



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Engenharia

# Estimação Robusta de Órbitas de Satélites LEO Baseada na Fusão Multissensorial de Dados

Milca de Freitas Coelho

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Junho de 2014



# Agradecimentos

É com muita satisfação que expresso os meus mais sinceros agradecimentos a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização dos meus objetivos e para a finalização de mais uma etapa da minha formação académica.

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu pai pelo seu incondicional apoio e carinho, pela sua presença constante ao longo de toda a minha vida, por ser um exemplo de coragem, força e bom carácter, por todos os ensinamentos que me transmitiu e que contribuíram para a pessoa que sou hoje. Por toda a confiança que depositou em mim, total ajuda e paciência na superação de obstáculos, o meu muito obrigado!

Expresso também a minha maior gratidão à minha mãe por fazer parte da minha jornada, pelo seu incentivo e carinho que foram imprescindíveis para eu chegar até aqui. Obrigada por acreditar em mim!

Aos meus irmãos pela vossa constante presença e por contribuírem para o enriquecimento do meu caminho.

Um especial agradecimento ao meu orientador, o Prof. Doutor Kouamana Bousson, pela oportunidade e privilégio em desenvolver um tema nesta área. Os meus mais sentidos agradecimentos pela sua orientação, apoio, disponibilidade, ensinamentos, opiniões e críticas que contribuíram para solucionar as dúvidas e problemas que foram surgindo ao longo da realização deste trabalho. O meu muito obrigado por todos os conhecimentos que me transmitiu e que também contribuíram para o meu desenvolvimento como pessoa.

Agradeço aos restantes familiares e amigos por me acompanharem ao longo dos anos.

A todos os que proporcionaram as condições necessárias para finalização desta etapa, os meus mais profundos agradecimentos e espero que este trabalho dignifique tal esforço.



# Resumo

A estimação de órbitas é um processo delicado, pois a extração incorreta do vetor de estado do satélite origina uma análise errada da sua trajetória, induzindo a que haja uma remodelação desnecessária da sua posição. Desta forma, tanto a fonte utilizada para obter as medições como todo o processo de estimação são de grande importância.

Neste trabalho, determina-se a órbita de um satélite LEO (Low Earth Orbit) com base num conjunto de medições efetuadas por dois satélites geostacionários.

Este estudo foi realizado com o intuito de contribuir para um melhoramento nos processos atualmente utilizados na determinação de órbitas de satélites artificiais.

Tendo consciência da presença inevitável de incertezas, ruídos e erros, computacionais e físicos, provenientes tanto dos modelos matemáticos como dos próprios instrumentos utilizados, todas as medições realizadas pelos satélites geostacionários foram filtradas. Devido à dinâmica não linear do sistema, o filtro aplicado foi o de Kalman estendido.

Após a implementação do filtro, verificou-se que o ruído existente é praticamente eliminado. Assim, os resultados obtidos são fiáveis e satisfatórios, sendo possível manter a estabilidade e controlo da órbita LEO com medições efetuadas por satélites geostacionários.

## Palavras - chave

Satélite LEO, Low Earth Orbit, Determinação de Órbitas, Satélites Geostacionários, Dinâmica Não Linear, Filtro de Kalman Estendido.



# Abstract

Orbit estimation is a delicate process, since the incorrect extraction of the satellite state vector provides a wrong analysis of its trajectory, inducing to a pointless remodeling of its position. For that reason, the source used for the measurements and the entire estimation process are very important.

In this work, the orbit of a LEO satellite (Low Earth Orbit) is determined based on a set of measurements performed by two geostationary satellites.

This study was realized with the intention of contributing to an improvement on the orbit determination problem.

Towards the unavoidable presence of uncertainties, noise and errors, both from the mathematical models as well in the instruments used, all measurements made by geostationary satellites were filtered. Due to non-linear dynamics of the system, the filter applied was the extended Kalman filter.

After the implementation of the filter, the noise is virtually eliminated. So, the results obtained are reliable and satisfactory, being possible to maintain the stability and control of the LEO's orbit with these measurements.

## Keywords

LEO Satellite, Low Earth Orbit, Orbit Determination, Geostationary Satellites, Nonlinear Dynamics, Extended Kalman Filter.



# Índice

Lista de Figuras .....	xi
Lista de Acrónimos .....	xiii
Lista de Símbolos.....	xv
Capítulo I .....	1
I.1 – Introdução .....	1
I.2 – Satélites LEO.....	3
I.3 – Satélites GPS.....	5
I.3.1.a) Segmento Espacial .....	6
I.3.1.b) Segmento de Controlo .....	6
I.3.1.c) Segmento do Utilizador .....	7
I.3.2 – Aplicações do Sistema GPS.....	7
I.4 – Satélites Geostacionários .....	8
I.5 – Problemática da Estimação de Órbitas .....	9
I.6 – Objetivos do Trabalho .....	12
I.7 – Estrutura da Dissertação .....	12
Capítulo II .....	13
II.1 – Introdução .....	13
II.2 – Filtragem de Sinais na Determinação de Órbitas.....	13
II.3 – Filtro de Kalman .....	14
II.3.1 – Sistema Estocástico .....	14
II.3.2 – Noções de Probabilidade e Estatística .....	16
II.3.2.a) Distribuição de Probabilidade de um Evento Aleatório.....	16
II.3.2.b) Distribuição Condicional e a sua Esperança Matemática .....	17
II.3.2.c) Relação entre o Espectro do Sinal e o Tempo.....	18
II.3.2.d) Ruído Branco.....	19
II.3.3 – Introdução ao Filtro de Kalman (clássico) .....	20
II.3.3.a) Filtro de Kalman Discreto (FKD) .....	21
II.3.3.b) Filtro de Kalman Estendido (FKE).....	23
II.3.4 – Limitações do Filtro de Kalman .....	25
II.3.5 – Fusão Multissensorial de Dados.....	25
II.3.5.a) Filtragem .....	28
II.3.5.b) Alisamento .....	29

Capítulo III .....	31
III.1 – Introdução .....	31
III.2 – Determinação da Órbita do Satélite LEO .....	31
III.3 – Equações da Dinâmica de Órbita .....	33
III.4 – Determinação da Órbita do Satélite GEO.....	35
III.5 – Modelação e Simulação do Problema.....	37
Capítulo IV .....	50
IV.1 – Conclusão .....	50
Bibliografia .....	52
Anexos.....	55
Anexo A – Transformação de Coordenadas.....	56
Anexo B – Figuras da Dissertação Ampliadas.....	62

# Lista de Figuras

Figura II.1 - Função da probabilidade da distribuição normal (ou Gaussiana).

Figura II.2 - Representação do ruído branco em função do tempo e da frequência.

Figura II.3 - Representação de um ciclo do filtro de Kalman discreto.

Figura III.1 - Órbita elíptica.

Figura III.2 - Ilustração da órbita LEO e dos satélites GEO.

Figura III.3 - Representação 3D da órbita LEO e satélites GEO.

Figura III.4 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas cartesianas).

Figura III.5 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas esféricas).

Figura III.6 - Representação da distância  $r$ .

Figura III.7 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas cartesianas).

Figura III.8 - Erro presente nas medições.

Figura III.9 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas).

Figura III.10 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas) em função do tempo.

Figura III.11 - Representação da matriz  $x_k$  (linearizada).

Figura III.12 - Representação da matriz  $z_k$  (linearizada).

Figura III.13 - Órbita real e órbita filtrada.

Figura III.14 - Representação gráfica das coordenadas em função do tempo (filtradas e reais).

Figura III.15 - Representação das três órbitas estimadas.

Figura III.16 - Representação das coordenadas das órbitas estimadas em função do tempo.



# Lista de Acrónimos

(Por ordem alfabética)

DO	Determinação de Órbitas
FKD	Filtro de Kalman Discreto
FKE	Filtro de Kalman Estendido
GPS	Global Positioning System
LEO	Low Earth Orbit
ML	Maximum Likelihood
MLE	Maximum Likelihood Estimate
MEO	Medium Earth Orbit
MGM	Método Generalizado de Millman
NextGen	Next Generation



# Lista de Símbolos

(Por ordem de aparecimento)

Símbolo	Definição
$r$	Vector que contém as componentes da posição $(x, y, z)$
$v$	Vector que contém as componentes da velocidade
$w$	Vector de ruído e incertezas
$G$	Constante gravitacional da Terra
$(x, y, z)$	Coordenadas cartesianas
$(r, \theta, \phi)$	Coordenadas esféricas
$a$	Vector de incertezas e ruído
$E(X)$	Valor esperado de uma variável contínua
$R_X$	Autocorrelação de um sinal aleatório $X(t)$
$\mathfrak{F}[\cdot]$	Transformações de Fourier
$\hat{x}_k^-$	Estimação <i>a priori</i> do estado no passo $k$
$\hat{x}_k$	Estimação <i>a posteriori</i> do estado no passo $k$
$P_k^-$	Estimativa <i>a priori</i> da covariância do erro
$P_k$	Estimativa <i>a posteriori</i> da covariância do erro
$z_k$	Medições actuais
$h_p$	Distância desde a superfície da Terra até o perigeu
$h_a$	Distância desde a superfície da Terra até o apogeu
$r_p$	Distância desde o centro da Terra até o perigeu
$r_a$	Distância desde o centro da Terra até o apogeu
$e$	Excentricidade da órbita
$\mu$	Parâmetro gravitacional padrão
$T$	Período da órbita do satélite
$M_e$	Massa da Terra
$F_r(t)$	Força externa exercida sobre o satélite na direção $r$
$F_\theta(t)$	Força externa exercida sobre o satélite na direção $\theta$
$\xi_x(t), \xi_y(t)$	Ruído e perturbações de distribuição normal
$u$	Entrada de controlo
$\Omega$	Velocidade angular da Terra



# Capítulo I

## I.1 - Introdução

Atualmente, a importância das órbitas não geostacionárias é cada vez maior, o que desencadeia não só um maior interesse neste tema como um desenvolvimento positivo deste tipo de satélites. Daí, a sua sofisticação estar a aumentar e a habilidade de prever as posições e velocidades de forma precisa e exata ser cada vez mais indispensável.

Os métodos de determinação de órbitas (DO) evoluíram bastante ao longo dos últimos 50 anos, pelo contributo de especialistas provenientes tanto da própria indústria envolvida nesta área como também de organizações governamentais e universidades. As melhorias ocorreram principalmente nas técnicas de modelação, permitindo a fusão de dados de diversos satélites de rastreamento, posicionados em diferentes órbitas [1].

Johannes Kepler (1571-1630) foi um dos primeiros a contribuir para a progressão da DO. Baseando-se nas observações astronómicas de Tycho Brahe deduziu que as órbitas eram elipses com o Sol em um dos focos. Posteriormente, desenvolveu as suas três leis empíricas do movimento planetário [2] que constituem a solução completa para um problema de dois corpos num movimento orbital [3].

Isaac Newton (1642-1727) em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, escreveu as suas três leis do movimento e a lei da gravitação. Estas leis foram deduzidas em relação a um sistema de coordenadas “inercial” que está fixo no espaço ou em movimento com velocidade constante mas sem rotação. Desta forma, mostrou que as leis empíricas de Kepler podiam ser obtidas através da sua lei gravitacional [2].

A redescoberta do asteroide Ceres, em 1801, marcou a primeira vez que astrónomos usaram observações passadas para prever uma órbita num tempo futuro [4].

No século XVIII, os trabalhos de Euler, D’Alembert, Lagrange, Lambert e Laplace contribuíram para grandes avanços na determinação de órbitas por observações astronómicas, através do estudo das perturbações das órbitas planetárias [2]. Assim, deu-se os primeiros passos para o desenvolvimento dos métodos atuais.

Leonard Euler (1707-1783) foi o primeiro a utilizar métodos matemáticos em vez dos tradicionais métodos geométricos, para rotular os problemas de dinâmica. Em 1744, escreveu *Theoria Motuum Planetarum et Cometarum*, um método analítico para a solução de uma órbita parabólica a partir de três observações muito próximas [4].

Johann H. Lambert (1728-1779) generalizou as fórmulas de Euler de modo a incluir as órbitas elípticas e hiperbólicas. Posteriormente, outros cientistas conseguiram obter soluções analíticas através do seu trabalho [4]. Na astrodinâmica, a solução de Lambert permite a determinação de uma órbita entre quaisquer dois vetores de posição desde que conhecidos [4].

No campo astronómico, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) é conhecido por encontrar soluções estáveis para um problema de três corpos [4].

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) criou um método baseado apenas em ângulos, onde a proximidade entre eles não é um requisito [4], em oposição ao método de Euler, que necessita de pequenos ângulos.

Porém, o grande avanço na determinação de órbitas verificou-se com a elaboração do método dos mínimos quadrados. Adrian Marie Legendre (1752-1833) e Karl Friedrich Gauss (1777-1855) desenvolveram de forma independente este método. O trabalho de Legendre foi publicado em 1806: “Nouvelles methods pour la determination des orbites des cometes” [5]. Gauss apesar de ter criado o seu trabalho em 1795 só o publicou em 1809, *Theoria Motus Corporum Coelestium* [5], sendo ele creditado pelo desenvolvimento deste método.

Ainda no século XIX, as estatísticas foram introduzidas nos processos de estimação e mais alguns refinamentos foram feitos nos métodos conhecidos.

Josiah Gibbs (1839-1903) desenvolveu um método geométrico que trouxe melhorias ao método dos mínimos quadrados para a solução dos vetores de posição no primeiro e terceiro tempo de observação [4].

Samuel Herrick (1911-1974) desenvolveu uma abordagem para o método de Gibbs com a série de Taylor, permitindo que problemas de um curto espaço de tempo possam ser resolvidos. Esta técnica é utilizada em aplicações modernas, como radares de observação de espaços próximos [4].

R. A. Fisher (1890-1962) desenvolveu em 1912 o *Maximum Likelihood Estimate* (MLE). Este é um método de estimação estatístico, que expande o princípio de Gauss de modo a cobrir os erros estatísticos não Gaussianos. O seu trabalho foi fortemente influenciado por Kolmogorov e Wiener [4].

Andrei N. Kolmogorov (1903-1987) e Norbert Wiener (1894-1964) desenvolveram independentemente, a técnica linear de estimação média dos mínimos quadrados, em 1941 e 1942 respetivamente. A teoria combinada do filtro Wiener-Kolmogorov aplica a dedução de Gauss, onde as equações lineares devem estar disponíveis para a estimação da solução [5].

J. W. Follin, em 1955, criou uma abordagem recursiva para derivar estimativas atualizadas a partir de novas medições [5].

R. E. Kalman (1930- ) publicou “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems” em tempo-discreto, filtragem recursiva média quadrática.

Peter Swerling (1929- ) publicou uma versão mais complexa do método de Kalman, onde as equações da matriz da covariância do erro são atualizadas [5]. Os algoritmos de Swerling e Kalman são variações do método dos mínimos quadrados de Gauss e Legendre [4].

Richard Bucy desenvolveu em conjunto com Kalman versões de tempo contínuo de filtros sequenciais [5].

O filtro de Kalman-Bucy também é conhecido como “Extended Kalman” ou “Extended Sequential Filter” - Filtro de Kalman Estendido.

Com o aparecimento de instrumentos de observação, equipados com tecnologias e potências computacionais um pouco superiores, foi possível melhorar ainda mais a teoria de Gauss e o filtro de Kalman.

Na década de 1960, os satélites que orbitavam à volta da Terra eram posicionados com precisões de centenas de metros, uma vez que estavam sujeitos à precisão da frequência de rádio, sistemas de medição ótica, modelos de forças, técnicas de análise e tecnologia computacional ainda um pouco primitiva [6].

Na década de 1970, a precisão melhorou para dezenas de metros devido aos avanços na modelação das forças e avanços computacionais [6].

Atualmente, a tecnologia laser está a ser implementada de modo a contribuir positivamente no rastreamento de satélites [4].

## **I.2 - Satélites LEO**

A estimação robusta apresentada nesta dissertação incide sobre as órbitas de satélites LEO (Low Earth Orbit). Estas órbitas são caracterizadas pela sua proximidade à Terra, isto é órbitas terrestres baixas. Geralmente, situadas entre os 500-1500 km de altitude [7].

Este intervalo é estabelecido de forma a evitar a colocação dos satélites na cintura de Van Hallen, situada entre os 1500-5000 km de altitude, pois é uma zona que apresenta elevada radiação, o que deteriora e danifica gravemente os equipamentos e sistemas. Abaixo

dos 200 km também não é aconselhável coloca-los em órbita, porque o seu tempo de vida é bastante curto devido à sua rápida deterioração por sobreaquecimento [8].

Atualmente, o interesse no estudo e aplicação deste tipo de órbita (LEO) tem vindo a aumentar devido às suas inúmeras vantagens. Pois, como está próximo da superfície terrestre apresenta uma transmissão de sinais com qualidade superior à dos satélites que estão em órbitas mais elevadas [7], mesmo que a posição do recetor não permita uma visibilidade clara para o céu, seja por influência de prédios, árvores ou outros obstáculos [9], estes satélites apresentam menores atrasos na transmissão e maiores ângulos de propagação [7].

As órbitas de baixa altitude tornam possível o uso de equipamentos, sistemas e antenas de menores dimensões com potências de transmissão bastante reduzidas [10], o que traduz custos de serviços e equipamentos mais baixos para os utilizadores. Do ponto de vista dos custos de lançamento e posicionamento, estes também são inferiores, o que permite o lançamento de vários satélites em simultâneo [11]. Daqui resulta uma transmissão de sinais mais eficaz, pois os vários satélites ao operarem em conjunto constituem uma rede de satélites que facilita a intercomunicação. Desta forma, asseguram a transmissão mesmo na presença de uma avaria pontual [10]. Além disso, o seu movimento contínuo assegura a transmissão/receção de sinais em qualquer momento e em qualquer local [12].

Os satélites LEO caracterizam-se pelo seu movimento a elevada velocidade, necessária e vital para resistir ao arrasto atmosférico existente na altitude em que orbitam [13] [14]. Este arrasto é criado pelo ar aí presente e causa uma degradação orbital gradual que impõe a necessidade de usar motores e combustível para possíveis correções orbitais, o que também contribui para um desgaste do próprio satélite e conseqüente diminuição do seu tempo de vida, geralmente entre 5 a 10 anos [8] [11].

Perante o uso de uma velocidade elevada estes satélites possuem períodos de cerca de 90 minutos. Assim, o tempo sobre determinada posição geográfica é bastante curto, o que dificulta a recolha de informação e dados dessa região [10] [13].

Este problema pode ser contornado pela alteração da forma da órbita, por exemplo adaptando a forma elíptica, ou então através da criação de uma rede de satélites com diferentes órbitas [10] [13].

Atualmente, o grande problema que os satélites LEO enfrentam é os detritos que orbitam á volta da Terra [15] [16].

Existem mais de 35 milhões de detritos, principalmente partes de satélites antigos, veículos lançadores e resíduos de combustíveis sólidos que possuem velocidades extremamente elevadas de até 7 km/s [17].

Por isso, além de garantir a correta colocação do satélite em órbita, as companhias responsáveis têm de se certificar que estes não são atingidos pelo lixo espacial. Esta não é uma tarefa fácil, sendo geralmente superada pelo uso de escudos e materiais de isolamento que reforçam o revestimento do satélite [17].

Apesar destas limitações, os satélites LEO são muito úteis em diversas áreas. Nos dias de hoje, são essenciais para reduzir o tempo de transmissão nas comunicações via satélite. Assim, são utilizados por estações espaciais, em reconhecimento militar e para verificações de condições meteorológicas.

Estes também permitem que organizações governamentais e comerciais estejam aptas a transmitir sinais de televisão, rádio, telemóveis bem como completar missões espaciais de curto alcance.

## **I.3 - Satélites GPS**

Para o bom funcionamento das órbitas LEO, os satélites GPS e todo o seu sistema são muitas vezes utilizados como uma fonte externa de aquisição de dados.

O GPS refere-se a um sistema de posicionamento global (Global Positioning System) pertencente ao departamento de defesa dos EUA, capaz de fornecer aos utilizadores serviços relacionados à sua navegação, tais como: posição tridimensional, velocidade, aceleração, desvios angulares e tempo com alta precisão, em relação a um sistema de coordenadas [18].

A precisão deste sistema está sujeita à eficiência, desempenho e sofisticação do equipamento recetor, mas geralmente os erros são na ordem do metro e do nano-segundo [16] [19].

O sistema GPS é constituído por uma constelação de 24 satélites artificiais, que estão distribuídos uniformemente por 6 órbitas com 4 satélites em cada [18] [19].

Esta distribuição garante que pelo menos 8 satélites possam ser vistos em simultâneo, em qualquer momento e de qualquer ponto da superfície terrestre [19]. Garante também uma maior estabilidade na constelação face a fatores perturbadores, como o vento solar e os campos gravitacionais, pois os satélites sofrem todos aproximadamente a mesma influência.

Para além destes 24 satélites, a Força Aérea Americana possui mais alguns em órbita, de forma a manter uma cobertura global mesmo quando um dos satélites da linha base é retirado de serviço. Estes satélites adicionais também contribuem para um aumento no desempenho e precisão do sistema em geral, mas não são considerados como parte da constelação principal [16] [18] [20].

Os satélites GPS circulam a uma altitude de 20000 km aproximadamente, ou seja, numa órbita MEO (Medium Earth Orbit) e completam duas voltas por dia, tendo cada órbita um período de 12h aproximadamente [16].

O sistema de posicionamento global consiste em 3 segmentos: Espacial, Controlo e do Utilizador.

### **I.3.1.a) Segmento Espacial**

Como referido anteriormente é composto por uma constelação principal de 24 satélites ativos, que transmitem ondas de rádio aos utilizadores. Esta constelação possui seis planos orbitais elípticos com quatro satélites em cada plano.

Cada plano orbital possui uma inclinação de 55° em relação ao plano equatorial e de 60° entre as respetivas órbitas, o que confere um campo de visão sobre a superfície terrestre de 28° [18].

Cada satélite está equipado com quatro relógios atômicos, sendo dois deles em céσιο e os outros dois em rubídio [18].

Este segmento está sob controlo e gestão da Força Aérea dos Estados Unidos da América, que comprometeu-se a manter disponível pelo menos os satélites da constelação principal, em 95% do tempo [20].

Atualmente, este segmento possui um total de 31 satélites em órbita (constelação principal e reservas) [20].

### **I.3.1.b) Segmento de Controlo**

Este segmento consiste numa rede global de instalações terrestres que rastreiam os satélites GPS, monitorizam as suas transmissões, executam análises e enviam comandos e dados para a constelação.

Atualmente é composto por uma estação de controlo mestre no Colorado Springs, 12 antenas de controlo/comandos e 16 estações de monitorização [18] [20].

A estação de controlo principal tem como objetivo enviar para cada satélite as suas efemérides atualizadas e se for o caso, possíveis correções ao relógio. Esta atualização geralmente ocorre a cada 8 horas [18].

### **I.3.1.c) Segmento do Utilizador**

Este segmento consiste nos equipamentos recetores de sinais GPS, com capacidade de calcular o tempo e a posição 3D do utilizador a partir da informação transmitida pelos satélites GPS [20].

## **I.3.2 - Aplicações do Sistema GPS**

O sistema de GPS é um elemento essencial e muito importante para a transmissão e globalização da informação [20].

Nos dias de hoje, esta tecnologia é de fácil acesso sendo possível acede-la através de um simples telemóvel ou de um relógio de pulso e marca presença em centenas de aplicações que afetam diretamente muitos aspetos da vida moderna [20].

O sistema GPS contribui para o aumento da economia, sendo utilizado em diversas áreas, tais como agricultura, construção, mineração, topografia, entrega de mercadorias, entre outras [20].

Grandes redes de comunicação, sistemas bancários, mercados financeiros e redes de energia dependem fortemente do sistema GPS para a sincronização e precisão do tempo, como também para o bom funcionamento de muitos sistemas sem fios [20].

Este sistema também contribui para o salvamento de vidas, pois pode ser aplicado no transporte evitando-se acidentes e em instrumentos de busca e salvamento. Também é possível utiliza-lo de forma a diminuir o tempo de chegada dos serviços de emergência e de socorro, na previsão do tempo, monitoramento de terremotos e proteção ambiental [20].

O sistema GPS desempenha um papel fundamental em todos os sistemas de transportes aéreos da próxima geração (NextGen = next generation), reforçando a segurança de voo, contribuindo para uma melhor gestão do espaço aéreo e aumentando a eficiência dos

voos. Com as suas capacidades precisas, contínuas e globais, oferece serviços integrados de navegação por satélite que satisfazem muito dos requisitos imprescindíveis aos usuários da aviação. Esta navegação e posição espacial permitem a determinação da posição tridimensional de todas as fases de voo e até na deslocação da superfície do aeroporto [20].

Para além da ampla aplicação na superfície terrestre, é também cada vez mais aplicado em tarefas e missões espaciais, revolucionando e revitalizando a forma como as diversas nações operam no espaço. É útil para os sistemas de orientação e gestão de veículos tripulados, acompanhamento e controle das várias constelações de satélites, para a observação da Terra a partir do espaço e para o lançamento e rastreamento de veículos espaciais [20].

Estas são apenas algumas amostras, pois todos os dias são inventadas mais aplicações, sendo estas limitadas apenas pela imaginação humana [20].

Embora, o sistema GPS seja cada vez mais acessível, possui uma grande limitação: o controlo da sua constelação de satélites pertence a uma nação estrangeira. Apesar de não haver indícios que o seu uso venha a sofrer restrições, este é um aspeto importante que deve ser tido em conta no planeamento de muitas missões, principalmente missões espaciais e mais delicadas, como é o caso das órbitas, com custos financeiros elevados, em que depender inteiramente de uma tecnologia estrangeira pode trazer riscos.

## **I.4 - Satélites Geostacionários**

Para além dos satélites GPS, os satélites geostacionários (GEO) são também uma fonte de aquisição de dados que pode ser utilizada na determinação de órbitas LEO.

O plano orbital destes satélites corresponde à zona equatorial da Terra, com uma inclinação de 0° e posicionados a uma altitude de 35900 km aproximadamente [16].

São caracterizados por se moverem na mesma direção que a Terra acompanhando o seu movimento, ou seja, a partir da superfície terrestre os satélites GEO parecem estar “parados” (estão sempre sobre a mesma região geográfica), completando desta forma, uma rotação por dia. Esta característica permite que as antenas terrestres tenham uma posição fixa, evitando o seu rastreamento constante [16].

Os satélites de comunicação e meteorológicos são exemplos de satélites posicionados nesta órbita [16].

## I.5 - Problemática da Estimação de Órbitas

A determinação da órbita é feita essencialmente através da estimação de um conjunto de observações discretas da posição e velocidade do satélite num dado instante, sendo necessário estabelecer um referencial e um grau de precisão, que depende da importância da aplicação a que se destina o uso da informação obtida [22]. Todas estas equações são equações de aproximação.

O conjunto de observações inclui a realização de medições externas provenientes de sensores terrestres ou espaciais e das medições dos instrumentos do próprio satélite [22].

As observações passadas compõem uma base de dados que permite estimar o estado futuro do movimento do satélite, ou seja, é possível determinar a órbita futura com base nas observações passadas.

A determinação de uma órbita e a sua propagação são consideradas probabilísticas, uma vez que, as observações estão sujeitas a incertezas aleatórias e sistemáticas, provenientes dos instrumentos de medição e dos próprios modelos matemáticos utilizados. Assim, deve-se modelar o problema da forma mais adequada possível de modo a cumprir os requisitos mínimos da missão [22].

Um satélite artificial é influenciado por uma vasta variedade de forças externas, tais como a gravidade terrestre, a resistência ao avanço provocada pela atmosfera, a gravitação de multi-corpos, a pressão da radiação solar, efeito das próprias marés e até pelos seus próprios propulsores. Caso não houvesse perturbações de qualquer natureza, a sua órbita poderia ser simplificada e modelada como um movimento kepleriano puro, onde apenas a força gravitacional age sobre o satélite, mas como tal facto diverge da realidade, verifica-se que as perturbações afetam diretamente os elementos keplerianos que representam a órbita [22] [23].

A seleção das forças utilizadas na modelização depende da exatidão e precisão requerida no processo de DO e da quantidade de dados e informação disponíveis, que irá resultar num conjunto de equações dinâmicas não-lineares. Muitas vezes este modelo pode ser simplificado ou reduzido sem pôr em causa o desempenho do processamento.

As incertezas computacionais e físicas limitam a exatidão e precisão com que se determina o estado do satélite. De um modo similar, os dados observados são também não-lineares em relação ao estado de movimento do satélite, pois muitas das influências a que está sujeito podem não estar incluídas nos modelos de observação aplicados [22].

O movimento orbital (processo dinâmico) pode ser descrito de uma forma bastante simplificada pelas seguintes equações diferenciais ordinárias vetoriais, definidas em relação ao sistema de referência inercial [23]:

$$\dot{r} = v \quad (1.1)$$

$$\dot{v} = -G \frac{r}{r^3} + w \quad (1.2)$$

Sendo,

$r$  - o vector que contém as componentes da posição  $(x, y, z)$ , dado por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.3)$$

$v = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  - o vector que contém as componentes da velocidade;

$w = [w_1 \ w_2 \ w_3]$  - o vector do ruído e incertezas;

$G$  - constante gravitacional da Terra.

$$\text{Assim: } X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6]^T$$

Com:

$$X_1 = x; \quad X_2 = y; \quad X_3 = z; \quad X_4 = \dot{x}; \quad X_5 = \dot{y}; \quad X_6 = \dot{z} \quad (1.4)$$

Desta forma, a dinâmica da trajetória do satélite LEO é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = X_4 = \dot{x} \\ \dot{X}_2 = X_5 = \dot{y} \\ \dot{X}_3 = X_6 = \dot{z} \\ \dot{X}_4 = \ddot{x} = -G \frac{X_1}{r^3} + w_1 \\ \dot{X}_5 = \ddot{y} = -G \frac{X_2}{r^3} + w_2 \\ \dot{X}_6 = \ddot{z} = -G \frac{X_3}{r^3} + w_3 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{X} = f(X) + w \quad (1.6)$$

Sendo,  $X_0$  a condição inicial, modelada como um vetor aleatório com distribuição normal [23].

As medições em coordenadas esféricas são dadas por:

$$Y = (r, \theta, \phi) \quad (1.7)$$

Sendo,

$(x_1, y_1, z_1)$  as coordenadas geocêntricas cartesianas do satélite LEO;

$(x_g, y_g, z_g)$  as coordenadas geocêntricas cartesianas do satélite GPS;

Tem-se:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_g)^2 + (y_1 - y_g)^2 + (z_1 - z_g)^2} \quad (1.8)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{(y_1 - y_g)}{(x_1 - x_g)}\right) \quad (1.9)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{(z_1 - z_g)}{\sqrt{(x_1 - x_g)^2 + (y_1 - y_g)^2 + (z_1 - z_g)^2}}\right) \quad (1.10)$$

Portanto, em coordenadas esféricas, o sistema é definido por:

$$Y = h(X) + a \quad (1.11)$$

Onde:  $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]$  é o vector das incertezas e ruído.

## **I.6 - Objetivos do Trabalho**

Este trabalho tem por objetivo estimar a órbita de um satélite LEO baseada numa fusão multissensorial de dados.

Como meio externo para a aquisição da informação foram utilizados dois satélites geostacionários. Apesar de um só satélite fornecer os dados necessários à determinação de órbita (DO), o uso de dois confere uma maior precisão, veracidade e robustez em relação aos ruídos.

Os dados provenientes dos satélites GPS não foram analisados, uma vez que, a sua aplicação exige uma recolha de informação de vários satélites da constelação e consequentemente um aumento na complexidade de análise e tratamento de dados.

Esta dissertação também incide na elaboração de um método de filtragem robusta, baseado no filtro de Kalman e a sua respetiva aplicação em todos os dados obtidos.

## **I.7 - Estrutura da Dissertação**

No capítulo I é feita uma discussão do desenvolvimento histórico da determinação de órbitas e uma abordagem aos componentes mais relevantes do sistema em estudo, isto é, os satélites GPS, LEO e GEO. Neste capítulo também é exposta a problemática da estimação de órbitas e os objetivos de trabalho.

No capítulo II é exposta a importância da aplicação de filtros na DO. Também é realizada uma introdução ao filtro de Kalman, bem como a alguns conceitos relevantes à sua compreensão. Por fim, é descrito os métodos de fusão multissensoriais de dados.

No capítulo III, o problema de estimação de órbita de um satélite LEO é modelado e simulado. Os seus resultados são apresentados e analisados.

Apresentam-se as conclusões e indicações para possíveis trabalhos futuros, relacionados com este tema, no capítulo IV.

# Capítulo II

## II.1 - Introdução

Na determinação de órbitas é indispensável a utilização de métodos para a extração correta de informação de um sinal com perturbações e é aqui os filtros desempenham um papel crucial e fundamental.

Este capítulo visa o filtro de Kalman e todo o processo envolvido na filtragem de sinais, que posteriormente será aplicado no capítulo III.

## II.2 - Filtragem de Sinais na Determinação de Órbitas

A construção de um novo satélite, independentemente da sua aplicação, implica uma grande responsabilidade por parte das agências espaciais que devem ser capazes de prever a respetiva órbita com a maior precisão possível.

Pois, na presença de uma previsão imprecisa ou incorreta, há muitas vezes a necessidade de alterar a altitude da órbita ou mesmo de remodelar o próprio satélite e a sua atitude [24].

Assim, a conceção de uma ferramenta capaz de determinar órbitas com uma margem de erro cada vez menor, deve ser fortemente motivada de forma a obter-se o melhor desempenho possível.

Deste ponto de vista, os métodos de filtragem são essenciais para a integração não só das observações e medições realizadas pelas diversas fontes, como também das equações da dinâmica de órbita, de modo a obter-se a posição e a velocidade do satélite com a maior veracidade e rapidez possível, características determinantes para aplicações em tempo-real.

Em relação aos satélites LEO, a modelação de erros incide essencialmente no arrasto atmosférico, tanto a nível das incertezas do seu efeito sobre o próprio satélite, como nas incertezas associadas à densidade da atmosfera. A pressão solar é outra fonte de erro a ser considerada, pois embora seja constante tem um impacto pouco estudado sobre a trajetória, devido à inadequada modelação da irradiação do próprio satélite ou a alterações temporais

nos seus parâmetros. Para além disto, as informações sobre a sua atitude contêm muitas imprecisões e incertezas, que variam consoante a sua forma e estrutura [24].

Muitas das variáveis de interesse, necessárias para a descrição do estado do sistema, não podem ser medidas diretamente daí os seus valores serem deduzidos indiretamente e a sua veracidade e precisão serem prejudicadas pelas imprecisões dos instrumentos utilizados.

Para os casos de rastreamento ou com movimento associado, é mais adequado considerar as variáveis de interesse como sendo aleatórias e contínuas.

Uma variável aleatória é essencialmente uma função que mapeia todos os pontos do espaço da amostra de números reais. Desta forma,  $X(t)$  indicará a posição esperada dessa variável para um determinado tempo [25].

## II.3 - Filtro de Kalman

### II.3.1 - Sistema Estocástico

Para a determinação de órbitas, considera-se o satélite como um sistema, neste caso um sistema estocástico, ou seja, um sistema cujo estado é analisado e determinado com base nas teorias de probabilidade - o estado é não-determinista (aleatório).

**Sistema determinístico:** é um sistema cuja previsão dos seus estados futuros não é obtida de forma aleatória, isto é, a sua saída é prevista com 100% de certeza. Um modelo determinístico produz sempre a mesma saída para uma dada condição ou estado inicial.

Ao contrário de um sistema determinístico, um sistema estocástico não produz sempre a mesma saída para uma dada entrada.

Alguns componentes característicos deste tipo de sistema são:

- Entradas estocásticas;
- Atrasos aleatórios no tempo;
- Perturbações e ruído modelados de uma forma aleatória;
- Processos dinâmicos estocásticos.

Dado um sistema físico qualquer, nomeadamente uma aeronave, um processo químico ou até mesmo um processo económico, para desenvolver a aptidão de analisá-lo e projetar controladores eficientes e com as capacidades pretendidas, primeiro é necessário desenvolver um modelo matemático que represente adequadamente alguns aspetos do seu comportamento [26].

Para tal, é necessário estabelecer inter-relações entre as variáveis de interesse e as entradas/saídas do sistema, através dos conhecimentos físicos, das leis fundamentais e de testes empíricos [26]. Desta forma, será possível analisar a sua estrutura e os seus modos de resposta, e se desejável, projetar compensadores que alterem as suas características e controladores que forneçam determinadas entradas, de forma a gerar as respostas pretendidas [26].

Para observar os comportamentos do sistema é necessário possuir instrumentos de medição, aptos a medir os sinais de saída em relação às variáveis de interesse. Estas saídas e as entradas introduzidas com conhecimento prévio, são as únicas informações discerníveis sobre o comportamento do sistema em estudo. Estes instrumentos de medição são de grande importância, pois se for projetado um controlador de *feedback*, as saídas provenientes destes instrumentos são os únicos sinais disponíveis para as entradas do controlador [26].

Os sistemas determinísticos e as teorias de controlo apresentam algumas limitações que tornam os métodos estocásticos preferíveis [26].

Estas limitações são principalmente baseadas nas imperfeições dos próprios modelos matemáticos implementados, pois da vasta gama de modos e parâmetros conhecidos, estes modelos apenas têm em consideração os que são críticos ou dominantes na resposta do sistema, provocando a não-modelação de muitos efeitos [26].

Outra limitação está na dinâmica do sistema que é influenciada não só pelas entradas do controlador, mas também por perturbações que não podem ser controladas nem modeladas de uma forma determinística. Para além disto, é necessário ter em conta que os dados provenientes dos sensores não são perfeitos nem completos, uma vez que, também estão sujeitos à sua própria dinâmica, distorções e ruído [26].

Assim, desenvolveu-se os modelos estocásticos que visam essencialmente [26]:

- Incluir todas as incertezas de uma forma direta e prática;
- Estimar e otimizar as quantidades de interesse, mesmo que os dados disponíveis pelos sensores sejam incompletos e suscetíveis a ruídos e incertezas.

- Independentemente das incertezas, otimizar o controlador do sistema de modo a agir da forma pretendida;
- Avaliar as capacidades e a veracidade do desempenhado, das estimativas e do próprio controlador, antes e depois da sua aplicação.

### II.3.2 - Noções de Probabilidade e Estatística

A base da filtragem de sinais está na probabilidade, por isso, neste tópico serão abordados alguns conceitos relevantes e aplicados no funcionamento dos filtros.

#### II.3.2.a) Distribuição de Probabilidade de um Evento Aleatório

Dado um conjunto de variáveis aleatórias, independentemente da sua distribuição, a sua soma tende a seguir uma distribuição normal (distribuição Gaussiana) [25].

Assim, para um processo aleatório:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (2.1)$$

Isto é, um processo aleatório contínuo  $X$ , de distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  (desvio padrão  $\sigma$ ). Esta distribuição está representada na figura seguinte.

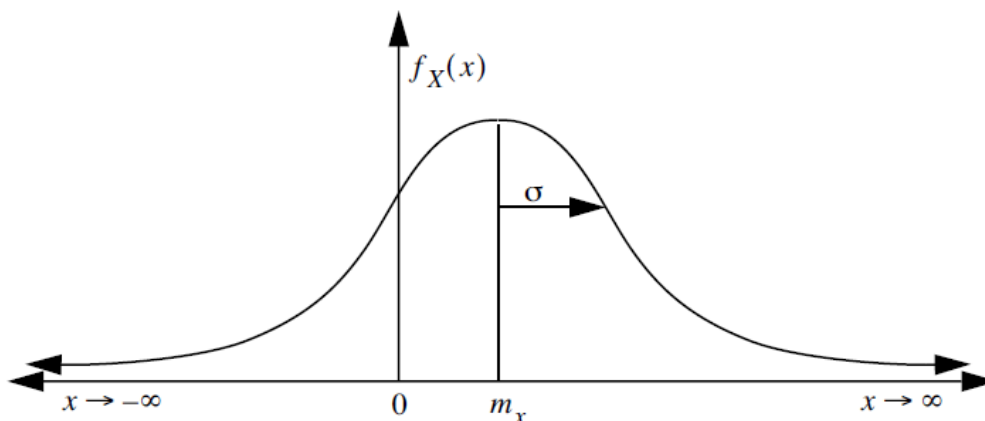


Figura II.1 - Função da probabilidade da distribuição normal (ou Gaussiana) [25].

A distribuição normal possui uma função da probabilidade da densidade de  $X$ , para o intervalo  $-\infty < x < \infty$ , definida por [25]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (2.2)$$

Qualquer função linear, de um processo aleatório com distribuição normal, possui uma distribuição linear [25].

Em particular, se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Y = aX + b$  então:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad (2.3)$$

A função da probabilidade da densidade de  $Y$  é dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-(a\mu+b))^2}{a^2 \sigma^2}} \quad (2.4)$$

Por fim, se  $X_1$  e  $X_2$  são independentes, com  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  então:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (2.5)$$

Sendo a sua função densidade:

$$f_X(x_1 + x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (2.6)$$

### II.3.2.b) Distribuição Condicional e a sua Esperança Matemática

Duas variáveis aleatórias contínuas são estatisticamente independentes se [25]:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (2.7)$$

#### - Regra de Bayes:

Sabendo que a probabilidade de um acontecimento  $A$  dado a ocorrência de um acontecimento  $B$  é denominada como probabilidade condicionada de  $A$  dado  $B$  então [25]:

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2.8)$$

Se os acontecimentos A e B forem independentes, a probabilidade de ambos ocorrerem simultaneamente é [25]:

$$p(A \cap B) = p(A) p(B) \quad (2.9)$$

A regra de Bayes baseia-se na equação (2.8) e permite especificar a probabilidade da densidade de uma variável aleatória X dado (na presença de) uma variável aleatória Y [25]:

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{Y|X}(y)f_X(x)}{f_Y(y)} \quad (2.10)$$

### - Contínuo-Discreto:

Dado um processo discreto X e um processo contínuo Y, a probabilidade discreta da função de massa de X condicionada a Y = y é dada por [25]:

$$p_X(x | Y = y) = \frac{f_Y(y|X=x)p_X(x)}{\sum_z f_Y(y|X=z)p_X(z)} \quad (2.11)$$

## II.3.2.c) Relação entre o Espectro do Sinal e o Tempo

A autocorrelação é uma característica dos sinais aleatórios, relacionada com o tempo e de grande importância pois, é a correlação do próprio sinal ao longo do tempo [25].

A autocorrelação de um sinal aleatório X(t) nos tempos t<sub>1</sub> e t<sub>2</sub>, é definida por:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.12)$$

Se o processo for estacionário, isto é, a densidade não varia ao longo do tempo, a equação anterior irá depender apenas da diferença  $\tau = t_1 - t_2$ :

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (2.13)$$

Como esta é uma característica que varia em função do tempo, pode também ser interpretada em relação ao seu espectro no domínio da sua frequência. Assim, para um processo estacionário, a relação espectral-temporal (relação Wiener-Khinchine) é dada por [25]:

$$S_X(j\omega) = \mathfrak{F}[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.14)$$

Onde,

$\mathfrak{F}[\bullet]$  indica as transformações de Fourier

$\omega$  indica o número de ciclos ( $2\pi$ ) por segundo;

A função  $S_X(j\omega)$  denomina-se por densidade espectral de potência de um sinal aleatório.

### II.3.2.d) Ruído Branco

Um caso particular do sinal aleatório é quando a função de autocorrelação é uma função *dirac delta*  $\delta(\tau)$ , esta é uma função que é nula em todos os pontos excepto quando  $\tau = 0$  [25]:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A & \text{para } \tau = 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases} \quad (2.15)$$

Sendo,  $A$  a magnitude (valor constante).

Neste caso, onde a autocorrelação é um “pico”, a transformação de Fourier resulta num espectro de frequência constante, como é possível observar nos gráficos da figura II.2. Esta é uma definição de ruído branco, em que as funções  $R_X$  e  $S_X$  possuem grande importância na frequência do espectro, mas não se correlacionam consigo próprias ao longo do tempo, exceto no presente ( $\tau = 0$ ). Por isso, o ruído branco é considerado independente, ou seja, uma amostra do sinal num determinado tempo é completamente independente de outra amostra em outro tempo [25].

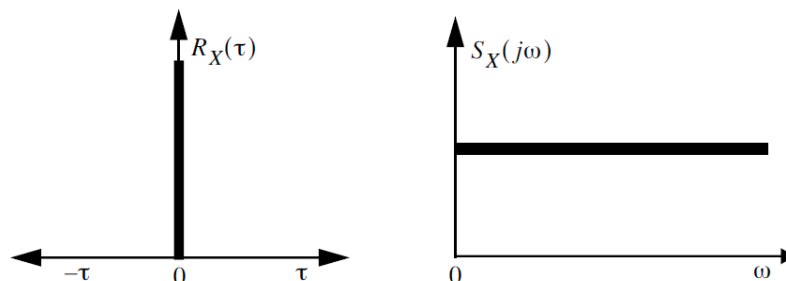


Figura II.2 - Representação do ruído branco em função do tempo e da frequência respetivamente [25].

Muitas vezes, os sinais aleatórios podem ser modelados como filtros ou em forma de ruído branco. Isto significa que é possível filtrar a saída de uma fonte hipotética de ruído branco, de modo a tornar o seu ruído não-branco, que por sua vez terá uma banda limitada no domínio da frequência e uma correlação maior no domínio do tempo [25].

### **II.3.3 - Introdução ao Filtro de Kalman (clássico)**

Atualmente existe uma vasta gama de ferramentas matemáticas capazes de analisar os sistemas estocásticos a partir de medições com ruído. A mais conhecida e utilizada é o Filtro de Kalman.

O filtro de Kalman pode ser descrito como um algoritmo ótimo recursivo utilizado no processamento de dados. É considerado ótimo por possuir a capacidade de incorporar toda a informação disponível, ou seja, processa todas as medições disponíveis, independentemente da sua precisão, de modo a estimar o valor atual da variável de interesse. Assim, utiliza [26]:

- o conhecimento do próprio sistema e as medições da dinâmica dos seus instrumentos;
- a descrição estatística do ruído do sistema, medições dos erros e as incertezas dos modelos dinâmicos;
- qualquer informação disponível sobre as condições iniciais das variáveis de interesse.

É recursivo, pois não requer que os dados anteriores sejam mantidos e reprocessados em cada instante que uma nova medição é feita.

O filtro de Kalman combina toda a informação e dados disponíveis juntamente com o conhecimento prévio do sistema e dos seus instrumentos, obtendo assim uma estimativa das variáveis de tal forma que o erro é estatisticamente minimizado. É por isso que este filtro apresenta superioridade em relação aos outros na obtenção de resultados [26].

### II.3.3.a) Filtro de Kalman Discreto (FKD)

O filtro discreto é utilizado quando o estado de um sistema linear e estocástico é estimado em pontos discretos no tempo.

O seu processamento e equações podem ser divididos em dois grupos:

1. Equações *time update* - equações de previsão;
2. Equações *measurement update* - equações de correção.

O primeiro grupo de equações é responsável por projetar o “estado atual” num tempo futuro (tempo seguinte ao atual) e estimar a covariância do erro. Desta forma, é possível obter uma estimativa *a priori* do tempo seguinte. O segundo grupo de equações é responsável pelo *feedback*, ou seja, efetua a incorporação da nova medição na estimativa *a priori* de forma a obter uma melhor estimativa *a posteriori* [25].

A figura seguinte ilustra um ciclo do filtro de Kalman discreto, onde o *time update* projeta a estimativa do estado corrente e o *measurement update* ajusta a estimativa projetada através da medição realizada nesse tempo [25].

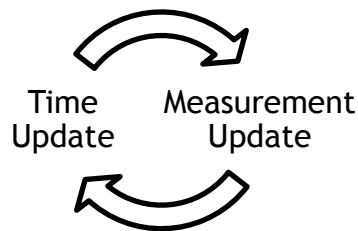


Figura II.3 - Representação de um ciclo do filtro de Kalman discreto.

As equações *time update* para um estado  $x \in \mathcal{R}^n$  são [25] [27]:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (2.16)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.17)$$

Onde,

$\hat{x}_k^-$ : representa a estimativa *a priori* do estado no passo k e é definido em  $\hat{x}_k^- \in \mathcal{R}^n$ .

$\hat{x}_k$ : representa a estimativa *a posteriori* do estado no passo k e é definido em  $\hat{x}_k \in \mathcal{R}^n$ .

A : representa uma matriz  $n \times n$  que relaciona o estado no tempo anterior (isto é, no passo  $k - 1$ ) e o estado atual (isto é, no passo  $k$ ).

B : representa uma matriz  $n \times l$  e relaciona a entrada do controlador  $u$  e a entrada do estado  $x$ .

$u$  : entrada do controlador opcional. É definido em  $u \in \mathfrak{R}^l$ .

$P_k^-$  : corresponde à estimativa *a priori* da covariância do erro.

$P_k$  : corresponde à estimativa *a posteriori* da covariância do erro.

Q : é a matriz da covariância do erro do processo.

As equações *measurement update* para o filtro discreto são [25]:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (2.18)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-) \quad (2.19)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (2.20)$$

Onde,

H : representa uma matriz  $m \times n$  e relaciona o estado com a medição  $z_k$ .

A medição  $z \in \mathfrak{R}^m$  é dada por:

$$z_k = H x_k + v_k \quad (2.21)$$

$v_k$  : representa o ruído das medições.

R : corresponde à covariância do erro das medições.

K : representa uma matriz  $n \times m$  denominada por ganho ou factor de mistura. Minimiza a covariância do erro da estimativa *a posteriori*.

A diferença  $(z_k - H \hat{x}_k^-)$  é conhecida como residual e reflete a discrepância entre a medição prevista,  $H \hat{x}_k^-$  e a medição atual,  $z_k$ .

### II.3.3.b) Filtro de Kalman Estendido (FKE)

Muitas vezes os sistemas estocásticos são definidos por processos não lineares, como na determinação de órbitas. Neste caso, o filtro discreto de Kalman já não é adequado mas sim a sua forma estendida.

O filtro de Kalman estendido é um filtro que possui a capacidade de linearizar a média e covariância corrente, ou seja, lineariza a estimação à volta do valor atual através das derivadas parciais das funções que definem o processo e as medições [25].

Tal como acontece com o filtro discreto, este também possui dois grupos de equações, assim para um vetor de estado  $x \in \mathfrak{R}^n$ , as equações *time update* são dadas por [25] [27]:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (2.22)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (2.23)$$

Onde,

$f$  : representa a função não linear que relaciona o estado no tempo anterior (isto é, no passo  $k - 1$ ) e o estado atual (isto é, no passo  $k$ ).

$u_k$  : representa a função condutora (associada ao controlador, se existente).

$A$  : representa uma matriz Jacobiana da derivada parcial da função  $f$  em relação a  $x$  no passo  $k$  dada por:

$$A_{[i,j]k} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (2.24)$$

$W$  : representa uma matriz Jacobiana da derivada parcial da função  $f$  em relação a  $w$  no passo  $k$  dada por:

$$W_{[i,j]k} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (2.25)$$

Sendo,

$Q_k$  : a covariância do erro do processo no passo  $k$ .

As equações *measurement update* para este filtro são [25]:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (2.26)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (2.27)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (2.28)$$

Onde,

$H$  : representa uma matriz Jacobiana da derivada parcial da função  $h$  em relação a  $x$  no passo  $k$  dada por:

$$H_{[i,j]}_k = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}} (\tilde{x}_k, 0) \quad (2.29)$$

$\tilde{x}_k$  : corresponde à aproximação do estado e é obtida por:

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (2.30)$$

$V$  : representa uma matriz Jacobiana da derivada parcial da função  $h$  em relação a  $v$  no passo  $k$  dada por:

$$V_{[i,j]}_k = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}} (\tilde{x}_k, 0) \quad (2.31)$$

$v$  : representa o ruído das medições.

$z_k$  : corresponde à medição, definida em  $z \in \mathfrak{R}^m$  dada por:

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (2.32)$$

$h$  : representa uma função não linear que relaciona o estado  $x_k$  com a medição  $z_k$ .

No rastreamento de órbitas de satélites à volta da Terra, o vetor de estado  $x_k$  é desconhecido. Este estado corresponde à posição do satélite no tempo  $k$  em relação a um sistema de coordenadas esféricas com origem no centro da Terra. Estas medições não podem ser realizadas diretamente, por isso são rastreadas por fontes externas que calculam a distância até o satélite em questão e os seus respetivos ângulos de rastreamento. Assim, é possível obter as medições  $z_k$ .

### II.3.4 - Limitações do Filtro de Kalman

Apesar da atual empregabilidade dos filtros de Kalman e dos seus bons resultados, estes apresentam algumas limitações.

Para a implementação do filtro discreto é necessário que o problema seja descrito através de um modelo linear e as incertezas a ele associado sejam brancas e gaussianas [26].

As limitações do filtro estendido ocorrem após as transformações da linearização do modelo, pois a distribuição (ou a densidade no caso contínuo) das variáveis aleatórias já não segue a conhecida distribuição normal, assim este filtro passa a ser apenas um estimador de estados *ad hoc* que aproxima, por linearização, a regra de Bayes [25].

### II.3.5 - Fusão Multissensorial de Dados

A fusão multissensorial de dados representa o conjunto de teorias, técnicas e ferramentas que visam a combinação de dados provenientes de vários sensores. Desta forma, o seu objetivo principal é combinar e melhorar a qualidade da informação disponível [27].

O conceito geral do processo de fusão é obter várias medições de diversas fontes e combina-las, de modo a que o resultado final apresente qualidades superiores ao que seria esperado se os dados fossem utilizados individualmente.

A maior dificuldade desta abordagem reside na escolha do processo mais adequado para a combinação de dados [27]. Nesta dissertação a fusão é realizada através do uso de um conjunto de dados que possui informação *a priori*, pois tendo em conta que a determinação de órbitas está inserida no âmbito estatístico, esta é a abordagem que apresenta melhores resultados.

O método generalizado de Millman (MGM) é a ferramenta mais adequada para combinar duas ou mais estimações (correlacionadas ou não) [28] e é apresentado de seguida.

Sendo  $N$  o número de estimativas locais de um vetor  $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$  onde  $n_x$  é um espaço dimensional Euclidiano e  $\hat{x}_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ , as matrizes de covariância do erro das estimações relacionam-se por [28]:

$$P_{ij} = cov(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \quad (2.33)$$

Com,  $\tilde{x}_i = x - \hat{x}_i$  e  $i, j = 1, \dots, N$

O objetivo deste método é encontrar uma estimativa linear ótima de  $x$  sob a forma:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^N c_i \hat{x}_i \quad (2.34)$$

$$\sum_{i=1}^N c_i = I_{n_x} \quad (2.35)$$

Onde,

$c_i$  é a matriz de peso constante e dimensões  $n_x \times n_x$ .

$I_{n_x}$  é uma matriz identidade com dimensão  $n_x$ .

Assim, é possível obter a matriz global da covariância do erro:

$$P = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i P_{ij} c_j^T \quad (2.36)$$

Através do MGM as matrizes  $c_i$  podem ser obtidas através da minimização do critério [28]:

$$J(c_1, c_2, \dots, c_N) = E \left( \left\| x - \sum_{i=1}^N c_i \hat{x}_i \right\|^2 \right) \quad (2.37)$$

Ao qual conduz para as seguintes equações lineares:

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i (P_{ij} - P_{iN}) + c_N (P_{Nj} - P_{NN}) = 0 \quad (2.38)$$

$$\sum_{i=1}^N c_i = I_{n_x} \quad (2.39)$$

Com,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$

É importante referir que as relações entre as expressões (2.34), (2.36), (2.38) e (2.39) representam o método generalizado de Millman para  $N > 2$ .

Nesta dissertação, são utilizados dois satélites geostacionários como fontes externas, ou seja,  $N = 2$ . Analisando este caso concreto, o método de Millman pode ser reescrito e simplificado da seguinte forma:

- Se as duas estimativas são correlacionadas entre si, o MGM é reduzido à fórmula de Bar-Shalom-Campo:

$$\hat{x} = c_1 \hat{x}_1 + c_2 \hat{x}_2 \quad (2.40)$$

$$c_1 = (P_{22} - P_{21})(P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})^{-1} \quad (2.41)$$

$$c_2 = (P_{11} - P_{12})(P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})^{-1} \quad (2.42)$$

- Se as duas estimativas não são correlacionadas, isto é,  $P_{12} = P_{21} = 0$  então:

$$\hat{x} = c_1 \hat{x}_1 + c_2 \hat{x}_2 \quad (2.43)$$

$$c_1 = P_{22}(P_{11} + P_{22})^{-1} \quad (2.44)$$

$$c_2 = P_{11}(P_{11} + P_{22})^{-1} \quad (2.45)$$

Dado um sistema estocástico linear discreto qualquer, definido por [28]:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gw_k \quad (2.46)$$

$$z_k^{(j)} = H^{(j)}x_k + v_k^{(j)} \quad (2.47)$$

Onde,

$F \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $H^{(j)} \in \mathfrak{R}^{n_z \times n_x}$  e  $G \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_w}$  são matrizes conhecidas.

$x_k \in \mathfrak{R}^{n_x}$  é o estado imensurável do sistema.

$z_k^{(j)} \in \mathfrak{R}^{n_z}$  são as medições provenientes do sensor  $j$  ( $j = 1, \dots, S$ ) no tempo  $k$ .

$w_k \in \mathfrak{R}^{n_w}$  e  $v_k^{(j)} \in \mathfrak{R}^{n_z}$  são os ruídos do estado e das medições, respetivamente. Estes ruídos seguem uma distribuição Gaussiana e branca, sendo mutuamente independentes e também independentes do estado inicial do sistema.

É possível encontrar a estimativa do estado do sistema  $x_k$  desde que as medições  $\mathcal{L}_Z$  sejam dadas.

$\mathcal{L}_Z$  é definido por:

$${}^l Z = [z_0, z_1, \dots, z_l] \quad (2.48)$$

Geralmente a estimação está sob a forma de uma função densidade de probabilidade condicionada  $p(x_k | {}^l Z)$  ou então sob a forma de dois momentos condicionados, a média  $\hat{x}_{k|l} = E(x_k | {}^l Z)$  e a matriz de covariância  $P_{k|l} = cov(x_k | {}^l Z)$ .

Portanto, a solução geral do problema de estimação é dada pelas relações recursivas funcionais conhecidas, tanto para a previsão ( $k > l$ ) e filtragem ( $k = l$ ) como para o alisamento ( $k < l$ ) [28].

Estas relações são resolvidas e obtidas através de um sistema linear Gaussiano.

Para o caso de um sensor, isto é,  $S=1$  tem-se:

- A filtragem;
- O alisamento:

### II.3.5.a) Filtragem

A filtragem ( $k=l$ ) é obtida através do filtro de Kalman e do método simplificado de Millman [28]:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.49)$$

O ganho de Kalman  $K_k$  pode ser interpretado como a fusão de duas estimativas, sendo estas:

1. A informação prévia (*a priori*)  $\hat{x}_{k|k-1}$ .
2. A estimativa de máxima probabilidade (maximum likelihood - ML) do estado  $\hat{x}_k^{ML}$ .

$$\hat{x}_k^{ML} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z_k \quad (2.50)$$

Onde,  $P_{ML} = (H^T R^{-1} H)^{-1}$  é matriz de covariância baseada apenas nas medições  $z_k$ .

Ao reescrever a equação (2.49) sob a forma do método de Millman, obtém-se:

$$\hat{x}_{k|k} = c_1 \hat{x}_1 + c_2 \hat{x}_2 \quad (2.51)$$

Sendo,

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_k^{ML}$$

$$c_1 = P_{k|k} P_{k|k-1}^{-1}$$

$$c_2 = P_{k|k} P_{ML}^{-1}$$

$$P_{k|k} = (P_{k|k}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}$$

### II.3.5.b) Alisamento

O alisamento ( $k < l$ ) ao contrário da filtragem, possui mais dados disponíveis. Portanto, a estimativa filtrada é alisada através de  ${}_{k+1}^l Z = [z_{k+1}, \dots, z_l]$ .

Estes dados são processados pela informação do filtro, obtidos no tempo passado com condição inicial zero [28].

Esta estimativa é dada por [28]:

$$\hat{x}_{k|l} = S_{k|l}^{-1} \hat{y}_{k|l} \quad (2.52)$$

Onde,

$S_{k|l} = P_{k|l}^{-1}$  e corresponde à matriz de precisão.

$\hat{y}_{k|l}$  é a estimativa proveniente da informação filtrada realizada no tempo passado.

Deste modo, as equações de fusão são:

$$K_k = P_{k|k} S_{k|l} (I_{n_x} + P_{k|k} S_{k|l})^{-1} \quad (2.53)$$

$$P_k = (I_{n_x} + K_k) P_{k|k} \quad (2.54)$$

$$\hat{x}_k = (I_{n_x} - K_k) \hat{x}_{k|k} + P_k \hat{y}_{k|l} \quad (2.55)$$

Nesta dissertação o método de Millman é utilizado para fundir a informação obtida pelos dois satélites geostacionários e daí resultar uma estimação da órbita LEO com melhores qualidades, fiabilidade, precisão e robustez.

# Capítulo III

## III.1 - Introdução

Neste capítulo as órbitas LEO e GEO serão determinadas, modeladas e simuladas com auxílio da ferramenta computacional, Matlab.

Como já referido nos capítulos anteriores, a filtragem de sinais foi feita através do filtro de Kalman estendido.

## III.2 - Determinação da Órbita do Satélite LEO

Para determinar a órbita do satélite LEO é necessário estabelecer primeiro a sua altitude, isto é, a distância da superfície da Terra até ao perigeu ( $h_p$ ) e apogeu ( $h_a$ ), que constituem os pontos mais próximo e afastado da órbita em relação ao corpo central (Terra), respetivamente.

Assumindo:

$$h_p = 300 \text{ km}$$

$$h_a = 850 \text{ km}$$

A figura seguinte é uma representação em 2D de alguns parâmetros necessários para os cálculos da determinação da órbita.

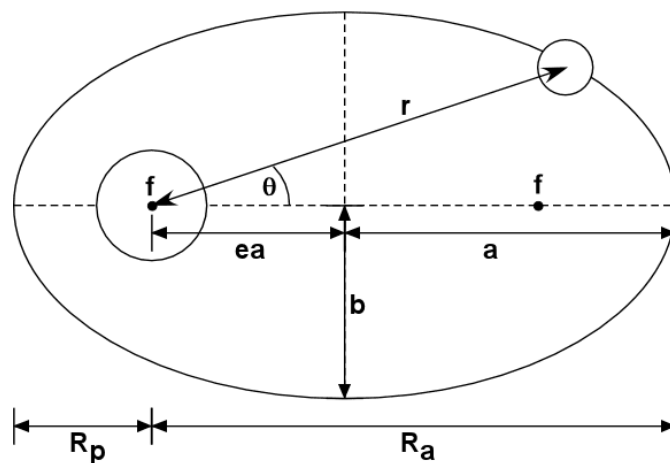


Figura III.1 - Órbita elíptica.

Sendo  $R_T = 6378$  km o raio da Terra, é possível calcular as seguintes distâncias:

$$r_p = R_T + h_p = 6378 + 300 = 6678 \text{ km} \quad (3.1)$$

$$r_a = R_T + h_a = 6378 + 850 = 7228 \text{ km} \quad (3.2)$$

Para uma órbita elíptica, a excentricidade ( $e$ ) deve pertencer ao intervalo  $[0,1]$ .

Dada por:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (3.3)$$

Ao substituir pelos valores anteriormente calculados, obtém-se:

$$e = \frac{7228 - 6678}{7228 + 6678} = 0,039551$$

Verifica-se que esta órbita cumpre o requisito da excentricidade.

Os restantes parâmetros foram calculados da seguinte forma:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{7228 + 6678}{2} = 6953 \text{ km} \quad (3.4)$$

$$b = \sqrt{r_a \times r_p} = \sqrt{7228 \times 6678} = 6947,56 \text{ km} \quad (3.5)$$

$$p = \frac{2 \times r_a \times r_p}{r_a + r_p} = 6942,12 \text{ km} \quad (3.6)$$

Ao reescrever  $p$  como:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.7)$$

Onde,

$\mu$  é o parâmetro gravitacional padrão da Terra, com um valor tabelado e constante de  $\mu_{\text{Terra}} = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$

$h$  é um parâmetro orbital. Substituindo a equação (3.7) pelos valores já calculados anteriormente, é possível obter o seu valor:

$$6942,12 = \frac{h^2}{398600} \Leftrightarrow h = 52603,52 \text{ km}^2/\text{s} \quad (3.8)$$

É de notar que este valor é constante ao longo da trajetória do satélite.

O seu período é dado por:

$$T = \frac{2A}{h} \quad (3.9)$$

Sendo,

$A = \pi \times a \times b$  a área da elipse. Substituindo tem-se:

$$A = \pi \times 6953 \times 6947,56 = 1,51759 \times 10^8 \text{ km}^2$$

$$\text{Logo, } T = \frac{2 \times 1,51759 \times 10^8}{52603,52} \cong 5769,92 \text{ segundos}$$

### III.3 - Equações da Dinâmica de Órbita

Considerando que o satélite move-se no plano equatorial da Terra, cujo centro corresponde à origem da órbita, as equações do movimento para as posições do satélite em coordenadas esféricas ( $r, \theta$ ) são:

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}(t)^2 - \frac{GM_e}{r(t)^2} + \frac{F_r(t)}{M_s} \quad (3.10)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{F_\theta(t)}{M_s r(t)} \quad (3.11)$$

Onde,

$M_e$ : massa da Terra;

$G$ : constante gravitacional da Terra;

$M_s$ : massa do satélite;

$F_r(t)$  e  $F_\theta(t)$ : são as forças exercidas sobre o satélite nas direcções  $r$  e  $\theta$ , respetivamente.

A órbita possui uma forma elíptica e é definida, em coordenadas esféricas, por:

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T}t \quad (3.12)$$

$$r(\theta(t)) = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos(\theta(t))} = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \quad (3.13)$$

Sendo,

T : o período do satélite, em segundos;

a : é um parâmetro orbital;

e : é a excentricidade da órbita,  $0 < e < 1$ .

Reescrevendo as equações anteriores em coordenadas cartesianas, no plano xy tem-se:

$$x(t) = r(\theta(t)).\cos(\theta(t)) + \xi_x(t) \quad (3.14)$$

$$y(t) = r(\theta(t)).\sin(\theta(t)) + \xi_y(t) \quad (3.15)$$

Onde,

$\xi_x(t)$  e  $\xi_y(t)$  correspondem ao ruído e perturbações de distribuição normal.

Contudo, por conveniência as equações do movimento são substituídas por um sistema equivalente de quatro equações diferenciais de primeira ordem, assim, considerando:

$$F_r(t) = 0 \quad (3.16)$$

$$F_\theta(t) = 0 \quad (3.17)$$

Tem-se:

$$x_1 := r(t) - \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

$$x_2 := \dot{r}(t)$$

$$\begin{aligned}
x_3 &:= \theta(t) - \left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\
x_4 &:= \dot{\theta}(t) - \frac{2\pi}{T}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Onde,

$x_3$  corresponde ao desvio do ângulo.

Desta forma, o sistema é descrito por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \left(x_1(t) + \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}\right) \cdot \left(x_4(t) + \frac{2\pi}{T}\right)^2 - \frac{GM_e}{\left(x_1(t) + \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}\right)^2} + \frac{F_r(t)}{M_s} \\ x_4(t) \\ -\frac{2x_2(t) \cdot \left(x_4(t) + \frac{2\pi}{T}\right)}{x_1(t) + \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}} + \frac{F_\theta(t)}{M_s \left(x_1(t) + \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}\right)} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Estas equações constituem um modelo estado-espaco não-linear com entradas e saídas.

A entrada de controlo é dada por:  $u = (F_r, F_\theta)^T$  e a saída por  $x_3$ .

Perante perturbações a variável de estado do sistema, no tempo  $t$  é dada por:

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

### III.4 - Determinação da Órbita do Satélite GEO

O satélite GEO possui uma posição fixa em relação à Terra. Assim, as suas coordenadas geocêntricas cartesianas foram assumidas como:

$$x_g = 0 \quad y_g = 0 \quad z_g = 42278 \text{ km}$$

Isto significa que a sua posição está fixa e a uma altitude de 42278 km do centro da Terra (assumindo que o valor do raio da Terra é 6378 km e a altitude da superfície terrestre é 35900 km). Este satélite está num plano normal ao plano orbital de LEO.

Contudo, se o referencial for considerado fixo com origem no centro da Terra, tal como acontece com o satélite LEO, as suas equações de movimento serão dadas em coordenadas esféricas por [29]:

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}(t)^2 - \frac{GM_e}{r(t)^2} + \frac{F_r(t)}{M_s} \quad (3.20)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)^2}{r(t)} + \frac{F_\theta(t)}{M_s r(t)} \quad (3.21)$$

A órbita geostacionária pretendida é dada por [29]:

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t \quad (3.22)$$

$$r(t) = R_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_e}{\Omega^2}} \quad (3.23)$$

$$F_r(t) = 0 \quad (3.24)$$

$$F_\theta(t) = 0 \quad (3.25)$$

Sendo,

$\Omega$  : a velocidade angular da Terra.

Substituindo as equações do movimento por um sistema equivalente de quatro equações diferenciais de primeira ordem, tem-se:

$$x_1 := r(t) - R_0$$

$$x_2 := \dot{r}(t)$$

$$x_3 := \theta(t) - (\theta_0 + \Omega t)$$

$$x_4 := \dot{\theta}(t) - \Omega \quad (3.26)$$

Desta forma, o sistema é descrito por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ (x_1(t) + R_0) \cdot (x_4(t) + \Omega)^2 - \frac{GM_e}{(x_1(t) + R_0)^2} + \frac{F_r(t)}{M_s} \\ x_4(t) \\ -\frac{2x_2(t) \cdot (x_4(t) + \Omega)}{x_1(t) + R_0} + \frac{F_\theta(t)}{M_s(x_1(t) + R_0)} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Estas equações constituem um modelo estado-espço não-linear com entradas e saídas.

A entrada de controlo é dada por:  $u = (F_r, F_\theta)^T$  e a saída por  $x_3$ .

A órbita geoestacionária corresponde à seguinte solução de equilíbrio:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$F_r(t) = 0$$

$$F_\theta(t) = 0$$

### III.5 - Modelação e Simulação do Problema

A determinação da órbita do satélite LEO foi efetuada através da informação obtida a partir de dois satélites GEO's, posicionados num plano perpendicular ao seu plano orbital, a uma distância de 42278 km da origem (centro da Terra). Estes satélites estão em faces opostas da órbita, como demonstrado na figura seguinte:

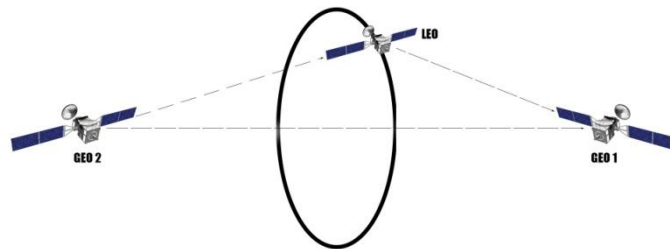


Figura III.2 - Ilustração da órbita LEO e dos satélites GEO.

A órbita LEO foi colocada no plano  $xy$  do referencial. A simulação da sua trajetória e das respetivas posições dos satélites GEO's foi realizada com base nas equações expostas anteriormente e com o auxílio da ferramenta computacional: Matlab.

Assim, utilizando os valores apresentados no capítulo III.2 em conjunto com as equações (3.12) e (3.13), foi possível definir a órbita LEO em função do tempo. Em coordenadas esféricas e para este referencial, tem-se:

$$\theta_{leo}(t) = \frac{2\pi}{T}t \tag{3.12}$$

$$r_{leo}(\theta(t)) = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos(\theta_{leo}(t))} \tag{3.13}$$

$$\phi_{leo} = 0$$

Convertendo em coordenadas cartesianas:

$$x_{leo} = r_{leo} \cos\phi_{leo} \sin\theta_{leo} \quad (A.1)$$

$$y_{leo} = r_{leo} \cos\phi_{leo} \cos\theta_{leo} \quad (A.2)$$

$$z_{leo} = r_{leo} \sin\phi_{leo} \quad (A.3)$$

Estas equações são apresentadas mais detalhadamente no anexo A desta dissertação, mas com uma nomenclatura diferente para as coordenadas esféricas e em [30].

As coordenadas cartesianas dos satélites GEO's são:

$$x_{geo\ 1} = 0 \quad y_{geo\ 1} = 0 \quad z_{geo\ 1} = 42278 \text{ km}$$

$$x_{geo\ 2} = 0 \quad y_{geo\ 2} = 0 \quad z_{geo\ 2} = -42278 \text{ km}$$

Na figura seguinte apresenta-se uma ilustração gráfica deste modelo, em coordenadas cartesianas, a sua origem corresponde ao centro da Terra:

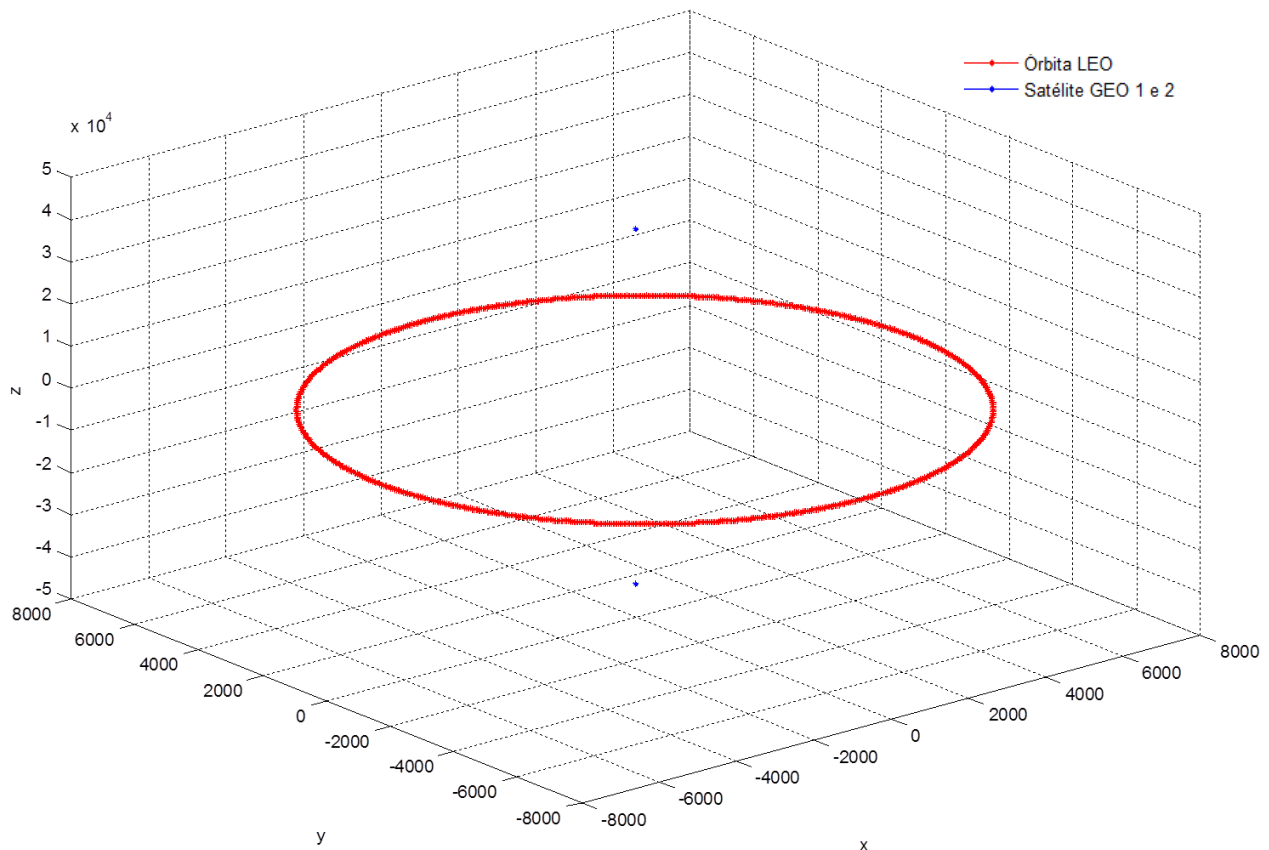


Figura III.3 - Representação 3D da órbita LEO e satélites GEO.

A trajetória a vermelho representa a órbita elíptica de LEO, sendo o seu eixo maior igual a 13906 km e o seu eixo menor 13895 km.

Como os satélites GEO's estão fixos em relação a este referencial, as suas posições são representadas por pontos, neste caso, assinalados a azul sendo respetivamente (0,0,42278) e (0,0,-42278).

Após estabelecer todas as posições, é necessário efetuar as medições com os satélites geostacionários e posteriormente analisa-las. Este procedimento é idêntico para ambos os satélites GEO's, por isso, a simulação foi realizada apenas para um deles.

É importante referir, que para tal é necessário situar o referencial no centro do satélite GEO, ou seja:

$$x_{geo} = 0 ; \quad y_{geo} = 0 ; \quad z_{geo} = 0$$

Desta forma, as novas coordenadas do satélite LEO são dadas por  $(x, y, z)$ . Sendo:

$$x = R_0 ; \quad y = y_{leo} - y_{geo} ; \quad z = z_{leo} - z_{geo} ;$$

Onde,

$$R_0 = 42278$$

O gráfico da figura III.4 ilustra a medição de trajetória real, isto é, sem ruído, realizada pelo satélite GEO em coordenadas cartesianas.

Esta órbita está no plano  $yz$  e a coordenada  $x$  é igual a 42278. Este valor representa a distância entre o satélite GEO e o plano orbital de LEO. A sua órbita possui um eixo maior igual a 13906 km e um eixo menor de 13895 km, o que permite validar as medições efetuadas pelo satélite GEO, uma vez que são idênticas às dimensões calculadas e estipuladas inicialmente.

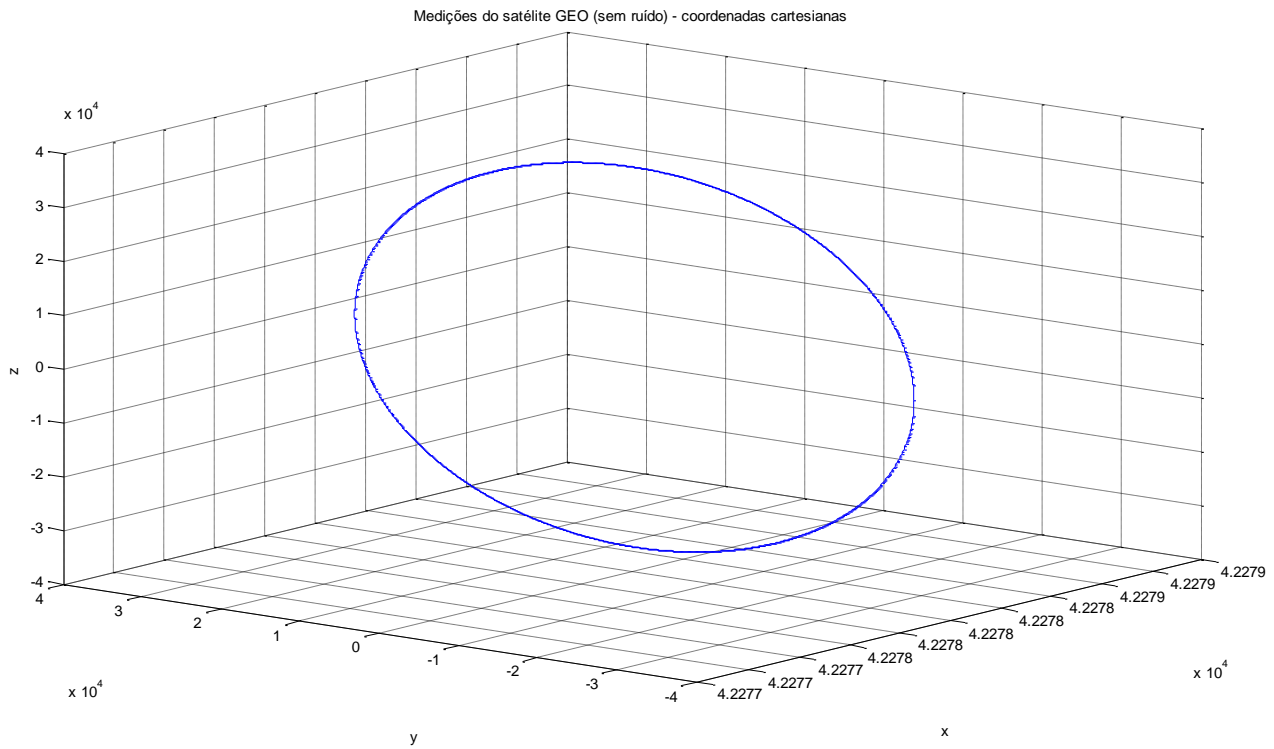


Figura III.4 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas cartesianas).

A mesma representação em coordenadas esféricas:

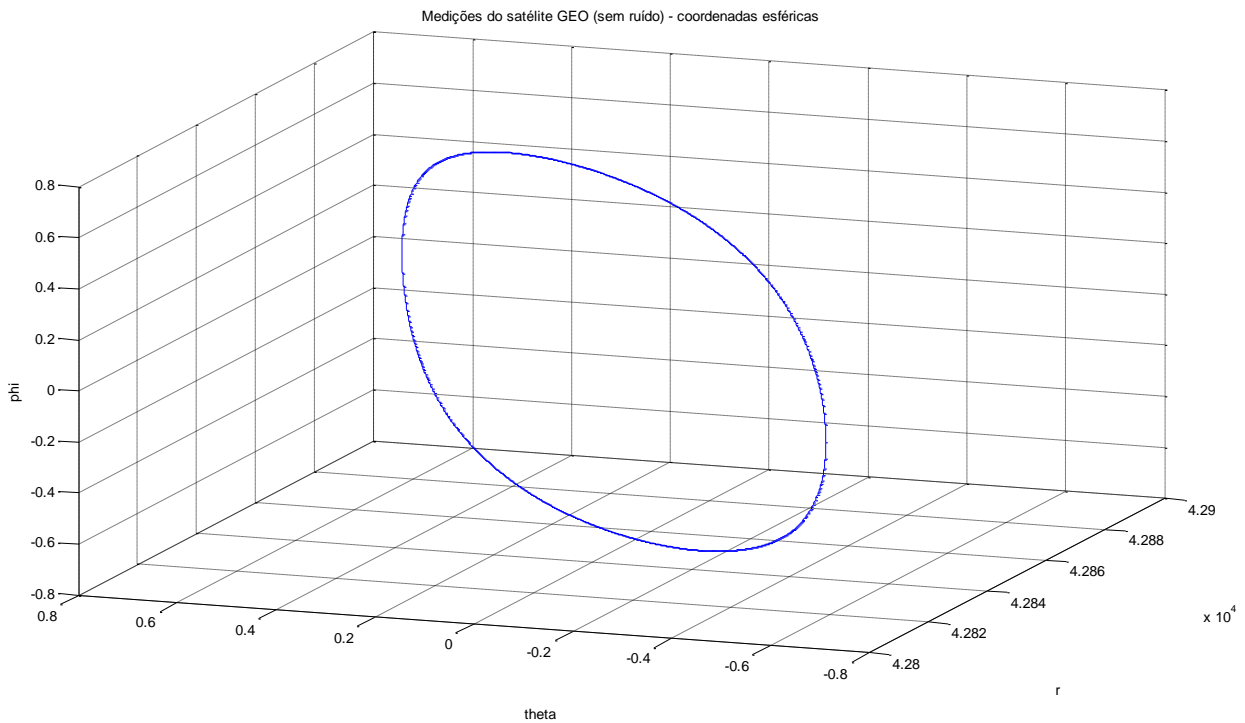


Figura III.5 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas esféricas).

No gráfico da figura III.5 a coordenada  $r$  corresponde a uma distância e varia ao longo do tempo. Esta distância refere-se à hipotenusa do triângulo formado entre o plano da órbita LEO e a distância  $R_0$ , ou seja:

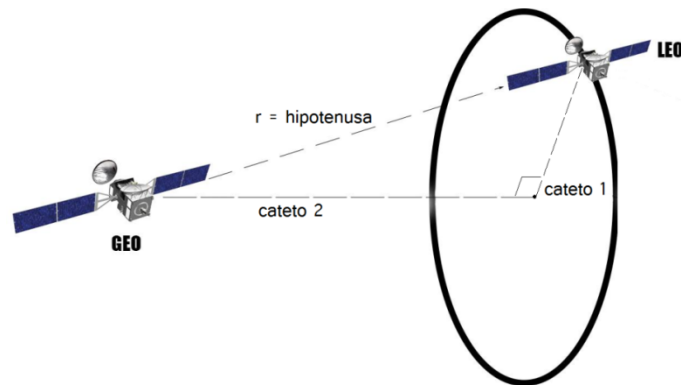


Figura III.6 - Representação da distância  $r$ .

Na figura III.6 o cateto 2 é igual a  $R_0$  e o cateto 1 varia consoante a posição de LEO. Os seus valores foram obtidos através da equação (3.13), esta variação influencia diretamente a distância  $r$ , daí a conseqüente variação presente no gráfico da figura III.5. Ainda em relação a este gráfico, as coordenadas  $\theta$  e  $\phi$  correspondem ao azimute e à elevação, respetivamente.

Como mencionado anteriormente todas as medições estão sujeitas a ruídos e incertezas e é importante tê-los em conta e adicionar aos valores medidos para que os resultados sejam mais realísticos.

O ruído associado a todas as medições deste processo foi assumido e segue uma distribuição normal, dada por  $N \sim (0,15)$ .

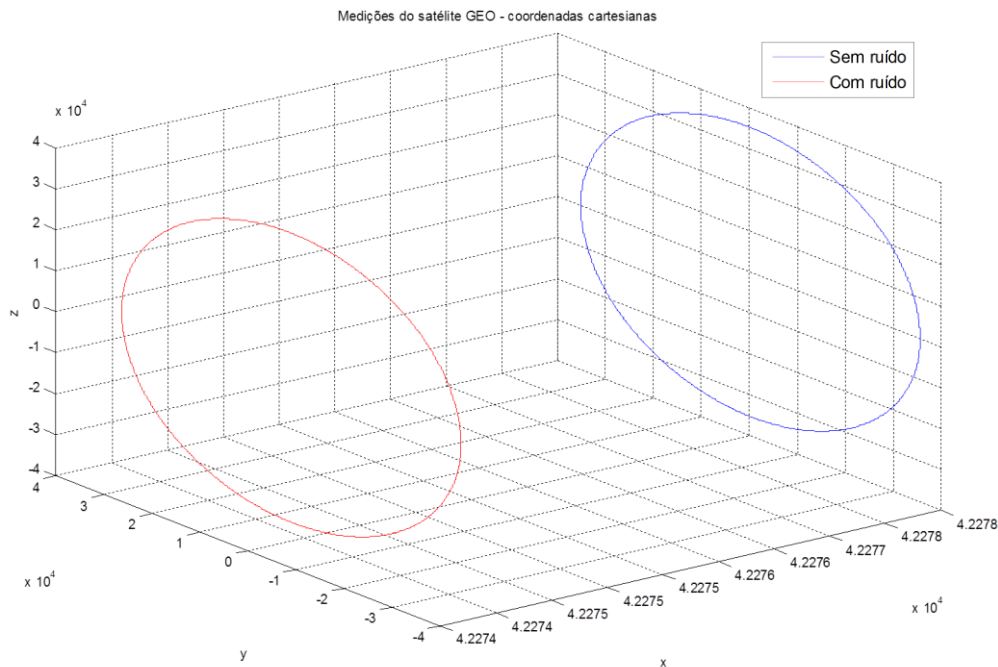


Figura III.7 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas cartesianas).

No gráfico anterior, a trajetória a azul corresponde à órbita LEO sem ruído, isto é, à sua órbita real; e a trajetória a vermelho corresponde às medições dessa órbita com ruído associado. Se tivéssemos tido em conta as medições a vermelho, o satélite teria sido posicionado com um erro de 4,2619 km (4 km aproximadamente). Este erro apesar de ser aleatório foi assumido como constante e igual para todas as coordenadas, por isso é invariante ao longo do tempo como demonstrado nos gráficos da figura III.8.

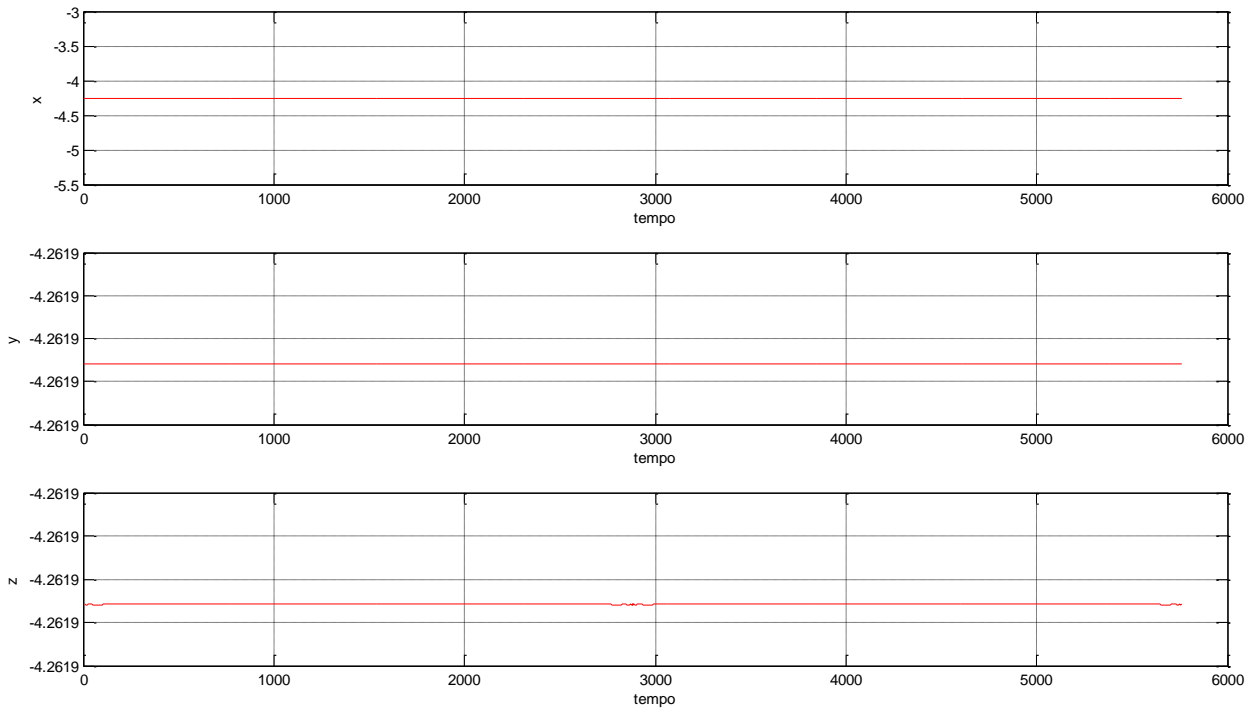


Figura III.8 - Erro presente nas medições.

Verifica-se assim que a presença de ruído influencia negativamente o resultado, distanciando-o da realidade. Tal como acontece com as medições em coordenadas cartesianas, as coordenadas esféricas são sujeitas às mesmas incertezas, originando as seguintes alterações:

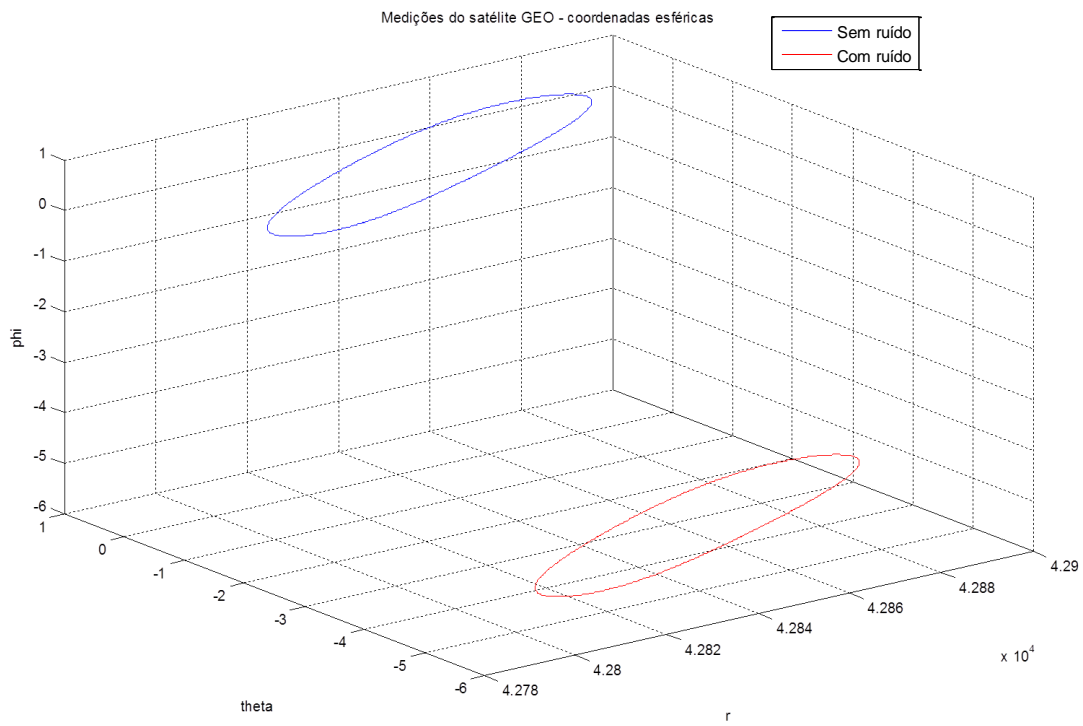


Figura III.9 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas).

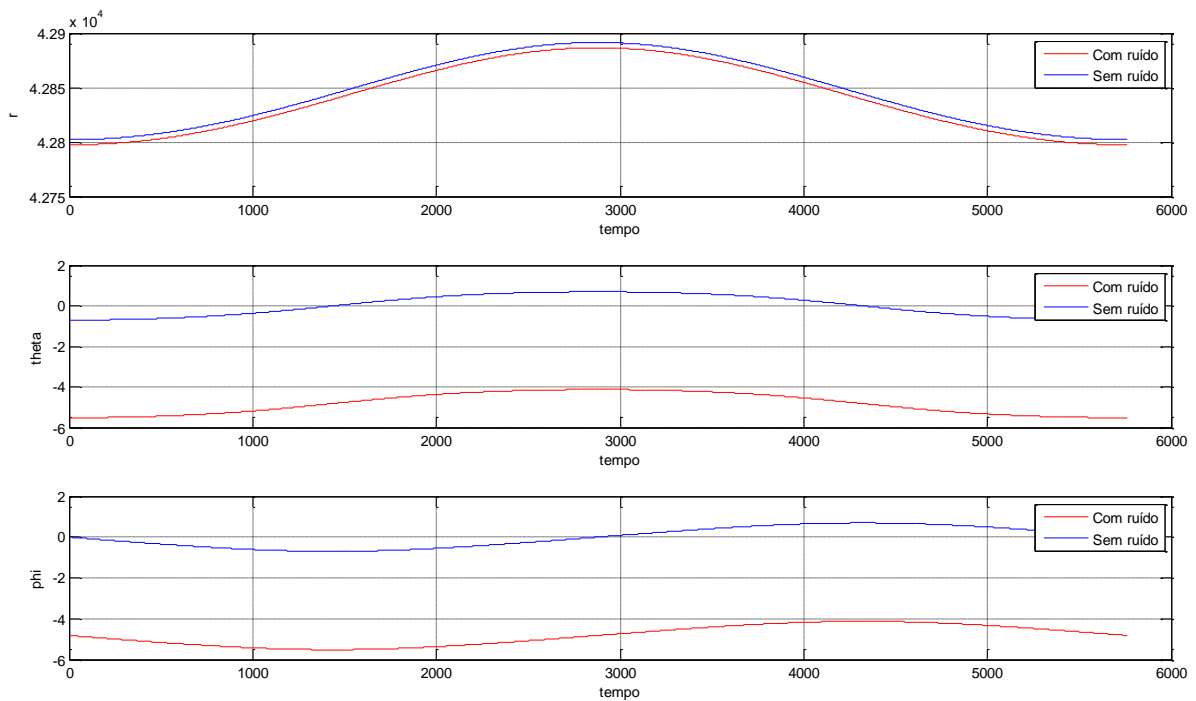


Figura III.10 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas) em função do tempo.

No gráfico da figura III.10 as coordenadas esféricas estão representadas em função do tempo. Tal como anteriormente, a trajetória a azul representa as medições sem ruído e a vermelho com ruído. A diferença é evidente e é importante tê-la em conta para que o modelo simulado seja realístico.

Os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  possuem uma alteração de aproximadamente 5 graus. O valor é igual para ambos, pois como anteriormente mencionado, o ruído associado é igual e constante ao longo do tempo e para ambas as coordenadas, por isso, a variação é sempre a mesma.

A coordenada  $r$  apesar de possuir o mesmo erro, apresenta uma variação de diferente valor. Isto acontece por referir-se a uma distância e conseqüentemente possuir valores de grandezas superiores, daí verifica-se que influência gerada sobre esta coordenada é diferente perante o mesmo erro.

Para combater este problema e garantir que o satélite é posicionado corretamente, é necessário implementar um filtro. Neste caso foi utilizado o filtro de Kalman estendido (apresentado no capítulo II), dado que este é um sistema dinâmico definido por equações não lineares, expressas por [25] [31]:

$$x_k = f(X) + w \quad (3.28)$$

$$z_k = h(X) + v \quad (3.29)$$

Sendo,

$f(X)$  em função das coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ ;

$h(X)$  em função das coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ ;

$w$  e  $v$  são o ruído presente com uma distribuição normal:  $N \sim (0,15)$ .

O primeiro passo da aplicação do FKE é a linearização das equações anteriores, sendo respetivamente [25]:

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1} \quad (3.30)$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k \quad (3.31)$$

Os parâmetros das equações (3.30) e (3.31) foram descritos no capítulo II.3.3b) desta dissertação.

Os princípios geométricos que permitem mapear  $\mathbf{z}_k$  através de  $\mathbf{x}_k$  são incorporados na matriz  $\mathbf{H}_k$ . A matriz  $\mathbf{A}_k$  determina como a posição do satélite varia ao longo do tempo, tendo em conta as leis físicas que influenciam os corpos em órbita. A matriz  $\mathbf{W}_k$  permite que haja desvios dessas leis devido a fatores como a não uniformidade do campo gravitacional da Terra e entre outros.

A representação gráfica de  $x_k$  e  $z_k$  é apresentada de seguida. Estes gráficos ilustram o modelo linearizado da órbita LEO.

A linearização é um passo muito importante, pois permite que o filtro consiga beneficiar melhor da informação *a priori* disponível, tanto a informação proveniente da dinâmica do sistema e das estatísticas do ruído como também das medições realizadas durante a operação. Tudo isto permite obter *feedbacks* ótimos, o que proporciona controladores com respostas otimizadas. Toda esta informação é posteriormente traduzida para um sinal de controlo.

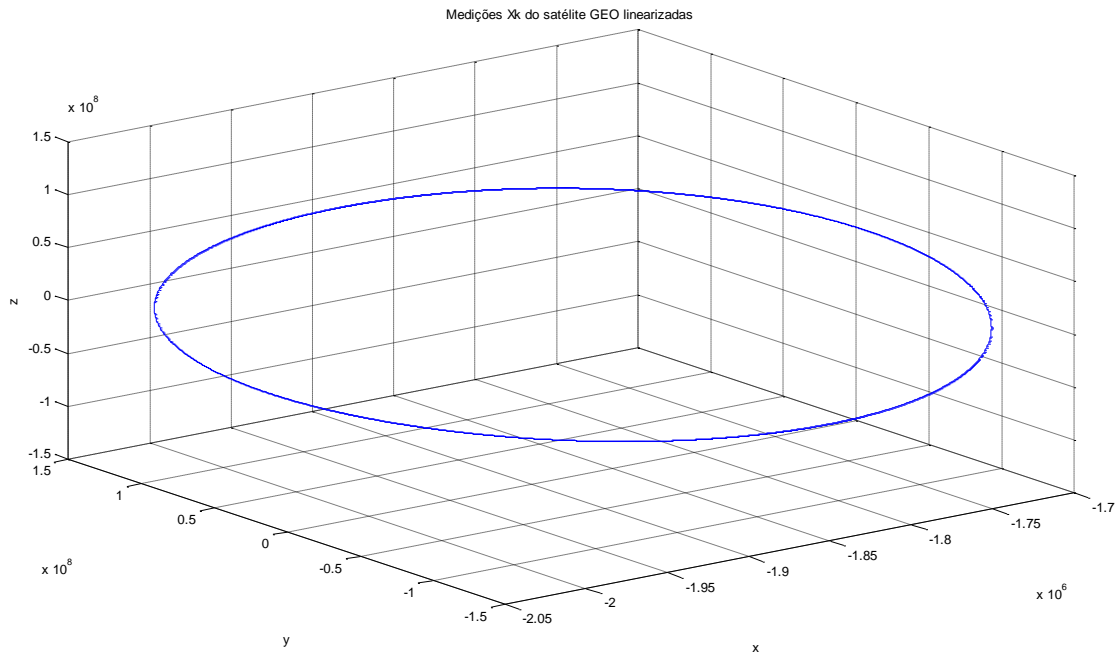


Figura III.11 - Representação da matriz  $x_k$  (linearizada).

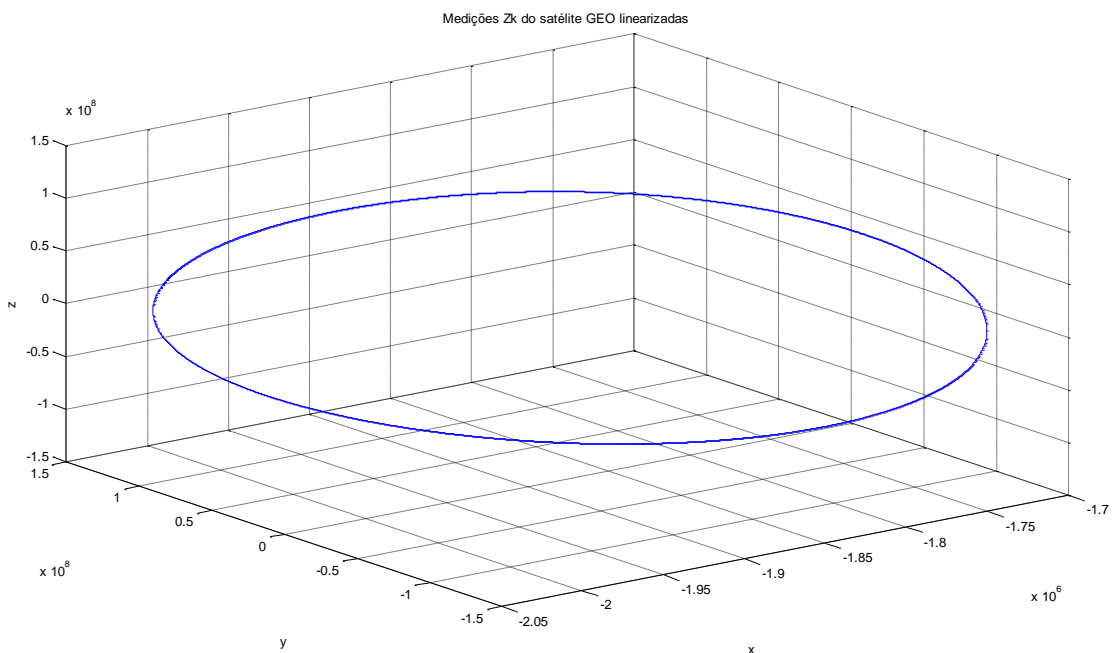


Figura III.12 - Representação da matriz  $z_k$  (linearizada).

Após a linearização, é possível implementar o FKE conforme as equações (descritas no capítulo II.3.3b):

- Equações *time update*:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_k^T \quad (2.23)$$

- Equações *measurement update*:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T)^{-1} \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (z_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.28)$$

Como, neste caso, o sistema simulado não possui controlador, o parâmetro  $\mathbf{u}_k$  da equação (2.22) é nulo.

É importante notar e reforçar o facto de que o filtro é aplicado sobre o modelo linearizado. Por isso, a sua correta modelação é de extrema relevância.

O gráfico seguinte ilustra a trajetória filtrada e a real. Novamente, a trajetória a azul representa a órbita real e a vermelho as medições obtidas pelo satélite GEO após a aplicação do filtro:

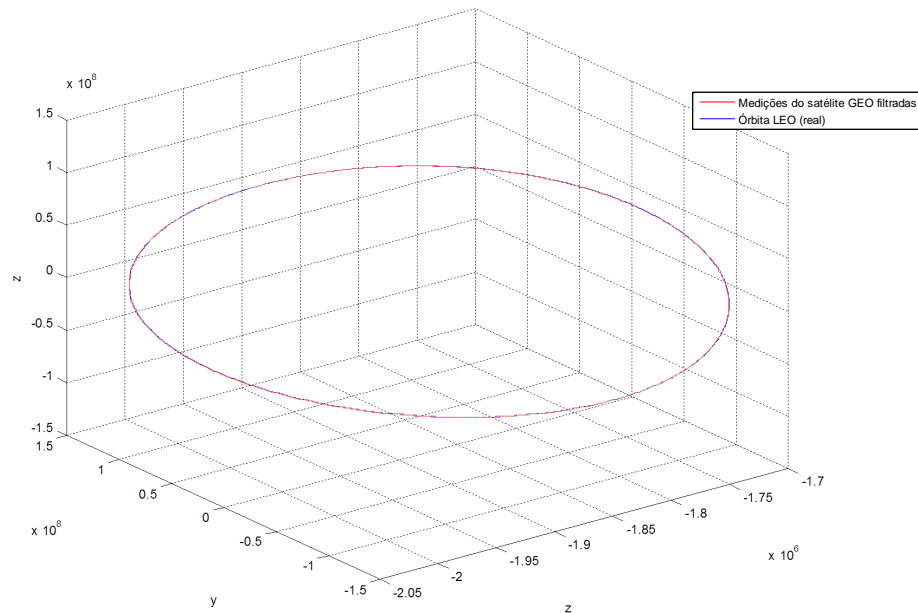


Figura III.13 - Órbita real e órbita filtrada.

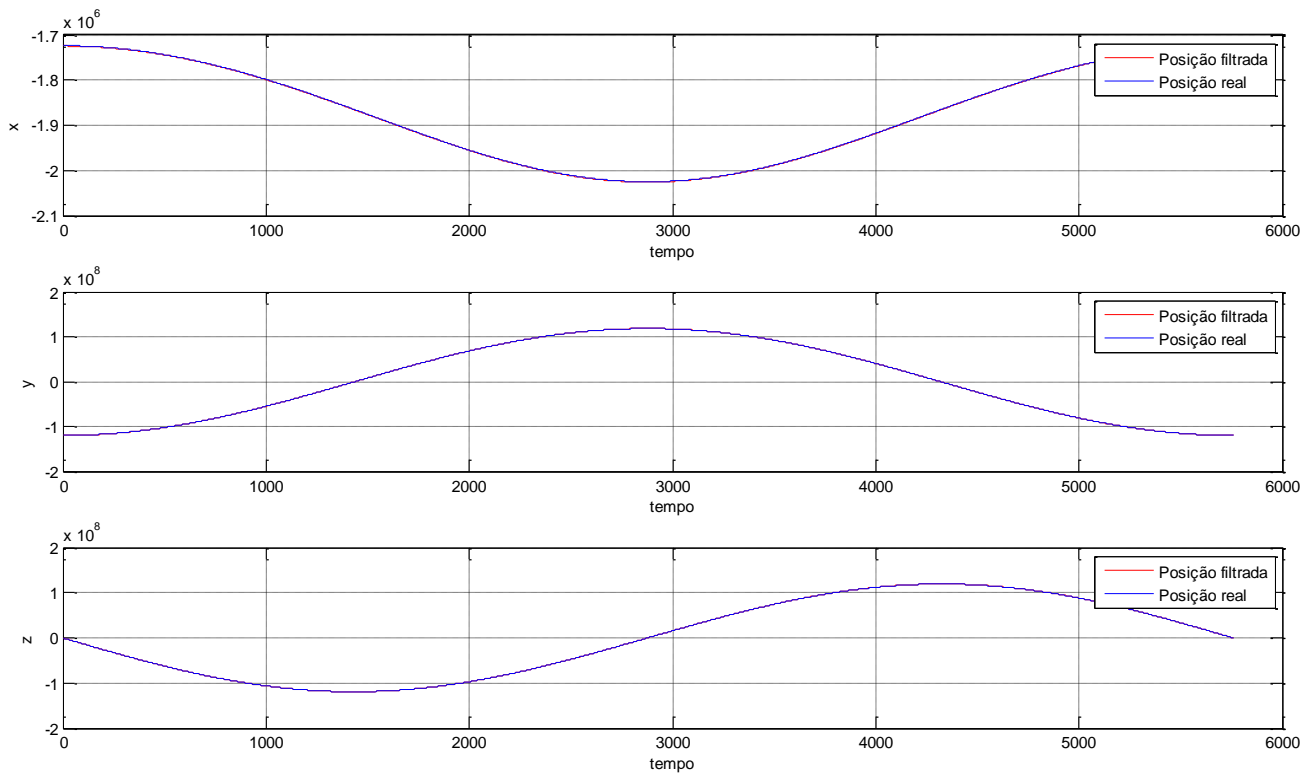


Figura III.14 - Representação gráfica das coordenadas em função do tempo (filtradas e reais).

A figura III.14 ilustra a variação das coordenadas cartesianas em função do tempo, onde os valores a azul representam a trajetória real e a vermelho a trajetória filtrada.

Pela análise dos gráficos verifica-se que após a aplicação do filtro, os resultados obtidos aproximavam-se de uma forma bastante satisfatória dos valores reais.

O ruído presente nas medições é praticamente eliminado, sendo até difícil de diferenciar nos gráficos os valores filtrados dos valores reais, o que é bastante satisfatório.

Deste modo, é possível afirmar que a aplicação do filtro diminui ou praticamente anula o problema da existência de ruído e incertezas, cumprindo assim a sua função e permitindo que a órbita de um satélite LEO possa ser medida e controlada através dos satélites geostacionários.

Portanto, a implementação dos filtros permite obter dados fiáveis e com um grau de precisão elevado, tornando a sua utilização necessária e indispensável.

Após a realização das filtrações, procedeu-se à fusão das medições realizadas por ambos os satélites geostacionários.

Tendo em conta que as estimativas efetuadas pelos satélites GEO não se correlacionam, ou seja, são independentes, aplicou-se as equações descritas no capítulo II.3.5 desta dissertação:

$$\hat{x} = c_1 \hat{x}_1 + c_2 \hat{x}_2 \quad (2.43)$$

$$c_1 = P_{22}(P_{11} + P_{22})^{-1} \quad (2.44)$$

$$c_2 = P_{11}(P_{11} + P_{22})^{-1} \quad (2.45)$$

Desta forma foi possível obter a órbita resultante da fusão. O gráfico da figura seguinte representa as três estimativas, isto é, a estimativa do GEO 1, GEO 2 e a sua fusão:

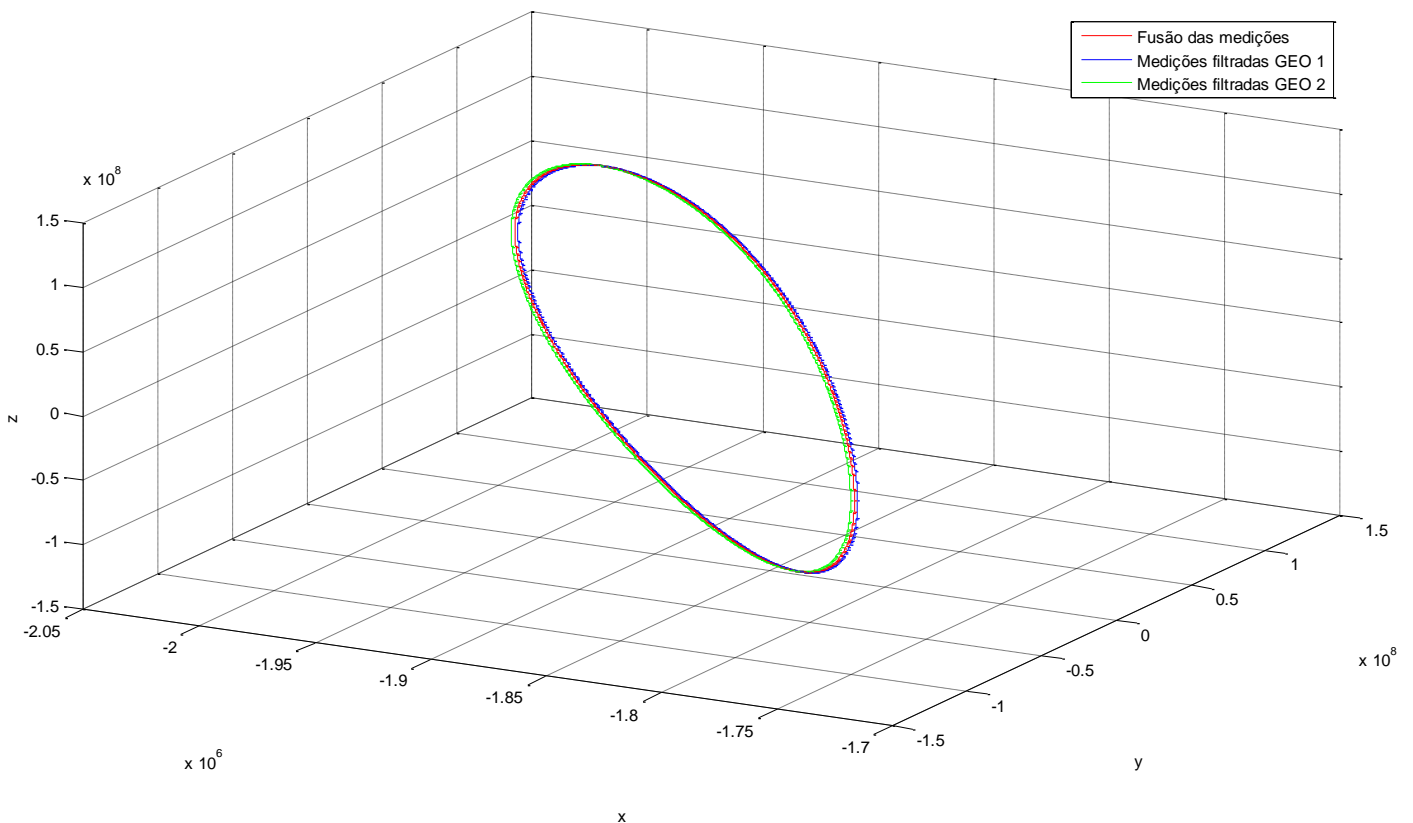


Figura III.15 - Representação das três órbitas estimadas.

A trajetória a vermelho representa a órbita que resultou da fusão de informação; a azul a trajetória medida pelo satélite GEO 1 e a verde a trajetória medida pelo satélite GEO 2.

É importante referir que o modelo orbital apresentado corresponde ao linearizado.

Por observação da figura III.15 é possível verificar que obtém-se uma estimativa mais precisa e robusta com a fusão de informação. Esta combinação de dados foi realizada com as medições já filtradas o que também contribui para o aumento da sua precisão.

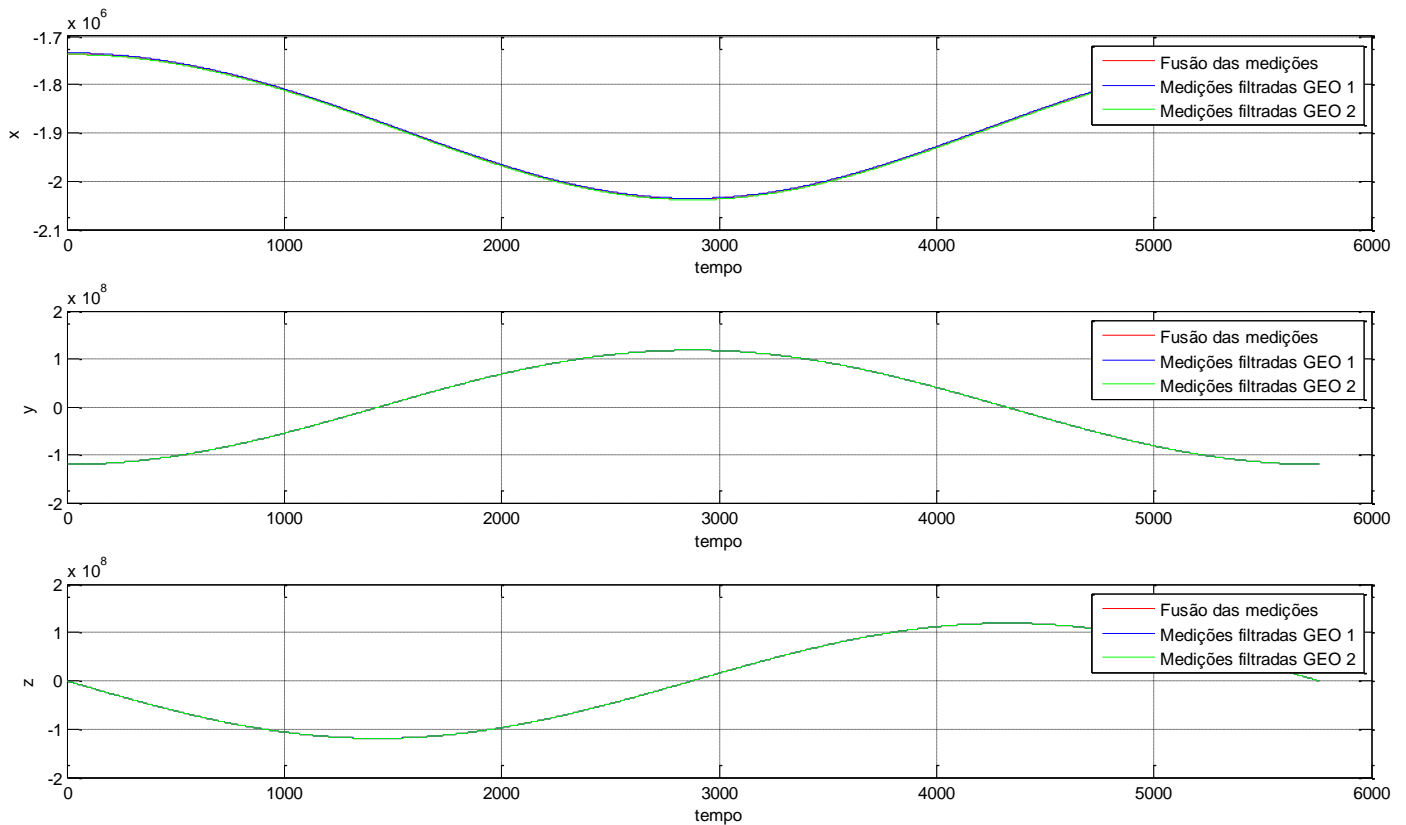


Figura III.16 - Representação das coordenadas das órbitas estimadas em função do tempo.

A figura III.16 representa a variação das coordenadas em função do tempo. É possível constatar que a coordenada que apresenta maior diferença entre as medições realizadas pelos satélites geostacionários é a coordenada x, mas a fusão da informação eliminou este problema. Novamente, conclui-se que a órbita estimada pelo método de Millman apresenta superioridade na sua robustez e precisão.

As coordenadas y e z apresentam estimativas praticamente idênticas, o que é bastante satisfatório. Assim, verifica-se que a aplicação do filtro é suficiente para obter uma boa estimativa, contudo em medições mais críticas onde a influência do ruído é mais acentuada (como no caso da coordenada x), a aplicação de um método de fusão de informação torna-se necessário.

# Capítulo IV

## IV.1 - Conclusão

Neste trabalho estimou-se de forma robusta a órbita de um satélite LEO com base em medições realizadas por dois satélites GEO's.

Para que a simulação efetuada se aproximasse das aplicações reais, a presença de ruídos e incertezas foram tidos em conta, pois a sua existência é inevitável e encontra-se em todos os instrumentos, métodos, cálculos e conseqüentemente nos valores obtidos. Atualmente existem muitos métodos para superar este problema, contudo, neste estudo foi selecionado o filtro de Kalman estendido, principalmente pela sua capacidade de aplicação em diversas áreas e pelas suas respostas rápidas e eficientes que o tornam apto e o mais adequado para aplicações em tempo-real. Tendo em conta estas características e a dinâmica do sistema em estudo, este foi o método moderno mais apelativo e eficiente.

Através das simulações realizadas, verificou-se que a ausência de filtros ou a sua incorreta implementação é o suficiente para posicionar o satélite de forma errada, comprometendo o seu desempenho, controlo, estabilidade e missão. Contudo, quando aplicado corretamente permite obter resultados fiáveis e satisfatórios, onde a presença de ruído é praticamente inexistente. Durante o processo de simulação o filtro não mostrou nenhum sinal de divergência ou degradação, o que permite mais uma vez constatar o seu bom desempenho.

Concluiu-se também que os satélites geostacionários são uma fonte externa de medições que deve ser tida em conta perante a problemática da determinação de órbitas, pois o seu desempenho é positivo e permite um aumento na precisão do controlo das trajetórias de satélites posicionados em altitude inferiores.

Constatou-se que perante aplicações ou missões mais críticas onde a precisão e robustez são requisitos imprescindíveis, o método de fusão de informação torna-se necessário.

Após a realização das simulações, verificou-se que o método de Millman apresenta melhores qualidades face à aplicação das medições individualmente, proporcionando resultados mais fiáveis, robustos, precisos e exatos. Estas características são importantes para que haja um maior controlo e estabilidade sobre órbita LEO.

Todos os resultados apresentados nesta dissertação foram influenciados pelos valores assumidos, tais como, a distribuição normal do ruído. Por isso, a sua alteração irá gerar resultados diferentes.

Em trabalhos futuros, seria interessante variar os valores da distribuição normal de forma a obter-se uma estimação mais precisa e matrizes de covariância mais realísticas. Seria também interessante variar estas matrizes em cada passo. Estas possibilidades implicam um processo de filtragem mais complexo e maior tempo de resposta contudo, poderá apresentar melhores resultados.

Outra indicação para um possível trabalho futuro seria a utilização de dados reais em vez de medições simuladas.

## Bibliografia

- [1] Vetter, J. R. 2007, Johns Hopkins APL Technical Digest, Volume 27, Number 3, p. 239-252.
- [2] Norton, Maxwell, *Spacecraft Navigation and Guidance*, Advances in Industrial Control Series, Springer-Verlag London Limited, Great Britain, 1998.
- [3] Wiesel, William, E., *Spaceflight Dynamics*, 2nd ed., Irwin/McGraw-Hill Companies Inc., New York, NY, 1997.
- [4] Vallado, David A., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, Space Technology Series ed. Wiley J. Larson, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 1997.
- [5] Sorenson, H. W., "Least-squares estimation: from Gauss to Kalman," IEEE Spectrum, Vol. 7, July 1970, pp. 63-68.
- [6] Tapley, Byron D., Schutz, Bob E., Born, George H., *Statistical Orbit Determination*, Elsevier Academic Press, New York, NY, 2004.
- [7] Charles, Michael, "Satellite Communications. CSC490: Wireless Networking", [S.I.]. Disponível na Internet em: <<http://www.slideshare.net/bingoplayer/satellite-powerpoint-18880491>> Consultado a Fevereiro de 2014.
- [8] Serviços de Telecomunicações, "Comunicação por Satélite". Disponível na Internet em: <[http://www.estig.ipbeja.pt/~lmgst/st/misc/st\\_12.pdf](http://www.estig.ipbeja.pt/~lmgst/st/misc/st_12.pdf)>. [Consultado a Fevereiro de 2014].
- [9] Caglar, Huseyin (General Manager, Globalstar Avrasya A.S.), Advantages of LEO Satellite Communication Systems During Disasters, *Regional Joint Conference on "Disaster: Relief and Management -International Cooperation & Role of ICT"*, Sheraton Al Montazah Hotel, Alexandria, Egypt, 14 -17 April 2007. Disponível na internet em: <http://ituarabic.org/2007/Disaster-Relief/FinalDocs/3rd%20Day/SessionXII/Doc58-Globalstar.pdf> [Consultado a Fevereiro de 2014]
- [10] Camara, Lucas R. R., "Análise de Interferência entre Satélites Geo-Estacionários", Dissertação de mestrado da Escola de Engenharia, Departamento de Electrónica e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2006.
- [11] Faculdade de Ciências e Tecnologia, "Redes Satélites", [S.I.], Universidade do Algarve. Disponível na internet em: < <http://w3.ualg.pt/~bamine/RedesSat1.pdf>> [Consultado a Fevereiro de 2014]

[12] Redding, Christopher, Overview of LEO Satellite Systems, *International Symposium on Advanced Radio Technologies*, Institute for Telecommunication Sciences, National Telecommunications and Information Administration, Boulder, CO, 1999. Disponível na internet em < [http://www.its.blrdoc.gov/media/30335/red\\_s.pdf](http://www.its.blrdoc.gov/media/30335/red_s.pdf)> [ Consultado em Fevereiro de 2014].

[13] Polaris Project: *Evening Star*, Iowa State University. Disponível na Internet em < [http://www.polaris.iastate.edu/EveningStar/Unit4/unit4\\_sub3.htm](http://www.polaris.iastate.edu/EveningStar/Unit4/unit4_sub3.htm)> [Consultado a Fevereiro de 2014].

[14] <[http://www.sqa.org.uk/e-learning/NetTechDC01CCD/page\\_35.htm](http://www.sqa.org.uk/e-learning/NetTechDC01CCD/page_35.htm)> [Consultado a Fevereiro de 2014]

[15] NASA *Orbital Debris Program Office*. (2009, July). Orbital debris frequently asked questions. Accessed September 11, 2009. Disponível na Internet em < <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=40173>> [Consultado a Fevereiro de 2014].

[16] <<http://www.nasa.gov/>> [Consultado a Fevereiro de 2014].

[17] Vermillion, J. e Jimenes, F. (1997). Low Earth Orbit Satellites. Disponível na internet em < <http://www.science.gov/index.html>> [Consultado em Fevereiro de 2014].

[18] Bousson, K., “Princípios do Sistema GPS”, Departamento da Ciências Aeroespaciais, Universidade da Beira Interior, 2013.

[19] <[http://www.cfa.harvard.edu/space\\_geodesy/ATLAS/gps.html](http://www.cfa.harvard.edu/space_geodesy/ATLAS/gps.html)> [Consultado a Fevereiro de 2014].

[20] < <http://www.gps.gov/>> [Consultado a Fevereiro de 2014].

[21] < <http://dsp-fpga.com/article-id/?82>> [Consultado em Março de 2014].

[22] AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics), doc. “Space Systems - Orbit Determination and Estimation - Process for Describing Techniques”, 2010. Documento pode ser encontrado em:

<[https://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CDgQFjAB&url=http%3A%2F%2Faiaa.kavi.com%2Fapps%2Fgroup\\_public%2Fdownload.php%2F3171%2FCD%25201123%2520Orbit%2520Determination%2520and%2520Estimation%2520Final.doc&ei=rRAwU6r1AoWnhAfR7oHoAQ&usg=AFQjCNHfyQ\\_3lcmjv9are-jABj3rke\\_nmQ&bvm=bv.62922401,d.bGQ](https://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CDgQFjAB&url=http%3A%2F%2Faiaa.kavi.com%2Fapps%2Fgroup_public%2Fdownload.php%2F3171%2FCD%25201123%2520Orbit%2520Determination%2520and%2520Estimation%2520Final.doc&ei=rRAwU6r1AoWnhAfR7oHoAQ&usg=AFQjCNHfyQ_3lcmjv9are-jABj3rke_nmQ&bvm=bv.62922401,d.bGQ)> [Consultado a Fevereiro de 2014].

- [23] Pardal, Paula. “*Determinação de Órbita em Tempo Real Através de Filtro não Linear de Kalman Sigma- Ponto*”, Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, INPE São José dos Campos, 2011.
- [24] Hobbs, David. Bohn, Preben. “Precise Orbit Determination for Low Earth Orbit Satellites”, Terma A/S, Space, Vasekaer 12, 2730 Herlev, Denmark. Disponível na internet em:  
<<http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=589087&fileOId=748400>> [Consultado a Fevereiro de 2014]
- [25] Welch, Greg. Bishop, Gary. “*An Introduction to the Kalman Filter*”, Course 8, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, Champel Hill, NC 27599-3175, Siggraph 2001.
- [26] Maybeck, Peter S., *Stochastic models, estimation and control*, volume 1, 1979.
- [27] Mitchell, H.B., *Multi-Sensor Data Fusion - An Introduction*, cap. 9.7, páginas 151-153 Springer, Berlin, 2007.
- [28] Shin, Vladimir et al, “*Generalized Millman’s formula and its application for estimation problems*”, Department of Mechatronics, Gwangju Institute of Science and Technology, Republic of Korea, 15 May 2005.
- [29] Trentelman, Harry L. et al, “*Control theory for linear systems*”, capítulo I, May 15, 2002.
- [30] Lin, Chih-Min., Mon, Yi-Jen, “*Improved Kalman Filter Design for Three-Dimensional Radar Tracking*”, Department of Electrical Engineering, Yuan-Ze University, Taiwan, Republic of China.
- [31] Dressler, Robert M., Tabak, Daniel., “*Satellite Tracking by Combined Optimal Estimations and Control Techniques*”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. ac-16, no6, Dezembro 1971.
- [32] Hurrass, Karlheinz, *Basic Principles of Flight Test Instrumentation Engineering*, AGARD Chapter 13, March 1994.
- [33] Vermeille, H., “*Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates*”, Journal of Geodesy, volume 76, pp 451-454, Springer, 2002.

# Anexos

## Anexo A - Transformação de Coordenadas

Para a representação de trajetórias aéreas existem dois tipos de sistemas de coordenadas [32]:

1. Coordenadas geocêntricas cartesianas
2. Coordenadas geográficas

O sistema de coordenadas cartesianas é usado para medições de pequenas áreas, com apenas alguns quilômetros [32].

Se o radar de rastreamento estiver situado na origem do sistema, as coordenadas  $x,y,z$  são obtidas pela seguinte expressão [32]:

$$x = \rho \cdot \cos\gamma \cdot \sin\sigma \quad (\text{A.1})$$

$$y = \rho \cdot \cos\gamma \cdot \cos\sigma \quad (\text{A.2})$$

$$z = \rho \cdot \sin\gamma \quad (\text{A.3})$$

Sendo,

$\rho$ : o alcance do radar

$\sigma$ : o ângulo azimute

$\gamma$ : a elevação

Geralmente facilita se alinharmos um eixo do sistema de coordenadas cartesianas com um outro que seja importante para a medição em questão.

É importante estabelecer a relação entre as posições do sistema de medição de trajetória e as posições do sistema de navegação, pois esta relação serve para testar a veracidade dos dados obtidos se um sistema de navegação de satélites ou inercial for usado juntamente com um sistema terrestre. É muito mais fácil e rápido, para este caso, usar as coordenadas geográficas globais [32].

No campo da aviação este procedimento é muito importante, pois todas as posições são dadas em coordenadas geográficas [32].

A transformação das coordenadas cartesianas locais em geográficas é feita da seguinte forma:

- Supondo que o centro da Terra corresponde á origem de um novo referencial  $(z_1, z_2, z_3)$ , transforma-se as coordenadas do sistema em análise, em coordenadas deste novo sistema, através da equação [32]:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ z_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\lambda_0 & -\sin\psi_0\cos\lambda_0 & \cos\psi_0\cos\lambda_0 \\ \cos\lambda_0 & -\sin\psi_0\cos\lambda_0 & \cos\psi_0\sin\lambda_0 \\ 0 & \cos\psi_0 & \sin\psi_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Sendo,

$$z_{10} = (N_0 + H_0)\cos\psi_0\cos\lambda_0$$

$$z_{20} = (N_0 + H_0)\cos\psi_0\sin\lambda_0$$

$$z_{30} = [(N_0(1 - e^2) + H_0)]\sin\psi_0 \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Com, } N_0 = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\psi_0)}}$$

$\lambda_0, \psi_0, H_0$  :correspondem às coordenadas geográficas do centro do sistema  $(x,y,z)$

a: corresponde ao eixo maior da referência elipsoidal

b: corresponde ao eixo menor da referência elipsoidal

e: corresponde á excentricidade da referência elipsoidal e é dada por:  $e^2 = \frac{(a^2-b^2)}{a^2}$

Portanto, as coordenadas geográficas são obtidas:

$$\cotan\lambda_p = \frac{z_1}{z_2} \quad (\text{A.6})$$

$$\cotan\psi_p = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_3} \times \left(1 - \frac{e^2}{1+H_p/N}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$H_p = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \cos\psi_p + z_3 \sin\psi_p - a \sqrt{(1 - e^2\sin^2\psi_p)} \quad (\text{A.8})$$

Existem algumas dificuldades ao computacionar o parâmetro  $\psi_p$ , pois  $H_p$  e  $N$  só podem ser calculados se o valor de  $\psi_p$  for conhecido [32].

Uma solução é utilizar um método iterativo, que deve começar com  $H_p = 0$  ou usar os valores da altitude provenientes do altímetro [32].

Após o primeiro cálculo de  $\psi_p$  é possível determinar uma aproximação de  $H_p$  e  $N$ .

É de observar que este método converge muito rapidamente [32].

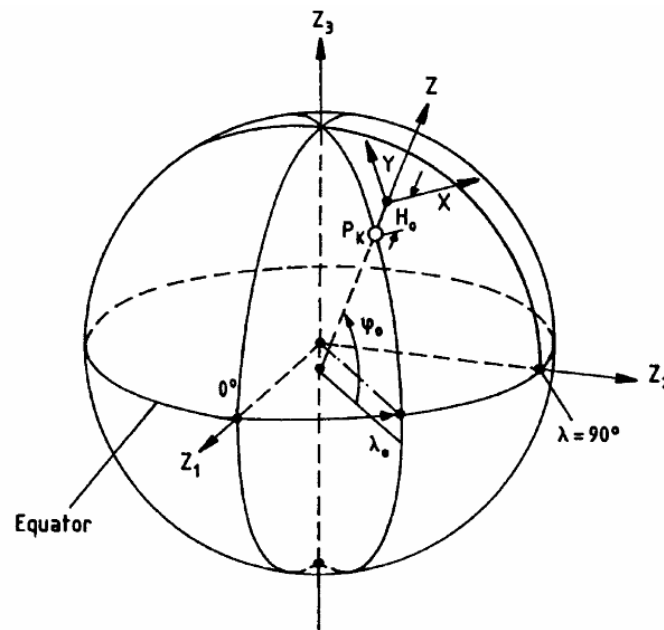


Figura A1 - Representação das coordenadas geográficas e das coordenadas  $x,y,z$  [32].

Para transformar as coordenadas geodésicas em geocêntricas cartesianas é necessário recorrer a um processo iterativo. Este é um método algébrico válido para qualquer ponto do globo terrestre (incluindo os polos e independentemente do valor da excentricidade elipsoide da superfície) e do espaço [33].

Sendo,

$a, b, e$ : o semieixo maior, semieixo menor, excentricidade de referência (elipsoide) respetivamente;

$X, Y, Z$ : as coordenadas geocêntricas cartesianas

$\lambda, \phi, h$ : a longitude, latitude e altitude geodésicas [33].

Pode-se relacionar ambas as coordenadas através das seguintes equações [33]:

$$X = (h + n) \cos \varphi \cos \lambda \quad (\text{A.8})$$

$$Y = (h + n) \cos \varphi \sin \lambda \quad (\text{A.9})$$

$$Z = (h + n - e^2 n) \sin \varphi \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Com, } n = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{A.11})$$

Através da análise da figura seguinte é possível escrever as equações que permitem determinar os valores de  $h$  e  $\varphi$  [33].

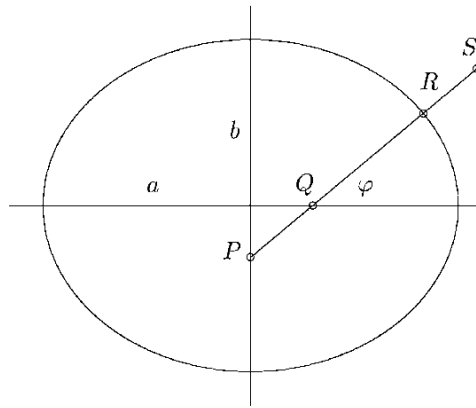


Figura A2 - Representação dos parâmetros necessários à transformação.

Onde:  $PR = n$ ;  $PQ = e^2 n$ ;  $RS = h$ ;

Assim tem-se:

$$k = \frac{QS}{PR} = \frac{h+n-e^2n}{n} \quad (\text{A.12})$$

Esta equação permite uma computação algébrica, sem ambiguidade dos valores de  $h$  e  $\varphi$ . Portanto, apresenta uma solução algébrica de grau 4 [33].

Desta forma, é possível obter [33]:

$$h = (k + e^2 - 1)n \quad (\text{A.13})$$

Pela equação (A.10) tem-se [33]:

$$\sin \varphi = \frac{Z}{kn} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo na equação (A.11) [33]:

$$n = \sqrt{a^2 + e^2 \frac{Z^2}{k^2}} \quad (\text{A.15})$$

Estabelecendo relações entre as equações anteriores, pode-se reescreve-las da seguinte forma [33]:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{(k+e^2)n} \quad (\text{A.16})$$

$$X^2 + Y^2 = (k + e^2)^2 n^2 (1 - \sin^2 \varphi) \quad (\text{A.17})$$

Substituindo  $\sin \varphi$  pela equação (A.14) e  $n$  pela equação (A.15) [33]:

$$\frac{X^2 + Y^2}{(k+e^2)^2} + \frac{(1-e^2)Z^2}{k^2} = a^2 \quad (\text{A.18})$$

É possível obter o valor de  $k$ .

Posteriormente, recorre-se às equações (A.13), (A.15) e (A.18) para calcular computacionalmente o valor de  $h$  e às equações (A.14) e (A.16) para o valor de  $\varphi$  [33].

Assim, ao termos umas coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$  quaisquer, é necessário determinar primeiramente os valores de  $k$  e  $D$ :

$$k = \sqrt{u + v + w^2} - w \quad (\text{A.19})$$

$$D = \frac{k\sqrt{X^2 + Y^2}}{k+e^2} \quad (\text{A.20})$$

E posteriormente calcular as seguintes equações [33]:

$$p = \frac{X^2 + Y^2}{a^2} \quad (\text{A.21})$$

$$q = \frac{1-e^2}{a^2} Z^2 \quad (\text{A.22})$$

$$r = \frac{p+q-e^4}{6} \quad (\text{A.23})$$

$$s = e^4 \frac{pq}{4r^3} \quad (\text{A.24})$$

$$t = \sqrt[3]{1 + s + \sqrt{s(2 + s)}} \quad (\text{A.25})$$

$$u = r \left( 1 + t + \frac{1}{t} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$v = \sqrt{u^2 + e^4 q} \quad (\text{A.27})$$

$$w = e^2 \frac{u+v-q}{2v} \quad (\text{A.28})$$

$$k = \sqrt{u + v + w^2} - w \quad (\text{A.29})$$

$$D = \frac{k\sqrt{X^2 + Y^2}}{k + e^2} \quad (\text{A.30})$$

Sendo,  $u$ ,  $r$  e  $s$  uns parâmetros quaisquer [33].

## Anexo B - Figuras da Dissertação Ampliadas

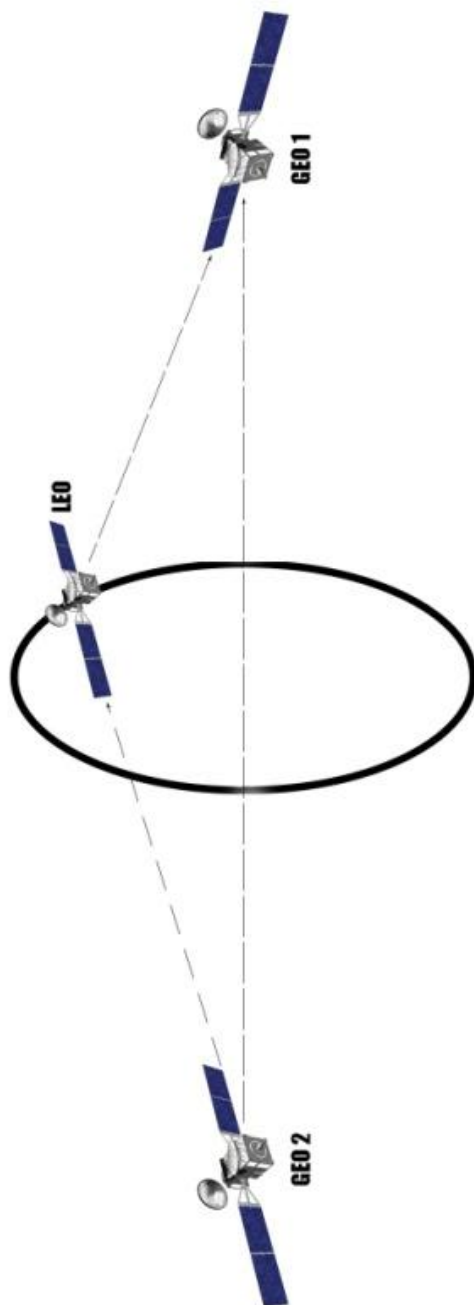


Figura III.2 - Ilustração da órbita LEO e dos satélites GEO.

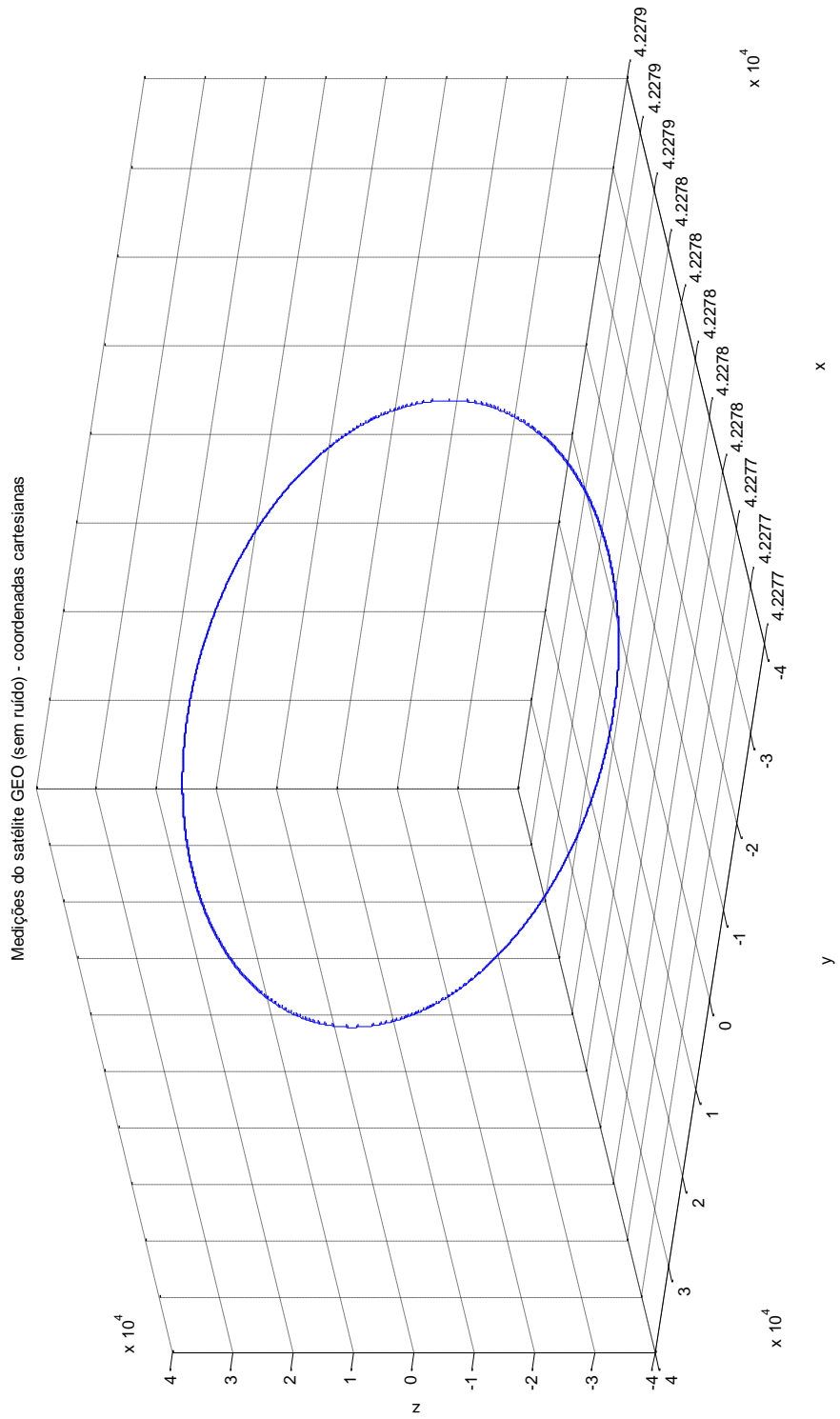


Figura III.4 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas cartesianas).

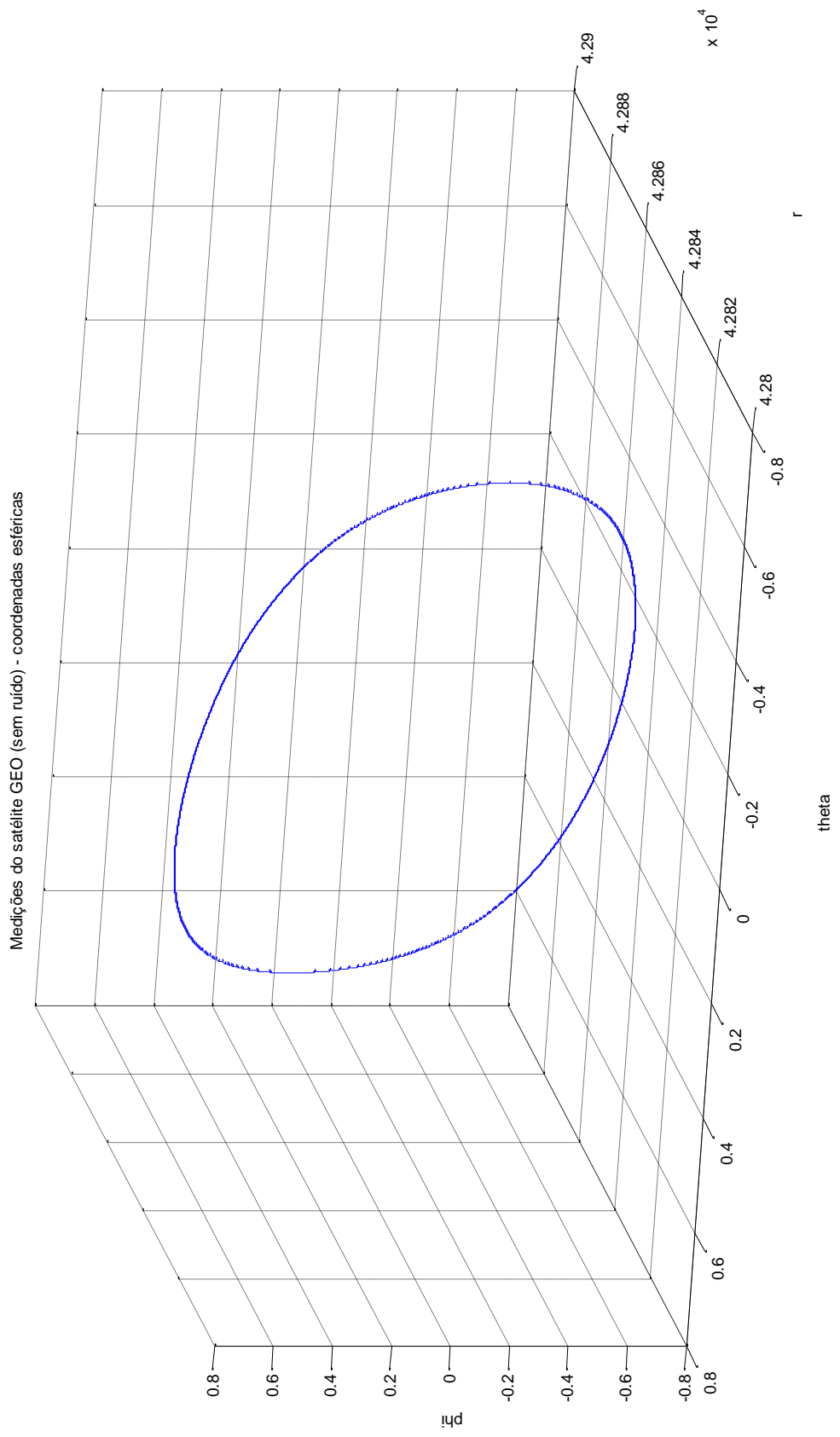


Figura III.5 - Representação da trajetória LEO através das medições realizadas pelo satélite GEO (coordenadas esféricas).

Medições do satélite GEO - coordenadas cartesianas

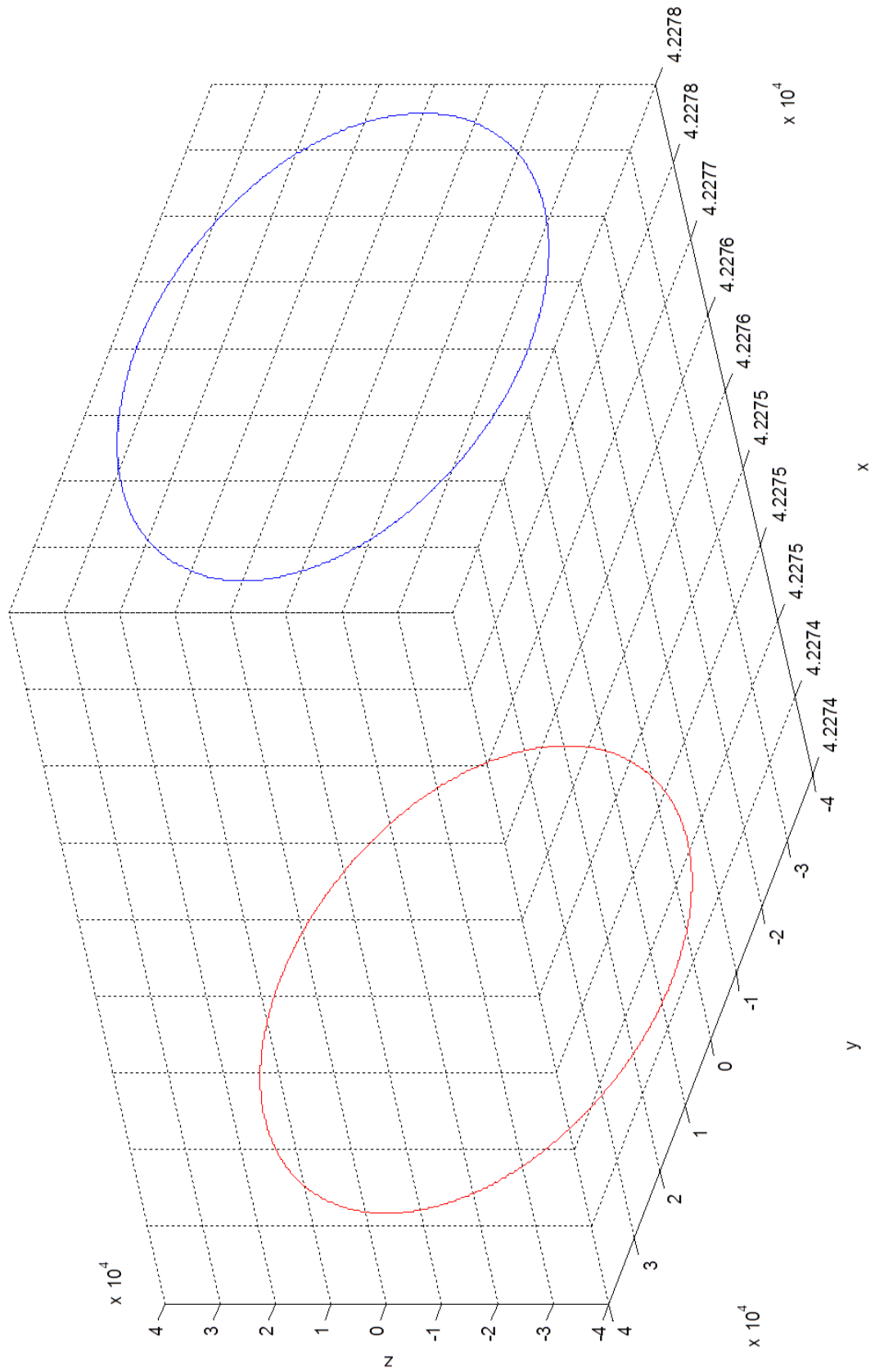


Figura III.7 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas cartesianas).

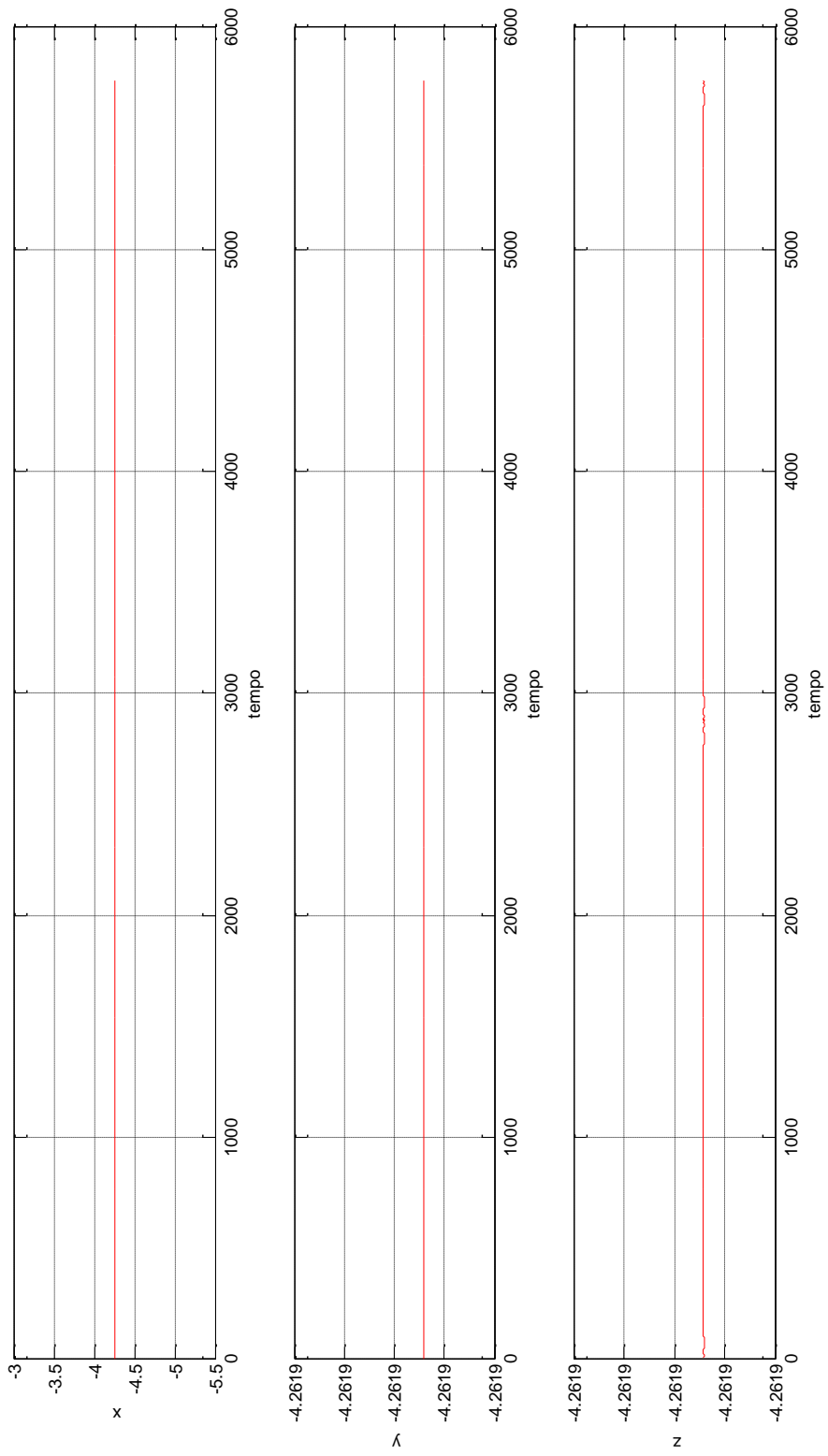


Figura III.8 - Erro presente nas medições.

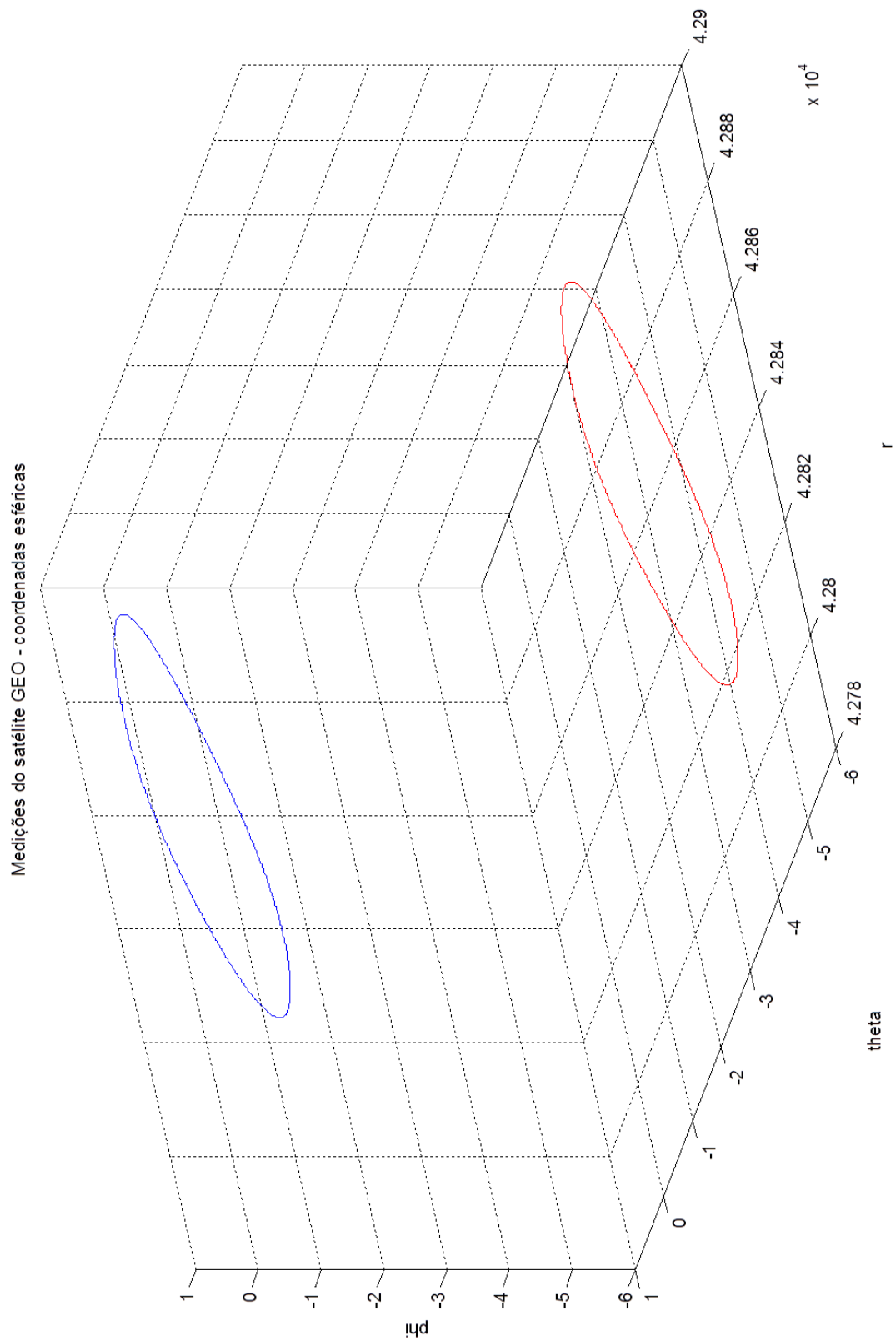


Figura III.9 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas).

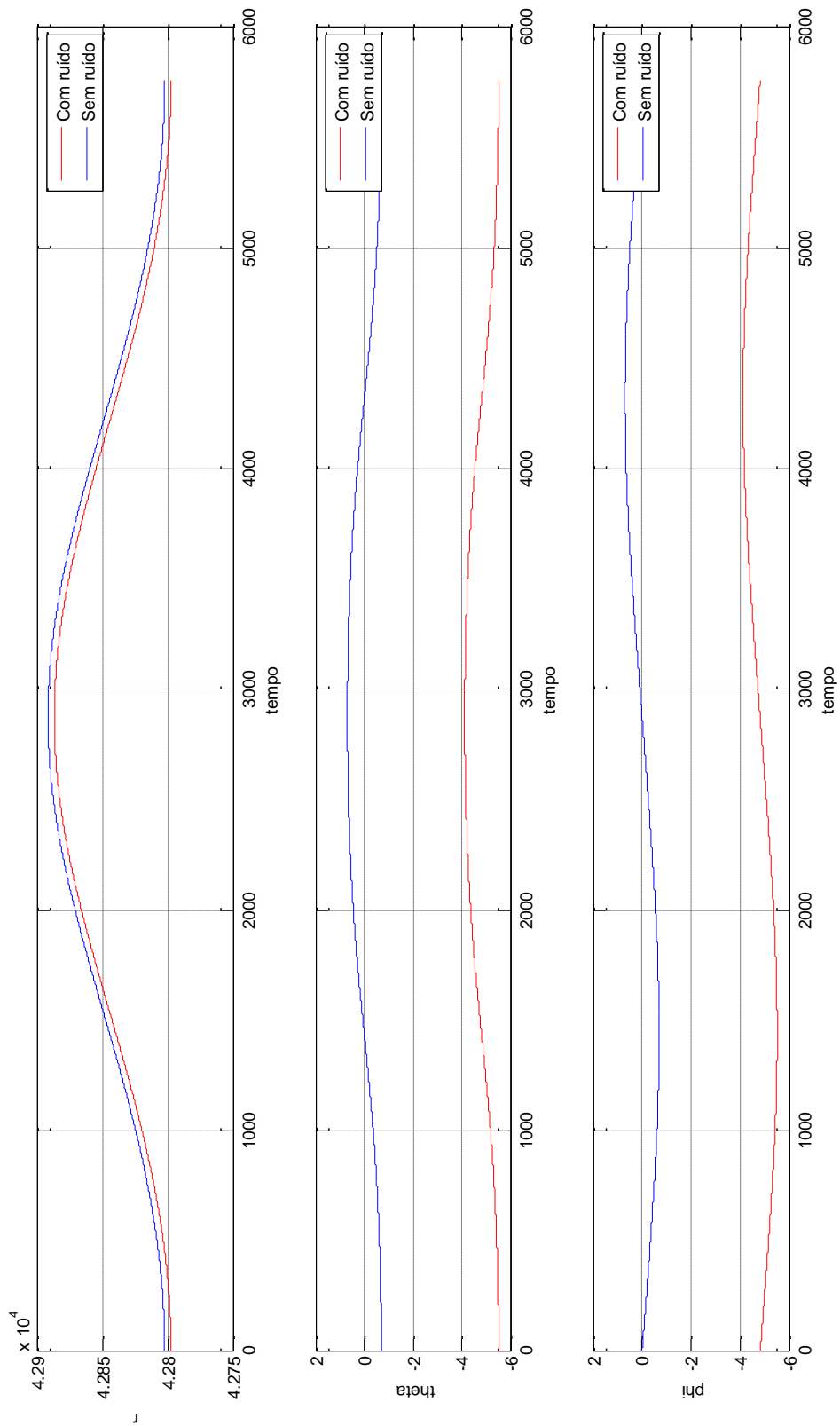


Figura III.10 - Medições obtidas pelo satélite GEO com e sem ruído (coordenadas esféricas) em função do tempo.

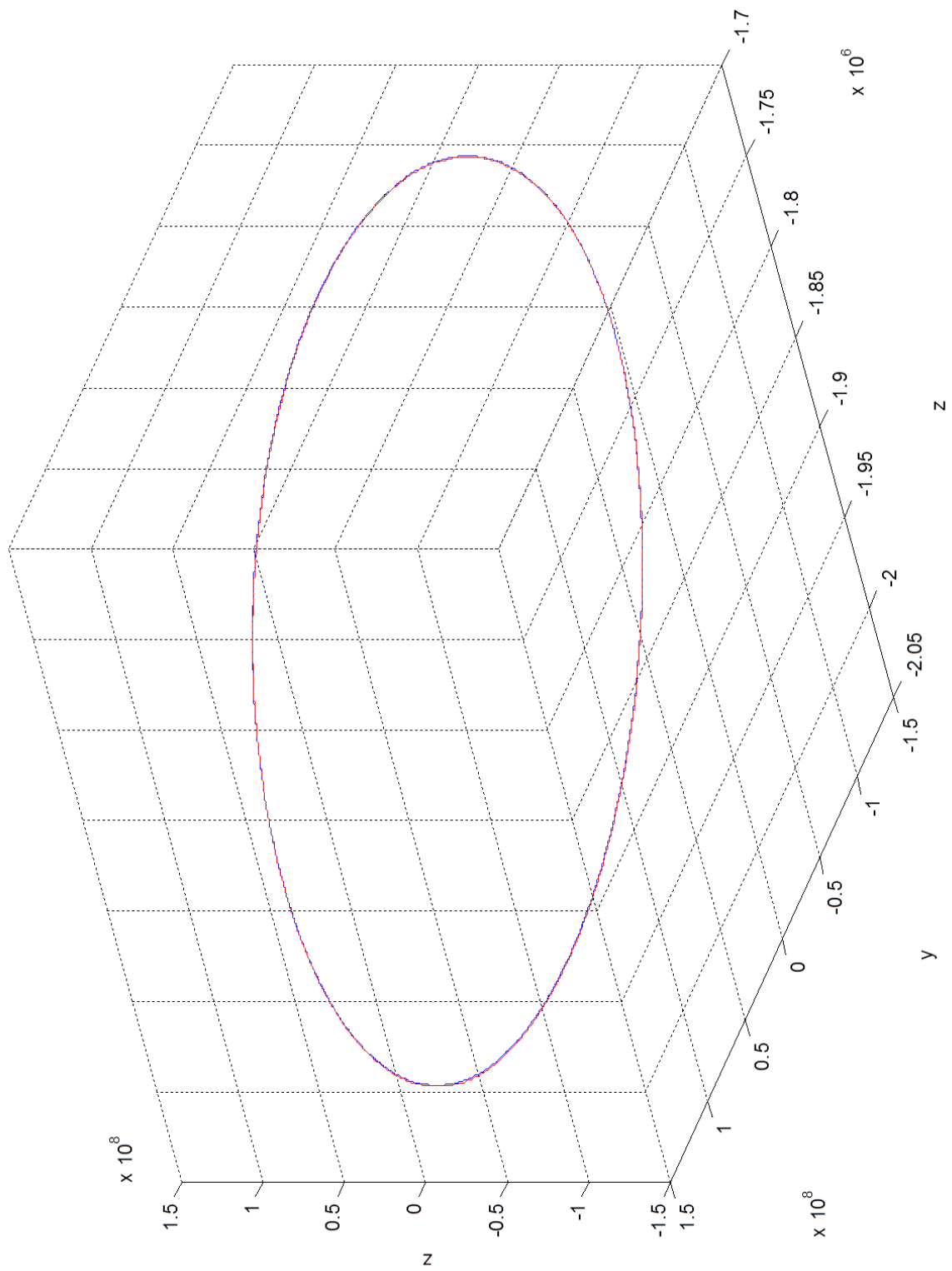


Figura III.13 - Órbita real e órbita filtrada.

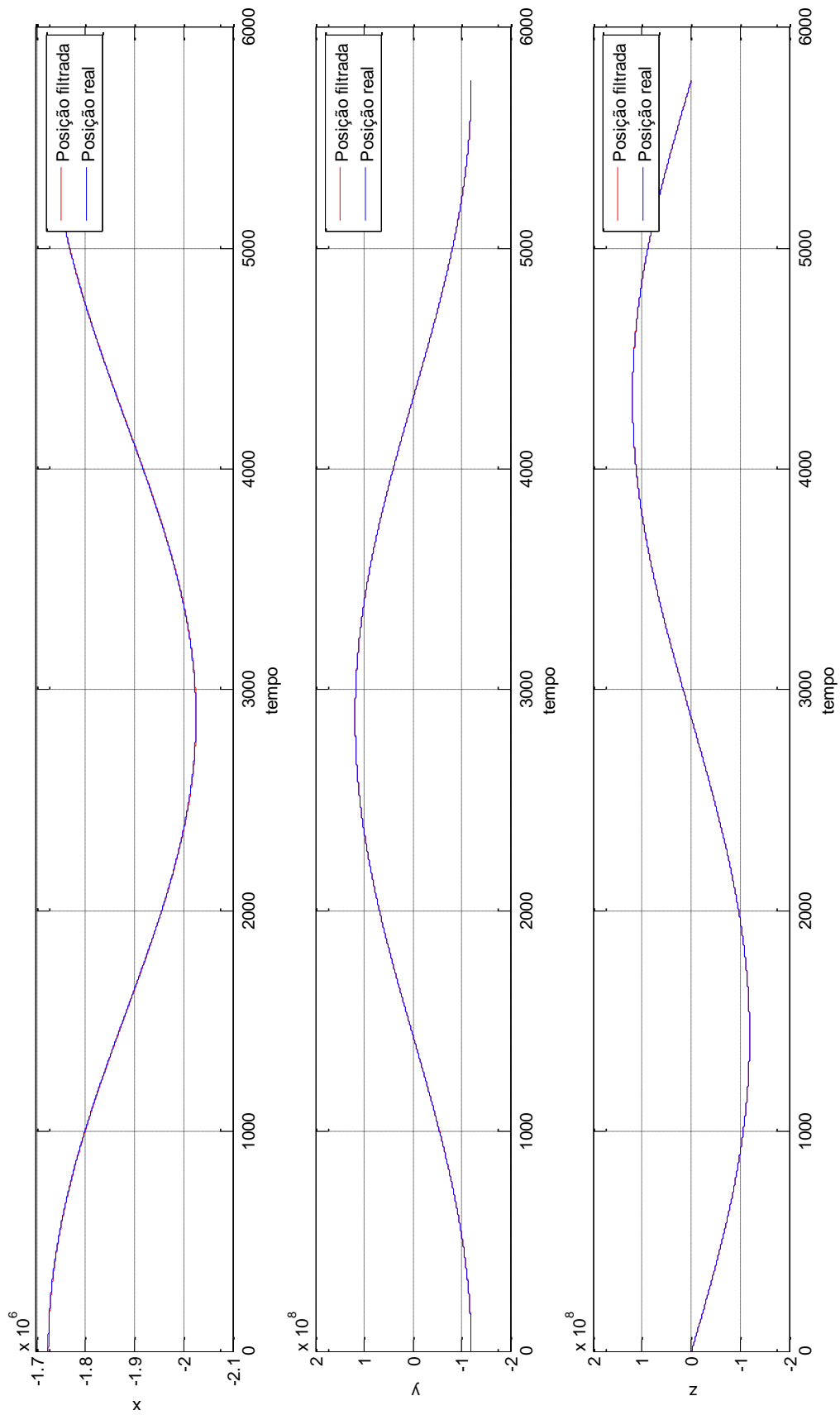


Figura III.14 - Representação gráfica das coordenadas em função do tempo (filtradas e reais).

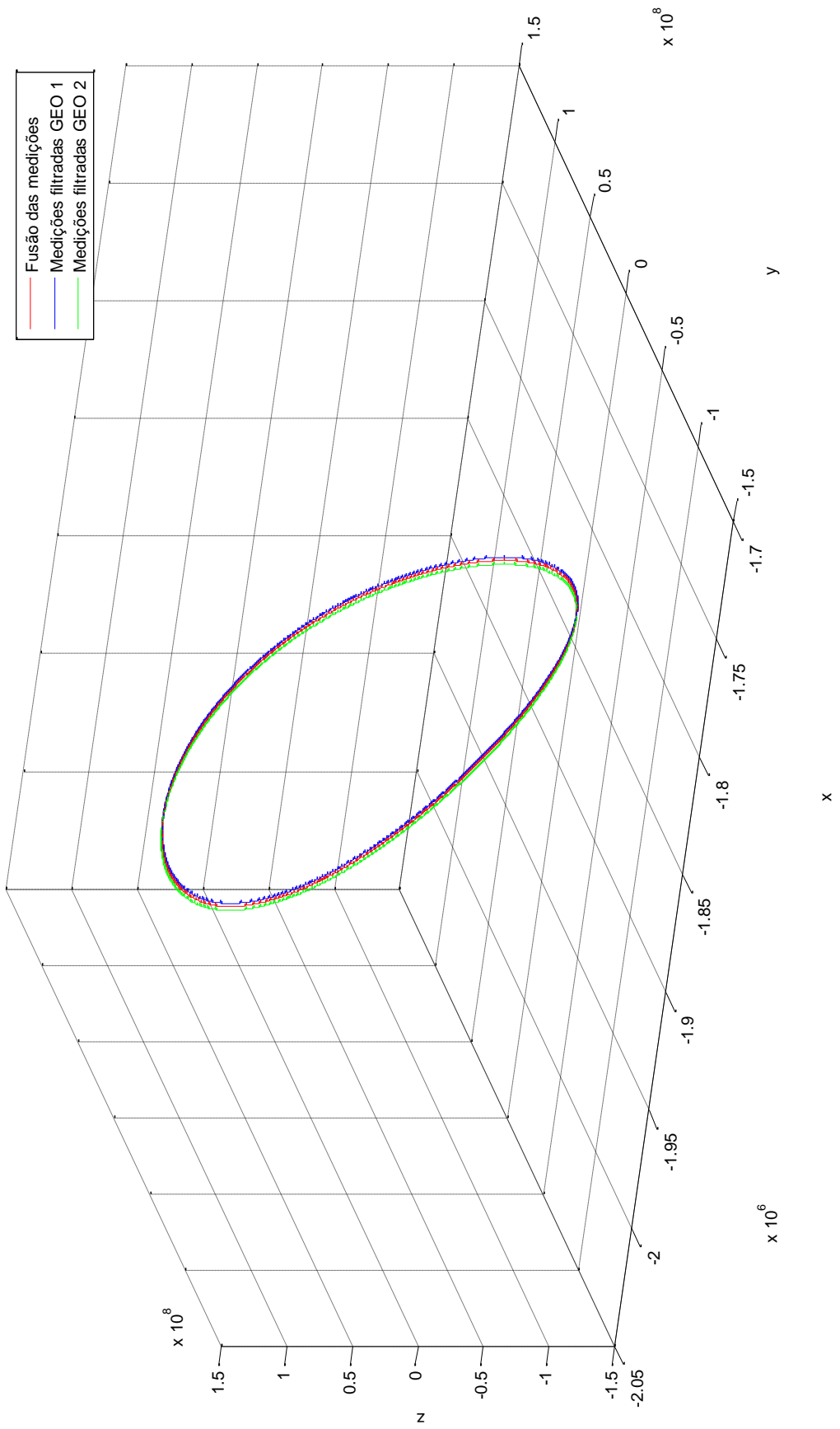


Figura III.15 - Representação das três órbitas estimadas.

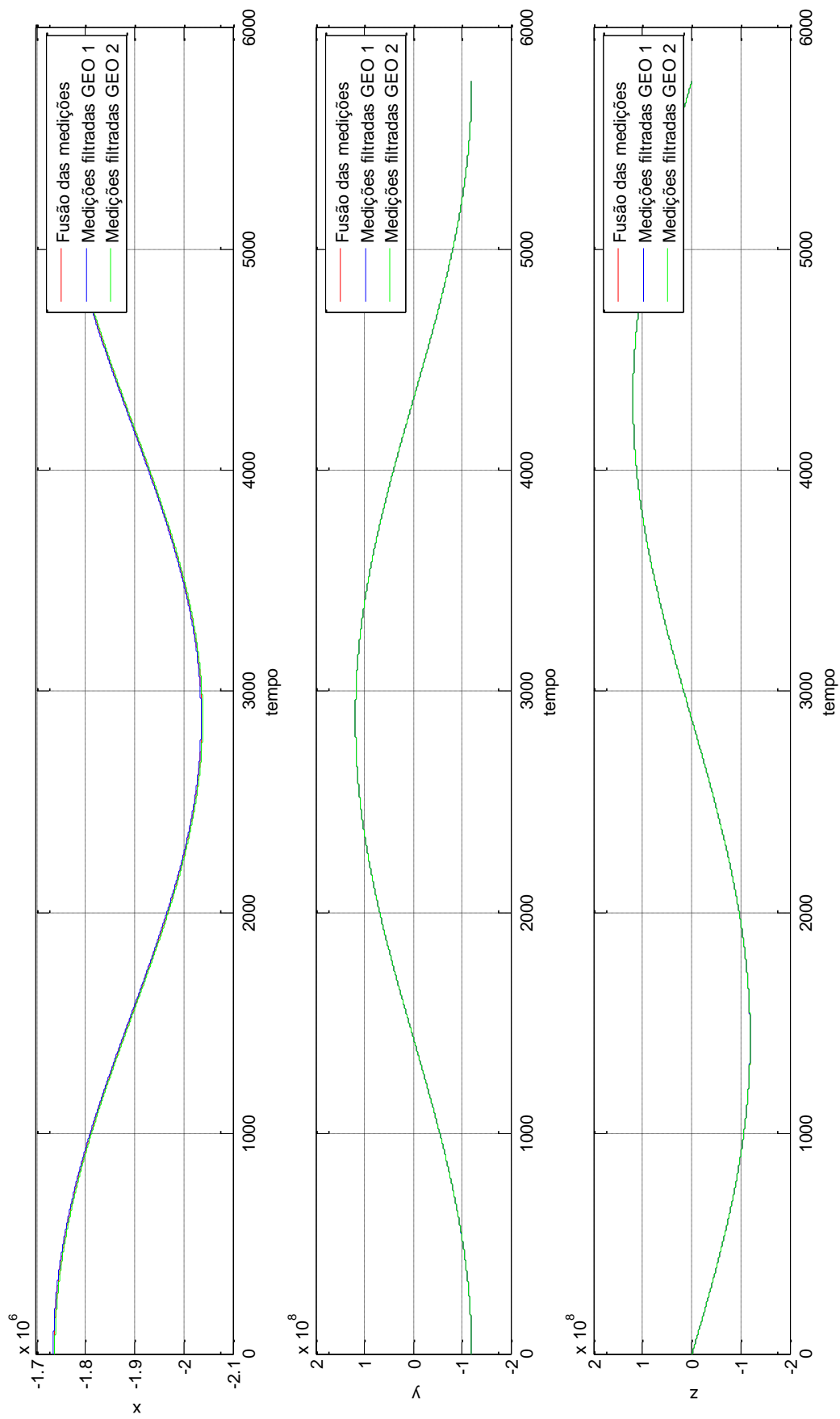


Figura III.16 - Representação das coordenadas das órbitas estimadas em função do tempo.