

**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AEROESPACIAIS



**GERAÇÃO DE TRAJÉCTORIAS SEM COLISÃO PARA AERONAVES  
NÃO TRIPULADAS**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Aeronáutica

**FILIPPE MAIA**

Covilhã, Agosto de 2008



**UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR**

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AEROESPACIAIS



**GERAÇÃO DE TRAJÉCTORIAS SEM COLISÃO PARA AERONAVES  
NÃO TRIPULADAS**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Aeronáutica

**FILIPPE MAIA**

Covilhã, Agosto de 2008

FILIPE DANIEL BARREIRA DA SILVA MAIA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AEROSPACIAIS

Orientador: K. BOUSSON

Data: 31 Agosto de 2008

GERAÇÃO DE TRAJÉCTORIAS SEM COLISÃO PARA  
AERONAVES NÃO TRIPULADAS

## DEDICATÓRIA

À minha família em especial à Elisabete pelo seu persistente apoio.

# ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS .....	iv
NOMENCLATURA E ABREVIATURAS .....	v
AGRADECIMENTOS .....	vi
RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
Capítulo 1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação .....	1
1.2 Resolução de conflitos.....	2
1.3 Sistema de controlo autónomo de voo .....	3
1.4 Navegação proporcional.....	6
1.5 Estrutura do trabalho .....	7
Capítulo 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	8
2.1 Estado da Arte.....	8
2.2 Modelo dinâmico do UAV .....	19
Capítulo 3. MODELAÇÃO DA PREVENÇÃO DE COLISÃO 3D PARA UAV's .....	23
3.1 Definição de envelope de conflito.....	23
3.2 Definição de cone de conflito .....	24
3.3 Parametrização da trajectória.....	25
Capítulo 4. NAVEGAÇÃO PROPORCIONAL 3D .....	26
4.1 Estratégia para resolução de conflitos 3D .....	26
4.2 Condições suficientes para inexistência de conflito.....	30
4.3 Optimização de trajectória.....	31
4.4 Navegação proporcional óptima .....	32

4.5	Resolução de conflito global.....	34
Capítulo 5. APLICAÇÃO E RESULTADOS.....		36
5.1	Algoritmo NP.....	36
5.2	Resolução local.....	39
5.3	Resolução global.....	45
5.4	Tempo de simulação.....	46
Capítulo 6. CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO.....		47
BIBLIOGRAFIA.....		49
ANEXOS.....		52

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Diagrama de blocos de um controlador autónomo de voo de um UAV. . . . .	3
Figura 1.2 - Geometria da navegação proporcional horizontal [23]. . . . .	6
Figura 2.1 - Método de propagação de estado [8]. . . . .	10
Figura 2.2 - Resolução de conflitos para múltiplas aeronaves . . . . .	12
Figura 2.3 - Configuração geométrica para resolução de conflitos [5]. . . . .	15
Figura 2.4 - Condição suficiente para evitar a colisão [5]. . . . .	16
Figura 2.5 - Geometria e variáveis para a análise de convergência [5]. . . . .	16
Figura 2.6 - Resultados obtidos por Han e Bang [5]. . . . .	18
Figura 2.7 - Constante de navegação para lei de navegação óptima [24]. . . . .	19
Figura 2.8 - Variáveis de estado e controlo do ponto massa. . . . .	19
Figura 3.1 - Envelope de conflito e distância entre duas aeronaves [11]. . . . .	24
Figura 3.2 - Configuração do cone de conflito. . . . .	24
Figura 4.1 - Representação tridimensional da LOS. . . . .	26
Figura 4.2 - Esquema representativo do vector relativo e respectivos ângulos para sair do cone de conflito. . . . .	27
Figura 4.3 - Esquema para resolução de conflitos globalmente. . . . .	34
Figura 5.1 - Trajectória no plano XY para a primeira simulação. . . . .	39
Figura 5.2 - Trajectória no plano XZ para a primeira simulação. . . . .	40
Figura 5.3 - Trajectória 3D para a primeira simulação. . . . .	40
Figura 5.4 - Trajectória no plano XY para a segunda simulação. . . . .	41
Figura 5.5 - Trajectória no plano XZ para a segunda simulação. . . . .	41
Figura 5.6 - Trajectória 3D para a segunda simulação. . . . .	41
Figura 5.7 - Trajectória no plano XY para a terceira simulação. . . . .	42
Figura 5.8 - Trajectória no plano XZ para a terceira simulação. . . . .	42
Figura 5.9 - Trajectória 3D para a terceira simulação. . . . .	43
Figura 5.10 - Trajectória no plano XY para a quarta simulação. . . . .	43
Figura 5.11 - Trajectória no plano XZ para a terceira simulação. . . . .	44
Figura 5.12 - Trajectória 3D para a terceira simulação. . . . .	44
Figura 5.13 - Trajectória no plano XY para conflito com 4 aeronaves. . . . .	45
Figura 5.14 - Trajectória no plano XZ para conflito com 4 aeronaves. . . . .	45
Figura 5.15 - Trajectória 3D para conflito com 4 aeronaves. . . . .	46

## NOMENCLATURA E ABREVIATURAS

2D	Bidimensional.
3D	Tridimensional.
$a_h$	Aceleração horizontal dada à aeronave.
ADS-B	Sistema dependente de vigilância e transferência de dados (“ <i>Automatic Dependent Surveillance – Broadcast</i> ”).
AFCS	Controlador automático de voo (“ <i>Automatic Flight Control</i> ”).
ATC	Controlo de tráfego aéreo (“ <i>Air Traffic Control</i> ”).
ATM	Gestão do tráfego aéreo (“ <i>Air Traffic Management</i> ”).
CTAS	Sistema de alerta de tráfego em aproximação (“ <i>Converging Traffic Alert System</i> ”).
FBW	Fly-by-wire.
GPS	Sistema de posicionamento global (“ <i>Global Positioning System</i> ”).
IFR	Regras de voo por instrumentos (“ <i>Instrument Flight Rules</i> ”).
IMU	Sistema inercial de medida (“ <i>Inertial Measurement System</i> ”).
INS	Sistema inercial de navegação (“ <i>Inertial Navigation System</i> ”).
LOS	Linha de vista (“ <i>Line-of-site</i> ”).
N	Constante da navegação proporcional.
NOTAMs	Avisos à navegação aérea (“ <i>Notice To Airmen</i> ”).
NP	Navegação proporcional
R <sub>p</sub>	Raio de protecção de uma aeronave.
R <sub>T</sub>	Distância entre duas aeronaves.
TCAS	Sistema de alerta de tráfego e resolução de conflitos (“ <i>Traffic Alert &amp; Collision Avoidance System</i> ”).
TMA	Área terminal (“ <i>Terminal Area</i> ”).
UAV	Aeronave não tripulada (“ <i>Unmanned Aerial Vehicle</i> ”).
$v_{cl}$	Velocidade de aproximação.
$V_{rel}$	Velocidade relativa entre duas aeronaves.
$\lambda$	Ângulo da LOS com o eixo horizontal.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os quantos me apoiaram para que este projecto fosse realizado. Agradecimento especial para o professor Dr. K. Bousson pela sua óptima orientação e incentivo para ir sempre mais além.

## RESUMO

Esta tese tem como objectivo inicial encontrar um método que permita a uma aeronave não tripulada (UAV) gerar trajectórias sem colisão, tendo em conta o tráfego envolvente devido a aeronaves tripuladas. O problema da resolução de conflitos é um problema actual devido ao congestionamento do espaço aéreo. Com uma futura introdução do conceito de voo livre (*“free flight”*) será obrigatório que todas as aeronaves possuam um sistema que evite o conflito e consequentemente a colisão.

A solução do problema foi obtida através da navegação proporcional tridimensional, um método simples de navegação e de fácil implementação. O objectivo foi orientar a nossa aeronave para fora da zona de conflito assim que o TCAS emite um primeiro sinal de alerta. O problema da resolução de conflitos parte do princípio que a posição de cada aeronave é conhecida assim como o respectivo vector de velocidade.

A determinação da aceleração apropriada para a aeronave é essencial para a prevenção de conflitos com outras aeronaves, sendo esta obtida pela aplicação da lei da navegação proporcional. Esta aceleração é decomposta nos diferentes eixos e considerada nas equações de navegação. As equações de navegação respeitam os limites físicos impostos à aeronave além da expressão da sua própria dinâmica. Apesar destes limites, a aeronave consegue evitar os conflitos com as outras na sua vizinhança. Este método permite simular intervalos de 90 segundos, com 4 aeronaves nas imediações em menos de 1 segundo.

Palavras-chave: prevenção da colisão, TCAS, navegação proporcional tridimensional, UAV.

## ABSTRACT

The main objective of the present dissertation is to propose a method that allows a UAV to navigate from one point to a destination point without colliding with neighboring manned aircraft. The conflict resolution is a daily problem due to the constrained airspace and dense traffic. With the forthcoming event of free-flight in air navigation, conflict resolution strategies will be mandatory for most of the aircraft.

The solution is based on 3D proportional navigation, an easy implementation and simple navigation method. A first warning signal of the TCAS gives a guidance command for the conflict resolution in which the UAV is guided away from the protection envelope of a conflicting aircraft. The conflict resolution assumes that the position and the velocity vector of every aircraft are available at any moment.

The computation of the appropriate acceleration for the UAV is essential to enable it escape from the conflict zone. This is obtained resorting to the proportional navigation law. The projections of the acceleration vector are performed relatively to the navigation axes and taken into account in the navigation equations that include the expression of the positional dynamics as well as the physical constraints of the variables that are involved. Nevertheless, the proposed method allows dealing with the collision avoidance problem in less than one second for conflict prevention over a time horizon of ninety seconds involving the UAV and four conflicting aircraft.

Key-words: collision avoidance, TCAS, 3D proportional navigation, UAV.

## Capítulo 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação

Este trabalho tem como objectivo a resolução de conflitos entre aeronaves, um problema que cada vez mais se faz sentir, especialmente nas zonas terminais (TMA's). Como solução começa a surgir o conceito de voo livre, fruto destes mesmos congestionamentos das actuais rotas mas também dos elevados custos de operação das aeronaves. O conceito de voo livre diz que cada aeronave poderá fazer o seu plano de voo, isto é, escolher a sua rota e velocidade para chegar ao seu destino o mais depressa possível [1, 4 a 12, 16, 19 e 22].

Apesar de o voo livre resolver o problema de congestionamento do espaço aéreo, vem causar outros graves problemas, que são ao nível de controlo e monitorização. Todas as aeronaves são controladas pelos controladores de tráfego aéreo (ATC) que assegura a manutenção da distância de segurança entre as aeronaves. Com cada aeronave a escolher o seu rumo, altitude e velocidade este controlo torna-se praticamente impossível. Impõe-se então a adopção de estratégias que ajudem a simplificação e resolução dos conflitos que possam surgir.

Uma forma de simplificar o problema de resolução de conflitos é dividir o espaço em duas zonas. A primeira diz respeito às imediações de uma TMA e a segunda refere-se à zona de voo em rota. Para cada uma das zonas existem particularidades e diferentes formas de resolver os conflitos que possam surgir. Esta tese visa a resolução de conflitos que possam surgir numa zona de voo em rota, mas perto de uma TMA, pois é onde podem surgir mais conflitos devido à elevada densidade de tráfego. A resolução de conflitos numa TMA não é abordada mas já existem trabalhos que abordam este tipo de problemas como o trabalho realizado por Bousson [1].

Esta tese tem como objectivo desenvolver uma resolução de conflitos tridimensional em que o tráfego nas imediações tem influência nas decisões a tomar. O método de

navegação proporcional é utilizado por ser mais simples e robusto, fornecendo uma solução rápida ao nosso problema.

## **1.2 Resolução de conflitos**

A resolução de conflitos pode geralmente ser decomposta em duas fases, a detecção desse mesmo conflito e a sua resolução. Podemos definir a detecção de conflito como um potencial conflito que pode surgir no futuro e é detectado a partir de dados disponíveis das outras aeronaves tais como a sua posição, velocidade, direcção e plano de voo. A fase da resolução do conflito é quando uma das aeronaves muda a sua velocidade, direcção ou altitude de forma a não entrar no espaço protegido da outra. Vamos tratar neste trabalho o UAV que controlamos como a nossa aeronave e aeronave que vai causar o conflito como a aeronave intrusa.

O trabalho vai focar mais a resolução de conflito e deixar a detecção para outros sistemas existentes no mercado e que já desempenham esse papel de detecção de conflitos, como o TCAS. A sua utilização deve-se ao facto de todas as aeronaves de transporte estarem equipadas com este sistema e o nível de confiança que este oferece. O primeiro passo na detecção é a aquisição da posição e do vector de orientação das aeronaves nas imediações do UAV. A aquisição dos dados é realizada pelo TCAS ou por um sistema semelhante, instalado na aeronave, que fornecerá em caso de conflito um aviso.

A resolução do conflito pode ser encarada de duas formas, isto é, como cooperativa ou não cooperativa. No caso de não cooperativa o que acontece é que as aeronaves envolvidas no encontro, não trocam informações entre elas e as intenções futuras de cada uma são desconhecidas, sendo que neste caso é assumido o caso de pior cenário, para uma resolução de conflito eficiente. Na cooperativa a posição e o vector direcção são conhecidos tanto pelas respectivas aeronaves assim como pelos controladores de tráfego aéreo, e confiam na resolução fornecida por estes. Entre os extremos destes casos temos a aproximação probabilística à resolução de conflitos. No nosso caso vamos ter uma resolução cooperativa, mas em que só a nossa aeronave vai tomar medidas para resolver o conflito, mantendo a outra aeronave o seu plano de voo inalterado. A resolução do conflito tem como objectivo manter o

UAV fora da zona protegida das aeronaves intrusas enquanto tenta percorrer os *waypoints*<sup>1</sup> pré-definidos e respeitar o tempo para percorrer o plano de voo. O sistema dinâmico para orientação da aeronave será considerado e apresentado mais à frente. A trajectória livre de conflito será obtida com recurso à navegação proporcional.

### 1.3 Sistema de controlo autónomo de voo

Um sistema de controlo autónomo de voo pode ser constituído por diferentes módulos: o módulo de *guidance*<sup>2</sup>, de resolução de conflitos, do AFCS, de actuadores, da aeronave, do IMU e do módulo de INS/GPS. Na Figura 1.1 está representado um sistema bastante simplificado, de como pode ser constituído um sistema de controlo autónomo de um UAV, assim como as variáveis de controlo que entram e saem de cada respectivo bloco.

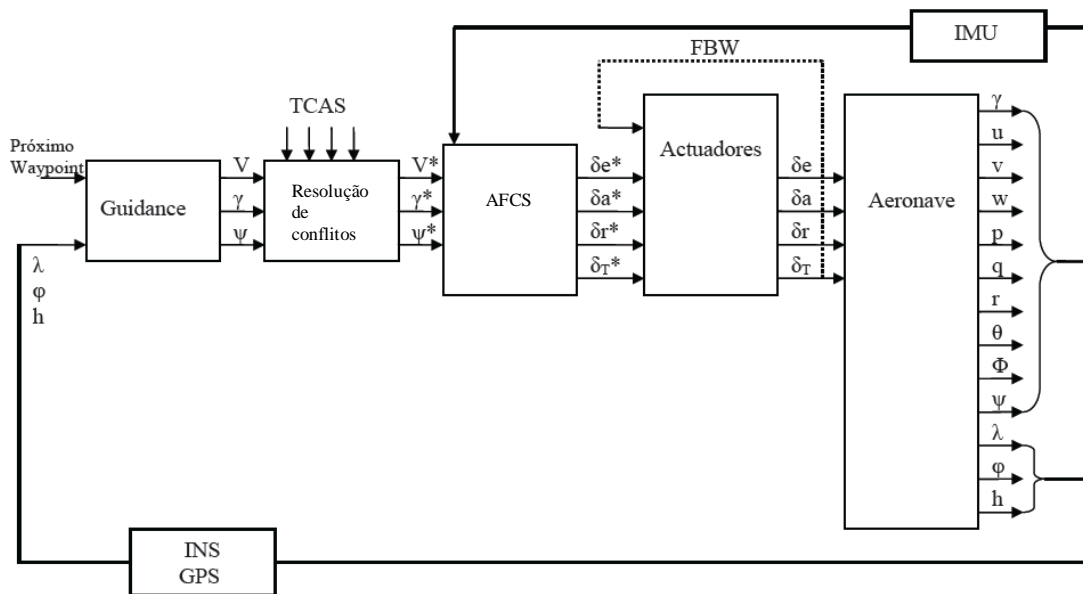


Figura 1.1 - Diagrama de blocos de um controlador autónomo de voo de um UAV.

<sup>1</sup> Palavra inglesa que traduz um ponto num espaço tridimensional pelo qual a aeronave deve passar durante o voo. Um plano de voo de uma aeronave é constituído por um conjunto indefinido de *n waypoints*.

<sup>2</sup> Palavra inglesa que tem como significado a orientação da aeronave no plano horizontal e no plano vertical. A palavra é utilizada para definir a atitude e direcção da aeronave para percorrer os *waypoints* que constituem o plano de voo.

Explicando sucintamente o funcionamento do controlador autónomo de voo, começando pelo módulo de *guidance*, este recebe os *waypoints* introduzidos pelo piloto ou dados pelo computador de bordo aquando do cálculo da rota a seguir, e recebe também os dados acerca do estado da aeronave. Este módulo com base nos dados recebidos fornece ao módulo de resolução de conflito a velocidade necessária, o ângulo de trajetória e de ataque a tomar pela aeronave para chegar ao *waypoint* seguinte. Neste módulo terá de estar disponível a informação da velocidade máxima e mínima da aeronave, assim como o ângulo máximo e mínimo de ataque e também o ângulo máximo e mínimo de inclinação, para que não sejam saturados os controlos da aeronave. O módulo de *guidance* também pode ter a função de determinar se o *waypoint* seguinte é atingido ou não e se deve passar para o outro seguinte. Para realizar essa função tem de ter disponível do bloco de INS/GPS a localização da aeronave.

O módulo de resolução de conflitos recebe os dados fornecidos pelo módulo de *guidance* e faz o cruzamento com os dados fornecidos pelo TCAS de outras aeronaves que se encontram na vizinhança e analisa a existência de perigo de colisão. O TCAS faz uma interrogação, às aeronaves nas suas imediações, com o intervalo de um segundo, significando isto que os dados estão disponíveis para o módulo de resolução de conflitos a cada segundo. Como encaramos a resolução de conflitos como cooperativa, os dados referentes à posição, ângulo do plano de voo e direcção de cada aeronave considerada intrusa estão sempre disponíveis através de um dispositivo de comunicação de dados (ADS-B) e que esses dados são fornecidos ao módulo de resolução de conflitos. Se houver perigo de colisão a velocidade, ângulo de trajetória e de ataque serão corrigidos de forma a evitar o conflito. Na implementação deste sistema por motivo de simplificação é recomendado por Bousson [1] a separação entre o sistema do TCAS e o módulo de resolução de conflitos. Pelo mesmo motivo podemos dizer que a separação entre o módulo de *guidance* e de resolução de conflitos é benéfica. O módulo de resolução de conflitos deve solucionar o problema e fornecer esses dados ao controlador automático de voo para que este direcione a aeronave. Mais à frente iremos abordar a metodologia para a resolução do conflito.

O controlador automático de voo (AFCS) recebe os dados do bloco de resolução de conflitos e transforma a informação recebida nos comandos a fornecer às superfícies de controlo da aeronave de forma a cumprir com a velocidade que lhe é pedida e com o ângulo de trajectória e de ataque.

Nos actuadores entram os dados relativos à deflexão necessária para navegar a aeronave para o ponto de destino e a tracção para atingir a velocidade necessária. Os valores que entram não são exactamente os resultantes devido a condições atmosféricas, de voo ou de outro tipo, sendo por isso a saída os valores que são atingidos pelos actuadores. Numa aeronave com a tecnologia *Fly-by-wire*<sup>3</sup> (FBW) existe uma realimentação que permite aos actuadores saber qual é a verdadeira posição deles e desta forma actuar para obter os valores que são pedidos na entrada.

O bloco que representa a aeronave em quais os actuadores vão actuar as saídas são as condições em que o avião está a voar e estas condições serão avaliadas pela unidade de medida inercial (IMU) e pelo INS/GPS. O IMU mede as acelerações a partir dos acelerómetros e taxas de rotação nos três eixos de forma a fornecer os dados de novo ao controlador de voo para este verificar se a velocidade, o ângulo de trajectória e de ataque são os pretendidos.

O GPS calcula a verdadeira posição da aeronave e fornece essa informação ao bloco de orientação. No mesmo bloco do GPS podemos ter o INS que utiliza os dados de acelerómetros e de giroscópios para fazer o cálculo da posição actual da aeronave através de integrações ao longo do tempo. O INS utiliza também como o IMU acelerómetros e giroscópios para calcular a posição e estado da aeronave num determinado momento. Para isso temos de ter pelo menos três acelerómetros e três giroscópios para obtermos as acelerações em todas as direcções e os giroscópios para medir as taxas de rotação da aeronave. Ao combinarmos estes sensores todos numa plataforma obtemos um sistema capaz de medir a velocidade a posição da aeronave, a aceleração, a atitude e o rumo.

---

<sup>3</sup> Palavra inglesa que tem como significado a inclusão de blocos de controlo, nos actuadores de aeronaves, que são interligados com os blocos de cálculo e de condicionamento dos sinais de controlo de voo.

## 1.4 Navegação proporcional

A navegação proporcional tem sido utilizada ao longo dos anos na orientação de mísseis de forma a estes atingirem os seus alvos em movimento. Mas este mesmo processo que consegue direccionar os mísseis para atingir o seu objectivo pode também ser útil na resolução de conflitos, podendo fazer com que uma determinada aeronave mantenha uma distância de segurança a outras aeronaves ou obstáculos tal com apresentado por Han e Bang [5]. Será utilizado este método de navegação devido à sua simplicidade e facilidade de implementação. A navegação proporcional clássica baseia-se no facto de duas aeronaves se encontram em aproximação e que eventualmente se interceptarão numa linha de vista (LOS) [17 e 23]. A navegação proporcional na sua aplicação mais conhecida, os mísseis, o objectivo é reduzir a linha de vista, isto é, o míssil manobra de forma a atingir a aeronave que persegue. No nosso caso o objectivo é o oposto, a aeronave vai manobrar de forma a evitar o conflito. Este objectivo é acompanhado por condições adicionais em que se tenta minimizar o desvio de trajectória e a variação de velocidade e altitude da aeronave. Estes critérios vão fornecer a trajectória a percorrer (trajectória óptima) pela aeronave.

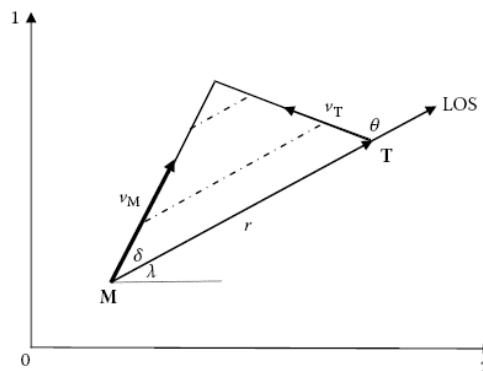


Figura 1.2 - Geometria da navegação proporcional horizontal [23].

A navegação proporcional horizontal baseia-se em conceitos simples da navegação paralela, baseada na intuição física. De acordo com a navegação paralela a LOS deve ser igual a zero. Na realidade ela é diferente de zero e para que o comando de orientação seja proporcional à razão da variação da LOS, esta tem de decrescer para valores perto de zero. A lei da navegação proporcional diz que a aceleração dada é proporcional à razão da LOS, isto é, a constante de proporcionalidade pode ser reduzida ao produto da razão da navegação efectiva  $N$  vezes a velocidade relativa da

velocidade de aproximação ( $v_{cl}$ ) entre  $M$  e  $T$  como mostra a Figura 1.2. Podemos traduzir as palavras na seguinte fórmula:

$$a_h(t) = N v_{cl} \dot{\lambda}(t) \quad (1.1)$$

onde  $a_h(t)$  é a aceleração introduzida que actua perpendicularmente à linha instantânea LOS e  $\dot{\lambda}(t)$  é o ângulo da LOS com a referencia horizontal para aquele instante [23].

A Figura 1.2 mostra o chamado “*triângulo de colisão*” que consiste nas posições do míssil ( $M$ ) e do seu alvo ( $T$ ) e dos seus respectivos vectores velocidade  $v_M$  e  $v_T$ , a LOS e o vector de alcance  $r$ . O ângulo da LOS,  $\lambda$ , é medido com respeito ao eixo de referência 2. O ângulo  $\delta$  é o ângulo do vector  $v_M$  com a LOS. A tracejado temos as futuras linhas LOS de acordo com a lei da navegação em paralelo.

## 1.5 Estrutura do trabalho

No capítulo dois é apresentado um resumo do estado da arte com uma breve definição de voo livre e de onde e porque surgiram estes conceitos. As estratégias para resolver os problemas resultantes do conceito de voo livre. Também é realizada uma revisão do sistema dinâmico de um UAV.

No capítulo três é definido o conceito de envelope de segurança, cone de conflito e a parametrização de trajectórias. No capítulo quatro é apresentada a resolução de conflitos 3D com base na navegação proporcional e na sua optimização. No capítulo cinco são apresentados os casos de aplicação para a nossa aeronave e é realizado um breve resumo do algoritmo aplicado para simular a resolução de conflitos. No capítulo seis e sete são apresentados respectivamente os resultados obtidos e comentados assim como é realizada uma breve apreciação e uma recomendação para trabalhos futuros.

## Capítulo 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Estado da Arte

Nos dias de hoje existem regras muito apertadas para a operação de aeronaves no espaço aéreo civil, principalmente devido ao aumento do tráfego aéreo. Para uma aeronave não tripulada voar dentro do espaço aéreo civil temos de assegurar que esta não vai por em perigo as restantes aeronaves, estando estas obrigadas a garantir um nível de segurança igual à das aeronaves tripuladas.

O espaço aéreo cada vez mais saturado, principalmente nas zonas terminais, levou a um novo conceito que é o de voo livre. Este novo conceito tem beneficiado de avanços recentes dos sistemas de posicionamento global (GPS, Galileo, ...) e de comunicações de dados por satélite (ADS-B), sendo definido como a operação de voo eficiente e seguro segundo as regras de voo por instrumentos (IFR) em que os operadores têm liberdade para seleccionar a rota e velocidade ideal em tempo real. O voo livre concede novos graus de liberdade às aeronaves o que também representa um aumento de complexidade ao sistema de controlo do tráfego aéreo (ATC). Assim cada aeronave tem a responsabilidade de navegar sem colidir com outras na proximidade [2, 6, 11, 16]. O sucesso do voo livre depende da detecção de conflitos e da determinação de estratégias apropriadas para a resolução de conflitos entre as aeronaves [15]. Para a detecção de conflitos existem vários algoritmos de diferentes autores, que são baseados na monitorização contínua das aeronaves na vizinhança. A monitorização contínua pode-se realizar por um sistema ADS-B, em que a aeronave por um protocolo de comunicação de dados por satélite fornece a informação da sua posição GPS assim como a trajectória provável às aeronaves vizinhas [4].

A resolução de conflitos, também conhecida como navegação sem colisão tem sido assegurada pelo ATC, o TCAS e pelo piloto da aeronave. Duas aeronaves consideram-se em conflito quando uma aeronave entra na zona protegida de outra. Os controladores devem coordenar os movimentos das aeronaves de forma a manter a distância mínima de segurança entre elas [15].

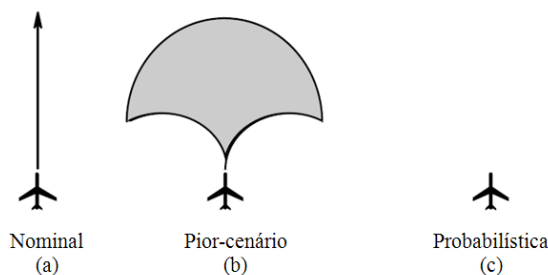
O sistema ATC é um serviço fornecido por controladores baseados em terra, que orientam as aeronaves em terra e em rota. A principal tarefa dos controladores é assegurar a separação entre as aeronaves, tanto lateral, vertical e longitudinal. As tarefas secundárias são a garantia da segurança, o escoamento ordeiro e expedito do tráfego e o fornecimento de informação aos pilotos, como a meteorologia e informações de navegação (NOTAMs). O espaço de protecção de cada aeronave, segundo normas dos ATC's, é de 5 milhas náuticas horizontalmente e de 2000 pés verticalmente. A separação horizontal reduz para 3 milhas náuticas quando uma aeronave se encontra num raio de 40 milhas náuticas de antenas de radar e a separação vertical reduz para os 1000 pés entre aeronaves abaixo dos 29000 pés.

O TCAS é um sistema de alerta que utiliza o ATCRBS ou modo S transponder, instalado em cada aeronave de forma a criar um espaço de protecção e determinar a posição de um possível avião intruso e determinar a possibilidade de colisão, em que a cada segundo efectua uma interrogação às outras aeronaves nas imediações para saber quais são as aeronaves que no futuro poderão vir a causar um conflito. O conceito de resolução de conflitos pelo TCAS assenta na compreensão dos níveis de sensibilidade, do tau e do volume de protecção [3]. O aumento do nível de sensibilidade aumenta a área protegida e conseqüentemente os avisos emitidos pelo TCAS. O sistema de alerta baseia-se em dois parâmetros de avaliação, o Tau e o Dmod, em que o Tau ( $\tau$ ) é o tempo, em segundos, para atingir o ponto de menor separação entre as duas aeronaves e é dada por,

$$\tau = \frac{R_T}{\frac{dR}{dt}} \quad (2.1)$$

em que o  $R_T$  corresponde à distância entre as duas aeronaves, o  $dR/dt$  é a variação dessa distância, em m/s. Se  $dR/dt$  é positivo significa que as aeronaves estão em aproximação, se for negativo então as aeronaves já se estão a afastar uma da outra. O Dmod é a distância de segurança em torno da aeronave, servindo este parâmetro para prevenir a aproximação de aeronaves intrusas que não sejam detectadas pelo Tau. O caso de um aviso pelo Dmod é uma aeronave intrusa que se aproxima da outra aeronave vinda da parte de trás a uma velocidade igual ou pouco superior e em que o Tau fica fora da zona de alerta [3]. Dois tipos de aviso são emitidos pelo TCAS, o R.A. (“*Resolution Advisory*”) identifica um intruso considerado como uma ameaça

de colisão, para um Tau menor do que 25 segundos e o T.A. (“Traffic Advisory”) identifica um intruso que mais tarde pode causar um R.A. e cuja posição deve ser monitorizada de perto, para um Tau entre os 25 e 40 segundos. O sistema TCAS II mais comum pode controlar até 30 alvos e fornece apenas manobras evasivas verticais as quais têm duas categorias: correctiva e preventiva.



**Figura 2.1 - Método de propagação de estado [8].**

Kuchar [7] realizou uma análise probabilística sobre metodologias para avaliação de desempenho dos sistemas de alerta incluindo probabilidade de falso alarme e de falha de detecção. Esta metodologia foi aplicada ao TCAS II versão 6.04A e foi verificado que a probabilidade de falso alarme foi reduzida e a falha de detecção também diminuiu. Este trabalho mostra que a fiabilidade do TCAS II é alta e que este pode ser utilizado para a detecção de conflitos, num problema de resolução de conflitos.

Noutro seu trabalho Kuchar e Yang [8] analisam os mais de 60 trabalhos existentes no campo de detecção e resolução de conflitos. No trabalho foram apresentadas as vantagens e desvantagens dos diferentes trabalhos realizados, assim como apontados pontos em comum. Em Kuchar e Yang [9], 33 dos 68 modelos são analisados mais aprofundadamente. Os autores concluem que apesar de existirem bastantes propostas para a resolução de conflitos, em que os problemas como as incertezas devido à rota, a capacidade de lidar com múltiplos conflitos, coordenação, necessidades de computação, problemas de implementação, aceitação pelos pilotos e controladores de tráfego aéreo, robustez à degradação e à falha, integração com outra informação importante como as condições atmosféricas e também com os requerimentos de certificação e verificação, os vários modelos não abrangem grande parte destes problemas. Na análise dos modelos os autores categorizam os problemas por dimensões, estado, propagação, incerteza e métrica. A dimensão refere-se ao tipo de manobras para resolver o conflito, manobras verticais, horizontais ou ambas. O

estado refere-se às variáveis de estado que geralmente são a posição da aeronave ou o vector velocidade. A propagação é o modelo utilizado para prever a trajectória futura da aeronave, existindo três tipos de propagação: a nominal (a), a probabilística (c) e a do pior-cenário (b). No método nominal o estado actual da aeronave é projectado no futuro sem ter em consideração possíveis incertezas, isto é, extrapolação da posição futura baseado na sua posição actual e vector de velocidade. No método probabilístico as incertezas no modelo são utilizadas para desenvolver uma série de possíveis trajectórias. No método de pior-cenário alguns estados são assumidos com valores extremos e utilizados para achar a sua possível posição no futuro. As incertezas têm a ver com possíveis erros dados pelos sistemas de medição. A métrica refere-se aos parâmetros utilizados para tomar decisões acerca da existência de conflito. Geralmente este parâmetro costuma ser a distância de separação das duas aeronaves, o tempo para menor separação entre aeronaves, probabilidade de conflito, etc.

Kuchar e Yang [8] depois de realizarem a separação pelos métodos de propagação realizam a análise pelos seguintes parâmetros, se os modelos incluem a detecção de conflito ou não, o tipo de resolução: optimizada, campo de forças em que as aeronaves são partículas carregadas e são utilizadas equações da electrostática para determinar as manobras de resolução de conflito, manobras pré-introduzidas ou manuais.

A detecção e resolução de conflitos são um problema que tem sido visto de uma forma local entre a aeronave própria e o intruso. Uma resolução não local resolve o conflito tendo em conta todas as aeronaves a voar na zona de operação, permitindo à aeronave obter uma rota óptima de operação. Para isso é necessário conhecer a posição e o vector de direcção de todas as aeronaves nas imediações.

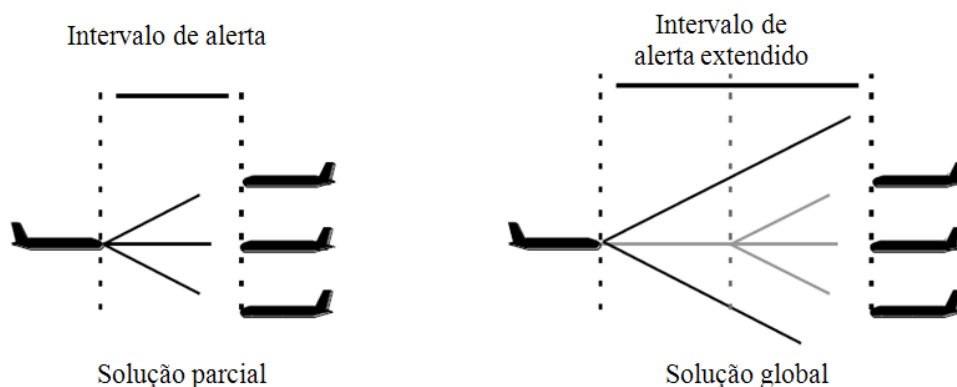


Figura 2.2 - Resolução de conflitos para múltiplas aeronaves

Um sistema protótipo de alerta e resolução de conflitos para o voo livre é proposto por Yang e Kuchar [22], em que uma lógica de alerta é baseada no modelo probabilístico fornecido pelos sensores da aeronave e incertezas de trajectória que não precisam de ser uma distribuição Gaussiana. Simulações Monte Carlo foram usadas para estimar a probabilidades de conflitos em função da posição, direcção e velocidade do intruso. Adicionalmente foi considerada a probabilidade de conflito ao longo de potenciais trajectórias resultantes da resolução de conflito, em que o plano de voo do avião intruso não foi incluído no modelo algo que poderia ser usado para reduzir a incerteza na trajectória projectada. As manobras de resolução de conflito foram apenas pensadas para resolução do problema no imediato, tendo em conta apenas o avião intruso, isto é, não foram incluídas manobras posteriores de regresso à rota inicial e os aviões nas proximidades que podem causar mais conflitos também não foram tidos em conta. Obter trajectórias por simulações Monte Carlo é um processo demorado e dispendioso, pois este sistema utiliza simulações estocásticas como forma de obter aproximações numéricas para avaliar os integrais de posição. Os trabalhos de Prandini et al [14], e Paielli e Erzberger [12], por sua vez, para calcular a probabilidade de conflitos utilizam algoritmos analíticos. Nestes dois trabalhos a detecção de conflito é local e a possível resolução é 2D, apesar de ambos falarem de uma possível resolução do conflito em 3D.

O método probabilístico para a detecção de um conflito realizado por Prandini e Watkins [13] é caracterizado pelos seguintes blocos: a componente de previsão da posição da aeronave no tempo horizonte de vigilância e a componente de detecção de conflito em que um método computacional verifica a segurança de uma configuração

e se alerta o ATC. Os autores neste trabalho realizam a classificação dos modelos probabilísticos existentes e utilizam estes para comparar com os resultados obtidos, em que concluem que as técnicas por eles utilizadas para acelerar os cálculos do método de Monte Carlo resultam na teoria e na prática obtiveram resultados prometedores em aplicações restritas.

Um trabalho de detecção e resolução de conflitos em 3D foi realizado por Doweck et al [2], para duas aeronaves, em que apenas um manobra para evitar o conflito. A manobra produzida para resolver o conflito é realizada apenas com recurso à modificação de um parâmetro de voo, a trajectória, a velocidade em relação ao solo ou a velocidade vertical da aeronave. Apesar de eficaz este método ele contém algumas falhas tais como a não optimização das manobras de resolução de conflito e a resolução local do problema. Por sua vez Menon, et al [11], considera a resolução de conflitos como um problema de controlo óptimo envolvendo várias aeronaves, em que o conflito é resolvido usando a optimização de parâmetros e a optimização de trajectórias. A resolução do conflito gera uma trajectória que é avaliada por dois factores: o desvio da trajectória original e a combinação linear do tempo de voo e do gasto de combustível. Apesar de este trabalho obter uma solução para o conflito envolvendo várias aeronaves, num espaço 3D, o processo de computação e optimização é demorado e complicado.

Uma estratégia de optimização dinâmica proposta por Raghunathan et al [15], baseada numa estrutura de programação matemática para a acomodação de modelos detalhados da dinâmica das aeronaves de forma a obter uma trajectória óptima livre de colisão para um grupo de aeronaves. A trajectória é escolhida segundo a função que minimiza o custo, tendo em conta as prioridades entre as aeronaves.

Na orientação automática de aeronaves em zonas terminais de forma a evitar conflitos o problema é exposto em Bousson [1], como de optimização em que o vector solução é composto pelo rumo, velocidade e nível de voo de cada aeronave. Este vector deve corresponder a uma rota sem colisão e que convirja para o ponto especificado no procedimento de aterragem. A optimização e os modelos dinâmicos de voo utilizados no algoritmo de simulação das equações diferenciais rígidas e não-rígidas são mais simples e adequadas ao processamento em tempo real. Este método

de optimização é rápido e menos complexo do que o algoritmo clássico de optimização livre de derivadas.

A capacidade de “ver e evitar” está reservada a aeronaves tripuladas e para ser possível ter UAV's a voar no espaço aéreo civil tem de ser garantido o mesmo nível de segurança, o chamado “detectar e evitar” [20]. Em Utt et al [20], os autores utilizam para detectar aeronaves intrusas sensores em silício e algoritmos de processamento de imagens complexos. Este sistema desenvolvido é destinado a veículos remotamente operados e a sua aplicação é complicada, pois ainda está numa fase experimental com alguns fenómenos meteorológicos a gerar falsos alarmes. Tallec [19] defende a passagem do “ver e evitar” para o “detectar e evitar”, com recurso ao TCAS que detectaria as aeronaves intrusas e passaria a mensagem ao CTAS que processaria o alerta, permitindo assim a integração no espaço aéreo de aeronaves tripuladas e não tripuladas. Para passar do “ver” para o “detectar” estão a ser estudadas várias soluções técnicas para aplicação nos UAV's tais como: sensores ópticos, infravermelhos, radar de microondas, radar laser e radar biestático.

Trabalho que se pode incluir no “ver e evitar” é o de Kumar e Ghose [10] em que uma estratégia para resolver um conflito devido a presença de um obstáculo imóvel com a ajuda de um radar. A estratégia utilizada para resolver o conflito foi a navegação proporcional clássica inicialmente aplicada a 2D e depois estendida a 3D.

A navegação proporcional pode-se aplicar também a objectos em movimento tal como é proposto por Han e Bang [5]. Apesar da lei de navegação proporcional ser utilizada essencialmente para orientação de mísseis esta pode ser utilizada na resolução de conflitos orientando apenas o vector da velocidade relativa com o vector resultante da resolução de conflitos. O coeficiente de navegação óptima pode ser obtido se o obstáculo se move com um vector de velocidade constante. Este método parte também do pressuposto que os dados relativos à aeronave intrusa como a posição, a velocidade e o ângulo de orientação são conhecidos. Estes dados são essenciais para o algoritmo implementado, como se pode ver na Figura 2.3.

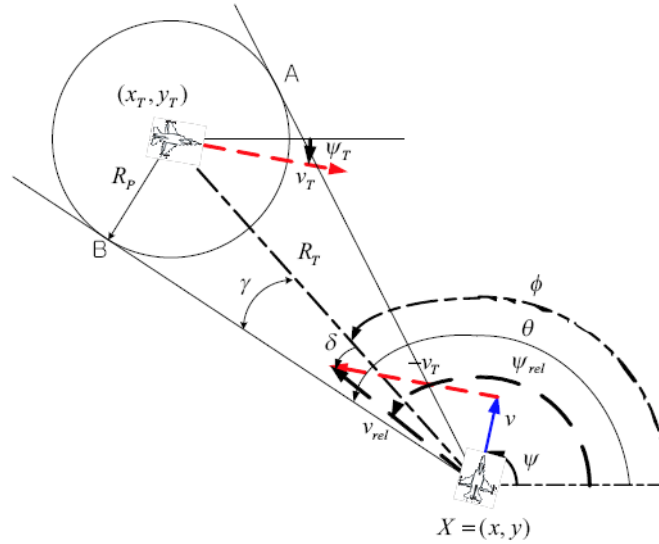


Figura 2.3 - Configuração geométrica para resolução de conflitos [5].

Como pode ser observado na Figura 2.3, um cone é formado por três pontos, A, B e X. A navegação é em modo normal se não houver detecção de um obstáculo. Quando um obstáculo for detectado uma manobra de evasão vai ser efectuada em rota. O algoritmo de controlo vai calcular:  $v_{rel} = v - v_T$ . Se o vector velocidade relativo estiver fora do cone de obstáculo, a navegação normal é mantida, caso contrário o modo para evitar colisão é iniciado. O modo para evitar colisão consiste em estabelecer o vector  $\vec{X}$ . Em seguida o vector da velocidade relativa da aeronave é orientado até convergir com o vector de resolução de conflito. O comando segundo a navegação proporcional para evitar a colisão é dado por:

$$a = Nv_{rel}\dot{\theta} \quad (2.2)$$

em que  $a$  é a aceleração imposta,  $\dot{\theta}$  representa o vector de orientação para evitar a colisão e  $N$  é a constante de navegação proporcional. A condição de resolução de conflito tem de ser definida de forma a converter modo de resolução de conflito em modo de navegação, quando o conflito é resolvido.

As três condições suficientes para garantir a resolução do conflito são:

- A distância entre a aeronave e o obstáculo é maior do que a distância de segurança ( $R_P$ ).

$$R_T \geq R_P \quad (2.3)$$



A figura mostra a tracejado a rota relativa da aeronave, que satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\sin(\theta - \alpha) &= \frac{R_\alpha}{R} \\ \sin(\theta - \alpha + \Delta\theta) &= \frac{R_\alpha}{R + \Delta R} \cong \frac{R_\alpha}{R} \left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Se o intervalo  $\Delta t$  é pequeno, o ponto B aproxima-se do ponto A. De modo que:

$$\Delta\theta = -\frac{\Delta R}{R} \tan(\theta - \alpha) \quad (2.6)$$

$$\alpha \approx \psi_{rel}$$

logo a seguinte equação é satisfeita:

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R} \tan(\theta - \psi_{rel}) \quad (2.7)$$

Se a aeronave se encontra numa situação de colisão temos:

$$0 < \theta - \psi_{rel} < \pi \quad (2.8)$$

$$0 < \theta - \psi_{rel} < \frac{\pi}{2} \rightarrow \dot{R} < 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta - \psi_{rel} < \pi \rightarrow \dot{R} > 0 \quad (2.10)$$

logo  $\dot{\theta}$  é sempre maior do que zero numa situação de colisão. Agora para a análise de convergência temos de introduzir o seguinte definição para o termo de erro,

$$\xi = \theta - \psi_{rel} \quad (2.11)$$

ou

$$\dot{\xi} = \dot{\theta} - \dot{\psi}_{rel} \quad (2.12)$$

De forma ao termo do erro convergir para zero, a derivada do tempo do termo erro é sempre negativa, desde que o termo erro seja positivo para a situação de colisão, como mostra a figura anterior. Se a resposta do comando de controlo de resolução de conflito for adicionado à equação anterior obtemos,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{\theta} - \dot{\psi}_{rel} \\ &= (1 - N)\dot{\theta}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Na Equação 2.13, como  $\dot{\theta}$  é positivo a seguinte condição  $N > 1$ , deve ser satisfeita para obter convergência.

Pelo resultados apresentados no trabalho de Han e Bang [5] evitar a colisão entre as aeronaves com o recurso à navegação proporcional 2D resulta localmente.

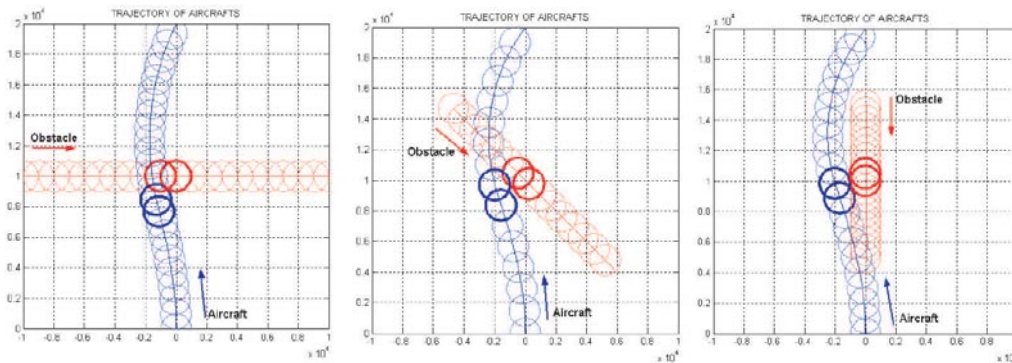


Figura 2.6 - Resultados obtidos por Han e Bang [5].

Na otimização da navegação proporcional existem vários métodos. Vários autores da área de orientação de mísseis abordam este problema embora de formas diferentes. No seu livro Siouris [17] utiliza uma função de custo que visa minimizar a distância do míssil ao seu alvo, sendo o controlo para tal a aceleração do míssil. Neste trabalho as restrições ao problema são unicamente as acelerações do míssil que não pode ter valores superiores ao máximo físico deste. A constante de navegação proporcional obtida pelo autor é de  $N=3$ , embora na prática sejam utilizados valores de 4 e 5. A solução para o problema de otimização é alcançada com base no método da matriz de Riccati.

Zarchan [24] para otimizar a lei de navegação proporcional utiliza também uma função de custo que visa minimizar a distância entre o míssil e o alvo e em que o controlo é a aceleração. Para tal partem da solução da equação diferencial do vector espaço de estados para encontrar a matriz fundamental que é a transformada inversa de Laplace e tem de ser invertida primeiro para a matriz  $(sI - F)$ . A matriz fundamental é então utilizada na solução da equação diferencial resultante do vector de estados, em que apenas interessa o primeiro estado. Deste primeiro estado deriva-se em ordem ao tempo de forma a obter a lei óptima de navegação proporcional. Para

o autor também a constante de navegação se aproxima de 3 como mostra a Figura 2.7.

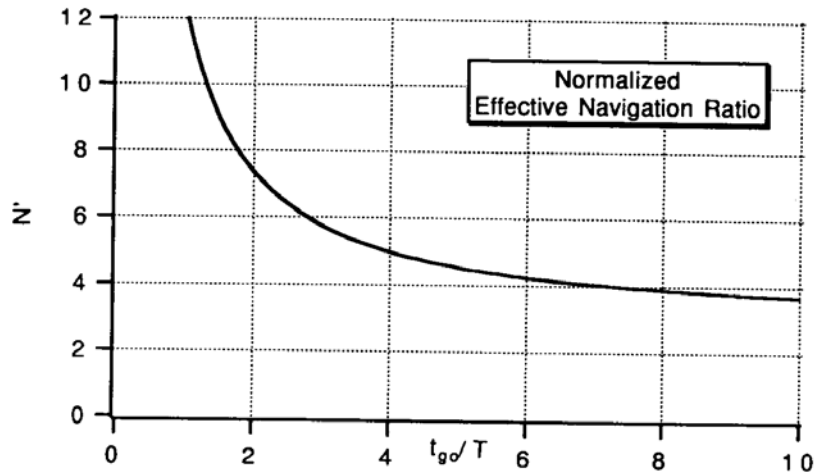


Figura 2.7 - Constante de navegação para lei de navegação ótima [24].

Yanushevsky [23] aplica os mesmos conceitos dos autores anteriores, mudando apenas a forma de obter o controle ótimo. O controle ótimo é obtido com recurso à aproximação Bellman-Lyapunov que pode ser visto em mais detalhe no anexo A2.

## 2.2 Modelo dinâmico do UAV

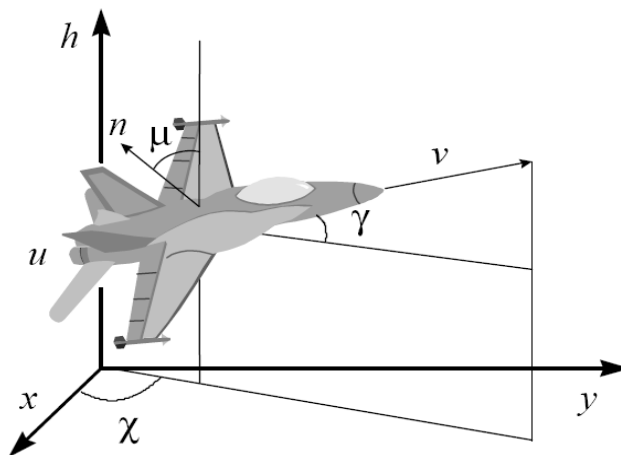


Figura 2.8 - Variáveis de estado e controle do ponto massa.

É introduzido neste capítulo de revisão bibliográfica a caracterização do modelo dinâmico de uma aeronave, para mostrar como é complicado, apesar de várias

simplificações que podem ser realizadas para obter as leis de orientação de um UAV. O modelo da aeronave pode ser reduzido a um modelo ponto massa, de forma a simplificar o problema. Este modelo consegue reproduzir maior parte das forças dinâmicas encontradas na aviação civil [1, 11, 15]. O problema é resolvido assumindo um referencial euclidiano mas em movimento (Terra plana) e a um referencial sem rotação, mas que se move com a massa de ar local. Estas assumções são razoáveis para aeronaves civis operando dentro de um alcance de 200 milhas náuticas. Como a resolução de conflitos se dá dentro deste limite a fidelidade do modelo ponto massa é adequado para a formulação do nosso problema. As equações gerais de movimento descrevem o ponto massa da aeronave num espaço tridimensional, com vento constante e potência de motor a variar, onde a massa da aeronave é considerada constante. As equações são as seguintes:

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \chi + W_x \quad (2.14)$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \sin \chi + W_y \quad (2.15)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma + W_h \quad (2.16)$$

$$\dot{V} = \frac{T-D}{m} - g \sin \gamma \quad (2.17)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{g}{V} \left( \frac{L \cos \mu}{gm} - \cos \gamma \right) \quad (2.18)$$

$$\dot{\chi} = \frac{L \sin \mu}{mV \cos \gamma} \quad (2.19)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\tau} (uT_{max} - T) \quad (2.20)$$

$$\dot{m} = -\eta \quad (2.21)$$

Onde  $x$ ,  $y$  e  $h$  são as coordenadas de posição,  $V$  é a velocidade,  $\gamma$  é o ângulo com o plano de voo,  $\chi$  é o ângulo de direcção,  $\mu$  é o ângulo de viragem na referência aerodinâmica,  $T$  é a potência efectiva,  $T_{max}$  é a potência máxima disponível,  $u$  é a posição da manete de controlo da potência,  $\tau$  é a constante de tempo de resposta do motor,  $\alpha$  é o ângulo de ataque,  $\epsilon_t$  é o ângulo entre o vector de potência e o eixo de sustentação nula,  $D$  é o arrasto,  $L$  é a sustentação e  $\eta$  é o consumo específico de combustível. O vector de velocidade do vento é composto pelas três componentes:  $W_x$ ,  $W_y$  e  $W_h$ .

A sustentação ( $L$ ) e o arrasto ( $D$ ) são dados da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} C_L(\alpha) \rho(h) V^2 S \quad (2.22)$$

$$D = \frac{1}{2} C_D(\alpha) \rho(h) V^2 S \quad (2.23)$$

Onde S é a área da asa e  $\rho(h)$  é a densidade do ar com respeito à altitude e pode ser obtida da seguinte forma:

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0(1 - 2.2558 \times 10^{-5}h)^{4.256060537}, & h < 11000m \\ 0.29707\rho_0 \exp[1.576939464 \times 10^{-4}(11000 - h)], & 11000 < h < 20000m \end{cases} \quad (2.24)$$

Em que  $\rho_0=1.225 \text{ kg/m}^3$ . Os coeficientes aerodinâmicos são:

$$C_D(\alpha) = C_{D0} + C_{D2} \cdot C_L^2(\alpha) \text{ e } C_L(\alpha) \cong C_{L\alpha} \cdot \alpha \quad (2.25)$$

E  $C_{D0}$  e  $C_{D2} \cdot C_L^2$  são respectivamente os coeficientes de vórtice devido ao arrasto e o arrasto viscoso devido à sustentação.

Para conveniência analítica, as equações que descrevem a posição da aeronave podem ser diferenciadas uma vez em ordem ao tempo e as restantes equações dinâmicas podem ser utilizadas de uma forma alternativa no modelo da aeronave como:

$$\ddot{x} = U_1, \quad \ddot{y} = U_2, \quad \ddot{h} = U_3 \quad (2.26)$$

Onde  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  são as novas três variáveis de controlo do modelo ponto massa. As relações entre estas variáveis de controlo e as variáveis actuais de controlo são dadas pelas seguintes expressões:

$$\mu = \tan^{-1} \left[ \frac{U_2 \cos \chi - U_1 \sin \chi}{\cos \gamma (U_3 + g) - \sin \gamma (U_1 \cos \chi - U_2 \sin \chi)} \right] \quad (2.27)$$

$$n = \frac{\cos \gamma (U_3 + g) - \sin \gamma (U_1 \cos \chi - U_2 \sin \chi)}{g \cos \mu} \quad (2.28)$$

$$T = [\sin \gamma (U_3 + g) + \cos \gamma (U_1 \cos \chi - U_2 \sin \chi)]m + D \quad (2.29)$$

Logo o ângulo de direcção ( $\chi$ ) e o ângulo do plano de voo ( $\gamma$ ) podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\tan \chi = \dot{y} / \dot{x}, \quad \sin \gamma = \dot{h} / V \quad (2.30)$$

Neste modelo a posição da manete,  $u$  selecciona a fracção da potência máxima da tracção que temos disponível. O factor de carga é a razão das forças gravitacionais e de sustentação que afecta a aeronave. Junto com o ângulo de viragem estas podem ser usadas para controlar a direcção da aeronave.

Contudo estas variáveis de controlo  $n$ ,  $\mu$  e  $u$ , estão constrangidos a valores em que a performance da aeronave não saia do seu envelope de voo, isto é, possa ficar com danos estruturais durante as manobras em voo. Logo têm de obedecer às seguintes condições:

$$\begin{aligned} |n| &\leq n_{max} \\ |\mu| &\leq \mu_{max} \\ 0 &\leq u \leq 1 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Este modelo da aeronave ponto massa pode também ser utilizado para determinar os parâmetros geométricos das trajetórias em termos de variáveis de controlo da aeronave e vice-versa. A modelação de aeronaves pode ser consultada mais extensivamente em Stevens e Lewis [18].

## Capítulo 3. MODELAÇÃO DA PREVENÇÃO DE COLISÃO 3D PARA UAV's

### 3.1 Definição de envelope de conflito

Segundo a definição aceita para a definir, conflito ocorre quando, se as aeronaves se encontrarem a diferentes altitudes mas no seu percurso de subida ou descida estas se encontram separadas por menos de 1000 pés (cerca de 300m), no plano vertical. Se as aeronaves estiverem à mesma altitude, estas não se podem aproximar mais do que 3 milhas náuticas (5556m). Esta definição traduz-se numa caixa com um diâmetro de 6 milhas náuticas e uma espessura de 2000 pés, em que o avião se encontra no centro desta caixa. Qualquer aeronave que entre dentro desta caixa diz-se que está a causar um conflito.

Esta definição de conflito é simples de contextualizar, mas numericamente pode trazer problemas devido às arestas neste envelope. Uma aeronave a voar na periferia do envelope de conflito pode alterar a situação, o que vai causar dificuldades no algoritmo de resolução de conflitos.

Uma forma de representar a definição de conflito é através de um envelope de segurança referido por Bousson [1] e Menon et al [11]. O envelope de segurança para uma aeronave na posição  $(x_i, y_i, h_i)$  é definido pela seguinte equação:

$$\frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}{a^2} + \frac{(h-h_i)^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (3.1)$$

Este envelope tem uma secção cruzada longitudinal elíptica no plano vertical e uma secção cruzada longitudinal circular no plano horizontal, sendo  $a$  o eixo semi-maior da secção cruzada elíptica e  $b$  o eixo semi-menor. De forma a garantir a separação, um pode definir um parâmetro de aproximação  $r_{ij}$  entre duas aeronaves  $i$  e  $j$ , baseado na distância entre a posição da aeronave  $i$  e o envelope de segurança da aeronave  $j$ . O cálculo para  $r_{ij}$  é dado por:

$$r_{i,j} = \sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2 + \Delta h_{i,j}^2} - \sqrt{\frac{a^2 b^2 (\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2 + \Delta h_{i,j}^2)}{a^2 \Delta h_{i,j}^2 + b^2 (\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2)}}, \quad i \neq j \quad (3.2)$$

onde  $\Delta x_{i,j} = x_i - x_j$ ;  $\Delta y_{i,j}$  e  $\Delta h_{i,j}$  são igualmente definidos. Pode ser verificado que o parâmetro de aproximação é positivo se o envelope de segurança da aeronave não se toca com outra aeronave, sendo negativo da outra forma. O propósito da resolução de conflitos será manter o parâmetro de aproximação positivo.

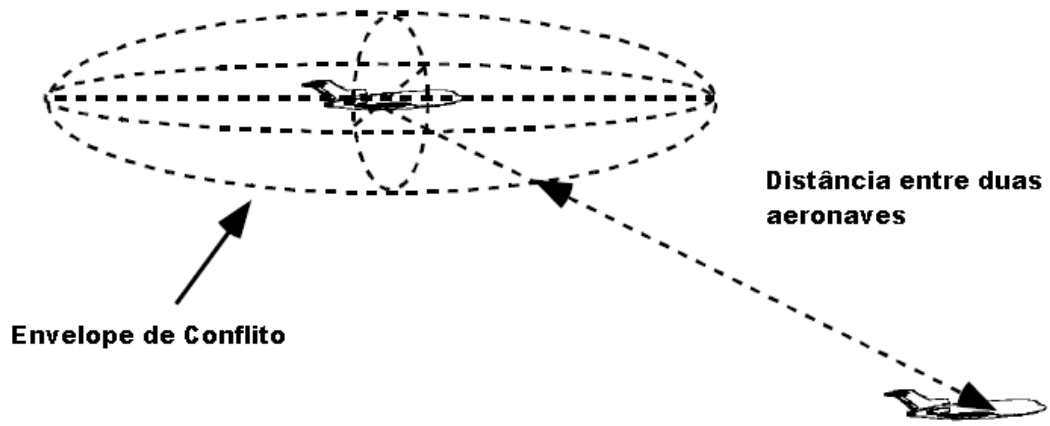


Figura 3.1 - Envelope de conflito e distância entre duas aeronaves [11].

### 3.2 Definição de cone de conflito

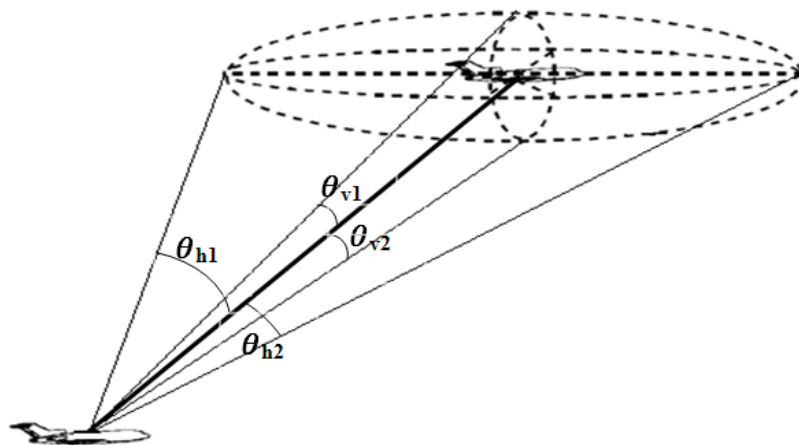


Figura 3.2 - Configuração do cone de conflito.

O cone de conflito é um volume criado para descrever o espaço que separa a nossa aeronave da aeronave intrusa. Para definir esse espaço temos de saber a distância entre as duas,  $R_T$ . A partir da linha imaginária que liga as duas aeronaves temos quatro ângulos tirados em relação ao envelope de conflito, como mostra a Figura 3.2. Estes são os ângulos utilizados para determinar a existência de conflito assim como a fuga a este. Se o vector relativo entre as duas aeronaves estiver dentro do cone de conflito, existe conflito entre estas. Para terminar com o conflito o vector relativo tem de ser orientado para fora do cone. A orientação na horizontal vai ser para  $\theta_{h1}$  ou  $\theta_{h2}$ , e na vertical para  $\theta_{v1}$  ou  $\theta_{v2}$ .

### 3.3 Parametrização da trajectória

O método de parametrização de trajectória permite a descrição das trajectórias individuais das aeronaves usando um pequeno número de parâmetros, que são a velocidade ( $V$ ), o ângulo do plano de voo ( $\gamma$ ) e a direcção da aeronave ( $\chi$ ). Estes três parâmetros formam o vector de orientação da respectiva aeronave. Além de permitir uma descrição compacta da trajectória, os métodos de parametrização de trajectória permitem obter a solução do problema na forma de um problema de optimização de parâmetros.

As trajectórias parametrizadas das aeronaves podem ser obtidas a partir de *waypoints* de quatro dimensões, isto é, três componentes de posição e uma de tempo, em que a aeronave vai percorrer a sequência especificada  $N+1$  dada de *waypoints*  $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots, P_N$  (em que  $P_0$  pode ser igual a  $P_N$ ), vindo esta sequência de pontos de uma base de dados, que pode ser um plano de voo pré-definido.

A parametrização de trajectórias de forma linear é altamente eficiente do ponto de vista computacional, mas pode levar a mudanças abruptas nas variáveis de controlo, o que não é desejável pois todas as aeronaves têm os seus limites estruturais e dinâmicos. De forma a limitar estas mudanças abruptas foram introduzidas saturações nos actuadores de controlo e limitados os rácios de viragem e subida da aeronave. Também nos *waypoints* foram introduzidos uma distância de aceitação de forma à aeronave poder avançar para o próximo *waypoint*. Este parâmetro é dado por  $\sigma = 2b$ , em que  $b$  é a envergadura da asa da aeronave.

## Capítulo 4. NAVEGAÇÃO PROPORCIONAL 3D

### 4.1 Estratégia para resolução de conflitos 3D

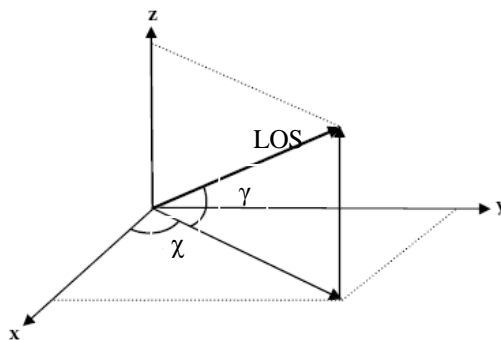


Figura 4.1 - Representação tridimensional da LOS.

De forma a visualizar um objecto temos de traçar uma linha até esse objecto. A linha de vista (LOS) que passa pelo objectivo de orientação é um importante conceito para a orientação. Essa orientação com respeito a um sistema referência de coordenadas permite formular ordens de orientação precisas. Se o alvo no fim da LOS estiver imóvel a LOS pode ser traduzida pelo vector da nossa aeronave, que voa para alcançar esse objectivo. Mas se o alvo estiver em movimento para atingir esse objectivo é preciso somar os dois vectores respectivos de movimento. Mas como o objectivo para este trabalho é exactamente o oposto à que fazer a diferença entre estes mesmos vectores. O vector resultante,  $V_{rel}$ , não vai ser mais do que a diferença entre o vector direcção da aeronave intrusa ( $U$ ) com o vector direcção da nossa aeronave ( $V$ ).

$$V_{rel} = V - U \quad (4.1)$$

O vector  $V_{rel}$  é importante pois vai traduzir o objectivo que é guiar a aeronave para fora do cone de conflito, isto é, se o vector estiver fora do cone não haverá conflito. Pode-se traduzir o vector nas seguintes componentes:  $V_{rel} = [v_{rel}, \gamma_{rel}, \chi_{rel}]$ .

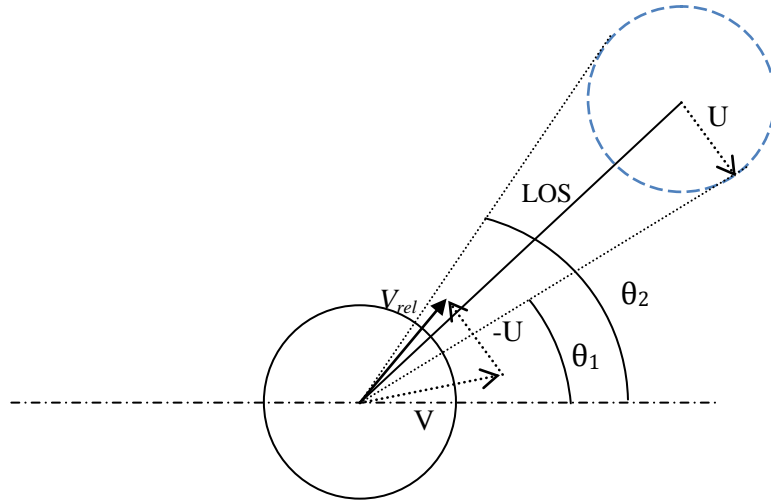


Figura 4.2 - Esquema representativo do vector relativo e respectivos ângulos para sair do cone de conflito.

Após a introdução à navegação proporcional em duas dimensões, podemos aplicar este conceito para combinar a representação tridimensional. Usando o azimute  $\chi$  e a elevação  $\gamma$  da aeronave obtemos as seguintes equações para as acelerações  $a_h(t)$  e  $a_v(t)$  no plano horizontal e no plano vertical respectivamente.

$$a_h(t) = N v_{rel} \dot{\chi}(t), \quad a_v(t) = N v_{rel} \dot{\gamma}(t) \quad (4.2)$$

em que  $N$  é a constante de navegação proporcional e  $v_{rel}$  é a velocidade relativa entre as aeronaves. A aceleração total dada à aeronave vai ser  $a_c(t) = (a_{cx}(t), a_{cy}(t), a_{cz}(t))$ , isto é, projectando a aceleração total nos diversos eixos obtemos as segundas derivadas das equações dinâmicas do modelo da aeronave, representadas nas equações 2.14 a 2.16:

$$\ddot{x} = a_{cx} = -a_h(t) \sin \chi \cos \gamma - a_v(t) \cos \chi \sin \gamma \quad (4.3)$$

$$\ddot{y} = a_{cy} = a_h(t) \cos \chi \cos \gamma - a_v(t) \sin \chi \sin \gamma \quad (4.4)$$

$$\ddot{h} = a_{cz} = a_v(t) \cos \gamma \quad (4.5)$$

Estas são as acelerações que vão permitir à aeronave fugir ao conflito. Mas para orientar a aeronave para os ângulos pretendidos isto só não basta, temos de recorrer ao vector relativo, pois é este que deve ser orientado para fora do cone de conflito. Logo vamos introduzir nas equações 4.3 a 4.5 a subtracção do ângulo verdadeiro

entre a direcção e elevação da aeronave ao ângulo de direcção e elevação do vector relativo, resultando as seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_{cx} &= -a_h(t) \sin(\chi_{rel} - \chi) \cos(\gamma_{rel} - \gamma) - a_v(t) \cos(\chi_{rel} - \chi) \sin(\gamma_{rel} - \gamma) \\ a_{cy} &= a_h(t) \cos(\chi_{rel} - \chi) \cos(\gamma_{rel} - \gamma) - a_v(t) \sin(\chi_{rel} - \chi) \sin(\gamma_{rel} - \gamma) \\ a_{cz} &= a_v(t) \cos(\gamma_{rel} - \gamma) \end{aligned} \quad (4.6 - 4.8)$$

O propósito de introduzir a diferença entre os ângulos relativo e da aeronave tem apenas um simples objectivo, obter o ângulo inverso da aeronave intrusa, para que a nossa possa acelerar de forma a afastar-se na direcção oposta:

$$\chi_{rel} = \chi - \chi_{intrusa}$$

logo obtemos para a diferença de direcção do vector relativo com a nossa aeronave:

$$\chi_{rel} - \chi = (\chi - \chi_{intrusa}) - \chi = -\chi_{intrusa}$$

O mesmo é válido para a atitude da aeronave, em que vamos obter um ângulo de ataque contrário ao da aeronave intrusa.

Para obter as acelerações verticais e horizontais a introduzir nas equações anteriores temos:

$$\alpha_h = Nv_{rel}\dot{\theta}_h, \quad \alpha_v = Nv_{rel}\dot{\theta}_v \quad (4.9)$$

em que  $\dot{\theta}_h$  e  $\dot{\theta}_v$  não é mais do que os respectivos ângulos para fugir ao conflito horizontalmente e verticalmente. No modelo foram introduzidas restrições ao nível das acelerações máxima e mínima, para não ultrapassar os limites estruturais da aeronave. Os valores obtidos para os ângulos serão por vezes muito elevados, fazendo com que a aeronave mude demasiado rápido de direcção, não respeitando as leis da física. Logo foi introduzido as equações seguintes para harmonizar as mudanças de direcção e atitude do UAV, embora já restringidas ao nível da aceleração.

Para isso vamos obter um valor para a direcção em função da aceleração e do intervalo de tempo e do ângulo para fugir ao conflito. Este valor será utilizado na equação a seguir para obter a direcção futura da aeronave.

$$\chi_k^{ref} = a_{cy} + dt \cdot N \dot{\theta}_h \quad (4.10)$$

$$\chi_{k+1} = \chi_k + \left(1 - \exp\left(-\frac{dt}{T_{amax}}\right)\right) (\chi_k^{ref} - \chi_k) \quad (4.11)$$

em que  $dt$  é o intervalo de tempo do cálculo e  $T_{amax}$  é a constante de tempo. Da mesma forma como foi realizado para a direcção da aeronave podemos obter equações idênticas para a elevação da aeronave:

$$\gamma_k^{ref} = a_{cz} + dt \cdot N \dot{\theta}_v \quad (4.12)$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \left(1 - \exp\left(-\frac{dt}{T_{amax}}\right)\right) (\gamma_k^{ref} - \gamma_k) \quad (4.13)$$

Para os ângulos obtidos da aceleração vertical e da aceleração horizontal tem de se introduzir uma função que limite o ângulo de direcção e ataque da aeronave respectivamente:

$$|\chi_k^{ref}| \leq \chi_{max}^{ref} \quad (4.14)$$

$$|\gamma_k^{ref}| \leq \gamma_{max}^{ref} \quad (4.15)$$

Para a velocidade temos de garantir que está não sai dos limites de operação da aeronave, nem que tenha acelerações irreais. Logo impõe-se a seguinte condição:

$$|V_k^{ref}| \leq V_{max}^{ref} \quad (4.16)$$

e em seguida o valor é introduzido na equação que traduz a verdadeira velocidade de referência da aeronave:

$$V_{ref} = V + \left(1 - \exp\left(-\frac{dt}{T_{amax}}\right)\right) (V_k^{ref} - V) \quad (4.17)$$

em que  $V_k^{ref}$  não é nada mais do que igual a  $a_{cx}$  e  $T_{amax}$  a constante de tempo imposta pela aceleração máxima é dada da seguinte forma:

$$T_{a_{max}} = 1/(5a_{max}) \quad (4.18)$$

esta constante de tempo nem sempre é utilizada com estes valores. Existem casos que outros valores para a constante de tempo são mais apropriados. No capítulo mais à frente vamos indicar as situações onde isto acontece.

## 4.2 Condições suficientes para inexistência de conflito

À semelhança do realizado por Han e Bang [5], temos de introduzir condições que determinem o fim de conflito, para que a aeronave retome o seu plano de voo. Neste caso temos de introduzir condições não só para por fim ao conflito na horizontal como na vertical, obtendo as seguintes condições:

Condição 1: A nossa aeronave encontra-se fora do envelope de conflito da aeronave intrusa e as aeronaves estão a afastar-se.

$$r_{i,j} > 0, \frac{dR}{dt} > 0 \quad (4.19)$$

Condição 2: O azimute e a elevação do vector de velocidade relativo,  $\chi_{rel}$  e  $\gamma_{rel}$  respectivamente, encontram-se fora do cone de obstáculo.

Condição 3: O obstáculo encontra-se atrás da direcção do vector de velocidade relativo, tanto horizontalmente ou verticalmente.

$$\chi_{rel} \geq \frac{\pi}{2} + atan2(\Delta x, \Delta y) \text{ ou } \chi_{rel} \leq -\frac{\pi}{2} + atan2(\Delta x, \Delta y) \quad (4.20)$$

$$\gamma_{rel} \geq \frac{\pi}{2} + atan2(\Delta z, \Delta y) \text{ ou } \gamma_{rel} \leq -\frac{\pi}{2} + atan2(\Delta z, \Delta y) \quad (4.21)$$

em que temos  $(x_T, y_T, z_T)$  como as coordenadas da aeronave intrusa e  $(x, y, z)$  como as coordenadas do UAV.

$$\Delta x = x_T - x, \Delta y = y_T - y, \Delta z = z_T - z \quad (4.22)$$

### 4.3 Optimização de trajectória

O movimento da aeronave pode normalmente ser descrito por um conjunto de equações diferenciais da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.23)$$

$x$  é o vector das variáveis de estado, isto é, velocidade, ângulo do plano de voo e ângulo de trajectória e  $u$  o vector das variáveis de controlo, potência e ângulo de rolamento. Também algumas restrições podem ser adicionadas tais como factor de carga e ângulo máximo de rolamento na seguinte forma algébrica:

$$\underline{g} \leq g(x, u) \leq \bar{g} \quad (4.24)$$

onde  $\underline{g}$  e  $\bar{g}$  são respectivamente os limites inferiores e superiores das restrições algébricas. Agora o problema surge com a determinação de  $u$  para obter a melhor trajectória sem violar as restrições. Todos os tipos de optimização começam pela definição do termo escalar da função objectivo, isto é, definir o que é bom e o que é mau. Na optimização de trajectórias de aeronaves é obvio que o consumo é um factor limitativo, assim como o tempo de chegada ao *waypoint* determinado.

O problema da orientação automática para a resolução de conflitos consiste em garantir que a aeronave não colide com outra durante o voo. Isto traduz-se na garantia da manutenção da distância entre as duas aeronaves, em que esta é maior do que a distância mínima de segurança pré-determinada [1]. De forma a atingir estes objectivos podemos alterar a velocidade da aeronave, a altitude e as componentes da trajectória enquanto percorre o seu plano de voo, assegurando também que a aeronave para tal não efectue demasiadas manobras.

Na navegação proporcional a optimização é mais simplificada e prendesse só com o objectivo que é orientar a aeronave para o alvo o mais eficientemente possível. Logo o objectivo é modelar o nosso problema de forma a obter a constante de navegação proporcional óptima.

#### 4.4 Navegação proporcional óptima

A lei da navegação proporcional 1.1 é o resultado de uma inferência lógica. Se a razão da razão da LOS difere de zero, isto é, se as aeronaves se estão a afastar ou a aproximar, podemos introduzir uma acção que leve ao pretendido. A formulação mais rigorosa do problema, para manter o nosso avião fora da zona de protecção da aeronave intrusa, pode ser vista no subcapítulo 4. As acelerações dadas foram consideradas como controlos e a LOS e as suas derivadas foram escolhidas como variáveis de estado.

De forma diferente a lei de orientação da navegação proporcional foi considerada como uma acção de controlo. Vários trabalhos mostram que controlos lineares são óptimos nos casos de sistemas caracterizados por equações lineares diferenciais e uma função quadrática como índice de desempenho. A teoria quadrática linear surge da teoria geral do controlo óptimo não linear. Para a equação de movimento, considerando um movimento horizontal:

$$\ddot{y} = -a_h \quad (4.25)$$

Temos de encontrar o índice de desempenho para qual a lei de navegação proporcional é um controlo óptimo. Problemas deste género são chamados de problemas de optimização inversa [23].

Partindo do princípio que a velocidade relativa entre as aeronaves se mantém constante, ignorando a dinâmica da aeronave podemos escrever:

$$\dot{y} = -a_h, \quad y = r\chi, \quad R_T(\tau) = V_{rel}\tau \quad (4.26)$$

O índice de performance ou função de custo é definida por:

$$I = \frac{1}{2}(Cy^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} a_h^2(t)dt) \quad (4.27)$$

onde  $C$  é o coeficiente, geralmente chamado de factor de peso, e o tempo de voo inicial é zero. O primeiro termo da equação 4.27 representa a separação do plano horizontal das duas aeronaves e o segundo termo caracteriza a energia despendida

durante o voo para resolver o conflito. Um valor alto para  $C$  realça a importância de manter a distância de segurança no plano horizontal e um  $C$  menor realça a importância de despende pouca energia para fugir ao conflito, sendo que neste caso interessa é a manutenção da distância de segurança entre as aeronaves. Da mesma forma que realizamos a optimização para a resolução horizontal do problema, podemos aplicar à optimização da trajectória vertical.

O problema óptimo consiste em achar o valor para a aceleração da aeronave que minimize a função 4.27. Para a obtenção desta solução do problema óptimo vamos aplicar o método de Bellman-Lyapunov (Anexo A2). O resultado obtido para a aceleração é:

$$a_h(t) = \frac{3\tau}{\frac{3}{C} + \tau^3} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (4.28)$$

Alcançar o objectivo corresponde a um  $C \rightarrow \infty$ , logo obtemos,

$$a_h(t) = \frac{3}{\tau^2} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (4.29)$$

Tendo em conta que a variação do ângulo de trajectória da aeronave pode ser dada pela seguinte equação,

$$\dot{\chi}(t) = \frac{y(t) + \dot{y}(t)\tau}{V_{rel}\tau^2} \quad (4.30)$$

obtem-se a seguinte simplificação,

$$a_h(t) = 3 V_{rel} \dot{\chi}(t) \quad (4.31)$$

Isto significa que para a lei de navegação proporcional a constante de navegação óptima é  $N=3$ , que garante a manutenção da distância de segurança à aeronave invasora. As leis de navegação óptima produzem um melhor desempenho da aeronave.

É de notar a simplificação feita ao problema, mas a obtenção de resultados realistas são quase impossíveis e estes valores obtidos são os suficientes para garantir a resolução do problema. A utilização da matriz de Riccati como método numérico

permite obter o controlo óptimo mas à que estudar novas aplicações de combinação de índices/restrições.

#### 4.5 Resolução de conflito global

A estratégia para resolver um conflito globalmente é um pouco mais complicada do que a local. Na resolução local a única preocupação está em resolver o perigo de colisão ou invasão da zona protegida no imediato. A resolução global vai fazer com que na resolução do problema local, a nossa aeronave não vá causar outro conflito pouco tempo depois.

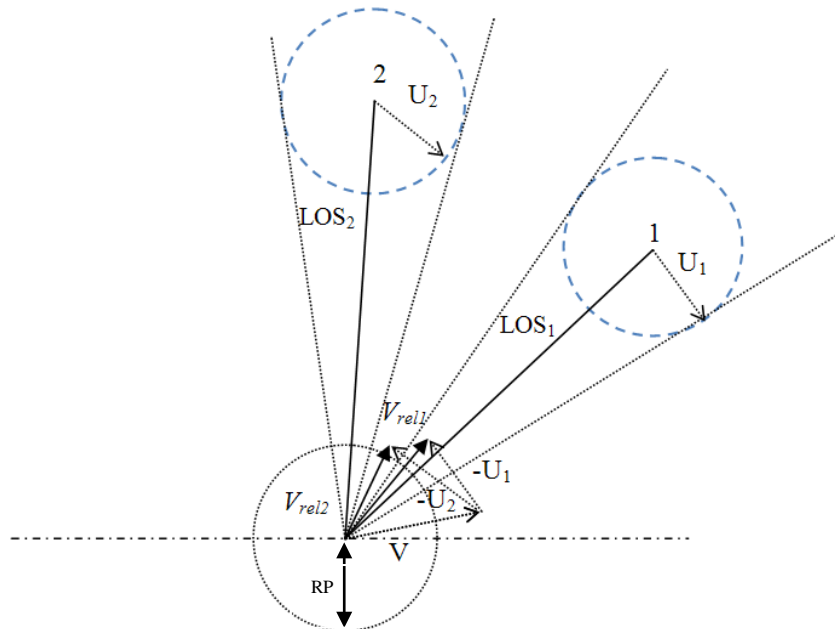


Figura 4.3 - Esquema para resolução de conflitos globalmente.

Na resolução de conflitos global há um tempo alargado de detecção de aeronaves nas imediações, em que todas elas são interrogadas quanto à sua posição e vector de direcção. Para cada aeronave é calculado o vector relativo de movimento entre as duas, como demonstrado na Figura 4.3. Este processo repete-se para as  $n$  aeronaves a voar nas imediações, gerando  $n$  vectores relativos de movimento,  $V_{rel\ n}$ . Para cada aeronave é calculado pelo TCAS o  $\tau$ , o tempo para alcançar o ponto de maior

proximidade. É através do  $\tau$  que vamos atribuir prioridade às aeronaves. A aeronave que tiver um número  $i$  menor terá logo um  $\tau$  menor.

Quando para a aeronave que tem atribuído o número um tiver um  $\tau$  menor do que o limite de segurança, isto é, seja emitido um aviso pelo TCAS, a nossa aeronave manobrará para fugir ao conflito. Ao manobrar para fazer com que o  $V_{rel\ 1}$  saia do cone de conflito, o bloco de resolução de conflitos não deixará com que o  $V_{rel\ 2}$  fique dentro do cone de conflito com a segunda aeronave. O mesmo se passará para as  $n$  aeronaves nas imediações e respectivos vectores,  $V_{rel\ n}$ .

## Capítulo 5. APLICAÇÃO E RESULTADOS

A simulação realizada tem como cenário o UAV a voar junto de uma TMA mais concretamente a do Aeroporto de Lisboa. Foi considerada a TMA de Lisboa devido à densidade de tráfego, que é a mais alta de Portugal. As altitudes das aeronaves estão compreendidas entre os 1000 e os 2500 metros. As velocidades das aeronaves civis a convergirem para o aeroporto têm velocidades compreendidas entre os 100 m/s e os 150m/s e a velocidade para a nossa aeronave está compreendida entre os 20m/s e os 40m/s. As acelerações horizontais e verticais do nosso UAV, para manter a integridade estrutural estão restringidas ao intervalo de  $-5g$ 's a  $5g$ 's. A simulação é realizada para um intervalo de 180 segundos.

As equações obtidas através da navegação proporcional foram aplicadas no modelo da aeronave descrito no subcapítulo 2.2. Ao aplicar verificou-se que as equações do modelo da aeronave a não ser as que descrevem o movimento da aeronave não fazem muito sentido, pois ao limitar a aeronave nas acelerações e nas mudanças de atitude e direcção todas as condições descritas nesse ponto ficam cumpridas.

Serão também apresentados alguns gráficos obtidos a partir do algoritmo descrito no ponto seguinte. Estes resultados são inicialmente para o conflito entre duas aeronaves, a nossa e a intrusa. Posteriormente serão também analisados casos de conflito com diversas aeronaves.

### 5.1 Algoritmo NP

O algoritmo escrito em linguagem do programa MATLAB<sup>®</sup> inicia com a mudança de coordenadas geodésicas para geocêntricas. Esta transformação é realizada utilizando a mudança de coordenadas de Vermeille [21]. Esta mudança prende-se com o facto dos dados fornecidos pelo módulo de *guidance* ser em coordenadas geodésicas.

Em seguida é necessário calcular a distância que nos separa das diversas aeronaves detectadas nas imediações, sendo esta distância a LOS entre as aeronaves. É também

realizada a verificação se o envelope de conflito das aeronaves está a ser violado. Com a variação da distância entre as aeronaves obtemos o  $\tau$  para cada uma. A aeronave que tiver um valor menor é a aeronave para a qual vai ser calculado os ângulos de fuga ao conflito, isto quando esse  $\tau$  for menor do que 55 segundos.

O passo seguinte prende-se com o cálculo do  $\tau$  que separa as aeronaves, seguido da avaliação se o tempo para a colisão é inferior à margem de segurança. O valor atribuído como margem de segurança foi de 55 segundos, devido à relativa baixa velocidade do UAV em comparação com a aeronave intrusa. A margem de segurança sendo menor, a nossa aeronave não conseguirá manobrar sem violar o envelope de segurança da outra aeronave. Algo que deu para perceber durante a realização do trabalho é que uma fuga ao conflito apenas na horizontal não seria possível devido à baixa velocidade do UAV e à limitação de aceleração imposta à aeronave.

Se a aeronave entrar em modo de evitar a colisão serão obtidas as acelerações a partir dos ângulos calculados para a fuga ao conflito. A partir da distância entre as aeronaves,  $R_T$  e do raio de protecção da aeronave intrusa,  $R_P$ , vamos obter os dois ângulos para fugir ao conflito,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A representação desta solução pode ser vista na Figura 4.2. Esta solução para a horizontal é igualmente aplicada para a vertical, em que apenas o  $R_P$  muda da distância de segurança horizontal para a separação vertical obrigatória entre aeronaves, obtendo um  $\theta_{v1}$  e  $\theta_{v2}$ . A obtenção dos respectivos ângulos não passa de um simples problema trigonométrico.

Após a obtenção dos respectivos ângulos para fugir ao conflito o vector relativo é calculado. Em seguida é realizado um teste para através da posição do vector relativo ver qual dos ângulos para fugir ao conflito se deve utilizar, isto é, qual é o que implica um menor desvio de trajectória. Para o ângulo da atitude a utilizar verificamos se a aeronave se encontra a uma maior altitude ou menor de que a aeronave intrusa. Esses ângulos de fuga são testados para as aeronaves nas imediações e se o novo vector relativo em relação a cada aeronave intrusa estiver dentro do cone de conflito, será calculado um novo ângulo para permitir à nossa aeronave fugir deste possível futuro conflito. Se o tiver de ser atribuído um novo ângulo de fuga ele vai ter em atenção se a ordem do primeiro conflito foi para subir

ou descer, para a esquerda ou direita, não permitindo que ele retorne a um ângulo que vá causar conflito na mesma.

Foi introduzido mais um pequeno detalhe na obtenção dos ângulos de fuga, mas que impedem que a aeronave receba ordens contraditórias. Se a primeira ordem no primeiro conflito que a aeronave encontra é para subir ela vai sempre subir, isto para evitar que ela encontre um novo conflito quando for a subir e desça outra vez de encontra ao mesmo conflito. O mesmo se passa nas ordens laterais de fuga ao conflito.

Obtidos os ângulos para fugir ao conflito horizontalmente e verticalmente aplicamos nas equações das acelerações. Estas acelerações são em seguida restringidas aos seus valores máximos de operação,  $|a_{max}| = 5g/s$ . Em seguida serão calculadas as equações da navegação proporcional apresentadas no subcapítulo 4.1 de forma a obter um novo vector de orientação para o UAV.

Este novo vector vai então ser fornecido ao módulo do AFCS. Para o caso da margem de segurança não detectar um avião que possa vir a causar conflito foi introduzido outro parâmetro que faz com que o modo de evitar a colisão seja activado, que é o vector relativo estar dentro do cone de conflito.

Se o modo de evitar a colisão não for activado a informação relativa à orientação da aeronave fornecida pelo módulo de *guidance* será passada inalterada para o módulo do AFCS.

Existe também o caso de o  $\tau$  estar dentro da margem de segurança adoptada, mas a aeronave já se encontrar atrás da perpendicular do vector relativo. Para este caso foi introduzido no programa as condições descritas no subcapítulo 4.2 de condições suficientes para inexistência de conflito por parte daquela aeronave intrusa. A condição descrita no ponto três utiliza a função arco tangente de dois argumentos para que possa fornecer o ângulo pretendido no quadrante correcto.

No algoritmo só falta falar da parte em que introduzimos a função de saturação da velocidade e do ângulo de atitude. Como focado no subcapítulo 4.1 temos de introduzir funções que limitem a velocidade, para esta não exceder a máxima

permitida ou a mínima e entre em perda de eficiência aerodinâmica (“stall”). Logo vamos introduzir a seguinte função de saturação para a velocidade, em que  $I = [v_{min}, v_{max}]$  é um intervalo de números reais:

$$Sat(V, I) = \begin{cases} v_{min}, & se \ v < v_{min} \\ v, & se \ v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ v_{max}, & se \ v > v_{max} \end{cases} \quad (5.1)$$

O mesmo vai ser realizado para o ângulo de atitude da aeronave em que a função de saturação e tem  $J = [\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  como intervalo de uma gama de números considerada para a aeronave e pode ser representada da seguinte forma:

$$Sat(RG, J) = \begin{cases} \gamma_{min}, & se \ \gamma < \gamma_{min} \\ \gamma, & se \ \gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max} \\ \gamma_{max}, & se \ \gamma > \gamma_{max} \end{cases} \quad (5.2)$$

Não há necessidade de introduzir uma função de saturação para o rumo pois este fica desde logo limitado devido à limitação imposta à aceleração horizontal da aeronave.

## 5.2 Resolução local

O primeiro caso testado é para o nosso UAV a sair de uma posição geodésica com 39° Oeste, 9° Norte e uma altitude de 1500 metros, com a velocidade máxima, 0° de ângulo de ataque e uma direcção de 70° em relação ao eixo de referência. A aeronave intrusa tem uma posição inicial de 39° Oeste e 9.2° Norte e uma altitude de 1500 metros,  $Z = [39, 9.2, 1500]$  e um vector direcção com 100 m/s de velocidade, 0° de ângulo de ataque e uma direcção de -60°.

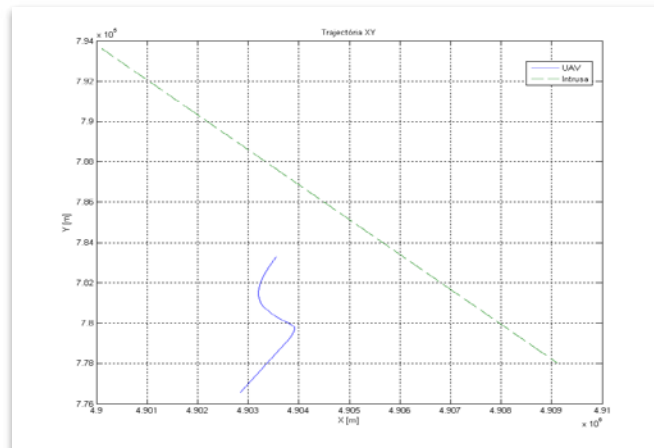


Figura 5.1 - Trajetória no plano XY para a primeira simulação.

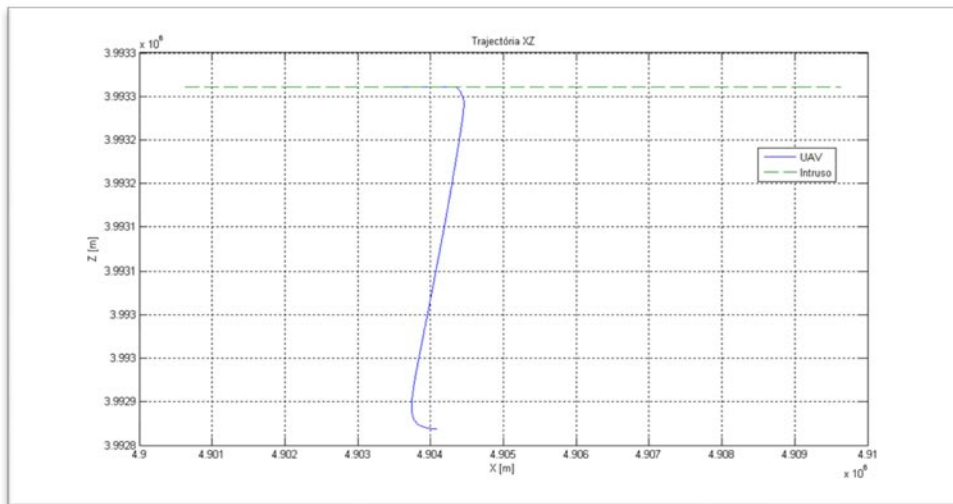


Figura 5.2 - Trajectory no plano XZ para a primeira simulação.

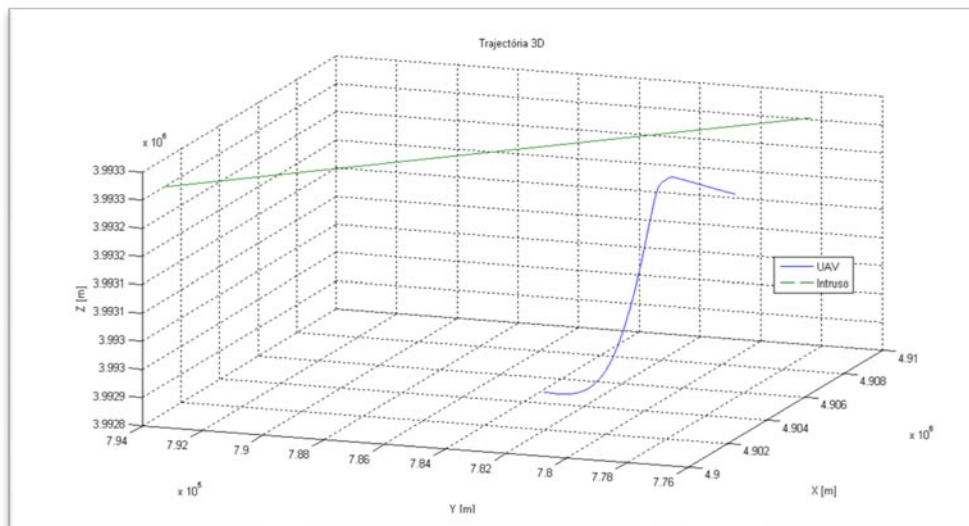


Figura 5.3 - Trajectory 3D para a primeira simulação.

A distância mínima de separação entre as duas aeronaves neste caso foi de 3528 m, nunca o envelope de segurança da aeronave intrusa foi invadido. Na segunda simulação apresentada as aeronaves continuam a sair da mesma posição do caso anterior e com vectores iguais, apenas varia a altitude do UAV e obtemos os seguintes gráficos.

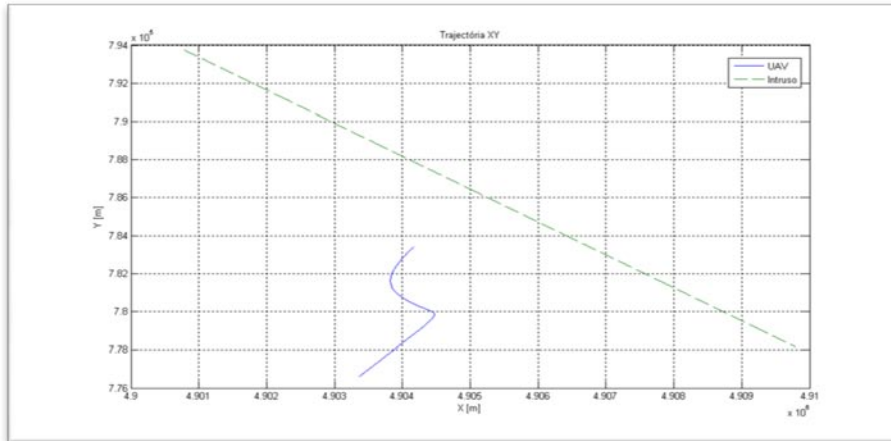


Figura 5.4 - Trajetória no plano XY para a segunda simulação.

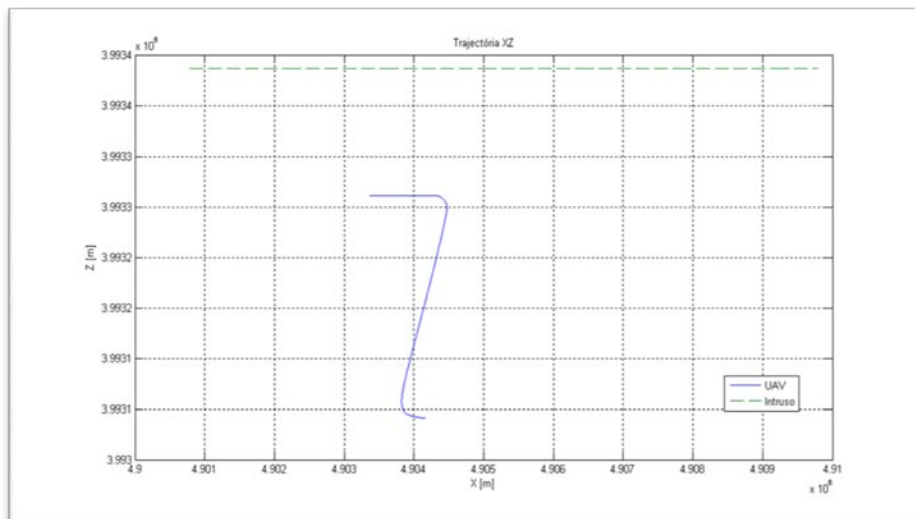


Figura 5.5 - Trajetória no plano XZ para a segunda simulação.

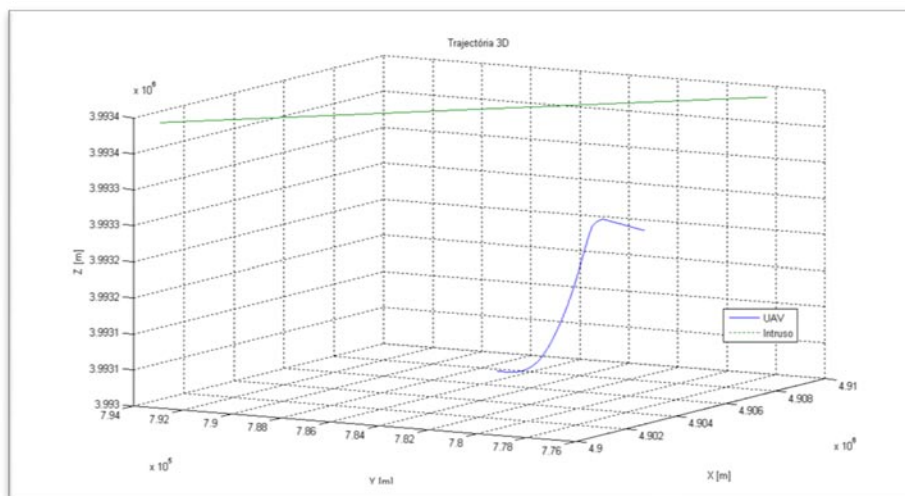


Figura 5.6 - Trajetória 3D para a segunda simulação.

Também foram realizadas mais uma simulação para o caso inverso em que o UAV encontra-se a uma altitude superior ao do avião intruso, mas com resultados semelhantes.

Na terceira simulação temos as aeronaves a sair da mesma posição com o UAV apenas com o desvio da trajetória para  $100^\circ$  em relação ao caso anterior e o avião intruso tem uma velocidade constante de 150 m/s,  $0^\circ$  de ângulo de ataque e um ângulo de  $-80.7^\circ$  de direcção.

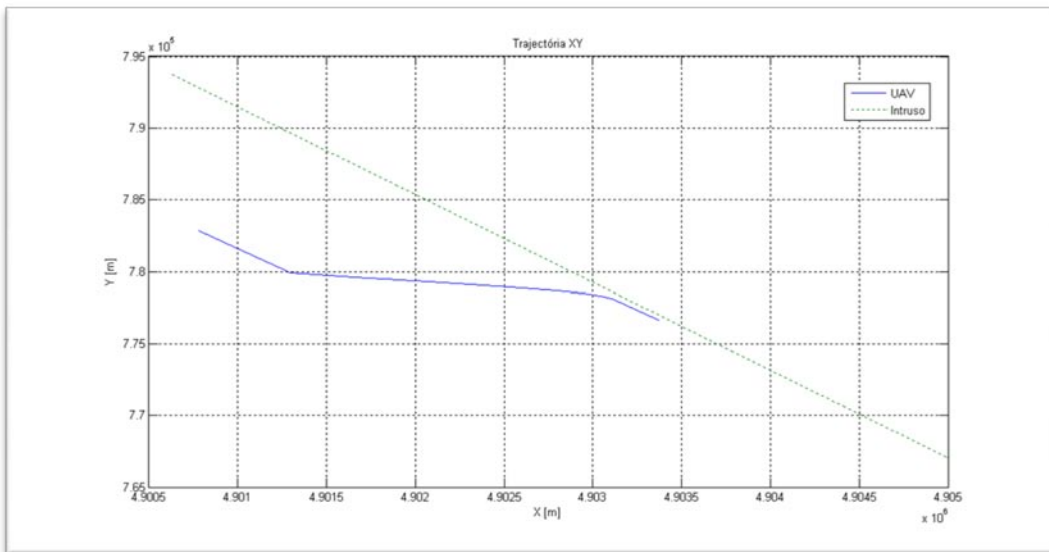


Figura 5.7 - Trajetória no plano XY para a terceira simulação.

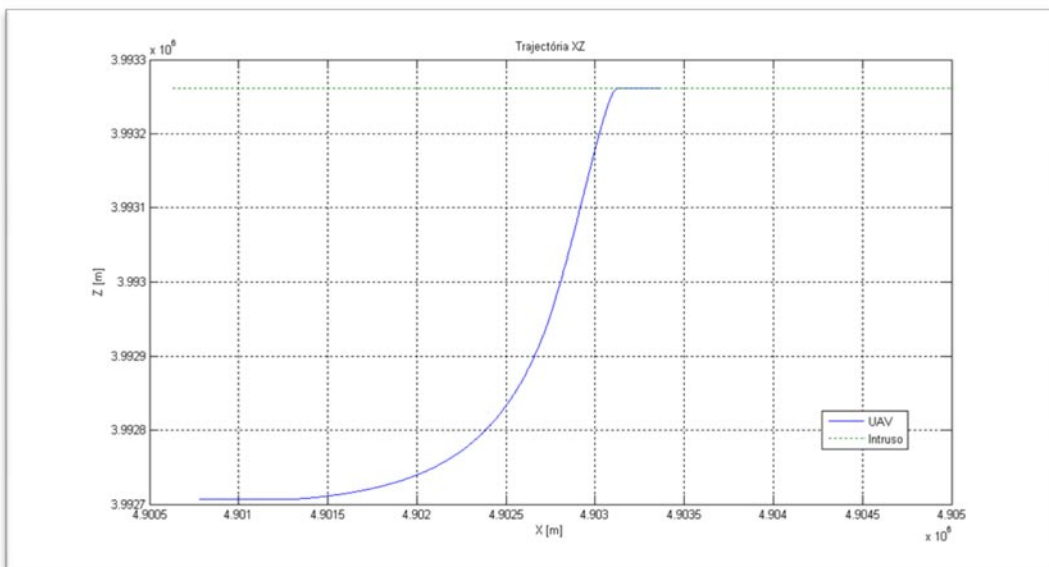


Figura 5.8 - Trajetória no plano XZ para a terceira simulação.

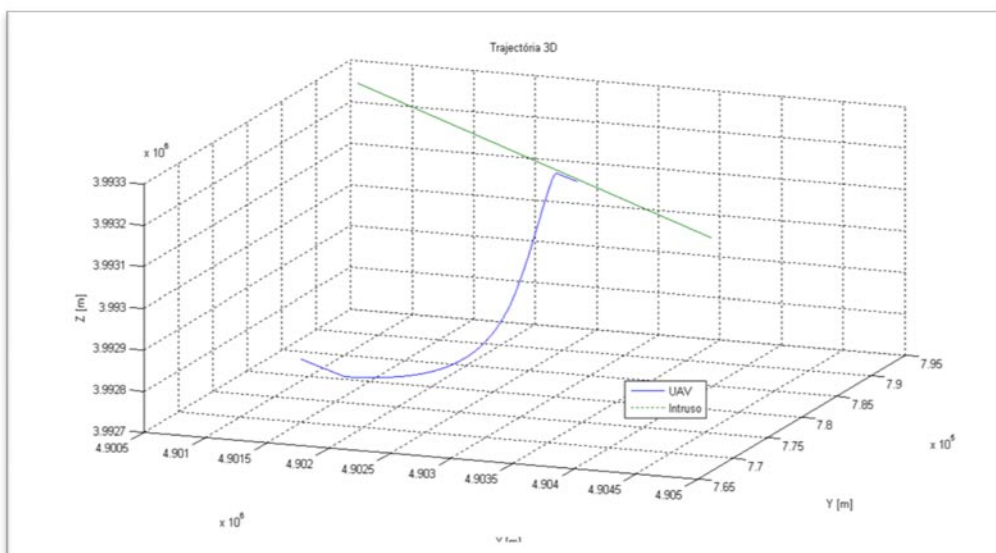


Figura 5.9 - Trajetória 3D para a terceira simulação.

Nesta terceira simulação a separação mínima entre as duas aeronaves foram de apenas 900 m. Mesmo com esta separação o envelope de segurança da aeronave intrusa não foi invadido.

Na quarta simulação realizada as aeronaves partem de posições geodésicas idênticas apenas com variações na altitude do UAV que é 100 m inferior à da outra aeronave. O vector direcção do UAV é composto por uma velocidade de 35m/s, um ângulo de ataque de  $1^\circ$  e uma direcção de  $90^\circ$ . A aeronave intrusa tem uma velocidade de 130m/s um ângulo de ataque de  $0^\circ$  e uma direcção de  $-70^\circ$ .

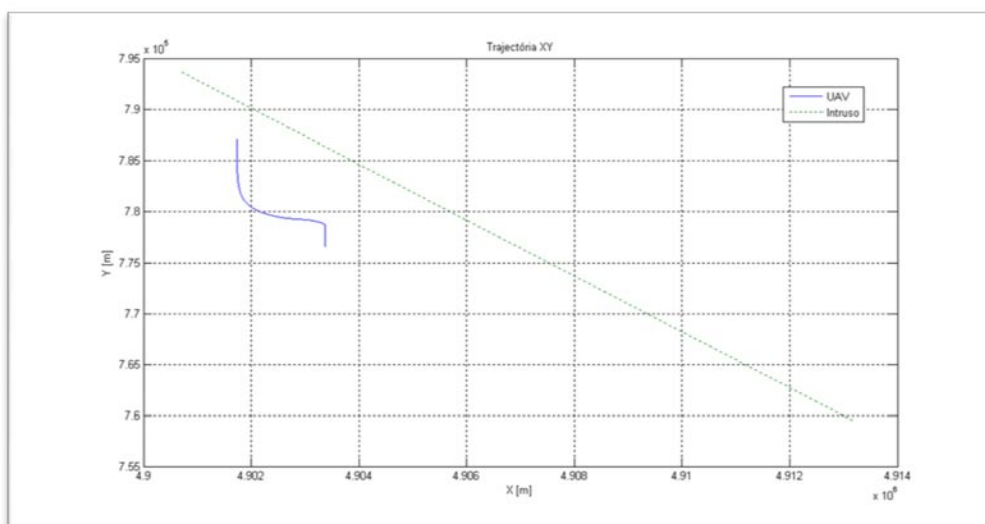


Figura 5.10 - Trajetória no plano XY para a quarta simulação.

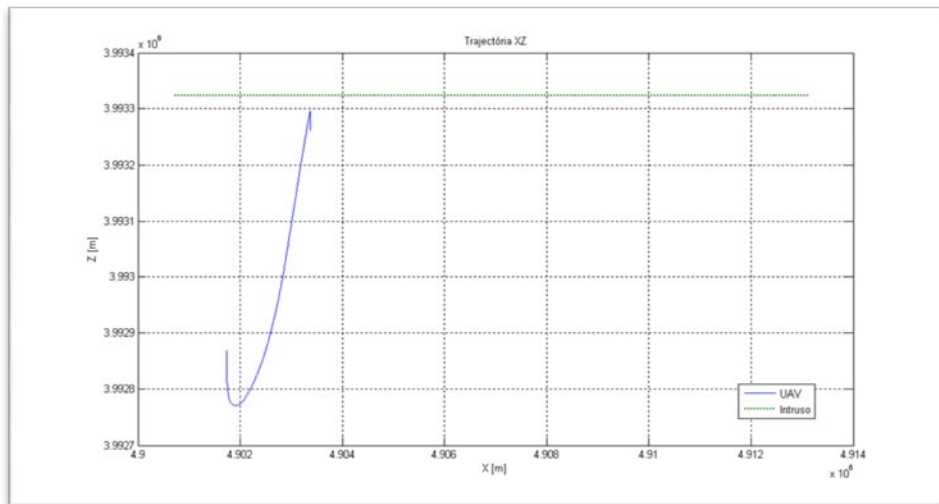


Figura 5.11 - Trajetória no plano XZ para a terceira simulação.

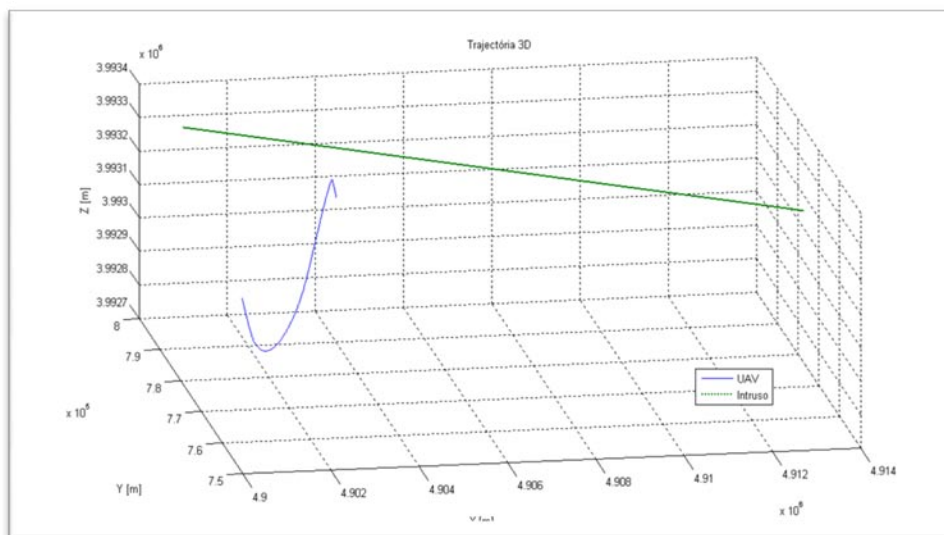


Figura 5.12 - Trajetória 3D para a terceira simulação.

Neste último caso a distância mínima entre as aeronaves foi de 3 374 m. Pode-se verificar neste gráfico que o UAV estava numa trajetória ascendente, mas como se encontra a uma altitude inferior à da aeronave intrusa a opção é descer. Depois de deixar de existir conflito o UAV continua a sua trajetória inicial.

### 5.3 Resolução global

Neste último caso analisado temos o conflito entre a nossa aeronave e 4 aeronaves intrusas, um cenário quase impossível de acontecer na realidade, mas é realizado para mostrar que o algoritmo consegue da mesma forma tomar uma decisão tendo em conta todas as aeronaves nas imediações.

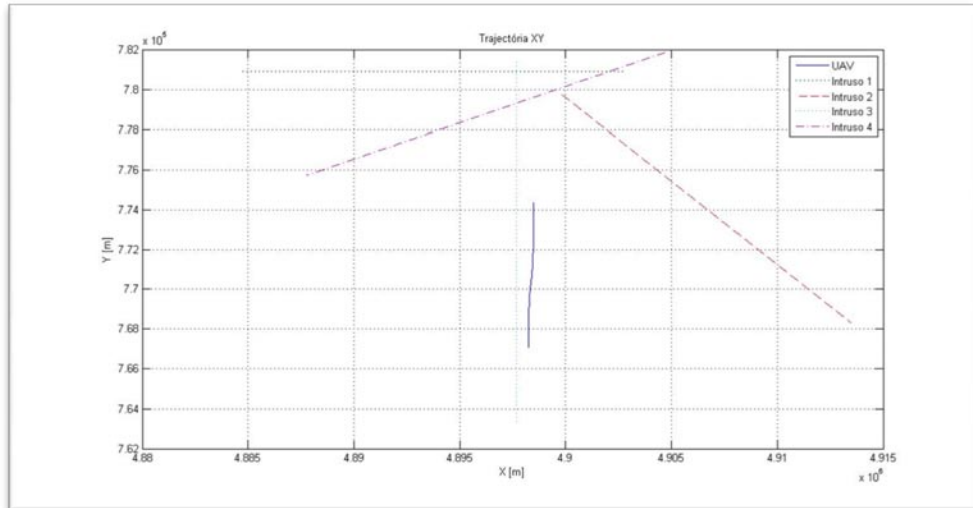


Figura 5.13 - Trajetória no plano XY para conflito com 4 aeronaves.

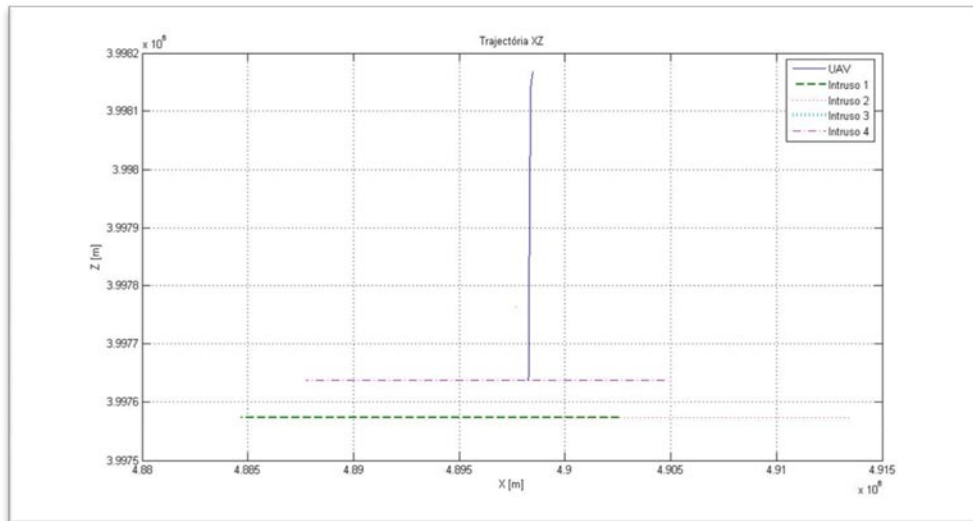


Figura 5.14 - Trajetória no plano XZ para conflito com 4 aeronaves.

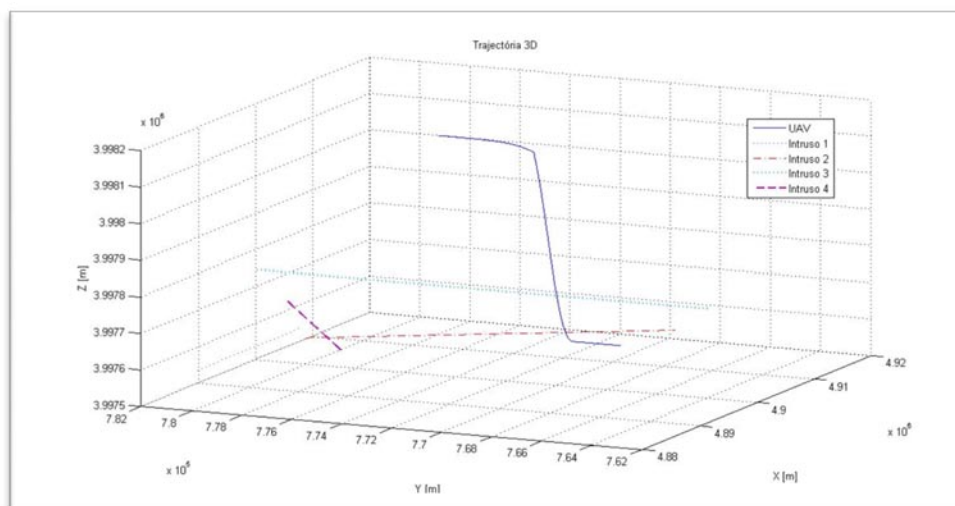


Figura 5.15 - Trajetória 3D para conflito com 4 aeronaves.

Neste último caso temos a nossa aeronave a aproximar-se de outras 4 aeronaves, em que temos 2 aeronaves a voar numa altitude abaixo da nossa e outras duas numa altitude acima. A decisão no ângulo de fuga é para cima pois a aeronave que causa o primeiro alerta está numa posição a baixo e como a primeira decisão é subir a decisão mantêm-se ao longo da simulação até não haver mais nenhuma situação de conflito. Como se pode verificar na Figura 5.15 a nossa aeronave sobe ao encontro do Intruso 3, mas era a melhor situação na tomada de decisão e quando esta aeronave passa a ter um  $\tau$  menor esta desvia-se para a direita e continua a subir. Apesar de invadir o envelope de segurança desta aeronave a distância menor entre as duas aeronaves foi de 841 m.

## 5.4 Tempo de simulação

O tempo de simulação do problema em MATLAB<sup>®</sup> foi de aproximadamente dois segundos com um processador 2.00 GHz Intel Pentium 4, com 1Gb de RAM a correr na plataforma Windows XP. O número de iterações realizadas foi de 180 para as 4 aeronaves. Ao realizarmos o processamento do mesmo problema, mas para 90 segundos obtivemos o tempo esperado de processamento menor a um segundo. Este tempo de processamento é o pretendido, pois o TCAS fornece novos dados das aeronaves nas imediações de segundo a segundo ao bloco de resolução de conflitos.

## Capítulo 6. CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO

A navegação proporcional resolve o problema da resolução de conflitos e simplifica o algoritmo pois o modelo implementado dispensa o modelo dinâmico do UAV descrito no subcapítulo 2.2. A restrição realizada às acelerações e às mudanças de atitude e direcção garante validade dos movimentos realizados pela aeronave, não havendo necessidade de ter equações que estejam constantemente a verificar se os valores de controlo são excessivos.

Na parte de optimização da lei da navegação proporcional o método utilizado de Bellman-Lyapunov é bastante complicado e deve ser objecto de um novo estudo, especialmente para obter melhores desempenhos da aeronave com as variações das combinações índices/restrições. Também seria positivo encontrar uma alternativa a este método, embora este forneça uma solução óptima para o problema.

O método aplicado é baseado na obtenção da aceleração necessária para fugir ao conflito com base na lei da navegação proporcional.

Com os resultados obtidos nas simulações realizadas pode-se afirmar que a navegação proporcional resolve o problema de resolução de conflitos tanto de uma forma local como global.

Existem casos na resolução global de conflitos em que devido à existência de várias aeronaves nas imediações a solução obtida não evita a nossa aeronave de invadir o envelope de conflito de outras aeronaves, embora mantenha sempre uma distância considerável de segurança. Deve-se salientar que estes casos de várias aeronaves a voar muito perto umas das outras são cenários quase impossíveis de obter na aviação real e foram apenas criados para testar a robustez do programa criado para a resolução de conflitos.

Para este trabalho foi considerado que o TCAS emite um alerta para um  $\tau$  menor que 55 segundos. Este valor foi obtido experimentalmente, resultado de diversas aplicações de tempos de alerta diferentes e o que permitiu sempre à nossa aeronave escapar ao envelope de conflito da outra aeronave foi para um  $\tau > 55$  s. Este valor deve-se essencialmente à velocidade da aeronave, que é muito baixa em relação com as aeronaves tripuladas.

Para a resolução global de conflitos a solução é dada para a aeronave mais próxima e no processo de resolução verifica que esta não esteja em conflito com outras aeronaves nas imediações. No futuro deve ser criado um plano de prioridade para cada aeronave nas imediações de forma a dar pesos a cada uma para uma resolução de conflitos mais eficaz.

O tempo de simulação do problema em MATLAB<sup>®</sup> foi de aproximadamente dois segundos com um processador 2.00 GHz Intel Pentium 4, com 1Gb de RAM a correr na plataforma Windows XP. Para obtermos um tempo de processamento menor a um segundo apenas podemos fazer 90 iterações. Nos resultados apresentados no capítulo anterior são realizadas 180 iterações por cada processamento de forma a mostrar que os conflitos são completamente resolvidos. Com os recursos existentes actualmente a nível de poder de processamento é possível duplicar o número de aeronaves e manter o tempo de processamento.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Bousson, K., "Automatic Guidance of Aircraft for Collision Avoidance in Terminal Areas", *Russian-American Journal of Actual Problems of Aviation and Aerospace Systems* , Vol. 6, No. 2(12), 2001, pp. 49-57.
- [2] Dowek, G., Muñoz, C., & Geser, A., "Tactical Conflict Detection and Resolution in a 3-D Airspace", ICASE Report No. 2001-7, NASA/ CR-2001, 2001.
- [3] FAA, "Introduction to TCAS II", Version 7, 2000.
- [4] Ghosh, R., & Tomlin, C., "Maneuver Design for Multiple Aircraft Conflict Resolution", *American Control Conference 2000*, Vol. 1, 2000, pp. 672-676.
- [5] Han, S., & Bang, H., "Proportional Navigation-Based Optimal Collision Avoidance for UAV's", *2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents*, 2004, pp. 76-81.
- [6] Hoekstra, J., "Free Flight with Airbone Separation Assurance", *National Aerospace Laboratory*, NLR-TP-2002-170, 2002.
- [7] Kuchar, J., "Methodology for Alerting-System Performance Evaluation", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* , Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 438-444.
- [8] Kuchar, J., & Yang, L., "A Review of Conflict Detection and Resolution Modeling Methods", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* , Vol. 1, No. 4, 2000, pp. 179-189.

- [9] Kuchar, J., & Yang, L., "Survey of a Conflict Detection and Resolution Modeling Methods", *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.*, AIAA-97-3732, 1997.
- [10] Kumar, B., & Ghose, D., "Radar-Assisted Collision Avoidance/Guidance Strategy for Planar Flight", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.37, N.1,2001, pp. 77-90.
- [11] Menon, P., Sweriduk, G., & Sridhar, B., "Optimal Strategies for Free-Flight Air Traffic Conflict Resolution", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 22, No. 2, 1999, pp. 202-211.
- [12] Paielli, R., & Erzberger, H., "Conflict probability estimation for free flight", *NASA Technical Memorandum 110411*, 1996.
- [13] Prandini, M., & Watkins, O., "Probabilistic Aircraft Conflict Detection", *IST-2001-32460 of European Commission*, 2005.
- [14] Prandini, M., Hu, J., Lygeros, J., & Sastry, S., "A probabilistic approach to aircraft conflict detection", *IEEE Transactionson Intelligent Transportation Systems*, Vol. 1, No. 4, 2000, pp. 199-219.
- [15] Raghunathan, A., Gopal, V., Subramanian, D., Biegler, L., & Samad, T., "Dynamic Optimization Strategies for Three-Dimensional Conflict Resolution of Multiple Aircraft", *Jornal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 4, 2004, pp. 586-594.
- [16] RTCA Task Force 3, "Final Report RTCA Task Force 3 - Free Flight Implementation", RTCA, 1995.
- [17] Siouris, G., "Missile Guidance and Control Systems", 2004, New York: Springer.

- [18] Stevens, B., & Lewis, F., "*Aircraft Control and Simulation*", 1992, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [19] Tallec, C., "*VFR general aviation aircraft and UAV flights deconfliction*", *Journal of Aerospace Science and Technology*, Vol.9, 2005, pp. 495-503.
- [20] Utt, J., McCalmont, J., & Deschenes, M., "*Development of a Sense and Avoid System*", *Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics Infotech, 2005*, Virginia: AIAA.
- [21] Vermeille, H., "*Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates*", *Journal of Geodesy*, Vol.76, 2002, pp. 451-454.
- [22] Yang, L., & Kuchar, J., "Prototype Conflict Alerting System for Free Flight", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 4, 1997, pp. 768-773.
- [23] Yanushevsky, R., "*Modern Missile Guidance*", 2008, New York: Taylor & Francis Group.
- [24] Zarchan, P., "*Tactical and Strategic Missile Guidance*", 1994, Washington, DC: AIAA.

## ANEXOS

### **A1. Método de Lyapunov**

A teoria de controlo sendo apresentada de uma forma moderna ou clássica, recorre sempre a uma única base sólida, a teoria de estabilidade de movimento de Lyapunov.

Apesar de a teoria de Lyapunov ser mais eficaz na análise de estabilidade de processos descritos por equações diferenciais não lineares, pode também ser aplicado para analisar a estabilidade através de equações diferenciais lineares. Intuitivamente a estabilidade de movimento significa que para pequenas alterações nas equações iniciais em  $t_0$ , elas se vão manter pequenas para todo  $t > t_0$ .

Mais precisamente a solução para  $x_0(t)$  da equação diferencial,

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x(0) \quad (\text{A1.1})$$

é considerada estável (ou o sistema descrito pela equação diferencial A1.1 é estável no ponto de equilíbrio  $x_0=0$ ), se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  que para cada solução  $x(t)$  e para todo  $t \geq 0$  temos  $\|x(t) - x_0(t)\|^2 < \varepsilon$  dado que  $\|x(0) - x_0(0)\|^2 < \delta$  onde

$$\|x\|^2 = \sum x_i^2$$

(No caso de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes,  $\delta$  não depende de  $t_0$ ).

O sistema A1.1 é dito assintoticamente estável, se for estável e o  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$ . Estabilidade simples e estabilidade assintótica são determinadas com base no método Lyapunov, que assume a utilização das chamadas definição positiva e semidefinição positiva  $V(x) \geq 0$ . A definição positiva de  $V(x)$  é positiva para todo o  $x \neq 0$ . A função definição negativa tem o sinal oposto [23].

**Teorema:** O sistema A1.1 é assintoticamente estável, se existir uma função definição positiva  $V(x)$  ( $V(0)=0$ ) que é derivável ao longo da equação A1.1 e negativamente definida.

A derivada de  $V(x)$  ao longo da Equação A1.1 é igual,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^T}{dx} Ax \quad (\text{A1.2})$$

Escolhendo  $V(x) = x^T W x$ , onde  $W$  é uma matriz simétrica positivamente definida, obtemos, em vez da Equação A1.2,  $x^T (WA + A^T W)x$ , para que a condição de estabilidade assintótica seja,

$$WA + A^T W = -R < 0 \quad (\text{A1.3})$$

isto é, a matriz resultante de A1.3 deve ser negativamente definida.

A interpretação física do teorema é a seguinte:  $V(x)$  tem a forma de uma parábola. A Equação A1.3 implica que  $V(x(t))$  decresce monotonamente com o tempo ao longo da trajectória da equação de estado. Claro que  $V(x(t))$  vai eventualmente aproximar-se de zero ao passo que  $t \rightarrow \infty$ . Dado que  $V(x)$  é positivamente definida, temos  $V(0)=0$  quando  $x=0$ . Assim se encontrarmos as matrizes positivamente definidas  $W$  e  $R$  que estão relacionadas com a equação A1.3, temos logo todas a trajectória possíveis da equação de estado a tender para zero,  $t \rightarrow \infty$ . A função  $V(x)$  é a chamada função de Lyapunov do sistema.

Existem várias modificações ao método de Lyapunov, várias definições de estabilidade para sistemas dinâmicos especiais. Aqui apresenta-se o método de Lyapunov para a análise de estabilidade de operação de um sistema num intervalo finito  $[0, t_f]$ . Introduzindo

$$\tau = \frac{1}{t_f - t} \quad (\text{A1.4})$$

o intervalo  $[0, t_f]$  com respeito a  $t$  é transformado no intervalo  $[1/t_f, \infty]$  com respeito a  $\tau$ . Tendo em conta

$$\frac{d}{dt} = \tau^2 \frac{d}{d\tau},$$

a Equação A1.1 pode ser apresentada como,

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\tau^2} Ax \quad (\text{A1.5})$$

Se  $V(x)$  é a função de Lyapunov com respeito à Equação A1.5 a solução desta equação é estável no intervalo  $\tau$ . Dado que a transformação A1.4 não muda o sinal da equação

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{\tau^2} \frac{dV}{dt'}$$

a solução da Equação A1.5 é estável também no intervalo  $t$ , isto é, para cada trajetória estável no intervalo  $\tau$  existe uma trajetória estável no intervalo finito, isto de forma a que  $V(x)$  vai decrescer quando  $t \rightarrow t_f$ . Contudo porque  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $dV/d\tau$  é sempre zero, o decréscimo de  $x$  não é assintótico.

## A2. Aproximação Bellman-Lyapunov

Considerando o sistema dinâmico descrito pela seguinte equação:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x(0) \quad (\text{A2.1})$$

onde  $x$  é um vector de estado com  $m$ -dimensões,  $u$  é um vector de controlo com  $n$ -dimensões e  $A$  e  $B$  são matrizes com dimensões apropriadas.

Vamos determinar a lei de controlo  $u$  que minimiza a função de custo,

$$I = \frac{1}{2} \left( x^T(t_f) C_0 x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) R x(t) + \|u(t)\|^2) dt \right) \quad (\text{A2.2})$$

onde  $C_0$  e  $R$  são matrizes simétricas positivamente semi-definidas.

Para encontrar o controlo óptimo temos de seguir o método de programação dinâmica de Bellman. A derivação da equação funcional de Bellman é dada de acordo com o princípio óptimo: cada parte da trajectória óptima é a trajectória óptima. Sendo o valor para a função óptima:

$$\varphi(x(t_0), t_0) = \min_{u(t)} I \quad (\text{A2.3})$$

Logo de acordo com o princípio de optimização pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \varphi(x(t_0), t_0) &= \min_{u(t)} \frac{1}{2} \left\{ x^T(t_f) C_0 x(t_f) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} (x^T(t) R x(t) + \|u(t)\|^2) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t+\delta}^{t_f} (x^T(t) R x(t) + \|u(t)\|^2) dt \right\} \\ &= \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} [x^T(t_f) C_0 x(t_f) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} (x^T(t) R x(t) + \|u(t)\|^2) dt] + \varphi(x(t_0 + \delta), t_0 + \delta) \right\} \quad (\text{A2.4}) \end{aligned}$$

Supondo que  $\delta$  é pequeno o suficiente para que existam derivadas parciais de  $\varphi(x)$  para um  $x \in [x(t_0), x(t_0 + \delta)]$ . Expandindo  $\varphi(x(t_0), x(t_0 + \delta))$  em séries de Taylor na vizinhança de  $x(t_0)$ , depois das transformações apropriadas obtemos,

$$\varphi(x(t_0), t_0) = \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} (x^T(t_0) R x(t_0) + \|u(t_0)\|^2) \delta + \varphi(x(t_0), t_0) + \right. \\ \left. + \frac{d\varphi}{dt} \delta + \frac{d\varphi}{dx} A x(t) + B u(t) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \delta + O(\delta) \right\} \quad (\text{A2.5})$$

onde,

$$\frac{\partial \varphi^T}{\partial x} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \right)$$

é um vector linha, onde se assume que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$ .

Tendendo  $\delta$  para zero e tendo em conta que de acordo com o princípio de optimização, a estratégia tem de ser óptima apesar do estado em que o sistema se encontre no momento, isto é,  $x(t_0)$  e  $u(t_0)$  podem ser tratadas como os valores dos vectores,  $x(t)$  e  $u(t)$ , obtemos a equação funcional requerida,

$$\min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} (x^T(t) R x(t) + \|u(t)\|^2) + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^T}{dx} (Ax(t) + Bu(t)) \right\} = 0 \quad (\text{A2.6})$$

Para a existência de mínimo na função dentro de parêntises, a sua derivada com respeito a  $u(t)$   $\left( \frac{d}{du} \right)$  tem de ser igual a zero, isto é,

$$u(t) = -B^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{A2.7})$$

Substituindo a Equação A2.7 na Equação A2.6 obtemos,

$$\frac{1}{2} x^T(t) R x(t) + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^T}{dx} Ax(t) - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^T}{dx} B B^T \frac{d\varphi}{dx} u(t) = 0 \quad (\text{A2.8})$$

A solução do problema considerado reduz-se a encontrar a função  $\varphi(x)$  satisfazendo a equação da função de Bellman A2.8, ou equivalente a equação A2.6. A solução vai ser procurada na forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x^T(t) W(t) x(t) \quad (\text{A2.9})$$

Substituindo na Equação A2.7 e A2.8 obtemos

$$u(t) = -B^T W(t) x(t) \quad (\text{A2.10})$$

$$\dot{W} + A^T W + W A - W B B^T W + R = 0 \quad (\text{A2.11})$$

Esta é a chamada solução da equação de Riccati. Comparando as equações de A2.2 com a A2.9 para  $t=t_F$ , concluiu-se que  $W(t_F) = C_0$ . Utilizando o critério para um integral quadrático com limite superior, Equação A2.2,  $W$  é uma matriz constante e em vez de termos a Equação A2.11, temos a chamada equação de Riccati, que corresponde à solução estacionária de A2.11.

$$A^T W + W A - W B B^T W + R = 0 \quad (\text{A2.12})$$

Comparando a Equação A2.12 com a A1.3, podemos ver que A2.12 é a equação de Lyapunov A1.3 para um sistema fechado com controlo A2.10 e  $W$  é a função de Lyapunov para o sistema.

O objectivo aqui é fazer a ligação entre o método de Lyapunov utilizado na obtenção duma lei de navegação proporcional óptima e na optimização de um sistema baseado na minimização da função de custo. Logo podemos obter a solução para a lei da navegação proporcional óptima, utilizando para a resolução das equações 4.26 e 4.27 as seguintes matrizes de controlo do nosso UAV.

```
A=[ 0      0      0      0      0      0      0      0      -0.0676
    0.3714 -0.0423 0      0.6381 0      -0.1439 0      0      0
    0.3199 0      -0.0423 0      -0.7498 0      0      0      -0.9977
    0      0      0      -3.2304 0      -0.0773 0      1.0000 0
    0      0      29.000 0      0.0713 0      1.000 0      0      0
    0      -29.000 0      0.4661 0      -0.0386 0      -0.0677 0
   -9.7876 0      0      0      0      0      0      0      28.9337
    0      9.7876 0      0      0      0      0      0      0
   -0.0001 0      0      0      0      0      0      0      0];
```

```
B=[ 0      0      0      2.1451
    0      0      1.2543 0
    0      0      0      0
    0      -19.1969 0.4494 0
   -78.3114 0      0      0
    0      0.3329 0.9013 0
    0      0      0      0
    0      0      0      0
    0      0      0      0];
```

```
R= eye(9); (matriz identidade 9x9)
```

```
C_0 =[C 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

Com estas matrizes de controlo da nossa aeronave obtemos a equação de Riccati,  $W$ , a solução estacionária para o problema.

$W = 1.0e+005 *$

```
[0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
 0.0000  0.0001 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0001  0.0005
 0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000
 0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0001 -0.0007
-0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000 -0.0001  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0001 -0.0000  0.0002 -0.0020
-0.0000  0.0005 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0007  0.0000 -0.0020  1.3578];
```

Obtendo a matriz de Riccati e aplicando na Equação A2.11 temos a solução com a obtenção da matriz diferencial de Riccati.

$\dot{W} = 1.0e-009 *$

```
[ 0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0001 -0.0005
-0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0001  0.0000 -0.0003  0.0069
-0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0001
-0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0002
-0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0002
 0.0000 -0.0001  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0035
-0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0001
 0.0001 -0.0003  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000 -0.0002 -0.0051
-0.0005  0.0068 -0.0001  0.0002 -0.0002 -0.0035  0.0001 -0.0051  0.1867];
```

Os valores obtidos para a matriz diferencial de Riccati são valores muito pequenos, logo podemos igualar os valores a zero. Os valores obtidos para a matriz diferencial de Riccati mas com base noutros valores das matrizes de controlo  $A$  e  $B$  resultam em resultados muito semelhantes. Logo podemos dizer que a matriz não linear de Riccati não depende de valores das matrizes de controlo.

Para garantir a solução pretendida para o nosso problema sabemos que a solução da matriz não linear de Riccati tem como solução final,  $w_{11}(t_F) = C$  e para os outros valores da matriz  $w_{nn}(t_F) = RP$ , para garantir a manutenção da distância de segurança.

A solução para a equação de Riccati é dada integrando os valores obtidos na matriz diferencial de Riccati sabendo os valores finais pretendidos. Logo podemos ver que:

$$\begin{aligned}w_{11}(t) &= \frac{3}{3/C+(t_F-t)^3} \\w_{12}(t) &= \frac{3(t_F-t)}{3/C+(t_F-t)^3} \\w_{22}(t) &= \frac{3(t_F-t)^2}{3/C+(t_F-t)^3} \\&\dots \\w_{99}(t) &= \frac{3(t_F-t)^8}{3/C+(t_F-t)^3}\end{aligned}$$

A expressão de controlo óptimo é dada da seguinte forma e está de acordo com a Equação 4.28,

$$u(t) = -a_h(t) = -w_{12}x_1 - w_{22}x_2$$