UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Séries: Uma proposta para alunos do 2º Ciclo do Ensino Secundário

Versão final após defesa

Jacinto Cumolehã

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Gastão Bettencourt

Covilhã, junho de 2018

Dedicatória

Este trabalho é dedicado a Deus por ser meu guia em toda minha trajetória, minha mãe por ser a razão da minha vida, meus irmãos, minha querida namorada e toda a minha família que, com muita paciência e carinho sempre me apoiaram.
Ao curso de Matemática para Professores e às pessoas com quem eu convivi ao longo desses anos. Não esquecerei a experiência compartilhada com os amigos.

Agradecimentos

Ao meu orientador por ser humilde e por ao longo deste tempo sempre estar bem disposto e animado. Aos amigos pelo incentivo para a realização deste trabalho. Ao departamento de Matemática pelo total apoio.

Resumo

O presente trabalho destina-se a servir de base a um curso de enriquecimento curricular, na área da matemática, para alunos do secundário. O tema escolhido é séries numéricas. Apresentamos os conteúdos necessários para definir uma série, os conceitos pertinentes, assim como muitos resultados que permitem aferir a natureza de uma dada série. Apresentamos critérios usuais, como são os critérios de condensação de Cauchy, de comparação, da raiz, da razão, de Kummer, de Gauss, de Leibniz, vimos também resultados menos usuais, como o critério de Schlomilch, ou os resultados de Moser e Salat. Para estes últimos é necessário introduzir novos conceitos de convergência, assim como o conceito de densidade natural.

Palavras-chave

Sucessão, Série, Série harmónica, Subséries, Densidade Natural

Abstract

The present work is intended to serve as a basis for a curricular enrichment course in the area of mathematics for secondary students. The chosen theme is the numerical series. We present the contents necessary to define a series, the pertinent concepts, as well as many results that allow us to gauge the nature of a given series. We present usual tests such as the Cauchy's condensation test, comparison, root, D'Alembert, Kummer, Gauss, Leibniz test, as well as less usual results, such as the Schlomilch test, or the results of Moser and Salat. For the latter it is necessary to introduce new concepts of convergence, as well as the concept of natural density.

Keywords

Sequence, Series, Harmonic Series, Subseries, Natural density

Índice

Capítulo 1

Introdução

Somar dois números é, provavelmente, a operação mais elementar em matemática. Com toda a naturalidade percebemos como somar mais do que dois números e muito rapidamente surge a questão de continuar o processo e somar indefinidamente. Como se sabe, a questão aqui levantada é formalizada com os conceitos de limite e de série. O presente trabalho destina-se a servir de base a um curso de enriquecimento curricular para alunos do 2º ciclo do ensino secundário, usando a terminologia em voga no sistema de ensino angolano, ou para alunos do ensino secundário, agora usando a terminologia do sistema de ensino português. Assumimos que estes alunos conhecem o conceito de sucessão e o de limite e apresentaremos o conceito de série. A ideia de base é que muita matemática associada às séries pode ser apresentada e trabalhada para alunos motivados com conhecimentos ao nível do secundário. Nesse sentido a abordagem aqui escolhida evita conceitos matemáticos como derivadas (que tipicamente são usados para estabelecer limites pela regra de Cauchy) e como integrais (que tipicamente são usados para estabelecer a natureza das séries de Dirichlet).

Assim, apesar de assumirmos que os conceitos de sucessões e de limite são conhecidos, começamos este trabalho por apresentar definições e resultados importantes que serão fundamentais nos capítulos posteriores. Um desses resultados é o que indica que uma sucessão limitada e monótona é convergente. É fascinante a matemática que decorre deste resultado. Ainda neste capítulo, e uma vez que optamos por não usar a regra de Cauchy, apresentamos a definição usual do número e como o limite de uma sucessão.

No capítulo seguinte introduzimos as séries. Começamos por trabalhar os poucos exemplos onde se consegue obter o valor da série-série geométrica e séries telescópicas e apresentamos a condição necessária de convergência. O quarto capítulo é dedicado às séries de termos não negativos. Começamos por apresentar a demonstração da divergência da série harmónica usando o argumento de Oresme (1325-1382), e para obter rapidamente uma família de séries de comparação - as séries de Dirichlet (1805-1859) - apresentamos o critério de condensação de Cauchy (1789-1857). Este último tem uma generalização natural -o critério de Schlomilch (1823-1901)- e de forma a não quebrar a sequência natural da apresentação optámos por colocá-lo aqui. Depois desta pequena digressão, apresentamos os critérios de comparação, da razão e da raiz.

No capítulo cinco vimos as séries sem sinal fixo, onde abordamos o critério de Leibniz (1646-1716), o conceito de convergência absoluta e o de reordenamento de uma série. No próximo capítulo apresentamos os critério de Kummer (1810-1893), Raabe (1801-1859) e Gauss (1777-1855).

Finalmente, no capítulo sete abordamos outras definições de limite, como sejam o limite superior, e o limite à Cesàro (1859-1906). Definimos também densidade natural de um subconjunto de $\mathbb{N}$ e a fórmula de Abel (1802-1829), o análogo de integração por partes.

Estes ingredientes vão ser importantes para determinar condições que garantam que uma subsérie da série harmónica é divergente. Esse é o conteúdo do teorema de Moser (1921-1970). Posteriormente, Salat (1926-2005) generalizou os resultados de Moser, e um desses resultados é abordado aqui. Com exceção do último capítulo, todos os capítulos finalizam com exercícios propostos.

Capítulo 2

Sucessões

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos fundamentais sobre sucessões que admitimos que são conhecidos e apresentamos demonstrações de alguns resultados.

Definição 1. *Uma sucessão é uma função cujo o conjunto de partida é o conjunto dos números naturais e o conjunto de chegada é o conjunto dos números reais.*
Assim uma sucessão é uma função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Os seus termos são

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$$

Tipicamente não fazemos menção à função f e escrevemos a sucessão simplesmente como

$$a_1\,, a_2\,, a_3\,, a_4, \cdots, a_n, \cdots$$

ou como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemplo 1. *Sucessão de números ímpares.*

$$1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$$

Todos os termos desta sucessão podem ser escritos como

$$a_n = 2n - 1$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a_n é o termo geral da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2. *Seja*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

então

$$a_n = \frac{1}{n}$$

No estudo de sucessões com infinitos termos estaremos interessados na seguinte questão: o que acontece com o termo a_n quando n é muito grande? Em outras palavras, o que acontece com a_n quando n tende para $+\infty$?

Exemplo 3. *Vamos considerar a sucessão*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{n+4}.$$

Queremos saber o que acontece com a_n quando n é muito grande.
Primeiro vamos perceber o seguinte: dividindo o numerador e denominador por n, obtemos

$$a_n = \frac{1/n}{n/n} = \frac{1/n}{1}$$

Como $1/n$ se aproxima de zero quando n é muito grande, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se aproxima de 0.
Como $a_{10} = 0.1$, $a_{100} = 0.01$, $a_{1000} = 0.001$, intuitivamente percebemos que a_n se aproxima de zero quando n é grande. Vamos formalizar essa intuição usando o conceito de limite.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \to L.$$

A proxima definição generaliza o limite anterior.

2.1 Sucessão Convergente

Definição 2. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão e L um número real. Dizemos que a_n converge para L, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número natural N correspondente de tal modo que:*

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

sempre que $n > N$.
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L dizemos que a_n é convergente e representamos por

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

No caso contrário se não existe L para o qual a_n convirja dizemos que a_n é divergente.

Veremos a seguir uma interpretação geométrica para melhorar a nossa compreensão. Considerando a sucessão de termo geral a_n tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

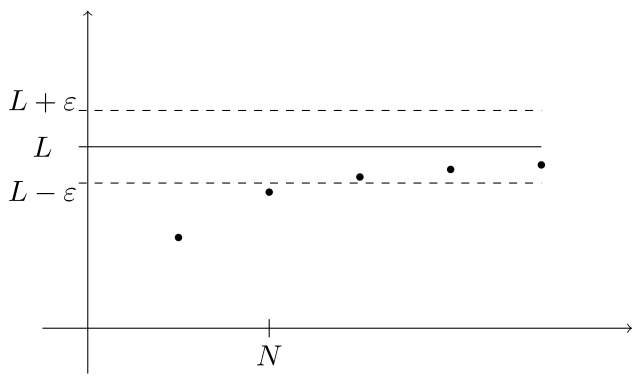

Figura 2.1

Escolhe-se ε e constrói-se o intervalo $]L-\varepsilon\ ,\ L+\varepsilon[$. Se a sucessão converge para L existe N grande de tal modo que todos os termos da sucessão a partir de N estarão no intervalo $]L-\varepsilon\ ,\ L+\varepsilon[$, essa é a ideia por trás da definição que vimos anteriormente.

Exemplo 4. *Vamos provar que*

$$\frac{1}{n} \to 0$$

Os primeiros termos da sucessão são

$$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

Aparentemente os termos aproximam-se de 0. *Vejamos por definição que assim é. Para concretizar concideremos* $\varepsilon = 0,01$. *Temos*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0,01$$

consequentemente

$$\frac{1}{n} < 0,01$$

desde que

$$n > \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow n > 100$$

Assim basta escolher $N = 101$. *Portanto se* $n > 101$ *temos*

$$|a_n - 1| < 0,01$$

Mas este raciocínio permanece válido para qualquer $\epsilon > 0$, *pois temos*

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

Assim, basta tomar

$$N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Se $n > N$ *temos*

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Portanto para cada $\varepsilon > 0$ *existe um natural* N *tal que se* $n > N$ *temos*

$$n > N > \frac{1}{\varepsilon}$$

e portanto

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

Assim vimos que $a_n \to 0$.

Frequentemente estamos na presença de uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que o termo geral cresce indefinidamente. Nesta situação diremos que a sucessão diverge para $+\infty$. tão grande quanto quisermos, escolhendo n suficientemente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

A próxima definição formaliza esse fato.

Definição 3. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Dizemos que a_n diverge para $+\infty$ se para cada real $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N$ então $a_n > M$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge para $+\infty$ representamos por*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

2.2 Algumas Propriedades de Limite de uma Sucessão

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões que convergem para a e b respectivamente. Então

1. O limite de uma sucessão quando existe é único.

2. $$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} a_n \times b_n = a.b$$

4. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ sempre que } (\, b_n, b \neq 0)$$

5. $$\lim_{n\to+\infty} ca_n = ca \text{ para qualquer } c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5. *Vamos calcular o limite das seguinte sucessão*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{5+6n^2}{1+n^2} \right)$$

Temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{5+6n^2}{1+n^2} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{5+6n^2}{1+n^2}$$

consequentemente dividindo por n o numerador e denominador a expressão

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n/n + 1/n}{n/n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 + 1/n}{1} \right)$$

Como $1/n$ aproxima-se de 0 quando $n \to +\infty$, então

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+1/n}{1}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

da mesma forma, obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5+6n^2}{1+n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5/n^2+6n^2/n^2}{1/n^2+n^2/n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5/n^2+6}{1/n^2+1}$$

Por outro lado temos

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = 0\times 0 = 0$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5/n^2+6}{1/n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{1} = 6$$

Logo conclui-se que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{5+6n^2}{1+n^2}\right) = 1+6 = 7$$

2.3 Sucessões Monótonas

Definição 4. *Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dizemos que a sucessão é monótona crescente se*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

isto é, se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \textit{para todo } n.$$

Exemplo 6. *A sucessão de termo geral*

$$a_n = n^2$$

é monótona crescente. Temos

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow n^2 \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 \leq n^2+2n+1 \Leftrightarrow 0 \leq 2n+1$$

o que é verdade para todo n.

Definição 5. *Da mesma forma dizemos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente se*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

isto é, se

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \textit{para todo } n.$$

Exemplo 7. *A sequência*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

é monótona decrescente. Temos

$$a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$0 \geq \frac{-n-1+n}{n^2+n} \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1}{n^2+n}$$

o que é verdade para todo n assim a_n é decrescente.

Definição 6. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Dizemos que é limitada inferiormente ou tem cota inferior se existir um número real M tal que*

$$a_n \geq M \text{ para todo } n.$$

Exemplo 8. *A sucessão de termo geral*

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

é limitada inferiormente. Como

$$\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1$$

Portanto para todo n tem-se $a_n > 1$.

Definição 7. *Seja a_n uma sucessão, dizemos que a_n é limitada superiormente ou tem cota superior se existir um número real M tal que*

$$a_n \leq M \text{ para todo } n.$$

Exemplo 9. *A sucessão de termo geral*

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

é limtada superiormente. Da mesma forma temos

$$\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n-1}{n} < 1$$

Assim para todo n tem-se $a_n < 1$. Logo a sucessão é limitada superiormente.

Definição 8. *Dizemos que uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existirem dois números reais α e β, tais que*

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Por outras palavras uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se ela for ao mesmo tempo limitada superiormente e inferiormente, essa é a ideia por detraz da definição anterior.

Exemplo 10. *Seja a sucessão*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Temos

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \cdots \geq \frac{1}{n} \geq \cdots$$

Como a_n é positivo para qualquer n, temos

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

O próximo axioma é muito útil para o teorema posterior.

2.4 Axioma da Completude

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se A é limitado superiormente naturalmente que existirão infinitas cotas superiores. A menor dessas cotas superiores é chamada de supremo. Seja A um conjunto de números reais, diferente de vazio com cota superior. Então A tem menor cota superior que chamamos de supremo.

Exemplo 11. *Dado*

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$$

vemos que A é limitado superiormente e qualquer elemento do conjunto $[1, +\infty[$ é uma cota superior. Assim o supremo do conjunto A é o elemento 1, o que se indica da seguinte forma:

$$\sup A = 1$$

Teorema 1. *(Axioma da Completude) Seja A um conjunto de números reais diferente de vazio e com cota superior. Então A tem supremo.*

O axioma da completude é um resultado fundamental que permite estabelecer o próximo resultado que é central em todo este trabalho.

Teorema 2. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada e monótona então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.*

Demonstração: Pelo axioma anterior significa que existe uma menor cota superior que chamamos de supremo (L). Assim

$$a_n \leq L \text{ para qualquer } n.$$

Para todo $\varepsilon > o$ existe um número positivo N tal que

$$L - \varepsilon \leq a_N \leq L$$

para qualquer termo da sucessão a_n tem-se

$$a_n \leq L$$

Por outro lado, diminuindo o número L obtemos $L - \epsilon$, então algum termo da sucessão vai ficar maior que esse número visto que L é o menor número real tal que todos termos de

a_N são

$$a_N \leq L$$

Queremos mostrar que o supremo é o limite da sucessão a_n. Portanto, se a_n for uma sucessão crescente para qualquer $n > N$ então:

$$L - \varepsilon \leq a_N < a_n \leq L < L + \varepsilon$$

Ou seja, obtemos

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

isto é,

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Assim $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ e conclui-se que a sucessão a_n converge para L.

Exemplo 12. *A sucessão*

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

é convergente.

Já vimos que é limitada superiormente por 1. *Por outro lado, como todos os termos são positivos, a sucessão é limitada inferiormente por* 0. *Além disso é crescente pois:*

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)(n+1) \leq n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 \leq n^2 \Leftrightarrow -1 \leq 0$$

Assim concluímos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é convergente. Temos*

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \leq \cdots \frac{n-1}{n} \leq \cdots$$

mas como

$$0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$$

conclui-se que a_n *é convergente.*

2.5 Sucessões Enquadradas

Teorema 3. *Sejam* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sucessões que convergem para* L *respectivamnente e*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

então a sucessão $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *também converge para* L.

Demonstração: Seja a_n uma sucessão que converge para L, então para todo $\epsilon > o$ existe N_1 tal que

$$|a_n - L| < \epsilon$$

para qualquer $n \geq N_1$.

Da mesma forma $c_n \to L$, e para todo $\epsilon > o$ existe N_2 tal que

$$|c_n - L| < \epsilon$$

Para qualquer $n \geq N_2$.
Queremos mostrar que a sucessão b_n também converge para L. Portanto basta escolher $N = max\{N_1\,, N_2\}$ obtemos:

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon \text{ para qualquer}\, n \geq N$$

isto implica que

$$|b_n - L| < \epsilon \text{ para qualquer}\, n \geq N.$$

Ou seja, conclui-se que

$$b_n \to L$$

Exemplo 13. *Vamos provar que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{sen\, n}{n} = 0$$

sabemos que $sen\, n$ *está entre* -1 *e* 1*, assim pelo teorema das sucessões enquadradas temos*

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{sen\,(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

mas como

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad e \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Consequentemente conclui-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{sen\,(n)}{n} = 0$$

Proposição 1. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão. Seja* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sua subsucessão. Temos*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Demonstração: Como b_n é uma subsucessão de a_n podemos escrever $b_n = a_{t_n}$ onde

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < \cdots$$

como

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural N tal que se $n > N$ temos

$$|a_n - L| < L$$

por outro lado para todo natural n existe $t_n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > n$. Portanto para todo $t_n > n > N$ temos

$$|a_{t_n} - L| < \varepsilon$$

ou seja

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = L$$

A proposição (1) afirma que se uma sucessão converge qualquer subsucessão terá o mesmo limite. Assim se uma sucessão a_n tem duas subsequências, b_{t_n} e c_{t_n} com dois limites distintos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não poderá ter limite.

Exemplo 14. *A sucessão de termo geral*

$$a_n = (-1)^n$$

diverge. Consideremos então as subsequências de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

e

$$c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

temos $b_n \to 1$ *e* $c_n \to -1$. *Pelo exposto* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *não tem limite.*

Geralmente uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pode ter várias subsucessões. Se algumas dessas subsucessões têm o mesmo limite nada se pode concluir acerca do limite da sucessão original. Por exemplo.

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 1 \text{ se } n \text{ é de forma } 10^k, k \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ nos restantes casos} \end{cases}$$

Temos $a_{2n-1} \to 1$ e $a_{10^k} \to 1$ mas $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem limite. Se por outro lado a união do conjunto dos índices das subsucessões envolvidas dá o conjunto $\mathbb{N}$ e se todas convergem para o mesmo limite, já podemos garantir que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. É esse o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 2. *Seja* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sucessão. Se as subsucessões* $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ *convergem para* L *então* $a_n \to L$

Demonstração: Se $a_{2n} \to L$ então dado $\epsilon > 0$ existe M_1 tal que se $n > M_1$ temos

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon$$

Se $a_{2n-1} \to L$ dado $\varepsilon > 0$ existe M_2 tal que se $n > M_2$ temos

$$|a_{2n-1}| < \varepsilon$$

Seja então $M = \max\{M_1, M_2\}$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $n > M$. Uma vez que n é par ou ímpar temos sempre $|a_n - L| < \varepsilon$. O próximo resultado é muito importante para o estudo de sucessões.

2.6 O número e

Proposição 3. *Desigualdade de Bernoulli. Seja $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Vamos provar por indução matemática. Seja $P(n)$ o enunciado

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

$P(1)$ é verdade pois

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1.x \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 + x$$

é verdadeira. Assumimos então que $P(n)$ é verdade e procuramos saber se $P(n+1)$ é verdade, isto é, se

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

é verdade. Temos

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \Leftrightarrow$$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \Leftrightarrow$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + n + nx^2 \Leftrightarrow$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \Leftrightarrow$$

Como $nx^2 \geq 0$ resulta que

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Portanto obtemos

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

o que é justamente a nossa tese de indução. Ficou assim estabelecido que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Proposição 4. *A sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é uma sucessão crescente

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}\, n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{(n+2)^{n+1}\, n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{[n(n+2)]^{n+1}}{[(n+1)^2]^{n+1}} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right) \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}
\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$$

uma vez que

$$-\frac{1}{(n+1)^2} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$1 < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < n^2 + 2n$$

Portanto a expressão

$$-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$$

é verdadeira e podemos aplicar a desigualdade de Bernoulli. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq \frac{n+1}{n}\left[1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] \\
&\geq \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right] \\
&\geq \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \\
&\geq \frac{1}{n}\left[n+1-\frac{n+1}{(n+1)}\right] = \frac{1}{n}[n+1-1] \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Assim a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Proposição 5. *A sucessão* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de termo geral*

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

é uma sucessão decrescente.

Demonstração: Resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{(n+1)^{n+2}(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{[n(n+2)]^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[1+\frac{1}{n^2+2n}\right]^{n+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{[n(n+2)]^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[1+\frac{1}{n^2+2n}\right]^{n+2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{(n+1)^{n+2}(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{\left[(n+1)^2\right]^{n+2}}{[n(n+2)]^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right]^{n+2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[1+\frac{1}{n^2+2n}\right]^{n+2}
\end{aligned}
$$

Por outro lado temos

$$\frac{1}{n^2+2n} > 0$$

logo podemos aplicar a desigualdade de Bernoulli. Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &\geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}(n+2)\right) \\
&\geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\geq \frac{n+1}{n+1} \\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

Assim $(b_n) \geq b_{n+1}$ ou seja a sucessão $b_n \geq b_{n+1}$ é decrescente

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

e portanto $b_n > a_n$ Por outro lado tem-se

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

e

$$b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4$$

O facto da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser crescente e a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente obriga que

$$2 < a_n < b_n < 4$$

Como a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada o limite existe. A sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada logo o limite existe. Seja e o limite de a_n. Então por definição temos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Por outro lado

$$b_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n\left(\frac{n+1}{n}\right) \Leftrightarrow a_n = \frac{n}{n+1}b_n$$

Passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}b_n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\lim_{n\to+\infty} b_n\\
&= 1\lim_{n\to+\infty} b_n \text{ então}\\
\lim_{n\to+\infty} b_n &= e
\end{aligned}$$

Proposição 6. *Estudo da sucessão*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Veremos agora, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Desde que $a_n \to +\infty$ *ou* $-\infty$. *De facto, se* $a_n \to +\infty$, *a partir de certa* $a_n > 1$.

Consideremos o número inteiro a *que depende de* n *tal que*

$$a \leq a_n < a + 1$$

Estas desigualdades podem tomar a forma

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a+1}$$

Adicionando uma unidade, obtemos

$$1 + \frac{1}{a+1} < 1 + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a}$$

Desta expressão e da inicial obriga que

$$\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{a} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{a} &= \lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{a+1}\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{-1} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{a+1}.\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{-1} \\
&= e.1 \\
&= e
\end{aligned}$$

(note-se que $a_n \to +\infty$ *também* $a \to +\infty$*). E*

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1} &= \lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{1} \\
&= \lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}.\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{1} \\
&= e.1 \\
&= e
\end{aligned}$$

Então pelo teorema das sucessões enquadradas, obriga que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Desde que $a_n \to +\infty$*. Se* $a_n \to -\infty$ *e fazendo* $b_n = -a_n$ *temos*

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} &= \left(1+\frac{1}{-a_n}\right)^{-b_n} \\
&= \left(\frac{1-b_n}{-b_n}\right)^{-b_n} \\
&= \left(\frac{-b_n}{1-b_n}\right)^{-b_n} \\
&= \left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} \\
&= \left(\frac{b_n-1+1}{b_n-1}\right)^{b_n} \\
&= \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}.\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)\\
&= e.1\\
&= e
\end{aligned}$$

Porque se $a_n \to -\infty$ então $b_n \to +\infty$ podemos utizar o resultado antes deduzido. Assim

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

desde que $a_n \to -\infty$. Definimos a função exponencial por

$$e^x = \lim_{a_n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}$$

Desde que $x \neq 0$, ou seja x funciona como constante e $a_n \to +\infty$ ou $a_n - \infty$. Basta agora notar que

$$\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{x}}\right)^{a_n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{x}}\right)^{\frac{a_n}{x}}\right]^x$$

Sendo o limite $a_n \to +\infty$, também o limite a_n/x será $+\infty$ ou $-\infty$ (sinal igual ou contário ao de a_n) conforme $x > 0$ ou $x < 0$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{x}}\right)^{\frac{a_n}{x}} = e$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{x}}\right)^{\frac{a_n}{x}}\right]^x = e^x$$

Lembrando que x é constante a variável é n.

O próximo exemplo é muito importante no estudo de sucessão.

Exemplo 15. *Vamos provar que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n} = 0$$

Pela desigualdade de Bernoulli temos

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

para todo $x/n > -1$. Passando ao limite obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x \Leftrightarrow e^x \geq 1+x$$

Temos $e^x \geq 1 + x \geq 1$ *para todo* $x \geq 0$. *Escolhendo* $x = \log\sqrt{n}$. *Temos*

$$\begin{aligned}
e^{\log\sqrt{n}} &\geq 1 + \log\sqrt{n} \geq 1 \\
\sqrt{n} &\geq 1 + \log(n^{\frac{1}{2}}) \geq 1 \\
\frac{\sqrt{n}}{n} &\geq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} &\geq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pelo limite das sucessões enquadradas

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

Asssim provamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

Exercícios 1. *Determine a convergência ou divergência das sucessões*

a) $a_n = \frac{n^3+2n}{n^2+2}$ *b)* $a_n = -\frac{1}{n}$ *c)* $a_n = \frac{3n^2+5n}{4n^2-1}$

d) $a_n = \left(2^n - 2^{-3n}\right)$ *e)* $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ *f)* $a_n = \left[\frac{1}{2^{3n}} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right]$

g) $a_n = \frac{2n^4+n^2-3n}{n^2+3n-5}$

Exercícios 2. *Calcule o limite das seguintes sucessões.*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

Capítulo 3

Introdução às Séries

Neste capítulo introduzimos o conceito fundamental deste trabalho: a série numérica. Essencialmente trata-se de formalizar a ideia de somar infinitas parcelas, algo que à primeira vista parece contra-intuitivo mas que é absolutamente natural. Por exemplo a dízima infinita periódica

$$0.11111\ldots$$

pode ser encarada como a soma

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$$

que mais não é do que uma soma de infinitas parcelas.

3.1 Série

Definição 9. *Define-se série como uma expressão da forma*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

que representamos como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ ou } \sum a_n$$

A este objecto estão associadas duas sucessões distintas: a própria sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e a chamada sucessão das somas parciais* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ s_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \end{aligned}$$

Se a sucessão $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tem limite* s *dizemos que* s *é a soma da série com termo geral* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como na próxima definição.*

Definição 10. *A série de termo geral* a_n *diz-se convergente se a sua sucessão das somas* *parciais* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge - isto é, se existe um número real* s *tal que*

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = s$$

Nesse caso escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

Se

$$\lim_{n\to+\infty} s_k$$

não existe. Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge.

Exemplo 16. *Veremos agora como estabelecer a convergência ou divergência das seguintes séries*

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \qquad\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty} 0$$

a) Pela definição (9) *temos*

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = 1\\
s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3\\
&\vdots\\
s_k &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k
\end{aligned}$$

Isto significa que

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} k = +\infty.$$

Assim a série dada diverge.

b) Da mesma forma obtemos

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = 0 + 0 = 0\\
s_2 &= a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0 + 0 = 0\\
&\vdots\\
s_k &= 0 + \cdots + 0 = 0
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$$

Logo a série dada converge para 0*.*

Se a partir de certa ordem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

então as séries de termos gerais a_n e b_n são da mesma natureza. Portanto, a natureza de uma série não é alterada modificando um número finito de termos.

Exemplo 17. *Vamos estabelecer a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Analizando a sucessão das somas parciais temos

$$s_k = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

multiplicando a expressão s_k por $\frac{1}{2}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} s_k &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right] \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \left[\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right] + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^0} \\
&= s_k + \frac{1}{2^{k+1}} - 1
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} s_k - s_k &= \frac{1}{2^{k+1}} - 1 \\
s_k - \frac{1}{2} s_k &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
s_k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
s_k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Passando a expressão s_k ao limite obtemos

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\lim\limits_{k \to +\infty} 1 - \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

O exemplo anterior é um caso particular de um tipo de séries que se vai relevar fundamental:

3.2 Série Geométrica

Definição 11. *Seja $r \in \mathbb{R}$. Uma série de tipo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

diz-se uma série geométrica.

Teorema 4. *Seja $r \in \mathbb{R}$ e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$$

uma série geométrica. Então

1. *se $|r| < 1$ a série converge e tem por soma $s = \frac{1}{1-r}$.*
2. *se $|r| \geq 1$ a série diverge.*

Demonstração: Começamos a prova com o caso $r \neq 1$. Temos

$$s_k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k$$

multiplicando por r temos:

$$\begin{aligned} rs_k &= \left(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k\right) + r^{k+1} - 1 \\ &= s_k + r^{k+1} - 1 \\ rs_k - s_k &= r^{k+1} - 1 \\ (1-r)s_k &= 1 - r^{k+1} \end{aligned}$$

dividindo por $1 - r$ obtemos:

$$s_k = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r}$$

passando ao limite a expressão s_k temos:

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-r} - \lim_{k\to+\infty}\frac{r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r} \times \lim_{k\to+\infty} r^{k+1}$$

Assim obtemos as seguintes conclusões:

1. Se $|r| < 1$ então $\lim_{k\to+\infty} r^{k+1} = 0$ e

$$\lim_{k\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-r} = s$$

2. Se $|r| > 1$ então $\lim_{k \to +\infty} r^{k+1}$ não existe, logo

$$\lim_{k \to +\infty} s_k \text{ não existe}$$

ou seja, nestas condições a série diverge.

3. Se $r = 1$ então

$$s_k = 1 + 1 \cdots + = k$$

e a série diverge

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = +\infty$$

pois o limite não é um número real.

4. Se $r = -1$ então

$$s_k = -1 \text{ se } k \text{ for ímpar} \quad \text{e } s_k = 0 \text{ se } k \text{ é par.}$$

Nessas condições o limite da sucessão de somas parciais s_k diverge, logo a série diverge.

Exemplo 18. *Vamos provar que a série converge e calcular a sua soma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

Como $r = 1/10$ *e* $|r| < 1$ *resulta que a série converge e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = 10/9$$

Exemplo 19. *Seja*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

Temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{10} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

Assim

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - 1 - \frac{1}{10}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9} - 1 - \frac{1}{10}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$$

A seguir veremos outro tipo de série muito importante em que o termo da série, a_n, se pode escrever como uma diferença.

3.3 Séries de Mengoli ou Telescópica

Definição 12. *Uma série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

cujo termo geral a_n pode escrever-se na forma $(u_{n+1} - u_n)$ denomina-se série de Mengoli. Temos

$$\begin{aligned}
s_0 &= u_1 - u_0 \\
s_1 &= \sum_{n=0}^{1}(u_{n+1} - u_n) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) = u_2 - u_0 \\
s_2 &= \sum_{n=0}^{2}(u_{n+1} - u_n) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) = u_3 - u_0 \\
&\vdots \\
s_k &= \sum_{n=0}^{k}(u_{n+1} - u_n) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + \cdots (u_{k+1} - u_k) = u_{k+1} - u_0
\end{aligned}$$

Isto significa que

$$\lim_{k\to+\infty} s_k \text{ existe se e somente se } \lim_{k\to+\infty} u_{k+1}$$

existe. Portanto obtém-se o seguinte resultado

Teorema 5. *Seja*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

uma série cujo termo geral a_n pode escrever-se como

$$a_n = u_{n+1} - u_n$$

então:

1. *Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge então a série do termo geral a_n converge e a sua soma é dada por*

$$s = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_0$$

2. *Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge então a série de termo geral a_n diverge.*

Exemplo 20. *Vamos determinar a natureza da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Escolhendo

$$u_n = -\frac{1}{n+1}$$

temos

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-n-1+n+2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Assim, escrevendo

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Temos

$$u_{n+1} - u_n = a_n$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0$$

resulta que

$$s = 0 - u_0 = 0 - (-1) = 1$$

3.4 Algumas Propriedades Sobre Séries

Os resultados anteriores referentes à série de Mengoli e à série geométrica são casos muito particulares em que, no caso de convergência, se consegue obter o valor da série em questão. Tipicamente não se consegue obter a soma da série e numa primeira análise contentamo-nos em determinar se uma série é convergente ou divergente. Diz-se então que estudamos a natureza da série. Nesse sentido, o resultado mais funtamental é o seguinte:

Teorema 6. *(Condição Necessária de Convergência.)*
Se uma série de termo geral a_n converge então $a_n \to 0$.

Demonstração: Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

uma série convergente e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas parciais, então

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Pela definição (9) significa que $s_n \to s$. Portanto a sucessão

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

tende para o mesmo limite. Como

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

Consequentemente obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n = s - s = 0$$

Esta condição é necessária, mas não suficiente para que uma série seja convergente. Outra leitura deste resultado é a seguinte: se $a_n \not\to 0$, então a série de termo geral a_n diverge.

Exemplo 21. *Usando o teorema* (6) *vamos mostrar que a série é divergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1}$$

Temos

$$a_n = \frac{2n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

Portanto a série de termo geral a_n diverge.

Uma observação muito importante é que se o termo geral da série converge para zero, isto é, se $a_n \to 0$, nada se pode concluir acerca da natureza da série, sendo necessário uma investigação adicional.

Operações com Séries

Teorema 7. *Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ também converge.*

2. *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ também converge.*

Demonstrção: Começamos por mostrar a parte 1.
Sejam $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sucessões das somas parciais das séries de termos gerais a_n e b_n respectivamente. Temos

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Portanto, como as respectivas séries são convergentes, pela definição (9) obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \text{ e } \lim_{n\to+\infty} t_n = t$$

Considerando $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sucessão das somas parciais da série de termo geral $(a_n + b_n)$, então:

$$r_n = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = s_n + t_n$$

Como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes a sucessão $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge, pois

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = s + t$$

Conclui-se que a série dada é convergente e a sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Parte 2. Da mesma forma temos

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Portanto

$$\lambda s_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \text{ existe e } \lambda \in \mathbb{R}$$

Significa que

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda s_n \text{ existe e temos}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda s_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda s = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Exemplo 22. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries*

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{4n}{2n+1} \right) \qquad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{4n}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{2n+1}$$

A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$$

é geométrica e convergente porque

$$r = |\frac{1}{4}| < 1$$

Logo a sua soma é dada por

$$s = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Mas a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{2n+1}$$

é divergente já que pela condição necessária temos

$$a_n = \frac{4n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$$

Portanto conclui-se que a série dada é divergente.
b) Da mesma forma temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Sabemos que a primeira é uma série geométrica convergente porque

$$r = \left| \frac{1}{2} \right| < 1$$

e sua soma é:

$$s = \frac{1 \times 2}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 2 = 4$$

Por outro lado também já vimos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

é de Mengoli, e convergente com soma igual a 1*. Assim a série dada converge e sua soma é* 5*.*

Exercícios 3. *Estude a natureza das seguintes séries:*
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10}{3^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+5n}{4n^2-1}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-1}{n^2+2}$
d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}$.

Exercícios 4. *Utilize séries conhecidas para determinar a natureza das seguintes séries, e em caso de convergência calcule a sua soma*
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{3}{4^n} \right)$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2^n - 2^{-3n} \right)$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

Exercícios 5. *Dada a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

Determina uma expressão para a sucessão das somas parciais que lhe está associada e aproveita este resultado para mostrar que a série diverge.

Exercícios 6. *Calcule a soma das seguintes séries*
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n} \right)$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \frac{n}{n+1} \right)$

Capítulo 4

Séries de Termos Não Negativos

No capítulo precendende estabelecemos a convergência ou divergência de algumas séries por meio de uma fórmula para a soma parcial $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, determinando então se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n$$

existe ou não.

Infelizmente, a não ser em casos especiais, como os da série geométrica ou da série telescópica, é impossível estabelecer uma fórmula explícita para o limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como veremos, podemos, desenvolver critérios para a convergência ou divergência de uma série de termo geral a_n. Os mesmos critérios não nos dão a soma da série, dizem-nos apenas se a soma existe.

Isto é suficiente na nossa aplicação porque, sabendo que a soma existe, podemos aproximar o seu valor com um grau arbitrário de exatidão, bastando somar um número suficiente de termos da série.

Neste capítulo consideraremos apenas séries de termos não negativos, isto é, séries de termo geral a_n tais que $a_n \geq 0$ para todo n.

O próximo teorema mostra que, para estabelecer a natureza de uma série de termos não negativos, basta determinar se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Teorema 8. *([1] Teorema (11.22) pag:34)*
Seja $\sum a_n$ uma série de termos não negativos. Então

1. *Se existir um número M positivo tal que $s_n \leq M$ para qualquer n, então a série de termo geral a_n converge e a sua soma, s, verifica $s \leq M$.*

2. *Se não existir M nessas condições a série de termo geral a_n diverge.*

Demonstração: Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de somas parciais da série de termos não negativos com termo geral a_n, então:

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

e portanto $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona. Como existe um número M tal que $s_n < M$ para todo n, então $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada logo o limite existe. Assim a série converge e temos

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \leq M$$

Caso contrário a série diverge e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

4.1 Série Harmónica

Definição 13. *É uma série muito importante dada por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Antes de estabecermos a sua natureza começamos por notar que a sucessão das somas parcias associadas crece muito lentamente. A título de exemplo temos

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} \simeq 7,485$$

e

$$\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n} \simeq 14,393.$$

Teorema 9. *(Nicole Oresme,* 1350*)*
A série harmónica é divergente.

Demonstração: O raciocínio usado na demonstração consiste em agrupar os termos, de forma que a soma em cada grupo seja maior que 1/2. Assim consideremos a sucessão das somas parcias associada à série harmónica. Temos

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2} \\
& \cdots \text{ generalizando podemos provar por indução matemática que} \\
s_{2^n} &\geq 1 + n\frac{1}{2} \text{ é verdadeira}
\end{aligned}$$

Portanto vemos que a subsucessão s_{2^n} é divergente quando n tende para $+\infty$. Logo s_n é divergente e a série harmónica é divergente. Falta apenas provar a desigualdade

$$s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$$

Provamos por indução matemática. Pretendemos mostrar que $p(n)$ é verdadeira para todo n o enunciado $s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$.
Vejamos que $p(1)$ é verdade. Temos

$$s_{2^1} \geq 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

o que é claramente verdade. Portanto assumimos que

$$s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$$

é verdade e procuramos ver que $p(n+1)$ também é verdade, isto é

$$s_{2^{n+1}} \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}$$

Temos

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

onde o número de termos entre parênteses é:

$$2^{n+1} - (2^n+1) + 1 = 2^{n+1} - 2^n - 1 + 1 = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$$

e todos os termos da soma entre parênteses são maiores que

$$\frac{1}{2^{n+1}}$$

Isto quer dizer que a soma entre parênteses é maior ou igual que o número de termos vezes o menor valor dentro de parênteses. Ou seja

$$s_{2^{n+1}} \geq s_{2^n} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}$$

Portanto, por hipótese de indução, temos:

$$s_{2^{n+1}} \geq \left(1 + n\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\,\frac{1}{2}$$

Ou seja a tese de indução é verdadeira. Fica assim provado que

$$s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$$

para qualquer $n \geq 1$.

É importante salientar que a demonstração da divergência da série harmónica de termo geral a_n, foi possível, porque a_n é decrescente e de termos positivos. Assim este argumento permanece válido se em vez da série harmónica considerarmos então uma série com termo geral a_n decrescente e positivo. Seja então a_n decrescente e positivo para todo n. Temos

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 \\ &= a_1 + a_2 + 2a_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_8 &= s_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\
&\geq s_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \\
&= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 \\
&\cdots \text{ generalizando podemos provar que} \\
s_{2^n} &\geq a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

O resultado (1) permite concluir o seguinte:

Se a sucessão s_n converge então a subsucessão s_{2^n} também converge, logo a série de termo geral $2^k a_{2^k}$ é convergente. Podemos escrever este resultado da seguinte forma:

Teorema 10. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos não negativos e decrescente.*

$$\textit{Se a série} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \textit{ converge então a série } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \textit{ também converge.}$$

A seguir veremos que o recíproco deste resultado tanbém é válido pois:

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})
\end{aligned}
$$

na expressão $(a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})$ o número de termos é

$$2^{n+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n \text{ portanto}$$

$$
\begin{aligned}
s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \text{ assim}
\end{aligned}
$$

$$\text{Se a série } \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k} \text{ converge implica que a série } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ também converge}$$

Podemos rescrever o teorema anterior incorporando a informação agora obtida:

4.2 Critério de Condensação de Cauchy

Teorema 11. *(Critério de Condensação de Augustin Cauchy, 1821)*
Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos não negativos e decrescente.

$$\text{A série } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge se e somente se a série } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Exemplo 23. *Vamos provar pelo critério de condensação de Cauchy que a seguinte série é convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Significa que

$$a_n = \frac{1}{n^2} \text{ portanto } a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^2}$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{ a série obtida é geométrica e como } r = |\frac{1}{2}| < 1$$

é convergente

$$s = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Conclui-se que a série dada é convergente, pois é decrescente e de termos não negativos.

Exemplo 24. *Vamos provar pelo critério de condensação de Cauchy que a seguinte série diverge.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Como

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ portanto } a_{2^n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

assim temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2^n}\sqrt{2^n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2^n}$$

calculando o limite do termo geral $\sqrt{2^n}$ obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2^n} = +\infty$$

portanto, pela condição nessária de convergência conclui-se que a série dada também diverge.
O teorema precedente permite-nos mostrar a convergência ou divergência da série de termo geral

$$\frac{1}{n^p}$$

para qualquer $p \in \mathbb{R}^+$. Já vimos a título de exemplo que para $p = 1/2$ a série diverge e para $p = 2$ a série converge. Vamos agora fazer um estudo mais completo.

4.3 Série Dirichlet ou Série-P

Teorema 12. *Seja $p \in]0, +\infty[$ e considere-se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Então

1. *se $0 < p < 1$ a série diverge.*
2. *se $p > 1$ a série converge.*

Demonstração: Se $p \leq 0$ a série diverge, facilmente verifica-se porque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$$

Seja $p > 0$. Aplicando o critério de condensação de Cauchy, uma vez que a série de termo geral

$$a_n = \frac{1}{n^p}$$

é decrescente e de termos positivos para todo n, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \simeq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

Consequentemente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n . 2^{-np} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-np} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n(1-p)}$$

Mas $2^{1-p} < 1$ se e só se $1 - p < 0$, ou seja, é convergente se e só se $p > 1$. Portanto a série obtida é geométrica,

Exemplo 25. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries*
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2}$

a) temos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$$

Portanto trata-se da série-p e como

$$p = \frac{5}{3} > 1$$

assim a série dada converge.
b) Da mesma forma temos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

obtemos uma série-p e com $p = 1$, consequentemente obtemos a série harmónica que sabemos ser divergente, logo a série dada também é divergente.

O critério de condensação de Cauchy estabelece que as séries

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

têm a mesma natureza. Assim, para determinarmos a natureza da primeira série escolhemos averiguar a natureza de uma outra série em que o termo geral já não é a_n mas $2^n a_{2^n}$. Subjacente a está escolha está o facto de termos agrupado os termos de a_n em grupos de potências de 2. Mas não é obrigatório considerar o número 2. Podíamos ter escolhido agrupar os termos de a_n em potências de $3, 4, 10$, etc. Há portanto uma certa liberdade na escolha da sucessão que usamos para agrupar os termos. O próximo resultado aprofunda esta ideia.

Teorema 13. *(Critério de Oskar Shlomilch, 1873)*
Considere-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Se a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente de termos, positivos e se existe $L > 0$ e uma sucessão de naturais $n_k : k \in \mathbb{N}$ tal que

1. $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$

2. $\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k-n_{k-1}} < L$

então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge se e somente se a série } \sum_{k=1}^{+\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k} \text{ converge.}$$

Observação 1. *Se no critério de Schlomilch escolhermos a sucessão de termo geral $n_k = 2^k$ obtemos o critério de condensação de Cauchy.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} s_{n_2} &= a_1 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2} \\ &= s_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2} \\ &\geq s_{n_1} + (n_2 - n_1) a_{n_2} \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} s_{n_3} &= s_{n_2} + a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_3} \\ &\geq s_{n_1} + (n_2 - n_1) a_{n_2} + (n_3 - n_2) a_{n_3} \end{aligned}$$

Generalizando, podemos provar que:

$$s_{n_i} \quad \geq \quad s_{n_1} + \sum_{k=2}^{i} (n_k - n_{k-1}) a_{n_k}$$

Como

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} < L$$

Temos

$$n_k - n_{k-1} > \frac{1}{L}(n_{k+1} - n_k)$$

Assim

$$\begin{aligned} s_{n_i} &\geq s_{n_1} + \sum_{k=2}^{i} (n_k - n_{k-1}) a_{n_k} \\ &\geq s_{n_1} + \frac{1}{L} \sum_{k=2}^{i} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k} \end{aligned}$$

Se s_n converge, s_{n_i} converge e

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$$

converge.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $m_i : i \in \mathbb{N}$ uma sucessão de naturais com:

$$0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_i < \cdots$$

Consideremos:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como m_i é crescente, existe um índice i_n que verifica $n < m_{i_n} - 1$

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} + \cdots + a_{m_{i_n}} - 1 \\ &= (a_1 + \cdots + a_{m_1 - 1}) + (a_{m_1} + \cdots + a_{m_2 - 1}) + \\ &\qquad + (a_{m_2} + \cdots + a_{m_3 - 1}) + \cdots + (a_{m_{(i_n - 1)}} + \cdots + a_{m_{i_n} - 1}) \\ &\leq s_{m_1 - 1} + (m_2 - m_1) a_{m_1} + (m_3 - m_2) a_{m_2} + \cdots + (m_{i_n} - m_{(i_n - 1)}) a_{m_{(i_n - 1)}} \end{aligned}$$

$$s_n \leq s_{m_1 - 1} + \sum_{k=1}^{i_n - 1} (m_{k+1} - m_k) a_{m_k}$$

Portanto se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} (m_{k+1} - m_k) a_{m_k}$ converge, implica que s_n também converge.

Exemplo 26. *Vamos determinar a natureza da seguinte série.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

O termo geral

$$\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

é decrescente. Escolhemos $n_k = k^2$

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 - (k-1)^2} = \frac{k^2 + 2k + 1 - k^2}{k^2 - k^2 + 2k - 1} = \frac{2k+1}{2k-1} = 1 + \frac{2}{2k-1}$$

Como

$$\frac{2}{2k-1} \leq 2$$

para todo $k \geq 1$, *temos*

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k - n_{k-1}} \leq 3$$

Portanto, pelo critério de Schlomilch, as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((k+1)^2 - k^2) \frac{1}{2^{\sqrt{k^2}}}$$

têm a mesma natureza. A última série é

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) \frac{1}{2^k} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

A última série é geométrica de razão menor do que um, logo convergente. A série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

é convergente, pois como

$$k < \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

temos

$$\frac{k}{2^k} < \frac{3^k}{2^k 2^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

converge. Consequentemente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ converge.}$$

O próximo teorema permite-nos utilizar séries conhecidas ou seja, séries convergentes ou divergentes para estabelecer a natureza de outras séries.

4.4 Critério geral de Comparação

Teorema 14. *Sejam*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

séries de termos não negativos tais que

$$a_n \leq b_n$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. *Tem-se*

1. Se a série $\sum b_n$ converge, então a série $\sum a_n$ também converge.
2. Se a série $\sum a_n$ diverge, então a série $\sum b_n$ também diverge.

Demonstração: Considerando s_n e t_n as sucessões das somas parciais, temos

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

Como as séries a_n e b_n são de termos não negativos com para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Vamos começar por mostrar o caso 1. Como $a_n \leq b_n$ temos

$$s_n \leq t_n$$

Sendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

convergente, a sucessão das somas parciais $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e monótona crescente. Conclui-se que a sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Assim

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

Da mesma forma vamos mostrar o caso 2. Recordemos que se P, Q são enunciados então

$$P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim Q \Rightarrow \sim P$$

Tendo presente o contra-recíproco do resultado anterior temos

$$\sim \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}\right) \Rightarrow \sim \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge}\right)$$

Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 27. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries.*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2+5^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

a) Temos

$$2+5^n \geq 5^n \Rightarrow \frac{1}{2+5^n} \leq \frac{1}{5^n}$$

Ou seja

$$a_n \leq b_n$$

escolhendo

$$b_n = \frac{1}{5^n}$$

e como $\sum b_n$ *é convergente. Resulta pela parte (1) do teorema que a série dada converge.*

b) Da mesma forma temos

$$\ln n \geq 1$$

então

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

escolhendo

$$b_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

temos $a_n \geq b_n$*. Por outro lado como a série de termo geral* b_n *é a série harmónica sabemos que diverge para* $+\infty$ *então a série de termo geral* a_n *também diverge para* $+\infty$*.*

Observação 2. *Ao utilizarmos o critério geral de comparação, devemos primeiro escolher uma série de termo geral* b_n *adequada, para então provar que* $a_n \leq b_n$*, para qualquer* n*. Esta prova pode ser difícil se* a_n *for uma expressão complicada. O critério seguinte é em geral mais fácil de aplicar.*

4.5 Critério Geral de Comparação do Limite

Teorema 15. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *uma série de termos positivos tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \text{ então}$$

1. *Se* $L \in]0,+\infty[$ *as duas séries têm a mesma natureza.*

2. Se $L = 0$ se a série $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

3. Se $L = +\infty$ se a série $\sum b_n$ diverge então$\sum a_n$ diverge.

Demonstração: Vamos começar por provar o primeiro caso em que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

L é um real positivo.
Pela definição de limite de uma sucessão para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem N a partir da qual tem-se

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \text{ para qualquer } n \geq N$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno, de modo que $L - \varepsilon > 0$ sejam α e β dois números reais positivos tais que

$$\alpha = L - \epsilon \text{ e } \beta = L + \epsilon$$

Consequentemente obtemos

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$$

Então a partir dessa ordem N temos

$$\alpha b_n < a_n < \beta b_n$$

Assim pelo critério geral de comparação, obtemos as seguintes conclusões

1. Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge se e somente se $\sum \beta a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

2. Se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge se e somente se $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Nessas condições ambas as séries têm a mesma natureza.
Segundo caso $L = 0$. Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma ordem N tal que para qualquer $n \geq N$. Temos

$$0 - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < 0 + \epsilon$$

Escolhendo $\epsilon = 1$ implica que existe N tal que para qualquer $n \geq N$, temos

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Rightarrow a_n \leq b_n$$

Consequentemente pelo critério geral de comparação temos que
se a série $\sum b_n$ converge, implica que a série $\sum a_n$ converge.
Por último vamos mostrar o terceiro caso $L = +\infty$. Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Para qualquer $M > 0$ existe N tal que para qualquer $n \geq N$, temos

$$\frac{a_n}{b_n} \geq M$$

Escolhendo $M = 1$ existe N tal que para qualquer $n \geq N$. Temos

$$\frac{a_n}{b_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq b_n$$

Consequentemente usando o critério geral de comparação conclui-se que se a série $\sum b_n$ diverge, então a série $\sum a_n$ também diverge.

Exemplo 28. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries*

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-2}{n+1} \qquad\qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$$

a) O termo geral da série é

$$a_n = \frac{n^3-2}{n+1}$$

desprezando os termos de menor magnitude no numerador e denominador quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\frac{n^3-2}{n+1} \simeq \frac{n^3}{n} = n^2$$

implica que vamos escolher

$$b_n = n^2$$

Mas com $\sum n^2$ diverge. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3-2}{n+1}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-2}{n^3+n^2} = 1$$

e como $\sum n^2$ diverge resulta que a série dada diverge.

b) Da mesma forma desprezando os termos de menor magnitude no numerador e denominador quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)} \simeq \frac{3n^2}{2^n n^2} = \frac{3}{2^n} = b_n$$

Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}}{\frac{3}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}\frac{2^n}{3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+5n}{3(n^2+1)} = 1$$

Como L é um numéro positivo, e como $\sum b_n$ é convergente conclui-se que a série dada converge.

Quando a série do termo geral a_n é de termos positivos o próximo critério é muito útil

4.6 Critério da Razão

Teorema 16. *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos. Suponhamos que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1. Se $L < 1$ a série $\sum a_n$ converge.

2. Se $L > 1$ a série $\sum a_n$ diverge.

3. Se $L = 1$ nada se pode concluir sobre a série $\sum a_n$.

Demonstração: Vamos começar por provar o primeiro caso, $L < 1$.
Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Por definição de limite de uma sucessão para todo $\epsilon > 0$ existe uma ordem M_1 tal que para qualquer $n \geq M_1$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno temos

$$L + \varepsilon < 1$$

Temos

$$-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon$$

Consequentemente temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon$$

então

$$a_{n+1} < (\epsilon + L)a_n$$

para qualquer $n \geq M$. Em particular para $n = M + 1$ temos

$$a_{M+2} < (\epsilon + L)a_{M+1}$$

Para $n = a_{M+2}$ temos

$$a_{M+3} < (\epsilon + L)a_{M+2}$$

Implica que

$$a_{M+3} < (\epsilon + L)(\epsilon + L)a_{M+1}$$

Assim obtemos

$$a_{M+3} < (\epsilon + L)^2 a_{M+1}$$

$$\vdots$$

Podemos provar por indução matemática que

$$a_{M+K} < (\epsilon + L)^{k-1} a_{M+1}$$

é verdadeira para qualquer $k \geq 2$. Consequentemente obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M+1} a_n + \sum_{n=M+2}^{+\infty} a_n$$

Por outro lado temos

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (\epsilon + L)^{k-1} a_{M+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\epsilon + L)^k}{\epsilon + L} a_{M+1} = \frac{a_{M+1}}{\epsilon + 1} \sum_{k=2}^{+\infty} (\epsilon + L)^k$$

A série obtida é geométrica, pois $r = (\epsilon + L) < 1$ logo é convergente. Assim a série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (\epsilon + L)^{k-1} a_{M+1}$$

converge e consequentemente

$$\sum_{n=M+2}^{+\infty} a_n = a_{M+2} + a_{M+3} + \cdots = \sum_{k=2}^{+\infty} a_{M+k}$$

também converge, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M+1} a_n + \sum_{n=M+2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M+1} a_n + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{M+1}$$

é convergente.

Segundo caso, $L > 1$. Seja $\varepsilon > 0$, existe uma ordem M tal que para qualquer $n \geq M$ temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon$$

escolhendo ε suficientemente pequeno de forma que $L - \varepsilon > 1$. Temos

$$-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon$$

Portanto obtemos

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Assim

$$a_n(L - \epsilon) < a_{n+1}$$

Escolhendo $n = M + 1$ temos

$$a_{M+1}(L - \epsilon) < a_{M+2}$$

Para $n = M+2$ temos

$$a_{M+2}(L-\epsilon) < a_{M+3}$$

Assim

$$a_{M+1}(L-\epsilon)^2 < a_{M+3}$$

$$\vdots$$

Podemos provar por indução matemática que

$$a_{M+1}(L-\epsilon)^{k-1} < a_{M+k}$$

é verdadeira para qualquer $k \geq 2$. Mas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{M+1}(L-\epsilon)^{k-1} = \frac{a_{M+1}}{L-\epsilon}\sum_{k=1}^{+\infty}(L-\epsilon)^k$$

A série obtida é geométrica e como $r = (L-\epsilon) > 1$, é divergente. Portanto a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{M+1}(L-\epsilon)^k$$

diverge. Consequentemente

$$a_{M+1} + a_{M+2} + a_{M+3} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{M+k}$$

é divergente e portanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

também é divergente.

Por último temos o caso $L = 1$. Considerando a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ sabemos que é divergente mas}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

E a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sabemos que é convergente, mas}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

E portanto o facto do limite ser igual a 1, não nos permite concluir nada acerca da natureza das séries em questão. Neste caso dizemos que o critério é inconclusivo.

Exemplo 29. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries:*
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n+1}$.
a)

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Consequentemente obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\,2}{(n-1)n!} \times \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} = 0$$

Como $L = 0 < 1$ conclui-se que a série é convergente.
b) Da mesma forma temos

$$a_n = \frac{5^n}{n+1}$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} \times \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+5}{n+2} = 5.$$

Consequentemente $L = 5 > 1$. Assim conclui-se que a série é divergente. O próximo critério é particularmente útil quando a_n contém potências de n.

4.7 Critério da Raiz

Teorema 17. *Seja $\sum a_n$ uma série de termos não negativos, e suponhamos que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Temos

1. *Se $L < 1$ a série $\sum a_n$ converge*
2. *Se $L > 1$ a série $\sum a_n$ diverge*
3. *Se $L = 1$ nada podemos afirmar sobre a série $\sum a_n$.*

Demonstração: Começamos por mostrar o primeiro caso, $L < 1$.
Seja ϵ fixo. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

temos que existe $M > 0$ tal que para qualquer $n > M$, obtemos

$$\left| a_n^{\frac{1}{n}} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < a_n^{\frac{1}{n}} - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n^{\frac{1}{n}} < L + \varepsilon$$

Escolhemos ε tal que $L + \epsilon < 1$. Obtemos

$$a_n^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + L \Rightarrow a_n < (\varepsilon + L)^n$$

Assim a série obtida

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} (\varepsilon + L)^n$$

é geométrica e convergente porque a razão é menor que 1. Consequentemente a série

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n$$

é convergente, portanto a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n$$

é convergente.
Segundo caso, $L > 1$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $(L - \epsilon) > 1$. Pela definição de limite de uma sucessão existe $M > 0$ tal que para qualquer $n > M$ temos

$$|a_n^{\frac{1}{n}} - L| < \varepsilon$$

Assim

$$-\epsilon < a_n^{\frac{1}{n}} - L < \varepsilon$$

em particular obtemos

$$L - \varepsilon < a_n^{\frac{1}{n}}$$

consequentemente temos

$$(L - \varepsilon)^n < a_n$$

Assim

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} (L - \epsilon)^n$$

é geométrica e divergente pois $r = (L - \epsilon) > 1$. Portanto a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \sum_{n=1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n$$

é também divergente. O resto da prova é análogo ao critério da razão, ou seja, se $L = 1$ temos.
Considerando a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(\frac{1}{n}\log n)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}\log n)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

Neste caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente mas

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Considerando a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\log(n^2)^{\frac{1}{n}}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{1}{n}\log n^2\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{2}{n}\log n\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\left[2\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n}\right]}
\end{aligned}$$

Consequentemente temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{2\times 0} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Assim a série dada converge mas

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

E portanto o facto do limite ser igual a 1 não nos permite concluir nada acerca da natureza das séries em questão. Neste caso dizemos que o critério é inconclusivo.

Exemplo 30. *Vamos determinar a natureza das seguintes séries*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$

a) Aplicando o critério da raiz temos a

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(n^n\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como $0 < 1$*, portanto a série dada é convergente.*

b) Da mesma forma e como

$$a_n = \left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$$

Então

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$$

Como $2 > 1$, assim a série de termo geral a_n é divergente.

Exercícios 7. *Determine a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{3^n+1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-5n}}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5+4n^3-1}{2n^8+4n^4+2}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(0,3)^n}$.

Exercícios 8. *Aplicando o critério da razão ou da raiz, determina a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ln\, n)^n}{\sqrt{n^n}}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1})^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$.

Exercícios 9. *Utiliza o critério de condensação de Cauchy para determinar a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k \ln k}}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$.

Capítulo 5

Séries Sem Sinal Fixo

Uma família importante de séries sem sinal fixo pode ser obtida da seguinte forma. Escolhemos uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos positivos e consideramos as séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k + \cdots$$

ou

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{k+1} a_k + \cdots$$

Estas séries dizem-se séries alternadas uma vez que o sinal do termo geral vai alternando, entre positivo e negativo ou vice-versa.
O próximo critério é muito importante para determinar a natureza de séries alternadas.

5.1 Critério de Leibniz

Teorema 18. *Seja*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1} a_k + \cdots$$

uma série alternada. Se

1. $a_{k+1} \leq a_k$ *para qualquer* $k \in \mathbb{N}$

2. $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$

a série converge.

Demonstração: Começamos por analizar a sucessão das somas parciais dos termos pare

$$s_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k}$$

Agrupando os termos como:

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

Pela primeira hipótese do teorema as parcelas entre parênteses são não negativas, logo

$$s_{2k} \geq 0$$

A próxima soma parcial é

$$s_{2(k+1)} = s_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

Implica que a sucessão das somas parciais pare é uma sucessão crescente. Por outro lado reagrupando os parênteses temos

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}.$$

Significa que estamos a subtrair do primeiro termo uma expressão positiva, então podemos afirmar que s_{2k} é limitada superiormente por a_1. Portanto obtemos:

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = s$$

para algum $s \in \mathbb{R}$. Considerando as somas parciais dos termos ímpare temos

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$$

Passando ao limite temos

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} (s_{2k} + a_{2k+1})$$

Pois, como pela segunda hipótese do teorema se tem

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = 0$$

então

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} s_{2k} + 0 = s$$

Portanto conclui-se que as sucessões das somas parciais pares e ímpares têm o mesmo limite s. Assim a sucessão das somas parcias também converge e tem-se

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

Exemplo 31. *Vamos analisar a natureza das seguintes séries alternadas*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n^2-3}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n-3}$

Pelo teorema de Leibniz primeiramente temos que provar que $a_{n+1} \leq a_n$ *e que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

a) Como

$$a_n = \frac{2n}{4n^2-3}$$

Obtemos

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{4n^2+8n+1} - \frac{2n}{4n^2-3} = \frac{(2n+2)(4n^2-3) - 2n(4n^2+8n+1)}{(4n^2+8n+1)(4n^2-3)} =$$

$$= \frac{-8n^2 - 8n - 6}{(4n^2 + 8n + 1)(4n^2 - 3)} \leq 0$$

é decrescente para qualquer n e como

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0$$

Assim conclui-se que a série dada é convergente.
b) Podemos provar que $a_{k+1} \leq a_k$. Mas como

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{4n - 3} = \frac{1}{2}$$

pela condição necessária de convergência a série é divergente.

O próximo conceito é muito útil para séries de termos positivos e termos negativos. Permite utilizar critérios criados para as séries de termos positivos para determinar a natureza de outros tipos de séries.

5.2 Série Absolutamente Convegente

Definição 14. *Uma série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diz-se absolutamente convergente se a série*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

é convergente.

É de salientar que se a série de termo geral a_n é de termos positivos, então $|a_n| = a_n$

Exemplo 32. *Vamos provar que a seguinte série é absolutamente convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Considerando os valores absolutos de cada termo, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Sabemos que a série de termo geral

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

é uma série-p convergente. Logo a série dada é absolutamente convergente.

Exemplo 33. *Vamos provar que a seguinte série converge mas não é absolutamente convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

Está série é chamada série harmónica alternada. São verificadas as condições do critério de Leibniz, ou seja, escolhendo

$$a_n=\frac{1}{n}$$

a_n é decrescente pois

$$\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$$

é equivalente

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-n-1}{n^2+n}=-\frac{1}{n^2+n}\leq 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Portanto, pelo critério de Leibniz a série é convergente. Para estudar a convergência absoluta, aplicamos a definição (14). Considerando os valores absolutos temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

A série obtida é a série harmónica que já sabemos ser divergente, logo pela definição (14) a série harmónica alternada não é absolutamente convergente.
A próxima definição diz-nos que séries convergentes mas não absolutamente convergentes, como a série harmónica alternada têm um nome especial.

Definição 15. *Se a série* $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ *converge mas* $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ *diverge, então a série* $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ *diz-se simplesmente convergente.*

O próximo teorema é muito útil para séries absolutamente convergentes.

Teorema 19. *Se a série* $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ *é absolutamente convegente, então* $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ *converge.*

Demonstrção: Temos sempre

$$-|a_k|\leq a_k\leq |a_k|$$

e somando $|a_k|$ ambos os membros da desigualdade obtemos

$$0\leq |a_k|+a_k\leq 2|a_k|$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ converge, então $\sum_{k=1}^{+\infty}2|a_k|$ converge. Logo

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|+a_k$$

é uma série convergente, além disso

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + |a_k| - |a_n| = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

Consequentemente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

converge.

Exemplo 34. *Vamos determinar a natureza da série alternada.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \cdots (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Considerando os valores absolutos de cada termo temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots$$

A série obtida é a série geométrica de razão $1/2$, que é convergente. Logo a série dada é absolutamente convergente e pelo teorema anterior a série dada é convergente (nestas condições não precisamos de aplicar o teorema de Leibniz).

Exemplo 35. *Vamos determinar a natureza da seguinte série:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Não podemos usar a condição necessária de convergência. Mas aplicando o critério geral de comparação do limite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

é divergente. Resulta que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

As séries têm a mesma natureza. Logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ diverge}$$

Nestas condições não podemos aplicar o teorema da série absoluta. Como a série de termo geral a_n diverge, podemos usar o teorema de Leibniz. Assim

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}{\left(\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}\right)} \\
&= \frac{n+1-n-2}{\left(\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}\right)} \\
&= \frac{-1}{\left(\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}\right)} \leq 0
\end{aligned}$$

Logo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Portanto pelo teorema de Leibniz a série converge. Como a série dos módulos diverge concluímos que a série é simplesmente convergente.

Observação 3. *Nas séries de termos sem sinal fixo é essencial sabermos o seguinte: O critério de Leibniz é uma condição suficiente de convergência, pelo que nada se poderá concluir quando falha algumas das hipóteses. Salienta-se no entanto que se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$$

a série alternada diverge, já que também

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} a_n \neq 0$$

A seguir veremos um resultado muito importante.

5.3 Reordenamento de séries

Quando somamos os mesmos números mas escolhendo outra ordem obtemos o que chamamos um reordenamento da série dada. Por exemplo seja

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Se multiplicarmos os membros por $1/2$ obtemos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Por outro lado somando as duas séries anteriores obtemos

$$s + \frac{s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Suponha-se que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{3s}{2}$$

A série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

diz-se um reordenamento da série harmónica alternada e pelo exposto temos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{3s}{2}$$

Assim, ao fazermos este reordenamento da série harmónica alternada obtivémos outra série que tem outra soma (pode ver-se que $s = \ln 2$). Tal nem sempre acontece e o próximo resultado esclarece esta questão.

Teorema 20. *Seja* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *uma série absolutamente convergente. Seja* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *um reordenamento de* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$*. Então*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

Demonstração: Começamos por supor que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ são séries de termos positivos.

Onde $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ é um reordenamento de $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ e } t_N = \sum_{n=1}^{N} b_n.$$

Então $s_N \to s$ e $t_N \to t$. Por outro lado temos

$$s_N \leq t \text{ e } t_N \leq s$$

passando ao limite obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} s_N \leq t \text{ e } \lim_{n\to+\infty} t_N \leq s$$

Significa que $s \leq t$ e $t \leq s$, consequentemente

$$s \leq t \leq s$$

assim $s = t$.

Vejamos o caso mas geral

$$\begin{cases} {a_n}^{+} = \frac{|a_n|+a_n}{2} \\ {a_n}^{-} = \frac{|a_n|-a_n}{2} \end{cases}$$

Consequentemente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^{+} - \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^{-}$$

Por outro lado temos

$$|a_n| = {a_n}^{+} + {a_n}^{-}$$

logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{+} + \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^{-}$$

Somando as duas últimas séries obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{+}$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{+}$$

é convergente. Isto obriga que também

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{-}$$

seja convergente. Mas como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^+ \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^-$$

Consequentemente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^- \ \text{ e } \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^-$$

Logo obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^-$$

temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Assim podemos afirmar que uma série de termos positivos seu reordenamento converge para a mesma soma.

Exercícios 10. *Determine a natureza das séries.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{5^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1+e^{-n}\right)$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$.

Exercícios 11. *Diga se as séries são absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergentes.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ *g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n n!+1}{n^n}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{5n+1}$.

Capítulo 6

Três Critérios para Convegência de Séries de Termos não Negativos

O teorema seguinte nos permitirá deduzir posteriormente novos critérios de convergência, quando alguns dos critérios já estudados são inconclusivos.

6.1 Critério de Kummer

O teorema seguinte nos permitirá deduzir posteriormente novos critérios de convergência, quando alguns dos critérios já estudados são inconclusivos.

Teorema 21. *([8] Theorem 2.7 Pag: 46)*
Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e $k \in \mathbb{R}$. Suponha-se que existe uma sucessão $d_n > 0$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{d_{n+1}}\right] = k$$

Temos

1. *Se $k > 0$ a série $\sum a_n$ converge.*

2. *Se $k < 0$ e $\sum d_n$ diverge, então a série $\sum a_n$ diverge.*

Demonstração: Começamos por mostrar o primeiro caso em que $k > 0$.
Suponha-se que $h \in]0, k]$ e que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se tem:

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{d_{n+1}} \geq h$$

Como $a_n > 0$, multiplicando a expressão anterior por a_n obtemos

$$\frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \geq h a_n$$

Por outro lado multiplicando por $1/h$. Temos

$$\frac{1}{h}(a_n d_n - a_{n+1}d_{n+1}) \geq a_n$$

Portanto analizando as somas parciais da sucessão $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ temos

$$\begin{aligned}
s_m &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{m} a_n \\
s_m &= \sum_{n=1}^{N} a_n + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_m \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{1}{h}\left[a_{N+1}d_{N+1} - a_{N+2}d_{N+2}\right] + \cdots + \frac{1}{h}\left[a_m d_m - a_{m+1}d_{m+1}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{1}{h}\left[a_{N+1}d_{N+1} - a_{m+1}d_{m+1}\right]
\end{aligned}$$

Como $a_{m+1}d_{m+1} > 0$ resulta que

$$s_m \leq \sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{1}{h}[a_{N+1}d_{N+1}]$$

Portanto $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e limitada, logo a sucessão $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para algum limite. Isto é, a série $\sum a_n$ converge.

Segundo caso, em que $k < 0$. Seja a sucessão $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum d_n$ diverge e suponha-se que $k < 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{d_{n+1}} < 0$$

para qualquer $n \geq N$. Multiplicando a desigualdade anterior por a_n temos

$$\frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{d_n} \leq \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}$$

Para qualquer $n \geq N$. Por outro lado temos

$$\frac{a_n}{d_n} \geq \frac{a_N}{d_N} > 0$$

para qualquer $n \geq N$. Assim

$$a_n \geq \left(\frac{a_N}{d_N}\right) d_n$$

para qualquer $n \geq N$. Consequentemente como $\sum d_n$ diverge, conclui-se pelo critério de comparação que a série a_n diverge.

Exemplo 36. *Vamos estudar o natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Já vimos a título de exemplo que a aplicação dos critérios da razão e da raiz era inconclu-

siva. Assim temos

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \times n^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Aplicando o critério de Kummer e escolhendo $d_n = 1/n$. Temos

$$n - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1) > 0$$

Como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Assim

$$\begin{aligned} n - \frac{a_{n+1}}{a_n}(n+1) &= n - \frac{n^2}{(n+1)^2} \times (n+1) \\ &= n - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{n^2 + n - n^2}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

passando ao limite temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Portanto como $k = 1 > 0$, então a série dada é convergente pelo critério de Kummer. Salientar que o critério de Kummer permite-nos usar outros critérios. O próxio critério é muito útil quando é inconclusivo o critério precedente.

O critério de Kummer permite-nos ainda obter outros critérios.

6.2 Critério de Raabe

Teorema 22. *([8] Theorem 2.8 Pag: 48)*
Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponha-se que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}$$

para qualquer n. Seja

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \beta \quad \textit{então}$$

1. *Se $\beta > 1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

2. *Se $\beta < 1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração: Temos
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n} = \frac{n-1}{n} - \frac{\beta_n - 1}{n}$$
Temos.
$$n\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n-1) - (\beta_n - 1) \Leftrightarrow -(n-1) + \frac{a_{n+1}}{a_n}n = -(\beta_n - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}n = \beta_n - 1$$
Assim, escolhendo no critério de Kummer $d_n = \frac{1}{n-1}$ temos
$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{d_{n+1}}$$
Então

1. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n - 1 > 0$, isto é, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n > 1$ então $\beta > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
2. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n - 1 < 0$, isto é, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n < 1$ então $\beta < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Exemplo 37. *Vamos determinar a natureza da série*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$
Como
$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$
Temos
$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\,(2n+2)} \times \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\\
\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1
\end{aligned}$$
E portanto o critério da razão não nos permitiria tirar conclusões. Aplicando o critério de Raabe temos:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}$$
Como
$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2n+2-1}{2n+2}\\
&= \frac{2n+2}{2n+2} - \frac{1}{2n+2}\\
&= 1 - \frac{1}{2n+2}\\
&= 1 - \frac{\left(\frac{n}{2n+2}\right)}{n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo

$$\beta_n = \frac{n}{2n+2}$$

Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{2} < 1$$

a série dada diverge. Outro resultado que também decorre do critério de Kummer é o seguinte.

6.3 Critério de Gauss

Teorema 23. *([8] Theorem 2.12 Pag: 50)*
Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

uma série de termos positivos. Suponha-se que exista uma sucessão $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada e $k > 0$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{Q_n}{n^{1+k}}$$

para qualquer n. Temos

1. *Se $\lambda > 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.*

2. *Se $\lambda \leq 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração: Caso $\lambda \neq 1$ usamos o critério de Raabe.

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda - \frac{Q_n}{n^k} = \lim_{n\to+\infty} \lambda - \lim_{n\to+\infty} \frac{Q_n}{n^k} = \lambda - 0 = \lambda$$

Logo pelo critério de Raabe temos.

1. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2. $\lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Suponha-se que $\lambda = 1$. Temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{Q_n}{n^{1+k}}$$

Escolhendo $d_n = (n-1)\log(n-1)$ pelo critério de Kummer temos

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}$$

Assim

$$\begin{aligned}
d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} &= (n-1)\log(n-1) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{Q_n}{n^{1+k}}\right) n \log n \\
&= (n-1)\log(n-1) - n\log n + \log n - Q_n \frac{n \log n}{n^k n} \\
&= (n-1)\log(n-1) - n\log n + \log n - Q_n \frac{\log n}{n^k}
\end{aligned}$$

Mas em particular temos

$$n \log n = (n-1)\log n + \log n \quad \text{portanto}$$

$$\begin{aligned}
d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} &= (n-1)\log(n-1) - (n-1)\log n - \log n + \log n - Q_n \frac{\log n}{n^k} \\
&= (n-1)[\log(n-1) - \log n] - Q_n \frac{\log n}{n^k} \\
&= (n-1)\log\left(\frac{n-1}{n}\right) - Q_n \frac{\log n}{n^k}
\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\log b^a = a \log b$$

Então

$$\begin{aligned}
(n-1)\log\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1} \\
&= \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \log\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \quad \text{passando ao limite temos} \\
\lim_{n\to+\infty}(n-1)\log\left(\frac{n-1}{n}\right) &= -\log e - \log 1 = -1
\end{aligned}$$

Como $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada temos

$$Q_n \frac{\log n}{n} \to 0$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty} d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} = -1$$

Logo pelo critério de Kummer que a série a_n diverge.

Exemplo 38. *Vamos mostrar que a seguinte série é divergente*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(1+1.2)\cdots(1+n(n+1))}$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(1+1.2)\cdots(1+n(n+1))}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{[(n+1)]^2}{(1+1.2)\cdots(1+n(n+1))(1+(n+1)(n+2))} \times \frac{(1+1\cdot 2)\cdots(1+n(n+1))}{(n!)^2} \\
&= \frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} \times \frac{1}{1+(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2(n!)^2}{[(n!)^2} \times \frac{1}{1+(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+3}
\end{aligned}$$

Se tentássemos aplicar o critério da razão veriamos que é inconclusivo. Aplicando o critério de Raabe, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+3} = \frac{n^2+2n+1+n+2-n-2}{n^2+3n+3} \\
&= \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+3} - \frac{n+2}{n^2+3n+2} \\
&= 1 - \frac{n+2}{n^2+3n+3} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+2)}{n^2+3n+2}\right) = 1 - \frac{\beta_n}{n}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\beta_n = \frac{n^2+2n}{n^2+3n+2}$$

passando ao limite a temos

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+3n+2} = 1$$

E o critério de Raabe é inconclusivo. Conforme dissemos no princípio deste capítulo quando o critério de Raabe é inconclusivo, um caminho a seguir é o critério de Gauss. Assim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n}\left(\lambda - \frac{Q_n}{n^k}\right)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1-\frac{n+2}{n^2+3n+2}\\
&= 1-\frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{n^2+3n+2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{n}\left[\frac{n^2+3n+2-n-2}{n^2+3n+2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{n}\left[1-\frac{n+2}{n^2+3n+2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{n}\left[1-\frac{\frac{n^2+2n}{n^2+3n+2}}{n}\right]=1-\frac{1}{n}\left[1-\frac{Q_n}{n^k}\right]
\end{aligned}$$

Assim

$$Q_n=\frac{n^2+2n}{n^2+3n+2} \quad e \;\; n^k=n=1$$

Como a sucessão $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada pois*

$$0\leq n^2+2n\leq n^2+3n+2 \;\; logo$$

$$0\leq\frac{n^2+2n}{n^2+3n+2}\leq 1$$

Passando ao limite tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}Q_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+3n+2}=1$$

Resulta pelo critério de Gauss que a série é divergente.

Exercícios 12. *Aplicando o critério de Kummer, estude a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Exercícios 13. *Aplicando os critérios de Raabe e Gauss, estude a natureza das seguintes séries abaixo:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n!)^3}{2^{6n}(n!)^6}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n^2+1}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$.

Capítulo 7

Densidade Natural de Subséries Convergentes da Série Harmónica e Generalizações

Um conceito transversal em todo este trabalho é o conceito de limite. Sucede contudo que em muitas situações estamos na presença de uma sucessão que embora não tenha limite tem subsucessões com limite. Um exemplo é a sucessão de termo geral $a_n = (-1)^n$. Não existe limite de a_n quando n tende para infinito mas a subsucessão $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite 1, e a subsucessão $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também tem limite -1. Em algumas situações é conveniente criar outras definições que de alguma forma permitam obter um valor limite para sucessões que não tenham limite. Nesse sentido abordaremos dois conceitos. O limite superior e a convergência à Cesaro.

7.1 Limite Superior e Inferior

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada e

$$B_k = \{a_n : n \geq k\}$$

Temos $B_{k+1} \subset B_k$ e consequentemente $\sup B_{k+1} \leq \sup B_k$. Portanto

$$(\sup B_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ é decrescente e limitada}$$

Definição 16. *Nestas condições definimos limite superior de a_n como*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} (\sup B_k)$$

Da mesma forma define-se limite inferior de a_n como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} (\inf B_k)$$

Exemplo 39. *Seja $a_n = (-1)^n$. Temos*

$$B_k = \{(-1)^n : n \geq k\} = \{-1, 1\}$$

Assim $\sup B_k = 1$

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup B_k = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1$$

Analogamente

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf B_k = -1$$

Exemplo 40. *Seja*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Temos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por outro lado

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (\sup B_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} (\inf B_k) = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Este resultado é válido com mais generalidade.

Teorema 24. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão limitada e convergente. Tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Propriedade 1. *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucessões limitadas. Tem-se*

1.
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

2.
$$\limsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

Demonstração: Começamos por mostrar o primeiro resultado

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Basta ver que se

$$A_k = \{a_n : n \ge k\}$$

temos

$$\inf A_k \le \sup A_k$$

logo

$$\lim_{k\to+\infty} (\inf A_k) \le \lim_{k\to+\infty} (\sup A_k)$$

isto é

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Supomha-se que $A_{k+1} \subset A_k$. Consequentemeente temos

$$\sup A_{k+1} \le \sup A_k$$

Portanto $(\sup A_k)$ é uma sucessão decrescente. E $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é existe o limite. Ou seja

$$\lim_{k\to+\infty}(\sup A_k)=\limsup_{k\to+\infty} a_n$$

Temos

$$\inf A_{k+1}\geq \inf A_k$$

Portanto como $(\inf A_k)$ é crescente e limitada então

$$\liminf_{k\to+\infty} A_k$$

existe e chama-se

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Por outro lado temos

$$\inf A_k\leq a_n\leq \sup A_k \text{ sempre que } n\geq k.$$

Assim

$$\liminf_{k\to+\infty} A_k\leq \limsup_{k\to+\infty} A_k$$

conclui-se que

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n\leq \liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Segundo caso.

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\leq \limsup_{n\to+\infty} a_n+\limsup_{n\to+\infty} b_n$$

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões limitadas, então

$$A_k=\{a_n : n\geq k\} \text{ e } B_k=\{b_n : n\geq k\}$$

Escrevemos

$$s_k=\sup A_k \text{ e } t_k=\sup B_k$$

Temos

$$a_j\leq s_k \text{ sempre que } j\geq k \text{ e } b_i\leq t_k \text{ sempre que } i\geq k.$$

Assim $a_j+b_i\leq s_k+t_k$ sempre que $j,i\geq k$. Escolhendo $j=i$ temos

$$a_i+b_i\leq s_k+t_k \text{ sempre que } i\geq k.$$

Significa que

$$\{a_i+b_i : i\geq k\} \text{ é majorado por } s_k+t_k \text{ logo}$$

$$\sup\{a_i+b_i : i\geq k\}\leq s_k+t_k$$

Fazendo

$$\sup\{a_i+b_i : i\geq k\}=d_k \text{ temos } d_k\leq s_k+t_k$$

Passando ao limite. Obtemos

$$\lim_{k\to+\infty} d_k \leq \lim_{k\to+\infty} (s_k + t_k) = \lim_{k\to+\infty} s_k + \lim_{k\to+\infty} t_k$$

ou seja

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

Proposição 7. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada e $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ uma sua subsucessão. Tem-se*

$$\liminf x_n \leq \liminf x_{n_k}$$

Demonstração: Seja $B_k = \{x_n : n \geq k\}$ temos $B_{k+1} \subset B_k$ portanto

$$\inf B_k \leq \inf B_{k+1}$$

Mas como a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada a sucessão $(\inf B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada. Logo o limite $\lim(\inf B_k)$ existe. Assim

$$\liminf x_n = \lim(\inf B_k)$$

Seja $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja

$$B_i^{'} = \{x_{n_k} : n_k \geq i\} \text{ e } B_i = \{x_n : n \geq i\}$$

Temos

$$B_i^{'} \subset B_i$$

e este resultado obriga que $\inf B_i \leq \inf B_i^{'}$ e portanto

$$\lim_{i\to+\infty}(\inf B_i) \leq \lim_{i\to+\infty}(\inf B_i^{'}) \Leftrightarrow \liminf x_n \leq \liminf x_{n_k}$$

O outro tipo de convergência que referimos na introdução é a convergência à Cesàro.

7.2 Convergência à Cesàro

Definição 17. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Define-se convergência à Cesàro de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

O próximo exemplo mostra que uma sucessão divergente no sentido usual pode ter uma soma à Cesaro bem definida.

Exemplo 41. *Seja $a_n = (-1)^n$. Temos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

Se n é par

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = (-1+1)+\cdots+(-1+1) = 0$$

Se n é ímpar

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = (-1+1)+\cdots+(-1+1)-1 = -\frac{1}{n} \to 0$$

Um dos factores que torna este conceito de convergência interessante é que preserva o conceito de convergência antigo. Mais explicitamente temos:

Teorema 25. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Se a_n converge para b então*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to b$$

Demonstração: Pretende-se mostrar que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to b$$

Portanto dado $\varepsilon > o$ existe M tal que se $n > M$ temos

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - b\right| < \varepsilon$$

Assim

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - b\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - b)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - b)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - b| \tag{2}$$

Por outro lado a sucessão de termo geral a_k converge para b se e somente se para todo $\epsilon_1 > 0$ existe M_1, tal que se $n > M_1$ temos

$$|a_k - b| < \epsilon_1$$

Consequentemente o resultado (2) será

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_1}|a_k - b| + \frac{1}{n}\sum_{k=M_1+1}^{n}|a_k - b| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_1}|a_k - b| + \frac{1}{n}\sum_{k=M_1+1}^{n}\epsilon_1 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_1}|a_k - b| + \frac{1}{n}\left[n-(M_1+1)+1\right]\varepsilon_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M_1}|a_k - b| + \frac{1}{n}(n - M_1)\epsilon_1$$

Seja C a constante

$$\sum_{k=1}^{M_1}|a_k - b|$$

então $\frac{1}{n} \times C \to 0$. Assim para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe M_2 tal que se $n \geq M_2$

$$\left| \frac{1}{n} \times C - 0 \right| < \varepsilon_2$$

isto é

$$\frac{C}{n} < \varepsilon_2$$

Assim, escolhendo

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $\varepsilon > 0$ existe $M = max\{M_1, M_2\}$ tal que se $n \geq M$, então:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - b \right| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

7.3 Densidade Natural

Definição 18. *Seja* $A \subset \mathbb{N}$. *Seja*

$$\pi_A(n) = |A \cap \{1, ..., n\}|$$

onde $|A|$ *é o número de elementos no conjunto* A.
Define-se densidade natural superior de A *como*

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\pi_A(n)}{n}.$$

De forma análoga define-se densidade natural inferior de A *como*

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \to +\infty} \frac{\pi_A(n)}{n}.$$

Quando

$$\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$$

diz-se que o conjunto A *tem densidade natural* $d(A)$.

Exemplo 42. *Seja* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *Vejamos que* $d(A) = 0$.
Como

$$\pi_A(n) = |A \cap \{1, 2, \cdots, n\}|$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\pi_A(5) = |A \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$$

Da mesma forma se $n > 5$ *temos*

$$\pi_A(n) = |A \cap \{1, 2, 3, \cdots, n\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$$

Consequentemente temos

$$\frac{\pi_A(n)}{n} = \frac{|\{1,2,3,4\}|}{n} = \frac{4}{n} \quad \textit{para qualquer } n \geq 4$$

Portanto

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\pi_A(n)}{n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0.$$

Da mesma forma

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\pi_A(n)}{n} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$$

Portanto como $\underline{d}(A) = \overline{d}(A) = 0$ *resulta que* $d(A) = 0$

Exemplo 43. *Seja* $A = \mathbb{N}$. *Tem-se* $d(A) = 1$ *temos*

$$\pi_{\mathbb{N}}(n) = |\mathbb{N} \cap \{1,2,3,\cdots,n\}| = |\{1,2.\cdots n\}| = n$$

Isto implica que

$$\overline{d}(\mathbb{N}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\pi_{\mathbb{N}}(n)}{n} = \limsup_{n\to+\infty} 1 = 1$$

De forma análoga, obtemos

$$\underline{d}(\mathbb{N}) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\pi_{\mathbb{N}}(n)}{n} = \liminf_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Portanto como

$$\underline{d}(\mathbb{N}) = \overline{d}(\mathbb{N}) = 1 \quad \textit{assim } d(\mathbb{N}) = 1$$

A seguir veremos uma proposição muito importante

Proposição 8. *Seja* $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ *onde* $a_k < a_{k+1}$. *Temos*

1. $\underline{d}(A) = \liminf \frac{k}{a_k}$

2. $\overline{d}(A) = \limsup \frac{k}{a_k}$

e se $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$

$$d(A) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{a_k}$$

Demonstração: Temos

$$\underline{d}(A) = \liminf \frac{\pi_A(n)}{n} \leq \liminf \frac{\pi_A(a_n)}{a_n} = \liminf \frac{n}{a_n} \Rightarrow \underline{d}(A) \leq \liminf \frac{n}{a_n}$$

Por outro lado se n é um natural existem infinitos a_k tais que $n \leq a_k$. Consideremos o primeiro k tal que $n < a_k$. Temos $a_{k-1} \leq n < a_k$. A desigualdade $n < a_k$ pode ser escrita da forma

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{a_k} \Leftrightarrow \frac{k}{n} > \frac{k}{a_k}$$

Temos também

$$\begin{aligned}\pi_A(n) &= |\{1,\cdots,n\}\cap A|\\ &= |\{1,\cdots,n\}\cap\{a_1,\cdots,a_k,\cdots\}|\\ &= |\{1,\cdots,n\}\cap\{a_1,\cdots,a_{k-1}\}| = k-1\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{k}{a_k}-\frac{\pi_A(n)}{n} &= \frac{k}{a_k}-\frac{(k-1)}{n} < \frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\\ &= \frac{k-k+1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{k}{a_k}-\frac{\pi_A(n)}{n} < \frac{1}{n} \tag{3}$$

Pelo resultado (3) temos

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{k}{a_k} \leq \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\pi_A(n)}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\liminf_{n\to+\infty}\frac{\pi_A(n)}{n}$$

$$= \liminf_{n\to+\infty}\frac{\pi_A(n)}{n} = \underline{d}(A)$$

Provámos assim que

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{k}{a_k} \leq \underline{d}(A) \leq \liminf_{n\to+\infty}\frac{n}{a_n}$$

o que estabelece o ponto 1 da proposição. De forma análoga podemos provar que

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to+\infty}\frac{k}{a_k}$$

Exemplo 44. *Se A é o conjunto dos números pares $d(A) = 1/2$.*
Seja $A = \{2,4,6,\cdots\}$. Como o conjunto dos números pares pode ser escrito na forma $A = \{2k : k\in\mathbb{N}\}$ e $\pi_A(2n) = |A\cap\{1,2,3,\cdots,2n\}|$
Como

$$\frac{k}{a_k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

resulta que

$$d(A) = \lim_{k\to+\infty}\frac{k}{2k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A seguir veremos uma fórmula análoga a fórmula de integração por partes.

7.4 Fórmula de Abel

Teorema 26. *([8] Theorem* 2.20 *Pag:* 55*)*
Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucessões de números reais. Temos*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

onde

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Demonstração: Seja

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$$

temos

$$B_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = b_1 + \cdots + b_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$B_n - B_{n-1} = b_n \text{ para todo } n \geq 2 \qquad (4)$$

Se $n = 1$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{1} b_1 = B_1$$

Com esta ideia vamos mostrar a fórmula de Abel. Seja

$$S_N = a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n b_n$$

pelo resultado (4) temos

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_1 b_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + a_4(B_4 - B_3) + \cdots + a_N(B_n - B_{N-1}) \end{aligned}$$

onde $b_1 = B_1$ e reagrupando os termos temos

$$\begin{aligned} &= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + B_3(a_3 - a_4) + B_4(a_4 - a_5) + \cdots + B_{N-1}(a_{N-1} - a_N) + a_N B_N \\ &= a_N B_n + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \\ &= a_N B_n - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \qquad (7) \end{aligned}$$

Abordaremos agora o conceito de subsérie e como se relaciona com a densidade natural do conjunto de índices onde estará definida. Consideremos a série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

diz-se uma subsérie da série harmónica pois a sucessão que define o termo geral desta última é uma subsucessão do termo geral da série harmónica. Mais geralmente temos

Definição 19. *Dada a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

se $(a_{n_j})_{n_j \in \mathbb{N}}$ *é uma subsucessão de* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dizemos que*

$$\sum_{n=j}^{+\infty} a_{n_j}$$

é uma subsérie de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Escrevendo $A = \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ *usamos também a notação*

$$\sum_{n \in A} a_n \ \ \textit{para representar} \ \ \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n_j}$$

Exemplo 45. *Consideremos a série harmónica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Seja $A = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Seja

$$S_n = \sum_{k \in A}^{n} \frac{1}{k}$$

Temos

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k \in A}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k \in A}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Se $n \in A$ temos

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k\in A}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k\in A}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k\in A}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k\in A}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Se $n \notin A$ temos $S_n = S_{n-1}$ e portanto $S_n - S_{n-1} = 0$.
Assim se $n \in A$ temos

$$n(S_n - S_{n-1}) = 1$$

e se $n \notin A$ temos

$$S_n - S_{n-1} = 0$$

Decorre que, definindo $S_0 = 0$, temos

$$\pi_A(n) = 1(S_1 - S_0) + 2(S_2 - S_1) + \cdots + n(S_n - S_{n-1})$$

uma vez que a parcela k, $k(S_k - S_{k-1})$, indica-nos se $k \in A$ (e nesse caso dá 1) ou se $k \notin A$ (e nesse caso dá 0). Neste contexto de ideias temos o seguinte resultado.

7.5 Moser

Teorema 27. *(Moser,* 1958*)*
Seja $A \subset \mathbb{N}$. Temos

$$\sum_{A} \frac{1}{n} \text{ converge } \Rightarrow d(A) = 0$$

Demonstração: Seja

$$S_n = \sum_{k\in A}^{n} \frac{1}{k}\,, S_0 = 0$$

Temos

$$\begin{aligned} \pi_A(n) &= 1(S_1 - S_0) + 2(S_2 - S_1) + \cdots + n(S_n - S_{n-1}) \\ &= S_1(1-2) + S_2(2-3) + \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots + S_{n-1}(n-1-n) + nS_n \\ &= nS_n - S_1 - S_2 - S_3 - S_{n-1} \\ &= nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por

$$\frac{1}{n}$$

obtemos

$$\frac{\pi_A(n)}{n} = S_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

Passando ao limite temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi_A(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

Portanto se S_n converge, então pelo teorema de Cesaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

também converge para o mesmo limite e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi_A(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k = S - S = 0$$

Assim conclui-se que

$$d(A) = 0$$

Observação 4. *A qualquer conjunto $A \subset \mathbb{N}$ podemos associar de forma única uma sucessão $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$*

Onde $\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & , \quad k \in A \\ 0 & , \quad k \notin A \end{cases}$

Exemplo 46. $A = \{2, 4\}$
Temos $\varepsilon_1 = 0\,, \varepsilon_2 = 1\,, \varepsilon_3 = 0\,, \varepsilon_4 = 1$ e $\varepsilon_j = 0$ para todo $j \geq 5$. Se $n \geq 4$ temos

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j = 2$$

Por outro lado

$$\pi_A(n) = |A \cap \{1, 2, 3, \cdots, n\}| = |\{2, 4\} \cap \{1, 2, 3, \cdots, n\}| = 2$$

se $n \geq 4$.

$$\sum_{A} d_k = d_1 + d_3 + d_4 = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k d_k$$

Mas geralmente temos

Exemplo 47. *Seja $A = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ e $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sucessão associada.*
Seja $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Temos

$$\sum_{A} d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n d_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \pi_A(n)$$

Uma possível generalização do resultado anterior é a seguinte:

7.6 Salát

Teorema 28. *Salát,* 1964 *([7] Theorem* 2. *Pag:* 212*)*
Seja $A \subset \mathbb{N}$. Temos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k$$

uma série que diverge para $+\infty$. Suponha-se que existe k_0 tal que

$$d_{k_0} \geq d_{k_0+1} \geq \cdots \geq d_{k_0+k} \geq \cdots$$

Temos

$$\sum_{A} d_k \text{ converge } \Rightarrow \underline{d}(A) = 0$$

Demonstração: Se $\underline{d}(A) > 0$ existe $\alpha > 0$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq r$

$$\pi_A(n) > \alpha\, n$$

Para $n \geq r, k$, do resultado (7) temos

$$\sum_{k=r}^{r+t} \varepsilon_k\, d_k \quad = \quad d_{r+t} \sum_{k=1}^{r+t} \varepsilon_k - d_{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_k - \sum_{k=r-1}^{r+t-1} (d_{k+1} - d_k) \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n$$

fazendo alguns cálculos temos

$$\begin{aligned}
&= d_{r+t}\pi_A(r+t) - d_{r-1}\pi_A(r-1) - \sum_{k=r-1}^{r+t-1} (d_{k+1} - d_k)\pi_A(k) \\
&= d_{r+t}\pi_A(r+t) - d_r\pi_A(r-1) + \pi_A(r)(d_r - d_{r+1}) + \\
&\quad\ \pi_A(r+1)(d_{r+1} - d_{r+2}) + \cdots + \pi_A(r+t-1)(d_{r+t-1} - d_{r+t})
\end{aligned}$$

como $\quad \pi_A(r) \geq \alpha r$, a expressão anterior é

$$\begin{aligned}
&\geq -d_r\pi_A(r-1) + \alpha[r(d_r - d_{r+1}) + (r+1)(d_{r+1} - d_{r+2}) + \cdots \\
&\quad\ \cdots + (r+t-1)(d_{r+t-1} - d_{r+t}) + d_{r+t}(r+t)] \\
&= -d_r\pi_A(r-1) + \alpha(r\, d_r + d_{r+1} + d_{r+2} + ... + d_{r+t})
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=r}^{r+t} \varepsilon_k\, d_k \quad \geq \quad -d_r\pi_A(r-1) + \alpha r d_r + \alpha \sum_{k=r+1}^{r+t} d_k$$

Como por hipótese $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k$ é divergente, então $\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=r+1}^{r+t} d_k = +\infty$ Portanto conclui-se que

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=r}^{r+t} \varepsilon_k \, d_k \text{ diverge.}$$

Capítulo 8

Bibliografia

[1] Carl B. Boyer, História da Matemática, tradução de Elsa F. Gomide, 2ª edição, São Paulo, Editora Edgar Blucher, 1996.

[2] Earl William Swokowski, Cálculo com geometria analítica, tradução de A. A. de Faria, 2ª edição, São Paulo, Makron Books, 1994.

[3] Manuel Alberto M. Ferreira, Exercícios de sucessões e Séries, 3ª edição, Lisboa, 2009.

[4] Ricardo Ameida, Cálculo: Teoria e Exercícios, 1ª edição, 2017.

[5] João Paulo Santos, Cálculo numa Variável Real, 2ª edição, Instituto Superior Técnico, 2016.

[6] Departamento de Matemática, Exercícios de Análise Matemática 1 e 2, 3ª edição, Instituto Superior Técnico, 2010.

[7] T. Salát, On subseries, Math. Zeitschr. $85, 209 - 225$, 1964.

[8] Daniel D. Bonar, Michael J. Khoury, Real Infinite Series, The Mathematical Association of America, 2006.

[9] Leo Moser, On the series $\sum 1/p$, The American Mathematical Monthly, Vol. 65, No 2, $104 - 105$, Mathematical Association of America, 1958.

[10] Jim Fowler, Bart Snapp, Sequences and Series, 2014.