UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Caraterizações e dinâmica das Funções Quadráticas. Planificação da subunidade *Funções Quadráticas*.

Tânia Sofia Beijocas Pacheco

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em

Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

(2º ciclo de estudos)

Orientador Científico: Prof. Doutor Helder Soares Vilarinho

Covilhã, Junho de 2012

Agradecimentos

Ao professor Doutor Helder Soares Vilarinho, orientador pedagógico e científico deste trabalho, pela disponibilidade, partilha do saber, comentários e sugestões para a sua realização.

À professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes, orientadora cooperante do estágio, pelo óptimo acolhimento na Escola Secundária Campos Melo, pela oportunidade de aprender e partilha de experiências.

À Escola Secundária Campos Melo pela oportunidade de realizar o estágio e a todos que nela me acolheram.

Ao meu colega e amigo de estágio Flávio Escada, pela sua amizade, companheirismo, incentivo e espírito de entre ajuda no decorrer destes anos de trabalho.

Aos meus familiares e amigos, em especial à minha mãe, tia e avô pelo seu apoio, confiança, compreensão e incentivo para a realizição deste trabalho.

Ao Ricardo pelo seu carinho, paciência e incondicional apoio.

A todas as pessoas que contribuiram para a concretização deste trabalho.

A todos os meus sinceros agradecimentos!

Resumo

A componente científica é constituída por duas partes. Na primeira parte estudamos três caracterizações das Funções Quadráticas. Por outro lado, na segunda parte estudamos a Função Quadrática na perspectiva dos sistemas dinâmicos, tendo-se como objectivo compreender as propriedades dinâmicas associadas à família $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

Na componente pedagógica é apresentada uma descrição sumária do estágio e a planificação da subunidade "Funções Quadráticas", inserida no *Tema II (Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo.)* do programa de Matemática A do 10º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias.

Palavras-chave

Sistemas Dinâmicos, Funções Quadráticas, Planificação.

Abstract

The scientific component of this work has two parts: first we have studied tree characterizations of the Quadratic Function. Then we have studied the Quadratic Function on a view of the dynamical systems, trying to understand the dynamical properties associated to the family of functions $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

In the pegagogical component we present a summary description of my internship and the planning of the subunit "Quadratic Functions", inserted on the second theme of Mathematics A syllabus of the 10^{th} grade.

Keywords

Dynamical Systems, Quadratic Fuctions, Planning.

Índice

Introdução

Este trabalho tem como finalidade a conclusão do 2° Ciclo em Ensino de Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário e está dividido em duas componentes, científica e pedagógica.

Como ponto de partida para a realização do trabalho científico escolhi o tema "Funções Quadráticas" uma vez que este é um subtema do Tema II (Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo) no programa de Matemática A do 10° ano dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias (no qual exerci a Prática de Ensino Supervisionada). Assim, com a realização deste trabalho pretendo aprofundar e diversificar o meu estudo acerca do tema escolhido, de modo a ter ferramentas teóricas relacionadas com o tema.

No trabalho científico aprofundou-se o estudo das Funções Quadráticas. Este trabalho é constituído por duas partes: Caracterizações das Funções Quadráticas, onde, ao longo do trabalho, são apresentadas diversas caracterizações das Funções Quadráticas e um estudo da Função Quadrática na perspectiva dos sistemas dinâmicos.

Na primeira parte, a fonte principal para a sua realização foi o livro "Matemática do Ensino Médio - volume 1"[10], de Elon Lages Lima, mas procurei sempre, além de compreender, completar, aprofundar e extender as ideias lá apresentadas. Os conteúdos são apresentados com detalhe, quer na apresentação das definições quer na demonstração dos resultados envolvidos. O trabalho realizado nesta parte assentou na prova de resultados importantes para obter diversas caracterizações das Funções Quadráticas.

A principal fonte para a realização da segunda parte da componente científica foi o livro de "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems"[5], de Robert L. Devaney. Os conceitos e provas aqui apresentadas não são tão detalhados como na primeira parte, sendo que alguns resultados necessários são apenas enunciados. Assim, o trabalho nesta parte consiste, por um lado, numa introdução a conceitos elementares de Sistemas Dinâmicos e, por outro lado, são estudados e analisados alguns dos principais resultados associados à dinâmica de uma família das Funções Quadráticas.

O trabalho pedagógico apresentado corresponde a uma descrição sumária do estágio e à planificação de uma das três subunidades planificadas ao longo do estágio, as restantes encontram-se no portefólio correspondente ao núcleo de estágio 2011/2012 entregue na escola. Assim, a subunidade escolhida foi sobre "Funções Quadráticas", incluída no *Tema II - Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo.*, no programa de Matemática A do 10° ano. A realização das planificações das aulas correspondentes à subunidade escolhida teve sempre como base o programa de Matemática A do 10° ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias [3]. Além disso, procurou-se construir tarefas de modo a desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar e também desenvolver e promover o pensamento matemático.

Nas planificações apresentadas são integrados os Temas Transversais que se mostrem aconselhados às mesmas, além de informações sobre Data, Ano/Turma, Duração da aula, Tema, Tópico, Sumário, Pré-Requisitos, Objectivos, Avaliação/Reflexão, TPC, Recursos, Apoio bibliográfico, assim como a Metodologia a ser utilizada na respectiva aula (Conteúdos/Estratégias).

Uma vez que os conhecimentos sobre funções são indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, o estudo da subunidade "Funções Quadráticas" tem como base o estudo analítico, numérico e gráfico. Assim é realizado o estudo detalhado das "Funções Quadráticas" e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações. Além disso, nas planificações apresentadas é feito o estudo intuitivo de propriedades das "Funções Quadráticas" e dos seus gráficos (tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica) através da análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos seus gráficos das famílias de "Funções Quadráticas" onde se considerou apenas a variação de um parâmetro de cada vez e também através das transformações simples de funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$ e $y = f(ax)$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado utilizando a linguagem das transformações geométricas.

Capítulo 1

Caracterizações e dinâmica das Funções Quadráticas

Neste capítulo começamos por introduzir algumas noções e resultados elementares sobre as funções quadráticas (secção 1.1). Seguem-se três caracterizações das funções quadráticas: através do seu gráfico (secção 1.2), sobre a transformação de progressões aritméticas de segunda ordem (secção 1.3) e na sua relação com áreas delimitadas pelos eixos coordenados e pelo gráfico de funções afins (secção 1.4). Na secção 1.5 fazemos uma muito breve introdução aos sistemas dinâmicos e ao estudo da dinâmica de uma família de funções quadráticas.

1.1 Definições e Preliminares

Esta secção consiste na definição e propriedades elementares das Funções Quadráticas, essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.1.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa-se por* ***função quadrática*** *quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Comecemos por enunciar e provar algumas propriedades sobre as Funções Quadráticas.

Proposição 1.1.2 *Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ duas funções quadráticas. Se $f(x) = g(x)$, ou seja, $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b' + c'$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.*

Demonstração da proposição 1.1.2
Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ duas funções quadráticas tal que $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considerando $x = 0$, vem $c = c'$. Assim, obtemos:

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Contudo, esta igualdade é válida para todo o x diferente de zero. Assim, dividindo ambos os membros por x temos:

$$ax + b = a'x + b', \forall x \neq 0.$$

Portanto, quando $x = 1$ e $x = -1$ obtemos respectivamente:

$$a + b = a' + b' \quad (1.1)$$

e

$$-a + b = -a' + b' \quad (1.2)$$

Fazendo a soma entre (1.1) e (1.2), vem:

$$\begin{aligned} a+b-a-b &= a'+b'-a'+b' \\ 2b &= 2b' \\ b &= b'. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo a diferença entre (1.1) e (1.2) temos:

$$\begin{aligned} a+b-(-a+b) &= a'+b'-(-a'+b') \\ a+b+a-b &= a'+b'+a'-b' \\ 2a &= 2a' \\ a &= a'. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.1.3 *Sejam $f(x)=ax^2+bx+c$ e $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ duas funções quadráticas. Se $f(x_1)=g(x_1)$, $f(x_2)=g(x_2)$ e $f(x_3)=g(x_3)$ (em que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$), ou seja, $f(x)$ e $g(x)$ são iguais em três pontos distintos, então $f(x)=g(x)$ para qualquer número real.*

Demonstração da Proposição 1.1.3
Sejam $f(x)=ax^2+bx+c$ e $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ duas funções quadráticas.

Escrevendo $\alpha=a-a'$, $\beta=b-b'$ e $\gamma=c-c'$ queremos mostrar que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} f(x_1)-g(x_1) &= 0 \\ ax_1^2+bx_1+c-(a'x_1^2+b'x_1+c') &= 0 \\ ax_1^2+bx_1+c-a'x_1^2-b'x_1-c' &= 0 \\ (a-a')x_1^2+(b-b')x_1+(c-c') &= 0 \\ \alpha x_1^2+\beta x_1+\gamma &= 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} f(x_2)-g(x_2) &= 0 \\ ax_2^2+bx_2+c-(a'x_2^2+b'x_2+c') &= 0 \\ ax_2^2+bx_2+c-a'x_2^2-b'x_2-c' &= 0 \\ (a-a')x_2^2+(b-b')x_2+(c-c') &= 0 \\ \alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
f(x_3) - g(x_3) &= 0 \\
ax_3^2 + bx_3 + c - (a'x_3^2 + b'x_3 + c') &= 0 \\
ax_3^2 + bx_3 + c - a'x_3^2 - b'x_3 - c' &= 0 \\
(a - a')x_3^2 + (b - b')x_3 + (c - c') &= 0 \\
\alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma &= 0. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Assim, fazendo a diferença entre (1.4) e (1.3) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma &= 0 \\
\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) &= 0. \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

E fazendo a diferença entre (1.5) e (1.3) temos:

$$
\begin{aligned}
\alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma &= 0 \\
\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) &= 0. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Uma vez que $x_1 \neq x_2$ e $x_1 \neq x_3$, ou seja, $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir (1.6) por $x_2 - x_1$ e obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{0}{x_2 - x_1} \\
\frac{\alpha(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{\beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} &= 0 \\
\alpha(x_2 + x_1) + \beta &= 0. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Também dividindo (1.7) por $x_3 - x_1$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} &= \frac{0}{x_3 - x_1} \\
\frac{\alpha(x_3 + x_1)(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} + \frac{\beta(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} &= 0 \\
\alpha(x_3 + x_1) + \beta &= 0. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Assim, subtraindo (1.8) a (1.9) temos:

$$
\begin{aligned}
\alpha(x_3 + x_1) + \beta - \alpha(x_2 + x_1) - \beta &= 0 \\
\alpha x_3 + \alpha x_1 + \beta - \alpha x_2 - \alpha x_1 - \beta &= 0 \\
\alpha x_3 - \alpha x_2 &= 0 \\
\alpha(x_3 - x_2) &= 0 \\
\alpha = 0 \vee x_3 - x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Como $x_3 - x_2 \neq 0$ vem que $\alpha = 0$.

Uma vez encontrado α, vamos determinar β. Para tal substituímos $\alpha = 0$ por exemplo em (1.8), obtendo $\beta = 0$ ($0(x_2 - x_1) + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$). Por fim, para determinar γ substituímos em (1.3) (por exemplo) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ obtendo assim $\gamma = 0$. $\square$

Proposição 1.1.4 *Dados três números reais distintos x_1, x_2 e x_3 e números arbitrários y_1, y_2 e y_3 tais que os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são não colineares em $\mathbb{R}^2$, existe uma e uma só função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.*

Demonstração da Proposição 1.1.4
Colocando as equações (1.3), (1.4) e (1.5) num sistema obtemos um sistema de três equações lineares a três incógnitas (α, β, γ), em que os segundos membros são iguais a zero, ou seja, é um sistema homogéneo. Temos assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Como vimos na demonstração da Proposição 1.1.3 este sistema possui como solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou seja, a solução trivial. No entanto, quando um sistema homogéneo apenas admite a solução trivial podemos substituir os zeros dos segundos membros por números arbitrários que obtemos sempre uma única solução. Assim, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2 e y_3, existe um e um só terno ordenado (a, b, c) tal que:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \quad (1.10)$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \quad (1.11)$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \quad (1.12)$$

Realizando-se a diferença entre (1.11) e (1.10) e entre (1.12) e (1.10) obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c &= y_2 - y_1 \\ a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

e

$$\begin{aligned} ax_3^2 + bx_3 + c - ax_1^2 - bx_1 - c &= y_3 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) &= y_3 - y_1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Uma vez que $x_2 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_1$ temos que $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$. Assim, podemos dividir (1.13) por $x_2 - x_1 \neq 0$ e (1.14) por $x_3 - x_1$, obtendo respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a(x_2 + x_1) + b &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{a(x_3^2-x_1^2)+b(x_3-x_1)}{x_3-x_1} &= \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \\
a(x_3+x_1)+b &= \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

De seguida, subtraimos (1.13) a (1.14) para determinar o valor de a:

$$\begin{aligned}
a(x_2+x_1)+b-a(x_3+x_1)+b &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \\
ax_3-ax_2 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \\
a(x_3-x_2) &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \\
a &= \frac{y_3-y_1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}-\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)} \\
a &= \frac{1}{x_3-x_2}\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right].
\end{aligned}$$

Acabamos então de ver que dados três números reais distintos x_1, x_2 e x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2 e y_3, existe um e um só terno ordenado (a,b,c) tal que a função $f(x)=ax^2+bx+c$ tem $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ e $f(x_3)=y_3$.

No entanto, a função $f(x)=ax^2+bx+c$ pode não ser quadrática, a não ser que $a\neq 0$.

Como vimos anteriormente, $a=\frac{1}{x_3-x_2}\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]$. Então,

$$\begin{aligned}
a=0 \quad &\Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{x_3-x_2}\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] \\
a=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0 \\
a=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.
\end{aligned}$$

Sejam $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$. O declive da recta AC é $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ e o declive da recta AB é $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Então a condição $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ significa que as rectas AB e AC têm o mesmo declive, ou seja, os pontos A,B e C são colineares. □

Proposição 1.1.5 *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática. Então f é contínua.*

Demonstração da Proposição 1.1.5
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática. Então existem números reais a, b e c, com $a\neq 0$, tais que $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Em primeiro lugar, provemos que $g(x)=ax^2$, com $a\neq 0$ é uma função contínua em qualquer $w\in\mathbb{R}$. Isto é, pretendemos provar que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, se $|x-w|<\delta$ então

$|g(x) - g(w)| < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(w)| &= |ax^2 - aw^2| = |a(x^2 - w^2)| = |a(x-w)(x+w)| \\
&= |a(x-w)(x+w-w+w)| = |a(x-w)(x-w+2w)| = |a(x-w)||x-w+2w| \\
&\leq |a(x-w)|(|x-w| + |2w|) = |a||x-w|(|x-w| + |2w|) \leq |a|\delta^2 + 2\delta|a||w|.
\end{aligned}$$

Assim, basta considerar δ tal que $|a|\delta^2 + 2\delta|a||w| < \varepsilon$.

Em seguida, provemos que $h(x) = bx + c$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é contínua em qualquer $t \in \mathbb{R}$. Isto é, pretendemos provar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - t| < \delta$ então $|h(x) - h(t)| < \varepsilon$. Assim,
$|h(x) - h(t)| = |bx + c - bt - c| = |bx - bt| = |b(x - t)| = |b||x - t| < |b|\delta$.

Portanto, basta tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{|b|}$.

Logo, a função f é soma de funções contínuas pelo que f é contínua em $\mathbb{R}$. □

Proposição 1.1.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática. Então a derivada de f em $x \in \mathbb{R}$ é $2ax + b$.*

Demonstração da Proposição 1.1.6
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática. Então existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(x^2 + 2xh + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2ax + ah + b) \\
&= 2ax + b
\end{aligned}$$

□

1.2 Primeira caracterização das Funções Quadráticas

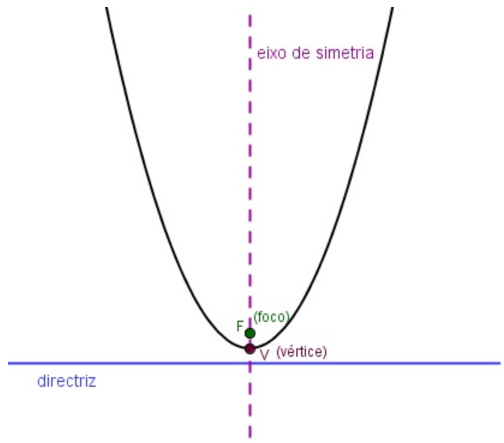
Esta secção consiste em caracterizar as Funções Quadráticas através do seu gráfico.

Definição 1.2.1 *Uma* ***parábola*** *é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto (foco) e de uma recta (directriz) que não contém esse ponto.*

Definição 1.2.2 *A recta que passa no foco F e é perpendicular à directriz designa-se* ***eixo de simetria*** *da parábola.*

Definição 1.2.3 *O ponto da parábola mais próximo da directriz designa-se* ***vértice*** *da parábola. Este é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e o ponto de intersecção entre o eixo de simetria da parábola e a directriz.*

Em seguida, apresenta-se a figura que traduz as definições anteriores.

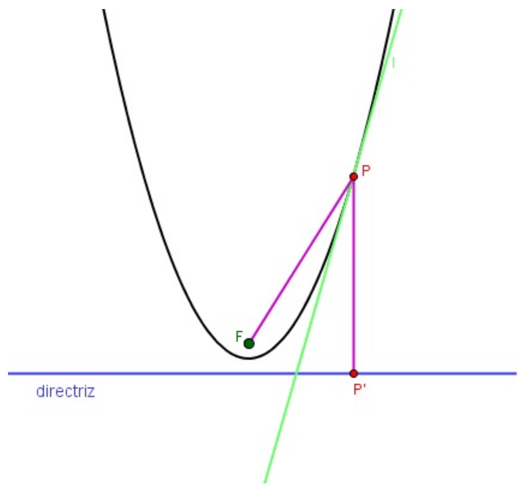


Definição 1.2.4 *Dizemos que l é uma* **recta tangente a uma parábola** *num ponto P dessa parábola se P pertence a l e todos os outros pontos da parábola pertencem do mesmo lado da recta.*

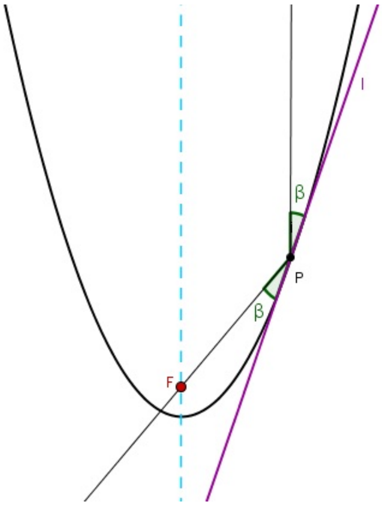
Definição 1.2.5 *Chamamos* ***gráfico*** *de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ao conjunto $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 1.2.6 *A* ***recta tangente ao gráfico de uma função*** *f* ***no ponto de abcissa*** *x_0 é a recta que passa no ponto $P(x_0, f(x_0))$ e tem como declive a derivada de f em x_0.*

Seja P um ponto de uma parábola de foco F e seja P' a projecção de P sobre a directriz. Dizemos que uma parábola possui a ***propriedade focal*** se a recta l, tangente à parábola em P, é a bissectriz do ângulo FPP'.

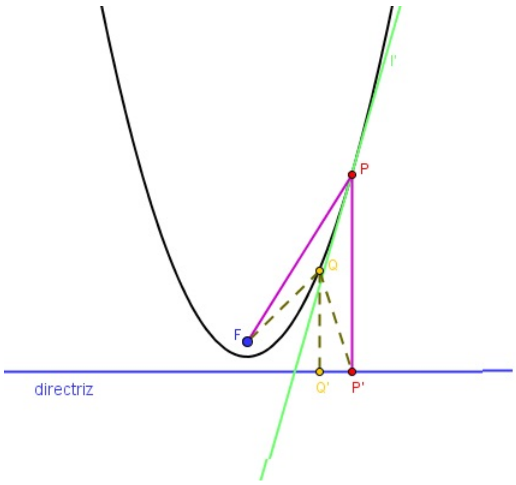


Uma interpretação para esta propriedade é que se fizermos incidir um feixe de luz paralelo à directriz sobre o ponto P, a sua reflexão (o ângulo de incidência é congruente com o ângulo de saída) na recta tangente à parábola em P irá passar em F.



Lema 1.2.7 *Uma parábola possui a propriedade focal.*

Demonstração do Lema 1.2.7
Suponhamos que a recta l é tangente à parábola num ponto P. Seja P' a projecção de P sobre a directriz. Assim, l é bissectriz do ângulo FPP'.
Suponhamos que a bissectriz do ângulo FPP' (chamamos-lhe l') intersecta a parábola noutro ponto, digamos Q, cuja projecção sobre a directriz é denotada por Q'. Pela definição 1.2.1 temos que $\overline{FQ} = \overline{QQ'}$. Por outro lado, o triângulo FPP' é isósceles, e a bissectriz do ângulo FPP' passa no ponto médio da perpendicular FP'. Portanto, para cada ponto Q nessa bissectriz temos $\overline{QP'} = \overline{QF} = \overline{QQ'}$.



Chegamos assim a uma contradição porque Q' é o único ponto sobre a directriz da parábola onde a distância a Q é mínima. □

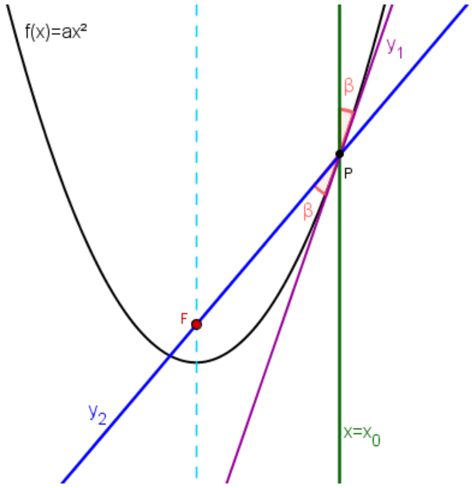
Teorema 1.2.8 *O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.*

Demonstração do Teorema 1.2.8

Em primeiro lugar provemos que o gráfico de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, é uma parábola.

Para tal, vamos determinar "candidatos" a foco e a directriz.

Caso o gráfico da função $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, seja uma parábola, a recta tangente à parábola num ponto P de coordenadas (x_0, ax_0^2), $x_0 \neq 0$, (recta y_1) faz ângulos iguais com a recta, $x = x_0$, paralela ao eixo de simetria e com a recta que une o foco (ponto F) a esse ponto (recta y_2), devido ao facto da parábola possuir a propriedade focal (lema 1.2.7).

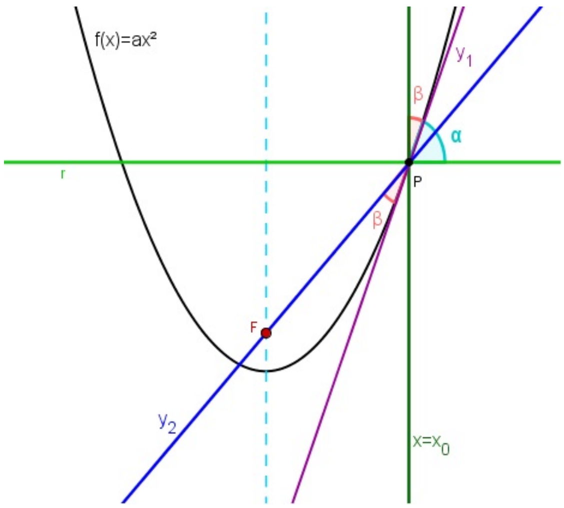


Seguidamente, determinemos a equação reduzida da recta y_2.

Uma vez que a recta y_1 é a recta tangente à parábola no ponto (x_0, ax_0^2), temos que y_1 é da forma $y_1 = m_1 x + b_1$, onde m_1 é a derivada da função f no ponto (x_0, ax_0^2). Portanto, pela proposição 1.1.6 temos que $y_1 = 2ax_0x + b_1$. Por outro lado, o declive da recta y_1 é igual ao valor da tangente do ângulo formado entre a recta e o eixo Ox, o qual designamos por α. Assim, temos que $\tan \alpha = 2ax_0$.

Em seguida, tracemos a recta paralela ao eixo Ox (recta r) passando pelo ponto (x_0, ax_0^2).

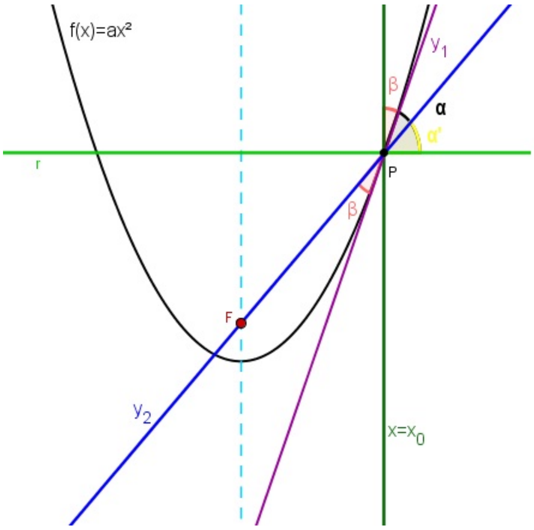
Como a recta r é paralela ao eixo Ox e a recta y_1 intersecta a recta r e o eixo Ox temos que ângulos alternados formados pelas intersecções são congruentes, logo o ângulo entre y_1 e r é α.



Assim, temos $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $2\alpha = \pi - 2\beta$.

No entanto, y_2 é da forma $y_2 = m_2x + b_2$, onde m_2 é igual ao valor da tangente do ângulo formado entre a recta y_2 e o eixo Ox (o qual designaremos por α'). Logo, $m_2 = \tan\alpha'$.

Mas, a recta r é paralela ao eixo Ox e a recta y_2 intersecta o eixo Ox e a recta r, logo o ângulo entre a recta y_2 e a recta r é α'.



Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\alpha' + 2\beta &= \frac{\pi}{2}\\
\alpha' + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{\pi}{2}\\
\alpha' + \pi - 2\alpha &= \frac{\pi}{2}\\
\alpha' &= \frac{\pi}{2} - \pi + 2\alpha\\
\alpha' &= -\frac{\pi}{2} + 2\alpha.
\end{aligned}$$

Como $m_2 = \tan\alpha'$, vem que:

$$\begin{aligned}
m_2 &= \tan\left(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\\
m_2 &= -\mathrm{cotan}(2\alpha)\\
m_2 &= -\frac{1}{\tan(2\alpha)}\\
m_2 &= -\frac{1}{\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}\\
m_2 &= -\frac{1-\tan^2(\alpha)}{2\tan(\alpha)}\\
m_2 &= \frac{\tan^2(\alpha)-1}{2\tan(\alpha)}\\
m_2 &= \frac{(2ax_0)^2-1}{2.2ax_0}\\
m_2 &= \frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}.
\end{aligned}$$

Assim, $y_2 = \frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}x + b_2$.

Em seguida, determinemos b_2 utilizando o facto de o ponto (x_0, ax_0^2) pertencer à recta y_2.

$$\begin{aligned}
ax_0^2 &= \frac{4a^2x_0^2 - 1}{4ax_0}(x_0) + b_2 \\
ax_0^2 &= \frac{4a^2x_0^3 - x_0}{4ax_0} + b_2 \\
ax_0^2 &= \frac{4a^2x_0^3}{4ax_0} - \frac{x_0}{4ax_0} + b_2 \\
ax_0^2 &= ax_0^2 - \frac{1}{4a} + b_2 \\
b_2 &= \frac{1}{4a}
\end{aligned}$$

Logo, $y_2 = \frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}x + \frac{1}{4a}$.

Uma vez que $f(x)$ é uma função par, o seu gráfico é simétrico em relação à recta $x = 0$. Caso o gráfico seja uma parábola, esta recta coincide com o eixo de simetria da parábola. Portanto, o "foco" tem de coordenadas $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, pois pertence ao eixo de simetria da parábola e à recta y_2.

Por outro lado, o ponto $(0, 0)$ é o único ponto do gráfico de f que pertence ao eixo de simetria, pelo que será o vértice da parábola.

Portanto, pela definição 1.2.3 vem que a "directriz" é a recta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Em seguida, provamos que qualquer ponto que pertence ao gráfico da função $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, dista igualmente do ponto $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ (foco) e da recta $y = -\frac{1}{4a}$ (directriz).

Seja T um ponto genérico que pertence ao gráfico de f, de coordenadas (x, ax^2). Seja T' o ponto que pertence à directriz cuja abcissa é igual à do ponto T, portanto tem como coordenadas $\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$. Para o gráfico da função f ser uma parábola temos que verificar que o ponto T dista igualmente de F e de T', ou seja, $\overline{TF} = \overline{TT'}$.

$$\begin{aligned}
\overline{TF} &= \overline{TT'} \\
\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} &= \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos que:

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\
\frac{x^2}{2} &= \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, o gráfico da função $f(x) = ax^2$ corresponde à parábola cujo foco é o ponto $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a directriz é a recta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Finalmente, o gráfico da função $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$, obtém-se a partir do gráfico da função $f(x) = ax^2$ por uma translação associada ao vector (h, k), pelo que o seu gráfico é a parábola cujo foco é o ponto $F\left(h, \frac{1}{4a}+k\right)$ e a directriz é a recta horizontal $y=-\frac{1}{4a}+k$. $\square$

Exemplo 1.2.9 *Consideremos a função quadrática $f(x)=x^2$. Pelo Teorema 1.2.8 o gráfico da função f é a parábola cujo o foco é o ponto $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e a directriz é a recta horizontal $y=-\frac{1}{4}$.*

Teorema 1.2.10 *Seja $f(x)$ uma função tal que o seu gráfico é uma parábola. Então $f(x)$ é uma função quadrática.*

Demonstração do Teorema 1.2.10

Seja $P(x, f(x))$ um ponto genérico que pertence ao gráfico da função f, ou seja, pertence a uma parábola. Sem perda de generalidade podemos considerar que o vértice da parábola é $(0,0)$. Pela definição de parábola, temos que o ponto P dista igualmente do foco $F(0,t)$ e da directriz (ponto $P'(x,-t)$), ou seja, $\overline{PF}=\overline{PP'}$.

$$\begin{aligned}
\overline{PF} &= \overline{PP'}\\
\sqrt{(x-0)^2+(f(x)-t)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(f(x)+t)^2)}\\
\sqrt{x^2+(f(x)-t)^2} &= \sqrt{(f(x)+t)^2}
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos que:

$$\begin{aligned}
x^2+(f(x)-t)^2 &= (f(x)+t)^2\\
x^2+(f(x))^2-2tf(x)+t^2 &= (f(x))^2+2tf(x)+t^2\\
x^2-2tf(x) &= 2tf(x)\\
x^2-2tf(x)-2tf(x) &= 0\\
x^2-4tf(x) &= 0\\
-4tf(x) &= -x^2\\
4tf(x) &= x^2\\
f(x) &= \frac{1}{4t}x^2.
\end{aligned}$$

Obtemos assim que $f(x)=\frac{1}{4t}x^2$, ou seja, f é uma função quadrática.

Se o vértice fosse (h,k) basta considerar $f(x-h)+k$, que é uma função quadrática. $\square$

1.3 Segunda caracterização das Funções Quadráticas

Esta secção consiste em caracterizar as Funções Quadráticas através de progressões aritmédicas de segunda ordem.

Definição 1.3.1 *Uma **progressão aritmética (de primeira ordem)** é uma sequência em que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa constante é designada razão da progressão aritmética.*

Exemplo 1.3.2 *A sequência (5,8,11,14,17,20, ...) é uma progressão aritmética de primeira ordem uma vez que a diferença entre cada termo e o anterior é 3 (razão da progressão aritmética).*

Definição 1.3.3 *Uma* ***progressão aritmética (de segunda ordem)*** *é uma sequência* $(y_1,y_2,y_3,...)$ *na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior* $((d_n) = (y_{n+1} - y_n))$ *formam uma progressão aritmética de primeira ordem.*

Definição 1.3.4 *Uma* ***progressão aritmética de segunda ordem não degenerada*** *é uma sequência* $(y_1,y_2,y_3,...)$ *na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior* $((d_n) = (y_{n+1} - y_n))$ *formam uma progressão aritmética de primeira ordem não constante (com razão diferente de zero).*

Exemplo 1.3.5 *Consideremos a sequência* (u_n)*=(1,4,9,16,25,...,* n^2*, ...) de termo geral* $u_n = n^2$*. De seguida, averiguemos as diferenças entre os termos consecutivos.*

$$d_n = u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Assim, a sequência (d_n)*=(3,5,7,9,...,*$2n + 1$*,...) é uma progressão aritmética de primeira ordem cuja razão é 2, pelo que a sequência* (u_n) *é uma progessão aritmética de segunda ordem.*

Lema 1.3.6 (y_n) *é uma progressão aritmética de segunda ordem se e só se* y_n *é um polinómio de segundo grau em* n*.*

Demonstração do Lema 1.3.6
$(\Rightarrow)$
Seja (y_n) uma progressãoo aritmética de segunda ordem. Então $(x_n) = (y_{n+1} - y_n)$ é uma progressão aritmética de razão diferente de zero. Assim, $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ... + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_n) = y_{n+1} - y_1$. Como $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (x_n), vem que, $y_{n+1} - y_1$ é um polinómio de grau 2 em n. Portanto, y_n é também um polinómio de grau 2 em n.

$(\Leftarrow)$
Seja agora $y_n = an^2+bn+c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então vem que, $y_{n+1}-y_n = a\,(n+1)^2+b\,(n+1\,)+\,c\,-\,(a\,n^2\,+\,b\,n\,+\,c\,)\,=\,a\,n^2\,+\,2an\,+\,a\,+\,bn\,+\,b\,+\,c\,-\,an^2\,-\,bn\,-\,c\,=\,2an\,+\,(a+b)$. Esta expressão de primeiro grau em n, pelo que $(y_{n+1} - y_n)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem e, consequentemente, (y_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem. $\square$

Teorema 1.3.7 *Uma função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é quadrática se e só se toda a progressão aritmética não constante* $(x_1,x_2,...,x_n,...)$ *é transformada por* f *numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada* $(f(x_1),\ f(x_2),...,f(x_n),...)$*.*

Demonstração do Teorema 1.3.7

($\Rightarrow$)

Sejam (x_n) uma progressão aritmética de primeira ordem, com $x_n = x_{n-1} + r = x_1 + (n-1)r$, e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De modo a mostrar que $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem mostremos que as diferenças sucessivas

$$d_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$d_2 = f(x_3) - f(x_2)$$

$$...$$

$$d_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$$

$$d_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})$$

$$...$$

formam uma progessão aritmética.

Assim, calculemos $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$ e $f(x_{n+2})$ para de seguida calcularmos d_n e d_{n+1}.

$f(x_n) = f(x_1 + (n-1)r) = a(x_1 + (n-1)r)^2 + b(x_1 + (n-1)r) + c = a(x_1^2 + 2x_1r(n-1) + (n-1)^2r^2) + bx_1 + b(n-1)r + c = a(x_1^2 + 2x_1r(n-1) + (n^2 - 2n + 1)r^2) + bx_1 + bnr - br + c = ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2nar^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c.$

$f(x_{n+1}) = f(x_1 + nr) = a(x_1 + nr)^2 + b(x_1 + nr) + c = a(x_1^2 + 2x_1nr + n^2r^2) + bx_1 + bnr + c = ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c.$

$f(x_{n+2}) = f(x_1 + (n+1)r) = a(x_1 + (n+1)r)^2 + b(x_1 + (n+1)r) + c = a(x_1^2 + 2x_1r(n+1) + (n+1)^2r^2) + bx_1 + b(n+1)r + c = a(x_1^2 + 2x_1rn + 2x_1r + (n^2 + 2n + 1)r^2) + bx_1 + brn + br + c = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + brn + br + c.$

$d_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c - (ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2nar^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c) = ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c - ax_1^2 - 2ax_1rn + 2ax_1r - an^2r^2 + 2nar^2 - ar^2 - bx_1 - bnr + br - c = 2arx_1 + 2anr^2 - ar^2 + br.$

$d_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + brn + br + c - (ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c) = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + brn + br + c - ax_1^2 - 2ax_1nr - an^2r^2 - bx_1 - bnr - c = 2ax_1r + 2anr^2 + ar^2 + br.$

Logo, $d_{n+1} - d_n = 2ax_1r + 2anr^2 + ar^2 + br - 2arx_1 - 2anr^2 + ar^2 - br = 2ar^2$, pelo que ($d_1$, d_2, ..., d_n,...) é uma progressão aritmética de primeira ordem de razão $2ar^2$.

($\Leftarrow$)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que tem a propriedade de transformar toda a progressão aritmética não constante numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada.

Seja $g(x) = f(x) - f(0)$. Então g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade de que $g(0) = 0$.

Assim, considerando a progressão aritmética de primeira ordem (1,2,3,4,5,...) temos que $(g(n))$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Portanto, pelo lema 1.3.6 existem números reais a e b (com $a \neq 0$) tais que $g(n) = an^2 + bn\,, \forall n \in \mathbb{N}$. (Note-se que deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$, mas $g(0) = 0$).

De seguida, fixemos um número arbitrário $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a seguinte progressão aritmética:

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{n}{p}, ...\right)$$

Analogamente, existem números reais a' e b' (com $a' \neq 0$) tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
an^2 + bn &= g(n) \\
an^2 + bn &= g\left(\frac{np}{p}\right) \\
an^2 + bn &= a'(np)^2 + b'(np) \\
an^2 + bn &= (a'p^2)n^2 + (b'p)n.
\end{aligned}$$

Assim, as funções quadráticas $ax^2 + bx$ e $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ são iguais $\forall\, x \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.1.2 vem que:

$$a = a'p^2 \Leftrightarrow a' = \frac{a}{p^2}$$

e

$$b = b'p \Leftrightarrow b' = \frac{b}{p}.$$

Portanto, para quaisquer números naturais n e p temos que:

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{n}{p}\right) &= a'n^2 + b'n \\
g\left(\frac{n}{p}\right) &= \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n \\
g\left(\frac{n}{p}\right) &= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).
\end{aligned}$$

As funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo o racional positivo $r = \frac{n}{p}$. Se p não pertence a $\mathbb{Q}$ então $p = \lim r_n$, onde $r_n \in \mathbb{Q}$. Portanto,

$$g(p) = g(\lim r_n)$$

Uma vez que a função g é contínua vem que:

$$\begin{aligned}
g(p) &= \lim g(r_n) \\
g(p) &= \lim(ar_n^2 + br_n)
\end{aligned}$$

Como a função quadrática é contínua (pela Proposição 1.1.5) temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= a \lim r_n^2 + b \lim r_n \\ g(p) &= ap^2 + bp. \end{aligned}$$

Logo, $g(x) = ax^2 + bx$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

De maneira análoga, considerando a progressão aritmética de primeira ordem $(-1, -2, -3, ...)$ concluímos que $g(x) = ax^2 + bx$, $\forall x \leq 0$.

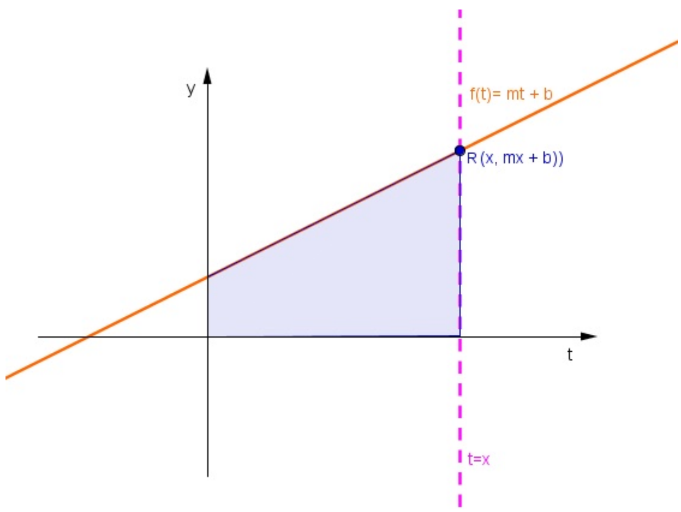
Logo, colocando $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x) + c$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

1.4 Terceira caracterização das Funções Quadráticas

Esta secção consiste em caracterizar as Funções Quadráticas através da área "limitada pelo gráfico" de uma função afim.

Teorema 1.4.1 *Seja $f(t) = mt + b$, com $m \neq 0$ (função afim). Então a função que expressa a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy é uma função quadrática.*

Demonstração do Teorema 1.4.1
Seja $f(t) = mt + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$.
Em primeiro lugar consideremos o caso $m > 0$ e $b > 0$.
Consideremos um ponto R genérico que pertence ao gráfico da função f, portanto R tem como coordenadas $(x, mx + b)$. Pretendemos determinar a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy, tal como é sugerido na figura que se segue:

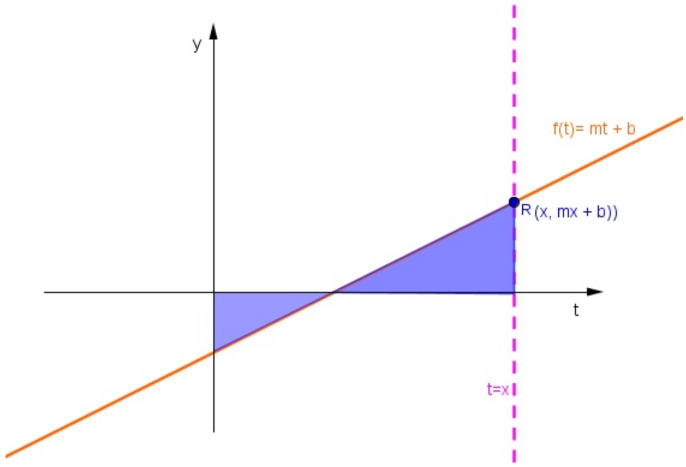


Assim, a área da região pretendida em função de x é dada por:

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & A_{\triangle} + A_{\square} \\ A(x) & = & \dfrac{b \times h}{2} + c \times l \\ A(x) & = & \dfrac{x \times (mx + b - b)}{2} + bx \\ A(x) & = & \dfrac{x \times mx}{2} + bx \\ A(x) & = & \dfrac{x^2 m}{2} + bx \\ A(x) & = & \dfrac{m}{2} x^2 + bx. \end{array}$$

Logo, para $m > 0$ e $b > 0$ a função que expressa a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy $\left(A(x) = \frac{m}{2}x^2 + bx\right)$ é uma função quadrática.
O caso $m < 0$ e $b < 0$ é análogo.

Em segundo lugar, consideremos o caso $m > 0$ e $b < 0$.
Consideremos um ponto T genérico que pertence ao gráfico da função f, portanto T tem como coordenadas $(x, mx + b)$. Pretendemos determinar a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy, tal como é sugerido na figura que se segue:



Assim, a área da região pretendida em função de x é dada por:

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & A_{\triangle} + A_{\triangle} \\ A(x) & = & \dfrac{\frac{-b}{m}.b}{2} + \dfrac{(x + \frac{b}{m})(mx + b)}{2} \\ A(x) & = & \dfrac{-b^2}{2m} + \dfrac{mx^2 + bx + \frac{bmx}{m} + \frac{b^2}{m}}{2} \\ A(x) & = & \dfrac{-b^2}{2m} + \dfrac{mx^2 + bx + bx + \frac{b^2}{m}}{2} \\ A(x) & = & \dfrac{-b^2}{2m} + \dfrac{m^2 + 2bx + \frac{b^2}{m}}{2} \\ A(x) & = & \dfrac{-b^2}{2m} + \dfrac{m^2}{2} + bx + \dfrac{b^2}{2m} \\ A(x) & = & \dfrac{m}{2} x^2 + bx. \end{array}$$

Logo, para $m > 0$ e $b < 0$ a função que expressa a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy $\left(A(x) = \frac{m}{2}x^2 + bx\right)$ é uma função quadrática.
O caso $m < 0$ e $b > 0$ é análogo.

Portanto, a função que expressa a área compreendida entre o eixo Ot, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy $\left(A(x) = \frac{m}{2}x^2 + bx\right)$ é uma função quadrática. $\square$

Teorema 1.4.2 *Seja $f(x) = ax^2 + bx$, com $a \neq 0$. Então a função f expressa a área "delimitado pelo gráfico" de uma função afim.*

Demonstração do Teorema 1.4.2
Seja $f(x) = ax^2 + bx$, com a, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Pelo Teorema 1.4.1 vimos que a função que expressa a área compreendida entre o eixo Ox, a recta $y = mt + b$, a recta $t = x$ e o eixo Oy é do tipo $A(x) = \frac{m}{2}x^2 + bx$. Assim, considerando $a = \frac{m}{2}$, temos que a função f expressa a área "abaixo do gráfico" da função afim $f(t) = 2at + b$. $\square$

1.5 Função Quadrática na perspectiva dos sistemas dinâmicos

Os sistemas dinâmicos ocorrem no mundo real e têm como objectivo perceber a evolução de um sistema ao longo do tempo, por exemplo, através da natureza das órbitas (identificando o conjunto de órbitas que são periódicas, eventualmente periódicas, ...). Mas, geralmente, esta tarefa é difícil, se não impossível. Por exemplo, se $f(x)$ é polinomial de grau 2 então encontrar explicitamente os pontos periódicos de período n leva à resolução da equação $(f \circ f \circ ... \circ f)(x) = x$, que é uma equação polinomial de grau 2^n.

Nesta secção o principal objectivo é compreender as órbitas da família de funções $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ (funções quadráticas) no intervalo $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, ou seja, dada a função $F_\mu(x)$ e um valor inicial x_0, queremos perceber o que acontece à sequência

$$(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ...)$$

para os diferentes valores de μ. Contudo, apesar da sua aparente simplicidade, esta função ilustra muitos dos mais importantes fenómenos que ocorrem nos sistemas dinâmicos.

No entanto, num primeiro momento pode-se suspeitar que a iteração de $F_\mu(x)$ num dado valor inicial corresponde a uma sequência que converge para um limite fixo, mas a função $F_\mu(x)$ leva a resultados imprevisíveis quando iterados.

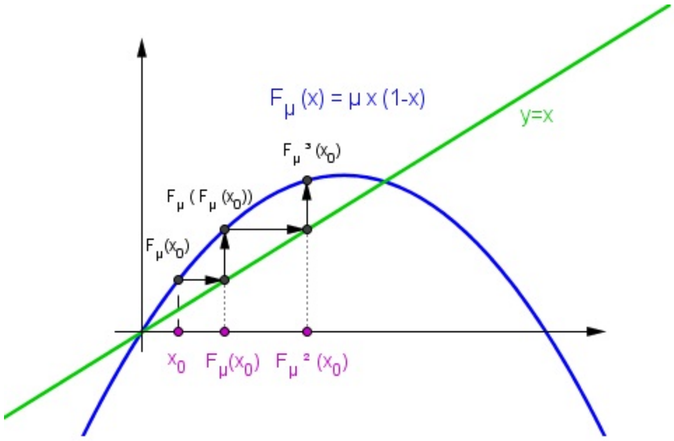
Note-se que a sequência $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ...)$ ao longo desta secção é designada por

$$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...).$$

Definição 1.5.1 *A **órbita futura** de x pela função f é o conjunto de pontos x, $f(x)$, $f^2(x)$, ..., $f^n(x_0)$,... e é denotada por $O^+(x)$.*

O gráfico de uma função f tem informação acerca da primeira iteração de f e podemos analisá-lo de modo a ver o que vai acontecer em iterações mais elevadas. Assim, identificamos a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ e marcamos um ponto de abcissa x_0. De seguida, traçamos uma linha vertical desde $(x_0, 0)$ até ao gráfico de f, ou seja, até ao ponto $(x_0, f(x_0))$ e uma linha horizontal do ponto $(x_0, f(x_0))$ até Δ, ou seja, até ao ponto $(f(x_0), f(x_0))$. Em seguida, tracemos a linha vertical desde $(f(x_0), f(x_0))$ até ao gráfico de f, ou seja, até ao ponto $(f(x_0), f^2(x_0))$.

A figura seguinte ilustra este processo para a função $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 1$.



Definição 1.5.2 *x é um **ponto fixo** de f se $f(x) = x$. Denotamos o conjunto dos pontos fixos por $Fix(f)$.*

Exemplo 1.5.3 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 1$.*

Pontos fixos de F_μ:

$$
\begin{aligned}
F_\mu &= x \\
\mu x(1-x) &= x \\
\mu x(1-x) - x &= 0 \\
x[\mu(1-x) - 1] &= 0 \\
x = 0 \vee \mu(1-x) - 1 &= 0 \\
x = 0 \vee \mu - \mu x - 1 &= 0 \\
x = 0 \vee \mu x &= \mu - 1 \\
x = 0 \vee x &= \frac{\mu - 1}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Logo, F_μ tem dois pontos fixos, o 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Definição 1.5.4 *x é um **ponto periódico de f de período** r se $f^r(x) = x$. O menor r positivo para o qual $f^r(x) = x$ é designado o período primário de x. Denotamos o conjunto dos pontos periódicos por $Per_n(f)$.*

Exemplo 1.5.5 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 1$.*
Pelo exemplo 1.5.3 temos que F_μ tem dois pontos fixos, o 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. Logo, 0 é um ponto periódico de período 1 de F_μ, uma vez que $F_\mu(0) = 0$, e p_μ é um ponto periódico de período 1 de F_μ pois $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$.

Definição 1.5.6 *x é um **ponto crítico** de f se $f'(x) = 0$. O ponto crítico é **não degenerado** se $f''(x) \neq 0$, e é **degenerado** se $f''(x) = 0$.*

Definição 1.5.7 *Seja p um ponto periódico de período n. O ponto p é **hiperbólico** se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. O número $(f^n)'(p)$ é chamado o **multiplicador** do ponto periódico.*

Exemplo 1.5.8 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 1$. Pelo exemplo 1.5.5 temos que 0 e p_μ são pontos periódicos de período 1. Em seguida, calculemos $F'_\mu(x)$.*

$F'_\mu(x) = [\mu x(1-x)]' = \mu[x'(1-x)+x(1-x)'] = \mu[(1-x)+x(-1)] = \mu(1-x-x) = \mu(1-2x) = \mu-2\mu x.$

Portanto, $F'_\mu(0) = \mu - 2\mu \times 0 = \mu$ e $F'_\mu(p_u) = \mu - 2\mu \times \frac{u-1}{\mu} = \mu - \frac{2\mu^2-2\mu}{\mu} = \mu - 2\mu + 2 = 2 - \mu$.

Logo, 0 é um ponto hiperbólico pois $|F_\mu(0)| = |\mu| > 1$ e p_μ é também um ponto hiperbólico para $1 < \mu < 3$ uma vez que $|F'_\mu(p_\mu)| = |2-\mu| \neq 1$.

No que se segue, consideremos f uma função de classe C^1.

Proposição 1.5.9 *Seja p um ponto hiperbólico fixo com $|f'(p)| < 1$. Então existe um intervalo aberto U sobre p tal que se $x \in U$, então $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p$.*

Demonstração da Proposição 1.5.9
Como f é de classe C^1 existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < A < 1$ para $x \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ e algum $A < 1$.

Pelo Teorema do Valor Intermédio, temos que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x-p| < |x-p| \leq \varepsilon$$

Logo $f(x)$ está contido em $[p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ e, de facto, está mais proximo de p do que x.

Analogamente, $|f^n(x) - p| \leq A^n|x-p|$, pelo que $f^n(x) \to p$ quando $n \to +\infty$. □

Proposição 1.5.10 *Seja p um ponto periódico de período r. Se $|(f^r)'(p)| < 1$ então existe U que contém p tal que $\lim_{n\to+\infty}(f^r)^n(x) = p$.*

Demonstração da Proposição 1.5.10
Como f^r é de classe C^1 existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^r)'(x)| < A < 1$ para $x \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ e algum $A < 1$.

Pelo Teorema do Valor Intermédio, temos que:

$$|f^r(x) - p| = |f^r(x) - f^r(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon$$

Logo $f^r(x)$ está contido em $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ e, de facto, está mais proximo de p do que x.

Analogamente, $|(f^r)^n(x) - p| \leq A^n|x - p|$ tal que $(f^r)^n(x) \to p$ quando $n \to +\infty$. $\square$

O resultado anterior conduz-nos à definição seguinte.

Definição 1.5.11 *Seja p um ponto periódico hiperbólico de período n com $|(f^n)'(p)| < 1$. O ponto p é chamado um **ponto periódico atractor** (ou poço).*

Definição 1.5.12 *Um ponto fixo p com $|f'(p)| > 1$ é chamado um **ponto repulsor** (ou fonte).*

Exemplo 1.5.13 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 1$.*
Pelo exemplo 1.5.8 temos que 0 é um ponto fixo com $|f'(0)| > 1$, logo é um ponto fixo repulsor para $\mu > 1$. Já p_μ é um ponto fixo atractor para $1 < \mu < 3$, pois para $1 < \mu < 3$ temos que p_μ é um ponto periódico hiperbólico com $|f'_\mu(p_\mu)| < 1$.

Proposição 1.5.14 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.*
1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$ se $\mu > 1$.

Demonstração da Proposição 1.5.14
1. Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.
Em primeiro lugar provemos que $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$. Assim, temos que:

$$F_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \mu x = 0 \vee 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Logo, $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ (e $F_\mu(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$). Pelo exemplo 1.5.3 temos $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

2. Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 1$ e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$. Como $0 < \frac{1}{\mu} < 1$, vem que:

$$0 > -\frac{1}{\mu} > -1$$

$$1 + 0 > 1 - \frac{1}{\mu} > 1 - 1$$

$$1 > 1 - \frac{1}{\mu} > 0$$

$$0 < 1 - \frac{1}{\mu} < 1.$$

Logo, $0 < p_\mu < 1$. $\square$

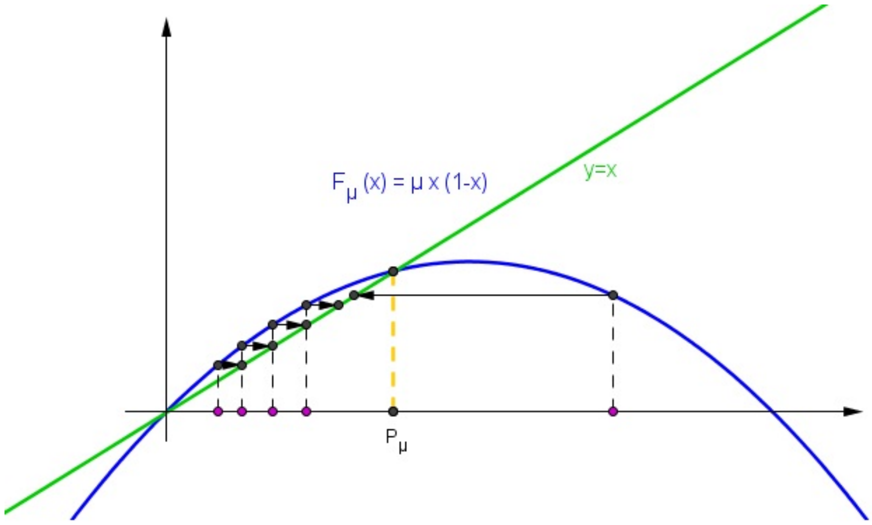
Proposição 1.5.15 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $1 < \mu < 3$.*

1. F_μ tem um ponto fixo atractivo em $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ e um ponto fixo repelente em 0.

2. Se $0 < x < 1$ então $lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Demonstração da Proposição 1.5.15

1. Já foi demonstrado nos exemplos 1.5.3 e 1.5.13.
2. Em primeiro lugar vemos o caso em que $1 < \mu < 2$, onde temos a seguinte figura.

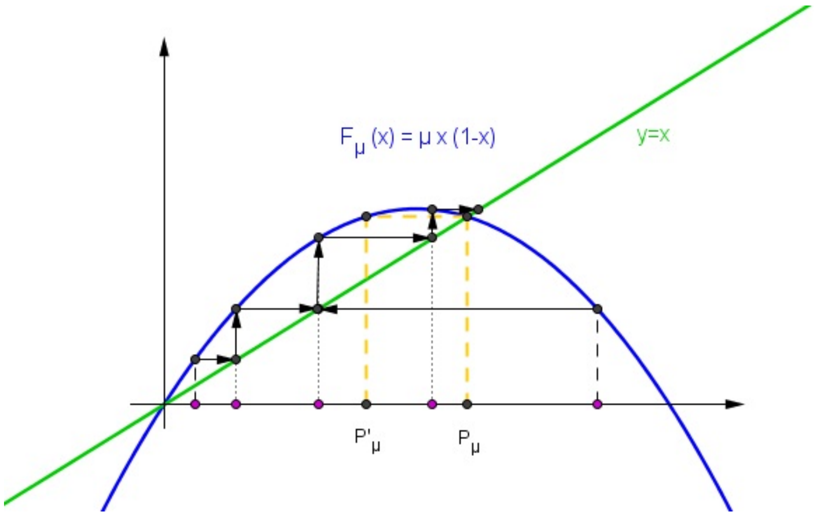


Com base na figura podemos notar que:

· se x está no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$ se $x \neq p_\mu$, logo $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$;

· se x está no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ então $F_\mu(x)$ está em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, pelo que o argumento anterior implica $F_\mu^n(x) = F_\mu^{(n-1)}(F_\mu(x)) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$.

De seguida, vemos o caso em que $2 < \mu < 3$, onde temos a seguinte figura.



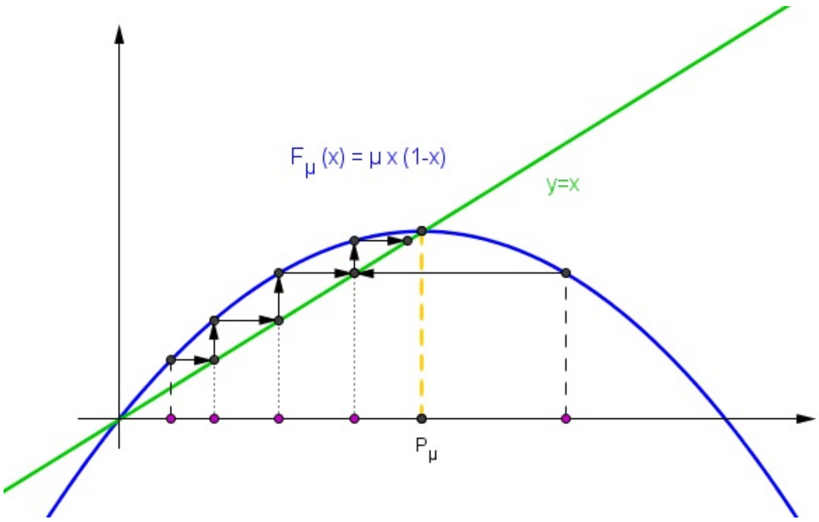
Com base na figura podemos notar que:

· $\frac{1}{2} < p_\mu < 1$;

· p'_μ é o único ponto no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ que é enviado para p_μ por F_μ;
· o intervalo $[p'_\mu, p_\mu]$ é enviado para o intervalo $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$ por F^2_μ, portanto $F^n_\mu(x) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$ $\forall x \in [p'_\mu, p_\mu]$;
· para $0 < x < p'_\mu$ existe $k > 0$ tal que $F^k_\mu(x) \in [p'_\mu, p_\mu]$, logo $F^n_\mu(F^k_\mu(x)) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$;
· se $x \in [p_\mu, 1]$, $F_\mu(x) \in [0, p_\mu]$ e então $\lim_{n\to\infty} F^n_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F^{(n-1)}_\mu(F_\mu(x)) \to p_\mu$.

Assim, $\lim_{n\to\infty} F^n_\mu(x) = p_\mu$ quando $2 < \mu < 3$.

Por fim, vemos o caso em que $\mu = 2$.



Neste caso, pela alínea 1 desta proposição podemos concluir que $p_\mu = \frac{1}{2}$. E com base na figura podemos notar que:
· para $0 < x < p_\mu$ vem que $F^n_\mu(x) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$;
· para $x \in [p_\mu, 1]$, existe $k > 0$ tal que $F^k_\mu \in [0, p_\mu]$, logo $F^n_\mu(F^k_\mu(x)) \to p_\mu$ quando $n \to \infty$.

Assim, $\lim_{n\to\infty} F^n_\mu(x) = p_\mu$ quando $\mu = 2$.

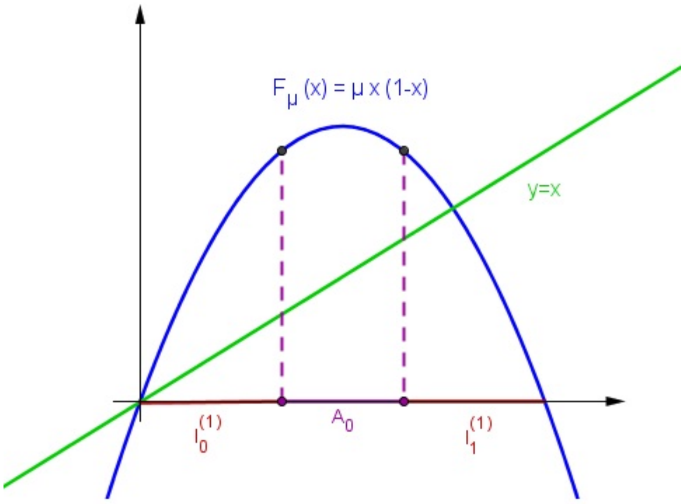
Logo, $\lim_{n\to\infty} F^n_\mu(x) = p_\mu \forall x \in]0, 1[$ quando $1 < \mu < 3$. $\square$

Portanto, para $1 < \mu < 3$, F_μ tem apenas dois pontos fixos e todos os outros em $I = \{x : 0 < x < 1\}$ são assintóticos para p_μ. Assim, a dinâmica de F_μ está completamente compreendida para valores de μ neste intervalo.

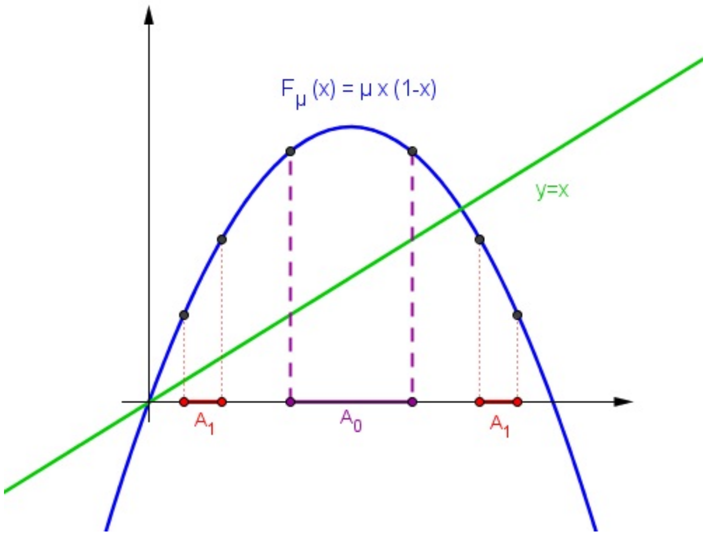
Para $3 \leq \mu \leq 4$ apesar de ser extremamente interessante não vamos abordar este caso, pois saí do âmbito deste trabalho. Grosso modo à medida que o parâmetro μ aumenta vão surgir órbitas periódicas atractoras de períodos 2,4,..., mas também de períodos um pouco surpreendentes como 3 (o que, por o resultado famoso [14], implica a existência de órbitas periódicas de todos os períodos).

Em seguida, consideremos o caso em que $\mu > 4$. E, como anteriormente, todas as dinâmicas de F_μ ocorrem no intervalo $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, vamos novamente considerar este intervalo.
Notemos que para $\mu > 4$ o valor máximo de F_μ é maior do que 1, logo certos pontos deixam I depois de uma iteração de F_μ. Seja A_0 o conjunto desses pontos, ou seja, A_0 é o conjunto dos pontos que "escapam" imediatamente de I após uma iteração de F_μ (e depois "tendem" para $-\infty$) e os

outros pontos permanecem em I depois de uma iteração de F_μ. Seja $A_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_0\}$, ou seja, A_1 é o conjunto de pontos que "escapam" de I depois de duas iterações de F_μ e os outros pontos ficam em I após duas iterações de F_μ. Intuitivamente, $A_n = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\}$, ou seja, A_n é o conjunto de todos os pontos que "escapam" de I à iteração $n+1$.
Portanto, os pontos que pertencem a A_n tendem para $-\infty$. Assim, interessa analisar o comportamento daqueles pontos que nunca "escapam" de I, ou seja, o conjunto de pontos que pertencem ao conjunto $I - (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$ (denotemos este conjunto por Λ).
Como A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $I - A_0$ consiste em 2 intervalos fechados, $I_0^{(1)}$ na esquerda e $I_1^{(1)}$ na direita (como podemos ver na figura que se segue).



Portanto, vemos que:
· F_μ transforma $I_0^{(1)}$ e $I_1^{(1)}$ monotonicamente em I;
· F_μ está a aumentar em $I_0^{(1)}$ e a diminuir em $I_1^{(1)}$;
· Existe um par de intervalos abertos, um em $I_0^{(1)}$ e outro em $I_1^{(1)}$, que são transformados em A_0 por F_μ, os quais designaremos pelo conjunto A_1 (como vemos na imagem que se segue).



De seguida, consideremos $I - (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto consiste em 4 intervalos fechados ($I_0^{(2)}$, $I_1^{(2)}$,

$I_2^{(2)}$ e $I_2^{(2)}$) e cada um destes quatro intervalos contém um subintervalo aberto que é transformado por F_μ^2 em A_0, ou seja, os pontos nesses intervalos "escapam" de I à terceira iteração de F_μ, designado este conjunto por A_2. Continuando este processo, verificamos que A_n consiste em 2^n intervalos abertos disjuntos, portanto, $I-(A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n)$ consiste em 2^{n+1} intervalos fechados, assim, $F_\mu^{(n+1)}$ transforma cada um destes intervalos fechados monotonicamente em I. De facto, o gráfico de $F_\mu^{(n+1)}$ é alternardamente crescente e decrescente nesses intervalos, tem exactamente 2^n pontos de inflexão em I e intersecta a recta $y = x$ pelo menos 2^n vezes, ou seja, tem pelo menos 2^n pontos fixos.

Definição 1.5.16 *Um conjunto real é* ***totalmente desconexo*** *se não contém intervalos.*

Definição 1.5.17 *Um conjunto é* ***perfeito*** *se todos os pontos são de acumulação ou pontos limite de outros pontos do conjunto.*

Definição 1.5.18 *Um conjunto de $\mathbb{R}$ é um* ***conjunto de Cantor*** *se é fechado, totalmente desconexo e é um perfeito subconjunto de I.*

Teorema 1.5.19 *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$ então Λ é um conjunto de Cantor.*

A demonstração encontra-se em [5] (Teorema 5.6).

Definição 1.5.20 *Seja $f : J \to J$. Diz-se que f é* ***topologicamente transitiva*** *se para qualquer par de conjuntos abertos U, $V \subseteq J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Exemplo 1.5.21 *$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, com $\mu > 2 + \sqrt{5}$ é topologicamente transitiva* [5].

Definição 1.5.22 *Seja $f : J \to J$. Diz-se que f tem* ***dependência sensitiva das condições iniciais*** *se existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in J$ e para qualquer vizinhança N de x, existe $y \in N$ e $n > 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Exemplo 1.5.23 *A função quadrática $F_\mu = \mu x(1-x)$ com $\mu > 2+\sqrt{5}$ tem dependência sensitiva das condições iniciais em Λ. Para verificar escolhamos δ menor que o diâmetro de A_0 (onde A_0 é o conjunto dos pontos que "escapam" imediatamente de I após uma iteração de F_μ). Seja $x, y \in \Lambda$. Se $x \neq y$ então os itinerários de x e y estão em distintos $I_i^{(n+1)}$ e $I_j^{(n+1)}$, para algum n. Mas, isto significa que $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$ estão em lados opostos de A_0, logo $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta$.*

Definição 1.5.24 *Seja $V \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto. Uma aplicação $f : V \to V$ é* ***caótica*** *em V se:*
1. f tem dependência sensitiva das condições iniciais;
2. f é topologicamente transitiva;
3. Os pontos periódicos são densos em V.

Prova-se [5] que o conjunto dos pontos periódicos de $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 2+\sqrt{5}$ é denso em Λ.

Assim, a função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ é caótica em Λ quando $\mu > 2+\sqrt{5}$. Este resultado também é válido para $\mu > 4$ mas a prova [5] sai do âmbito deste trabalho.

Teorema 1.5.25 *A função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ é caótica em Λ quando $\mu > 4$.*

Além disso, temos que para $\mu > 4$, F_4 é caótica em todo o intervalo I [5].

Teorema 1.5.26 *A função quadrática $F_4(x) = 4x(1-x)$ é caótica em $I = [0,1]$.*

1.6 Conclusões

Com a realização deste trabalho podemos concluir que existem diversas formas de abordar e caracterizar as Funções Quadráticas, nomeadamente, através do seu gráfico, de progressões aritméticas de ordem superior e como área "gerada" pelo gráfico de uma função afim. Também é possível olhar as Funções Quadráticas através da sua dinâmica. No entanto, neste caso, apesar do aspecto aparentemente simples das Funções Quadráticas, um estudo mais aprofundado revela um comportamento dinâmico extremamente rico e complexo.

Capítulo 2

Componente pedagógica

2.1 Introdução

No âmbito do relatório de estágio integrado na unidade curricular do 2° ano do plano de estudos do 2° Ciclo, em Ensino da Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade da Beira Interior, pretende-se presentear uma descrição sumária do trabalho desenvolvido ao longo do ano lectivo 2011/2012, assim como apresentar a planificação de uma subunidade didática referente a um período de regência neste ano lectivo.

A Prática de Ensino Supervisionada (PES) ocorreu na Escola Secundária Campos Melo, na Covilhã, iniciando-se no dia um de Setembro de 2011, na qual fazem parte leccionação de aulas supervisionadas, observação das aulas do orientador cooperante e colegas do núcleo de estágio, participação na planificação da actividade lectiva, preparação de instrumentos de avaliação e materiais didácticos e participação em actividades de estágio com ligação à escola.

O núcleo de estágio 2011/2012 constituído pelos estagiários Flávio Escada e Tânia Pacheco, sob orientação da professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes (orientadora cooperante) e Helder Soares Vilarinho (orientador científico).

Assim, à orientadora cooperante foram atríbuidas as turmas 10° e 11° anos dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, tendo a direcção de turma do 11° A. Contudo, nas primeiras semanas de Setembro realizaram-se as seguintes actividades: planificações anuais, médio e longo prazo dos anos mencionados, testes diagnósticos paras as respectivas turmas e reunião do grupo de Matemática com vista a marcação de reuniões de nível para se preparar o ano lectivo. E também foi realizada a atribuições das regências aos estagiários, ficando acordado que a estagiária Tânia Pacheco leccionaria no 10° ano e o estagiário Flávio Escada leccionaria no 11° ano, onde cada estagiário leccionaria seis blocos de noventa minutos em cada período, o que perfaz um total de dezoito aulas de noventa minutos ao longo do ano lectivo. Além disso, nas primeiras semanas também ocorreu a reunião geral de professores, na qual a Directora da escola deu votos de bom trabalho e bom ano ano escolar, fez uma breve apresentação da oferta educativa da Escola Campos Melo e dos seus documentos orientadores.

Na escola fomos sempre bem recebidos, quer pelos professores e funcionários, como pelos alunos das turmas do 10° e 11° anos pois encaravam-nos como um professor em sala de aula e recorriam ao nosso auxílio para esclarecimento de dúvidas na resolução de exercícios.

O trabalho realizado durante o estágio teve como base:
· planificar as aulas assistidas e leccionar as mesmas;
· estar sempre presente nas aulas leccionadas pela professora Isaura (orientadora cooperante);
· assistir às aulas leccionadas pelo colega de estágio;
· discutir com a professora Isaura as metodologias a adoptar em cada aula por nós leccionada;

· elaborar fichas de trabalho;
· elaborar testes de avaliação;
· construir matrizes para os testes;
· fazer critérios de correcção dos testes;
· corrigir e discutir a correcção dos testes;
· controle de faltas da turma do 11° A;
· organizar o dossie da direcção de turma do 11° A.

Por outro lado, também estive presente nas reuniões:
· do departamento de Matemática e Ciências Experimentais;
· de nível com vista a elaboração das planificações a curto prazo para as respectivas turmas;
· de grupo;
· de directores de turma;
· de avaliação (intercalar e final de período);
· de encarregados de educação da turma do 11° A.

No decorrer do estágio foram diversas as actividades extracurriculares em que o núcleo de estágio participou e organizou. Assim, as actividades que participamos foram as seguintes:
· supervisionar a primeira e segunda eliminatória das Olimpíadas da Matemática realizadas na Escola Secundária Campos Melo;
· apuramento dos alunos da escola a participar no Campeonato de Jogos de Matemática e acompanhamento dos alunos seleccionados a nível de escola à final do Campeonato de Jogos de Matemática realizada em Coimbra no dia 9 de Março;
· na Ceia de Natal;
· nos dia dos departamentos onde foram realizados acessórios com formas geométricas com o objectivo de o dinheiro conseguido na venda dos mesmos reverter a favor de famílias carenciadas, além disso, para o dia dos departamentos também se elaborou material para o desfile "A Matemática e a Moda".

No entanto, o núcleo de estágio dinamizou actividades extracurriculares, especificamente um Peddy Paper Matemático e uma secção de trabalho com a calculadora gráfica TI N-Spire.

O Peddy Paper denominado "Matcidade" realizou-se no dia 6 de Janeiro, incluído nas comemorações do 128° aniversário da Escola Secundária Campos Melo sendo destinado aos alunos do 3° ciclo e secundário. Este consistiu num percurso pela cidade da covilhã, iniciado e terminado na escola, sendo constituído por várias estapas. Às equipas eram facultados guiões com pistas com o objectivo de descobrirem os locais a que se deviam dirigir para efectuarem diversas actividades. A pontuação era dividida em três grupos, respostas às perguntas incluídas nos guiões, actividades realizadas e o tempo dispendido para a realização da prova. O Peddy Paper foi destacado devido à ampla participação dos alunos (cerca de 200 alunos), o seu grau de satisfação com a actividade e entusiasmo dos alunos, principalmente os alunos do 3° ciclo nos momentos em que necessitavam de completar a prova em cada um dos postos. Saliente-se que o regulamento do Peddy Paper encontra-se em anexo a este relatório.

Por outro lado, a secção de trabalho com a calculadora TI N-Spire foi destinada ao grupo de Matemática da Escola Secundária Campos Melo e para a realização da mesma foram elaborados guiões (incluídos em anexo a este relatório) com as respectivas tarefas com o objectivo de utilizar a calculadora para as resolver, de modo a explorar os comandos incluídos na calculadora gráfica TI N-Spire.

Porém, durante o estágio também frequentei a ação de formação "Utilização Pedagógica dos Quadros Interativos na Matemática e Ciências Experimentais" e assisti à apresentação dos manuais de 9° e 12° anos das editoras ASA e Porto Editora.

No primeiro período leccionei seis aulas de noventa minutos do Tema I - Geomatria no Plano e no Espaço I do 10° ano, mais concretamente leccionei os seguintes subtópicos: Referencial cartesiano ortogonal e monométrico no plano; Correspondências entre o plano e $\mathbb{R}^2$; Distância entre dois pontos no plano e no espaço; Conjuntos de pontos e condições em $\mathbb{R}^2$; Mediatriz de um segmento de recta; Vectores livres no plano e no espaço. No entanto, no segundo período também leccionei seis aulas de noventa minutos do Tema II (Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo) do 10° ano onde leccionei a subunidade "Funções Quadráticas". Por fim, no terceiro período leccionei seis aulas do Tema III - Estatística do 10° ano correspondendo aos seguintes subtópicos: Dados agrupados em classes (tabela de frequências, histogramas, marca da classe, polígonos de frequências e função cumulativa); Medidas de localização (média, moda, mediana e quartis); Medidas de dispersão (amplitude, amplitude interquartis, desvio médio, variância e desvio padrão).

Assim, devido às restrições de espaço impostas para a elaboração deste relatório todas as actividades e planificações, assim como todos os materiais realizados na Prática de Ensino Supervionada encontram-se no portefólio corresponde ao núcleo de estágio 2011/2012.

A planificação da subunidade apresentada neste trabalho corresponde ao estudo das "Funções Quadráticas", incluída no Tema II (Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo) do programa de Matemática A do 10° ano dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e é constituída por seis aulas.

Na aula $n°1$, introduziu-se o estudo da função quadrática, mais concretamente a definição, domínio e gráfico. Nas aulas $n°2$ e $n°3$, estudou-se a família de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$, $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$, $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$, onde se analisou os efeitos das mudanças de parâmetros no gráfico das respectivas funções. Na aula $n°4$, na primeira parte da aula estudou-se as transformações simples de funções através de uma apresentação em Powerpoint (incluída em anexo a este relatório). Na segunda parte da aula estudou-se as funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Na aula $n°5$ estudou-se a resolução analítica e gráfica de inequações do 2° grau. Por fim, a aplicação dos conhecimentos acerca da família das funções quadráticas foi na aula $n°6$ através da resolução de uma proposta de trabalho com exercícios retirados dos testes intermédios de 10° ano. Contudo, todas as planificações apresentadas contêm os seguintes pontos: Data, Ano/Turma, Duração da aula, Tema, Tópico, Sumário, Pré-Requisitos, Objectivos, Competências Transversais, Avaliação/Reflexão, TPC, Recursos, Apoio Bibliográfico e Conteúdos/Estratégias.

2.2 Aula 1

Data: 6 de Fevereiro de 2012.
Ano/Turma: 10° / A
Duração da aula: 90 minutos.
Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Funções quadráticas.

Sumário:
Introdução ao estudo da função quadrática: definição, domínio e gráfico.

Pré-Requisitos:
Calcular perímetros e áreas de rectângulos;
Resolver equações do 2° grau;
Calcular distância entre dois pontos;
Identificar funções;
Utilizar a calculadora gráfica para obter gráficos;
Conhecer as propriedades das funções e dos seus gráficos.

Objectivos:
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica;
Calcular o máximo de uma função quadrática usando a calculadora gráfica.

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno da matéria a leccionar, como também através dos exercícios a resolver; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica; desenvolve-se também a competência Aplicações da Matemática quando se faz uma pequena abordagem às aplicações da parábola em situações da vida real.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a avaliar.

TPC:
Nesta aula não há TPC.

Recursos:
Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].

Conteúdos / Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

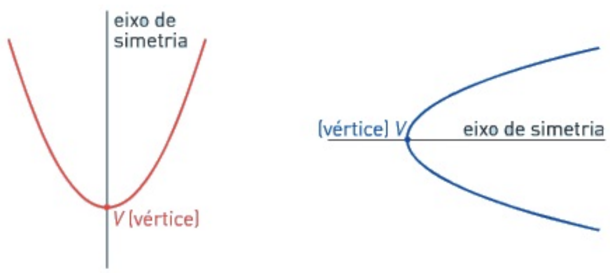
Posteriormente será dito aos alunos que nesta aula iremos começar o estudo das funções quadráticas, onde iremos abordar a sua definição, domininо e gráfico.

De seguida, será feita uma pequena introdução acerca das parábolas. Assim, será dito aos alunos que há várias situações na vida real em que se encontram arcos com a forma de parábola, como por exemplo, nas comunicações no uso das antenas parabólicas (daí o seu nome) e na arquitectura (por exemplo, em pontes).

Seguidamente, será feita uma abordagem intuitiva sobre "O que é uma parábola?" (o apontamento será escrito no quadro para que os alunos tomem nota nos seus cadernos).

O que é uma parábola?

· Uma parábola é uma curva simétrica em relação a um eixo (eixo de simetria) e com um vértice, como podemos ver na seguinte figura.

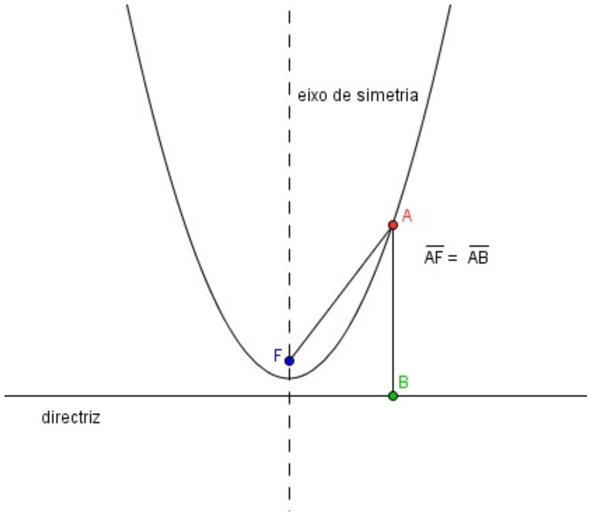


Salientando-se que iremos abordar apenas as parábolas do tipo que estão representadas na esquerda, uma vez que as parábolas do tipo das representadas na direita não são representações gráficas de funções.

· Uma parábola é uma curva que resulta do corte da superfície cónica por um plano paralelo a uma das geratrizes. (esta afirmação será auxiliada com uma cónica para que os alunos consigam visualizar a parábola)

Posteriormente será escrita no quadro a definição geométrica de parábola assim como a imagem que traduz esta definição para que os alunos tomem nota no seu caderno.

Definição geométrica de parábola: parábola é o conjunto dos pontos do plano equdistantes de um ponto (foco) e de uma recta (directriz) que não contém esse ponto.



De seguida, será referido que as parábolas gozam da propriedade focal ou reflectora, ou seja, todo o raio incidente na parábola, paralelo ao seu eixo de simetria, reflecte-se passando pelo foco. Por exemplo, esta propriedade é aplicada no mecanismo de funcionamento das antenas parabólicas.

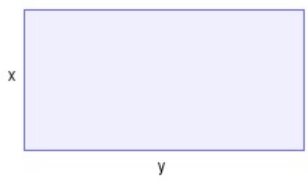
Em seguida, será escrito no quadro a definição de função quadrática para que os alunos tomem nota nos seus cadernos.

Definição: Uma função real de variável real definida por um polinímio de 2.° grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é designada por função quadrática.
O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Depois será feito um exemplo em conjunto no quadro (o qual os alunos devem tomar nota no seu caderno) para evidenciar a importância de se estudar as características das funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Exemplo:
O Sr. António tem 20 metros de arame para delimitar um curral de forma rectangular. Quais as dimensões do curral para que a área cercada seja máxima?

Sejam x e y as dimensões do curral.

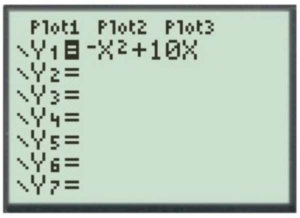


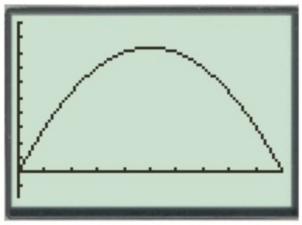
Assim, temos:
$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.

Portanto, a área pode ser expressa em função de x:
$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

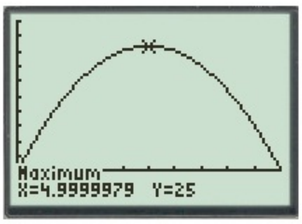
Como x e y são as dimensões do curral temos $x > 0 \wedge y > 0$. Mas $x < 10$ pois $y = 10 - x$ e $y > 0$. Portanto, o domínio da função é $]0, 10[$.

De seguida, recorrendo à calculadora gráfica obtemos uma representação gráfica da função que a cada x faz corresponder a área do curral.





Com o auxílio da calculadora gráfica através do comando "2nd - trace - 4:maximum" obtemos o máximo da função.

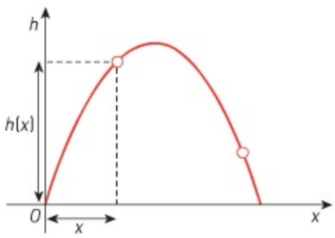


Logo, a área máxima é $25\,m^2$ e corresponde ao curral com a forma de quadrado com 5 metros de lado.

Por fim será proposto aos alunos o exercício 32 da página 41 do manual dos alunos. O mesmo será posteriormente corrigido no quadro por um aluno.

Exercício 32
Uma bola é lançada numa mesa de pingue-pongue. Na sua trajectória descreve arcos de parábola, como a figura sugere.

Segue-se um esquema onde está representado o referido arco e duas possíveis posições da bola.



Admite que a altura h da bola em relação à mesa, ao longo da sua trajectória, entre o ponto A e o ponto B, é dada em função de x, pela expressão:

$$h(x) = -0,03x^2 + 3x, \text{ em centímetos}$$

Determina:
32.1 a distânica de A a B;
32.2 a altura máxima atingida pela bola (recorre à calculadora gráfica).

Resolução do exercício 32
32.1
Para determinar a distância de A a B necessitamos de saber as coordenadas dos pontos A e B. No entanto, sabemos que os pontos A e B são os zeros da função, ou seja, a ordenada nestes pontos é nula, portanto calculemos $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,03x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-0,03x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -0,03x + 3 = 0$$

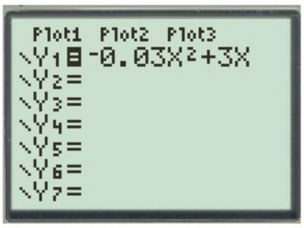
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -0,03x = -3$$

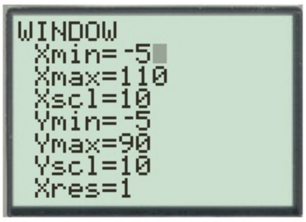
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-3}{-0,03}$$

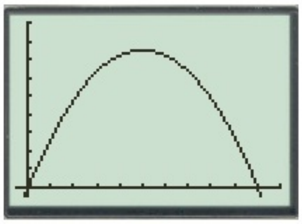
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 100$$

Assim, temos $A(0,0)$ e $B(100,0)$.
Logo, $d(A,B) = \sqrt{(100-0)^2} = 100$.

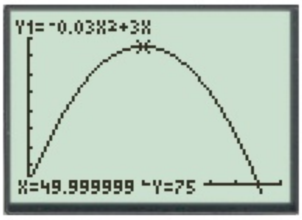
32.2
De modo a determinar a altura máxima atingida pela bola introduzimos a função $h(x)$ na calculadora gráfica de modo a ter a sua representação gráfica.







Assim, para obter-mos a altura máxima atingida pela bola utilizamos o comando "2nd - trace - 4:maximum" da calculadora gráfica.



Portanto, concluímos que a altura máxima atingida pela bola é 75 centímetros.

2.3 Aula 2

Data: 8 de Fevereiro de 2012.
Ano/Turma: 10° / A
Duração da aula: 90 minutos.
Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Família de funções quadráticas.
Família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$.
Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$.

Sumário:
Família de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$.

Pré-Requisitos:
Conhecer as propriedades das funções e dos seus gráficos.
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica.

Objectivos:
Esboçar a representação gráfica de uma função quadrática do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$;
Identificar o vértice e o eixo de simetria das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$;
Identificar o sentido da concavidade através de gráficos e da expressão analítica;
Identificar as propriedades das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ (domínio, contradomínio, monotomia, sinal, zeros e extremos);
Analisar a influência dos parâmetros a e h na família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$.

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno das propostas de trabalho, como também através dos exercícios a resolver; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a avaliar.

TPC:
Exercício 38 da página 44 do manual dos alunos (o qual deverá ser entre na aula seguinte numa folha à parte).

Recursos:
Propostas de trabalho; Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].

Conteúdos / Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

Em seguida, será dito aos alunos que nesta aula iremos abordar a família de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$, onde iremos realizar duas propostas de trabalho com o objectivo de estudar as propriedades da família das funções quadráticas destes dois tipos e analisar a influência dos parâmetros a e h.

De seguida, será entregue aos alunos uma proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$. A mesma será feita em conjunto.
Assim, apresenta-se de seguida a proposta de trabalho e sua respectiva correcção.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Matemática A

10º ano 2011/2012

Proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

1. Considera as funções quadráticas seguintes:

$f(x) = x^2$; $g(x) = 3,5x^2$; $h(x) = 15x^2$; $i(x) = 0,5x^2$; $j(x) = 0,2x^2$

1.1. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça no mesmo referencial os gráficos das funções quadráticas.

1.2. Identifica, em cada função, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola e o sentido da concavidade.

2. Considera as funções quadráticas seguintes:

$l(x) = -x^2$; $m(x) = -3,5x^2$; $n(x) = -15x^2$; $o(x) = -0,5x^2$; $p(x) = -0,2x^2$

2.1. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça no mesmo referencial os gráficos das funções quadráticas.

2.2. Identifica, em cada função, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola e o sentido da concavidade.

3. Completa o quadro seguinte:

	$g(x) = 3,5x^2$	$i(x) = 0,5x^2$	$n(x) = -15x^2$	$p(x) = -0,2x^2$
Domínio				
Contradomínio				
Zeros				
Sinal				
Monotonia				
Extremos				

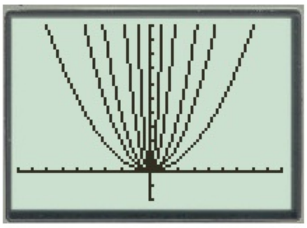
4. Através da análise dos exercícios anteriores o que podemos inferir acerca do parâmetro a?

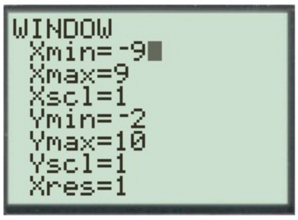
5. Preenche o quadro seguinte:

$y = ax^2$	$a > 0$	$a < 0$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Sinal		
Monotonia		
Coordenadas do vértice		
Eixo de simetria		
Extremos		

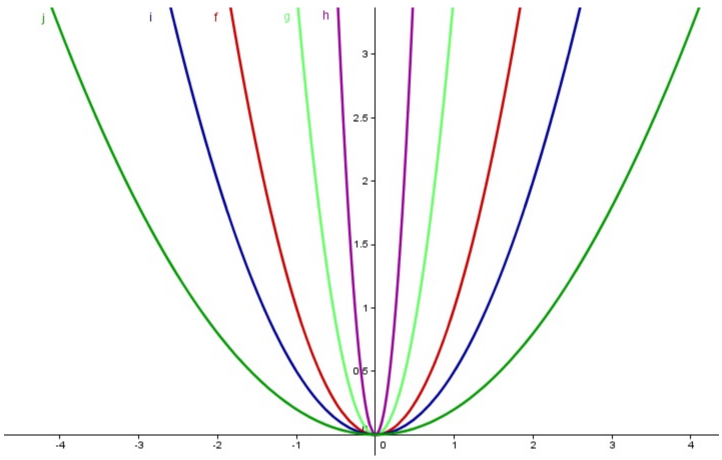
Correcção da proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

1.
1.1.
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.



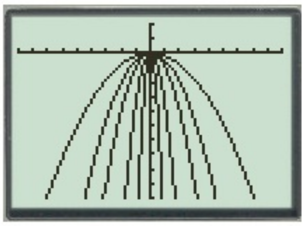


Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.

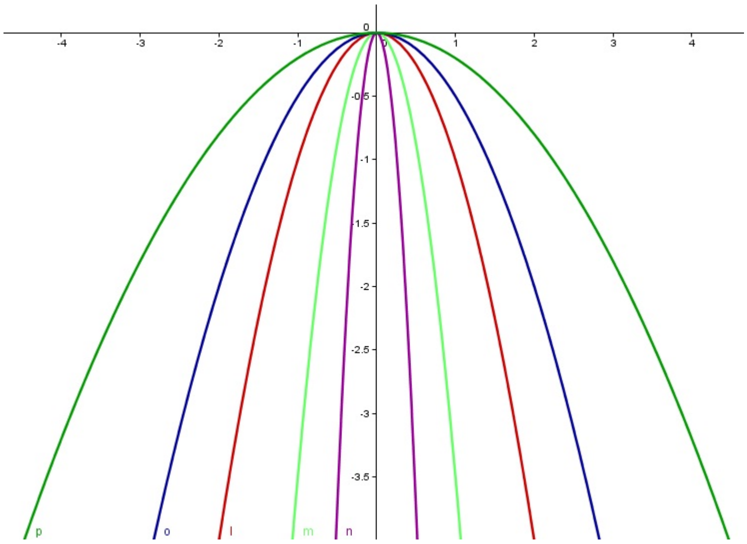


1.2.
As parábolas que representam as funções f, g, h, i e j têm vértice no ponto (0,0), o eixo de simetria é a recta $x = 0$ e têm a concavidade voltada para cima.

2.
2.1.
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.



Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.



2.2.

As parábolas que representam as funções l, m, n, o e p têm vértice no ponto (0,0), o eixo de simetria é a recta $x = 0$ e têm a concavidade voltada para baixo.

3.

	$g(x) = 3,5x^2$	$i(x) = 0,5x^2$	$n(x) = -15x^2$	$p(x) = -0,2x^2$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	0	0	0	0
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty,0]$ Crescente em $[0,+\infty[$	Decrescente em $]-\infty,0]$ Crescente em $[0,+\infty[$	Crescente em $]-\infty,0]$ Decrescente em $[0,+\infty[$	Crescente em $]-\infty,0]$ Decrescente em $[0,+\infty[$
Extremos	Mínimo:0 Minimizante:0	Mínimo:0 Minimizante:0	Máximo:0 Maximizante:0	Máximo:0 Maximizante:0

4.

· O sinal do parâmetro a influencia o sentido da concavidade da parábola, ou seja, se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima, se $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

· O valor absoluto de a influencia a abertura da parábola, ou seja, quanto maior o valor absoltuto de a menor é abertura da parábola;

· O vértice da parábola (ponto $(0, 0)$) e o eixo de simetria (recta $x = 0$) são independentes do parâmetro a.

5.

$y = ax^2$	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	0	0
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Crescente em $]-\infty, 0]$ Decrescente em $[0, +\infty[$
Coordenadas do vértice	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Eixo de simetria	$x = 0$	$x = 0$
Extremos	Mínimo:0 Minimizante:0	Máximo:0 Maximizante:0

Em seguida à realização da proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ será entregue aos alunos uma proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ (a qual será feita em conjunto). A mesma será enunciada de seguida e a respectiva correcção.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Matemática A

10º ano 2011/2012

Proposta de trabalho - Função Quadrática

Assunto: Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$

1. Considera as funções quadráticas seguintes:

$f(x) = x^2$; $g(x) = (x-2)^2$; $h(x) = (x+1)^2$; $i(x) = (x+3)^2$

1.1. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça no mesmo referencial os gráficos das funções quadráticas.

1.2. Identifica, em cada função, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola.

1.3. Explica como podes obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

1.4. Explica como podes obter o gráfico da função i a partir do gráfico da função f.

1.5. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça o gráfico da função $j(x) = -(x+1)^2$ e explica como podes obter o gráfico da função $j(x)$ a partir do gráfico da função $h(x)$.

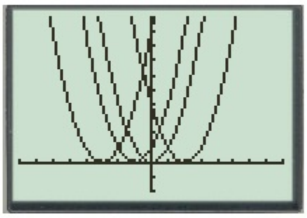
2. Para funções do tipo $y = a(x-h)^2$ explica o efeito do parâmetro h relativamente ao gráfico da função $y = ax^2$ e identifica as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria.

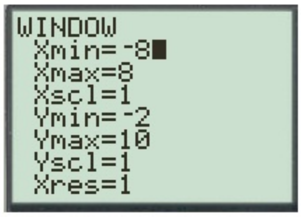
3. Preenche o quadro seguinte:

$y = a(x-h)^2$	$a > 0$	$a < 0$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Sinal		
Monotonia		
Coordenadas do vértice		
Eixo de simetria		
Extremos		

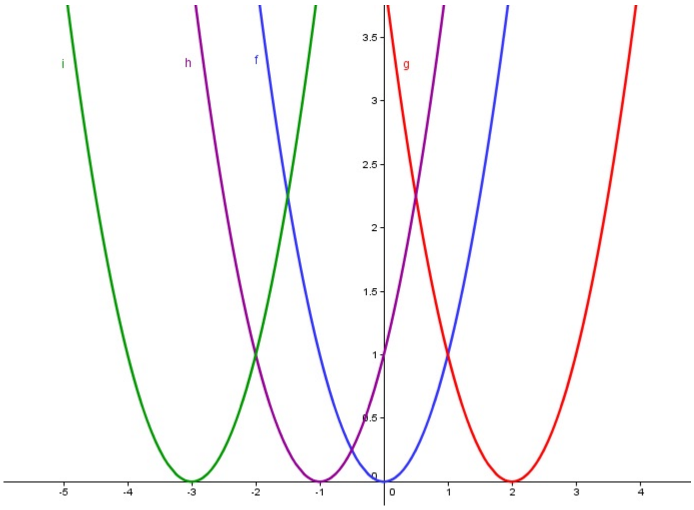
Correcção da proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$

1.
1.1.
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.





Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.



1.2.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função f é o ponto $(0,0)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = 0$.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função g é o ponto $(2,0)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = 2$.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função h é o ponto $(-1,0)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = -1$.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função i é o ponto $(-3,0)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = -3$.

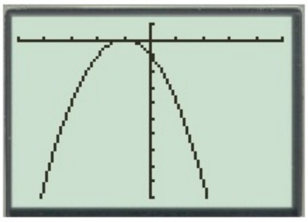
1.3.
O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f, deslocando-o duas unidades para a direita, ou seja, efectuando-se uma translação associada ao vector $(2,0)$.

1.4.

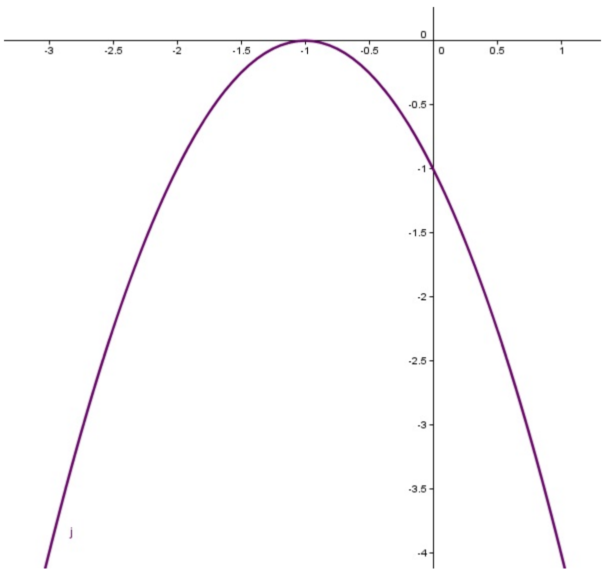
O gráfico da função i obtém-se a partir do gráfico da função f, deslocando-o três unidades para a esquerda, ou seja, efectuando-se uma translação associada ao vector $(-3,0)$.

1.5.

Em primeiro lugar apresento a representação gráfica da função j utilizando a calculadora.



Em segundo apresento a representação gráfica da função j utilizando o software *geogebra*.



O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico da função h, realizando uma simetria em relação ao eixo Ox.

2.

O gráfico da função $y = a(x-h)^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = ax^2$, através de um deslocamento horizontal, ou seja, efectuando-se uma translação associada ao vector $(h,0)$.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função $y = a(x-h)^2$ é o ponto $(h,0)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = h$.

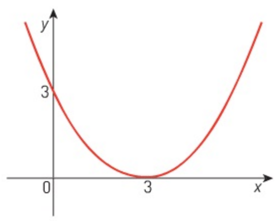
3.

$y = a(x-h)^2$	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	h	h
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{h\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{h\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, h]$ Crescente em $[h, +\infty[$	Crescente em $]-\infty, h]$ Decrescente em $[h, +\infty[$
Coordenadas do vértice	$(h, 0)$	$(h, 0)$
Eixo de simetria	$x = h$	$x = h$
Extremos	Mínimo:0 Minimizante:h	Máximo:0 Maximizante:h

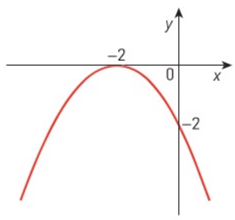
Para terminar a aula será proposto aos alunos o exercício 37 da página 44 do manual dos alunos. O mesmo será feito pelos alunos e posteriormente corrigido no quadro por dois alunos.

Exercício 37
Escreve na forma $y = a(x-h)^2$ as funções que têm as seguintes representações gráficas:

37.1



37.2



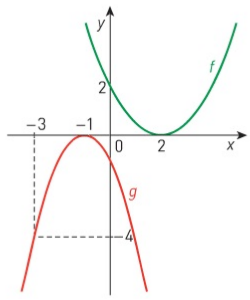
Resolução do exercício 37
37.1.
O vértice da parábola é o ponto $(3, 0)$. Portanto, $y = a(x-3)^2$.
Uma vez que o ponto $(0, 3)$ pertence à parábola temos que:
$3 = a(0-3)^2 \Leftrightarrow 3 = a(-3)^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.
Logo, $y = \frac{1}{3}(x-3)^2$.

37.2.
O vértice da parábola é o ponto $(-2, 0)$. Portanto, $y = a(x+2)^2$.
Uma vez que o ponto $(0, -2)$ pertence à parábola temos que:
$-2 = a(0+2)^2 \Leftrightarrow -2 = a(4)^2 \Leftrightarrow a = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Logo, $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$.

Por fim, será apontado no quadro o trabalho de casa (exercício 38 da página 44 do manual dos alunos), o qual deverá ser entre na aula seguinte numa folha à parte.

Exercício 38
No referencial da figura estão representados duas funções f e g, da família $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$.



38.1 Para cada função, indica o domínio, contradomínio e constrói um quadro de variação identificando os extremos.

38.2 Atendendo aos dados da figura, determina expressões que definam as funções f e g.

Correcção do TPC - Exercício 38
38.1.
$D_f = \mathbb{R}$; $D'_f = \mathbb{R}_0^+$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

O máximo absoluto de f é o 0 e o minimizante é o 2.

$D_g = \mathbb{R}$; $D'_g = \mathbb{R}_0^-$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

O mínimo absoluto de g é o 0 e o maximizante é o -1.

38.2.
A função f é da família $y = a(x-h)^2$.
Uma vez que o vértice da parábola que representa a função f tem de coordenadas $(2, 0)$ temos que $f(x) = a(x-2)^2$.
No entanto, para determinar o valor de a usamos o dado que o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence à parábola. Portanto, temos:

$$2 = a(0-2)^2 \Leftrightarrow 2 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Logo, a expressão que define a função f é $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

A função g é da família $y = a(x-h)^2$.
Uma vez que o vértice da parábola que representa a função g tem de coordenadas $(-1, 0)$ temos que $g(x) = a(x+1)^2$.
No entanto, para determinar o valor de a usamos o dado que o ponto de coordenadas $(-3, -4)$ pertence à parábola. Portanto, temos:

$$-4 = a(-3+1)^2 \Leftrightarrow -4 = 4a \Leftrightarrow a = -1.$$

Logo, a expressão que define a função g é $g(x) = -(x+1)^2$.

2.4 Aula 3

Data: 24 de Fevereiro de 2012.
Ano/Turma: 10° / A
Duração da aula: 90 minutos.
Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Família de funções quadráticas.
Família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$.
Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Sumário:
Família de funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Pré-Requisitos:
Conhecer as propriedades das funções e dos seus gráficos.
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica;
Identificar o vértice e o eixo de simetria das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$;
Identificar o sentido da concavidade através de gráficos e da expressão analítica;
Identificar as propriedades das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, zeros e extremos);
Analisar a influência dos parâmetros a e h na família de funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$.

Objectivos:
Esboçar a representação gráfica de uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$;
Identificar o vértice e o eixo de simetria das funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$;
Identificar as propriedades das funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, zeros e extremos);
Analisar a influência dos parâmetros a, h, k na família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno das propostas de trabalho, como também através dos exercícios a resolver; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a

avaliar.

TPC:
Nesta aula não há TPC.

Recursos:
Propostas de trabalho; Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].

Conteúdos / Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

Em seguida, será dito aos alunos que nesta aula iremos abordar a família de funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ e do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$, onde iremos realizar duas propostas de trabalho com o objectivo de estudar as propriedades da família das funções quadráticas e analisar a influência do parâmetro k.

De seguida, será entregue aos alunos uma proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$. A mesma será feita em conjunto.
Assim, apresenta-se de seguida a proposta de trabalho e sua respectiva correcção.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Matemática A

10º ano 2011/2012

Proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$

1.
1.1. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça o gráfico das seguintes funções e indica o eixo de simetria e as coordenadas do vértice de cada parábola.

$$f(x) = x^2;\ g(x) = x^2 + 2;\ h(x) = x^2 - 3$$

1.2. Explica como podes obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f.

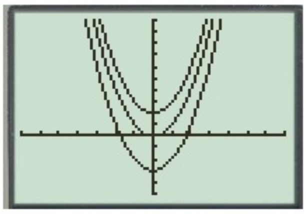
2. Para funções do tipo $y = ax^2 + k$ explica o efeito do parâmetro k relativamente ao gráfico da função $y = ax^2$ e identifica as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria.

3. Completa o quadro seguinte:

$y = ax^2 + k$	$a > 0 \wedge k > 0$	$a > 0 \wedge k < 0$	$a < 0 \wedge k > 0$	$a < 0 \wedge k < 0$
Domínio				
Contradomínio				
Zeros				
Sinal				
Monotonia				
Extremos				

Correcção da proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$

1.
1.1.
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.



Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.

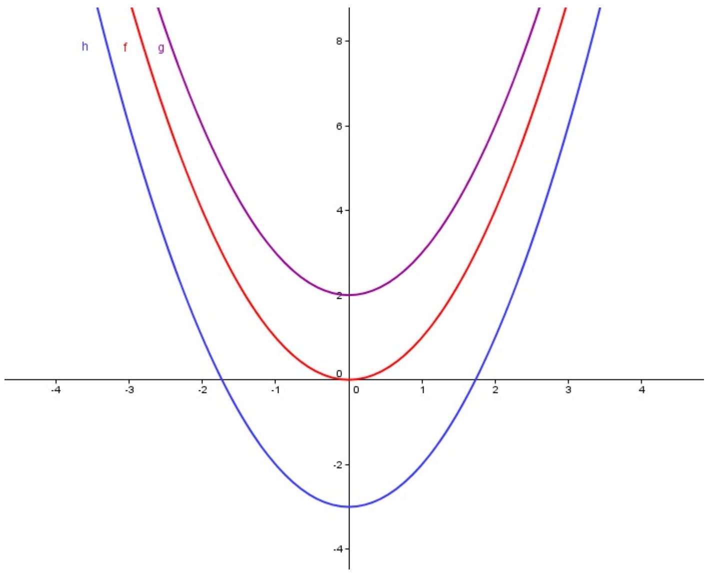


Gráfico da função f:
· Eixo de simetria: $x = 0$;
· Vértice: $(0, 0)$

Gráfico da função g:
· Eixo de simetria: $x = 0$;
· Vértice: $(0, 2)$

Gráfico da função h:
· Eixo de simetria: $x = 0$;
· Vértice: $(0, -3)$

1.2.

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f, deslocando-o duas unidades para a cima, ou seja, efectuando-se uma translação associada ao vector $(0, 2)$.

2.

O gráfico da função $y = ax^2 + k$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = ax^2$, através de um deslocamento vertical, ou seja, efectuando-se uma translação associada ao vector $(0, k)$.
O vértice da parábola que é a representação gráfica da função $y = ax^2 + k$ é o ponto $(0, k)$ e o seu eixo de simetria é a recta $x = 0$.

3.

$y = ax^2 + k$	$a > 0 \wedge k > 0$	$a > 0 \wedge k < 0$	$a < 0 \wedge k > 0$	$a < 0 \wedge k < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$	$]-\infty, k]$
Zeros	Não tem	x_1 e x_2	x_1 e x_2	Não tem
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$	Positiva em $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ Negativa em $]x_1, x_2[$	Positiva em $]x_1, x_2[$ Negativa em $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$	Negativa em $\mathbb{R}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Decrescente em $[0, +\infty[$ Crescente em $[-\infty, 0]$	Decrescente em $[0, +\infty[$ Crescente em $[-\infty, 0]$
Extremos	Mínimo:k Minimizante:0	Mínimo:k Minimizante:0	Máximo:k Minimizante:0	Máximo:k Minimizante:0

Em seguida à realização da proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ será entregue aos alunos uma proposta de trabalho acerca da família de funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$ (a qual será feita em conjunto). A mesma será enunciada de seguida e a respectiva correcção.

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Matemática A

10º ano 2011/2012

Proposta de trabalho - Função Quadrática

Assunto: Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$

1. Considera as funções quadráticas seguintes:

$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = (x-3)^2 + 2$$

1.1. Com o auxílio de uma calculadora gráfica esboça no mesmo referencial os gráficos das funções quadráticas.

1.2. Como podes obter o gráfico da função g a partir do gráfico de f?

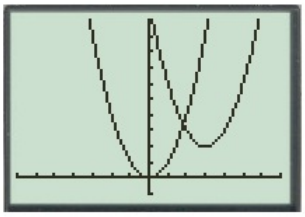
1.3. Indica o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico da função g.

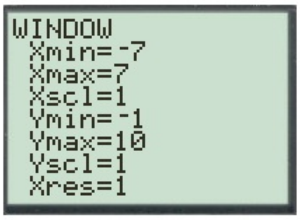
Conclusão:

O gráfico de uma função do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ (com $a \neq 0$) é uma parábola com as seguintes caracteristicas:
- concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$;
- vértice no ponto de coordenadas (h, k);
- eixo de simetria é a recta de equação $x = h$.

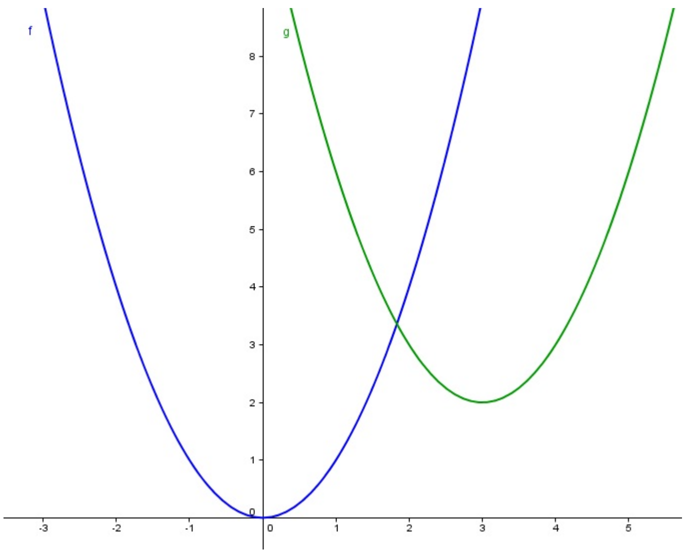
Correcção da proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$

1.1.
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.





Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.



1.2.
O gráfico da função g obtem-se a partir do gráfico da função f, efectuando-se uma translação associada ao vector $(3, 2)$.

1.3.
O vértice da parábola tem de coordenadas $(3, 2)$ e o eixo de simetria é recta $x = 3$.

Para finalizar a aula será proposto aos alunos o exercício 43 da página 47 do manual dos alunos. O mesmo será feito pelos alunos e posteriormente corrigido no quadro.

Exercício 43
Considera as funções quadráticas f, g e h tais que:
$f(x) = -0,2x^2 + 3$;
$g(x) = 2(x-5)^2$;
$h(x) = -(x+1)^2 - 4$.

43.1 Prenche o seguinte quadro:

	Coordenadas do vértice	Equação do eixo de simetria
$f(x)$		
$g(x)$		
$h(x)$		

43.2 Estuda cada uma das funções quanto ao domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos.

Resolução do exercício 43 (Pág.47)
43.1

	Coordenadas do vértice	Equação do eixo de simetria
$f(x)$	$(0,3)$	$x=0$
$g(x)$	$(5,0)$	$x=5$
$h(x)$	$(-1,-4)$	$x=-1$

43.2
Função f:
Domínio: $\mathbb{R}$
Contradomínio: $]-\infty,3]$
Zeros: $\{-\sqrt{15},\sqrt{15}\}$
$f(x)=0 \Leftrightarrow -0,2x^2+3=0 \Leftrightarrow -0,2x^2=-3 \Leftrightarrow x^2=\frac{-3}{-0,2} \Leftrightarrow x^2=15 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{15}$.
Sinal: $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{15},\sqrt{15}[$; $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-\sqrt{15}[\cup]\sqrt{15},+\infty[$.
Monotonia: Crescente em $]-\infty,0]$ e decrescente em $[0,+\infty[$.
Máximo absoluto: 3

Função g:
Domínio: $\mathbb{R}$
Contradomínio: $[0,+\infty[$
Zeros: $\{5\}$
$g(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-5)^2=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.
Sinal: $g(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$.
Monotonia: Crescente em $[5,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty,5]$.
Mínimo absoluto: 0

Função h:

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $]-\infty, -4]$

Zeros: não tem

$h(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{-4}$ (impossível em $\mathbb{R}$).

Sinal: h é negativa em todo o seu domínio.

Monotonia: Crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, +\infty[$.

Máximo absoluto: -4

2.5 Aula 4

Data: 27 de Fevereiro de 2012. **Ano/Turma:** 10° / A **Duração da aula:** 90 minutos. **Tema II:** Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Transformações simples de funções.
Funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sumário:
Transformações simples de funções.
Estudo de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Pré-Requisitos:
Conhecer as propriedades das funções e dos seus gráficos.
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica;
Esboçar a representação gráfica de uma função quadrática do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$;
Identificar o vértice e o eixo de simetria das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$;
Identificar o sentido da concavidade através de gráficos e da expressão analítica;
Identificar as propriedades das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, zeros e extremos);
Analisar a influência dos parâmetros a, h e k na família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

Objectivos:
Obter o gráfico da função $g(x) = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Obter o gráfico da função $g(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Obter o gráfico da função $g(x) = f(-x)$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Obter o gráfico da função $g(x) = -f(x)$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Obter o gráfico da função $g(x) = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Obter o gráfico da função $g(x) = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$ conhecendo o gráfico da função f;
Determinar analítica e graficamente os pontos de intersecção do gráfico da função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$) com os eixos coordenados;
Identificar o vértice e o eixo de simetria da parábola que representa graficamente uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$;
Identificar as propriedades da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, zeros e extremos).

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno da matéria a leccionar, como também através dos exercícios a resolver; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a avaliar.

TPC:
Exercícios 49.1 e 49.6 da página 53 do manual dos alunos.

Recursos:
Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica; PowerPoint.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].

Conteúdos / Estratégias:
Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

Em seguida, será dito aos alunos que nesta aula iremos abordar transformações simples de funções (onde será feita uma apresentação em powerpoint) e estudar funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

De seguida, será feita uma apresentação em powerpoint sobre as transformações simples de funções. No diapositivo 2 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma translação vertical no gráfico da função, onde iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(x)+2$ e $g_2(x) = f(x)-1$ a partir do gráfico da função f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função $g_1(x) = f(x) + 2$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma translação associada ao vector $(0, 2)$ e que o gráfico da função $g_2(x) = f(x) - 1$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma translação associada ao vector $(0, -1)$. Em seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se um deslocamento na vertical, ou seja, uma translação associada ao vector $(0, a)$.
No diapositivo 3 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma translação horizontal no gráfico da função, na qual iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(x - 1)$ e $g_2(x) = f(x + 2)$ a partir do gráfico da função f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função $g_1(x) = f(x - 1)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma translação associada ao vector $(1, 0)$ e que o gráfico da função $g_2(x) = f(x+2)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma translação associada ao vector $(-2, 0)$. Em seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = f(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se um deslocamento horizontal, ou seja, uma translação associada ao vector $(a, 0)$.
No diapositivo 4 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma simetria em relação ao eixo das ordenadas no gráfico da função, onde iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2 - 4x$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter o gráfico da função $g(x) = (-x)^2 - 4(-x)$ a partir do gráfico da função

f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma simetria em relação ao eixo das ordenadas. Em seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = f(-x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma simetria em relação ao eixo das ordenadas.
No diapositivo 5 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma simetria em relação ao eixo das abcissas no gráfico da função, onde iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2 - 4x$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter o gráfico da função $g(x) = -(x^2 - 4x)$ a partir do gráfico da função f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma simetria em relação ao eixo das abcissas. De seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = -f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma simetria em relação ao eixo das abcissas.
No diapositivo 6 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma dilatação/compressão na vertical no gráfico da função, na qual iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2 - 1$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = 2f(x)$ e $g_2(x) = 0,5f(x)$ a partir do gráfico da função f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função $g_1(x) = 2f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma dilatação vertical em que os mesmos valores para a abcissa passam a ter o dobro da ordenada obtida pela função f e que o gráfico da função $g_2(x) = 0,5f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma compressão vertical em que os mesmos valores para a abcissa passam a ter metade da ordenada obtida pela função f. Em seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = af(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma dilatação vertical caso $|a| > 1$ ou uma compressão vertical caso $|a| < 1$.
No diapositivo 7 iremos abordar uma transformação simples que corresponde a uma dilatação/compressão na horizontal, onde iremos analisar um exemplo e seguidamente o caso geral. Assim, consideremos $f(x) = x^2 - 1$ e será colocada a seguinte questão aos alunos: "Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(2x)$ e $g_2(x) = f(0,5x)$ a partir do gráfico da função f?" Os alunos devem concluir que o gráfico da função $g_1(x) = f(2x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma compressão horizontal em que as abcissas passam a metade para que tenham a mesma imagem e que o gráfico da função $g_2(x) = 0,5f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma dilatação horizontal em que as abcissas passam para o dobro para que tenham a mesma imagem. De seguida, consideremos o caso geral: o gráfico da função $g(x) = f(ax)$ obtém-se a partir do gráfico da função f efectuando-se uma compressão horizontal caso $|a| > 1$ ou uma dilatação horizontal caso $|a| < 1$.

Funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Em seguida, será feito um estudo de uma função quadrática. Para tal será feito o seguinte exemplo no quadro para que os alunos tomem nota nos seus cadernos.

Exemplo:

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
Faz o estudo da função f, considerando:
· pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados;
· coordenadas do vértice da parábola;
· esboço do gráfico da função f;
· domínio;

· contradomínio;
· sinal;
· monotonia;
· extremos.

Pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados:

· com o eixo Ox, ou seja, zeros da função:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
Recorrendo à fórmula resolvente para uma equação do 2.°, temos:
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{+ \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2+4}{2} \vee x = \frac{2-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$
Assim, o gráfico da função f é uma parábola que intersecta o eixo das abcissas nos pontos $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

· com o eixo Oy:
$f(0) = -3$
Assim, o gráfico da função f é uma parábola que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -3)$.

Coordenadas do vértice da parábola:

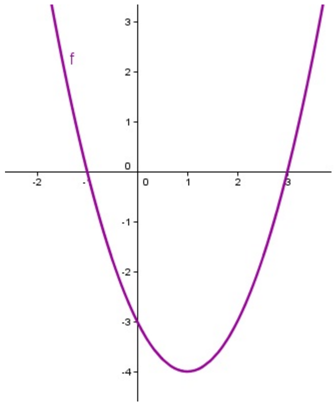
1° Processo:
Seja $V(x_v, y_v)$ o vértice da parábola.
Uma vez que a parábola é simétrica em relação ao eixo $x = x_v$ temos:
$x_v = \frac{-1+3}{2} = 1$
Conhecida a abcissa do vértice da parábola basta calcular a sua imagem para obtermos a ordenada do vértice.
$y_v = f(x_v) \Leftrightarrow y_v = 1^2 - 2 \times 1 - 3 \Leftrightarrow y_v = -4$.
Logo, o vértice da parábola representativa da função f é $(1, -4)$.

2° Processo:
Se $f(x) = a(x-h)^2 + k$ as coordenadas do vértice da parábola são (h, k).
Assim, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - 3 = (x-1)^2 - 4$.
Portanto, as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f são $(1, -4)$.

3° Processo:
Nota: Seja $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. O vértice da parábola representativa da função tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Utilizando esta nota, temos que o vértice da parábola representativa da função f tem de coordenadas:
$(-\frac{-2}{2}, -\frac{(-2)^2-4(-3)}{4}) = (1, -4)$.

Esboço do gráfico da função f:



Domínio:

$D_f = \mathbb{R}$.

Contradomínio:

$D'_f = [-4, +\infty[$.

Sinal:

f é positiva em $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$;
f é negativa em $]-1, 3[$.

Monotonia:

f é decrescente em $]-\infty, 1]$;
f é crescente em $[1, +\infty[$.

Extremos:

Mínimo absoluto: -4;
Minimizante: 1.

De seguida, será proposto aos alunos o exercício 46 da página 50 do manual dos alunos. O mesmo será resolvido pelos alunos e posteriormente corrigido no quadro.

Exercício 46
Considera a parábola de equação $y = -3x^2 + 6x + 2$.
46.1 Transforma a equação dada numa expressão do tipo $y = a(x-h)^2 + k$.

46.2 Indica as coordenadas do vértice.

46.3 Escreve a equação do eixo de simetria.

46.4 Indica o intervalo do domínio onde a função é crescente.

Resolução do exercício 46

46.1

$y = -3(x^2 - 2x) + 2 = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2 = -3(x-1)^2 + 3 + 2 = -3(x-1)^2 + 5.$

46.2

As coordenadas do vértice são $(1, 5)$.

46.2

A equação do eixo de simetria é $x = 1$.

46.3

A função é crescente em $]-\infty, 1]$.

Para terminar a aula será proposto aos alunos o exercício 48 da página 53 do manual dos alunos (o mesmo será feito pelos alunos e posteriormente corrigido no quadro).

Exercício 48

Considera as funções f e g definidas por:

$f(x) = x^2 - 6x + 5;$

$g(x) = f(x) + 2.$

48.1 Determina o mínimo de f e os pontos de intersecção do seu gráfico com os eixos.

48.2 Representa graficamente as funções f e g.

48.3 Indica as coordenadas do vértice da parábola representativa da função g.

Resolução do exercício 48

48.1

· intersecção com o eixo Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6+4}{2} \vee x = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1.$

Assim, o gráfico da função f é uma parábola que intersecta o eixo das abcissas nos pontos $(1, 0)$ e $(5, 0)$.

· intersecção com o eixo Oy:

$f(0) = 5$

Assim, o gráfico da função f é uma parábola que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 5)$.

· mínimo:

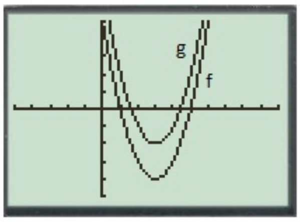
De modo a determinar o mínino da função iremos primeiro determinar as coordenadas do vértice da parábola, para tal coloquemos $f(x)$ na forma $a(x-h)^2 + k$.

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4.$

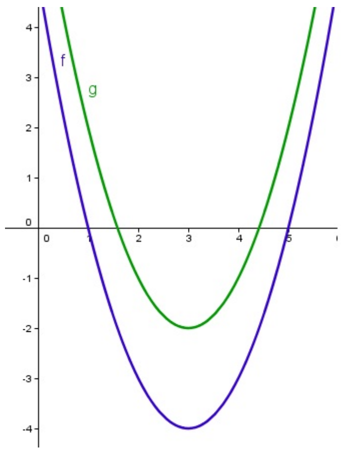
Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $(3, -4)$.

Logo, o mínimo é -4 e o minimizante é 3.

48.2
Em primeiro lugar apresento as representações gráficas das funções utilizando a calculadora.



Em segundo apresento as representações gráficas das funções utilizando o software *geogebra*.



48.3
As coordenadas do vértice da parábola representativa da função g são $(3, -2)$.

Por fim, será marcado o trabalho de casa (exercício 49.1 e 49.6 da página 53).

Exercício 49
Para cada função determina:
· as coordenadas do vértice da parábola associada à função;
· o eixo de simetria do gráfico;
· o contradomínio.

49.1 $y = 2x^2 - 6x$

49.6 $y = -2x^2 + 8x - 1$

Correcção do TPC - Exercício 49
49.1
$y = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3x) = 2\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{18}{4} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$.

As coordenadas do vértice da parábola representativa da função são $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.
O eixo de simetria da parábola é a recta $x = \frac{3}{2}$.
O contradomínio da função é $[-\frac{9}{2}, +\infty[$.

49.6

$y = -2x^2 + 8x - 1 = -2(x^2 - 4x) - 1 = -2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 1 = -2(x-2)^2 - 2(-4) - 1 = -2(x-2)^2 + 8 - 1 = -2(x-2)^2 + 7$.
As coordenadas do vértice da parábola representativa da função são $(2, 7)$.
O eixo de simetria da parábola é a recta $x = 2$.
O contradomínio da função é $]-\infty, 7]$.

2.6 Aula 5

Data: 29 de Fevereiro de 2012.
Ano/Turma: 10° / A
Duração da aula: 90 minutos.
Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Inequações do 2° grau.

Sumário:
Correcção do TPC.
Resolução de inequações do 2° grau.

Pré-Requisitos:
Resolver equações do 2° grau;
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica;
Identificar o sentido da concavidade através de gráficos e da expressão analítica;
Determinar analítica e graficamente os zeros de uma função quadrática.

Objectivos:
Resolver analítica e graficamente inequações do 2° grau através da função quadrática adequada.

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno da matéria a leccionar, como também através dos exercícios a resolver; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a avaliar.

TPC:
Exercício 52 da página 56 do manual dos alunos.

Recursos:
Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].

Conteúdos / Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

De seguida verifica-se o TPC proposto aos alunos e será corrigido no quadro por dois alunos.

Terminada a correcção do TPC será dito aos alunos que iremos abordar as inequações do 2° grau. Assim, será realizado o seguinte exemplo no quadro para que os alunos tomem nota no seu caderno.

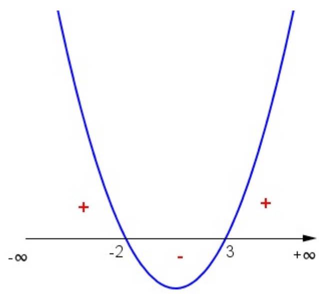
Exemplo:
Resolve em $\mathbb{R}$ a seguinte inequação: $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Resolução analítica:

A solução desta inequação pode ser encontrada através do estudo do sinal da função quadrática $y = x^2 - x - 6$.

Assim, determinam-se os zeros:
$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+5}{2} \vee x = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$.

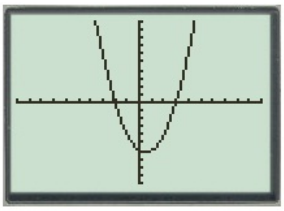
Conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade da parábola é voltada para cima, o seguinte esquema permite visualizar a distribuição do sinal.



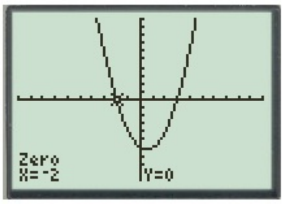
Portanto, o conjunto solução da inequação é $[-2, 3]$.

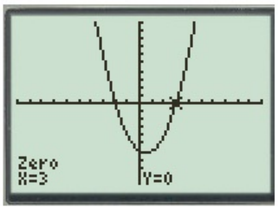
Resolução gráfica:

Inicialmente introduzimos a expressão que define a função na calculadora gráfica ($y = x^2 - x - 6$). Obtemos assim a seguinte representação gráfica e a respectiva janela de visualização.



De seguida, determinam-se os zeros na calculadora gráfica através do comando "2nd - trace - 2:zero".





Uma vez conhecidos os zeros da função, temos que:

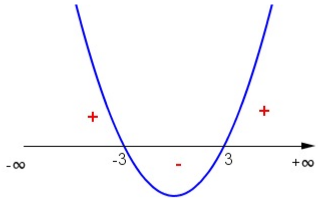
$$x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 3].$$

Em seguida, será proposto aos alunos os exercícios 50.1, 50.2, 50.3 e 50.6 da página 55 do manual dos alunos. Os mesmos serão resolvidos pelos alunos e posteriormente corrigidos no quadro por quatro alunos.

Exercício 50
Resolve as seguintes inequações:

50.1 $x^2 - 9 > 0$;
50.2 $-2x^2 + x - 1 \leq 1$;
50.3 $-x(x-3) \geq 0$;
50.6 $x^2 + 2x > \frac{x+2}{3}$.

Resolução do exercício 50
50.1
Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y = x^2 - 9$. Assim, calculemos os zeros.
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$.
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



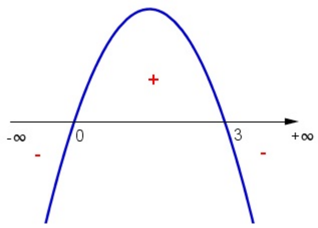
Assim, o conjunto solução da inequação é $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$.

50.2

Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y=-2x^2+x-1$.
Assim, calculemos os zeros.
$-2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-2)\times(-1)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ (impossivel em $\mathbb{R}$).
Logo a parábola que representa a função tem a concavidade voltada para baixo e não tem zeros (ou seja, não intersecta o eixo das abcissas).
Portanto, o conjunto solução da inequação é $\mathbb{R}$.

50.3

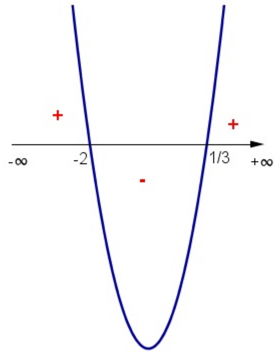
Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y=-x(x-3)$.
Assim, calculemos os zeros.
$-x(x-3)=0 \Leftrightarrow -x=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para baixo, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Assim, o conjunto solução da inequação é $[0,3]$.

50.6

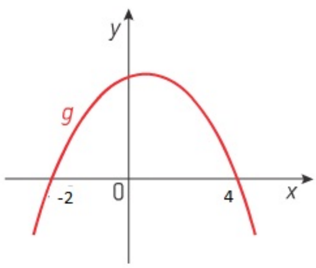
$x^2+2x>\frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 3x^2+6x>x+2 \Leftrightarrow 3x^2+6x-x-2>0 \Leftrightarrow 3x^2+5x-2>0$.
Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y=3x^2+5x-2$.
Assim, calculemos os zeros.
$3^2+5x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm7}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-5-7}{6} \vee x=\frac{-5+7}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-12}{6} \vee x=\frac{2}{6} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{1}{3}$
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Assim, o conjunto solução da inequação é $]-\infty,-2[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$.

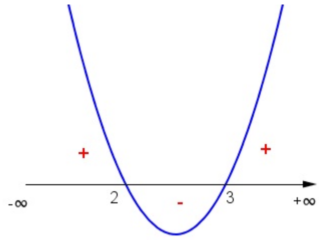
De seguida, será feito o seguinte exemplo no quadro em que os alunos devem tomar nota nos seus cadernos.

Exemplo:
Sejam f e g funções quadráticas tais que:
$f(x)=x^2-5x+6$ e g admite a seguinte representação gráfica.



Determina os valores de x que satisfazem a condição:
1. $f(x)<0$
2. $f(x).g(x)>0$

1. Para encontrar a solução da inequação $(f(x)<0)$ vamos estudar o sinal da função quadrática $f(x)=x^2-5x+6$. Assim, calculemos os zeros.
$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times6}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5+1}{2} \vee x=\frac{5-1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \vee x=\frac{4}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=2.$
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Logo, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, 3[$.

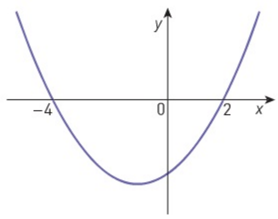
2. Para determinar os valores de x que satisfazem a condição $f(x).g(x) > 0$ representamos no mesmo quadro o sinal de ambas as funções e atender às regras dos sinais da multiplicação.

	$-\infty$	-2		2		3		4	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	-	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	-
$f(x) \times g(x)$	-	0	$+$	0	-	0	$+$	0	-

Logo, $f(x).g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[\cup]3, 4[$.

Em seguida, será proposto aos alunos os exercício 53 da página 56 do manual dos alunos. O mesmo será resolvido pelos alunos e posteriormente corrigidos no quadro por dois alunos.

Exercício 53
Considera as funções reais de variável real f e g tais que $f(x) = -2x^2 + 9x - 7$ e g admite a representação gráfica da figura seguinte:



Determina, sob a forma de intervalo, os valores de x para os quais:

53.1 a função f toma valores positivos;

53.2 $f(x).g(x) \leq 0$.

Resolução do exercício 53
53.1
Comecemos por determinar os zeros de f.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times (-2) \times (-7)}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{-4} \Leftrightarrow$ $x = \frac{-9+5}{-4} \vee x = \frac{-9-5}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-4} \vee x = \frac{-14}{-4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{7}{2}$.
Uma vez que conhecemos os zeros e o sentido da concavidade podemos concluir que a função f toma valores positivos em $\left]1, \frac{7}{2}\right[$.

53.2
Para determinar os valores de x que satisfazem a condição $f(x).g(x) \leq 0$ basta representar no mesmo quadro o sinal de ambas as funções e atender às regras dos sinais da multiplicação.

	$-\infty$	-4		1		2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$g(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x) \times g(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Logo, $f(x).g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [1, 2] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$

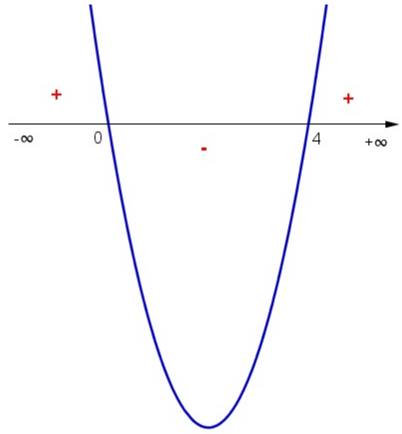
Para terminar a aula será marcado o TPC (exercício 52 da página 56 do manual dos alunos).

Exercício 52
Considera as funções reais de variável real definidas por:
$f(x) = 2x^2 - 8x$;
$g(x) = x^2 + 4x - 12$;
$h(x) = 2x^2 - 8x + 6$;
$i(x) = x^2 + 2x + 5$;
$j(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Determina sob a forma de intervalo, os valores de x para os quais:

52.1 $f(x) \leq 0$;
52.2 $i(x) > 0$;
52.3 $g(x) > 0$;
52.4 $g(x) > j(x)$;
52.5 $f(x) \leq g(x) - 8$.

Correcção do TPC - Exercício 52
52.1
$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x \leq 0$.
Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 8x$.
Assim, calculemos os zeros.
$2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 8 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$.
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Logo, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0,4]$.

52.2

$i(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 > 0$.

Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $i(x) = x^2+2x+5$. Assim, calculemos os zeros.

$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\times1\times5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}$ (impossível em $\mathbb{R}$).

Logo a parábola que representa a função tem a concavidade voltada para cima e não tem zeros (ou seja, não intersecta o eixo das abcissas).

Portanto, $i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

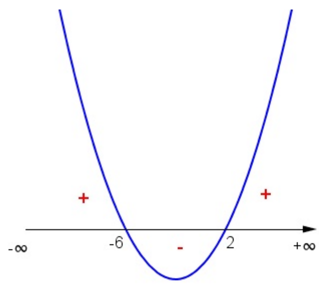
52.3

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 > 0$.

Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $g(x) = x^2 + 4x - 12$. Assim, calculemos os zeros.

$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16-4\times1\times(-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4+8}{2} \vee x = \frac{-4-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \vee x = \frac{-12}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -6$.

Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



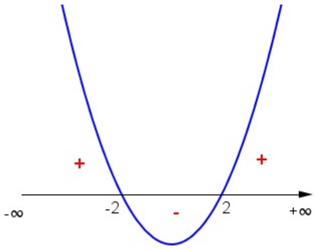
Logo, $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-6[\cup]2,+\infty[$.

52.4

$g(x) > j(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 > -x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4x - 4x - 12 + 4 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 0$.

Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y = 2x^2 - 8$. Assim, calculemos os zeros.

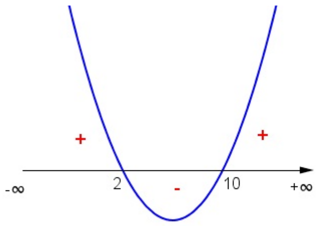
$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$.
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Logo, $2x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

52.5

$f(x) \leq g(x) - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x \leq x^2 + 4x - 12 - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 8x - 4x + 20 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 \leq 0$.
Para encontrar a solução da inequação vamos estudar o sinal da função quadrática $y = x^2 - 12x + 20$.
Assim, calculemos os zeros.
$x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 1 \times 20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12+8}{2} \vee x = \frac{12-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{20}{2} \vee x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 2$.
Uma vez conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade é voltada para cima, a figura seguinte permite visualizar a distribuição do sinal.



Logo, $x^2 - 12x + 20 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 10]$.

2.7 Aula 6

Data: 2 de Março de 2012.
Ano/Turma: 10° / A
Duração da aula: 90 minutos.
Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

Tópico:
Resolução de uma proposta de trabalho envolvendo o estudo da função quadrática.

Sumário:
Correcção do TPC.
Resolução de uma proposta de trabalho envolvendo o estudo da função quadrática.

Pré-Requisitos:
Resolver equações do 2° grau;
Conhecer e identificar uma função quadrática;
Conhecer e identificar o gráfico de uma função quadrática;
Representar graficamente uma função quadrática usando a calculadora gráfica;
Identificar o sentido da concavidade através de gráficos e da expressão analítica;
Identificar o vértice e o eixo de simetria da parábola que representa graficamente uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$;
Identificar as propriedades da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, zeros e extremos);
Determinar analítica e graficamente os zeros de uma função quadrática;
Resolver analítica e graficamente inequações do 2° grau através da função quadrática adequada.

Objectivos:
Aplicar os conhecimentos sobre a função quadrática no estudo de situações reais ou em contexto real;
Resolver problemas usando a família de funções quadráticas.

Competências Transversais:
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas em torno da resolução da proposta de trabalho; além disso, privilegia-se a relação da tecnologia com a matemática, ao utilizar a calculadora gráfica.

Avaliação/Reflexão:
Os alunos serão avaliados através da observação directa, mais concretamente nas suas atitudes e valores, no seu empenho e participação espontânea no decorrer da aula (Avaliação formativa dos alunos). Para tal será preenchida a grelha de observação da aula que contempla os aspectos a avaliar.

TPC:
Os exercícios da proposta de trabalho que não se resolvam durante a aula.

Recursos:

Manual do aluno; Quadro interactivo; Videoprojector; Calculadora Gráfica; Proposta de trabalho.

Apoio bibliográfico:
[3],[4] e [7].
· Gabinete de avaliação eduacacional. *Exames & Provas.* Retirado a 16 de Fevereiro de 2012, do Web site do Ministério da Educação e Ciência:
http://bi.gave.min-edu.pt/exames/download/MAT_10_ENV1_Maio_2010.pdf?id=397;
· Gabinete de avaliação eduacacional. *Exames & Provas.* Retirado a 16 de Fevereiro de 2012, do Web site do Ministério da Educação e Ciência:
http://bi.gave.min-edu.pt/exames/download/matematicaA10_V1_05_2008.pdf?id=4175;
· Gabinete de avaliação eduacacional. *Exames & Provas.* Retirado a 16 de Fevereiro de 2012, do Web site do Ministério da Educação e Ciência:
http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA10_Mai2011_V1.pdf;
· Gabinete de avaliação eduacacional. *Exames & Provas.* Retirado a 16 de Fevereiro de 2012, do Web site do Ministério da Educação e Ciência:
http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=10_ano_Enunciado_versao_1.pdf.

Conteúdos / Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

Em seguida, verifica-se o TPC proposto aos alunos que será corrigido no quadro pelos alunos.

De seguida, será entregue uma proposta de trabalho envolvendo o estudo das funçõs quadráticas aos alunos. Esta será feita pelos alunos e corrigida no quadro pelos mesmos.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Matemática A

10º ano 2011/2012

Proposta de trabalho - Função Quadrática

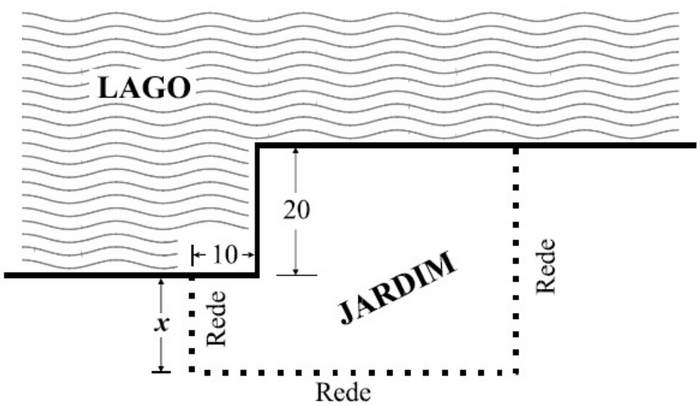
Assunto: Resolução de problemas envolvendo o estudo das funções quadráticas.

1. Sejam a, b e c três números reais.
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sabe-se que:
· $a > 0$;
· a função f tem um único zero, que é o número real 5.

Qual o contradomínio de $\mathbb{R}$?

(A) $]-\infty, 0]$ **(B)** $[0, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, 5]$ **(D)** $[5, +\infty[$

2. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra.
Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.
Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam sempre perpendiculares.



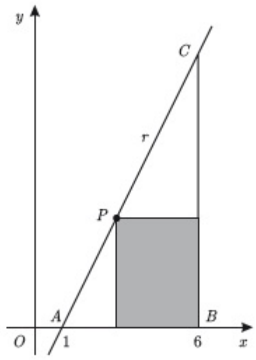
As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.
Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim.
Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

2.1. Mostra que a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

2.2. Determina o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determina essa área máxima.

3. Na figura, está representada, em referencial o.n. xOy, a reta r, definida pela equação $y = 2x - 2$. Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas $(1, 0)$ e $(6, 0)$, respetivamente, e C é o ponto da reta r de abcissa 6.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[A, C]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto C.
A cada posição do ponto P corresponde um retângulo em que uma das diagonais é o segmento $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox.
Seja x a abcissa do ponto $P (x \in]1, 6[)$.
Resolve os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

3.1. Mostra que a área do retângulo é dada, em função de x, por

$$S(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

3.2. Determina os valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8.
Apresenta a resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

4. Uma bola de ténis é lançada verticalmente. A altura da bola t segundos após ter sido lançada é dada em função de t pela expressão:

$$h(t) = -4,9t^2 + 30t + 2\,,\ em\ metros$$

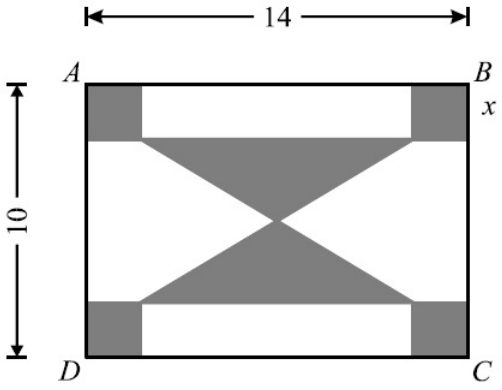
4.1. A que altura está a bola quando é lançada?

4.2. Qual é a altura máxima atingida pela bola? (Recorre à calculadora gráfica e apresenta o resultado aproximado às décimas)

4.3. Em que instante é que a bola cai no chão? (Recorre à calculadora gráfica e apresenta o resultado aproximado às décimas)

4.4. No contexto desta situação, qual é o domínio da variável t? Apresenta o resultado aproximado às décimas.

5. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.



Este retângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constítuida por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).
A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.
Cada triângulo tem um vértice no centro do rectângulo $[ABCD]$.
Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm ($x \in]0,5[$).
Sem recorrer à calculadora, resolve os três itens seguintes.

5.1. Mostra que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por

$$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$$

5.2. Determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcule essa área.

5.3. Determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à àrea da parte em madeira.

Correcção da proposta de trabalho - Função Quadrática
Assunto: Resolução de problemas envolvendo o estudo das funções quadráticas.

1.
O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade coltada para cima e intersecta o eixo Ox no ponto 5 (tendo apenas um zero).
Logo, o contradomínio de f é $[0,+\infty[$ (opção (B)).

2.
2.1.
Em relação aos lados do jardim que não confinam com o lago, temos:
· um lado tem x metros de comprimento (como nos mostra a figura);
· o lado oposto tem $x+20$ metros de comprimento;
· o terceiro lado tem $100-(x+x+20)=80-2x$ metros de comprimento (uma vez que a rede tem 100 metros).

Portanto, a área (em m^2) do jardim é dada em função de x, por:

$a(x)=(80-2x)(x+20)-10\times20 \Leftrightarrow a(x)=80x+1600-2x^2-40x-200 \Leftrightarrow a(x)=-2x^2+40x+1400.$

2.2.
Comecemos por determinar as coordenadas vértice da parábola representativa da função $a(x)$. Para tal coloquemos a função $a(x)$ na forma $y=a(x-h)^2+k$.

$a(x)=-2x^2+40x+1400 \Leftrightarrow a(x)=-2(x^2-20x)+1400 \Leftrightarrow a(x)=-2(x^2-20x+10^2-10^2)+1400 \Leftrightarrow$
$a(x)=-2(x^2-20x+10^2)+200+1400 \Leftrightarrow a(x)=-2(x-10)^2+1600$

Portanto, o vértice tem de coordenadas $(10,1600)$.
Logo, a área do jardim é máxima para $x=10$, sendo $1600\,m^2$ a área máxima.

3.
3.1.
O comprimento do lado do rectângulo contido no eixo Ox é $6-x$, uma vez que a abcissa do ponto P é x e esta nunca coincide com a abcissa do ponto B.
O ponto P tem de coordenadas $(x,2x-2)$ uma vez que este ponto pertence à recta de equação $y=2x-2$.

Portanto, a área do rectângulo é dada, em função de x, por:
$S(x)=(6-x)(2x-2)=12x-12-2x^2+2x=-2x^2+14x-12.$

3.2.
A condição que traduz o problema é:
$-2x^2+14x-12<8 \wedge x \in]1,6[.$

Temos que:
$-2x^2+14x-12<8 \Leftrightarrow -2x^2+14x-12-8<0 \Leftrightarrow -2x^2+14x-20<0.$

A solução desta inequação pode ser encontrada através do estudo do sinal da função quadrática $y = -2x^2 + 14x - 20$.

Assim, determinam-se os zeros:
$-2x^2 + 14x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times (-2) \times (-20)}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{196-160}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm 6}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-14-6}{-4} \vee x = \frac{-14+6}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-20}{-4} \vee x = \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$.

Portanto, $-2x^2 + 14x - 20 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$.
Uma vez que $x \in]1, 6[$, o conjunto solução condição que traduz o problema é:

$$(]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[) \cap]1, 6[=]1, 2[\cup]5, 6[$$

Logo, o conjunto dos valores de x para os quais a área do rectângulo é inferior a 8 é $]1, 2[\cup]5, 6[$.

4.

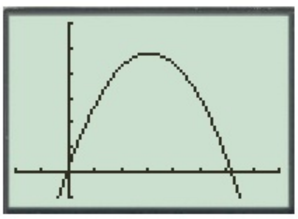
4.1.

De modo a determinar a altura da bola quando é lançada calculemos $h(0)$. $h(0) = -4,9 \times 0 + 30 \times 0 + 2 = 2$.

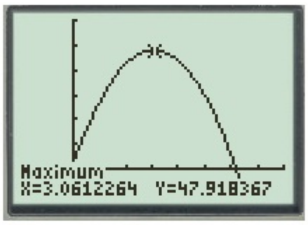
Portanto, a bola quando é lançada está a dois metros de altura.

4.2.

Inicialmente introduzimos a expressão que define a função na calculadora gráfica ($y = -4,9x^2 + 30x + 2$). Obtemos assim a seguinte representação gráfica e a respectiva janela de visualização.

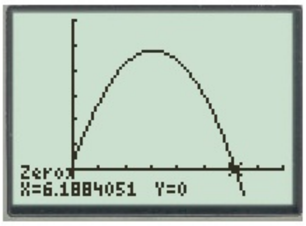


De seguida, determina-se o máximo na calculadora gráfica através do comando "2nd - trace - 4:maximum".



Logo, a área máxima atingida pela bola é $47,9$ metros.

4.3.
Para determinar o instante em que a bola cai no chão determinamos o zero na calculadora gráfica através do comando "2nd - trace - 2:zero".



Portanto, a bola cai no chão $6,2$ segundos após ter sido lançada.

4.4.
$t \in [0; 6,2]$

5.
5.1.
$A_{\square} = x \times x = x^2$
$A_{\triangle} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{(14-2x)\times(5-x)}{2} = \frac{(14-2x)}{2} \times (5-x) = (7-x)(5-x) = 35 - 7x - 5x + x^2 = 35 - 12x + x^2$.

Portanto, a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por:
$A(x) = 4x^2 + 2(35 - 12x + x^2) = 4x^2 + 70 - 24x + 2x^2 = 6x^2 - 24x + 70$.

5.2.
Comecemos por determinar as coordenadas vértice da parábola representativa da função $A(x)$. Para tal coloquemos a função $A(x)$ na forma $y = a(x-h)^2 + k$.

$A(x) = 6x^2 - 24x + 70 = 6(x^2 - 4x) + 70 = 6(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 70 = 6(x^2 - 4x + 2^2) - 24 + 70 =$

$6(x-2)^2+46$.

Portanto, o vértice tem de coordenadas $(2, 46)$.

Logo, a área da parte em metal é mínima para $x = 2$, sendo $46\,cm^2$ a área mínima.

5.3.
Se a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, então a área da parte em metal é metade da área da placa.

A área da placa é $140\,cm^2$ (pois tem 14 cm de comprimento e 10 cm de largura), portanto metade é $70\,cm^2$.

Temos assim que resolver a equação $A(x) = 70$.
$6x^2 - 24x + 70 = 70 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow 6x(x-4) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$.

Como x é o comprimento do lado do quadrado, temos que $x = 4$.

Logo, para $x = 4$ a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

2.8 Conclusões

O estágio foi muito enriquecedor para a minha formação, pois levo um maior leque de experiência sendo isso muito útil para a minha vida futura. Mas isto foi possível devido ao facto de haver muito trabalho do núcleo de estágio, assim como o ambiente entre o núcleo de estágio, o qual devo salientar que foi excelente. No entanto, num primeiro momento do estágio sentia alguma tensão uma vez que era a primeira interação com os estudantes na condição de professor e devido ao facto de se exigir muita responsabilidade, compreensão e conhecimento dos conteúdos. Mas essa tensão foi desaperecendo devido à boa relação entre o núcleo de estágio e comunidade escolar.

É de extrema importância a realização de uma planificação da aula e também muito produtivo o facto de se discutir com os outros professores acerca da metodologia adoptada, como também o facto de se poder reflectir após a execução do plano da aula. Contudo, uma planificação não pode ser rígida mas sim flexível uma vez que o professor pode inserir novos elementos na planificação, assim como alterar os existentes na planificação com base as necessidades do momento. Assim, para a realização de um bom trabalho é indispensável a reflexão sobre a prática docente e a flexibilidade da planificação da aula.

Ressalto o facto de a unidade curricular Didáctica da Matemática do 1° ano do 2° Ciclo em Ensino da Matemática ter-nos preparado em relação à elaboração de planificações de aulas, pois foi muito útil durante o decorrer do estágio onde houve evolução nas planificações das aulas, na leccionação das mesmas uma vez que íamos ganhando alguma experiência e um mais à vontade perante a turma.

Bibliografia

[1] Akopyan, A.V. & Zaslavsky, A.A. (1984). *Mathematical world.* American Mathematical Society.

[2] Araújo, P.V. (2002). *Curso de Geometria.* Lisboa: Gradiva.

[3] Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C. & Lopes, I.M.C. (2003). *Matemática A*, 10°, 11° e 12° anos. Programa, ME-DES.

[4] Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). *Novo Espaço 10° ano - Parte II.* Porto: Porto Editora. (manual adotado pela escola)

[5] Devaney, R. L. (1948). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Second Edition.*

[6] Dias, C., Ferreira, J., Duarte, R. & Leandro, S. (2009). *IRealmat Matemática A 10° ano - volume 2.* Lisboa: Plátano Editora.

[7] Duarte, T. O. & Filipe, J. P. (2010). *Matemática dez - volume 2.* Lisboa: Lisboa Editora.

[8] Gleick, J. (2005). *CAOS: A construção de uma nova ciência.* Lisboa: Gradiva.

[9] Lima, E.L. (2004). *Análise Real - volume 1.* Rio de Janeiro: IMPA.

[10] Lima, E.L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2006). *Matemática do Ensino Médio - volume 1.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[11] Lima, E.L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2006). *Matemática do Ensino Médio - volume 2.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[12] Stewart, I. (2000). *Deus Joga aos Dados?* Lisboa: Gradiva.

[13] Viegas, C., Gomes, F. & Lima, Y. (2011). *XEQMAT 11 - volume 2 Matemática A - 11º Ano.* Lisboa: Texto Editores.

[14] Yorke, J. A. & Li, T. Y. (1975). *Period Three Implies Caos.* The American Mathematical Monthly. Volume 82 - Número 10.

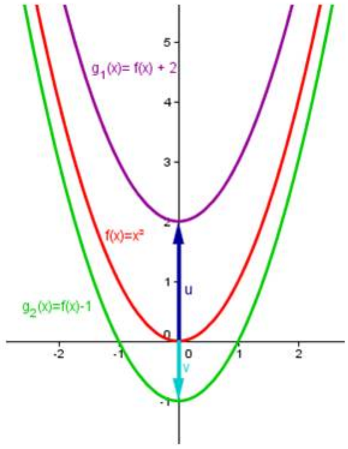
Apêndice A

Anexos

A.1 Apresentação em powerpoint - Aula 4

Transformações simples de funções

Translação vertical:



Exemplo:

Seja $f(x) = x^2$.

Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(x) + 2$ e $g_2(x) = f(x) - 1$ partir do gráfico da função f?

Caso geral:

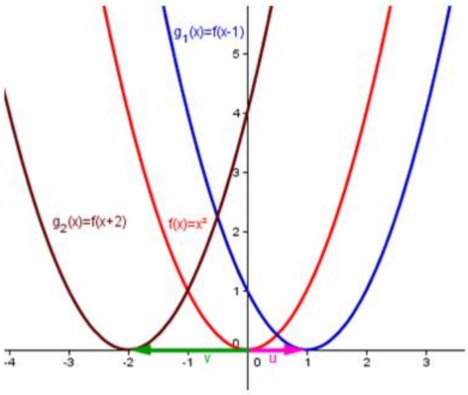
Seja $g(x) = f(x) + a,\ a \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando-se um deslocamento vertical, ou seja, uma translação associada ao vetor (0,a) .

Tânia Pacheco 2

Transformações simples de funções

Translação horizontal:



Exemplo:

Seja $f(x) = x^2$.

Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(x - 1)$ e $g_2(x) = f(x + 2)$ a partir do gráfico da função f?

Caso geral:

Seja $g(x) = f(x - a),\ a \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando-se um deslocamento horizontal, ou seja, uma translação associada ao vetor (a,0) .

Tânia Pacheco 3

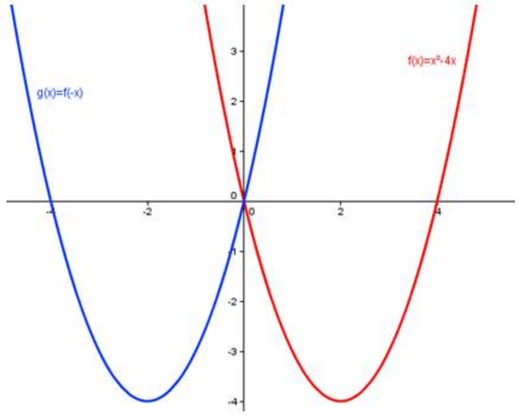
Transformações simples de funções

Simetria em relação ao eixo das ordenadas:

Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

Como podemos obter o gráficos da função $g(x) = (-x)^2 - 4(-x)$ a partir do gráfico da função f?



Caso geral:

Seja $g(x) = f(-x)$.

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando-se uma simetria em relação ao eixo das ordenadas.

Tânia Pacheco 4

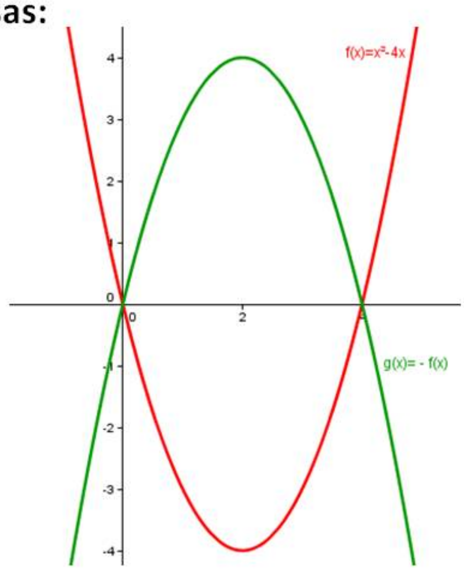
Transformações simples de funções

Simetria em relação ao eixo das abcissas:

Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

Como podemos obter o gráfico da função $g(x) = -(x^2 - 4x)$ a partir do gráfico da função f?



Caso geral:

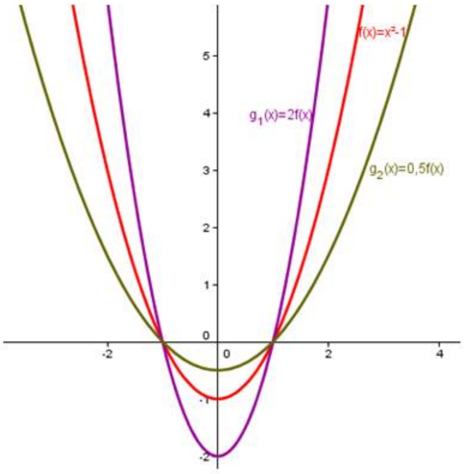
Seja $g(x) = -f(x)$.

O gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f efetuando-se uma simetria em relação ao eixo das abcissas.

Tânia Pacheco 5

Transformações simples de funções

Dilatação/Compressão na vertical:



Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - 1$.

Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = 2f(x)$ e $g_2(x) = 0,5f(x)$ partir do gráfico da função f?

Caso geral:

Seja $g(x) = af(x),\ a \in \mathbb{R}$.

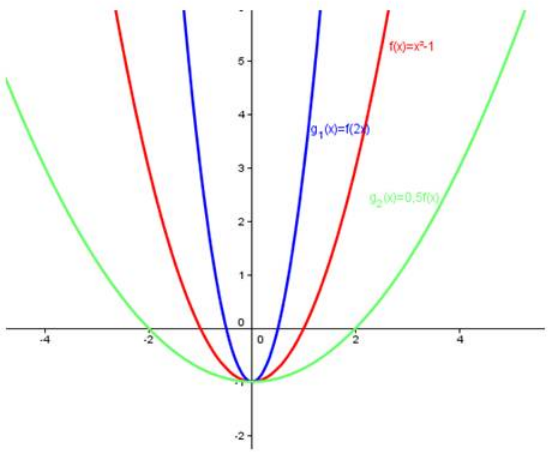
Se |a|>1, diz-se que há uma dilatação na vertical.

Se |a|<1, diz-se que há uma compressão na vertical.

Tânia Pacheco 6

Transformações simples de funções

Dilatação/Compressão na horizontal:



Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - 1$.

Como podemos obter os gráficos das funções $g_1(x) = f(2x)$ e $g_2(x) = f(0,5x)$ a partir do gráfico da função f?

Caso geral:

Seja $g(x) = f(ax),\ a \in \mathbb{R}$.

Se |a|>1, diz-se que há uma compressão na horizontal.

Se |a|<1, diz-se que há uma dilatação na horizontal.

Tânia Pacheco 7

A.2 Regulamento do Peddy Paper MatCidade

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO DA COVILHÃ

PEDDY PAPER
"MATCIDADE"

Regulamento

- ✓ As equipas são constituídas por 5 elementos.
  - As equipas constituídas por alunos do 3ºCiclo serão acompanhadas por um monitor. O monitor será um aluno de 11º ou 12ºAno. Os restantes alunos formam equipas de 5 elementos não necessitando de monitor.

- ✓ O peddy paper realizar-se-á fora do recinto escolar (pela cidade da Covilhã), pelo que os alunos participantes necessitam de entregar atempadamente uma autorização dos encarregados de educação.

- ✓ O peddy paper consiste num percurso pela cidade, que se inicia e termina na escola, sendo constituído por várias etapas. Aos alunos ser-lhes-á facultado uma espécie de guião para que eles descubram quais os locais a que se devem dirigir, onde terão variadas atividades à sua espera. Estes locais serão desconhecidos e é desafio das equipas, através das pistas dadas nos guiões, conseguir encontrá-los.

- ✓ O local de concentração dos alunos, para o início do peddy paper, será no átrio da entrada da escola, um pouco antes das 10h.

- ✓ As equipas não irão sair todas ao mesmo tempo da escola, sendo a partida da primeira equipa feita às 10h. As restantes sairão com algum tempo de intervalo entre elas.

- ✓ No dia da prova será dado um cartão de identificação da equipa a um dos elementos, que deverá ser conservado até ao fim da prova.

- ✓ A pontuação da prova será dividida em 3 campos principais: o tempo dispendido para a prova, a resposta a determinadas perguntas que estarão junto do guião mencionado acima e a pontuação obtida nas diversas atividades propostas nos locais escolhidos para as mesmas.

- ✓ As 3 melhores equipas receberão um prémio, sendo as pontuações divulgadas na semana seguinte à realização do peddy paper.

A.3 Guião - Calculadora TI N-Spire

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

DIREÇÃO REGIONAL DE EDUCAÇÃO DO CENTRO

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Guião 1 – Geometria

Tarefa 1 – Como construir um cubo em perspetiva cavaleira?

Objetivo – Explorar comandos incluídos na calculadora gráfica TI N-Spire.

Pretendemos construir um cubo com 10 cm de lado, a 45°.

1. Comecemos por construir um quadrado com 10 cm de lado:

1.1. Num novo documento escolher "Adicionar Geometria";

1.2. Utilizar o comando "Menu – 9: Formas – 5: Polígono regular";

1.3. Construir um lado do quadrado (ou seja, um segmento de reta AB): "Menu – 7: Pontos e retas – 5: Segmento";

1.4. Designar os pontos A e B: "Menu - 1: Ações – 6: Texto";

1.5. Efetuar e ajustar a medição: "Menu – 8: Medição – 1: Comprimento" e clicar no texto e digitar 10 cm;

1.6. Construir os restantes lados:

1.6.1. Selecionar o ponto A e escolher o comando "Menu – A: Construção – 1: Perpendicular" e repete-se o mesmo processo para o ponto B;

1.6.2. Construir uma circunferência de centro em A e que passe por B: "Menu – 9: Formas – 1: Circunferência" e uma circunferência de centro em B que passe por A;

1.6.3. Marcar os pontos de intersecção das circunferências com as retas perpendiculares: "Menu – 7: Pontos e retas – 3: Pontos de intersecção";

1.6.4. Ocultar linhas auxiliares: "Menu – 1: Ações – 3: Ocultar/ Mostrar";

1.6.5. Designar os pontos C e D.

1.7. Construir os restantes vértices do cubo:

1.7.1. Construir uma semi-reta de origem em B: “Menu – 7: Pontos e retas – 6: Semi-recta”;

1.7.2. Construir uma das arestas laterais através do comando “Menu – A: Construção – 4: Bissectriz”;

1.7.3. Construir o vetor que permite determinar os restantes vértices:

(A) Determinar o ponto médio do segmento AB (ponto P_M): “Menu – A: Construção – 5: Ponto Médio”;

(B) Construir a circunferência de centro em B e que passe por P_M;

(C) Determinar ponto de intersecção entre a circunferência e a bissectriz (ponto E);

(D) Marca vetor: “Menu – 7: Pontos e rectas – 8: Vector.

1.7.4. Efetuar translação do vetor para restantes vértices: “Menu – B: Transformação – 3: Translação”;

1.7.5. Designar os pontos E, F, G e H;

1.7.6. Ocultar linhas auxiliares.

1.8. Unir os pontos e colocar os segmentos que não se visualizam a tracejado: “Menu – 1: Ações – 4: Atributos”.

Guião 2 – Funções

Tarefa 1 – Como obter uma função que modele um conjunto de dados?

Objetivo – Modelar um conjunto de dados através de uma função, utilizando ferramentas da calculadora gráfica TI N-Spire.

Consideremos o seguinte conjunto de dados que dizem respeito aos percentis de peso nas crianças do sexo masculino:

Idade	**Peso Ideal (kg)**
2	13
4	16
6	20.5
8	25.5
10	32
12	40
14	50
16	60
18	67
20	71

1. Comecemos por introduzir os valores numa página de listas e folha de cálculo:

1.1. Num novo documento escolher "Adicionar listas e folha de cálculo";

1.2. Inserir os dados em cada uma das colunas, atribuindo o nome de "Ano" à coluna A e "Nº de assinantes" à coluna B;

2. Obtenhamos uma representação dos pontos que traduzam a relação entre as 2 variáveis:

2.1. Abrir uma nova página, escolhendo "Adicionar Dados e Estatística";

2.2. Escolhe-se a variável que se vai colocar no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas (neste caso "Ano" e "Nº de assinantes", respetivamente).

3. Escolhe-se um modelo cujo gráfico se ajuste o mais possível ao conjunto de pontos: "Menu – 4: Analisar – 6:Regressão – B: Mostrar Logística (d=0)".

Tarefa 2 - Estudo de Funções

Objetivo – Realizar o estudo dos pontos notáveis do gráfico de uma função; representar funções por ramos.

1. Comecemos por representar graficamente uma função quadrática e uma função cúbica:

1.1. Abrir um novo documento escolhendo "Adicionar Gráficos";

1.2. No editor de funções escrever em “f1(x)” a expressão analítica da função “-x^2 + 3x + 4”;

1.3. Clicar no símbolo  e introduzir a expressão de “f2(x)”, “x^3 + 3x + 2”;

2. Ajustar a janela de visualização das funções: “Menu - 4: Janela – 1: Definições de Janela”;

3. Encontrar pontos de interesse dos gráficos:

3.1. Determinar o máximo da função quadrática: “Menu – 6: Analisar gráfico – 3: Máximo”;

3.2. Determinar os zeros das funções: “Menu – 6: Analisar gráfico – 1: Zeros”;

3.3. Para facilitar a visualização dos vários pontos de interesse que estamos a calcular podemos ir ocultando os que já visualizámos:

“Menu – 1: Ações – 3: Ocultar/Mostrar”

3.4. Determinar o ponto de intersecção das funções: “Menu – 6: Analisar gráfico – 4: Interseção”;

3.5. Determinar o ponto de inflexão da função cúbica: “Menu – 6: Analisar gráfico – 5: Inflexão”;

4. Modificar os atributos do gráfico: “Menu – 1: Ações – 4: Atributos”;

5. Representar a seguinte função por ramos:

$$\begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ -2x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

5.1. Abrir um novo documento e escolher “Adicionar gráficos”;

5.2. Carregar na tecla  e escolher .