UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

O Teorema de Pitágoras

Daniela Eduarda Amaral Saraiva

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo

Covilhã, Outubro de 2011

Relatório de estágio subordinado ao tema “O Teorema De Pitágoras” elaborado por Daniela Eduarda Amaral Saraiva, N.º M4184 do curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário pela Universidade da Beira Interior, integrado no 2º Ciclo de Bolonha e orientado pelo Professor Doutor Paulo Rebelo.

Conteúdo

Lista de Figuras

Agradecimentos

Porque um trabalho desta dimensão não se consegue fazer sem apoio, queria agradecer:

À minha família e namorado, pelo apoio que me deram ao longo de todo este processo;

Agradeço aos colegas e amigos pela ajuda que deram durante este período;

Aos Professores Doutores Patrícia Beites e Alejandro Nicolás pela autorização de utilização da figura 3.24 em [1];

Ao Professor Doutor Paulo Rebelo, pelo seu apoio e disponibilidade.

Resumo

No presente trabalho propus-me a fazer uma revisão sobre o Teorema de Pitágoras, a altura da descoberta da sua prova e o trabalho que se desenvolveu à sua volta desde a sua demonstração. É também apresentada uma análise da sua importância no Ensino da Matemática em Portugal.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Triângulo Rectângulo, Números Irracionais, Ensino da Matemática em Portugal.

Abstract

In this paper, I set myself to make a review of the Pythagorean Theorem, the time of its discover and the work that has developed around it since its demonstration. It also gives an analysis of its importance in the Teaching of Math in Portugal.

Keywords: Pythagorean Theorem, Right Angle Triangle, Irrational Numbers, Math Teaching in Portugal.

"Tudo é número"

Pitágoras

Capítulo 1

Introdução

Muito provavelmente, o resultado matemático mais conhecido é o Teorema de Pitágoras.

Este facto deve-se à simplicidade do resultado que o torna fácil de memorizar, devido às suas aplicações e pelo facto de que este resultado é apresentado de diversas formas ao longo dos vários ciclos de ensino, desde o pré-primário até ao ensino superior.

O enunciado mais comum deste resultado é o seguinte:

> "Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"

embora não tivesse sido assim que foi formulado inicialmente.

Com este trabalho, desenvolvido no âmbito do Relatório de Estágio integrado no Estágio Pedagógico em Ensino da Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, procurou-se fazer um estudo sobre este Teorema, localizando historicamente (em termos sociais e políticos) a época em que foi pela primeira vez demonstrado para que o leitor tome consciência e tenha noção do peso que a Matemática essencialmente prática tinha naquela época na Grécia Antiga.

Apresenta-se a possível demonstração com que Pitágoras terá provado o Teorema e também algumas das muitas demonstrações realizadas desde a sua descoberta.

É necessário referir que, como se verá no decorrer deste trabalho, este Teorema se aplica a um só tipo de triângulos, e que este resultado já era conhecido e aplicado antes de Pitágoras o conseguir provar, mas que foi de facto ele o primeiro a conseguir demonstrar a igualdade.

Vai-se também estudar o impacto do Teorema no Ensino em Portugal, fazendo referência a várias partes do Programa da Matemática em que ele está presente, dando particular ênfase à sua introdução no Currículo Matemático Português.

Este trabalho encontra-se dividido da seguinte forma:

No Segundo Capítulo apresenta-se uma pequena reflexão daquilo que seria a Sociedade Grega antes e durante a descoberta desta relação por Pitágoras.

No Terceiro Capítulo apresentam-se algumas noções básicas de triângulos, seguidas das demonstrações do Teorema, incluindo a que se pensa que Pitágoras tenha utilizado.

No Quarto Capítulo faz-se um estudo dos Ternos Pitagóricos e apresentam-se métodos para os determinar.

No Quinto Capítulo apresentam-se algumas das aplicações que o Teorema de Pitágoras tem noutras áreas da Matemática.

Para terminar, no Sexto Capítulo apresenta-se as aplicações do Teorema de Pitágoras no Ensino em Portugal e no Sétimo Capítulo uma possível introdução numa sala de aula a este Teorema.

É de referir que todas as figuras que não estão remetidas para a Bibliografia foram construídas recorrendo ao GeoGebra no decorrer da elaboração deste trabalho.

Capítulo 2

A Sociedade Grega no tempo de Pitágoras

Neste Capítulo vamo fazer um enquadramento a nível geográfico, histórico, económico e social de onde, quando e como surgiu a demonstração do Teorema de Pitágoras.

2.1 A Grécia Antiga

Quando utilizamos o termo "Grécia Antiga"referimo-nos ao que foi considerado o período de ouro da Grécia e das regiões envolventes que estavam sobre o seu poder.

Localizada na zona sul do continente Europeu, é banhada pelo Mar Mediterrâneo.

Não existe uma data precisa atribuída ao início deste período, mas muitos defendem o seu começo aquando a realização dos primeiros Jogos Olímpicos, no ano de 776 a.C.[1], e que tenha terminado nos últimos séculos antes da morte de Cristo.

A história da Grécia começa aproximadamente no terceiro milénio antes de Cristo.

Os Aqueus, um povo nómada do norte da Europa, migrou para lá à procura de um clima ameno e terras férteis. De facto, o clima revelou-se agradável, mas as terras não eram das mais férteis, principalmente devido à falta de água doce que levava as plantações à seca. Esse facto levou os Gregos a procurar terras de cultivo noutras zonas, e por isso saíram para o mar à sua procura.

Como se pode observar na figura 2.1, retirada de [37], a sua excelente localização dava-lhes acesso à Ásia Menor pelo Mar Egeu, ao Sul da Europa e Norte de África, e foi para esses locais que foram em busca de novas terras, formando colónias às quais chamaram de Cidades Estado, especialmente depois do século VII a.C..

Durante todo este tempo, as Cidades espalhadas pela Grécia e pelas regiões próximas, embora Gregas, queriam a sua independência, isto é, não existia um estado politicamente unificado entre os Gregos.

Cada cidadão era considerado um soldado e deviam estar disponíveis para defender a sua Cidade. O regime político vigente era a democracia. Devemos salientar que esta não era perfeita pois as mulheres não votavem e tinham escravos.

Surgiram ameaças de outros povos, tais como os Persas que tentam apoderar-se das Cidades Estado, e isso fez com que elas se tenham unido contra esse inimigo comum.

[1] Há quem defenda que tenha começado pelo ano 1000 a.C.

Figura 2.1: Mapa da Grécia Antiga.

Embora os Persas tenham sido bem sucedidos e tenham conseguido tomar algumas Cidades Estado, foram mais tarde derrotados quando tentam tomar Atenas.

Afastado o perigo Persa, regressaram as divergências entre as Cidades Estado o que as tornou cada vez mais fracas e vulneráveis.

Por fim são conquistadas por Filipe da Macedónia no século IV a.C., e no século I a.C. torna-se uma província romana.

Esse espaço de tempo de 3 séculos é o chamado período Helenístico, onde se difundiu a cultura grega por todos os territórios do Império Romano de Alexandre, o Grande, e esse nome significava "Viver como os Gregos".

2.2 O florescer da Ciência

Os Gregos tal como outras civilizações na altura eram, até então, um povo que recorria a lendas e mitos para explicar fenómenos naturais.

A Grécia era conhecida por haver liberdade de expressão, permitindo que as pessoas pensem por si mesmas e possam discutir as suas ideias e pontos de vista, ao contrário de outros grandes povos, como por exemplo o Egipto.

O desenvolvimento social, económico e político permitiu que os Gregos se dedicassem ao estudo e à investigação de fenómenos e acontecimentos previamente atribuídos aos Deuses.

Surgiram assim os filósofos[2]. Entre os mais conhecidos estão Aristóteles, que estudou na Academia de Platão, que foi discípulo de Sócrates, Tales, Pitágoras, Heráclito e Protágoras.

Sócrates estudou maioritariamente o comportamento humano e foi criador do método socrático[3];

Platão investigou como governar um Estado da melhor forma;

[2]Do grego $\Theta\iota\lambda o\sigma o\varphi\iota\alpha$, que literalmente significa "amor à sabedoria". A filosofia é o estudo de problemas relacionados com a existência, o conhecimento, a verdade, valores morais e estéticos, entre outros, distinguindo-se da mitologia e da religião pois segue a linha da utilização de argumentos racionais para justificar as suas afirmações.

[3]É um método de ensino, onde prevalesce o diálogo entre o professor e o aluno, em que o professor tenta conduzir o aluno ao raciocínio correcto, mas pondo sempre questões no seu decorrer.

Aristóteles foi um dos que mais áreas estudou, escrevendo sobre política, poesia e as ciências: Biologia, Física, Matemática, entre outras, e foi Professor de Alexandre, o Grande.

Foi durante o período Helenístico que se diz que a sabedoria Grega teve o seu maior desenvolvimento, em particular na área das Ciências (entre as quais a Medicina, Astronomia e Matemática), mas esse auge só se deu devido ao desenvolvimento que teve nos séculos que anteriores.

2.3 O desenvolvimento da Matemática

Tal como outras áreas, a Matemática era uma ciência em desenvolvimento.

Os Gregos começaram a questionar-se sobre o que antes consideravam como justificado.

Colocaram a seguinte questão:

Porquê?

Procurava-se desta forma determinar a justificação para certos fenómenos e responder a questões que até àquele momento nem sequer tinham sido colocadas.

Isso começou a ser feito pelos grandes pensadores como por exemplo Tales, por muitos considerado o pai da Matemática, Pitágoras, Aristóteles, entre outros, e depois mais tarde por matemáticos, tais como Euclides, Arquimedes, Apolónio, Eudoxus, etc...

2.4 Pitágoras de Samos

Não se sabe com exactidão a data de nascimento e a data de morte de Pitágoras (figura 2.2, extraída de [38]).

Estima-se que tenha nascido por volta do ano 570 a.C. em Samos, uma ilha grega no Mar Egeu onde viveu com a família até à sua adolescência.

Dotado de uma inteligência acima da média, é enviado ainda jovem para Mileto, outra cidade grega, para ser ensinado por Tales, considerado na altura o maior dos sábios.

Mais tarde viajou por vários países - Pérsia, Síria, Arábia, Índia e Egipto, entre outros - com o intuito de conhecer mais sobre as suas religiões e ciências.

Permaneceu no Egipto por mais de 20 anos, onde foi discípulo do sacerdote Sonchi e onde aprendeu os princípios daquilo que mais tarde viria a ensinar como sendo a sua doutrina.

De regresso à Grécia, quis fundar na sua terra natal uma escola para ensinar essa doutrina, mas o desentendimento entre ele e Polícrates - tirano que regia Samos na altura - fez com que não o pudesse concretizar. Foi então estabelecer-se em Crotona, cidade do sul de Itália, onde fundou aquilo que muitos chamaram de seita filosófico-religiosa, mas que se tratava nada mais que uma escola onde ensinava, entre outras coisas, Matemática, Religião, Música e Moral.

Essa escola, denominada Pitagórica, criou uma comunidade com os mesmos ideais políticos, filosóficos e religiosos, que veio a ter muita influência no panorama romano em geral, tentando alterar especialmente a instrução dos jovens e o papel da mulher na sociedade.

Pitágoras ficou então considerado um pensador dos mais influentes e famosos da altura.

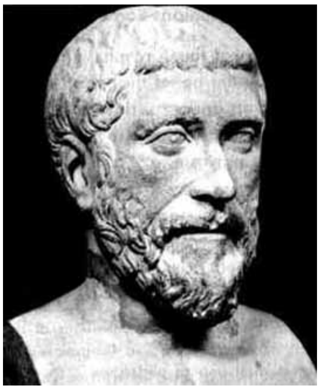


Figura 2.2: Pitágoras

A escola manteve-se aberta até a cidade entrar em guerra com outra cidade vizinha - Síbaris - mas após Crotona ter ganho, muitas das famílias nobres de onde provinha grande parte dos alunos de Pitágoras, foram mandadas mudar de cidade pelos governantes, e isso fez com que a escola fechasse de vez.

Após o seu encerramento, Pitágoras optou por exilar-se em Metaponto, outra cidade do sul de Itália, onde permaneceu até à data da sua morte, cerca do ano 490 a.C., também esta incerta.

Pensa-se que foi Pitágoras o primeiro a usar a palavra "matemática"e definiu-a como sendo um pensamento baseado em provas dedutivas, pois não há provas que antes de si alguém tenha praticado este tipo de raciocínio.

Por esta razão é que ele foi considerado o primeiro matemático puro, e deve-se a ele a constituição da matemática como uma ciência.

Atribuíram-se a Pitágoras muitas descobertas e invenções, tais como

- a invenção da "tábua de multiplicação"e do "sistema decimal";
- a invenção das "proporções aritméticas", "geométricas"e "harmónicas";
- a descoberta de várias propriedades dos poliedros regulares.

Pitágoras e os seus alunos da Escola Pitagórica começaram por estudar aquilo que ele considerava ser a essência da Matemática - *O Número* - mas também se dedicaram a construções de sólidos tais como do tetraedro, octaedro, dodecaedro, à secção áurea, entre outras coisas.

Mas o que realmente faz distinguir Pitágoras dos outros matemáticos foi a demonstração do que mais tarde ficou conhecido com o seu nome, o Teorema de Pitágoras.

Capítulo 3

O Teorema de Pitágoras

Pitágoras foi o primeiro a demonstrar o Teorema, mas não foi o primeiro a utilizar esse resultado.

Há provas de que já era conhecido e aplicado pelos Babilónios e por outros povos séculos antes, mas não existe informação de que tenham realizado a sua prova.

Nesta secção vamos apresentar algumas demonstrações para o Teorema de Pitágoras - incluindo aquela que se pensa ser a usada por Pitágoras - mas antes é necessário apresentar algumas definições e propriedades que estão presentes ao longo deste Capítulo, necessárias para a compreensão de tais demonstrações.

3.1 Definições principais

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas matemáticos mais conhecidos, ganhando esse título a outros tais como os de Cauchy, Bolzano ou Taylor entre outros. Este facto pode ser atribuído à simplicidade e o facto de que é de fácil aplicação, de tal forma que faz parte dos conteúdos programáticos do 3° Ciclo do Ensino Básico, como se verá no Capítulo 6.

Este resultado só ficou assim conhecido como “teorema”, devido a Euclides, pois foi ele o primeiro a introduzir este tipo de nomenclatura[1].

Como tal, deve ser enunciado, mas antes devem-se introduzir os conceitos matemáticos usados, tendo em conta uma futura aplicação, no Capítulo 6, e tendo também em particular atenção os seus destinatários.

Definição 3.1.1 (Triângulo) *Um triângulo é um polígono com três lados, segmentos de recta que unem três pontos não colineares, denominados por vértices dos triângulo (Figura 3.1).*

Proposição 3.1.1 *O comprimento de cada um dos lados de um triângulo é sempre igual ou inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, isto é, dado um triângulo cujos lados têm de comprimentos a, b e c, tem-se que*

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b.$$

[1] “Teorema”é um termo que foi introduzido por Euclides na sua obra “Elementos”, e refere-se a algo que pode ser provado, demonstrado. Esta nomenclatura só aparece cerca de dois séculos depois de Pitágoras viver.

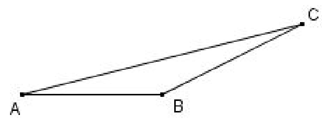


Figura 3.1: Triângulo

Proposição 3.1.2 *Num triângulo, a soma dos seus três ângulos internos perfaz* 180°.

Proposição 3.1.3 *Dois triângulos são equivalentes quando:*

- *Têm dois lados iguais e o ângulo por eles formado também o é.*
- *Têm dois ângulos adjacentes e um lado respectivamente iguais.*
- *Têm os três lados respectivamente iguais.*

Um triângulo pode ser classificado segundo os seus ângulos ou os seus lados.

Definição 3.1.2 (Classificação de um triângulo quanto aos lados) *Quanto aos seus lados, um triângulo (figura 3.2) pode ser:*

- *equilátero, quando tem todos os lados iguais;*
- *isósceles, quanto tem somente dois lados iguais;*
- *escaleno, quando o comprimento dos seus lados são todos diferentes.*

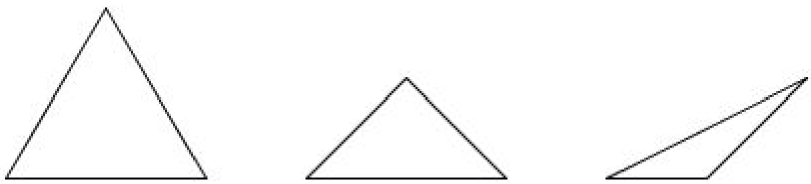


Figura 3.2: Classificação dos triângulos quanto aos lados

Como se pode ver na figura 3.2, da esquerda para a direita, tem-se o triângulo equilátero, isósceles e escaleno.

Em particular, quando um triângulo é equilátero, tem todos os ângulos também iguais, cada um de 60°.

Definição 3.1.3 (Classificação de um triângulo quanto aos ângulos) *Quanto aos seus ângulos, um triângulo (figura 3.3) pode ser:*

- *acutângulo, quando tem todos os ângulos agudos;*
- *rectângulo, quando tem um ângulo recto;*
- *obtusângulo, quando tem um ângulo obtuso.*

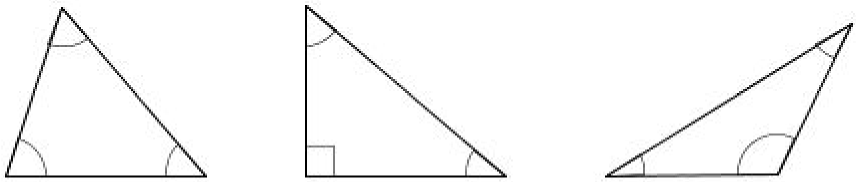


Figura 3.3: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Como se pode ver na figura 3.3, da esquerda para a direita, tem-se o triângulo acutângulo, rectângulo, obtusângulo.

Definição 3.1.4 (Triângulos Semelhantes) *Dois triângulos dizem-se semelhantes se e só se todos os seus ângulos forem iguais.*

Para se provar que dois triângulos são semelhantes existem três critérios, que se apresentam de seguida.

Critério LLL - Lado Lado Lado Se todos os lados de um triângulo T_1 são semelhantes aos lados de outro triângulo T_2, então T_1 e T_2 são semelhantes.

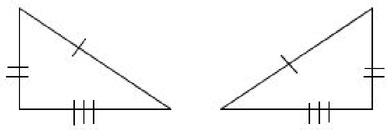


Figura 3.4: Triângulos semelhantes segundo o critério LLL

Critério LAL - Lado Ângulo Lado Se dois lados adjacentes de um triângulo T_1 são semelhantes a dois lados adjacentes de outro triângulo T_2, e os ângulos formados nos dois triângulos entre esses lados também forem iguais, então T_1 e T_2 são semelhantes.

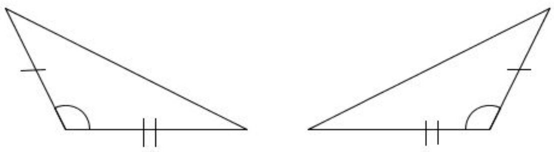


Figura 3.5: Triângulos semelhantes segundo o critério LAL

Critério ALA - Ângulo Lado Ângulo Se um lado de um triângulo T_1 é semelhante a um lado de outro triângulo T_2, e os ângulos adjacentes a esse lado forem iguais nos dois triângulos, então T_1 e T_2 são semelhantes.

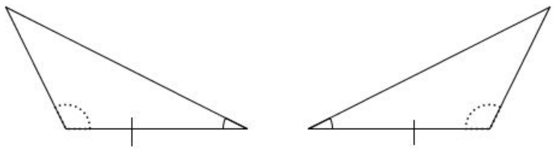


Figura 3.6: Triângulos semelhantes segundo o critério ALA

Prova 1 (Unicidade do ângulo recto) *Pela Proposição 3.1.2, num triângulo a soma dos seus ângulos internos perfaz* $180°$*.*

Havendo um ângulo recto, sobraria para os dois outros ângulos

$$180° - 90° = 90°.$$

Ora se houvesse outro ângulo com $90°$*, implicaria que o terceiro ângulo do triângulo teria que ter de amplitude* $0°$*, o que implicaria que não iria existir o polígono.*

A este tipo particular de triângulos são atribuídos nomes específicos aos seus lados: cateto e hipotenusa[2].

Definição 3.1.5 *Num triângulo rectângulo, os lados adjacentes do ângulo recto são denominados por catetos e o lado oposto a esse ângulo por hipotenusa (figura 3.7).*

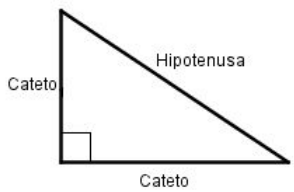


Figura 3.7: Triângulo rectângulo, com cateto e hipotenusa

Agora, depois de apresentadas as definições principais, pode-se enunciar a relação sob a forma de Teorema, tal como Pitágoras a enunciou

Teorema 3.1.1 (Teorema de Pitágoras - Formulação Original) *"Um triângulo tem um ângulo recto se e só se a área do quadrado no lado oposto a esse ângulo for igual à soma das áreas dos quadrados dos outros lados."*

Embora seja este o enunciado original, actualmente não é desta forma que ele é enunciado. Em busca de uma simplificação, ele passou a ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.1.2 (Teorema de Pitágoras) *Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*[3]*.*

No Capítulo 6 iremos falar no porquê desta alteração.

[2] *A palavra "cateto"provém da palavra grega "kathetos", que significa perpendicular, e "hipotenusa"do grego "upoteinousa", que significa a linha que subtende ou sustém.*

[3] Conforme enunciado em [22].

3.2 A possível demonstração de Pitágoras

Não se sabe exactamente qual o método que Pitágoras utilizou para demonstrar o resultado.

Este Teorema afirma que num triângulo rectângulo

$$cateto_1^2 + cateto_2^2 = hipotenusa^2$$

ou então, num triângulo de hipotenusa c e catetos a e b, que $a^2 + b^2 = c^2$.

Conhecido o valor da hipotenusa c, pode-se afirmar que c^2 corresponde à área do quadrado cujos lados têm esse comprimento. Podemos pensar da mesma forma para os valores de a e b.

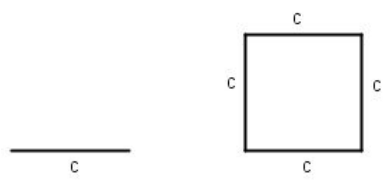


Figura 3.8: Segmento de comprimento c e quadrado de lado c

Com o objectivo de provar visualmente o Teorema, pensa-se que Pitágoras a aplicou ao triângulo de catetos 3 e 4 unidades, e 5 unidades de hipotenusa.

Demonstração 3.2.1 (Demonstração de visual de Pitágoras) *Após a construção do triângulo rectângulo, constroem-se quadrados sobre os seus lados (figura 3.9).*

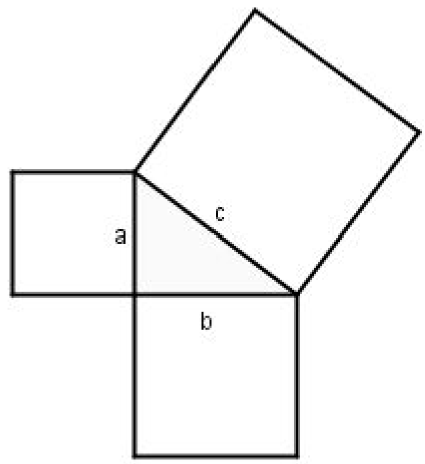


Figura 3.9: Quadrados construídos sobre os lados do triângulo

Calculem-se as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo:

- $A_a = 3 \times 3 = 9$
- $A_b = 4 \times 4 = 16$
- $A_c = 5 \times 5 = 25$

Para ser de mais fácil compreensão, dividem-se os quadrados em quadrados menores, cada um com uma unidade de área, como se pode ver na figura 3.10.

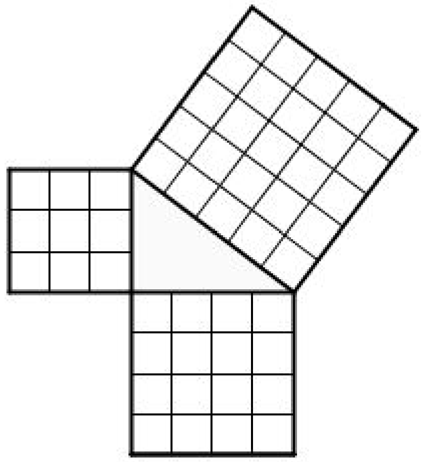


Figura 3.10: Quadrados divididos em quadrados.

É fácil de ver que

$$\begin{aligned} A_a + A_b &= 9 + 16 \\ &= 25 \\ &= A_c \end{aligned}$$

provando-se assim que a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa.

Trata-se de uma demonstração bastante rápida de mostrar, que, juntamente com a sua componente visual, a torna a prova que mais se aplica para ensinar e mostrar aos alunos das nossas Escolas a veracidade de tal enunciado, pela sua simplicidade.

3.2.1 A demonstração analítica de Pitágoras

Com a demonstração visual que se apresentou no ponto anterior consegue-se verificar a relação afirmada por Pitágoras, mas era necessário provar que tal relação é válida para todo e qualquer triângulo rectângulo, e não só para este caso específico.

De seguida apresenta-se aquela que se pensa ter sido a demonstração analítica com que Pitágoras conseguiu provar o seu teorema.

Esta demonstração encontra-se no *Chou Pei Suan Ching*[4], um texto clássico chinês escrito antes do nascimento de Cristo, onde se fez uma compilação de vários problemas matemáticos.

Esta demonstração do Teorema de Pitágoras baseia-se unicamente em duas imagens: 2 quadrados de lado $a + b$ - figuras 3.11 e 3.14 - em que cada um tem 4 triângulos iguais, dispostos de formas diferentes.

[4] A tradução literal é "O Clássico de Aritmética do Gnômon e das Trajetórias Circulares do Céu" e é datado como anterior ao terceiro século a.C.

Consegue-se fazer esta demonstração visualmente, fazendo deslizar os triângulos - figuras 3.12 e 3.13 - mostrando assim que a área dos dois quadrados a branco na primeira imagem da sequência é igual à área do quadrado a branco na última imagem da sequência.

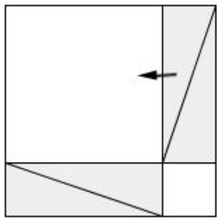


Figura 3.11: Chou Pei Suan Ching - 01

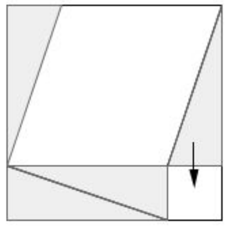


Figura 3.12: Chou Pei Suan Ching - 02

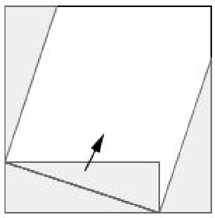


Figura 3.13: Chou Pei Suan Ching - 03

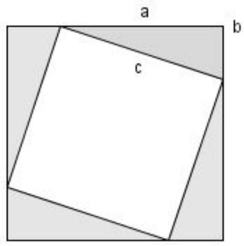


Figura 3.14: Chou Pei Suan Ching - 04

As figuras 3.16 e 3.18 ajudam a uma melhor compreensão da demonstração.

Considerem-se dois quadrados iguais, de lado $a + b$ - figuras 3.16 e 3.18 - onde a e b correspondem às medidas dos catetos dos triângulos de hipotenusa c, como se pode verificar nas figuras 3.15 e 3.17.

Pode-se afirmar que as suas áreas são iguais, assim como as áreas dos vários triângulos contidos nos quadrados.

A área de cada um desses triângulos é

$$A_{\triangle} = \frac{a \times b}{2}.$$

A área do quadrado da figura 3.15 é

$$A_{\square_1} = 4 \times \frac{a \times b}{2} + a^2 + b^2.$$

onde a^2 é a área do quadrado de lado a e b^2 é a área do quadrado de lado b.

Da mesma forma, pode-se afirmar que a área do quadrado da figura 3.16 é

$$A_{\square_2} = 4 \times \frac{a \times b}{2} + c^2.$$

onde c^2 é a área do quadrado de lado c.

Como os quadrados são iguais, então

$$\begin{aligned} A_{\square_1} &= A_{\square_2} \\ \Leftrightarrow 4 \times \frac{a+b}{2} + a^2 + b^2 &= 4 \times \frac{a+b}{2} + c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

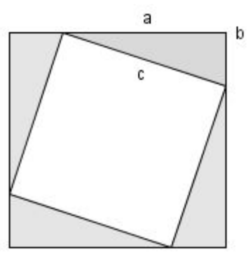


Figura 3.15: Chou Pei Suan Ching - *i*

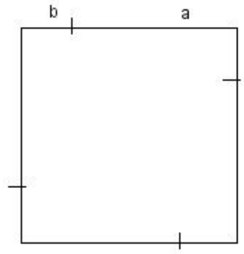


Figura 3.16: Chou Pei Suan Ching - *ii*

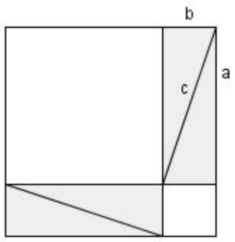


Figura 3.17: Chou Pei Suan Ching - *iii*

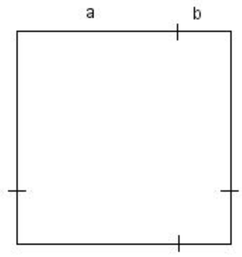


Figura 3.18: Chou Pei Suan Ching - *iv*

Isto é, num triângulo rectângulo, a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

3.3 Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

Nesta secção vamos apresentar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Devemos ainda salientar que existem publicações que contêm centenas de demonstrações para este resultado.

Uma dessas publicações, e provavelmente a mais conhecida é o livro "The Pythagorean Proposition", [16], escrito por Elisha Scott Loomis, (1852 – 1940), publicado em 1940 e reeditado em 1968, que apresenta mais de 300 demonstrações deste Teorema. Outras demonstrações foram descobertas depois.

Loomis dividiu as demonstrações em 4 tipos:

- Demonstrações algébricas (baseadas em relações algébricas);
- Demonstrações geométricas (baseadas na comparação de áreas);
- Demonstrações quaterniónicas (baseadas em operações com vectores);
- Demonstrações dinâmicas (baseadas em massa e velocidade).

Elisha Scott Loomis, , natural de Ohio, E.U.A., tornou-se professor em 1873. Ocupou alguns cargos de director de algumas escolas e da Baldwin University. Entre várias obras escritas sobressai o livro "O Teorema de Pitágoras", onde estão reunidas 370 provas deste teorema.

Também no sítio www.cut-the-knot.org estão reunidas 93 provas deste Teorema.

Como estas, existem muitas outras compilações de demonstrações do Teorema de Pitágoras.

3.3.1 A demonstração de Euclides

Euclides de Alexandria (figura 3.19, retirada de [40]) (360 a.C. -295 a.C.), é um dos matemáticos mais conhecidos, especialmente pelo seu trabalho desenvolvido na área da Geometria, de tal forma que muitos o apelidam de "Pai da Geometria".

Figura 3.19: Euclides.

Euclides escreveu "Os Elementos", uma obra composta por 13 livros, onde compilou definições, axiomas, teoremas e proposições sobre Geometria no Plano (6 livros), Teoria dos Números (3 livros), Incomensuráveis (1 livro) e Geometria no Espaço (3 livros), e foi considerada durante muitos séculos o manual para o ensino da Matemática. Euclides enuncia o Teorema de Pitágoras na Proposição 47 do Livro I:

> Em triângulos rectângulos, o quadrado no lado oposto ao ângulo recto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo recto.

Vamos de seguida apresentar duas demonstrações de Euclides, bastante distintas entre si e presentes nos "Elementos". Antes é necessário enunciar as Proposições 36 e 41 do livro I de "Elementos", imprescindíveis para a compreensão dessas demonstrações.

Proposição 3.3.1 (Proposição 36 Livro I) *Paralelogramos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais.*

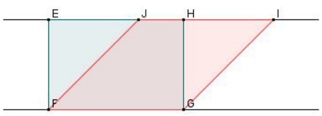


Figura 3.20: Proposição 36 do Livro I de Euclides

Proposição 3.3.2 (Proposição 41 Livro I) *Se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo, e estão nas mesmas paralelas, então a área do paralelo é o dobro da área do triângulo.*

Vamos ainda enunciar um resultado que é utilizado numa das demonstrações que a seguir apresentamos.

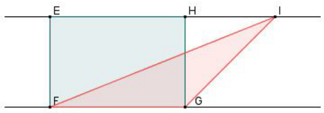
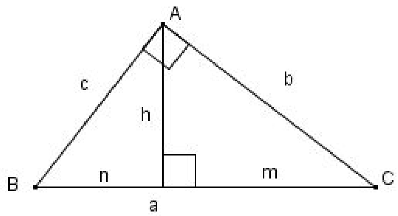


Figura 3.21: Proposição 41 do Livro I de Euclides

Teorema 3.3.1 (Teorema das Alturas) *Num triângulo rectângulo, a altura correspondente à hipotenusa divide este em dois triângulos semelhantes do seguinte modo, onde se te*



$$\begin{aligned} \frac{h}{n} &= \frac{m}{h} \\ h^2 &= mn \\ h &= \sqrt{mn} \end{aligned}$$

A primeira demonstração que se vai mostrar é a Proposição 31 do Livro VI.

Demonstração dos Triângulos Semelhantes

Consideremos um triângulo rectângulo de catetos a, b e hipotenusa c.

Dividindo-se esse triângulo recorrendo ao Teorema das Alturas obtemos dois triângulos rectos, de acordo com a figura 3.22.

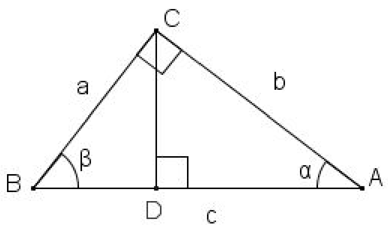


Figura 3.22: Teorema das Alturas.

Podemos assim afirmar que todos os triângulos são semelhantes.

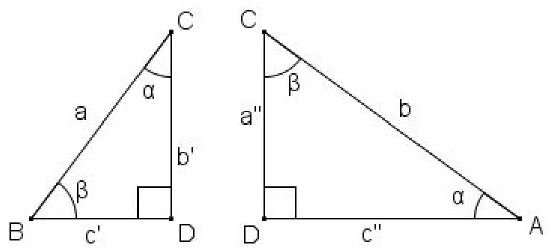


Figura 3.23: Triângulos resultantes da divisão.

Considerem-se os ângulos α em A e β em B.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e o ângulo em C é de 90°, tem-se que

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Pode-se observar que nos três triângulos, o cateto menor é sempre o lado oposto ao ângulo α e o cateto maior é o oposto ao ângulo β.

Recorrendo ao facto de que os triângulos são semelhantes, e

- Comparando o triângulo ABC com o triângulo ACD, obtém-se

$$\frac{\text{cateto maior}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{c''}{b}, \text{ portanto } b^2 = cc'';$$

- Comparando o triângulo ABC com o triângulo BCD, obtém-se

$$\frac{\text{lado menor}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{c'}{a}, \text{ portanto } a^2 = c'.$$

Pode-se então afirmar que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= cc' + c'' \\ &= c\left(c' + c''\right) \\ &= c \times c \\ &= c^2, \end{aligned}$$

pois como se pode ver na figura 3.22, $c' + c'' = c$, o que demonstra o resultado.

Demonstração "A Cadeira da Noiva"

Esta demonstração é das mais difíceis de se verificar visualmente, e já lhe foram atribuídos os nomes de "Capelo Franciscano"ou "Cadeira da Noiva"(figura 3.24 retirada de [7]), pois lembra a cadeira em que as noivas orientais eram transportadas nas costas de um escravo para o casamento.

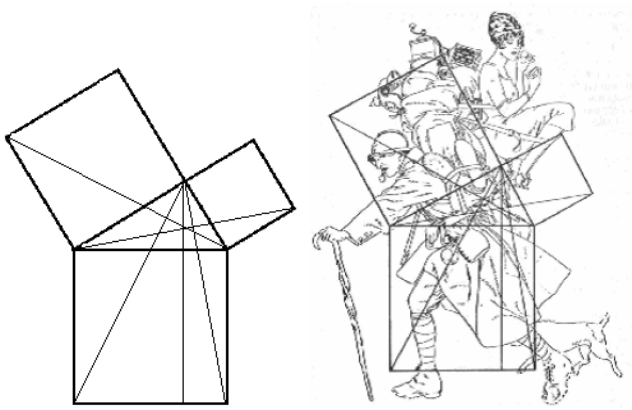


Figura 3.24: A cadeira da Noiva.

Consideremos o triângulo ABC recto em B, e os quadrados que se traçaram sobre os lados deste triângulo, como se vê na figura 3.25.

As áreas dos quadrados traçados são dadas por

- $A_{\square ABDE} = c^2$;
- $A_{\square ACFG} = b^2$;
- $A_{\square BCIH} = a^2$.

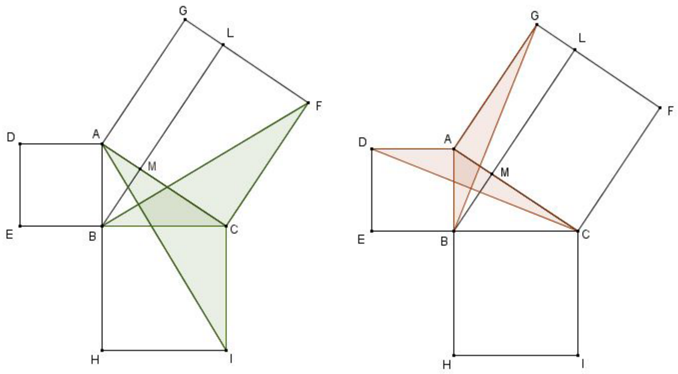


Figura 3.25: Demonstração de Euclides - i

É fácil de ver que

- os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle ADC$ são semelhantes, pois $AC = AG$, $AB = AD$ e partilham o ângulo em A.;
- os triângulos $\triangle ACI$ e $\triangle BCF$ são semelhantes, pois $BC = CI$, $AC = CF$ e partilham o ângulo em C.

Considere-se o segmento de recta BL paralelo a AG, tal que o ponto L pertença ao lado do quadrado oposto ao ângulo recto, e M o ponto onde esse segmento intersecta AC.

Tem-se que

$$A_{\triangle ABG} = \frac{AG \times GL}{2} = \frac{1}{2} A_{CMLF}.$$

pelas proposições 3.3.1 e 3.3.2.

Como os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle ADC$ são iguais, tem-se que

$$A_{\triangle ABG} + A_{\triangle ADC} = A_{AMLG}.$$

De igual modo se consegue provar que

$$A_{\triangle ACI} + A_{\triangle BCF} = A_{CMLF}.$$

Da mesma forma, e de novo pela proposição 3.3.2, podemos afirmar que

$$A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} A_{\square ABED} \text{ e que } A_{\triangle ACI} = \frac{1}{2} A_{\square BCIH},$$

pois existem as paralelas AD e BE que limitam tanto o triângulo $\triangle ADC$ como o quadrado $\square ABED$. assim como as paralelas AH e CI que limitam tanto o triângulo $\triangle ACI$ como o quadrado $\square BCIH$.

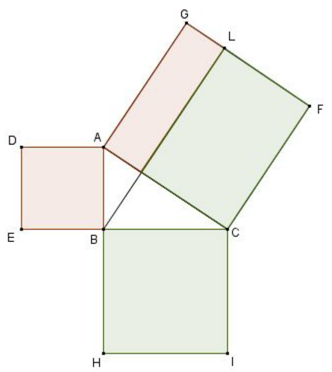


Figura 3.26: Demonstração de Euclides - *ii*

Tem-se então que

$$A_{\square ABED} = A_{AMLG} \text{ e que } A_{\square BCIH} = A_{CMLF}.$$

Ou seja, provou-se assim que a soma das áreas do quadrados menores é igual à àrea do quadrado maior.

3.3.2 A demonstração de Michael Hardy

Embora se tenha procurado, nada foi encontrado sobre Michael Hardy, à excepção de que pertenceria à Universidade de Toledo, Ohio.

Traça-se o triângulo ABC, recto em C, sobre uma circunferência de centro em B e raio c (figura 3.27).

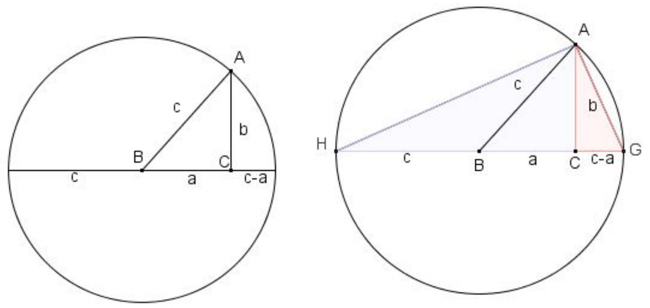


Figura 3.27: Demonstração de Michael Hardy.s

Traçam-se os triângulos AGH e ACG.

Pode-se afirmar pelo Teorema 3.3.1, o Teorema das Alturas, que os triângulos ACG e AGH são semelhantes.

Então tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{HC}{CA} &= \frac{CA}{CG} \\
\Leftrightarrow \frac{c+a}{b} &= \frac{b}{c-a} \\
\Leftrightarrow b^2 &= (c+a)(c-a) \\
\Leftrightarrow b^2 &= c^2 - a^2 \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}$$

Isto é, num triângulo rectângulo, a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

3.3.3 A demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo di ser Piero da Vinci $(1452-1519)$, figura 3.28 retirada de [39], nasceu perto de Florença, Itália.

Figura 3.28: Auto-Retrato de Leonardo da Vinci.

Os seus dotes de artista cedo se revelaram e tornou-se aprendiz do mestre Andrea del Verrocchio.

Homem dos mil ofícios, da Vinci não pode pode ser definido por uma única profissão. Foi artista de várias artes, arquitecto, matemático, engenheiro, inventor, entre outras...

Das entre as suas obras, todos conhecem a Mona Lisa ou A Última Ceia. Entre as mais notáveis encontra-se um esboço de um aparelho voador, semelhante ao helicóptero, que o levaram a ser considerado um visionário.

Mais se falará sobre da Vinci no Capítulo 5.

A demonstração de Leonardo da Vinci é uma das mais conhecidas, provavelmente não por si própria mas sim por ter sido elaborada por ele, considerado o maior e mais completo génio e artista de todos os tempos.

À primeira vista, a imagem a partir da qual Leonardo da Vinci fez a sua demonstração não parece ser das mais directas.

A sua explicação deriva do facto dos quadriláteros $DEFG$, $GCAD$, $BAJI$ e $IHCB$ serem todos congruentes (figura 3.29).
Mas como se prova que são realmente congruentes?

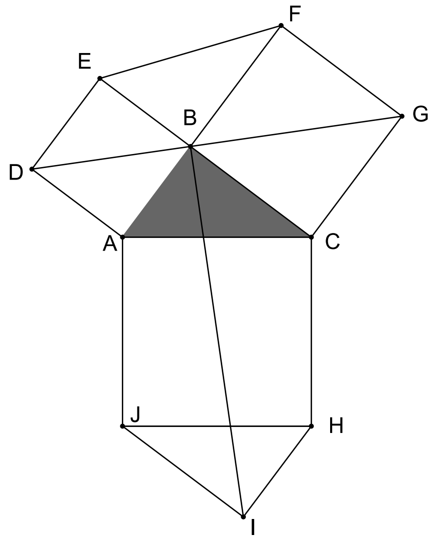


Figura 3.29: Demonstração de da Vinci.

- Considere-se o triângulo ABC, cujo cateto AB tem de medida a unidades, o cateto BC tem de medida b unidades e hipotenusa AC com medida c unidades.

- Os segmentos AD, DE, EB e AB têm de comprimento a, visto serem os lados do quadrado $ADEB$;

- Os segmentos BF, FG, GC e BC têm de medida b, visto serem os lados do quadrado $BCGF$;

- Os segmentos AC, CH, JH e AJ têm de medida c, visto serem os lados do quadrado $ACHJ$;

- Os triângulos ABC e EBF são congruentes, pois têm dois lados de igual medida e o ângulo por eles formado é igual (são ambos rectos).

  Desta forma conclui-se que os quadriláteros $DEFG$ e $GCAD$ são iguais, visto que $AD = DE = a$, $FG = GC = b$ e $EF = AC = c$, e também o segmento de recta DG é comum aos dois quadriláteros e por isso pode-se considerar como sendo um eixo de simetria. Pode-se também considerar que o quadrilátero $BAJI$ é uma rotação do quadrilátero $GCAD$, de amplitude $90°$ em torno do ponto A no sentido dos ponteiros do relógio. Logo, $BAJI$ e $GCAD$ são congruentes, e como $AD = AB = a$ e $AC = CH = c$, então $JI = CG = b$.

- Da mesma forma, pode-se ver o quadrilátero $BCHI$ como sendo o resultado de uma rotação do quadrilátero $GCHD$, também de $90°$, em torno do ponto C, no sentido anti-horário, onde é fácil de ver que $GC = BC = b$ e $AC = CH = c$. Assim, conclui-se que os quadriláteros $BCHI$ e $GCHD$ são congruentes, de onde se retira que $HI = DA = a$.

  Mas então, por transitividade, tem-se que

$$BAJI = GCAD = BCHI = DEFG$$

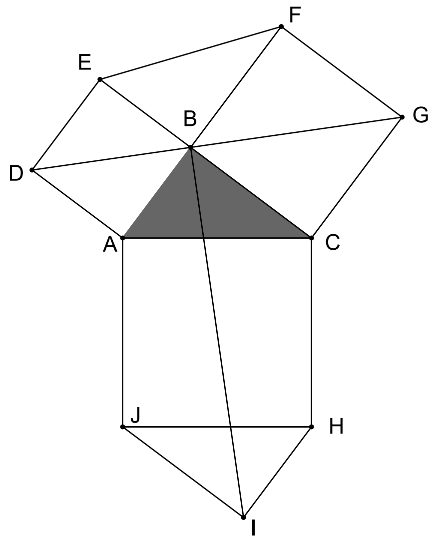
isto é, os quadriláteros são todos congruentes, e isso implica a congruência dos hexágonos $ABCHIJ$ e $ADEFGC$.

- Após se chegar a esta conclusão, pode-se concluir que a área do hexágono $ADEFGC$ (que é a soma das áreas dos quadrados $ADEB$ e $FGCB$, com as áreas dos triângulos ABC e EBF) é igual à área do hexágono $ABCHIJ$ (que é a soma das áreas do quadrado $ACJH$ com a dos triângulos ABC e HIJ).

  E como $JH = AC = c$, $JI = CG = BC = b$ e $HI = DA = AB = a$, também se pode afirmar que o triângulo HIJ é congruente com o triângulo ABC, que é congruente também com o triângulo EFB.

  Então

$$\begin{aligned} A_{ABCHIJ} &= A_{ADEFGC} \\ A_{ADEB} + A_{FGCB} + A_{ABC} + A_{EBF} &= A_{ACJH} + A_{ABC} + A_{HIJ} \end{aligned}$$



- Como os triângulos ABC, EFB e HIJ são congruentes, então tem-se que

$$A_{ADEB} + A_{FGCB} = A_{ACJH}$$

  donde resulta que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

de onde se consegue facilmente ver que, no triângulo ABC, a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

3.3.4 A demonstração de Henry Perigal

Henry Perigal (1801-1898) foi um livreiro em Londres, Inglaterra. Era um matemático amador que ficou conhecido nesta área por ter publicado em 1873 uma demonstração visual do Teorema de Pitágoras, reconhecida pela sua simplicidade e por ser tão prática.

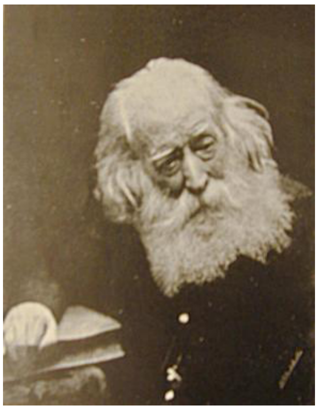


Figura 3.30: Henry Perigal.

A demonstração por ele apresentada encontra-se gravada na sua lápide.

Henry Perigal procedeu do seguinte modo: traçam-se os quadrados sobre os lados do triângulo rectângulo em C (figura 3.31).

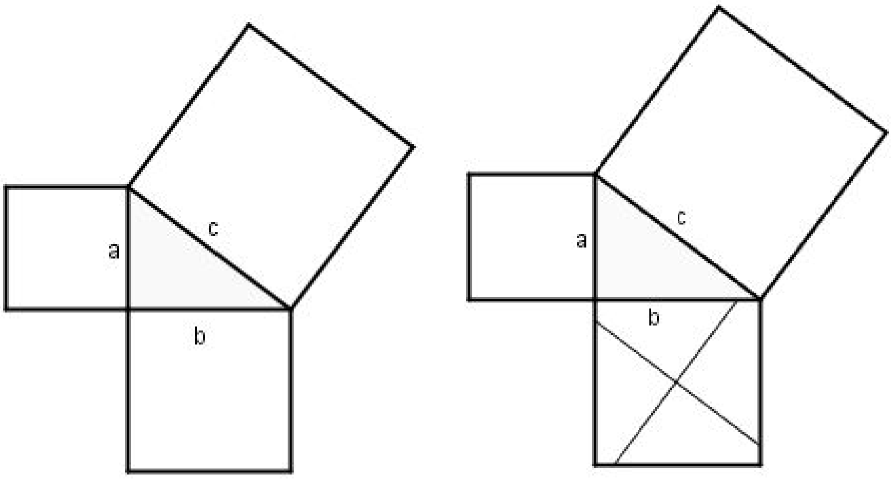


Figura 3.31: Demonstração de Henry Perigal - *i*.

De seguida, marca-se o centro do quadrado sobre o cateto b.

Traça-se um segmento paralelo a c que passe por esse centro, e de seguida traça-se um segmento perpendicular ao primeiro.

Desta forma, dividiu-se o quadrado de lado b em 4 partes iguais (figura 3.31).

Marcam-se os pontos médios dos lados do quadrado sobre a hipotenusa, e traçam-se segmentos paralelos aos catetos do triângulo, dois a dois.

O quadrado fica dividido em 5 partes, sendo 4 delas iguais, e a central um quadrado (figura 3.32).

Ou seja, como se consegue provar que as 5 partes em que foi dividido o quadrado maior são iguais às figuras em que foi dividido o quadrado mediano mais o quadrado menor, prova-se que as suas áreas são iguais, provando assim o Teorema de Pitágoras.

É esta simplicidade e similaridade a uma brincadeira, parecido com o Tangran, que

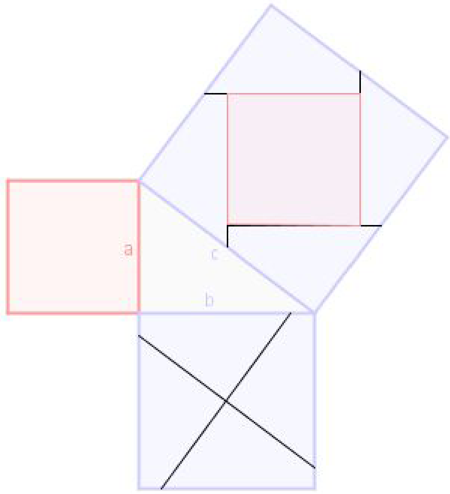


Figura 3.32: Demonstração de Henry Perigal - *ii*.

faz com que ela seja muitas apresentada em forma de jogo didáctico a crianças em idade pré-escolar.

3.3.5 A demonstração de James Garfield

James Abram Garfield (1831-1881), é mais conhecido por ter sido o vigésimo presidente dos Estados Unidos da América (e o segundo a ser assassinado).

Figura 3.33: James Garfield.

O Presidente Garfield (figura 3.33 retirada de [42]) esteve no cargo por apenas quatro meses, quando foi baleado e ferido mortalmente a 2 de Julho de 1881 por Charles Julius Guiteau, acabando por morrer a 19 de Setembro desse mesmo ano. Exerceu o cargo de Presidente durante seis meses e quinze dias. Era um entusiasta pela Matemática, e em 1876 demonstrou o Teorema de Pitágoras para os seus colegas do Congresso dos Estados Unidos. Esta demonstração foi publicada em "The New England Journal of Education", Volume 3, Boston, 1876, p. 161, uma revista direccionada para a Educação e o Ensino, [4].

Na demonstração, Garfield recorre a um trapézio de base maior b, base menor a e altura $a+b$.

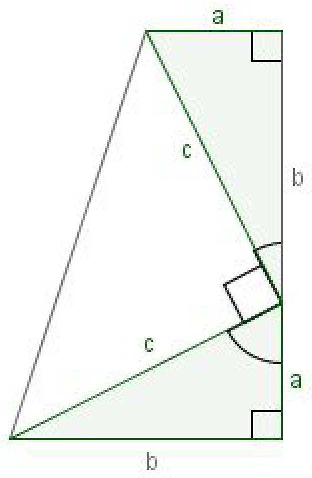


Figura 3.34: Demonstração de Garfield.

Este trapézio pode ser dividido em três triângulos rectângulos (figura 3.34).

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, Garfield calculou a área do trapézio de dois modos diferentes, e igualando-as no final, concluindo que se obtém a igualdade do Teorema de Pitágoras.

A área deste polígono pode ser calculada aplicando a fórmula do cálculo da sua área, mas também pode ser calculada recorrendo à decomposição do polígono inicial em três triângulos, e calculando a soma das três áreas triangulares.

Então, calculando a área pela fórmula do trapézio, tem-se que

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{base\ maior + base\ menor}{2} \times altura \\ &= \frac{b+a}{2} \times (a+b) \\ &= \frac{(b+a)\times(b+a)}{2} \\ &= \frac{a^2+2ab+b^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Calculando recorrendo à soma das áreas dos triângulos, tem-se que

$$
\begin{aligned}
A_t &= A_{\triangle_1} + A_{\triangle_2} + A_{\triangle_3} \\
&= \frac{base_1 \times altura_1}{2} + \frac{base_2 \times altura_2}{2} + \frac{base_3 \times altura_3}{2} \\
&= \frac{b \times a}{2} + \frac{a \times b}{2} + \frac{c \times c}{2} \\
&= 2 \times \frac{b \times a}{2} + \frac{c^2}{2} \\
&= ba + \frac{c^2}{2}. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Visto que ambos os resultados correspondem à mesma medida, igualando (3.1) e (3.2) tem-se que

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} &= ba + \frac{c^2}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} &= \frac{c^2}{2} \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}
$$

concluindo-se assim que o quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma do quadrado dos catetos.

3.3.6 A demonstração de Mike Staring

Esta demonstração foi desenvolvida por Mike Staring e foi publicada na edição número 69 da *Mathematics Magazine*, uma publicação bimensal da *Mathematical Association of America*.

Staring desenvolveu esta demonstração que faz uso do Cálculo, procedendo do seguinte modo:

Considere-se o triângulo ABC, recto em A.

Fixe-se AB e sejam $AB = b$ e $AC = x$ de tal forma que se BC é uma função da variável x, $f(x)$, como se pode ver na figura 3.35 retirada de [30].

Se AC é incrementado em Δx, então BC é incrementado em Δf.

Considere-se também o triângulo rectângulo $\triangle PCD$ recto em P.

Utilizando a semelhança de triângulos tem-se que

$$
\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{CQ}{CD} > \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CB} = \frac{x}{f(x)}. \qquad (3.3)
$$

Por outro lado, tem-se que

$$
\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{SD}{CD} < \frac{RD}{CD} = \frac{AD}{BD} = \frac{x + \Delta x}{f(x) + \Delta f} < \frac{x}{f(x) + \Delta x}. \qquad (3.4)
$$

Ora

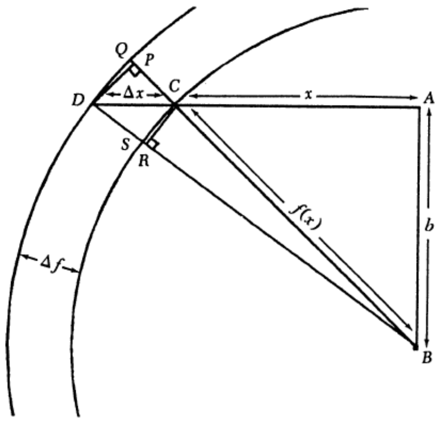


Figura 3.35: Demonstração de Mike Staring

- A segunda igualdade em (3.3) deve-se ao facto de que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PDC$ são semelhantes;
- A segunda desigualdade em (3.4) deve-se ao facto de que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle RCD$ são semelhantes;
- $f(x) + \Delta f > 0$.

E considerando que $\Delta x \to 0^+$, tem-se que

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{f(x)}.$$

Resolvendo a equação diferencial obtemos

$$f^2(x) = x^2 + c,$$

onde c é uma constante.

Então, utilizando a condição inicial $f(x) = b$ para $x = 0$, obtém-se $c = b^2$.

Ou seja,

$$f^2(x) = x^2 + b^2, \tag{3.5}$$

o que significa que o quadrado da hipotenusa do triângulo rectângulo é igual à soma do quadrado dos catetos.

Capítulo 4

Os Ternos Pitagóricos

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados que nos permitem obter Ternos Pitagóricos.

Um dos métodos mais simples consiste em multiplicar um qualquer terno Pitagórico por um número natural e o terno que obtemos ainda é um terno Pitagórico. Outros métodos que vamos apresentar utilizam fórmulas se bem que, alguns dois quais com algumas limitações.

Só muito recentemente é que o problema inverso, isto é, verificar se um terno (a, b, c) com a, b e c naturais, é Pitagórico tem uma solução simples. Isto é devido às tecnologias que temos ao nosso dispor.

Existem inúmeros programas informáticos aos quais podemos recorrer no computador, tais como o GeoGebra, o Cabri Geométre, o Cinderella, Sketchpad, Mathematica, MatLab, ...

Esta tarefa também pode ser facilitada quando se recorre ao uso de uma simples régua e um transferidor.

Mas no tempo de Pitágoras não existiam estas ferramentas de medição e construção geométrica como hoje e muito menos computadores, e portanto a tarefa de provar que um triângulo é rectângulo, independentemente do valor dos seus catetos, era uma tarefa nada fácil de se realizar.

Hoje em dia não faz muita diferença se trabalhamos com catetos com medidas inteiras ou decimais, mas naquela altura, se trabalhar com números inteiros já era complicado, nem sequer se tentava trabalhar com valores não inteiros.

Após a demonstração do Teorema de Pitágoras, surgem os chamados "Ternos Pitagóricos", que se refere ao conjunto de três valores que são as medidas dos lados de um triângulo rectângulo.

Definição 4.0.1 *Um Terno Pitagórico é um conjunto de três números naturais a, b e c tais que $a < b < c$ e que verificam a igualdade do Teorema de Pitágoras, ou seja,*

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

e denota-se por (a, b, c).

Exemplo 4.0.1 *Como exemplo de Ternos Pitagóricos podem-se apresentar os ternos $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ e $(5, 12, 13)$, sendo o primeiro o mais conhecido.*

A expressão “Terno Pitagórico”pode induzir a pensar que os resultados (os ternos) a seguir apresentados foram demonstrados por Pitágoras. No entanto, tal não aconteceu.

Existem referências que datam dos tempos dos Babilónios, que nos levam a crer que este povo reconhecia esta propriedade ao conjunto dos três números inteiros já no segundo milénio antes de Cristo.

Uma desssas provas é a “Tábua de Plimpton”número 322.

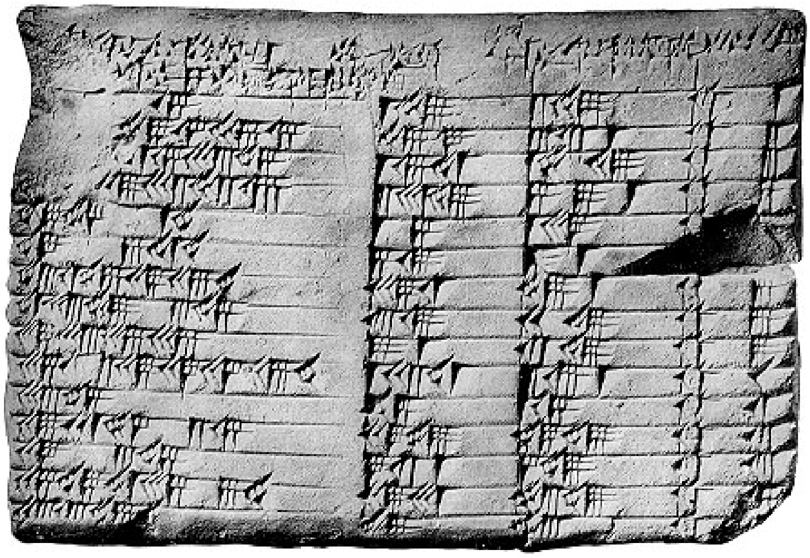


Figura 4.1: Tábua de Plimpton 322

Embora não haja concenso na interpretação do conteúdo desta tábua, uma das hipóteses mais defendida é a que ela apresenta Ternos Pitagóricos. Esta hipótese é defendida particularmente por Otto E. Neugebauer (1899 – 1990), um matemático austríaco-americano que conseguiu decifrar o que a tábua continha escrito.

Esta “tábua”(figura 4.1 retirada de [43]) é uma “placa de argila”onde os Babilónios registavam dados importantes. A utilização da argina pode ser atribuída à ausência de papiro ou então devido à sua durabilidade.

O nome que lhe foi atribuído deve-se a dois factos:

Plimpton por pertencer à colecção privada de George Arthur Plimpton (1855 – 1936), director da Editora Ginn and Company, que coleccionava tudo o que se pudesse relacionar com a descoberta dos conhecimentos, neste caso matemáticos;

O número 322 que lhe foi dado na colecção, número esse que lhe foi atribuído quando G. A. Plimpton a doou à Universidade de Columbia, Nova Iorque.

Não se sabe ao certo quando foi escrita a tábua, mas crê-se que foi na cidade de Larsa, antiga Suméria, pelo ano de 1762 a.C., antes do rei Hammurabi (1810 a.C. - 1750 a.C.) da Babilónia tomar a cidade a Rim-Sin II, rei de toda a Suméria.

Esta tábua foi gravada em escrita cuneiforme, consiste em “picar”a pedra, com o auxílio de cunhas próprias, evidenciando as depressões “escritas”.

Há quem defenda a ideia de que os Babilónios construiram Ternos Pitagóricos (a, b, c) da seguinte forma:

Dados dois naturais m e n, definem-se a, b e c tal que

$$a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2.$$

Então o terno (a, b, c) é Pitagórico.

Esta fórmula foi usada mais tarde e atribuída a um matemático de renome, como se verá mais à frente.

É por isso que se afirma e relaciona esta tábua aos Ternos Pitágóricos, pois pensa-se que nela foram escritos alguns ternos - mesmo antes de terem sido definidos.

4.1 Propriedades dos Ternos Pitagóricos

Estes Ternos satisfazem algumas propriedades que se vão de seguida enunciar.

Há alguns Ternos Pitagóricos particulares, que são aqueles compostos somente por números primos entre si.

Definição 4.1.1 *Um Terno Pitagórico primitivo é um terno constituído por números primos entre si.*

Exemplo 4.1.1 *Como exemplos de Ternos Pitagóricos primitivos podemos apresentar os ternos* $(3, 4, 5)$, $(7, 24, 25)$ *e* $(12, 35, 37)$.

Existem alguns métodos para obter Ternos Pitagóricos.

Dado um Terno Pitagórico (a, b, c) qualquer, é possível obter uma infinidade de Ternos Pitagóricos. Para tal, basta multiplicar esse terno por um número natural k.

Teorema 4.1.1 *Seja* (a, b, c) *um Terno Pitagórico e seja* k *um número natural. Então* (ka, kb, kc) *também é um Terno Pitagórico.*

Demonstração 4.1.1 *Seja* (a, b, c) *um Terno Pitagórico e seja* k *um número real. Como* (a, b, c) *é um Terno Pitagórico, então verifica a condição*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Multiplicando o terno por um qualquer $k \in \mathbb{N}$*, obtém-se*

$$k\,(a, b, c) = (ka, kb, kc)\,.$$

Então

$$\begin{aligned} (ka)^2 + (kb)^2 &= (kc)^2 \\ k^2a^2 + k^2b^2 &= k^2c^2 \\ k^2(a^2 + b^2) &= k^2c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Logo, (ka, kb, kc) *também é Terno Pitagórico.*

■

Exemplo 4.1.2 *Considere-se o Terno Pitagórico* $(3,4,5)$. *Então, consegue-se obter, por exemplo*

- $(6,8,10)$, *multiplicando por* 2;
- $(9,12,15)$, *multiplicando por* 3;
- $(30,40,50)$, *multiplicando por* 10.

Outra forma de determinar mais Ternos é recorrendo a fórmulas.

Uma dessas fórmulas foi descoberta por Pitágoras, e é usada recorrendo a números ímpares.

Proposição 4.1.1 *Seja n um número ímpar tal que $n \geq 3$. Então*

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right)$$

é um Terno Pitagórico.

Demonstração 4.1.2 *Sejam n e $\frac{n^2-1}{2}$ os catetos do triângulo.*

Então,

$$\begin{aligned} n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 &= n^2 + \frac{n^4-2n^2+1}{4} \\ &= \frac{4n^2}{4} + \frac{n^4-2n^2+1}{4} \\ &= \frac{4n^2+n^4-2n^2+1}{4} \\ &= \frac{n^4+2n^2+1}{4} \\ &= \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

onde $\frac{n^2+1}{2}$ representa a hipotenusa do triângulo. Verifica-se assim a igualdade do Teorema de Pitágoras. ■

Exemplo 4.1.3 *Consideremos $n = 5$. Então*

$$\frac{n^2-1}{2} = \frac{5^2-1}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

e

$$\frac{n^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

Facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} 5^2 + 12^2 &= 25 + 144 \\ &= 169 \\ &= 13^2 \end{aligned}$$

Logo, $(5,12,13)$ é um Terno Pitagórico.

Outra forma de obter Ternos Pitagóricos está baseado no seguinte resultado, obtido por Pitágoras,

Teorema 4.1.2 *Seja n um número ímpar maior que 1, m e $m+1$ dois números consecutivos tais*

$$m + (m+1) = n^2.$$

Então $(n, m, m+1)$ é um Terno Pitagórico.

Demonstração 4.1.3 *Sejam m e n os catetos do triângulo. Então,*

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= m^2 + [m + (m+1)] \\ &= m^2 + 2m + 1 \\ &= (m+1)^2, \end{aligned}$$

onde $m+1$ representa a hipotenusa do triângulo.

■

Exemplo 4.1.4 *Veja-se o mesmo exemplo que o anterior. Seja $n = 5$. Então $n^2 = 5^2 = 25$, e como $n^2 = 2m+1$, tem-se que*

$$\begin{aligned} 25 &= 2m + 1 \\ 2m &= 24 \\ m &= 12 \end{aligned}$$

o que implica que $m + 1 = 13$.

Como foi verificado no exemplo 4.1.3, temos que $(5, 12, 13)$ é Terno Pitagórico.

Nota 4.1.1 *É de notar que esta fórmula só funciona se n for ímpar, uma vez que quando n é par, $\frac{n^2-1}{2}$ não é um inteiro.*

Propriedade 4.1.1 *Nos Ternos encontrados a partir desta fórmula, o valor de c - a hipotenusa - é apenas uma unidade superior ao valor de b - o cateto maior.*

Outra fórmula foi descoberta mais tarde, por Platão, onde não existe a limitação da fórmula de Pitágoras, de se poder apenas aplicar a números ímpares.

Proposição 4.1.2 *Seja n um número natural tal que $n \neq 1$. Então o terno*

$$(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$$

é um Terno Pitagórico.

Demonstração 4.1.4 *Sejam $2n$ e $n^2 - 1$ os catetos do triângulo. Então,*

$$\begin{aligned} (2n)^2 + (n^2-1)^2 &= 4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1 \\ &= n^4 + 2n^2 + 1 \\ &= (n^2+1)^2, \end{aligned}$$

onde $n^2 + 1$ representa a hipotenusa do triângulo.

■

Exemplo 4.1.5 *Alguns exemplos de Ternos Pitagóricos encontrados recorrendo-se a esta fórmula são*

- $(8, 15, 17)$ *para* $n = 4$*;*
- $(10, 24, 26)$ *para* $n = 5$*;*
- $(14, 48, 50)$ *para* $n = 7$*.*

Tal como nos Ternos encontrados recorrendo às fórmulas anteriores, também os que se encontram através desta fórmula partilham uma propriedade.

Propriedade 4.1.2 *Nos ternos descobertos através desta fórmula, valor de c - a hipotenusa - é apenas duas unidades maior que o valor de b - o cateto maior.*

Como já foi referido, n pode ser tanto par como ímpar, sendo sempre possível determinar o terno, mas é de notar que o valor menor - o cateto menor - é sempre par.

Comparando as fórmulas anteriores, e tendo em conta as propriedades referidas, podem-se constatar dois factos.

1. Nenhum dos ternos gerados a partir da fórmula de Pitágoras pode ser gerado pela fórmula de Platão;
2. Não se conseguem obter todos os Ternos existentes, em particular, os primitivos.

Foi então que Euclides apresentou um resultado novo,

Proposição 4.1.3 *Sejam* m *e* n *dois números naturais tal que* $m > n$*. Então*

$$\left(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2\right)$$

é um Terno Pitagórico.

Demonstração 4.1.5 *Sejam* $m^2 - n^2$ *e* $2mn$ *os catetos do triângulo. Então,*

$$\begin{aligned} \left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2, \end{aligned}$$

onde $m^2 + n^2$ *representa a hipotenusa do triângulo.* ∎

Através desta fórmula conseguem-se determinar todos os Ternos primitivos, bastando para isso apenas que m e n sejam primos entre si.

Conseguem-se também determinar ternos que podem ser obtidos pelas fórmulas de Pitágoras e Platão.

Exemplo 4.1.6 *Alguns exemplos de Ternos Pitagóricos encontrados recorrendo-se a esta fórmula são*

- $(5, 12, 13)$*, quando* $n = 2$ *e* $m = 3$*,primos entre si;*
- $(16, 30, 36)$*, quando* $n = 3$ *e* $m = 5$*, também primos entre si;*

- $(27, 36, 45)$ - *quando* $n = 3$ *e* $m = 6$, *não primos entre si.*

Existem alguns números que nunca aparecem em nenhum Terno Pitagórico.

Definição 4.1.2 *Chamam-se números antiPitagóricos àqueles números que não constam de nenhum Terno.*

Exemplo 4.1.7 *São números antiPitagóricos os naturais 47 ou 71.*

Existem também números que aparecem em mais que um terno, embora não lhes tivesse sido dado nenhum nome em particular pelo qual possam ser conhecidos.

Exemplo 4.1.8 *O número* 60 *aparece nos ternos* $(11, 60, 61)$, $(60, 91, 109)$ *e* $(60, 221, 229)$, *entre outros.*

4.2 Ternos Mais Importantes

Existem alguns Ternos Pitagórigos aos quais foi dada mais importância ao longo dos tempos, em especial na época do descobrimento do Teorema de Pitágoras. São esses ternos que se vão analisar de seguida.

4.2.1 O Terno $(3, 4, 5)$

O Terno $(3, 4, 5)$ é considerado um dos ternos mais importantes. Para além de ser o "primeiro"de todos (visto que não existe mais nenhum com números inferiores a estes), pensa-se que foi com este que Pitágoras "verificou"o seu Teorema.

Trata-se do único terno que é formado por três números consecutivos, e é chamado de *triângulo nupcial* por alguns.

Este Terno pode ser determinado segundo vários métodos, como se viu na secção 4.1. Ora veja-se.

Pelo Método de Pitágoras Tendo em conta a fórmula

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right)$$

e considerando $n = 3$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left(3, \frac{3^2-1}{2}, \frac{3^2+1}{2}\right) &= \left(3, \frac{8}{2}, \frac{10}{2}\right) \\ &= (3, 4, 5)\,; \end{aligned}$$

Pelo Método de Platão Tendo em conta a fórmula

$$(2n, n^2-1, n^2+1),$$

e considerando $n = 2$, tem-se que

$$\begin{aligned} (2 \times 2, 2^2-1, 2^2+1) &= (4, 3, 5) \\ &= (3, 4, 5); \end{aligned}$$

Pelo Método de Euclides Tendo em conta a fórmula

$$\left(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2\right),$$

e considerando $m = 2$ e $n = 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}\left(2^2 - 1^2, 2 \times 2 \times 1, 2^2 + 1^2\right) &= (4 - 1, 4, 4 + 1) \\ &= (3, 4, 5);\end{aligned}$$

Pelo Método do Quadrado de um Número Ímpar Tendo em conta que

$$n^2 = m + (m + 1)$$

e considerando $n = 3$, tem-se que

$$\begin{aligned}m + (m + 1) &= 3^2 \\ 2m + 1 &= 9 \\ 2m &= 8 \\ m &= 4\end{aligned}$$

obtendo assim $m + 1 = 5$, e, por conseguinte, o terno $(3, 4, 5)$.

Não é só no terno $(3, 4, 5)$ que estes números são importantes.

Eles estão presentes em todos os ternos que se conhecem, pois em todos eles existe um valor, a, b ou c, que é múltiplo de 3, 4 ou 5, atendendo aos seguintes pressupostos:

- exactamente um dos valores a ou b é múltiplo de 3;
- exactamente um dos valores a ou b é múltiplo de 4;
- exactamente um dos valores a, b ou c é múltiplo de 5.

4.2.2 O Terno (1,1,$\sqrt{2}$) e as suas implicações

Outro terno muito importante é o terno (1,1,$\sqrt{2}$).

De facto ele é terno e verifica a igualdade do Teorema.

$$\begin{aligned}1^2 + 1^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 &= 2.\end{aligned}$$

Mas não se pode afirmar que se trata de um Terno Pitagórico, pois não cumpre o critério principal: não se trata de 3 números inteiros.

Mas a sua importância é tanta, que é digno de se fazer referência a este terno e analisá-lo, pelos “problemas- e soluções - que ele trouxe à Matemática.

Os Matemáticos trabalhavam o Teorema de Pitágoras somente com números naturais, mas já se conheciam outros conjuntos numéricos, até ao conjunto dos racionais - aqueles que se escrevem sob a forma de fracção.

Até então, os gregos afirmavam que a recta onde marcavam os números racionais era "ininterrupta".

Admitir que haveria outros números que não o fossem, comprometia tal recta, que não seria como até ali a assumiam, implicava que deixasse de ser contínua e tivesse espaços por ocupar entre os pontos, isto é, deixava de ser recta para ser agora um conjunto de pontos espaçados entre si.

Mas, se esses números existiam de facto, então havia necessidade de os tentar representar, e sobretudo de os definir.

Pensa-se que tal aconteceu quando, ao aplicar o Teorema de Pitágoras a alguns triângulos rectângulos, não conseguiam atribuir um valor natural nem fraccionário à medida da hipotenusa - apesar de estarem convictos de que ele teria que existir.

Um exemplo que mostrava isso era o problema geométrico de Pitágoras do triângulo rectângulo de catetos de uma unidade de medida.

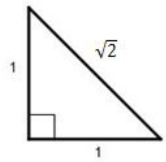


Figura 4.2: Triângulo rectângulo com catetos de lado 1.

Não se pode afirmar com toda a certeza, mas pensa-se que foi um discípulo de Pitágoras que deu os primeiros passos ao encontro da resolução deste problema.

Esse discípulo era Hipaso de Metaponto, nascido cerca do ano 500 a.C. e data da morte incerta, e deparou-se com este problema enquanto resolvia situações matemáticas que a doutrina da Escola Pitagórica defendia que podiam ser resolvidas aplicando o Teorema de Pitágoras.

Esta Escola sustentava a ideia de que tudo podia ser explicado ou até mesmo expresso por números, quando defendiam a teoria de "Tudo é número" - tudo podia ser escrito como número inteiro ou como a razão entre dois.

Sabiam que com o Teorema de Pitágoras conseguiam determinar o valor da hipotenusa de um triângulo.

Sabiam também que, dividindo um quadrado por uma das suas diagonais, se obtinham dois triângulos semelhantes.

Tendo em conta esta suposição, é possível determinar o valor da diagonal de qualquer quadrado.

Foi então que Hipaso decidiu determinar o valor da diagonal de um quadrado que media uma unidade de lado, e se deparou com este problema.

Concluiu que o valor não se tratava de um número inteiro, e não conseguia encontrar dois inteiros cujo quociente correspondesse àquele valor.

Surge assim a polémica.

Hoje sabe-se que o valor obtido é $1,414\ldots$, que se sabe corresponder a $\sqrt{2}$ - uma notação que ainda não tinha sido inventada naquela altura[1] - um número nem natural nem racional que não era nem inteiro nem fraccionário[2].

Era a prova que existiam esses tais números para além dos que diziam existir, que até então não tinham sido tomados em conta e que Hipaso agora defende.

Deu-se-lhes então o nome de *números irracionais*, para os distinguir dos já definidos.

Acredita-se por isso que foi o número $\sqrt{2}$ o primeiro valor a surgir e a ser classificado como irracional, e por isso ficou conhecido como a *Constante de Pitágoras*.

Mas este problema conduziu a outro.

Sabia-se que $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ e por aí em diante, ou seja, conseguia-se definir alguns naturais como sendo o quadrado de outros.

E por isso considerava-se impossível definir certos naturais desta forma, como por exemplo os naturais 5, 6 e 8, embora, por enquadramento, pudessem afirmar que, por exemplo o número 6, se pudesse escrever como sendo o quadrado de um número entre 2 e 3, e que ele teria que existir.

A questão que então se impunha era determinar exactamente esse valor.

Concluí-se que não existiria apenas um número irracional, mas sim um número infinito deles.

Mas afirmar isso seria como que uma "declaração de morte" a toda a doutrina Pitagórica e tudo aquilo que defendiam até então.

Por isso os outros membros defendem que tal informação não deve ser dada a conhecer fora da Escola, e tentaram a todo o custo barrar essa fuga de informação.

Existem várias teorias sobre a morte de Hipaso.

Há quem afirme que morreu afogado, outros que a sua morte por afogamento se deve aos seus colegas que o atiraram propositadamente borda fora do barco onde estavam para que ele não pudesse revelar a sua descoberta. Há também quem defenda que se matou, como que se castigando a si próprio por estar a contrariar tudo aquilo que defendia.

A verdade, essa, não se sabe ao certo.

Foi assim que esta importante descoberta, ironicamente consequência directa do Teorema de Pitágoras - o principal achado da Escola Pitagórica - pôs termo à doutrina defendida, e consequentemente levou à destruição e desaparecimento da Escola.

De seguida apresenta-se uma das várias provas existentes que mostram a irracionalidade do número $\sqrt{2}$, como está presente em [17], recorrendo ao método da redução ao absurdo.

Prova 2 *Considere-se que $\sqrt{2}$ é um número racional, e sejam a e b dois números inteiros, primos entre si.*

Então, por $\sqrt{2}$ ser um número racional pode-se escrever como sendo o quociente entre dois inteiros, ou seja

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Desta forma, obtém-se que

[1] É necessário referir que o símbolo "$\sqrt{\ }$" ainda não era usado na Grécia Antiga. Só apareceu pelo século XVI e pensa-se que a sua forma $\sqrt{x}$ se deve à semelhança com a letra r da palavra *radix*, que em latim significa raiz.

[2] Não se fala de números inteiros mas sim naturais pelo facto de se estar a trabalhar com comprimentos e distâncias, que são sempre valores positivos.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\
\Leftrightarrow a^2 &= 2b^2
\end{aligned}$$

o que implica que a^2 *é par.*

Mas dado que o quadrado de um número ímpar é ímpar também, então isso significa que a é par, ou seja, pode-se escrever como $a = 2m$, *m também um número inteiro.*

Então, substituindo, tem-se que

$$\begin{aligned}
a^2 &= 2b^2 \\
\Leftrightarrow (2m)^2 &= 2b^2 \\
\Leftrightarrow 4m^2 &= 2b^2 \\
\Leftrightarrow 2m^2 &= b^2
\end{aligned}$$

o que implica que b também é par.

E como a e b seriam pares, significa que teriam pelo menos um factor em comum - o 2.

Mas esse facto contradiz a suposição de que a e b não teriam factores primos entre si.

Logo, $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, *ou seja, não pode ser racional, o que implica que é irracional.*

Capítulo 5

Algumas aplicações do Teorema de Pitágoras

Habitualmente, ao Teorema de Pitágoras associamos a imagem de um triângulo rectângulo. No entanto, este resultado pode ser aplicado a outras figuras, polígonais ou não, e também em várias outras áreas da Matemática, como por exemplo em espaços vectoriais com produto interno, álgebra, ...

Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações do Teorema de Pitágoras.

5.1 Hipócrates de Chiós

Hipócrates de Chios[1][2] (470 a.C. - 410 a.C.) foi um matemático grego que nasceu na ilha grega de Khiós.

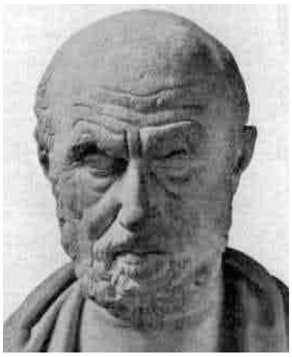


Figura 5.1: Hipócrates de Chios.

Hipócrates (figura 5.1 retirada de [44]) é considerado um dos matemáticos mais influentes da Grécia Antiga, tendo-se dedicado principalmente à área da Geometria.

Embora não haja provas da sua existência, vários matemáticos Gregos, entre os quais Aristóteles, afirmavam que Hipócrates tinha escrito um livro ao qual deu o nome de "Elementos da Geometria"e cuja obra foi considerada precursora dos "Elementos"de Euclides.

[1] Cidade grega também conhecida por Khiós ou Quios.

[2] Não confundir com Hipócrates de Cós, o pai da Medicina.

5.1.1 A quadratura do triângulo rectângulo

Uma dos temas estudados por Hipócrates é a quadratura de polígonos.

Definição 5.1.1 *A quadratura de uma figura plana consiste em construir um quadrado de área igual à área da figura dada inicialmente recorrendo apenas ao auxílio de régua e compasso.*

Hipócrates começou pelo polígono mais simples - o triângulo rectângulo - que mais tarde lhe seria bastante útil para provar a quadratura de outros polígonos.

Mas para o conseguir fazer, Hipócrates teve que recorrer a um teorema,

Apresentamos de seguida a prova que Hipócrates realizou para a quadratura do triângulo rectângulo.

Prova 3 (Prova de Hipócrates) *Considere-se o triângulo ABC, recto em A.*

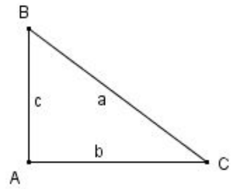


Figura 5.2: Triângulo rectângulo.

Como se sabe, a área de um triângulo é dada por

$$A_{\triangle} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{bc}{2}$$

Agora, vamos proceder do seguinte modo:

i) Prolonga-se o cateto b, um comprimento igual ao cateto c.

ii) Marca-se o ponto médio M deste novo segmento de comprimento $b + c$; Traça-se o semicírculo de centro M e de raio $\frac{b+c}{2}$. Isto é, obtém-se

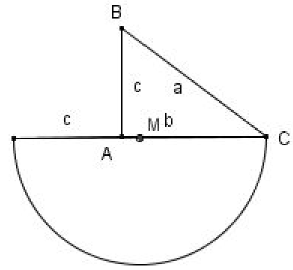


Figura 5.3: Quadratura de um triângulo - *i*

iii) Traça-se o segmento perpendicular ao diâmetro do semicírculo com extremos no ponto A e na intersecção com o semicírculo, onde se marca o ponto P. Traçamos o novo triângulo PCD. Isto é, obtemos

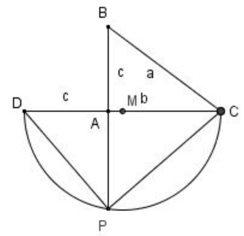


Figura 5.4: Quadratura de um triângulo - *ii*

iv) Visto que AP é a altura deste novo triângulo, pelo Teorema das Alturas tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{c} &= \frac{b}{\overline{AP}}\\ \overline{AP}^2 &= bc\\ \overline{AP} &= \sqrt{bc}\end{aligned}$$

Ou seja, traçando um quadrado de lado $AP = \sqrt{bc}$, obtém-se um quadrado de área $\left(\sqrt{bc}\right)^2 = bc$. Isto é,

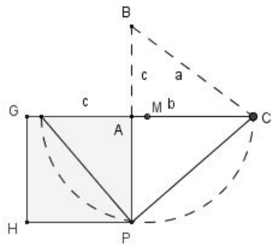


Figura 5.5: Quadratura de um triângulo - *iii*

Mas como a área do triângulo inicial era $A_\triangle = \frac{bc}{2}$, é necessário encontrar um quadrado cuja área seja metade da área do quadrado $\square APHG$. Este quadrado é o que se obtém unindo os pontos médios dos lados do quadrado $\square APHG$, como se vê na figura 5.6.

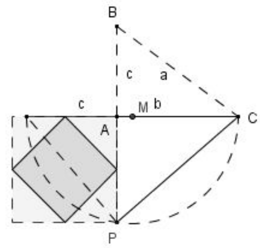


Figura 5.6: Quadratura de um triângulo - *iv*

Deste modo obtemos um quadrado com a mesma área que o triângulo inicial, provando assim que é possível a quadratura de um triângulo rectângulo.

5.1.2 Quadratura de outros polígonos

Foi apresentada atrás a definição de quadratura de um qualquer polígono (ver definição 5.1.1).

Hipócrates conseguiu provar que se podia fazer a quadratura de todos os polígonos, decompondo o problema ao máximo.

Já tinha conseguido provar que é possível fazer a quadratura de um triângulo rectângulo.

Coloca-se agora a questão de como lidar com polígonos que não tem ângulos rectos.

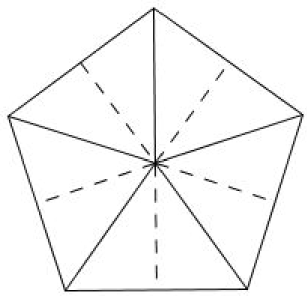


Figura 5.7: Pentágono decomposto em triângulos.

Sabe-se que

- qualquer polígono se pode decompor em triângulos e quadriláteros[3];
- qualquer triângulo não rectângulo se pode dividir em outros dois triângulos rectângulos;
- a área de qualquer polígono é igual à área dos polígonos obtidos na sua decomposição - neste caso igual à área dos triângulos rectângulos;
- Os triângulos rectângulos podem ser quadrados.

Então, é possível efectuar a quadratura de qualquer polígono!

Na figura 5.7 pode-se ver um pentágono decomposto em triângulos, que posteriormente foram decompostos em triângulos rectângulos.

Pode-se também afirmar que a área do quadrado resultante da quadratura do polígono inicial é igual à soma das áreas dos quadrados resultantes da quadratura de todos os triângulos rectângulos em que se decompôs esse polígono.

5.1.3 As lunas de Hipócrates

Após demonstrar que a quadratura de polígonos é possível, Hipócrates decidiu ir mais longe e tentar a quadratura de figuras não-poligonais, em particular de figuras delimitadas por arcos de circunferências, de nome lunas (também designadas por "lúnulas").

Definição 5.1.2 *Uma luna é uma figura geométrica delimitada por dois arcos de circunferência de raios distintos.*

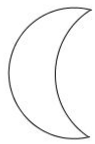


Figura 5.8: Exemplo de uma luna.

Como exemplo, pode-se apresentar a seguinte luna, figura 5.8.

Não se pode afirmar ao certo o número de demonstrações distintas que Hipócrates realizou para demonstrar a quadratura destas figuras, mas sabe-se que trabalhou com inúmeras lunas distintas, e que provou que é possível efectuar a sua quadratura.

Mas para conseguir provar que são possíveis tais quadraturas recorreu a um resultado que se vai enunciar agora como teorema mas que se vai mostrar mais à frente na secção 5.2.

Teorema 5.1.1 *Dado um triângulo rectângulo de catetos a e b e hipotenusa c, a soma das áreas dos semi-círculos sobre os catetos é igual à área do semi-círculo sobre a hipotenusa.*

Uma das demonstrações que Hipócrates fez é a que se vai apresentar de seguida.

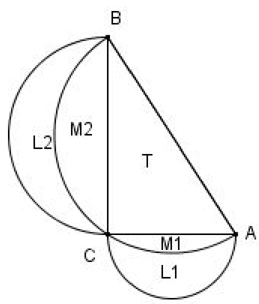


Figura 5.9: Exemplo de quadratura de uma Luna.

Na figura 5.9 está representado o triângulo rectângulo ABC inscrito no semi-círculo de diâmetro AB. Estão também representados dois semi-círculos de diâmetros AC e CB.

Sejam T a área do triângulo rectângulo, $L1$ e $L2$ as lunas, e $M1$ e $M2$ as áreas das partes dos semi-círculo excluíndo as lunas.

Desta forma, pode-se afirmar que a área de cada uma das semi-circunferências menores pode ser dada por

- $A_{\text{ Semi-círculo de diâmetro AC}} = A_1 = L1 + M1;$
- $A_{\text{ Semi-círculo de diâmetro CB}} = A_2 = L2 + M2;$
- $A_{\text{ Semi-círculo de diâmetro AB}} = A_3 = T + M1 + M2.$

[3]Que também podem ser decompostos em triângulos.

Recorrendo ao teorema 5.1.1, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 + A_2 \\ T + M1 + M2 &= L1 + M1 + L2 + M2 \\ T &= L1 + L2 \end{aligned}$$

o que mostra que a área do triângulo é igual à soma das áreas das lunas.

Assim, pode-se afirmar que é possível efectuar a quadratura das lunas pois a área do quadrado que se procura é igual à área do triângulo inicial, e a quadratura deste já tinha sido provada.

O seu sucesso a provar que a quadratura das lunas é possível levou Hipócrates a tentar provar a quadratura do círculo, embora não tivesse sido bem sucedido.

Hoje sabe-se que tal quadratura é impossível, e foi pelas inúmeras tentativas falhadas em busca da sua prova que levaram com que este problema fosse considerado um dos três problemas clássicos da Geometria Grega[4].

5.1.4 As lunas por Margerum e McDonnell

Vai-se de seguida apresentar uma prova do Teorema de Pitágoras demonstrado por Eugene A. Margerum e Michael M. McDonnell, a partir da quadratura das lunas de Hipócrates.

Esta demonstração foi publicada na edição número 70 de Dezembro de 1997 da *Mathematics Magazine*.

Após a análise da figura 5.10, consegue-se perceber que esta se obtém a partir da figura 5.11, após uma reflexão do semi-círculo de área A_3 sobre a hipotenusa.

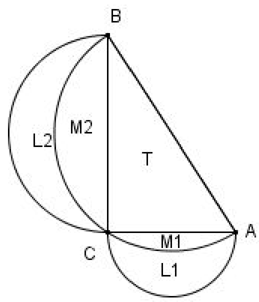


Figura 5.10: Luna considerada por Margerum e McDonnell - i

Pretende-se demonstar que a soma das áreas das duas lunas é igual à área do triâgulo inicial como se afirmou atrás,

$$T = L1 + L2.$$

Para isso, vai-se agora calcular as áreas dos semi-círculos, tendo em conta que a fórmula para o cálculo da área de um círculo é

$$A_{\circ} = \pi \times r^2$$

[4]Juntamente com a Duplicação do Cubo e a Trisecção do Ângulo.

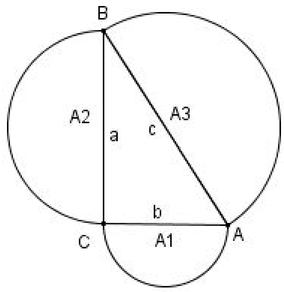


Figura 5.11: Luna considerada por Margerum e McDonnell - *ii*

onde r denomina o raio do círculo.

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi \times \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times b^2}{8}, \\ A_2 &= \frac{\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times a^2}{8} \end{aligned}$$

e que

$$A_3 = \frac{\pi \times \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times c^2}{8}.$$

Tem-se que

$$M1 + M2 = A_3 - T$$

e que a área do triângulo, T, é dada por

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \times a \times b$$

ou seja,

$$\begin{aligned} M1 + M2 &= A_3 - T \\ &= \frac{\pi \times c^2}{8} - \frac{1}{2} \times a \times b. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que a área das lunas pode ser dada por

$$\begin{aligned} L1 + L2 &= A1 + A2 - (M1 + M2) \\ &= \frac{\pi \times b^2}{8} + \frac{\pi \times a^2}{8} - \frac{\pi \times c^2}{8} + \frac{1}{2} \times a \times b \end{aligned}$$

e recorrendo ao resultado que Hipócrates demonstrou,5.1.1 , tem-se

$$
\begin{aligned}
T &= L1 + L2 \\
\frac{1}{2} \times a \times b &= \frac{\pi \times b^2}{8} + \frac{\pi \times a^2}{8} - \frac{\pi \times c^2}{8} + \frac{1}{2} \times a \times b \\
0 &= \frac{\pi \times b^2}{8} + \frac{\pi \times a^2}{8} - \frac{\pi \times c^2}{8} \\
\pi c^2 &= \pi b^2 + \pi a^2 \\
c^2 &= b^2 + a^2.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a soma do quadrado dos catetos do triângulo é igual ao quadrado da hipotenusa.

5.1.5 As influências em Leonardo da Vinci

Mesmo passados quase 2000 anos, Leonardo Da Vinci, sofreu influências dos trabalhos de Hipócrates. Nota-se bem a influência que o trabalho de Hipócrates teve em Leonardo Da Vinci, em particular o que desenvolveu no estudo da quadratura das lunas.

O seu fascínio por estas figuras levou a que ele se debruçasse sobre esta área e viesse ele próprio a demonstrar a quadratura de um enorme número de lunas distintas[5], no seguimento do trabalho de Hipócrates.

Essa fascinação é visível em várias obras de da Vinci, como por exemplo em *Codex Atlanticus*, obra de doze volumes onde foram compilados dos mais variados objectos do seu estudo e é notável a presença do estudo que desenvolveu em torno das lunas, como se vê nas figuras seguintes, 5.12 retirada de [46] e 5.13, retirada de [47].

Figura 5.12: Um dos volumes do Codex.

Pode-se mesmo afirmar que foram estas influências da Geometria da Grécia Antiga que o engrandeceram e o tornaram tão famoso como é.

Não só o trabalho de Hipócrates, mas todo o estudo de Pitágoras na demonstração do Teorema de Pitágoras - que levou à demonstração da existência dos números irracionais - levou Leonardo da Vinci a enamorar-se pelo Número de Ouro[6], o irracional

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \simeq \pm 1.618\ldots,$$

designado por Φ, que se afirma ser o resultado da divisão perfeita ou proporção divina, e que aplicou em inúmeras das suas obras, de onde se sobressai a Mona Lisa.

[5] E também polígonos.

[6] Também conhecido como número áureo, proporção de ouro ou proporção áurea.

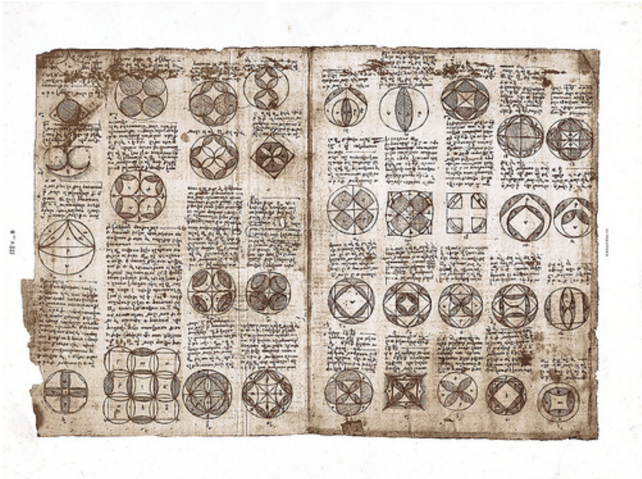


Figura 5.13: Páginas do Codex mostrando lunas.

5.2 Relações Pitagóricas noutras figuras

Uma das demonstrações mais conhecidas do Teorema de Pitágoras consiste na construção de quadrados sobre cada um dos lados de um triângulo rectângulo, provando que a soma das áreas dos quadrados menores - sobre os catetos - é igual à área do quadrado maior - sobre a hipotenusa.

Euclides, depois de afirmar o Teorema de Pitágoras no Livro I dos "Elementos", generalizou para outras figuras sobre os lados do triângulo com a proposição 31 do livro VI.

> Em todo o triângulo rectângulo, qualquer figura rectilínea formada sobre o lado oposto ao ângulo recto é igual âs outras figuras rectilíneas tomadas juntas, semelhantes à primeira, e semelhantemente descritas sobre os lados que compreendem o ângulo recto.

Nesta secção vamos mostrar que é possível alterar esta demonstração, construindo no lugar de quadrados outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo, mantendo válida a relação das áreas provada por Pitágoras.

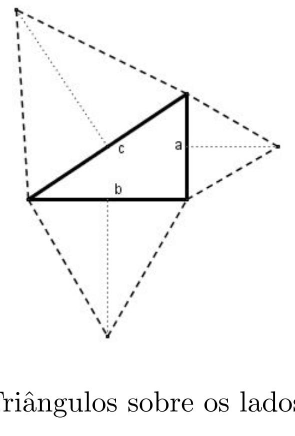


Figura 5.14: Triângulos sobre os lados do triângulo.

Veja-se o exemplo que se apresenta, onde se construiram triângulos regulares sobre os lados do triângulo, como se pode ver na figura 5.14. Vai-se provar que a área do pentágono sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas sobre os catetos.

A área do triângulo é dada por

$$A_{\triangle} = \frac{base \times altura}{2}$$

tendo em conta que as bases de cada triângulo são a, b e c. Como se tratam de triângulos regulares, sabem-se todas as suas medidas dos lados, mas é necessário calcular as alturas de cada triângulo.

Considere-se o triângulo construído sobre o cateto b.

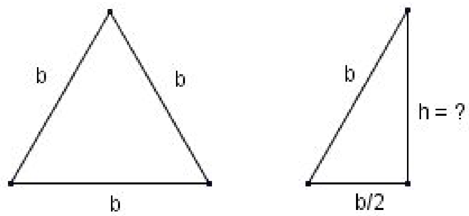


Figura 5.15: Altura do triângulo.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$\begin{aligned}
cateto^2 + cateto^2 &= hipotenusa^2 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 &= b^2 \\
\Leftrightarrow h^2 &= b^2 - \frac{b^2}{4} \\
\Leftrightarrow h^2 &= \frac{3}{4}b^2 \\
\Leftrightarrow h &= \sqrt{\frac{3}{4}b^2} \\
\Leftrightarrow h &= \frac{\sqrt{3}}{2}b
\end{aligned}$$

Sustituíndo vem que

$$A_{\triangle b} = \frac{b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b}{2}.$$

De igual modo, se determina que

- A área do triângulo sobre o cateto a é $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$;
- A área do triângulo sobre a hipotenusa c é $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Assim, substituindo, tem-se que

$$\begin{aligned}
A_{\triangle a} + A_{\triangle b} &= \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} + \frac{b \times \frac{\sqrt{3}}{2}b}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \\
&= A_{\triangle c},
\end{aligned}$$

mostrando assim que a soma das duas áreas menores é igual à área maior.

O problema complica um pouco mais quando são outros polígonos, como por exemplo o pentágono regular.

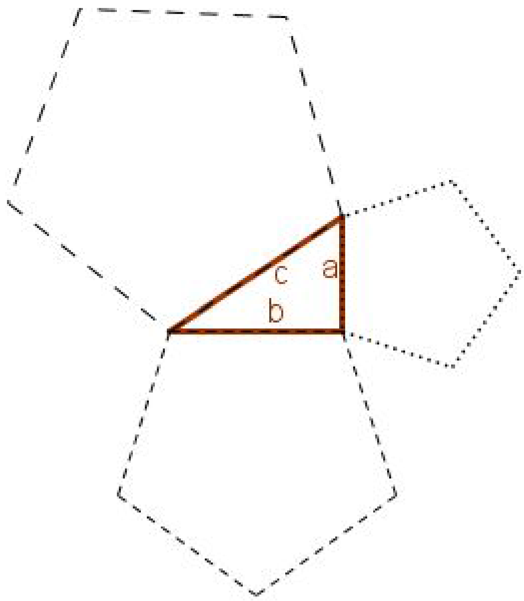


Figura 5.16: Pentágonos sobre os lados do triângulo.

Ora dividindo os pentágonos em triângulos, estes já não são regulares, mas sim isósceles, e isso implicava que só se conhecia um valor do triângulo, dificultando o cálculo da altura - que corresponte também à apótema do pentágono.

Considere-se o pentágono de lado b.

A solução obtém-se recorrendo à Trigonometria.

Visto que o pentágono é regular, sabem-se os valores dos ângulos internos (figura 5.17).

Desta forma, recorrendo à fórmula da *tangente* de um ângulo tem-se que

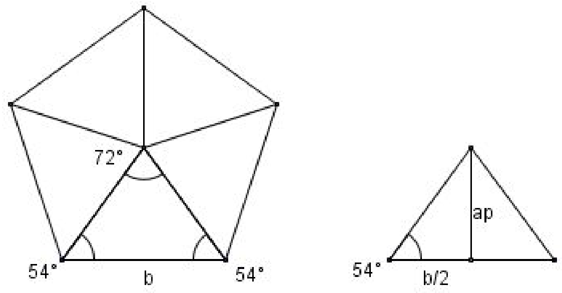


Figura 5.17: A apótema.

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\\ \Leftrightarrow \tan 54^\circ &= \frac{\text{Apótema}}{\frac{b}{2}}\\ \Leftrightarrow ap &= \frac{b\tan 54^\circ}{2}\end{aligned}$$

Tendo em conta que a área de qualquer polígono regular pode ser dada pela expressão

$$A = \frac{\text{Perímetro} \times \text{Apótema}}{2}$$

substituindo, tem-se que

$$\begin{aligned}A_b &= \frac{5b \times \dfrac{b\tan 54^\circ}{2}}{2}\\ &= \frac{5b^2}{4}\tan 54^\circ\end{aligned}$$

De igual modo, se determina que

- A área do pentágono sobre o cateto a é $\dfrac{5a^2}{4}\tan 54^\circ$
- A área do pentágono sobre a hipotenusa c é $\dfrac{5c^2}{4}\tan 54^\circ$

Assim, substituindo, tem-se que

$$\begin{aligned}A_a + A_b &= \frac{5a^2}{4}\tan 54^\circ + \frac{5b^2}{4}\tan 54^\circ\\ &= \frac{5}{4}\tan 54^\circ(a^2+b^2)\\ &= \frac{5}{4}\tan 54^\circ c^2\\ &= A_c\end{aligned}$$

Uma vez que verificado que era possível efectuar a alteração, continuaram no mesmo rumo que nas quadraturas.

Podemos então colocar a seguinte questão:

> Se esta relação é válida como polígonos, será que se verifica com outras figuras planas que não sejam polígonos?

Esta questão tem uma resposta afirmativa e foi demonstrado que é possível efectuar a quadratura para círculos e semicírculos.

Considere-se o triângulo de catetos a e b e hipotenusa c como mostra a figura 5.18.

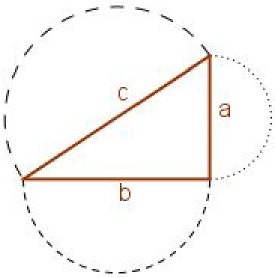


Figura 5.18: Semicírculos sobre os lados do Triângulo.

A área de cada um dos semicírculos é dada por

- $A_{\text{Semi-círculo de diâmetro b}} = A_1 = \frac{1}{2}\pi(\frac{b}{2})^2$;
- $A_{\text{Semi-círculo de diâmetro a}} = A_2 = \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2$;
- $A_{\text{Semi-círculo de diâmetro c}} = A_3 = \frac{1}{2}\pi(\frac{c}{2})^2$.

Assim, a soma das áreas dos semicírculos sobre os catetos é

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ &= A_3 \end{aligned}$$

como se queria provar.

Para provar esta relação aplicada aos círculos, figura 5.19, basta observar a prova mostrada para a relação anterior e retirar a fracção $\frac{1}{2}$ antes de cada área.

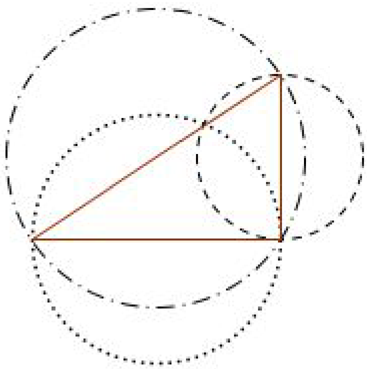


Figura 5.19: Circunferências sobre os lados do Triângulo.

E estando sempre em busca de saber, surge então a necessidade de provar o mesmo para quaisquer linhas curvas.

Euclides conseguiu provar que tal é possível, generalizando essa aplicação para qualquer figura curva ou não poligonal, desde que as três sobre os lados do triângulo fossem semelhantes, e faz tal afirmação na sua obra "Elementos", Livro VI, proposição IV:

> "Erguendo-se figuras semelhantes nos lados de um triângulo rectângulo, a soma das áreas das duas menores é igual à área da maior."

Tal é conseguido usando a razão de semelhança entre cada uma das áreas das figuras, possível de determinar a partir da razão de semelhança entre os lados do triângulo como se pode ver na figura 5.20 (retirada de [5]).

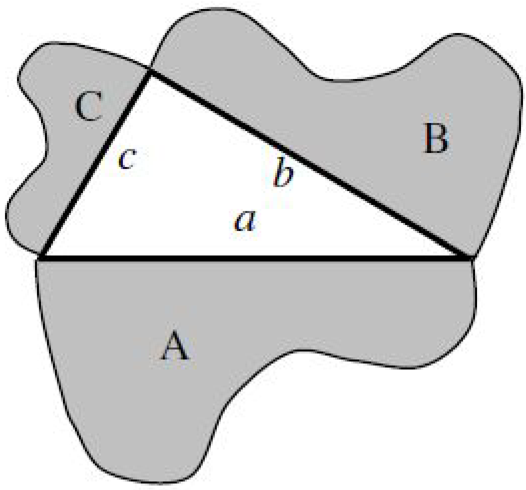


Figura 5.20: Figuras curvas sobre os lados do Triângulo.

Visto que as figuras são semelhantes, consegue-se obter

- a figura sobre c a partir da figura sobre a, multiplicando esta por $\frac{c}{a}$;

- a figura sobre b a partir da figura sobre a, multiplicando esta por $\dfrac{b}{a}$;

E como queremos trabalhar com as suas áreas, tem que se usar estas razões elevadas ao quadrado.

Pode-se então afirmar que

$$\begin{aligned}
A_b + A_c &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times A_a + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \times A_a \\
&= \frac{b^2}{a^2}A_a + \frac{c^2}{a^2}A_a \\
&= A_a\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right) \\
&= A_a\left(\frac{a^2}{a^2}\right) \\
&= A_a
\end{aligned}$$

Ou seja, provou-se que a soma das áreas das figuras sobre os catetos é igual à área da figura sobre a hipotenusa.

5.3 Distância em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

Quer a duas, quer a três dimensões, no plano e no espaço respectivamente, o Teorema de Pitágoras é fulcral para determinar a distância entre dois pontos.

Mas para tal acontecer é necessário colocar esses dois pontos num referencial, recorrendo a um sistema de eixos de duas ou três dimensões. Para tal vamos considerar 2 eixos ortogonais (no caso de $\mathbb{R}^2$) e 3 eixos ortogonais 2 a 2 no caso de $\mathbb{R}^3$.

Só após cada um dos dois pontos estar bem identificado com valores de abcissas, ordenadas e cotas - no caso do espaço - podemos obter a distância entre eles.

Definição 5.3.1 (Distância entre dois pontos no Plano) *Sejam R e P dois pontos no plano, tais que $R(x_1, y_1)$ e $P(x_2, y_2)$. Então, a distância entre os pontos R e P, representada por $d(R, P)$, pode ser dada pela fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

É possível obter esta fórmula recorrendo ao Teorema de Pitágoras.

Onde quer que seja que estes dois pontos estão marcados num referencial, conseguem-se unir e formar o segmento RP. Deste modo, conseguimos também traçar segmentos de recta perpendiculares aos eixos de modo a que se unem numa extremidade, e a outra coincida com os extremos de RP.

Ora de tal construção resulta um triângulo rectângulo, em que RP representa a hipotenusa, e consegue-se obter o valor correspondente aos outros segmentos pela diferença das coordenadas. Daí o referencial e as coordenadas serem fundamentais.

Procedendo do mesmo modo, é possível encontrar a fórmula da distância entre dois pontos no espaço $\mathbb{R}^3$.

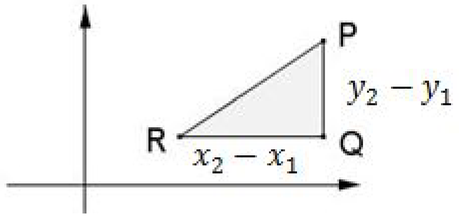


Figura 5.21: Distância em $\mathbb{R}^2$

Definição 5.3.2 (Distância entre dois pontos no Espaço) *Sejam R e P dois pontos no espaço, tais que $R(x_1, y_1, z_1)$ e $P(x_2, y_2, z_2)$. Então, a distância entre os pontos R e P, representada por $d(R, P)$, é dada pela fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Mas desta vez não se pode trabalhar com um triângulo rectângulo como auxílio, pois trata-se de um polígono no plano. A solução passa por usar as três coordenadas, e construir um paralelipipedo tendo os dois pontos como vértices deste, como se consegue observar na figura.

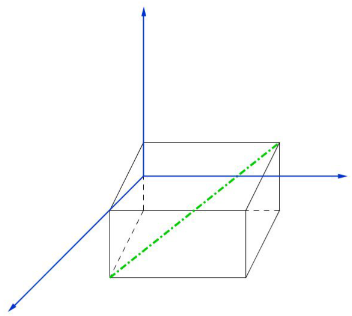


Figura 5.22: Distância em $\mathbb{R}^3$

5.4 Espaços vectoriais com produto interno

Nesta secção vai-se apresentar uma aplicação do Teorema de Pitágoras em espaços vectoriais como produto interno.

Considerere-se o espaço vectorial real, no qual vamos definir um produto interno "|", isto é, a cada par de vectores x, y, está associado um escalar, representado por $x|y$, que neste caso é um número real que satisfaz as seguintes propriedades:

P$_1$ $x|y = y|x$;

P$_2$ $(\alpha x + \beta y)\,|z = \alpha\,(x|z) + \beta\,(y|z)$;

P$_3$ $x|x \geq 0$; O caso $x|x = 0$ ocorre se e somente se $x = 0$.

Quando $x|y = 0$ diz-se que os vectores são *perpendiculares* ou *ortogonais*.

Um *Espaço Euclidiano* é um espaço vectorial real com dimensão finita.

Tendo em conta a definição de produto interno apresentada anteriormente, pode-se definir uma norma, $\|\ \|$ do seguinte modo:

$$\|x\| = +\sqrt{x|x}.$$

Utilizando as propriedades do produto interno, prova-se que a seguinte relação é válida

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y)\,|\,(x+y) \\ &= \|x\|^2 + 2\,(x|y) + \|y\|^2\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

E desta forma quando se tem $x|y = 0$ em (5.1), obtém-se o Teorema de Pitágoras:

$$\|x+y\|^2 = \left\|x^2\right\| + \|y\|^2\,.$$

5.5 Raíz quadrada de uma matriz

Definição 5.5.1 (Matriz) *Sejam m e n dois inteiros naturais e $\mathbb{K}$ é um corpo, chama-se matriz do tipo (m,n) em $\mathbb{K}$ a uma aplicação $\mathcal{A}$, tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (i,j) &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Representa-se por $M_{\mathbb{K}}(m,n)$ $\big($ou $M_{(m,n)}\,(\mathbb{K})\big)$ o conjunto de todas as matrizes do tipo (m,n) em $\mathbb{K}$ dizendo que m é o número de linhas e que n é o número de colunas de cada matriz deste conjunto.

Definição 5.5.2 (Raíz quadrada de uma matriz) *Seja A uma matriz quadrada. A matriz B diz-se raíz quadrada da matriz A se e somente se $B \times B = A$. A matriz B é representada por $A^{\frac{1}{2}}$.*

Uma matriz A pode ter mais do que uma raíz quadrada. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{bmatrix},$$

em como raízes quadradas as matrizes

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

bem como as suas inversas aditivas.

Um exemplo bem mais interessante é o caso da matriz identidade de ordem 2, isto é, a matriz

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que possui um número infinito de raízes quadradas, com elementos racionais, da forma

$$\frac{1}{t}\begin{bmatrix} \mp s & \mp r \\ \mp r & \pm s \end{bmatrix}, \ \frac{1}{t}\begin{bmatrix} \pm s & \pm r \\ \mp r & \mp s \end{bmatrix}, \frac{1}{t}\begin{bmatrix} \mp r & \mp s \\ \mp s & \mp r \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

e

$$\frac{1}{t}\begin{bmatrix} \pm r & \mp s \\ \mp s & \mp r \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

onde (r, s, t) é um terno Pitagórico, isto é, $r^2 + s^2 = t^2$.

Quando a matriz é definida positiva, ela admite exactamente uma raíz quadrada, que habitualmente é designada por raíz quadrada principal.

Facilmente se verifica que a qualquer matriz apresentada em (5.2) e (5.3) é raíz quadrada da matriz I_2. Seja (r, s, t) um terno Pitagórico, isto é, $r^2 + s^2 = t^2$ e seja A a matriz de ordem 2 definida do seguinte modo

$$A = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} s & r \\ r & -s \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A \\
&= \left(\frac{1}{t}\begin{bmatrix} s & r \\ r & -s \end{bmatrix}\right) \times \left(\frac{1}{t}\begin{bmatrix} s & r \\ r & -s \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\begin{bmatrix} r^2 + s^2 & 0 \\ 0 & r^2 + s^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r^2+s^2}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{r^2+s^2}{t^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

uma vez que $r^s + s^2 = t^2$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pretende-se encontrar os valores de a, b, c e d de tal forma que $A^2 = I_2$.

Efectuando o produto,

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ad + bd \\ ac + bd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ad + bd \\ ac + bd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva ao sistema de equações algébricas não lineares:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2+bc & = & 1 \\ ab+bd & = & 0 \\ ac+dc & = & 0 \\ bc+d^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2+bc & = & 1 \\ (a+d)\,b & = & 0 \\ (a+d)\,c & = & 0 \\ bc+d^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Pode-se escrever as seguintes relações:

$$(a+d)\,b = 0 \Leftrightarrow a+d = 0 \vee b = 0.$$

A condição $b = 0$ é automaticamente excluída pois o número "0"não é elemento de qualquer terno Pitagórico. Logo, $a = -d$. Utilizando esta condição, retira-se ainda que $b = c$.

Portanto, obtém-se uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

A matriz A^2 é:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

É claro que $A^2 = I$ se e somente se $a^2+b^2 = 1$. Se a e b são elementos de um qualquer terno Pitagório então, existe um c de tal forma que $a^2+b^2 = c^2$. Logo, dividindo a matriz A por c, obtém-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \\ \\ \frac{a}{c} & -\frac{a}{c} \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix},$$

com $a^2+b^2 = c^2$.

De modo análogo, fazem-se as demonstraçoes para as restantes matrizes atrás referidas.

Capítulo 6

O Teorema de Pitágoras no Ensino em Portugal

Como já foi referido na secção 3.1, a formulação original do Teorema de Pitágoras não corresponde à que se usa hoje em dia nas salas de aula e nos manuais.

O Teorema de Pitágoras é parte integrante do Programa Nacional de Matemática do Ensino Básico, um tópico da Geometria ensinado no decorrer do 8º Ano de Escolaridade.

Mas não é só neste nível escolar que ele está presente.

De seguida vai-se fazer uma pequena análise dos ciclos de ensino em Portugal e analisar o "peso"do Teorema de Pitágoras.

6.1 O Ensino Pré-Escolar e Primário

Quem frequentou o Ensino Pré-Escolar em creches e infantários, decerto que se lembra de brincar com jogos didáticos, mesmo não fazendo ideia do que isso seria.

Normalmente, este tipo de jogos são de madeira, para que as crianças possam tocar-lhe e conhecer melhor as suas formas. São também um meio para dar a conhecer às crianças os diferentes polígonos. Exemplos desses jogos são os do estilo do Tangram, isto é, várias peças de diferentes formas e tamanhos, que têm como objectivo conseguir que a criança seja capaz de ocupar na totalidade um determinado espaço usando todas as peças, e sem nunca as sobrepôr.

Um exemplo desse tipo de jogos é a demonstração do Teorema de Pitágoras segundo Henry Perigal, como se viu na subsecção 3.3.4.

O resultado do Teorema estava "latente", e os alunos apenas aplicavam o Teorema.

Os alunos aprendiam Matemática sem o saber.

6.2 O Segundo Ciclo do Ensino Básico

Embora neste ciclo de estudos os alunos ainda não tenham contacto com o Teorema de Pitágoras, é nele que se introduz o conceito de Áreas de polígonos, e aprofundam os conhecimentos de Geometria adquiridos no Ensino Primário, tais como

- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude;

- Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados;
- Construir triângulos e compreender os casos de possibilidade na construção de triângulos[1].

essenciais para que se possa enunciar o Teorema.

6.3 O Terceiro Ciclo do Ensino Básico

Após a introdução destes conceitos e noções no Segundo Ciclo, pode-se agora enunciar o Teorema de Pitágoras.

Embora tenha havido nos últimos anos uma alteração ao Currículo da Matemática no Ensino em Portugal, a introdução deste Teorema no ensino permaneceu sem sofrer alterações.

Continua a ser leccionado no decorrer do 8º Ano de Escolaridade, tendo sofrido apenas uma "alteração na ordem"em que é leccionado e no método de ensino. O novo Programa defende que os conceitos, resultados e métodos sejam adquiridos mediante um processo de descoberta e realização de tarefas, recorrendo aos mais diversos materiais disponíveis, tais como o Programas Informáticos, Quadros Interactivos, etc...

A teoria que está por trás desta metodologia de ensino, defende que o conhecimento é melhor interiorizado quando descoberto pelo indivíduo, invés da transmissão desse conhecimento.

É na continuação do estudo deste Teorema que se introduz o Recíproco do Teorema de Pitágoras.

Este Recíproco é nada mais que o Teorema tal como Pitágoras o formulou. Defende-se que os alunos adquirem melhor os conteúdos nesta sequência.

Apresenta-se a definição de Terno Pitagórico, e extende-se o conceito do Teorema de Pitágoras ao Espaço, trabalhando em 3 dimensões.

Os manuais escolares (de acordo com o Novo Programa) tentam fornecer ao aluno um pouco da História do Teorema, fazendo caixas dignas de atenção sobre como, quando e onde foi descoberto e demonstrado este Teorema, não esquecendo também o seu autor, Pitágoras.

6.3.1 O Teorema nos Manuais Escolares do 8º Ano

Após a análise de alguns dos novos manuais escolares do 8º Ano de Escolaridade que serão utilizados a partir do Ano Lectivo de 2011/2012, pode-se verificar que todos eles seguem as directivas do ensino pela descoberta, apresentando as mais variadas formas de atingirem o objectivo desta matéria em concreto.

Embora os conteúdos a ser leccionados sejam os mesmos, existem algumas diferenças entre os manuais.

Há manuais que dão mais importância às referências históricas do que outros, que apresentam mais exercícios resolvidos, mais actividades, etc...

Aquele que despertou mais a minha atenção foi o manual o *PI8*, editado pelas Edições Asa S.A. e certificado pela Universidade do Minho, da autoria de Fátima Cerqueira Magro, Fernando Fidalgo e Pedro Louçano.

[1] Como referido em [18].

É superado a nível de informação histórica pelo *Xis8* da Texto Editores, mas supera outros pela interactividade das tarefas que propõe, tais como o *Matematicamente Falando* da Areal, ou o *Matemática* da Porto Editora.

No Capítulo 7 apresenta-se uma possível introdução a este Teorema numa aula de 8° Ano de Escolaridade, tendo por base este manual.

6.4 Ensino Secundário

Quando os alunos chegam ao ensino Secundário, é ponto assumido que o Teorema de Pitágoras é das matérias que vai estar sempre presente ao longo destes 3 anos, não directamente mas como cálculo auxiliar ou passo intermédio.

É neste ciclo de ensino que são apresentados aos alunos os conceitos matemáticos de distâncias entre pontos no plano e no espaço e as respectivas fórmulas, já definidas na secção 5.3.

Os alunos deverão ser capazes de relacionar a fórmula da distância no plano com o passo final da resolução do Teorema de Pitágoras tal como aprendeu no 8º Ano de Escolaridade.

Está também presente na Trigonometria e nos Números Complexos.

Surge na Trigonometria pois por definição o círculo trigonométrico mede de raio uma unidade, e para o cálculo das razões trigonométricas *seno* e *coseno* de um ângulo considera-se o triângulo que se consegue formar entre o braço do ângulo e as paralelas aos eixos, como se consegue ver na figura 6.1.

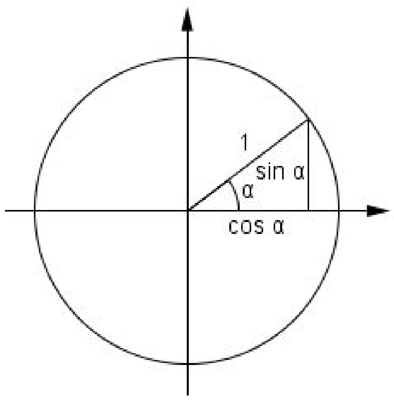


Figura 6.1: Teorema de Pitágoras na Trigonometria.

A Fórmula Fundamental da Trigonometria

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

é o Teorema de Pitágoras aplicado a um tipo de triângulos particular: o triângulo com hipotenusa de 1 unidade, onde $\sin^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ são os quadrados dos catetos do triângulo rectângulo e 1 é o quadrado da hipotenusa.

De igual modo se pode afirmar a presença deste Teorema nos Números Complexos.

$z = a + bi$ é o número complexo na forma algébrica que corresponde ao ponto P na figura 6.2, onde a representa o valor da coordenada do eixo real e b o valor da coordenada do eixo imaginário.

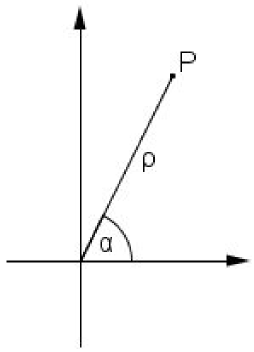


Figura 6.2: Argumento de um número complexo

Na forma trigonométrica representa-se por

$$z = \rho \ \ cis\,(\theta)\,,$$

onde ρ corresponde ao módulo de z, $|z|$, e θ a amplitude do ângulo que se forma entre o eixo real e o segmento que une o ponto em questão à origem do referencial, em radianos, também chamado de argumento.

Para o cálculo de ρ aplica-se a fórmula

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

onde uma vez mais aplicamos o Teorema de Pitágoras.

Assim como nestas matérias, o Teorema de Pitágoras está presente em muitas outras áreas, quer directa ou indirectamente, que é um facto que vem reforçar a ideia da sua elevada importância no Mundo Matemático.

Capítulo 7

Uma Possível Introdução ao Teorema de Pitágoras

Neste Capítulo vai-se analisar o exemplo de uma possível introdução deste Teorema numa aula de 8° Ano de Escolaridade tendo como base as tarefas de introdução de novos conteúdos conforme disponibilizadas em [22].

O facto de terem direccionado a realização desta tarefa (figura 7.2) para o uso do GeoGebra torna-a numa aula mais leve e interactiva.

Neste caso, pretende-se que os alunos relacionem as áreas dos quadrados que desenharam sobre os lados de um triângulo rectângulo, em particular que a soma das áreas do dois quadrados menores é igual à área do quadrado maior.

Parte-se do princípio que hoje em dia todas as escolas têm os recursos necessários para que a tarefa possa ser realizada a pares ou em grupos de 3 alunos, mas no caso de tal não ser possível, pode-se dar uso ao Quadro Interactivo ou simplesmente ao projector, realizando a tarefa em conjunto, sendo apenas um aluno a trabalhar no programa enquanto os outros visualizam e dão ideias, opiniões.

O uso do GeoGebra nesta tarefa é repleto de pontos positivos. O programa permite:

- A construção bastante rápida de figuras e a verificação se os valores dos ângulos são os pretendidos;
- A determinação de áreas sem a necessidade de efectuar cálculos;
- A possibilidade de alterar a posição de pontos, alterando assim também o triângulo e quadrados, mantendo o ângulo recto, sem que se perca tempo;
- A aplicação das novas tecnologias no Ensino, que é um ponto que defendido pelas linhas do Currículo Nacional.

Esta tarefa, sem o recurso a este programa, seria bastante trabalhosa de realizar no que trata da verificação a igualdade para mais do que um caso, assim como também na falha da verificação dessa igualdade para casos em que o triângulo não é rectângulo.

A ideia principal desta actividade é a da introdução dos alunos à ideia geral do Teorema de Pitágoras, seguindo a direcção que a tarefa segue ao estilo do Método Socrático, isto é, fazendo questões pertinentes que direccionem os alunos para a descoberta daquilo que se pretende.

Após a verificação da igualdade que relaciona as áreas dos quadrados, esta tarefa direcciona o aluno para uma nova tarefa a realizar na aula seguinte: a prova de que tal igualdade se verifica para todos os casos possíveis de triângulos rectângulos.

Apresenta também um exercício em que o aluno terá que aplicar o conhecimento adquirido na aula para que o consiga resolver na totalidade.

Exercício 1 *Observa a figura e determina o valor de a, b, c e x.*

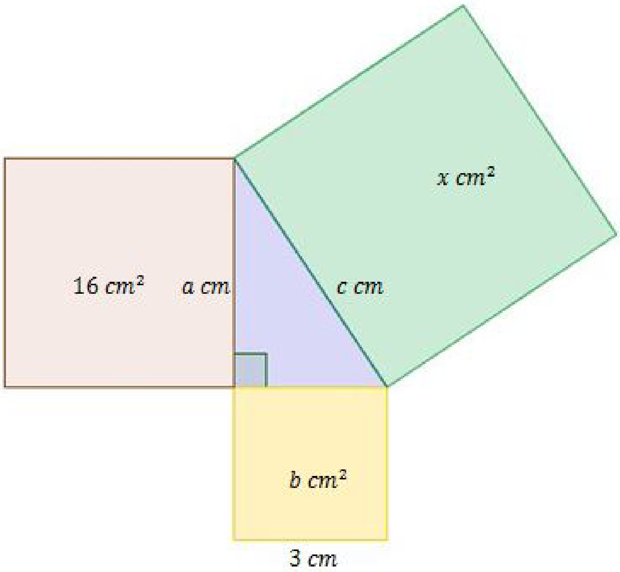


Figura 7.1: Exercício de aplicação dos conhecimentos adquiridos

Para tal, o aluno tem que seguir a seguinte ordem de descoberta:

$$b, a \to x \to c.$$

O aluno já sabe calcular a área de um quadrado quando é dado o seu lado e vice-versa, daí os valores de a e b serem os primeiros a ser calculados.

De seguida dá-se a aplicação do conhecimento adquirido na aula para determinar x. Visto se tratar de um triângulo rectângulo, o aluno pode somar os valores das duas áreas menores já calculadas, determinando assim a área do quadrado maior. Isto leva a que consiga determinar por fim o valor de c, de igual modo que a.

$$\begin{aligned}
A_{\square rosa} &= a^2 \Leftrightarrow 16 = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{16} \Leftrightarrow a = 4cm \\
A_{\square amarelo} &= c^2 \Leftrightarrow A_{\square amarelo} = 3^2 \Leftrightarrow b = 9cm^2 \\
A_{\square verde} &= A_{\square rosa} + A_{\square amarelo} \Leftrightarrow x = 16 + 9 \Leftrightarrow x = 25cm^2 \\
A_{\square verde} &= c^2 \Leftrightarrow 25 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{25} \Leftrightarrow c = 5cm
\end{aligned}$$

De seguida o manual apresenta um leque de exercícios variados, para que o aluno consolide o que aprendeu na aula.

A escolha da realização da tarefa recorendo ao GeoGebra torna-a rápida de efectuar, o que se traduz em tempo extra que sobra para a prática de exercícios, essencial para que o conhecimento permaneça no aluno.

TAREFA 5 Teorema de Pitágoras

1. Abre o programa GeoGebra e esconde os eixos coordenados.

1.1. Constrói um triângulo retângulo.

1.2. Utilizando a ferramenta "Polígono regular", constrói quadrados sobre os lados do triângulo *ABC*.

1.3. Utilizando a ferramenta "Área", determina a área de cada um dos três quadrados e completa, no teu caderno, a seguinte tabela.

Área do quadrado construído sobre o menor cateto	Área do quadrado construído sobre o maior cateto	Soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos	Área do quadrado construído sobre a hipotenusa
?	?	?	?

1.4. O que observas? Explica o teu raciocínio.

Sugestão: Desloca os pontos *A*, *B* e *C*, obtendo assim novos triângulos retângulos e volta a responder à questão **1.3.**.

1.5. Será que as conclusões obtidas se mantêm em qualquer triângulo? Explica o teu raciocínio.

1.6. Completa, no teu caderno, a afirmação: "A observação realizada leva-me a admitir que, num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa…".

A conjetura que fizeste na alínea anterior é válida, qualquer que seja o triângulo retângulo considerado, como terás oportunidade de provar na Tarefa 6, página 73. Utiliza-a para responder à questão seguinte.

2. Observa a figura e determina o valor de a, b, c e x.

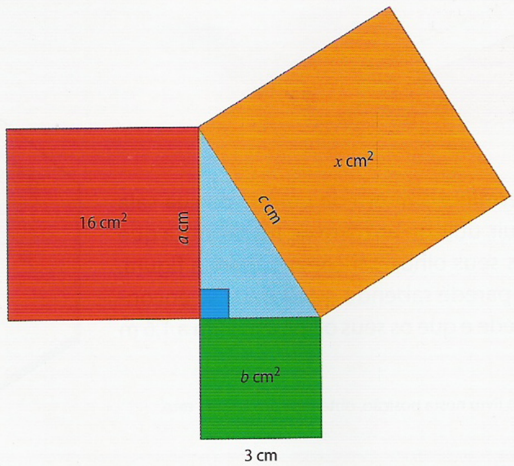


Figura 7.2: Tarefa de introdução do Teorema de Pitágoras

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho foram apresentados algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas das quais foram elaboradas centenas ou mesmo milhares de anos depois de Pitágoras.

A variedade de demonstrações existentes para o Teorema de Pitágoras e tendo em conta a diversidade de áreas que se podem utilizar para o demonstrar mostra a riqueza e a importância deste resultado.

Verificámos ainda que este resultado tem uma presença muito forte nos diversos ciclos de ensino, desde o pré-primário até ao ensino superior. Um aspecto de que salientar é que este resultado pode ser apresentado de vários modos distintos e em diferentes àreas do conhecimento.

O fascínio que exerce sobre muitos, talvez pela simplicidade que enuncia, leva a que surjam novas provas com o passar dos tempos. Como exemplo, podemos apresentar a seguinte memónica:

> "A caminho de Siracusa, dizia Pitágoras aos seus netos: O quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos".

Bibliografia

[1] Beites, P. D. and Nicolás, A. P., Loomis' Book As A Source Of Ideas For Enhancing Mathematical Proof Making, Proceedings of EDULEARN10 Conference. 5th-7th July 2010, Barcelona, Spain.

[2] Alsina, Claudi (2010). A seita dos números: O Teorema de Pitágoras. Espanha: RBA Coleccionables S.A..

[3] Lobato, Vivian da Silva (2001). Trabalho de conclusão do Curso de Pedagogia entitulado "Revisitando a Educação na Grécia Antiga: A Padeia". Belém - Pará: Universidade da Amazónia - UNAMA.

[4] Staring, Mike (1996). The Pythagorean proposition: A proof by means of calculus. Mathematics Magazine 69 (February): 45-46. Mathematical Association of America.

[5] Wagner, Eduardo (S. D.). Teorema de Pitágoras e Áreas.

[6] Amaral, Maria Elisabete Nunes (2008). Trabalho Científico entitulado "Lúnulas e Quadraturas". Covilhã: Departamento de Matemática - Universidade da Beira Interior.

[7] Boyer, Carl B. (1996). História da Matemática. Ed. Edgar Blucher Lda.

[8] Hall, Leon M. (1987). Notes on the Great Theorems. Rolla: Departamento de Matemática e Estatística - Universidade do Missouri.

[9] Luke, Hodgkin (2005). A History of Mathematics - From Mesopotânia to Modernity. Oxford: Oxford University Press.

[10] Stillwell, John (2010). Mathematics and its History. Springer.

[11] Stillwell, John (2000). The Four Pillars of Geometry. San Francisco: Springer.

[12] Gomes, Kléber (S. D.). A Quadratura das Lunas de Hipócrates de Chios. S. E..

[13] Swartzlander, Diane (2007). Pythagorean Triples. Lincon: University of Nebraska-Lincoln.

[14] Bastian, Irma Verri (2000). Tese de Mestrado em Educação Matemática entitulada "O Teorema de Pitágoras". São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

[15] Marques, Isabel Sofia Cardoso (2007). Tese de Mestrado em Ensino da Matemática entitulada "À Descoberta do Teorema de Pitágoras". Porto: FCUP.

[16] Loomis, Elisha Scott (1968). The Pythagorean Proposition. Washington D.C.: NCTM.

[17] Caderno de Apontamentos da cadeira de História e Filosofia da Matemática (2007/2008). UBI.

[18] Ponte, João Pedro da; Serrazina, Lurdes e outros (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. DGIDC: Ministério da Educação.

[19] Passos, Iolanda C. e Correia, Olga F. (2011). Matemática em ação 8 Volume 2. Lisboa: Lisboa Editora.

[20] Conceição, Alexandra e Almeida, Matilde (2011). Matematicamente Falando - Livro do Professor. Porto: Areal Editores.

[21] Neves, Mª Augusta F.; Silva, António P. e outros (2011). Matemática Parte 2 - Exemplar do Professor.Porto: Porto Editora.

[22] Magro, Fátima C.; Fidalgo, Fernando e Louçano, Pedro (2011). Pi8 Volume 2 - Edição do Professor. Edições Asa S.A.

[23] Pereira, Paula P. e Pimenta, Pedro (2011). Xis8 Volume 2 - Manual do Professor. Lisboa: Texto Editores, Lda.

[24] Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira. Volume XXII.Lisboa, Rio de Janeiro: Editorial Enciclopédia Limitada.

[25] Gomes, Francelino; Viegas, Cristina e Lima, Yolanda (2007). Xeqmat Matemática A 12ºAno - Volume 3. Lisboa: Texto Editores, Lda.

[26] Gomes, Francelino; Viegas, Cristina e Lima, Yolanda (2011). Xeqmat Matemática A 11ºAno - Volume 1. Lisboa: Texto Editores, Lda.

[27] Passos, Iolanda C. e Correia, Olga F. (2010). Matemática em ação 7 Parte 2. Lisboa: Lisboa Editora.

Sítios consultados

[28] http://www.historyofscience.com, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[29] https://ldpd.lamp.columbia.edu/, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[30] http://www.cut-the-knot.org/, consultado pela última vez a 11 de Outubro de 2011

[31] http://aleph0.clarku.edu/, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[32] http://www.loomis.8k.com/page3.html, consultado pela última vez a 11 de Outubro de 2011

[33] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Leonardo.htm, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[34] http://www.gave.min-edu.pt/, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[35] http://www.crie.min-edu.pt/, consultado pela última vez a 11 de Outubro de 2011

[36] http://www.fc.up.pt/fcup/, consultado pela última vez a 10 de Outubro de 2011

[37] http://www.cfh.ufsc.br/w̃fil/cienciagrega.htm, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[38] http://matematica.no.sapo.pt/pitagoras.htm, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[39] http://www.theartwolf.com/leonardo.htm, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[40] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm37/indice1.htm, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[41] http://plus.maths.org/content/dissecting-table, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[42] http://www.aboutfamouspeople.com/article5020.html, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[43] http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[44] http://integraldefinida.blogspot.com/2010/01/hipocrates-de-chios.html, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[45] http://jwilson.coe.uga.edu, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[46] http://en.wikipedia.org/wiki/Codex_Atlanticus, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[47] http://thevespiary.com/blog/2008/11/14/omerta-ital-n-conspiracy-of-silence/, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011

[48] http://www.mat.uc.pt/ jaimecs/euclid/5parte.html, consultado pela última vez a 12 de Outubro de 2011