UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior. Planificação de subunidade relativa ao Tema III - Sucessões Reais.

Flávio Alberto Louro Escada

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em

Ensino de Matemática no 3ºciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

(2º ciclo de estudos)

Orientador Científico: Prof. Doutor Helder Soares Vilarinho

Covilhã, Junho de 2012

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Helder Vilarinho por toda a dedicação e empenho que mostrou no decorrer do trabalho, bem como pelas valiosas sugestões dadas para a elaboração do mesmo.

À Professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes por nos ter acolhido, orientado e ensinado ao longo de todo este ano, além de toda a amizade e disponibilidade mostradas.

À Escola Secundária Campos Melo e a todos aqueles que a consitituem por nos terem proporcionado este ano de estágio.

À minha amiga Tânia Pacheco por tudo aquilo que passámos juntos, por todo o apoio e amizade, sabes que te ficarei para sempre agradecido!

À minha amiga Regina Guimarães uma palavra especial de agradecimento por todo o apoio demonstrado e por saber que quando precisar sei que posso contar contigo!

À minha família e em especial ao meu irmão e a alguém muito especial, pelo tempo que não lhes dediquei.

Por fim a todos aqueles que de alguma forma marcaram este ano e me ajudaram a cumprir os meus objetivos!

Resumo

Na parte relacionada com o trabalho científico estudámos de modo sistemático progressões aritméticas e progressões geométricas de primeira ordem e de ordem superior. Fez-se também uma incursão nas sucessões definidas por recorrência, estudando recorrências lineares de primeira e segunda ordens. Posteriormente provou-se também como o Teorema de Recorrência Múltipla implica o Teorema de Van der Waerden, mostrando-se assim que, dada qualquer coloração arbitrária dos números naturais, com um número finito de cores, existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento arbitrariamente grande. Seguidamente, com recurso a uma extensão polinomial do Teorema de Van der Waerden, generalizou-se este resultado para progressões aritméticas de ordem superior e para sucessões definidas por recorrência.

Na parte relacionada com a prática de ensino supervisionada apresenta-se uma breve descrição do estágio pedagógico, tal como a planificação de uma subunidade didática. Neste caso a planificação comporta 6 aulas de 90 minutos, correspondentes ao *Tema III - Sucessões Reais* do programa de Matemática A de 11° ano para os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e Ciências Socioeconómicas.

Palavras-chave

Progressões Aritméticas de ordem superior, Progressões Geométricas de ordem superior, Sucessões definidas por recorrência, Teorema de Van der Waerden, Teoria de Ramsey, Teorema de Recorrência Múltipla, Planificação, Sucessões Reais

Abstract

In the scientific part of this work we have studied arithmetic and geometric progressions of first and higher orders. We have analyzed recursive sequences, presenting results about linear recursions of first and second orders. Subsquently, we have proved how the Multiple Recurrence Theorem implies Van der Waerden's Theorem, showing that for any coloring of the natural numbers with a finite number of colors we can find arbitrarily large monochromatic arithmetic progressions. After that, using a polynomial extension of Van der Waerden's Theorem, we have generalized this result for arithmetic progressions of higher order and recursive sequences.

On the other hand we present a short description of my internship and also the planning of 6 classes with 90 minutes each, connected with the theme of real sequences included in the Mathematics A syllabus of the 11^{th} grade.

Keywords

Arithmetic progressions of higher order, Geometric progressions of higher order, Recursive sequences, Van der Waerden's Theorem, Multiple Recurrence Theorem, Ramsey Theory, Planning, Real Sequences.

Índice

Introdução **1**

1 Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior **3**

1.1 Noções elementares 3

1.2 Progressões Aritméticas 4

1.3 Progressões Geométricas 9

1.4 Sucessões definidas por recorrência 12

1.4.1 Recorrências lineares de primeira ordem 13

1.4.2 Recorrências lineares de segunda ordem 16

1.5 Colorações de progressões de ordem superior 20

1.6 Conclusão 24

2 Prática de Ensino Supervisionada **27**

2.1 Descrição sumária do Estágio Pedagógico 27

2.2 Planificação da Aula 1 32

2.3 Planificação da Aula 2 39

2.4 Planificação da Aula 3 45

2.5 Planificação da Aula 4 51

2.6 Planificação da Aula 5 57

2.7 Planificação da Aula 6 64

2.8 Reflexão sobre a Prática de Ensino Supervisionada 70

Bibliografia **71**

A Anexos **73**

A.1 Ficha de trabalho sobre Progressões Geométricas 73

A.2 Guião de trabalho com a calculadora N-Spire 76

A.3 Regulamento do Peddy Paper MatCidade 81

Introdução

O Relatório de Estágio (RE) apresentado será essencialmente dividido em dois grandes grupos: o que diz respeito à vertente científica deste relatório e o que se liga à vertente pedagógica, que coincide que o trabalho realizado durante a Prática de Ensino Supervisionada (PES).

Para a parte científica do RE foi-nos proposto, no início do ano letivo, que tratássemos e aprofundássemos um tema com interesse para os níveis de escolaridade que iríamos lecionar. Em virtude dessa restrição, e dado ter lecionado as minhas aulas ao 11° ano como irei explicar mais adiante, comecei por escolher qual dos temas relativos ao currículo desse ano iria estudar. Depois de refletir, juntamente com o orientador científico, o Prof. Doutor Helder Vilarinho, chegámos à conclusão de que seria mais proveitoso escolher um subtema do tema "Sucessões". Sendo assim, procurámos alguma bibliografia e tentámos pensar num conteúdo a desenvolver, que numa fase inicial estivesse bem conectado ao que é lecionado no 11° ano, sendo estendido, numa segunda fase, para algo mais profundo e que mostrasse alguns resultados interessantes nesse âmbito.

Dadas as considerações anteriores pensámos então em fazer uma breve síntese teórica dos conceitos de progressão aritmética, progressão geométrica e sucessão definida por recorrência. Dentro destes conteúdos começou-se por abordar caraterísticas presentes no programa de 11° ano, como, por exemplo, as definições, o termo geral e a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica. Com o evoluir do trabalho avançámos para o estudo de progressões aritméticas de ordem superior, tal como de progressões geométricas de ordem superior. Neste campo estudámos e demonstrámos alguns resultados importantes sobre a caracterização destes dois tipos de progressões. No caso das sucessões definidas por recorrência avançou-se para a determinação do termo geral de uma sucessão deste tipo, demonstrando-se alguns resultados associados e que nos mostram algumas possibilidades para encontrar o termo geral destas.

No desenvolvimento do trabalho referido anteriormente tomou-se como base o livro do matemático Elon Lages Lima, "A Matemática do Ensino Médio - Volume 2", pois este seguia a linha de pensamento necessária para este relatório: o autor faz uma síntese dos conteúdos lecionados no Ensino Médio do Brasil (que é o equivalente ao Ensino Secundário português), aprofundando esses temas e dando-lhe outra visão.

Depois de concluída esta primeira parte do trabalho científico fez-se uma breve incursão sobre Teoria de Ramsey, introduzindo-se alguns conceitos e resultados estruturais. Demonstrou-se como o Teorema de Recorrência Múltipla implica o Teorema de Van der Waerden: dada qualquer coloração dos números naturais, com um número finito de cores, existe sempre uma progressão aritmética monocromática de comprimento arbitrariamente grande.

Usando a ideia da prova do Teorema de Van der Waerden partiu-se para a generalização deste, analisando a seguinte questão: "Dada qualquer coloração dos números naturais, com um número finito de cores, é possível encontrar-se progressões aritméticas de ordem k, $k \in \mathbb{N}$, monocromáticas arbitrariamente grandes?". A resposta afirmativa surge usando uma extensão polinomial do Teorema de Recorrência Múltipla [2], tendo-se analisado seguidamente alguns casos particulares.

Na parte pedagógica do trabalho, apresento neste relatório a planificação de uma subunidade didática, correspondente a um dos períodos de regência de aulas. Além disso, faço também uma breve síntese daquilo que foi a minha PES, descrevendo sumariamente quais as atividades realizadas, as tarefas cumpridas, bem como um breve resumo dos conteúdos abordados em todas as aulas lecionadas. Farei também, no fim desse capítulo, uma reflexão crítica de todo o ano de estágio e particularmente das aulas lecionadas e apresentadas neste relatório.

Escolhi, para integrar este trabalho, a planificação da subunidade relacionada com o subtema das Sucessões, principalmente por ter ligação ao tema da parte científica, e pelo facto de ter lecionado todas as aulas consecutivamente, o que permitiu maior coerência entre os planos de aula. Durante a planificação das aulas houve sempre um cuidado especial em seguir as orientações presentes no programa oficial de Matemática A.

Capítulo 1

Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior

1.1 Noções elementares

No decorrer deste capítulo vamos começar por apresentar algumas noções elementares de sucessões (seção 1.1). Segue-se posteriormente para o estudo e caraterização de progressões aritméticas de ordem superior (seção 1.2) e das progressões geométricas de ordem superior (seção 1.3), sintetizando depois alguns resultados acerca de sucessões definidas por recorrência (seção 1.4). Para finalizar o capítulo será feita uma breve incursão sobre Teoria de Ramsey, estudando e generalizando o Teorema de Van der Waerden (seção 1.5).

Definição 1.1.1 *Uma sucessão de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural n (ordem) faz corresponder um número real x_n (que se denomina n-ésimo termo da sucessão). Portanto,*

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x_n$$

Escrevemos $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas (x_n) para identificar a sucessão cujo n-ésimo termo é x_n (chamado termo geral da sucessão).

Definição 1.1.2 (Limite de uma sucessão) *Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o* ***limite*** *da sucessão (x_n) quando, para todo o número real $\varepsilon > 0$ existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que todos os termos x_n com ordem $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$:*

$$a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, : \, n > n_0 \, \Rightarrow \, |x_n - a| < \varepsilon$$

Assim, qualquer intervalo aberto centrado em a contém todos os termos x_n da sucessão à exceção de um número finito de índices n (todos os $n \leqslant n_0$).

Escrevemos $\lim x_n = a$, ou ainda,

$$a = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ ou } x_n \to a$$

Uma sucessão que possui limite diz-se **convergente**, caso contrário diz-se **divergente**.

1.2 Progressões Aritméticas

Definição 1.2.1 *Progressões aritméticas são sucessões de números reais nas quais a diferença entre termos consecutivos é sempre constante. Essa diferença constante tem o nome de* ***razão da progressão*** *e representar-se-á pela letra* r.

Consideremos uma progressão aritmética (a_n). Se quisermos, por exemplo, calcular o termo de ordem 5 a partir do termo inicial a_1, basta somar a a_1 quatro vezes a razão dessa progressão aritmética. Isto é, $a_5 = a_1 + 4r$.

Assim sendo, para calcular um termo de ordem n numa progressão aritmética de razão r qualquer basta atender a que

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (1.1)$$

O termo geral de uma progressão aritmética (a_n) de razão $r > 0$ é assim dado pela expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Exemplo 1.2.2 *A sucessão* $(a_n) = (-4, 7, 18, 25, ...)$ *é uma progressão aritmética de razão* $r = 11$ *e termo inicial -4, cujo termo geral é dado por* $a_n = -4 + (n-1)11 = -4 + 11n - 11 = 11n - 15$.

Pela definição 1.2.1 podemos verificar que o termo geral de uma progressão aritmética é dado por um polinómio em n: $a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + nr - r = rn + (a_1 - r)$. Para $r \neq 0$ vem que este polinómio é de grau 1. Por esta razão as progressões aritméticas com $r \neq 0$ são chamadas **progressões aritméticas de primeira ordem**. Se $r = 0$, a progressão denomina-se **estacionária ou constante**.

Reciprocamente, se *numa sucessão, o termo geral de ordem* n *for dado por um polinómio em* n*, de grau menor ou igual a 1, então esta será uma progressão aritmética.* De facto se $x_n = an + b$, então (x_n) é uma progressão aritmética onde $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$.

Proposição 1.2.3 (Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética) *A soma dos* n *primeiros termos de uma progressão aritmética* (a_n) *é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \quad (1.2)$$

Demonstração: Seja (a_n) uma progressão aritmética e S_n a soma dos seus n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n. \quad (1.3)$$

Reordenando os termos da igualdade anterior começando pelo último e terminando no primeiro vem

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1. \quad (1.4)$$

Somando (1.3) com (1.4) obtemos que

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Ao passar de um par de parentêses para o seguinte verifica-se que, na primeira parcela há um aumento de r e na segunda parcela uma diminuição de r, não alterando a soma. Isto é,

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_1+r+a_n-r)+(a_1+2r+a_n-2r)+...+(a_1+(n-1)r+a_n-(n-1)r)+(a_n+a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n).$$

Como existem n pares de parentêses, temos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n \Leftrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

Exemplo 1.2.4 *A soma dos n primeiros números naturais é*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Observemos que os primeiros números naturais são elementos de uma progressão aritmética de razão $r = 1$, com $a_1 = 1$, podendo-se utilizar assim a proposição 1.2.3. Notemos que S_n é um polinómio de grau 2, sem termo independente.

Exemplo 1.2.5 *A soma dos n primeiros números ímpares é $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$. Notemos que, uma vez mais, S_n é um polinómio de grau 2, sem termo independente.*

Consideremos então a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{a_1 n + a_1 n + n^2 r - rn}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 n}{2} + \frac{rn^2}{2} - \frac{rn}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n.$$

É fácil observar que, se $r \neq 0$, S_n é um polinómio de segundo grau em n, sem termo independente.

Por outro lado, *todo o polinómio de segundo grau, sem termo independente, corresponde à soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética.* De facto, seja $P(n) = an^2 + bn$. Então $P(n)$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética em que $\frac{r}{2} = a$ e $b = a_1 - \frac{r}{2}$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$.

Definição 1.2.6 (Operador diferença) *Denotemos por Δ o operador diferença em sucessões: $\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$.*

Da definição anterior podemos concluir que uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética se e só se a sucessão (Δa_n) é constante.

Definição 1.2.7 (Progressão aritmética de segunda ordem) *Uma sucessão* (a_n) *na qual a sucessão das diferenças* $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ *é uma progressão aritmética de primeira ordem (não constante), designa-se por* ***progressão aritmética de segunda ordem****.*

Generalizando a definição 1.2.7 podemos dizer que uma **progressão aritmética de ordem** k, com $k \geq 2$, é uma sucessão na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$.

Exemplo 1.2.8 *Consideremos a sucessão* $(b_n) = (1, 5, 10, 16, 22, 29, ...)$. *A sucessão* (b_n) *é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois* $(c_n) = (\Delta b_n) = (b_{n+1} - b_n) = (b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, ...) = (4, 5, 6, ...)$ *é uma progressão aritmética de primeira ordem.*

Exemplo 1.2.9 *Considere-se a sucessão de termo geral* $d_n = n^3 - n$. *Verifiquemos que esta sucessão é uma progressão aritmética de terceira ordem. Para tal calculemos operadores diferença sucessivos:*
$\Delta d_n = d_{n+1} - d_n = (n+1)^3 - (n+1) - (n^3 - n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - n^3 + n = 3n^2 + 3n$;
$\Delta\Delta d_n := \Delta^2 d_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) - (3n^2 + 3n) = 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 - 3n^2 - 3n = 6n + 6$;
$\Delta^3 d_n = 6(n+1) + 6 - (6n+6) = 6n + 6 + 6 - 6n - 6 = 6$.
Concluimos assim que $(\Delta^3 d_n)$ *é constante, pelo que a sucessão* (d_n) *é, de facto, uma progressão aritmética de terceira ordem.*

Voltemos à soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. No exemplo seguinte mostramos que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemplo 1.2.10 *Para mostrar a igualdade anterior notemos que:*

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \quad (1.5)$$

Atendendo a que

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

é possível simplificar estes dois somatórios, obtendo em (1.5) *a seguinte expressão:*

$$(k+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Além disso, pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética vem que

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Também,

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n,$$

pelo que

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Assim, podemos verificar que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1^3 - \frac{3n^2+3n}{2} - n}{3} = \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Observe-se que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

é um polinómio de grau 3 em n.

O Teorema 1.2.11 vai generalizar o resultado obtido na conclusão do exemplo 1.2.10.

Teorema 1.2.11 *O somatório*

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$$

é um polinómio de grau $p+1$ em n.

Demonstração: Demonstre-se o Teorema 1.2.11 por indução sobre p. Para $p = 1$ o resultado foi provado no exemplo 1.2.4. Suponhamos agora que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinómio de grau $p+1$ em n, $\forall p \in \{1, 2, ..., s\}$. Mostre-se que a afirmação é verdadeira agora para $s = p+1$, ou seja, mostre-se que $\sum_{k=1}^{n} k^{p+1}$ é polinómio de grau $p+2$ em n.

Notemos que, aplicando o binómio de Newton, $(k+1)^{p+2} = k^{p+2} + (p+2)k^{p+1} + ...$, onde os termos restantes formam um polinómio de grau p em k. Logo, vem que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+2} + (p+2)\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + F(n), \quad (1.6)$$

onde $F(n)$ é um polinómio de grau $p+1$ em n, pela hipótese de indução.

Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+2} = 2^{p+2} + 3^{p+2} + ... + n^{p+2} + (n+1)^{p+2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+2} = 1^{p+2} + 2^{p+2} + 3^{p+2} + ... + n^{p+2}.$$

Simplificando as parcelas comuns aos somatórios anteriores obtém-se em (1.6)

$$(n+1)^{p+2} = 1^{p+2} + (p+2)\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + F(n). \quad (1.7)$$

De (1.7) vem que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \frac{(n+1)^{p+2} - 1^{p+2} - F(n)}{p+2},$$

que é um polinómio de grau $p+2$ em n. □

Do Teorema anterior obtemos de imediato o seguinte corolário.

Corolário 1.2.12 *Se $F(n)$ é um polinómio de grau p em n então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinómio de grau $p+1$ sobre n.*

Seguidamente vamos dar uma caracterização das progressões aritméticas de ordem superior.

Lema 1.2.13 *(a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem se e só se a_n é um polinómio de segundo grau em n.*

Demonstração: Seja (a_n) uma progressão aritmética de segunda ordem. Então $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é uma progressão aritmética de razão diferente de zero. Assim, $b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$. Como $b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (b_n), vem que, $a_{n+1} - a_1$ é um polinómio de grau 2 em n. Portanto, a_n é também um polinómio de grau 2 em n. Seja agora $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$. Então vem que, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a\,(n+1)^2 + b\,(n+1) + c - (a\,n^2 + b\,n + c) = a\,n^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c = 2an + (a+b)$. Esta expressão é de primeiro grau em n, pelo que (Δa_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem e, consequentemente, (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem. □

O Teorema seguinte surge como generalização do lema 1.2.13.

Teorema 1.2.14 *(a_n) é uma progressão aritmética de ordem $p \geqslant 1$ se e só se a_n é um polinómio de grau p em n.*

Demonstração: Utilizamos o método de indução matemática sobre p. Para $p = 1, 2$ o resultado é válido e já foi provado no lema 1.2.13. Suponha-se agora que o resultado é válido $\forall p \in \{1, 2, ..., s\}$ e mostre-se que o resultado é válido para $p = s + 1$.

Se (a_n) é progressão aritmética de ordem $s+1$ então $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é uma progressão aritmética de ordem s. Pela hipótese de indução, b_n é um polinómio de grau s em n. Então

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + ... + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

é, pelo corolário 1.2.12, um polinómio de grau $s + 1$ em n. Logo, a_{n+1} e, consequentemente, a_n são polinómios de grau $s + 1$ em n.

Reciprocamente, seja a_n um polinómio de grau $s + 1$ em n. Então Δa_n é um polinómio de grau s em n. Pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s, o que implica que (a_n) seja uma progressão aritmética de ordem $s + 1$. □

1.3 Progressões Geométricas

Definição 1.3.1 *Seja (b_n) uma sucessão. Se o quociente entre cada termo e o seu termo anterior for constante (e diferente de zero) então (b_n) denomina-se* ***progressão geométrica****. A essa constante denomina-se* razão da progressão *e representa-se por q, para $q \neq 0$ e $q \neq 1$.*

Da definição 1.3.1 é óbvio constatar que, numa progressão geométrica (b_n), um termo é obtido pelo produto do termo anterior pela razão. Por exemplo, $b_2 = qb_1$ e $b_3 = qb_2 = q^2 b_1$.

Surge assim naturalmente a expressão do termo geral de uma progressão geométrica (b_n) :

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

onde $q \neq 0$, $q \neq 1$ é a razão da progressão geométrica.

Exemplo 1.3.2 *A sucessão $(b_n) = \left(8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{4}$, com termo inicial 8, cujo termo geral é dado por $b_n = \dfrac{8}{4^{n-1}}$.*

Proposição 1.3.3 (Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica) *Seja (b_n) uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$. Então a soma dos n primeiros termos de (b_n), denotada por S_n, é dada por:*

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração: $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n$. Multiplicando a igualdade anterior por q obtemos que: $qS_n = b_2 + b_3 + ... + b_n + b_{n+1}$, de onde $S_n - qS_n = b_{n+1} - b_1$. Ou seja, $S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$, pelo que $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. □

Como aplicação da Proposição 1.3.3 apresenta-se o exemplo seguinte, que remonta a uma lenda associada ao inventor do xadrez.

Exemplo 1.3.4 *Segundo uma lenda, o inventor do xadrez teria pedido ao seu Rei, como recompensa pela sua invenção, um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira e assim sucessivamente, dobrando sempre a quantidade pedida de uma casa para a outra. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas o problema apresentado resume-se na soma dos primeiros 64 termos de uma progressão geométrica de razão 2. De acordo com a Proposição 3.3 essa soma é dada por:*

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = 2^{64} - 1.$$

Nas progressões geométricas com razão $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito, quando $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q},$$

pois $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Este resultado é muito importante para, por exemplo, determinar a fração correspondente a uma dada dízima infinita periódica, como é mostrado nos exemplos seguintes.

Exemplo 1.3.5 *Determinar a fração correspondente à dízima infinita periódica* $0.9999....$
Notemos que $0.9999... = 0.9+0.09+0.009+...$, *ou seja, a dízima apresentada corresponde ao limite da soma dos* n *primeiros termos de uma progressão geométrica de razão* 0.1, *com termo inicial* 0.9. *Aplicando o resultado anterior vem que,*

$$\lim S_n = \frac{0.9}{1-0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1.$$

Então podemos concluir que a fração correspondente à dízima $0.9999....$ *é* 1.

Exemplo 1.3.6 *Determinar a fração correspondente à dízima infinita periódica* $1.71111......$
Observemos que $1.711111... = 1.7 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ...$ *Notemos que* $0.01 + 0.001 + ...$, *corresponde ao limite da soma dos* n *primeiros termos de uma progressão geométrica de razão* 0.1, *com termo inicial* 0.01. *Assim temos que,*

$$\lim S_n = \frac{0.01}{1-0.1} = \frac{0.01}{0.9} = \frac{1}{90}.$$

Logo concluímos que, $1.7111... = \frac{17}{10} + \frac{1}{90} = \frac{154}{90} = \frac{77}{45}$.

Definição 1.3.7 (Operador quociente) *Denotemos por* ∇ *o operador quociente em sucessões:* $\nabla b_n := \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Da definição anterior podemos concluir que uma sucessão (b_n) é uma progressão geométrica se e só se $(\nabla b_n) = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ é constante.

Definição 1.3.8 (Progressão geométrica de segunda ordem) *Uma sucessão (b_n) na qual a sucessão dos quocientes $(\nabla b_n) = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ é uma progressão geométrica de primeira ordem, designa-se por **progressão geométrica de segunda ordem**.*

Generalizando a definição 1.3.8 podemos dizer que uma **progressão geométrica de ordem** k, com $k \geq 2$, é uma sucessão na qual os quocientes entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão geométrica de ordem $k-1$.

De seguida apresentam-se alguns resultados que permitem relacionar as progressões geométricas com as progressões aritméticas.

Teorema 1.3.9 *(b_n) é uma progressão geométrica de termos positivos se e só se (a_n), definida por $a_n = \log b_n$, é uma progressão aritmética.*

Demonstração: Seja (b_n) uma progressão geométrica de termos positivos. Então, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$, onde $q \neq 1$ é constante (razão da progressão geométrica).
Para que (a_n), definida por $a_n = \log b_n$ seja uma progressão aritmética a diferença $a_{n+1} - a_n$ terá que ser constante. Vejamos, $a_{n+1} - a_n = \log b_{n+1} - \log b_n = \log\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \log q$, $q \neq 0$, que é constante. Logo (a_n) é uma progressão aritmética de razão $\log q$.

Se $a_n = \log(b_n)$ é uma progressão aritmética então

$$\log(b_{n+1}) - \log(b_n) = r \Leftrightarrow \log\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = r \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = e^r$$

isto é, (b_n) é uma progressão geométrica de razão $q = e^r$. □

Teorema 1.3.10 *(g_n) é uma progressão geométrica de segunda ordem se e só se $\log g_n$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração: Seja (g_n) uma progressão geométrica de segunda ordem. Então h_n, definida por $h_n = \dfrac{g_{n+1}}{g_n}$ é uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$, ou seja, $h_n = h_1 r^{n-1}$ (por definição).
Portanto,

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= h_1 g_n r^{n-1} = h_1^2 r^{n-2} r^{n-1} g_{n-1} = \ldots = \\ &= h_1^n r^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} g_1 = h_1^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} g_1, \end{aligned}$$

de onde,

$$g_n = h_1^{n-1} r^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} g_1.$$

Assim,

$$\log g_n = \log g_1 + (n-1)\log h_1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\log r,$$

que é um polinómio de grau 2 em n, e pelo Teorema 1.2.14, é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Suponhamos agora que $(\log g_n)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, pelo Teorema 1.2.14, $\log g_n = an^2 + bn + c$, $a \neq 0$.

Assim $g_n = e^{an^2+bn+c}$. Provemos que g_n é uma progressão geométrica de segunda ordem.

$\Delta g_n = \dfrac{g_{n+1}}{g_n} = \dfrac{e^{a(n+1)^2+b(n+1)+c}}{e^{an^2+bn+c}} = \dfrac{e^{an^2+2an+a+bn+b+c}}{e^{an^2+bn+c}} = e^{2an+a+b}$.

$\Delta^2 g_n = \dfrac{\Delta g_{n+1}}{\Delta g_n} = \dfrac{e^{2a(n+1)+a+b}}{e^{2an+a+b}} = e^{2a}$, que é constante, provando-se que (g_n) é uma progressão geométrica de segunda ordem. □

Corolário 1.3.11 *Se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem então $(b_n) = (cr^{a_n})$ é uma progressão geométrica de segunda ordem, para qualquer constante $c > 0$ e razão r.*

Demonstração: Seja (a_n) uma progressão aritmética de segunda ordem e consideremos a sucessão $(b_n) = (cr^{a_n})$. Aplicando logaritmos obtemos que, $\log b_n = a_n \log r + \log c$. Por hipótese (a_n) é progressão aritmética de segunda ordem, logo $(a_n \log r + \log c)$ é também uma progressão aritmética de segunda ordem. Basta observar que o termo geral de (a_n) é da forma $a_n = a_1 n^2 + a_2 n + c$, logo $\log b_n = ((a_1 n^2 + a_2 n + c)\log r + \log c)$ que é um polinómio de 2º grau. Pelo Teorema 1.3.10 (b_n) é uma progressão geométrica de segunda ordem. □

Com o Corolário 1.3.11 e o Teorema 1.2.14 é possível afirmar que, por exemplo, $c_n = 8^{3n^2+3n}$ é uma progressão geométrica de segunda ordem.

1.4 Sucessões definidas por recorrência

Definir uma sucessão por recorrência é equivalente a estabelecer uma regra que permite calcular qualquer dos seus termos usando o(s) termo(s) imediatamente anterior(es).

De seguida enumeram-se alguns exemplos de sucessões definidas por recorrência.

Exemplo 1.4.1 *Podemos definir a sucessão $(x_n) = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$, sucessão dos números naturais ímpares, através da expressão $x_{n+1} = x_n + 2$, para $n \geqslant 1$, com $x_1 = 1$. O termo geral da sucessão (x_n) é dado por $x_n = 2n - 1$.*

Exemplo 1.4.2 *Podemos definir uma progressão aritmética por recorrência. Seja então (y_n) uma progressão aritmética e r a sua razão, com $y_1 = a$ então $y_{n+1} = y_n + r$, para $n \geqslant 1$.*
Analogamente podemos definir uma progressão geométrica por recorrência. Seja (z_n) uma progressão geométrica de razão q, com $z_1 = a$, então $z_{n+1} = q.z_n$, para $n \geqslant 1$.

Exemplo 1.4.3 *Uma das mais famosas sucessões definidas por recorrência é a sucessão de Fibonacci* $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$*, com* $F_0 = F_1 = 1$*, onde cada termo é a soma dos dois termos imediatamente anteriores.* (F_n) *pode ser definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$*, para* $n \geqslant 0$*.*

Notemos que uma sucessão não fica univocamente determinada apenas pela sua expressão de recorrência. Observe-se que, no exemplo 1.4.1, a sucessão definida por recorrência é satisfeita tanto pela sucessão dos números naturais ímpares, como por qualquer progressão aritmética de razão 2. Para definir univocamente uma sucessão, usando recorrência é necessário ter conhecimento sobre o(s) seu(s) primeiro(s) termo(s).

Podemos verificar que nos exemplos 1.4.1 e 1.4.2 cada termo é expresso em função do termo imediatamente anterior. Já no exemplo da sucessão de Fibonacci necessitamos de utilizar os dois termos exactamente anteriores.

1.4.1 Recorrências lineares de primeira ordem

Definição 1.4.1.1 *Uma recorrência diz-se* ***linear*** *de primeira ordem se for da forma* $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$*, com* $a_n \neq 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 1.4.1.2 (Recorrências lineares) *Alguns exemplos de recorrências lineares:* $(n+1)x_{n+1} = 2x_n$*,* $y_{n+1} = ny_n + 3n$*;*

Exemplo 1.4.1.3 (Recorrências lineares de primeira ordem homogéneas) $z_{n+1} = 3z_n$*;* $a_{n+1} = \frac{a_n}{8}$*.*

De seguida apresenta-se um exemplo, cujo objetivo é determinar o termo geral de uma sucessão, sendo esta definida por uma recorrência linear de primeira ordem homogénea ($b_n = 0$).

Exemplo 1.4.1.4 *Determinar o termo geral da sucessão* $x_{n+1} = nx_n$*,* $x_1 = 1$*.*

Atendendo à expressão que define recursivamente a sucessão notemos que:
$x_2 = 1x_1$*;*
$x_3 = 2x_2$*, e assim sucessivamente.*
Portanto, $x_n = (n-1)x_{n-1} = (n-1)(n-2)x_{n-2} = (n-1)!\, x_1$*. Como* $x_1 = 1$*, vem que* $x_n = (n-1)!$*.*

Em geral, podemos afirmar que o termo geral das sucessões deste tipo é dado por $x_n = a_1 a_2 ... a_n x_1$.

Consideremos agora recorrências lineares não-homogéneas de primeira ordem. Aquelas que mais facilmente se resolvem são as do tipo $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Notemos que,

$$x_2 = x_1 + f(1)$$

$$x_3 = x_2 + f(2)$$

$$...$$

$$x_n = x_{n-1} + f(n-1) = x_{n-2} + f(n-2) + f(n-1) = ... = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Logo qualquer recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$ tem por solução

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (1.8)$$

Exemplo 1.4.1.5 *Determinar o termo geral da sucessão definida recursivamente por* $z_{n+1} = z_n + n$, *com* $z_1 = 0$.

Esta recorrência é linear de primeira ordem não homogénea. No entanto podemo-la resolver utilizando o resultado citado em (1.8).

Logo, por (1.8) *vem que,*

$$z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} n = 0 + \frac{n(n-1)}{2},$$

pois $\sum_{k=1}^{n-1} n$ *corresponde à soma dos* $n-1$ *primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 1, com termo inicial 1, ou seja,*

$$\sum_{k=1}^{n-1} n = \frac{[1+(n-1)].(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

O teorema que se segue mostra que qualquer recorrência linear de primeira ordem não homogénea se pode transformar numa recorrência linear da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, de modo a poder ser resolvida pelo processo anterior.

Teorema 1.4.1.6 *Se* y_n *é uma solução não-nula da recorrência linear homogénea* $z_{n+1} = g(n)z_n$, *então a substituição* $z_n = y_n x_n$ *transforma a recorrência* $z_{n+1} = g(n)z_n + h(n)$ *em* $x_{n+1} = x_n + h(n)[g(n).y_n]^{-1}$.

Demonstração: Façamos a substituição $z_n = y_n x_n$ na recorrência $z_{n+1} = g(n)z_n + h(n)$. Podemos verificar que a anterior se transforma em

$$y_{n+1}x_{n+1} = g(n)y_n x_n + h(n). \quad (1.9)$$

No entanto $y_{n+1} = g(n)y_n$, pois y_n, por hipótese, é solução não-nula da recorrência $z_{n+1} = g(n)z_n$. Logo a equação (1.9) transforma-se em $g(n)y_n x_{n+1} = g(n)y_n x_n + h(n)$, isto é,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n g(n)y_n[g(n)y_n]^{-1} + h(n)[g(n)y_n]^{-1} \\ x_{n+1} &= x_n + h(n)[g(n)y_n]^{-1}. \end{aligned}$$

□

Como aplicação do teorema 1.4.1.6 apresenta-se então o exemplo seguinte.

Exemplo 1.4.1.7 *Determinar o termo geral da sucessão definida por recorrência $y_{n+1} = 3y_n + 3^n$, com $y_1 = 2$.*

Comecemos então por encontrar uma solução não-nula da recorrência linear homogénea $y_{n+1} = 3y_n$. Observemos então que:
$y_2 = 3y_1$;
$y_3 = 3y_2$;
....
$y_n = 3y_{n-1}$.
Logo vem que $y_n = 3y_{n-1} = 3.3y_{n-2} = 3^3 y_{n-3} = ... = 3^{n-1}y_1$.

Portanto uma solução não-nula da recorrência $y_{n+1} = 3y_n$ é $y_n = 3^{n-1}$.
Faça-se então a substituição $y_n = 3^{n-1}x_n$. Aplicando o Teorema 1.4.1.6 vem que,

$$x_{n+1} = x_n + 3^n[3.3^{n-1}]^{-1} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + 1.$$

Encontremos agora o termo geral da sucessão $x_{n+1} = x_n + 1$. Assim,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 2 + (n-1) = n + 1.$$

Então $y_n = 3^{n-1}x_n = 3^{n-1}(n+1)$.

Exemplo 1.4.1.8 *Determinar o termo geral da recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.*
Em primeiro lugar determine-se uma solução não-nula da recorrência linear homogénea $x_{n+1} = 2x_n$.

Notemos que $x_n = 2x_{n-1} = 2^2 x_{n-2} = ... = 2^{n-1}x_1$. Portanto uma solução não-nula é do tipo $x_n = 2^{n-1}c$, onde c é uma constante. Logo, aplicando o Teorema 1.4.1.6,

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}z_n \\ z_{n+1} &= z_n + 1[22^{n-1}]^{-1} \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{2^n} = z_n + 2^{-n}. \end{aligned}$$

Portanto vem que,

$$
\begin{aligned}
z_n &= z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n} = z_1 + 2^{-1}\frac{1-2^{-(n-1)}}{1-2^{-1}} = \\
&= z_1 - \left(\frac{1}{2}\frac{2^{-n+1}-1}{2^{-1}-1}\right) = z_1 - 2^{-n+1} + 1 = 3 + 2^{-n+1},
\end{aligned}
$$

pois $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n}$ *é uma progressão geométrica de razão* $r = 2^{-1}$ *e termo inicial* $a_0 = 2^{-1}$*; além disso* $x_1 = 2$ *e* $x_1 = 2^{1-1}z_1 \Leftrightarrow z_1 = 2$*. Assim,*

$$
x_n = 2^{n-1}(3 + 2^{-n+1}) = 3.2^{n-1}.
$$

1.4.2 Recorrências lineares de segunda ordem

Tal como nas recorrências lineares de primeira ordem começar-se-á por estudar as recorrências lineares de segunda ordem homogéneas.

Definição 1.4.2.1 *Uma recorrência linear de segunda ordem homogénea, com coeficientes constantes, é uma recorrência da forma* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$*. Podemos sempre supor que* $q \neq 0$*, pois se* $q = 0$*, a recorrência torna-se numa recorrência de primeira ordem.*

Para encontrar o termo geral de uma recorrência linear de segunda ordem homogénea associa-se à mesma uma equação de segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, que se denomina **equação caraterística.** Utilizaremos esta equação caraterística como auxiliar para determinar o termo geral de uma dada recorrência linear de segunda ordem. O teorema que se segue relaciona as raízes da equação caraterística com a expressão do termo geral que se procura.

Teorema 1.4.2.2 *Sejam* r_1 *e* r_2 *raízes da equação caraterística* $r^2 + pr + q = 0$*. Então* $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + q = 0$*, para quaisquer valores de* C_1 *e* C_2*.*

Demonstração: Comecemos por substituir $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$. Obtemos então que,

$$
\begin{aligned}
C_1r_1^{n+2} &+ C_2r_2^{n+2} + p(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) + q(C_1r_1^n + C_2r_2^n) \\
&= C_1r_1^nr_1^2 + C_2r_2^nr_2^2 + pC_1r_1^nr_1 + pC_2r_2^nr_2 + qC_1r_1^n + qC_2r_2^n \\
&= C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) \\
&= C_1r_1^n.0 + C_2r_2^n.0 = 0,
\end{aligned}
$$

pois r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q$. □

O Teorema que se segue mostra então que, se $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência têm a forma da solução apresentada no Teorema 1.4.2.2.

Teorema 1.4.2.3 *Sejam r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$ raízes da equação característica $r^2 + pr + q$. Então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.
Encontremos constantes C_1 e C_2 que sejam solução do sistema de equações:
$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer vem que:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & r_2 \\ y_2 & r_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}}.$$

As soluções são possíveis pois suposemos que $r_1 \neq r_2 \neq 0$.

Portanto $C_1 = \dfrac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$.

Analogamente podemos verificar que

$$C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Queremos então provar que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostrar-se-á que $z_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos assim que

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n &= y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} + p(y_{n+1} - C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^n) + q(y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n) \\ &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q). \end{aligned}$$

$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n$ é igual a zero, pois y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Além disso os dois últimos parênteses são também iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q$. Então significa que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, vem que $z_1 = z_2 = 0$. Portanto, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$, para todo o n. $\square$

Como exemplo de aplicação do Teorema 1.4.2.3 segue-se a determinação do termo geral da sucessão de Fibonacci.

Exemplo 1.4.2.4 *A sucessão de Fibonacci define-se recursivamente através da expressão $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = F_1 = 1$. Pretendemos determinar agora o seu termo geral. Para isso comecemos por identificar a equação característica associada à sucessão (F_n) que é $r^2 = r + 1$.*
As raízes da equação característica são:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, o termo geral da sucessão é dado por:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para determinar C_1 e C_2 utilizamos o conhecimento dos primeiros dois termos da sucessão ($F_0 = F_1 = 1$). Resolvendo o seguinte sistema, obtemos o valor das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer, vem que:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}}$$

$$C_1 = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Analogamente obtemos que $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Portanto, o termo geral da sucessão é dado por:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Estudemos agora o caso em que as raízes da equação característica são números complexos. Desta forma, escrevemos as raízes na forma trigonométrica, de modo a simplificar os cálculos. Assim suponhamos que $r_1 = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $r_2 = \rho(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$. Portanto vem que,

$$\begin{aligned} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n &= C_1 \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + C_2 \rho^n (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) = \\ &= \rho^n (C_1 + C_2 (\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2(\sin(n\theta)) \end{aligned}$$

Assim a solução para o termo geral pode então ser escrita como,

$$a_n = \rho^n [C_1' \cos(n\theta) + C_2' \sin(\theta)],$$

onde $C_1' = C_1 + C_2$ e $C_2' = i(C_1 - C_2)$.

Analisámos os casos em que as raízes da equação característica eram diferentes e por outro lado quando eram raízes complexas. Suponhamos agora que as raízes da equação são iguais. Seguem-se então os seguintes Teoremas que salvaguardam este último caso.

Teorema 1.4.2.5 *Sejam $r_1 = r_2 = r$ raízes (iguais) da equação $r^2 + pr + q = 0$. Então $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Se as raízes são iguais implica que $r = -\frac{p}{2}$.
Substituíndo $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtém-se que:

$$\begin{aligned} C_1r^{n+2} &+ C_2r^{n+2}(n+2) + p(C_1r^{n+1} + C_2r^{n+1}(n+1) + q(C_1r^n + C_2nr^n) = \\ &= C_1r^nr^2 + nC_2r^nr^2 + 2C_2r^nr^2 + pC_1r^nr + pnC_2r^nr + pC_2r^nr + qC_1r^n + qC_2nr^n = \\ &= C_1r^n(r^2+pr+q) + C_2r^nn(r^2+pr+q) + C_2r^nr(2r+p) = \\ &= C_1r^n.0 + C_2r^nn.0 + C_2r^nr.0 = 0, \end{aligned}$$

pois r é raíz da equação característica e $r = -\frac{p}{2}$. □

Prove-se agora a unicidade da solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$, no caso em que as raízes da equação característica são iguais, sendo a mesma da forma $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$.

Teorema 1.4.2.6 *Sejam $r_1 = r_2 = r$ raízes (iguais) da equação $r^2 + pr + q = 0$. Então $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é a única solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: A demonstração é análoga à do Teorema 1.4.2.3. □

Todos os métodos para encontrar o termo geral das recorrências de segunda ordem reportam-se para recorrências homogéneas. O Teorema seguinte diz respeito a um processo que é útil para encontrar o termo geral de recorrências lineares de segunda ordem não-homogéneas.

Teorema 1.4.2.7 *Seja a_n uma solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$. A substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0$.*

Demonstração: Substitua-se então $x_n = a_n + y_n$ na equação, obtendo-se

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ pois a_n é solução da equação original. Logo, a equação fica apenas $y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 0$. □

Como consequência do Teorema anterior podemos verificar que a solução de uma recorrência não-homogénea é constituída por duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogénea e uma solução da homogénea, o que facilita a determinação do termo geral deste tipo de recorrências.

Exemplo 1.4.2.8 *Determinar o termo geral da recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.

Em primeiro lugar determinemos a solução da recorrência homogénea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$. *A equação característica associada à recorrência é* $r^2 - 6r + 8 = 0$, *cujas soluções são,*

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow r_1 = \frac{6-2}{2} \vee r_2 = \frac{6+2}{2} \Leftrightarrow r_1 = 2 \vee r_2 = 4$$

Portanto a solução da recorrência homogénea é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Seguidamente tentaremos encontrar uma solução particular da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ *, por tentativas. Devemos determinar uma solução* t_n, *que substituída na recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ *dê como resultado* $n + 3^n$.

Conjeturemos que t_n *seja a soma de um polinómio de grau 1 com uma exponencial de base 3. Portanto* t_n *terá a forma* $t_n = An + B + C3^n$.

Substituíndo na recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$, *vem que*

$$A(n+2) + B + C3^{n+2} - 6(A(n+1) + B + C3^{n+1}) + 8(An + B + C3^n) =$$
$$= An + 2A + B + C3^n 3^2 - 6An - 6A - 6B - 6 \times 3 \times C3^n + 8An + 8B + 8C3^n =$$
$$= 3An - 4A + 3B - C3^n(9 - 18 + 8) = 3An + 3B - 4A - C3^n.$$

Assim $3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$, *portanto* t_n *será solução da recorrência se* $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ *e* $-C = 1$. *Ou seja,* $A = \frac{1}{3}$, $3B - 4 \times \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3B = \frac{4}{3} \Leftrightarrow B = \frac{4}{9}$ *e* $C = -1$.

Logo $t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$, *pelo que a solução da recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ *é dada pela soma de* h_n *com* t_n, *ou seja,* $C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$.

1.5 Colorações de progressões de ordem superior

A Teoria de Ramsey é uma ramo da matemática que estuda em que condições uma dada regularidade ocorre num conjunto. Uma das suas aplicações consiste em responder a perguntas deste tipo: "Quantos elementos deve ter uma certa estrutura de modo a garantir que existe nessa estrutura uma dada propriedade?".
Um dos resultados mais representativos é o Teorema de Van der Waerden [13].

Teorema 1.5.1 (Van Der Waerden) *Para qualquer coloração dos naturais com um número finito de* m *cores,* $m \in \mathbb{N}$, *podemos encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento arbitrariamente grande.*

Iremos apresentar uma prova dinâmica tendo por base o Teorema de Recorrência Múltipla.

Comecemos com algumas definições. Seja $A = \{c_1, ..., c_s\}$ um conjunto finito de cores. Seja $A^{\mathbb{N}}$ o conjunto infinito de todas as colorações formadas com as cores do conjunto A,

$$A^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...),\, x_i \in A,\, \forall i\}.$$

Este conjunto tem uma estrutura de espaço métrico, considerando como distância:

$$d(x, y) = \frac{1}{l},$$

onde l é o menor inteiro tal que $x_l \neq y_l$, para $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...) \in A^{\mathbb{N}}$.

Considera-se também a aplicação *desvio* (ou *shift*), $T : X \to X$, definida por:

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Esta aplicação é contínua. Basta notar que, dado $\varepsilon > 0$, para termos $d(Tx, Ty) = \frac{1}{l} < \varepsilon$ basta tomar $d(x, y) < \frac{1}{l+1}$.

Para provar o Teorema de Van der Waerden iremos usar o Teorema de Recorrência Múltipla (TRM) [7]:

Teorema 1.5.2 (Teorema de Recorrência Múltipla) *Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua num espaço métrico X. Então, para todo o k natural e $\varepsilon > 0$, existe um $x \in X$ e um n natural tal que, simultaneamente,*

$$d(T^{in}(x), (x)) < \varepsilon \;, \forall i = 1, ..., k$$

Proposição 1.5.3 *O Teorema de Recorrência Múltipla implica o Teorema de Van der Waerden.*

Demonstração:
Seja $A = \{c_1, ..., c_s\}$ o conjunto das cores e fixemos $z = (z_1, z_2, ...) \in A^{\mathbb{N}}$ uma dada coloração dos números naturais, onde $z_i \in A$ representa a cor do número natural i. Seja $k \in \mathbb{N}$ um "comprimento" arbitrário e $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ a aplicação *desvio.*
Pela definição da distância d, vem que, $\forall x, y \in A^{\mathbb{N}}$ e $m, l \in \mathbb{N}$,

$$d(T^m(x), T^l(y)) < 1 \Leftrightarrow x_{m+1} = y_{l+1}.$$

Em particular, uma progressão aritmética $m, m+n, ..., m+in$ é monocromática se e só se

$$z_m = z_{m+n} = ... = z_{m+in},$$

ou seja, se e só se:

$$d(T^{m-1}(z), T^{m-1+in}(z)) = d(T^{m-1}(z), T^{in}(T^{m-1}(z))) < 1, \forall i = 1, ..., k.$$

Tomemos $X = \overline{\{T^m(z)\}_{m=0}^{\infty}}$. X é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ é uma aplicação contínua em X, sendo $Z = \{T^m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ denso em X.[1]

Estamos então nas condições de utilizar o Teorema de Recorrência Múltipla no espaço métrico X, com a aplicação *desvio*, pelo que $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, $\exists y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$d(T^{in}(y), y) < \varepsilon.$$

Façamos $\varepsilon = 1$, ficando com $d(T^{in}(y), y) < 1$. Pela definição de distância e notando que $y = (y_1, y_2, ...)$, vem que:

$$d(T^{in}(y), y) < 1 \Leftrightarrow y_{in+1} = y_1, \forall i = 1, ..., k. \quad (1.10)$$

Como $y \in X$, y é da forma $y = T^{M_0}(z)$, para algum $M_0 \in \mathbb{N}$, então

$$y = (y_1, y_2, ...) = T^{M_0}(z) = (z_{M_0+1}, z_{M_0+2}, ...).$$

Portanto a condição (1.10) fica apenas:

$$z_{M_0+in+1} = z_{M_0+1}, \ \forall i = 1, ..., k,$$

pelo que a coloração z contém a progressão aritmética de comprimento k $(M_0 + 1, M_0 + n + 1, ..., M_0 + kn + 1)$ monocromática. □

Provada a existência de progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes numa qualquer coloração finita dos números naturais segue-se a extensão natural para a seguinte questão: "Será que existem progressões aritméticas de ordem p, com $p \in \mathbb{N}$, monocromáticas arbitrariamente grandes, numa qualquer coloração finita dos números naturais?"

Para analisar esta propriedade usaremos a seguinte versão do Teorema de Recorrência Múltipla (TRMP) [2]:

Teorema 1.5.4 (Teorema de Recorrência Múltipla Polinomial) *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Sejam $p_1(m), p_2(m), ..., p_k(m)$ polinómios em m tais que para qualquer $i = 1, ..., k$: $p_i(0) = 0$, os coeficientes de $p_i(m) \in \mathbb{Q}$ e $p_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Então $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in X$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(T^{p_i(r)}x, x) < \varepsilon, \forall i = 1, ..., k. \quad (1.11)$$

Notemos que o TRMP enunciado anteriormente pode ser transformado no TRM fazendo apenas $p_i(m) = im$, tornando-se o TRM num caso particular do TRMP. Além disso é fácil observar que $p_i(m) = im$ satisfaz as três condições enunciadas no TRMP.

De modo análogo à ideia da prova da Proposição 1.5.3 iremos usar o TRMP para estender o Teorema de Van der Waerden para progressões aritméticas de ordem superior.

Observemos que, se fixarmos r, $p_i(r)$ pode representar um polinómio em i. Por esse motivo, e para facilitar a notação nesses casos, façamos $p_i(r) := P_r(i)$.

Proposição 1.5.5 *O Teorema de Recorrência Múltipla Polinomial implica o Teorema de Van der Waerden.*

Para mostrar esse facto basta considerar o caso particular em que $p_i(m) = im$, $\forall i = 1, ..., k$. De facto, seja $r \in \mathbb{N}$ fornecido pelo TRMP, tendo então $P_r(i) = ir$. Ou seja, $P_r(1) = r$, $P_r(2) = 2r$, ... , $P_r(k) = kr$. Ora, $r, 2r, ..., kr$ são os primeiros k termos de uma progressão aritmética de razão r. Então, pelo TRMP, é possível afirmar-se que dada uma coloração dos números naturais podemos encontrar uma progressão aritmética monocromática arbitrariamente grande. Não podemos é afirmar qual o primeiro termo desta sucessão nem qual a sua razão, podendo apenas assegurar que ela existe, com uma dada razão e com um comprimento k arbitrário previamente estabelecido.

Generalizando o caso anterior consideremos polinómios do tipo $p_i(m) = q_1(m)i + q_0(m)$, para $q_a(m)$, $a \in \{0, 1\}$, que satisfazem as condições do TRMP. Aplicando o TRMP sabemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^{p_i(r)}x, x) < \varepsilon, \forall i = 1, ..., k$, tendo-se $p_i(r) = P_r(i) = q_1(r)i + q_0(r)$, com $q_a(r)$, $a \in \{0, 1\}$. Assim de modo análogo à prova da Proposição 1.5.3 podemos afirmar que dada uma coloração dos números naturais, com um número finito de cores, podemos encontrar uma progressão aritmética monocromática arbitrariamente grande.

Assim é possível enunciar:

Corolário 1.5.6 *Dada uma coloração qualquer dos números naturais, com um número finito de cores, existe uma cópia de uma progressão aritmética arbitrariamente grande, cujo termo geral é um polinómio do tipo $q_1(r)i + q_0(r)$, onde $r \in \mathbb{N}$ é fornecido pelo TRMP e $q_a(r)$, $a \in \{0, 1\}$ são polinómios que satisfazem as condições do TRMP.*

Consideremos agora polinómios em m do tipo $p_i(m) = q_2(m)i^2 + q_1(m)i + q_0(m)$, com $q_a(r)$, $a \in \{0, 1, 2\}$ que satisfazem as condições do TRMP. Aplicando novamente o TRMP existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $P_r(i) = q_2(r)i^2 + q_1(r) + q_0(r)$, podendo-se afirmar que $(P_r(i))_i$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Assim, podemos concluir que, dada uma qualquer coloração dos números naturais, com um número finito de cores, é possível encontrar uma progressão aritmética de segunda ordem monocromática, cujo termo geral é dado por um polinómio do tipo $P_r(i) = q_2(r)i^2 + q_1(r)i + q_0(r)$, onde $q_a(r)$, $a \in \{0, 1, 2\}$, polinómios que satisfazem as condições do TRMP.

Simplificando, podemos enunciar:

Corolário 1.5.7 *Qualquer coloração finita dos números naturais admite uma progressão aritmética de segunda ordem arbitrariamente grande monocromática.*

Como exemplo imediato surge o polinómio $P_r(i) = ri^2 + ri + r$, com $r \in \mathbb{N}$ fornecido pelo TRMP sobre os polinómios $p_i(m) = mi^2 + mi + m$, que representa o termo geral de uma dada progressão aritmética de segunda ordem. Sendo assim é possível afirmar-se que, dada uma qualquer coloração dos naturais, existe uma progressão aritmética de segunda ordem monocromática, cuja progressão aritmética de primeira ordem associada tem razão $2r$. Basta notar que:

$P_r(i+1) - P_r(i) = r(i+1)^2 + r(i+1) + r - ri^2 - ri - r = ri^2 + 2ri + r + ri + r - ri^2 - ri = 2ri + 2r$, pelo que $(S_r(i))_i = (2ri + 2r)_i$ é uma progressão aritmética de primeira ordem cuja razão é $S_{i+1}(r) - S_i(r) = 2r(i+1) + 2r - 2ri - 2r = 2r$.

Generalizando agora os casos anteriores, temos:

Teorema 1.5.8 *Dada uma qualquer coloração (finita) dos números naturais é possível encontrar-se uma cópia de progressão aritmética de ordem k, $k \in \mathbb{N}$, arbitrariamente grande, com termo geral definido por um polinómio do tipo $p_i(r) = q_k(r)i^k + q_{k-1}(r)i^{k-1} + ... + q_2(r)i^2 + q_1(r)i + q_0(r)$, onde $q_a(m)$, $a = 1, ..., k$ são polinómios que satisfazem as condições do TRMP e $r \in \mathbb{N}$ fornecido pelo TRMP.*

Ressalvemos que, no Teorema anterior, apenas se afirma que podemos encontrar uma progressão aritmética de ordem k monocromática, não conseguindo encontrar o primeiro termo, nem controlar o valor de r.

Utilizemos também o TRMP e a Proposição 1.5.3 para mostrar que também, dada uma coloração finita dos naturais, existem sucessões definidas por recorrência, arbitrariamente grandes, monocromáticas. Analise-se apenas um exemplo simples, de modo a ilustrar a propriedade.

Consideremos o exemplo 1.4.1.4:

Nesse caso a sucessão definida por recorrência era $x_{n+1} = nx_n$, para $x_1 = 1$. Consideremos agora que x_1 é uma dada constante, $x_1 = c$, $c \in \mathbb{N}$, sendo o termo geral $x_n = c(n-1)!$. Suponhamos que $p_i(m) = (i-1)!m$. Aplicando o TRMP sabemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^{(i-1)!r}x, x) < \varepsilon$, $\forall i = 1, ..., k$. Assim fazendo $P_r(i) = (i-1)!r$, é possível afirmar que dada uma coloração finita dos números naturais existe uma cópia de uma sucessão definida por recorrência monocromática arbitrariamente grande, de termo geral $a_n = r(n-1)!$.

1.6 Conclusão

Fazendo uma pequena reflexão no que diz respeito ao trabalho desenvolvido em torno da parte científica deste Relatório de Estágio creio que devo realçar alguns pontos que correspondem à análise dos resultados chave nas diferentes seções do trabalho.

Começando pela seção relativa às progressões aritméticas e observando toda a análise feita nesse âmbito salienta-se o resultado que nos permite afirmar que toda a progressão aritmética, de ordem p, $p \in \mathbb{N}$, tem termo geral representado por um polinómio de grau p e vice-versa, ou seja, todo o polinómio de grau p representa uma progressão aritmética de ordem p. Penso que este é um Teorema importante e, especificamente para este trabalho, foi muito útil para rematar os resultados finais.

Já na seção das progressões geométricas provou-se o Teorema e respetivo corolário que nos garantem que dada uma progressão aritmética de segunda ordem (a_k) então a sucessão $(g_k) = (cr^{a_k})$

é uma progressão geométrica de segunda ordem. Ficou por trabalhar e explorar o Teorema e respetivo corolário que generalizassem o resultado para uma ordem k, $k \in \mathbb{N}$. No entanto não houve possibilidade de explorar esse conteúdo devido a restrições de tempo.

Na seção relativa ao estudo das sucessões definidas por recorrência pretendeu-se, maioritariamente, compreender como determinar o termo geral de uma sucessão definida por recorrência. Analisaram-se os casos das recorrências lineares de primeira e de segunda ordens. Este resultados foram importantes no sentido em que, dada qualquer recorrência deste tipo, é possível encontrar o seu termo geral.

Na seção correspondente ao Teorema de Van der Waerden assinala-se o resultado chave como sendo a prova do mesmo, utilizando alguns resultados auxiliares tomados como válidos. Analisou-se e trabalhou-se também a sua generalização o que permitiu enunciar um resultado muito forte: "Dada qualquer coloração dos naturais existe uma progressão aritmética de ordem k, $k \in \mathbb{N}$, monocromática."É de realçar que podemos afirmar que existe essa progressão aritmética mas não conseguimos determinar o seu primeiro termo.

Relativamente a esta seção final apresenta-se como sugestão de trabalho futuro a extensão do Teorema de Van der Waerden para progressões geométricas, caso que ainda permanece em aberto, mas que surge como extensão natural de tudo o que foi enunciado no decorrer do trabalho.

Capítulo 2

Prática de Ensino Supervisionada

No decorrer deste segundo capítulo inclui-se uma breve descrição daquilo que foi o meu ano de estágio (seção 2.1), apresentando seguidamente um conjunto de 6 aulas de 90 minutos correspondentes a um dos períodos de lecionação, inserido no *Tema III - Sucessões Reais* do programa oficial de Matemática A (seções 2.2 a 2.7). Para terminar apresenta-se uma pequena reflexão acerca do trabalho realizado, a nível da prática de ensino supervisionada (seção 2.8).

2.1 Descrição sumária do Estágio Pedagógico

Nos próximos parágrafos tentarei fazer um breve resumo daquilo que foi o meu Estágio Pedagógico (EP), integrado no 2° ciclo de estudos em Ensino da Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.
O núcleo de estágio correspondente ao ano letivo de 2011/2012 foi composto pela orientadora cooperante, a Prof.ª Maria Isaura Fazendeiro Mendes, pelo orientador científico, Prof. Doutor Helder Soares Vilarinho, pela Diretora de Curso, Prof.ª Doutora Isabel Maria Romano da Cunha Dias, pela minha colega estagiária, Tânia Sofia Beijocas Pacheco e por mim.

O Estágio Pedagógico decorreu na Escola Secundária Campos Melo (ESCM), na Covilhã, que nos acolheu durante o ano letivo, permitindo-nos aprender e por em prática os conhecimentos teóricos que tínhamos adqurido até então. Trabalhámos com as turmas correspondentes às da nossa orientadora, nomeadamente uma turma de 10° ano e uma turma de 11° ano, inscritas na disciplina de Matemática A. Ambas as turmas pertenciam a cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, de acordo com o Decreto-Lei n.º 272/2007, de 26 de julho e Declaração de Rectificação n.º 84/2007, de 21 de setembro.

Cada um de nós, estagiários, ficou afeto a uma turma, lecionando as aulas previstas no documento regulador da Prática de Ensino Supervisionada (PES), mas sempre trabalhando a par em ambas as turmas e envolvendo-nos nas suas atividades. Essa afetação de turmas apenas restringiu a lecionação de aulas, embrenhando-nos sempre na dinâmica das duas turmas. No meu caso foi-me atribuída a lecionação na turma de 11° ano.

A turma de 10° ano era constituída por cerca de 24 alunos mas, dadas as mudanças de turma e anulações de matrícula, o número de alunos da turma não se manteve constante. A turma de 11° ano era constituída por cerca de 25 alunos, estando a direção de turma a cargo da orientadora cooperante o que nos permitiu uma incursão mais profunda e mais rica em termos de aprendizagem no que respeita ao EP.

A atividade relativa ao EP iniciou-se no dia 1 de setembro de 2011, apresentando-nos à orientadora cooperante. A partir desse dia envolvi-me ao máximo em todas as atividades que me foram possíveis em termos escolares. A nível de participação em reuniões passo a enunciar em todas as que participei, estando presente:

· nas reuniões de diretores de turma, como a que precedeu o início do ano letivo, ou as que precediam as reuniões de final de período;
· na reunião do departamento de matemática e ciências experimentais, realizada no dia 6 de setembro de 2011, que teve como principal objetivo transmitir informações necessárias ao arranque do ano letivo;
· nas reuniões de grupo realizadas mensalmente, após os conselhos pedagógicos, onde eram transmitidas através da representante de grupo, que neste caso era também a nossa orientadora cooperante, as principais informações debatidas no conselho pedagógico;
· nas reuniões realizadas antes do início das aulas, destinadas à realização dos documentos de planificação anual de cada uma das turmas;
· nas reuniões de nível, realizadas semanalmente, destinadas à planificação das aulas das semanas subsquentes, tal como à realização de materiais didáticos, como fichas de trabalho, além da preparação de questões aula, testes de avaliação, ou trabalhos de avaliação;
· nas reuniões de conselho de turma, realizadas no início do ano letivo (mais precisamente a 9 de setembro de 2011) com o objetivo de construir o Projeto Curricular de Turma (PCT) e de caraterizar ambas as turmas;
· na reunião geral de professores, realizada a 12 de setembro de 2011, cujo objetivo foi o de preparar o arranque do ano letivo, dando a conhecer a todos os professores informações relativas ao novo ano letivo;
· nas reuniões intercalares de avaliação, que tiveram lugar no 1° e 2° períodos;
· nas reuniões de avaliação de final de período;
· e finalmente nas reuniões de encarregados de educação da turma do 11° ano.

Feita a síntese no que toca à participação nas principais reuniões do EP passo a enumerar algumas das funções desempenhadas no decorrer da PES e EP.

Focando-me apenas no domínio de tarefas executadas no âmbito da direção de turma do 11° ano posso realçar que contribuí na organização do PCT e dossier de turma, no controle de faltas, no envio de correspondência para os encarregados de educação e na preparação das reuniões dos encarregados de educação. Todas estas tarefas foram supervisionadas pela orientadora cooperante, dando sugestões e partilhando sempre os seus conhecimentos, ajudando-me a ambientar na prosecução deste tipo de tarefas.

Em termos de tarefas relacionadas com atividades letivas realço a participação na elaboração e discussão de exercícios para os testes de avaliação de ambas as turmas, tal como na elaboração de questões aula, critérios de correção dos testes e questões aula, além da discussão de possíveis trabalhos de avaliação para os alunos, aceitando e ouvindo sempre as sugestões dadas por todos os intervenientes neste processo, desde a orientadora cooperante até aos outros colegas que constituíam o grupo de matemática.

No que toca a atividades dinamizadas pelo núcleo de estágio envolvendo a comunidade escolar nomeio o Peddy-Paper, realizado no dia 6 de janeiro de 2012 e a sessão de trabalho com a calculadora gráfica N-Spire, realizada no dia 2 de maio de 2012. De seguida serão explicadas resumidamente em que consistiram as atividades mencionadas anteriormente e qual a sua dinâmica geral e a contextualização no ambiente escolar.

O Peddy-paper "MatCidade", realizado a 6 de janeiro de 2011, teve como objetivo principal promover o conhecimento arquitetónico, paisagístico e histórico da cidade, contribuindo para a cultura matemática dos alunos participantes e para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática, promovendo também um ensino contextualizado e ligado ao real. Esta atividade foi realizada fora do recinto escolar, tendo os alunos percorrido certos locais da cidade da Covilhã, sendo as equipas de alunos do Ensino Básico acompanhadas por monitores. O Peddy-paper iniciou-se na ESCM, sendo dada a cada uma das equipas participantes um guião inicial e o regulamento da prova (consultar Anexos). Este guião indicava pistas para onde os alunos se deveriam dirigir, tendo que ir respondendo a variadas questões ao longo do caminho percorrido. Esta atividade contou com uma forte adesão dos alunos, tendo-se registado perto de 200 alunos participantes e cerca de 20 professores que ajudaram na organização e que desempenharam tarefas de responsável de posto, nos diferentes locais onde era necessária a realização de algumas provas. Em termos gerais o *feedback* dos alunos foi muito positivo, incitando a que se organizassem mais atividades como esta.

A sessão de trabalho com a calculadora gráfica N-Spire, realizada a 2 de maio de 2011, teve como objetivo principal demonstrar alguns comandos da calculadora e dar a conhecer como trabalhar, a nível de Geometria, Tratamento de Dados e Funções com a tecnologia da N-Spire. A atividade contou com a participação de todos os docentes do grupo de matemática da ESCM, tendo estes apoiado-se em guiões elaborados por mim e pela colega estagiária (consultar Anexos), onde se pretendia demonstrar as funcionalidades da calculadora.

Além das atividades dinamizadas pelo núcleo também participei, juntamente da minha colega de estágio, noutras que envolveram a comunidade escolar. Entre elas saliento:
· a participação e vigilância nas provas de 1^a e 2^a fases das Olimpíadas da Matemática;
· a participação no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM), tanto na fase da escola, realizada a 29 de fevereiro de 2012 (apurando os finalistas a nível de escola), como na fase nacional, realizada a 9 de março de 2012, no Estádio Universitário em Coimbra, onde acompanhei, juntamente com a orientadora cooperante e a minha colega de estágio, os alunos apurados;
· a participação na ceia de natal da ESCM, realizada a 19 de dezembro de 2011;
· a participação no "Dia dos Departamentos", realizado a 23 de março de 2012, que teve como tema "A Matemática e a Moda", onde também se procedeu à entrega dos prémios e diplomas dos vencedores do Peddy-Paper "MatCidade".

Assisti praticamente a todas as aulas da orientadora cooperante, estando sempre atento às estratégias utilizadas pela orientadora, no sentido de cativar os alunos e transmitir o conhecimento. Sempre que solicitado, esclareci dúvidas aos alunos que necessitavam, criando com eles uma grande empatia e incentivando-os a requerer a minha ajuda sempre que assim o entendessem.

Terminada esta síntese prossigo agora para a descrição dos conteúdos e temas abordados nas aulas lecionadas na turma de 11° ano. As aulas lecionadas integram-se nos conteúdos referentes ao programa de Matemática A de 11° ano para os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e Ciências Socioeconómicas. Na preparação das aulas apoiei-me no programa de Matemática A, seguindo o espírito de ensino demonstrado no mesmo no que diz respito às finalidades e objetivos que se pretende que os alunos desenvolvam. Além disso foi tido em conta, no decorrer das aulas lecionadas, o desenvolvimento das competências transversais sugerido no programa.

Durante o 1° Período as aulas lecionadas incluíram-se no *Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II.* Foram lecionadas um total de 6 aulas de 90 minutos. A 1^a aula incidiu sobre o conteúdo relativo às equações trigonométricas elementares, transmitindo aos alunos como resolver equações do tipo $\cos(\alpha) = 0$, $\cos(\alpha) = 1$, $\cos(\alpha) = -1$, $\sin(\alpha) = 0$, $\sin(\alpha) = 1$, $\sin(\alpha) = -1$ e $\tan(\alpha) = 0$. Apesar de generalizar as fórmulas de resolução destas equações foi frisado o fato de se recorrer ao círculo trigonométrico como ferramenta fundamental e auxiliadora na resolução das equações. Na 2^a aula lecionei o conteúdo referente às propriedades do produto escalar, enunciando-as e fazendo a demonstração de uma delas. Além disso foi realizada uma ficha de trabalho com exercícios retirados dos Testes Intermédios, com vista à consolidação de conhecimentos e à preparação dos alunos para a prova que iriam realizar em fevereiro de 2012. Já durante a 3^a aula foram transmitidos aos alunos algumas aplicações do produto escalar, demonstrando desta feita a formula de cálculo do cosseno da diferença e da soma de dois ângulos e mostrando como determinar a equação da mediatriz de um segmento de reta usando produto escalar. Na 4^a aula dei continuação às aplicações do produto escalar abordando, mais concretamente, a determinação da equação de uma circunferência e a determinação da equação de uma reta tangente a uma circunferência usando apenas o produto escalar. No decorrer da 5^a aula ensinei aos alunos como determinar a equação cartesiana de um plano, conhecido um ponto e o seu vetor normal, revendo também algumas situações particulares de equações de planos. Para terminar na 6^a aula lecionei o conteúdo relativo às aplicações do produto escalar no espaço, mostrando como obter o plano mediador de um segmento de reta, a equação de uma superfície esférica e a equação de um plano tangente a uma superfície esférica.

Durante o 2° Período as 6 aulas de 90 minutos lecionadas inseriram-se no *Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e Derivada.* Sendo assim na 1^a aula abordou-se o conteúdo relativo à resolução de equações e inequações fracionárias em contexto de problemas de modelação. Na 2^a aula consolidaram-se os conhecimentos adquiridos acerca de funções racionais e da resolução de equações e inequações fracionárias, resolvendo-se uma ficha de trabalho com problemas de modelação, alguns ligados a situações da vida real. No decorrer da 3^a aula lecionei a noção intuitiva de limite, tendo como objetivo que os alunos calculassem limites analiticamente (em casos simples) e soubessem indicar limites através da representação gráfica de uma dada função. Já na 4^a aula pretendeu-se transmitir um teorema que relaciona derivabilidade com continuidade, focando-se também a interpretação geométrica de derivada, ou seja, ver a derivada num ponto como o declive da reta tangente à representação gráfica da função nesse ponto. Na 5^a aula fez-se referência à função derivada da função constante, afim e quadrática, demonstrando-se cada uma das respetivas funções derivada. Na última aula deste bloco continuou-se o estudo das funções derivada, focando-se agora a função derivada da função cúbica, módulo e racional.

Durante o 3° Período, as 6 aulas de 90 minutos lecionadas inseriram-se no *Tema III - Sucessões Reais.* Começou-se por abordar, na 1^a aula o conceito de sucessão monótona, fazendo-se o estudo do sinal de $u_{n+1} - u_n$. Na aula seguinte, introduziram-se os conceitos de majorante, minorante e sucessão limitada, começando primeiro por analisar exemplos de representações gráficas de sucessões, intuindo a sua limitação e posteriormente a sua prova. Durante o decorrer da 3^a aula introduziu-se o conceito de progressão aritmética, dando-se a sua definição, analisando exemplos e deduzindo qual o termo geral de uma progressão aritmética. Continuando no subtema das progressões aritméticas, durante a 4^a aula, foi trabalhado como calcular a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética, exemplificando o método para o fazer, deduzindo a fórmula geral e demonstrando-a. Já na 5^a aula passou-se ao estudo das progressões geométricas, começando por analisar um exemplo, de modo a intuir o conceito em foco. Fez-se referência, à semelhança das progressões aritméticas, à definição e termo geral de uma progressão geométrica. Para terminar este conjunto de aulas, no decorrer da última aula, foi trabalhado como calcular a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica, apresentando-se a fórmula geral e demonstrando-a.

Feita a síntese geral dos conteúdos lecionados nas 18 aulas previstas na PES apresenta-se, na próxima seção, a planificação de uma subunidade didática correspondente a um dos períodos de lecionação. Escolhi as aulas relativas ao conteúdo lecionado no 3° Período acerca das Sucessões Reais porque, por um lado, o tema está um pouco relacionado com o que é desenvolvido no trabalho científico, bem como, por outro lado, por ter sido o período de lecionação em que as aulas foram todas dadas seguidamente, sem haver interrupção nos conteúdos. Assim pode-se apresentar o conjunto de aulas como um todo, havendo coesão e seguimento entre as mesmas.

Após a apresentação da planificação das 6 aulas escolhidas apresento uma pequena reflexão acerca da lecionação das mesmas, bem como uma conclusão geral acerca do que foi para mim o EP.

2.2 Planificação da Aula 1

Data: 14 de Maio de 2012 **Turma / Ano:** 11° A **Duração da aula:** 90 minutos **Tema:** Sucessões Reais. **Subtema:** Estudo de propriedades: monotonia e limitação. **Conteúdo abordado na aula:** Estudo da monotonia de sucessões.

Sumário:
Estudo da monotonia de sucessões.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão.

Objetivos:
Estudar a monotonia de uma sucessão.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos.
É também alvo de desenvolvimento a competência transversal relativa à tecnologia e matemática, ao se utilizar a calculadora gráfica para representar graficamente as sucessões.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Exercício 27 a) (página 199) e 95 (página 229).

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Calculadora Gráfica, Videoprojetor.

Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro. Seguidamente faz-se um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será referido que durante a aula o objetivo principal é estudar a monotonia de uma sucessão. Para isso começa-se por questionar os alunos acerca do que será a monotonia de uma sucessão. Ouvidas as respostas dos alunos deve frisar-se que, analogamente ao que acontece nas funções, pretende-se determinar se uma certa sucessão é crescente, decrescente ou se não é monótona.

Para introduzir as definições de sucessão crescente e decrescente começa-se por escrever dois exemplos simples no quadro.

Exemplo 1: Considere-se a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2n$. Escrevendo alguns termos da sucessão observamos que (u_n) é igual a $2\,,4\,,6\,,8\,,10\,,12....$

Notemos que quanto maior é o valor de n (ou seja, a ordem) maior será o valor de u_n (ou seja, o termo). Podemos assim afirmar que esta é uma sucessão **monótona crescente**. Uma sucessão é crescente se, quando a ordem aumenta, os termos aumentam também, ou seja,

$$(u_n) \text{ é crescente se } n > p \Rightarrow u_n > u_p, \text{ para } n, p \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2: Consideramos agora a sucessão $v_n = -3n$. Escrevendo alguns termos da sucessão verificamos que (v_n) é igual a $-3\,,-6\,,-9\,,-12.....$

Neste caso, quanto maior é a ordem, **menor** será o valor do termo, pelo que esta sucessão se diz **monótona decrescente**, isto é,

$$(v_n) \text{ é decrescente se } n > p \Rightarrow u_n < u_p, \text{ para } n, p \in \mathbb{N}.$$

De seguida escrevem-se no quadro as definições de sucessão monótona crescente e decrescente frisando-se, oralmente, que as definições seguintes são equivalentes às dadas anteriormente, mas que são mais úteis para estudar a monotonia das sucessões.

Definição: Uma sucessão (u_n) é **monótona crescente** se cada termo é maior que o anterior, isto é, $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda, equivalentemente, se $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição: Uma sucessão (u_n) é **monótona decrescente** se cada termo é menor que o anterior, isto é, $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda, equivalentemente, se $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Far-se-á também um comentário oral ao conceito de sucessão crescente e decrescente em sentido lato, sugerindo aos alunos que leiam as definições presentes nas páginas 194 e 195 do seu manual. Além disso é necessário chamar a atenção para o fato destas definições serem válidas para todos os números naturais, ou seja, basta falharem numa das ordens para que já não se verifiquem.

Depois de escritas as definições propõe-se aos alunos que resolvam o exercício 19 da página 194 do manual. Apesar do objetivo do exercício não ser estudar a monotonia das sucessões, o professor fará referência às conclusões que se podem retirar quanto a esse aspeto, através da análise do sinal de $u_{n+1} - u_n$.

Exercício 19: Seja $u_n = 1 - 2n$, $v_n = \dfrac{n}{2n+3}$ e $w_n = (-1)^n.n$.
Exprime em função de n e simplifica as expressões:

a) u_{n+1} e $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} = 1 - 2(n+1) = 1 - 2n - 2 = -1 - 2n$.
$u_{n+1} - u_n = -1 - 2n - (1 - 2n) = -2$.
$u_{n+1} - u_n = -2 < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que se conclui que a sucessão é monótona decrescente.

b) v_{n+1} e $v_{n+1} - v_n$:

$v_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+1}{2n+5}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{2n+5} - \frac{n}{2n+3} = \frac{(n+1)(2n+3) - n(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} =$$
$$= \frac{2n^2 + 3n + 2n + 3 - 2n^2 - 5n}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{3}{(2n+5)(2n+3)}.$$

$v_{n+1} - v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão é monótona crescente.

c) w_{n+1} e $w_{n+1} - w_n$:

$w_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)$.
$w_{n+1} - w_n = (-1)^{n+1}(n+1) - (-1)^n.n = (-1)^n[-n - 1 - n] = (-1)^n[-2n - 1]$.

Para tirar conclusões acerca da monotonia da sucessão anterior basta notar que:
$w_1 = -1$, $w_2 = 2$ e $w_3 = -3$;
Portanto, $w_1 < w_2$, mas $w_2 > w_3$, concluindo-se que w_n é não monótona.

Corrigido o exercício no quadro pelos alunos estudaremos algumas sucessões não monótonas, analisando-se para isso os exemplos 1 e 3 das páginas 195 e 196. Os exemplos serão analisados no quadro, participando os alunos na resolução.

Exemplo 1:
Consideremos a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Observemos que $u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = -\frac{1}{3}$, pelo que se verifica que $u_1 < u_2$, mas $u_2 > u_3$.
Portanto conclui-se que a sucessão não é monótona.

Exemplo 3:
Consideremos a sucessão (w_n) definida por $w_n = \begin{cases} 2n & \text{se} \quad n \leq 5 \\ n & \text{se} \quad n > 5 \end{cases}$.

Notemos que, para $n \leq 5$, a sucessão é crescente, tal como para $n > 5$. No entanto constatamos que $w_5 = 10$ e $w_6 = 5$, o que nos permite afimar que a sucessão não é monótona.

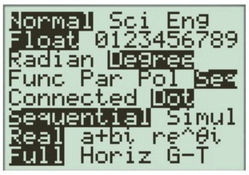
Nota: Em certos casos é relativamente simples encontrar um contraexemplo que permita afirmar que uma sucessão não é monótona. Existem outros casos em que é mais complicado encontrar um contraexemplo, socorrendo-nos nessas situações do auxílio da calculadora gráfica e da respetiva representação gráfica da sucessão em causa.

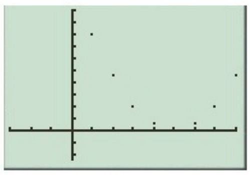
Depois de analisados estes exemplos propõe-se aos alunos a resolução do exercício 20 da página 195 do manual. O exercício será posteriormente corrigido no quadro pelos alunos.

Exercício 20: Justifica que não são monótonas as sucessões de termo geral:

a) $u_n = (-2)^n$
É fácil verificar que $u_1 = -2$, $u_2 = 4$ e $u_3 = -8$, pelo que, $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$, o que nos permite concluir que a sucessão não é monótona.

b) Para auxiliar a resolução do exercício observemos a representação gráfica desta sucessão ($v_n = (5-n)^2$):



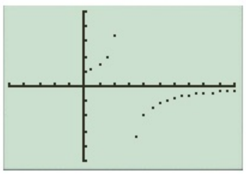


Nota: Para representar graficamente uma sucessão na calculadora temos que teclar "[MODE]"e escolher "[Seq]". Depois basta colocar a expressão da sucessão acedendo à tecla "[Y=]".

Observando a representação gráfica da sucessão verificamos que ela não será monótona, pois num primeiro momento decresce, crescendo num segundo momento. Com o auxílio do comando "[TRACE]"é possível verificar que $v_4 = 1$, $v_5 = 0$ e $v_6 = 1$, pelo que se conclui que $v_4 > v_5$ e $v_5 < v_6$, portanto a sucessão não é monótona.

c) $x_n = \frac{1}{11-2n}$

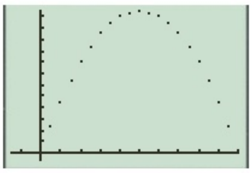
Observemos, com o auxílio da calculadora gráfica, a representação da sucessão:



Verifiquemos que $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = 1$ e $x_6 = -1$. Ora, $x_4 < x_5$, mas $x_5 > x_6$, pelo que se prova que a sucessão não é monótona.

Nota: Deve-se frisar que a escolha da janela deve ser feita de forma adequada e analisando sempre que possível a expressão da sucessão. Neste caso a sucessão não terá imagens maiores que 1 nem menores que -1, pelo que a janela de visualização deve refletir esse fato.

d) $y_n = 20n - n^2$
Atendendo à representação da sucessão podemos verificar que $y_9 = 99$, $y_{10} = 100$ e $y_{11} = 99$, pelo que $y_9 < y_{10}$ mas $y_{10} > y_{11}$, pelo que a sucessão não é monótona.



Nota 2: Deve-se deixar claro que a análise da representação gráfica dos termos de uma sucessão não é suficiente para provar a monotonia de uma sucessão. Serve apenas para procurar um contraexemplo que possa mostrar a não monotonia da sucessão.

Após a correção deste exercício propõe-se a realização do exercício 21 da página 196.

Exercício 21: Estuda quanto à monotonia a sucessão das medidas das áreas das regiões coloridas na sequência seguinte:

Pretendemos estudar a monotonia da sucessão das medidas das áreas das regiões coloridas da figura.
Sendo r o raio da primeira semicircunferência temos que,

$A_1 = \dfrac{\pi r^2}{2}$.

Na segunda figura apresentam-se duas semicircunferências, cujo raio é metade do primeiro, portanto:

$A_2 = 2 \times \dfrac{\pi(\frac{r}{2})^2}{2} = \dfrac{\pi r^2}{4}$.

Na terceira figura temos quatro semicircunferências, cujos raios são um quarto do primeiro, portanto:

$A_3 = 4 \times \dfrac{\pi(\frac{r}{4})^2}{2} = \dfrac{\pi 2r^2}{16} = \dfrac{\pi r^2}{8}$.

Analisemos agora a monotonia estudando o sinal de $A_{n+1} - A_n$:

$A_{n+1} = \frac{\pi r^2}{2^{n+1}}$ e $A_n = \frac{\pi r^2}{2^n}$, generalizando a partir dos casos particulares anteriores. Portanto, $A_{n+1} - A_n = \frac{\pi r^2}{2^{n+1}} - \frac{\pi r^2}{2^n} = \frac{\pi r^2 - 2\pi r^2}{2^{n+1}} = -\frac{\pi r^2}{2^{n+1}} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova-se assim que a sucessão é monótona decrescente.

Seguidamente à correção do exercício serão analisados mais alguns exemplos de sucessões monótonas, procedendo-se ao estudo do sinal de $u_{n+1} - u_n$.

Estes exemplos serão analisados pelo professor, participando os alunos na sua resolução, sendo sempre que possível questionados os alunos para a justificação de determinados passos.

Exemplo 2 - Página 197:
Estudar a monotonia de $v_n = \frac{2n+6}{n}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2(n+1)+6}{n+1} - \frac{2n+6}{n} = \frac{2n+8}{n+1} - \frac{2n+6}{n} = \\ &= \frac{(2n+8)(n) - (2n+6)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n^2+8n-2n^2-2n-6n-6}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-6}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que v_n é uma sucessão monótona decrescente.

Exemplo 4 - Página 198:
Estudar a monotonia de $w_n = (n-50)^2$.

$w_{n+1} - w_n = (n+1-50)^2 - (n-50)^2 = (n-49)^2 - (n-50)^2 = n^2 - 98n + 2401 - n^2 + 100n - 2500 = 2n - 99$.

Notemos que não é possível afirmar que a expressão $2n - 99$ seja sempre positiva ou sempre negativa. Além do mais a expressão é negativa para valores de $n \in \{1, 2, 3, ...49\}$ e positiva para valores de $n \geq 50$. Portanto a sucessão w_n não é monótona.

Propõe-se agora a resolução dos exercícios 23 (página 197) e 25 (página 198). Estes serão depois corrigidos no quadro pelos alunos.

Exercício 23: Mostra que a sucessão definida por $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ é decrescente:

Pretende-se então estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)+1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} = \\ &= \frac{(n+2)(2n+1) - (n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+n+4n+2-2n^2-3n-2n-3}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pelo que } u_n \text{ é uma sucessão monótona decrescente.} \end{aligned}$$

Exercício 25: Estuda quanto à monotonia, a sucessão (v_n) sabendo que $v_{n+1} - v_n = 2n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}\,$.

Pretendemos estudar quanto à monotonia a sucessão v_n sabendo que $v_{n+1} - v_n = 2n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Notemos que, para $n = 1$, vem que $v_2 - v_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_1$;
Para $n \geq 2$, verificamos que $v_{n+1} - v_n > 0$.
Portanto conclui-se que $v_{n+1} - v_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que v_n é uma sucessão monótona crescente em sentido lato.

Corrigidos os exercícios marca-se o TPC para a aula seguinte, nomeadamente os exercícios 27 a) (página 199) e 95 (página 229), dando-se por terminada a aula.

Exercício 27 a): Estuda quanto à monotonia a sucessão de termo geral $u_n = 3n + (-1)^n$:

Queremos estudar a monotonia de $u_n = 3n + (-1)^n$.
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3n + 3 + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - (-1)^n - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$.

Para n par verifica-se que $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$;
Para n ímpar verifica-se que $u_{n+1} - u_n = 5 > 0$;
Portanto conclui-se que $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

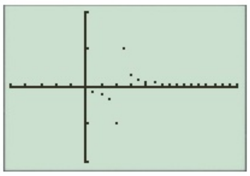
Exercício 95: Estuda, quanto à monotonia, as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = 2n - 9$ e $v_n = \dfrac{1}{2n-9}$ e comenta a afirmação: Se (a_n) é uma sucessão crescente, então (b_n) definida por $\dfrac{1}{a_n}$ é decrescente.

Estudemos quanto à monotonia a sucessão $u_n = 2n - 9$:
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 9 - (2n - 9) = 2n + 2 - 9 - 2n + 9 = 2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, u_n é uma sucessão monótona crescente.

Estude-se agora a sucessão $v_n = \frac{1}{2n-9}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2(n+1)-9} - \frac{1}{2n-9} = \frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-9} = \frac{(2n-9)-(2n-7)}{(2n-7)(2n-9)} = $$
$$= \frac{-2}{(2n-7)(2n-9)}.$$

Podemos afirmar que esta sucessão nem é sempre positiva nem é sempre negativa, de modo a concluir a sua monotonia. Veriquemos a representação gráfica desta sucessão:



Através do auxílio do comando "[TRACE]"podemos verificar que a sucessão é não monótona. Ora, $u_3 = -\frac{1}{3}$, $u_4 = -1$ e $u_5 = 1$, pelo que $u_3 > u_4$, mas $u_5 > u_4$.

Como conclusão podemos constatar que a afirmação citada é falsa.
Corrigidos os exercícios dá-se por terminada a aula.

2.3 Planificação da Aula 2

Data: 16 de Maio de 2012 **Turma / Ano:** 11° A **Duração da aula:** 90 minutos **Tema:** Sucessões Reais. **Subtema:** Estudo de propriedades: monotonia e limitação. **Conteúdo abordado na aula:** Conceito de sucessão limitada.

Sumário:
Correção do TPC.
Conceito de sucessão limitada.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão;
Saber analisar a monotonia de uma sucessão.

Objetivos:
Compreender e interiorizar os conceitos de majorante e minorante de um conjunto;
Estudar a limitação de uma sucessão.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos;
É também alvo de desenvolvimento a competência transversal relativa à tecnologia e matemática, ao se utilizar a calculadora gráfica para representar graficamente as sucessões.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Exercício 102 (página 229).

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Calculadora Gráfica, Videoprojetor.

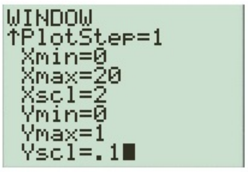
Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

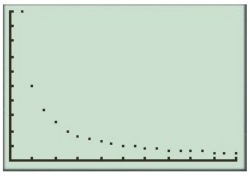
Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro. Seguidamente corrige-se o TPC proposto na aula anterior, aproveitando para se rever os conceitos abordados nessa aula. Após a correção do TPC faz-se um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será trabalhado o conceito de sucessão limitada, introduzindo os conceitos de majorante e minorante de um conjunto.

De modo a introduzir o conceito de sucessão limitada começa-se por apresentar um exemplo simples, que será escrito no quadro. Será exposto e analisado pelo professor, questionando os alunos para determinados pormenores, com o objetivo de intuir o conceito de limitação de uma sucessão.

Exemplo 1: Consideremos a sucessão definida por $u_n = \frac{1}{n}$. Representemo-la graficamente:





Verifiquemos que a sucessão u_n é monótona decrescente:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Como $u_1 = 1$ e a sucessão é monótona decrescente podemos concluir que as imagens desta sucessão nunca serão maiores que 1. Além disso constatamos que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Portanto $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fazendo o esboço no quadro podemos limitar a representação gráfica dos termos da sucessão numa faixa horizontal compreendida entre as retas $y = 0$ e $y = 1$, pelo que dizemos que esta sucessão é limitada. Mais ainda, podemos afirmar que 1 é um majorante da sucessão, ou seja, todos os valores que pertencem ao contradomínio da sucessão são menores ou iguais a 1. 0 será um minorante da sucessão, ou seja, todos os valores que pertencem ao contradomínio da sucessão são maiores que 0.

Depois de analisado este exemplo formalizam-se as definições de sucessão limitada, majorante e minorante, sendo estas definições escritas no quadro, para que os alunos tomem nota delas.

Majorante de um conjunto: Um número real M é majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n) se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Minorante de um conjunto: Um número real m é minorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n) se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Sucessão limitada: Uma sucessão (u_n) diz-se limitada se o conjunto dos seus termos é minorado e majorado.
(u_n) é limitada se e só se $\exists m, M \in \mathbb{R} : \ m \leq u_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$

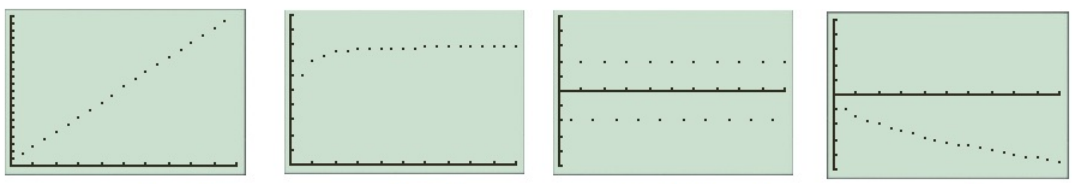
Combinando as definições anteriores com o conceito de sucessão monótona podemos concluir que: *Toda a sucessão crescente é minorada e toda a sucessão decrescente é majorada.*

Dada a consequência anterior é feita a seguinte questão aos alunos: "Caso a sucessão (u_n) seja monótona crescente e limitada qual será o seu minorante? E para uma sucessão monótona decrescente qual será o seu majorante?"

Os alunos deverão dar como resposta u_1 para ambos os casos, sendo este fato explicado pelo professor caso persistam dúvidas.

Após a formalização das definições anteriores serão analisados alguns exemplos de sucessões de modo a interiorizar o conceito de limitação. Os exemplos serão analisados pelo professor, tentando sempre incluir os alunos nas justificações necessárias.

Exemplo 2: Consideremos as sucessões $u_n = 2n+1$, $v_n = 4 - \frac{1}{n}$, $w_n = (-1)^n \times 2$ e $z_n = -\sqrt{n}$. Representemo-las graficamente:



$u_n = 2n+1$ $\quad$ $v_n = 4 - \frac{1}{n}$ $\quad$ $w_n = (-1)^n \times 2$ $\quad$ $z_n = -\sqrt{n}$

Constatamos então, através da representação gráfica, que:
· (u_n) é uma sucessão não limitada; é minorada mas não é majorada, mais precisamente, $3 \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
· (v_n) é uma sucessão limitada, ou seja minorada e majorada, $3 \leq v_n < 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
· (w_n) é uma sucessão limitada, mais precisamente, $-2 \leq w_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
· (z_n) é não limitada, sendo majorada mas não minorada, sendo $z_n \leq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Provemos que (u_n) e (z_n) são de fato sucessões não limitadas. Esta prova será feita pelo professor, tentanto fazer com que os alunos percebam a importância de mostrar a não limitação analiticamente, servindo apenas a representação gráfica para nos ajudar a visualizar a limitação de sucessões.

$u_n = 2n+1$. Suponhamos que (u_n) tem um majorante $M \in \mathbb{R}$. Então significa que $2n+1 < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. No entanto notemos que $2n+1 > M \Leftrightarrow 2n > M-1 \Leftrightarrow n > \frac{M-1}{2}$, pelo que escolhendo uma ordem n superior a $\frac{M-1}{2}$, M deixa de ser majorante de (u_n). Portanto u_n não é limitada.

$z_n = -\sqrt{n}$. Suponhamos que (z_n) tem um minorante $m \in \mathbb{R}$. Então, $-\sqrt{n} > m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. No entanto notemos que $-\sqrt{n} > m \Leftrightarrow \sqrt{n} < -m \Rightarrow n < (-m)^2 \Leftrightarrow n < m^2$. Portanto escolhendo uma ordem n, menor que m^2, deixamos de ter um minorante, sendo z_n não limitada.

Nos exemplos seguintes estuda-se a limitação de algumas sucessões.

Exemplo 3: Estudemos a limitação da sucessão $v_n = \frac{n+1}{n+3}$.

Comecemos por estudar a monotonia de v_n:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+2}{n+4} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$
$$= \frac{n^2 + 5n + 6 - n^2 - 5n - 4}{(n+4)(n+3)} = \frac{2}{(n+4)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

v_n é monótona crescente. Como $v_1 = \frac{1}{2}$, podemos concluir que $\frac{1}{2}$ é minorante da sucessão.

Fazendo a divisão inteira de $n+1$ por $n+3$ obtemos que $v_n = 1 - \frac{2}{n+3}$:

$$\begin{array}{r|l} n+1 & n+3 \\ \cline{2-2} -n-3 & 1 \\ \cline{1-1} \text{-2} & \end{array}$$

Como $\frac{2}{n+3} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem que $-\frac{2}{n+3} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{n+3} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto a sucessão é limitada, mais precisamente, $\frac{1}{2} \leq v_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4: Consideremos a sucessão $w_n = \begin{cases} 4 - \frac{3}{n} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \\ \frac{2}{n} & \text{se} \quad n \text{ par} \end{cases}$.

Verifiquemos que w_n é uma sucessão limitada.
Tomemos em primeiro lugar os termos de ordem ímpar:

Neste caso temos que $w_n = 4 - \frac{3}{n}$.
$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n} \leq 3 \Leftrightarrow 0 > -\frac{3}{n} \geq -3 \Leftrightarrow 4 > 4 - \frac{3}{n} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 4 - \frac{3}{n} < 4$.

Para este caso verificamos que 1 é minorante e 4 é majorante do conjunto.

Tomemos agora os termos de ordem par:

Neste caso temos que $w_n = \frac{2}{n}$.
$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n} \leq 2$.

Portanto, 0 é minorante e 2 é majorante deste conjunto.

Considerando agora a sucessão w_n, vemos que o maior dos majorantes encontrados é 4 ($\max\{1, 4\}$) e o menor dos minorantes é 0 ($\min\{0, 2\} = 0$), pelo que: $0 < w_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sendo w_n uma sucessão limitada.

Seguidamente à análise destes exemplos serão propostos aos alunos a resolução de uma série de exercícios com vista à consolidação dos conceitos expostos. Os exercícios vão sendo corrigidos no quadro pelos alunos, à medida que eles os vão terminando. Serão propostos os exercícios 30 a) b) (página 200), 32 a) (página 201) e 33 a) b) c)(página 202).

Exercício 30: Indica, se possível, majorantes e minorantes, para os seguintes conjuntos:

a) $\mathbb{N}$. Este conjunto não possui majorantes (é infinito). Os minorantes pertencem ao intervalo $]-\infty, 1]$.

b) $\mathbb{N} \cup \left[-\frac{11}{2}, \frac{23}{3}\right]$. Este conjunto não possui majorantes. Os minorantes pertencem ao intervalo $]-\infty, -\frac{11}{2}]$.

Nota: Para auxiliar a compreensão do exercício a resolução será acompanhada do respetivo esboço nas retas reais dos conjuntos pretendidos.

Exercício 32: Mostra que são limitadas as sucessões de termo geral (u_n) definidas por:

a) Estudar a limitação de $u_n = \frac{2n}{n+2}$:

Estudemos a monotonia de u_n:
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)}{n+3} - \dfrac{2n}{n+2} = \dfrac{(2n+2)(n+2) - 2n(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$
$= \dfrac{2n^2 + 2n + 4n + 4 - 2n^2 - 6n}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{4}{(n+3)(n+2)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que u_n é uma sucessão monótona crescente.
Como $u_1 = \frac{2}{3}$, sabemos que $\frac{2}{3}$ é um minorante da sucessão.

Atendendo à divisão inteira de $2n$ por $n+2$, vem que $u_n = 2 - \frac{4}{n+2}$.

$$\begin{array}{r|l} 2n & n+2 \\ \cline{2-2} -2n-4 & 2 \\ \hline -4 & \end{array}$$

Como $\frac{4}{n+2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem que $-\frac{4}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{n+2} < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\frac{2}{3} \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 33: Mostra que são limitadas as sucessões seguintes:

a) Estudar a limitação de $u_n = \frac{1}{n^2+1}$:

Estudemos a monotonia de u_n :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2+1} - \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n^2+1-n^2-2n-2}{[(n+1)^2+1](n^2+1)} =$
$= \dfrac{-2n-1}{[(n+1)^2+1](n^2+1)} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

u_n é uma sucessão decrescente e como $u_1 = \frac{1}{2}$, vem que $u_n \leq \frac{1}{2}$. Além disso é fácil observar que 0 é um minorante da sucessão, pois $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) $v_n = \begin{cases} \frac{3}{n} & \text{se} \quad n \text{ par} \\ \frac{2}{n} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Estudemos a limitação dos termos da sucessão para n ímpar:
Neste caso a sucessão é definida por $v_n = \frac{2}{n}$. Verifiquemos que esta é uma sucessão decrescente,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n-2n-2}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)} < 0, \, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Como $v_1 = 2$, $0 < v_n \leq 2$, para n ímpar e $n \in \mathbb{N}$.

Para n par:
Neste caso a sucessão é definida por $v_n = \frac{3}{n}$. Analogamente à anterior esta também é uma sucessão decrescente e como $v_2 = \frac{3}{2}$, $0 < v_n \leq \frac{3}{2}$.

O maior dos majorantes encontrados é 2 ($\max\{\frac{3}{2}, 2\}$) e o menor dos minorantes é 0 ($\min\{0,0\} = 0$), pelo que: $0 < v_n \leq \frac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $u_1 = 3 \wedge u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \, \forall n \in \mathbb{N}$:

Vejamos, $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{u_2} = 3$ e assim sucessivamente.
Os termos desta sucessão são, alternadamente, $\frac{1}{3}$ e 3, pelo que $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 3$.

Corrigidos os exercícios marca-se o TPC: Exercício 102 (página 229) e dá-se por terminada a aula.

Exercício 102: Dada a sucessão $w_n = \dfrac{n-1}{n}$:

a) Averigua se 0,92 é termo da sucessão:

$\frac{n-1}{n} = 0,92 \Leftrightarrow n - 1 = 0,92n \Leftrightarrow 0,08n = 1 \Leftrightarrow n = \frac{1}{0{,}08} = 12,5 \notin \mathbb{N}$. Portanto, 0,92 não é um termo da sucessão.

b) Mostra que a sucessão é crescente:

Estudemos a monotonia da sucessão:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{n+1-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n.n-(n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0, \, \forall n \in N, \text{ pelo que } w_n \text{ é uma sucessão monótona crescente.}$$

c)d) Mostra que 1 é majorante da sucessão e justifica que ela é limitada:

Estudemos a limitação de w_n:
Fazendo a divisão inteira de $n-1$ por n obtemos que $u_n = 1 - \frac{1}{n}$:

$$\begin{array}{r|l} n-1 & n \\ \cline{2-2} -n-1 & 1 \\ \hline \text{-1} & \end{array}$$

A sucessão é crescente e $u_1 = 0$, pelo que 0 é minorante. Além disso,
$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, pelo que a sucessão tem como majorante 1. Portanto, $0 \leq u_n < 1$, sendo uma sucessão limitada.

Corrigidos os exercícios dá-se por terminada a aula.

2.4 Planificação da Aula 3

Data: 17 de Maio de 2012
Turma / Ano: 11° A
Duração da aula: 90 minutos
Tema: Sucessões Reais.
Subtema: Progressões aritméticas e geométricas.
Conteúdo abordado na aula: Progressões aritméticas - Termo geral e monotonia.

Sumário:
Correção do TPC.
Progressões aritméticas: definição, termo geral e estudo da monotonia.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão;
Saber analisar a monotonia de uma sucessão.

Objetivos:
Compreender e interiorizar os conceitos de progressão aritmética e razão de uma progressão aritmética;
Determinar o termo geral de uma progressão aritmética;
Identificar progressões aritméticas pela sua expressão algébrica;
Estudar a monotonia de uma progressão aritmética através do valor da sua razão.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Exercício 114 (página 230).

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Videoprojetor.

Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro. Seguidamente o professor corrige o trabalho de casa, aproveitando para rever conceitos da aula anterior. Após a correção do TPC faz-se um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será estudado um caso específico de sucessões - as progressões aritméticas, onde será deduzida a fórmula para o seu termo geral e analisar-se-á a sua monotonia.

Para introduzir o tema abordado na aula começamos por analisar o seguinte exemplo. O enunciado será escrito no quadro, resolvendo-se o mesmo depois em conjunto apelando a participação dos alunos, para que eles intuam o conceito de progressão aritmética.

"Imaginemos que queremos fazer uma poupança para as férias. Na primeira semana começamos por guardar 10 euros. Guardaremos 2 euros em cada uma das semanas que se seguem. Faremos este esquema de poupança durante 10 semanas".

1. Determina quanto teremos que guardar na 5^a semana? E na 10^a semana?
2. Apresenta todo o esquema de poupança, indicando em cada semana quanto teremos que guardar.

Como respostas as questões anteriores os alunos deverão referir:

1. Na 5^a semana teremos que guardar $10 + 4 \times 2 = 18$ euros e na 10^a semana deveremos guardar $10 + 9 \times 2 = 28$ euros.

2.

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poupança	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28

Analisando a tabela da segunda questão é agora feita a seguinte questão aos alunos: O que tem de especial esta sucessão? Que padrão podem reconhecer nela?

Os alunos deverão responder que o incremento de um termo para o outro é sempre o mesmo, ou seja, de 2 euros.

Depois de chegados a esta conclusão apresenta-se esta sucessão como sendo uma progressão aritmética, referindo-se oralmente que este tipo de progressões apresentam a caraterística de que a diferença entre cada termo e o imediatamente anterior é sempre a mesma.

É agora formalizada a definição de progressão aritmética, sendo escrita no quadro, para que os alunos tomem nota:

Definição: Uma *progressão aritmética* é uma sucessão em que a diferença entre cada termo e o termo anterior é sempre constante. A essa constante denotamo-la por r e chamamos-lhe razão da progressão. Simbolicamente,
(u_n) é progressão aritmética se e só se $u_{n+1} - u_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como consequência da definição anterior é possível afirmar que *Numa progressão aritmética obtém-se cada termo somando a razão ao termo imediatamente anterior (à exceção do primeiro).*

Apresenta-se agora um exemplo que ilustra a afirmação anterior:

Consideremos a progressão aritmética (u_n), em que $u_1 = -8$ e $r = 3$. Então podemos afirmar que $u_2 = u_1 + r = -8 + 3 = -5$, tal como $u_3 = u_2 + r = -5 + 3 = -2$, e assim sucessivamente.

Formalizada a definição propõe-se agora a resolução de alguns exercícios de aplicação, que serão resolvidos pelos alunos e posteriormente corrigidos no quadro por eles: Exercício 36 (página 206), 37, 38, 39 a) b) d) (página 207).

Exercício 36: Das sucessões seguintes identifica as que **não** são progressões aritméticas:

a) Notemos que $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{2(n+1)}{3} - 1 + \dfrac{2n}{3} = \dfrac{-2n-2+2n}{3} = -\dfrac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}$, podemos concluir que u_n é uma progressão aritmética de razão $-\frac{2}{3}$.

b) Verifiquemos se é uma progressão aritmética:
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{3(n+1)+2}{n+1} - \dfrac{3n+2}{n} = \dfrac{(3n+5)n - (3n+2)(n+1)}{n(n+1)} =$
$= \dfrac{3n^2+5n-3n-2n-2}{n(n+1)} = -\dfrac{2}{n(n+1)}, \forall n \in N$, pelo que $v_{n+1} - v_n$ não é constante (depende de n). Logo v_n não é progressão aritmética.

c) $w_{n+1} - w_n = (n+1)(n+3) - n(n+2) = n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 2n = 2n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que w_n não é uma progressão aritmética.

Exercício 37: Escreve os cinco primeiros termos da progressão aritmética:

a) $u_1 = 0$, razão = 3;
$u_2 = u_1 + r = 3 + 0 = 3$; $u_3 = u_2 + r = 3 + 3 = 6$; $u_4 = u_3 + r = 6 + 3 = 9$; $u_5 = u_4 + r = 9 + 3 = 12$.

b) $u_1 = 10$, razão = -3;
$u_2 = u_1 + r = 10 - 3 = 7$; $u_3 = u_2 + r = 7 - 3 = 4$; $u_4 = u_3 + r = 4 - 3 = 1$; $u_5 = u_4 + r = 1 - 3 = -2$.

c) $u_2 = 4$, razão = 5;
$u_1 = u_2 - r = 4 - 5 = -1$; $u_3 = u_2 + r = 4 + 5 = 9$; $u_4 = u_3 + r = 9 + 5 = 14$; $u_5 = u_4 + r = 14 + 5 = 19$.

Exercício 38: Indica a razão de cada uma das seguintes progressões aritméticas:

a) $-5\,, -1\,, 3\,, 7\,, 11 ...$
r = -1-(-5) = 4.

b) $2\,, \frac{5}{2}\,, 3\,, \frac{7}{2} ...$
r = $\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

c) $4\,, 2\,, 0\,, -2 ...$
r = 2-4 = -2.

d) $20\,,12\,,4\,,-4...$
r=12-20=-8.

Exercício 39: As sucessões seguintes são **progressões aritméticas**. Determina, para cada uma delas, a sua razão:

a) $u_n = 2 - 3n$;
$u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - 2 + 3n = -3n + 3 + 3n = 3$, logo a razão de u_n é 3.

b) $w_n = \frac{2}{3}n - 1$;
$w_{n+1} - w_n = \frac{2}{3}(n+1) - 1 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

d) $v_n = \begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = b_n - \pi, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Neste caso basta notar que $b_{n+1} - b_n = -\pi$, sendo a razão da progressão aritmética igual a $-\pi$.

Seguidamente à correção dos exercícios passa-se à dedução do termo geral de uma progressão aritmética. Começa-se também por um exemplo de forma a depois generalizar a expressão do termo geral. O exemplo será escrito no quadro, apelando como habitual à participação dos alunos.

Consideremos a sucessão dos números ímpares. Colocando os primeiros termos ordenadamente temos que:
$u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 7$; $u_5 = 9$, ...

A razão da progressão aritmética é igual a 2. Portanto podemos reescrever os termos da sucessão como:
$u_1 = 1$; $u_2 = 2 + 1$; $u_3 = 2 \times 2 + 1$; $u_4 = 3 \times 2 + 1$; $u_5 = 4 \times 2 + 1$, ... $u_n = (n-1) \times 2 + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$.

Assim o termo geral da sucessão é dado por $u_n = 2n - 1$. Dado o termo geral é simples calcular qualquer termo que se queira, por exemplo, qual o centésimo número ímpar? A resposta é $u_{100} = 2 \times 100 + 1 = 201$.

Formaliza-se agora a generalização do termo geral de uma progressão aritmética, cujo apontamento será escrito no quadro para que os alunos tomem nota:

Termo geral de uma progressão aritmética:
Seja u_1 o primeiro termo da progressão aritmética e seja r a sua razão. Então:

$u_2 = u_1 + r$;
$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$;
$u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r$;
.....
$u_n = u_1 + (n-1)r$,

pelo que o termo geral de uma progressão aritmética de termo inicial u_1 e razão r é dado por:

$$u_n = u_1 + (n-1)r,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos também apresentar o termo geral definido por recorrência. Supondo que $u_1 = a$, vem que:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Como consequência da definição de progressão aritmética, $u_{n+1} - u_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluimos, facilmente, que (u_n) é uma sucessão monótona. A sua monotonia dependerá do sinal de r:

· Se $r > 0$ a progressão é monótona crescente;
· Se $r < 0$ a progressão é monótona decrescente;
· Se $r = 0$ a progressão é constante.

Feita a síntese teórica propõe-se a resolução de exercícios, sendo depois corrigidos no quadro pelos alunos. Os exercícios propostos serão: Exercício 44 (página 209) e 47 (página 210).

Exercício 44: Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n-7}{3}$.

a) Prova que se trata de uma progressão aritmética.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(n+1)+1}{2} - \dfrac{3n+1}{2} = \dfrac{3n+4-3n-1}{2} = \dfrac{3}{2}$.
u_n é uma progressão artimética de razão $\frac{3}{2}$.

b) Será (u_n) uma sucessão monótona ou não monótona? É limitada ou não limitada?
Como verificado na alínea anterior $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que u_n é uma sucessão monótona crescente. Ao ser crescente o seu minorante é $u_1 = 2$. Verificamos também que u_n não é limitada.
Suponhamos que (u_n) é limitada, existindo um majorante $M \in \mathbb{R}$. Então $u_n = \frac{3n+1}{2} < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas $\frac{3n+1}{2} < M \Leftrightarrow 3n+1 < 2M \Leftrightarrow n < \frac{2M-1}{3}$. Portanto, ao escolher a ordem n superior a $\frac{2M-1}{3}$, deixaremos de ter um majorante, sendo a sucessão ilimitada.

c) Investiga se 101 é termo da sucessão.
$u_n = 101 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2} = 101 \Leftrightarrow 3n = 202 - 1 \Leftrightarrow n = 67$.
Portanto, 101 é o termo de ordem 67 da sucessão.

d) Determina quantos termos da sucessão estão entre 1000 e 1200.
$u_n = 1000 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2} = 1000 \Leftrightarrow 3n = 2001 \Leftrightarrow n \approx 666,3$
$u_n = 1200 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2} = 1200 \Leftrightarrow 3n = 2399 \Leftrightarrow n \approx 799,6$
Assim os termos situados entre 1000 e 1200 estão associados a ordens entre 667 e 799, pelo que existem 799-667+1 = 133 termos nestas condições.

Exercício 47: Calcula o termo geral e o 20° termo de cada uma das progressões:

a) $12\,, 19\,, 26\,, 33...$
$u_1 = 12$, $r = 7$, logo $u_n = u_1 + (n-1)r = 12 + (n-1)7 = 12 + 7n - 7 = 7n + 5$.

$u_{20} = 7 \times 20 + 5 = 145.$

b) $-5\,;-5,5\,;-6\,;-6,5...$
$u_1 = -5$, $r = -0,5$, logo $u_= u_1 + (n-1)r = -5 + (n-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}n - 5 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}n - \frac{9}{2}$.
$u_{20} = -\frac{1}{2} \times 20 - \frac{9}{2} = -10 - \frac{9}{2} = -\frac{29}{2}$.

c) $-\sqrt{2}\,, 0\,, \sqrt{2}\,, 2\sqrt{2}...$
$u_1 = -\sqrt{2}$, $r = \sqrt{2}$, logo $u_n = -\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}n - 2\sqrt{2}$.
$u_{20} = 20\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

d) $1\,, \frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\,, 0\,, -\frac{1}{3}$
$r = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.
$u_n = 1 + (n-1)(-\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}$.
$u_{20} = -\frac{1}{3} \times 20 + \frac{4}{3} = -\frac{20}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{16}{3}$.

Corrigidos os exercícios marca-se o TPC para a aula seguinte: Exercício 114 (página 230), dando-se por terminada a aula.

Exercício 114:

Suponhamos que a escadaria tem n degraus e que u_n representa a distância do degrau n ao solo.
Bernardo: $u_{\frac{n}{2}} = 18,5$;
$u_{19} = u_4 + 6$, pois o António está no 19° degrau e está 6 metros acima do Vitor, que se posiciona no 4° degrau.

Aplicando a definição de termo geral de uma progressão aritmética vem que $u_{19} = u_4 + (19-4)r \Leftrightarrow u_4 + 6 = u_4 + 15r \Leftrightarrow 6 = 15r \Leftrightarrow r = \frac{6}{15} = 0,4$.

$$u_{\frac{n}{2}} = 18,5 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times 0,4 = 18 \Leftrightarrow \frac{n}{2} - 1 = 45 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 46 \Leftrightarrow n = 92.$$

Logo a escadaria tem 92 degraus.

2.5 Planificação da Aula 4

Data: 21 de Maio de 2012
Turma / Ano: 11° A
Duração da aula: 90 minutos
Tema: Sucessões Reais.
Subtema: Progressões aritméticas e geométricas.
Conteúdo abordado na aula: Soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Sumário:
Correção do TPC.
Soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão;
Saber analisar a monotonia de uma sucessão;
Conhecer o conceito de progressão aritmética e de razão de uma progressão aritmética;
Determinar o termo geral de uma progressão aritmética.

Objetivos:
Compreender a demonstração relativa à fórmula de cálculo da soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética;
Aplicar a fórmula de cálculo na soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos;
É também alvo de desenvolvimento a competência transversal relativa à lógica e raciocínio matemático, no momento da demonstração da fórmula de cálculo da soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética;
Desenvolve-se a competência relativa às aplicações da matemática, aquando da resolução de problemas da vida quotidiana que envolvem a matéria a leccionar;
Há também espaço para a competência da história da matemática ao contar-se uma pequena curiosidade relativa a Gauss, relacionada com o tópico a abordar na aula.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Exercício 2 (página 220).

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Videoprojetor.

Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro, corrigindo-se logo de seguida o TPC da aula anterior. Posteriormente faz-se um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será explorado como se pode calcular a soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética, deduzindo-se e demonstrando-se a fórmula necessária ao seu cálculo.

Como forma de introduzir o conteúdo abordado apresenta-se o seguinte exemplo, sendo escrito no quadro, para que os alunos tomem nota. Algumas das observações presentes no exemplo serão apenas enunciadas oralmente, sendo apenas as justificações mais importantes escritas no quadro.

Exemplo: Consideremos a sucessão (u_n) definida por $u_n = 3n + 1$. Listemos os primeiros 10 termos desta sucessão: $4\,,7\,,10\,,13\,,16\,,19\,,22\,,25\,,28\,,31$.

Se estivermos interessados em calcular a soma destes termos pode ser útil conhecermos alguma forma de o fazermos rapidamente. Basta imaginar que queremos calcular a soma de 100 termos, o que seria trabalhoso fazer somando termo a termo.

Queremos então calcular $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31$.
Somemos então os termos que estão nos extremos (o 1° e o 10° termos), $4 + 31 = 35$. Agora somemos os termos da posições 2 e 9, $7 + 28 = 35$. Prosseguindo com este processo de somar os termos equidistantes dos extremos concluimos que a sua soma é sempre 35.
Notemos que o fato da soma dos termos equidistantes dos extremos ser constante permite calcular rapidamente o valor da soma dos termos pretendidos: basta multiplicar o valor dessa constante pelo número de pares que se formam.

Logo $S_{10} = (4 + 31) \times \frac{10}{2} = 175$.

A propósito da abordagem deste método para o cálculo da soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética o professor narrará oralmente a seguinte curiosidade aos alunos:

"Conta-se que o matemático alemão Gauss, ainda muito jovem e irrequieto nas aulas, teria sido desafiado pelo seu professor. Este, para o manter entretido, pediu-lhe que calculasse o valor da soma dos números inteiros de 1 a 100. Gauss terá respondido em pouco tempo, surpreendendo o seu professor. Ele teria utilizado a estratégia mostrada de seguida:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Obteve então 100 vezes a parcela 101. Isto significa que, somando duas vezes os números inteiros de 1 a 100 se obtém como resultado 10100. Dividindo o resultado por 2, Gauss deu ao professor a resposta correta."

Observemos o que acontece quando o número de termos é ímpar.
Suponhamos agora que queríamos calcular a soma dos primeiros 7 termos da sucessão:
$4+7+10+13+16+19+22$

$4+22=26$; $7+19=26$; $10+16=26$, pelo que a soma dos termos equidistantes dos extremos é constante.

Portanto, $S=(4+22)\times\frac{6}{2}+13=(4+22)\times 3+(4+22)\times\frac{1}{2}=(4+22)\times\left(3+\frac{1}{2}\right)=(4+22)\times\frac{7}{2}=91$.

Generalizando os casos anteriores podemos afirmar que **a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética** é dada, para qualquer $n\in\mathbb{N}$, por:

$$S_n=\frac{u_1+u_n}{2}\times n$$

Demonstre-se agora a fórmula enunciada:

Demonstração: A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n), com primeiro termo u_1 pode ser calculada adicionando, ordenadamente, as parcelas dispostas por ordem crescente ou decrescente:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_{n-1}+u_n \quad (2.1)$$

mas também,

$$S_n=u_n+u_{n-1}+...+u_2+u_1 \quad (2.2)$$

Somando (2.1) e (2.2) vem:

$$2S_n=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+...+(u_{n-1}+u_2)+(u_n+u_1).$$

As parcelas (u_1+u_n), (u_2+u_{n-1}), ... têm todas o mesmo valor, pois representam a soma dos termos equidistantes dos extremos, que é constante. Notemos que, por exemplo,

$$u_2+u_{n-1}=u_1+r+u_n-r=u_1+u_n,$$

provando-se analogamente para as restantes parcelas.

Portanto, como existem n parcelas vem,

$$2S_n=n\times(u_1+u_n)\Leftrightarrow S_n=\tfrac{u_1+u_n}{2}.$$

Terminada a demonstração faz-se referência à fórmula que permite calcular a soma de termos consecutivos, desde um termo qualquer u_p até u_n, não tendo a soma que se começar necessariamente no primeiro termo.

Soma dos termos $u_p, u_{p+1}, ..., u_n$ de uma progressão aritmética:

$$S = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n - p + 1).$$

Seguidamente propõe-se aos alunos que resolvam os exercícios 52, 53 e 55 da página 213 do manual. Estes exercícios serão depois corrigidos no quadro pelos alunos.

Exercício 52: Se numa progressão aritmética (u_n) se tem $u_3 + u_{11} = 18$, indica o valor de:

a) $u_1 + u_{13}$:
$u_1 + u_{13} = 18$, pois u_1 e u_{13} são os termos equidistantes dos extremos.
b) k tal que $u_4 + u_k = 18$:
$u_4 + u_{10} = 18$, pois u_4 e u_{10} são os termos equidistantes dos extremos, pelo que $k = 10$.
c) u_7:
$u_7 = 18$, pois u_7 será o termo de ordem central.

Exercício 53: Supondo que temos todos os termos entre o primeiro e o último indicados, quantas parcelas têm as seguintes somas?

a) $u_1 + u_2 + ... + u_{16}$, tem 16 parcelas, pois $16 - 1 + 1 = 16$.
b) $u_3 + u_4 + ... + u_{17}$, tem $17 - 3 + 1 = 15$ parcelas.
c) $u_3 + u_4 + ... + u_{200}$, tem $200 - 3 + 1 = 196$ parcelas.
d) $u_5 + u_6 + ... + u_n$, tem $n - 5 + 1 = n - 4$ parcelas.

Exercício 55: Determina:

a) a soma dos 25 primeiros termos de (u_n) com $u_n = 3n + 2$:
$u_1 = 5$, $u_{25} = 77$.
$S_{25} = \frac{u_1 + u_{25}}{2} \times 25 = \frac{5 + 77}{2} \times 25 = 1025.$

b) a soma de 12 termos consecutivos de $u_n = 3 - n$ a começar no 5° termos, inclusivé.
$u_5 = -2$, $u_{16} = 3 - 16 = -13$.
$S_{12} = \frac{u_5 + u_{16}}{2} \times 12 = \frac{-2 - 13}{2} \times 12 = -90.$

c) a soma dos 20 primeiros números ímpares.
$u_n = 2n - 1$.
$u_1 = 1$, $u_{20} = 39$.
$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{1 + 39}{2} \times 20 = 400.$

d) a soma dos 30 números pares consecutivos a começar em 204.
$u_n = 2n$.
Queremos calcular a soma de 30 números pares consecutivos a começar em 204.

$2n = 204 \Leftrightarrow n = 102$. Portanto o termo 204 tem ordem 102. Como queremos os 30 números pares consecutivos vem que o último par tem ordem 131 (pois $131 - 102 + 1 = 30$).

Logo, $u_{102} = 204$, $u_{131} = 262$ e
$S = \dfrac{u_{102} + u_{131}}{2} \times 30 = \dfrac{204 + 262}{2} \times 30 = 6990$.

Corrigidos os exercícios o professor passará o enunciado de mais um exercício no quadro, para que os alunos tomem nota e o resolvam, sendo depois corrigido.

Exercício: De uma progressão aritmética sabe-se que $u_7 = 23$ e $u_{23} = 31$.
a) Qual é o 5° termo da sucessão?
b) Determina o termo geral.
c) Verifica se 50 é termo da sucessão.
d) Determina a soma de todos os termos entre o 15° e o 37°, inclusive.

Resolução:
a) Determinemos a razão da progressão aritmética:
$u_{23} = u_7 + 16r \Leftrightarrow 31 = 23 + 16r \Leftrightarrow 8 = 16r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$.

Logo, $u_5 = u_7 - 2r = 23 - 2 \times \frac{1}{2} = 22$.

b) $u_n = u_1 + (n-1)r$. Sabemos que $r = \frac{1}{2}$ e que $u_1 = u_7 - 6r = 23 - 6 \times \frac{1}{2} = 23 - 3 = 20$.

Portanto, $u_n = 20 + (n-1) \times \frac{1}{2} = 20 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{39}{2}$.

c) $u_n = 50 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{39}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = 50 - \frac{39}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = \frac{61}{2} \Leftrightarrow n = 61$.
Portanto, 50 é termo da sucessão, cuja ordem é 61.

d) $u_{15} = \frac{1}{2} \times 15 + \frac{39}{2} = \frac{54}{2} = 27$;
$u_{37} = \frac{1}{2} \times 37 + \frac{39}{2} = \frac{76}{2} = 38$.

$S = \dfrac{u_{15} + u_{37}}{2} \times (37 - 15 + 1) = \dfrac{27 + 38}{2} \times 23 = 747,5$.

Após a correção dos exercícios propõe-se a resolução dos exercícios 121 e 122 da página 231 do manual, sendo corrigidos pelo professor à medida que os alunos os vão terminando.

Exercício 121: Considera uma determinada sequência de pilhas de troncos. Seja (t_n) a sucessão do número de troncos da sequência de pilhas. Sabe-se que $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, $t_5 = 15$,...

a) Indica o número de troncos que terá a pilha seguinte.
A pilha seguinte, t_6 terá na sua constituição 21 troncos, em 6 filas, sendo que na base tem 6 troncos, diminuíndo 1 tronco por cada fila.

b) Quantos troncos teria a 7^a pilha?
A sétima pilha, t_7 teria $21 + 7 = 28$ troncos.

c) Como se passa de t_{n-1} para t_n?

Para passar de t_{n-1} para t_n temos que adicionar n troncos à pilha de t_{n-1}.

d) Justifica que t_n é crescente e não é progressão aritmética. Determina o termo geral de t_n.
O termo geral de t_n é: $t_n = t_{n-1} + n$.
Assim, $t_n - t_{n-1} = n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sendo esta uma sucessão monótona crescente. No entanto não é uma progressão aritmética pois a diferença entre um termo e o seu termo anterior depende de n.

Exercício 122: Na 1^a fila da plateia de um teatro há 25 cadeiras e em cada uma das filas seguintes há mais duas cadeiras do que na anterior. Quantas filas tem a plateia, sabendo que, ao todo, tem 2560 lugares?

A primeira fila tem 25 cadeiras;
A segunda fila tem mais 2 cadeiras que a anterior ou seja, 27;

Estamos perante a presença de uma progressão aritmética de razão 2, com termo inicial 25, cujo termo geral é:
$u_n = u_1 + (n-1)r = 25 + (n-1)2 = 25 + 2n - 2 = 2n + 23$.

Sabe-se também que a soma de todas as cadeiras é 2560. Aplicando a fórmula da soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética vem:
$S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow 2560 = \dfrac{25 + 2n + 23}{2} \times n \Leftrightarrow 2560 = (24 + n) \times n \Leftrightarrow 2560 = 24n + n^2 \Leftrightarrow n^2 + 24n - 2560 = 0$.

Aplicando a fórmula resolvente:
$n = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 1 \times (-2560)}}{2} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{10816}}{2} = \dfrac{-24 \pm 104}{2}$
$\Leftrightarrow n = -64 \ \vee \ n = 40$.

Logo concluimos que a plateia tem 40 filas.

Depois de corrigidos os exercícios marca-se o TPC para a aula seguinte: Exercício 2 da página 220, dando-se por terminada a aula.

Exercício 2: O valor da soma $4 + 7 + 10 + ... + 76$ é:

Queremos determinar a soma de $4 + 7 + 10 + ... + 76$.
Esta é uma progressão aritmética de razão 3 e termo inicial 4, logo:
$u_n = 4 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.
$u_n = 76 \Leftrightarrow 3n + 1 = 76 \Leftrightarrow n = \frac{75}{3} = 25$.

Portanto, $S = \dfrac{u_1 + u_{25}}{2} \times 25 = \dfrac{4 + 76}{2} \times 25 = 1000$.

A resposta correta é a opção (A).

Feita a correção dos exercícios dá-se por terminada a aula.

2.6 Planificação da Aula 5

Data: 23 de Maio de 2012
Turma / Ano: 11° A
Duração da aula: 90 minutos
Tema: Sucessões Reais.
Subtema: Progressões aritméticas e geométricas.
Conteúdo abordado na aula: Progressões geométricas - Termo geral e monotonia.

Sumário:
Correção do TPC.
Progressões geométricas: definição, termo geral e estudo da monotonia.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão;
Saber analisar a monotonia de uma sucessão.

Objetivos:
Compreender e interiorizar os conceitos de progressão geométrica e razão de uma progressão geométrica;
Determinar o termo geral de uma progressão geométrica;
Identificar progressões geométricas pela sua expressão algébrica;
Estudar a monotonia de uma progressão geométrica através do valor da sua razão.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Exercício 127 (página 231).

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Videoprojetor, Ficha de Trabalho (ver anexos), Calculadora Gráfica.

Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro. Seguidamente corrige-se o exercício que ficou para TPC, fazendo-se depois um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será estudado outro caso específico de sucessões - as progressões geométricas, onde será deduzido o seu termo geral e analisar-se-á a sua monotonia.

Começa-se então a aula por resolver o primeiro exercício da ficha de trabalho que introduz o conceito de progressão geométrica. O exercício será resolvido em conjunto, sendo escrita a sua resolução no quadro, apelando à participação dos alunos. Deve-se alertar os alunos para o facto de que os outros dois exercícios da ficha serão resolvidos na aula seguinte, resolvendo-se apenas o primeiro na presente aula.

Exercício 1 - Ficha:

1.1. De modo a preencher a tabela, e caso seja necessário, pode-se esquematizar a situação apresentada. Notemos que no primeiro dia vendem-se 12 jornais, pois cada um dos quatro amigos vende um jornal a 3 amigos. No dia seguinte o esquema é o mesmo: cada um dos que receberam o jornal irão vendê-lo a mais 3 amigos, o que triplica o número de jornais vendidos relativamente ao dia anterior.

Dias de venda	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Jornais vendidos nesse dia	12	36	108	324	972	2916
Totais de jornais vendidos	12	48	156	480	1452	4368

1.2. No sétimo dia teriam sido vendidos $2916 \times 3 = 8748$ jornais, tendo-se acumulado um valor total de 13116 euros. Pelo que se pode concluir que o objetivo foi cumprido.

1.3. Caso o esquema se mantivesse até ao 10° dia teríamos que:
8° dia: $8748 \times 3 = 26244$ jornais;
9° dia: $26244 \times 3 = 78732$ jornais;
10° dia: $78732 \times 3 = 236196$ jornais.

O valor acumulado pela venda dos jornais ao 10° dia seria de 354288 euros.

1.4. De forma a representar j_n em função de n notemos que o o número inicial de jornais vendidos é 12, triplicando este número a cada dia que passa. Portanto,

$j_n = 12 \times 3^{n-1}$.

Atendendo ao resolvido no exercício anterior o professor introduz o conceito de progressão geométrica. Os conceitos mais importantes serão escritos no quadro para que os alunos tomem nota deles. Notemos que no caso estudado cada termo obtém-se do anterior multiplicando-o por 3, ou seja, $j_n = j_{n-1} \times 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\frac{j_n}{j_{n-1}} = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Este tipo de sucessão é uma progressão geométrica.

Definição: Uma progressão geométrica é uma sucessão em que o quociente entre cada termo e o termo anterior é sempre constante. A essa constante denotamo-la por r e chamamos-lhe razão da progressão. Simbolicamente,
(u_n) é progressão geométrica se e só se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como consequência da definição anterior é possível afirmar-se que: *Uma sucessão em que cada termo se obtém multiplicando o termo anterior por uma constante é uma progressão geométrica.*

Seguem-se alguns exemplos, de forma a permitir aos alunos que interiorizem melhor o conceito de progressão geométrica.

Exemplos:

$u_n = 7^n$:
$u_1 = 7$, $u_2 = 7^2 = 7 \times 7 = 49$, $u_3 = 7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$,...

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 7.

$v_n = (\frac{1}{2})^n$:
$v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $v_3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Após este momento de exposição de matéria propõe-se aos alunos a resolução dos exercícios 58 (página 215) e 62 (página 216), sendo posteriormente corrigidos no quadro.

Exercício 58: Determina a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $2, 6, 18, 54, ...$
$r = \dfrac{6}{2} = 3;$
b) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$
$r = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2};$
c) $0,1; 0,01; 0,001; ...$
$r = \dfrac{0,01}{0,1} = 0,1;$
d) $-5, -10, -20, -40, ...$
$r = \dfrac{-10}{-5} = 2;$
e) $0,1; 0,3; 0,9; 2,7; ...$
$r = \dfrac{0,3}{0,1} = 0,3;$
f) $1, -2, 4, -8, ...$
$r = \dfrac{-2}{1} = -2.$

Exercício 62: Mostra que é progressão geométrica a sucessão de termo geral:

a) $u_n = \frac{3^n}{2}$.

Façamos $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2}}{\frac{3^n}{2}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 = r$, logo u_n é uma progressão geométrica.

b) $v_n = -2 \times 5^{n+1}$.

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2 \times 5^{n+2}}{-2 \times 5^{n+1}} = \frac{5^{n+2}}{5^{n+1}} = 5 = r$, logo v_n é uma progressão geométrica.

c) $a_n = 10\pi^n$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10\pi^{n+1}}{10\pi^n} = \frac{\pi^{n+1}}{\pi^n} = \pi = r$, logo a_n é uma progressão geométrica.

d) $f_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} \times 3^{n+1}}{2^n \times 3^{n+2}} = 2 \times 3^{n+1-n-2} = 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3} = r$, logo f_n é progressão geométrica.

Seguidamente à resolução destes exercícios, e à semelhança do estudo feito para as progressões aritméticas, procede-se à determinação do termo geral de uma progressão geométrica, tal como o estudo da sua monotonia, dada a razão. Os apontamentos serão feitos no quadro, sendo um momento expositivo por parte do professor.

Termo geral de uma progressão geométrica:

Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão r. Pela definição de progressão geométrica podemos afirmar que:
$u_2 = u_1 \times r$;
$u_3 = u_2 \times r = u_1 \times r \times r = u_1 \times r^2$;
$u_4 = u_3 \times r = u_1 \times r^3$;
...
$u_n = u_{n-1} \times r = u_1 \times r^{n-1}$.

Portanto o termo geral de uma progressão geométrica de termo inicial u_1 e razão r é dado por:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Podemos definir (u_n) também por recorrência, supondo que $u_1 = a$:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Deduzido o termo geral de uma progressão geométrica sintetiza-se, de seguida, o comportamento deste tipo de progressões, no que concerne à sua monotonia e limitação, dada a razão e o seu primeiro termo. A informação será escrita no quadro para que os alunos tomem nota.

Comportamento de uma progressão geométrica (u_n) de primeiro termo u_1 e razão r:

Se $r > 1$:
· $u_1 > 0$, então (u_n) é crescente e não limitada;
· $u_1 < 0$, então (u_n) é decrescente e não limitada;

Se $r = 1$, então (u_n) é constante e limitada;

Se $0 < r < 1$:
· $u_1 > 0$, então (u_n) é decrescente e limitada;
· $u_1 < 0$, então (u_n) é crescente e limitada;

Se $-1 < r < 0$, então (u_n) é não monótona e limitada;

Se $r = -1$, então (u_n) é não monótona e limitada;

Se $r < -1$, então (u_n) é não monótona e não limitada.

Terminada a síntese teórica propõe-se aos alunos que resolvam os exercícios 65, 66 (página 217) e 70 (página 219), sendo posteriormente corrigidos no quadro, à medida que os alunos os vão resolvendo.

Exercício 65:

a) $u_1 = \frac{1}{2}$ e $r = 2$;

$u_2 = u_1 \times r = \frac{1}{2} \times 2 = 1$;
$u_3 = u_2 \times r = 1 \times 2 = 2$;
$u_4 = u_3 \times r = 4$;
$u_5 = 8$.

b) $u_1 = \frac{1}{2}$ e $r = -4$;

$u_2 = u_1 \times r = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$;
$u_3 = -2 \times (-4) = 8$;
$u_4 = -32$;
$u_5 = 128$.

c) $u_2 = 10$ e $r = 2$;

$u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{10}{2} = 5$;
$u_3 = u_2 \times r = 10 \times 2 = 20$;
$u_4 = 40$;
$u_5 = 80$.

d) $u_2 = -\frac{1}{3}$ e $r = 3$;

$u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{\frac{-1}{3}}{3} = -\frac{1}{9}$;
$u_3 = u_2 \times r = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$;
$u_4 = -3$;
$u_5 = -9$.

Exercício 66: Calcula o 10° termo e o termo geral da progressão geométrica:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$
$u_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$, logo,
$u_n = \frac{1}{3} \times ((\frac{1}{3})^{n-1}) = (\frac{1}{3})^n$;
$u_{10} = \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{59049}$.

b) $u_1 = \frac{1}{5}$ e $r = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = 2$, logo,
$u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n-1}$;
$u_{10} = \frac{1}{5} \times 2^9 = \frac{512}{5}$.

c) $u_1 = 10$ e $r = \frac{20}{10} = 2$, logo,
$u_n = 10 \times 2^{n-1} = 5 \times 2^n$;
$u_{10} = 5 \times 2^10 = 5120$.

d) $u_1 = 12$ e $r = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, logo,
$u_n = 12 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$;
$u_{10} = 12 \times \frac{1}{2^9} = \frac{3}{128}$.

Exercício 70: Indica o tipo de monotonia de cada uma das progressões geométricas (a_n) sabendo que:

a) $a_1 = -5$ e $r = 2$, portanto (a_n) é uma progressão geométrica decrescente e não limitada;

b) $a_2 = -4$ e $r = 3$, portanto (a_n) é uma progressão geométrica decrescente e não limitada;

c) $a_1 = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$, portanto (a_n) é uma progressão geométrica decrescente e limitada;

(a_n) é uma sucessão limitada e $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$.

d) $a_1 = -0,3$ e $r = \frac{1}{2}$, portanto (a_n) é uma progressão geométrica crescente e limitada;

(a_n) é uma sucessão limitada e $-0,3 \leq a_n \leq 0$.

Seguidamente à correção dos exercícios propõe-se, para TPC, a resolução do exercício 127 (da página 231 do manual), dando-se por terminada a aula.

Exercício 127: Dispomos, paralelamente entre si, placas de isolamento sonoro. Cada uma delas absorve 40% da intensidade que recebe. Uma fonte sonora emite um som de intensidade 1000 (em certa unidade). Seja f_1 a intensidade do som depois de atravessar a 1^a placa e f_n a intensidade do som depois de atravessar a placa de ordem n.

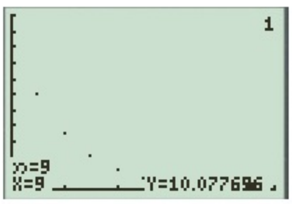
a) Calcula f_2, f_3 e f_{n+1} em função de n:
$f_1 = 0,6 \times 1000 = 600$ (pois a intensidade é diminuída em 40%, sobrando assim 60% da intensidade inicial).
$f_2 = 0,6 \times f_1 = 0,6 \times 600 = 360$.
$f_3 = 0,6 \times f_2 = 0,6^2 \times f_1 = 0,6^2 \times 600 = 216$.
$f_{n+1} = 0,6^n \times f_1$.

b) Exprime f_n em função de n:
(f_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 0,6$ e termo inicial 1000, pelo que:
$f_n = 0,6^{n-1} \times 1000$.

c) Quantas placas o som deve atravessar para que a sua intensidade seja inferior a 11 unidades?
Notemos que:
$f_4 = 0,6^4 \times 1000 = 129,6$;
$f_5 = 0,6^5 \times 1000 = 77,76$;
$f_6 = 0,6^6 \times 1000 = 46,66$;
$f_7 = 0,6^7 \times 1000 = 27,99$;
$f_8 = 0,6^8 \times 1000 = 16,8$;
$f_9 = 0,6^9 \times 1000 = 10,07$;

Portanto verifica-se que a intensidade do som após atravessar a 9^a placa é inferior a 11, pelo que o som deve atravessar pelo menos 9 placas de modo que a sua intensidade seja menor que 11.

Nota: Os alunos poderão encontrar a solução graficamente, representando a sucessão e, através do comando [TRACE], verificar qual a ordem a partir da qual os termos da sucessão são menores que 11.



É possível afirmar que todos os termos subsequentes ao termo de ordem 9 são menores que 11, pois a sucessão é monótona decrescente (basta observar que a razão é 0,6 e o seu termo inicial é 1000.)

2.7 Planificação da Aula 6

Data: 24 de Maio de 2012 **Turma / Ano:** 11° A **Duração da aula:** 90 minutos **Tema:** Sucessões Reais. **Subtema:** Progressões aritméticas e geométricas. **Conteúdo abordado na aula:** Soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sumário:
Soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Resolução de exercícios.

Pré-Requisitos: Os alunos devem:
Conhecer a definição e as diferentes formas de representação de sucessões, tal como a sua notação;
Conhecer a noção de termo e ordem de uma sucessão;
Saber analisar a monotonia de uma sucessão;
Conhecer o conceito de progressão geométrica e de razão de uma progressão geométrica;
Determinar o termo geral de uma progressão geométrica.

Objetivos:
Compreender a demonstração relativa à fórmula de cálculo da soma dos termos consecutivos de uma progressão geométrica;
Aplicar a fórmula de cálculo na soma dos termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Competências Transversais:
Será desenvolvida a competência transversal relativa à comunicação matemática oral aquando da discussão em torno da matéria a lecionar e durante a resolução dos exercícios propostos;
É também alvo de desenvolvimento a competência transversal relativa à lógica e raciocínio matemático, no momento da demonstração da fórmula de cálculo da soma dos termos consecutivos de uma progressão geométrica;
Desenvolve-se a competência relativa às aplicações da matemática, aquando da resolução de problemas da vida quotidiana que envolvem a matéria a leccionar.

Avaliação/Reflexão:
A avaliação da aula é exclusivamente formativa, avaliando-se o comportamento, atitudes e valores dos alunos, bem como a sua participação espontânea no decorrer da aula e nas possíveis discussões geradas em torno da matéria. Será, para isso, preenchida uma grelha de observação de aula, que contemplará os aspetos descritos.

TPC: Nesta aula não há TPC.

Recursos: Manual do aluno [8], Quadro, Videoprojetor, Ficha de Trabalho, Calculadora Gráfica.

Apoio Bibliográfico: [3], [4], [5], [8].

Metodologia utilizada nas aulas:

A aula inicia-se escrevendo o sumário no quadro. Seguidamente faz-se um breve resumo acerca do conteúdo abordado na aula: será explorado como se pode calcular a soma dos termos consecutivos de uma progressão geométrica, deduzindo-se e demonstrando-se a fórmula necessária ao seu cálculo.

Apresenta-se de seguida a fórmula de cálculo da soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica. Esta será escrita no quadro, tal como a sua demonstração. Os alunos serão estimulados para acompanhar a demonstração tentando justificar alguns passos.

Soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica:

Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$, então a soma dos seus n primeiros termos S_n é dada por:

$$S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r};\ r \neq 1$$

Demonstração: Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$. A soma dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n \quad (2.3)$$

Multiplicando a igualdade anterior por r ficamos com:

$$S_n r = u_1 r + u_2 r + u_3 r + ... + u_n r \quad (2.4)$$

Como $u_{n+1} = r u_n$, a igualdade (2.4) fica:

$$S_n r = u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + u_{n+1} \quad (2.5)$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (2.3) e (2.5), resulta que:

$$S_n - S_n r = u_1 + u_2 + ... + u_n - (u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1})$$
$$\Leftrightarrow S_n - S_n r = u_1 - u_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow S_n(1-r) = u_1 - u_1 r^n$$
$$\Leftrightarrow S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r} = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r},\ r \neq 1.$$

Terminada a demonstração da fórmula enunciada procede-se à aplicação e consolidação da mesma, através da realização de exercícios. Para começar é proposto aos alunos que resolvam os exercícios 74 e 75 (da página 223), sendo depois corrigidos no quadro pelos alunos.

Exercício 74: Calcula a soma dos 10 primeiros termos da progressão geométrica em que:

a) $v_1 = 1$ e $r = 2$.

$$S_{10} = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023.$$

b) $v_2 = 4$ e $r = \frac{1}{2}$.

$$v_2 = v_1 \times r \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_2}{r} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$$S_{10} = 8 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{64}.$$

c) $v_2 = 10$ e $r = \frac{1}{5}$.

$$v_2 = v_1 \times r \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_2}{r} = \frac{10}{\frac{1}{5}} = 50.$$

$$S_{10} = 50 \times \frac{1-(\frac{1}{5})^{10}}{1-\frac{1}{5}} \approx 62,5.$$

d) $v_1 = -5$ e $r = -2$.

$$S_{10} = -5 \times \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1705.$$

Exercício 75:

A medida da área de cada triângulo é $\frac{4}{9}$ da área do anterior. O primeiro triângulo tem lado 24.

a) Queremos saber o termo geral da sucessão dos perímetros. Seja (p_n) a sucessão que representa o perímetro do triângulo de ordem n.

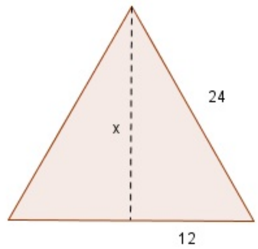
$p_1 = 24 \times 3 = 72$.
Como a medida da área de cada triângulo é $\frac{4}{9}$ da área do anterior podemos concluir que todos eles são triângulos semelhantes, com razão de semelhança relativamente às suas áreas de $\frac{4}{9}$. Portanto a razão de semelhança entre a medida dos seus lados será de $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Consequentemente também a relação entre a medida do perímetro de cada triângulo e do triângulo anterior será de $\frac{2}{3}$.

Assim $p_1 = 24$ e $r = \frac{2}{3}$, pelo que,
$p_n = p_1 \times r^{n-1} = 24 \times (\frac{2}{3})^{n-1}$.

b) Queremos determinar a soma das áreas dos primeiros 10 triângulos, logo:

Calculemos a área do primeiro triângulo:



$x^2 + 12^2 = 24^2 \Leftrightarrow x^2 = 24^2 - 12^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{432} \Leftrightarrow x = 12\sqrt{3}$.

$A_{\triangle} = \frac{b \times h}{2} = \frac{24 \times 12\sqrt{3}}{2} = 144\sqrt{3}$.

$S_{10} = 144\sqrt{3} \times \dfrac{1 - (\frac{4}{9})^{10}}{1 - \frac{4}{9}} \approx 448,81$.

c) Escrever a expressão da soma das medidas das áreas dos n primeiros triângulos em função de n:

$S_n = 144\sqrt{3} \times \dfrac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \dfrac{1296}{5}\sqrt{3}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right)$.

Depois de corrigir estes exercícios resolvem-se agora os exercícios 2 e 3 da ficha de trabalho entregue na aula anterior. Estes serão depois corrigidos no quadro pelos alunos.

Exercício 2 da ficha de trabalho:

2.1. Cada semicircunferência tem como raio o diâmetro da anterior. A primeira semicircunferência tem diâmetro 1, logo tem raio $\frac{1}{2}$. A segunda semicircunferência terá raio 1, logo diâmetro 2.

Os diâmetros de cada semicircunferência formam uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1. Logo o termo geral é:

$d_n = d_1 \times r^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

$d_{15} = 2^{14} = 16384$.

2.2. Queremos determinar o comprimento do "caracol". Notemos que o comprimento da primeira semicircunferência é dada por:

$c_1 = \dfrac{2\pi\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

$c_2 = \frac{2\pi 1}{2} = \pi$.

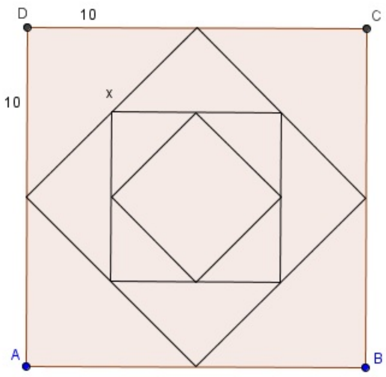
Portanto os comprimentos formam uma progressão geométrica de razão 2.

O comprimento do caracol corresponde à soma dos comprimentos das 15 semicircunferências, logo,

$S_{15} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = \frac{\pi}{2} \times 32767 = 16383,5\pi.$

3. Consideremos, em primeiro lugar, a sucessão das medidas dos comprimentos dos lados, denotada por (l_n).

$\overline{AB} = 20$ cm.



$10^2 + 10^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 200 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200} \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}.$

Portanto, $l_1 = 20$ e $l_2 = 10\sqrt{2}$.

$(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{100} \Leftrightarrow y = 10.$

Logo, $l_3 = 10$.

$5^2 + 5^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 = 50 \Leftrightarrow y = 5\sqrt{2}.$

$l_4 = 5\sqrt{2}.$

Note-se então que $l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2l_n^2}{4}\right)} = \frac{l_n}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n.$

Assim, (l_n) forma uma progressão geométrica de razão $\frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A soma dos dez primeiros termos de (l_n) é $S_{10} = 20 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 66,15.$

Estudemos agora a sucessão dos perímetros, denotada por (p_n).

O perímetro do primeiro quadrado é dado por $20 \times 4 = 80$, ou seja, $p_1 = 80$.

Da mesma forma, como $l_2 = 10\sqrt{2}$, temos que $p_2 = 40\sqrt{2}$.

$p_3 = 40$ e $p_4 = 20\sqrt{2}$.

Note-se que $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}4l_n \Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}p_n$,

logo (p_n) forma uma progressão geométrica de razão $r = \frac{40\sqrt{2}}{80} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A soma dos dez primeiros termos de (p_n) é dada por $S_{10} = 80 \times \dfrac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 264,60$.

A sucessão das áreas, (a_n), tem como primeiro termo $a_1 = 20 \times 20 = 400$.

$a_2 = (10\sqrt{2})^2 = 200$;
$a_3 = 10^2 = 100$;
$a_4 = (5\sqrt{2})^2 = 50$.

Ou seja, $a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}l_n)^2 = \frac{1}{2}l_n^2 = \frac{1}{2}a_n$.

(a_n) forma uma progressão geométrica de razão $r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = 400$.

A soma dos dez primeiros termos é dada por $S_n = 400 \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \approx 799,21$.

Corrigidos os exercícios dá-se por terminada a aula.

2.8 Reflexão sobre a Prática de Ensino Supervisionada

Apresento agora uma pequena reflexão acerca das aulas lecionadas e incluídas neste trabalho, bem como uma pequena conclusão acerca da experiência adquirida no EP.

Um dos pontos positivos que creio que possa retirar do conjunto de aulas lecionadas é o facto de ter ressalvado a importância da demonstração de resultados na Matemática, tentando, sempre que possível, incluir demonstrações de resultados que utilizássem ferramentas matemáticas ao alcance dos alunos. Tentei também incluir os alunos no seguimento da demonstração, incentivando a sua participação, de forma a que eles se ambientem à demonstração dos resultados. Além disso tive o cuidado de incluir a resolução de problemas no decorrer das aulas apesar de, primeiramente, se resolverem exercícios de cálculo mais rotineiro, como forma de consolidar os conteúdos abordados, passando por vezes, em certos casos, para a aplicação desses conhecimentos na resolução de problemas. Outra das competências transversais incluída nas aulas foi a da História da Matemática, fazendo referência a certas curiosidades no âmbito de determinados conteúdos, como forma de cativar a atenção dos alunos. A componente relativa ao uso da calculadora gráfica também foi preparada com cuidado, havendo espaço para resolver determinados exercícios com o auxílio da mesma, explicando os comandos necessários para a resolução dos exercícios.

Alguns dos pontos que creio que possa melhorar e que não tenham corrido tão bem foram, por exemplo, a gestão da dinâmica da sala de aula. Neste caso a gestão do tempo fornecido aos alunos para resolver os exercícios e a sua posterior correção no quadro poderia ter sido melhor trabalhada, pois, por vezes, os alunos dispersavam-se um pouco. Além disso também se revelou um pouco complicado cativar a atenção dos alunos, pelo que poderia ter pensado em maneiras de apresentar a matéria de forma a cativá-los mais. Apesar disso penso que consegui transmitir bem as minhas ideias e os conteúdos abordados, tentando sempre esclarecer as dúvidas de todos os alunos.

Em termos de extensão das aulas planificadas notei que uma ou outra aula poderiam estar mais extensas do que eu pensaria pois os alunos demoravam mais do que o planeado a resolver os exercícios. Mas, na generalidade, os objetivos propostos em cada aula foram cumpridos.

Relativamente ao EP posso afirmar que foi uma experiência muito positiva e o facto de termos participado em muitas atividades, bem como termos realizado muitas tarefas, permitiu-nos ter uma verdadeira incursão no mundo da docência.

Com o trabalho realizado nas questões de direção de turma e com a participação nas reuniões de grupo, nível, de avaliação ou de planificação de aulas, conseguimos ter uma visão muito ampla e profunda daquilo que se passa no interior de uma escola. Graças ao EP construímos uma bagagem de conhecimentos que nos vai permitir, quando começarmos a nossa docência, integrar bem numa escola, sabendo aquilo que nos espera.

Como ponto negativo deste EP gostaria de realçar o facto de nos termos esforçado imenso, investindo imenso tempo e também dinheiro, sem sequer termos uma mínima isenção de propinas. Estou de acordo relativamente aos moldes em que o EP está concebido, pois é um ano muito intenso e que nos permite realmente ganhar experiência na docência, à excepção desse pormenor que já referi.

Bibliografia

[1] Arbieto, A.; Matheus, C. & Moreira, C.G. (2009). *Ensaios Matemáticos - Volume 17 - The remarkable efectivness of ergodic theory in number theory.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[2] Bergelson, V. & Leibman, A. (1996).*Polynomial Extensions of Van der Waerden's theorem and Szemerédi's theorems.* Journal of the American Mathematical Society. Volume 9 - Number 3.

[3] Carvalho e Silva, J. (Coord.); Fonseca, M. G.; Martins, A. A; Fonseca, C. M. C & Lopes, I. M. C. (2003). *Matemática A, 10°, 11° e 12° anos.* Programa, ME-DES;

[4] Costa, B.; Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço - Parte 2 - Matemática A* 11°*Ano.* Porto: Porto Editora.

[5] Duarte, T. O.; Filipe, J. P.; Gouveia, A.; Fernandes, C. (2011). *Matemática onze - Parte 2 - Funções/Sucessões.* Lisboa: Lisboa Editores.

[6] Furstenberg, H. (1981). *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* New Jersey: Princeton University Press.

[7] Furstenberg, H. & Weiss, B. (1978). *Topological dynamics and combinatorial number theory.* Journal d'Analyse Math. 34: 61-85.

[8] Gomes, F.; Lima, Y. & Viegas, C. (2011). *Xeqmat11 - Volume 2.* Lisboa: Texto Editores, Lda. (Manual adotado pela escola).

[9] Gowers, T. (2002). *Matemática - uma breve introdução.* Tradução publicada por acordo com Oxford University Press (2008). Lisboa: Gradiva.

[10] Lima, E. L. (2004). *Análise Real - Volume 1.* Rio de Janeiro: IMPA.

[11] Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P. ; Wagner, E. & Morgado, A.C (2006). *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[12] Lima, Y. (2009). *Ergodic Ramsey Theory.* Disquisitiones Mathematicae - Matheus' Weblog. Página acedida em 28-04-2012 e disponível em http://matheuscmss.wordpress.com/2009/10/03/ergodic-ramsey-theory-by-yuri-lima/.

[13] Waerden, B. L. V (1927). *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw Arch. Wisk. 15: 212-216.

[14] Wikipédia. *Ramsey theory.* Página acedida em 02-05-2012 e disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory.

Apêndice A

Anexos

A.1 Ficha de trabalho sobre Progressões Geométricas

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO 2011/2012

Matemática A -11°Ano

Assunto: Progressões Geométricas

1. Uma associação de estudantes pretende arranjar fundos para uma viagem de fim de curso.
Numa das reuniões da associação um dos elementos apresentou a seguinte proposta:
"Fazer um pequeno jornal com desafios matemáticos para ser vendido a 1 euro."
Aceite a proposta, pensaram na forma de fazer a distribuição dos jornais e estabeleceram uma "rede" de vendas que consistia no seguinte:
No 1° dia da saída do jornal, cada um dos quatro elementos da associação vendia um jornal a três amigos e cada um desses três amigos, no dia seguinte, vendia o jornal a outros três amigos, e assim sucessivamente: em cada dia, quem tivesse comprado o jornal no dia anterior vendia um jornal a três amigos.

Fizeram as contas e ficaram entusiasmados com os resultados. Daqui para a frente faltava pôr em prática toda a estratégia delineada.

1.1. Preenche a seguinte tabela:

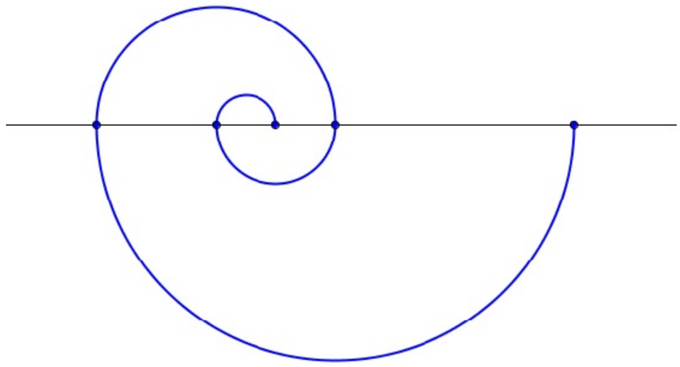
Dias de venda	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Jornais vendidos nesse dia	12	36				
Totais de jornais vendidos	12	48				

1.2. O objetivo desta iniciativa era realizar 12500 euros na venda dos jornais. Sabe-se que a estratégia planeada funcionou com sucesso até ao final do 7° de vendas. O que concluis quanto ao objetivo estabelecido?

1.3. Admite que a estratégia funcionava com sucesso durante 10 dias consecutivis. Qual o número de jornais vendidos no 10° dia? Qual seria o valor total realizado na venda dos jornais?

1.4. Seja j_n o número de jornais vendidos no dia de ordem n. Representa j_n em função de n.

2. Considera o "caracol" formado por semicircunferências, em que a primeira tem diâmetro 1 e cada uma das seguintes tem como raio o diâmetro da anterior. Admite que o "caracol" é constituído por 15 semicircunferências.

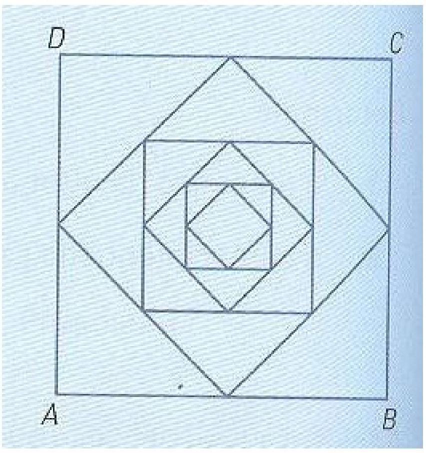


Determina:

2.1. O diâmetro da última semicircunferência.

2.2. O comprimento do "caracol".

3. Observa a figura construída a partir de um quadrado $[ABCD]$.
Cada quadrado é obtido unindo os pontos médios dos lados do quadrado anterior.



Supondo que $\overline{AB} = 20$ cm, verifica se as sucessões (l_n), (p_n) e (a_n), respetivamente, das medidas dos comprimentos dos lados, dos perímetros e das áreas dos quadrados obtidos, são progressões geométricas e, em caso afirmativo, indica as respetivas razões e calcula a soma dos dez primeiros termos.

A.2 Guião de trabalho com a calculadora N-Spire

Guião 1 – Geometria

Tarefa 1 – Como construir um cubo em perspetiva cavaleira?

Objetivo – Explorar comandos incluídos na calculadora gráfica TI N-Spire.

Pretendemos construir um cubo com 10 cm de lado, a 45°.

1. Comecemos por construir um quadrado com 10 cm de lado:

1.1. Num novo documento escolher "Adicionar Geometria";

1.2. Utilizar o comando "Menu – 9: Formas – 5: Polígono regular";

1.3. Construir um lado do quadrado (ou seja, um segmento de reta AB): "Menu – 7: Pontos e retas – 5: Segmento";

1.4. Designar os pontos A e B: "Menu - 1: Ações – 6: Texto";

1.5. Efetuar e ajustar a medição: "Menu – 8: Medição – 1: Comprimento" e clicar no texto e digitar 10 cm;

1.6. Construir os restantes lados:

1.6.1. Selecionar o ponto A e escolher o comando "Menu – A: Construção – 1: Perpendicular" e repete-se o mesmo processo para o ponto B;

1.6.2. Construir uma circunferência de centro em A e que passe por B: "Menu – 9: Formas – 1: Circunferência" e uma circunferência de centro em B que passe por A;

1.6.3. Marcar os pontos de intersecção das circunferências com as retas perpendiculares: "Menu – 7: Pontos e retas – 3: Pontos de intersecção";

1.6.4. Ocultar linhas auxiliares: "Menu – 1: Ações – 3: Ocultar/ Mostrar";

1.6.5. Designar os pontos C e D.

1.7. Construir os restantes vértices do cubo:

1.7.1. Construir uma semi-reta de origem em B: “Menu – 7: Pontos e retas – 6: Semi-recta”;

1.7.2. Construir uma das arestas laterais através do comando “Menu – A: Construção – 4: Bissectriz”;

1.7.3. Construir o vetor que permite determinar os restantes vértices:

(A) Determinar o ponto médio do segmento AB (ponto P_M): “Menu – A: Construção – 5: Ponto Médio”;

(B) Construir a circunferência de centro em B e que passe por P_M;

(C) Determinar ponto de intersecção entre a circunferência e a bissectriz (ponto E);

(D) Marca vetor: “Menu – 7: Pontos e rectas – 8: Vector.

1.7.4. Efetuar translação do vetor para restantes vértices: “Menu – B: Transformação – 3: Translação”;

1.7.5. Designar os pontos E, F, G e H;

1.7.6. Ocultar linhas auxiliares.

1.8. Unir os pontos e colocar os segmentos que não se visualizam a tracejado: “Menu – 1: Ações – 4: Atributos”.

<u>Guião 2 – Funções</u>

Tarefa 1 – Como obter uma função que modele um conjunto de dados?

Objetivo – Modelar um conjunto de dados através de uma função, utilizando ferramentas da calculadora gráfica TI N-Spire.

Consideremos o seguinte conjunto de dados que dizem respeito aos percentis de peso nas crianças do sexo masculino:

Idade	**Peso Ideal (kg)**
2	13
4	16
6	20.5
8	25.5
10	32
12	40
14	50
16	60
18	67
20	71

1. Comecemos por introduzir os valores numa página de listas e folha de cálculo:

1.1. Num novo documento escolher "Adicionar listas e folha de cálculo";

1.2. Inserir os dados em cada uma das colunas, atribuindo o nome de "Ano" à coluna A e "Nº de assinantes" à coluna B;

2. Obtenhamos uma representação dos pontos que traduzam a relação entre as 2 variáveis:

2.1. Abrir uma nova página, escolhendo "Adicionar Dados e Estatística";

2.2. Escolhe-se a variável que se vai colocar no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas (neste caso "Ano" e "Nº de assinantes", respetivamente).

3. Escolhe-se um modelo cujo gráfico se ajuste o mais possível ao conjunto de pontos: "Menu – 4: Analisar – 6:Regressão – B: Mostrar Logística (d=0)".

Tarefa 2 - Estudo de Funções

Objetivo – Realizar o estudo dos pontos notáveis do gráfico de uma função; representar funções por ramos.

1. Comecemos por representar graficamente uma função quadrática e uma função cúbica:

1.1. Abrir um novo documento escolhendo “Adicionar Gráficos”;

1.2. No editor de funções escrever em “f1(x)” a expressão analítica da função “$-x^2 + 3x + 4$”;

1.3. Clicar no símbolo  e introduzir a expressão de “f2(x)”, “$x^3 + 3x + 2$”;

2. Ajustar a janela de visualização das funções: “Menu - 4: Janela – 1: Definições de Janela”;

3. Encontrar pontos de interesse dos gráficos:

3.1. Determinar o máximo da função quadrática: “Menu – 6: Analisar gráfico – 3: Máximo”;

3.2. Determinar os zeros das funções: “Menu – 6: Analisar gráfico – 1: Zeros”;

3.3. Para facilitar a visualização dos vários pontos de interesse que estamos a calcular podemos ir ocultando os que já visualizámos:

“Menu – 1: Ações – 3: Ocultar/Mostrar”

3.4. Determinar o ponto de intersecção das funções: “Menu – 6: Analisar gráfico – 4: Interseção”;

3.5. Determinar o ponto de inflexão da função cúbica: “Menu – 6: Analisar gráfico – 5: Inflexão”;

4. Modificar os atributos do gráfico: “Menu – 1: Ações – 4: Atributos”;

5. Representar a seguinte função por ramos:

$$\begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ -2x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

5.1. Abrir um novo documento e escolher “Adicionar gráficos”;

5.2. Carregar na tecla  e escolher .

A.3 Regulamento do Peddy Paper MatCidade

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO DA COVILHÃ

PEDDY PAPER
“MATCIDADE”

Regulamento

- ✓ As equipas são constituídas por 5 elementos.
    - As equipas constituídas por alunos do 3ºCiclo serão acompanhadas por um monitor. O monitor será um aluno de 11º ou 12ºAno. Os restantes alunos formam equipas de 5 elementos não necessitando de monitor.

- ✓ O peddy paper realizar-se-á fora do recinto escolar (pela cidade da Covilhã), pelo que os alunos participantes necessitam de entregar atempadamente uma autorização dos encarregados de educação.

- ✓ O peddy paper consiste num percurso pela cidade, que se inicia e termina na escola, sendo constituído por várias etapas. Aos alunos ser-lhes-á facultado uma espécie de guião para que eles descubram quais os locais a que se devem dirigir, onde terão variadas atividades à sua espera. Estes locais serão desconhecidos e é desafio das equipas, através das pistas dadas nos guiões, conseguir encontrá-los.

- ✓ O local de concentração dos alunos, para o início do peddy paper, será no átrio da entrada da escola, um pouco antes das 10h.

- ✓ As equipas não irão sair todas ao mesmo tempo da escola, sendo a partida da primeira equipa feita às 10h. As restantes sairão com algum tempo de intervalo entre elas.

- ✓ No dia da prova será dado um cartão de identificação da equipa a um dos elementos, que deverá ser conservado até ao fim da prova.

- ✓ A pontuação da prova será dividida em 3 campos principais: o tempo dispendido para a prova, a resposta a determinadas perguntas que estarão junto do guião mencionado acima e a pontuação obtida nas diversas atividades propostas nos locais escolhidos para as mesmas.

- ✓ As 3 melhores equipas receberão um prémio, sendo as pontuações divulgadas na semana seguinte à realização do peddy paper.