

Equações diferenciais biharmónicas evolutivas com crescimento não standard

Willian dos Santos Panni

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática e Aplicações
(3^o ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor José Carlos Matos Duque
Co-orientador: Prof. Doutor Jorge Ferreira

Júri:

Prof. Doutor Paulo Jorge da Silva Almeida
Prof. Doutor Feliz Manuel Barrão Minhós
Prof. Doutor Hermenegildo Borges de Oliveira
Prof. Doutor Dilberto da Silva Almeida Júnior
Prof. Doutor José Carlos Matos Duque
Prof. Doutor Rui Jorge Mendes Robalo

24 de janeiro de 2025

Declaração de Integridade

Eu, Willian dos Santos Panni, que abaixo assino, estudante com o número de inscrição D2926, do Curso de Doutorado em Matemática e Aplicações da Faculdade de Ciências, declaro ter desenvolvido o presente trabalho e elaborado o presente texto em total consonância com o **Código de Integridades da Universidade da Beira Interior**.

Mais concretamente afirmo não ter incorrido em qualquer das variedades de Fraude Académica, e que aqui declaro conhecer, que em particular atendi à exigida referenciação de frases, extratos, imagens e outras formas de trabalho intelectual, e assumindo assim na íntegra as responsabilidades da autoria.

Universidade da Beira Interior, 31 de janeiro de 2025.

Atentamente,

Dedicatória

Dedicado à minha esposa Ângela.

Agradecimentos

Expresso a minha gratidão a todos que explicitamente ou implicitamente ajudaram-me a alcançar o sucesso nesta nova etapa da minha jornada académica, nomeadamente:

- à minha esposa Ângela por sua compreensão, motivação constante e a coragem de mudar de país para estar ao meu lado;
- ao meu pai, minha mãe, meu irmão e minha irmã pelo apoio ao longo de todo este percurso;
- ao meu orientador, Prof. Dr. José C. M. Duque, pelos valiosos conhecimentos transmitidos, por sua paciência, dedicação contínua e tempo disponibilizado, que foram fundamentais para o desenvolvimento e a conclusão desta tese;
- ao Prof. Dr. Rui M. P. Almeida por colaborar fortemente na investigação, fornecer ensinamentos e sugestões que contribuíram significativamente para o progresso deste trabalho;
- a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, em especial ao Prof. Dr. Paulo J. S. P. Rebelo pelas agradáveis conversas;
- ao Prof. Dr. Jorge Ferreira por me indicar a Universidade da Beira Interior, proporcionando-me a oportunidade de realizar os meus estudos académicos neste ambiente inspirador.

A todos, o meu muito obrigado!

Este trabalho foi suportado pelo MCTES - Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, FSE - Fundo Social Europeu, UE - União Europeia e FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, através do Centro de Matemática e Aplicações - Universidade da Beira Interior, sob o número de concessão UI/BD/150794/2020 e com o Identificador de Objeto Digital (DOI)

<https://doi.org/10.54499/UI/BD/150794/2020>

Resumo

Neste trabalho, investiga-se uma equação diferencial evolutiva com o operador $p(x)$ -biharmónico. Especificamente, estuda-se o problema de encontrar uma função $u = u(x, t)$ que satisfaz:

$$\begin{cases} u_t + \Delta_{p(x)}^2 u - \alpha \Delta u = f(x, t), & \text{em } \Omega \times]0, T], \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times]0, T], \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua denotada por $\partial\Omega$, $0 < T < \infty$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha < \infty$ e $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é uma função Lipschitz contínua na variável t . Considerando uma função de expoente variável $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$, mensurável e limitada, o operador $p(x)$ -biharmónico é representado por:

$$\Delta_{p(x)}^2 u = \Delta \left(|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \right).$$

Efetuada a mudança de variável

$$v = -|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Leftrightarrow \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v,$$

onde $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é o expoente conjugado de $p(x)$, o problema original é representado num sistema constituído por duas equações de segunda ordem,

$$\begin{cases} u_t - \Delta v - \alpha \Delta u = f, & \text{em } \Omega \times]0, T], \\ \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v, & \text{em } \Omega \times]0, T], \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega \times]0, T], \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Realiza-se a discretização do referido sistema em relação à variável t e obtém-se o problema semidiscreto. Demonstra-se a existência da solução semidiscreta através do teorema de Brouwer e com técnicas clássicas de Análise Funcional são provadas a unicidade e as estimativas à priori da referida solução semidiscreta. Posteriormente, aplica-se o Método de Rothe e mostra-se que o sistema de equações de segunda ordem possui uma única solução fraca. Além disto, apresenta-se um estudo detalhado sobre a ordem de convergência da solução semidiscreta para a solução fraca.

De seguida, aplica-se a discretização espacial e define-se o problema discreto. Prova-se que a solução discreta existe e é única. Adicionalmente, mostram-se as estimativas à priori da referida solução e investiga-se minuciosamente a ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca.

Finalmente, utilizando o método de elementos finitos com as bases de Lagrange, obtém-se um sistema de equações algébricas. Para o referido sistema, implementam-se os códigos computacionais no software MATLAB e são apresentados exemplos considerando o domínio espacial unidimensional e bidimensional. Realiza-se uma análise detalhada das estimativas de erro e da ordem de convergência, em relação ao espaço e ao tempo, e conclui-se que as simulações numéricas são condizentes com a investigação analítica.

Palavras-chave

$p(x)$ -biharmónico, equação parabólica, método de Rothe, solução fraca, solução semidiscreta, solução discreta, ordem de convergência, método dos elementos finitos, simulações numéricas.

Abstract

In this work, an evolutionary differential evolution equation with the $p(x)$ -biharmonic operator is investigated. Specifically, the problem of finding a function $u = u(x, t)$ that satisfies

$$\begin{cases} u_t + \Delta_{p(x)}^2 u - \alpha \Delta u = f(x, t), & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times]0, T], \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, is an open, bounded set with a continuous Lipschitz boundary denoted by $\partial\Omega$, $0 < T < \infty$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha < \infty$ and $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ is a continuous Lipschitz function with respect to the variable t . Considering a variable exponent function $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$, measurable and limited, the $p(x)$ -biharmonic operator is represented by

$$\Delta_{p(x)}^2 u = \Delta \left(|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \right).$$

Performing the change of variable

$$v = -|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Leftrightarrow \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v,$$

where $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is the conjugate exponent of $p(x)$, the original problem is represented as a system consisting of two second-order equations:

$$\begin{cases} u_t - \Delta v - \alpha \Delta u = f, & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v, & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ u = v = 0, & \text{on } \partial\Omega \times]0, T], \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

The discretisation of the above system is carried out with respect to the variable t , resulting in a semi-discrete problem. The existence of the semi-discrete solution is demonstrated using Brouwer's theorem, and the uniqueness and a priori estimates of the said semidiscrete solution are proved using classical techniques of Functional Analysis. Subsequently, Rothe's method is applied and it is shown that the system of second-order equations has a unique weak solution. Furthermore, a detailed study is presented on the order of convergence of the semidiscrete solution to the weak solution.

Next, spatial discretization is applied and the discrete problem is defined. It is proved that the discrete solution exists and is unique. In addition, a priori estimates of the discrete solution are obtained, and the order of convergence of the discrete solution to the weak solution is meticulously investigated.

Finally, using the finite element method with Lagrange bases, a system of algebraic equations is obtained. For the said system, computational codes are implemented in MATLAB software, and examples are presented considering one-dimensional and two-dimensional spatial domains. A detailed analysis of error estimates and the order of convergence, with respect to space and time, is conducted, concluding that the numerical simulations are consistent with the analytical investigation.

Keywords

$p(x)$ -biharmonic, parabolic equation, Rothe's method, weak solution, semi-discrete solution, discrete solution, convergence order, finite element method, numerical simulations.

Índice

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Equação evolutiva com o operador $p(x)$-biharmônico | 9 |
| 2.1 | Problema semidiscreto | 12 |
| 2.1.1 | Existência da solução semidiscreta | 13 |
| 2.1.2 | Unicidade da solução semidiscreta | 16 |
| 2.1.3 | Estimativas à priori da solução semidiscreta | 20 |
| 2.1.4 | Existência e unicidade da solução fraca | 27 |
| 2.1.5 | Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ | 39 |
| 2.1.6 | Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$ | 44 |
| 2.1.7 | Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$ | 46 |
| 2.2 | Problema discreto | 48 |
| 2.2.1 | Existência da solução discreta | 49 |
| 2.2.2 | Unicidade da solução discreta | 51 |
| 2.2.3 | Estimativas à priori da solução discreta | 54 |
| 2.2.4 | Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$ | 60 |
| 2.2.5 | Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$ | 81 |
| 2.2.6 | Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$ | 89 |
| 2.2.7 | Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$ | 98 |
| 2.2.8 | Discretização por bases de Lagrange | 112 |
| 3 | Resultados numéricos | 115 |
| 3.1 | Exemplo 1 com $1.4 \leq p(x) < 1.93$ | 115 |
| 3.2 | Exemplo 2 com $2.5 \leq p(x) \leq 3$ | 123 |
| 3.3 | Exemplo 3 com $4 \leq p(x) \leq 6.5$ | 130 |
| 4 | Conclusões e trabalhos futuros | 139 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| Bibliografia | 141 |
| A Fundamentação Teórica | 149 |
| A.1 Espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ | 149 |
| A.2 Distribuições | 151 |
| A.3 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ | 152 |
| A.4 Espaços de Bochner $L^p(a, b; X)$ | 154 |
| A.5 Espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ | 155 |
| A.6 Discretização no espaço | 163 |
| A.6.1 Funções de base lineares unidimensionais | 165 |
| A.6.2 Funções de base de grau arbitrário unidimensionais | 166 |
| A.6.3 Funções de base de grau 1 bidimensionais | 169 |
| A.6.4 Funções de base de grau arbitrário bidimensionais | 171 |
| A.7 Teoremas auxiliares | 175 |
| Glossário | 178 |
| Índice Remissivo | 183 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1 | Funções $u(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ do Exemplo 1. | 116 |
| 3.2 | Funções $v(x, t)$ e $f(x, t)$ do Exemplo 1. | 117 |
| 3.3 | Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 1. | 117 |
| 3.4 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 1. | 120 |
| 3.5 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 1. | 120 |
| 3.6 | Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 1. | 123 |
| 3.7 | Funções $u(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ do Exemplo 2. | 124 |
| 3.8 | Funções $v(x, t)$ e $f(x, t)$ do Exemplo 2. | 124 |
| 3.9 | Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 2. | 125 |
| 3.10 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 2. | 127 |
| 3.11 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 2. | 128 |
| 3.12 | Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 2. | 130 |
| 3.13 | Funções $u(x, y, 1)$ e $\Delta u(x, y, 1)$ do Exemplo 3. | 131 |
| 3.14 | Funções $v(x, y, 1)$ e $f(x, y, 1)$ do Exemplo 3. | 132 |
| 3.15 | Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 3. | 132 |
| 3.16 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 3. | 135 |
| 3.17 | Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 3. | 135 |
| 3.18 | Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 3. | 137 |
| A.1 | Partição do intervalo $[0, 1]$ formada por quatro elementos finitos. | 165 |
| A.2 | Funções de base lineares. | 166 |
| A.3 | Elemento finito de referência. | 167 |
| A.4 | Funções de base com $r = 1$ | 168 |
| A.5 | Funções de base com $r = 2$ | 169 |
| A.6 | Malha triangular e o elemento de referência T_e | 169 |
| A.7 | Função de base $\varphi_1(x, y)$ para T_e | 170 |

| | | |
|------|-------------------------------------------------------------|-----|
| A.8 | Função de base $\varphi_2(x, y)$ para T_e . | 170 |
| A.9 | Função de base $\varphi_3(x, y)$ para T_e . | 171 |
| A.10 | Transformação linear de \hat{T} para T_e e sua inversa. | 171 |
| A.11 | Representação geométrica das áreas em \hat{T} e T_e . | 172 |
| A.12 | Funções de base de grau $r = 1$ em T_e . | 173 |
| A.13 | Funções de base de grau $r = 2$ em T_e . | 174 |
| A.14 | Funções de base de grau $r = 3$ em T_e . | 175 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Ordem de convergência, em relação a δ , da solução semidiscreta para a solução fraca. | 48 |
| 2.2 | Ordem de convergência, em relação a δ , da solução discreta para a solução fraca. | 111 |
| 2.3 | Ordem de convergência, em relação a h , da solução discreta para a solução fraca. | 111 |
| 2.4 | Relação entre h e δ | 112 |
| 3.1 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 1. | 118 |
| 3.2 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 1. | 119 |
| 3.3 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 1. | 119 |
| 3.4 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 1. | 119 |
| 3.5 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 1. | 121 |
| 3.6 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 1. | 121 |
| 3.7 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 1. | 122 |
| 3.8 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 4$ do Exemplo 1. | 122 |
| 3.9 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 2. | 125 |
| 3.10 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 2. | 126 |
| 3.11 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 2. | 126 |

| | | |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.12 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 2. | 126 |
| 3.13 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 2. | 128 |
| 3.14 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 2. | 129 |
| 3.15 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 2. | 129 |
| 3.16 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 4$ do Exemplo 2. | 129 |
| 3.17 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 3. | 133 |
| 3.18 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 3. | 133 |
| 3.19 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 3. | 134 |
| 3.20 | Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 3. | 134 |
| 3.21 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 3. | 136 |
| 3.22 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 3. | 136 |
| 3.23 | Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 3. | 136 |

Lista de Acrónimos

| | |
|--------|--------------------------------|
| UBI | Universidade da Beira Interior |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| EDP | Equação Diferencial Parcial |
| q.t.p. | quase em toda parte |
| q.s. | quase sempre. |

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais não lineares cuja estrutura depende da própria solução podem surgir na modelação matemática de vários processos da vida real. A maioria destes modelos enquadra-se na classe de equações diferenciais evolutivas com crescimento não standard. Nas últimas décadas, as equações diferenciais e os problemas variacionais com condições de crescimento não padronizadas têm atraído cada vez mais a atenção dos investigadores (ver, por exemplo, [8] para uma revisão). Estes problemas surgem em vários ramos da matemática aplicada e da física, por exemplo, no restauro de imagens e processamento digital [22], fluxos de fluidos eletro-reológicos ou termo-reológicos [74] e mecânica elástica [85]. As soluções para estes tipos de problemas podem apresentar propriedades interessantes, como extinção em tempo finito, *blow-up*, propagação de perturbações com velocidade finita ou fenómenos de tempo de espera, que são intrínsecos à solução de outros problemas não lineares.

As equações diferenciais parciais de quarta ordem têm várias aplicações em deformações de vigas elásticas [43, 54], em teoria das placas finas [29, 30] e no processamento de imagens [82], por exemplo. Na intersecção destes campos de estudo surgem os problemas com o operador $p(x)$ -biharmónico.

O operador $p(x)$ -biharmónico torna-se o bilaplaciano ou simplesmente o operador biharmónico quando a função $p(x) \equiv 2$. Para este caso, Ciarlet e Raviart [26] investigaram a seguinte equação biharmónica

$$\Delta^2 u = f. \tag{1.1}$$

Em particular, os autores estudaram a formulação variacional e demonstraram a existência e a unicidade da solução. Além disso, obtiveram estimativas de erro e a ordem de convergência utilizando elementos finitos C^0 associados a polinómios de grau r , onde $r \geq 1$.

Behrens e Guzmán [12] introduziram um novo método misto para a Equação (1.1), onde utilizaram uma formulação na qual reescreveram a referida equação como um sistema de quatro equações de primeira ordem. Os autores introduziram uma forma híbrida do método que permitiu reduzir os graus de liberdade globalmente acoplados apenas àqueles associados aos multiplicadores de Lagrange que aproximam a solução e sua derivada nas faces da triangulação.

Ben-Artzi, Chorev, Croisille e Fishelov [13] apresentaram um esquema de diferenças

finitas aplicável a domínios planares irregulares gerais para aproximar a Equação (1.1). Os autores utilizaram um polinómio de grau seis para realizar a interpolação e apresentaram um método para construir o respetivo polinómio. Além disso, demonstraram que a referida construção possui precisão de segunda ordem.

Chen, Li e Lin [21] investigaram a Equação (1.1) e realizaram uma mudança de variável na qual a equação biharmónica foi desacoplada em duas equações de Poisson. Eles desenvolveram um algoritmo rápido e com precisão de segunda ordem baseado numa discretização de diferenças finitas. Além disto, apresentaram exemplos numéricos que comprovaram a eficiência do método.

Georgoulis e Houston em [40] aplicaram o método de elementos finitos descontínuo de Galerkin para a Equação (1.1) e realizaram a análise de erro considerando graus polinómiais $r \geq 2$. Os autores também obtiveram a convergência exponencial e exibiram alguns resultados numéricos.

Recentemente, Lopes e de Oliveira [64] introduziram um método de elementos finitos de Galerkin contínuo/descontínuo com termos de penalização interiores para resolver a Equação (1.1) onde $f = \beta(|u_y|^{q-2}u_y)_y$ com $\beta > 0$ e $q > 1$. Os autores provaram a existência e a unicidade de soluções fracas. A consistência, estabilidade e convergência do método foram demonstradas analiticamente. Para demonstrar a aplicabilidade e robustez do modelo numérico, foram apresentados vários exemplos numéricos.

O estudo da Equação (1.1) foi realizada extensivamente e, para mais detalhes, são indicadas também as referências [18, 37, 41].

Por outro lado, para a equação parabólica com o operador biharmónico, nomeadamente,

$$u_t + \Delta^2 u = f, \quad (1.2)$$

existem aplicações na modelação do crescimento de um filme fino epitaxial. Por exemplo, Liu, Ma e Tang [60] estudaram a Equação (1.2) com $f = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u \log |\nabla u|)$ onde $q > 2$. Os autores demonstraram o *blow-up* em tempo finito da solução fraca. Além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtiveram o limite inferior e a respetiva taxa de *blow-up*. King, Stein e Winkler em [53] consideraram $f = \operatorname{div}(g(\nabla u)) + h(x, t)$ e provaram a existência, a unicidade e a regularidade de soluções para a Equação (1.2) num espaço funcional apropriado. Adicionalmente, demonstraram o comportamento assintótico e exibiram simulações numéricas.

Li [56] considerou $f = g(x, t) - h(x, t)u$ em (1.2) e utilizou um operador de interpolação especial desenvolvido por Girault e Raviart para provar estimativas de erro ótimas através do método de elementos finitos mistos aplicado a malhas retangulares quase uniformes. Ele demonstrou a ordem de convergência ótima e realizou simulações computacionais. Em

outro estudo, Li [55] desenvolveu métodos mistos utilizando funções de base radiais para resolver a Equação (1.2) com $f = g(x, t) - h(x, t)u$. Adicionalmente, obteve estimativas de erro semelhantes às dos métodos clássicos de elementos finitos mistos. Destacam-se também as referências [73, 75, 84, 86], em relação à Equação (1.2).

Winkler [81] investigou a seguinte equação parabólica com o operador biharmônico,

$$u_t + \Delta^2 u - \beta \Delta u = f, \quad (1.3)$$

onde a constante $\beta \leq 0$ e a função $f = g(x) - C\Delta|\nabla u|^2$ com $C > 0$. O autor demonstrou a existência de uma solução fraca global através do método de Rothe. Adicionalmente, investigou as estimativas e o comportamento assintótico de soluções radiais.

Liu e Li em [62] estudaram a Equação (1.3) considerando $\beta = 1$ e a função $f = g(u) + \Delta_p u$, onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ representa o operador p -Laplaciano. Os autores consideraram $p > 2$ e, através da teoria dos poços potenciais, demonstraram a existência global, o comportamento assintótico e o *blow-up* em tempo finito das soluções fracas. Enfatiza-se que a Equação (1.3) também foi estudada nas referências [2, 14, 15].

Por outro lado, quando se considera a função $p(x) \equiv p$ constante, tem-se o operador p -biharmônico definido por

$$\Delta_p^2 u = \Delta (|\Delta u|^{p-2} \Delta u), \quad \text{onde } 1 < p < \infty.$$

A investigação do referido operador na equação elíptica,

$$\Delta_p^2 u = f, \quad (1.4)$$

tem sido explorada por diversos investigadores. Por exemplo, Katzourakis e Pryer [48] consideraram a função f identicamente nula em (1.4). Para um valor de p fixo, os autores propuseram um método baseado em elementos finitos mistos C^0 e provaram, utilizando normas dependentes da malha, que o método converge sob a regularidade mínima da solução. Além disso, sob determinadas condições de regularidade e utilizando uma condição inf-sup, mostraram que a aproximação da solução converge com as taxas específicas que dependem de p e realizaram simulações numéricas para validar seus resultados teóricos.

Pryer [72] estudou as aproximações descontínuas de Galerkin da Equação (1.4) através de uma perspectiva variacional. O autor propôs uma formulação variacional discreta baseada numa definição apropriada de um elemento finito Hessiano e investigou a convergência do método (sem taxas) utilizando um argumento de semicontinuidade.

Almeida, Duque, Ferreira e Panni [3] demonstraram a existência, unicidade e regularidade das soluções fracas para a Equação (1.4) através de técnicas de Análise Funcional. Os

autores aplicaram o método de elementos finitos mistos e provaram que a solução discreta existe, é única e possui determinada regularidade. Adicionalmente, investigaram a ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca, as estimativas de erro e as simulações numéricas. A investigação utilizou normas clássicas que não dependem da malha, generalizando assim os resultados de Katzourakis e Pryer [48]. Outras investigações relacionadas à Equação (1.4) estão nas referências [34, 43, 46, 65, 66, 67].

Para a seguinte equação evolutiva com o operador p -biharmônico

$$u_t + \Delta_p^2 u = f, \quad (1.5)$$

referencia-se o artigo de Liu e Guo [58], onde os autores consideraram a função $f = -C|u|^{p-2}$, com $C > 0$ e $p > 2$. Eles demonstram a existência de soluções fracas pelo método do tempo discreto. Adicionalmente foram discutidas as propriedades do comportamento assintótico e a velocidade finita de propagação de perturbações das soluções.

Quando se considera uma não linearidade do tipo logarítmica $f = |u|^{q-2}u \log(|u|)$ em (1.5), Wang e Liu [80] provaram a existência de soluções globais, *blow-up*, extinção e não extinção das soluções através de considerações entre as constantes p e q . Liu e Li em [59] consideraram a seguinte não linearidade $f = C|u|^{q-2}u \log(|u|)$ em (1.5), onde $C > 0$, e demonstraram a existência das soluções fracas, o comportamento assintótico e a propagação de perturbações das soluções de acordo com relações entre p e q .

Chaoui e Djaghout [20] estudaram a seguinte equação com o termo de memória

$$u_t + \Delta_p^2 u = f(x, t) + \int_0^t a(t-s) \Delta_p^2 u(s, x) ds,$$

onde a é uma função contínua. Os autores aplicaram a discretização em relação à variável temporal e, através do método de Rothe, provaram a existência e as estimativas à priori da solução semidiscreta. Posteriormente, demonstraram a existência e a unicidade da solução fraca. Além disso, foi estabelecida a ordem de convergência. Adicionalmente, eles aplicaram o método de elementos finitos mistos, desenvolveram a formulação mista para a referida equação e apresentaram exemplos numéricos.

Recentemente, alguns investigadores estudaram a Equação (1.5) com o termo de dissipação forte $(-\Delta u_t)$, nomeadamente,

$$u_t + \Delta_p^2 u - \Delta u_t = f. \quad (1.6)$$

Cömert e Pişkin [27] consideraram uma não linearidade logarítmica $f = |u|^{q-2}u \ln(|u|)$, $q > 2$, e através do método dos poços potenciais e da desigualdade logarítmica de Sobolev, determinaram a existência e a unicidade da solução fraca global. Além disso, obtiveram

o comportamento polinomial para a referida solução. Liu e Fang em [63] investigaram a Equação (1.6) com $f = |u|^{q-2}u \log(|u|)$ e utilizando a aproximação de Galerkin e algumas estimativas de energia, demonstraram a existência de soluções locais e globais. Os autores também provaram o *blow-up* e as suas propriedades, além de determinarem a extinção e o decaimento da solução.

Por outro lado, quando se consideram $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, e o expoente p uma função $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ mensurável e limitada, tem-se o operador $p(x)$ -biharmônico definido por

$$\Delta_{p(x)}^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u).$$

A investigação do referido operador tem atraído a atenção de diversos investigadores, especialmente para a equação elíptica

$$\Delta_{p(x)}^2 u = f, \tag{1.7}$$

Heidarkhani, Afrouzi, Moradi, Caristi e Ge [45] consideraram $f = g(x, u)$ e, através de métodos variacionais, demonstraram a existência de solução fraca. Zhou [87] investigou a Equação (1.7) com $f = \beta g(x, u) + \mu h(x, u) - a(x)|u|^{p(x)-2}u$, onde $\beta, \mu \in \mathbb{R}$ e $p(x) > 1$. O autor impôs hipóteses adequadas sobre as funções $a(x)$, $g(x, u)$, $h(x, u)$ e utilizando técnicas variacionais, estabeleceu condições para a existência e não existência de soluções.

Ourraoui [69] estudou a Equação (1.7) aplicada a um problema com condições de fronteira do tipo Robin e provou a existência de solução com e sem estrutura variacional. El Amrouss, Moradi e Moussaoui [32] consideraram $f = \beta g(x, u) - \mu|u|^{p(x)-2}u$ em (1.7) e investigaram um problema condições de fronteira de Neumann, para o referido problema os autores demonstraram a existência de pelo menos três soluções.

Recentemente, Almeida, Duque, Ferreira e Panni em [5] investigaram a Equação (1.7) com $f \in L^2(\Omega)$. O uso de técnicas conhecidas de Análise Funcional permitiu que os autores demonstrassem a existência, a unicidade e as estimativas à priori da solução fraca. Além disto, aplicaram o método de elementos finitos e provaram a existência, a unicidade e a regularidade da solução discreta. Os autores exibiram resultados numéricos que exemplificam e validam a teoria. A referida investigação generalizou os resultados de Almeida, Duque, Ferreira e Panni [3]. Adicionalmente, pode-se consultar os estudos relacionados ao espectro da Equação (1.7) nas referências [9, 10, 33, 39] e para problemas elípticos não locais envolvendo o operador $p(x)$ -biharmônico indicam-se [78, 83].

Para as equações parabólicas com o operador $p(x)$ -biharmônico, nomeadamente,

$$u_t + \Delta_{p(x)}^2 u = f, \tag{1.8}$$

Liu [61] considerou a função $f = |u|^{q(x)-2}u$ com $q(x) > 1$ e provou a existência local de soluções fracas, além disto, o autor obteve o *blow-up* em tempo finito das soluções com uma energia inicial não positiva.

Chaoui e Djaghout em [19] estudaram a Equação (1.8) considerando f uma função contínua. Eles realizaram a discretização em relação à variável temporal, obtiveram o problema semidiscreto e demonstraram a existência da solução semidiscreta através da teoria dos operadores monótonos não lineares. Posteriormente, os autores utilizaram o método de elementos finitos de Galerkin, aplicaram o método de Rothe e demonstraram algumas estimativas à priori. Finalmente, provaram a existência da solução fraca.

Recentemente, Pişkin e Butakin [70] consideraram

$$u_t + \Delta_{p(x)}^2 u + \Delta^2 u_t = |u|^{q(x)-2} u,$$

com os expoentes $p(x)$ e $q(x)$ mensuráveis. Os autores aplicaram as condições de fronteira de Dirichlet e provaram o *blow-up* para o referido problema através de hipóteses adequadas nos expoentes variáveis e na dimensão do domínio.

Os trabalhos referenciados anteriormente motivaram-nos a investigar uma equação diferencial parabólica com o operador $p(x)$ -biharmónico. A nossa pesquisa foi incentivada pelo facto do referido problema ainda não possuir um método numérico eficaz. A utilização do método de Rothe pareceu adequada, pois este método já mostrou ser eficiente na resolução de outros problemas de evolução. O método baseia-se na discretização no tempo, transformando o problema evolutivo em elíptico e, conseqüentemente, determinando uma solução aproximada para o problema evolutivo original. Destaca-se que esta técnica foi amplamente estudada por Kačur em [49, 50, 51, 52]. Adicionalmente, observou-se que a maioria dos artigos sobre as equações parabólicas com o operador $p(x)$ -biharmónico investiga apenas a existência, a unicidade e o comportamento assintótico de soluções fracas. No entanto, estes artigos carecem de análise numérica relativa às propriedades da solução discreta.

A tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresenta-se a equação evolutiva com o operador $p(x)$ -biharmónico e são definidas as hipóteses para o desenvolvimento da pesquisa. No referido capítulo também se define o conceito de solução fraca. Na Secção 2.1 define-se o problema semidiscreto através da discretização em relação à variável t e demonstram-se a existência, a unicidade e as estimativas à priori da solução semidiscreta. Aplica-se o método de Rothe e prova-se a existência e a unicidade da solução fraca. Finalmente, investiga-se a ordem de convergência da solução semidiscreta para a solução fraca. Na Secção 2.2 discretiza-se o problema em relação à variável espacial e define-se o problema discreto. Para o referido problema provam-se a existência, a unicidade e as estimativas à priori da solução discreta. Adicionalmente, investiga-se a ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca. Encerra-se a secção com a aplicação das bases de

Lagrange e a obtenção do sistema de equações algébricas para a implementação no software MATLAB. No Capítulo 3 são apresentados os resultados numéricos de três exemplos implementados em MATLAB. Finalmente, apresentam-se as conclusões e os trabalhos futuros no Capítulo 4. No Apêndice A encontram-se as definições e os teoremas que auxiliam no desenvolvimento deste trabalho.

Destaca-se que os resultados desta investigação foram apresentados em conferências e publicados em revistas, nomeadamente:

- Apresentação de trabalho no XV Encontro Acadêmico de Modelagem Computacional realizado no Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCTI entre os dias 22 e 25 de fevereiro de 2022, para mais detalhes [4];
- Apresentação de trabalho no XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional realizado na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) entre os dias 26 e 30 de setembro de 2022, para mais detalhes [7];
- Publicação no arXiv, nomeadamente, Almeida, Duque, Ferreira, Panni. Mixed finite element method for a beam equation with the p -biharmonic operator [3];
- Publicação de artigo na revista Computers & Mathematics with Applications. Nomeadamente, Almeida, Duque, Ferreira, Panni. Mixed finite element method for a beam equation with the $p(x)$ -biharmonic operator [5];
- Apresentação de trabalho na International Conference on Mathematical Analysis and Applications in Science and Engineering realizada no Instituto Superior de Engenharia do Porto entre os dias 20 e 22 de junho de 2024;
- Submissão do artigo “Numerical analysis of an elliptic equation with the p -biharmonic operator”;
- Submissão do artigo “Existence and uniqueness of solutions for a parabolic equation with the p -biharmonic operator using Rothe’s method”;
- Submissão do artigo “Numerical analysis for an evolution equation with the p -biharmonic operator”.

Capítulo 2

Equação evolutiva com o operador $p(x)$ -biharmónico

Inicia-se este capítulo com a apresentação do problema parabólico envolvendo o operador $p(x)$ -biharmónico e as respetivas hipóteses que são necessárias para realizar a investigação. Posteriormente, faz-se uma mudança de variável e explicita-se o conceito de solução fraca para o referido problema. Informa-se que, ao longo deste trabalho, as constantes que são independentes dos parâmetros e das funções envolvidas são denotadas por C ou C_i com $i \in \mathbb{N}^*$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua denotada por $\partial\Omega$, $0 < T < \infty$, $Q = \Omega \times]0, T]$ o cilindro de altura T , $\Gamma = \partial\Omega \times]0, T]$ a lateral do cilindro e $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Estuda-se o problema de encontrar uma função $u = u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t + \Delta_{p(x)}^2 u - \alpha \Delta u = f(x, t), & \text{em } Q, \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{em } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Delta_{p(x)}^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u)$ representa o operador $p(x)$ -biharmónico, a função $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ é mensurável e satisfaz, para todo $x \in \Omega$,

$$1 < p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty, \quad (2.2)$$

$0 < \alpha_0 \leq \alpha < \infty$ e $f \in L^2(Q)$ é uma função Lipschitz contínua na variável t , assim para cada $x \in \Omega$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x, t_1) - f(x, t_2)| \leq C |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in]0, T]. \quad (2.3)$$

Considera-se a seguinte mudança de variável

$$v = -|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u, \quad (2.4)$$

e $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o expoente conjugado de Hölder de $p(x)$ satisfazendo, para todo $x \in \Omega$, $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ e

$$1 < q^- = \frac{p^+}{p^+ - 1} \leq q(x) \leq q^+ = \frac{p^-}{p^- - 1} < \infty. \quad (2.5)$$

Verifica-se que (2.5) é válida através de (2.2). De facto,

$$\begin{aligned}
0 &< p^- - 1 \leq p(x) - 1 \leq p^+ - 1 < \infty \\
0 &< \frac{1}{p^+ - 1} \leq \frac{1}{p(x) - 1} \leq \frac{1}{p^- - 1} < \infty \\
1 &< 1 + \frac{1}{p^+ - 1} \leq 1 + \frac{1}{p(x) - 1} \leq 1 + \frac{1}{p^- - 1} < \infty \\
1 &< \frac{p^+}{p^+ - 1} \leq \frac{p(x)}{p(x) - 1} \leq \frac{p^-}{p^- - 1} < \infty \\
1 &< q^- = \frac{p^+}{p^+ - 1} \leq q(x) \leq q^+ = \frac{p^-}{p^- - 1} < \infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.4) tem-se

$$\begin{aligned}
|v|^{q(x)-2} v &= - \left| -|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \right|^{q(x)-2} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \\
&= - \left(|\Delta u|^{p(x)-1} \right)^{q(x)-2} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{(p(x)-1)(q(x)-2)} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{p(x)q(x)-2p(x)-q(x)+2} |\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{p(x)q(x)-2p(x)-q(x)+2+p(x)-2} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{p(x)q(x)-p(x)-q(x)} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{p(x)\left(\frac{p(x)}{p(x)-1}\right)-p(x)-\frac{p(x)}{p(x)-1}} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^{\frac{(p(x))^2-(p(x))^2+p(x)-p(x)}{p(x)-1}} \Delta u \\
&= - |\Delta u|^0 \Delta u \\
&= - \Delta u.
\end{aligned}$$

Desta maneira, segue que

$$v = -|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u \Leftrightarrow \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v. \quad (2.6)$$

Através de (2.6), o Problema (2.1) torna-se equivalente ao de encontrar as funções $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ tais que

$$\begin{cases} u_t - \Delta v - \alpha \Delta u = f, & \text{em } Q, \\ \Delta u = -|v|^{q(x)-2} v, & \text{em } Q, \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Sejam $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$, multiplica-se cada equação do Problema (2.7) por uma respetiva função ψ e η , integra-se sobre Ω , aplica-se a fórmula de Green e obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} u_t \psi dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx, & \text{em } Q, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta dx = \int_{\Omega} |v|^{q(x)-2} v \eta dx, & \text{em } Q, \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Se integrarmos o Problema (2.8) de 0 até t , então

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_0^t \int_{\Omega} u_t \psi dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi dx dt + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx dt \\ = \int_0^t \int_{\Omega} f \psi dx dt, & \text{em } Q, \\ \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \eta dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} |v|^{q(x)-2} v \eta dx dt, & \text{em } Q, \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

Apresenta-se a seguir o conceito de solução fraca para o Problema (2.7).

Definição 2.1. O par (u, v) é uma solução fraca do Problema (2.7) se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- ii) $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$;
- iii) $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ com $q(x)$ satisfazendo (2.5);
- iv) Para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$, o seguinte sistema é satisfeito

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_0^t (u_t, \psi) dt + \int_0^t (\nabla v, \nabla \psi) dt + \alpha \int_0^t (\nabla u, \nabla \psi) dt = \int_0^t (f, \psi) dt, & \text{em } Q, \\ \int_0^t (\nabla u, \nabla \eta) dt = \int_0^t (|v|^{q(x)-2} v, \eta) dt, & \text{em } Q, \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0 = 0, & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno no espaço $L^2(\Omega)$.

2.1 Problema semidiscreto

Nesta secção utiliza-se o método de Rothe para discretizar o Problema (2.8) em relação à variável temporal t . Adicionalmente, aplica-se a fórmula regressiva para aproximar a derivada em relação à variável t e, conseqüentemente, define-se o problema semidiscreto. No final da secção, apresenta-se o conceito de solução semidiscreta para o referido problema.

Considera-se $n \in \mathbb{N}^*$ finito, fixo e particiona-se uniformemente o intervalo $I = [0, T]$ em n subintervalos denotados por I_k . Cada subintervalo I_k possui o tamanho $\delta = \frac{T}{n}$ e os pontos deste particionamento são denotados por t_k com $k = 1, 2, \dots, n$. Assim, tem-se a discretização no tempo,

$$]0, T] = \bigcup_{k=1}^n I_{k-1}, \quad I_{k-1} =]t_{k-1}, t_k],$$

onde $t_k = t_{k-1} + \delta$ e $0 < \delta < 1$.

Aplica-se a fórmula regressiva para aproximar a derivada em relação à variável t , em cada ponto t_k , por

$$u_t(x, t_k) \approx \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\delta} = \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}. \quad (2.10)$$

Avaliando o Problema (2.8) em $t = t_k$ e utilizando (2.10), tem-se que o problema parabólico (2.8) é reduzido à solução de n problemas elípticos da forma

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right) \psi dx + \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_k \cdot \nabla \psi dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_k \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} f_k \psi dx, \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_k \cdot \nabla \eta dx = \int_{\Omega} |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k \eta dx, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0 = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $f_k = f(x, t_k)$.

A seguir, apresenta-se o conceito de solução semidiscreta para o Problema (2.11).

Definição 2.2. *Sejam $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$ e X um espaço de Banach definido por $X = H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$. Para cada $k = 1, \dots, n$, o par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ é uma solução semidiscreta do Problema (2.11) se o seguinte sistema for satisfeito*

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \psi \right) + (\nabla \tilde{v}_k, \nabla \psi) + \alpha (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \psi) = (f_k, \psi), \\ (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \eta) = (|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta), \end{cases} \quad (2.12)$$

para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$.

Observação 2.3. Verifica-se que $X = H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ de facto é um espaço de Banach através da Proposição A.11 e do Teorema A.19.

2.1.1 Existência da solução semidiscreta

Nesta subsecção demonstra-se a existência da solução semidiscreta para o Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2. Inicialmente, prova-se o Lema 2.4 e obtém-se um par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (2.12). Finalmente, demonstra-se o Teorema 2.5 e tem-se que o par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ é, de facto, a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2.

Considera-se a aplicação $A : (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \rightarrow (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ definida por

$$\begin{aligned} (A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\psi, \eta)) &= \delta(f_k, \psi) - (\tilde{u}_k, \psi) + (\tilde{u}_{k-1}, \psi) - \delta(\nabla \tilde{v}_k, \nabla \psi) \\ &\quad - \alpha \delta(\nabla \tilde{u}_k, \nabla \psi) - (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \eta) + \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta \right), \end{aligned}$$

para todo par $(\psi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Lema 2.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f_k \in L^2(\Omega)$ com $k = 1, \dots, n$ e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$. Então, para cada k , existe um par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (2.12).

Demonstração

Inicialmente, observa-se que a aplicação $A : (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \rightarrow (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ é contínua devido à continuidade do produto interno.

Por outro lado, nota-se que

$$\begin{aligned} (A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) &= \delta(f_k, \tilde{u}_k) - (\tilde{u}_k, \tilde{u}_k) + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \delta(\nabla \tilde{v}_k, \nabla \tilde{u}_k) \\ &\quad - \alpha \delta(\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{u}_k) - (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) + \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \tilde{v}_k \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) &= \delta(f_k, \tilde{u}_k) - \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \delta(\nabla \tilde{v}_k, \nabla \tilde{u}_k) \\ &\quad - \alpha \delta \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) + \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k). \end{aligned}$$

Através da Proposição A.17, tem-se $\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) \geq 0$ e, conseqüentemente,

$$(A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) \geq \delta(f_k, \tilde{u}_k) - \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \delta(\nabla \tilde{v}_k, \nabla \tilde{u}_k) \\ - \alpha \delta \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k).$$

Aplicam-se as desigualdades de Hölder e de Young (Teoremas A.1 e A.30),

$$(A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) \geq \delta(f_k, \tilde{u}_k) - \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \frac{\delta}{2} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ - \frac{\delta}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \delta \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

isto é,

$$(A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) \geq \delta(f_k, \tilde{u}_k) + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ - \frac{1}{4} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Para obtermos $(A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) \geq 0$, deve-se exigir que

$$\delta(f_k, \tilde{u}_k) + (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) - \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ - \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0,$$

conseqüentemente,

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) + \delta(f_k, \tilde{u}_k).$$

Da desigualdade de Poincaré (Teorema A.13) existe $C_1 > 0$, tal que

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) + \delta(f_k, \tilde{u}_k).$$

Novamente, usam-se as desigualdades de Hölder e de Young (Teoremas A.1 e A.30),

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Define-se $C = C(\min\{\frac{1}{2}, \frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}, \frac{1}{4C_1}, \frac{2\delta + 1}{4}\})$, assim

$$\begin{aligned} C \left(\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ \leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

isto implica em,

$$\begin{aligned} C \left(\|\tilde{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{v}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{4C_1} \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Substituindo (2.14) em (2.13),

$$C \left(\|\tilde{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{v}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Desta maneira,

$$\|\tilde{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{v}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta,$$

onde

$$\beta = \left(\frac{2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Assim, observa-se que, para cada $k = 1, \dots, n$, a aplicação $A : (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \rightarrow (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ é contínua e existe $\beta > 0$ tal que $(A(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)) \geq 0$ para todo par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com $\|\tilde{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{v}_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta$. Então, pelo Teorema A.33,

existe um par $(\tilde{u}_k^*, \tilde{v}_k^*) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$A(\tilde{u}_k^*, \tilde{v}_k^*) = 0, \text{ com } \|\tilde{u}_k^*\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{v}_k^*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta.$$

Portanto, o par $(\tilde{u}_k^*, \tilde{v}_k^*) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ satisfaz (2.12). ■

Demonstra-se no teorema a seguir que existe uma solução semidiscreta para o Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2.

Teorema 2.5. *Sob as hipóteses do Lema 2.4, para cada k , existe um par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ que é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2.*

Demonstração

Pelo Lema 2.4, existe um par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (2.12). Assim, substituindo $\eta = \tilde{v}_k$ no Problema (2.12) obtém-se

$$\begin{aligned} (|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \tilde{v}_k) &= (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) \\ \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) &= (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k). \end{aligned}$$

Através das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30), tem-se

$$\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) \leq \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\tilde{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C \|\tilde{v}_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C.$$

Isto implica que $\tilde{v}_k \in L^{q(x)}(\Omega)$. Portanto, existe um par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ que é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2. ■

2.1.2 Unicidade da solução semidiscreta

Nesta subsecção enuncia-se e demonstra-se o Teorema 2.6 que garante a unicidade da solução semidiscreta para o Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2. Destaca-se que a prova utiliza algumas técnicas clássicas de Análise Funcional.

Teorema 2.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f_k \in L^2(\Omega)$ com $k = 1, \dots, n$ e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$. Então, existe um único par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ que é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2.*

Demonstração

Considere $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k), (\check{u}_k, \check{v}_k) \in X$ duas soluções semidiscretas distintas do Problema

(2.11). Assim, para todo par $(\psi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\begin{cases} (\tilde{u}_k, \psi) - (\tilde{u}_{k-1}, \psi) + \delta (\nabla \tilde{v}_k, \nabla \psi) + \alpha \delta (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \psi) = \delta (f_k, \psi), \\ (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \eta) = \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta \right), \end{cases} \quad (2.15)$$

e

$$\begin{cases} (\check{u}_k, \psi) - (\check{u}_{k-1}, \psi) + \delta (\nabla \check{v}_k, \nabla \psi) + \alpha \delta (\nabla \check{u}_k, \nabla \psi) = \delta (f_k, \psi), \\ (\nabla \check{u}_k, \nabla \eta) = \left(|\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \eta \right). \end{cases} \quad (2.16)$$

Além disso, as soluções $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$ e $(\check{u}_k, \check{v}_k)$ estão sujeitas às mesmas condições iniciais,

$$\begin{cases} \tilde{u}_k = \check{u}_k = \tilde{v}_k = \check{v}_k = 0, & \text{em } \partial\Omega \times]0, T], \\ \tilde{u}_0 = \check{u}_0, \quad \tilde{v}_0 = \check{v}_0, & \text{em } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Através de (2.15) e (2.16), segue que

$$\begin{cases} (\tilde{u}_k - \check{u}_k, \psi) - (\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \psi) + \delta (\nabla (\tilde{v}_k - \check{v}_k), \nabla \psi) \\ + \alpha \delta (\nabla (\tilde{u}_k - \check{u}_k), \nabla \psi) = 0, \\ (\nabla (\tilde{u}_k - \check{u}_k), \nabla \eta) = \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \eta \right). \end{cases} \quad (2.18)$$

Se $\psi = \tilde{u}_k - \check{u}_k$ e $\eta = \tilde{v}_k - \check{v}_k$, então

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla (\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k \right) \\ = (\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \tilde{u}_k - \check{u}_k). \end{aligned}$$

Por hipótese $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$. Assim, para $x \in \Omega$ fixo, o Teorema A.32 implica que $(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k) \geq 0$, logo

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla (\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \tilde{u}_k - \check{u}_k). \quad (2.19)$$

Do facto $\alpha \delta \|\nabla (\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$, segue que

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \tilde{u}_k - \check{u}_k).$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)},$$

simplificando,

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para $k = 1, \dots, n$, obtém-se

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_0 - \check{u}_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das condições iniciais dadas em (2.17), tem-se $\tilde{u}_0 = \check{u}_0$, assim

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Portanto,

$$\|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{u}_k = \check{u}_k \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.20)$$

Por outro lado, da estimativa (2.19), vem que

$$\alpha\delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \tilde{u}_k - \check{u}_k).$$

Da desigualdade de Hölder (Teorema A.1), segue que

$$\alpha\delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Através da desigualdade de Poincaré (Teorema A.13), existe $C > 0$ tal que

$$\alpha\delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)},$$

simplificando,

$$\alpha\delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Utiliza-se a estimativa (2.20) e conclui-se

$$\|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \nabla\tilde{u}_k = \nabla\check{u}_k \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \tilde{u}_k = \check{u}_k \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (2.21)$$

Nesta etapa, considera-se $\psi = \tilde{v}_k - \check{v}_k$ em (2.18) e obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq |(\tilde{u}_k - \check{u}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k)| + |(\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}, \tilde{v}_k - \check{v}_k)| \\ &\quad + |\alpha\delta (\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k), \nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k))|. \end{aligned}$$

Aplicam-se as desigualdades de Hölder e Poincaré (Teoremas A.1 e A.13), usa-se o facto de $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ para obter

$$\delta \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} \\ + C_2 \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)},$$

com $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$. Ao simplificar, tem-se

$$\delta \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|\tilde{u}_k - \check{u}_k\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\tilde{u}_{k-1} - \check{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \delta \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}.$$

De (2.20) e (2.21), vem que

$$\|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \nabla \tilde{v}_k = \nabla \check{v}_k \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \tilde{v}_k = \check{v}_k \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (2.22)$$

Observa-se que, ao aplicar a desigualdade de Poincaré (Teorema A.13) em (2.22), obtém-se

$$\frac{1}{C} \|\tilde{v}_k - \check{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

onde $C > 0$. Consequentemente,

$$\|\tilde{v}_k - \check{v}_k\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{v}_k = \check{v}_k \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.23)$$

Para finalizar a demonstração, faz-se necessário provar que $\tilde{v}_k = \check{v}_k$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ com $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$ para todo $x \in \Omega$. Para tanto, inicialmente considera-se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2]$, então pelo Teorema A.20 existe uma imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ e

$$\|\tilde{v}_k - \check{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq C \|\tilde{v}_k - \check{v}_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Através de (2.23), temos

$$\|\tilde{v}_k - \check{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{v}_k = \check{v}_k \text{ em } L^{q(x)}(\Omega); \quad q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2]. \quad (2.24)$$

Finalmente, para o caso em que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (2, \infty)$, considera-se $\eta = \tilde{v}_k - \check{v}_k$ em (2.18),

$$\left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k \right) = (\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k), \nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)). \quad (2.25)$$

Para $x \in \Omega$ fixo, segue do Teorema A.32

$$\begin{aligned}
C |\tilde{v}_k - \check{v}_k|^{q(x)} &\leq \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k \right)_{\mathbb{R}^d} \\
C \int_{\Omega} |\tilde{v}_k - \check{v}_k|^{q(x)} dx &\leq \int_{\Omega} \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k \right)_{\mathbb{R}^d} dx \\
C \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) &\leq \int_{\Omega} \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k \right) (\tilde{v}_k - \check{v}_k) dx \\
C \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) &\leq \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\check{v}_k|^{q(x)-2} \check{v}_k, \tilde{v}_k - \check{v}_k \right). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.26) em (2.25),

$$C \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) \leq (\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k), \nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)).$$

Aplicam-se as desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30),

$$C \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) \leq \frac{1}{2} \|\nabla(\tilde{u}_k - \check{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(\tilde{v}_k - \check{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De (2.21) e (2.22), vem que

$$\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) \leq 0.$$

Utiliza-se a Proposição A.17 e conclui-se

$$\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k - \check{v}_k) = 0 \Leftrightarrow \tilde{v}_k = \check{v}_k \text{ em } L^{q(x)}(\Omega); \quad q(x) \in [q^-, q^+] \subset (2, \infty). \tag{2.27}$$

Portanto, de (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24) e (2.27) concluímos que, para $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, existe um único par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ que é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2. ■

2.1.3 Estimativas à priori da solução semidiscreta

A subsecção que está a ser iniciada tem o objetivo de demonstrar as estimativas à priori da solução semidiscreta. Os Teoremas 2.7 e 2.8 investigam as referidas estimativas e demonstram que estas dependem dos dados iniciais.

Teorema 2.7. *Sejam $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido*

da Definição 2.2. Então, para toda a função $f_k \in L^2(\Omega)$, tem-se

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + \delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.28)$$

$$\|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{2}{\alpha q^-}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.29)$$

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \left[\left(\frac{q^+}{q^-}\right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^-}}, \right. \\ \left. \left[\left(\frac{q^+}{q^-}\right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (2.30)$$

Além disto, se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, então

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max \left\{ \left[\left(\frac{q^+}{q^-}\right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^-}}, \right. \\ \left. \left[\left(\frac{q^+}{q^-}\right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (2.31)$$

Demonstração

Se $\eta = \tilde{v}_k$ em (2.12), então

$$(\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) = \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \tilde{v}_k \right) = \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k).$$

Da Proposição A.17, vem que

$$(\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) = \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) \geq 0. \quad (2.32)$$

Por outro lado, considera-se $\psi = \tilde{u}_k$ em (2.12),

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta (\nabla \tilde{v}_k, \nabla \tilde{u}_k) = (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) + \delta (f_k, \tilde{u}_k).$$

Substituindo (2.32),

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\delta \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) = (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) + \delta(f_k, \tilde{u}_k). \quad (2.33)$$

Do facto $\alpha\delta\|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ e de (2.32), segue que

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\tilde{u}_{k-1}, \tilde{u}_k) + \delta(f_k, \tilde{u}_k).$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} + \delta\|f_k\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)},$$

simplificando,

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \delta\|f_k\|_{L^2(\Omega)},$$

e para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$, obtém-se a estimativa (2.28).

Por outro lado, se $\psi = \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}$ em (2.12), então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nabla\tilde{v}_k, \nabla\tilde{u}_k) - (\nabla\tilde{v}_k, \nabla\tilde{u}_{k-1}) + \alpha\|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha(\nabla\tilde{u}_k, \nabla\tilde{u}_{k-1}) \\ = (f_k, \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

De (2.12) com $\eta = \tilde{v}_k$, tem-se

$$(\nabla\tilde{u}_{k-1}, \nabla\tilde{v}_k) = \left(|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k \right). \quad (2.35)$$

Substituindo (2.32) e (2.35) em (2.34),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) + \alpha\|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k \right) \\ + \alpha(\nabla\tilde{u}_k, \nabla\tilde{u}_{k-1}) + (f_k, \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}). \end{aligned}$$

Através das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30), existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) + \alpha\|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k \right) \\ + \alpha\varepsilon_1 \|\nabla\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{4\varepsilon_1} \|\nabla\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon_2 \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, consideram-se $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ e $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k \right) \\ &+ \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nota-se que,

$$|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1} \tilde{v}_k \leq \left| |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1} \tilde{v}_k \right| = |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-1} |\tilde{v}_k|.$$

Utiliza-se a desigualdade de Young (Teorema A.21),

$$|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1} \tilde{v}_k \leq C_\varepsilon |\tilde{v}_{k-1}|^{(q(x)-1)p(x)} + \varepsilon |\tilde{v}_k|^{q(x)},$$

onde $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon = \frac{1}{q(x)(\varepsilon p(x))^{\frac{q(x)}{p(x)}}$ e $p(x) = \frac{q(x)}{q(x)-1}$. Integrando sobre Ω e supondo que $\varepsilon = \frac{q(x)-1}{q(x)}$, segue que

$$\left(|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k \right) \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{q(x)-1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx. \quad (2.37)$$

De (2.37) e (2.36), vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{q(x)-1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)} dx + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Isto implica em,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \delta \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$, obtém-se

$$\int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |\tilde{v}_0|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Através de (2.5), tem-se $0 < \frac{1}{q^+} \leq \frac{1}{q(x)} \leq \frac{1}{q^-} < 1$ e

$$\left(\frac{2}{q^+} \right) \int_{\Omega} |\tilde{v}_k|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{2}{q^-} \right) \int_{\Omega} |\tilde{v}_0|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

isto é,

$$\left(\frac{2}{q^+} \right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) + \alpha \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{2}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \alpha \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.38)$$

Consequentemente,

$$\|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\left(\frac{2}{\alpha q^-} \right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aplica-se o Teorema A.31 e demonstra-se (2.29).

Por outro lado, de (2.38) temos

$$\rho_{q(x)}(\tilde{v}_k) \leq \left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(\tilde{v}_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.39)$$

Do Teorema A.18 vem que

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k)^{\frac{1}{q^-}}, \rho_{q(x)}(\tilde{v}_k)^{\frac{1}{q^+}} \right\}.$$

Substituindo (2.39) prova-se a estimativa (2.30).

Por outro lado, se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, então pelo Teorema A.20 existe uma imersão

contínua $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ tal que

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Finalmente, substituindo (2.30) obtém-se (2.31). ■

O seguinte teorema estabelece uma estimativa para a aproximação da derivada em relação à variável t .

Teorema 2.8. *Sejam $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2, $\tilde{u}_0 = 0$ e $f \in L^2(\Omega)$ uma função Lipschitz contínua na variável t , então*

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^2(\Omega)} + CT. \quad (2.40)$$

Demonstração

Avalia-se o Problema (2.12) em $t = t_k$ e $t = t_{k-1}$ e obtém-se, para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \psi \right) + (\nabla \tilde{v}_k, \nabla \psi) + \alpha (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \psi) = (f_k, \psi), \\ (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \eta) = (|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta}, \psi \right) + (\nabla \tilde{v}_{k-1}, \nabla \psi) + \alpha (\nabla \tilde{u}_{k-1}, \nabla \psi) = (f_{k-1}, \psi), \\ (\nabla \tilde{u}_{k-1}, \nabla \eta) = (|\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \eta), \end{cases}$$

onde $k = 1, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Assim,

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \psi \right) + (\nabla (\tilde{v}_k - \tilde{v}_{k-1}), \nabla \psi) + \alpha (\nabla (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}), \nabla \psi) \\ = \left(\frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta}, \psi \right) + (f_k - f_{k-1}, \psi), \\ (\nabla (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}), \nabla \eta) = (|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \eta). \end{cases}$$

Se $\psi = \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}$ e $\eta = \tilde{v}_k - \tilde{v}_{k-1}$, então

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \left(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k - |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2} \tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k - \tilde{v}_{k-1} \right) \\ & + \frac{\alpha}{\delta} \|\nabla (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta}, \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right) + \left(f_k - f_{k-1}, \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$, tem-se para $x \in \Omega$ fixo que o Teorema A.32

implica em $(|\tilde{v}_k|^{q(x)-2}\tilde{v}_k - |\tilde{v}_{k-1}|^{q(x)-2}\tilde{v}_{k-1}, \tilde{v}_k - \tilde{v}_{k-1}) \geq 0$. Adicionalmente, como $\|\nabla(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$, então segue que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta}, \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right) + \left(f_k - f_{k-1}, \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right).$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1), vem que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k - f_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por hipótese a função f é Lipschitz contínua na variável t , assim de (2.3) tem-se

$$|f_k - f_{k-1}| \leq C |t_k - t_{k-1}| = C |\delta| = C\delta.$$

Desta maneira,

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}_{k-1} - \tilde{u}_{k-2}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + C\delta.$$

Iterando $k = 2, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, segue que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + C\delta(k-1).$$

Como $\delta = \frac{T}{n}$ e $k-1 < k \leq n$, então

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + CT.$$

Assim,

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\delta|} \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + CT.$$

Da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do facto de $0 < \delta < 1$, vem que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \|\tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta} \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega)} + CT.$$

Substituindo (2.28) com $k = 1$ e $\tilde{u}_0 = 0$, conclui-se (2.40). ■

Corolário 2.9. *Sob as hipóteses do Teorema 2.8, tem-se*

$$\|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k\|_{L^2(\Omega)} + T \right), \quad (2.41)$$

$$\|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k\|_{L^2(\Omega)} + T \right). \quad (2.42)$$

Demonstração

Se $\psi = v_k$ em (2.12), então

$$\left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \tilde{v}_k \right) + \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha (\nabla \tilde{u}_k, \nabla \tilde{v}_k) = (f_k, \tilde{v}_k).$$

De (2.32) vem que

$$\|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \left(\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \tilde{v}_k \right) \right| + (f_k, \tilde{v}_k).$$

Através das desigualdades de Hölder e Poincaré (Teoremas A.1 e A.13) existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Logo,

$$\|\nabla \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Substituindo (2.40) demonstra-se que a estimativa (2.42) é válida. Finalmente, aplica-se a desigualdade de Poincaré (Teorema A.13) em (2.42) e prova-se (2.41). ■

Observação 2.10. *Se $u(x, 0) = \tilde{u}_0 \neq 0$ em Ω , a existência e a unicidade da solução semi-discreta do Problema (2.11) são provadas de forma análoga às demonstrações apresentadas anteriormente. Entretanto, a hipótese $\tilde{u}_0 = 0$ é necessária para que as estimativas à priori (2.40), (2.41) e (2.42) sejam uniformemente independentes de δ .*

2.1.4 Existência e unicidade da solução fraca

Nesta subsecção aplica-se o Método de Rothe para provar que existe uma única solução fraca para o Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1.

Anteriormente, demonstrou-se que para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$, o par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \in X$ é a única solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2. Desta maneira,

pode-se definir as funções de Rothe $\bar{u}_n = \bar{u}_n(x, t)$ e $\bar{v}_n = \bar{v}_n(x, t)$ por

$$\begin{aligned}\bar{u}_n = \bar{u}_n(x, t) &= \tilde{u}_{k-1}(x) + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\tilde{u}_k(x) - \tilde{u}_{k-1}(x)) \text{ em } I_{k-1}, \\ \bar{v}_n = \bar{v}_n(x, t) &= \tilde{v}_{k-1}(x) + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\tilde{v}_k(x) - \tilde{v}_{k-1}(x)) \text{ em } I_{k-1},\end{aligned}$$

onde $I_{k-1} =]t_{k-1}, t_k]$.

Destaca-se que, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \Omega$ fixos, as funções de Rothe $\bar{u}_n(x, t)$ e $\bar{v}_n(x, t)$ são lineares por partes na variável t no intervalo I . Além disso, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla \bar{u}_n = \nabla \bar{u}_n(x, t) &= \nabla \tilde{u}_{k-1}(x) + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\nabla \tilde{u}_k(x) - \nabla \tilde{u}_{k-1}(x)) \text{ em } I_{k-1}, \\ \nabla \bar{v}_n = \nabla \bar{v}_n(x, t) &= \nabla \tilde{v}_{k-1}(x) + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\nabla \tilde{v}_k(x) - \nabla \tilde{v}_{k-1}(x)) \text{ em } I_{k-1}.\end{aligned}$$

Enfatiza-se que, ao longo desta e das seguintes subsecções, C é uma constante independente de n e k .

No que segue, enuncia-se e demonstra-se o Teorema 2.11 que utiliza as funções de Rothe \bar{u}_n e $\nabla \bar{u}_n$ para provar a existência da função $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Teorema 2.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t e $\tilde{u}_0 = 0$. Então, existe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que*

$$\bar{u}_n \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.43)$$

Além disto, tem-se

$$\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq CT.$$

Demonstração

Inicialmente, nota-se que \bar{u}_n é limitada em $L^2(\Omega)$. De facto,

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \tilde{u}_{k-1} + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aplica-se a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3),

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta}\right) (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + |t - t_{k-1}| \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo (2.28) e (2.40) com $\tilde{u}_0 = 0$, temos

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} + |t - t_{k-1}| \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + CT \right).$$

Por definição, considerou-se \bar{u}_n com $t \in I_{k-1} =]t_{k-1}, t_k]$, conseqüentemente $|t - t_{k-1}| \leq |\delta| = \delta$ e

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} + \delta \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + CT \right).$$

Por hipótese $f_i \in L^2(\Omega)$ e $0 < \delta < 1$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $k = 1, 2, \dots, n$, tem-se

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (2.44)$$

Analogamente, $\nabla \bar{u}_n$ é limitado em $L^2(\Omega)$. De facto, com a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), obtém-se

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{|t - t_{k-1}|}{|\delta|} \|\nabla \tilde{u}_k - \nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Através do facto de $|t - t_{k-1}| \leq |\delta|$, então aplicando novamente a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), segue que

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|\nabla \tilde{u}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo (2.29) com $\tilde{u}_0 = 0$,

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\delta \sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\delta \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da hipótese de $f_i \in L^2(\Omega)$ vem que

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha^{\frac{1}{2}}} [C_1 \delta (k-1)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} (C_1 \delta k)^{\frac{1}{2}}.$$

Desde $\delta = \frac{T}{n}$ e $k - 1 < k \leq n$, então

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha^{\frac{1}{2}}} (C_1 T)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} (C_1 T)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (2.45)$$

Através das estimativas (2.44) e (2.45), obtém-se

$$\|\bar{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (2.46)$$

Isto implica que a sequência de funções de Rothe $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34) existem uma subsequência de $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &\rightharpoonup u \text{ em } L^2(\Omega), \\ \nabla \bar{u}_n &\rightharpoonup \nabla u \text{ em } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disto, de (2.46), segue que

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \|\bar{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq CT. \quad (2.47)$$

Da Proposição A.11, do Teorema A.12 e da Proposição A.15, tem-se que $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ é um espaço de Banach reflexivo. Adicionalmente, a função $\bar{u}_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ é limitada neste espaço. Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34) existem uma subsequência de $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tais que

$$\bar{u}_n \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Finalmente, pelo Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6) e da estimativa (2.47), conclui-se que

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\bar{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq CT.$$

■

O seguinte corolário estabelece que a função u do Teorema 2.11 também pertence ao espaço $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Corolário 2.12. *Sob as hipóteses do Teorema 2.11, a função $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.*

Demonstração

Através do Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6) e de (2.46), obtém-se

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C. \end{aligned}$$

■

A seguir, demonstra-se que a função u do Teorema 2.11 é a solução requerida, para isto define-se $\bar{U}_n : t \mapsto L^2(\Omega)$ por

$$\bar{U}_n = \begin{cases} \frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0}{\delta}, & \text{se } t = 0, \\ \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, & \text{se } t \in]t_{k-1}, t_k], \end{cases} \quad (2.48)$$

onde $k = 1, 2, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

O próximo teorema demonstra que $\bar{U}_n \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e converge fracamente para a função u_t no espaço $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, além disto obtém-se que $u(0) = 0$.

Teorema 2.13. *Sob as hipóteses do Teorema 2.11, existe uma função $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que*

$$\bar{U}_n \rightharpoonup u_t \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e

$$\|u_t\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq CT. \quad (2.49)$$

Demonstração

Inicialmente, nota-se que

$$\|\bar{U}_n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \|\bar{U}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Através de (2.40), observa-se que $\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}$ não depende de t , logo

$$\|\bar{U}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \delta \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.50)$$

Da estimativa (2.40), vem que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + C_1 T \right)^2.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^n \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq n \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + C_1 T \right)^2. \quad (2.51)$$

Substituindo (2.51) em (2.50),

$$\|\bar{U}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq n\delta \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + C_1 T \right)^2.$$

Desde que $\delta = \frac{T}{n}$,

$$\|\bar{U}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq T \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + C_1 T \right)^2.$$

Usa-se o facto de $f_1 \in L^2(\Omega)$ e obtém-se

$$\|\bar{U}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq CT. \quad (2.52)$$

Consequentemente, a sequência $\{\bar{U}_n\}_{n=1}^\infty$ é uniformemente limitada, então pelo Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34), existem uma subsequência de $\{\bar{U}_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ainda denotada por $\{\bar{U}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $U \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tais que

$$\bar{U}_n \rightharpoonup U \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.53)$$

Isto implica que existe uma função $\omega(t)$ que satisfaz

$$\int_0^t U(\tau) d\tau = \omega(t). \quad (2.54)$$

Além disso, as funções $\bar{U}_n(t)$ e \bar{u}_n estão relacionadas por

$$\int_0^t \bar{U}_n(\tau) d\tau = \bar{u}_n(t).$$

Através de (2.43) e de (2.53), segue que

$$\omega = u. \quad (2.55)$$

Consequentemente, existe uma função absolutamente contínua $u \in AC(0, T; L^2(\Omega))$ e do Teorema A.36 tem-se $U(t) = u_t(t)$ em $L^2(\Omega)$ para todo $t \in I = [0, T]$. Além disso, de (2.54) e (2.55),

$$u(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau$$

e isto implica que

$$u(0) = 0.$$

Finalmente, pelo Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6) e de (2.52), demonstra-se que a estimativa (2.49) é satisfeita. ■

Uma consequência do Teorema 2.13 é que a função u_t também pertence ao espaço $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. De facto, prova-se este resultado no seguinte corolário.

Corolário 2.14. *Sob as hipóteses do Teorema 2.13, a função u_t satisfaz*

$$\|u_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq CT^2.$$

Demonstração

Usam-se o Teorema 2.13, Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6), a definição de \bar{U}_n em (2.48) e obtém-se

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\bar{U}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ em } I_{k-1}.$$

De (2.40), vem que

$$\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CT^2 \Rightarrow \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CT^2,$$

portanto,

$$\|u_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CT^2.$$

■

A seguir, tem-se o teorema que faz o uso das funções de Rothe \bar{v}_n e $\nabla \bar{v}_n$ para demonstrar que existe uma função $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$.

Teorema 2.15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t , a função $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ e $\tilde{u}_0 = 0$. Então, existe $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$, com $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$, tal que*

$$\bar{v}_n \rightharpoonup v \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)). \quad (2.56)$$

Além disto,

$$\|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))}^2 \leq CT. \quad (2.57)$$

Demonstração

Inicialmente, destaca-se que a função de Rothe \bar{v}_n é limitada em $L^2(\Omega)$. De facto, usa-se a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e obtém-se

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{v}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{|t - t_{k-1}|}{|\delta|} \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Desde que $|t - t_{k-1}| \leq |\delta|$ para todo $t \in I_{k-1}$, então ao aplicar novamente a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), segue que

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|\tilde{v}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aplica-se a estimativa (2.41) e tem-se

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_1 \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + T \right) + C_1 \left(\|f_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k\|_{L^2(\Omega)} + T \right).$$

Por hipótese $f_k \in L^2(\Omega)$, com $k = 1, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}^*$, assim

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (2.58)$$

Adicionalmente, a função \bar{v}_n é limitada no espaço $L^{q(x)}(\Omega)$ com $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$. De facto, usando a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e o facto de $|t -$

$t_{k-1} \leq |\delta|$ para todo $t \in I_{k-1}$, nós obtemos

$$\|\bar{v}_n\|_{L^q(x)(\Omega)} \leq 2 \|\tilde{v}_{k-1}\|_{L^q(x)(\Omega)} + \|\tilde{v}_k\|_{L^q(x)(\Omega)}.$$

Substituindo (2.30) com $\tilde{u}_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_n\|_{L^q(x)(\Omega)} \leq & 2 \max \left\{ \left(\frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\} \\ & + \max \left\{ \left(\frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \end{aligned}$$

Desde que $f_i \in L^2(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_n\|_{L^q(x)(\Omega)} \leq & 2 \max \left\{ \left(\frac{C_1 \delta q^+ (k-1)}{2} \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{C_1 \delta q^+ (k-1)}{2} \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\} \\ & + \max \left\{ \left(\frac{C_1 \delta q^+ k}{2} \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{C_1 \delta q^+ k}{2} \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \end{aligned}$$

Usam-se os factos de $\delta = \frac{T}{n}$ e $k-1 < k \leq n$,

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_n\|_{L^q(x)(\Omega)} \leq & 2 \max \left\{ \left(\frac{C_1 T q^+}{2} \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{C_1 T q^+}{2} \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\} \\ & + \max \left\{ \left(\frac{C_1 T q^+}{2} \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\frac{C_1 T q^+}{2} \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\bar{v}_n\|_{L^q(x)(\Omega)} \leq C. \quad (2.59)$$

Por outro lado, nota-se que $\nabla \bar{v}_n$ é limitado no espaço $L^2(\Omega)$. De facto, através da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), $|t - t_{k-1}| \leq |\delta|$ para todo $t \in I_{k-1}$, da estimativa (2.42) e do facto de $f_i \in L^2(\Omega)$, tem-se

$$\|\nabla \bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (2.60)$$

Observa-se que das estimativas (2.58) e (2.60), segue que

$$\|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (2.61)$$

Isto implica que a seqüência de funções de Rothe $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34) existem uma subseqüência de $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} \bar{v}_n &\rightharpoonup v \text{ em } L^2(\Omega), \\ \nabla \bar{v}_n &\rightharpoonup \nabla v \text{ em } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disto, de (2.59) e (2.61), tem-se

$$\|\bar{v}_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))}^2 = \int_0^T \|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)}^2 dt \leq CT. \quad (2.62)$$

Consequentemente \bar{v}_n é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ e devido ao Teorema A.19, a Proposição A.11, o Teorema A.12 e a Proposição A.15, tem-se que o espaço $L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ é Banach reflexivo. Assim, do Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34) existem uma subseqüência de $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ tais que

$$\bar{v}_n \rightharpoonup v \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)).$$

Para finalizar a demonstração, utilizam-se o Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6) e a estimativa (2.62) para provar que (2.57) é satisfeita. ■

O próximo corolário demonstra que a função v obtida no Teorema 2.15 também pertence ao espaço $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$.

Corolário 2.16. *Se as hipóteses do Teorema 2.15 são satisfeitas, então a função $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$.*

Demonstração

Aplicam-se o Teorema da semicontinuidade inferior da norma (Teorema A.6) e as estimativas (2.59) e (2.61) para obtermos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^{q(x)}(\Omega))}^2 &= \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^2 \\
&\leq \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \liminf_{n\rightarrow\infty} \|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \liminf_{n\rightarrow\infty} \|\bar{v}_n\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^2 \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

■

Para terminar esta subsecção, prova-se a seguir o teorema da existência e unicidade da solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1.

Teorema 2.17. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t e $\tilde{u}_0 = 0$. Além disto, considere*

i) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, *equivalentemente, $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$ quando $d \leq 2$ e;*

ii) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (\max\{\frac{3}{2}, \frac{d+2}{4}\}, \infty)$, *ou seja, $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \min\{3, \frac{d+2}{d-2}\})$ quando $d > 2$.*

Então, existe um único par $(u, v) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ que é a solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1.

Demonstração

Reescreve-se o Problema (2.9) com as funções de Rothe e obtém-se, para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} \int_0^t (\bar{U}_n, \psi) dt + \int_0^t (\nabla \bar{v}_n, \nabla \psi) dt + \alpha \int_0^t (\nabla \bar{u}_n, \nabla \psi) dt = \int_0^t (\bar{f}_n, \psi) dt, \\ \int_0^t (\nabla \bar{u}_n, \nabla \eta) dt = \int_0^t (|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n, \eta) dt, \end{cases} \quad (2.63)$$

com a função \bar{f}_n definida para $t \in I_{k-1}$ por

$$\bar{f}_n = \bar{f}_n(x, t) = f_{k-1}(x) + \left(\frac{t - t_{k-1}}{\delta} \right) (f_k(x) - f_{k-1}(x)).$$

Por hipótese $f \in L^2(Q)$ e conseqüentemente

$$\|\bar{f}_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34), existe uma subseqüência de $\{\bar{f}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{\bar{f}_n\}_{n=1}^\infty$, tal que

$$\bar{f}_n \rightharpoonup f \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.64)$$

Por outro lado, dos Teoremas A.24 e A.25 e do facto de $\bar{v}_n \in H_0^1(\Omega)$, tem-se para todo $x \in \Omega$,

$$\left\| |\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| |\bar{v}_n|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \max \left\{ \|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{q^- - 1}, \|\bar{v}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{q^+ - 1} \right\} \leq C.$$

Isto implica que $|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \in L^2(\Omega)$ e

$$\left\| |\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \left\| |\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq CT,$$

consequentemente, através do Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema A.34) existem uma subseqüência de $\{|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, ainda denotada por $\{|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$, e uma função $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tais que

$$|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \rightharpoonup g \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.65)$$

Além disto, utilizando o facto de existir uma imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e de (2.56), obtém-se $\bar{v}_n \rightarrow v$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, assim $\bar{v}_n \rightarrow v$ q.t.p. em $\Omega \times]0, T]$. Portanto, de (2.65) e pelo Teorema A.7, tem-se $g = |v|^{q(x)-2} v$ e

$$|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n \rightharpoonup |v|^{q(x)-2} v \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.66)$$

Através dos Teoremas 2.11, 2.13, 2.15, de (2.64) e de (2.66), tem-se, para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_0^t (\bar{U}_n, \psi) dt &\rightarrow \int_0^t (u_t, \psi) dt, \\ \int_0^t (\nabla \bar{v}_n, \nabla \psi) dt &\rightarrow \int_0^t (\nabla v, \nabla \psi) dt, \\ \int_0^t (\nabla \bar{u}_n, \nabla \psi) dt &\rightarrow \int_0^t (\nabla u, \nabla \psi) dt, \\ \int_0^t (\bar{f}_n, \psi) dt &\rightarrow \int_0^t (f, \psi) dt, \\ \int_0^t (|\bar{v}_n|^{q(x)-2} \bar{v}_n, \eta) dt &\rightarrow \int_0^t (|v|^{q(x)-2} v, \eta) dt. \end{aligned}$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, o Problema (2.63) torna-se

$$\begin{cases} \int_0^t (u_t, \psi) dt + \int_0^t (\nabla v, \nabla \psi) dt + \alpha \int_0^t (\nabla u, \nabla \psi) dt = \int_0^t (f, \psi) dt, \\ \int_0^t (\nabla u, \nabla \eta) dt = \int_0^t (|v|^{q(x)-2} v, \eta) dt. \end{cases}$$

Finalmente, através da unicidade do limite conclui-se que existe um único par $(u, v) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$ que é a solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1. ■

2.1.5 Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$

Para investigar a ordem de convergência da solução semidiscreta para a solução fraca faz-se necessário analisar três casos: inicialmente consideram-se $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$; a seguir estudam-se os dois casos em que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e a dimensão do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d = 1$ e $d > 1$.

Teorema 2.18. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t , $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Se o par (u, v) é a solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1 e, para cada k , o par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$ é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2, então*

$$\|u_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.67)$$

$$\|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C\delta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.68)$$

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq C \max \left\{ \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}, \quad (2.69)$$

$$\|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^{\frac{1}{2}} \max \left\{ \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2q^-}}, \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2q^+}} \right\}, \quad (2.70)$$

onde $u_k = u(x, t_k)$, $v_k = v(x, t_k)$, C é uma constante e $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ satisfaz $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$.

Demonstração

Avalia-se o Problema (2.8) no tempo $t = t_k$ e obtém-se, para todas $\psi, \eta \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} (u_t(x, t_k), \psi) + (\nabla v_k, \nabla \psi) + \alpha (\nabla u_k, \nabla \psi) = (f_k, \psi), \\ (\nabla u_k, \nabla \eta) = (|v_k|^{q(x)-2} v_k, \eta), \end{cases} \quad (2.71)$$

onde $u_k = u(x, t_k)$, $v_k = v(x, t_k)$ e $f_k = f(x, t_k)$. Subtraindo (2.71) e (2.12),

$$\begin{cases} \left(u_t(x, t_k) - \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \psi \right) + (\nabla (v_k - \tilde{v}_k), \nabla \psi) + \alpha (\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla \psi) = 0, \\ (\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla \eta) = (|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta). \end{cases}$$

Para $\psi \in H_0^1(\Omega)$, adiciona-se o termo $(\frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \psi) = 0$ no problema anterior e obtém-se

$$\begin{cases} \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \psi \right) + \left(\frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}, \psi \right) + (\nabla (v_k - \tilde{v}_k), \nabla \psi) \\ + \alpha (\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla \psi) = \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \psi \right), \\ (\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla \eta) = (|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, \eta). \end{cases} \quad (2.72)$$

Se $\eta = v_k - \tilde{v}_k$, então

$$(\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla (v_k - \tilde{v}_k)) = (|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k).$$

Do Teorema A.32 tem-se, para todo $x \in \Omega$ fixo e $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$,

$$(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k) \geq 0.$$

Desta maneira,

$$(\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla (v_k - \tilde{v}_k)) = (|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k) \geq 0. \quad (2.73)$$

Por outro lado, substituindo $\psi = \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}$ em (2.72),

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} (\nabla (v_k - \tilde{v}_k), \nabla (u_k - \tilde{u}_k)) + \frac{\alpha}{\delta} \|\nabla (u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Através da estimativa (2.73) e do facto de $\|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$, segue que

$$\left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|.$$

Aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por hipótese $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, assim utiliza-se o Teorema A.16 e obtém-se

$$\left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + C\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Isto implica que, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$,

$$\left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{u_0 - \tilde{u}_0}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + Ck\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Através dos factos de $\tilde{u}_0 = u_0$, $\delta = \frac{T}{n}$ e $k \leq n$, tem-se

$$\frac{1}{\delta} \|u_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq CT \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))},$$

consequentemente demonstra-se que a estimativa (2.67) é satisfeita.

Por outro lado, de (2.74) e (2.73) vem que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\delta} \|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| \\ &\quad + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|. \end{aligned}$$

Usa-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\delta} \|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Através da estimativa (2.67) e do Teorema A.16,

$$\frac{\alpha}{\delta} \|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \left(\|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \right).$$

Do facto de $0 < \delta < 1$, segue que

$$\frac{\alpha}{\delta} \|\nabla (u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2$$

e desta maneira, verifica-se que a estimativa (2.68) é válida.

Nesta etapa da demonstração utiliza-se a hipótese $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$ e, para $x \in \Omega$ fixo, obtém-se do Teorema A.32

$$C \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right).$$

De (2.73), tem-se

$$C \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq (\nabla (u_k - \tilde{u}_k), \nabla (v_k - \tilde{v}_k)). \quad (2.75)$$

Substituindo (2.75) em (2.74),

$$\left(\frac{C}{\delta} \right) \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|.$$

Da desigualdade de Hölder (Teorema A.1), temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C}{\delta} \right) \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \\ & \leq \left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Aplicam-se a estimativa (2.67) e o Teorema A.16,

$$\left(\frac{1}{\delta} \right) \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \left(\|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

Desde que $0 < \delta < 1$, então

$$\left(\frac{1}{\delta} \right) \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

Portanto,

$$\rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k) \leq C \delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (2.76)$$

Do Teorema A.18, segue que

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k)^{\frac{1}{q^-}}, \rho_{q(x)}(v_k - \tilde{v}_k)^{\frac{1}{q^+}} \right\}.$$

Substituindo (2.76), prova-se a estimativa (2.69). Adicionalmente, do facto de $q(x) \geq 2$, para todo $x \in \Omega$, então pelo Teorema A.20, existe uma imersão contínua $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

De (2.69), tem-se

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max \left\{ \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{q^-}}, \left(\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (2.77)$$

Finalmente, considerando $\psi = v_k - \tilde{v}_k$ em (2.72), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha (\nabla(u_k - \tilde{u}_k), \nabla(v_k - \tilde{v}_k)) &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| \\ &+ \left| \left(\frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right|. \end{aligned}$$

De (2.73),

$$\begin{aligned} \|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| + \left| \left(\frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| \\ &+ \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right|. \end{aligned}$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\begin{aligned} \|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Da estimativa (2.67), do Teorema A.16 e do facto de $0 < \delta < 1$,

$$\|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \left(C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

Substituindo (2.77), demonstra-se a estimativa (2.70). ■

2.1.6 Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$

Nesta subsecção continua-se a investigação da ordem de convergência da solução semi-discreta para a solução fraca. Entretanto, altera-se a dimensão do domínio para $\Omega \subset \mathbb{R}$ e considera-se $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$.

Teorema 2.19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t , $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Se o par (u, v) é a solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1 e, para cada k , o par $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$ é a solução semidiscreta do Problema (2.11) no sentido da Definição 2.2, então*

$$\|u_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.78)$$

$$\|\nabla(u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C\delta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.79)$$

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.80)$$

$$\|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{\frac{1}{4}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.81)$$

onde C é uma constante e $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ satisfaz $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$.

Demonstração

Destaca-se que as estimativas (2.78) e (2.79) são provadas de maneira idêntica à demonstração do Teorema 2.18.

Por outro lado, se $\beta = 0$ no Teorema A.32 e $x \in \Omega$ for fixo, então

$$C|v_k - \tilde{v}_k|^2 (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{q(x)-2} \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right)_{\mathbb{R}}. \quad (2.82)$$

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$, tem-se $-1 < q(x) - 2 < 0$ e

$$(|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{q(x)-2} = \frac{1}{(|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{2-q(x)}}. \quad (2.83)$$

Por hipótese, $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $v_k, \tilde{v}_k \in H_0^1(\Omega)$ para cada k , assim $H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ e isto implica que $|v_k|$ e $|\tilde{v}_k|$ são limitadas por uma constante. Logo,

$$(|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{2-q(x)} \leq C^{2-q(x)}.$$

Além disto, do facto de $2 - q(x) > 0$, segue que

$$(|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{2-q(x)} \leq C \Leftrightarrow C \leq \frac{1}{(|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{2-q(x)}}. \quad (2.84)$$

De (2.84), (2.83) e (2.82), tem-se

$$C \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right). \quad (2.85)$$

Por outro lado, considera-se $\psi = \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}$ em (2.72) e obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} (\nabla(v_k - \tilde{v}_k), \nabla(u_k - \tilde{u}_k)) &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| \\ &\quad + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|. \end{aligned}$$

De (2.73), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right) &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| \\ &\quad + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|. \end{aligned}$$

Substituindo (2.85), vem que

$$\frac{C}{\delta} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right| + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right) \right|.$$

Aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\begin{aligned} &\frac{C}{\delta} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left\| \frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Da estimativa (2.78) e do Teorema A.16, segue que

$$\frac{C}{\delta} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \left(\|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

Do facto de $0 < \delta < 1$, tem-se

$$\frac{1}{\delta} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

e desta maneira demonstra-se a estimativa (2.80).

Finalmente, substitui-se $\psi = v_k - \tilde{v}_k$ em (2.72) e utiliza-se (2.73) para obtermos

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left| \left(\frac{u_{k-1} - \tilde{u}_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| + \left| \left(\frac{u_k - \tilde{u}_k}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right| \\ &\quad + \left| \left(u_t(x, t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta}, v_k - \tilde{v}_k \right) \right|. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (Teorema A.1), a estimativa (2.78), o Teorema A.16 e o facto de $0 < \delta < 1$, segue que

$$\|\nabla (v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \left(C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

Portanto, substituindo (2.80) prova-se a estimativa (2.81). ■

2.1.7 Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$

Nesta subsecção estuda-se a ordem de convergência da solução semidiscreta para a solução fraca com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, e a função de expoente variável $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$.

Teorema 2.20. *Sob as hipóteses do Teorema 2.19 e considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, tem-se*

$$\|u_k - \tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \quad (2.86)$$

$$\|\nabla (u_k - \tilde{u}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C\delta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \quad (2.87)$$

$$\|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{\frac{r^*}{2}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{r^*}, \quad (2.88)$$

$$\|\nabla (v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{\frac{r^*}{4}} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{r^*+1}{2}}, \quad (2.89)$$

onde C é uma constante, $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ é tal que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$ e

$$r^* = \begin{cases} r^+ = \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)}, & \text{se } \left\| |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} \geq 1, \\ r^- = \frac{3q^-}{2(q^- + 1)}, & \text{se } \left\| |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} < 1. \end{cases}$$

Demonstração

As estimativas (2.86) e (2.87) são obtidas de maneira idêntica à demonstração do Teorema 2.18.

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$, então aplicando o Teorema A.32 com $x \in \Omega$ fixo e

$0 < \beta = \frac{2(2-q(x))}{3q(x)} < \frac{2}{3}$, tem-se

$$C_1 |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right)_{\mathbb{R}},$$

isto implica que,

$$C_1 \int_{\Omega} |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right). \quad (2.90)$$

Por outro lado, nota-se que

$$\frac{3}{4} < \frac{3q^-}{2(q^- + 1)} \leq \frac{3q(x)}{2(q(x) + 1)} \leq \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)} < 1,$$

então do Teorema A.26 segue que

$$\left(\frac{C_2}{2} \right)^{\frac{1}{r^*}} \rho_{\frac{3q(x)}{2(q(x)+1)}} \left(|v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} \right)^{\frac{1}{r^*}} \leq \int_{\Omega} |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx,$$

ou seja,

$$\left(\frac{C_2}{2} \right)^{\frac{1}{r^*}} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \int_{\Omega} |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx, \quad (2.91)$$

onde

$$r^* = \begin{cases} r^+ = \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)}, & \text{se } \left\| |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} \geq 1, \\ r^- = \frac{3q^-}{2(q^- + 1)}, & \text{se } \left\| |v_k - \tilde{v}_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} < 1, \end{cases}$$

$C_2 > 0$ é uma constante tal que

$$C_2 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{\frac{3q(x)}{q(x)-2}} \left((\tilde{v})^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right)^{1-r^-}, \rho_{\frac{3q(x)}{q(x)-2}} \left((\tilde{v})^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right)^{1-r^+} \right\}},$$

onde considerou-se $\tilde{v} = |v_k| + |\tilde{v}_k|$ por simplificação de notação. Observa-se que,

$$C_2 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{3q(x)+2} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{1-r^-}, \rho_{3q(x)+2} (|v_k| + |\tilde{v}_k|)^{1-r^+} \right\}}.$$

Substituindo (2.91) em (2.90),

$$C \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |\tilde{v}_k|^{q(x)-2} \tilde{v}_k, v_k - \tilde{v}_k \right).$$

Destaca-se que, o restante da demonstração segue de maneira análoga ao Teorema 2.19. Assim,

$$\frac{1}{\delta} \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq C \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2$$

e conseqüentemente verifica-se que a estimativa (2.88) é válida.

Analogamente ao Teorema 2.19, tem-se

$$\|\nabla(v_k - \tilde{v}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v_k - \tilde{v}_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Substituindo (2.88) na estimativa acima demonstra-se que (2.89) é satisfeita. ■

Termina-se a investigação do problema semidiscreto com a apresentação da Tabela 2.1 contendo a ordem de convergência, em relação a δ , da solução semidiscreta para a solução fraca. Os resultados da referida tabela seguem dos Teoremas 2.18, 2.19 e 2.20.

Tabela 2.1: Ordem de convergência, em relação a δ , da solução semidiscreta para a solução fraca.

| $p(x)$ | $1 < p(x) \leq 2$ | $2 < p(x) < \infty$ | |
|-----------------------------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ | $d \geq 1$ | $d = 1$ | $d > 1$ |
| $\ u_k - \tilde{u}_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta)$ | $O(\delta)$ | $O(\delta)$ |
| $\ \nabla(u_k - \tilde{u}_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ |
| $\ v_k - \tilde{v}_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}$ |
| $\ \nabla(v_k - \tilde{v}_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{2q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{4}})$ | $O(\delta^{\frac{3q^-}{8(q^-+1)}}$ |

2.2 Problema discreto

Apresenta-se nesta secção a discretização do Problema (2.11) em relação à variável espacial x e, conseqüentemente, define-se o problema discreto. Termina-se a secção exibindo o conceito de solução discreta para o referido problema.

Sejam $U_k \in S_h$ e $V_k \in S_h \cap L^{q(x)}(\Omega)$ as aproximações das funções $u(x, t_k)$ e $v(x, t_k)$, respetivamente, com o espaço S_h definido conforme a Secção A.6. O problema discreto consiste em determinar o par $(U_k, V_k) \in S_h \times (S_h \cap L^{q(x)}(\Omega))$ tal que, para todo par

$(\Psi, \Phi) \in S_h \times S_h$, o seguinte sistema é satisfeito

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right) \Psi dx + \int_{\Omega} \nabla V_k \cdot \nabla \Psi dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla U_k \cdot \nabla \Psi dx = \int_{\Omega} F_k \Psi dx, \\ \int_{\Omega} \nabla U_k \cdot \nabla \Phi dx = \int_{\Omega} |V_k|^{q(x)-2} V_k \Phi dx, \\ U_k|_{\partial\Omega} = V_k|_{\partial\Omega} = 0, \\ U(x, 0) = U_0 = 0, \end{cases} \quad (2.92)$$

onde $F_k = f(x, t_k)$.

No que segue, exhibe-se o conceito de solução discreta para o Problema (2.92).

Definição 2.21. *Sejam $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$ e X_h um espaço de Banach definido $X_h = S_h \times (S_h \cap L^{q(x)}(\Omega))$. Para cada $k = 1, \dots, n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, o par $(U_k, V_k) \in X_h$ é uma solução discreta do Problema (2.92) se o seguinte sistema for satisfeito*

$$\begin{cases} \left(\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) + (\nabla V_k, \nabla \Psi) + \alpha (\nabla U_k, \nabla \Psi) = (F_k, \Psi), \\ (\nabla U_k, \nabla \Phi) = (|V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi), \end{cases} \quad (2.93)$$

para todo par $(\Psi, \Phi) \in S_h \times S_h$.

2.2.1 Existência da solução discreta

Inicia-se esta subsecção com a definição de uma aplicação A que auxilia na demonstração da existência da solução discreta.

Seja $A : (S_h \times S_h) \rightarrow (S_h \times S_h)$ uma aplicação dada por

$$\begin{aligned} (A(U_k, V_k), (\Psi, \Phi)) &= \delta (F_k, \Psi) - (U_k, \Psi) + (U_{k-1}, \Psi) - \delta (\nabla V_k, \nabla \Psi) \\ &\quad - \alpha \delta (\nabla U_k, \nabla \Psi) - (\nabla U_k, \nabla \Phi) + (|V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi), \end{aligned}$$

para todo par $(\Psi, \Phi) \in S_h \times S_h$.

A seguir, demonstra-se que o par $(U_k, V_k) \in S_h \times S_h$ satisfaz o Problema (2.93).

Lema 2.22. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $F_k \in L^2(\Omega)$ com $k = 1, \dots, n$ e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$. Então, para cada k , existe um par $(U_k, V_k) \in S_h \times S_h$ que satisfaz (2.93).*

Demonstração

Nota-se que, a continuidade do produto interno implica que a aplicação $A : (S_h \times S_h) \rightarrow (S_h \times S_h)$ é contínua.

Por outro lado, tem-se

$$(A(U_k, V_k), (U_k, V_k)) = \delta(F_k, U_k) + (U_{k-1}, U_k) - \|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta(\nabla V_k, \nabla U_k) - \alpha\delta \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\nabla U_k, \nabla V_k) + \rho_{q(x)}(V_k).$$

Da Proposição A.17 vem que $\rho_{q(x)}(V_k) \geq 0$. Além disto, utilizando as desigualdades de Hölder e de Young (Teoremas A.1 e A.30), obtém-se

$$(A(U_k, V_k), (U_k, V_k)) \geq \delta(F_k, U_k) + (U_{k-1}, U_k) - \|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Para que $(A(U_k, V_k), (U_k, V_k)) \geq 0$, segue que

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (U_{k-1}, U_k) + \delta(F_k, U_k).$$

Através das desigualdades de Poincaré, Hölder e Young (Teoremas A.13, A.1 e A.30), tem-se

$$\frac{1}{2} \|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|F_k\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

onde $C_1 > 0$.

Definindo $C = C(\min\{\frac{1}{2}, \frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}, \frac{1}{4C_1}, \frac{2\delta + 1}{4}\})$, obtemos

$$C \left(\|U_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|V_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\alpha\delta + \delta + 1}{2}\right) \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_1} \|V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2\delta + 1}{4}\right) \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim,

$$C \left(\|U_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|V_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq \|U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|F_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Consequentemente,

$$\|U_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta,$$

onde

$$\beta = \left(\frac{2}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|F_k\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Isto implica que, para cada k , a aplicação $A : (S_h \times S_h) \rightarrow (S_h \times S_h)$ é contínua e existe $\beta > 0$ tal que $(A(U_k, V_k), (U_k, V_k)) \geq 0$ para todo par $(U_k, V_k) \in S_h \times S_h$ satisfazendo $\|U_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta$. Assim, através do Teorema A.33, existe um par $(U_k^*, V_k^*) \in S_h \times S_h$ tal que

$$A(U_k^*, V_k^*) = 0, \text{ com } \|U_k^*\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V_k^*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta.$$

Portanto, o par $(U_k^*, V_k^*) \in S_h \times S_h$ satisfaz (2.93). ■

O próximo teorema mostra que a função $V_k \in L^{q(x)}(\Omega)$ e isto implica que o par $(U_k, V_k) \in X_h$ é, de facto, a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21.

Teorema 2.23. *Sob as hipóteses do Lema 2.22, para cada k , existe um par $(U_k, V_k) \in X_h$ que é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21.*

Demonstração

Através do Lema 2.22, o par $(U_k, V_k) \in S_h \times S_h$ satisfaz (2.93). Logo, substituindo $\Phi = V_k$ no Problema (2.93) e utilizando as desigualdades de Hölder e de Young (Teoremas A.1 e A.30), obtém-se

$$\rho_{q(x)}(V_k) \leq \frac{1}{2} \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|U_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C \|V_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C.$$

Consequentemente, $V_k \in L^{q(x)}(\Omega)$. Portanto, existe um par $(U_k, V_k) \in X_h$ que é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21. ■

2.2.2 Unicidade da solução discreta

Esta subsecção demonstra que o par $(U_k, V_k) \in X_h$ é a única solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21.

Teorema 2.24. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$, um domínio limitado, aberto e com fronteira Lipschitz contínua, $F_k \in L^2(\Omega)$ com $k = 1, \dots, n$ e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$. Então, existe um único par $(U_k, V_k) \in X_h$ que é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21.*

Demonstração

Sejam $(U_k, V_k), (\check{U}_k, \check{V}_k) \in X_h$ duas soluções discretas distintas do Problema (2.92). Assim, para todo par $(\Psi, \Phi) \in S_h \times S_h$, tem-se

$$\begin{cases} (U_k - \check{U}_k, \Psi) + \delta (\nabla (V_k - \check{V}_k), \nabla \Psi) + \alpha \delta (\nabla (U_k - \check{U}_k), \nabla \Psi) \\ = (U_{k-1} - \check{U}_{k-1}, \Psi), \\ (\nabla (U_k - \check{U}_k), \nabla \Phi) = (|V_k|^{q(x)-2} V_k - |\check{V}_k|^{q(x)-2} \check{V}_k, \Phi), \end{cases} \quad (2.94)$$

e

$$\begin{cases} U_k = \check{U}_k = V_k = \check{V}_k = 0, & \text{em } \partial\Omega \times]0, T], \\ U_0 = \check{U}_0, V_0 = \check{V}_0, & \text{em } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (2.95)$$

Considerando $\Psi = U_k - \check{U}_k$ e $\Phi = V_k - \check{V}_k$, obtém-se

$$\begin{aligned} \|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta (|V_k|^{q(x)-2} V_k - |\check{V}_k|^{q(x)-2} \check{V}_k, V_k - \check{V}_k) \\ = (U_{k-1} - \check{U}_{k-1}, U_k - \check{U}_k). \end{aligned}$$

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$, então, para $x \in \Omega$ fixo, segue do Teorema A.32 que $(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |\check{V}_k|^{q(x)-2} \check{V}_k, V_k - \check{V}_k) \geq 0$. Assim,

$$\|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (U_{k-1} - \check{U}_{k-1}, U_k - \check{U}_k). \quad (2.96)$$

Utiliza-se o facto de $\alpha \delta \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ e aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_{k-1} - \check{U}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para $k = 1, \dots, n$, tem-se

$$\|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_0 - \check{U}_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das condições iniciais dadas em (2.95), obtém-se

$$\|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow U_k = \check{U}_k \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.97)$$

Por outro lado, através da estimativa (2.96) e das desigualdades de Hölder e de Poincaré

(Teoremas A.1 e A.13), segue que

$$\alpha\delta \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|U_{k-1} - \check{U}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo (2.97) vem que

$$\|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \nabla U_k = \nabla \check{U}_k \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } U_k = \check{U}_k \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (2.98)$$

Por outro lado, se $\Psi = V_k - \check{V}_k$ em (2.94), então

$$\begin{aligned} \delta \|\nabla (V_k - \check{V}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq |(U_k - \check{U}_k, V_k - \check{V}_k)| + |(U_{k-1} - \check{U}_{k-1}, V_k - \check{V}_k)| \\ &\quad + |\alpha\delta (\nabla (U_k - \check{U}_k), \nabla (V_k - \check{V}_k))|. \end{aligned}$$

Utilizam-se as desigualdades de Hölder e de Poincaré (Teoremas A.1 e A.13) e obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \|\nabla (V_k - \check{V}_k)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \|U_k - \check{U}_k\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|U_{k-1} - \check{U}_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \alpha\delta \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$.

Por (2.97) e (2.98), vem que

$$\|\nabla (V_k - \check{V}_k)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \nabla V_k = \nabla \check{V}_k \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } V_k = \check{V}_k \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (2.99)$$

Além disto, aplica-se a desigualdade de Poincaré (Teorema A.13) em (2.99) e conclui-se que

$$\|V_k - \check{V}_k\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow V_k = \check{V}_k \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.100)$$

Nesta etapa da demonstração, considera-se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2]$. Assim, pelo Teorema A.20 existe uma imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ e

$$\|V_k - \check{V}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq C \|V_k - \check{V}_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Substituindo (2.100),

$$\|V_k - \check{V}_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow V_k = \check{V}_k \text{ em } L^{q(x)}(\Omega); \quad q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2]. \quad (2.101)$$

Finalmente, sejam $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (2, \infty)$ e $\Phi = V_k - \check{V}_k$ em (2.94),

$$\left(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |\check{V}_k|^{q(x)-2} \check{V}_k, V_k - \check{V}_k \right) = \left(\nabla (U_k - \check{U}_k), \nabla (V_k - \check{V}_k) \right).$$

Através do Teorema A.32, para $x \in \Omega$ fixo, tem-se

$$C \rho_{q(x)} (V_k - \check{V}_k) \leq \left(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |\check{V}_k|^{q(x)-2} \check{V}_k, V_k - \check{V}_k \right).$$

Assim,

$$C \rho_{q(x)} (V_k - \check{V}_k) \leq \left(\nabla (U_k - \check{U}_k), \nabla (V_k - \check{V}_k) \right).$$

Das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30), vem que

$$\rho_{q(x)} (V_k - \check{V}_k) \leq \frac{1}{2C} \|\nabla (U_k - \check{U}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2C} \|\nabla (V_k - \check{V}_k)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Substituindo (2.98) e (2.99),

$$\rho_{q(x)} (V_k - \check{V}_k) \leq 0.$$

Aplica-se a Proposição A.17 e conclui-se que

$$\rho_{q(x)} (V_k - \check{V}_k) = 0 \Leftrightarrow V_k = \check{V}_k \text{ em } L^{q(x)}(\Omega); \quad q(x) \in [q^-, q^+] \subset (2, \infty). \quad (2.102)$$

Portanto, de (2.97), (2.98), (2.99), (2.100), (2.101) e (2.102) conclui-se que, para $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, existe um único par $(U_k, V_k) \in X_h$ que é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21. ■

2.2.3 Estimativas à priori da solução discreta

Os teoremas desta subsecção demonstram que as estimativas à priori da solução discreta dependem dos dados iniciais.

Teorema 2.25. *Sejam $(U_k, V_k) \in X_h$ a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21. Então, para toda a função $F_k \in L^2(\Omega)$, tem-se*

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_0\|_{L^2(\Omega)} + \delta \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.103)$$

$$\|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{2}{\alpha q^-} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_{q(x)} (V_0)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\delta \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.104)$$

$$\|V_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \left[\left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^-}}, \right. \\ \left. \left[\left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (2.105)$$

Além disto, se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, então

$$\|V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max \left\{ \left[\left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^-}}, \right. \\ \left. \left[\left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{q^+}} \right\}. \quad (2.106)$$

Demonstração

Considera-se $\Phi = V_k$ no Problema (2.92), utiliza-se a Proposição A.17 e obtém-se

$$(\nabla U_k, \nabla V_k) = \rho_{q(x)}(V_k) \geq 0. \quad (2.107)$$

Por outro lado, se $\Psi = U_k$ em (2.92), então

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta (\nabla V_k, \nabla U_k) = (U_{k-1}, U_k) + \delta (F_k, U_k).$$

De (2.107), tem-se

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \rho_{q(x)}(V_k) = (U_{k-1}, U_k) + \delta (F_k, U_k). \quad (2.108)$$

Observa-se que $\alpha \delta \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ e $\rho_{q(x)}(V_k) \geq 0$, logo

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (U_{k-1}, U_k) + \delta (F_k, U_k).$$

Aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\|U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|F_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Isto implica que, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$, a estimativa (2.103) é válida.

Por outro lado, considera-se $\Psi = U_k - U_{k-1}$ em (2.92) e obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|U_k - U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nabla V_k, \nabla U_k) - (\nabla V_k, \nabla U_{k-1}) + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha (\nabla U_k, \nabla U_{k-1}) \\ = (F_k, U_k - U_{k-1}). \end{aligned}$$

Substituindo (2.107),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|U_k - U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(V_k) + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\nabla V_k, \nabla U_{k-1}) + \alpha (\nabla U_k, \nabla U_{k-1}) \\ + (F_k, U_k - U_{k-1}). \end{aligned}$$

Observa-se que, se $\Phi = V_k$ em (2.92), então $(\nabla U_{k-1}, \nabla V_k) = (|V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k)$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \|U_k - U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(V_k) + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(|V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k \right) \\ + \alpha (\nabla U_k, \nabla U_{k-1}) + (F_k, U_k - U_{k-1}). \end{aligned}$$

Das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \|U_k - U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_{q(x)}(V_k) + \frac{\alpha}{2} \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(|V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k \right) \\ + \frac{\alpha}{2} \|\nabla U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|F_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Similarmente à (2.37), mostra-se que

$$\left(|V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k \right) \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |V_{k-1}|^{q(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{q(x)-1}{q(x)} \right) |V_k|^{q(x)} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} \|U_k - U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |V_k|^{q(x)} dx + \frac{\alpha}{2} \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{q(x)} \right) |V_{k-1}|^{q(x)} dx + \frac{\alpha}{2} \|\nabla U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|F_k\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |V_k|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |V_{k-1}|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla U_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \delta \|F_k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Iterando $k = 1, \dots, n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, vem que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |V_k|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{2}{q(x)} \right) |V_0|^{q(x)} dx + \alpha \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Usa-se o facto de $0 < \frac{1}{q^+} \leq \frac{1}{q(x)} \leq \frac{1}{q^-} < 1$ e obtém-se

$$\left(\frac{2}{q^+} \right) \rho_{q(x)}(V_k) + \alpha \|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{2}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \alpha \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.109)$$

Logo,

$$\|\nabla U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\left(\frac{2}{\alpha q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Utiliza-se o Teorema A.31 e prova-se (2.104).

Retorna-se à estimativa (2.109) e tem-se

$$\rho_{q(x)}(V_k) \leq \left(\frac{q^+}{q^-} \right) \rho_{q(x)}(V_0) + \frac{\alpha q^+}{2} \|\nabla U_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta q^+}{2} \sum_{i=1}^k \|F_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.110)$$

Pelo Teorema A.18 segue que

$$\|V_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \rho_{q(x)}(V_k)^{\frac{1}{q^-}}, \rho_{q(x)}(V_k)^{\frac{1}{q^+}} \right\}.$$

Substituindo (2.110) mostra-se que a estimativa (2.105) é válida. Quando considera-se $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, segue do Teorema A.20 que existe uma imersão contínua $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ tal que

$$\|V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|V_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Finalmente, substituindo (2.105) obtém-se (2.106). ■

O próximo teorema estabelece uma estimativa para o termo $\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}$, a referida estimativa depende dos dados iniciais do problema.

Teorema 2.26. *Seja $(U_k, V_k) \in X_h$ a solução discreta do Problema (2.92), no sentido da Definição 2.21, $U_0 = 0$ e $f(x, t)$ Lipschitz contínua na variável t . Então,*

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|F_1\|_{L^2(\Omega)} + CT. \quad (2.111)$$

Demonstração

Suponha que o Problema (2.92) seja investigado para $t = t_k$ e $t = t_{k-1}$. Assim, para todas $\Psi, \Phi \in S_h$, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) + (\nabla (V_k - V_{k-1}), \nabla \Psi) + \alpha (\nabla (U_k - U_{k-1}), \nabla \Psi) \\ = (F_k - F_{k-1}, \Psi) + \left(\frac{U_{k-1} - U_{k-2}}{\delta}, \Psi \right) \end{aligned}$$

e

$$(\nabla (U_k - U_{k-1}), \nabla \Phi) = \left(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, \Phi \right),$$

onde $k = 1, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Sejam $\Psi = \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}$ e $\Phi = V_k - V_{k-1}$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \left(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k - V_{k-1} \right) \\ + \frac{\alpha}{\delta} \|\nabla (U_k - U_{k-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\frac{U_{k-1} - U_{k-2}}{\delta}, \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right) + \left(F_k - F_{k-1}, \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Fixando $x \in \Omega$ e aplicando o Teorema A.32, segue que

$$\left(|V_k|^{q(x)-2} V_k - |V_{k-1}|^{q(x)-2} V_{k-1}, V_k - V_{k-1} \right) \geq 0.$$

Adicionalmente, usa-se o facto de que $\|\nabla (U_k - U_{k-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ e obtém-se

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{U_{k-1} - U_{k-2}}{\delta}, \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right) + \left(F_k - F_{k-1}, \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right).$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{U_{k-1} - U_{k-2}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|F_k - F_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por hipótese a função f é Lipschitz contínua na variável t e isto implica que

$$\|F_k - F_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta.$$

Assim,

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{U_{k-1} - U_{k-2}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + C\delta.$$

Para $k = 2, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{U_1 - U_0}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + C\delta(k-1).$$

Desde que $\delta = \frac{T}{n}$ e $k-1 < k \leq n$, segue que

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{U_1 - U_0}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + CT.$$

Aplica-se a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e utiliza-se o facto de $0 < \delta < 1$,

$$\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta} \|U_1\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta} \|U_0\|_{L^2(\Omega)} + CT.$$

Finaliza-se a prova substituindo (2.103) com $k = 1$, $U_0 = 0$ e obtendo (2.111). ■

Corolário 2.27. *Sob as hipóteses do Teorema 2.26, tem-se*

$$\|V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|F_1\|_{L^2(\Omega)} + \|F_k\|_{L^2(\Omega)} + T \right), \quad (2.112)$$

$$\|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|F_1\|_{L^2(\Omega)} + \|F_k\|_{L^2(\Omega)} + T \right). \quad (2.113)$$

Demonstração

Se $\Psi = V_k$ no Problema (2.92), então

$$\left(\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}, V_k \right) + \|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha (\nabla U_k, \nabla V_k) = (F_k, V_k).$$

Através de (2.107), segue que

$$\|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \left(\frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}, \tilde{v}_k \right) \right| + (F_k, V_k).$$

Das desigualdades de Hölder e Poincaré (Teoremas A.1 e A.13) existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|\nabla V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\left\| \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|F_k\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Substituindo (2.111) prova-se (2.113). Finalmente, aplica-se a desigualdade de Poincaré (Teorema A.13) em (2.113) e prova-se (2.112). ■

Observação 2.28. Se $U(x, 0) = U_0 \neq 0$ em Ω , então a existência e a unicidade da solução discreta do Problema (2.92) são demonstradas de maneira análoga. Entretanto, a hipótese $U_0 = 0$ é necessária para que as estimativas (2.111), (2.112) e (2.113) sejam uniformemente independentes de δ .

2.2.4 Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Na investigação da ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca são estudados quatro casos, nomeadamente:

- i) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$;
- ii) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se $d \leq 2$ e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (\max\{\frac{3}{2}, \frac{2(d-1)}{d}\}, 2]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se $d > 2$;
- iii) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$;
- iv) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$.

O teorema a seguir investiga o primeiro caso e estabelece a ordem de convergência em relação a h , em relação a δ e um critério de convergência entre h e δ .

Teorema 2.29. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado, aberto, com fronteira Lipschitz contínua e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$. Se o par (u, v) é a solução fraca do Problema (2.7) no sentido da Definição 2.1, $(u, v) \in H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$ com $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$, $u_t \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e o par (U_k, V_k) é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21 com $U_0 = R_h u_0$, então

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.114)$$

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^{s-1} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.115)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right), \quad (2.116)$$

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2q^+}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{2q^+}}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.117)$$

onde $u_k = u(x, t_k)$, $v_k = v(x, t_k)$, $U_k = U_k(x)$, $V_k = V_k(x)$, $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$ é uma constante, $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ satisfaz $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$ e $h \leq C\delta^\beta$, com $\beta > \frac{q^+-1}{sq^+}$, determina um critério para que exista a ordem convergência.

Demonstração

Suponha que o espaço de elementos finitos $S_h \subset H_0^1(\Omega)$, conseqüentemente pode-se considerar o Problema (2.8) avaliado em $t = t_k$ com as funções $\psi = \Psi \in S_h$ e $\eta = \Phi \in S_h$. Nomeadamente,

$$\begin{cases} (u_t, \Psi) + (\nabla v_k, \nabla \Psi) + \alpha (\nabla u_k, \nabla \Psi) = (f_k, \Psi), \\ (\nabla u_k, \nabla \Phi) = \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k, \Phi \right), \end{cases} \quad (2.118)$$

para todas $\Psi, \Phi \in S_h$. Por simplificação, denotaram-se $u_t = u_t(x, t_k)$, $u_k = u(x, t_k)$ e $v_k = v(x, t_k)$.

Subtraindo (2.93) e (2.118),

$$\begin{cases} \left(u_t - \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) + (\nabla (v_k - V_k), \nabla \Psi) + \alpha (\nabla (u_k - U_k), \nabla \Psi) = 0, \\ (\nabla (u_k - U_k), \nabla \Phi) = \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi \right). \end{cases} \quad (2.119)$$

Sejam $R_h u_k$ e $R_h v_k$ as projeções de Ritz das funções u_k e v_k , respetivamente, no espaço S_h de acordo com a Definição A.28. De (2.119), tem-se

$$\begin{aligned} & (\nabla (u_k - U_k) + \nabla R_h u_k - \nabla R_h u_k, \nabla \Phi) \\ &= \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k + |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \Phi \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & (\nabla (u_k - R_h u_k), \nabla \Phi) + (\nabla (R_h u_k - U_k), \nabla \Phi) \\ &= \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \Phi \right) + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi \right). \end{aligned}$$

Da Definição A.28, segue que

$$\begin{aligned} (\nabla (R_h u_k - U_k), \nabla \Phi) &= \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \Phi \right) \\ &+ \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

De maneira análoga, tem-se por (2.119)

$$\begin{aligned} & \left(u_t - \frac{U_k - U_{k-1}}{\delta} + \frac{R_h u_k - R_h u_k + R_h u_{k-1} - R_h u_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) \\ &+ (\nabla (v_k - V_k + R_h v_k - R_h v_k), \nabla \Psi) + \alpha (\nabla (u_k - U_k + R_h u_k - R_h u_k), \nabla \Psi) = 0, \end{aligned}$$

reorganiza-se,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_h u_k - U_k}{\delta} - \frac{R_h u_{k-1} - U_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) + \left(u_t - \frac{R_h u_k - R_h u_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) \\ & + (\nabla (v_k - R_h v_k), \nabla \Psi) + (\nabla (R_h v_k - V_k), \nabla \Psi) + \alpha (\nabla (u_k - R_h u_k), \nabla \Psi) \\ & + \alpha (\nabla (R_h u_k - U_k), \nabla \Psi) = 0. \end{aligned}$$

Novamente usa-se a Definição A.28,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_h u_k - U_k}{\delta} - \frac{R_h u_{k-1} - U_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) + \left(u_t - \frac{R_h u_k - R_h u_{k-1}}{\delta}, \Psi \right) \\ & + (\nabla (R_h v_k - V_k), \nabla \Psi) + \alpha (\nabla (R_h u_k - U_k), \nabla \Psi) = 0. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Para $k = 1, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, definem-se

$$\theta_k = R_h u_k - U_k, \quad \mu_k = u_k - R_h u_k, \quad (2.122)$$

$$\chi_k = R_h v_k - V_k, \quad \omega_k = v_k - R_h v_k, \quad (2.123)$$

além disto, consideram-se

$$\theta_0 = R_h u_0 - U_0 \quad (2.124)$$

e

$$\bar{\partial} \theta_k = \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\delta}, \quad \bar{\partial} R_h u_k = \frac{R_h u_k - R_h u_{k-1}}{\delta} \text{ e } \bar{\partial} \mu_k = \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\delta}.$$

Desta maneira, reescrevem-se (2.120) e (2.121) como

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\partial} \theta_k, \Psi) + (u_t - \bar{\partial} R_h u_k, \Psi) + (\nabla \chi_k, \nabla \Psi) + \alpha (\nabla \theta_k, \nabla \Psi) = 0, \\ (\nabla \theta_k, \nabla \Phi) = \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \Phi \right) \\ \quad + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \Phi \right), \end{array} \right. \quad (2.125)$$

para todas $\Psi, \Phi \in S_h$. Se $\Psi = \theta_k \in S_h$ e $\Phi = \chi_k \in S_h$, então

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial} \theta_k, \theta_k) + (u_t - \bar{\partial} R_h u_k, \theta_k) + \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \\ & + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) + \alpha \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Nota-se que,

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}\theta_k, \theta_k) &= \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\delta}, \theta_k \right) \\
&= \frac{1}{\delta} \left(\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\theta_{k-1}, \theta_k) \right) \\
&\geq \frac{1}{\delta} \left(\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\delta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\bar{\partial}\theta_k, \theta_k). \quad (2.127)$$

Substituindo (2.127) em (2.126),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) \\
&\leq |(u_t - \bar{\partial} R_h u_k, \theta_k)| + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|.
\end{aligned}$$

Através das desigualdades de Hölder, Poincaré e Young (Teoremas A.1, A.13 e A.30), obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) \\
&\leq \frac{C_1}{4\varepsilon_1} \|u_t - \bar{\partial} R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon_1 \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, considera-se $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) \\
&\leq \frac{C_1}{2\alpha} \|u_t - \bar{\partial} R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|. \quad (2.128)
\end{aligned}$$

Observa-se que,

$$\|u_t - \bar{\partial} R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_t - \bar{\partial} u_k + \bar{\partial} u_k - \bar{\partial} R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De (2.122), vem que

$$\|u_t - \bar{\partial}R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_t - \bar{\partial}u_k + \bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e o Teorema A.31, obtemos

$$\|u_t - \bar{\partial}R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\|u_t - \bar{\partial}u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.129)$$

Substituindo (2.129) em (2.128),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) \\ & \leq \frac{C_1}{\alpha} \|u_t - \bar{\partial}u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{\alpha} \|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Por outro lado, nota-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u_t - R_h u_t) dt &= \frac{1}{\delta} (u - R_h u) \Big|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k} \\ &= \frac{1}{\delta} (u_k - u_{k-1} - R_h u_k + R_h u_{k-1}) \\ &= \frac{u_k - R_h u_k - u_{k-1} + R_h u_{k-1}}{\delta} \\ &= \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\delta} \\ &= \bar{\partial}\mu_k. \end{aligned}$$

Isto implica que,

$$|\bar{\partial}\mu_k| \leq \left| \frac{1}{\delta} \right| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t| dt = \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t| |1| dt.$$

Aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\begin{aligned}
|\bar{\partial}\mu_k| &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |1|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} (t_k - t_{k-1})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\delta} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\bar{\partial}\mu_k|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt.$$

Integra-se sobre Ω ,

$$\|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_t - R_h u_t|^2 dt dx.$$

Aplica-se o teorema de Fubini,

$$\|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_t - R_h u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Através do Teorema A.29, segue que

$$\|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{Ch^{2s}}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_t\|_{H^s(\Omega)}^2 dt.$$

Por hipótese $u_t \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$, então

$$\|\bar{\partial}\mu_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(u)h^{2s}}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = C(u)h^{2s}. \quad (2.131)$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1}) u_{tt} dt &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} t u_{tt} dt - t_{k-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_{tt} dt \\
&= (t u_t) \Big|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_t dt - t_{k-1} [u_t(t)] \Big|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k} \\
&= t_k u_t(t_k) - t_{k-1} u_t(t_{k-1}) - u_k + u_{k-1} - t_{k-1} u_t(t_k) + t_{k-1} u_t(t_{k-1}) \\
&= (t_k - t_{k-1}) u_t(t_k) - u_k + u_{k-1} \\
&= \delta u_t(t_k) - u_k + u_{k-1} \\
&= \delta \left(u_t(t_k) - \frac{u_k - u_{k-1}}{\delta} \right) \\
&= \delta (u_t - \bar{\partial} u_k),
\end{aligned}$$

onde $u_t = u_t(t_k)$. Assim,

$$|u_t - \bar{\partial} u_k| = \left| \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1}) u_{tt} dt \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |t - t_{k-1}| |u_{tt}| dt.$$

Aplica-se a desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\begin{aligned}
|u_t - \bar{\partial} u_k| &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |t - t_{k-1}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left[\frac{(t - t_{k-1})^3}{3} \Big|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left[\frac{(t_k - t_{k-1})^3}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\delta} \left(\frac{\delta^3}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \delta^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|u_t - \bar{\partial} u_k|^2 \leq C \delta \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u_{tt}|^2 dt.$$

Integra-se sobre Ω , aplica-se o teorema de Fubini e obtém-se que

$$\|u_t - \bar{\partial}u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Desde que $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$\|u_t - \bar{\partial}u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(u)\delta \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = C(u)\delta^2. \quad (2.132)$$

Substituindo (2.132) e (2.131) em (2.130),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\bar{\partial}\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k\right) \\ & \leq \frac{C(u)\delta^2}{\alpha} + \frac{C(u)h^{2s}}{\alpha} + \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k\right). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Por hipótese $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, desta maneira para $x \in \Omega$ fixo, obtém-se do Teorema A.32

$$0 < C_1 \rho_{q(x)}(\chi_k) \leq \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k\right). \quad (2.134)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\partial}\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \rho_{q(x)}(\chi_k) & \leq \frac{C(u)\delta^2}{\alpha} + \frac{C(u)h^{2s}}{\alpha} \\ & + \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k\right). \end{aligned}$$

Através da desigualdade de Young com expoentes variáveis (Teorema A.21), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\partial}\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \rho_{q(x)}(\chi_k) & \leq \frac{C(u)\delta^2}{\alpha} + \frac{C(u)h^{2s}}{\alpha} \\ & + C_\varepsilon \rho_{p(x)}\left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k\right) + \varepsilon \rho_{q(x)}(\chi_k). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, considera-se $C_1 - \varepsilon > C$ com $C \in \mathbb{R}^+$ e obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\partial}\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \rho_{q(x)}(\chi_k) & \leq \frac{C(u)\delta^2}{\alpha} + \frac{C(u)h^{2s}}{\alpha} \\ & + C_2 \rho_{p(x)}\left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k\right). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Do Teorema A.32 com $\beta = 0$ e $x \in \Omega$ fixo, segue que

$$\left| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right| \leq C |\omega_k| (|v_k| + |R_h v_k|)^{q(x)-2}.$$

Desde que $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $v_k, R_h v_k \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ e isto implica que $|v_k|$ e $|R_h v_k|$ são limitadas por uma constante. Além disto, para $x \in \Omega$ fixo, tem-se que $q(x) - 2 \geq 0$. Logo,

$$\left| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right| \leq C |\omega_k|, \quad (2.136)$$

consequentemente,

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq C \rho_{p(x)} (\omega_k). \quad (2.137)$$

Substituindo (2.137) em (2.135),

$$\frac{1}{2} \bar{\delta} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \rho_{q(x)} (\chi_k) \leq \frac{C(u)\delta^2}{\alpha} + \frac{C(u)h^{2s}}{\alpha} + C \rho_{p(x)} (\omega_k). \quad (2.138)$$

Do Teorema A.18 vem que

$$\rho_{p(x)} (\omega_k) \leq \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|\omega_k\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \right\}.$$

Por hipótese $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e pelo Teorema A.20 existe uma imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\rho_{p(x)} (\omega_k) \leq C \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\}. \quad (2.139)$$

Da definição de ω_k em (2.123) e do Teorema A.29, obtemos

$$\begin{aligned} \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\} &\leq \max \left\{ \left(C h^s \|v_k\|_{H^s(\Omega)} \right)^{p^-}, \left(C h^s \|v_k\|_{H^s(\Omega)} \right)^{p^+} \right\} \\ &\leq \max \left\{ (C h^s C(v))^{p^-}, (C h^s C(v))^{p^+} \right\} \\ &\leq C \max \left\{ h^{s p^-}, h^{s p^+} \right\}, \end{aligned}$$

onde $C = C(v, p^-, p^+)$. Desde que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$, $0 < h < 1$, $1 < s \leq r + 1$ e $r \geq 1$, então

$$\max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\} \leq C h^{s p^-}.$$

Usa-se o facto de $p(x)$ e $q(x)$ serem expoentes conjugados e obtém-se

$$\max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\} \leq Ch^{\frac{sq^+}{q^+-1}}. \quad (2.140)$$

De (2.140) e (2.139), tem-se

$$\rho_{p(x)}(\omega_k) \leq Ch^{\frac{sq^+}{q^+-1}}. \quad (2.141)$$

Substitui-se (2.141) em (2.138),

$$\frac{1}{2}\bar{\delta}\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\rho_{q(x)}(\chi_k) \leq C\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right),$$

onde $C = C(u, v, p^-, p^+, \alpha)$. Consequentemente,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\delta\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\rho_{q(x)}(\chi_k) \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right). \quad (2.142)$$

Isto implica que,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right).$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, n$,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\sum_{i=1}^k\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right),$$

ou seja,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta k\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right).$$

Da definição de θ_0 em (2.124) e da hipótese $U_0 = R_h u_0$, segue que

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta k\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right).$$

Desde que $\delta = \frac{T}{n}$ e $k \leq n$, então

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}\right), \quad (2.143)$$

onde $C = C(T)$.

Por outro lado, nota-se que

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_k - R_h u_k + R_h u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De (2.122) vem que

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_k - R_h u_k + \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Através da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31, obtém-se

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_k - R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Utiliza-se o Teorema A.29 e substitui-se (2.143),

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(u)h^{2s} + C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Portanto,

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Investigam-se os termos dominantes e verifica-se que a estimativa (2.114) é satisfeita.

Por outro lado, retorna-se a estimativa (2.142) e obtém-se

$$\alpha\delta \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Substituindo (2.143),

$$\alpha\delta \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right) + C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right),$$

reorganizando,

$$\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right). \quad (2.144)$$

De maneira análoga, obtém-se

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla(u_k - R_h u_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Utilizando o Teorema A.29 e a estimativa (2.144), temos

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(u)h^{2(s-1)} + C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right),$$

ou seja,

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Analizam-se os termos dominantes e demonstra-se que (2.115) é válida.

Retorna-se novamente à estimativa (2.142) e tem-se

$$\delta \rho_{q(x)}(\chi_k) \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Substituindo (2.143),

$$\rho_{q(x)}(\chi_k) \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Através do Teorema A.18,

$$\min \left\{ \|\chi_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^{q^-}, \|\chi_k\|_{L^{q(x)}(\Omega)}^{q^+} \right\} \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$, então pelo Teorema A.20 existe uma imersão contínua $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e

$$\min \left\{ \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^-}, \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^+} \right\} \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Usa-se o facto de $q^- \leq q^+$ e define-se

$$q^* = \begin{cases} q^-, & \text{se } \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} \geq 1, \\ q^+, & \text{se } \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} < 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^*} \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right). \quad (2.145)$$

Observa-se que, novamente pela desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), pelo Teorema A.31 e da definição de χ_k em (2.123), tem-se

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^*} \leq C \|v_k - R_h v_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^*} + C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^*}.$$

Do Teorema A.29 e da estimativa (2.145), segue que

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^{q^*} \leq C(v) h^{sq^*} + C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right).$$

Desta maneira,

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{sq^*} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Novamente aplica-se o Teorema A.31,

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^*}} + \delta^{\frac{2}{q^*}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^*}}}{\delta^{\frac{1}{q^*}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^*(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^*}}} + h^s + h^{\frac{2s}{q^*}} + h^{\frac{sq^+}{q^*(q^+-1)}} \right).$$

Desde que $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $s > 1$ e $q^- \leq q^+$, então

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^s + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right).$$

Verificam-se os termos dominantes e prova-se a estimativa (2.116).

Finalmente, consideram-se $\Psi = \chi_k$ e $\Phi = \chi_k$ em (2.125),

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\theta_k, \chi_k) + (u_t - \bar{\partial}R_h u_k, \chi_k) + \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \\ + \alpha \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right) = 0. \end{aligned}$$

De (2.134), segue que

$$(\bar{\partial}\theta_k, \chi_k) + (u_t - \bar{\partial}R_h u_k, \chi_k) + \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\delta} |(\theta_{k-1}, \chi_k)| + \frac{1}{\delta} |(\theta_k, \chi_k)| + |(u_t - \bar{\partial}R_h u_k, \chi_k)| \\ &\quad + \alpha \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|. \end{aligned}$$

Através das desigualdades de Hölder, Young e de Poincaré (Teoremas A.1, A.30 e A.13), obtemos

$$\begin{aligned} [1 - C_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_{\varepsilon_1} \|u_t - \bar{\partial}R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\varepsilon_2} \alpha^2 \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Se ε_1 e ε_2 são tais que $1 - C_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) > C_2$, com $C_2 \in \mathbb{R}^+$, então

$$\begin{aligned} C_2 \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} + C \|u_t - \bar{\partial}R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C\alpha^2 \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De (2.129), (2.131) e (2.132), vem que

$$\begin{aligned} \|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} + C(\delta^2 + h^{2s}) \\ &\quad + C \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Através da estimativa (2.136) e do Teorema A.29, obtém-se

$$\left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2s},$$

onde $C = C(v)$. Assim,

$$\|\nabla\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} + C(\delta^2 + h^{2s}).$$

Utilizando as estimativas (2.143), (2.145) e desde que $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $s > 1$ e

$q^- \leq q^+$, então

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right)$$

e

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right).$$

Isto implica que,

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right) \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right) \\ &\quad + C (\delta^2 + h^{2s}). \end{aligned} \quad (2.146)$$

Por outro lado, tem-se da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla (v_k - R_h v_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Substituindo (2.146) e utilizando o Teorema A.29,

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C(v)h^{2(s-1)} + C (\delta^2 + h^{2s}) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right) \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right). \end{aligned}$$

Termina-se a demonstração com a investigação dos termos dominantes e a obtenção da estimativa (2.117). ■

No que se segue, demonstra-se detalhadamente a determinação dos termos dominantes que resultaram as estimativas (2.114), (2.115), (2.116) e (2.117) no Teorema 2.29.

Observação 2.30. *Através do Teorema 2.29, tem-se*

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right), \quad (2.147)$$

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \right), \quad (2.148)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^s + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right), \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C (\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^{2s}) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right) \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} \right), \end{aligned} \quad (2.150)$$

onde $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$ e $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$.

Inicialmente, para a estimativa (2.147) nota-se que

$$\frac{sq^+}{q^+ - 1} \leq 2s \Leftrightarrow 2 \leq q^+.$$

Desde que $0 < h < 1$, então

$$h^{2s} \leq h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}. \quad (2.151)$$

Consequentemente, mostra-se que a estimativa (2.147) é reescrita como (2.114).

Por outro lado, para a estimativa (2.148), observa-se que $0 < \delta < 1$ e

$$\delta^2 < \delta. \quad (2.152)$$

O próximo objetivo consiste em determinar a relação de ordenação entre $h^{2(s-1)}$, h^{2s} e $h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}$. Através de (2.151) faz-se necessário comparar apenas $h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}$ e $h^{2(s-1)}$. Suponha que

$$\frac{sq^+}{q^+ - 1} \leq 2(s - 1) \Leftrightarrow q^+(2 - s) \leq 2(1 - s),$$

onde $s \in \mathbb{N}$ é tal que $s > 1$.

Se $s = 2$, então $\frac{q^+}{q^+-1} \leq 1$, equivalentemente, $p^- \leq 1$. Isto implica numa contradição. Logo, $\frac{sq^+}{q^+-1} \geq 2(s - 1)$.

Se $s > 2$, então $q^+ \geq \frac{2(1-s)}{(2-s)} > 2$ e consequentemente $\frac{sq^+}{q^+-1} \leq 2(s - 1)$. Desta maneira, tem-se

$$\begin{cases} \frac{sq^+}{q^+ - 1} \geq 2(s - 1), & \text{se } s = 2, \\ \frac{sq^+}{q^+ - 1} \leq 2(s - 1), & \text{se } s > 2. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \leq h^{2(s-1)}, & \text{se } s = 2, \\ h^{\frac{sq^+}{q^+-1}} \geq h^{2(s-1)}, & \text{se } s > 2. \end{cases} \quad (2.153)$$

Finalmente, devem-se comparar os termos $\frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta}$ e $\frac{h^{2s}}{\delta}$. Observa-se que os denominadores são idênticos, então faz-se necessário apenas comparar os numeradores. Utiliza-se (2.151) e mostra-se que

$$\frac{h^{2s}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta}. \quad (2.154)$$

Através de (2.152), (2.153) e (2.154), demonstra-se que a estimativa (2.148) é equivalente à (2.115).

Nesta etapa, comparam-se os termos da estimativa (2.149). Verifica-se trivialmente que

$$\delta^{\frac{2}{q^+}} < \delta^{\frac{1}{q^+}}. \quad (2.155)$$

Por outro lado, para os termos h^s , $h^{\frac{2s}{q^+}}$ e $h^{\frac{s}{q^+-1}}$ tem-se

$$\frac{s}{q^+ - 1} \leq \frac{2s}{q^+} \leq s \Leftrightarrow 2 \leq q^+,$$

ou seja,

$$h^s \leq h^{\frac{2s}{q^+}} \leq h^{\frac{s}{q^+-1}}. \quad (2.156)$$

Nos termos $\frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}$ e $\frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}$ comparam-se apenas os numeradores. Através de (2.156), vem que

$$\frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}. \quad (2.157)$$

Desta maneira, usam-se as relações de ordem (2.155), (2.156) e (2.157) para reescrever a estimativa (2.149) como (2.116).

Finalmente, resta-nos comparar os termos da estimativa (2.150). Notemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \delta^2 + h^{\frac{s}{q^+-1}} + h^{2(s-1)} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{2s} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)}}}{\delta} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \right). \quad (2.158)
\end{aligned}$$

Para as potências de base δ , deve-se comparar $\delta^{\frac{1}{q^+}}$, $\delta^{\frac{2}{q^+}}$ e δ^2 . Através de (2.155), faz-se necessário comparar apenas $\delta^{\frac{1}{q^+}}$ e δ^2 . Observemos que,

$$\frac{1}{q^+} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq q^+.$$

Assim,

$$\delta^2 \leq \delta^{\frac{1}{q^+}}. \quad (2.159)$$

Para as potências de base h , deve-se investigar $h^{\frac{s}{q^+-1}}$, $h^{2(s-1)}$, $h^{\frac{2s}{q^+}}$ e h^{2s} . De (2.156) e do facto de $h^{2s} \leq h^s$, resta-nos verificar apenas que

$$\frac{s}{q^+-1} \leq 2(s-1) \Leftrightarrow 2q^+(1-s) \leq 2-3s.$$

Por hipótese, $s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 2$. Logo,

$$\frac{s}{q^+-1} \leq 2(s-1) \Leftrightarrow q^+ \geq \frac{2-3s}{2(1-s)} \geq 2.$$

Desta maneira,

$$h^{2(s-1)} \leq h^{\frac{s}{q^+-1}}. \quad (2.160)$$

A seguir, investigam-se as frações com denominadores δ . Nomeadamente, $\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta}$, $\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta}$, $\frac{h^{\frac{sq^+}{q^+-1}}}{\delta}$ e $\frac{h^{\frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)}}}{\delta}$. Utiliza-se o facto dos denominadores serem iguais e

comparam-se apenas os numeradores. Observa-se que,

$$\frac{s(q^+ + 2)}{2(q^+ - 1)} \leq \frac{s(q^+ + 2)}{q^+} \Leftrightarrow 2 \leq q^+,$$

$$\frac{s(q^+ + 2)}{2(q^+ - 1)} \leq \frac{sq^+}{q^+ - 1} \Leftrightarrow 2 \leq q^+$$

e

$$\frac{s(q^+ + 2)}{2(q^+ - 1)} \leq \frac{s((q^+)^2 + 4q^+ - 4)}{2q^+(q^+ - 1)} \Leftrightarrow 2 \leq q^+.$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} h \frac{s(q^++2)}{q^+} \leq h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}, \\ h \frac{sq^+}{q^+-1} \leq h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}, \\ h \frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)} \leq h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}, \end{array} \right.$$

isto implica que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h \frac{s(q^++2)}{q^+}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta}, \\ \frac{h \frac{sq^+}{q^+-1}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta}, \\ \frac{h \frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta}. \end{array} \right. \quad (2.161)$$

De maneira análoga, demonstra-se para os termos com denominador $\delta \frac{q^++1}{q^+}$ que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h \frac{s(q^++2)}{q^+}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}}, \\ \frac{h \frac{sq^+}{q^+-1}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}}, \\ \frac{h \frac{s((q^+)^2+4q^+-4)}{2q^+(q^+-1)}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}} \leq \frac{h \frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}{\delta \frac{q^++1}{q^+}}. \end{array} \right. \quad (2.162)$$

Por outro lado, para os termos com denominadores $\delta \frac{1}{q^+}$, utiliza-se (2.156) e obtém-se

$$\frac{h \frac{2s}{q^+}}{\delta \frac{1}{q^+}} \leq \frac{h \frac{s}{q^+-1}}{\delta \frac{1}{q^+}}. \quad (2.163)$$

Para os termos com denominadores $\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}$, segue que

$$\frac{sq^+}{2(q^+-1)} \leq s \Leftrightarrow 2 \leq q^+,$$

ou seja,

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}}. \quad (2.164)$$

Similarmente, mostra-se que

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}}. \quad (2.165)$$

Através de (2.159), (2.160), (2.161), (2.162), (2.163), (2.164) e (2.165) reescreve-se (2.158) como

$$\begin{aligned} & \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \right). \end{aligned} \quad (2.166)$$

Observa-se que, se os numeradores são iguais, então comparam-se os denominadores, ou seja,

$$1 \leq \frac{q^++1}{q^+} \Rightarrow \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}. \quad (2.167)$$

Por outro lado,

$$\frac{q^+-2}{q^+} \leq \frac{q^+-1}{q^+} \Rightarrow \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}}. \quad (2.168)$$

Substituindo (2.167) e (2.168) em (2.166),

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \right). \quad (2.169)$$

Falta-nos realizar a comparação entre os termos $\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}$, $\frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}}$ e $\frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}$. Para isto, suponha que $h \leq C\delta^{\beta_i}$ onde $\beta_i > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Assim, cada termo é reescrito como

$$\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \leq C\delta^{\frac{\beta_1 s(q^++2)}{2(q^+-1)}} \delta^{-\frac{q^++1}{q^+}} = C\delta^{\frac{\beta_1 sq^+(q^++2)-(q^++1)(2q^+-2)}{2q^+(q^+-1)}},$$

$$\frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \leq C\delta^{\frac{\beta_2 sq^+}{2(q^+-1)}} \delta^{-\frac{q^+-1}{q^+}} = C\delta^{\frac{\beta_2 s(q^+)^2-(q^+-1)(2q^+-2)}{2q^+(q^+-1)}}$$

e

$$\frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \leq C\delta^{\frac{\beta_3 s}{q^+-1}} \delta^{-\frac{1}{q^+}} = C\delta^{\frac{\beta_3 sq^+-(q^+-1)}{q^+(q^+-1)}} = C\delta^{\frac{2\beta_3 sq^+-2(q^+-1)}{2q^+(q^+-1)}}.$$

Observa-se que os denominadores são iguais e assim basta comparar os numeradores. Através da restrição de $\beta_i > 0$, tem-se

$$\beta_1 sq^+(q^++2) - (q^++1)(2q^+-2) > 0 \Leftrightarrow \beta_1 > \frac{2((q^+)^2 - 1)}{sq^+(q^++2)},$$

$$\beta_2 s(q^+)^2 - (q^+-1)(2q^+-2) > 0 \Leftrightarrow \beta_2 > \frac{2(q^+-1)^2}{s(q^+)^2}$$

e

$$2\beta_3 sq^+ - 2(q^+-1) > 0 \Leftrightarrow \beta_3 > \frac{q^+-1}{sq^+}.$$

O próximo objetivo será determinar o menor valor de β_i . Nota-se que, para β_3 e β_1 , tem-se

$$\frac{q^+-1}{sq^+} \leq \frac{2((q^+)^2 - 1)}{sq^+(q^++2)} \Leftrightarrow 0 \leq q^+.$$

Por outro lado, para β_3 e β_2 , segue que

$$\frac{q^+-1}{sq^+} \leq \frac{2(q^+-1)^2}{s(q^+)^2} \Leftrightarrow 2 \leq q^+.$$

Logo, $\beta_3 > \frac{q^+-1}{sq^+}$ é a menor restrição. Portanto, a estimativa (2.169) torna-se

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{q^+-1}} + \frac{h^{\frac{s}{q^+-1}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \right).$$

Consequentemente, demonstra-se que (2.117) é satisfeita. Além disto, para que exista a ordem de convergência é necessário que $h \leq C\delta^{\beta_3}$ com $\beta_3 > \frac{q^+-1}{sq^+}$. Destaca-se que este critério de convergência também é aplicável para as estimativas (2.115) e (2.116).

2.2.5 Ordem de convergência com $1 < p(x) \leq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$

Nesta subsecção analisa-se a ordem de convergência em relação a h e em relação a δ . Faz-se um estudo para o caso em que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$ e também estuda-se o caso em que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (\max\{\frac{3}{2}, \frac{2(d-1)}{d}\}, 2]$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $d > 2$. Além disto, estabelece-se um critério para que exista a referida ordem de convergência.

Teorema 2.31. *Sob as hipóteses do Teorema 2.29 com $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, e considerando*

- i) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2] \Leftrightarrow q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$ quando $d \leq 2$ e;
- ii) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (\max\{\frac{3}{2}, \frac{2(d-1)}{d}\}, 2] \Leftrightarrow q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \min\{3, \frac{2(d-1)}{d-2}\})$ quando $d > 2$.

Tem-se,

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}} \right), \quad (2.170)$$

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}} \right), \quad (2.171)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.172)$$

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2q^+}} + \frac{h^{\frac{s}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{2q^+}}} + h^{\frac{s}{4(q^+-1)}} \right), \quad (2.173)$$

onde $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$ é uma constante e a relação para que exista ordem de convergência é dada por $h \leq C\delta^\beta$ com $\beta > \frac{2(q^+-1)}{sq^+}$.

Demonstração

Prossegue-se de maneira idêntica à demonstração do Teorema 2.29 até a estimativa (2.135). Posteriormente, fixa-se $x \in \Omega$, aplica-se o Teorema A.32 com $\beta = \frac{1}{2}$ e obtém-se

$$\left| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right| \leq C |\omega_k|^{\frac{1}{2}} (|v_k| + |R_h v_k|)^{\frac{2q(x)-3}{2}}.$$

Logo,

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq C \int_{\Omega} |\omega_k|^{\frac{p(x)}{2}} (|v_k| + |R_h v_k|)^{\frac{(2q(x)-3)p(x)}{2}} dx.$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.1),

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq C \left\| |\omega_k|^{\frac{p(x)}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| (|v_k| + |R_h v_k|)^{\frac{(2q(x)-3)p(x)}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nota-se que,

$$\left\| |\omega_k|^{\frac{p(x)}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} = \rho_{p(x)}(\omega_k)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\left\| (|v_k| + |R_h v_k|)^{\frac{(2q(x)-3)p(x)}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} = \rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq C \rho_{p(x)}(\omega_k)^{\frac{1}{2}} \rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Similarmente à (2.141), obtém-se

$$\rho_{p(x)}(\omega_k)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}.$$

Consequentemente,

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq Ch^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.174)$$

Do Teorema A.18, da hipótese $p(x) \leq 2$ e do Teorema A.20 existe uma imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} & \rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \max \left\{ \left\| (|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p^-}{2}}, \left\| (|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p^+}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Através dos Teoremas A.24 e A.25 com

- i) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2] \Leftrightarrow q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$ quando $d \leq 2$ e;
- ii) $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (\max\{\frac{3}{2}, \frac{2(d-1)}{d}\}, 2] \Leftrightarrow q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \min\{3, \frac{2(d-1)}{d-2}\})$ quando $d > 2$,

vem que

$$\begin{aligned} & \rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \max \left\{ \max \left\{ \left\| |v_k| + |R_h v_k| \right\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^- - 3)p^-}{2}}, \left\| |v_k| + |R_h v_k| \right\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^+ - 3)p^-}{2}} \right\}, \right. \\ & \quad \left. \max \left\{ \left\| |v_k| + |R_h v_k| \right\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^- - 3)p^+}{2}}, \left\| |v_k| + |R_h v_k| \right\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^+ - 3)p^+}{2}} \right\} \right\}. \quad (2.175) \end{aligned}$$

Nota-se que, da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) tem-se

$$\| |v_k| + |R_h v_k| \|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^- - 3)p^-}{2}} \leq C \left(\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \|R_h v_k\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{(2q^- - 3)p^-}{2}}.$$

Pela definição da projeção de Ritz (Definição A.28),

$$\|\nabla R_h v_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)} \Leftrightarrow \|R_h v_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Assim,

$$\| |v_k| + |R_h v_k| \|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^- - 3)p^-}{2}} \leq C \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{(2q^- - 3)p^-}{2}} \leq C, \quad (2.176)$$

onde $C = C(v, p^-)$.

De maneira análoga investigam-se os outros termos da estimativa (2.175). Consequentemente, substituindo (2.176) em (2.175),

$$\rho_{p(x)} \left((|v_k| + |R_h v_k|)^{2q(x)-3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C, \quad (2.177)$$

onde $C = C(v, p^-, p^+)$.

De (2.177) e (2.174), obtemos

$$\rho_{p(x)} \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right) \leq Ch^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}.$$

Substitui-se a estimativa acima em (2.135),

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \rho_{q(x)}(\chi_k) \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right).$$

Destaca-se que o restante da demonstração segue de maneira análoga ao Teorema 2.29. Nomeadamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \\ \|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \\ \|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^s + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C (\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^s + h^{2s}) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}} \right) \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right). \end{aligned}$$

Investigam-se os termos dominantes das estimativas acima e conclui-se (2.170), (2.171), (2.172) e (2.173). ■

A seguir, explicitam-se os cálculos que determinam os termos dominantes das estimativas (2.170), (2.171), (2.172) e (2.173) no Teorema 2.31.

Observação 2.32. *Através do Teorema 2.31, tem-se*

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.178)$$

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.179)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^s + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right), \quad (2.180)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C (\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^s + h^{2s}) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}} \right) \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right), \end{aligned} \quad (2.181)$$

onde $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$ e

i) $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \infty)$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d \leq 2$ e;

ii) $q(x) \in [q^-, q^+] \subset [2, \min\{3, \frac{2(d-1)}{d-2}\})$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 2$.

Para a estimativa (2.178), verifica-se que

$$\frac{sq^+}{2(q^+ - 1)} \leq 2s \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+.$$

Por hipótese $0 < h < 1$, então

$$h^{2s} \leq h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}. \quad (2.182)$$

Desta maneira, demonstra-se que a estimativa (2.178) é equivalente à (2.170).

Por outro lado, para estimativa (2.179) devem-se comparar os termos $h^{2(s-1)}$, h^{2s} e $h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}$. Utiliza-se (2.182) e percebe-se que resta-nos comparar apenas $h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}$ e $h^{2(s-1)}$.

Desde que $s \in \mathbb{N}$ e $s > 1$, então

$$\frac{sq^+}{2(q^+-1)} \leq 2(s-1) \Leftrightarrow q^+(4-3s) \leq 4(1-s) \Leftrightarrow q^+ \geq \frac{4(1-s)}{4-3s} \geq 2.$$

Assim,

$$h^{2(s-1)} \leq h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}. \quad (2.183)$$

Para os termos $\frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta}$ e $\frac{h^{2s}}{\delta}$ é necessário apenas comparar os numeradores. De (2.182) vem que

$$\frac{h^{2s}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}}{\delta}. \quad (2.184)$$

Portanto, de (2.152), (2.183) e (2.184) tem-se que a estimativa (2.179) é reescrita como sendo (2.171).

A seguir, investigam-se os termos dominantes de (2.180). Através de (2.156) devem-se comparar apenas os termos $h^{\frac{2s}{q^+}}$ e $h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}$. Observa-se que,

$$\frac{s}{2(q^+-1)} \leq \frac{2s}{q^+} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+,$$

logo,

$$h^{\frac{2s}{q^+}} \leq h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}. \quad (2.185)$$

Consequentemente,

$$\frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}. \quad (2.186)$$

Portanto, de (2.155), (2.185) e (2.186) transforma-se a estimativa (2.180) para (2.172).

Finalmente, para a estimativa (2.181) tem-se

$$\begin{aligned}
\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + \delta^{\frac{2}{q^+}} + \delta^2 + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} + h^{2(s-1)} + h^{\frac{2s}{q^+}} + h^s + h^{2s} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \right).
\end{aligned}$$

Para as potências de bases δ , segue de (2.155) e (2.159) que $\delta^{\frac{1}{q^+}}$ é o termo dominante. Para as potências de base h , de (2.182), (2.183) e (2.185) resta-nos comparar $h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}$ e h^s . Nota-se que,

$$\frac{s}{2(q^+-1)} \leq s \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq q^+,$$

logo,

$$h^s \leq h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \right). \quad (2.187)
\end{aligned}$$

No que se segue, comparam-se as frações com denominadores δ . Nota-se que,

$$\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)} \leq \frac{s(q^++2)}{q^+} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+,$$

$$\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)} \leq \frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+$$

e

$$\frac{s(q^+ + 2)}{4(q^+ - 1)} \leq \frac{s((q^+)^2 + 8q^+ - 8)}{4q^+(q^+ - 1)} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+.$$

Desta maneira, segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}} \leq h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}, \\ h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}} \leq h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}, \\ h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}} \leq h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}, \end{array} \right.$$

consequentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta}, \\ \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta}, \\ \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta}. \end{array} \right. \quad (2.188)$$

Analogamente, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{q^+}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}, \\ \frac{h^{\frac{s(2q^+-1)}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}, \\ \frac{h^{\frac{s((q^+)^2+8q^+-8)}{4q^+(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}. \end{array} \right. \quad (2.189)$$

Por outro lado, utiliza-se (2.185) e demonstra-se que

$$\frac{h^{\frac{2s}{q^+}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}}. \quad (2.190)$$

Além disto, observa-se que

$$\frac{sq^+}{4(q^+ - 1)} \leq s \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq q^+$$

e isto implica em

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \quad (2.191)$$

e

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}}. \quad (2.192)$$

Substituindo (2.188), (2.189), (2.190), (2.191) e (2.192) em (2.187),

$$\begin{aligned} & \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \right). \end{aligned} \quad (2.193)$$

Para os termos que possuem os numeradores iguais, comparam-se os denominadores. Nomeadamente,

$$1 \leq \frac{q^+ + 1}{q^+} \Rightarrow \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \quad (2.194)$$

e

$$\frac{q^+ - 2}{q^+} \leq \frac{q^+ - 1}{q^+} \Rightarrow \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-2}{q^+}}} \leq \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}}. \quad (2.195)$$

Substituindo (2.194) e (2.195) em (2.193),

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} + \frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} + \frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \right). \quad (2.196)$$

Para finalizar, deve-se realizar a comparação entre os termos $\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}}$, $\frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}}$ e $h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}$. Para isto, seja $h \leq C\delta^{\beta_i}$ onde $\beta_i > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Assim, cada respectivo termo passa a ser

$$\frac{h^{\frac{s(q^++2)}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^++1}{q^+}}} \leq C\delta^{\frac{\beta_1 s(q^++2)}{4(q^+-1)}} \delta^{-\frac{q^++1}{q^+}} = C\delta^{\frac{\beta_1 sq^+(q^++2) - 4(q^++1)(q^+-1)}{4q^+(q^+-1)}},$$

$$\frac{h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{q^+-1}{q^+}}} \leq C \delta^{\frac{\beta_2 sq^+}{4(q^+-1)}} \delta^{-\frac{q^+-1}{q^+}} = C \delta^{\frac{\beta_2 s(q^+)^2 - 4(q^+-1)(q^+-1)}{4q^+(q^+-1)}}$$

e

$$\frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \leq C \delta^{\frac{\beta_3 s}{2(q^+-1)}} \delta^{-\frac{1}{q^+}} = C \delta^{\frac{\beta_3 sq^+ - 2(q^+-1)}{2q^+(q^+-1)}} = C \delta^{\frac{2\beta_3 sq^+ - 4(q^+-1)}{4q^+(q^+-1)}}.$$

Nota-se que os denominadores são iguais e então é necessário apenas comparar os numeradores. Através da restrição de $\beta_i > 0$, tem-se

$$\beta_1 sq^+(q^+ + 2) - 4(q^+ + 1)(q^+ - 1) > 0 \Leftrightarrow \beta_1 > \frac{4((q^+)^2 - 1)}{sq^+(q^+ + 2)},$$

$$\beta_2 s(q^+)^2 - 4(q^+ - 1)(q^+ - 1) > 0 \Leftrightarrow \beta_2 > \frac{4(q^+ - 1)^2}{s(q^+)^2}$$

e

$$2\beta_3 sq^+ - 4(q^+ - 1) > 0 \Leftrightarrow \beta_3 > \frac{2(q^+ - 1)}{sq^+}.$$

A seguir, determina-se o menor valor de β_i . Nota-se que, para β_3 e β_1 , tem-se

$$\frac{2(q^+ - 1)}{sq^+} \leq \frac{4((q^+)^2 - 1)}{sq^+(q^+ + 2)} \Leftrightarrow 0 \leq q^+.$$

Para β_3 e β_2 ,

$$\frac{2(q^+ - 1)}{sq^+} \leq \frac{4(q^+ - 1)^2}{s(q^+)^2} \Leftrightarrow 2 \leq q^+.$$

Desta maneira, $\beta_3 > \frac{2(q^+-1)}{sq^+}$ é a menor restrição. Portanto, a estimativa (2.196) passa a ser

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{q^+}} + h^{\frac{s}{2(q^+-1)}} + \frac{h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}}{\delta^{\frac{1}{q^+}}} \right).$$

Consequentemente, prova-se que (2.173) é válida. Além disto, $h \leq C\delta^{\beta_3}$ com $\beta_3 > \frac{2(q^+-1)}{sq^+}$ é o critério de convergência do Teorema 2.31.

2.2.6 Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$

Na subsecção que está a ser iniciada a função de expoente variável satisfaz $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$. Demonstra-se, no teorema a seguir, a ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca e explicita-se um critério entre h e δ para que exista a referida ordem de convergência.

Teorema 2.33. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado, aberto, com fronteira Lipschitz contínua e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$. Se o par (u, v) é a solução fraca do Problema*

(2.7) no sentido da Definição 2.1, $(u, v) \in H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$ com $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$, $u_t \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e o par (U_k, V_k) é a solução discreta do Problema (2.92) no sentido da Definição 2.21 com $U_0 = R_h u_0$, então

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + h^{s(q^- - 1)} \right), \quad (2.197)$$

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^{s(q^- - 1)} \right), \quad (2.198)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^{s(q^- - 1)} \right), \quad (2.199)$$

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\delta^{\frac{1}{4}} + \frac{h^{\frac{s(q^- - 1)}{2}}}{\delta^{\frac{1}{4}}} + h^{\frac{s(q^- - 1)}{2}} \right), \quad (2.200)$$

onde $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$ é uma constante, $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ satisfaz $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$ e o critério de convergência é definido por $h \leq C\delta^\beta$ com $\beta > \frac{1}{2s(q^- - 1)}$.

Demonstração

A demonstração segue de maneira idêntica à prova do Teorema 2.29 até a estimativa (2.133). Fixando $x \in \Omega$ e aplicando o Teorema A.32 com $\beta = 0$, tem-se

$$C |\chi_k|^2 (|R_h v_k| + |V_k|)^{q(x)-2} \leq \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right)_{\mathbb{R}^d}. \quad (2.201)$$

Desde que $-1 < q(x) - 2 < 0$, então

$$(|R_h v_k| + |V_k|)^{q(x)-2} = \frac{1}{(|R_h v_k| + |V_k|)^{2-q(x)}}.$$

Por hipótese $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $R_h v_k, V_k \in H_0^1(\Omega)$. Assim, $H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ e isto implica que $|R_h v_k|$ e $|V_k|$ são limitadas por uma constante. Além disto, usa-se o facto de $2 - q(x) > 0$ e obtém-se

$$(|R_h v_k| + |V_k|)^{2-q(x)} \leq C_1^{2-q(x)} \leq C.$$

Logo,

$$C \leq \frac{1}{(|R_h v_k| + |V_k|)^{2-q(x)}} = (|R_h v_k| + |V_k|)^{q(x)-2}. \quad (2.202)$$

Substituindo (2.202) em (2.201),

$$C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right).$$

Desta forma, a estimativa (2.133) passa a ser

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|.$$

Através das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30),

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C - \varepsilon_1) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C_{\varepsilon_1} \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Sem perda de generalidade, seja $C - \varepsilon_1 > C_2$ com $C_2 \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por outro lado, do Teorema A.32 com $x \in \Omega$ fixo e $\beta = \frac{p(x)-2}{p(x)-1} = 2 - q(x) > 0$, segue que

$$\left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.203)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C \left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.204)$$

Nesta etapa da prova considera-se $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, 3)$, equivalentemente, $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (\frac{3}{2}, 2)$. Assim,

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\omega_k|^{2(q(x)-1)} dx = \rho_{2(q(x)-1)}(\omega_k).$$

Utiliza-se o Teorema A.18 e obtém-se

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^{2(q(x)-1)}(\Omega)}^{2(q^- - 1)}, \|\omega_k\|_{L^{2(q(x)-1)}(\Omega)}^{2(q^+ - 1)} \right\}.$$

Usa-se o facto de $1 < 2(q(x) - 1) < 2$ e aplica-se o Teorema A.20 para obter uma imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2(q(x)-1)}(\Omega)$ tal que

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^- - 1)}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^+ - 1)} \right\}. \quad (2.205)$$

Caso $p(x) \in [p^-, p^+] \subset [3, \infty)$, então $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \frac{3}{2}]$ e do Teorema A.23 obtemos

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^- - 1)}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^+ - 1)} \right\}. \quad (2.206)$$

Nota-se que, para $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$, ou seja, $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$, tem-se de (2.205) e (2.206)

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max \left\{ \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^- - 1)}, \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^{2(q^+ - 1)} \right\}.$$

Através da definição de ω_k em (2.123) e do Teorema A.29, vem que

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max \left\{ h^{2s(q^- - 1)}, h^{2s(q^+ - 1)} \right\},$$

onde $C = C(v, q^-, q^+)$. Desde que $q^- \leq q^+$, $0 < h < 1$ e $s > 1$, então

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C h^{2s(q^- - 1)}. \quad (2.207)$$

Substituindo (2.207) em (2.204),

$$\bar{\delta} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \delta \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C \delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right). \end{aligned} \quad (2.208)$$

Consequentemente,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Para $k = 1, \dots, n$ e $n \in \mathbb{N}^*$, segue que

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta k \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Por hipótese $\theta_0 = 0$, $\delta = \frac{T}{n}$ e $k \leq n$, assim

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right). \quad (2.209)$$

Por outro lado, utilizando a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e o Teorema A.31, obtemos

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_k - R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Do Teorema A.29 e de (2.209),

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Investigam-se os termos dominantes e conclui-se que (2.197) é válida.

Retorna-se à estimativa (2.208) e obtém-se

$$\alpha\delta \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Por (2.209),

$$\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right). \quad (2.210)$$

Por outro lado, da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31 vem que

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla(u_k - R_h u_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Substituindo (2.210) e aplicando o Teorema A.29,

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Estudam-se os termos dominantes e obtém-se (2.198).

Novamente pelas estimativas (2.208) e (2.209), segue que

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right). \quad (2.211)$$

Através da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31,

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v_k - R_h v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Com o Teorema A.29 e com a estimativa (2.211), obtemos

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Verificam-se os termos dominantes e conclui-se que (2.199) é satisfeita.

Finalmente, de maneira análoga ao Teorema 2.29, tem-se

$$\|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} + C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

Substituindo (2.209) e (2.211),

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right) \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta + \frac{h^s}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right). \end{aligned} \quad (2.212)$$

Da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31,

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla (v_k - R_h v_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De (2.212) e do Teorema A.29,

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right) \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta + \frac{h^s}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right). \end{aligned}$$

Termina-se a demonstração com a comparação dos termos dominantes e a obtenção da estimativa (2.200). ■

A seguir, analisam-se os termos dominantes que determinaram as estimativas (2.197), (2.198), (2.199) e (2.200) no Teorema 2.33.

Observação 2.34. *Segue do Teorema 2.33 que,*

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right), \quad (2.213)$$

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right), \quad (2.214)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right), \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &\quad + \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right) \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta + \frac{h^s}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^s + h^{s(q^- - 1)} \right), \end{aligned} \quad (2.216)$$

onde $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$ e $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$.

Inicia-se a investigação para a estimativa (2.213) observando que,

$$2s(q^- - 1) \leq 2s \Leftrightarrow q^- \leq 2.$$

Desde que $0 < h < 1$, então

$$h^{2s} \leq h^{2s(q^- - 1)}. \quad (2.217)$$

Desta maneira, a estimativa (2.213) torna-se (2.197).

Para a estimativa (2.214), deve-se comparar $h^{2(s-1)}$, h^{2s} e $h^{2s(q^- - 1)}$. Utiliza-se (2.217) e comparam-se apenas $h^{2(s-1)}$ e $h^{2s(q^- - 1)}$,

$$2s(q^- - 1) \leq 2(s - 1) \Leftrightarrow q^- \leq \frac{2s - 1}{s} < 2,$$

pois $s \in \mathbb{N}$ e $s > 1$. Assim,

$$h^{2(s-1)} \leq h^{2s(q^- - 1)}. \quad (2.218)$$

Por outro lado, de (2.217), tem-se

$$\frac{h^{2s}}{\delta} \leq \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta}. \quad (2.219)$$

Portanto, utilizando (2.152), (2.218) e (2.219) prova-se que a estimativa (2.214) é equivalente à (2.198).

Destaca-se que, de (2.152), (2.217) e (2.219) a estimativa (2.215) é reescrita como (2.199).

Finalmente, resta-nos investigar (2.216), nomeadamente,

$$\begin{aligned} \|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta + \delta^2 + h^{s(q^- - 1)} + h^{2s(q^- - 1)} + h^{2(s-1)} + h^s + h^{2s} \right) \\ &+ C \left(\frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + \frac{h^{sq^-}}{\delta} + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}} + \frac{h^{sq^-}}{\delta^{\frac{3}{2}}} + \frac{h^{2s}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (2.220)$$

Para os termos dependentes apenas de δ , verifica-se que

$$\delta^2 < \delta < \delta^{\frac{1}{2}}. \quad (2.221)$$

Para os termos $h^{s(q^- - 1)}$, $h^{2s(q^- - 1)}$, $h^{2(s-1)}$, h^s e h^{2s} , utilizam-se (2.217), (2.218) e faz-se necessário comparar apenas $h^{s(q^- - 1)}$, $h^{2s(q^- - 1)}$ e h^s . Nota-se que

$$\begin{cases} s(q^- - 1) \leq 2s(q^- - 1) & \Leftrightarrow 1 \leq q^-, \\ s(q^- - 1) \leq s & \Leftrightarrow q^- \leq 2 \end{cases}$$

e isto implica que,

$$\begin{cases} h^{2s(q^- - 1)} \leq h^{s(q^- - 1)}, \\ h^s \leq h^{s(q^- - 1)}. \end{cases} \quad (2.222)$$

Consequentemente, tem-se

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.223)$$

Por outro lado, para as frações com denominadores δ utiliza-se (2.217) e comparam-se apenas $\frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta}$ e $\frac{h^{sq^-}}{\delta}$.

$$2s(q^- - 1) \leq sq^- \Leftrightarrow q^- \leq 2.$$

Logo,

$$\frac{h^{sq^-}}{\delta} \leq \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta}. \quad (2.224)$$

Para as frações com denominadores $\delta^{\frac{3}{2}}$, utilizam-se (2.217) e (2.224) para demonstrar que

$$\frac{h^{sq^-}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.225)$$

Substituindo (2.221), (2.222), (2.223), (2.224) e (2.225) em (2.220),

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + h^{s(q^- - 1)} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Para os termos que possuem os numeradores iguais, comparam-se os denominadores. Nomeadamente,

$$1 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta} \leq \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim,

$$\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + h^{s(q^- - 1)} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.226)$$

Para terminar, deve-se realizar a comparação entre $\frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}}$ e $\frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}}$. Para tanto, suponha que $h \leq C\delta^{\beta_i}$ onde $\beta_i > 0$ e $i = 1, 2$. Desta forma, segue que

$$\frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} \leq C\delta^{\beta_1 s(q^- - 1)}\delta^{-\frac{1}{2}} = C\delta^{\frac{2\beta_1 s(q^- - 1) - 1}{2}}$$

e

$$\frac{h^{2s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \leq C\delta^{2\beta_2 s(q^- - 1)}\delta^{-\frac{3}{2}} = C\delta^{\frac{4\beta_2 s(q^- - 1) - 3}{2}}.$$

Utiliza-se o facto dos denominadores serem iguais e comparam-se apenas os numeradores. Através da restrição de $\beta_i > 0$, tem-se

$$2\beta_1 s(q^- - 1) - 1 > 0 \Leftrightarrow \beta_1 > \frac{1}{2s(q^- - 1)}$$

e

$$4\beta_2 s(q^- - 1) - 3 > 0 \Leftrightarrow \beta_2 > \frac{3}{4s(q^- - 1)}.$$

Destaca-se que,

$$\frac{1}{2s(q^- - 1)} \leq \frac{3}{4s(q^- - 1)} \Leftrightarrow 1 \leq q^-.$$

Consequentemente, $\beta_1 > \frac{1}{2s(q^- - 1)}$ é a menor restrição. Portanto, a estimativa (2.226) torna-se

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + h^{s(q^- - 1)} + \frac{h^{s(q^- - 1)}}{\delta^{\frac{1}{2}}} \right)$$

e isto implica que (2.200) é satisfeita. Além disto, $h \leq C\delta^{\beta_1}$, com $\beta_1 > \frac{1}{2s(q^- - 1)}$, estabelece um critério para que exista a ordem de convergência do Teorema 2.33.

2.2.7 Ordem de convergência com $2 < p(x) < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$

A investigação da ordem de convergência em relação a h e em relação a δ é explicitada nesta subsecção para o caso em que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (2, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$. Adicionalmente, mostra-se o critério da existência da referida ordem.

Teorema 2.35. *Sob as hipóteses do Teorema 2.33 e considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 1$, tem-se*

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta + h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right), \quad (2.227)$$

$$\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{1}{2}}} + h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right), \quad (2.228)$$

$$\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right), \quad (2.229)$$

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{8(q^- + 1)}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{2(q^- + 4)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{8(q^- + 1)}}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{2(q^- + 4)}} \right), \quad (2.230)$$

onde $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$ é uma constante e a relação $h \leq C\delta^\beta$, com $\beta > \frac{q^- + 4}{4s((q^-)^2 - 1)}$, garante a existência da ordem de convergência.

Demonstração

O início desta demonstração segue de maneira idêntica à prova do Teorema 2.29 até a obtenção da estimativa (2.133).

Para $x \in \Omega$ fixo e $0 < \beta = \frac{2(2-q(x))}{3q(x)} < \frac{2}{3}$ tem-se pelo Teorema A.32

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\Omega} |\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|R_h v_k| + |V_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx \\ \leq \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right). \end{aligned} \quad (2.231)$$

Observa-se que

$$\frac{3}{4} < \frac{3q^-}{2(q^- + 1)} \leq \frac{3q(x)}{2(q(x) + 1)} \leq \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)} < 1. \quad (2.232)$$

Assim, através do Teorema A.26 vem que

$$\left(\frac{C_2}{2} \right)^{\frac{1}{r^*}} \rho_{\frac{3q(x)}{2(q(x)+1)}} \left(|\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} \right)^{\frac{1}{r^*}} \leq \int_{\Omega} |\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|R_h v_k| + |V_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx,$$

onde

$$r^* = \begin{cases} r^+ = \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)}, & \text{se } \left\| |\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|R_h v_k| + |V_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} \geq 1, \\ r^- = \frac{3q^-}{2(q^- + 1)}, & \text{se } \left\| |\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|R_h v_k| + |V_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right\|_{L^1(\Omega)} < 1, \end{cases}$$

e $C_2 > 0$ é uma constante tal que

$$C_2 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{\frac{3q(x)}{q(x)-2}} \left(\left(\tilde{V} \right)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right)^{1-r^-}, \rho_{\frac{3q(x)}{q(x)-2}} \left(\left(\tilde{V} \right)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} \right)^{1-r^+} \right\}},$$

onde considerou-se $\tilde{V} = |R_h v_k| + |V_k|$ por simplificação de notação.

Simplificando,

$$\left(\frac{C_2}{2} \right)^{\frac{1}{r^*}} \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \int_{\Omega} |\chi_k|^{\frac{4(q(x)+1)}{3q(x)}} (|R_h v_k| + |V_k|)^{\frac{(q(x)-2)(3q(x)+2)}{3q(x)}} dx \quad (2.233)$$

com

$$C_2 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{3q(x)+2} (|R_h v_k| + |V_k|)^{1-r^-}, \rho_{3q(x)+2} (|R_h v_k| + |V_k|)^{1-r^+} \right\}}.$$

De (2.233) e (2.231), tem-se

$$C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \left(|R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k - |V_k|^{q(x)-2} V_k, \chi_k \right). \quad (2.234)$$

Substituindo (2.234) em (2.133),

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + \left| \left(|v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k, \chi_k \right) \right|.$$

Através das desigualdades de Hölder e Young (Teoremas A.1 e A.30),

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C - \varepsilon_1) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C_{\varepsilon_1} \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}}.$$

Considerando $C - \varepsilon_1 > C_3$ com $C_3 \in \mathbb{R}^+$, vem que

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C \left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}}.$$

De (2.203), segue que

$$\left\| |v_k|^{q(x)-2} v_k - |R_h v_k|^{q(x)-2} R_h v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}} \leq C \left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \frac{C(u)}{\alpha} (\delta^2 + h^{2s}) + C \left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}}. \quad (2.235)$$

Analogamente à prova do Teorema 2.33, obtém-se

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}} \leq C \max \left\{ h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2-r^*}}, h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2-r^*}} \right\}.$$

Da definição de r^* obtém-se quatro possibilidades para os expoentes. Nomeadamente,

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}} \leq C \max \left\{ h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2-r^-}}, h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2-r^+}}, h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2-r^-}}, h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2-r^+}} \right\}. \quad (2.236)$$

De (2.232), tem-se

$$\frac{3}{4} < r^- = \frac{3q^-}{2(q^- + 1)} \leq r^+ = \frac{3q^+}{2(q^+ + 1)} < 1,$$

isto implica que

$$\frac{4}{5} < \frac{1}{2 - r^-} \leq \frac{1}{2 - r^+} < 1.$$

Além disto, usam-se os factos de $0 < h < 1$, $s > 1$ e obtém-se

$$\max \left\{ h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2 - r^-}}, h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2 - r^+}} \right\} = h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2 - r^-}}$$

e

$$\max \left\{ h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2 - r^-}}, h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2 - r^+}} \right\} = h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2 - r^-}}.$$

Substituindo em (2.236),

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}} \leq C \max \left\{ h^{\frac{2s(q^- - 1)}{2 - r^-}}, h^{\frac{2s(q^+ - 1)}{2 - r^-}} \right\}.$$

Desde que $1 < q^- \leq q^+ < 2$, então $0 < q^- - 1 \leq q^+ - 1 < 1$. Logo,

$$\left\| |\omega_k|^{q(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{2-r^*}} \leq Ch^{\frac{2s(q^- - 1)}{2 - r^-}} = Ch^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}. \quad (2.237)$$

Substituindo (2.237) em (2.235),

$$\begin{aligned} \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\delta \|\nabla\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} &\leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right). \end{aligned} \quad (2.238)$$

Consequentemente,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right).$$

Para $k = 1, \dots, n$ com $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta k \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right).$$

Desde que $\theta_0 = 0$, $\delta = \frac{T}{n}$ e $k \leq n$, segue que

$$\|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right). \quad (2.239)$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e o Teorema A.31, obtemos

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u_k - R_h u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Substituindo (2.239) e utilizando o Teorema A.29,

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

Verificam-se os termos dominantes e obtém-se a estimativa (2.227).

Retorna-se para a estimativa (2.238) e tem-se

$$\alpha \delta \|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

De (2.239),

$$\|\nabla \theta_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right). \quad (2.240)$$

De maneira análoga, utilizam-se a desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), os Teoremas A.31, A.29 e a estimativa (2.240) para obter

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

Investigam-se os termos dominantes e demonstra-se que (2.228) é satisfeita.

Novamente retorna-se à estimativa (2.238) e obtém-se

$$C \delta \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq \|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

Substituindo (2.239),

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r^*}} \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta} + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

Da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3) e do Teorema A.31, tem-se

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{r^*} + \delta^{2r^*} + \frac{h^{2sr^*}}{\delta^{r^*}} + \frac{h^{\frac{4sr^*((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta^{r^*}} + h^{2sr^*} + h^{\frac{4sr^*((q^-)^2-1)}{q^-+4}} \right).$$

Por hipótese $0 < h < 1$ e $0 < \delta < 1$. Além disto, $r^- \leq r^+$, então

$$\|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{r^-} + \delta^{2r^-} + \frac{h^{2sr^-}}{\delta^{r^-}} + \frac{h^{\frac{4sr^-(q^-)^2-1}{q^-+4}}}{\delta^{r^-}} + h^{2sr^-} + h^{\frac{4sr^-(q^-)^2-1}{q^-+4}} \right).$$

Da definição de r^- , vem que

$$\begin{aligned} & \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{q^-+1}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{q^-+1}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}}} + \frac{h^{\frac{6sq^-(q^-)-1}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}}} + h^{\frac{3sq^-}{q^-+1}} + h^{\frac{6sq^-(q^-)-1}{q^-+4}} \right). \end{aligned} \quad (2.241)$$

Através da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), dos Teoremas A.31, A.29 e de (2.241), segue que

$$\begin{aligned} & \|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{q^-+1}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{q^-+1}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}}} + \frac{h^{\frac{6sq^-(q^-)-1}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}}} + h^{2s} + h^{\frac{3sq^-}{q^-+1}} + h^{\frac{6sq^-(q^-)-1}{q^-+4}} \right). \end{aligned}$$

Verificam-se os termos dominantes e conclui-se (2.229).

Finalmente, de maneira análoga ao Teorema 2.29, tem-se

$$\|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left(\|\theta_{k-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\chi_k\|_{L^2(\Omega)} + C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right).$$

De (2.239) e (2.241), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right) \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \right. \\ &\quad \left. + h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right). \end{aligned} \quad (2.242)$$

Por outro lado, da desigualdade de Minkowski (Teorema A.3), dos Teoremas A.31, A.29 e de (2.242), vem que

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right) \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \right. \\ &\quad \left. + h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right). \end{aligned}$$

Conclui-se a prova com a análise dos termos dominantes e a validação da estimativa (2.230). ■

Seguidamente, investigam-se os termos dominantes do Teorema 2.35.

Observação 2.36. *Do Teorema 2.35, tem-se*

$$\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^2 + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right), \quad (2.243)$$

$$\|\nabla (u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta + \delta^2 + \frac{h^{2s}}{\delta} + \frac{h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right), \quad (2.244)$$

$$\begin{aligned} &\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{q^- + 1}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{q^- + 1}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}}} + h^{2s} + h^{\frac{3sq^-}{q^- + 1}} + h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right), \end{aligned} \quad (2.245)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^2 + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\ &+ \frac{C}{\delta} \left(\delta + h^s + h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \right) \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \right. \\ &\quad \left. + h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right), \end{aligned} \quad (2.246)$$

onde $0 < h < 1$, $0 < \delta < 1$, $1 < s \leq r + 1$, $r \geq 1$ e $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$.

Inicialmente, para a estimativa (2.243) observa-se que,

$$\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4} \leq 2s \Leftrightarrow \left(q^- + \frac{3}{2} \right) (q^- - 2) \leq 0 \Leftrightarrow q^- \in \left[-\frac{3}{2}, 2 \right].$$

Por hipótese $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, 2)$ e $0 < h < 1$, assim

$$h^{2s} \leq h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}. \quad (2.247)$$

Desta maneira, a estimativa (2.243) resulta em (2.227).

Para a estimativa (2.244), devem-se comparar os termos $h^{2(s-1)}$, h^{2s} e $h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}$.
Através de (2.247) faz-se necessário realizar a comparação apenas de $h^{2(s-1)}$ e $h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}$.
Nota-se que,

$$\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4} \leq 2(s-1) \Leftrightarrow 2s(q^-)^2 + (1-s)q^- - 6s + 4 \leq 0,$$

e isto implica em

$$\frac{s-1 - \sqrt{49s^2 - 34s + 1}}{4s} \leq q^- \leq \frac{s-1 + \sqrt{49s^2 - 34s + 1}}{4s}.$$

Observa-se que,

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-1 + \sqrt{49s^2 - 34s + 1}}{4s} = \frac{1 + \sqrt{129}}{8} \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-1 + \sqrt{49s^2 - 34s + 1}}{4s} = 2.$$

Desta maneira,

$$h^{2(s-1)} \leq h^{\frac{4s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}. \quad (2.248)$$

Além disto, de (2.247) vem que

$$\frac{h^{2s}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{4s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta}. \quad (2.249)$$

Portanto, utilizando (2.152), (2.248) e (2.249) transforma-se a estimativa (2.244) em (2.228).

Nesta etapa, investigam-se os termos da estimativa (2.245). Para as potências dependentes apenas de δ , segue que

$$\frac{3q^-}{2(q^-+1)} \leq \frac{3q^-}{q^-+1},$$

logo,

$$\delta^{\frac{3q^-}{q^-+1}} \leq \delta^{\frac{3q^-}{2(q^-+1)}}. \quad (2.250)$$

Para as potências de base h , nomeadamente, h^{2s} , $h^{\frac{3sq^-}{q^-+1}}$ e $h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^-+4}}$, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4} \leq 2s \quad \Leftrightarrow 3(q^-)^2 - 4q^- - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq q^- \leq 2, \\ \frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4} \leq \frac{3sq^-}{q^- + 1} \quad \Leftrightarrow 2(q^-)^2 - q^- - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq q^- \leq 2, \end{array} \right.$$

assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{2s} \leq h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}, \\ h^{\frac{3sq^-}{q^- + 1}} \leq h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}. \end{array} \right. \quad (2.251)$$

Consequentemente,

$$\frac{h^{\frac{3sq^-}{q^- + 1}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}}} \leq \frac{h^{\frac{6sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}}}. \quad (2.252)$$

Portanto, utilizam-se (2.250), (2.251) e (2.252) e demonstra-se que (2.245) implica em (2.229).

Para a estimativa (2.246), tem-se

$$\begin{aligned}
\|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} + h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}} + h^{2(s-1)} + h^{2s} + h^{2s(q^- - 1)} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(5q^- + 2)}{2(q^- + 1)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(4(q^-)^3 + 7(q^-)^2 + 8q^- - 4)}{2(q^- + 1)(q^- + 4)}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(3(q^-)^2 - 2q^- + 4)}{q^- + 4}}}{\delta} \right) \\
&+ C \left(\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{s(5q^- + 2)}{2(q^- + 1)}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{s(4(q^-)^3 + 7(q^-)^2 + 8q^- - 4)}{2(q^- + 1)(q^- + 4)}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{s(3(q^-)^2 - 2q^- + 4)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} \right) \\
&+ C \left(h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{2 - q^-}{2(q^- + 1)}}} + \frac{h^s}{\delta^{\frac{2 - q^-}{2(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \right) \\
&+ C \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} + \delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} + \delta^2 \right). \quad (2.253)
\end{aligned}$$

Para os termos $\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}$, $\delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}}$ e δ^2 tem-se

$$\begin{cases} \frac{3q^-}{4(q^- + 1)} \leq \frac{3q^-}{2(q^- + 1)} & \Leftrightarrow q^- \in (-\infty, 1) \cup [0, \infty), \\ \frac{3q^-}{4(q^- + 1)} \leq 2 & \Leftrightarrow q^- \in \left(-\infty, -\frac{8}{5}\right] \cup (-1, \infty), \end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} \delta^{\frac{3q^-}{2(q^- + 1)}} \leq \delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}, \\ \delta^2 \leq \delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}. \end{cases} \quad (2.254)$$

A seguir, investigam-se os termos $h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}$, $h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}$, $h^{2(s-1)}$, h^{2s} e $h^{2s(q^- - 1)}$. De (2.217) e (2.218), faz-se necessário comparar apenas $h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}$, $h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}}$ e $h^{2s(q^- - 1)}$.

Nota-se que,

$$\begin{cases} \frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4} \leq \frac{3sq^-}{2(q^- + 1)} & \Leftrightarrow q^- \in (-\infty, -4) \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup [0, 2], \\ \frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4} \leq 2s(q^- - 1) & \Leftrightarrow q^- \in (-\infty, -4) \cup [1, 8], \end{cases}$$

e isto implica que,

$$\begin{cases} h^{\frac{3sq^-}{2(q^- + 1)}} \leq h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}, \\ h^{2s(q^- - 1)} \leq h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}. \end{cases} \quad (2.255)$$

Para as frações com denominadores δ , segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4} \leq \frac{s(5q^- + 2)}{2(q^- + 1)} \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_1, \\ \frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4} \leq \frac{s(4(q^-)^3 + 7(q^-)^2 + 8q^- - 4)}{2(q^- + 1)(q^- + 4)} \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_2, \\ \frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4} \leq \frac{s(3(q^-)^2 - 2q^- + 4)}{q^- + 4} \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_3, \end{array} \right.$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_1 = (-\infty, -4) \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left[-\frac{2}{5}, 2\right], \\ \mathbb{S}_2 = (-\infty, -4) \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup [0, 2], \\ \mathbb{S}_3 = (-\infty, -4) \cup \left[-\frac{3}{2}, 2\right]. \end{array} \right.$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h \frac{s(5q^-+2)}{2(q^-+1)}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\delta}, \\ \frac{h \frac{s(4(q^-)^3+7(q^-)^2+8q^- -4)}{2(q^-+1)(q^-+4)}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\delta}, \\ \frac{h \frac{s(3(q^-)^2-2q^- +4)}{q^-+4}}{\delta} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\delta}. \end{array} \right. \quad (2.256)$$

Analogamente, vem que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h \frac{s(5q^-+2)}{2(q^-+1)}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}}, \\ \frac{h \frac{s(4(q^-)^3+7(q^-)^2+8q^- -4)}{2(q^-+1)(q^-+4)}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}}, \\ \frac{h \frac{s(3(q^-)^2-2q^- +4)}{q^-+4}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}} \leq \frac{h \frac{s(5(q^-)^2-3q^- -2)}{q^-+4}}{\frac{7q^-+4}{\delta^{4(q^-+1)}}}. \end{array} \right. \quad (2.257)$$

Para os termos $h \frac{\frac{2s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}{\delta^{4(q^-+1)}}$ e $\frac{h^s}{\delta^{4(q^-+1)}}$, observa-se que

$$\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4} \leq s \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_3,$$

desta maneira,

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{q^-+4}{4(q^-+1)}}} \leq \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{q^-+4}{4(q^-+1)}}}. \quad (2.258)$$

De maneira análoga, segue que

$$\frac{h^s}{\delta^{\frac{2-q^-}{2(q^-+1)}}} \leq \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2-1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{2-q^-}{2(q^-+1)}}}. \quad (2.259)$$

Para os termos $\frac{3sq^-(q^- - 1)}{\delta^{\frac{q^-+4}{4(q^-+1)}}}$ e $\frac{3sq^-}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}}$, utiliza-se (2.255) e mostra-se que

$$\frac{h^{\frac{3sq^-}{2(q^-+1)}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}} \leq \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}}. \quad (2.260)$$

Substituindo (2.254), (2.255), (2.256), (2.257), (2.258), (2.259) e (2.260) em (2.253),

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^-+4}} \right) \\ &+ C \left(\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^-+4}}}{\delta} + \frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{7q^-+4}{4(q^-+1)}}} + \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{q^-+4}{4(q^-+1)}}} + \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{2-q^-}{2(q^-+1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}} \right). \end{aligned}$$

Para os termos que possuem os numeradores iguais, comparam-se os denominadores. Nomeadamente,

$$1 \leq \frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)} \Leftrightarrow q^- \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty) \Rightarrow \frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^-+4}}}{\delta} \leq \frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{7q^-+4}{4(q^-+1)}}}$$

e

$$\frac{2 - q^-}{2(q^- + 1)} \leq \frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)} \Leftrightarrow q^- \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty) \Rightarrow \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{2-q^-}{2(q^-+1)}}} \leq \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{q^-+4}{4(q^-+1)}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\nabla (v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \right) \\ &+ C \left(\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \right). \end{aligned} \quad (2.261)$$

Para finalizar, deve-se comparar $\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}}$, $\frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)}}}$ e $\frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}}$. Para isto, suponha que $h \leq C\delta^{\beta_i}$ onde $\beta_i > 0$ e $i = 1, 2, 3$. Desta forma, tem-se

$$\frac{h^{\frac{s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} \leq C\delta^{\frac{\beta_1 s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)}{q^- + 4}} \delta^{-\frac{7q^- + 4}{4(q^- + 1)}} = C\delta^{\frac{4\beta_1 s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)(q^- + 1) - (7q^- + 4)(q^- + 4)}{4(q^- + 4)(q^- + 1)}},$$

$$\frac{h^{\frac{2s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)}}} \leq C\delta^{\frac{2\beta_2 s((q^-)^2 - 1)}{q^- + 4}} \delta^{-\frac{q^- + 4}{4(q^- + 1)}} = C\delta^{\frac{8\beta_2 s((q^-)^2 - 1)(q^- + 1) - (q^- + 4)^2}{4(q^- + 4)(q^- + 1)}}$$

e

$$\frac{h^{\frac{3sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}}} \leq C\delta^{\frac{3\beta_3 sq^-(q^- - 1)}{q^- + 4}} \delta^{-\frac{3q^-}{4(q^- + 1)}} = C\delta^{\frac{12\beta_3 sq^-(q^- - 1)(q^- + 1) - 3q^-(q^- + 4)}{4(q^- + 4)(q^- + 1)}}.$$

Observa-se que os denominadores são iguais, então comparam-se apenas os numeradores. Através da restrição de $\beta_i > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \beta_1 &> \frac{(7q^- + 4)(q^- + 4)}{4s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)(q^- + 1)}, \\ \beta_2 &> \frac{(q^- + 4)^2}{8s((q^-)^2 - 1)(q^- + 1)}, \\ \beta_3 &> \frac{q^- + 4}{4s(q^- - 1)(q^- + 1)}. \end{aligned}$$

Para β_3 e β_1 , nota-se que

$$\frac{q^- + 4}{4s(q^- - 1)(q^- + 1)} \leq \frac{(7q^- + 4)(q^- + 4)}{4s(5(q^-)^2 - 3q^- - 2)(q^- + 1)} \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_4,$$

onde $\mathbb{S}_4 = [-4, -1) \cup (-1, -\frac{2}{5}) \cup (1, \infty)$.

Por outro lado, β_3 e β_2 , tem-se

$$\frac{q^- + 4}{4s(q^- - 1)(q^- + 1)} \leq \frac{(q^- + 4)^2}{8s((q^-)^2 - 1)(q^- + 1)} \Leftrightarrow q^- \in \mathbb{S}_5,$$

com $\mathbb{S}_5 = (-\infty, -4] \cup (1, 2]$.

Consequentemente, $\beta_3 > \frac{q^-+4}{4s((q^-)^2-1)}$ é a menor restrição. Desta maneira, a estimativa (2.261) passa a ser

$$\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}} + h^{\frac{3sq^-(q^- -1)}{q^-+4}} + \frac{h^{\frac{3sq^-(q^- -1)}{q^-+4}}}{\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}} \right).$$

Portanto, (2.230) é verificada. Adicionalmente, $h \leq C\delta^{\beta_3}$, com $\beta_3 > \frac{q^-+4}{4s((q^-)^2-1)}$, determina um critério para que exista a ordem de convergência do Teorema 2.35.

No que se segue, apresentam-se as tabelas com as ordens de convergência demonstradas nos Teoremas 2.29, 2.31, 2.33 e 2.35.

A Tabela 2.2 explicita a ordem de convergência, em relação a δ , da solução discreta para a solução fraca.

Tabela 2.2: Ordem de convergência, em relação a δ , da solução discreta para a solução fraca.

| $p(x)$ | $1 < p(x) \leq 2$ | | $2 < p(x) < \infty$ | |
|---------------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ | $d = 1$ | $d > 1$ | $d = 1$ | $d > 1$ |
| $\ u_k - U_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta)$ | $O(\delta)$ | $O(\delta)$ | $O(\delta)$ |
| $\ \nabla(u_k - U_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ |
| $\ v_k - V_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ | $O(\delta^{\frac{3q^-}{4(q^-+1)}}$ |
| $\ \nabla(v_k - V_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(\delta^{\frac{1}{2q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{2q^+}})$ | $O(\delta^{\frac{1}{4}})$ | $O(\delta^{\frac{3q^-}{8(q^-+1)}}$ |

A Tabela 2.3 mostra a ordem de convergência, em relação a h , da solução discreta para a solução fraca.

Tabela 2.3: Ordem de convergência, em relação a h , da solução discreta para a solução fraca.

| $p(x)$ | $1 < p(x) \leq 2$ | | $2 < p(x) < \infty$ | |
|---------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|
| $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ | $d = 1$ | $d > 1$ | $d = 1$ | $d > 1$ |
| $\ u_k - U_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}$ | $O(h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}$ | $O(h^{s(q^- -1)}}$ | $O(h^{\frac{2s((q^-)^2-1)}{q^-+4}})$ |
| $\ \nabla(u_k - U_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(h^{s-1}, h^{\frac{sq^+}{2(q^+-1)}}$ | $O(h^{\frac{sq^+}{4(q^+-1)}}$ | $O(h^{s(q^- -1)}}$ | $O(h^{\frac{2s((q^-)^2-1)}{q^-+4}})$ |
| $\ v_k - V_k\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(h^{\frac{s}{q^+-1}})$ | $O(h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}$ | $O(h^{s(q^- -1)}}$ | $O(h^{\frac{3sq^-(q^- -1)}{q^-+4}})$ |
| $\ \nabla(v_k - V_k)\ _{L^2(\Omega)}$ | $O(h^{\frac{s}{2(q^+-1)}}$ | $O(h^{\frac{s}{4(q^+-1)}}$ | $O(h^{\frac{s(q^- -1)}{2}})$ | $O(h^{\frac{3sq^-(q^- -1)}{2(q^-+4)}}$ |

Apresenta-se a seguir uma condição necessária em h e δ para que exista a ordem de convergência. Neste caso, considera-se $h \leq C\delta^\beta$, com $\beta > \varepsilon$ e os valores de ε são dados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Relação entre h e δ .

| $p(x)$ | $1 < p(x) \leq 2$ | | $2 < p(x) < \infty$ | |
|-------------------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ | $d = 1$ | $d > 1$ | $d = 1$ | $d > 1$ |
| ε | $\frac{q^+ - 1}{sq^+}$ | $\frac{2(q^+ - 1)}{sq^+}$ | $\frac{1}{2s(q^- - 1)}$ | $\frac{q^- + 4}{4s((q^-)^2 - 1)}$ |

2.2.8 Discretização por bases de Lagrange

Nesta subsecção, transforma-se o Problema (2.92) num sistema de equações algébricas. Para tanto, suponha que o espaço de elementos finitos S_h seja formado por uma base de Lagrange. Nomeadamente,

$$S_h = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_e} \rangle.$$

Consequentemente, representam-se

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) \varphi_i, & V_k &= \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i, \\ \Psi &= \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i, & \Phi &= \sum_{i=1}^{N_e} \eta_i \varphi_i, \end{aligned} \quad (2.262)$$

onde $\tilde{u}_i(t_k)$ e $\tilde{v}_i(t_k)$, com $i = 1, \dots, N_e$, são os coeficientes constantes a serem determinados e as funções ψ_i e η_i são arbitrárias.

Substituindo (2.262) no Problema (2.92), tem-se

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i \right) + \delta \left(\nabla \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i, \nabla \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i \right) \\ + \alpha \delta \left(\nabla \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) \varphi_i, \nabla \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i \right) &= \left(\sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_{k-1}) \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i \right) + \delta \left(f(t_k), \sum_{i=1}^{N_e} \psi_i \varphi_i \right) \end{aligned}$$

e

$$\left(\nabla \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) \varphi_i, \nabla \sum_{i=1}^{N_e} \eta_i \varphi_i \right) = \left(\left| \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i \right|^{q(x)-2} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_e} \eta_i \varphi_i \right).$$

Usa-se o facto de $\tilde{u}_i(t_k)$ e $\tilde{v}_i(t_k)$ serem os coeficientes constantes e, além disto, da arbitrariedade das funções ψ_i e η_i , escolhem-se sem perda de generalidade $\psi_i = \eta_i = \varphi_j$

com $j = 1, \dots, N_e$. Assim,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) (\varphi_i, \varphi_j) + \delta \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) \\ & + \alpha \delta \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_{k-1}) (\varphi_i, \varphi_j) + \delta \sum_{j=1}^{N_e} (f(t_k), \varphi_j) \end{aligned} \quad (2.263)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{u}_i(t_k) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N_e} \left(\left| \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i \right|^{q(x)-2} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i, \varphi_j \right). \quad (2.264)$$

Nota-se que,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_e} \left(\left| \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i \right|^{q(x)-2} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i, \varphi_j \right) \\ & = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i \right|^{q(x)-2} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \varphi_i \varphi_j dx \\ & = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \tilde{v}_i(t_k) \int_{\Omega} \left| \sum_{l=1}^{N_e} \tilde{v}_l(t_k) \varphi_l \right|^{q(x)-2} \varphi_i \varphi_j dx. \end{aligned}$$

Sejam $\vec{u}_k, \vec{v}_k, \vec{f}_k$ os vetores com elementos em $\mathbb{R}^{d \times 1}$ e denotados por $\tilde{u}_i(t_k), \tilde{v}_i(t_k)$ e $f_i(t_k) = (f(t_k), \varphi_i)$, respetivamente. Denotam-se por $\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ as matrizes com elementos em $\mathbb{R}^{d \times d}$ definidos por

$$\begin{aligned} m_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j), \\ a_{ij} &= (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \\ b_{ij} &= \int_{\Omega} \left| \sum_{l=1}^{N_e} \tilde{v}_l(t_k) \varphi_l \right|^{q(x)-2} \varphi_i \varphi_j dx, \end{aligned}$$

respetivamente. Assim, obtém-se o sistema de equações algébricas associado com (2.263) e (2.264),

$$\begin{cases} \mathcal{M} \vec{u}_k + \delta \mathcal{A} \vec{v}_k + \alpha \delta \mathcal{A} \vec{u}_k = \mathcal{M} \vec{u}_{k-1} + \delta \vec{f}_k, \\ \mathcal{A} \vec{u}_k = \mathcal{B}(\vec{v}_k) \vec{v}_k. \end{cases} \quad (2.265)$$

Destaca-se que a existência, a unicidade e a regularidade das soluções \vec{u}_k e \vec{v}_k para o Problema (2.265) são garantidas pelos Teoremas 2.23, 2.24, 2.25 e 2.26. Além disto,

observa-se que as matrizes \mathcal{M} e \mathcal{A} são construídas através do produto interno de funções que formam o espaço de elementos finitos S_h , isto implica que para $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $r = 1$, ambas as matrizes \mathcal{M} e \mathcal{A} são tridiagonais, simétricas e definidas positivas. Portanto, o Problema (2.265) constitui um sistema não linear.

Capítulo 3

Resultados numéricos

Neste capítulo, apresentam-se os resultados da implementação da teoria utilizando o software MATLAB. O código desenvolvido é validado e realiza-se uma análise detalhada da ordem de convergência tanto no espaço quanto no tempo. Nos Exemplos 1 e 2, considera-se o Problema (2.7) num domínio unidimensional. No Exemplo 3, investiga-se o mesmo problema num domínio bidimensional.

3.1 Exemplo 1 com $1.4 \leq p(x) < 1.93$

Neste exemplo, investiga-se o Problema (2.7) num domínio unidimensional $\Omega = (0, 1)$, com o intervalo temporal $0 < t \leq 1$, $\alpha = 1$ e a função de expoente variável

$$p(x) = \frac{20x + 14}{10x^2 + 10}.$$

Deste modo, $p^- = 1.4$ e $p^+ = \frac{7+\sqrt{149}}{10} < 1.93$. Além disso, a solução exata $u = u(x, t)$ é definida por

$$u = \frac{62500000x (te^{-t})^{10}}{186279093} (30045015x^{31} - 320480160x^{30} + 1541620080x^{29} - 4404628800x^{28} + 8279070800x^{27} - 10699106880x^{26} + 9629196192x^{25} - 5960930976x^{24} + 2429727300x^{23} - 589024800x^{22} + 64512240x^{21} - 11).$$

Verifica-se que as condições de fronteira para a função u são satisfeitas, nomeadamente,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por outro lado, para $t = 0$, a condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Observe-se que

$$u_{xx} = (te^{-t})^{10} (10x^3 - 10x^2)^{10} = (te^{-t})^{10} [(-1)(-10x^3 + 10x^2)]^{10},$$

ou seja,

$$u_{xx} = [te^{-t} (10x^2 - 10x^3)]^{10}.$$

A seguir, apresentam-se os gráficos de u e de u_{xx} nas Figuras 3.1(a) e 3.1(b), respetivamente.

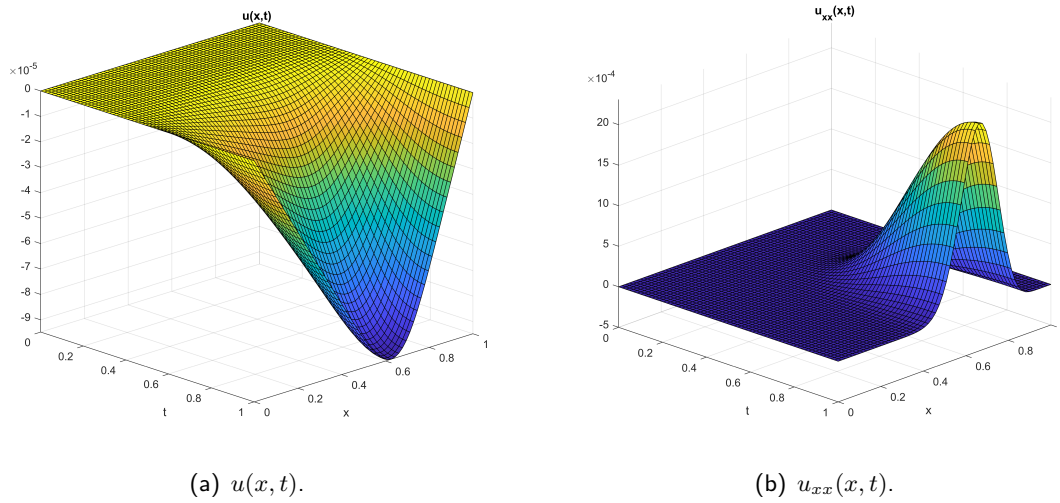


Figura 3.1: Funções $u(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ do Exemplo 1.

Tem-se que $u_{xx} \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ e $\forall t \in [0, T]$. Agora, através da mudança de variável (2.6) define-se a função v por

$$v = -(u_{xx})^{p(x)-1} = -[te^{-t} (10x^2 - 10x^3)]^{\frac{-10x^2+20x+4}{x^2+1}},$$

cujos gráficos estão explicitados na Figura 3.2(a). Deste modo, as condições de fronteira para a função v são satisfeitas,

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Determina-se agora a função f utilizando (2.7), resultando em $f = u_t - v_{xx} - u_{xx}$. O gráfico de f é mostrado na Figura 3.2(b). Salienta-se que as funções f , u , v e p estão em conformidade com as hipóteses do Teorema 2.29.

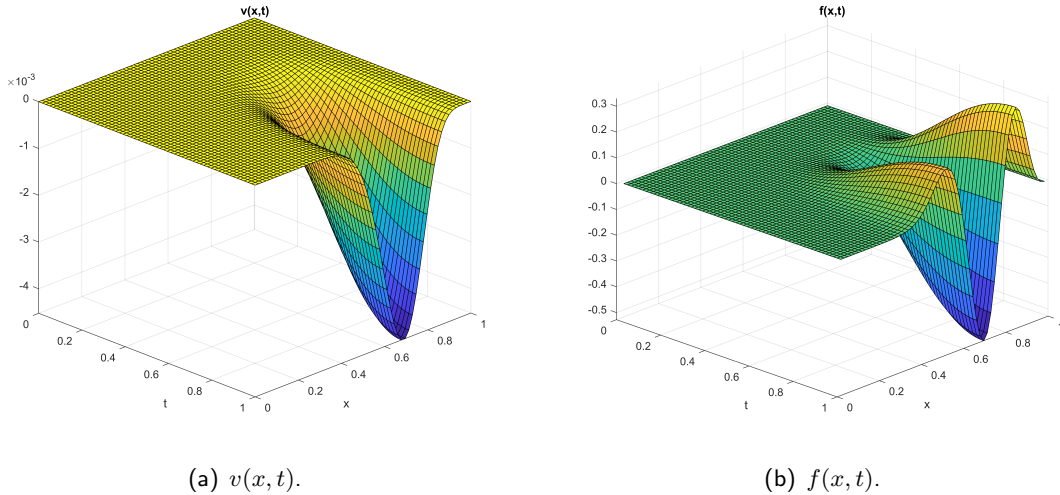


Figura 3.2: Funções $v(x, t)$ e $f(x, t)$ do Exemplo 1.

Aplica-se o método dos elementos finitos ao exemplo mencionado utilizando uma malha uniforme e um espaço de elementos finitos formado por funções de base linear. Nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b) comparam-se as soluções aproximadas com as soluções exatas utilizando $N_e = 25$ elementos finitos, $h = \frac{1}{N_e}$, o tempo $t = 1$, $\delta = \frac{1}{N_t}$ e $N_t = 1000$. Observa-se que, mesmo com um número reduzido de elementos finitos, as aproximações das soluções são bastante satisfatórias.

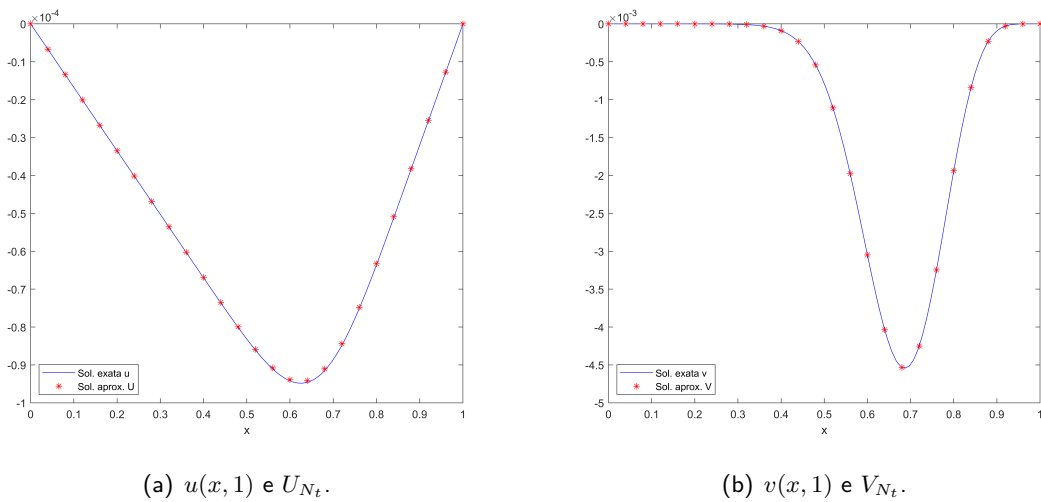


Figura 3.3: Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 1.

Para investigar a ordem de convergência numérica em relação a h , realizam-se simulações computacionais com $\delta = \frac{1}{1000}$. Variam-se o grau das funções de base para $r = 1, 2, 3, 4$ e o número de elementos finitos para $N_e = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32, 42, 56, 74, 100, 139, 178, 247, 316$. Além disso, calculam-se a norma do erro e do gradiente do

erro em $L^2(\Omega)$, definidas por

$$\|e(U_k)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_e} \int_{T_i} |u_k - U_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

$$\|e(\nabla U_k)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_e} \int_{T_i} |\nabla u_k - \nabla U_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

para $k = 0, 1, \dots, n$.

Traçando o gráfico $\log(h)$ versus $\log(\|e\|_2)$, a inclinação da reta obtida indica a ordem de convergência numérica de h . Analiticamente, a ordem de convergência numérica é determinada por

$$\text{ordem} = \frac{\log(\|e(U_{k,h_1})\|_2) - \log(\|e(U_{k,h_2})\|_2)}{\log(h_1) - \log(h_2)},$$

onde $k = 0, 1, \dots, n$.

As Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam os resultados da ordem de convergência numérica em relação a h e os erros na norma $L^2(\Omega)$.

Tabela 3.1: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 1.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/9 | 2.38e-06 | 1.82 | 2.06e-04 | 2.12 | 2.94e-05 | 1.06 | 5.95e-03 | 1.11 |
| 1/10 | 1.96e-06 | 1.86 | 1.64e-04 | 2.14 | 2.64e-05 | 1.02 | 5.29e-03 | 1.12 |
| 1/12 | 1.38e-06 | 1.89 | 1.16e-04 | 1.90 | 2.19e-05 | 1.02 | 4.47e-03 | 0.92 |
| 1/14 | 1.03e-06 | 1.92 | 8.64e-05 | 1.92 | 1.87e-05 | 1.02 | 3.86e-03 | 0.94 |
| 1/16 | 7.95e-07 | 1.94 | 6.66e-05 | 1.94 | 1.63e-05 | 1.02 | 3.40e-03 | 0.96 |
| 1/18 | 6.32e-07 | 1.95 | 5.29e-05 | 1.95 | 1.45e-05 | 1.01 | 3.03e-03 | 0.97 |
| 1/21 | 4.67e-07 | 1.96 | 3.91e-05 | 1.97 | 1.24e-05 | 1.01 | 2.61e-03 | 0.97 |
| 1/25 | 3.32e-07 | 1.97 | 2.77e-05 | 1.97 | 1.04e-05 | 1.01 | 2.20e-03 | 0.98 |
| 1/32 | 2.04e-07 | 1.97 | 1.70e-05 | 1.98 | 8.12e-06 | 1.01 | 1.73e-03 | 0.99 |
| 1/42 | 1.19e-07 | 1.98 | 9.88e-06 | 1.99 | 6.18e-06 | 1.00 | 1.32e-03 | 0.99 |
| 1/56 | 6.75e-08 | 1.97 | 5.57e-06 | 1.99 | 4.63e-06 | 1.00 | 9.89e-04 | 1.00 |
| 1/74 | 3.91e-08 | 1.96 | 3.19e-06 | 2.00 | 3.50e-06 | 1.00 | 7.49e-04 | 1.00 |
| 1/100 | 2.19e-08 | 1.93 | 1.75e-06 | 2.00 | 2.59e-06 | 1.00 | 5.54e-04 | 1.00 |
| 1/139 | 1.18e-08 | 1.87 | 9.08e-07 | 1.99 | 1.86e-06 | 1.00 | 3.99e-04 | 1.00 |
| 1/178 | 7.62e-09 | 1.78 | 5.55e-07 | 1.99 | 1.46e-06 | 1.00 | 3.12e-04 | 1.00 |
| 1/247 | 4.48e-09 | 1.62 | 2.90e-07 | 1.98 | 1.05e-06 | 1.00 | 2.25e-04 | 1.00 |
| 1/316 | 3.17e-09 | 1.40 | 1.79e-07 | 1.95 | 8.20e-07 | 1.00 | 1.76e-04 | 1.00 |

Tabela 3.2: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 1.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/9 | 7.27e-08 | 2.61 | 2.19e-05 | 1.96 | 3.42e-06 | 1.37 | 1.30e-03 | 1.05 |
| 1/10 | 5.17e-08 | 3.23 | 1.80e-05 | 1.90 | 2.78e-06 | 1.99 | 1.17e-03 | 0.98 |
| 1/12 | 2.87e-08 | 3.23 | 1.06e-05 | 2.87 | 1.93e-06 | 2.00 | 8.30e-04 | 1.88 |
| 1/14 | 1.77e-08 | 3.13 | 6.77e-06 | 2.94 | 1.42e-06 | 1.97 | 6.15e-04 | 1.94 |
| 1/16 | 1.17e-08 | 3.08 | 4.57e-06 | 2.95 | 1.09e-06 | 1.98 | 4.74e-04 | 1.95 |
| 1/18 | 8.23e-09 | 3.02 | 3.22e-06 | 2.96 | 8.66e-07 | 1.98 | 3.76e-04 | 1.96 |
| 1/21 | 5.24e-09 | 2.92 | 2.04e-06 | 2.97 | 6.38e-07 | 1.98 | 2.78e-04 | 1.97 |
| 1/25 | 3.27e-09 | 2.71 | 1.21e-06 | 2.97 | 4.51e-07 | 1.99 | 1.97e-04 | 1.98 |
| 1/32 | 1.92e-09 | 2.16 | 5.82e-07 | 2.98 | 2.76e-07 | 1.99 | 1.21e-04 | 1.98 |
| 1/42 | 1.41e-09 | 1.14 | 2.59e-07 | 2.97 | 1.60e-07 | 1.99 | 7.01e-05 | 1.99 |
| 1/56 | 1.27e-09 | 0.35 | 1.13e-07 | 2.90 | 9.03e-08 | 1.99 | 3.95e-05 | 1.99 |
| 1/74 | 1.24e-09 | 0.08 | 5.55e-08 | 2.54 | 5.18e-08 | 1.99 | 2.26e-05 | 2.00 |
| 1/100 | 1.24e-09 | 0.02 | 3.49e-08 | 1.54 | 2.86e-08 | 1.98 | 1.24e-05 | 2.00 |

Tabela 3.3: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 1.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/9 | 5.48e-09 | 5.51 | 3.75e-06 | 4.34 | 4.33e-07 | 4.53 | 3.18e-04 | 3.33 |
| 1/10 | 3.77e-09 | 3.55 | 2.13e-06 | 5.38 | 3.24e-07 | 2.76 | 2.02e-04 | 4.33 |
| 1/12 | 2.18e-09 | 2.99 | 1.03e-06 | 3.97 | 1.97e-07 | 2.72 | 1.17e-04 | 2.97 |
| 1/14 | 1.57e-09 | 2.13 | 5.67e-07 | 3.88 | 1.25e-07 | 2.98 | 7.52e-05 | 2.88 |
| 1/16 | 1.36e-09 | 1.08 | 3.37e-07 | 3.89 | 8.39e-08 | 2.96 | 5.10e-05 | 2.91 |
| 1/18 | 1.29e-09 | 0.48 | 2.13e-07 | 3.88 | 5.92e-08 | 2.96 | 3.61e-05 | 2.93 |
| 1/21 | 1.25e-09 | 0.19 | 1.19e-07 | 3.81 | 3.75e-08 | 2.96 | 2.29e-05 | 2.95 |
| 1/25 | 1.24e-09 | 0.05 | 6.45e-08 | 3.49 | 2.25e-08 | 2.93 | 1.36e-05 | 2.97 |
| 1/32 | 1.23e-09 | 0.01 | 3.63e-08 | 2.33 | 1.13e-08 | 2.79 | 6.53e-06 | 2.98 |
| 1/42 | 1.23e-09 | 0.00 | 3.01e-08 | 0.69 | 6.15e-09 | 2.25 | 2.90e-06 | 2.99 |
| 1/56 | 1.23e-09 | 0.00 | 2.93e-08 | 0.09 | 4.42e-09 | 1.15 | 1.23e-06 | 2.99 |

Tabela 3.4: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 1.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.21e-06 | — | 2.91e-04 | — | 1.51e-05 | — | 6.81e-03 | — |
| 1/3 | 3.53e-08 | 8.72 | 3.36e-05 | 5.33 | 1.38e-06 | 5.90 | 1.36e-03 | 3.97 |
| 1/4 | 2.97e-08 | 0.61 | 2.13e-05 | 1.59 | 1.29e-06 | 0.24 | 1.03e-03 | 0.98 |
| 1/5 | 7.18e-09 | 6.36 | 5.72e-06 | 5.89 | 4.34e-07 | 4.88 | 3.53e-04 | 4.80 |
| 1/6 | 5.60e-09 | 1.36 | 3.12e-06 | 3.31 | 3.85e-07 | 0.65 | 2.32e-04 | 2.31 |
| 1/7 | 2.08e-09 | 6.44 | 1.63e-06 | 4.20 | 1.33e-07 | 6.91 | 1.41e-04 | 3.20 |
| 1/8 | 1.38e-09 | 3.08 | 4.03e-07 | 10.49 | 5.91e-08 | 6.06 | 4.06e-05 | 9.33 |
| 1/9 | 1.37e-09 | 0.02 | 2.67e-07 | 3.49 | 6.62e-08 | -0.95 | 3.00e-05 | 2.58 |
| 1/10 | 1.28e-09 | 0.64 | 2.44e-07 | 0.85 | 4.31e-08 | 4.07 | 3.01e-05 | -0.02 |
| 1/12 | 1.24e-09 | 0.18 | 1.07e-07 | 4.50 | 1.93e-08 | 4.41 | 1.54e-05 | 3.68 |

Observa-se que, na Tabela 3.2, quando $N_e \geq 42$ a ordem de convergência numérica em relação a h para a função u está a diminuir devido à sobreposição de erros computacionais e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$. Esta análise é similar para v quando $N_e \geq 100$. Na Tabela 3.3, isto acontece quando $N_e \geq 16, 32, 56$ para, respetivamente, u, v e ∇u . Na Tabela 3.4, nota-se isto quando $N_e \geq 9, 10$ para, respetivamente, u e v .

Nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b) são apresentados os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a h para as funções u e v , respetivamente. Observa-se que, os referidos gráficos e as tabelas correspondentes estão em conformidade com os resultados do Teorema 2.29, o que implica que as simulações computacionais são consistentes com a investigação analítica. Além disso, devido à regularidade das soluções, tem-se que, para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica é aproximadamente ótima $O(h^{r+1})$ para polinómios de grau r , onde $r \geq 1$.

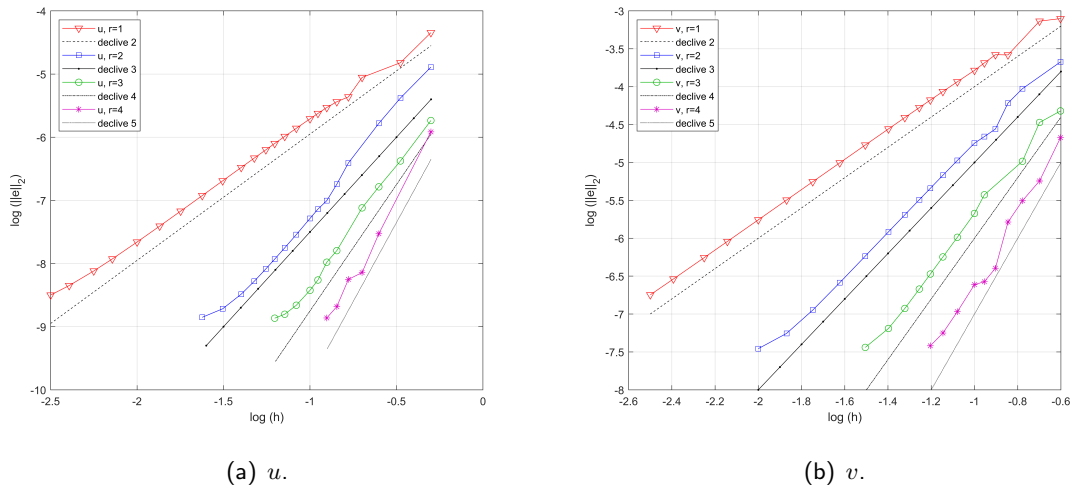


Figura 3.4: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 1.

Abaixo, apresentam-se as Figuras 3.5(a) e 3.5(b) com os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a h para as funções ∇u e ∇v , respetivamente. Destaca-se que, para $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica é aproximadamente ótima $O(h^r)$.

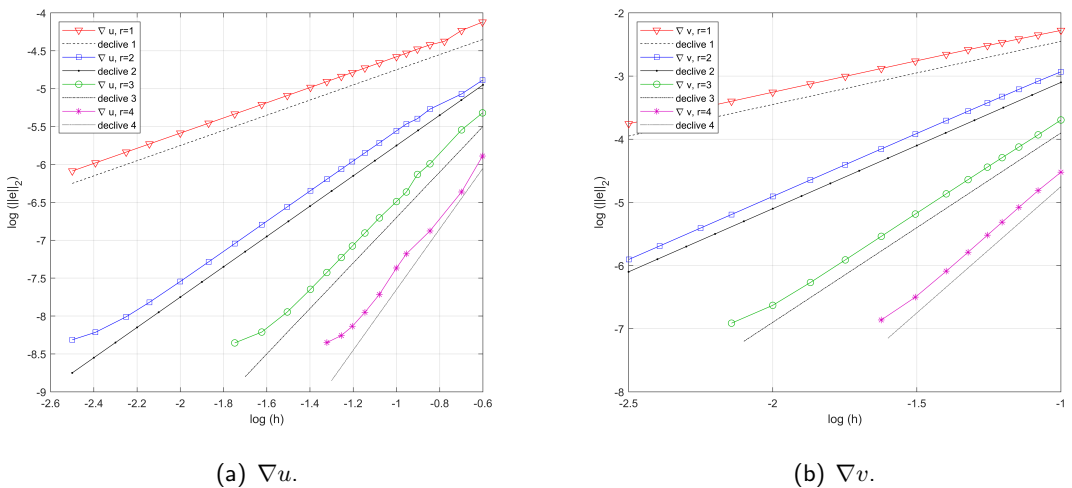


Figura 3.5: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 1.

A seguir, investiga-se a ordem de convergência numérica em relação a δ . Para isso, são realizadas simulações computacionais com $h = \frac{1}{316}$, variando o grau das funções de base para $r = 1, 2, 3, 4$ e $\delta = \frac{1}{N_t}$ com $N_t = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32, 42, 56, 74, 100, 139, 178, 247, 316$.

Realizam-se os cálculos da norma do erro e do gradiente do erro em $L^2(\Omega)$, definidas por (3.1) e (3.2), respetivamente. Da mesma forma que para h , traça-se o gráfico $\log(\delta)$ versus $\log(\|e\|_2)$ e obtém-se que a inclinação da reta indica a ordem de convergência numérica de δ . Analiticamente, esta ordem de convergência numérica é definida por

$$\text{ordem} = \frac{\log(\|e(U_{k_1, \delta_1})\|_2) - \log(\|e(U_{k_2, \delta_2})\|_2)}{\log(\delta_1) - \log(\delta_2)}.$$

As Tabelas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 apresentam os resultados da ordem de convergência numérica em relação a δ e os respetivos erros na norma $L^2(\Omega)$.

Tabela 3.5: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 1.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 2.50e-07 | 0.85 | 5.92e-06 | 0.86 | 1.15e-06 | 0.46 | 1.77e-04 | 0.01 |
| 1/6 | 2.12e-07 | 0.92 | 5.00e-06 | 0.92 | 1.06e-06 | 0.41 | 1.76e-04 | 0.01 |
| 1/7 | 1.83e-07 | 0.95 | 4.31e-06 | 0.96 | 1.01e-06 | 0.35 | 1.76e-04 | 0.01 |
| 1/8 | 1.60e-07 | 0.97 | 3.78e-06 | 0.98 | 9.67e-07 | 0.30 | 1.76e-04 | 0.01 |
| 1/9 | 1.43e-07 | 0.98 | 3.37e-06 | 0.99 | 9.38e-07 | 0.25 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/10 | 1.29e-07 | 0.99 | 3.03e-06 | 1.00 | 9.17e-07 | 0.22 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/12 | 1.07e-07 | 0.99 | 2.53e-06 | 1.00 | 8.89e-07 | 0.17 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/14 | 9.21e-08 | 1.00 | 2.16e-06 | 1.00 | 8.71e-07 | 0.13 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/16 | 8.07e-08 | 0.99 | 1.89e-06 | 1.00 | 8.59e-07 | 0.10 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/18 | 7.18e-08 | 0.99 | 1.68e-06 | 1.00 | 8.51e-07 | 0.08 | 1.76e-04 | 0.00 |
| 1/21 | 6.16e-08 | 0.99 | 1.44e-06 | 1.00 | 8.43e-07 | 0.06 | 1.76e-04 | 0.00 |

Tabela 3.6: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 1.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 2.49e-07 | 0.86 | 5.90e-06 | 0.86 | 7.96e-07 | 0.86 | 1.87e-05 | 0.86 |
| 1/6 | 2.10e-07 | 0.93 | 4.99e-06 | 0.93 | 6.72e-07 | 0.93 | 1.58e-05 | 0.92 |
| 1/7 | 1.81e-07 | 0.96 | 4.30e-06 | 0.96 | 5.80e-07 | 0.96 | 1.36e-05 | 0.96 |
| 1/8 | 1.59e-07 | 0.98 | 3.77e-06 | 0.98 | 5.08e-07 | 0.98 | 1.20e-05 | 0.97 |
| 1/9 | 1.41e-07 | 0.99 | 3.35e-06 | 1.00 | 4.52e-07 | 0.99 | 1.06e-05 | 0.98 |
| 1/10 | 1.27e-07 | 1.00 | 3.02e-06 | 1.00 | 4.07e-07 | 1.00 | 9.59e-06 | 0.99 |
| 1/12 | 1.06e-07 | 1.01 | 2.51e-06 | 1.01 | 3.39e-07 | 1.01 | 8.01e-06 | 0.99 |
| 1/14 | 9.05e-08 | 1.01 | 2.15e-06 | 1.01 | 2.90e-07 | 1.01 | 6.88e-06 | 0.99 |
| 1/16 | 7.90e-08 | 1.01 | 1.87e-06 | 1.02 | 2.53e-07 | 1.01 | 6.04e-06 | 0.98 |
| 1/18 | 7.01e-08 | 1.02 | 1.66e-06 | 1.02 | 2.24e-07 | 1.02 | 5.39e-06 | 0.97 |
| 1/21 | 5.99e-08 | 1.02 | 1.42e-06 | 1.02 | 1.92e-07 | 1.01 | 4.65e-06 | 0.95 |

Tabela 3.7: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 1.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 2.49e-07 | 0.86 | 5.90e-06 | 0.86 | 7.96e-07 | 0.86 | 1.86e-05 | 0.86 |
| 1/6 | 2.10e-07 | 0.93 | 4.99e-06 | 0.93 | 6.72e-07 | 0.93 | 1.57e-05 | 0.93 |
| 1/7 | 1.81e-07 | 0.96 | 4.30e-06 | 0.96 | 5.79e-07 | 0.96 | 1.36e-05 | 0.96 |
| 1/8 | 1.59e-07 | 0.98 | 3.77e-06 | 0.98 | 5.08e-07 | 0.98 | 1.19e-05 | 0.98 |
| 1/9 | 1.41e-07 | 0.99 | 3.35e-06 | 1.00 | 4.52e-07 | 0.99 | 1.06e-05 | 1.00 |
| 1/10 | 1.27e-07 | 1.00 | 3.02e-06 | 1.00 | 4.07e-07 | 1.00 | 9.51e-06 | 1.00 |
| 1/12 | 1.06e-07 | 1.01 | 2.51e-06 | 1.01 | 3.39e-07 | 1.01 | 7.91e-06 | 1.01 |
| 1/14 | 9.05e-08 | 1.01 | 2.15e-06 | 1.01 | 2.90e-07 | 1.01 | 6.77e-06 | 1.01 |
| 1/16 | 7.90e-08 | 1.01 | 1.87e-06 | 1.02 | 2.53e-07 | 1.01 | 5.91e-06 | 1.02 |
| 1/18 | 7.01e-08 | 1.02 | 1.66e-06 | 1.02 | 2.24e-07 | 1.02 | 5.24e-06 | 1.02 |
| 1/21 | 5.99e-08 | 1.02 | 1.42e-06 | 1.02 | 1.92e-07 | 1.01 | 4.48e-06 | 1.02 |

Tabela 3.8: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 4$ do Exemplo 1.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 2.49e-07 | 0.86 | 5.90e-06 | 0.86 | 7.96e-07 | 0.86 | 1.86e-05 | 0.86 |
| 1/6 | 2.10e-07 | 0.93 | 4.99e-06 | 0.93 | 6.72e-07 | 0.93 | 1.57e-05 | 0.93 |
| 1/7 | 1.81e-07 | 0.96 | 4.30e-06 | 0.96 | 5.79e-07 | 0.96 | 1.36e-05 | 0.96 |
| 1/8 | 1.59e-07 | 0.98 | 3.77e-06 | 0.98 | 5.08e-07 | 0.98 | 1.19e-05 | 0.98 |
| 1/9 | 1.41e-07 | 0.99 | 3.35e-06 | 1.00 | 4.52e-07 | 0.99 | 1.06e-05 | 1.00 |
| 1/10 | 1.27e-07 | 1.00 | 3.02e-06 | 1.00 | 4.07e-07 | 1.00 | 9.51e-06 | 1.00 |
| 1/12 | 1.06e-07 | 1.01 | 2.51e-06 | 1.01 | 3.39e-07 | 1.01 | 7.91e-06 | 1.01 |
| 1/14 | 9.05e-08 | 1.01 | 2.15e-06 | 1.01 | 2.90e-07 | 1.01 | 6.77e-06 | 1.01 |
| 1/16 | 7.90e-08 | 1.01 | 1.87e-06 | 1.02 | 2.53e-07 | 1.01 | 5.91e-06 | 1.02 |
| 1/18 | 7.01e-08 | 1.02 | 1.66e-06 | 1.02 | 2.24e-07 | 1.02 | 5.24e-06 | 1.02 |
| 1/21 | 5.99e-08 | 1.02 | 1.42e-06 | 1.02 | 1.92e-07 | 1.01 | 4.48e-06 | 1.02 |

Na Figura 3.6 são apresentados os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a δ . Verifica-se através desses gráficos e das respetivas tabelas que, para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$, $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica está suficientemente próxima da ordem ótima $O(\delta)$. Salienta-se que, quando $r = 1$ o gráfico da ordem de convergência numérica em δ para o gradiente das soluções é omitido devido ao facto de que o erro depende exclusivamente do termo h^{s-1} e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$, resultando em nenhuma ordem de convergência numérica em δ .

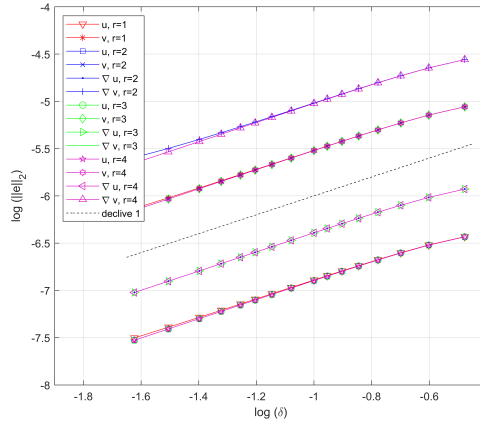


Figura 3.6: Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 1.

3.2 Exemplo 2 com $2.5 \leq p(x) \leq 3$

Neste exemplo, estuda-se o Problema (2.7) no domínio $\Omega = (0, 1)$, $0 < t \leq 1$, $\alpha = 1$, sendo a função de expoente variável definida por

$$p(x) = \frac{x + 5}{2},$$

o que implica $p^- = 2.5$ e $p^+ = 3$. Além disso, considere-se a solução exata $u = u(x, t)$ dada por

$$u = (te^{-t})^2 \left(\frac{x^2 - x}{4} + \frac{\cos(2\pi x) - 1}{8\pi^2} \right).$$

Deste modo, as condições de fronteira para a função u são satisfeitas. De facto,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

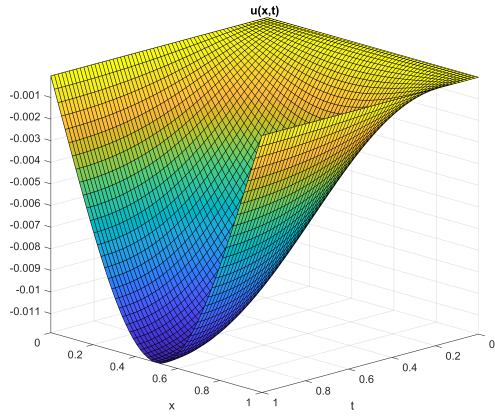
Adicionalmente, para $t = 0$, a condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

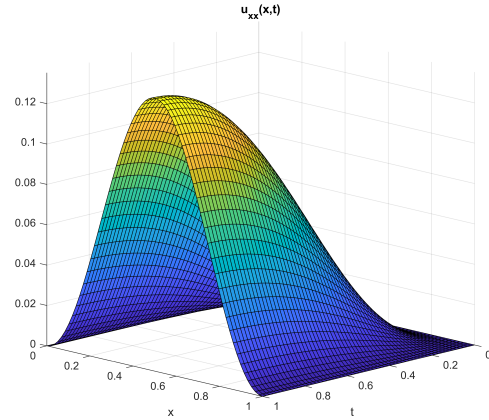
Tem-se

$$u_{xx} = (te^{-t})^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x)}{2} \right) = (te^{-t} \sin(\pi x))^2.$$

Os gráficos de u e de u_{xx} são apresentados, respetivamente, nas Figuras 3.7(a) e 3.7(b).



(a) $u(x, t)$.



(b) $u_{xx}(x, t)$.

Figura 3.7: Funções $u(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ do Exemplo 2.

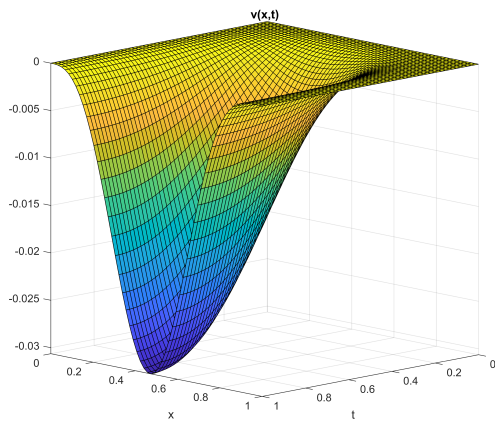
Verifica-se que $u_{xx} \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ e $\forall t \in [0, T]$. Assim, a mudança de variável definida por (2.6) implica que

$$v = -(u_{xx})^{p(x)-1} = -(te^{-t} \sin(\pi x))^{x+3},$$

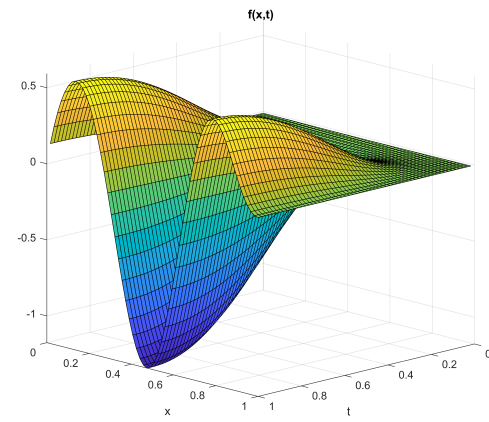
cujos gráficos estão representados na Figura 3.8(a). Observe-se que as condições de fronteira para a função v são satisfeitas. Com efeito,

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \forall t \in [0, T].$$

Para a função f utiliza-se (2.7), obtendo-se $f = u_t - v_{xx} - u_{xx}$. O seu gráfico está apresentado na Figura 3.8(b). Destaca-se que as funções f , u , v e p estão de acordo com as condições do Teorema 2.33.



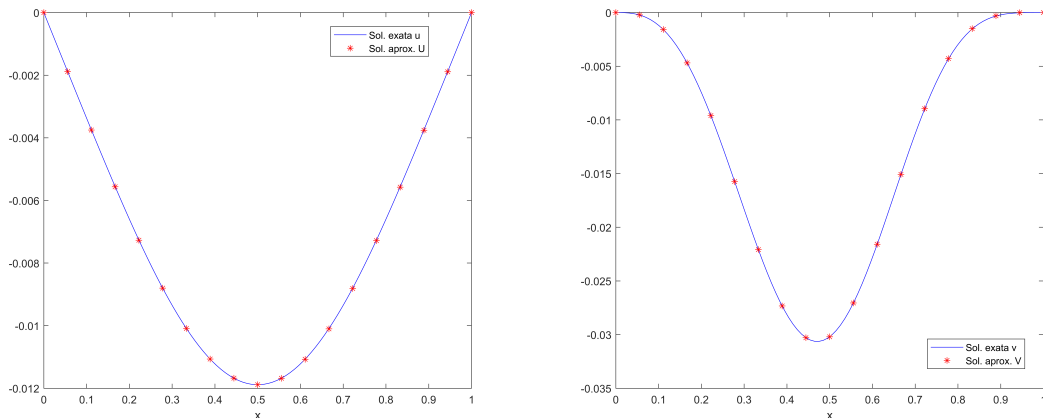
(a) $v(x, t)$.



(b) $f(x, t)$.

Figura 3.8: Funções $v(x, t)$ e $f(x, t)$ do Exemplo 2.

Aplica-se o método dos elementos finitos com uma malha uniforme e com o espaço de elementos finitos formado por funções de base lineares ($r = 1$). As Figuras 3.9(a) e 3.9(b) mostram as soluções aproximadas e as soluções exatas em $t = 1$. Utilizam-se $\delta = \frac{1}{N_t}$, $N_t = 1000$, $N_e = 18$ elementos finitos e verifica-se que, mesmo com poucos elementos finitos, as aproximações produzem bons resultados.



(a) $u(x, 1)$ e U_{N_t} .

(b) $v(x, 1)$ e V_{N_t} .

Figura 3.9: Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 2.

Nas Tabelas 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12, apresentam-se os resultados da ordem de convergência numérica em relação a h e os erros na norma $L^2(\Omega)$ definidos por (3.1) e (3.2). Destaca-se que, se fixou $\delta = \frac{1}{1000}$ e, posteriormente, variaram-se o grau das funções de base para $r = 1, 2, 3, 4$ e o número de elementos finitos para $N_e = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32, 42, 56, 74, 100, 139, 178, 247, 316$.

Tabela 3.9: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 2.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 2.92e-04 | 2.06 | 1.84e-03 | 1.48 | 4.79e-03 | 0.97 | 3.02e-02 | 0.58 |
| 1/6 | 2.02e-04 | 2.04 | 1.30e-03 | 1.91 | 4.00e-03 | 0.99 | 2.56e-02 | 0.91 |
| 1/7 | 1.47e-04 | 2.03 | 9.65e-04 | 1.94 | 3.43e-03 | 1.00 | 2.21e-02 | 0.94 |
| 1/8 | 1.13e-04 | 2.02 | 7.44e-04 | 1.95 | 3.00e-03 | 1.00 | 1.95e-02 | 0.95 |
| 1/9 | 8.88e-05 | 2.02 | 5.91e-04 | 1.96 | 2.67e-03 | 1.00 | 1.74e-02 | 0.96 |
| 1/10 | 7.18e-05 | 2.01 | 4.80e-04 | 1.97 | 2.40e-03 | 1.00 | 1.57e-02 | 0.97 |
| 1/12 | 4.98e-05 | 2.01 | 3.35e-04 | 1.97 | 2.00e-03 | 1.00 | 1.31e-02 | 0.98 |
| 1/14 | 3.66e-05 | 2.00 | 2.47e-04 | 1.98 | 1.71e-03 | 1.00 | 1.13e-02 | 0.98 |
| 1/16 | 2.80e-05 | 2.00 | 1.89e-04 | 1.98 | 1.50e-03 | 1.00 | 9.90e-03 | 0.99 |
| 1/18 | 2.22e-05 | 1.99 | 1.50e-04 | 1.99 | 1.33e-03 | 1.00 | 8.81e-03 | 0.99 |
| 1/21 | 1.63e-05 | 1.99 | 1.10e-04 | 1.99 | 1.14e-03 | 1.00 | 7.56e-03 | 0.99 |
| 1/25 | 1.16e-05 | 1.98 | 7.80e-05 | 1.99 | 9.58e-04 | 1.00 | 6.36e-03 | 0.99 |
| 1/32 | 7.12e-06 | 1.96 | 4.77e-05 | 1.99 | 7.48e-04 | 1.00 | 4.97e-03 | 1.00 |
| 1/42 | 4.21e-06 | 1.94 | 2.78e-05 | 1.99 | 5.70e-04 | 1.00 | 3.79e-03 | 1.00 |
| 1/56 | 2.44e-06 | 1.89 | 1.57e-05 | 1.98 | 4.27e-04 | 1.00 | 2.84e-03 | 1.00 |
| 1/74 | 1.48e-06 | 1.81 | 9.12e-06 | 1.96 | 3.23e-04 | 1.00 | 2.15e-03 | 1.00 |
| 1/100 | 8.97e-07 | 1.65 | 5.11e-06 | 1.92 | 2.39e-04 | 1.00 | 1.59e-03 | 1.00 |
| 1/139 | 5.68e-07 | 1.39 | 2.79e-06 | 1.84 | 1.72e-04 | 1.00 | 1.15e-03 | 1.00 |

Tabela 3.10: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 2.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/5 | 1.63e-05 | 3.13 | 2.19e-04 | 3.44 | 4.52e-04 | 1.99 | 7.16e-03 | 2.42 |
| 1/6 | 9.40e-06 | 3.01 | 1.30e-04 | 2.86 | 3.14e-04 | 2.01 | 5.08e-03 | 1.88 |
| 1/7 | 6.14e-06 | 2.76 | 8.35e-05 | 2.88 | 2.31e-04 | 1.99 | 3.80e-03 | 1.89 |
| 1/8 | 4.14e-06 | 2.95 | 5.66e-05 | 2.91 | 1.76e-04 | 2.01 | 2.94e-03 | 1.92 |
| 1/9 | 2.90e-06 | 3.01 | 4.00e-05 | 2.94 | 1.39e-04 | 2.01 | 2.34e-03 | 1.94 |
| 1/10 | 2.12e-06 | 2.98 | 2.93e-05 | 2.95 | 1.13e-04 | 2.01 | 1.90e-03 | 1.95 |
| 1/12 | 1.25e-06 | 2.89 | 1.71e-05 | 2.96 | 7.80e-05 | 2.01 | 1.33e-03 | 1.96 |
| 1/14 | 8.27e-07 | 2.70 | 1.08e-05 | 2.97 | 5.73e-05 | 2.01 | 9.82e-04 | 1.97 |
| 1/16 | 5.99e-07 | 2.42 | 7.29e-06 | 2.97 | 4.38e-05 | 2.00 | 7.54e-04 | 1.98 |
| 1/18 | 4.70e-07 | 2.06 | 5.15e-06 | 2.95 | 3.46e-05 | 2.00 | 5.97e-04 | 1.98 |
| 1/21 | 3.68e-07 | 1.58 | 3.28e-06 | 2.92 | 2.54e-05 | 2.00 | 4.39e-04 | 1.99 |
| 1/25 | 3.09e-07 | 1.00 | 2.01e-06 | 2.81 | 1.80e-05 | 2.00 | 3.10e-04 | 1.99 |
| 1/32 | 2.76e-07 | 0.46 | 1.11e-06 | 2.42 | 1.10e-05 | 1.99 | 1.90e-04 | 1.99 |
| 1/42 | 2.64e-07 | 0.16 | 7.48e-07 | 1.45 | 6.41e-06 | 1.98 | 1.10e-04 | 2.00 |
| 1/56 | 2.61e-07 | 0.05 | 6.52e-07 | 0.47 | 3.68e-06 | 1.93 | 6.21e-05 | 2.00 |
| 1/74 | 2.60e-07 | 0.01 | 6.34e-07 | 0.10 | 2.22e-06 | 1.81 | 3.56e-05 | 2.00 |

Tabela 3.11: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 2.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/3 | 1.03e-05 | 2.78 | 2.38e-04 | 3.17 | 2.31e-04 | 1.41 | 6.73e-03 | 2.13 |
| 1/4 | 2.64e-06 | 4.75 | 4.83e-05 | 5.54 | 9.12e-05 | 3.23 | 1.86e-03 | 4.47 |
| 1/5 | 1.12e-06 | 3.86 | 2.81e-05 | 2.43 | 4.70e-05 | 2.97 | 1.33e-03 | 1.50 |
| 1/6 | 6.66e-07 | 2.83 | 1.39e-05 | 3.86 | 2.75e-05 | 2.94 | 7.91e-04 | 2.86 |
| 1/7 | 4.75e-07 | 2.20 | 7.55e-06 | 3.95 | 1.74e-05 | 2.95 | 5.01e-04 | 2.96 |
| 1/8 | 3.82e-07 | 1.63 | 4.47e-06 | 3.93 | 1.17e-05 | 2.96 | 3.37e-04 | 2.97 |
| 1/9 | 3.33e-07 | 1.16 | 2.84e-06 | 3.85 | 8.29e-06 | 2.96 | 2.37e-04 | 2.97 |
| 1/10 | 3.06e-07 | 0.80 | 1.92e-06 | 3.69 | 6.08e-06 | 2.94 | 1.74e-04 | 2.97 |
| 1/12 | 2.81e-07 | 0.48 | 1.08e-06 | 3.18 | 3.60e-06 | 2.88 | 1.01e-04 | 2.97 |
| 1/14 | 2.70e-07 | 0.24 | 7.86e-07 | 2.05 | 2.37e-06 | 2.72 | 6.38e-05 | 2.98 |
| 1/16 | 2.66e-07 | 0.13 | 6.87e-07 | 1.01 | 1.71e-06 | 2.42 | 4.29e-05 | 2.98 |
| 1/18 | 2.63e-07 | 0.08 | 6.52e-07 | 0.44 | 1.35e-06 | 2.01 | 3.02e-05 | 2.97 |
| 1/21 | 2.61e-07 | 0.04 | 6.36e-07 | 0.16 | 1.08e-06 | 1.43 | 1.91e-05 | 2.96 |
| 1/25 | 2.60e-07 | 0.02 | 6.32e-07 | 0.04 | 9.47e-07 | 0.78 | 1.15e-05 | 2.93 |
| 1/32 | 2.60e-07 | 0.01 | 6.30e-07 | 0.01 | 8.83e-07 | 0.28 | 5.76e-06 | 2.79 |
| 1/42 | 2.60e-07 | 0.00 | 6.30e-07 | 0.00 | 8.68e-07 | 0.07 | 3.12e-06 | 2.25 |

Tabela 3.12: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 2.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 8.59e-06 | — | 1.61e-04 | — | 1.89e-04 | — | 4.13e-03 | — |
| 1/3 | 2.10e-06 | 3.47 | 2.73e-05 | 4.38 | 3.24e-05 | 4.35 | 1.01e-03 | 3.46 |
| 1/4 | 6.77e-07 | 3.94 | 1.09e-05 | 3.19 | 1.08e-05 | 3.83 | 5.38e-04 | 2.20 |
| 1/5 | 3.50e-07 | 2.96 | 2.82e-06 | 6.06 | 4.42e-06 | 4.00 | 1.71e-04 | 5.14 |
| 1/6 | 2.80e-07 | 1.21 | 1.25e-06 | 4.48 | 2.21e-06 | 3.79 | 8.06e-05 | 4.12 |
| 1/7 | 2.64e-07 | 0.38 | 8.10e-07 | 2.80 | 1.37e-06 | 3.10 | 4.44e-05 | 3.87 |
| 1/8 | 2.60e-07 | 0.11 | 6.85e-07 | 1.25 | 1.05e-06 | 2.00 | 2.65e-05 | 3.87 |
| 1/9 | 2.59e-07 | 0.03 | 6.49e-07 | 0.46 | 9.32e-07 | 1.02 | 1.68e-05 | 3.86 |
| 1/10 | 2.59e-07 | 0.00 | 6.38e-07 | 0.17 | 8.88e-07 | 0.45 | 1.12e-05 | 3.82 |
| 1/12 | 2.60e-07 | 0.00 | 6.32e-07 | 0.05 | 8.66e-07 | 0.14 | 5.79e-06 | 3.63 |
| 1/14 | 2.60e-07 | -0.01 | 6.31e-07 | 0.01 | 8.64e-07 | 0.01 | 3.60e-06 | 3.09 |

Nota-se que, na Tabela 3.9, para o caso em que $N_e \geq 6$ a ordem de convergência numérica em relação a h para a função u está a decrescer devido à sobreposição de erros computacionais e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$. Esta análise é idêntica para v quando $N_e \geq 139$. Na Tabela 3.10, isto acontece quando $N_e \geq 14, 25, 74$ para, respetivamente, u, v e ∇u . Na Tabela 3.11, o mesmo acontece quando $N_e \geq 6, 10, 14, 32$ para, respetivamente, $u, v, \nabla u$ e ∇v . De maneira análoga, verifica-se isto na Tabela 3.12 quando $N_e \geq 5, 7, 12$ para, respetivamente, u, v e ∇u , e ∇v .

Os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a h para u e v são apresentados, respetivamente, nas Figuras 3.10(a) e 3.10(b). Investigando os referidos gráficos e as respetivas tabelas, nota-se que os resultados são consistentes com o Teorema 2.33, portanto as simulações computacionais estão de acordo com o estudo analítico. Observa-se que, quando se utilizam polinómios de grau $r = 1, 2, 3$, a ordem de convergência numérica para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$ é aproximadamente ótima $O(h^{r+1})$. Por outro lado, para polinómios de grau $r = 4$ a referida ordem de convergência numérica é significativamente menor do que a ordem ótima.

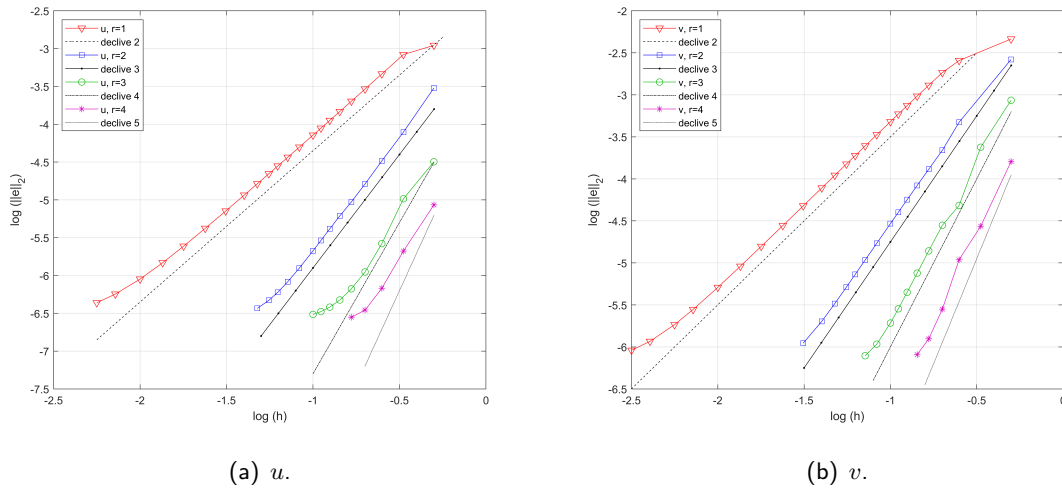


Figura 3.10: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 2.

As Figuras 3.11(a) e 3.11(b) mostram os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a h para ∇u e ∇v , respetivamente. Tem-se que, para $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica está suficientemente próxima da ordem ótima $O(h^r)$.

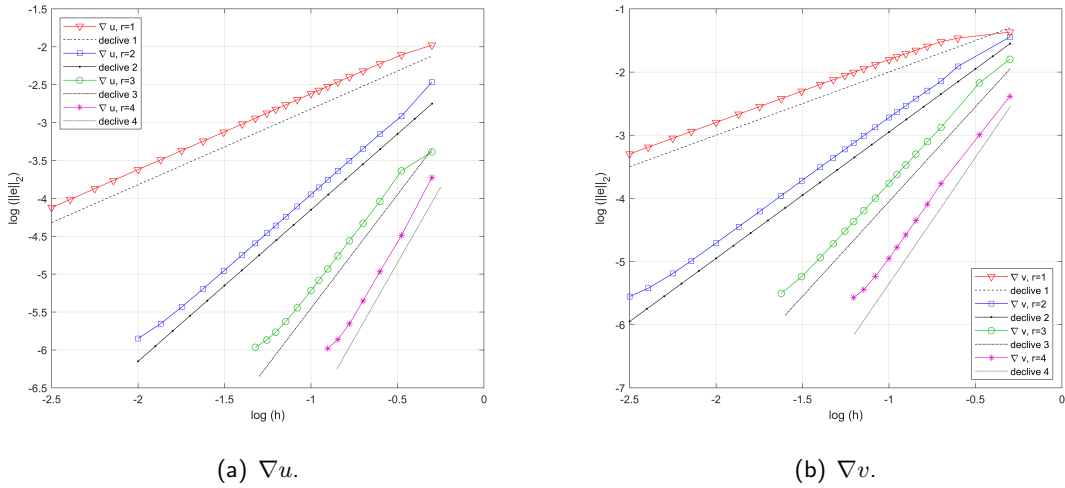


Figura 3.11: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 2.

Para a investigação da ordem de convergência numérica em relação a δ , foram considerados $h = \frac{1}{100}$, o grau das funções de base $r = 1, 2, 3, 4$ e $\delta = \frac{1}{N_t}$ com $N_t = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 25, 32, 42, 56, 74, 100, 139, 178, 247, 316$. As Tabelas 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 exibem os resultados da referida ordem de convergência numérica e os erros na norma $L^2(\Omega)$.

Tabela 3.13: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 2.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.51e-04 | — | 3.57e-04 | — | 5.53e-04 | — | 1.95e-03 | — |
| 1/3 | 1.01e-04 | 1.00 | 2.39e-04 | 0.99 | 4.09e-04 | 0.74 | 1.76e-03 | 0.25 |
| 1/4 | 7.42e-05 | 1.06 | 1.77e-04 | 1.04 | 3.42e-04 | 0.62 | 1.69e-03 | 0.15 |
| 1/5 | 5.84e-05 | 1.07 | 1.40e-04 | 1.05 | 3.07e-04 | 0.49 | 1.65e-03 | 0.09 |
| 1/6 | 4.81e-05 | 1.07 | 1.16e-04 | 1.05 | 2.86e-04 | 0.37 | 1.63e-03 | 0.06 |
| 1/7 | 4.09e-05 | 1.06 | 9.84e-05 | 1.05 | 2.74e-04 | 0.29 | 1.62e-03 | 0.05 |
| 1/8 | 3.55e-05 | 1.06 | 8.57e-05 | 1.04 | 2.66e-04 | 0.23 | 1.61e-03 | 0.03 |
| 1/9 | 3.14e-05 | 1.05 | 7.59e-05 | 1.03 | 2.60e-04 | 0.18 | 1.61e-03 | 0.03 |
| 1/10 | 2.81e-05 | 1.04 | 6.81e-05 | 1.03 | 2.56e-04 | 0.15 | 1.61e-03 | 0.02 |
| 1/12 | 2.33e-05 | 1.03 | 5.66e-05 | 1.02 | 2.51e-04 | 0.11 | 1.60e-03 | 0.02 |
| 1/14 | 1.99e-05 | 1.02 | 4.85e-05 | 1.00 | 2.48e-04 | 0.08 | 1.60e-03 | 0.01 |
| 1/16 | 1.73e-05 | 1.02 | 4.25e-05 | 0.99 | 2.45e-04 | 0.06 | 1.60e-03 | 0.01 |
| 1/18 | 1.54e-05 | 1.01 | 3.79e-05 | 0.98 | 2.44e-04 | 0.05 | 1.60e-03 | 0.01 |
| 1/21 | 1.32e-05 | 1.00 | 3.26e-05 | 0.97 | 2.43e-04 | 0.04 | 1.60e-03 | 0.00 |

Tabela 3.14: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 2.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.50e-04 | — | 3.56e-04 | — | 5.00e-04 | — | 1.13e-03 | — |
| 1/3 | 1.00e-04 | 1.00 | 2.38e-04 | 0.99 | 3.33e-04 | 1.00 | 7.56e-04 | 0.99 |
| 1/4 | 7.38e-05 | 1.06 | 1.76e-04 | 1.05 | 2.46e-04 | 1.06 | 5.58e-04 | 1.05 |
| 1/5 | 5.80e-05 | 1.08 | 1.38e-04 | 1.07 | 1.93e-04 | 1.07 | 4.40e-04 | 1.06 |
| 1/6 | 4.77e-05 | 1.08 | 1.14e-04 | 1.07 | 1.59e-04 | 1.07 | 3.63e-04 | 1.07 |
| 1/7 | 4.04e-05 | 1.07 | 9.67e-05 | 1.06 | 1.35e-04 | 1.07 | 3.08e-04 | 1.06 |
| 1/8 | 3.51e-05 | 1.07 | 8.40e-05 | 1.06 | 1.17e-04 | 1.07 | 2.67e-04 | 1.06 |
| 1/9 | 3.09e-05 | 1.06 | 7.41e-05 | 1.06 | 1.03e-04 | 1.06 | 2.36e-04 | 1.05 |
| 1/10 | 2.77e-05 | 1.06 | 6.64e-05 | 1.05 | 9.22e-05 | 1.06 | 2.12e-04 | 1.04 |
| 1/12 | 2.28e-05 | 1.05 | 5.48e-05 | 1.05 | 7.61e-05 | 1.05 | 1.75e-04 | 1.04 |
| 1/14 | 1.94e-05 | 1.05 | 4.67e-05 | 1.04 | 6.47e-05 | 1.05 | 1.50e-04 | 1.03 |
| 1/16 | 1.69e-05 | 1.04 | 4.07e-05 | 1.04 | 5.63e-05 | 1.04 | 1.31e-04 | 1.02 |
| 1/18 | 1.50e-05 | 1.04 | 3.60e-05 | 1.03 | 4.98e-05 | 1.04 | 1.16e-04 | 1.01 |
| 1/21 | 1.28e-05 | 1.03 | 3.07e-05 | 1.03 | 4.25e-05 | 1.03 | 9.95e-05 | 1.00 |

Tabela 3.15: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 2.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.50e-04 | — | 3.56e-04 | — | 5.00e-04 | — | 1.13e-03 | — |
| 1/3 | 1.00e-04 | 1.00 | 2.38e-04 | 0.99 | 3.33e-04 | 1.00 | 7.55e-04 | 1.00 |
| 1/4 | 7.38e-05 | 1.06 | 1.76e-04 | 1.05 | 2.46e-04 | 1.06 | 5.58e-04 | 1.05 |
| 1/5 | 5.80e-05 | 1.08 | 1.38e-04 | 1.07 | 1.93e-04 | 1.07 | 4.40e-04 | 1.07 |
| 1/6 | 4.77e-05 | 1.08 | 1.14e-04 | 1.07 | 1.59e-04 | 1.07 | 3.62e-04 | 1.07 |
| 1/7 | 4.04e-05 | 1.07 | 9.67e-05 | 1.06 | 1.35e-04 | 1.07 | 3.07e-04 | 1.06 |
| 1/8 | 3.51e-05 | 1.07 | 8.40e-05 | 1.06 | 1.17e-04 | 1.07 | 2.67e-04 | 1.06 |
| 1/9 | 3.09e-05 | 1.06 | 7.41e-05 | 1.06 | 1.03e-04 | 1.06 | 2.36e-04 | 1.06 |
| 1/10 | 2.77e-05 | 1.06 | 6.64e-05 | 1.05 | 9.22e-05 | 1.06 | 2.11e-04 | 1.05 |
| 1/12 | 2.28e-05 | 1.05 | 5.48e-05 | 1.05 | 7.61e-05 | 1.05 | 1.74e-04 | 1.05 |
| 1/14 | 1.94e-05 | 1.05 | 4.67e-05 | 1.04 | 6.47e-05 | 1.05 | 1.48e-04 | 1.04 |
| 1/16 | 1.69e-05 | 1.04 | 4.07e-05 | 1.04 | 5.63e-05 | 1.04 | 1.29e-04 | 1.04 |
| 1/18 | 1.50e-05 | 1.04 | 3.60e-05 | 1.03 | 4.98e-05 | 1.04 | 1.14e-04 | 1.03 |
| 1/21 | 1.28e-05 | 1.03 | 3.07e-05 | 1.03 | 4.25e-05 | 1.03 | 9.76e-05 | 1.03 |

Tabela 3.16: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 4$ do Exemplo 2.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.50e-04 | — | 3.56e-04 | — | 5.00e-04 | — | 1.13e-03 | — |
| 1/3 | 1.00e-04 | 1.00 | 2.38e-04 | 0.99 | 3.33e-04 | 1.00 | 7.55e-04 | 1.00 |
| 1/4 | 7.38e-05 | 1.06 | 1.76e-04 | 1.05 | 2.46e-04 | 1.06 | 5.58e-04 | 1.05 |
| 1/5 | 5.80e-05 | 1.08 | 1.38e-04 | 1.07 | 1.93e-04 | 1.07 | 4.40e-04 | 1.07 |
| 1/6 | 4.77e-05 | 1.08 | 1.14e-04 | 1.07 | 1.59e-04 | 1.07 | 3.62e-04 | 1.07 |
| 1/7 | 4.04e-05 | 1.07 | 9.67e-05 | 1.06 | 1.35e-04 | 1.07 | 3.07e-04 | 1.06 |
| 1/8 | 3.51e-05 | 1.07 | 8.40e-05 | 1.06 | 1.17e-04 | 1.07 | 2.67e-04 | 1.06 |
| 1/9 | 3.09e-05 | 1.06 | 7.41e-05 | 1.06 | 1.03e-04 | 1.06 | 2.36e-04 | 1.06 |
| 1/10 | 2.77e-05 | 1.06 | 6.64e-05 | 1.05 | 9.22e-05 | 1.06 | 2.11e-04 | 1.05 |
| 1/12 | 2.28e-05 | 1.05 | 5.48e-05 | 1.05 | 7.61e-05 | 1.05 | 1.74e-04 | 1.05 |
| 1/14 | 1.94e-05 | 1.05 | 4.67e-05 | 1.04 | 6.47e-05 | 1.05 | 1.48e-04 | 1.04 |
| 1/16 | 1.69e-05 | 1.04 | 4.07e-05 | 1.04 | 5.63e-05 | 1.04 | 1.29e-04 | 1.04 |
| 1/18 | 1.50e-05 | 1.04 | 3.60e-05 | 1.03 | 4.98e-05 | 1.04 | 1.14e-04 | 1.03 |
| 1/21 | 1.28e-05 | 1.03 | 3.07e-05 | 1.03 | 4.25e-05 | 1.03 | 9.76e-05 | 1.03 |

Na Figura 3.12 apresentam-se os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a δ . Verifica-se que, quando $r = 1, 2, 3, 4$, esta ordem de convergência numérica é ótima para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$. Se $r = 2, 3, 4$, então a ordem de convergência numérica em δ para $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$ é $O(\delta)$. Quando $r = 1$, não há ordem de convergência numérica para o gradiente das soluções devido ao facto do erro depender exclusivamente do termo h^{s-1} e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$.

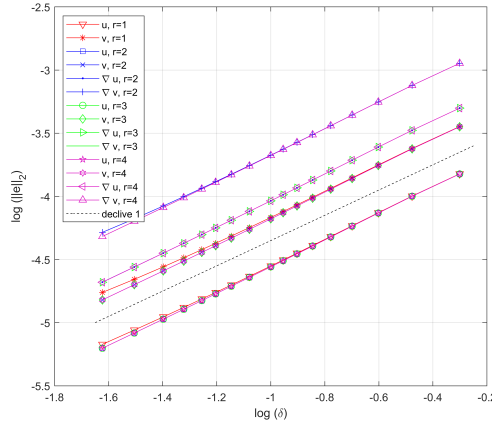


Figura 3.12: Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 2.

3.3 Exemplo 3 com $4 \leq p(x) \leq 6.5$

Neste último exemplo, ilustra-se o Teorema 2.35 num domínio bidimensional $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, com intervalo temporal $0 < t \leq 1$, constante $\alpha = 1$ e função de expoente variável definida por

$$p(x, y) = \frac{4x - y + 9}{2},$$

donde $p^- = 4$ e $p^+ = 6.5$. Além disso, seja a solução exata $u = u(x, y, t)$ dada por

$$u = te^{-t} (2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x) (-2y^6 + 6y^5 - 5y^4 + y).$$

O gráfico de u é apresentado na Figura 3.13(a), considerando $t = 1$.

Deste modo, as condições de fronteira para a função u são satisfeitas,

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad \forall y \in [0, 1], \forall t \in [0, 1], \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

A condição inicial em $t = 0$ é dada por

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Observe-se que

$$u_{xx} = te^{-t} (60x^4 - 120x^3 + 60x^2) (-2y^6 + 6y^5 - 5y^4 + y),$$

$$u_{yy} = te^{-t} (2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x) (-60y^4 + 120y^3 - 60y^2).$$

Assim,

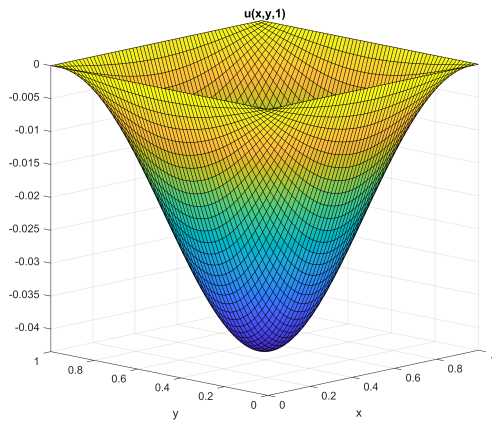
$$\Delta u = g(x, y)h(t),$$

onde

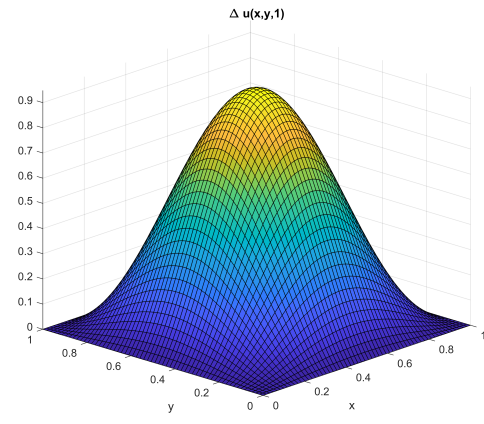
$$g(x, y) = (60x^4 - 120x^3 + 60x^2) (-2y^6 + 6y^5 - 5y^4 + y) + (2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x) (-60y^4 + 120y^3 - 60y^2),$$

$$h(t) = te^{-t}.$$

O gráfico de Δu no instante $t = 1$ é apresentado na Figura 3.13(b).



(a) $u(x, y, 1)$.



(b) $\Delta u(x, y, 1)$.

Figura 3.13: Funções $u(x, y, 1)$ e $\Delta u(x, y, 1)$ do Exemplo 3.

Tendo em conta o facto de $g(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega, h(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$, tem-se $\Delta u \geq 0, \forall (x, y, t) \in Q$. Deste modo, através da equação (2.6), obtém-se

$$v = -|\Delta u|^{p(x,y)-2} \Delta u = -(\Delta u)^{p(x,y)-1} = -[g(x, y)h(t)]^{p(x,y)-1}.$$

Assim, as condições de fronteira para a função v são satisfeitas,

$$v(0, y, t) = v(1, y, t) = 0, \forall y \in [0, 1], \forall t \in (0, 1],$$

$$v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0, \forall x \in [0, 1], \forall t \in (0, 1].$$

Apresenta-se na Figura 3.14(a) o gráfico de v para $t = 1$.

A função $f = u_t - \Delta v - \Delta u$ é determinada por (2.7). Na Figura 3.14(b) é apresentado o gráfico de f para $t = 1$. Destaca-se que as funções f , u , v e p estão de acordo com as hipóteses do Teorema 2.35.

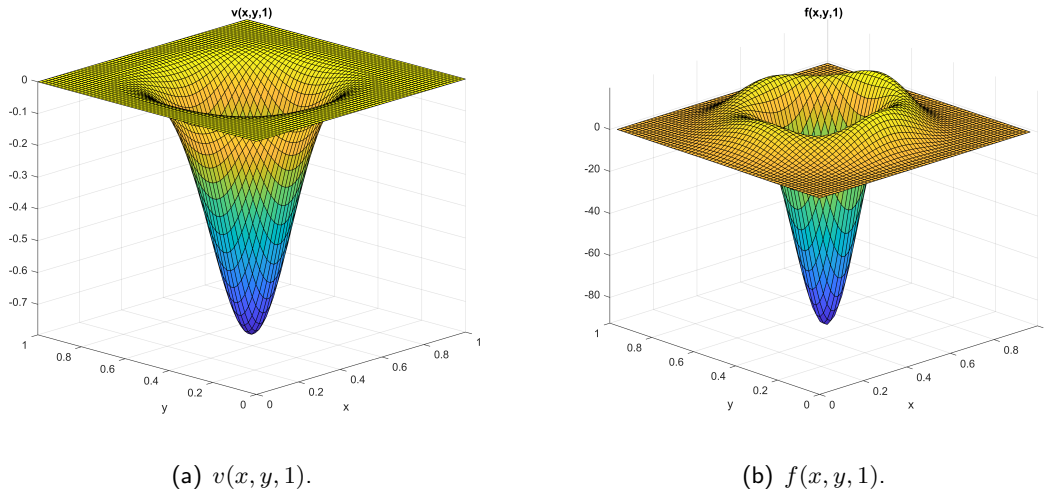


Figura 3.14: Funções $v(x, y, 1)$ e $f(x, y, 1)$ do Exemplo 3.

Considere-se a malha do domínio formada por elementos finitos triangulares, conforme mostrado nas Figuras 3.15(a) e 3.15(b). O espaço de elementos finitos é composto por funções de base lineares, ou seja, $r = 1$. Nas Figuras 3.15(a) e 3.15(b), é possível realizar uma comparação visual entre a solução aproximada e a solução exata. Neste caso, a malha é composta por 328 elementos finitos com a altura máxima de $h = \frac{1}{10}$, o tempo $t = 1$ e $\delta = \frac{1}{N_t}$ com $N_t = 100$. Observa-se que as aproximações das soluções são bastante precisas.

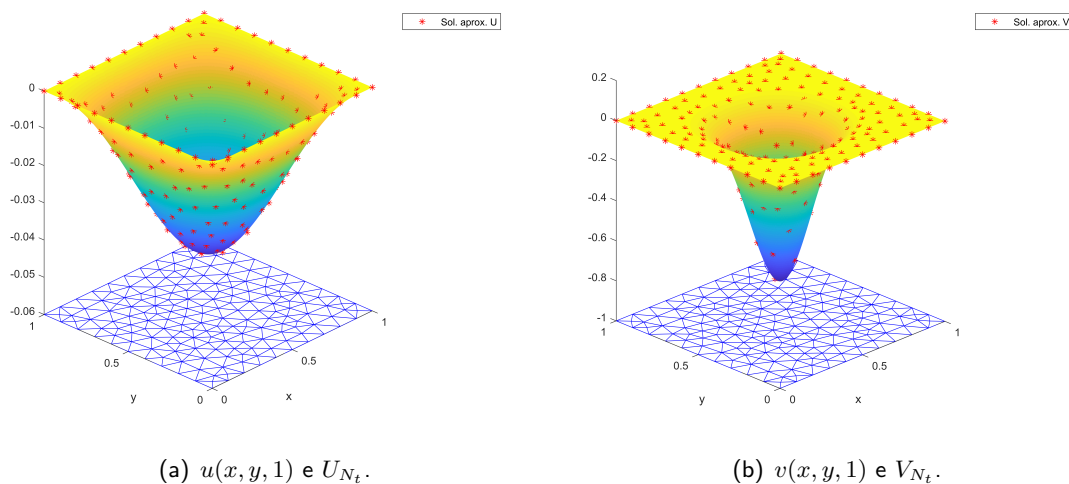


Figura 3.15: Soluções exatas e aproximadas para $t = 1$ do Exemplo 3.

As Tabelas 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20 mostram os resultados da ordem de convergência numérica em relação a h e os respectivos erros na norma $L^2(\Omega)$ definidos por (3.1) e (3.2). Para as simulações fixou-se $\delta = \frac{1}{100}$ e alteraram-se o grau das funções de base para $r = 1, 2, 3, 4$. Além disso, variou-se a altura máxima dos triângulos, nomeadamente, utilizou-se $h = \frac{1}{N_e}$ com $N_e = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20$.

Tabela 3.17: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 1$ do Exemplo 3.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 2.61e-03 | – | 8.03e-02 | – | 4.30e-02 | – | 9.79e-01 | – |
| 1/3 | 1.19e-03 | 1.95 | 2.59e-02 | 2.79 | 2.76e-02 | 1.09 | 5.84e-01 | 1.27 |
| 1/4 | 8.00e-04 | 1.37 | 3.68e-02 | -1.23 | 2.38e-02 | 0.51 | 7.29e-01 | -0.77 |
| 1/5 | 6.17e-04 | 1.17 | 2.62e-02 | 1.53 | 1.90e-02 | 1.03 | 5.98e-01 | 0.89 |
| 1/6 | 4.73e-04 | 1.46 | 2.09e-02 | 1.24 | 1.62e-02 | 0.87 | 5.29e-01 | 0.68 |
| 1/7 | 3.21e-04 | 2.52 | 1.84e-02 | 0.81 | 1.33e-02 | 1.26 | 5.09e-01 | 0.25 |
| 1/8 | 2.41e-04 | 2.16 | 1.30e-02 | 2.58 | 1.18e-02 | 0.91 | 4.27e-01 | 1.31 |
| 1/9 | 1.85e-04 | 2.23 | 9.09e-03 | 3.07 | 1.04e-02 | 1.05 | 3.59e-01 | 1.46 |
| 1/10 | 1.34e-04 | 3.06 | 7.70e-03 | 1.58 | 9.35e-03 | 1.04 | 3.29e-01 | 0.84 |
| 1/11 | 1.52e-04 | -1.32 | 6.91e-03 | 1.14 | 8.74e-03 | 0.71 | 3.11e-01 | 0.61 |
| 1/12 | 1.03e-04 | 4.53 | 5.74e-03 | 2.13 | 7.94e-03 | 1.10 | 2.85e-01 | 1.00 |
| 1/14 | 7.62e-05 | 1.92 | 4.11e-03 | 2.16 | 6.60e-03 | 1.19 | 2.41e-01 | 1.08 |
| 1/16 | 5.42e-05 | 2.56 | 3.10e-03 | 2.11 | 5.79e-03 | 0.99 | 2.09e-01 | 1.06 |
| 1/18 | 4.32e-05 | 1.93 | 2.41e-03 | 2.16 | 5.08e-03 | 1.11 | 1.85e-01 | 1.04 |
| 1/20 | 3.64e-05 | 1.61 | 1.99e-03 | 1.79 | 4.62e-03 | 0.89 | 1.68e-01 | 0.91 |

Tabela 3.18: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 2$ do Exemplo 3.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 2.55e-03 | – | 2.24e-02 | – | 1.89e-02 | – | 5.17e-01 | – |
| 1/3 | 1.46e-03 | 1.38 | 1.51e-02 | 0.98 | 1.09e-02 | 1.36 | 4.27e-01 | 0.47 |
| 1/4 | 7.07e-04 | 2.52 | 5.44e-03 | 3.54 | 6.55e-03 | 1.77 | 2.05e-01 | 2.55 |
| 1/5 | 4.07e-04 | 2.48 | 3.33e-03 | 2.20 | 4.00e-03 | 2.22 | 1.53e-01 | 1.31 |
| 1/6 | 1.77e-04 | 4.56 | 3.13e-03 | 0.35 | 1.84e-03 | 4.26 | 1.48e-01 | 0.18 |
| 1/7 | 1.24e-04 | 2.32 | 1.67e-03 | 4.06 | 1.45e-03 | 1.53 | 9.72e-02 | 2.74 |
| 1/8 | 7.12e-05 | 4.15 | 9.76e-04 | 4.03 | 9.37e-04 | 3.28 | 6.76e-02 | 2.72 |
| 1/9 | 5.15e-05 | 2.74 | 5.67e-04 | 4.61 | 7.33e-04 | 2.09 | 4.78e-02 | 2.95 |
| 1/10 | 3.85e-05 | 2.77 | 4.54e-04 | 2.12 | 5.73e-04 | 2.33 | 4.05e-02 | 1.56 |
| 1/11 | 2.92e-05 | 2.91 | 3.74e-04 | 2.03 | 4.68e-04 | 2.12 | 3.55e-02 | 1.39 |
| 1/12 | 1.83e-05 | 5.39 | 3.03e-04 | 2.43 | 3.63e-04 | 2.91 | 3.09e-02 | 1.59 |
| 1/14 | 9.80e-06 | 4.04 | 1.83e-04 | 3.25 | 2.43e-04 | 2.62 | 2.20e-02 | 2.20 |
| 1/16 | 6.01e-06 | 3.65 | 1.20e-04 | 3.17 | 1.73e-04 | 2.52 | 1.65e-02 | 2.14 |
| 1/18 | 4.64e-06 | 2.21 | 8.02e-05 | 3.42 | 1.34e-04 | 2.15 | 1.28e-02 | 2.14 |
| 1/20 | 4.98e-06 | -0.68 | 5.99e-05 | 2.77 | 1.12e-04 | 1.70 | 1.05e-02 | 1.90 |

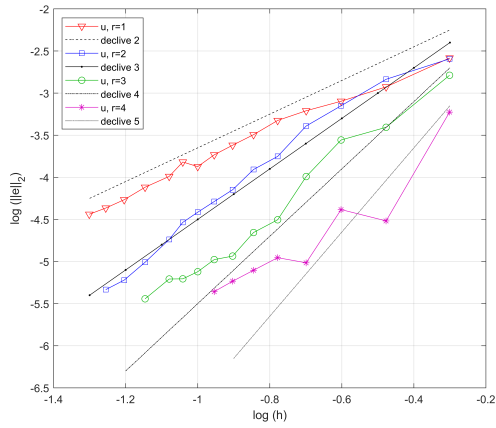
Tabela 3.19: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 3$ do Exemplo 3.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 1.63e-03 | — | 4.56e-03 | — | 1.02e-02 | — | 1.58e-01 | — |
| 1/3 | 3.93e-04 | 3.51 | 2.52e-03 | 1.47 | 3.00e-03 | 3.02 | 1.00e-01 | 1.12 |
| 1/4 | 2.77e-04 | 1.21 | 1.21e-03 | 2.55 | 2.07e-03 | 1.28 | 6.16e-02 | 1.69 |
| 1/5 | 1.02e-04 | 4.48 | 4.22e-04 | 4.72 | 1.04e-03 | 3.11 | 2.73e-02 | 3.65 |
| 1/6 | 3.13e-05 | 6.48 | 2.48e-04 | 2.91 | 4.00e-04 | 5.21 | 1.76e-02 | 2.39 |
| 1/7 | 2.21e-05 | 2.26 | 1.80e-04 | 2.08 | 2.57e-04 | 2.87 | 1.45e-02 | 1.25 |
| 1/8 | 1.16e-05 | 4.82 | 9.42e-05 | 4.85 | 1.54e-04 | 3.87 | 8.89e-03 | 3.68 |
| 1/9 | 1.05e-05 | 0.82 | 4.11e-05 | 7.03 | 1.61e-04 | -0.39 | 4.94e-03 | 4.98 |
| 1/10 | 7.57e-06 | 3.14 | 3.06e-05 | 2.82 | 7.33e-05 | 7.45 | 3.87e-03 | 2.32 |
| 1/11 | 6.23e-06 | 2.04 | 2.81e-05 | 0.89 | 6.91e-05 | 0.63 | 3.49e-03 | 1.10 |
| 1/12 | 6.20e-06 | 0.05 | 1.72e-05 | 5.61 | 5.79e-05 | 2.03 | 2.50e-03 | 3.85 |
| 1/14 | 3.61e-06 | 3.51 | 1.01e-05 | 3.46 | 3.41e-05 | 3.43 | 1.52e-03 | 3.23 |
| 1/16 | 3.25e-06 | 0.77 | 7.05e-06 | 2.70 | 2.63e-05 | 1.96 | 9.84e-04 | 3.24 |
| 1/18 | 2.72e-06 | 1.51 | 6.21e-06 | 1.08 | 2.30e-05 | 1.12 | 6.77e-04 | 3.18 |
| 1/20 | 3.34e-06 | -1.93 | 4.89e-06 | 2.27 | 2.20e-05 | 0.42 | 5.21e-04 | 2.48 |

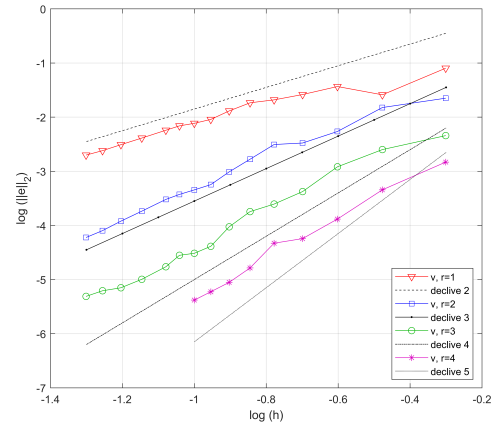
Tabela 3.20: Ordem de convergência numérica em relação a h e erros com $r = 4$ do Exemplo 3.

| h | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/2 | 5.94e-04 | — | 1.48e-03 | — | 3.92e-03 | — | 6.35e-02 | — |
| 1/3 | 3.04e-05 | 7.33 | 4.55e-04 | 2.91 | 5.33e-04 | 4.92 | 2.85e-02 | 1.98 |
| 1/4 | 4.14e-05 | -1.07 | 1.31e-04 | 4.32 | 4.35e-04 | 0.70 | 9.52e-03 | 3.81 |
| 1/5 | 9.66e-06 | 6.52 | 5.71e-05 | 3.73 | 2.02e-04 | 3.43 | 5.01e-03 | 2.87 |
| 1/6 | 1.11e-05 | -0.76 | 4.70e-05 | 1.07 | 1.41e-04 | 1.97 | 4.45e-03 | 0.65 |
| 1/7 | 7.87e-06 | 2.23 | 1.64e-05 | 6.83 | 9.81e-05 | 2.36 | 1.85e-03 | 5.69 |
| 1/8 | 5.84e-06 | 2.24 | 8.88e-06 | 4.59 | 7.77e-05 | 1.75 | 9.71e-04 | 4.82 |
| 1/9 | 4.39e-06 | 2.41 | 5.95e-06 | 3.40 | 6.00e-05 | 2.20 | 4.77e-04 | 6.04 |
| 1/10 | 6.55e-06 | -3.79 | 4.17e-06 | 3.36 | 5.45e-05 | 0.92 | 3.43e-04 | 3.13 |

Nas Figuras 3.16(a) e 3.16(b), apresentam-se os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a h para as funções u e v , respectivamente. Através das referidas figuras e das respectivas tabelas, observa-se que os resultados obtidos são consistentes com os demonstrados no Teorema 2.35. Portanto, as simulações numéricas realizadas estão em conformidade com o estudo analítico. Destaca-se que, para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica existe, porém está abaixo da ordem ótima. Isto está de acordo com os resultados do Teorema 2.35, onde a ordem de convergência depende do expoente $q(x)$, dado por $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. Note-se que essa ordem tende a diminuir quando $q \rightarrow 1$, o que ocorre quando $p \rightarrow \infty$.



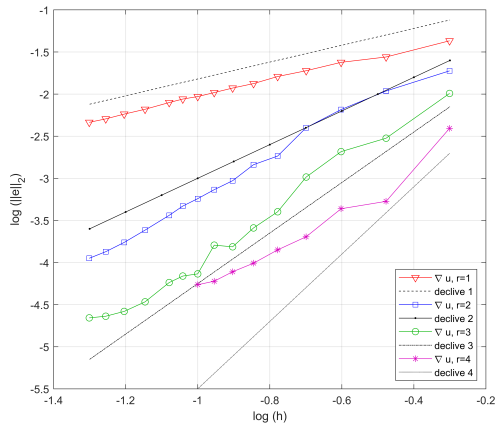
(a) u .



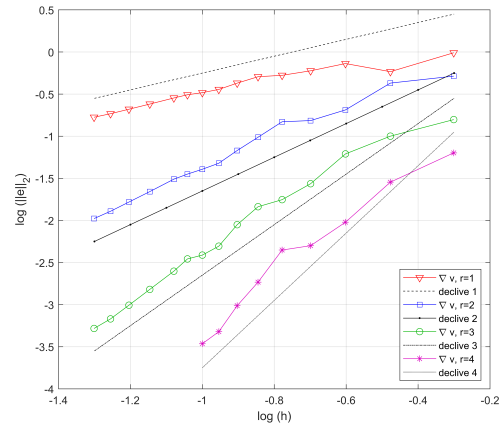
(b) v .

Figura 3.16: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 3.

Nas Figuras 3.17(a) e 3.17(b) são apresentados os gráficos da ordem de convergência numérica com respeito a h , das funções ∇u e ∇v , respectivamente. Utilizam-se as referidas figuras e as respectivas tabelas para concluir que, para $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica fica aquém da ótima, conforme previsto no Teorema 2.35.



(a) ∇u .



(b) ∇v .

Figura 3.17: Ordem de convergência numérica em relação a h do Exemplo 3.

No que segue, investiga-se a ordem de convergência numérica em relação a δ . Para tal, foram considerados $h = \frac{1}{40}$, $r = 1, 2, 3$ e $\delta = \frac{1}{N_t}$ com $N_t = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20$. As Tabelas 3.21, 3.22 e 3.23 mostram os resultados da referida ordem de convergência numérica e os respectivos erros na norma $L^2(\Omega)$.

Tabela 3.21: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 1$ do Exemplo 3.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/6 | 3.54e-05 | 2.20 | 5.39e-04 | 0.12 | 2.29e-03 | 0.03 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/7 | 2.81e-05 | 1.50 | 5.34e-04 | 0.06 | 2.29e-03 | 0.01 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/8 | 2.39e-05 | 1.20 | 5.31e-04 | 0.04 | 2.29e-03 | 0.01 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/9 | 2.04e-05 | 1.35 | 5.29e-04 | 0.04 | 2.29e-03 | 0.01 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/10 | 1.85e-05 | 0.93 | 5.27e-04 | 0.03 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/11 | 1.65e-05 | 1.19 | 5.26e-04 | 0.03 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/12 | 1.53e-05 | 0.85 | 5.25e-04 | 0.02 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/14 | 1.31e-05 | 1.05 | 5.23e-04 | 0.02 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/16 | 1.15e-05 | 0.92 | 5.22e-04 | 0.02 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/18 | 1.07e-05 | 0.66 | 5.21e-04 | 0.01 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |
| 1/20 | 9.96e-06 | 0.66 | 5.20e-04 | 0.01 | 2.29e-03 | 0.00 | 8.55e-02 | 0.00 |

Tabela 3.22: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 2$ do Exemplo 3.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/6 | 3.74e-05 | 2.08 | 7.85e-05 | 1.85 | 2.37e-04 | 2.07 | 2.79e-03 | 0.05 |
| 1/7 | 3.02e-05 | 1.40 | 6.46e-05 | 1.26 | 1.91e-04 | 1.40 | 2.78e-03 | 0.02 |
| 1/8 | 2.59e-05 | 1.13 | 5.57e-05 | 1.10 | 1.65e-04 | 1.10 | 2.78e-03 | 0.01 |
| 1/9 | 2.31e-05 | 1.00 | 4.93e-05 | 1.04 | 1.48e-04 | 0.96 | 2.78e-03 | 0.01 |
| 1/10 | 2.05e-05 | 1.14 | 4.42e-05 | 1.04 | 1.31e-04 | 1.11 | 2.77e-03 | 0.01 |
| 1/11 | 1.84e-05 | 1.10 | 4.01e-05 | 1.01 | 1.18e-04 | 1.07 | 2.77e-03 | 0.01 |
| 1/12 | 1.70e-05 | 0.95 | 3.68e-05 | 1.01 | 1.10e-04 | 0.88 | 2.77e-03 | 0.00 |
| 1/14 | 1.44e-05 | 1.08 | 3.16e-05 | 0.98 | 9.39e-05 | 1.02 | 2.77e-03 | 0.00 |
| 1/16 | 1.27e-05 | 0.91 | 2.79e-05 | 0.93 | 8.42e-05 | 0.82 | 2.77e-03 | 0.00 |
| 1/18 | 1.12e-05 | 1.07 | 2.50e-05 | 0.94 | 7.51e-05 | 0.97 | 2.77e-03 | 0.00 |
| 1/20 | 1.03e-05 | 0.82 | 2.29e-05 | 0.86 | 6.98e-05 | 0.69 | 2.77e-03 | 0.00 |

Tabela 3.23: Ordem de convergência numérica em relação a δ e erros com $r = 3$ do Exemplo 3.

| δ | $\ e(U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(V_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla U_k)\ _2$ | ordem | $\ e(\nabla V_k)\ _2$ | ordem |
|----------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 1/6 | 3.65e-05 | 2.14 | 7.79e-05 | 1.86 | 2.29e-04 | 2.17 | 3.81e-04 | 1.82 |
| 1/7 | 2.97e-05 | 1.34 | 6.40e-05 | 1.28 | 1.86e-04 | 1.34 | 3.15e-04 | 1.23 |
| 1/8 | 2.55e-05 | 1.15 | 5.50e-05 | 1.13 | 1.60e-04 | 1.15 | 2.73e-04 | 1.07 |
| 1/9 | 2.22e-05 | 1.16 | 4.84e-05 | 1.08 | 1.39e-04 | 1.18 | 2.43e-04 | 1.01 |
| 1/10 | 1.99e-05 | 1.03 | 4.33e-05 | 1.07 | 1.25e-04 | 1.02 | 2.19e-04 | 0.99 |
| 1/11 | 1.79e-05 | 1.11 | 3.91e-05 | 1.06 | 1.12e-04 | 1.13 | 2.00e-04 | 0.95 |
| 1/12 | 1.65e-05 | 0.94 | 3.57e-05 | 1.03 | 1.04e-04 | 0.91 | 1.84e-04 | 0.92 |
| 1/14 | 1.40e-05 | 1.07 | 3.05e-05 | 1.04 | 8.76e-05 | 1.09 | 1.61e-04 | 0.88 |
| 1/16 | 1.23e-05 | 0.95 | 2.66e-05 | 1.02 | 7.73e-05 | 0.94 | 1.44e-04 | 0.83 |
| 1/18 | 1.09e-05 | 1.09 | 2.35e-05 | 1.05 | 6.79e-05 | 1.10 | 1.31e-04 | 0.80 |
| 1/20 | 9.92e-06 | 0.86 | 2.12e-05 | 0.98 | 6.22e-05 | 0.84 | 1.22e-04 | 0.71 |

Na Figura 3.18 são apresentados os gráficos da ordem de convergência numérica em relação a δ . Verifica-se através dos referidos gráficos e das respetivas tabelas que, para $\|u_k - U_k\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência numérica está suficientemente próxima da ordem ótima $O(\delta)$ quando $r = 1, 2, 3$. Para $\|v_k - V_k\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla(u_k - U_k)\|_{L^2(\Omega)}$ observa-se uma ordem de convergência aproximadamente $O(\delta)$ quando $r = 2, 3$. Para o caso $r = 1$, o gráfico da ordem de convergência numérica em δ é omitido. Isso ocorre devido ao facto de

o erro depender exclusivamente do termo h^{s-1} e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$, resultando em nenhuma ordem de convergência numérica em δ . Finalmente, para $\|\nabla(v_k - V_k)\|_{L^2(\Omega)}$, tem-se ordem ótima quando $r = 3$ e, para os casos $r = 1, 2$, não há ordem de convergência numérica devido ao termo h^{s-1} e a constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$.

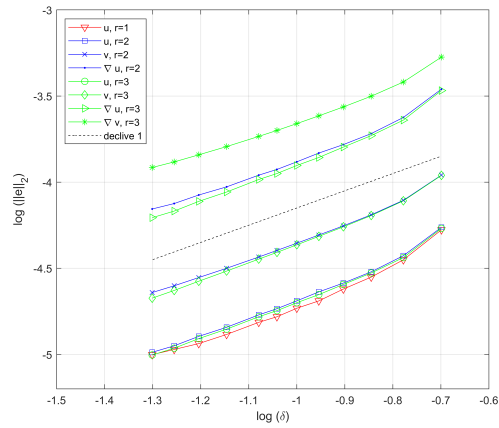


Figura 3.18: Ordem de convergência numérica em relação a δ do Exemplo 3.

Capítulo 4

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho investigou-se uma equação diferencial parabólica com o operador $p(x)$ -biharmónico. Aplicou-se uma mudança de variável conveniente e transformou-se o problema original num sistema formado por duas equações de segunda ordem.

Realizou-se a discretização em relação à variável temporal e definiu-se o problema semi-discreto. Através do teorema de Brouwer, demonstrou-se a existência da solução discreta. O uso de técnicas clássicas de Análise Funcional permitiu provar que a referida solução discreta é única. Adicionalmente, foram estabelecidas as estimativas à priori da solução discreta e notou-se que estas dependem exclusivamente dos dados iniciais. Além disso, para que as estimativas sejam uniformes, foi necessário considerar que a condição inicial no tempo seja igual a zero. Posteriormente, utilizou-se o Método de Rothe e mostrou-se que o sistema composto por duas equações de segunda ordem possui uma única solução fraca. Ainda na investigação semidiscreta, estabeleceram-se estimativas de erro e a ordem de convergência da solução semidiscreta para a solução fraca.

Posteriormente, definiu-se o problema discreto através da discretização em relação à variável espacial. Utilizou-se, novamente, o teorema Brouwer e obteve-se a existência da solução discreta. A unicidade da solução discreta foi obtida de maneira clássica, e estabeleceram-se as estimativas à priori da referida solução discreta. Da mesma forma que no caso semidiscreto, verificou-se que as estimativas à priori da referida solução discreta dependem dos dados iniciais, sendo necessário considerar que a condição inicial no tempo seja igual a zero para que sejam uniformes. Determinaram-se as estimativas de erros entre a solução discreta e a solução fraca na norma $L^2(\Omega)$. Além disso, investigou-se a ordem de convergência da solução discreta para a solução fraca, obtendo-se a convergência no espaço, no tempo, bem como um critério para a existência da ordem de convergência. Destaca-se que a mudança de variável aplicada no início da investigação foi extremamente vantajosa, pois possibilitou a obtenção da ordem de convergência em relação a δ e h para as funções u , v , ∇u e ∇v , utilizando elementos finitos com pouca regularidade, apenas C^0 para uma equação de quarta ordem.

Finalmente, aplicou-se o método dos elementos finitos e obteve-se um sistema de equações algébricas. Implementaram-se os códigos computacionais no software MATLAB para este sistema e os resultados obtidos foram explicitados em três exemplos.

No primeiro exemplo, investigou-se o problema numa dimensão espacial com a função de expoente variável satisfazendo $1.4 \leq p(x) < 1.93$. Verificou-se que as ordens de

convergência numéricas em relação a h e a δ estavam suficientemente próximas das ordens ótimas.

No segundo exemplo, estudou-se o caso em que $2.5 \leq p(x) \leq 3$ sobre um domínio unidimensional. Notou-se que a ordem de convergência numérica em relação a h estava suficientemente próxima da ordem ótima. Por outro lado, obteve-se uma ordem ótima ao investigar a ordem de convergência numérica em relação a δ .

No terceiro exemplo, abordou-se o problema num domínio bidimensional com a condição $4 \leq p(x) \leq 6.5$. Verificou-se que a ordem estava abaixo da ordem ótima. Este resultado está alinhado com os resultados do Teorema 2.35, onde a ordem de convergência depende do expoente $q(x)$, com $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. Esta ordem tende a diminuir à medida que $q \rightarrow 1$, o que ocorre quando $p \rightarrow \infty$. Posteriormente, verificou-se em alguns casos que a ordem de convergência numérica em relação a δ está suficientemente próxima da ordem ótima $O(\delta)$. Houve casos em que não existiu ordem de convergência numérica em δ , pois o erro dependia exclusivamente do termo h^{s-1} e da constante $C = C(u, v, p^-, p^+, T, \alpha)$.

Deste modo, os exemplos ilustraram que as simulações numéricas estão de acordo com o estudo analítico.

Futuramente, tem-se o objetivo de investigar outras propriedades da solução da referida equação parabólica, nomeadamente o comportamento assintótico e o *blow-up*. Além disso, pretende-se estudar as equações hiperbólicas com o operador $p(x)$ -biharmónico.

Bibliografia

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] Léo Agélas. Global regularity of solutions of equation modeling epitaxy thin film growth in \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$. *J. Evol. Equ.*, 15(1):89–106, 2015.
- [3] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Jorge Ferreira, and Willian S. Panni. Mixed finite element method for a beam equation with the p -biharmonic operator. *arXiv preprint arXiv:2202.10350*, 2022.
- [4] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Jorge Ferreira, and Willian S. Panni. Método de elementos finitos para uma equação de viga com o operador p -biharmônico. In *Proceedings of XV Encontro Acadêmico de Modelagem Computacional*, pages 145–154, Petrópolis, RJ, Brasil, February 2022. Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCTI. ISBN: 978-85-99961-24-7.
- [5] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Jorge Ferreira, and Willian S. Panni. Mixed finite element method for a beam equation with the $p(x)$ -biharmonic operator. *Comput. Math. Appl.*, 139:57–67, 2023.
- [6] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, and Belchior C. X. Mário. A mixed finite element method for a class of evolution differential equations with p -Laplacian and memory. *Appl. Numer. Math.*, 181:534–551, 2022.
- [7] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Willian S. Panni, and Jorge Ferreira. Equação de viga com o operador $p(x)$ -biharmônico. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, pages 1–7. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), September 2022. e-ISSN: 2359-0793.
- [8] Stanislav Antontsev and Sergey Shmarev. *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions*, volume 4 of *Atlantis Studies in Differential Equations*. Atlantis Press, Paris, 2015. Existence, uniqueness, localization, blow-up.
- [9] Abdesslem Ayoujil and Abdel R. El Amrouss. On the spectrum of a fourth order elliptic equation with variable exponent. *Nonlinear Anal.*, 71(10):4916–4926, 2009.
- [10] Abdesslem Ayoujil and Abdel R. El Amrouss. Continuous spectrum of a fourth order nonhomogeneous elliptic equation with variable exponent. *Electron. J. Differential Equations*, 2011(24):1–12, 2011.

- [11] Eric B. Becker, Graham F. Carey, and J. Tinsley Oden. *Finite elements: An Introduction*, volume I of *The Texas Finite Element Series*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- [12] Edwin M. Behrens and Johnny Guzmán. A mixed method for the biharmonic problem based on a system of first-order equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(2):789–817, 2011.
- [13] Matania Ben-Artzi, Ittai Chorev, Jean-Pierre Croisille, and Dalia Fishelov. A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(4):3087–3108, 2009.
- [14] Dirk Blömker and Christoph Gugg. On the existence of solutions for amorphous molecular beam epitaxy. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 3(1):61–73, 2002.
- [15] Dirk Blömker, Christoph Gugg, and Martin Raible. Thin-film-growth models: roughness and correlation functions. *European J. Appl. Math.*, 13(4):385–402, 2002.
- [16] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [17] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [18] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [19] Abderrazak Chaoui and Manal Djaghout. On the solution of evolution $p(\cdot)$ -Bilaplace equation with variable exponent. *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)*, 41:10, 2023.
- [20] Abderrazek Chaoui and Manal Djaghout. Galerkin mixed finite element method for parabolic p -biharmonic equation with memory term. *SeMA J.*, pages 1–15, 2023.
- [21] Guo Chen, Zhilin Li, and Ping Lin. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow. *Adv. Comput. Math.*, 29(2):113–133, 2008.
- [22] Yunmei Chen, Stacey Levine, and Murali Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4):1383–1406, 2006.
- [23] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

- [24] Shue-Sum Chow. Finite element error estimates for nonlinear elliptic equations of monotone type. *Numer. Math.*, 54(4):373–393, 1989.
- [25] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [26] Philippe G. Ciarlet and Pierre-Arnaud Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974)*, pages 125–145. Academic Press, New York-London, 1974.
- [27] Tuğrul Cömert and Erhan Pişkin. Global existence and decay of solutions for p -biharmonic parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Open J. Math. Anal.*, 6(1):39–47, 2022.
- [28] David V. Cruz-Uribe and Alberto Fiorenza. *Variable Lebesgue spaces. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.
- [29] Cristian-Paul Danet. On a hinged plate equation of nonconstant thickness. *Differ. Equ. Appl.*, 10(2):235–238, 2018.
- [30] Cristian-Paul Danet. Existence and uniqueness of weak and classical solutions for a fourth-order semilinear boundary value problem. *ANZIAM J.*, 61(3):305–319, 2019.
- [31] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, and Michael Růžička. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, volume 2017 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [32] Abdel R. El Amrouss, Fouzia Moradi, and Mimoun Moussaoui. Existence and multiplicity of solutions for a $p(x)$ -biharmonic problem with Neumann boundary conditions. *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)*, 40:15, 2022.
- [33] Abdelouahed El Khalil, Mohamed Laghzal, My Driss Morchid Alaoui, and Abdelfattah Touzani. Eigenvalues for a class of singular problems involving $p(x)$ -biharmonic operator and $q(x)$ -Hardy potential. *Adv. Nonlinear Anal.*, 9(1):1130–1144, 2020.
- [34] Mohammed El Mokhtar Ould El Mokhtar. Existence and nonexistence for boundary problem involving the p -biharmonic operator and singular nonlinearities. *J. Funct. Spaces*, pages Art. ID 7311332, 6, 2023.
- [35] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.

- [36] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [37] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and A. Linke. Finite volume schemes for the biharmonic problem on general meshes. *Math. Comp.*, 81(280):2019–2048, 2012.
- [38] Xianling Fan and Dun Zhao. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(2):424–446, 2001.
- [39] Bin Ge, Qing-Mei Zhou, and Yu-Hu Wu. Eigenvalues of the $p(x)$ -biharmonic operator with indefinite weight. *Z. Angew. Math. Phys.*, 66(3):1007–1021, 2015.
- [40] Emmanuil H. Georgoulis and Paul Houston. Discontinuous Galerkin methods for the biharmonic problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 29(3):573–594, 2009.
- [41] Roland Glowinski and Olivier R. Pironneau. Numerical methods for the first biharmonic equation and the two-dimensional Stokes problem. *SIAM Rev.*, 21(2):167–212, 1979.
- [42] Thirupathi Gudi. Finite element method for a nonlocal problem of Kirchhoff type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(2):657–668, 2012.
- [43] Tihomir Gyulov and Gheorghe Moroşanu. On a class of boundary value problems involving the p -biharmonic operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 367(1):43–57, 2010.
- [44] Markus Haase. *Functional analysis*, volume 156 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- [45] Shapour Heidarkhani, Ghasem A. Afrouzi, Shahin Moradi, Giuseppe Caristi, and Bin Ge. Existence of one weak solution for $p(x)$ -biharmonic equations with Navier boundary conditions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67(3):1–13, 2016.
- [46] Ronald H. W. Hoppe. A C^0 interior penalty discontinuous Galerkin method and an equilibrated *a posteriori* error estimator for a nonlinear fourth order elliptic boundary value problem of p -biharmonic type. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 56(6):2051–2079, 2022.
- [47] Thomas J. R. Hughes. *The finite element method*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [48] Nikos Katzourakis and Tristan Pryer. On the numerical approximation of p -biharmonic and ∞ -biharmonic functions. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 35(1):155–180, 2019.
- [49] J. Kačur. Method of Rothe in evolution equations. In *Equadiff 6 (Brno, 1985)*, volume 1192 of *Lecture Notes in Math.*, pages 23–34. Springer, Berlin, 1986.

- [50] Jozef Kačur. Application of Rothe's method to nonlinear evolution equations. *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied*, 25(1):63–81, 1975.
- [51] Jozef Kačur. Method of Rothe and nonlinear parabolic boundary value problems of arbitrary order. *Czechoslovak Math. J.*, 28(103)(4):507–524, 1978.
- [52] Jozef Kačur. Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions. *Math. Slovaca*, 30(3):213–237, 1980.
- [53] Belinda B. King, Oliver Stein, and Michael Winkler. A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth. *J. Math. Anal. Appl.*, 286(2):459–490, 2003.
- [54] Alan C. Lazer and Patrick J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev.*, 32(4):537–578, 1990.
- [55] Jichun Li. Mixed methods for fourth-order elliptic and parabolic problems using radial basis functions. *Adv. Comput. Math.*, 23(1-2):21–30, 2005.
- [56] Jichun Li. Optimal convergence analysis of mixed finite element methods for fourth-order elliptic and parabolic problems. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 22(4):884–896, 2006.
- [57] Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [58] Changchun Liu and Jinyong Guo. Weak solutions for a fourth order degenerate parabolic equation. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 54(1):27–39, 2006.
- [59] Changchun Liu and Pingping Li. A parabolic p -biharmonic equation with logarithmic nonlinearity. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 81(1):35–48, 2019.
- [60] Changchun Liu, Yitong Ma, and Hui Tang. Lower bound of blow-up time to a fourth order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth. *Appl. Math. Lett.*, 111:Paper No. 106609, 7, 2021.
- [61] Yang Liu. Existence and blow-up of solutions to a parabolic equation with nonstandard growth conditions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 99(2):242–249, 2019.
- [62] Yang Liu and Wenke Li. A class of fourth-order nonlinear parabolic equations modeling the epitaxial growth of thin films. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 14(12):4367–4381, 2021.

- [63] Zhiqing Liu and Zhong Bo Fang. Well-posedness and asymptotic behavior for a pseudo-parabolic equation involving p -biharmonic operator and logarithmic nonlinearity. *Taiwanese J. Math.*, 27(3):487–523, 2023.
- [64] Nuno D. Lopes and Hermenegildo B. de Oliveira. Continuous/discontinuous Galerkin approximations for a fourth-order nonlinear problem. *Comput. Math. Appl.*, 97:122–152, 2021.
- [65] Yao Lu and Yongqiang Fu. Multiplicity results for solutions of p -biharmonic problems. *Nonlinear Anal.*, 190:111596, 13, 2020.
- [66] Moloud Makvand Chaharlang and Abdolrahman Razani. A fourth order singular elliptic problem involving p -biharmonic operator. *Taiwanese J. Math.*, 23(3):589–599, 2019.
- [67] Giovanni Molica Bisci and Dušan Repovš. Multiple solutions of p -biharmonic equations with Navier boundary conditions. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 59(2):271–284, 2014.
- [68] Antonín Novotný and Ivan Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, volume 27 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [69] Anass Ourraoui. On a class of a boundary value problems involving the $p(x)$ -biharmonic operator. *Proyecciones*, 38(5):955–967, 2019.
- [70] Erhan Pişkin and Gülistan Butakın. Blow-up phenomena for a $p(x)$ -biharmonic heat equation with variable exponent. *Math. Morav.*, 27(2):25–32, 2023.
- [71] Erhan Pişkin and Baver Okutmuşur. *An introduction to Sobolev spaces*. Bentham Science Publishers, Ltd., Sharjah, 2021.
- [72] Tristan Pryer. Discontinuous Galerkin methods for the p -biharmonic equation from a discrete variational perspective. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 41:328–349, 2014.
- [73] Chengyuan Qu, Wenshu Zhou, and Bo Liang. Asymptotic behavior for a fourth-order parabolic equation modeling thin film growth. *Appl. Math. Lett.*, 78:141–146, 2018.
- [74] Michael Růžička. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [75] Albert. N. Sandjo, Salissou Moutari, and Youssou Gningue. Solutions of fourth-order parabolic equation modeling thin film growth. *J. Differential Equations*, 259(12):7260–7283, 2015.
- [76] Mohammad Shahrouzi, Faramarz Tahamtani, Jorge Ferreira, and Mirelson M. Freitas. Blow-up results for a Boussinesq-type plate equation with a logarithmic damping term and variable-exponent nonlinearities. *Appl. Math. (Warsaw)*, 50(1):81–96, 2023.

- [77] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.
- [78] Mohamed Talbi, Mohammed Filali, Khalid Soualhine, and Najib Tsouli. On a $p(x)$ -biharmonic Kirchhoff type problem with indefinite weight and no flux boundary condition. *Collect. Math.*, 73(2):237–252, 2022.
- [79] Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [80] Jiaojiao Wang and Changchun Liu. p -biharmonic parabolic equations with logarithmic nonlinearity. *Electron. J. Differential Equations*, pages 1–18, 2019.
- [81] Michael Winkler. Global solutions in higher dimensions to a fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin-film growth. *Z. Angew. Math. Phys.*, 62(4):575–608, 2011.
- [82] Yu-Li You and Mostafa Kaveh. Fourth-order partial differential equations for noise removal. *IEEE Trans. Image Process.*, 9(10):1723–1730, 2000.
- [83] Qi Zhang and Qing Miao. Multiple solutions for a nonlocal elliptic problem involving $(p(x), q(x))$ -biharmonic operator. *J. Math.*, pages Art. ID 5547669, 12, 2021.
- [84] Xiaopeng Zhao and Changchun Liu. The existence of global attractor for a fourth-order parabolic equation. *Appl. Anal.*, 92(1):44–59, 2013.
- [85] Vasilii V. Zhikov. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 50(4):675–710, 1986.
- [86] Jun Zhou. Global asymptotical behavior of solutions to a class of fourth order parabolic equation modeling epitaxial growth. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 48:54–70, 2019.
- [87] Zheng Zhou. On a $p(x)$ -biharmonic problem with Navier boundary condition. *Bound. Value Probl.*, 2018(149):1–14, 2018.

Apêndice A

Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão sobre as definições matemáticas e os teoremas utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente definem-se os espaços de Lebesgue com expoente constante $L^p(\Omega)$ e são abordadas as distribuições para, posteriormente, definir os espaços de Sobolev com expoente constante $W^{m,p}(\Omega)$. Além disto, são definidos os espaços de Bochner $L^p(a, b; X)$ e os espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$. Para mais detalhes, indicam-se as referências [1, 8, 17, 28, 31, 36, 38, 44, 57, 68, 71, 77].

Adicionalmente, explicitam-se os principais conceitos e os teoremas relacionados com a discretização espacial. Apresenta-se um resumo sobre o método dos elementos finitos e definem-se as funções de base de grau $r \geq 1$ que geram o espaço dos elementos finitos em domínios unidimensionais e bidimensionais. A respectiva teoria pode ser investigada com detalhes nas referências [11, 16, 25, 35, 47, 79].

No final deste capítulo há uma secção contendo as desigualdades fundamentais e os teoremas que não se enquadram nas secções anteriores. Detalhes adicionais podem ser consultados nas referências [6, 23, 24, 36, 42, 68].

Destaca-se que, as constantes que são independentes dos parâmetros e das funções são denotadas C_i , com $i \in \mathbb{N}^*$, ou simplesmente por C .

A.1 Espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Nesta secção definem-se os espaços de Lebesgue com expoente constante, nomeadamente, $L^p(\Omega)$. Além disto, apresentam-se os teoremas fundamentais relacionados aos referidos espaços.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Denotam-se por $L^p(\Omega)$ os espaços vectoriais que são formados pelas classes de funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$ é finita, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach ao ser equipado com a

norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, isto é, um espaço de Banach com um produto interno definido por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Por outro lado, o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$ é constituído pelas classes de funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são essencialmente limitadas, nomeadamente,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \exists C \geq 0, |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u|$$

é um espaço de Banach.

Ao longo deste trabalho, para cada $1 \leq p \leq \infty$, denomina-se q o expoente conjugado de Hölder de p tal que $1 \leq q \leq \infty$ e:

i) Se $1 < p < \infty$, então $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Equivalentemente, $q = \frac{p}{p-1}$ ou $p = \frac{q}{q-1}$;

ii) Se $p = 1$, então $q = \infty$. Analogamente, se $p = \infty$, então $q = 1$.

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder [36, p. 706]). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Observação A.2. *Através da desigualdade de Hölder, tem-se*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.3 (Desigualdade de Minkowski [36, p. 707]). *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$, então,*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema A.4. [17, p. 118] *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $1 \leq p \leq r \leq \infty$, então existe uma*

imersão contínua $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^r(\Omega)}, \quad \forall u \in L^r(\Omega),$$

onde $C = |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$.

Teorema A.5. [68, p. 11] Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach localmente uniformemente convexo e reflexivo.

Teorema A.6 (Semicontinuidade inferior da norma [17, p. 58]). Sejam X um espaço de Banach e $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em X . Se $u_n \rightharpoonup u$ em X , então $\|u_n\|_X$ é limitada e

$$\|u\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X.$$

Teorema A.7. [57, p. 12] Sejam Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^d , u e $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ funções de $L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, tais que:

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad u_n \rightarrow u, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

então $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$.

A.2 Distribuições

Esta secção tem o objetivo de enunciar os principais conceitos relacionados às distribuições para, na secção seguinte, definir os espaços de Sobolev.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto. Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto. Para uma função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se:

- i) $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$;
- ii) $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$ é um conjunto compacto de Ω .

Considera-se $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ um multi-índice de números naturais. Denota-se por $|\beta| = \sum_{i=1}^d \beta_i$ a ordem deste multi-índice e por D^β a derivada parcial de ordem $|\beta|$ da função u , isto é,

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}}.$$

Quando $\beta = (0, 0, \dots, 0)$, tem-se $D^0 u = u$.

Definição A.8. Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $C_0^{\infty}(\Omega)$ que converge para uma função $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Então, existe um conjunto compacto K tal que $\text{supp}(u) \subset K$, $\text{supp}(u_n) \subset K$ para todo n e

$$D^{\beta}u_n \rightarrow D^{\beta}u \text{ uniformemente em } K \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ para todo multi-índice } \beta.$$

Indica-se por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço vetorial formado por $C_0^{\infty}(\Omega)$ munido da convergência dada pela Definição A.8. Por $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota-se o espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, os elementos pertencentes à $\mathcal{D}'(\Omega)$ são denominados funções generalizadas ou distribuições.

Definição A.9. Uma distribuição $D^{\beta}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita derivada no sentido das distribuições de ordem β da distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\int_{\Omega} D^{\beta}u v dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} u D^{\beta}v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação A.10. Se $u \in C^m(\Omega)$, então as derivadas no sentido das distribuições de u , até a ordem m , são idênticas às derivadas clássicas.

A.3 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Inicia-se esta secção com a definição dos espaços de Sobolev com expoente constante, nomeadamente, os espaços $W^{m,p}(\Omega)$. Posteriormente são apresentados as principais propriedades e os teoremas dos referidos espaços.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Por $W^{m,p}(\Omega)$ denotam-se os espaços das funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que as suas derivadas no sentido das distribuições até a ordem m são também elementos de $L^p(\Omega)$, nomeadamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^{\beta}u \in L^p(\Omega) \forall \beta; |\beta| \leq m\}.$$

Define-se a norma neste espaço por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|=0}^m \|D^{\beta}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\beta|=0}^m \text{ess sup}_{\Omega} |D^{\beta}u|.$$

Proposição A.11. [68, p. 41] Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ possuem as seguintes propriedades:

- i) Se $1 \leq p \leq \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach;
- ii) Quando $p = 2$, denota-se por $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ o espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\beta|=0}^m D^{\beta} u D^{\beta} v dx.$$

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho do conjunto $C_0^{\infty}(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Destaca-se que o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é interpretado como o conjunto das funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tais que $D^{\beta} u = 0$ na fronteira $\partial\Omega$ para todo $|\beta| \leq m - 1$. No decorrer deste trabalho, denota-se por $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Teorema A.12. [68, p. 41] *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, seja um conjunto aberto com fronteira Lipschitz contínua. As seguintes afirmações são válidas:*

- i) Para $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço separável;
- ii) Para $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo;
- iii) Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $C^{\infty}(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema A.13 (Desigualdade de Poincaré [17, p. 290]). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto e limitado. Então, existe uma constante C que depende apenas de Ω e de p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema A.14. [68, p. 44] *Sejam $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e Ω um domínio Lipschitz e limitado.*

- i) Se $m < \frac{d}{p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$;
- ii) Se $m = \frac{d}{p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $1 \leq r < \infty$;
- iii) Se $\frac{d}{p} < m < \frac{d}{p} + 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,m-d/p}(\overline{\Omega})$;
- iv) Se $m = \frac{d}{p} + 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, onde $0 < \beta < 1$ e

$$C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}); \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\beta}} < \infty \right\};$$

- v) Se $m > \frac{d}{p} + 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

A.4 Espaços de Bochner $L^p(a, b; X)$

Nesta secção faz-se uma breve definição dos espaços de Bochner $L^p(a, b; X)$ e explicitam-se as suas propriedades.

Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Denotam-se por $L^p(a, b; X)$ os espaços de Bochner formados pelas classes de funções $u : (a, b) \rightarrow X$ tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ seja integrável à Lebesgue em (a, b) . Define-se

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Proposição A.15. [68, p. 56] *Os espaços $L^p(a, b; X)$ possuem as seguintes propriedades:*

- i) *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(a, b; X)$ é um espaço de Banach;*
- ii) *Se X é um espaço reflexivo, então $L^p(a, b; X)$ é um espaço reflexivo com $1 < p < \infty$;*
- iii) *Se X é um espaço de Banach separável, então $L^p(a, b; X)$ é um espaço de Banach separável com $1 \leq p < \infty$.*

O próximo teorema auxilia na demonstração da ordem de convergência investigada neste trabalho.

Teorema A.16. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, 2, \dots, n$. Suponha que o intervalo $I = [0, T]$ seja particionado uniformemente em n subintervalos de tamanho $\delta = t_k - t_{k-1}$ onde t_k denota os pontos deste particionamento. Se $u, u_t \in L^2(\Omega)$ para todo t e $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Então,

$$\left\| u_t(x, t_k) - \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Demonstração

Aplica-se a expansão em série de Taylor da função $u(x, t)$ no ponto $t = t_{k-1}$ próximo de $t = t_k$,

$$u(x, t_{k-1}) = u(x, t_k) + u_t(x, t_k)(t_{k-1} - t_k) + \frac{u_{tt}(x, \tau)}{2!}(t_{k-1} - t_k)^2,$$

onde $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$. Desde que $\delta = t_k - t_{k-1}$, então

$$u(x, t_{k-1}) = u(x, t_k) - \delta u_t(x, t_k) + \frac{\delta^2 u_{tt}(x, \tau)}{2},$$

logo,

$$u_t(x, t_k) - \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\delta} = \frac{\delta u_{tt}(x, \tau)}{2}.$$

Aplica-se a norma em $L^2(\Omega)$,

$$\left\| u_t(x, t_k) - \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|u_{tt}(x, \tau)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{A.1})$$

Por hipótese, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, assim para $\tau \in (t_{k-1}, t_k) \subset [0, T]$ tem-se

$$\|u_{tt}(x, \tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u_{tt}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{tt}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) em (A.1), demonstra-se o teorema. ■

A.5 Espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$

Na secção atual, definem-se os espaços de Lebesgue com expoente variável, nomeadamente, os espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$. Enunciam-se as propriedades e os teoremas dos referidos espaços. Além disto, demonstram-se teoremas importantes que auxiliam na investigação deste trabalho.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua. Denomina-se expoente variável a função mensurável $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ e para uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ define-se o funcional

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

O espaço generalizado de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ é formado pelas classes de funções u mensuráveis, tais que o funcional $\rho_{p(x)}(u)$ é finito, nomeadamente,

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \rho_{p(x)}(u) < \infty \right\}.$$

Neste espaço está definida a norma de Luxemburg

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \beta > 0; \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\beta}\right) \leq 1 \right\}.$$

Proposição A.17. [8, p. 4] *O funcional $\rho_{p(x)}(u)$ possui as seguintes propriedades:*

i) $\rho_{p(x)}(u) \geq 0$, para todo u ;

ii) $\rho_{p(x)}(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Denotam-se por

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

e considera-se para todo $x \in \Omega$, $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$.

Teorema A.18. [8, p. 8] *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua. Se para todo $x \in \Omega$, $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, então para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ tem-se*

$$\min \left\{ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \right\} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \right\}.$$

Equivalentemente,

$$\min \left\{ \rho_{p(x)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(x)}(u)^{\frac{1}{p^+}} \right\} \leq \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \max \left\{ \rho_{p(x)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(x)}(u)^{\frac{1}{p^+}} \right\}.$$

Teorema A.19. [8, p. 16] *Sob as hipóteses do Teorema A.18, $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Teorema A.20. [8, p. 11] *Sejam $p(x)$ e $r(x)$ funções de expoente variável com $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, $r(x) \in [r^-, r^+] \subset (1, \infty)$ para todo $x \in \Omega$. Se $r(x) \geq p(x)$ q.s. em Ω , então existe uma imersão contínua $L^{r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}, \quad \forall u \in L^{r(x)}(\Omega),$$

onde $C = C(|\Omega|, p^-, p^+, r^-, r^+)$.

Para $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, denomina-se $q(x)$ o expoente conjugado de Hölder de $p(x)$ tal que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$ e

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1 \Leftrightarrow q(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1} \Leftrightarrow p(x) = \frac{q(x)}{q(x) - 1}.$$

Teorema A.21 (Desigualdade de Young com expoentes variáveis [76, p. 6]). *Se $a, b, \varepsilon > 0$, $p(x)$ e $q(x)$ são expoentes conjugados, então*

$$ab \leq \varepsilon a^{p(x)} + C_\varepsilon b^{q(x)},$$

onde

$$C_\varepsilon = \frac{1}{q(x) (\varepsilon p(x))^{\frac{q(x)}{p(x)}}}.$$

Teorema A.22 (Desigualdade de Hölder com expoentes variáveis [8, p. 9]). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua. Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, $p(x)$ e $q(x)$ são expoentes conjugados, então*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Teorema A.23. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado, com fronteira Lipschitz contínua e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (0, 1]$ para todo $x \in \Omega$. Se $u \in L^2(\Omega)$, então $|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq C \max \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\},$$

onde $C = 2 \max \left\{ |\Omega|^{\frac{2-p^-}{2}}, |\Omega|^{\frac{2-p^+}{2}} \right\}$.

Demonstração

Aplica-se a desigualdade de Hölder com expoentes variáveis (Teorema A.22) e obtém-se

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq 2 \|1\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega)} \left\| |u|^{p(x)} \right\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega)}. \quad (\text{A.3})$$

Através do Teorema A.18, segue que

$$\|1\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega)} \leq \max \left\{ |\Omega|^{\frac{2-p^-}{2}}, |\Omega|^{\frac{2-p^+}{2}} \right\} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\left\| |u|^{p(x)} \right\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega)} \leq \max \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p^-}, \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p^+} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3), conclui-se a demonstração. ■

Teorema A.24. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 2$, um conjunto aberto, limitado, com fronteira Lipschitz contínua e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ para todo $x \in \Omega$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $|u|^{p(x)-1} \in L^2(\Omega)$, para todo $x \in \Omega$, e*

$$\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max \left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^- - 1}, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^+ - 1} \right\},$$

onde $C = C_1 \max \left\{ |\Omega|^{\frac{p^+ + 2 - p^-}{2(p^+ + 1)}}, |\Omega|^{\frac{1}{p^+ + 1}} \right\}$ e C_1 é uma constante.

Demonstração

Através da desigualdade de Hölder com expoentes variáveis (Teorema A.22), obtemos

$$\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left\| 1 \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p^++2-p(x)}}(\Omega)} \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p(x)-1}}(\Omega)}. \quad (\text{A.6})$$

Do Teorema A.18 vem que

$$\begin{aligned} \left\| 1 \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p^++2-p(x)}}(\Omega)} &\leq \max \left\{ |\Omega|^{\frac{2}{p^++1}}, |\Omega|^{\frac{p^++2-p^-}{p^++1}} \right\}, \\ \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p(x)-1}}(\Omega)} &\leq \max \left\{ \|u\|_{L^{2(p^++1)}(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{L^{2(p^++1)}(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por hipótese $p(x) \in (1, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d \leq 2$, assim pelo Teorema A.14 existe uma imersão contínua $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p^++1)}(\Omega)$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p(x)-1}}(\Omega)} &\leq C_2 \max \left\{ \|u\|_{H^1(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{H^1(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\} \\ &\leq C_3 \max \left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.7) e (A.8) em (A.6), demonstra-se o teorema. ■

Teorema A.25. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 2$, um conjunto aberto, limitado, com fronteira Lipschitz contínua e $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \min\{3, \frac{d+2}{d-2}\})$ para todo $x \in \Omega$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $|u|^{p(x)-1} \in L^2(\Omega)$, para todo $x \in \Omega$, e*

$$\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max \left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^- - 1}, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^+ - 1} \right\},$$

onde $C = C_1 \max\{|\Omega|^{\frac{3-p^+}{2(p^++1)}}, |\Omega|^{\frac{3+p^+-2p^-}{2(p^++1)}}\}$ e C_1 é uma constante.

Demonstração

Aplica-se a desigualdade de Hölder com expoentes variáveis (Teorema A.22) e obtém-se

$$\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left\| 1 \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p^++3-2p(x)}}(\Omega)} \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{2(p(x)-1)}}(\Omega)}. \quad (\text{A.9})$$

Através do Teorema A.18, segue que

$$\begin{aligned} \left\| 1 \right\|_{L^{\frac{p^++1}{p^++3-2p(x)}}(\Omega)} &\leq \max \left\{ |\Omega|^{\frac{3-p^+}{p^++1}}, |\Omega|^{\frac{3+p^+-2p^-}{p^++1}} \right\}, \\ \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{2(p(x)-1)}}(\Omega)} &\leq \max \left\{ \|u\|_{L^{p^++1}(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{L^{p^++1}(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Desde que $1 < p(x) < \min\{3, \frac{d+2}{d-2}\}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d > 2$, tem-se pelo Teorema A.14 que existe uma imersão contínua $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^++1}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| |u|^{2(p(x)-1)} \right\|_{L^{\frac{p^++1}{2(p(x)-1)}}(\Omega)} &\leq C_2 \max \left\{ \|u\|_{H^1(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{H^1(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\} \\ &\leq C_3 \max \left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p^- - 1)}, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p^+ - 1)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo (A.10) e (A.11) em (A.9), conclui-se o teorema. ■

Teorema A.26. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz contínua. Suponha que, para todo $x \in \Omega$, $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (0, 1)$ e $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ (nota-se que, $q(x) < 0$). Se u e v são funções mensuráveis com $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, então*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \geq \left(\frac{C_1}{2}\right)^{\frac{1}{p^*}} \rho_{p(x)}(u)^{\frac{1}{p^*}},$$

onde

$$p^* = \begin{cases} p^+, & \text{se } \|uv\|_{L^1(\Omega)} \geq 1, \\ p^-, & \text{se } \|uv\|_{L^1(\Omega)} < 1, \end{cases}$$

$C_1 > 0$ é uma constante tal que

$$C_1 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{q(x)}(v)^{1-p^-}, \rho_{q(x)}(v)^{1-p^+} \right\}}.$$

Demonstração

Desde que $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (-\infty, 0)$ e $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, então

$$0 < \int_{\Omega} v^{q(x)} dx < \infty \Leftrightarrow 0 < \int_{\Omega} \frac{1}{v^{-q(x)}} dx < \infty. \quad (\text{A.12})$$

Por outro lado, sejam $r(x)$ e $s(x)$ expoentes conjugados tais que

$$1 < r^- = \frac{1}{p^+} \leq r(x) = \frac{1}{p(x)} \leq r^+ = \frac{1}{p^-} < \infty \quad (\text{A.13})$$

e

$$1 < s^- = \frac{r^+}{r^+ - 1} \leq s(x) = \frac{r(x)}{r(x) - 1} \leq s^+ = \frac{r^-}{r^- - 1} < \infty. \quad (\text{A.14})$$

Definindo as funções auxiliares

$$\varphi = v^{-\frac{1}{r(x)}} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\psi = (uv)^{\frac{1}{r(x)}} \quad (\text{A.16})$$

tem-se

$$\varphi^{s(x)} = v^{q(x)}. \quad (\text{A.17})$$

De facto, através da definição de φ em (A.15) segue que

$$\varphi^{s(x)} = \left(v^{-\frac{1}{r(x)}} \right)^{s(x)}.$$

De (A.14), vem que

$$\varphi^{s(x)} = \left(v^{-\frac{1}{r(x)}} \right)^{\frac{r(x)}{r(x)-1}} = (v)^{-\frac{1}{r(x)-1}} = (v)^{\frac{1}{1-r(x)}}.$$

Substituindo (A.13),

$$\varphi^{s(x)} = (v)^{\frac{1}{1-\frac{1}{p(x)}}} = (v)^{\frac{1}{\frac{p(x)-1}{p(x)}}} = (v)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} = v^{q(x)},$$

pois por hipótese $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. Desta maneira, demonstrou-se que a igualdade (A.17) é satisfeita.

Por outro lado, de (A.12) e (A.17), vem que

$$0 < \int_{\Omega} v^{q(x)} dx < \infty \Leftrightarrow 0 < \int_{\Omega} \varphi^{s(x)} dx < \infty,$$

isto implica que $\varphi \in L^{s(x)}(\Omega)$.

Além disto, através de (A.16), tem-se

$$\psi^{r(x)} = uv.$$

Utilizando a hipótese de que as funções u e v são mensuráveis com $uv \in L^1(\Omega)$, obtém-se

$$\int_{\Omega} \psi^{r(x)} dx = \int_{\Omega} uv dx < C,$$

logo $\psi \in L^{r(x)}(\Omega)$.

Através de (A.13), tem-se

$$\int_{\Omega} u^{p(x)} dx = \int_{\Omega} u^{\frac{1}{r(x)}} dx = \int_{\Omega} (v)^{-\frac{1}{r(x)}} (v)^{\frac{1}{r(x)}} (u)^{\frac{1}{r(x)}} dx = \int_{\Omega} (v)^{-\frac{1}{r(x)}} (uv)^{\frac{1}{r(x)}} dx.$$

De (A.15) e (A.16), segue que

$$\int_{\Omega} u^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \varphi \psi dx.$$

Através da desigualdade de Hölder (Teorema A.22),

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq 2 \|\psi\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{s(x)}(\Omega)}.$$

Por (A.16), vem que

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \left\| (uv)^{\frac{1}{r(x)}} \right\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{s(x)}(\Omega)}.$$

Aplica-se o Teorema A.18,

$$\begin{aligned} & \rho_{p(x)}(u) \\ & \leq 2 \max \left\{ \rho_{r(x)} \left((uv)^{\frac{1}{r(x)}} \right)^{\frac{1}{r^-}}, \rho_{r(x)} \left((uv)^{\frac{1}{r(x)}} \right)^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^+}} \right\}, \end{aligned}$$

simplificando,

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |uv| dx \right)^{\frac{1}{r^-}}, \left(\int_{\Omega} |uv| dx \right)^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^+}} \right\},$$

ou seja,

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{s(x)}(\varphi)^{\frac{1}{s^+}} \right\}.$$

De (A.17), tem-se

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \rho_{s(x)} \left((v)^{\frac{q(x)}{s(x)}} \right)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{s(x)} \left((v)^{\frac{q(x)}{s(x)}} \right)^{\frac{1}{s^+}} \right\},$$

simplificando novamente,

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{s^-}}, \left(\int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{s^+}} \right\},$$

isto é,

$$\rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\} \max \left\{ \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^+}} \right\}.$$

Desde que v seja uma função não nula, segue que

$$\rho_{p(x)}(u) \left[\frac{1}{\max \left\{ \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^+}} \right\}} \right] \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\}.$$

Através da Proposição A.17, tem-se $0 < \frac{1}{\rho_{q(x)}(v)} < \infty$. Por simplificação, considera-se

$$C_1 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^+}} \right\}},$$

onde $C_1 \in (0, \infty)$. Assim,

$$C_1 \rho_{p(x)}(u) \leq 2 \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^-}}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{r^+}} \right\}.$$

Logo,

$$C_1^{r^-} \rho_{p(x)}(u)^{r^-} \leq 2^{r^-} \max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{r^-}{r^+}} \right\}. \quad (\text{A.18})$$

Através de (A.13) tem-se $r^- \leq r^+$ e $\frac{r^-}{r^+} \leq 1$. Consequentemente, faz-se necessário investigar dois casos para a estimativa (A.18).

Caso $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \geq 1$, então

$$\max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{r^-}{r^+}} \right\} = \|uv\|_{L^1(\Omega)}.$$

Assim, a estimativa (A.18) torna-se

$$\left(\frac{C_1}{2} \right)^{r^-} \rho_{p(x)}(u)^{r^-} \leq \|uv\|_{L^1(\Omega)}. \quad (\text{A.19})$$

Caso $\|uv\|_{L^1(\Omega)} < 1$, então

$$\max \left\{ \|uv\|_{L^1(\Omega)}, \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{r^-}{r^+}} \right\} = \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{r^-}{r^+}}.$$

Desta maneira, a estimativa (A.18) passa a ser

$$C_1^{r^-} \rho_{p(x)}(u)^{r^-} \leq 2^{r^-} \|uv\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{r^-}{r^+}},$$

ou seja,

$$\left(\frac{C_1}{2}\right)^{r^+} \rho_{p(x)}(u)^{r^+} \leq \|uv\|_{L^1(\Omega)}. \quad (\text{A.20})$$

De (A.19) e (A.20), tem-se

$$\left(\frac{C_1}{2}\right)^{r^*} \rho_{p(x)}(u)^{r^*} \leq \|uv\|_{L^1(\Omega)},$$

onde

$$r^* = \begin{cases} r^-, & \text{se } \|uv\|_{L^1(\Omega)} \geq 1, \\ r^+, & \text{se } \|uv\|_{L^1(\Omega)} < 1, \end{cases}$$

e

$$C_1 \leq \frac{1}{\max \left\{ \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^-}}, \rho_{q(x)}(v)^{\frac{1}{s^+}} \right\}},$$

com $C_1 \in (0, \infty)$.

Finalmente, usam-se as estimativas (A.13) e (A.14) para obtermos os valores de r^- , r^+ , s^- e s^+ em função de p^- e p^+ . ■

A.6 Discretização no espaço

Nesta secção são apresentadas as definições e os teoremas relacionados à discretização espacial.

Definição A.27 (*d*-simplex [23, p. 112]). *Sejam $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{d+1}$ vetores de \mathbb{R}^d tais que, para todo $i = 2, 3, \dots, d+1$, os vetores*

$$\nu_i - \nu_1$$

*são linearmente independentes. Denomina-se o fecho convexo de ν_i como *d*-simplex de vértices $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{d+1}$.*

Destaca-se que, quando $d = 1$ tem-se que o 1-simplex representa um segmento de reta. Se $d = 2$, então o 2-simplex é um triângulo e para $d = 3$ o 3-simplex é definido como um tetraedro.

Considera-se \mathcal{T}_h uma partição não degenerada do domínio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, em d -simplex com parâmetro h , tal que $0 < h < 1$. Assim, o conjunto Ω é dividido num número finito de subconjuntos T_i , $i = 1, \dots, N_e$, denominados de elementos finitos e que satisfazem a teoria do método dos elementos finitos apresentada por Ciarlet [25] e Thomée [79]. Nomeadamente:

$$\text{i) } \Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} T_i;$$

$$\text{ii) } \text{int}(T_i) \neq \emptyset, \forall T_i \in \mathcal{T}_h;$$

$$\text{iii) } \text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset, \forall T_i, T_j \in \mathcal{T}_h \text{ com } i \neq j;$$

$$\text{iv) } \text{cada lado de } T_i \text{ ou pertence à fronteira do domínio } \Omega \text{ ou é lado de outro } T_j \in \mathcal{T}_h;$$

$$\text{v) } \text{cada } T_i \text{ possui fronteira Lipschitz contínua,}$$

onde $\text{int}(T_i)$ representa o interior do subconjunto T_i .

Define-se o espaço dos elementos finitos $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ como o espaço das funções contínuas sobre $\bar{\Omega}$ que são polinómios de grau r , $r \geq 1$, em cada d -simplex de \mathcal{T}_h e que se anulam na fronteira $\partial\Omega$, isto é,

$$S_h = \left\{ u \in C_0^0(\bar{\Omega}) ; u|_{T_i} \text{ é um polinómio de grau } r \geq 1, \forall T_i \in \mathcal{T}_h \right\},$$

com $i = 1, \dots, N_e$. Considera-se que o espaço S_h é gerado por uma base de Lagrange, nomeadamente,

$$S_h = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_e} \rangle.$$

Definição A.28 (Projeção de Ritz [79, p. 8]). *Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $R_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_h$. Denota-se por $R_h u$ a projeção de Ritz da função u sobre o espaço S_h tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx, \forall \psi \in S_h.$$

Teorema A.29. [79, p. 8] *Se $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ e $R_h : H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow S_h$ é a projeção de Ritz, então, para toda função $u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, tem-se*

$$\|u - R_h u\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(u - R_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad 1 \leq s \leq r + 1.$$

Nas subsecções seguintes, explicitam-se as funções φ_i , $i = 1, \dots, N_e$, que formam a base do espaço de elementos finitos S_h , para mais detalhes indicam-se as referências Brenner e Scott [16], Ciarlet [25] e Becker, Carey e Oden [11].

A.6.1 Funções de base lineares unidimensionais

Nesta subsecção definem-se as funções de base lineares por partes para o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$. Por simplicidade, investiga-se o caso em que $\Omega = [0, 1]$ e particiona-se uniformemente o referido intervalo num número finito de elementos T_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, conforme exibido na Figura A.1.

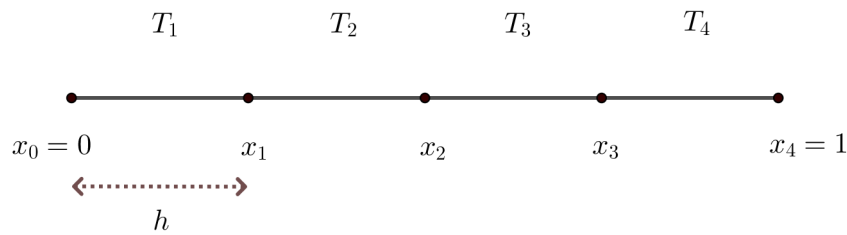


Figura A.1: Partição do intervalo $[0, 1]$ formada por quatro elementos finitos.

Devido ao facto do particionamento ser feito uniformemente, então o comprimento de cada elemento finito é constante e definido por $h = \frac{x_1 - x_0}{4} = 0.25$. Além disto, os pontos x_i são usualmente denominados de pontos nodais e o intervalo particionado é nomeado de malha de elementos finitos.

Para definir as funções de base, seguem-se os seguintes critérios:

- i) Escolhem-se funções relativamente simples e que estejam definidas em cada elemento sobre a malha;
- ii) Pertencem ao espaço $H_0^1(\Omega)$;
- iii) Os valores da solução aproximada são precisamente os valores da solução exata nos pontos nodais.

Um conjunto de funções de base que satisfazem esses três critérios é exibido na Figura A.2 e definido por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

onde $h = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1, 2, 3$. Consequentemente, tem-se

$$\frac{d\varphi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ -\frac{1}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases}$$

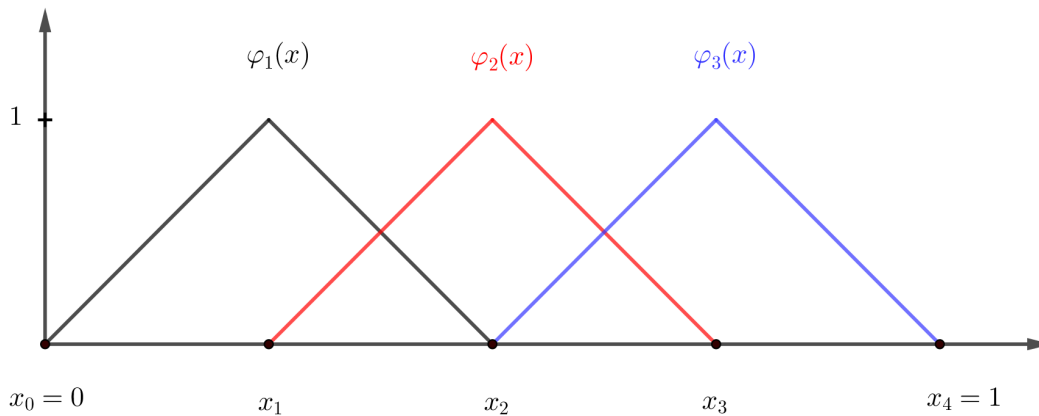


Figura A.2: Funções de base lineares.

Na literatura, as funções de base da Figura A.2 são conhecidas como funções chapéu. Destaca-se que as referidas funções são lineares por partes em cada elemento finito da malha e satisfazem a condição de ortogonalidade

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

A.6.2 Funções de base de grau arbitrário unidimensionais

Nesta subsecção são determinadas as funções de base de grau $r \geq 1$ que formam o espaço de elementos finitos S_h . Nomeadamente, neste trabalho, utilizam-se elementos finitos de Lagrange para a construção destas funções de base. Os referidos elementos satisfazem os seguintes critérios:

- i) Para o domínio $\Omega = [0, a]$, cria-se uma malha uniformemente particionada e escolhe-se um elemento finito de referência T_e . Estabelece-se um sistema de coordenadas ξ com origem no centro do elemento T_e , dimensionado de modo que $\xi = -1$ no extremo esquerdo e $\xi = 1$ no extremo direito, conforme exibido na Figura A.3.

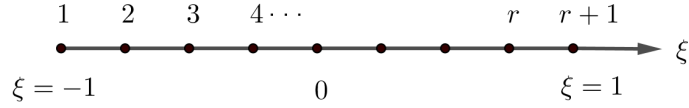


Figura A.3: Elemento finito de referência.

ii) Define-se,

$$\xi = \frac{2x - (x_i + x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i},$$

e assim os pontos $x \in [x_i, x_{i+1}]$ são transformados em pontos $\xi \in [-1, 1]$. Realizam-se os cálculos no elemento finito de referência T_e e denotam-se as funções de base por $\varphi_i(\xi)$;

iii) Para as funções de grau $r \geq 1$, identificam-se $(r + 1)$ pontos nodais (incluindo os extremos) que dividem o elemento de referência em r segmentos iguais. Denotam-se por $\xi_i, i = 1, 2, \dots, r + 1$, as coordenadas de cada ponto nodal e para cada um destes pontos nodais formam-se o produto de r funções lineares $(\xi - \xi_j)$, onde $j = 1, 2, \dots, r + 1$ e $j \neq i$. Estas funções tem a seguinte forma,

$$\begin{array}{ll} \text{Ponto nodal 1 :} & (\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_{r+1}), \\ \text{Ponto nodal 2 :} & (\xi - \xi_1) (\xi - \xi_3) (\xi - \xi_4) \dots (\xi - \xi_{r+1}), \\ & \vdots \\ \text{Ponto nodal } i : & (\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{i-1}) (\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{r+1}), \\ & \vdots \\ \text{Ponto nodal } r + 1 : & (\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_r); \end{array}$$

iv) Para cada ponto nodal i , avalia-se o produto correspondente na etapa (iii) em $\xi = \xi_i$ e dividem-se as funções do produto por este valor. Isto normaliza os polinómios para que $\varphi_i(\xi_i) = 1$ e produz a função de base $\varphi_i(\xi)$ correspondente a cada ponto nodal i . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_{r+1})}{(\xi_1 - \xi_2) (\xi_1 - \xi_3) \dots (\xi_1 - \xi_{r+1})}, \\ \varphi_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1) (\xi - \xi_3) \dots (\xi - \xi_{r+1})}{(\xi_2 - \xi_1) (\xi_2 - \xi_3) \dots (\xi_2 - \xi_{r+1})}, \end{aligned}$$

e generalizando,

$$\varphi_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1}) (\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{r+1})}{(\xi_i - \xi_1) (\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1}) (\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{r+1})}.$$

Destaca-se que, as funções $\varphi_i(\xi)$ são linearmente independentes e satisfazem

$$\varphi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Consequentemente, as $(r + 1)$ funções definem a base de Lagrange constituída de um conjunto de todos os polinómios de grau até r .

A Figura A.4 mostra as funções de base lineares ($r = 1$) onde

$$\varphi_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{1}{2}(1 - \xi),$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi).$$

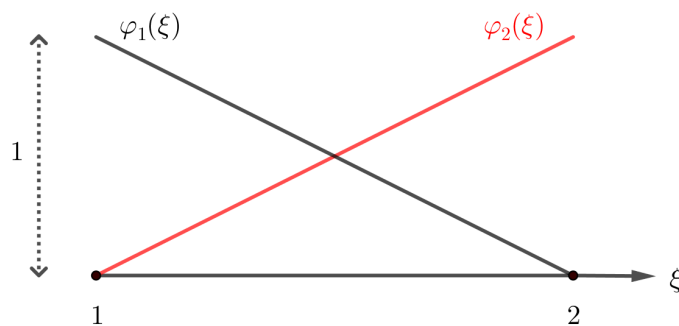


Figura A.4: Funções de base com $r = 1$.

No que segue, a Figura A.5 exhibe as funções de base quadráticas ($r = 2$) onde

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\xi}{2}(\xi - 1),$$

$$\varphi_2(\xi) = 1 - \xi^2,$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(\xi + 1).$$

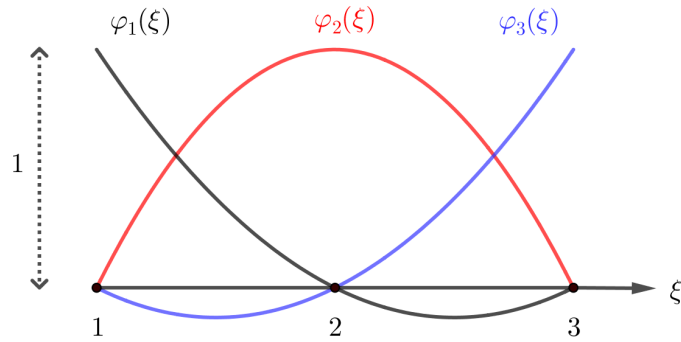


Figura A.5: Funções de base com $r = 2$.

A.6.3 Funções de base de grau 1 bidimensionais

Nesta subsecção, apresentam-se as funções de base de grau 1 sobre um domínio bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Suponha que o domínio Ω seja particionado uniformemente numa malha triangular, desta forma tem-se que os elementos finitos são triângulos e para a referida investigação escolhe-se um elemento finito de referência denotado por T_e cujos os vértices são os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$, conforme exibido na Figura A.6.

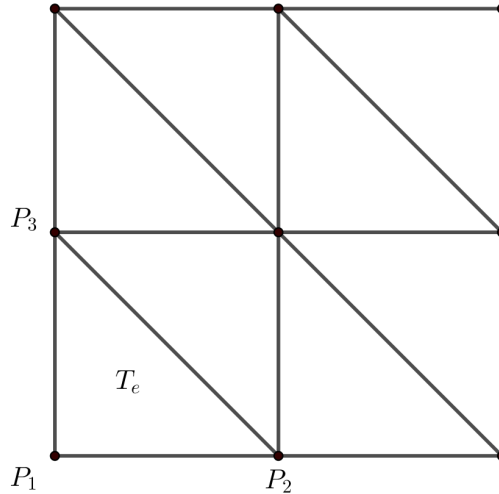


Figura A.6: Malha triangular e o elemento de referência T_e .

As funções de base para T_e são definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y], \end{aligned}$$

onde A_e representa a área do elemento finito T_e tal que

$$A_e = \frac{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2}{2}.$$

Observa-se que, as funções $\varphi_i(x, y)$ satisfazem

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$.

As Figuras A.7, A.8 e A.9 mostram, respetivamente, as funções de base $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ e $\varphi_3(x, y)$ para o elemento finito de referência T_e .

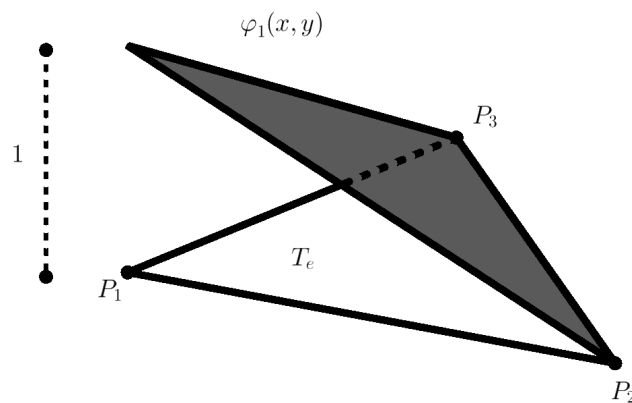


Figura A.7: Função de base $\varphi_1(x, y)$ para T_e .

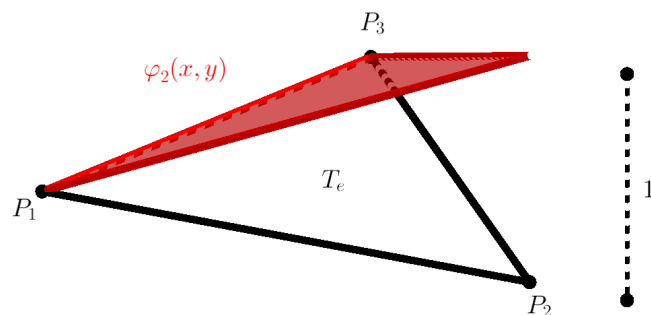


Figura A.8: Função de base $\varphi_2(x, y)$ para T_e .

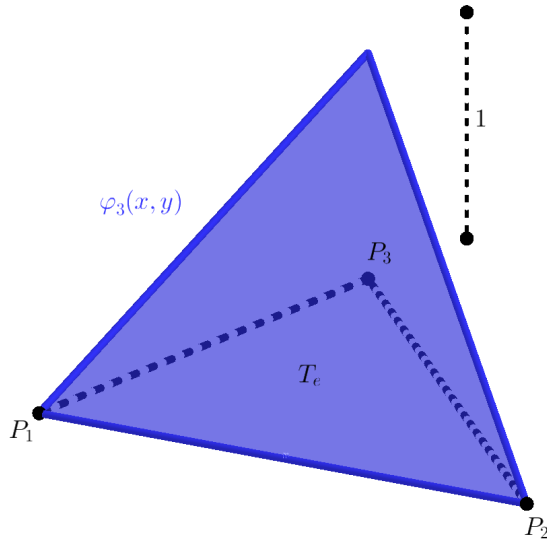


Figura A.9: Função de base $\varphi_3(x, y)$ para T_e .

A.6.4 Funções de base de grau arbitrário bidimensionais

Nesta subsecção, explicitam-se as funções de base de grau $r \geq 1$ num domínio bidimensional.

Inicia-se a investigação com a discretização uniforme do domínio em triângulos e escolhe-se um triângulo \hat{T} com os vértices $\hat{P}_1 = (x_1, y_1)$, $\hat{P}_2 = (x_2, y_2)$ e $\hat{P}_3 = (x_3, y_3)$. Realiza-se uma transformação linear que mapeia o triângulo \hat{T} num triângulo de referência T_e (e vice-versa), conforme a Figura A.10.

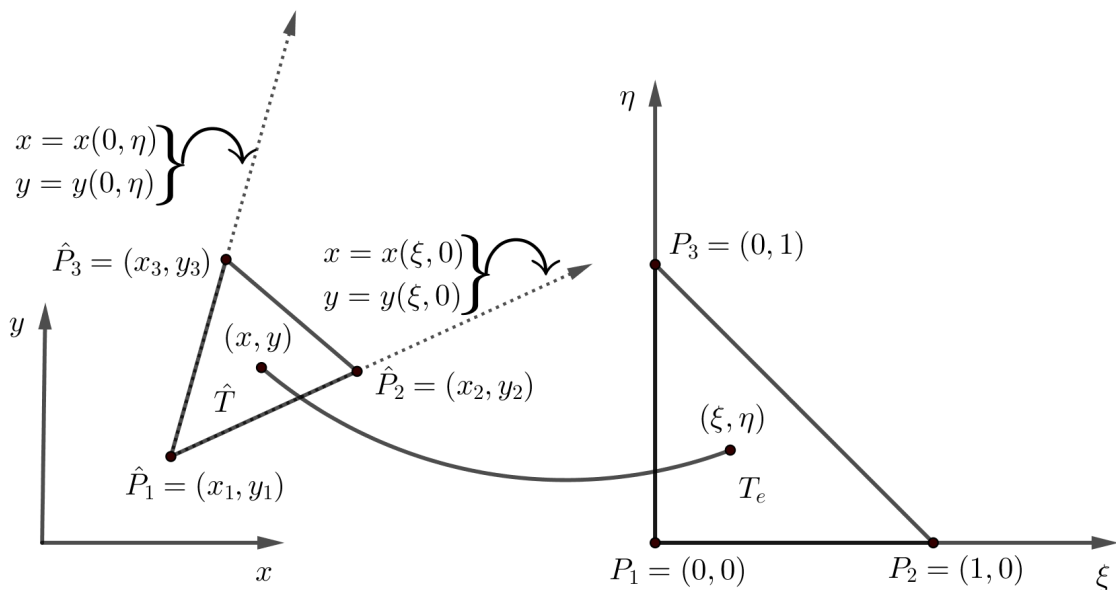


Figura A.10: Transformação linear de \hat{T} para T_e e sua inversa.

A referida transformação linear descreve o mapeamento de um sistema cartesiano num

sistema assimétrico e a linearidade implica que a base polinomial no plano xy é transformada numa base polinomial no plano $\xi\eta$ e vice-versa.

As funções de base lineares para o elemento T_e nos pontos nodais P_1 , P_2 e P_3 são definidas, respetivamente, por

$$\begin{cases} \varphi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \\ \varphi_2(\xi, \eta) = \xi, \\ \varphi_3(\xi, \eta) = \eta. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Assim, a transformação linear é dada por

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^3 x_i \varphi_i(\xi, \eta), \\ y = \sum_{i=1}^3 y_i \varphi_i(\xi, \eta). \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Através de (A.21) e (A.22), obtém-se a transformação inversa

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2\hat{A}} [(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)], \\ \eta = \frac{1}{2\hat{A}} [-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)], \end{cases}$$

onde

$$\hat{A} = \frac{x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_3 y_2}{2},$$

representa a área do triângulo \hat{T} .

Seja $\hat{P}(x, y)$ um ponto arbitrário em \hat{T} e denota-se por $P(\xi, \eta)$ o ponto correspondente em T_e . Constroem-se os segmentos de retas que unem (x, y) e (ξ, η) aos vértices de, respetivamente, \hat{T} e T_e . Denotam-se por \hat{a}_i e a_i , $i = 1, 2, 3$, as áreas dos subtriângulos opostas aos vértices i de, respetivamente, \hat{T} e T_e , conforme exibido na Figura A.11.

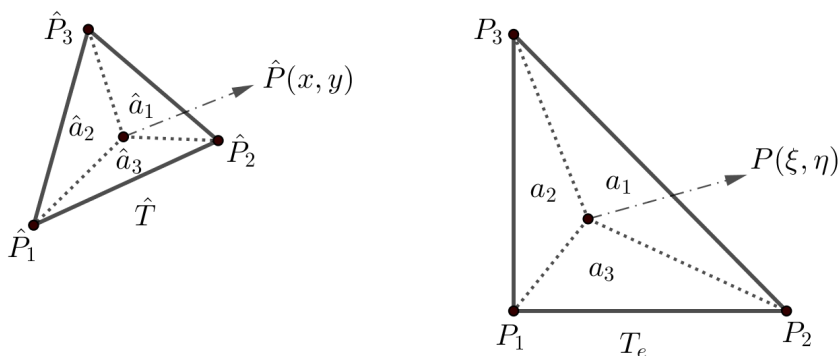


Figura A.11: Representação geométrica das áreas em \hat{T} e T_e .

Definem-se as coordenadas de áreas da seguinte maneira

$$\zeta_i = \frac{a_i}{A_e},$$

onde $A_e = \frac{1}{2}$ é a área de T_e . Equivalentemente, tem-se

$$\begin{cases} \zeta_1 = 1 - \xi - \eta, \\ \zeta_2 = \xi, \\ \zeta_3 = \eta. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Desde que a transformação seja linear, então esta distorce as áreas uniformemente e obtém-se

$$\zeta_i = \frac{a_i}{A_e} = \frac{\hat{a}_i}{\hat{A}}.$$

Destaca-se que, as coordenadas triangulares ζ_i em T_e podem ser utilizadas para determinar as funções base de grau $r \geq 1$. Observa-se na Figura A.12 que as funções de base de grau $r = 1$ são

$$\varphi_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_i,$$

onde $i = 1, 2, 3$ e ζ_i satisfaz (A.23).

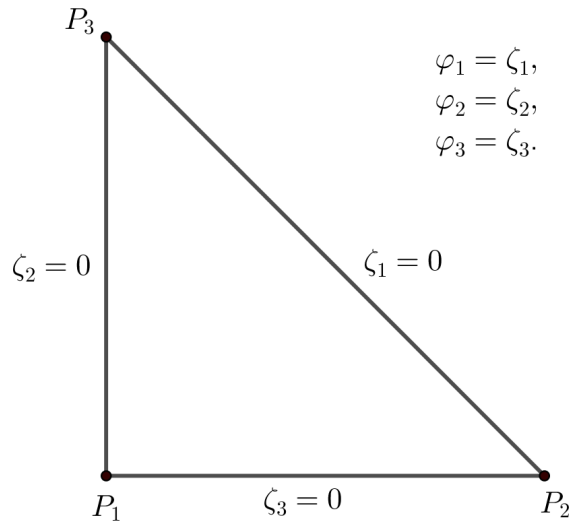


Figura A.12: Funções de base de grau $r = 1$ em T_e .

Na Figura A.13, explicitam-se as localizações dos pontos nodais para a função de base de grau $r = 2$. Nota-se que a referida função de base quadrática para o ponto nodal P_1 deve ser zero no lado $\zeta_1 = 0$ oposto ao ponto nodal P_1 e em $\zeta_1 = \frac{1}{2}$, que passa pelos pontos nodais intermediários P_4 e P_6 . Dimensiona-se o produto destas formas lineares por 2 para garantir que $\varphi_1(1, 0, 0) = 1$ forneça a função de forma quadrática $\varphi_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_1(2\zeta_1 - 1)$.

Construções semelhantes produzem as funções restantes, e tem-se

$$\varphi_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{cases} \zeta_i(2\zeta_i - 1), & \text{para o ponto nodal } P_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \zeta_j\zeta_k, & \text{para o ponto nodal } P_i \text{ entre } P_j - P_k \text{ para } i = 4, 5, 6. \end{cases}$$

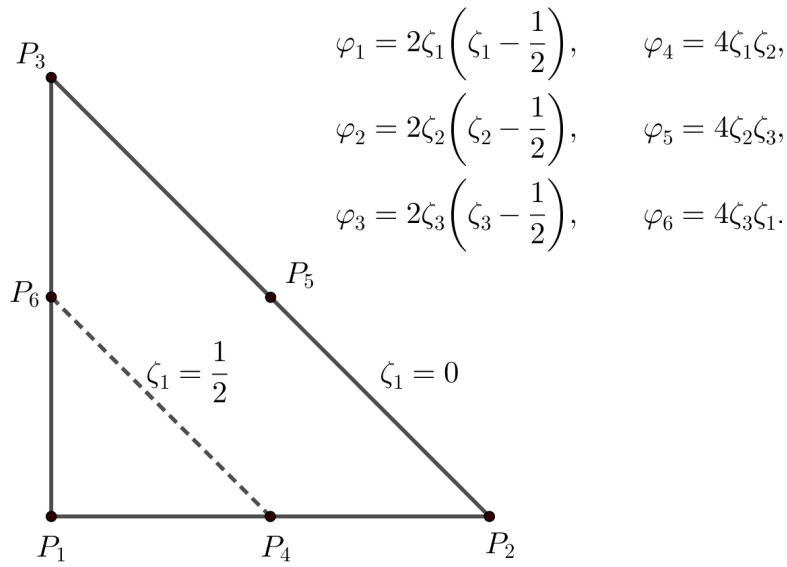


Figura A.13: Funções de base de grau $r = 2$ em T_e .

De maneira similar, para um elemento cúbico de Lagrange com pontos nodais localizados como na Figura A.14, as funções de base são definidas por

$$\varphi_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{cases} \frac{9}{2}\zeta_i \left(\zeta_i - \frac{2}{3}\right) \left(\zeta_i - \frac{1}{3}\right), & \text{se } i = 1, 2, 3, \\ \frac{27}{2}\zeta_j\zeta_k \left(\zeta_j - \frac{1}{3}\right), & \text{primeiro nó de trisseção } (i = 4, 5, 6) \\ & \text{lado } j - k, \\ \frac{27}{2}\zeta_j\zeta_k \left(\zeta_k - \frac{1}{3}\right), & \text{segundo nó de trisseção } (i = 7, 8, 9) \\ & \text{lado } j - k, \\ 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3, & \text{nó central } i = 10. \end{cases}$$

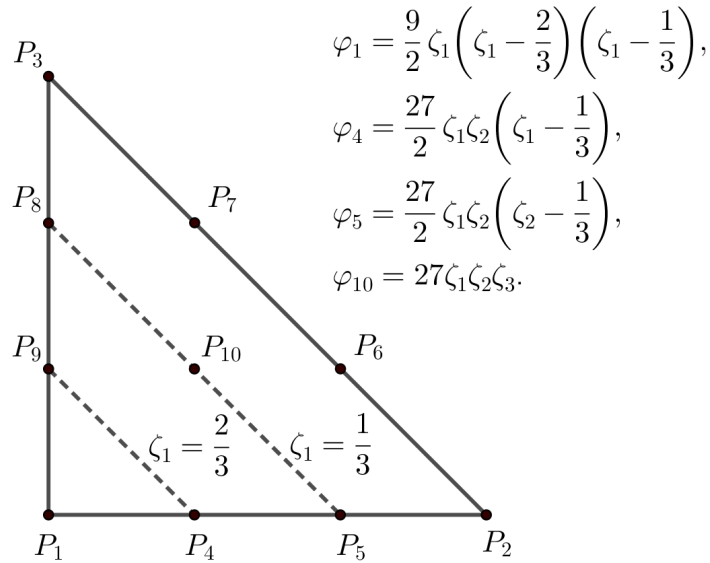


Figura A.14: Funções de base de grau $r = 3$ em T_e .

Estes resultados podem ser generalizados para triângulos de Lagrange de grau superior utilizando as distribuições nodais para o triângulo de Pascal.

A.7 Teoremas auxiliares

Nesta secção estão os teoremas que não se enquadram nas secções apresentadas anteriormente.

Teorema A.30 (Desigualdade de Young [36, p. 706]). *Se $a, b, \varepsilon > 0$, p e q são expoentes conjugados, então*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q,$$

onde

$$C_\varepsilon = \frac{1}{q (\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}}.$$

Teorema A.31. [24, p. 380] *Para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$ com $d \geq 1$ e $0 < p < \infty$, a desigualdade p -triangular é satisfeita*

$$C_p |a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p,$$

onde $C_p = 1$ se $0 < p \leq 1$ e $C_p = 2^{1-p}$ se $p > 1$.

Além disso, se $0 < p \leq 1$, então a desigualdade inversa é satisfeita

$$||a|^p - |b|^p| \leq |a - b|^p.$$

Teorema A.32. [6, p. 535] Para todo $p > 1$ e $\beta \geq 0$, existem três constantes positivas C_1, C_2 e C_3 tais que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$ e $a \neq b$, as seguintes desigualdades são satisfeitas:

i)

$$\left| |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b \right| \leq C_1 |a - b|^{1-\beta} (|a| + |b|)^{p-2+\beta};$$

ii)

$$C_2 |a - b|^{2+\beta} (|a| + |b|)^{p-2-\beta} \leq (|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b, a - b)_{\mathbb{R}^d};$$

iii) Se $p \geq 2$, então

$$C_3 |a - b|^p \leq (|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b, a - b)_{\mathbb{R}^d},$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^d}$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^d .

O teorema do ponto fixo de Brouwer implica o seguinte teorema.

Teorema A.33. [42, p. 662] Sejam H um espaço de Hilbert de dimensão finita, $\beta > 0$ e $A : H \rightarrow H$ uma aplicação contínua tal que

$$(A(u), u)_H > 0, \quad \forall u \in H, \quad \text{com } \|u\|_H = \beta.$$

Então, existe $u^* \in H$ tal que

$$A(u^*) = 0, \quad \text{com } \|u^*\|_H \leq \beta.$$

Teorema A.34 (Banach-Alaoglu [36, p. 723]). Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ é limitada, então existem uma subsequência $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ e uma função $u \in X$ tais que

$$u_{n_i} \rightharpoonup u.$$

A seguir, apresenta-se a definição de uma função absolutamente contínua.

Definição A.35. [68, p. 12] Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ de intervalos disjuntos de I satisfaz

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)| \leq \varepsilon.$$

Então, f é uma função absolutamente contínua em I . Denota-se por $AC(I)$ o conjunto de todas as funções absolutamente contínuas em I .

Teorema A.36. [68, p. 12] Se $f \in L^1(I)$, então $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ pertence à $AC(\bar{I})$ e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in I$.

Glossário

Geral

\hookrightarrow imersão contínua

$\hookrightarrow \hookrightarrow$ imersão compacta

\rightarrow convergência

\rightharpoonup convergência fraca

$$|\beta| = \sum_{i=1}^d \beta_i \text{ onde } \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$$

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} |u| = \sup \left\{ \inf_{x \in \Omega \setminus Z} |u(x)| : Z \subset \Omega, \operatorname{meas}(Z) = 0 \right\}$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u| = \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus Z} |u(x)| : Z \subset \Omega, \operatorname{meas}(Z) = 0 \right\}$$

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \text{ suporte de } u$$

$q = \frac{p}{p-1}$ é o expoente conjugado de Hölder de p onde $1 \leq p \leq \infty$

$p(x)$ denota a função de expoente variável $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$

$q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ é o expoente conjugado de Hölder de $p(x)$

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x)$$

$$p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

T_i denotam os elementos finitos com $i = 1, \dots, N_e$.

Conjuntos

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ denota o conjunto dos números naturais exceto o número zero

\mathbb{R} denota o conjunto dos números reais

\mathbb{R}^+ denota o conjunto dos números reais positivos

\mathbb{R}^d denota o espaço euclidiano de dimensão $d \geq 1$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

$|\Omega| = \text{meas}(\Omega) = \text{medida de Lebesgue de } \Omega$

$\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω

$\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω

$\text{int}(\Omega)$ denota o interior do conjunto Ω

$\mathcal{T}_h = \{T_i\}, i = 1, \dots, N_e$

$Q = \Omega \times]0, T]$

$\Gamma = \partial\Omega \times]0, T].$

Operadores

$D^\beta u$ denota a derivada fraca de ordem β da função u

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ denota a derivada parcial de u em relação à variável t

$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ denota o divergente da função u

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ denota o gradiente de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$ representa o Laplaciano da função u

$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ representa o operador p -Laplaciano da função u

$\Delta_p^2 u = \Delta (|\Delta u|^{p-2} \Delta u)$ representa o operador p -biharmónico da função u

$\Delta_{p(x)}^2 u = \Delta (|\Delta u|^{p(x)-2} \Delta u)$ representa o operador $p(x)$ -biharmónico da função u .

Espaços de Funções

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \text{ onde } 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \exists C \geq 0, |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \}$$

$$C^m(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é } m\text{-vezes continuamente diferenciável} \}$$

$$C^{m,\beta}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in C^m(\Omega) \text{ e } D^\beta u \text{ é Hölder contínua com expoente } \beta \}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}); \operatorname{supp}(u) \text{ é um conjunto compacto} \}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); D^\beta u \in L^p(\Omega) \forall \beta; |\beta| \leq m \}$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$L^p(a, b; X) = \left\{ u : (a, b) \rightarrow X, \text{ mensurável; } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty \right\}$$

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

$$AC(a, b) = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é absolutamente contínua em } [a, b]\}$$

$$S_h = \left\{ u \in C_0^0(\overline{\Omega}); u|_{T_i} \text{ é um polinómio de grau } r \geq 1, \forall T_i \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Normas, Produto Interno e Funcional

$|x|$ módulo de $x \in \mathbb{R}$

$|x|$ norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < \infty$$

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u|$$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|=0}^m \|D^\beta u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\beta|=0}^m \text{ess sup}_\Omega |D^\beta u|$$

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty; \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X$$

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx; \quad p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$$

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \beta > 0; \rho_{p(x)} \left(\frac{u}{\beta} \right) \leq 1 \right\}$$

$$\|e(U_k)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_e} \int_{T_i} |u_k - U_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

norma do erro entre a solução aproximada U e a exata u avaliadas no tempo k .

Índice Remissivo

definição

- de d -simplex, 163
- de solução discreta, 49
- de solução fraca, 11
- de solução semidiscreta, 12

desigualdade

- p -triangular, 175
- de Hölder, 150
- de Hölder com expoentes variáveis, 157
- de Minkowski, 150
- de Poincaré, 153
- de Young, 175
- de Young com expoentes variáveis, 156

discretização

- no espaço, 163
- no tempo, 12

espaço dos elementos finitos, 164

espaços

- de Bochner, 154
- de Lebesgue, 149
- de Sobolev, 152
- generalizados de Lebesgue, 155

funções de base

- de grau 1 bidimensionais, 169
- de grau arbitrário bidimensionais, 171
- de grau arbitrário unidimensionais, 166
- lineares unidimensionais, 165

funções de Rothe, 28

fórmula regressiva, 12

método

- de Rothe, 12, 27
- dos elementos finitos, 164

problema

- discreto, 48

semidiscreto, 12

projeção de Ritz, 164

Teorema

da semicontinuidade inferior da norma,
151

de Banach-Alaoglu, 176

de Brouwer, 176