



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Engenharia

Controlo Robusto de Sistemas Baseado em Modelos Paramétricos Intervalares

Raquel da Silva Magalhães

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Aeronáutica

(Ciclo de Estudo Integrado)

Orientador: Professor Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Outubro de 2013

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, pelo apoio incondicional ao longo destes anos. Aos meus irmãos, Pedro e Helena. E ao Professor Doutor Kouamana Bousson, pela disponibilidade compreensão e orientação.

Um especial obrigado a todos os amigos com quem tive o privilégio de conviver.

Resumo

Os sistemas de Controlo são cada vez mais utilizados nas diversas áreas. Estes têm como finalidade garantir um bom desempenho do modelo em questão. Foram desenvolvidos modelos matemáticos capazes de descrever o comportamento dinâmico de um sistema, procurando sempre atender aos requisitos de robustez tanto a nível de estabilidade como de desempenho. Esta dissertação visa o desenvolvimento de um controlador capaz de satisfazer os requisitos de robustez e desempenho desejados para um modelo de sistemas baseado em parâmetros intervalares. A Teoria Quantitativa de Controlo (QFT), de *Horowitz-Sidi* foi a base fundamental para toda a modelação do controlo robusto desenvolvido. Esta técnica permite projetar controladores robustos com base no domínio das frequências, cumprindo especificações mínimas quantitativas considerando a presença de incertezas no sistema e a existência de perturbações. Para implementar é necessário definir as especificações de desempenho, responsáveis por descrever o comportamento esperado, e as especificações de robustez, responsáveis por descrever o comportamento de rejeição que o sistema deve assumir face às variações paramétricas e às perturbações externas.

De forma a validar o método desenvolvido nesta dissertação, numa primeira fase foi considerado um modelo de um sistema dinâmico com parâmetros intervalares e posteriormente aplicado ao controlo da arfagem de uma aeronave.

Palavras-chave

Teoria Quantitativa de Controlo (QFT), controlo robusto, desempenho, estabilidade.

Abstract

Control systems are increasingly used in several areas. These are intended to ensure a good performance of a required plant system. Mathematical models were developed in order to describe the dynamic behavior of a system, fulfilling the robustness and stability performance requirements. The aim of this thesis is to develop a controller able to satisfy the robustness and performance desired requirements for a plant system based on interval parameters. This was based on the Quantitative Feedback Theory (QFT) of Horowitz and Sidi. This technique allows to design robust controllers based on the frequency domain, fulfilling the minimum quantitative specifications considering the presence of uncertainties in the system and disturbances associated. To implement the plant system, is necessary to define the performance specifications, responsible for describing the expected plant behavior and define the robustness specifications, responsible for the plant rejection behavior due to parametric variations and external disturbances.

In order to validate the exposed method, was initially simulated for an electrical motor and was also applied to a pitch control of an aircraft.

Keywords

Quantitative Feedback Theory (QFT), robust control, performance, stability.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract.....	iv
Lista de Figuras.....	vi
Lista de Acrónimos.....	viii
Nomenclatura.....	ix
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 Controlo Robusto	2
1.2 Método de Kharitonov	5
1.3 Método de Yanushevsky	7
1.4 Controlo H^∞	9
1.5 Horowitz-Sidi	11
Estrutura do Sistema de Controlo	12
Procedimento da Teoria Quantitativa de Controlo.....	12
1.6 Formulação do Problema	21
Capítulo 2	24
2.1 Modelação do Controlo do Voo Robusto	24
2.2 Método Proposto	27
Capítulo 3	32
Simulações	32
3.1 Aplicação 1 - Motor Elétrico	32
3.2 Aplicação 2 - Controlo da Arfagem	41
Capítulo 4	46
Conclusão	46
4.1 Contribuições.....	46
4.2 Trabalhos Futuros	47
Referências	48

Lista de Figuras

Figura 1. 1 Representação de uma trajetória com atuação de um controlador robusto e sem controle robusto	5
Figura 1. 2 Imagem do retângulo $M(w)$	7
Figura 1. 3 Diagrama Geral do sistema para o método H^∞	10
Figura 1. 4 Sistema Realimentado com dois graus de liberdade	12
Figura 1. 5 Exemplo de QFT template [1]	15
Figura 1. 6 Limite Superior e Inferior e zona permitida para o sistema operar no domínio do tempo [1].....	17
Figura 1. 7 Limite superior e Inferior e zona permitida para o sistema operar no domínio das frequências[1]	18
Figura 1. 8 Curva da Função $L(j\omega)$ [1]	19
Figura 1. 9 Exemplo de um Pré-Filtro com base na teoria QFT [1]	20
Figura 1. 10 Modelo Geral do Sistema.....	21
Figura 3.1 Sistema Nominal de $P(q, s)$	33
Figura 3.2 Representação da Função de Transferência do Sistema para Diferentes Valores de Frequência.....	34
Figura 3. 3 Representação dos intervalos superior e inferior para a especificação de seguimento da trajetória no espaço do tempo	35
Figura 3. 4 Função de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l	39
Figura 3. 5 Funções de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l	40
Figura 3. 6 Funções de transferência sem aplicação do controle e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l	41
Figura 3. 7 Função de transferência nominal, $P_0(s)$	42
Figura 3. 8 Função de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l	44

Lista de Acrónimos

MIMO	Multiple - Input - Multiple - Outup
SISO	Single - Input - Single - Output
QFT	Quantitative Feedback Theory
LTI	Linear Time Invariante
MISO	Multiple - Input - Single - Output
SISO QFTIT	Single Input - Single Output - Quantitative Feedback Theory Interactive Tool
FTMF	Função de Transferência de Malha Fechada
MF	Margem de Fase
MG	Margem de Ganho

Nomenclatura

t	Tempo
$x(t)$	Vetor de estado do sistema
$u(t)$	Vetor de controlo do sistema
ϕ	Ângulo de pranchamento
a	Aceleração
x_0	Vetor de estado inicial
η	Incertezas do modelo
ξ	Incertezas nas medidas efetuadas sobre o sistema
A, B, C, D	Matrizes de dimensão apropriada
Q	Matriz simétrica positiva
$C(s)$	Função de transferência do controlador
$F(s)$	Função de transferência do pré-filtro
$P(s)$	Função de transferência do sistema
$\mathcal{P}(s)$	Família de sistemas
Λ	Largura de banda
k	Ganho estático
T_r	Função de transferência de malha fechada
ω_n	Frequência natural
τ	Constante de tempo
T_s	Tempo de subida
T_{pico}	Tempo até ao pico
T_{ac}	Tempo de acomodação
T_p	Período próprio
B_u	Função de transferência do intervalo superior
B_l	Função de transferência do intervalo inferior
M_p	Pico de magnitude
ω_r	Frequência do fator de amortecimento
L_0	Função de transferência nominal do sistema
δ	Fator de amortecimento
δ_u	Fator de amortecimento de B_u
δ_l	Fator de amortecimento de B_l
ω_l	Frequência natural de B_l
ω_u	Frequência natural de B_u
K	Vetor dos parâmetros do controlador
ω	Frequência
$H(s)$	Função de transferência global

π	Constante de valor 3.14
θ	Vetor dos parâmetros do pré-filtro
x_{ref}	Referência de funcionamento
s	Representação do plano real e complexo no domínio da frequência, $s = ji$
N_P	Numerador da função de transferência $P(s)$
D_P	Denominador da função de transferência $P(s)$
N_C	Numerador da função de transferência $C(s)$
D_C	Denominador da função de transferência $C(s)$
N_F	Numerador da função de transferência $F(s)$
D_F	Denominador da função de transferência $F(s)$
N_{B_u}	Numerador de função de transferência $B_u(s)$
D_{B_u}	Denominador da função de transferência $B_u(s)$
N_{B_l}	Numerador de função de transferência $B_l(s)$
D_{B_l}	Denominador da função de transferência $B_l(s)$
dB	Decibéis
s	Segundos
rad/s	Radianos por segundo
$\theta(s)$	Ângulo de arfagem
δ_e	Deflexão do ângulo de arfagem
O, \vec{x}	Eixo de direção x
O, \vec{y}	Eixo de direção y
O, \vec{z}	Eixo de direção z

Capítulo 1

Introdução

Conscientemente ou não, toda a atividade humana baseia-se em modelos, tanto mentais, como físicos, onde o ser humano procura sempre controlá-los.

Um modelo matemático descreve o comportamento dinâmico de um sistema, servindo de ponto de partida para aplicações de controlo. Este modelo procura sempre atender aos requisitos de robustez tanto a nível de estabilidade como de desempenho. Podemos afirmar que um bom modelo é aquele que consegue representar a dinâmica do sistema satisfatoriamente sem grande complexidade matemática.

O objeto físico a ser controlado, num modelo dinâmico, chama-se de sistema, podendo ser na prática um automóvel, uma aeronave, entre outros. De forma a controlar o sistema, devemos estar aptos a modificar certos parâmetros físicos, chamados de entradas ou de controlos (inputs), como é o caso do acelerador ou das superfícies de controlo da aeronave. Outro requisito importante é a variável física capaz de medir o comportamento do sistema, as saídas (outputs), sendo eles a velocidade do carro ou altitude da aeronave. Toda esta terminologia descreve o sistema dinâmico.

Sistemas de Controlo são atualmente utilizados em várias ramificações dos campos da engenharia e em muitas áreas das ciências naturais e sociais. Nós próprios somos uma forma de sistema de controlo, embora de natureza biológica. Um sistema pode ser extremamente simples, como um interruptor de uma lâmpada ou muito complexo como um piloto automático de uma aeronave.

Mas o porquê de precisarmos de controlar determinados sistemas? Um conjunto de situações permitem assegurar o bom desempenho de qualquer sistema. A mudança no ponto de operação, as compensações de perturbações, a estabilização de um sistema naturalmente instável, são todo um leque de ações básicas desempenhadas pelo controlador.

O comportamento de sistemas controlados robustamente tem vindo a ser estudado com maior relevância desde o início dos anos 70. Tornando-se crucial ter presente a importância de que determinados sistemas dinâmicos multivariáveis, isto é, sistemas com várias entradas e várias saídas, podem ser controlados, otimizando o desempenho e estabilidade.

Um aspeto a ser considerado na obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico de um sistema é a possibilidade da existência de incertezas em

alguns parâmetros do modelo. Estas podem advir de variados fatores, como imprecisão de alguns componentes, erros de linearização, entre outros.

Sistemas incertos são difíceis de se trabalhar, uma vez que estas incertezas podem acarretar restrições na procura de soluções. A este processo de busca da solução de um problema de controlo envolvendo o sistema nominal e determinadas incertezas associadas, é o campo do Controlo Robusto.

Existem também vários exemplos de perturbações aplicados numa aeronave, como ruídos, mudanças de temperatura, rajadas de vento, etc. O controlador Robusto deve sobretudo debruçar-se na minimização destas variáveis do sistema, minimizando assim a influência das incertezas e perturbações atuantes no mesmo.

No que concerne à aplicação do controlador robusto, existem cientistas como *Kharitonov* [8,9], que a partir da análise de polinómios incertos/intervalares tornou possível averiguar a sua estabilidade. *Yanushevsky* [7], apresentou uma aproximação de um sistema robusto com parâmetros incertos baseando-se na problemática do controlo ótimo. Outro modelo desenvolvido por *McFarlane* e *Glover* é o controlo H_∞ [10], que expressa o problema de controlo como um problema de otimização matemática. No entanto os trabalhos mais aprofundados no decorrer desta dissertação pertencem a *Harowitz* e *Sidi* [1,2,3].

Numa fase introdutória, serão expostos os métodos já existentes assim como a formulação do problema a que este trabalho se propõe resolver. No segundo capítulo, será realizada a modelação e apresentado o método. No terceiro capítulo, o método teórico desenvolvido será aplicado a modelos de sistemas e serão simulados os resultados para cada caso específico. Todas as conclusões e interpretações dos resultados serão apresentadas no quarto e último capítulo.

1.1 Controlo Robusto

A teoria do controlo em áreas específicas como a engenharia e a matemática, apresenta diversas ramificações a fim de analisar sistemas dinâmicos que se encontram sujeitos a situações adversas. O controlo robusto enquadra-se num desses ramos. De uma forma geral pode ser definido como um conjunto de componentes, sendo eles desde biológicos, mecânicos, pneumáticos, elétricos ou qualquer sistema capaz de regular ou controlar o comportamento do sistema.

Como foi referido anteriormente, o maior objetivo de um controlador é minimizar os efeitos de determinadas condições iniciais desconhecidas bem como, influências externas refletidas

no comportamento do sistema. Desta forma, existe um problema de estabilização robusta e outro de desempenho robusto. No primeiro pretende-se manter o sistema estável para uma determinada classe de incertezas, e no segundo, minimizar a influência das perturbações externas em relação ao critério escolhido neste trabalho.

O termo robusto é definido como a capacidade de manter a estabilidade satisfatória ou as características de desempenho na presença de todas as variações possíveis nos parâmetros do sistema, mais frequentemente é visto como uma proteção contra incertezas nas especificações do sistema.

Existem duas divisões essenciais na teoria do controlo, a clássica e a moderna. O controlo clássico diz respeito a todas as técnicas e métodos desenvolvidos até 1950, desde então até ao presente que se utiliza o controlo moderno.

O controlo no domínio das frequências é utilizado para estabilizar um sistema de controlo, recorrendo ao uso de equações diferenciais, as transformadas de Laplace, utilizadas maioritariamente em sistemas com uma entrada e uma saída (SISO). No entanto, *Evans*, desenvolveu um método gráfico capaz de determinar os polos de uma função de transferência fechada como uma função com um ganho.

O método de controlo no espaço de estados foi desenvolvido por forma a realizar essas equações do sistema de controlo computacionalmente, reduzindo matematicamente qualquer equação de ordem n , para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Este método pode então trabalhar com sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), podendo ser otimizados.

Pode-se afirmar que a principal diferença entre os dois métodos é que, no método do domínio das frequências, recorre-se a uma resposta no domínio das frequências enquanto que no método de controlo no espaço de estados utilizam-se as variáveis de estado.

Existem dois métodos de resolução de um determinado sistema de controlo. Este pode ser feito recorrendo a um controlo de circuito aberto ou um controlo em circuito fechado (realimentado). No primeiro caso o controlador depende do tempo t e não do estado x , $u(t) = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. No segundo caso, o controlador u é em função do estado $u(x) = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

No caso de um sistema de malha aberta, sempre que sujeito a perturbações não previsíveis ou até mesmo comportamentos indesejados dos parâmetros, mesmo que descritos no modelo teórico, o utilizador não pode intervir. Neste sentido a realimentação permite uma correção dos parâmetros de entrada, forçando o sistema a realizar o objetivo inicialmente idealizado.

No caso específico de uma aeronave e de encontro à dinâmica de voo, o controlo atua sobre as superfícies de controlo de forma a alterar as forças e os momentos atuantes na aeronave. A alteração da intensidade e da orientação da tração do sistema permitem também controlar os veículos. Pode-se assim definir como duas variáveis de controlo por exemplo o ângulo de pranchamento, Φ e a aceleração, a .

Considerando um sistema dinâmico representado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

com uma condição inicial $x(0) = x_0$. Onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $x(0) = x_0$ é a condição inicial, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ são as entradas e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ são as saídas do sistema, f e h são funções contínuas do sistema.

De acordo com a equação (1.1), primeiro estabelece-se um objetivo dentro do qual a função diferencial deve ser cumprida. Com vista nesse objetivo deverá ser encontrado um controlador u , que melhor satisfaça os nossos requisitos, uma vez que as variáveis de controlo u de um sistema permitem alterar a dinâmica do respetivo sistema.

O sistema da equação (1.1) pode ainda ser representado como o modelo geral de um sistema controlado sendo este:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) + \eta(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) + \xi(x, u, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de saída ou de observação, sendo $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ duas funções lineares ou (geralmente) não lineares. A variável η representa as incertezas no modelo do sistema físico; ξ as incertezas nas medidas efetuadas sobre o sistema. São funções do sistema e dependem do tempo t , do vetor de estado e de controlo respetivamente, x e u .

A primeira equação do sistema representado em (1.2), \dot{x} é chamada de equação de estado do sistema e a segunda sendo chamada de equação de observação ou de saída.

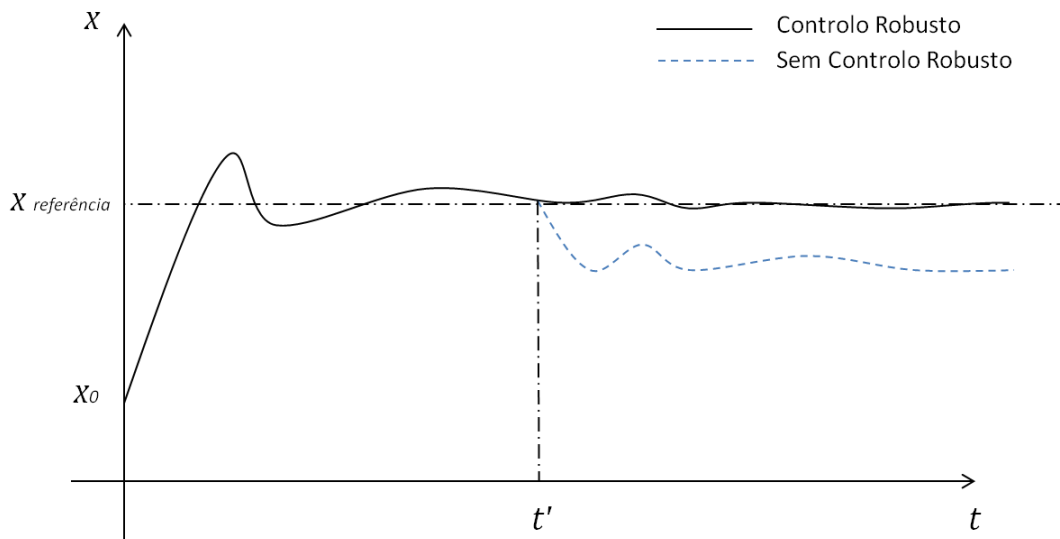


Figura 1. 1 Representação de uma trajetória com atuação de um controlador robusto e sem controlo robusto

A figura (1.1) representa o comportamento inicial da trajetória de uma aeronave, desde uma posição inicial x_0 , até à posição seguinte x_{ref} , num momento específico t' , a aeronave sofre uma perturbação, pode-se considerar como sendo uma rajada de vento, por exemplo.

A atuação de um controlador robusto permite que este resista a essas perturbações e estabilize, podendo percorrer a trajetória inicialmente predefinida.

Como já referenciado, existe um leque de métodos capazes de analisar matematicamente a problemática do controlo robusto. Estes são expostos de seguida, apurando as suas vantagens e limitações.

1.2 Método de Kharitonov

O método de *Kharitonov* [8,9] é utilizado sobretudo quando os parâmetros físicos do sistema são conhecidos sob a forma intervalar. Este recorre a funções traçadas a partir de polinómios, provendo as condições necessárias para a estabilidade de sistemas com coeficientes incertos. Pode ser aplicado num caso de estabilidade com apenas quatro polinómios.

A exemplo considere-se um conjunto ϕ de polinómios de grau n tal que:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1.3)$$

onde $a_l^-, a_l^+ \in \mathbb{R}^n$, $a_l: [a_l^-, a_l^+]$, $l = 1, 2, \dots, n-1$ são os coeficientes de valores incertos, delimitados por um intervalo de valores.

Para verificar-se a estabilidade do polinómio (1.3) é necessário recorrer ao critério de *Routh-Hurwitz* [9], uma vez que, ϕ é o conjunto de polinómios, este é finito não sendo possível verificar cada um dos seus elementos.

Pretende-se saber se todos os polinómios do conjunto são estáveis. Para tal considerando um vetor de coeficientes incertos $a = [a_0, \dots, a_n]$ e $a = [a_0^-, a_0^+]x \dots x [a_n^-, a_n^+] = F$ é o conjunto de valores possíveis de a . Define-se o conjunto finito de polinómios por: $\phi(z, a) = \varphi(z, a): a \in F$.

Definição 1.1 Cada polinómio do conjunto de polinómios $\phi(z, a)$ é estável se e só se os quatro polinómios de *Kharitonov* [10,11] forem estáveis.

A fim de saber se $\varphi(z, a)$ é estável para todo o $\varphi(z, a) \in \phi(z, a)$, deve-se verificar os quatro polinómios de *Kharitonov* [8,9]:

$$P_1^{par} = a_0^- + a_2^+ z^2 + a_4^- z^4 + \dots = \sum_{l=0, par}^n i^l \cdot \min\{i^l a_l^-, i^l a_l^+\} z^l \quad (1.4)$$

$$P_2^{par} = a_0^+ + a_2^- z^2 + a_4^+ z^4 + \dots = \sum_{l=0, par}^n i^l \cdot \max\{i^l a_l^-, i^l a_l^+\} z^l \quad (1.5)$$

$$P_1^{impar} = a_1^- + a_3^+ z^3 + a_5^- z^5 + \dots = \sum_{l=0, impar}^n i^{l-1} \cdot \min\{i^l a_l^-, i^l a_l^+\} z^l \quad (1.6)$$

$$P_2^{impar} = a_1^+ + a_3^- z^3 + a_5^+ z^5 + \dots = \sum_{l=0, impar}^n i^{l-1} \cdot \max\{i^l a_l^-, i^l a_l^+\} z^l \quad (1.7)$$

Definição 1.2 Os polinómios de *Kharitonov* [8,9] são:

$$k_{mn} = P_m^{par} + P_n^{impar} \quad (1.8)$$

onde $m, n = 1, 2$.

Analisando, observamos que $P_m^{par} + P_n^{impar}$ são uma decomposição de $k_{mn}(i\omega)$ em parte real e imaginária. Então para todo o $P \in \phi$, $ReP(i\omega) \in [P_1^{par}(i\omega), P_2^{par}(i\omega)]$ e $ImP(i\omega) \in [P_1^{impar}(i\omega), P_2^{impar}(i\omega)]$.

Definindo $M(w) = \{P(iw) | P \in K\}$:

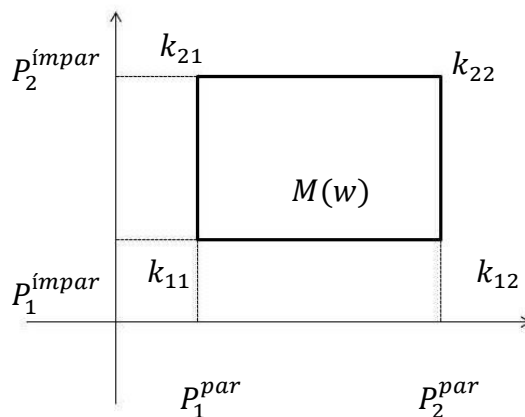


Figura 1. 2 Imagem do retângulo $M(w)$

Os polinómios calculados em iw , no plano complexo constituem as extremidades do retângulo $M(w)$, este mantém o seu formato ao longo da variação de w .

Este método é vantajoso pois se a princípio estavam a ser testados um número infinito de polinómios para validar a sua estabilidade, de facto só são necessários testar quatro, usando o método de *Routh-Hurwitz* [9].

1.3 Método de Yanushevsky

O método que se segue apresenta uma aproximação de um sistema de controlo robusto, com parâmetros incertos, baseado em considerações de um problema de controlo ótimo com um índice específico de desempenho. O controlador ótimo é formulado tendo em conta a estimativa da localização dos valores próprios do sistema com parâmetros incertos, garantindo a estabilidade assintótica do sistema de malha fechada.

A vantagem deste procedimento é a sua simplicidade. É bastante similar ao controlador analítico baseado na solução do problema do controlador linear quadrático.

Considere-se o controlador linear descrito na seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.9}$$

onde x é definido como o vetor de estado de dimensão n e u o vetor de controlo de dimensão m . $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são as matrizes de dimensão apropriada.

Inicialmente é assumido que apenas os elementos da matriz A não são exatamente conhecidos, isto é:

$$A_1 \leq A \leq A_2 \quad (1.10)$$

onde a matriz A é definida por um intervalo de valores $A_1 = [a_{1ij}]$ e $A_2 = [a_{2ij}]$ são o valor inferior e superior, respetivamente.

O problema de controlo robusto tem como finalidade forçar a aeronave a voltar ao equilíbrio quando esta for perturbada ou então orientar de forma a atingir outro ponto de equilíbrio desejado. O objetivo é então encontrar uma equação de controlo que faça com que o sistema seja estável para todo o intervalo de valores definido em (1.10).

O procedimento analítico consiste na minimização de uma função, J designada critério de desempenho e definida por:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + cu^T(t)u(t)]dt \quad (1.11)$$

onde $Q = [q_{ij}]$ é a matriz definida simétrica e positiva, e c é uma constante positiva.

O vetor de controlo é dado na forma de:

$$u(t) = -\frac{1}{c}B^TWx(t) \quad (1.12)$$

A matriz definida positiva, W satisfaz a equação de *Riccati*. No entanto, neste caso em particular, não existe informação suficiente para calcular a matriz W .

Considerando o sistema equivalente à equação (2.10):

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t) \quad (1.13)$$

$$A_0 = A + \gamma I \quad (1.14)$$

Onde os valores próprios da matriz A_0 são deslocados por γ em comparação aos valores próprios da matriz A .

É sabido que a minimização da função (1.13) é dada por:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{2\gamma t} [x^T(t)Qx(t) + cu^T(t)u(t)]dt \quad (1.15)$$

A escolha de γ pode ser obtida a partir da estimativa do intervalo superior dos valores próprios da família da matriz de estado definido na equação (1.10). Chamaremos a γ o valor do intervalo superior dos valores próprios da matriz A da equação (1.9) se o semiplano $Re \geq \gamma$ contenha os valores próprios da matriz A .

A fim de estimar γ seguem-se as seguintes expressões:

$$\gamma = \max[1, (n + \epsilon) \max |M_i|] \quad (1.16)$$

$$\gamma = \min[\max \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max \sum_{j=1}^n |a_{ij}|] \quad (1.17)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} n \max |a_{ij} + a_{ji}| \quad (1.18)$$

onde M_i denota do somatório de todos os mínimos principais de ordem i , $1 \leq i \leq n$; é um número pequeno positivo.

1.4 Controlo H_{∞}

O objetivo mais importante de um sistema de controlo é atingir determinadas especificações de desempenho e prover a estabilidade interna do sistema, neste sentido H_{∞} é uma das técnicas utilizadas hoje em dia para o controlo robusto, sendo uma das melhores técnicas no controlo de sistemas lineares com realimentação. É sabido que este método é eficiente na atenuação de perturbações que possam aparecer no sistema.

Os sistemas lineares, invariantes no tempo e de dimensão finita, no domínio de tempo, um sistema com variáveis de entrada e variáveis de saída, tem a seguinte forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (1.19)$$

Considerando o sistema no domínio do tempo, tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.20)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.21)$$

Onde A, B, C e D são matrizes reais de tamanho apropriado.

Sendo $G(s)$ definido como a matriz do sistema de transferência tem-se:

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \tag{1.22}$$

Para descrever a desempenho do sistema de controlo recorre-se ao tamanho de determinados sinais. Considere-se a norma H_∞ para uma função G , no domínio da frequência tem-se:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \tag{1.23}$$

Este espaço de *Hardy* designado H_∞ [10], indica o espaço das funções analíticas delimitadas no semiplano complexo.

Representado o diagrama do sistema na figura (1.3), é possível observar o sistema e o controlador, onde atuam duas variáveis de entradas e duas variáveis de saída. Essas duas variáveis de entrada são classificadas como $u(t)$, que representa a variável de entrada do controlo do sistema e respetivamente a variável de saída do controlador e $d(t)$ representa as perturbações externas. As variáveis de saída são também classificadas como $y(t)$ que são os sinais medidos, tornando-se como uma variável de entrada do controlador, e $z(t)$ as variáveis de saída do desempenho do sistema, que representa todos os sinais que deverão ser controlados.

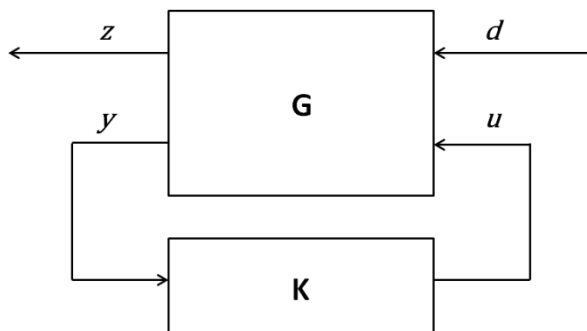


Figura 1. 3 Diagrama Geral do sistema para o método H_∞

O método de H_∞ pretende encontrar um controlador para um sistema geral tal que a norma infinita da função de transferência relacionando $d(t)$ com o desempenho $z(t)$ seja mínima.

Considerando a matriz $G(j\omega)$ em função das variáveis de entrada d e u O sistema da figura (1.3) pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(j\omega) \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ii}(j\omega) & G_{ij}(j\omega) \\ G_{ji}(j\omega) & G_{jj}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Com o vetor de controlo representado por:

$$u = K(j\omega)y \quad (1.25)$$

É possível representar a dependência de z em d :

$$z = F_l(G, K)d \quad (1.26)$$

Com F_l a função de transferência linear, definida por:

$$F_l(G, K) = G_{ii}(j\omega) + G_{ij}(j\omega)K(I - G_{ij}(j\omega)K)^{-1}G_{ji}(j\omega) \quad (1.27)$$

O objetivo deste método é encontrar um controlador K tal que $F_l(G, K)$ seja minimizado de acordo com a norma H_∞ . A norma infinita da matriz de transferência da função $\|F_l(G, K)\|$ é dada por:

$$F_l\|(G, K)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma} |F_l(G, K)(j\omega)| \quad (1.28)$$

Onde $G(j\omega)$ é o sistema e $K(j\omega)$ o controlador, $\bar{\sigma}$ é o máximo valor singular da função $P(G, K)(j\omega)$.

Esta técnica é vantajosa, quando comparada com as técnicas clássicas de controlo, uma vez que é facilmente aplicável a sistemas com multivariáveis, no entanto, a problemática da otimização e estabilização robusta ainda é bastante complexa.

1.5 Horowitz-Sidi

Horowitz [1,2,3], baseou-se na técnica de controlo robusto que considera as incertezas associadas a um sistema. Esta técnica é conhecida como *Teoria Quantitativa de Controlo*, designada por QFT, que advém do seu termo em inglês "*Quantitative Feedback Theory*" [4]. Ele debruçou-se neste estudo no ano de 1963, no entanto, mais tarde em 1972, *Sidi*, transcreveu e aprofundou o algoritmo de *Horowitz* [1,2,3].

Esta metodologia no domínio das frequências, permite projetar controladores robustos com base no domínio da sua frequência, cumprindo assim algumas especificações mínimas quantitativas considerando a presença de incertezas no sistema e a existência de perturbações. Segundo *Sidi* [1,2,3], um sistema "incerto" nem sempre implica que seja "desconhecido", pode-se limitar as incertezas dos parâmetros do modelo dentro de uma gama de valores conhecidos.

O modelo QFT [4] foi inicialmente projetado para incertezas elevadas, sistemas invariantes no tempo, sistemas com múltiplas entradas e uma saída e mais tarde para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Com esta teoria Horowitz [1,2,3] mostrou que o objetivo final de um controlador deve ser a obtenção de uma função de transferência de circuito aberto, com a largura de banda adequada para sensibilizar o sistema e reduzir as perturbações.

Estrutura do Sistema de Controlo

Na figura (1.4) está representado um diagrama de blocos de um sistema realimentado, que ilustra a ideia principal da técnica QFT [4] aplicada a sistemas com uma entrada e uma saída e a uma estrutura de controlo com dois graus de liberdade.

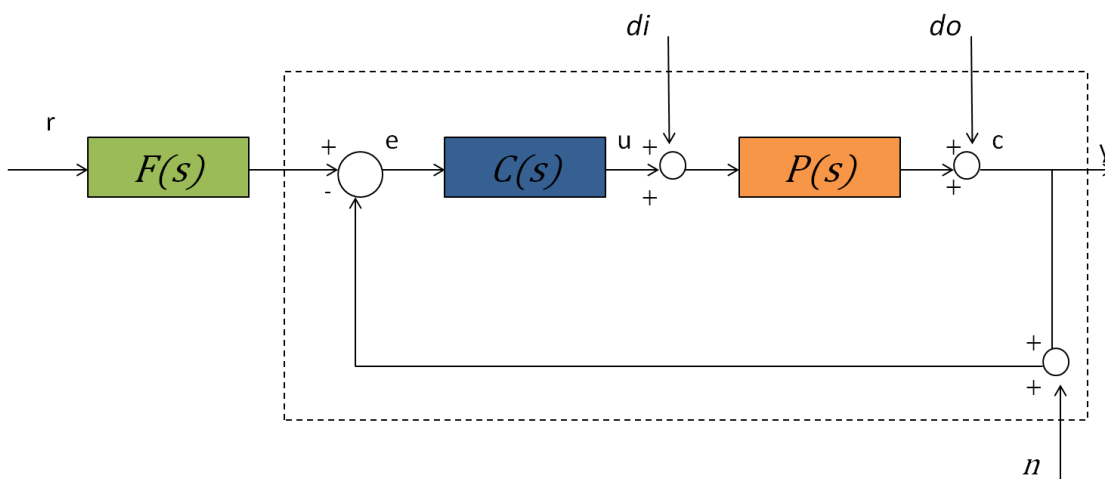


Figura 1. 4 Sistema Realimentado com dois graus de liberdade

Sendo $y(t)$ os sinais de saída do sistema, $u(t)$ do controlo e $e(t)$ dos erros associados, com respeito aos sinais de referência $r(t)$ e de perturbações $d_i(t)$ e $d_0(t)$, $n(t)$ representa o ruído do sensor. $C(s), F(s), P(s)$ caracterizam as funções de transferência do controlador, pré-filtro e do sistema, respetivamente.

A metodologia QFT [4] permite projetar um controlador robusto que satisfaça algumas especificações quantitativas, mencionadas daqui em diante.

Procedimento da Teoria Quantitativa de Controlo

Considerando $\mathcal{P}(s)$ a família de sistemas, esta é representada usando incertezas paramétricas:

$$\mathcal{P}(s) = \left\{ P(s) = k \frac{\prod_{i=1}^n (s+z_i) \prod_{z=1}^m (s^2+2\xi_z \omega_{0z} s + \omega_{0z}^2)}{s^N \prod_{r=1}^a (s+p_r) \prod_{t=1}^b (s^2+2\xi_t \omega_{0t} s + \omega_{0t}^2)} \right\} \quad (1.44)$$

Onde, k , z_i , p_r , ξ_z , ω_{0z} , ξ_t , ω_{0t} são variáveis independentes, que podem assumir os seguintes valores de incertezas:

$$k \in [k_{min}, k_{max}]; \quad z_i \in [z_{i,min}, z_{i,max}]; \quad p_r \in [p_{r,min}, p_{r,max}]; \quad \xi_z \in [\xi_{zmin}, \xi_{zmax}]; \\ \omega_{0z} \in [\omega_{0zmin}, \omega_{0zmax}]; \quad \xi_t \in [\xi_{tmin}, \xi_{tmax}]; \quad \omega_{0t} \in [\omega_{0tmin}, \omega_{0tmax}]$$

sendo: $n + m < a + b + N$.

Para a implementação do método de QFT [4] é necessário definir as especificações de desempenho e robustez desejadas. As especificações de desempenho descrevem o comportamento esperado do sistema enquanto que as especificações de robustez descrevem o comportamento de rejeição que o sistema deve assumir face às variações paramétricas e às perturbações externas.

1. Especificação do Problema

Nesta fase inicial, deve ser representado o modelo do sistema bem como as incertezas. As especificações podem ser realizadas em termos de limitação de magnitude para determinadas frequências. Todas as especificações expostas são com base no domínio de frequência.

1. Rejeição das perturbações no modelo de entrada: Na equação (1.45), δ_{p0} relaciona-se com a capacidade do sistema rejeitar as perturbações externas na entrada do sistema.

$$\left| \frac{\hat{c}}{\hat{d}_0} \right| = \left| \frac{1}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \delta_{p0}(\omega) \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.45)$$

2. Rejeição das perturbações no modelo de saída: Na equação (1.46), δ_{pi} especifica a restrição sobre a magnitude da função de sensibilidade do sistema. Esta especificação está diretamente relacionada com a capacidade do sistema rejeitar as perturbações externas na saída do sistema.

$$\left| \frac{\hat{c}}{\hat{d}_i} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \delta_{pi}(\omega) \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.46)$$

3. Estabilidade Robusta: Na equação (1.47) λ define a restrição de estabilidade robusta do sistema relacionando-se diretamente com a margem de ganho do sistema (MG) ou com a margem de fase (MF). Este valor especifica o limite superior máximo de magnitude que o sistema de malha fechada pode assumir. Para que o sistema seja estável para um determinado valor de entrada r , este deve ser igual ao valor de referência r_{ref} , para se obter um ganho unitário e satisfazendo as condições de estabilidade. No entanto esta condição deve

assumir os requisitos de robustez, garantindo que o ganho global (ganho do sistema e o ganho do controlador) sejam menores que o valor definido λ .

$$\left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}F} \right| = \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \lambda \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.47)$$

4. Referências de seguimento da trajetória (tracking): Os limites $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$, na equação (1.48), definem-se como o limite inferior e superior, em magnitude do seguimento de trajetória. Os funções $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$ estabelecem duas curvas, no diagrama de magnitude de Bode [12], entre as quais, a saída do sistema segue uma referência de entrada segundo os requisitos de desempenho desejados.

$$B_l(\omega) \leq \left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}} \right| = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq B_u(\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.48)$$

5. Rejeição de ruído: Na equação (1.49), $\delta_n(\omega)$ serve para atenuar o ruído do sensor.

$$\left| \frac{\hat{c}}{\hat{n}} \right| = \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \delta_n(\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.49)$$

6. Esforço do controlo: Na equação (1.50), $\delta_{ce}(j\omega)$ atenua o esforço do controlo devido às perturbações na entrada do sistema.

$$\left| \frac{\hat{u}}{\hat{n}} \right| = \left| \frac{C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \delta_{ce}(\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.50)$$

É de mencionar, que tendo em conta as equações (1.45), (1.46) e (1.48) verifica-se que, à medida que o ganho do controlador aumenta, a sensibilidade do sistema diminui, ajudando na robustez desejada do sistema. Devido a este aumento do ganho do controlador, a largura de banda também sofre um acréscimo. As especificações limitam os valores da largura de banda, restringindo o valor do ganho do controlador e a robustez, ajudando a impedir que os ruídos afetem tanto a estabilidade do sistema como o esforço do controlo. Ter-se-á então que se encontrar um compromisso entre os vários requisitos.

Outro aspeto importante, remete à ordem do controlador e à robustez do sistema. Controladores de ordem reduzida proporcionam maiores larguras de banda o que se reflete no seu tempo rápido de reação perante entradas de referência. Por sua vez, o controlador necessita de maiores ganhos para não ser tão sensível às perturbações externas. Quando o controlador assume uma ordem elevada, o sistema é robusto para baixas frequências e assume uma largura de banda maior, no entanto torna-se prejudicial para a estabilidade do sistema a elevadas frequências, tal acontece porque nesta situação o sistema é afetado pelo ganho do controlador. Tem-se novamente que encontrar um compromisso entre a ordem do controlador e a minimização da largura de banda deste.

2. Templates

Toda a informação quantitativa das incertezas é representada no plano de *Nichols* [11] por um conjunto de pontos, chamado *template*. Para cada frequência ω , existe uma representação gráfica da incerteza associada. Hoje em dia, existem duas ferramentas computacionais que permitem definir o sistema modelo de forma razoável. SISO-QFTIT é um *Toolbox* para o Matlab (Toolbox QFT v2.0) da empresa Terasoft Inc [6]. Este programa é uma das ferramentas que permite calcular os *templates* do sistema que se pretende analisar.

Para a construção dos *templates*, o sistema precisa projetar cada sistema do conjunto $\mathcal{P}(s)$ no diagrama de *Nichols* [11]. Faz-se um novo cálculo de forma a combinar todos os sistemas possíveis tendo em conta a variação de cada uma das incertezas paramétricas existentes. Para cada frequência determinada, calcula-se o respetivo valor de magnitude e fase de cada sistema selecionado e projeta-se o ponto obtido no diagrama de *Nichols* [11].

A título de exemplo, é possível observar a figura (1.5) que representa um sistema de segunda ordem, exibido para o conjunto de frequências:

$$\Lambda = \{0.5, 1, 2, 4, 8, 15, 30, 60, 90, 120, 180\} \text{ rad/s} \quad (1.51)$$

O conjunto é definido pela seguinte equação de transferência de segunda ordem:

$$P(s) = \frac{k}{s(s+a)}, \quad k \in [1, 10], \quad a \in [1, 10] \quad (1.52)$$

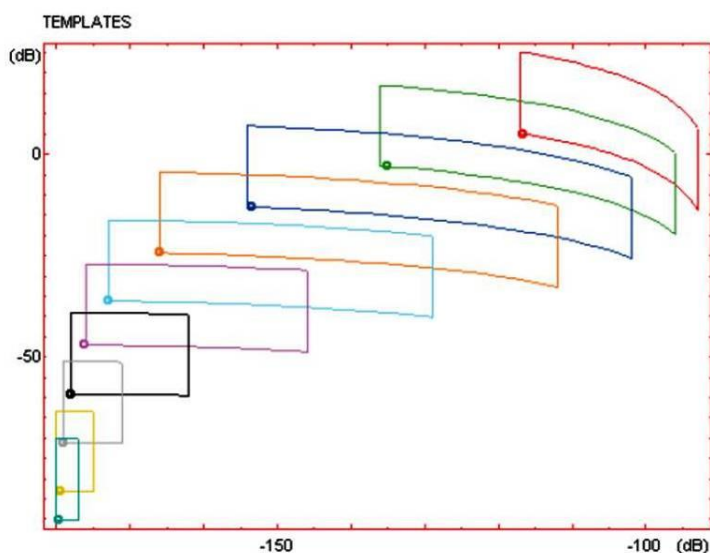


Figura 1. 5 Exemplo de QFT template [1]

Na figura (1.5), cada ponto determina a dinâmica de um sistema para a frequência selecionada. A região demarcada pelos pontos define o *template* do sistema.

3. Intervalo Superior e Inferior que Delimitam o Sistema

Nesta fase, determinado o modelo do *template*, o método de QFT [4] converte as especificações de magnitude de malha fechada, referidas no primeiro passo, em constrangimentos de magnitude e fase de uma função nominal de malha aberta. Estes constrangimentos são designados de intervalos. Ou seja, converte as especificações anteriores para cada valor de frequência $\omega \in \Lambda$, em zonas proibidas do plano de *Nichols* [11] para a função nominal L_0 representada por: $L_0 = C(j\omega)P_0(j\omega)$. Os limites associados a cada frequência são agrupados de forma a obter-se uma única zona proibida.

Considere-se como função de transferência de um sistema de segunda ordem:

$$T_r(s) = \frac{\omega_n^2 K}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.53)$$

onde:

$T_r(s)$: função de transferência de malha fechada

K : ganho estático

ξ : coeficiente de amortecimento

ω_n : frequência natural do sistema

O sistema pode então ser classificado em cinco tipos, considerando o amortecimento a que está sujeito:

- $\xi = 0$: Sistema sem amortecimento
- $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$: Sistema subamortecido com oscilações
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi < 1$: Sistema subamortecido sem oscilações
- $\xi = 1$: Sistema criticamente amortecido
- $\xi > 1$: Sistema sobreamortecido

Para um sistema com amortecimento, a constante de tempo, τ é representada por:

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} \quad (1.54)$$

Depende do fator de amortecimento e da frequência natural. Se o sistema for subamortecido, pode-se calcular ainda:

Tempo de subida:

$$\begin{cases} T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \left[\arctan \left(\frac{-\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) + \pi \right] \\ T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} (\pi - \arccos \xi) \end{cases} \quad (1.55)$$

Tempo até ao pico:

$$T_{pico} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1.56)$$

Tempo de acomodação para ε % de erro, dada por:

$$T_{ac} = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \left(\frac{100}{\varepsilon} \right) \quad (1.57)$$

Período próprio:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1.58)$$

Frequência natural:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_p} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.59)$$

Como já mencionado, é necessário definir duas funções de transferência, cujas saídas no tempo verificam os requisitos anteriores estabelecendo um máximo e mínimo onde os valores de saída do sistema sejam consideravelmente aceitáveis. Exemplificado na figura (1.6) encontram-se os limites superior e inferior, neste caso para as especificações de desempenho no domínio temporal:

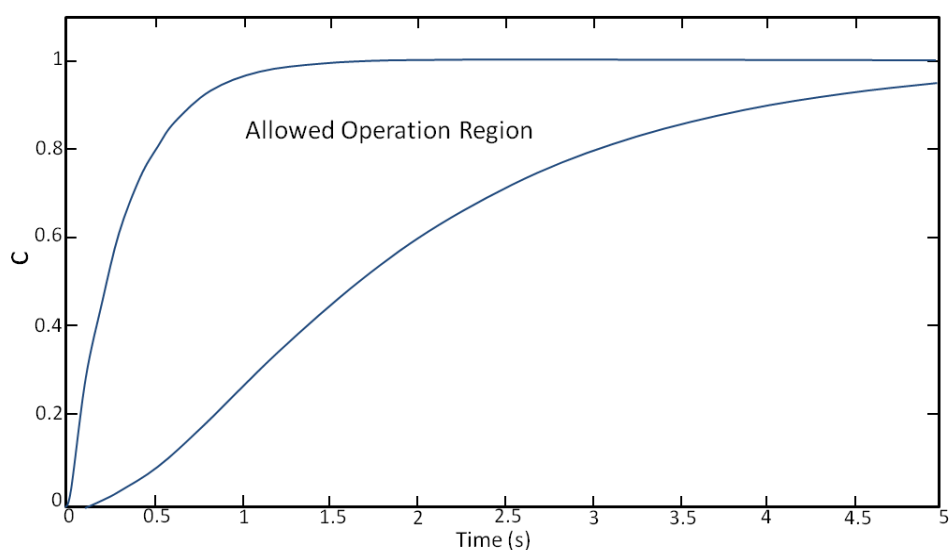


Figura 1. 6 Limite Superior e Inferior e zona permitida para o sistema operar no domínio do tempo [1]

Sempre que um sistema de segunda ordem é sujeito a uma variável de entrada sinusoidal, a variável de saída é também sinusoidal mas com uma variação da fase e magnitude.

O pico de magnitude é representado por:

$$M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \quad (1.60)$$

Com M_p o pico de magnitude e δ o fator de amortecimento.

A frequência crítica, por sua vez é definida:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \quad (1.61)$$

Sendo δ o fator de amortecimento e ω_n a frequência natural.

Recorrendo ao diagrama de Bode [12] é possível exemplificar graficamente os valores superiores e inferiores ($B_u(s)$ e $B_l(s)$), que delimitam o envelope para a especificação de desempenho da trajetória, desta vez no domínio de frequência:

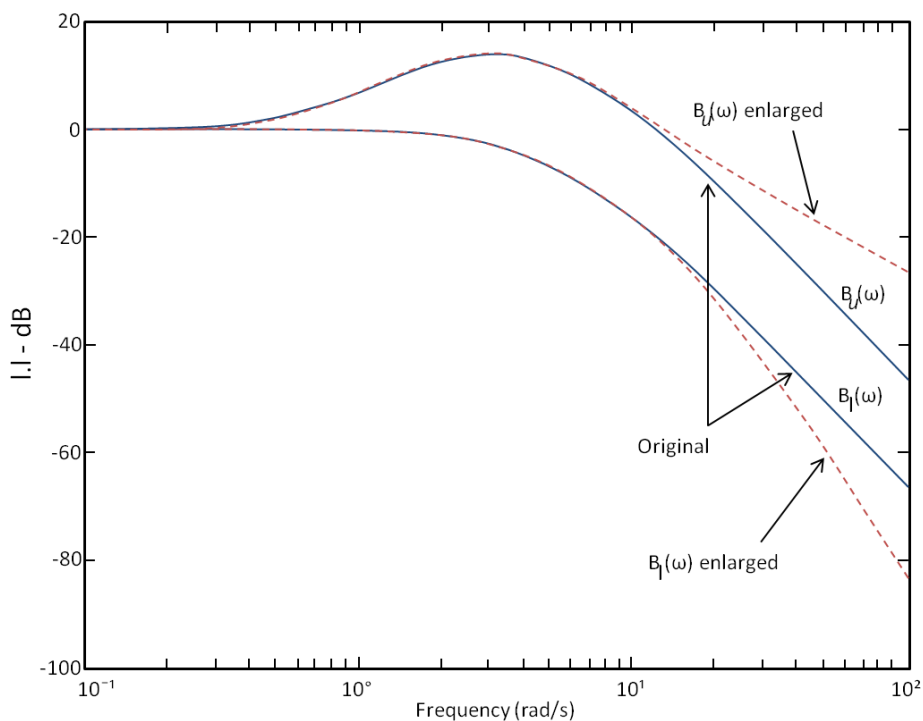


Figura 1. 7 Limite superior e Inferior e zona permitida para o sistema operar no domínio das frequências[1]

4. Dimensionamento da Resposta (Loop Shaping)

As especificações de desempenho e robustez apresentadas anteriormente são exemplificadas no diagrama de *Nichols* [11] e convertidas em contornos, que graficamente representam as restrições do sistema. Desenha-se o controlador de tal forma que a função nominal L_0 seja manipulada para que satisfaça os intervalos anteriores.

Através de diferentes procedimentos, é possível determinar os vários contornos para diferentes frequências tendo em conta as especificações de estabilidade e seguimento do sistema.

A figura (1.8) mostra um exemplo dos intervalos para especificações de estabilidade e seguimento, mostra também a função nominal onde esses intervalos são satisfeitos, para cada frequência.

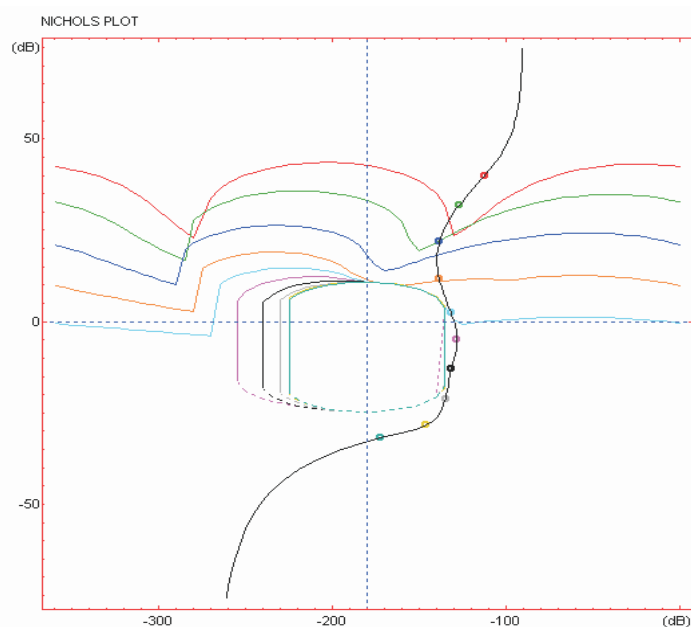


Figura 1. 8 Curva da Função $L(j\omega)$ [1]

5. Pré-Filtro

O pré-filtro é projetado para que a função de transferência de malha fechada, desde os valores de referência aos valores de saída, siga as especificações de desempenho robusto. Na figura (1.9) observa-se que as variações do sistema devem então estar inseridas numa faixa de tolerância desejada.

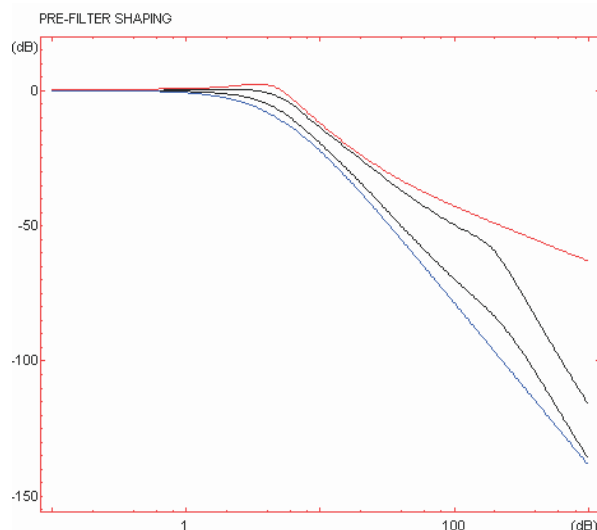


Figura 1. 9 Exemplo de um Pré-Filtro com base na teoria QFT [1]

É necessário, a síntese da função do pré-filtro para garantir o cumprimento das especificações de desempenho no domínio das frequências. Graficamente, o efeito que produz o pré-filtro no sistema é um deslocamento das curvas de magnitude máxima e mínima da função de transferência de malha fechada.

6. Validação

Por fim, quando obtidas as funções do controlador e do pré-filtro, o passo seguinte baseia-se na simulação, no domínio da frequência como temporal, para verificar se o sistema cumpre todos os requisitos.

Esta teoria foi projetada para satisfazer todos os requisitos no domínio de frequência, no entanto no espaço temporal é importante obter respostas de saída temporais de simulação e comparar com as especificações iniciais.

Este método apresenta algumas vantagens quando comparado com outros métodos:

- Baseia-se num modelo de controlo típico de dois graus de liberdade, facilitando a análise e compreensão;
- São modelados apenas os estados mensuráveis e os estados controlados;
- Permite trabalhar com sistemas não lineares, sistemas com uma entrada e uma saída e ainda com sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

1.6 Formulação do Problema

Pretende-se modelar um controlador robusto, baseado na teoria de Horowitz e Sidi [1,2,3], capaz de responder aos requisitos de estabilidade e desempenho robusto desejado, com parâmetros de incertezas associados. É necessário construir o modelo matemático para realizar a simulação do sistema de controlo, com recurso à técnica de QFT [4] a partir das bases teóricas já mencionadas e dos seus princípios fundamentais.

O objetivo é então, projetar um controlador, $C(s)$ e um pré-filtro $F(s)$, como ilustrado na figura (1.10), para que dessa forma as especificações de estabilidade e desempenho sejam atingidas para uma família de sistemas $\mathcal{P}(s)$ que descreve o sistema $P(s)$.

O sistema a desenvolver é representado por:

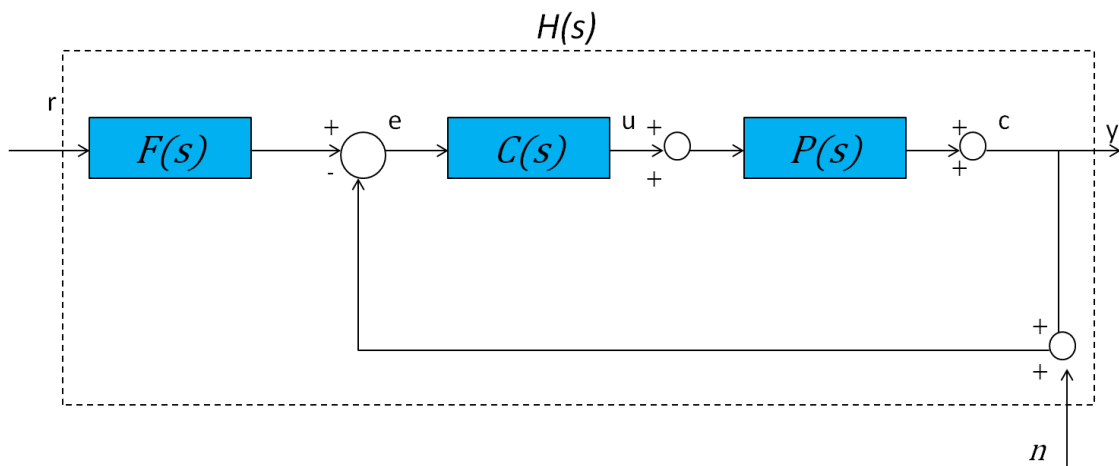


Figura 1. 10 Modelo Geral do Sistema

Sendo $y(t)$ os sinais de saída do sistema, $u(t)$ de controlo e $e(t)$ os erros, com respeito aos sinais de referência $r(t)$ de perturbações $d_i(t)$ e $d_o(t)$. $n(t)$ é representa o ruído do sensor. $C(s)$, $F(s)$, $P(s)$ representam as funções de transferência do controlador, pré-filtro e do sistema, respetivamente.

O sistema mostrado na figura (1.10) consiste no sistema realimentado, onde deve ser projetado o controlador, capaz de satisfazer as especificações de desempenho e estabilidade.

Considerando um modelo geral de uma função de transferência definido por:

$$\mathcal{P}(s) = \left\{ P(s) = k \frac{\prod_{i=1}^n (s+z_i) \prod_{z=1}^m (s^2+2\xi_z \omega_{0z} + \omega_{0z}^2)}{s^N \prod_{r=1}^a (s+p_r) \prod_{t=1}^b (s^2+2\xi_t \omega_{0t} + \omega_{0t}^2)} \right\} \quad (1.62)$$

Onde, k , z_i , p_r , ξ_z , ω_{0z} , ξ_t , ω_{0t} são variáveis independentes que podem assumir os seguintes valores de incertezas:

$$k \in [k_{min}, k_{max}]; \quad z_i \in [z_{i,min}, z_{i,max}]; \quad p_r \in [p_{r,min}, p_{r,max}]; \quad \xi_z \in [\xi_{zmin}, \xi_{zmax}];$$

$$\omega_{0z} \in [\omega_{0zmin}, \omega_{0zmax}]; \quad \xi_t \in [\xi_{tmin}, \xi_{tmax}]; \quad \omega_{0t} \in [\omega_{0tmin}, \omega_{0tmax}]$$

sendo: $n + m < a + b + N$.

De uma forma global, o objetivo principal de um controlador é a obtenção de uma função de transferência de malha aberta com uma largura de banda adequada de forma a tornar sensível o sistema e reduzir as perturbações. Neste caso, existem especificações para as quais o controlador deve cumprir:

a) Desempenho Robusto

O sistema deverá satisfazer as especificações de desempenho estabelecida por:

$$B_l(\omega) \leq \left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}} \right| = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq B_u(\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.62)$$

Onde $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$ representam os intervalos inferior e superior, respetivamente, representados pelas magnitudes da resposta em frequência. Horowitz [5] defendia que se a magnitude de uma função de transferência de malha fechada estivesse localizada entre o domínio de frequências de $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$ então a resposta no domínio de tempo está localizada entre as especificações de tempo correspondentes.

b) Estabilidade Robusta

O sistema deve também satisfazer a condição de estabilidade robusta representada por:

$$\left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}F} \right| = \left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \lambda \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (1.63)$$

Sendo λ a especificação de estabilidade, considera-se a margem de fase igual a: $2 \cdot \arcsin(0.5\lambda)$ graus e o ganho de margem igual a $20 \log_{10} \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)$ dB. A especificação de estabilidade está relacionada com a margem relativa de estabilidade: margem e ganho de fase.

Uma vez encontrados os valores do controlador e Pré-filtro que satisfaçam as condições anteriores deve-se determinar a Função de Transferência global:

$$H(s) = \frac{F(s)P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (1.64)$$

Sendo, $C(s)$ o controlador, $F(s)$ o pré-filtro e $P(s)$ o sistema.

O objetivo principal deste trabalho passa pela proposta de um método de controlo robusto, capaz de atuar num determinado sistema com parâmetros específicos, de forma a garantir o seu controlo, estabilidade e desempenho robusto mesmo quando sujeito a incertezas e perturbações causadas pelos mais variados motivos.

O interesse deste tema, recai essencialmente na sua atualidade, uma vez que, nos dias de hoje é importante colmatar qualquer que seja a perturbação existente, de forma a que as aeronaves sejam cada vez mais estáveis, proporcionando, no caso particular de um voo comercial, uma melhoria do conforto para todos os seus ocupantes e aumentando o desempenho no caso de uma aeronave militar.

Capítulo 2

2.1 Modelação do Controlo do Voo Robusto

Uma vez que o sistema é todo ele projetado para intervalos de valores, a modelação é feita com recurso a uma ferramenta do *Matlab* chamada de *Intlab* [13], capaz de realizar os cálculos intervalares.

Considerando um sistema geral, definido por $P(q, s)$:

$$P(q, s) = \frac{b_0 s^0 + b_1 s^1 + \dots + b_m s^m}{a_0 s^0 + a_1 s^1 + \dots + a_n s^n} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (2.1)$$

Onde:

$$a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}]; i = 1, \dots, n$$

$$b_j \in [b_{j \min}, b_{j \max}]; j = 1, \dots, m$$

A modelação terá como base o cumprimento das especificações apresentadas anteriormente no método de Horowitz [1,2,3], pelo que é necessário numa fase inicial determinar a faixa para a qual o sistema irá operar, designada por largura de banda, representada por:

$$\Lambda = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]. \quad (2.2)$$

A sistema nominal, P_0 , é também definido como o sistema no qual este deve operar satisfatoriamente.

São determinadas as especificações de desempenho máximo e mínimo, no domínio de frequência, assumindo um ganho unitário. Definem-se os limites intervalares de $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$ baseado no pico de magnitude e frequência natural. O fator de amortecimento condicionará o tipo de sistema. Para ter o comportamento desejado deve assumir-se as seguintes condições:

Para o intervalo superior B_u o fator de amortecimento deverá ser:

$$\delta_u < 1 \quad (2.3)$$

Para o intervalo inferior B_l , o fator de amortecimento terá que assumir a condição (2.4)

$$\delta_l \geq 1 \quad (2.4)$$

As funções serão então representadas na forma genérica de uma função de transferência de segundo grau:

$$T_r(s) = \frac{\omega_n^2 k}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.5)$$

onde:

$T_r(s)$: função de transferência de malha fechada

$k > 0$: ganho estático

$\omega_n > 0$: frequência natural

$\xi > 0$: coeficiente de amortecimento

As especificações de desempenho robusto desejadas descrevem o comportamento esperado do sistema perante uma determinada entrada de referência, por sua vez, as especificações de robustez descrevem o comportamento de rejeição que o sistema deve ter diante das variações paramétricas e das perturbações externas.

Como principal restrição será considerada a estabilidade robusta, definida por:

- Estabilidade

$$\left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \lambda \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.6)$$

Os valores do sistema são delimitados pelo valor de λ , que está diretamente relacionado com o limite superior máximo de magnitude de malha fechada no qual o sistema pode operar.

A condição definida na equação (2.6) foi reformulada tendo em conta os numerados e denominadores das funções. Esta manipulação permite trabalhar equações na sua forma simplificada. Considera-se $j\omega = s$.

Tem-se:

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}; \quad C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \quad (2.7)$$

Com $N_P(s)$ e $D_P(s)$ o numerador e denominador da função de transferência $P(s)$ e N_C e D_C o numerador e denominador da função de transferência $C(s)$.

Modelando a equação (2.6) obtém-se:

$$\left| \frac{\frac{N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}}{1 + \frac{N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}} \right| \leq \lambda \Leftrightarrow \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\frac{N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}}{\frac{D_P(s) D_C(s) + N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}} \right| \leq \lambda \Leftrightarrow \quad (2.9)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s) + N_P(s) N_C(s)} \right| \leq \lambda \Leftrightarrow \quad (2.10)$$

As condições definidas nas inequações (2.6) e (2.10) representam as mesmas restrições, no entanto com uma modelação diferente. Para efeitos de simulação e implementação será utilizada a abordagem representada na inequação (2.10).

- Desempenho da trajetória

$$B_l(\omega) \leq \left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}} \right| = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq B_u(\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.11)$$

Nas referências de desempenho, $B_l(\omega)$ e $B_u(\omega)$ irão limitar em magnitude o seguimento ou trajetória do sistema.

No caso das condições de desempenho da trajetória considera-se:

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}, \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}; \quad C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \quad (2.12)$$

Com $N_P(s)$ e $D_P(s)$ o numerador e denominador da função de transferência $P(s)$, N_C e D_C o numerador e denominador da função de transferência $C(s)$ e N_F e D_F o numerador e denominador da função de transferência $F(s)$.

Manipulando a inequação (2.11) obtém-se:

$$B_l(\omega) \leq \left| \frac{\frac{N_F(s) N_P(s) N_C(s)}{D_F(s) D_P(s) D_C(s)}}{1 + \frac{N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}} \right| \leq B_u(\omega) \Leftrightarrow \quad (2.13)$$

$$\Leftrightarrow B_l(\omega) \leq \left| \frac{\frac{N_F(s) N_P(s) N_C(s)}{D_F(s) D_P(s) D_C(s)}}{\frac{D_P(s) D_C(s) + N_P(s) N_C(s)}{D_P(s) D_C(s)}} \right| \leq B_u(\omega) \Leftrightarrow \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow B_l(\omega) \leq \left| \frac{N_F(s) N_P(s) N_C(s)}{D_F(s) [D_P(s) D_C(s) + N_P(s) N_C(s)]} \right| \leq B_u(\omega) \quad (2.15)$$

Para a implementação e simulação do controlador será analisada a função em termos de quociente entre o numerado e denominador para todas as funções de transferência.

2.2 Método Proposto

Tendo por base os métodos expostos no primeiro capítulo, será apresentado o método desenvolvido para este modelo em particular que assenta nos princípios fundamentais e procedimentos já descritos anteriormente.

Considerando um sistema geral, no domínio de frequência:

$$P(q, s) = \frac{\theta_0 s^0 + \theta_1 s^1 + \dots + \theta_m s^m}{\theta_0 s^0 + \theta_1 s^1 + \dots + \theta_n s^n} = \frac{\sum_{j=0}^m \theta_j s^j}{\sum_{i=0}^n \theta_i s^i} \quad (2.16)$$

Com: $\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}]$; $i = 1, \dots, n$ e $\theta_j \in [\theta_{j \min}, \theta_{j \max}]$; $j = 1, \dots, m$

E $\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dots \\ \theta_{n+m} \end{bmatrix}$ o vetor dos parâmetros do sistema e com $\theta \in D$ e D definido o domínio dos valores dos parâmetros.

O método terá por base as especificações previamente definidas. Tenha-se então em consideração a seguinte equação de estabilidade:

$$\left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq \lambda \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.17)$$

A equação da estabilidade que o sistema deve satisfazer pode ser manipulada de forma a obter:

$$|P(j\omega)C(j\omega)| \leq \lambda |1 + P(j\omega)C(j\omega)| \quad (2.18)$$

Podendo ser ainda definida por:

$$\Leftrightarrow |P(j\omega)C(j\omega)| - \lambda |1 + P(j\omega)C(j\omega)| \leq 0 \quad (2.19)$$

A esta nova especificação, atribui-se o nome de $f_1(\omega)$, obtendo a primeira restrição, com base na equação de estabilidade de *Horowitz* [1,2,3]:

$$f_1(j\omega) \leq 0 \quad (2.20)$$

A função f_1 para efeitos de simulação, é reformulada tendo em consideração o numerador e denominador de cada função de transferência pelo que, deduzindo a expressão (2.19) é possível obter:

$$\left| \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \right| - \lambda \left| 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \right| \leq 0 \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \right| - \lambda \left| \frac{D_P(s) \cdot D_C(s) + N_P(s) \cdot N_C(s)}{D_P(s) \cdot D_C(s)} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.22)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{D_P(s) \cdot D_C(s)} \right) \cdot [|N_P(s) \cdot N_C(s)| - \lambda |D_P(s) \cdot D_C(s) + N_P(s) \cdot N_C(s)|] \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.23)$$

$$\Leftrightarrow |N_P(s) \cdot N_C(s)| - \lambda |D_P(s) \cdot D_C(s) + N_P(s) \cdot N_C(s)| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow f_1(j\omega) = |N_P(s) \cdot N_C(s)| - \lambda |D_P(s) \cdot D_C(s) + N_P(s) \cdot N_C(s)| \quad (2.25)$$

Com N_P , D_P e N_C, D_C os numeradores e denominadores das funções $P(j\omega)$ e $C(j\omega)$, respetivamente.

Outra importante condição, que o sistema deve cumprir, refere-se ao desempenho da trajetória, como já visto. Esta é condicionada pelos intervalos superior e inferior:

$$B_l(j\omega) \leq \left| \frac{\hat{c}}{\hat{r}} \right| = \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \leq B_u(j\omega) \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.26)$$

Manipulando a inequação (2.26), sendo esta limitada por dois valores, será subdividida em duas inequações. A primeira inequação baseia-se no valor inferior, $B_l(j\omega)$:

$$B_l(j\omega) \leq \left| \frac{F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1+P(j\omega)C(j\omega)} \right| \quad \forall \omega > 0, \forall P \in \mathcal{P} \quad (2.27)$$

A função representa os valores inferiores para os quais o sistema terá que satisfazer, garantindo assim as especificações desejadas.

Manipulado a inequação (2.27), obtém-se:

$$\Leftrightarrow B_l(j\omega) |1 + P(j\omega)C(j\omega)| - |F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)| \leq 0 \quad (2.28)$$

Garantindo que a expressão será menor ou igual a zero e atribuindo a esta nova inequação o nome de $f_2(j\omega)$, tem-se:

$$f_2(j\omega) \leq 0 \quad (2.29)$$

A equação (2.28) modelada em termos de quociente entre numerador e denominador pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\left| \frac{N_{B_l}}{D_{B_l}} \right| \cdot \left| 1 + \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \right| - \left| \frac{N_F}{D_F} \cdot \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.30)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{N_{B_l} D_P \cdot D_C \cdot D_F}{D_{B_l} D_P \cdot D_C \cdot D_F} \right| \cdot \left| \frac{D_F \cdot D_{B_l} \cdot (D_P \cdot D_C + N_P \cdot N_C)}{D_P \cdot D_C \cdot D_F \cdot D_{B_l}} \right| - \left| \frac{N_F}{D_F} \cdot \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \cdot \frac{D_{B_l}}{D_{B_l}} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.31)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{D_{B_l} D_P D_C D_F} \right) \cdot [|N_{B_l} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_l} (D_P D_C + N_P N_C)| - |N_F N_P N_C D_{B_l}|] \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.32)$$

$$\Leftrightarrow |N_{B_l} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_l} (D_P D_C + N_P N_C)| - |N_F N_P N_C D_{B_l}| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.33)$$

$$\Leftrightarrow f_2(j\omega) = |N_{B_l} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_l} (D_P D_C + N_P N_C)| - |N_F N_P N_C D_{B_l}| \quad (2.34)$$

Com N_{B_l} , D_{B_l} , N_P , D_P , N_C , D_C , N_F , D_F os numeradores e denominadores das funções $B_l(j\omega)$, $P(j\omega)$, $C(j\omega)$ e $F(j\omega)$, respetivamente.

O intervalo superior $B_u(\omega)$, restringe, também o sistema e pode também ser deduzido por:

$$|F(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)| - B_u(\omega)|1 + P(j\omega)C(j\omega)| \leq 0 \quad (2.35)$$

Por fim, esta nova equação será intitulada de $f_3(\omega)$:

$$f_3(j\omega) \leq 0 \quad (2.36)$$

Reescrevendo a inequação (2.35), considerando o numerador e denominador das funções de transferência:

$$\left| \frac{N_F}{D_F} \cdot \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \right| - \left| \frac{N_{B_u}}{D_{B_u}} \right| \left| 1 + \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.37)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{N_F}{D_F} \cdot \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_C}{D_C} \cdot \frac{D_{B_u}}{D_{B_u}} \right| - \left| \frac{N_{B_u} D_P D_C D_F}{D_{B_u} D_P D_C D_F} \right| \cdot \left| \frac{D_F D_{B_u} (D_P D_C + N_P N_C)}{D_P D_C D_F D_{B_u}} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.38)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{D_{B_u} D_P D_C D_F} \right) \cdot [|N_F N_P N_C D_{B_u}| - |N_{B_u} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_u} (D_P D_C + N_P N_C)|] \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow [|N_F N_P N_C D_{B_u}| - |N_{B_u} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_u} (D_P D_C + N_P N_C)|] \leq 0 \Leftrightarrow \quad (2.40)$$

$$\Leftrightarrow f_3(j\omega) = |N_F N_P N_C D_{B_u}| - |N_{B_u} D_P D_C D_F| \cdot |D_F D_{B_u} (D_P D_C + N_P N_C)| \quad (2.41)$$

Com N_{B_u} , D_{B_u} , N_P , D_P , N_C , D_C , N_F , D_F os numeradores e denominadores das funções $B_u(j\omega)$, $P(j\omega)$, $C(j\omega)$ e $F(j\omega)$, respetivamente

Depois de modeladas as especificações é necessário ter presente o objetivo primordial, que passa pela obtenção do modelo geral do controlador, $C(j\omega)$ e de um pré-filtro $F(j\omega)$, para um dado sistema geral $P(j\omega)$. Para tal considere-se como modelo geral a função de transferência do controlador como:

$$C(s) = \frac{\alpha s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\xi\omega_2 s + \omega_2^2} \quad (2.42)$$

Com $K = \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \xi\omega_1 \end{bmatrix}$ o vetor dos parâmetros do Controlador.

Considerando igualmente, um modelo geral da função de transferência do pré-filtro como:

$$F(s) = \frac{\delta_1 + \delta_2 s + \delta_3 s^2}{\delta_4 d \delta_1 + s + d \delta_3 s^3} \quad (2.43)$$

Com $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$ o vetor dos parâmetros do Pré-Filtro.

Desenvolvendo as equações obtidas em (2.25), (2.34) e (2.41) é possível concluir que as restrições f_1 , f_2 e f_3 dependem dos parâmetros do controlador K , da frequência ω , dos parâmetros do sistema e dos parâmetros do pré-filtro, respetivamente θ e δ . Deduzindo as três inequações anteriores obtém-se:

$$f_1(K, j\omega, \theta) = |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - \lambda |1 + P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (2.44)$$

$$\Leftrightarrow f_1(j\omega) = |N_P(s) \cdot N_C(s)| - \lambda |D_P(s) \cdot D_C(s) + N_P(s) \cdot N_C(s)| \quad (2.45)$$

$$f_2(K, j\omega, \theta) = B_l(\omega) |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - |F(\delta, j\omega)P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (2.46)$$

$$\Leftrightarrow f_2(j\omega) = |N_{B_l} D_P \cdot D_C \cdot D_F| \cdot |D_F \cdot D_{B_l} (D_P \cdot D_C + N_P \cdot N_C)| - |N_F \cdot N_P \cdot N_C \cdot D_{B_l}| \quad (2.47)$$

$$f_3(K, j\omega, \theta) = |F(\delta, j\omega)P(\theta, j\omega)C(\bar{K}, j\omega)| - B_u(\omega) |1 + P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (2.48)$$

$$\Leftrightarrow f_3(j\omega) = |N_F \cdot N_P \cdot N_C \cdot D_{B_u}| - |N_{B_u} D_P \cdot D_C \cdot D_F| \cdot |D_F \cdot D_{B_u} \cdot (D_P \cdot D_C + N_P \cdot N_C)| \quad (2.49)$$

Com N_{B_u} , D_{B_u} , N_P , D_P , N_C , D_C , N_F , D_F , N_{B_l} , D_{B_l} os numeradores e denominadores das funções $B_u(j\omega)$, $P(j\omega)$, $C(j\omega)$, $F(j\omega)$ e $B_l(j\omega)$, respetivamente.

Descrição do Problema: Deve-se achar o vetor K tal que, para qualquer valor de $\theta \in D$ e para qualquer frequência $\omega \in \Lambda$ (Λ definido pela largura de banda) sejam cumpridas as seguintes desigualdades:

$$f_1(K, j\omega, \theta) \leq 0 \quad (2.50)$$

$$f_2(K, j\omega, \theta) \leq 0 \quad (2.51)$$

$$f_3(K, j\omega, \theta) \leq 0 \quad (2.52)$$

O problema passa por determinar os valores do vetor K que satisfaçam as restrições anteriores para as várias gamas de frequência definidas e os vários valores paramétricos previamente definidos do sistema.

Assim é necessário maximizar as funções f_1, f_2 e f_3 . Ou seja, deve-se encontrar os valores máximos de:

$$J(K) = \max_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}} (f_1(K, j\omega, \theta), f_2(K, j\omega, \theta), f_3(K, j\omega, \theta)) \quad (2.53)$$

Recorre-se ao máximo do mínimo de uma função, pois desta forma qualquer valor máximo encontrado satisfaz os requisitos mínimos desejados. Neste método em questão traduz-se em encontrar o valor mínimo do vetor K capaz de satisfazer o máximo valor das funções:

$$\min_K \max_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}} (f_1(K, j\omega, \theta), f_2(K, j\omega, \theta), f_3(K, j\omega, \theta)) \quad (2.54)$$

Capítulo 3

Simulações

3.1 Aplicação 1 - Motor Elétrico

Os motores elétricos são aplicados em diversas áreas e com diferentes finalidades, entre elas a aeronáutica. As superfícies de controlo de uma aeronave são um exemplo da utilidade destes motores. É frequente instalarem-se motores elétricos nas superfícies de controlo de uma aeronave estando, normalmente sujeitos a cargas que podem ou não variar de intensidade.

Nesta primeira aplicação, considera-se um motor elétrico onde a inércia, definida por J_m , está sob uma carga com inércia J_l . Ambas estão agregadas através de um veio com espessura k e amortecimento representado pela variável c .

A função de transferência que traduz o modelo descrito é representada por:

$$P(q, s) = \frac{J_l s^2 + ds + k}{J_l J_m s^3 + (J_l + J_m) ds^2 + (J_l + J_m) ks} \quad (3.1)$$

Com $q = [J_l, k]^T \in B$ o vetor contendo os parâmetros intervalares da função de transferência $P(q, s)$ definidos por $J_l = [5.6, 8]$; $k = [5880, 5900]$. $J_m = 0.4$ e $d = 2$ são definidos números reais positivos. B é o espaço do domínio de todos os parâmetros intervalares.

A fim de representar o sistema nominal, escolheram-se os valores médios dos parâmetros intervalares:

$$P_0 = \frac{6.8s^2 + 2s + 5890}{2.72s^3 + 14.4s^2 + 42408s} \quad (3.2)$$

Recorrendo ao diagrama de Bode [12], é possível representar o comportamento da função $P_0(q, s)$ no domínio das frequências, considerando a sua variação em magnitude e fase ao longo de uma gama de frequências.

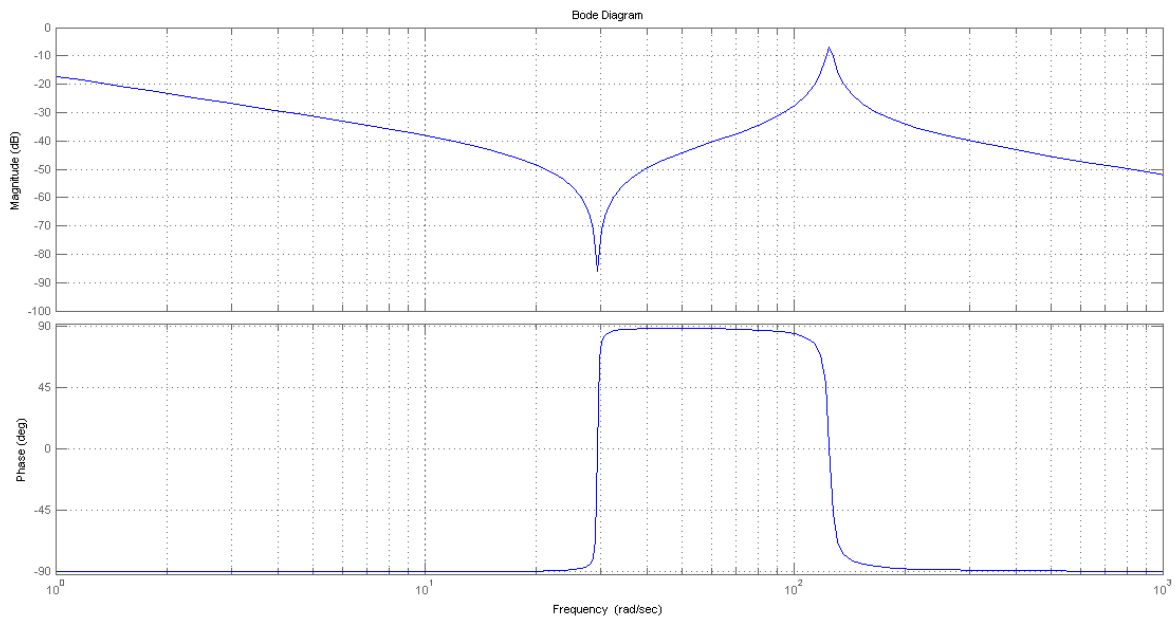


Figura 3.1 Sistema Nominal de $P(q, s)$

Na figura (3.1) observa-se o comportamento da função de transferência nominal para uma gama de frequências desde $10^{-1}(rad/s)$ até aos $10^3(rad/s)$. O seu pico de magnitude é, aproximadamente $-7.4 (dB)$ a uma frequência de $124 (rad/s)$. No diagrama de fase, os valores mínimos e máximos variam entre -90° a 90° , respetivamente.

Definido o sistema nominal, deve-se referir qual a largura de banda na qual o sistema irá operar. Esta varia desde $-3 dB$ até ao pico máximo da função. Neste caso, sendo ele $-7.4 (dB)$, determinou-se:

$$\omega_{min} = -7.4 - 3 \Leftrightarrow \omega_{min} = -10.4 dB \quad (3.3)$$

Com ω_{min} representado pela mínima frequência.

Para $\omega_{min} = -10.4 dB$ o valor do pico de magnitude é de:

$$PM = 122 rad/s \quad (3.4)$$

O diagrama de Bode [12] é utilizado para descrever graficamente o comportamento do modelo, considerando o ganho $|G(j\omega)|$ dB e a sua resposta em frequência, ω (rad/s).

A gama de frequências é dada por:

$$\Lambda = [0.1, 20, 40, 60, 80, 100, 124] rad/s \quad (3.5)$$

Todo o sistema $P(q, s)$ depende de q , vetor formado pelos parâmetros intervalares da função. O comportamento da função $P(q, s)$ para diferentes valores dos parâmetros definidos em $q = [J, k]^T \in B$ é representado na figura (3.2).

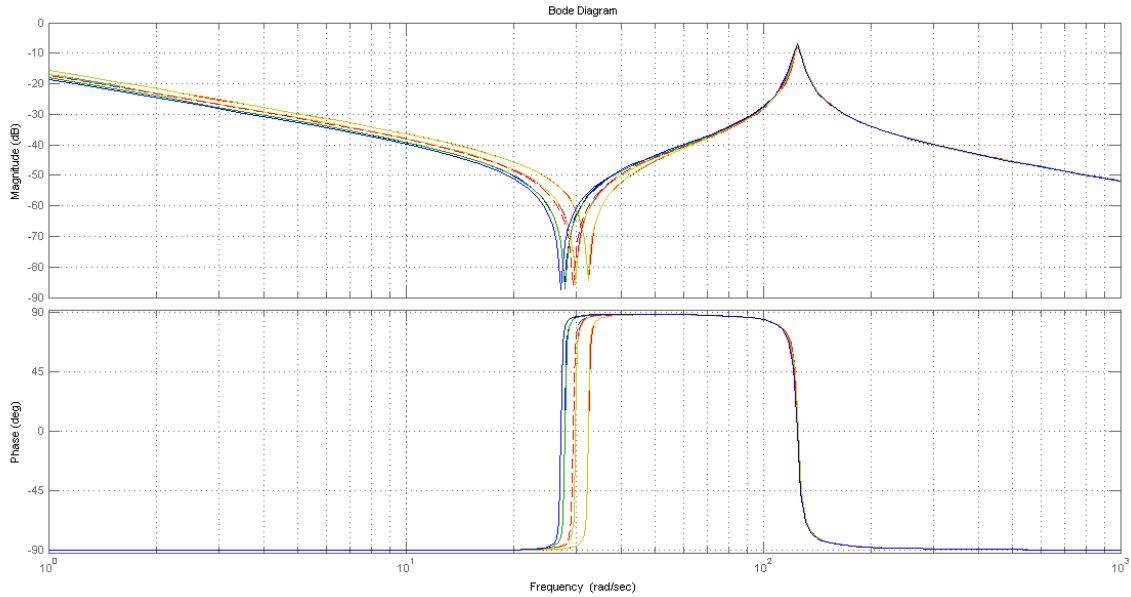


Figura 3.2 Representação da Função de Transferência do Sistema para Diferentes Valores de Frequência

O comportamento das funções da figura (3.2) não oscilam da figura (3.1), o que representa que o comportamento assumido pelas funções para diferentes valores dos parâmetros iniciais não diferem muito.

É necessário definir os intervalos para os quais o sistema será forçado a operar a fim de garantir as especificações de desempenho e estabilidade desejadas. São definidos com um máximo e mínimo valor de magnitude, descritos pelas funções B_l e B_u :

- Intervalo Superior, B_u :

A função de transferência final de B_u é dada pela expressão (3.6):

$$B_u = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1} \quad (3.6)$$

Onde:

$$\omega_{n_u} = 1 \text{ dB} \quad (3.7)$$

$$\delta_u = 0.7 \quad (3.8)$$

Sendo ω_{n_u} a frequência natural da função B_u e δ_u o fator de amortecimento.

- Intervalo Inferior, B_l :

A função de transferência final de B_l é dada pela expressão (3.9)

$$B_l = \frac{0.7225}{s^2 + 2.295s + 0.7225} \quad (3.9)$$

Onde:

$$\omega_n = 0.85 \text{ dB} \quad (3.10)$$

$$\delta_1 = 1.35 \quad (3.11)$$

Sendo $\omega_{n,1}$ a frequência natural da função B_l e δ_1 o fator de amortecimento.

Considerando as especificações de desempenho da trajetória definidas por B_l e B_u representa-se o envelope com a variação das funções no domínio temporal.

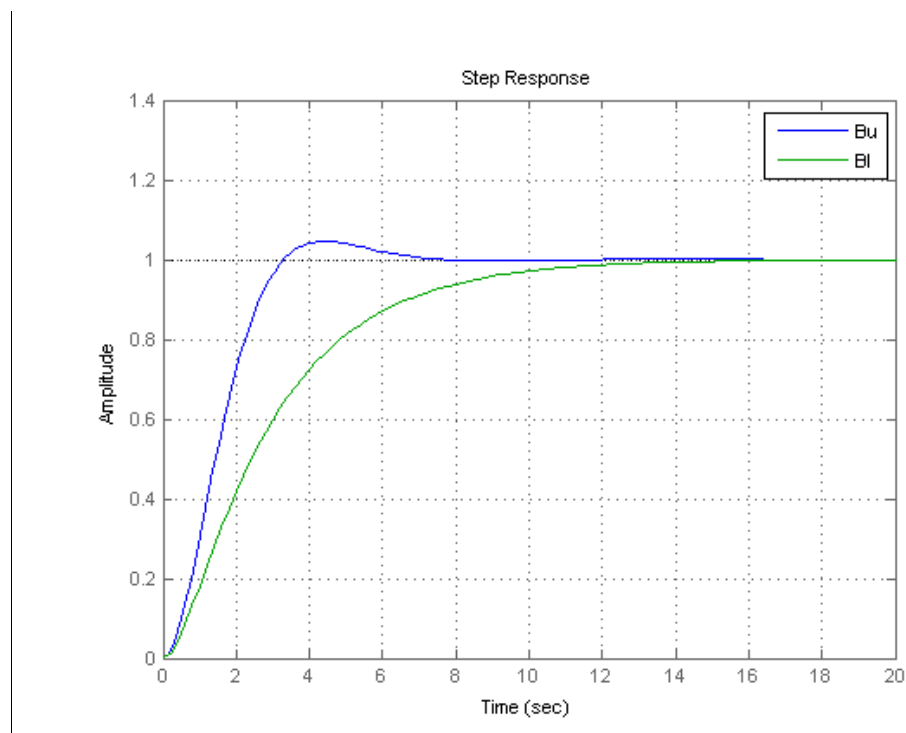


Figura 3. 3 Representação dos intervalos superior e inferior para a especificação de seguimento da trajetória no espaço do tempo

Na figura (3.3) o intervalo máximo $B_u(j\omega)$, representado a azul, assume um pico de amplitude aos 1.05 entre os 4 e 5 segundos, estabilizando aos zero graus aproximadamente aos 6s. $B_l(j\omega)$, está representada a verde, é crescente até aos 11s estabilizando depois a uma magnitude com valor zero.

A função máxima e mínimo B_u e B_l , apresenta as seguintes características no domínio do tempo:

- B_u :

$$t = 1.2s \quad \begin{cases} PM = 1.05 \\ \text{Overshoot (\%)} = 4.6 \end{cases} \quad (3.12)$$

Settling Time: 5.98s

Rise Time: 2.13s

- B_l :

Settling Time: 11s

Rise Time: 6.03s

O método de *Nelder Mead* [14] é utilizado na procura dos melhores valores para a função de transferência do controlador, porque este método procura um mínimo local de um problema multidimensional sem restrições:

(3.13)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Com $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (n > 1)$

Otimizou-se, através do método de *Nelder Mead* [14] a seguinte função:

$$f_1(K, \omega, \theta) = |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - \lambda |1 + P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow f_1(j\omega) = |N_p(s) \cdot N_c(s)| - \lambda |D_p(s) \cdot D_c(s) + N_p(s) \cdot N_c(s)| \quad (3.15)$$

Sendo a função de controlo definida por:

$$C(s) = \frac{\alpha s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\xi\omega_2 s + \omega_2^2} \quad (3.16)$$

Com $K = \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \xi \end{bmatrix}$ o vetor dos parâmetros do controlador.

Obtém-se como função de transferência do controlador:

$$C(s) = C(s) = \frac{1.26s^2 + 2.556s + 3.24}{s^2 + 1.3774s + 3.24} \quad (3.17)$$

Considerando $\xi = 0.71$ e $x_0 = [1,1,1]$, qualquer valor para o qual a função a ser otimizada não tem valor infinito, isto é, qualquer x_0 tal que $f(x_0)$ assume um valor finito.

Uma segunda otimização, igualmente com o método de *Nelder Mead* [14], da seguinte função:

$$f_2(k, \omega, \theta) = B_l(\omega) |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - |F(\delta, j\omega)P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (3.18)$$

Permitiu determinar os valores do pré-filtro.

$$F(s) = \frac{\delta_1 + \delta_2 s + \delta_3 s^2}{\delta_4 d \delta_1 + s + d \delta_3 s^3} \quad (3.19)$$

Com $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$ o vetor dos parâmetros do pré-filtro.

O função de transferência do pré-filtro, depois de otimizada é representada na equação (3.20)

$$F(s) = \frac{1.1759 + 1.3524s + 0.017s^2}{3.407 + s + 0.034s^3} \quad (3.20)$$

Com $d = 2$ definido um número real positivo.

Como demonstrado na descrição do algoritmo, deve ser encontrado o máximo das funções, para qualquer valor de $\omega \in \Lambda$ e $\theta \in P$. Este problema de maximização permite encontrar um maior valor possível para qualquer valor pertencente aos intervalos dos parâmetros iniciais das funções.

$$J(K) = \max_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}} (f_1(K, \omega, \theta), f_2(K, \omega, \theta), f_3(K, \omega, \theta)) \quad (3.21)$$

Para encontrar $J(K)$, calculou-se utilizando o *Intlab* [13], os valores máximos de cada função:

$$f_1(K, j\omega, \theta) = |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - \lambda |1 + P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (3.22)$$

$$\Leftrightarrow f_1(j\omega) = |N_p(s) \cdot N_c(s)| - \lambda |D_p(s) \cdot D_c(s) + N_p(s) \cdot N_c(s)| \Leftrightarrow \quad (3.23)$$

$$\Leftrightarrow f_1(K, \omega, \theta) = 10^7 * [-4.9089, 0.0392] \quad (3.24)$$

$$f_2(K, j\omega, \theta) = B_l(\omega) |P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| - |F(\delta, j\omega)P(\theta, j\omega)C(K, j\omega)| \quad (3.25)$$

$$\Leftrightarrow f_2(j\omega) = |N_{B_l} D_P \cdot D_C \cdot D_F| \cdot |D_F \cdot D_{B_l} (D_P \cdot D_C + N_P \cdot N_C)| - |N_F \cdot N_P \cdot N_C \cdot D_{B_l}| \Leftrightarrow \quad (3.26)$$

$$\Leftrightarrow f_2(K, \omega, \theta) = 10^{21} * [-0.0001, 2.0414] \quad (3.27)$$

$$f_3(K, j\omega, \theta) = |F(\delta, j\omega) P(\theta, j\omega) C(\bar{K}, j\omega)| - B_U(\omega) |1 + P(\theta, j\omega) C(K, j\omega)| \quad (3.28)$$

$$\Leftrightarrow f_3(j\omega) = |N_F \cdot N_P \cdot N_C \cdot D_{B_u}| - |N_{B_u} D_P \cdot D_C \cdot D_F| \cdot |D_F \cdot D_{B_u} \cdot (D_P \cdot D_C + N_P \cdot N_C)| \Leftrightarrow \quad (3.29)$$

$$\Leftrightarrow f_3(K, \omega, \theta) = 10^{22} * [-2.7491, 0.0001] \quad (3.30)$$

Com N_{B_u} , D_{B_u} , N_P , D_P , N_C , D_C , N_F , D_F , N_{B_l} , D_{B_l} os numeradores e denominadores das funções $B_u(j\omega)$, $P(j\omega)$, $C(j\omega)$, $F(j\omega)$ e $B_l(j\omega)$, respetivamente.

Neste método era necessário encontrar o valor mínimo do vetor K capaz de satisfazer o máximo valor das funções:

$$\text{Min}_K \text{Max}_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}} (f_1(K, j\omega, \theta), f_2(K, j\omega, \theta), f_3(K, j\omega, \theta)) \quad (3.31)$$

Depois de determinados os valores de K, é possível afirmar que o valor que satisfaz a condição (3.31) é dado por:

$$\text{Min}_K \text{Max}_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}} (f_1(K, j\omega, \theta), f_2(K, j\omega, \theta), f_3(K, j\omega, \theta)) = 2.0414e + 022 \quad (3.32)$$

É necessário confirmar se os valores obtidos para o controlador satisfazem as condições de desempenho e controlo para o sistema $P(q, s)$. Depois de simulado, verificou-se graficamente que a função do sistema comporta-se como desejado.

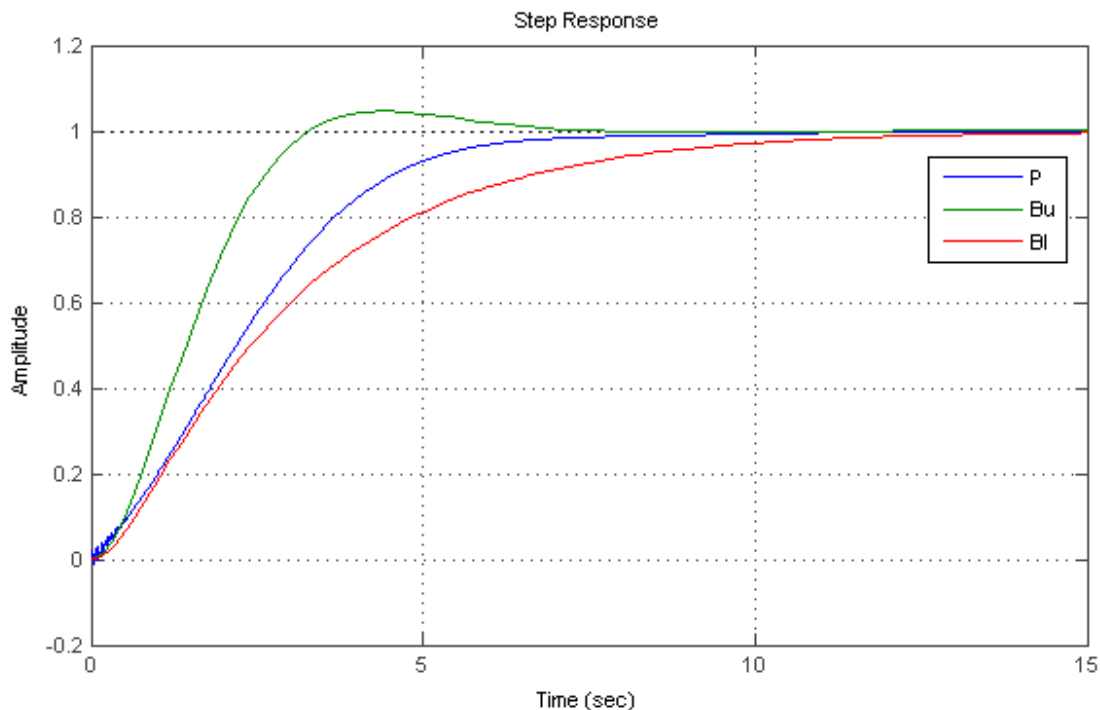


Figura 3. 4 Função de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l

A azul encontra-se o sistema com implementação do controlador. A cor verde e vermelha são respetivamente, o intervalo superior e inferior que delimitam o seguimento de referência da trajetória desejada.

Existe uma pequena perturbação no início da trajetória, no entanto a função $P(s)$ quando sujeita ao controlo implementado comporta-se dentro do intervalo de valores impostos. A figura (3.4) representa o comportamento apenas da função nominal, no entanto é sabido que os mesmo requisitos devem ser cumpridos pela família de sistemas. Ou seja para diferentes valores dos parâmetros intervalares do sistema $P(s)$ as mesmas especificações devem ser cumpridas. Na figura (3.5) encontra-se representadas três funções, a função nominal $P(s)$, a função para os quais os valores dos parâmetros do sistema são mínimos, $P_{min}(s)$ e a função cujos dos parâmetros iniciais do sistema são máximos, P_{max} .

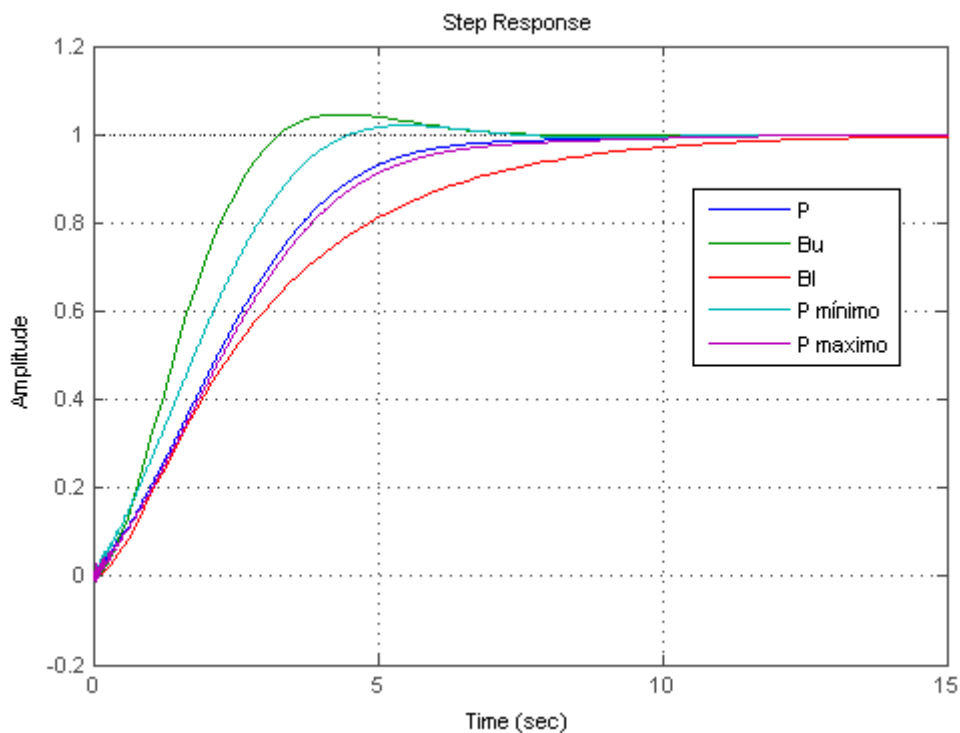


Figura 3. 5 Funções de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l

Na figura (3.5) é possível observar os limites intervalares que se encontram a verde e a vermelho correspondendo à função de transferência $B_u(s)$ e $B_l(s)$, respetivamente. As três funções representadas, $P_{min}(s)$, P_{max} e $P(s)$ seguem as referências de trajetória desejada, uma vez que o seu comportamento descrito encontra-se na zona aceitável para um bom desempenho do sistema (entre os dois valores representados pelas funções $B_u(s)$ e $B_l(s)$).

Como forma de comparação é possível observar o comportamento das funções de transferência descritas anteriormente na figura (3.5) mas desta vez sem a implementação do controlador.

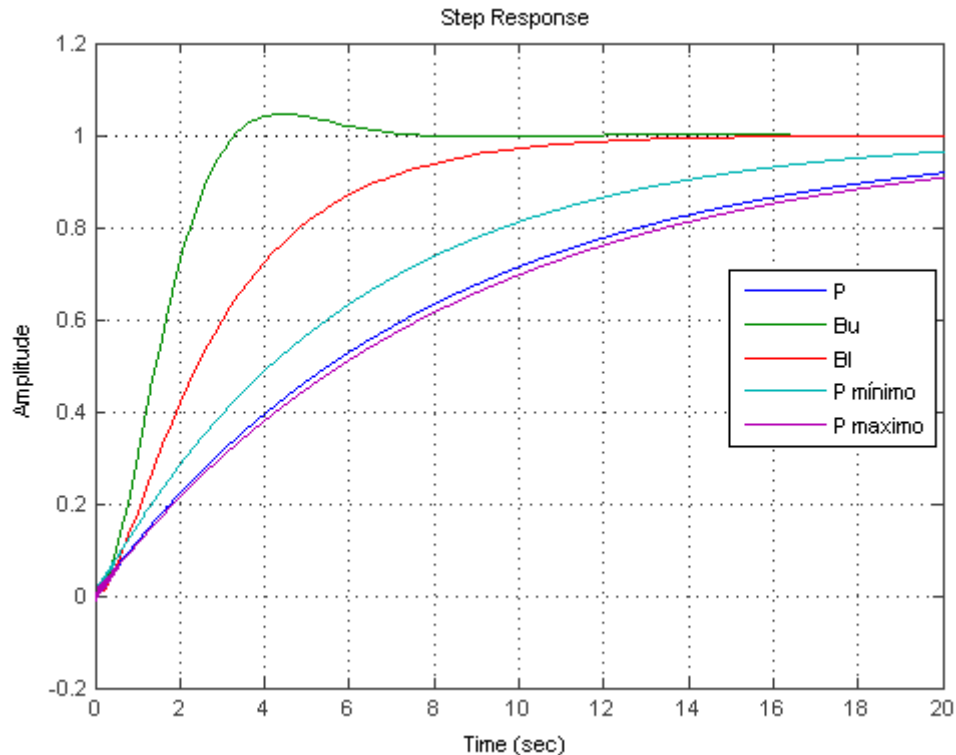


Figura 3. 6 Funções de transferência sem aplicação do controlo e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l

São representadas as mesmas funções de transferência, $P_{min}(s)$, P_{max} e $P(s)$ da figura (3.5) e verifica-se através desta nova abordagem, sem o efeito do controlador, representado na figura (3.6), que estas não se encontram dentro dos limites desejáveis. O controlador aplicado permite então, diminuir grandemente o tempo que o sistema demora a estabilizar e sobretudo, permite que o sistema assuma como referência de desempenho os valores desejados.

3.2 Aplicação 2 - Controlo da Arfagem

Nesta segunda aplicação, será simulado o controlo da arfagem de uma aeronave. Todo o desenvolvimento desta segunda aplicação será de forma mais sucinta, uma vez que o método já foi explicado na primeira aplicação, em maior detalhe.

Considere-se uma aeronave e os seus movimentos típicos ao longo dos eixos $(0, \vec{x})$, $(0, \vec{y})$ e $(0, \vec{z})$. O movimento realizado pela aeronave em torno do eixo $(0, \vec{y})$ provoca um ângulo de rotação entre $(0, \vec{x}_0)$ e $(0, \vec{x})$ no plano vertical designado de arfagem. O profundor controla o movimento de arfagem da aeronave.

O movimento de arfagem é governado pelas dinâmicas do voo longitudinal. Baseando a simulação que se segue num modelo de uma aeronave comercial e assumindo um regime de voo de cruzeiro a altitude e velocidade constante, considera-se a função de transferência que representa o ângulo de arfagem, θ com a deflexão do profundor, δ_e :

$$P(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{as+b}{s^3+cs^2+ds} \quad (3.33)$$

Com $a = [1.2, 1.812]$, $b = [0.14192, 0.2188]$, $c = [0.5912, 0.8868]$ e $d = [0.7368, 1.1052]$. Estes são definidos como os parâmetros intervalares do sistema.

A função de transferência nominal é dada por:

$$P_0(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s} \quad (3.34)$$

A função $P_0(s)$ representada graficamente no domínio das frequências é visível na figura (3.7).

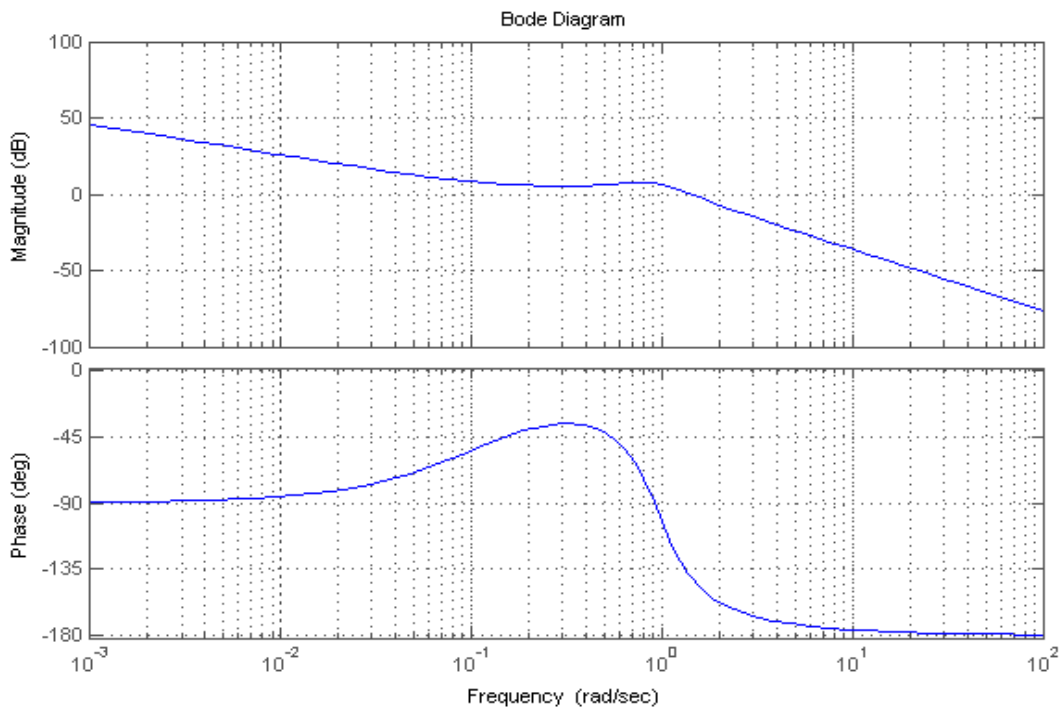


Figura 3. 7 Função de transferência nominal, $P_0(s)$

Para a função nominal representada na figura (3.7), a largura de banda escolhida no qual o sistema irá operar é definida por:

$$\Lambda = [0.1, 2, 4, 6, 8, 10] \text{ rad/s} \quad (3.35)$$

Os intervalos superior, $B_u(s)$, e inferior, $B_l(s)$, que definem o desempenho desejado no qual este sistema deve atuar são caracterizados por:

- **Intervalo Superior, B_u :**

A função de transferência final de B_u é dada pela expressão (3.36):

$$B_u = \frac{4}{s^2 + 2.6s + 4} \quad (3.36)$$

Onde:

$$\omega_{n_u} = 1.3 \text{ dB} \quad (3.37)$$

$$\delta_u = 0.85 \quad (3.38)$$

Sendo ω_{n_u} a frequência natural da função B_u e δ_u o fator de amortecimento.

- **Intervalo Inferior, B_l :**

A função de transferência final de B_l é dada pela expressão (3.39):

$$B_l = \frac{0.25}{s^2 + 0.675s + 0.25} \quad (3.39)$$

Onde:

$$\omega_{n_l} = 1.3 \text{ dB} \quad (3.40)$$

$$\delta_l = 0.5 \quad (3.41)$$

Sendo ω_{n_l} a frequência natural da função B_l e δ_l o fator de amortecimento.

Os valores da função do controlador e do pré-filtro, depois de otimizadas as equações definidas em (2.25), (2.4) e (2.41) são:

$$C(s) = \frac{5s^2 + 5.964s + 17.64}{s^2 + 4.26s + 9} \quad (3.42)$$

$$F(s) = \frac{1.1159 + 1.0991s + 0.1323s^2}{3.122 + s + 0.2646s^3} \quad (3.43)$$

As funções f_1 , f_2 e f_3 assumiram os valores máximos apresentados nas equações (2.25), (2.34) e (2.41).

$$f_1(K, j\omega, \theta) = 10^4 * [-1.6753, 0.0937] \quad (3.44)$$

$$f_2(K, j\omega, \theta) = 10^{13} * [-0.0001, 2.4256] \quad (3.45)$$

$$f_3(K, j\omega, \theta) = 10^{14} * [-4.0312, 0.0001] \quad (3.46)$$

Com K definido o vetor dos parâmetros do controlador, ω a frequência do sistema e θ o vetor dos parâmetros do pré-filtro.

O valor máximo dos valores das funções definidas nas equações (3.44), (3.45) e (3.46) é:

$$\underset{K}{\text{Min}} \underset{\substack{\omega \in \Lambda \\ \theta \in P}}{\text{Max}}(f_1(K, j\omega, \theta), f_2(K, j\omega, \theta), f_3(K, j\omega, \theta)) = 2.4255^{14} \quad (3.47)$$

O sistema $P(s)$, sujeito à ação do controlador, é apresentado na figura (3.8) assim como os intervalos que delimitam a região imposta como um requisito de desempenho robusto desejável.

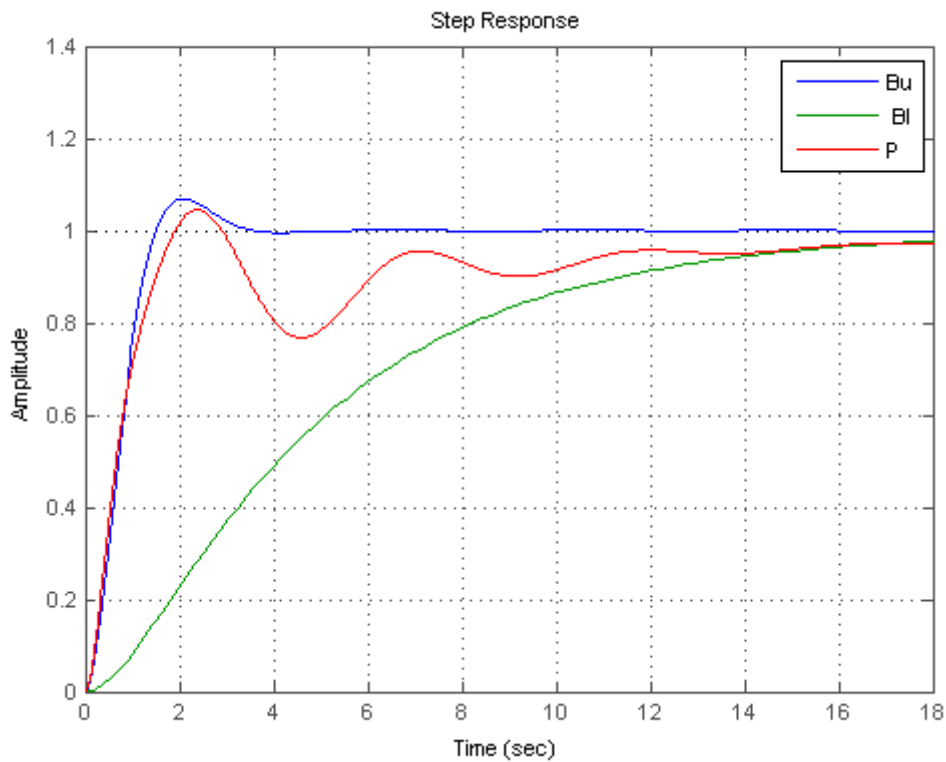


Figura 3. 8 Função de transferência do sistema controlado e as funções de transferência dos limites superior B_u e do limite inferior B_l

O controlo projetado para o sistema $P(s)$ provou ser eficaz, uma vez que, analogamente ao sistema representado na primeira aplicação, este volta a satisfazer os requisitos de desempenho e estabilidade desejados. O sistema assume todos os valores no intervalo delimitado pelas equações B_l e B_u .

Capítulo 4

Conclusão

Esta dissertação tinha como objetivo desenvolver um método de controlo e testá-lo para um modelo de sistemas de aeronaves em particular, com o intuito de provar a sua consistência e perceber a sua aplicabilidade e fiabilidade. É de realçar que uma das principais vantagens do método proposto, é a sua capacidade de trabalhar com incertezas de valores e a capacidade de criar um controlo que permita satisfazer as referências de desempenho de trajetória para um sistema com parâmetros de valores. Este método garante ainda, um envelope de valores aceitáveis nos quais o sistema poderá atuar satisfazendo todas as condições desejáveis de desempenho e robustez.

4.1 Contribuições

Numa parte inicial desta dissertação, foi exposta toda a base teórica que serviu como fundamento do método desenvolvido. A técnica de controlo aplicada foi a Teoria Quantitativa de Controlo de Horowitz e Sidi. Esta técnica tem obtido destaque na última década no ramo das engenharias, principalmente pelo contínuo interesse na busca de controladores cada vez mais robustos. O método foi desenvolvido no domínio das frequências o que permitiu trabalhar com um sistema com incertezas paramétricas associadas. Outra vantagem é sua capacidade de projetar controladores de baixa ordem com ganhos fixos e robustos perante diferentes perturbações.

O método desenvolvido baseou-se nas especificações de estabilidade e desempenho apresentadas por Horowitz, como já referido. Estas foram modeladas e apresentadas com recurso à optimização de Nelder Mead a fim de encontrar os melhores valores para os parâmetros do controlador e para o pré-filtro que satisfizessem os requisitos impostos.

Foram simulados dois casos particulares, o primeiro referia-se a um motor elétrico, muitas vezes aplicado, por exemplo, nas superfícies de controlo de uma aeronave. Para o modelo apresentado, sempre com parâmetros definidos por um intervalo mínimo e máximo de valores, procedeu-se à análise, impondo os limites superior e inferior e definindo a região admissível para o sistema atuar. Os valores obtidos para o controlador foram considerados aceitáveis, uma vez que observando o comportamento do sistema, este assume o desempenho desejado.

Numa segunda simulação, foi aplicado o controlo da arfagem. A análise foi similar ao primeiro caso. Novamente, os valores do controlador foram aceitáveis, uma vez que quando analisado

o comportamento da função, ela encontra-se dentro dos limites permissíveis para garantir um bom desempenho do sistema.

Em síntese, como principais contribuições, esta dissertação descreveu a técnica da Teoria de Realimentação de um Controlador, sugeriu uma metodologia para o controlo de um sistema e simulou para casos concretos o cumprimento dos requisitos iniciais.

4.2 Trabalhos Futuros

O método de controlo desenvolvido foi aplicado a casos particulares, que apesar de serem usuais na área aeronáutica, foram realizadas simulações em pequena escala, para provar a fiabilidade da teoria desenvolvida. Posto isto, como um futuro trabalho seria interessante a validação do modelo de controlo a larga escala no âmbito do voo autónomo.

Outro importante consideração, que carece de ser desenvolvida é a sua aplicabilidade a modelos com múltiplas entradas e múltiplas saídas, uma vez que toda a simulação exposta, nesta dissertação, respeita apenas sistemas com uma entrada e uma saída.

Estas são duas das propostas que poderão ser consideradas em trabalhos futuros, por forma a validar e explorar outros campos ou métodos que se possam vir a revelar interessantes dentro da área de controlo.

Referências

- [1] Guzmán, J. L, Moreno, J. C., Berenguel, M., Rodriguez, F., Sánchez-Hermosilla, J. "A frequency Domain Quantitative Technique for Robust Control System Design", *Robust Control Theory and Applications (edited by Bartoszewicz, A. chap.17, 2011.*
- [2] Gutman, P., Nordin, M., Cohen, B. "Recursive methods to Compute Value Sets and Horowitz-Sidi bounds", *International Journal of Robust and Nonlinear Control, Publish online 10 August 2006 in Wiley InterScience.*
- [3] Horowitz, I.M. and Sidi, M., "Synthesis of a feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances", *Int. J. Control, 16(2), 1972, pp.287-309.*
- [4] Horowitz, I. M., "Quantitative Feedback Theory (QFT)", *QFT Publications, 4470 Grinnel Ave. Boulder, Colorado, 80303.*
- [5] Díaz, J. M., Dormido S., Aranda J., "SISO-QFTIT An Interactive Software Tool for the Design of Robust Controllers Using the QFT Methodology", *User's guide, v.1.0, April 2005.*
- [6] Borghesani, C. Chait Y., Yaniv O., " The QFT Frequency Domain Control Design Toolbox", *User's guide, July 2003.*
- [7] Yanushevsky, R. T. "Approach to Robust Control Systems Design", *Vol. 1, No.1, Jan-Feb. 1991.*
- [8] Hitz, M. A., Kaltofen E., "The Kharitonov Theorem and its Applications in Symbolic Mathematical Computation", *19 May 1997.*
- [9] "Interval Polynomials Kharitonov's Theorem", <http://www.ece.tamu.edu/~bhatt/books/robustcontrol/chapter07.pdf>, (última visita em Outubro de 2013).
- [10] Subrahmanyam, M. B., " H_∞ Optimal Control Theory Over a Finite Horizon", <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a240898.pdf> (última visita em Outubro de 2013).
- [11] <http://www.freestudy.co.uk/control/t9.pdf> (última visita em Outubro de 2013).
- [12] <http://www.freestudy.co.uk/control/t10.pdf> (última visita em Outubro de 2013).
- [13] Pál, L., Csendes, T., "Global Optimization Software Intlab Implementation of an interval global optimization", *Optimization Methods and Software, Vol. 00, January 2008, 1-10.*
- [14] Mathews, J. H., Fink K. D. "Nelder-Mead Method", *Numerical Methods Using Matlab, chap. 8, v. 4, 2004.*