

**Modelação por Elementos Finitos de uma  
Viga em Caixão de Betão Armado à Torção**  
Estudo da Variação da Geometria da Secção

Rafael Melo Ramos

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Civil  
Mestrado integrado

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, junho de 2020



# Dedicatória

Dedico esta dissertação especialmente à minha mãe, que mesmo longe, sempre esteve do meu lado e em tudo me ajudou, me apoiou e me encaminhou a realizar este sonho. Espero aumentar mais um bocadinho todo o orgulho que tens em mim, e acima de tudo, espero poder ser eu daqui para a frente a demonstrar-te que todo este nosso esforço não foi em vão. Foram 6 anos, é verdade, com muitas voltas, mas se tudo correr bem, e vai correr, foram 6 anos essenciais para o que virá daqui para a frente.

Quero também dedicar esta dissertação a todos os que me apoiaram dia-a-dia, pela ajuda pelo apoio e pela amizade. Um muito obrigado a todos e espero que fiquem felizes por mim.



# Agradecimentos

Agradeço, principalmente aos meus pais, eles que construíram as minhas fundações e me ajudaram a conquistar este sonho de ser mestre de Engenharia Civil. Em especial à minha mãe ela, que sempre fez tudo para me ajudar e ver realizar este sonho, que no fundo sinto que acabou por ser um sonho comum, um obrigado, sabes bem que nada é, por tudo o que és e fazes por mim mãe.

Quero agradecer, a todos os docentes e funcionários que fazem estar de pé este lindo curso, um obrigado por toda a disponibilidade, todo o empenho e vontade de ensinar, e acima de tudo por todo o sentimento de amor a esta profissão que me transmitiram ano após ano, um grande obrigado.

Quero agradecer ao meu orientador de tese, Professor Doutor Luís Bernardo, primeiramente, por ser o profissional que é e sobretudo pelo seu conhecimento. Onde, para muitos, realizar uma dissertação consigo seria um enorme desafio, talvez devido à dificuldade que seria, eu pensei que, se fizesse uma tese consigo como orientador, com as suas capacidades por muito difícil que fosse, você facilmente me ajudaria, e assim lhe agradeço, por toda a ajuda, e paciência. Um obrigado do fundo do coração.

Quero agradecer à minha namorada, aquela que mais me chateou para trabalhar e não esperar que as coisas acontecessem do nada, por tantos, “Rafael não estas a fazer nada”, um obrigado é pouco, pela ajuda, paciência e por estares ao meu lado.

Por fim, mas não menos importantes, aos meus amigos, de curso e não só, Flávio, sabes que longe ou perto és e serás muito especial para mim, um bem-haja por tudo meu menino, sabes que estarei aqui para o que precisares, Miraldes, aquele que provavelmente mais chateei, obrigado por tudo. Afilhados, força nisso, estarei cá para tudo, Max, John é para acabar em 5!! O meu uera, obrigado pai mais novo, por todos os conselhos e raspanetes, mas acima de tudo por toda a nossa amizade. Aos restantes, que sabem bem quem são um obrigado por tudo.



# Resumo

Nesta dissertação é modelada através do software ABAQUS a Viga A2 previamente ensaiada por Bernardo em 2003 e modelada por Ferreira em 2016. Trata-se de uma viga em caixão de betão armado (com secção transversal retangular vazada) sujeita à torção pura até à rotura. No modelo apresentado nesta dissertação, designado de modelo modificado, foram realizadas várias alterações de forma a obter resultados mais satisfatórios. Para tal, a implementação deste modelo segue o regime de uma análise não linear com elementos finitos, recorrendo ao software comercial ABAQUS. Precedente à realização desta dissertação, foi necessário estudar todo o processo realizado por Bernardo em 2003, relativo ao ensaio experimental realizado, bem como todo o processo antecedente e de tratamento de dados.

Foi realizado e apresentado nesta dissertação todo o procedimento de modelação da Viga A2 através do software comercial ABAQUS, de forma a demonstrar passo a passo toda a modelação da Viga A2 com o modelo modificado. Posteriormente, foram realizadas comparações com o modelo implementado por Ferreira em 2016, bem como com os resultados experimentais obtidos por Bernardo em 2003.

Após a modelação e calibração do modelo modificado da Viga A2, foram realizadas alterações na geometria da secção do modelo, com o intuito de estudar o comportamento da Viga A2 nestas novas configurações. Desta forma, foi alterada a espessura das paredes da secção retangular vazada do modelo, bem como foram adicionados banzos laterais de diferentes larguras. Por fim, realizaram-se comparações dos resultados obtidos com as cláusulas relacionadas e estabelecidas em algumas normas/códigos de referência, verificando que os resultados obtidos neste trabalho validam os mesmos.

## Palavras-chave

Betão Armado; Viga em Caixão; Torção; Elementos Finitos; Geometria da Secção; ABAQUS



# **Abstract**

In this dissertation, beam A2 is numerically modeled using software ABAQUS. This beam was initially tested by Bernardo in 2003 and modeled by Ferreira in 2016. Beam A2 is a reinforced concrete beam, a box beam (with hollow rectangular cross section), under pure torsion until failure. In the model presented in this dissertation, named ad modified model, several changes were made in order to obtain more satisfying results. For this, to implement the modela nonlinear analysis with finite elements by using the commercial software ABAQUS was used. To perform this work, it was necessary to study all the process performed by Bernardo in 2003 and related with the experimental testing, and also all the precedent process and data treatment.

Besides that, in this dissertation, all the modeling process of beam A2, using the commercial software ABAQUS, was realized and presented with the purpose to demonstrate, step by step, with the implementation of the modified model. In the end, the obtained results were compared with the ones from model implemented by Ferreira in 2016, as well with the experimental results by Bernardo in 2003.

After the modeling and calibration of the modified model of beam A2, some geometrical changes were incorporated into the cross section of the model with the aim to study the new behavior of beam A2. For this, the thickness of the walls of the hollow rectangular section was changed. Also, lateral flanges with different widths were added. The new results were compared with some related standards/codes rules existents in the literature, were good agreement was found.

## **Keywords**

Reinforced Concrete; Hollow Beam; Torsion; Finite Elements; Cross-section Geometry; ABAQUS



# Índice

Capítulo 1 – Introdução .....	26
1. Modelos de Análise Estrutural .....	26
1.1 Análise linear elástica .....	27
1.2 Análise não linear .....	28
1.3 Critérios de cedência.....	30
1.4 Análise Plástica .....	31
1.5 Lei Constitutiva.....	33
1.6 Justificação do tema .....	35
Capítulo 2 - Método dos elementos finitos para a análise não linear ABAQUS.....	41
2.1 Breve Descrição do <i>software</i> ABAQUS .....	41
2.2 Método dos Elementos Finitos .....	42
2.3 Formulação do método dos elementos finitos aplicado à análise não linear .....	44
2.4 Método dos Elementos Finitos – Modelo da Rigidez.....	46
2.5 Elementos Finitos utilizados .....	50
2.5.1 Elemento treliça T3D2.....	50
2.5.2 Elemento tridimensional hexaédrico C3D8 .....	50
2.6 Aplicação do Método dos elementos finitos no ABAQUS .....	51
2.7 Modelação do comportamento do betão no ABAQUS .....	51
2.7.1 Descrição Geral do modelo CDP (Concrete Damaged Plasticity).....	52
2.7.2 Descrição Geral do modelo SCM (Smearred Crack Model) .....	57
2.7.3 Caracterização do betão à compressão .....	60
2.7.4 Caracterização do betão à tração .....	63
2.8 Modelação elástica do aço no ABAQUS.....	67
2.9 Modelação plástica do aço no ABAQUS .....	68
2.10 Definição do tipo de análise.....	70
2.11 Definição das interações no modelo .....	72
2.12 Condições de Contorno.....	74
2.13 Processamento e análise de problemas não lineares.....	75
2.14 Interpretação de resultados .....	76
Capítulo 3 – Descrição da modelação no ABAQUS da Viga A2 com modelo corrigido .	77
3.1 Modelo geral de trabalho no ABAQUS .....	77
3.2 Caracterização da viga A2 .....	78
3.2 Criação dos elementos constituintes e geometria base .....	80
3.3 Definição do tipo de elemento e criação da malha .....	82
3.4 Propriedades dos materiais que constituem a viga A2.....	84

3.5	Associação das componentes .....	88
3.6	Configuração do tipo de análise .....	89
3.7	Definição das interações .....	90
3.8	Definição das condições de contorno.....	92
3.9	Processamento do modelo .....	94
3.10	Análise de resultados .....	95
Capítulo 4- Modelação da Viga A2 com diferentes espessuras de parede .....		102
4.1	Documento Normativo de referência.....	102
4.2	Geometria dos novos modelos .....	103
4.3	Modelo t=5cm .....	103
4.4	Modelo t=7.5cm .....	108
4.5	Modelo t=15cm.....	112
4.6	Modelo t=20cm.....	115
4.7	Modelo Secção Cheia.....	120
4.8	Análise gráfica de todos os modelos .....	124
Capítulo 5- Modelação da Viga A2 com a introdução de banzos .....		129
5.1	Documentos Normativos de referência e geometria dos novos modelos .....	129
5.2	Modelação dos novos modelos.....	130
5.3	Propriedades do varão de aço $\phi$ 6 mm .....	130
5.4	Modelo com banzo b=10cm .....	132
5.5	Modelo com banzo b=20cm.....	135
5.6	Modelo com banzo b=30cm.....	140
5.7	Modelo com banzo b=40cm.....	144
5.8	Modelo com banzo b=50cm.....	147
5.9	Análise geral dos resultados obtidos .....	152
Capítulo 6- Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros .....		157
6.1	Análise do modelo da viga A2 com modelo modificado e comparação com o modelo de Ferreira [4] .....	157
6.2	Conclusões, variação da espessura do modelo da Viga A2 .....	159
6.3	Conclusões, adição de banzos laterais no modelo da Viga A2 .....	160
6.4	Sugestões para trabalhos futuros .....	161
Bibliografia.....		162
Anexos.....		165

# Lista de Figuras

Figura 1 -Distribuição dos momentos numa viga contínua devido a cargas pontuais segundo uma análise linear elástica e elasto-plástica [2].....	32
Figura 2 -Comportamento reológico elástico, perfeitamente plástico .....	33
Figura 3 -Modelo físico para o comportamento elástico e plástico.....	34
Figura 4 -Modelo de comportamento elástico perfeitamente plástico.....	34
Figura 5 -Exemplo de uma modelação no ABAQUS .....	42
Figura 6- Escolha do CDP no <i>software</i> ABAQUS.....	53
Figura 7 -Plano de tensões correspondente aos diferentes valores de $K_c$ .....	55
Figura 8– Representação da modelação por CDP pelo ABAQUS. ....	57
Figura 9 -Representação do SCM no ABAQUS .....	58
Figura 10 -Comportamento uniaxial do betão segundo o ABAQUS .....	59
Figura 11 - Relação uniaxial tensão- extensão para o modelo de dano .....	62
Figura 12 - Introdução da relação tensão-extensão no software ABAQUS .....	63
Figura 13– Representação da deformação total de um provete de betão sujeito à tração [9].....	64
Figura 14 - Caracterização do comportamento do betão à tração no software ABAQUS .....	65
Figura 15 -Comportamento linear do betão à tração.....	65
Figura 16 -Relação constitutiva do aço à tração .....	66
Figura 17 -Módulo no software ABAQUS para a caracterização elástica do material metálico.....	67
Figura 18 Definição das propriedades elásticas para caracterização do comportamento elástico do aço.....	68
Figura 19 -Definição da isotropia para a caracterização plástica do aço.....	69
Figura 20 -Definição das propriedades plásticas para caracterização do comportamento elástico do aço.....	70
Figura 21 -Definição do tipo de análise no ABAQUS.....	71
Figura 22 -Representação do Coupling no ABAQUS .....	73
Figura 23 -Tolerância exterior para elementos embebidos.....	74
Figura 24 -Convenção de deslocamento e rotações segundo o ABAQUS.....	74
Figura 25 -Janela de seleção de dados para construção de gráficos em ABAQUS.....	76
Figura 26 – Esquema dos módulos no ABAQUS .....	78
Figura 27 - Pormenorização da Viga A2 .....	80
Figura 28 -Módulo de criação da geometria base .....	81
Figura 29 -Criação dos cortes e representação da zona constituída por betão elástico. ....	81

Figura 30 - Criação dos cortes e representação da zona constituída por betão plástico. .....	82
Figura 31 - Criação da malha da viga na secção transversal .....	82
Figura 32 - Divisão em quatro partes das zonas de extremidade da Viga A2.....	83
Figura 33 -Criação da malha no elemento viga secção longitudinal.....	83
Figura 34 - Área da secção de aço 8mm em $\text{mm}^2$ .....	86
Figura 35 - Área da secção de aço 10mm em $\text{mm}^2$ .....	87
Figura 36 - Área da secção de aço 12mm em $\text{mm}^2$ .....	87
Figura 37 -Pormenor construtivo da armadura da viga A2 .....	88
Figura 38 - Configuração do tipo de análise .....	89
Figura 39- Definição do Embebimento da armadura da viga A2 .....	90
Figura 40 -Definição do Coupling na viga A2 .....	91
Figura 41 -Configuração final das interações no modelo.....	91
Figura 42 -Configuração das condições de contorno BC1 e BC2 .....	92
Figura 43 -Restrição BC-1 .....	93
Figura 44 -Restrição BC-2.....	93
Figura 45 -Configuração da condição de contorno BC3 .....	94
Figura 46 -Configuração do Processamento do modelo .....	95
Figura 47 - Gráficos com as curvas T- $\theta$ para a viga A2 .....	96
Figura 48 -Curva T- $\theta$ modelo modificado com marcações.....	96
Figura 49 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo modificado da viga A2 .....	98
Figura 50 -Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo modificado da viga A2 .....	98
Figura 51 - Deslocamentos segundo U1 (mm) para o modelo modificado da viga A2 ...	99
Figura 52 -Deslocamentos segundo U2 (mm) para o modelo modificado da viga A2 ...	99
Figura 53 -Deformação geral para o modelo modificado da viga A2, (a) e (b).....	100
Figura 54 - Modelo com t=5cm.....	104
Figura 55 - Deformação do modelo com t=5cm.....	104
Figura 56 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=5cm .....	105
Figura 57 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=5cm	105
Figura 58 - Deslocamentos segundo U1 (mm) para o modelo com t=5cm.....	106
Figura 59 - Deslocamentos segundo U2 (mm) para o modelo com t=5cm .....	106
Figura 60 - Deslocamentos segundo U3 (mm) para o modelo com t=5cm.....	107
Figura 61 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=5cm .....	107
Figura 62 – Modelo com t=7.5cm .....	108

Figura 63 - Deformação do modelo com t=7.5cm .....	108
Figura 64 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=7.5cm .....	109
Figura 65 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=7.5cm .....	109
Figura 66 -Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo com t=7.5cm .....	110
Figura 67 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=7.5cm .....	110
Figura 68 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo com t=7.5cm .....	111
Figura 69 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=7.5cm ..	111
Figura 70 -Modelo com t=15cm .....	112
Figura 71 - Deformação do modelo com t=15cm .....	112
Figura 72 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=15cm .....	113
Figura 73 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=15cm	113
Figura 74 -Deslocamentos segundo U1 em mm modelo com t=15cm .....	113
Figura 75 -Deslocamentos segundo U2 em mm modelo com t=15cm .....	114
Figura 76 -Deslocamentos segundo U3 em mm modelo com t=15cm .....	114
Figura 77 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=15cm ....	115
Figura 78 – Modelo com t=20cm .....	116
Figura 79 - Deformação do modelo com t=20cm .....	116
Figura 80 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=20cm .....	117
Figura 81 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=20cm .....	117
Figura 82 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=20cm .....	118
Figura 83 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=20cm .....	118
Figura 84 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo com t=20cm .....	119
Figura 85 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=20cm ...	119
Figura 86 - Modelo com secção cheia .....	120
Figura 87 - Deformação do modelo com secção cheia .....	121
Figura 88 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com secção cheia .....	121
Figura 89 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com secção cheia .....	122
Figura 90 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo com secção cheia .....	122
Figura 91 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com secção cheia .....	123
Figura 92 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo com secção cheia .....	123

Figura 93 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo com secção cheia .....	124
Figura 94 - Representação gráfica dos resultados de todos os modelos.....	125
Figura 95 - Representação gráfica da relação entre os momentos torsores de fissuração e resistente (último ou máximo) para as diferentes secções vazadas e secção cheia, em função da relação $x/t$ .....	127
Figura 96 - Exemplo de uma solução adotada para a armadura dos banzos - banzos com $b = 10$ cm .....	130
Figura 97 - Área da secção aço $\phi 6$ mm (em $\text{mm}^2$ ).....	131
Figura 98 - Disposição geral das armaduras no modelo com banzo .....	131
Figura 99 - Disposição das armaduras no modelo com banzo e com $b = 10$ cm .....	132
Figura 100 -Modelo da viga A2 com banzo: $b=10\text{cm}$ .....	133
Figura 101 -Deformação da viga A2 com banzo $b=10\text{cm}$ .....	133
Figura 102 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: $b=10\text{cm}$ .....	133
Figura 103 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo $b=10\text{cm}$ ...	134
Figura 104 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: $b=10\text{cm}$ .....	134
Figura 105 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: $b=10\text{cm}$ .....	134
Figura 106 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: $b=10\text{cm}$ .....	135
Figura 107 - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo $b=10\text{cm}$ .....	135
Figura 108 - Modelo da viga A2 com banzo: $b=20\text{cm}$ .....	136
Figura 109 - Deformação da viga A2 com banzo: $b=20\text{cm}$ .....	136
Figura 110 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: $b=20\text{cm}$ .....	137
Figura 111 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: $b=20\text{cm}$ ...	137
Figura 112 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: $b=20\text{cm}$ .....	138
Figura 113 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: $b=20\text{cm}$ .....	138
Figura 114 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: $b=20\text{cm}$ .....	139
Figura 115 - Representação gráfico do modelo da viga A2 com banzo $b=20\text{cm}$ .....	139
Figura 116 - Modelo da viga A2 com banzo: $b=30\text{cm}$ .....	140
Figura 117 - Deformação da viga A2 com banzo: $b=30\text{cm}$ .....	140
Figura 118 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: $b=30\text{cm}$ .....	141
Figura 119 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: $b=30\text{cm}$ ..	141
Figura 120 -Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: $b=30\text{cm}$ .....	142
Figura 121 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: $b=30\text{cm}$ .....	142
Figura 122 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: $b=30\text{cm}$ .....	143

Figura 123 - Representação gráfico do modelo da viga A2 com banzo $b=30\text{cm}$ .....	143
Figura 124 - Modelo da viga A2 com banzo: $b=40\text{cm}$ .....	144
Figura 125 - Deformação da viga A2 com banzo: $b=40\text{cm}$ .....	145
Figura 126 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: $b=40\text{cm}$ .....	145
Figura 127 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: $b=40\text{cm}$ ...	145
Figura 128 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: $b=40\text{cm}$ .....	146
Figura 129 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: $b=40\text{cm}$ .....	146
Figura 130 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: $b=40\text{cm}$ .....	146
Figura 131 - - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo $b=40\text{cm}$ .....	147
Figura 132 - Modelo da viga A2 com banzo: $b=50\text{cm}$ .....	148
Figura 133 - Deformação da viga A2 com banzo: $b=50\text{cm}$ .....	148
Figura 134 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: $b=50\text{cm}$ .....	149
Figura 135 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: $b=50\text{cm}$ ..	149
Figura 136 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: $b=50\text{cm}$ .....	150
Figura 137 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: $b=50\text{cm}$ .....	150
Figura 138 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: $b=50\text{cm}$ .....	151
Figura 139 - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo: $b=50\text{cm}$ .....	151
Figura 140 - Análise gráfica comparativa dos resultados obtidos com a adição de banzos laterais .....	152
Figura 141 - Análise gráfica da evolução do momento torsor máximo e de fissuração .	154
Figura 142 - Pormenor construtivo da armadura da viga A2 com modelo modificado	158



## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Caracterização do betão utilizado na Viga A2 .....	79
Tabela 3.2 - Caracterização das armaduras da Viga A2.....	79
Tabela 3.3 - Propriedades elásticas do betão.....	84
Tabela 3.4 -Propriedades do betão plástico.....	84
Tabela 3.5 - Relação tensão-extensão plástico à compressão para o betão plástico .....	84
Tabela 3.6 -Comportamento à tração do betão plástico .....	85
Tabela 3.7 - Propriedades elásticas do aço para todos os diâmetros.....	85
Tabela 3.8 -Propriedades plásticas do aço $\phi 8$ .....	86
Tabela 3.9 -Propriedades plásticas do aço $\phi 10$ .....	86
Tabela 3.10 -Propriedades plásticas do aço $\phi 12$ .....	87
Tabela 3.11 - Análise comparativa para os pontos de fissuração e último.....	97
Tabela 4.1 - Espessuras consideradas e relação com os limites normativos segundo [13] .....	103
Tabela 4.2 - Análise comparativa do comportamento da viga A2 com diferentes espessuras de parede .....	125
Tabela 4.3 - Análise comprativa do momento de fissuração e momento máximo entre os modelos com secção vazada e o modelo com secção cheia.....	126
Tabela 5.1 - Apresentação dos modelos com a introdução de banzos laterais .....	129
Tabela 5.2 - Propriedades plásticas do aço $\square 6$ .....	130
Tabela 5.3 - Análise comparativa dos resultados obtidos com a adição de banzos laterais .....	153



# Simbologia

Alfabeto Latino:

$a_j$ - Nós do elemento;
$[B]$ - Matriz que relaciona deformações e deslocamentos;
$d$ - Representa a variável escalar da degradação da rigidez;
$dc$ - Variável de dano em função da temperatura;
$D^{el}$ - Representa a degradação da rigidez elástica;
$D_0^{el}$ - Representa a rigidez elástica inicial do material;
$d_t$ - Variável de dano em função da temperatura;
$dV$ - Volume infinitesimal de material da estrutura;
$E$ - Módulo de elasticidade;
$E_s$ - Módulo de elasticidade secante do aço;
$F$ - Condição de cedência;
$f_{ctm}$ - Valor médio da resistência à tração do betão;
$f(\sigma)$ - Função de cedência;
$f_{yk}$ - Valor característico da tensão de cedência;
$f_y$ - Tensão de cedência
$f_{ym}$ - Valor médio da tensão de cedência da armadura;
$f_u$ - Tensão última;
$G_f$ - Energia de fratura do betão;
$K_c$ - Rácio do segundo invariante;
$P$ - Pressão;
$T_{cr}$ - Momento Torsor de fissuração;
$(T_{cr})_{rel}$ - Momento Torsor de fissuração relativo;
$T_{max}$ - Momento Torsor máximo;
$(T_{max})_{rel}$ - Momento Torsor de máximo relativo;
$q(CM)$ - meridiano das compressões;
$q(TM)$ - invariante de tensões no meridiano das trações;
$U_0$ - Energia de deformação por unidade de volume;
$w$ - Abertura da fenda principal;
$1/r$ - Curvatura;

Alfabeto Grego:

$\Delta l$ - Alongamento/encurtamento;
$\Delta_{el}$ - Alongamento elástico na zona não fendilhada;
$\Delta T_{cr}$ - Incremento do Momento Torsor de Fissuração;
$\Delta T_{max}$ - Incremento do Momento Torsor máximo;
$\epsilon_{c1}$ - Extensão correspondente à tensão máxima;
$\epsilon_{cu1}$ - Extensão correspondente à tensão última;
$\epsilon^{el}$ - Taxa de deformação elástica;
$\epsilon^{pl}$ - Parcela plástica da taxa de deformação;
$\dot{\epsilon}^{pl}$ - Taxa de deformação plástica;
$\epsilon_{pu}$ - Extensão última plástica;
$\epsilon_{su}$ - Extensão última convencional da armadura ordinária;
$\epsilon_{ud}$ - Valor da extensão última;
$\epsilon_{ym}$ - Valor médio da primeira extensão de cedência;
$\{\epsilon\}$ - Vetor das deformações;
$\{\epsilon_0\}$ - Vetor das deformações iniciais;
$\dot{\epsilon}$ - Taxa de deformação total;
$\epsilon(\theta, f_i)$ - Excentricidade;
$\mu$ - Parâmetro de regularização visco plástica;
$\theta_{cr}$ - Rotação segundo o Momento Torsor de fissuração;
$\theta_{max}$ - Rotação segundo o Momento Torsor máximo;
$\sigma_{b0}$ - Tensão inicial de compressão equibisaxial;
$\sigma_c$ - Tensão de compressão;
$\sigma_{ct}(w)$ - Tensão de abertura de fendas;
$\sigma_{c0}$ - Tensão inicial de compressão uniaxial;
$\sigma_{ef}$ - Tensão efetiva;
$\sigma_0$ - Vetor das tensões iniciais;
$\Pi$ - Funcional;
$\Pi_n$ - Funcional associado a n;
$\nu$ - Coeficiente de Poisson
$\varphi_j$ - Função forma;
$\Psi(\theta, f_i)$ - Ângulo de dilatância;
$\Omega$ - Energia Potencial das ações externas aplicadas no sistema;



## Lista de Acrónimos

ACI - American Concrete Institute
CDP - Concrete Damaged Plasticity
CEB - Comité Européen du Béton
CMP - Classic Metal Plasticity
EC2 - Eurocódigo
ELS - Estado Limite de Serviço
ELU - Estado Limite Último
EN - European Norm
fib - Fédération International du Béton
LNEC - Laboratório Nacional de Engenharia Civil
MEF - Método dos Elementos Finitos
PMP - Porous Metal Plasticity
RP - Reference Point
SCM - Smearred Crack Model



# Capítulo 1 – Introdução

## 1. Modelos de Análise Estrutural

Os modelos teóricos e o recurso aos métodos numéricos, com o apoio de trabalhos experimentais, têm vindo a dar um grande contributo na análise das estruturas, de modo a garantir que a previsão do comportamento em estado limite último e de serviço se aproxime do valor das solicitações compatíveis com as estruturas.

Segundo o Eurocódigo 2, na secção 5.1.1,

*O objetivo de uma análise estrutural é o de determinar a distribuição quer de esforços, quer de tensões, extensões e deslocamentos, em toda ou parte da estrutura. Sempre que necessário deverá ser efetuada uma análise local complementar [1].*

Desta forma, no dimensionamento de uma estrutura é necessário considerar a relação entre as ações aplicadas na estrutura e a resposta da mesma, através do comportamento dos materiais bem como da geometria da estrutura. Na execução de uma análise estrutural, é importante executá-las de forma ideal, tanto a nível da geometria como do seu comportamento, que devem ser ajustados conforme o problema em estudo.

Assim, existem vários métodos de análise, como a análise linear elástica, análise não linear, análise com redistribuição de esforços e análise plástica. Estas diferentes análises, têm que respeitar as condições de equilíbrio e de compatibilidade da estrutura. É também importante conhecer a ductilidade da estrutura através da capacidade de rotação plástica nas seções para poder garantir a capacidade de deformação necessária no método de análise.

## 1.1 Análise linear elástica

Segundo o EC2 a análise linear deve ser aplicada na verificação dos estados limites de serviço ELS, no entanto, este tipo de análise também pode ser utilizado na verificação aos estados limites últimos. Segundo o Eurocódigo 2 [1] “O cálculo de elementos, quer nos estados limites de utilização quer nos estados limites últimos, pode ser efetuado com uma análise linear baseada na teoria da elasticidade.”

Na determinação dos efeitos das ações, a análise linear pode ser efetuada admitindo as hipóteses seguintes:

- secções não fendilhadas;
- relações tensões-extensões lineares;
- valores médios do módulo de elasticidade;

Segundo o Eurocódigo 2

*Para os efeitos das deformações de origem térmica, dos assentamentos e da retração no estado limite último, pode admitir-se uma rigidez reduzida correspondente às secções fendilhadas, desprezando a contribuição do betão tracionado, mas incluindo os efeitos da fluência. Para o estado limite de utilização, deve considerar-se uma evolução gradual da fendilhação. [1]*

Desta forma, este tipo de análise está baseada na hipótese clássica de Resistência dos Materiais, segundo a qual, existe uma proporcionalidade entre a ação e a resposta, tanto de uma secção particular ou da estrutura. A análise com redistribuição de esforços é adequada para vigas contínuas, mas não deve ser utilizada no dimensionamento de pilares e pórticos.

No betão armado, os resultados da análise linear elástica, apenas se aproximam da realidade física se não existir fendilhação da peça, na zona tracionada de betão, e se na zona comprimida os níveis de tensão forem baixos, o que acontecerá apenas nos estados limites de serviço, e se a armadura se encontrar na fase elástica.

Já que, na fase de rotura, tanto o betão como o aço, já terão ultrapassado a sua fase elástica, pelo que, esta análise não é a mais apropriada. Segundo Bastos em 1997 citado por Araújo, 2013, [2]

*A análise elástica admite um comportamento linear elástico dos materiais com a manutenção da rigidez constante em todo o processo e traduz muito aproximadamente o valor dos esforços instalados para níveis de carga inferiores à carga de fendilhação do betão sendo aceitável a sua aplicação em fase de serviço. Já em estado limite último, fase em que tanto o aço como o betão ultrapassaram largamente o seu domínio elástico, ou quase elástico, a análise não linear ou o cálculo plástico parecem ser mais adequados à determinação da distribuição dos esforços realmente produzidos nas secções específicas. [2]*

## **1.2 Análise não linear**

Para realizar uma análise não linear, é necessário ter em conta a relação tensão/ extensão dos materiais constituintes. No caso do betão armado, os dois materiais constituintes são o aço e o betão pelo que o comportamento destes dois materiais definem a relação momento-curvatura ( $M-1/r$ ) das secções e a relação carga-deslocamento.

Segundo o Eurocódigo 2,

*Os métodos de análise não linear podem ser utilizados, quer para os estados limites de utilização quer para os estados limites últimos, desde que satisfaçam as condições de equilíbrio e de compatibilidade e que seja admitido um comportamento não linear adequado para os materiais. A análise pode ser de primeira ou de segunda ordem. [1]*

*Relativamente ao estado limite último, deve verificar-se a capacidade de resistência das secções críticas locais, a quaisquer deformações não elásticas resultantes da análise, tendo em devida conta as incertezas. [1]*

*Na análise não linear, devem utilizar-se características dos materiais que representam a rigidez de uma forma realista, mas que tenham em conta as*

*incertezas da rotura. Devem utilizar-se apenas os modelos de cálculo que sejam válidos nos domínios de aplicação considerados. [1]*

É o caso do betão que evidencia uma relação não linear entre tensões e deformações, em que as suas características mecânicas variam ao longo do tempo, e onde, a fendilhação do material modifica bastante a resistência das secções. Outro exemplo, são os solos que não recuperam totalmente as deformações provocadas por carregamentos temporários, e a sua resposta não é normalmente elástica. Também, ainda os aços macios, que não se comportam elasticamente para grandes deformações, para além, de que a sua real resposta depende de vários fatores, tais como, a temperatura, tipo de estrutura e de carregamento, encurvadura etc.

Segundo Bastos (1997), citado por Araújo, 2013 [2]

*A análise não linear utiliza as leis constitutivas reais dos materiais permitindo acompanhar a evolução dos esforços e deformações durante todo o carregamento. A sua aplicação obriga, no entanto, a uma definição rigorosa dos parâmetros envolvidos na análise, sendo um processo delicado que, como tal, não se justifica nos dimensionamentos correntes. O método plástico é particularmente simples possibilitando não só a verificação da segurança da estrutura como também um pré-dimensionamento das estruturas correntes. [2]*

Em suma, para a representação do comportamento não linear do material, são considerados vários modelos, tais como,

- elasto-plástico;
- elasto-viscoplástico baseado no modelo de Perxyna [3];
- viscoelástica-viscoplástica;
- hiperelástica-viscoplástica (inicial ou atualizada);
- hipaelástica-viscoplástica;

No entanto, os dois modelos, elasto-plástico e elasto-viscoplástico baseado no modelo de Perxyna [3], são aqueles que maior facilidade de implementação e razoável aplicação aos problemas de análise dinâmica de estruturas.

Para estabelecer o modelo de comportamento não linear do material é necessário a definição de 3 conceitos:

- O critério de cedência inicial;

- A regra de endurecimento;
- Lei de escoamento;

O primeiro conceito, define como o material atinge o estado plástico, já o segundo conceito, permite determinar como se processa o escoamento, ou seja, o tipo de evolução da deformação pós atingir o estado plástico. Relativamente ao terceiro conceito, permite relacionar os incrementos de deformação plástica e de tensão.

### 1.3 Critérios de cedência

O critério de cedência permite obter uma aproximação do nível de tensão para o qual a deformação plástica dá início, sendo numa forma geral, dado pela equação 1.01, [2]

$$F = f(\sigma) - Y(k)$$

Equação 1.01

Sendo,

$F$  – Condição de cedência.

$f$  – É a função de cedência, ou a função de carregamento no caso de cedência com endurecimento.

$Y$  – Um parâmetro do material que traduz a cedência em função do endurecimento  $K$ .

O estado plástico é o estado de tensão em que a função de cedência é igual à tensão de cedência, enquanto que, no comportamento elástico, é caracterizado por  $f < Y$ . Sendo que, no estado plástico, onde  $f = Y$ , o incremento da função de cedência devido a um incremento de tensão, é representado pela equação 1.02,

$$df = \left( \frac{df}{d\sigma_{ij}} \right) * d\sigma_{ij}$$

Equação 1.02

Assim, para um material perfeitamente plástico, ( $Y$  constante), se  $F < 0$  ou  $F = 0$  e  $df < 0$ , o material apresentará um comportamento elástico, enquanto que, se  $F = 0$  e  $df > 0$ ,

o material atinge o estado plástico. Sendo que, para materiais com endurecimento, o comportamento será elástico para  $F < 0$  ou para  $F = 0$  e  $df \leq 0$ , enquanto o escoamento verifica-se para  $F = 0$  e  $df > 0$ .

Em suma, se  $df < 0$  ocorre descarga elástica, para  $df = 0$  ocorre carregamento neutro existindo apenas deformação elástica, enquanto que se  $df > 0$  ocorrerá carregamento plástico.

A situação na qual,  $F > 0$  torna-se impossível, dado que se admite que as tensões permanecem na superfície de cedência durante a deformação plástica.

Por fim, verifica-se que o critério de cedência acaba por ser visualizado como sendo uma superfície no espaço das componentes das tensões e a posição relativa dum ponto que descreva o estado do material num ponto da estrutura, permitindo determinar se o material, nesse ponto, entrou em cedência ou não.

O estudo no domínio plástico complica-se pelo facto de diferentes classes de materiais exibirem diferentes características de comportamento plástico, pelo que, se torna necessário a utilização de vários critérios de cedência quando se pretende codificar um programa de cálculo.

## 1.4 Análise Plástica

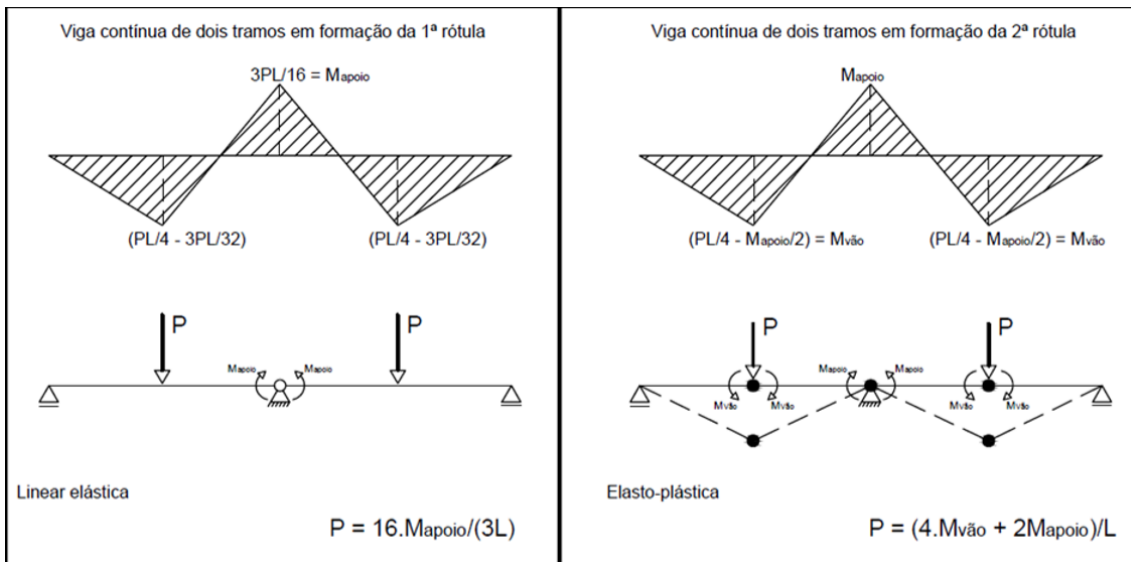
A análise plástica pressupõe que os materiais têm um comportamento elasto-plástico, sendo as deformações elásticas desprezáveis quando comparadas com as deformações plásticas. Desta forma, a definição da análise plástica acaba por ser oposta à definição de análise elástica.

Desta forma, segundo o EC2,

*Os métodos baseados na análise plástica só devem ser utilizados nas verificações em relação aos estados limites últimos. A ductilidade das secções críticas deve ser suficiente para a formação do mecanismo considerado. A análise plástica deve basear-se ou no método do limite inferior (estático) ou no método do limite superior (cinemático). [1]*

Para executar uma análise plástica sem qualquer verificação direta da capacidade de rotação da secção/estrutura, para o estado limite último, deve ser satisfeitas as condições acima referidas.

Na Figura 1 é possível observar uma análise elasto-plástica de uma viga submetida a cargas pontuais nos dois tramos. Sendo que,  $M_{\text{apoio}}$  é o momento que provoca a plastificação da secção sobre apoio intermédio e  $M_{\text{vão}}$  é o momento que provoca a plastificação das secções a meio vão do tramo. O primeiro diagrama Figura 1 (a) resulta da consideração de que os materiais têm um comportamento linear elástico, já no segundo diagrama Figura 1 (b), verifica-se a criação de uma rótula plástica na secção de apoio central, devido ao seu comportamento perfeitamente plástico tendo também em conta que a estrutura tem um comportamento linear elástico até ao instante em que se formam mais duas rótulas plásticas (mecanismos de colapso).



(a)

(b)

Figura 1 -Distribuição dos momentos numa viga contínua devido a cargas pontuais segundo uma análise linear elástica e elasto-plástica [2]

## 1.5 Lei Constitutiva

Para materiais dúcteis e com um pronunciado patamar de cedência e uma tensão limite próxima da tensão de cedência, pode admitir-se uma lei constitutiva idealizada, apresentada na Figura 2. Tal lei traduz um comportamento reológico designado por elástico perfeitamente plástico. A extensão correspondente ao patamar de cedência é, de uma maneira geral, um múltiplo da extensão máxima em regime elástico.

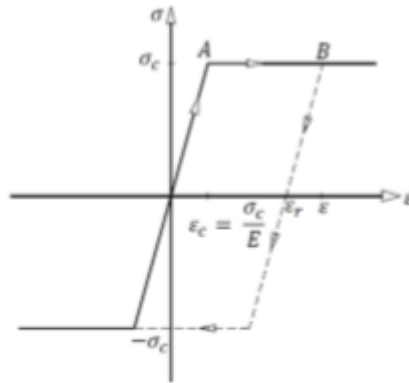


Figura 2 -Comportamento reológico elástico, perfeitamente plástico

Tal como foi referido anteriormente, a lei constitutiva define o comportamento reológico do material, ou seja, estabelece as relações entre os tensores das tensões e das extensões. Sendo que, a reologia do material é condicionada por vários fenómenos físicos bastante complexos que acontecem a nível atómico. A lei constitutiva é a componente potencialmente mais complexa da relação força-deslocamento, uma vez que pode ser condicionada por diversos fatores, tais como plasticidade, viscosidade, viscoelasticidade, anisotropia, etc.

Com o objetivo de entender este conceito mais facilmente, o mesmo pode ser compreendido com modelos físicos de comportamento. O comportamento elástico pode ser facilmente entendido imaginando uma mola à qual se aplicou uma força: Quando esta força é aplicada na mola, esta deforma-se, caso se aumente a força, a deformação da mola será consideravelmente maior, e por fim, caso se retire a força aplicada, a mola recupera as dimensões iniciais.

Um comportamento elástico perfeitamente plástico pode modelar-se, juntando em série o modelo elástico com o modelo plástico. Adicionalmente, as figuras 3 e 4 apresentam também o comportamento elástico não linear e o comportamento perfeitamente plástico.

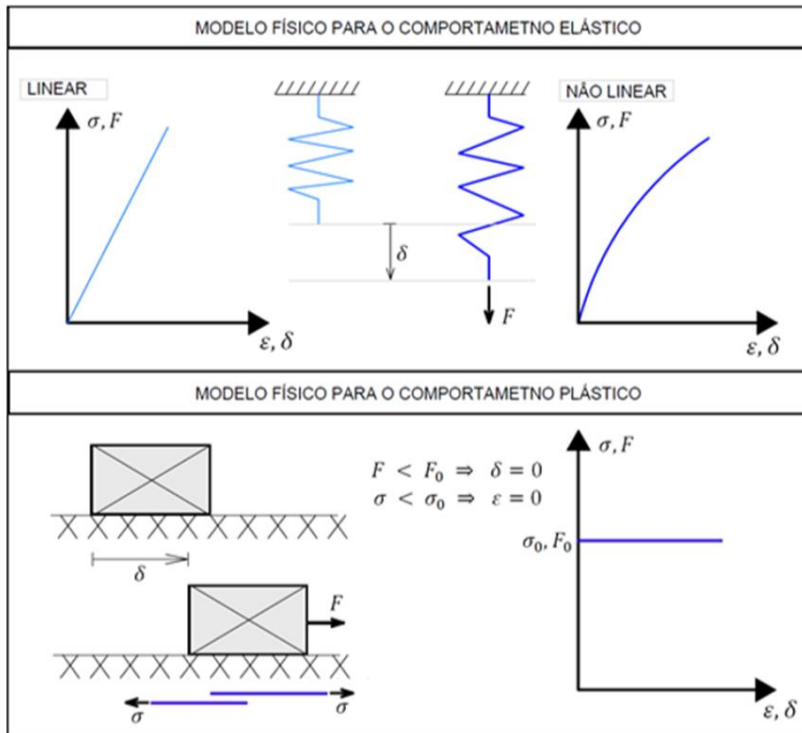


Figura 3 -Modelo físico para o comportamento elástico e plástico

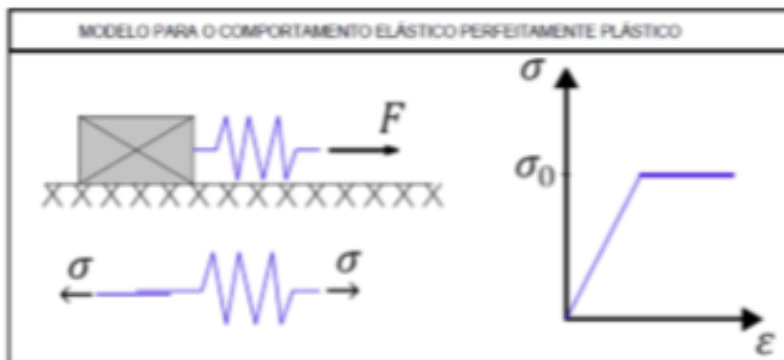


Figura 4 -Modelo de comportamento elástico perfeitamente plástico

## 1.6 Justificação do tema

Um conjunto de forças que tendem a torcer uma peça fazendo-a girar sobre o seu próprio eixo é denominado por “momento torsor, momento de torção ou torque”. Nas estruturas de betão armado, a ligação monolítica entre vigas e as lajes ou entre vigas apoiadas noutras vigas (apoios indiretos), dá origem a momentos de torção. Um caso comum de torsão em estruturas de betão armado ocorre também quando existe uma distância (braço ou excentricidade) entre a linha de ação de uma carga e o eixo longitudinal da viga. Estes tipos de situações podem ocorrer durante a fase de construção ou mesmo quando atuarem os carregamentos permanentes e variáveis na estrutura. Na prática, o caso mais comum de torção ocorre com lajes em consola isoladas encastradas em vigas de apoio. O facto de a laje em consola não ter continuidade para outras lajes internas, faz com que esta deva estar obrigatoriamente encastrada na viga de apoio, de modo que a flexão na laje se transmita por torção na viga e posteriormente esta torção na viga transmite-se por flexão nos pilares. Tais esforços, incluindo os de torção, devem ser considerados no dimensionamento da estrutura.

De salientar que o tipo secção influencia em muito a resistência de uma estrutura esteja exposta a qualquer tipo de esforço. Desta forma, na resistência à torção, as secções vazadas são as mais eficientes. Isto porque o fluxo de tensões tangenciais geradas são essencialmente absorvidas pela zona periférica da secção. Assim, as secções vazadas de parede fina são as que mais se assemelham a este tipo de configuração conduzindo a um melhor aproveitamento do material. Para além da economia de material, a redução do peso próprio, com implicação direta na altura da secção e na quantidade de armadura necessária, justifica que esta opção seja vantajosa.

Caracteriza-se uma viga sujeita à torção mediante o estudo da curva comportamental momento torsor ( $T$ ) – rotação ( $\theta$ ). Tal curva comportamental permite avaliar, de uma forma simples, o estado evolutivo da viga em todo o historial de carga. Na referida curva distinguem-se várias zonas comportamentais. A zona inicial é caracterizada pela fase comportamental antes de ser atingido o momento torsor de fissuração  $T_{cr}$  (Estado I ou não fissurado). Nesta fase, a rigidez de torção pode ser calculada através da Teoria de St. Venant, uma vez que é considerado válido poder assumir-se um comportamento elástico linear da viga, e assim, pode considerar-se constante o declive da curva nesta zona do gráfico. Após ser atingido o momento torsor de fissuração, inicia-se a Zona 2 (Estado II ou fissurado). Para as vigas com secção cheia, esta fase tem início com um aumento

notável da rotação para um valor do momento torsor constante e igual a  $T_{cr}$ . Este aumento de rotação ocorre ao longo de um intervalo de deformação ( $\theta_{cr}^I < \theta < \theta_{cr}^{II}$ ), zona 2.a, onde se observa um desenvolvimento praticamente linear da curva T- $\theta$  até certo nível do momento torsor. De salientar, que o declive deste troço corresponde à rigidez de torção da viga em estado fissurado ( $K^{II}$ ). As vigas com secção vazada não evidenciam experimentalmente a Zona 2.a caracterizada anteriormente, isto por não apresentarem capacidade de redistribuição de tensões tangenciais que as secções cheias apresentam devido à existência do núcleo de betão, dando origem a uma zona de transição comportamental até que as armaduras sejam efetivamente mobilizadas. Tal capacidade de redistribuição é muito limitada nas secções vazadas, principalmente se as paredes forem finas. A caracterização do comportamento da viga à torção no estado fissurado poderá ser realizada, de forma aceitável, por intermédio de uma análise elástico-linear em regime fissurado. Seguidamente, entrando na Zona 2.b, esta pode ser caracterizada por um modelo de treliça espacial com ângulo constante de  $45^\circ$  e considerando um comportamento elástico-linear dos materiais, ou seja, considerando relações constitutivas lineares para os mesmos. Este comportamento pode ser considerado válido até que a Curva T - $\theta$  comece a evidenciar um comportamento não linear acentuado, a partir do qual a viga entra na Zona 3. Por fim, a Fase 3 termina quando a viga atinge a rotura efetiva, quer por esmagamento do betão comprimido nas escoras quer por cedência ou mesmo rotura das armaduras tracionadas (caso de vigas com taxas de armaduras de torção muito baixas).

Por fim, o MEF (Método dos Elementos Finitos) é na atualidade um dos métodos mais utilizado para as análises não lineares de estruturas de betão armado, em virtude da evolução tecnológica das ferramentas computacionais e também da disponibilidade de vários programas comerciais que incorporam módulos de análises não lineares no âmbito do MEF. Embora hoje em dia já tenha sido desenvolvido e se encontre disponível uma ampla biblioteca elementos finitos, as análises não lineares, entre outros, têm motivado a constante procura por novos modelos que conciliem a eficiência computacional a uma precisão coerente. Tal ocorre particularmente no domínio do betão estrutural tendo em conta a dificuldade existente em incorporar corretamente a influência das descontinuidades do material, particularmente devido à fissuração, bem como as leis constitutivas do betão e do aço e a interação entre os dois materiais.

Tendo em conta os estudos e trabalhos existentes na literatura, entre eles, os estudos experimentais relacionados com a Viga A2 à torção realizados por Bernardo em 2003 [4], bem como o estudo e modelação da mesma viga realizado por Ferreira em 2016 [5], considera-se o tema desta dissertação um tema atual, com bastantes variantes de estudo e com a possibilidade de dar origem a novos trabalhos.



## 1.7 Objetivos do trabalho

Para o desenvolvimento desta dissertação, foram definidos 3 objetivos principais, sendo eles:

- A modificação do modelo numérico implementado no software ABAQUS por Ferreira, 2016 [4] de forma a obter um modelo melhorado da viga de referência A2 (viga em caixão de betão armado sujeita à torção pura e testada experimentalmente por Bernardo, 2003 [5] procurando assim calibrar melhor a resposta da referida viga face ao observado experimentalmente, designadamente através da obtenção da curva momento torsor ( $T$ ) – rotação ( $\theta$ ). Para esta tarefa, foram realizadas alterações ao nível da implementação do modelo e foram melhor calibrados alguns parâmetros relativos aos materiais, em especial o betão;
- Tendo por base o modelo numérico calibrado da viga A2, foram implementados 5 novos modelos fazendo variar as espessuras das paredes. O objetivo foi avaliar a influência deste parâmetro geométrico no comportamento global, e em especial último, da viga, e comparar os resultados obtidos com disposições normativas relacionadas;
- Tendo também por base o modelo numérico calibrado da viga A2, foram implementados 5 novos modelos com a incorporação de banzos superiores com diferentes larguras. O objetivo foi avaliar a influência da presença destes elementos adicionais no comportamento global, e em especial último, da viga, e também comparar os resultados obtidos com disposições normativas relacionadas.

## 1.6 Organização do documento

O documento está organizado em 6 capítulos, onde serão apresentados os conceitos e trabalho realizados no âmbito das modelações realizados no programa ABAQUS, assim como os resultados obtidos.

Assim, o Capítulo 1 introduz o tema do trabalho com alguns conceitos base, descreve resumidamente os objetivos bem como a organização deste documento.

O Capítulo 2 apresenta de forma mais detalhada os conceitos teóricos considerados fundamentais para a realização de uma análise não linear de peças de betão armado através do método dos elementos finitos.

No capítulo 3 é apresentado o modelo de referência, a viga A2 à torção, e a sua implementação no *software* ABAQUS. São apresentados todos os passos da modelação e calibração, dando-se também destaque às modificações incorporadas relativamente ao anterior modelo implementado por Bernardo, 2003 [5] e posteriormente calibrado por Ferreira, 2016 [4].

Já no capítulo 4, tendo por base o modelo implementado e calibrado da viga de referência, procede-se ao estudo da alteração das espessuras das paredes, com o intuito de avaliar a influência deste parâmetro na resposta da viga.

No Capítulo 5, de forma semelhante ao realizado no Capítulo 4, procede-se à adição de banzos laterais superiores, com diferentes larguras, na secção da viga de referência e estuda-se a influência destes elementos na resposta da viga.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões decorrentes do trabalho realizado, e são apresentadas propostas de desenvolvimentos futuros.

Finalmente, é apresentada uma lista das referências bibliográficas



# Capítulo 2 - Método dos elementos finitos para a análise não linear ABAQUS

## 2.1 Breve Descrição do *software* ABAQUS

O *software* utilizado nesta dissertação denomina-se ABAQUS, sendo a versão acadêmica de 2017. Trata-se de um *software* de análise por elementos finitos, lançado em 1978 pela empresa *HKS Inc de Rhode Island*. O programa diverge em 5 produtos principais, sendo que para o intuito desta dissertação apenas foi utilizado o produto, ABAQUS/CAE, ou seja, “*Complete Abaqus Environment*”. Trata-se de um aplicativo de *software* para modelação e análise de todos os tipos de componentes.

O *software* ABAQUS é usado em muitas indústrias, tais como, automotiva, aeroespacial, civil, etc. O *software* é bastante popular devido à sua ampla capacidade de modelação de materiais, e à capacidade que o programa oferece de personalização. Para realizar uma análise completa no *software*, é necessário completar os 3 principais passos, sendo eles,

- Pré-processamento;
- Processamento;
- Pós-processamento;

No primeiro passo de modelação, o modelo é criado tendo em conta as características geométricas e mecânicas dos materiais que o compõem. Em seguida, no processamento, são executados todos os cálculos computacionais. Por último, no pós-processamento serão obtidos e visualizados os resultados numericamente e na forma de mapas ou gráficos como é exemplo a Figura 5.

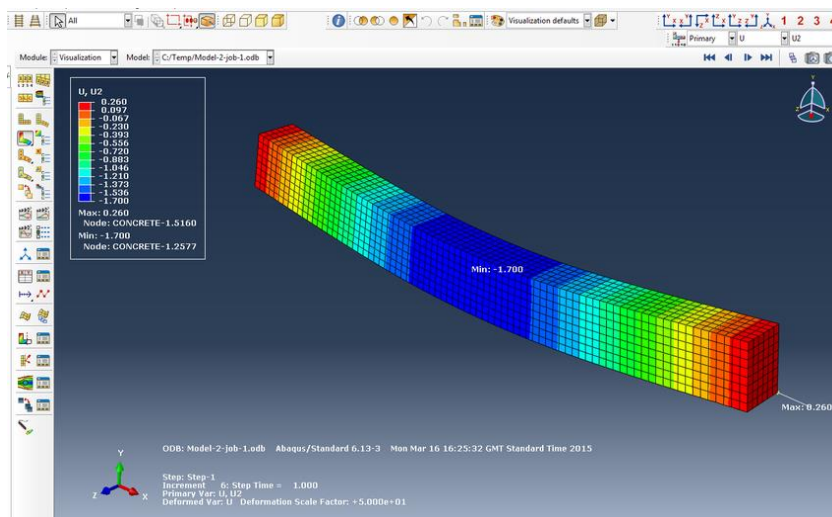


Figura 5 - Exemplo de uma modelação no ABAQUS

## 2.2 Método dos Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos (MEF) trata-se de um método numérico de análise estrutural, com o intuito de determinar o estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores. Quando existe a necessidade de projetar uma estrutura, com o intuito de alcançar uma solução satisfatória, quer economicamente ou na verificação dos pré-requisitos funcionais e regulamentares, é habitual proceder-se a uma sucessão de análises e modificações das suas características iniciais.

Na análise de estruturas, deve-se inicialmente dividi-las em estruturas reticuladas quando são constituídas por barras prismáticas cuja dimensão típica da secção transversal é bastante inferior ao comprimento do seu eixo, sendo exemplos as vigas, pórticos, treliças e grelhas, ou estruturas não reticuladas, sendo que estas estruturas acabam por ser estudadas como meios contínuos. Relativamente às estruturas reticuladas, torna-se particularmente simples aplicar o método das forças e o método dos deslocamentos, bem como outras técnicas que, em geral, são difíceis de estender aos meios contínuos.

Assim, o MEF trata-se de um método numérico de análise deste tipo de estruturas. O objetivo do método consiste na obtenção de uma formulação que possa explorar a análise automatizada de sistemas complexos por intermédio de programas computacionais. Desta forma, o método considera o sistema global como um conjunto de elementos finitos, no entanto com complexidade inferior. Para que posteriormente a estrutura global se comporte do mesmo modo, é necessário que em certos pontos comuns

a vários elementos, designados como nós, os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas estejam em equilíbrio, por forma a, que o sistema global, resultante do agrupamento dos elementos finitos, reaja como uma única entidade.

A vantagem deste método é que a equação de movimento do sistema global pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas individualmente para cada elemento finito utilizado na modelação. O deslocamento em qualquer ponto no interior de cada um destes elementos é obtido por intermédio de interpolação sendo, geralmente, as funções de interpolação polinómios de grau reduzido e iguais para elementos do mesmo tipo.

Pode-se então afirmar que a utilização do MEF no estudo de um sólido com uma geometria arbitrária, e sob um esforço externo também arbitrário, possibilita ao engenheiro a determinação do estado de tensões e deformações desse sólido. É também, de grande importância salientar que a formulação e aplicação do MEF dependerá de várias simplificações associadas a cada problema, tais como,

- Análise dinâmica ou estática - Por norma, as ações sobre as estruturas são dinâmicas, devendo assim considerar-se as forças de inércia associadas às acelerações obtidas devido a essas ações. Contudo, em muitas situações considera-se nulo o efeito dinâmico da estrutura, quando as ações são aplicadas de um modo suficientemente lento, desprezando-se assim as forças de inércia.
- Análise não linear ou linear - Ao analisar uma estrutura, é habitual considerar-se que os deslocamentos provocados por ações exteriores na estrutura são muito pequenos em relação à real dimensão dos componentes da estrutura, podendo assim, admitir-se que não existe influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição de esforços e tensões, em suma, todo o estudo é feito com base na geometria inicial indeformada. Caso esta hipótese não seja considerada, então a análise é designada como não linear geométrica
- Tipo de estrutura – As estruturas podem ser classificadas quanto à sua geometria como reticuladas ou laminares, ou sólidas quando não se enquadram caracteristicamente em nenhum dos dois grupos referidos anteriormente.

As etapas na solução numérica pelo método dos elementos finitos podem definir-se da seguinte forma:

- Subdivisão do sistema global contínuo em (n) elementos finitos;
- Para cada elemento finito n calcular a matriz rigidez  $[K^{(n)}]$ , para problemas dinâmicos é necessário também o cálculo da matriz de massa  $[M^{(n)}]$  e da matriz

de amortecimento dependente da velocidade  $[C^{(n)}]$  relativo a um referencial local;

- Determinação para o sistema global da matriz de rigidez  $[K]$ , para problemas dinâmicos, da matriz de massa  $[M]$  e da matriz de amortecimento dependente da velocidade  $[C]$ , através do agrupamento das matrizes de cada elemento finito (procedimento designado de assemblagem), calculadas no passo anterior;
- Determinação do vetor das cargas aplicadas ao sistema global  $\{R\}$ ;
- Determinação das equações de movimento para o sistema global;
- Cálculo das variáveis do problema em questão, sendo elas, os deslocamentos, velocidades, deformações e tensões.

### **2.3 Formulação do método dos elementos finitos aplicado à análise não linear**

O MEF, baseado no método de Rayleigh-Ritz, prevê a divisão do domínio de integração, tornando o meio originalmente contínuo em discreto através da divisão em pequenas áreas denominadas Elementos Finitos. Desta forma, o número de divisões realizadas ao domínio, é diretamente proporcional à precisão e aproximação do resultado final. Pelo que, ao invés de se estabelecer uma função que seja admissível para todo o modelo, as funções amissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito [6].

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{\ddot{U}\} + [K]\{\dot{U}\} = \{R\}$$

Equação 2.01

Desta forma, para cada elemento finito  $n$ , é associado um funcional,  $\Pi_n$  que em conjunto com os outros elementos finitos definidos, formam o funcional  $\Pi$  de todo o domínio definido pela equação 2.02.

$$\Pi = \sum_{n=1}^x \Pi_n$$

Equação 2.02

Sendo que para o elemento finito  $n$  estabelece-se uma função aproximadora,  $v$ , através das variáveis  $a_j$  referentes aos nós do elemento e por funções de forma  $\varphi_j$ , sendo  $j$  o número dos nós que compõe o elemento

$$v = \sum_{j=1}^m a_j \times \varphi_j$$

Equação 2.03

O funcional passa a ser expresso pela equação 2.04

$$\Pi(a_j) = \sum_{n=1}^x \Pi_n \times (a_j)$$

Equação 2.04

A condição de estacionaridade gera um sistema de equações algébricas, tais como,

$$\delta \Pi(a_j) = \sum \delta \Pi_n(a_j) = \sum \sum \frac{\partial \Pi_n(a_j)}{\partial a_j} = 0$$

Equação 2.05

A solução deste sistema de equações fornece os valores dos parâmetros nodais  $a_j$ , podendo ser deslocamentos, forças internas ou ambos, dependendo da formulação utilizada. Caso os campos de deslocamentos sejam aproximados por funções aproximadoras, emprega-se o princípio da mínima energia potencial. As incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais, denominando-se assim o método de método dos elementos finitos modelo dos deslocamentos, ou método dos elementos finitos modelo da rigidez.

Utilizando-se outra formulação, pode-se descrever o campo de tensões ou esforços internos nodais por funções aproximadoras e aplicar-se o princípio da mínima energia complementar, as incógnitas são tensões ou esforços internos nodais, denominando-se o método de método dos elementos finitos modelo das forças/flexibilidade.

## 2.4 Método dos Elementos Finitos – Modelo da Rigidez

A solução de problemas estruturais pode ser baseada nas parcelas referentes à energia de deformação e ao trabalho realizado, tendo sempre em conta as ações externas aplicadas no sistema.

O funcional que representa a energia potencial total para uma solução apropriada ao método de Rayleigh-Ritz é representado por, [6]:

$$\Pi_p = U + \Omega$$

Equação 2.06

Onde,

$\Pi_p$  – Energia potencial total do sistema;

U – Energia de deformação da estrutura;

$\Omega$  – Energia Potencial das ações externas aplicadas no sistema;

A parcela U, corresponde ao trabalho realizado pelas forças internas, ou seja, em função da tensão e conseqüente deformação, no material que compõe os elementos estruturais. Desta forma, para um cubo infinitesimal de material da estrutura, obtém-se pela equação 1.08,

$$dU_o = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d_{xy} + \tau_{yz} d_{yz} + \tau_{zx} d_{zx}$$

Equação 2.07

A equação 2.08 é equivalente a,

$$\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon} = \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} - [E]\{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

Equação 2.08

Onde,

$U_o$  - Energia de deformação por unidade de volume;

$\{\varepsilon\}$  – Vetor das deformações;

$\{\varepsilon_0\}$  – Vetor das deformações iniciais;

$\sigma_0$  – Vetor das tensões iniciais;

Após tratamento matemático, a energia de deformação por unidade de volume é calculada através da equação 2.09,

$$U_0 = \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\} \{\sigma_0\}$$

Equação 2.09

A energia de deformação da estrutura é calculada a partir, de,

$$U = \int_V U_0 dV$$

Equação 2.10

Onde,

$dV$  - Volume infinitesimal de material da estrutura.

Assim, substituindo  $U_0$  na equação 2.10, a expressão final da energia de deformação da estrutura vem,

$$U = \int_V \left( \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\} \{\sigma_0\} \right) dV$$

Equação 2.11

Utilizando-se os conceitos de discretização e interpolação pelo método dos elementos finitos, tem-se em função dos graus de liberdade considerados,

$$\{\bar{u}\} = [N] \{u_L\}$$

Equação 2.12

Sendo,

$\{\bar{u}\}$  – Campo de deslocamentos dos nós;

$[N]$  – Funções de deslocamentos ou de interpolação para o tipo de elemento finito usado;

$\{u_L\}$  – Deslocamentos nodais do elemento;

As deformações são obtidas pela equação 2.13,

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Equação 2.13

Que gera,

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{1,y} & N_{n,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

Equação 2.14

Onde,

$[B]=[∂]\{N\}$  – Matriz que relaciona deformações e deslocamentos;

$[\partial]$  – Matriz de operadores diferenciais gerada através das expressões de interpolação do elemento finito;

O potencial correspondente às ações externas  $\Omega$ , compreende o trabalho realizado pelas forças concentradas e/ou momentos aplicados se a estrutura recuperasse a sua configuração original, definido pela equação 2.15,

$$\Omega = -F_x u - F_y v = -\{u\}^T \{R_{ext}\}$$

Equação 2.15

Onde,

$\{u\}$  – Vetor de deslocamentos associados aos graus de liberdade globais da estrutura;

$R_{ext}$  – Vetor de forças externas nodais;

Fazendo a substituição da equação 2.14 na equação 2.11, o seu produto em 2.06, juntamente com a equação 2.15 na equação 2.06, a equação 2.16 toma a seguinte forma,

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nelem} \{u_L\}_n^T [k]_n \{U_L\}_n - \{u\}^T \{R_{ext}\}$$

Equação 2.16

Onde,

$\{u_L\}_n$ - Vetor de deslocamentos nodais do elemento n;

$[k]_n = [B]_n^T [C]_n [B]_n$ - Matriz rigidez do elemento n;

Realizando o somatório da equação 2.16,

$$\{\delta_U\}^T [K] \{u\} - \{\delta_U\}^T \{R_{ext}\} = 0$$

Equação 2.17

Onde,

$[K] = \sum_{n=1}^{nelem} [k]_n$ - Matriz rigidez global da estrutura;

Aplicando-se o princípio da energia potencial estacionária,

$$\delta \Pi_P = 0$$

Equação 2.18

A equação 1.17 toma a forma,

$$\{\delta_U\}^T [K] \{u\} - \{\delta_U\}^T \{R_{ext}\} = 0$$

Equação 2.19

E desta forma, da equação 2.16 obtém-se,

$$[K] * \{u\} - \{R_{ext}\} = \{0\}$$

Equação 2.20

Por fim, solucionando-se o sistema representado pela equação 2.20, é possível obter-se o vetor de deslocamentos nodais  $\{u\}$ , com o qual pode-se calcular,

- As deformações implementadas

$$\{\varepsilon\} = [B] * \{u_L\}$$

Equação 2.21

- As tensões provenientes das deformações

$$\{\sigma\} = [E] * \{\varepsilon\}$$

Equação 2.22

## 2.5 Elementos Finitos utilizados

### 2.5.1 Elemento treliça T3D2

O elemento treliça T3D2 é um elemento finito que possui dois nós, apresentando três graus de liberdade por nó, referentes às translações nas direções X, Y e Z.

Este elemento é geralmente usado somente para transmitir forças axiais e, conseqüentemente, admite carregamentos apenas ao longo do eixo do elemento, visto que não possui rigidez para resistir a sollicitações perpendiculares ao seu eixo. Desta forma, foi este tipo de elemento finito utilizado para a modelação de todas as armaduras constituintes do modelo, [7].

### 2.5.2 Elemento tridimensional hexaédrico C3D8

Os elementos disponibilizados pelo *software* ABAQUS, mais comuns para a modelação tridimensional, são os elementos 3D hexaédricos de 8 nós. No entanto, estes podem dividir-se em três, sendo eles C3D8, C3D8R e C3D8I.

Para a modelação de todas as peças constituídas por betão, foi utilizado o tipo de elemento finito C3D8R, constituído por 8 nós e por cada nó existem três graus de liberdade: translações segundo as direções X, Y e Z, [7].

## 2.6 Aplicação do Método dos elementos finitos no ABAQUS

O betão armado, constituído por betão e aço, tem um comportamento não linear. Desta forma, é necessário implementar uma relação constitutiva não linear entre as tensões e deformações dos materiais, e assim, o vetor das forças internas passa a depender não linearmente do vetor dos deslocamentos  $\{u\}$ , assim,

$$\Delta Q(u) = \{R_{ext}\} - \{F_{int}\} = 0$$

Equação 2.23

Devido a esta relação não linear, torna-se necessária a implementação de uma solução incremental e iterativa. De uma forma geral, as principais não linearidades inerentes numa estrutura de betão armado a serem implementadas no método, consistem principalmente da fissuração ou esmagamento do betão, da perda de aderência entre os materiais, ou do escoamento do aço. Assim, apresentando um comportamento progressivo e vinculado ao carregamento implementado na estrutura, é necessário que a solução seja obtida aplicando-se incrementos de carga ou de deslocamentos, para possibilitar uma boa aproximação do comportamento real.

Nos últimos anos têm sido apresentados vários modelos para a análise não linear a partir do modelo dos Elementos Finitos. No entanto, nesta dissertação apenas será apresentado o modelo no âmbito do *software* utilizado (ABAQUS).

## 2.7 Modelação do comportamento do betão no ABAQUS

Tal como foi referido anteriormente, durante os últimos anos, foram desenvolvidos vários modelos constitutivos para caracterizar o comportamento não linear do betão. O modelo mais utilizado com consideração de dano contínuo em estruturas de betão armado, é o modelo de dano isotrópico.

O conceito de dano, nada mais é do que uma degradação das propriedades do material, traduzindo-se pela diminuição da área da seção por onde são transmitidas as

tensões. Desta forma, é necessário conhecer o conceito de tensão efetiva para a utilização do modelo de danos. A tensão efetiva consiste na tensão existente no material não danificado.

O modelo de dano contínuo, baseia-se em três aspetos:

- Conjunto de variáveis que caracterizem o dano;
- Determinação da tensão efetiva;
- Estabelecimento das leis que indicam a evolução do dano;

No ABAQUS com o intuito de caracterizar o comportamento não linear do betão, existem duas aproximações, o *Smearred Crack Model* (o “modelo de fenda média”) e o *Plastic Damage Model* (o “modelo de dano plástico”). O modelo de dano plástico é o modelo mais utilizado visto possuir maior capacidade de convergência comparativamente ao modelo de fenda média devido à maior simplicidade e robustez dos algoritmos numéricos associados, o que torna mais atrativo a utilização deste modelo em análises de estruturas mais complexas, tal como confirmado por Ferreira, 2016 [4].

### **2.7.1 Descrição Geral do modelo CDP (Concrete Damaged Plasticity)**

No *software* ABAQUS, o modelo de dano plástico para o betão utiliza o conceito de dano isotrópico em combinação com tração isotrópica e compressão plástica para representar o comportamento inelástico do betão. Este modelo assume um padrão de dano contínuo para o betão, tendo por base a plasticidade. Assim, este modelo de dano plástico é assumido para quantificar a resposta do betão à compressão e à tração uniaxial.

A definição do comportamento não linear do betão no *software* ABAQUS é feita a partir da opção representada na Figura 6, com a opção do modelo *Concrete Damaged Plasticity* (CDP). Este modelo assume dois mecanismos de rutura do betão, sendo eles a fissuração à tração e o esmagamento à compressão. Relativamente à propagação das fissuras, estas são modeladas tendo por base um mecanismo de dano contínuo, designado por *Stiffness Degradation* (“degradação da rigidez”).

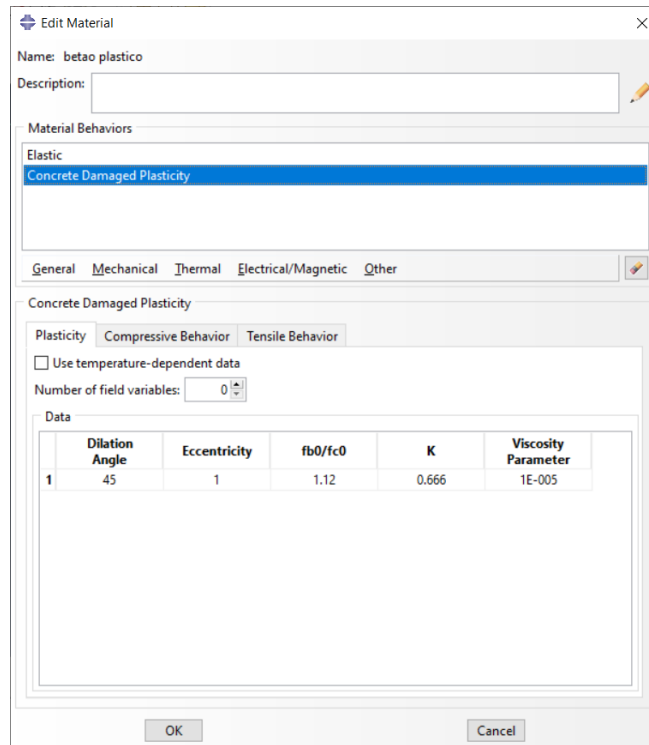


Figura 6- Escolha do CDP no *software* ABAQUS

Para recriar o dano em materiais como o betão, este pode ser definido através da energia de fratura necessária para gerar microfissuras, sendo calculada tendo por base a área da curva  $\sigma_{ct}(w)$ .

O modelo CDP foi criado tendo em conta aplicações em que o betão é submetido a carregamentos monótonos, cíclicos ou dinâmicos com níveis baixos de confinamento. No CDP assume-se uma decomposição adicional da taxa de deformação, segundo a equação 2.24,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl}$$

Equação 2.24

Onde,

$\dot{\varepsilon}$  - Taxa de deformação total;

$\dot{\varepsilon}^{el}$  - Taxa de deformação elástica;

$\dot{\varepsilon}^{pl}$  - Taxa de deformação plástica;

Desta forma, a resposta do betão caracterizada pela relação tensão-extensão, é gerida por escalares elásticos que têm em conta o dano no betão, de acordo com a equação 2.25,

$$\sigma = (1 - d)D_0^{el}:(\varepsilon - \varepsilon^{pl}) = D^{el}:(\varepsilon - \varepsilon^{pl})$$

Equação 2.25

Onde,

$D_0^{el}$  - Representa a rigidez elástica inicial do material;

$D^{el}$  - Representa a degradação da rigidez elástica;

$d$  - Representa a variável escalar da degradação da rigidez;

A degradação do betão é definida por duas variáveis de dano uniaxiais independentes entre si,  $d_c$  e  $d_t$ , sendo definidas em função das deformações plásticas, da temperatura e área, tal como indicado pela equação 2.26 e 2.27,

$$d_t = d_t(\dot{\varepsilon}_t^{pl}, \theta, f_i); (0 \leq d_t \leq 1)$$

Equação 2.26

$$d_c = d_c(\dot{\varepsilon}_c^{pl}, \theta, f_i); (0 \leq d_c \leq 1)$$

Equação 2.27

Fazendo a análise destas equações, verifica-se que as variáveis de degradação uniaxiais aumentam as funções das tensões equivalentes plásticas. Desta forma, as variáveis de dano podem tomar valores compreendidos entre 0 e 1, sendo o extremo 0 para materiais totalmente plastificados, e 1 para materiais sem dano.

Para realizar a caracterização do comportamento do betão segundo o modelo de dano plástico, para além do módulo de elasticidade  $E$ , e do coeficiente de Poisson,  $\nu$ , são necessários definir parâmetros de dano plástico e realizar a descrição do comportamento à compressão e tração do material, sendo que, a definição destes comportamentos será analisada mais à frente.

Desta forma, os parâmetros de dano plástico que são necessários definir são,

- Excentricidade,  $\varepsilon(\theta, f_i)$ , este parâmetro define a taxa a que a função se aproxima da assíntota, sendo que o potencial de fluxo tende para uma linha reta à medida que a excentricidade tende para zero. Sendo que, o valor de defeito definido pelo *software* é igual a 1.

- O rácio entre a tensão inicial de compressão equibisaxial e a tensão inicial de compressão uniaxial,  $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$ , sendo que o valor utilizado como defeito no *software* é igual a 1.16.
- O rácio  $K_c$  do segundo invariante de tensões no meridiano das trações,  $q(TM)$ , e do meridiano das compressões,  $q(CM)$ , para qualquer valor do invariante de pressões  $P$ , de tal modo que a tensão máxima principal é negativa  $\sigma_{max} < 0$ , obedecer à condição:  $0,5 < K_c \leq 1,0$  como é possível observar na Figura 7. Foi assumido um valor por defeito de 0,666.

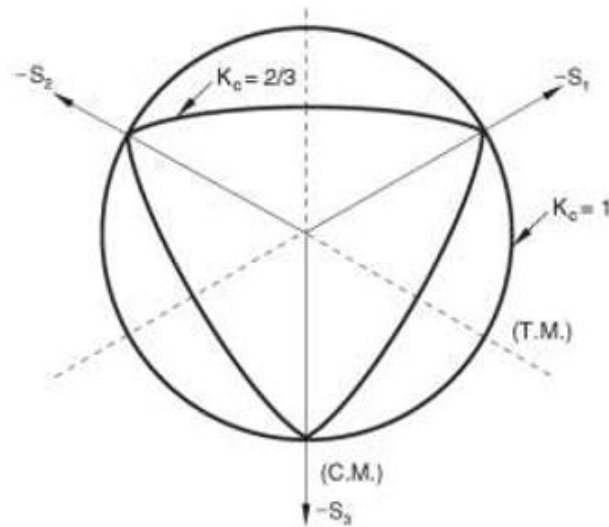


Figura 7 -Plano de tensões correspondente aos diferentes valores de  $K_c$

- Parâmetro de regularização visco plástica,  $\mu$ . O modelo CDP, no *software* ABAQUS, pode ser regularizado usando o parâmetro de regularização visco plástica, “forçando” as tensões a estarem fora da superfície de cedência. O *software* ABAQUS utiliza uma generalização da regularização criada por Suvaun, 1972 [8], segundo a qual o tensor da deformação visco plástica, é definido pela equação 2.28,

$$\dot{\varepsilon}_v^{Pl} = \frac{1}{\mu} (\varepsilon^{pl} - \varepsilon_v^{Pl})$$

Equação 2.28

Onde  $\mu$  é o parâmetro da viscosidade que representa o tempo de relaxação visco plástica, ou seja, a deformação plástica quantificada no modelo de estrutura não viscosa.

Do mesmo modo, uma variável de degradação da rigidez viscosa para o sistema,  $d_v$ , é definida pela equação 2.29,

$$d_v = \frac{1}{\mu}(d - d_v)$$

Equação 2.29

Desta forma, a relação tensão-extensão do modelo visco plástico é dada pela seguinte equação 1.30,

$$\sigma = (1 - d_v)D_v^{el}:(\varepsilon - \varepsilon_v^{pl})$$

Equação 2.30

O parâmetro de viscosidade ajuda a melhorar a taxa de convergência pelo que, após várias tentativas, o valor adotado foi de  $10^{-5}$ , apesar de, por defeito, o ABAQUS considerar o valor 0.

- Ângulo de dilatância- Valor calculado no plano tensão de pressão equivalente (p) – tensão desviatoria equivalente (q) a elevadas pressões de confinamento. Na prática pode assumir-se que este ângulo se relaciona com o ângulo de atrito interno do material e está associado ao aumento do mecanismo de fissuração do betão durante a fase não elástica.

Na figura 8 estão representados todos os parâmetros acima abordados e inseridos no software ABAQUS.

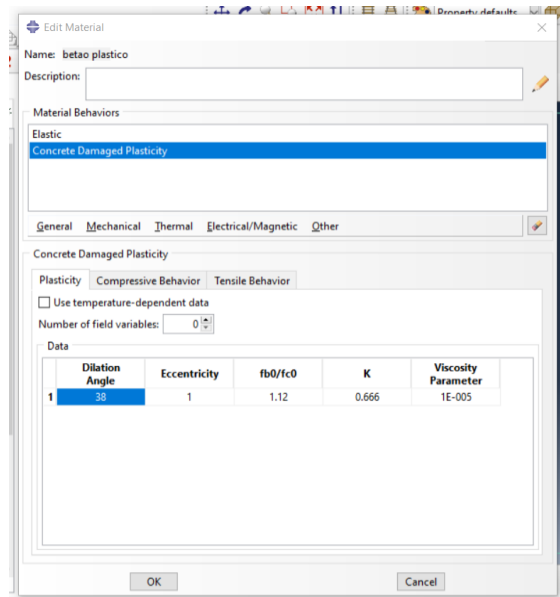


Figura 8– Representação da modelação por CDP pelo ABAQUS.

### 2.7.2 Descrição Geral do modelo SCM (Smearred Crack Model)

No ABAQUS, é possível caracterizar o comportamento do betão após a sua fissuração de forma aproximada, através do *Smearred Crack Model*, este modelo é adequado para análises em que o betão esteja sujeito essencialmente a incrementos de deformações monotónicas sob baixas tensões de confinamento. As propriedades elásticas definem o comportamento elástico e o modelo SCM descreve a parte irreversível do material após fissuração.

Desta forma, o SCM constitui um modelo geral capaz de modelar o comportamento do betão para qualquer tipo de estruturas, tal como representado na Figura 9.

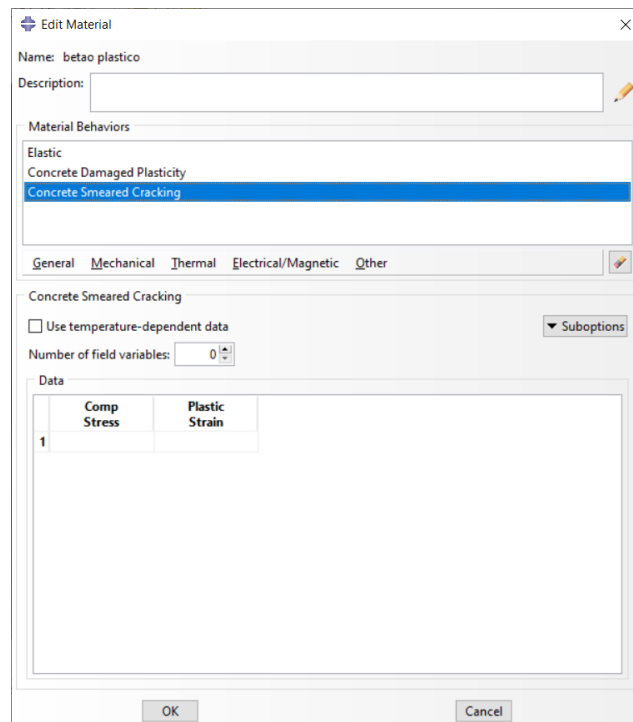


Figura 9 -Representação do SCM no ABAQUS

O SCM modela a fissuração e a resposta à compressão do betão em comportamento uniaxial, visto que o modelo assume inicialmente a aplicação de uma tensão monotónica. A resposta do material durante a descarga/recarga é elástica. No entanto o modelo inclui uma compensação plástica.

Desta forma, à medida que a tensão aumenta ocorrem deformações inelásticas que não são recuperáveis, a resposta do material amolece (*Softening effect*), após o amolecimento do betão atingida uma tensão máxima a partir da qual o material não consegue suportar qualquer aumento de tensão. Se a carga for removida em algum ponto após a ocorrência de deformações inelásticas, a resposta em descarga é mais macia do que a resposta elástica inicial, ou seja, o comportamento elástico sofreu danos.

O SCM ignora este efeito pelo facto de assumir um incremento de deformação monotónica. Apesar disso, a perda de rigidez elástica é levada em conta devido à fissuração. O modelo assume também que não há deformações permanentes associadas à fissuração, tal comportamento está representado na Figura 10.

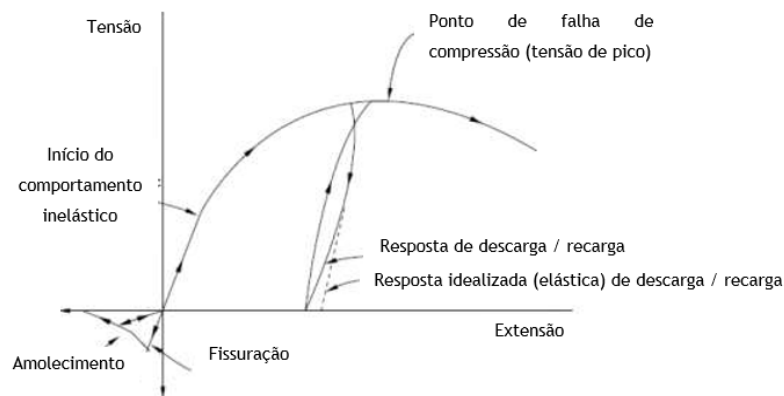


Figura 10 -Comportamento uniaxial do betão segundo o ABAQUS

O modelo é regido pela fissuração e pelo comportamento anisotrópico após a fissuração, sendo que a cada ponto de integração do modelo de elementos finitos são realizados, de forma independente, cálculos constitutivos em que a tensão e a rigidez são influenciadas pela fissuração.

Assim, o modelo necessita de detetar o início da fissuração e para isso utiliza o critério de Rankine onde a fissura forma-se na direção normal à tensão principal máxima de tração quando a tensão atinge a superfície de rotura. Visto que, a rotura ocorre num ponto, o ABAQUS, armazena a orientação da fissura para cálculos subsequentes. O *software* apenas permite que neste ponto onde sucedeu a primeira fissura se forme outra fissura apenas na direção ortogonal à direção da fissura existente e dependendo do estado de tensão a que o ponto de integração está sujeito. Desta forma, não podem ocorrer mais do que três fissuras em qualquer ponto, em particular duas no caso de um estado plano de tensão e uma no caso de um estado de tensão uniaxial. Após a deteção de uma fissura é usado um modelo de elasticidade danificada. Com início da fissuração, a transferência de carga através das fissuras dá-se a partir dos varões de aço.

Com o intuito de utilizar o SCM na caracterização do comportamento do betão, são necessários definir alguns comandos, tais como,

- *Failure Ratio 1* – Trata-se do quociente entre a tensão máxima de compressão biaxial e a tensão máxima de compressão uniaxial. O valor assumido por defeito pelo *software* é igual a 1.16;
- *Failure Ratio 2* - Valor absoluto do quociente entre a tensão máxima de tração uniaxial e a tensão máxima de compressão uniaxial. O valor assumido por defeito pelo *software* é igual a 1.16;

- *Failure Ratio 3*- Trata-se da razão entre a magnitude de uma componente principal da deformação plástica para a tensão máxima de compressão biaxial e a deformação plástica para a tensão máxima de compressão uniaxial. O valor assumido por defeito pelo *software* é igual a 1.28;
- *Failure Ratio 4*- É a relação entre a tensão principal de tração até a fissuração, em estado plano, quando a outra tensão principal é no valor de compressão final à tração, até à tensão de fendilharão sob tensão uniaxial. O valor assumido por defeito pelo *software* é igual a 0.337;

Também é necessário fixar o Tension Stiffening (tensão de enrijecimento), neste comando é possível especificar a relação entre a tensão restante e a tensão no início da fissuração e a extensão de fissuração. Por último, o comando mais influente na resposta do modelo, é o Shear Retention (retenção de corte). Trata-se de um fator de retenção do comportamento ao corte que permite estabelecer a redução da rigidez de corte do betão à medida que a fissura se propaga [9]. Tendo em conta o estudo realizado por Ferreira, 2016 [4], o referido autor verificou que, para o tipo de problema em estudo (vigas de betão armado sujeitas à torção), o SCM deu origem a prematuros problemas de convergência após a fissuração da viga, os quais não foram possível de resolver. Por este motivo, nesta dissertação foi imediatamente descartada a possibilidade de caracterizar o comportamento do betão através do SCM.

### **2.7.3 Caracterização do betão à compressão**

Segundo o Eurocódigo 2, [1] o betão à compressão apresenta um comportamento elástico linear apenas até uma tensão de cerca de um terço da tensão de rotura à compressão. Nesta fase, as tensões de tração originadas no betão por efeito de Poisson são inferiores à tensão de rotura do betão por tração. Contudo, as microfendas existentes no betão paralelas à tensão de compressão tendem a instabilizar cada vez mais, ao passo que as microfendas perpendiculares à tensão de compressão tendem a fechar-se.

No instante em que o betão à compressão apresenta um comportamento inelástico e desta forma não linear, a deformação imposta passa a não ser reposta na fase de descarga, pelo que, as deformações passarão a ser permanentes. Desta forma, é nesta fase que ocorrem microfendas paralelas à tensão de compressão que se propagam através

da pasta de cimento devido às trações perpendiculares à tensão de compressão originadas pelo efeito de Poisson. Juntamente, mas perpendicularmente à tensão de compressão, dá-se o esmagamento das microfendas entre os agregados e a pasta de cimento.

Na face exterior apenas são visíveis fendas quando o betão está próximo da tensão de rotura por compressão, fendas essas que são provenientes da propagação da microfendilhação. Caso a tensão exercida no betão aumente, estas fendas propagam-se até à formação de um sistema instável de fendas, atingindo-se assim, a tensão máxima resistida pelo betão à compressão. Logo após o alcance da tensão máxima, o betão perde rapidamente a sua integridade levando desta forma, a uma perda acentuada de resistência e um aumento da deformação.

Segundo o EC2 [1], a relação tensão ( $\sigma$ )-extensão ( $\epsilon$ ) do betão à compressão é caracterizado por uma curva parabólica até à rotura, a qual representa a parte ascendente da relação  $\sigma$ - $\epsilon$ . Para análises estruturais não lineares, o EC2 apresenta uma relação  $\sigma$ - $\epsilon$  dada pela equação 2.31,

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta}$$

Equação 2.31

Onde,

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$$

Equação 2.32

$\epsilon_{c1}$  - Extensão correspondente à tensão máxima;

$\epsilon_{cu1}$  - Extensão correspondente à tensão última;

$$k = 1.05 E_{cm} \frac{|\epsilon_{c1}|}{f_c}$$

Equação 2.33

$$\epsilon_{c1} = 0.7 f_{cm}^{0.31} < 2.8$$

Equação 2.34

Para a modelação do comportamento não linear do betão no *software* ABAQUS foi necessário introduzir no *software* uma relação tensão-extensão que caracterizasse o mesmo, sendo de evitar utilizar relações teóricas gerais propostas em códigos, tal como no Eurocódigo 2 [1], que servem essencialmente para o dimensionamento

Desta forma, a relação adotada resultou de um modelo constitutivo que tivesse em conta a fissuração devido à tração e o esmagamento devido à compressão. De entre os modelos de dano contínuo desenvolvidos ao longo dos anos, o modelo de dano isotrópico é atualmente o mais utilizado na modelação do comportamento não linear de estruturas de betão armado. Fisicamente pode-se interpretar o conceito de dano como uma degradação das propriedades do material, que se traduz através da diminuição da área da secção por onde as tensões são transmitidas, ou seja, com a evolução do dano a secção efetiva diminui. Daí a necessidade do conceito de secção ou tensão efetiva para a utilização dos modelos de danos, [10].

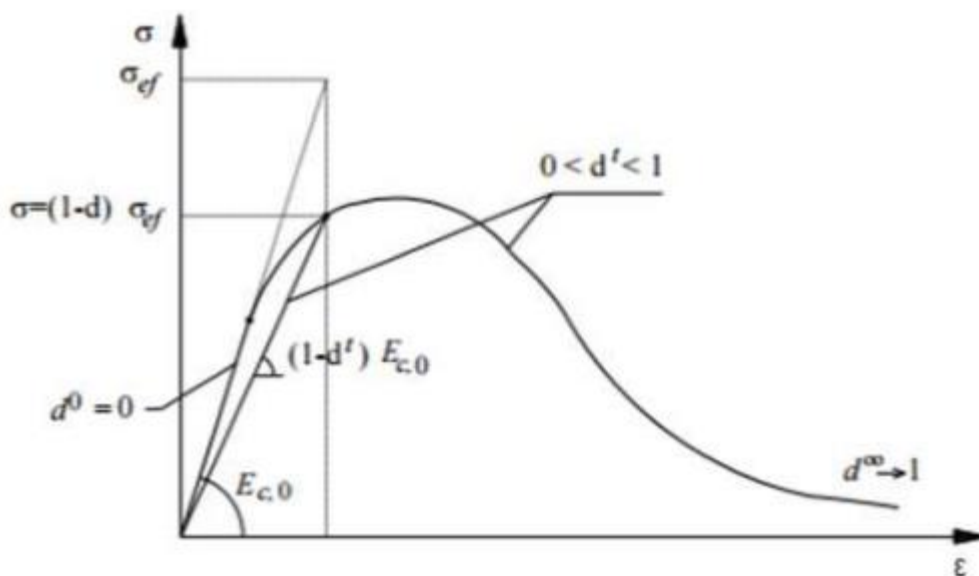


Figura 11 - Relação uniaxial tensão- extensão para o modelo de dano

Contudo, o modelo de dano contínuo deve garantir:

- Variáveis que caracterizem o dano;
- Estabelecimento da tensão efetiva/lei constitutiva tendo em conta as características do dano;
- Estabelecimento das leis que traduzem a evolução do dano;

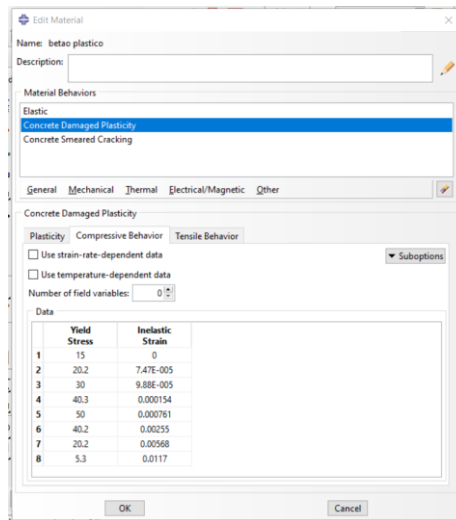


Figura 12 - Introdução da relação tensão-extensão no software ABAQUS

## 2.7.4 Caracterização do betão à tração

Para caracterizar o comportamento do betão, o conhecimento da sua resistência à tração é fundamental. Devido à complexidade da realização de um ensaio em tração pura, por norma, a determinação da resistência à tração realiza-se levando à rotura por flexão provetes prismáticos, submetidos à aplicação de cargas concentradas aplicadas a meio vão.

O comportamento do betão à tração é linear até a um valor próximo da tensão de rotura por tração, pelo que ao longo do ensaio são geradas varias microfendas, aproximadamente perpendiculares à tensão de tração, sendo que a rotura do provete sucede quando se origina uma fenda macroscópica, em resultado de um excesso de tensão nas microfendas anteriormente criadas. Após a formação da fenda principal e a tensão de rotura do betão à tração ser atingida, ocorre um fenómeno denominado por amolecimento, que diz respeito à diminuição da tensão instalada no betão conjuntamente com um aumento da deformação do elemento.

Desta forma, é possível dividir o comportamento do betão à tração em duas partes distintas, sendo elas,

- Uma zona de comportamento elástico linear onde o betão não se encontra fendilhado;
- Uma zona de comportamento não linear, após a fissuração do betão;

Desta forma, o alongamento/deformação do betão acaba por ser a soma das deformações nestas duas fases distintas, caracterizado pela Figura 13, vindo:

$$\Delta l = \Delta_{el} + w$$

Equação 2.35

Onde,

$\Delta_{el}$  – Alongamento elástico na zona não fendilhada;

$w$  – Abertura da fenda principal;

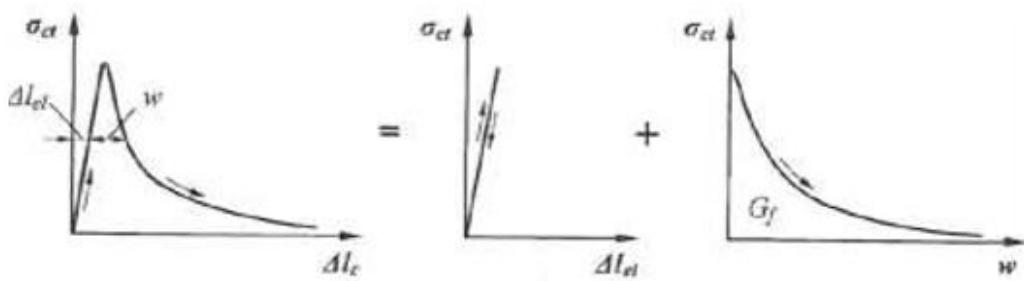


Figura 13– Representação da deformação total de um provete de betão sujeito à tração [9]

Outra característica considerada por muitos autores como sendo uma propriedade essencial do betão, é a sua energia de fratura,  $G_f$  (N/m), sendo representada pela área limitada pela curva  $\sigma_{ct}(w)$  na parte não linear. A energia de fratura do betão é descrita como a quantidade de energia necessária para produzir uma fenda de área unitária integralmente aberta. Segundo o *código modelo fib 2010* [10] é possível calcular a energia de fratura tendo por base a resistência média à compressão do betão, pela equação 2.36,

$$G_f = \int \sigma_{ct} dW \Leftrightarrow G_f = 73 f_{cm}^{0.18}$$

Equação 2.36

Onde,

$\sigma_{ct}$  - Tensão do betão à tração

$G_f$  - Energia de fratura do betão

Neste estudo a caracterização do comportamento do betão à tração para as análises realizadas tiveram por base o valor da energia de fratura, bem como a tensão resistente do betão à tração. O ABAQUS permite esta opção, como se pode observar na Figura 14.

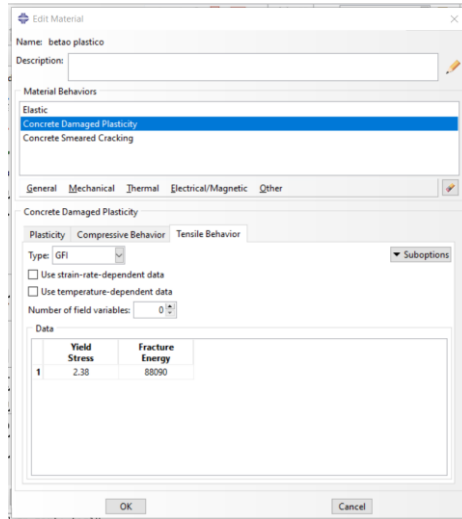


Figura 14 - Caracterização do comportamento do betão à tração no software ABAQUS

Para calcular o valor médio da resistência à tração do betão, tomou-se este como sendo o limite do comportamento linear do betão à tração, como ilustrado na Figura 15 através da relação  $\sigma$ - $\epsilon$ .

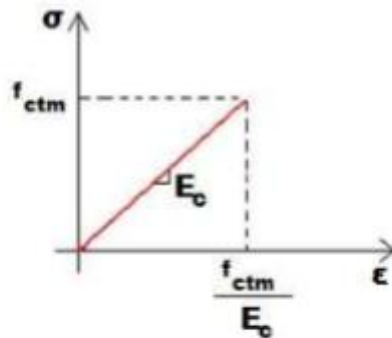


Figura 15 -Comportamento linear do betão à tração

O valor da resistência média à tração do betão,  $f_{ctm}$ , segundo o EC2 [1], é calculado a partir da equação 2.37,

$$f_{ctm} = 0.3f_{ck}^{\frac{2}{3}}$$

Equação 2.37

Sendo  $f_{ck}$  o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade, o qual pode ser obtido a partir do valor médio [1].

O comportamento do aço à tração, de um modo geral, independentemente do modelo adotado, é similar. Desta forma, até que a tensão de cedência por tração seja atingida, o aço apresenta um comportamento elástico-linear. O módulo de elasticidade,  $E_s$ , é a constante de proporcionalidade da reta que representa o comportamento linear do aço até à cedência. Na ausência de ensaios experimentais ou de valores fornecidos pelo fabricante do aço, o valor do módulo de elasticidade para o aço de armaduras ordinárias pode ser considerado aproximadamente 200 GPa. Da mesma forma, o coeficiente de Poisson pode ser considerado igual a 0,3.

Segundo o EC2 [1], tal como foi referido anteriormente, o comportamento do aço à tração pode ser caracterizado por uma relação constitutiva  $\sigma$ - $\varepsilon$  bilinear (com ou sem endurecimento), como ilustrado na Figura 16,

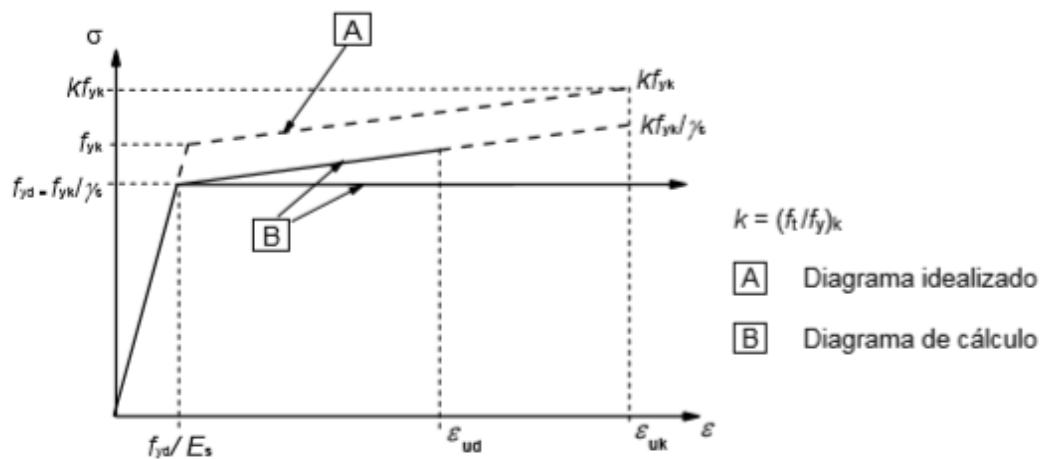


Figura 16 -Relação constitutiva do aço à tração

Na Figura 16, os parâmetros representados são os seguintes:

$\varepsilon_{ud}$  -Valor da extensão última, sendo o valor estabelecido pelo EC2 pela Equação 1.38 apenas quando se considera o endurecimento.

$\varepsilon_{uk}$  - Valor característica da extensão última, correspondente à tensão máxima ou de rotura;

$f_{yk}$  -Valor característico da tensão de cedência;

$$\varepsilon_{ud} = 0.9\varepsilon_{uk}$$

Equação 2.38

## 2.8 Modelação elástica do aço no ABAQUS

No *software* ABAQUS, de forma semelhante ao betão, é necessário definir as propriedades elásticas e plásticas do aço.

Na definição da resposta elástica de um material metálico, o *software* ABAQUS permite o uso de uma lei linear de elasticidade ou um modelo de equações de estado. O meio mais comum é a definição de uma lei linear de elasticidade onde podem ser definidas propriedades elásticas como a isotropia ou a anisotropia, bem como propriedades elásticas que dependem da temperatura ou da área da secção de aço. É importante salientar que em materiais que possuam elevadas deformações elásticas o modelo de elasticidade linear não deve ser utilizado.

Desta forma, apenas é necessário definir no programa o módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ) bem como o respetivo coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), como pode ser observado na Figura 17 e na Figura 18.

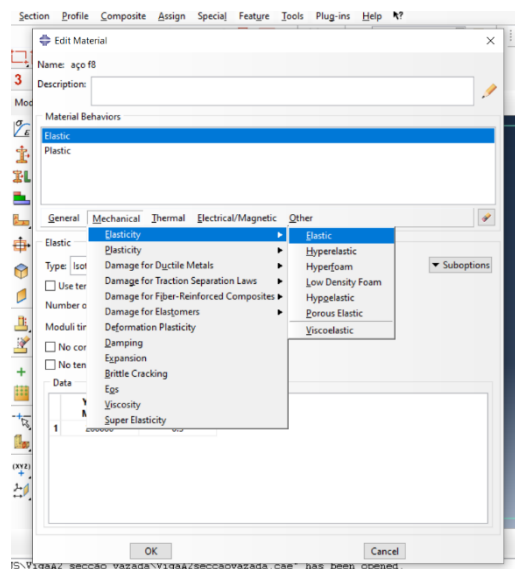


Figura 17 -Módulo no software ABAQUS para a caracterização elástica do material metálico

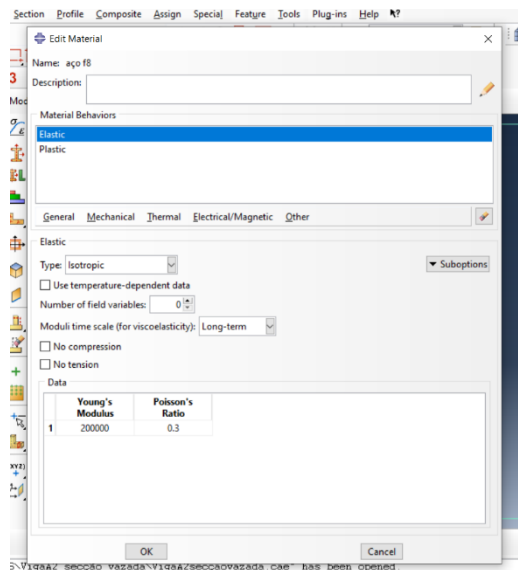


Figura 18 Definição das propriedades elásticas para caracterização do comportamento elástico do aço.

## 2.9 Modelação plástica do aço no ABAQUS

Ao contrário da modelação elástica no ABAQUS, a modelação do comportamento plástico pode ser definido por vários modelos. Um dos mais utilizados para materiais metálicos correntes dúcteis é o modelo *Classic Metal Plasticity* – CMP. Neste modelo estão incluídos modelos para metais sujeitos a carregamentos cíclicos, modelos de falha dinâmica, entre outros. Para além deste modelo, o ABAQUS também integra um modelo para definir o comportamento plástico de metais com características porosas, sendo este designado por *Porous Metal Plasticity* – PMP (“Plasticidade de metais porosos”) [7].

A partir do CMP é possível fazer uso da superfície de cedência de *Von Mises* para materiais isotrópicos ou da superfície de cedência de *Hill* para materiais que exibam um comportamento anisotrópico. Ambas as superfícies assumem que a cedência do material é independente do estado de tensão equivalente. O modelo utiliza a teoria da plasticidade perfeita com um comportamento de endurecimento isotrópico, podendo ser usada em qualquer análise que utilize elementos cujos graus de liberdade são deslocamentos. No entanto, a este modelo plástico deve estar associado o modelo elástico linear do material.

A definição do endurecimento do material pode ser definido como um endurecimento isotrópico. Trata-se de um endurecimento isotrópico pois a superfície de

cedência altera de forma uniforme em todas as direções das tensões, aumentando ou diminuindo com as deformações plásticas [7].

O ABAQUS fornece um modelo de endurecimento isotrópico para os casos que envolvam grandes deformações plásticas, caracterizada na Figura 19, ou em casos em que a deformação plástica em cada ponto ocorre essencialmente na mesma direção durante todo o carregamento.

Em suma, o comportamento do aço no programa foi definido através do modelo CMP, tendo sido também adotado um comportamento isotrópico para o material. Desta forma, para definir o comportamento plástico do material é necessário definir a tensão de cedência  $f_y$ , a tensão última,  $f_u$ , assim como a correspondente extensão última plástica,  $\epsilon_{pu}$ . Este modelo é basicamente definido pela relação  $\sigma$ - $\epsilon$  plástica, onde o valor inicial da tensão (corresponde à tensão máxima na qual a deformação plástica é nula) é igual ao valor limite da tensão elástica.

Opcionalmente, é ainda possível associar variáveis de temperatura e/ou de área equivalente. Esta relação deve ser especificada usando intervalos iguais na deformação plástica, caso contrário o ABAQUS regulariza a relação de modo a criar intervalos iguais, Figura 20.

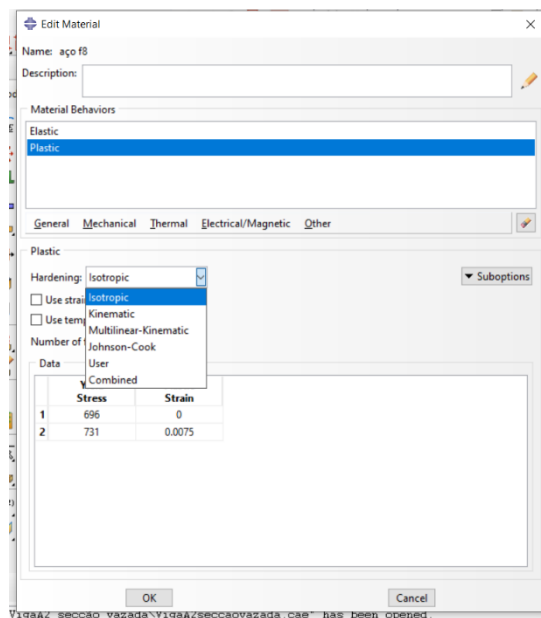


Figura 19 -Definição da isotropia para a caracterização plástica do aço

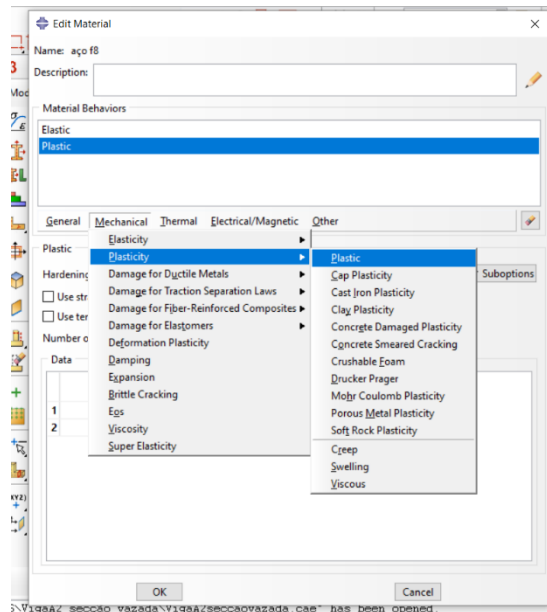


Figura 20 -Definição das propriedades plásticas para caracterização do comportamento elástico do aço.

## 2.10 Definição do tipo de análise

Para executar uma simulação do modelo no ABAQUS, é necessário criar e definir um passo/incremento, *Step*, que o software vai utilizar para dividir o período total do tempo em intervalos (etapas de incrementos).

Deste modo a análise consiste em duas etapas gerais, sendo elas, um passo inicial, *Initial Step*, que é gerado automaticamente com a criação do modelo, desde que sejam criadas as condições de apoio. E por fim, um passo de análise, adotado em função do tipo de análise (estática, dinâmica, etc), onde são definidas as imposições de carga e deslocamentos. Para a definição deste último passo, é necessário definir as seguintes opções,

- Tempo de incrementação – O ABAQUS define um tempo de incrementação automático começando a incrementação tendo por base o valor do incremento inicial. No entanto, os tamanhos dos incrementos de tempo podem ser definidos pelo utilizador tendo em conta a velocidade com que a solução converge.
- Número máximo de incrementos – O número de incrementos máximo pode ser limitado numa etapa, sendo que, por defeito, o número máximo de incrementos é de 100.

- Tamanho inicial do incremento – É a partir deste valor que o ABAQUS inicia a incrementação de análise.
- Tamanho mínimo do incremento – Valor comparativo utilizado pelo ABAQUS numa análise em que necessita realizar um incremento menor para a solução convergir. Quando o valor do incremento é menor que este valor, a análise é terminada reportando um erro para o utilizador. Por definição este valor é  $10^{-5}$ , contudo o mesmo pode ser ajustado pelo utilizador.
- Tamanho máximo do incremento – É o valor máximo utilizado pelo ABAQUS para o tamanho do incremento durante a análise. Este valor pode ser especificado pelo utilizador, caso contrário o ABAQUS define este valor em função do período de tempo total da análise.

É de referir, que a cada passo, *Step*, podem ser definidos diferentes carregamentos, condições de apoio e procedimentos de análise, sendo que o ABAQUS fornece uma ferramenta, *Step Manager*, Figura 21, onde é possível criar, editar e manipular as etapas associadas à análise.

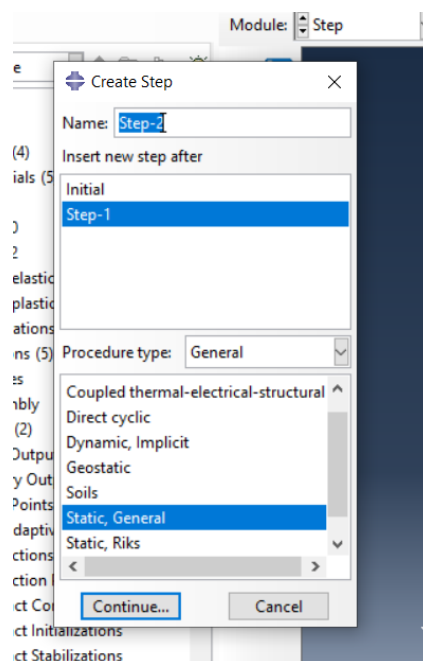


Figura 21 -Definição do tipo de análise no ABAQUS

## 2.11 Definição das interações no modelo

No programa ABAQUS é possível a partir do módulo *Interaction*, definir e gerir interações do modelo. As interações definem ações ou dependências entre 2 ou mais corpos ou regiões e ações com o ambiente circundante. As interações disponíveis no programa são,

- Interações mecânicas e térmicas entre regiões de um modelo, ou entre a região de um modelo e o seu ambiente circundante;
- Restrições na análise em regiões de um modelo;
- Conexões entre dois pontos de um modelo ou entre o modelo e um ponto exterior;
- Inércia sobre regiões do modelo, como por exemplo pontos de massa, inércia de rotação e potência de calor;
- Fissuras sobre regiões do modelo;
- Molas e amortecedores entre dois pontos de um modelo ou entre um ponto do modelo e um ponto exterior.

Para o modelo utilizado no presente trabalho no ABAQUS, e de entre as disponíveis, as restrições utilizadas foram as seguintes:

- *Contact* interactions (“interações de contacto”) – Descreve o contacto entre diferentes áreas, superfícies rígidas ou deformáveis, numa única superfície;
- *Coupling* (“acoplamento”) – É uma restrição de acoplamento, ou seja, permite restringir o movimento de uma superfície no movimento de um único ponto;
- *Embedded regions* (“regiões embebidas”) – Esta interação permite embeber uma região do modelo dentro de outra região ou dentro de todo o modelo;

Na modelação da viga A2 modificada, foram realizados acoplamentos nas extremidades da viga, em dois pontos de referência sendo eles, RP1 e RP2, de forma, a que o plano da extremidade da peça acompanhe o movimento de um ponto de referência criado exteriormente à peça, representado pelo Figura 22. As restrições de acoplamento cinemático são úteis nos casos em que um grande número de nós são limitados ao movimento de um único nó.

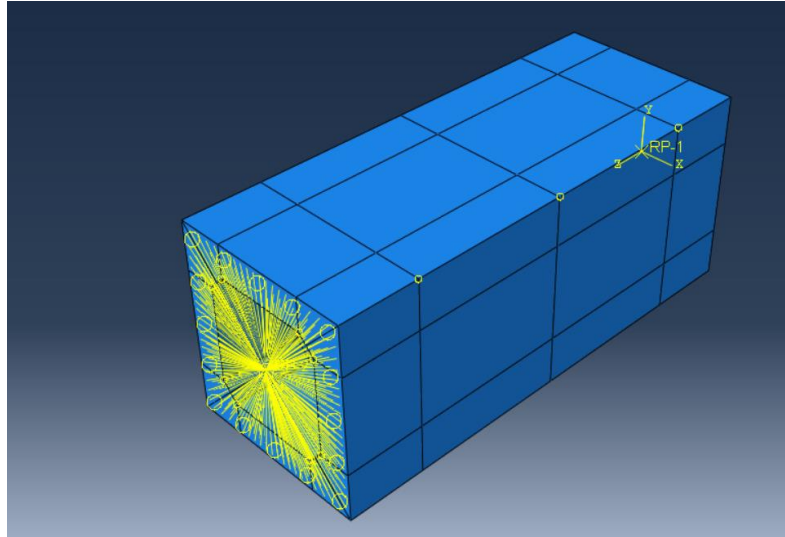


Figura 22 -Representação do Coupling no ABAQUS

Relativamente à definição do contacto entre varões e betão, a interação definida foi o *Embedded regions*, Figura 23, esta técnica é usada para especificar que um elemento está incorporado num outro elemento de acolhimento. Assim, é necessário definir no programa quais os nós dos elementos incorporados e quais os nós do elemento acolhedor, por outras palavras, é necessário definir no programa qual o elemento que se situa dentro de um outro elemento. Desta forma, os graus de liberdade do “nó embebido” são limitados aos valores interpolados dos correspondentes graus de liberdade do elemento de acolhimento.

Para definir o quão longe um nó pode ser acolhido, é definida uma tolerância. O modelo assume que os nós embebidos devem-se situar dentro de uma distância calculada através da multiplicação do tamanho médio dos elementos acolhedores por 0,05, valor este por definição.

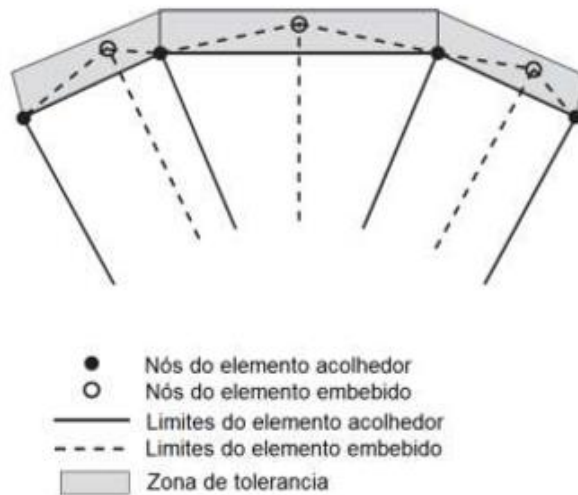


Figura 23 -Tolerância exterior para elementos embebidos

## 2.12 Condições de Contorno

Para definir no programa todas as condições de contorno a que o modelo está submetido, sejam cargas, apoios, deslocamentos, forças ou até temperaturas, o *software* ABAQUS disponibiliza essas funções no módulo *Loud*. No entanto, esta etapa está dependente da etapa anterior, criação de um *Step*, dado que a definição do *Step* associado dita quando estas se tornam ativas. Cada tipo de condição de contorno pode ser definida em separado.

Assim, este módulo possui um gestor que auxilia à criação e edição das condições associadas ao modelo, na Figura 24, estão representados o sentido positivo de deslocamentos e rotações segundo o *software* ABAQUS.

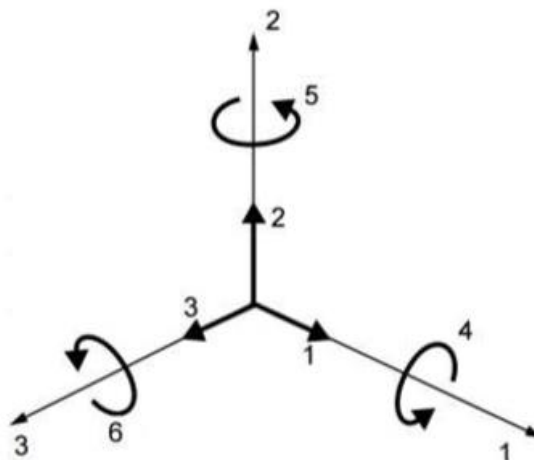


Figura 24 -Convenção de deslocamento e rotações segundo o ABAQUS

Na Figura 24,

- 1, corresponde às translações segundo a direção X ( $U_1$ );
- 2, corresponde às translações segundo a direção Y ( $U_2$ );
- 3, corresponde às translações segundo a direção Z ( $U_3$ );
- 4, corresponde às rotações em torno da direção X ( $UR_1$ );
- 5, corresponde às rotações em torno da direção Y ( $UR_2$ );
- 6, corresponde às rotações em torno da direção Z ( $UR_3$ ).

## **2.13 Processamento e análise de problemas não lineares**

Ao contrário de uma análise linear, a solução para uma análise não linear não pode ser calculada através da resolução de simples sistemas de equações lineares. A solução é obtida especificando uma carga em função do tempo e o tempo total de incrementação para a resposta não linear. Assim, o ABAQUS divide a simulação em tempos de incrementos e tenta encontrar a configuração de equilíbrio aproximada no final de cada incremento. Através do método de *Newton-Raphson*, executa várias iterações para determinar uma solução para cada incremento de tempo. Na definição de uma análise, é atribuído um histórico de tempo para a simulação. Desta forma, numa análise não linear o histórico de tempo definido é dividido em incrementos de tempo.

O ABAQUS, para além dos limites máximos e mínimos de incrementos, solicita ao utilizador um incremento inicial que, ao longo da análise, vai ajustando e escolhendo automaticamente o valor do incremento seguinte. No final de cada incremento a estrutura está cada vez mais próxima do equilíbrio, estando disponíveis para o utilizador os resultados no final de cada incremento. Para cada incremento de tempo, e na tentativa de encontrar uma solução em equilíbrio, podem ser calculadas várias iterações. Assim, se no final de cada iteração o modelo não estiver em equilíbrio, o ABAQUS realiza outra iteração. Caso se verifique que, durante o processo, as iterações divergem subsequentemente afastando-se do equilíbrio, o processo iterativo é encerrado e é executado um incremento de tempo menor na tentativa de encontrar uma solução próxima do equilíbrio.

## 2.14 Interpretação de resultados

Por fim, é no módulo *Visualization*, que o utilizador tem acesso, para além das deformações e tensões a que a estrutura estará sujeita, à visualização outros dados relacionados com o pós-processamento da análise. Através do módulo *Create XY Data* podem ser construídos diversos gráficos de resultados, geralmente em função do tempo no eixo dos *xx*. Para a construção de gráficos no ABAQUS, encontra-se disponível uma vasta panóplia de opções para o eixo dos *yy* como, carga num ponto, momento num ponto, deformações, forças de reação, momentos de reação, tensões, deslocamentos espaciais e rotações espaciais, tal como representado na Figura 25.

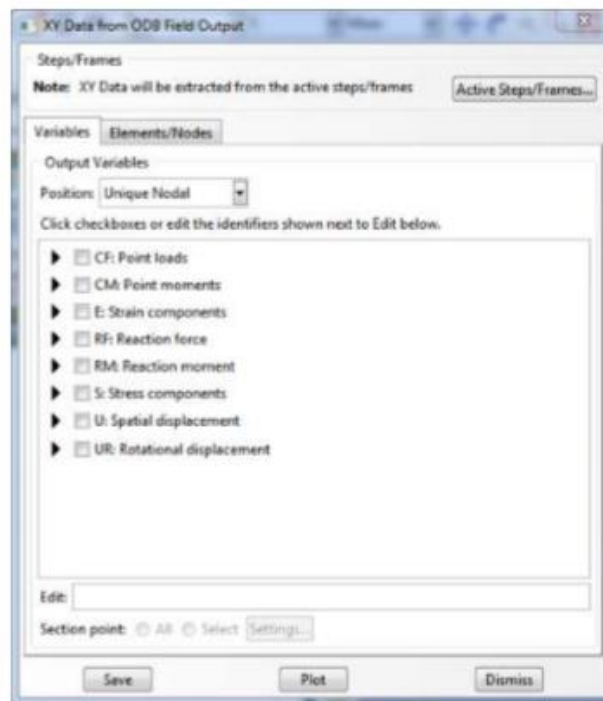


Figura 25 -Janela de seleção de dados para construção de gráficos em ABAQUS

# Capítulo 3 – Descrição da modelação no ABAQUS da Viga A2 com modelo corrigido

## 3.1 Modelo geral de trabalho no ABAQUS

O programa ABAQUS, como já foi anteriormente referido, é subdividido em 9 subcategorias, sendo que estas podem ser agrupadas em três grandes conjuntos, sendo eles o pré-processamento o processamento e o pós-processamento.

É necessário fornecer várias informações na fase do pré-processamento, para que a simulação seja realizada na fase do processamento e por fim, sejam elaborados os resultados na fase do pós-processamento. Assim, na fase do pré-processamento o modelo é gerado tendo em conta as características geométricas e mecânicas dos materiais que o compõem, estão assim incluídas as seguintes categorias tal como representado na Figura 26:

- *PART*- Criação da geometria base
- *MESH*- Criação da geometria da malha
- *PROPERTY*- Definição das propriedades dos materiais (*MATERIALS*) e atribuição às respetivas secções (*SECTIONS*)
- *ASSEMBLY*- Montagem do modelo
- *STEP*- Definição do tipo de análise e dos incrementos
- *INTERACTION*- Definição das interações entre peças
- *LOAD*- Aplicação das condições de contorno, sejam aplicações de cargas (*LOADS*) ou restrições (BC's)

Relativamente à fase do processamento, o programa subdivide-se em apenas uma subcategoria, sendo ela o *JOB* onde serão realizados todos os cálculos e procedimentos computacionais. Por fim, é na fase do pós-processamento que o programa realiza e apresenta toda a análise de resultados, sendo que, a subcategoria onde é realizado este processo é na *VISUALIZATION*.

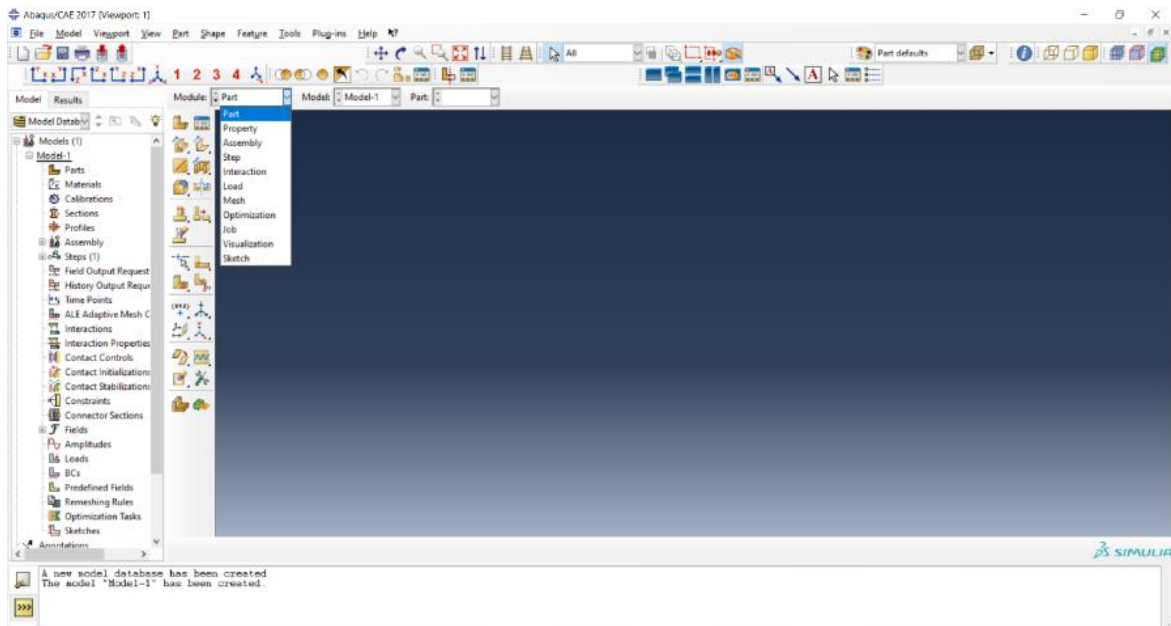


Figura 26 – Esquema dos módulos no ABAQUS

### 3.2 Caracterização da viga A2

Para esta dissertação, a viga em estudo escolhido foi a viga A2, ensaiada à torção pura por Bernardo, 2006 [5] e posteriormente modelada no programa ABAQUS por Ferreira, 2016 [4]. Na presente dissertação foram realizadas várias alterações na modelação da viga A2 a partir do ABAQUS, tanto ao nível da modelação, com vista a calibrar melhor o modelo, como ao nível da geometria, com vista a estudar a influência de novos fatores geométricos. Relativamente à viga A2, esta caracteriza-se por uma secção quadrada vazada com uma taxa de armadura de torção moderada, compatível com um comportamento dúctil à torção (de acordo com o observado por Bernardo, 2006 [5] e com as armaduras longitudinais e transversais equilibradas. trata viga foi parcialmente modelada na direção longitudinal, ao longo de um comprimento de 1.5 m, com uma secção quadrada vazada com uma dimensão exterior de 60 cm e com uma espessura média de 10 cm.

As características do betão utilizado na construção da viga de referência apresentadas na Tabela 3.1 provenientes dos resultados experimentais realizados por Bernardo, 2006 [5], onde calculou o valor médio da resistência à compressão do betão,  $f_{ctm}$ , através do ensaio à compressão uniaxial de 5 provetes cúbicos (com aresta de 15 cm), de acordo com a Especificação LNEC E 226-1968, [11].

Tabela 3.1 - Caracterização do betão utilizado na Viga A2

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
$f_{cm}$	47,34 MPa
$\varepsilon_0$	0,2%
$\varepsilon_{cu}$	0,35%
$E_c$	36,10 GPa

Relativamente às armaduras constituintes da viga A2, estas possuem um recobrimento real de 3 cm. A pormenorização das armaduras pode ser visualizada na Figura 27 (a) e 27 (b). Relativamente ao aço das armaduras, com classe de resistência A500NR, para a determinação das tensões e extensões de cedência das armaduras, Bernardo, 2006 [5] realizou ensaios à tração de 6 provetes de aço por cada diâmetro de varão utilizado segundo a Norma Portuguesa EN 10 002-1, [12], sendo os resultados obtidos apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Caracterização das armaduras da Viga A2

$\varnothing$ (mm)	$f_{ym}$ (MPa)	$f_{tm}$ (MPa)	$\varepsilon_{ym}$ (‰)	$\varepsilon_{su}$ (‰)	$E_c$
8	695,89	847,65	3.479	10	200
10	714,83	866,02	3.574	10	200
12	672,42	809,57	3.362	10	200

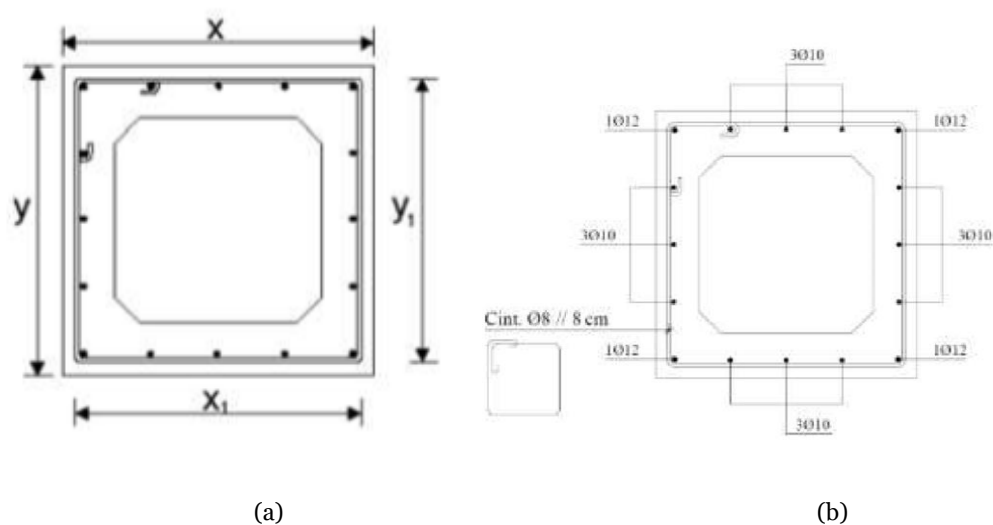


Figura 27 - Pormenorização da Viga A2

Na Figura 27 (a),  $x=y=60$  cm e  $x_1=y_1=52.3$  cm, sendo a espessura das paredes da secção igual a 10cm.

### 3.2 Criação dos elementos constituintes e geometria base

A partir do módulo (PARTS), é possível a criação de toda a geometria base da viga A2. Para isso, é necessário a criação das várias partes constituintes da viga A2, sendo elas: o betão, as armaduras longitudinais de reforço (varões  $\phi 10$  e  $\phi 12$  distribuídos pela secção de acordo com a Figura 27 (b) e por fim as cintas constituídas por varões  $\phi 8$  espaçadas de 8 cm. De salientar que, na criação dos elementos constituintes, deve-se definir no programa o tipo de material que cada componente é constituído, assim como, para o elemento viga, foi definido o tipo de material como material *Solid* como representado na Figura 28. Já em relação aos constituintes das armaduras da viga foram definidos como *Wire*.

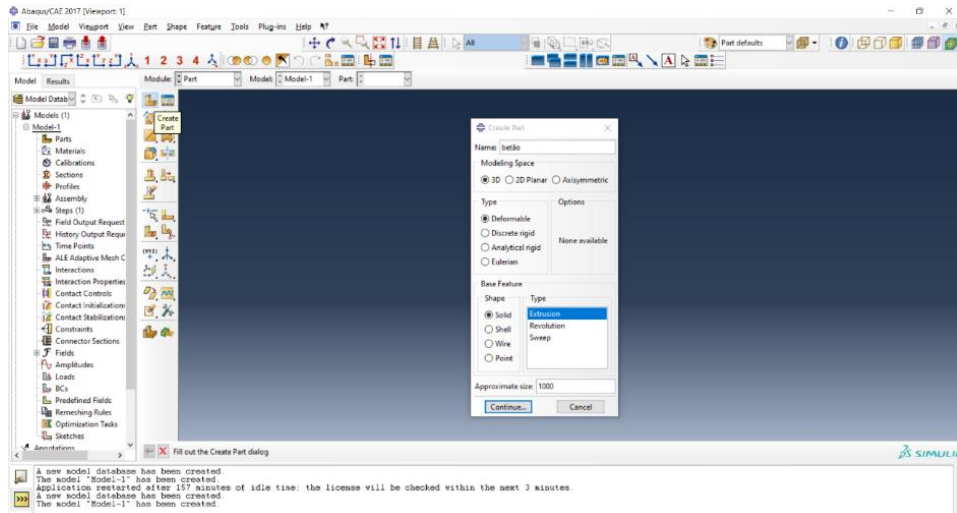


Figura 28 -Módulo de criação da geometria base

Após a definição das 5 partes constituintes da viga A2, com o auxílio do comando *Partition Cell* foi possível realizar os cortes nas componentes criadas, como ilustrado na Figura 29, de modo a assegurar mais tarde a gerenciação de uma malha simétrica para os elementos finitos. Ainda, na constituição dos cortes na componente da viga, foram realizados dois cortes transversais à viga com 250 mm de largura. A criação destes cortes transversais ajudou na definição das zonas extremas a serem constituídas por betão elástico para aplicar a ação torsional numa extremidade, bem como as condições de apoio na outra extremidade. É de salientar que a definição destes cortes em nada interferem nas ligações interiores de qualquer componente, apenas delimitam zonas distintas na mesma componente, é possível observar na Figura 29 as zonas constituídas por betão elástico e na Figura 30 as zonas constituídas por betão plástico.

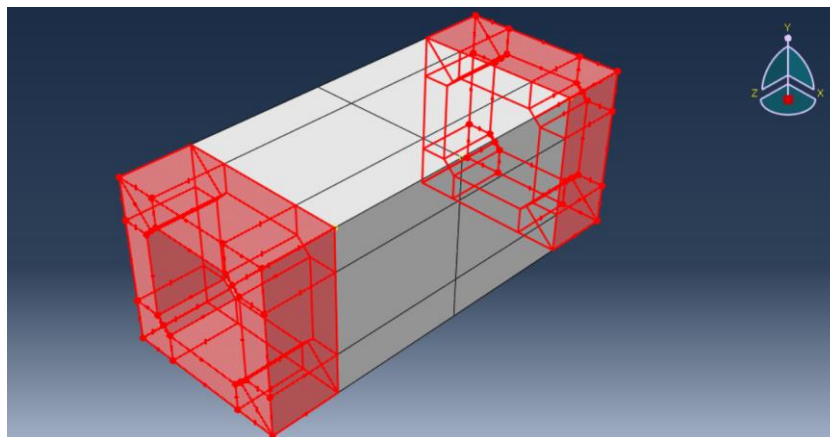


Figura 29 -Criação dos cortes e representação da zona constituída por betão elástico.

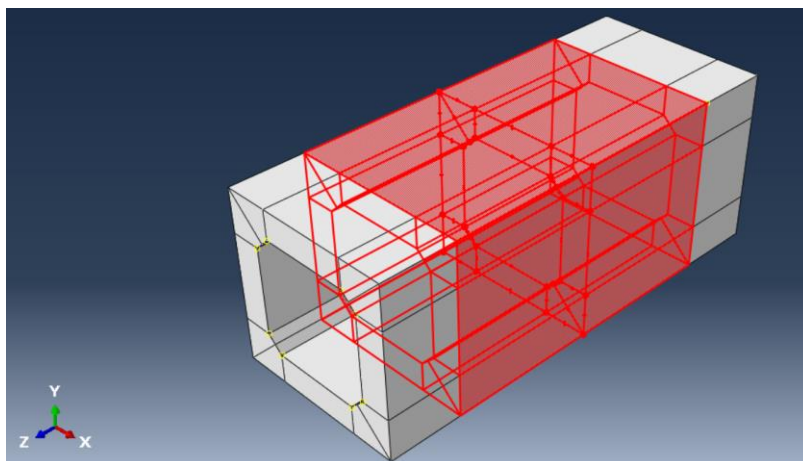


Figura 30 - Criação dos cortes e representação da zona constituída por betão plástico.

### 3.3 Definição do tipo de elemento e criação da malha

Os tipos de elementos finitos utilizados na modelação da viga diferiram em função do tipo de material a modelar. Assim, para o betão a sua modelação foi realizada com elementos octaédricos C3D8R [7], tal como foi descrito no capítulo 2, na secção 2.4.1 e 2.4.2. Relativamente aos varões das armaduras, a sua modelação foi realizada por elementos lineares em barra do tipo T3D2 [7]. Desta forma, após definição no programa do tipo de elemento finito a utilizar foi necessário gerenciar a malha de elementos finitos. Para a criação da malha dos varões longitudinais, as respetivas barras foram divididas em 20 partes iguais. Cada ramo da cinta foi dividida em 8 partes iguais. Relativamente à viga de betão a escolha da sua divisão está explicitada na Figura 31.

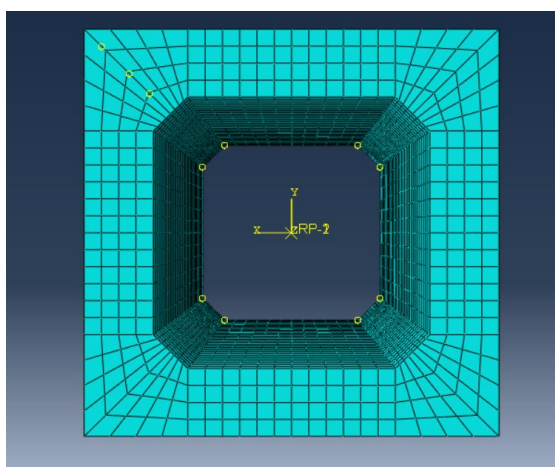


Figura 31 - Criação da malha da viga na secção transversal

Como é possível observar na Figura 32, as zonas de extremidade foram divididas em 4 partes iguais enquanto que a zona interna da secção foi dividida em 8 partes iguais, perfazendo assim um total de 16 divisões por face. Relativamente à criação da malha na direção longitudinal, foi realizada conforme ilustrado na Figura 33. Sendo que a zona central (a vermelho na Figura) foi subdividida em 22 partes e as zonas extremas em 6 partes cada, totalizando 34 elementos. Na Figura 30 também é possível observar a definição de dois pontos essenciais neste modelo. Foram definidos dois pontos de referência (*Reference Points*) em cada secção de extremidade e centrados na secção: RP-1 (0,0,0) e RP-2 (0,0,1500), com coordenadas em mm. Foram também criadas duas superfícies associadas às faces de extremidade da viga A2. Estas superfícies serão essenciais para os processos de definição das condições de contorno apresentados mais à frente neste capítulo.

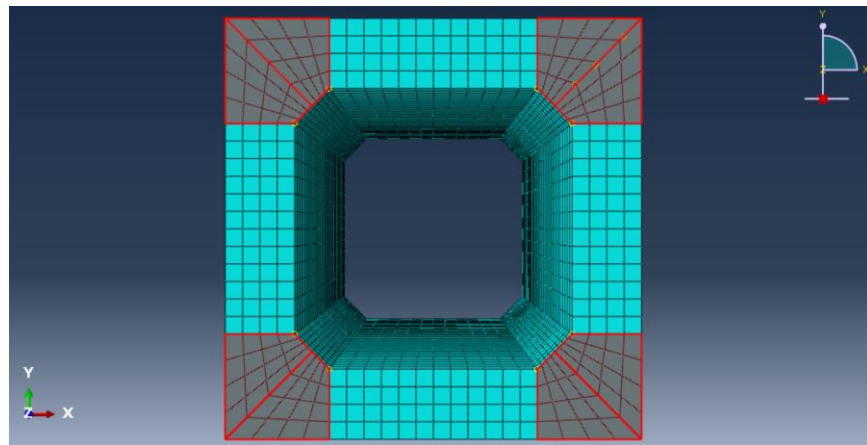


Figura 32 - Divisão em quatro partes das zonas de extremidade da Viga A2

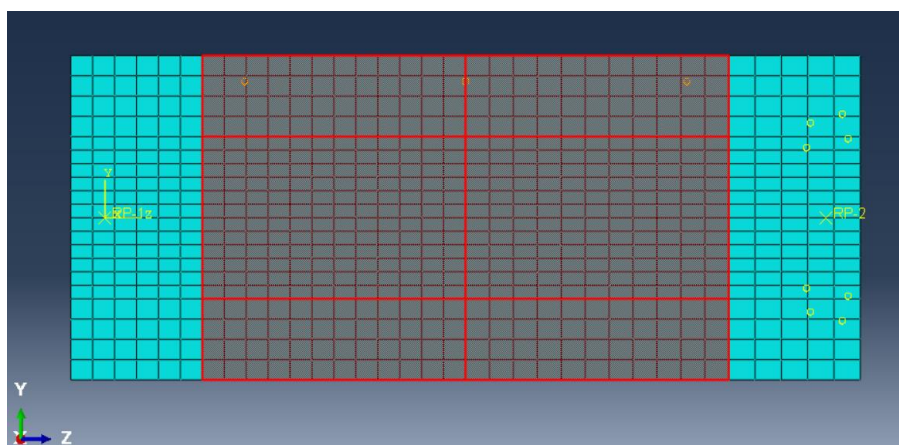


Figura 33 - Criação da malha no elemento viga seção longitudinal

Após a realização de vários modelos com diferentes escolhas de malhas e tendo em conta algumas conclusões apresentadas por Ferreira, 2016 [4], verificou-se que uma

malha com maior número de elementos finitos constitui um problema para o tempo de cálculo do programa. No entanto, verificou-se também ser fundamental para a obtenção de resultados com maior vigor.

### 3.4 Propriedades dos materiais que constituem a viga A2

Tal como foi descrito anteriormente, a viga A2 é constituída por dois tipos de material betão no ABAQUS, elástico e plástico, bem como por três diferentes tipos de material aço, em função do diâmetro dos varões. As tabelas seguintes apresentam as propriedades adotadas para os materiais constituintes das componentes da viga A2.

Tabela 3.3 - Propriedades elásticas do betão

<i>Módulo de Young</i>	35500
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0.2

Tabela 3.4 - Propriedades do betão plástico

<i>Ângulo de dilatação (°)</i>	45
<i>Excentricidade</i>	1
$f_{b0}/f_{c0}$	1.12
<i>K</i>	0.666
<i>Parâmetro de viscosidade</i>	1E-005

Comportamento à compressão:

Tabela 3.5 - Relação tensão-extensão plástico à compressão para o betão plástico

<i>Tensão plástica (MPa)</i>	<i>Extensão plástica</i>
15	0
20.2	7.47E-005
30	9.88E-005
40.3	0.000154
50	0.000761

40.2	0.00255
20.2	0.00568
5.3	0.0117

Tabela 3.6 -Comportamento à tração do betão plástico

<i>Tensão resistente à tração (MPa)</i>	2.05
<i>Energia de fratura (N/m)</i>	88090

Na adoção das propriedades do betão plástico foi realizada uma das várias alterações ao modelo de Ferreira, 2016 [4]. Com vista a melhorar a aproximação das respostas numérica e experimental da viga A2 foi necessário, por tentativas, aumentar o valor do ângulo de dilatação de 38° para 45°, bem como a diminuição da tensão resistente do betão à tração de 2.38 MPa para 2.05 MPa. De entre os vários parâmetros para o CDP, o primeiro mostrou-se ser o mais influente para “acertar” o pico da resposta na fase última comportamental, enquanto, que o segundo permitiu “acertar” o a passagem do estado não fissurado para o estado fissurado.

As tabelas seguintes resumem as propriedades adotadas para o aço constituinte dos varões de reforço.

Tabela 3.7 - Propriedades elásticas do aço para todos os diâmetros

<i>Módulo de Young (MPa)</i>	200000
<i>Coefficiente de Poisson</i>	0.3

Propriedades Plásticas aço  $\phi 8$ :

Tabela 3.8 -Propriedades plásticas do aço  $\phi 8$

<i>Tensão plástica (MPa)</i>	<i>Extensão plástica</i>
696	0
731	0.0075

A Figura 34 ilustra a atribuição, no ABAQUS, da área para a secção de aço do varão  $\phi 8$ .

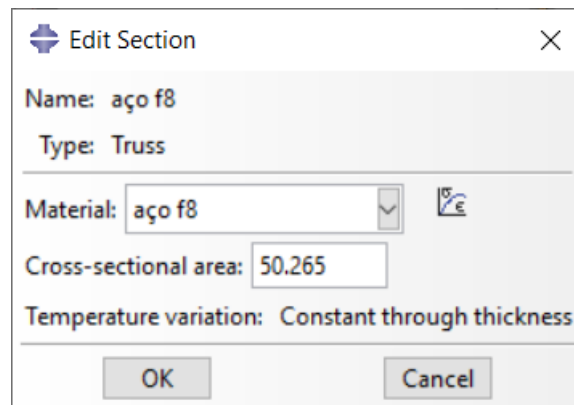


Figura 34 - Área da secção de aço 8mm em  $\text{mm}^2$

Propriedades Plásticas aço  $\phi 10$ :

Tabela 3.9 -Propriedades plásticas do aço  $\phi 10$

<i>Tensão plástica (MPa)</i>	<i>Extensão plástica</i>
715	0
751	0.0075

A Figura 35 ilustra a atribuição, no ABAQUS, da área para a secção de aço do varão  $\phi 10$ .

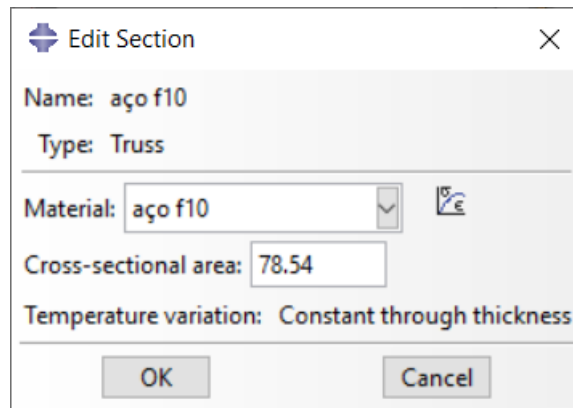


Figura 35 - Área da secção de aço 10mm em  $\text{mm}^2$

Propriedades Plásticas aço  $\phi 12$ :

Tabela 3.10 -Propriedades plásticas do aço  $\phi 12$

<i>Tensão plástica (MPa)</i>	<i>Extensão plástica</i>
672	0
706	0.0075

A Figura 36 ilustra a atribuição, no ABAQUS, da área para a secção de aço do varão  $\phi 12$ .

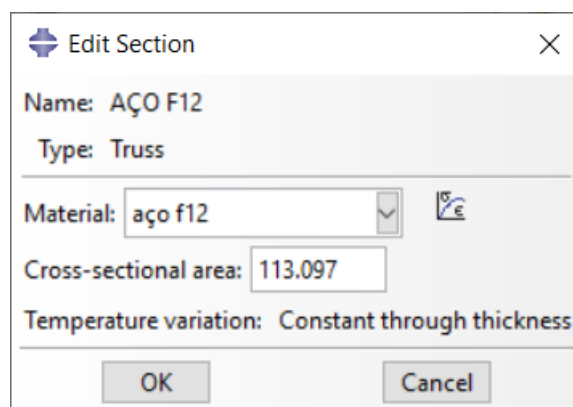


Figura 36 - Área da secção de aço 12mm em  $\text{mm}^2$

### 3.5 Associação das componentes

Na associação de componentes, foi modelada a “gaiola” da armadura da viga A2. Desta forma, e como apresentado anteriormente, a referida “gaiola” é constituída por cintas  $\phi 8$  e varões longitudinais de canto  $\phi 12$  e 3 varões longitudinais  $\phi 10$  em cada parede.

Relativamente aos espaçamentos, as cintas são espaçadas de 8 cm. Estas foram posicionadas de forma simétrica em relação à secção central da viga, tendo-se também tido o cuidado de evitar a existência de cintas localizadas nas faces extremas da viga (as cintas extremas ficaram completamente embebidas no betão com um espaçamento de 3 cm à face). Estes aspetos constituem ligeiras alterações ao modelo de Ferreira, 2016 [4] com vista a garantir uma resposta numérica mais realista do modelo, evitando assimetria desnecessárias na direção longitudinal e concentrações irrealistas de tensões devido ao mau posicionamento das cintas extremas. O posicionamento adotado para as cintas pode ser visualizado na Figura 37.

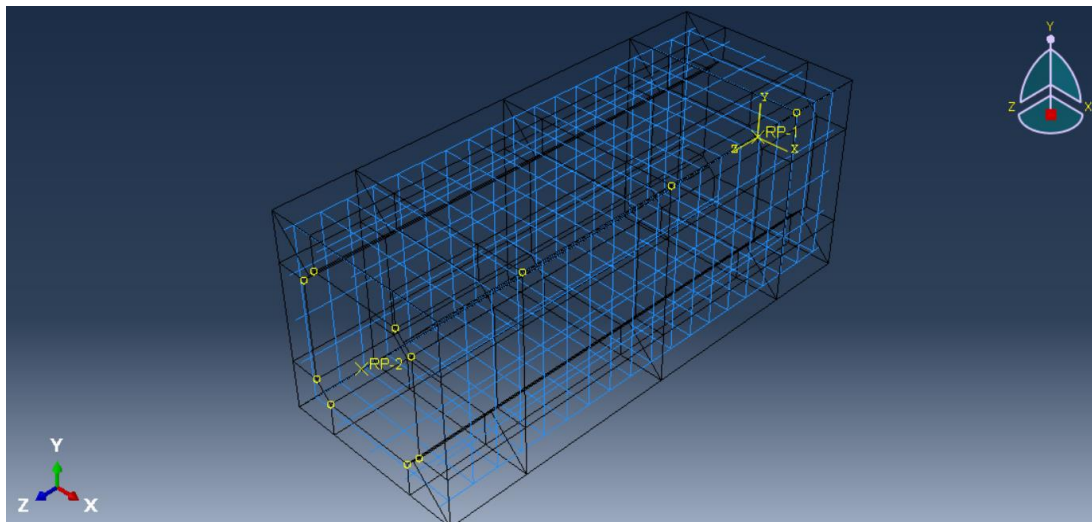
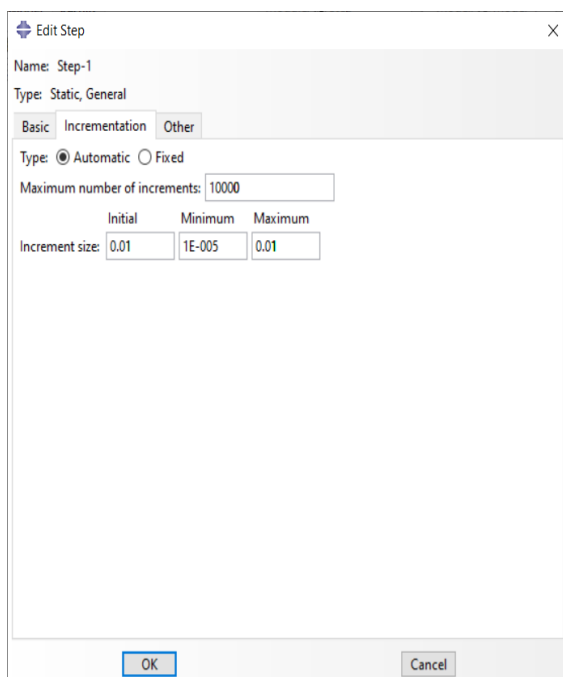


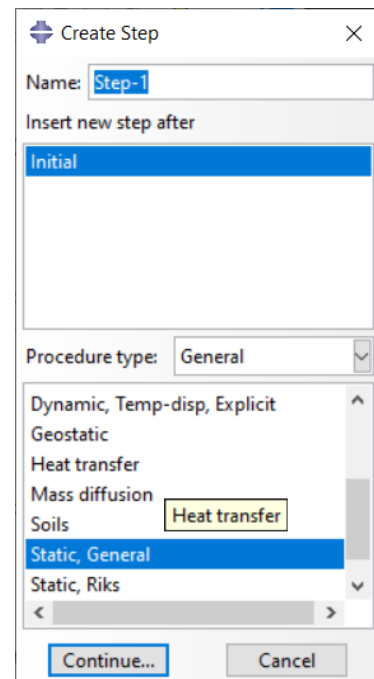
Figura 37 -Pormenor construtivo da armadura da viga A2

### 3.6 Configuração do tipo de análise

Após a conclusão da definição de todos os componentes da viga A2, bem como a associação dos mesmos, o modelo da viga está pronto para a configuração do tipo de análise. Assim, foi definida o tipo de análise como *Static General*, mantendo-se todos os parâmetros por defeito à exceção dos parâmetros da incrementação, onde foi aumentado o número máximo de incrementos de 100 para 10000 e foi diminuído o tamanho do incremento inicial e do incremento máximo de 1 para 0.01, como indicado na Figura 38 (a) e (b).



(a)

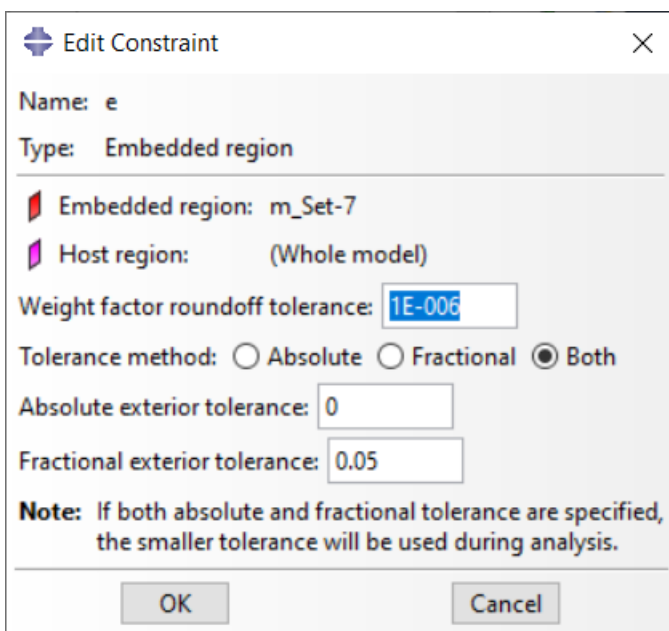


(b)

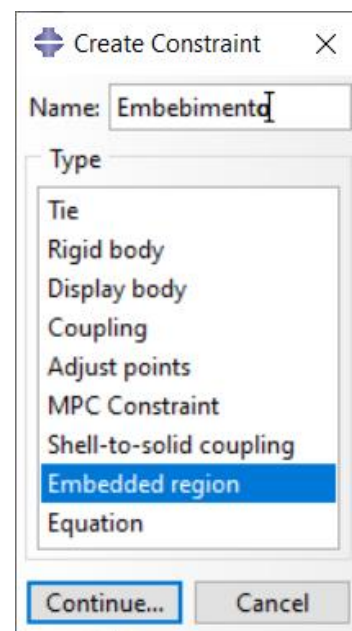
Figura 38 - Configuração do tipo de análise

### 3.7 Definição das interações

Foram definidos dois tipos de interações diferentes no modelo da viga A2. A primeira consiste na interação por embebedimento das armaduras no betão constituente da viga. Assim, é necessário criar uma interação no modelo e seleccionar a opção *Embedded Region*, posteriormente é necessário definir no *software* quais os materiais que terão este tipo de interação. Para tal, seleccionando apenas as armaduras da viga, selecciona-se a opção *Whole Region* e confirma-se no fim desta ação para que as armaduras estejam embebidas no betão tal como representado na Figura 39 (a) e (b).



(a)



(b)

Figura 39– Definição do Embebimento da armadura da viga A2

Por fim, o segundo tipo de interação definido na viga A2 foi o *Coupling*. Para tal, foram previamente criadas duas superfícies de referência, uma em cada face de extremidade da viga. Tais superfícies foram denominadas por Surf-RP1 relativa à face onde será criado o ponto de referência RP1 com as coordenadas (0,0,0) e Surf-RP2 associada ao ponto de referência RP2 com as coordenadas (0,0,1500). Posteriormente, foi definido o *coupling* entre cada superfície de referência e o correspondente ponto de referência. Por fim, tal como apresentado na Figura 40, apenas foram restringidos em ambos os *couplings* os graus de liberdade U1 e U2, ou seja, segundo os eixos globais *x* e *y*.

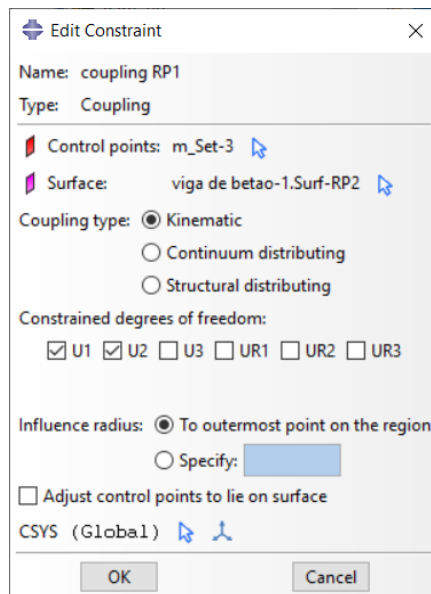


Figura 40 -Definição do Coupling na viga A2

Por fim, o resultado das interações no modelo encontra-se ilustrado na Figura 41,

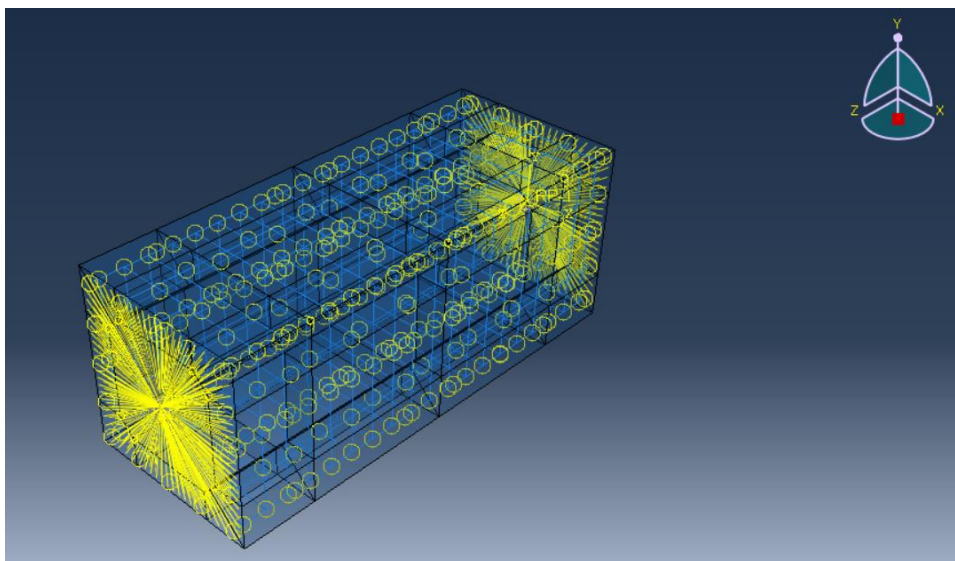


Figura 41 -Configuração final das interações no modelo

De salientar a alteração realizada nesta secção em relação ao modelo de Ferreira, [4]. Neste modelo, foi realizado o *Coupling* dos pontos de referência com as superfícies que delimita o betão elástico do betão plástico. No entanto, no modelo realizado nesta dissertação esta união não foi realizada dado que não se aproveitaria integralmente o comprimento do betão elástico para uniformizar as tensões aplicadas nas secções extremas para a região central de betão plástico, quer devido à aplicação da ação

torsional bem como devido às condições de apoio, ambos impostos nos pontos de referência.

### 3.8 Definição das condições de contorno

Foram criadas três condições de contorno, BC-1, BC-2, BC-3, sendo que, as duas primeiras constituem reações de apoio localizadas no ponto de referência RP1 e num ponto localizado num canto a meio vão da viga. Relativamente à condição de contorno BC-3, trata-se da condição rotação de torção imposta a que a viga estará sujeita. Para a criação das condições de contorno BC-1 e BC-2, selecionou-se a opção *Create Boundary Condition* e na janela selecionou-se conforme ilustrado na Figura 42.

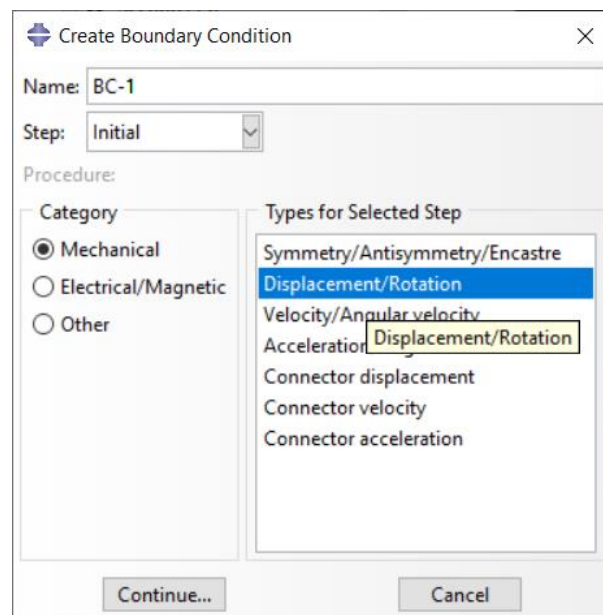


Figura 42 -Configuração das condições de contorno BC1 e BC2

Após a definição do tipo de condição de contorno, deve-se definir quais os graus de liberdade que serão restringidos. Nesta fase, foram realizadas várias alterações em relação ao modelo realizado por Ferreira [4]. Assim, para BC1 associada ao ponto de referência RP1, como representado na Figura 43, foram restringidos os deslocamentos  $U_1$  e  $U_2$ , bem como a rotação  $UR_3$ . Para Bc2 associada a um ponto a meio vão da viga, foi apenas restringido o deslocamento  $U_3$  como representada na Figura 44. Com estas

alterações pretendeu-se garantir uma deformação torsional mais uniforme na zona central de betão plástico.

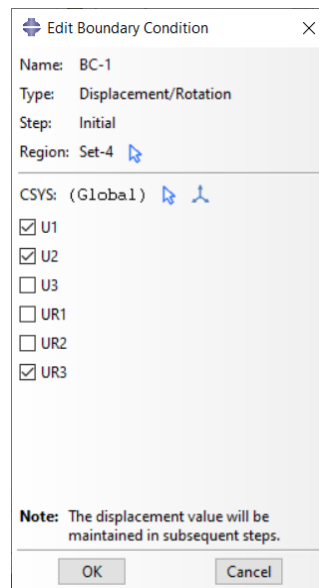


Figura 43 -Restrição BC-1

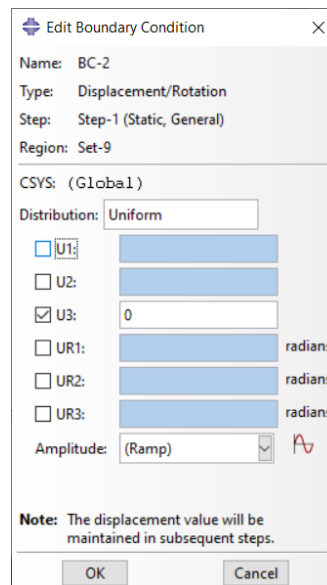


Figura 44 -Restrição BC-2

Por fim, o valor máximo da rotação de torção correspondente à condição de contorno BC3 foi aumentada em relação a Ferreira, 2016 [4] de 0.06914 rad para 0.10 rad como representado na Figura 45. O objetivo foi modelar, ao longo de um maior intervalo de deformação, a resposta pós-pico da viga.

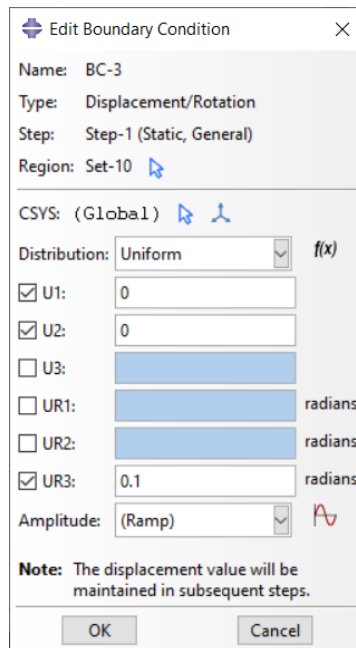


Figura 45 -Configuração da condição de contorno BC3

### 3.9 Processamento do modelo

Com todos os parâmetros necessários para a modelação da viga A2 definidos, é necessário então, criar no programa o *Job*, dado que se trata de uma modelação de análise não linear, é necessário realizar uma pequena alteração nesta partição. A alteração trata-se de alterar nas definições de processamento definindo-se a utilização virtual de quatro processadores melhorando assim, a velocidade da simulação bem como a melhoria das capacidades gráficas como representado na Figura 46.

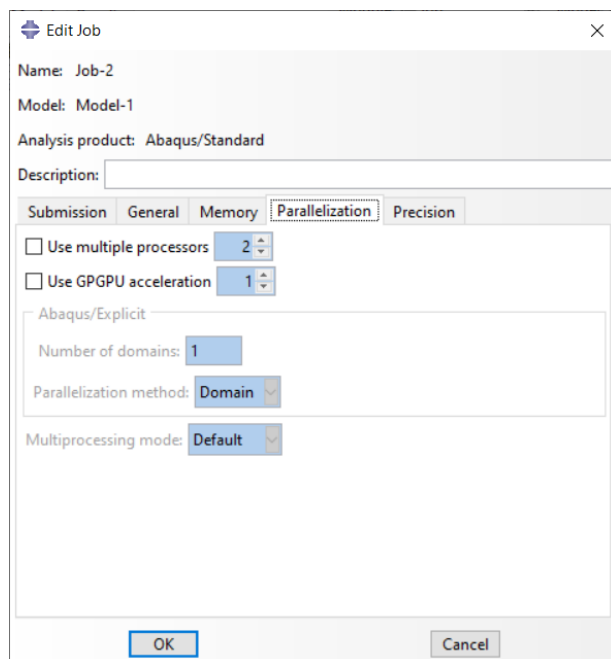


Figura 46 -Configuração do Processamento do modelo

### 3.10 Análise de resultados

Refere-se que no Anexo 1 pode ser encontrado o vídeo demonstrativo de toda a modelação da Viga A2 com modelo modificado.

Para a análise de resultados do comportamento global da viga foram extraídas as relações tempo – momento torsor no apoio RP1 e tempo – rotação no ponto RP2. O posterior tratamento dos dados fornecidos pelo ABAQUS passou pela conversão da rotação de radianos para graus e pela divisão da rotação total, em radianos, pelo comprimento unitário da viga, conforme apresentado no Anexo 2. Como pode ser observado na Figura 47, os resultados obtidos utilizando o modelo modificado para a Viga A2 são bastante satisfatórios, dada a maior proximidade da curva teórica  $T - \theta$ , obtida neste trabalho com a correspondente experimental, comparativamente à obtida utilizando o modelo original [4].

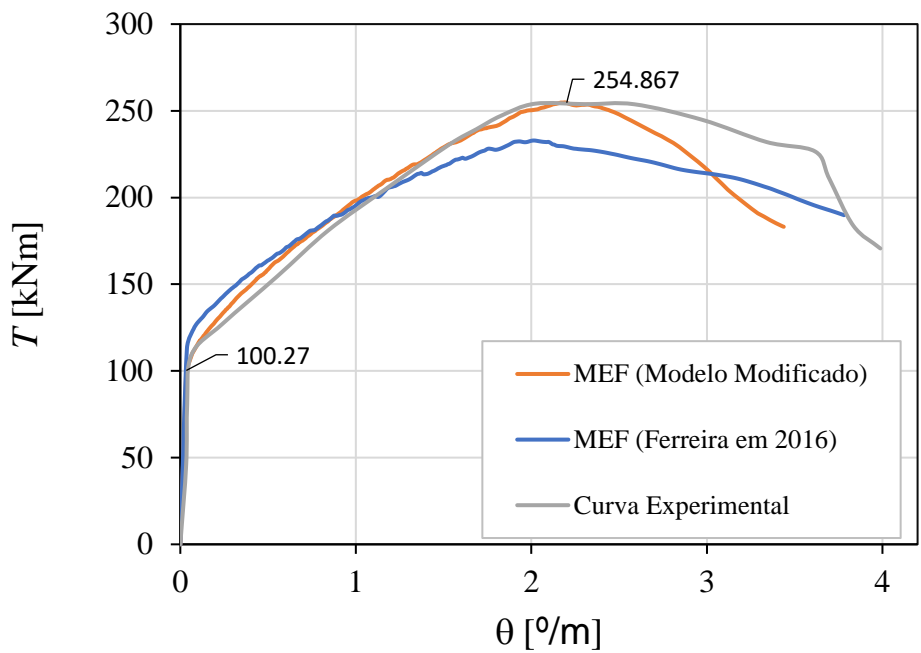


Figura 47 - Gráficos com as curvas T- θ para a viga A2

Ao analisar a curva T - θ obtida neste trabalho é importante salientar dois pontos característicos, sendo eles o ponto onde ocorre o momento torsor de fissuração e a sua respectiva rotação ( $T_{cr}$  ;  $\theta_{cr}$ ) e o momento torsor resistente (último) e a sua respectiva rotação ( $T_r$  ;  $\theta_r$ ). As coordenadas destes pontos podem ser observadas na Figura 48.

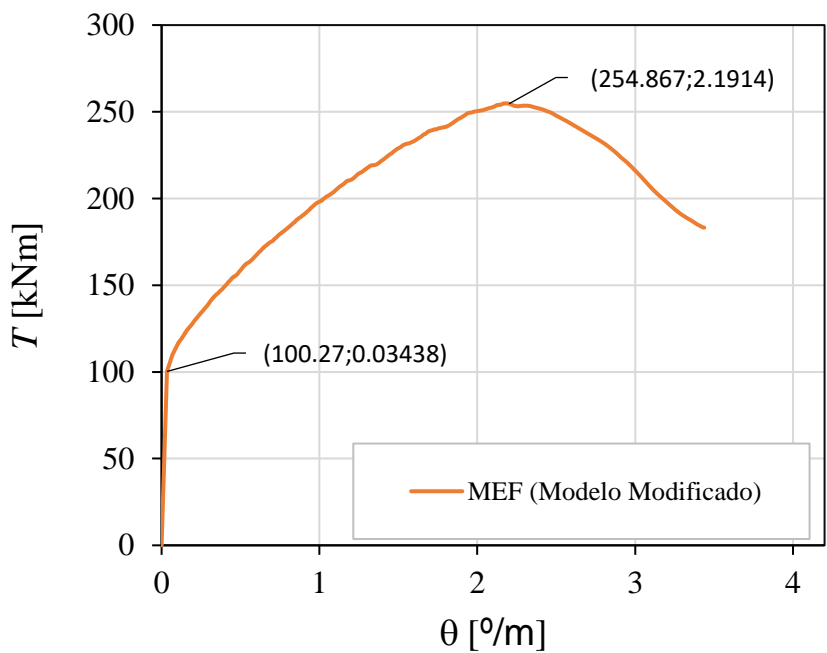


Figura 48 -Curva T- θ modelo modificado com marcações

Na Tabela 3.11, apresentam-se as coordenadas dos pontos referidos anteriormente para as curvas  $T - \theta$  ilustradas na Figura 47, bem como a comparação entre os valores numéricos e experimentais.

Tabela 3.11 - Análise comparativa para os pontos de fissuração e último

	$\theta_{cr}$ (°/m)	$T_{cr}$ (kNm)	$\theta_T$ (°/m)	$T_r$ (kNm)
Curva experimental	0.064	109.495	2.019	254.079
Curva teórica: Modelo de Ferreira, 2016 [4]	0.055	115.25	2.091	244.748
Curva teórica: Modelo Modificado	0.034	100.270	2.190	254.867
Experimental/Modelo Modificado	1.88	1.092	0.922	0.997
Experimental/Modelo de Ferreira, 2016 [4]	1,164	0,95	0.966	1.039

Tendo por base o apresentado anteriormente, é possível concluir que o modelo modificado da viga A2 apresenta uma resposta mais próxima da experimental, comparativamente ao obtido utilizando o modelo de Ferreira, 2016 [4], em particular:

- O momento de fissuração, ao contrário do modelo de Ferreira em 2016 [4], situa-se ligeiramente abaixo do valor experimental. No entanto, no modelo modificado, o ponto de fissuração localiza-se mais perto do.
- Relativamente ao momento torsor resistente do modelo modificado, este é bastante próximo do valor experimental verificando-se que  $T_{r,exp}/T_{r,modelado}$  é bastante próximo de 1. No entanto, a rotação associada é ligeiramente superior à experimental.

As Figuras 49 a 53 (a) e (b) apresentam, a título exemplificativo, alguns resultados gráficos relativamente ao estado de tensão e de deformação da viga A2 para o modelo modificado. Refere-se que o vídeo ilustrativo de toda a modelação, encontra-se no Anexo 1 desta dissertação.

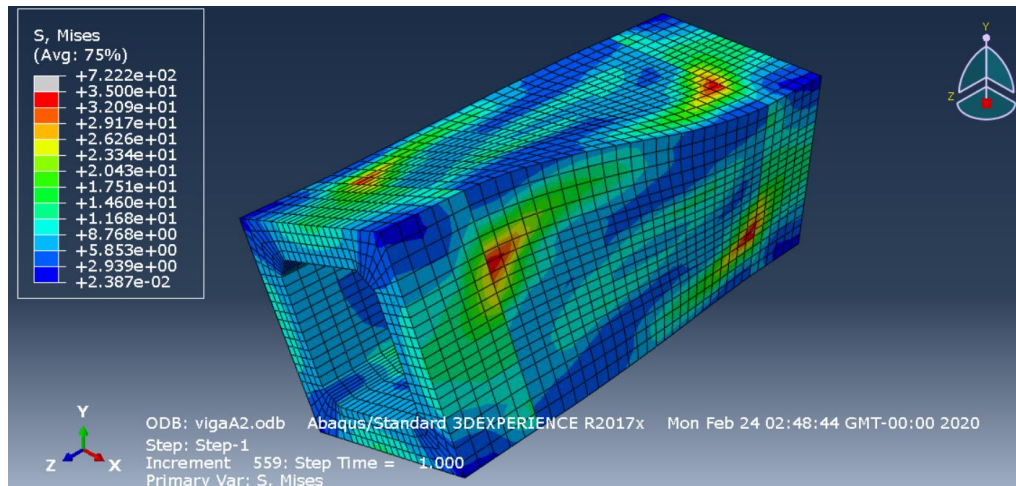


Figura 49 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo modificado da viga A2

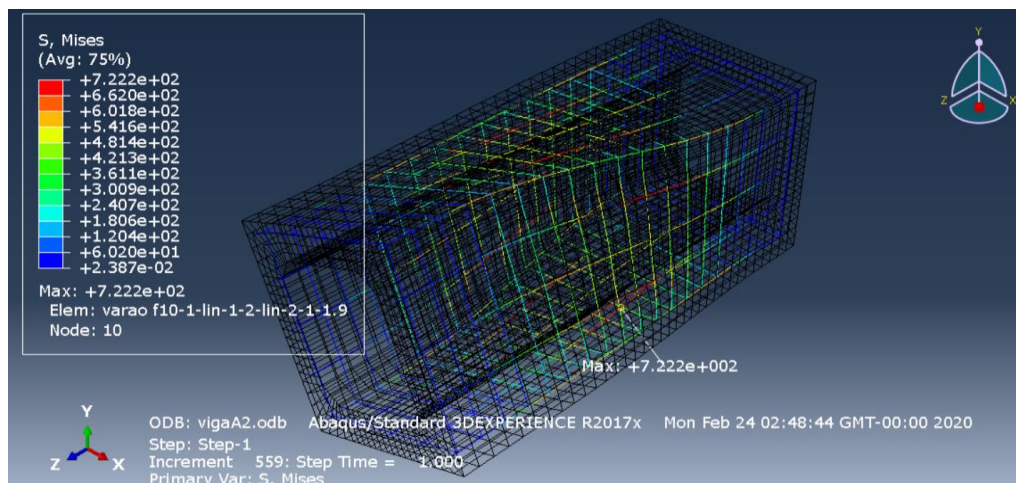


Figura 50 -Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo modificado da viga A2

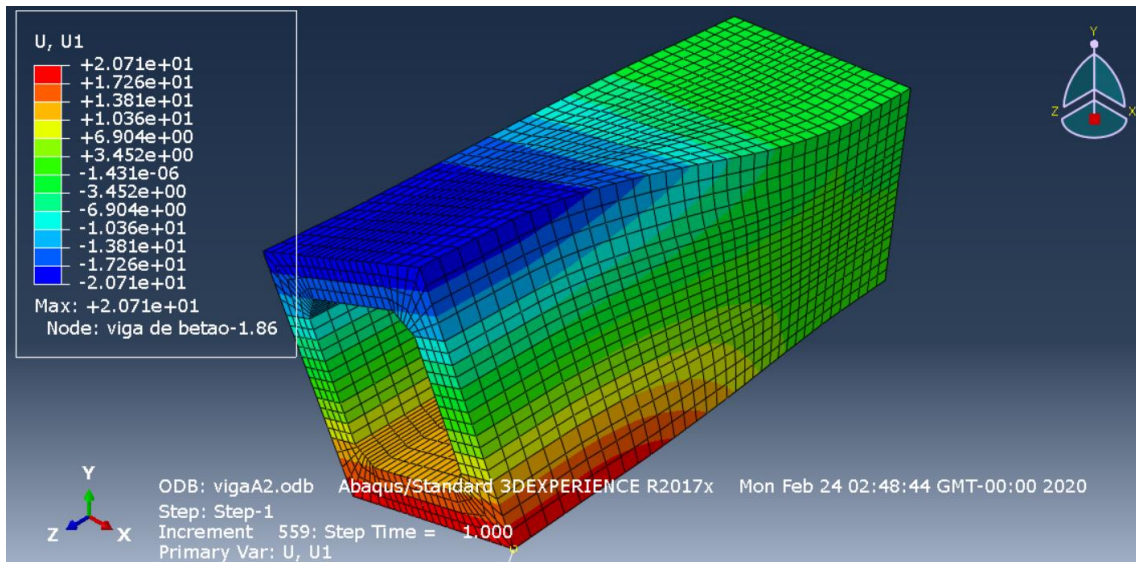


Figura 51 - Deslocamentos segundo U1 (mm) para o modelo modificado da viga A2

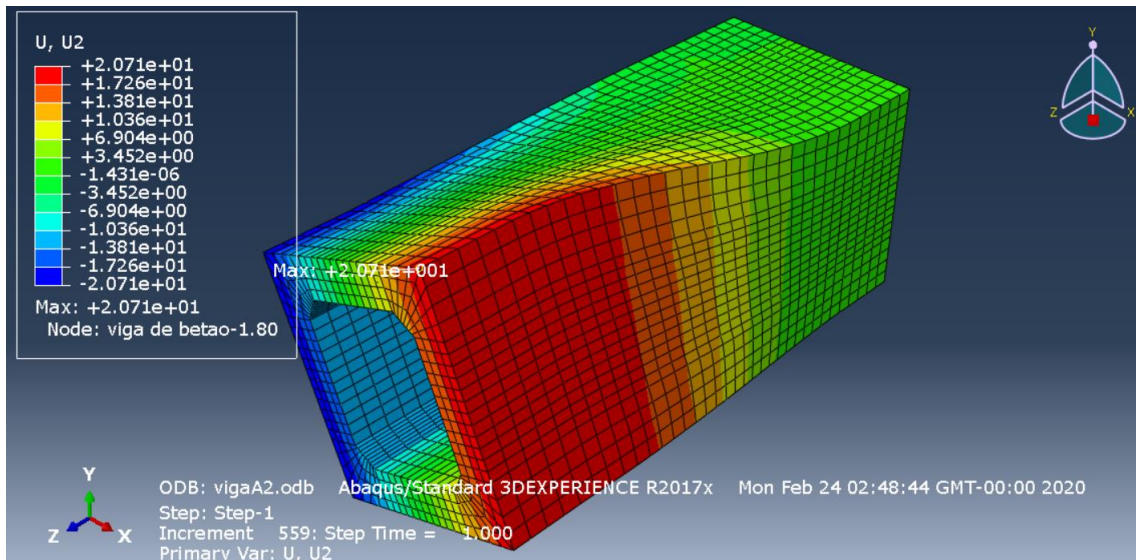
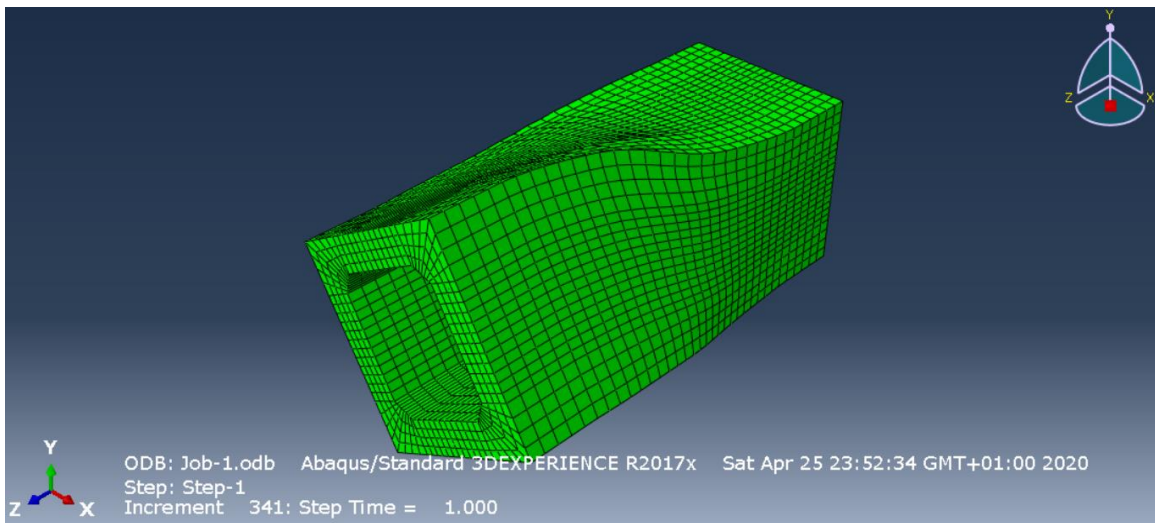
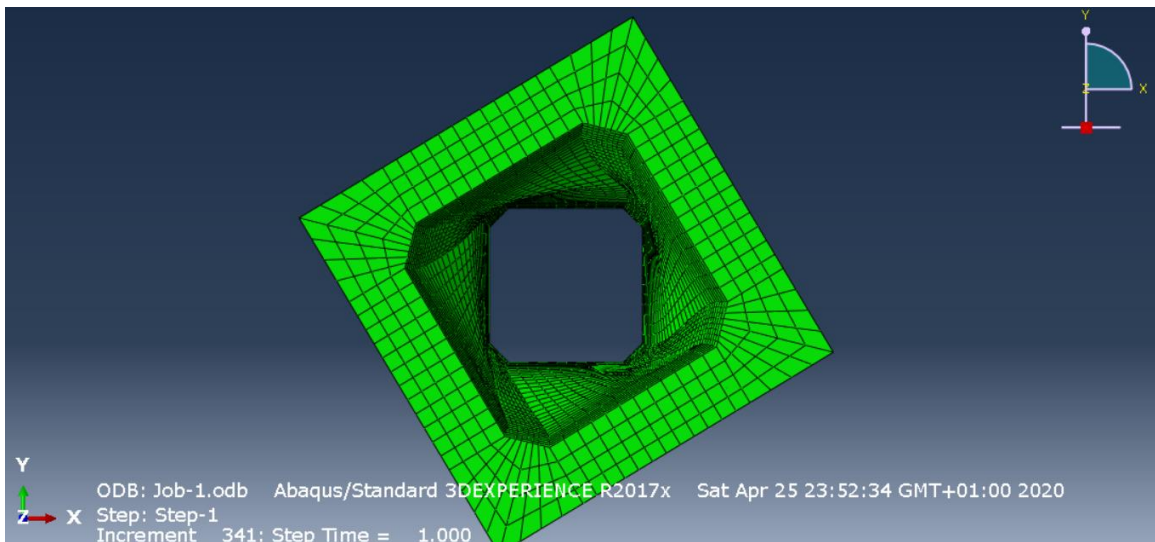


Figura 52 -Deslocamentos segundo U2 (mm) para o modelo modificado da viga A2



(a)



(b)

Figura 53 -Deformação geral para o modelo modificado da viga A2, (a) e (b)



# Capítulo 4- Modelação da Viga A2 com diferentes espessuras de parede

Após a implementação do modelo modificado para a viga A2 e da sua calibração no ABAQUS, procedeu-se à variação da espessura das paredes mantendo iguais todos os restantes constituintes da viga. Desta forma, com o intuito de analisar o comportamento da viga A2 foram implementados modelos com diferentes espessuras, incluindo um modelo da viga A2 de secção cheia.

## 4.1 Documento Normativo de referência

A escolha das diferentes espessuras teve por base as disposições normativas de uma anterior versão do Código Americano, designadamente o ACI318R-89, [13]. Na sua cláusula 11.6.1.2, relativa à torção em as secções ocas (secções em caixão), que é o caso da viga A2, o referido código estabelece que uma secção oca retangular pode ser considerada, para efeitos de dimensionamento ao Estado Limite Último, como uma secção cheia equivalente nos seguintes casos:

- No caso de a secção ter uma espessura pelo menos igual a  $x/4$ ;
- No caso de a espessura ser inferior a  $x/4$ , mas superior ou igual a  $x/10$ , desde que nas equações o termo  $\Sigma x^2y$  seja multiplicado por  $4t/x$ .

Caso a espessura  $t$  seja inferior a  $x/10$ , a rigidez da parede deve ser contabilizada nos cálculos. Neste caso, a secção oca não pode ser aproximada a uma secção cheia equivalente para efeitos de dimensionamento. De facto, é de esperar que as vigas em caixão com parede fina podem sofrer uma rotura frágil e prematura em torção devido à instabilidade das paredes.

Para o caso de a espessura da parede ser inferior a  $x/4$  mas superior a  $x/10$ , o código considera que a resistência à torção da secção em caixão é inferior à correspondente secção cheia. A redução de resistência da secção cheia equivalente através do fator de correção  $4t/x$  é considerada conservativa em relação a resultados experimentais.

Por fim, também se verifica que a relação entre o momento torsor de fissuração e o momento torsor último decresce com a diminuição da espessura da parede.

De referir que a anterior disposição normativa desapareceu nas edições posteriores do código Americano a partir de 1995, sem que tenha sido encontrada uma justificação na literatura consultada.

## 4.2 Geometria dos novos modelos

Tendo por base o exposto na secção anterior, foram considerados 5 novos modelos com as espessuras indicadas na Tabela 4.1. Tal como apresentado na secção 4.1, os modelos definidos tiveram em conta o documento normativo apresentado, sendo que,

Tabela 4.1 - Espessuras consideradas e relação com os limites normativos segundo [13]

x (cm)	t (cm)	t/x	x/t	Limites do ACI318R-89	
				t>x/10	t<x/4
60	5.0	1/12	12.0	KO	OK
60	7.5	1/8	8.0	OK	OK
60	10.0	1/6	6.0	OK	OK
60	15.0	1/4	4.0	OK	OK
60	20.0	1/3	3.0	OK	KO
60	30.0*	1/2	2.0	OK	KO

\*secção cheia

A partir da tabela anterior, é possível então concluir que apenas um modelo (t=5cm) não pode, segundo o *Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary, 1989*, [13] ser considerado equivalente, com ou sem fator de correção, a uma secção cheia para o dimensionamento à torção

Nas secções seguintes, o objetivo é verificar, através do ABAQUS e para a viga de referência em estudo, se os limites normativos anteriormente referidos podem ser considerados válidos.

## 4.3 Modelo t=5cm

Para esta secção, foi modelada a viga A2 com uma espessura de parede reduzida para metade, ou seja, com 5cm. Na Figura 54 é possível observar o modelo de elementos

finitos da viga. Já na Figura 55 é apresentada a deformação do modelo. Nas Figuras 56 e 57 será feita uma representação do estado de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 58, 59 e 60 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 61. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

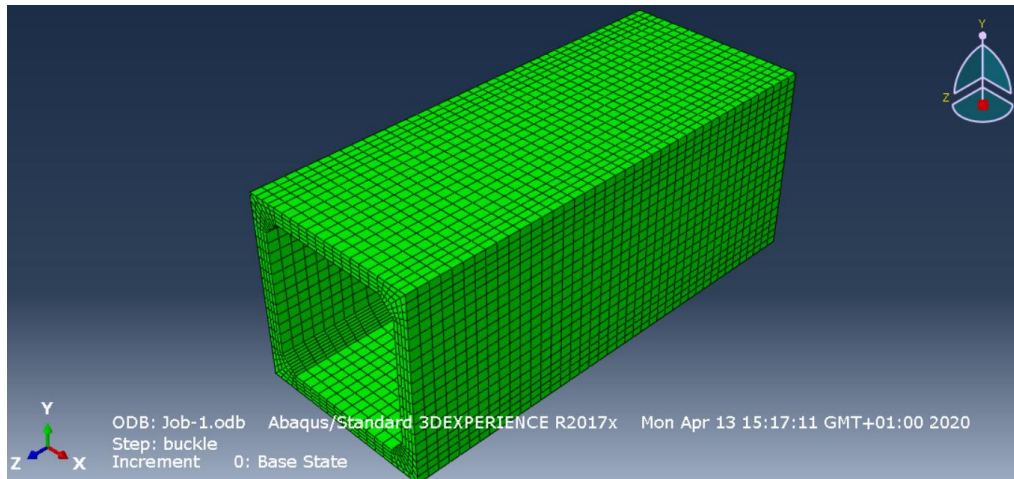


Figura 54 - Modelo com t=5cm

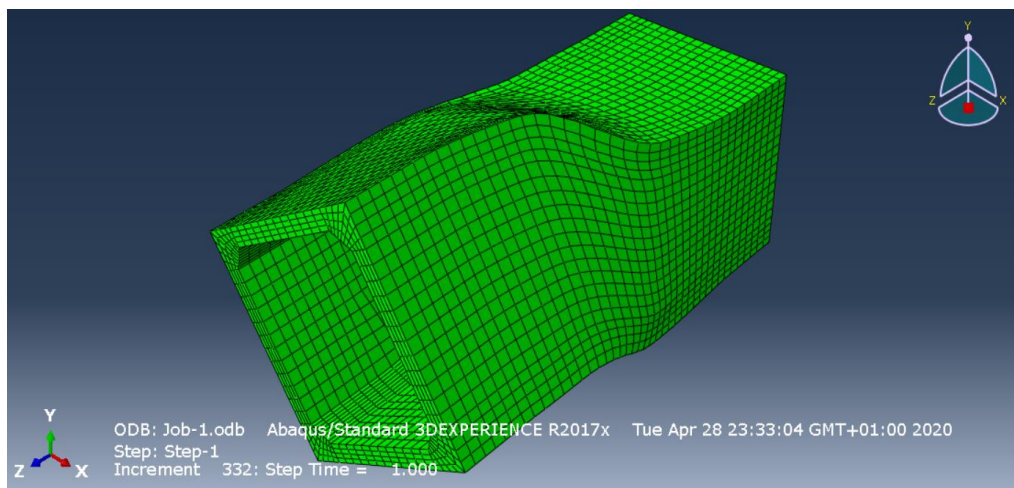


Figura 55 - Deformação do modelo com t=5cm

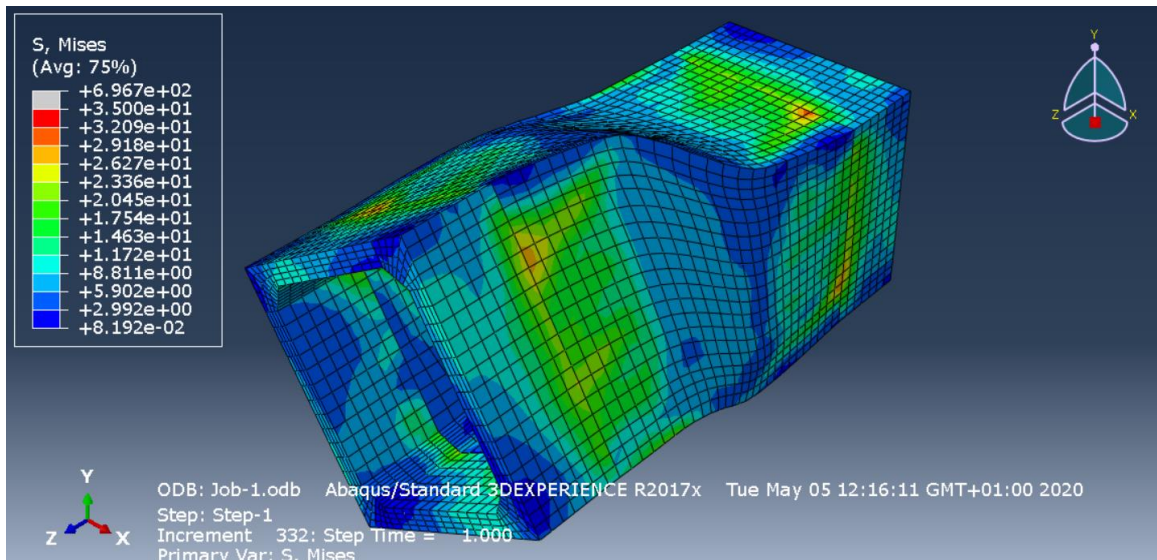


Figura 56 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=5cm

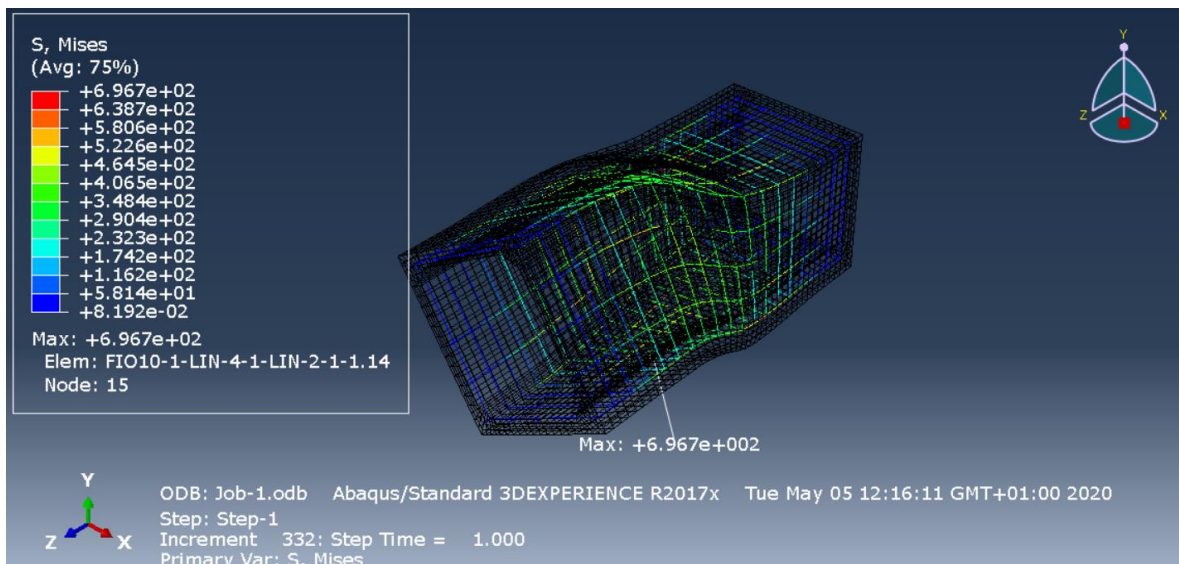


Figura 57 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=5cm

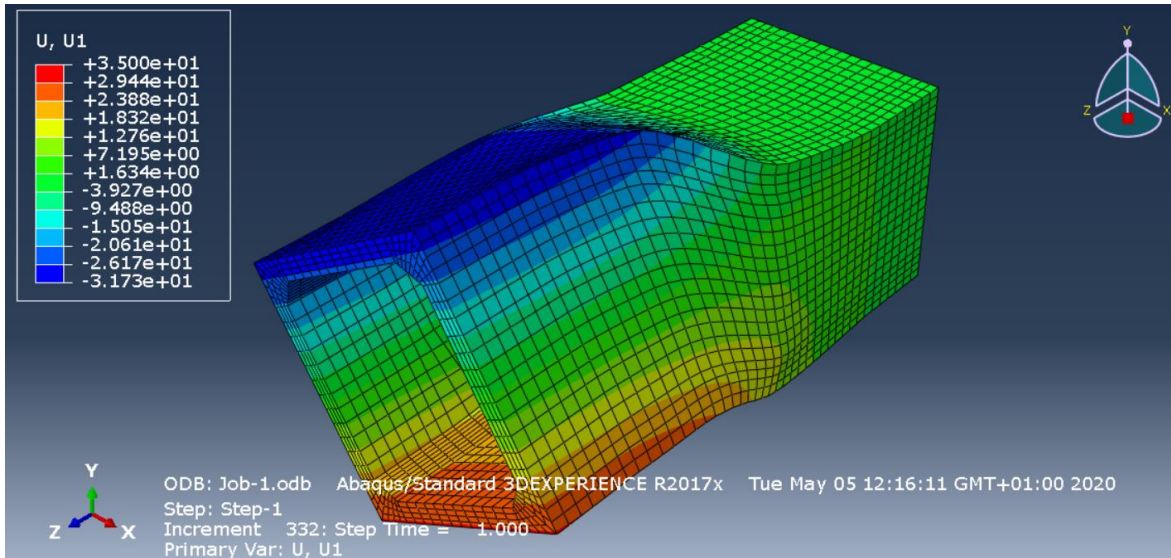


Figura 58 - Deslocamentos segundo U1 (mm) para o modelo com t=5cm

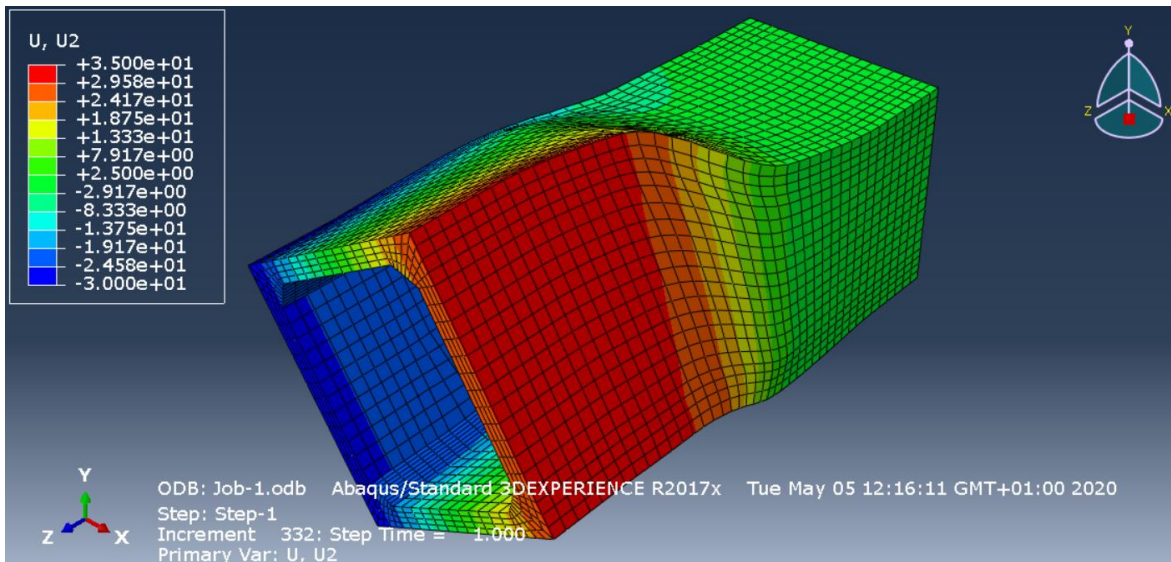


Figura 59 - Deslocamentos segundo U2 (mm) para o modelo com t=5cm

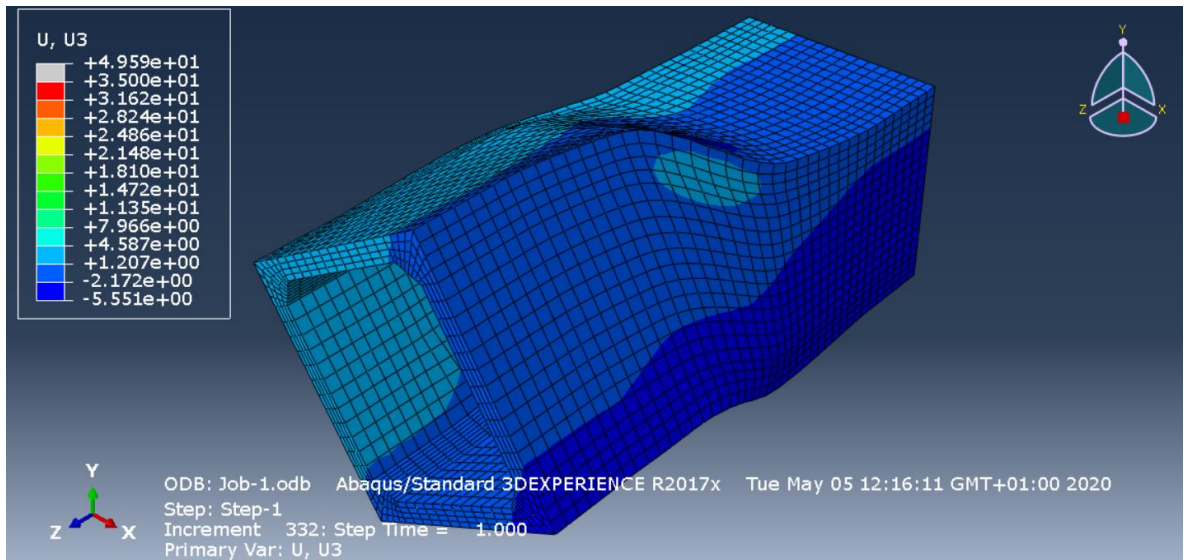


Figura 60 - Deslocamentos segundo U<sub>3</sub> (mm) para o modelo com t=5cm

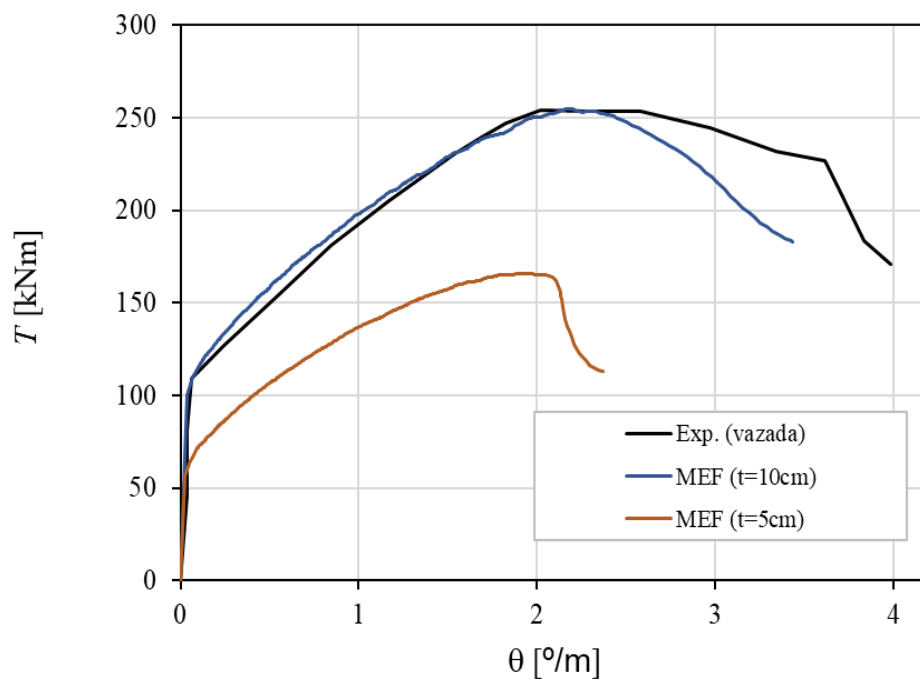


Figura 61 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=5cm

## 4.4 Modelo $t=7.5\text{cm}$

Para esta secção, foi modelada a viga A2 com uma espessura de parede reduzida para 0.75 do modelo inicial, ou seja, com 5cm. Na Figura 62 é possível observar o modelo de elementos finitos da viga. Já na Figura 63 é apresentada a deformação do modelo. Nas Figuras 64 e 65 será feita uma representação do estado de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 66,67 e 68 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em  $mm$  do modelo segundo  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , por fim, a curva  $T - \theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 69. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas  $T - \theta$  será feita mais à frente.

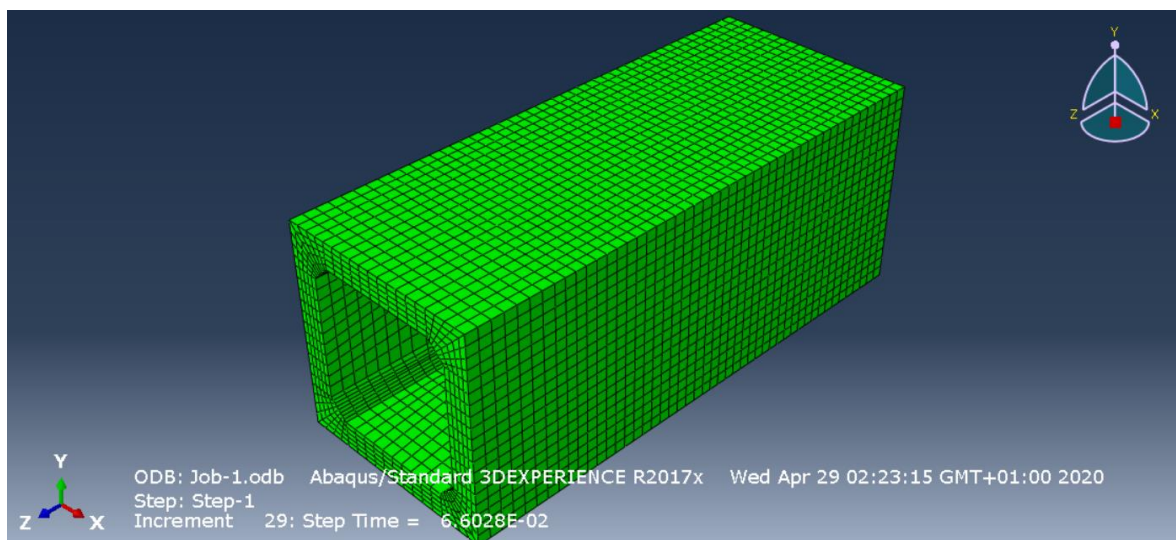


Figura 62 – Modelo com  $t=7.5\text{cm}$

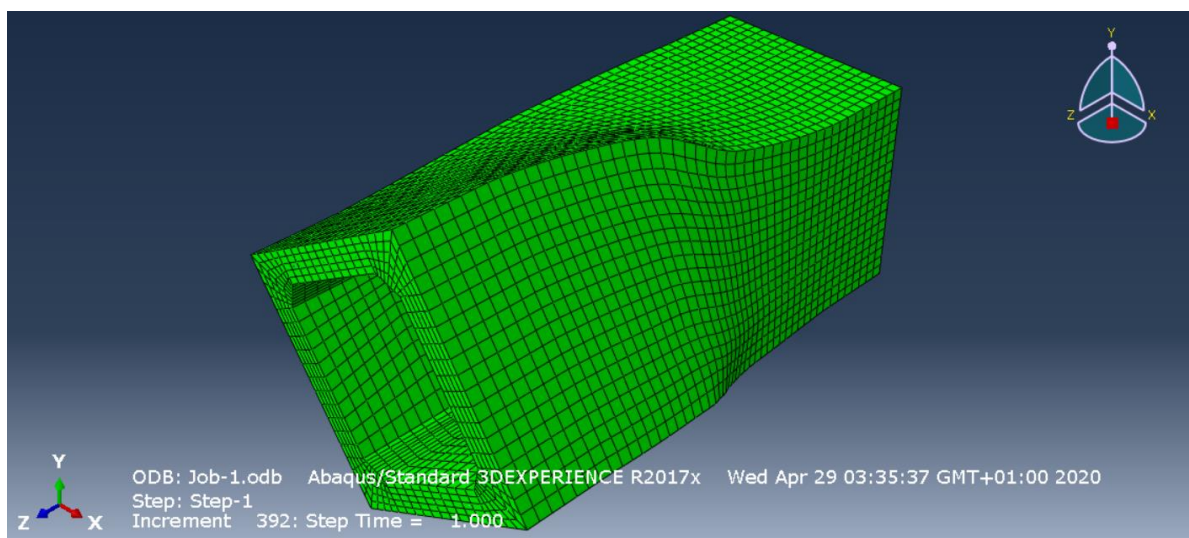


Figura 63 - Deformação do modelo com  $t=7.5\text{cm}$

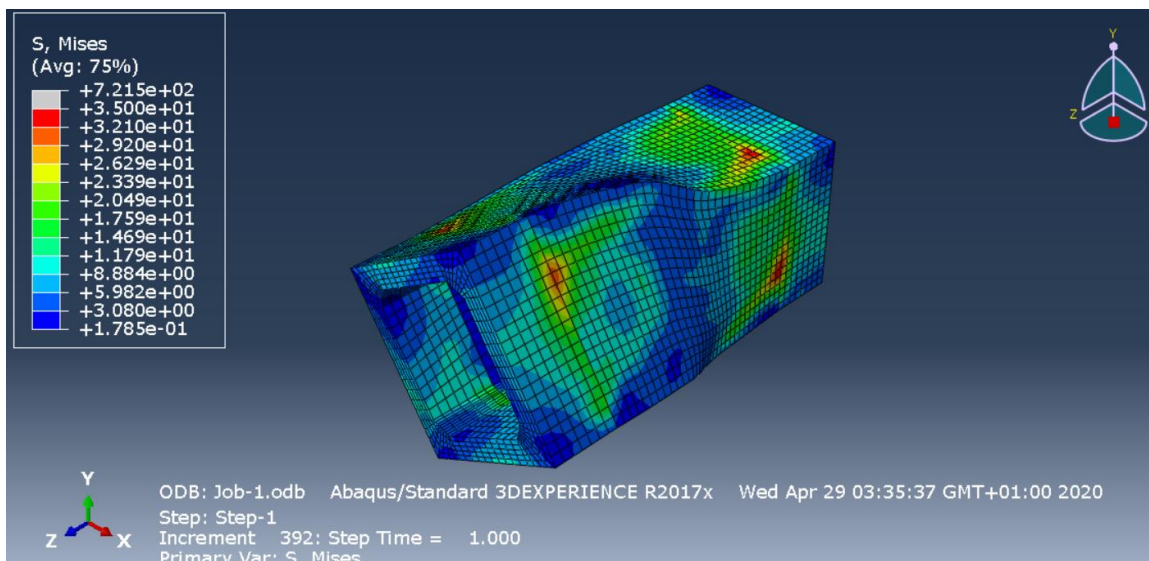


Figura 64 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=7.5cm

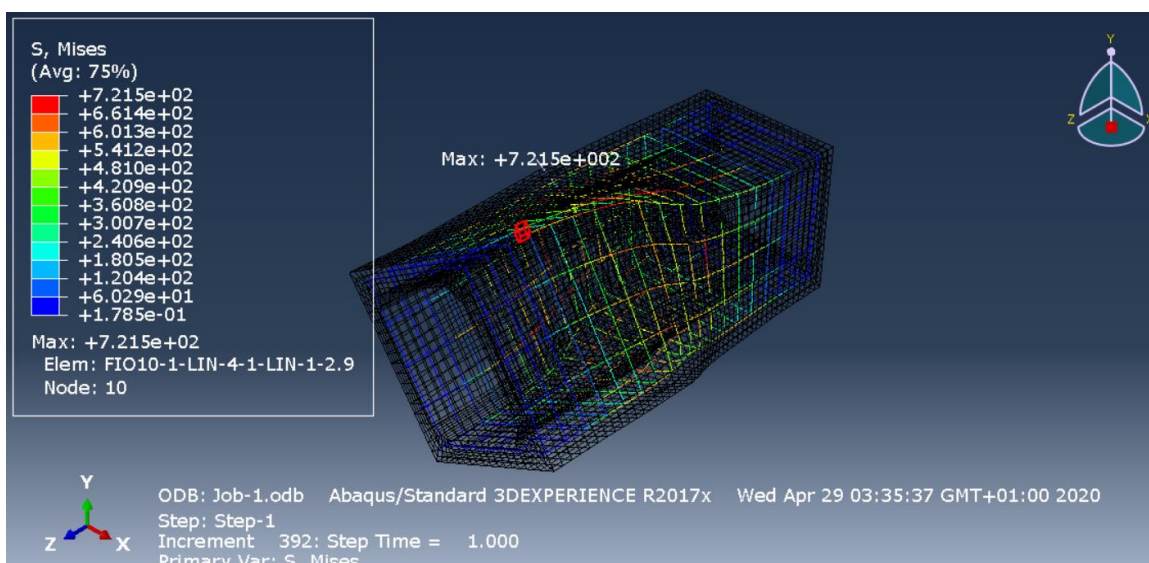


Figura 65 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=7.5cm

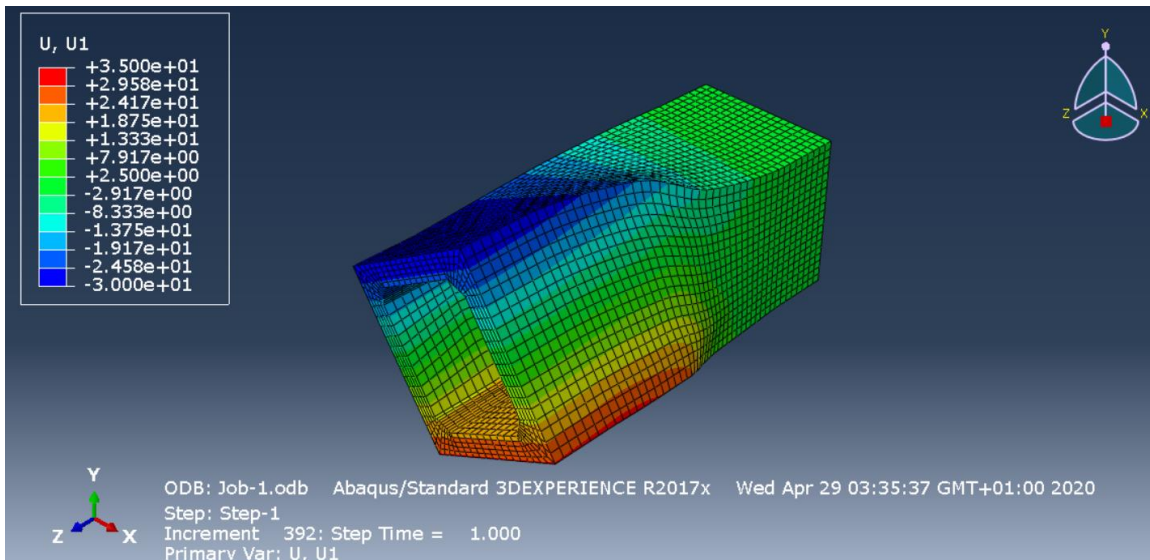


Figura 66 -Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo com t=7.5cm

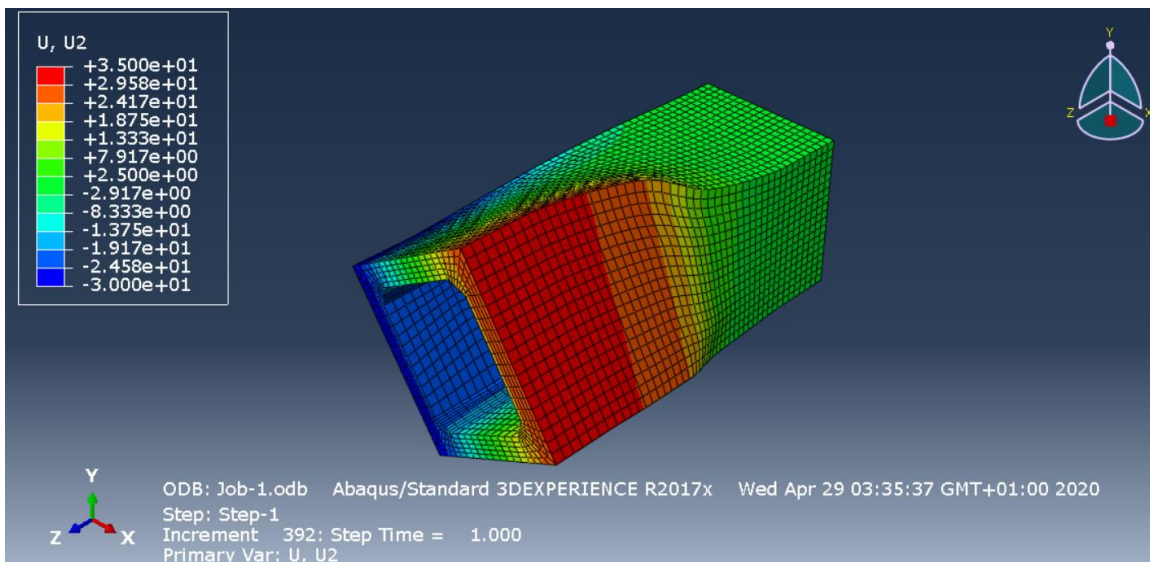


Figura 67 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=7.5cm

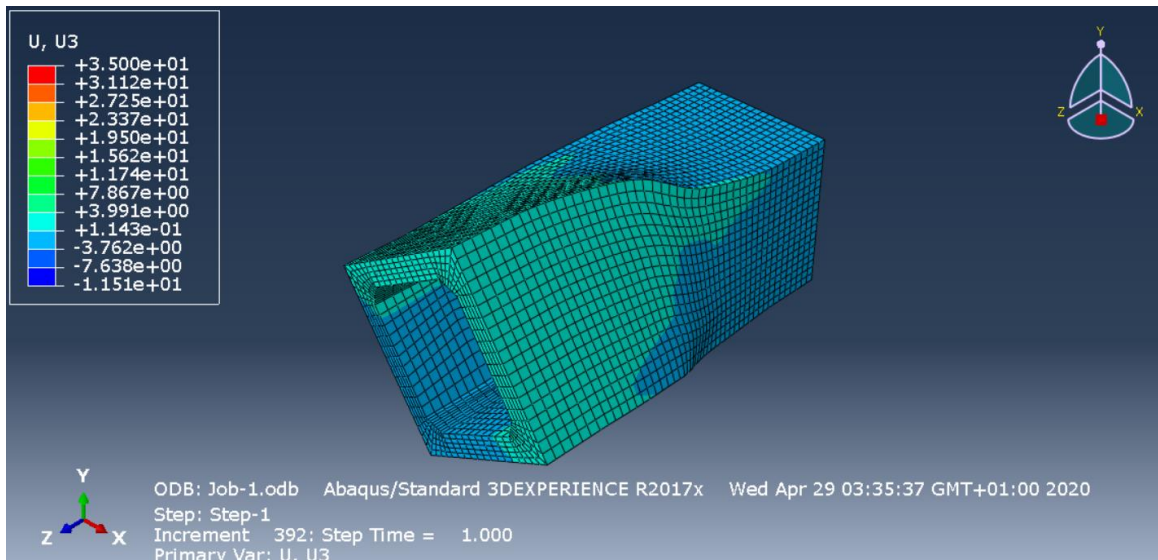


Figura 68 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo com t=7.5cm

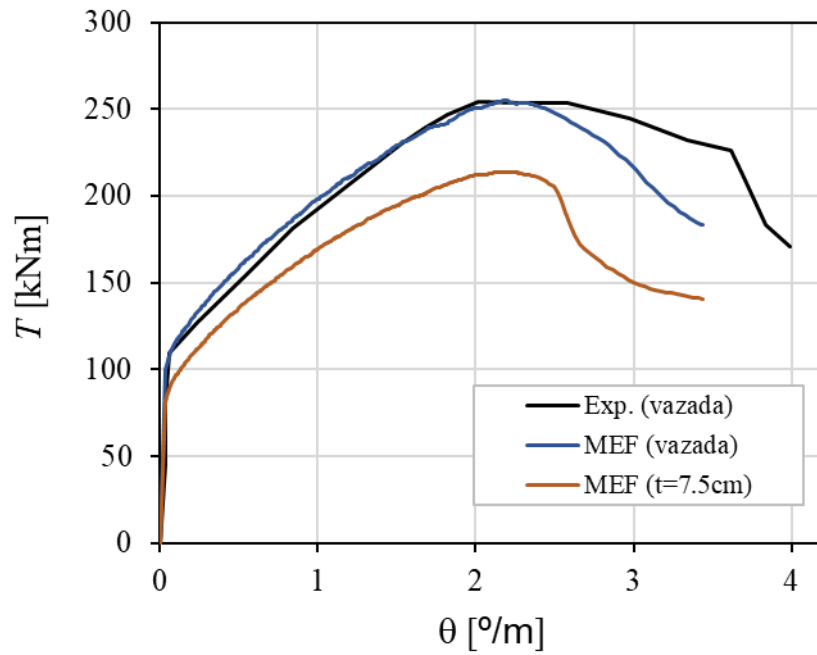


Figura 69 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=7.5cm

## 4.5 Modelo $t=15\text{cm}$

Para esta secção, foi modelada a viga A2 com uma espessura de parede aumentada para 1.5 do modelo inicial, ou seja, com 15cm. Tal como representado na Figura 70 é possível observar o modelo de elementos finitos da viga. Já na Figura 71 é apresentada a deformação do modelo. Nas Figuras 72 e 73 está representado o estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo. Nas Figuras 74, 75 e 76 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , por fim, a curva  $T - \theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 77. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas  $T - \theta$  será feita mais à frente.

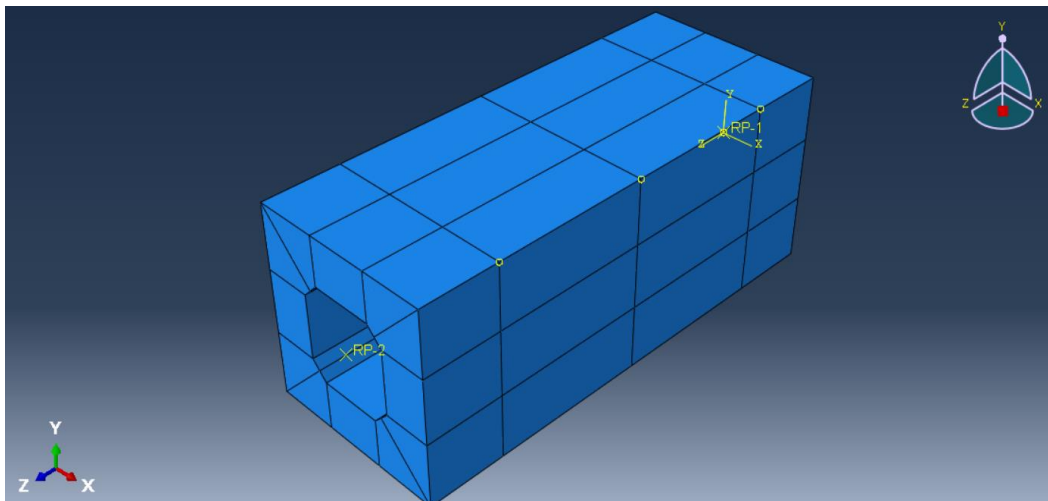


Figura 70 -Modelo com  $t=15\text{cm}$

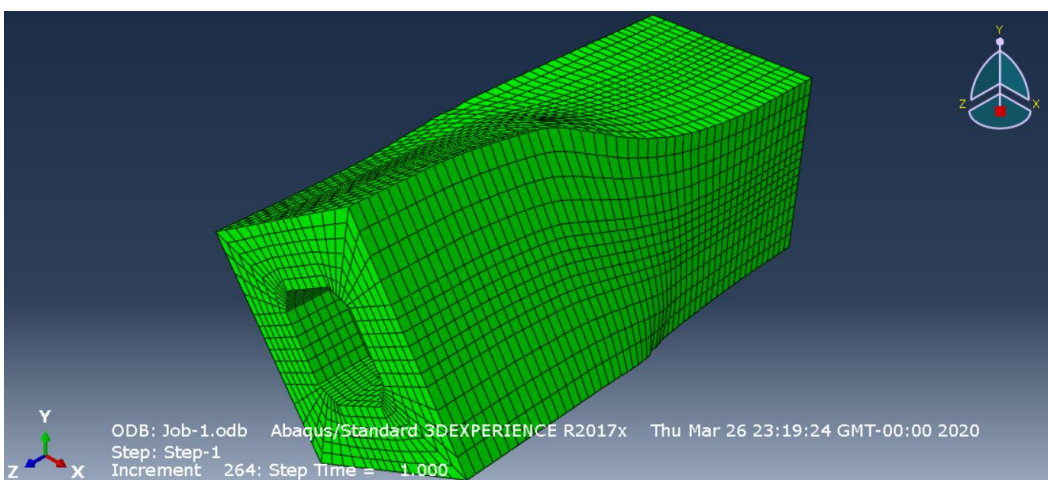


Figura 71 - Deformação do modelo com  $t=15\text{cm}$

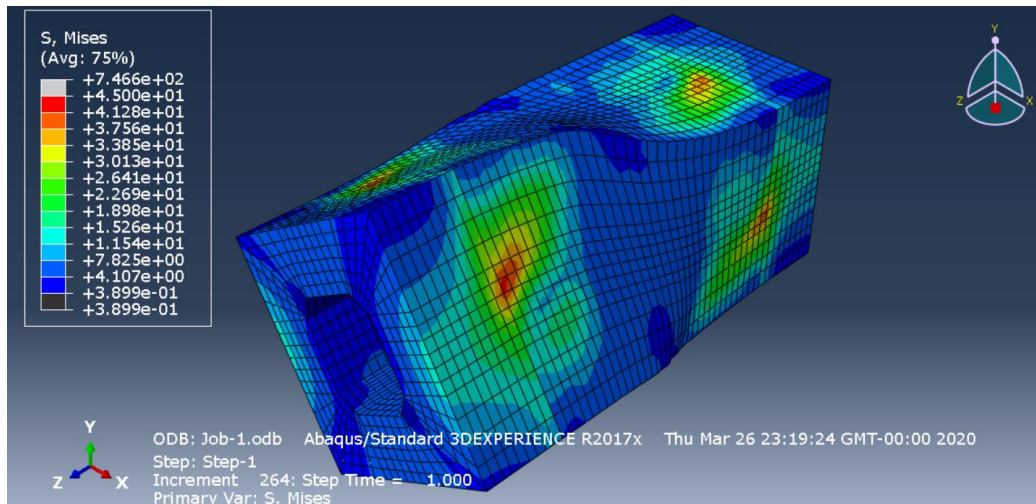


Figura 72 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=15cm

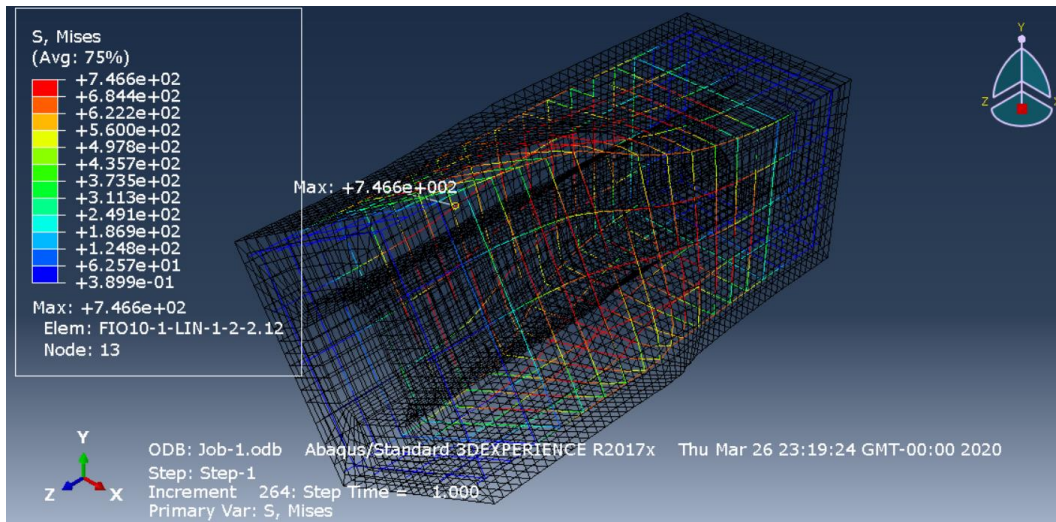


Figura 73 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=15cm

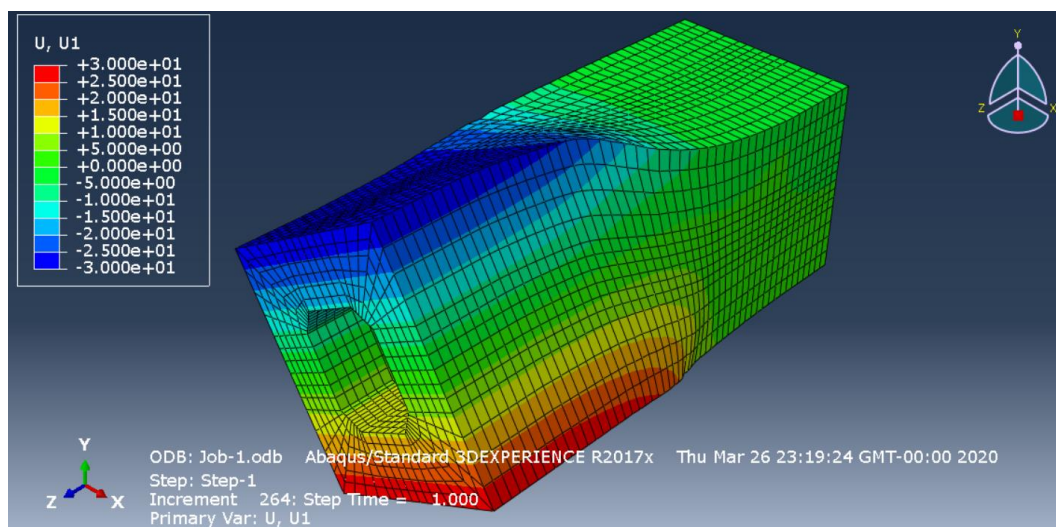


Figura 74 -Deslocamentos segundo U1 em mm modelo com t=15cm

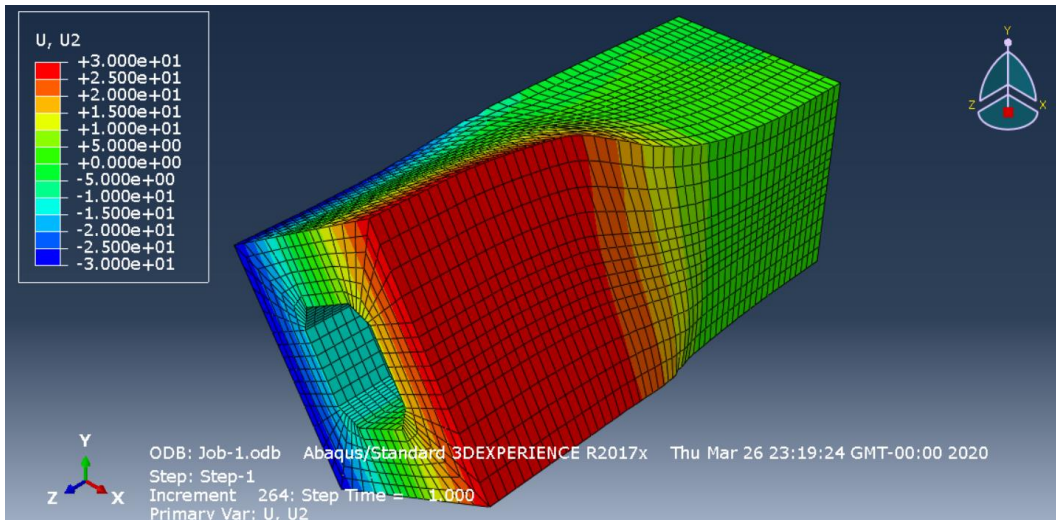


Figura 75 -Deslocamentos segundo U2 em mm modelo com t=15cm

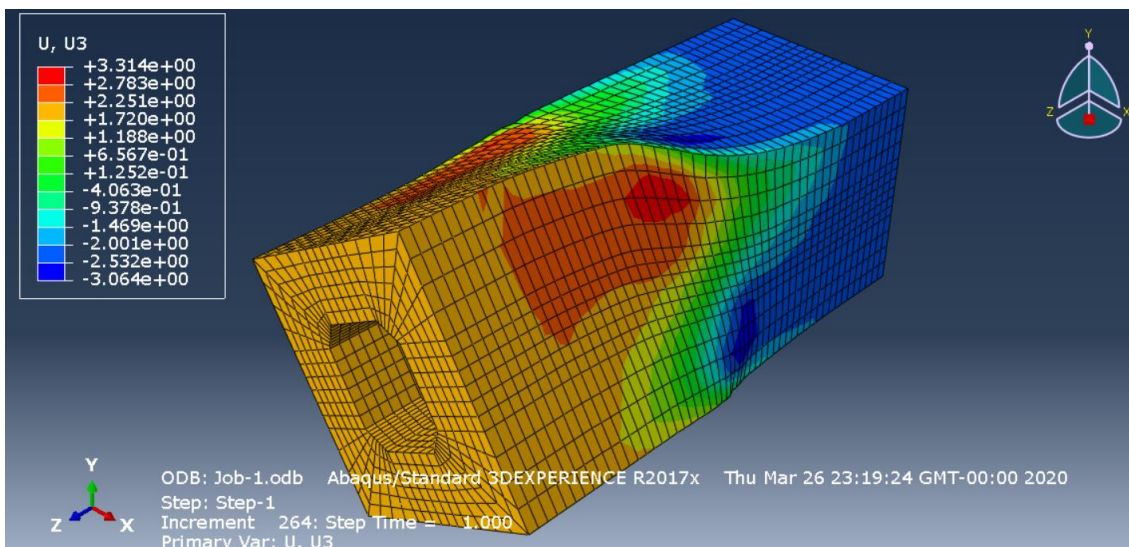


Figura 76 -Deslocamentos segundo U3 em mm modelo com t=15cm

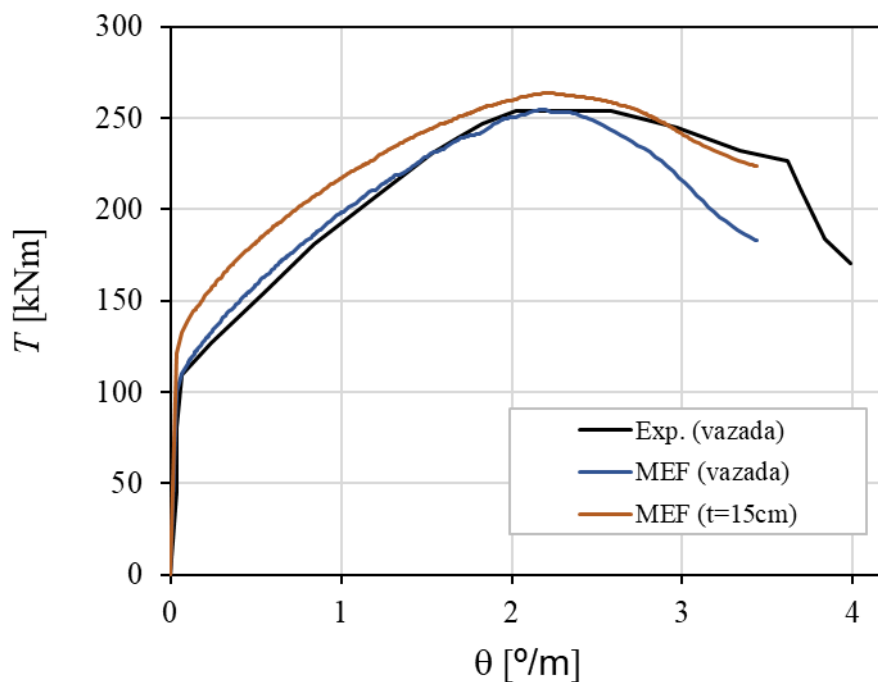


Figura 77 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=15cm

## 4.6 Modelo t=20cm

Para esta secção, foi modelada a viga A2 com uma espessura de parede aumentada para o dobro do modelo inicial, ou seja, com 20 cm. Na Figura 78 é possível observar o modelo de elementos finitos da viga. Já na Figura 79 é apresentada a deformação do modelo. Nas Figuras 80 e 81 será feita uma representação do estado de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 82, 83 e 84 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 85. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

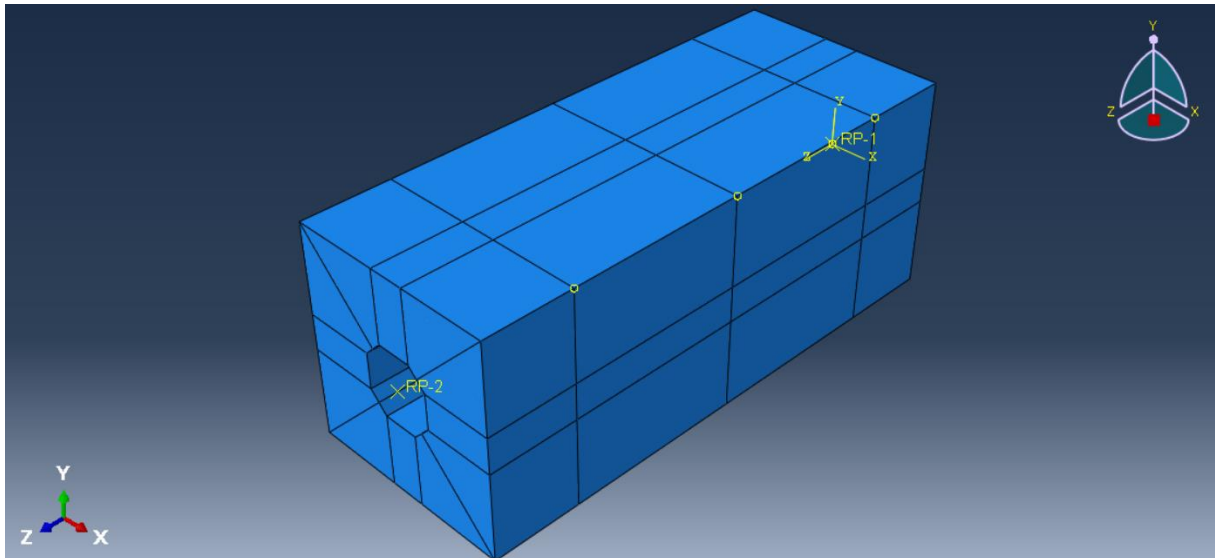


Figura 78 – Modelo com  $t=20\text{cm}$

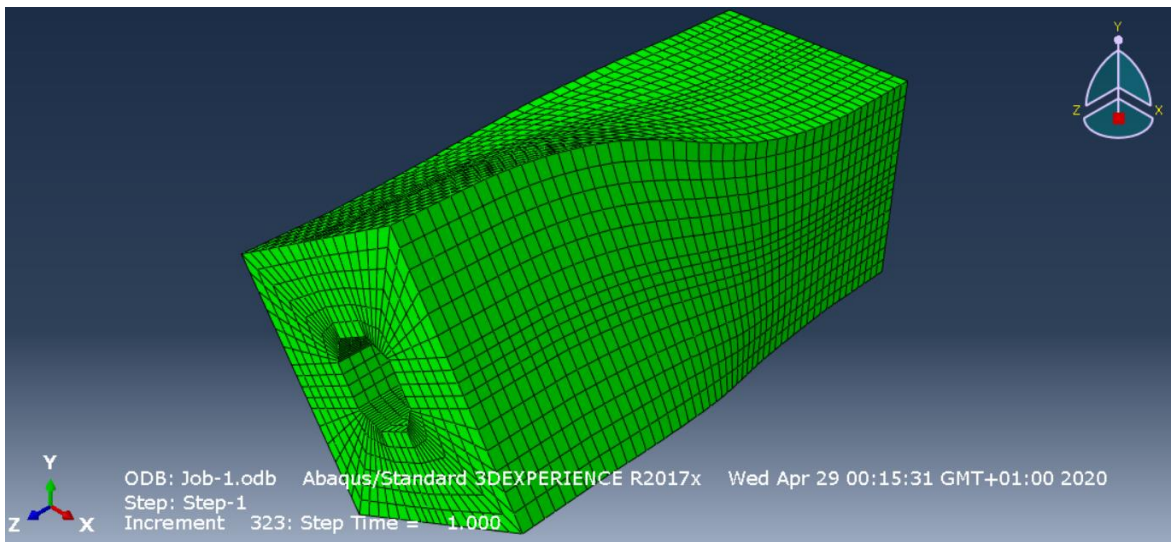


Figura 79 - Deformação do modelo com  $t=20\text{cm}$

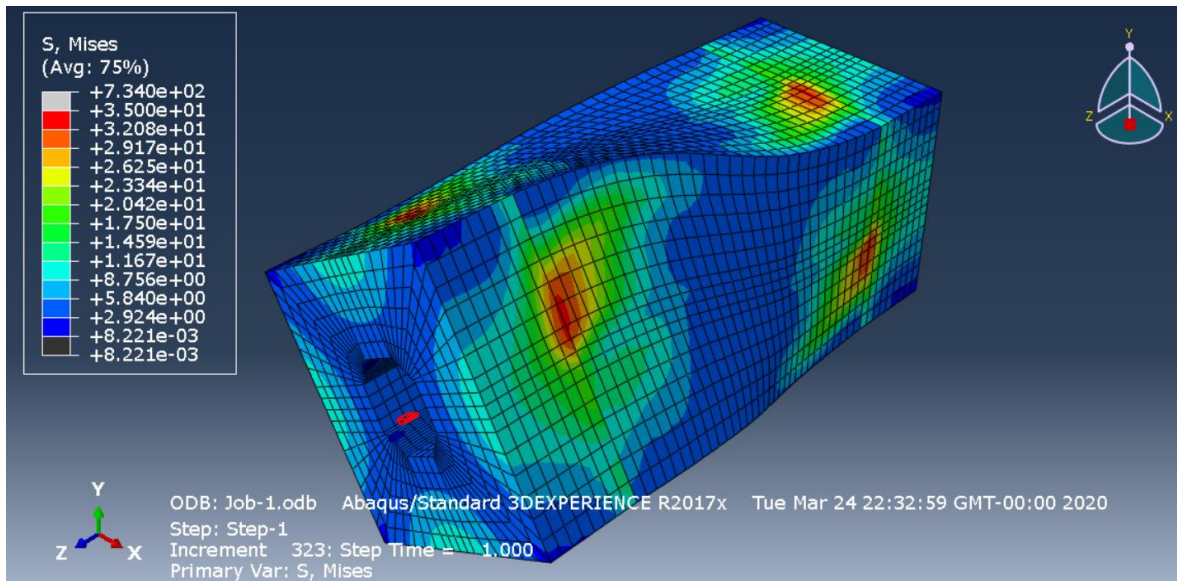


Figura 80 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com t=20cm

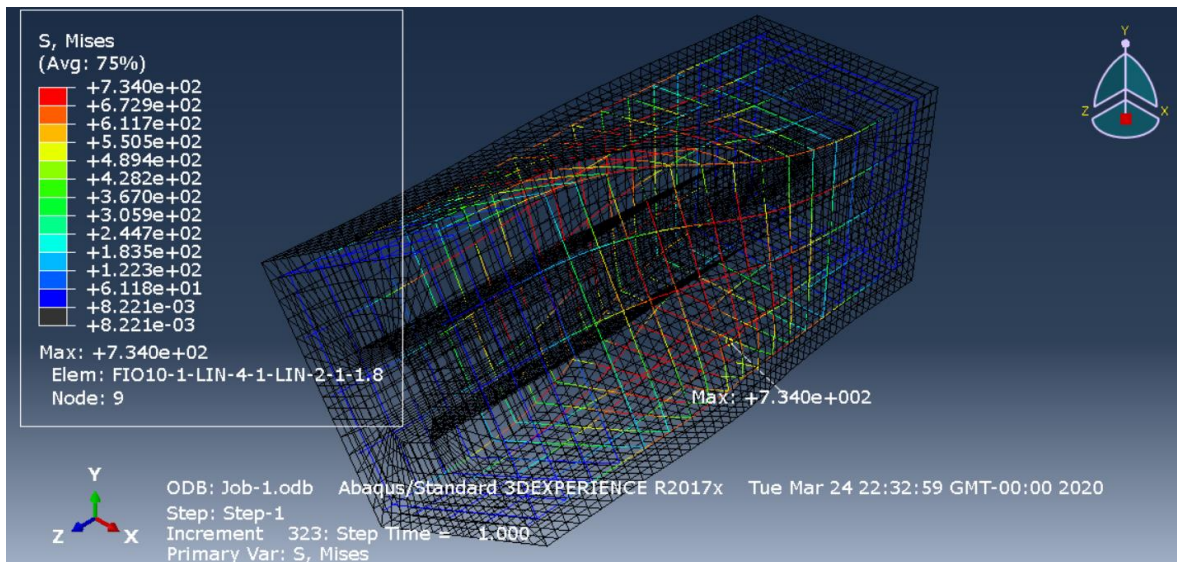


Figura 81 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com t=20cm

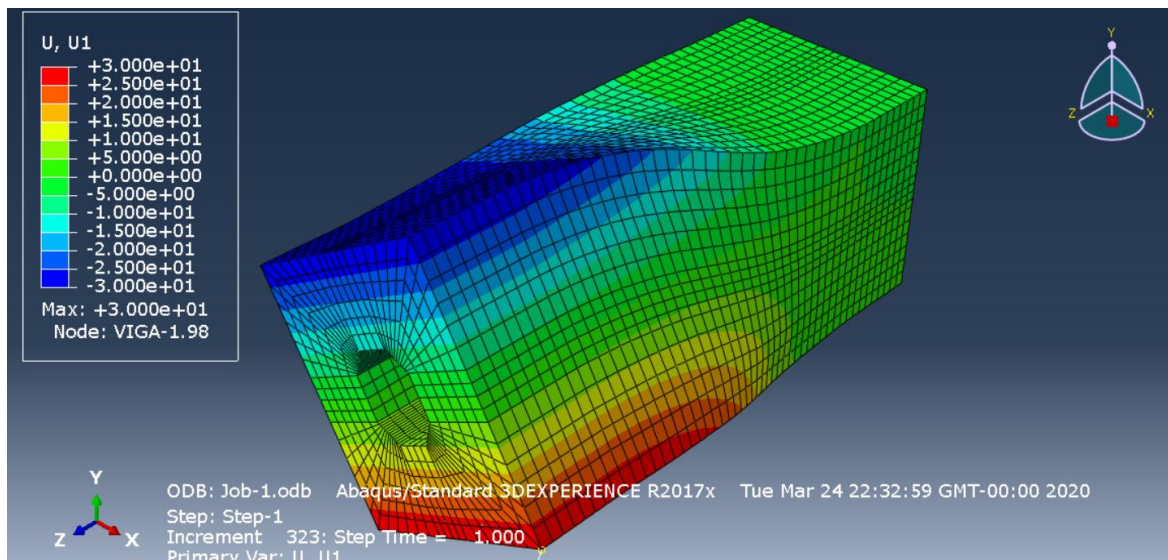


Figura 82 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=20cm

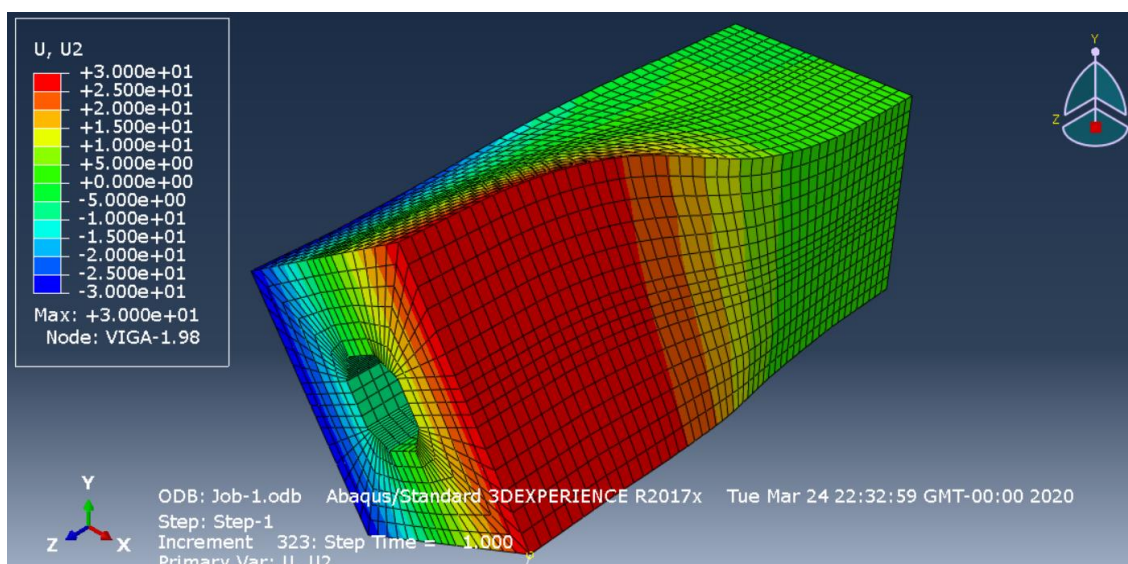


Figura 83 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com t=20cm

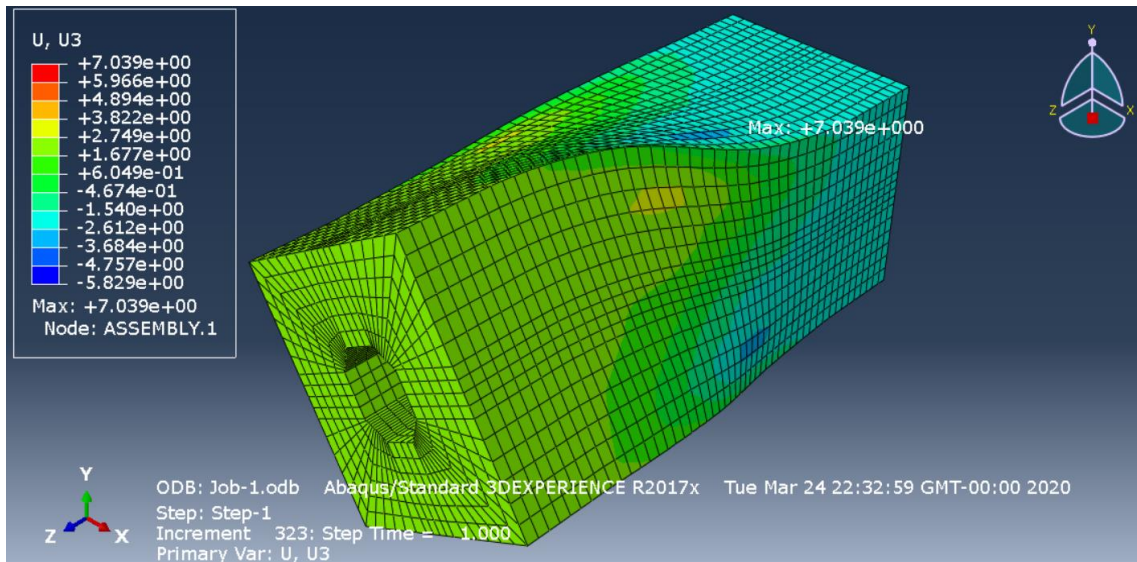


Figura 84 -Deslocamentos segundo U<sub>3</sub> em mm do modelo com t=20cm

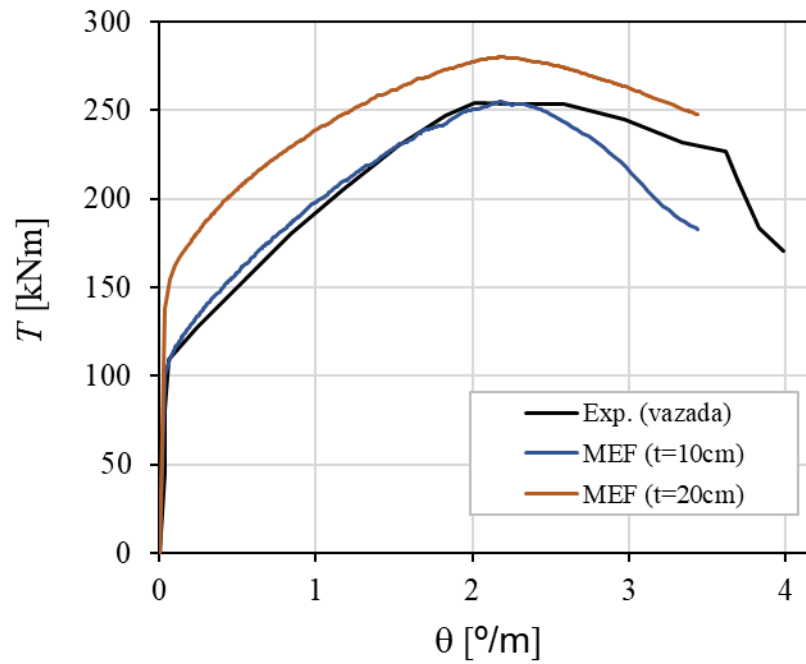


Figura 85 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo t=20cm

## 4.7 Modelo Secção Cheia

Foi modelada a viga A2 com a secção cheia, à qual foi atribuída, para efeitos de designação, uma “espessura equivalente” igual a metade da largura da viga, ou seja,  $t=30\text{cm}$ . Na Figura 86 é possível observar o modelo de elementos finitos da viga. Já na Figura 87 é apresentada a deformação do modelo. Nas Figuras 88 e 89 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 90, 91 e 92 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 93. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

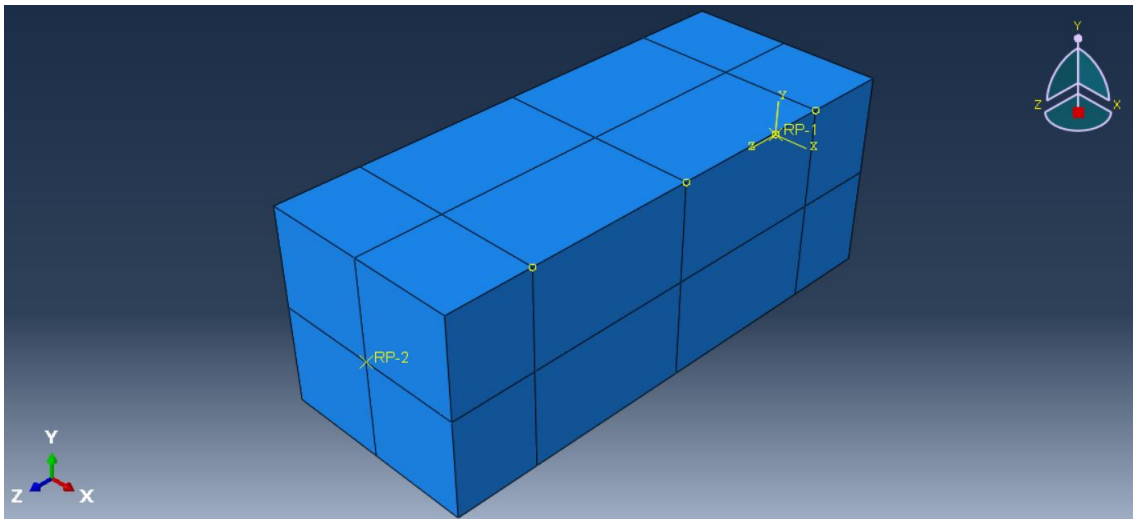


Figura 86 - Modelo com secção cheia

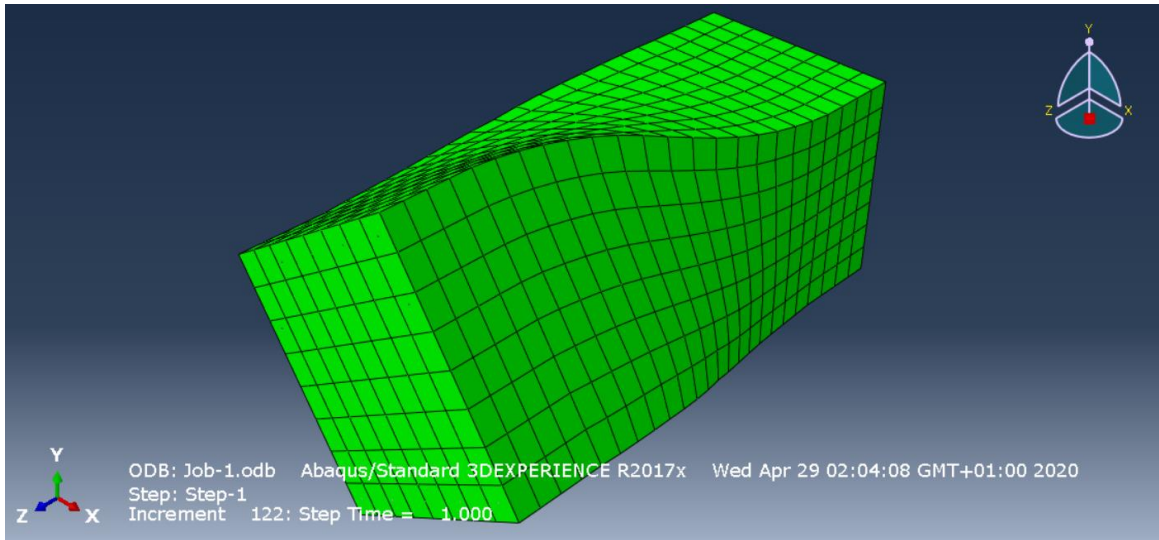


Figura 87 - Deformação do modelo com secção cheia

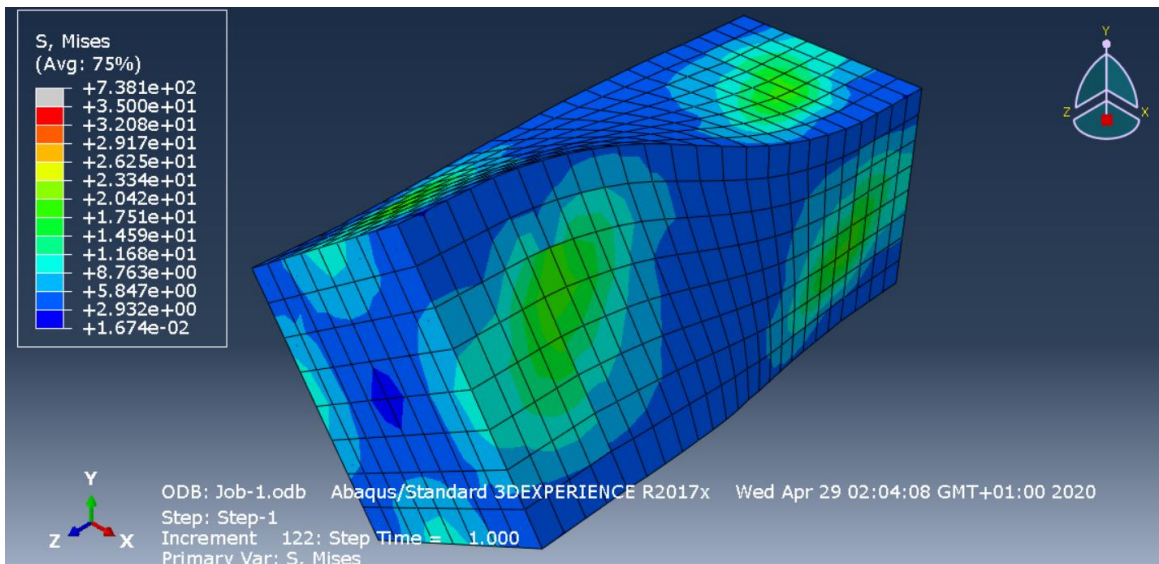


Figura 88 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo com secção cheia

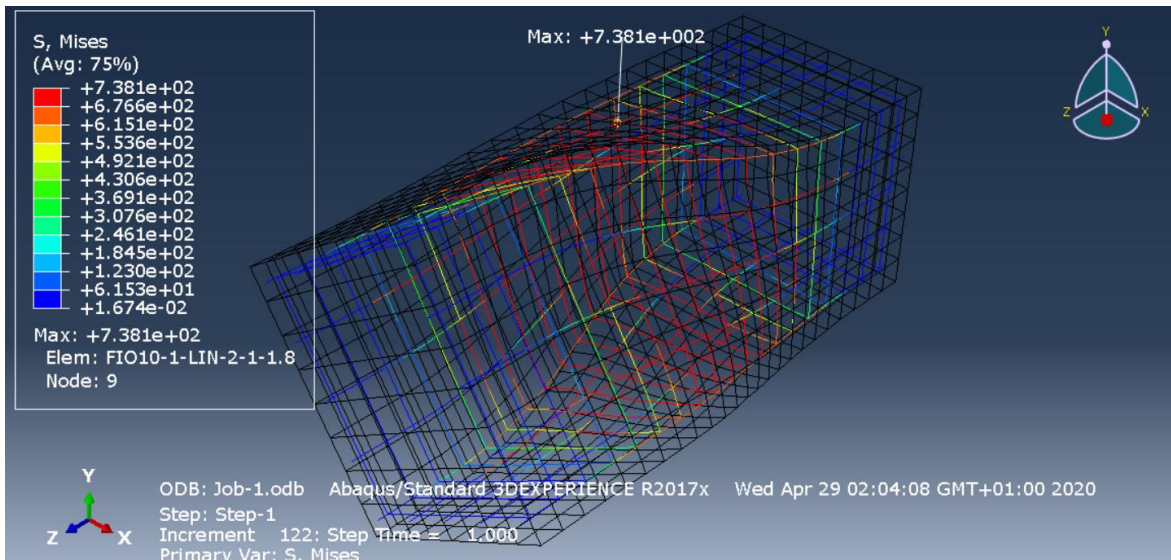


Figura 89 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo com secção cheia

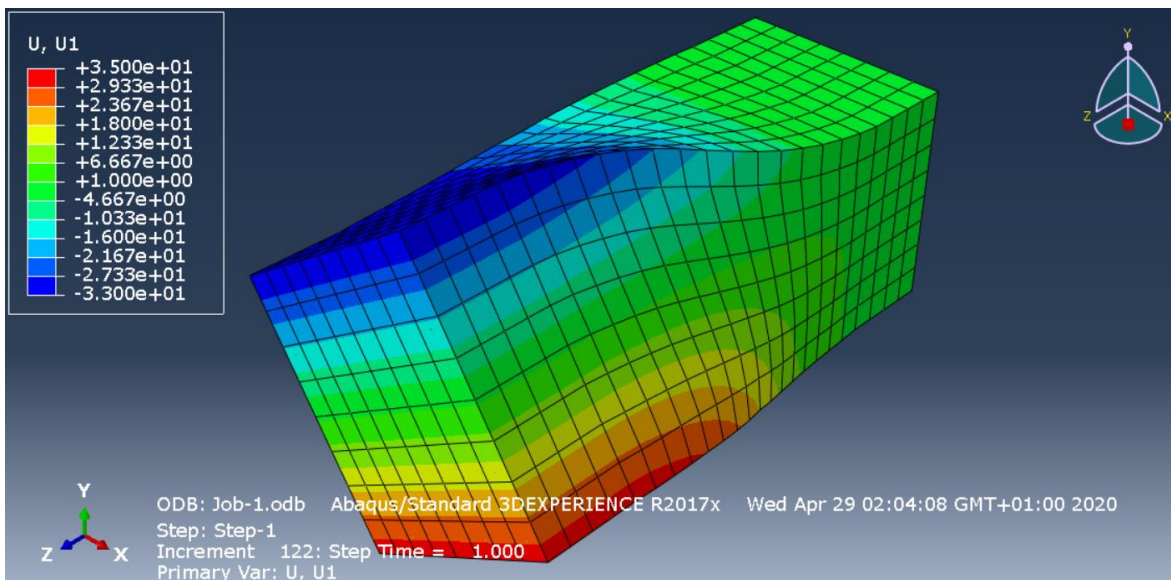


Figura 90 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo com secção cheia

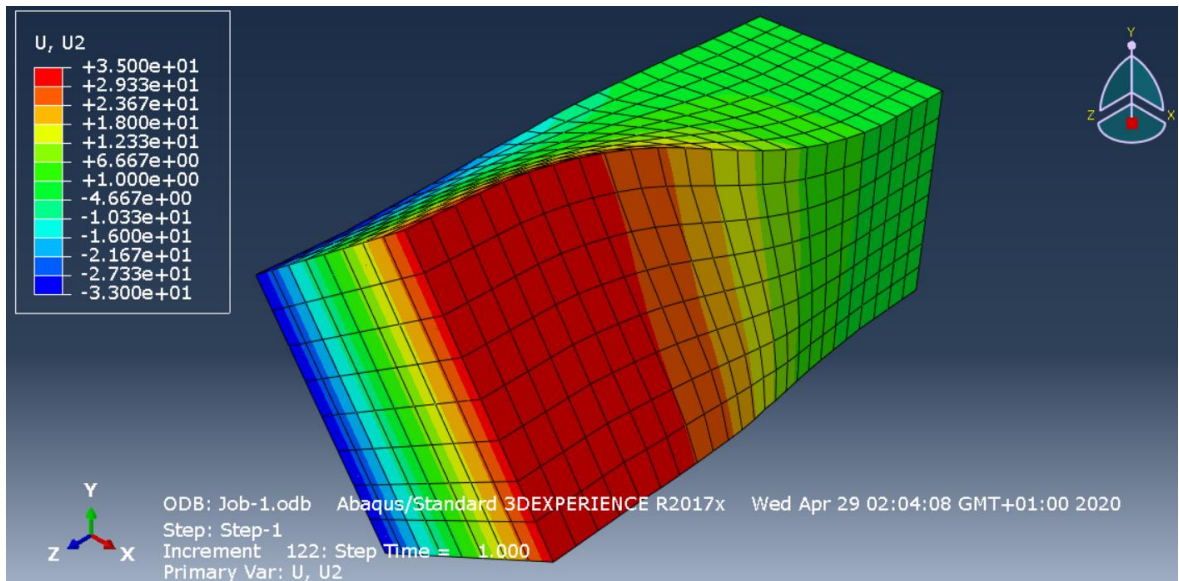


Figura 91 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo com secção cheia

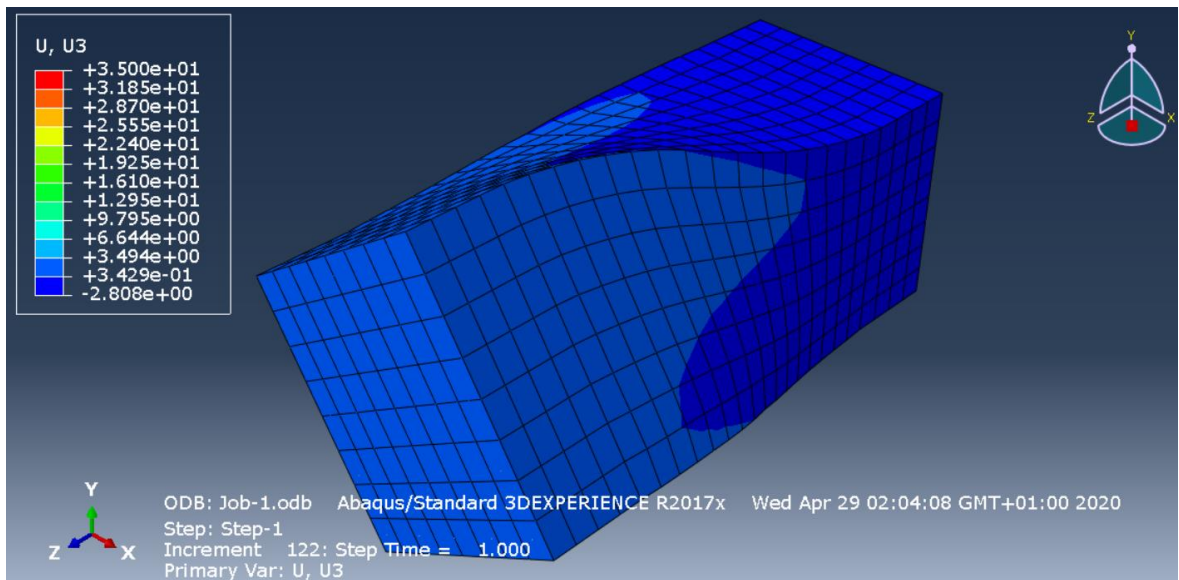


Figura 92 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo com secção cheia

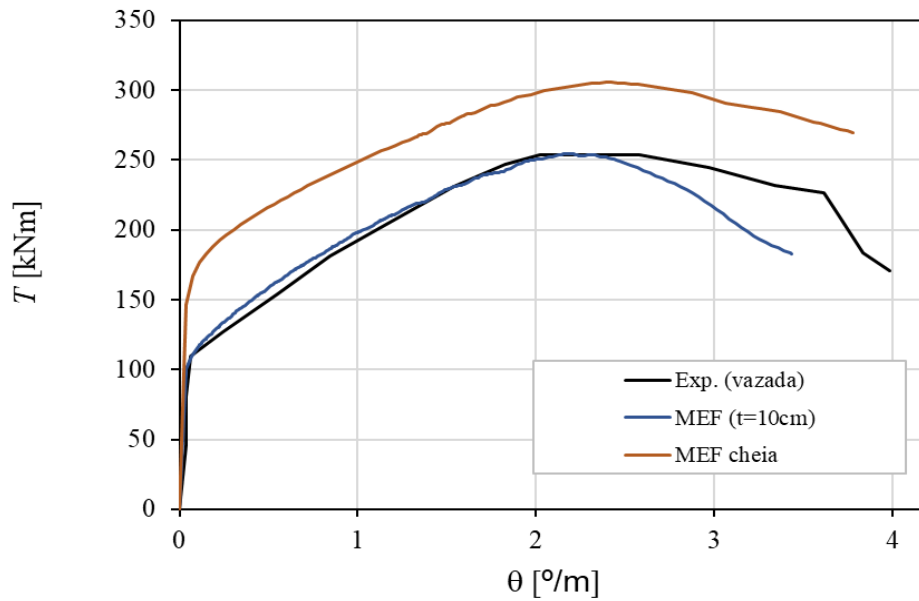


Figura 93 - Representação gráfica dos resultados da simulação do modelo com secção cheia

#### 4.8 Análise gráfica de todos os modelos

Após a modelação de todos os modelos com variação da espessura, apresentam-se seguidamente os resultados conjuntos para análise. A Figura 94 apresenta os gráficos  $T - \theta$  obtidos. A Tabela 13 apresenta alguns valores numéricos para os resultados obtidos, designadamente para os momentos torsores de fissuração e resistente (último ou máximo). Finalmente, a Figura 95, apresenta um gráfico com a variação da relação entre os momentos torsores de fissuração e resistente (último ou máximo) para as diferentes secções vazadas e secção cheia, em função da relação  $x/t$  proveniente dos valores da Tabela 4.2.

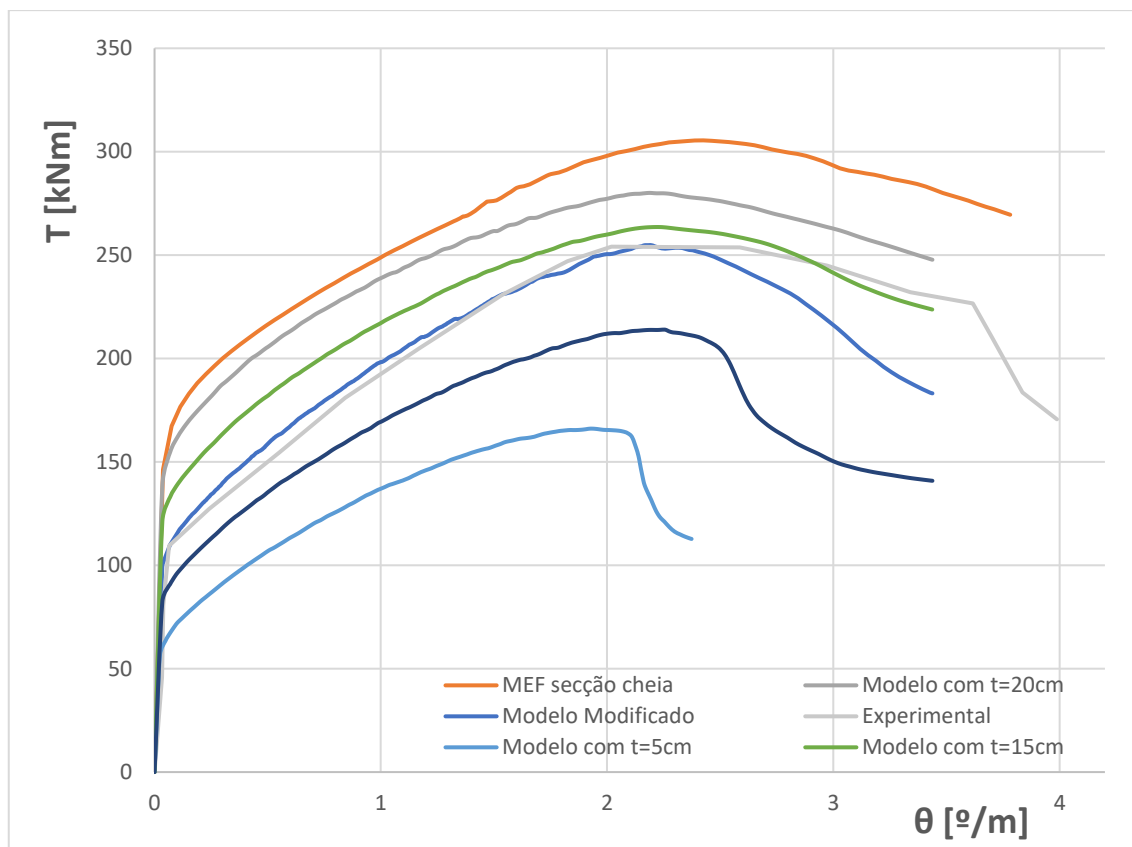


Figura 94 - Representação gráfica dos resultados de todos os modelos

Tabela 4.2 - Análise comparativa do comportamento da viga A2 com diferentes espessuras de parede

*Variações percentuais*

<b>x</b> (cm)	<b>t</b> (cm)	<b>t/x</b>	<b>x/t</b>	<b>T<sub>max</sub></b> (kNm)	<b>T<sub>cr</sub></b> (kNm)	<b>(T<sub>max</sub>)<sub>rel</sub></b>	<b>(T<sub>cr</sub>)<sub>rel</sub></b>	<b>ΔT<sub>max</sub></b> (%)	<b>ΔT<sub>cr</sub></b> (%)
60.00	5.00	0.08	12.00	166.08	56.45	0.65	0.56	-34.84	-17.20
60.00	7.50	0.13	8.00	213.96	82.48	0.84	0.82	-16.05	-6.98
60.00	10.00	0.17	6.00	254.86	100.27	1.00	1.00	0.00	0.00
60.00	15.00	0.25	4.00	263.58	121.12	1.03	1.21	3.42	8.18
60.00	20.00	0.33	3.00	280.07	138.42	1.10	1.38	9.89	14.97
60.00	30.00*	0.50	2.00	305.47	146.35	1.20	1.46	19.86	18.08

\*Secção Cheia

Onde,

$$(T_{cr})_{rel} = \frac{T_{cr(t=x)}}{T_{cr(t=10)}}$$

Equação 5.01

$$(T_{max})_{rel} = T_{max(t=x)} / T_{max(t=10)}$$

Equação 5.02

$$\Delta T_{cr} = (\Delta T_{cr(t=x)} - \Delta T_{cr(t=10)}) / \Delta T_{cr(t=10)}$$

Equação 5.03

$$\Delta T_{max} = (\Delta T_{max(t=x)} - \Delta T_{max(t=10)}) / \Delta T_{max(t=10)}$$

Equação 5.04

Tabela 4.3 - Análise comparativa do momento de fissuração e momento máximo entre os modelos com secção vazada e o modelo com secção cheia

<b>x/t</b>	<b><math>T_{cr}</math></b>	<b><math>T_{max}</math></b>	<b><math>T_{maxvazada} / T_{maxcheia}</math></b>	<b><math>T_{crvazada} / T_{crcheia}</math></b>	
	(kNm)	(kNm)	(kNm)	(kNm)	
<i>t=5</i>	12.00	56.45	166.08	0.54	0.39
<i>t=7.5</i>	8.00	82.48	213.96	0.70	0.56
<i>t=10</i>	6.00	100.27	254.86	0.83	0.69
<i>t=15</i>	4.00	121.12	263.58	0.86	0.83
<i>t=20</i>	3.00	138.42	280.07	0.92	0.95
<i>cheia</i>	2.00	146.35	305.47	1.00	1.00

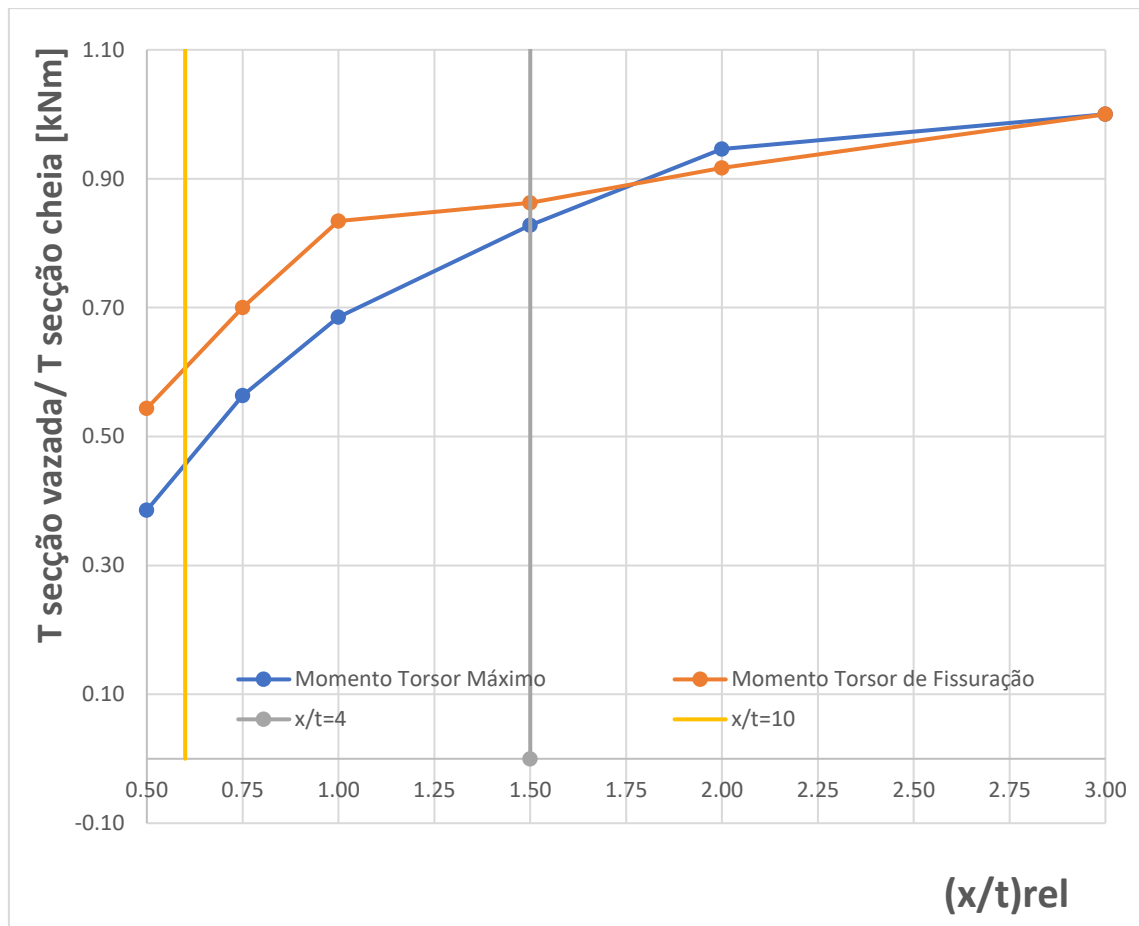


Figura 95 - Representação gráfica da relação entre os momentos torsores de fissuração e resistente (último ou máximo) para as diferentes secções vazadas e secção cheia, em função da relação  $x/t$ .

A Figura 94 mostra existir uma grande influência da espessura das paredes na resposta global das vigas à torção, em particular nos momentos torsores de fissuração e máximo. De uma forma geral, à medida que reduz a espessura da parede, a partir da secção cheia, reduzem significativamente os referidos momentos. Estas tendências são comprovadas numericamente através das Tabelas 4.2 e 4.3. A Figura 94 mostra também que para espessuras muito baixas, a rotura em torção é substancialmente mais frágil, mostrando a importância em considerar a influência da baixa rigidez das paredes e possíveis efeitos de instabilidade local.

Tendo por base o referido da secção 4.1, o código [13] apontava dois valores de referência para a relação  $x/t$ . Para valores superiores a 4, o código considerava que, para a resistência à torção, a secção vazada podia ser assimilada a uma secção cheia equivalente. A Figura 95 mostra que para  $x/t = 4$  se observa que a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia é superior a 0.8, e para valores maiores de  $x/t = 4$  a referida relação aumenta e tende para a unidade. Posto ao contrário, pode concluir-se que para  $x/t > 4$ , a resistência à torção de uma secção cheia pode ser calculada de forma conservativa, mas não excessivamente, como uma secção

vazada equivalente. Para o intervalo de  $x/t$  entre 10 e 4, observa-se que a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia tende a baixar rapidamente à medida que a relação  $x/t$  aumenta (isto é, à medida que a espessura reduz). Para este intervalo, o código de referência [13] impõe um fator de correção igual a  $4t/x$  para corrigir a resistência à torção da secção cheia por forma a obter a resistência efetiva da secção vazada. Para a Viga A2 em estudo, esse fator é igual a cerca de  $4 \times 10 / 60 \approx 0,67$ . Segundo o gráfico da Figura 95, para o momento torsor máximo, esse valor é igual a 0,69, confirmando assim a ordem de grandeza do valor anterior. Para  $x/t = 10$ , e para valores inferiores, a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia continua a decrescer e é inferior a 50%.

Tendo por base o exposto anteriormente, pode referir-se que os resultados gerais obtidos parecem confirmar a validade das disposições do código de referência [13] resumidas na Secção 4.1 e a serem utilizadas em projeto para o dimensionamento à torção de secção retangulares de betão armado, pelo menos para o tipo de viga simulada neste trabalho.

Apesar de o código analisado [13] não referir nada acerca do momento torsor de fissuração, os resultados anteriormente apresentados mostram tendências similares às observadas para o momento torsor máximo. Aparentemente, as referidas disposições normativas também poderiam ser aplicadas para o cálculo do momento torsor de fissuração, o que pode ser relevante para uma verificação aos Estados Limites de Serviço.

# Capítulo 5- Modelação da Viga A2 com a introdução de banzos

No seguimento do capítulo anterior, pretende-se agora analisar o comportamento da viga A2 original são introduzidos banzos laterais com várias larguras. A introdução deste tipo de elementos é habitual em secções em caixão utilizadas, por exemplo, em tabuleiros de pontos.

## 5.1 Documentos Normativos de referência e geometria dos novos modelos

Para a escolha das dimensões dos diferentes banzos laterais a implementar no modelo da viga A2, teve-se como referência novamente o anterior Código Americano ACI318R-89 [13] e o regulamento português REBAP [14] bem como o estudo realizado por Hsu [15]. Os quais estabelecem que, em secções retangulares, a resistência à torção de um elemento com secção aberta é igual à soma das resistências individuais à torção da alma e dos banzos, desde que a parte exterior do banzo não exceda três vezes a sua espessura. Desta forma, segundo *Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary 1989*, [13], os banzos laterais só devem ser contabilizados no dimensionamento da secção à torção se  $b \leq 3t$ , sendo  $b$  a largura do banzo e  $t$  a sua espessura. Tendo por base a referida disposição, foram implementados 5 novos modelos da Viga A2 modelos com diferentes geometrias de banzos definidos pela relação  $b/t$ , de acordo com o apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Apresentação dos modelos com a introdução de banzos laterais

b	t	t/b	b/t
(cm)	(cm)		
0.00*	10.00	0.00	0.00
10.00	10.00	1.00	1.00
20.00	10.00	0.50	2.00
30.00	10.00	0.33	3.00
40.00	10.00	0.25	4.00
50.00	10.00	0.20	5.00

\*modelo modificado da Viga A2

## 5.2 Modelação dos novos modelos

Para a os novos modelos, é necessário adicionar os banzos laterais. Para tal, a parede horizontal superior da secção da viga A2 foi estendida para fora da secção, mantendo a mesma espessura. Para além disso, os banzos incorporam uma camada de armaduras, composta uma armadura transversal, com o mesmo diâmetro ( $\phi 8$ ) e espaçamento da cinta da secção, bem como varões longitudinais construtivos ( $\phi 6$ ) com um espaçamento médio de 10 cm. A Figura 96 ilustra a solução de armaduras adotada para os banzos.

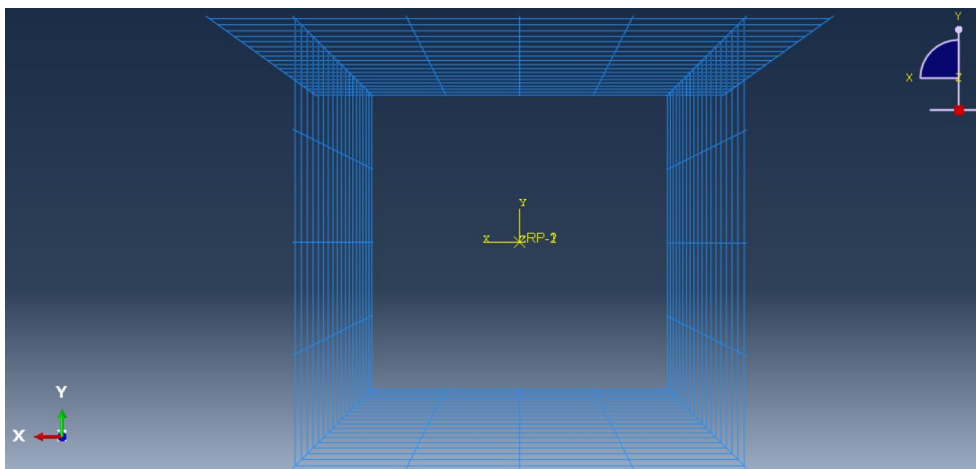


Figura 96 - Exemplo de uma solução adotada para a armadura dos banzos - banzos com  $b = 10$  cm

## 5.3 Propriedades do varão de aço $\phi 6$ mm

A Tabela 16 apresenta as propriedades plásticas adotadas para os varões  $\phi 6$ , sendo que as propriedades elásticas mantiveram-se como apresentado na Tabela 5.2 as quais foram introduzidas no ABAQUS.

Propriedades Plásticas:

Tabela 5.2 - Propriedades plásticas do aço  $\square 6$

<i>Tensão plástica (MPa)</i>	<i>Extensão plástica</i>
696	0
731	0.0075

A área da secção dos varões  $\phi 6$  foi introduzida no ABAQUS como ilustrado na Figura 97.

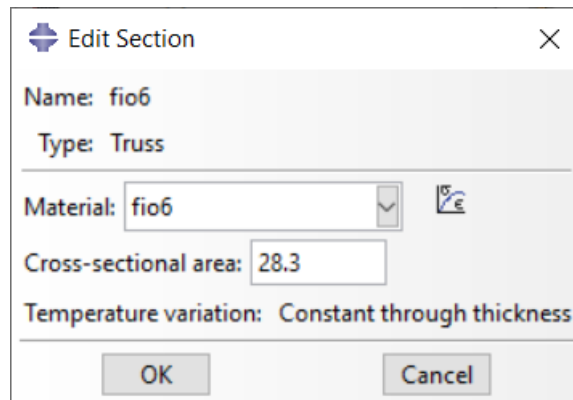


Figura 97 - Área da secção aço  $\phi 6$  mm (em  $\text{mm}^2$ )

As Figuras 98 e 99 ilustram a disposição das armaduras dos banzos na secção de betão.

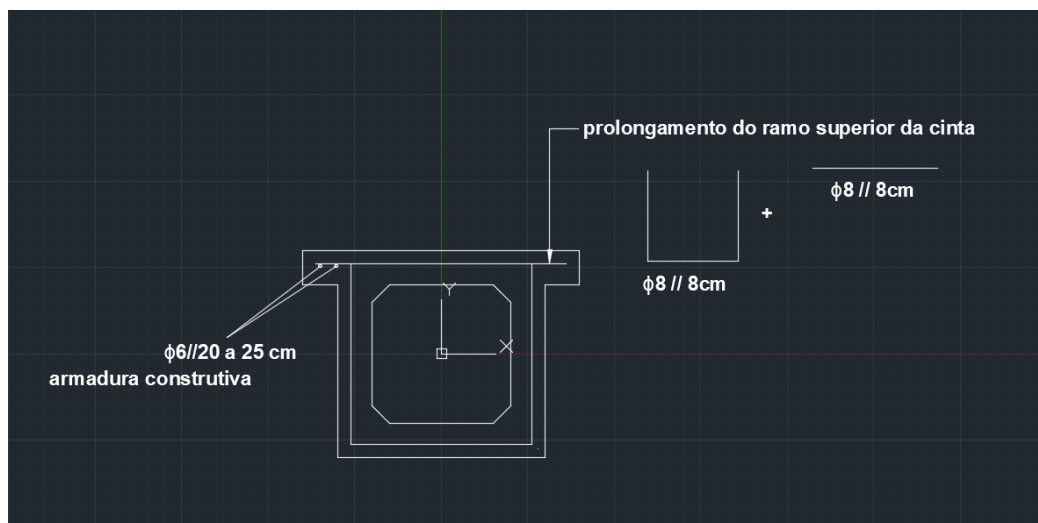


Figura 98 - Disposição geral das armaduras no modelo com banzo

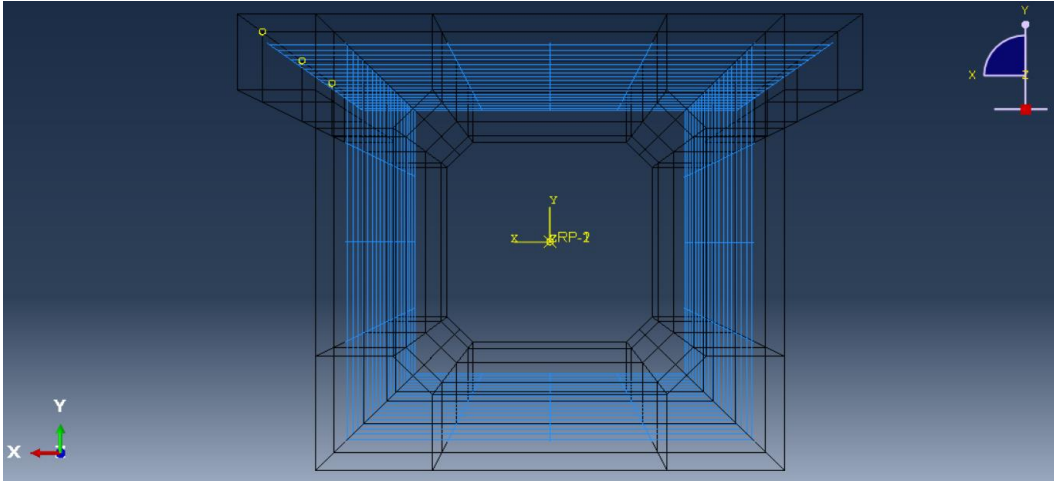


Figura 99 - Disposição das armaduras no modelo com banzo e com  $b = 10$  cm

## 5.4 Modelo com banzo $b=10$ cm

Foi modelada a viga A2 com a aplicação de dois banzos laterais com 10 cm de largura. Na Figura 100 é possível observar a representação da viga, também, é possível observar na Figura 101 a sua deformação com o mesmo aumento de escala em relação ao apresentado no modelo modificado da viga A2. Nas Figuras 102 e 103 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 104, 105 e 106 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , por fim, a curva  $T - \theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 107. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas  $T - \theta$  será feita mais à frente.

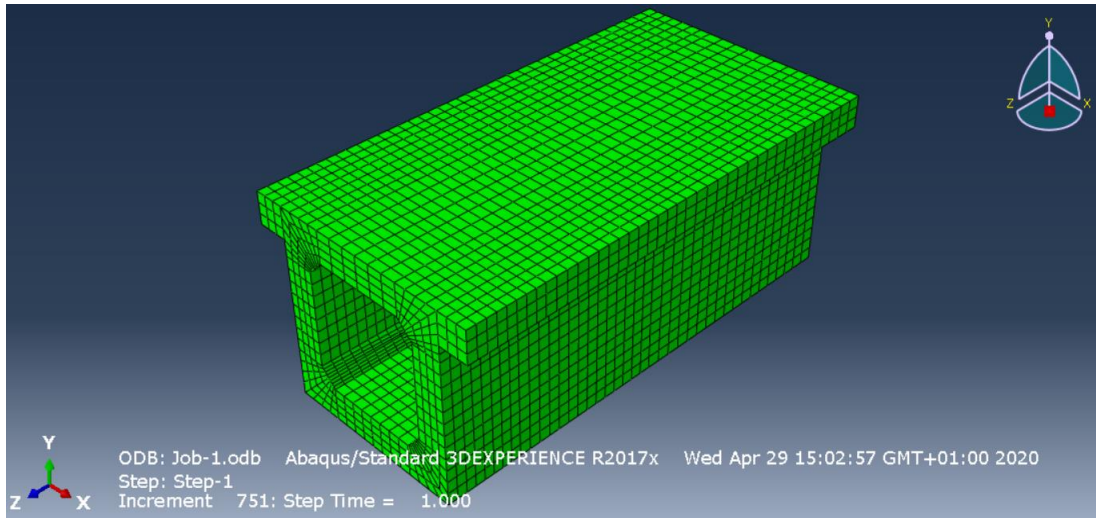


Figura 100 -Modelo da viga A2 com banzo: b=10cm

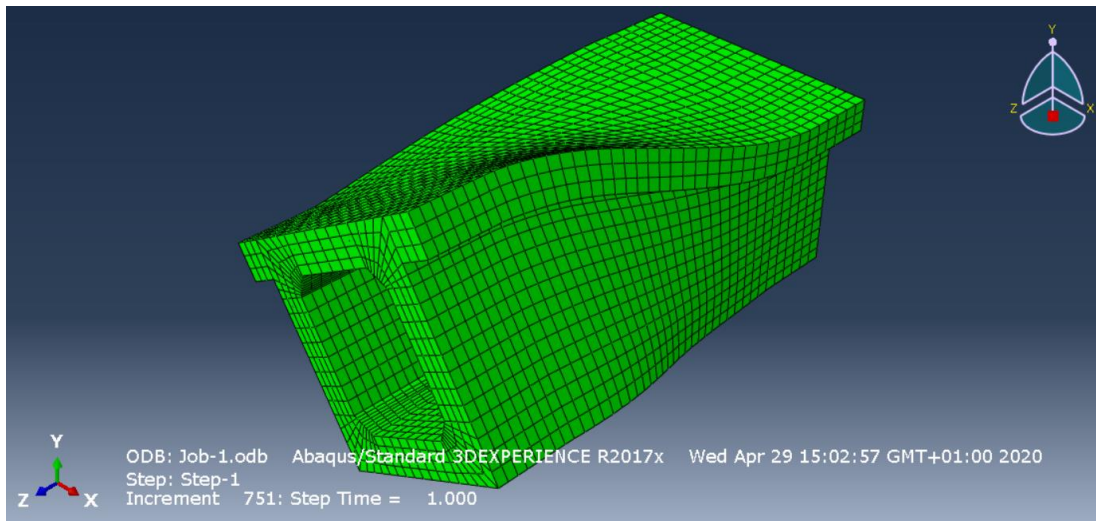


Figura 101 -Deformação da viga A2 com banzo b=10cm

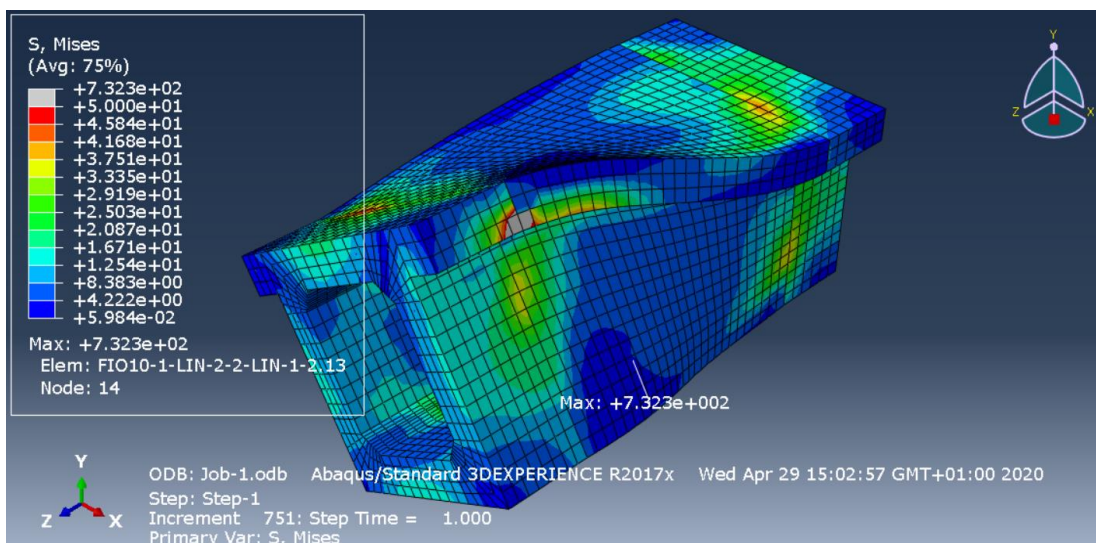


Figura 102 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: b=10cm

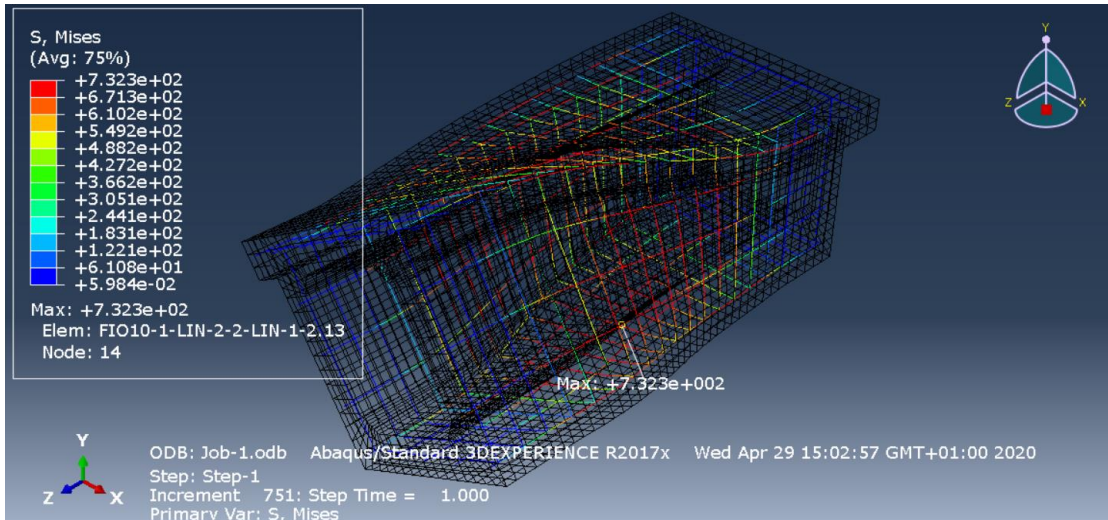


Figura 103 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo b=10cm

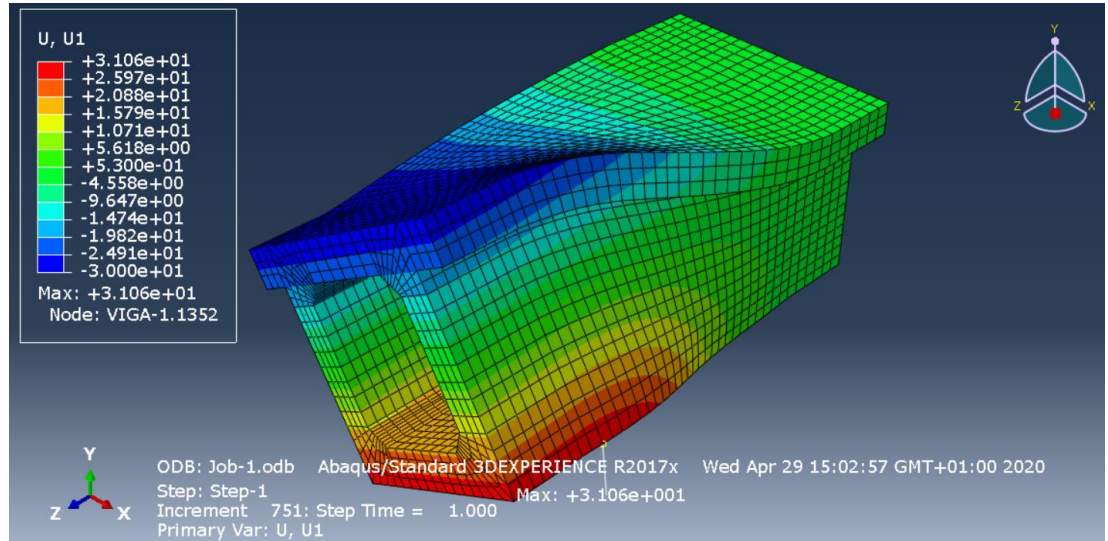


Figura 104 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: b=10cm

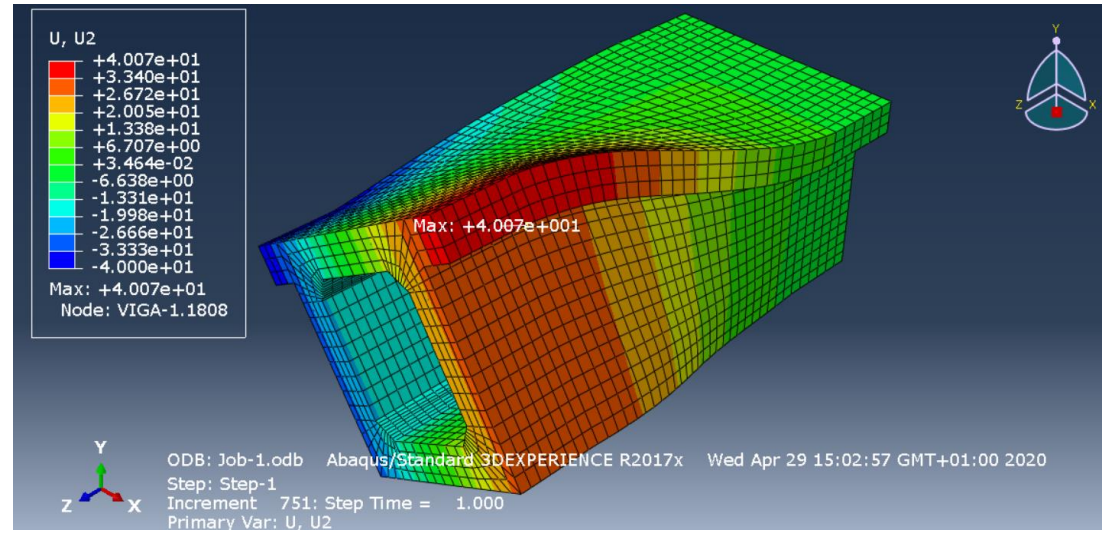


Figura 105 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: b=10cm

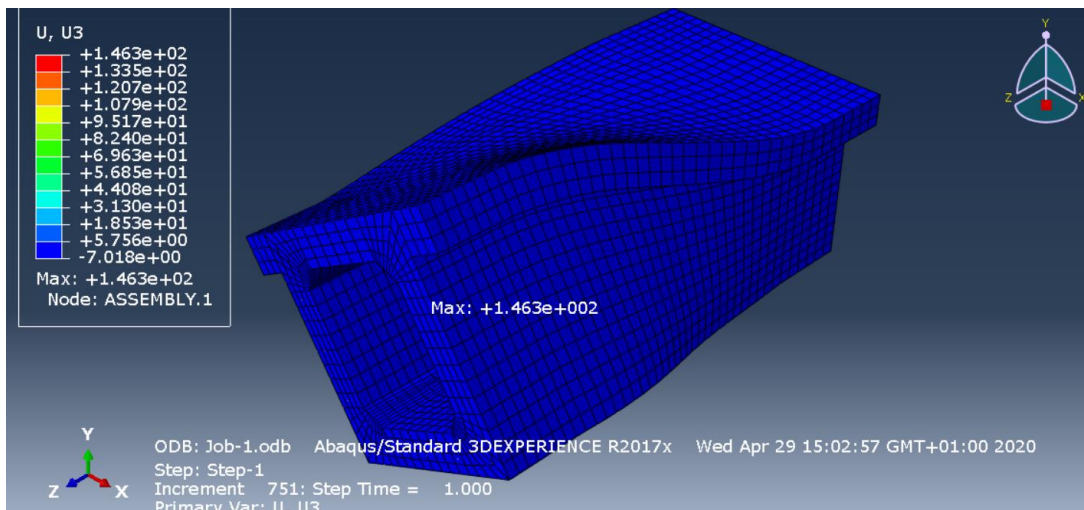


Figura 106 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: b=10cm

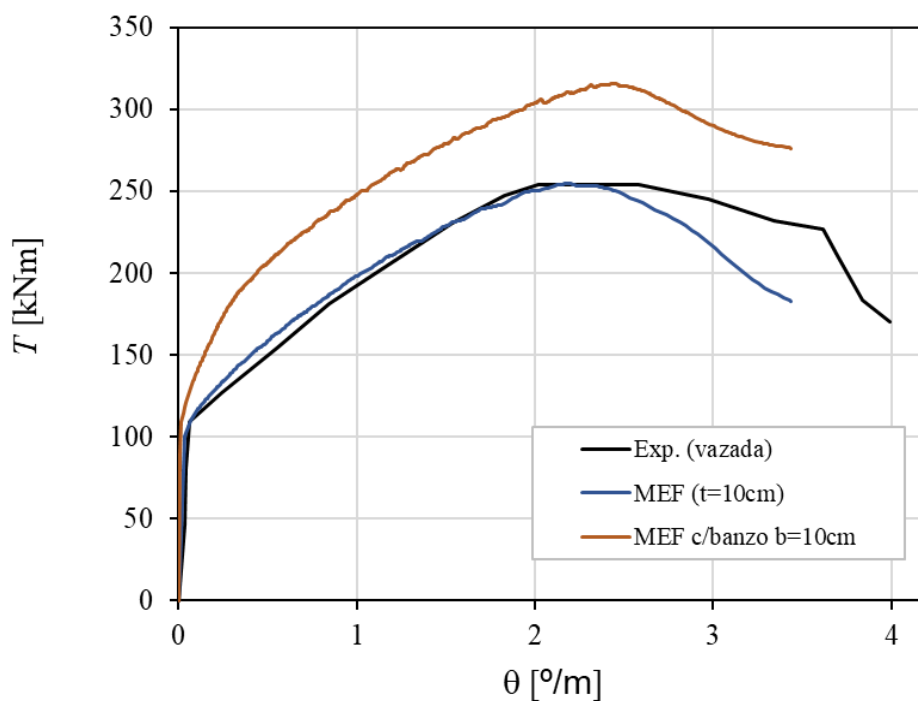


Figura 107 - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo b=10cm

## 5.5 Modelo com banzo b=20cm

Foi modelada a viga A2 com a aplicação de dois banzos laterais com 20 cm de largura. Na Figura 108 é possível observar a representação da viga, também, é possível observar na Figura 109 a sua deformação com o mesmo aumento de escala em relação ao apresentado no modelo modificado da viga A2. Nas Figuras 110 e 111 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o

estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 112, 113 e 114 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 115. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

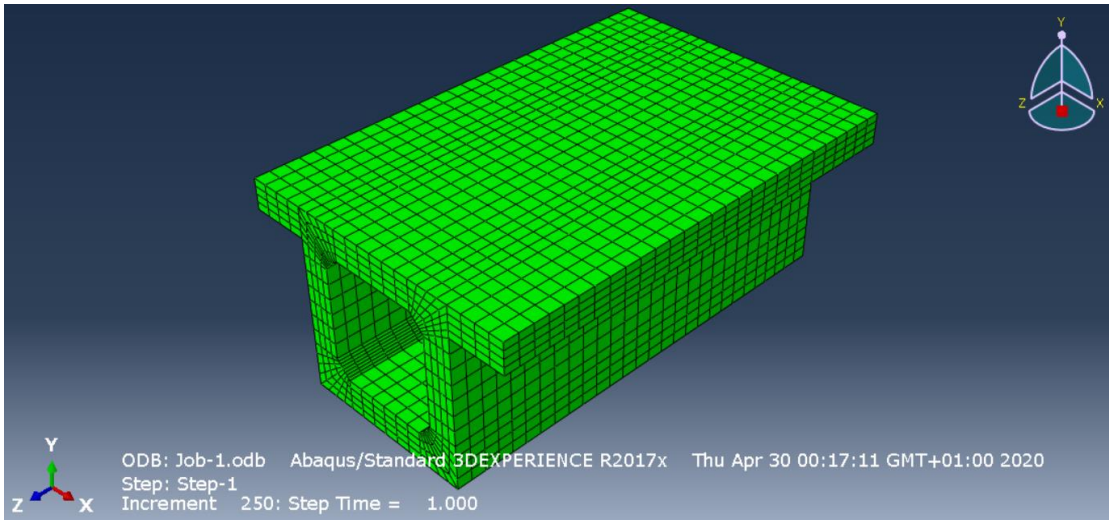


Figura 108 - Modelo da viga A2 com banzo:  $b=20\text{cm}$

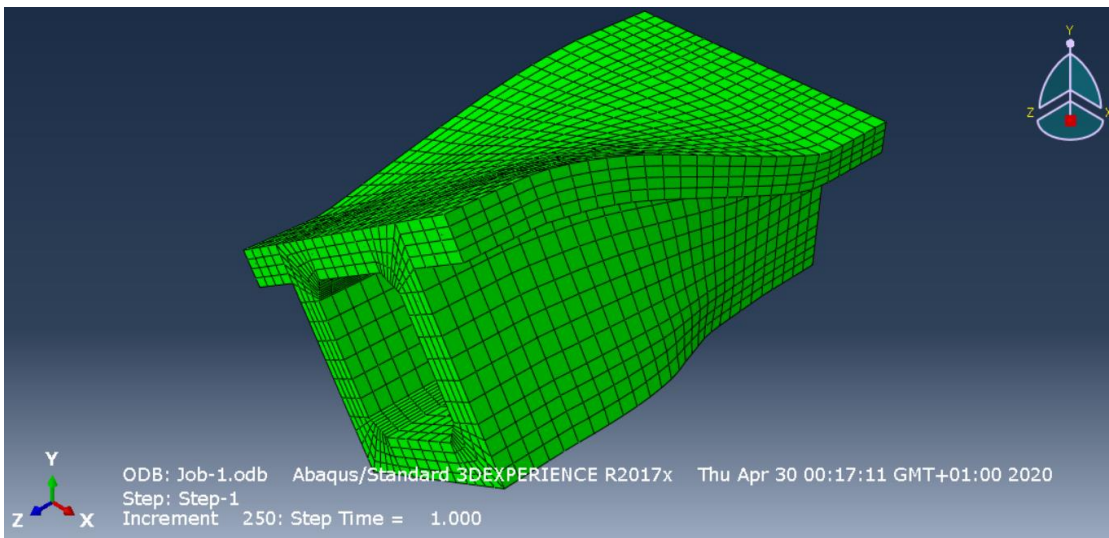


Figura 109 - Deformação da viga A2 com banzo:  $b=20\text{cm}$

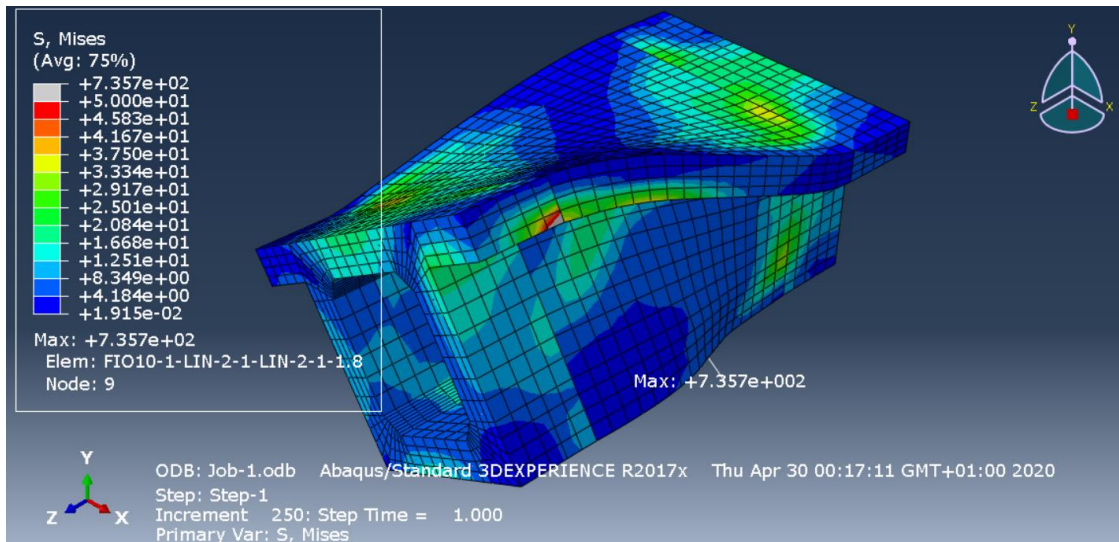


Figura 110 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: b=20cm

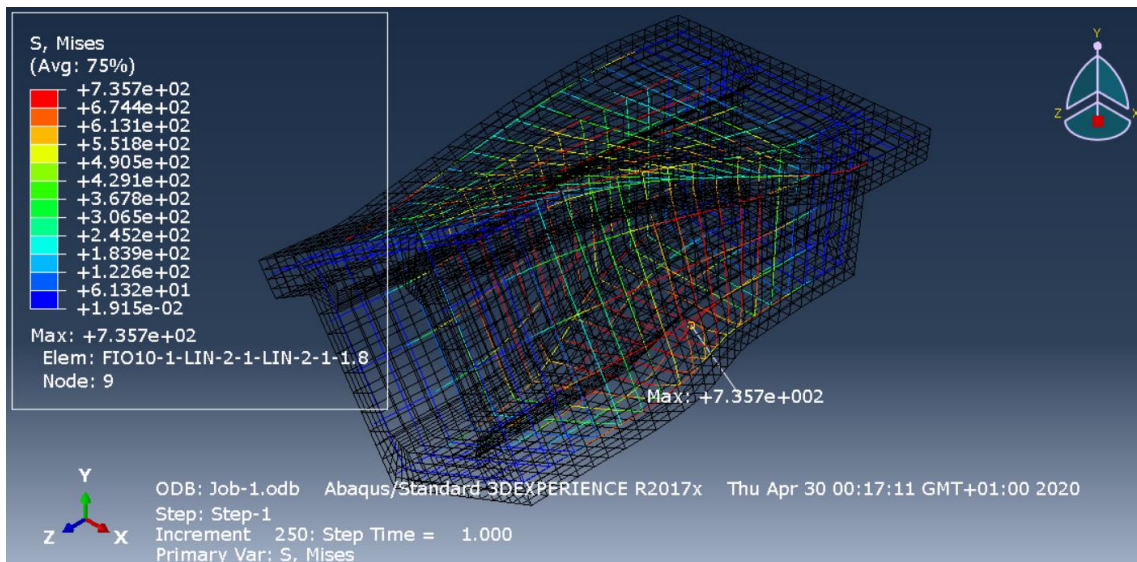


Figura 111 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: b=20cm

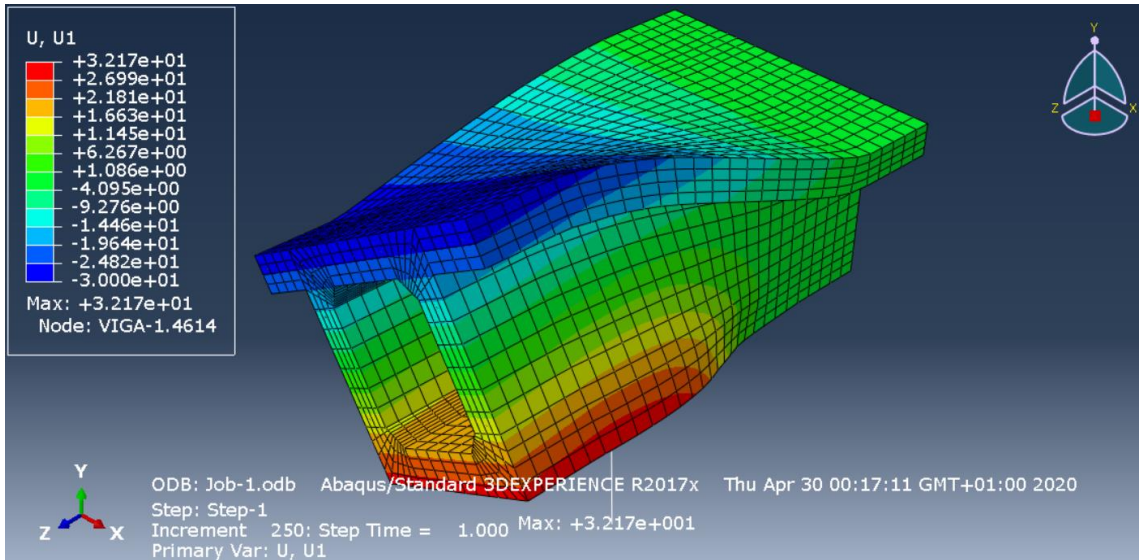


Figura 112 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: b=20cm

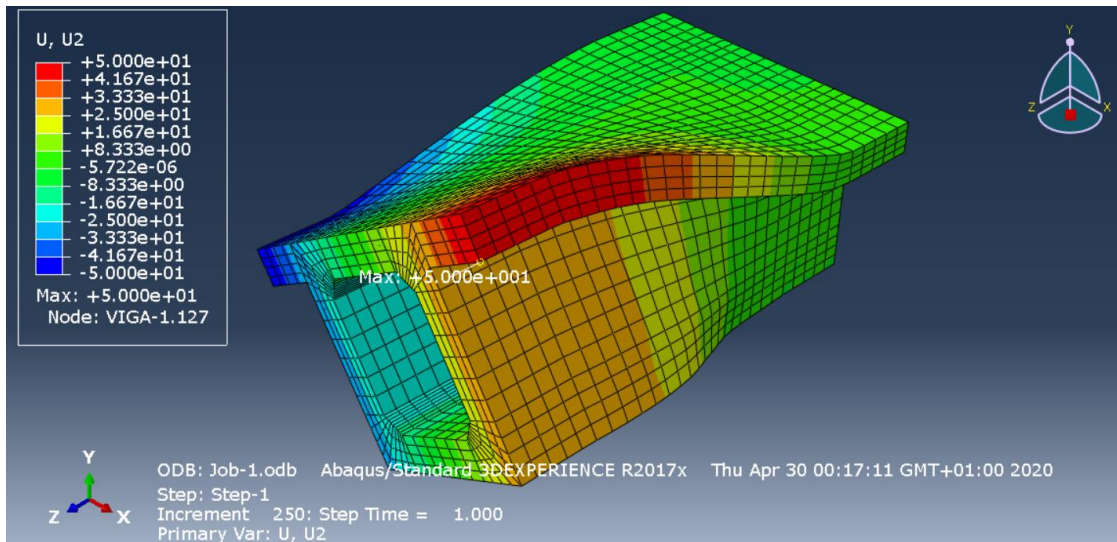


Figura 113 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: b=20cm

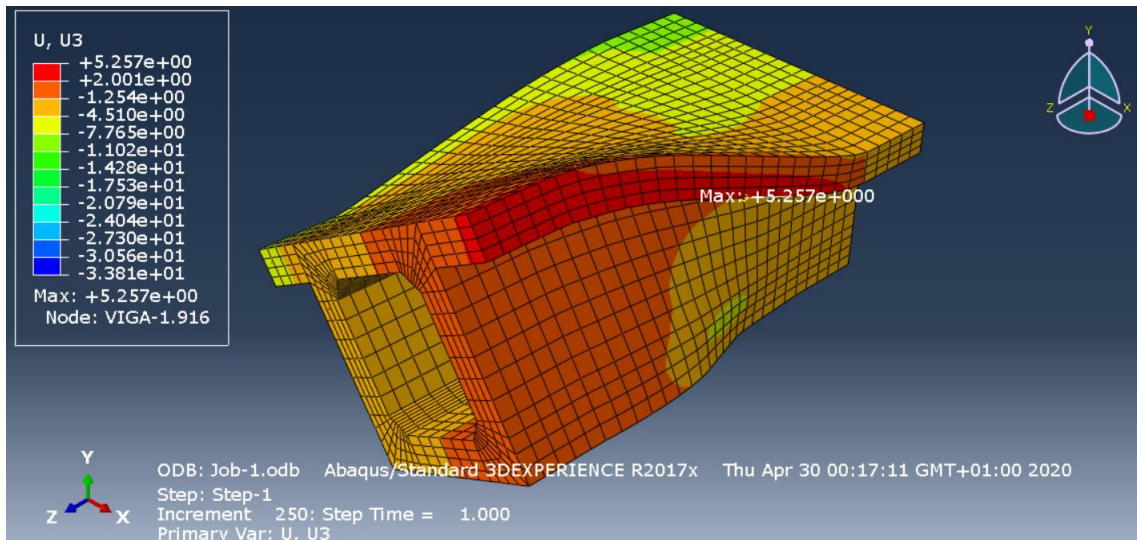


Figura 114 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: b=20cm

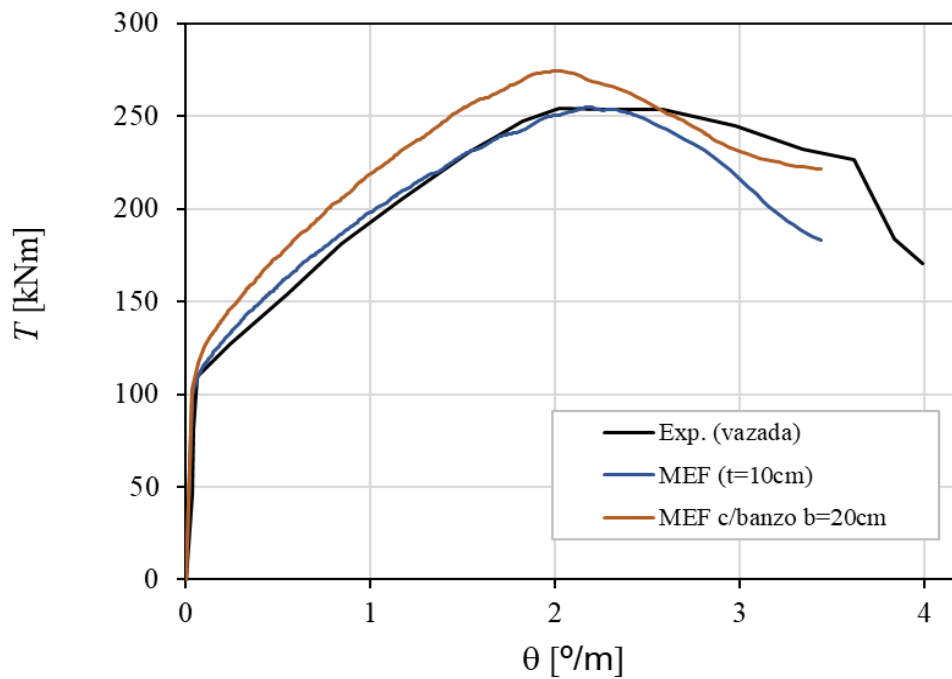


Figura 115 - Representação gráfico do modelo da viga A2 com banzo b=20cm

## 5.6 Modelo com banzo $b=30\text{cm}$

Foi modelada a viga A2 com a aplicação de dois banzos laterais com 30 cm de largura. Na Figura 116 é possível observar a representação da viga, também, é possível observar na Figura 117 a sua deformação com o mesmo aumento de escala em relação ao apresentado no modelo modificado da viga A2. Nas Figuras 118 e 119 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 120, 121 e 122 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 123. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

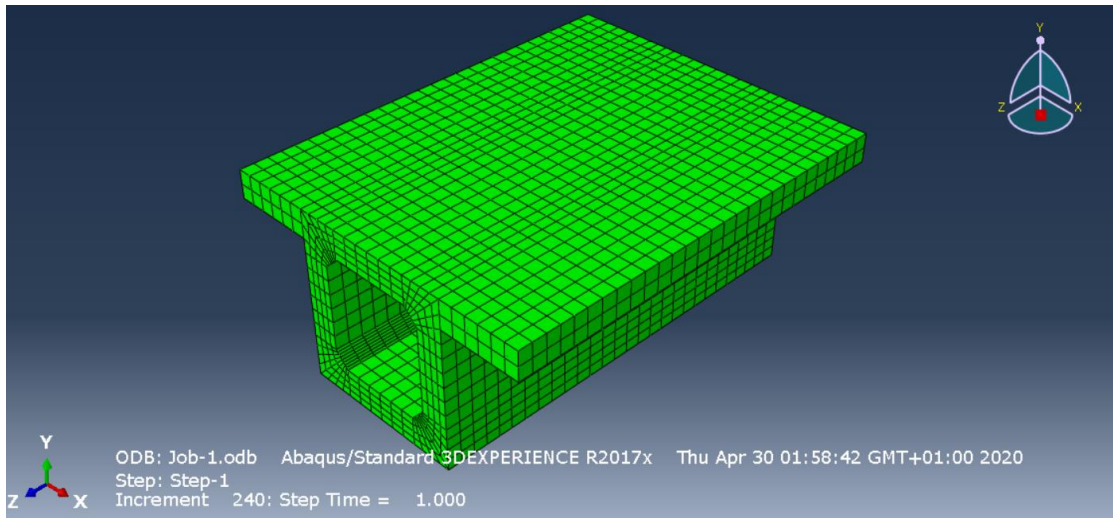


Figura 116 - Modelo da viga A2 com banzo:  $b=30\text{cm}$

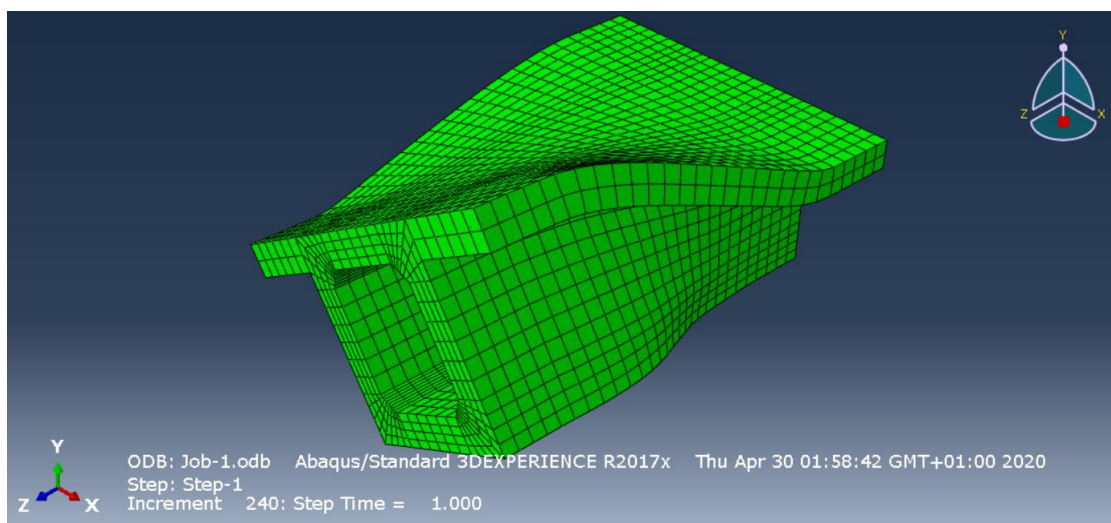


Figura 117 - Deformação da viga A2 com banzo:  $b=30\text{cm}$

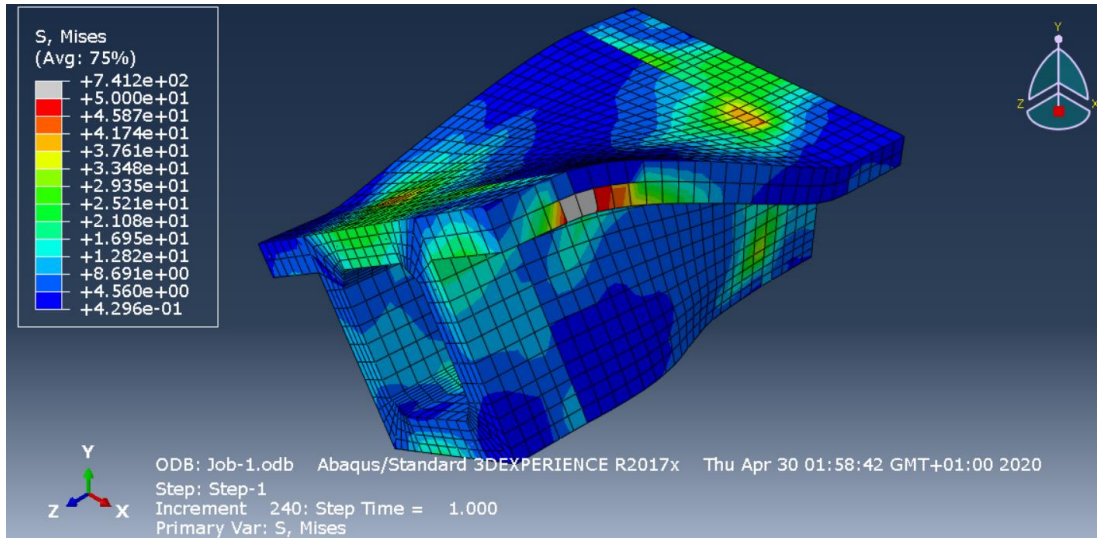


Figura 118 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: b=30cm

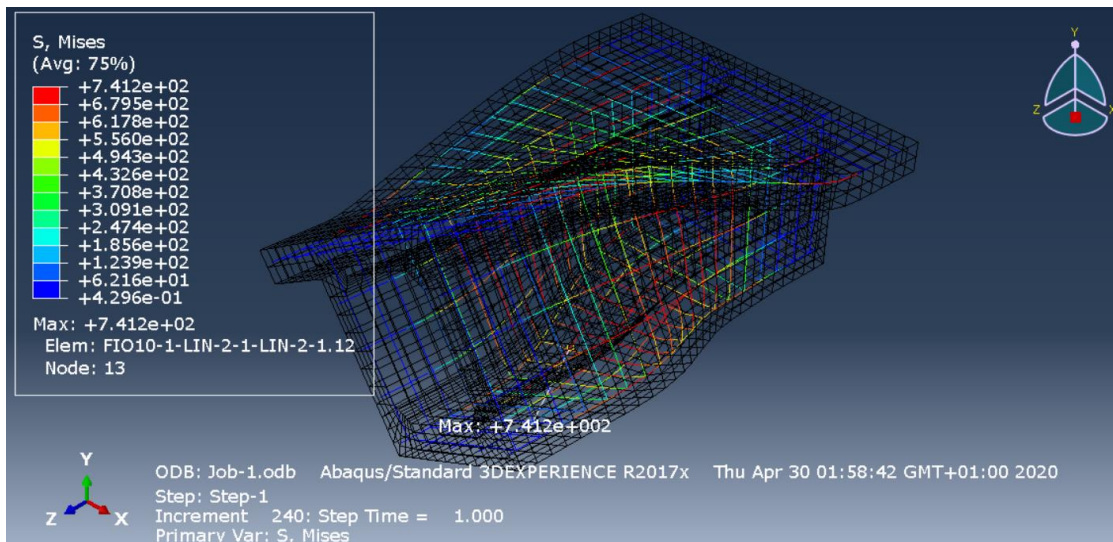


Figura 119 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: b=30cm

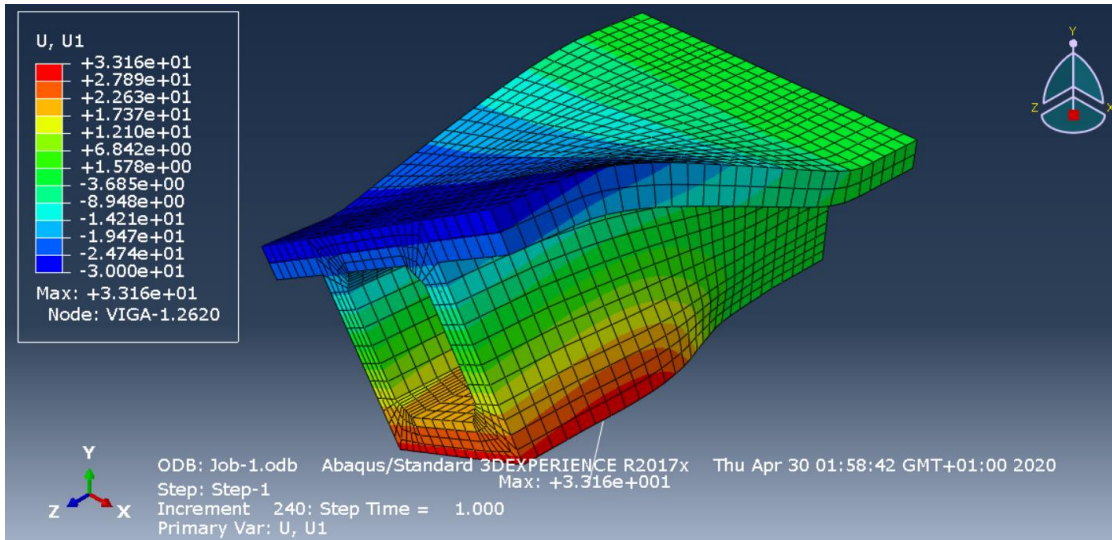


Figura 120 -Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: b=30cm

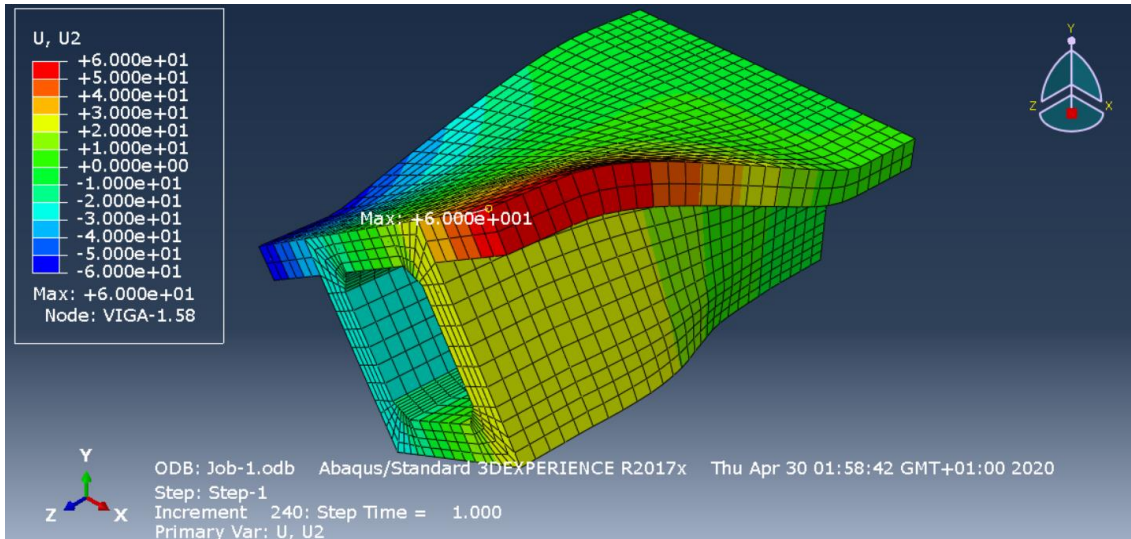


Figura 121 -Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: b=30cm

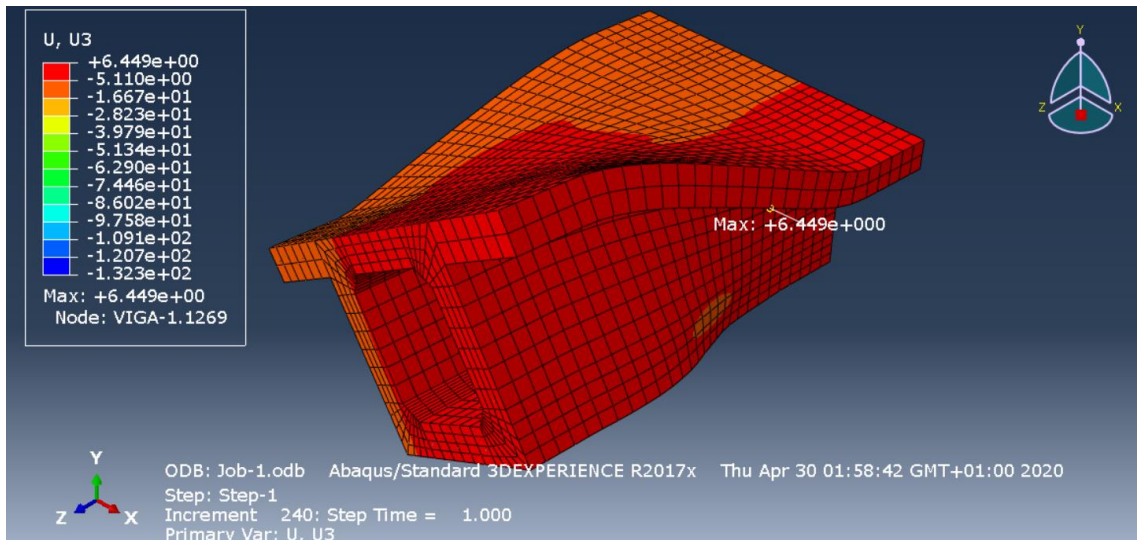


Figura 122 -Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: b=30cm

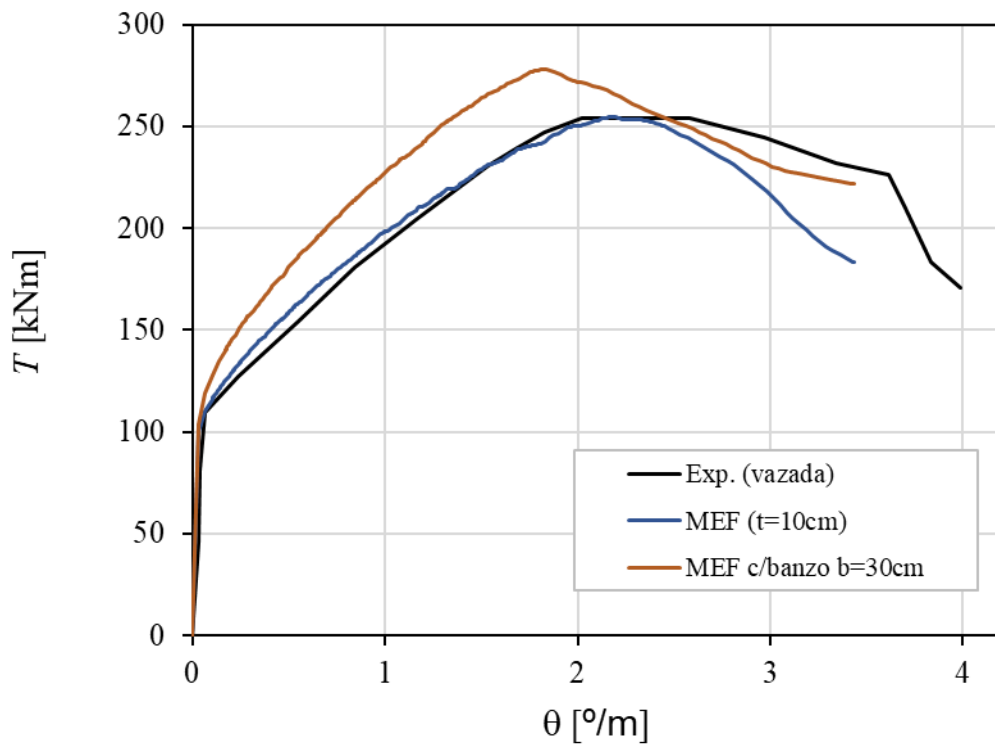


Figura 123 - Representação gráfico do modelo da viga A2 com banzo b=30cm

## 5.7 Modelo com banzo b=40cm

Foi modelada a viga A2 com a aplicação de dois banzos laterais com 40 cm de largura. Na Figura 124 é possível observar a representação da viga, também, é possível observar na Figura 125 a sua deformação com o mesmo aumento de escala em relação ao apresentado no modelo modificado da viga A2. Nas Figuras 126 e 127 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises em (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 128, 129 e 130 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T -  $\theta$  obtida da simulação é apresentada na Figura 131. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T -  $\theta$  será feita mais à frente.

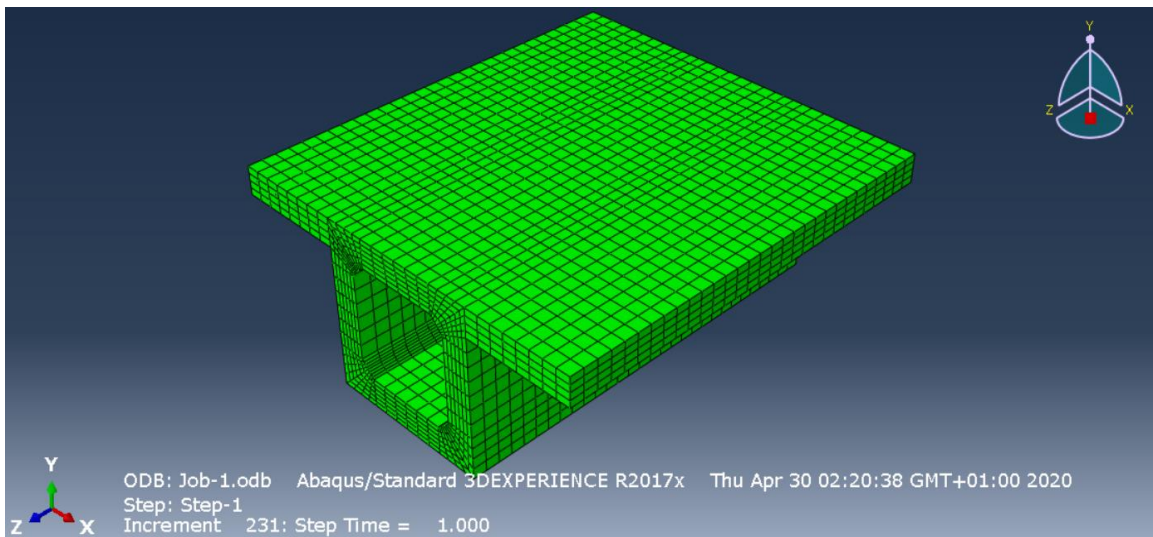


Figura 124 - Modelo da viga A2 com banzo: b=40cm

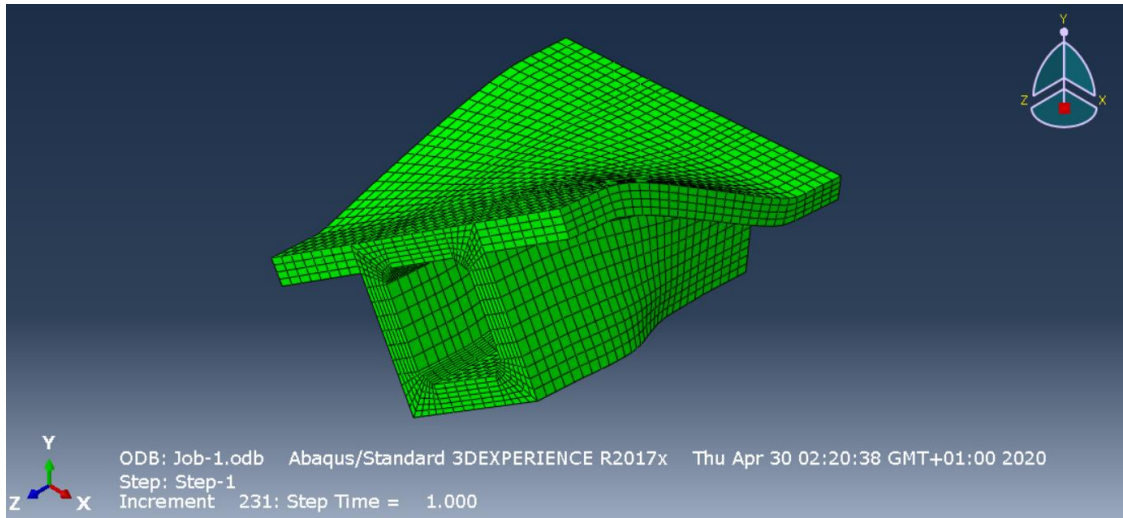


Figura 125 - Deformação da viga A2 com banzo: b=40cm

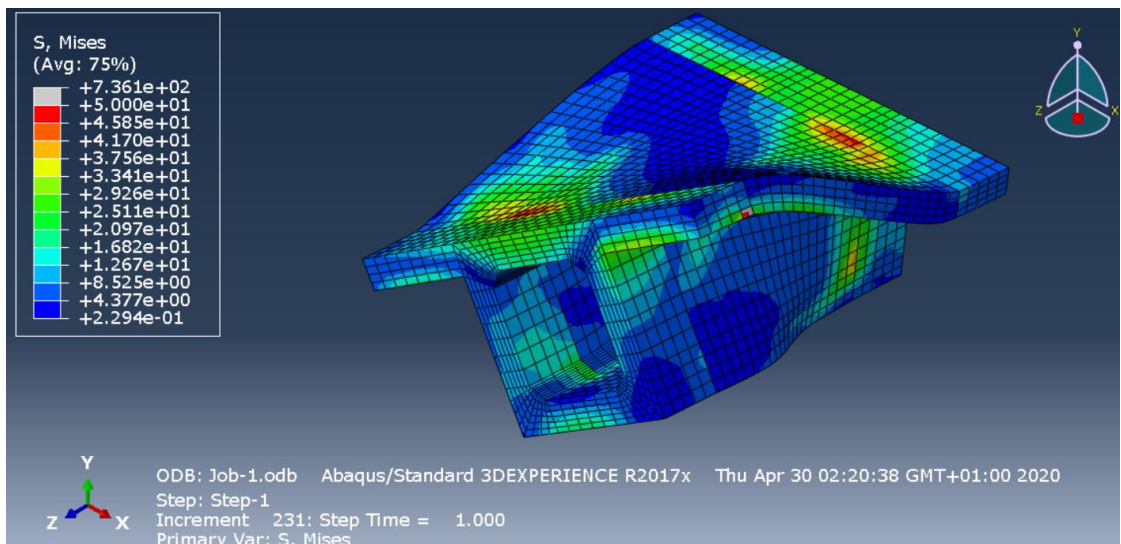


Figura 126 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: b=40cm

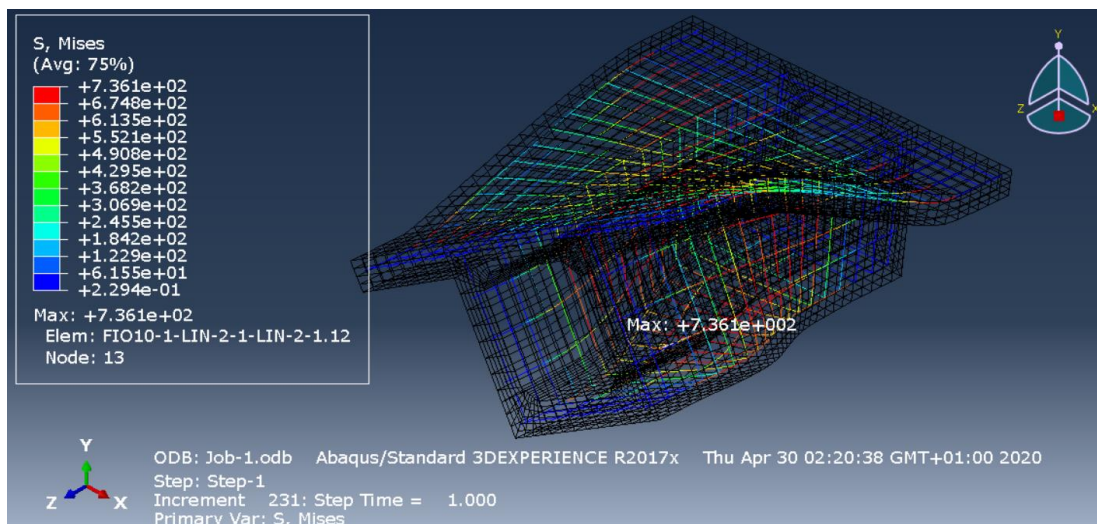


Figura 127 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: b=40cm

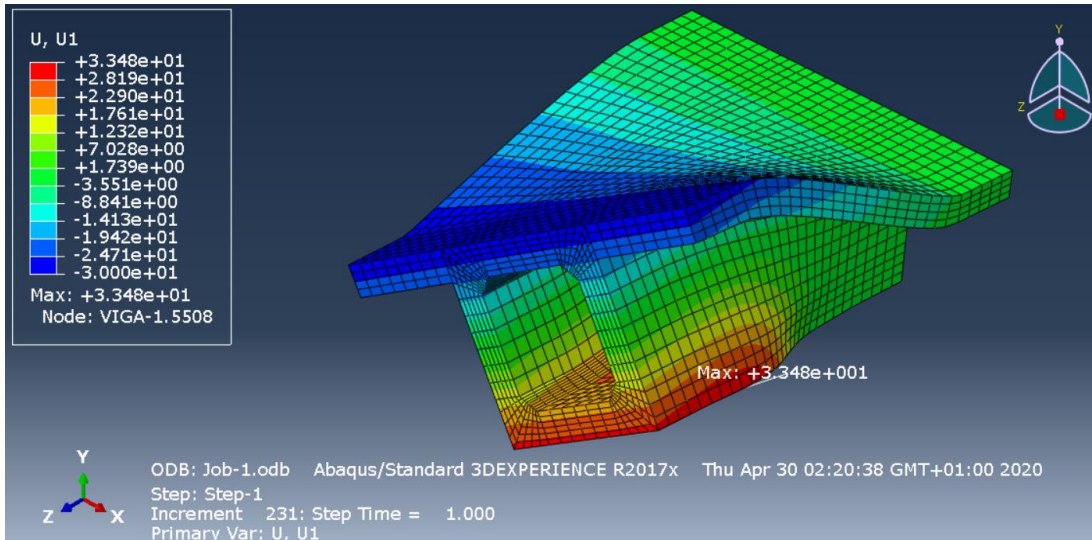


Figura 128 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: b=40cm

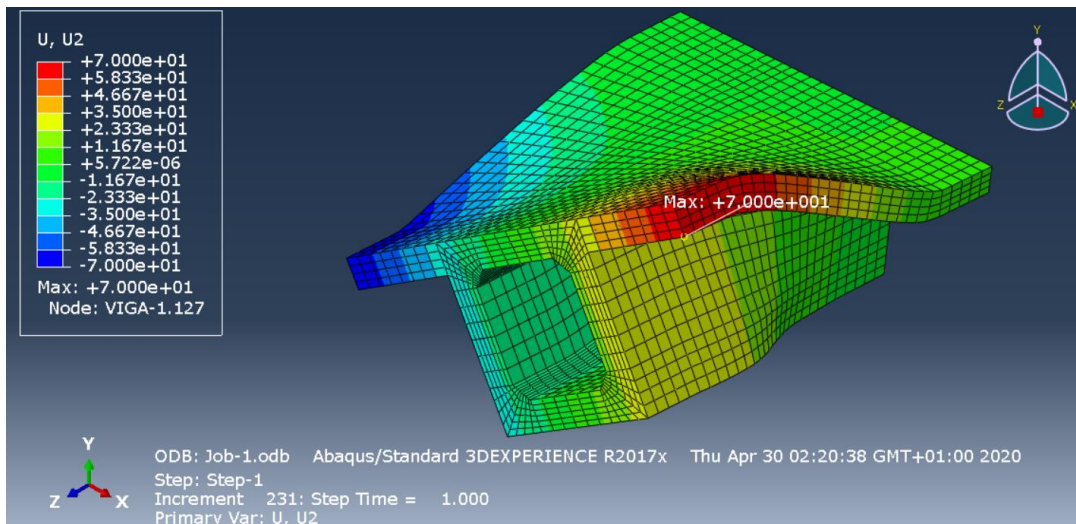


Figura 129 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: b=40cm

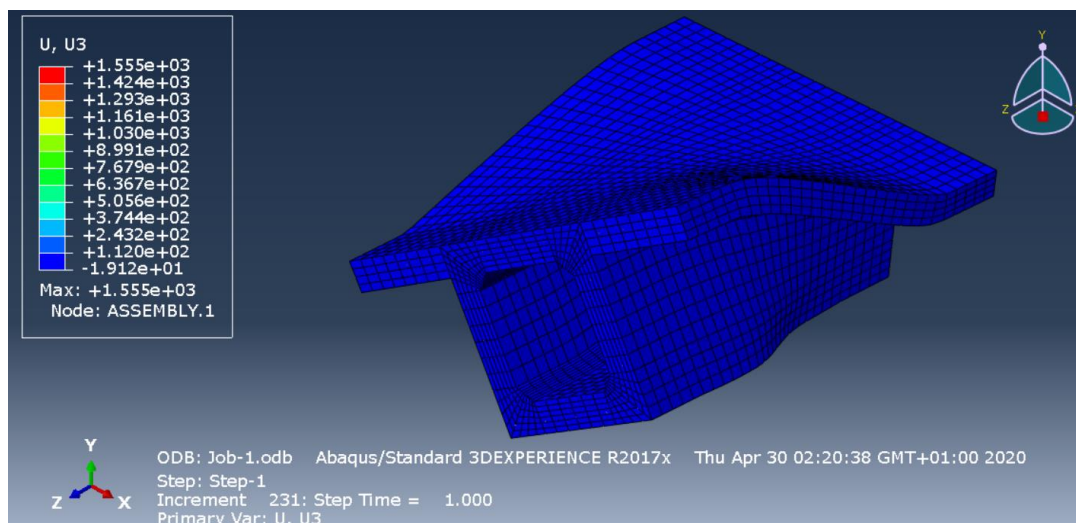


Figura 130 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: b=40cm

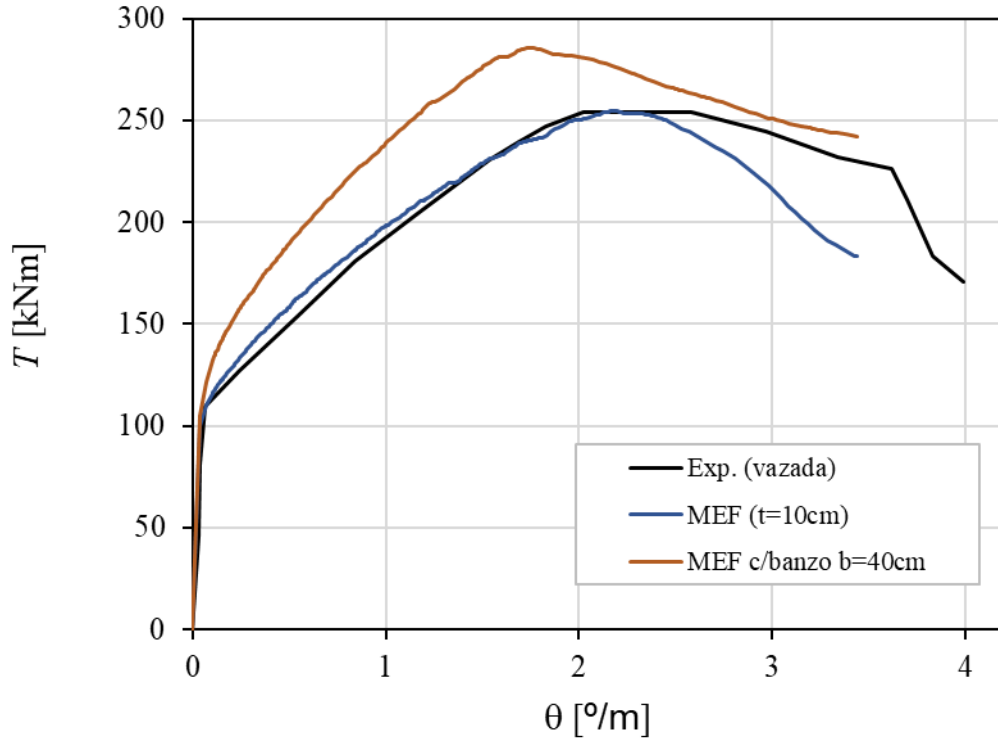


Figura 131 - - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo b=40cm

## 5.8 Modelo com banzo b=50cm

Foi modelada a viga A2 com a aplicação de dois banzos laterais com 50 cm de largura. Na Figura 132 é possível observar a representação da viga, também, é possível observar na Figura 133 a sua deformação com o mesmo aumento de escala em relação ao apresentado no modelo modificado da viga A2. Nas Figuras 134 e 135 será feita uma representação do estado de tensão de Von Mises (MPa) no betão e respetivamente o estado de tensão axial em (MPa) nas armaduras do modelo, já nas Figuras 136, 137 e 138 estão apresentadas também numa representação a cores dos deslocamentos em mm do modelo segundo U1, U2 e U3, por fim, a curva T - θ obtida da simulação é apresentada na Figura 139. A análise dos resultados obtidos em termos de curvas T - θ será feita mais à frente.

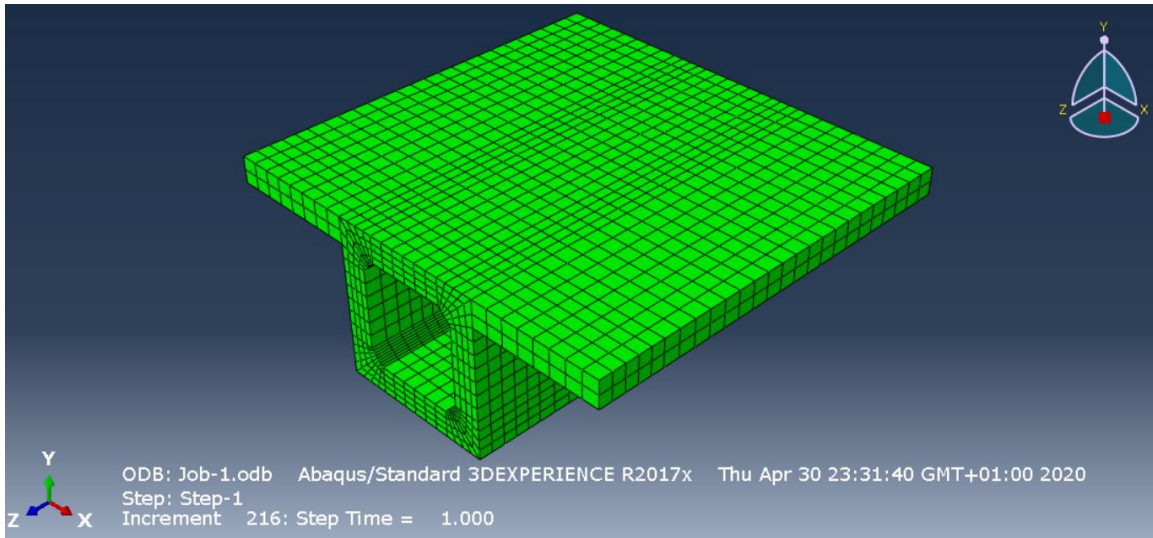


Figura 132 - Modelo da viga A2 com banzo:  $b=50\text{cm}$

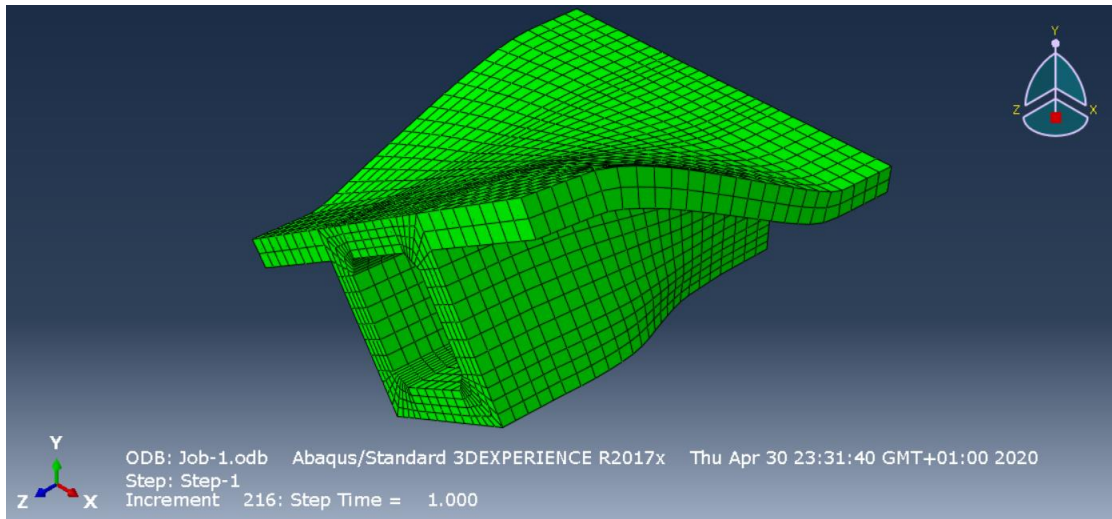


Figura 133 - Deformação da viga A2 com banzo:  $b=50\text{cm}$

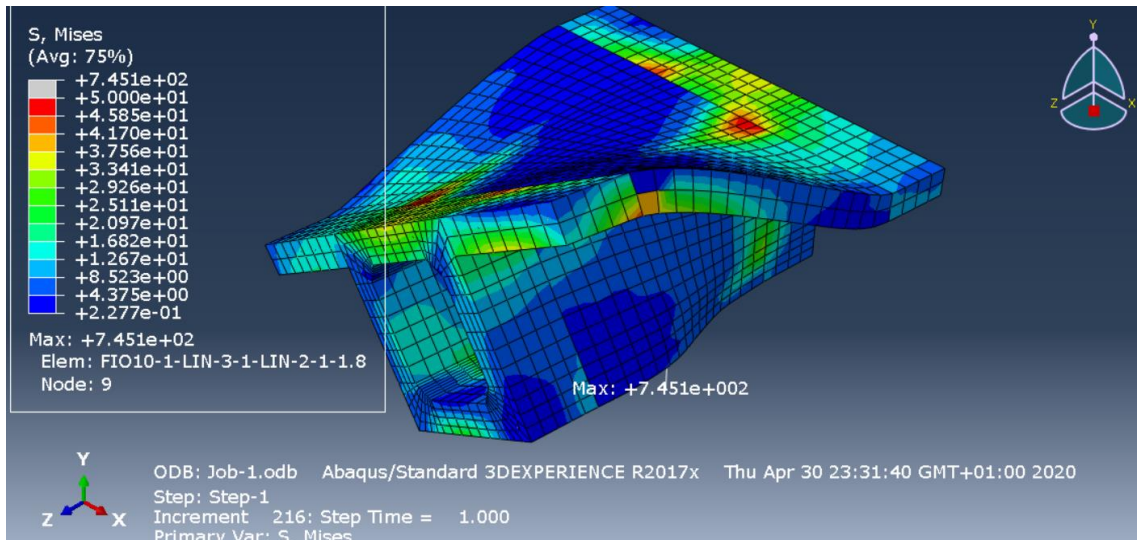


Figura 134 - Estado de tensão (de Von Mises, MPa) no betão para o modelo: b=50cm

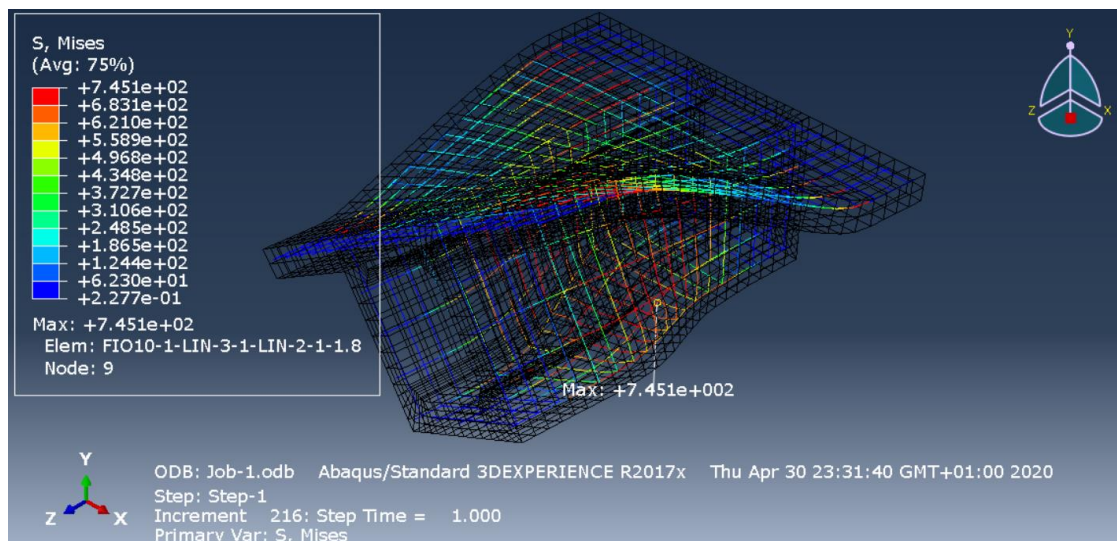


Figura 135 - Estado de tensão (axial, MPa) nas armaduras para o modelo: b=50cm

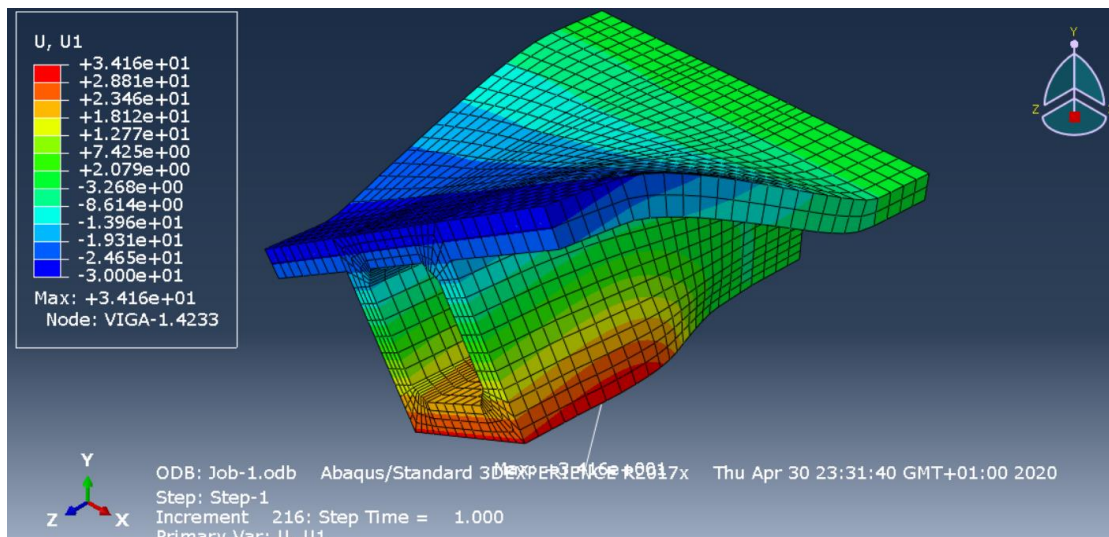


Figura 136 - Deslocamentos segundo U1 em mm do modelo: b=50cm

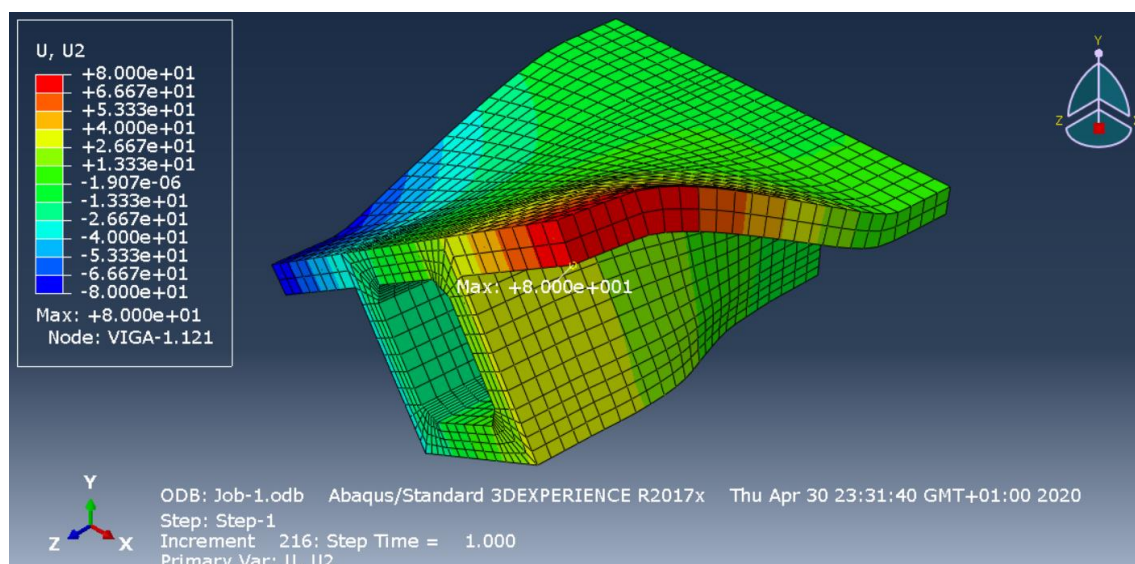


Figura 137 - Deslocamentos segundo U2 em mm do modelo: b=50cm

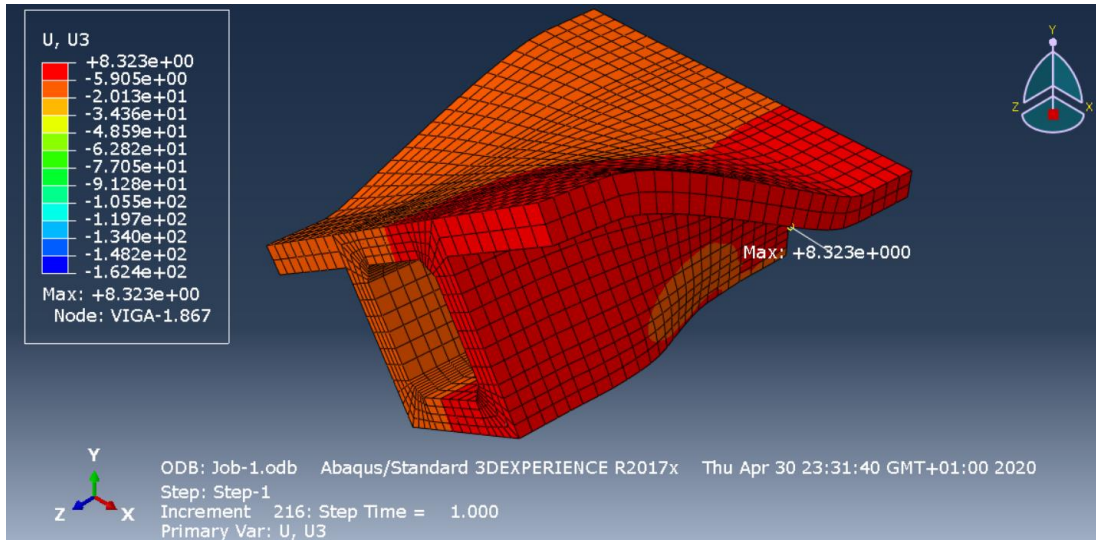


Figura 138 - Deslocamentos segundo U3 em mm do modelo: b=50cm

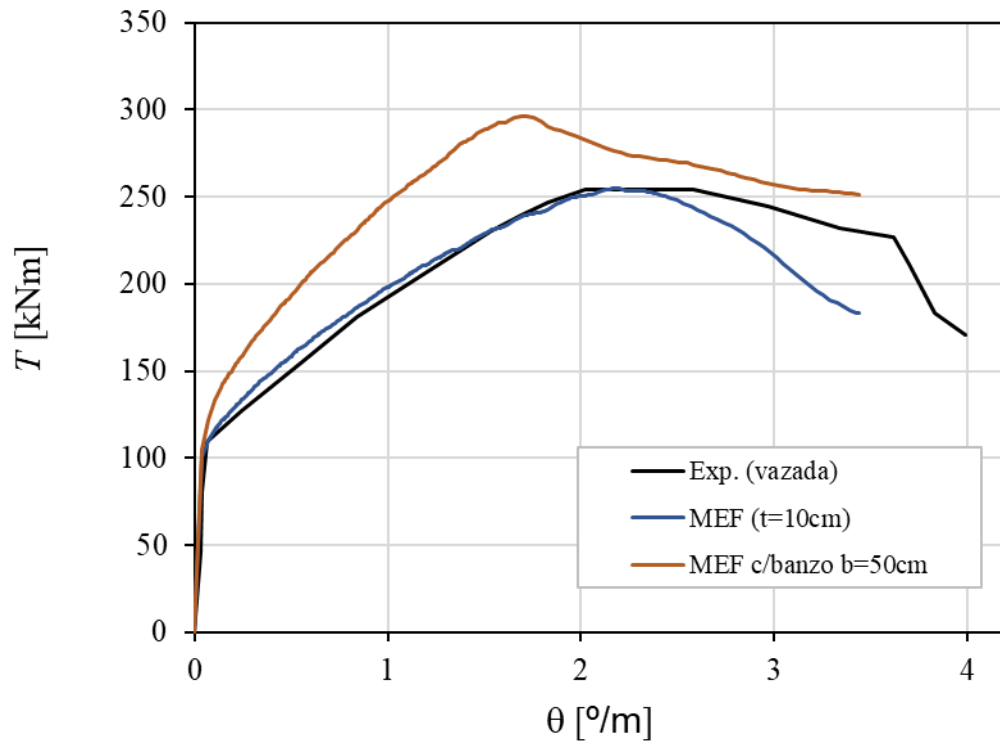


Figura 139 - Representação gráfica do modelo da viga A2 com banzo: b=50cm

## 5.9 Análise geral dos resultados obtidos

Após a implementação de todos os modelos e após a simulação dos mesmos, foram obtidos os resultados correspondentes de forma a desenhar a curva  $T - \theta$  correspondente a cada modelo. Assim, é possível analisar através da Figura 140 o gráfico comparativo das curvas  $T - \theta$  de cada modelo, onde, também, foi adicionada a curva  $T - \theta$  experimental [5] e teórica da viga original A2 obtida no Capítulo 3 desta dissertação com o modelo modificado. Já na Figura 141 está apresentado o gráfico que representa a evolução do momento torsor de fissuração e do momento torsor máximo de cada modelo completado com os valores numéricos da Tabela 5.3.

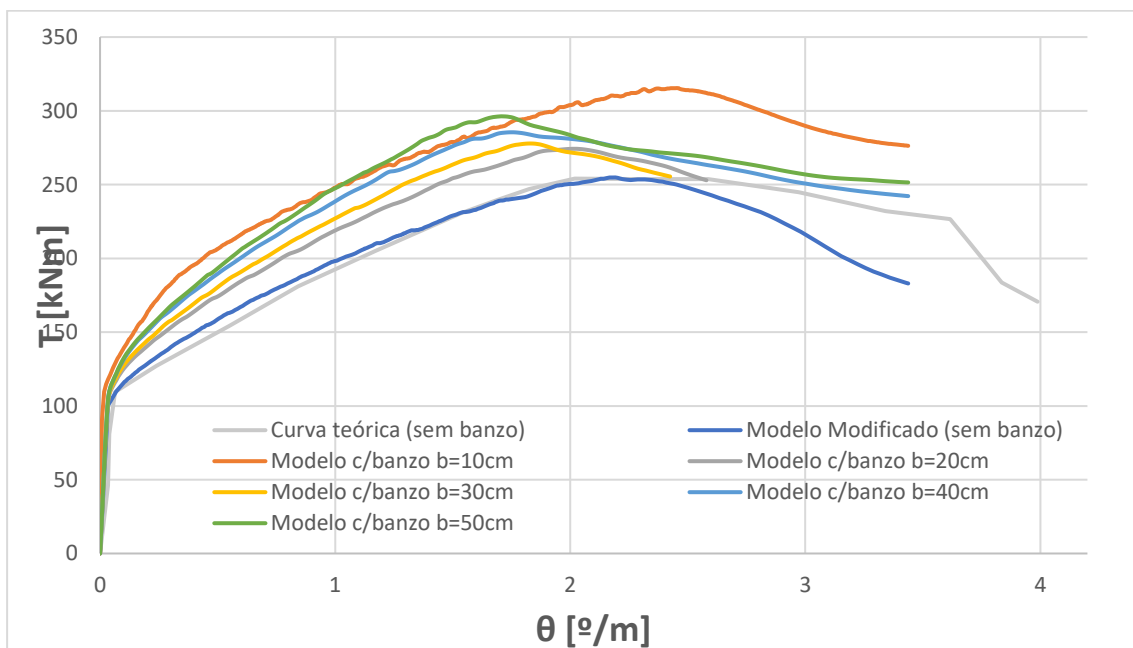


Figura 140 - Análise gráfica comparativa dos resultados obtidos com a adição de banzos laterais

Tabela 5.3 - Análise comparativa dos resultados obtidos com a adição de banzos laterais

<b>b</b>	<b>t</b>	<b>t/b</b>	<b>b/t</b>	$T_{max}$	$T_{cr}$	$(T_{max})_{rel}$	$(T_{cr})_{rel}$	$\Delta T_{max}$	$\Delta T_{cr}$
(cm)	(cm)			(kNm)	(kNm)			(%)	(%)
<b>0.00</b>	10.00	0	0.00	254.86	100.27	1.00	1.00	0.00	0.00
<b>10.00</b>	10.00	1.00	1.00	315.43	109.58	1.24	1.09	23.77	3.65
<b>20.00</b>	10.00	0.50	2.00	274.28	103.58	1.08	1.03	7.62	1.30
<b>30.00</b>	10.00	0.33	3.00	277.84	103.83	1.09	1.04	9.02	1.40
<b>40.00</b>	10.00	0.25	4.00	285.47	105.12	1.12	1.05	12.01	1.90
<b>50.00</b>	10.00	0.20	5.00	294.21	105.09	1.15	1.05	15.44	1.89

Onde,

$$(T_{cr})_{rel} = T_{cr(b=x)} / T_{cr(b=0)}$$

Equação 5.05

$$(T_{max})_{rel} = T_{max(b=x)} / T_{max(b=0)}$$

Equação 5.06

$$\Delta T_{cr} = (\Delta T_{cr(b=x)} - \Delta T_{cr(b=0)}) / \Delta T_{cr(b=0)}$$

Equação 5.07

$$\Delta T_{max} = (\Delta T_{max(b=x)} - \Delta T_{max(b=0)}) / \Delta T_{max(b=0)}$$

Equação 5.08

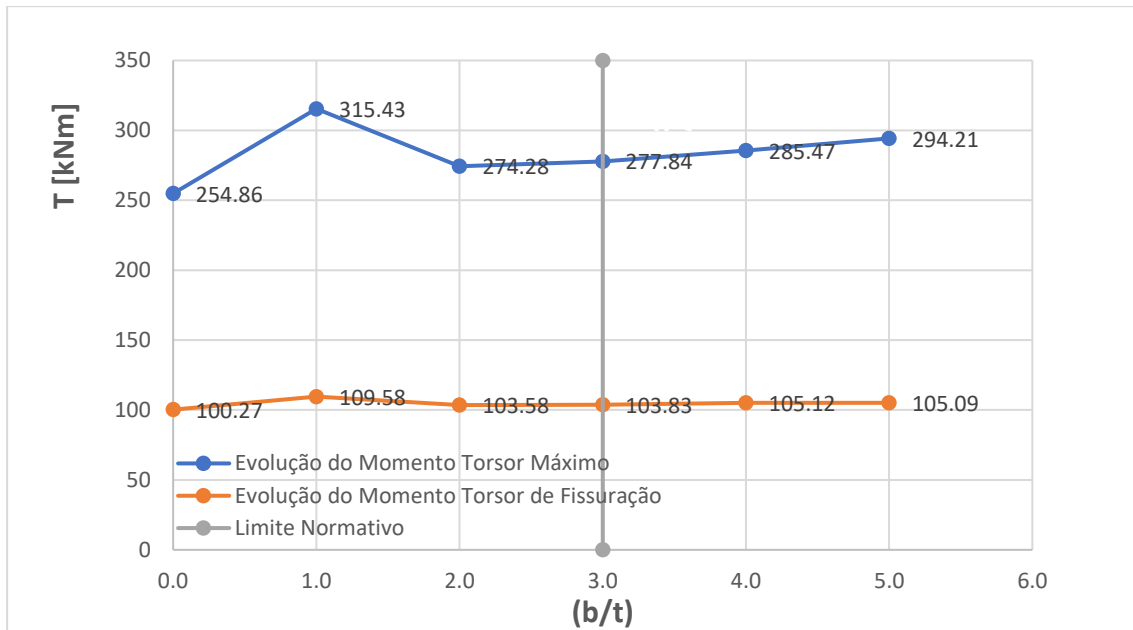


Figura 141 - Análise gráfica da evolução do momento torsor máximo e de fissuração

A Figura 140 mostra existir uma razoável influência da presença de banzo, em particular para o momento torsor máximo. Essa influência é pouco relevante para o momento torsor de fissuração. De uma forma geral, a Figura 140 mostra que existe um pico no aumento do momento torsor máximo para a secção com banzo com  $b = 10$  cm, sendo que para valores superiores de  $b$  o aumento do momento torsor máximo reduz mas volta a crescer lentamente à medida que  $b$  aumenta. Esta tendência é comprovada numericamente através dos resultados expostos na Tabela 5.3.

Tendo por base o referido da secção 4.1, o código Americano [14] e o REBAP [15] estipulavam que a participação de banzos para o cálculo da resistência à torção de secções de betão armado só devia ser contabilizada para uma relação  $b/t \leq 3$ . A Figura 141 mostra que o pico do aumento de resistência à torção da secção com banzo se localiza nesse intervalo, em particular para  $b/t = 1$ . Observa-se uma redução da referida resistência logo a partir de  $b/t = 2$ . A partir deste último limite, como referido anteriormente, a resistência à torção volta a aumentar ligeiramente à medida que  $b/t$  aumenta.

Tendo por base o exposto anteriormente, pode referir-se que os resultados gerais obtidos parecem confirmar a validade do limite para  $b/t$  estipulado nas disposições das normas analisadas [14], [15], embora, para a viga analisada neste trabalho, se observe que o limite de  $b/t = 3$  aparenta ser um pouco excessivo. Deve no entanto referir-se que tal não compromete a segurança para o dimensionamento à torção, pois para  $b/t > 1$  se observa sempre que a resistência à torção da secção com banzo é superior à da secção original sem banzo.

A Figura 141 confirma também que a introdução de banzos não afeta notavelmente o momento torsor de fissuração da secção, podendo os mesmos serem desprezados.



# Capítulo 6- Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões adquiridas com o desenvolvimento desta dissertação. Desta forma, primeiramente serão abordados todos os dados relativos à modelação da viga A2 com o modelo modificado fazendo um comparativo do modelo realizado por Ferreira, 2016 [4] indicando as principais alterações do modelo. Já na secção 6.2 deste capítulo será feita uma abordagem relativa aos resultados obtidos da construção dos 5 novos modelos com diferentes espessuras realizando uma análise tendo em conta os documentos normativos. Relativamente à secção 6.3 deste capítulo realizar-se-á uma análise comparativa dos 5 modelos com a adição de banzos laterais com diferentes larguras, realizando a análise comparativa e tendo em conta os documentos normativos consultados. Por último, na secção 6.4, serão apresentadas as conclusões obtidas com a realização desta dissertação bem como a apresentação de algumas sugestões para novos trabalhos.

## 6.1 Análise do modelo da viga A2 com modelo modificado e comparação com o modelo de Ferreira [4]

Como foi referido na secção 3.10 desta dissertação, verificaram-se várias melhorias na nova modelação da viga A2, entre elas a maior aproximação da curva numérica do modelo à curva experimental. Verificou-se assim que, as alterações aplicadas no modelo modificado refletiram-se em bons resultados finais. De forma sucinta, as principais alterações ao modelo de Ferreira, 2016 [4] e que deram origem ao modelo modificado foram,

- A criação de superfícies nas extremidades associadas aos dois pontos de referência (RP-1 e RP-2), nos quais posteriormente foram aplicadas as condições de contorno ou de fronteira. No modelo de Ferreira de 2016 [4] tais superfícies foram criadas na delimitação do betão elástico e do betão plástico;
- A alteração do comportamento plástico do betão, alterando o tipo de comportamento do betão à tração. Desta forma, foi alterado de "Strain" para "GFI" (*fracture energy*). O intuito desta alteração resumiu-se ao facto de que, quando se utiliza o "Strain" é visível na curva T- $\theta$  um decréscimo do momento

torsor quando a viga passa do estado não fissurado para o estado fissurado, o qual está relacionado com a forma da relação constitutiva do betão à tração (pico + quebra).

Relativo à construção das armaduras constituintes da viga A2, foi realizada uma alteração do modelo Ferreira, 2016 [4], optando-se por não colocar cintas de extremidade, obrigando assim, a que estas ficassem espaçadas 3 cm da extremidade da armadura, contabilizando assim um total de 19 cintas espaçadas a 8cm, tal como a Figura 142 indica.

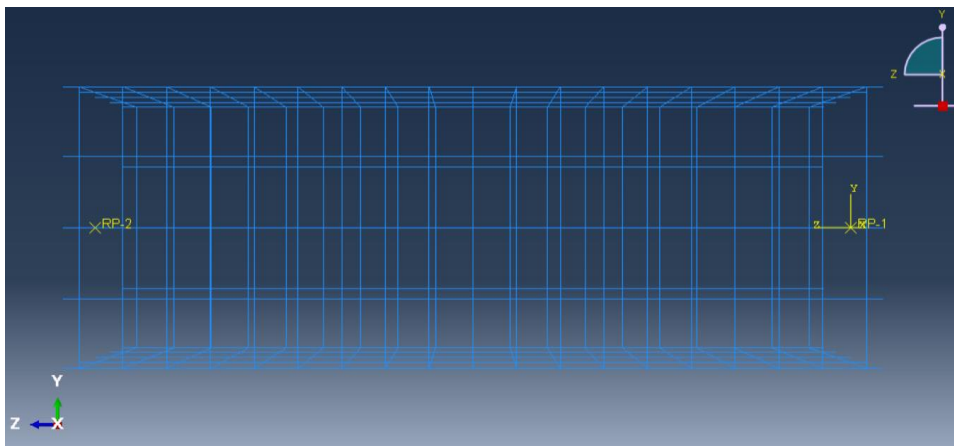


Figura 142 - Pormenor construtivo da armadura da viga A2 com modelo modificado

- Relativamente às condições de apoio, no ponto RP-1, apenas ficaram restringidos os movimentos segundo  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , já no ponto intermédio da viga ficou restringido o movimento segundo  $U_3$  e por fim no ponto de referência, RP-2, ficaram restringidos os movimentos segundo  $U_1$  e  $U_2$  e o momento torsor aplicado em  $U_3$  igual a 0.1 KNm.

## 6.2 Conclusões sobre a variação da espessura do modelo da Viga A2

As principais conclusões obtidas no decorrer do presente trabalho encontram-se, de forma sumária, descritas seguidamente,

- Perante o estudo realizado, é possível analisar que à medida que se reduz a espessura da parede, a partir da secção cheia, diminuem significativamente o valor quer do Momento Torsor de Fissuração quer do Momento Torsor Máximo. Sendo que, para secções com espessuras bastantes pequenas foi possível verificar que a rotura em torção é substancialmente mais frágil e prematura;
- Analisando os resultados obtidos e realizando a comparação com os limites normativos [14], verificou-se que, para  $x/t = 4$  se observa que a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia é superior a 0.8, sendo que para valores de  $x/t$  superiores, esta relação aumenta até à unidade;
- Noutro ponto de vista, pode concluir-se que para  $x/t > 4$ , a resistência à torção de uma secção cheia pode ser calculada de forma conservativa, mas não excessivamente, como uma secção vazada equivalente;
- No intervalo de  $x/t$  entre 10 e 4, observa-se que a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia tende a baixar rapidamente à medida que a relação  $x/t$  aumenta (isto é, à medida que a espessura reduz);
- Sendo que neste intervalo, a norma [14], refere a necessidade de aplicar um fator de correção igual a  $4t/x$  para corrigir a resistência à torção da secção cheia por forma a obter a resistência efetiva da secção vazada. Verificou-se que o fator de correção referido na norma [14], perante os resultados obtidos, se demonstrou válido;
- Para valores iguais e inferiores a  $x/t = 10$ , a relação entre o momento torsor máximo da secção vazada e da secção cheia continua a decrescer e é inferior a 50%;
- Por fim, os resultados gerais obtidos parecem confirmar a validade das disposições da norma [14], resumidas na Secção 4.1 desta dissertação, para a aplicação em projeto para o dimensionamento à torção de secção retangulares de betão armado, pelo menos para o tipo de viga simulada neste trabalho.

### 6.3 Conclusões sobre a adição de banzos laterais no modelo da Viga A2

Perante os resultados obtidos após a modelação com a adição de banzos laterais com diferentes larguras foram obtidas as seguintes conclusões,

- Verificou-se a existência de uma razoável influência da presença de banzo, em particular para o momento torsor máximo, sendo que essa influência é pouco relevante para o momento torsor de fissuração;
- Na análise do gráfico final com todas as curvas  $T - \theta$ , observa-se a existência de um pico, no aumento do momento torsor máximo para a secção com banzo com  $b = 10$  cm, sendo que para valores superiores de  $b$  o aumento do momento torsor máximo reduz, mas volta a crescer lentamente à medida que  $b$  aumenta;
- Segundo as normas, [14], [15], estas estipulavam que a participação de banzos para o cálculo da resistência à torção de secções de betão armado só devia ser contabilizada para uma relação  $b/t \leq 3$ . Perante os resultados obtidos, estes mostram que o pico do aumento de resistência à torção da secção com banzo se localiza nesse intervalo, em particular para  $b/t = 1$ . Observa-se uma redução da referida resistência logo a partir de  $b/t = 2$ . A partir deste último limite, como referido anteriormente, a resistência à torção volta a aumentar ligeiramente à medida que  $b/t$  aumenta;
- Assim, é possível que os resultados gerais obtidos apontem para a confirmação da validade do limite para  $b/t$  estipulado nas disposições das normas analisadas [14], [15], embora, para a viga analisada neste trabalho se observe que o limite de  $b/t = 3$  parece ser um pouco excessivo. Deve no entanto referir-se que tal não compromete a segurança para o dimensionamento à torção, pois para  $b/t > 1$  se observa sempre que a resistência à torção da secção com banzo é superior à da secção original sem banzo;
- Por fim, tendo em conta o que apresentado anteriormente, a introdução de banzos não afeta notavelmente o momento torsor de fissuração da secção, podendo os mesmos serem desprezados.

## 6.4 Sugestões para trabalhos futuros

Tendo em conta o trabalho realizado nesta dissertação, e tendo por base o modelo de referência da Viga A2 sujeito à torção, sugerem-se os seguintes desenvolvimentos futuros:

- Estudar novas variáveis geométricas, como por exemplo a relação  $y/x$  da secção, ou seja, o chamado “aspeto” da secção, realizando uma comparação entre secções retangulares “versus” secção quadrada;
- A realização de um estudo semelhante sobre a influência do núcleo de betão e das taxas de armadura na ductilidade em torção pura;
- Estudar secções com mais do que um caixão (secção multicelular), anexando várias secções do tipo das da viga A2 lado a lado, de forma a compor uma secção mais larga e com menor altura que poderia ser utilizada como tabuleiro de uma ponte ou até de um pavimento.

## Bibliografia

- [1] EC2, “Eurocódigo 2: Projeto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios,” Comité Europeu de Normalização; Comité Europeu de Normalização; Comité Europeu de Normalização; Europäisches Komitee für Normung, Bruxelas, 2004.
- [2] V. N. Q. P. Araújo, “Análise comparativa de Modelos de Cálculo de Estruturas de Betão Armado,” Coimbra, 2013.
- [3] P. Perxyna, “Fundamental Problems in Viscoplasticity,” Advances in Applied Mechanics, Academic Press , New York, 1966.
- [4] M. Ferreira, “Análise não linear por Elementos Finitos de Vigas de Betão Armado à Torção,” Covilhã, junho, 2016.
- [5] L. Bernardo, “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência,” Coimbra, 2003.
- [6] J. M. R. S. Tavares, Introdução ao método dos elementos finitos, maio, 1998.
- [7] S.V. Chaudhari Department of Applied Sciences & Humanities. Rajiv Gandhi Institute of Technology, Modeling of Concrete for nonlinear analysis Using Finite Element Code ABAQUS, Mumbai, India, 2012.
- [8] J. L. Suvaun. G., Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Paris: Dunod, 1972.
- [9] S. Johnson, “Comparison of Nonlinear Finite Element Modeling Tools for Structural Concrete,” Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Engenharia, Universidade de Illinois, Champaign, 2006.
- [10] T. Hsu, Torsion of Reinforced Concrete, Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- [11] f.-. F. I. d. Béton, Model Code 2010, First Complete Draft, Fib bulletins, Suíça, Março, 2010.
- [12] “Betão. Ensaio de Compressão,” LNEC, 1968.
- [13] IPQ, “Norma Portuguesa EN 10 002-1, “Materiais Metálicos. Ensaios de Tração, Parte 1: Método de Ensaio (à temperatura ambiente),” Novembro 1990.
- [14] “Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary,” Farmington Hills, 1989.
- [15] REBAP, Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Porto Editora, 1983.

- [16] T. Hsu, "Torsion of Structural Concrete – Behaviour of Reinforced Concrete Rectangular Members," Detroit, 1968.
- [17] O. J. Pereira, "Introdução ao método dos elementos finitos na análise de problemas de elasticidade," 2005.
- [18] L. D. Kirchhof, "Análise da resposta de modelos numéricos de vigas mistas aço-concreto," Argentina, 2003.
- [19] F. T. Dias, J. P. d. Cruz, R. F. Valente e R. A. d. Sousa, "Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia," *Método dos Elementos Finitos* -, pp. 115-300.
- [20] A. Lyrio, "Análise de placas de betão pré-esforçado com base no modelo de treliça com amolecimento," Covilhã, 2017.
- [21] B. Cerquido, "Análise de secções de betão armado com base no modelo de treliça com amolecimento," Covilhã, maio, 2017.
- [22] Dassault Systems, ABAQUS 6.12 User Manual Vol 1, USA, 2012.
- [23] Dassault Systems, ABAQUS 6.12 User Manual Vol 2, USA, 2012.
- [24] Dassault Systems, ABAQUS 6.12 User Manual Vol 3, USA, 2012.
- [25] Dassault Systems, ABAQUS 6.12 User Manual Vol 4, USA, 2012.
- [26] Dassault Systems , ABAQUS 6.12 User Manual Vol 5, USA, 2012.



## **Anexos**

**Anexo 1 (a) e 1 (b)** - Vídeo de toda a modelação da Viga A2 com modelo modificado

**Anexo 2** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado (ABAQUS)

**Anexo 3** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $t=5\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 4** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $t=7.5\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 5** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $t=15\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 6** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $t=20\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 7** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com secção cheia (ABAQUS)

**Anexo 8** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $b=10\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 9** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $b=20\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 10** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $b=30\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 11** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $b=40\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 12** - Modelo da Viga A2 com modelo modificado com  $b=50\text{cm}$  (ABAQUS)

**Anexo 13** - Resultados do modelo da Viga A2 com modelo modificado

**Anexo 14** - Resultados comparativos na alteração de espessuras do modelo da viga A2 com modelo modificado

**Anexo 15** - Resultados comparativos na adição de banzos do modelo da viga A2 com modelo modificado

**Anexo 16** - Análise de resultados dos modelos com diferentes espessuras

**Anexo 17** – Análise de resultado dos modelos com a adição de banzos

