



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

**Sobre Polinómios:
desde as propriedades elementares
até à Teoria de Operadores**

Versão Final Após Defesa

Fonseca André

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Professora Doutora Maria das Neves Rebocho

Covilhã, Fevereiro de 2020

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo, palavras-chave	iv
Abstract, keywords	v
1 Introdução	1
1.1 Motivação e enquadramento dos temas estudados	1
1.2 Objectivos do trabalho	4
1.3 Notações e expressões utilizadas	4
2 Propriedades elementares de polinómios	6
2.1 Definições	6
2.2 Operações no espaço dos polinómios	8
2.2.1 Multiplicação de um polinómio por uma constante	8
2.2.2 Adição/subtracção de polinómios	8
2.2.3 Multiplicação de polinómios	10
2.2.4 Divisão de polinómios	10
2.3 Generalidades sobre zeros de polinómios	11
2.4 O Teorema Fundamental da Álgebra	13
3 Equações polinomiais	16
3.1 Resolução de Equações polinomiais de grau dois, três e quatro	16
3.1.1 Equações polinomiais de grau dois: a Fórmula Resolvente	16
3.1.2 Equações cúbicas	23
3.1.3 Equações quárticas	31
3.2 As equações de grau igual a ou superior a cinco	34
3.2.1 O Teorema da Raíz Racional e algumas consequências	34
3.2.2 Dois métodos numéricos	38

4	O uso da álgebra de polinómios para introduzir derivadas	52
4.1	A noção de tangente a uma curva	52
4.2	Tangentes a curvas polinomiais	56
4.2.1	problema da tangente para a parábola $y = x^2$	56
4.2.2	O problema da tangente para uma curva polinomial geral	57
4.3	A derivada de um polinómio num ponto	60
4.3.1	A relação com o método clássico	61
4.3.2	Breves observações sobre o estudo da função não polinomial	63
5	Operadores às diferenças divididas	64
5.1	O operador geral às diferenças divididas	65
5.2	Classificação dos operadores	68
5.2.1	Caso I: $\lambda = \tau = 0$ em (5.2.13)	69
5.2.2	Caso II: $\lambda \neq 0$ e $\tau = 0$ em (5.2.13)	71
5.2.3	Caso III: $\lambda = 0$ e $\tau \neq 0$ em (5.2.13)	73
5.2.4	Caso IV: $\lambda \neq 0$ e $\tau \neq 0$ em (5.2.13)	77
5.3	Propriedades básicas dos operadores	85
5.3.1	A regra do produto	85
5.3.2	A regra do quociente	87
	Bibliografia	89

Agradecimentos

Gostaria de expressar aqui os meus sinceros agradecimentos:

- A Deus todo poderoso por ter me permitido chegar cá e pelas maravilhas que tem me proporcionado.
- À Professora Doutora Maria das Neves Rebocho, pela paciência, dedicação e pela experiência que me foi transmitindo ao longo do desenvolvimento do trabalho e que Deus lhe abençoe sempre e sempre.
- Aos meus pais por terem me posto neste mundo e pela educação que me foi dada.
- A Conceição Wime Catolo pelo apoio que me foi dando antes e durante a formação.
- Aos Professores do Departamento de Matemática da UBI.
- Ao Professor Doutor Boa Ventura Ima Panzo por ter acreditado sempre em mim e pelo espírito de sacrifício que me foi transmitindo.
- Aos meus irmãos Daniel André Chipuku Kanganjo, Laurinda André, Maria André e aos outros membros da família pela ajuda prestada ao longo da minha vida.
- Ao Professor Doutor Kengana Sebastião André João pelo encorajamento que me foi transmitindo ao longo da minha formação.
- A Lídia Alfredo Fernando a minha futura esposa pela força e incentivo que tem me dado.
- Aos meus amigos, Euclides Catumbela, Frederico Lutumba, Mamona Eduardo, Yolanda Viamonte, João Nzambe Francisco, Mateus Francisco, José Adão Kambonguele.

Resumo

Nesta dissertação apresenta-se um estudo sobre polinómios. Os principais tópicos a serem focados são: o Teorema Fundamental da Álgebra; a resolução de equações polinomiais (dedução da solução de equações de grau dois, três e quatro, bem como a aplicação de alguns métodos numéricos para equações de grau maior que quatro); o uso da álgebra elementar de polinómios para o estudo de tangentes a curvas polinomiais, bem como a introdução do cálculo de derivadas; o estudo de operadores às diferenças divididas com a propriedade fundamental de resultarem num polinómio de grau $n - 1$ quando aplicados a um polinómio de grau n .

Palavras-Chave: Polinómios; Equações Polinomiais; Tangentes; Operadores às diferenças divididas.

Abstract

In this work it is presented a study about polynomials. The main topics to be focused are as follows: the Fundamental Theorem of Algebra; the solution of polynomial equations (to deduce the solutions of the polynomial equations of degrees two, three and four, and also to apply numerical methods to find approximate solutions of polynomial equations of degree higher than four); the use of standard properties of polynomial algebra to study tangents to polynomial curves, as well as to introduce the calculus of derivatives; the study of divided-difference operators with the fundamental property of giving a polynomial of degree $n - 1$ when applied to a polynomial of degree n .

Keywords: Polynomials, Polynomial equations; Tangents; Divided-difference operators.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e enquadramento dos temas estudados

Este trabalho foca-se no estudo de polinómios. Um polinómio é uma função da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

(cf. secção (2.1)), onde a_n, \dots, a_0 são números reais ou complexos e n é um número inteiro não negativo. De acordo com a hierarquia dada em [13], os polinómios são as funções, digamos, mais básicas. No entanto, os polinómios são muito importantes para várias áreas das ciências, tais como Matemática, Física, Química, etc.

Porquê estudar polinómios? Não ambicionando dar uma resposta completa a esta questão tão vasta, indicamos apenas algumas ideias.

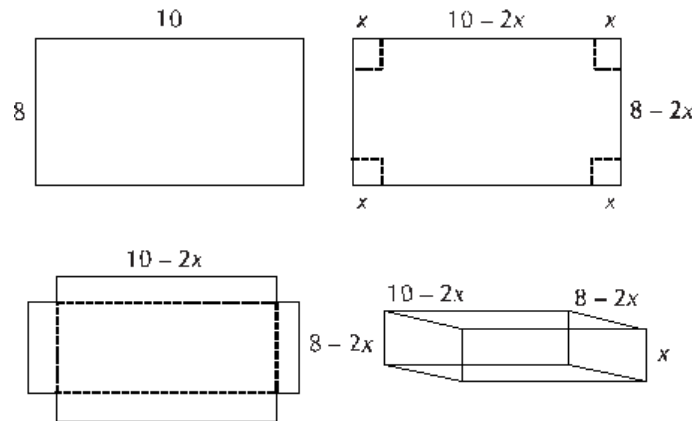
Devemos começar por referir que os polinómios estão muito presentes nos currículos/programas do ensino secundário. De facto, operar com polinómios, nomeadamente, adicioná-los, subtraí-los, multiplicá-los, dividi-los e, acima de tudo, calcular os seus zeros, são temas bastante presentes nos tais currículos. Aqui devemos referir o exemplo mais conhecido que é o polinómio de grau dois, ou seja, a função quadrática, e o cálculo dos respectivos zeros, através da Fórmula Resolvente. Mas a resolução de equações polinomiais mais genéricas, ou seja, resolução de equações do tipo

$$P(x) = 0,$$

onde P é um polinómio de grau n , com $n \geq 2$, é um tema bastante conhecido não só nos currículos do ensino secundário como também nos currículos de cursos de ensino superior, por exemplo, em cursos de ciências exactas, engenharias, ciências sociais, etc. De facto, os polinómios surgem muitas vezes associados a cálculos de áreas, volumes, velocidades. Vejamos alguns exemplos: o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ - trata-se de

um polinómio de grau 2 na variável r ; a equação reduzida da circunferência, dada por $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ - trata-se de um polinómio nas variáveis x e y ; a altura que alcança um projectil que é lançado verticalmente com velocidade inicial v_0 a partir da altura h_0 , é dada por $A = h_0 + v_0t + 4,9t^2$ - trata-se de um polinómio na variável t ; a velocidade no movimento rectilíneo uniforme, $v = v_0 + at$ - trata-se de um polinómio na variável t . Outro exemplo, e que nos leva à resolução de equações polinomiais, é o seguinte exemplo de [14, pg. 70], onde se modela um problema de volumes por meio de polinómios.

Usando um pedaço de cartão rectangular com 10 unidades de comprimento e 8 unidades de altura, construir uma caixa rectangular com altura de x unidades, e cujo volume seja de 50 unidades.



Ora, de acordo com a figura, o volume da caixa pretendida é dado por $x(8-2x)(10-2x)$. Uma vez que se pretende que o volume seja igual a 50, então temos a equação

$$x(8 - 2x)(10 - 2x) = 50.$$

Assim, obter a solução deste problema significa resolver a equação polinomial $80x - 36x^2 + 4x^3 = 50$, equivalentemente,

$$4x^3 - 36x^2 + 80x - 50 = 0. \quad (1.1.1)$$

Neste caso temos $P(x) = 4x^3 - 36x^2 + 80x - 50$, ou seja, um polinómio de grau 3, e, então, a equação (1.1.1) é uma equação cúbica. Para as equações cúbicas existe uma fórmula, envolvendo radicais (cf. capítulo 3), que nos dá a solução exacta. Devemos salientar que fórmulas que nos dão as soluções exactas (ou seja, soluções dadas por meio

de uma expressão que envolve radicais) existem apenas para os casos em que o grau do polinómio é menor que ou igual a 4. Se o grau do polinómio for maior que 4, então não existem (aliás, nem podem existir) fórmulas que nos dêem a solução exacta por meio de radicais. Este resultado é conhecido como Teorema de Abel-Ruffini (cf. capítulo 3). Assim, na maioria dos casos em que o grau do polinómio é maior que 4, as equações polinomiais resolvem-se procurando as soluções na forma de soluções aproximadas, através de métodos numéricos. Neste trabalho resolvemos apresentar os dois métodos numéricos estudados em [14], nomeadamente, o método de Newton-Raphson e o método da Bissecção. Estes métodos usam, como ferramenta principal, as derivadas, bem como algumas propriedades elementares dos polinómios, tais como a continuidade.

Assim, as derivadas podem surgir de forma natural no estudo de equações polinomiais de grau maior que 4. Esta temática motivou o estudo que apresentamos no capítulo 4, sobre determinação de derivadas e de tangentes a curvas polinomiais. Aqui devemos fazer um breve parêntesis sobre o problema de identificação de tangentes a curvas. De acordo com [12], este foi o problema central para os matemáticos e físicos dos séculos XVII e XVIII, com Isaac Newton (1642-1727) e Wilhelm Leibniz (1646-1716) a darem contribuições fundamentais para o cálculo infinitesimal e o estudo de “limites”. Não faremos aqui descrições históricas de resultados, pois estão (demasiado) dispersos na literatura, aconselhamos o leitor interessado a ler, por exemplo, as referências de [11, 12].

Voltando então à determinação de tangentes a curvas, escolhemos estudar os artigos [11, 12], onde se explicam métodos bastante simples (ou seja, baseados em álgebra elementar de polinómios, tais como divisão euclidiana e factorização), para o cálculo da tangente a uma curva polinomial, bem como para a introdução do conceito de derivada de um polinómio num ponto.

Uma propriedade fundamental de derivadas de polinómios é que a derivada de um polinómio de grau n é um polinómio de grau $n - 1$. Ora, esta propriedade motivou o estudo que apresentamos no capítulo 5, sobre operadores às diferenças divididas que imitam a propriedade referida dos polinómios, ou seja, com a propriedade de devolverem um polinómio de grau $n - 1$ quando aplicados a um polinómio de grau n . A teoria dos operadores às diferenças divididas tem muitas aplicações, em especial na teoria de Polinómios Ortogonais e Funções Especiais (ver [2, 3, 4, 6, 7, 8, 15]). Não entraremos em detalhes sobre tais aplicações, focamo-nos na representação, classificação e interpretação geométrica de operadores às diferenças divididas. As técnicas e ferramentas de estudo que aqui utilizaremos baseiam-se em propriedades bem conhecidas de polinómios e equações polinomiais.

1.2 Objectivos do trabalho

De seguida indicamos, de forma genérica, os objectivos em cada um dos restantes capítulos desta dissertação.

O objectivo do capítulo 2 é introduzir as noções básicas, bem como alguns resultados fundamentais a serem usadas ao longo da dissertação. Nas secções 2.1 e 2.2 apresentamos as definições elementares sobre polinómios, bem como as operações: adição/subtracção, multiplicação e divisão de polinómios. Na secção 2.3 apresentamos resultados genéricos sobre zeros de polinómios. Na secção 2.4 apresentamos o Teorema fundamental da Álgebra, bem como a sua demonstração. As principais referências bibliográficas para este capítulo foram [1, 13, 14].

O objectivo principal do capítulo 3 é o estudo de equações polinomiais. Na secção 3.1 apresentamos, de forma detalhada, a dedução das soluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Na secção 3.2 abordamos as equações polinomiais de grau maior que quatro: estudamos o Teorema da Raíz Racional e apresentamos dois métodos numéricos, o método de Newton-Raphson e o método da Bissecção. As principais referências bibliográficas para este capítulo foram [5, 9, 10, 13, 14].

O objectivo principal do capítulo 4 é detalhar o estudo de [11, 12], onde se usa a álgebra de polinómios para determinar tangentes a curvas polinomiais e para introduzir o conceito de derivada.

O objectivo do capítulo 5 é estudar operadores às diferenças divididas com a propriedade fundamental de devolverem um polinómio de grau $n - 1$ quando aplicados a um polinómio de grau n . Na secção 5.1 apresentamos a dedução da forma geral dos operadores com a propriedade referida. Na secção 5.2 apresentamos a classificação dos tais operadores (essencialmente, há quatro casos canónicos de operadores às diferenças), juntamente com a interpretação geométrica, onde se faz a ligação de cada operador com a respectiva cónica. Na secção 5.3 deduzimos algumas propriedades elementares de tais operadores, nomeadamente, a regra do produto e a regra do quociente. As principais referências bibliográficas para este capítulo foram [2, 3, 4, 6, 7, 8, 15].

1.3 Notações e expressões utilizadas

1. \mathbb{N} Conjunto dos números naturais.
2. \mathbb{Z} Conjunto dos números inteiros.
3. \mathbb{R} Conjunto dos números reais.

4. \mathbb{C} Conjunto dos números complexos.
5. \leq menor que ou igual a.
6. \neq Diferente.
7. \vee ou.
8. $x \rightarrow \infty$ (x tende para infinito).
9. $\forall x$ Para todo o x .
10. f' Indica a derivada da função f .
11. \lim Limite.
12. $x \approx \alpha$ x aproximadamente igual a α .

Capítulo 2

Propriedades elementares de polinómios

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos sobre polinómios.

Começamos por apresentar, na secção 2.1, a definição de polinómios, e depois, na secção 2.2, apresentamos as operações sobre polinómios, nomeadamente, a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão de polinómios. Na secção 2.3 apresentamos alguns resultados genéricos sobre zeros. Na secção 2.4 apresentamos o chamado Teorema Fundamental da Álgebra, e a sua demonstração detalhada.

As referências que nos permitiram fazer este estudo foram [1, 13, 14].

2.1 Definições

Começamos por apresentar as principais definições (ver, por exemplo, [14, 13]).

Definição 2.1.1 *Um polinómio, P , é uma função da forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.1.1)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais.

Os termos $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ designam-se por monómios e $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ designam-se por coeficientes, a_0 é o termo independente do polinómio. Se $a_n \neq 0$, então n é o grau de P .

Se $n = 0$ em (2.1.1) obtemos a função constante,

$$f(x) = a_0, \quad (2.1.2)$$

com $a_0 \in \mathbb{R}$.

Se $n = 1$ em (2.1.1) obtemos a chamada função afim,

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad (2.1.3)$$

com $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_1 \neq 0$.

Se $n = 2$ em (2.1.1) obtemos a função quadrática,

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2.1.4)$$

com $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$.

Se $n = 3$ em (2.1.1) obtemos a função cúbica,

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2.1.5)$$

com $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_3 \neq 0$.

Se $n = 4$ em (2.1.1) obtemos a função quártica,

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2.1.6)$$

com $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_4 \neq 0$.

Observação 2.1.1 *A variável x será geralmente considerada uma variável real (ou seja, o domínio de P é \mathbb{R}), mas a definição pode estender-se, naturalmente, ao conjunto dos números complexos.*

Exemplos

As seguintes funções são polinómios:

1. $P(x) = 7x^2 - 5x + 6$.
2. $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 2\sqrt{2}$.
3. $P(x) = \frac{1}{3}x^4 - 4x + \frac{2}{3}$

Observação 2.1.2 *A função $f(x) = \frac{1}{x}$, ou seja, $f(x) = x^{-1}$, não é um polinómio, pois possui um expoente inteiro negativo, e os expoentes de um polinómio devem ser números inteiro não negativos. A função $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ também não é um polinómio, pois o expoente é fraccionário.*

2.2 Operações no espaço dos polinómios

2.2.1 Multiplicação de um polinómio por uma constante

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

um polinómio e c uma constante. Define-se o polinómio cP do seguinte modo:

$$(cP)(x) = c(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0),$$

ou seja,

$$cP(x) = ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + ca_0.$$

2.2.2 Adição/subtracção de polinómios

Sejam

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

dois polinómios, onde $n \geq m$ ou $m \geq n$.

Assumindo que $n \geq m$, então podemos reescrever Q na forma

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

onde $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$.

Então, define-se a adição $P + Q$ do seguinte modo:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x),$$

ou seja,

$$(P + Q)(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0.$$

logo,

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Analogamente, podemos definir a subtracção de polinómios $P - Q$ como

$$(P - Q)(x) = (P + (-Q))(x),$$

ou seja, a subtracção, $P - Q$, é a soma do polinómio P com o polinómio $-Q$. Logo,

$$(P - Q)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Observação 2.2.1 *Conclui-se que o grau de $P \pm Q$ é menor ou igual ao maior dos graus dos dois polinómios, ou seja,*

$$gr(P \pm Q) \leq \max\{gr(P), gr(Q)\}.$$

Exemplos

1. Dados

$$P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \quad Q(x) = -x^2 + 8x - 3,$$

então

$$(P + Q)(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4.$$

2. Dados

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 5x - 3, \quad Q(x) = -2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2,$$

então

$$(P + Q)(x) = -x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x - 5.$$

3. Dados

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \quad Q(x) = 2x^3 + 8x - 3$$

então

$$(P + Q)(x) = 4x^2 + 5x - 4.$$

4. Dados

$$P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \quad Q(x) = -x^2 + 8x - 3,$$

então

$$(P - Q)(x) = 5x^3 + 5x^2 - 11x + 2.$$

5. Dados

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 5x - 3, \quad Q(x) = -2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2,$$

então

$$(P - Q)(x) = 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 9x - 1.$$

2.2.3 Multiplicação de polinómios

Sejam

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Então, aplicando a propriedade distributiva, obtemos

$$(PQ)(x) = (a_n b_m) x^{n+m} + \cdots$$
$$+ \cdots + (a_n b_k + a_{n-1} b_{k+1} + a_{n-2} b_{k+2} + \cdots + a_{n-m+k} b_m) x^{n+k} + \cdots$$
$$+ \cdots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_{n-m} b_m) x^n + \cdots$$
$$+ \cdots + (a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + a_2 b_{j-2} + \cdots + a_j b_0) x^j + \cdots + (a_0 b_0),$$

onde $k = 1, \dots, m-1$ e $j = 1, \dots, n-1$.

Observação 2.2.2 *Conclui-se que o grau do produto dos polinómios P e Q é igual à soma dos graus dos dois polinómios, ou seja,*

$$gr(PQ) = gr(P) + gr(Q).$$

Exemplos

Dados

$$P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \quad Q(x) = -x^2 + 8x - 3,$$

então

$$(PQ)(x) = -5x^5 + 40x^4 - 15x^3 - 4x^4 + 32x^3 - 12x^2 + 3x^3 - 24x^2 + 9x + x^2 - 8x + 3,$$

ou seja,

$$(PQ)(x) = -5x^5 + 36x^4 + 20x^3 - 35x^2 + x + 3.$$

2.2.4 Divisão de polinómios

Consideremos dois polinómios P e D , com grau de P maior ou igual que grau de D , ou seja, $gr(P) \geq gr(D)$. Fazer a divisão de P por D é determinar dois polinómios, q e r , que satisfaçam a seguinte igualdade:

$$P(x) = D(x)q(x) + r(x) \tag{2.2.7}$$

A fórmula (2.2.7) lê-se usualmente, do seguinte modo:

Dividendo = divisor \times quociente + resto .

A divisão (2.2.7) é designada por divisão euclidiana.

Observação 2.2.3 *Exemplos de divisão de polinómios podem ser encontrados na secção 3.3. (Synthetic Division) do livro [14], páginas 75-79.*

Definição 2.2.1 *Se na divisão de P por D , (2.2.7), obtivermos $r(x) = 0$, dizemos que P é divisível por D ou que D divide P , e a divisão é chamada de exacta.*

2.3 Generalidades sobre zeros de polinómios

Os resultados desta subsecção podem ser encontrados em [14].

Definição 2.3.1 *Um número complexo (ou real) c é zero do polinómio P se $P(c) = 0$.*

Observação 2.3.1 *Diremos também que $x = c$ é uma raíz da equação $P(x) = 0$.*

Teorema 2.3.1 *Quando um polinómio P é dividido por $x - c$, o resto r que se obtém é dado por $P(c)$, ou seja, $r = P(c)$.*

Demonstração: Quando se divide P por $x - c$ obtém-se um quociente q e um resto r . Assim, de acordo com a equação (2.2.7), podemos escrever

$$P(x) = (x - c)q(x) + r(x). \quad (2.3.8)$$

Fazendo $x = c$ em (2.3.8) obtemos

$$P(c) = (c - c)q(c) + r(c),$$

logo,

$$P(c) = r(c),$$

ou seja, o resto é igual a $P(c)$. □

Observação 2.3.2 *Se P é divisível por $x - c$, então o resto da divisão é igual a zero, ou seja, $r = 0$.*

Exemplo

Determinemos o resto da divisão do polinómio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$ por $x - 1$.
Pelo Teorema 2.3.1, teremos

$$r = P(c).$$

Notemos que $c = 1$. Ora,

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 8,$$

logo,

$$P(1) = -6.$$

Então

$$r = -6.$$

Corolário 2.3.1.1 *Seja P um polinómio e tal que $P(c) = 0$. Então, $x - c$ é um factor de P , ou seja, P pode escrever-se na forma*

$$P(x) = (x - c)q(x), \tag{2.3.9}$$

onde $q(x)$ é um polinómio com $gr(q) = gr(P) - 1$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, temos $r = P(c)$. Uma vez que $P(c) = 0$, então, $r = 0$.

Assim, do algoritmo de divisão euclidiana, teremos (2.3.8) com $r(x) = 0$. Logo,

$$P(x) = (x - c)q(x),$$

ou seja, $x - c$ é um factor de $P(x)$.

Uma vez que

$$gr((x - c)q) = gr(x - c) + gr(q),$$

então, de (2.3.9), teremos

$$gr(P) = 1 + gr(q),$$

logo,

$$gr(q) = gr(P) - 1.$$

□

Exemplo

Verifiquemos se $x - 2$ é um factor do polinómio $P(x) = x^2 - 4$. Basta averiguar se $P(2) = 0$. Uma vez que

$$P(2) = 2^2 - 4,$$

isto é,

$$P(2) = 0,$$

então, pelo corolário anterior, $x - 2$, é um factor do polinómio P . Assim, teremos que

$$P(x) = (x - 2)q(x).$$

Além disso, temos que

$$q(x) = x + 2.$$

2.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

Antes de fazermos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra salientamos alguns resultados que vão ajudar na compreensão do referido teorema.

Primeiro partiremos da definição de equações algébricas, depois a definição da função inteira, e enunciaremos o Teorema de Liouville.

Definição 2.4.1 *Denominamos equações polinómicas ou algébricas, às equações da forma $P(x) = 0$, onde P é um polinómio.*

Notemos que resolver uma equação algébrica é obter o conjunto dos zeros de um polinómio P , ou seja, obter os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $P(x) = 0$. A esses valores de x chamaremos de raízes da equação $P(x) = 0$, ou zeros do polinómio P .

Definição 2.4.2 *(ver [1]) Uma função f , definida no conjunto dos números complexos, designa-se por inteira ou holomorfa se for diferenciável no seu domínio.*

O teorema que se segue é conhecido como Teorema de Liouville (ver [1]).

Teorema 2.4.1 (Teorema de Liouville) *Seja f uma função definida no conjunto dos números complexos. Se f é inteira e limitada em \mathbb{C} , então f é constante.*

Apresentamos agora o Teorema Fundamental da Álgebra, que pode ser consultado, por exemplo, em [1].

Teorema 2.4.2 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo o polinómio de grau n não nulo tem n zeros (no corpo dos números complexos), contando multiplicidades.*

Demonstração: Demonstraremos este teorema em duas partes.

Parte I.

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

um polinómio de grau n não nulo. Suponhamos, por absurdo, que $P(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{C}$. Como $P(x)$ é inteiro e não tem raízes, então a função $f(x) = \frac{1}{P(x)}$ também é inteira.

Então, temos

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{P(x)} \right| = \frac{1}{|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0|}.$$

Colocando $|x^n|$ em evidência, obtemos

$$|f(x)| = \frac{1}{|x^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|}.$$

Agora, cada termo $\frac{a_j}{x^{n-j}}$ tende para zero, quando x tende para infinito.

Assim, $|f(x)| \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \infty$. Em particular, podemos escolher R suficientemente grande para que $|f(x)| < 1$ sempre que $|x| > R$.

Por outro lado, como $f(x)$ é contínua no disco fechado e limitado, centrado na origem e de raio R , $f(x)$ também é limitada sempre que $|x| \leq R$. Então conclui-se que f é limitada em \mathbb{C} .

Pelo Teorema de Liouville a função f é constante, digamos, $f(x) = c$.

Como

$$f(x) = \frac{1}{P(x)} = c,$$

então

$$P(x) = \frac{1}{c},$$

também é constante. Isso contradiz a suposição de que $P(x)$ não é constante e, portanto, $P(x)$ tem um zero.

Parte II.

Mostraremos agora que todo o polinómio P de grau n tem exactamente n zeros (contando multiplicidades).

Seja P um polinómio de grau $n \geq 1$. Pela parte I, $P(x)$ admite $x_1 \in \mathbb{C}$ como raiz, ou seja $P(x_1) = 0$. Pelo corolário 2.3.1.1, então existe um polinómio q_{n-1} de grau $n - 1$ tal que

$$P(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x).$$

Agora aplicando o mesmo resultado a $q_{n-1}(x)$, novamente existem $x_2 \in \mathbb{C}$ e $q_{n-2}(x)$ de grau $n - 2$, tal que

$$q_{n-1}(x) = (x - x_2)q_{n-2}(x),$$

ou seja,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x).$$

Aplicando sucessivamente o processo, obtemos uma generalização, ou seja,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)q_0(x),$$

onde grau $q_0 = 0$.

Escreva-se $q_0 = \alpha$. Então, obtemos

$$P(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Concluimos assim o pretendido. □

Corolário 2.4.2.1 *Todo o polinómio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ pode ser factorizado na forma*

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

É importante salientar que no capítulo seguinte analisaremos com mais detalhes os zeros de polinómios.

Capítulo 3

Equações polinomiais

Este capítulo é dedicado ao estudo de equações polinomiais, nomeadamente, a determinação de zeros de polinómios.

Na secção 3.1 estudaremos com detalhe as equações polinomiais seguintes:

- equações do segundo grau (quadráticas), aplicando a técnica de completar os quadrados e aplicando a fórmula resolvente (ver [14]);
- equações do terceiro grau (cúbicas), aplicando as chamadas fórmulas de Cardano e Del Ferro (ver [5, 14]);
- equações do quarto grau, aplicando a chamada fórmula de Ludovico Ferrari (ver [5, 14]).

Na secção 3.2 falaremos sobre as equações do quinto grau e superiores. Apresentaremos o Teorema de Abel-Ruffini (ver, por exemplo, [14]) e apresentamos alguns resultados que permitem determinar zeros de polinómios ou equivalentemente, raízes de equações polinomiais: começamos por estudar o chamado Teorema da Raíz Racional (ver [14]), e depois abordaremos dois métodos numéricos para a determinação das raízes aproximadas de equações polinomiais (não lineares), o método de Newton-Raphson e o método da Bissecção (ver [10, 14]).

3.1 Resolução de Equações polinomiais de grau dois, três e quatro

3.1.1 Equações polinomiais de grau dois: a Fórmula Resolvente

Seja dada a equação quadrática ou equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.1.1}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Vamos aplicar a técnica de completar o quadrado (ver [14]) para resolver a equação (3.1.1).

Proposição 3.1.1 *As raízes da equação (3.1.1) são dadas por*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.1.2)$$

Demonstração: Dividindo ambos os membros da equação (3.1.1) por a , temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Isolando o termo independente, teremos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}.$$

Somando em ambos os membros da equação $\frac{b^2}{4a^2}$, obtemos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

O 1º membro pode ser reescrito usando a fórmula do quadrado da soma, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Reduzindo o 2º membro ao mesmo denominador, obtemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Logo,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Resolvendo em ordem a x , obtemos

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ou seja, obtemos (3.1.2). □

Observação 3.1.1 *Abreviadamente, escreveremos*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Escreva-se

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e defina-se

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

o chamado de discriminante da equação (3.1.1), $ax^2 + bx + c = 0$.

Se $\Delta > 0$, então a equação quadrática possui duas raízes reais e distintas, ou seja, $x_1 \neq x_2$.

Se $\Delta = 0$, a equação quadrática possui duas raízes reais e iguais, ou seja, $x_1 = x_2$.

Se $\Delta < 0$, então a equação quadrática possui duas raízes complexas e conjugadas.

Exemplo 1

Aplicando a técnica de completar o quadrado, resolvamos as seguintes equações:

1. $3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Dividindo a equação por 3, temos

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0.$$

Isolando o termo independente, teremos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}.$$

Somando em ambos os membros da equação $\frac{4}{9}$, teremos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}.$$

O 1º membro pode ser reescrito usando a fórmula do quadrado da soma, temos

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}.$$

Reduzindo o 2º membro ao mesmo denominador, obtemos

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Logo,

$$x + \frac{2}{3} = \pm \sqrt{\frac{10}{9}}.$$

Isolando x , temos que

$$x = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Logo, teremos

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{3}.$$

Assim o conjunto solução da equação, $3x^2 + 4x - 2 = 0$ é

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} \right\}.$$

2. $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

Dividindo a equação por 3, temos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0.$$

Isolando o termo independente, temos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x = -\frac{2}{3}.$$

Somando em ambos os membros da equação $\frac{4}{9}$, teremos

$$x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}.$$

O primeiro membro pode ser reescrito usando a fórmula do quadrado da soma, temos

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}.$$

Reduzindo o 2º membro ao mesmo denominador, obtemos

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9}.$$

Elevando os dois membros da equação na raiz quadrada, temos

$$x + \frac{2}{3} = \pm \sqrt{-\frac{2}{9}}.$$

Isolando x , temos que

$$x = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{-2}}{3},$$

logo,

$$x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{-2}}{3} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{-2}}{3}.$$

Assim o conjunto solução da equação $3x^2 + 4x - 2 = 0$ é $S = \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{-2}}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{-2}}{3} \right\}$,
ou seja,

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}i}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}i}{3} \right\}.$$

3. $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Ora,

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = 0.$$

Podemos transformar directamente o 1º membro da equação num quadrado perfeito,

$$(x + 2)^2 = 0,$$

ou seja,

$$x + 2 = 0 \iff x = -2.$$

Assim, concluimos que

$$x_1 = -2 \vee x_2 = -2.$$

Logo, o conjunto solução da equação $x^2 + 4x + 4 = 0$ é

$$S = \{-2\}.$$

Exemplo 2

Resolver as seguinte equações, aplicando a fórmula resolvente.

1. $3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Comparando com $ax^2 + bx + c = 0$, temos

$$a = 3, \quad b = 4 \quad e \quad c = -2.$$

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$ vem dado por

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2),$$

ou seja,

$$\Delta = 40.$$

Aplicando a fórmula (3.1.2), isto é,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

obtemos

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{40}}{2 \cdot 3} \vee x_2 = \frac{-4 - \sqrt{40}}{2 \cdot 3},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{6} \vee x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{10}}{6},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{3}.$$

Assim, o conjunto solução da equação $3x^2 + 4x - 2 = 0$ é

$$S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}, \frac{-2 - \sqrt{10}}{3} \right\}.$$

2. $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

Comparando com a equação $ax^2 + bx + c = 0$ temos

$$a = 3, \quad b = 4 \quad e \quad c = 2.$$

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$ vem dado por

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2,$$

ou seja,

$$\Delta = -8.$$

Aplicando a fórmula (3.1.2), isto é,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

obtemos

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{-8}}{2 \times 3} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{-8}}{2 \times 3},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{-2}}{6} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{-2}}{6}.$$

Simplificando, vem que

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}i}{3} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}i}{3}.$$

O conjunto solução da equação $3x^2 + 4x + 2 = 0$ é

$$S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{2}i}{3}, \frac{-2 - \sqrt{2}i}{3} \right\}.$$

3. $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Comparando com $ax^2 + bx + c = 0$ temos

$$a = 1, \quad b = 4 \quad e \quad c = 4.$$

Assim, $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$ vem dado por

$$\Delta = 0.$$

Como $\Delta = 0$, de (3.1.2), a equação $x^2 + 4x + 4 = 0$ possui duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$. Assim, podemos escrever

$$x_1 = x_2 = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2},$$

ou seja,

$$x_1 = x_2 = -2.$$

Concluimos que o conjunto solução da equação $x^2 + 4x + 4 = 0$ é

$$S = \{-2\}.$$

Consequências da fórmula resolvente e da factorização de polinómios de segundo grau

Relembremos (cf. Corolário 2.4.2.1) que toda a equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, pode ser factorizada da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (3.1.3)$$

onde, x_1 e x_2 são as raízes da equação.

É importante salientar algumas fórmulas que serão aplicadas mais adiante, nomeadamente que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica do 2º grau.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Então, pela decomposição (3.1.3), temos

$$a(x - x_2)(x - x_1) = ax^2 + bx + c.$$

Dividindo ambos os membros por a e aplicando a propriedade distributiva no 1º membro, obtemos

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a},$$

logo,

$$-(x_1 + x_2)x + x_1x_2 = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Igualando os coeficientes das variáveis com o mesmo grau, tem-se

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \quad (3.1.4)$$

Outra resolução alternativa para a soma e o produto das raízes para uma equação do 2º grau é a seguinte.

Sejam

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Então, somando as raízes, obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

logo,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Multiplicando as raízes, obtemos

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

logo,

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

assim,

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}.$$

Portanto,

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

3.1.2 Equações cúbicas

Começamos por considerar a equação geral/completa do 3º grau

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{3.1.5}$$

O primeiro progresso na solução da equação desse tipo foi feito pelo matemático Scipione del Ferro (1465-1526), que mostrou como passar de (3.1.5) para outra equação cúbica em que o termo x^2 não aparece (ver [14]).

Começamos por mostrar que a substituição $x = y - \frac{b}{3}$ elimina o termo em x^2 da equação (3.1.5).

Fazendo a substituição

$$x = y - \frac{b}{3} \tag{3.1.6}$$

na equação (3.1.5), obtemos

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0,$$

ou seja,

$$y^3 - 3y^2\left(\frac{b}{3}\right) + 3y\left(\frac{b^2}{9}\right) - \frac{b^3}{27} + b\left(y^2 - \frac{2b}{3}y + \frac{b^2}{9}\right) + cy - \frac{cb}{3} + d = 0.$$

Após alguns cálculos, obtemos

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d = 0.$$

A equação anterior é chamada equação cúbica reduzida, que passaremos a escrever na forma

$$y^3 + py = q, \quad (3.1.7)$$

onde

$$p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = \frac{cb}{3} - \frac{2b^3}{27} - d. \quad (3.1.8)$$

Vejamos então como se resolvem as equações cúbicas reduzidas.

Equações Cúbicas Reduzidas

Vamos deduzir fórmulas para a resolução de equações cúbicas do tipo (3.1.7),

$$y^3 + py = q,$$

onde p e q são números reais. Mais tarde, mostraremos que, mediante certas condições, estas equações têm uma solução real.

Proposição 3.1.2 *A equação (3.1.7) tem uma raiz da forma*

$$y = u + v, \quad (3.1.9)$$

onde u e v verificam

$$3uv + p = 0, \quad u^3 + v^3 = q. \quad (3.1.10)$$

Demonstração: Substituindo (3.1.9) em (3.1.7), teremos que

$$(u + v)^3 + p(u + v) = q,$$

logo,

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) = q,$$

ou ainda,

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) = q,$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) = q. \quad (3.1.11)$$

Usando (3.1.10), ou seja, $u^3 + v^3 = q$ e $3uv + p = 0$, em (3.1.11) obtemos $q = q$.

Assim, mostramos que $y = u + v$ é a raiz da equação (3.1.7). \square

De seguida determinamos u e v .

Proposição 3.1.3 u e v são dados por

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3.1.12)$$

Demonstração: Da equação $3uv + p = 0$ obtemos

$$v = -\frac{p}{3u}.$$

Substituindo a igualdade anterior na segunda equação de (3.1.10), obtemos

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = q,$$

logo,

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q.$$

Multiplicando ambos os membros por u^3 , obtemos

$$u^6 - \frac{p^3}{27} = u^3q,$$

ou seja,

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Fazendo a substituição $z = u^3$, temos que

$$z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Como a equação anterior é uma equação do 2º grau, aplicaremos a fórmula resolvente, obtendo

$$z = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2},$$

ou seja,

$$z = \frac{q \pm 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{2}.$$

Sabendo que $z = u^3$, temos

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

logo,

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3.1.13)$$

Substituindo (3.1.13) na 2ª equação de (3.1.10), $u^3 + v^3 = q$, obtemos

$$\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + v^3 = q.$$

Logo,

$$v^3 = q - \left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right),$$

ou seja,

$$v^3 = \frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Assim,

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3.1.14)$$

□

Substituindo u e v dados por (3.1.13) e (3.1.14) em (3.1.9), obtemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (3.1.15)$$

ou

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (3.1.16)$$

Notemos que as duas soluções (3.1.15) e (3.1.16) são iguais. Assim, acabámos de mostrar a proposição seguinte.

Proposição 3.1.4 *Uma solução da equação cúbica reduzida (3.1.7), $y^3 + py = q$, é dada por*

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3.1.17)$$

Logo, uma solução da equação completa (3.1.5), $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, é $x = y - \frac{b}{3}$, ou seja,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3}, \quad (3.1.18)$$

onde p e q são dados por (3.1.8).

Para a demonstração da proposição seguinte necessitamos do teorema que se segue, conhecido como Teorema de Bolzano (ver, por exemplo, [13]).

Teorema 3.1.1 [Teorema de Bolzano]

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz de f no intervalo $[a, b]$.

Vejamos agora a proposição.

Proposição 3.1.5 Se na equação (3.1.7), $y^3 + py = q$, os números p e q forem positivos, então a equação (3.1.7) possui uma solução real, dada na forma (3.1.17).

Demonstração: Apliquemos o teorema de Bolzano para mostrar que $f(x) = x^3 + px - q$ tem uma raiz real.

Consideremos $x = 0$, $f(0) = -q$ (que é negativo), pois q foi considerado positivo.

Consideremos $x = N$, onde N é um número positivo muito grande, logo, $x^3 + px$ será um número positivo muito grande e será maior que q se N for grande o suficiente. Então, $f(N)$ será positivo. Como $f(0) < 0$ e $f(N) > 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe uma raiz real de f . \square

Observação 3.1.2 Como é sabido que a equação cúbica possui três raízes (cf. Teorema Fundamental da Álgebra), depois de encontrada uma raiz, α , podemos aplicar a divisão euclidiana para encontrarmos uma factorização do tipo

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(x^2 + Bx + C).$$

Obtida a equação do 2º grau $x^2 + Bx + C = 0$, aplicaremos os procedimentos da sub-secção anterior para obtermos as restantes duas raízes.

Exemplos

Determinemos as raízes das seguintes equações:

1. $x^3 - 6x = 9$.

A equação está na forma (3.1.7), $x^3 + px = q$, onde $p = -6$, $q = 9$.

Então, pela fórmula (3.1.17), temos

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}},$$

ou seja,

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{4} - \frac{7}{2}},$$

isto é,

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}},$$

obtemos

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1},$$

ou seja,

$$x = 2 + 1$$

ou seja,

$$x = 3,$$

logo é uma raiz real da equação.

Agora, aplicando o algoritmo da divisão euclidiana na expressão $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, temos

$$x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3).$$

Assim,

$$x^3 - 6x - 9 = 0 \iff x = 3 \vee x^2 + 3x + 3 = 0.$$

A solução de $x^2 + 3x + 3 = 0$ é dada por

$$x = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2 \cdot 1},$$

ou seja,

$$x = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $x^3 - 6x = 9$ é

$$S = \left\{ 3, \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} \right\}$$

2. $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Esta equação é da forma (3.1.7), $x^3 + px = q$, onde $p = -3$, $q = 2$.

Pela fórmula (3.1.17), obtemos

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{0}} \iff x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1},$$

ou seja,

$$x = 2.$$

Logo aplicando o algoritmo de divisão euclidiana, temos que

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0.$$

Pela lei do anulamento do produto, teremos

$$x - 2 = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0,$$

ou seja,

$$x = 2 \vee x^2 + 2x + 1 = 0.$$

A solução de $x^2 + 2x + 1 = 0$ é

$$x = -1,$$

que é uma raiz dupla.

Assim o conjunto solução da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ é

$$S = \{-1, 2\}.$$

Exemplo

Resolver a seguinte equação cúbica completa,

$$2x^3 + 6x^2 - 24x - 280 = 0.$$

Dividindo a equação por 2, teremos

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 140 = 0.$$

Esta equação está na forma (3.1.5) com, $b = 3$, $c = -12$, $d = -28$. De seguida faremos a mudança de variável, $x = y - \frac{b}{3}$, onde $b = 3$, assim teremos

$$x = y - 1. \tag{3.1.19}$$

Substituindo na equação (3.1.5), teremos

$$(y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 12(y - 1) - 140 = 0.$$

Após alguns cálculos, obtemos

$$y^3 - 15y - 126 = 0,$$

isto é,

$$y^3 - 15y = 126.$$

Esta última equação é da forma (3.1.7),

$$x^3 + px = q,$$

onde, $p = -15$, $q = 126$. Pela fórmula (3.1.17), obtemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{126}{2} + \sqrt{3844}} + \sqrt[3]{\frac{126}{2} - \sqrt{3844}},$$

ou seja,

$$y = \sqrt[3]{63 + 62} + \sqrt[3]{63 - 62},$$

isto é,

$$y = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1},$$

ou seja,

$$y = 5 + 1.$$

Logo,

$$y = 6.$$

Voltando à substituição anterior (3.1.19), teremos

$$x = y - 1.$$

Logo,

$$x = 5,$$

que é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 - 12x - 140 = 0$.

Pelo algoritmo de divisão euclidiana, teremos que

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 140 = (x - 5)(x^2 + 8x + 28).$$

Pela lei do anulamento do produto, teremos

$$x - 5 = 0 \vee x^2 + 8x + 28 = 0.$$

Logo,

$$x = 5 \vee x^2 + 8x + 28 = 0.$$

A solução de $x^2 + 8x + 28 = 0$ é

$$x = \frac{-8 + \sqrt{-48}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{-48}}{2 \cdot 1},$$

ou seja,

$$x = \frac{-8 + \sqrt{-48}}{2} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{-48}}{2},$$

logo,

$$x = -4 + \sqrt{12}i \vee x = -4 - \sqrt{12}i.$$

Assim o conjunto solução da equação $2x^3 + 6x^2 - 24x - 280 = 0$ é

$$S = \left\{ 5, -4 + \sqrt{12}i, -4 - \sqrt{12}i \right\}.$$

3.1.3 Equações quárticas

Para resolver as equações do quarto grau vamos usar o chamado método de Ferrari (ver [14]), que mostramos na proposição que se segue.

Proposição 3.1.6 *Toda a equação do 4º grau,*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (3.1.20)$$

pode ser transformada numa equação do 2º grau em x ,

$$\left(\left(x^2 + \frac{ax}{2} \right) + y \right)^2 = \left(2y + \frac{a^2}{4} - b \right) x^2 + (ay - c)x + y^2 - d. \quad (3.1.21)$$

Além disso, o 2º membro da equação (3.1.21) pode ser transformado num quadrado perfeito,

$$\left(2y + \frac{a^2}{4} - b \right) \left(x + \frac{(ay - c)}{2 \left(2y + \frac{a^2}{4} - b \right)} \right)^2, \quad (3.1.22)$$

onde y é uma raiz da equação quártica

$$8y^3 - 4by^2 + 2acy - 8dy + 4bd - a^2d - c^2 = 0. \quad (3.1.23)$$

Demonstração: Escreva-se a equação (3.1.20) na forma

$$x^4 + ax^3 = -(bx^2 + cx + d). \quad (3.1.24)$$

Completando o quadrado no 1º membro da equação (3.1.24), obtemos

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = \frac{a^2x^2}{4} - bx^2 - cx - d,$$

ou seja,

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} \right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b \right) x^2 - cx - d. \quad (3.1.25)$$

Somando a expressão $y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)$ a ambos os membros da equação (3.1.25), obtemos

$$y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Assim, temos

$$\left(\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + y\right)^2 = y^2 + 2yx^2 + axy + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d,$$

e obtemos (3.1.21),

$$\left(\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + y\right)^2 = \left(2y + \frac{a^2}{4} - b\right)x^2 + (ay - c)x + y^2 - d.$$

De seguida encontramos os valores de y que transformam o 2º membro da equação anterior num quadrado perfeito, ou seja, em que o discriminante da expressão quadrática do 2º membro na variável x seja igual a zero.

Fazendo

$$2y + \frac{a^2}{4} - b = A, \quad ay - c = B, \quad y^2 - d = C, \quad (3.1.26)$$

obtemos, do segundo membro de (3.1.21),

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

com, $A \neq 0$. Relembrando que $\Delta = B^2 - 4AC$, então teremos, usando os dados de (3.1.26),

$$\Delta = 0 \iff (ay - c)^2 - 4\left(2y + \frac{a^2}{4} - b\right)(y^2 - d) = 0,$$

ou seja,

$$8y^3 - 4by^2 + 2acy - 8dy + 4bd - a^2d - c^2 = 0.$$

A factorização do segundo membro de (3.1.21) é então dada por

$$A(x - x_1)^2, \quad x_1 = -\frac{B}{2A},$$

logo, temos a factorização (3.1.22). □

Observação 3.1.3 *Notemos que a equação (3.1.23) é uma equação cúbica em y . Então, podemos aplicar os procedimentos vistos na sub-secção anterior para determinarmos uma raiz.*

Exemplo

Determinemos o conjunto solução da seguinte equação do quarto grau

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

A equação anterior é uma equação do tipo (3.1.20),

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com

$$a = -1, \quad b = -2, \quad c = -2, \quad d = 4.$$

Substituindo esses valores na equação (3.1.23), teremos

$$8y^3 + 8y^2 - 28y - 40 = 0.$$

O conjunto solução desta última equação é

$$y = 2, y = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}, y = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

Escolha-se a raiz $y = 2$. Voltando à equação (3.1.21) e usando os valores

$$y = 2, \quad a = -1, \quad b = -2, \quad c = -2, \quad d = 4,$$

temos

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 &= \left(2 \cdot 2 + \frac{(-1)^2}{4} - (-2)\right)x^2 + (-2 + 2)x + 2^2 - 4, \\ \iff \left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 &= \left(4 + \frac{1}{4} + 2\right)x^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 = \frac{25x^2}{4}.$$

Logo,

$$x^2 - \frac{x}{2} + 2 = \pm \frac{5x}{2},$$

ou seja,

$$x^2 - \frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{2} \quad \vee \quad x^2 - \frac{x}{2} + 2 = -\frac{5x}{2}.$$

A primeira equação tem solução

$$x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 2.$$

A segunda equação tem solução

$$x_1 = -1 + i \quad \vee \quad x_2 = -1 - i.$$

Assim, o conjunto solução da equação $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ é

$$S = \{1, 2, -1 + i, -1 - i\}.$$

Observação 3.1.4 *No exemplo anterior poderíamos ter trabalhado também com os valores $y = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$ substituindo na equação (3.1.21) para determinarmos as raízes da equação $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$. É importante dizer que trabalhando com estes valores a solução da equação $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ é a mesma comparativamente às encontradas.*

3.2 As equações de grau igual a ou superior a cinco

Nesta subsecção daremos alguns detalhes sobre as equações do quinto grau ou superiores. Começaremos por apresentar um teorema, chamado de teorema de Abel-Ruffini (ver, por exemplo, [14]).

Teorema 3.2.1 (*Abel-Ruffini*)

Não é possível encontrar uma fórmula semelhante às fórmulas para resolver equações quadráticas, cúbicas e quárticas que resolverão todas as equações de quinto grau e superiores. Isto é, não se pode encontrar uma fórmula que resolva todas essas equações usando radicais.

Este teorema não diz que as equações do quinto grau ou superiores não têm solução ou não podem ser resolvidas, mas sim que não há nenhuma fórmula, com aplicação de radicais, por exemplo, tal como a fórmula resolvente, que pode ser aplicada para resolver equações de 2º grau. No entanto, existem vários métodos para a resolução das referidas equações, nomeadamente, para a procura de raízes aproximadas. Neste contexto referiremos dois métodos: Método de Newton-Raphson e o Método da Bissecção. Outro método, bastante genérico, é o chamado Teorema da Raíz Racional: trata-se de um resultado aplicável a polinómios de grau n (onde n é qualquer) e de coeficientes inteiros.

3.2.1 O Teorema da Raíz Racional e algumas consequências

Começamos então por abordar o Teorema da Raíz Racional, que pode ser encontrado, por exemplo, em [14].

Teorema 3.2.2 (Teorema da Raíz Racional) *Considere-se a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_i \in \mathbb{Z}$ e $a_n \neq 0$. Se $x = \frac{p}{q}$ for raiz desta equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .*

Demonstração: Seja $\frac{p}{q}$, raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, com p e q primos entre si. Queremos mostrar que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Como $\frac{p}{q}$ é a raiz da equação, temos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou seja,

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_2 \frac{p^2}{q^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por q^n , obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \quad (3.2.27)$$

Isolando $a_n p^n$ em (3.2.27) temos

$$a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - a_{n-2} p^{n-2} q^2 - \cdots - a_2 p^2 q^{n-2} - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n,$$

ou seja,

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} - a_{n-2} p^{n-2} q - \cdots - a_2 p^2 q^{n-3} - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}).$$

Fazendo

$$-a_{n-1} p^{n-1} - a_{n-2} p^{n-2} q - \cdots - a_2 p^2 q^{n-3} - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1} = k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

temos

$$a_n p^n = qk.$$

Uma vez que p e q não têm factores comuns, então conclui-se que q terá de ser divisor de a_n .

Agora, isolando em (3.2.27) $a_0 q^n$, temos:

$$a_0 q^n = -a_n p^n - a_{n-1} p^{n-1} q - a_{n-2} p^{n-2} q^2 - \cdots - a_2 p^2 q^{n-2} - a_1 p q^{n-1},$$

ou seja,

$$a_0 q^n = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} q - a_{n-2} p^{n-3} q^2 - \cdots - a_2 p q^{n-2} - a_1 q^{n-1}).$$

Fazendo

$$-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} q - a_{n-2} p^{n-3} q^2 - \cdots - a_2 p q^{n-2} - a_1 q^{n-1} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z},$$

temos

$$a_0 q^n = p\alpha.$$

Uma vez que p e q não têm factores comuns, então conclui-se que p terá de ser divisor de a_0 . □

Exemplo

Determinemos quais são as raízes racionais da equação

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0. \quad (3.2.28)$$

Se existir $\frac{p}{q}$ raiz de $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$, então, pelo Teorema da raiz Racional, teremos que p é divisor de 3 e q é divisor de 1. Ora, os divisores de 3 são: $-1, 1, -3, 3$; os divisores de 1 são: $-1, 1$.

Logo, teremos quatro situações possíveis:

$$\frac{p}{q} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = -3 \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = 3.$$

Estas serão as candidatas a raízes da equação (3.2.28). Substituindo na equação anterior, teremos

$$P(-1) = -4, \quad P(1) = 2, \quad P(3) = 0, \quad P(-3) = -66,$$

ou seja,

$$P(-1) \neq 0, \quad P(1) \neq 0, \quad P(-3) \neq 0.$$

Logo, $x = 3$ é uma das raízes da equação.

Assim, concluímos que a equação $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$ possui a raiz racional $x = 3$.

O teorema seguinte pode ser encontrado em [14].

Teorema 3.2.3 *Seja N um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Então, \sqrt{N} é irracional.*

Demonstração: Seja N um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito.

Defina-se o polinómio

$$P(x) = x^2 - N.$$

Os zeros de P são

$$x_1 = -\sqrt{N} \quad \text{ou} \quad x_2 = \sqrt{N}.$$

Pelo Teorema da Raiz Racional, se existir uma raiz racional $x_1 = \frac{p}{q}$, onde p e q são primos entre si, então

$$\frac{p}{q} = -\sqrt{N} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = \sqrt{N}.$$

Então, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = N$, isto é,

$$p^2 = q^2 N. \quad (3.2.29)$$

Uma vez que p e q são primos entre si, escrevamos

$$p = p_1 p_2 \dots p_r, \quad q = q_1 q_2 \dots q_s,$$

$p_i \neq q_j$, $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$. Substituindo em (3.2.29), temos:

$$p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2 = q_1^2 q_2^2 \dots q_s^2 N, \quad (3.2.30)$$

sendo $p_i \neq q_j$, então para que (3.2.30) se verifique teríamos de ter

$$p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2 = N \quad \text{e} \quad q_1^2 q_2^2 \dots q_s^2 = 1.$$

Mas tal significa que

$$N = p^2,$$

que é uma contradição, pois estamos a assumir que N não é quadrado perfeito.

Logo, concluímos que \sqrt{N} não é racional, ou seja, \sqrt{N} é irracional. □

Exemplo

Verifiquemos se a equação $x^2 - 12 = 0$ possui raízes racionais.

Pelo Teorema da Raíz Racional, as eventuais raízes racionais da equação $x^2 - 12 = 0$ são $x = \frac{p}{q}$, onde p é divisor de -12 e q é divisor de 1. Então, teremos de ter

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \quad \text{e} \quad q = \pm 1,$$

logo,

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$$

Nenhum destes valores é raiz da equação $x^2 - 12 = 0$. Mas sabemos que

$$x^2 - 12 = 0 \iff x = \pm\sqrt{12}.$$

Logo, conclui-se que $x = \sqrt{12}$ e $x = -\sqrt{12}$ são irracionais.

Teorema 3.2.4 *Seja A um número inteiro positivo que não é uma potência de n . Então, $\sqrt[n]{A}$ é irracional.*

Demonstração: Defina-se o polinómio $P(x) = x^n - N$. Verifica-se que o zero de P é dado por $x = \sqrt[n]{N}$.

A restante demonstração é análoga à do teorema anterior. □

3.2.2 Dois métodos numéricos

De seguida abordamos dois métodos numéricos que permitem determinar as raízes aproximadas de equações polinomiais não lineares. A informação que a seguir apresentamos está, essencialmente, em [14].

O método de Newton-Raphson ou método das tangentes

Este método é chamado das tangentes, devido à forma como as iteradas são calculadas, pois estas envolvem derivadas, que, geometricamente, representam tangentes a uma dada curva.

Começamos por lembrar a equação de uma recta tangente a uma curva \mathcal{C} : $y = f(x)$ num ponto (a, b) da curva.

Primeiro será necessário calcular o valor de $f'(a)$, a derivada de f avaliada em $x = a$, que dá a inclinação da tangente à curva de f em $x = a$. Assim, teremos a equação da recta tangente

$$y - b = f'(a)(x - a). \quad (3.2.31)$$

Como (a, b) é um ponto da curva \mathcal{C} , então $b = f(a)$. Assim, a equação (3.2.31) pode ser escrita da forma

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (3.2.32)$$

Pela equação (3.2.32) podemos encontrar onde a recta tangente intersecta o eixo Ox , fazendo $y = 0$. Tal implica

$$-f(a) = f'(a)(x - a),$$

ou seja,

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Assim, obtemos que a coordenada do ponto onde a recta tangente intersecta o eixo $0x$ é dada por

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (3.2.33)$$

Observação 3.2.1 *Para que a recta tangente intersecte o eixo Ox , assumimos a condição $f'(a) \neq 0$.*

Recordemos que o objectivo é de encontrar o zero da função, isto é, onde a função f intersecta o eixo Ox . De acordo com a figura abaixo (este é um exemplo que ilustra a situação), tal ocorre em x_0 . Assim, observamos que, se traçarmos a recta tangente, T , num ponto próximo com coordenadas $(x_1, f(x_1))$, o ponto x_2 , onde a recta tangente T

intersecta o eixo Ox , estará mais próximo de x_0 do que x_1 . Assim, pela equação (3.2.33), obtemos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

De seguida traçamos a recta tangente à curva no ponto $(x_2, f(x_2))$ e observamos onde ela intersecta o eixo Ox . Pela figura vemos que intersecta em x_3 , que é mais próximo de x_0 do que x_2 . Assim, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Continuando com o mesmo processo, veremos que estamos a aproximar-nos cada vez mais de x_0 , que é o zero da função f .

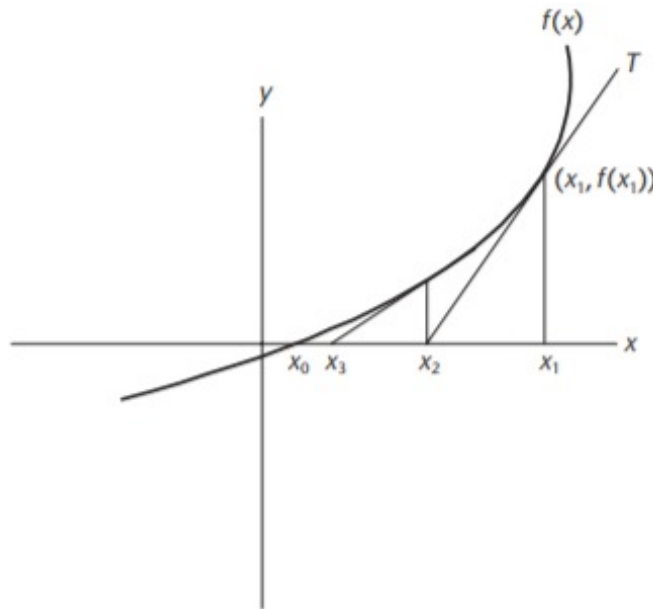


Figura 3.1: Representação da recta tangente

Assim, generalizando obtemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.2.34)$$

onde $n \geq 1$, n indica a n -ésima iteração do algoritmo, e $f'(x_n) \neq 0$ é derivada da função f em x_n .

Notemos que, para saber qual será a solução aproximada da equação, é necessário ter em conta alguns critérios, chamados critérios de paragem, que indicamos de seguida.

Critérios de Paragem

O algoritmo anteriormente descrito deve ser parado quando ocorre uma das situações seguintes:

1. Quando encontramos $x_{n+1} = x_n$;
2. Quando queremos que a diferença em valor absoluto de x_n e x_{n+1} , isto é, $|x_{n+1} - x_n|$, seja menor que um determinado dado erro ϵ , ou seja, $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

Exemplos

Exemplo 1.

Consideremos a função polinomial de grau cinco, $f(x) = x^5 - 3x + 2$. Vamos considerar quatro situações:

- (i) determinamos uma raiz aproximada da função f para o valor inicial, por exemplo, $x_1 = 0$, e usando todas as iterações aproximadas com quatro casas decimais;
- (ii) determinamos uma raiz aproximada da função f para o valor inicial $x_1 = 0$, usando todas as iterações aproximadas com seis casas decimais;
- (iii) determinamos uma raiz aproximada da função f para o valor inicial $x_1 = 2$, usando todas as iterações aproximadas com quatro casas decimais;
- (iv) determinamos uma raiz aproximada da função f agora para o valor inicial $x_1 = 2$, usando todas as iterações aproximadas com seis casas decimais.

- (i) Determinemos uma raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ para o valor inicial $x_1 = 0$, usando todas as iterações aproximadas com quatro casas decimais.

Pela fórmula de Newton-Raphson (3.2.34), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A derivada da função f é $f'(x) = 5x^4 - 3$ e $x_1 = 0$, assim, $f'(0) = -3$ e x_2 é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Logo,

$$x_2 = 0 - \frac{2}{-3}.$$

Uma vez que estamos a considerar as iterações com quatro casas decimais, então consideremos

$$x_2 = 0.6667.$$

Iterando, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

logo,

$$x_3 = 0.6667 - \frac{(0.6667)^5 - 3 \times 0.6667 + 2}{5 \times (0.6667)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_3 = 0.7321.$$

A 3ª iteração é dada por

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

logo,

$$x_4 = 0.7321 - \frac{(0.7321)^5 - 3 \times 0.7321 + 2}{5 \times (0.7321)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_4 = 0.7411.$$

A 4ª iteração é dada por

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)},$$

logo,

$$x_5 = 0.7411 - \frac{(0.7411)^5 - 3 \times 0.7411 + 2}{5 \times (0.7411)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_5 = 0.7413.$$

A 5ª iteração é dada por

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)},$$

logo,

$$x_6 = 0.7413 - \frac{(0.7413)^5 - 3 \times 0.7413 + 2}{5 \times (0.7413)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_6 = 0.7413.$$

Como $x_6 = x_5$, então, pelo critério da paragem, a raíz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ é

$$x \approx 0.7413.$$

- (ii) Determinemos uma raíz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ para o valor inicial $x_1 = 0$, usando todas as iterações aproximadas, com seis casas decimais.

Pela fórmula de Newton-Raphson (3.2.34), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A derivada da função f é $f'(x) = 5x^4 - 3$ e $x_1 = 0$, assim, $f'(0) = -3$ e x_2 é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Logo,

$$x_2 = 0 - \frac{2}{-3}.$$

Uma vez que estamos a considerar as iterações com seis casas decimais, então consideremos

$$x_2 = 0.666667.$$

Iterando, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

logo,

$$x_3 = 0.666667 - \frac{(0.666667)^5 - 3 \times 0.666667 + 2}{5 \times (0.666667)^4 - 3},$$

ou seja

$$x_3 = 0.732106.$$

A 3ª iteração é dada por

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

logo,

$$x_4 = 0.732106 - \frac{(0.732106)^5 - 3 \times 0.732106 + 2}{5 \times (0.732106)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_4 = 0.741057.$$

A 4ª iteração é dada por

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)},$$

logo,

$$x_5 = 0.741057 - \frac{(0.741057)^5 - 3 \times 0.741057 + 2}{5 \times (0.741057)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_5 = 0.741271.$$

A 5ª iteração é dada por

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)},$$

logo,

$$x_6 = 0.741271 - \frac{(0.741271)^5 - 3 \times 0.741271 + 2}{5 \times (0.741271)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_6 = 0.741271.$$

Como $x_6 = x_5$, então, pelo critério da paragem, a raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ é

$$x \approx 0.741271.$$

- (iii)** Determinemos uma raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ para o valor inicial $x_1 = 2$, usando todas as iterações aproximadas com quatro casas decimais.

Pela fórmula de Newton-Raphson (3.2.34), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A derivada da função f é $f'(x) = 5x^4 - 3$ e $x_1 = 2$, assim, x_2 é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Logo,

$$x_2 = 2 - \frac{2^5 - 6 + 2}{5 \times 2^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_2 = 1,6364.$$

Iterando, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

logo,

$$x_3 = 1,6364 - \frac{(1,6364)^5 - 3 \times 1,6364 + 2}{5 \times (1,6364)^4 - 3},$$

ou seja

$$x_3 = 1,3678.$$

A 3ª iteração é dada por

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

logo,

$$x_4 = 1,3678 - \frac{(1,3678)^5 - 3 \times 1,3678 + 2}{5 \times (1,3678)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_4 = 1,1827.$$

A 4ª iteração é dada por

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)},$$

logo,

$$x_5 = 1,1827 - \frac{(1,1827)^5 - 3 \times 1,1827 + 2}{5 \times (1,1827)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_5 = 1,0698.$$

A 5ª iteração é dada por

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)},$$

logo,

$$x_6 = 1,0698 - \frac{(1,0698)^5 - 3 \times 1,0698 + 2}{5 \times (1,0698)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_6 = 1,0157.$$

A 7ª iteração é dada por

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)},$$

logo,

$$x_7 = 1,0157 - \frac{(1,0157)^5 - 3 \times 1,0157 + 2}{5 \times (1,0157)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_7 = 1,0011.$$

A 8ª iteração é dada por

$$x_8 = x_7 - \frac{f(x_7)}{f'(x_7)},$$

logo,

$$x_8 = 1,0011 - \frac{(1,0011)^5 - 3 \times 1,0011 + 2}{5 \times (1,0011)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_8 = 1.$$

A 9ª iteração é dada por

$$x_9 = x_8 - \frac{f(x_8)}{f'(x_8)},$$

logo,

$$x_9 = 1 - \frac{(1)^5 - 3 \cdot 1 + 2}{5 \times 1^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_9 = 1.$$

Como $x_8 = x_9$, então, pelo critério da paragem, a raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ é $x \approx 1$. Verifica-se, aliás, que $x = 1$ é uma solução (exacta) da equação.

- (iv) Determinemos uma raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ para o valor inicial $x_1 = 2$, usando todas as iterações aproximadas com seis casas decimais.

Pela fórmula de Newton-Raphson (3.2.34), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A derivada da função f é $f'(x) = 5x^4 - 3$ e $x_1 = 2$, assim, x_2 é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Logo,

$$x_2 = 2 - \frac{2^5 - 6 + 2}{5 \times 2^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_2 = 1,636364.$$

Iterando, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

logo,

$$x_3 = 1,636364 - \frac{(1,636364)^5 - 3 \times 1,636364 + 2}{5 \times (1,636364)^4 - 3},$$

ou seja

$$x_3 = 1,367760.$$

A 3ª iteração é dada por

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

logo,

$$x_4 = 1,367760 - \frac{(1,367760)^5 - 3 \times 1,367760 + 2}{5 \times (1,367760)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_4 = 1,182672.$$

A 4ª iteração é dada por

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)},$$

logo,

$$x_5 = 1,182672 - \frac{(1,182672)^5 - 3 \times 1,182672 + 2}{5 \times (1,182672)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_5 = 1,069761.$$

A 5ª iteração é dada por

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)},$$

logo,

$$x_6 = 1,069761 - \frac{(1,069761)^5 - 3 \times 1,069761 + 2}{5 \times (1,069761)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_6 = 1,015732.$$

A 6ª iteração é dada por

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)},$$

logo,

$$x_7 = 1,015732 - \frac{(1,015732)^5 - 3 \times 1,015732 + 2}{5 \times (1,015732)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_7 = 1,001099.$$

A 7ª iteração é dada por

$$x_8 = x_7 - \frac{f(x_7)}{f'(x_7)},$$

logo,

$$x_8 = 1,001099 - \frac{(1,001099)^5 - 3 \times 1,001099 + 2}{5 \times (1,001099)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_8 = 1,000006.$$

A 8ª iteração é dada por

$$x_9 = x_8 - \frac{f(x_8)}{f'(x_8)},$$

logo,

$$x_9 = 1,000006 - \frac{(1,000006)^5 - 3 \times 1,000006 + 2}{5(1,000006)^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_9 = 1.$$

A 9ª iteração é dada por

$$x_{10} = x_9 - \frac{f(x_9)}{f'(x_9)},$$

logo,

$$x_9 = 1 - \frac{1^5 - 3 \cdot 1 + 2}{5 \cdot 1^4 - 3},$$

ou seja,

$$x_{10} = 1.$$

Como $x_9 = x_{10}$, então, pelo critério da paragem, a raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ é $x \approx 1$. Verifica-se, aliás, que $x = 1$ é uma solução (exacta) da equação.

Exemplo 2.

Vejamos agora outro exemplo de cálculo de valores aproximados para \sqrt{N} , sendo N um número positivo. Este exemplo está relacionado com o cálculo do zero de uma função quadrática. De facto, determinar a raiz quadrada de N é equivalente determinar a raiz (positiva) da função $f(x) = x^2 - N$.

Agora, aplicando o método de Newton-Raphson (3.2.34), começaremos por considerar um valor positivo, por exemplo, x_1 .

Assim, teremos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A derivada da função f é $f'(x) = 2x$, assim, x_2 é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

logo,

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - N}{2x_1},$$

ou seja,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{N}{x_1} \right).$$

Iterando, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

logo

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - N}{2x_2},$$

ou seja

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{N}{x_2} \right).$$

A 3ª iteração é dada por

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

logo,

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - N}{2x_3},$$

ou seja,

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{N}{x_3} \right).$$

A 4ª iteração é dada por

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)},$$

logo,

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - N}{2x_4},$$

ou seja,

$$x_5 = \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{N}{x_4} \right).$$

A n-ésima n iteração é dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

logo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n},$$

ou seja,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right).$$

Método da Bissecção

O método da Bissecção é um método numérico que serve para determinar as raízes aproximadas de equações não lineares. Aplica-se a funções contínuas em intervalos $[a, b]$, onde a, b são números reais.

Recordamos o Teorema de Bolzano, já enunciado na secção 3.1, segundo o qual, dada f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz de f no intervalo $[a, b]$.

O método da Bissecção consiste no seguinte.

Seja m o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então:

- Se $f(a)f(m) < 0$, ou seja, $f(a)$ e $f(m)$ têm sinais opostos, então pelo teorema de Bolzano, o novo intervalo contendo a raiz de f é $[a, m]$;
- Se $f(b)f(m) < 0$, ou seja, $f(b)$ e $f(m)$ têm sinais opostos, então o novo intervalo contendo a raiz é $[m, b]$.

Notemos que, em cada passo do algoritmo, ou seja, em cada iteração, consideramos x_k como sendo o ponto médio do intervalo em questão. Repete-se o processo até que se atenda às condições/critérios de paragem.

Critérios de Paragem

O algoritmo anteriormente descrito deve ser parado quando ocorre uma das situações seguintes:

1. Quando o número de iterações é igual a um dado valor pré-definido. Para determinar o número de iterações procedemos da seguinte forma: definam-se $a_k = \frac{a}{2^k}$, $b_k = \frac{b}{2^k}$, onde a, b são os extremos do intervalo $[a, b]$. Para determinar o número de iterações, devemos obter o valor de k tal que

$$b_k - a_k < \epsilon,$$

sendo ϵ um valor dado (erro), ou seja,

$$\frac{b-a}{2^k} < \epsilon \iff 2^k > \frac{b-a}{\epsilon},$$

ou equivalentemente (aplicando logaritmo aos dois membros da desigualdade),

$$k \log(2) > \log(b-a) - \log(\epsilon).$$

Logo,

$$k > \frac{\log(b-a) - \log(\epsilon)}{\log(2)}, \tag{3.2.35}$$

onde $k \in \mathbb{N}$, e k indica o número de iterações a considerar. Notemos que se k for um número decimal, deve-se arredondar sempre por excesso para um número natural.

2. Quando a diferença em valor absoluto de x_k e x_{k-1} seja menor que um determinado dado erro ϵ , ou seja, quando $|x_{k-1} - x_k| < \epsilon$.
3. Quando o valor absoluto de $f(x_k)$ seja menor que um determinado erro dado ϵ , ou seja, $|f(x_k)| < \epsilon$.

Exemplo

Determinemos a raiz aproximada da função $f(x) = x^5 - 3x + 2$ no intervalo $[0; 0,9]$, usando todas as iterações aproximadas com quatro casas decimais aplicando o método da Bisseção, dado que $\epsilon = 0,001$.

Começemos por calcular o número de iterações aplicando a fórmula (3.2.35), ou seja, $k > \frac{\log(b-a) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$. Tendo em conta os valores dados, temos

$$k > \frac{\log(0,9 - 0) - \log(0,001)}{\log(2)},$$

ou seja $k > 9,81$. Logo, arredondamos para $k = 10$. Assim, conclui-se que teremos dez iterações.

A resolução é apresentada na tabela seguinte.

k	a	b	f(a)	f(b)	$x_k = \frac{a+b}{2}$	$f(x_k)$
1	0	0,9	2	-0,1095	0,45	0,6685
2	0,45	0,9	0,6685	-0,1095	0,675	0,1151
3	0,675	0,9	0,1151	-0,1095	0,7875	-0,0596
4	0,675	0,7875	0,1151	-0,0596	0,7313	0,0153
5	0,7313	0,7875	0,0153	-0,0596	0,7594	-0,0256
6	0,7313	0,7594	0,0153	-0,0256	0,7454	-0,0060
7	0,7313	0,7454	0,0153	-0,0061	0,7384	0,0044
8	0,7384	0,7454	0,0043	-0,0061	0,7419	-0,0009
9	0,7384	0,7419	0,0043	-0,0009	0,7402	0,0016
10	0,7402	0,7419	0,0016	0,0009	0,7411	0,0003

Como o critério 1 foi verificado (aliás, também o critério 3 se verificou, ou seja, $|f(x_{10})| < 0,001$), então a raiz aproximada de $f(x) = x^5 - 3x + 2$ é

$$x \approx 0,7411.$$

Capítulo 4

O uso da álgebra de polinómios para introduzir derivadas

Este capítulo é baseado nos artigos [11, 12]. Os principais resultados são dados na secção 4.2, onde se usa o chamado *método do ponto duplo* [11] para deduzir a equação da recta tangente a uma curva polinomial, bem como na secção 4.3, onde se introduz o conceito de derivada usando ferramentas algébricas relacionadas com os polinómios, nomeadamente a divisão euclidiana de polinómios.

Tal como fez o autor de [12], com o objectivo de introduzir o conceito de tangente, começamos por rever, na secção 4.1, a função quadrática, em particular, a sua análise do ponto de vista geométrico no que se refere aos pontos de intersecção com o eixo Ox , ou seja, os seus zeros.

Na secção 4.2 abordamos o tema de tangentes a curvas polinomiais, seguindo o método descrito em [12]. O principal resultado desta secção é o Teorema 4.2.1, que estabelece o declive da recta tangente ao gráfico de uma curva polinomial $\mathcal{C} : y = P(x)$ num ponto de abscissa $x = a$ como sendo o polinómio $q(a)$, onde $q(x)$ é o polinómio que resulta da divisão de $P(x) - P(a)$ por $x - a$. Com estes resultados, baseados em ferramentas algébricas de divisão de polinómios, define-se, na secção 4.3, a derivada de um polinómio em $x = a$, e estudam-se algumas propriedades das derivadas. Terminamos o capítulo apresentando algumas observações sobre o método das tangentes a curvas polinomiais anteriormente descrito aplicado a funções não polinomiais.

4.1 A noção de tangente a uma curva

Para introduzirmos a noção de tangente a uma curva começamos por recordar a função quadrática, que colocaremos na forma canónica, com coeficiente do termo em x^2 igual a 1,

ou seja, consideramos a função quadrática mónica (ver [12]).

Proposição 4.1.1 *Toda a função quadrática mónica pode ser escrita na forma*

$$f(x) = (x - b)^2 + c. \quad (4.1.1)$$

Demonstração: Consideremos a função $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, com $A = 1$.

Pela técnica de completar os quadrados, obtemos $f(x) = x^2 + \frac{2B}{2}x + \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C$, ou seja,

$$f(x) = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Assim, obtemos

$$f(x) = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{4C - B^2}{4},$$

e podemos escrever f na forma (4.1.1), com $b = -\frac{B}{2}$, $c = \frac{4C - B^2}{4}$. □

Tendo em conta o valor de c , da expressão $f(x) = (x - b)^2 + c$, analisaremos três condições seguintes.

• **Condição 1:** $c < 0$.

O gráfico de f intersecta o eixo x em dois pontos distintos, e teremos zeros distintos, ou seja, $x_1 \neq x_2$:

$$(x - b)^2 + c = 0,$$

logo,

$$x_1 = b + \sqrt{ci} \text{ ou } x_2 = b - \sqrt{ci}.$$

• **Condição 2:** $c = 0$.

Os dois pontos de interseção coincidem, e teremos zero duplo ou de multiplicidade dois da equação quadrática:

$$(x - b)^2 = 0,$$

logo,

$$x = b.$$

• **Condição 3:** $c > 0$.

O gráfico não intersecta o eixo $0x$, ou seja, a equação $f(x) = 0$ não tem nenhuma solução em \mathbb{R} ,

$$(x - b)^2 + c = 0,$$

logo,

$$x_1 = b + \sqrt{ci} \text{ ou } x_2 = b - \sqrt{ci}.$$

Vejamos as respectivas representações gráficas.

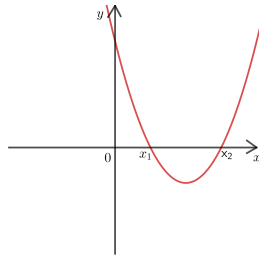


Figura 4.1: Representação do gráfico que intersecta o eixo $0x$ em dois pontos distintos ($x_1 \neq x_2$).

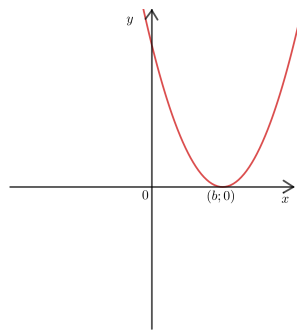


Figura 4.2: Representação do gráfico que intersecta o eixo $0x$ num ponto ($x_1 = x_2$).

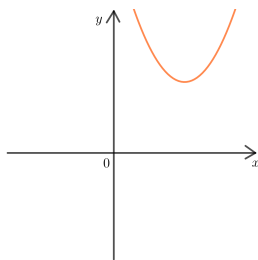


Figura 4.3: Representação de gráfico que não intersecta o eixo $0x$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{C}$).

Nas três condições descritas anteriormente, destacamos a segunda condição, ou seja, o caso em que $c = 0$. Neste caso, o gráfico da função $f(x) = (x - b)^2$ intersecta o eixo $0x$ num único ponto, $(b, 0)$, o que nos vai levar a recordar o conceito de tangente. De facto, neste caso o eixo $0x$ é tangente à parábola descrita por $f(x) = (x - b)^2$.

A situação descrita na segunda situação trata-se, então, de um exemplo bem conhecido dos currículos do ensino secundário para uma primeira abordagem da ideia de tangente.

De forma informal, seguindo [12], podemos dizer que uma tangente a uma curva no ponto P_1 é uma recta que intersecta a curva em P_1 de tal maneira que qualquer pequena rotação da recta originará dois pontos distintos de intersecção.

As figuras abaixo mostram situações típicas como a tangente toca a curva em apenas um ponto P , que no entanto, se a tangente for movida ligeiramente vai intersectar a curva em dois pontos. Assim, o único ponto de tangência, portanto, é realmente responsável por dois pontos que se tornam claramente visíveis se a tangente for movida adequadamente. Por isso, seguindo [12], chamamos a esse ponto de intersecção de tangência de *ponto duplo*.

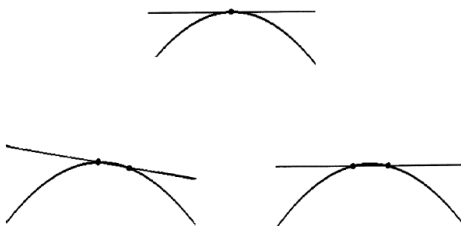


Figura 4.4: 2: Representação que ilustra a definição de tangente.

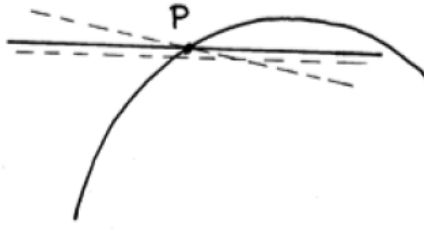


Figura 4.5: 2: Representação que ilustra a ideia de não tangente.

4.2 Tangentes a curvas polinomiais

4.2.1 problema da tangente para a parábola $y = x^2$

Consideremos agora o problema de determinar a recta tangente à parábola descrita por $f(x) = x^2$. O seu gráfico é dado pela curva $\mathcal{C} : y = x^2$. Seja $(a; a^2)$ um ponto arbitrário da curva \mathcal{C} . Através desse ponto temos a equação da recta tangente,

$$y - a^2 = m(x - a), \quad (4.2.2)$$

onde m é a inclinação da recta. As coordenadas dos pontos de intersecção da recta (4.2.2) com a curva \mathcal{C} são as soluções da equação

$$x^2 - a^2 - m(x - a) = 0. \quad (4.2.3)$$

Transformando $x^2 - a^2$ em produto, obtemos

$$(x + a)(x - a) - m(x - a) = 0,$$

ou seja,

$$(x + a - m)(x - a) = 0. \quad (4.2.4)$$

De acordo com a discussão prévia sobre tangentes, a recta será tangente à curva precisamente quando os dois pontos de intersecção coincidirem, ou seja, quando $x = a$ for zero duplo da equação (4.2.4), isto é,

$$x = m - a \quad e \quad x = a.$$

Logo, podemos concluir que

$$m - a = a,$$

ou seja,

$$m = 2a.$$

Assim, conclui-se que a recta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(a; a^2)$ tem o declive $2a$, ou seja, a sua equação é da forma

$$y = a^2 + 2a(x - a).$$

Exemplo

Determinemos a equação da recta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(-3, 9)$.

Temos

$$a = -3.$$

Uma vez que $m = 2a$, então

$$m = -6.$$

Assim, a equação da recta tangente a parábola $y = x^2$ no ponto $(-3, 9)$ é $y = 9 - 6(x + 3)$, ou seja

$$y = -6x - 9.$$

4.2.2 O problema da tangente para uma curva polinomial geral

Vejam agora como determinar rectas tangentes para qualquer curva polinomial. Teremos de generalizar o método usado para a parábola para uma curva que é o gráfico de um polinómio arbitrário.

Para darmos a sequência é importante lembrarmos que um polinómio de grau n é uma função, P , descrita por uma expressão algébrica na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (4.2.5)$$

É importante ressaltar que se $n = 1$ na expressão (4.2.5), então teremos uma função afim, cujo gráfico é uma recta.

A solução do problema da tangente para qualquer polinómio é dado no teorema seguinte (ver [11, 12]).

Teorema 4.2.1 *Seja P um polinómio de grau $n \geq 1$ e seja $(a; P(a))$ um ponto do gráfico de P . Então, existe uma única recta que passa em $(a; P(a))$ e com declive dado por $m = q(a)$, onde q é o polinómio de grau $n - 1$ na factorização $P(x) - P(a) = q(x)(x - a)$, ou seja, o declive da recta tangente ao gráfico de P é $m = q(a)$, onde $q(x)$ é o polinómio que resulta da divisão de $P(x) - P(a)$ por $x - a$.*

Demonstração: Seja P um polinómio de grau n , com $n \geq 1$.

Consideremos a curva $\mathcal{C} : y = P(x)$, e seja $(a, P(a))$ um ponto arbitrário de \mathcal{C} . Consideremos a equação da recta tangente a \mathcal{C} no ponto $(a, P(a))$,

$$y = P(a) + m(x - a). \quad (4.2.6)$$

Os pontos de intersecção da recta com a curva são dadas pelas soluções da equação

$$P(x) - P(a) = m(x - a). \quad (4.2.7)$$

Uma vez que $x = a$ é um zero do polinómio $P(x) - P(a)$, com grau $(P(x) - P(a)) = n$, então, pelo Corolário 2.3.1.1, temos a factorização de polinómios

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a), \quad (4.2.8)$$

onde q é um polinómio de grau $n - 1$.

Igualando (4.2.7) e (4.2.8), podemos escrever

$$m(x - a) = q(x)(x - a) \iff m(x - a) - q(x)(x - a) = 0.$$

Factorizando, obtemos

$$(x - a)(m - q(x)) = 0. \quad (4.2.9)$$

De acordo com a discussão precedente, a recta é tangente à curva \mathcal{C} precisamente quando os dois pontos coincidem, ou seja, quando a equação (4.2.9) tiver o zero duplo $x = a$, ou seja,

$$x = a \quad \text{e} \quad m = q(x). \quad (4.2.10)$$

Logo, temos

$$m = q(a).$$

□

Observação 4.2.1 Naturalmente, tal como em [12], chamaremos recta tangente ao gráfico de P no ponto $(a, P(a))$ à recta definida por

$$y = P(a) + q(a)(x - a). \quad (4.2.11)$$

Exemplos

Exemplo 1. Determinemos a equação da recta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Neste caso $P(x) = x^2$. Pelo teorema 4.2.1, m é $q(a)$, onde $q(x)$ é o polinómio na factorização

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a),$$

onde $a = 1$. Uma vez que $P(1) = 1$, então

$$P(x) - 1 = q(x)(x - 1),$$

temos,

$$x^2 - 1 = q(x)(x - 1),$$

ou seja,

$$q(x) = x + 1.$$

Logo,

$$q(1) = 2.$$

Concluimos que a equação da recta tangente á parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ é

$$y = 2x - 1.$$

Exemplo 2. Determinemos a equação da recta tangente à parábola $y = 2 - 2x^2$ no ponto $P(-1, 0)$.

Pelo teorema 4.2.1, m é $q(a)$, onde $q(x)$ é o polinómio na factorização

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a),$$

onde $a = -1$.

Uma vez que $P(-1) = 0$, então

$$P(x) = q(x)(x + 1),$$

logo, temos

$$2 - 2x^2 = q(x)(x + 1) \iff 2(1 - x)(x + 1) = q(x)(x + 1),$$

ou seja,

$$q(x) = 2(1 - x).$$

Logo,

$$q(-1) = 4.$$

Concluimos que a equação da recta tangente à parábola $y = 2 - 2x^2$ no ponto $P(-1, 0)$ é escrita na forma

$$y - 0 = 4(x + 1),$$

logo,

$$y = 4x + 4.$$

4.3 A derivada de um polinómio num ponto

Recordemos que pelo teorema 4.2.1, o declive da recta tangente é dada por $m = q(a)$. De acordo com [11, 12], este valor pode ser chamado também de derivada de P no ponto de abcissa $x = a$, e é denotado por $D(P)(a)$, ou também por $P'(a)$.

Tendo em conta o teorema 4.2.1, conclui-se então que o factor q , cujo valor $q(a) = D(P)(a)$ é a derivada em a , pode ser calculado usando o algoritmo de divisão de polinómios.

Vejamos então como calcular a derivada de um polinómio de grau n .

A derivada de $P(x) = cx^n$

Seja $P(x) = cx^n$, um polinómio de grau n , com $n \geq 1$ e $c \neq 0$.

Pelo teorema 4.2.1, temos que

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a),$$

ou seja,

$$cx^n - ca^n = q(x)(x - a).$$

Pela divisão euclidiana, obtemos que

$$q(x) = c(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

e obtemos

$$q(a) = cna^{n-1}.$$

Então,

$$D(cx^n)(a) = q(a) = cna^{n-1}. \quad (4.3.12)$$

Em particular, se P tiver grau n , então $D(P)$ é um polinómio de grau $n - 1$.

Como um polinómio é uma soma de funções de potência, podemos escrever a derivada de qualquer polinómio, aplicando a regra de derivada da soma, tal como explicado na proposição seguinte.

Proposição 4.3.1 Se P e Q são polinómios, então $(P + Q)'(a) = P'(a) + Q'(a)$.

Demonstração: Pela equação (4.2.8), sabemos que

$$P(x) - P(a) = q_1(x)(x - a) \quad e \quad Q(x) - Q(a) = q_2(x)(x - a). \quad (4.3.13)$$

Assim, teremos que

$$(P + Q)(x) - (P + Q)(a) = q(x)(x - a) \iff P(x) + Q(x) - P(a) - Q(a) = q(x)(x - a),$$

ou seja,

$$(P(x) - P(a)) + (Q(x) - Q(a)) = q(x)(x - a).$$

Usando (4.3.13), obtemos

$$q_1(x)(x - a) + q_2(x)(x - a) = q(x)(x - a).$$

Logo,

$$q_1(x) + q_2(x) = q(x),$$

donde,

$$q_1(a) + q_2(a) = q(a).$$

Tendo em conta a equação (4.3.12), temos que $q_1(a) = D(P(a))$ e $q_2(a) = D(Q(a))$, logo, conclui-se que

$$D(P(a)) + D(Q(a)) = D(P + Q)(a),$$

ou seja,

$$(P + Q)'(a) = P'(a) + Q'(a).$$

□

4.3.1 A relação com o método clássico

Vejamos agora o método clássico para introduzir/calcular a recta tangente a uma curva $\mathcal{C} : y = f(x)$ num determinado ponto $(a, f(a))$. Tal método é baseado em rectas secantes, que passam através deste ponto e de outro ponto distinto $(x, P(x))$ na curva, e argumentando que a tangente surge como limite dessa secante, com x a tender para "a", isto é, $x \rightarrow a$.

Tendo em conta a figura abaixo, o declive da recta secante é da forma

$$m(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4.3.14)$$

Assim, será necessário determinar o limite de $m(x)$.

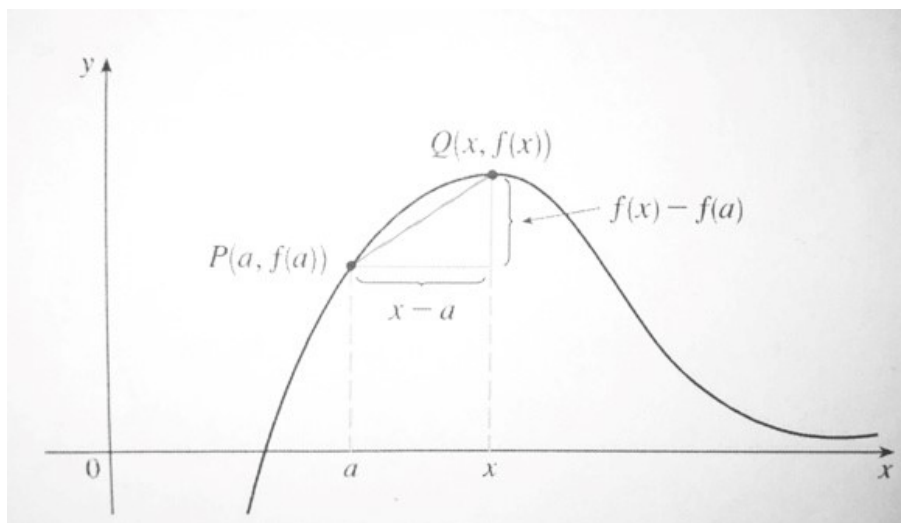


Figura 4.6: Representação geométrica da recta secante

Como $x \neq a$ e $x \rightarrow a$, então não podemos considerar $x = a$ na expressão (4.3.14), senão obteríamos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Procedendo como anteriormente em (4.2.7) e (4.2.8), obtemos

$$f(x) - f(a) = m(x - a), \quad f(x) - f(a) = q(x)(x - a).$$

Logo,

$$m(x - a) = q(x)(x - a).$$

Assim, temos

$$m(x) = \frac{q(x)(x - a)}{x - a}, \quad \text{para } x \neq a,$$

ou seja,

$$m(x) = q(x), \quad \text{para } x \neq a. \tag{4.3.15}$$

Aplicando limite na expressão (4.3.15), temos

$$\lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a). \tag{4.3.16}$$

Fazendo uma comparação entre o método abordado anteriormente na sub-secção 4.2.2 e o chamado método clássico, vemos que as técnicas algébricas (factorização) que são necessárias são exactamente as mesmas. No entanto, é importante salientar que para além do método clássico aplicar as mesmas ferramentas algébricas, introduz a nova ideia de limite, em que ocorre $0/0$. Ora será necessário resolver esta expressão *sem sentido*, assumindo que $x \neq a$ e devem-se usar algumas técnicas sobre limites para concluir que não há problema em resolver para $x = a$. Ainda, podemos acrescentar dizendo que o

método clássico é mais geral comparativamente ao método da subsecção anterior, visto que o método clássico pode ser aplicado também a funções não polinomiais, ao passo que o anterior é aplicado somente a funções polinomiais.

4.3.2 Breves observações sobre o estudo da função não polinomial

Começamos por destacar que as ferramentas algébricas básicas elementares que usámos no caso de polinómios poderão ser adequadamente estendidas para funções mais gerais. É claro que a ideia do ponto duplo atinge os seus limites quando saímos do domínio das funções algébricas.

Embora a ideia de definir tangentes através de pontos duplos ainda esteja correcta, tentar identificá-los procurando zeros duplos das equações relevantes leva-nos a deparar com o maior obstáculo que é o facto de que, em geral, não existe factorização adequada disponível.

Por exemplo, analisemos a seguinte expressão:

$$2^x - 2^0 = q(x)(x - 0).$$

Tendo em conta a expressão acima, temos para $x \neq 0$, que:

$$2^x - 2^0 = q(x)(x - 0) \iff 2^x - 1 = q(x)x \iff q(x) = \frac{2^x - 1}{x}.$$

Neste caso (ver [13]), temos $q(0) = \ln(2)$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} q(x) = q(0).$$

Assim podemos escrever (ver [13])

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2). \quad (4.3.17)$$

Devemos salientar que, para que determinássemos o valor do limite (4.3.17) é necessário aplicar a teoria de limites (limite da função exponencial), [13]. Essa teoria é vasta, e não faz parte do nosso objecto de estudo. Enfatizamos novamente a ideia de que a justificação de limites do tipo (4.3.17) para funções não polinomiais, ou seja, o chamado método clássico, exige ferramentas e técnicas mais abrangentes do que a técnica da factorização para funções polinomiais, esta baseada apenas na divisão euclidiana de polinómios.

Capítulo 5

Operadores às diferenças divididas

Neste capítulo estudamos operadores às diferenças. Estamos interessados nos operadores às diferenças divididas que imitem a propriedade da derivada de polinómios, nomeadamente, “A derivada de um polinómio de grau n é igual a um polinómio de grau $n - 1$ ”. Recordamos que a forma genérica dos operadores às diferenças divididas, que daqui em diante denotamos por \mathbb{D} , é

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)},$$

onde y_1, y_2 são funções/expressões que dependem de x .

Estamos interessados em dar resposta à seguinte questão:

(Q): Qual é o operador às diferenças divididas mais geral, \mathbb{D} , com a propriedade

$$\mathbb{D}(\text{polinómio de grau } n) = \text{polinómio de grau } n - 1 ?$$

O primeiro resultado principal deste capítulo é a forma genérica do operador \mathbb{D} que mantém a propriedade acima indicada: mostramos, na secção 5.1, que \mathbb{D} é dado por

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}},$$

onde p é um polinómio de grau um e r um polinómio de grau menor ou igual a dois (cf. Teorema 5.1.1). Os coeficientes de p, r são os coeficientes de uma cónica, relacionada com o operador.

Estudaremos a classificação dos operadores (existem quatro casos, em que o operador se pode escrever de determinada forma canónica), e faremos a respectiva interpretação geométrica, ou seja, apresentamos a respectiva ligação a uma dada cónica (cf. Secção 5.2).

Por último, na secção 5.3, apresentamos algumas propriedades básicas dos operadores às diferenças divididas, nomeadamente, a regra do produto e do quociente.

Devemos referir que a resposta à questão (Q), bem como a interpretação geométrica, foram apresentadas no trabalho pioneiro de Magnus [6]. Neste capítulo apresentamos esses resultados de forma mais compreensiva, isto é, com maior detalhe.

5.1 O operador geral às diferenças divididas

Seja f uma função real de variável real ou complexa. O operador às diferenças divididas, \mathbb{D} , é definido por

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)}, \quad (5.1.1)$$

para algumas funções y_1, y_2 . Consideremos o operador \mathbb{D} com a seguinte propriedade fundamental:

\mathbb{D} dá-nos um polinómio de grau $n - 1$ quando aplicado a um polinómio de grau n . (5.1.2)

Nesta etapa, y_2 e y_1 são funções desconhecidas. Tendo em conta o operador definido em (5.1.1), como obter y_1 e y_2 ?

Para obter y_1 e y_2 , vamos aplicar o operador (5.1.1) aos polinómios do segundo e terceiro grau, respectivamente.

Aplicando \mathbb{D} a $f(x) = x^2$, obtemos

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{(y_2(x))^2 - (y_1(x))^2}{y_2(x) - y_1(x)},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{(y_2(x) - y_1(x))(y_2(x) + y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)}.$$

Logo,

$$\mathbb{D}f(x) = y_2(x) + y_1(x),$$

que, de acordo com a propriedade (5.1.2), é um polinómio de grau 1.

Aplicando \mathbb{D} a $f(x) = x^3$, obtemos

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{(y_2(x))^3 - (y_1(x))^3}{y_2(x) - y_1(x)},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{(y_2(x) - y_1(x)) ((y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2)}{y_2(x) - y_1(x)}.$$

Logo,

$$\mathbb{D}f(x) = (y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2.$$

De acordo com a propriedade (5.1.2), $(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2$ é um polinómio de grau 2. Notemos que dizer que o polinómio $(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2$ é de grau 2, é equivalente a dizer que $gr(y_1(x)y_2(x)) \leq 2$. Ora vejamos:

$$(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2 = [(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2] - y_1(x)y_2(x),$$

isto é,

$$(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2 = (y_1(x) + y_2(x))^2 - y_1(x)y_2(x),$$

ou seja,

$$y_1(x)y_2(x) = (y_1(x) + y_2(x))^2 - [(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2],$$

Uma vez que $(y_1(x))^2 + y_1(x)y_2(x) + (y_2(x))^2$ é um polinómio de grau 2 e $(y_1(x) + y_2(x))^2$ é um polinómio de grau 2, e como a diferença entre dois polinómios de grau 2 é igual a um polinómio de grau menor ou igual a 2, então conclui-se que $y_1(x)y_2(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a 2.

Assim, obtivemos as duas condições sobre y_1 e y_2 :

$$y_1(x) + y_2(x) = \text{polinómio de grau } 1, \quad (5.1.3)$$

$$y_1(x)y_2(x) = \text{polinómio de grau } \leq 2. \quad (5.1.4)$$

As condições (5.1.3) e (5.1.4) definem y_1 e y_2 como as duas raízes de uma equação quadrática em y . De facto, lembremo-nos de que, se y_1 e y_2 são as raízes de uma equação quadrática em y , por exemplo,

$$Ay^2 + By + C = 0, \quad (5.1.5)$$

então temos as fórmulas conhecidas (cf. (3.1.4)),

$$y_1 + y_2 = -B/A, \quad y_1y_2 = C/A. \quad (5.1.6)$$

Agora, de (5.1.6) e tendo em atenção que $y_1 + y_2 =$ polinómio de grau 1 e $y_1y_2 =$ polinómio de grau menor ou igual que 2, podemos escrever

$$-B/A = \pi_1, \quad C/A = \pi_2,$$

onde

$$\pi_1(x) = \pi_{1,1}x + \pi_{1,0}, \quad \pi_2(x) = \pi_{2,2}x^2 + \pi_{2,1}x + \pi_{2,0}.$$

Substituindo π_1 e π_2 em (5.1.5), obtemos

$$Ay^2 - A(\pi_{1,1}x + \pi_{1,0})y + A(\pi_{2,2}x^2 + \pi_{2,1}x + \pi_{2,0}) = 0,$$

ou seja,

$$Ay^2 - A\pi_{1,1}xy - A\pi_{1,0}y + A\pi_{2,2}x^2 + A\pi_{2,1}x + A\pi_{2,0} = 0.$$

Fazendo

$$A = a, \quad A\pi_{1,1} = 2b, \quad -A\pi_{1,0} = 2d, \quad A\pi_{2,2} = c, \quad A\pi_{2,1} = 2e, \quad A\pi_{2,0} = f,$$

temos uma cónica, que passaremos a escrever na forma canónica

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0, \quad a \neq 0. \quad (5.1.7)$$

O primeiro resultado principal desta secção é dado pelo teorema seguinte (ver [6]).

Teorema 5.1.1 *O operador às diferenças divididas, \mathbb{D} , com a propriedade de obter um polinómio de grau $n - 1$ quando aplicado a um polinómio de grau n , é dado por*

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)},$$

onde y_1 e y_2 são as raízes da cónica (5.1.7), $ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0$. Portanto,

$$y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}, \quad y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}, \quad (5.1.8)$$

com

$$p(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \quad r(x) = \frac{(b^2 - ac)}{a^2}x^2 + \frac{2(bd - ae)}{a^2}x + \frac{d^2 - af}{a^2}. \quad (5.1.9)$$

Demonstração: Pela equação (5.1.7), escrita na forma

$$ay^2 + (2bx + 2d)y + (cx^2 + 2ex + f) = 0,$$

podemos aplicar a fórmula resolvente na variável y , obtendo

$$y_1(x) = \frac{-2bx - 2d - 2\sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(bd - ae)x + d^2 - af}}{2a}$$

ou

$$y_2(x) = \frac{-2bx - 2d + 2\sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(bd - ae)x + d^2 - af}}{2a},$$

ou seja,

$$y_1(x) = -\frac{bx + d}{a} - \frac{\sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(bd - ae)x + d^2 - af}}{a}$$

ou

$$y_2(x) = -\frac{bx + d}{a} + \frac{\sqrt{(b^2 - ac)x^2 + 2(bd - ae)x + d^2 - af}}{a}.$$

Assim, obtemos

$$y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}, \quad y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)},$$

onde, p e r são dados por (5.1.9). □

Observação 5.1.1 A forma genérica do operador \mathbb{D} é, então,

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}}. \quad (5.1.10)$$

Observação 5.1.2 De (5.1.8), $y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}$, $y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}$, obtemos

$$y_1(x) + y_2(x) = 2p(x), \quad (5.1.11)$$

$$\frac{(y_2(x) - y_1(x))^2}{4} = r(x). \quad (5.1.12)$$

Estas igualdades serão muito úteis para cálculos mais adiante.

5.2 Classificação dos operadores

Consideremos a cônica (5.1.7), $ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0$. Definam-se

$$\lambda = b^2 - ac, \quad \tau = \frac{(b^2 - ac)(d^2 - af) - (bd - ae)^2}{a}. \quad (5.2.13)$$

Se $\lambda \neq 0$, então o polinómio r dado em (5.1.9) pode escrever-se na forma seguinte:

$$r(x) = \frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}. \quad (5.2.14)$$

De facto, aplicando a técnica de completar os quadrados em r dado por (5.1.9),

$$r(x) = \frac{(b^2 - ac)}{a^2} x^2 + \frac{2(bd - ae)}{a^2} x + \frac{d^2 - af}{a^2},$$

obtemos

$$r(x) = \frac{b^2 - ac}{a^2} \left(x^2 + 2 \left(\frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right) x + \left(\frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right)^2 + \frac{d^2 - af}{b^2 - ac} - \left(\frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right)^2 \right),$$

ou seja,

$$r(x) = \frac{b^2 - ac}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right)^2 + \frac{b^2 - ac}{a^2} \left[\frac{d^2 - af}{b^2 - ac} - \left(\frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right)^2 \right].$$

Consequentemente, obtemos

$$r(x) = \frac{b^2 - ac}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{b^2 - ac} \right)^2 + \frac{[(d^2 - af)(b^2 - ac) - (bd - ae)^2] / a}{a(b^2 - ac)},$$

ou seja, obtemos r dado por (5.2.14).

A classificação de operadores é feita tendo em conta os parâmetros λ e τ definidos em (5.2.13) (ver [6, 15]).

5.2.1 Caso I: $\lambda = \tau = 0$ em (5.2.13)

Como $\lambda = \tau = 0$, então, de (5.1.9), obtemos

$$p(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \quad r(x) = \frac{d^2 - af}{a^2}. \quad (5.2.15)$$

Recordando que $y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}$, $y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}$, então

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} \\ y_2(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a}, \end{cases}$$

isto é, temos

$$\begin{cases} y_1(x) = mx + b_1 \\ y_2(x) = mx + b_2, \end{cases}$$

onde

$$m = -\frac{b}{a}, \quad b_1 = -\frac{d}{a} - \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a}, \quad b_2 = -\frac{d}{a} + \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a}.$$

Proposição 5.2.1 *No caso I, o operador às diferenças divididas pode escrever-se na forma canónica $\mathbb{D} = \Delta_w$, onde*

$$\Delta_w f(x) = \frac{f(x+w) - f(x)}{w}, \quad w \neq 0. \quad (5.2.16)$$

Demonstração: Podemos considerar

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} = x + w \quad (5.2.17)$$

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} = x \quad (5.2.18)$$

Igualando os coeficientes das variáveis com o mesmo grau, obtemos

$$-\frac{b}{a} = 1, \quad (5.2.19)$$

$$-\frac{d}{a} + \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} = w, \quad (5.2.20)$$

$$-\frac{d}{a} - \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} = 0. \quad (5.2.21)$$

De (5.2.19) obtemos

$$b = -a. \quad (5.2.22)$$

De

$$\lambda = b^2 - ac, \quad b = -a,$$

temos, dado que $\lambda = 0$,

$$b^2 - ac = 0, \quad b = -a,$$

logo,

$$c = a. \tag{5.2.23}$$

Somando (5.2.20) e (5.2.21), obtemos $-2\frac{d}{a} = w$, logo,

$$d = -\frac{aw}{2}. \tag{5.2.24}$$

De

$$\tau = \frac{(b^2 - ac)(d^2 - af) - (bd - ae)^2}{a} = 0, \quad \lambda = 0,$$

temos $bd - ae = 0$. Assim, usando b e d obtidos anteriormente, obtemos $(-a)\left(-\frac{aw}{2}\right) = ae$, logo,

$$e = \frac{aw}{2}. \tag{5.2.25}$$

De (5.2.21), obtemos

$$\sqrt{d^2 - af} = -d \Rightarrow d^2 - af = d^2,$$

portanto,

$$f = 0. \tag{5.2.26}$$

Ficam assim determinadas as constantes a, b, c, d, e, f de modo a que o operador \mathbb{D} se escreva na forma (5.2.16). □

Corolário 5.2.0.1 *O operador Δ_w pode ser escrito na forma (5.1.10),*

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}},$$

onde

$$p(x) = x + \frac{w}{2}, \quad r(x) = \frac{w^2}{4}.$$

O operador Δ_w está associado à cónica dada por

$$\mathcal{C} : ay^2 - 2axy + ax^2 - awy + awx = 0,$$

ou seja, duas rectas paralelas

$$y = x, \quad y = x + w.$$

Demonstração: Para obtermos p e r basta usar em (5.2.15) os valores de a, b, c, d, e, f , obtidos anteriormente.

Além disso, obtemos a cónica dada por

$$ay^2 - 2axy + ax^2 - awy + awx = 0.$$

Sendo $a \neq 0$, temos $(y - x)^2 - w(y - x) = 0$, ou seja,

$$(y - x)(y - x - w) = 0,$$

Assim, temos rectas paralelas

$$y = x, \quad y = x + w.$$

□

Observação 5.2.1 *O operador (5.2.16) é usualmente chamado operador de Hahn (ver [8]).*

5.2.2 Caso II: $\lambda \neq 0$ e $\tau = 0$ em (5.2.13)

Como $\lambda \neq 0$ e $\tau = 0$, então temos, de (5.2.14),

$$p(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \quad r(x) = \frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right)^2. \quad (5.2.27)$$

Recordando que $y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}$, $y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}$, então temos

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right) \\ y_2(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right) \end{cases}$$

isto é, temos

$$\begin{cases} y_1(x) = m_1x + b_1 \\ y_2(x) = m_2x + b_2 \end{cases},$$

onde

$$m_1 = -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a}, \quad m_2 = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a}, \quad b_1 = -\frac{d}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda} \right), \quad b_2 = -\frac{d}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda} \right).$$

Proposição 5.2.2 *No caso II, o operador às diferenças divididas pode escrever-se na forma canónica $\mathbb{D} = \mathcal{D}_{q,h}$, onde*

$$\mathcal{D}_{q,h}f(x) = \frac{f(qx + h) - f(x)}{(q - 1)x + h}, \quad q \neq 1. \quad (5.2.28)$$

Demonstração: Podemos considerar

$$\left(-\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a}\right)x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda}\right) = qx + h, \quad (5.2.29)$$

$$\left(-\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a}\right)x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda}\right) = x. \quad (5.2.30)$$

Igualando os coeficientes das variáveis com o mesmo grau, obtemos

$$-\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a} = 1, \quad (5.2.31)$$

$$-\frac{d}{a} - \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda}\right) = 0, \quad (5.2.32)$$

$$-\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a} = q, \quad (5.2.33)$$

$$-\frac{d}{a} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \left(\frac{bd - ae}{\lambda}\right) = h. \quad (5.2.34)$$

Somando (5.2.31) com (5.2.33), obtemos $-2\frac{b}{a} = q + 1$, logo,

$$b = -\frac{(q + 1)}{2}a.$$

Somando (5.2.32) com (5.2.34), obtemos $-2\frac{d}{a} = h$, logo,

$$d = -\frac{ha}{2}.$$

Subtraindo (5.2.31) e (5.2.33), obtemos $2\frac{\sqrt{\lambda}}{a} = q - 1$, logo,

$$\lambda = \frac{(q - 1)^2 a^2}{4}.$$

Usando $\lambda = b^2 - ac$ e b obtido anteriormente, obtemos

$$c = qa.$$

Usando em (5.2.32), λ , b e d obtidos anteriormente, obtemos

$$e = \frac{ha}{2}.$$

Usando $\tau = \frac{(b^2 - ac)(d^2 - af) - (bd - ae)^2}{a} = 0$, obtemos

$$f = 0.$$

Ficam assim determinadas as constantes a, b, c, d, e, f de modo a que o operador \mathbb{D} se escreva na forma (5.2.28). \square

Corolário 5.2.0.2 O operador $\mathcal{D}_{q,h}$ pode ser escrito na forma (5.1.10),

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}},$$

onde

$$p(x) = \frac{(q+1)}{2}x + \frac{h}{2}, \quad r(x) = \frac{(q-1)^2}{4} \left(x + \frac{h}{q-1}\right)^2.$$

O operador $\mathcal{D}_{q,h}$ está associado à cónica dada por

$$\mathcal{C} : ay^2 - (q+1)axy + qax^2 - hay + hax = 0,$$

ou seja, duas rectas concorrentes

$$y = x, \quad y = qx + h.$$

Demonstração: Para obtermos p e r basta usar em (5.2.27) os valores de a, b, c, d, e, f , obtidos anteriormente.

Além disso, obtemos a cónica dada por

$$ay^2 - (q+1)axy + qax^2 - hay + hax = 0.$$

Sendo $a \neq 0$, temos

$$y^2 - (q+1)xy + qx^2 - hy + hx = 0,$$

ou seja,

$$(y - qx - h)(y - x) = 0.$$

Assim, temos rectas concorrentes

$$y = x, \quad y = qx + h, \quad q \neq 1.$$

□

Observação 5.2.2 O operador (5.2.28) é usualmente chamado operador de q -diferença (em inglês, q -difference operator) (ver [4]).

5.2.3 Caso III: $\lambda = 0$ e $\tau \neq 0$ em (5.2.13)

Como $\lambda = 0$ e $\tau \neq 0$, então temos, de (5.1.9), ambos os polinómios de grau um,

$$p(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \quad r(x) = 2\frac{(bd - ae)}{a^2}x + \frac{(d^2 - af)}{a^2}. \quad (5.2.35)$$

Recordando que $y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}$, $y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}$, então temos

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{2(bd-ae)x+(d^2-af)}}{a} \\ y_2(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{2(bd-ae)x+(d^2-af)}}{a}. \end{cases}$$

Proposição 5.2.3 No caso III, o operador às diferenças divididas pode escrever-se na forma canónica

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(\left(\sqrt{x} + \frac{i}{2}\right)^2\right) - f\left(\left(\sqrt{x} - \frac{i}{2}\right)^2\right)}{2i\sqrt{x}}. \quad (5.2.36)$$

Demonstração: Podemos considerar

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)}}{a} = \left(\sqrt{x} + \frac{i}{2}\right)^2,$$

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)}}{a} = \left(\sqrt{x} - \frac{i}{2}\right)^2,$$

ou seja,

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \frac{\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)}}{a} = x + i\sqrt{x} - \frac{1}{4}, \quad (5.2.37)$$

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \frac{\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)}}{a} = x - i\sqrt{x} - \frac{1}{4}. \quad (5.2.38)$$

Somando (5.2.37) com (5.2.38), obtemos

$$-2\frac{b}{a}x - 2\frac{d}{a} = 2x - \frac{2}{4}.$$

Igualando os coeficientes obtemos

$$-2\frac{b}{a} = 2, \quad -2\frac{d}{a} = -\frac{2}{4},$$

logo, obtemos

$$b = -a, \quad d = \frac{a}{4}. \quad (5.2.39)$$

Subtraindo (5.2.37) e (5.2.38), obtemos

$$2\frac{\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)}}{a} = 2i\sqrt{x},$$

logo,

$$\sqrt{2(bd - ae)x + (d^2 - af)} = ia\sqrt{x},$$

donde, elevando ao quadrado,

$$2(bd - ae)x + (d^2 - af) = -a^2x.$$

Igualando coeficientes, temos

$$2(bd - ae) = -a^2, \quad d^2 - af = 0.$$

Usando $d = \frac{a}{4}$ em $d^2 - af = 0$ obtemos

$$f = \frac{a}{16}.$$

Usando os valores de b e d dados em (5.2.39) em $2(bd - ae) = -a^2$ obtemos

$$e = \frac{a}{4}.$$

Para determinar c usamos o facto de $\lambda = b^2 - ac = 0$, e $b = -a$, obtendo

$$c = a.$$

Ficam assim determinadas as constantes a, b, c, d, e, f de modo a que o operador \mathbb{D} se escreva na forma (5.2.36). \square

Corolário 5.2.0.3 *O operador \mathbb{D} dado por (5.2.36) pode ser escrito na forma (5.1.10),*

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}},$$

onde

$$p(x) = x - \frac{1}{4}, \quad r(x) = -x.$$

Este operador \mathbb{D} está associado à cónica dada por

$$\mathcal{C} : y^2 - 2xy + x^2 + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 0,$$

ou seja, uma parábola.

Demonstração: Para obtermos p e r basta usar em (5.2.35) os valores de a, b, c, d, e, f , obtidos anteriormente.

Além disso, obtemos a cónica dada por

$$ay^2 - 2axy + ax^2 + \frac{a}{2}y + \frac{a}{2}x + \frac{a}{16} = 0.$$

Sendo $a \neq 0$, obtemos

$$y^2 - 2xy + x^2 + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 0.$$

\square

Observação 5.2.3 *O operador (5.2.36) é usualmente chamado operador de Wilson [2].*

A parametrização para o caso III

Para este caso III existe uma parametrização dada por (ver [6])

$$x = x(s) = c_2s^2 + c_1s + c_0, \tag{5.2.40}$$

onde c_2, c_1, c_0 são constantes.

Verifica-se que $\mathbb{D}f(x)$ se pode escrever na forma

$$\mathbb{D}f(x(s)) = \frac{f(y_2(x(s))) - f(y_1(x(s)))}{y_2(x(s)) - y_1(x(s))}, \quad (5.2.41)$$

onde

$$y_2(x(s)) = x \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad y_1(x(s)) = x \left(s - \frac{1}{2} \right). \quad (5.2.42)$$

Recordemos que, de (5.1.8), temos

$$y_2(x(s)) = p(x(s)) + \sqrt{r(x(s))}, \quad y_1(x(s)) = p(x(s)) - \sqrt{r(x(s))},$$

logo,

$$p(x(s)) + \sqrt{r(x(s))} = x \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad (5.2.43)$$

$$p(x(s)) - \sqrt{r(x(s))} = x \left(s - \frac{1}{2} \right). \quad (5.2.44)$$

Escreva-se

$$p(x) = p_1x + p_0, \quad r(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0.$$

De seguida obtemos os coeficientes dos polinómios p, r dados em função da parametrização (5.2.40).

Proposição 5.2.4 *Verificam-se as seguintes igualdades:*

$$p_1 = 1, \quad p_0 = \frac{c_2}{4}, \quad (5.2.45)$$

$$r_2 = 0, \quad r_1 = c_2, \quad r_0 = \frac{c_1^2}{4} - c_2c_0. \quad (5.2.46)$$

Demonstração: Para obtermos os coeficientes de p somamos (5.2.43) com (5.2.44), obtendo

$$2p(x(s)) = x \left(s - \frac{1}{2} \right) + x \left(s + \frac{1}{2} \right).$$

Tendo em atenção $x(s)$ dado por (5.2.40), então obtemos

$$2(p_1x(s) + p_0) = c_2 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + c_1 \left(s - \frac{1}{2} \right) + c_0 + c_2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + c_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) + c_0.$$

Assim,

$$2p_1(c_2s^2 + c_1s + c_0) + 2p_0 = c_2s^2 - c_2s + \frac{c_2}{4} + c_1s - \frac{c_1}{2} + c_0 + c_2s^2 + c_2s + \frac{c_2}{4} + c_1s + \frac{c_1}{2} + c_0,$$

ou seja,

$$2p_1c_2s^2 + 2p_1c_1s + 2p_1c_0 + 2p_0 = 2c_2s^2 + 2c_1s + \frac{c_2}{2} + 2c_0.$$

Igualando os coeficientes das variáveis com o mesmo grau em s , obtemos

$$2p_1c_2 = 2c_2, \quad 2p_1c_0 + 2p_0 = \frac{c_2}{2} + 2c_0.$$

Conseqüentemente, p_1, p_0 são dados por (5.2.45).

Para obtermos os coeficientes de r calculamos a diferença entre (5.2.43) com (5.2.44) e elevamos ao quadrado, obtendo

$$r(x(s)) = \frac{[x(s + \frac{1}{2}) - x(s - \frac{1}{2})]^2}{4}.$$

Tendo em atenção $x(s)$ dada por (5.2.40), então obtemos

$$r_2(c_2s^2 + c_1s + c_0)^2 + r_1(c_2s^2 + c_1s + c_0) + r_0 = \frac{(2c_2s + c_1)^2}{4}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} 4r_2c_2^2s^4 + 8r_2c_2c_1s^3 + (4c_1^2r_2 + 8r_2c_2c_0 + 4r_1c_2)s^2 + (8r_2c_1c_0 + 4r_1c_1)s \\ + 4r_2c_0^2 + 4r_1c_0 + 4r_0 = 4c_2^2s^2 + 4c_2c_1s + c_1^2. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das variáveis com o mesmo grau em s , obtemos

$$\begin{aligned} 4r_2c_2^2 = 0, \quad 8r_2c_2c_1 = 0, \quad 4c_1^2r_2 + 8r_2c_2c_0 + 4r_1c_2 = 4c_2^2, \\ 8r_2c_1c_0 + 4r_1c_1 = 4c_2c_1, \quad 4r_2c_0^2 + 4r_1c_0 + 4r_0 = c_1^2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos r_2, r_1, r_0 dados por (5.2.46). □

5.2.4 Caso IV: $\lambda \neq 0$ e $\tau \neq 0$ em (5.2.13)

Como $\lambda \neq 0$ e $\tau \neq 0$, então temos, de (5.2.14),

$$p(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a}, \quad r(x) = \frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}. \quad (5.2.47)$$

Recordando que $y_1(x) = p(x) - \sqrt{r(x)}$, $y_2(x) = p(x) + \sqrt{r(x)}$, temos

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \sqrt{\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}} \\ y_2(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \sqrt{\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda} \right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}}. \end{cases}$$

Neste caso veremos que o operador canônico é o operador de Askey-Wilson [2], dado por

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}z + q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\right) - f\left(\frac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}}z + q^{\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)(z - z^{-1})}.$$

A relação entre a variável x e z é a seguinte: considera-se o mapa de projeção do círculo unitário $\{z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi[]$ para o intervalo real $[-1, 1]$, dado por

$$x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}). \quad (5.2.48)$$

O parâmetro q é definido por $q = e^{2i\eta}$, onde η é um dado número real.

Antes de prosseguirmos necessitaremos de recordar alguns cálculos e fórmulas que serão úteis para o que se segue.

Recordamos a fórmula de Euler (ver [1]),

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta).$$

Além disso,

$$z - z^{-1} = e^{i\theta} - e^{-i\theta}, \quad z + z^{-1} = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$

logo,

$$z - z^{-1} = 2i \operatorname{sen}(\theta), \quad z + z^{-1} = 2 \cos(\theta). \quad (5.2.49)$$

Elevando ao quadrado, temos $(z - z^{-1})^2 = -4 \operatorname{sen}^2(\theta)$. Da fórmula fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, logo, $(z - z^{-1})^2 = -4 \operatorname{sen}^2(\theta) = -4(1 - \cos^2(\theta))$. Agora, desta última igualdade e de (5.2.48), resulta que

$$(z - z^{-1})^2 = -4(1 - x^2). \quad (5.2.50)$$

Proposição 5.2.5 *No caso IV, o operador às diferenças divididas pode escrever-se na forma canónica como o operador de Askey-Wilson,*

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}z + q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\right) - f\left(\frac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}}z + q^{\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)(z - z^{-1})}. \quad (5.2.51)$$

Demonstração: Podemos considerar

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} + \sqrt{\frac{\lambda}{a^2}\left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2} + \frac{\tau}{a\lambda} = \frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}z + q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right), \quad (5.2.52)$$

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} - \sqrt{\frac{\lambda}{a^2}\left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2} + \frac{\tau}{a\lambda} = \frac{1}{2}\left(q^{-\frac{1}{2}}z + q^{\frac{1}{2}}z^{-1}\right). \quad (5.2.53)$$

Somando (5.2.52) com (5.2.53), obtemos

$$-2\frac{b}{a}x - 2\frac{d}{a} = \frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}(z + z^{-1}) + q^{-\frac{1}{2}}(z + z^{-1})\right).$$

Recordando (5.2.48), ou seja, $z + z^{-1} = 2x$, obtemos

$$-2\frac{b}{a}x - 2\frac{d}{a} = \frac{1}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}2x + q^{-\frac{1}{2}}2x\right).$$

Logo, obtemos

$$-\frac{b}{a}x - \frac{d}{a} = \frac{(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})}{2}x. \quad (5.2.54)$$

Igualando os coeficientes obtemos

$$-\frac{b}{a} = \frac{(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})}{2}, \quad -\frac{d}{a} = 0,$$

logo,

$$b = -\frac{(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})}{2}a \quad (5.2.55)$$

e

$$d = 0. \quad (5.2.56)$$

Subtraindo (5.2.52) e (5.2.53), obtemos

$$2\sqrt{\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}} = \frac{1}{2} \left(q^{\frac{1}{2}}(z - z^{-1}) - q^{-\frac{1}{2}}(z - z^{-1})\right),$$

logo,

$$2\sqrt{\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}} = \frac{1}{2} \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right) (z - z^{-1}).$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$4 \left(\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}\right) = \frac{1}{4} \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 (z - z^{-1})^2.$$

De (5.2.50), obtemos

$$4 \left(\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda}\right) = \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 (x^2 - 1).$$

Logo,

$$\frac{\lambda}{a^2} \left(x + \frac{bd - ae}{\lambda}\right)^2 + \frac{\tau}{a\lambda} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} (x^2 - 1). \quad (5.2.57)$$

Igualando coeficientes em (5.2.57), temos

$$\frac{\lambda}{a^2} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}, \quad (5.2.58)$$

$$2\lambda \frac{(bd - ae)}{a^2\lambda} = 0, \quad (5.2.59)$$

$$\frac{\lambda}{a^2} \frac{(bd - ae)^2}{\lambda^2} + \frac{\tau}{a\lambda} = -\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}. \quad (5.2.60)$$

Agora, de (5.2.59) obtemos

$$bd - ae = 0,$$

que, combinado com (5.2.56) nos dá $ae = 0$, logo,

$$e = 0.$$

De (5.2.58) e (5.2.55) relembrando que $\lambda = b^2 - ac$, obtemos

$$\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}a^2 - ac = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}a^2,$$

logo, obtemos

$$ac = \left(\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} - \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} \right) a^2.$$

Após alguns cálculos, obtemos $ac = a^2$, logo,

$$c = a.$$

Analisemos agora (5.2.60). De $bd - ae = 0$, resulta $\frac{\tau}{a\lambda} = -\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}$, logo relembrando que $\tau = \frac{\lambda(d^2 - af)}{a}$ (pois $bd - ae = 0$), obtemos

$$\frac{(d^2 - af)}{a} = -\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}a.$$

Uma vez que $d = 0$, então resulta que

$$f = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}a.$$

Ficam assim determinadas as constantes a, b, c, d, e, f de modo a que o operador \mathbb{D} se escreva na forma (5.2.51). □

Corolário 5.2.0.4 *O operador \mathbb{D} dado por (5.2.51) pode ser escrito na forma (5.1.10),*

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f\left(p(x) + \sqrt{r(x)}\right) - f\left(p(x) - \sqrt{r(x)}\right)}{2\sqrt{r(x)}},$$

onde

$$p(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}x, \quad r(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}(x^2 - 1).$$

Este operador \mathbb{D} está associado à cônica dada por

$$\mathcal{C} : y^2 - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)xy + x^2 + \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} = 0,$$

ou seja, uma hipérbole (se q real) ou elipse (se q for complexo).

Demonstração: Para obtermos p e r basta usar em (5.2.47) os valores de a, b, c, d, e, f , obtidos anteriormente.

Além disso, obtemos a cônica dada por

$$ay^2 - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)axy + ax^2 + \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}a = 0.$$

Sendo $a \neq 0$, obtemos

$$y^2 - \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)xy + x^2 + \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} = 0.$$

Trata-se de uma hipérbole (se q real) ou elipse (se q for complexo) (ver [15]). □

A parametrização para o caso IV

Para este caso IV existe uma parametrização dada por (ver [6])

$$x = x(s) = k_1q^s + k_2q^{-s} + k_3, \tag{5.2.61}$$

onde k_1, k_2, k_3 são constantes. O parâmetro q é definido (em termos da cônica) por

$$q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2b}{\sqrt{a}\sqrt{c}}.$$

Analogamente ao caso III, verifica-se que $\mathbb{D}f(x)$ se pode escrever na forma

$$\mathbb{D}f(x(s)) = \frac{f(y_2(x(s))) - f(y_1(x(s)))}{y_2(x(s)) - y_1(x(s))},$$

onde

$$y_2(x(s)) = x \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad y_1(x(s)) = x \left(s - \frac{1}{2} \right).$$

Recordemos que, de (5.1.8), temos

$$y_2(x(s)) = p(x(s)) + \sqrt{r(x(s))}, \quad y_1(x(s)) = p(x(s)) - \sqrt{r(x(s))},$$

logo, tal como no caso III, também agora se verifica

$$p(x(s)) + \sqrt{r(x(s))} = x \left(s + \frac{1}{2} \right), \tag{5.2.62}$$

$$p(x(s)) - \sqrt{r(x(s))} = x \left(s - \frac{1}{2} \right). \tag{5.2.63}$$

Escreva-se

$$p(x) = p_1x + p_0, \quad r(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0.$$

De seguida obtemos os coeficientes dos polinómios p, r dados em função da parametrização (5.2.61).

Proposição 5.2.6 *Verificam-se as seguintes igualdades:*

$$p_1 = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}, \quad (5.2.64)$$

$$p_0 = k_3 \left(1 - \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}\right), \quad (5.2.65)$$

$$r_2 = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}, \quad (5.2.66)$$

$$r_1 = -2k_3 \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}, \quad (5.2.67)$$

$$r_0 = r_0 = (k_3^2 - 4k_1k_2) \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}. \quad (5.2.68)$$

Demonstração: Para obtermos os coeficientes de p somamos (5.2.62) com (5.2.63), obtendo

$$2p(x(s)) = x\left(s - \frac{1}{2}\right) + x\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

Tendo em atenção $x(s)$ dado por (5.2.61), então obtemos

$$2p_1(k_1q^s + k_2q^{-s} + k_3) + 2p_0 = k_1q^{s-\frac{1}{2}} + k_2q^{-s+\frac{1}{2}} + k_3 + k_1q^{s+\frac{1}{2}} + k_2q^{-s-\frac{1}{2}} + k_3,$$

logo,

$$2p_1k_1q^s + 2p_1k_2q^{-s} + 2p_1k_3 + 2p_0 = (q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})k_1q^s + (q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})k_2q^{-s} + 2k_3.$$

Igualando coeficientes em q^s , q^{-s} e q^0 , obtemos

$$2p_1k_1 = \left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)k_1, \quad 2p_1k_2 = \left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\right)k_2, \quad 2p_1k_3 + 2p_0 = 2k_3.$$

Consequentemente, p_1, p_0 são dados por (5.2.64) e (5.2.65).

Para obtermos os coeficientes de r calculamos a diferença entre (5.2.62) com (5.2.63) e elevamos ao quadrado, obtendo

$$r(x(s)) = \frac{\left[x\left(s + \frac{1}{2}\right) - x\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2}{4}.$$

Tendo em atenção $x(s)$ dada por (5.2.61), então obtemos

$$r_2x^2(s) + r_1x(s) + r_0 = \frac{\left(k_1q^{s+\frac{1}{2}} + k_2q^{-s-\frac{1}{2}} - k_1q^{s-\frac{1}{2}} - k_2q^{-s+\frac{1}{2}}\right)^2}{4},$$

isto é,

$$\begin{aligned} r_2(k_1^2q^{2s} + 2k_1k_2 + k_2^2q^{-2s} + 2k_1k_3q^s + 2k_2k_3q^{-s} + k_3^2) + r_1(k_1q^s + k_2q^{-s} + k_3) + r_0 \\ = \frac{\left(\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)k_1q^s - \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)k_2q^{-s}\right)^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

O segundo membro de (5.2.69) pode escrever-se na forma

$$\frac{\left[\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)(k_1q^s - k_2q^{-s})\right]^2}{4},$$

ou ainda,

$$\frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} (k_1^2q^{2s} + k_2^2q^{-2s} - 2k_1k_2).$$

Assim, de (5.2.69) obtemos

$$\begin{aligned} r_2(k_1^2q^{2s} + 2k_1k_2 + k_2^2q^{-2s} + 2k_1k_3q^s + 2k_2k_3q^{-s} + k_3^2) + r_1(k_1q^s + k_2q^{-s} + k_3) + r_0 \\ = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} (k_1^2q^{2s} + k_2^2q^{-2s} - 2k_1k_2). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de q^{2s} , q^{-2s} , q^s , q^{-s} e de q^0 , na equação anterior obtemos, respectivamente,

$$r_2k_1^2 = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} k_1^2, \quad (5.2.70)$$

$$r_2k_2^2 = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4} k_2^2, \quad (5.2.71)$$

$$2r_2k_1k_3 + r_1k_1 = 0, \quad (5.2.72)$$

$$2r_2k_2k_3 + r_1k_2 = 0, \quad (5.2.73)$$

$$r_2(2k_1k_2 + k_3^2) + r_1k_3 + r_0 = -2k_1k_2 \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}. \quad (5.2.74)$$

As equações (5.2.70) e (5.2.71) dão-nos (5.2.66),

$$r_2 = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}.$$

As equações (5.2.72) e (5.2.73) dão-nos $r_1 = -2r_2k_3$, logo, obtemos (5.2.67),

$$r_1 = -2k_3 \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}.$$

De (5.2.74) obtemos

$$r_0 = -r_2(2k_1k_2 + k_3^2) - r_1k_3 - 2k_1k_2 \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4},$$

logo, usando o valor de r_2 e de r_1 , obtemos

$$r_0 = (k_3^2 - 4k_1k_2) \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4},$$

ou seja, obtemos (5.2.68). □

Observação 5.2.4 *Muitas vezes, na literatura, é dada a parametrização juntamente com a cônica, em vez do operador. Por exemplo, no caso IV é dada a cônica (5.1.7), $ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0$, juntamente com a parametrização (associada ao operador de Askey-Wilson) [7]*

$$x(s) = x_c + \xi\sqrt{a}(q^s + q^{-s}), \quad (5.2.75)$$

onde

$$x_c = \frac{ae - bd}{b^2 - ac},$$

e q definido por

$$q^{1/2} + q^{-1/2} = -\frac{2b}{\sqrt{a}\sqrt{c}}.$$

Assim, temos a parametrização do tipo (5.2.61), com

$$k_1 = k_2 = \xi\sqrt{a}, \quad k_3 = x_c.$$

Assim, os polinômios p, r associados ao operador são dados por

$$p(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}x + x_c \left(1 - \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}\right), \quad (5.2.76)$$

$$r(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}x^2 - 2x_c \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}x + (x_c^2 - 4\xi^2a) \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}. \quad (5.2.77)$$

No caso simétrico dado em [15], temos a parametrização

$$x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}), \quad (5.2.78)$$

ou seja, $x_c = 0$, $\xi\sqrt{a} = \frac{1}{2}$ em (5.2.75). Logo, os polinômios p, r associados ao operador são dados por (ver também [3])

$$p(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}x, \quad (5.2.79)$$

$$r(x) = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{4}(x^2 - 1). \quad (5.2.80)$$

5.3 Propriedades básicas dos operadores

Consideremos o operador às diferenças divididas, \mathbb{D} , na sua forma genérica dada em (5.1.1),

$$\mathbb{D}f(x) = \frac{f(y_2(x)) - f(y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)}.$$

Para o que se segue necessitamos de definir alguns operadores auxiliares: os operadores

$$\mathbb{E}_1 f(x) = f(y_1(x)), \quad \mathbb{E}_2 f(x) = f(y_2(x)), \quad (5.3.81)$$

e o operador companheiro,

$$\mathbb{M}f(x) = \frac{\mathbb{E}_1 f(x) + \mathbb{E}_2 f(x)}{2}. \quad (5.3.82)$$

5.3.1 A regra do produto

Proposição 5.3.1 [6]

A diferença dividida do produto pode ser calculada usando as seguintes fórmulas:

$$\mathbb{D}(gf) = f(y_1)\mathbb{D}g + g(y_2)\mathbb{D}f, \quad (5.3.83)$$

$$\mathbb{D}(gf) = f(y_2)\mathbb{D}g + g(y_1)\mathbb{D}f, \quad (5.3.84)$$

$$\mathbb{D}(gf) = \mathbb{D}g\mathbb{M}f + \mathbb{M}g\mathbb{D}f. \quad (5.3.85)$$

Demonstração: Para obtermos (5.3.83) usamos a definição,

$$\mathbb{D}(gf) = \frac{(gf)(y_2) - (gf)(y_1)}{y_2 - y_1},$$

isto é,

$$\mathbb{D}(gf) = \frac{g(y_2)f(y_2) - g(y_1)f(y_1)}{y_2 - y_1}. \quad (5.3.86)$$

Adicionando e subtraindo $g(y_2)f(y_1)$, obtemos

$$\mathbb{D}(gf) = \frac{g(y_2)f(y_2) - g(y_1)f(y_1) + g(y_2)f(y_1) - g(y_2)f(y_1)}{y_2 - y_1},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}(gf) = \frac{g(y_2)[f(y_2) - f(y_1)]}{y_2 - y_1} + \frac{f(y_1)[g(y_2) - g(y_1)]}{y_2 - y_1}.$$

Logo, obtemos (5.3.83).

Para obtermos (5.3.84), adicionamos e subtraímos $f(y_2)g(y_1)$ a (5.3.86), logo,

$$\mathbb{D}(gf) = \frac{[g(y_2) - g(y_1)]f(y_2)}{y_2 - y_1} + \frac{[f(y_2) - f(y_1)]g(y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Portanto, obtemos (5.3.84).

Assim, somando (5.3.83) e (5.3.84), obtemos

$$\mathbb{D}(gf) + \mathbb{D}(gf) = f(y_1)\mathbb{D}g + g(y_2)\mathbb{D}f + f(y_2)\mathbb{D}g + g(y_1)\mathbb{D}f,$$

ou seja,

$$2\mathbb{D}(gf) = [f(y_1) + f(y_2)]\mathbb{D}g + [g(y_1) + g(y_2)]\mathbb{D}f.$$

Tendo em atenção que $\frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} = \mathbb{M}f$ e $\frac{g(y_1) + g(y_2)}{2} = \mathbb{M}g$, então obtemos (5.3.85). \square

Proposição 5.3.2 [6]

Verifica-se a propriedade

$$\mathbb{M}(gf) = \mathbb{M}g\mathbb{M}f + \frac{\Delta_y^2}{4}\mathbb{D}g\mathbb{D}f, \quad (5.3.87)$$

onde $\Delta_y = y_2(x) - y_1(x)$.

Demonstração: Por definição, temos

$$\mathbb{M}(gf) = \frac{(gf)(y_1) + (gf)(y_2)}{2},$$

ou seja,

$$\mathbb{M}(gf) = \frac{2g(y_1)f(y_1) + 2g(y_2)f(y_2)}{4}.$$

Adicionando e subtraindo $g(y_1)f(y_2) + g(y_2)f(y_1)$, obtemos, após factorizarmos,

$$\mathbb{M}(gf) = \frac{[g(y_1) + g(y_2)][f(y_1) + f(y_2)]}{4} + \frac{[g(y_2) - g(y_1)][f(y_2) - f(y_1)]}{4},$$

ou seja,

$$\mathbb{M}(gf) = \frac{(g(y_1) + g(y_2))(f(y_1) + f(y_2))}{2} + \frac{[g(y_2) - g(y_1)][f(y_2) - f(y_1)](y_2 - y_1)^2}{4(y_2 - y_1)^2}.$$

Assim, temos

$$\mathbb{M}(gf) = \frac{(g(y_1) + g(y_2))(f(y_1) + f(y_2))}{2} + \frac{(y_2 - y_1)^2 [g(y_2) - g(y_1)] [f(y_2) - f(y_1)]}{4(y_2 - y_1)(y_2 - y_1)}.$$

Tendo em atenção que $\Delta y = y_2 - y_1$, e a definição de \mathbb{M} e \mathbb{D} , então obtemos a propriedade (5.3.87), isto é,

$$\mathbb{M}(gf) = \mathbb{M}g\mathbb{M}f + \frac{\Delta_y^2}{4}\mathbb{D}g\mathbb{D}f.$$

\square

5.3.2 A regra do quociente

Proposição 5.3.3 [6]

A diferença dividida do quociente pode ser calculada usando as seguintes fórmulas:

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_1)\mathbb{D}g - g(y_1)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)}, \quad (5.3.88)$$

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_2)\mathbb{D}g - g(y_2)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)}, \quad (5.3.89)$$

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{\mathbb{D}g \mathbb{M}f - \mathbb{D}f \mathbb{M}g}{\mathbb{E}_1 f \mathbb{E}_2 f}. \quad (5.3.90)$$

Demonstração: Para deduzir (5.3.88) começamos por aplicar a definição,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{\left(\frac{g}{f}\right)(y_2) - \left(\frac{g}{f}\right)(y_1)}{y_2 - y_1},$$

isto é,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{\frac{g(y_2)}{f(y_2)} - \frac{g(y_1)}{f(y_1)}}{y_2 - y_1},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{g(y_2)f(y_1) - f(y_2)g(y_1)}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1}. \quad (5.3.91)$$

Adicionando e subtraindo $f(y_1)g(y_1)$, temos

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{g(y_2)f(y_1) - f(y_2)g(y_1) + f(y_1)g(y_1) - f(y_1)g(y_1)}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_1)[g(y_2) - g(y_1)] - g(y_1)[f(y_2) - f(y_1)]}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

Obtemos, então, (5.3.88), isto é,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_1)\mathbb{D}g - g(y_1)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)}.$$

Analogamente, para deduzir (5.3.89), começamos por aplicar a definição, ou seja, temos (5.3.91),

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{g(y_2)f(y_1) - f(y_2)g(y_1)}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

Adicionando e subtraindo $f(y_2)g(y_2)$ obtemos

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{g(y_2)f(y_1) - f(y_2)g(y_1) + f(y_2)g(y_2) - f(y_2)g(y_2)}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_2)[g(y_2) - g(y_1)] - g(y_2)[f(y_2) - f(y_1)]}{f(y_2)f(y_1)} \frac{1}{y_2 - y_1},$$

Obtemos, então, (5.3.89), isto é,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_2)\mathbb{D}g - g(y_2)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)}.$$

Finalmente, somando (5.3.88) e (5.3.89), obtemos

$$2\mathbb{D}(g/f) = \frac{f(y_1)\mathbb{D}g - g(y_1)\mathbb{D}f + f(y_2)\mathbb{D}g - g(y_2)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)},$$

ou seja,

$$\mathbb{D}(g/f) = \frac{\left(\frac{f(y_1)+f(y_2)}{2}\right)\mathbb{D}g - \left(\frac{g(y_1)+g(y_2)}{2}\right)\mathbb{D}f}{f(y_2)f(y_1)}.$$

Como

$$\frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} = \mathbb{M}f(x), \quad \frac{g(y_1) + g(y_2)}{2} = \mathbb{M}g(x), \quad \mathbb{E}_1 f(x) = f(y_1(x)), \quad \mathbb{E}_2 f(x) = f(y_2(x)),$$

obtemos (5.3.90). □

Proposição 5.3.4 [6]

Verifica-se a propriedade

$$\mathbb{M}(g/f) = \frac{\mathbb{E}_1 g \mathbb{E}_2 f + \mathbb{E}_2 g \mathbb{E}_1 f}{2\mathbb{E}_1 f \mathbb{E}_2 f} \tag{5.3.92}$$

Demonstração: Aplicando definição, temos

$$\mathbb{M}\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{\left(\frac{g}{f}\right)(y_1) + \left(\frac{g}{f}\right)(y_2)}{2},$$

ou seja,

$$\mathbb{M}\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{\frac{g(y_1)}{f(y_1)} + \frac{g(y_2)}{f(y_2)}}{2}.$$

Logo, obtemos

$$\mathbb{M}\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{\frac{g(y_1)f(y_2) + g(y_2)f(y_1)}{f(y_1)f(y_2)}}{2},$$

ou seja, obtemos a propriedade (5.3.92). □

Bibliografia

- [1] L. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1978 (terceira edição).
- [2] R. Askey e J. Wilson, *Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., vol.54 (319), AMS, Providence, 1985.
- [3] G. Filipuk e M.N. Rebocho, *Orthogonal polynomials on systems of non-uniform lattices from compatibility conditions*, J. Math. Anal. Appl. 456 (2017) 1380-1396.
- [4] W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome, die q -Differenzgleichungen genügen*, Math. Nach. 2 (1949) 4-32.
- [5] E. Lages Lima, *A Equação do Terceiro Grau*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987, 9-23. Rio de Janeiro.
- [6] A.P. Magnus, *Associated Askey-Wilson polynomials as Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*, Springer Lect. Notes in Math. 1329, Springer, Berlin, 1988, pg. 261-278.
- [7] A.P. Magnus, *Special nonuniform lattice (snul) orthogonal polynomials on discrete dense sets of points*, J. Comput. Appl. Math. 65 (1995) 253-265.
- [8] P. Maroni e M. Mejri, *The symmetric D_ω -semiclassical orthogonal polynomials of class one*, Numer. Algorithms 49 (2008) 251–282.
- [9] M. Paiva, *Matemática Volume Único*, Editora Moderna (primeira edição).
- [10] S. Pilling, *Cálculo Numérico*, Faculdade de Engenharia, Arquitecturas e Urbanismo-FEAU, São Paulo.
- [11] M. Range, *Descartes's double point method for tangents: an old idea suggests new approaches to calculus*, Notices Amer. Math. Soc. 61 no. 4 (2014) 387-389.

- [12] M. Range, *Using high school algebra for a natural approach to derivatives and continuity* Math. Gaz. 102 no. 555, (2018) 435-446.
- [13] J. Stewart, *Cálculo Volume I*, Thomson Pioneiro, 2005 (quinta edição).
- [14] A. Sultan e A.L Artzt, *The Mathematics that every secondary school math teacher needs to know*, New York, 2011 (primeira edição).
- [15] N.S. Witte, *Semi-classical orthogonal polynomial systems on nonuniform lattices, deformations of the Askey table, and analogues of isomonodromy*, Nagoya Math. J. 219 (2015) 127–234.