UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

APROXIMAÇÃO DO NÚMERO DE NEPER
VERSÃO FINAL APÓS A DEFESA

HERMENEGILDO SIMÃO

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor José Carlos Matos Duque
Co-orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida

Covilhã, Maio de 2018

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por permitir-me alcançar esta meta.

Dedico este trabalho aos meus pais, Fernando Capalo "in memorian" e à minha mãe Maria Eva Muachambi.

Agradecimentos

A Deus todo-poderoso que me dá o dom da vida e me capacita para conseguir vencer os desafios.

Aos meus orientadores, Professor Doutor José Carlos Matos Duque e Professor Doutor Rui Manuel Pires Almeida, pelo apoio disponibilizado, pelas opiniões e críticas, pela total colaboração no solucionar de dúvidas e pela forma amiga como guiaram o trabalho.

Ao meu pai Fernando Capalo (que Deus o tenha), que cedo me ensinou a dedicação aos estudos e consentir sacrifícios para vencer os desafios que a vida nos coloca. À minha mãe Maria Eva Muachambi, pela educação, pela confiança e apoio incondicional que sempre me proporcionou ao longo desta trajetória.

À minha esposa, Maria Generosa A. Fernando e aos meus filhos, pela paciência nas minhas ausências e apoio moral que sempre me concederam.

Ao meu amigo e colega, Ngaiele Muecheno Fundão, pelo apoio moral e académico, pela abnegação e total ajuda prestados, que foram fundamentais para atingir esta meta. Aos meus irmãos, Sandra, Cecília, Marcos e Delfim, pela força e encorajamento que me têm dado ao longo dos anos.

Ao coletivo dos meus colegas, pelo espírito de equipa, irmandade e solidariedade que permitiram encarar e resolver as principais dificuldades sempre em coletivo, especialmente ao Jacinto Comolehã, João Canansevele e Orlando Cawende, a todos o meu muito obrigado.

Ao coletivo dos professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciência da UBI, especialmente, os Professores Doutores, Alberto Simões, Henrique Cruz, Sandra Vaz, Rui Pacheco, Jorge Gama, Hélder Vilarinho, Nuno Correia, César da Silva, Ilda Rodrigues, Ana Carapito, Rogério Serôdio e Paulo Rebelo, que deram o seu melhor para a nossa formação académica com toda dedicação e paciência.

Ao Dr. Victor Silva e ao Dr. Abel Jones Pique pela oportunidade que me concederam para frequentar o curso de mestrado, pelo apoio moral e pela confiança que depositaram em mim. A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para o êxito deste desafio, o meu muito obrigado!

Resumo

O presente trabalho trata da aproximação do número de Neper. Começa-se por apresentar uma resenha histórica dos principais factos e protagonistas em torno deste número. De seguida, apresentam-se alguns métodos que permitem calcular a sua aproximação, com recurso a sucessões, séries e frações contínuas. Por fim, deduzem-se modelos matemáticos, envolvendo o número de Neper, que descrevem determinados fenómenos estudados em diferentes áreas da ciência. Espera-se que este trabalho proporcione aos alunos e professores informação importante que contribua para o melhoramento do processo de ensino e aprendizagem deste tópico no ensino secundário.

Palavras-chave

Número de Neper, história, aproximação, aplicações.

Abstract

The present work deals with the approximation of Neper's number. An in-depth historical review focusing on the main facts and protagonists about this number is presented. Subsequently, various methods for calculating its approximation, using sequences, series and continuous fractions, are studied. Finally, some mathematical models involving Neper's number, which describe certain phenomena in different areas of science, are deduced. It is hoped that this work will provide students and teachers with useful information which will contribute to the improvement of the teaching and learning process on this topic in secondary school.

Keywords: Neper's number, history, approximation, applications.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho vai abordar a aproximação do número de Neper. Este número também conhecido por euler e representado pelo símbolo e é um número irracional cujo valor aproximado é 2.7182818284590453353... É denominado número de Neper em homenagem a John Napier, enquanto que a utilização do símbolo e o qual acredita-se que deriva da palavra exponencial, é atribuída ao matemático Euler. O número de Neper está presente em vários modelos matemáticos aplicados nas distintas ciências, nos quais precisa ser aproximado com um número adequado de casas decimais corretas. Para calcular a sua aproximação são usados diferentes métodos, parte dos quais serão abordados neste trabalho.

O número de Neper à semelhança do π é uma das constantes importantes da matemática. Essa constante despertou o interesse de muitos matemáticos ao longo do tempo, no entanto, foi a partir dos séculos XVI e XVII, com os trabalhos do matemático escocês, John Napier (1550 - 1617) e do suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) que esse número se tornou mais conhecido.

O e está presente em vários conteúdos de matemática precisamente nas sucessões e séries, nas funções exponenciais e logarítmicas e no cálculo diferencial e integral. Dada a transversalidade dos conteúdos matemáticos em que é aplicado, este número está presente em vários modelos matemáticos sobretudo aqueles que representam fenómenos com caraterísticas de crescimento ou decrescimento, aplicados em áreas como a medicina, biologia, economia, química e física moleculares, engenharia, música, entre outras.

A abordagem no ensino secundário do número de Neper, apesar da sua importância na matemática e não só, ainda é tida como superficial. Tal facto foi constatado na análise feita aos programas e manuais de matemática do ensino secundário em Portugal e Angola. Os referidos materiais didáticos não mostram uma abordagem significativa do número de Neper que contenha, por exemplo, uma resenha histórica, os métodos de calcular a sua aproximação com maior número de casas corretas, a sua importância na matemática, com realce em modelos matemáticos aplicados nas diversas ciências para explicar determinados fenómenos da vida prática.

Como consequência disso, os alunos apenas aplicam as fórmulas previamente concebidas e realizam cálculos, utilizam o e que em muitos casos é aproximado apenas com três casas decimais corretas ($e \approx 2.718$) e raras vezes é calculada a sua aproximação, a não ser com o recurso às máquinas calculadoras. Esta situação dificulta efetivamente a sua aprendizagem, o que leva os alunos a terminem o ensino secundário, com pouca informação relativa ao número de Neper.

Com base nas preocupações apresentadas acima, levanta-se a seguinte questão: Como melhorar o ensino e aprendizagem do número de Neper no ensino secundário? Para responder a esta questão, propõem-se fazer uma abordagem profunda sobre vários aspetos relacionados ao número de Neper, mostrando a sua importância, os métodos de aproximação e as distintas aplicações nas mais variadas ciências, mais especificamente:

- Efetuar uma resenha histórica sobre o número de Neper;
- Saber o que o número de Neper representa na matemática;
- Mostrar as diferentes maneiras de calcular a aproximação do número de Neper;
- Apresentar as diferentes aplicações do número de Neper nas variadas ciências.

Espera-se que o presente trabalho apresente os principais factos históricos relacionados ao número de Neper; as técnicas da aproximação do número de Neper com realce para a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e as frações contínuas; as provas da irracionalidade do e, e da igualdade $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, bem como, a prova do facto de a derivada da função $f(x) = ce^x$ ser igual ce^x, com $c \in \mathbb{R}$. Espera-se igualmente mostrar as aplicações do número de Neper em modelos matemáticos que auxiliam a resolução de problemas ligados à economia, química e física molecular e à teoria das probabilidades. No final espera-se apresentar os principais resultados do trabalho, bem como apresentar sugestões que visam melhorar o estudo do número de Neper no ensino secundário.

O trabalho está estruturado em seis capítulos, ao longo dos quais se procurou atingir os principais objetivos que motivaram a realização do mesmo. O primeiro capítulo é dedicado aos aspetos introdutórios, no segundo capítulo procurou-se trazer uma abordagem histórica sobre o número de Neper, o terceiro capítulo incide na breve revisão dos principais teoremas e resultados fundamentais ligados ao estudo de sucessões, séries e logaritmos. O quarto capítulo destina-se ao estudo dos métodos de aproximação do número de Neper, mais precisamente, aproximação pela sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, pela série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e através das frações contínuas, o qual demonstra ainda alguns resultados importantes, tais como, a prova da irracionalidade do e. O quinto capítulo mostra as distintas aplicações do e em modelos matemáticos usados nas distintas ciências e finalmente, o sexto e último capítulo destina-se as considerações finais do trabalho, nas quais apresenta algumas sugestões que visam melhorar o ensino deste conteúdo no ensino secundário.

Capítulo 2

História do número de Neper

O número de Neper surgiu talvez com a descoberta dos logaritmos, criados como instrumentos para tornar os cálculos aritméticos mais simples, tendo-se verificado posteriormente que os logaritmos tinham mais importância do que se pensava, quer na matemática, quer noutras ciências, uma vez que, diversos factos matemáticos e vários fenómenos da natureza e até mesmo sociais, podem ser explicados com o recurso aos logaritmos.

O período compreendido entre o final do século XVI, e o início do século XVII, testemunhou uma enorme expansão do conhecimento científico nos mais variados domínios da vida. Foi nesta altura em que se deu o desenvolvimento da geografia, física e astronomia, o que permitiu mudar rapidamente a perceção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, finalmente tinha sido aceite. Em 1519 Fernão de Magalhães (1480 - 1521) começava a circunavegação do globo que permitiu descobrir várias regiões do mundo. Em 1569, Gerhard Mercantor publicou o novo mapa do mundo, tendo criadas as condições que melhoraram o processo de navegação. Galileu Galilei, estabelecia na Itália, os alicerces da ciência da mecânica, já na Alemanha, Johannes Kepler, publicava as suas famosas três leis do movimento planetário, uma grande contribuição para a astronomia [Lim85].

Esses desenvolvimentos envolviam quantidades enormes de dados numéricos, o que obrigava os sábios da época a realizarem cálculos bastante trabalhosos. Embora nesta altura já estivessem descobertas as frações decimais, ainda assim, era de vital importância desenvolver um método que permitisse efetuar com eficiência e eficácia as multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes. As operações aritméticas podem ser classificadas em três grupos, de acordo com o grau de dificuldade: adição e subtração formam as operações de primeira espécie, multiplicação e divisão, da segunda espécie e a potenciação e radiciação constituem as operações da terceira espécie. Na altura, procurava-se um processo que permitisse reduzir cada operação da segunda e terceira espécies numa operação da primeira espécie.

John Napier (1550-1617), escocês, também conhecido por Neper, nascido em Edimburgo, formado em teologia, proprietário de terras, lançou-se a esse desafio que lhe durou vinte anos. Precisamente em 1614, conseguiu corresponder, dando resposta a essa necessidade, com a descoberta dos logaritmos, tendo para o efeito publicado em

Edimburgo a sua mais célebre obra, **Merifici logarithmorum canois description** (uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

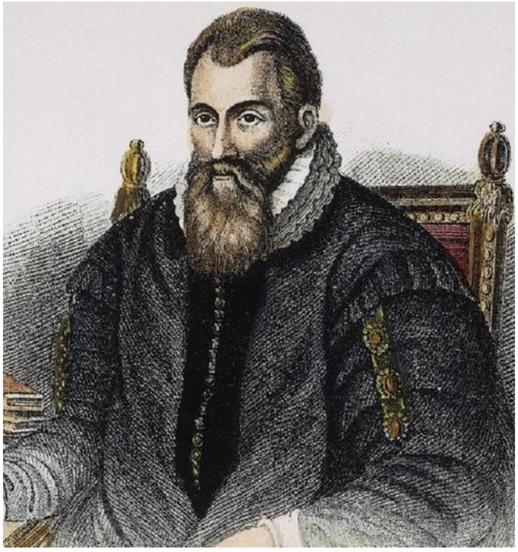


Figura 2.1: Jonh Napier (1550 - 1617)
Fonte: www.colegioweb.com.br, biografia-letra

John Napier viveu a maior parte de sua vida na majestosa propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, em Edimburgo, Escócia, e vários anos de sua vida metido em problemas políticos e religiosos de seu tempo. Era grande opositor da igreja católica e defensor das ideias de John Knox e Jaime I. Em 1593 publicou uma obra que muitos consideravam como o livro das revelações, amplamente lido contra a Igreja de Roma intitulada A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John, na qual se propunha provar que o papa era o Anticristo e que o criador tencionava pôr fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. O livro teve 21 edições, dez das quais publicadas ainda em vida do autor, o que fazia a Napier acreditar que seguramente a sua reputação, ou seja, que o seu nome estava garantido na história em virtude do seu livro [Eve08]. As revelações de Napier eram tidas para muitos como profecias, ele chegou a escrever também sobre várias máquinas de guerra infernais. Previu inclusive que no futuro desenvolver-se-ia uma peça de artilharia que "poderia eliminar de um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura", que se produziriam "dispositivos para navegar debaixo d'água" e que se criaria um carro de guerra com uma boca que se acenderia para "espalhar a destruição por todas as partes". A metralhadora, o submarino e o tanque de guerra, respectivamente, vieram concretizar esses vaticínios na Primeira Guerra Mundial [Eve08].

De acordo com Maor, [Mao08], foi a partir do conhecimento de geometria que Napier chegou acidentalmente aos logaritmos; mais precisamente observando a fórmula

$$\sin(A) \times \sin(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}.$$

Esta fórmula e outras semelhantes para $\cos(A) \times \cos(B)$ e $\sin(A) \times \cos(B)$, então conhecidas como regras de adição e subtração, a sua importância consiste no facto do produto de duas expressões trigonométricas $\sin(A) \times \cos(B)$ poder ser calculado através da soma e diferença de outras expressões trigonométricas como $\cos(A-B)$ e $\cos(A+B)$. E como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para outra mais simples. Terá sido essa ideia que levou o Napier à descoberta dos logaritmos.

Admite-se ainda [Mao08] uma outra possibilidade, se calhar a mais direta que envolveria os termos de uma progressão geométrica, uma sequência de números com proporção fixa entre os termos sucessivos, como por exemplo, 1, 2, 4, 8, 16,..., é uma progressão geométrica de razão 2.

Se tomarmos por q a razão, então, começando com o 1, os termos da progressão são $1, q, q^2$, q^3, q^4,... assim por diante, pode-se notar que o termo n é q^{n-1}. Antes mesmo de Napier, já se conhecia a relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes ou índices da razão comum. O Matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), "Arithmética Integra" (1544), formulou esta relação da seguinte maneira: Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q$, q^2,... o resultado será o mesmo que se somarmos os expoentes correspondentes. Por exemplo, $q^2 \times q^3 = (q.q).(q.q.q) = q.q.q.q.q = q^5$, um resultado que poderíamos ter obtido somando os expoentes 2 e 3. De modo semelhante dividir um termo de uma expressão por outro equivale a subtrair os seus expoentes $\frac{q^5}{q^3} = \frac{q.q.q.q.q}{q.q.q} = q^2 = q^{5-3}$. E assim, temos a regra simples $q^m.\ q^n = q^{m+n}$ e $\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$.

2.1 Tábua de logaritmos e contribuição de Henry Briggs

Uma tabua de logaritmos é constituída essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna a esquerda corresponde a um número à sua direita, chamado seu logaritmo. Para multiplicar dois números basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler a tábua, da direita para esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

Para tal, usava-se uma tabela de duas colunas (ou duas linhas), que colocava em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade potências de um certo número) com os de uma progressão aritmética. Abaixo temos um exemplo simples de uma tábua de logaritmos:

2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Observe que esta "tábua de logaritmos" tem a seguinte estrutura

a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Por exemplo, se pretendesse multiplicar, 32 por 128, buscava-se na tabela os números correspondentes na segunda linha, que no caso são 5 e 7. A soma de 5 e 7 resulta 12, localizado na segunda linha, o qual tem como correspondente 4096 na primeira linha. Portanto, concluía-se que $32 \times 128 = 4096$.

Procedimento semelhante ocorria na divisão. Supomos a divisão de 1024 por 256, os números correspondentes, são 10 e 8, subtraindo 10-8=2. O número da primeira linha correspondente a 2 é 4. Logo, $1024 \div 256 = 4$. A validade do método decorre das conhecidas leis:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ e $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Assim,

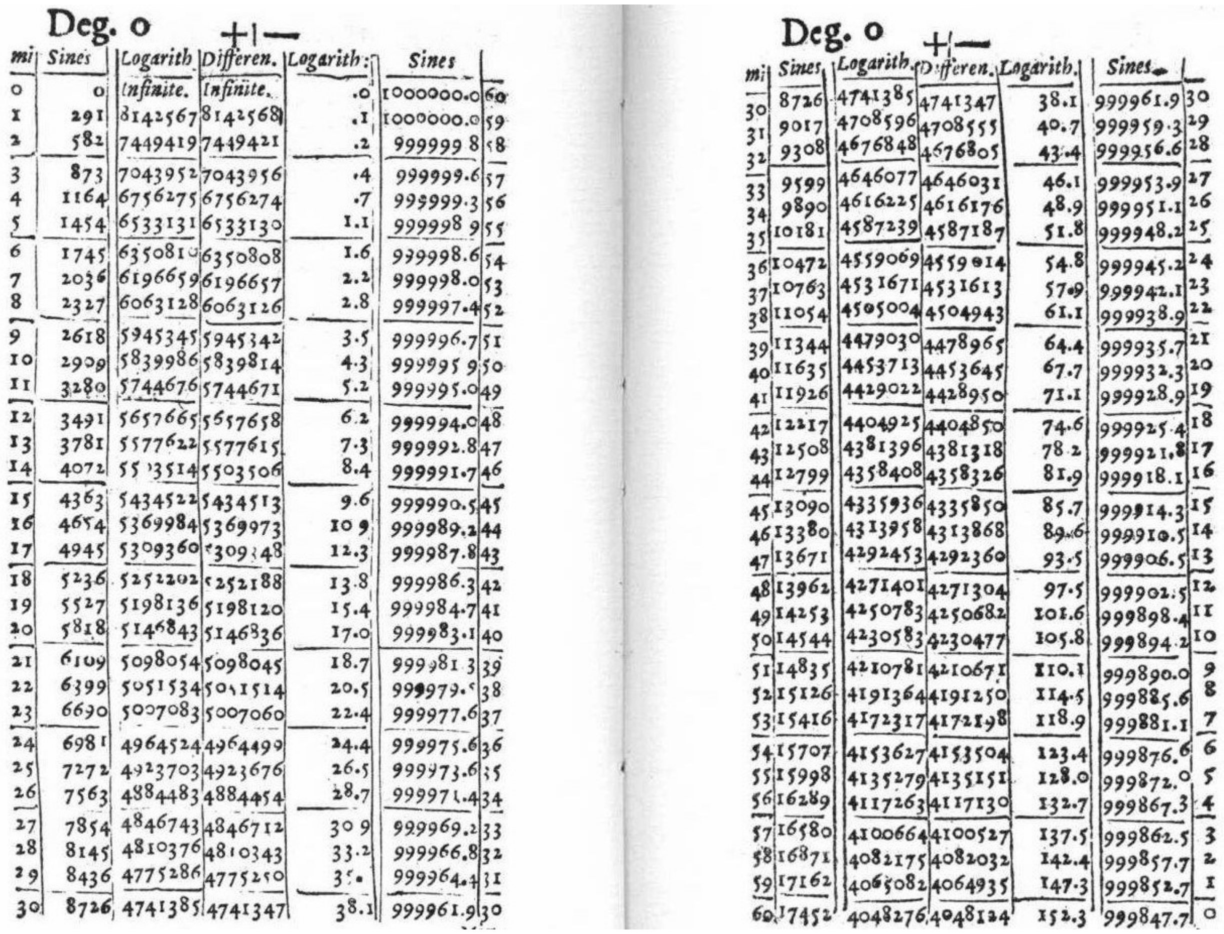
$32 \times 128 = 2^5 \times 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4096$

e

$1024 \div 256 = 2^{10} \div 2^8 = 2^{10-8} = 2^2 = 4$

A inconveniência dessa tábua reside no facto de restringir o número de multiplicações e divisões, uma vez que as potências de 2 crescem muito rapidamente, o que fez Napier recorrer a um número mais próximo de 1, cujas potências crescessem lentamente, proporcionando um grande número de produtos e quocientes imediatos. Outra solução seria o recurso a expoentes fracionários, mas como esses, não eram inteiramente conhecidos na época de Napier, então ele decidiu definitivamente optar por um número mais próximo de 1, no caso 0,9999999, ou $1 - 10^{-7}$

Na notação moderna isto significa dizer que se na primeira tabela $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, então o expoente L é o logaritmo (neperiano) de N [Mao08].



Deg. o +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999 8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998 9	55
6	1745	635081[illegible]	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995 9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	55[illegible]3514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10 9	999989.2	44
17	4945	5309360	[illegible]309348	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	[illegible]252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981 3	39
22	6399	5051534	50[illegible]1514	20.5	999979.[illegible]	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	99997[illegible].4	34
27	7854	4846743	4846712	30 9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	3[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30

Deg. o +|—

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0

Figura 2.2: Tabela de logaritmos de John Napier

Fonte: https://tecnoaprendizagem.wordpress.com

Depois do surgimento da primeira tábua de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631), professor da universidade de Londres e de Oxford, após uma concertação com Napier, elaboraram uma nova tábua de mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos decimais, ou logaritmos ordinários, que tiram proveito do facto de usarmos um sistema de numeração decimal [Lim85].

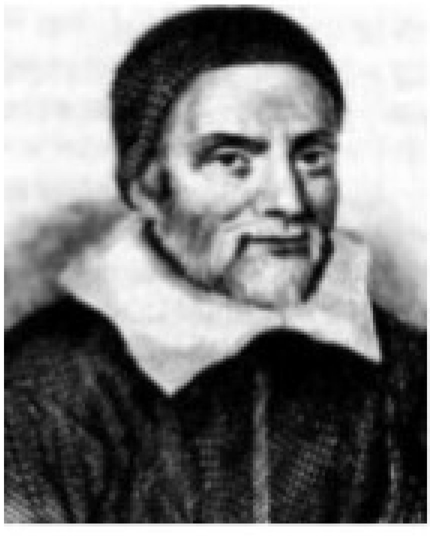


Figura 2.3: Henry Briggs (1561 - 1631)
Fonte: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/*logaritmos*,Historia.html

Durante mais de trezentos e cinquenta anos depois da descoberta dos logaritmos, a sua utilidade revelou-se decisiva na ciência e na tecnologia.

A grande invenção de Napier foi inequivocamente adotada por toda comunidade científica da época. Na astronomia, há muito se aguardava por uma descoberta assim, que permitisse reduzir significativamente o trabalho e melhorasse o seu desempenho. O astrónomo e matemático francês Simon Laplace (1749 - 1827), considerou a nova descoberta como fundamental para a melhoria da qualidade de vida dos astrónomos "a invenção dos logaritmos ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrónomos". Convencidos com o contributo que a nova descoberta trouxera para ciência, Bonaventura Cavalieri, empenhou-se em divulgar os logaritmos na Itália, Johann Kepler fê-lo na Alemanha e Edmund Wingate na França. Wingate, aproveitou os anos que passou na França, para se tornar escritor de textos de aritmética elementar mais destacado da língua inglesa no século XVII.

Outro inventor dos logaritmos a par de Napier, foi o suíço Jobst Bürgi (1552-1632), um construtor de instrumentos. Bürgi concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independentemente de Napier e publicou os seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier o ter feito. Porém, acredita-se que Napier foi primeiro mentor da ideia, ou seja, o primeiro inventor dos logaritmos. A diferença entre os dois inventores residia no facto de que a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica.

Atualmente, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b. Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes [Boy96].

nº	log	nº	log	nº	log	nº	log	nº	log
1	0	21	1,322219	41	1,612784	61	1,78533	81	1,908485
2	0,30103	22	1,342423	42	1,623249	62	1,792392	82	1,913814
3	0,477121	23	1,361728	43	1,633468	63	1,799341	83	1,919078
4	0,60206	24	1,380211	44	1,643453	64	1,80618	84	1,924279
5	0,69897	25	1,39794	45	1,653213	65	1,812913	85	1,929419
6	0,778151	26	1,414973	46	1,662758	66	1,819544	86	1,934498
7	0,845098	27	1,431364	47	1,672098	67	1,826075	87	1,939519
8	0,90309	28	1,447158	48	1,681241	68	1,832509	88	1,944483
9	0,954243	29	1,462398	49	1,690196	69	1,838849	89	1,94939
10	1	30	1,477121	50	1,69897	70	1,845098	90	1,954243
11	1,041393	31	1,491362	51	1,70757	71	1,851258	91	1,959041
12	1,079181	32	1,50515	52	1,716003	72	1,857332	92	1,963788
13	1,113943	33	1,518514	53	1,724276	73	1,863323	93	1,968483
14	1,146128	34	1,531479	54	1,732394	74	1,869232	94	1,973128
15	1,176091	35	1,544068	55	1,740363	75	1,875061	95	1,977724
16	1,20412	36	1,556303	56	1,748188	76	1,880814	96	1,982271
17	1,230449	37	1,568202	57	1,755875	77	1,886491	97	1,986772
18	1,255273	38	1,579784	58	1,763428	78	1,892095	98	1,991226
19	1,278754	39	1,591065	59	1,770852	79	1,897627	99	1,995635
20	1,30103	40	1,60206	60	1,778151	80	1,90309	100	2

Figura 2.4: Tabela de logaritmos decimais

Fonte: slideplayer.com.br

Atualmente, com a utilização dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam algo do seu poder como instrumento de cálculo, à semelhança do que acontece com outras tabelas matemáticas. Contudo, o estudo dos logaritmos ainda é, e certamente continuará a ser, importante na matemática e noutras ciências. Pois, embora tenham sido inventados como ferramenta para facilitação de operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e de outras ciências mostra hoje que diversos fenómenos naturais e mesmo sociais estão estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram ter apreciável valor intrínseco.

2.2 Surgimento do número de Neper a partir de questões financeiras

Acredita-se também que o número de Neper possa ter origem nas questões financeiras, sobretudo no conceito de juros compostos, ou valor pago sobre um empréstimo, o que remonta desde a época da história escrita.

Importa recordar qual é o comportamento dos juros compostos. Imaginemos que investimos 100 unidades monetárias (u.m.) de capital inicial numa conta que paga

Figura 2.5: Jost Bürgi (1552 - 1632)
Fonte: www.colegioweb.com.br, biografia-letra

5% de juros compostos anualmente. No final de um ano, o nosso saldo será de $100 \times 1.05 = 105$. Esta soma será, para o banco, o novo capital que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano, o saldo deverá ser de $105 \times 1.05 = 110.25$, no final do terceiro ano $110.25 \times 1.05 = 115.76$, e assim sucessivamente. Ora, desse modo, teremos juros anuais sobre o valor original e juros anuais sobre o capital acumulado – daí o termo "juros compostos" [PP13]. Portanto, o nosso saldo cresce numa progressão geométrica, com a taxa comum de 1.05. No entanto, numa conta que pague juros simples, a taxa anual é aplicada sobre o valor original, que é o mesmo a cada ano. Se tivéssemos investido 100 u. m. a juros simples, de cinco por cento, o saldo aumentaria a cada ano de 5 dando-nos uma progressão aritmética 100, 105, 110, 115 e assim por diante. Portanto, o dinheiro investido a juros compostos – não obstante qual seja a taxa – vai, após certo tempo, crescer mais rápido se comparado ao investido a juros simples.

O exemplo acima, dá-nos uma ideia do que acontece no caso geral. Vamos supor que investimos um capital inicial de P u.m. numa conta que paga $r\%$ da taxa de juros compostos anualmente. (Nos cálculos vamos exprimir r como uma dízima, por exemplo 0.05 em vez de 5%). Isto significa que, no final do primeiro ano, o saldo será $P \times (1+r)$, e no final do segundo ano, $P \times (1+r)^2$, e assim por diante até que depois de t anos o saldo será $P\times(1+r)^t$. Denotada esta soma por S chegamos à fórmula

$$S = P \times (1+r)^t. \quad (2.1)$$

Determinados bancos fazem o cálculo de juro acumulado várias vezes por ano. Por

Período de conversão	n	$\frac{r}{n}$	S
Anual	1	0,05	105,00
Semestral	2	0,025	105,06
Trimestral	4	0,0125	105,09
Mensal	12	0,004166	105,12
Semanal	52	0,0009615	105,12
Diário	365	0,0001370	105,13

Tabela 2.1: Capitalização de juros compostos a uma taxa anual de 5%

exemplo, uma taxa de juros anual de 5% é composta semestralmente, o banco usará metade da taxa de 2.5%. Assim teremos 100×1.025^2 ou 105.0625, cerca de seis centavos a mais do que o mesmo dinheiro renderia se fosse composto anualmente a 5%.

Na comunidade bancária podemos encontrar todos os tipos de composição de juros – anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo ao dia. Para cada "Período de conversão" o banco usa taxa de juros anual dividida por n, que é $\frac{r}{n}$. Como em t anos existem (nt) períodos de conversão, um capital inicial P, após t anos renderá

$$S = P \times (1 + \frac{r}{n})^{nt} \quad (2.2)$$

É claro que a equação (2.1) é apenas um caso especial da equação (2.2) o caso onde $n = 1$.

Interessa fazer comparação da quantidade de dinheiro que um determinado capital irá render depois de um ano para diferentes períodos de conversão, usando-se a mesma taxa de juros anual. Vamos tomar como exemplo P = 100 e $r = 5\% = 0.05$. Com uma calculadora científica através da tecla exponencial (geralmente denotada por y^x), poderemos usar multiplicações repetidas por um fator de $(1 + \frac{0.05}{n})$. Os resultados, mostrados na tabela 2.1, são bem surpreendentes. Como vemos uma quantia de 100 composta diariamente rende exatamente treze centavos a mais do que quando composta anualmente e cerca de um centavo a mais do que quando composta mensalmente ou semanalmente! Será que esta tendência se mantêm?

Para explorarmos esta questão, supomos um caso especial da equação (2.2), quando $r = 1$. Isto significa uma taxa anual de juros de 100%, embora na prática não existam bancos que alcancem tanta oferta. Contudo, trata-se de uma suposição, ou seja, não é uma situação real, mas tem profundas consequências matemáticas. Vamos assumir que, $P = 1$ e $t = 1$ ano. A equação (2.2) fica $S = (1 + \frac{1}{n})^n$. A seguir vamos procurar saber qual será o comportamento desta fórmula para valores crescentes de n. Os resultados são dados na tabela 2.2.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
10	2.25937
50	2.69159
100	2.70481
1000	2.71692
10000	2.71815
100000	2.71827
1000000	2.71828

Tabela 2.2: Termos da sucessão $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$

Observa-se que, a partir de certo valor, o aumento que n toma praticamente não afeta o resultado – as mudanças dão-se em dígitos cada vez menos significativos.

Porém, coloca-se a questão de que se esse padrão continua. O que ocorre é que, não importa o quão elevado seja n, os valores de $(1+\dfrac{1}{n})^n$ estacionam nalgum ponto em torno de $2.71828\ldots$ Não sabemos quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $(1+\dfrac{1}{n})^n$ à medida que n tende ao infinito, por isso, não se sabe ao certo a data da descoberta do número que mais tarde seria denotado por e. Parece provável, no entanto, que as origens do e recuem até ao início do século XVII, por volta da época em que Napier inventou os logaritmos. Em consequência, um bocado de atenção foi dada à lei dos juros compostos, e é possível que o número e tenha sido reconhecido pela primeira vez neste contexto. Mas antes de nos voltarmos para essas questões seria bom dar uma atenção mais detalhada ao processo matemático que se encontra na base e: o processo do limite.

2.3 Contribuição de Euler para o número de Neper

O número de Neper, ou simplesmente, constante de Euler e, como é universalmente conhecida, foi usada pela primeira vez como base do sistema de logaritmos naturais, pelo Matemático suíço, Leonhard Euler, em 1736. O conceito por detrás desse número era bem conhecido desde a invenção dos logaritmos, cerca de um século antes por Napier. Porém, a padronização que tornou o seu uso universal coube ao Euler, o também responsável pelas distintas notações que hoje são usadas em vários ramos da Matemática, como são os casos do π, f(x) para funções; a, b, c para os lados de um triângulo ABC, s para o semiperímetro do triângulo ABC, r para o inraio do triângulo ABC, R para o circunraio do triângulo ABC, Σ para somatório e i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Também deve-se a Euler, a notável fórmula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ que para $x = \pi$, a transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como $i^i = e^{\frac{-\pi}{2}}$ por exemplo. Um facto importante que conseguiu estabelecer é que todo número real não nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, excepto um, se $r > 0$. Na geometria plana aparece a reta de Euler.

2.3.1 Um pouco sobre vida e obra de Leonhard Euler

Leonhard Euler, nasceu em 1707 na Basileia, Suíça. No começo, estudou teologia, uma vez que o seu pai era um ministro religioso, esperava que o filho seguisse o mesmo caminho. Entretanto, Euler, muito cedo estudou com Jean Bernoulli e tornou-se amigo dos seus filhos, Daniel e Nicolaus (os irmãos Bernoulli) e através deles, descobriu a sua verdadeira vocação na Matemática. Em seguida passou a ser aluno de Jackes Bernoulli.

Em 1727, aos 20 anos de idade, com ajuda dos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli, Euler passou a pertencer à Academia de São Petersburgo, na Rússia, instituição que acabara de ser criada por Pedro, o Grande. Com a saída de Daniel que regressara a Suíça para ocupar o posto de Professor de Matemática na Universidade de Basileia, Euler passou a responder pela secção de matemática da Academia.

Euler permaneceu no cargo durante 14 anos, tendo prestigiado sobremaneira a Academia de São Petersburgo. A seguir mudou-se para a Academia de Berlim, na Alemanha onde a convite de Frederico, o Grande, desempenhou iguais funções durante os 25 anos seguintes. Fruto do reconhecimento do seu desempenho na Rússia, a Academia de S. Petersburgo continuou a pagar-lhe pensões durante todo o tempo que passou em Berlim.

O carinho que os russos mantinham por Euler e o mau relacionamento com os membros da corte de Berlim, que na altura valorizavam mais os filósofos do que a geómetras, fizeram-no, em 1766, aceitar um convite de Catarina, a Grande, para retornar à Academia de São Petersburgo, onde ficaria os 17 anos seguintes de sua vida. Euler morreu subitamente em 1783 com 76 anos de idade [Boy96].

Euler foi um escritor muito produtivo, tendo superado todos os matemáticos de sua época e não só, as suas contribuições figuram em todos os ramos da matemática. Como se não bastasse, a sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego. Embora já estivesse cego do olho direito desde 1735. A cegueira poderia ser um obstáculo intransponível que poderia pôr fim a sua produtividade científica, mas, Euler, extraordinariamente, superou essa grande dificuldade e manteve a atividade produtiva. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande [Eve08].

Durante a sua vida, Euler publicou 530 trabalhos, entre livros e artigos, ao morrer, deixou ainda, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais 47 anos, dos quais puderam ser editados 886 trabalhos sobre a vida e obra de Euler, uma iniciativa levada a cabo pela Sociedade Suíça de Ciências Naturais, desde 1909.

Capítulo 3

Principais Teoremas e resultados fundamentais

Neste capítulo vamos relembrar algumas definições e teoremas sobre sucessões, séries e logaritmos com incidência nos resultados essenciais necessários ao estudo. São omitidas as demonstrações pois podem ser consultadas em muitos livros de análise real, podemos referir por exemplo [Fer91].

3.1 Sucessões

Esta secção vai abordar algumas noções básicas sobre sucessões, nomeadamente, definições, teoremas e certos resultados que serão necessários no presente estudo.

Definição 3.1. *Uma sucessão numérica ou sucessão de números reais é qualquer aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Geralmente uma sucessão representa-se pelo seu termo geral, ou por recorrência, em que se dão a conhecer alguns dos primeiros termos, sendo o termo de ordem n definido através dos termos anteriores.*

Por exemplo, $u_n = 3 + 4n$ é uma sucessão definida pelo termo geral, ao passo que,

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n + 4, n \geq 1 \end{cases}$$

é a mesma sucessão definida por recorrência.

Uma sucessão diz-se majorada, se o conjunto dos seus termos for majorado, isto é,[Mir78]:

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq b.$$

E minorada, se o conjunto dos seus termos for minorado, ou seja,

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, : a \leq u_n.$$

Definição 3.2 (sucessão limitada)**.** *Uma sucessão simultaneamente majorada e minorada diz-se limitada.*

Portanto, se a sucessão (u_n) for limitada teremos,

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.\ a \leq u_n \leq b.$$

Em resumo temos:
Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem:
$u_n < u_{n+1}$, a sucessão diz-se estritamente crescente.
$u_n \leq u_{n+1}$ a sucessão diz-se crescente.
$u_n > u_{n+1}$ a sucessão diz-se estritamente decrescente
$u_n \geq u_{n+1}$ a sucessão diz-se decrescente.
Normalmente, se (u_n) é crescente, a sucessão $(-u_n)$ é decrescente; se (u_n) é decrescente, $(-u_n)$ é crescente.
Uma sucessão decrescente ou crescente diz-se monótona.

Dada uma sucessão (u_n), para averiguar se ela é crescente ou decrescente constrói-se a diferença $u_n - u_{n+1}$. Se esta diferença é não positiva então $u_n \leq u_{n+1}$ e (u_n) é crescente; se a diferença é não negativa tem-se $u_n \geq u_{n+1}$ e (u_n) é decrescente. É evidente que uma sucessão (u_n) pode não ser crescente nem decrescente. É, por exemplo, o caso de $u_n - u_{n+1}$ ser de sinal indeterminado e $u_{n-1} - u_{n+1}$ e $u_n - u_{n+2}$ serem de sinais contrários. A sucessão diz-se, então, oscilatória – ora crescente, ora decrescente.

Definição 3.3 (Progressão Aritmética). *Uma sucessão (u_n) é uma progressão aritmética se existe um número real r tal que $u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Ao número r chama-se razão da progressão aritmética.

O termo geral de uma progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1).r$$

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética é:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n, n \in \mathbb{N}$$

Definição 3.4 (Progressão Geométrica). *Uma sucessão (u_n) de termos não nulos é uma progressão geométrica se existe um número r, tal que:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se razão da progressão geométrica.

O termo geral de uma progressão geométrica é:

$$u_n = u_1.r^{n-1}.$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo u_1 e a razão r é:

$$S_n = u_1.\frac{1-r^n}{1-r}$$

Uma sucessão (u_n) tem por limite a (e escreve-se $u_n \to a$ ou $\lim u_n = a$) se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : (n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$$

ou seja, $u_n \to a$ se e só se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem a partir da qual, todos os termos pertencem ao intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. A sucessão que verifica a propriedade indicada acima, diz-se convergente.

3.1.1 Teoremas importantes sobre sucessões

Teorema 3.5. *[teorema da unicidade do limite] Nenhuma sucessão tem dois limites distintos, ou seja, se a sucessão (u_n) tem limite este é único.*

Para o teorema que se segue notamos que uma sucessão se diz limitada se o conjunto dos seus termos o for.

Teorema 3.6. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Teorema 3.7 (Propriedades Algébricas)**.** *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e (u_n) e (v_n) sucessões convergentes para os limites u e v, respetivamente .*

Então,

(i) $u_n + v_n$, (cu_n) e $(u_n v_n)$ convergem para os limites $u+v$, cu, uv respectivamente;

(ii) Se $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $u \neq 0$ então $(\frac{1}{u_n})$ converge para $\frac{1}{u}$.

Teorema 3.8. *Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes. Se $u_n \leq v_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então*

$\lim u_n \leq \lim v_n$

Teorema 3.9 (Teorema das sucessões enquadradas). *Sendo u_n e v_n sucessões convergentes com o mesmo limite a, e z_n uma sucessão tal que a partir de certa ordem $u_n \leq z_n \leq v_n$, então, $\lim z_n = a$.*

Vamos apresentar a seguir uma classe importante de sucessões para as quais é fácil provar a sua convergência.

Teorema 3.10. *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Definição 3.11. *(Subsucessão) Sendo u e w duas sucessões, diremos que w é subsucessão de u se e somente se existir uma sucessão estritamente crescente v tal que $w = u \circ v$ (o que pressupõe naturalmente $v_n \in \mathbb{N}$ para cada $n \in \mathbb{N}$).*

Teorema 3.12. *Toda a sucessão limitada de números reais possui uma subsucessão convergente.*

Teorema 3.13. *A sucessão de números reais (u_n) diz-se de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$, se tem*

$$|u_n - u_m| < \varepsilon$$

O teorema que se segue enuncia uma propriedade fundamental das sucessões de Cauchy. Mas antes precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Proposição 3.14. *Toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Teorema 3.15. *Uma sucessão (u_n) de números reais é convergente se e só se for de Cauchy.*

3.2 Séries

Nesta secção são abordados alguns resultados sobre séries numéricas e séries de funções, precisamente os que constituem pre-requisitos para a abordagem a posteriori.

3.2.1 Séries numéricas

Definição 3.16 (Séries). *Sendo (u_n) uma sucessão numérica, chama-se série numérica de termo geral (u_n) à expressão*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...,$$

que abreviadamente se costuma a escrever
$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *ou, ainda* $\sum u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Associada a uma série, considera-se sempre uma sucessão das suas somas parciais definidas por

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dir-se-á convergente ou divergente conforme a sucessão das somas parciais, s_n, que lhe está associada for convergente ou divergente.
A $s = \lim s_n$, no caso da convergência, chama-se soma da série.

Definição 3.17 (Série absolutamente convergente). *Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente se e só se a série dos valores absolutos (módulos) dos seus termos $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente.*

Teorema 3.18. *Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente então é convergente. Além disso*

$$|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Definição 3.19 (Série Geométrica). *Chama-se Série geométrica a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, quando (u_n) é uma progressão geométrica. A Série geométrica representa-se, habitualmente, por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

A sucessão associada à série é:

$$s_1 = a$$

$$s_2 = a + ar$$

$$s_3 = a + ar + ar^2$$

$$s_4 = a + ar + ar^2 + ar^3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

3.2.2 Alguns teoremas sobre séries

Vejamos, agora, alguns teoremas que nos fazem concluir sobre a convergência ou divergência de séries:

Teorema 3.20. *A série $\sum ar^n$ converge se e somente se $|r| < 1$; na hipótese de convergência, a soma da série é $\frac{a}{1-r}$.*

Teorema 3.21. *Se uma série $\sum u_n$ é convergente, então $u_n \to 0$.*

Teorema 3.22. *i) Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ duas séries convergentes, de somas a e b, respetivamente, e $w_n = u_n + v_n$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ é convergente e a sua soma é $c = a + b$*
ii) Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergente de soma a e c um número real, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n)$ é convergente e tem por soma ac [Fer91].

Definição 3.23 (produto de séries numéricas)**.** *Geralmente, dadas duas séries*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Chama-se série produto à série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

sendo
$c_0 = a_0 b_0$
$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$
$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$
$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$
$\vdots$
$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$
$\vdots$
Se $\sum a_n = a$ e $\sum b_n = b$ forem absolutamente convergente, $\sum c_n$ é convergente e

tem-se $\sum c_n = ab$

Nota: $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *podem ser convergentes sem que* $\sum c_n$ *o seja.*

Teorema 3.24 (Critério de comparação). *Suponhamos que, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *se tem* $0 \leq u_n \leq v_n$, *então,*
a) se $\sum v_n$ *é convergente,* $\sum u_n$ *também é convergente.*
b) se $\sum u_n$ *é divergente,* $\sum v_n$ *também é divergente.*

Teorema 3.25 (Critério da razão D'Alembert). *Consideremos uma série* $\sum u_n$, *de termos positivos. Então se*
a) existe um número $r < 1$ *tal que, a partir de certa ordem, se tenha* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$, *a série* $\sum u_n$ *é convergente;*
b) a partir de certa ordem, se tem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, *a série* $\sum u_n$ *é divergente.*

3.2.3 Séries de funções

Definição 3.26 (Série de funções). *Chama-se série de funções a uma expressão que se pode escrever na forma* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, *com* $f_n(x)$ *funções reais de variável real todas definidas no mesmo intervalo* $[a, b]$.

Diz-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge em $[a, b]$, para a função $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ se para cada $x \in [a, b]$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

o que significa que, para cada $x \in [a, b]$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = s(x)$$

A função $s(x)$, dada por $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, denomina-se soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Teorema 3.27 (Critério de Weierstrass). *Considerando a série de funções dada por* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *definida no intervalo* $[a, b]$. *Se:*
i)existem constantes M_n *tais que* $|f_n(x)| \leq M_n$,

ii) a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ *é convergente,*
então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $[a, b]$.

Definição 3.28 (Série de potência de $(x-a)$)**.** *Uma série de potência de $(x-a)$ é uma série da forma [Fer09]:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

Definição 3.29 (Série de potência de x)**.** *Uma série de potência de x, é uma série da forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(É o caso particular das séries de potências de $(x-a)$ onde se considera $a = 0$)

Definição 3.30 (Produto de séries de potências)**.** *Se tivermos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$*

a série de produto é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n$$

Teorema 3.31 (Raio de convergência de série de potências)**.** *Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ podem acontecer três situações:*

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge apenas para $x = a$

ii)$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge absolutamente em $]a-r; a+r[$ e diverge em $]-\infty; a-r[$ e $]a+r; +\infty; [$.

iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge absolutamente em $\mathbb{R}$.

Ao valor de r chama-se raio de convergência.

Portanto, no caso de existência do limite quando $a_n \neq 0$, o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ pode ser dado por,

$$\lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = r \quad (3.1)$$

Definição 3.32 (Teorema de Taylor)**.** *Se uma determinada função f tiver derivada de ordem n num determinado intervalo fechado com extremos a e x, sendo $x > a$ ou $x < a$, existe pelo menos,um ponto c, do interior desse intervalo tal que[Fer09]*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (3.2)$$

Para $a = 0$, a fórmula de Taylor assume a forma

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), (c \text{ entre } x \text{ e } 0)$$

A expressão acima é designada por fórmula de Mac-Laurin.

Pode se notar que se substituirmos $f(x)$ (em pontos próximos de a) por
$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$,

teremos um erro dado pela expressão

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

denominado "resto de Lagrange" de ordem n.

Teremos então,

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n(n+1)!}.f^{(n+1)}(c) = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c) = 0$$

3.3 Logaritmos

No capítulo 2 deste trabalho falamos do surgimento do e, e vimos que a sua história está intimamente ligada à dos logaritmos, aliás, o e constitui a base do logaritmo natural, também conhecido como logaritmo neperiano. Nesta secção iremos rever a definição e principais propriedades operatórias, resultados de que precisaremos nas aplicações do número de Neper na vida prática.

Logaritmo é uma função matemática que sendo a e b números reais positivos e a diferente de 1 ($0 < a \neq 1, b > 0$), denominamos logaritmo de b na base a, ao expoente em que a deve ser elevado de modo que a potência obtida de base a seja igual a b $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ [Ste06].

Sendo que:

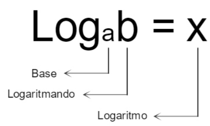


Figura 3.1: Logaritmo

a - é a base do logaritmo, tem de ser um número real positivo, diferente de 1 ($0 < a$; e $a \neq 1$).
b - é o logaritmando, deve ser um real positivo ($b > 0$).
x - é logaritmo.

Da definição de logaritmo e tendo sempre em conta as condições de existência, decorrem as seguintes propriedades:

1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a a^b = b$

4. $b^{\log_b a} = a$

5. Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$.

3.3.1 Propriedades operatórias do logaritmo

Para operarmos com os logaritmos, temos de ter em conta as seguintes condições:

1. **Logaritmo do produto**: numa mesma base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma entre o logaritmo desses números. Ou seja, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então, $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

2. **Logaritmo do quociente:** numa mesma base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo desses números. Ou seja, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$.

3. **Logaritmo da potência:** numa mesma base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo da potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base

positiva. Ou seja, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\log_a b^c = c.\log_a b$

4. **Mudança de base:** um logaritmo qualquer numa base a e o logaritmando b , fazendo a mudança de base, consiste em transformar esse logaritmo num quociente de um logaritmo formado por uma base c . A mudança de base resulta no quociente entre logaritmos em que tanto b quanto a passam a ser o logaritmando formado pela base c.

Ou seja, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ $(0 < c \neq 1)$, então $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

3.3.2 Logaritmo neperiano

O **logaritmo neperiano**, também denominado **logaritmo natural** de um número a, com $a > 0$, é o logaritmo desse número a, na base e. Representamos o logaritmo natural por ln.

$$\ln a = \log_e a$$

Como a função logaritmo possui derivadas até a ordem $(n+1)$, num dado intervalo, I, de $\mathbb{R}$, então pode ser aproximada pelo polinómio de Taylor da forma:

$$P(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{4!}f^{(4)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \text{ entre } x \text{ e } a.$$

Vamos encontrar o polinómio de Taylor de ordem n em torno de $a = 1$.

Comecemos em primeiro lugar a determinar as derivadas de $f(x) = \ln x$.

$f(x) = \ln x$; $f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(1) = 1$.

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $f''(1) = -1$.

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $f'''(1) = 2$.

$f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{x^4}$; $f^{(4)}(1) = -6$.

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$; $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$
Substituindo os termos na fórmula, teremos: Com $a = 1$

$\ln(x) = 0 + \dfrac{1}{1!}(x-1) - \dfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{2}{3!}(x-1)^3 - \dfrac{6}{4!}(x-4)^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)}\xi^{n+1}$, ξ entre x e 1.

$\ln(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 - \dfrac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)}\xi^{n+1}$, ξ entre x e 1.

Capítulo 4

Métodos de cálculo da aproximação do número de Neper

Este capítulo é dedicado ao estudo de três métodos de cálculo da aproximação do número de Neper, nomeadamente, o método da sucessão $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$, o método da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ e o método de frações contínuas ao longo dos quais são apresentadas as demonstrações dos principais resultados. No final faz-se a comparação da eficiência dos mesmos em termos de convergência do número de Neper.

4.1 Aproximação do e pela sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$

O número de Neper, começa a ser abordado no ensino secundário a partir do estudo de sucessões. Neste contexto surgem diversos limites que sugerem uma abordagem numérica, um desses limites é o da sucessão definida pelo termo geral

$$u_n = (1+\frac{1}{n})^n.$$

Nesta altura, o número de Neper e é apresentado aos alunos como sendo limite desta sucessão. Todavia, a abordagem que se faz a partir do 11º ano, não é aprofundada, daí que, não se faz estudo da sua convergência, pese embora, alguns manuais referirem que esta sucessão é monótona crescente e limitada, cujos termos estão contidos no intervalo de [2, 3[e consequentemente, a sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ é convergente e o seu limite é um número maior do que dois e não superior a três, [Fer09]. Assim sendo, o aluno pode através da calculadora científica estimar o valor do e com determinado número de casas decimais corretas.

Os manuais de matemática do 11º ano sugerem atividades que visam calcular vários termos da sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ de modo a confirmar que é crescente e estimar o valor do e. São sugeridas igualmente atividades relacionadas com a comparação dos valores do e que se obtém através da calculadora e usando a função e^x.

As atividades referidas no parágrafo anterior visam obter uma aproximação para o limite de $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$, partindo do pressuposto de que uma sucessão toma valores tão próximos do seu limite quanto se queira, desde que se tome um termo de uma ordem suficientemente elevada. Entretanto, como a calculadora tem uma precisão

n	$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
10	**2**.593742460
10^2	**2.7**04813829
10^3	**2.71**6923932
10^4	**2.718**145927
10^5	**2.7182**68237
10^6	**2.71828**0469
10^7	**2.718281**693
10^8	**2.7182818**15
10^9	**2.71828182**7
10^{10}	**2.718281828**
10^{11}	**2.718281828**
10^{12}	**2.718281828**
10^{13}	**2.7**60577856
10^{14}	1
10^{15}	1
10^{16}	1

Tabela 4.1: Tabela de aproximação do e pela sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

finita, aquele facto não corresponde à verdade. Para determinadas ordens, os valores apresentados na calculadora afastam-se muito do número e. Esta situação pode induzir o aluno em erro, uma vez que ele não está familiarizado com este tipo de problemas e desconhece o valor exato do número e.

Interessa que o professor informe ao aluno de que, a calculadora permite-nos ter uma ideia do limite de uma sucessão, porém, em muitos casos falha devido aos erros de arredondamento, o que faz com que apresente determinados valores que não tenham a ver com a realidade.

A tabela 4.1 mostra aproximações dos termos da sucessão que se obtém da calculadora TI - 83 plus.

A tabela 4.1 mostra aproximações que vão melhorando a medida que n cresce. No entanto, para $n = 10^k$, com k desde 1 até 10, as aproximações obtidas apresentam k algarismos corretos, deste modo $n = 10^{10}$, tem 10 algarismos corretos, o valor da precisão proporcionada pela máquina calculadora, uma vez que a máquina apresenta resultados com o máximo de 10 algarismos. Ora, se usarmos $n = 10^{11}$, obtemos no visor da máquina a mesma aproximação já obtida com $n = 10^{10}$. Pois, internamente os cálculos são efetuados com 14 dígitos, é possível extrair mais um algarismo correto para valor de e, o que resulta numa aproximação de $e = 2.7182818284$

Da mesma maneira, com $n = 10^{12}$ podemos, procedendo de modo análogo, obter mais um algarismo e, o número assim construído é 2.71828182845, porque, para

$n = 10^k$ com $k \geq 14$ (k inteiro), obtém-se sempre o valor 1 na máquina, isto deve-se ao facto de, para estes valores de k , ter-se $1 + \frac{1}{10^k} = 1$ por ser $\frac{1}{10^k}$ menor do que a precisão da máquina. Para $n = 10^{13}$ obtém-se a aproximação 2.760577856, que não é a melhor que aproximação dada para $n = 10^{12}$.

Acredita-se que este tipo de abordagem, que constituiu um problema prático, na matemática financeira, permitiu a introdução do número de Neper por forma a superar o obstáculo que existia de considerar o infinito como um número grande, o que levava a ideia de que $1^\infty = 1$ [Mao08].

"... o comportamento peculiar da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ para valores grandes de n deve parecer de facto intrigante. Suponha que consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses,$(1 + \frac{1}{n})$, à medida que n aumenta, $\frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 0 e assim $1 + \frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de n realmente grande (...) a expressão $(1+\frac{1}{n})$ pode ser substituída por 1. Agora, elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. Portanto, parece que $(1 + \frac{1}{n})^n$ para valores grandes de n deve se aproximar do número 1." [Mao08].

Vamos a seguir apresentar a prova em duas etapas de que a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é convergente, nomeadamente, primeiro, demonstrar que a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, é crescente e depois que está compreendida entre dois e três ($2 \leq u_n \leq 3$), logo o seu limite existe [Fer09].

4.1.1 A sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é crescente

Comecemos por provar que a sucessão de termo geral $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ com $(n = 1, 2, ...)$ é de termos positivos e crescente. Note-se que para qualquer n inteiro e positivo, a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é uma potência de base positiva. A demonstração de que a sucessão é crescente será feita à custa da aplicação da fórmula do binómio de Newton.

Desenvolvendo $(1 + \frac{1}{n})^n$ por aplicação do binómio de Newton obtemos:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \binom{n}{n} 1^n (\frac{1}{n})^0 + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} (\frac{1}{n})^1 + \binom{n}{n-2} 1^{n-2} (\frac{1}{n})^2 + ...$$
$$\cdots + \binom{n}{n-k} 1^{n-k} (\frac{1}{n})^k + ... + \binom{n}{1} 1^1 (\frac{1}{n})^{n-1} + \binom{n}{0} 1^0 (\frac{1}{n})^n$$

Efetuando os cálculos obtemos:

$$(1+\frac{1}{n})^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} + \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}.\frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!}.\frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$+\frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}.\frac{1}{n^k} + \cdots + \cdots + \frac{n!}{1!(n-1)!}.\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n!}{0!(n-0)!}.\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \cdots + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k} + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots 3.2}{(n-1)!}.\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots 2.1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

Finalmente, podemos dar ao desenvolvimento inicial a forma

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 3\,.2}{n^{n-2}} + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)\cdots 2\,.1}{n^{n-1}}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n}) + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \quad (4.1)$$

Obtivemos assim uma soma de $n+1$ parcelas. Quando n aumenta, aumenta o número de parcelas. Por outro lado, cada uma das parcelas cresce com n porque, por exemplo,

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) < \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})$$

cresce com n visto que qualquer dos fatores $1-\frac{i}{n}$ é crescente com n (atenda a que k não depende de n). Portanto $u_n = (1-\frac{1}{n})^n$ é uma sucessão crescente.

4.1.2 A sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$, é limitada

A seguir vamos provar que a sucessão $(1+\frac{1}{n})^n$, é limitada [Fer09].

Uma vez que qualquer um dos fatores $(1-\frac{i}{n})$ é inferior a 1, podemos escrever (com base na igualdade deduzida em (4.1) que

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad (4.2)$$

(substituindo no caso todos os fatores $(1-\frac{i}{n})$ por 1).

Ora, como

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}} \; (k=3,4,\cdots,n)$$

temos que

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

E, finalmente

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2+\frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

($\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}$ podem representar os termos de uma progressão geométrica com o 1º termo igual $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$).

Mas,

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Portanto,

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Em suma,

$$(1+\frac{1}{n})^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado, conclui-se que $u_n \geq 2$ (uma vez que se $u_1 = 2$ e atendendo que $(1+\frac{1}{n})^n$ é crescente).

Concluímos que,

$$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

O mesmo é dizermos que $(1+\frac{1}{n})^n$ é limitada.

Atendendo que a sucessão de termo geral $(1+\frac{1}{n})^n$ é monótona e limitada, com o respeito ao teorema 3.10, ela é convergente. Denotemos por e o seu limite, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

4.1.3 Propriedade da sucessão $u_n = (1+\frac{a}{v_n})^{v_n}$

A seguir vamos apresentar algumas propriedades relacionadas com o limite. Tem-se que;

$$\lim(1+\frac{1}{v_n})^{v_n} = e$$

desde que v_n tenda para $+\infty$ ou $-\infty$. De facto, se $v_n \to +\infty$, a partir de certa ordem $v_n > 1$.
Consideremos, então, o número inteiro α que depende de n, tal que

$$\alpha \leq v_n < \alpha + 1.$$

Estas desigualdades podem tomar a forma

$$\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{v_n} > \frac{1}{\alpha+1}$$

Finalmente, adicionando uma unidade, obteremos

$$1+\frac{1}{\alpha+1} < 1+\frac{1}{v_n} \leq 1+\frac{1}{\alpha}$$

Desta expressão e da inicial resulta

$$(1+\frac{1}{\alpha+1})^{\alpha} \leq (1+\frac{1}{v_n})^{v_n} < (1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha+1}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha+1})^{\alpha} &= \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha+1})^{\alpha+1}(1+\frac{1}{\alpha+1})^{-1} = \\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha+1})^{\alpha+1}. \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha+1})^{-1} \\ &= e.1 = e\end{aligned}$$

(note-se que se $v_n \longrightarrow +\infty$ também $\alpha \longrightarrow +\infty$).

e

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha+1} &= \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}(1+\frac{1}{\alpha}) = \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}. \lim_{\alpha\to+\infty}(1+\frac{1}{\alpha}) \\ &= e.1 = e\end{aligned}$$

Então, pelo teorema 3.9 nomeadamente, teorema das sucessões enquadradas, concluímos que

$$\lim(1+\frac{1}{v_n})^{v_n}=e$$

desde que $v_n \to +\infty$.

Se $v_n \to -\infty$, fazendo $w_n = -v_n$, temos que

$$(1+\frac{1}{v_n})^{v_n}=(1+\frac{1}{-w_n})^{-w_n}=(\frac{1-w_n}{-w_n})^{-w_n}=$$
$$=(\frac{-w_n}{1-w_n})^{w_n}=(\frac{w_n}{w_n-1})^{w_n}=(\frac{w_n-1+1}{w_n-1})^{w_n}=(1+\frac{1}{w_n-1})^{w_n}$$

Então,

$$\lim_{v_n\to-\infty}(1+\frac{1}{v_n})^{v_n}=\lim_{w_n\to+\infty}(1+\frac{1}{w_n-1})^{w_n}=\lim(1+\frac{1}{w_n-1})^{w_n-1}.(1+\frac{1}{w_n-1})=$$
$$=e.1=e$$

porque se $v_n \to -\infty$ então $w_n \to +\infty$ e podemos utilizar o resultado antes deduzido. Assim, $\lim(1+\frac{1}{v_n})^{v_n}=e$ desde que $v_n \to -\infty$.

Vamos definir a função exponencial por

$$e^x=\lim_{v_n\to\infty}(1+\frac{x}{v_n})^{v_n}$$

desde que $x \neq 0$ e $v_n \to +\infty$ ou $v_n \to -\infty$.

Basta, agora notar que

$$(1+\frac{x}{v_n})^{v_n}=(1+\frac{1}{\frac{v_n}{x}})^{v_n}=[(1+\frac{1}{\frac{v_n}{x}})^{\frac{v_n}{x}}]^x$$

então, sendo o limite de $v_n + \infty$ ou $-\infty$, também o limite de $\frac{v_n}{x}$ será $+\infty$ ou $-\infty$ (sinal igual ou contrário ao de v_n conforme $x > 0$ ou $x < 0$), pelo que

$$\lim(1+\frac{1}{\frac{v_n}{x}})^{\frac{v_n}{x}}=e.$$

Então,

$$\lim[(1+\frac{1}{\frac{v_n}{x}})^{\frac{v_n}{x}}]^x=e^x$$

(pode se notar que x funciona como constante; a variável é n).

4.2 Aproximação do e pela série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Na secção anterior calculou-se a aproximação do número de Neper através da sucessão $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ utilizando a máquina calculadora científica. Verificou-se que o mesmo é pouco eficiente em termos de aproximação do número Neper dada a instabilidade que apresenta, conforme se viu na tabela 4.1. Esta situação leva a necessidade de estudar outros métodos mais sofisticados, um dos quais, é o da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Nesta secção vamos tratar de fazer o estudo da aproximação do número de Neper através da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, mais precisamente, demonstrar alguns resultados importantes à volta da série e calcular a aproximação do e a partir das respetivas somas parciais.

Uma vez que a representação do número de Neper está associada à escrita de uma soma de infinitos termos (ver 4.2), isto permite abordar uma série, que parece ser convergente. A seguir vamos começar por provar que

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Para verificar esta conjectura, inicialmente determinamos um limite superior. Isto pode ser feito usando algumas desigualdades simples e cálculos numéricos, uma importante ferramenta a ser explorada.

Seja, $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Para determinar se existe um limite superior para s, tem-se que:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3.4\cdots n} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n} < 1.(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Obtivemos acima uma série Geométrica com o primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{Soma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Daí: $s < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow s < 3$.

$s > 2$ porque $s = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots > 2$, então s é finito e fica limitado pela desigualdade $2 < s < 3$. Deste modo, com respeito a expressão (4.2), $2 < e \leq s < 3$ sejam

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

e

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Para $2 \leq p \leq n$, temos

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots$$

$$(1 - \frac{p-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$\geq 1 + 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p-1}{n}).$$

Fixando p e tomando limite em n obtemos

$$\lim u_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!}$$

$$e \geq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}$$

Considerando o limite quando $p \to \infty$, obtemos

$$e \geq s.$$

Logo podemos definir

$$e = \lim_{v_n \to \infty} (1 + \frac{1}{v_n})^{v_n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

A expressão acima permite aproximar o número de Neper, a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais.

Com a calculadora científica podemos calcular a aproximação do e. A tabela 4.2 apresenta as aproximações obtidas pelas somas parciais da série para alguns valores de n. É de notar que não se verifica o mesmo erro que na tabela 4.1, os primeiros dígitos vão ficando fixos até que o número estabiliza em 2.7182818. No entanto, é de notar igualmente que o visor da máquina calculadora contém um número limitado de casas decimais.

O resultado do número de Neper que a máquina calculadora nos fornece (e = 2,718281828), dá-nos uma perceção de certa regularidade na parte decimal (8281), própria de um número racional. Mas, será que o número de Neper é um número racional?

A seguir vamos apresentar uma prova simples da irracionalidade do número de Neper. A prova é por redução ao absurdo.

4.2.1 Prova da irracionalidade do e

Vamos supor que $e = \frac{p}{q}$, com p e q números inteiros primos entre si e q diferente de zero.

$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$, onde $q < n$.

Multiplicando-se ambos os membros por $q!$, teremos:

$$\frac{p}{q}.q! = 1.q! + 1.q! + \frac{1}{2!}.q! + \frac{1}{3!}.q! + \cdots + \frac{1}{(q-1)!}.q! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1)!}.q! + \frac{1}{(q+2)!}.q! + \cdots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{q}.q! = q! + q! + \frac{1}{2!}.1.2.3.4.5.6 \cdots q + \frac{1}{3!}.1.2.3.4.5.6 \cdots q + \cdots + \frac{1}{(q-1)!}.q.(q-1)! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1)q!}.q! + \frac{1}{(q+2).(q+1)q!}.q! + \cdots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots$$

$$\Leftrightarrow p.(q-1) \cdots 3.2.1 = [q! + q! + (3.4.5.6 \cdots q) + \cdots + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \\ + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + \cdots + \frac{1}{n!}q! + \cdots$$

$$\Leftrightarrow p.(q-1) \cdots 3.2.1 - [q! + q! + (3.4.5.6 \cdots q) + (4.5.6. \cdots q) + \cdots + q + 1] = \\ = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + \cdots \frac{1}{n!}q! + \cdots$$

No primeiro membro as parcelas são números inteiros positivos, porque $q \geq 2$.

No segundo membro, as parcelas são frações, das quais uma vez que $q \geq 2$, implica que $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, e:

$$\frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(q+2)(q+1)} \leq \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{n!}.q! \leq \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{3} = \frac{1}{3^{n-(q+1)}}$$

Assim sendo, no segundo membro: $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + \cdots \frac{1}{n!}q! + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + \cdots$, obtém-se uma série geométrica com o primeiro termo $a_1 = \frac{1}{3}$ e razão $r = \frac{1}{3}$. A soma destas parcelas é:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{n!}q! + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + \cdots = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Então chegamos à conclusão que um inteiro positivo é menor que $\frac{1}{2}$, o que é um absurdo. Logo, o número de Neper não pode ser um número racional, ou seja, é um número irracional.

n	somas parciais da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	aproximação
0	$\frac{1}{0!}$	1
1	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$	**2**
2	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$	**2**.5
3	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$	**2**.666666667
4	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$	**2.7**08333333
5	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$	**2.71**6666667
6	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$	**2.718**055555
7	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}$	**2.7182**53968
8	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$	**2.71827**8769
9	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}$	**2.718281**525
10	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$	**2.7182818**01
11	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}$	**2.718281828**
12	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}$	**2.718281828**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}+\cdots+\frac{1}{30!}$	**2.718281828**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.2: Tabela de aproximação do e por série infinita

4.2.2 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Vamos em seguida provar que [Fer09],

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4.3)$$

Como aplicação da definição 3.2.3, vamos considerar a função $x \to exp(x)$ definida pela série de potências.

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Então, é $a_n = \frac{1}{n!}$.
Portanto, utilizando do resultado (3.1), o seu raio de convergência é

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$\lim n + 1 = +\infty$$

pelo que o intervalo de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Então, o domínio de $exp(x)$ é $\mathbb{R}$.

Efetuamos agora, $exp(x).exp(y)$:

Recorrendo a definição 3.30 de produto de séries de potências, teremos, considerando as séries

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} y^n$,

a série produto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

sendo

$c_0 = 1.1 = 1,$
$c_1 = 1.y + x.1 = x + y,$
$c_2 = 1.\frac{y^2}{2!} + x.y + \frac{x^2}{2!}.1 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} = \frac{(x+y)^2}{2!},$
$c_3 = 1.\frac{y^3}{3!} + x\frac{y^2}{2!} + \frac{x^2}{2!}y + \frac{x^3}{3!}.1 = \frac{y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3}{3!} = \frac{(x+y)^3}{3!}$

$\vdots$

$c_n = \dfrac{(x+y)^n}{n!}$

Portanto,

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}).(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

e em consequência,

$$exp(x).exp(y) = exp(x+y).$$

Desta forma pode-se concluir que

$$exp(x).exp(-x) = exp(0).$$

Verificando a fórmula que dá $exp(x)$ pode-se concluir que

$$exp(0) = 1.$$

pelo que

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$$

Também

$$exp(rx) = exp(x + x + \cdots + x) =$$
$$= exp(x).exp(x)\cdots exp(x) =$$
$$= [exp(x)]^r$$

Então

$[exp(x)]^r = exp(rx)$, $r \in \mathbb{N}$.

Poderia se mostrar facilmente que esta propriedade é válida para qualquer $r \in \mathbb{R}$; então,

$$[exp(x)]^r = exp(rx).$$

Todas as propriedades deduzidas, até agora, mostram uma analogia de comportamento entre a função $exp(x)$ e uma potência de base constante e expoente variável (é isto a que chamamos uma exponencial). De facto, mostra-se que

$$exp(1) = e$$

$$\begin{aligned} exp(x) &= exp(1.x) \\ &= (exp(1))^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

pelo que podemos por

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n).$$

Conclui-se que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

(basta notar, atendendo ao desenvolvimento em série de potências que $e^x > x$) e

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

(basta notar que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$).

Por outro lado, a função e^x é estritamente crescente (conclui-se imediatamente da análise de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$)

De tudo o que foi dito, conclui-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $]0, +\infty[$ estritamente crescente.

O número de Neper pode ser definido como limite, para valores grandes de n da série:

$$e = \lim_{v_n \to \infty} (1 + \frac{1}{v_n})^{v_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

4.2.3 $(e^x)' = e^x$

e^x é uma função que é igual a sua derivada. A seguir apresentamos uma prova simples deste resultado.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Derivando os dois membros da igualdade, teremos

$$(e^x)' = (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots)'$$

$$(e^x)' = 1' + x' + (\frac{1}{2!}x^2)' + (\frac{1}{3!}x^3)' + (\frac{1}{4!}x^4)' + \cdots + (\frac{x^n}{n!})' + \cdots$$
$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3.2!} + \frac{4x^3}{4.3!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!} + \cdots$$

$$(e^x)' = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = e^x$$

O que mostra precisamente que a derivada de e^x é igual a ela mesma e^x.

4.2.4 $(ce^x)' = ce^x$

Vamos a seguir provar que $(ce^x)' = ce^x, c \in \mathbb{R}$, é única função cuja derivada resulta nela mesma.

Supomos que existam mais funções cujas as derivadas resultam nas referidas funções.

$$f'(x) = f(x)$$

Se multiplicarmos ambos os lados da igualdade por e^{-x}, teremos:

$$e^{-x}f'(x) = e^{-x}f(x)$$

$$e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0$$

$$(e^{-x}f(x))' = 0$$

Disto resulta;

$$e^{-x}f(x) = c$$
$$f(x) = ce^x.$$

Logo, ce^x é única função cuja derivada resulta nela mesma.

4.2.5 Erro da aproximação do e^x

Vamos agora deduzir uma expressão para o erro da aproximação do e através da truncatura da série.

Como a função $f(x) = e^x$ é infinitamente derivável, com recurso a equação (3.2) temos que,

$f(x) = e^x$

Para $x = 0$,

$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1$

$f^{(4)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(4)}(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Logo, por desenvolvimento de polinómio de Taylor temos que

$e^x = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dfrac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dfrac{(x-a)^4}{4!}f^{(4)}(a) + \cdots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, com ξ entre a e x.

Para $a = 0$, teremos
$e^x = f(0) + (x-0)f'(0) + \dfrac{(x-0)^2}{2!}f''(0) + \dfrac{(x-0)^3}{3!}f'''(0) + \dfrac{(x-0)^4}{4!}f^{(4)}(0) + \cdots + \dfrac{(x-0)^n}{n!}f^n(0) + \dfrac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$, com ξ entre 0 e x.

Para $x = 1$

$e^1 = f(0) + (1-0)f'(0) + \dfrac{(1-0)^2}{2!}f''(0) + \dfrac{(1-0)^3}{3!}f'''(0) + \dfrac{(1-0)^{(4)}}{4!}f^{(4)}(0) + \cdots +$

Aproximação do Número de Neper

$\frac{(1-0)^n}{n!}f^n(0) + \frac{(1-0)^n}{(n+1)!}e^{\xi}$, com ξ entre 0 e 1.

$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}$, com ξ entre 0 e 1.

Ou seja,

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}$, com ξ entre 0 e 1.

Estabelecido o erro da aproximação dado pela expressão $\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}$, como o ξ está entre 0 e 1, podemos estimar o erro de qualquer aproximação do e. Vamos supor por exemplo que queremos calcular o valor do e com dez casas corretas.

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi} < 0.5 \times 10^{-10}$$

Recorrendo ao resultado demonstrado acima que dá conta de que $2 < e < 3$, podemos assumir $e^{\xi} < e^1 < 3$, teremos então que,

$$\frac{1}{(n+1)!}3 < 0.5 \times 10^{-10}$$
$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{0.5}{10^{10}}$$

Ou seja,

$$\frac{3}{(n+1)!} < 5 \times 10^{-11}$$

Em seguida procuramos os valores que substituídos em n satisfaçam a inequação.

Para $n = 1$, teremos

$\frac{3}{2!} > 5 \times 10^{-11}$, portanto, não satisfaz.

Para $n = 12$, teremos,

$\frac{3}{13!} > 5 \times 10^{-11}$, também não satisfaz.

Para $n = 13$, teremos,

$\frac{3}{14!} = 3.4412 \times 10^{-11} < 5 \times 10^{-11}$, satisfaz.

Portanto, para determinar o e com dez casas decimais corretas, teremos de calcular apenas treze termos da série.

4.3 Aproximação do e pelas Frações contínuas

A teoria de frações contínuas é um dos importantes assuntos da Matemática elementar que continua a despertar interesse de muitos matemáticos, sendo ainda hoje tema de pesquisas. As frações contínuas são outra forma de representar um número real (racional e irracional), fornece aproximações racionais surpreendentemente boas, além de ser natural e conceitualmente simples.

Acredita-se que o uso de frações contínuas remonta aos séculos XVI, XVII e XVIII, porém há indícios de que outros povos antigos conhecessem rudimentos desse tema. Segundo Boyer [Boy96], os primeiros passos foram dados pelo Pietro Antonio Cataldi de Bolonha (1548-1626), que escreveu algumas raízes quadradas na forma de frações contínuas.

Uma fração contínua também chamada fração continuada, é uma forma importante de representar números reais. Em geral, apresenta a expressão da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots]$$

Uma fração contínua é uma expressão obtida a partir de um processo iterativo para representação de um número como a soma de sua parte inteira mais o inverso da sua parte fracionária. No caso do número em causa for racional, o processo termina quando o número não mais tiver uma parte fracionária, pois que este processo pode ser utilizado para representação dos números racionais e irracionais.

Para aproximar um número real (racional ou irracional) sob forma de frações contínuas, podem ser utilizados vários procedimentos, entre os quais, o procedimento aritmético, algébrico (com duas vias diferentes) e de Bombeli.

O número de Neper, nosso objeto de estudo, pode também ser representado sob forma de frações contínuas, embora, a semelhança do π e de outros números irracionais, seja uma representação infinita pelo facto do e ser igualmente um número irracional, conforme viu-se na demonstração feita na secção anterior.

Por indução matemática pode-se deduzir uma expressão geral para a soma.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1}{a_2 - 1 + \cfrac{a_2}{a_3 - 1 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} - 1 + \cfrac{a_{n-1}}{a_n - 1}}}}}}$$

Com $a_1 > 0$, $a_i > 1$, $i > 1$.

Fazendo, o limite $n \to \infty$, teremos que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1}{a_2 - 1 + \cfrac{a_2}{a_3 - 1 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} - 1 + \cfrac{a_{n-1}}{a_n - 1 + \ddots}}}}}}$$

Considerando que,

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

ou seja,

$$e^{-1} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Sendo que,

$$1 - e^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k}.$$

Disto resulta que,

$$\frac{e-1}{e} = 1 - e^{-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - 1 + \cfrac{2}{3 - 1 + \cfrac{3}{4 - 1 + \cfrac{4}{5 - 1 + \ddots}}}}} \tag{4.4}$$

Invertendo (4.4), teremos,

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ddots}}}}} \qquad (4.5)$$

Passando o 1 para o outro membro, teremos

$$\frac{e}{e-1} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ddots}}}}} \qquad (4.6)$$

A seguir, invertendo (4.6), teremos,

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{7}{7 + \ddots}}}}}} \qquad (4.7)$$

Finalmente, isolando o e teremos uma representação em fração contínua do número de Neper.

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{7}{7 + \cfrac{8}{8 + \cfrac{9}{9 + \cfrac{10}{10 + \cfrac{11}{11 + \cfrac{12}{12 + \cfrac{13}{13 + \cfrac{14}{14 + \ddots}}}}}}}}}}}}} \qquad (4.8)$$

Contudo, existem outras formas de representar o e por meio de frações continuas, uma das quais apresentada em (4.9). A dedução matemática de frações contínuas pode ser consultada no livro[Cam12]

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{34 + \cfrac{1}{38 + \cfrac{1}{42 + \ddots}}}}}}}}}}} \tag{4.9}$$

Com recurso a esta ferramenta matemática, podemos aproximar o e e por conseguinte fazer-se comparação com as duas formas vistas anteriormente, nomeadamente, a aproximação feita a partir da sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, e da série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. As tabelas 4.5 e 4.6 trazem a ideia dos resultados da aproximação do número de Neper, por meio de frações contínuas sucessivas.

A convergência da aproximação do número de Neper por frações contínuas, varia em função do tipo de frações contínuas a aplicar, sendo que algumas convergem mais rápido do que outras. Para as frações contínuas do tipo (4.8), com 10 iterações, temos o e com 9 dígitos corretos. Este processo embora seja infinito, permite estimar o erro da aproximação sem a necessidade de fazer muitas contas. O resultado apresentado na tabela 4.4 assegura-nos que para determinado número de dígitos corretos de Neper, teremos $n + 1$ frações contínuas.

A tabela 4.4 mostra o quanto a convergência pode ser rápida. Se aplicarmos outro tipo de frações contínuas, como por exemplo (4.9), teremos uma convergência ainda mais rápida. Com apenas 6 iterações, temos o e aproximado com 12 dígitos corretos, uma média de dois dígitos corretos por cada iteração.

Em virtude de ter se provado a irracionalidade do e não é possível calcular todos os seus dígitos. Porém, com os métodos estudados é possível aproximar o e com o número de casas decimais que se deseja. Portanto, o e é representado por uma dízima infinita não periódica como se vê nos seus primeiros 130 dígitos.
$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724$
$076630353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629\ldots$

n	Fração contínua	Fração resultante	Aproximação	Erro
x_0	2	2	2	0.7182818284
x_1	$2+\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	3	0.2817181715
x_2	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3}}$	$\frac{8}{3}$	**2**.666666667	0.0516151619
x_3	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4}}}$	$\frac{30}{11}$	**2.7**27272727	- 0.0089908987
x_4	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5}}}}$	$\frac{144}{53}$	**2.71**6981132	0.0013006964
x_5	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6}}}}}$	$\frac{840}{309}$	**2.718**446602	- 0.0001647734
x_6	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6+\cfrac{7}{7}}}}}}$	$\frac{40320}{14833}$	**2.7182**63332	- 0.0000184968
x_7	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6+\cfrac{7}{7+\cfrac{8}{8}}}}}}}$	$\frac{45360}{16687}$	**2.71828**3694	- 0.0000018653
x_8	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6+\cfrac{7}{7+\cfrac{8}{8+\cfrac{9}{9}}}}}}}}$	$\frac{403200}{148329}$	**2.718281**657	0.0000001709
x_9	...	$\frac{3991680}{1468457}$	**2.7182818**43	- 0.0000000142
x_{10}	...	$\frac{43545600}{16019531}$	**2.71828182**7	0.0000000012

Tabela 4.3: Tabela de aproximação do e por frações contínuas do tipo [4.8]

4.4 Comparação dos métodos de aproximação do número de Neper

Como se viu no desenvolvimento deste capítulo, para a aproximação do número de Neper, são empregues vários métodos, três dos quais analisados neste estudo, designadamente, o método da sucessão $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$, o método da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e o método de frações contínuas. A tabela 4.5 ilustra o comportamento de cada

n	Fração contínua	Fração resultante	Aproximação	Erro
x_0	1			
x_1	$1+\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	3	0.2817181715
x_2	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6}}$	$\frac{19}{7}$	**2.71**4285714	0.0039961142
x_3	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10}}}$	$\frac{193}{71}$	**2.718**309859	- 0.0000280305
x_4	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14}}}}$	$\frac{2721}{1001}$	**2.718281**718	0.0000001103
x_5	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18}}}}}$	$\frac{49171}{18089}$	**2.718281828**	- 0.0000000002
x_6	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\frac{1}{22}}}}}}$	$\frac{1084483}{398959}$	**2.718281828**	0.0000000000

Tabela 4.4: Tabela de aproximação do e por frações contínuas do tipo [4.9]

um dos três métodos em relação à aproximação do número de Neper. O método da sucessão, por exemplo, não é eficaz, é muito lento em termos de convergência. Para $n = 10^6$, ou seja, para $n = 1000000$ tem-se apenas o número de Neper aproximado com seis dígitos corretos, ao passo que com seis iterações aplicando o método de série numérica obtém-se o número de Neper com oito dígitos corretos. Já o método de frações contínuas é o mais eficaz, foram precisas apenas 6 iterações para se aproximar o número de Neper com 12 dígitos corretos, sendo por isso, o melhor em termos de precisão na aproximação do número de Neper se comparado com os dois anteriores. A eficiência do método de frações contínuas, suscitou interesse de estudiosos que desenvolveram vários tipos, alguns melhores do que outros, tal como vimos nos dois exemplos apresentados neste trabalho.

n	$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$	n	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	Fração contínua	
1	2	0	1	1	
10	**2**.593742460	1	**2**	$1 + \frac{2}{1}$	3
10^2	**2.7**04813829	2	**2**,5	$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6}}$	2,**71**4285714
10^3	**2.71**6923932	3	**2**,666666667	$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10}}}$	**2,718**309859
10^4	**2.718**145927	4	**2,7**08333333	$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14}}}}$	**2,718281**718
10^5	**2.7182**68237	5	**2,71**6666667	$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18}}}}}$	**2,718281828**
10^6	**2.71828**0469	6	**2,718**055555	$1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22}}}}}}$	**2,718281828**
10^7	**2.718281**693	7	**2,7182**53968	...	...
10^8	**2.7182818**15	8	**2,7182**78769	...	...
10^9	**2.71828182**7	9	**2,718281**525	...	...
10^{10}	**2.718281828**	10	**2,7182818**01	...	...

Tabela 4.5: Comparação da aproximação do número de Neper por método

Capítulo 5

Aplicação do e na vida prática

O número de Neper, ou constante de Neper e tem muita importância na matemática e bastante aplicação nas demais ciências, tais como Economia, Química, Física, Medicina e tantas outras, sobretudo em fenómenos que apresentam caraterísticas de crescimento e ou decrescimento, como por exemplo, o crescimento de uma determinada população.

Neste trabalho vamos falar precisamente de três aplicações do e na vida prática, sendo a primeira relativa a matemática económica, nomeadamente no cálculo de juros compostos e a segunda no processo de desintegração radioativa, a sua vasta aplicação na Química, na Medicina, na Indústria, na Agricultura e na Arqueologia, e uma terceira aplicação na Teoria das Probabilidades, com maior enfoque na função de distribuição de Poisson.

5.1 Aplicação do e na Economia

Na economia, o e é tem muitas aplicações, face a sua presença em diversos fenómenos económicos, uma das quais tem a ver com o cálculo de juros compostos.

Juros compostos, é uma operação monetária bastante aplicada nos sistemas financeiros, dadas as vantagens que oferece sob ponto de vista de rentabilidade. Os juros compostos consistem em fazer aplicações sobre aplicações, ou seja, aplicação constante de um montante em diferentes períodos de tempo (mensal, trimestral, semestral e anual,...).

O esquema abaixo, ajuda-nos a perceber melhor isto mesmo.

Vamos supor que um cliente de um determinado banco pretende aplicar o seu dinheiro a juros compostos numa quantia de 300 u.m. (unidade monetária) a uma taxa de 6% ao ano.

Para a primeira capitalização, teremos;

$$M(1) = 300 \times (1 + 0.06) = 318$$

Figura 5.1: Imagens de Euro, moeda do espaço europeu
Fonte: https://www.dicasdaitalia.com.br

Como se trata de juros compostos, teremos aplicação sobre aplicação, ou seja, teremos os seguintes resultados.

$M(2) = 318 \times (1 + 0.06) = 337.08 = 300 \times (1 + 0.06)^2$
$M(3) = 337.08 \times (1 + 0.06) = 357.30 = 300 \times (1 + 0.06)^3$
$M(4) = 357.30 \times (1 + 0.06) = 378.74 = 300 \times (1 + 0.06)^4$
$\vdots$
Verifica-se que o montante cresce numa progressão geométrica de razão 1.06, obtendo-se a fórmula;

$$M(t) = P \times (1 + r)^t$$

onde,
$M(t)$ – Montante ou valor final
P – o Principal ou capital investido
r – taxa de juro
t – tempo ou período de capitalização

Ora, se o cliente em causa resolver aplicar a mesma taxa de juros, mas em períodos de capitalização menores, nomeadamente, semestre, trimestre, mensal, diário e até mesmo por hora, isto é, fazer aplicação em n períodos cada vez menores. Matematicamente teremos a seguinte expressão.

$$M(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Para o capital inicial de 300 investido pelo cliente do banco, teremos o seguinte rendimento, isto a julgar pelo tipo de capitalização aplicada [MT17].

Capitalização	n	Valor final $M(1)$
Anual	1	318.000
Semestral	2	318.270
Trimestral	4	318.409
Mensal	12	318.503
Diário	365	318.549
Por hora	8760	318.550
Por minuto	210240	318.550
Por segundo	12614400	318.550

Tabela 5.1: Tabela de capitalização de juros compostos

Na tabela 5.1 vê-se que o montante final vai aumentando à medida que a frequência dos períodos aumenta, embora que tal aumento seja em escala cada vez menor. Entretanto, podemos igualmente verificar que a diferença entre os resultados anual, semestral, trimestral e mensal é um tanto ou quanto significativa. Já não se observa o mesmo nas diferenças entre os valores finais por hora, minuto e segundo, uma vez que as mesmas são bastante insignificantes. Existe um limite, ou seja, à medida que n tender para números infinitamente grandes, o montante final, tenderá para aproximadamente, 318.550.

Esta operação que desde há muito os bancos fazem, permite perceber que a mudança no período de capitalização não aumenta necessariamente a cobrança de juros de modo infinito, existe um limite de crescimento natural deste processo [QC17].

Assim sendo calculando o montante, teremos

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} P(1+\frac{r}{n})^{nt} = \lim_{n\to\infty} P((1+\frac{r}{n})^{n})^{t} = Pe^{rt}.$$

Então o montante final de t anos com a capitalização contínua poderá ser calculado facilmente usando a fórmula [Pem07]

$$M(t) = P \times e^{rt}.$$

Em que,
$M(t)$ – é o montante ou valor final
P – Principal ou Capital inicial investido
e – o número de Neper
r – taxa de juro
t – tempo

É com esta fórmula simples que os bancos conseguem calcular o montante resultante de qualquer aplicação de juros compostos continuamente a quaisquer taxas e período t. Ora, na sua aplicação é necessário que o número de Neper seja aproximado com um número adequado de dígitos corretos, por forma a reduzir a margem de erros e garantir maior eficácia dos resultados pretendidos.

Exemplo
Um capital de 15000.00 Euros é aplicado a taxa anual de 10% em 4 anos, com a capitalização contínua. Qual é o montante final?

Dados
$P = 15000.00$
$t = 4$
$r = 10\% = 0.1$
$M(t) = ?$

Resolução:

$$M(t) = P \times e^{rt}$$

Calculando o montante com o e aproximado com 3 dígitos corretos, ou seja, $e = 2.71$, teremos o seguinte resultado.
$M(t) = 15000.00 \times (2.71)^{((0.1)\times 4)} = 22350.07$

Ora, tomando o e aproximado com 10 dígitos corretos, teremos o seguinte resultado.
$M(t) = 15000.00 \times e^{((0.1)\times 4)} = 15000.00 \times e^{(0.4)}$
$M(t) = 22377.37$

Temos uma diferença de 27,3 Euros que se consubstancia em perca, neste caso em particular, o cliente perderia essa diferença para o banco. Entretanto, se se tratasse de um empréstimo bancário, então o banco perderia tal diferença para o cliente.

Ora, se o banco perdesse esta diferença para 1000 clientes, estávamos a falar num prejuízo avaliado em pouco mais de 27000.00 Euros. Por outro lado, as diferenças disto resultantes são proporcionais ao valor investido, ou seja, se se tratasse de somas avultadas de dinheiro, o prejuízo obviamente seria maior ainda, daí a necessidade imperiosa de se ter o e aproximado com um número adequado de casas decimais corretas.

Por outro lado, é preciso saber que a aproximação do número de Neper com muitas ou poucas casas decimais corretas, depende muito do tipo de modelo matemático a ser aplicado. Contudo, no capítulo anterior viu-se como estimar o erro da aproximação para uma determinada precisão que se deseja. Nos casos de cálculo de juros compostos por exemplo, na possibilidade de determinar o número de casas corretas para se assegurar que o erro seja menor que 0.005, teremos o seguinte.

Sabe-se que

$$M(t) = P \times e^{rt}.$$

Como P, r e t são constantes, uma vez que representam números conhecidos a priori, pode-se facilmente determinar o número de casas corretas que o e deve tomar para um determinado modelo matemático, pela fórmula da propagação do erro

$$\frac{\partial M}{\partial e} = Prte^{rt-1}$$
$$E_a(M) \leq |Prte^{rt-1}| E_a(e)$$

Disto resulta que para

$$E_a(M) \leq 0.005,$$

temos que ter

$$E_a(e) < \frac{0.005}{Prte^{rt-1}}.$$

Como a partir de um resultado anterior, sabemos que o erro da aproximação do e é dado pela expressão $\frac{1}{(n+1)!} e^{\xi}$, que é majorado por $\frac{3}{(n+1)!}$, teremos então que;

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{0.005}{Prte^{rt-1}}$$

A partir desta expressão, podemos calcular por exemplo o números de termos necessários para que o erro seja menor a 0.005.
$P = 15000$
$t = 4$
$r = 0.1$

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{0.005}{Prte^{rt-1}}$$
$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{0.005}{15000 \times 0.1 \times 4 \times 3^{0.1 \times 4 - 1}}$$
$$\frac{3}{(n+1)!} < 1.61 \times 10^{-6}$$

Para $n = 8$

$\frac{3}{(9!)} > 1.61 \times 10^{-6}$, não satisfaz.

Para $n = 9$

$\frac{3}{(10!)} < 1.61 \times 10^{-6}$, portanto, satisfaz. Isto significa que para calcular o montante final da aplicação de 15000 Euros por forma a que o erro seja menor do que 0.005, teremos que tomar o e aproximado com 9 termos da série.

5.2 Aplicação do e na desintegração Radioativa

O e está presente nas diferentes manifestações da desintegração radioativa, conhecida também por decaimento radioativo, fenómeno que consiste na transformação de um átomo noutro através da radiação.

Com o crescente desenvolvimento científico a utilização da desintegração radioativa conhece hoje uma vasta aplicação em várias áreas, trazendo vantagens e nalguns casos, desvantagens, quando utilizada por exemplo na produção de material bélico, como bombas nucleares, que hoje constituem uma séria ameaça à sobrevivência humana [PSF12].

Figura 5.2: Imagens de desintegração radioativa
Fonte: http://www.myshared.ru/slide/1022959

Na figura 5.2 vemos imagens diferentes, porém, em todas, algo comum, a presença do processo da desintegração radioativa ou decaimento. Este processo é transversal, ou seja, tem aplicação em fenómenos estudados em várias ciências, como podemos ver a seguir.

Na Medicina, a ciência médica tem atualmente várias aplicações das radiações, desde o diagnóstico de doenças até o seu tratamento. Estamos a falar por exemplo, da radioterapia, o processo de eliminação de doenças como tumores malignos ou cancerígenos no qual se utiliza geralmente o Raio X ou outras fontes de eletrões para se evitar a propagação da doença e por conseguinte garantir a restituição de células sadias [PSF12].

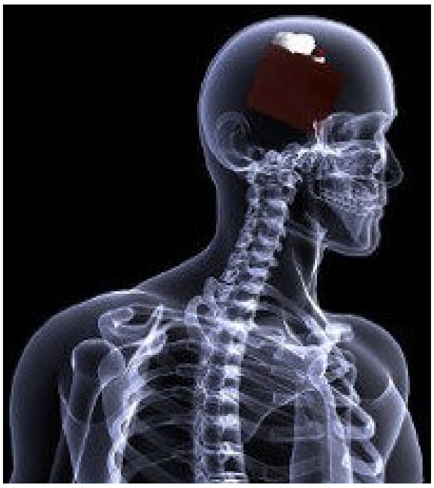


Figura 5.3: Imagens de Raio X
Fonte:http://raio-x.info

Na agricultura, através do processo da radiação, usam-se elementos radioativos para, entre outras aplicações, estudar os fertilizantes e o metabolismo dos minerais nas plantas, por exemplo medir a quantidade de fosfato existente no solo e o consumo de fósforo pelas plantas, bem como, no combate aos insetos.

Na indústria, a radiação é importante no processo de conservação de alimentos frescos, como carnes, peixe e mariscos, uma vez que estes tipos de alimentos não pode passar por métodos convencionais de eliminação de bactérias como a pasteurização térmica. A radiação destrói fungos e bactérias e por conseguinte, impede o crescimento de agentes produtores de deterioração.

Na Arqueologia, o processo da radiação permite por meio de fósseis achados um pouco por todo mundo, descobrir sobre a história das criaturas que existiram há muitos anos atrás, algumas das quais antes mesmo da existência do homem. Com o recurso ao método do carbono 14, é possível calcular há quantos anos o ser vivo morreu. O Carbono 14 é um isótopo instável composto de 6 protões e 8 neutrões, de meia vida de 5730 anos. Este é formado pelo resultado de uma reação do nitrogênio

14 [PSF12].
A atividade de uma fonte radioativa representa a sua taxa de desintegração, obtida

Figura 5.4: Fóssil de um animal
Fonte:http://escolakids.uol.com.br/fosseis.htm

do decaimento radioativo, para um radionuclídeo isolado, em que o decréscimo no número de átomos do elemento radioativo por unidade de tempo $N'(t)$ é proporcional ao número de átomos ainda não desintegrado $N(t)$, ou seja; [Tak06]).

$$N'(t) = -\lambda N(t) \quad (5.1)$$

Este fenómeno da transformação de um átomo noutro através da emissão de radiação, obedece uma lei própria, denominada "Lei fundamental da desintegração radioativa", cujo o modelo matemático resulta do seguinte:

Multiplicando-se ambos os lados da igualdade (5.1), por $e^{\lambda t}$, teremos

$N'(t)e^{\lambda t} = -\lambda N(t)e^{\lambda t}$.

Disto sai,

$N'(t)e^{\lambda t} + \lambda N(t)e^{\lambda t} = 0$.

Como a partir de resultados anteriores, sabemos que;

$(N(t)e^{\lambda t})' = 0$

Então;

Aproximação do Número de Neper

$N(t)e^{\lambda t} = c.$

$N(t) = ce^{-\lambda t}$

Assim sendo, se no instante inicial, t_0, existiam $N(t_0)$ átomos

$N(t_0) = ce^{-\lambda t_0} \Leftrightarrow c = N(t_0)e^{\lambda t_0}$

Destas condições iniciais resulta que

$N(t) = N(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}$

ou seja,

$$N = N_0e^{-\lambda t}. \quad (5.2)$$

A fórmula (5.2), denomina-se "lei fundamental da desintegração radioativa", em que:

$N =$ número de núcleos radioativos remanescentes após um tempo t
$N_0 =$número de núcleos radioativos na amostra num tempo $t = 0$
$\lambda =$ Constante de desintegração
$e =$ número de Neper

Para aplicarmos a fórmula (5.2), precisamos antes calcular a constante de desintegração radioativa. [PSF12]

Vamos primeiro estabelecer as unidades em que vamos falar.

A atividade do núcleo é expressa em Becquerel (Bq) no (SI), sendo que:

$1Bq = 1$ desintegração radioativa por segundo

$1Bq = 1$ desintegração/s

Uma outra unidade importante a saber é o Curie (Ci) no SI

$1g =$rádio -226.

A relação entre o Becquerel e Curie é dada por

$1Ci = 3.7.10^{10}Bq$

Outro conceito associado ao processo de decaimento radioativo é o **tempo de meia vida**. Trata-se do tempo necessário para que a quantidade de radionuclídeos de uma amostra diminua pela metade do seu valor no inicio do fenómeno. O seu valor pode facilmente ser retirado da equação, basta para o efeito fazer $t = T_{\frac{1}{2}}$, sendo $R = \dfrac{R_0}{2}$.

Ora, relacionando o tempo de meia vida $(t_{\frac{1}{2}})$ e a desintegração radioativa, temos que;

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Quando $t = t_{\frac{1}{2}}$, substituindo na fórmula temos

$N = \dfrac{N_0}{2}$

$\dfrac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}$

$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$

$ln(\frac{1}{2}) = -\lambda t ln(e)$

$ln(1) - ln(2) = -\lambda t ln(e)$

$0 - ln(2) = -\lambda t.1$

$-ln(2) = -\lambda t$

$ln(2) = \lambda t$

Sendo $t_{\frac{1}{2}}$, tempo de meia vida, então temos que

$ln(2) = \lambda t_{\frac{1}{2}}$

$\lambda = \dfrac{ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$

Aproximação do Número de Neper

Vamos a seguir resolver um problema para que se possa perceber melhor, uma das aplicações do decaimento radioativo na vida prática.

Exemplo

A atividade de um certo fóssil diminui de 1530 desintegrações por segundo para 190 desintegrações por segundo já com a correção da radiação de fundo, durante o processo de fossilização. Sendo a meia-vida do isótopo radioativo do ^{14}C de 5730 anos, determine a idade do fóssil [Ber14].

Resolução

1530 desintegrações $\rightarrow$ 190 desintegrações

$t_{\frac{1}{2}} = 5730$ anos

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln(2)}{5730} anos^{-1} = 0.0001209424$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow 190 = 1530 e^{-\lambda t} \Rightarrow ln(190) = ln(1530) - 0.0001209424t$$

$$5.25 = 7.33 - 0.0001209424t \Rightarrow t = (\tfrac{2.083}{0.0001209424}) = 17198.269 \cong 17198 \text{ anos}$$

Resposta: A idade do fóssil é de 17 198 anos.

5.3 Aplicação do e na Teoria das Probabilidades

O número de Neper tem também aplicação na Teoria das probabilidades, nas distribuições de probabilidades, mais precisamente na distribuição de Poisson e distribuição exponencial.

A Distribuição de Poisson, é uma distribuição discreta de probabilidade que se usa em situações em que para além do conhecimento do tamanho da amostra, sabe-se quantas vezes que determinado acontecimento ocorreu e quantas não ocorreu. A sua principal aplicação é a contagem do número de eventos que ocorrem de modo independente num determinado intervalo de tempo numa região em especial [PG16]. Como por exemplo:

- O número de chamadas telefónicas que chegam numa central num determinado

intervalo de tempo;
- O número de pessoas que acorrem a um estabelecimento por hora;
- O número de carros que passam por uma determinada estrada num determinado intervalo de tempo;
- O número de artigos que existem num lote de tamanho aleatório, etc.

O modelo matemático associado a distribuição de Poisson é a função de probabilidade

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \\ 0, & x \notin \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \end{cases}$$

Pode-se utilizar também a fórmula de recorrência.

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} f(0) = e^{-\lambda}, \\ f(x) = f(x-1) \times \dfrac{\lambda}{x}, \quad x \in \{1, 2, 3, \cdots\} \end{cases}$$

Exemplo concreto da aplicação da distribuição de Poisson

O número de chamadas que chegam à central telefónica de uma associação de táxi é uma variável aleatória de Poisson com a média de 1.5 chamadas em cada 10 minutos

Figura 5.5: Imagem de uma Associação de táxi
[Fonte: http://visao.sapo.pt/actualidade/sociedade]/2016-03-16-O-mundo-paralelo-dos-taxis

Considere o período das 10:00 e as 10:10. Determine a probabilidade da associação:

1. Não receber qualquer chamada.

2. Receber mais de 2 chamadas.

Resolução:

Seja
X_t = número de chamadas que chegam à central telefónica no intervalo de tempo t (minutos)
λ = número médio de chamadas que chegam à central telefónica por minuto.

Então,
$X_t \sim Poisson(0.15t)$
$t = 10$, $\lambda t = 1.5$
a) $P(X_{10} = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Para o e aproximado com três dígitos corretos, ou seja $e = 2.71$, teremos

$P(X_{10} = 0) = \dfrac{(2.71)^{(-1.5)}(1.5)^0}{0!} = 0.22415$, ou seja, é de aproximadamente 22.41%

Ora, fazendo a mesma operação, e tomar o e aproximado com 10 dígitos corretos, teremos

$P(X_{10} = 0) = \dfrac{e^{(-1.5)}(1.5)^0}{0!} = 0.2231$, ou seja, 22.31%

b) $P(X_{10} > 2) = 1 - P(X_{10} = 0) - P(X_{10} = 1) - P(X_{10} = 2)$

Para $e = 2.71$, teremos

$P(X_{10} > 2) = 1 - (2.71)^{-1.5}(\frac{(1.5)^0}{0!} + \frac{(1.5)^1}{1!} + \frac{(1.5)^2}{2!})$
$P(X_{10} > 2) = 0.1874$, o mesmo que 18.74%

Para o e aproximado com 10 dígitos corretos, teremos

$P(X_{10} > 2) = 1 - e^{-1.5}(\frac{(1.5)^0}{0!} + \frac{(1.5)^1}{1!} + \frac{(1.5)^2}{2!})$
$P(X_{10} > 2) = 0.191$, ou seja, 19.1%

Obs.: Na resolução do exercício vê-se claramente a diferença nos resultados, conforme a aproximação do e seja com três ou com 10 dígitos corretos:

Na alínea a) temos 22.41% ao invés de 22.51% obtidos anteriormente e na alínea b)18.74% ao invés de 19.1%

Portanto, em qualquer aplicação do e, é fundamental que seja aproximado com um número adequado de dígitos corretos, sob pena de se obter resultados que em nada tenham a ver com a realidade, ou pelo menos, distantes da precisão necessária.

Capítulo 6

Considerações finais

O desenvolvimento do presente estudo “Aproximação do número de Neper” permitiu fazer uma abordagem significativa à volta do número de Neper, também conhecido por “euler”, uma das constantes importantes da matemática.

A abordagem histórica permitiu trazer informações ligadas ao surgimento do número de Neper e relaciona as duas teorias da origem deste número, designadamente, a do surgimento do número de Neper a partir da descoberta dos logaritmos e a outra que defende a origem do mesmo nas questões financeiras, precisamente no cálculo de juros compostos. A abordagem, histórica apresenta igualmente, as contribuições dos matemáticos John Napier (1550 - 1617), Henry Briggs (1561 - 1631), Jost Burgi (1552 - 1632) e Leonhard Euler (1707 – 1783) para o estudo do número de Neper.

O trabalho demonstra como calcular as aproximações do número de Neper com um maior número de dígitos corretos com recurso aos métodos da sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$, da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e das frações contínuas. Compara a eficiência destes métodos e conclui que o método de frações contínuas é o mais eficiente. Ainda assim, conclui que o método da sucessão $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ aplicado no ensino secundário, deve ser mais explorado, ou seja, deve se aumentar a aproximação para pelo menos 10 dígitos corretos em vez de aproximá-lo apenas com dois ou três dígitos corretos. O método da série e o método das frações contínuas poderão ser ministrados no ensino superior.

O trabalho permitiu concluir igualmente que nas aplicações do número de Neper nas diversas ciências para explicar determinados fenómenos da vida prática, o e deverá ser aproximado com um número adequado de dígitos corretos, por forma a elevar a eficiência e eficácia dos resultados.

Acredita-se que o presente estudo é uma ferramenta colocada à disposição de alunos e demais leitores, para aprofundarem a sua aprendizagem sobre o número de Neper.

Tal como em qualquer obra científica, a abordagem sobre a aproximação do número de Neper não se esgota neste trabalho, há ainda muito por ser desenvolvido para melhor explorar o significado e a importância deste número na matemática e não só.

Para se melhorar o ensino e aprendizagem do número de Neper no ensino secundário, julga-se importante que o seu estudo seja progressivo ao longo das três classes que compreendem o secundário.

No décimo primeiro ano, sugere-se a partir do estudo do $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ se melhore a abordagem histórica do número de Neper, fazer referência ao surgimento e as contribuições de determinados matemáticos na descoberta do mesmo e as distintas aplicações na matemática e nos fenómenos que são estudados noutras ciências para a resolução de problemas da vida prática. Os alunos deverão saber sobre a necessidade de se aproximar o e com maior número de casas corretas e aproveitar-se a ocasião para fazê-lo com a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ até 10 dígitos corretos.

Já no décimo segundo ano, os alunos deverão aprofundar o seu conhecimento sobre a importância do número de Neper na matemática, especificamente a sua aplicação em vários conteúdos de matemática tais como sucessões e séries, funções exponenciais e logarítmicas e no cálculo diferencial e integral. Ainda nesta classe, os alunos deverão saber mais sobre a transversalidade dos conteúdos matemáticos em que o número de Neper é aplicado, com realce para modelagem matemática de fenómenos com características de crescimento ou decrescimento.

Deverá se aproveitar fazer a demonstração da derivada da função $f(x) = ce^x$ ser igual a ce^x, única função cuja derivada resulta nela mesma.

Os alunos deverão saber que o estudo sobre o número de Neper continua com maior profundidade no ensino superior onde são estudados outros métodos de aproximação, entre os quais, o método da série numérica e o método de frações contínuas, bem como as demonstrações de importantes resultados como, por exemplo, a prova da irracionalidade do e.

Bibliografia

[Ber14] Bertolo. Exercícios sobre decaimento radioativo, brochura de apoio as aulas, 2014. Available from: `http://qa.ff.up.pt/radioquimica/rq-tp/rq-tp04.pdf` [cited 22 Dezembro 2017]. 65

[Boy96] C. Boyer. *História da Matemática*. 2ª Edição. Edgar Blucher, 1996. 10, 16, 47

[Cam12] C. L. M. B. Campos. *Transcendental Representations whith Applications*. Mathematics and Phisics for science and Technology. Taylor & Francis, 2012. Available from: `https://books.google.pt/books?id=POh92t7y200c`. 50

[Eve08] H. Eves. *Introdução à História da Matemática*. 5ª Edição. Editora da Unicamp, 2008. 6, 16

[Fer91] J. C. C. Ferreira. *Introdução à análise matemática*. Manuais universitários. Fundação Calouste Gulbenkian. Serviço de Educação e Bolsas, 1991. 17, 22

[Fer09] M. A. M. Ferreira. *Sucessões e Séries*. 3ª Edição. Edições Sílabo, LDA, 2009. 24, 29, 31, 32, 40

[Lim85] E. L. Lima. *Logaritmos*. 1ª Edição. IMPA, 1985. 5, 9

[Mao08] E. Maor. *A história de um número*. 5ª Edição. Record, 2008. 6, 7, 9, 31

[Mir78] J. C. Miranda. *Análise Matemática I*. Volume I, 2ª Edição. Coimbra, 1978. 17

[MT17] P. L. Mota and R. Terra. Juros compostos e o número de Euler, 2017. Available from: `http://terracoeconomico.com.br/juros-compostos-e-o-numero-de-euler-e` [cited 22 Dezembro 2017]. 56

[Pem07] M. R. Pemberton. *Matemática para economistas*. 1ª Edição. Instituto Piaget, Lisboa – Portugal, 2007. 57

[PG16] A. C. Pedrosa and S. M. A. Gama. *Probabilidade e estatística*. 3ª Edição. Porto Editora – Portugal, 2016. 65

[PP13] J. C. Precioso and H. A. Pedroso. História do e gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática E Estatística Em Foco*, 1(1):31–40, 2013. 12

[PSF12] M. Da C. Patrício, V. Silva, and A. A. Filho. A radioatividade e suas utilidades. *POLÊM!CA*, 11(2):252–260, 2012. Available from: `http://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/polemica/article/view/3097`. 60, 61, 62, 63

[QC17] A. Querelha and F. Correia. *Manual de Matemática Financeira.* 3ª Edição. Edições Almedina, Coimbra, 2017. 57

[Ste06] J. Stewart. *Cálculo.* 5ª Edição. Editora da Unicamp, 2006. 25

[Tak06] M. N. Takeda. *Aplicação Do Método De Monte Carlo No Estudo Da Padronização De Radionuclídeos Com Esquema De Desintegração Complexos Em Sistema De Coincidências* $4\pi\beta - \gamma$. PhD thesis, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. Tese de Doutorado em Tecnologia Nuclear - Aplicações. 62