



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharias

Análise de secções de betão armado com base no modelo de treliça com amolecimento

Estudo de vigas sujeitas à torção combinada com flexão

Bernardo Miguel Dias Cerquido

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo
Coorientador: Prof. Doutor Bernardo Horowitz

Covilhã, maio de 2017

Agradecimentos

A realização desta dissertação não teria sido possível sem a contribuição de diversas pessoas às quais quero deixar algumas palavras de agradecimento.

Em primeiro lugar, agradeço ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador científico desta dissertação, pela constante disponibilidade, apoio, amizade e conhecimento transmitido, não só ao longo da realização deste trabalho como também ao longo do meu percurso académico.

Agradeço ao Professor Doutor Bernardo Horowitz, coorientador científico desta dissertação, pela disponibilidade, comentários e observações que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Ao Mestre Jordlly Reydon de Barros Silva, o meu muito obrigado pelo interesse e apoio sempre demonstrado, assim como por todas as explicações, esclarecimentos e sugestões dadas com vista a complementar a dissertação, incluindo para a implementação dos códigos em MATLAB.

Agradeço à minha família mais próxima, pais, irmão e avó, pelo apoio incondicional, encorajamento e por me terem fornecido todas as condições necessárias que me possibilitaram concluir esta etapa. À Inês, por todo o carinho, compreensão e apoio ao longo deste período, o meu especial agradecimento.

Por último, agradeço à Ana Lyrio pela frequente troca de ideias e discussões sobre a temática, que contribuíram para cimentar os conhecimentos que fomos adquirindo no desenvolvimento das nossas dissertações.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento de vigas de betão armado solicitadas à torção combinada com flexão, com base no modelo de treliça com amolecimento. Para tal, é utilizado o modelo *Combined Action Softened Truss Model* (CA-STM) para prever o comportamento global de vigas ensaiadas à combinação de esforços especificada anteriormente e cujos resultados experimentais foram recolhidos na bibliografia consultada.

Para isso, tendo em conta que o CA-STM é baseado no modelo *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), numa primeira fase é estudado o RA-STM, onde são introduzidas novas relações constitutivas dos materiais, baseadas em estudos mais recentes, com o intuito de melhorar a previsão do modelo e estender as suas previsões ao comportamento pós-pico de painéis ao corte. As alterações introduzidas são validadas com base nos resultados experimentais de 19 painéis de betão armado, ensaiados a um estado de tensão de corte puro e cujos resultados foram recolhidos na bibliografia. Posteriormente, as alterações introduzidas no RA-STM são incorporadas também no CA-STM, sendo validadas através da comparação das previsões deste modelo com os resultados experimentais de 72 vigas de betão armado, recolhidos na literatura, ensaiadas à torção pura e à torção combinada com flexão.

Como procedimento de solução para ambos os modelos anteriormente referidos, em substituição dos procedimentos originais, onde a solução é obtida por tentativa e erro, é adotado um procedimento eficiente proposto recentemente e que se mostrou apropriado para os objetivos deste trabalho.

Palavras-chave

Betão armado, modelo de treliça com amolecimento, painéis, vigas, corte, torção, flexão.

Abstract

The behavior of reinforced concrete beams under torsion and bending is studied in this thesis, by using the softened truss model. For this, the *Combined Action Softened Truss Model* (CA-STM) is used to predict the global behavior of reinforced concrete beams under the referred internal forces combination, for which experimental data were found in the collected literature.

Since CA-STM is based on the *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), the first step is to study the RA-STM implemented with new constitutive laws from recent studies. The objective is to improve the model's predictions and also to extend it for the post-peak stage of reinforced concrete panels under shear. The proposed modifications to the model are validated with the experimental data of 19 reinforced concrete panels subjected to a pure shear loading, which were found in the literature. After this, the changes made in RA-STM are also incorporated in CA-STM and validated comparing the model's prediction with experimental data of 72 reinforced concrete beams, reported in the literature, under pure torsion and also under torsion combined with bending.

For both models, instead of using the original calculation procedures where the solution is obtained by a trial and error calculation, an efficient procedure recently proposed is used. This procedure has shown to be suitable for the objectives of this study.

Keywords

Reinforced concrete, softened truss model, panels, beams, shear, torsion, bending.

Índice

CAPÍTULO 1 - Introdução	1
1.1 Introdução ao estudo da torção	1
1.1.1 Notas históricas.....	1
1.1.2 Tipos de torção	2
1.1.3 Comportamento de uma viga de betão armado à torção pura	4
1.2 Modelos analíticos para análise de secções de betão armado	6
1.2.1 Introdução	6
1.2.2 Esforços de membrana	7
1.2.3 Torção pura	8
1.2.4 Torção combinada com outros esforços.....	9
1.3 Justificação do tema do trabalho e objetivos propostos.....	10
1.4 Organização do documento	11
CAPÍTULO 2 - RA-STM	13
2.1 Introdução	13
2.2 Descrição do Modelo	13
2.2.1 Equilíbrio das tensões	14
2.2.2 Compatibilidade das deformações	16
2.2.3 Relações constitutivas dos materiais	17
2.2.3.1 Betão à compressão	17
2.2.3.2 Armaduras longitudinais e transversais à tração	20
2.3 Carregamento proporcional	24
2.4 Modelo de treliça elástico linear (MCTM).....	26
2.5 Procedimento de solução	27
2.5.1 Equações adicionais.....	27
2.5.2 Equação não linear resolvida na estimativa inicial (MCTM)	27
2.5.3 Sistema de equações não lineares (RA-STM)	28
2.6 Algoritmo de solução	28
2.7 Comparação com resultados experimentais.....	31
2.7.1 Descrição dos painéis ensaiados	31
2.7.2 Previsões do procedimento proposto	33
2.7.3 Comparação do comportamento dos painéis.....	36
2.7.4 Análise comparativa entre painéis	39
2.8 Conclusões preliminares	41
CAPÍTULO 3 - CA-STM	43
3.1 Introdução	43
3.2 Descrição do modelo	43

3.2.1	Transformação da secção real para a secção idealizada no CA-STM.....	45
3.2.1.1	Geometria da secção	45
3.2.1.2	Espessura do fluxo de tensões tangenciais	46
3.2.1.3	Cálculo das áreas de aço equivalente para cada painel	47
3.2.1.4	Transformação das solicitações reais em esforços de membrana.....	49
3.2.1.4.1	Esforços tangenciais	50
3.2.1.4.2	Esforços normais	51
3.2.2	Equações de equilíbrio e de compatibilidade dos painéis	52
3.2.3	Relações constitutivas dos materiais	53
3.2.3.1	Betão à compressão	53
3.2.3.2	Betão à tração	54
3.2.3.3	Armaduras longitudinais e transversais à tração	55
3.2.4	Compatibilidade entre as extensões dos painéis	56
3.2.4.1	Curvaturas longitudinais e transversais	56
3.2.4.2	Compatibilidade das extensões longitudinais dos painéis	57
3.2.4.3	Curvatura das escoras de betão	58
3.2.4.4	Cálculo da rotação axial com base na distorção.....	59
3.3	Procedimento de solução.....	59
3.3.1	Introdução.....	59
3.3.2	Equações adicionais	59
3.3.2.1	Ângulo variável em função das extensões	59
3.3.2.2	Parâmetros da secção real e da secção idealizada	60
3.3.3	Variáveis primárias selecionadas	60
3.3.4	Função resíduo que representa o sistema não linear	62
3.3.5	Estimativa inicial com base no modelo linear	63
3.3.6	Algoritmo de solução	64
3.4	Comparação com resultados experimentais.....	67
3.4.1	Descrição das vigas de referência utilizadas	67
3.4.2	Previsões do procedimento proposto	70
3.4.3	Curvas de interação torção - momento fletor	73
3.4.4	Análise comparativa entre o CA-STM proposto e a versão original.....	75
3.4.5	Análise comparativa do CA-STM com vigas solicitadas à torção pura.....	77
3.4.6	Análise comparativa do CA-STM com vigas solicitadas à torção e flexão	78
3.5	Conclusões preliminares	80
CAPÍTULO 4 - Conclusões e recomendações para estudos futuros.....		83
4.1	Introdução.....	83
4.2	Conclusões	83
4.3	Recomendações para estudos futuros.....	86

Bibliografia	87
Anexos.....	93
Anexo I. Código em MATLAB do RA-STM	94
Anexo II. Previsão teórica do RA-STM para cada painel.....	103
Anexo III. Código em MATLAB do CA-STM.....	122
Anexo IV. Curvas $T_{\chi}-\theta$	138
Anexo V. Curvas $M_z-\theta$	145
Anexo VI. Curvas $M_z-\Phi_{L,24}$	147
Anexo VII. Limitações e problemas detetados	148

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Rotura frágil por torção de uma viga de um edifício [21].	2
Figura 1.2 - Torção de compatibilidade (a) e torção de equilíbrio (b) [6].	3
Figura 1.3 - Torção de circulatoria (a) e torção com empenamento (b) [6].	4
Figura 1.4 - Curva T- θ típica de uma viga de betão armado à torção pura [36].	5
Figura 1.5 - Simplificação de estruturas de betão armado em elementos de placa [26].	6
Figura 2.1 - Elemento bidimensional de betão armado submetido a tensões de membrana (adaptado de Silva em 2016 [43]).	14
Figura 2.2 - Curvas σ_D - ε_D (adaptado de Hsu e Mo em 2010 [26]).	18
Figura 2.3 - Coeficiente de amolecimento do betão à compressão (adaptado de Hsu e Mo em 2010 [26]).	19
Figura 2.4 - Relação constitutiva do aço (adaptado de Jeng e Hsu em 2009 [31]).	22
Figura 2.5 - Influência da taxa de armadura no parâmetro m .	23
Figura 2.6 - Efeito de ferrolho ou ação de dupla flexão [13].	23
Figura 2.7 - Relação entre as solicitações e a tensão principal de tração no elemento (adaptado de Silva em 2016 [43]).	25
Figura 2.8 - Fluxograma do algoritmo de solução.	30
Figura 2.9 - <i>Universal Panel Tester</i> [26].	31
Figura 2.10 - Representação esquemática de um painel [49].	32
Figura 2.11 - Comparação das curvas σ_D - ε_D do painel VA1 [49].	34
Figura 2.12 - Comparação das curvas f_L - ε_L do painel A3 [39].	34
Figura 2.13 - Comparação das curvas $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ε_R do painel VA3 [49].	35
Figura 2.14 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} do painel B2 [39].	36
Figura 2.15 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} da série de painéis VA [49].	37
Figura 2.16 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} da série de painéis VB [49].	38
Figura 2.17 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} da série de painéis A [39][28].	38
Figura 2.18 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} da série de painéis B [39].	39
Figura 3.1 - Estrutura idealizada pelo CA-STM [43].	44
Figura 3.2 - Transformação da secção real [43].	45
Figura 3.3 - Possíveis geometrias do diagrama de extensões nas escoras (adaptado de Silva em 2016 [43]).	46
Figura 3.4 - Distribuição das armaduras longitudinais nos quatro painéis [43].	48
Figura 3.5 - Fluxos de tensões tangenciais resultantes dos esforços tangenciais [43].	50
Figura 3.6 - Momento resultante segundo Z devido à solicitações nos painéis 2 e 4 [43].	51
Figura 3.7 - Relação constitutiva do betão à tração (adaptado de Jeng e Hsu [31]).	54
Figura 3.8 - Curvaturas longitudinais e transversais [43].	56
Figura 3.9 - Compatibilidade entre as extensões longitudinais dos painéis [43].	57

Figura 3.10 - Fluxograma do algoritmo proposto.	66
Figura 3.11 - Secções das vigas recolhidas.	67
Figura 3.12 - Comparação das curvas $T_X-\theta$ da viga 2-1 [34].	70
Figura 3.13 - Comparação das curvas $T_X-\theta$ da viga 2-3 [34].	71
Figura 3.14 - Comparação das curvas $M_Z-\theta$ da viga 2-2 [34].	72
Figura 3.15 - Comparação das curvas $M_Z-\Phi_{L,24}$ da viga TB2 [33].	73
Figura 3.16 - Curva de interação da série 1 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].	74
Figura 3.17 - Curva de interação da série 2 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].	74
Figura 3.18 - Curva de interação da série 3 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].	74
Figura 3.19 - Curva de interação da série TB de Lampert e Thürlimann em 1968 [32] e em 1969 [33].	74

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Caracterização dos painéis recolhidos.....	32
Tabela 2.2 - Análise comparativa do RA-STM com os dados experimentais dos painéis analisados.....	40
Tabela 3.1 - Propriedades geométricas e mecânicas das vigas recolhidas.....	68
Tabela 3.1 (Cont.) - Propriedades geométricas e mecânicas das vigas recolhidas.	69
Tabela 3.2 - Análise comparativa com os resultados obtidos por Greene em 2006 [15].	76
Tabela 3.3 - Análise de vigas de secção cheia.	77
Tabela 3.4 - Análise de vigas de secção vazada.	78
Tabela 3.5 - Análise de vigas de secção cheia.	79
Tabela 3.6 - Análise de vigas de secção vazada.	80

Lista de Acrónimos

ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CA-STM	<i>Combined Action Softened Truss Model</i>
EC2	<i>Eurocódigo 2</i>
ELS	<i>Estados Limites de Serviço</i>
ELU	<i>Estados Limites Últimos</i>
FA-STM	<i>Fixed-Angle Softened Truss Model</i>
GSVATM	<i>Generalized Softened Variable Angle Truss-Model</i>
MCTM	<i>Mohr Compatibility Truss Model</i>
RA-STM	<i>Rotating-Angle Softened Truss Model</i>
SMMT	<i>Softened Membrane Model for Torsion</i>
STM	<i>Softened Truss Model</i>
TS-STM	<i>Tension Stiffened Softened Truss Model</i>
UPT	<i>Universal Panel Tester</i>

Simbologia

Alfabeto Latino

A'	Primeiro coeficiente para o cálculo de σ_1
A_{cp}	Área limitada pelo perímetro externo da secção
A_g	Área bruta de betão
$A_{L,i}$	Área da armadura longitudinal no painel i
$A_{LPRE,i}$	Área armadura longitudinal preliminar no painel i
A_{LT}	Área de armadura longitudinal total
A_T	Área de armadura transversal
A_0	Área delimitada pela linha média do fluxo de corte
B'	Segundo coeficiente para o cálculo de σ_1
C'	Terceiro coeficiente para o cálculo de σ_1
E_c	Módulo de elasticidade do betão
E_s	Módulo de elasticidade do aço
F_{CA-STM}	Função resíduo do CA-STM
F_{MCTM}	Função resíduo do MCTM
F_{RA-STM}	Função resíduo do RA-STM
$(GC)^I$	Rigidez de torção em Estado I (não fissurado)
$(GC)^{II}$	Rigidez de torção em Estado II (fissurado)
M_Y	Momento fletor atuante segundo o eixo Y
M_Z	Momento fletor atuante segundo o eixo Z
N_X	Esforço axial atuante segundo o eixo X
T, T_X	Momento torsor atuante segundo o eixo X
T_{cr}	Momento torsor de fissuração
$T_{u,exp}$	Momento torsor último (máximo) experimental
$T_{u,th}$	Momento torsor último (máximo) teórico
V_Y	Esforço transversal atuante segundo o eixo Y
V_Z	Esforço transversal atuante segundo o eixo Z
b	Dimensão da base da secção
b_0	Largura dos painéis 2 e 4
cv	Coefficiente de variação
f_c', f_{cm}	Valor médio da resistência à compressão do betão
f_{cr}	Tensão de fissuração do betão
$f_L, f_{L,i}$	Tensão na armadura longitudinal do painel i
f_{Ly}	Tensão de cedência da armadura longitudinal
f_s	Tensão no aço das armaduras

f_{Sy}	Tensão de cedência do aço das armaduras
$f_T, f_{T,i}$	Tensão na armadura transversal do painel i
f_{Ty}	Tensão de cedência da armadura transversal
h	Dimensão da altura da secção
h_0	Largura dos painéis 1 e 3
i	Índice identificador do painel (1, 2, 3 e 4)
k	Índice identificador da iteração
$k_{1D,i}$	Relação entre a tensão média e a tensão de pico na escora do painel i
$k_{1R,i}$	Relação entre a tensão média e a tensão de pico no tirante do painel i
m	Parâmetro que define a curvatura da curva $f_s-\varepsilon_s$
m_L	Coefficiente de proporcionalidade longitudinal
m_T	Coefficiente de proporcionalidade transversal
m_{LT}	Coefficiente de proporcionalidade de corte
$n_{máx}$	Número máximo de pontos da análise
p_{cp}	Perímetro externo da secção
q_i	Fluxo total de tensões tangenciais
$q_{Vy,i}$	Fluxo de tensões tangenciais no painel i resultante do esforço transversal segundo Y
$q_{Vz,i}$	Fluxo de tensões tangenciais no painel i resultante do esforço transversal segundo Z
$q_{T,i}$	Fluxo de tensões tangenciais no painel i resultante do momento torsor
s	Desvio padrão / Espaçamento longitudinal da armadura transversal
$t_{D,i}$	Espessura do fluxo de tensões tangenciais no painel i
t_i	Espessura real do painel i
$w_{0,i}$	Largura do painel i
\bar{x}	Média
z_i	Parâmetro adimensional da curvatura no painel i
z_i^0	Estimativa linear inicial para o parâmetro adimensional da curvatura no painel i

Alfabeto Grego

$\Delta\varepsilon_D, \Delta\varepsilon_{DS,1}$	Incremento entre as iterações
$\Phi_{L,13}$	Curvatura longitudinal dos painéis 1 e 3
$\Phi_{L,24}$	Curvatura longitudinal dos painéis 2 e 4
$\Phi_{T,13}$	Curvatura transversal dos painéis 1 e 3
$\Phi_{T,24}$	Curvatura transversal dos painéis 2 e 4
α_1	Ângulo fixo

a_2	Complemento do ângulo fixo
$a_D, a_{D,i}$	Complemento do ângulo variável, inclinação das escoras de betão do painel i
a_R	Ângulo variável
$\gamma_{LT}, \gamma_{LT,i}$	Distorção no painel i
$\gamma_{u,exp}$	Distorção última (máxima) experimental
$\gamma_{u,th}$	Distorção última (máxima) teórica
ε	Extensão
$\varepsilon_{A,i}$	Extensão de compressão na face interna do painel i
ε_{CL}	Extensão longitudinal no eixo da secção idealizada
ε_{cr}	Extensão de fissuração do betão
ε_{cu1}	Extensão última do betão à compressão (análise não linear)
$\varepsilon_D, \varepsilon_{D,i}$	Extensão principal de compressão no painel i
$\varepsilon_{DS,1}$	Extensão principal de compressão inicial na face externa do painel 1
$\varepsilon_{DS,i}^0$	Estimativa linear inicial da extensão principal de compressão na face externa do painel i
$\varepsilon_{DS,i}$	Extensão principal de compressão na face externa do painel i
ε_{DSMAX}	Extensão principal de compressão máxima admitida na face externa
$\varepsilon_{L,i}^0$	Estimativa linear inicial da extensão da armadura longitudinal do painel i
$\varepsilon_L, \varepsilon_{L,i}$	Extensão da armadura longitudinal do painel i
ε_0	Extensão correspondente ao pico de tensão no betão
$\varepsilon_{R,i}^0$	Estimativa linear inicial da extensão principal de tração no painel i
$\varepsilon_R, \varepsilon_{R,i}$	Extensão principal de tração no painel i
ε_S	Extensão no aço das armaduras
ε_{Sy}	Extensão de cedência do aço das armaduras
$\varepsilon_T, \varepsilon_{T,i}$	Extensão da armadura transversal no painel i
μ	Fator redutor de escala das tensões aplicadas no painel
ζ	Coeficiente de amolecimento
η	Relação ente as forças resistentes nas armaduras na direção longitudinal e transversal
θ	Rotação axial
ρ	Taxa de armadura
$\rho_L, \rho_{L,i}$	Taxa de armadura longitudinal no painel i
$\rho_T, \rho_{T,i}$	Taxa de armadura transversal no painel i
σ	Tensão
σ_1	Tensão principal de tração no elemento de betão armado
σ_2	Tensão principal de compressão no elemento de betão armado
$\sigma_D, \sigma_{D,i}$	Tensão principal de compressão no betão no painel i
$\sigma_L, \sigma_{L,i}$	Tensão longitudinal aplicada no painel i
σ_L^c	Componente da tensão longitudinal aplicada no betão

$\sigma_R, \sigma_{R,i}$	Tensão principal de tração no betão no painel i
$\sigma_T, \sigma_{T,i}$	Tensão transversal aplicada no painel i
σ_T^c	Componente da tensão transversal aplicada no betão
$\tau_{LT}, \tau_{LT,i}$	Tensão tangencial aplicada no painel i
τ_{LT}^c	Componente da tensão tangencial aplicada no betão
τ_{RD}	Tensão tangencial no betão
$\tau_{u,exp}$	Tensão tangencial última (máxima) experimental
$\tau_{u,th}$	Tensão tangencial última (máxima) teórica
ψ_i	Curvatura da escora do painel i

CAPÍTULO 1 - Introdução

1.1 Introdução ao estudo da torção

1.1.1 Notas históricas

No início do século XX, o betão armado começou a assumir um papel relevante na construção de estruturas. No entanto, até à década de 60, a torção era em geral desprezada para efeitos de dimensionamento. O facto de a torção não ser considerada um esforço com papel primário para o dimensionamento das estruturas na época era suportado pelo facto de que os códigos e regulamentos nessa altura não incorporassem, em geral, disposições específicas para o dimensionamento à torção, sendo que em muitas vezes nem era feita qualquer referência a este esforço.

A partir da década de 60, como consequência do desenvolvimento dos processos gerais de dimensionamento, os elevados fatores de segurança utilizados na época foram sendo reduzidos. Em resultado disso, começou a surgir a consciência de que a reserva de segurança que permitia aos projetistas considerar a torção como um efeito secundário também diminuiu. Esse decréscimo dos fatores de segurança deveu-se à adoção de um novo método de dimensionamento baseado na Teoria dos Estados Limites Últimos (ELU), que veio substituir o método baseado nas tensões admissíveis. Em Portugal, este novo método de dimensionamento entrou em vigor com o Regulamento de Estruturas em Betão Armado em 1966.

As hipóteses simplificativas adotadas em projeto antes da imposição, por parte dos novos documentos normativos, da consideração direta dos efeitos torsionais, levaram, em alguns casos, ao registo de situações associadas com insuficiente resistência à torção. De entre essas situações, realça-se o aparecimento de fissuras e de deformações excessivas em serviço, bem como casos de rotura, originadas pela insuficiente resistência à torção de elementos estruturais. Apesar dos poucos casos documentados, a Fig. 1.1 ilustra o caso de uma rotura de uma viga inserida na estrutura de um parque de estacionamento na Flórida (USA) em 1964 [21], onde é visível nas faces da viga o desenvolvimento de uma fenda helicoidal, típica de uma rotura de torção motivada pela falta de armadura de torção.

Dado o interesse mundial em redor da problemática da torção, em 1958 foi criada a Comissão 438 do *American Concrete Institute* (ACI 438) com o objetivo de estudar a temática e promover a investigação nessa área. Em resultado dos esforços da referida Comissão, em 1971 surge o primeiro documento normativo (ACI 318-71 [1]) onde, pela primeira vez, estava incluído o procedimento para o dimensionamento à torção.



Figura 1.1 - Rotura frágil por torção de uma viga de um edifício [21].

Apesar da extensa investigação realizada, atualmente o dimensionamento e verificação de elementos à torção ainda continua, em parte, a ser baseado em procedimentos semi-empíricos ou mesmo empíricos. Além disso, ainda existem alguns domínios no dimensionamento de elementos à torção onde existe pouco conhecimento acerca do comportamento estrutural, principalmente para baixos níveis de carregamento. O dimensionamento de elementos estruturais a esforços de torção combinados com outros esforços também representa uma situação que requer uma especial atenção, pois os documentos normativos remetem em geral para uma análise em separado, somando-se e sobrepondo-se no final as armaduras resultantes e realizando-se no fim uma eventual verificação adicional de interação entre alguns dos esforços. Tudo isto é ainda agravado com o surgimento de novas técnicas construtivas e pela utilização de novos materiais estruturais que podem dificultar a análise e o dimensionamento rigoroso para os efeitos torsionais.

Tendo em conta as dificuldades anteriormente referidas, pode concluir-se que o estudo da torção, quer seja como esforço primário ou combinado com outros esforços, continua a ser um tema atual. Como tal, é fundamental o desenvolvimento de mais estudos sobre o comportamento de elementos de betão estrutural sujeitos à torção, com o objetivo de propor modelos de dimensionamento precisos e novas indicações práticas para projeto, de forma a garantir a plena segurança das estruturas dimensionadas.

1.1.2 Tipos de torção

Os efeitos da torção induzidos num determinado elemento estrutural não podem ser considerados iguais em todos os casos, pois dependem da forma como o elemento se encontra integrado (ligação) na estrutura e da forma como a secção desse elemento absorve os efeitos torsionais. No que diz respeito ao tipo de ligação, a torção pode ser classificada de: torção de compatibilidade e torção de equilíbrio (Fig. 1.2).

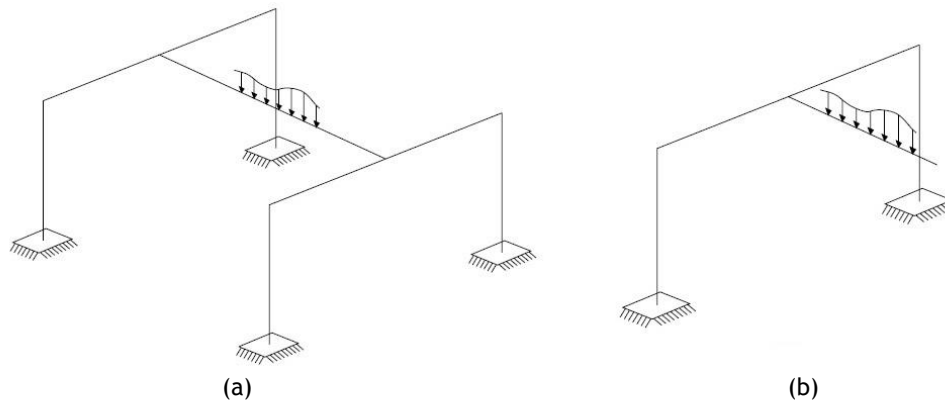


Figura 1.2 - Torção de compatibilidade (a) e torção de equilíbrio (b) [6].

No caso de estruturas hiperestáticas, como por exemplo pórticos correntes em edifícios com ligações monolíticas entre os diferentes elementos estruturais, a torção que se gera nos elementos advém muitas vezes da compatibilização de deformações, constituindo assim um efeito secundário. Este tipo de torção designa-se de torção de compatibilidade. Na Fig. 1.2 (a) é ilustrado um exemplo onde ocorre este tipo de torção. Na referida figura, a viga que une os dois pórticos, ao ser solicitada por um carregamento vertical, tende a fletir, originando momentos torsores nas travessas dos pórticos, que lhe servem de apoio, em resultado das ligações monolíticas existentes entre os elementos. Este tipo de torção normalmente pode ser desprezado no processo de dimensionamento, desde que sejam adotadas as disposições construtivas necessárias e garantidas as quantidades mínimas de armadura de controlo de fissuração recomendadas nas disposições normativas.

No caso da torção de equilíbrio, a estabilidade da estrutura, ou de parte dela, depende essencialmente da rigidez de torção da viga de apoio. Observando agora a Fig. 1.2 (b), verifica-se que, ao ser aplicado um carregamento vertical na viga em consola, esta vai gerar um momento torsor na travessa do pórtico que lhe serve de apoio. Caso esta não consiga resistir a esta solicitação, ocorrerá o colapso parcial da estrutura. Desta forma, este tipo de torção não pode ser desprezado para efeitos de dimensionamento.

Assim, para o caso de estruturas isostáticas, ou em partes isostáticas de estruturas, os esforços de torção que possam ser gerados são designados de torção de equilíbrio e devem ser considerados no âmbito de análise dos ELU. Relativamente à torção de compatibilidade, após ocorrer a fissuração dos elementos na zona da ligação, os momentos torsores reduzem substancialmente e ocorre uma redistribuição dos esforços internos, tornando-se assim necessário garantir a segurança para os Estados Limites de Serviço (ELS).

Relativamente à forma como as secções absorvem os esforços de torsão, é possível classificar a torção de acordo com: torção de Saint Venant ou torção circulatoria e torção com empenamento (Fig. 1.3)

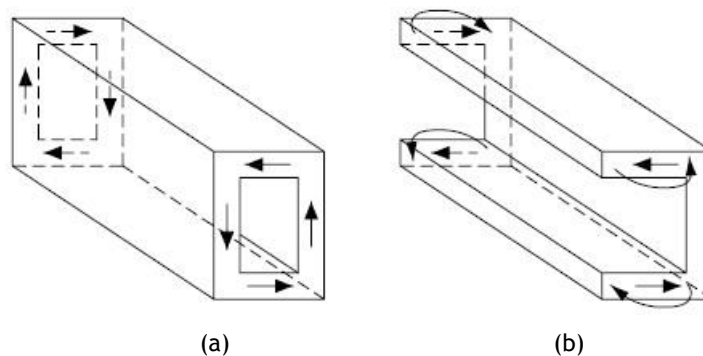


Figura 1.3 - Torção de circulatoria (a) e torção com empenamento (b) [6].

A torção de Saint Venant ou torção circulatoria ocorre em seções circulares e simétricas (cheias ou ocas) onde os momentos torsões são essencialmente resistidos por um fluxo circulatorio de tensões tangenciais ao longo das paredes da seção (Fig. 1.3 (a)). A torção com empenamento ocorre em elementos de seções abertas, principalmente de parede fina, e é em geral resistida por momentos transversais adicionais gerados nas paredes das seções (Fig. 1.3 (b)).

Neste trabalho, será analisado o comportamento à torção de diversas vigas com seção retangular, cheia e vazada, e como tal o âmbito do estudo insere-se no domínio da torção de equilíbrio e da torção de Saint Venant.

1.1.3 Comportamento de uma viga de betão armado à torção pura

Com o objetivo de compreender o comportamento mecânico de uma viga sujeita à torção pura, vários autores têm realizado diversos ensaios experimentais, submetendo vigas de betão armado a este esforço. Através dos resultados obtidos nesses ensaios é possível desenhar uma curva comportamental, que relaciona o momento torsor (T) e a rotação (θ). Essa curva ilustra os estados comportamentais de uma viga à medida que esta é carregada gradualmente com um momento torsor crescente até à sua rotura. Para vigas de betão armado correntes, com taxas de armaduras moderadas, a curva $T-\theta$ tipo encontra-se representada na Fig. 1.4, onde é possível identificar três zonas comportamentais distintas.

A primeira zona da curva $T-\theta$ corresponde ao Estado I ou ao estado não fissurado, pois representa o comportamento da viga antes de esta atingir o momento torsor de fissuração, T_{cr} . Nesta zona, a viga apresenta um comportamento elástico-linear (desenvolvimento reto da curva $T-\theta$) e como tal, é possível determinar a rigidez de torção da viga ($(GC)'$) de acordo com a Teoria de Saint Venant. Nesta fase as armaduras de torção têm pouca influência na rigidez da viga, contribuindo apenas para um ligeiro aumento do momento torsor de fissuração. Segundo Hsu em 1968 [19], este aumento é diretamente proporcional à quantidade total de armadura de torção existente na viga.

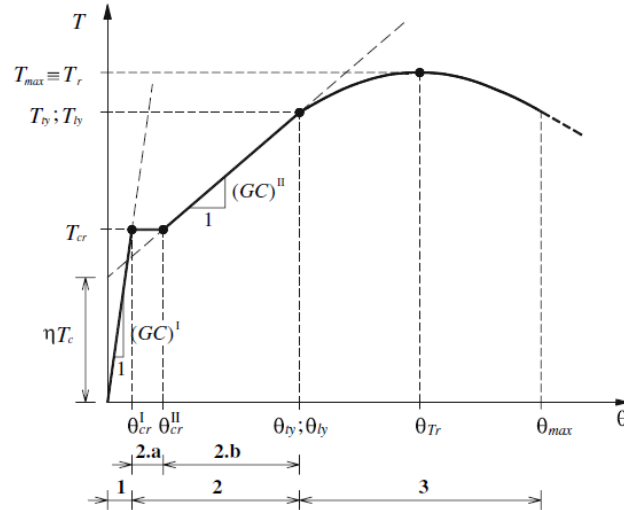


Figura 1.4 - Curva $T-\theta$ típica de uma viga de betão armado à torção pura [36].

A zona 2 da curva $T-\theta$ tem início assim que ocorre a fissuração da viga, ou seja, quando o momento torsor de fissuração (T_{cr}) é atingido. Esta fase corresponde ao Estado II ou ao estado fissurado, traduzindo-se numa forte quebra da rigidez de torção. Para o caso de vigas de secção cheia, o início desta zona é geralmente caracterizada por um aumento brusco da rotação para um valor aproximadamente constante de momento torsor e igual a T_{cr} (zona 2.a Fig. 1.4). Após este aumento da deformação, observa-se novamente uma evolução praticamente linear da curva $T-\theta$, até ser atingido um determinado valor de momento torsor (zona 2.b Fig. 1.4). O declive deste troço representa a rigidez de torção da viga em estado fissurado ($(GC)^{II}$).

As vigas de secção vazada não evidenciam experimentalmente a zona 2.a descrita anteriormente. Esta diferença de comportamento, entre vigas de secção cheia e vigas de secção vazada, na transição do estado fissurado para o estado não fissurado, foi explicado por Bernardo em 2003 [6]. De acordo com o referido autor, as secções cheias, devido ao núcleo de betão, são capazes de redistribuir as tensões tangenciais, dando origem a uma zona de transição comportamental até que as armaduras sejam efetivamente solicitadas. No caso das secções vazadas essa capacidade de redistribuição é muito limitada, principalmente para os casos de paredes finas.

A terceira zona da curva $T-\theta$ caracteriza-se por um comportamento não linear até ser atingido o momento torsor máximo, após o qual ocorre a rotura da viga. Consoante o tipo de rotura, é possível verificar dois comportamentos distintos. Para uma rotura dúctil, caso ilustrado na Fig. 1.4, a zona 3 inicia-se no momento em que pelo menos uma das armaduras de torção (longitudinal ou transversal) entra em cedência. No caso de se tratar de uma rotura frágil, a zona 3 inicia-se assim que o betão comprimido nas escoras da viga começa a entrar num regime marcadamente não linear, dado as elevadas tensões instaladas, podendo a rotura ocorrer antes da cedência das armaduras de torção (caso de vigas com taxas de armaduras de torção muito elevadas).

1.2 Modelos analíticos para análise de secções de betão armado

1.2.1 Introdução

Com o intuito de simplificar os problemas inerentes ao dimensionamento de estruturas com geometria e comportamento complexo, vários autores desenvolveram diversos modelos analíticos onde determinados elementos estruturais são analisados como a junção de elementos mais pequenos e mais simples (Fig. 1.5).

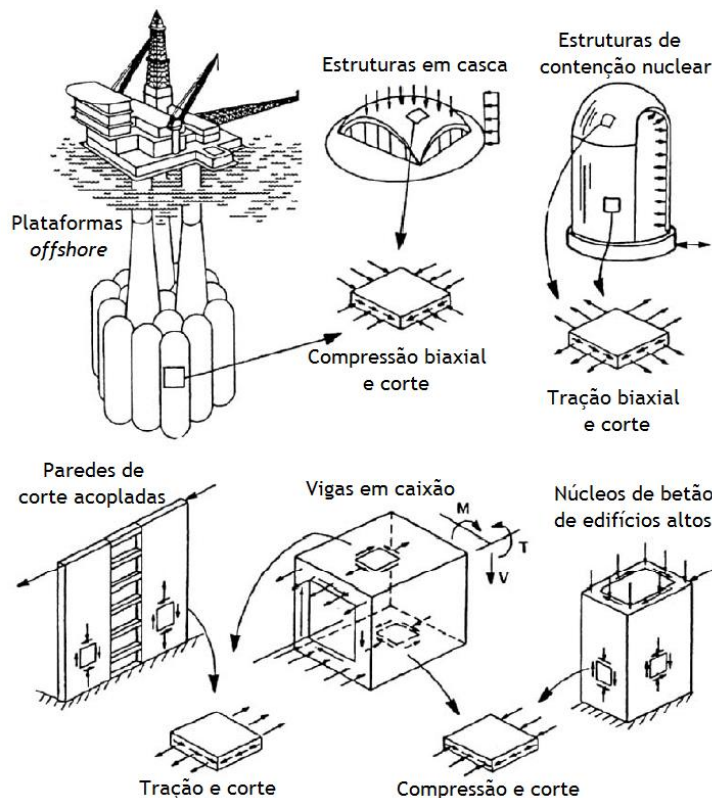


Figura 1.5 - Simplificação de estruturas de betão armado em elementos de placa [26].

Em resultado desta simplificação, estes elementos bidimensionais (2D) estão apenas sujeitos a tensões atuantes no seu plano, ou seja, a tensões de membrana. Devido a estas características, estes elementos são denominados de placas ou painéis. Embora possa parecer que esta simplificação resulte num problema muito diferente do problema real, basta reconhecer que, na realidade, os diferentes esforços que podem atuar num elemento estrutural geram, nos referidos elementos pequenos e mais simples, estados planos de tensão. Por exemplo no caso de vigas em caixão, tais elementos compõem as paredes da secção. Quando submetidas apenas à torção, os referidos elementos estão sujeitos a um estado de corte puro, enquanto que se submetidas a esforços combinados, os elementos estão sujeitos a um estado de tensão mais geral. Assim, com base no estudo do comportamento deste tipo de elementos 2D, é possível definir e calibrar modelos analíticos mais gerais, e extrapolar o comportamento global do elemento estrutural em estudo.

1.2.2 Esforços de membrana

Com base no modelo de treliça plana, desenvolvido originalmente por Ritter e Morsch em 1902 [35], vários modelos analíticos foram desenvolvidos com o objetivo de modelar o comportamento dos elementos de placa solicitados a esforços de membrana. De entre tais modelos, é de destacar o trabalho realizado por Thomas Hsu e a sua equipa na Universidade de Houston, nos EUA. O referido autor, ao longo de vários anos e tendo por base os resultados experimentais obtidos em diversos ensaios de painéis de betão armado, maioritariamente ensaiados ao corte, desenvolveu vários modelos analíticos, calibrando-os de acordo com os comportamentos observados experimentalmente.

Assim, Hsu em 1988 [22] desenvolveu o modelo denominado de *Softened Truss Model (STM)*, onde já era contabilizado o efeito de amolecimento do betão (*softening effect*), observado pela primeira vez por Robinson e Demorieux em 1972 [42]. Os referidos autores constataram que, em painéis solicitados a um estado de tensão de corte puro, a lei constitutiva do betão à compressão nas escoras era modificada em resultado da fissuração gerada pela tração perpendicular.

O STM considera que, no estado fissurado, a direção das fissuras é igual à direção das tensões principais no elemento de betão. Segundo Hsu em 1993 [24], na realidade, a direção da primeira fissura é determinada de acordo com as tensões principais antes da fissuração, o que em geral é diferente da direção das tensões principais após a fissuração. Com o aumento da carga, surgem novas fissuras em virtude da rotação da direção das tensões principais no estado pós-fissurado, em resultado da redistribuição interna de tensões e das condições de compatibilidade. Por causa desta característica e em resultado da calibração das relações constitutivas, nomeadamente do betão à tração e da incorporação do *stiffening effect* (efeito de enrijecimento) por Berlarbi e Hsu em 1994 [4]), do estudo do coeficiente de amolecimento por Berlarbi e Hsu em 1995 [5], e da incorporação do efeito de ferrolho por Pang e Hsu em 1995 [39], este modelo passou a designar-se de *Rotating-Angle Softened Truss Model (RA-STM)*.

No entanto, os modelos baseados na teoria do ângulo variável não incorporam a lei constitutiva do betão ao corte uma vez que o referencial base assumido é o das direções principais de tensão para qualquer nível de carregamento. No entanto, tal contribuição existe na realidade, devido ao “efeito de ferrolho” das armaduras e do interbloqueamento dos agregados (contribuição do betão) ao longo das fissuras. De acordo com Pang e Hsu em 1992 [38], a pequena parcela de resistência do betão ao corte deve-se ao facto de, em geral, a direção real da fissuração no elemento é diferente das direções principais de tensão.

Pang e Hsu em 1996 [40] e Hsu e Zhang em 1997 [27] desenvolveram o modelo *Fixed-Angle Softened Truss Model (FA-STM)*, que em vez de se basear num ângulo variável, como o próprio nome indica, é baseado num ângulo fixo. Este ângulo, correspondente ao ângulo das direções principais dos esforços aplicados no elemento armado, é utilizado para orientar o sistema de

coordenadas adotado e assim estabelecer as equações de equilíbrio e de compatibilidade. Desta forma, a teoria do ângulo fixo assume que a orientação das fissuras é perpendicular à direção principal do esforço de tração aplicado no elemento de betão armado, a qual é considerada constante. No entanto, após a fissuração do elemento, as armaduras começam a ser solicitadas e o sistema de coordenadas definido pelas tensões principais no elemento de betão, tende a desviar-se do sistema de coordenadas dos esforços aplicados no elemento de betão armado, desenvolvendo-se tensões tangenciais. Por esse motivo, no FA-STM torna-se necessário incorporar a lei constitutiva do betão ao corte. Contudo, devido a este aspeto, este modelo é analiticamente mais complicado comparativamente com o RA-STM, sendo as equações de equilíbrio e de compatibilidade, bem como o procedimento de cálculo, mais complexos.

Segundo Hsu em 2010 [26], os modelos anteriormente apresentados, não conseguem prever adequadamente o comportamento pós-pico da curva tensão tangencial (τ) - distorção (γ) dos painéis devido ao facto do efeito de Poisson no estado fissurado não ser considerado. Com base nos resultados experimentais decorrentes de ensaios de painéis de betão armado, Zhu e Hsu em 2002 [28] conseguiram quantificar o efeito de Poisson caracterizando-o através de dois rácios denominados de Hsu/Zhu. Entrando em conta com o efeito de Poisson, os referidos autores desenvolveram o *Softened Membrane Model (SMM)*.

No presente trabalho, em detrimento da utilização de um modelo analítico mais complexo, foi decidido usar o RA-STM e calibrá-lo para o comportamento pós-pico tendo por base adequadas relações constitutivas para os materiais, designadamente o betão à compressão e as armaduras à tração (Capítulo 2). No entanto, em vez de ser utilizado o procedimento original, é adotado o procedimento eficiente proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43]. Como forma de validação deste novo procedimento, os referidos autores, reproduziram os resultados numéricos obtidos por Hsu e Mo em 2010 [26].

1.2.3 Torção pura

Apesar de na maioria das estruturas raramente os seus elementos constituintes sejam apenas solicitados à torção nas zonas críticas, em determinadas situações este esforço pode assumir uma importância primária. Em função disso, vários modelos analíticos têm vindo a ser desenvolvidos com o intuito de prever o comportamento global, designadamente através do cálculo da curva $T-\theta$, de secções de betão armado.

Embora a problemática da torção em vigas de betão armado possa ser reduzida a um problema local de corte puro nos elementos simples 2D (placas) que constituem as paredes da secção, o comportamento global é mais complexo em virtude do carácter tridimensional (3D) dos efeitos torsionais em toda a viga. Por causa disto, as equações de equilíbrio consideradas para os modelos ao corte necessitam ser modificadas, sendo necessário entrar em conta com fenómenos mais globais, como por exemplo deformação geral da viga à torção que induz um efeito de flexão nas escoras de betão [32][26].

De entre os vários modelos desenvolvidos é de destacar o STM, por Hsu em 1985 [25], o *Tension Stiffened Softened Truss Model* (TS-STM) desenvolvido por Greene em 2006 [15], onde foi adicionada a relação constitutiva do betão à tração ao STM e o *Softened Membrane Model for Torsion* (SMMT) por Jeng e Hsu em 2009 [31], desenvolvido a partir da generalização do SMM para elementos de betão armado submetidos ao corte. Para além destes modelos, é de realçar ainda o modelo *Generalized Softened Variable Angle Truss-Model* (GSVATM), de Bernardo *et al.* em 2015 [9], que resultou numa generalização do modelo de treliça espacial com ângulo variável proposto por Hsu e Mo em 1985 [25], incorporando a lei constitutiva do betão à tração.

1.2.4 Torção combinada com outros esforços

Embora exista na bibliografia vários modelos analíticos baseados em modelos de treliça para o estudo de elementos à torção pura, o mesmo não se verifica para o caso de elementos solicitados à torção combinada com outros esforços. Em resultado da presença de outras solicitações, a análise torna-se, naturalmente, mais complexa em resultado da forma como cada esforço solicita a estrutura e também devido à interação que existe entre os mesmos.

Assim, existem poucos modelos analíticos capazes de prever o comportamento de secções de betão armado solicitadas nas referidas condições. No entanto, Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], com base no RA-STM, desenvolveram o *Combined Action Softened Truss Model* (CA-STM) capaz de calcular o comportamento de vigas de betão armado solicitadas a combinações de esforços. Este modelo, que tem por base as equações de equilíbrio, as equações de compatibilidade e as relações constitutivas dos materiais utilizadas no RA-STM, simula a viga real em estudo como a junção de quatro painéis de betão armado submetidos ao corte, desprezando o núcleo de betão. O CA-STM é capaz de prever o comportamento de vigas de betão armado, de secção cheia e vazada, à torção combinada com flexão, com esforço transversal e com esforço axial. De acordo com Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], este modelo apresentou bons resultados comparativamente com alguns dados experimentais. O referido modelo é notoriamente complexo do ponto de vista da sua formulação e do procedimento de cálculo, tendo em conta o número de variáveis envolvidas. Silva em 2016 [43] e Silva *et. al* em 2017 [45] propuseram um procedimento de cálculo mais eficiente para o CA-STM, em alternativa ao procedimento de cálculo original. Os referidos autores verificaram que o modelo, tendo por base o novo procedimento de cálculo, apresentou bons resultados comparativamente a alguns resultados experimentais com vigas à torção e com vigas à torção combinada com esforço transversal. Neste trabalho, o CA-STM, com o procedimento de cálculo eficiente, é objeto de estudo no Capítulo 3, em particular para vigas à torção combinada com flexão.

1.3 Justificação do tema do trabalho e objetivos propostos

Com base no apresentado ao longo deste capítulo, torna-se evidente a necessidade de continuar a desenvolver novos modelos analíticos e de calibrar os atualmente existentes, de forma a que estes possam, com maior rigor, prever o comportamento de secções de betão armado solicitadas por vários níveis e combinações de solicitações. A implementação destes modelos através de aplicações informáticas, como por exemplo o MATLAB, possibilita que os mesmos possam ser utilizados, modificados e testados de forma mais eficiente. Desta forma, tais modelos podem ser utilizados como uma ferramenta de auxílio no âmbito do projeto de estruturas.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação vai ao encontro dessa necessidade, tendo por base o novo procedimento eficiente, proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44], Silva em 2016 [43], e Silva *et. al* em 2017 [45], para o RA-STM e para o CA-STM. Este novo procedimento, implementado em MATLAB, baseia-se em reformular o procedimento de cálculo como um sistema de equações não lineares com restrições, resolvendo-o através de algoritmos do *toolbox* de otimização do MATLAB. As variáveis primárias, utilizadas para a resolução do sistema, foram escolhidas de forma a tornar o procedimento mais eficiente. Como estimativa inicial, os referidos autores adotaram um modelo de treliça elástico linear.

Tal como foi referido anteriormente, o CA-STM é baseado no RA-STM, em resultado de este idealizar uma viga como a junção de quatro painéis, sendo o mecanismo de resistência idealizado para cada painel o RA-STM. Por isso, torna-se evidente a necessidade de, numa primeira fase, analisar e compreender o funcionamento do RA-STM e, de seguida, calibrá-lo de forma a que este seja também capaz de prever o comportamento pós-pico. Como forma de validação das alterações propostas, a previsão do modelo será comparada com diversos dados experimentais, recolhidos na bibliografia e relativos a ensaios de painéis de betão armado ao corte.

As alterações introduzidas no RA-STM servirão de base ao estudo do CA-STM, sendo as mesmas também aplicadas neste último modelo. Posteriormente, à semelhança do que foi feito para o RA-STM, com o objetivo de validar as alterações introduzidas no modelo, as previsões deste são comparadas com vigas ensaiadas à torção pura e com vigas ensaiadas à torção combinada com flexão. Esta última combinação de solicitações é o objetivo de estudo fixado no âmbito do CA-STM, tendo-se considerado que já é suficientemente amplo para não incorporar neste trabalho outras combinações de solicitação.

Tendo por base o exposto anteriormente, o trabalho apresentado nesta dissertação pode ser dividido em dois objetivos principais:

- Calibrar o RA-STM com o objetivo de prever também o comportamento pós-pico de painéis de betão armado. Como procedimento de solução é adotado o procedimento eficiente proposto

por Silva em 2016 [43] e Silva e Horowitz em 2015 [44], tendo o mesmo sido implementado no MATLAB. Posteriormente, as alterações introduzidas são validadas com base na comparação das previsões do modelo com numerosos dados experimentais de painéis de betão armado, recolhidos na bibliografia e ensaiados até à rotura sob um estado de tensão de corte puro;

- Incorporar no CA-STM as alterações introduzidas e validadas para o RA-STM. Validar o CA-STM para prever o comportamento de vigas de betão armado ensaiadas à torção combinada com flexão, utilizando como procedimento de solução o procedimento eficiente proposto por Silva em 2016 [43] e de Silva *et al.* 2017 [45], implementado em MATLAB. A validação terá por base a comparação com numerosos dados experimentais de vigas de betão armado ensaiadas à torção pura, numa primeira fase e para uma prévia validação, e ensaiadas à torção combinada com flexão.

1.4 Organização do documento

Nesta subsecção é apresentada a organização da dissertação com uma descrição sumária do conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1 apresenta-se uma ideia geral sobre o tema da dissertação e são salientados os aspetos que tornam este trabalho relevante e necessário.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), proposto originalmente por Pang e Hsu em 1995 [39] e Berlarbi e Hsu em 1994 [4] e 1995 [5], assim como as alterações introduzidas, com o objetivo de prever o comportamento de painéis de betão armado submetidos a um estado de tensão de corte puro. Como procedimento de solução é adotado o procedimento proposto por Silva em 2016 [43] e Silva e Horowitz em 2015 [44], implementado em MATLAB.

No Capítulo 3 é descrito o modelo *Combined Action Softened Truss Model* (CA-STM), desenvolvido por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17]. Tendo em conta o estudo realizado e os resultados obtidos no Capítulo 2, as alterações previamente implementadas no RA-STM são transpostas também para o CA-STM. O âmbito de análise deste capítulo centra-se na previsão do comportamento de vigas de betão armado ensaiadas à torção combinada com flexão, embora numa primeira fase tenham sido estudadas também vigas solicitadas à torção pura. À semelhança do capítulo anterior, é utilizado como procedimento de solução o procedimento proposto por Silva em 2016 [43] e Silva *et al.* em 2017 [45], implementado em MATLAB.

Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas as principais conclusões do estudo realizado e apresentam-se indicações e recomendações para futuros desenvolvimentos do trabalho.

CAPÍTULO 2 - RA-STM

2.1 Introdução

O dimensionamento de estruturas mais complexas, por vezes, é simplificado transformando a estrutura inicial numa associação de elementos mais pequenos e mais simples. Com base neste princípio vários modelos de análise estrutural foram desenvolvidos.

Algumas dessas estruturas podem ser idealizadas como um conjunto de elementos bidimensionais de betão armado sujeitos apenas a tensões atuantes no seu plano, ou seja, sujeitos a esforços de membrana. Devido a estas características, normalmente estes são denominados de placas ou painéis, podendo o seu comportamento ser determinado com recurso a procedimentos baseados em modelos de treliça plana concebidos por diversos autores.

Neste capítulo, o modelo em estudo é o RA-STM (*Rotating-Angle Softened Truss Model*), desenvolvido por Pang e Hsu em 1995 [39] e Berlarbi e Hsu em 1994 [4] e 1995 [5], também denominado de modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável. Este modelo não linear tem por base os três princípios de Navier da mecânica dos materiais: equilíbrio das tensões, compatibilidade das deformações e leis constitutivas dos materiais.

De forma a prever o comportamento tensão (σ) - extensão (ϵ) pré-pico de painéis de betão armado, Silva e Horowitz em 2015 [44] e Silva em 2016 [43] desenvolveram um algoritmo em MATLAB baseado no modelo RA-STM. Este algoritmo, em vez de ser resolvido por tentativa e erro, solução usada no modelo original, estabelece o problema como um sistema de equações não lineares, resolvendo-o com recurso a algoritmos de otimização presentes no *toolbox* de otimização do MATLAB, tornando-se assim mais eficiente. Como estimativa inicial para o procedimento é utilizado um modelo de treliça plana elástico linear, o MCTM (*Mohr Compatibility Truss Model*).

Com base no código desenvolvido por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], neste capítulo é reproduzido um código semelhante com o objetivo de compreender melhor o seu funcionamento. Posteriormente, serão introduzidas algumas alterações com o objetivo de aperfeiçoar o modelo. Para validar essas alterações, são feitas várias comparações com resultados experimentais recolhidos na bibliografia.

2.2 Descrição do Modelo

O RA-STM é um modelo de análise não linear de painéis de betão armado. A designação RA-STM prende-se com o facto do mecanismo de resistência idealizado ser semelhante a uma treliça plana, onde o betão resiste aos esforços de compressão e as armaduras aos esforços de tração. Neste modelo, as leis constitutivas do betão e do aço são baseadas nas relações médias σ - ϵ

calibradas por via experimental. Devido a isto, a curva tensão (σ_D) - extensão (ϵ_D) do betão à compressão apresenta duas características: uma relação não linear entre as tensões e as extensões e o amolecimento do betão em compressão, resultante do efeito da fissuração diagonal no comportamento do betão na direção principal de compressão em elementos submetidos ao corte. Para contabilizar este efeito do amolecimento é incorporado um coeficiente ζ à lei constitutiva do betão. Dada a relevância que este efeito tem no comportamento do betão à compressão, mediante a lei σ_D - ϵ_D considerada, este aparece no nome do modelo (*softened*).

Desde então, este modelo tem vindo a ser desenvolvido por vários autores aproximando assim a sua previsão do comportamento real das estruturas observadas experimentalmente. Algumas das melhorias feitas foram a contabilização da contribuição do betão na resistência ao corte (interbloqueamento dos agregados), Pang e Hsu em 1996 [40] e a incorporação do efeito de Poisson para a previsão do comportamento pós-pico, Hsu e Zhu em 2002 [28].

2.2.1 Equilíbrio das tensões

Na Fig. 2.1 está ilustrado um elemento bidimensional de betão armado sujeito a esforços de membrana, onde a direção das armaduras longitudinais e transversais estabelece o sistema de coordenadas L-T.

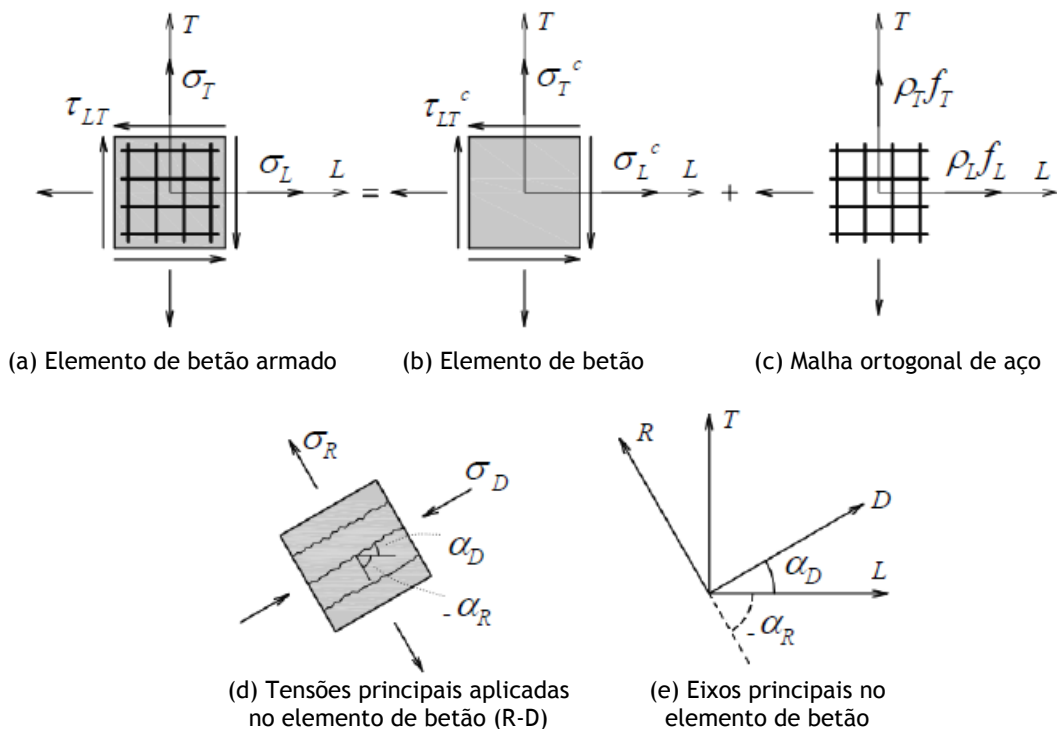


Figura 2.1 - Elemento bidimensional de betão armado submetido a tensões de membrana (adaptado de Silva em 2016 [43]).

As tensões de membrana aplicadas no elemento de betão armado (σ_L , σ_T e τ_{LT}) podem ser divididas nas componentes atuantes no betão (σ_L^c , σ_T^c e τ_{LT}^c) e nas componentes atuantes nas armaduras ($\rho_L f_L$ e $\rho_T f_T$). As tensões σ_L e σ_T representam as tensões normais no elemento de betão armado e a tensão τ_{LT} representa a tensão tangencial.

No caso das armaduras, ρ_L e ρ_T designam as taxas de armadura e f_L e f_T as tensões nas mesmas. Considera-se que as armaduras apenas resistem a esforços axiais, desprezando assim o efeito de ferrolho. Para além deste aspeto, admite-se a existência de aderência perfeita entre o aço e o betão. A convenção de sinais adotada estabelece que as tensões e deformações de tração são consideradas positivas e as de compressão negativas.

Equilibrando as tensões aplicadas no elemento de betão armado (σ_L , σ_T e τ_{LT}) com as tensões no betão (σ_L^c , σ_T^c e τ_{LT}^c) e nas armaduras ($\rho_L f_L$ e $\rho_T f_T$), segundo o sistema de coordenadas L-T, obtém-se a Eq. 2.1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L \\ \rho_T f_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

As componentes das tensões no betão podem ser determinadas através das tensões principais (σ_R e σ_D) e do ângulo a_R , Fig. 2.1 (e). O ângulo a_R relaciona os sistemas de coordenadas L-T e R-D e é denominado ângulo variável. Esta denominação advém da variação que este sofre à medida que as tensões no elemento de betão armado aumentam proporcionalmente, Hsu e Mo em 2010 [26].

Em resultado deste modelo ser baseado na teoria do ângulo variável, a orientação das direções principais (assumida igual à orientação das fissuras) no elemento de betão depende da orientação do sistema de coordenadas R-D. Em virtude de R-D definir um sistema de coordenadas segundo as direções principais, a tensão de corte no betão é nula ($\tau_{RD} = 0$).

Outro aspeto que é tido em conta no RA-STM é o problema da descontinuidade gerada pelas fissuras no elemento de betão armado, que resulta num comportamento distinto do painel ao longo da sua extensão. Para facilitar a análise, são admitidas tensões e extensões médias ao longo de um comprimento suficientemente grande para incluir várias fissuras, em vez de estudar apenas pontos específicos do elemento.

Sabendo que a orientação das fissuras no elemento de betão armado tende a surgir perpendicularmente à direção principal de tração no elemento de betão (σ_R), utilizando o complemento do ângulo variável (a_D), em vez de a_R , é possível prever a orientação das fissuras (Fig. 2.1 (e)). Devido a isso, e dado que ambas as variáveis apresentam as mesmas propriedades, optou-se por utilizar a_D nas equações do modelo. Com recurso ao círculo de Mohr das tensões

no painel, é possível obter a transformação de coordenadas entre R-D e L-T para o elemento de betão, como é apresentado na Eq. 2.2:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(a_D) & \sin^2(a_D) & 2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ \sin^2(a_D) & \cos^2(a_D) & -2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ -\sin(a_D)\cos(a_D) & \sin(a_D)\cos(a_D) & \cos^2(a_D) - \sin^2(a_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Substituindo na Eq. 2.1 as tensões aplicadas no elemento de betão pela Eq. 2.2, obtêm-se as equações de equilíbrio apresentadas na Eq. 2.3:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(a_D) & \sin^2(a_D) & 2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ \sin^2(a_D) & \cos^2(a_D) & -2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ -\sin(a_D)\cos(a_D) & \sin(a_D)\cos(a_D) & \cos^2(a_D) - \sin^2(a_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L \\ \rho_T f_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Nesta versão do modelo, como forma de simplificação, despreza-se a resistência do betão à tração, podendo assim considerar-se nula a tensão associada, ou seja, $\sigma_R = 0$. Tendo em conta esta simplificação, reorganizando a Eq. 2.3, resultam as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sigma_L = \sigma_D \cos^2(a_D) + \rho_L f_L \quad (2.4)$$

$$\sigma_T = \sigma_D \sin^2(a_D) + \rho_T f_T \quad (2.5)$$

$$\tau_{LT} = -\sigma_D \sin(a_D)\cos(a_D) \quad (2.6)$$

2.2.2 Compatibilidade das deformações

De forma análoga ao apresentado no subcapítulo anterior, a transformação de coordenadas entre o sistema R-D e L-T pode ser obtida a partir do círculo de Mohr para as extensões do elemento (Eq. 2.7).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(a_D) & \sin^2(a_D) & 2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ \sin^2(a_D) & \cos^2(a_D) & -2\sin(a_D)\cos(a_D) \\ -2\sin(a_D)\cos(a_D) & 2\sin(a_D)\cos(a_D) & 2\cos^2(a_D) - 2\sin^2(a_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_D \\ \varepsilon_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Os parâmetros ε_L e ε_T representam as extensões lineares médias na armadura longitudinal e transversal, respetivamente, e o parâmetro γ_{LT} a distorção média no sistema de coordenadas L-T. Os parâmetros ε_D e ε_R representam as extensões principais médias de compressão e tração no sistema de coordenadas R-D. Adicionando as duas primeiras linhas da Eq. 2.7 obtêm-se o primeiro princípio da invariância (Eq. 2.8).

$$\varepsilon_L + \varepsilon_T = \varepsilon_D + \varepsilon_R \quad (2.8)$$

Para além desta simplificação, também a última linha da Eq. 2.7 pode ser simplificada, resultando a Eq. 2.9.

$$\gamma_{LT} = 2(\varepsilon_R - \varepsilon_D) \sin(\alpha_D) \cos(\alpha_D) \quad (2.9)$$

2.2.3 Relações constitutivas dos materiais

2.2.3.1 Betão à compressão

A curva σ - ε de um provete cilíndrico de betão submetido a um carregamento uniaxial de compressão pode ser expressa matematicamente através da parábola proposta por Hognestad em 1952 [18], de acordo com a Eq. 2.10.

$$\sigma_D = f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

O parâmetro f_c' representa a tensão de compressão resistente do betão (pico de tensão) e ε_0 a extensão relativa a essa tensão, geralmente admitida igual a 2×10^{-3} para os betões de resistência normal. A Eq. 2.10 está representada na Fig. 2.2.

Dado que para o problema em estudo o elemento é sujeito a um estado de tensões biaxial de tração e compressão, é necessário adaptar a curva da Eq. 2.10. A existência de esforços de tração perpendiculares aos esforços de compressão diminui a resistência do betão quando comparada com a obtida em ensaios de compressão uniaxiais. Este efeito é denominado de *softening effect* ou efeito de amolecimento. De forma a contabilizar esta perda de resistência é necessário incorporar na lei constitutiva do betão à compressão o coeficiente de amolecimento, ζ . De acordo com alguns modelos, este pode afetar apenas a tensão ou simultaneamente a tensão e a extensão. Neste trabalho optou-se por considerar o efeito do amolecimento do betão tanto para as tensões como para as extensões por ser considerada a situação mais realista [8], sendo esta situação denominada de amolecimento proporcional. No procedimento desenvolvido por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], a relação constitutiva do betão à compressão utilizada é a proposta por Hsu e Mo em 2010 [26] (Eq. 2.11).

$$\sigma_D = \begin{cases} \zeta f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D \leq \zeta \varepsilon_0 \\ \zeta f_c' \left[1 - \left(\frac{\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} - 1}{\frac{2}{\zeta} - 1} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D > \zeta \varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

A primeira alteração feita no procedimento consiste na alteração da lei constitutiva apresentada anteriormente pela lei proposta por Zhu *et al.* em 2001 [50] (Fig. 2.2), Eq. 2.12. Esta alteração é baseada nos resultados de ensaios experimentais mais recentes, onde foi verificado pelos autores que, após atingida a tensão de pico, a curva comportamental dos painéis apresentava um longo patamar (Fig. 2.2). Em função disso, na segunda linha da Eq. 2.11, referente ao comportamento pós-pico, a constante 2 foi alterada por 4. Também Bernardo *et al.* em 2012 [8], após analisarem várias relações constitutivas de betão à compressão, em vigas de betão armado sujeitas a esforços de torção, verificaram que esta foi a que obteve melhores resultados. Esta conclusão pode também ser considerada válida para os objetivos do presente capítulo uma vez que o comportamento de vigas à torção é ditado pelo comportamento das paredes efetivas da secção, nas quais se desenvolve um fluxo circulatorio de tensões tangenciais. Desta forma, o comportamento de cada parede da viga assemelha-se ao comportamento de um painel ao corte.

$$\sigma_D = \begin{cases} \zeta f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D \leq \zeta \varepsilon_0 \\ \zeta f_c' \left[1 - \left(\frac{\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} - 1}{\frac{4}{\zeta} - 1} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D > \zeta \varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

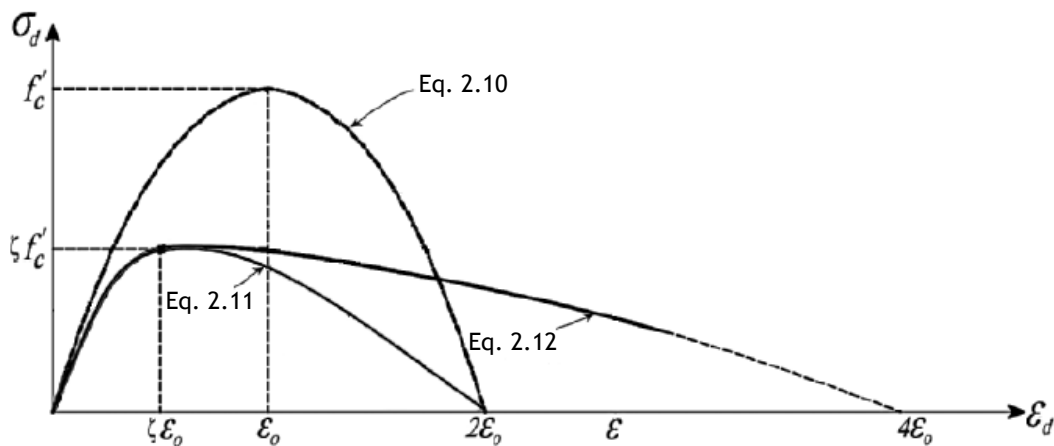


Figura 2.2 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (adaptado de Hsu e Mo em 2010 [26]).

Para o cálculo do coeficiente de amolecimento várias expressões foram desenvolvidas por diferentes autores, tais como Belarbi e Hsu em 1995 [5]. Através de ensaios experimentais realizados em diversos painéis, os referidos autores observaram que o coeficiente de amolecimento dependia essencialmente da extensão principal média de tração (ε_R) e do caminho de carga, ou seja, na forma como o carregamento era aplicado (sequencial ou proporcional) (Eq. 2.13).

$$\zeta = \frac{0,9}{\sqrt{1+400\varepsilon_R}} \quad (2.13)$$

No modelo proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], assim como o proposto por Hsu e Mo em 2010 [26], é utilizado o coeficiente de amolecimento da Eq. 2.14. A alteração no denominador, relativamente à Eq. 2.13, foi proposta por Hsu e Mo em 2010 [26] e é justificada pelo facto desta nova equação resultar num coeficiente mais conservativo, aumentando assim o efeito de amolecimento do betão o que, por consequência, reduz mais a resistência do betão à compressão. Tendo em conta que o objetivo deste trabalho é retratar o comportamento dos painéis de forma mais próxima possível ao seu comportamento real, observando a Fig. 2.3 verifica-se que a Eq. 2.13 aproxima-se melhor dos resultados obtidos experimentalmente.

$$\zeta = \frac{0,9}{\sqrt{1+600\varepsilon_R}} \quad (2.14)$$

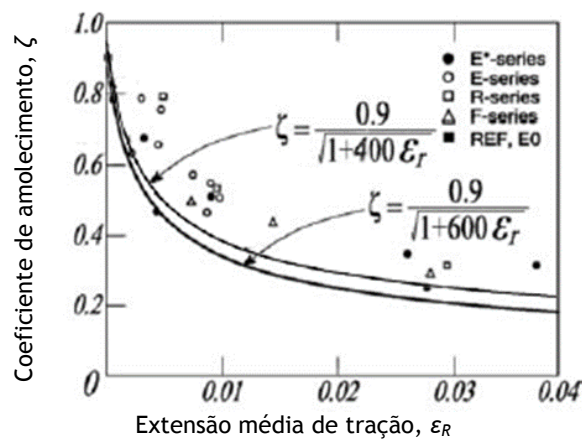


Figura 2.3 - Coeficiente de amolecimento do betão à compressão (adaptado de Hsu e Mo em 2010 [26]).

Em função do que foi referido anteriormente, a segunda modificação consiste na alteração da expressão de cálculo do coeficiente de amolecimento, sendo esta substituída pela expressão proposta por Zhang e Hsu em 1998 [49] (Eqs. 2.15-2.18). Para além dos bons resultados obtidos, este coeficiente de amolecimento tem em conta a distribuição das armaduras (Eq. 2.16) e também está calibrado para betões de alta resistência (Eq. 2.18). O parâmetro η' na Eq. 2.15 é igual a η ou igual ao inverso de η , garantindo assim que este seja sempre inferior à unidade. Para além disso, de acordo com Zhu *et al.* em 2001 [50], o valor de η' deve estar compreendido segundo o intervalo $0,2 < \eta' < 1$. Bernardo *et al.* em 2012 [8], através da análise de vários coeficientes de amolecimento, concluíram que de entre os vários coeficientes analisados, incluindo o coeficiente da Eq. 2.13, o coeficiente da Eq. 2.15 apresentou melhores resultados.

$$\zeta = \frac{R(f_c')}{\sqrt{1 + \frac{400\varepsilon_R}{\eta'}}} \quad (2.15)$$

$$\eta = \frac{\rho_T f_{Ty}}{\rho_L f_{Ly}} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \eta \leq 1 \Rightarrow \eta' = \eta \\ \eta > 1 \Rightarrow \eta' = \frac{1}{\eta} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$R(f_c') = \frac{5,8}{\sqrt{f_c'(\text{MPa})}} \leq 0,9 \quad (2.18)$$

Por último, contrariamente ao algoritmo proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], nesta nova versão do algoritmo o comportamento pós-pico do painel é calculado. Para isso são alterados os critérios de paragem do procedimento, ou seja, os valores máximos de extensão de compressão admitidos. Estes limites foram definidos adotando os valores convencionais propostos pelo Eurocódigo 2 [14] e baseados no modelo não linear da relação σ_D - ε_D do betão. Para betões de classe de resistência inferior a 50 MPa, admite-se que a extensão última do betão à compressão (ε_{cu1}) é 3,5‰ (Eq. 2.19), sendo este o valor fixado pelo EC2 [14] para a extensão última convencional do betão para efeitos de cálculo. Para betões de classe de resistência iguais ou superiores a 50 MPa, o valor de ε_{cu1} é calculado através da Eq. 2.20, onde f_{cm} é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão.

$$\varepsilon_{cu1} = 3,5\text{‰} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{cu1} = 2,8 + 27 \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \quad (2.20)$$

2.2.3.2 Armaduras longitudinais e transversais à tração

A curva σ - ε simplificada de um provete de aço, ensaiado à tração uniaxial, pode ser representado matematicamente pela Eq. 2.21. Esta curva relaciona a tensão no aço com a extensão correspondente num determinado ponto. Nesta equação, E_s é o módulo de elasticidade do aço e ε_s e ε_{Sy} são a extensão do aço e a extensão do aço quando este atinge a tensão de cedência. Os parâmetros f_s e f_{Sy} representam a tensão no aço e a respetiva tensão de cedência. Embora a curva da Eq. 2.21 apresente um comportamento elasto-plástico perfeito, segundo Hsu e Mo em 2010 [26], esta prevê de forma satisfatória a resistência ao corte de painéis submetidos a esforços membrana, quando a resistência à tração do betão (σ_R) é desprezada.

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & , \text{ para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} \\ f_{sy} & , \text{ para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (2.21)$$

Apesar de, em regime elástico, a primeira linha da Eq. 2.21 também ser válida para armaduras envolvidas em betão quando solicitadas por esforços de tração, após a fissuração do betão existe um comportamento bastante distinto ao longo das armaduras embebidas neste. Enquanto que nas zonas fissuradas a tração é suportada pelas armaduras, entre fissuras, parte dessa tração é suportada pelo betão não fissurado, sendo esta transferida das armaduras para o betão por aderência. Este fenómeno é denominado de *stiffening effect* (efeito de enrijecimento). Devido a esta variabilidade de tensões e deformações, as curvas que consideram este efeito relacionam tensões médias com deformações médias.

No caso do procedimento de solução proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], a relação constitutiva adotada foi a função modificada de Ramberg-Osgood apresentada na Eq. 2.22 (Collins e Mitchel em 1991 [12]).

$$f_s = E_s \varepsilon_s \left[A + \frac{1-A}{\left[1 + \left[(1-A) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}} \right]^F \right]^{\frac{1}{F}}} \right] \quad (2.22)$$

No entanto, no novo procedimento, em vez de ser utilizada a relação constitutiva referida anteriormente, é adotada a relação constitutiva proposta por Jeng e Hsu em 2009 [31] (Fig. 2.4), Eqs. 2.23-2.26, sendo já considerado o efeito de enrijecimento. Contudo, em resultado dos referidos autores terem calibrado esta relação constitutiva para vigas à torção, a expressão de cálculo da tensão de fissuração do betão (f_{cr}) foi majorada em 110% em relação à lei constitutiva (Eq. 2.27) proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [4], para painéis ao corte. Este aumento deve-se ao facto do módulo de elasticidade do betão (E_c) e da extensão que provoca a fissuração do betão (ε_{cr}) terem sido incrementados em 45% o que, de acordo com a lei de Hooke, resulta num valor de f_{cr} superior. Tendo em conta este aspeto e o facto do âmbito do estudo neste capítulo se centrar em painéis de betão armado, a expressão de f_{cr} adotada é a proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [4] (Eq. 2.26).

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & , \text{ para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \\ f_{sy} \left[(0,91 - 2B) + (0,02 + 0,25B) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}} \right] & , \text{ para } \varepsilon_s > \varepsilon_n \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_n = (0,93 - 2B) \varepsilon_{sy} \quad (2.24)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}} \right)^{1,5} \quad (2.25)$$

$$f_{cr} = 0,311 \sqrt{f_c'} \text{ (MPa)} \quad (2.26)$$

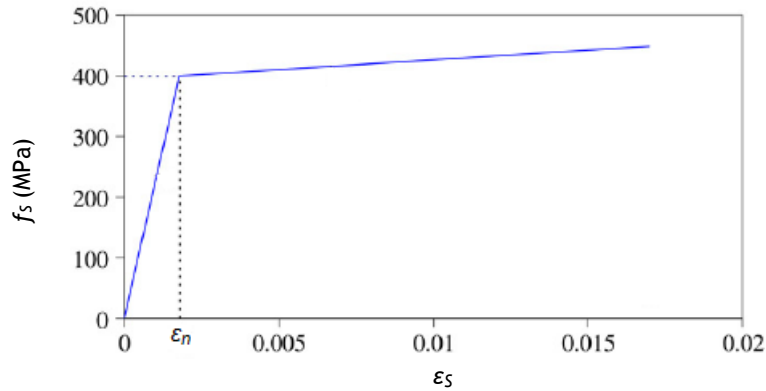


Figura 2.4 - Relação constitutiva do aço (adaptado de Jeng e Hsu em 2009 [31]).

Para além da lei constitutiva bilinear proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [32] (Eq. 2.27), os referidos autores apresentam outro modelo (Eqs. 2.28 e 2.29), mais complexo, baseado na equação proposta por Richard-Abbott em 1975 [41].

$$f_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s, & \text{para } f_s \leq (0,93 - 2B)f_{sy} \\ (0,91 - 2B)f_{sy} + (0,02 + 0,25B)E_s \epsilon_s, & \text{para } f_s \geq (0,93 - 2B)f_{sy} \end{cases} \quad (2.27)$$

Este modelo (Eqs. 2.28 e 2.29), ao contrário do bilinear, apresenta uma curvatura que liga a zona elástica com a plástica, sendo definida pelo parâmetro m . No entanto, após várias simulações feitas no MATLAB, verificou-se que para determinados valores de taxa de armadura a previsão do modelo deixava de ser satisfatória ou até mesmo, em alguns casos, observaram-se problemas de convergência.

$$f_s = \frac{0,975E_s \epsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1,1E_s \epsilon_s}{f_{sy}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}} + 0,025E_s \epsilon_s \quad (2.28)$$

$$m = \frac{1}{9B - 0,2} \leq 25 \quad (2.29)$$

Após uma análise mais minuciosa da variação do parâmetro m (Eq. 2.29) em função do parâmetro B (Eq. 2.25), que por sua vez depende da taxa de armadura (ρ), da tensão de cedência do aço (f_{sy}) e da tensão de fissuração do betão (f_{cr}), verifica-se que, para determinadas combinações destes valores, o parâmetro m assume valores muito elevados.

Fixando os valores de f_{Sy} e f_{cr} , e variando apenas o valor de ρ constata-se que, para determinados valores de ρ , o parâmetro m possui uma assintota (Fig. 2.5), o que origina problemas de convergência no procedimento de cálculo.

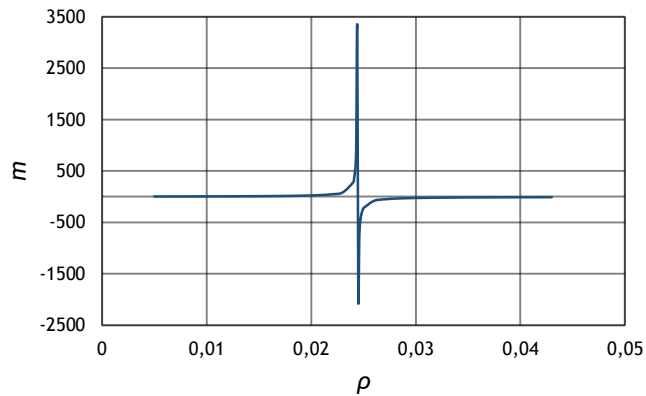


Figura 2.5 - Influência da taxa de armadura no parâmetro m .

Embora m esteja limitado superiormente (Eq. 2.29), eliminando assim o problema relativamente aos valores positivos da assíntota, não existe nenhuma especificação quanto ao limite inferior. Aliando este facto aos maus resultados obtidos, esta lei não foi utilizada.

Pang e Hsu em 1995 [39] propuseram uma nova alteração à lei constitutiva média do aço apresentada na Eq. 2.27. No caso de painéis onde a disposição das armaduras (L-T) coincide com as direções principais do estado de tensão aplicado no elemento de betão armado (1-2), ou seja, quando o ângulo entre a direção L e 2 é igual a 90° ou 0° , após a fissuração vertical do betão, as armaduras longitudinais continuam a estar sujeitas apenas a esforços de tração axial. Quando esta condição não se verifica, caso por exemplo de painéis com as armaduras orientadas a 45° , para além da tração axial, as armaduras ficam sujeitas a um fenómeno denominado de efeito de ferrolho, ou ação de dupla flexão nas armaduras, de forma a satisfazer a condição de compatibilidade das deformações nas fissuras (Fig. 2.6).

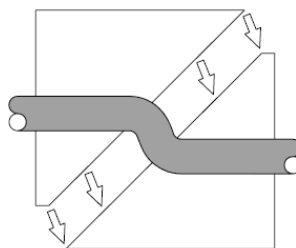


Figura 2.6 - Efeito de ferrolho ou ação de dupla flexão [13].

Este fenómeno, segundo os autores, provoca dois efeitos na relação média σ - ϵ do aço. Primeiro, a sobreposição de tensões de flexão locais com tensões axiais uniformes resulta na diminuição do esforço de tração correspondente à cedência das armaduras e na fase plástica última.

Segundo, a flexão local nas armaduras provoca uma deterioração mais acentuada da aderência entre as armaduras e o betão, aumentando a extensão da zona de cedência das armaduras na zona da fissura. O aumento da zona de cedência contribui com deformação adicional para a extensão média do aço. Ambos estes efeitos diminuem a curva média σ - ϵ do aço nos painéis onde a orientação das armaduras não coincide com as direções principais 1-2. De forma a considerar este efeito, Pang e Hsu em 1995 [39] propuseram as Eqs. 2.30 e 2.31, onde a_2 é o ângulo entre a direção principal 2, de acordo com o estado de tensão aplicado, e a direção das armaduras longitudinais.

$$f_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s, & \text{para } \epsilon_s \leq \epsilon_n \\ f_{sy} [(0,91 - 2B) + (0,02 + 0,25B) \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{sy}}] \left(1 - \frac{2 - \frac{a_2}{45^\circ}}{1000\rho} \right), & \text{para } \epsilon_s > \epsilon_n \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\epsilon_n = (0,93 - 2B) \epsilon_{sy} \left(1 - \frac{2 - \frac{a_2}{45^\circ}}{1000\rho} \right) \quad (2.31)$$

No entanto, Hsu e Zhu em 2002 [28], baseados em resultados experimentais posteriores de placas ensaiadas com controlo de descolamento, verificaram que este efeito não era relevante voltando assim a adotar as expressões originais (Eq. 2.27) onde o efeito ferrolho é desprezado. Para além disso, as Eqs. 2.30 e 2.31 também foram introduzidas no novo procedimento verificando-se que estas pioravam a previsão do modelo comparativamente com os resultados experimentais.

Após esta análise das várias leis constitutivas para o aço e como foi referido inicialmente, foi adotada a lei constitutiva proposta por Jeng e Hsu em 2009 [31], tendo esta sido a que apresentou melhores resultados.

2.3 Carregamento proporcional

O carregamento proporcional define-se como um carregamento onde a relação entre os esforços solicitantes se mantém constante, independentemente do estado de tensão a que o elemento esteja sujeito.

A Fig. 2.7 ilustra um elemento de betão armado submetido a um determinado estado de tensão, segundo o sistema de coordenadas L-T. Tratando-se de um carregamento proporcional, é possível relacionar as tensões de membrana aplicados no elemento de betão armado com a tensão principal de tração (σ_1) através de coeficientes de proporcionalidade (m_L, m_T, m_{LT}).

$$\sigma_L = m_L \sigma_1 \quad (2.32)$$

$$\sigma_T = m_T \sigma_1 \quad (2.33)$$

$$\tau_{LT} = m_{LT} \sigma_1 \quad (2.34)$$

Estes três coeficientes permanecerão constantes enquanto o elemento estiver sujeito a um carregamento proporcional.

Para além desta relação, também o sistema de coordenadas L-T está relacionado com o sistema de coordenadas 1-2, onde as direções 1-2 são definidas de acordo com o estado de tensão externo aplicado no elemento de betão armado. A relação entre L-T e 1-2 é feita através do ângulo α_1 (Fig. 2.7). À semelhança do que foi feito anteriormente para α_R , a orientação do eixo 1-2 pode ser definida através do ângulo complementar de α_1 , ou seja, o ângulo α_2 (Fig. 2.7). O parâmetro σ_2 representa a tensão principal de compressão.

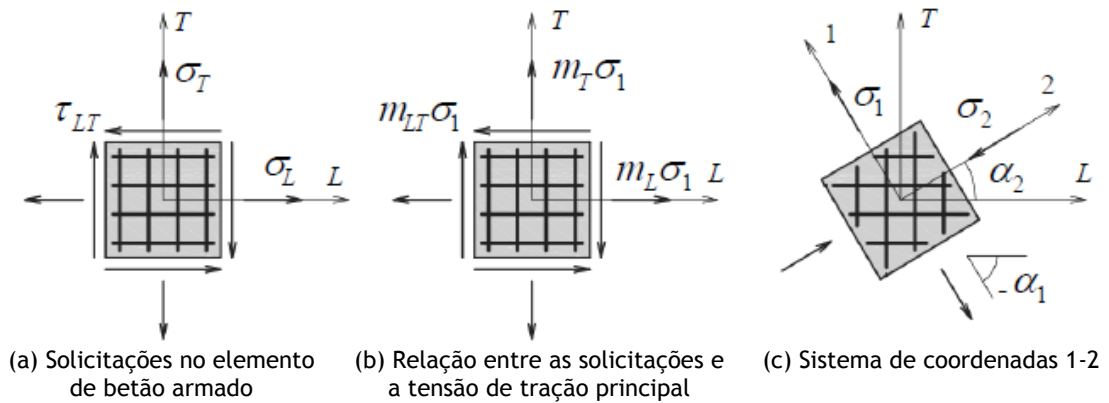


Figura 2.7 - Relação entre as solicitações e a tensão principal de tração no elemento (adaptado de Silva em 2016 [43]).

De acordo com o círculo de Mohr, a tensão principal de tração pode ser determinada através da Eq. 2.35:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_L + \sigma_T}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_L + \sigma_T}{2}\right)^2 + \tau_{LT}^2} \quad (2.35)$$

Segundo Hsu e Mo em 2010 [26], substituindo os coeficientes de proporcionalidade nas equações de equilíbrio, Eqs. 2.4-2.6, pode-se obter:

$$m_L \sigma_1 - \rho_L f_L = \sigma_d \cos^2(a_d) \quad (2.36)$$

$$m_T \sigma_1 - \rho_T f_T = \sigma_d \sin^2(a_d) \quad (2.37)$$

$$m_{LT} \sigma_1 = -\sigma_d \sin(a_d) \cos(a_d) \quad (2.38)$$

Multiplicando a Eq. 2.36 pela Eq. 2.37, elevando a Eq. 2.38 ao quadrado, e combinando os resultados, obtém-se a Eq. 2.39:

$$(m_L \sigma_1 - \rho_L f_L)(m_T \sigma_1 - \rho_T f_T) = (m_{LT} \sigma_1)^2 \quad (2.39)$$

A solução da Eq. 2.39 pode ser determinada através da Eq. 2.40 e dos respectivos coeficientes A' , B' e C' (Eqs. 2.41-2.43).

$$\sigma_1 = \frac{1}{2A'} \left(B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'} \right) \quad (2.40)$$

$$A' = m_L m_T - m_{LT}^2 \quad (2.41)$$

$$B' = m_L \rho_T f_T - m_T \rho_L f_L \quad (2.42)$$

$$C' = \rho_T f_T \rho_L f_L \quad (2.43)$$

A Eq. 2.40, apresentada por Hsu em 1993 [24], permite calcular a tensão σ_1 em função apenas dos coeficientes de proporcionalidade, taxas de armadura e tensões nos aços, para qualquer ponto estudado no comportamento carga-deformação da estrutura. Devido a isso, esta equação tem uma grande importância para o modelo.

2.4 Modelo de treliça elástico linear (MCTM)

Para iniciar o procedimento proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], é necessário efetuar uma estimativa inicial de ε_L e ε_T . Para isso, é utilizado um modelo de treliça elástico linear, denominado de *Mohr Compatibility Truss Model* (MCTM). Este modelo é aplicável para cargas de serviço e para carregamentos próximos do início de cedência das armaduras [26].

Tal como o RA-STM, o MCTM assenta nos mesmos três princípios da mecânica das estruturas. Para além disso, ambos os modelos utilizam as mesmas equações de equilíbrio e de compatibilidade, diferenciando-se apenas nas leis constitutivas. O MCTM não entra em conta com o efeito de amolecimento do betão e considera, tanto para o aço como para o betão, um comportamento elástico linear perfeito (Eq. 2.44 e 2.45). Na Eq. 2.45, E_c é o módulo de elasticidade do betão calculado segundo o EC2 [14] e de acordo com a Eq. 2.46. A resistência do betão à tração, tal como no RA-STM, também é desprezada. O MCTM também será utilizado como estimativa inicial para o novo algoritmo apresentado neste capítulo.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad (2.44)$$

$$\sigma_D = E_c \varepsilon_D \quad (2.45)$$

$$E_c = 22 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (2.46)$$

2.5 Procedimento de solução

2.5.1 Equações adicionais

Com recurso a relações trigonométricas e com as equações de compatibilidade da Eq. 2.7, é possível definir o ângulo a_D através das deformações nos sistemas L-T e R-D (Eqs. 2.47 e 2.48).

$$\sin^2(a_D) = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} = \frac{\varepsilon_R - \varepsilon_T}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad (2.47)$$

$$\cos^2(a_D) = \frac{\varepsilon_R - \varepsilon_L}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} = \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad (2.48)$$

Estas equações assumem uma função relevante no modelo RA-STM pois permitem eliminar o ângulo a_D das equações de equilíbrio, dando estabilidade numérica ao procedimento. Encontrada a solução, o ângulo a_D pode ser calculado com base na Eq. 2.49.

$$a_D = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D}}\right) \quad (2.49)$$

2.5.2 Equação não linear resolvida na estimativa inicial (MCTM)

Reescrevendo a Eq. 2.38 em ordem a σ_D e substituindo nas Eqs. 2.36 e 2.37, e resolvendo-as em ordem a f_L e f_T respetivamente, obtêm-se as Eqs. 2.50-2.52.

$$f_L = \frac{m_L + m_{LT} \cot(a_D)}{\rho_L} \sigma_1 \quad (2.50)$$

$$f_T = \frac{m_T + m_{LT} \tan(a_D)}{\rho_T} \sigma_1 \quad (2.51)$$

$$\sigma_D = \frac{-m_{LT}}{\sin(a_D) \cos(a_D)} \sigma_1 \quad (2.52)$$

Combinando as relações constitutivas elástico lineares (Eqs. 2.44 e 2.45) com as equações de equilíbrio (Eqs. 2.50-2.52), resultam as seguintes equações:

$$\varepsilon_L = \frac{m_L + m_{LT} \cot(a_D)}{E_s \rho_L} \sigma_1 \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_T = \frac{m_T + m_{LT} \tan(a_D)}{E_s \rho_T} \sigma_1 \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_D = \frac{-m_{LT}}{E_c \sin(a_D) \cos(a_D)} \sigma_1 \quad (2.55)$$

Com recurso à Eq. 2.49 é possível obter a equação não linear da estimativa inicial (Eq. 2.56), onde F_{MCTM} corresponde à função resíduo utilizada para a estimativa de a_D . As extensões são calculadas através das Eqs. 2.53-2.55.

$$F_{MCTM} = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D} - \tan^2(a_D) = 0 \quad (2.56)$$

Calculado o ângulo a_D , pode-se calcular as extensões ε_L , ε_T e ε_D segundo as Eqs. 2.53-2.55. Os valores destas serão utilizados como estimativa inicial para a solução do sistema de equações não lineares resolvido neste procedimento.

2.5.3 Sistema de equações não lineares (RA-STM)

Adicionando as Eqs. 2.36 e 2.37 com as Eqs. 2.48 e 2.47, respetivamente, e rearranjando as equações, obtém-se a função resíduo F_{RA-STM} (Eq. 2.57).

$$F_{RA-STM} = \begin{bmatrix} \sigma_D \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_L \sigma_1 + \rho_L f_L \\ \sigma_D \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_T \sigma_1 + \rho_T f_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Esta função representa o sistema de equações não lineares que é resolvido no procedimento, onde a não linearidade das equações advém das relações constitutivas utilizadas. As duas variáveis escolhidas para solucionar este sistema de equações são as duas extensões dos aços, ε_L e ε_T , definindo-se os seus valores por mil (10^{-3}) de forma a reduzir problemas de convergência. Deste modo, a grandeza dos valores de entrada e dos valores de saída permanece coerente evitando assim problemas numéricos relacionados com grandes discrepâncias na ordem de grandeza destes mesmos valores.

2.6 Algoritmo de solução

O algoritmo de solução é semelhante ao descrito por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43], sofrendo apenas algumas alterações no cálculo de alguns parâmetros, tendo sido estas mencionadas ao longo deste capítulo.

O problema a ser resolvido consiste em: para um dado valor de ε_D , encontrar a solução do sistema de duas equações não lineares e duas incógnitas da Eq. 2.57. Para o cálculo da estimativa inicial dos valores de ε_L e ε_T , necessários para iniciar o algoritmo, é utilizado o MCTM. As tensões de membrana aplicadas no elemento (σ_L , σ_T e τ_{LT}) são conhecidas e o objetivo é estimar o comportamento do painel aumentando-os proporcionalmente. Isto é feito variando o valor de ε_D desde zero até ε_{cu1} , resolvendo o sistema não linear de duas equações e duas incógnitas (Eq. 2.57) para cada caso.

Para iniciar o processo iterativo, calcula-se o estado aproximado de tensões/deformações para as solicitações $\mu\sigma_L$, $\mu\sigma_T$ e $\mu\tau_{LT}$, utilizando o MCTM. Com o objetivo de garantir que a estimativa seja próxima da linearidade, utiliza-se o fator redutor de escala $\mu = 10^{-3}$. Como o modelo é linear, é possível calcular os valores iniciais de ε_D , ε_L e ε_T com base no produto das deformações correspondentes ao estado de tensão σ_L , σ_T e τ_{LT} , obtidas resolvendo a Eq. 2.56, pelo fator redutor μ .

Para as próximas iterações, o valor de ε_D vai sendo incrementado utilizando como ponto inicial da solução do novo sistema de equações os resultados obtidos na iteração anterior. Este processo repete-se até serem calculados o número máximo de pontos especificado ($n_{máx} = 1000$) ou até o valor de ε_D ser superior aos limites impostos pelas Eqs. 2.19 e 2.20. Para a resolução eficiente dos sistemas de equações não lineares é utilizado a função *lsqnonlin*, presente no *toolbox* de otimização do MATLAB.

Com base neste procedimento o comportamento pré-pico e pós-pico do elemento é calculado. O algoritmo de solução é apresentado no fluxograma da Fig. 2.8 e o código em MATLAB encontra-se no Anexo I. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos no subcapítulo seguinte.

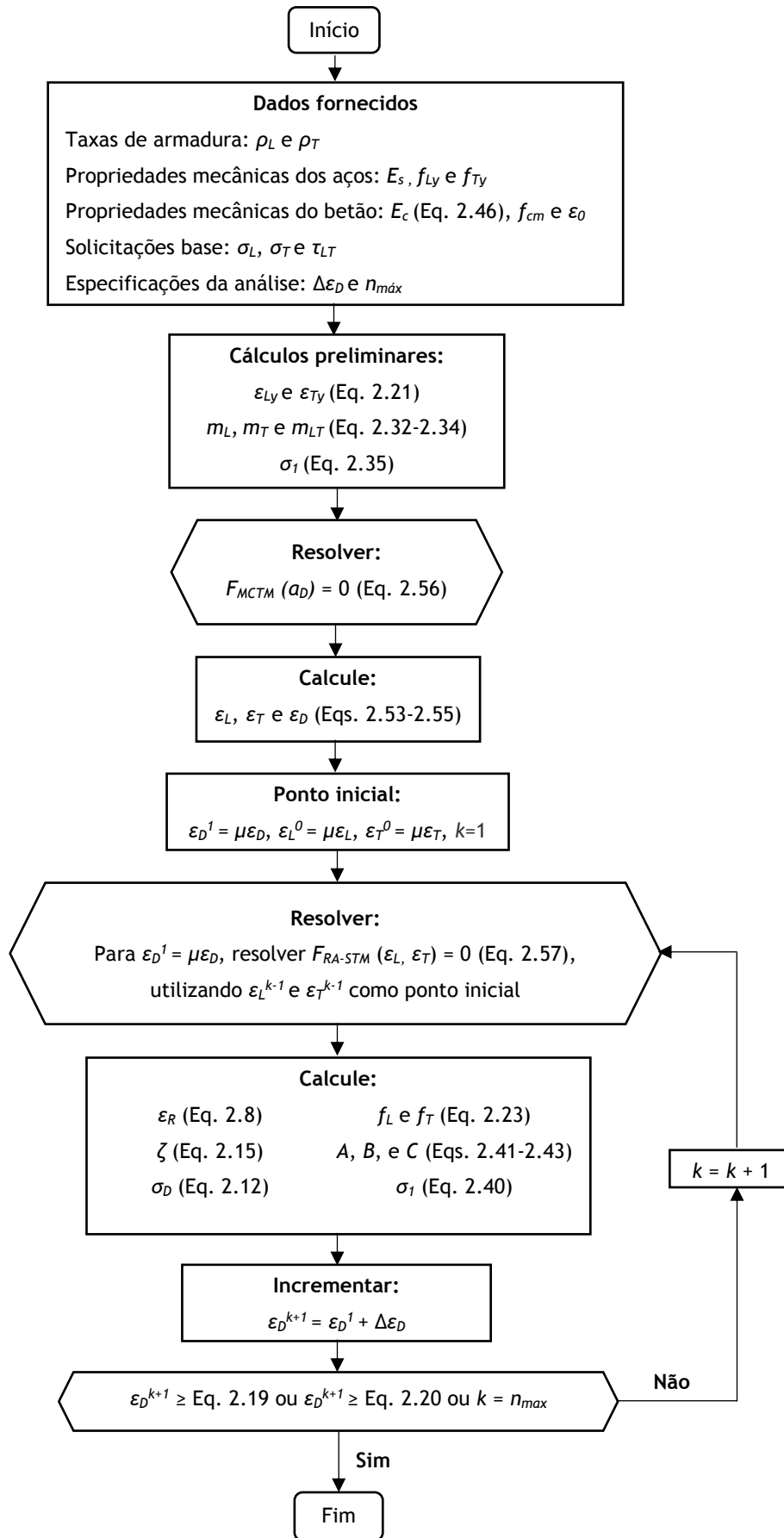


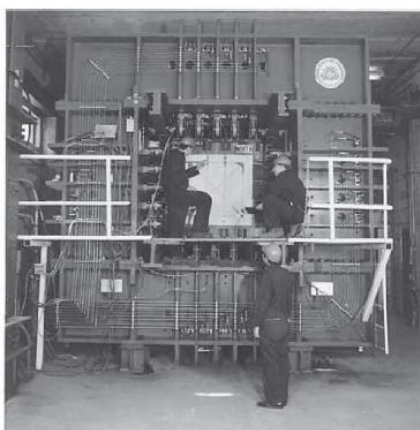
Figura 2.8 - Fluxograma do algoritmo de solução.

2.7 Comparação com resultados experimentais

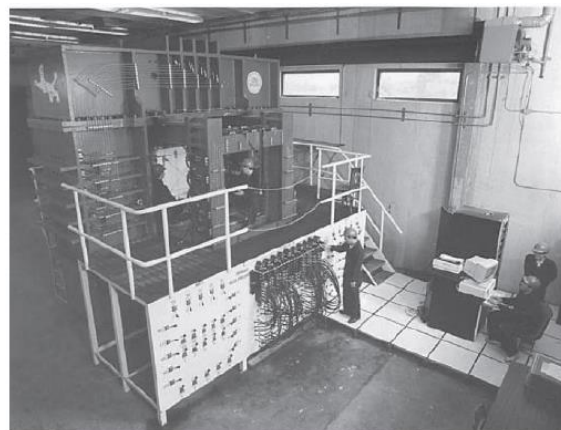
2.7.1 Descrição dos painéis ensaiados

Como forma de validação das alterações propostas ao modelo inicial, foram recolhidos na bibliografia os resultados de diversos ensaios de painéis de betão armado submetidos a tensões de membrana. Os dados experimentais de cada painel foram introduzidos no MATLAB com o objetivo de os comparar com a previsão do modelo. Em alguns casos, para além de resultados experimentais, existem resultados teóricos do comportamento dos painéis calculados através de outras versões do RA-STM.

Todos os painéis recolhidos têm em comum o facto de terem sido ensaiados no *Universal Panel Tester* (UPT) (Fig. 2.9), construído na Universidade de Houston, Hsu *et al.* em 1995 [29]. Este foi construído com o objetivo de estudar, de forma controlada, o comportamento de painéis e permitir assim aperfeiçoar as expressões utilizadas nos modelos de cálculo. As séries de painéis A e B foram ensaiadas por Pang e Hsu em 1995 [39], tendo como principal objetivo estudar o efeito da variação da taxa de armadura e o efeito da distribuição desta segundo a direção longitudinal e transversal. Zhang e Hsu em 1998 [49] ensaiaram painéis de betão de alta resistência, séries VA e VB, com o intuito de calibrar os modelos de cálculo para painéis de betão de alta resistência. Mais tarde, Hsu e Zhu em 2002 [28] referem que o painel A1 foi substituído pelo painel A1R ensaiado em 1997. Esta alteração é justificada pelos referidos autores devido a suspeitas de problemas de fabricação ou problemas relacionados com o próprio ensaio experimental do primeiro painel. Em resultado desta observação, no âmbito deste trabalho, o painel A1 foi substituído pelo painel A1R. No entanto, devido à falta de informação relativamente às propriedades mecânicas deste, foram adotadas as mesmas do painel A1 com exceção das taxas de armadura que foram fornecidas pelos autores [28].



(a) Vista norte



(b) Vista sul

Figura 2.9 - *Universal Panel Tester* [26].

Na Tabela 2.1 são apresentados todos os painéis recolhidos e as suas propriedades mecânicas. Os painéis ensaiados têm a mesma dimensão, 1,397 x 1,397 x 0,178 m, com a exceção do painel VA4 que, devido à dimensão das armaduras, teve de sofrer um aumento da sua espessura para 0,203 m. O UPT apenas consegue solicitar os painéis com forças normais de tração ou compressão ou ambas em simultâneo. Deste modo, de forma a simular o ensaio de um painel sujeito a um estado de tensão de corte puro ($\sigma_L = \sigma_T = 0$) foi necessário orientar a malha ortogonal de aço a 45° em relação à direção principal 2 (Fig. 2.10). Todos os painéis recolhidos têm esta disposição de armaduras.

Tabela 2.1 - Caracterização dos painéis recolhidos.

Painel	Betão		Aço						η^{**}
	f_{cm} (MPa)	ϵ_0 (mm/mm)	Direção Longitudinal			Direção Transversal			
			ρ_L	Armaduras	f_{Ly} (MPa)	ρ_T	Armaduras	f_{Ty} (MPa)	
VA0 [49]	98,8	0,00240	0,0060	10M@188 mm*	445	0,0060	10M@188 mm*	445	1,000
VA1 [49]	95,1	0,00245	0,0120	10M@94 mm*	445	0,0120	10M@94 mm*	445	1,000
VA2 [49]	98,2	0,00250	0,0239	15M@94 mm*	409	0,0239	15M@94 mm*	409	1,000
VA3 [49]	94,6	0,00245	0,0359	20M@94 mm*	455	0,0359	20M@94 mm*	455	1,000
VA4 [49]	103,1	0,00235	0,0524	25M@94 mm*	470	0,0524	25M@94 mm*	470	1,000
VB1 [49]	98,2	0,00250	0,0239	15M@94 mm*	409	0,0120	10M@94 mm*	445	0,546
VB2 [49]	97,6	0,00245	0,0359	20M@94 mm*	455	0,0120	10M@94 mm*	445	0,332
VB3 [49]	102,3	0,00235	0,0598	25M@94 mm*	470	0,0120	10M@94 mm*	445	0,189
VB4 [49]	96,9	0,00230	0,0180	20M@188 mm*	455	0,0060	10M@188 mm*	445	0,332
A1R***[28]	42,2	0,00213	0,0077	-	445	0,0077	-	445	1,000
A2 [39]	41,2	0,00210	0,0119	-	463	0,0119	-	463	1,000
A3 [39]	41,6	0,00194	0,0179	-	446	0,0179	-	446	1,000
A4 [39]	42,5	0,00220	0,0298	-	470	0,0298	-	470	1,000
B1 [39]	45,2	0,00215	0,0119	-	463	0,0060	-	445	0,480
B2 [39]	44,1	0,00235	0,0179	-	446	0,0119	-	463	0,690
B3 [39]	44,9	0,00215	0,0179	-	446	0,0060	-	445	0,332
B4 [39]	44,7	0,00205	0,0298	-	470	0,0060	-	445	0,189
B5 [39]	42,8	0,00220	0,0298	-	470	0,0119	-	463	0,394
B6 [39]	43,0	0,00220	0,0298	-	470	0,0179	-	446	0,570

* A especificação das dimensões das armaduras está no sistema de medida canadiano; ** $\eta = \frac{\rho_T f_{Ty}}{\rho_L f_{Ly}}$;

*** Propriedades mecânicas consideradas iguais às do painel A1 (f_{cm} , ϵ_0 , f_{Ly} e f_{Ty}).

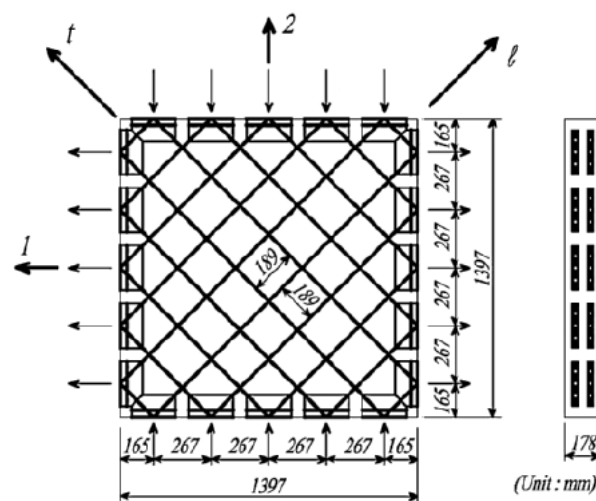


Figura 2.10 - Representação esquemática de um painel [49].

2.7.2 Previsões do procedimento proposto

Terminado o procedimento de cálculo, o algoritmo dá a possibilidade de representar graficamente os resultados. Através dos vários parâmetros calculados é possível representar cinco curvas tensão-deformação distintas: tensão e extensão de compressão no betão (σ_D - ε_D), tensão e extensão na armadura longitudinal (f_L - ε_L), tensão e extensão na armadura transversal (f_T - ε_T), tensão média nas armaduras e extensão de tração no betão ($\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ε_R), e tensão de corte e distorção (τ_{LT} - γ_{LT}). Seguidamente é apresentado um exemplo de cada uma dessas curvas. No Anexo II encontram-se todos os resultados obtidos.

Na Fig. 2.11 está representada a curva σ_D - ε_D do betão para o painel VA1 [49], calculada pelo procedimento, e a respetiva curva experimental. Esta série de painéis é a única onde estão disponíveis os resultados experimentais relativos à curva comportamental em estudo.

Na curva calculada pelo procedimento, numa primeira fase, observa-se um aumento da tensão de compressão acompanhado de um pequeno aumento da extensão, apresentando um comportamento praticamente linear. No momento em que as armaduras do painel começam a entrar em cedência é visível uma ligeira alteração da curva até atingir a tensão de pico. Após ser atingida a tensão máxima no betão observa-se um aumento brusco da extensão acompanhado de um ligeiro decréscimo da tensão de compressão, terminando a previsão assim que a extensão atinge os limites impostos no procedimento.

No caso da curva experimental, numa fase inicial, a tensão de compressão no betão aumenta rapidamente existindo uma ligeira extensão. Assim que a tensão atinge cerca de 4,4 MPa há um aumento repentino da extensão associado ao momento em que ocorre a fissuração do painel provocando uma ligeira perda de rigidez. Após isso, a tensão de compressão continua a aumentar até ocorrer a cedência das armaduras. A partir dessa zona, a tensão de compressão tende globalmente a diminuir à medida que extensão aumenta bruscamente.

Refere-se ainda que em virtude do modelo teórico não considerar a influência do betão tracionado na direção perpendicular à direção principal de compressão ($\sigma_R = 0$), o mesmo assume um estado plenamente fissurado desde o início do carregamento. Assim, o modelo não consegue reproduzir a transição entre os estados não fissurado e fissurado.

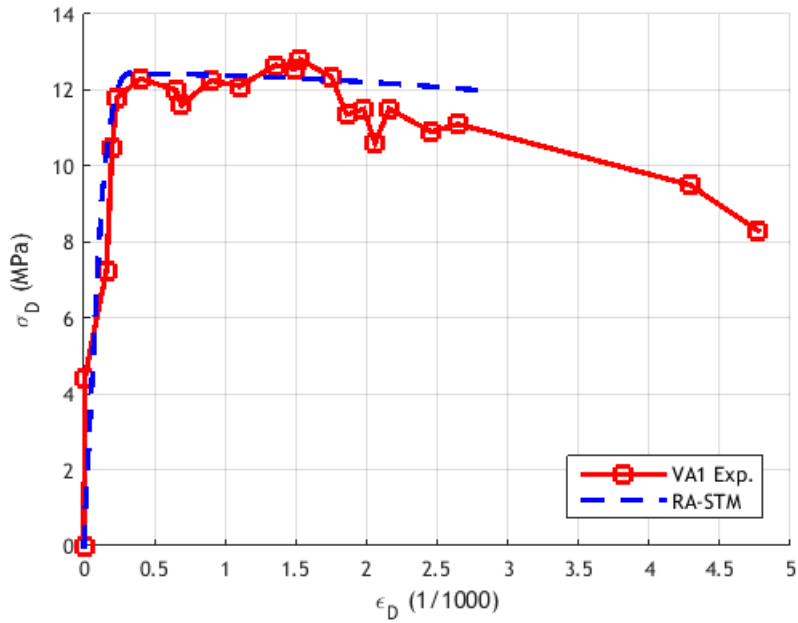


Figura 2.11 - Comparação das curvas σ_D - ϵ_D do painel VA1 [49].

A curva f_L - ϵ_L do painel A3 [39] está representada na Fig. 2.12. Como em ambas as direções, longitudinal e transversal, o comportamento do material aço é idêntico, visto se basearem na mesma lei constitutiva, apenas será apresentado um exemplo para uma das direções.

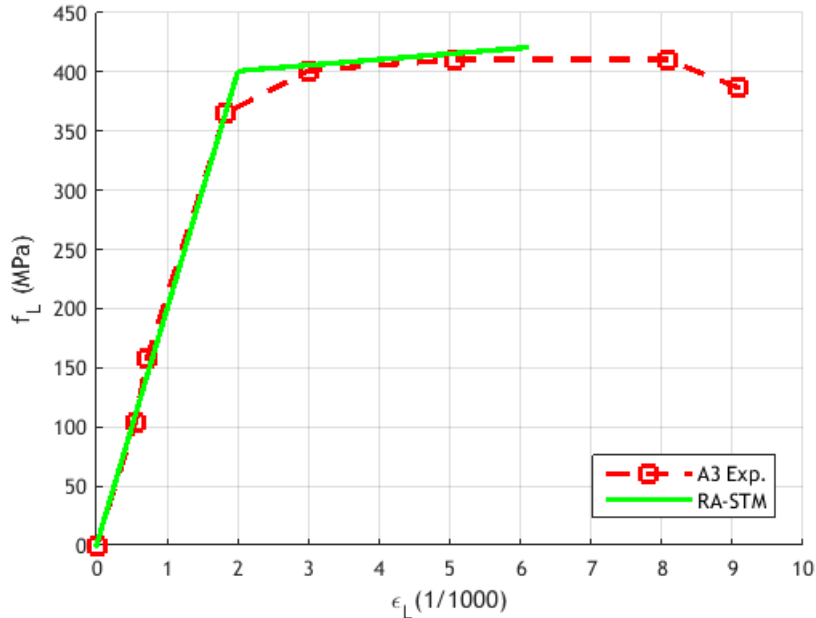


Figura 2.12 - Comparação das curvas f_L - ϵ_L do painel A3 [39].

Na curva calculada pelo modelo é visível um comportamento elástico-linear perfeito do aço até este atingir a tensão de cedência média, por volta dos 400 MPa. A partir desse ponto, a tensão no aço deixa de aumentar de forma acentuada, verificando-se grandes extensões plásticas. Nesta fase é visível um ligeiro aumento da tensão à medida que a armadura se continua a

deformar em resultado do enrijecimento do aço. Dada a boa aproximação entre a previsão do modelo e os resultados experimentais, o comportamento descrito anteriormente é válida para ambas as curvas.

Enquanto que na Fig. 2.12 está representada a curva $f_L-\epsilon_L$ do painel A3 [39], na Fig. 2.13 está representada a curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T - \epsilon_R$ do painel VA3 [49], que tem em conta as armaduras nas duas direções e a contribuição do betão. Desta forma, é facilmente observável que, comparativamente com a curva da Fig. 2.12, os valores da tensão no aço na Fig. 2.13 são bastante inferiores devido a tratarem-se de valores médios ao longo dos painéis e não referentes apenas a tensões num determinado ponto dos painéis. No entanto, o comportamento apresentado pela curva é semelhante ao descrito anteriormente.

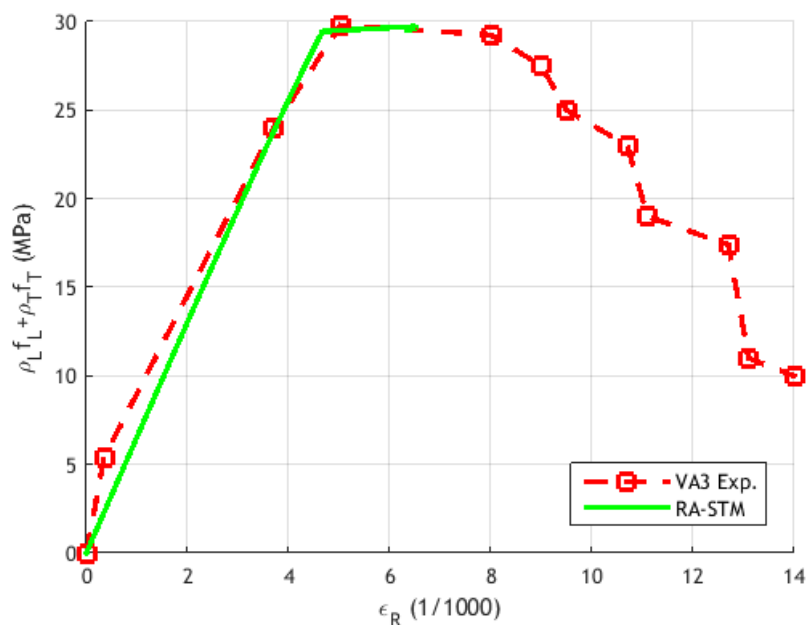


Figura 2.13 - Comparação das curvas $\rho_L f_L + \rho_T f_T - \epsilon_R$ do painel VA3 [49].

Na Fig. 2.14, para além da previsão do modelo e dos resultados experimentais, está também representada a curva teórica, calculada por Pang e Hsu em 1995 [39] a partir de outra versão do RA-STM, aquando dos ensaios experimentais. Na versão adotada para o cálculo teórico é contabilizada a resistência do betão à tração, contrariamente ao que acontece no modelo proposto. Deste modo, no início da curva teórica, é visível que o painel apresenta uma maior rigidez inicial comparativamente com a previsão do procedimento proposto. Após essa fase, as curvas tendem a convergir.

Após um aumento proporcional da tensão de corte e da distorção, são facilmente identificados, principalmente na curva teórica e na solução do procedimento, dois pontos distintos onde se observa duas perdas consecutivas de rigidez do painel. Esses pontos resultam do facto do painel B2 [39] ser armado assimetricamente ($\rho_L \neq \rho_T$) sendo esses dois pontos correspondentes à

cedência sucessiva das armaduras. Assim que a armadura com a menor taxa, neste caso a transversal, atinge a tensão de cedência, resulta uma perda de rigidez do painel traduzindo-se numa extensão mais acentuada. Após isso, a armadura longitudinal também entra em cedência, reduzindo ainda mais a rigidez do painel. Caso o painel fosse armado simetricamente ($\rho_L = \rho_T$), a curva apenas apresentaria um ponto referente à cedência das armaduras.

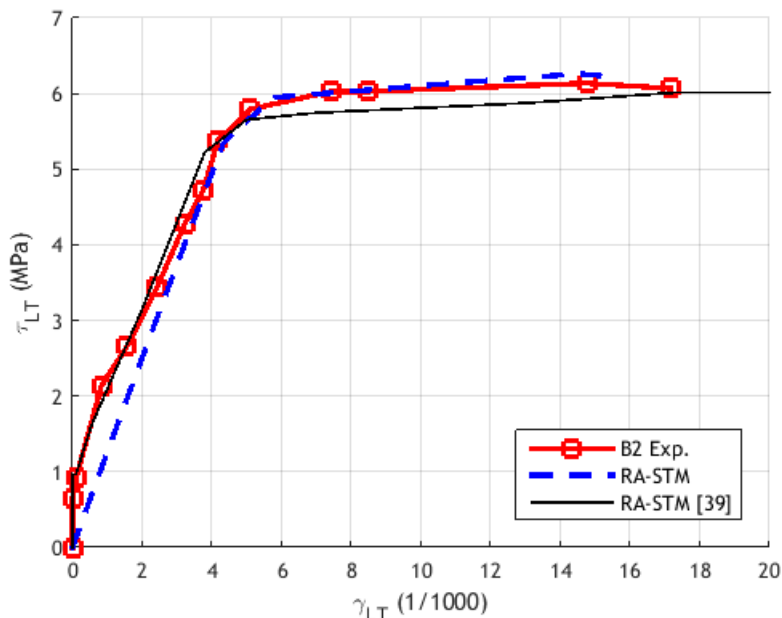


Figura 2.14 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} do painel B2 [39].

2.7.3 Comparação do comportamento dos painéis

Com o objetivo de comparar o comportamento dos diversos painéis de cada série e ter uma perspetiva global do comportamento de cada painel, em seguida são apresentados os resultados obtidos através das curvas τ_{LT} - γ_{LT} para cada série de painéis. Em cada uma das curvas estão assinalados os pontos onde as armaduras entram em cedência. Nos casos onde as taxas de armadura são iguais em ambas as direções, estas atingem a tensão de cedência para o mesmo valor de tensão e extensão, estando os respetivos pontos das curvas assinaladas com o marcador 'X'. Quando as taxas de armadura são diferentes, as armaduras entram em cedência em pontos distintos, sendo estes identificados com marcadores diferentes, designadamente um quadrado para as armaduras transversais e um círculo para as armaduras longitudinais. As respetivas taxas de armadura de cada painel estão indicadas na legenda de cada figura.

De uma forma geral, e como seria de esperar, observa-se em todas as séries de painéis (Figs. 2.16-2.19) que, à medida que as taxas de armadura aumentam, a rigidez do painel também aumenta. Em contrapartida, painéis com maiores taxas de armadura deformam-se menos após a cedência das armaduras, apresentando assim uma rotura tendencialmente frágil. Os painéis com menores taxas, após a cedência das armaduras, atingem deformações superiores sendo por isso mais dúcteis.

A série de painéis VA [49], representada na Fig. 2.15, é composta por cinco painéis de betão de alta resistência, armados simetricamente e sujeitos ao mesmo estado crescente de tensão de corte puro. A taxa de armadura de cada painel aumenta sucessivamente ao longo da série, ou seja, o VA0 é o painel com menores taxas de armadura e o VA4 é o painel com maiores taxas de armadura. Em consequência das maiores taxas de armadura, os painéis VA3 e VA4 atingem tensões tangenciais mais elevadas, sendo a rotura condicionada pelo betão à compressão. Em resultado disso, a curva $\tau_{LT}-\gamma_{LT}$ assemelha-se à lei constitutiva do betão no estado último comportamental. Por outro lado, nos painéis com menores taxas de armadura (VA0, VA1 e VA2), a rotura é condicionada pelas armaduras. Devido a isso, o seu comportamento assemelha-se à lei constitutiva do aço.

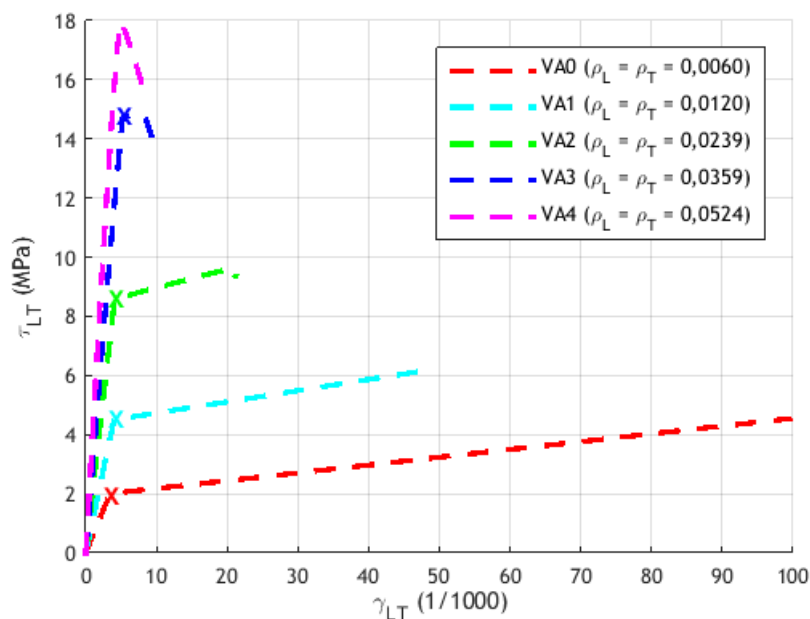


Figura 2.15 - Comparação das curvas $\tau_{LT}-\gamma_{LT}$ da série de painéis VA [49].

Na Fig. 2.16 está representada a série de painéis VB [49]. À semelhança da série VA, também esta série é composta por painéis de betão de alta resistência sujeitos ao mesmo estado de tensão de corte puro. No entanto, as taxas de armadura longitudinal e transversal são diferentes. Nesta série, o painel VB4 é o painel com menores taxas de armadura. Os painéis VB1, VB2 e VB3 têm a mesma taxa de armadura transversal, enquanto que a taxa de armadura longitudinal aumenta de VB1 até VB3. Ao contrário do que acontecia na série analisada anteriormente, nesta série, em resultado dos painéis terem taxas de armaduras diferentes nas duas direções, nos painéis VB4 e VB1 são visíveis dois pontos distintos referentes à zona de cedência das armaduras em cada uma das direções. Nestes painéis a rotura é condicionada pelas armaduras. Os painéis VB2 e VB3, em resultado de maiores taxas de armadura, suportam valores de tensão superiores sem que a armadura longitudinal chegue a entrar em cedência. Nestes casos, a rotura do painel ocorre por esgotamento da capacidade resistente do betão.

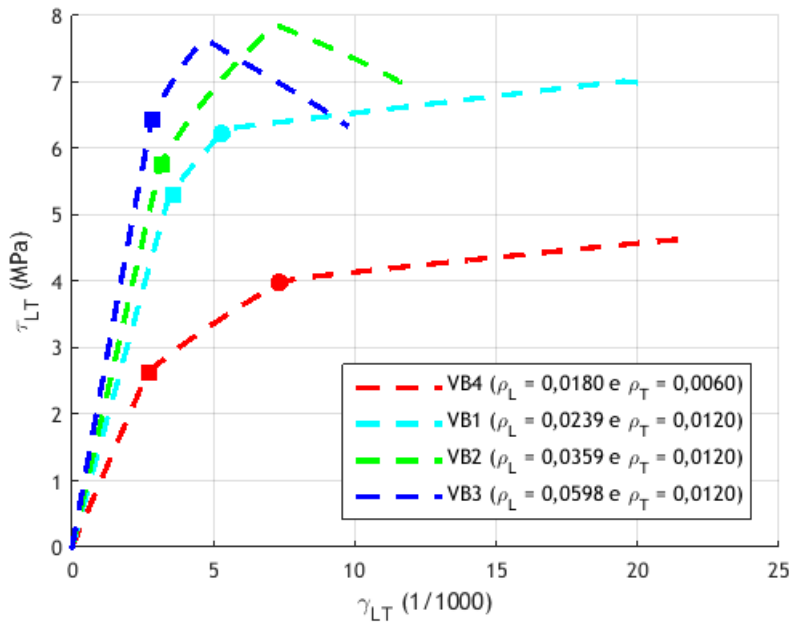


Figura 2.16 - Comparação das curvas $\tau_{LT}-\gamma_{LT}$ da série de painéis VB [49].

A série de painéis A [39][28], formada por quatro painéis de betão de resistência normal, armados simetricamente e submetidos a corte puro, está representada na Fig. 2.17. Esta série de painéis apresenta um comportamento semelhante à série VA. Contudo, o facto dos painéis desta série serem de betão de resistência normal, naturalmente, reduz as tensões de pico atingidas pelos mesmos, comparativamente aos painéis da série VA com taxas de armadura idênticas. Nos painéis A1R, A2 e A3 ambas as armaduras atingem a tensão de cedência condicionando assim o modo de rotura de cada um destes painéis. No caso do painel A4 a rotura do painel ocorre pelo betão, sem que as armaduras entrem em cedência.

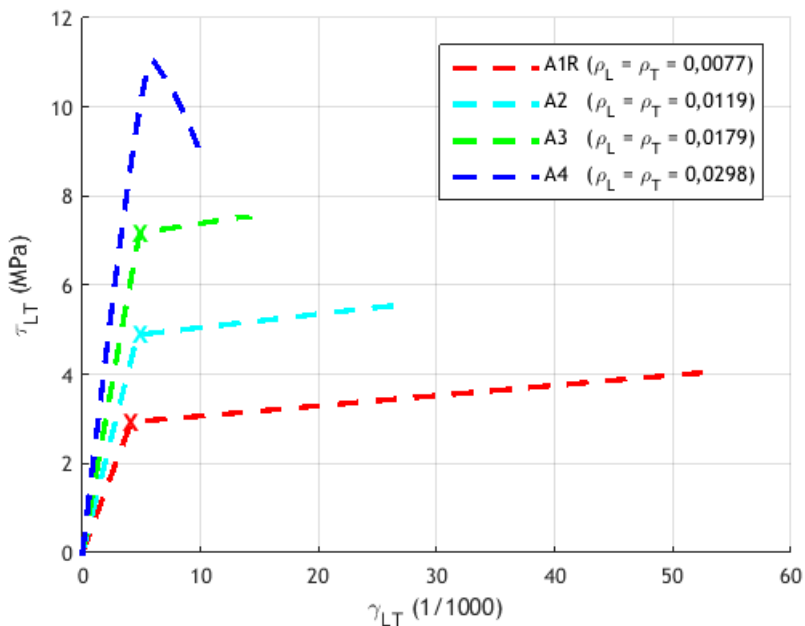


Figura 2.17 - Comparação das curvas $\tau_{LT}-\gamma_{LT}$ da série de painéis A [39][28].

Na Fig. 2.18 estão representados os painéis da série B [39]. Estes painéis, de betão de resistência normal, têm taxas de armaduras distintas em ambas as direções. Analisando as várias curvas é possível verificar que, de todos os painéis da série, os painéis B3 e B4 apresentam um comportamento muito semelhante, apesar do painel B4 possuir uma taxa de armadura longitudinal superior. Em virtude dessa característica, no caso do painel B4, apenas a armadura transversal entra em cedência enquanto que no painel B3 ambas as armaduras atingem a cedência. Contudo, ambos os painéis atingem um valor de tensão de pico muito semelhante. Apesar das diferenças de armaduras, a rotura de ambos os painéis é similar.

Outros painéis com um comportamento algo semelhante são os painéis B2 e B5. Apesar da diferença da taxa de armadura longitudinal, ambos os painéis atingem valores de tensões de pico algo semelhantes. Contudo, a rotura de cada painel ocorre de forma distinta. No caso do painel B2 o comportamento da curva assemelha-se à lei constitutiva do aço, indicando assim que a sua rotura é condicionada pelo mesmo. No caso do painel B5 verifica-se o contrário, sendo a rotura do painel condicionada mais pelo betão.

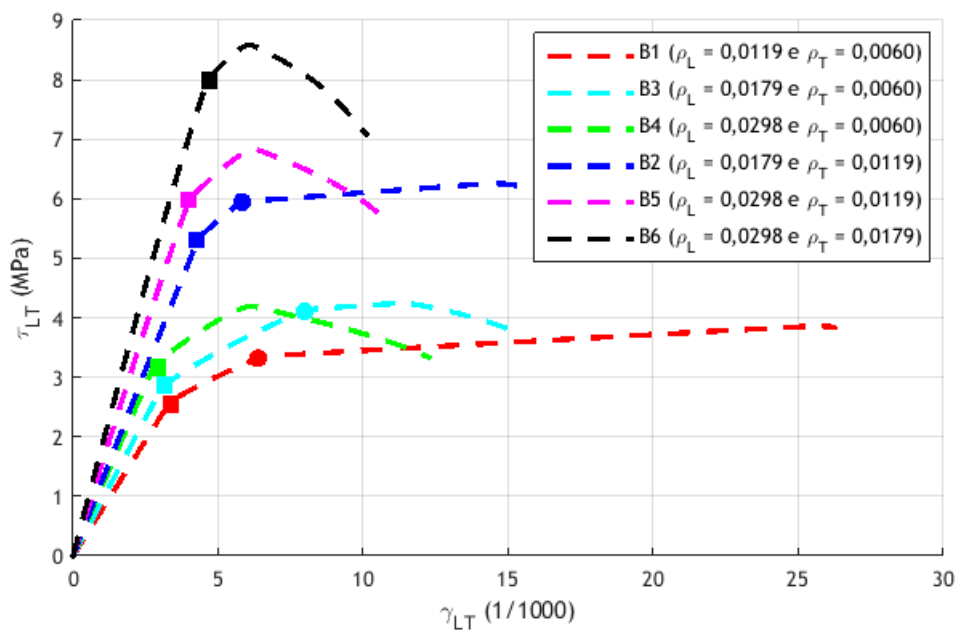


Figura 2.18 - Comparação das curvas τ_{LT} - γ_{LT} da série de painéis B [39].

2.7.4 Análise comparativa entre painéis

De forma a avaliar a proximidade das previsões obtidas a partir do novo procedimento de cálculo com as curvas experimentais, na Tabela 2.2 são apresentados os valores últimos (máximos), teóricos e experimentais, da tensão de corte e respetiva distorção ($\tau_{u,exp}$, $\tau_{u,th}$, $\gamma_{u,exp}$ e $\gamma_{u,th}$) para todos os painéis analisados. Nos casos onde se verifica a existência de dois ou mais valores de $\tau_{u,exp}$ iguais, é calculada a média aritmética dos valores de $\gamma_{u,exp}$ correspondentes. Para além destes, são também apresentadas as relações $\tau_{u,exp}/\tau_{u,th}$ e $\gamma_{u,exp}/\gamma_{u,th}$, para as quais foram calculadas a média, desvio padrão e coeficiente de variação (\bar{x} , s e cv , respetivamente).

Para esta análise, o painel VA0 não foi considerado em virtude de, segundo Zhang e Hsu em 1998 [49], o mesmo possuir taxas de armadura, em ambas as direções, inferiores à taxa considerada como sendo a mínima. O valor da taxa de armadura mínima, para este painel, foi determinado por Zhang em 1995 [48] como sendo igual a 0,0078, ou seja, superior aos 0,0060 do painel mencionado. O facto do painel referido possuir uma taxa de armadura insuficiente reflete-se no seu comportamento atípico experimentalmente observado (Anexo II).

De acordo com os resultados obtidos para a relação $\tau_{u,exp}/\tau_{u,th}$, verifica-se que os valores calculados pelo modelo são, em termos médios, próximos dos experimentais, $\bar{x} = 1,066$. O grau de dispersão dos resultados medido pelo coeficiente de correlação, $cv = 8,635\%$, é inferior a 10% o que, segundo vários autores (por exemplo [46]), constitui um valor aceitável.

Em relação a $\gamma_{u,exp}/\gamma_{u,th}$, observa-se que o modelo, para mais de metade dos painéis analisados, subestimou os valores da distorção, $\bar{x} = 1,129$, e verifica-se a uma grande dispersão, $cv = 32,965\%$. Estes resultados mostram que o modelo teórico tem maior dificuldade em prever corretamente as deformações últimas dos painéis.

Tabela 2.2 - Análise comparativa do RA-STM com os dados experimentais dos painéis analisados.

Painel	$\tau_{u,exp}$ (MPa)	$\tau_{u,th}$ (MPa)	$\tau_{u,exp}/\tau_{u,th}$	$\gamma_{u,exp}$ (1/1000)	$\gamma_{u,th}$ (1/1000)	$\gamma_{u,exp}/\gamma_{u,th}$
VA1 [49]	6,30	6,22	1,01	42,90	49,52	0,87
VA2 [49]	9,80	9,60	1,02	22,15	20,37	1,09
VA3 [49]	15,00	14,86	1,01	7,00	7,26	0,96
VA4 [49]	21,50	17,94	1,20	7,30	5,02	1,46
VB1 [49]	7,50	7,01	1,07	22,43	19,50	1,15
VB2 [49]	9,18	7,84	1,17	11,28	7,30	1,54
VB3 [49]	9,76	7,63	1,28	8,54	4,76	1,79
VB4 [49]	4,94	4,63	1,07	12,27	21,34	0,57
A1R [28]	3,78	4,03	0,94	23,09	52,43	0,44
A2 [39]	5,39	5,53	0,97	28,00	26,12	1,07
A3 [39]	7,58	7,53	1,01	9,95	13,63	0,73
A4 [39]	11,38	11,04	1,03	7,07	5,91	1,20
B1 [39]	3,97	3,86	1,03	26,12	25,61	1,02
B2 [39]	6,14	6,26	0,98	14,76	14,57	1,01
B3 [39]	4,36	4,24	1,03	10,13	11,25	0,90
B4 [39]	5,07	4,20	1,21	10,54	6,13	1,72
B5 [39]	7,19	6,83	1,05	9,36	6,26	1,49
B6 [39]	9,51	8,59	1,11	7,93	6,09	1,30
\bar{x}			1,066			1,129
s			0,092			0,372
cv			8,635%			32,965%

2.8 Conclusões preliminares

No presente capítulo foi apresentado o modelo RA-STM, desenvolvido por Pang e Hsu em 1995 [39] e Berlarbi e Hsu em 1994 [4] e 1995 [5], baseado no procedimento eficiente proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44] e por Silva em 2016 [43]. Com vista a melhorar a previsão do modelo, foram feitas algumas alterações que foram apresentadas e justificadas ao longo deste capítulo. De entre essas alterações a mais relevante foi a introdução de novas leis constitutivas para o betão e para o aço, bem como a alteração dos limites de deformação anteriormente impostos (critérios de rotura) [44] [43], permitindo assim determinar também o comportamento pós-pico sem ser necessário considerar a resistência ao corte do betão nem tão pouco o efeito de Poisson no estado pós-fissuração [26].

Como forma de validação das alterações introduzidas ao modelo, foram recolhidos na bibliografia dados experimentais de 19 painéis de betão armado sujeitos a corte puro. Posteriormente, esses dados foram comparados com a previsão do modelo tendo este apresentado bons resultados no geral, em particular para o comportamento último e para a capacidade resistente.

Para além dos bons resultados teóricos obtidos com o modelo utilizado, refere-se também a eficiência do mesmo em termos de esforço de cálculo. O tempo médio de processamento para o cálculo de mil pontos foi cerca de nove segundos, para um processador Intel® Core™ i7-2630QM @ 2.00GHz, o que demonstra a eficiência do procedimento.

CAPÍTULO 3 - CA-STM

3.1 Introdução

Uma das grandes dificuldades no âmbito da análise estrutural prende-se com o facto de, na maior parte dos casos, os elementos estruturais não estarem sujeitos apenas a um tipo de esforço (axial, transverso, flexão ou torção), mas sim a uma combinação destes. Em resultado desta combinação, a previsão do comportamento carga-deformação de um elemento estrutural torna-se bastante mais complexa devido à interação que ocorre entre os vários esforços e da forma como cada um deles solicita as secções.

Na tentativa de ultrapassar estas dificuldades, vários autores desenvolveram diversos modelos de análise. Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], a partir do modelo RA-STM, desenvolveram um novo modelo denominado de CA-STM (*Combined-Action Softened Truss Model*) capaz de prever o comportamento pré-pico de vigas de betão armado sujeitas a uma combinação de carregamentos. Para além do CA-STM, Greene em 2006 [15] desenvolveu ainda o modelo TS-STM (*Tension Stiffened Softened Truss Model*), tendo este resultado da incorporação da relação constitutiva do betão à tração no STM (*Softened Truss Model*), desenvolvido por Hsu e Mo em 1985 [25], melhorando assim a previsão do modelo para cargas de serviço.

Tendo como base o CA-STM, à semelhança do que fez para o RA-STM, Silva em 2016 [43] e Silva *et al.* em 2017 [45] desenvolveram um algoritmo em MATLAB melhorando o procedimento de solução e tornando-o mais eficiente, comparativamente com o procedimento original resolvido por tentativa e erro.

Este novo procedimento servirá de base para o estudo elaborado neste capítulo, onde é apresentado o modelo CA-STM e são propostas algumas alterações no seguimento do estudo realizado no Capítulo 2 desta dissertação. Contudo, apesar do referido modelo conseguir prever o comportamento carga-deformação de vigas de betão armado solicitadas a diferentes combinações de esforços [15][16][17][43][45], no âmbito desta dissertação apenas são estudadas vigas solicitadas à torção pura e também solicitadas à torção combinada com flexão.

3.2 Descrição do modelo

O modelo CA-STM calcula o comportamento carga-deformação de vigas de betão armado idealizando a secção real como a junção de quatro painéis, como ilustrado na Fig. 3.1. A convenção de sinais adotada pelo modelo também se encontra representada na referida figura.

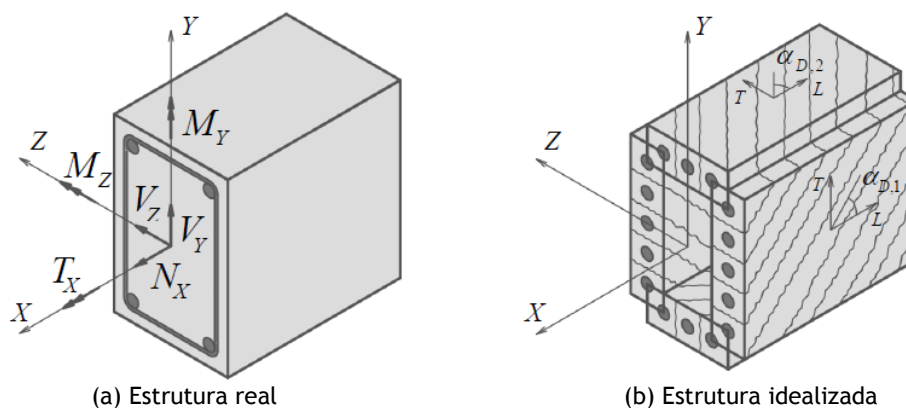


Figura 3.1 - Estrutura idealizada pelo CA-STM [43].

Os esforços aplicados na secção da viga são transmitidos aos painéis através de tensões normais, para o caso de flexão e esforço axial, ou através de tensões tangenciais no caso de torção e esforço transversal. A espessura de cada painel i ($t_{D,i}$) é definida como sendo igual à espessura efetiva do fluxo de tensões tangenciais atuante na respetiva face.

De acordo com a teoria de vigas de secção fechada de parede fina solicitadas à torção, o esforço solicitante é resistido através de um fluxo de tensões tangenciais constante que se desenvolve ao longo do perímetro da secção transversal. O CA-STM utiliza este mesmo princípio tanto para secções cheias como para secções vazadas, solicitadas à torção pura ou combinada com outros esforços. Desta forma, para o cálculo da resistência da secção o núcleo de betão é desprezado.

Ao ser submetida à torção, as faces de uma viga, originalmente planas, assumem a forma de um paraboloide hiperbólico provocando a flexão das escoras de betão (Lampert e Thürlimann em 1968 [32]). Este efeito é contabilizado pelo modelo através de um gradiente linear nas extensões principais de compressão nos painéis.

O mecanismo de resistência idealizado para cada painel é o RA-STM, apresentado no capítulo anterior, onde a malha de armadura resiste às tensões de tração e as escoras de betão, definidas pelas fissuras diagonais, às tensões de compressão. O efeito de ferrolho nas armaduras é desprezado e considera-se a existência de aderência perfeita entre o aço e o betão. O sistema de coordenadas principal adotado no RA-STM é o referencial R-D definido de acordo com as tensões principais no betão. O ângulo α_D , denominado de ângulo variável, relaciona o sistema de coordenadas L-T com R-D e define a orientação das fissuras (Fig. 3.1 (b)).

Em virtude da descontinuidade gerada pela fissuração, o comportamento do painel é diferenciado ao longo da sua extensão. De forma a contornar este aspeto, em vez de serem analisados pontos específicos do elemento, recorre-se ao conceito de tensões médias e extensões médias. Este conceito aplica-se tanto ao RA-STM como ao CA-STM. Relativamente à

convenção de sinais adotada, as tensões e extensões referentes à compressão são negativas e as referentes à tração são positivas.

A relação constitutiva do betão à compressão adotada no CA-STM já entra em conta com o efeito de amolecimento gerado pela tração perpendicular às escoras. Relativamente às armaduras, é adotada a curva elasto-plástica perfeita. No que diz respeito à relação constitutiva do betão à tração, com base em resultados experimentais, Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], incorporaram no modelo uma relação tensão (σ) - extensão (ϵ) média de modo a que o mesmo também fosse válido para as cargas de serviço.

3.2.1 Transformação da secção real para a secção idealizada no CA-STM

Para dar início ao procedimento de solução do CA-STM é necessário inicialmente adaptar o problema real ao problema idealizado pelo modelo. O CA-STM analisa uma viga de betão armado como sendo o resultado da junção de quatro painéis, dividindo as armaduras por cada um destes, tendo em conta a sua disposição real, e solicitando cada um dos painéis com tensões de membrana calculadas a partir das solicitações reais.

3.2.1.1 Geometria da secção

Na Fig. 3.2 é ilustrada a transformação da secção real de betão para a secção idealizada pelo modelo. Para proceder a esta transformação é necessário conhecer as dimensões b e h , que representam a base e a altura da secção, respetivamente, e a espessura real de cada parede t_i , onde o índice i simboliza a numeração adotada para cada parede (Fig. 3.2 (a)). Apesar de na Fig. 3.2 estar ilustrada uma secção vazada, o CA-STM também pode ser utilizado para secções cheias. Neste caso, admite-se que t_i é igual a metade da menor dimensão da secção original (Greene em 2006 [15]).

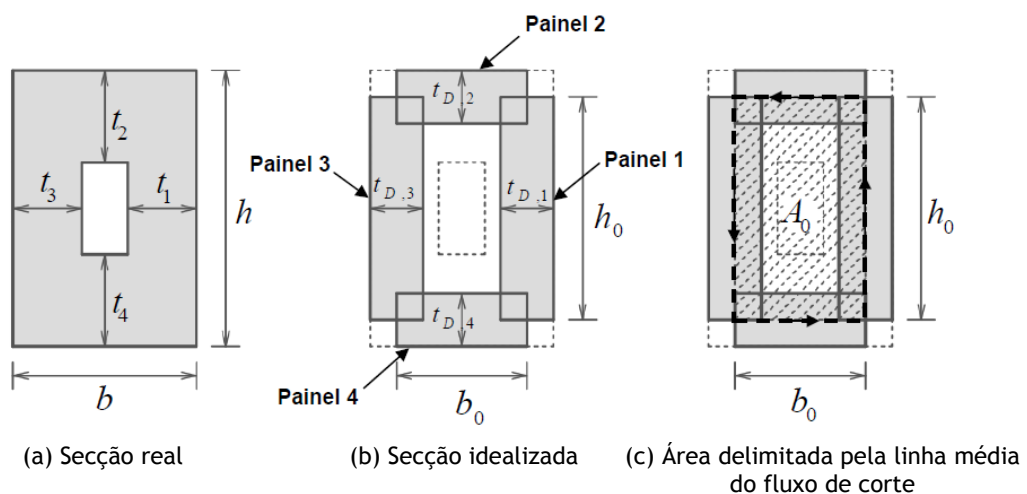


Figura 3.2 - Transformação da secção real [43].

Segundo Bredt em 1896 [11], vigas retangulares de parede fina resistem a esforços de torção através de um fluxo de tensões tangenciais constante ao longo do perímetro da secção. Com base na geometria desse fluxo, o CA-STM define as espessuras dos quatro painéis de betão idealizados ($t_{D,i}$), onde a linha do fluxo de corte coincide com os eixos dos painéis. A linha do fluxo pode ser definida com base nas dimensões b_0 e h_0 , cuja multiplicação resulta na área limitada pela referida linha, A_0 (Fig. 3.2 (c)).

Devido à geometria da secção, a largura dos painéis ($w_{0,i}$) para os painéis 2 e 4 é igual a b_0 e para os painéis 1 e 3 é igual a h_0 . Estas dimensões podem ser determinadas com base nas espessuras fictícias dos painéis ($t_{D,i}$) e da base (b) e altura (h) da secção original (Eqs. 3.47 e 3.48). A área transversal de cada elemento pode ser determinada a partir do produto entre $t_{D,i}$ e $w_{0,i}$.

3.2.1.2 Espessura do fluxo de tensões tangenciais

Uma viga de betão armado ao ser solicitada à torção, as faces do elemento, originalmente planas, assumem a forma de um parabolóide hiperbólico provocando assim flexão nas escoras de betão. Este efeito é considerado pelo CA-STM através de um gradiente linear nas extensões principais de compressão nos painéis.

Na Fig. 3.3 estão representadas os possíveis diagramas de extensões nas escoras, onde a parte tracionada é desprezada (Fig. 3.3 (a)). Quando $t_{D,i}$ é inferior a t_i , ou seja, quando a espessura idealizada para o painel é inferior à espessura real da respetiva parede, a extensão de compressão na face interna ($\epsilon_{A,i}$) tem valor nulo e a extensão de compressão na face externa ($\epsilon_{DS,i}$) é igual ao dobro da extensão principal de compressão ($\epsilon_{D,i}$). No caso da espessura efetiva do painel ser limitada pela espessura real da parede ($t_{D,i} = t_i$), o valor de $\epsilon_{A,i}$ pode ser nulo (Fig. 3.3 (b)) ou não (Figs. 3.3 (c) e (d)) dependendo da solicitação a que o elemento esteja sujeito.

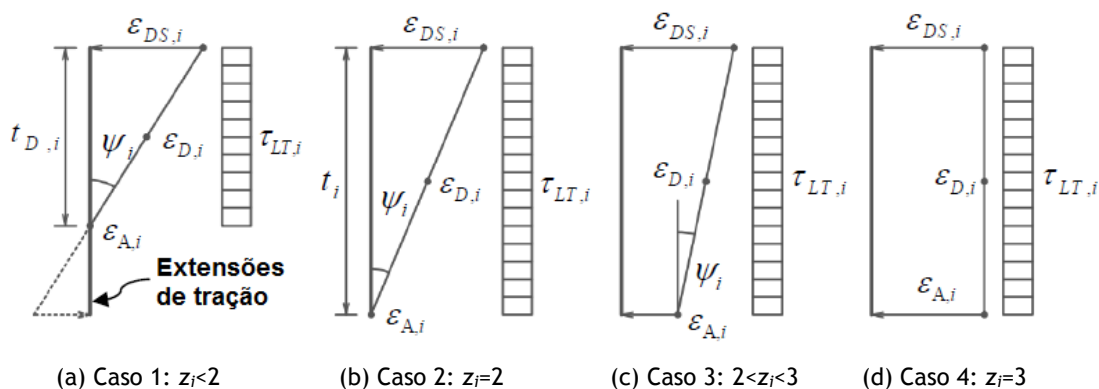


Figura 3.3 - Possíveis geometrias do diagrama de extensões nas escoras (adaptado de Silva em 2016 [43]).

Através da análise da Fig. 3.3 é possível deduzir a Eq. 3.1, onde $\epsilon_{D,i}$ é igual à média aritmética de $\epsilon_{DS,i}$ e $\epsilon_{A,i}$.

$$\varepsilon_{D,i} = \frac{\varepsilon_{DS,i} + \varepsilon_{A,i}}{2} \quad (3.1)$$

Para além desta expressão, tendo em conta os quatro casos ilustrados na Fig. 3.3 e a convenção de sinais adotada, é possível determinar a curvatura da escora em cada painel (ψ_i) com recurso à Eq. 3.2.

$$\psi_i = -\frac{\varepsilon_{DS,i} - \varepsilon_{A,i}}{t_{D,i}} \quad (3.2)$$

De forma a relacionar as variáveis $\varepsilon_{DS,i}$, $\varepsilon_{A,i}$, $\varepsilon_{D,i}$, $t_{D,i}$ e ψ_i com os diagramas de extensões ilustrados na Fig. 3.3, foi introduzido o parâmetro adimensional z_i , sendo esta variável entre 0 e 300 (Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17]). No entanto, Silva em 2016 [43] e Silva *et al.* em 2017 [45] propuseram que essa incógnita variasse entre 0 e 3 de forma a evitar grandes diferenças de ordem de grandeza com as restantes variáveis que poderiam resultar em problemas numéricos de convergência.

Quando z_i é menor que 2, $\varepsilon_{A,i}$ é nulo e $t_{D,i}$ é proporcional a z_i (Fig. 3.3 (a)) correspondendo ao caso 1. Já quando z_i é maior que 2 e menor que 3, ou seja, o caso 3 (Fig. 3.3 (c)), $\varepsilon_{A,i}$ varia linearmente com z_i e $t_{D,i}$ é igual a t_i . Quando o valor de z_i é igual a 3, as extensões permanecem constantes e os valores dos parâmetros $\varepsilon_{A,i}$ e $\varepsilon_{DS,i}$ são iguais, sendo este o caso 4. O comportamento descrito anteriormente para as variáveis $\varepsilon_{A,i}$ e $t_{D,i}$, em função de z_i , é dado pelas Eqs. 3.3 e 3.4.

$$\varepsilon_{A,i} = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < z_i \leq 2 \\ (z_i - 2)\varepsilon_{DS,i}, & \text{para } 2 < z_i \leq 3 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$t_{D,i} = \begin{cases} z_i \frac{t_i}{2}, & \text{para } 0 < z_i \leq 2 \\ t_i, & \text{para } 2 < z_i \leq 3 \end{cases} \quad (3.4)$$

Em virtude de z_i relacionar várias incógnitas do problema e ser adimensional, este parâmetro foi escolhido por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45] para ser uma das variáveis primárias utilizada no procedimento de solução.

3.2.1.3 Cálculo das áreas de aço equivalente para cada painel

Para além da transformação da secção real na secção idealizada pelo modelo é necessário também calcular as áreas de aço equivalentes para cada painel. No que diz respeito à armadura transversal, em virtude da geometria do problema, a área de armadura idealizada para cada um dos quatro painéis é a mesma da viga estudada (A_T/s).

Relativamente à armadura longitudinal, se a área de armadura estiver distribuída de forma simétrica, basta calcular a área total de armadura da secção real e dividi-la de igual forma pelos quatro painéis. Caso a distribuição seja assimétrica, o processo é mais complexo. Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], através do conceito de tensão uniforme nas armaduras longitudinais, propuseram uma forma racional de dividir a área de armadura longitudinal total (A_{LT}) pelos quatro painéis.

Na Fig. 3.4 está ilustrado o procedimento de distribuição da área de armadura longitudinal por cada painel. Na referida figura, a face inferior da viga apresenta uma maior área de armadura comparativamente com a face superior. Já as faces laterais têm a mesma área de armadura.

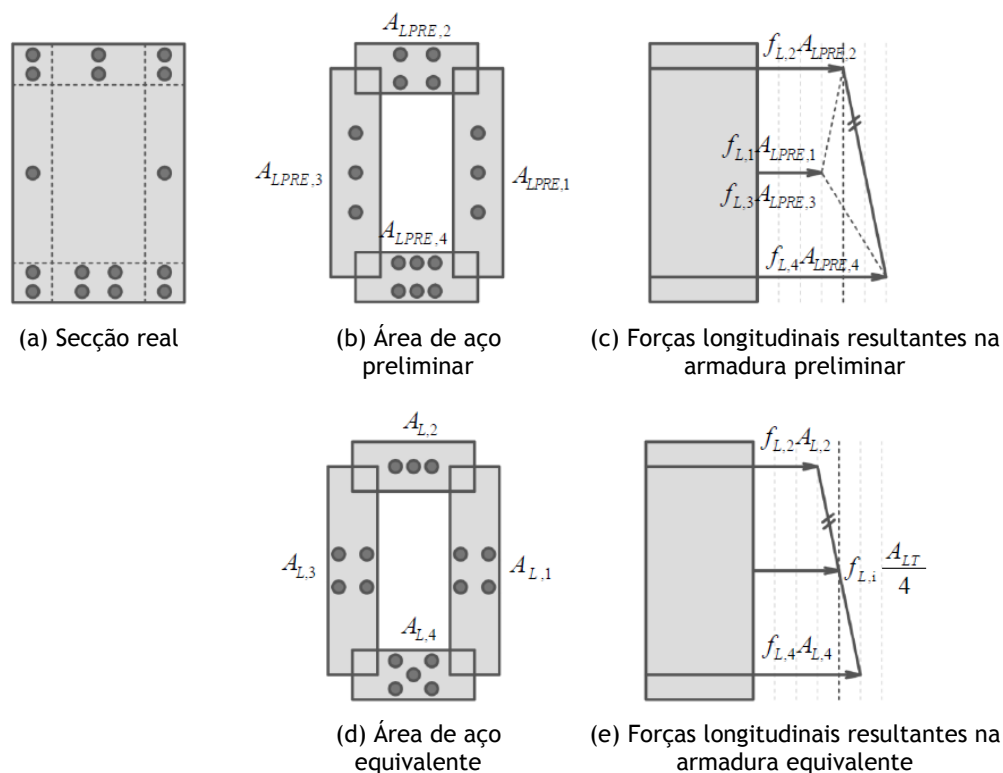


Figura 3.4 - Distribuição das armaduras longitudinais nos quatro painéis [43].

Antes de calcular a área de aço equivalente em cada painel ($A_{L,i}$), Fig. 3.4 (d), é necessário determinar a área de aço preliminar por elemento ($A_{LPRE,i}$). O processo para determinar $A_{LPRE,i}$ consiste em dividir a secção estudada segundo as áreas de influência de cada face (Fig. 3.4 (a)). Desta forma, as armaduras localizadas na zona central pertencem ao respetivo painel, enquanto que as armaduras localizadas nas zonas de sobreposição de painéis, ou seja, nos cantos da secção, são divididas de igual forma entre ambos os painéis adjacentes.

Conhecido o valor de $A_{LPRE,i}$ para cada painel, o procedimento calcula a armadura equivalente com base nos seguintes princípios:

- As armaduras longitudinais nos elementos idealizados apresentam a mesma tensão ($f_{L,i}$);
- As forças resultantes nas armaduras longitudinais dos quatro painéis ($f_{L,i}A_{L,i}$) têm uma relação linear entre si (3.4 (e));
- A diferença entre as resultantes dos painéis opostos é a mesma, tanto para a armadura equivalente ($A_{L,i}$) como para a armadura preliminar ($A_{LPRE,i}$).

De acordo com o primeiro e terceiro ponto, a armadura equivalente da face inferior ($A_{L,4}$) produz uma força resultante maior que a da face superior ($A_{L,2}$), assim como acontece com $f_{L,4}A_{LPRE,4}$ e $f_{L,2}A_{LPRE,2}$. Por outro lado, de acordo com o segundo ponto, as forças resultantes nas faces laterais ($f_{L,1}A_{L,1}$ e $f_{L,3}A_{L,3}$) são iguais à média das forças resultantes na face superior e inferior, que corresponde a um quarto da força resultante total na armadura longitudinal dos painéis ($f_{L,i}A_{LT}/4$), como ilustra a Fig. 3.4 (e).

Seguindo o raciocínio apresentado e desconsiderando $f_{L,i}$, em virtude de se assumir que este é igual nos quatro painéis, é possível obter a Eq. 3.5, onde a área de armadura equivalente em cada painel ($A_{L,i}$) é igual a um quarto da área total de armadura ($A_{LT}/4$), acrescida ou subtraída da metade da diferença entre as áreas de armadura preliminar do respetivo elemento e do elemento oposto a ele.

$$A_{L,1} = \frac{A_{LT}}{4} + \left(\frac{A_{LPRE,1} - A_{LPRE,3}}{2} \right) \quad (3.5a)$$

$$A_{L,2} = \frac{A_{LT}}{4} + \left(\frac{A_{LPRE,2} - A_{LPRE,4}}{2} \right) \quad (3.5b)$$

$$A_{L,3} = \frac{A_{LT}}{4} + \left(\frac{A_{LPRE,3} - A_{LPRE,1}}{2} \right) \quad (3.5c)$$

$$A_{L,4} = \frac{A_{LT}}{4} + \left(\frac{A_{LPRE,4} - A_{LPRE,2}}{2} \right) \quad (3.5d)$$

No caso de dois painéis opostos apresentarem a mesma área de armadura preliminar, a armadura equivalente em ambos será igual a um quarto da armadura longitudinal total. Desta forma, se a armadura da secção estiver simetricamente disposta o procedimento divide de igual forma a área de armadura total pelos quatro painéis.

3.2.1.4 Transformação das solicitações reais em esforços de membrana

Definida a geometria da secção e as áreas de aço equivalentes em cada elemento, é necessário calcular os esforços membrana a partir das solicitações reais na estrutura.

3.2.1.4.1 Esforços tangenciais

O CA-STM considera que as secções idealizadas resistem ao esforço transversal e ao momento torsor através de fluxos de tensões tangenciais ao longo dos painéis. Na Fig. 3.5 é apresentada a convenção de sinais adotada, onde as solicitações atuantes no sentido anti-horário são consideradas positivas.

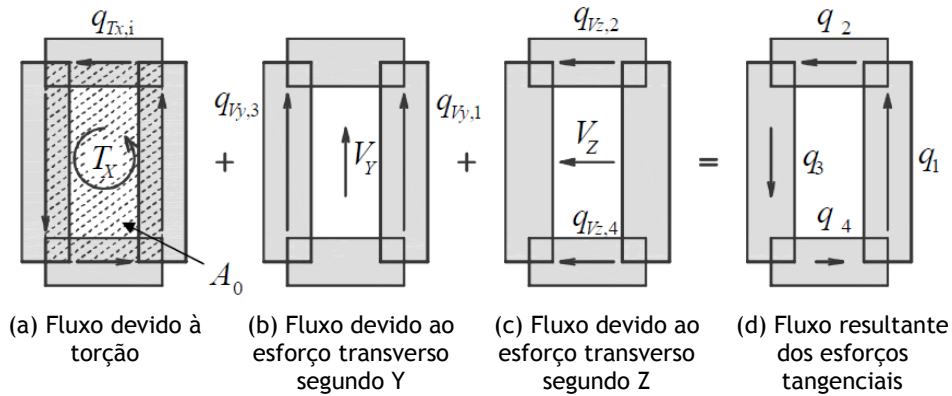


Figura 3.5 - Fluxos de tensões tangenciais resultantes dos esforços tangenciais [43].

O momento torsor (T_x), aplicado na secção, gera um fluxo de tensões tangenciais ($q_{T,i}$) que pode ser determinado de acordo com a Eq. 3.6 (fórmula de Bredt), onde o parâmetro A_0 representa a área limitada pela linha do fluxo (Fig. 3.5 (a)).

$$q_{T,i} = \frac{T_x}{2A_0} \quad (3.6)$$

Relativamente aos esforços transversos (V_Y e V_Z), o modelo considera que, dos quatro painéis que constituem a secção, apenas os dois elementos paralelos ao sentido do carregamento contribuem para a resistência da secção (Fig. 3.5 (b) e (c)). Ou seja, para uma solicitação V_Y apenas são solicitados os painéis 1 e 3, enquanto que para uma solicitação V_Z apenas são solicitados os painéis 2 e 4. Os fluxos de tensões tangenciais ($q_{V_y,1}$, $q_{V_z,2}$, $q_{V_y,3}$ e $q_{V_z,4}$) resultantes dos esforços transversos, V_Y e V_Z , podem ser determinados de acordo com as Eqs. 3.7 e 3.8.

$$q_{V_y,1} = q_{V_y,3} = \frac{V_Y}{2h_0} \quad (3.7)$$

$$q_{V_z,2} = q_{V_z,4} = \frac{V_Z}{2b_0} \quad (3.8)$$

Em virtude do modelo considerar uma distribuição constante da tensão tangencial nos painéis, tanto para a torção como para o esforço transversal, é possível obter o fluxo total de tensões tangenciais (q_i) apenas com base na soma destas duas parcelas, como demonstra a Eq. 3.9 e a Fig. 3.5 (d).

$$q_1 = \frac{T_x}{2A_0} + \frac{V_y}{2h_0} \quad (3.9a)$$

$$q_2 = \frac{T_x}{2A_0} + \frac{V_z}{2b_0} \quad (3.9b)$$

$$q_3 = \frac{T_x}{2A_0} - \frac{V_y}{2h_0} \quad (3.9c)$$

$$q_4 = \frac{T_x}{2A_0} - \frac{V_z}{2b_0} \quad (3.9d)$$

Conhecendo o fluxo total de tensões tangenciais (q_i) e a espessura de cada painel ($t_{D,i}$), é possível calcular a tensão tangencial resultante em cada elemento ($\tau_{LT,i}$) através da Eq. 3.10.

$$\tau_{LT,i} = \frac{q_i}{t_{D,i}} \quad (3.10)$$

3.2.1.4.2 Esforços normais

O CA-STM considera que as secções idealizadas resistem ao esforço axial e ao momento fletor, através de tensões normais uniformemente distribuídas na face de cada painel ($\sigma_{L,i}$). Na Fig. 3.6 está ilustrada uma representação esquemática das tensões normais resultantes nos painéis 2 e 4, em função de um momento fletor segundo o eixo Z (M_Z) e de um esforço axial (N_X).

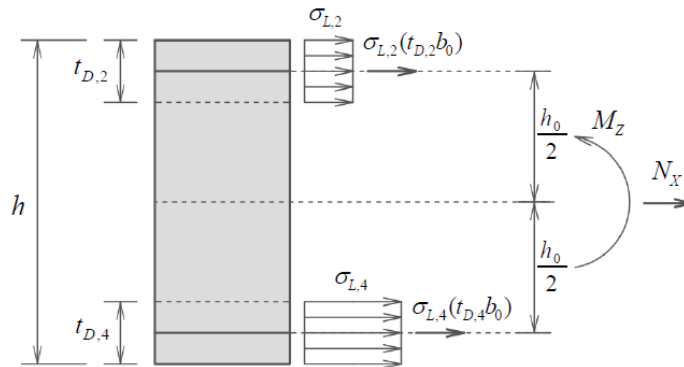


Figura 3.6 - Momento resultante segundo Z devido à solicitações nos painéis 2 e 4 [43].

De acordo com a referida figura é possível deduzir as Eqs. 3.11 e 3.12, que representam os momentos resultantes, M_Y e M_Z , em função das tensões normais nos painéis.

$$M_Y = [\sigma_{L,3}(t_{D,3}h_0) - \sigma_{L,1}(t_{D,1}h_0)] \frac{b_0}{2} \quad (3.11)$$

$$M_Z = [\sigma_{L,4}(t_{D,4}b_0) - \sigma_{L,2}(t_{D,2}b_0)] \frac{h_0}{2} \quad (3.12)$$

De forma semelhante, também o esforço axial atuante na secção (N_x) pode ser calculado através da soma das contribuições dos quatro painéis (Eq. 3.13).

$$N_x = \sigma_{L,1}(t_{D,1}h_0) + \sigma_{L,2}(t_{D,2}b_0) + \sigma_{L,3}(t_{D,3}h_0) + \sigma_{L,4}(t_{D,4}b_0) \quad (3.13)$$

3.2.2 Equações de equilíbrio e de compatibilidade dos painéis

Em consequência do mecanismo de resistência adotado para os painéis pelo CA-STM ser o mesmo do utilizado no RA-STM, as equações de equilíbrio e de compatibilidade em ambos os modelos são praticamente as mesmas, ou seja, as Eqs. 3.14-3.18 correspondem às Eqs. 2.3, 2.9 e 2.8.

$$\sigma_{L,i} = \sigma_{D,i} \cos^2(a_{D,i}) + \sigma_{R,i} \sin^2(a_{D,i}) + f_{L,i} \left(\frac{A_{L,i}}{t_{D,i}\omega_{0,i}} \right) \quad (3.14)$$

$$\sigma_{T,i} = \sigma_{R,i} \cos^2(a_{D,i}) + \sigma_{D,i} \sin^2(a_{D,i}) + f_{T,i} \left(\frac{A_T}{t_{D,i}s} \right) \quad (3.15)$$

$$\tau_{LT,i} = (\sigma_{R,i} - \sigma_{D,i}) \sin(a_{D,i}) \cos(a_{D,i}) \text{sinal}(q_i) \quad (3.16)$$

$$\gamma_{LT,i} = 2(\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}) \sin(a_{D,i}) \cos(a_{D,i}) \text{sinal}(q_i) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{T,i} = \varepsilon_{R,i} + \varepsilon_{D,i} - \varepsilon_{L,i} \quad (3.18)$$

As Eqs. 3.14 e 3.15 representam o equilíbrio das tensões de membrana longitudinais ($\sigma_{L,i}$) e transversais ($\sigma_{T,i}$) para cada um dos painéis, onde os termos $(A_{L,i}/t_{D,i}\omega_{0,i})$ e $(A_T/t_{D,i}s)$ correspondem às taxas de armadura longitudinal ($\rho_{L,i}$) e transversal ($\rho_{T,i}$), respetivamente. Em virtude do modelo admitir que não ocorre a transferência de esforços entre os painéis através de tensões transversais ($\sigma_{T,i}$), esta parcela é nula (Fig. 3.1 (a)). Este aspeto será comentado posteriormente. Os parâmetros $\sigma_{D,i}$ e $\sigma_{R,i}$ representam, respetivamente, a tensão principal de compressão e de tração no betão, enquanto que $f_{L,i}$ e $f_{T,i}$ retratam a tensão na armadura longitudinal e transversal, respetivamente. O parâmetro s define o espaçamento da armadura transversal. O ângulo definido entre a direção principal de compressão no betão e o eixo longitudinal é $a_{D,i}$.

Relativamente à Eq. 3.16, esta traduz o equilíbrio das tensões tangenciais ($\tau_{LT,i}$) e a Eq. 3.17 a compatibilidade das distorções no painel ($\gamma_{LT,i}$). As deformações $\varepsilon_{R,i}$ e $\varepsilon_{D,i}$ retratam as extensões principais de tração e de compressão no betão. De modo a garantir que os sinais de $\tau_{LT,i}$ e $\gamma_{LT,i}$ permaneçam iguais ao do fluxo de tensões tangenciais em cada painel (q_i), nas respetivas equações, aparece o termo $\text{sinal}(q_i)$. Para além disso, as tensões calculadas de acordo com a Eq. 3.16 têm de ser compatíveis com as calculadas a partir da Eq. 3.10.

Por último, a Eq. 3.18, também conhecida como o primeiro princípio da invariância, relaciona quatro variáveis do problema de forma simples e coesa tendo por isso grande relevância para o procedimento. Os parâmetros $\varepsilon_{T,i}$ e $\varepsilon_{L,i}$ definem, respetivamente, as extensões transversais e longitudinais nas armaduras.

O sistema de coordenadas adotado para cada painel é definido como positivo quando a direção transversal do painel coincide com a direção do fluxo de tensões tangenciais, provocado por um momento torsor positivo (anti-horário), Fig. 3.5 (a). Relativamente à direção longitudinal do painel, esta considera-se positiva quando é paralela ao eixo da viga. (Fig. 3.1 (b)).

3.2.3 Relações constitutivas dos materiais

3.2.3.1 Betão à compressão

Tendo por base a análise feita e os resultados obtidos no Capítulo 2 desta dissertação, a relação constitutiva do betão à compressão utilizada por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] para o CA-STM é substituída pela mesma que foi adotada no RA-STM, ou seja, a relação proposta por Zhu et al. em 2001 [50] (Eq. 2.12). De forma semelhante, também o coeficiente de amolecimento (ζ) é substituído pelo proposto por Zhang e Hsu em 1998 [49] (Eqs. 2.15-2.18), sendo este aplicado tanto às tensões como às extensões.

Com o objetivo de simplificar o modelo, em vez de se considerar um diagrama de tensões não uniforme na escora de betão, resultante da curva σ_D - ε_D (Eq. 2.12), é considerado um diagrama de tensões médio calculado a partir da Eq. 3.19.

$$\sigma_{D,i} = k_{D,i} \zeta_i f_c' \quad (3.19)$$

O parâmetro $k_{D,i}$ representa a relação entre a tensão média e a tensão de pico na escora de betão para cada painel e é obtido através da integração da curva σ_D - ε_D (Eq. 2.12), resultando a Eq. 3.20. O parâmetro f_c' representa a tensão de compressão uniaxial resistente do betão.

$$k_{D,i} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{DS,i}}{\zeta \varepsilon_0} - \frac{(\varepsilon_{DS,i})^2}{3(\zeta \varepsilon_0)^2}, & \text{para } \frac{\varepsilon_{DS,i}}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1 \\ 1 - \frac{\zeta \varepsilon_0}{3\varepsilon_{DS,i}} - \frac{(\varepsilon_{DS,i} - \zeta \varepsilon_0)^3}{3\varepsilon_{DS,i}(4\varepsilon_0 - \zeta \varepsilon_0)^2}, & \text{para } \frac{\varepsilon_{DS,i}}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Para além disso, à semelhança do que foi feito no Capítulo 2, é ainda adicionado ao procedimento a Eq. 2.20 referente ao cálculo da extensão última de compressão do betão (ε_{cu1}), de acordo com o EC2 [14], para betões com classes de resistência superiores ou iguais a 50 MPa. A referida equação é adotada como critério de paragem para vigas onde se verifique esta condição, limitando assim a extensão de compressão máxima (ε_{DSMAX}) admitida na escora. No caso de classes de betões inferiores a 50 MPa, admite-se que ε_{DSMAX} é igual a 3,5‰ (Eq. 2.19),

sendo este o valor fixado pelo EC2 [14] para a extensão última convencional do betão para efeitos de cálculo.

3.2.3.2 Betão à tração

Como forma de simplificação dos modelos de cálculo, por vezes, a resistência do betão à tração é desprezada, como por exemplo no modelo RA-STM apresentado no Capítulo 2. Apesar desta simplificação ter pequena influência na previsão da resistência do elemento, o mesmo não se verifica na previsão do comportamento global carga-deformação, sobretudo para baixos níveis de carga. Devido a isso, torna-se importante considerar a resistência do betão à tração para permitir calcular a resposta da estrutura também para cargas de serviço.

A curva σ - ϵ do betão à tração é definida com base em dois comportamentos distintos, antes e depois da fissuração. Antes do elemento atingir a tensão de fissuração do betão (f_{cr}), a curva apresenta um comportamento linear. Após a fissuração, a tensão de tração do betão vai diminuindo enquanto que a extensão de tração aumenta (Fig. 3.7).

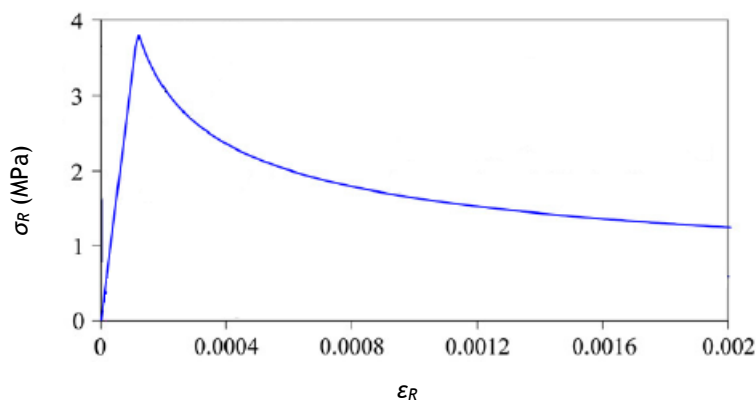


Figura 3.7 - Relação constitutiva do betão à tração (adaptado de Jeng e Hsu em 2009 [31]).

Greene em 2006 [15], com o objetivo de melhorar a previsão do modelo STM, desenvolveu o modelo TS-STM (*Tension Stiffened Softened Truss Model*) onde incorporou a relação constitutiva do betão à tração. Com base em dados experimentais de vigas solicitadas à torção pura, o referido autor propôs três funções distintas para caracterizar o comportamento pós-fissuração do betão tracionado (linear, quadrática e exponencial), permitindo a possibilidade de optar por aquela que melhor se adaptasse ao problema. Posteriormente, estas relações constitutivas foram adotadas também para o CA-STM [15][16][17].

No entanto, na versão do CA-STM proposta neste trabalho é adotada a relação constitutiva do betão à tração proposta por Jeng e Hsu em 2009 [31] e representada na Fig. 3.7 (Eqs. 3.21 e 3.22). O valor da extensão de fissuração do betão (ϵ_{cr}), apresentada na Eq. 3.22, foi calibrado pelos autores para vigas de secção cheia solicitadas à torção pura, tendo este sido incrementado em 45% relativamente ao proposto por Belarbi e Hsu em 1994 [4]. Bernardo *et al.* em 2013 [10]

verificaram que, para o caso de secções vazadas, o valor de ε_{cr} apresentado anteriormente sobrestimava o momento torsor de fissuração. Por isso, e com base nos resultados obtidos, os referidos autores calibraram o valor de ε_{cr} incrementando-o apenas em 24%. Apesar de ambos os valores terem sido calibrados para vigas solicitadas à torção pura, ambos apresentaram bons resultados também para vigas solicitadas à torção combinada com flexão, como será demonstrado mais adiante. Relativamente à expressão de cálculo para f_{cr} , é utilizada a Eq. 3.24, também adotada por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], pois esta apresentou melhores resultados e tornou o modelo mais eficiente comparativamente com a proposta por Jeng e Hsu em 2009 [31]. Na referida equação, o parâmetro A_g é a área bruta de betão e o parâmetro A_{cp} a área limitada pelo perímetro externo da secção.

$$\sigma_{R,i} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{R,i}, & \text{para } \varepsilon_{R,i} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{R,i}}{\varepsilon_{cr}} \right)^{0,4}, & \text{para } \varepsilon_{R,i} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,000116 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,0000992 \quad (3.23)$$

$$f_{cr} = \frac{A_g}{2A_{cp}} \sqrt{f_c'} \quad (3.24)$$

De forma análoga ao que foi feito para a relação constitutiva do betão à compressão, considera-se também para o tirante de betão um diagrama de tensões constante. Desta forma, a tensão de tração do betão é determinada de acordo com a Eq. 3.25, onde o parâmetro $k_{1R,i}$ representa a relação entre a tensão média de tração e a tensão de tração de pico, f_{cr} , para cada painel. Este parâmetro é determinado através da integração da Eq. 3.21, resultando assim na Eq. 3.26.

$$\sigma_{R,i} = k_{1R,i} f_{cr} \quad (3.25)$$

$$k_{1R,i} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{RS,i}}{2\varepsilon_{cr}}, & \text{para } \frac{\varepsilon_{RS,i}}{\varepsilon_{cr}} \leq 1 \\ \frac{\varepsilon_{cr}}{2\varepsilon_{RS,i}} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{(0,6)\varepsilon_{RS,i}} \left[(\varepsilon_{RS,i})^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,4} \right], & \text{para } \frac{\varepsilon_{RS,i}}{\varepsilon_{cr}} > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

3.2.3.3 Armaduras longitudinais e transversais à tração

Com base nos resultados obtidos e no estudo realizado no capítulo anterior, para caracterizar o comportamento das armaduras, em vez de ser adotada a curva elasto-plástica perfeita utilizada por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], é adotada a mesma relação constitutiva da versão do RA-STM apresentada no Capítulo 2, ou seja, a proposta por Jeng e Hsu em 2009 [31] (Eqs. 3.27-3.29).

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \\ f_{sy} [(0,91 - 2B) + (0,02 + 0,25B) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}}], & \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_n \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\varepsilon_n = (0,93 - 2B) \varepsilon_{sy} \quad (3.28)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}} \right)^{1,5} \quad (3.29)$$

3.2.4 Compatibilidade entre as extensões dos painéis

Para além dos aspetos referidos ao longo deste subcapítulo, para que o CA-STM consiga prever corretamente o comportamento carga-deformação de um elemento é necessário garantir algumas condições de compatibilidade entre os quatro painéis de betão armado idealizados. Estas condições são estabelecidas com base nas curvaturas transversais e longitudinais da secção.

3.2.4.1 Curvaturas longitudinais e transversais

As extensões longitudinais e transversais em painéis opostos relacionam-se entre si através da distância entre os dois eixos dos elementos (h_0 e b_0) e das respetivas curvaturas longitudinais ($\Phi_{L,13}$ e $\Phi_{L,24}$) e transversais ($\Phi_{T,13}$ e $\Phi_{T,24}$). Na Fig. 3.8 é possível observar essa relação.

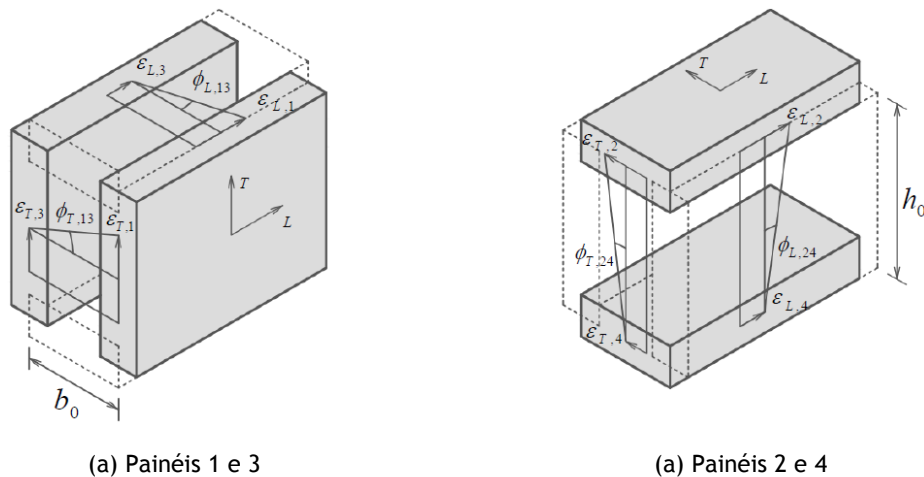


Figura 3.8 - Curvaturas longitudinais e transversais [43].

Para o caso dos painéis 1 e 3, a diferença entre as extensões longitudinais de ambos os painéis induz a curvatura $\Phi_{L,13}$, em relação ao eixo Y. De forma semelhante, a curvatura $\Phi_{T,13}$ pode ser obtida tendo por base as extensões transversais dos referidos painéis. Seguindo o mesmo procedimento para os painéis 2 e 4, obtêm-se as curvaturas $\Phi_{L,24}$ e $\Phi_{T,24}$. As várias curvaturas podem ser calculadas de acordo com as Eqs. 3.30-3.33.

$$\Phi_{T,13} = \frac{\varepsilon_{T,1} - \varepsilon_{T,3}}{b_0} \quad (3.30)$$

$$\Phi_{T,24} = \frac{\varepsilon_{T,2} - \varepsilon_{T,4}}{h_0} \quad (3.31)$$

$$\Phi_{L,13} = \frac{\varepsilon_{L,1} - \varepsilon_{L,3}}{b_0} \quad (3.32)$$

$$\Phi_{L,24} = \frac{\varepsilon_{L,2} - \varepsilon_{L,4}}{h_0} \quad (3.33)$$

3.2.4.2 Compatibilidade das extensões longitudinais dos painéis

A extensão longitudinal de cada painel ($\varepsilon_{L,i}$) pode ser relacionada com a extensão longitudinal no eixo da secção idealizada (ε_{CL}) e com as duas curvaturas longitudinais dos painéis ($\Phi_{L,13}$ e $\Phi_{L,24}$) como ilustrado na Fig. 3.9. Desta forma, $\varepsilon_{L,i}$ pode ser determinado de acordo com a Eq. 3.34.

$$\varepsilon_{L,1} = \varepsilon_{CL} + \Phi_{L,13} \frac{b_0}{2} \quad (3.34a)$$

$$\varepsilon_{L,2} = \varepsilon_{CL} + \Phi_{L,24} \frac{h_0}{2} \quad (3.34b)$$

$$\varepsilon_{L,3} = \varepsilon_{CL} - \Phi_{L,13} \frac{b_0}{2} \quad (3.34c)$$

$$\varepsilon_{L,4} = \varepsilon_{CL} - \Phi_{L,24} \frac{h_0}{2} \quad (3.34d)$$

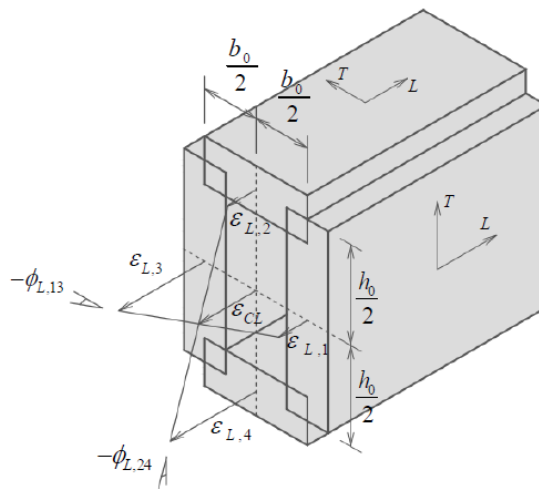


Figura 3.9 - Compatibilidade entre as extensões longitudinais dos painéis [43].

No procedimento original do CA-STM, proposto por Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], o parâmetro $\varepsilon_{L,i}$ é determinado de acordo com a equação anterior. No entanto, Silva em 2016 [43] e Silva *et al.* em 2017 [45], em vez de utilizarem a mesma equação, optaram por utilizar a Eq. 3.35 deduzida a partir da Eq. 3.34. Esta alteração é justificada pelo facto da nova equação se adaptar melhor ao procedimento de solução proposto. Em resultado disso, esta será também utilizada na versão do CA-STM proposta nesta dissertação.

$$\varepsilon_{L,1} + \varepsilon_{L,3} = \varepsilon_{L,2} + \varepsilon_{L,4} \quad (3.35)$$

É de referir que, em virtude do CA-STM modelar a estrutura considerando as deformações longitudinais constantes em cada painel, nas zonas de interface entre dois painéis adjacentes existe uma descontinuidade nesses parâmetros. De acordo com Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], esse problema pode ser reduzido subdividindo cada um dos painéis num maior número de elementos, o que contudo, naturalmente, irá aumentar a complexidade do modelo.

3.2.4.3 Curvatura das escoras de betão

Como foi referido anteriormente, quando uma viga é submetida à torção pura, as faces, originalmente planas, assumem a forma de um parabolóide hiperbólico provocando a curvatura das escoras de betão. Este fenómeno, observado por Lampert e Thürlimann em 1968 [32], conduziu os referidos autores à derivação da Eq. 3.36, onde ψ_i é a curvatura da escora e θ a rotação axial do elemento provocada pela torção.

$$\psi_i = \theta \sin(2a_{D,i}) \quad (3.36)$$

Em resultado do CA-STM admitir a combinação de momento torsor com outros esforços, é necessário adicionar à Eq. 3.36 as parcelas correspondentes aos mesmos: curvaturas longitudinais ($\Phi_{L,13}$ e $\Phi_{L,24}$) e curvaturas transversais ($\Phi_{T,13}$ e $\Phi_{T,24}$). Seguindo este raciocínio, Onsongo em 1978 [37] desenvolveu a Eq. 3.37, onde a curvatura das escoras de betão é calculada a partir das três curvaturas referidas.

$$\psi_i = \theta \sin(2a_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\Phi_{L,13} \\ -\Phi_{L,24} \\ \Phi_{L,13} \\ \Phi_{L,24} \end{bmatrix} \cos^2(a_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\Phi_{T,13} \\ -\Phi_{T,24} \\ \Phi_{T,13} \\ \Phi_{T,24} \end{bmatrix} \sin^2(a_{D,i}) \quad (3.37)$$

Para o processo de solução apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], uma das premissas utilizadas é a concordância entre as curvaturas calculadas na Eq. 3.37 e as obtidas na Eq. 3.2.

3.2.4.4 Cálculo da rotação axial com base na distorção

No caso de um elemento solicitado à torção pura, a rotação axial do elemento (θ) pode ser relacionada com a distorção (y_{LT}) de acordo com a Eq. 3.38. Esta expressão é obtida integrando o empenamento da secção, provocado pela rotação e pela distorção, ao longo do perímetro da secção. No caso de secções fechadas, a soma do empenamento total da secção é igual a zero.

$$\theta = \frac{P_0}{2A_0} y_{LT} \quad (3.38)$$

Em resultado do CA-STM modelar as diferentes paredes da viga como um painel submetido ao corte, o fluxo de tensões tangenciais é constante em cada face. Com base nesta hipótese, Greene em 2006 [15] deduziu a Eq. 3.39 para o cálculo de θ . Analisando a referida equação constata-se que esta resulta da soma da contribuição de cada um dos painéis.

$$\theta = \left[(y_{LT,1} + y_{LT,3})h_0 + (y_{LT,2} + y_{LT,4})b_0 \right] \frac{1}{2A_0} \quad (3.39)$$

3.3 Procedimento de solução

3.3.1 Introdução

Neste subcapítulo é apresentado o procedimento de solução proposto por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45] para o CA-STM. Em virtude dos bons resultados obtidos e da eficiência do mesmo, este será também utilizado nesta versão do CA-STM, tendo sido alterados apenas os critérios de paragem com o intuito de calcular também o comportamento pós-pico.

3.3.2 Equações adicionais

3.3.2.1 Ângulo variável em função das extensões

Com recurso a relações trigonométricas, juntamente com as equações de compatibilidade do painel, é possível determinar o ângulo $a_{D,i}$ em função das extensões $\varepsilon_{D,i}$, $\varepsilon_{R,i}$, $\varepsilon_{L,i}$ e $\varepsilon_{T,i}$, como demonstram as Eqs. 3.40-3.42. As Eqs. 3.40 e 3.41 correspondem às Eqs. 2.47 e 2.48 do Capítulo 2.

$$\sin^2(a_{D,i}) = \frac{\varepsilon_{L,i} - \varepsilon_{D,i}}{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}} = \frac{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{T,i}}{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}} \quad (3.40)$$

$$\cos^2(a_{D,i}) = \frac{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{L,i}}{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}} = \frac{\varepsilon_{T,i} - \varepsilon_{D,i}}{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}} \quad (3.41)$$

$$\cos(a_{D,i})\sin(a_{D,i}) = \frac{\sqrt{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{L,i}}\sqrt{\varepsilon_{L,i} - \varepsilon_{D,i}}}{\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}} \quad (3.42)$$

As equações anteriores são importantes para o procedimento, pois através delas o ângulo $a_{D,i}$ é eliminado enquanto variável e o processo de solução ganha estabilidade numérica. Desta forma, o ângulo $a_{D,i}$ pode ser determinado de acordo com a Eq. 3.43, onde o termo $\text{sinal}(q_i)$ garante que o sentido de $a_{D,i}$ esteja de acordo com o sentido do fluxo de tensões tangenciais do painel em estudo (q_i). A Eq. 3.43 corresponde à Eq. 2.49 apresentada no Capítulo 2.

$$a_{D,i} = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{L,i} - \varepsilon_{D,i}}{\varepsilon_{T,i} - \varepsilon_{D,i}}}\right) \text{sinal}(q_i) \quad (3.43)$$

3.3.2.2 Parâmetros da secção real e da secção idealizada

Ao longo do procedimento de solução é necessário calcular alguns parâmetros geométricos tanto para a secção real como para a secção idealizada (Eqs. 3.44-3.49). Esses parâmetros são: área bruta de betão (A_g), perímetro externo (p_{cp}), área limitada pelo perímetro externo da secção (A_{cp}), comprimentos do fluxo de tensões tangenciais (b_0 e h_0) e a área limitada pelo fluxo de tensões tangenciais (A_0).

$$A_g = (b - t_1)t_4 + (h - t_2)t_1 + (b - t_3)t_2 + (h - t_4)t_2 \quad (3.44)$$

$$p_{cp} = 2(b + h) \quad (3.45)$$

$$A_{cp} = bh \quad (3.46)$$

$$b_0 = b - \left(\frac{t_{D,1} + t_{D,3}}{2}\right) \quad (3.47)$$

$$h_0 = h - \left(\frac{t_{D,2} + t_{D,4}}{2}\right) \quad (3.48)$$

$$A_0 = b_0 h_0 \quad (3.49)$$

3.3.3 Variáveis primárias selecionadas

Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] verificaram que o número de variáveis desconhecidas, resultantes do procedimento de solução adotado para o CA-STM, excedia o número total de equações existentes em seis. Deste modo, seria necessário conhecer outras seis variáveis iniciais para conseguir determinar as restantes variáveis.

Como primeira hipótese os autores consideraram que o procedimento de solução seria “regido pelas solicitações” (T_x , N_x , V_y , V_z , M_y e M_z), ou seja, teriam de ser atribuídos valores às diferentes solicitações de acordo com o problema em estudo. No entanto, verificaram que esta hipótese teria algumas limitações. Caso os valores das solicitações fossem superiores aos valores resistentes da secção o modelo teria dificuldades em encontrar uma solução. Por outro lado, no caso das solicitações serem inferiores, o modelo poderia encontrar duas soluções distintas

para a mesma combinação de carregamento: uma para o comportamento pré-pico e outra para o comportamento pós-pico. Para além destes aspetos, em virtude dos valores das solicitações admitidos permanecerem fixos, o modelo não conseguiria determinar o comportamento carga-deformação da estrutura.

Outra alternativa seria tornar o procedimento apenas “regido pelas deformações”. Para isso, em vez das solicitações (T_x , N_x , V_y , V_z , M_y e M_z), teriam de ser utilizadas seis novas variáveis relacionadas com as deformações do elemento. Contudo, as solicitações determinadas por este método seriam arbitrárias o que dificultaria tanto a utilização como a validação do modelo.

Tendo em conta estas limitações, os referidos autores propuseram uma alternativa ao procedimento de solução. Em resultado de muitos dos ensaios experimentais de vigas sujeitas a combinação de esforços adotarem relações constantes entre o momento torsor e os restantes esforços, os autores optaram por utilizar estas relações como variáveis conhecidas para a solução do problema, tornando assim o método de solução “regido pelas solicitações e pelas deformações”. Desta forma, é assumido um valor inicial para $\varepsilon_{DS,1}$ e, em vez de serem definidas cada uma das solicitações, são estabelecidas relações constantes entre o momento torsor e os outros esforços (N_x/T_x , V_y/T_x , V_z/T_x , M_y/T_x e M_z/T_x).

No entanto, este procedimento de solução desenvolvido por Greene em 2006 [24] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] é resolvido com base numa metodologia de tentativa e erro, o que torna o processo de solução moroso e complexo. Devido a isso, e com base no procedimento de solução eficiente desenvolvido previamente para o RA-STM [44][43], Silva em 2016 [43] e Silva *et al.* em 2017 [45] propuseram um novo procedimento de solução também para o CA-STM. Para isso, os referidos autores, substituíram algumas das variáveis primárias do RA-STM [44][43] por outras equivalentes que se ajustaram melhor ao método. Devido à maior complexidade do CA-STM, uma vez que este idealiza uma viga de betão armado como a junção de quatro painéis, e da necessidade de contabilizar outros efeitos inerentes aos efeitos da torção, como por exemplo a flexão das escoras, em vez das três variáveis primárias necessárias para solucionar o sistema do RA-STM, para o caso de um único painel, no CA-STM são necessárias dezasseis variáveis primárias. Com estas alterações, os referidos autores conseguiram aumentar a eficiência do procedimento de solução do CA-STM e minimizar problemas de convergência.

Em resultado das modificações introduzidas pelos referidos autores, o momento torsor (T_x) passou a ser uma incógnita do problema e, como tal, foi necessário normalizá-lo de forma a evitar problemas de convergência. Tal foi realizado dividindo o momento torsor pelo momento torsor de fissuração da secção (T_{cr}). Este último dado é calculado pela Eq. 3.50, a qual corresponde à expressão (a) presente na tabela 22.7.5.1 do ACI 318-14 [2].

$$T_{cr} = 0,33\sqrt{f_c} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \quad (3.50)$$

Assim, o procedimento apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], e utilizado também neste trabalho, pode ser descrito da seguinte forma: Dada a geometria da secção real (t_i , b e h), a armadura longitudinal e transversal equivalente de cada painel ($A_{L,i}$ e A_T/s), as propriedades do betão (E_c , f_c' , ε_0 , ε_{cr0} e ε_{cr}) e do aço (E_s , f_{Ly} e f_{Ty}), as relações dos esforços atuantes (N_X/T_X , V_Y/T_X , V_Z/T_X , M_Y/T_X e M_Z/T_X) e a extensão $\varepsilon_{DS,1}$, determine as variáveis T_X , $\varepsilon_{DS,2}$, $\varepsilon_{DS,3}$, $\varepsilon_{DS,4}$, $\varepsilon_{R,i}$, $\varepsilon_{L,i}$ e z_i que minimizam a função F_{CA-STM} , sujeita à restrição $0 \leq z_i \leq 3$, até um valor abaixo da tolerância admitida (Tol).

Em resultado da solução do sistema de equações ser determinada com base num valor fixo de $\varepsilon_{DS,1}$, é possível obter o comportamento da estrutura para várias fases de carregamento proporcionais, variando apenas o valor da extensão inicial assumida. Para além deste aspeto, $\varepsilon_{DS,1}$ é um parâmetro que varia de forma crescente de zero até ao valor máximo admitido de ε_{DSMAX} , sendo por isso possível definir o próximo valor de extensão como sendo igual ao $\varepsilon_{DS,1}$ atual mais um incremento $\Delta\varepsilon_{DS,1}$.

3.3.4 Função resíduo que representa o sistema não linear

O sistema de equações não linear, resolvido no procedimento de solução, pode ser dividido em cinco grupos de equações.

Tendo em conta a Eq. 3.15 e o facto de, como referido no ponto 3.2.2 deste capítulo, o modelo não considerar a transmissão de esforços transversais entre painéis ($\sigma_{T,i} = 0$), é possível definir o primeiro grupo de quatro equações do sistema não linear (Eq. 3.51).

$$F_{CA-STM}(i) = \sigma_{R,i} \cos^2(a_{D,i}) + \sigma_{D,i} \sin^2(a_{D,i}) + f_{T,i} \left(\frac{A_T}{t_{D,i}s} \right) = 0 \quad (3.51)$$

O segundo grupo de equações relaciona-se com as curvaturas nas escoras de betão. Tendo por base o facto de, como foi referido anteriormente, os valores de ψ_i calculados pela Eq. 3.2 terem de concordar com os calculados pela Eq. 3.37, obtém-se a Eq. 3.52.

$$F_{CA-STM}(i+4) = \theta \sin(2a_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\Phi_{L,13} \\ -\Phi_{L,24} \\ \Phi_{L,13} \\ \Phi_{L,24} \end{bmatrix} \cos^2(a_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\Phi_{T,13} \\ -\Phi_{T,24} \\ \Phi_{T,13} \\ \Phi_{T,24} \end{bmatrix} \sin^2(a_{D,i}) + \frac{\varepsilon_{DS,i} - \varepsilon_{A,i}}{t_{D,i}} = 0 \quad (3.52)$$

De forma semelhante, as tensões tangenciais calculadas a partir da Eq. 3.10 têm de coincidir com as calculadas pela Eq. 3.16. Tendo em conta este aspeto, e combinando ambas as equações, obtém-se o terceiro grupo de quatro equações (Eq. 3.53).

$$F_{CA-STM}(i+8) = (\sigma_{R,i} - \sigma_{D,i}) \sin(a_{D,i}) \cos(a_{D,i}) \sin(a_i) - \frac{q_i}{t_{D,i}} = 0 \quad (3.53)$$

Através do equilíbrio entre as tensões normais nos painéis e as solicitações atuantes na secção, é possível obter mais três equações, Eqs. 3.54-3.56, definidas com base nas Eqs. 3.11-3.13.

$$F_{CA-STM} (13) = \left[\sigma_{L,3} (t_{D,3} h_0) - \sigma_{L,1} (t_{D,1} h_0) \right] \frac{b_0}{2} - M_Y = 0 \quad (3.54)$$

$$F_{CA-STM} (14) = \left[\sigma_{L,4} (t_{D,4} b_0) - \sigma_{L,2} (t_{D,2} b_0) \right] \frac{h_0}{2} - M_Z = 0 \quad (3.55)$$

$$F_{CA-STM} (15) = \sigma_{L,1} (t_{D,1} h_0) + \sigma_{L,2} (t_{D,2} b_0) + \sigma_{L,3} (t_{D,3} h_0) + \sigma_{L,4} (t_{D,4} b_0) - N_X = 0 \quad (3.56)$$

A última equação do sistema não linear diz respeito à compatibilidade das extensões longitudinais dos quatro painéis, apresentada anteriormente na Eq. 3.35.

$$F_{CA-STM} (16) = \varepsilon_{L,1} - \varepsilon_{L,2} + \varepsilon_{L,3} - \varepsilon_{L,4} = 0 \quad (3.57)$$

3.3.5 Estimativa inicial com base no modelo linear

O método utilizado como estimativa inicial do procedimento é o mesmo do apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], sendo apenas alterada a forma como é estimado o valor inicial da extensão principal de tração, $\varepsilon_{R,i}^0$. Como estimativa inicial o procedimento utiliza um modelo elástico linear de um painel de betão sujeito a um estado de tensão de corte puro. Em resultado do CA-STM modelar a viga em análise como sendo formada por quatro painéis distintos, são atribuídos a cada um deles os mesmos valores iniciais para as variáveis primárias. Em função deste aspeto, os valores atribuídos inicialmente para as extensões de compressão na face externa dos painéis, $\varepsilon_{DS,i}^0$, são iguais ao previamente assumido para a extensão de compressão na face externa do painel 1, $\varepsilon_{DS,1}$ (Eq. 3.58).

$$\varepsilon_{DS,i}^0 = \varepsilon_{DS,1} \quad (3.58)$$

Relativamente ao valor inicial da extensão principal de tração, $\varepsilon_{R,i}^0$, este é assumido como sendo igual a metade do valor $\varepsilon_{DS,1}$, mas com sinal positivo (Eq. 3.59). Relativamente ao valor inicial da extensão longitudinal do painel, $\varepsilon_{L,i}^0$, este é nulo em virtude de se tratar de um problema de corte puro (Eq. 3.60).

$$\varepsilon_{R,i}^0 = \frac{-\varepsilon_{DS,1}}{2} \quad (3.59)$$

$$\varepsilon_{L,i}^0 = 0 \quad (3.60)$$

Os valores de $\varepsilon_{DS,i}^0$, $\varepsilon_{R,i}^0$, e de ε_{cr} , sendo este último referente à extensão que provoca a fissuração do betão, são estabelecidos inicialmente, tanto para secções cheias como vazadas. Para a estimativa inicial do momento torsor é utilizada a Eq. 3.62, que resulta da conjugação

da Eq. 3.61, referente à tensão tangencial que origina a fissuração do betão, de acordo com o ACI 318-14 [2], e da Eq. 3.50, relativa ao momento torsor que provoca a fissuração do betão.

$$\tau_{cr} = 0,33\sqrt{f_{ck}} \text{ (MPa)} \quad (3.61)$$

$$T^0_x = \varepsilon_{DS,1} \frac{E_c}{2} \frac{A_{cp}^2}{\rho_{cp}} \quad (3.62)$$

Por último, é necessário atribuir um valor inicial à variável z_i^0 , parâmetro adimensional, que define a geometria do diagrama das extensões na escora. Sabendo que este apenas varia num intervalo de valores entre zero e três, é adotado, como estimativa inicial, um valor intermédio, ou seja, o valor unitário (Eq. 3.63).

$$z_i^0 = 1 \quad (3.63)$$

3.3.6 Algoritmo de solução

O algoritmo de solução é semelhante ao apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], sofrendo apenas algumas alterações nas expressões de cálculo de alguns parâmetros, tendo estas sido referidas ao longo deste capítulo.

O problema a ser resolvido consiste no seguinte: dada a geometria da secção (t_i , b e h), a armadura longitudinal e transversal equivalente em cada painel ($A_{L,i}$ e A_T), as propriedades mecânicas do betão (f_{cm} e ε_0) e do aço (E_s , f_{Ly} e f_{Ty}), as relações dos esforços solicitantes com o momento torsor (N_x/T_x , V_y/T_x , V_z/T_x , M_y/T_x e M_z/T_x) e a extensão principal de compressão na face externa do painel 1 ($\varepsilon_{DS,1}$), determine a solução do sistema de equações não linear (Eqs. 3.51-3.57), $F_{CA-STM}(T_x, \varepsilon_{DS,2}, \varepsilon_{DS,3}, \varepsilon_{DS,4}, \varepsilon_{R,i}, \varepsilon_{L,i}, z_i) = 0$, sabendo que $0 \leq z_i \leq 3$.

De acordo com as relações das solicitações definidas, pretende-se determinar o comportamento da estrutura mantendo fixa essas proporções, variando $\varepsilon_{DS,1}$ inicial, de forma crescente, até o valor máximo ($\varepsilon_{DS,MAX}$) estabelecido e resolvendo o sistema de equações $F_{CA-STM}(T_x, \varepsilon_{DS,2}, \varepsilon_{DS,3}, \varepsilon_{DS,4}, \varepsilon_{R,i}, \varepsilon_{L,i}, z_i) = 0$ para cada caso.

Para iniciar o processo iterativo, com recurso a um modelo elástico linear, calcula-se o comportamento de um painel de betão submetido a um estado de tensão de corte puro. Com base neste, obtêm-se as estimativas iniciais para o CA-STM de acordo com as Eqs. 3.58-3.63. Nesta versão do procedimento, para além de se assumir o valor de $\varepsilon_{DS,1}$ também os valores de $\varepsilon_{R,i}^0$ e de ε_{cr} são admitidos inicialmente.

Para as seguintes iterações, soma-se um incremento de deformação ($\Delta\varepsilon_{DS,1}$) a $\varepsilon_{DS,1}$ e como ponto inicial para a solução do novo sistema de equações não lineares são usados os resultados obtidos na iteração anterior. Este processo é repetido até ser atingindo o número máximo de pontos

($n_{max} = 400$) ou o valor de $\varepsilon_{DS,1}$ ser superior ao limite $\varepsilon_{DS,MAX}$ (Eq. 2.19 e Eq. 2.20). Contrariamente ao assumido por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], caso o momento torsor (T_x) seja igual à resistência de pico da estrutura o procedimento não é interrompido. Este critério de paragem foi retirado com o intuito de calcular também o comportamento pós-pico do elemento. Para resolver o sistema de equações não lineares, à semelhança do capítulo anterior, é utilizada a função *lsqnonlin*, presente no *toolbox* de otimização do MATLAB.

O algoritmo de solução é apresentado no fluxograma da Fig. 3.10 e o código em MATLAB encontra-se no Anexo III. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos no subcapítulo seguinte.

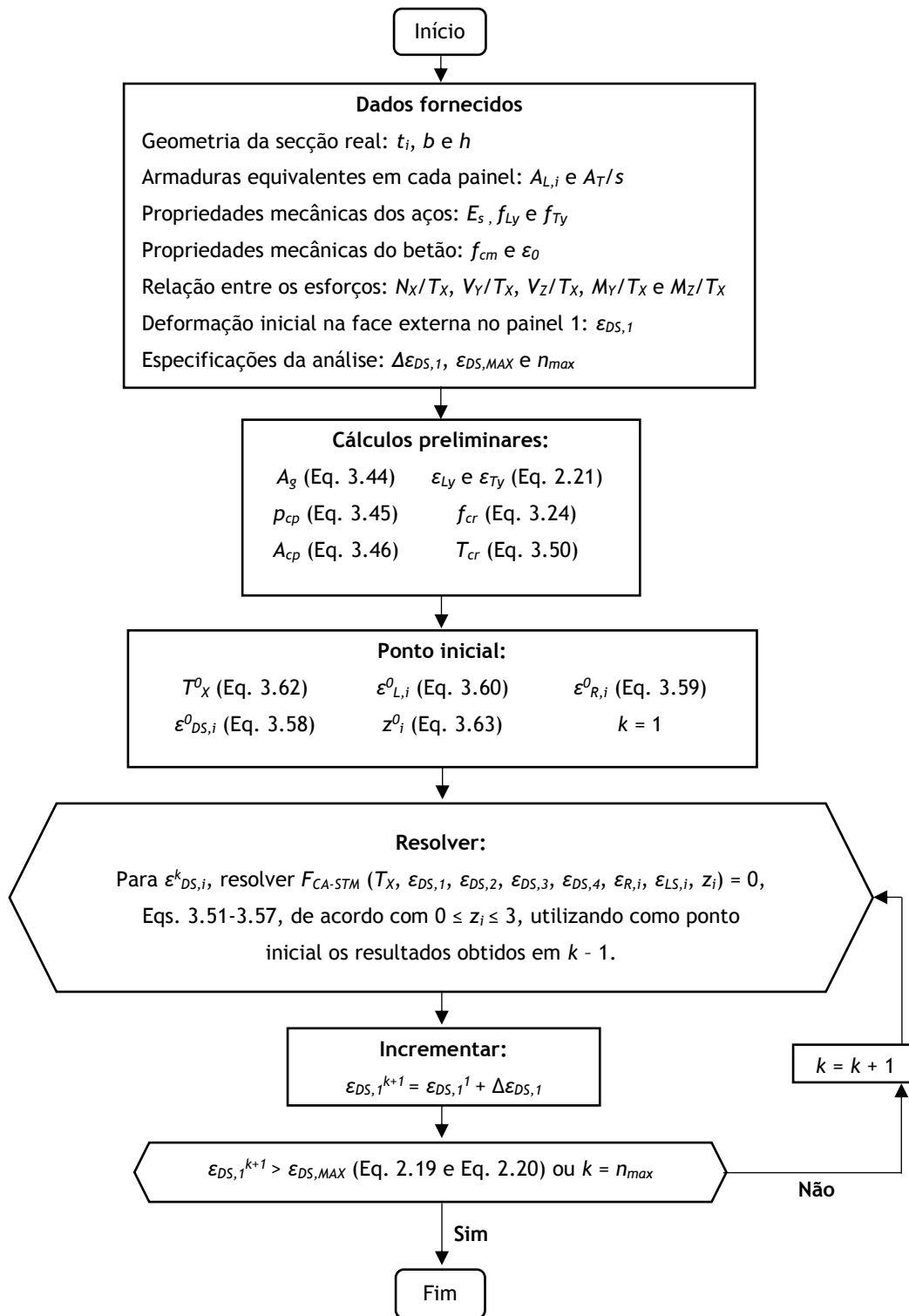


Figura 3.10 - Fluxograma do algoritmo proposto.

3.4 Comparação com resultados experimentais

3.4.1 Descrição das vigas de referência utilizadas

Com o objetivo de avaliar a previsão do modelo e validar as alterações efetuadas, foram recolhidos na bibliografia os resultados experimentais de 72 vigas de betão armado ensaiadas à torção pura ou à torção combinada com flexão. Na Tabela 3.1 são apresentadas todas as vigas recolhidas e respetivas propriedades geométricas e mecânicas. As soluções de armadura, longitudinal e transversal, apresentadas estão caracterizadas de acordo com as notações originais dos autores. Para além destes dados é ainda apresentada a relação entre o momento fletor e o momento torsor (M/T) utilizada tanto no ensaio como na previsão teórica do CA-STM.

As vigas das séries 1, 2, 3 e 4 foram ensaiadas por McMullen e Warwaruk em 1967 [34], tendo como principal objetivo estudar o comportamento de vigas solicitadas por diferentes combinações de esforços. Com um objetivo semelhante, mas utilizando essencialmente vigas de secção vazada, Lampert e Thürlimann em 1968 [32] e 1969 [33] ensaiaram as vigas das séries T e TB à torção pura e à torção combinada com flexão, respetivamente. Hsu em 1968 [20] ensaiou diversas vigas à torção pura, tendo sido recolhidas para este estudo algumas das vigas das séries B, G, I, J e M. As séries TBS, TBO e TBU foram testadas por Onsongo em 1978 [37], tendo as três séries sido solicitadas à torção e à flexão em simultâneo. Os resultados foram utilizados pelo referido autor para a validação de um modelo teórico. Bernardo e Lopes em 2009 [7], com o intuito de analisarem a resistência e a ductilidade de vigas de betão de alta resistência e de secção vazada, na sua fase última comportamental, ensaiaram dezasseis vigas, à torção pura, divididas por três séries: A, B e C. Por último, as vigas das séries A, B, C e D foram ensaiadas à torção pura por Jeng em 2014 [30] com o objetivo de calibrar o modelo teórico *SMMT (Softened Membrane Model for Torsion)* para vigas de secção vazada de parede fina e de parede espessa. Na Fig. 3.11 estão ilustradas as secções das vigas recolhidas.

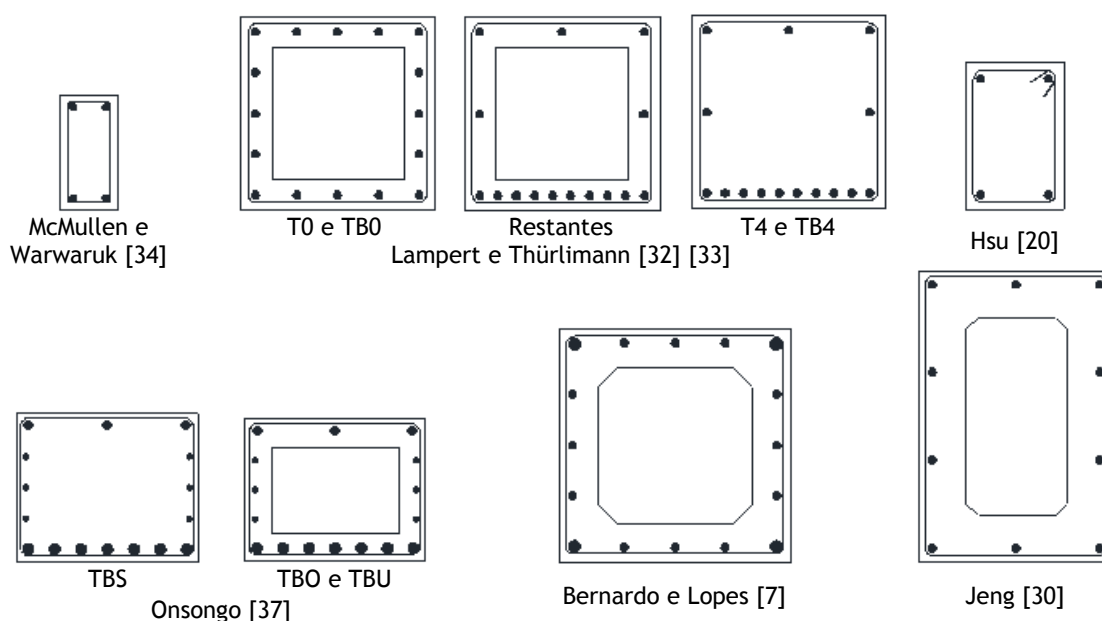


Figura 3.11 - Secções das vigas recolhidas.

Tabela 3.1 - Propriedades geométricas e mecânicas das vigas recolhidas.

Viga	Tipo de secção	Dimensões						Betão		
		b (cm)	h (cm)	t ₁ (cm)	t ₂ (cm)	t ₃ (cm)	t ₄ (cm)	f _{cm} (MPa)	ε ₀ (1/1000)	ε _{cr} (1/1000)
1-1 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	35,8	2,1*	0,116
1-2 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	30,6	2,0*	0,116
1-3 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	34,9	2,1*	0,116
1-4 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	34,3	2,1*	0,116
1-5 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	33,2	2,1*	0,116
1-6 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	38,2	2,2*	0,116
2-1 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	39,7	2,2*	0,116
2-2 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	34,6	2,1*	0,116
2-3 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	37,9	2,2*	0,116
2-4 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	36	2,1*	0,116
2-5 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	36,6	2,1*	0,116
3-1 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	36,7	2,1*	0,116
3-2 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	36,7	2,1*	0,116
3-3 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	37,6	2,2*	0,116
3-4 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	37,6	2,2*	0,116
3-5 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	40,1	2,2*	0,116
4-1 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	37,1	2,1*	0,116
4-2 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	39,3	2,2*	0,116
4-3 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	40,3	2,2*	0,116
4-4 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	39,1	2,2*	0,116
4-5 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	38,4	2,2*	0,116
4-6 [34]	Cheia	15	30	-	-	-	-	43,3	2,3*	0,116
T1 [32]	Vazada	50	50	8	8	8	8	35	2,1*	0,0992
T3 [32]	Vazada	50	50	8	8	8	8	33,1	2,1*	0,0992
T4 [32]	Cheia	50	50	-	-	-	-	29,2	2,0*	0,116
TB0 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	28,6	2,0*	0,0992
TB1 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	27,9	2,0*	0,0992
TB2 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	27,9	2,0*	0,0992
TB3 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	28,6	2,0*	0,0992
TB4 [33]	Cheia	50	50	-	-	-	-	31,4	2,0*	0,0992
TB5 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	26,5	1,9*	0,0992
TB6 [33]	Vazada	50	50	8	8	8	8	26,7	1,9*	0,0992
B6 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	28,8	1,98	0,116
B9 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	28,8	1,98	0,116
G4 [20]	Cheia	25,4	50,8	-	-	-	-	28,3	1,97	0,116
G7 [20]	Cheia	25,4	50,8	-	-	-	-	31,0	2,03	0,116
I5 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	45	2,28	0,116
J1 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	14,3	1,63	0,116
M2 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	30,6	2,02	0,116
M3 [20]	Cheia	25,4	38,1	-	-	-	-	26,8	1,94	0,116
TBS1 [37]	Cheia	50,8	41,3	-	-	-	-	28	2,5	0,116
TBS2 [37]	Cheia	50,8	41,3	-	-	-	-	32,9	2,5	0,116
TBS3 [37]	Cheia	50,8	41,3	-	-	-	-	45,8	2,5	0,116
TBS4 [37]	Cheia	50,8	41,3	-	-	-	-	15,5	2,0	0,116
TBO2 [37]	Vazada	50,8	41,1	7,6	8,1	7,6	7,6	19,7	2,4	0,0992
TBO3 [37]	Vazada	50,8	41,1	7,6	8,1	7,6	7,6	19,1	2,4	0,0992
TBO4 [37]	Vazada	50,8	41,1	7,6	8,1	7,6	7,6	20,4	2,4	0,0992
TBO5 [37]	Vazada	50,8	41,1	7,6	8,1	7,6	7,6	20,5	2,4	0,0992
TBU2 [37]	Vazada	50,8	41	7,6	6	7,6	7,6	34,8	3,1	0,0992
TBU3 [37]	Vazada	50,8	41	7,6	8	7,6	7,6	34,8	3,1	0,0992
TBU4 [37]	Vazada	50,8	41	7,6	5,5	7,6	7,6	34,8	3,1	0,0992
TBU5 [37]	Vazada	50,8	41	7,6	8	7,6	7,6	34,8	3,1	0,0992
A2 [7]	Vazada	60	60	10,7	10,7	10,7	10,7	47,3	2,31	0,0992
A3 [7]	Vazada	60	60	10,9	10,9	10,9	10,9	46,2	2,3	0,0992
A4 [7]	Vazada	60	60	10,4	10,4	10,4	10,4	54,8	2,42	0,0992
A5 [7]	Vazada	60	60	10,4	10,4	10,4	10,4	53,1	2,4	0,0992
B3 [7]	Vazada	60	60	10,9	10,9	10,9	10,9	77,8	2,7	0,0992
B4 [7]	Vazada	60	60	11,2	11,2	11,2	11,2	79,8	2,72	0,0992
B5 [7]	Vazada	60	60	11,6	11,6	11,6	11,6	76,4	2,68	0,0992
C3 [7]	Vazada	60	60	10,3	10,3	10,3	10,3	91,6	2,8	0,0992
C4 [7]	Vazada	60	60	10,3	10,3	10,3	10,3	91,4	2,8	0,0992
C5 [7]	Vazada	60	60	10,4	10,4	10,4	10,4	96,7	2,8	0,0992
C6 [7]	Vazada	60	60	10,4	10,4	10,4	10,4	87,5	2,8	0,0992
A095c [30]	Vazada	49,7	71,1	14,5	14,5	14,5	14,5	35,1	2,1*	0,0992
A120a [30]	Vazada	50,2	71,9	18,4	18,4	18,4	18,4	27,6	2,0*	0,0992
B065b [30]	Vazada	50,3	71	9,2	9,2	9,2	9,2	39,2	2,2*	0,0992
B080a [30]	Vazada	50	72,1	11,2	11,2	11,2	11,2	46,5	2,3*	0,0992
B110a [30]	Vazada	49,8	71	15,5	15,5	15,5	15,5	48,1	2,3*	0,0992
C065a [30]	Vazada	49,5	78,1	8,5	8,5	8,5	8,5	78,8	2,7*	0,0992
C100a [30]	Vazada	49,9	72,3	12,7	12,7	12,7	12,7	90,6	2,8*	0,0992
D075a [30]	Vazada	49,8	73,4	8,7	8,7	8,7	8,7	94,9	2,8*	0,0992
D090a [30]	Vazada	50,1	72,2	10,5	10,5	10,5	10,5	105,7	2,8*	0,0992

Tabela 3.1 (Cont.) - Propriedades geométricas e mecânicas das vigas recolhidas.

Viga	Aço								M/T
	Armadura Longitudinal	A _L (cm ²)	Armadura Transversal	A _T (cm ²)	s (m)	f _{Ly} (MPa)	f _{Ty} (MPa)	E _s (GPa)	
1-1 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	0
1-2 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	0,34
1-3 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	0,50
1-4 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	1,00
1-5 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	2,00
1-6 [34]	2#3+2#6	7,10	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	344,4	379,2	200	4,00
2-1 [34]	4#6	11,36	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	323,4	370,2	200	0
2-2 [34]	4#6	11,36	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	323,4	370,2	200	0,50
2-3 [34]	4#6	11,36	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	323,4	370,2	200	1,00
2-4 [34]	4#6	11,36	#3 at 3 ¼"	0,71	0,083	323,4	370,2	200	2,00
2-5 [34]	4#6	11,36	#3 at 4 ½"	0,71	0,083	323,4	370,2	200	4,00
3-1 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ½"	0,71	0,114	351,3	379,2	200	0
3-2 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ½"	0,71	0,114	351,3	379,2	200	0,95
3-3 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ½"	0,71	0,114	351,3	379,2	200	0,93
3-4 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ½"	0,71	0,114	351,3	379,2	200	1,64
3-5 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ½"	0,71	0,114	351,3	379,2	200	3,57
4-1 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 3"	0,71	0,076	351,3	370,2	200	1,67
4-2 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 6"	0,71	0,152	351,3	370,2	200	1,64
4-3 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 7 ½"	0,71	0,191	351,3	370,2	200	1,64
4-4 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 9"	0,71	0,229	351,3	370,2	200	1,72
4-5 [34]	2#3+2#5	5,42	#3 at 4 ¾"	0,71	0,178	351,3	370,2	200	2,00
4-6 [34]	2#3+2#4	4,00	#3 at 7"	0,71	0,178	351,3	370,2	200	2,00
T1 [32]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	364	364	210	0
T3 [32]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	364	364	210	0
T4 [32]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	364	364	210	0
TB0 [33]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	390	390	210	1,00
TB1 [33]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	390	390	210	2,00
TB2 [33]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	390	390	210	3,70
TB3 [33]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	390	390	210	1,00
TB4 [33]	16φ12	18,10	φ12//0,11	1,13	0,110	390	390	210	1,00
TB5 [33]	16φ12	18,10	φ8//0,11	0,50	0,110	384	396	210	1,00
TB6 [33]	16φ12	18,10	φ8//0,11	0,50	0,110	384	396	210	1,00
B6 [20]	4#9	25,81	#4 at 2 ¼"	1,29	0,057	331,7	322,8	200	0
B9 [20]	4#6	11,36	#3 at 6"	0,71	0,152	319,3	342,8	200	0
G4 [20]	4#7	15,48	#4 at 4 ½"	1,29	0,114	325,5	321,4	200	0
G7 [20]	6#5	12,00	#4 at 5 ¾"	1,29	0,146	319,3	322,8	200	0
I5 [20]	4#8	20,39	#4 at 2 ¾"	1,29	0,069	310,3	325,5	200	0
J1 [20]	4#4	5,16	#3 at 6"	0,71	0,152	327,6	346,2	200	0
M2 [20]	4#6	11,36	#3 at 4 ½"	0,71	0,105	329	357,2	200	0
M3 [20]	4#7	15,48	#4 at 5 ½"	1,29	0,140	322,1	326,2	200	0
TBS1 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	425	443	200	0,80
TBS2 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	425	443	200	0,80
TBS3 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	425	443	200	0,80
TBS4 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	410	379	200	0,80
TBO2 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	410	379	200	3,83
TBO3 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	410	379	200	1,43
TBO4 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	410	379	200	0,66
TBO5 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	460,3	379	200	0,20
TBU2 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	460,3	379	200	3,83
TBU3 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	460,3	379	200	1,44
TBU4 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,076	460,3	379	200	0,66
TBU5 [37]	3#4+6#3+7#8	43,83	#4@76	1,29	0,130	460,3	379	200	0,20
A2 [7]	4φ12+12φ10	13,95	φ8//0,08	0,503	0,080	672,4	695,9	200	0
A3 [7]	16φ12	18,10	φ10//0,095	0,785	0,095	672,4	714,8	200	0
A4 [7]	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,07	0,785	0,070	723,9	714,8	200	0
A5 [7]	4φ16+20φ12	30,66	φ12//0,08	1,131	0,080	723,9	672,4	200	0
B3 [7]	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,07	0,785	0,070	723,9	714,8	200	0
B4 [7]	16φ16	32,17	φ12//0,075	1,131	0,075	723,9	672,4	200	0
B5 [7]	20φ16	40,21	φ12//0,06	1,131	0,060	723,9	672,4	200	0
C3 [7]	4φ16+20φ10	23,75	φ10//0,075	0,785	0,075	723,9	714,8	200	0
C4 [7]	4φ16+20φ12	30,66	φ12//0,08	1,131	0,080	723,9	672,4	200	0
C5 [7]	4φ20+12φ16	36,69	φ12//0,065	1,131	0,065	723,9	672,4	200	0
C6 [7]	24φ16	48,25	φ12//0,05	1,131	0,050	723,9	672,4	200	0
A095c [30]	4#5+6#5	15,74	#4@130	1,29	0,130	371	381	200	0
A120a [30]	10#5	20,00	#4@170	1,29	0,170	464	380	200	0
B065b [30]	10#8	51,00	#4@130	1,29	0,130	452	380	200	0
B080a [30]	10#6	28,40	#4@100	1,29	0,100	454	392	200	0
B110a [30]	10#5	20,00	#4@150	1,29	0,150	453	369	200	0
C065a [30]	10#5	20,00	#4@130	1,29	0,130	338	376	200	0
C100a [30]	10#6	28,40	#4@100	1,29	0,100	466	447	200	0
D075a [30]	10#6	28,40	#4@100	1,29	0,100	469	381	200	0
D090a [30]	10#6	28,40	#4@100	1,29	0,100	466	447	200	0

Como foi referido anteriormente, umas das premissas assumidas para o CA-STM e para que o modelo consiga prever de forma coerente o comportamento carga-deformação das vigas é que o rácio de carregamento, para os casos onde exista torção e flexão simultânea, se mantenha constante de início ao fim do ensaio. Embora este aspeto se verifique para as vigas das séries 1, 2, e 4, o mesmo não acontece para as vigas da série 3 e TB. Para os casos das vigas da série 3, onde se verificou que o rácio não era constante ao longo do ensaio, optou-se, da mesma forma que para as séries 1,2 e 4, por adotar os rácios relativos ao carregamento na rotura. A variação dos rácios de carregamento da série 3 justifica-se pelo facto de estas vigas terem sido ensaiadas de forma sequencial, ou seja, alternando entre solicitações de momento fletor e de momento torsor. Contudo, apesar desta variação, os resultados obtidos foram satisfatórios comparativamente aos obtidos optando pelos rácios iniciais (no início do carregamento). Relativamente às vigas da série TB adotaram-se os rácios iniciais de carregamento. Esta opção será comentada e justificada posteriormente no ponto 3.4.4 deste capítulo.

3.4.2 Previsões do procedimento proposto

Após o procedimento de cálculo terminar, o algoritmo implementado dá a possibilidade de representar graficamente os resultados obtidos. Com recurso aos valores calculados para cada parâmetro é possível obter três curvas distintas: a curva momento torsor (T_x) - rotação axial (θ), a curva momento fletor (M_z) - rotação axial (θ) e a curva momento fletor (M_z) - curvatura no plano vertical ($\Phi_{L,24}$). Nos Anexos IV, V e VI encontram-se todos os resultados obtidos.

Na Fig. 3.12 está representada um exemplo de uma curva teórica (T_x - θ) calculada a partir do procedimento de cálculo para a viga 2-1 [34] solicitada à torção pura ($M/T = 0$). Para além desta, estão ainda representadas a respetiva curva experimental e a curva teórica calculada a partir da versão original do CA-STM [15].

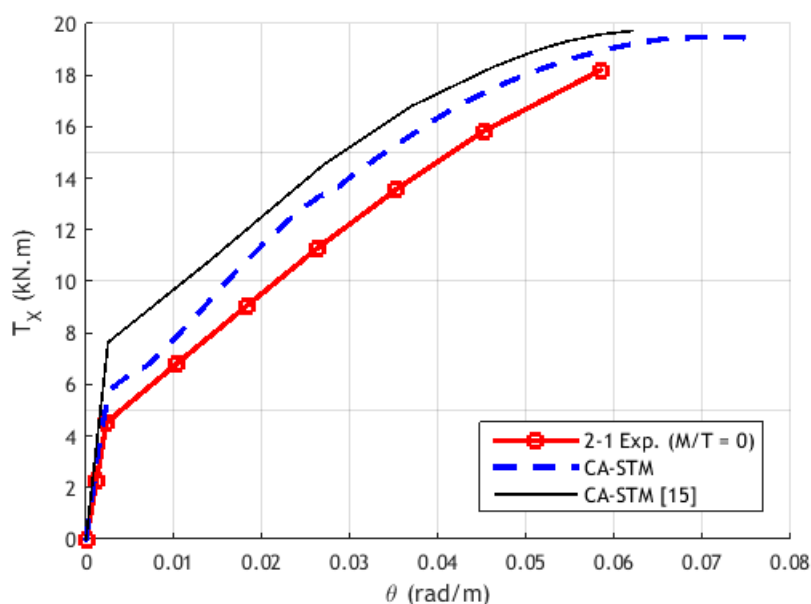


Figura 3.12 - Comparação das curvas T_x - θ da viga 2-1 [34].

Através da Fig. 3.12, tendo por base a curva calculada pelo CA-STM, é possível analisar e descrever o comportamento da viga em estudo. Inicialmente, o momento torsor e a rotação axial evoluem linearmente, ou seja, a viga apresenta um comportamento elástico linear até atingir o momento torsor de fissuração (T_{cr}). Ao atingir esse ponto, a viga fissa e verifica-se um aumento súbito da taxa de rotação. Em consequência da fissuração, ocorre uma perda significativa da rigidez da viga, o que corresponde à alteração do declive da curva, tal como observado na Fig. 3.12. Após a fissuração, o momento torsor continua a aumentar proporcionalmente à rotação. Nesta fase, é possível observar que a curva tende a apresentar novamente um comportamento aproximadamente linear. A partir de um determinado valor de momento torsor, a curva deixa de ter um comportamento linear e entra num regime não linear. Esta alteração pode ser justificada pela cedência de uma ou de ambas as armaduras de torção, ou pelo facto da tensão na escora de betão se aproximar da respetiva tensão de pico, evidenciando assim o comportamento não linear do betão. Após isso, a taxa de aumento do momento torsor tende a reduzir até ser atingida a resistência da viga, enquanto que a rotação axial continua a aumentar acentuadamente. O procedimento do CA-STM termina assim que seja atingida a extensão última imposta para o betão, definida a partir das Eqs. 2.19 e 2.20.

Outro exemplo de uma curva $T_x-\theta$ é a curva ilustrada na Fig. 3.13, referente à viga 2-3 [34]. Em virtude de esta viga pertencer à mesma série da viga 2-1 (Fig. 3.13), ambas têm as mesmas características geométricas e mecânicas. No entanto, a viga 2-3 é solicitada à torção e à flexão ($M/T = 1,0$). Apesar da presença de flexão, a Fig. 3.13 mostra que o comportamento evidenciado pela viga 2-3, através da curva $T_x-\theta$, é em tudo semelhante ao descrito para a viga 2-1, verificando-se apenas uma tendência final na curva para formar um patamar horizontal. Tal comportamento indicia que as armaduras entraram em cedência mais cedo.

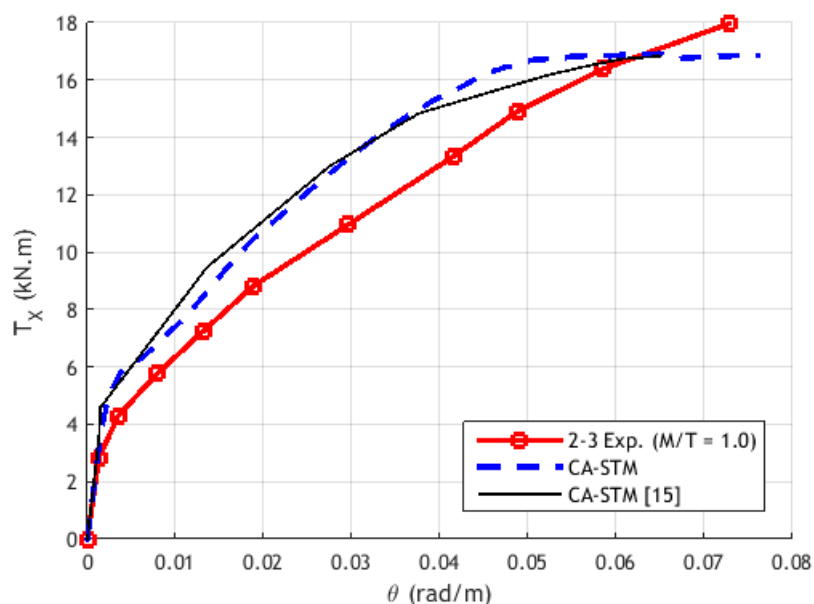


Figura 3.13 - Comparação das curvas $T_x-\theta$ da viga 2-3 [34].

Outra das opções do procedimento é a impressão de curvas $M_z-\theta$, como ilustrado na Fig. 3.14 para o caso da viga 2-2 [34]. Mais uma vez, em resultado da referida viga pertencer à mesma série das vigas anteriormente analisadas, esta tem as mesmas características mecânicas, diferenciando-se apenas na razão do carregamento a que foi solicitada ($M/T = 0,5$). Analisando a Fig. 3.14 é possível verificar que a evolução, quer da curva teórica como da curva experimental, é em tudo semelhante às curvas $T_x-\theta$ apresentadas para as vigas 2-1 e 2-2. Em virtude de ambas as curvas, $M_z-\theta$ e $T_x-\theta$, dependerem da evolução do parâmetro θ , a referida semelhança de aspeto entre as curvas era expectável.

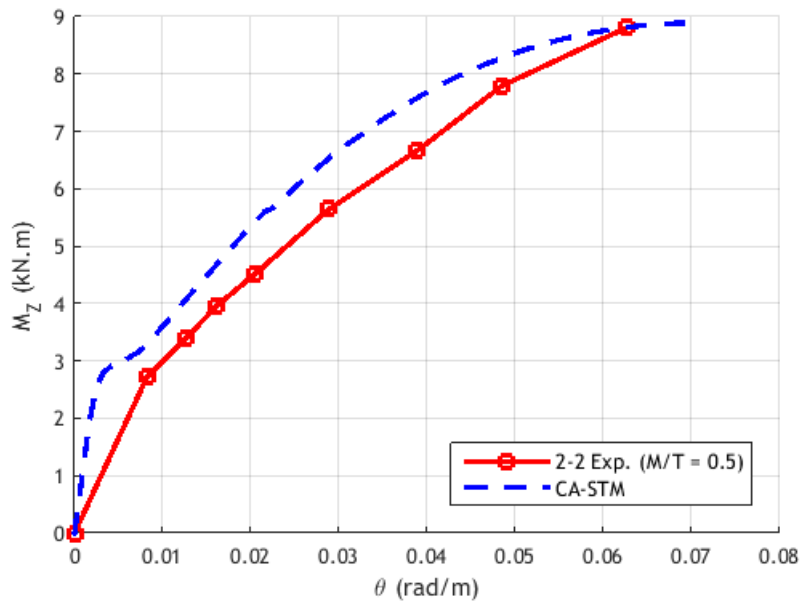


Figura 3.14 - Comparação das curvas $M_z-\theta$ da viga 2-2 [34].

Por último, na Fig. 3.15 é ilustrado um exemplo de uma curva $M_z-\Phi_{L,24}$, nomeadamente para o caso da viga TB2 [33]. Esta viga é de secção vazada e foi ensaiada à torção e flexão ($M/T = 2,0$). Observando a referida figura é possível verificar que o modelo subestimou os momentos fletores na fase última comportamental, comparativamente com os experimentais. Esta tendência foi observada por diversas vezes, principalmente para as vigas desta série. Uma possível explicação para esta observação poderá estar relacionada pelo facto do modelo considerar que as tensões normais, resultantes do momento fletor, se distribuem apenas na espessura efetiva das paredes, inferior neste caso à espessura real das paredes da secção vazada. Desta forma, o betão atinge mais rapidamente a extensão última e, por consequência, o momento fletor resistente é menor. Para além disso, o modelo tem uma limitação maior na flexão em virtude de admitir que as resultantes das tensões de tração e de compressão, originadas pela flexão, passam pelo eixo central dos painéis. Assim, a resultante de tração, por exemplo, pode não coincidir com o centro geométrico da armadura. No que diz respeito ao aspeto da curva, é possível verificar que, inicialmente, o momento fletor aumenta rapidamente acompanhado de pequenas deformações, ou seja, a viga apresenta um comportamento muito rígido. Quando esta

fissura, por volta dos 40 kN.m, observa-se uma alteração do declive da curva associada à perda de rigidez. Após a fissuração, o momento fletor continua a aumentar assim como a curvatura, mas agora de forma mais acentuada. Este comportamento continua até que ocorre a cedência de uma ou de ambas as armaduras, assemelhando assim o aspeto da curva à relação constitutiva adotada para o aço. Nesta fase, a viga sofre grandes deformações enquanto que o momento fletor aumenta ligeiramente. Este comportamento mantém-se até a viga atingir a rotura, que ocorre assim que o betão atinge a extensão última convencional. Apesar de o modelo ter subestimado os valores de M_z , a forma da curva teórica é semelhante à da curva experimental, indicando que o modelo prevê corretamente a evolução da curva tanto na fase inicial como após a cedência das armaduras.

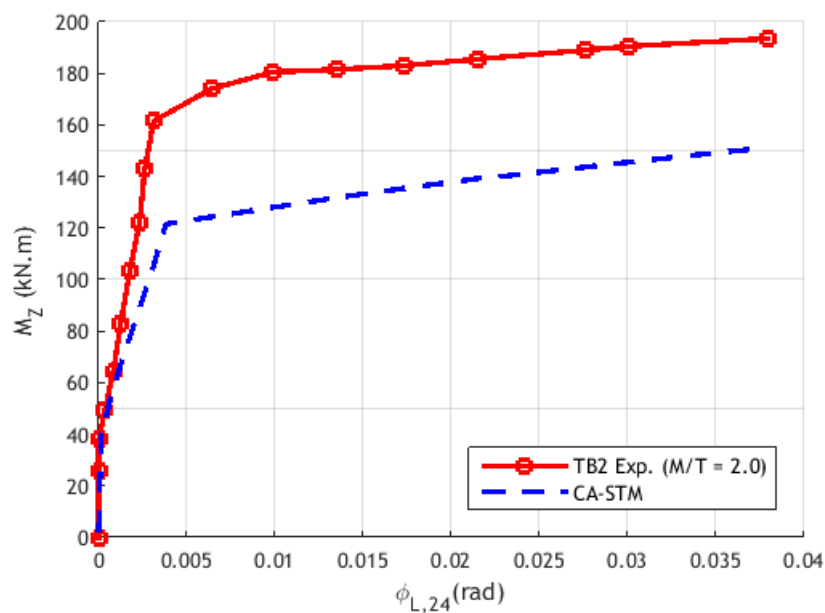


Figura 3.15 - Comparação das curvas M_z - $\phi_{L,24}$ da viga TB2 [33].

3.4.3 Curvas de interação torção - momento fletor

O CA-STM também pode ser utilizado para traçar as curvas de interação para uma determinada secção, como ilustrado nas Figs. 3.16-3.19. De forma a ser possível traçar a curva de interação é necessário conhecer ou calcular o momento torsor e o momento fletor, correspondentes à rotura da viga para vários rácios de carregamento, mantendo as propriedades da secção constantes. Deste modo, é possível traçar uma curva que fornece a informação de como varia a resistência de uma determinada secção de acordo com o rácio de carregamento a que esta esteja sujeita. Nas Figs. 3.16-3.19 são ilustradas, para algumas séries de vigas de referência, as curvas de interação obtidas a partir do CA-STM utilizado neste trabalho, as curvas resultantes dos dados experimentais e, quando conhecidas, as curvas obtidas por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17].

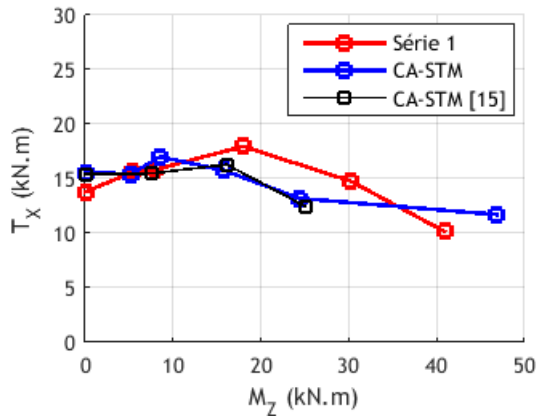


Figura 3.16 - Curva de interação da série 1 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].

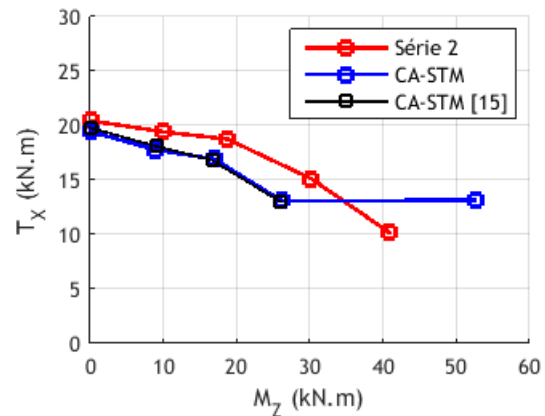


Figura 3.17 - Curva de interação da série 2 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].

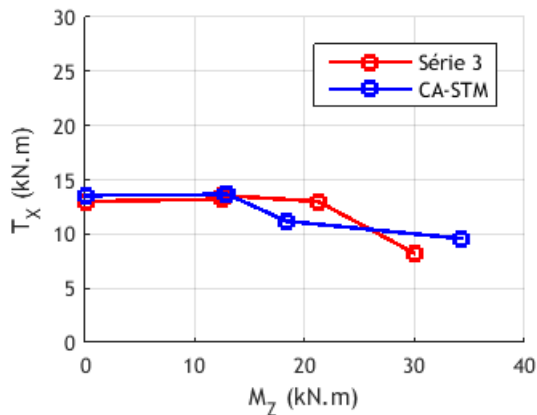


Figura 3.18 - Curva de interação da série 3 de McMullen e Warwaruk em 1967 [34].

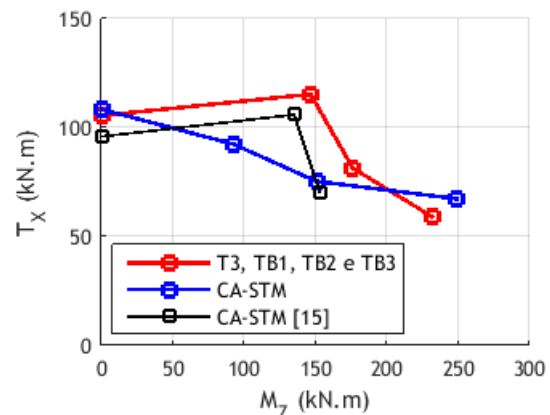


Figura 3.19 - Curva de interação da série TB de Lampert e Thürlimann em 1968 [32] e 1969 [33].

No que diz respeito à proximidade entre os resultados obtidos em ambas as previsões teóricas conclui-se que estes foram muito semelhantes, com exceção da curva de interação da série TB, onde se verifica uma grande diferença relativamente ao ponto correspondente à viga TB1. Essa diferença pode ser explicada devido ao facto dos referidos autores terem adotado um rácio de carregamento distinto daquele que é referido por Lampert e Thürlimann em 1969 [33] para o caso da viga TB1. Relativamente à proximidade da previsão do modelo com os dados experimentais é possível verificar que, para a maior parte dos casos, os resultados obtidos estão próximos dos experimentais. Contudo, é possível observar, principalmente na série 2 [34], algumas diferenças relativas à última viga da série (ponto mais à direita da curva). Neste caso, o rácio M/T é de 4, ou seja, existe uma solicitação de momento fletor quatro vezes superior à de momento torsor. Esta observação pode indicar que o modelo mostra maiores dificuldades no cálculo das previsões em problemas em que o momento torsor deixa de ser um esforço primário. Uma possível explicação prende-se com a maior dificuldade observada no cálculo da previsão para os efeitos do momento fletor, pelos motivos anteriormente referidos (Subsecção 3.4.2).

3.4.4 Análise comparativa entre o CA-STM proposto e a versão original

De forma a averiguar o efeito das alterações introduzidas no modelo comparativamente com a versão original do CA-STM proposta por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], é apresentada uma análise estatística semelhante à apresentada pelo referido autor baseada no mesmo grupo de vigas. Contudo, em virtude do estudo neste trabalho se centrar em vigas de betão armado solicitadas à torção ou à torção combinada com flexão, apenas as vigas com estas características de carregamento são aqui consideradas.

Os resultados obtidos são apresentados no Anexo IV e na Tabela 3.2, onde os parâmetros $T_{u,exp}$ e $T_{u,th}$ representam os momentos torsores últimos (máximos) experimental e teórico, respetivamente, atingido pela viga. Com recurso a esses valores são calculadas as razões $T_{u,exp}/T_{u,th}$ que são utilizadas para o cálculo da média (\bar{x}), desvio padrão (s) e coeficiente de variação (cv). Com estes dados é possível analisar a proximidade entre os resultados experimentais e a previsão do modelo.

Para esta análise a viga TB4 não foi considerada, contrariamente ao considerado por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], pelo facto de se observar que a previsão teórica desta viga fornece uma curva de comportamento que termina muito prematuramente. Esta viga distingue-se das restantes da mesma série por ser uma viga de secção cheia. Após uma análise mais aprofundada do problema verificou-se que o mesmo ocorria para o procedimento do CA-STM apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45], independentemente de adotar as relações constitutivas utilizadas pelos referidos autores ou as originais [15][16][17]. No Anexo VII é apresentada a referida curva, assim como uma possível justificação para a ocorrência do problema observado.

Observando os resultados obtidos na Tabela 3.2 é possível verificar que, embora o valor médio se tenha aproximado mais da unidade ($\bar{x} = 1,059$) comparativamente ao obtido por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] ($\bar{x} = 1,096$), verificou-se uma maior dispersão de resultados, tendo sido o coeficiente de variação ligeiramente superior ($cv = 11,109\%$), embora também aceitável visto estar próximo de 10% [33].

Tabela 3.2 - Análise comparativa com os resultados obtidos por Greene em 2006 [15].

Viga	$T_{u,exp}$ (MPa)	$T_{u,teo}$ [24] (MPa)	$T_{u,teo}$ (MPa)	$T_{u,exp}/ T_{u,th}$ [24]	$T_{u,exp}/ T_{u,th}$
1-1 [34]	13,8	15,4	15,6	0,90	0,89
1-3 [34]	15,8	15,5	17,0	1,02	0,93
1-4 [34]	18	16,3	15,8	1,10	1,14
1-5 [34]	14,8	12,5	13,2	1,18	1,12
2-1 [34]	20,5	19,8	19,5	1,04	1,05
2-2 [34]	19,4	18,1	17,8	1,07	1,09
2-3 [34]	18,8	16,8	16,9	1,12	1,11
2-4 [34]	15,1	13	13,1	1,16	1,15
3-1 [34]	13	14,9	13,5	0,87	0,96
4-1 [34]	13,6	10,6	12,3	1,28	1,10
4-2 [34]	11,4	10	12,4	1,14	0,92
4-3 [34]	10,5	9,4	9,9	1,12	1,06
4-4 [34]	9,6	9	9,9	1,07	0,97
4-5 [34]	11,6	10,2	9,7	1,14	1,19
4-6 [34]	7,5	7,4	9,2	1,01	0,82
T3 [32]	105,5	95,9	108,4	1,10	0,97
TB1 [33]	115,3	105,9	92,4	1,09	1,25
TB2 [33]	81,4	70,5	75,3	1,15	1,08
TB4* [33]	113,8	97,4	76,9	1,17	1,48*
TB5 [33]	94,2	80,2	79,9	1,17	1,18
TB6 [33]	96,1	81	80,2	1,19	1,20
\bar{x}				1,096	1,059
s				0,097	0,118
cv				8,811%	11,109%

* A Viga TB4 não foi considerada na análise estatística.

Existem alguns aspetos que podem justificar as diferenças obtidas e que devem ser referidos. Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] optaram por utilizar os rácios de carregamento finais para todas as vigas. Como foi referido anteriormente, embora este aspeto não tenha relevância para as séries 1, 2, 4 e, neste caso, também a série 3 pois a viga 3-1 é solicitada à torção pura, o mesmo não acontece para a série TB. Adotando os rácios finais, à semelhança de Greene em 2006 [15] e de Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], constatou-se que as previsões do modelo pioravam para todas as vigas da referida série. Para além deste aspeto, o rácio referente à viga TB1 e utilizado pelos referidos autores não está de acordo com o rácio indicado no relatório experimental de Lampert e Thürlimann em 1969 [33], o que pode justificar a diferença observada entre os valores de $T_{u,exp}/ T_{u,th}$. Outro aspeto a realçar prende-se com o facto de, Greene em 2006 [15] e de Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], não especificarem as características mecânicas das diversas vigas calculadas, sendo apenas feita referência a valores médios. Devido a isso não é possível garantir que os valores adotados para a caracterização das vigas, em ambos os cálculos, tenham sido os mesmos. Esta observação ganha ainda maior relevância para o caso das vigas TB onde grande parte dos parâmetros necessários para a caracterização das vigas foram obtidos por Lampert e Thürlimann em 1969 [33] através de ensaios em prismas de betão de diferentes dimensões dos atualmente preconizados nas normas, como por exemplo no EC2 [14].

3.4.5 Análise comparativa do CA-STM com vigas solicitadas à torção pura

Em seguida são apresentados os resultados obtidos através do CA-STM para algumas vigas ensaiadas à torção pura, designadamente as vigas ensaiadas por Hsu em 1968 [20], por Bernardo e Lopes em 2009 [7] e por Jeng em 2014 [30]. O objetivo é avaliar a aptidão do modelo para a previsão do comportamento de vigas sujeitas à torção pura, o qual constitui um caso particular de carregamento. De forma semelhante ao que foi feito anteriormente, com recurso aos valores de $T_{u,exp}/T_{u,th}$ de cada viga, são calculados três parâmetros estatísticos: a média (\bar{x}), o desvio padrão (s) e o coeficiente de variação (cv). Com esses dados é possível avaliar a proximidade da previsão do modelo relativamente aos dados do ensaio experimental de cada uma das vigas. As três séries de vigas foram divididas em duas análises distintas, sendo uma delas referente a vigas de secção cheia ([20]) e outra a vigas de secção vazada ([7] e [30]).

Relativamente ao grupo de vigas ensaiadas por Hsu em 1968 [20], de acordo com a Tabela 3.3 verifica-se que é obtido um valor de $\bar{x} = 0,994$, de $s = 0,038$ e um $cv = 3,775\%$, o que evidencia a concordância entre a previsão do modelo e os resultados experimentais. Para além disso, os resultados obtidos estão de acordo com outros modelos teóricos utilizados para prever o comportamento de vigas de secção cheia à torção pura, tais como o GSVATM por Bernardo *et al.* em 2015 [9] e o SMMT por Jeng e Hsu em 2009 [31].

Tabela 3.3 - Análise de vigas de secção cheia.

Viga	$T_{u,exp}$ (MPa)	$T_{u,th}$ (MPa)	$T_{u,exp}/T_{u,th}$
B6 [20]	61,7	58,4	1,06
B9 [20]	29,8	31,3	0,95
G4 [20]	64,9	64,4	1,01
G7 [20]	52,4	54,6	0,96
I5 [20]	70,7	72,9	0,97
J1 [20]	21,5	22,2	0,97
M2 [20]	40,3	39,7	1,02
M3 [20]	43,6	42,7	1,02
\bar{x}			0,994
s			0,038
cv			3,775%

Os resultados referentes às vigas ensaiadas por Bernardo e Lopes em 2009 [7], séries A, B, e C, são apresentados na Tabela 3.4. Para maior parte dos casos verifica-se que o modelo sobrestimou o valor de T_u , o que se deve ao facto de as curvas teóricas se prolongarem ligeiramente para além das curvas experimentais, como é possível verificar no Anexo IV.

No que diz respeito às vigas ensaiadas por Jeng em 2014 [30] (Tabela 3.4), para além de serem de secção vazada, como foi referido anteriormente, estas são ainda distinguidas pelo autor de acordo com a espessura da parede. Desta forma, as vigas B065b, B080a, C065a, D070a e D090a são consideradas como vigas de parede fina e as vigas A095c, A120a, B110a e C110a como vigas de parede espessa. Embora para o conjunto de vigas de parede fina não se tenha verificado

qualquer problema de cálculo, para o caso das três vigas com maior espessura de parede (A095c, A120a e B110a) verifica-se que o modelo termina a previsão de forma muito prematura (Anexo VII). Esta característica em particular, relativa à espessura da parede, parece estar diretamente relacionada com os problemas verificados no procedimento de cálculo. Em virtude disso e dos maus resultados obtidos, estas três vigas são excluídas da análise estatística. Além destas vigas, Jeng em 2014 [30] verificou também que a viga C065c evidenciou uma rotura precoce o que, apesar de não afetar a previsão do modelo, condicionou o resultado de $T_{u,exp}/T_{u,th}$ obtido. Devido a isso, esta viga foi também excluída desta análise.

Para estas duas séries de vigas, excluindo as vigas anteriormente referidas, é obtido um valor de $\bar{x} = 0,928$, de $s = 0,098$ e um $cv = 10,604\%$, estando este próximo dos 10%, o que, segundo vários autores (por exemplo [46]), constitui um valor aceitável. As previsões teóricas de todas as vigas consideradas nestas análises são apresentadas no Anexo IV.

Tabela 3.4 - Análise de vigas de secção vazada.

Viga	$T_{u,exp}$ (MPa)	$T_{u,th}$ (MPa)	$T_{u,exp}/T_{u,th}$
A2 [7]	254,1	249,5	1,02
A3 [7]	299,9	316,2	0,95
A4 [7]	368,2	414,4	0,89
A5 [7]	412,2	450,4	0,92
B3 [7]	355,8	433,2	0,82
B4 [7]	437,9	510,8	0,86
B5 [7]	456,2	545,6	0,84
C3 [7]	347,7	425,4	0,82
C4 [7]	450,3	508,6	0,89
C5 [7]	450,3	572,2	0,79
C6 [7]	521,3	604,2	0,86
A095c* [30]	210	114,3	1,84
A120a* [30]	215,3	126,3	1,70
B065b [30]	278	257,9	1,08
B080a [30]	300,7	301,8	1,00
B110a* [30]	237,5	141,1	1,68
C065a* [30]	182	220,8	0,82
C100a [30]	370,2	338	1,10
D075a [30]	339,5	321	1,06
\bar{x}			0,928
s			0,098
cv			10,604%

*As vigas A095c, A120a e B110a não foram consideradas na análise estatística.

3.4.6 Análise comparativa do CA-STM com vigas solicitadas à torção e flexão

Na Tabela 3.5 são apresentadas as séries de vigas de betão armado solicitadas à combinação de torção e flexão ensaiadas por McMullen e Warwaruk em 1967 [34] e por Lampert e Thürlimann em 1968 [32] e 1969 [33]. Apesar das séries de vigas TBS, TBO e TBU, ensaiadas por Onsongo em 1978 [37], serem também solicitadas ao mesmo tipo de carregamento, estas não são alvo de análise pois, seguindo o procedimento de distribuição das armaduras proposto por

Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] para vigas com distribuição assimétrica de armadura, obtém-se para o caso do painel 2 (painel superior) áreas de armadura negativa. Em resultado deste valor não ser realista e este aspeto ser comum a todas as vigas das três séries, e tendo-se verificado que o modelo apresentava problemas de convergência, estas vigas foram excluídas. No entanto, as respetivas curvas experimentais e teóricas são apresentadas no Anexo VII desta dissertação, acompanhadas de mais informação relativa ao problema encontrado.

Para cada uma das vigas consideradas na análise, tendo por base os valores obtidos para a relação $T_{u,exp}/T_{u,th}$, é novamente calculada a média (\bar{x}), o desvio padrão (s) e o coeficiente de variação (cv), como mostra a Tabela 3.5 e a Tabela 3.6.

Tabela 3.5 - Análise de vigas de secção cheia.

Viga	$T_{u,exp}$ (MPa)	$T_{u,th}$ (MPa)	$T_{u,exp}/T_{u,th}$
1-1 [34]	13,8	15,6	0,89
1-2 [34]	15,6	15,4	1,01
1-3 [34]	15,8	17	0,93
1-4 [34]	18,0	15,8	1,14
1-5 [34]	14,8	13,2	1,12
1-6 [34]	10,2	11,7	0,87
2-1 [34]	20,5	19,5	1,05
2-2 [34]	19,4	17,8	1,09
2-3 [34]	18,8	16,9	1,11
2-4 [34]	15,1	13,1	1,15
2-5 [34]	10,2	13,1	0,77
3-1 [34]	13,0	13,5	0,96
3-2 [34]	13,2	13,7	0,97
3-3 [34]	13,6	13,7	0,99
3-4 [34]	13,0	11,2	1,16
3-5 [34]	8,2	9,6	0,86
4-1 [34]	13,6	12,3	1,10
4-2 [34]	11,4	12,4	0,92
4-3 [34]	10,5	9,9	1,06
4-4 [34]	9,6	9,9	0,97
4-5 [34]	11,6	9,7	1,19
4-6 [34]	7,5	9,2	0,82
\bar{x}			1,006
s			0,121
cv			12,037%

Para as séries de vigas 1, 2, 3 e 4 [34], embora a maior parte das vigas tenha sido ensaiada à torção e flexão em simultâneo, as vigas 1-1, 2-1 e 3-1 foram ensaiadas apenas à torção. No entanto, visto estas integrarem o estudo realizado por McMullen e Warwaruk em 1967 [34] no âmbito da análise do comportamento de vigas de betão armado solicitadas por diferentes combinações de esforços e devido à pequena influência que estas apresentam no universo total de vigas, optou-se por as considerar também nesta análise. Os valores obtidos para o conjunto das referidas quatro séries de vigas são $\bar{x} = 1,006$, $s = 0,121$ e $cv = 12,037\%$.

Relativamente às séries T [32] e TB [33], a distinção da designação deve-se ao facto das vigas da série T serem ensaiadas à torção e as da série TB serem ensaiadas à torção e flexão. No entanto, à semelhança do que feito anteriormente, ambas as séries de vigas foram integradas na mesma análise estatística. Novamente, em resultado dos referidos problemas apresentados pelo modelo no cálculo, a viga TB4 não foi considerada na análise estatística. Para além desta, também a viga T4 originou problemas de cálculo no procedimento. Ambas as vigas têm em comum o facto de serem de secção cheia. Comentários adicionais acerca deste problema, assim como as respetivas curvas teórica e experimental, são apresentados no Anexo VII. Excluindo as referidas vigas da análise, os resultados obtidos para o conjunto da série T e TB foram os seguintes (Tabela 3.6): $\bar{x} = 1,095$, $s = 0,140$ e $cv = 12,779\%$.

Apesar de em ambos os grupos de vigas se verificar que a variabilidade é ligeiramente superior a 10%, os resultados obtidos continuam a ser aceitáveis. No Anexo IV são apresentadas as previsões teóricas os dois grupos de vigas analisados.

Tabela 3.6 - Análise de vigas de secção vazada.

Viga	$T_{u,exp}$ (MPa)	$T_{u,th}$ (MPa)	$T_{u,exp}/T_{u,th}$
T1 [32]	140	145	0,97
T3 [32]	106	108,4	0,98
T4* [32]	132	96,8	1,36
TB0 [33]	90,5	73,6	1,23
TB1 [33]	115,3	92,4	1,25
TB2 [33]	81,4	75,3	1,08
TB3 [33]	59	67,3	0,88
TB4* [33]	113,8	76,9	1,48
TB5 [33]	94,2	79,9	1,18
TB6 [33]	96,1	80,2	1,20
	\bar{x}		1,095
	s		0,140
	cv		12,779%

3.5 Conclusões preliminares

No presente capítulo foi apresentado o modelo CA-STM, desenvolvido por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], de acordo com o procedimento eficiente apresentado por Silva em 2016 [43] e por Silva *et al.* em 2017 [45]. Com base no estudo realizado no Capítulo 2 desta dissertação foram propostas algumas alterações ao CA-STM com o objetivo de melhorar a previsão deste para vigas solicitadas à torção pura e à torção combinada com flexão.

Como forma de validação das alterações, a previsão do modelo foi comparada com 72 vigas, recolhidas na bibliografia, ensaiadas à torção e à torção combinada com flexão. De entre as vigas recolhidas existem vigas de secção cheia, de secção vazada, com distribuição simétrica e assimétrica de armadura, de betão de resistência normal e de alta resistência. De referir ainda

que, embora existam numerosos dados experimentais relativos a vigas de betão armado ensaiadas à torção pura disponíveis na bibliografia, o mesmo não se verifica para o caso de vigas solicitadas à torção e flexão em simultâneo. Para além disso, como foi referido anteriormente, uma das premissas adotadas pelo modelo é que o rácio dos esforços solicitantes, neste caso momento fletor e momento torsor, se mantenha constante do início ao fim do ensaio. Esta condição, imposta desde a versão original do CA-STM [15][16][17], deveu-se ao facto dos referidos autores terem verificado que muitos dos ensaios experimentais eram realizados com rácios constantes entre o momento torsor e os outros esforços. No entanto, ao longo da realização deste trabalho, verificou-se que, em diversos ensaios experimentais recolhidos da bibliografia consultada, tal rácio sofreu variações ao longo dos mesmos.

De entre as várias previsões calculadas pelo modelo implementado no MATLAB, verificaram-se a existência de algumas limitações no cálculo de determinadas vigas. Esses casos foram excluídos das diversas análises estatísticas e foram remetidos para o Anexo VII, onde são apresentadas as respetivas curvas teóricas e experimentais acompanhadas de uma breve descrição da possível causa observada para o problema. No Capítulo 4 são abordados de forma mais detalhada os problemas observados.

Excluindo as vigas onde se verificaram problemas na previsão das curvas carga-deformação, com base nos resultados obtidos nas diversas análises estatísticas, verificou-se uma boa aproximação dos resultados obtidos pelo CA-STM comparativamente com os dados experimentais, tanto para as vigas solicitadas à torção pura como para vigas solicitadas à torção e flexão.

Para além dos bons resultados teóricos obtidos pelo CA-STM, o modelo demonstrou uma boa eficiência. Relativamente ao tempo médio de processamento para o cálculo de quatrocentos pontos, para a maior parte dos casos analisados, este foi inferior a quarenta segundos. No entanto, dependendo do grau de complexidade do problema, como por exemplo secções com distribuição de armadura muito assimétricas ou com rácios muito elevados de solicitações, verificou-se que o tempo de processamento por vezes foi superior. No caso de problemas mais simples, o tempo de processamento chegou a ser cerca de quinze segundos. O processador utilizado nesta análise foi um Intel® Core™ i7-2630QM @ 2.00GHz. Este aspeto realça a eficiência do procedimento, tendo em conta que para cada um dos quatrocentos pontos do comportamento carga-deformação do elemento, é resolvido um sistema de equações não lineares com 16 variáveis primárias.

CAPÍTULO 4 - Conclusões e recomendações para estudos futuros

4.1 Introdução

Neste capítulo resumem-se as conclusões principais obtidas ao longo do presente trabalho e apresentam-se também propostas de desenvolvimento futuras.

Relativamente aos modelos analíticos estudados, o RA-STM [39][40][5] e o CA-STM [15][16][17], pode concluir-se que estes conseguiram prever eficazmente o comportamento dos diferentes elementos de betão armado analisados. Desta forma, as alterações efetuadas em ambos os modelos e a utilização do procedimento eficiente, proposto por Silva e Horowitz em 2015 [44], por Silva em 2016 [43] e por Silva *et. al* em 2017 [45], são validadas em função dos resultados obtidos para um conjunto amplo de dados experimentais. Por estes motivos, é possível concluir que os objetivos propostos inicialmente para este trabalho foram alcançados com sucesso.

4.2 Conclusões

De seguida, apresentam-se as principais conclusões obtidas com base no trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação.

Relativamente ao RA-STM, a proposta de calibração deste modelo através da alteração das relações constitutivas mostrou-se adequada, tendo as previsões teóricas obtidas evidenciado uma boa concordância relativamente aos dados experimentais de 19 painéis de betão armado ensaiados ao corte. Para além disso, também o procedimento eficiente [44][43] foi testado para um maior número de casos, tendo confirmado o seu correto funcionamento.

Em resultado da incorporação de novas leis constitutivas e das alterações dos critérios de paragem, verificou-se ainda que o referido modelo conseguiu calcular o comportamento pós-pico de alguns painéis de betão armado no que diz respeito à curva tensão tangencial (τ) - distorção (γ), sem ter sido incorporado o efeito de poisson para o estado fissurado nem a relação constitutiva do betão ao corte [26].

Em função dos bons resultados obtidos no Capítulo 2, as relações constitutivas introduzidas no RA-STM foram também utilizadas no CA-STM, substituindo assim as propostas originalmente por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17]. A partir das diversas análises estatísticas realizadas no Capítulo 3 é possível concluir que o CA-STM conseguiu prever corretamente as curvas momento torsor (T) - rotação axial (θ) das 55 vigas de betão armado consideradas, tanto solicitadas à torção pura como solicitadas à torção combinada com flexão.

Uma vez mais, a utilização do procedimento eficiente [43][45], para um número alargado de casos, confirmou o seu correto funcionamento.

Além das curvas $T-\theta$, o modelo foi também programado para reproduzir curvas momento fletor (M) - rotação axial (θ). Apesar dos bons resultados obtidos, estes não foram alvo de uma análise mais detalhada em função de não se inserirem nos objetivos desta dissertação. No entanto, as previsões do modelo referentes a essas curvas encontram-se no Anexo V. Outra possibilidade adicionada ao modelo foi a reprodução de curvas momento fletor (M) - curvatura (Φ). No caso destas verificou-se que, para o conjunto de vigas de secção vazada onde os dados experimentais $M-\Phi$ estavam disponíveis, o CA-STM subestimou os valores do momento resistente para a maior parte dos casos (Anexo VI). Uma possível explicação para esse aspeto prende-se com o facto do modelo considerar que as tensões normais, resultantes do momento fletor, se distribuem apenas na espessura efetiva das paredes, inferior neste caso à espessura real das paredes. Desta forma, o betão atinge mais rapidamente a extensão última e, por consequência, o momento fletor resistente é menor. Para além deste aspeto, o modelo admite que as resultantes das tensões de tração e compressão, provocadas pela flexão, coincidem com o eixo dos painéis. Desta forma, pode ocorrer que a resultante da tração, por exemplo, não coincida com o centro geométrico da armadura. Apesar disso, a forma geral das curvas teóricas previstas pelo modelo mostrou estar em concordância com a forma das curvas experimentais. Por último, com base nos resultados obtidos para algumas séries de vigas, nomeadamente o valor do momento torsor e o valor de momento fletor correspondentes à rotura da viga, o CA-STM foi ainda utilizado para reproduzir curvas de interação tendo-se, no geral, verificado uma boa concordância entre as previsões teóricas e os dados experimentais.

No entanto, apesar dos bons resultados obtidos, foram verificadas várias limitações do CA-STM que, para alguns casos, conduziram a que as curvas comportamentais previstas terminassem precocemente. As curvas onde se verificaram este tipo de problemas foram reunidas no Anexo VII, acompanhadas de uma breve descrição do problema e da sua possível causa.

Tal como foi referido anteriormente, uma das premissas adotadas no modelo e assumida por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] é que o rácio dos esforços solicitantes, neste caso momento fletor e momento torsor, se mantenha constante ao longo do ensaio. No entanto, neste trabalho verificou-se que em diversos ensaios experimentais, recolhidos da bibliografia consultada, tal rácio sofreu variações ao longo dos mesmos. Além disso, muitas vezes os autores não referem nada quanto a uma possível variação do referido rácio, nomeadamente em artigos de revistas onde as condições de ensaio são em geral caracterizadas de forma resumida. No entanto, em virtude de grande parte dos dados experimentais utilizados neste trabalho provirem de relatórios de ensaios, foi possível ter acesso aos rácios de carregamento ao longo dos ensaios e verificar a real variação dos mesmos.

Outro problema observado prende-se com o facto do método utilizado no processo de distribuição das áreas de armadura da secção real pelos quatro painéis idealizados, proposto por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], ter apresentado algumas limitações. As vigas das séries TBS, TBO e TBU [37], em virtude da grande assimetria existente entre a armadura longitudinal superior ($3,87 \text{ cm}^2$) e a armadura longitudinal inferior ($35,70 \text{ cm}^2$), após a sua distribuição, resultou para o painel 2, ou seja, o painel correspondente à face superior da viga, uma área de armadura negativa. Esta questão impossibilitou que estas fossem consideradas na análise comparativa e pode explicar os resultados obtidos. A previsão destas vigas foi remetida para o Anexo VII.

Verificou-se ainda que o modelo apresentou alguma sensibilidade relacionada com a espessura máxima admitida para os painéis ($t_{D,max}$). Segundo Greene em 2006 [15] e Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], o valor de $t_{D,max}$ para o caso de secções vazadas é admitido como sendo igual à espessura real da parede da secção e, para secções cheias, igual a metade da menor dimensão da secção. Para as vigas T4 e TB4, vigas de secção cheia com dimensão de $0,50 \times 0,50 \text{ m}$ ensaiadas Lampert e Thürlimann em 1968 [32] e 1969 [33], assumir a espessura máxima do painel segundo o critério estabelecido por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] traduz-se numa estimativa muito grosseira relativamente à espessura efetiva. Este problema foi verificado pois seguindo este critério as curvas de comportamento previstas para as vigas T4 e TB4 terminaram precocemente (Anexo VII). Considerando-as como secção vazada, isto é, adotando o valor de $t_{D,max}$ igual às vigas de secção vazada da respetiva série, a previsão do modelo aproximou-se mais dos dados experimentais. No entanto, para as restantes vigas de secção cheia, este critério não originou problemas de cálculo, o que pode ser explicado pelo facto de estas terem uma secção retangular, em vez de quadrada, e serem de menores dimensões ($0,15 \times 0,30 \text{ m}$), o que conduz a valores de $t_{D,max}$ mais próximos dos reais.

A questão da sensibilidade do modelo ao parâmetro $t_{D,max}$ ganha ainda maior relevância com as previsões obtidas para as vigas A095c, A120a e B110a, que, da mesma forma como para as vigas T4 e TB4, se observou que as curvas teóricas se afastam bastante da curva experimental. Estas vigas, de secção vazada e ensaiadas por Jeng em 2014 [30], têm a particularidade de serem classificadas segundo o autor como vigas de parede espessa. Do conjunto das quatro vigas classificadas desta forma, apenas a C100a, com a menor espessura de parede de entre as quatro, foi calculada corretamente pelo CA-STM. Para as restantes vigas da série, classificadas de parede fina, não ocorreu qualquer problema na previsão do seu comportamento. Estas observações parecem indiciar uma limitação do modelo relativamente à espessura máxima admitida.

Em resultado de tudo o que foi referido anteriormente, apesar dos bons resultados obtidos, torna-se notória a necessidade de se aprofundar o estudo do CA-STM de forma a ultrapassar as limitações verificadas e assim conseguir aumentar a aplicabilidade e fiabilidade do referido modelo.

4.3 Recomendações para estudos futuros

Com base no que foi referido ao longo do presente capítulo, considera-se de especial interesse o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Incorporar no RA-STM com procedimento eficiente a relação constitutiva σ - ε para o betão à tração, de forma a permitir prever todo o comportamento teórico de painéis de betão armado submetidos a um estado de tensão de corte puro, incluindo para baixos níveis de carregamento;
- Alterar o procedimento de solução do CA-STM de forma a incorporar um rácio de solicitações variável ao longo do carregamento;
- Reformular o método de distribuição das áreas de armadura longitudinal da secção real pelos quatro painéis proposto por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17] para o CA-STM, ou limitar a aplicabilidade do referido modelo a vigas onde se verifique que a disposição assimétrica desta armadura não origine painéis com armadura negativa;
- Alterar a forma de estimativa da espessura máxima dos painéis ($t_{D,max}$) para o caso de vigas de secção cheia;
- Rever o critério para a distribuição das tensões normais induzidas pelo momento fletor, tanto para secções cheias como para secções vazadas com vista a corrigir as curvas teóricas;
- Calibrar o CA-STM para conseguir prever o comportamento de vigas de secção vazada de parede espessa ou limitar a aplicabilidade deste a vigas de secção vazada até uma determinada espessura de parede;
- Verificar a fiabilidade do CA-STM com procedimento eficiente a vigas solicitadas a outras combinações de esforços, como por exemplo torção e esforço axial, torção e esforço transversal, ou mesmo com todos os esforços a atual em simultâneo, tendo por base o maior número de resultados experimentais possíveis.
- Dados os problemas relatados anteriormente e associados com resultados experimentais, torna-se necessário a realização de um maior número de ensaios experimentais controlados com vigas sob diversas combinações de esforços, em particular no que respeita ao controlo do rácio entre os esforços internos na zona de rotura.

Bibliografia

- [1] ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)”, American Concrete Institute, Detroit, 1971. (Citado em [6]).
- [2] American Concrete Institute, “Building Code Requirements for structural Concrete, ACI - 318”, Farmington hills, MI USA, 2014.
- [3] Andrade, J. M. A., “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção”, Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2010.
- [4] Belarbi, A. and Hsu, T. T. C., “Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 91(4), July-August 1994, pp. 465-474.
- [5] Belarbi, A. and Hsu, T. T. C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 92(5), September-October 1995, pp. 562-573.
- [6] Bernardo, L. F. A., “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência”, Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003.
- [7] Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R., “Torsion in HSC Hollow Beams: Strength and Ductility Analysis”, *ACI Structural Journal*, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A., Vol. 106, Issue 1, Jan/Feb 2009, pp. 39-48
- [8] Bernardo, L. F. A., Andrade, J. M. A. and Lopes, S. M. R., “Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study”, *Engineering Structures*, volume 42, 2012, pp. 278-296.
- [9] Bernardo, L. F. A., Andrade, J. M. A. and Nunes, N. C. G., “Generalized softened variable angle truss-model for reinforced concrete beams under torsion”, *Materials and Structures*, Vol. 48. No. 7, 2015, pp. 2169-2193.
- [10] Bernardo, L. F. A., Andrade, J. M. A. and Oliveira, L. A. P., “Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion”, *Journal of Civil Engineering and Management*, ISSN 1392-3730, Taylor and Francis, Vol. 19, Supplement 1, 2013, pp. S141-S152.

- [11] Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Band 40, No. 28, pp. 785-790, No. 29, 1896, pp. 813-817. (Citado em [43]).
- [12] Collins, M. P., Mitchell, D., "Prestressed Concrete Structures", Prentice-Hall, March 1991.
- [13] Costa, R. J. T., "Placas de Betão Armado Submetidas a Estados Bidimensionais de Tensão", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005.
- [14] EN 1992-1-1, "Eurocódigo 2: Projeto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", Comité Europeu de Normalização, Março 2010.
- [15] Greene, G. G. Jr., "Behavior of reinforced concrete girders under cyclic torsion and torsion combined with shear: experimental investigation and analytical models", Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Missouri-Rolla, USA, 2006.
- [16] Greene, G. and Belarbi, A., "Model for RC members under torsion, bending and shear. I: Theory", *Journal of Engineering Mechanics*, 135(9), 2009a, 961-969.
- [17] Greene, G. G. and Belarbi, A., "Model for RC members under torsion, bending and shear. II: Model application and validation", *Journal of Engineering Mechanics*, 135(9), 2009b, 970-977.
- [18] Hognestad, E., "What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete?", Circular Series, 64, University of Illinois, Engineering Exp. Station, Ill. 1952. (Citado em [13]).
- [19] Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - A Summary of Pure Torsion", *Torsion of Structural Concrete*, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 165-178. (Citado em [6]).
- [20] Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members," *Torsion of Structural Concrete*, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306.
- [21] Hsu, T. T. C., "Torsion of Reinforced Concrete", Van Nostrand Reinhold Company, 1984. (Citado em [6]).
- [22] Hsu, T. T. C., "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion", *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 85(6), 1988, 624-635.

- [23] Hsu, T. T. C., “Nonlinear Analysis of Concrete Membrane Elements”, *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 88 (5), 1991, 552-561.
- [24] Hsu, T. T. C., “Unified Theory of Reinforced Concrete”, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1993.
- [25] Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., “Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests”, *Journal of the American Concrete Institute*, Proceedings, 82(3), 1985, 290-303. (Citado em [43]).
- [26] Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., “Unified Theory of Concrete Structures”, Wiley, 2010.
- [27] Hsu, T. T. C. and Zhang, L. X., “Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model”, *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 94 (5), 1997, 483-492.
- [28] Hsu, T. T. C. and Zhu, R. R. H., “Softened Membrane Model for Reinforced Concrete Elements in Shear”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 99(4), 2002, 460-469.
- [29] Hsu, T. T. C., Belarbi, A. and Pang, X. B., “A Universal Panel Tester”, *Journal of Testing and Evaluations*, ASTM, 23 (1), 1995, pp. 41-49. (Citado em [26]).
- [30] Jeng, C. H., “Unified Softened Membrane Model for Torsion in Hollow and Solid Reinforced Concrete Members: Modeling the Entire Pre- and Post- cracking Behavior”, *Journal of Structural Engineering*, 2014.
- [31] Jeng, C. H. and Hsu, T. T. C., “A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members”, *Engineering Structures*, 31 (9), May 2009, 1944-1954.
- [32] Lampert, P. and Thürlimann, B., “Torsionsversuche an Stahlbetonbalken”, Institut für Baustatik, ETH Zürich, 1968, 101 pp.
- [33] Lampert, P. and Thürlimann, B., “Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken”, Institut für Baustatik, ETH Zürich, 1969, 116 pp.
- [34] McMullen, A. E., and Warwaruk, J., “The Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Loading”, Report No. 2, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, July 1967, 162 pp.
- [35] Mörsch E. Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie. 1st ed. Wayss and Freitag, A. G., Im Selbstverlag der Firma, Neustadt a d. Haardt; 1902. p. 118. (Citado em [31]).

[36] Nobre, S.S., “Modelo Modificador de Treliza Espacial com Ângulo Variável - Avaliação da Lei constitutiva do Betão à Tração para Fissuração de Vigas de Betão Armado sujeitas à Torção”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Arquitetura e Engenharia Civil, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2014. (Citado em [47]).

[37] Onsongo, W. M., “The diagonal compression field theory for reinforced concrete beams subjected to combined, torsion, flexure and axial load”, PhD thesis, University of Toronto, 1978.

[38] Pang, X. B. and Hsu, T. T. C., “Constitutive Laws of Reinforced Concrete in Shear”, Research Report UHCEE 92-1, Dept. of Civil and Environmental Engineering, University of Houston, Dec. 1992, 187 pp. (Citado em [24]).

[39] Pang, X. B. and Hsu, T. T. C., “Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 92(6), November-December 1995, pp. 665-679.

[40] Pang, X. B. and Hsu, T. T. C., “Fixed-Angle softened truss model of reinforced concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 93(2), March-April 1996, pp. 197-207.

[41] Richard, R. M. and Abbott, B. J., “Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 101(EM4), 1975, pp. 511-515. (Citado em [4]).

[42] Robinson, J.R. and Demorieux, J.M. (1972), “Essais de Traction-Compression sur Modèles d’Ame de Poutre en Beton Arme,” IRABA Report, Institut de Recherches Appliquees du Beton de L’Ame, Part 1, June 1968, 44 pp. (Citado em [26])

[43] Silva, J. R. B., “Procedimento eficiente de análise de seções em concreto armado usando o modelo de treliza com amolecimento”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

[44] Silva, J. R. B. e Horowitz, B., “Procedimento Eficiente Para Estimar o Comportamento Carga-Deformação de Painéis de Concreto Armado Submetidos a Esforços de Membrana Usando o Modelo de Treliza com Amolecimento e Ângulo Variável”, CILAMCE 2015 - XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2015.

[45] Silva, J., Horowitz, B., Bernardo, L., “Efficient Procedure to Analyze RC Beam Sections using the Softened Truss Model”, *ACI Structural Journal*, American Concrete Institute, Vol. 114, No. 3, May-June 2017, pp. 1-10.

[46] Spiegel, M. R., “Probabilidade e Estatística”, Tradução de Alfredo Alves de Farias, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1978. (Citado em [3]).

[47] Teixeira, M. M., “Ductilidade de Vigas de Betão Armado sujeitas à Torção”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2015.

[48] Zhang, L. X., “Constitutive laws of reinforced elements with high strength”, PhD thesis, Dept. of Civ. Eng., Univ. of Houston, Houston, Tex., 1995. (Citado em [49]).

[49] Zhang, L. X. and Hsu, T. T. C., “Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No.1, January 1998, pp. 24-34.

[50] Zhu, R. R. H., Hsu, T. T. C. and Lee, J. Y., “Rational Shear Modulus for Smeared-Crack Analysis of Reinforced Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 98(4), July-August 2001, pp. 443-450.

Anexos

Anexo I. Código em MATLAB do RA-STM

Script para iniciar o RA-STM

```
%//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% RA-STM - ROTATING ANGLE SOFTENED TRUSS MODEL /
%//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

% INICIO ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
clear all; clc;

% DADOS DE ENTRADA ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
DADOS_INICIAIS; tic;

% CÁLCULO DA ESTIMATIVA INICIAL (MCTM) ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
alfaD1 = (lsqnonlin(@(alfaD) MCTM_PAINEL(alfaD),0.01,[],0))*180/pi;

% SOLUÇÃO ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
COMP_PAINEL;

% CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
toc; PLOT_PAINEL;
```

Função para a escolha dos dados iniciais

```
function DADOS_INICIAIS
%////////////////////////////////////
% SELEÇÃO DO PAINEL
%////////////////////////////////////

disp('Selecione os dados iniciais');
disp(' ');
disp('1 - VA0 [fcm = 98,8 MPa | roL = 0,0060 | roT = 0,0060] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('2 - VA1 [fcm = 95,1 MPa | roL = 0,0120 | roT = 0,0120] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('3 - VA2 [fcm = 98,2 MPa | roL = 0,0239 | roT = 0,0239] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('4 - VA3 [fcm = 94,6 MPa | roL = 0,0359 | roT = 0,0359] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('5 - VA4 [fcm = 103,1 MPa | roL = 0,0524 | roT = 0,0524] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('6 - VB1 [fcm = 98,2 MPa | roL = 0,0239 | roT = 0,0120] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('7 - VB2 [fcm = 97,6 MPa | roL = 0,0359 | roT = 0,0120] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('8 - VB3 [fcm = 102,3 MPa | roL = 0,0598 | roT = 0,0120] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('9 - VB4 [fcm = 96,9 MPa | roL = 0,0180 | roT = 0,0060] - ZHANG e HSU
(1998)');
disp('10 - A1R [fcm = 42,2 MPa | roL = 0,0077 | roT = 0,0077] - (1997)');
disp('11 - A2 [fcm = 41,2 MPa | roL = 0,0119 | roT = 0,0119] - PANG e HSU
(1995)');
disp('12 - A3 [fcm = 41,6 MPa | roL = 0,0179 | roT = 0,0179] - PANG e HSU
(1995)');
disp('13 - A4 [fcm = 42,5 MPa | roL = 0,0298 | roT = 0,0298] - PANG e HSU
(1995)');
disp('14 - B1 [fcm = 45,2 MPa | roL = 0,0119 | roT = 0,0060] - PANG e HSU
(1995)');
disp('15 - B2 [fcm = 44,1 MPa | roL = 0,0179 | roT = 0,0119] - PANG e HSU
(1995)');
disp('16 - B3 [fcm = 44,9 MPa | roL = 0,0179 | roT = 0,0060] - PANG e HSU
(1995)');
disp('17 - B4 [fcm = 44,8 MPa | roL = 0,0298 | roT = 0,0060] - PANG e HSU
(1995)');
disp('18 - B5 [fcm = 42,8 MPa | roL = 0,0298 | roT = 0,0119] - PANG e HSU
(1995)');
disp('19 - B6 [fcm = 43,0 MPa | roL = 0,0298 | roT = 0,0179] - PANG e HSU
(1995)');
disp(' ');

IND = input('Escolha uma opção: ');

if IND > 0
    switch IND
        case 1
            VA0_ZHANG_e_HSU;
        case 2
            VA1_ZHANG_e_HSU;
        case 3
            VA2_ZHANG_e_HSU;
        case 4
            VA3_ZHANG_e_HSU;
        case 5
            VA4_ZHANG_e_HSU;
        case 6
            VB1_ZHANG_e_HSU;
        case 7
            VB2_ZHANG_e_HSU;
        case 8
            VB3_ZHANG_e_HSU;
```

```
case 9
    VB4_ZHANG_e_HSU;
case 10
    A1R_1997;
case 11
    A2_PANG_e_HSU;
case 12
    A3_PANG_e_HSU;
case 13
    A4_PANG_e_HSU;
case 14
    B1_PANG_e_HSU;
case 15
    B2_PANG_e_HSU;
case 16
    B3_PANG_e_HSU;
case 17
    B4_PANG_e_HSU;
case 18
    B5_PANG_e_HSU;
case 19
    B6_PANG_e_HSU;
end
end
end
```

Função para o cálculo da estimativa inicial (MTCM)

```
function F = MCTM_PAINEL(alfaD)
%////////////////////////////////////
% COMPORTAMENTO LINEAR DO PAINEL (MTCM) - ESTIMATIVA INICIAL PARA O RA-STM/
%////////////////////////////////////
global roL roT Es Ec eL eT eD sig1 mLT mL mT

% Equações de equilíbrio (Eqs. 2.53-2.55):
eL=(mL+mLT*cot(alfaD))/(Es*roL)*0.001*sig1 ;
eT=(mT+mLT*tan(alfaD))/(Es*roT)*0.001*sig1;
eD=-mLT/(Ec*sin(alfaD)*cos(alfaD))*0.001*sig1;

% Equação não linear (Eq. 2.5):
F = (eL-eD)/(eT-eD)-(tan(alfaD))^2;

end
```

Função do RA-STM

```
function F = RASTM_PAINEL(x,ed1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO PAINEL (RA-STM) /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global roL roT Es fcm fLy fTy e0 mL mLT mL mT sigmaD csi eR fL fT eLy eTy
% CÁLCULOS INICIAIS ////////////////////////////////////////////////////
% Princípio da Invariância (Eq. 2.8):
eR = x(1) + x(2) - ed1;

% Coeficiente de Amolecimento (Eqs. 2.15-2.18):
R = 5.8/(sqrt(fcm));
if R <= 0.9
    R_linha = R;
else
    R_linha = 0.9;
end

n = (roT*fTy)/(roL*fLy);
if n <= 1
    n_linha = n;
else
    n_linha = 1/n;
end

csi = R_linha/(sqrt(1+((0.4*eR)/n_linha)));

% Relação constitutiva do betão à compressão (Eq. 2.12):
if ed1 > csi*e0
    sigmaD = -csi*fcm*(2*(ed1/(csi*e0))-(ed1/(csi*e0))^2);
else
    sigmaD = -csi*fcm*(1-((ed1/(csi*e0)-1)/((4/csi)-1))^2);
end

% Relação constitutiva do aço (Eqs. 2.23-2.26):
fcr = 0.311 * sqrt(fcm);

% Armadura Longitudinal
BL = (1/roL)*(fcr/fLy)^1.5;
enL = eLy*10^-3*(0.93-2*BL);

if x(1)*10^-3 <= enL
    fL = x(1)*10^-3*Es;
else
    fL = fLy*((0.91-2*BL)+(0.02+0.25*BL)*(x(1)/eLy));
end

% Armadura Transversal
BT = (1/roT)*(fcr/fTy)^1.5;
enT = eTy*10^-3*(0.93-2*BT);

if x(2)*10^-3 <= enT
    fT = x(2)*10^-3*Es;
else
    fT = fTy*((0.91-2*BT)+(0.02+0.25*BT)*(x(2)/eTy));
end

% Tensão principal de tracção (Eqs. 2.40-2.43):
A = mL*mT - mLT^2;
B = mL*roT*fT + mT*roL*fL;
C = roT*fT*roL*fL;
sigma1 = (1/(2*A))*(B-sqrt(B^2-4*A*C));
%COMPORTAMENTO NÃO LINEAR RA-STM ////////////////////////////////////////////////////
% Sistema de equações não-linear (Eq. 2.57):
F(1) = sigmaD*(x(1)-ed1)/(eR-ed1)-mT*sigma1+roT*fT;
F(2) = sigmaD*(x(2)-ed1)/(eR-ed1)-mL*sigma1+roL*fL;
end
```

Função para o cálculo do comportamento carga-deformação do painel

```
function COMP_PAINEL
%////////////////////////////////////
% COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMÇÃO DO PAINEL (RASTM_PAINEL) /
%////////////////////////////////////
global eL eT eD sigmaD eR fL fT fcm roL roT
global ED SIGMAD TAL GAMA EL ET FL FT ALFAD ER ROLFL_ROTFT

% Estimativa inicial com base no MCTM:
x(1) = eL*1000;
x(2) = eT*1000;
ed1 = eD*1000;

% Número máximo de pontos e tamanho do passo:
pontos = 1000;
passo = 4/pontos;

% Cálculo comportamento tensão-deformação:
for i = 1:pontos

    options = optimset('TolX',10^-10,'TolFun',10^-10);
    x = lsqnonlin(@(x) RASTM_PAINEL(x,ed1-passo*i),x,[0,0],[],options);

    % Criar vetores de comportamento:
    ED(i) = eD - passo*i;
    SIGMAD(i) = sigmaD;
    COS = (x(2)-ED(i))/(eR-ED(i));
    SIN = (x(1)-ED(i))/(eR-ED(i));
    TAL(i) = -SIGMAD(i)*sqrt(COS*SIN);
    GAMA(i) = 2*(eR-ED(i))*sqrt(COS*SIN);
    EL(i) = x(1);
    ET(i) = x(2);
    FL(i) = fL;
    FT(i) = fT;
    ALFAD(i) = -atan(sqrt(SIN/COS))*180/pi;
    ER(i) = EL(i) + ET(i) - ED(i);
    ROLFL_ROTFT(i) = FL(i)*roL + FT(i)*roT;

    % Critérios de paragem (betão normal e de alta resistência)
    % (Eqs. 2.19 e 2.20..):
    if fcm <= 50
        if - ED(i) >= 3.5;
            break
        end
    else
        if - ED(i) >= 2.8 + 27 * ((98-fcm)/100)^4;
            break
        end
    end
end

end
end
```

Função para impressão das curvas carga-deformação do painel

```
function PLOT_PAINEL
%////////////////////////////////////
% IMPRESSÃO DAS CURVAS DE COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO PAINEL /
%////////////////////////////////////
global ED SIGMAD TAL GAMA EL ET FL FT ER ROLFL ROTFT
global e_plot sigmaD_plot eR_plot aco_plot eL_plot eT_plot fL_plot fT_plot
global tal_plot gama_plot tal_Teo gama_Teo a b c
% DADOS INICIAIS //////////////////////////////////////

e_PLOT      = e_plot;
sigmaD_PLOT = sigmaD_plot;
eR_PLOT     = eR_plot;
aco_PLOT    = aco_plot;
eL_PLOT     = eL_plot;
eT_PLOT     = eT_plot;
fL_PLOT     = fL_plot;
fT_PLOT     = fT_plot;
tal_PLOT    = tal_plot;
gama_PLOT   = gama_plot;

% Opção:
disp('1 - Curva tensão-deformação de compressão do betão');
disp('2 - Curva tensão-deformação da armadura longitudinal');
disp('3 - Curva tensão-deformação da armadura transversal');
disp('4 - Curva tensão-deformação da armadura longitudinal e transversal');
disp('5 - Curva tensão-deformação de corte do painel');
disp(' ');
disp('6 - Voltar ao inicio');
disp('0 - Sair');
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

% IMPRESSÃO DAS CURVAS //////////////////////////////////////

while IND > 0
    switch IND

        case 1
            % 1 - Curva tensão-deformação de compressão do betão
            hold on
            plot(-e_PLOT,-sigmaD_PLOT,'-rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
            plot(-[0 ED],[-[0 SIGMAD]'],'--b','LineWidth',2)

            % Titulos
            xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
            ylabel('\sigma_D (MPa)');
            legend(a,...
                b,'Location','southeast');
            grid on
            hold off

        case 2
            % 2 - Curva tensão-deformação da armadura longitudinal
            hold on
            plot(eL_PLOT,fL_PLOT,'--rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
            plot([0 EL],[0 FL]','-g','LineWidth',2)

            % Titulos
            xlabel('\epsilon_L(1/1000)');
            ylabel('f_L (MPa)');
            legend(a,...
                b,'Location','southeast');
            grid on
            hold off
```

```

case 3
    % 3 - Curva tensão-deformação da armadura transversal
    hold on
    plot(eT_PLOT, fT_PLOT, '--rs', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 7)
    plot([0 ET], [0 FT], '-g', 'LineWidth', 2)

    % Títulos
    xlabel('\epsilon_T (1/1000)');
    ylabel('f_T (MPa)');
    legend(a, ...
        b, 'Location', 'southeast');
    grid on
    hold off

case 4
    % 4 - Curva tensão-deformação da armadura long. e trans.
    hold on
    plot(eR_PLOT, aco_PLOT, '--rs', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 7)
    plot([0 ER], [0 ROLFL_ROTFT], '-g', 'LineWidth', 2)

    % Títulos
    xlabel('\epsilon_R (1/1000)');
    ylabel('\rho_Lf_L + \rho_Tf_T (MPa)');
    legend(a, ...
        b, 'Location', 'southeast');
    grid on
    hold off

case 5
    % 5 - Curva tensão-deformação de corte do painel
    hold on
    plot(gama_PLOT, tal_PLOT, '-rs', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 7)
    plot([0 GAMA], [0 TAL], '--b', 'LineWidth', 2)
    plot(gama_Teo, tal_Teo, '-k', 'LineWidth', 1)

    % Títulos
    xlabel('\gamma_L_T (1/1000)');
    ylabel('\tau_L_T (MPa)');
    legend(a, ...
        b, ...
        c, 'Location', 'southeast');
    grid on
    hold off

case 6
    if IND == 6
        inicio;
        break
    end
end
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

end
end

```

Dados experimentais do painel VA3

```
function VA3_ZHANG_e_HSU
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DADOS EXPERIMENTAIS DO PAINEL VA3 - ZHANG E HSU (1998) /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global roL roT Es fLy fTy Ec fcm e0 tal sigL sigT eLy eTy
global sig1 mLT mL mT
global e_plot sigmaD_plot eR_plot aco_plot eL_plot eT_plot fL_plot fT_plot
global alfa_plot tal_plot gama_plot tal_Teo gama_Teo a b c
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DADOS INICIAIS /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Taxas de armadura:
roL = 0.0359;
roT = 0.0359;

% Propriedades mecânicas dos aços:
Es = 200000; %Módulo de elasticidade do aço (MPa)
fLy = 455; %Tensão de cedência da armadura longitudinal (MPa)
fTy = 455; %Tensão de cedência da armadura transversal (MPa)

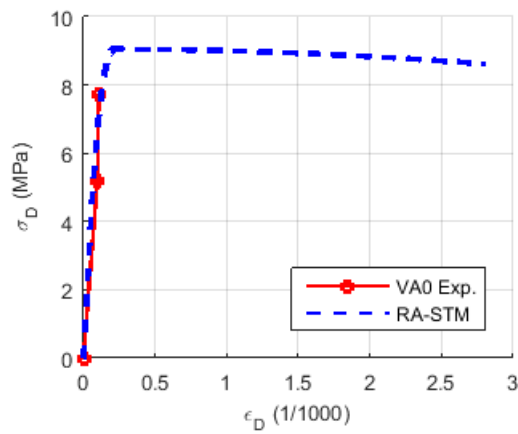
% Propriedades mecânicas do betão:
fcm = 94.6; %Resistência média do betão (MPa)
Ec = (22*(fcm/10)^0.3)*1000; %Módulo de elasticidade do betão (MPa)
e0 = -2.45; % Extensão de compressão correspondente à
tensão de pico no betão (1/1000)
% Solicitações no elemento de betão armado (L-T):
tal = -3.69; %Tensão tangencial (MPa)
sigL = 0; %Tensão de tração longitudinal (MPa)
sigT = 0; %Tensão de compressão transversal (Mpa)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CÁLCULOS PRELIMINARES /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eLy = fLy/Es*1000;
eTy = fTy/Es*1000;
sig1 = (sigL + sigT)/2 + sqrt(((sigL - sigT)/2)^2 + tal^2);
mLT = tal/sig1;
mL = sigL/sig1;
mT = sigT/sig1;

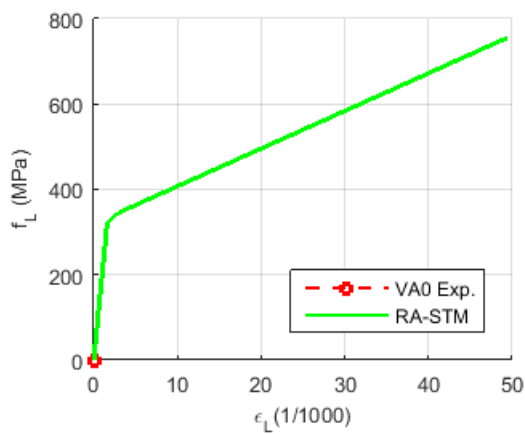
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DADOS CURVAS EXPERIMENTAIS E TEÓRICAS /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
e_plot = [0; -0.3; -0.785; -1.08; -2; -2.57; -3.07; -4; -4.36; -4.7;
-6.2];
sigmaD_plot = [0; -15.2; -30; -29.8; -25; -23.7; -18.9; -18.15; -17.5;
-15.4; -12.5];
eR_plot = [ 0; 0.35; 3.7; 5.025; 8; 9; 9.5; 10.7; 11.1; 12.7; 13.1;
14];
aco_plot = [ 0; 5.4; 24; 29.8; 29.25; 27.5; 25; 23; 19; 17.4; 11; 10];
eL_plot = 0;
eT_plot = 0;
fL_plot = 0;
fT_plot = 0;
alfa_plot = 0;
tal_plot = [0; 2; 2.7; 4; 5.1; 5.9; 7.1; 7.8; 8.9; 10; 10.6; 11.7; 12.2;
13.5; 14.5; 15; 14.9; 14.9];
gama_plot = [0; 0.2; 0.3; 0.8; 1.3; 1.7; 2.1; 2.3; 2.75; 3.25; 3.5; 4.1;
4.3; 5; 5.7; 7; 8; 9.2];
tal_Teo = [0; 2.8; 2.7; 14.9; 14.9];
gama_Teo = [0; 0.2; 0.3; 5; 7.8];
%Legenda
a = 'VA3 Exp.';
b = 'RA-STM';
c = 'RA-STM [49]';
end
```

Anexo II. Previsão teórica do RA-STM para cada painel

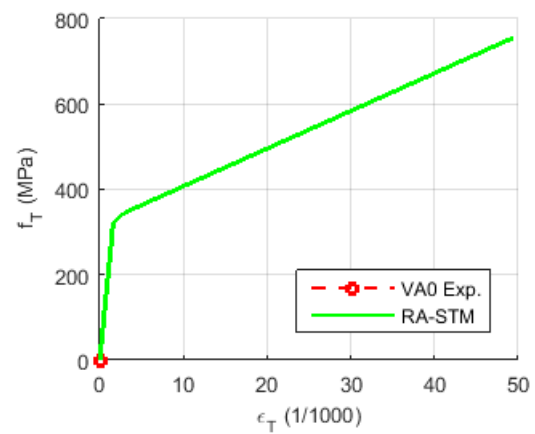
Painel VA0



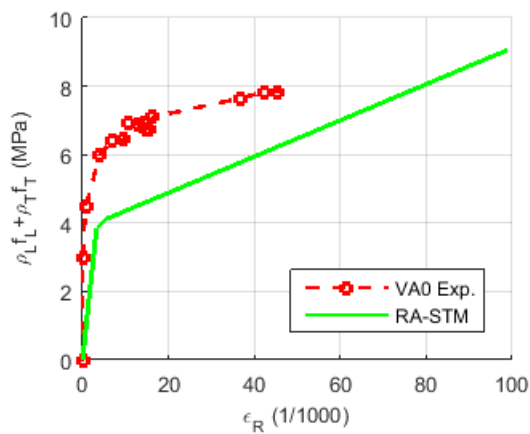
Curva σ_D - ϵ_D



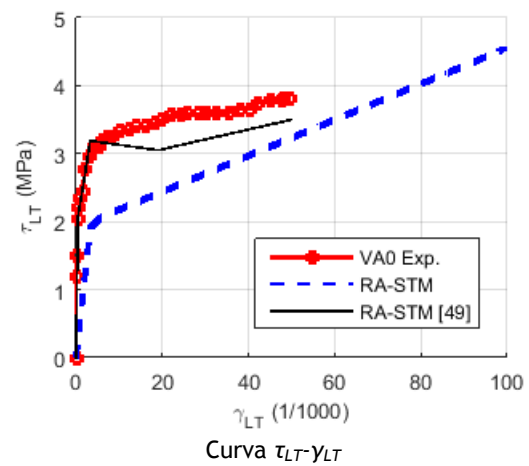
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

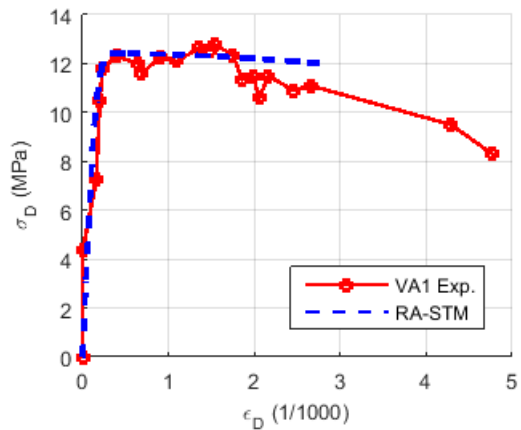


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

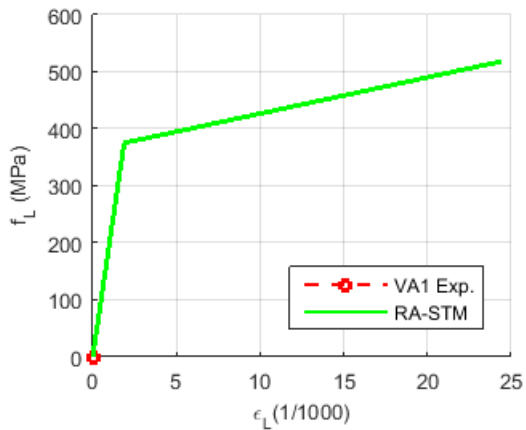


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

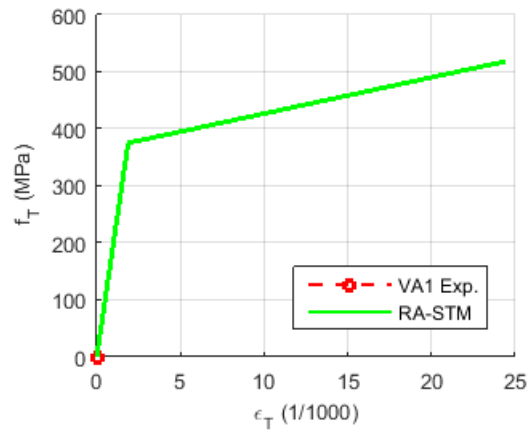
Painel VA1



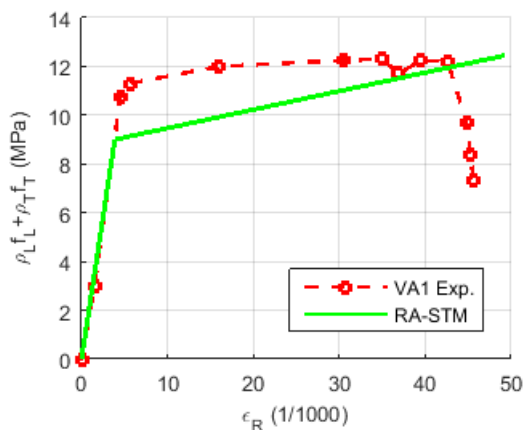
Curva σ_D - ϵ_D



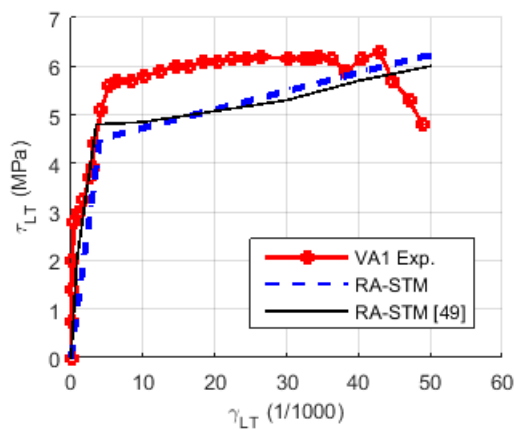
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

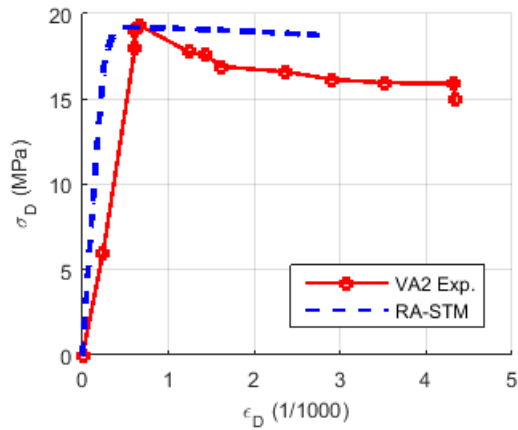


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

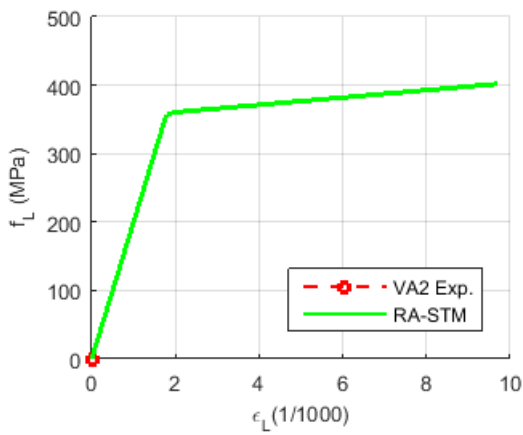


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

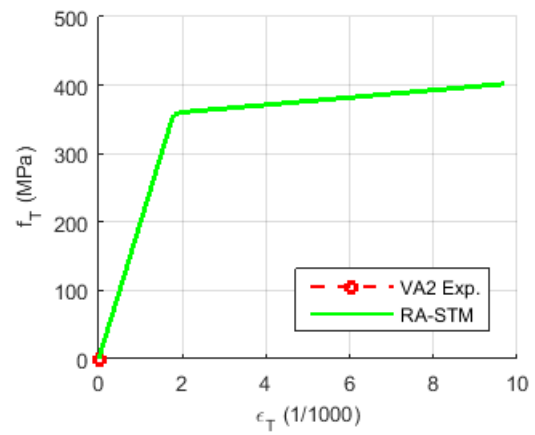
Painel VA2



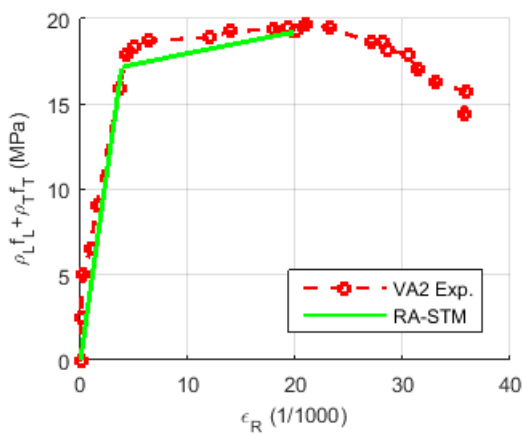
Curva σ_D - ϵ_D



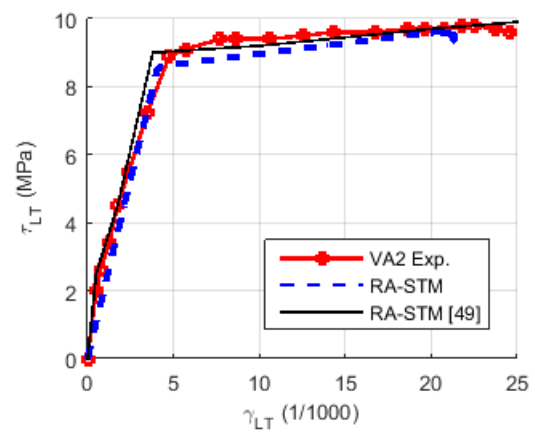
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

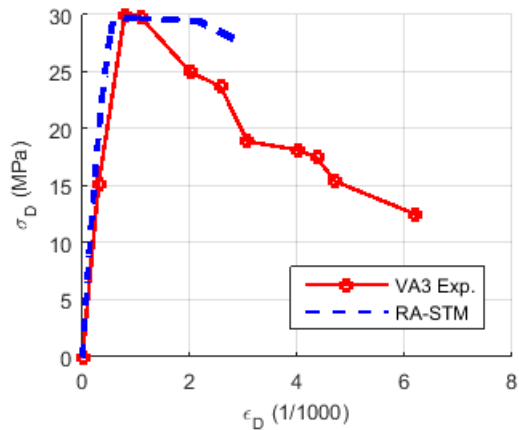


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

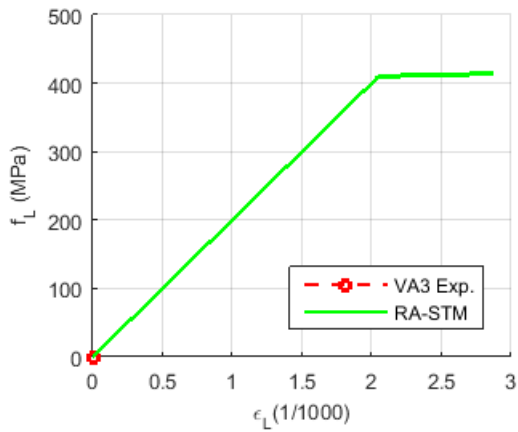


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

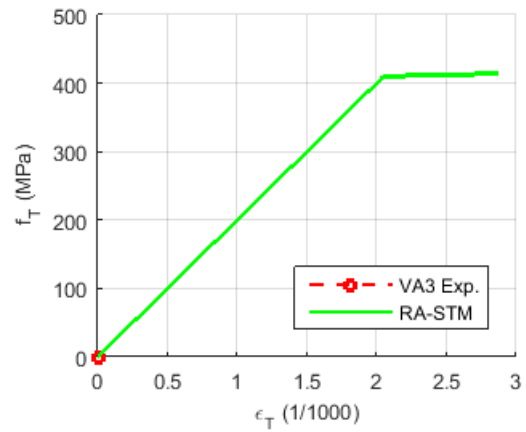
Painel VA3



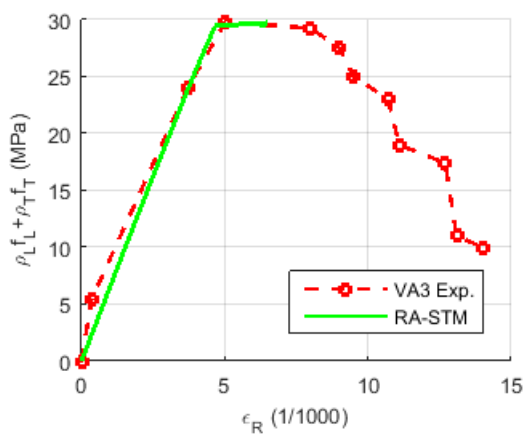
Curva $\sigma_D - \epsilon_D$



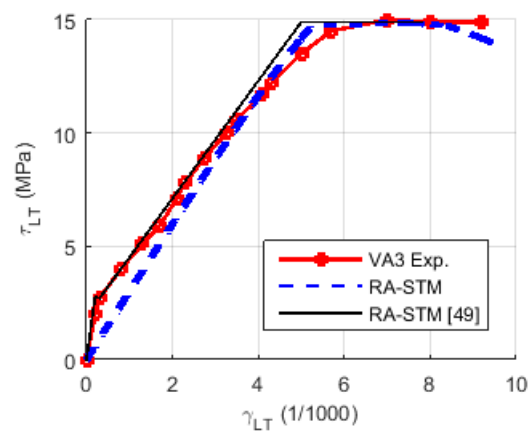
Curva $f_L - \epsilon_L$



Curva $f_T - \epsilon_T$

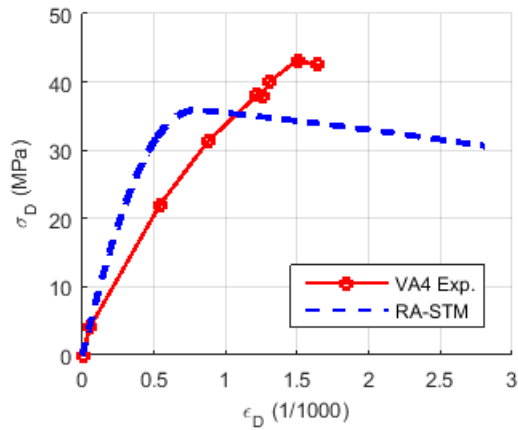


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T - \epsilon_R$

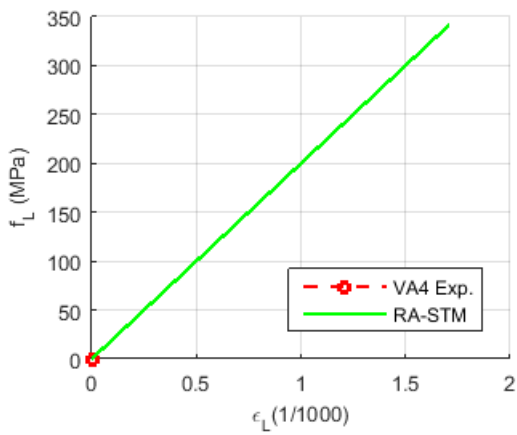


Curva $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$

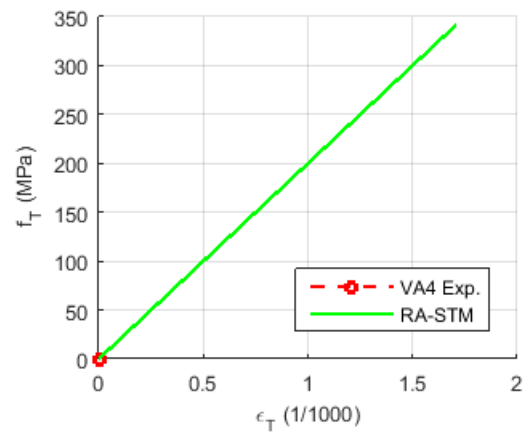
Painel VA4



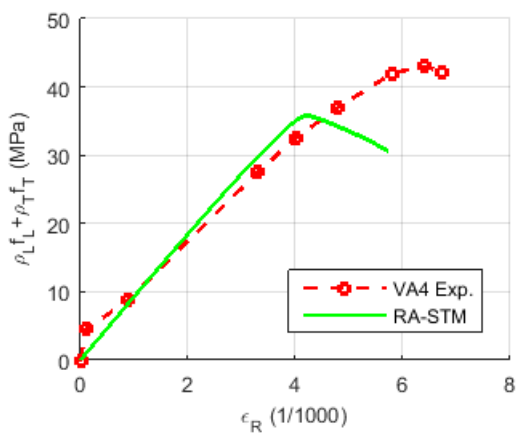
Curva σ_D - ϵ_D



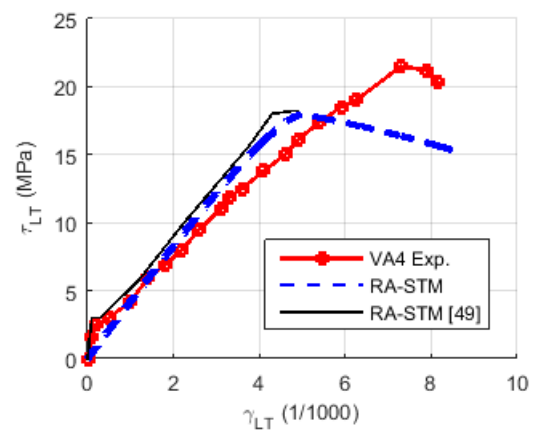
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

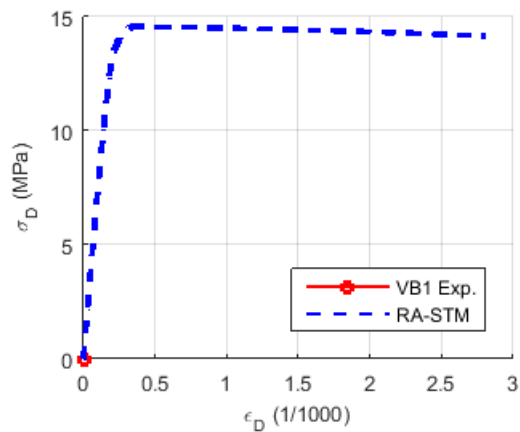


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

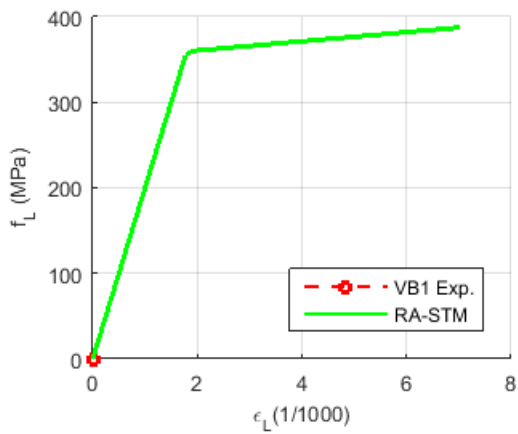


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

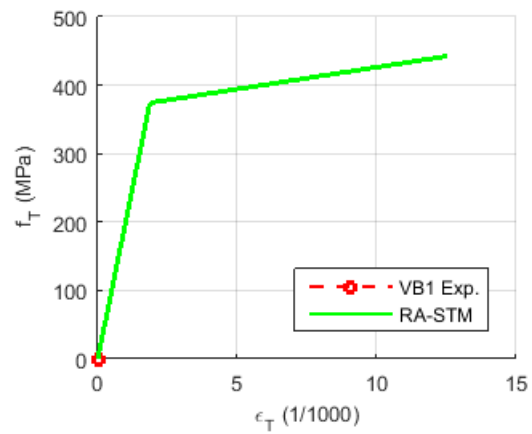
Painel VB1



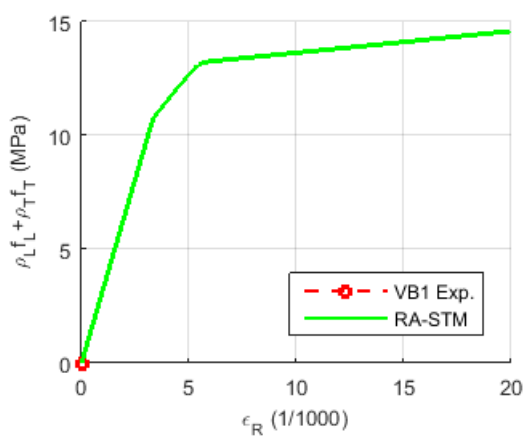
Curva σ_D - ϵ_D



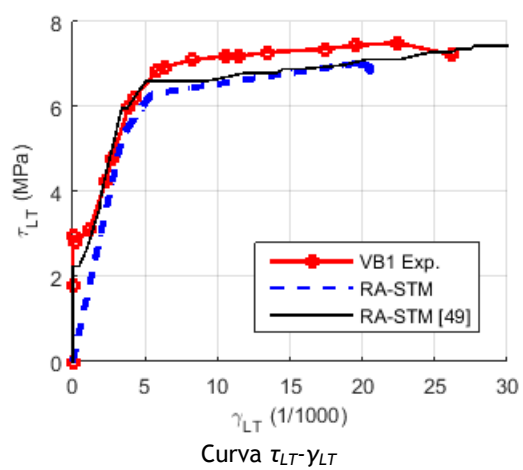
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

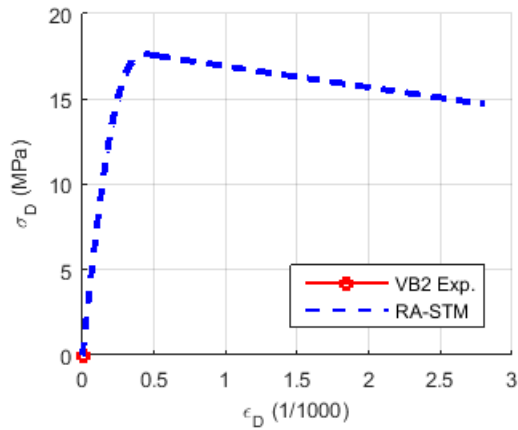


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

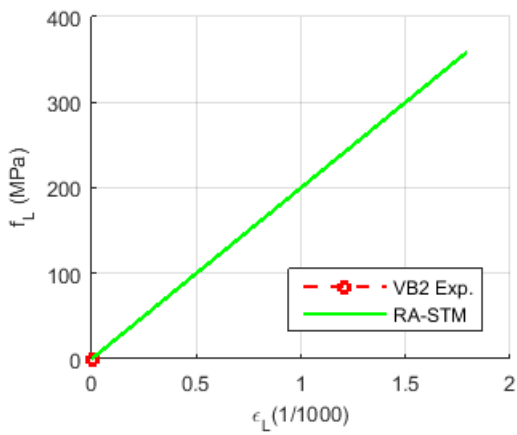


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

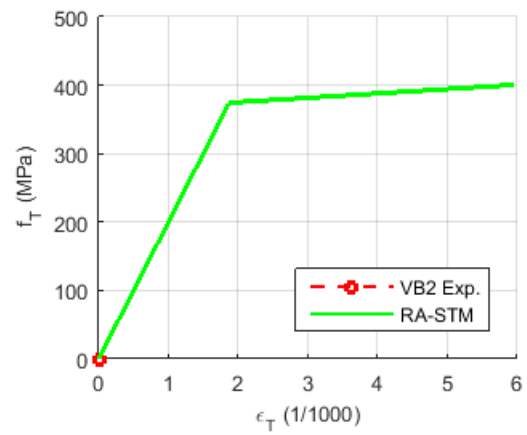
Painel VB2



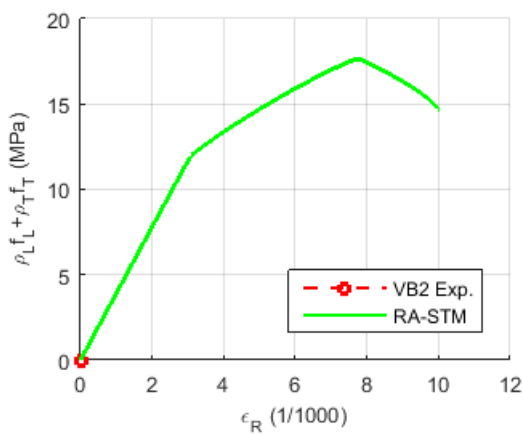
Curva σ_D - ϵ_D



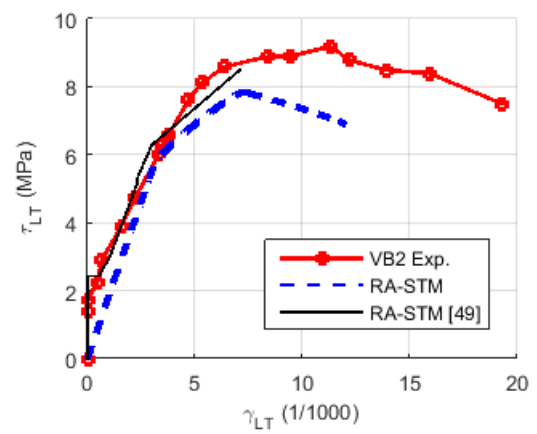
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

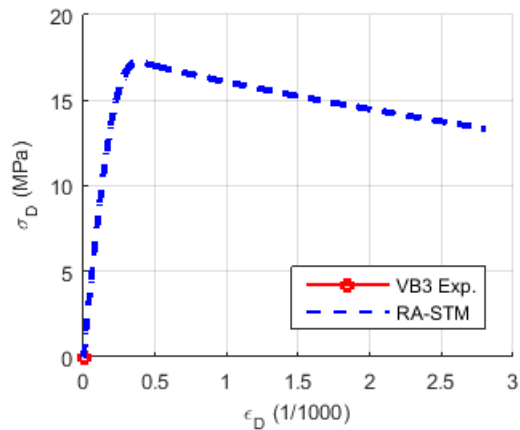


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

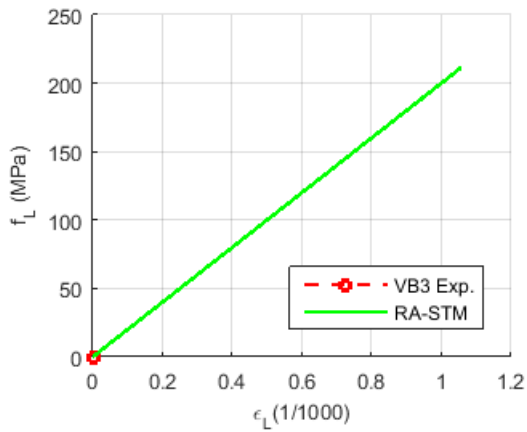


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

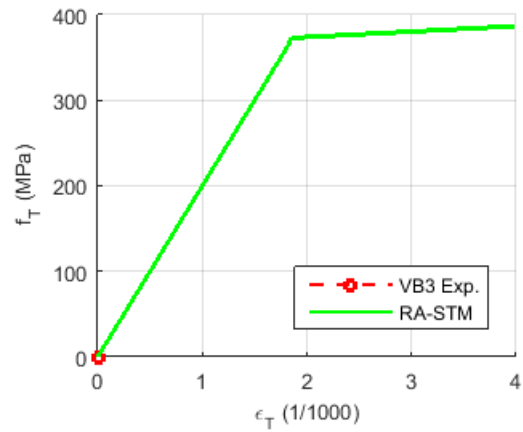
Painel VB3



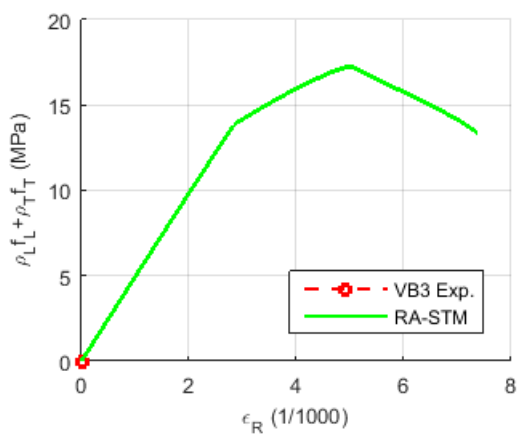
Curva σ_D - ϵ_D



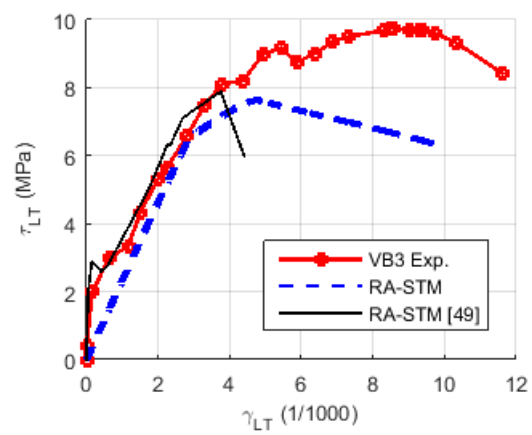
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

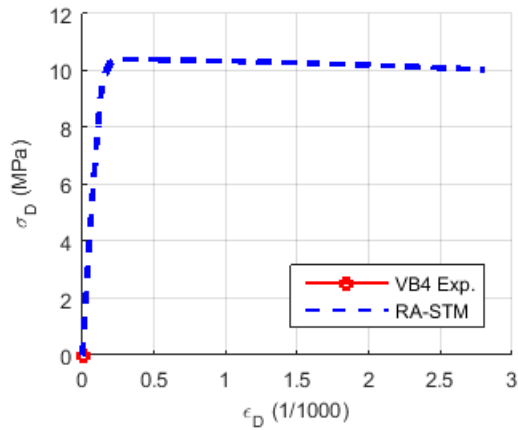


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

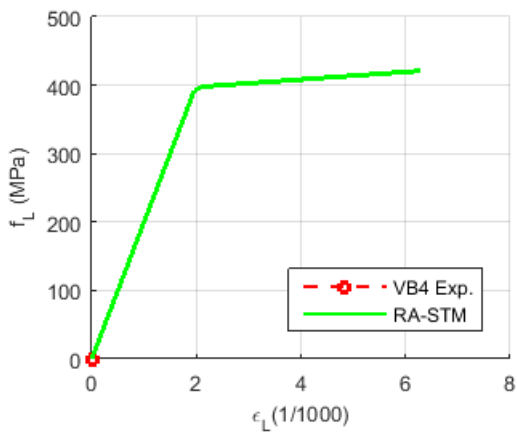


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

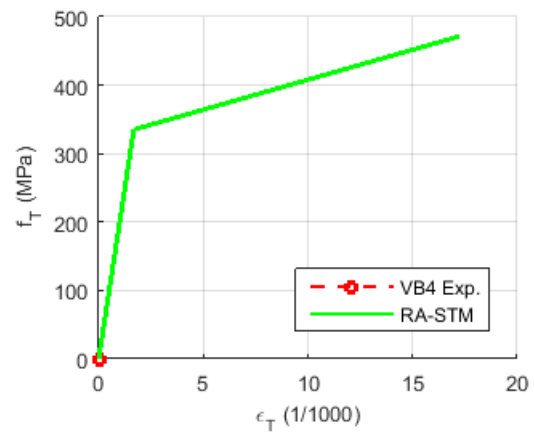
Painel VB4



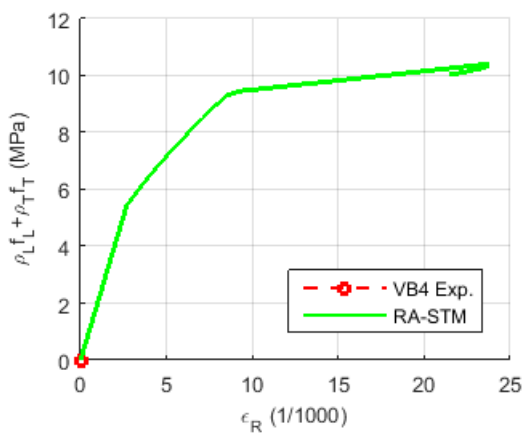
Curva σ_D - ϵ_D



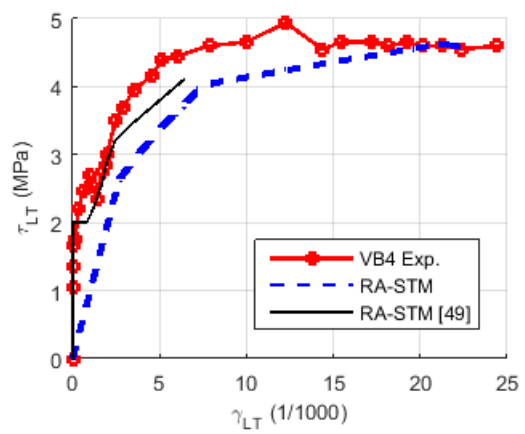
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

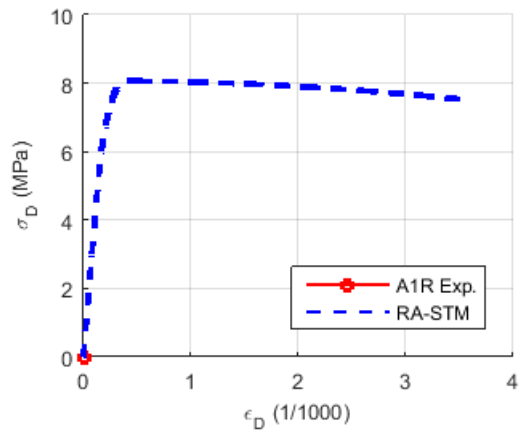


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

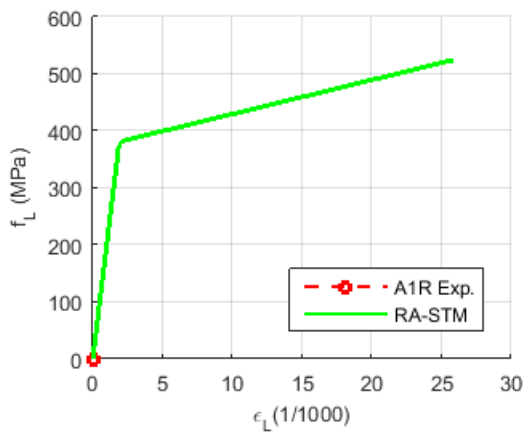


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

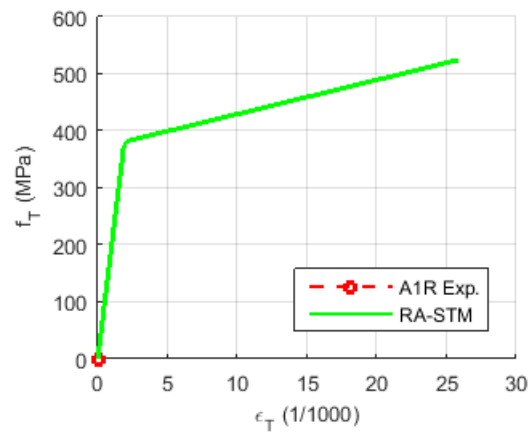
Painel A1R



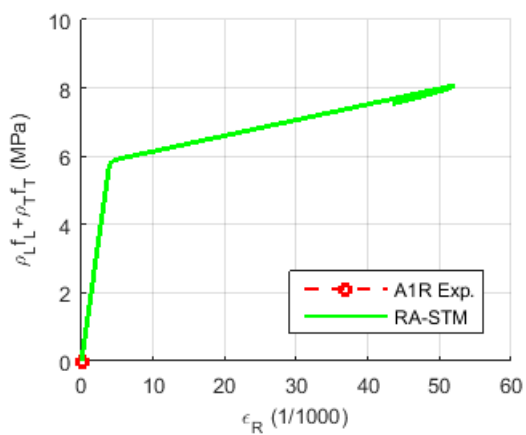
Curva σ_D - ϵ_D



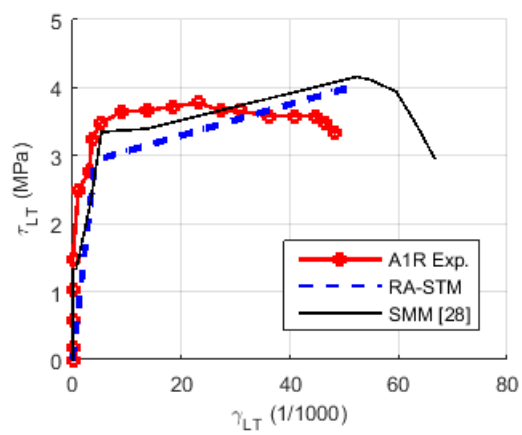
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

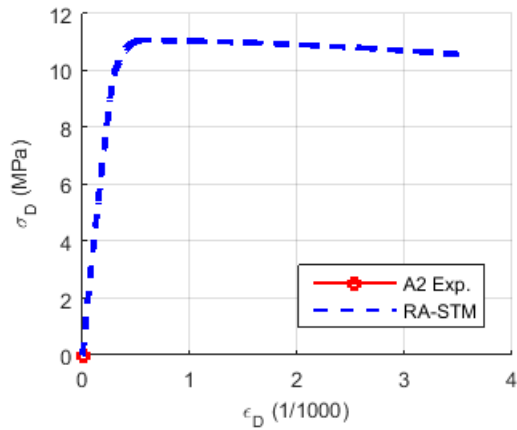


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

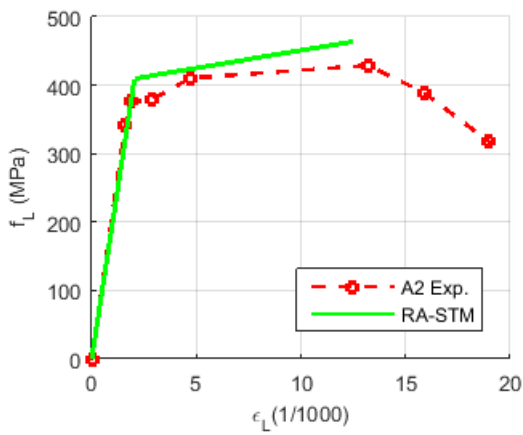


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

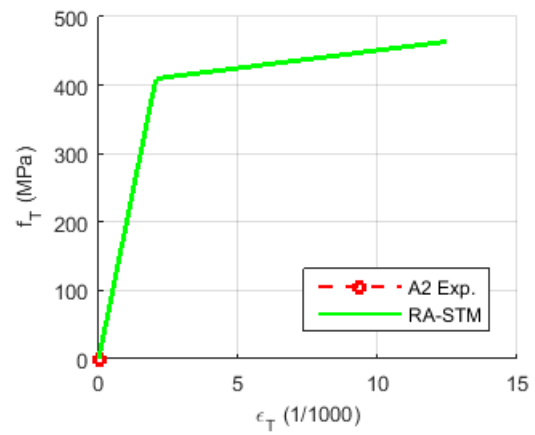
Painel A2



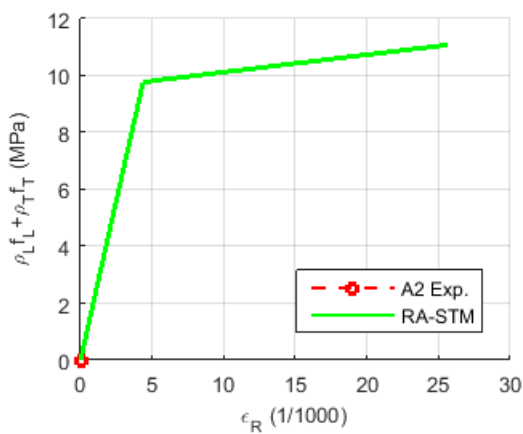
Curva σ_D - ϵ_D



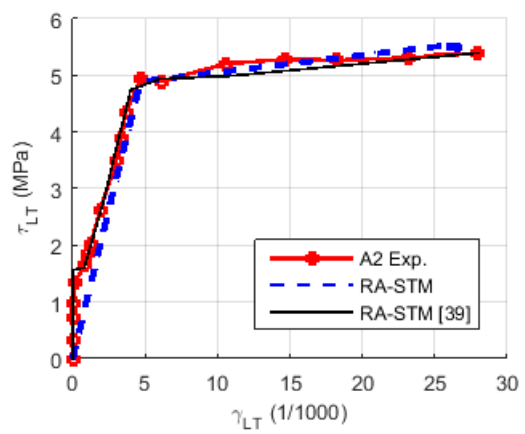
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

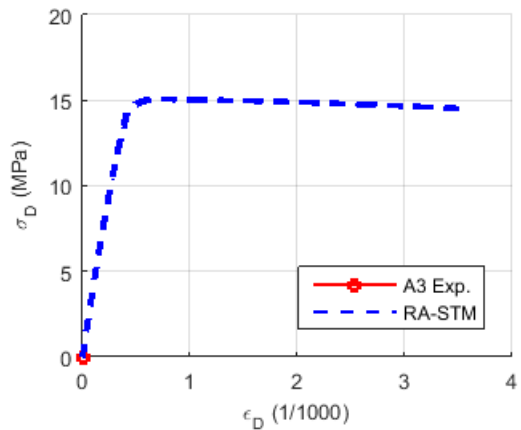


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

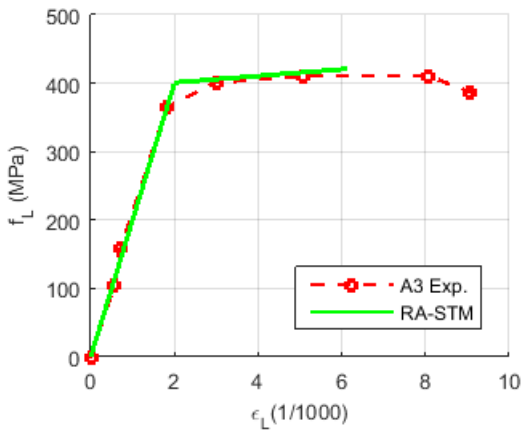


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

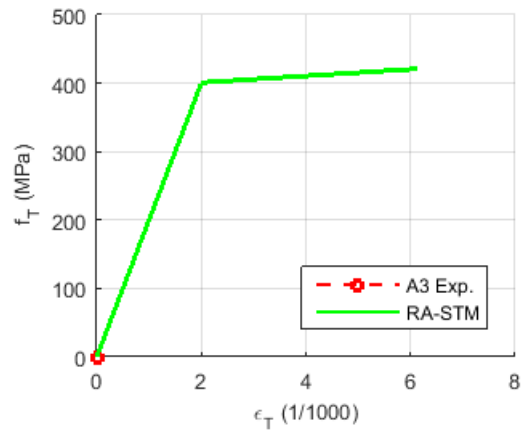
Painel A3



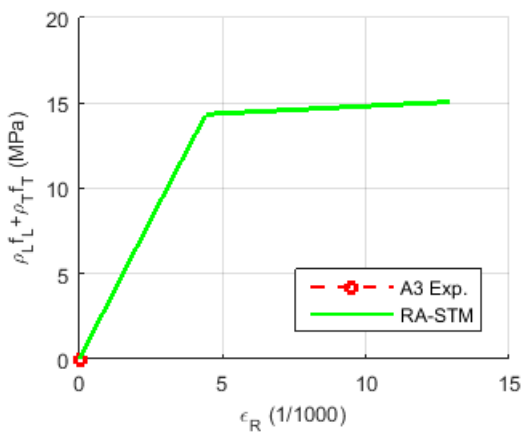
Curva $\sigma_D - \epsilon_D$



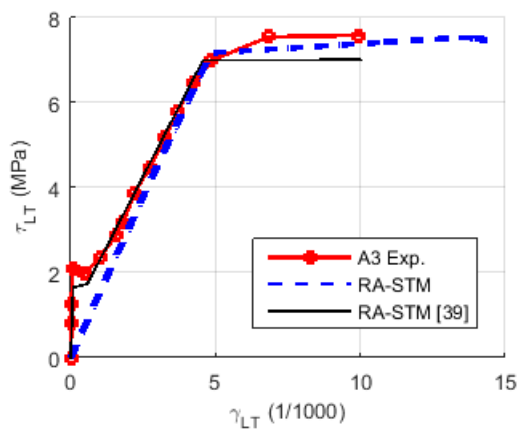
Curva $f_L - \epsilon_L$



Curva $f_T - \epsilon_T$

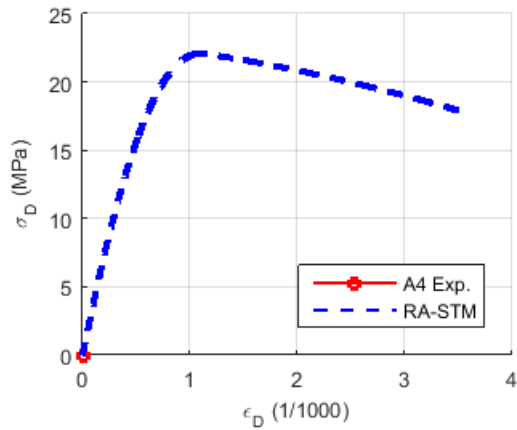


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T - \epsilon_R$

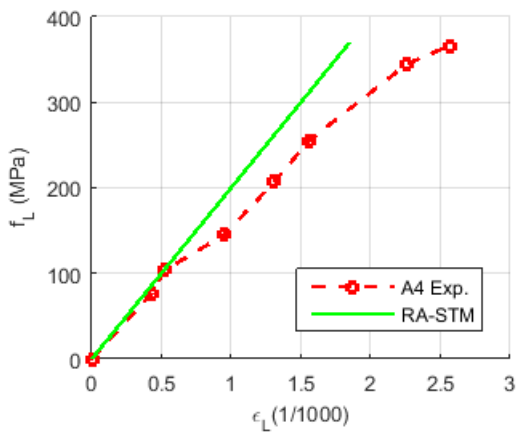


Curva $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$

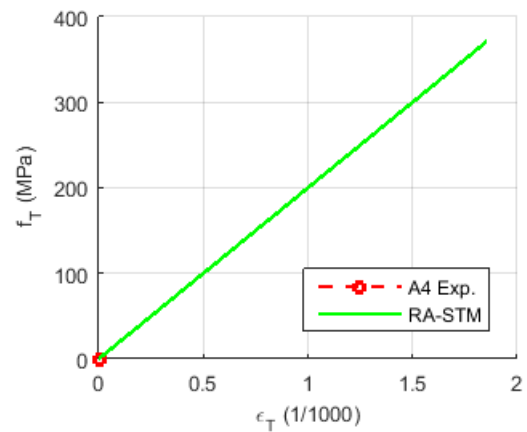
Painel A4



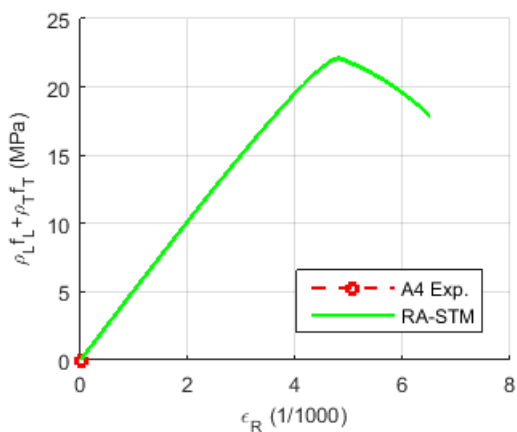
Curva σ_D - ϵ_D



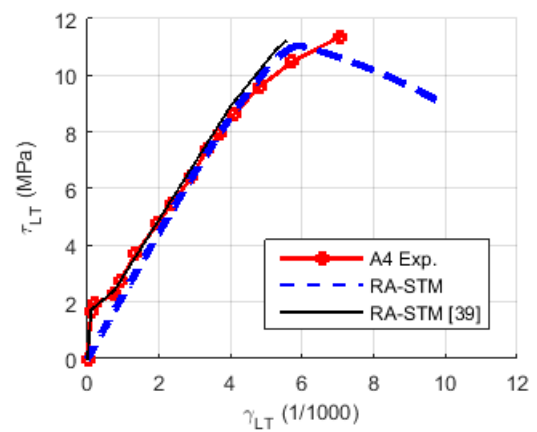
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

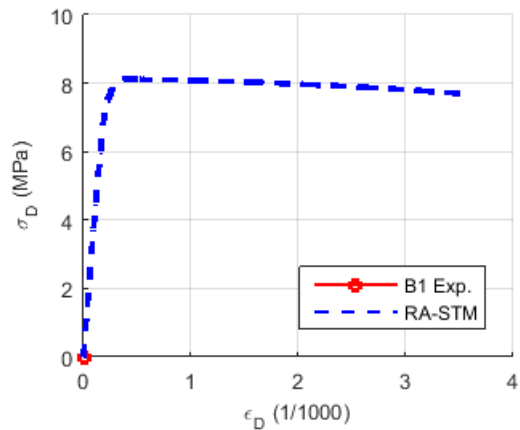


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

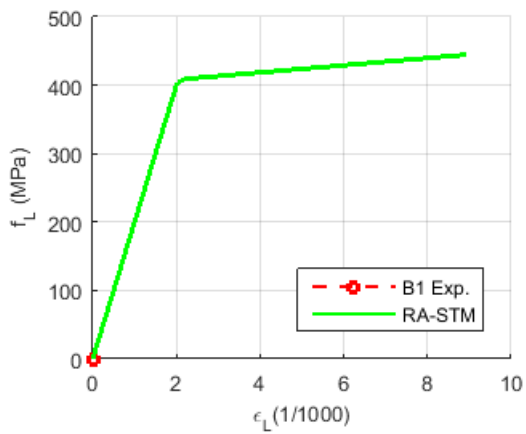


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

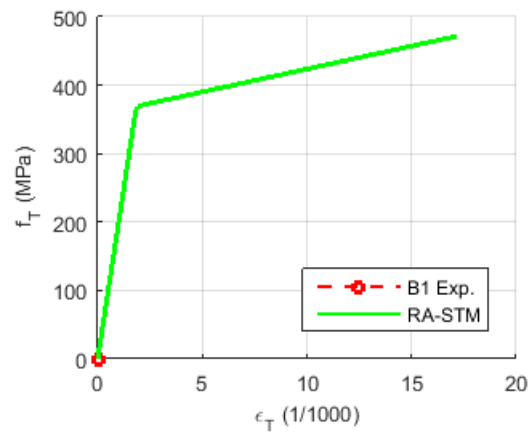
Painel B1



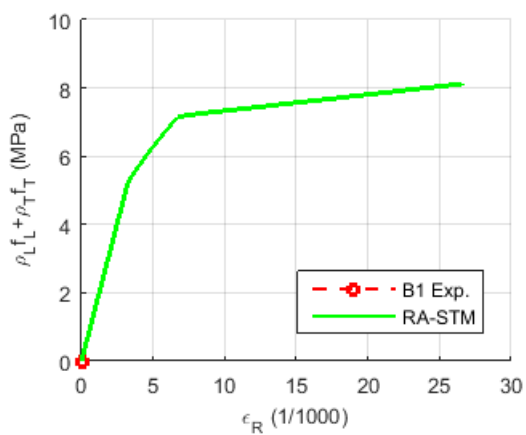
Curva σ_D - ϵ_D



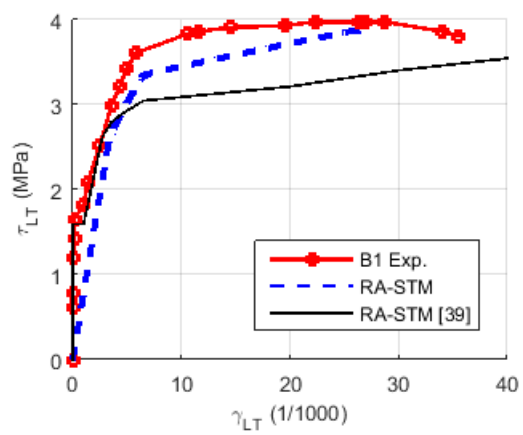
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

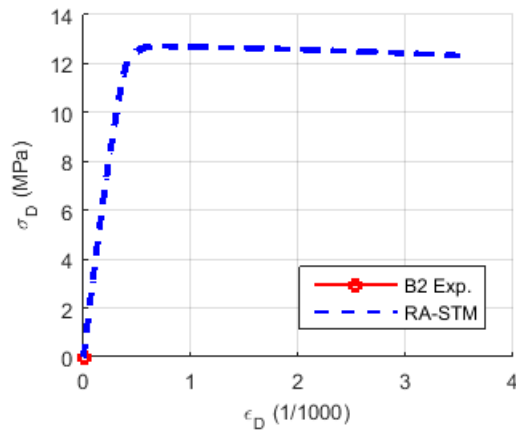


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

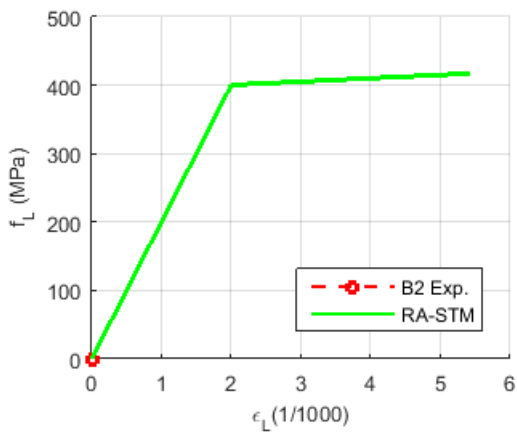


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

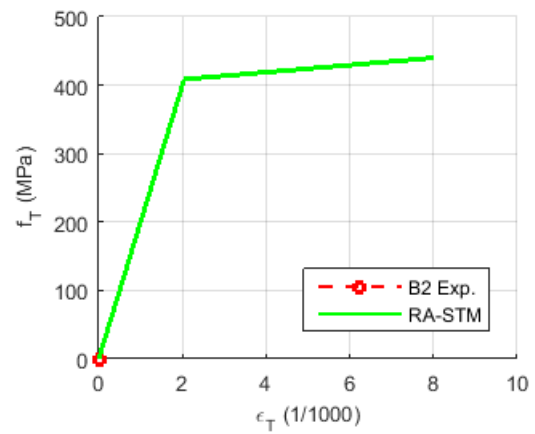
Painel B2



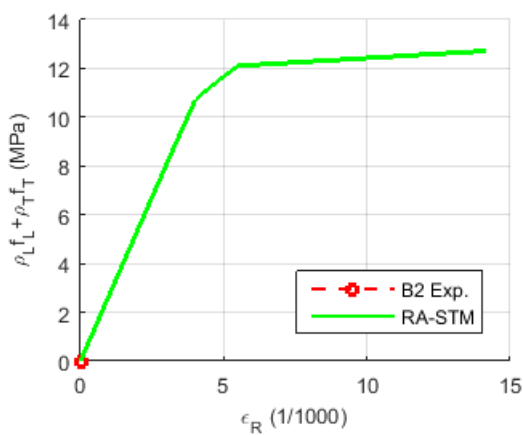
Curva σ_D - ϵ_D



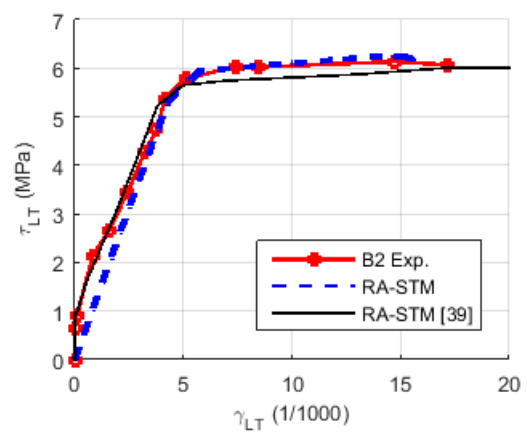
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

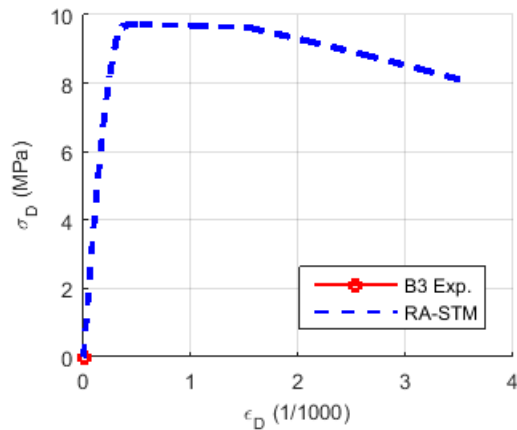


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

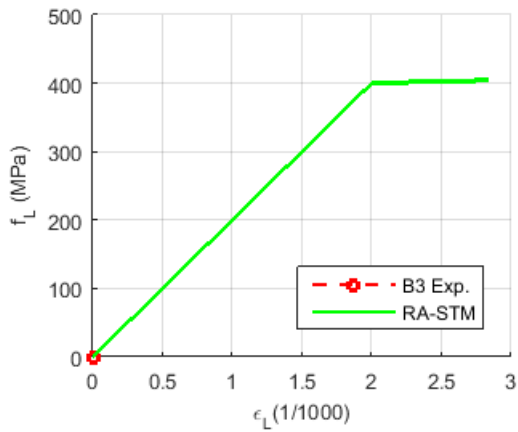


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

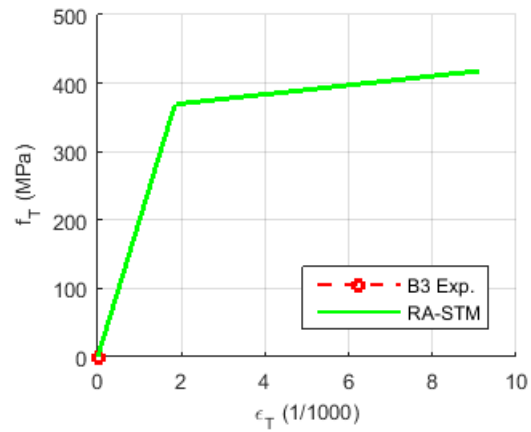
Painel B3



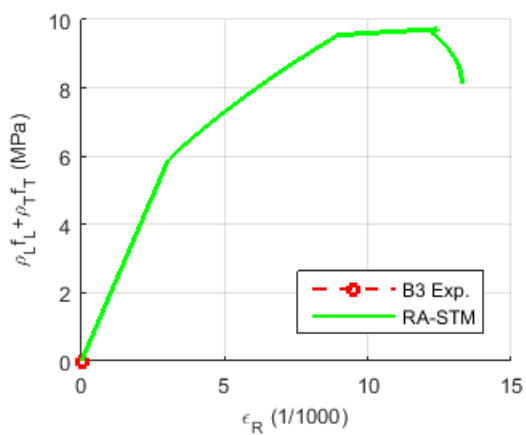
Curva σ_D - ϵ_D



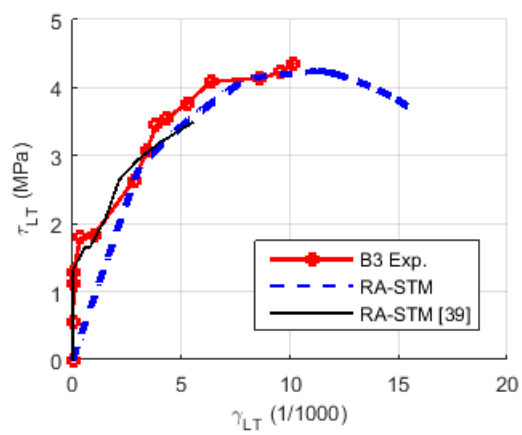
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

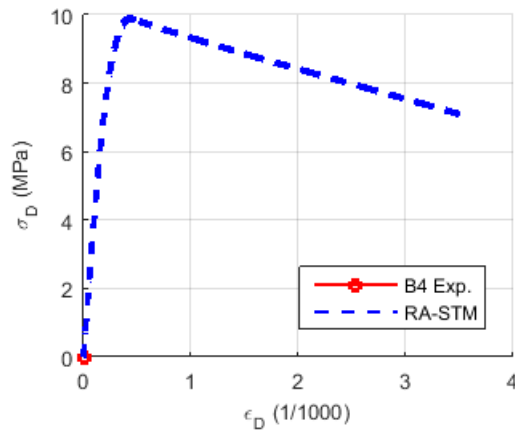


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

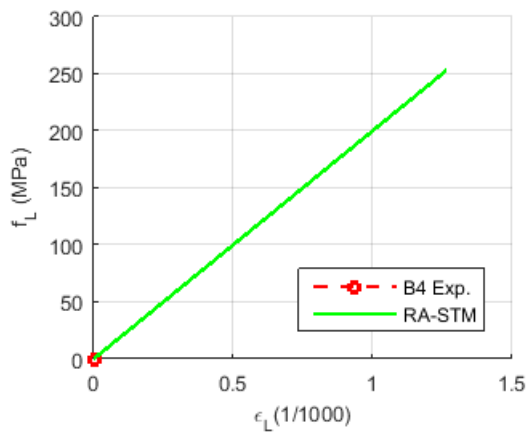


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

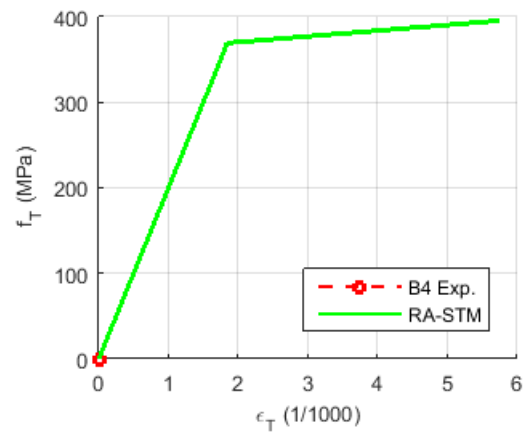
Painel B4



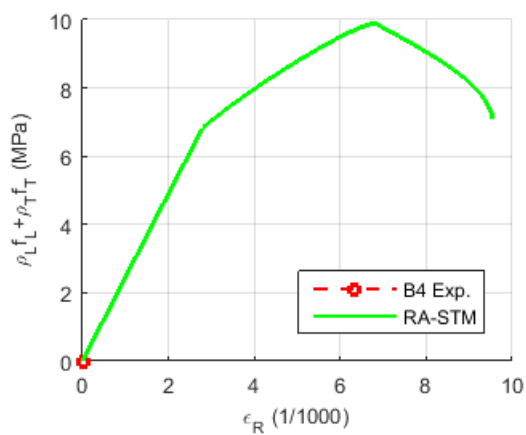
Curva σ_D - ϵ_D



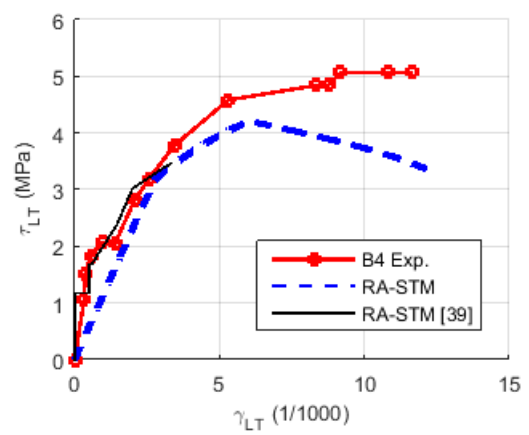
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

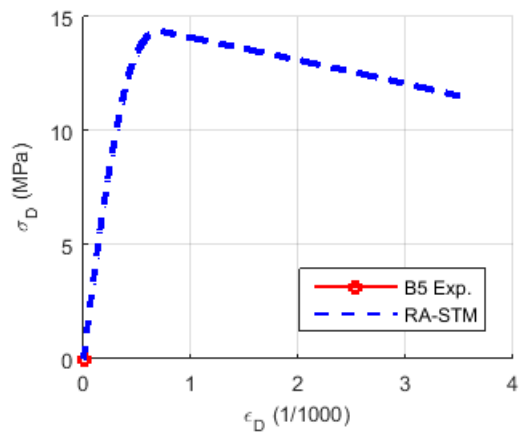


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

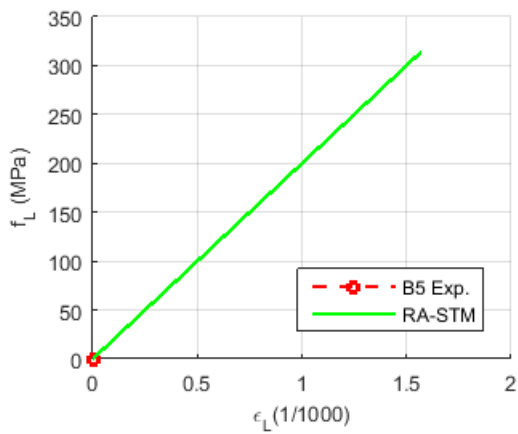


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

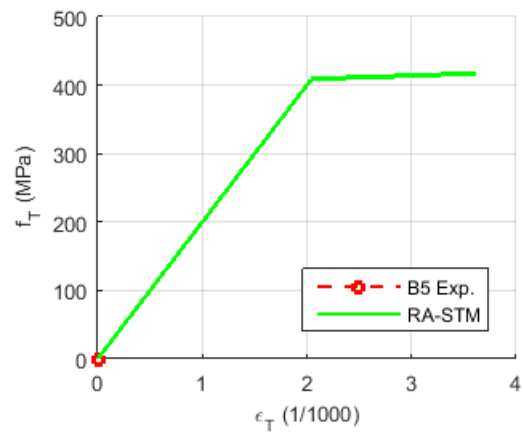
Painel B5



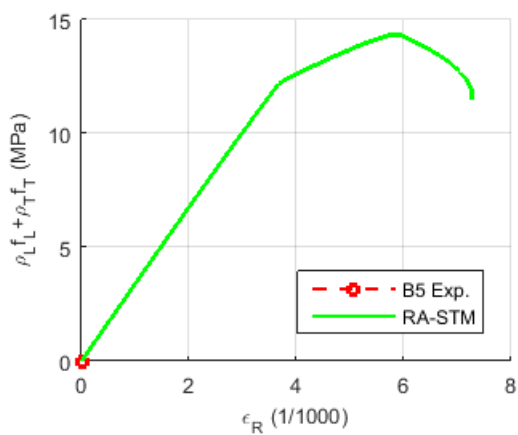
Curva σ_D - ϵ_D



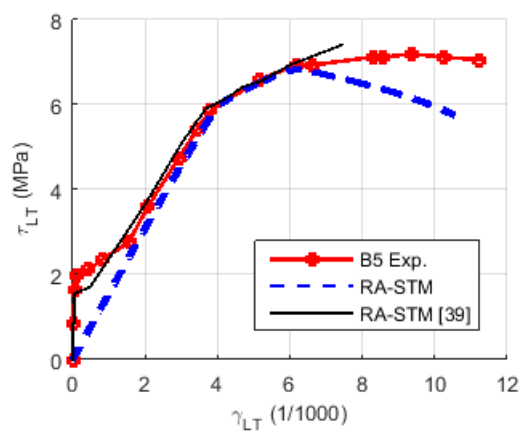
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T

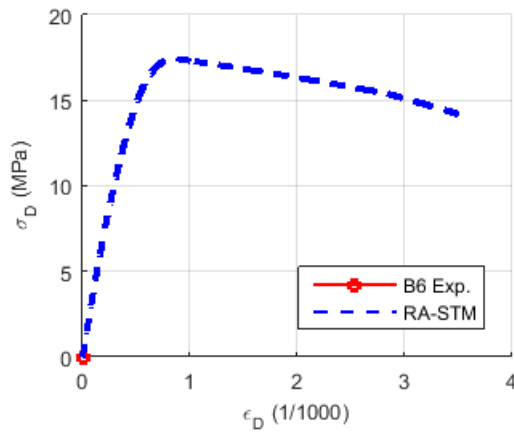


Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R

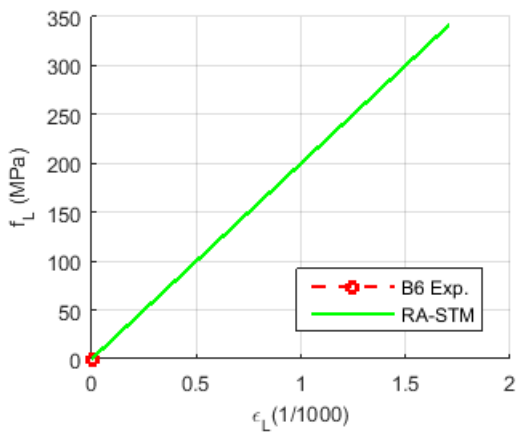


Curva τ_{LT} - γ_{LT}

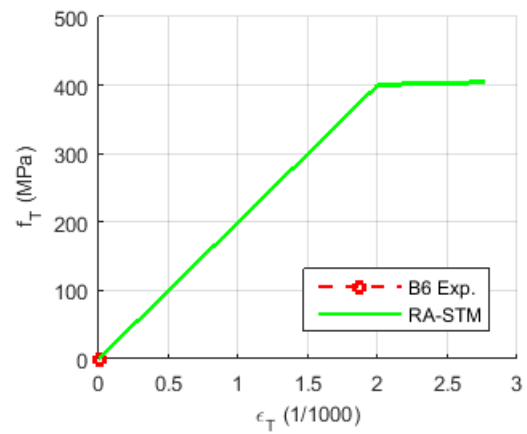
Painel B6



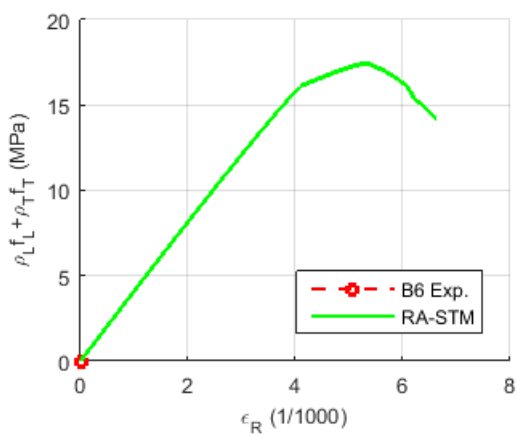
Curva σ_D - ϵ_D



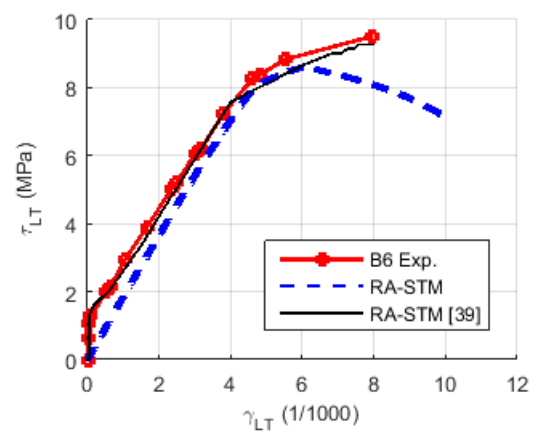
Curva f_L - ϵ_L



Curva f_T - ϵ_T



Curva $\rho_L f_L + \rho_T f_T$ - ϵ_R



Curva τ_{LT} - γ_{LT}

Anexo III. Código em MATLAB do CA-STM

Script para iniciar o CA-STM

```
% ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
% CA-STM - COMBINED ACTION SOFTENED TRUSS MODEL /  
% ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
  
% INICIO ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
tic; clear all; clc; global eds1  
  
% DADOS DE ENTRADA ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
DADOS_INICIAIS;  
  
% EXTENSÃO DE COMPRESSÃO INICIAL DO PAINEL 1 ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
eds1 = -0.01;  
  
% CÁLCULO DA ESTIMATIVA INICIAL ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
EST_CAMCTM(eds1);  
  
% SOLUÇÃO DO SISTEMA ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
COMP_CASTM;  
  
% CURVAS CARGA-DEFORMAÇÃO ////////////////////////////////////////////////////////////////////  
toc; PLOT_CASTM;
```

Função para a escolha dos dados iniciais

```
function DADOS_INICIAIS
%////////////////////////////////////
% SELEÇÃO DO PAINEL A ANALISAR
%////////////////////////////////////

disp('Selecione os dados iniciais');
disp(' ');
disp('1 - McMullen_and_Warwaruk_11');
disp('2 - McMullen_and_Warwaruk_12');
disp('3 - McMullen_and_Warwaruk_13');
disp('4 - McMullen_and_Warwaruk_14');
disp('5 - McMullen_and_Warwaruk_15');
disp('6 - McMullen_and_Warwaruk_16');
disp('7 - McMullen_and_Warwaruk_21');
disp('8 - McMullen_and_Warwaruk_22');
disp('9 - McMullen_and_Warwaruk_23');
disp('10 - McMullen_and_Warwaruk_24');
disp('11 - McMullen_and_Warwaruk_25');
disp('12 - McMullen_and_Warwaruk_31');
disp('13 - McMullen_and_Warwaruk_32');
disp('14 - McMullen_and_Warwaruk_33');
disp('15 - McMullen_and_Warwaruk_34');
disp('16 - McMullen_and_Warwaruk_35');
disp('17 - McMullen_and_Warwaruk_41');
disp('18 - McMullen_and_Warwaruk_42');
disp('19 - McMullen_and_Warwaruk_43');
disp('20 - McMullen_and_Warwaruk_44');
disp('21 - McMullen_and_Warwaruk_45');
disp('22 - McMullen_and_Warwaruk_46');
disp('23 - Lampert_and_Thurlimann_T1');
disp('24 - Lampert_and_Thurlimann_T3');
disp('25 - Lampert_and_Thurlimann_T4');
disp('26 - Lampert_and_Thurlimann_TB0');
disp('27 - Lampert_and_Thurlimann_TB1');
disp('28 - Lampert_and_Thurlimann_TB2');
disp('29 - Lampert_and_Thurlimann_TB3');
disp('30 - Lampert_and_Thurlimann_TB4');
disp('31 - Lampert_and_Thurlimann_TB5');
disp('32 - Lampert_and_Thurlimann_TB6');
disp('33 - Hsu_B6');
disp('34 - Hsu_B9');
disp('35 - Hsu_M2');
disp('36 - Hsu_M3');
disp('37 - Hsu_G4');
disp('38 - Hsu_G7');
disp('39 - Hsu_I5');
disp('40 - Hsu_J1');
disp('41 - Winston_Onsongo_TBS1');
disp('42 - Winston_Onsongo_TBS2');
disp('43 - Winston_Onsongo_TBS3');
disp('44 - Winston_Onsongo_TBS4');
disp('45 - Winston_Onsongo_TBO2');
disp('46 - Winston_Onsongo_TBO3');
disp('47 - Winston_Onsongo_TBO4');
disp('48 - Winston_Onsongo_TBO5');
disp('49 - Winston_Onsongo_TBU2');
disp('50 - Winston_Onsongo_TBU3');
disp('51 - Winston_Onsongo_TBU4');
disp('52 - Winston_Onsongo_TBU5');
disp('53 - Bernardo_and_Lopes_A2');
disp('54 - Bernardo_and_Lopes_A3');
disp('55 - Bernardo_and_Lopes_A4');
disp('56 - Bernardo_and_Lopes_A5');
disp('57 - Bernardo_and_Lopes_B3');
disp('58 - Bernardo_and_Lopes_B4');
disp('59 - Bernardo_and_Lopes_B5');
```

```

disp('60 - Bernardo_and_Lopes_C3');
disp('61 - Bernardo_and_Lopes_C4');
disp('62 - Bernardo_and_Lopes_C5');
disp('63 - Bernardo_and_Lopes_C6');
disp('64 - Jeng_A095c');
disp('65 - Jeng_A120a');
disp('66 - Jeng_B065b');
disp('67 - Jeng_B080a');
disp('68 - Jeng_B110a');
disp('69 - Jeng_C065a');
disp('70 - Jeng_C100a');
disp('71 - Jeng_D075a');
disp('72 - Jeng_D090a');
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

if IND > 0
    switch IND
        case 1
            McMullen_and_Warwaruk_11;
        case 2
            McMullen_and_Warwaruk_12;
        case 3
            McMullen_and_Warwaruk_13;
        case 4
            McMullen_and_Warwaruk_14;
        case 5
            McMullen_and_Warwaruk_15;
        case 6
            McMullen_and_Warwaruk_16;
        case 7
            McMullen_and_Warwaruk_21;
        case 8
            McMullen_and_Warwaruk_22;
        case 9
            McMullen_and_Warwaruk_23;
        case 10
            McMullen_and_Warwaruk_24;
        case 11
            McMullen_and_Warwaruk_25;
        case 12
            McMullen_and_Warwaruk_31;
        case 13
            McMullen_and_Warwaruk_32;
        case 14
            McMullen_and_Warwaruk_33;
        case 15
            McMullen_and_Warwaruk_34;
        case 16
            McMullen_and_Warwaruk_35;
        case 17
            McMullen_and_Warwaruk_41;
        case 18
            McMullen_and_Warwaruk_42;
        case 19
            McMullen_and_Warwaruk_43;
        case 20
            McMullen_and_Warwaruk_44;
        case 21
            McMullen_and_Warwaruk_45;
        case 22
            McMullen_and_Warwaruk_46;
        case 23
            Lampert_and_Thurlimann_T1;
        case 24
            Lampert_and_Thurlimann_T3;
        case 25
            Lampert_and_Thurlimann_T4;
    end
end

```

```
case 26
    Lampert_and_Thurlimann_TB0;
case 27
    Lampert_and_Thurlimann_TB1;
case 28
    Lampert_and_Thurlimann_TB2;
case 29
    Lampert_and_Thurlimann_TB3;
case 30
    Lampert_and_Thurlimann_TB4;
case 31
    Lampert_and_Thurlimann_TB5;
case 32
    Lampert_and_Thurlimann_TB6;
case 33
    Hsu_B6;
case 34
    Hsu_B9;
case 35
    Hsu_M2;
case 36
    Hsu_M3;
case 37
    Hsu_G4;
case 38
    Hsu_G7;
case 39
    Hsu_I5;
case 40
    Hsu_J1;
case 41
    Winston_Onsongo_TBS1;
case 42
    Winston_Onsongo_TBS2;
case 43
    Winston_Onsongo_TBS3;
case 44
    Winston_Onsongo_TBS4;
case 45
    Winston_Onsongo_TBO2;
case 46
    Winston_Onsongo_TBO3;
case 47
    Winston_Onsongo_TBO4;
case 48
    Winston_Onsongo_TBO5;
case 49
    Winston_Onsongo_TBU2;
case 50
    Winston_Onsongo_TBU3;
case 51
    Winston_Onsongo_TBU4;
case 52
    Winston_Onsongo_TBU5;
case 53
    Bernardo_and_Lopes_A2;
case 54
    Bernardo_and_Lopes_A3;
case 55
    Bernardo_and_Lopes_A4;
case 56
    Bernardo_and_Lopes_A5;
case 57
    Bernardo_and_Lopes_B3;
case 58
    Bernardo_and_Lopes_B4;
case 59
    Bernardo_and_Lopes_B5;
```

```
case 60
    Bernardo_and_Lopes_C3;
case 61
    Bernardo_and_Lopes_C4;
case 62
    Bernardo_and_Lopes_C5;
case 63
    Bernardo_and_Lopes_C6;
case 64
    Jeng_A095c;
case 65
    Jeng_A120a;
case 66
    Jeng_B065b;
case 67
    Jeng_B080a;
case 68
    Jeng_B110a;
case 69
    Jeng_C065a;
case 70
    Jeng_C100a;
case 71
    Jeng_D075a;
case 72
    Jeng_D090a;
end
end
end
```

Função para o cálculo da estimativa inicial

```
function EST_CAMCTM(eds1)
%////////////////////////////////////
% ESTIMATIVA INICIAL - COMPORTAMENTO LINEAR DE UM PAINEL SUBMETIDO /
% A UM ESTADO DE TENSÃO DE CORTE PURO /
%////////////////////////////////////
global x fcm b h

% Perímetro externo da secção (Eq. 3.45):
pcp = 2*(b+h);

% Área inclusa pelo perímetro externo da secção (Eq. 3.46):
Acp = b*h;

% NBR-6118/2007 - Módulo de elasticidade secante do betão:
Ecc = 0.85*5600*sqrt(fcm);

for i = 1:3
    x(i) = eds1;
end

for i = 4:7
    x(i) = (-eds1)/2;
    x(i+4) = 0;
    x(i+8) = 1;
end
x(16) = eds1*10^-3*(-Ecc/2)*(Acp^2/pcp);
end
```

Função do CA-STM

```
function F = CASTM(x,eds1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CA-STM - COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DA SECÇÃO /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global h b t1 t2 t3 t4 A11 A12 A13 A14 At s fLy fTy Es
global fcm e0 ecr TETA Tcr MyTx MzTx VyTx VzTx NxTx Mz fiL24

% Área inclusa pelo perímetro externo da secção (eq. 3.46):
Acp = b*h;

% Área bruta da secção (Eq. 3.44):
Ag = (b-t1)*t4 + (h-t2)*t1 + (b-t3)*t2 + (h-t4)*t3;

% Tensão de fissuração do betão (Eq. 3.24):
fcr = 0.5*Ag/Acp*sqrt(fcm);

% Deformação de cedência da armadura longitudinal (1/1000):
eLy = fLy/Es*1000;

% Deformação de cedência da armadura transversal:
eTy = fTy/Es;

% Perímetro externo da secção (Eq. 3.45):
pcp = 2*(b+h);

% Momento torsor de fissuração (Eq. 3.50):
Tcr = 1/3*sqrt(fcm)*(Acp^2/pcp);

% COMBINED ACTION SOFTENED TRUSS MODEL (CA-STM)/////////////////////////////////
% Relação dos outros eforços com o momento torsor:
Tx = Tcr*x(16);
My = MyTx*Tx;
Mz = MzTx*Tx;
Vy = VyTx*Tx;
Vz = VzTx*Tx;
Nx = NxTx*Tx;

% Espessura do fluxo e deformação interna do painel (Eq. 3.3 e Eq. 3.4):
if x(12) < 2
    td1 = x(12)*t1/2;
    ea1 = 0;
else
    td1 = t1;
    ea1 = (x(12) - 2)*eds1*10^-3;
end

if x(13) < 2
    td2 = x(13)*t2/2;
    ea2 = 0;
else
    td2 = t2;
    ea2 = (x(13) - 2)*x(1)*10^-3;
end

if x(14) < 2
    td3 = x(14)*t3/2;
    ea3 = 0;
else
    td3 = t3;
    ea3 = (x(14) - 2)*x(2)*10^-3;
end

if x(15) < 2
    td4 = x(15)*t4/2;
    ea4 = 0;
else
```

```

    td4 = t4;
    ea4 = (x(15) - 2)*x(3)*10^-3;
end

% Base do fluxo de tensões tangenciais (Eq. 3.47):
b0 = b - (td1 + td3)/2;

% Altura do fluxo de tensões tangenciais (Eq. 3.48):
h0 = h - (td2 + td4)/2;

% Área inclusa pelo fluxo de tensões tangenciais (Eq. 3.49):
A0 = b0*h0;

% Deformação principal de compressão nos painéis (Eq. 3.1):
eD1 = (eds1*10^-3 + ea1)/2;
eD2 = (x(1)*10^-3 + ea2)/2;
eD3 = (x(2)*10^-3 + ea3)/2;
eD4 = (x(3)*10^-3 + ea4)/2;

% Curvaturas longitudinais (Eq. 3.32 e Eq. 3.33):
fiL13 = (x(8)*10^-3 - x(10)*10^-3)/b0;
fiL24 = (x(9)*10^-3 - x(11)*10^-3)/h0;

% Princípio da invariância das extensões (Eq. 3.18):
eT1 = x(4)*10^-3 + eD1 - x(8)*10^-3;
eT2 = x(5)*10^-3 + eD2 - x(9)*10^-3;
eT3 = x(6)*10^-3 + eD3 - x(10)*10^-3;
eT4 = x(7)*10^-3 + eD4 - x(11)*10^-3;

% Curvaturas transversais (eq. 3.30 e Eq. 3.31):
fiT13 = (eT1 - eT3)/b0;
fiT24 = (eT2 - eT4)/h0;

% Taxa de armadura longitudinal e transversal:
roL1= (A11/(td1*h0));
roL2= (A12/(td2*b0));
roL3= (A13/(td3*h0));
roL4= (A14/(td4*b0));
roT1= At/(td1*s);
roT2= At/(td2*s);
roT3= At/(td3*s);
roT4= At/(td4*s);

% Coeficiente de amolecimento (Eqs. 2.15-2.18):
R = 5.8/(sqrt(fcm));
if R <= 0.9
    R_linha = R;
else
    R_linha = 0.9;
end

n1 = (roT1*fTy)/(roL1*fLy);
if n1 <= 1
    n1_linha = n1;
else
    n1_linha = 1/n1;
end
zeta1 = R_linha/(sqrt(1+((0.4*x(4))/n1_linha)));

n2 = (roT2*fTy)/(roL2*fLy);
if n2 <= 1
    n2_linha = n2;
else
    n2_linha = 1/n2;
end
zeta2 = R_linha/(sqrt(1+((0.4*x(5))/n2_linha)));

```

```

n3 = (roT3*fTy)/(roL3*fLy);
if n3 <= 1
    n3_linha = n3;
else
    n3_linha = 1/n3;
end

zeta3 = R_linha/(sqrt(1+((0.4*x(6))/n3_linha)));

n4 = (roT4*fTy)/(roL4*fLy);
if n4 <= 1
    n4_linha = n4;
else
    n4_linha = 1/n4;
end

zeta4 = R_linha/(sqrt(1+((0.4*x(7))/n4_linha)));

% Relação entre a resistência à compressão no pico e a resistência
% média (Eq. 3.20):
if eds1*10^-3 / (zeta1*e0) <= 1
    k1D1 = eds1*10^-3/(zeta1*e0) - (eds1*10^-3)^2/(3*(zeta1*e0)^2);
else
    k1D1 = 1 - zeta1*e0/(3*eds1*10^-3) - (eds1*10^-3 -
zeta1*e0)^3/(3*eds1*10^-3*(4*e0-zeta1*e0)^2);
end

if x(1)*10^-3 / (zeta2*e0) <= 1
    k1D2 = x(1)*10^-3/(zeta2*e0) - (x(1)*10^-3)^2/(3*(zeta2*e0)^2);
else
    k1D2 = 1 - zeta2*e0/(3*x(1)*10^-3) - (x(1)*10^-3 -
zeta2*e0)^3/(3*x(1)*10^-3*(4*e0-zeta2*e0)^2);
end

if x(2)*10^-3 / (zeta3*e0) <= 1
    k1D3 = x(2)*10^-3/(zeta3*e0) - (x(2)*10^-3)^2/(3*(zeta3*e0)^2);
else
    k1D3 = 1 - zeta3*e0/(3*x(2)*10^-3) - (x(2)*10^-3 -
zeta3*e0)^3/(3*x(2)*10^-3*(4*e0-zeta3*e0)^2);
end

if x(3)*10^-3 / (zeta4*e0) <= 1
    k1D4 = x(3)*10^-3/(zeta4*e0) - (x(3)*10^-3)^2/(3*(zeta4*e0)^2);
else
    k1D4 = 1 - zeta4*e0/(3*x(3)*10^-3) - (x(3)*10^-3 -
zeta4*e0)^3/(3*x(3)*10^-3*(4*e0-zeta4*e0)^2);
end

% Tensão principal de compressão no betão (Eq. 3.19):
sigmaD1 = -zeta1*fcm*k1D1;
sigmaD2 = -zeta2*fcm*k1D2;
sigmaD3 = -zeta3*fcm*k1D3;
sigmaD4 = -zeta4*fcm*k1D4;

% Extensão principal de tração na face externa dos painéis:
ers1 = 2*x(4);
ers2 = 2*x(5);
ers3 = 2*x(6);
ers4 = 2*x(7);

% Relação entre a resistência à tração no pico e a resistência
% média (Eq. 3.26):
if ers1 <= ecr
    k1R1 = ers1/(2*ecr);
else
    k1R1 = ecr/(2*ers1) + ecr^0.4/(0.6*ers1)*((ers1)^0.6 - (ecr)^0.6);
end

```

```

if ers2 <= ecr
    k1R2 = ers2/(2*ecr);
else
    k1R2 = ecr/(2*ers2) + ecr^0.4/(0.6*ers2)*((ers2)^0.6 - (ecr)^0.6);
end

if ers3 <= ecr
    k1R3 = ers3/(2*ecr);
else
    k1R3 = ecr/(2*ers3) + ecr^0.4/(0.6*ers3)*((ers3)^0.6 - (ecr)^0.6);
end

if ers4 <= ecr
    k1R4 = ers4/(2*ecr);
else
    k1R4 = ecr/(2*ers4) + ecr^0.4/(0.6*ers4)*((ers4)^0.6 - (ecr)^0.6);
end

% Tensão principal de tração no betão (Eq. 3.25):
sigmaR1 = k1R1*fcr;
sigmaR2 = k1R2*fcr;
sigmaR3 = k1R3*fcr;
sigmaR4 = k1R4*fcr;

% Tensão na armadura trasnversal (Eqs. 3.27-3.29):
BT1 = (1/(At/(td1*s)))*(fcr/fTy)^1.5;
enT1 = eTy*(0.93-2*BT1);
if eT1 <= enT1
    fT1 = eT1*Es;
else
    fT1 = fTy*((0.91-2*BT1)+(0.02+0.25*BT1)*(eT1/eTy));
end

BT2 = (1/(At/(td2*s)))*(fcr/fTy)^1.5;
enT2 = eTy*(0.93-2*BT2);
if eT2 <= enT2
    fT2 = eT2*Es;
else
    fT2 = fTy*((0.91-2*BT2)+(0.02+0.25*BT2)*(eT2/eTy));
end

BT3 = (1/(At/(td3*s)))*(fcr/fTy)^1.5;
enT3 = eTy*(0.93-2*BT3);
if eT3 <= enT3
    fT3 = eT3*Es;
else
    fT3 = fTy*((0.91-2*BT3)+(0.02+0.25*BT3)*(eT3/eTy));
end

BT4 = (1/(At/(td4*s)))*(fcr/fTy)^1.5;
enT4 = eTy*(0.93-2*BT4);
if eT4 <= enT4
    fT4 = eT4*Es;
else
    fT4 = fTy*((0.91-2*BT4)+(0.02+0.25*BT4)*(eT4/eTy));
end

% sin(alfaD)^2 (Eq. 3.40):
sin21 = ((x(8)*10^-3) - eD1)/((x(4)*10^-3) - eD1);
sin22 = ((x(9)*10^-3) - eD2)/((x(5)*10^-3) - eD2);
sin23 = ((x(10)*10^-3) - eD3)/((x(6)*10^-3) - eD3);
sin24 = ((x(11)*10^-3) - eD4)/((x(7)*10^-3) - eD4);

% cos(alfaD)^2 (Eq. 3.41):
cos21 = ((x(4)*10^-3) - (x(8)*10^-3))/((x(4)*10^-3) - eD1);
cos22 = ((x(5)*10^-3) - (x(9)*10^-3))/((x(5)*10^-3) - eD2);
cos23 = ((x(6)*10^-3) - (x(10)*10^-3))/((x(6)*10^-3) - eD3);
cos24 = ((x(7)*10^-3) - (x(11)*10^-3))/((x(7)*10^-3) - eD4);

```

```

% sin(alfaD)*cos(alfaD) (Eq. 3.42):
sincos1 = sqrt(((x(8)*10^-3) - eD1)*(eT1 - eD1))/((x(4)*10^-3) - eD1);
sincos2 = sqrt(((x(9)*10^-3) - eD2)*(eT2 - eD2))/((x(5)*10^-3) - eD2);
sincos3 = sqrt(((x(10)*10^-3) - eD3)*(eT3 - eD3))/((x(6)*10^-3) - eD3);
sincos4 = sqrt(((x(11)*10^-3) - eD4)*(eT4 - eD4))/((x(7)*10^-3) - eD4);

% Equação de equilíbrio transversal (Eq. 3.51):
F(1) = sigmaD1*sin21 + sigmaR1*cos21 + fT1*(At/(td1*s));
F(2) = sigmaD2*sin22 + sigmaR2*cos22 + fT2*(At/(td2*s));
F(3) = sigmaD3*sin23 + sigmaR3*cos23 + fT3*(At/(td3*s));
F(4) = sigmaD4*sin24 + sigmaR4*cos24 + fT4*(At/(td4*s));

% Cálculo dos Fluxos (Eq. 3.9):
q1 = Tx/(2*A0) + Vy/(2*h0);
q2 = Tx/(2*A0) + Vz/(2*b0);
q3 = Tx/(2*A0) - Vy/(2*h0);
q4 = Tx/(2*A0) - Vz/(2*b0);

% Distorção nos painéis (Eq. 3.17):
gamaLT1 = 2*((x(4)*10^-3) - eD1)*sincos1*sign(q1);
gamaLT2 = 2*((x(5)*10^-3) - eD2)*sincos2*sign(q2);
gamaLT3 = 2*((x(6)*10^-3) - eD3)*sincos3*sign(q3);
gamaLT4 = 2*((x(7)*10^-3) - eD4)*sincos4*sign(q4);

% Ângulo Teta (Eq. 3.39):
TETA = ((gamaLT1 + gamaLT3)*h0 + (gamaLT2 + gamaLT4)*b0)/(2*A0);

% Curvatura da escora (Eq. 3.52):
curv1a = -((eds1*10^-3) - ea1)/td1;
curv2a = -((x(1)*10^-3) - ea2)/td2;
curv3a = -((x(2)*10^-3) - ea3)/td3;
curv4a = -((x(3)*10^-3) - ea4)/td4;

curv1b = TETA*2*sincos1 - fiL13*cos21 - fiT13*sin21;
curv2b = TETA*2*sincos2 - fiL24*cos22 - fiT24*sin22;
curv3b = TETA*2*sincos3 + fiL13*cos23 + fiT13*sin23;
curv4b = TETA*2*sincos4 + fiL24*cos24 + fiT24*sin24;

F(5) = curv1a - curv1b;
F(6) = curv2a - curv2b;
F(7) = curv3a - curv3b;
F(8) = curv4a - curv4b;

% Tensão tangencial (Eq. 3.53):
tal1a = q1/td1;
tal2a = q2/td2;
tal3a = q3/td3;
tal4a = q4/td4;

tal1b = (-sigmaD1 + sigmaR1)*sincos1*sign(q1);
tal2b = (-sigmaD2 + sigmaR2)*sincos2*sign(q2);
tal3b = (-sigmaD3 + sigmaR3)*sincos3*sign(q3);
tal4b = (-sigmaD4 + sigmaR4)*sincos4*sign(q4);

F(9) = tal1a-tal1b;
F(10) = tal2a - tal2b;
F(11) = tal3a - tal3b;
F(12) = tal4a - tal4b;

% Tensão na armadura longitudinal (Eqs. 3.27-3.29)::
BL1 = (1/(A11/(td1*h0)))*(fcr/fLy)^1.5;
enL1 = eLy*10^-3 *(0.93-2*BL1);
if x(8)*10^-3 <= enL1
    fL1 = x(8)*10^-3*Es;
else
    fL1 = fLy*((0.91-2*BL1)+(0.02+0.25*BL1)*(x(8)/eLy));
end

```

```

BL2 = (1/(A12/(td2*b0)))*(fcr/fLy)^1.5;
enL2 = eLy*10^-3 *(0.93-2*BL2);
if x(9)*10^-3 <= enL2
    fL2 = x(9)*10^-3*Es;
else
    fL2 = fLy*((0.91-2*BL2)+(0.02+0.25*BL2)*(x(9)/eLy));
end

BL3 = (1/(A13/(td3*h0)))*(fcr/fLy)^1.5;
enL3 = eLy*10^-3 *(0.93-2*BL3);
if x(10)*10^-3 <= enL3
    fL3 = x(10)*10^-3*Es;
else
    fL3 = fLy*((0.91-2*BL3)+(0.02+0.25*BL3)*(x(10)/eLy));
end

BL4 = (1/(A14/(td4*b0)))*(fcr/fLy)^1.5;
enL4 = eLy*10^-3 *(0.93-2*BL4);
if x(11)*10^-3 <= enL4
    fL4 = x(11)*10^-3*Es;
else
    fL4 = fLy*((0.91-2*BL4)+(0.02+0.25*BL4)*(x(11)/eLy));
end

% Equação de equilíbrio longitudinal (Eq. 3.14):
sigmaL1 = sigmaD1*cos21 + sigmaR1*sin21 + fL1*(A11/(td1*h0));
sigmaL2 = sigmaD2*cos22 + sigmaR2*sin22 + fL2*(A12/(td2*b0));
sigmaL3 = sigmaD3*cos23 + sigmaR3*sin23 + fL3*(A13/(td3*h0));
sigmaL4 = sigmaD4*cos24 + sigmaR4*sin24 + fL4*(A14/(td4*b0));

% Momento fletor no eixo Y (Eq. 3.54):
F(13) = (sigmaL3*td3*h0 - sigmaL1*td1*h0)*b0/2 - My;

% Momento fletor no eixo Z (Eq. 3.55):
F(14) = (sigmaL4*td4*b0 - sigmaL2*td2*b0)*h0/2 - Mz;

% Esforço normal em X (Eq. 3.56):
F(15) = sigmaL1*td1*h0 + sigmaL2*td2*b0 + sigmaL3*td3*h0 + sigmaL4*td4*b0 -
Nx;

% Compatibilização das deformações longitudinais (Eq. 3.57):
ecL13 = (x(8)*10^-3 + x(10)*10^-3)/2;
ecL24 = (x(9)*10^-3 + x(11)*10^-3)/2;

F(16) = ecL13-ecL24;
end

```

Função para o cálculo do comportamento carga-deformação da viga

```
function COMP_CASTM
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CÁLCULO DO COMPORTAMENTO CARGA-DEFORMAÇÃO DA SECÇÃO /
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global eds1 Tcr TETAj Tj x TETA fcm FIL24 MZ Mz fil24 Mzj

% Limites inferiores e superiores para x(1)-x(16):
lb = [-100; -100; -100; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
ub = [0; 0; 0; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 3; 3; 3; 3; 100];

nmax = 400;
TETAj(nmax) = 0; Tj(nmax)=0;
for i = 1:nmax
    passo =0.01;

    options = optimset('MaxFunEvals',40000,'MaxIter',50000,'TolX',10^-
8,'TolFun',10^-8);
    x = lsqnonlin(@(x) CASTM(x,eds1-passo*i),x,lb,ub,options);
    TETAj(i) = TETA;
    Tj(i) = x(16)*Tcr*1000;
    FIL24(i) = fil24;
    MZ(i) = Mz*1000;

    lim = min(min(eds1-passo*i,x(1)),min(x(2),x(3)));

    % Critérios de paragem (betão normal e de alta resistência)
    % (Eqs. 2.19 e 2.20..):
    if fcm <= 50
        if lim < -3.5
            TETAj = TETAj(1:i);
            Tj = Tj(1:i);
            break
        end
    else
        if lim <= -( 2.8 + 27 * ((98-fcm)/100)^4)
            TETAj = TETAj(1:i);
            Tj = Tj(1:i);
            break
        end
    end
end
end
end
```

Função para impressão das curvas carga-deformação da viga

```
function PLOT_CASTM
%//////////////////////////////////////
% IMPRESSÃO DAS CURVAS CARGA-DEFORMAÇÃO /
%//////////////////////////////////////
global TETAexp Texp TETAteo Tteo TETAj Tj aa bb cc dd FIL24 MZ
global Mexp PHIexp Mzj TCI_exp MCI_exp TCI_teo MCI_teo TCI_teog MCI_teog
% Opção
disp('1 - Curva momento torsor-rotação axial');
disp('2 - Curva momento fletor-rotação axial');
disp('3 - Curva momento fletor-curvatura longitudinal');
disp('4 - Curva de interação');
disp(' ');
disp('5 - Voltar ao inicio');
disp('0 - Sair');
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

% SELEÇÃO DA CURVA ////////////////////////////////////////
while IND > 0
    switch IND
        case 1
            hold on
            plot(TETAexp,Texp,'-rs','LineWidth',2)
            plot(TETAj,Tj,'--b','LineWidth',2)
            plot(TETAteo,Tteo,'-k','LineWidth',1)
            xlabel('\theta (rad/m)');
            ylabel('T_X (kN.m)');
            legend(aa,...
                bb,...
                cc,'Location','southeast');
            grid on
        case 2
            hold on
            plot(TETAexp,Mexp,'-rs','LineWidth',2)
            plot(TETAj,Mzj,'--b','LineWidth',2)
            xlabel('\theta (rad/m)');
            ylabel('M_Z (kN.m)');
            legend(aa,...
                bb,...
                cc,'Location','southeast');
            grid on
        case 3
            hold on
            plot(PHIexp,Mexp,'-rs','LineWidth',2)
            plot(-FIL24,MZ,'--b','LineWidth',2)
            xlabel('\phi_L_2_4(rad)');
            ylabel('M_Z (kN.m)');
            legend(aa,...
                bb,...
                cc,'Location','southeast');
            grid on
        case 4
            hold on
            plot(MCI_exp,TCI_exp,'-rs','LineWidth',2)
            plot(MCI_teo,TCI_teo,'-bs','LineWidth',2)
            plot(MCI_teog,TCI_teog,'-ks','LineWidth',1)
            xlabel('M_Z (kN.m)');
            ylabel('T_X (kN.m)');
            axis auto
            legend(dd,...
                bb,...
                cc,'Location','southeast');
            grid on
        case 5
            if IND == 5
                INICIO;
```

```
                break
            end
        end
    end
    disp(' ');
    IND = input('Escolha uma opção: ');
end
tempo = toc;
end
```

Dados experimentais da viga 1-2

```
function McMullen_and_Warwaruk_12
%////////////////////////////////////
% DADOS EXPERIMENTAIS DA VIGA 1-2 - MCMULLEN E WARWARUK (1970) /
%////////////////////////////////////
global h b t1 t2 t3 t4 A11 A12 A13 A14 At s fLy fTy Es fcm e0 ecr ecr0
global TETAexp Texp Mexp aa bb cc MyTx MzTx VyTx VzTx NxTx
global TCI_exp MCI_exp TCI_teo MCI_teo TCI_telog MCI_telog
%////////////////////////////////////
% DADOS INICIAIS /
%////////////////////////////////////

% Geometria da secção:
h = 0.30; % Altura da secção (m)
b = 0.15; % Base da secção (m)
t1 = b/2; t2 = b/2; % Espessura máxima dos painéis (m)
t3 = b/2; t4 = b/2;

% Quantidade das armaduras:
A11 = 1.775*10^-4; % Área da armadura longitudinal no painel 1 (m2)
A12 = 7.1*10^-5; % Área da armadura longitudinal no painel 2 (m2)
A13 = 1.775*10^-4; % Área da armadura longitudinal no painel 3 (m2)
A14 = 2.84*10^-4; % Área da armadura longitudinal no painel 4 (m2)
At = 7.1*10^-5; % Área da armadura transversal (m2)
s = 0.083; % Espaçamento da armadura transversal (m)

% Propriedades Mecânicas dos aços:
fLy = 344; % Tensão de cedência da armadura longitudinal (MPa)
fTy = 379; % Tensão de cedência da armadura transversal (MPa)
Es = 200000; % Módulo de elasticidade dos aços (MPa)

% Propriedades Mecânicas do betão:
fcm = 30.613; % Resistência média de compressão do betão (MPa)
e0=(-0.7*(fcm)^0.31)*10^-3; % Extensão de compressão correspondente à tensão
de pico no betão (1/1000)
ecr = 0.116; % Extensão de tração de fissuração do betão (1/1000)

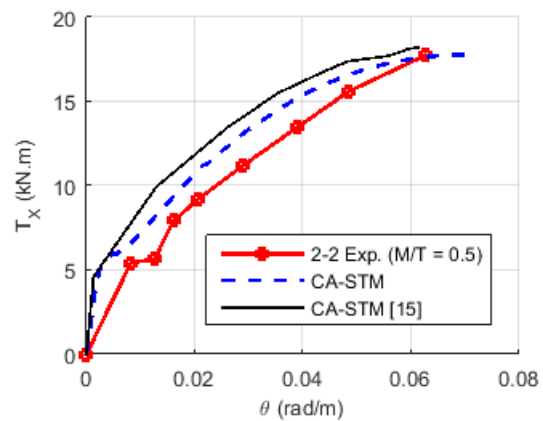
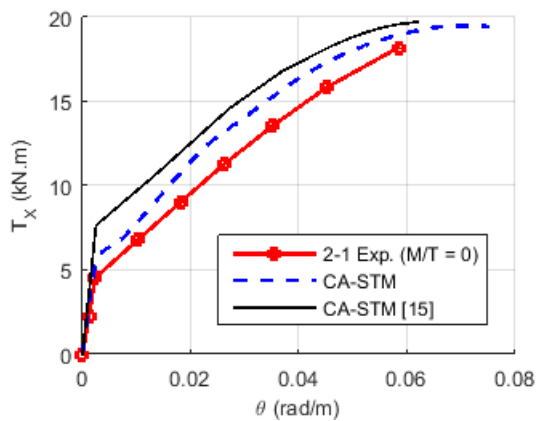
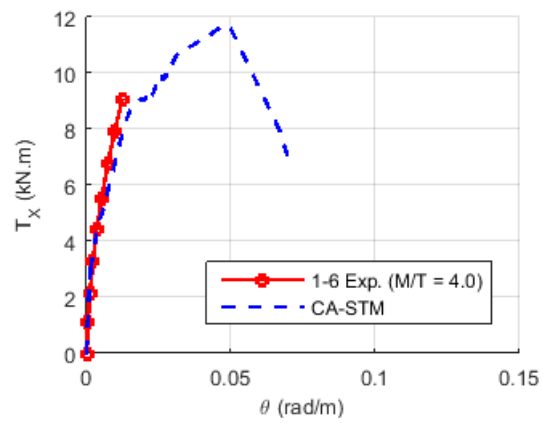
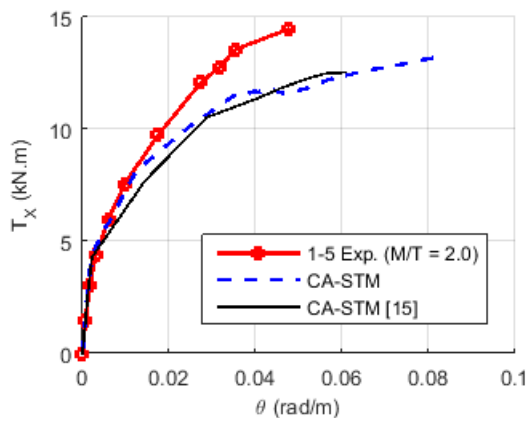
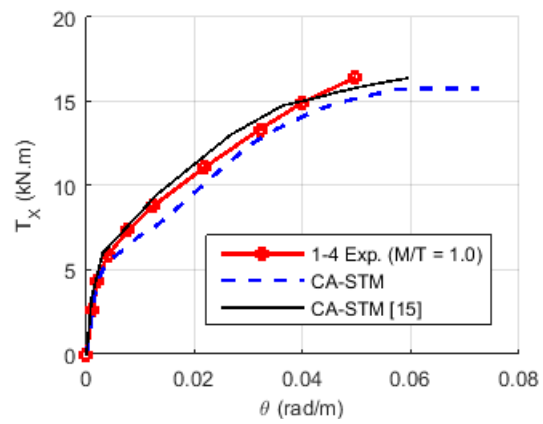
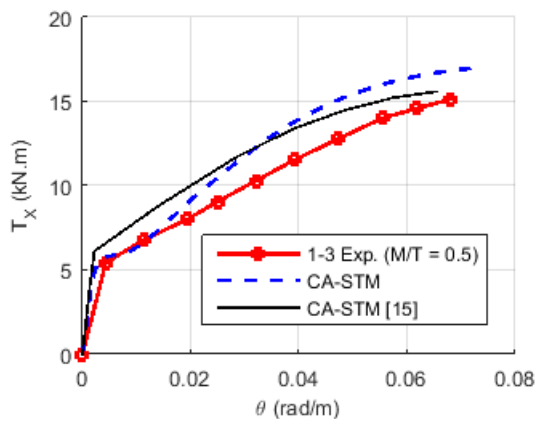
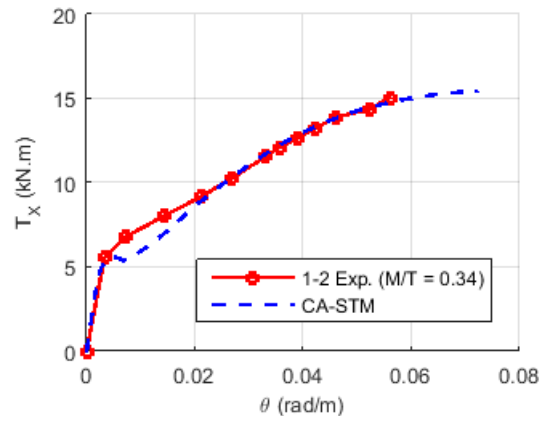
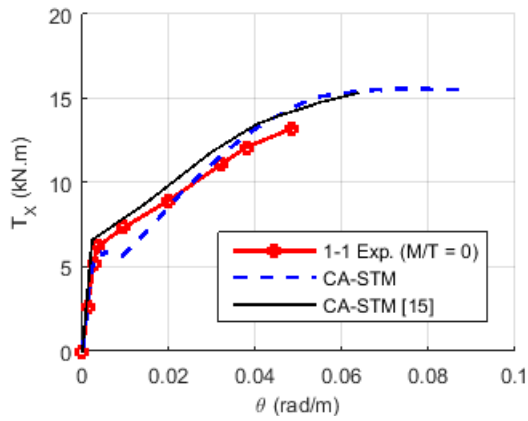
% Relação dos outros esforços com o momento torsor:
MyTx = 0; % Momento Fletor y / Momento Torsor x
MzTx = 0.34; % Momento Fletor z / Momento Torsor x
VyTx = 0; % Esforço Cortante y / Momento Torsor x
VzTx = 0; % Esforço Cortante z / Momento Torsor x
NxTx = 0; % Esforço Normal x / Momento Torsor x

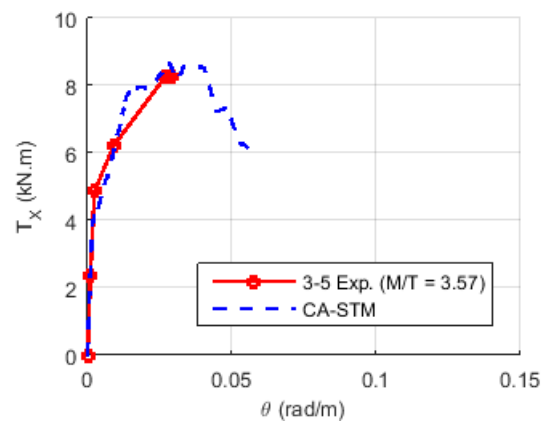
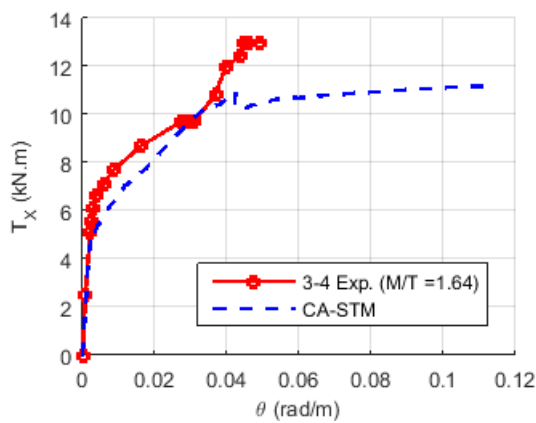
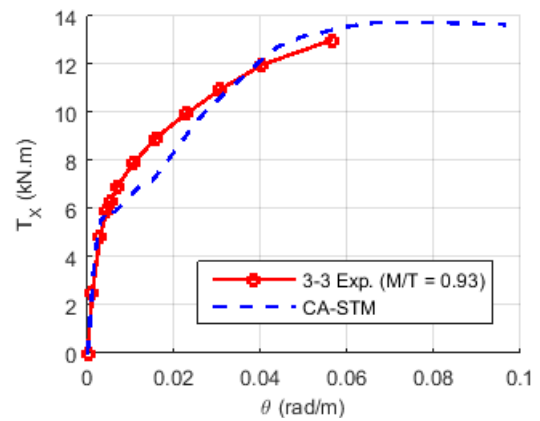
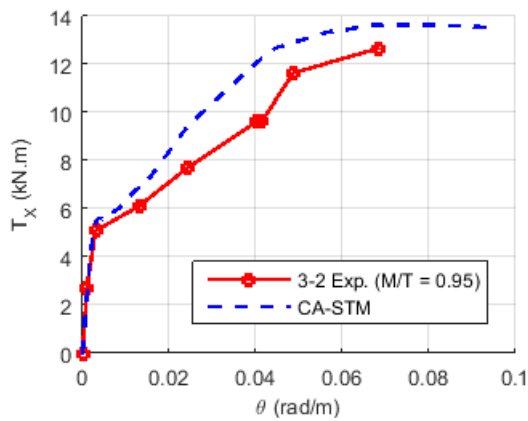
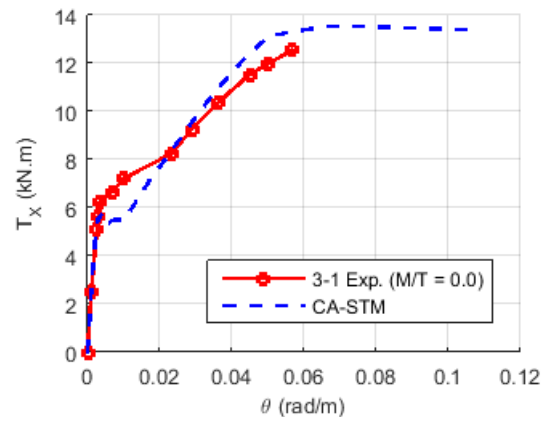
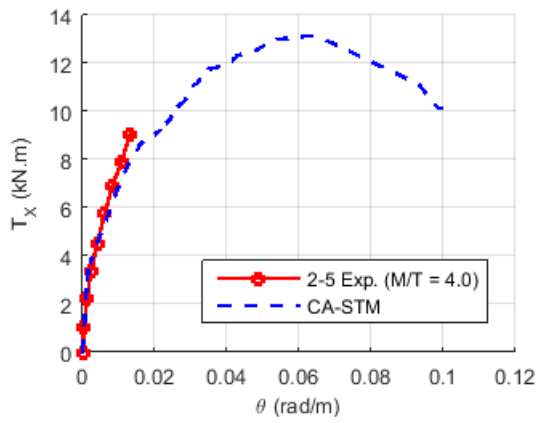
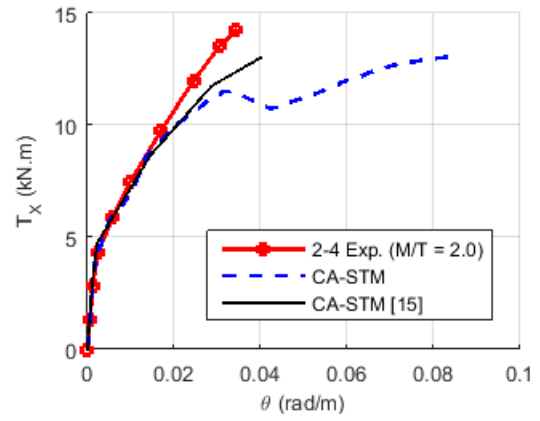
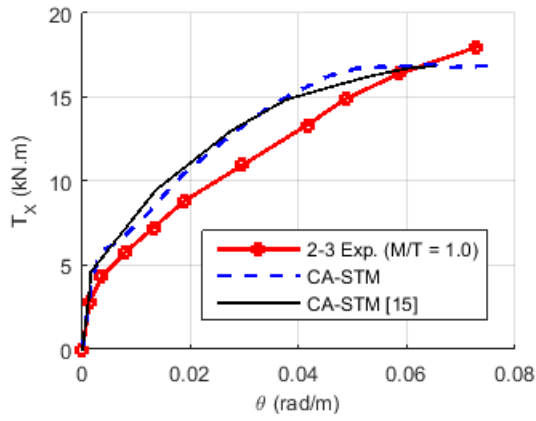
%////////////////////////////////////
% DADOS CURVA EXPERIMENTAL E TEÓRICA /
%////////////////////////////////////

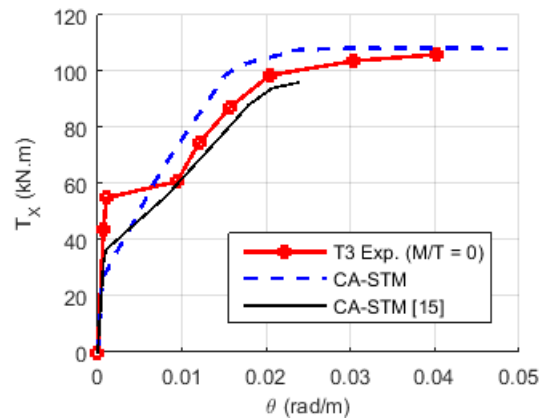
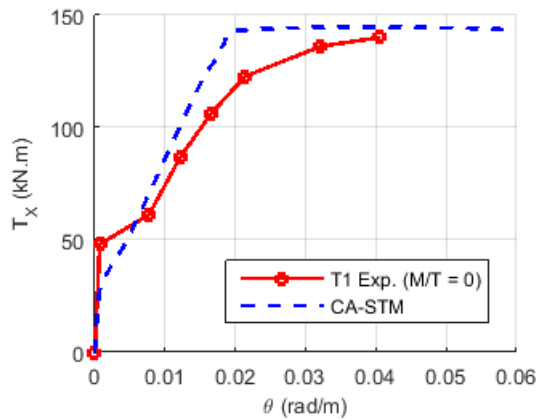
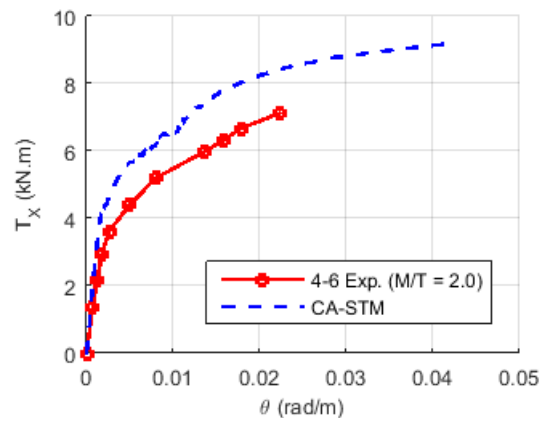
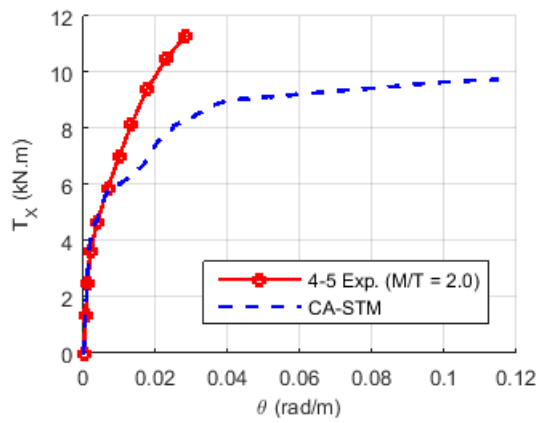
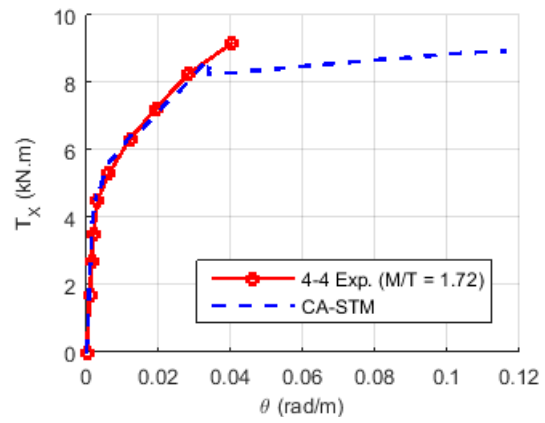
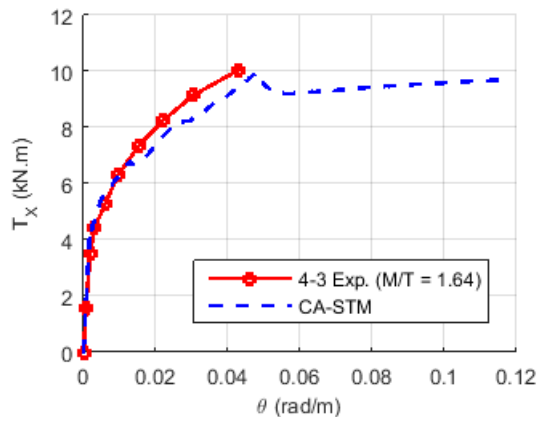
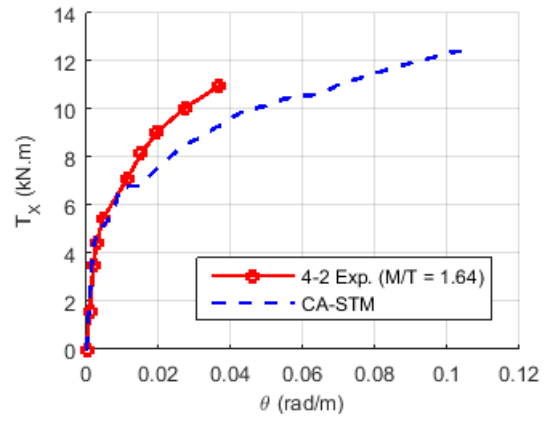
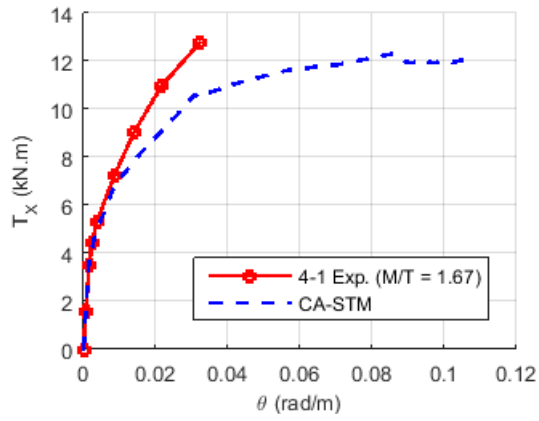
TETAexp = [0.0000; 0.0033; 0.0072; 0.0143; 0.0211; 0.0269; 0.0330; 0.0356;
0.0390; 0.0422; 0.0462; 0.0523; 0.056];
Texp = [0.000; 5.536; 6.779; 8.022; 9.151; 10.281; 11.524; 12.089; 12.654;
13.219; 13.896; 14.348; 15.026];
Mexp = [0.000; 2.712; 3.050; 3.389; 3.615; 3.954; 4.293; 4.406; 4.519;
4.745; 4.858; 4.971; 5.197];
TCI_exp = [13.783; 15.591; 15.817; 17.964; 14.800; 8.586];
MCI_exp = [0; 5.310; 7.909; 17.964; 30.165; 40.898];
TCI_teo = [15.5573; 15.4394; 17.0075; 15.7736; 13.1948; 11.7155];
MCI_teo = [0; 5.2494; 8.5037; 15.7736; 24.4104; 46.8621];
TCI_telog = [15.4; 15.5; 16.3; 12.5];
MCI_telog = [0; 7.65; 16.1; 25];

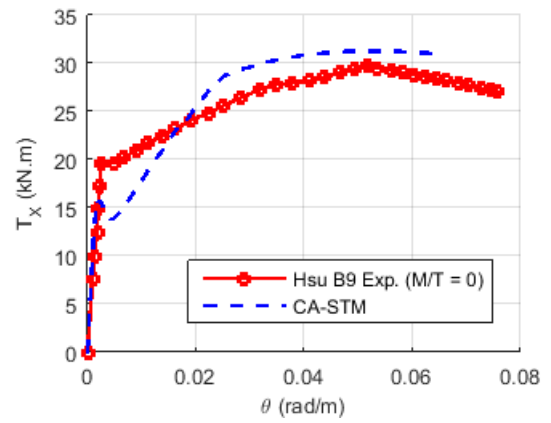
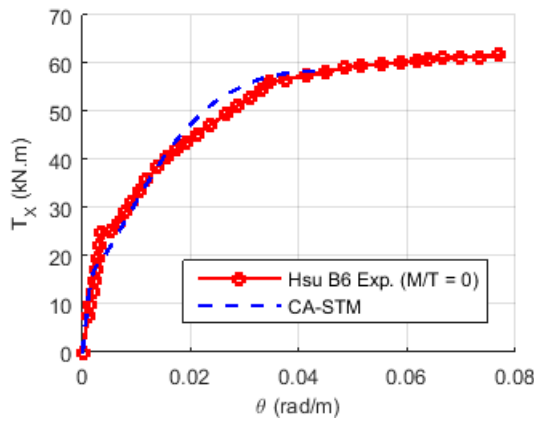
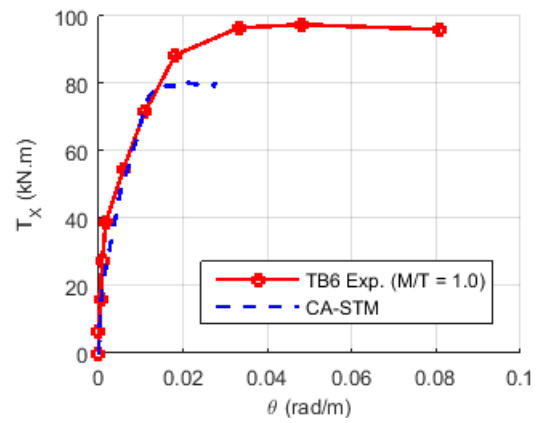
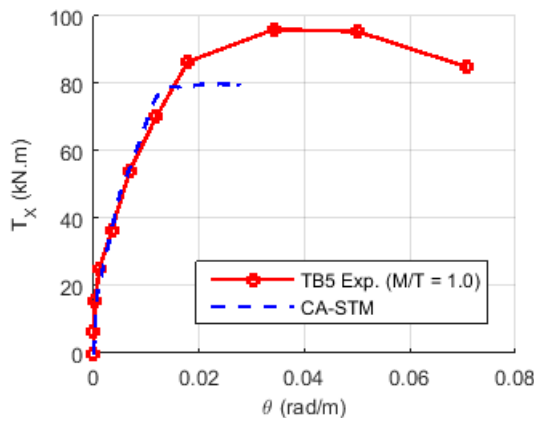
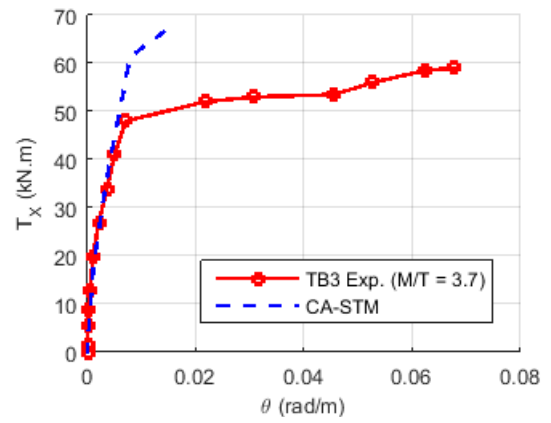
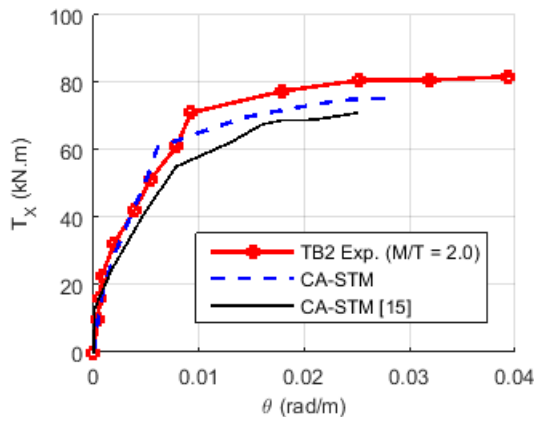
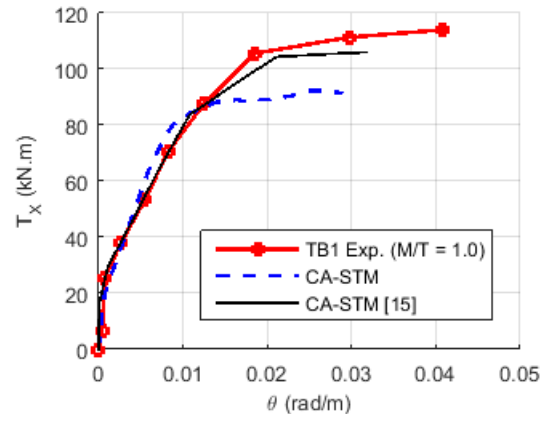
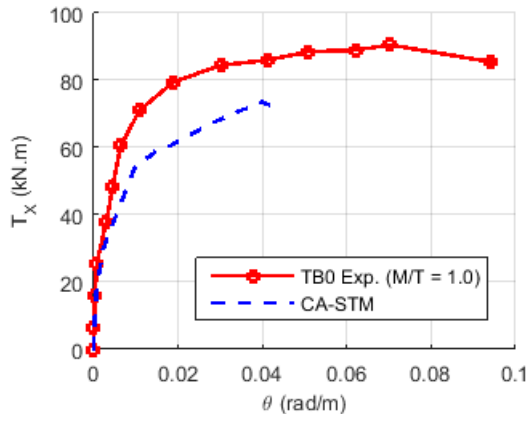
% Legenda:
aa = '1-2 Exp. (M/T = 0.34)';
bb = 'CA-STM';
cc = 'CA-STM [15]';
end
```

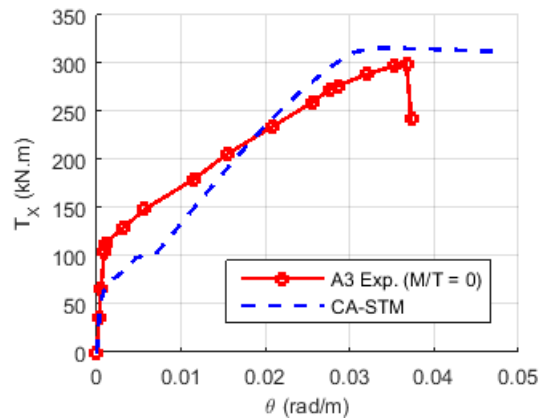
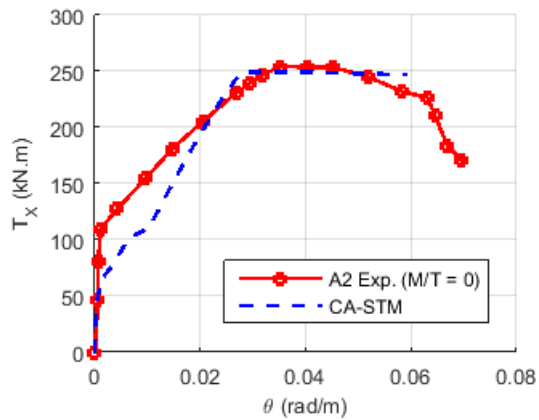
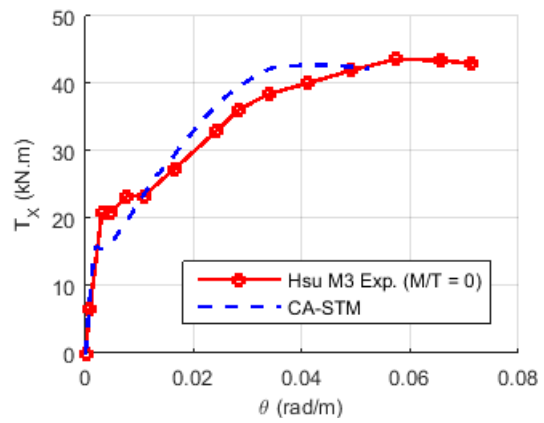
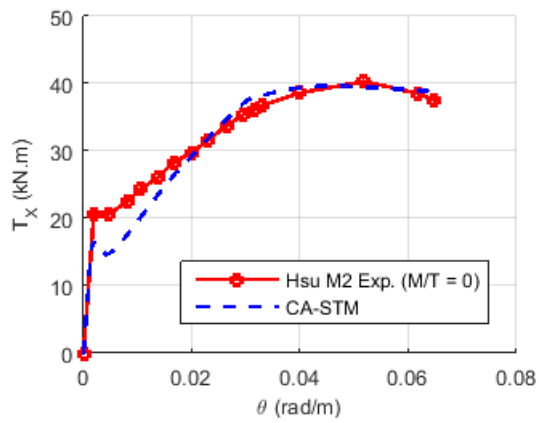
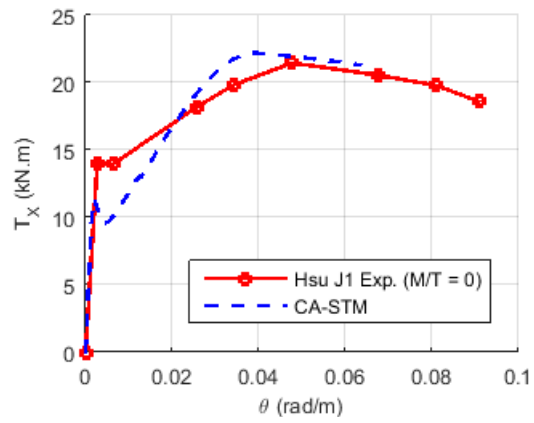
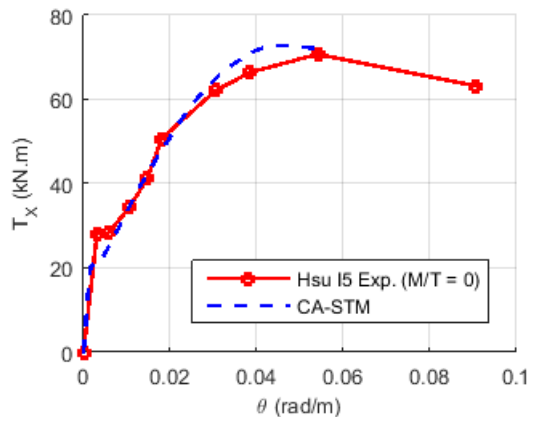
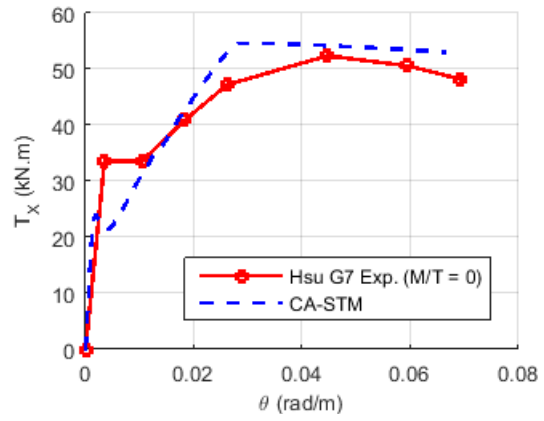
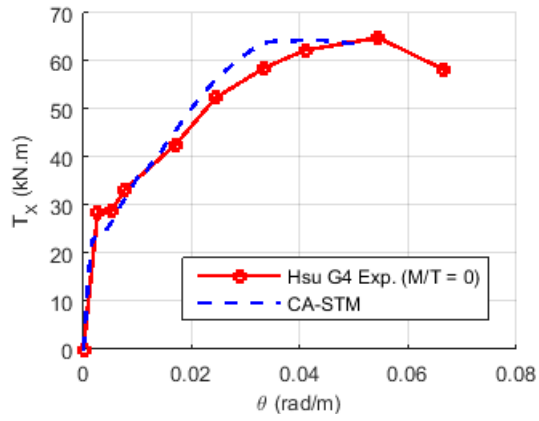
Anexo IV. Curvas $T_X-\theta$

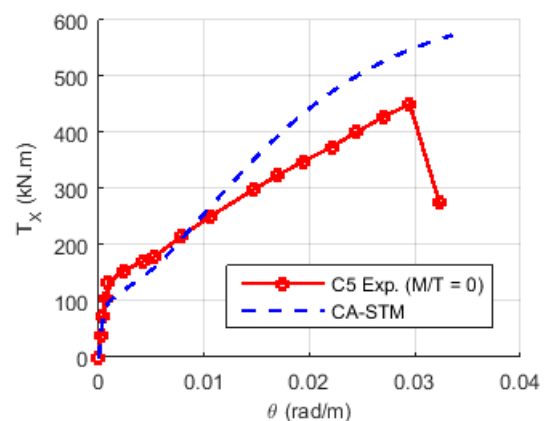
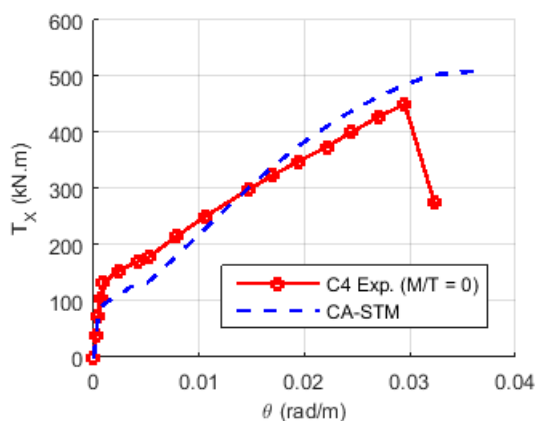
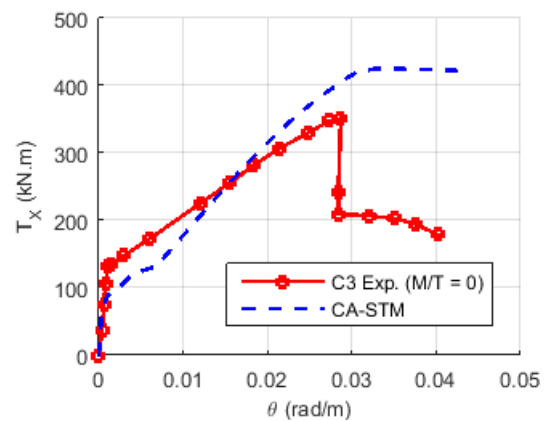
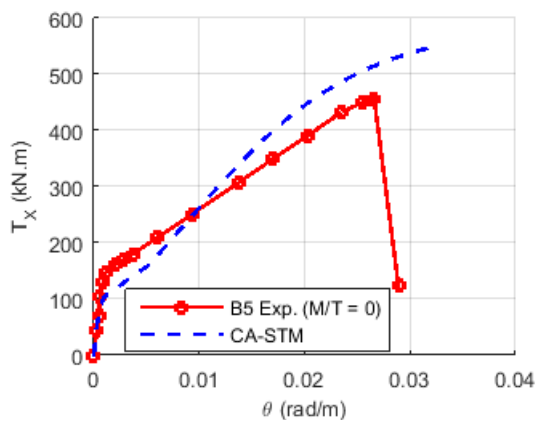
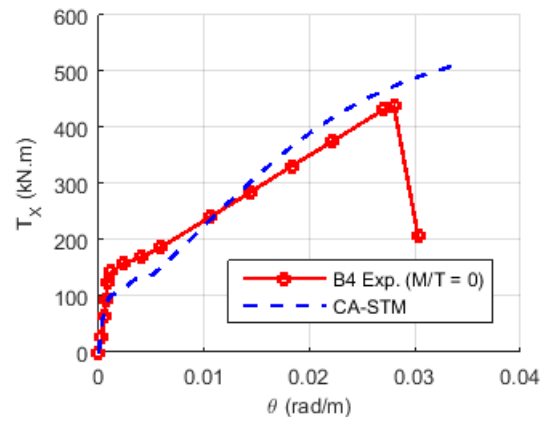
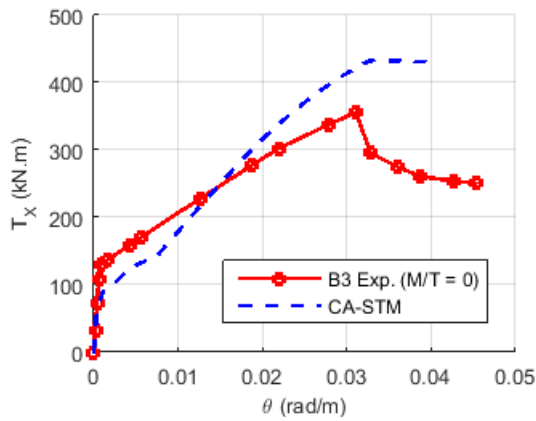
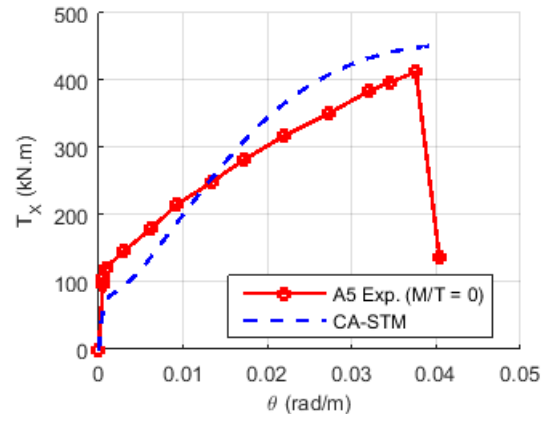
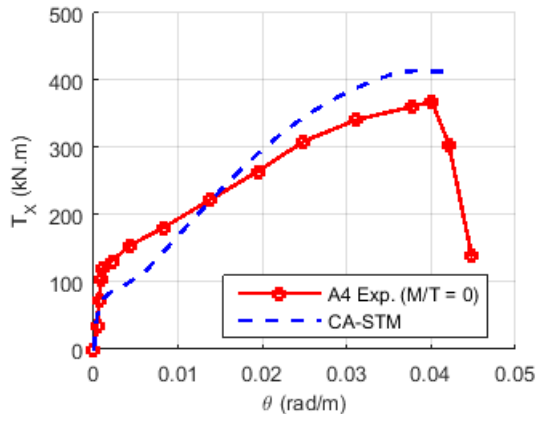


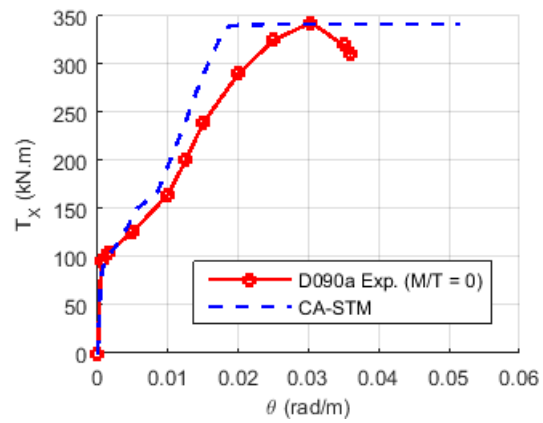
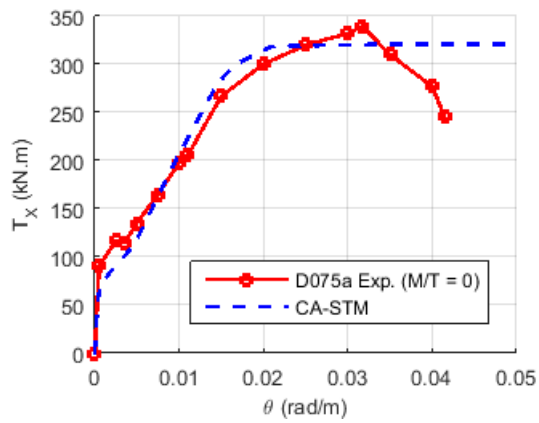
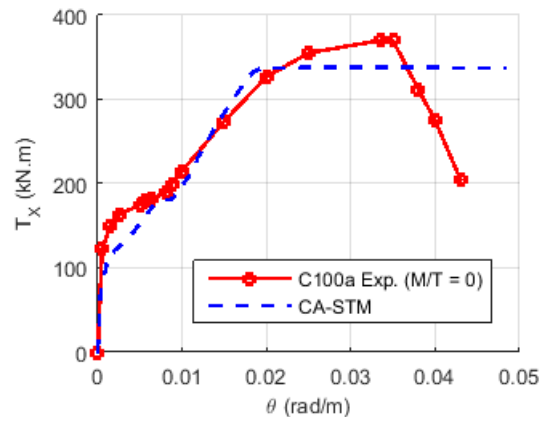
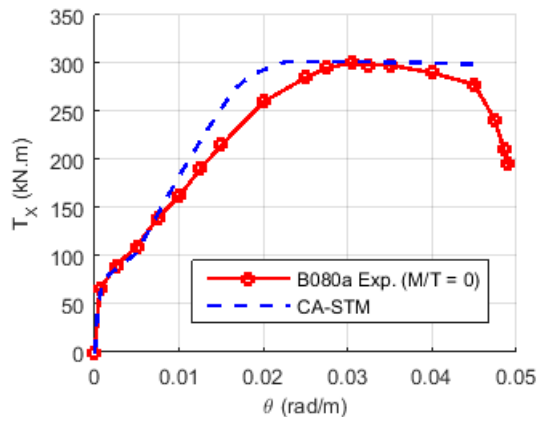
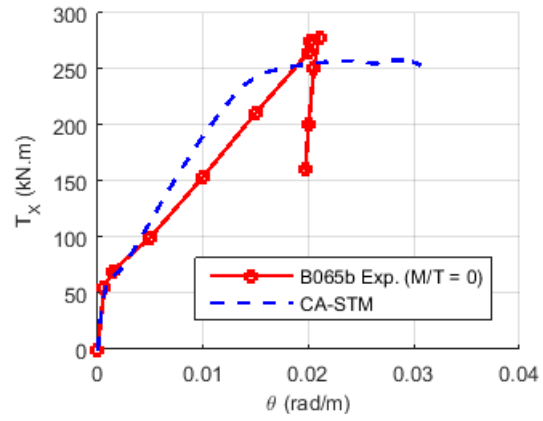
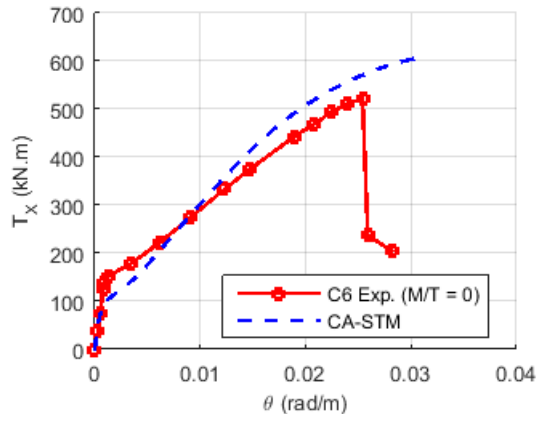




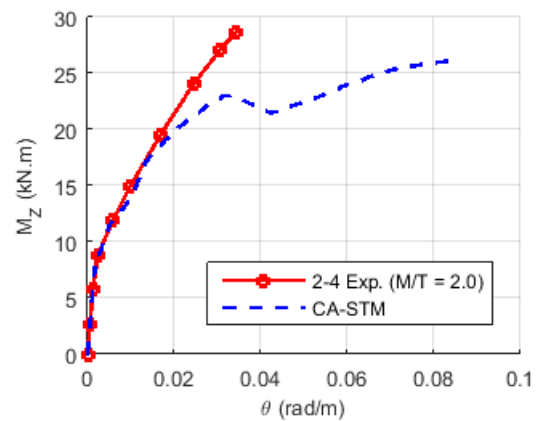
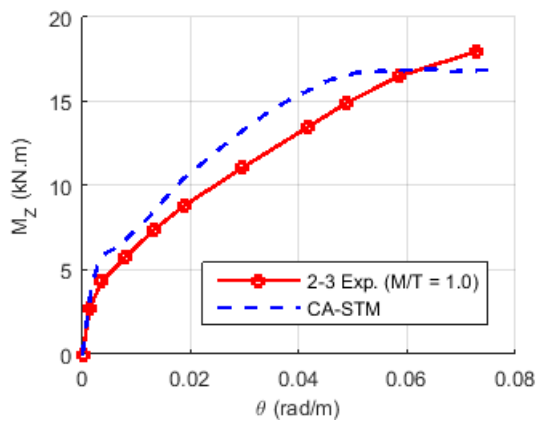
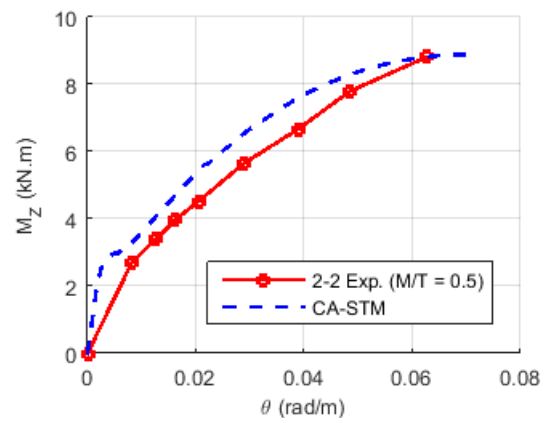
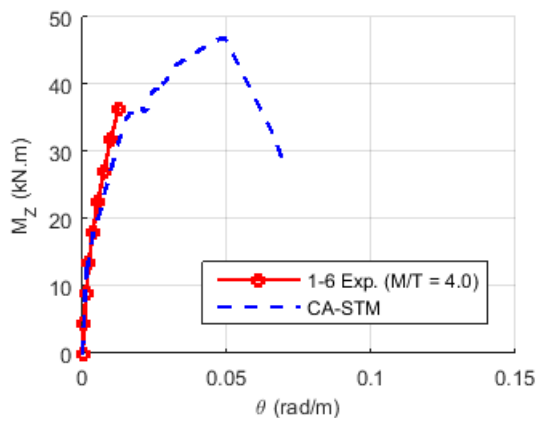
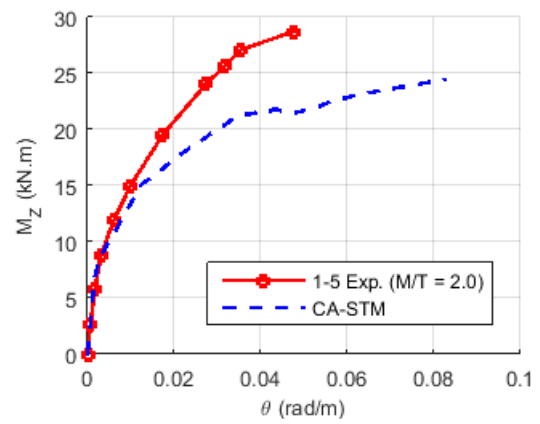
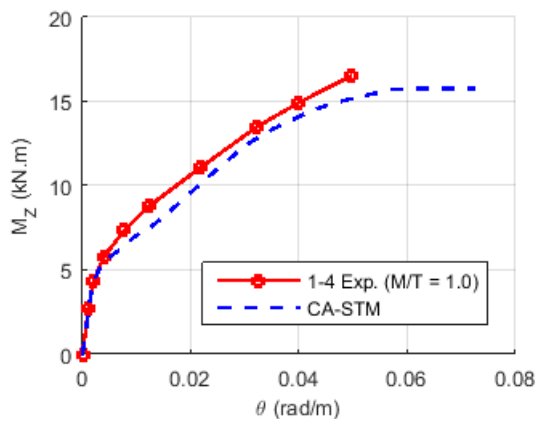
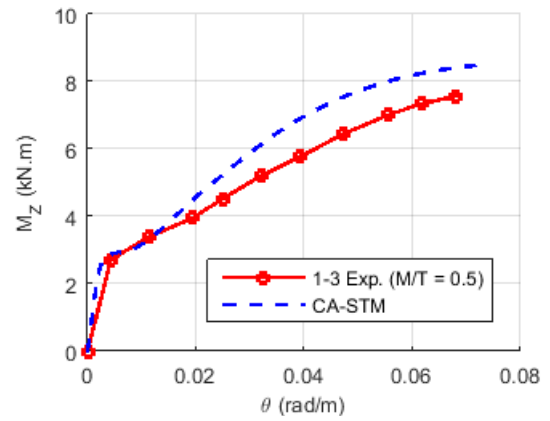
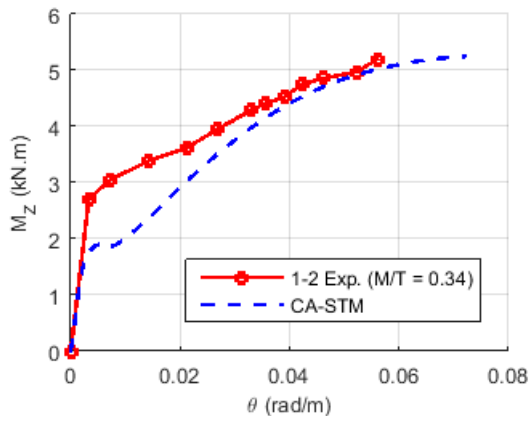


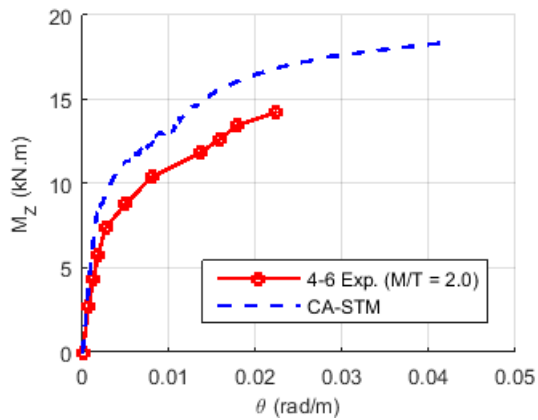
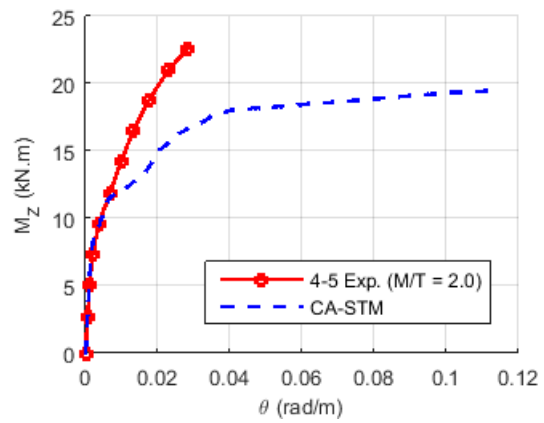
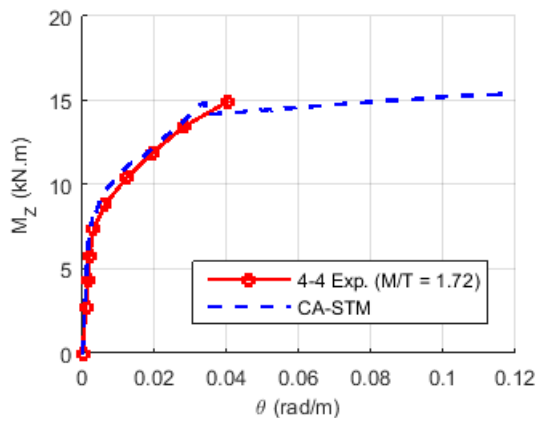
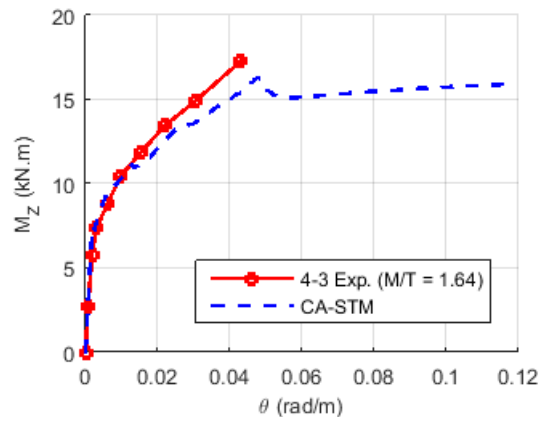
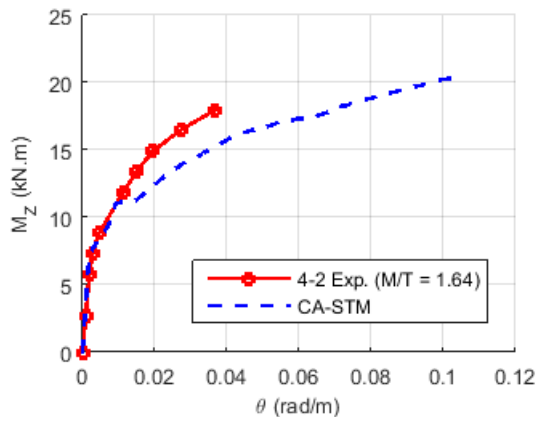
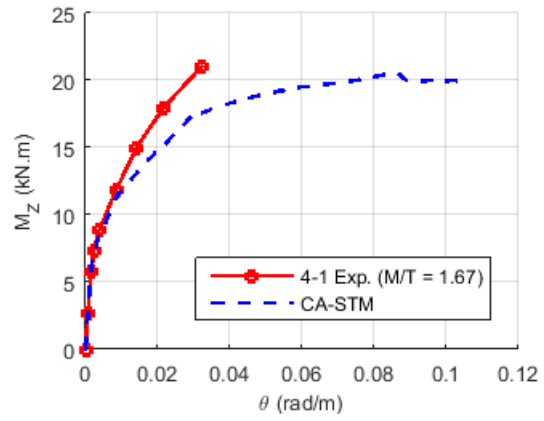
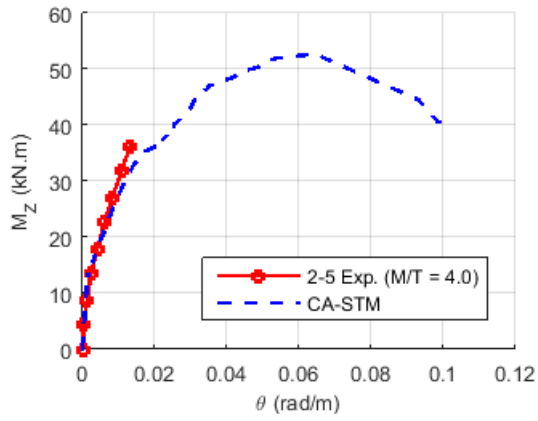




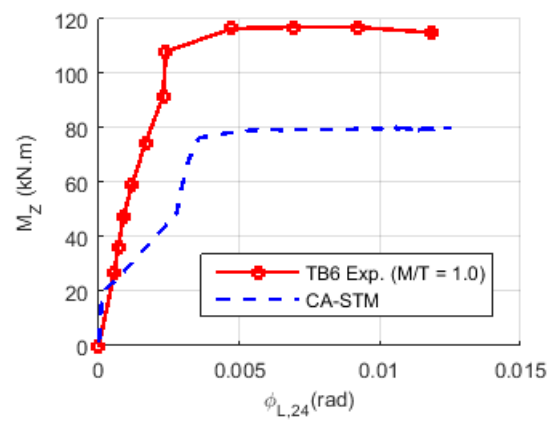
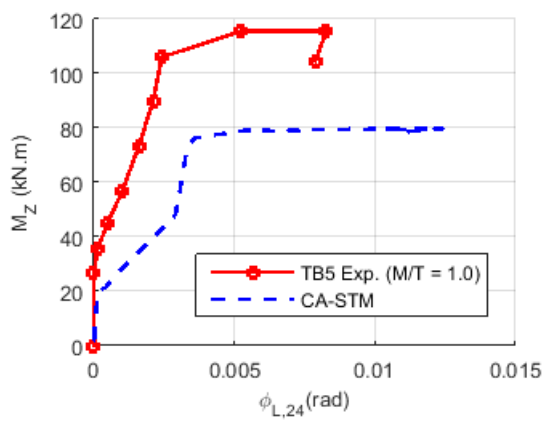
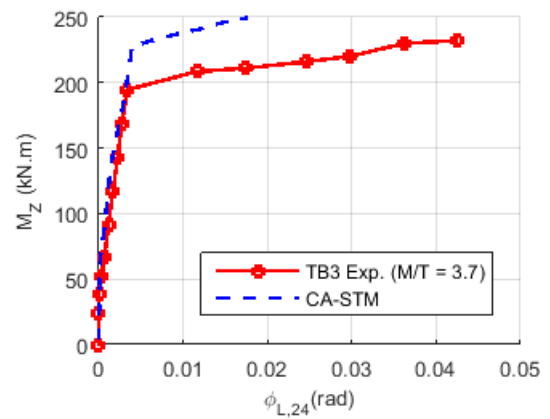
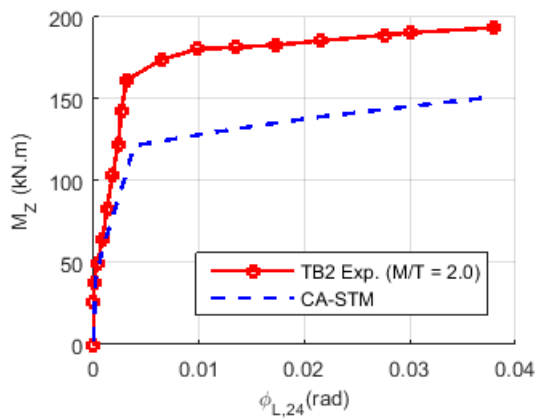
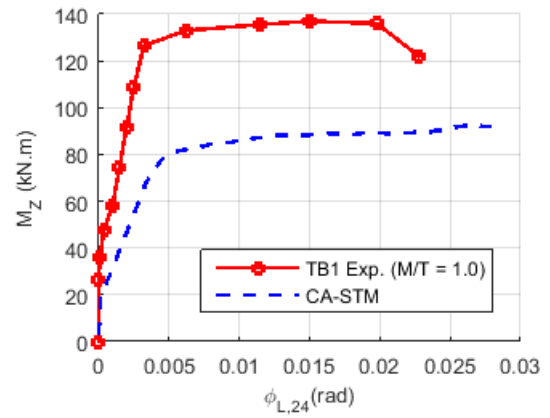
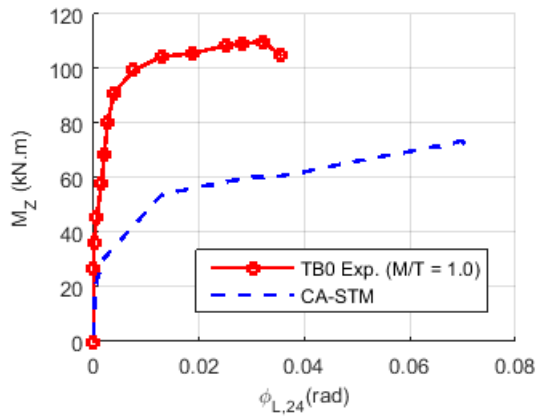


Anexo V. Curvas $M_Z-\theta$



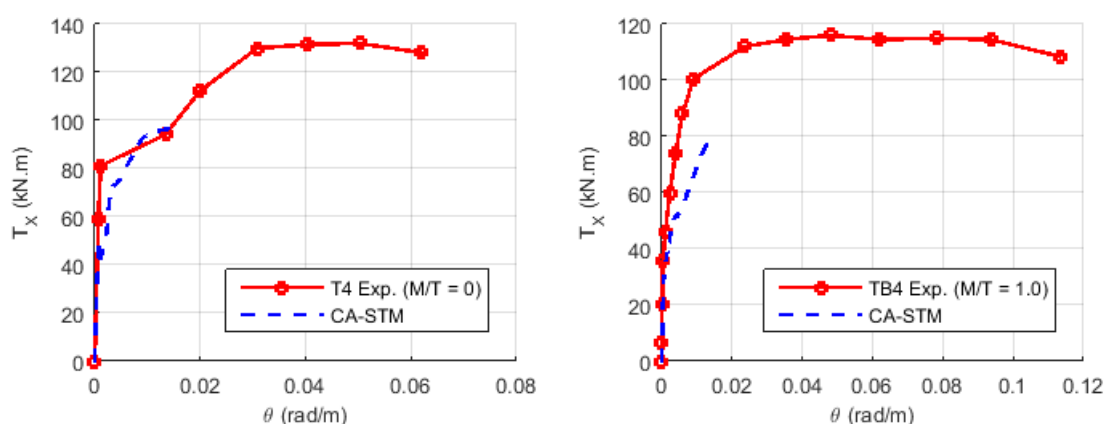


Anexo VI. Curvas $M_Z-\Phi_{L,24}$

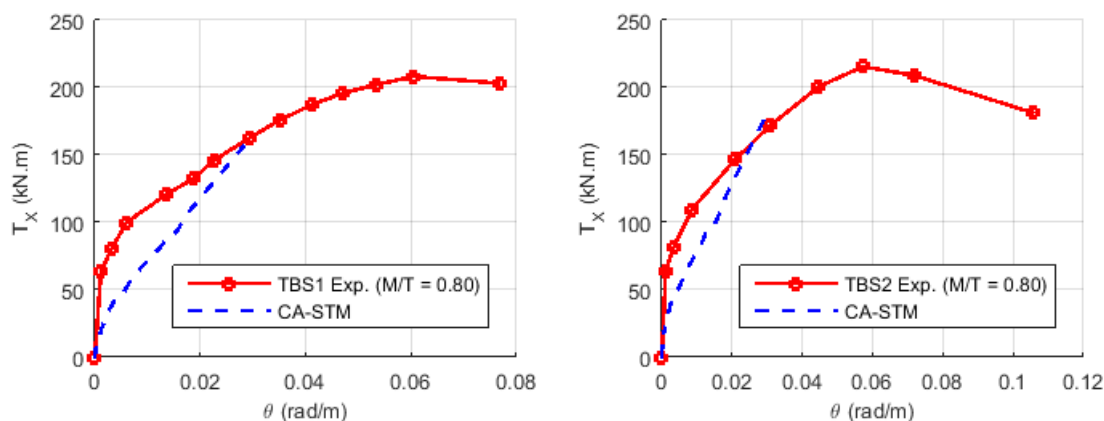


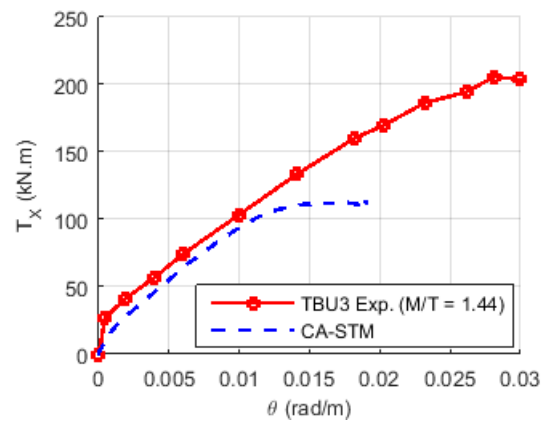
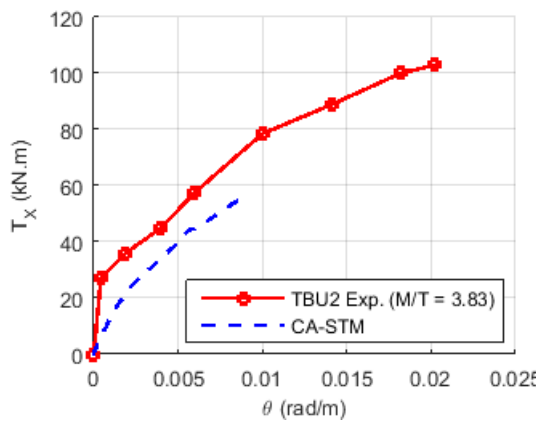
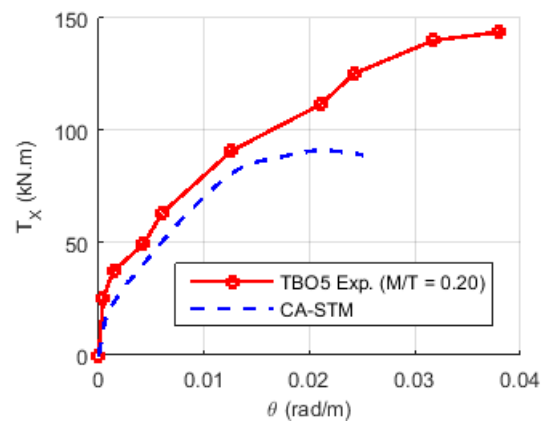
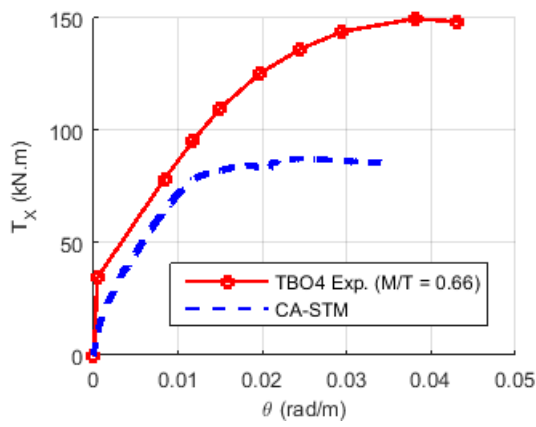
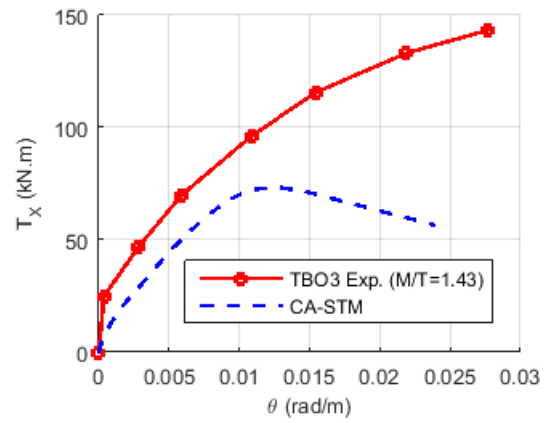
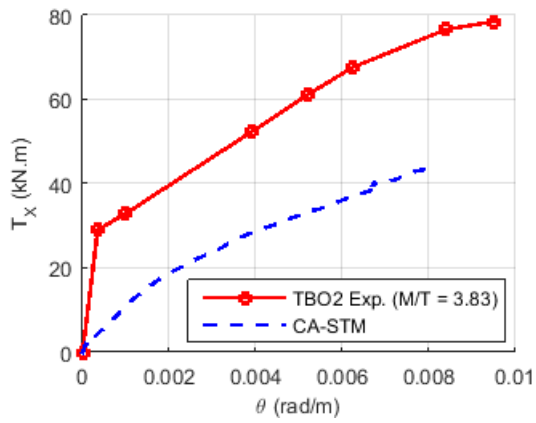
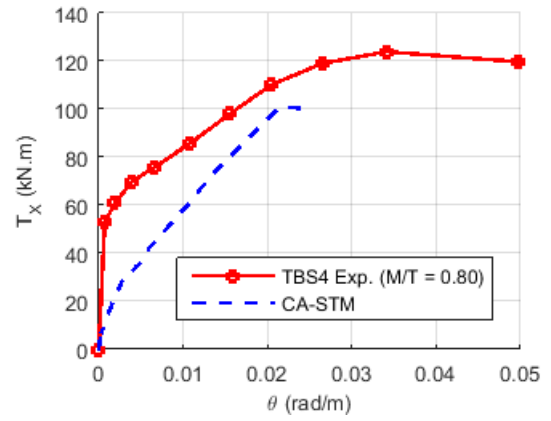
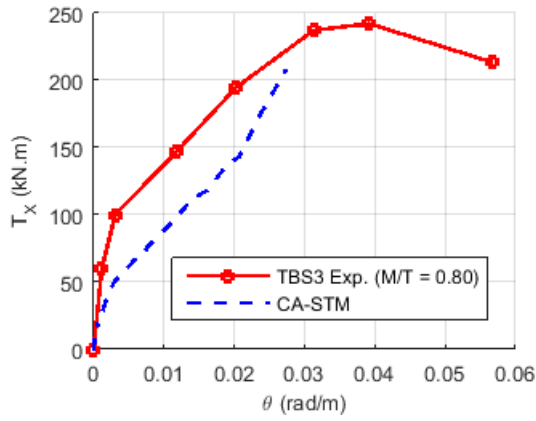
Anexo VII. Limitações e problemas detetados

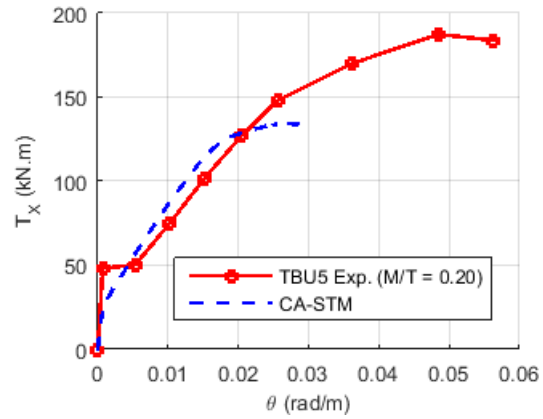
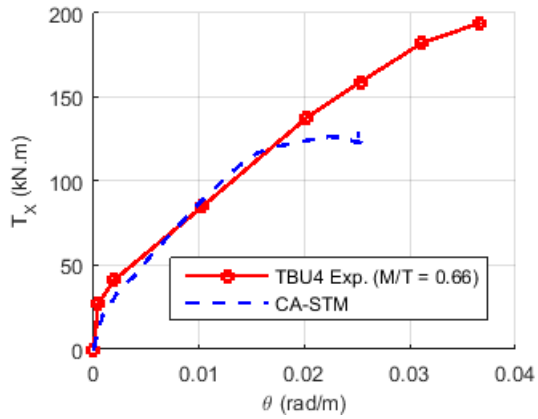
As vigas T4 e TB4 são vigas de secção quadrada (0,50x0,50m) e cheia para as quais se verificou que a previsão teórica, neste caso das curvas $T_x-\theta$, terminou precocemente. Através de uma análise mais detalhada verificou-se que o problema provavelmente residia no facto do método proposto por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], para a determinação das espessuras máximas dos painéis ($b/2$), para estes casos, atribuía valores muito superiores aos das espessuras efetivas dos painéis o que originou problemas de cálculo ao modelo. A redução manual das espessuras iniciais mostrou que o problema observado tendia a desaparecer.



Para as vigas das séries TBS, TBO e TBU, em resultado da grande assimetria existente entre a armadura longitudinal superior e a armadura longitudinal inferior, o método de distribuição da área de armadura proposto por Greene em 2006 [15] e por Greene e Belarbi em 2009a [16] e 2009b [17], originou que o painel 2, referente à face superior da viga, tivesse uma área de armadura negativa. Este aspeto originou problemas de cálculo no procedimento. Refere-se que a atribuição de um valor nulo para a armadura ou de um valor muito baixo não resolveu o problema. Em consequência disto, torna-se necessário repensar o método de distribuição das áreas de armadura longitudinal ou limitar a aplicabilidade do modelo a vigas onde se verifique que a disposição assimétrica desta armadura não dê origem painéis com armadura negativa.







Relativamente às vigas A095a, A120a e B110a verifica-se que a previsão do modelo termina muito antes do esperado. Com recurso a várias simulações no CA-STM contactou-se que, para esta série de vigas, o modelo apresentava problemas de cálculo a partir de um determinado valor de espessura da parede (t_D). A redução manual de t_D , para valores semelhantes aos das vigas da mesma série, onde o modelo não teve problemas de cálculo, resolveu o referido problema.

