, onde na face inferior actua uma temperatura mais elevada do que a da face superior (figura 10.6).

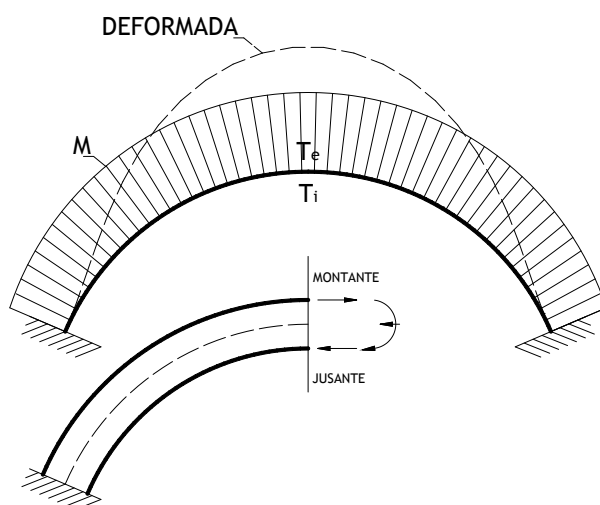


Figura 10.6 - Arco encastrado nas duas extremidades, em que a face de intradorso está sujeita a uma temperatura superior à da face de extradorso.

Quando as temperaturas são distintas nas duas faces do arco, ocorre uma variação uniforme e uma variação diferencial de temperatura. A variação uniforme é responsável pela deformação, pelo esforço axial que se estabelece no arco e por uma parcela pouco significativa do diagrama final de momentos flectores. A variação diferencial de temperatura é maioritariamente responsável pelos momentos flectores que se estabelecem, não provocando nenhuma deformação no arco. Se a temperatura da face de intradorso for superior à da face de extradorso, a variação diferencial provoca tracções na face de extradorso e compressões na face de intradorso.

Referências Bibliográficas

- 1 BOFANG, Z.; ZHANMEI, L. - External temperature loads. In SERAFIM, J. L., ed. lit.; CLOUGH, R. W., ed. lit. - Arch dams: International Workshop on Arch Dams, Coimbra, 5-9 April, 1987. Rotterdam [etc.]: A. A. Balkema, 1990. ISBN 90-6191-865-0. cap. 7.1, p. 217-225.
- 2 BOOGS, H. L. - Guide for preliminary design of arch dams [Monografia em linha]. [Organismo responsável] United States Department of the Interior. Denver: Bureau of Reclamation, imp. 1977. [Consult. 9 Jan. 2011]. (A Water Resources Technical Publication: Engineering Monograph; nº 36). Requer: Adobe Acrobat Reader. Disponível em WWW:<URL:http://www.usbr.gov/pmts/hydraulics_lab/pubs/EM/EM36.pdf>.
- 3 BRANCO, F. A.; MENDES, P. - Numerical simulations of heat of hydration temperature in dams. In SERAFIM, J. L., ed. lit.; CLOUGH, R. W., ed. lit. - Arch dams: International Workshop on Arch Dams, Coimbra, 5-9 April, 1987. Rotterdam [etc.]: A. A. Balkema, 1990. ISBN 90-6191-865-0. cap. 7.2, p. 225-230.
- 4 CALLADINE, C. R. - **Theory of shell structures**. 1st paperback ed. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 1988. 763 p. ISBN 0-521-36945-2
- 5 Circunferência. In: *Wikipédia, a enciclopédia livre* [Em linha]. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011, rev. 24 Agosto 2011. [Consult. 22 Set. 2011]. Disponível em WWW:< <http://pt.wikipedia.org/wiki/Circunfer%C3%Aancia>>.
- 6 COSTA, C. P.; BAPTISTA, A. L.; PINA, C. A. B. - Estudo do comportamento de uma barragem abóbada por métodos experimentais e numéricos. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1990. 20 p. (Memória; nº 755). ISBN 972-49-1339-2.
- 7 CUNHA, L. V. - **Desenho técnico**. 13ª ed. rev. e actual. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2004. 854 p. ISBN 972-31-1066-0
- 8 DELGADO, A. H.; MÁRQUEZ, L. - Modelling of an arch dam by polynomial interpolation. Mathematics and Computers in Simulation [Artigo em linha]. 79:12 (2009) 3434-3443. [Consult. 15 Out. 2010]. Disponível na Internet:<URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V0T-4W99VYK-1/2/39c64a0aa6d2e43fcad224c6f6905ab3>>. ISSN 0378-4754.
- 9 DELGADO, R. M. - O método dos elementos finitos na análise dinâmica de barragens incluindo a interacção sólido-líquido [Em linha]. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1984, actual. 2009-06-24. [Consult. 30 Dez. 2010]. Tese de doutoramento. Disponível em WWW:<URL: <http://hdl.handle.net/10216/13197>>.

- 10 DUQUE, J. - «Sebenta de matemática computacional». [2008]. 174 f. Acessível no Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal.
- 11 FIALHO, J. F. L. - **Barragens casca: contribuição para o seu cálculo elástico**. Ed. do autor. Lisboa: J. F. Lobo Fialho, 1966. 208 p. Dissertação apresentada ao concurso para professor catedrático da cadeira de resistência de materiais do Instituto Superior Técnico.
- 12 FIALHO, J. F. L. - Princípios orientadores do projecto de barragens abóbada: um novo método de traçado e dimensionamento. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1955. 38 p. (Memória, nº65).
- 13 FLÜGGE, W. - **Stresses in shells**. New York: Springer-Verlag, 1967. 499 p. 4th printing.
- 14 FONSECA, J. A. S. P. - Análise viscoelasto-plástica de estados planos de tensão e estados planos de deformação [Em linha]. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1986, actual. 2009-06-09. [Consult. 03 Mai. 2011]. Dissertação de mestrado. Disponível em WWW:<URL: <http://hdl.handle.net/10216/12299>>.
- 15 LAPKO, A. - **Mechanics and design of reinforced concrete members in the light of Eurocode 2**. Covilhã: Universidade da Beira Interior, 1996. 295 p. ISBN 972-9209-54-5
- 16 LISLE, R. J.; ROBINSON, J. M. - The Mohr circle for curvature and its application to fold description. Journal of Structural Geology [Artigo em linha]. 17:5 (1995) 739-750. [Consult. 22 Fev. 2011]. Disponível na Internet:<URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V9D-3Y6HS35-36/2/d067eea729db21989db8e3013be6fc9f>>. ISSN 0191-8141.
- 17 LITEWKA, A.; LITEWKA P. - **Mechanika budowli w architekturze historycznej**. Wydanie 1. Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2006. 361 p. ISBN 83-7143-346-8
- 18 MARTIN, J. - The search of shapes for arch dams. In SERAFIM, J. L., ed. lit.; CLOUGH, R. W., ed. lit. - Arch dams: International Workshop on Arch Dams, Coimbra, 5-9 April, 1987. Rotterdam [etc.]: A. A. Balkema, 1990. ISBN 90-6191-865-0. cap. 1, p. 15-59.
- 19 MELIÇO, J. A. G. - Escolha de formas de barragens abóbada [Em linha]. Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2010. [Consult. 18 Jun. 2011]. Dissertação de mestrado. Disponível em WWW:<<http://hdl.handle.net/10362/5114>>.
- 20 MOURACHEV, V.; SIGALOV, E.; BAĪKOV, V. - **Construções de betão armado**. Trad. de H. Fabères dos Santos Leite. Porto: Edições Lopes da Silva, 1980. 768 p.
- 21 NAAMAN A. E. - **Prestressed concrete analysis and design: fundamentals**. 2nd ed. Ann Arbor: Techno Press 3000, 2004. 1072 p. ISBN 0-9674939-1-9

- 22 NEGRÃO, J. H. - **Estática aplicada para engenharia civil e arquitectura**. Ed. do autor. [Coimbra]: J. H. Negrão, 2006. 260 p.
- 23 NP EN 1992-1-1. 2010, Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão. Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. Caparica: IPQ, 259 p.
- 24 OWEN, D. R. J.; HINTON, E. - **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, cop. 1980. 594 p. ISBN 0-906674-05-2
- 25 PEDRO, J. O. - Dimensionamento das barragens abóbada pelo método dos elementos finitos. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1977. 322 p. (Memória; nº 479).
- 26 PORTUGAL. Instituto da Água, I.P. - Barragens de Portugal [Base de dados em linha]. Lisboa: Comissão Nacional Portuguesa de Grandes Barragens, [1992]. [Consult. 7 Ago. 2011]. Barragem de Cabril, desenhos. Disponível em WWW:<URL:http://cnpqb.inag.pt/gr_barragens/gbportugal/Cabrildes.htm>.
- 27 PORTUGAL. Laboratório Nacional de Engenharia Civil - Influência das juntas de contracção no comportamento estático de barragens abóbada. Traduzido do alemão por Edgard Duerholt. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1989. 15 p. (Tradução; 894). Trad. de: Der einfluss der blockfugen auf das tragverhalten von gewölbbestaumauern.
- 28 PORTUGAL. Laboratório Nacional de Engenharia Civil - Quando é que as barragens-abóbada precisam de junta perimetral? [Manuscrito]. 1989. 21 f. Trad. de: Wann benötigen gewölbbestaumauern umfangsfugen. Acessível na Biblioteca do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal. 108409.
- 29 RIBEIRO, A. A. - **Barragens do tipo abóbada parabólica: cálculo dos arcos**. Porto: Imprensa Portuguesa, 1964. 125 p.
- 30 ROCHA, M.; SERAFIM, J. L. - Determinação de tensões de origem térmica de barragens-abóbada por meio de modelos. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1960. 26 p. (Memória; nº 133).
- 31 ROCHA, M.; SERAFIM, J. L.; SILVEIRA, A. F. - Arch dams: design and observation of arch dams in Portugal. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1957. 50 p. (Technical paper; nº95).
- 32 ROCHA, M.; SERAFIM, J. L.; SILVEIRA, A. F.; GUERREIRO, M. Q. - Observação de barragens de betão: resultados obtidos na barragem do Cabril. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1960. 26 p. (Memória; nº 129).
- 33 *Scilab 3.0* [Em linha]. Le Chesnay: The Scilab Consortium, 2011. Disponível em WWW:<http://www.scilab.org/>.
- 34 SERAFIM, J. L. - Análise geral crítica dos métodos de cálculo mais importantes das barragens-abóbada. Lisboa: Bertrand, [1958]. 22 p. (Electricidade; nº5). Tiragem especial.

- 35 SERAFIM, J. L., ed. lit.; CLOUGH, R. W., ed. lit. - **Arch dams: International Workshop on Arch Dams, Coimbra, 5-9 April, 1987**. Rotterdam [etc.]: A. A. Balkema, 1990. 559 p. ISBN 90-6191-865-0
- 36 SILVA, V. D.; JÚLIO, E. N. B. S. - Computation of membrane shapes and analysis of arch dams. Computers & Structures [Artigo em linha]. 64:1-4 (1997) 849-855. [Consult. 15 Out. 2010]. Disponível na Internet:<<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V28-3SMT86H-35/2/8bf7e70cba0d9a1a69a6575c86e42655>>. ISSN 0045-7949.
- 37 STRUIK, D. J. - **Lectures on classical differential geometry**. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1961. ISBN 0-486-65609-8
- 38 TORROJA, E. M. - **Razón y ser de los tipos estructurales**. Edición revisada por José A. Torroja. 3ª ed. rev. [S.l.]: Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo [etc.], [2008]. 318 p. ISBN 978-84-7790-456-4
- 39 YE H, C. H. - Membrane shapes: numerical model. In SERAFIM, J. L., ed. lit.; CLOUGH, R. W., ed. lit. - Arch dams: International Workshop on Arch Dams, Coimbra, 5-9 April, 1987. Rotterdam [etc.]: A. A. Balkema, 1990. ISBN 90-6191-865-0. cap. 2.2, p. 80-82.
- 40 ZHU, B.; RAO, B.; JIA, J.; LI, Y. - Shape optimization of arch dams for static and dynamic loads. Journal of Structural Engineering. New York: American Society of Civil Engineers. ISSN 0733-9445. 118:11 (1992) 2996-3015.
- 41 ZIENKIEWICZ, O. C. - **The finite element method**. 3rd expanded and revised ed. London [etc.]: McGraw-Hill Book Company, 1977. 787 p. ISBN 0-07-084072-5

Anexos

A.1 Notação

Caracteres latinos minúsculos:

a	Parâmetro da equação da espiral logarítmica (co-tangente do ângulo entre a tangente à espiral e o vector raio).
b	Largura da secção transversal do sólido.
c	Constante.
\cos , sen ,	Funções trigonométricas do co-seno, seno e tangente.
\tan	
d	Ordenada correspondente à excentricidade do centro de gravidade de um elemento num determinado nível, em relação ao centro de gravidade do elemento onde se pretende calcular as tensões na consola vertical.
d_c	Ordenada correspondente à excentricidade do centro de gravidade de um elemento ao nível do coroamento, em relação ao centro de gravidade do elemento onde se pretende calcular as tensões na consola vertical.
\det	Determinante de uma matriz.
dR , ds , dz	Distâncias elementares ao longo dos eixos R , s e z na análise de equilíbrio de uma casca de revolução.
ds_x , ds_y	Distâncias, medidas na superfície média, ao longo do eixo x ou y , entre duas secções opostas num elemento de casca.
$d\theta$, $d\phi$	Distâncias angulares elementares entre os dois meridianos ou os dois paralelos, que limitam o elemento da superfície média da casca de revolução em que se estabelecem as equações de equilíbrio.
e	Número de Euler.
e_x , e_y , e_z	Vectores do referencial $OXYZ$.
f	Flecha da parábola.
f_c	Tensão de rotura do betão à compressão.
f_{cd}	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão.
f_{ck}	Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade, referido a provetes cilíndricos.
$f_{ck,cube}$	Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade, referido a provetes cúbicos.
f_{cm}	Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão.
f_{ctk}	Valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples.
f_{ctm}	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples.

h_a	Altura do aparelho.
h_p	Altura do prisma.
j	Índice.
k, n	Número total de elementos utilizado numa série.
k_t	Coefficiente, que depende da espessura equivalente, usado no cálculo da extensão final da retracção por secagem.
l	Desenvolvimento do arco.
\ln	Logaritmo natural (de base e).
m	Massa de um corpo.
m_x, m_y	Momento flector, por unidade de comprimento, devido à distribuição não uniforme de tensões normais σ_x ou σ_y , na secção de abcissa ou ordenada constante.
m_{xy}, m_{yx}	Momento tursor, por unidade de comprimento, devido à distribuição não uniforme de tensões tangenciais τ_{xy} ou τ_{yx} , na secção de abcissa ou ordenada constante.
n_x, n_y	Esforço normal, por unidade de comprimento, ao longo da direcção x ou da direcção y da superfície média da casca, na secção de abcissa ou ordenada constante.
n_{xy}, n_{yx}	Esforço normal, por unidade de comprimento, ao longo da direcção y ou da direcção x da superfície média da casca, na secção de abcissa ou ordenada constante.
n_θ, n_ϕ	Esforço normal, por unidade de comprimento, ao longo do círculo paralelo ou do meridiano da superfície média da casca de revolução.
$n_{\theta\phi}, n_{\phi\theta}$	Esforço tangencial, por unidade de comprimento, ao meridiano ou ao círculo paralelo da superfície média da casca de revolução.
p	Carga distribuída numa linha ou numa área.
q_x, q_y	Esforço transversal, por unidade de comprimento, na direcção perpendicular à superfície média da casca, numa secção de abcissa ou ordenada constante.
r	Recta.
s	Coordenada curvilínea.
t	Espessura da secção transversal do sólido.
t_0	Espessura equivalente da secção transversal.
$t_{0,45.H}$	Espessura a uma altura de $0,15 \cdot H$, contada a partir da base do perfil central da barragem.
t_B	Espessura na base do perfil central da barragem.

t_C	Espessura no coroamento do perfil central da barragem.
t_d	Espessura de cálculo obtida a partir da fórmula dos tubos.
t_f	Espessura na secção transversal do fecho do arco.
u	Perímetro da parte da secção transversal exposta à secagem.
x, y, z	Coordenadas cartesianas locais.
x_0, y_0, z_0	Coordenadas do centro de uma circunferência, em relação ao referencial $oxyz$.
x_t, x_n, x_b	Versores (tangencial, normal e binormal) do triedro móvel, ao longo de uma curva espacial.
x_t, x_N, x_T	Versores (tangencial, normal e perpendicular) do triedro móvel, ao longo de uma curva de superfície.
w	Taxa de variação da espessura do arco a partir do fecho.

Caracteres latinos maiúsculos:

A	Área da secção transversal.
A_c	Área da secção transversal do elemento de betão.
C	Centro de uma circunferência.
C_{apr}	Coefficiente de aproveitamento da barragem.
DH	Distância horizontal ou reduzida.
DI	Distância directa ou oblíqua.
DN	Desnível.
DV	Distância vertical.
E	Módulo de elasticidade do material.
E_c	Módulo de elasticidade do betão.
E_r	Módulo de elasticidade da rocha.
ER	Erro padrão de uma função de aproximação a um conjunto de pontos.
F	Função escalar.
G	Força concentrada.
H	Altura máxima da barragem.
$(H - Z)$	Profundidade em relação ao nível de máxima cheia.
HR	Humidade relativa.
H_z	Ângulo azimutal.
I	Momento de inércia de segunda ordem da área da secção transversal.

J	Matriz Jacobiana.
K	Relação entre a flecha e o vão do arco parabólico.
L	Comprimento do vão (comprimento de corda no caso do arco).
$L_{0,15H}$	Comprimento de corda a uma altura de $0,15 \cdot H$, contada a partir da base da barragem.
M	Momento flector de um elemento tipo barra.
M, P, Z	Coordenadas cartesianas usadas em topografia.
M_{ac}	Momento flector numa secção a um determinado nível da consola vertical da barragem, durante a construção dos elementos acima deste.
N	Esforço axial de um elemento tipo barra.
N_{ac}	Esforço axial acumulado numa secção a um determinado nível da consola vertical da barragem, durante a construção dos elementos acima deste.
N_c	Norte cartográfico.
$N^{(el)}$	Funções de forma de um elemento isoparamétrico.
O	Origem do sistema de coordenadas.
P_j	Ponto genérico de índice j .
Q	Esforço transverso de um elemento tipo barra.
R	Raio da curva.
R_I, R_{II}	Raios de curvatura da superfície nos planos osculadores que contêm as direcções principais de curvatura.
R_{CIR}	Raio da curva circular.
R_e, R_i	Raio de curvatura da curva central de extradorso ou de intradorso.
R_{II}	Raio da curva do ramo tangente ao arco central num arco de vários centros.
R_{PARf}	Raio de curvatura no vértice da parábola.
R_x, R_y	Raio de curvatura da linha que resulta da intersecção da superfície média da casca com uma secção de abcissa ou ordenada constante.
S	Somatório do quadrado dos resíduos das coordenadas da quadrática.
T	Temperatura.
T_0	Varição uniforme de temperatura (temperatura média no centro de gravidade da peça).
T_e	Temperatura na face de extradorso (montante).
T_i	Temperatura na face de intradorso (jusante).
T_w	Temperatura da água na albufeira.
T_{wB}	Temperatura média anual da água na base do reservatório.

T_{wC}	Temperatura média anual da água à superfície do reservatório.
$USP_{0,45H}$, $DSP_{0,45H}$	Projecções de montante ou de jusante do perfil central, a uma altura de $0,45 \cdot H$, contada a partir da base da barragem.
USP_B , DSP_B	Projecções de montante ou de jusante na base do perfil central da barragem.
USP_C , DSP_C	Projecções de montante e de jusante no coroamento do perfil central da barragem.
V	Volume do sólido.
V_{esp}	Volume específico da barragem.
V_z	Ângulo zenital.
X , Y , Z	Coordenadas cartesianas, em relação à origem do referencial global.
X_0 , Y_0 , Z_0	Coordenadas do centro de uma circunferência, em relação ao referencial $OXYZ$.
X_C , Y_C , Z_C	Coordenadas cartesianas com origem no coroamento da linha média do perfil central.
X_{C0} , Y_{C0} , Z_{C0}	Coordenadas do centro de um arco circular em relação ao referencial $O_C X_C Y_C Z_C$.
X_O , Y_O , Z_O	Coordenadas da origem do referencial $OXYZ$.
X_V , Y_V , Z_V	Coordenadas do vértice de uma parábola, em relação ao referencial $OXYZ$.
X_{CS}	Abcissa do perfil S-S, no arco do coroamento, em relação ao referencial $O_C X_C Y_C Z_C$.
W	Peso próprio de um elemento como uma força concentrada.
W_{ac}	Peso próprio acumulado num determinado nível da consola vertical da barragem, durante a construção dos elementos acima deste.

Caracteres gregos minúsculos:

α	Coefficiente de dilatação térmica linear do material.
β	Ângulo de inclinação com a vertical da linha média do perfil.
β_B	Ângulo de inclinação com a vertical da linha média do perfil no arranque, junto à base.
γ	Peso volúmico.
γ_{sc}	Peso volúmico do betão simples.

γ_w	Peso volúmico da água.
ε	Extensão.
ε_{ca}	Extensão de retracção autogénea.
$\varepsilon_{ca}(\infty)$	Extensão final de retracção autogénea.
ε_{cd}	Extensão de retracção por secagem.
$\varepsilon_{cd,0}$	Extensão de retracção por secagem, de referência.
$\varepsilon_{cd}(\infty)$	Extensão final de retracção por secagem.
ε_{cs}	Extensão de retracção total do betão.
$\varepsilon_{cs}(\infty)$	Extensão final de retracção total do betão.
ε_s	Extensão de retracção.
ζ	Parâmetro da equação da espiral logarítmica (ângulo entre a espiral e o vector raio).
θ, ϕ, R	Coordenadas angulares (θ, ϕ) e radial (R) que identificam o meridiano, o círculo paralelo e a distância perpendicular de um ponto à superfície média da casca de revolução.
g	Ângulo entre a normal à superfície, num ponto da curva de superfície, e o eixo binormal da curva, no mesmo ponto.
μ	Posição da resultante do peso próprio dos diversos elementos acima de um determinado nível da consola vertical (excentricidade de N_{ac} em relação ao centro de gravidade da secção num determinado nível da consola vertical).
ν	Coeficiente de Poisson do betão.
ξ, η	Coordenadas locais de um elemento isoparamétrico.
π	Número pi.
ρ, λ	Coordenadas polares: raio e ângulo.
ρ_0	Parâmetro da equação da espiral logarítmica (comprimento do vector raio na origem).
σ	Tensão normal à secção transversal.
σ_e, σ_i	Tensões normais na secção transversal de uma consola da barragem, na fibra da face de extradorso ou de intradorso.
$\sigma_{máx}$	Tensão máxima de compressão no betão da barragem.
σ_x, σ_y	Tensão de normal à secção ao longo da direcção x ou da direcção y , na secção de abcissa ou ordenada constante.

ζ	Ângulo de rotação entre a secção normal, que contém uma curva que intersecta um ponto de uma superfície, e a secção normal principal da superfície, onde a curvatura atinge o seu valor máximo.
τ	Tensão tangencial à secção transversal.
τ_{xy}, τ_{yx}	Tensão tangencial à superfície média, ao longo da direcção y ou da direcção x , contida na secção de abcissa ou ordenada constante.
τ_{xz}, τ_{yz}	Tensão tangencial à secção de abcissa ou ordenada constante, normal à superfície média, ao longo da direcção z .
ν	Ângulo de inclinação das encostas do vale com a vertical.
ϕ_0	Valor da coordenada angular ϕ no topo do meridiano, onde este se inicia.
φ	Ângulo de abertura ao centro da curva.
φ_e, φ_i	Ângulo de abertura ao centro da curva de extradorso ou de intradorso.
χ	Curvatura.
χ_I, χ_{II}	Curvaturas principais.
χ_N, χ_G	Curvaturas normal e geodésica.
ψ	Ângulo entre os raios de curvatura da secção de fecho e da secção em estudo do arco.

Caracteres gregos maiúsculos:

Γ	Coefficiente de forma da barragem.
Δ	Amplitude de variação de uma grandeza.
ΔT	Variação diferencial de temperatura (diferença entre a temperatura da face inferior e superior da peça prismática).
Δx	Comprimento de uma forma geométrica que compõe o perfil.
Σ	Somatório.
Φ	Resíduo de uma expressão analítica.
Ψ	Torção de uma curva espacial.
Ψ_G	Torção geodésica de uma curva de superfície.
Ω	Coefficiente de abertura da barragem.

A.2 Glossário

Terminologia adaptada de [2], [11] e [12] e limitada ao presente trabalho.

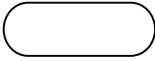
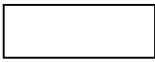
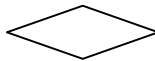


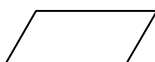
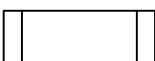
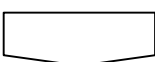
Altura (ou altura máxima)	Distância, medida na vertical, desde o coroamento até ao ponto mais baixo da barragem.
Ângulo de abertura	Amplitude do ângulo ao centro formado pelos raios das extremidades de um arco da barragem, numa determinada cota.
Ângulo de incidência	Amplitude do ângulo formado pela tangente ao eixo dos arcos horizontais da barragem na zona das nascenças e a curva de nível do terreno à mesma cota.
Base	Superfície inferior dos elementos verticais que assentam na fundação.
Biqueira	Zona inferior do paramento de jusante.
Calcanhar (ou pé de montante)	Zona inferior do paramento de montante.
Cilindro de referência	Superfície de referência vertical, cilíndrica, cuja geratriz é uma linha recta vertical e a directriz coincide com o coroamento do extradorso.
Comprimento de corda	Vão entre os encontros de um arco, habitualmente, ao nível do coroamento.
Consola central	O comportamento estrutural de uma barragem abóbada pode ser assemelhado, com as inerentes simplificações, ao comportamento estrutural de uma grelha constituída por um conjunto de elementos verticais (consolas) e elementos horizontais (arcos). A consola central é o elemento vertical localizado na zona central, equidistante dos encontros no caso de um vale simétrico, e cuja base é geralmente a zona mais baixa da barragem.
Consola lateral	Elemento vertical localizado na zona lateral, junto aos encontros. O corpo da barragem pode ser dividido, em termos de elementos verticais, na consola central e nas consolas laterais.
Coroamento	Topo da barragem.
Curvatura horizontal (ou efeito arco)	Propriedade atribuída a uma superfície que exhibe apenas curvatura ao longo da direcção horizontal.
Curvatura simples	Propriedade atribuída a uma superfície curva apenas numa das direcções principais de curvatura.

Curvatura vertical (ou efeito cúpula)	Propriedade atribuída a uma superfície que exhibe apenas curvatura em perfil.
Dupla curvatura	Propriedade atribuída a uma superfície curva ao longo das duas direcções principais de curvatura.
Encontro	Estrutura que suporta os elementos horizontais da barragem, como por exemplo as encostas do vale.
Espessura	Distância entre as faces de montante e jusante, medida perpendicularmente à superfície média.
Extradorso (ou paramento de montante)	Superfície curva de montante do corpo sólido da barragem.
Fecho dos arcos	Linha que une o topo de todos os arcos definidos em planta, desde a base até ao coroamento.
Fundação	Toda a estrutura que suporta a barragem.
Intradorso (ou paramento de jusante)	Superfície curva de jusante do corpo sólido da barragem.
Linha de inserção	Contorno que separa a superfície média do corpo da barragem da sua fundação.
Linha média	Lugar geométrico dos pontos pertencentes simultaneamente à superfície média e ao perfil central ou lateral.
Nascenças	Zona dos arcos horizontais da barragem junto à linha de inserção no respectivo nível.
Nível de máxima cheia	Nível máximo de água na albufeira, ou seja, ao nível do coroamento.
Perfil central (ou secção transversal central ou secção central ou perfil da secção média ou secção mestra)	Secção transversal formada pela intersecção do sólido que constitui a barragem com um plano vertical, cuja geratriz é uma linha recta vertical e a directriz é uma linha com a direcção do raio do cilindro de referência no ponto equidistante dos encontros.
Perfil lateral	Secção transversal formada pela intersecção do sólido que constitui a barragem com um plano vertical, cuja geratriz é uma linha recta vertical e a directriz é uma linha com a direcção de um dos raios do cilindro de referência.
Plano dos centros	Plano vertical que contém os centros dos raios de curvatura das superfícies de montante e jusante e do cilindro de referência.
Profundidade de escavação	Profundidade medida desde a superfície do solo até à rocha firme onde assenta a fundação.

Projeção de jusante	Distância horizontal do intradorso ao cilindro de referência, na linha perpendicular à superfície deste. As projecções de montante e jusante são distâncias horizontais que servem para localizar o extradorso e o intradorso relativamente ao cilindro de referência.
Projeção de montante	Distância horizontal do extradorso ao cilindro de referência, na linha perpendicular à superfície deste.
Raio do cilindro de referência	Raio de curvatura da linha curva resultante da intersecção da superfície do cilindro de referência com um plano horizontal num determinado nível. Ao nível do coroamento, o raio do cilindro de referência é coincidente com o raio do extradorso em todos os pontos.
Superfície média (ou folheto médio)	Lugar geométrico dos pontos a igual distância dos paramentos de montante e jusante, medida segundo a normal à própria superfície média.
Talvegue	Linha que une os pontos mais baixos de um vale, por onde correm as águas, ou seja, linha de intersecção das duas encostas.

A.3 Fluxogramas da rotina de cálculo PCURV

A legenda utilizada nos fluxogramas é descrita seguidamente.

	Início ou fim de um fluxograma.
	Processamento de operações.
	Decisão dependente do valor lógico.
	Entrada ou saída de dados armazenados.
	Introdução de dados a partir do teclado.
	Entrada de dados durante a compilação do programa.
	Transferência para uma subrotina.
	Conector de folhas.

As variáveis utilizadas nos fluxogramas têm o significado descrito seguidamente.

abs()	Módulo de um valor.
ACOE, BCOEF, CCOEF	Coefficientes da equação de uma parábola, do termo de maior para o de menor grau.
atan()	Função inversa da tangente.
ATETA	Ângulo entre a direcção principal de curvatura CURV1 e a direcção do plano que contém a curva com curvatura normal CURVX.
BYORG	Ordenada na origem de uma recta.
CARTD(NDIME,NNODE)	Derivadas cartesianas das funções de forma.
CENTR	Coordenadas do centro da circunferência.
CMEAN	Média das curvaturas normais em duas direcções ortogonais num ponto.
COORD(NPOIN,NDIME)	Coordenadas cartesianas dos pontos.
CPCOD(NDIME,4)	Coordenadas dos pontos que definem os vectores de curvatura principal no ponto central de um elemento, no referencial cartesiano cujos eixos têm a direcção das curvaturas principais, sendo o outro eixo perpendicular à superfície,
CPGCO(NDIME,4)	Coordenadas dos pontos que definem os vectores de curvatura principal no ponto central de um elemento, no referencial cartesiano global.
CURV1, CURV2	Curvaturas principais.
CURVA(NELEM,3)	Matriz das curvaturas normais e da torção geodésica das curvas, ortogonais no ponto central dos elementos, contidas nos planos xoz e $yoze$, definidos pelo referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no mesmo ponto.
CURVP(NELEM,3)	Matriz das curvaturas principais (CURV1 E CURV2) e do ângulo ATETA no ponto central de cada elemento.
CURVX, CURVY	Curvaturas normais de curvas, ortogonais no ponto central do elemento, contidas nos planos xoz e $yoze$, definidos pelo referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no mesmo ponto.
CVMAX	Curvatura principal máxima entre todos os pontos centrais dos elementos.
DD1OR(NPONT-1), DD2OR(NPONT-2)	Diferenças divididas de primeira e segunda ordem, no polinómio interpolador de Newton.
DELTX, DELTY	Espaçamento entre os pontos da malha, ao longo da direcção horizontal e vertical.
DELXL, DELXR	Distâncias horizontais entre o ponto central e o ponto à esquerda ou à direita, no plano em que se pretende inscrever uma curva.
DELYL, DELYR	Distâncias verticais entre o ponto central e o ponto à esquerda ou à direita, no plano em que se pretende inscrever uma curva.
DERIV(NDIME,NNODE)	Derivadas locais das funções de forma, em relação às coordenadas isoparamétricas.

det()	Determinante de uma matriz.
DJACB	Determinante da matriz Jacobiana (Jacobiano).
DTVEC(NELEM,2)	Matriz das curvaturas principais relativizadas em relação à curvatura principal máxima de todos os pontos centrais dos elementos.
DWCOD(NELEM,12)	Matriz que contém as matrizes CPGCO de todos os elementos.
DXFOU	Ficheiro de saída de dados em formato dxf.
ECOOD	Matriz multidimensional das coordenadas cartesianas globais de conjuntos de três pontos, que definem planos onde podem ser inscritas curvas.
EGCOD(NDIME,NNODE)	Coordenadas dos nós de um elemento, em relação ao referencial cartesiano global, com origem no ponto central do elemento.
ELCOD(NDIME,NNODE)	Coordenadas dos nós de um elemento, em relação ao referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no ponto central do elemento.
EXISP, ETASP	Coordenadas isoparamétricas locais ξ e η .
FSCAL	Factor de escala a aplicar aos valores das curvaturas principais.
GCURV	Segunda derivada de uma função no ponto intermédio da curva, contida no plano XOZ ou YOZ , definido pelo referencial cartesiano global, com origem no ponto central do elemento.
GROTA	Primeira derivada de uma função no ponto intermédio da curva, contida no plano XOZ ou YOZ , definido pelo referencial cartesiano global, com origem no ponto central do elemento.
GUCSO(NDIME)	Coordenadas da origem do referencial cartesiano global, a estabelecer no ponto central do elemento.
GUCSX(NDIME), GUCSY(NDIME)	Coordenadas dos vectores que definem os eixos X e Y do referencial cartesiano global, a estabelecer no ponto central do elemento.
HDIFF	Metade da diferença entre as curvaturas normais em duas direcções ortogonais num ponto.
IDIME, JDIME	Índice da linha e da coluna de uma matriz.
IMAGE, DIMAG, DDIMA	Valor da função (imagem) interpoladora, da sua primeira derivada e da sua segunda derivada, para um determinado objecto.
INCOO(NPOIN,NDIME+1)	Matriz que resulta da leitura do ficheiro TXTIN.
INDIC(NPOIN)	Vector dos índices dos pontos.
IPCOD(NNODE+1,NDIME)	Coordenadas isoparamétricas do nós de um elemento.
IPOIN, IELEM, INODE, IPONT, IIPND	Grandezas de ordem i .
ITROW, JTCOL	Índice da linha e da coluna de uma matriz, quando utilizados na mesma subrotina onde já estão incluídos IDIME e JDIME.
LCURV(NDIME,NNODE+1)	Segunda derivada ($\partial^2/\partial x^2$ ou $\partial^2/\partial y^2$) nos nós do elemento, da função $z=z(x,y)$, no referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no ponto central do elemento.

LNODS(NELEM,NNODE)	Matriz das ligações nodais dos elementos.
LROTA(NDIME,NNODE+1)	Primeira derivada ($\partial/\partial x$ ou $\partial/\partial y$) nos nós do elemento, da função $z=z(x,y)$, no referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no ponto central do elemento.
LRUCS(NELEM,3*NDIME)	Matriz que contém as matrizes de transformação de coordenadas ROTA2, de cada elemento.
LTORC(NDIME,NNODE+1)	Segunda derivada ($\partial^2/(\partial x \partial y)$ ou $\partial^2/(\partial y \partial x)$) nos nós do elemento, da função $z=z(x,y)$, no referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no ponto central do elemento.
LUCSO(NDIME)	Coordenadas da origem do referencial cartesiano local (com um eixo perpendicular à superfície), a estabelecer no ponto central do elemento.
LUCSX(NDIME), LUCSY(NDIME)	Coordenadas dos vectores que definem os eixos x e y do referencial cartesiano local (com um eixo perpendicular à superfície), a estabelecer no ponto central do elemento.
MATRIZ(:, :)	Toda a linha e toda a coluna da MATRIZ.
MATRIZ(a:b,c:d)	Submatriz constituída pelas linhas, de a até b , e pelas colunas, de c até d , da MATRIZ.
MATRIZ'	Transposta da MATRIZ.
max()	Valor máximo dos elementos de uma matriz.
min()	Valor mínimo dos elementos de uma matriz.
MODUL	Norma de um vector.
MPOSI(NROWS,NCOLS)	Matriz da posição dos índices dos pontos.
MSLOP	Inclinação de uma recta.
NDIME	Número de dimensões espaciais do problema.
NELEM	Número total de elementos da superfície.
NNODE	Número de nós por elemento.
NPOIN	Número total de pontos da malha ortogonal.
NPONT	Número de pontos usado numa interpolação.
NROWS, NCOLS	Número de linhas e colunas da malha ortogonal de pontos.
OBJEC	Valor do objecto do qual se pretende conhecer a imagem, dada pela função interpoladora.
PARAB	Valor da parábola interpoladora no ponto intermédio.
RADIC	Raio da circunferência.
ROTA1, TRANS1	Matrizes de transformação de coordenadas (rotação e translação) para estabelecimento do referencial cartesiano global, no ponto central do elemento.
ROTA2, TRANS2	Matrizes de transformação de coordenadas (rotação e translação) para estabelecimento do referencial cartesiano local, com um eixo perpendicular à superfície no ponto central do elemento.

ROTA3, TRAN3	Matrizes de transformação de coordenadas (rotação e translação) para estabelecimento do referencial cartesiano, cujos eixos têm a direcção das curvaturas principais, sendo o outro eixo perpendicular à superfície, no ponto central do elemento.
ROTAC(NDIME,NDIME)	Matriz de transformação de coordenadas, ou matriz dos cossenos directores.
SHAPE(NNODE)	Funções de forma.
TORXY	Torção geodésica das curvas que apresentam curvatura normal CURVX e CURVY.
TRANS(NDIME)	Matriz de uma translação genérica da origem do referencial.
TXTIN, TXTOU	Ficheiros de entrada e saída de dados como texto.
UCSO3(NDIME)	Coordenadas da origem do referencial cartesiano cujos eixos têm a direcção das curvaturas principais, sendo o outro eixo perpendicular à superfície, no ponto central do elemento.
UCSOR(NDIME)	Coordenadas da origem de um referencial cartesiano genérico.
UCSX3(NDIME), UCSY3(NDIME)	Coordenadas dos vectores que definem o referencial cartesiano cujos eixos têm a direcção das curvaturas principais, sendo o outro eixo perpendicular à superfície, no ponto central do elemento.
UCSXD(NDIME), UCSYD(NDIME)	Coordenadas dos vectores que definem os eixos X e Y de um referencial cartesiano genérico.
VECTA, VECTR, VECAI	Vectores.
XJACI(NDIME,NDIME)	Matriz inversa da matriz Jacobiana.
XJACM(NDIME,NDIME)	Matriz Jacobiana da transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas isoparamétricas locais.
XMMIN, XMMAX	Valores extremos das abcissas dos pontos da malha ortogonal.
YMMIN, YMMAX	Valores extremos das ordenadas dos pontos da malha ortogonal.

De seguida apresentam-se os fluxogramas da rotina de cálculo numérico PCURV e das restantes subrotinas.

