



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Generalização do VATM e do GSVATM para a Modelação de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Torção combinada com Estado Axial de Tensão Uniforme

Cátia Sofia Batista Taborda

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo
Coorientador: Prof. Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade

Covilhã, dezembro de 2017

Dedicatória

AOS MEUS

Agradecimentos

Existem algumas pessoas que foram fundamentais nesta jornada, às quais quero deixar o meu sincero agradecimento. Realizar um doutoramento torna-se, por vezes, um projeto individual e solitário. Sem estas pessoas a meu lado não seria possível levar este projeto a bom porto.

Quero agradecer ao meu orientador científico, Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, pela sua orientação sábia, generosa a nível científico e pacífica a nível pessoal. Agradeço-lhe ainda todas as oportunidades de aprendizagem que me tem proporcionado e me enriqueceram enquanto investigadora e pessoa.

Quero agradecer também ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade, coorientador científico desta tese pela disponibilidade e pelo apoio prestado para a implementação computacional dos modelos analíticos desenvolvidos ao longo do trabalho.

Quero também deixar um agradecimento especial ao Professor Jorge Manuel dos Reis Gama, professor do Departamento de Matemática, pela sua disponibilidade e pelo apoio prestado na análise de correlação não linear multivariável, que constituiu um aspeto importante no desenvolvimento do presente trabalho.

Agradeço ainda ao meu colega Mestre Micael Ferreira que me permitiu acompanhar e colaborar no seu trabalho de investigação, cujos resultados foram importantes para este trabalho.

Agradeço agora ao meu núcleo familiar por estarem sempre por perto, mantendo um ambiente harmonioso e de carinho. Agradeço-lhes também pelas vezes que me incentivaram a sair do meu habitat de trabalho para momentos de descontração e animados. Aos meus pais que sem a sua confiança e orientação neste momento não estaria onde estou nem seria a pessoa que sou. Ao meu irmão que me ajuda a ter pontos de vista diferentes e por ser uma pessoa de grande generosidade e persistência. A eles, o meu especial agradecimento.

Ao meu João, quero agradecer pelo amor, paciência, alegria com que preenche a minha vida. Por me ter amparado todos os momentos em que eu senti que não era mais capaz, sempre foi a minha fonte de energia e coragem. E ainda por me estimular sempre com novos projetos e desafios a nível intelectual.

Resumo

O presente trabalho é composto por duas partes, nas quais são realizados estudos analíticos com vigas de betão estrutural, de secção retangular, sujeitas à torção combinada com estado axial de tensão uniforme.

A primeira parte do trabalho tem por objetivo principal um estudo com vista à elaboração de ferramentas de auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção com confinamento axial, tendo por base o modelo VATM modificado (*Variable Angle Truss Model*). Esta parte visa complementar um anterior estudo realizado pela autora onde o referido modelo foi validado para o tipo de vigas em estudo. As referidas ferramentas, designadamente ábacos de dimensionamento e um pequeno aplicativo computacional, possibilitam obter de forma simples o valor efetivo da resistência de uma viga de betão armado à torção confinada axialmente. As ferramentas foram desenvolvidas a partir da realização de numerosas simulações tendo por base diversas variáveis de estudo bem como os resultados de análises de correlação não lineares multivariável.

A segunda parte do trabalho consiste em modelar o comportamento global de vigas de betão estrutural sujeitas, simultaneamente, à torção e a um estado de tensão axial uniforme. São estudadas as seguintes situações: vigas sujeitas a um esforço axial externo centrado de compressão ou tração (constante), vigas confinadas axialmente e vigas com pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente. Para tal, o modelo GSVATM (*Generalized Softened Variable Angle Truss Model*) é modificado no sentido de incorporar, para cada situação analisada, a interação resultante de esforços “torção + força axial longitudinal”. Os resultados do modelo proposto são validados mediante análises comparativas com resultados numéricos (análises não lineares com o método dos elementos finitos) e experimentais encontrados na literatura. Com o intuito de entender, para as várias situações estudadas, a influência do estado axial de tensão no comportamento à torção de uma viga, são também realizadas várias análises paramétricas.

Palavras-chave

Betão armado, Viga, Torção, estado axial de tensão, Modelo de treliça espacial, Esforço axial, Confinamento axial, Pré-esforço longitudinal, Dimensionamento.

Abstract

The present work is composed of two parts, in which analytical studies are performed on structural concrete beams, with rectangular cross-section, subjected to torsion combined with a uniform axial stress state.

The main objective of the first part of this work is to propose tools for the design of reinforced concrete beams under torsion and axial confinement. For this, the modified VATM (Variable Angle Truss Model) is used. This part of the work aims to complement a previous study carried out by the author, in which the referred theoretical model was validated for the type of beams being studied. The proposed tools, design abacus and a computational tool, allow to compute easily the effective torsional strength of a reinforced concrete beam axially confined. The tools were developed from several simulations based on various study variables and from the results of a nonlinear and multivariable correlation analysis.

The second part of this work aims to model the global behaviour of structural concrete beams subjected to torsion combined with a uniform axial stress state. The following cases are studied: beams under an external and constant centered axial force (compression or tension), axially confined beams and beams with longitudinal and centered prestress (adherent and non-adherent). For this, the GSVATM (Generalized Softened Variable Angle Truss Model) is modified in order to incorporate, for each case, the resulting interaction forces, "torsion + axial force". The results of the proposed model are validated with comparative analysis based on numerical results (nonlinear analysis with finite element method) and experimental results found in the literature. In order to understand, for each studied case, the influence of the uniform axial stress state on the torsional behaviour of the beam, several parametric analyzes are also performed.

Keywords

Reinforced concrete, Beam, Torsion, Axial stress state, Space truss model, Axial load, Axial confinement, Longitudinal prestress, Design.

Índice

Capítulo 1 - Enquadramento do tema

1.1.	Introdução ao Estudo da Torção em Estruturas de Betão	1
1.1.1.	Considerações gerais sobre a Torção	1
1.1.2.	Classificação fundamental dos efeitos da torção	6
1.1.3.	Descrição do comportamento de uma viga de Betão Armado à Torção	10
1.2.	Justificação do tema de trabalho	13
1.2.1.	Notas históricas - Evolução do estudo da torção até ao VATM	13
1.2.2.	Notas históricas - Evolução dos modelos de previsão global mediante o cálculo da curva integral $M_T-\theta$	22
1.2.3.	Casos práticos de Estruturas em estado de tensão axial uniforme	32
1.3.	Objetivos do trabalho	40
1.4.	Organização do documento	41

Capítulo 2 - Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável VATM e VATM modificado

2.1.	Introdução	43
2.2.	Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável - VATM	44
2.2.1.	Análise de uma viga com base no Modelo de Treliça Plana	44
2.2.2.	Vigas com secção vazada sujeitas à torção pura	46
2.2.3.	Flexão da escora de betão	47
2.2.4.	Relações constitutivas $\sigma - \epsilon$ dos materiais	49
2.2.5.	Formulação do VATM - Cálculo da curva $T - \theta$	52
2.3.	Modelação teórica do comportamento de vigas confinadas axialmente	56
2.3.1.	Metodologia para a incorporação do efeito do confinamento axial	56
2.3.2.	VATM para vigas de betão armado com confinamento axial	58
2.3.2.1.	Modelo de Treliça Plana em viga de betão armado com confinamento axial	58
2.3.2.2.	Vigas confinadas axialmente com secção vazada sujeitas à torção pura	59
2.3.3.	VATM para vigas de betão pré-esforçado com armaduras não aderentes e/ou cabos exteriores	62
2.3.4.	Cálculo da curva momento torsor - rotação $T - \theta$	66
2.4.	Considerações finais	70

Capítulo 3 - Refinamento dos ábacos de dimensionamento para vigas à torção com confinamento axial

3.1.	Introdução	71
3.2.	Justificação do refinamento dos ábacos	72
3.2.1.	Ábacos de dimensionamento de vigas à torção com secção quadrangular ($h/b=1$)	72
3.2.2.	Análise paramétrica: influência de h/b no momento torsor resistente	77
3.2.3.	Comparação com resultados experimentais	83
3.3.	Definição dos intervalos de valores para as variáveis de estudo	90
3.4.	Verificação da conformidade das vigas em análise	91
3.4.1.	Armadura mínima de torção	92
3.4.2.	Armadura máxima de torção	93
3.4.3.	Verificação das disposições normativas	94
3.5.	Ferramentas de dimensionamento para vigas à torção com diferentes fatores de forma h/b	98
3.5.1.	Ábacos de dimensionamento	98
3.5.2.	Aplicativo para auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado à torção confinadas axialmente	106
3.6.	Considerações finais	108

Capítulo 4 - Modelo Generalizado de treliça espacial com ângulo variável GSVATM

4.1.	Introdução	109
4.2.	Formulação do GSVATM	109
4.2.1.	Reformulação do Modelo de Treliza Plana em vigas de betão armado	110
4.2.2.	Viga com secção vazada sujeita à torção pura	114
4.2.3.	Flexão da escora e do tirante de betão	116
4.2.4.	Espessura efetiva da parede	119
4.2.5.	Relações constitutivas $\sigma-\varepsilon$ para os materiais	120
4.2.6.	Cálculo da curva $M_T-\theta$	122
4.3.	Considerações finais	128

Capítulo 5 - Extensão do GSVATM para vigas com estado axial de tensão uniforme

5.1.	Introdução	129
5.2.	Reformulação do GSVATM para vigas de betão armado com esforço axial externo centrado e constante	130
5.2.1.	Vigas sujeitas a esforço transversal, momento fletor e força axial	130
5.2.2.	Viga com secção vazada sujeita à torção e esforço axial externo	132

5.2.3.	Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	137
5.3.	Reformulação do GSVATM para vigas com confinamento axial -----	140
5.3.1.	Viga sujeita a esforço transversal, momento fletor e força axial -----	140
5.3.2.	Viga com secção vazada sujeita à torção e confinada axialmente -----	141
5.3.3.	Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	146
5.4.	Reformulação do GSVATM para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme -----	149
5.4.1.	Pré-esforço longitudinal aderente -----	150
5.4.1.1	Vigas com pré-esforço longitudinal e sujeitas à torção -----	150
5.4.1.2	Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	153
5.4.2	Pré-esforço externo ou não aderente -----	156
5.4.2.1.	Vigas com pré-esforço longitudinal e sujeitas à torção -----	156
5.4.2.2.	Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	157
5.5.	Considerações finais -----	160

Capítulo 6 - Análise Paramétrica

6.1.	Considerações gerais -----	161
6.2.	Caracterização da viga A2 - Viga de referência -----	162
6.3.	Análise paramétrica com resultados teóricos - GSVATM -----	166
6.3.1.	Influência do estado de tensão axial externo no comportamento da viga A2 à torção -----	166
6.3.2.	Influência do estado do confinamento axial no comportamento da viga A2 à torção -----	175
6.3.3.	Influência do pré-esforço longitudinal aderente no comportamento da viga A2 à torção -----	178
6.4.	Considerações finais -----	185

Capítulo 7 - Análises comparativas

7.1.	Introdução -----	187
7.2.	Análise comparativa com os resultados de modelos numéricos com elementos finitos -----	188
7.2.1.	Nota introdutória -----	188
7.2.2.	Vigas à torção com estado de tensão axial uniforme -----	190
7.2.2.1.	Modelo numérico da viga de referência A2 no Abaqus -----	190
7.2.2.2.	Comparação dos resultados teóricos com numéricos - Abaqus -----	195
7.2.3.	Vigas confinadas axialmente -----	200
7.3.	Análise comparativa com resultados experimentais -----	206
7.3.1.	Vigas com pré-esforço longitudinal uniforme aderente -----	207
7.3.2.	Vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior e/ou não aderente ---	218

7.4.	Considerações finais	221
------	----------------------------	-----

Capítulo 8 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

8.1.	Introdução	223
8.2.	Conclusões	223
8.3.	Propostas de trabalhos futuros	228

Referências	229
--------------------------	------------

Anexos

Anexo I - Ábacos auxiliares para a obtenção dos valores C_{ca} [116]	241
Anexo II - Taxas de armaduras das vigas com diferentes fatores de forma	245
Anexo III - Análise paramétrica: Influência do fator de forma na resistência de vigas à torção	247
Anexo IV - Combinações das variáveis de estudo	251
Anexo V - Combinações das variáveis de estudo para a taxa total de armadura máxima e mínima	261
Anexo VI - Ábacos auxiliares para a obtenção dos valores C_{ca} para diferentes fatores de forma	267
Anexo VII - Equações de C_{ca} para curva $\rho_{tot,min}$ em função de h/b	287
Anexo VIII - Equações de C_{ca} para curva $\rho_{tot,máx}$ em função de h/b	288
Anexo IX - Aplicativo de auxílio ao dimensionamento - folha de cálculo em Excel	

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Ponte de Waterloo - (a) Vista geral [133]; (b) Vista inferior [137]; (c) Secção transversal [20] -----	2
Figura 1.2 - Royal Festival Hall - (a) Vista Interior [140], (b) Esquema do caixão triangular para suporte da bancada em consola [20] -----	3
Figura 1.3 - Rotura por torção numa viga de um edifício [20] -----	4
Figura 1.4 - Torção de compatibilidade e de equilíbrio e a respetiva formação de rótulas plásticas [12] -----	6
Figura 1.5 - Evolução da rigidez de torção com o momento torsor [20] -----	7
Figura 1.6 - Simplificação dos modelos de cálculo para viga de extremidade e de continuidade [20] -----	8
Figura 1.7 - Torção circulatoria e torção com empenamento [12] -----	9
Figura 1.8 - Curva $T - \theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura -----	11
Figura 1.9 - Diagramas P-d das vigas 4, 5 e 6 [57] -----	18
Figura 1.10 - Diagrama da carga-deformação de vigas de betão armado axialmente restringidas com diferentes áreas de reforço exterior [83] -----	19
Figura 1.11 - Curva $T - \theta$ das vigas D: (a) Viga D1 - (b) Viga D2 [32] -----	20
Figura 1.12 - Curvas $T - \theta$ da viga A2 através da análise numérica com elementos finitos [32] -----	22
Figura 1.13 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ para a viga M2 [69] -----	23
Figura 1.14 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Bernardo e Lopes [24] [30] -----	24
Figura 1.15 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Bernardo et al. [29] -----	26
Figura 1.16 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Jeng e Hsu [74] -----	28
Figura 1.17 - Exemplo de curvas $M_T - \theta (M_T (\text{kNm}) - \theta (^\circ/\text{m}))$ [74] -----	31
Figura 1.18 - Modelo de pórtico com viga sujeita à torção devido à laje em consola, <i>Eberick Next</i> [131] -----	33
Figura 1.19 - Exemplo de vigas helicoidais com ângulo ao centro de 360° ou superior [97] --	34
Figura 1.20 - Exemplo de escada curva com ângulo ao centro inferior a 360° [138] -----	34
Figura 1.21 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo em planta [20] -----	35
Figura 1.22 - Passagem superior para peões, IP5 - antigo nó de Mangualde [20] -----	35
Figura 1.23 - Caso prático de torção: Casa da Cultura, Vila Velha de Rodão [134] [20] -----	36
Figura 1.24 - Momento torsor provocado pelo pré-esforço [20] -----	37
Figura 1.25 - Viaduto rodoviário de Linn Cove, Carolina do Norte - EUA [132] -----	37
Figura 1.26 - Ponte rodoviária sobre o Rio Douro, Régua [136] -----	38
Figura 1.27 - Ponte de Laguna Garzón na costa Sul do Uruguai [139] -----	39
Figura 1.28 - Reservatório circular elevado para abastecimento de água,	

Nova Parnamirim [135]	39
Figura 2.1 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana	44
Figura 2.2 - Análise do elemento A de viga com base no modelo de treliça plana	45
Figura 2.3 - Viga com secção retangular vazada sujeita à torção pura	46
Figura 2.4 - Flexão de uma escora inserida numa parede de uma viga com secção vazada sujeita à torção	48
Figura 2.5 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão	49
Figura 2.6 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do VATM modificado para o cálculo de $T - \theta$	55
Figura 2.7 - Viga betão armado sujeita à torção e inserida num pórtico simples [116]	57
Figura 2.8 - Viga confinada axialmente: (a) situação livre de restrição; (b) situação idealizada com molas lineares [32]	58
Figura 2.9 - Equilíbrio de uma viga submetida ao esforço transversal, momento fletor e força axial de compressão	59
Figura 2.10 - Viga com secção retangular vazada confinada axialmente sujeita à torção	59
Figura 2.11 - Encurtamento da escora de betão devido ao confinamento axial	61
Figura 2.12 - Ilustração do conceito de descompressão [66]	64
Figura 2.13 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do VATM modificado para o cálculo de $T - \theta$	69
Figura 3.1 - Ábacos para a obtenção do coeficiente de confinamento axial C_{ca} [116]	74
Figura 3.2 - Ábaco para a obtenção do coeficiente de correção C_{ca} [116]	75
Figura 3.3 - Exemplo de aplicação com viga quadrangular: $f_c = 70$ MPa , $k = 50000$ kN/m , $\rho_{tot} = 1,0\%$, $l = 10$ m	76
Figura 3.4 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 30$ MPa , $\rho_{tot} = 0,8\%$, $k = 30000$ kN/m	79
Figura 3.5 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 30$ MPa , $\rho_{tot} = 1,6\%$, $k = 0$ kN/m	80
Figura 3.6 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 90$ MPa , $\rho_{tot} = 0,8\%$, $k = 30000$ kN/m	80
Figura 3.7 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 90$ MPa , $\rho_{tot} = 1,6\%$, $k = 70000$ kN/m	80
Figura 3.8 - Curvas teóricas $T - \theta$ para as vigas com $f_c = 30$ MPa , $\rho_{tot} = 1,0\%$ e $b \times h = 7200$ cm ²	82
Figura 3.9 - Resultados das vigas ensaiadas por Hsu - (a) séries G, B e C com $x = 25,4$ cm (constante) e h variável; (b) séries K e N com $x = 15,24$ cm (constante) e h variável [63]	86
Figura 3.10 - Resultados teóricos: (a) Vigas das séries G, B e C; (b) Vigas das séries K e N	89

Figura 3.11 - Exemplo de ficheiro editável “.txt” de criação da viga ($h/b = 2,0$; $f_c = 30$ MPa e $\rho_{tot} = 0,4\%$) -----	100
Figura 3.12 - Ábaco: Torção + Confinamento axial para $f_c = 50$ MPa e $h/b = 1,5$ -----	102
Figura 3.13 - Ábaco: Torção + Confinamento axial para $f_c = 70$ MPa e $h/b = 3,0$ -----	103
Figura 3.14 - Exemplo de aplicação com viga retangular: $h/b = 3,0$, $f_c = 50$ MPa , $k = 25423,7$ kN/m , $\rho_{tot} = 0,6\%$ -----	105
Figura 3.15 - Aplicativo de auxílio ao dimensionamento de vigas confinadas axialmente com exemplo de aplicação com viga retangular: $h/b = 3,0$, $f_c = 50$ MPa , $k = 20000$ kN/m , $\rho_{tot} = 0,6\%$ e $l = 7,50$ m [81] -----	107
Figura 4.1 - Equilíbrio do elemento de viga sob o esforço transversal e momento fletor ----	111
Figura 4.2 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob o esforço transversal e momento fletor -----	113
Figura 4.3 - Equilíbrio de uma viga de secção vazada sujeita à torção pura -----	114
Figura 4.4 - Flexão da escora e do tirante de betão -----	116
Figura 4.5 - Estado de tensão e de extensão na escora e no tirante de betão -----	118
Figura 4.6 - Círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte -----	124
Figura 4.7 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM para o cálculo de $M_T - \theta$ -----	127
Figura 5.1 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob esforço transversal, momento fletor e força axial de tração -----	131
Figura 5.2 - Equilíbrio longitudinal de uma viga de secção retangular vazada -----	133
Figura 5.3 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para a interação momento torsor + esforço axial para o cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	139
Figura 5.4 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob esforço transversal, momento fletor e força de confinamento axial -----	141
Figura 5.5 - Encurtamento da escora e do tirante de betão -----	145
Figura 5.6 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para vigas confinadas axialmente para o cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	148
Figura 5.7 - Viga de betão pré-esforçada com secção vazada sujeita a um momento torsor -----	150
Figura 5.8 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para vigas com pré-esforço longitudinal para o cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	155
Figura 5.9 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM para vigas com pré- esforço longitudinal exterior e/ou não aderente para o cálculo da curva $M_T - \theta$ -----	159
Figura 6.1 - Geometria da viga de referência, viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20] -----	163
Figura 6.2 - Características geométricas e mecânicas da viga A2 [20] -----	164

Figura 6.3 - Curva $M_T - \theta$ para a viga A2	165
Figura 6.4 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial de compressão	168
Figura 6.5 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial de tração	169
Figura 6.6 - Curvas teóricas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial ----	170
Figura 6.7 - Curvas teóricas $\varepsilon_{1s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial ----	171
Figura 6.8 - Curvas teóricas $\alpha - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial ----	172
Figura 6.9 - Curvas teóricas $\varepsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial ----	174
Figura 6.10 - Curvas teóricas $\varepsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial ---	174
Figura 6.11 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento axial	175
Figura 6.12 - Variação percentual do momento torsor associado à fissuração, à cedência das armaduras transversais e resistente	177
Figura 6.13 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis pré-esforço longitudinal uniforme	180
Figura 6.14 - Curvas teóricas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente	181
Figura 6.15 - Curvas teóricas $\varepsilon_{1s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente	182
Figura 6.16 - Curvas teóricas $\alpha - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente	183
Figura 6.17 - Curvas teóricas $\varepsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente	184
Figura 6.18 - Curvas teóricas $\varepsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente	184
Figura 7.1 - (a) Secção transversal real da viga A2 [116], (b) Secção transversal simplificada da viga A2 no modelo numérico, Abaqus [55]	192
Figura 7.2 - (a) Modelo numérico global (sólido), (b) malha de elementos finitos do modelo numérico global, Abaqus [55]	193
Figura 7.3 - (a) Armaduras longitudinais e transversais no interior da viga, (b) Representação da limitação de acoplamento de um ponto de referência, (c) Aplicação da tensão axial uniforme, Abaqus [55]	193
Figura 7.4 - Curva $M_T - \theta_m$ experimental e teórica da viga A2, Abaqus [55]	194
Figura 7.5 - Curvas numéricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diferentes estados de compressão axial constantes	195

Figura 7.6 - Curvas numéricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diferentes estados de tração axial constantes	197
Figura 7.7 - Variação do momento torsor resistente teórico e numérico com diferentes estados de compressão axial	199
Figura 7.8 - Variação do momento torsor resistente teórico e numérico com diferentes estados de tração axial	199
Figura 7.9 - Modelo numérico da viga A2, Lusas: (a) Corte longitudinal - (b), (c) e (d) Cortes transversais, Lusas [116]	201
Figura 7.10 - Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2 com confinamento axial, Lusas [116]	201
Figura 7.11 - Modelo numérico da viga A2: (a) Betão + chapas metálicas - (b) Armaduras, Lusas [116]	203
Figura 7.12 - Modelo numérico da viga A2: (a) Binário de forças aplicado na chapa metálica da extremidade esquerda - (b) Encastramento à torção da viga na extremidade direita, Lusas [116]	203
Figura 7.13 - Curvas $M_T - \theta$ experimental e numérica da viga A2, Lusas [32]	204
Figura 7.14 - Curvas $M_T - \theta$ da viga A2 com confinamento axial: (a) numérica, LUSAS [116] - (b) teórica, GSVATM modificado	205
Figura 7.15 - Variação do momento torsor resistente	205
Figura 7.16 - Curva $M_T - \theta$ da viga P8 [71]	210
Figura 7.17 - Curva $M_T - \theta$ da viga P2 [89]	210
Figura 7.18 - Curva $M_T - \theta$ da viga P3 [89]	210
Figura 7.19 - Curva $M_T - \theta$ da viga P1AR [48]	211
Figura 7.20 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA2 [48]	211
Figura 7.21 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA3 [48]	211
Figura 7.22 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA3 [48]	211
Figura 7.23 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB1 [48]	211
Figura 7.24 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB2 [48]	211
Figura 7.25 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB3 [48]	212
Figura 7.26 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB4 [48]	212
Figura 7.27 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC1 [48]	212
Figura 7.28 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC2 [48]	212
Figura 7.29 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC3 [48]	212
Figura 7.30 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC4 [48]	212
Figura 7.31 - Curva $M_T - \theta$ da viga H3AR [121]	213
Figura 7.32 - Curva $M_T - \theta$ da viga H2A [121]	213
Figura 7.33 - Curva $M_T - \theta$ da viga H1AR [121]	213
Figura 7.34 - Curva $M_T - \theta$ da viga H3B [121]	213
Figura 7.35 - Curva $M_T - \theta$ da viga H2B [121]	213

Figura 7.36 - Curva $M_T - \theta$ da viga H1B [121]	213
Figura 7.37 - Curva $M_T - \theta$ da viga M3A [121]	214
Figura 7.38 - Curva $M_T - \theta$ da viga M2A [121]	214
Figura 7.39 - Curva $M_T - \theta$ da viga M1A [121]	214
Figura 7.40 - Curva $M_T - \theta$ da viga M3B [121]	214
Figura 7.41 - Curva $M_T - \theta$ da viga M2B [121]	214
Figura 7.42 - Curva $M_T - \theta$ da viga M1B [121]	214
Figura 7.43 - Relação entre os valores experimentais e teóricos do momento torsor resistente	217
Figura 7.44 - Relação entre os valores experimentais e teóricos da rotação correspondente ao momento torsor resistente	217
Figura 7.45 - Curva $M_T - \theta$ da viga D1 [20]	219
Figura 7.46 - Curva $M_T - \theta$ da viga D2 [20]	220

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Relação constitutiva do betão à compressão (Belarbi e Hsu [19], Hsu e Zhang [127]) -----	50
Tabela 2.2 - Relação constitutiva da armadura ordinária à tração, Belarbi e Hsu 1994 [17]--	52
Tabela 2.3 - Relação constitutiva da armadura de pré-esforço à tração, Ramberg-Osgood 1943 [101] e Hsu e Mo 1985b [71] -----	66
Tabela 3.1 - Combinações entre as variáveis de estudo (ρ_{tot} , f_c , h/b e k) para estudo da influência da variável h/b -----	78
Tabela 3.2 - Características das vigas ensaiadas e estudadas por Hsu [63] -----	84
Tabela 3.3 - Análise comparativa para o momento torsor resistente (Vigas das séries G, B, C, N e K) -----	88
Tabela 3.4- Variação percentual do parâmetro Ω experimental e teórico entre séries -----	89
Tabela 3.5 - Características geométricas das vigas simuladas -----	91
Tabela 3.6 - Características para a verificação das vigas a analisar com o auxílio do TORQUE_MTEAV modificado (ACI [6]) -----	95
Tabela 3.6 (continuação) - Características para a verificação das vigas ensaiadas com o auxílio do TORQUE_MTEAV modificado (ACI [6]) -----	96
Tabela 3.7 - Verificação da quantidade máxima e mínima da armadura transversal e longitudinal (ACI [6]) -----	97
Tabela 4.1 - Relação constitutiva do betão à tração, Belarbi e Hsu 1994 [17] e Jeng e Hsu 2009 [74] -----	121
Tabela 6.1 - Análise comparativa dos resultados teóricos do GSVATM com os experimentais da viga A2 -----	165
Tabela 6.2 - Nível de tensão axial de compressão aplicada à viga A2 -----	166
Tabela 6.3 - Nível de tensão axial de tração aplicada à viga A2 -----	167
Tabela 6.4 - Variação dos momentos torsores e das respetivas rotações com o confinamento axial -----	176
Tabela 6.5 - Nível de pré-esforço aplicada à viga A2 -----	179
Tabela 7.1 - Caracterização das curvas $M_T - \theta$ da viga A2 para vários estados de tensão axial de compressão (ponto de fissuração e ponto resistente) -----	196
Tabela 7.2 - Caracterização das curvas $M_T - \theta$ da viga A2 para vários estados de tensão axial de tração (ponto de fissuração e ponto resistente) -----	198
Tabela 7.3 - Variação percentual do momento torsor resistente teórico e numérico para o estado de compressão axial -----	199
Tabela 7.4 - Variação percentual do momento torsor resistente teórico e numérico para o estado de tração axial -----	199

Tabela 7.5 - Propriedades do cabo não aderente para diferentes níveis de confinamento axial	202
Tabela 7.6 - Características geométricas e mecânicas das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme e aderente	208
Tabela 7.7 - Características dos materiais das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme e aderente	209
Tabela 7.8 - Análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme aderente	216
Tabela 7.9 - Características geométricas e mecânicas das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior	218
Tabela 7.10 - Características dos materiais das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior	218
Tabela 7.11 - Análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior	220

Lista de Acrónimos

ACI	American Concrete Institute
BA	Betão Armado
BPE	Betão Pré-Esforçado
CEB	Comité Européen du Béton
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
GSVATM	Generalized Softened Variable Angle Truss Model
HSC	High Strength Concrete
MVATM	Modified Variable Angle Truss Model
NSC	Normal Strength Concrete
VATM	Variable Angle Truss Model

Simbologia

Alfabeto Latino

- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão / área de betão efetiva
- A_{ch} - Área de betão equivalente
- A_{cp} - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão
- A_h - Área da zona vazada da secção
- A_0 - Área limitada pela linha média do fluxo de corte
- A_{pl} - Área total da armadura de pré-esforço
- $A_{pl,calc}$ - Área de armadura de pré-esforço de cálculo
- A_{sl} - Área total de armadura longitudinal ordinária
- $A_{sl,min}$ - Área de armadura longitudinal ordinária mínima
- A_{sr} - Área de armadura longitudinal exterior
- A_{st} - Área total de armadura transversal ordinária
- $A_{st,max}$ - Área total de armadura transversal ordinária máxima
- $A_{st,min}$ - Área de armadura transversal ordinária mínima
- A_t - Área de armadura transversal referente a um ramo do estribo fechado
- A_v - Área de armadura transversal referente aos dois ramos de um estribo fechado
- C - Força de compressão na escora de betão
- C_{ca} - Coeficiente de correção da resistência
- $C_{ca,corr}$ - Coeficiente de correção da resistência em função do comprimento da viga
- D - força absorvida pela escora de betão
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- E_p - Módulo de elasticidade das armaduras de pré-esforço
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- F_{ca} - Força de compressão axial devido ao confinamento axial
- F_{ci} - Força de pré-esforço inicial aplicada ao cabo
- F_H - Força de equilíbrio horizontal
- $F_{pi,máx}$ - Força de pré-esforço máxima
- F_v - Força de equilíbrio vertical
- G - Módulo de distorção

$(GC)^I$ - Rigidez de torção no estado I
 $(GC)^{II}$ - Rigidez de torção no estado II
 K - parâmetro caracterizador do tipo de secção
 K^I - Rigidez de torção no estado I
 K^{II} - Rigidez de torção no estado II
 M - Momento fletor
 M_T - Momento torsor
 $M_{T,cr}$ - Momento torsor de fissuração
 $M_{Tcr,exp}$ - Momento torsor de fissuração experimental
 $M_{Tcr,th}$ - Momento torsor de fissuração teórico
 M_{Tu} - Momento torsor resistente
 $M_{Tu,exp}$ - Momento torsor resistente experimental
 $M_{Tu,th}$ - Momento torsor resistente teórico
 $M_{T,ly}$ - Momento torsor associado à cedência das armaduras longitudinais
 $M_{T,ty}$ - Momento torsor associado à cedência das armaduras transversais
 \bar{N} - Força longitudinal
 N_{ext} - Força resultante da tensão axial externa
 $N_{ext(C)}$ - Força resultante da tensão axial de compressão
 $N_{ext(T)}$ - Força resultante da tensão axial de tração
 R - resultante das forças no betão/ coeficiente de redução da lei constitutiva da armadura de pré-esforço à tração
 R^2 - Coeficiente de correlação
 T - Momento torsor /força de tração no tirante
 T_{cr} - Momento torsor de fissuração
 $T_{máx}$ - Momento torsor resistente
 $T_{máx,ca}$ - Momento torsor resistente tendo em conta o confinamento axial
 T_n - Valor nominal do momento torsor resistente
 T_0 - Momento torsor resistente interno contribuído pela viga sem armadura de torção
 T_u - Momento torsor resistente/momento torsor reduzido
 $T_{u,exp}$ - Momento torsor resistente experimental
 $T_{u,th}$ - Momento torsor resistente teórico
 V - Esforço transversal

b - Largura de uma secção transversal da viga
 b_w - Largura da alma de uma secção transversal
 cv - Coeficiente de variação
 d_v - Distância vertical entre as linhas de armadura longitudinal
 f_c - Resistência à compressão uniaxial do betão
 f'_c - Resistência à compressão uniaxial do betão
 f_{ci} - Tensão de compressão efetiva no betão devido ao pré-esforço
 f_{ck} - Valor característico da resistência à compressão do betão
 f_{cp} - Tensão inicial de compressão no betão induzida pelo pré-esforço
 f_{cr} - Resistência média à tração do betão
 f_{ctm} - Resistência média à tração do betão
 f_n^* - Limite superior o nível de tensões da armadura à tração
 f_{pi} - Tensão de tração efetiva nas armaduras de pré-esforço
 f_{pl} - Tensão na armadura de pré-esforço longitudinal
 $f_{pl,i}$ - Tensão inicial na armadura de pré-esforço
 $f_{pl0,1\%}$ - Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% para a armadura de pré-esforço
 f_{pu} - Tensão de rotura da armadura de pré-esforço
 f_{puk} - Valor característico da tensão de rotura da armadura de pré-esforço longitudinal de pré-esforço
 f_s - Tensão na armadura
 f_{sl} - Tensão na armadura ordinária longitudinal
 f_{sly} - Tensão de cedência na armadura ordinária transversal
 f_{slym} - Tensão média de cedência da armadura ordinária longitudinal
 f_{st} - Tensão na armadura ordinária transversal
 f_{sty} - Tensão de cedência na armadura ordinária transversal
 f_{stym} - Tensão média de cedência da armadura ordinária transversal
 f_{sy} - Tensão de cedência na armadura ordinária
 f_{yl} - Tensão de cedência da armadura ordinária longitudinal
 f_{yt} - Tensão de cedência da armadura ordinária transversal
 h - altura da secção transversal da viga
 k - Nível de confinamento axial

k_1 - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão/Rigidez de uma mola
 k_2 - Rigidez de uma mola
 $k_{l,corr}$ - Nível de confinamento axial corrigido em função do comprimento real da viga
 k_1^c - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão no tirante de betão
 k_2^c - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
 l - Comprimento da viga
 l_p - Comprimento efetivo da armadura de pré-esforço
 l_q - Maior dimensão da secção transversal onde o fluxo se desenvolve
 m - Relação entre o “volume” de armadura longitudinal e transversal/ coeficiente de forma que define a geometria o troço curvo da curva $\sigma - \varepsilon$ para a armadura à tração
 n_v - Força na armadura transversal por unidade de comprimento
 p_h - Perímetro da linha média da armadura transversal
 p_c - Perímetro exterior de uma secção transversal
 p_0 - Perímetro da linha média da armadura transversal
 q - Fluxo de corte
 s - Espaçamento da armadura transversal/desvio padrão
 t - Largura da viga de base de treliça plana/espessura da parede de viga vazada
 t_c - Espessura efetiva da escora de betão
 t_d - Espessura efetiva da escora de betão
 t_t - espessura efetiva do tirante de betão
 u - perímetro exterior da secção transversal de betão
 x - largura externa da secção transversal
 \bar{x} - valor da média
 x_1 - a dimensão menor da secção transversal da viga de um estribo fechado em relação à sua linha média
 y - altura externa da secção transversal
 y_1 - a dimensão maior da secção transversal da viga de um estribo fechado em relação à sua linha média

Alfabeto Grego

α - Ângulo de inclinação das escoras
 β - Ângulo entre a força de compressão (C) e de tração (T)
 β_e - Coeficiente de redução da extensão

β_{σ} - Coeficiente de redução da tensão
 γ - Ângulo de torção (Teoria do Tubo Fino de Bredt)/distorção/ângulo da força resultante R com a direção horizontal
 γ' - Ângulo da força resultante R com a direção horizontal
 ε - Extensão
 ε_{cr} - Extensão correspondente à resistência do betão à tração f_{cr}
 ε_{cu} - Extensão convencional de rotura do betão
 ε_{c1} - Extensão principal de tração na direção perpendicular à escora diagonal
 ε_d - Extensão de compressão na escora de betão
 ε_{dec} - Extensão na armadura de pré-esforço correspondente à descompressão do betão
 ε_{ds} - Extensão de compressão à superfície na escora de betão
 $\varepsilon_{ds,ca}$ - Encurtamento da fibra da face exterior da escora de betão devido ao confinamento axial
 $\varepsilon_{ds,ef}$ - Extensão de compressão efetiva à superfície na escora de betão
 $\varepsilon_{l,ca}$ - Encurtamento total da viga devido ao confinamento axial
 $\varepsilon_{l,i}$ - Extensão de tração induzida pelo estado de tensão axial externo/Extensão inicial de compressão na armadura longitudinal ordinária devido ao pré-esforço
 ε_{ly} - Extensão de cedência da armadura longitudinal
 $\varepsilon_{pl,i}$ - Extensão inicial de tração na armadura de pré-esforço longitudinal
 ε_{pl} - Extensão na armadura de pré-esforço longitudinal
 ε_s - Extensão na armadura
 ε_{sl} - Extensão na armadura ordinária longitudinal
 ε_{st} - Extensão na armadura ordinária transversal
 ε_{su} - Extensão convencional de rotura do aço
 ε_{sl,M_T} - Extensão na armadura longitudinal devido à aplicação do momento torsor
 ε_{ty} - Extensão de cedência da armadura transversal
 ε_0 - Extensão correspondente ao pico de tensão f'_c
 ε_1^c - Extensão de tração no tirante de betão
 ε_{1s}^c - Extensão de tração à superfície no tirante de betão
 $\varepsilon_{1s,ca}^c$ - Encurtamento da fibra da face exterior do tirante de betão devido ao confinamento axial
 $\varepsilon_{1s,ef}^c$ - Extensão de tração efetiva à superfície do tirante de betão

ε_2^c - Extensão de compressão na escora de betão
 ε_{2s}^c - Extensão de compressão à superfície na escora de betão
 $\varepsilon_{2s,ca}^c$ - Encurtamento da fibra da face exterior da escora de betão devido ao confinamento axial
 $\varepsilon_{2s,ef}^c$ - Extensão de compressão efetiva à superfície da escora de betão
 ϕ - Fator redutor de resistência
 η - Relação entre as forças resistentes na direção longitudinal e transversal
 θ - Rotação da secção transversal/ângulo de torção
 θ_{cr} - Rotação da secção transversal correspondente a T_{cr} / Rotação da secção transversal correspondente a $M_{T,cr}$
 $\theta_{cr,exp}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{Tcr,exp}$
 $\theta_{cr,th}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{Tcr,th}$
 θ_{cr}^I - Rotação da secção transversal correspondente a T_{cr} em Estado I
 θ_{cr}^{II} - Rotação da secção transversal correspondente a T_{cr} em Estado II
 θ_m - Rotação média da secção transversal
 $\theta_{M_{Tu}}$ - Rotação da secção transversal correspondente a M_{Tu}
 $\theta_{M_{Tu,exp}}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{Tu,exp}$
 $\theta_{M_{Tu,th}}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{Tu,th}$
 $\theta_{M_{T,ly}}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{T,ly}$
 $\theta_{M_{T,ty}}$ - Rotação da secção transversal correspondente a $M_{T,ty}$
 $\rho_{l,min}$ - Taxa de armadura longitudinal mínima
 ρ_{pl} - Taxa de armadura de pré-esforço longitudinal
 ρ_{sl} - Taxa de armadura ordinária longitudinal
 ρ_{st} - Taxa de armadura ordinária transversal
 ρ_{tot} - Taxa total de armadura de torção
 $\rho_{tot,max}$ - Taxa total de armadura máxima
 $\rho_{tot,min}$ - Taxa total de armadura mínima
 $\rho_{t,max}$ - Taxa de armadura transversal máxima
 σ - Tensão
 σ_d - Tensão de compressão na escora de betão
 σ_{ci} - Tensão axial de compressão

- σ_{ti} - Tensão axial de tração
- σ_1^c - Tensão de tração no tirante diagonal de betão
- σ_2^c - Tensão de compressão na escora diagonal de betão
- τ - Tensão tangencial
- φ - Curvatura do tirante de betão
- ψ - Curvatura da escora de betão
- Δl - Alongamento total livre da viga
- Δl_1 - Alongamento da viga devido à rigidez da mola (k_1)
- Δl_2 - Alongamento da viga devido à rigidez da mola (k_2)
- ΔN - Força total nas armaduras longitudinais
- Ω - Coeficiente de proporcionalidade com o momento torsor resistente interno contribuído pela armadura transversal
- Ω_{Hsu} - Coeficiente de proporcionalidade com o momento torsor resistente interno contribuído pela armadura transversal obtido por Hsu
- $\Omega_{th,VATM}$ - Coeficiente de proporcionalidade com o momento torsor resistente interno contribuído pela armadura transversal teórico obtido pelo VATM

Capítulo 1 - Enquadramento do tema

1.1. Introdução ao Estudo da Torção em Estruturas de Betão

1.1.1. Considerações gerais sobre a Torção

Durante muitas décadas no século passado, foi prática comum os projetistas de estruturas desprezarem, para efeitos de dimensionamento, o esforço de torção pois acreditava-se que os esforços de torção eram resistidos através de redistribuições de esforços e através da reserva de resistência que os fatores de segurança então proporcionavam. No entanto, na segunda metade no século XX, o dimensionamento de estruturas em betão armado tendo por base modelos mais realistas passou a ter um papel mais relevante para a comunidade científica. A partir da década de 60, a torção começou a ser considerada como um dos esforços de dimensionamento principais, designadamente em estruturas com geometria e/ou carregamento complexos. Refira-se que até à década de 60 do século passado os documentos normativos, em geral, não incorporavam disposições específicas para o dimensionamento de secções de betão armado à torção. Nessa altura, existiam casos considerados excecionais relativamente a elementos estruturais para os quais era reconhecida a importância em se considerar explicitamente o efeito torsional como esforço principal de dimensionamento. Um dos casos que é bastante referido na literatura, é o das estacas de betão armado pré-fabricadas e que, devido ao processo de cravação utilizado, eram designadas de estacas parafuso (*screw piles*). No processo de cravação, estes elementos eram simultaneamente comprimidos e torcidos por meios mecânicos [66]. A direção de aplicação e a magnitude do momento torsor eram previamente conhecidos (a magnitude era pré-determinada pelo método de cravação) pelo que a estaca era reforçada com uma armadura transversal helicoidal para garantir a resistência à torção. Esta armadura de torção era calculada através da avaliação da capacidade resistente dos elementos à torção a qual era, muitas vezes, obtida recorrendo a ensaios experimentais alterando-se as variáveis (resistência e tipo de solo, profundidade de penetração da estaca, entre outros) e com base em bibliografia especializada.

Os primeiros casos onde a torção constituiu um efeito a ser considerado explicitamente no processo de dimensionamento são referenciados por Armstrong em 1956 [14]. Tais casos referem-se aos projetos da Ponte de Waterloo e do *Royal Festival Hall*, ambos em Londres. O principal autor do projeto da Ponte de Waterloo (Figura 1.1), sobre o rio Tâmesa, Cuerel em 1948 [47], concebeu um tabuleiro constituído por duas vigas caixão nas extremidades, cada uma com três células, formando assim o elemento principal como se pode observar na Figura 1.1. b) e c). Cuerel considerou a problemática situação de se concentrarem cargas excêntricas que provocavam elevados momentos torsores nas vigas em caixão. Com esta preocupação em mente, surgiu a necessidade de se realizarem ensaios [47] para avaliar a capacidade resistente à torção de vigas em caixão com as mesmas características das que

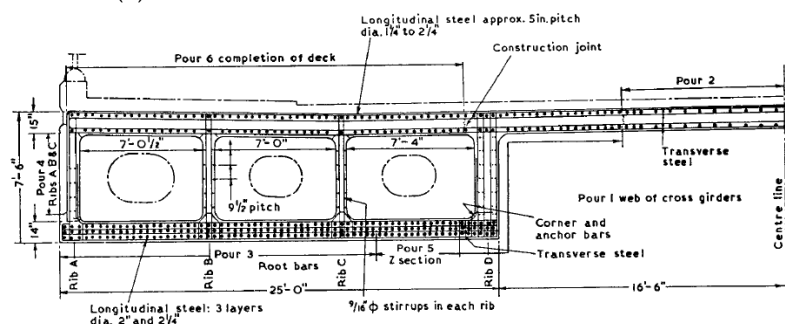
iriam ser utilizadas no projeto. Outros dos objetivos com a realização destes ensaios era confirmar se o fator de forma para a rigidez à torção de uma viga retangular oca ou com secção cheia era o mesmo que o fornecido pela Teoria de St. Venant. Foram obtidos resultados experimentais muito idênticos aos teóricos tendo-se verificado igualmente que a tensão tangencial máxima era atingida na parede de menor espessura.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1 - Ponte de Waterloo - (a) Vista geral [133]; (b) Vista inferior [137]; (c) Secção transversal [20]

Hugh Casson, arquiteto do *Royal Festival Hall* (Figura 1.2), concebeu uma estrutura extremamente modernista para a década de 40, e nomeou apenas jovens projetistas para conceberem o ambicioso projeto. Em 1951, Measor e New [88] disponibilizaram alguns pormenores de dimensionamento e conceção da “caixa de torção” que suportava uma laje em consola. O carregamento da referida laje gerava na viga em caixão, com secção triangular, elevados momentos torsores e era necessário tê-los em consideração na fase de dimensionamento. Tal dimensionamento baseou-se essencialmente na consulta de bibliografia especializada, pelo que não há registos da realização de ensaios experimentais auxiliares.

Estes dois casos práticos referidos nos parágrafos anteriores marcaram, de uma forma geral, a comunidade técnica e científica pelo que despoletou a necessidade de se estudar adequadamente a problemática da torção em elementos de betão armado.

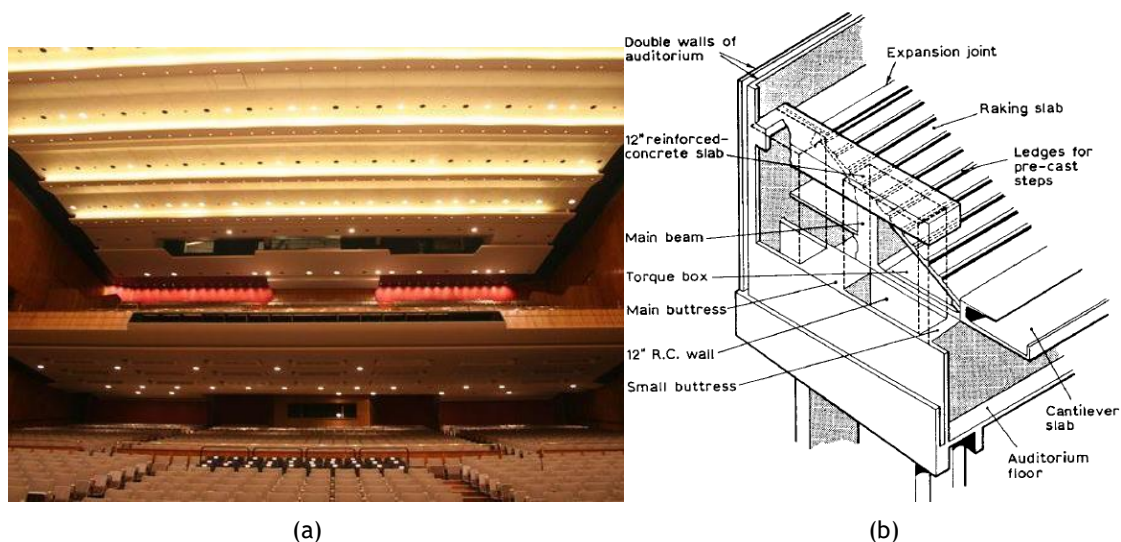


Figura 1.2 - Royal Festival Hall (a) Vista Interior [140] (b) Esquema do caixão triangular para suporte da bancada em consola [20]

A partir de meados da década de 40 do século passado, nos edifícios em particular, começaram a ser introduzidas expressões arquitetónicas arrojadas, dando muitas vezes origem a carregamentos excêntricos e complexos nos elementos estruturais, como o caso de vigas curvas, estruturas enviesadas e outras configurações irregulares. Para este tipo de estruturas, o efeito torsional assume um papel principal no dimensionamento e a simplificação aplicada até então que consistia em desprezar os esforços torsionais tornou-se inadequada. O desenvolvimento dos processos gerais de dimensionamento de estruturas de betão armado veio acompanhar a evolução da arquitetura, conduzindo a uma redução dos coeficientes de segurança por consequência de uma análise estrutural mais precisa e rigorosa. Assim, diminuíra também a reserva de resistência com que os projetistas contavam para a resistência aos esforços de torção. A diminuição dos fatores de segurança deve-se à alteração do método de dimensionamento baseado nas tensões admissíveis pelo método baseado nos Estados Limites Últimos (ELU). Em Portugal, o novo método de dimensionamento entrou em vigor com o Regulamento de Estruturas de Betão Armado em 1966. Era expectável que, perante as hipóteses simplificativas adotadas antes da década de 60 do século passado e antes da aplicação dos novos regulamentos, a adoção dos esforços de torção como esforços secundários seriam denunciados através de fissuração helicoidal e deformações excessivas, comprometendo a estética e a durabilidade das estruturas em questão. Tais casos não são fáceis de encontrar na literatura, no entanto Hsu em 1984 [66] descreve um caso registado em 1964 relacionado com a rotura de uma viga inserida na estrutura do pavimento de um parque de estacionamento na Flórida (EUA), Figura 1.3. A fenda com desenvolvimento helicoidal ilustrada na Figura 1.3 denuncia a insuficiência ou ausência de armadura específica para a resistência à torção. Um outro caso documentado é relativo a uma fissuração pronunciada nas vigas de apoio de varandas pesadas. Na altura foi demonstrado que o estado de fissuração teria sido provocado pelos grandes esforços de torção induzidos pelos referidos elementos em consola [66].



Figura 1.3 - Rotura por torção numa viga de um edifício [20]

Outra dificuldade sentida pelos engenheiros de estruturas fixava-se no cálculo das diferentes formas, arrojadas e complexas em estruturas estaticamente indeterminadas. O cálculo manual era lento e limitava a análise dessas estruturas. Tal aspeto agravou-se com o desenvolvimento da arquitetura moderna devido à maior complexidade das estruturas. Contudo, o avanço de programas de análise computacional acompanhou este desenvolvimento arquitetónico facilitando, desta forma, a análise estrutural e permitiu ainda aos engenheiros uma visão mais realista do comportamento estrutural. Atualmente, a modelação estrutural é uma ferramenta essencial e indispensável no projeto de estruturas, uma vez que o dimensionamento e verificação de elementos de betão armado e pré-esforçado à torção ainda são baseados em procedimentos empíricos e semi-empíricos [66]. Desta forma, as estruturas irregulares e o cálculo específico da torção deixaram de representar dificuldades e passaram a constituir casos normais no projeto de estruturas. Hoje em dia, a modelação estrutural recorrendo a ferramentas computacionais constitui uma aplicação corrente na área do projeto de estruturas e da investigação.

De forma a promover a investigação sobre a torção em elementos de betão armado e a elaboração de recomendações com vista a definir regras adequadas para o dimensionamento à torção de elementos de betão armado, foi criada em 1958 a comissão 438 do *American Concrete Institute* (ACI 438). O primeiro documento normativo a incluir procedimentos explícitos para o dimensionamento de secções à torção surge nos Estados Unidos da América em 1971, o código ACI 318-71 [4]. Deste modo passou a ser exigido ao engenheiro a consideração do esforço de torção como um esforço principal. À semelhança do que aconteceu nos Estados Unidos da América, foi igualmente promovida a investigação nesta área em outros países, de que resultaram novos critérios de dimensionamento posteriormente introduzidos nos respetivos códigos vigentes. Destaca-se a investigação produzida pelo *Comité Européen du Béton* (CEB) através da Comissão V “Esforço transversal - Torção” que, entre 1972 e 1977, desenvolveram extensos estudos sobre a torção que culminaram na incorporação dos procedimentos de dimensionamento à torção na edição de 1978 do código europeu (MC 78

[39]). Apesar de toda a investigação já existente, a problemática da torção com interação de vários esforços ainda constitui um problema atual, pois nestes casos os documentos normativos remetem em geral para uma análise separada e uma sobreposição final das armaduras resultantes. Em geral existe também uma verificação adicional de interação entre os esforços que complementa o processo, designadamente entre o esforço transversal e a torção. Além disso, o cálculo e verificação do comportamento de um elemento à torção em serviço, sobretudo no estado fissurado, ou seja, para os Estados Limites de Serviço (ELS), não se encontram explicitados. Uma vez que as cláusulas estão diretamente relacionadas com a torção fazem essencialmente referência a Estados Limites Últimos. Para os ELS, as normas em geral remetem para simples disposições de armaduras.

De entre os problemas relacionados com o estudo da torção, atrás referidos, realça-se a necessidade de elucidar alguns aspetos considerados ainda duvidosos nos atuais procedimentos de dimensionamento. Ao anteriormente referido, acresce a introdução de novos materiais estruturais e incorporação de sistemas de reforço como o pré-esforço, quer longitudinal quer transversal, que dificulta a análise de elementos sujeitos à torção. Em relação aos materiais destacam-se, por exemplo, os betões de alta e ultra alta resistência, betões leves e betões com fibras.

Os estudos acerca da problemática do comportamento de elementos de betão armado sujeitos à torção ainda não abrangem com suficiente clareza alguns domínios estruturais. Por exemplo, o caso de vigas de betão armado à torção sujeitas simultaneamente a um estado de tensão axial uniforme não se encontra ainda devidamente estudado na literatura. Existem alguns estudos, que serão referidos ainda neste capítulo, onde o efeito do confinamento de vigas é considerado no comportamento de vigas de betão armado à flexão. Tal demonstra a importância de considerar tal efeito para uma análise mais realista do comportamento dos elementos estruturais. Desta forma, considera-se também indispensável o desenvolvimento de estudos sobre elementos à torção e submetidos a um estado de tensão axial uniforme com vista a rever, se necessário, as regras práticas de dimensionamento para que este tipo de elementos estruturais.

Como será analisado na secção seguinte, os esforços de torção podem surgir de diferentes formas e podem representar um esforço com diferentes graus de importância para o dimensionamento.

1.1.2. Classificação fundamental dos efeitos da torção

Nos problemas práticos em que o esforço de torção surge na análise estrutural, distinguem-se várias situações fundamentais, dependendo das condições em que a torção surge na estrutura, das consequências de ser ou não desprezado no procedimento de verificação da segurança e da forma como o esforço de torção é absorvido pela secção transversal.

No caso de pórticos correntes em edifícios com ligações monolíticas entre os elementos estruturais, a torção que possa surgir nas vigas deve-se muitas vezes a exigências de compatibilidades de deformação, constituindo assim um efeito secundário. Este género de torção designa-se por torção de compatibilidade e um exemplo encontra-se ilustrado na Figura 1.4 (a). Neste caso, o equilíbrio da estrutura não depende da consideração do efeito da torção no processo de dimensionamento. Desta forma, a fissuração possível de ocorrer nas zonas onde se instala o esforço de torção pode gerar um acréscimo da deformação do elemento mas sem que ocorra o colapso da estrutura. Devem no entanto ser adotadas as disposições construtivas necessárias e de forma a garantir as quantidades mínimas de armadura para o controlo da fissuração como recomendado nas disposições normativas. No caso de não ser prevista uma armadura específica para garantir a resistência à torção para os Estados Limites Últimos, a rigidez de torção das vigas reduz-se drasticamente na passagem para o Estado II (fase de fissuração) (Figura 1.5). Tal deve ser considerado em fase de projeto, adotando uma rigidez de torção baixa ou mesmo nula.

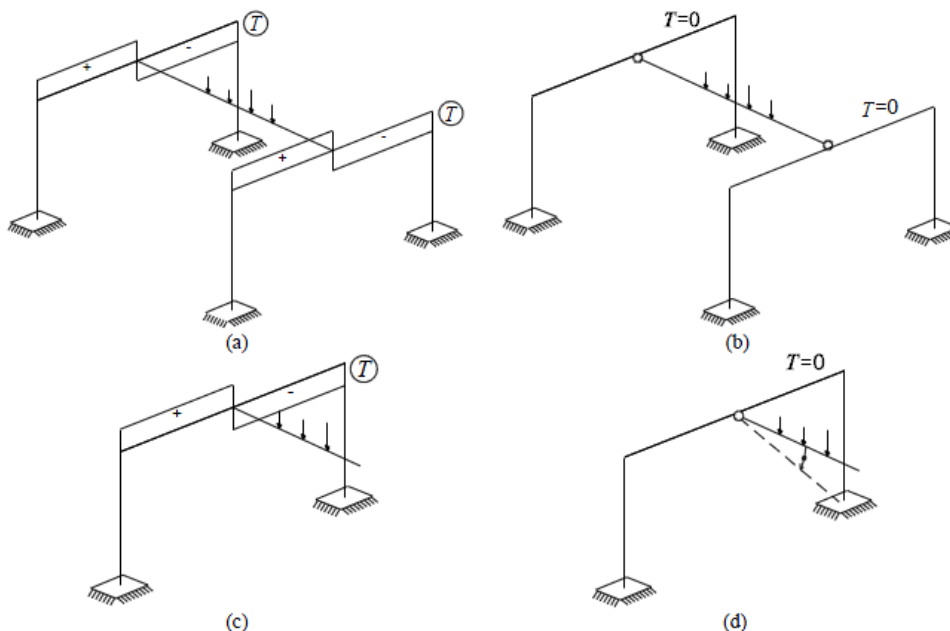


Figura 1.4 - Torção de compatibilidade e de equilíbrio e a respetiva formação de rótulas plásticas [12]

A Figura 1.5 ilustra a perda de rigidez de torção (85 a 90% segundo observado por Hsu em 1968 [63]) de vigas de secção retangular, com diferentes fatores de forma (relação entre a altura e a largura da secção transversal) mas com áreas iguais, ensaiadas à torção e sujeitas a

diferentes níveis de carga [37]. A perda de rigidez implica a redução dos esforços de torção, pelo que estes momentos e seus efeitos consequentes podem ser desprezados para efeitos de ELU. A redistribuição interna dos esforços hiperestáticos decorrente da redução drástica dos esforços de ligação, conduz a que os esforços iniciais de torção possam ser compensados por um aumento de esforços de flexão e corte noutras secções. No exemplo da Figura 1.4 (a) o novo modelo de dimensionamento a considerar, na situação limite e para os ELU, encontra-se representado na Figura 1.4 (b).

No caso de torção de equilíbrio, a estabilidade da estrutura depende da rigidez de torção da viga de apoio. Portanto, neste caso, não se pode desprezar este efeito em termos de dimensionamento. O caso ilustrado na Figura 1.4 (c) representa perfeitamente o descrito anteriormente, ou seja, se na zona de ligação da viga em consola com a viga de apoio se considerar a rigidez de torção nula (Figura 1.4 (d)), parte da estrutura fica instável e a primeira pode rodar livremente nessa ligação, dando-se o colapso parcial da estrutura (a parte em consola da estrutura é, em si, isostática). Quando a torção gerada é fundamental para o equilíbrio de pelo menos parte de uma estrutura, a mesma é designada por torção de equilíbrio.

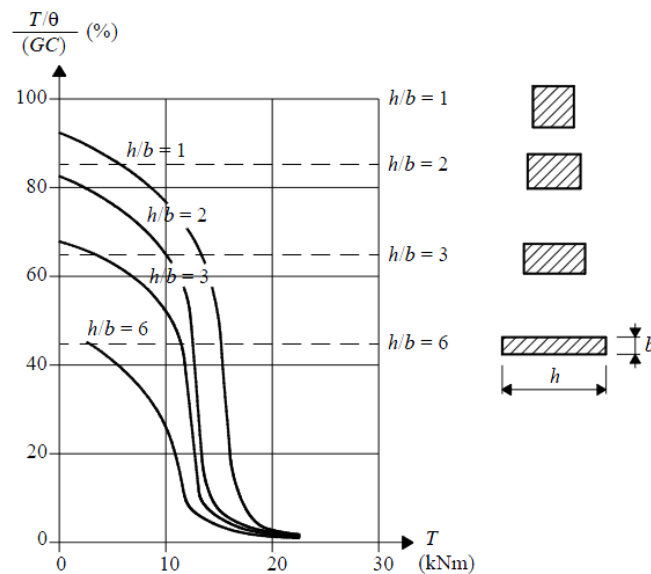


Figura 1.5 - Evolução da rigidez de torção com o momento torsor [20]

Atendendo ao exposto nos parágrafos anteriores compreende-se que a torção de equilíbrio deve ser considerada nos Estados Limites Últimos (ELU). Já para a torção de compatibilidade, tendo em conta que após a fissuração os momentos torsores resultantes das restrições induzidas pelos elementos adjacentes se reduzem substancialmente, interessa fundamentalmente garantir a segurança dos elementos para os ELS. Devido à necessidade de compatibilidade de deformações dos elementos adjacentes, podem produzir-se efeitos secundários que devem ser considerados para os ELS e deve dispor-se de armaduras necessárias para controlar esses efeitos. O cálculo complexo da deformação e da fissuração é

substituído, nos regulamentos e códigos, pela adoção de armaduras construtivas pois o problema ocorre frequentemente em estruturas correntes e a dificuldade é ultrapassada com alguma simplicidade.

A simplificação considerada nos modelos de cálculos das Figuras 1.4 (a) e (b), onde se despreza a rigidez de torção, encontra-se também ilustrada na Figura 1.6 (a) e (b). A Figura 1.6 (a) representa o caso do apoio de extremidade de uma laje de pavimento numa viga de bordo e a Figura 1.6 (b) é referente ao caso de um apoio de continuidade de uma laje de pavimento. A mola, representada nos modelos iniciais, colocada na zona da ligação monolítica simula a rigidez de torção elástica das vigas de apoio. A Figura 1.6 mostra que a simplificação induzida pelo facto de se desprezar a rigidez de torção das vigas de apoio facilita muito o cálculo dos diagramas elásticos dos momentos fletores. Esta simplificação obriga à adoção de regras construtivas adequadas para o controlo de fendilhação na zona de ligação da laje às vigas.

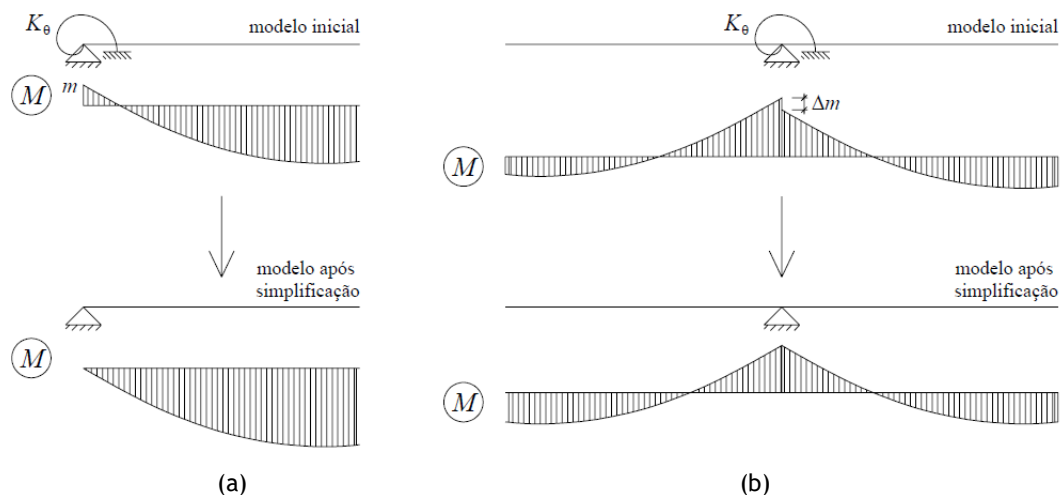


Figura 1.6 - Simplificação dos modelos de cálculo para viga de extremidade e de continuidade [20]

O facto de se poder desprezar a torção de compatibilidade para efeitos de dimensionamento é a razão pelo qual, em geral, na definição de modelos de grelha se pode considerar nula a rigidez de torção para os elementos lineares constituintes da grelha. Esta simplificação reduz substancialmente o tempo necessário para o cálculo dos esforços e facilita também a passagem dos esforços para as armaduras na fase de dimensionamento [20].

A forma da secção transversal do elemento influencia, de certo modo, o mecanismo como este absorve os esforços de torção a que se encontra sujeito. Desta forma, surge mais uma classificação fundamental dos efeitos da torção caracterizando a forma como as secções absorvem os efeitos torsionais. No caso de secções simples cheias e vazadas, os momentos de torção são resistidos essencialmente por um fluxo circulatório de tensões tangenciais ao longo das paredes da secção, a designada *Torção circulatória* ou *Torção de St. Venant*, ilustrada na Figura 1.7 (a). Em elementos de secções abertas a torção é resistida essencialmente por

momentos adicionais que se geram nas paredes, a denominada *Torção com empenamento*, encontrando-se este caso ilustrado na Figura 1.7 (b).

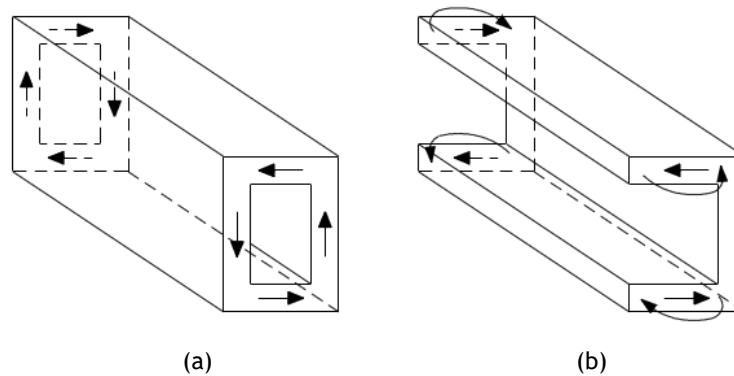


Figura 1.7 - Torção circulatoria e torção com empenamento [12]

A torção com empenamento é um tema que não será tratado explicitamente neste trabalho. No entanto, de seguida serão referidos alguns aspetos relativos a este tipo de torção que se consideram importantes. Na realidade, a ação torsional é acompanhada muitas vezes pelo empenamento das secções. O empenamento da secção transversal é um fenómeno muitas vezes associado à ação torsional e apenas as secções de geometria circular e aquelas com certas propriedades de configuração são livres do empenamento. Este fenómeno ocorre devido a diferentes alongamentos longitudinais das fibras, por exemplo pela presença de diafragmas que restringem as deformações longitudinais, ou devido à distribuição não homogénea do momento torsor. Em resultado, desenvolvem-se extensões e tensões axiais adicionais na secção. O empenamento é geralmente variável ao longo do desenvolvimento da viga [124].

Nos locais onde o empenamento é restringido ocorrem tensões longitudinais de tração e de compressão máximas e uma diminuição das tensões tangenciais. As vigas com secção de paredes finas não sofrem tanto os efeitos do empenamento como vigas com secção de paredes mais espessas [123]. Quando um elemento não se encontra restringido ao empenamento, assim como para secções cheias ou ocas, os efeitos de empenamento não são tão relevantes quanto os efeitos da torção de St. Venant. Em secções abertas compostas por pelo menos três paredes (como por exemplo, secções em “I” ou “U”), o empenamento pode gerar esforços de flexão secundários que modificam de uma forma importante o estado de tensão ao longo da secção transversal e ao longo de toda a viga. As restantes secções (cheias, vazadas e de parede fina composta até duas paredes, por exemplo “L”), o empenamento pode gerar uns pequenos acréscimos de tensões no elemento que podem ser desprezados no cálculo por não afetarem a sua capacidade resistente. Quando o empenamento não pode ocorrer livremente, mesmo para secções cheias ou vazadas, as tensões longitudinais adicionais que resultam da restrição ao empenamento reduzem-se drasticamente no Estado II (fissurado), uma vez que a fissuração liberta parte dessa restrição [123]. Desta forma,

conclui-se que o empenamento, resultante de um carregamento que gera torção, é aparentemente um aspeto importante a ter em conta nas vigas em caixão de pontes, onde muitas vezes a utilização de pré-esforço garante a não fendilhação em serviço e onde atualmente são de preferência concebidas soluções monolíticas sempre que possível. No entanto, vários aspetos contribuem para que ainda assim os efeitos do empenamento possam ser desprezados.

Estes aspetos explicam o facto de ainda não ter sido desenvolvido um método de cálculo satisfatoriamente simples para a consideração dos efeitos do empenamento em vigas de betão armado nos ELU e também este tipo de torção não ser contemplado explicitamente nos documentos normativos. A torção com empenamento é um fenómeno difícil de ter em conta no dimensionamento ao ELU. Existe no entanto alguma bibliografia especializada que trata o problema da torção de empenamento, por exemplo, Wlassow em 1964 [125], Grob em 1975 [60] e Kovács em 1995 [36].

No que respeita à torção de St. Venant, no caso de uma viga de secção cheia ou vazada de betão armado, o mecanismo de absorção dos efeitos torsionais através das tensões circulatorias (comportamento puro de torção) só é válido quando o elemento não se encontra fissurado. Após a fissuração do betão, os efeitos torsionais deixam de poder ser estudados com base numa análise apenas da secção transversal requerendo uma análise global da viga ao longo do seu eixo longitudinal. Este assunto será abordado mais especificamente no Capítulo 2.

1.1.3. Descrição do comportamento de uma viga de betão armado à torção

A partir da observação de resultados experimentais da campanha de ensaios realizada por Hsu em 1968 [63], é possível desenhar uma curva tipificada que permite caracterizar o comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção, designadamente a curva momento torsor (T) - rotação (θ). Tal curva comportamental permite avaliar, de uma forma simples, o estado evolutivo da viga em todo o historial de carga. Os dados experimentais resultantes de ensaios de vigas correntes em betão armado sujeitas à torção pura até à rotura, e disponíveis na literatura consultada, permitem, para taxas de armaduras moderadas, desenhar uma curva $T - \theta$ típica tal como a representada na Figura 1.8. De uma forma geral, e à semelhança do assumido por Bernardo e Lopes em 2008 [24], é possível distinguir na referida curva típica três zonas (Zonas 1, 2 e 3), correspondentes a fases de comportamento distintas.

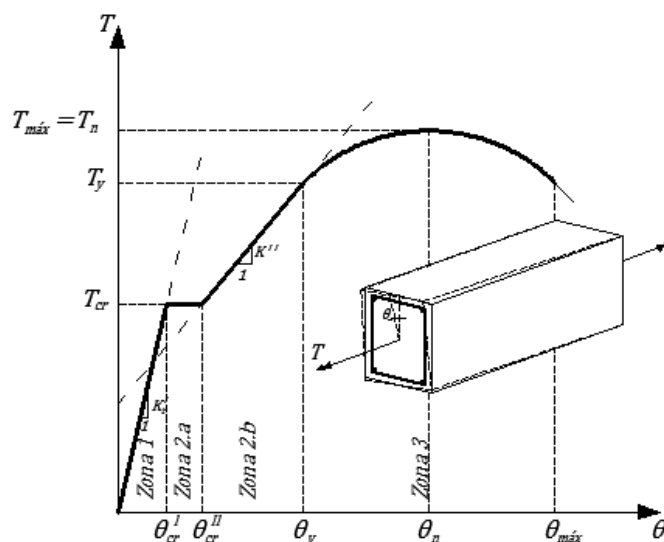


Figura 1.8 - Curva $T-\theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura

A Zona 1 da curva $T-\theta$ da Figura 1.8 corresponde à fase comportamental antes de ser atingido o momento torsor de fissuração T_{cr} (Estado I ou não fissurado). Nesta fase, para calcular a rigidez de torção (K^I) considera-se válida a Teoria de St. Venant [4], uma vez que se assume um comportamento elástico linear da viga. Desta forma, pode considerar-se que o declive da curva é aproximadamente constante na zona 1. Em consequência, a curva $T-\theta$ pode ser aproximada a uma reta. No entanto, tal aproximação deve ser encarada como uma hipótese simplificativa, uma vez que os ensaios experimentais mostram que, pouco antes de ser atingido o momento torsor de fissuração, a viga evidencia uma ligeira perda de rigidez, provavelmente resultante da microfissuração do betão [37]. No entanto, como as rotações são muito pequenas nesta fase comportamental, o cálculo da rigidez de torção tendo por base um comportamento elástico-linear assumido é bastante aceitável. Importa ainda referir que nesta fase a armadura de torção tem pouca influência na rigidez da viga, contribuindo apenas para aumentar ligeiramente o momento torsor para o qual ocorre a fissuração. Este ligeiro aumento do momento torsor é diretamente proporcional à taxa de armadura de torção, tal como referido por Bernardo em 2003 [20]. O cálculo do momento torsor de fissuração (T_{cr}) pode ser efetuado através da Teoria da Elasticidade [109], da Teoria da Flexão Enviada [62] ou ainda através da Teoria do Tubo Fino de Bredt [34].

Após ser atingido o momento torsor de fissuração, inicia-se a Zona 2 (Estado II ou fissurado). Para as vigas com secção cheia, esta fase tem início com um aumento significativo da rotação para um valor do momento torsor constante e igual a T_{cr} (Zona 2.a da Figura 1.8). Tal aumento da rotação ocorre ao longo de um intervalo de deformação ($\theta_{cr}^I < \theta < \theta_{cr}^{II}$), a partir do qual se observa um desenvolvimento praticamente linear da curva $T-\theta$ até um determinado nível do momento torsor. O declive deste troço representa a rigidez de torção da viga em

estado fissurado (K''). Observações experimentais mostram que, em vigas com secção vazada de parede fina (por exemplo, nos estudos de Lampert e Thurliman em 1969 [78] e também Bernardo em 2003 [20]) a Zona 2.a não é em geral visualizada comparativamente a vigas com secção cheia. Bernardo em 2003 [20] avançou uma possível explicação para esta diferença de comportamento entre vigas com secção cheia e vazada na transição do estado não fissurado para o estado fissurado. Tal explicação faz intervir a capacidade de redistribuição de tensões tangenciais que as secções cheias apresentam devido à existência do núcleo de betão, dando origem a uma zona de transição comportamental até que as armaduras sejam efetivamente mobilizadas. Tal capacidade de redistribuição é muito limitada nas secções vazadas, principalmente se as paredes forem finas, obrigando a que as armaduras sejam mais rapidamente mobilizadas após a fissuração. A caracterização do comportamento da viga à torção no estado fissurado pode ser realizada, de forma aceitável, por intermédio de uma análise elástico-linear em regime fissurado. Um modelo adequado para caracterizar a viga na Zona 2.b é um modelo de treliça espacial com ângulo constante de 45° e considerando um comportamento elástico-linear dos materiais, ou seja, considerando relações constitutivas lineares para os mesmos, tal como estabelecido por Hsu em 1973 [61]. A validade deste modelo foi observada por Bernardo em 2003 [24] e Bernardo e Lopes em 2008 [30].

O modelo elástico-linear referido anteriormente para caracterizar a Zona 2.b pode ser considerado válido até ao ponto em que a curva $T-\theta$ comece a evidenciar um comportamento não linear acentuado, a partir do qual a viga entra na Zona 3. Tal situação pode ocorrer por duas razões. O comportamento elástico-linear pode deixar de ser válido quando pelo menos uma das armaduras de torção (longitudinal ou transversal) entra em cedência. No caso de vigas com taxas de armadura elevadas, a perda de linearidade pode também ocorrer devido ao nível elevado de tensões instaladas no betão comprimido das escoras, o que origina uma resposta não linear dos materiais. Um modelo eficaz para caracterizar esta fase comportamental é o modelo de treliça espacial com ângulo variável (*Variable Angle Truss Model* - VATM). A Fase 3 termina quando a viga atinge a rotura efetiva, quer por esmagamento do betão comprimido nas escoras quer por rotura das armaduras tracionadas (caso de vigas com taxas de armaduras de torção muito baixas).

1.2. Justificação do tema de trabalho

Nesta Secção pretende-se apresentar em síntese a evolução histórica de alguns dos principais estudos e desenvolvimentos que conduziram ao conhecimento atual do comportamento de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado submetidas à torção pura. Uma vez que o presente trabalho pode ser dividido em duas partes (ver Secção 1.4), a presente secção apresenta-se dividida em duas subsecções. A primeira subsecção justifica e introduz a primeira parte do presente trabalho, enquanto a segunda subsecção justifica e apresenta uma introdução histórica à segunda parte do trabalho. Deve ainda referir-se que as duas partes que constituem este trabalho apresentam nomenclaturas diferentes para algumas variáveis uma vez que os modelos têm algumas variáveis diferentes. Contudo, todas as novas nomenclaturas que possam surgir ao longo do trabalho serão devidamente explicadas.

A primeira subsecção apresenta a evolução histórica de vários modelos, desde os estudos que deram origem ao Modelo de Treliza de Ângulo Variável (VATM) até ao modelo modificado do VATM de Taborda [116] que inclui a influência do confinamento axial no comportamento de uma viga de betão armado sujeita à torção. Nesta subsecção é ainda apresentado a validação do VATM modificado através da utilização dos resultados experimentais de vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal não aderente ensaiadas por Bernardo em 2003 [20]. Note-se ainda que o VATM modificado ao caso de vigas com confinamento axial constitui a base da primeira parte do presente trabalho.

Na segunda subsecção é apresentado de forma sucinta a evolução histórica dos estudos de torção que conduziram ao modelo que permite caracterizar todo o historial de carga de uma viga de betão armado sujeita à torção, designadamente o GSVATM. Este modelo reveste-se de uma grande importância uma vez que fornece um conceito claro de como uma viga de betão armado resiste à torção pura em todo o intervalo de carregamento, incluindo a fase antes e depois a fissuração do betão. Tal modelo constitui o modelo base da segunda parte do presente trabalho.

1.2.1. Notas históricas - Evolução do estudo da torção até ao VATM

Nas últimas décadas, várias teorias foram desenvolvidas para calcular a resistência à torção pura de vigas de betão armado. A base dos estudos tem origem no estudo pioneiro de barras homogéneas à torção. Os modelos teóricos associados são em muitos aspetos diretamente extrapoláveis ao caso de vigas de betão armado não fissuradas sujeitas à torção. Em 1826, Navier [93] baseou a dedução da equação para barras homogéneas com secção retangular em tudo muito semelhante ao realizado à equação teórica, deduzida pelo mesmo autor, para barras homogéneas com secção circular. Navier assumiu que as tensões tangenciais eram proporcionais à distância ao eixo de torção (à semelhança das barras circulares). Posteriormente, foi observado que as extrapolações de Navier sobrestimavam a rigidez de

torção em cerca da 20%, o que levantou dúvidas quanto à exatidão das equações de Navier para barras retangulares.

Em 1855 St. Venant [109] apresentou uma solução para a problemática da torção de peças prismáticas com secção retangular. St. Venant propôs substituir o momento polar de inércia pela constante de torção de St. Venant, 18% inferior ao momento polar de inércia. Após três décadas sem desenvolvimentos na problemática da torção, a evolução das ferramentas matemáticas, mais especificamente as Séries de Fourier e a teoria desenvolvida por Cauchy em 1828 [35], a designada Teoria da Elasticidade, permitiram a St. Venant desenvolver a sua teoria. Segundo a Teoria de St. Venant, uma barra prismática sujeita à torção origina apenas tensões tangenciais circulatorias. A distribuição das tensões tangenciais numa secção transversal de uma barra prismática, segundo a Teoria de St. Venant, mostra que a parte da secção mais solicitada corresponde à parte mais externa da mesma. A tensão tangencial é nula no eixo de torção (centro de corte da secção), sendo incrementada até a um valor máximo à superfície (a meio da face maior em secções retangulares). De um ponto de vista mais prático, a secção transversal mais eficiente e económica para resistir à torção é um tubo fino, onde toda a secção do tubo se encontra totalmente solicitada [116]. Em 1896, Bredt [34] derivou umas equações para tubos de paredes finas, equações que se tornaram muito úteis nos estudos posteriores de vigas de betão armado à torção.

Desde a década de 60 do século passado, foram desenvolvidas diversas teorias que permitem calcular a resistência à torção pura de vigas de betão armado. Estas teorias podem, de uma forma geral, ser divididas em dois grupos: a Analogia da Treliça Espacial e a Teoria da Flexão Enviesada. As três teorias mais marcantes foram desenvolvidas por Rausch em 1929 [104], Cowan em 1950 [46] e Hsu em 1968 [68]. As teorias desenvolvidas por Rausch e Cowan pertencem à Analogia da Treliça Espacial e a teoria de Hsu pertence à Teoria da Flexão Enviesada. Outros autores, como Lampert e Thurlimann em 1969 [78], Elfgren em 1972 [49] e Collins em 1973 [43], desenvolveram posteriormente novas teorias tendo por base as teorias originais de Rausch e Cowan. A Analogia da Treliça Espacial, desde a sua origem, influenciou a grande maioria dos investigadores e grupos de trabalho para o estabelecimento de normas. A título exemplificativo, o código do ACI, durante um longo período de tempo (desde 1971 [4] até 1995 [3]), adotou a teoria original de Hsu como base das suas disposições normativas para a torção em vigas de betão armado. Em 1995, o código do ACI foi revisto e as disposições relativas à torção foram reformuladas tendo por base a Analogia da Treliça Espacial, à semelhança do adotado por diversos outros documentos normativos (por exemplo, códigos europeus e canadiano).

Deste modo, torna-se assim importante referir a idealização da teoria de Analogia de Treliça Espacial desenvolvida por Rausch em 1929 [104] uma vez que constitui o modelo que serviu de base, entre outras teorias desenvolvidas posteriormente, ao VATM que constitui a teoria base da primeira parte deste trabalho. Ritter em 1899 [105] e Morsh em 1902 [90] simularam um

elemento de betão armado (fase pós-fissuração) tendo por base um modelo de treliça no plano da carga. Os referidos autores observaram que numa viga de betão armado sujeita ao esforço transversal, ocorre fissuração diagonal que divide o betão numa série de escoras. Neste modelo de treliça, as barras longitudinais superiores e inferiores constituem as cordas da treliça, enquanto as barras transversais e as escoras de betão constituem os elementos de equilíbrio da alma. Para simplificar o modelo, os autores consideraram a inclinação das escoras como sendo constante e igual a 45° . Este modelo, designado de Modelo de Treliça a 45° de Ritter e Morsh, permitia derivar facilmente e de forma elegante três equações de equilíbrio a partir das quais podiam ser calculadas as tensões na armadura transversal, na armadura longitudinal e nas escoras de betão a 45° . Estas equações podiam ser utilizadas para calcular a resistência última ao esforço transversal de uma viga de betão armado [116].

Em 1929 [104] foi proposta a primeira teoria capaz de prever a resistência última de elementos de betão armado sujeitos à torção. Esta teoria foi proposta por Rausch e consiste basicamente no alargamento do campo de aplicação do Modelo de Treliça a 45° . Rausch assumiu que uma viga de betão armado, após fissurar, funciona como um tubo. Deste modo a resistência de uma viga submetida a um momento torsor consiste, essencialmente, num fluxo circulatório de corte em torno do eixo de torção da viga, ou seja, este tubo funciona como uma treliça espacial. Esta treliça é formada por uma série de escoras inclinadas a 45° (em relação ao eixo da viga) que interagem com a armadura longitudinal e transversal. Face ao exposto, pode concluir-se que a ideia de Analogia da Treliça Espacial de Rausch estabelece uma conjugação inteligente entre a teoria do tubo fino de Bredt com a analogia da treliça plana para a análise do esforço transversal em vigas de betão armado. Além disso, este conceito fornece uma ideia bastante esclarecedora do funcionamento da armadura e do betão na resistência à torção [116]. No entanto, o modelo simplificado de Rausch não tem em conta alguns mecanismos resistentes adicionais, designadamente: a resistência ao corte da escora, a resistência adicional devido ao “efeito de ferrolho” nas barras longitudinais e transversais, a contribuição do núcleo de betão e a resistência do betão à tração [20]. A não consideração destes mecanismos foi considerada como a responsável pelos desvios observados entre as previsões e as resistências efetivas de vigas à torção.

De modo a melhorar a precisão do modelo de Rausch foram desenvolvidas, nas últimas décadas do século passado, três aproximações. A primeira aproximação considera que a armadura é parcialmente eficiente, aproximação seguida por Andersen em 1935 [10], Cowan em 1950 [46] e assumida pelo código do ACI desde 1971 [4] até 1995 [3]. A segunda aproximação baseou-se na redução da área A_0 (área limitada pela linha média do fluxo de corte e que consta na formulação de Rausch pela introdução da Teoria do Tubo Fino de Bredt), assumindo que esta coincide com a área limitada por uma linha fechada que liga os centros dos varões longitudinais. Esta aproximação foi inicialmente seguida por Lampert e Thurlimann em 1969 [78] e adotada pelo código modelo europeu de 1978 [39]. A terceira

aproximação foi proposta por Collins e Mitchell em 1980 [42] e consiste também em reduzir a área A_0 assumindo que a linha média do fluxo de corte coincide com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras. Nesta aproximação, considera-se que o betão de recobrimento, betão exterior à linha média de um varão transversal, não é efetivo. Contudo, a hipótese de Collins e Mitchell para o cálculo da profundidade do bloco equivalente das tensões de compressão não é rigoroso, pois não tem em conta o *softening effect* [116] (efeito de “amolecimento” do betão). Na realidade, a resistência à compressão da escora não é igual à resistência do betão medida em provetes cilíndricos em compressão uniaxial, uma vez que a resistência da escora é significativamente reduzida pela fissuração diagonal (Hsu e Mo em 1985 [69]). Por isso, esta aproximação não foi adotada pela comunidade científica em geral. Ainda assim, esta aproximação continua a ser adotada pelo código canadiano [12].

As aproximações enunciadas no parágrafo anterior, apesar de melhorarem a equação proposta por Rausch, apresentavam alguns problemas que comprometiam a sua utilização generalizada. A primeira questão dizia respeito ao facto de as aproximações se encontrarem calibradas apenas para um tipo de estruturas (vigas com pequenas dimensões do tipo das utilizadas em edifícios) e não se poder aplicar na generalidade dos casos. A segunda questão dizia respeito ao facto dos métodos empíricos de modificação da equação de Rausch serem considerados teoricamente não satisfatórios. Deste modo, era necessário uma nova aproximação que, em primeiro lugar, unificasse o comportamento de vigas com pequenas ou grandes secções, bem como incluísse o caso das vigas pré-esforçadas. Em segundo lugar, essa nova aproximação deveria abandonar, tanto quanto possível, o carácter empírico da correção da equação de Rausch. De entre alguns modelos teóricos propostos por diversos autores, um dos modelos mais utilizado é o VATM que incorpora o *softening effect*. Este modelo teórico foi desenvolvido sucessivamente por diversos autores que tiveram por base o modelo de treliça inicial de Rausch.

Em 1969, Lampert e Thurlimann [78] desenvolveram o VATM assumindo que o ângulo das escoras de betão podia variar para além dos 45° e que a teoria da plasticidade seria aplicável aos elementos de betão armado. Assim, passou a ser possível explicar-se o facto de as armaduras longitudinal e transversal entrarem ambas em cedência mesmo que estas não respeitem o princípio da igualdade de volume (armaduras não equilibradas). Os mesmos autores, ao estudarem a deformação de vigas sujeitas à torção, observaram que as superfícies da viga que inicialmente se encontravam planas, após a deformação por torção transformavam-se numa superfície hiperbólica, ou seja, a escora diagonal de betão para além de se encontrar num estado de compressão também se encontra sujeita a um efeito de flexão por imposição da deformação por torção. O VATM foi ainda desenvolvido por Collins, a partir de 1973 [43], embora com uma abordagem diferente. Este autor, em alternativa ao uso da teoria da plasticidade, utilizou a compatibilidade de deformações da treliça. Collins derivou uma equação de compatibilidade para determinar o ângulo do campo de tensões de

compressão idêntica à de Wagner para o campo de tensões de tração de almas de perfis metálicos [122]. Desta forma, Collins podia prever as condições de deformação utilizando o círculo de Mohr. O Modelo de Collins foi designado de Teoria do Campo Diagonal de Compressões.

Nos modelos anteriormente referidos, foi adotada a curva tensão - extensão ($\sigma-\epsilon$) convencional para o betão comprimido nas escoras (curva obtida através de ensaios de provetes cilíndricos à compressão uniaxial). Na realidade esta curva não é realista, vindo-se posteriormente a observar que a sua utilização conduzia a desvios entre os valores previstos e efetivos da resistência à torção de vigas de betão armado. Como já foi referido anteriormente, existe na realidade a influência negativa do *softening effect*. Este fenómeno foi incorporado no VATM com sucesso por Hsu e Mo em 1985 [69] [70], dando origem a um novo modelo cujas previsões das resistências à torção para vigas de betão armado e pré-esforçado eram congruentes com as observadas experimentalmente. A descrição detalhada do VATM será feita no Capítulo 2, Secção 2.2.

Geralmente, em casos correntes de projeto de estruturas, no dimensionamento de vigas de betão armado é desprezado o efeito da restrição axial que os elementos estruturais adjacentes induzem na viga, tais como pilares e lajes. Note-se que cada viga se encontra restringida não só em termos de rotação nas suas extremidades como também na sua deformação axial. Em casos de torção ou flexão em vigas de betão armado, em virtude do confinamento axial, pode gerar-se um estado de tensão de compressão axial. O nível de confinamento na viga aumenta com o aumento da rigidez dos elementos adjacentes. Desta forma, Taborda em 2012 [116] analisou a influência do confinamento axial para o dimensionamento de vigas de betão armado à torção, tendo verificado que, entre outros efeitos, o confinamento da viga conduz ao aumento da sua resistência. Existem documentos normativos que preveem o aumento do esforço transversal resistente de vigas em virtude da existência de um estado de tensão de compressão axial, por exemplo o Eurocódigo 2 [50]. No entanto não existem códigos que regulamentem a resistência de vigas à torção em função da existência de um estado de compressão axial simultâneo.

Na literatura, os primeiros estudos publicados que têm em conta a situação de confinamento axial são relativos a estruturas metálicas, sendo que este efeito apresenta uma importância considerável nos problemas de encurvadura dos perfis metálicos. Smith-Pardo e Aristizabal-Ochoa em 2007 [114] realizaram ensaios em vigas metálicas compostas por um perfil prismático, onde puderam concluir que o aumento das imperfeições iniciais aumenta a compressão axial induzida, e este aumento é maior para o caso de cargas concentradas em comparação com cargas uniformemente distribuídas. Tsipiras e Sapountzakis, em 2009, [111] concluíram que a condição axial limite tem uma influência significativa na rigidez de torção e na resposta de uma viga mista (betão + perfil metálico “I”) ao efeito do momento torsor uniforme. As vigas que possuem uma restrição axial total, para o mesmo nível de momento

torsor, apresentam menores ângulos de torção, ou seja, a restrição total dos deslocamentos ao longo do eixo da viga incrementa a sua rigidez à torção. No caso de estruturas metálicas, o Eurocódigo 3 preconiza métodos avançados de cálculo que são baseados em modelos numéricos de comportamento não linear material e geométrico [100].

Outro estudo importante na problemática do efeito do confinamento axial surge em 2011 para a flexão através de estudos publicados por Délcio Gomes e por Rui Rodrigues [57] [107], na FCTUC. Estes autores avaliaram o efeito do confinamento axial em vigas de betão armado sujeitas à flexão. De uma forma geral, os referidos autores observaram que a influência da restrição axial incide essencialmente no Estado II (após a fissuração) e no Estado III (após a cedência das armaduras), tal como pode ser observado na Figura 1.9. A reserva de resistência que as vigas axialmente confinadas apresentam no Estado III é conferida pelo esforço axial mobilizado no sistema de restrição axial [25].

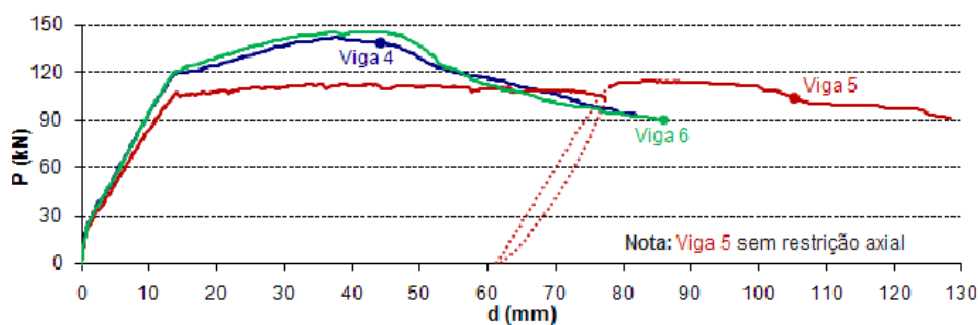


Figura 1.9 - Diagramas P-d das vigas 4, 5 e 6 [57]

Com base no estudo de Délcio Gomes e de Rui Rodrigues de 2011, é ainda possível observar-se que apesar da restrição axial incrementar a rigidez da viga, a sua ductilidade diminui. Este facto foi observado a partir da comparação do valor de deformação última que, no caso de vigas restringidas axialmente, é inferior ao valor da deformação última de vigas ensaiadas sem restrição axial [107]. Entende-se por ductilidade a capacidade de um material, secção, elemento estrutural ou estrutura em suportar grandes deformações sem que haja grande perda da sua resistência. A esta propriedade é hoje atribuída uma grande importância visto que está diretamente relacionada com a capacidade estrutural de redistribuição de tensões e esforços em segurança. Por isso, o estudo de qualquer fenómeno que modifica o comportamento dúctil de vigas torna-se importante de ser estudado.

Outro estudo publicado por Tiejiong Lou et al., em 2011, permite também chegar às conclusões apresentadas anteriormente [83]. O autor simulou a restrição axial através da colocação de armaduras exteriores que atuam como restrição passiva, ou seja, apenas atuam quando a viga tende a aumentar o seu comprimento. A viga, ao ser solicitada pelo carregamento, tende a sofrer deformações na direção longitudinal e, conseqüentemente, o elemento tende a alongar na zona tracionada da secção transversal, induzindo uma força de

tração na armadura externa. Tal como se pode observar no diagrama carga-deformação, representado na Figura 1.10, com o aumento da área de armadura exterior A_{sr} (simulando uma maior restrição axial), o valor da carga de cedência e de rotura aumentam, enquanto a carga de fissuração se mantém visualmente inalterada. Note-se que a força de restrição na armadura externa aumenta linearmente com a deformação da viga, aumentando deste modo a capacidade resistente de carga da viga.

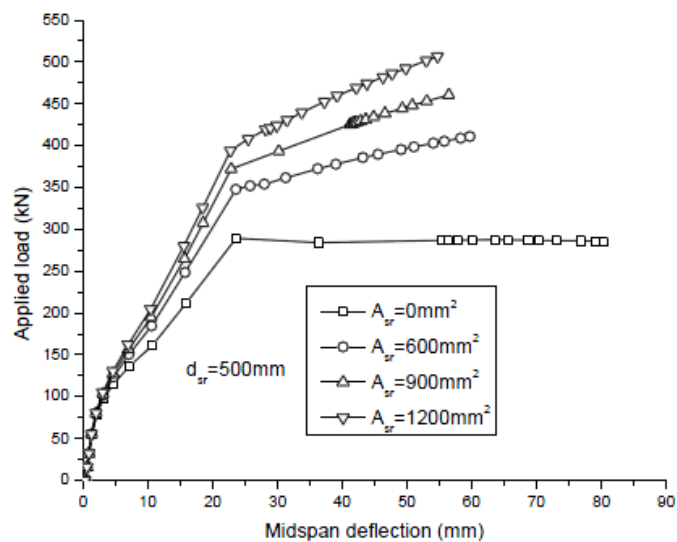


Figura 1.10 - Diagrama da carga-deformação de vigas de betão armado axialmente restringidas com diferentes áreas de reforço exterior [83]

Face aos escassos estudos específicos e documentos normativos que incluam cláusulas para o dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção pura em situação de confinamento axial, Taborda em 2012 [116] desenvolveu um modelo que consiste na extensão do VATM ao caso de vigas de betão armado em situação de confinamento axial. Este estudo surgiu da necessidade de avaliar com algum rigor a resistência e a ductilidade para o dimensionamento mais otimizado de elementos estruturais para o Estado limite Último de rotura por torção [13]. O facto de a viga se encontrar restringida origina o aparecimento de um estado de compressão ao longo do seu eixo longitudinal que proporciona um aumento da rigidez e da resistência da mesma, devido ao fecho das fissuras. Além disso, o estado de compressão origina também um aumento de tensão nas escoras inclinadas que conduz a uma rotura tendencialmente mais frágil por esmagamento do betão. Ou seja, o estado de compressão axial impede os elementos longitudinais de se alongarem livremente, e consequentemente, a restrição da extensão das armaduras coíbe as armaduras de entrarem em cedência para o valor de carga esperado (sem confinamento). Desta forma, à medida que o efeito de restrição axial aumenta, a rotura da viga tende a apresentar um comportamento mais frágil. O VATM modificado por Taborda [116] foi validado através dos resultados experimentais de vigas com pré-esforço longitudinal exterior, sujeitas à torção, e ensaiadas por Bernardo em 2003 [20]. Este tipo de vigas podem ser consideradas válidas para o estudo

comparativo em questão uma vez que a armadura de pré-esforço longitudinal exterior induz igualmente uma restrição à deformação axial da viga. As armaduras de pré-esforço atuam como restrição passiva, ou seja, a restrição axial é induzida pela rigidez axial da armadura exterior e atua apenas quando a viga tende a aumentar o seu comprimento na direção longitudinal. O nível de confinamento axial é tanto maior quanto maior a área da secção transversal das armaduras de pré-esforço. O VATM modificado por Taborda [116] foi também validado através de resultados numéricos obtidos com elementos finitos.

Para validar o VATM modificado, o correspondente procedimento de cálculo (apresentado ao longo da Secção 2.3 e ilustrado na Figura 2.13) foi implementado através de um aplicativo computacional designado por TORQUE_MTEAV baseado no VATM modificado. Utilizando este aplicativo e usando como base as características das vigas experimentais D1 e D2, vigas com pré-esforço longitudinal externo ensaiadas por Bernardo em 2003, Taborda [116] validou o modelo VATM modificado. Nas Figuras 1.11 (a) e (b) ilustram-se as curvas $T-\theta$ teóricas bem como as experimentais das vigas D1 e D2. Estas últimas foram desenhadas a partir dos resultados experimentais obtidos por Bernardo em 2003 [20]. Em cada figura encontram-se representadas três curvas $T-\theta$, para além da curva experimental, foi calculado a curva $T-\theta$ através do VATM original (livre de restrições) e através do VATM modificado que já inclui o efeito de confinamento axial k conferido pela rigidez axial das armaduras de pré-esforço exteriores. O VATM prevê o comportamento teórico com bons resultados apenas para a zona da curva $T-\theta$ em que os carregamentos são elevados (Hsu e Mo em 1985 [69] e Bernardo et. al em 2012 [23]). Isto deve-se ao facto de o VATM, tanto o original como o modificado, assumir que a viga se encontra fissurada desde o início do carregamento e por isso se observar uma pequena discrepância na zona inicial das curvas $T-\theta$ (Figura 1.11).

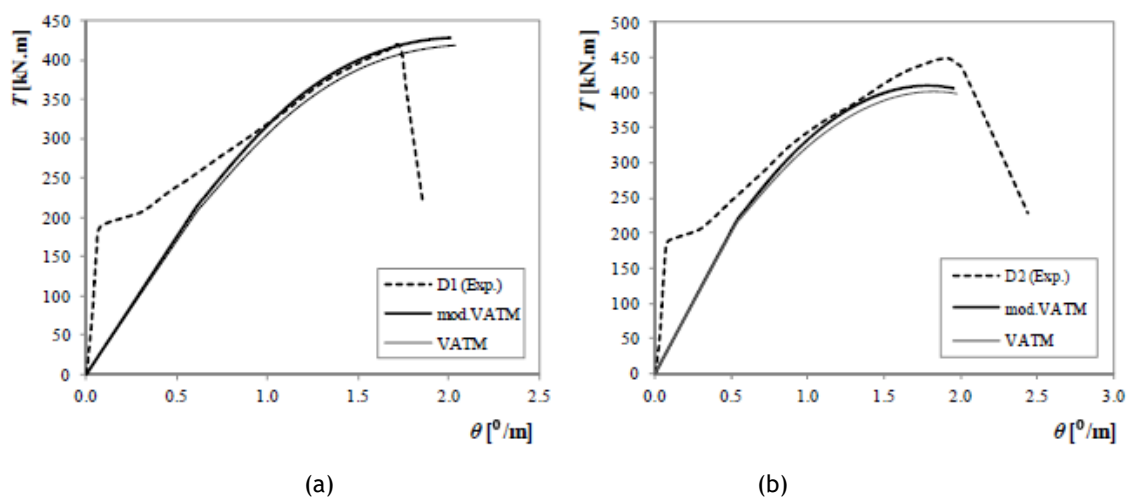


Figura 1.11 - Curva $T-\theta$ das vigas D: (a) Viga D1 - (b) Viga D2 [32]

Importa referir que Bernardo em 2003 [20] apontou que a viga D2 possui uma resistência maior do que a expectável quando comparada com a viga D1. De acordo com o referido

autor, o momento torsor resistente de ambas as vigas deveria ser semelhante uma vez que, apesar da viga D2 apresentar um pré-esforço maior e uma área de armadura de pré-esforço maior, esta possui uma classe de resistência do betão à compressão inferior. O que explica o facto de, para a viga D2, tanto os resultados obtidos com o VATM original como com o VATM modificado os resultados teóricos se afastarem um pouco mais dos resultados experimentais.

Com base na análise das curvas $T-\theta$ ilustradas nas Figuras 1.11 conclui-se que a previsão, para a parte final da curva $T-\theta$, obtida pelo TORQUE_MTEAV modificado apresentam resultados que não são muito diferentes comparativamente ao VATM original. A consideração do efeito de confinamento axial (devido à armadura de pré-esforço longitudinal exterior) confere à viga um ligeiro incremento da resistência à torção da viga. Tal deve-se, provavelmente, à pequena área de armadura de pré-esforço utilizada nas vigas D1 e D2. Os resultados obtidos indicam que o efeito de restrição axial induzido pela armadura de pré-esforço nas referidas vigas é bastante pequeno, sendo que tal efeito não é claramente visualizado no comportamento experimental das vigas. No entanto, a previsão teórica resultante do VATM modificado aproxima mais a curva $T-\theta$ do resultado experimental. Os resultados obtidos através da comparação com os resultados experimentais não foram muito conclusivos devido à pequena rigidez induzida pelas armaduras de pré-esforço. A falta de outros resultados experimentais disponíveis na literatura consultada levou Taborda a realizar uma análise não linear com elementos finitos para validar o modelo. Na Figura 1.12 apresentam-se as curvas numéricas $T-\theta$ de uma viga de betão armado com secção quadrangular vazada obtidas pelo modelo de elementos finitos, calibrado tendo por base uma viga real ensaiada à torção (viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20]), para um determinado intervalo corrente de restrição axial, k (kN/m), indicado na figura. É visível nas curvas $T-\theta$ da Figura 1.12 que, com o aumento do confinamento axial, aumenta o momento torsor resistente e a rigidez de torção das mesmas em estado fissurado. À medida que aumenta o nível de confinamento aparenta existir uma tendência de diminuição da capacidade de rotação última. A redução da rotação máxima com o incremento do confinamento está diretamente relacionada com a redução da ductilidade da viga devido à influência do estado de compressão axial.

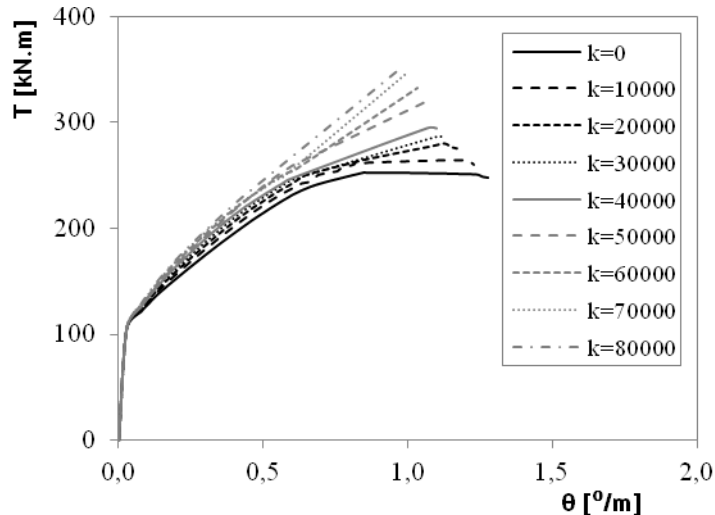


Figura 1.12 - Curvas $T - \theta$ da viga A2 através da análise numérica com elementos finitos [32]

Após a análise da influência do confinamento axial no comportamento último de vigas à torção Taborda observou, entre outros aspetos, um efeito favorável do confinamento através do incremento da resistência à torção. Por esta razão, a autora elaborou uns ábacos para auxiliar o projeto de vigas de secção quadrangular vazada de betão armado à torção. No entanto os ábacos apresentados possuem uma limitação uma vez que são apenas válidos para uma relação entre a altura e largura da secção próxima da unidade (secções quadrangulares). Este aspeto motivou e justificou a necessidade de se desenvolver a primeira parte deste trabalho que consiste, então, no desenvolvimento de ábacos de auxílio ao projeto para vigas com relação entre a altura e largura da secção diferente da unidade (secções retangulares). Esta secção será apresentada em pormenor na Secção 1.3.

1.2.2. Notas históricas - Evolução dos modelos de previsão global mediante o cálculo da curva integral $M_T - \theta$

A analogia da Treliza Espacial constitui um modelo base de diversos documentos normativos e permite obter uma simulação do comportamento global de vigas à torção para todo o historial de carga. No entanto, o modelo assume que a viga à torção se encontra num estado plenamente fissurado desde o início do carregamento o que implica que o modelo não seja rigoroso para níveis baixos de carregamento. A Figura 1.13 ilustra a curva momento torsor - rotação ($M_T - \theta$) obtida por Hsu e Mo [69] a partir de um algoritmo de cálculo baseado no VATM para uma viga de betão armado de resistência normal com secção cheia (viga M2). A Figura 1.13 inclui também a curva experimental $M_T - \theta$ da mesma viga.

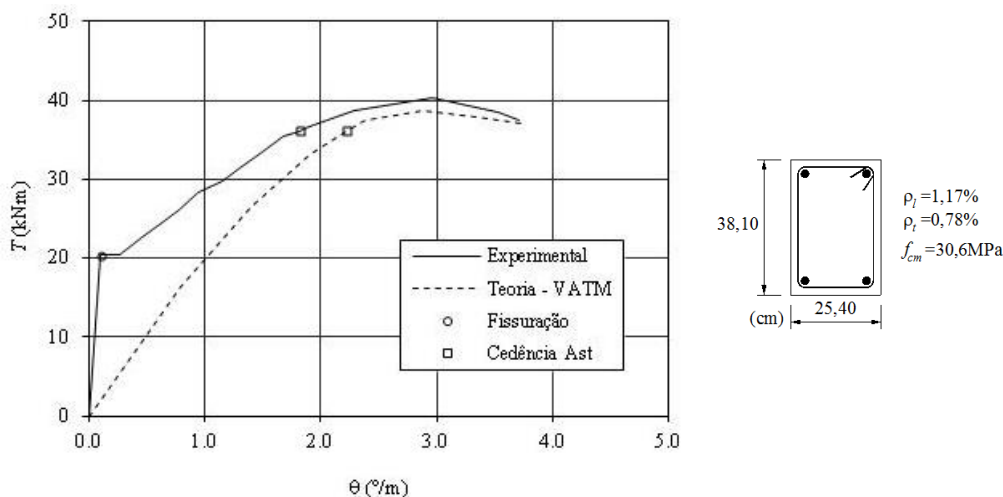


Figura 1.13 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ para a viga M2 [69]

A partir da curva $M_T - \theta$ da Figura 1.13 pode observar-se que os valores teóricos últimos do momento torsor se aproximam dos valores experimentais. Esta observação foi também apontada por Hsu para outras vigas semelhantes [66]. O sucesso do VATM na previsão dos pontos da curva $M_T - \theta$ para níveis elevados de carga é lógico, uma vez que, para tais níveis, o betão encontra-se extensivamente fissurado. Assim, para esta fase, o modelo teórico aproxima-se do comportamento real. Por sua vez, para níveis baixos de carregamento, as previsões teóricas da curva $M_T - \theta$, relativamente ao momento torsor, encontram-se bastante abaixo do observado experimentalmente. Isto deve-se ao facto de a viga não se encontrar extensivamente fissurada para níveis baixos de carregamento, tal como assumido no VATM. Deste modo, conclui-se que o VATM é apenas válido a partir de níveis de elevados de carregamento.

Bernardo e Lopes em 2008 e 2011 [24] [30] propuseram um novo modelo teórico, na forma de um algoritmo simples, com vista a prever teoricamente e de forma válida o comportamento global de vigas de betão armado de resistência normal ou de alta resistência sujeitas à torção pura. A aproximação teórica realizada por Bernardo e Lopes foi primeiramente dividida por fases, cada uma delas associada a uma fase particular do comportamento das vigas à torção observado experimentalmente:

- Estado I: fase elástico-linear em regime não fissurado caracterizado com recurso a diversas teorias clássicas da torção adotadas por Hsu [66] para vigas de betão armado, nomeadamente: Teoria da elasticidade [109], teoria da flexão enviesada [66] e a teoria do tubo fino de Bredt [34];
- Estado II: fase elástico-linear em regime fissurado caracterizada através da analogia da treliça espacial com um ângulo de 45° para as escoras de betão e tendo em conta o comportamento linear dos materiais, modelo este proposto por Hsu [61];
- Estado III: fase não linear caracterizada pelo VATM;

- Na transição entre as diversas teorias, Bernardo e Lopes adotaram critérios de ajustamentos semi-empíricos baseados na observação de resultados experimentais disponíveis na literatura [26].

O modelo proposto por Bernardo e Lopes foi o primeiro modelo que permitiu a previsão do comportamento global de uma viga de betão armado sujeita à torção, mediante o cálculo das curvas $M_T - \theta$ em todas as fases comportamentais. Os referidos autores foram ainda pioneiros no cálculo de curvas $M_T - \theta$ para vigas de alta resistência. Uma viga de betão de alta resistência tem um comportamento ligeiramente diferente das vigas de betão normal, isto porque as propriedades mecânicas no betão alteram notavelmente para elevados níveis de resistência. Na Figura 1.14 as previsões teóricas obtidas através do modelo de Bernardo e Lopes são comparadas com resultados experimentais referentes a ensaios à torção pura de vigas de betão armado. Pela análise das curvas $M_T - \theta$ da Figura 1.14 os autores observaram que o modelo desenvolvido permite obter boas previsões do comportamento global à torção de vigas de betão armado.

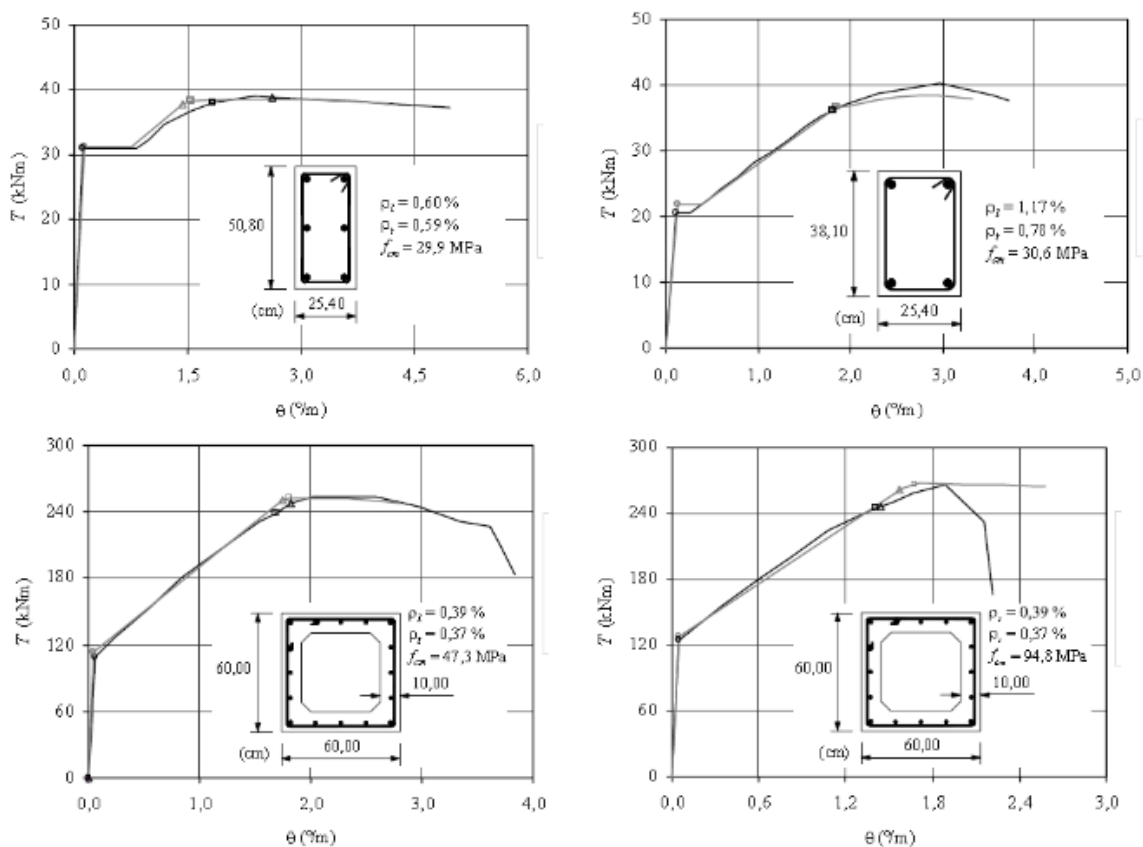


Figura 1.14 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Bernardo e Lopes [24] [30]

Apesar dos bons resultados obtidos através do modelo de Bernardo e Lopes, existem alguns aspetos que devem ser notados no que se refere ao modelo proposto. Primeiro, o modelo carece de alguma consistência uma vez que foram utilizadas três teorias distintas, com

formulações próprias para cada fase comportamental da viga à torção. Tal implicou que fosse necessário serem adotados critérios empíricos para realizar a transição entre as diversas fases comportamentais. Os próprios autores reconheceram que seria mais satisfatório se o modelo se baseasse apenas numa única teoria. Segundo, o modelo não fornece informações precisas sobre o estado interno de tensão e deformação para níveis baixos de carregamento, como por exemplo a tensão e a extensão nas armaduras. Esta observação pode ser explicada pelo facto da introdução dos critérios de transição exigirem pequenos ajustamentos da curva $M_T - \theta$, posteriormente ao seu cálculo nas várias fases comportamentais, segundo o eixo das rotações. Desta forma, os parâmetros internos de cálculo do modelo cujo cálculo deu origem às coordenadas $(\theta; M_T)$ nos troços da curva $M_T - \theta$ que posteriormente sofreram ajustamentos deixam de ser válidos. Para a verificação da viga à torção em estado de serviço, torna-se importante conhecer o estado interno de tensão e deformação, designadamente nas armaduras e no betão. Este aspeto tem uma grande relevância uma vez que os documentos normativos realçam cada vez mais a importância da verificação de segurança aos Estados Limites de Serviço, de forma a garantir um desempenho adequado em serviço e a respetiva durabilidade da estrutura.

Tendo em conta que o primeiro modelo de Bernardo e Lopes apresentava algumas limitações, os mesmos autores, juntamente com Andrade em 2012 [29], desenvolverem um modelo mais generalista no sentido de prever o comportamento global de vigas à torção recorrendo essencialmente apenas a uma teoria. Este novo modelo consiste na modificação do VATM, essencialmente na fase pré-fissuração, de forma a adaptá-lo a baixos níveis de carregamento. Tal novo modelo foi designado por Modelo de Treliza com Ângulo Variável Modificado (MVATM - *Modified Variable Angle Truss Model*). Comparando o MVATM com o modelo de Bernardo e Lopes, este novo modelo é mais consistente por se basear essencialmente numa só teoria para a caracterização de comportamento global de uma viga à torção, ainda que este modelo incorpore algumas correções ao formalismo original do VATM e também recorra a uma teoria distinta somente para prever o momento torsor de fissuração. O modelo proposto pelos referidos autores divide-se em três fases:

- Fase não fissurada: uma vez que o VATM assume a viga plenamente fissurada desde o início do carregamento, a formulação do VATM foi modificada de forma a incorporar a contribuição do betão tracionado nas equações de equilíbrio (direção longitudinal e transversal) e também a influência do núcleo de betão na rigidez à torção da viga mediante a correção das rotações para cada nível de carregamento;
- Transição entre o estado não fissurado e fissurado: após a fissuração é anulada a participação do betão à tração, contudo a contribuição do núcleo de betão nas vigas de secção cheia mantém-se. Assim, as rotações sofrem um acréscimo brusco para um momento torsor de fissuração constante (calculado através da Teoria do Tubo Fino de Bredt [66]);
- Fase pós-fissuração: a contribuição do núcleo de betão para a resistência da viga vai diminuindo até se atingir o momento torsor resistente. Para vigas de secção vazada, como em

geral não se observa experimentalmente um patamar horizontal na curva $M_T - \theta$ imediatamente após o momento de fissuração, é realizado um pequeno ajustamento da curva $M_T - \theta$ no troço pós fissuração.

Na Figura 1.15 encontram-se ilustradas as previsões teóricas mediante as curvas $M_T - \theta$ obtidas a partir do primeiro modelo de Bernardo e Lopes e o MVATM com alguns resultados experimentais referentes a ensaios à torção pura de vigas de betão armado. Pela análise das curvas $M_T - \theta$, os autores concluíram que o procedimento de cálculo do MVATM permitiu obter previsões muito próximas do modelo original de Bernardo e Lopes.

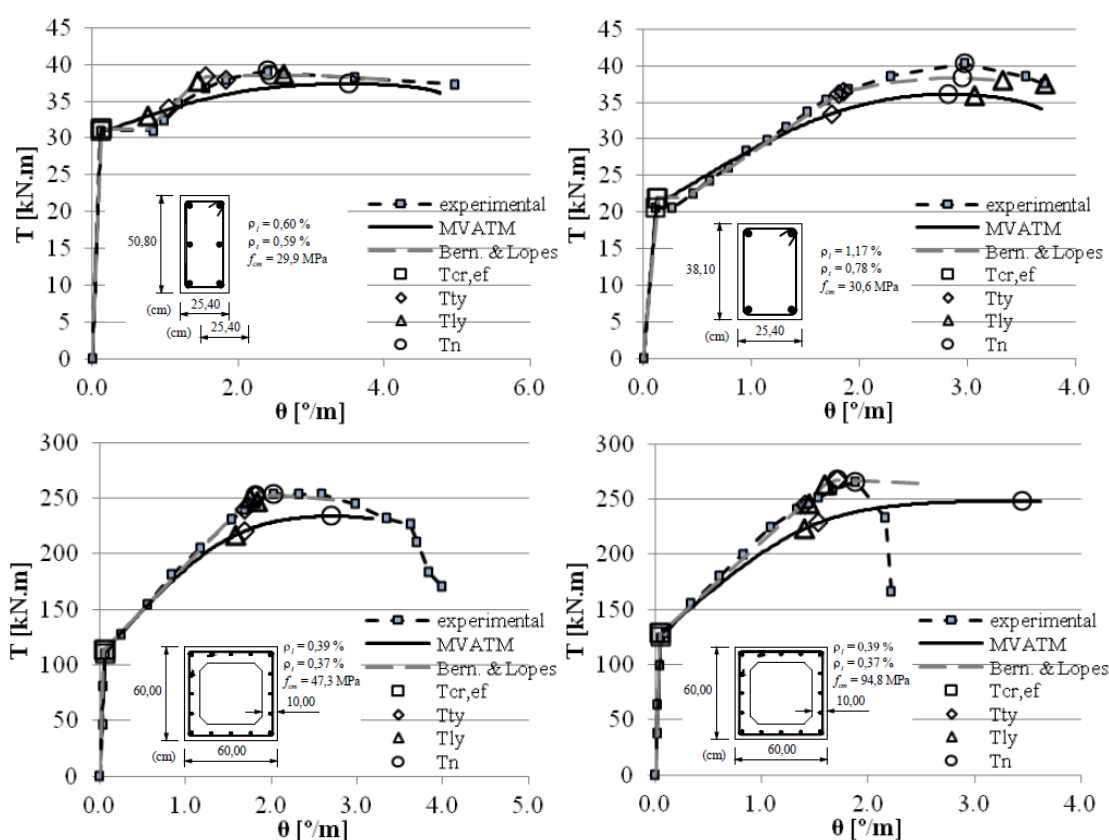


Figura 1.15 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Bernardo et al. [29]

Apesar do MVATM permitir obter boas previsões teóricas, subsiste o facto de este modelo ainda não prover informações precisas sobre o estado interno de deformação e tensão da viga para a fase pós-fissuração devido ao ajustamento, ainda necessário, da curva $M_T - \theta$ nessa mesma fase. Além disso, o modelo base revela-se incapaz de prever adequadamente, por si só, o momento de fissuração, tendo sido necessário os autores recorrerem a outra teoria para estabelecer o limite da fase não fissurada.

Jeng e Hsu em 2009 [74] propuseram um novo modelo teórico que consiste na adaptação de um modelo de membrana que tem em conta o *Softening Effect* e que foi desenvolvido e

calibrado inicialmente para placas de betão armado sujeitas ao corte, modelo este designado por *Softened Membrane Model - SMM* [74][98][129]. Este modelo consiste numa extensão da teoria elástica de membrana para membranas de betão armado sujeitas ao corte e em estado fissurado. Os autores adaptaram o SMM de forma a obter um modelo teórico que permitisse prever o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção. Esta extensão do SMM é designada por *SMMT - Softened Membrane Model for Torsion*. Essa extensão foi conseguida tendo por base a associação do SMM à Teoria do Tubo Fino de Bredt para relacionar o fluxo de tensões de corte a atuar na membrana (paredes da secção) e o momento torsor aplicado na secção. Desta forma o SMMT consegue prever o comportamento global de vigas de betão armado à torção. Outro aspeto inovador do SMM e do SMMT, relativamente aos modelos anteriormente referidos, consiste na incorporação na formulação de relações constitutivas adicionais para o betão (betão à tração e ao corte) que permitem incluir diretamente a contribuição do betão à tração na direção perpendicular à escora e também o efeito da distorção. Os autores realizaram duas alterações ao SMM de modo a ter em conta o efeito do gradiente de extensões nas escoras de betão ao longo da espessura do fluxo de corte, visto que as escoras de betão sofrem flexão. A primeira alteração consistiu em incrementar em 45% a rigidez pré-fissuração e a extensão para o pico de tensão na relação constitutiva para o betão à tração proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [17] incorporada no SMM. Esta alteração permitiu calibrar o modelo para a fase pré-fissuração. A segunda alteração consistiu na adoção do coeficiente de Hsu/Zhu (coeficiente equivalente ao coeficiente de Poisson para o estado fissurado) igual a 80% do valor adotado para os painéis sujeitos ao corte. Esta última alteração permitiu calibrar o modelo para a fase última comportamental.

O SMMT calibrado permite prever o comportamento global da viga à torção para todo o historial de carga. Este modelo, baseado numa única teoria, constitui um passo evolutivo para a comunidade científica no domínio da torção em vigas de betão estrutural. Jeng e Hsu compararam as previsões teóricas obtidas a partir do SMMT com os resultados experimentais de vigas de betão armado ensaiadas à torção pura. Os autores concluíram que o modelo permite obter boas previsões para o valor do momento torsor de fissuração e resistente, bem como para as respetivas rotações. Na Figura 1.16 encontram-se ilustradas as curvas $M_T - \theta$ para algumas vigas ensaiadas à torção. Nos gráficos da Figura 1.16, a linha contínua representa a curva experimental e a curva a tracejado representa a curva teórica obtida através do SMMT.

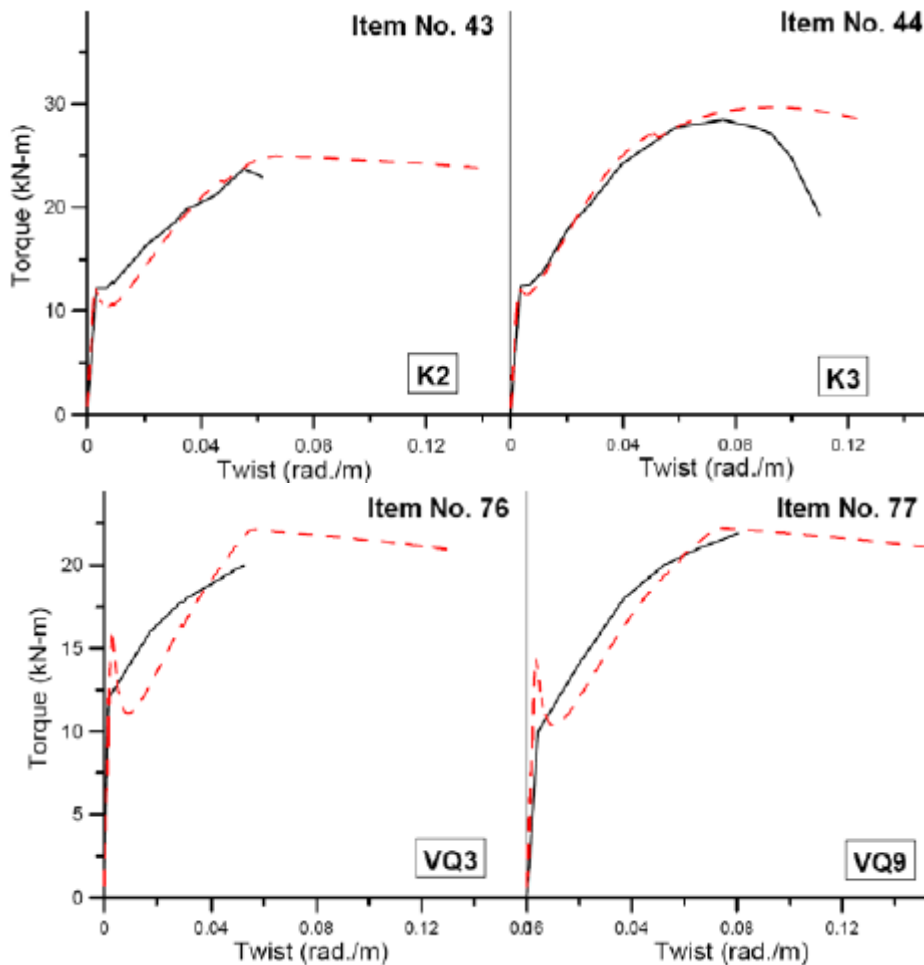


Figura 1.16 - Exemplos de curvas $M_T - \theta$ obtidas por Jeng e Hsu [74]

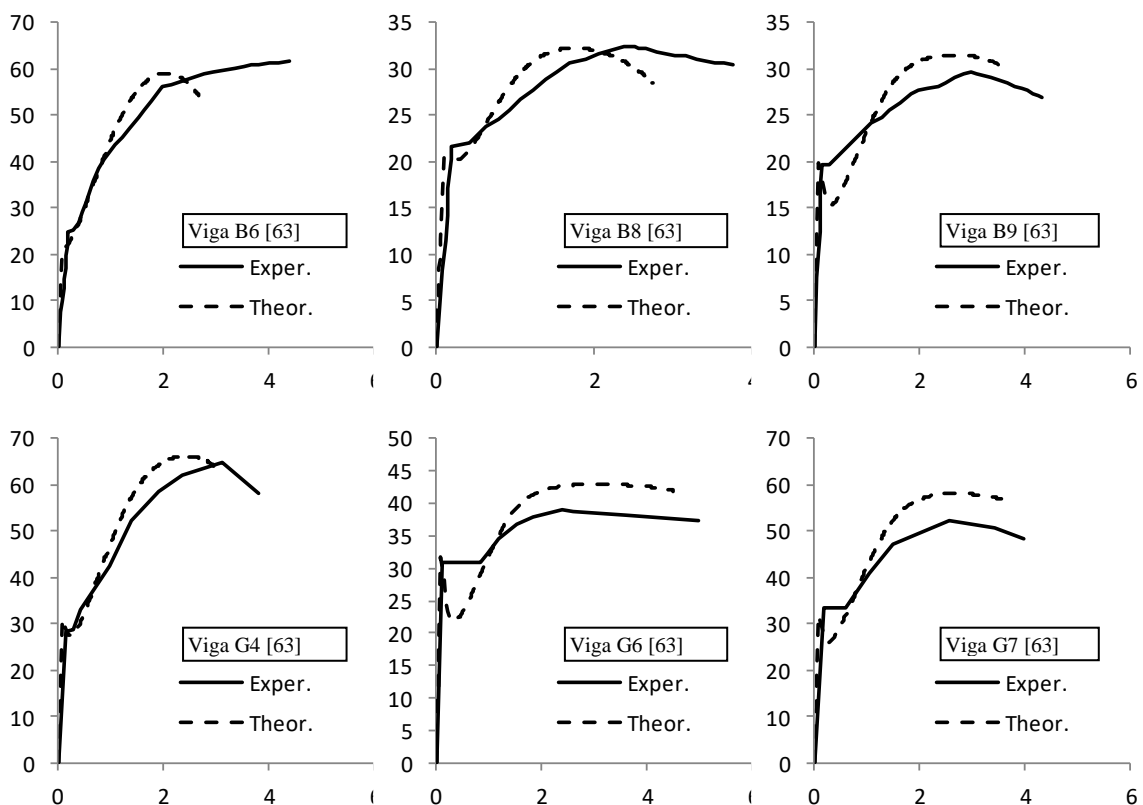
O modelo de Jeng e Hsu é considerado um modelo bastante consistente uma vez que a partir de uma única teoria o modelo consegue prever, com resultados bastante satisfatórios, o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção. No entanto, deve referir-se que o SMMT apresenta uma formulação matemática algo complexa, os critérios de convergência do algoritmo são bastante difíceis de implementar e os resultados são morosos, comparativamente ao VATM ou ao MVATM [106] [113]. O SMMT não permite ao utilizador uma leitura simples do comportamento de uma viga de betão armado após a fissuração. Além disso, por observação da Figura 1.16 é possível concluir que existe uma discordância nas curvas $M_T - \theta$ imediatamente após a passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, entre a previsão teórica do SMMT e os resultados experimentais de vigas ensaiadas à torção. De facto, observa-se nas previsões teóricas um decréscimo do momento torsor imediatamente após a fissuração, possivelmente implica uma previsão da rigidez pós-fissuração pouco rigorosa. Este aspeto não foi explicado pelos autores. Jeng e Hsu em 2009 [74] apontaram que, na adaptação do SMMT para vigas à torção, as vigas com secção vazada não foram incluídas. Segundo os autores, as vigas com secção vazada apresentam momentos torsores de fissuração e respetivas rotações mais baixas do que as vigas com secção cheia e, por isso, o SMMT não é adequado para este tipo de secções. Este argumento não é claro para

justificar a não inclusão de vigas com secção vazada no estudo publicado, uma vez que o SMMT constitui uma extensão de um modelo de membrana sujeito ao corte (SMM). Na realidade, quando uma viga é submetida a um momento torsor as paredes das secções vazadas, na sua zona central, funcionam como autênticas membranas sujeitas ao corte. É preciso ainda ter em conta que a extensão do SMM para vigas à torção é realizada introduzindo o conceito de tubo de parede fina, o que aparenta contrariar mais uma vez a justificação dos autores, pois a generalidade das vigas com secção vazada podem ser associadas a tubos de parede fina. Face ao exposto anteriormente, seria lógico que o SMMT pudesse também ser usado para prever o comportamento global de vigas de secção vazada à torção.

Bernardo et al. em 2013 [28] realizaram uma análise para averiguar a validade do SMMT na previsão da resposta torsional de vigas com secção vazada à torção. Os autores confirmaram que para as vigas de betão armado com secção vazada, o SMMT não fornece boas previsões para a fase pré-fissuração. A principal razão incide na correção da lei constitutiva do betão à tração para a fase pré-fissuração realizada por Jeng e Hsu [74], esta lei não é adequada para este tipo de secções. Este facto conduziu os autores a afirmarem que existe outro efeito que tem influência para além do gradiente de extensões ao longo da profundidade da zona do fluxo de corte, como por exemplo a influência do núcleo de betão das secções cheias na fase pré-fissuração, efeito este que não foi diretamente contemplado nas correções de Jeng e Hsu. Segundo Bernardo et al. a rigidez da fase pré-fissurada e a extensão para o pico de tensão deveriam ser incrementados em 24% em vez de 45%, tal como assumido por Jeng e Hsu. Desta forma, conclui-se que o SMMT não constitui ainda um modelo global para vigas à torção uma vez que existe a necessidade de adotar coeficientes empíricos de correção em função do tipo de secção em estudo.

Bernardo et al. em 2012 [27], tendo em conta as modificações que Jeng e Hsu realizaram ao SMM e seguindo uma linha de raciocínio semelhante, consideraram explicitamente a influência do betão à tração na direção perpendicular às escoras através da introdução de um “tirante” perpendicular à escora de betão na reformulação do VATM. Este tirante tem o objetivo de introduzir o comportamento do betão tracionado nessa mesma direção. O modelo GSVATM (*Generalized Softened Variable Angle Truss Model*) de Bernardo et al. constitui um modelo geral, para o qual o VATM de Hsu e Mo é um caso particular. A formulação do GSVATM coincide com a do VATM se se considerar a não existência do tirante perpendicular à escora de betão (ou seja, uma força de tração nula nessa direção). Comparando o modelo GSVATM de Bernardo et al. com o SMMT, este novo modelo fornece uma leitura mais simples do comportamento da viga à torção ao longo de todo o historial de carga, bem como do estado de tensão e extensão de toda a viga. No interesse do presente trabalho, o GSVATM é descrito de forma detalhada no Capítulo 4.

A Figura 1.17 apresenta exemplos de curvas $M_T - \theta$ teóricas (obtidas com o GSVATM) e experimentais para algumas vigas de betão armado ensaiadas à torção. No geral, observa-se na Figura 1.17 que o GSVATM, à semelhança do SMMT, tem alguma dificuldade no cálculo da resposta da viga imediatamente após a fissuração, bem como da rigidez de torção pós-fissuração no troço ascendente da curva $M_T - \theta$, principalmente para vigas com uma taxa de armadura pequena. A partir das curvas $M_T - \theta$ teóricas observa-se, após a fissuração, uma redução do momento torsor. Segundo Bernardo et al. [27] este comportamento ocorre devido à forma geométrica da curva do diagrama $\sigma - \varepsilon$ da relação constitutiva do betão à tração. Analisando-se o diagrama de tensões que caracteriza o comportamento do betão à tração (que se encontra ilustrado na Tabela 4.1, Capítulo 4), a queda brusca da tensão que se observa no diagrama parece refletir-se no comportamento das vigas à torção, mais propriamente na fase pós-fissuração. Este aspeto também foi observado nas curvas $M_T - \theta$ teóricas obtidas Jeng e Hsu [74] com o modelo SMMT. Importa referir que a lei média $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração utilizada tanto no SMMT como no GSVATM foi calibrada tendo por base o ensaio de prismas de betão armado à tração uniaxial e, por isso, não têm em conta mecanismos suplementares que ocorrem em situações de corte em virtude da direção das fissuras em relação às armaduras (interbloqueamento dos agregados, efeito de ferrolho, etc.), como acontece para o caso de vigas à torção.



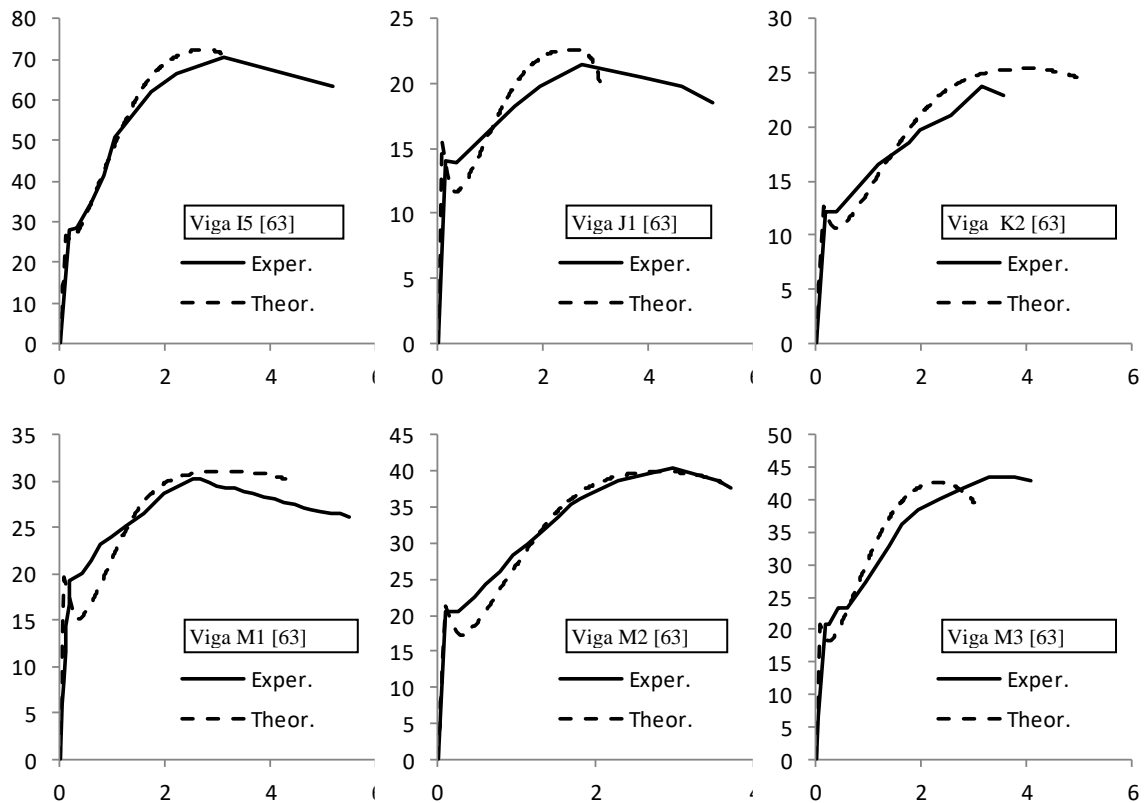


Figura 1.17 - Exemplo de curvas $M_T - \theta$ (M_T [kNm] - θ [°/m]) [74]

Na sequência do apresentado ao longo desta secção, a problemática da torção com interação de vários esforços ainda constitui um problema atual, uma vez que os documentos normativos ainda não contemplam uma análise conjunta dos efeitos nas estruturas, designadamente para o caso de vigas de betão armado sujeitas à torção e simultaneamente a um estado de tensão axial uniforme. Apesar dos estudos já existentes, a falta de documentação existente na bibliografia para o dimensionamento destes elementos, justifica a importância de desenvolver uma segunda parte neste trabalho, estudo este que tem como objetivo considerar tal efeito para uma análise mais realista do comportamento dos elementos estruturais e de se rever, se necessário, as regras práticas de dimensionamento para este tipo de elementos estruturais. Na secção 1.3 irá ser apresentado e justificado os objetivos da segunda parte do trabalho e no Capítulo 5 será desenvolvido a generalização do GSVATM para o caso de vigas à torção com o estado de tensão axial uniforme simultâneo.

De forma a justificar a importância prática deste estudo, a secção a seguir apresenta casos práticos onde situações de vigas sujeitas a um estado de tensão axial uniforme aliado à torção ocorrem na realidade.

1.2.3. Casos práticos de Estruturas em estado de tensão axial uniforme

Nos casos correntes de projeto de estruturas, o dimensionamento de vigas de betão armado é geralmente realizado desprezando-se o efeito da restrição axial induzido pela ligação das vigas aos restantes elementos estruturais, em geral pilares e lajes. Como já referido anteriormente, cada viga encontra-se restringida não só em termos de rotação nas suas extremidades, como também em termos do seu alongamento axial. Se o estado de tensões na viga devido ao carregamento, incluindo a retração e variações de temperatura, induzir uma deformação axial, a restrição axial gera o aparecimento de um estado de tensão axial ao longo do seu eixo. Isto também é verdade para vigas sujeitas à torção visto que a mesma tende a alongar, sobretudo após a fissuração, como observado por Hsu em 1968 [63]. Nestas situações, se a viga suportar momentos torsores primários, a viga fica assim sujeita a uma situação de interação de esforços torção - esforço axial. Existem ainda outras situações que induzem um estado tensão axial uniforme nas vigas. Por exemplo, a existência de pré-esforço longitudinal exterior e/ou não aderente constitui um caso em que, quando a viga é sujeita a um esforço de torção, surge uma restrição axial induzida pelas armaduras exteriores e/ou não aderentes quando a viga tende a alongar na sua direção longitudinal. Na presente sub-secção são apresentados alguns casos correntes de estruturas onde o estado de tensão uniforme axial surge aliado ao esforço de torção. Note-se que o esforço de torção numa viga de uma estrutura pode ocorrer quer devido à geometria da estrutura e/ou à existência de cargas excêntricas.

Note-se que no caso de vigas livres de restrições, situação idealizada é pouco comum na prática, quando é gerado o momento torsor na viga surgem fissuras diagonais no Estado II (Figura 1.8, Secção 1.1.3). É nesta fase que a armadura longitudinal começa a ser solicitada elasticamente à tração até atingir a sua tensão de cedência. Nesta fase comportamental a viga apresenta deformações axiais positivas (alongamento). No caso de vigas axialmente restringidas sujeitas à torção, como o caso da viga inserida num pórtico ilustrada na Figura 1.18, espera-se um comportamento ligeiramente diferente ao referido anteriormente. O facto de a viga se encontrar restringida pelos pilares origina o aparecimento de uma força de compressão ao longo do eixo longitudinal da viga que proporciona um aumento da rigidez e da resistência da mesma, devido ao fecho das fissuras. Além disso, a força de compressão origina também um aumento de tensão nas escoras inclinadas que conduz a uma rotura tendencialmente mais frágil por esmagamento do betão. Simultaneamente, a força de compressão axial reduz o estado de tração nas armaduras, pelo que estas são coibidas de entrarem em cedência para o valor de carga esperado (sem confinamento). Desta forma, à medida que o efeito de restrição axial aumenta, a rotura da viga irá ser tendencialmente mais frágil [116].

É importante referir que no dimensionamento de elementos estruturais aos ELU de rotura, deve-se fazer uma avaliação da resistência e da ductilidade de modo a que se obtenha uma

secção otimizada em que ambos os materiais (aço e betão) sejam utilizados até à sua capacidade última [13]. No entanto, o dimensionamento à torção deve ser realizado tendo em conta que a rotura de uma viga à torção é tendencialmente mais frágil do que a rotura de uma viga à flexão, devido ao estado de corte associado [59][26].

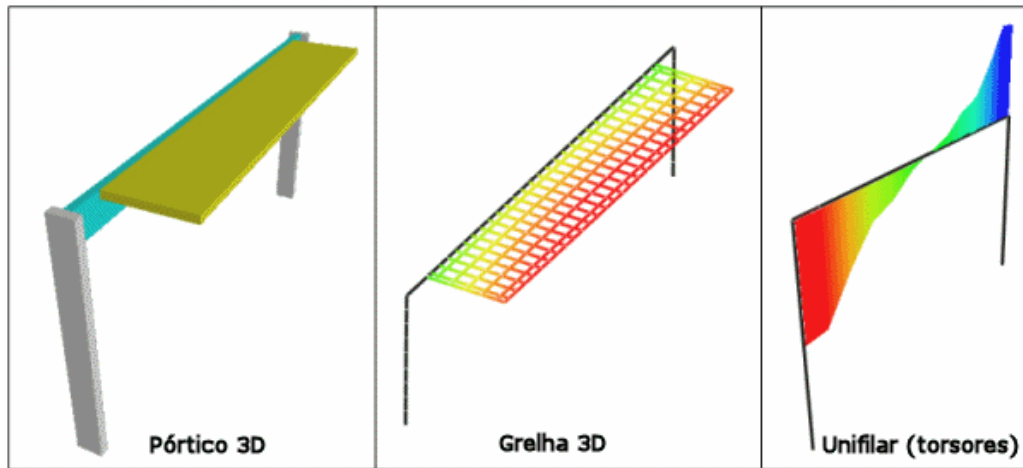


Figura 1.18 - Modelo de pórtico com viga sujeita à torção devido à laje em consola, *Eberick Next* [131]

A construção de vigas estruturais helicoidais (Figura 1.19) em edificações não é corrente, no entanto reconhece-se que o seu atrativo arquitetónico leva por vezes à sua utilização em rampas, passadiços para peões ou ciclistas, escadas, entre outros. Na Figura 1.20 é ilustrado um caso de escadas curvas em que a diretriz da viga assume um desenvolvimento helicoidal. Este tipo de escadas são obrigatoriamente encastradas nas suas extremidades, pelo que a viga se encontra sujeita a momentos torsões de equilíbrio (sobretudo nas extremidades) devido ao seu desenvolvimento curvo. No entanto, no caso particular da Figura 1.20 surge ainda a possibilidade do aumento dos momentos torsões ao longo da viga uma vez que podem surgir cargas excentricas aplicadas nas extremidades dos degraus da escada. Este aspeto é igualmente responsável pelo aparecimento de momentos torsões de equilíbrio em viga de escadas retas em que possa ser utilizado o mesmo tipo de disposição de degraus da Figura 1.20. Para qualquer viga que apresente um desenvolvimento curvo e se encontre restringida transversalmente nos seus apoios de extremidade, a carga aplicada gera torção na viga (Figura 1.21). A Figura 1.22 ilustra um caso interessante de uma passagem superior para peões em betão armado e pré-esforçado (IP5, antigo nó de Mangualde). A passagem superior adota uma solução constituída por uma estrutura tridimensional contínua com rampas de acesso helicoidais de curvatura pronunciada. Como a estrutura é contínua, os esforços de torção nas rampas de acesso transmitem-se ao vão principal.

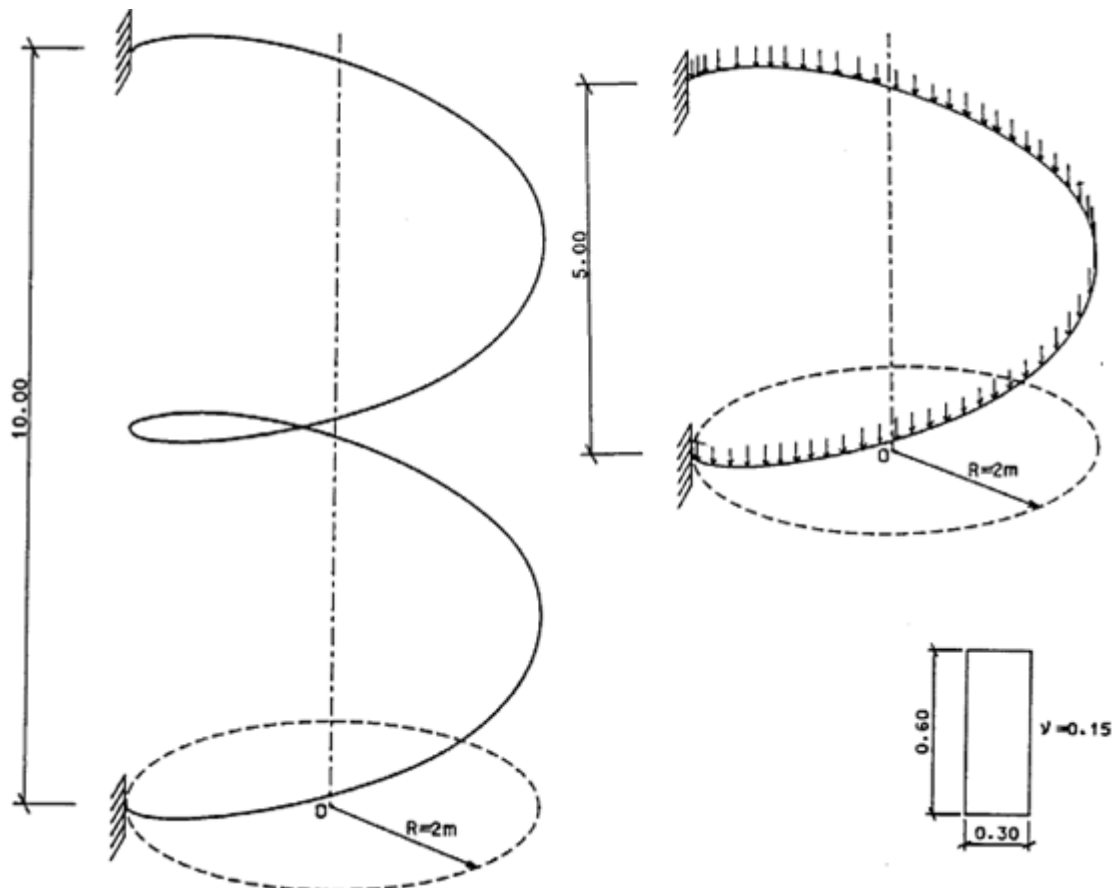


Figura 1.19 - Exemplo de vigas helicoidais com ângulo ao centro de 360° ou superior [97]



Figura 1.20 - Exemplo de escada curva com ângulo ao centro inferior a 360° [138]



Figura 1.21 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo em planta [20]



Figura 1.22 - Passagem superior para peões, IP5 - antigo nó de Mangualde [20]

A Figura 1.23 ilustra o caso corrente de um edifício de utilização pública, neste caso a Casa da Cultura em Vila Velha de Rodão. Na zona da entrada, houve necessidade de dimensionar uma banda de laje à torção para a sustentação de uma pala. A existência da referida pala de betão armado, a qual não possui continuidade para o interior do edifício, induz esforços importantes de torção no elemento da banda de laje, principalmente devido ao seu peso próprio e à ação da neve.

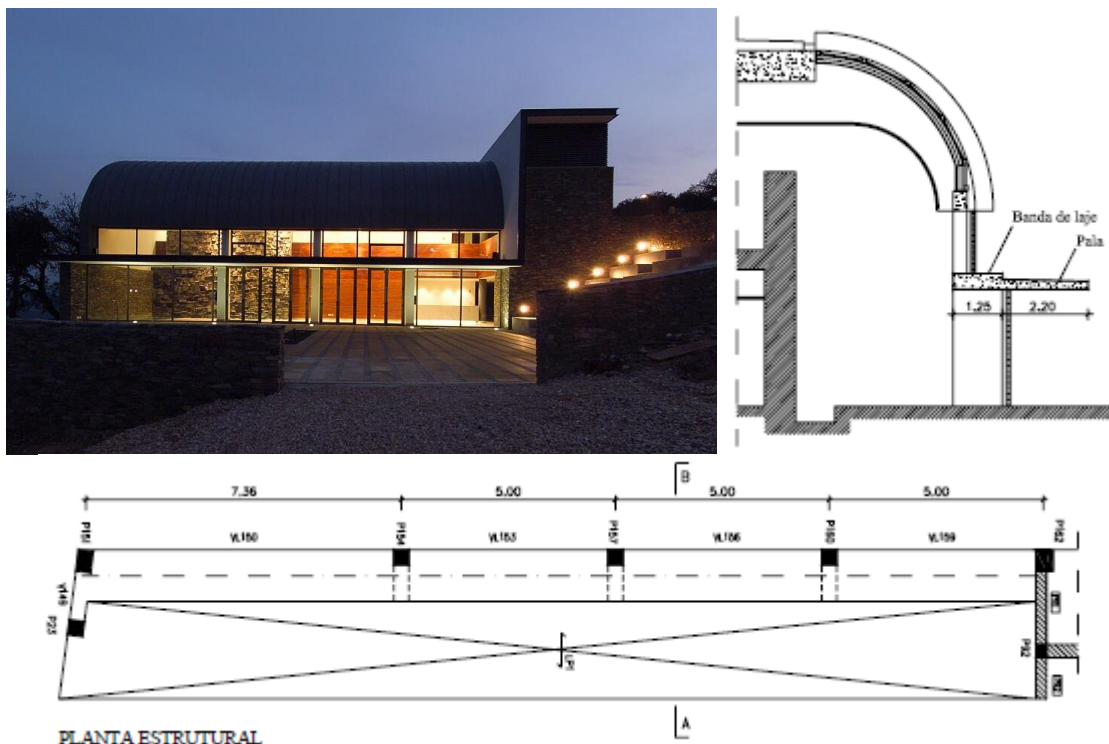


Figura 1.23 - Caso prático de torção: Casa da Cultura, Vila Velha de Rodão [134] [20]

Note-se que o elemento da banda da laje, para além de se encontrar sob ação de um momento torsor de equilíbrio induzido pela pala, se encontra também restringida na sua direção longitudinal (Figura 1.23 - Planta Estrutural) pela ligação aos restantes elementos estruturais. Deste modo, se a banda de laje tender a alongar na direção longitudinal devido à aplicação do momento torsor, os referidos elementos estruturais, designadamente os pilares, restringem esse alongamento e induzem desta forma um confinamento axial. Tal confinamento não foi tido em conta no dimensionamento à torção da referida banda de laje.

É no entanto no domínio das estruturas especiais que a torção assume correntemente um papel de esforço principal. Tem-se por exemplo o caso das pontes com traçado curvilíneo ou troços com a diretriz enviesada, tal como ilustrado nas Figuras 1.25 a 1.28. O facto de a ponte possuir uma diretriz curva faz com que mesmo as cargas verticais que são simétricas em relação à secção transversal deem origem a momentos torsores ao longo do elemento e mesmo na secção onde atuam. Note-se ainda que, mesmo que a ponte possua uma diretriz retilínea, uma força vertical assimétrica (excêntrica) gera um momento torsor de equilíbrio importante, dada a grandeza das ações atuantes neste tipo de estruturas (sobrecargas rodoviárias e/ou ferroviárias). Para além das cargas verticais excêntricas que possam ocorrer, o próprio pré-esforço, pela sua existência, origina esforços adicionais de torção resultantes do acompanhamento, em planta e em termos de traçado, da diretriz do traçado. Desta forma, mesmo que o pré-esforço seja dimensionado para equilibrar exatamente a carga vertical atuante, este induz momentos de torção na secção da viga ao longo do seu traçado (Figura 1.24).

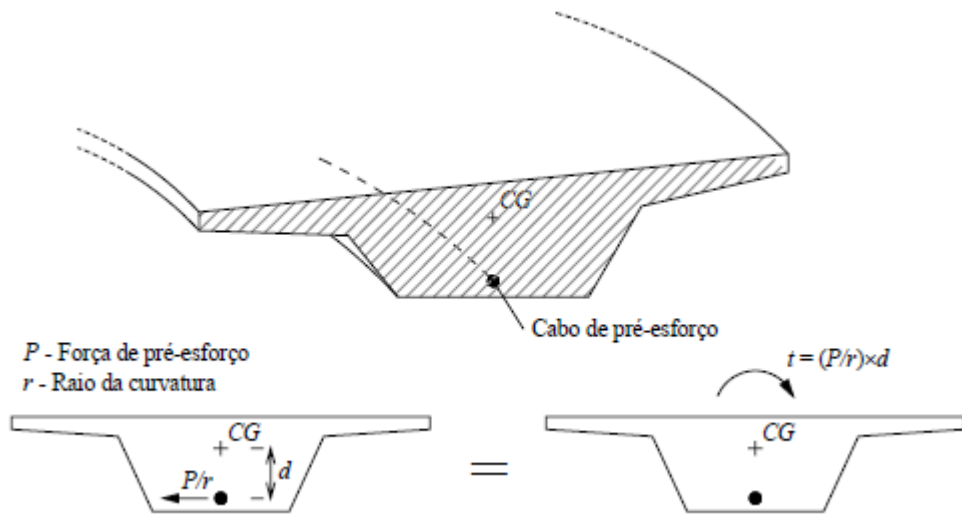


Figura 1.24 - Momento torsor provocado pelo pré-esforço [20]

Para além das cargas verticais e do pré-esforço, a ação do vento sobre o tabuleiro ou dos veículos e também a força centrífuga a ter em conta no caso particular de pontes curvas podem igualmente gerar momentos torsores adicionais.

A Figura 1.25 ilustra o viaduto rodoviário de *Linn Cove* na Carolina do Norte (EUA) construído em 1984. Esta ponte representa um caso muito referenciado na literatura por apresentar um traçado em “S” e se desenvolver num comprimento total de 380 m na *Grand Father Mountain*, traçado este que tenta acompanhar a geometria das encostas. O tabuleiro é constituído por uma viga contínua em caixa monocelular.

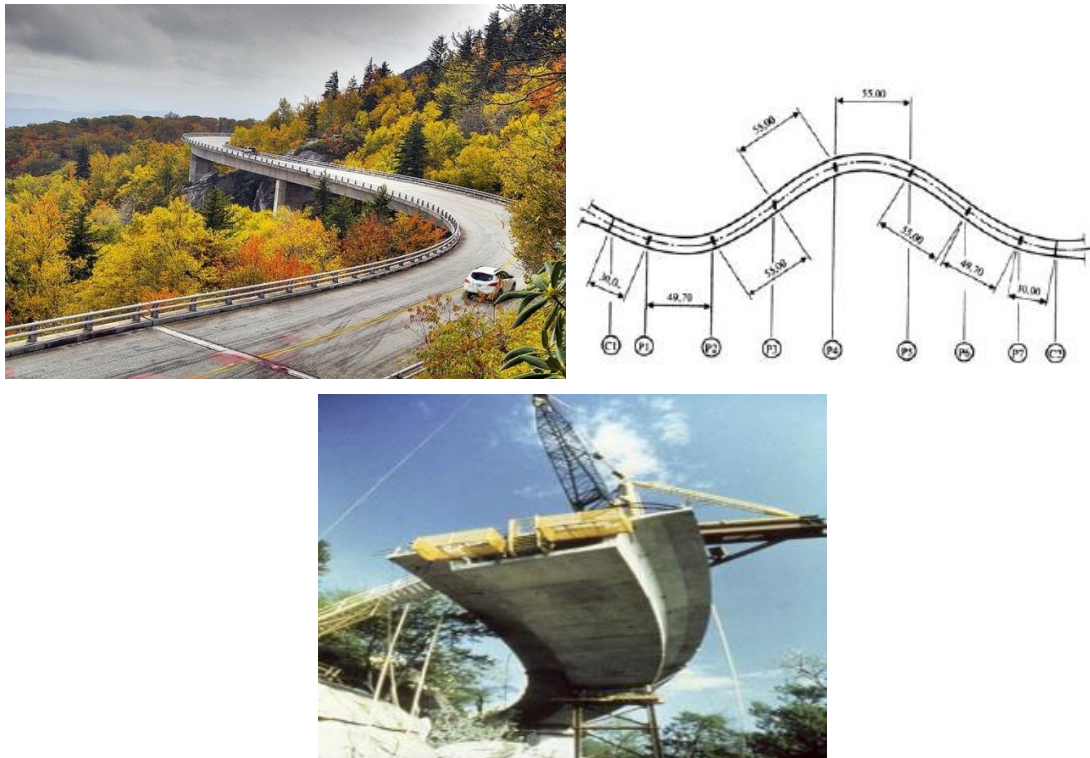


Figura 1.25 - Viaduto rodoviário de Linn Cove, Carolina do Norte - EUA [132]

A Figura 1.26 ilustra o caso nacional referente à ponte rodoviária sobre o Rio Douro, junto à Régua, construída em 1998. A Ponte desenvolve-se em 900m de extensão e com um raio de curvatura de 600 m e possui um tabuleiro contínuo em caixão monocelular [132].



Figura 1.26 - Ponte rodoviária sobre o Rio Douro, Régua [136]

A Figura 1.27 ilustra uma obra de arte com configuração geométrica única localizada na costa Sul do Uruguai, a Ponte de Laguna Garzón, graças à sua localização e sobretudo ao invulgar desenvolvimento circular do seu tabuleiro duplo. Segundo o projetista, Rafael Viñoly, o traçado curvo de cada faixa de rodagem tem tanto propósitos estéticos como de segurança, promovendo a redução de velocidade dos veículos durante a travessia [139].



Figura 1.27 - Ponte de Laguna Garzón na costa Sul do Uruguai [139]

Para além do caso de estruturas de pontes, existem outras estruturas correntes onde a torção surge como um efeito de dimensionamento preponderante, pelo menos em parte da estrutura. Tem-se como exemplo o caso de reservatórios circulares elevados para abastecimento de água, onde a laje inferior, bem como as paredes do reservatório, encontram-se apoiadas na viga de coroamento circular a qual se encontra sujeita a importantes esforços de torção de equilíbrio. A Figura 1.28 ilustra um reservatório em Nova Parnamirim (Brasil) que se encontra nessas condições.

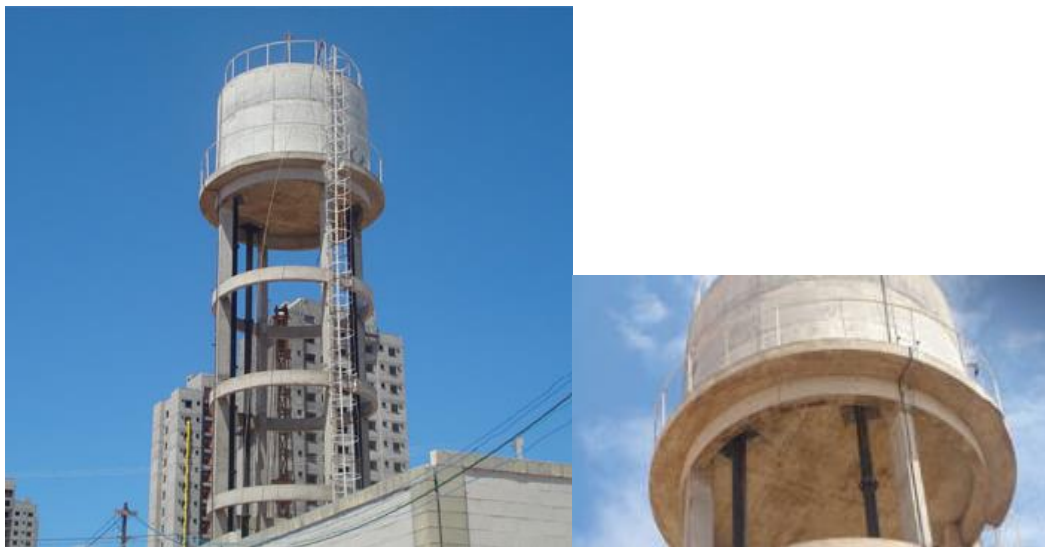


Figura 1.28 - Reservatório circular elevado para abastecimento de água, Nova Parnamirim [135]

Em todos os casos referidos ao longo desta secção as vigas principais encontram-se sujeitas a um estado de tensão axial uniforme devido ao facto de estarem integradas numa estrutura, existindo continuidade para os outros elementos estruturais. Tal estado de tensão axial uniforme não é geralmente tido em conta no dimensionamento da viga, em particular para a torção. Tal como referido ao longo do presente capítulo, a negligência do efeito do

confinamento axial no dimensionamento de vigas de betão armado à torção pode conduzir a um sobredimensionamento do referido elemento uma vez que a existência do confinamento axial aumenta a sua resistência devido ao efeito favorável do estado de compressão induzido pela restrição axial a que se encontra sujeita.

1.3. Objetivos do trabalho

Face ao exposto nas secções anteriores, destacam-se dois objetivos principais para o presente trabalho.

Tendo em conta que os ábacos de dimensionamento apresentados por Taborda em 2012 são válidos apenas para vigas de betão armado com secção quadrangular à torção, considerou-se importante, no desenvolvimento deste trabalho, eliminar esta limitação relacionada com a geometria do tipo de secção. Assim, o primeiro objetivo consiste na generalização dos ábacos de dimensionamento apresentados pela autora para vigas de betão armado com secção retangular à torção, ou seja, os novos ábacos a propor neste trabalho abrangem valores para a relação entre a altura e largura da secção diferentes da unidade. Estas novas ferramentas de dimensionamento permitirão estabelecer uma correlação entre o incremento da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento, e as variáveis de estudo a considerar, designadamente: a resistência do betão à compressão, a taxa total de armadura de torção, o nível de confinamento axial e a relação entre a altura e largura da secção.

Deve reconhecer-se que não ocorre frequentemente a situação de torção pura nas estruturas reais, tal como já foi referido na Secção 1.2.3. Normalmente, a torção surge associado a outros esforços, designadamente: esforço axial decorrente de diversas situações passíveis de ocorrer em estruturas, bem como flexão e esforço transversal. Assim, neste trabalho pretende-se também estudar e desenvolver um modelo teórico capaz de prever o comportamento global das vigas à torção sujeitas simultaneamente a um estado de tensão axial uniforme e constante. São consideradas várias situações, nomeadamente: esforço axial externo centrado e constante de compressão e tração, vigas com confinamento axial e vigas com pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente. Tendo por base o exposto atrás, define-se o segundo objetivo desta tese. Tendo por base o modelo global GSVATM, que caracteriza de forma adequada o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção pura, pretende-se reformular o algoritmo deste modelo de modo a contabilizar a interação torção + estado de tensão axial constante, podendo este último decorrer das diferentes situações anteriormente referidas. A reformulação do GSVATM para as referidas situações que dão origem a um estado de tensão axial será implementado num aplicativo computacional, designado por Torque. Este aplicativo será utilizado para auxiliar a realização de uma análise paramétrica com o objetivo de observar a influência dos estados de tensão axial no comportamento de vigas sujeitas à torção. Posteriormente, pretende-se também

utilizar os resultados do modelo teórico para uma análise comparativa com resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura por forma a validar o GSVATM modificado e confirmar as respetivas previsões teóricas, designadamente para o estado último comportamental das vigas.

1.4. Organização do documento

Na presente secção, apresenta-se de forma sumária a organização da tese bem como uma breve descrição do conteúdo dos diversos capítulos. Refere-se novamente que este documento se encontra dividido em duas partes principais. A primeira parte engloba os Capítulos 2 e 3, onde é apresentada a generalização das ferramentas de dimensionamento de vigas de betão armado à torção, contabilizando o efeito do confinamento axial. A segunda parte, que inclui a proposta de modificação do modelo GSVATM para vigas à torção com estado axial de tensão uniforme, e respetiva validação, engloba os Capítulos 4, 5, 6 e 7.

No Capítulo 1 apresenta-se o enquadramento do tema do trabalho, tanto em termos históricos associado ao estudo das vigas de betão estrutural à torção como também em termos da prática de projeto. O Capítulo 1 apresenta também os objetivos propostos para este trabalho, bem como uma descrição da organização do documento.

No Capítulo 2 apresenta-se a descrição de alguns modelos teóricos relacionados com a analogia da treliça espacial com ângulo variável (VATM), bem como a descrição dos respetivos algoritmos de cálculo que têm sido usadas para a modelação do comportamento último de vigas de betão armado e pré-esforçado à torção. É dada especial relevância ao modelo teórico que tem em conta a situação de confinamento axial (VATM modificado). São ainda expostos neste capítulo as leis constitutivas que caracterizam o comportamento do betão à compressão e das armaduras à tração, as quais serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Importa referir que os modelos descritos ao longo deste capítulo se encontram já incorporados no aplicativo computacional TORQUE_MTEAV.

No Capítulo 3 são justificadas e propostas duas ferramentas de cálculo que permitem auxiliar o projeto de vigas retangulares de betão armado à torção com confinamento axial, designadamente: ábacos de dimensionamento e um aplicativo computacional na forma de uma folha de cálculo. Estas ferramentas permitem corrigir o valor da resistência à torção das vigas, o qual pode ser obtido através de procedimentos de cálculo usuais tais como os incorporados nas disposições normativas, de modo a contabilizar o efeito favorável do confinamento axial. Tais ferramentas foram obtidas tendo por base o cálculo de diversas vigas com o apoio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado, que tem como base o VATM modificado para vigas com confinamento axial.

No Capítulo 4 apresenta-se de forma detalhada a formulação, e respetiva derivação, do Modelo de Treliça com Ângulo Variável - GSVATM para vigas de betão armado sujeitas à

torção. Tal modelo servirá de base à segunda parte da presente tese. O referido modelo permite a previsão do comportamento global de vigas à torção.

No Capítulo 5, o GSVATM é reformulado para vigas com seção retangular vazada sujeitas simultaneamente à torção e a um estado de tensão axial uniforme passível de ocorrer em diversas situações, designadamente: existência de pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente, confinamento axial e aplicação de esforço axial externo centrado e constante (compressão ou tração). Para cada uma destas situações, é apresentado o procedimento de cálculo associado ao GSVATM modificado.

No Capítulo 6 apresenta-se uma análise paramétrica com o objetivo de averiguar a influência do estado de tensão axial uniforme no comportamento global de uma viga de referência à torção. O objetivo é analisar a evolução de vários parâmetros importantes que caracterizam o estado interno de deformação e tensão da viga. Os modelos propostos no Capítulo 5 foram incorporados no aplicativo Torque de forma a auxiliar as análises teóricas do Capítulo 6.

No Capítulo 7 são apresentadas análises comparativas entre as previsões do GSVATM modificado com resultados experimentais, para a situação de pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente, e também com resultados numéricos obtidos através de modelos de elementos finitos para vigas sujeitas a um esforço axial externo centrado e constante de compressão e tração e vigas confinadas axialmente. Este capítulo tem como objetivo principal validar o GSVATM modificado para as várias situações referidas, o qual foi apresentado ao longo do Capítulo 5, bem como as tendências comportamentais obtidas através do mesmo modelo e expostas no Capítulo 6.

Finalmente, no Capítulo 8 resumem-se as principais conclusões das duas partes que constituem a tese. São também apresentadas indicações e recomendações para futuros trabalhos de investigação.

De forma a facilitar a consulta da tese, encontra-se no início do trabalho o índice geral, o índice de figuras, o índice de tabelas e uma lista de simbologia utilizada. As referências bibliográficas são listadas no final do texto.

Capítulo 2 - Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável VATM e VATM modificado

2.1. Introdução

Neste Capítulo descreve-se de forma sucinta algumas analogias de treliça espacial que têm sido utilizadas para a modelação do comportamento último de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado submetidas à torção pura, incluindo também a situação de confinamento axial que é comum ser negligenciada em projeto. Constitui objetivo dar-se especial atenção aos desenvolvimentos recentes do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável Modificado (VATM Modificado) que tem em conta o efeito do confinamento axial em vigas de betão armado e pré-esforçado sujeitas à torção (com secção cheia ou vazada).

O primeiro modelo descrito neste capítulo, que constitui o modelo base do VATM Modificado, é o Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (VATM - Variable Angle Truss Model) para vigas de betão armado sujeitas à torção e com secção retangular cheia ou vazada. Este modelo reveste-se de uma grande importância uma vez que, de entre as várias analogias de treliça espacial propostas por diversos autores, o VATM tem sido dos mais utilizados e tem servido de base de apoio a diversos autores para a elaboração de propostas de disposições normativas relativamente ao dimensionamento à torção de secções de betão estrutural, algumas das quais já incorporadas em diversos documentos normativos com enorme abrangência territorial, tais como o código ACI (American Concrete Institute), os códigos europeus MC (Model Code) 90 e EC 2 (Eurocódigo 2), entre outros.

O segundo modelo descrito no presente capítulo constitui uma extensão do VATM ao caso de vigas com confinamento axial sujeitas à torção. Conforme foi discutido na Secção 1.2.1, uma viga de betão armado, quando ligada monoliticamente aos elementos de uma estrutura da qual faz parte e quando submetida à torção, tende a sofrer um alongamento na direção longitudinal, do qual surge um estado adicional de compressão. Resultados experimentais obtidos por Hsu em 1968 [63] para vigas cheias e por Bernardo e Lopes em 2009 [26] para vigas vazadas, mostram que, no estado fissurado, as vigas de betão armado sujeitas à torção sofrem um alongamento não negligenciável na direção longitudinal. Tal alongamento aumenta até a viga atingir o momento torsor máximo. No caso de a viga se encontrar restringida por elementos estruturais adjacentes (tais como vigas, pilares, paredes, entre outros), esta fica sujeita a um estado de compressão axial variável em adição à torção. O valor da força axial de compressão resultante depende das características da viga, do nível de carregamento e do grau de confinamento (características dos elementos adjacentes). A existência desta força de compressão axial altera o estado interno de equilíbrio da viga, pelo que se trata de uma situação de interação de esforços: Torção + compressão axial centrada. A extensão do VATM para ter em conta esta interação designa-se de VATM modificado, tendo sido anteriormente

proposto por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32]. Tal modelo foi implementado através do aplicativo TORQUE_MTEAV desenvolvido por Andrade et al. em 2011 [11], que permitiu o cálculo da resistência efetiva de vigas de betão armado à torção com diversos níveis de confinamento axial. Tendo por base esta análise, foram propostos ábacos para o apoio ao projeto de vigas à torção com secção quadrangular (Secção 2.2.7) com vista a corrigir a resistência à torção por forma a ter em conta o efeito favorável do confinamento axial. Esta análise será estendida no presente trabalho (Capítulo 3) para incluir as vigas com secção retangular com diferentes relações altura versus largura da secção (definidas pelo designado fator de forma).

2.2. Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável - VATM

2.2.1. Análise de uma viga com base no Modelo de Treliça Plana

O modelo simplificado de treliça espacial de Rausch, que derivou do modelo simplificado de treliça plana de Morsh [90] e Ritter [105], deu origem ao modelo de treliça espacial com ângulo variável proposto por Hsu e Mo em 1985 [69]. Desta forma, considera-se importante, numa primeira fase, apresentar a derivação do modelo de treliça plana para a análise de vigas de betão armado sujeitas ao corte.

A viga ilustrada na Figura 2.1 com uma carga concentrada aplicada a meio vão encontra-se sujeita à ação combinada do esforço transversal e da flexão. O equilíbrio do elemento A da viga encontra-se ilustrado na Figura 2.2. Note-se que no modelo de treliça ilustrado na Figura 2.2 é assumido que na corda superior e inferior se encontra localizada toda a armadura longitudinal superior e inferior, respetivamente. A distância vertical entre as cordas é designada d_v , que também pode ser considerada como sendo o comprimento das barras verticais. Analisando o equilíbrio de forças do elemento A, ilustrado na Figura 2.2 (c), observa-se que a força de corte V (que atua na face esquerda) é decomposta em duas componentes - \bar{N} e D , onde a força longitudinal \bar{N} é absorvida igualmente pelas armaduras longitudinal superior e inferior com um valor $\bar{N}/2 = (V \cot \alpha)/2$ e a força D é absorvida pela escora de betão com um valor $D = V/\sin \alpha$. Sendo a força na escora de betão D aplicada na secção transversal da mesma, é possível estabelecer a equação da tensão na escora de betão:

$$\sigma_d = \frac{D}{t_d d_v \cos \alpha} \quad (2.1)$$

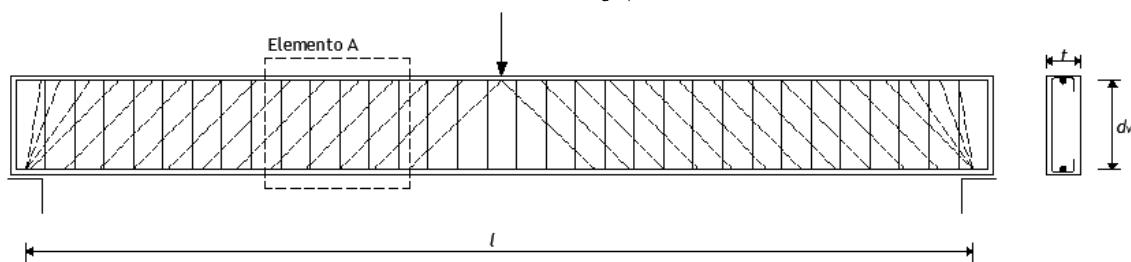


Figura 2.1 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana

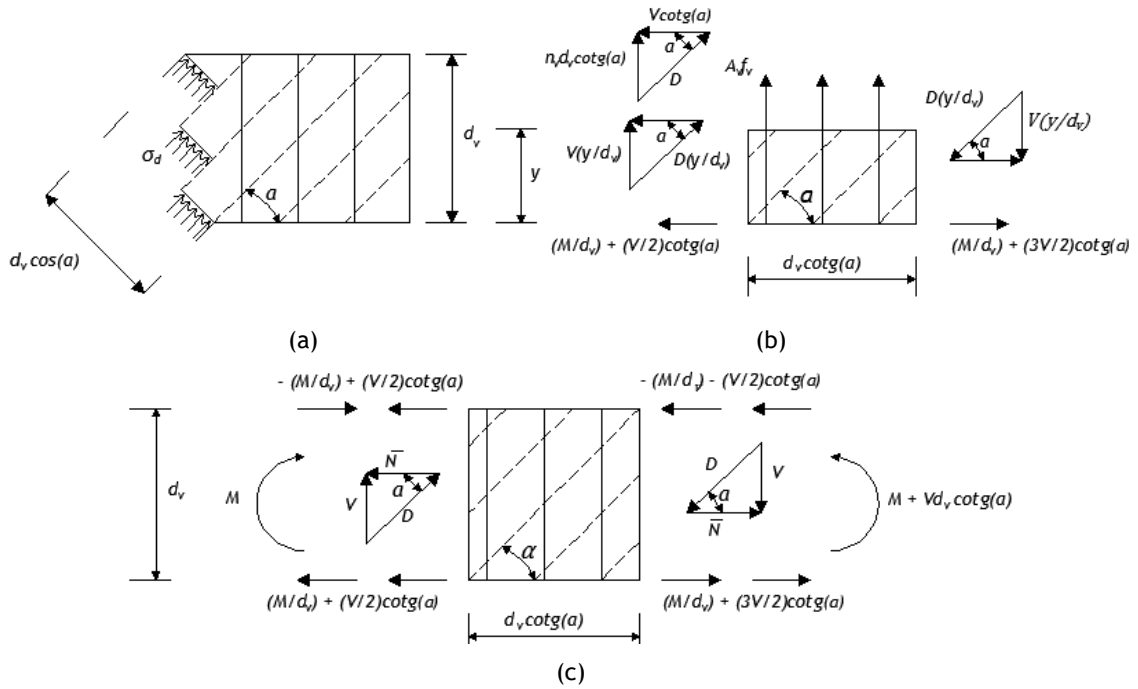


Figura 2.2 - Análise do elemento A de viga com base no modelo de treliça plana

Para calcular a força total na corda longitudinal superior e inferior deve ter-se em conta, para além da força $\bar{N}/2$ provocada pela força de corte V , o efeito provocado pelo momento M que na face esquerda acresce uma força de $\pm M/d_v$ e na face direita $\pm M + Vd_v \cot \alpha$. Assim, a força total na corda superior e inferior, N_t e N_b , vêm respetivamente:

$$N_t^{\text{esq}} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (2.2)$$

$$N_b^{\text{esq}} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (2.3)$$

$$N_t^{\text{dir}} = -\frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (2.4)$$

$$N_b^{\text{dir}} = \frac{M + d_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha = \frac{M}{d_v} + \frac{3V}{2} \cot \alpha \quad (2.5)$$

A força na armadura transversal é obtida a partir do equilíbrio vertical num subelemento do elemento A obtido através de um corte horizontal a uma distância arbitrária y da base, Figura 2.2 (b). Observando-se o equilíbrio do triângulo superior representado nessa mesma figura, a força horizontal $V \cot \alpha$ decompõe-se em duas forças: D e $n_v d_v \cot \alpha$. A força D é resistida pela escora diagonal e $n_v d_v \cot \alpha$ é uma força uniforme resistida pela armadura transversal por unidade de comprimento, $n_v = A_{st} f_{st} / s$. Através do equilíbrio de forças no triângulo superior da Figura 2.2 (b) a força na armadura transversal pode ser calculada através da seguinte equação:

$$n_v d_v = V \tan \alpha \Leftrightarrow A_{st} f_{st} = V \frac{s}{d_v} \tan \alpha \quad (2.6)$$

2.2.2. Vigas com secção vazada sujeitas à torção pura

A hipótese simplificativa de Rausch ao assumir uma inclinação constante de 45° para a escora diagonal de betão está associada à relação equilibrada entre as quantidades de armadura longitudinal e transversal para o caso da torção pura. No entanto, ensaios experimentais demonstraram, posteriormente, que ambas as armaduras (longitudinal e transversal) podiam entrar em cedência para um determinado intervalo da relação entre a quantidade de armadura longitudinal e transversal [66]. Por esta razão a treliça espacial deveria considerar um ângulo α variável para a escora de betão. Tendo em conta este aspeto, a Figura 2.3 representa uma viga de secção retangular e vazada, a qual é armada com quatro varões longitudinais, um em cada canto, com cintas uniformemente espaçadas (s) e escoras inclinadas de um ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A interação entre estes três elementos origina o efeito de treliça espacial. A consideração da armadura longitudinal concentrada nos cantos constitui uma hipótese simplificativa cuja validade foi comprovada por Hsu [66].

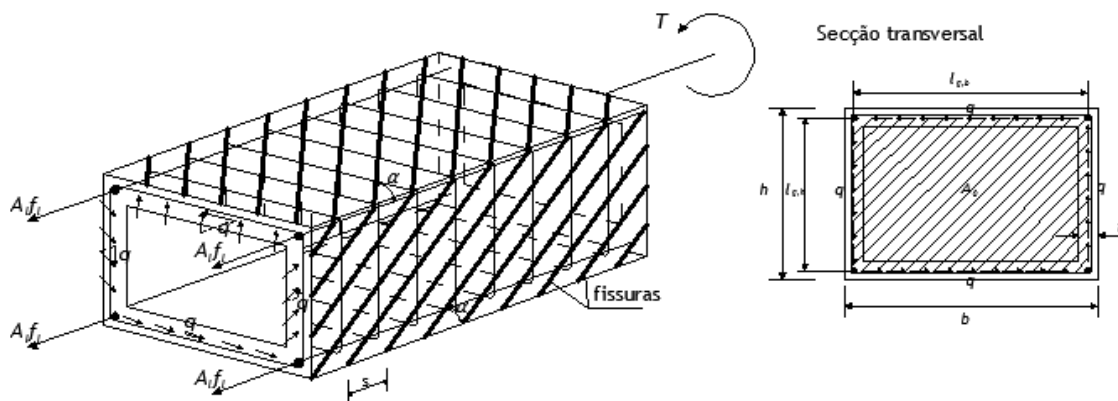


Figura 2.3 - Viga com secção retangular vazada sujeita à torção pura

Em cada secção transversal interior da viga são observáveis duas forças: a força nas barras longitudinais, $A_{sl}f_{sl}$, e a força na escora diagonal de betão. A resultante destas duas forças constitui o designado fluxo de corte q que atua na secção transversal. Utilizando a Teoria do Tubo de Paredes Finas de Bredt [34], que pode ser utilizada na viga ilustrada na Figura 2.3 uma vez que a mesma se pode assemelhar a um tubo fino a resistir a um momento torsor puro, é possível obter o fluxo de corte que circula nas paredes através de:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (2.7)$$

Na equação anterior A_0 corresponde à área limitada pela linha média do fluxo de corte (Figura 2.3 - secção transversal), que pode ser assumida como coincidindo com a linha média das paredes com espessura t . A força de corte que atua em cada parede reta da viga de secção vazada é em tudo muito semelhante a uma força de corte a atuar numa secção cheia de viga com pequena largura, tal como ilustrado na Figura 2.1. Assim, considerando que neste

caso o comprimento (maior dimensão) da secção transversal onde o fluxo se desenvolve é l_q , a força de corte equivalente ao fluxo de corte numa parede reta é $V = ql_q$ e a força na armadura longitudinal de uma parede é $\bar{N} = V \cot \alpha = ql_q \cot \alpha$ (Figura 2.3). Desta forma, definindo a força total nas armaduras longitudinais $\Delta N = A_{st} f_{st}$, onde A_{st} e f_{st} representam a área total de armadura longitudinal e a tensão dessa mesma armadura, respetivamente, considerando $p_0 = \sum l_q$ como sendo o perímetro da linha média do fluxo de corte e substituindo q pela Equação (2.7), a força total nas armaduras longitudinais vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot \alpha = A_{st} f_{st} = \frac{Tp_0}{2A_0} \cot \alpha \quad (2.8)$$

A força na armadura transversal, em cada cinta, deriva-se de uma forma muito semelhante a partir da Equação (2.6) e tendo em conta a igualdade $q = V/d_v$ e a Equação (2.7):

$$A_{st} f_{st} = \frac{Ts}{2A_0} \tan \alpha \quad (2.9)$$

Os parâmetros A_{st} e f_{st} representam a área de armadura transversal de uma barra transversal e a tensão nessa mesma armadura, respetivamente. Falta ainda apresentar uma expressão que permita calcular a tensão na escora de betão, esta pode ser obtida a partir da Equação (2.1) e tendo em conta a Equação (2.7):

$$\sigma_d = \frac{q}{t_d \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{T}{2A_0 t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.10)$$

Deste modo, as Equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) constituem as quatro equações básicas de equilíbrio para a torção segundo o VATM. Refira-se que a resistência última de uma viga de secção vazada é idêntica à de uma viga com secção cheia de características iguais (dimensões exteriores, tipo de betão, quantidade e disposição das armaduras). Uma vez que o núcleo não contribui para a sua resistência pode considerar-se que este não é efetivo quando a rotura é eminente. Desta forma, e uma vez que o VATM considera que a viga já está plenamente fissurada, as equações deduzidas nesta secção podem também ser consideradas válidas para vigas com secção cheia.

2.2.3. Flexão da escora de betão

A observação de Lampert e Thrurliman [78] de que numa viga submetida a um momento torsor as escoras, para além de se encontrarem sujeitas a um esforço axial, também se encontram sujeitas a um efeito de flexão, implica que o cálculo do estado de tensão e deformação das escoras deva ter em conta esta interação. A geometria resultante da flexão de uma escora de betão encontra-se ilustrada na Figura 2.4 para a parede superior de uma viga com secção vazada sujeita à torção. A superfície inicialmente plana OABC, que se localiza ao nível médio do fluxo de corte q , incorpora a escora de betão (linha diagonal OA). Em virtude da imposição de um ângulo de torção θ (por unidade de comprimento) a escora

de betão passa a apresentar um desenvolvimento curvo (linha AO'). Em consequência desta deformação a superfície da parede superior da viga transforma-se num parabolóide hiperbólico com uma inclinação de $\theta l_q \cot \alpha$ (Figura 2.4).

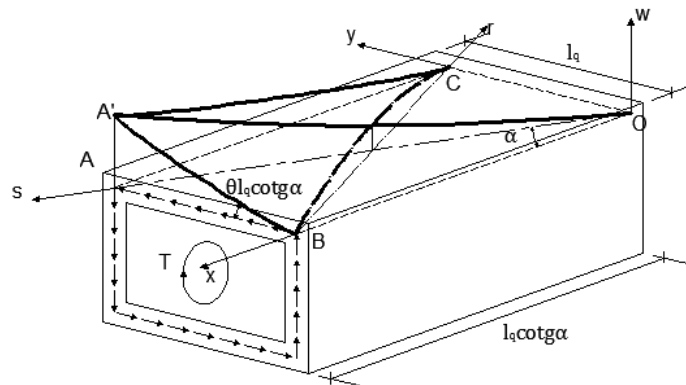


Figura 2.4 - Flexão de uma escora inserida numa parede de uma viga com secção vazada sujeita à torção

De forma a derivar equação para a curvatura da escora de betão, a superfície parabólica hiperbólica pode ser expressa pela seguinte equação, em que w é o deslocamento perpendicular ao plano x-y:

$$w = \theta xy \quad (2.11)$$

A curvatura da escora de betão, ψ , é a segunda derivada de w em relação a s , direção principal da escora de betão:

$$\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin 2\alpha \quad (2.12)$$

Considere-se agora uma secção da escora de betão com largura unitária e com secção $l \times t$ (Figura 2.5), a qual será analisada quanto ao estado de tensão e extensão. Devido ao efeito de flexão da escora de betão, podem ocorrer trações junto à face inferior e, nessas condições, essa área da escora pode ser desprezada uma vez que é considerado que o betão é apenas resistente à compressão. Desta forma, apenas a área correspondente à profundidade t_d é considerada como efetiva. Assumindo que a distribuição das extensões é linear, a extensão máxima, ε_{ds} , ocorre à superfície (Figura 2.4) e é dada por:

$$\varepsilon_{ds} = \psi t_d \quad (2.13)$$

O valor de t_d deve ser calculado a partir das equações de equilíbrio e das propriedades do bloco de tensões.

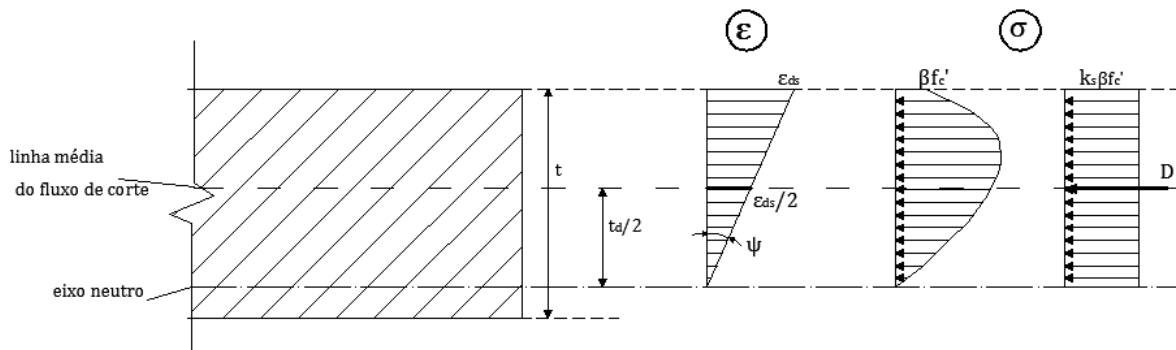


Figura 2.5 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão

As Equações (2.12) e (2.13) constituem as duas condições básicas de compatibilidade para a flexão da escora de betão devido à torção. Note-se que na Figura 2.5 a linha média de fluxo de corte não coincide com a resultante das tensões de compressão, sendo assumido que tal linha passa a meio da profundidade efetiva t_d . Por simplificação, a tensão na escora de betão é uniformizada através da utilização de um coeficiente k_1 , processo este que será explicado na secção seguinte.

2.2.4. Relações constitutivas $\sigma - \varepsilon$ dos materiais

É recorrente para caracterizar o comportamento do betão à compressão serem propostas relações $\sigma - \varepsilon$ médias que têm em consideração um comprimento de referência suficientemente grande para ter em conta a influência das extensões transversais de tração (*softening effect*, habitualmente traduzido na bibliografia portuguesa para “amolecimento do betão”). Tais extensões influenciam substancialmente o comportamento do betão comprimido na escora dos elementos de betão armado, principalmente no estado fissurado. Têm sido realizados diversos estudos com vista a propor relações constitutivas de modo a que estas se aproximem do comportamento real do betão comprimido quando este se encontra sujeito a um estado biaxial de tensão/deformação. De entre tais estudos, destacam-se os realizados por Vecchio e Collins entre 1982 e 1993 [119] [120] [118], Belarbi e Hsu em 1991 [19] e Zhu e Hsu em 2001 [128]. No entanto, nem todas as relações constitutivas propostas se mostraram adequadas para serem usadas na modelação comportamental de vigas de betão armado sujeitas à torção. Esta observação resulta de várias razões, como por exemplo pelo facto das relações $\sigma - \varepsilon$ serem habitualmente obtidas indiretamente com base em ensaios experimentais de painéis de betão armado submetidos ao corte puro. Outra questão prende-se com o facto de as relações $\sigma - \varepsilon$ serem habitualmente calibradas e limitadas a determinados intervalos de determinadas variáveis (classe do betão, taxa e balanço de armaduras, efeito de escala, etc.). Ainda importa referir que é comum assumir que as armaduras só resistem a esforços atuantes na direção do eixo das barras, não se tendo em consideração, de uma forma explícita, o efeito de ferrolho na secção das fissuras.

Bernardo et al. em 2012 [23] apresentaram um estudo em que foram analisados os resultados do VATM para a previsão do comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção, tendo por base 21 relações $\sigma-\varepsilon$ para o betão comprimido na escora propostas por vários autores. Com base numa exaustiva análise comparativa entre as previsões dos modelos e os dados experimentais, os autores concluíram que um dos modelos teóricos mais adequados era aquele que incorporava a relação $\sigma-\varepsilon$ para o betão comprimido na escora proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [19] com os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang em 1998 [127] para ter em conta o *softening effect*. As expressões matemáticas associadas à relação $\sigma-\varepsilon$ anteriormente referida são seguidamente apresentadas.

Segundo Belarbi e Hsu, [19] [18] a curva $\sigma-\varepsilon$ que caracteriza o betão à compressão na escora diagonal é traduzida por duas equações matemáticas, uma para o ramo ascendente representado pela Equação (2.14) e outra para o ramo descendente representado pela Equação (2.15), como ilustrado na Tabela 2.1. Na mesma tabela são ainda apresentados os coeficientes de redução da tensão (β_σ) e da extensão (β_ε), Equações (2.16) a (2.19).

Tabela 2.1 - Relação constitutiva do betão à compressão (Belarbi e Hsu [19], Hsu e Zhang [127])

<p>Se $\varepsilon_{ds} \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$:</p> $\sigma_d = \beta_\sigma f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{ds}}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.14)$ <p>Se $\varepsilon_{ds} > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$:</p> $\sigma_d = \beta_\sigma f'_c \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_{ds} - \beta_\varepsilon \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 - \beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.15)$ $\beta_\varepsilon = \beta_\sigma = \frac{R(f'_c)}{\sqrt{1 + \frac{400\varepsilon_{c1}}{\eta'}}} \quad (2.16)$ $\eta = \frac{\rho_l \sigma_{ly}}{\rho_t \sigma_{ty}} \quad (2.17)$ $\begin{cases} \eta' = \eta & \text{se } \eta \leq 1 \\ \eta' = 1/\eta & \text{se } \eta > 1 \end{cases} \quad (2.18)$ $R(f'_c) = \frac{5,8}{\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}}} \leq 0,9 \quad (2.19)$	
--	--

Na Tabela 2.1 o significado de alguns parâmetros é o seguinte:

f'_c - tensão de compressão resistente do betão;

ε_0 - extensão correspondente ao pico de tensão f'_c ;

β_σ e β_ϵ - coeficientes redutores que têm em conta o *softening effect* na tensão máxima do betão e na extensão correspondente ao pico de tensão, respetivamente;

ϵ_{c1} - Extensão principal de tração na direção perpendicular à escora diagonal, onde $\epsilon_{c1} = \epsilon_l + \epsilon_t + \epsilon_{ds}$ [66].

A Figura da Tabela 2.1 ilustra a evolução da tensão na escora de betão e permite estabelecer uma equação para determinar a tensão média de compressão na escora de betão correspondente ao diagrama de tensões retangular equivalente:

$$\sigma_d = k_1 \beta_\sigma f_c \quad (2.20)$$

O parâmetro k_1 é calculado através da integração das Equações (2.14) e (2.15), numericamente (se o VATM for implementado computacionalmente) ou analiticamente. Neste último caso, devem ser utilizadas as seguintes expressões matemáticas:

Se $\epsilon_{ds} \leq \beta_\epsilon \epsilon_0$:

$$k_1 = \frac{\epsilon_{ds}}{\beta_\epsilon \epsilon_0} \left(1 - \frac{\epsilon_{ds}}{3\beta_\epsilon \epsilon_0} \right) \quad (2.21)$$

E se $\epsilon_{ds} > \beta_\epsilon \epsilon_0$:

$$k_1 = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\beta_\epsilon \epsilon_0}{\epsilon_{ds}} \right) \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\epsilon} - 1 \right)^2} \right) + \frac{\epsilon_{ds}}{\beta_\epsilon \epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{2}{\beta_\epsilon} - 1 \right)^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{ds}}{\beta_\epsilon \epsilon_0} \right) \quad (2.22)$$

No presente estudo o cálculo do parâmetro k_1 foi obtido por integração numérica através do aplicativo TORQUE_MTEAV.

No estudo realizado por Bernardo et al. [23], os autores também compararam os resultados decorrentes de modelos que incorporavam diferentes relações $\sigma-\epsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas. Os referidos autores apresentaram a curva $\sigma-\epsilon$ proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [12] como a mais adequada para exprimir o comportamento das armaduras ordinárias tracionadas em vigas de betão armado sujeitas à torção, uma vez que esta relação constitutiva traduz o comportamento de armaduras embebidas em betão, contabilizando assim a participação do betão tracionado entre fendas, o designado *stiffening effect* (traduzido habitualmente na bibliografia portuguesa por “efeito de enrijecimento”). A curva $\sigma-\epsilon$ proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [17] para expressar o comportamento das armaduras envolvidas em betão quando tracionadas encontra-se representada na Tabela 2.2 e é expressa pela Equação (2.23).

Tabela 2.2 - Relação constitutiva da armadura ordinária à tração, Belarbi e Hsu 1994 [17]

$f_s = \frac{0,975E_s\varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1,1E_s\varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0,025E_s\varepsilon_s \quad (2.23)$	
$m = \frac{1}{9B - 0,2} \leq 25 \quad (2.24)$	
$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}}\right)^{1,5} \quad (2.25)$	
$f_{cr} = 3,75\sqrt{f'_c} \text{ (psi)} \quad (2.26)$	

Na Tabela 2.2 o parâmetro m é um coeficiente de forma que define a geometria do trecho curvo da curva $\sigma - \varepsilon$ e f_{cr} corresponde à resistência do betão à tração. De acordo com Belarbi e Hsu em 1994 [17], o ramo linear, no modelo bilinear que é uma simplificação do modelo de curva contínua, tem como limite superior o nível de tensões $f_n^* = (0,93 - 2B)f_{sy}$.

2.2.5. Formulação do VATM - Cálculo da curva T-θ

Para o cálculo da curva teórica T-θ, o VATM necessita de três equações de equilíbrio para calcular o momento torsor T, a espessura efetiva t_d da escora de compressão e o ângulo que estas fazem com o eixo longitudinal da viga. O momento torsor pode ser calculado rearranjando a Equação (2.10):

$$T = 2A_0 t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.27)$$

Assumindo que a linha média do fluxo de corte se encontra a meia profundidade do diagrama de tensões (Figura 2.5), o perímetro da linha média do fluxo de corte (p_0) e a área limitada pela mesma linha (A_0), podem ser obtidos através das equações seguintes, em que x e y representam as dimensões externas da secção:

$$p_0 = 2(x + y) - 4t_d \quad (2.28)$$

$$A_0 = (x - t_d)(y - t_d) \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação (2.27) nas Equações (2.8) e (2.9) obtém-se o ângulo α em função dos outros parâmetros já conhecidos:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (2.30)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sigma_d t_d} \quad (2.31)$$

Somando as duas equações anteriores, a espessura efetiva da escora vem:

$$t_d = \frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_{st} f_{st}}{s \sigma_d} \quad (2.32)$$

Neste ponto estão disponíveis as três equações de equilíbrio fundamentais para o cálculo da curva $T-\theta$: As Equações (2.27), (2.30) ou (2.31) e (2.32). Para além das equações de equilíbrio são ainda necessárias três equações para determinar as extensões na armadura longitudinal (ε_{sl}) e transversal (ε_{st}), bem como o ângulo de torção (θ) por unidade de comprimento. As expressões para o cálculo das extensões na armadura longitudinal e transversal são derivadas tendo por base relações trigonométricas obtidas através do círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte (Equações (2.33) e (2.34)) [20]. Para além das equações referidas anteriormente, que relacionam entre si as extensões nos materiais e o ângulo da escora, é também necessário uma relação que permita calcular o ângulo de torção. Tal relação é expressa pela Equação (2.35) que advém da Teoria do Tubo Fino de Bredt [34], onde $\gamma = \tau/G$ é a distorção (τ é a tensão tangencial e G é o módulo de distorção) e $p_0 = \int ds$ é o perímetro da linha média do fluxo de corte.

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_{st} + \varepsilon_d) \cot \alpha \quad (2.33)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_{st} + \varepsilon_d) \tan \alpha \quad (2.34)$$

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma \quad (2.35)$$

Substituindo a Equação (2.34) na Equação (2.35), e substituindo a equação resultante na Equação (2.12), e por último substituindo esta última equação resultante na Equação (2.13), obtém-se:

$$\varepsilon_{ds} = \frac{2p_0 t_d}{A_0} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_d) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.36)$$

Resolvendo a Equação (2.27) em ordem a t_d e substituindo-a na Equação (2.36), considerando que $\varepsilon_d = \varepsilon_{ds}/2$ (Figura 2.5), obtém-se a seguinte equação para a extensão na armadura transversal:

$$\varepsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{\rho_0 T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (2.37)$$

De forma semelhante, obtém-se a extensão na armadura longitudinal:

$$\varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{\rho_0 T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (2.38)$$

Por fim, eliminando ψ a partir das Equações (2.12) e (2.13) o ângulo de torção θ é dado por:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.39)$$

As Equações (2.37), (2.38) e (2.39) constituem as três equações de compatibilidade do VATM para o cálculo da curva teórica $T-\theta$.

Atendendo às equações apresentadas ao longo desta secção e às relações $\sigma-\varepsilon$ para o betão comprimido e para as armaduras tracionadas, torna-se possível definir um procedimento iterativo, na forma de um algoritmo, para o cálculo dos diversos pontos para o desenho da curva teórica $T-\theta$. O algoritmo assume como parâmetros de entrada (desconhecidos à partida) as variáveis: ε_{ds} , t_d , α , β_σ e β_ε . Desta forma estas variáveis são estimadas e os valores finais obtidos em cada iteração para estes mesmos parâmetros são comparados, constituindo este procedimento o critério de convergência. O traçado da curva $T-\theta$ passa por seleccionar sucessivos valores para ε_{ds} e repetir o cálculo do algoritmo. A rotura teórica da viga é definida através da imposição das extensões convencionais de rotura para os materiais (para o betão comprimido $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ e para o aço das armaduras tracionadas $\varepsilon_{su} = 0,01$).

A descrição pormenorizada do algoritmo de cálculo sai fora do âmbito da presente secção, podendo a mesma ser encontrada em bibliografia relacionada (por exemplo, [69], [24]). A Figura 2.6 ilustra o diagrama de fluxo com a estrutura do algoritmo para o cálculo da curva teórica $T-\theta$.

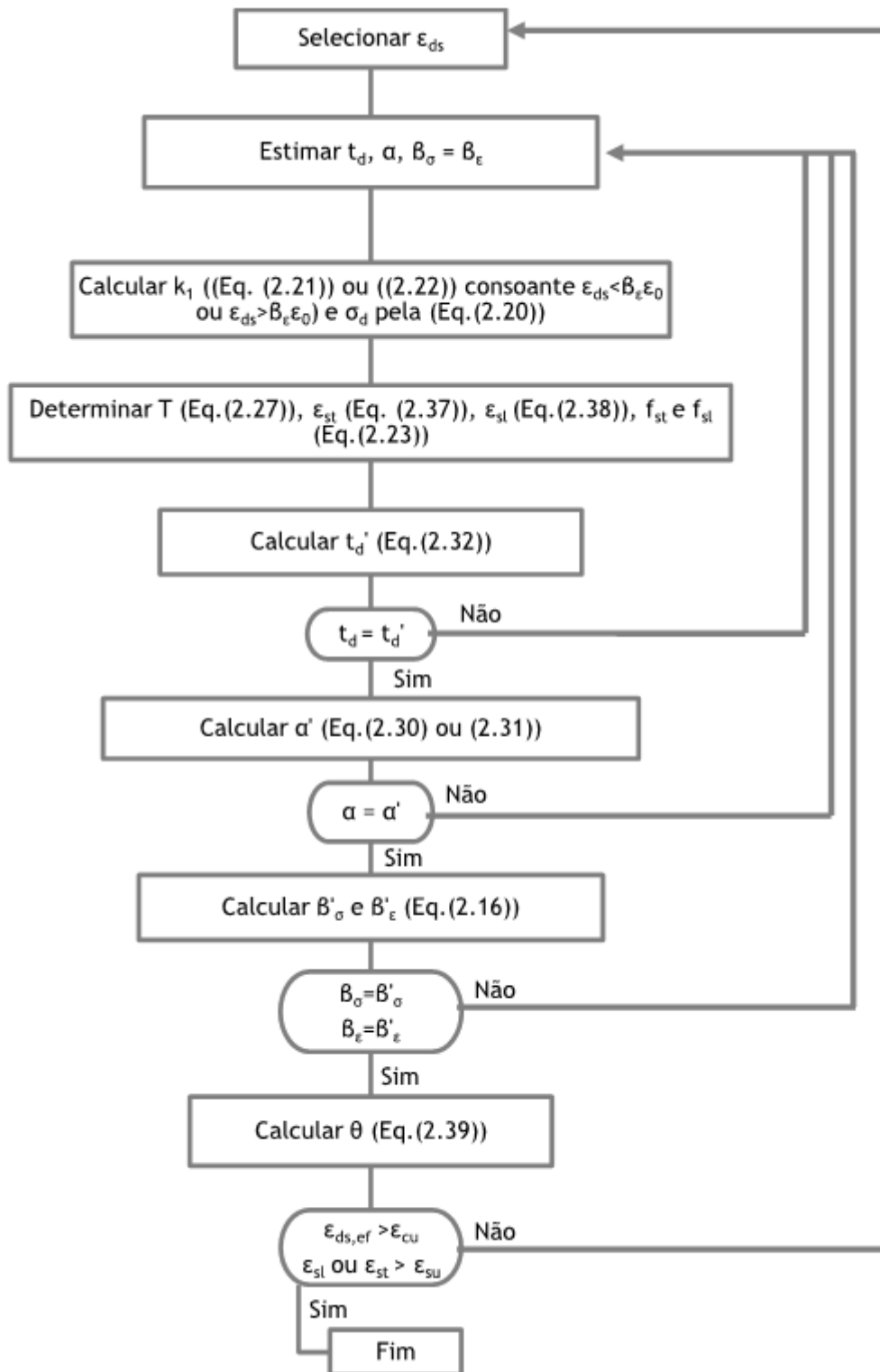


Figura 2.6 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do VATM modificado para o cálculo de $T - \theta$

2.3. Modelação teórica do comportamento de vigas confinadas axialmente

Esta secção descreve a metodologia que foi adotada por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32] para a modificação do VATM com vista a alargar o seu campo de aplicação a vigas de betão armado confinadas axialmente e submetidas à torção. A metodologia adotada para a modificação do VATM foi idêntica à utilizada por Hsu e Mo em 1985 [70] para adaptarem o VATM a vigas de betão pré-esforçado (pré-esforço longitudinal uniforme) à torção, e também à utilizada por Hsu em 1984 [66] no sentido de modificar o VATM de modo a incluir a situação de interação de esforços “torção + compressão axial longitudinal”. A influência da força de compressão devido ao confinamento axial é tida em conta na formulação das equações de compatibilidade e de equilíbrio do VATM. Como se verá adiante, a situação correspondente ao confinamento axial é diferente dos casos anteriormente referidos, o que motivou um estudo específico desta situação por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32].

Nesta secção será ainda abordada a modificação do VATM, desenvolvido por Bernardo et al. em 2015 [32], para vigas com pré-esforço longitudinal centrado exterior ou não aderente sujeitas à torção. Desde que as armaduras de pré-esforço estejam devidamente ancoradas nas extremidades, estas induzem um estado de confinamento axial à viga sujeita à torção pura, em resultado da rigidez axial dessas mesmas armaduras. A ausência de aderência entre as armaduras de pré-esforço e o betão permite considerar que o confinamento da viga constitui um problema análogo ao de uma viga restringida por outros elementos estruturais externos à mesma. Importa referir que o VATM modificado para vigas de betão armado constitui um caso particular do VATM modificado para vigas de betão pré-esforçado.

2.3.1. Metodologia para a incorporação do efeito do confinamento axial

Como já foi discutido anteriormente (Secção 1.2.1), nas situações correntes de estruturas geralmente as vigas não se encontram livre de restrições axiais. Na Figura 2.7 apresenta-se um exemplo básico de uma viga inserida num pórtico simples onde existe continuidade ao nível dos nós. Se a viga estiver sujeita a momentos torsores primários, após a fissuração o seu comprimento tende a aumentar e desta forma mobiliza a rigidez à flexão dos pilares, que por sua vez restringe o alongamento livre da viga. O nível do confinamento axial depende do alongamento da viga e da rigidez global à flexão dos pilares (a qual depende da secção do pilar, da sua altura, das condições de apoio e ligação à viga e dos materiais que o constituem).

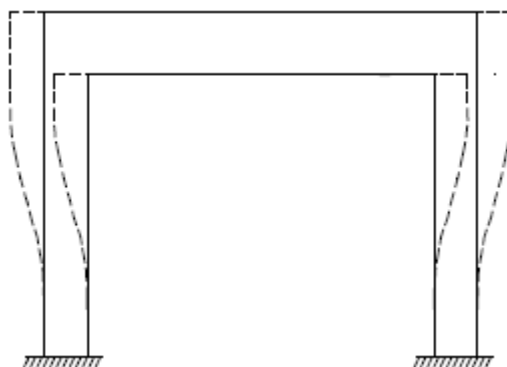


Figura 2.7 - Viga betão armado sujeita à torção e inserida num pórtico simples [116]

Na formulação deste modelo é assumido que o alongamento total livre da viga (livre de restrições), Δl , é quantificado através da extensão das armaduras longitudinais, ε_{sl} , isto é, admite-se por simplicidade que o alongamento da armadura longitudinal corresponde ao alongamento total da viga. Esta hipótese pode ser fundamentada por observações experimentais de estudos anteriores, por exemplo Hsu em 1968 [63]. É ainda admitido que a extensão nas armaduras longitudinais é constante ao longo de todo o comprimento da viga (l). Bernardo e Lopes em 2009 [25] observaram em estudos experimentais que o padrão de fissuração de uma viga à torção é constituído por fissuras principais com desenvolvimento helicoidal e por múltiplas fissuras secundárias, pelo que se pode assumir, de forma simplificada, que toda a viga se encontra no estado fissurado. Note-se que esta hipótese vai de encontro ao princípio do VATM, que assume que toda a viga se encontra em estado fissurado. A extensão da armadura ordinária longitudinal pode ser calculada diretamente através do VATM. Conhecendo a extensão na armadura longitudinal, é possível calcular uma estimativa para o alongamento livre da viga (Figura 2.8 (a)) através de:

$$\Delta l = l\varepsilon_{sl} \quad (2.40)$$

No modelo de viga ilustrado na Figura 2.7, a influência do confinamento axial provido pela rigidez axial dos pilares estruturais adjacentes pode ser simulada através de molas lineares localizadas nas secções extremas da viga e centradas na secção (Figura 2.8 (b)). Devido à rigidez das molas (assumidas como k_1 e k_2), quando a viga tende a aumentar o seu comprimento, é restituída uma força de compressão centrada, F_{ca} , pelas molas. Essa força é proporcional à rigidez das molas (k_1 e k_2) e ao alongamento livre da viga (Δl). Desta forma se justifica a situação de interação de esforços torção - compressão centrada.

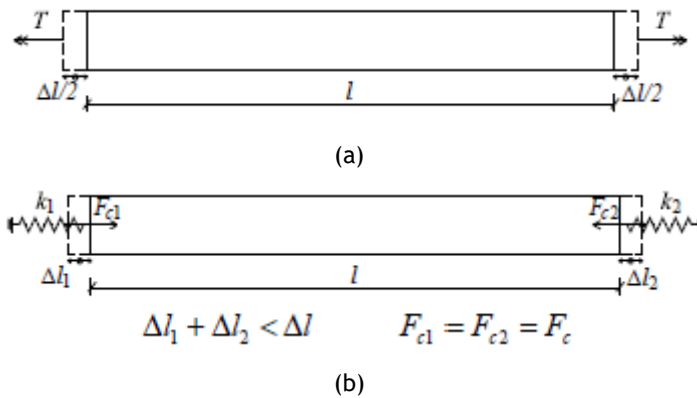


Figura 2.8 - Viga confinada axialmente: (a) situação livre de restrição - (b) situação idealizada com molas lineares [32]

A partir da Figura 2.8 (b) é possível calcular a força axial centrada na viga devido ao confinamento axial. Se as rigidezes k_1 e k_2 forem diferentes, então $\Delta l_1 \neq \Delta l_2$ e deve assumir-se $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Através do equilíbrio longitudinal a força centrada restituída pelas molas ($F_{ca1} = k_1 \Delta l_1$ e $F_{ca2} = k_2 \Delta l_2$) tem que ser igual e pode ser calculada através:

$$F_{ca} = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \quad (2.41)$$

O modelo apresentado nesta secção assume que a rigidez das molas (k_1 e k_2) é um parâmetro de entrada no procedimento de cálculo. Este parâmetro deve ser calculado previamente pelo utilizador face à situação de integração da viga na estrutura e em função das ligações aos elementos estruturais adjacentes.

2.3.2. VATM para vigas de betão armado com confinamento axial

2.3.2.1. Modelo de Trelíça Plana em viga de betão armado com confinamento axial

Nesta secção pretende-se fazer uma revisão do Modelo de Trelíça Plana para o caso de vigas confinadas axialmente. Como já foi referido anteriormente, este estudo pode ser interpretado como uma situação de interação de esforços Flexão + Esforço Transverso + Esforço axial. A Figura 2.9 ilustra uma viga simplesmente apoiada com um vão l e com uma carga concentrada aplicada a meio vão e, também, com uma força axial de compressão, F_{ca} , devido ao confinamento axial. Na Figura 2.9 é ainda ilustrado o equilíbrio interno do elemento da viga submetido a um esforço transverso constante V , momento fletor variável M e à força de compressão axial F_{ca} . A força F_{ca} é considerada como uma força exterior que deve ser equilibrada pelas forças internas V , \bar{N} e D .

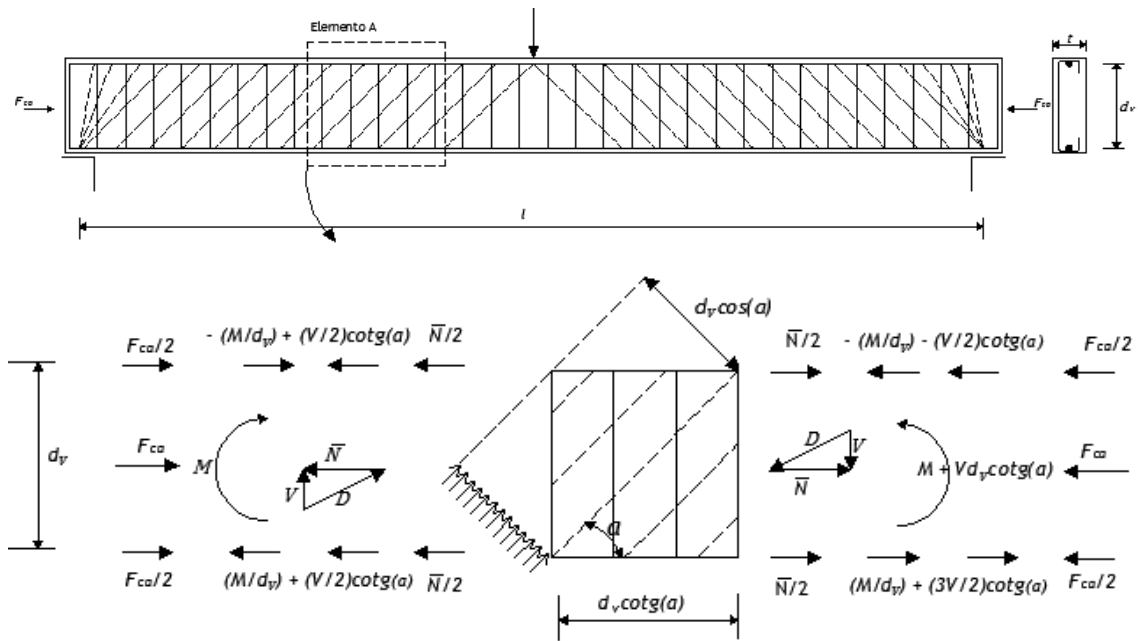


Figura 2.9 - Equilíbrio de uma viga submetida ao esforço transversal, momento fletor e força axial de compressão

No equilíbrio interno da viga é considerado que a força de corte V é decomposta na força diagonal D absorvida pela escora de betão ($D = V/\sin\alpha$) e pela força longitudinal \bar{N} absorvida pelas armaduras longitudinais, esta força é igualmente repartida pelas duas cordas superior e inferior. A força longitudinal \bar{N} deve ainda incorporar a força axial de compressão F_{ca} e pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\bar{N} = V \cot \alpha - F_{ca} \quad (2.42)$$

2.3.2.2. Vigas confinadas axialmente com secção vazada sujeitas à torção

Na Figura 2.10 está representada uma viga com secção retangular e vazada, análoga à ilustrada anteriormente na Figura 2.3. A viga ilustrada na Figura 2.10 encontra-se sujeita a um esforço de torção T e, em adição, a uma força de compressão F_{ca} devido ao confinamento axial.

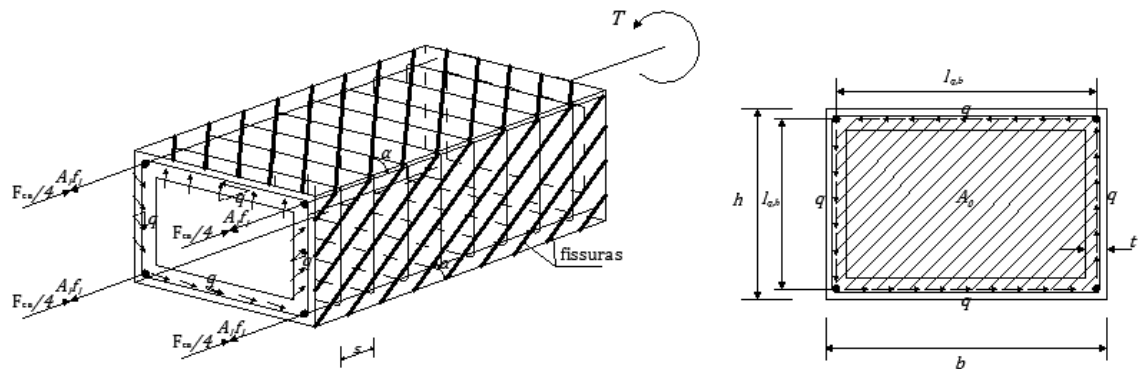


Figura 2.10 - Viga com secção retangular vazada confinada axialmente sujeita à torção

Na viga ilustrada na Figura 2.10 pode observar-se que a força longitudinal nas barras de canto deve incorporar, para além da solicitação longitudinal proveniente do momento torsor T também a força axial de compressão F_{ca} que se distribui igualmente pela armadura longitudinal. Em cada parede da secção transversal, a força na armadura longitudinal é dada por:

$$\bar{N} = qp_0 \cot \alpha - \frac{F_{ca}}{4} \quad (2.43)$$

A força total nas armaduras longitudinais vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot \alpha - F_{ca} = A_{st} f_{st} \quad (2.44)$$

Substituindo, na equação anterior, q pela Equação (2.7):

$$A_{st} f_{st} = \frac{Tp_0}{2A_0} \cot \alpha - F_{ca} \quad (2.45)$$

Segue-se a obtenção das três equações de equilíbrio do VATM modificado. O momento torsor T continua a ser determinado a partir da Equação (2.27). A partir da Equação (2.30) a inclinação da escora de betão vem:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_{st} f_{st} + F_{ca}}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (2.46)$$

Para a espessura da escora de betão, somando-se as Equações (2.46) e (2.31), vem:

$$t_d = \frac{A_{st} f_{st} + F_{ca}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_{st} f_{st}}{s \sigma_d} \quad (2.47)$$

As equações de compatibilidade do VATM anteriormente apresentadas (Equações (2.37) a (2.39)) sofrem uma pequena alteração relativamente ao exposto na Secção 2.2.5. Tal alteração prende-se com a necessidade de correção da extensão à superfície da escora diagonal de betão, ε_{ds} , substituindo-a por uma extensão efetiva, $\varepsilon_{ds,ef}$. Este assunto será claramente explicado mais à frente. Assim, as Equações ((2.37) a (2.39) ficam:

$$\varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds,ef} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds,ef} \quad (2.49)$$

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds,ef}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.50)$$

Em relação a uma situação sem confinamento, a força axial de confinamento F_{ca} reduz o livre alongamento da viga Δl (sendo $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$), pelo que o real alongamento da viga é efetivamente menor e em consequência vai aumentar o encurtamento efetivo da escora de betão.

Na Secção 2.3.1 foi referido que, por simplicidade, se assume que o encurtamento total da viga devido ao confinamento axial corresponde ao encurtamento da armadura longitudinal $\varepsilon_{l,ca}$ e pode ser estimado por:

$$\varepsilon_{l,ca} = \frac{\sigma_d}{E_c} = \frac{F_{ca}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{F_{ca}}{E_c (A_c - A_h) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (2.51)$$

Onde,

- σ_d - Tensão devido à força de confinamento axial
- F_{ca} - Força de compressão devido ao confinamento axial
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- A_{ch} - Área de betão equivalente
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão
- A_h - Área da zona vazada da secção (em secções cheias $A_h = 0$)

A ocorrência do encurtamento na armadura longitudinal induz um encurtamento na escora de betão inclinada. Assim, em rigor, deve calcular-se o encurtamento que a fibra da face exterior da escora de betão ($\varepsilon_{ds,ca}$) sofre devido ao confinamento axial da viga. O cálculo desse encurtamento é feito de uma forma simplificada, tendo por base o ilustrado na Figura 2.11, a partir da qual se pode estabelecer:

$$\varepsilon_{ds,ca} = \frac{\varepsilon_{l,ca}}{\cos \alpha} \quad (2.52)$$

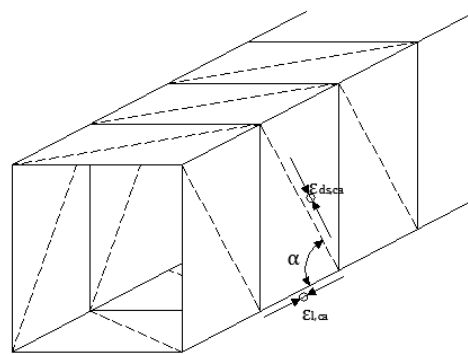


Figura 2.11 - Encurtamento da escora de betão devido ao confinamento axial

Deste modo, no novo procedimento de cálculo, o valor de entrada ε_{ds} para o procedimento de cálculo iterativo deve ser somado ao encurtamento da escora devido ao confinamento axial de modo a calcular a extensão efetiva $\varepsilon_{ds,ef}$, sendo este o valor que deve ser dado como dado inicial para o mesmo procedimento.

$$\varepsilon_{ds,ef} = \varepsilon_{ds} + \varepsilon_{ds,ca} \quad (2.53)$$

A metodologia anterior permite, de uma forma simples, corrigir o estado de deformação inicial da viga livre tendo em conta o efeito do confinamento axial.

2.3.3. VATM para vigas de betão pré-esforçado com armaduras não aderentes e/ou cabos exteriores

Como já referido no início da secção 2.3, pode considerar-se que vigas com pré-esforço longitudinal exterior ou não aderente se assemelham a vigas restringidas axialmente em resultado da restrição que as armaduras de pré-esforço conferem através da sua rigidez axial quando a viga tende a alongar devido à torção. A metodologia usada neste modelo é muito semelhante ao exposto na Secção 2.3.2, sendo que neste caso o confinamento axial depende essencialmente da rigidez axial da armadura de pré-esforço. Deste modo, nesta secção apenas são apresentadas as alterações do modelo que permitem a incorporação do efeito da armadura de pré-esforço. Note-se que o estado de tensão inicial correspondente à situação de descompressão não é relevante visto que com o VATM interessa essencialmente avaliar o comportamento último das vigas à torção.

A força de compressão conferida pelas armaduras de pré-esforço, enquanto elementos confinantes, é diretamente proporcional à rigidez axial da armadura de pré-esforço e ao alongamento da viga Δl em situação livre. O alongamento que a viga tende a desenvolver, em resultado da torção, é dependente da armadura longitudinal ordinária (armadura aderente), não sendo influenciado pela presença da armadura de pré-esforço não aderente. Assim, o alongamento livre de restrições da viga deve ser calculado, igualmente, pela Equação (2.40).

O equilíbrio da força de confinamento axial é tido em conta nas equações de equilíbrio longitudinal. Portanto, o cálculo do momento torsor T continua a ser realizado através da Equação (2.27). No entanto, para o cálculo da inclinação da escora de betão α com o eixo longitudinal a Equação (2.46) fica:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca}}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (2.54)$$

Na equação anterior A_{pl} e f_{pl} representam, respetivamente, a área e a tensão da armadura de pré-esforço. Para o cálculo da espessura efetiva t_d da escora de betão, a Equação (2.47) deve ser substituída por:

$$t_d = \frac{A_{sl} f_{sl} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_{st} f_{st}}{s \sigma_d} \quad (2.55)$$

Relativamente às equações de compatibilidade, estas mantêm-se inalteradas pois não envolvem o equilíbrio longitudinal. Assim, o cálculo da extensão na armadura ordinária longitudinal ε_{sl} , transversal ε_{st} e o ângulo de rotação θ é feito pelas Equações (2.48), (2.49) e (2.50), respetivamente. Para a situação em estudo na presente secção, o confinamento axial da viga é conferido pela rigidez axial da armadura de pré-esforço não aderente ou exterior. Deste modo a força de confinamento axial continua a ser definida pela Equação (2.41). Contudo, é necessário calcular-se, para o equilíbrio longitudinal, a força de pré-esforço inicial aplicada ao cabo, F_{ci} , para o cálculo da extensão na armadura de pré-esforço que será apresentado mais à frente nesta secção, sendo esta dada pela seguinte equação:

$$F_{ci} = f_{pl,i} A_{pl} \quad (2.56)$$

Como já referido anterior, durante o alongamento da viga o cabo de pré-esforço é solicitado axialmente, por isso, a rigidez axial global que este confere pode ser determinada através da seguinte equação:

$$k = \frac{E_p A_{pl}}{l_p} \quad (2.57)$$

onde l_p é o comprimento efetivo da armadura de pré-esforço, E_p é o módulo de elasticidade das armaduras de pré-esforço.

A partir da força de confinamento axial F_{ca} , determina-se o encurtamento da armadura ordinária longitudinal, numa situação de viga livre. Este cálculo é realizado considerando, novamente por simplicidade, que o encurtamento da armadura longitudinal é o mesmo que o encurtamento total da viga. Assim, homogeneizando a secção, o encurtamento da armadura longitudinal pode ser calculado através da equação:

$$\varepsilon_{l,ca} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{F_{ca}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{F_{ca}}{E_c (A_c - A_h - A_{pl}) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (2.58)$$

O encurtamento da armadura longitudinal implica um encurtamento da escora de betão inclinada, $\varepsilon_{ds,c}$, que é calculado, em módulo, através da Equação (2.52). Também neste procedimento de cálculo o parâmetro de entrada ε_{ds} deve ser substituído pela extensão à superfície da escora de betão diagonal de betão corrigida, $\varepsilon_{ds,ef}$ (Equação (2.53)), que tem em conta o efeito de confinamento, $\varepsilon_{ds,ca}$.

Para o cálculo da tensão instalada na armadura longitudinal de pré-esforço, $f_{pl,i}$, deve conhecer-se previamente a respetiva extensão, ε_{pl} . Utilizando o conceito de descompressão do betão esta extensão é dada por:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{dec} + \varepsilon_{sl} \quad (2.59)$$

Onde ε_{dec} é a extensão na armadura de pré-esforço na descompressão do betão e ε_{sl} é a extensão na armadura longitudinal ordinária. A Equação (2.59) pode ser justificada através da Figura 2.12. Esta figura ilustra a sobreposição das curvas $\sigma-\varepsilon$ para o aço da armadura ordinária e para o aço da armadura de pré-esforço. A Figura 2.12 mostra que a armadura ordinária começa a ser solicitada à tração somente após a armadura de pré-esforço atingir a tensão correspondente à descompressão do betão (Ponto B).

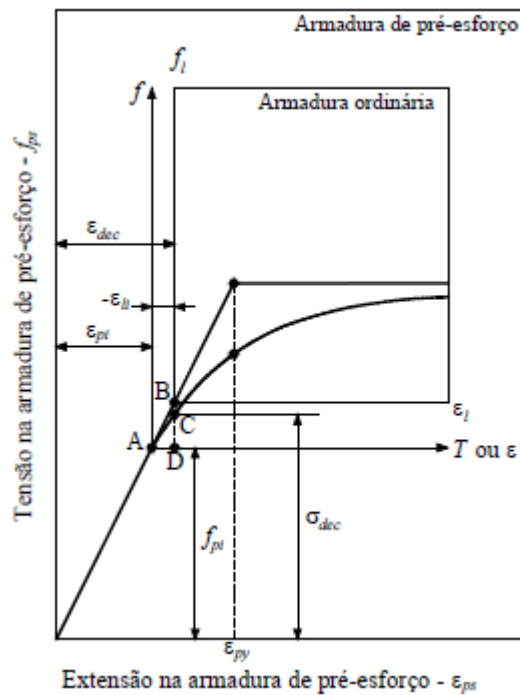


Figura 2.12 - Ilustração do conceito de descompressão [66]

No momento de aplicação do pré-esforço, é imposta uma extensão inicial de tração na armadura de pré-esforço longitudinal, $\varepsilon_{pl,i}$, e, por consequência, uma extensão inicial de compressão na armadura longitudinal ordinária, $\varepsilon_{l,i}$. Este estado inicial de extensões é representado pelo Ponto A da Figura 2.12. Recorrendo à lei de Hooke, à Equação (2.56) e ao conceito de homogeneização da secção, as duas extensões anteriores podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$\varepsilon_{pl,i} = \frac{f_{pl,i}}{E_p} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{F_{ci}}{A_{sl}(E_s - E_c) + E_c(A_c - A_h - A_{pl})} \quad (2.61)$$

A extensão de descompressão ε_{dec} (Ponto C na Figura 2.12) pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{dec} = \varepsilon_{pl,i} + \varepsilon_{l,i} \quad (2.62)$$

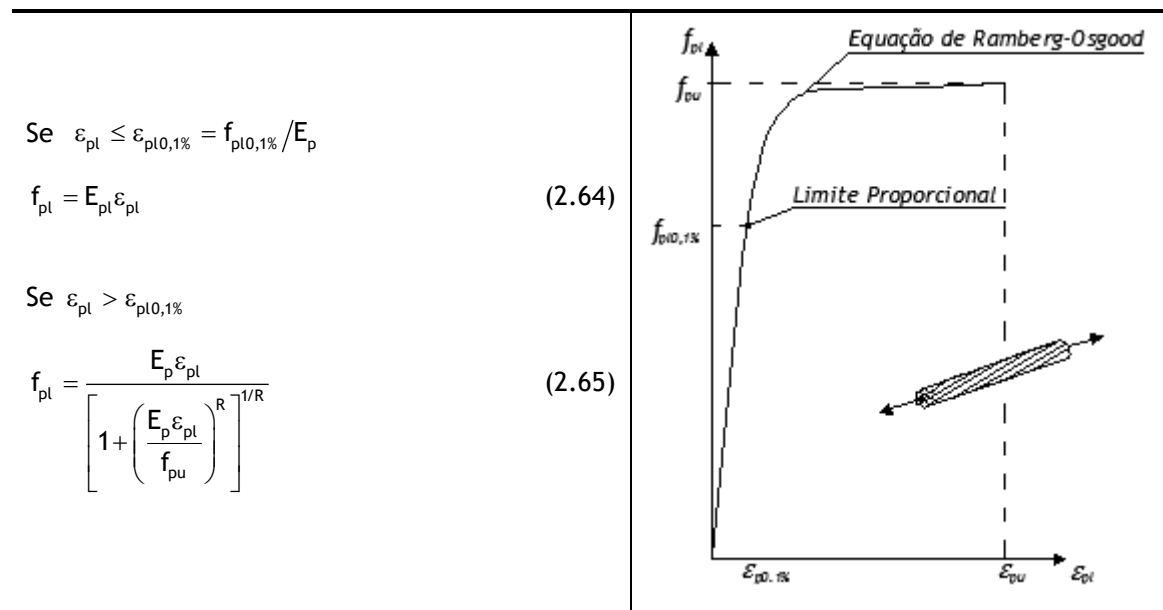
No caso de viga com armaduras de pré-esforço é necessário fazer uma correção na relação constitutiva que traduz o comportamento de betão à compressão na escora de betão. Desta forma, é introduzido o parâmetro η , que representa a relação entre as forças resistentes na direção longitudinal e transversal. Na direção longitudinal, deve ser considerada a participação da armadura de pré-esforço para calcular a força resistente total na direção longitudinal, uma vez que para níveis elevados de carregamento (domínio de validade do VATM) as armaduras de pré-esforço se comportam como simples armaduras passivas [127]. Assim, é somada a contribuição de ambas as armaduras, vindo:

$$\eta = \frac{\rho_{st} f_{sly} + \rho_{pl} f_{pl0,1\%}}{\rho_{st} f_{sty}} = \frac{A_{st} f_{sly} + A_{pl} f_{pl0,1\%}}{\frac{u}{s} A_{st} f_{sty}} \quad (2.63)$$

Na equação anterior, $f_{pl0,1\%}$ representa a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% para a armadura longitudinal de pré-esforço.

No que diz respeito à relação $\sigma-\varepsilon$ para a armadura de pré-esforço à tração, é necessário adotar uma lei específica para este tipo de armaduras. Apesar de também ser possível desenvolver relações $\sigma-\varepsilon$ tendo em consideração o *stiffening effect*, a diferença entre esta curva e a curva obtida desprezando o efeito da resistência do betão à tração entre fendas não é significativa na medida em que a variação de extensão ao longo do comprimento dos cabos é desprezável face à extensão introduzida nas armaduras no ato de aplicação do pré-esforço [45]. Neste tipo de armadura a resposta inicial é elástico-linear até uma extensão limite proporcional (0,1%). Para além desse limite, a resposta das armaduras é não linear podendo ser expressa pela equação de Ramberg-Osgood [71].

Tabela 2.3 - Relação constitutiva da armadura de pré-esforço à tração, Ramberg-Osgood 1943 [101] e Hsu e Mo 1985b [71]



Na Tabela 2.3, f_{pu} é a tensão de rotura da armadura de pré-esforço, R é um coeficiente determinado através de ensaios experimentais que pode ser considerado igual 4,38 para armaduras correntes de pré-esforço e $f_{pl0,1\%}$ é a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% para a armadura longitudinal de pré-esforço.

2.3.4. Cálculo da curva momento torsor - rotação (T - θ)

De forma a manter o algoritmo original de cálculo do VATM para vigas de betão armado ou pré-esforçado com confinamento axial, deve manter-se o parâmetro de entrada ε_{ds} do procedimento. Como já referido anteriormente e ilustrado na Figura 2.13, a metodologia escolhida para a consideração do efeito do confinamento axial consiste, numa primeira fase e para cada valor de entrada do ε_{ds} , utilizar o VATM original (Figura 2.6) para calcular a resposta da viga de betão armado ou pré-esforçado à torção sem confinamento axial (situação livre de restrição axial), designadamente a extensão das armaduras longitudinais ε_{sl} . A partir desta extensão, é calculado o alongamento da viga Δl e a força de confinamento axial F_{ca} resultante (força de compressão) que é introduzida no novo procedimento de cálculo baseado no VATM modificado ao caso de vigas com confinamento axial. No fim do VATM original é obtida a extensão efetiva da escora diagonal de betão $\varepsilon_{ds,ef}$ e o cálculo do algoritmo através do VATM modificado é iniciado.

O aplicativo computacional TORQUE_MTEAV (Andrade et al. 2011 [11]) foi modificado para incorporar o efeito do confinamento axial em vigas de betão armado e pré-esforçado. No

caso de vigas de betão armado, os parâmetros relativos ao pré-esforço devem ser considerados nulos. O aplicativo permite calcular o comportamento último de vigas de betão armado e de betão pré-esforçado com ou sem restrição axial, essencialmente o momento torsor resistente máximo e a respetiva rotação. O modelo apresentado ao longo da secção 2.3 também possui como critério de paragem a extensão convencional de rotura à superfície da escora ou a extensão convencional de rotura das armaduras tracionadas.

O procedimento de cálculo global passa a ser explicado de seguida. Tendo por base as expressões matemáticas deduzidas ao longo da presente Secção 2.3., é neste ponto possível estabelecer o modelo de cálculo iterativo para calcular os pontos da curva $T-\theta$ que caracterizam o comportamento evolutivo da viga na situação de confinamento axial. De seguida apresenta-se de forma sucinta os passos a realizar para a construção da curva $T-\theta$ da viga nessa situação.

- 1- Selecionar ε_{ds} . Assumir valores para t_d , α e β (uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$).
- 2- Inicialmente deve calcular-se ε_{sl} através do processo iterativo do VATM original (Figura 2.6). Calcular Δl a partir da Equação (2.40);
- 3- Determinar a constante de rigidez k da estrutura (valor de entrada do utilizador do processo iterativo ou utilizar a Equação (2.57) caso se trate de viga de betão pré-esforçado). Calcular a força de compressão devido ao confinamento axial F_{ca} através da Equação (2.41) e a extensão de encurtamento longitudinal devido ao confinamento axial $\varepsilon_{l,ca}$ através da Equação (2.51) se viga for de betão armado ou da Equação (2.58) se viga for de betão pré-esforçado.
- 4- Calcular a extensão na escora de betão $\varepsilon_{ds,ca}$ devido à força de confinamento através da Equação (2.52). Calcular o valor de entrada para a extensão efetiva da escora de betão $\varepsilon_{ds,ef}$ a partir da Equação (2.53), substituir o valor ε_{ds} no passo 1;
- 5- Calcular k_1 através da Equação (2.21) se $\varepsilon_{ds,ef} \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{ds,ef} > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ e determinar a tensão na escora σ_d a partir da Equação (2.20);
- 6- Determinar o momento torsor T pela Equação (2.27);
- 7- Calcular as extensões na armadura longitudinal ε_{sl} e transversal ε_{st} a partir das Equações (2.48) e (2.49), respetivamente, e na armadura longitudinal de pré-esforço ε_{pl} pela Equação (2.59). Posteriormente calcular as tensões nas armaduras ordinárias longitudinal e transversal a partir da Equação (2.23) e na armadura longitudinal de pré-esforço pelas Equações (2.64) e (2.65), na Tabela 2.3, usando as equações das relações constitutivas;
- 8- Verificar t_d pela Equação (2.47) ou (2.55) e α pela Equação (2.46) ou (2.54), caso se trate de uma viga de betão armado ou pré-esforçado, respetivamente;

9- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\epsilon$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva;

10- Se:

10.1- Os valores calculados de t_d , α e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 1) a 9) até que estes valores converjam.

10.2- Caso os valores calculados de t_d , α e β sejam próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.

11- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (2.50). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $T - \theta$ de coordenadas $(\theta; T)$;

12- Selecionar outros valores de ϵ_{ds} , e consecutivamente calcular o novo valor de $\epsilon_{ds,ef}$ e repetir os Passos 2) a 11) para cada valor de ϵ_{ds} por forma a obter vários pontos $(\theta; T)$ que permitam desenhar a previsão da curva $T - \theta$.

De uma forma simplificada e resumida, pode apresentar-se o processo iterativo geral na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo se encontra ilustrado na Figura 2.13.

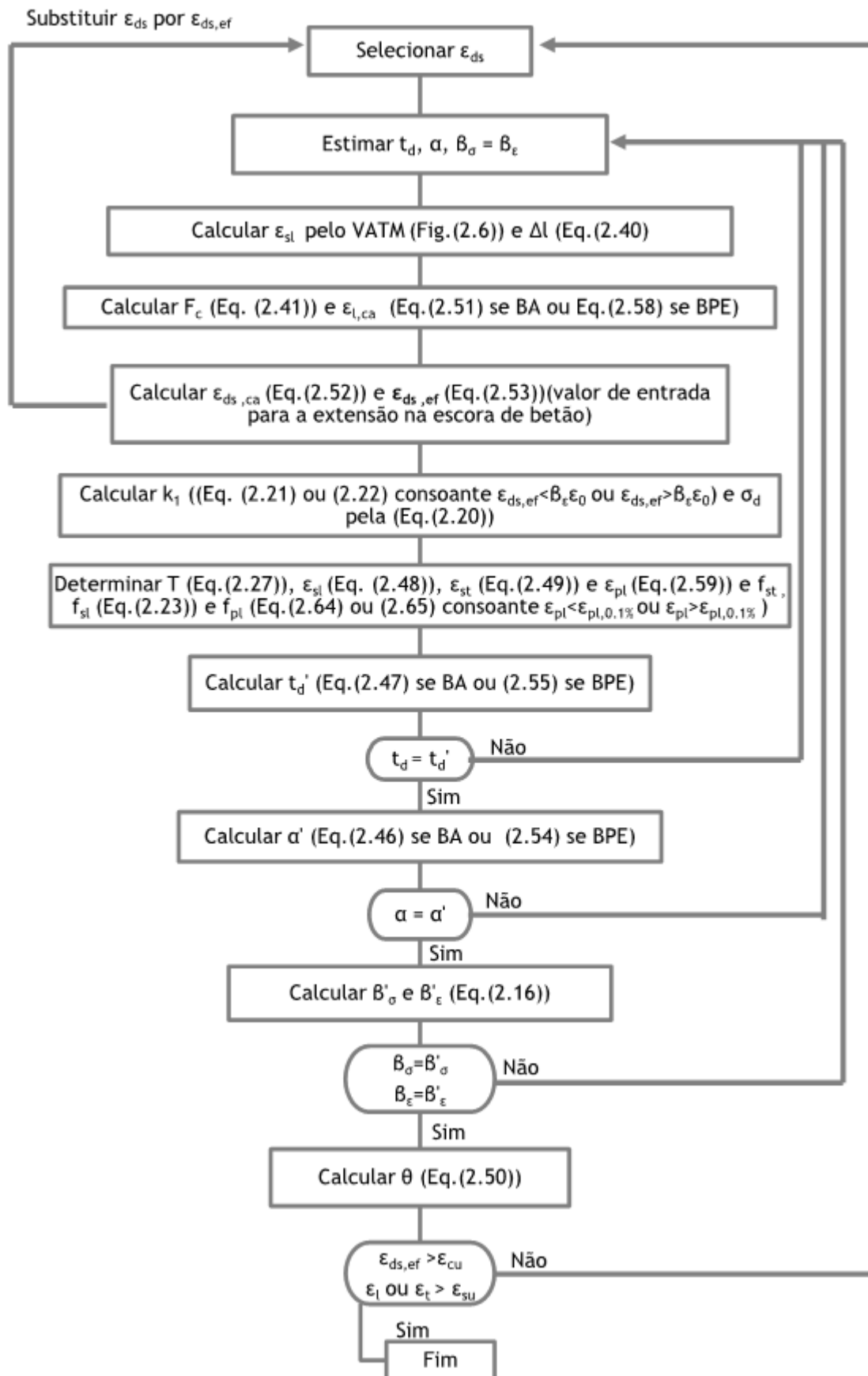


Figura 2.13 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do VATM modificado para o cálculo de $T - \theta$

2.4. Considerações finais

No presente capítulo, foi apresentado e descrito a formulação do VATM original bem como as alterações realizadas ao VATM original de forma a incorporar o efeito do confinamento axial na formulação do modelo de análise do comportamento último de vigas de betão armado e pré-esforçado quando sujeitas à torção pura. Estes modelos incorporam relações constitutivas para caracterizar o betão comprimido na escora (incluindo o *softening effect*) e para as armaduras ordinárias e de pré-esforço traccionadas (para as armaduras ordinárias tendo em conta o *stiffening effect*). A incorporação destas leis no VATM permitem obter boas previsões para o comportamento último das vigas de betão armado com e sem confinamento (incluindo vigas com pré-esforço longitudinal exterior).

Importa referir que os cálculos teóricos de vigas de betão armado ou pré-esforçado com base nos modelos apresentados neste capítulo é realizado recorrendo-se ao aplicativo computacional designado TORQUE_MTEAV [11], uma vez que a utilização manual do modelo pode tornar-se complexa e morosa.

Capítulo 3 - Refinamento dos ábacos de dimensionamento para vigas à torção com confinamento axial

3.1. Introdução

No presente capítulo são apresentadas duas ferramentas que permitem auxiliar o projeto de estruturas que incluem vigas com confinamento axial. Inicialmente é realizado o refinamento dos ábacos de dimensionamento apresentados por Tabora em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [31] ao caso de vigas com secção retangular para vários valores do quociente h/b (sendo h e b a altura e largura da secção, respetivamente) diferentes de 1. O objetivo tem como ponto de partida o trabalho anteriormente realizado pela autora e alargar o estudo de forma a incorporar uma variável suplementar: a relação h/b que, no presente trabalho, é designada por fator de forma. Posteriormente apresenta-se um aplicativo e respetivo procedimento de utilização, onde após ser inseridas as características geométricas e mecânicas da viga em análise, bem como o valor do confinamento axial, é calculado o momento torsor resistente de vigas confinadas axialmente.

Para o cálculo das vigas que são utilizadas neste estudo é utilizado o aplicativo TORQUE_MTEAV modificado [116][32], desenvolvido a partir do TORQUE_MTEAV de Andrade em 2011 [12], para vigas sujeitas à torção com confinamento axial. Este aplicativo permite calcular teoricamente a evolução de diversos parâmetros que caracterizam o comportamento de uma viga submetida à torção pura com confinamento axial, dando-se no presente trabalho um especial interesse ao momento torsor resistente e respetiva rotação transversal da secção. Este aplicativo tem como modelo de base o VATM modificado, descrito na Secção 2.3, sendo utilizadas as leis constitutivas que caracterizam o comportamento dos materiais (betão à compressão e armaduras ordinárias à tração) apresentadas na Secção 2.2.4.

Neste capítulo é utilizado o VATM modificado proposto pela autora em 2012 [116] e por Bernardo et al. [32], uma vez que se pretende encontrar um coeficiente corretivo do valor da resistência das vigas com secção retangular à torção de modo a contabilizar o efeito do confinamento axial. A resistência de uma viga à torção é geralmente obtida através de procedimentos usuais, tais como pela aplicação disposições normativas, mas estas disposições não contabilizam o referido efeito de confinamento axial. Importa referir que este modelo prevê bons resultados no estudo do comportamento último de vigas de betão armado quando sujeitas à torção, pelo que é aceitável a utilização deste modelo para o estudo em causa.

3.2. Justificação do refinamento dos ábacos

A proposta apresentada nesta tese para o refinamento dos ábacos de dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção com confinamento axial, resultou da necessidade de generalizar os mesmos a situações correntes em que as vigas apresentam uma secção transversal retangular com fator de forma diferente de 1. Em alguns estudos anteriores o h/b também constituiu uma variável de estudo e os autores verificaram experimentalmente a sua real influência no comportamento à torção das vigas, para uma determinada taxa de armadura e resistência do betão (por exemplo, [63]). Na secção 3.2.2 será demonstrada teoricamente a real influência de h/b no comportamento de uma secção à torção.

A situação lógica para o problema da torção pura é o uso de secções quadrangulares (correspondente a um fator de forma igual ou próximo de 1), uma vez que são mais eficientes e económicas para a resistência à torção. No entanto, devido ao efeito combinado dos esforços internos, a situação comum é a utilização de vigas com secção retangular em que o fator de forma é em geral maior do que 1. Note-se que, para este trabalho, se considera que h constitui a maior dimensão da secção transversal, pelo que o fator de forma h/b toma sempre valores superiores ou iguais a 1.

3.2.1. Ábacos de dimensionamento de vigas à torção com secção quadrangular ($h/b=1$)

Na presente secção apresenta-se de forma resumida a metodologia utilizada por Taborda em 2012 [116] para obter os ábacos de dimensionamento. Uma informação mais detalhada desta metodologia, da sua verificação e dos resultados obtidos pode ser encontrado em Taborda [116] e Bernardo et al. [31].

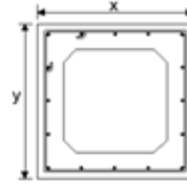
Na Secção 1.2.1 apresentaram-se as conclusões que Taborda em 2012 [116] obteve após analisar a influência do confinamento axial no comportamento último de vigas à torção. Recorde-se que a autora concluiu que o incremento da resistência máxima à torção em função do nível de confinamento é apreciável (Figuras 1.11 e 1.12), sugerindo que este efeito favorável deve ser tido em conta no dimensionamento de vigas de betão armado. Por conseguinte, Taborda em 2012 [116] propôs uma ferramenta de auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção que se encontrem em situação de confinamento axial. Esta ferramenta permite de uma forma simples corrigir o valor do momento torsor resistente calculado para a situação de vigas livre de confinamento axial, contabilizando o referido efeito favorável do confinamento axial através de um simples coeficiente de correção C_{ca} . Este permite calcular o momento torsor efetivo de uma viga de betão armado sujeita à torção com secção transversal próxima da quadrangular em condições de confinamento axial. Para determinar a resistência máxima de uma viga de betão armado que

se encontre confinada axialmente, $T_{m\acute{a}x,ca}$, basta conhecer previamente a resist\ecancia m\acute{a}xima da viga para a situa\c7\ao livre de confinamento axial, $T_{m\acute{a}x}$, obtida por exemplo atrav\es das disposi\c7\oes de documentos normativos, bem como o n\ivel de confinamento da viga, e consultar os \abacos propostos pela autora [116][31] para obter C_{ca} e aplicar a seguinte equa\c7\ao:

$$T_{m\acute{a}x,ca} = C_{ca} T_{m\acute{a}x} \quad (3.1)$$

Os \abacos de dimensionamento, exemplificados na Figura 3.1, tiveram origem numa equa\c7\ao geral obtida atrav\es de uma an\alise de regress\ao n\ao linear multivari\avel para as vari\aveis de estudo analisadas, nomeadamente: a taxa total de armadura de tor\c7\ao, ρ_{tot} , a resist\ecancia do bet\ao \aa compress\ao, f_c , e o n\ivel de confinamento axial, k . A influ\ecancia do confinamento axial no comportamento \faltimo das vigas tendo em conta estas vari\aveis foi estudada pela autora em 2012 [116]. Deste estudo resultaram 192 combina\c7\oes tendo em conta os valores de refer\ecancia considerados para as vari\aveis de estudo ($\rho_{tot} = 0,6, 0,8, 1,0, 1,2, 1,4$ e $1,6$ %, $f_c = 30, 50, 70$ e 90 MPa e $k = 0, 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000$ e 80000 kN/m). Utilizando o programa de an\alise estat\istica "R", as tr\es vari\aveis foram correlacionadas e foi obtida uma equa\c7\ao polinomial de grau 13 que possu\ia um coeficiente de determina\c7\ao pr\oximo de 1, significando que quase 100% da variabilidade do C_{ca} seria explicada pelo polin\omio de grau 13 nas vari\aveis independentes ρ_{tot} , f_c e k . Neste polin\omio, o coeficiente C_{ca} \e uma vari\avel dependente e ρ_{tot} , f_c e k foram consideradas vari\aveis independentes.

ABACO
TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
Secção Retangular



$f_c = 30 \text{ MPa}$

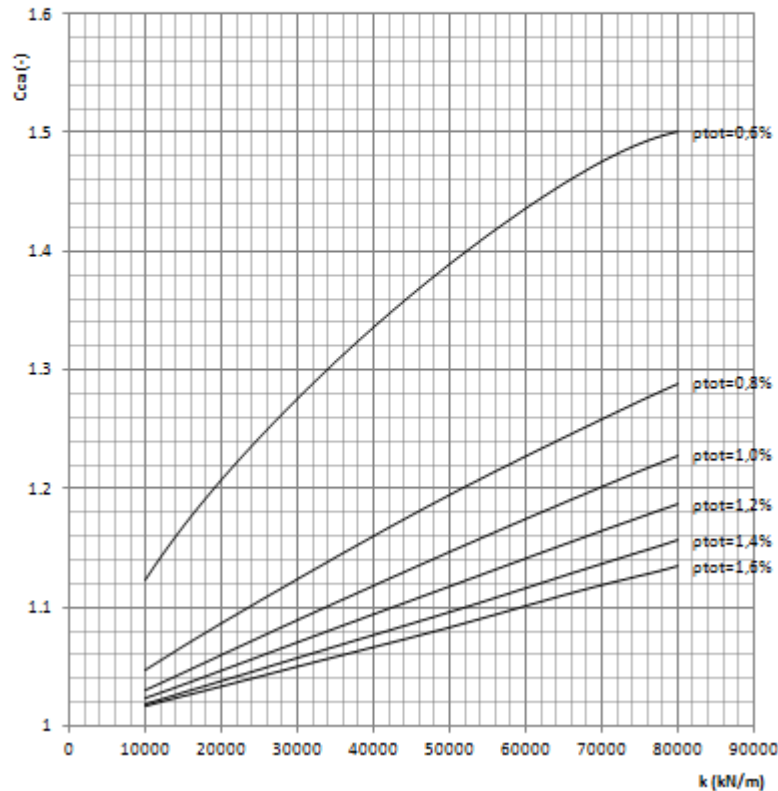


Figura 3.1 - Ábacos para a obtenção do coeficiente de confinamento axial C_{ca} [116]

O resíduo máximo do polinómio (diferença entre os valores amostrais observados da variável dependente, C_{ca} , e os respetivos valores dados pelo modelo ajustado, ou seja o polinómio de grau 13, nas variáveis independentes, ρ_{tot} , f_c e k) é 0,000488. Desta forma foi considerado que o polinómio era bastante preciso para as 192 combinações consideradas. A margem de erro para combinações de ρ_{tot} , f_c e k com valores diferentes dos considerados pôde também ser considerada bastante aceitável. Em virtude do polinómio encontrado ser de grau 13 e possuir 171 termos, foi considerado impraticável a sua utilização direta em projeto pelo que o mesmo foi utilizado para calcular as curvas dos ábacos auxiliares exemplificado na Figura 3.1. Como já foi anteriormente referido, estes ábacos permitem obter graficamente os valores relativos ao coeficiente C_{ca} em função das variáveis consideradas. O gráfico ilustrado na Figura 3.1 foram obtidos para cada classe de resistência do betão à compressão considerada, no Anexo I podem ser consultados os restantes ábacos obtidos pela autora [116].

Uma limitação encontrada aos ábacos apresentados, que foram calculados considerando apenas uma viga de referência com 5,90 m, prendeu-se com o facto de não contemplarem a

possibilidade de considerar comprimentos diferentes da referida viga. Foi anteriormente verificado que este parâmetro também influenciava o cálculo do momento torsor resistente na situação de confinamento axial [116] [31]. Tal como foi referido na Secção 2.3.1, a força de confinamento induzida na viga depende da rigidez dos elementos adjacentes e do alongamento total da viga em situação livre. O alongamento da viga livre quando sujeita à torção é diretamente proporcional ao seu comprimento total, sendo o alongamento efetivo por sua vez também diretamente proporcional à força de confinamento. Esta limitação foi ultrapassada ao terem sido estabelecidas equações de correlação suplementares que corrigem o valor do C_{ca} para vigas com secções de características geométricas semelhantes às da viga de referência mas com diferentes valores de comprimento livre. Taborda [116] recorreu ao software *IBM SPSS Statistics* e, através de uma regressão não linear quadrática (foram também experimentados outros tipos de regressões não lineares), obteve 6 polinómios de correção do coeficiente C_{ca} para vãos de 2, 4, 6, 8 e 10 m. O coeficiente de correlação de cada polinómio foi considerado bastante bom ($R^2 > 0,99$). A partir destes polinómios foram calculadas as curvas para um novo ábaco que permitiu estabelecer uma relação entre o coeficiente C_{ca} e o coeficiente de correção suplementar $C_{ca,corr}$ para diferentes valores de comprimentos da viga, o qual se encontra ilustrado na Figura 3.2.

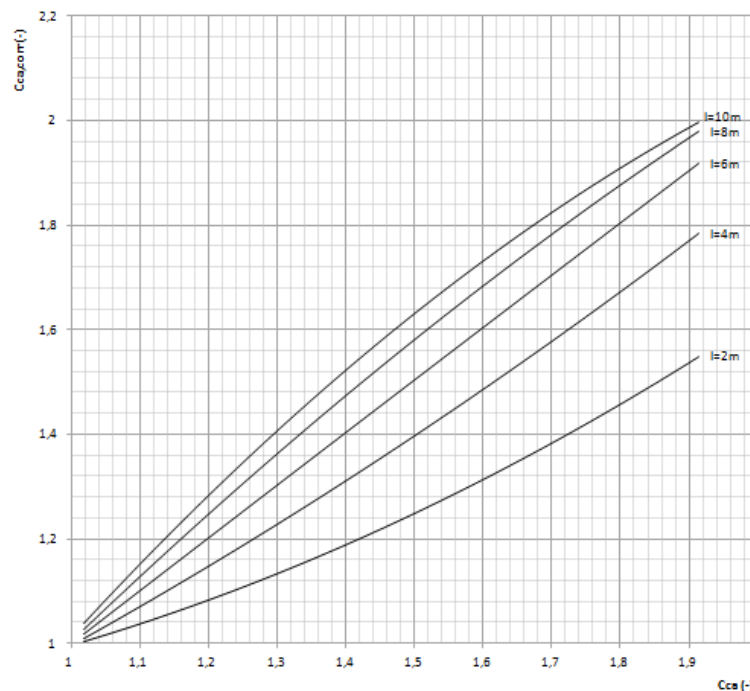


Figura 3.2 - Ábaco para a obtenção do coeficiente de correção C_{ca} [116]

Desta forma, para se determinar o valor final da resistência máxima à torção basta obter o valor do coeficiente C_{ca} através dos ábacos apresentados na Figura 3.1 e posteriormente corrigir esse valor com $C_{ca,corr}$ obtido através do ábaco apresentado na Figura 3.2. Assim, o valor final da resistência máxima passa a ser calculado através da Equação (3.2):

$$T_{m\acute{a}x,ca} = C_{ca,corr} T_{m\acute{a}x} \quad (3.2)$$

Para valores intermédios das variáveis consideradas na formulação dos ábacos, os mesmos podem ser simplificados obtidos por consulta dos ábacos a partir de uma interpolação linear.

De seguida, apresenta-se um exemplo de aplicação da metodologia anteriormente resumida com vista a clarificar a utilização dos ábacos apresentados. Considere-se o caso exemplificativo de uma viga de secção quadrangular ($h/b = 1$) e comprimento $l = 10\text{ m}$, com resistência do betão $f_c = 70\text{ MPa}$, taxa total de armadura de torção (com armadura equilibrada: $\rho_{sl} = \rho_{st}$) igual a $\rho_{tot} = 1,0\%$ e com um confinamento axial, decorrente da análise dos elementos adjacentes aos quais a viga se encontra ligada, igual $k = 50000\text{ kN/m}$. Para se obter o valor C_{ca} deve consultar-se o ábaco relativo à classe de resistência do betão à compressão para a situação em questão (70 MPa). Deve-se, portanto, fixar a abcissa relativa ao valor do confinamento axial (entrada nas abcissas: $k = 50000\text{ kN/m}$) e intercepar a linha vertical com a curva correspondente à taxa de armadura total. De seguida, projetando o ponto de intersecção sobre o eixo das ordenadas obtém-se o valor do coeficiente de confinamento axial, C_{ca} . Este procedimento encontra-se ilustrado na Figura 3.3 (a).

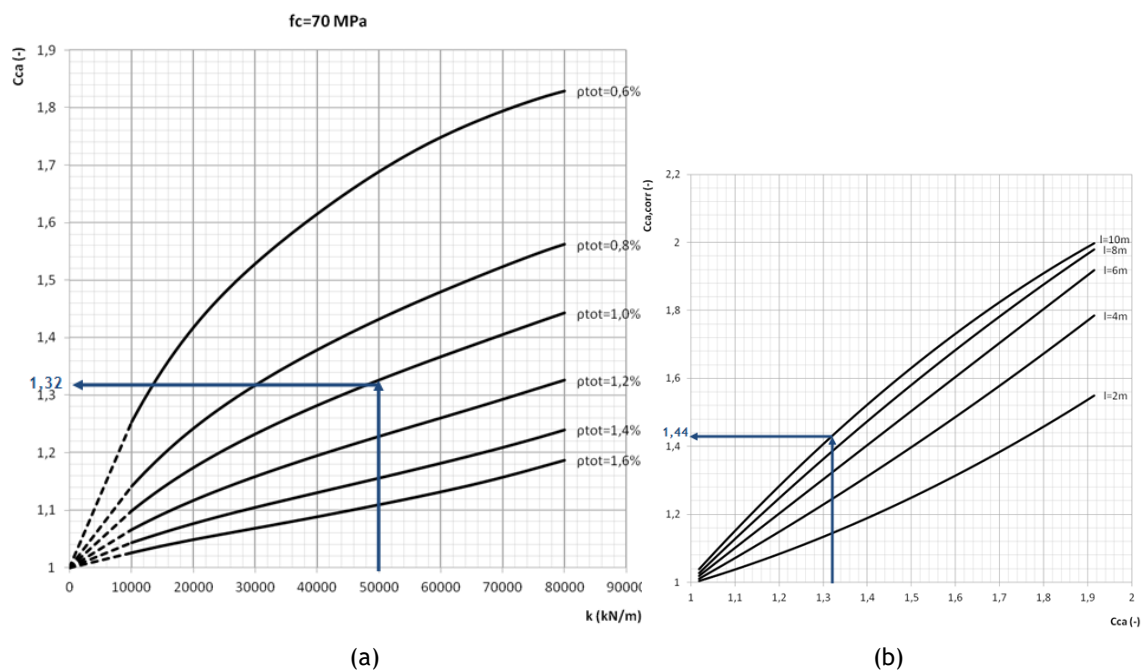


Figura 3.3 - Exemplo de aplicação com viga quadrangular: $f_c = 70\text{ MPa}$, $k = 50000\text{ kN/m}$, $\rho_{tot} = 1,0\%$, $l = 10\text{ m}$

Uma vez que a viga possui um comprimento livre diferente de 5,90m ($l = 10$ m) deve obter-se $C_{ca,corr}$ para corrigir o valor do C_{ca} em função do comprimento da viga em questão. Tal como ilustrado na Figura 3.3 (b), deve fixar-se a abcissa relativa ao valor do C_{ca} (entrada nas abcissas $C_{ca} = 1,32$) e intersecar a respetiva linha vertical com a curva do respetivo vão. Seguidamente, efetua-se a projeção segundo o eixo das ordenadas para obter o valor do coeficiente, $C_{ca,corr}$. Após calcular o valor da resistência máxima da viga à torção através dos documentos normativos, basta utilizar a Equação (3.2) para ter em conta o confinamento axial.

Após a apresentação do caso exemplificativo anterior, depara-se com uma limitação suplementar dos ábacos apresentados por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. [31]. Caso a viga possua uma secção transversal diferente da quadrangular, ou seja, com um fator de forma (h/b) diferente de 1, não existe nenhum ábaco corretivo nem nenhum polinómio que permita corrigir o valor do coeficiente do confinamento axial C_{ca} . Na bibliografia consultada, verificou-se que os fatores de forma utilizados por diversos autores em vigas de betão armado com secção cheia sujeitas à torção rondam valores de 1 a 3,25 [63] e em vigas com secção vazada de 1 a 2 [78]. Assim, considerou-se relevante desenvolver o estudo realizado anteriormente e generalizar o procedimento de cálculo anterior de modo a permitir corrigir a resistência à torção de vigas de betão armado com secções transversais retangulares com diversos valores do fator de forma. Na secção 3.3 são apresentados e justificados os intervalos de valores de h/b utilizados no presente estudo.

3.2.2. Análise paramétrica: influência de h/b no momento torsor resistente

Nesta secção procede-se a uma análise comparativa entre as curvas teóricas $T - \theta$ referentes às vigas com diferentes fatores de forma para diferentes níveis de confinamento axial. Analisam-se os casos com fator de forma 1, 1,5, 2, 2,5 e 3, a escolha destes valores é justificada na secção 3.3. As curvas foram calculadas com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado para incluir o efeito do confinamento axial. Para esta análise são realizadas 60 combinações (ver Tabela 3.1) tendo por base os vários valores assumidos para o fator de forma, h/b , resistência à compressão do betão, f_c , taxa total de armadura de torção, ρ_{tot} , e confinamento axial, k . Para a realização desta análise achou-se importante que a análise abrangesse os dois tipos de rotura (frágil e dúctil). Considera-se também que para a resistência do betão à compressão devem ser incluídos um betão de resistência normal (NSC - *Normal Strength Concrete*) e um betão de alta resistência (HSC - *High Strength Concrete*), tendo-se escolhido as resistências de 30 MPa e 90 MPa, respetivamente. O primeiro valor de referência escolhido, $f_c = 30$ MPa, constitui hoje uma das classe de resistência normal mais utilizadas em obras correntes e o segundo valor, $f_c = 90$ MPa,

corresponde à classe máxima prevista no Eurocódigo 2. Quanto à taxa total de armadura de torção, são adotados os valores de 0,8% e 1,6%. Esta escolha tem também como objetivo abranger o caso de rotura dúctil ($\rho_{tot} = 0,8\%$) com cedência das armaduras e de rotura frágil por compressão do betão ($\rho_{tot} = 1,6\%$). Os valores anteriores para f_c e ρ_{tot} foram escolhidos tendo por base as tipologias de roturas observadas por Bernardo e Lopes em 2009 [26] em vigas ensaiadas à torção com as características da viga de referência utilizada nesta secção. Quanto ao confinamento axial, opta-se pela situação livre de confinamento axial ($k = 0$ kN/m), por uma situação considerada média em termos de confinamento axial por Taborda em 2012 [116] ($k = 30000$ kN/m) e por um valor máximo de confinamento assumido também por Taborda em 2012 [116] ($k = 70000$ kN/m) o qual impõe uma rotura tendencialmente mais frágil por esgotamento da capacidade resistente da escora de betão.

Tabela 3.1 - Combinações entre as variáveis de estudo (ρ_{tot} , f_c , h/b e k) para estudo da influência da variável h/b

ρ_{tot} [%]	f_c [MPa]	h/b [-]	k [kN/m]	Combinações (ρ_{tot} ; f_c ; h/b ; k)	
0,8 1,6	30	1,0	0	(0,8;30;1,0;0)	(1,6;30;1,0;0)
			30000	(0,8;30;1,0;30000)	(1,6;30;1,0;30000)
			70000	(0,8;30;1,0;70000)	(1,6;30;1,0;70000)
		1,5	0	(0,8;90;1,0;0)	(1,6;90;1,0;0)
			30000	(0,8;90;1,0;30000)	(1,6;90;1,0;30000)
			70000	(0,8;90;1,0;70000)	(1,6;90;1,0;70000)
		2,0	0	(0,8;30;1,5;0)	(1,6;30;1,5;0)
			30000	(0,8;30;1,5;30000)	(1,6;30;1,5;30000)
			70000	(0,8;30;1,5;70000)	(1,6;30;1,5;70000)
		2,5	0	(0,8;90;1,5;0)	(1,6;90;1,5;0)
			30000	(0,8;90;1,5;30000)	(1,6;90;1,5;30000)
			70000	(0,8;90;1,5;70000)	(1,6;90;1,5;70000)
	3,0	0	(0,8;30;2,0;0)	(1,6;30;2,0;0)	
		30000	(0,8;30;2,0;30000)	(1,6;30;2,0;30000)	
		70000	(0,8;30;2,0;70000)	(1,6;30;2,0;70000)	
	90	1,0	0	(0,8;90;2,0;0)	(1,6;90;2,0;0)
			30000	(0,8;90;2,0;30000)	(1,6;90;2,0;30000)
			70000	(0,8;90;2,0;70000)	(1,6;90;2,0;70000)
		1,5	0	(0,8;30;2,5;0)	(1,6;30;2,5;0)
			30000	(0,8;30;2,5;30000)	(1,6;30;2,5;30000)
			70000	(0,8;30;2,5;70000)	(1,6;30;2,5;70000)
		2,0	0	(0,8;90;2,5;0)	(1,6;90;2,5;0)
			30000	(0,8;90;2,5;30000)	(1,6;90;2,5;30000)
			70000	(0,8;90;2,5;70000)	(1,6;90;2,5;70000)
2,5		0	(0,8;30;3,0;0)	(1,6;30;3,0;0)	
		30000	(0,8;30;3,0;30000)	(1,6;30;3,0;30000)	
		70000	(0,8;30;3,0;70000)	(1,6;30;3,0;70000)	
3,0	0	(0,8;90;3,0;0)	(1,6;90;3,0;0)		
	30000	(0,8;90;3,0;30000)	(1,6;90;3,0;30000)		
	70000	(0,8;90;3,0;70000)	(1,6;90;3,0;70000)		

O objetivo da presente secção é avaliar teoricamente a influência do fator de forma na resistência teórica à torção da viga de referência A2 considerada (a viga A2 possui uma secção vazada e encontra-se caracterizada na Secção 6.2) e da respetiva rotação, para os valores considerados para a resistência do betão à compressão, da taxa de armadura de torção e do confinamento axial apresentados na Tabela 3.1. Hsu em 1968 [63] observou que o núcleo de betão não influencia a resistência à torção de vigas de betão armado desde que a espessura da parede da secção vazada seja suficiente para não induzir problemas geometricamente não lineares. Tal foi garantido para a viga de referência A2 ensaiada por Bernardo [20]. As Figuras 3.4 a 3.7 ilustram algumas curvas teóricas $T-\theta$ obtidas para a viga de referência com o TORQUE_MTEAV modificado, tendo-se fixado para cada análise determinados valores para a resistência do betão à compressão, para a taxa total de armadura de torção e para o valor do confinamento axial. De forma a manter um valor constante da taxa total de armadura, ρ_{tot} , para os diferentes valores de h/b apresentados na Tabela 3.1 foi necessário alterar as áreas de armaduras mantendo-se a relação equilibrada entre a armadura longitudinal e transversal. Estes valores podem ser consultados no Anexo II. No Anexo III podem ser consultadas todas as curvas teóricas $T-\theta$ obtidas para esta análise paramétrica. Observe-se que em todas as curvas $T-\theta$ ilustradas nas Figuras 3.4 a 3.7, e também nas curvas apresentadas no Anexo III, se observa que à medida que aumenta o valor do fator de forma, h/b , aumenta o momento torsor máximo (resistência) da viga e diminui a rotação correspondente.

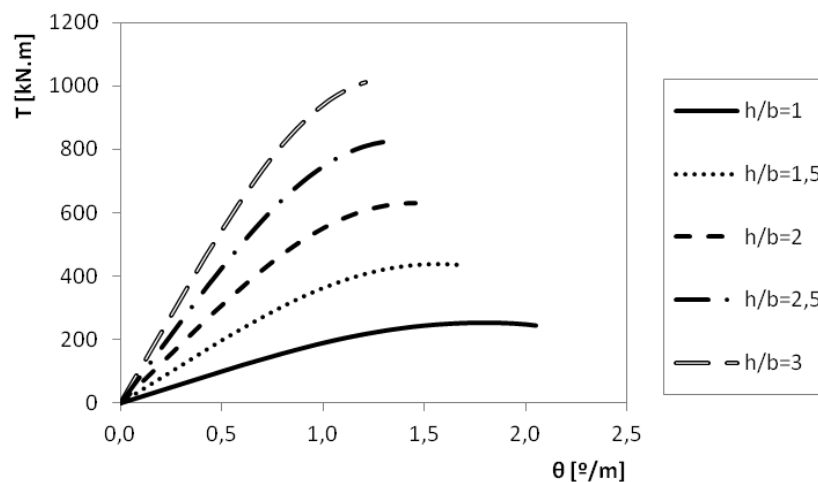


Figura 3.4 - Curvas teóricas $T-\theta$ para a viga de referência com $f_c = 30 \text{ MPa}$, $\rho_{tot} = 0,8\%$,
 $k = 30000 \text{ kN/m}$

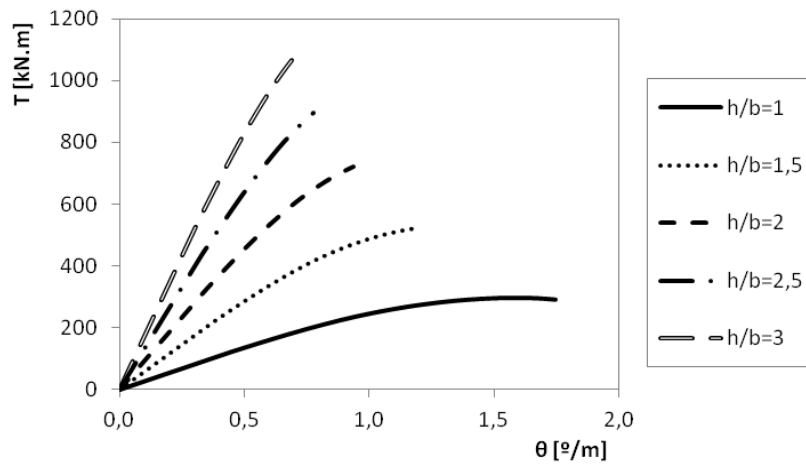


Figura 3.5 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 30 \text{ MPa}$, $\rho_{tot} = 1,6\%$, $k = 0 \text{ kN/m}$

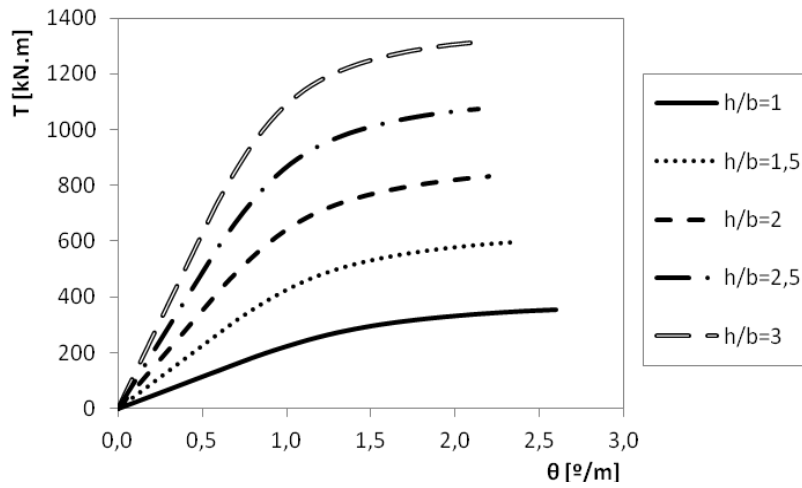


Figura 3.6 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 90 \text{ MPa}$, $\rho_{tot} = 0,8\%$,
 $k = 30000 \text{ kN/m}$

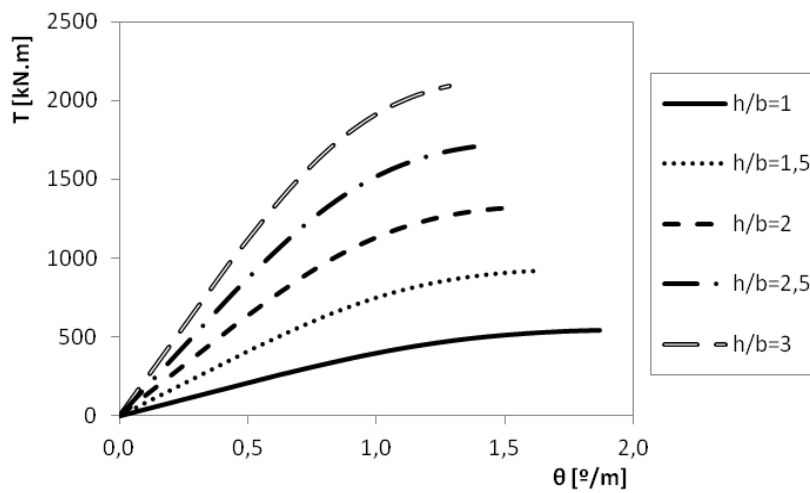


Figura 3.7 - Curvas teóricas $T - \theta$ para a viga de referência com $f_c = 90 \text{ MPa}$, $\rho_{tot} = 1,6\%$,
 $k = 70000 \text{ kN/m}$

Em todas as curvas $T-\theta$ obtidas também se observa que a rigidez à torção das vigas aumenta notavelmente à medida que h/b aumenta. Para além disso, a rotura assume um carácter mais frágil. O aumento da resistência da viga com o aumento de h/b é entendível pois como as características mecânicas da secção são iguais (f_c e ρ_{tot}), mudando apenas as características geométricas, a viga com maior h/b apresenta uma área da secção maior (maior $b \times h$). No VATM modificado $b \times h$ corresponde a $x \times y$, que é a área da secção transversal (incluindo a parte vazada) e este parâmetro entra na formulação do VATM modificado. A questão da viga apresentar uma rotura com carácter mais frágil à medida que h/b aumenta é também explicável através da análise do comportamento teórico da viga sujeita à torção. Como a viga é mais rígida, então para uma igual rotação imposta (indiretamente através do ϵ_{ds}), as tensões nos materiais são maiores e, por isso, para menores deformações o betão nas escoras esgota mais rapidamente a sua resistência.

Neste ponto, torna-se importante perceber-se como é que a área da secção transversal, condicionado pelo h/b , influencia o comportamento teórico da viga tendo em conta a modelação do VATM modificado apresentado na Secção 2.3. O momento torsor aplicado na secção da viga origina um fluxo de corte em cada parede da secção transversal e pode ser decomposto em duas forças: a força longitudinal nas armaduras e a tensão na escora diagonal de betão (Equação (2.8) e Equação (2.10), respetivamente). Observando-se a formulação do VATM modificado, através da Equação (2.8) pode concluir-se que conforme aumenta a área da secção transversal (a área aumenta com o aumento de h/b) a solicitação nas armaduras será cada vez menor o que implica que a escora de betão seja mais solicitada, pelo que a viga atinge mais rapidamente (em termos de deformação) a sua capacidade resistente. Desta forma, com o aumento de h/b , teoricamente, a viga apresenta uma rotura por torção mais frágil. Analisando-se também a Equação (2.27) que traduz o momento torsor resistente da viga, observa-se que se a área da secção transversal aumentar, e uma vez que a solicitação da escora de betão aumenta, aumenta também a resistência da viga.

Contudo, tendo por base apenas os resultados anteriormente apresentados, a influência isolada da variável h/b não pode ser considerada clara uma vez que as secções anteriormente consideradas possuem áreas ($b \times h$) diferentes e, por isso, torna-se necessário complementar a análise com vista a avaliar a real influência do fator de forma h/b como variável isolada. Por esta razão, foram simuladas três vigas com a mesma resistência do betão à compressão (30 MPa), com a mesma taxa de armadura de torção (1,0%) e com a mesma área de secção transversal (7200 cm²). As dimensões consideradas para a secção transversal foram as seguintes: 80x90 cm (h/b igual a 1,125), 60x120 cm (h/b igual a 2) e 50x144 cm (h/b igual a

2,88). Na Figura 3.8 estão representadas as curvas teóricas $T-\theta$ destas vigas para os diferentes valores de h/b considerados.

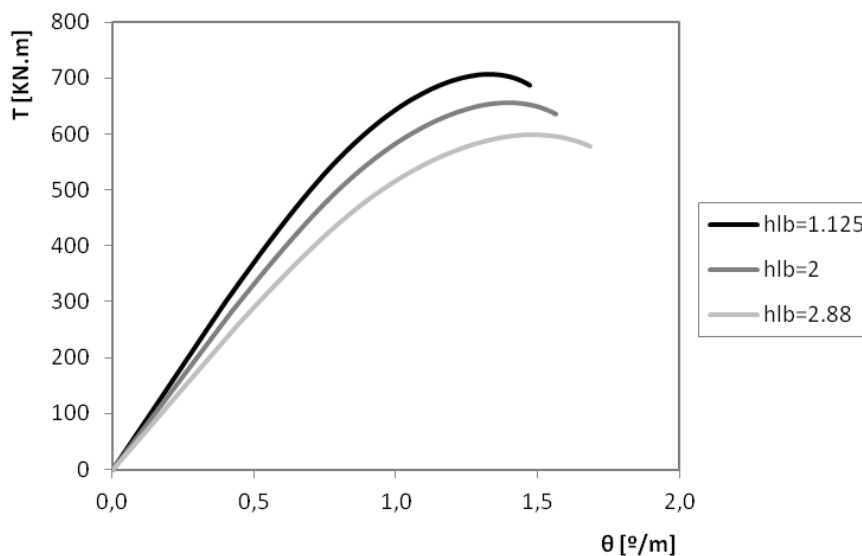


Figura 3.8 - Curvas teóricas $T-\theta$ para as vigas com $f_c = 30$ MPa , $\rho_{tot} = 1,0\%$ e $b \times h = 7200$ cm²

Pela análise das curvas teóricas $T-\theta$ representadas na Figura 3.8 pode observar-se que à medida que diminui o h/b , aumenta a resistência, e simultaneamente aumenta a rigidez e diminui a capacidade de deformação última. Estes novos resultados mostram a real influência da variável h/b mas contrariam as tendências observadas nas Figuras 3.4 a 3.7 onde a variável h/b não foi mantida isolada da área da secção transversal. Além disso, observa-se também que a influência isolada da variável h/b não é tão grande como o observado anteriormente (Figuras 3.4 a 3.7) onde também estava incorporada a variação da área da secção.

Os resultados anteriores comprovam também que, do ponto de vista da resistência e para vigas sujeitas à torção, a situação mais favorável (de entre várias configurações retangulares mas com a mesma área da secção transversal) é a que corresponde a um h/b próximo de 1 (secção quadrangular). Conclui-se assim que existe uma real e não desprezável influência da variável h/b (analisada como variável isolada) no comportamento teórico das vigas à torção. Esta influência observada justifica o refinamento dos ábacos de dimensionamento para vigas confinadas axialmente com a inclusão desta nova variável.

Da mesma forma como foi analisado para a influência da área da secção transversal, também a influência da variável isolada h/b pode ser entendida tendo por base a formulação do modelo teórico utilizado. De facto, na formulação do VATM modificado, para além de a área da secção estar presente no modelo, enquanto parâmetro, também o perímetro da secção

transversal se encontra presente. Refere-se que, para manter a área da secção transversal constante, de modo a isolar a variável h/b , o perímetro da secção varia diretamente com a variação de h/b . Desta forma, a influência de h/b está refletida no perímetro da secção, conforme aumenta h/b o perímetro da secção transversal também aumenta. Recorde-se que a torção origina um fluxo circulatório de tensões tangenciais ao longo das paredes da secção transversal. Na formulação, o efeito do fluxo de corte é considerado através de uma força de corte equivalente ao longo do comprimento de cada parede da secção, sendo que a resultante deste fluxo de corte equilibra o momento torsor. Analisando a formulação teórica do VATM modificado, o perímetro é incorporado na equação da espessura efetiva da escora de betão, Equação (2.32), assim, para um perímetro menor (h/b menor) a espessura efetiva é maior e, consecutivamente analisando novamente a Equação (2.27) que traduz o momento torsor resistente, a resistência da viga será maior.

3.2.3. Comparação com resultados experimentais

Nesta secção pretende-se validar o VATM modificado para a previsão da influência do parâmetro h/b no comportamento último de vigas à torção tendo por base resultados experimentais. Para tal, consultou-se a literatura disponível e encontrou-se um estudo publicado por Hsu em 1968 [63] no qual são apresentados os resultados do ensaio à torção de uma série de vigas com diferentes secções e características, com o objetivo de avaliar experimentalmente, entre outros, a influência da variável h/b . A presente secção apresenta a análise realizada e as conclusões que Hsu expôs no seu estudo, bem como a comparação destes resultados com os resultados teóricos obtidos tendo por base o VATM modificado.

Em 1968 [63] Hsu publicou os resultados de um estudo experimental sobre o comportamento à torção pura de vigas de betão armado com secção transversal retangular, num total de 53 vigas, com o objetivo de estudar a influência de oito variáveis de estudo. As variáveis envolvidas neste estudo são: a taxa de armadura de torção, o tipo de secção (secção cheia ou secção vazada), o nível de desequilíbrio entre a taxa de armadura longitudinal e transversal, a resistência do betão à compressão, o efeito de escala (relacionado com a área da secção transversal), a relação entre a altura e largura da secção transversal, o espaçamento da armadura longitudinal e o espaçamento da armadura transversal (cintas). De entre as nove séries de vigas ensaiadas, apenas as séries B, G, N, K e C, no total de 28 vigas, foram utilizadas para o estudo da influência do efeito de escala e da relação h/b , uma vez que as características destas vigas permitiram isolar a influência destas duas variáveis. Na Tabela 3.2 apresenta-se, de forma resumida, as características geométricas e mecânicas das referidas 28 vigas, onde h/b é equivalente a y/x .

Tabela 3.2 - Características das vigas ensaiadas e estudadas por Hsu [63]

Viga	x [cm]	y [cm]	$\frac{h}{b}$	x_1 [cm]	y_1 [cm]	f'_c [MPa]	f_{sty} [MPa]	f_{sty} [MPa]	A_{st} [cm ²]	ρ_l [%]	A_{st} [cm ²]	s [cm]	ρ_t [%]	m	ρ_{tot} [%]
B1	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	27,58	313,71	341,29	5,16	0,53	0,71	15,2	0,54	1,00	1,07
B2	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	28,61	316,47	319,92	7,92	0,83	1,29	18,1	0,82	1,00	1,65
B3	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	28,06	327,50	319,92	11,35	1,17	1,29	12,7	1,17	1,00	2,34
B4	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	30,54	319,92	323,36	15,52	1,6	1,29	9,2	1,61	0,99	3,21
B5	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	29,03	332,33	321,29	20,39	2,11	1,29	6,99	2,13	0,99	4,24
B6	25,4	38,1	1,5	21,59	34,29	28,82	331,64	322,67	25,79	2,67	1,29	5,72	2,61	1,02	5,28
G2	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	30,89	322,67	333,71	7,92	0,62	0,71	12,1	0,63	0,99	1,25
G3	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	26,82	338,53	327,50	11,35	0,88	1,29	15,6	0,88	1,00	1,76
G4	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	28,27	325,43	321,29	15,52	1,2	1,29	11,4	1,2	1,00	2,40
G5	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	26,89	330,95	327,50	20,39	1,58	1,29	8,57	1,6	0,99	3,18
G6	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	29,92	334,39	349,56	7,74	0,6	0,71	12,7	0,59	1,01	1,19
G7	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	30,96	319,23	322,67	11,88	0,93	1,29	14,6	0,94	0,99	1,87
G8	25,4	50,8	2,0	21,59	46,99	28,34	321,99	328,88	17,03	1,32	1,29	10,5	1,31	1,01	2,63
N1	15,24	30,48	2,0	13,03	28,27	29,51	352,32	341,29	2,85	0,61	0,32	9,21	0,62	0,98	1,23
N1a	15,24	30,48	2,0	13,03	28,27	28,69	346,12	344,74	2,85	0,61	0,32	9,21	0,62	0,98	1,23
N2	15,24	30,48	2,0	13,03	28,27	30,41	330,95	337,84	5,16	1,11	0,32	5,08	1,13	0,98	2,24
N2a	15,24	30,48	2,0	13,03	28,27	28,41	333,02	360,59	5,16	1,11	0,71	11,4	1,1	1,01	2,21
N3	15,24	30,48	2,0	13,03	28,27	27,30	351,63	351,63	4,28	0,92	0,32	6,35	0,90	1,01	1,82
K1	15,24	49,53	3,25	11,43	45,72	29,85	345,43	354,39	4,28	0,56	0,71	19,1	0,56	1,00	1,13
K2	15,24	49,53	3,25	11,43	45,72	30,61	335,77	337,84	7,74	1,03	0,71	10,5	1,03	1,00	2,05
K3	15,24	49,53	3,25	11,43	45,72	29,03	315,78	320,61	11,88	1,59	1,29	12,4	1,58	1,01	3,17
K4	15,24	49,53	3,25	11,43	45,72	28,61	344,05	339,91	17,03	2,26	1,29	8,57	2,28	0,99	4,54
C1	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	27,03	341,29	341,29	2,85	0,44	0,71	21,6	0,44	1,00	0,88
C2	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	26,54	334,39	344,74	5,16	0,8	0,71	11,7	0,81	0,99	1,61
C3	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	26,89	330,95	329,57	7,92	1,24	1,29	14,0	1,24	1,00	2,48
C4	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	27,17	336,46	327,50	11,35	1,76	1,29	9,84	1,76	1,00	3,52
C5	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	27,23	328,19	328,88	15,52	2,4	1,29	7,30	2,36	1,01	4,76
C6	25,4	25,4	1,0	21,59	21,59	27,58	315,78	327,50	20,27	3,16	1,29	5,40	3,2	0,99	6,36

Segundo Hsu, uma secção transversal retangular pode ser definida por duas variáveis: a relação h/b e uma dimensão absoluta, que é função da altura e da largura, ou seja, a área transversal. A influência desta última variável no comportamento das vigas é designada como efeito de escala. Hsu assumiu que o momento torsor resistente (T_u) de uma viga com armaduras equilibradas podia ser obtido a partir da Equação (3.3), a qual constitui uma função linear que inclui dois momentos torsores resistentes internos: um contribuído pela armadura transversal ($x_1 y_1 (A_{st}/s) f_{sty}$) e outro contribuído pela viga (sem armadura de torção (T_0)), o qual podia ser calculado de acordo com a teoria de Saint-Venant. Na Equação (3.3) x_1 e y_1 são, respetivamente, a dimensão menor e maior de um estribo fechado em relação à sua linha média, A_{st}/s é a área de armadura transversal distribuída, f_{sty} a tensão de cedência da

armadura transversal e Ω é o coeficiente de proporcionalidade com o momento torsor resistente interno contribuído pela armadura transversal.

$$T_u = T_0 + \Omega x_1 y_1 \frac{A_{st}}{s} f_{sty} \quad (3.3)$$

O coeficiente Ω referido no parágrafo anterior é o declive da reta definida pela Equação (3.3). A validade da Equação (3.3) pode ser observada na Figura 3.9 para algumas séries de vigas ensaiadas por Hsu [63], observando-se também que, a partir de um determinado valor para o momento torsor último, as curvas passam a ter um desenvolvimento não linear. Interessa ainda referir que, segundo o estudo de Hsu, o coeficiente Ω é obtido como uma correlação da zona linear das referidas curvas.

Hsu observou que o valor de Ω é influenciado pelas dimensões da secção transversal. Então, com o objetivo de analisar este problema, estudou as vigas das séries G e N para as quais a relação h/b das vigas são iguais mas as áreas são diferentes, o que possibilitou isolar o efeito de escala para a análise (Figura 3.9). As vigas da série G possuem uma secção com $25,4 \times 50,8 \text{ cm}$ e as vigas da série N uma secção com $15,24 \times 30,48 \text{ cm}$. A análise de Hsu consistiu em observar graficamente a evolução do momento torsor resistente (T_u) em função do momento torsor resistente interno contribuído pela armadura ($x_1 y_1 (A_{st}/s) f_{sty}$). As Figuras 3.9 (a) e (b) mostram que para a Série G foi obtido $\Omega = 1,45$, enquanto que para a Série N foi obtido $\Omega = 1,30$. Assim, Hsu observou que Ω não é constante para secções com a mesma relação h/b , mas com área diferentes (efeito de escala).

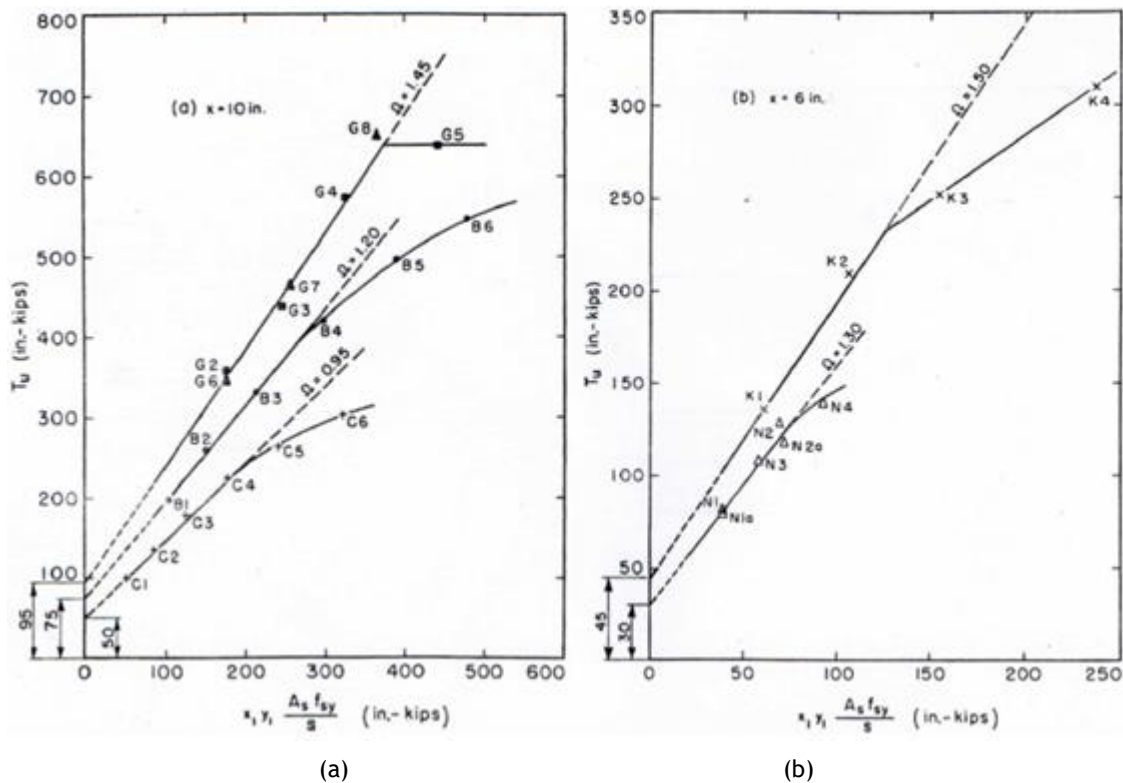


Figura 3.9 - Resultados das vigas ensaiadas por Hsu - (a) séries G, B e C com $x = b = 25,4$ cm (constante) e h variável, (b) séries K e N com $x = b = 15,24$ cm (constante) e h variável [63]

Hsu achou também importante isolar no seu estudo a variável h/b . Assim, manteve constante a largura da secção, $x=b$, e avaliou o comportamento do conjunto das vigas das séries G, B e C cujas secções transversais são $25,4 \times 50,8$ cm, $25,4 \times 38,1$ cm e $25,4 \times 25,4$ cm, respetivamente, bem como o conjunto das vigas das séries N e K em que a secção transversal tem $15,24 \times 30,48$ cm e $15,24 \times 49,53$ cm, respetivamente. Tendo por base os resultados expostos na Figura 3.9 é observável que Ω aumenta com o aumento do h/b . Contudo, Hsu não conseguiu estudar o efeito isolado da variável h/b através de uma comparação direta das cinco séries de vigas em análise (séries G, B, C, N e K) uma vez que h/b é função do fator de escala, ou seja, função da altura e largura da secção, bem como da respetiva área da secção transversal. Assim, Hsu analisou o efeito de h/b em função do efeito de escala mantendo constante a variável b (largura da secção), h (altura da secção) e posteriormente fixando a área da secção transversal. Em cada análise, Hsu avaliou a evolução de Ω e conseguiu correlacionar este parâmetro com o quociente entre a dimensão maior e menor do estribo fechado em relação à linha média (y_1/x_1), o qual está relacionado com h/b . Desta forma o autor conseguiu mostrar que o parâmetro Ω é influenciado pelo quociente y_1/x_1 , logo também de h/b .

Tendo em conta as observações de Hsu em 1968 [63], pode-se concluir que a resistência de uma viga com secção retangular à torção é também dependente da variável h/b em estudo no presente capítulo.

Tendo por base os resultados experimentais anteriormente referidos, pretende-se seguidamente verificar teoricamente a influência de h/b através do VATM para vigas à torção com secção retangular, considerando-se que h/b toma valores igual ou superiores a 1. Tendo por base as vigas as séries G, B, C, N e K com $h/b > 1$, o VATM modificado foi primeiramente utilizado para realizar uma análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais do momento torsor resistente, com o objetivo de validar o VATM modificado para as referidas vigas. A Tabela 3.3 apresenta os valores experimentais do momento torsor resistente obtidos por Hsu através dos ensaios experimentais ($T_{u,exp}$), os valores teóricos do momento torsor resistente obtidos pelo VATM modificado ($T_{u,th}$), os valores da relação $T_{u,exp}/T_{u,th}$ bem como o valor da média (\bar{x}), desvio padrão (s) e coeficiente de variação (cv) da referida relação.

Para as 28 vigas em análise pode observar-se que o VATM modificado prevê adequadamente o momento torsor resistente ($\bar{x} = 0,956$) e com uma dispersão de resultados bastante aceitável (cv = 8,06%). Desta forma, o VATM é validado para a previsão teórica da resistência à torção das vigas para as séries em análise e com $h/b > 1$.

Tabela 3.3 - Análise comparativa para o momento torsor resistente (Vigas das séries G, B, C, N e K)

Viga	$T_{u,exp}$ [kNm]	$T_{u,th}$ [kNm]	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,th}}$
B1	22,26	22,20	0,997
B2	29,26	30,97	1,058
B3	37,51	39,65	1,057
B4	47,34	48,34	1,021
B5	56,15	51,28	0,913
B6	61,69	53,62	0,869
G2	40,34	37,49	0,929
G3	49,60	48,15	0,971
G4	64,85	58,93	0,909
G5	71,97	65,30	0,907
G6	39,09	37,36	0,956
G7	52,65	50,92	0,967
G8	73,44	62,05	0,845
N1	9,10	8,29	0,912
N1a	8,99	8,24	0,916
N2	14,46	12,68	0,877
N2a	13,22	12,42	0,940
N3	12,20	10,95	0,897
K1	15,37	14,63	0,952
K2	23,73	22,47	0,947
K3	28,47	26,82	0,942
K4	35,03	29,86	0,852
C1	11,30	11,04	0,977
C2	15,25	17,59	1,153
C3	20,00	22,68	1,134
C4	25,31	26,02	1,028
C5	29,72	28,34	0,954
C6	34,23	30,23	0,883
		$\bar{x} =$	0,956
		$s =$	0,077
		$cv =$	8,06%

Seguidamente, constitui também objetivo validar o VATM no que respeita à influência do fator de forma h/b . Para tal, e tendo por base as vigas anteriormente analisadas, pretende-se analisar teoricamente a influência do parâmetro h/b no coeficiente Ω , nos mesmos moldes do realizado por Hsu. Usando os valores teóricos para o momento torsor resistente expostos na Tabela 3.3, foram obtidos os gráficos ilustrados nas Figuras 3.10 (a) e (b), os quais reproduzem teoricamente os resultados experimentais obtidos por Hsu (com as mesmas unidades originais) e ilustrados na Figura 3.9. A partir das Figuras 3.10 (a) e (b), observa-se que os gráficos mostram as mesmas tendências observadas experimentalmente. Tendo por

base uma regressão linear dos pontos localizados na porção linear dos gráficos, obteve-se as equações das retas, em particular o parâmetro Ω .

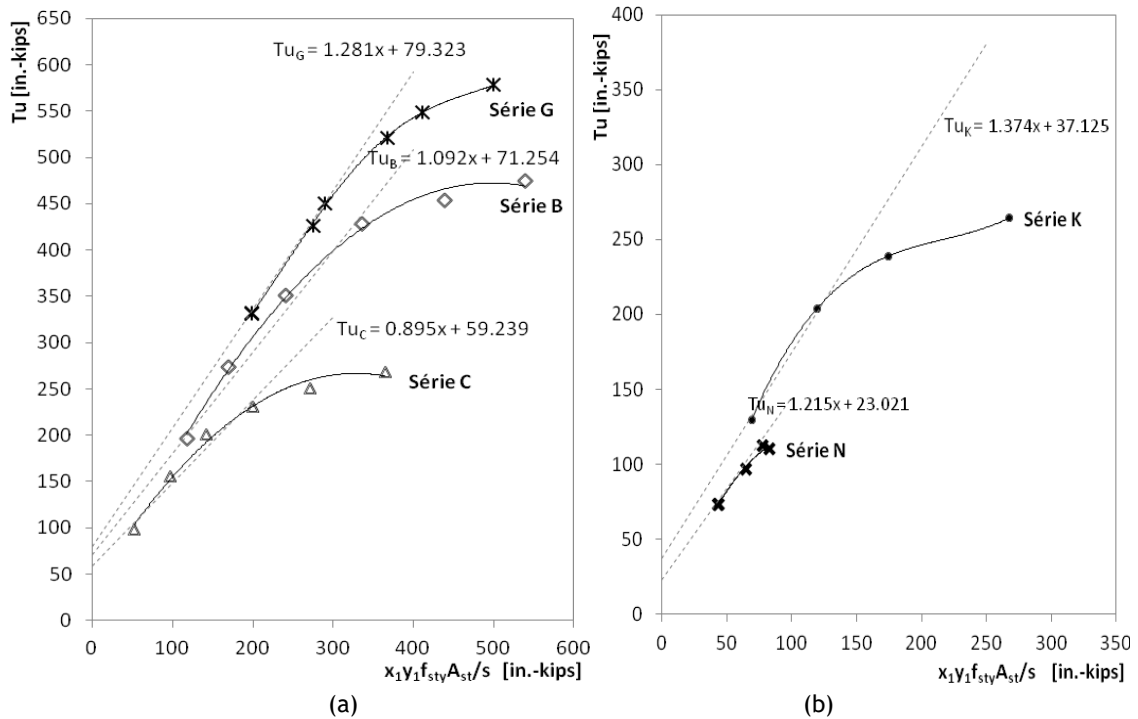


Figura 3.10 - Resultados teóricos - (a) Vigas das séries G, B e C; (b) Vigas das séries K e N

Através da análise dos gráficos da Figura 3.10, conclui-se que o parâmetro Ω assume valores de 1,281, 1,092 e 0,895 para as séries G, B e C, respetivamente, e 1,374 e 1,215 para as série K e N, respetivamente. À partida observa-se que os valores de Ω são ligeiramente subestimados relativamente aos obtidos por Hsu com os resultados experimentais. No entanto, se se observar os incrementos percentuais teórico e experimental que ocorre da Série C para a B, da Série B para a G e da série N para a K (Tabela 3.4), pode concluir-se que são ligeiramente inferiores mas com as mesmas tendências.

Tabela 3.4- Variação percentual do parâmetro Ω experimental e teórico entre séries

Intervalo percentual	Ω_{Hsu} [%]	$\Omega_{th,VATM}$ [%]
Série C - Série B	26,32	22,01
Série B - Série G	20,83	17,31
Série N - Série K	15,38	13,09

Tendo por base os resultados anteriores, verifica-se que o VATM modificado prevê adequadamente a influência de h/b na resistência à torção das vigas analisadas.

No trabalho anteriormente realizado pela autora [116], o desenvolvimento dos ábacos de dimensionamento para secções quadrangulares ($h/b = 1$) foi realizado mediante a validação

dos resultados teóricos obtidos com o VATM modificado tendo por base alguns resultados experimentais e também resultados obtidos com análises não lineares com elementos finitos. No entanto, para o caso de vigas com secções retangulares ($h/b > 1$), não foram encontrados resultados experimentais com vigas com confinamento axial. Desta forma, o objetivo da presente secção era averiguar se a influência do h/b podia ser prevista tendo por base os resultados teóricos do VATM modificado por forma a utilizar este modelo teórico para refinar os ábacos de dimensionamento de modo a contabilizar a variável h/b . Tendo por base os resultados anteriores, considera-se que esse objetivo foi atingido.

3.3. Definição dos intervalos de valores para as variáveis de estudo

Com o objetivo de reformular os ábacos de dimensionamento que permitem estabelecer uma correlação entre o incremento da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento, com as várias variáveis de estudo, torna-se necessário definir intervalos de valores para as mesmas. As variáveis a considerar são as mesmas que anteriormente foram consideradas por Taborda [116], adicionadas da nova variável analisada anteriormente, designadamente: nível de confinamento axial (k), taxa total de armadura de torção (ρ_{tot}), resistência à compressão do betão (f_c) e fator de forma da secção (h/b).

Tendo em conta o estudo anteriormente realizado por Taborda em 2012 [116], adotaram-se intervalos de valores análogos para todas as variáveis de forma a abranger as vigas com diferentes tipologias de rotura. Neste sentido decidiu-se adotar os mesmos valores para o nível de confinamento axial: 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000 e 80000 kN/m, incluindo a situação de confinamento nulo. Estes valores correspondem a situações comuns de confinamento de vigas em estruturas correntes [31]. O mesmo acontece em relação aos valores relativos à taxa total de armadura de torção: 0,2, 0,3, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0, 1,2, 1,4 e 1,6%. Este intervalo de valores pretende abranger vigas com rotura de carácter dúctil, frágil e prematuro por destacamento do betão de recobrimento e frágil por compressão do betão [31]. Quanto à resistência do betão à compressão, foram considerados os seguintes valores: 30, 50, 70 e 90 MPa. Este intervalo inclui a classe de resistência normal (primeiros dois valores) e a classe da alta resistência (últimos dois valores).

O intervalo de valores seleccionados para a variável do fator de forma da secção transversal (h/b) foi definido tendo por base uma pesquisa bibliográfica referente ao ensaio de vigas de betão armado ensaiadas à torção por diversos autores, designadamente: Hsu em 1968 [63], Lampert e Thurlimann em 1969 [78], Leonhardt and Schelling em 1974 [79], McMullen-Ragen em 1978 [87], Rasmussen Baker em 1995 [102] [103], Koutchoukali e Belarbi em 2001 [77], Bernardo em 2003 [20], Fang-Shiau em 2004 [51], Chiu, Fang, Young e Shiau em 2007 [41],

Peng e Wong em 2011 [99], Jeng em 2014 [75]. Tendo em conta as diversas geometrias adotadas para as vigas ensaiadas, observou-se que os valores do fator de forma usados variam usualmente entre 1 e 3,25 (este último valor é pouco frequente). Deste modo, decidiu-se adotar os valores que correspondem aos mais usuais em ensaios experimentais, designadamente: 1, 1,5, 2, 2,5 e 3.

Por coerência em relação ao trabalho desenvolvido por Taborda em 2012 [116], optou-se por manter a largura da secção da mesma viga de referência e aumentar a respetiva altura de modo a obter os diferentes valores do fator de forma em análise. A Tabela 3.5 resume as características geométricas das vigas simuladas com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado. Tomando estas vigas como referência analisa-se a influência do confinamento axial sobre a resistência máxima.

Tabela 3.5 – Características geométricas das vigas simuladas

h/b	x [cm]	y [cm]	x_1 [cm]	y_1 [cm]	t [cm]
1,0	60	60	53,9	53,10	10,67
1,5	60	90	53,9	83,10	10,67
2,0	60	120	53,9	113,10	10,67
2,5	60	150	53,9	143,10	10,67
3,0	60	180	53,9	173,10	10,67

Tendo por base os valores considerados para as variáveis em estudo, são definidas 1980 combinações (que podem ser consultadas no Anexo IV e Anexo V) para análise. Para cada caso calculou-se a resistência à torção teórica das vigas com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado. Desta forma, calculou-se o incremento da resistência à torção através da utilização de um parâmetro designado por C_{ca} . Este parâmetro consiste no coeficiente multiplicativo (maior ou igual à unidade) da resistência à torção da viga na situação sem confinamento axial.

3.4. Verificação da conformidade das vigas em análise

A partir da viga de referência A2 e de forma a simular as vigas com h/b diferente de 1, a geometria da secção da viga de referência é modificada, pelo que se torna necessário voltar a verificar a conformidade das novas vigas de acordo com as limitações normativas. Optou-se por quantificar um limite superior e inferior de acordo com disposições normativas vigentes de forma a ajudar a adotar taxas normais de armadura de torção para as vigas a simular. Os limites calculados para a quantidade de armadura de torção vão ser utilizados para os ábacos, aparecendo nestes como valores para as curvas de referência. Uma vez que, através do traçado das curvas dos ábacos, se começou por observar um efeito desfavorável do confinamento axial no que se refere ao tipo de rotura da viga, considerou-se de interesse quantificar os valores limites da taxa total de armadura para as quais se prevê que as vigas

em situação livre de confinamento começam a evidenciar roturas frágeis, quer por insuficiência de armadura quer por esmagamento do betão à compressão. Relativamente a este aspeto, recorde-se que o estado axial de compressão gerado pelo confinamento axial da viga tem um efeito favorável na resistência à torção das vigas. No entanto este efeito favorável é conseguido juntamente com um atraso da cedência das armaduras, o que proporciona um carácter mais frágil à rotura da viga, o que por outro lado leva a que este efeito também possa ser considerado como menos favorável.

Existem documentos normativos, com grande abrangência territorial, que limitam diretamente a quantidade de armadura no caso da torção e outros que não o fazem de forma direta. Bernardo em 2002 [20] verificou que, de entre vários documentos normativos analisados, o código do ACI é o que limita mais convenientemente a armadura de torção, tanto superior como inferiormente. Assim, no presente trabalho é adotado o código do ACI [6] para quantificar os limites da taxa total de armadura de torção, que constitui uma variável de análise, de forma a garantir um intervalo adequado para a quantidade de armaduras de torção.

Para além das disposições relativas aos limites mínimos e máximos impostos para as armaduras de torção, os documentos normativos também apresentam limites referentes a outras disposições construtivas para as armaduras, como o espaçamento máximo das cintas, espaçamento máximo dos varões longitudinais, diâmetros mínimos dos varões longitudinais, entre outros. Contudo, não é objetivo da presente secção verificar a conformidade das vigas a simular relativamente a estes limites.

3.4.1. Armadura mínima de torção

O código ACI [6] especifica, na Cláusula 11.5.5.1, que a quantidade mínima de armadura de torção deve ser prevista em todas as regiões onde o momento torsor reduzido, T_u , exceder o valor especificado na Cláusula 11.5.1. Nos casos em que a Cláusula 11.5.5.1 requer armadura de torção, a Cláusula 11.5.5.2 prevê um mínimo de armadura transversal para os estribos fechados, sendo dado pela Equação (3.4), não podendo ser inferior a $50b_w s/f_{yt}$:

$$A_v + 2A_t = 0,75\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad (3.4)$$

Em que,

- A_v - Área de armadura transversal referente aos dois ramos de um estribo fechado (considerada nula para o presente estudo)
- A_t - Área de armadura transversal referente a um ramo do estribo fechado
- b_w - Largura da alma da secção
- f'_c - Resistência à compressão uniaxial do betão

s - Espaçamento longitudinal da armadura transversal

f_{yt} - Tensão de cedência da armadura transversal

Em 1990, Roller e Russel [108], através de ensaios experimentais, apontaram a importância em incrementar a área mínima de armadura de esforço transversal de forma a prevenir a rotura quando ocorre a fissuração. A equação para o cálculo da armadura transversal mínima para o caso da torção pura foi alterada por consistência com os cálculos requeridos para a armadura mínima de esforço transversal, tendo resultado da Equação (3.4). Os referidos autores propuseram então a seguinte equação:

$$A_t = 0,375\sqrt{f_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad (3.5)$$

A área mínima de armadura nunca deve ser inferior a $25b_w s/f_{yt}$.

A Cláusula 11.5.5.3 refere que quando é requerido armadura de torção pela Cláusula 11.5.5.1, a área mínima de armadura longitudinal de torção deve ser calculado através da seguinte expressão:

$$A_{sl,min} = \frac{5\sqrt{f_c} A_{cp}}{f_{yl}} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yt}}{f_{yl}} \quad (3.6)$$

Onde A_t/s não deve ser inferior a $25b_w s/f_{yt}$, e em que f_{yt} e f_{yl} se referem à tensão de cedência da armadura transversal e longitudinal, respetivamente, A_{cp} corresponde à área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão e p_h é o perímetro da linha média da armadura transversal.

3.4.2. Armadura máxima de torção

A limitação superior da armadura de torção é definida tendo por base o máximo valor permitido para a tensão nas escoras de betão e tem como objetivo evitar a rotura frágil por compressão do betão nas escoras. Tendo por base este objetivo, a Cláusula 11.5.3.1 limita as dimensões das secções transversais (cheias ou ocas) através da seguinte inequação:

$$\frac{T_u p_h}{1,7A_{oh}^2} \leq \phi 8\sqrt{f_c} \quad (3.7)$$

A Inequação (3.7) pode ser utilizada para derivar uma expressão para a armadura transversal máxima. Substituindo-se T_u/ϕ por T_n , valor calculado pela expressão $T_n = 2A_o (A_t/s) f_{yt} \cot \theta$ incorporada na Cláusula 11.5.3.6, e resolvendo em ordem a A_t para a situação limite, obtém-se:

$$A_{st,max} = \frac{8\sqrt{f_c} A_{oh} s}{p_h f_{yt} \cot \theta} \Leftrightarrow \frac{A_{st,max}}{s} = \frac{8\sqrt{f_c} A_{oh}}{p_h f_{yt} \cot \theta} \quad (3.8)$$

3.4.3. Verificação das disposições normativas

Como já tinha sido anteriormente referido, a viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20] foi considerada como a viga de referência base para este estudo. Estudos realizados pelo mesmo autor [20] mostram que a viga A2 cumpria as limitações normativas impostas pelo código do ACI.

Para proceder à limitação superior e inferior da taxa total de armadura de torção nos ábacos, torna-se necessário realizar a verificação normativa das vigas a simular com o auxílio do aplicativo TORQUE_MTEAV modificado.

Os parâmetros que vão ser analisados são os seguintes:

- Área mínima de armadura transversal: Equação (3.5);
- Área mínima de armadura longitudinal: Equação (3.6);
- Área máxima de um ramo da armadura transversal: Equação (3.8).

As características geométricas e mecânicas das vigas a analisar encontram-se resumidas na Tabela 3.6 e em unidades imperiais, necessárias para o cálculo dos diversos parâmetros de controlo segundo as expressões incorporadas no código do ACI [6]. Os significados dos parâmetros expostos na Tabela 3.6 foram referidos ao longo da presente secção.

Tabela 3.6 - Características para a verificação das vigas a analisar com o auxílio do TORQUE_MTEAV modificado (ACI [6])

Viga		$x = b_w$	y	t	x_1	y_1	f'_c	f_{yv}	f_{yt}
h/b	f_c	[in]	[in]	[in]	[in]	[in]	[psi]	[psi]	[psi]
1	30	23,62	23,62	4,20	21,22	20,91	4350	100904	97501
	50	23,62	23,62	4,20	21,22	20,91	7250	100904	97501
	70	23,62	23,62	4,20	21,22	20,91	10150	100904	97501
	90	23,62	23,62	4,20	21,22	20,91	13050	100904	97501
1,5	30	23,62	35,43	4,20	21,22	32,72	4350	100904	97501
	50	23,62	35,43	4,20	21,22	32,72	7250	100904	97501
	70	23,62	35,43	4,20	21,22	32,72	10150	100904	97501
	90	23,62	35,43	4,20	21,22	32,72	13050	100904	97501
2	30	23,62	47,24	4,20	21,22	44,53	4350	100904	97501
	50	23,62	47,24	4,20	21,22	44,53	7250	100904	97501
	70	23,62	47,24	4,20	21,22	44,53	10150	100904	97501
	90	23,62	47,24	4,20	21,22	44,53	13050	100904	97501
2,5	30	23,62	59,06	4,20	21,22	56,34	4350	100904	97501
	50	23,62	59,06	4,20	21,22	56,34	7250	100904	97501
	70	23,62	59,06	4,20	21,22	56,34	10150	100904	97501
	90	23,62	59,06	4,20	21,22	56,34	13050	100904	97501
3	30	23,62	68,15	4,20	21,22	68,15	4350	100904	97501
	50	23,62	68,15	4,20	21,22	68,15	7250	100904	97501
	70	23,62	68,15	4,20	21,22	68,15	10150	100904	97501
	90	23,62	68,15	4,20	21,22	68,15	13050	100904	97501

Nota: 1 in = 2,54 cm, 1 in² = 6,45 cm²; 1 psi = 0,0068947 MPa

Tabela 3.6 (continuação) - Características para a verificação das vigas ensaiadas com o auxílio do TORQUE_MTEAV modificado (ACI [6])

Viga		A_{st}/s	A_{oh}	p_h	A_{cp}
h/b	f_c	[in ² /in]	[in ²]	[in]	[in]
1	30	0,0198	443,62	84,25	558
	50	0,0198	443,62	84,25	558
	70	0,0198	443,62	84,25	558
	90	0,0198	443,62	84,25	558
1,5	30	0,0234	694,26	107,87	837
	50	0,0234	694,26	107,87	837
	70	0,0234	694,26	107,87	837
	90	0,0234	694,26	107,87	837
2	30	0,0255	944,9	131,5	1116
	50	0,0255	944,9	131,5	1116
	70	0,0255	944,9	131,5	1116
	90	0,0255	944,9	131,5	1116
2,5	30	0,0270	1195,53	155,12	1395
	50	0,0270	1195,53	155,12	1395
	70	0,0270	1195,53	155,12	1395
	90	0,0270	1195,53	155,12	1395
3	30	0,0282	1446,17	178,74	1674
	50	0,0282	1446,17	178,74	1674
	70	0,0282	1446,17	178,74	1674
	90	0,0282	1446,17	178,74	1674

Nota: 1 in = 2,54 cm, 1 in² = 6,45 cm²; 1 psi = 0,0068947 MPa

A Tabela 3.7 resume as verificações normativas do código do ACI [6] relativas à taxa total de armadura mínima e máxima ($\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,max}$). Como se está a impor que as vigas possuam uma taxa de armadura longitudinal e transversal equilibrada, então o valor mínimo da taxa total de armadura pode ser obtida conhecendo o limite inferior da armadura longitudinal uma vez que é o único limite imposto pelo código do ACI [6]. O código do ACI define a armadura longitudinal mínima segundo a Equação (3.6), pelo que se obtém a respetiva taxa de armadura longitudinal mínima através da seguinte equação:

$$\rho_{l,min} = \frac{A_{st,min}}{A_c} \quad (3.9)$$

Desta forma, a taxa de armadura total mínima deve ser calculada a partir da seguinte equação:

$$\rho_{tot,min} = 2\rho_{l,min} \quad (3.10)$$

A verificação relativa à quantidade de armadura transversal máxima estabelecida pelo código do ACI é realizado através da Equação (3.8), dando origem à taxa de armadura transversal máxima que pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\rho_{t,max} = \frac{A_{st,max}}{s} \frac{u}{A_c} \quad (3.11)$$

A taxa total de armadura é dado por:

$$\rho_{tot,max} = 2\rho_{t,max} \quad (3.12)$$

Tabela 3.7 - Verificação da quantidade máxima e mínima da armadura transversal e longitudinal (ACI [6])

Viga		$A_{st,min}/s$	$\rho_{t,min}$	$A_{st,max}/s$	$\rho_{t,max}$	$A_{st,min}$	$\rho_{t,min}$	$\rho_{tot,min}$	$\rho_{tot,max}$
h/b	f_c	[in ² /in]	[%]	[in ² /in]	[%]	[in ²]	[%]	[%]	[%]
1,0	30	0,0058	0,087	0,0275	0,416	0,161	0,029	0,06	0,83
	50	0,0075	0,113	0,0355	0,537	0,710	0,127	0,25	1,07
	70	0,0088	0,134	0,0421	0,635	1,157	0,207	0,41	1,27
	90	0,0100	0,151	0,0477	0,719	1,543	0,276	0,55	1,44
1,5	30	0,0058	0,075	0,0337	0,434	0,217	0,026	0,05	0,87
	50	0,0075	0,096	0,0435	0,559	1,041	0,124	0,25	1,12
	70	0,0088	0,114	0,0514	0,662	1,711	0,204	0,41	1,32
	90	0,0100	0,129	0,0583	0,751	2,289	0,274	0,55	1,50
2,0	30	0,0058	0,068	0,0376	0,443	0,305	0,027	0,05	0,89
	50	0,0075	0,088	0,0485	0,571	1,403	0,126	0,25	1,14
	70	0,0088	0,104	0,0574	0,676	2,296	0,206	0,41	1,35
	90	0,0100	0,118	0,0651	0,767	3,068	0,275	0,55	1,53
2,5	30	0,0058	0,064	0,0403	0,448	0,378	0,027	0,05	0,90
	50	0,0075	0,083	0,0520	0,578	1,751	0,125	0,25	1,16
	70	0,0088	0,098	0,0615	0,684	2,867	0,205	0,41	1,37
	90	0,0100	0,111	0,0698	0,776	3,831	0,275	0,55	1,55
3,0	30	0,0058	0,062	0,0423	0,452	0,446	0,027	0,05	0,90
	50	0,0075	0,079	0,0546	0,583	2,094	0,125	0,25	1,17
	70	0,0088	0,094	0,0646	0,689	3,433	0,205	0,41	1,38
	90	0,0100	0,107	0,0733	0,782	4,591	0,274	0,55	1,56

Nota: 1 in² = 6,45 cm²; 1 psi = 0,0068947 MPa

Através das equações apresentadas na Secção 3.4 foi possível calcular os limites normativos em causa, mais especificamente a taxa total mínima e máxima de armadura, $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,max}$ (Tabela 3.7), para as vigas com as diferentes classes de resistência apresentadas e tendo em conta os valores considerados para os fatores de forma (h/b). Em relação à limitação inferior da taxa de armadura longitudinal, a Tabela 3.7 apresenta valores desproporcionais para as vigas que possuem uma classe de resistência baixa ($f_c = 30$ MPa). Ali e White em 1999 [9] mostraram que estes resultados para a área mínima de armadura longitudinal devem-se essencialmente à base empírica que está por detrás da expressão normativa. Os referidos autores afirmam que em determinadas condições limites (taxa de armadura alta ou muito baixa), a aplicação das disposições normativas referentes às armaduras mínimas resultam muitas vezes em duas situações indesejáveis:

- Armadura longitudinal mínima negativa;
- Armadura longitudinal mínima desproporcional em relação à armadura mínima transversal.

Desta forma, os valores obtidos para a armadura longitudinal mínima das vigas que apresentam uma classe de resistência do betão igual a 30 MPa, devem ser encarados com muita reserva. Por essa razão, o valor da taxa mínima total de armadura deve ser desprezado quando $f_c = 30$ MPa. Para as restantes classes de resistência, os valores limites são respeitados. Em relação aos valores da limitação superior da taxa total de armadura, é possível observar-se o facto de a taxa de armadura total máxima normativa para alguns casos, como por exemplo quando a resistência do betão é igual a 30 ou 50 MPa, ser inferior ao adotado. No entanto, não se modificam os valores de ρ_{tot} assumidos superiores ao limite normativo uma vez que constitui objetivo analisar igualmente as vigas com rotura do tipo frágil por compressão do betão.

3.5. Ferramentas de dimensionamento para vigas à torção com diferentes fatores de forma h/b

A presente secção tem como objetivo criar e apresentar duas ferramentas que podem ser utilizadas para o apoio ao projeto de vigas sujeitas à torção com secção quadrangular ou retangular, a partir das quais pode ser obtido o coeficiente C_{ca} que traduz o incremento da resistência à torção devido ao confinamento axial. Na primeira subsecção são apresentados uns ábacos que permitem obter um coeficiente multiplicativo para a resistência à torção da viga com diferentes valores de fator de forma da secção transversal sem confinamento axial, permitindo corrigir este mesmo valor para a situação com confinamento axial, à semelhança do exposto na Secção 3.2.1. Desta forma, estes ábacos permitirão estabelecer uma correlação entre o incremento da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento, e as várias variáveis de estudo analisadas, designadamente: resistência do betão à compressão, taxa total de armadura de torção, nível de confinamento e fator de forma da secção transversal. Na segunda subsecção é apresentado um aplicativo alternativo que permitirá, igualmente mas de forma mais direta, a obtenção do coeficiente C_{ca} .

É importante referir também que, para o estabelecimento das referidas ferramentas de apoio, são apenas assumidas vigas sujeitas à torção pura com armaduras equilibradas e com torção uniforme (momento torsor constante ao longo do vão).

3.5.1. Ábacos de dimensionamento

Nas Secções 3.2.2 e 3.2.3 foi verificado o real efeito do confinamento axial no comportamento último de vigas à torção, quer para vigas com secção quadrada ($h/b = 1$) quer com secção retangular ($h/b > 1$). Desta forma, decidiu-se completar o trabalho iniciado por Taborda em 2012 [116] e apresentado na Secção 3.2.1, de forma a generalizar os ábacos que servirão como ferramenta de auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção e que se encontrem em situação de confinamento axial.

O objetivo passou por correlacionar a variação da resistência da viga à torção, em relação à situação sem confinamento obtida por exemplo através dos documentos normativos, com os diversos valores do fator de forma (h/b) resultantes da geometria da secção transversal da viga, da resistência do betão à compressão, f_c , da taxa total de armadura, ρ_{tot} , e do nível de confinamento axial, k , no total de 1980 combinações. O intervalo de valores destas variáveis foi apresentado e justificado nas Secções 3.3 e 3.4. Estes ábacos surgem como opção face à complexidade já encontrada por Taborda em 2012 [116] para delinear uma expressão prática do ponto de vista da prática do projeto, uma vez que o polinómio de correlação resultante apresentou uma extensão considerável.

De forma a se poder traçar os ábacos foi necessário inicialmente criar 220 ficheiros de dados (com valores variáveis para h/b , f_c , ρ_{tot}) com a extensão “.trq” e que são editáveis através do “bloco de notas” do Windows. Nestes ficheiros, constam os valores que caracterizam a secção da viga, as propriedades do betão, as soluções das armaduras ordinárias longitudinal e transversal e as respetivas propriedades. A Figura 3.11 apresenta um dos ficheiros de dados considerado.

```

2,0-30-0,4.trq.txt - Bloco de notas
Ficheiro Editar Formatar Ver Ajuda
//Ficheiro de entrada base
//Viga LB A2-NSC
//2010-06-27
//
// Geometria
// secção [m]
// x [m]
// y [m]
// eixos da armadura transversal
// x1 [m]
// y1 [m]
// espessura parede da secção oca, se secção cheia t=0
// t [m]
//
// Betão
// fcm [MPa]
//
// Aço
// Armaduras Longitudinais
// Fly [MPa]
// nº de conj
// nConjAl
//
// nº_de_variões diametro [mm]
//
// Armadura Transversal
// fty [MPa]
// nº de conj
// nConjAt
//
// diametro [mm] espaçamento [m]
//
// fim do ficheiro
ok
Ln1, Col1

```

Figura 3.11 - Exemplo de ficheiro editável “.txt” de criação da viga ($h/b = 2,0$; $f_c = 30$ MPa e

$$\rho_{tot} = 0,4 \%$$

Após terem sido criados todos os ficheiros de dados, foi calculado o momento torsor resistente através do aplicativo Torque_MTEAV modificado para todas as vigas e para todos os valores da variável k , para um total de 1980 combinações. Recorde-se que este aplicativo foi programado com o VATM modificado (modelo apresentado na Secção 2.3). Obtidos os valores para o momento torsor resistente associados a cada valor do confinamento axial, foi possível determinar o valor do coeficiente C_{ca} .

Para se encontrar a equação geral que traduz o parâmetro C_{ca} em função das quatro variáveis de estudo, foram excluídas as combinações com $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,máx}$ uma vez que estas variáveis são função de outras variáveis de estudo. Recorde-se que na secção 3.4.3 foram calculadas as taxas mínimas e máximas de armadura de torção para que as vigas respeitassem os limites normativos impostos pelo código do ACI [6]. Assim, verifica-se que $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,máx}$ são dependentes do f_c , da área de armadura longitudinal e transversal e das dimensões da secção transversal, o que não acontece com os restantes valores de ρ_{tot} . Assim, de forma a simplificar a equação geral que traduz o parâmetro C_{ca} , decidiu-se separar os valores de $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,máx}$ e encontrar as equações que definem o cálculo do C_{ca} separadamente da equação geral (Equação (3.13)). Desta forma, fazendo-se uso das 1620 combinações apresentadas no Anexo IV, as quais foram usadas para calcular e desenhar os ábacos, foi

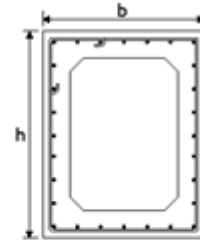
possível obter um desenvolvimento polinomial do logaritmo neperiano de C_{ca} em função das variáveis h/b , f_c , ρ_{tot} e k . Verificou-se a partir das combinações para o C_{ca} , em função das variáveis h/b , f_c , ρ_{tot} e k , que as curvas obtidas pela projeção de hipersuperfícies definidas num espaço a 5 dimensões nos diversos planos coordenados são não lineares e em geral, não linearizáveis. Assim, recorreu-se a modelos de regressão não linear baseado no método dos mínimos quadrados com o algoritmo proposto por Levenberg [80] e melhorado por Marquardt [86][92], disponíveis nos softwares estatísticos IBM SPSS, versão 23, ou R com o package nlmrt (*Functions for Nonlinear Least Squares Solutions*), versão 2013-9.25. A abordagem com estes algoritmos permitiu evitar o problema da singularidade do gradiente, muito comum quando utilizados os métodos de Newton-Raphson ou do gradiente descendente, aumentando assim a robustez na procura das estimativas dos coeficientes do modelo não linear a ajustar. Para a Equação (3.13) apresentada neste estudo, o respetivo resíduo absoluto máximo é de 0,1112 e o coeficiente de determinação igual a $R^2 = 0,995$. O coeficiente de determinação traduz a qualidade da equação, verificando-se que o valor obtido é bastante próximo da unidade. Tal significa que a equação encontrada fornece valores quase exatos para o C_{ca} .

Na Equação (3.13) apresenta-se o logaritmo neperiano do incremento da resistência à torção de uma viga confinada axialmente face à situação sem confinamento, C_{ca} :

$$\ln(C_{ca}) = 1,22711 + 0,823105 \tan^{-1} \left[\left(0,346762 + 0,000000245098k + \frac{1002,89}{k} - 0,0279109 \ln(k) \right) \times \right. \\ \times \left(-0,00122179f_c + \frac{400,325}{f_c^2} + 0,596907 \right) \times \left(1,83435e^{\frac{0,143305}{h/b} + 0,632847 \ln(h/b)} \right) \times \\ \left. \times \left(-18,5203\rho_{tot}^{\frac{3}{2}} - 3,97596\rho_{tot} - 1,18777\rho_{tot}^{\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (3.13)$$

Os ábacos são traçados a partir da Equação (3.13). Nas Figuras 3.12 e 3.13 encontram-se ilustrados dois exemplos dos ábacos obtidos para o caso de $h/b = 1,5$ e classe de resistência $f_c = 50$ MPa e $h/b = 3,0$ e $f_c = 70$ MPa. Os restantes ábacos traçados podem ser consultados no Anexo VI. Os ábacos obtidos foram denominados por “Ábaco Torção - Confinamento axial”. Para $k < 10000$ kN/m a estimação do coeficiente C_{ca} pode ser obtido através da extensão da curva até que esta cruze a origem do referencial do ábaco. Nessa região dos ábacos, a curva apresenta-se a tracejado.

ÁBACO
TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
 $h/b = 1.5$



$f_c = 50 \text{ MPa}$

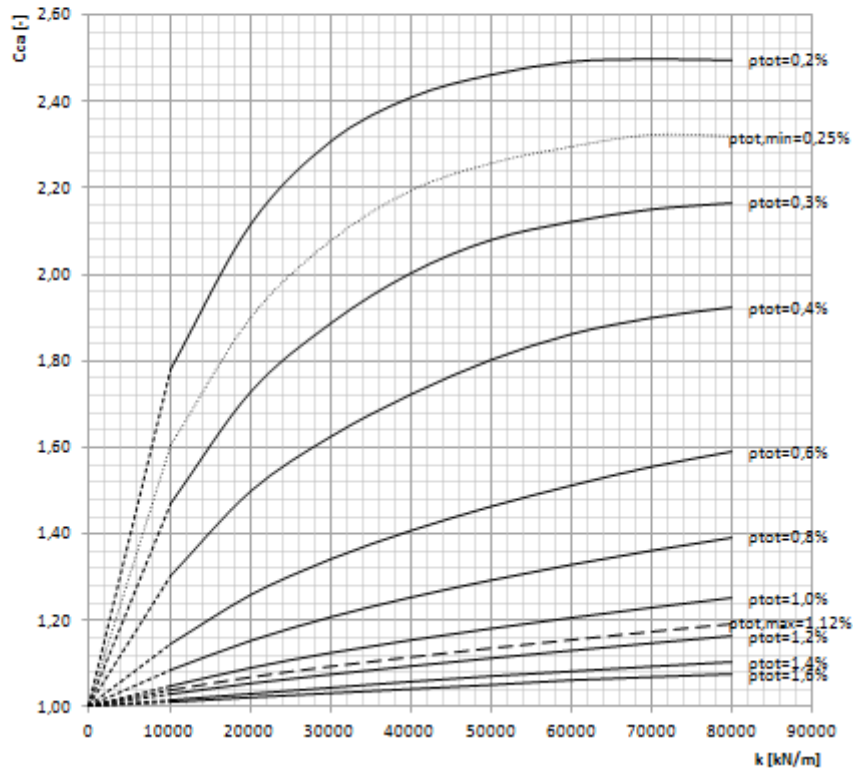


Figura 3.12 - Ábaco: Torção + Confinamento axial para $f_c = 50 \text{ MPa}$ e $h/b = 1,5$

ÁBACO
TORÇÃO + CONFINAMENTO AXIAL
 $h/b = 3$

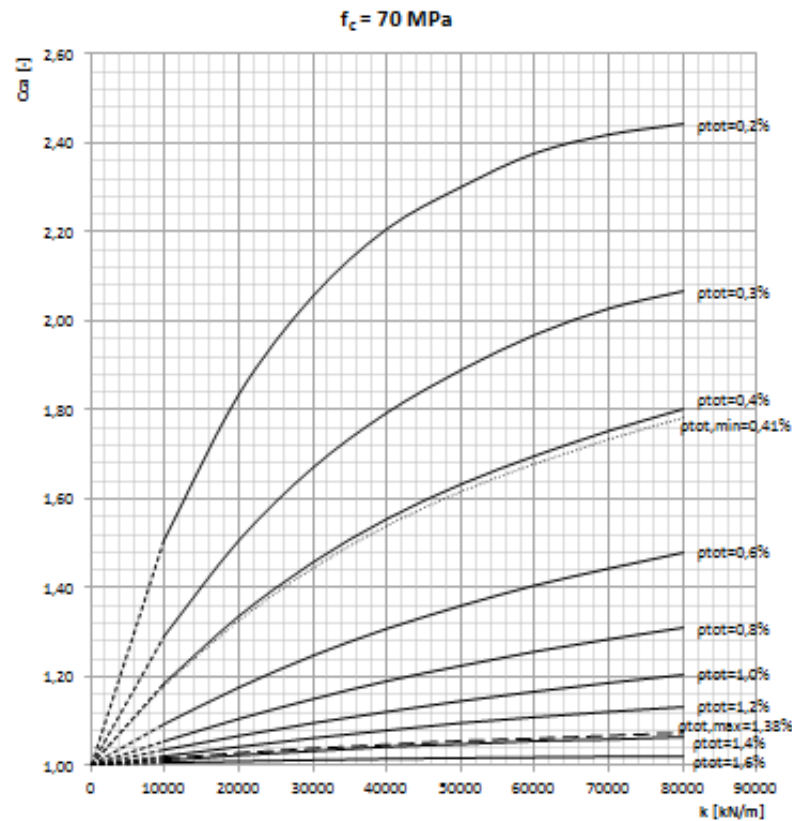
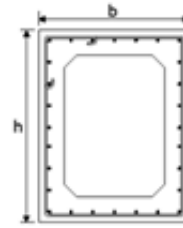


Figura 3.13 - Ábaco: Torção + Confinamento axial para $f_c = 70 \text{ MPa}$ e $h/b = 3,0$

Um aspeto novo que se pode observar nos ábacos propostos neste trabalho, em relação aos apresentados por Taborda em 2012 [116], é que os mesmos incorporam limites para a taxa total de armadura de torção. Estes limites mínimos e máximos normativos, estabelecidos a partir do código do ACI [6] (Secção 3.4.3), servem de referência para o utilizador ter uma ideia do intervalo de valores para a taxa total de armadura de torção que garante, do ponto de vista normativo, uma adequada ductilidade. Assim, durante a consulta dos ábacos é possibilitado ao utilizador uma perceção do enquadramento normativo das taxas totais de armadura à torção recomendadas.

Da mesma forma como se obteve a equação que possibilita correlacionar o parâmetro C_{ca} com as variáveis h/b , f_c , ρ_{tot} e k , a partir das 360 combinações (Anexo V) foi possível encontrar equações que traduzem o C_{ca} para $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,máx}$, em função de cada valor da variável h/b . Fazendo uso das referidas combinações e usando novamente o algoritmo de Lavenberg-Marquardt conseguiu-se que as hipersuperfícies propostas apresentem um resíduo

absoluto máximo muito pequeno (consequentemente, R^2 ficou muito próximo da unidade). Tal foi possível devido ao facto de existir uma correlação quase perfeita entre f_c e $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,max}$, permitindo assim ajustar as hipersuperfícies polinomiais com menos uma variável.

As equações que estimam o C_{ca} para traçar as curvas de $\rho_{tot,min}$ e $\rho_{tot,max}$, bem como os respetivos resíduos absolutos máximos, apresentam-se nos Anexos VII e VIII, respetivamente.

Os ábacos encontram-se organizados por classe de resistência do betão à compressão e por valor do fator de forma, sendo a sua consulta muito simples e prática. A consulta destes ábacos é em tudo muito semelhante ao apresentado por Taborda em 2012 [116] e, tal como explicado na Secção 3.2.1, para determinar o incremento da resistência à torção de uma viga de betão armado que se encontre confinada axialmente basta conhecer previamente qual o nível de confinamento longitudinal, a taxa total de armadura, o fator de forma e a resistência à torção da viga para a situação de confinamento nulo. Desta forma, para se obter o valor de C_{ca} deve consultar-se o ábaco relativo ao fator de forma em questão e à classe de resistência do betão à compressão da viga. De forma resumida, a consulta do ábaco para o cálculo de C_{ca} passa por fixar uma linha vertical que passa no valor do confinamento axial (abscissas) e intercepar essa linha com a curva correspondente à taxa da armadura da viga em questão. De seguida, projeta-se o ponto de interseção no eixo das ordenadas e obtém-se o coeficiente de confinamento axial, C_{ca} . O cálculo da resistência efetiva à torção da viga confinada axialmente obtém-se usando a seguinte equação:

$$T_{máx,ca} = C_{ca} T_{máx} \quad (3.14)$$

À semelhança dos ábacos apresentados inicialmente por Taborda em [31], para valores intermédios das variáveis considera-se válido utilizar uma interpolação linear. Importa referir que os ábacos de dimensionamento apresentados nesta secção permanecem válidos para vigas com comprimento diferente do comprimento da viga de referência (5,90 m), desde que o utilizador corrija previamente o valor do confinamento axial, k . Recorde-se que, tal como já referido anteriormente, a força de compressão axial que traduz o efeito do confinamento axial no algoritmo de cálculo do VATM modificado é função de k e do alongamento longitudinal da viga (Δl). Além disso, o alongamento livre da viga é diretamente proporcional ao seu comprimento. Assim, corrigindo-se o valor do confinamento axial, tal como apresentado na Equação (3.15), é possível corrigir o valor da força de confinamento axial tendo em conta o comprimento real da viga.

$$k_{l,corr} = k \times \frac{l_{real}}{5,90} \quad (3.15)$$

A Figura 3.14 apresenta um exemplo numérico de consulta dos novos ábacos para uma viga com uma secção retangular e $h/b = 3$, comprimento igual a 7,50 m, classe de resistência do

betão $f_c = 50 \text{ MPa}$, taxa total de armadura de torção igual a 0,6% e confinamento axial igual a 20000 kN/m. Tendo por base os valores apresentados, deve consultar-se o ábaco relativo a vigas com secção transversal em que o fator de forma é $h/b = 3$ e $f_c = 50 \text{ MPa}$. Assim, o primeiro passo é corrigir o valor do confinamento axial face ao comprimento da viga: $k_{l,corr} = 20000 \times (7,50/5,90) = 25423,7 \text{ kN/m}$. De seguida, deve-se fixar o valor do confinamento axial no eixo das abcissas $k = 25423,7 \text{ kN/m}$ e fazer uma projeção vertical até intercepar a curva referente à taxa de armadura total da viga em análise ($\rho_{tot} = 0,6\%$). Encontrando-se este ponto de interceção deve-se projetar o mesmo na horizontal, até ao eixo das ordenadas, e obtêm-se o valor do coeficiente de confinamento axial, C_{ca} . Uma vez obtido o coeficiente de confinamento axial basta o utilizador usar este coeficiente para corrigir o momento torsor resistente calculado, por exemplo, através dos documentos normativos. Utilizando a Equação (3.14), obtêm-se assim o valor da resistência à torção efetiva da viga em análise, tendo em conta o efeito do confinamento axial.

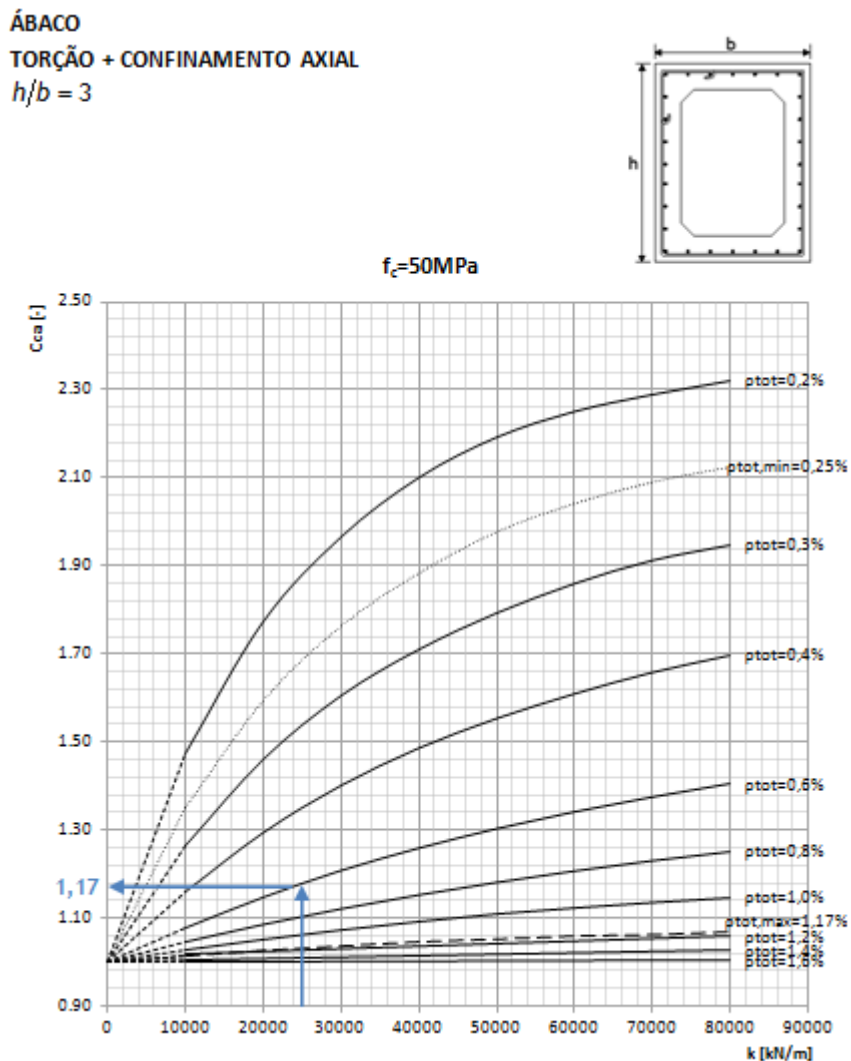


Figura 3.14 - Exemplo de aplicação com viga retangular: $h/b = 3,0$, $f_c = 50 \text{ MPa}$, $k = 25423,7 \text{ kN/m}$,

$$\rho_{tot} = 0,6\%$$

3.5.2. Aplicativo para auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado à torção confinadas axialmente

Um aspeto menos positivo que pode ser apontado à utilização dos Ábacos Torção - Confinamento axial apresentados na secção anterior é o facto da obtenção gráfica do C_{ca} não ser muito rigorosa, ficando sujeita a erros em função do utilizador. Por este motivo, apresenta-se na presente secção um método alternativo para determinar o C_{ca} de forma mais rigorosa.

Tendo como objetivo criar uma ferramenta de auxílio ao dimensionamento diferente dos ábacos e que permita de forma automática calcular a resistência à torção efetiva da viga confinada axialmente, foi desenvolvido um aplicativo para esse fim. Para tal, recorrendo-se à Equação (3.13), foi possível elaborar um aplicativo, na forma de uma folha de cálculo, em que apenas são solicitados os parâmetros identificados nas células com fundo amarelo (Figura 3.15). Para a utilização deste aplicativo é necessário calcular previamente o valor da resistência à torção da secção da viga livre de confinamento, recorrendo por exemplo às disposições normativas, e introduzir esse valor no aplicativo, juntamente com as características geométricas e mecânicas da secção da viga, designadamente: a largura e altura da secção, b e h respetivamente, o comprimento da viga, l , a área total da armadura longitudinal, A_{sl} , a área de um ramo da armadura transversal, A_{st} , o espaçamento da armadura transversal, s , a resistência do betão à compressão, f_c , e o valor do confinamento axial, k , calculado separadamente em função da restrição axial que a viga se encontre sujeita quando inserida na estrutura. O aplicativo de dimensionamento encontra-se disponibilizado através do [link](#) [81].

Após a introdução dos parâmetros requeridos, o aplicativo calcula automaticamente o coeficiente de correção C_{ca} e a resistência efetiva à torção da viga com confinamento axial. A Figura 3.15 ilustra um exemplo de cálculo do momento torsor resistente efetivo de uma viga com 7,50 m de vão confinada axialmente com $f_c = 50$ MPa, $h/b = 3,0$, $\rho_{tot} = 0,6\%$ e $k = 20000$ kN/m.

APLICATIVO PARA CÁLCULO DO COEFICIENTE C_{ca}

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

Altura da seção	h =	1,8	[m]	
Base da seção	b =	0,8	[m]	h/b = 3
Comprimento da viga	l =	7,50	[m]	

CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS

Armaduras

Área de armadura longitudinal	A _{sl} =	0,0032471	[m ²]	ρ _l = 0,00301
Área de armadura transversal	A _{st} =	6,79E-05	[m ²]	ρ _t = 0,00302
Espaçamento da armadura transversal	s =	0,1	[m]	ρ _{total} = 0,602 [%]

Betão

Classe de resistência do betão a compressão	f _c =	50	[MPa]	
---	------------------	----	-------	--

CONFINAMENTO AXIAL

k =	20000	[kN/m]	
-----	-------	--------	--

COEFICIENTE DE CONFINAMENTO AXIAL

C_{ca} = 1,1762938

MOMENTO TORSOR RESISTENTE SEM CONFINAMENTO

T_{l,máx} = 1086,29 kN.m

MOMENTO TORSOR RESISTENTE EFETIVO

T_{máx,ca} = 1277,80 kN.m

Figura 3.15 - Aplicativo de auxílio ao dimensionamento de vigas confinadas axialmente com exemplo de aplicação com viga retangular: $h/b = 3,0$, $f_c = 50$ MPa, $k = 20000$ kN/m, $\rho_{tot} = 0,6\%$ e $l = 7,50$ m [81]

Comparando os valores obtidos para o coeficiente C_{ca} através do ábaco de dimensionamento (Figura 3.14) e também pelo aplicativo, que utiliza a Equação (3.13), pode concluir-se que os valores são bastante próximos. No entanto, o valor do coeficiente obtido através do aplicativo é considerado mais preciso, uma vez que é calculado de forma analítica. Esta foi a principal razão que conduziu à criação deste aplicativo.

3.6. Considerações finais

No presente capítulo foi apresentado inicialmente a justificação da necessidade para se refinar os ábacos apresentados por Tabora em 2012 [116] para o cálculo do momento torsor resistente efetivo de vigas confinadas axialmente. A principal razão prendeu-se com o facto de que, mesmo em situações práticas de dimensionamento em que a torção é um esforço primário, as vigas possuem muitas vezes uma secção não quadrangular. Com vista a confirmar a influência do fator de forma (h/b) no comportamento das vigas à torção, foram realizadas análises paramétricas. A partir de uma primeira análise realizada, observou-se que as vigas com maior relação h/b apresentam uma maior resistência torção uma vez que a área da secção transversal aumenta. A partir de uma segunda análise onde foi possível isolar a variável h/b , impondo-se as áreas das secções das vigas eram iguais mas com diferentes valores de h/b , evidenciou-se a influência efetiva do parâmetro h/b na resistência e rigidez das vigas à torção. Esta observação motivou o refinamento de ferramentas (ábacos de dimensionamento e aplicativo de cálculo) para auxiliar o projeto de vigas de betão armado à torção, designadamente para calcular a resistência efetiva à torção de vigas com confinamento axial.

Neste capítulo, foi também demonstrada a influência da variável h/b na resistência de vigas de betão armado com secção quadrangular e retangular através de resultados experimentais. Com estes mesmos resultados foi ainda validada a previsão teórica do VATM modificado para vigas com secção retangular. Desta forma, considerou-se válido utilizar o VATM modificado como ferramenta auxiliar para o refinamento das ferramentas anteriormente referidas. Os ábacos de dimensionamento apresentados neste capítulo permitem obter facilmente um coeficiente multiplicativo para corrigir a resistência à torção de vigas na situação sem confinamento, tendo em conta a influência do confinamento axial.

Finalmente, foi ainda proposto um aplicativo, na forma de uma folha de cálculo, que permite de forma rápida e simples a obtenção do coeficiente de correção do momento torsor resistente e também da resistência efetiva à torção de vigas com confinamento axial.

Capítulo 4 - Modelo Generalizado de treliça espacial com ângulo variável GSVATM

4.1. Introdução

No presente capítulo descreve-se detalhadamente a formulação do novo Modelo de Treliça com Ângulo Variável GSVATM (*Generalized softened variable angle truss-model*) proposto por Bernardo et al, em 2015 [27] para vigas de betão armado (com secção retangular cheia ou vazada) sujeitas à torção. Optou-se por uma apresentação detalhada do modelo, incluindo alguns aspetos da derivação da formulação, visto ser necessário uma boa compreensão do modelo com vista a expandir o mesmo no Capítulo 5 para o caso de vigas sujeitas à torção e a um estado axial de tensão uniforme. O GSVATM constitui uma generalização do VATM, mediante a incorporação de um tirante perpendicular à escora de betão com o objetivo de introduzir o comportamento médio do betão tracionado nessa mesma direção. Desta forma, o GSVATM adota uma linha de raciocínio semelhante à que conduziu ao estabelecimento do VATM apresentado por Hsu e Mo em 1985 [69][70] e resumido no Capítulo 2 deste trabalho (Secção 2.2), bem como algumas das simplificações adotadas por Jeng e Hsu em 2009 na derivação do Modelo de Membrana para a torção, SMMT [74]. Note-se que ao longo deste capítulo apenas é apresentado o GSVATM para o caso de vigas de betão armado com secção retangular cheia ou vazada. O caso das vigas com secção retangular vazada sujeitas à torção simultaneamente com um estado axial de tensão uniforme será desenvolvido e apresentado no Capítulo 5.

O GSVATM servirá de base à segunda parte deste trabalho que irá consistir em generalizar o modelo para vigas de betão armado sujeitas à torção pura com a ação simultânea de um estado de tensão axial uniforme e posteriores análises de tendências comportamentais.

4.2. Formulação do GSVATM

Nesta secção apresenta-se, de forma pormenorizada, o GSVATM proposto por Bernardo et al. em 2015 [27]. O objetivo dos referidos autores foi propor um novo modelo, mais geral comparativamente ao VATM, capaz de prever o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção, incluindo a fase de baixos carregamentos. Para tal, os autores generalizaram o VATM original mediante a incorporação, na formulação, de um tirante de betão perpendicular à escora de betão para ter em conta a participação do betão à tração no comportamento de vigas sob o efeito do momento torsor. Em resultado disso, foi necessário também incorporar a relação constitutiva $\sigma-\varepsilon$ do betão à tração em adição à lei constitutiva que caracteriza o comportamento do betão à compressão.

Para formular o GSVATM, Bernardo et al. [27] inspiraram-se em parte nas premissas do modelo de membrana para a torção, o SMMT (*Softened Membrane Model for Torsion*),

desenvolvido por Jeng e Hsu em 2009 [74]. Tal como já referido na Secção 1.2.2, o SMMT teve origem num modelo inicialmente desenvolvido e calibrado para placas de betão armado sujeitas ao corte (*Softened Membrane Model - SMM*) [98], [64], [129]. O SMM [65] constitui uma extensão da teoria elástica de membrana para membranas de betão armado sujeitas ao corte e em estado fissurado. Admitindo um comportamento de membrana para as paredes de uma secção de uma viga à torção, e utilizando a Teoria do Tubo Fino de Bredt para relacionar o fluxo de tensões de corte a atuar na membrana e o momento torsor aplicado na secção, o SMMT pode ser utilizado para prever o comportamento global de vigas de betão armado à torção. Tal modelo, que não pode ser englobado na Analogia de Treliza Espacial, incorpora a contribuição do betão à tração na direção perpendicular à escora e também o efeito da distorção, para o qual foram incorporadas no modelo relações constitutivas adicionais para o betão (betão à tração e ao corte). À semelhança do SMMT, o GSVATM incorpora diretamente na sua formulação a contribuição do betão à tração da direção perpendicular à escora. No entanto, tratando-se de uma analogia de treliça espacial, o GSVATM não incorpora diretamente a influência do betão ao corte, ao contrário do SMMT que, tratando-se de um modelo de membrana, incorpora tal influência explicitamente.

Refira-se que o VATM constitui um caso particular do GSVATM quando a contribuição do betão à tração é considerada nula (inexistência do tirante de betão).

4.2.1. Reformulação do Modelo de Treliza Plana em vigas de betão armado

A reformulação do VATM para a incorporação de um tirante perpendicular à escora de betão passou inicialmente pela reformulação do Modelo de Treliza Plana apresentado na Secção 2.2.1. Considere-se o elemento A de viga ilustrado na Figura 4.1 (a) sob a ação de um esforço transversal constante (V) e um momento fletor variável. No modelo de treliça plana é considerado que a armadura longitudinal se concentra na corda superior e inferior do elemento, com uma distância d_v entre as linhas de armadura. Este elemento encontra-se agora num novo estado de equilíbrio interno representado na Figura 4.1 (b). A força de compressão C representa a resultante das tensões de compressão σ_2^c (2 - direção principal de compressão, c - betão (concrete)) na escora diagonal de betão que fazem um ângulo α com a direção longitudinal da viga. A tensão de compressão σ_2^c atua numa secção transversal da viga na direção perpendicular à escora com largura t e altura $d_v \cos \alpha$, tal como ilustrado na face esquerda do elemento A. De forma a introduzir o estado biaxial de tensão devido à força de tração existente no tirante, foi adicionado na face esquerda do elemento A uma força de tração T perpendicular a C a ser absorvida pelo tirante diagonal de betão (que se considera perpendicular à escora diagonal de betão). A força T representa a resultante das tensões de tração σ_1^c (1 - direção principal de tração) no tirante diagonal de betão. A tensão de tração

σ_1^c atua numa secção transversal da viga na direção do tirante com largura t e altura $d_v \sin \alpha$. A força longitudinal \bar{N} é absorvida na totalidade pelas armaduras longitudinais.

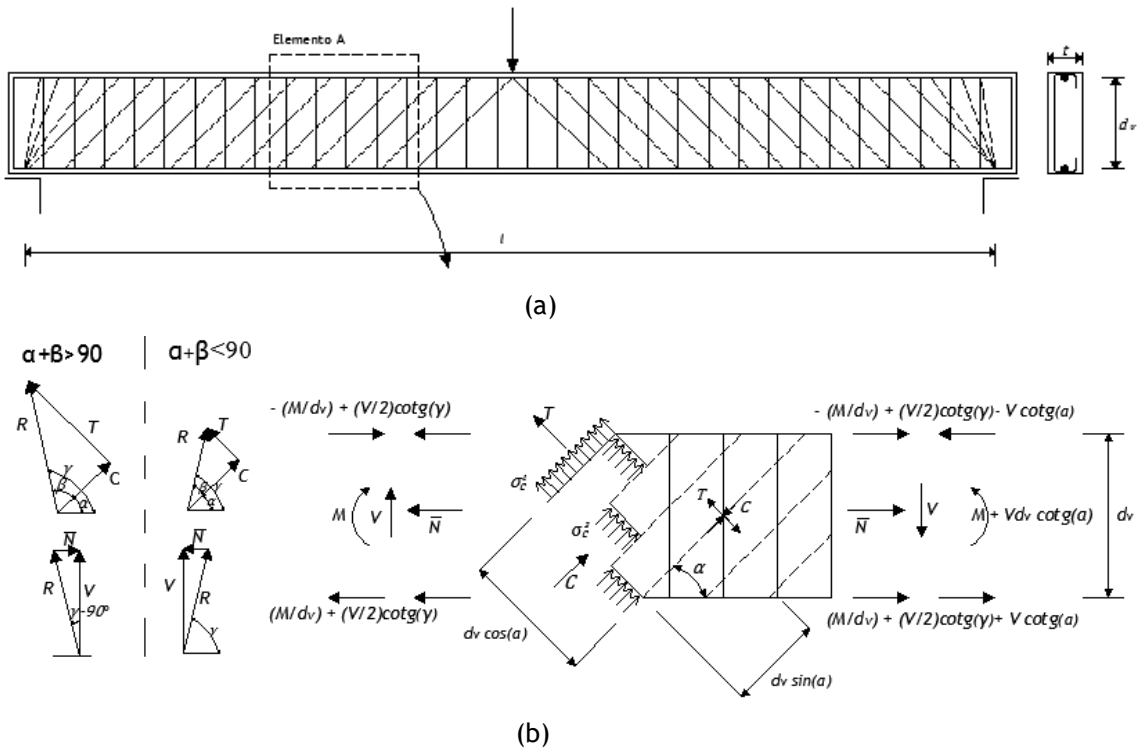


Figura 4.1 - Equilíbrio do elemento de viga sob o esforço transversal e momento fletor

A partir dos triângulos de forças superiores representados na Figura 4.1 (b), é possível obterem-se as seguintes relações:

$$R = \sqrt{C^2 + T^2} \quad (4.1)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{T}{C} \right) \quad (4.2)$$

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (4.3)$$

Nas equações anteriores γ representa o ângulo da força resultante R com a direção horizontal e β é o ângulo entre as forças C e T . Ainda a partir dos triângulos de forças inferiores representados na Figura 4.1 (b), a força de corte V é decomposta na força longitudinal \bar{N} e na força resultante R . Para este equilíbrio de forças o cálculo da força resultante é feito por:

$$R = \frac{V}{\sin \gamma} \quad (4.4)$$

Para o cálculo da força longitudinal \bar{N} , que se deve distribuir igualmente pelas armaduras longitudinais superior e inferior, são considerados os dois intervalos teóricos para o ângulo γ : $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$. Pela Figura 4.1 tem-se:

$$\bar{N} = V \cot \gamma, \quad \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.5)$$

$$\bar{N} = -V \cot \gamma, \quad \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.6)$$

Note-se que para se respeitar o equilíbrio vetorial $\dot{V} = \dot{R} + \dot{N}$, quando $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, então a força longitudinal nas armaduras deve ser de compressão. Contudo, nas simulações teóricas realizadas por Bernardo et al. [27] foi observado que a situação $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$ ocorre apenas para valores muito pequenos do momento torsor, pelo que os pontos $M_T - \theta$ correspondentes ao referido intervalo têm pouca expressão no traçado da curva $M_T - \theta$. A tensão de compressão na escora diagonal de betão σ_2^c associada à força de compressão C e a tensão no tirante de betão σ_1^c associada à força de tração T podem ser calculadas, respetivamente, através de:

$$\sigma_2^c = \frac{C}{td_v \cos \alpha} \quad (4.7)$$

$$\sigma_1^c = \frac{T}{td_v \sin \alpha} \quad (4.8)$$

Para determinar a força nas armaduras longitudinais deve considerar-se as duas componentes que nela intervêm. A armadura longitudinal deve resistir à componente $\bar{N}/2$ derivada da força de corte V e, em adição, a força proveniente do momento fletor M, que na face esquerda toma o valor de $\pm M/d_v$ e na face direita o valor $\pm(M + Vd_v \cot \alpha)/d_v$.

Para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$:

$$N_t^{\text{esq}} = -\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (4.9)$$

$$N_b^{\text{esq}} = \frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (4.10)$$

$$N_t^{\text{dir}} = -\frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) \quad (4.11)$$

$$N_b^{\text{dir}} = \frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) \quad (4.12)$$

Para a situação $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, as equações anteriores (Equações (4.9) a (4.12)) permanecem válidas mas o sinal da força longitudinal deve mudar, tal como já referido anteriormente, e considerar-se $\bar{N}/2$ como sendo uma força de compressão.

A força na armadura transversal é obtida efetuando-se um corte horizontal no elemento A a uma distância arbitrária y, a contar desde a face inferior do mesmo elemento, tal como se ilustra na Figura 4.2.

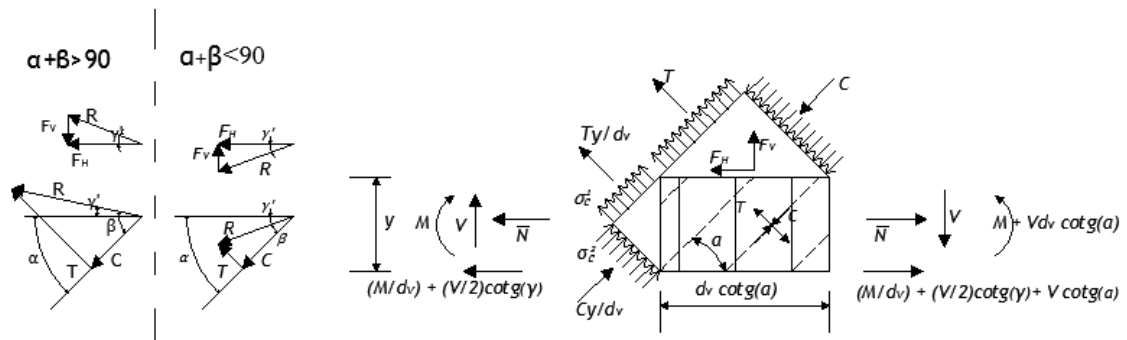


Figura 4.2 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob o esforço transversal e momento fletor

Para que haja equilíbrio entre as forças horizontais aplicadas ao elemento A, tem que existir uma força F_H em qualquer superfície de corte horizontal, que garanta esse equilíbrio. De acordo com a Figura 4.2 essa força deve ser equilibrada pelas forças nas armaduras inferiores:

$$F_H + \left(\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} \right) - \left(\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma + \frac{\bar{N}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow F_H = V \cot \alpha \quad (4.13)$$

A força resistida pela armadura transversal no elemento A, de comprimento $d_v \cot \alpha$, expressa-se através:

$$F_v = n_v d_v \cot \alpha \quad (4.14)$$

onde n_v é a força na armadura transversal por unidade de comprimento e pode ser calculada através de:

$$n_v = \frac{A_{st} f_{st}}{s} \quad (4.15)$$

Na equação anterior A_{st} e f_{st} representam a área de um varão da armadura transversal e a respetiva tensão instalada nesse varão, e s é o espaçamento na direção longitudinal da armadura transversal. A partir das relações de forças representadas nos triângulos inferiores da Figura 4.2, a resultante das forças R tem uma inclinação γ' com a horizontal e os intervalos de valores teóricos para este ângulo podem ser considerados os seguintes:

$$\gamma' = \alpha - \beta = \gamma - 2\beta, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.16)$$

$$\gamma' = \beta - \alpha = 2\beta - \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.17)$$

De forma a calcular a força distribuída na armadura transversal, primeiro é necessário recorrer ao triângulo de forças superior na Figura 4.2 e ter em conta as Equações (4.13) e (4.14):

$$\cot \gamma' = \frac{F_H}{F_v} = \frac{V \cot \alpha}{n_v d_v \cot \alpha} \Leftrightarrow n_v d_v = V \tan \gamma' \quad (4.18)$$

Substituindo n_v pela Equação (4.15) fica:

$$\frac{A_{st} f_{st}}{s} d_v = V \tan \gamma' \Leftrightarrow A_{st} f_{st} = \frac{V \tan \gamma'}{d_v} \quad (4.19)$$

Como referido anteriormente para a armadura longitudinal, para se manter o somatório vetorial das forças $\vec{V} = \vec{R} + \vec{F}_v$, quando $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, então a força longitudinal nas armaduras transversais F_v deve ser de compressão.

4.2.2. Viga com secção vazada sujeita à torção pura

Para a formulação do GSVATM Bernardo et al. [27] tomaram como base a viga com secção vazada e retangular (com armadura longitudinal simétrica nos cantos), com o mecanismo de resistência à torção idealizado por Hsu e Mo [66] [69] complementado de acordo com apresentado anteriormente, ou seja, com um tirante de betão perpendicular à escora de betão (Figura 4.3). O VATM dita que, em cada secção interna, existe um fluxo de corte q resultante de duas forças, a força nas armaduras longitudinais e a força na escora diagonal de betão com uma inclinação α com a horizontal. Contudo no GSVATM, existe uma nova força interna: a força no tirante de betão, perpendicular à escora diagonal de betão. Neste caso, o fluxo de corte q será agora resultante da força nas armaduras longitudinais e da força resultante R , com uma inclinação γ com a horizontal, entre a força na escora diagonal de betão e a força no tirante de betão perpendicular à escora.

Através da teoria do tubo fino de Bredt [34], a viga da Figura 4.3, quando submetida a um momento torsor M_T , desenvolve um fluxo de corte constante e circulatório nas paredes da viga, sendo esse fluxo de corte q calculado através de:

$$q = \frac{M_T}{2A_0} \quad (4.20)$$

onde A_0 é a área limitada pela linha média do fluxo de corte (Figura 4.3).

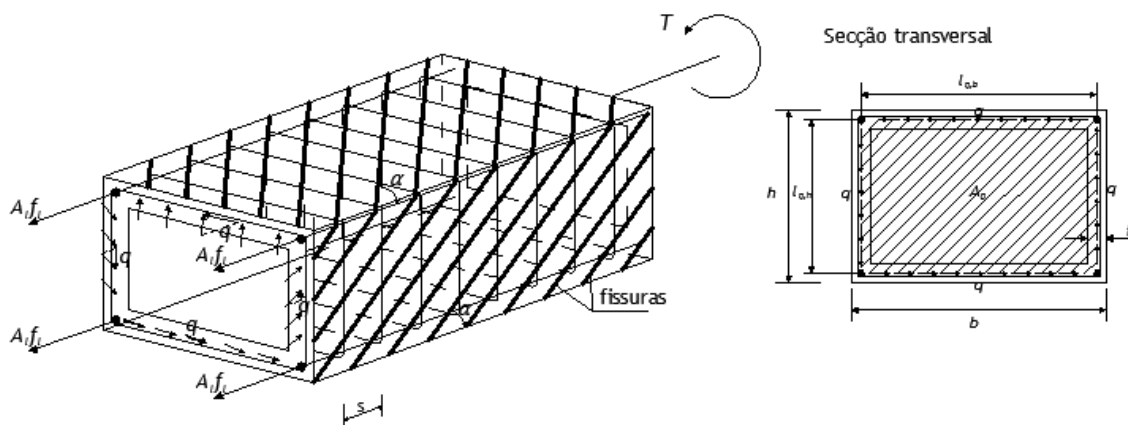


Figura 4.3 - Equilíbrio de uma viga de secção vazada sujeita à torção pura

Considerando-se o fluxo de corte q ao longo de uma parede reta da viga com uma altura l_q , a resultante desse fluxo é uma força de corte V atuando nessa mesma parede, sendo obtida por:

$$V = ql_q \quad (4.21)$$

Substituindo-se as Equações (4.5) e (4.6) na equação anterior, e considerando a Equação (4.20) a força na armadura longitudinal, \bar{N} , pode ser calculada através de:

$$\bar{N} = \frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.22)$$

$$\bar{N} = -\frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.23)$$

Atendendo que p_0 é definido como o perímetro da linha média do fluxo de corte ($\sum l_q$) e que a força total nas barras longitudinais pode ser calculada como $\Delta N = A_{st} f_{st}$, onde A_{st} e f_{st} representam a área total e a tensão na armadura longitudinal, a partir das equações anteriores a força total na armadura longitudinal pode ser calculada através de:

$$A_{st} f_{st} = \frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.24)$$

$$A_{st} f_{st} = -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.25)$$

A força na armadura transversal pode ser obtida a partir da Equação (4.19), considerando $V = qd_v$ e a Equação (4.20):

$$A_{st} f_{st} = \frac{M_T s}{2A_0} \tan \gamma' \quad (4.26)$$

Considerando novamente $V = qd_v$ e substituindo q pela Equação (4.20), a força de corte V obtém-se em função do momento torsor:

$$V = \frac{M_T d_v}{2A_0} \quad (4.27)$$

Para se calcular a tensão de compressão na escora de betão e de tração no tirante é necessário uma equação que relacione a resultante R com as forças de compressão C e de tração T . A partir da substituição da Equação (4.27) na Equação (4.4) tem-se:

$$R = \frac{M_T d_v}{2A_0 \sin \gamma} \quad (4.28)$$

Fazendo-se a decomposição da força resultante R para o cálculo da força de compressão na escora diagonal e de tração no tirante de betão, através dos triângulos de forças superior da Figura 4.1 (b), a forças C e T podem ser calculadas através de:

$$C = R \cos \beta = \frac{M_T d_v \cos \beta}{2A_0 \sin \gamma} \quad (4.29)$$

$$T = R \sin \beta = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2A_0 \sin \gamma} \quad (4.30)$$

A tensão de compressão σ_2^c na escora de betão e a tensão de tração σ_1^c no tirante podem ser obtidos substituindo a Equação (4.29) na Equação (4.7) e substituindo a Equação (4.30) na Equação (4.8), respetivamente:

$$\sigma_2^c = \frac{M_T}{2A_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (4.31)$$

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2A_0 t_t} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (4.32)$$

Onde t_c e t_t são a espessura efetiva da escora e tirante de betão, respetivamente.

4.2.3. Flexão da escora e do tirante de betão

Hsu e Mo [66] [69] observaram que numa viga submetida à torção, a escora de betão fica sujeita a um estado de flexão em adição ao estado de compressão. Portanto, deve analisar-se esta sobreposição de tensões e extensões. A Figura 4.4 ilustra a deformação da escora devido ao momento fletor imposto.

Bernardo et al. [27] em 2015, na formulação do GSVATM, alargaram este efeito ao tirante de betão perpendicular à escora de betão. Na Figura 4.4 encontra-se ilustrada, para além da deformação da escora AO (com uma inclinação α), também a deformação do tirante BC (perpendicular à escora) da parede superior de uma viga com secção vazada sujeita à torção. A parede apresenta um comprimento de $l_q \cot \alpha$ e encontra-se representada pela superfície plana ABCO, ao nível da linha média do fluxo de corte q .

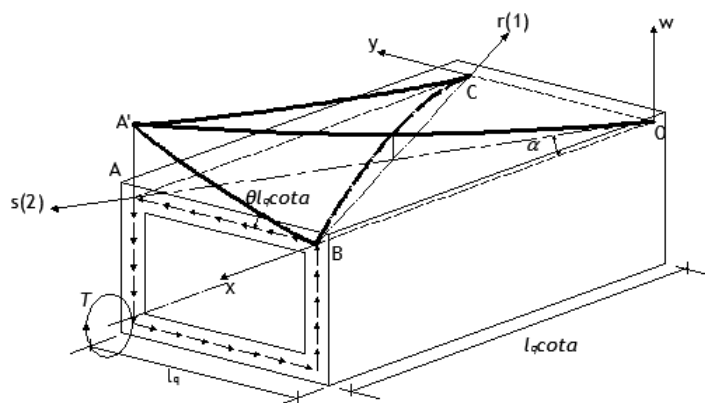


Figura 4.4 - Flexão da escora e do tirante de betão

Quando a viga está sujeita a um ângulo de torção θ (por unidade de comprimento), a superfície plana OABC transforma-se numa superfície parabolóide hiperbólica OA'BC com inclinação inicial $\theta l_0 \cot \alpha$ ao longo de A'B. Tal superfície corresponde a uma deformada w que pode ser expressa através de:

$$w = \theta xy \quad (4.33)$$

A escora de betão fica sujeita a uma curvatura ψ que pode ser relacionada com o ângulo de torção θ . Para tal, é necessário derivar duas vezes a Equação (4.33) em relação ao eixo s (eixo segundo a linha de escora, eixo coincidente com a direção principal de compressão e designado também por eixo 2). Para realizar essa derivação utilizou-se a regra de derivação em cadeia em relação às coordenadas, tendo em vista a dependência de w em relação a estas mesmas.

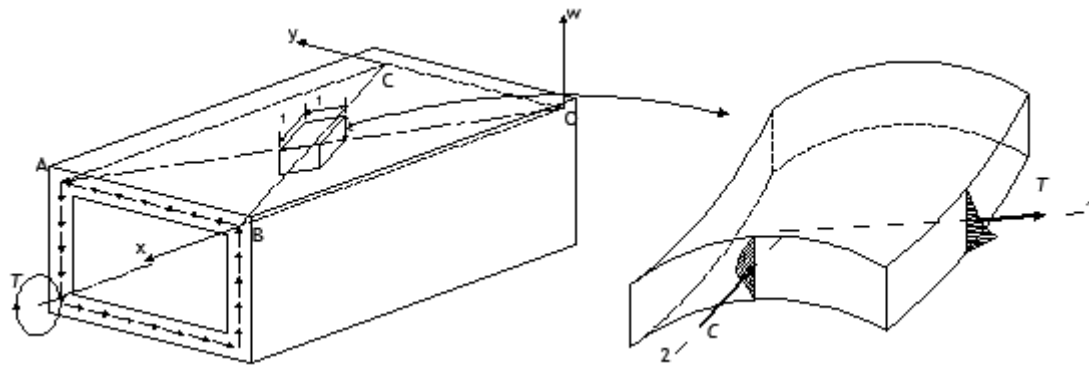
$$\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \theta \sin \alpha \cos \alpha + \theta \cos \alpha \sin \alpha = \theta \sin(2\alpha) \quad (4.34)$$

Tal como realizado para a escora de betão, a curvatura do tirante de betão φ é obtida derivando a Equação (4.33) mas agora em relação ao eixo coordenado r (eixo segundo a linha do tirante, eixo coincidente com a direção principal de tração e designado também por eixo 1):

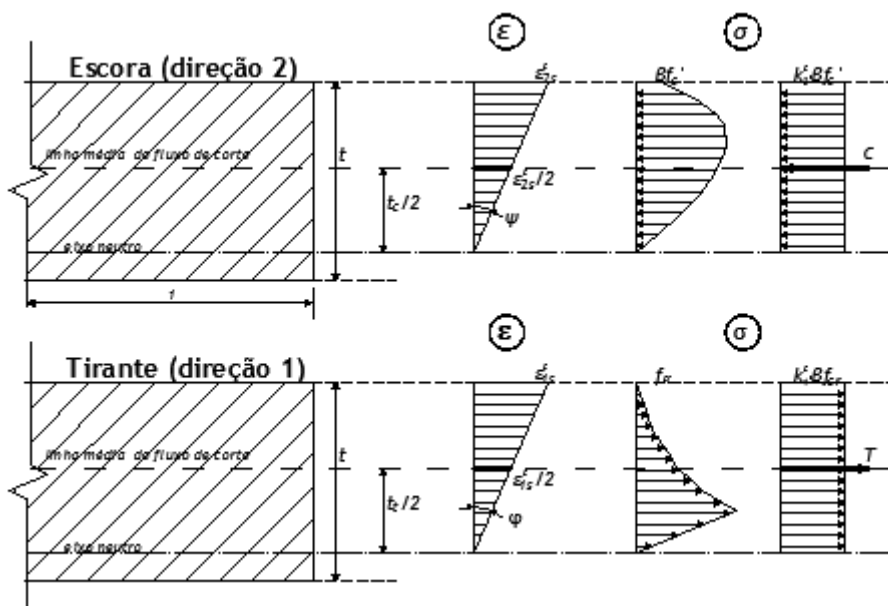
$$\varphi = \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{dr} = \theta \cos \alpha (-\sin \alpha) + (-\theta \sin \alpha) \cos \alpha = -\theta \sin(2\alpha) \quad (4.35)$$

Comparando a Equação (4.34) e (4.35), constatou-se que a curvatura do tirante de betão φ é simétrica da curvatura da escora de betão ψ , o que é lógico uma vez que a superfície OA'BC é uma superfície parabolóide hiperbólica.

Considere-se agora um prisma quadrado com lados unitários na base e altura t (Figura 4.5), orientado segundo os eixos principais de tensão. Tal prisma unitário encontra-se num estado biaxial de tensão (compressão segundo a linha da escora, eixo 2, e tração segundo a linha do tirante, eixo 1). Considere-se agora a secção da escora de betão com largura unitária e com altura de secção t , tal como representada na Figura 4.5 (a), a qual é analisada quanto ao estado de tensão e de extensão.



(a)



(b)

Figura 4.5 - Estado de tensão e de extensão na escora e no tirante de betão

Devido ao efeito de flexão da escora de betão, existe uma pequena área da parede da viga que se encontra à tração (junto à face inferior do limite interior da parede). Nessas condições e para elevados níveis de carregamento, essa área da escora pode ser desprezada. Para baixos níveis de carga, é esperado que a área de tração seja pequena ou inexistente, pelo que também é desprezada. Considera-se para efeito de cálculo apenas a área que se encontra efetivamente apenas à compressão ao longo de uma espessura t_c . A partir da Figura 4.5 (b) e assumindo-se que a distribuição das extensões na escora é linear, a extensão máxima de compressão à superfície da escora pode ser calculada através de:

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c \quad (4.36)$$

A extensão ao nível da linha média do fluxo de corte é dada por:

$$\varepsilon_2^c = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \quad (4.37)$$

Assim, encontram-se as equações de compatibilidade para a flexão da escora de betão: Equações (4.34) e (4.36).

De seguida apresentam-se as equações de compatibilidade para a flexão do tirante de betão. À semelhança do que acontece na escora de betão, no tirante de betão também existe uma pequena área junto à face inferior do limite interior da parede que se pode encontrar à compressão (Figura 4.5 (b)). Nessas condições e para elevados níveis de carregamento, a eventual participação desta parte do tirante à compressão pode ser desprezada. Desta forma, para efeitos de cálculo contabiliza-se apenas a área que se encontra à tração como sendo efetiva, ao longo de uma espessura t_t . Assumindo-se que a distribuição das extensões ao longo da espessura efetiva tem um carácter linear, a extensão máxima de tração à superfície do tirante ε_{1s}^c é dada por:

$$\varepsilon_{1s}^c = \varphi t_t \quad (4.38)$$

A extensão ao nível da linha média do fluxo de corte, ε_1^c , pode ser relacionada com a extensão máxima de tração à superfície do tirante através de:

$$\varepsilon_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2} \quad (4.39)$$

Assim, as equações de compatibilidade para a flexão do tirante são as Equações (4.35) e (4.38).

4.2.4. Espessura efetiva da parede

A espessura efetiva da escora de betão t_c e do tirante de betão t_t devem ser calculadas a partir das condições de equilíbrio e das propriedades do diagrama de tensões na escora e tirante. Seria expectável que t_c e t_t tomassem valores diferentes. No entanto, para a formulação do GSVATM, Bernardo et al. [27] assumiram a hipótese adotada por Jeng e Hsu em 2009 [74], para a formulação do SMMT, em que consideraram que t_t é igual a t_c , sendo t_c a única espessura da parede a ser calculada a partir das equações de equilíbrio e do diagrama de tensões. Esta simplificação permitiu reduzir o número de variáveis, bem como incongruências relativas a diferentes posições da linha média do fluxo de corte para a escora e o tirante em virtude das diferentes espessuras (Figura 4.5 (b)). Jeng e Hsu [74] mostraram que esta simplificação era aceitável. Desta forma, t_t deve ser substituído por t_c em toda a formulação anterior do GSVATM.

A profundidade do diagrama de tensões t_c pode ser obtida a partir da Equação (4.31) e tendo em conta que $\sigma_2^c = k_2^c \beta f_c^c$ (Secção 2.2.4), então:

$$t_c = \frac{M_T}{2A_0 k_2^c \beta f_c^c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (4.40)$$

Para uma secção retangular deve considerar-se o perímetro da linha média do fluxo de corte p_0 e a área limitada pela linha média do fluxo de corte, como:

$$p_0 = 2(x - t_c) + 2(y - t_c) = p_c - 4t_c \quad (4.41)$$

$$A_0 = (x - t_c)(y - t_c) = A_c - p_c(t_c/2) \quad (4.42)$$

Nas equações anteriores x e y são as dimensões exteriores, menor e maior respetivamente, da secção transversal, p_c é o perímetro exterior e A_c é a área exterior da secção transversal. Desta forma, e a partir das Equações (4.7) e (4.8), a força de compressão C e a força de tração T podem ser calculadas através de:

$$C = \sigma_2^c t_c d_v \cos \alpha \quad (4.43)$$

$$T = \sigma_1^c t_c d_v \sin \alpha \quad (4.44)$$

4.2.5. Relações constitutivas σ - ε para os materiais

A caracterização da escora de betão à compressão, do tirante de betão tracionado e das armaduras ordinárias à tração é necessário, à semelhança do realizado para o VATM, adotar relações σ - ε para o betão à compressão que contabilizem o *softening effect* e das relações σ - ε para as armaduras tracionadas. No caso do GSVATM tornou-se necessário adotar relação σ - ε para o betão à tração no tirante de betão por forma a contabilizar a influência do betão à tração.

Para o GSVATM continua a ser válida a relação constitutiva σ - ε para o betão comprimido na escora de betão proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [17] [19] bem como os coeficientes de redução que têm em conta o *softening effect* propostos por Zhang e Hsu em 1998 [127] apresentados na Tabela 2.1 na Secção 2.2.4 do presente trabalho.

Quanto à relação σ - ε para o tirante de betão à tração, em 2013 Nobre [94] analisou várias relações σ - ε propostas por diversos autores e, tendo por base o GSVATM, comparou o momento torsor teórico e a respetiva rotação teórica com os correspondentes valores experimentais de vigas de betão armado sujeitas à torção. Desta forma, de entre as relações constitutivas analisadas, a autora verificou que a relação σ - ε proposta por Belarbi e Hsu [17] e alterada por Jeng e Hsu [74] para o caso da torção é a relação que permite obter melhores resultados.

Para o tirante de betão, as propriedades do diagrama de tensões encontram-se apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Relação constitutiva do betão à tração, Belarbi e Hsu 1994 [17] e Jeng e Hsu 2009 [74]

$\sigma_1^c = E_c \varepsilon_1^c, \quad \varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr} \quad (4.45)$	
$\sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1^c} \right)^{0,4}, \quad \varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr} \quad (4.46)$	
$\varepsilon_{cr} = 0,00008K \quad (4.47)$	
$\begin{cases} K = 1,45 \text{ (secções cheias)} \\ K = 1,24 \text{ (secções vazadas)} \end{cases} \quad (4.48)$	
$E_c = 3875K \sqrt{f_c'} \text{ (MPa)} \quad (4.49)$	

A tensão de tração no tirante de betão σ_1^c é definida considerando-se um diagrama médio do diagrama não uniforme:

$$\sigma_1^c = k_1^c f_{cr} \quad (4.50)$$

Onde f_{cr} corresponde à tensão de fissuração do betão e k_1^c é a tensão média que é obtida através da integração das Equações (4.45) e (4.46):

$$k_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2\varepsilon_{cr}}, \quad \varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr} \quad (4.51)$$

$$k_1^c = \frac{\varepsilon_{cr}}{2\varepsilon_{1s}^c} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{0,6\varepsilon_{1s}^c} \left[(\varepsilon_{1s}^c)^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,6} \right], \quad \varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr} \quad (4.52)$$

A relação constitutiva $\sigma - \varepsilon$ original para o betão ao corte [17] foi modificada por Jeng e Hsu [74] na formulação do SMMT de forma a incorporar na lei constitutiva o gradiente de extensões da escora de betão na zona do fluxo de corte. A partir de resultados experimentais de vigas de betão armado e de secção cheia, a rigidez da fase pré-fissuração e a extensão correspondente ao pico de tensão foi aumentado cerca de 45%, de forma a calibrar o modelo na fase da pré-fissuração [27]. Esta modificação só pode ser considerada válida para vigas de betão armado e de secção cheia [74] [28]. Bernardo et al. em 2013 [28], após compararem a proposta de Jeng e Hsu, para vigas de secção cheia, com resultados experimentais, propuseram que, para vigas de secção vazada, incremento correspondesse a 25% da rigidez da fase pré-fissuração e da extensão correspondente ao pico de tensão. Bernardo et al. em 2013 [28] após compararem a proposta de Jeng e Hsu, para vigas de secção cheia, com resultados experimentais, propuseram que o incremento da tensão para secções vazadas fosse 24% em substituição dos 45%.

Para caracterizar as armaduras à tração continua a ser válida a relação constitutiva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Belarbi e Hsu [17] apresentada na Tabela 2.2 da Secção 2.2.4.

4.2.6. Cálculo da curva $M_T - \theta$

Nesta subsecção é apresentado e descrito o procedimento de cálculo do GSVATM com o objetivo de calcular a previsão teórica do comportamento global de vigas de betão armado (com secção cheia ou vazada) submetidas à torção pura. A caracterização do comportamento das vigas sujeitas à torção é realizada mediante o cálculo e traçado das curvas momento torsor - rotação: $M_T - \theta$. Para o cálculo da curva $M_T - \theta$ tendo por base o GSVATM é necessário recorrer a algoritmos de cálculo implementados computacionalmente em folhas de cálculo ou através de linguagem de programação. Tal necessidade decorre do carácter não linear, devido à adoção de leis constitutivas não lineares para os materiais, e também iterativo, devido ao desconhecimento inicial de algumas variáveis interdependentes, associado ao procedimento de cálculo.

O GSVATM requer três equações de equilíbrio, para a construção da curva teórica $M_T - \theta$, para o cálculo do momento torsor M_T , da espessura efetiva da escora de betão t_c e do ângulo α da escora de betão (conhecendo a inclinação da escora de betão, conhece-se também a inclinação do tirante de betão, uma vez que foi assumido que estes dois componentes são perpendiculares).

O momento torsor pode ser relacionado com a força resultante R através da Equação (4.28):

$$M_T = \frac{2A_0 R \sin \gamma}{d_v} \quad (4.53)$$

A Equação (4.53) é válida para as duas situações $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, o cálculo da espessura efetiva t_c da escora de betão é realizada através de uma relação entre esta e a força instalada nas armaduras longitudinais. Substituindo a Equação (4.31) na Equação (4.24) fica:

$$t_c = \frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.54)$$

Para $\alpha + \beta > 90^\circ$ e utilizando o mesmo raciocínio, substituindo a Equação (4.31) na Equação (4.25) vem:

$$t_c = -\frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.55)$$

Substituindo novamente a Equação (4.31) na Equação (4.24) e (4.25), para as situações $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$ respetivamente, e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtêm-se as seguintes equações que relacionam $\cos \alpha$ com a força instalada na armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl}}{t_c p_0 \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.56)$$

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl} f_{sl}}{t_c p_0 \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.57)$$

De forma semelhante ao realizado para a armadura longitudinal, o ângulo α pode ser relacionado com a força instalada na armadura transversal:

$$\cos\alpha = \frac{A_{st} f_{st} \cos\beta}{t_c \sigma_s^c} \frac{1}{\sin\gamma \tan\gamma'} \quad (4.58)$$

Igualando a Equação (4.58) e a Equação (4.56) para a situação $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e substituindo γ e γ' pelas Equações (4.3) e (4.16), respetivamente:

$$\frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \cos\gamma} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin\gamma \tan\gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st} f_{st} p_0}{A_{sl} f_{sl} s} = F, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (4.59)$$

Igualando a Equação (4.58) e a Equação (4.57) para a situação $\alpha + \beta > 90^\circ$ e substituindo γ e γ' pela Equações (4.3) e (4.17), respetivamente, obtém-se:

$$-\frac{A_{sl} f_{sl}}{p_0 \cos\gamma} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin\gamma \tan\gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st} f_{st} p_0}{A_{sl} f_{sl} s} = -F, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4.60)$$

As Equações (4.59) e (4.60) foram originalmente obtidas com o auxílio do *software* MATLAB (a solução global para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$ são iguais). Para o cálculo do valor do ângulo α basta substituir o parâmetro F, sendo que no domínio do problema em estudo apenas interessa a solução positiva resultante da Equação (4.59):

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{F^2 (\tan\beta)^2 + F (\tan\beta)^4 + F + (\tan\beta)^2}}{F (\tan\beta)^2 + 1} \right) \quad (4.61)$$

Deste modo obtém-se as três equações de equilíbrio do GSVATM: Equações (4.53), (4.54) (ou (4.55)) e (4.61).

O GSVATM requer ainda três equações de compatibilidade para determinar as extensões na armadura longitudinal ε_{sl} e transversal ε_{st} , bem como o ângulo de torção θ por unidade de comprimento. As expressões para o cálculo das extensões na armadura longitudinal e transversal são derivadas tendo por base relações trigonométricas obtidas através do círculo de Mohr, ilustrado na Figura 4.6 para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte, como apresentado por Vecchio e Collins [117].

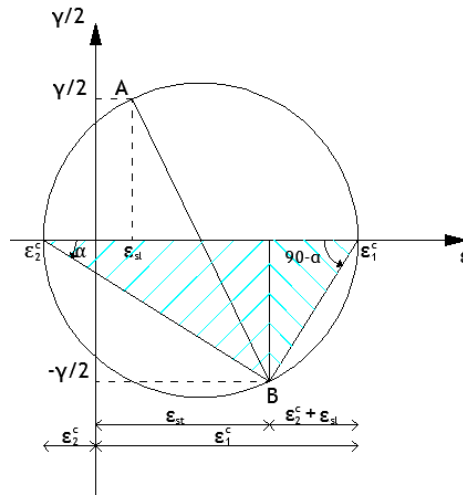


Figura 4.6 - Círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte

A partir da Figura 4.6 é possível derivar as seguintes equações:

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\gamma/2}{\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} = (\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c) \cot \alpha \quad (4.62)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\epsilon_{st} + \epsilon_2^c) \tan \alpha \quad (4.63)$$

Para além das equações referidas anteriormente, que relacionam entre si as extensões nos materiais e o ângulo da escora, é também necessário uma relação que permita calcular o ângulo de rotação. Tal relação é expressa pela Equação (4.64) que advém da Teoria do Tubo Fino de Bredt [12] e das Equações (4.62) e (4.63), onde $\gamma = \tau/G$ é a distorção (τ é a tensão tangencial e G é o módulo de distorção) e $p_0 = \int ds$ é o perímetro da linha média do fluxo de corte.

$$\theta = \frac{p_0}{A_0} (\epsilon_{st} + \epsilon_2^c) \tan \alpha \quad (4.64)$$

Substituindo a Equação (4.64) na expressão da curvatura da escora de betão (Equação (4.34)), obtém-se:

$$\psi = \frac{p_0}{A_0} (\epsilon_{st} + \epsilon_2^c) \tan \alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha) \quad (4.65)$$

A extensão máxima na superfície da escora de betão ϵ_{2s}^c pode ser obtida substituindo-se na Equação (4.36) a Equação (4.65):

$$\epsilon_{2s}^c = \frac{2p_0 t_c}{A_0} (\epsilon_{st} + \epsilon_2^c) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.66)$$

Substituindo t_c pela Equação (4.40) e considerando-se a Equação (4.37), e resolvendo em ordem à extensão na armadura transversal ϵ_{st} , tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2s}^c &= \frac{2p_0}{A_0} \frac{M_T}{2A_0\sigma_2^c} \frac{\cos\beta}{\sin\gamma \cos\alpha} \left(\varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \right) \tan\alpha \sin\alpha \cos\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \varepsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin\gamma}{p_0 M_T \cos\beta \tan\alpha \sin\alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c\end{aligned}\quad (4.67)$$

De forma semelhante, obtém-se a extensão na armadura longitudinal:

$$\varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin\gamma}{p_0 M_T \cos\beta \cot\alpha \sin\alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \quad (4.68)$$

Finalmente, eliminando ψ a partir das Equações (4.34) e (4.36) e reescrevendo as equações, o ângulo de torção θ é dado por:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2t_c \sin\alpha \cos\alpha} \quad (4.69)$$

Assim, as equações de compatibilidade para o GSVATM são as Equações (4.67), (4.68) e (4.69).

Pela relação de extensões obtidas do Circulo de Mohr representado na Figura 4.6 é ainda possível obter-se uma relação para o cálculo da extensão máxima de tração no tirante, ε_{1s}^c , a partir das extensões na armadura longitudinal, transversal e na escora de betão, calculadas anteriormente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^c &= \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c = \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \Rightarrow \varepsilon_{1s}^c = 2\varepsilon_1^c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_{1s}^c = 2\varepsilon_{sl} + 2\varepsilon_{st} + \varepsilon_{2s}^c\end{aligned}\quad (4.70)$$

Refere-se ainda que as Equações (4.62) a (4.70) são válidas para as duas situações $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Como no início do procedimento de cálculo algumas variáveis são inicialmente desconhecidas e interdependentes, torna-se necessário usar um algoritmo de cálculo iterativo para calcular a curva $M_T - \theta$. O fluxograma do algoritmo de cálculo está apresentado na Figura 4.7. A ordem para verificar as variáveis iniciais (t_c , α , ε_{1s}^c e $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$) foi originalmente otimizada para permitir minimizar o tempo de cálculo [27]. O modelo teórico assume como critério de paragem as extensões convencionais de rotura para o betão comprimido na escora e a extensão das armaduras tracionadas definidas no EC2 [40] (por exemplo, $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ para o betão de resistência normal comprimido na escora e $\varepsilon_{su} = 0,01$ para as armaduras tracionadas). Este algoritmo, para vigas de secção vazada, incorpora ainda uma verificação adicional, que consiste na limitação da espessura da escora de betão à espessura de parede real. Em complemento ao fluxograma da Figura 4.7, segue-se a descrição detalhada do procedimento de cálculo do GSVATM.

- 1- Selecionar ε_{2s}^c . Assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e β uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$.
- 2- Calcular k_2^c pela Equação (2.21) se $\varepsilon_{2s}^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{2s}^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$, calcular k_1^c pela Equação (4.51) se $\varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr}$ ou pela Equação (4.52) se $\varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr}$, determinar a tensão na escora σ_2^c a partir da Equação (2.20) e no tirante pela Equação (4.50).
- 3- Calcular a força de compressão na escora C pela Equação (4.43), a força de tração no tirante T através da Equação (4.44), a força resultante R pela Equação (4.1) e os ângulos β e γ pelas Equações (4.2) e (4.3), respetivamente.
- 4- Determinar o momento torsor M_T pela Equação (4.53), a extensão na armadura transversal pela Equação (4.67) e na armadura longitudinal Equação (4.68), bem como a tensão nas armaduras através da Equação (2.23) da Tabela 2.2.
- 5- Verificar t_c pela Equação (4.54) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou pela Equação (4.55) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
- 6- Verificar α através da Equação (4.61).
- 7- Verificar ε_{1s}^c pela Equação (4.70).
- 8- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva apresentada na Tabela 2.1.
- 9- Se:
 - 9.1 - os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 1) a 8) até que estes valores convirjam.
 - 9.2- os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β forem próximos dos valores assumidos então deve prosseguir-se para o Passo 10).
- 10- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (4.69). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $M_T - \theta$ de coordenadas $(\theta; M_T)$;
- 11- Selecionar outros valores de ε_{2s}^c e repetir os Passos 2) a 10) para cada valor de ε_{2s}^c por forma a obter vários pontos $(\theta; M_T)$ que permitam desenhar a previsão da curva $M_T - \theta$.

De uma forma simplificada e resumida, pode apresentar-se o processo iterativo geral na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo se encontra ilustrado na Figura 4.7.

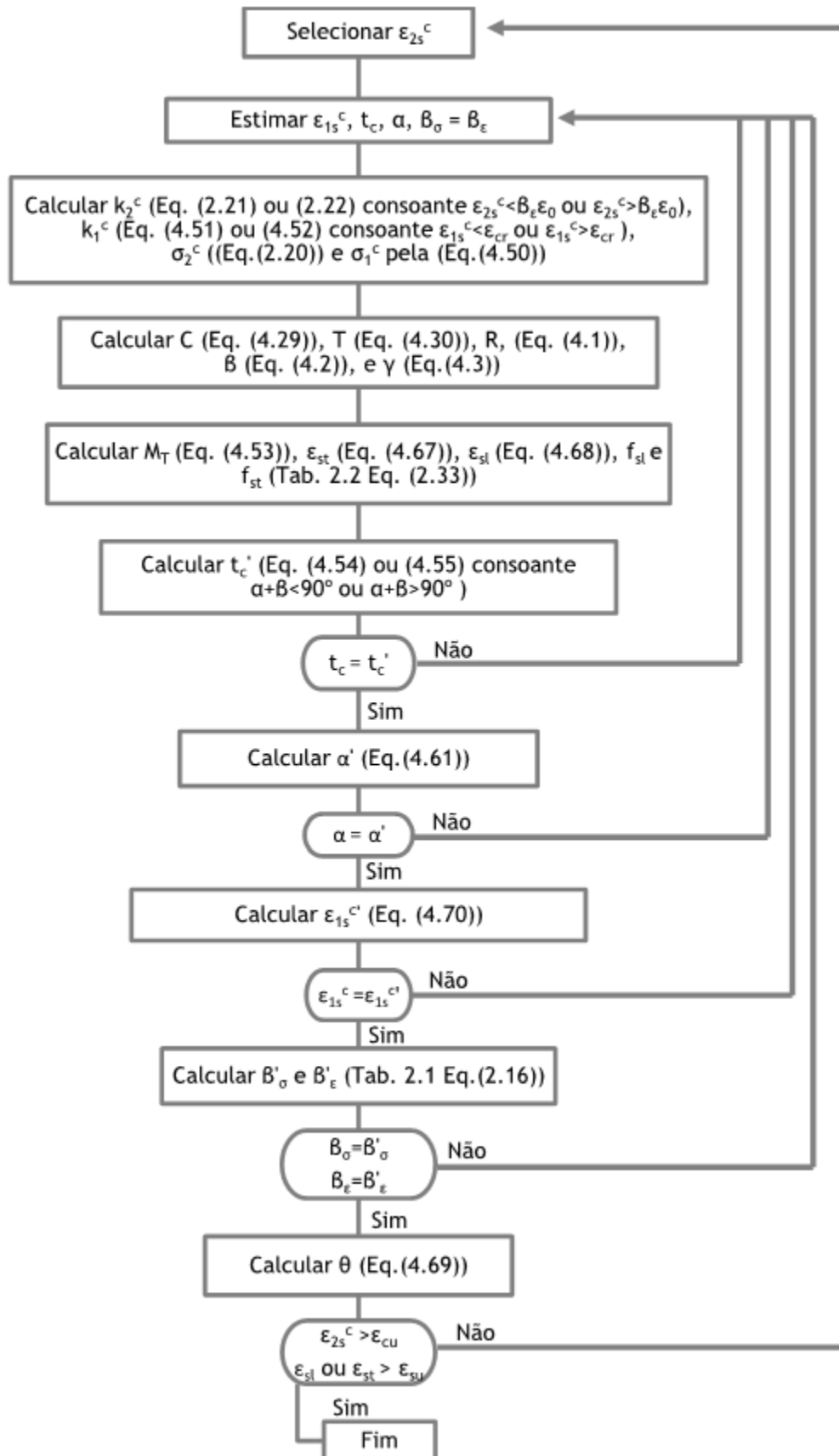


Figura 4.7 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM para o cálculo de $M_T - \theta$

4.3. Considerações finais

No presente capítulo foi detalhadamente apresentada a formulação do GSVATM de Bernardo et al. [27], que permitiu a implementação de um tirante de betão, perpendicular à escora, com o objetivo de incorporar no modelo de treliça espacial o estado biaxial de tensão que realmente existe nas paredes das vigas sujeitas à torção. Este modelo é capaz de prever toda a curva $M_T - \theta$ de vigas de betão armado sujeitas à torção pura. O GSVATM constitui um modelo global do qual o VATM constitui um caso particular. De facto, em toda a formulação se for considerado que é nula a força no tirante (T), obtém-se a formulação original do VATM. Tal prova a consistência do GSVATM.

O GSVATM incorpora as mesmas relações constitutivas para o betão comprimido na escora (incluindo o *softening effect*) e para as armaduras ordinárias tracionadas (incluindo o *stiffening effect*) que o VATM apresentado na Secção 2.2.4. No que diz respeito à caracterização do comportamento do betão à tração, o GSVATM incorpora uma nova relação constitutiva média.

Tendo por base a formulação apresentada ao longo do presente capítulo, Bernardo et al. [27] verificaram que o GSVATM fornece uma boa previsão do comportamento global, desde a fase inicial de carregamento até ao momento de rotura, de vigas de betão armado sujeitas à torção quer para vigas de secção cheia como vazada.

Capítulo 5 - Extensão do GSVATM para vigas com estado axial de tensão uniforme

5.1. Introdução

No presente capítulo descreve-se detalhadamente a generalização do GSVATM para incorporar no modelo um estado axial de tensão uniforme decorrente de diversas situações passíveis de ocorrer em projeto em problemas que envolvam torção primária, nomeadamente: a existência de pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente e a situação que já foi referida na Secção 2.3.3, a existência de um confinamento axial. Em ambas situações, o estado de compressão uniforme é variável ao longo dos estados comportamentais da viga. Para a generalização do GSVATM, toma-se por base a linha de formulação do modelo apresentado por Bernardo et al. em 2015 [27] e apresentado no Capítulo 4 deste trabalho. Note-se que as alterações realizadas ao GSVATM dão origem a um modelo mais global pelo que, nesse modelo, a não consideração de qualquer estado axial de tensão deve implicar que o modelo reformulado coincida com o GSVATM original, o qual deve constituir um caso particular do modelo mais global aqui proposto.

No presente capítulo, começa-se por apresentar uma formulação do GSVATM para a incorporação de um esforço axial externo centrado de compressão ou tração (constante), tendo por base as alterações que Hsu em 1984 [66] realizou no VATM original para incorporar a interação de esforços torção + força axial longitudinal. No presente estudo, é também considerada a referida interação de esforços e a força axial centrada deve ser encarada como uma força exterior a ser equilibrada pelos diversos componentes da treliça espacial incluídas no GSVATM. Note-se que a situação de tensão axial externa constante não corresponde a uma situação corrente na prática pelo que este modelo foi desenvolvido com o intuito de se realizar apenas uma análise preliminar de forma a confirmar a influência de um esforço axial baixo a moderado no comportamento à torção de uma viga de betão armado.

De seguida, o GSVATM é modificado ao caso de vigas de betão armado em situação de confinamento axial sujeitas à torção pura. Conforme já foi explicado anteriormente na Secção 1.2.1, é comum uma viga encontrar-se restringida axialmente pelos elementos estruturais adjacentes aos quais se encontra ligada. Quando a viga é submetida à torção fica sujeita a um estado de compressão axial adicional em virtude da restrição ao seu alongamento axial, principalmente após a viga fissurar. Nesta reformulação do GSVATM é considerada, à semelhança do esforço axial externo, uma situação de interação de esforços torção + esforço axial longitudinal. No entanto, para além da existência da força de compressão variável que surge quando a viga tende a alongar na direção longitudinal, ocorre ainda uma restrição do seu alongamento livre e, desta forma, as equações de compatibilidade

devem também ser alteradas. A metodologia utilizada por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32], apresentada na Secção 2.3, servirá de base a esta reformulação.

Por fim, o GSVATM é também modificado para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme para as duas situações que podem ocorrer na prática: pré-esforço aderente e não aderente e/ou exterior. No caso de vigas pré-esforçadas em que a armadura de pré-esforço é externa ou interna mas não aderente ao betão, e desde que devidamente ancorada nas extremidades, para além de criar o aumento da resistência à torção em resultado do pré-esforço, as armaduras criam também, pela sua rigidez axial, uma restrição ao alongamento da viga quando submetida a um momento torsor, induzindo assim um estado adicional de confinamento axial. A metodologia adotada para alargar o GSVATM de modo a incorporar a influência do pré-esforço será análoga ao que Hsu e Mo desenvolveram para o VATM em 1985 [71].

5.2. Reformulação do GSVATM para vigas de betão armado com esforço axial externo centrado e constante

A situação do esforço axial externo a considerar pode ser de dois tipos: compressão ou tração. Tais situações são aqui distinguidas para o estudo da viga sujeita à interação de esforços momento torsor + esforço axial. Considera-se convencionalmente que o esforço axial externo (resultante da tensão axial externa), N_{ext} , é positivo se for um esforço axial de tração. Para o caso associado ao esforço axial de compressão, basta trocar o sinal da força N_{ext} nas equações que serão apresentadas ao longo desta secção.

5.2.1. Vigas sujeitas a esforço transversal, momento fletor e força axial

Para modelar o comportamento de vigas de betão armado sujeitas a uma interação de esforços de torção e esforço axial externo ($M_T + N_{ext}$), considere-se inicialmente a mesma viga simplesmente apoiada submetida a uma força concentrada a meio vão da Figura 4.1 mas sujeita, também, a forças de tração axiais centradas, N_{ext} , nas extremidades, tal como ilustrado na Figura 5.1 (a).

Na Figura 5.1 (b) encontra-se representado o estado interno de equilíbrio de um elemento da viga sujeito ao esforço transversal V , momento fletor M e força axial de tração N_{ext} . A forma como a influência da força N_{ext} é incorporada no equilíbrio longitudinal é apresentada ao longo da presente secção, refere-se ainda que apenas são apresentadas as equações que sofrem alterações devido à incorporação do esforço axial externo, relativamente às equações originais do GSVATM apresentadas no Capítulo 4.

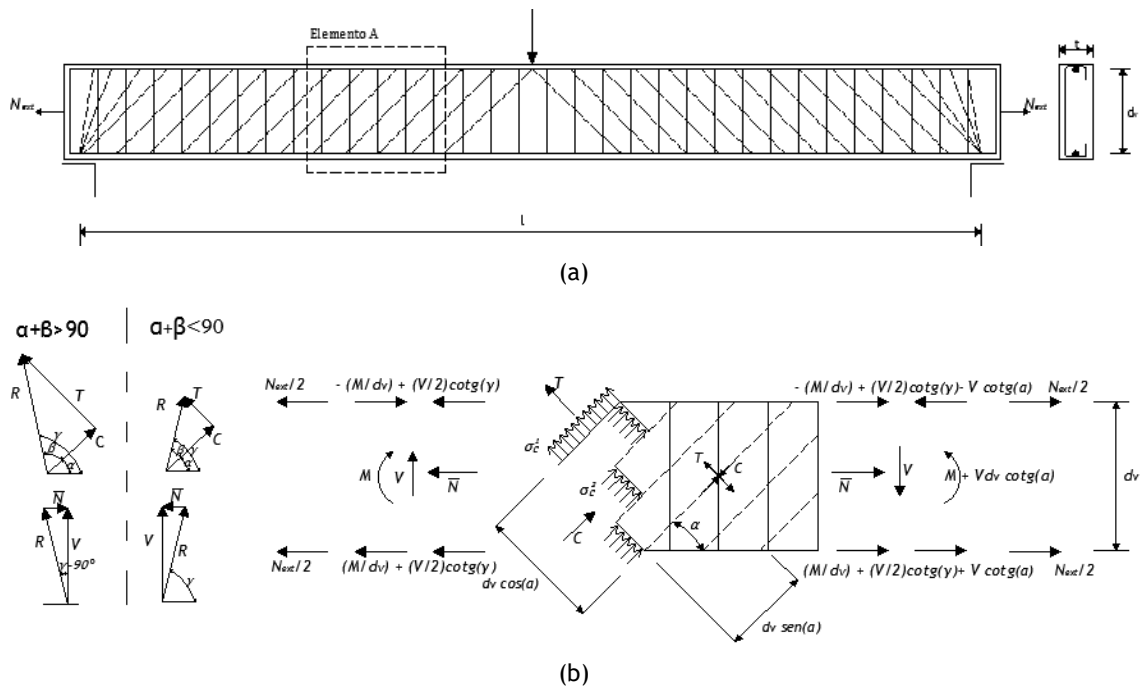


Figura 5.1 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob esforço transversal, momento fletor e força axial de tração

Através dos triângulos de forças inferiores apresentados na Figura 5.1 (b), observa-se que a força de corte V se decompõe em duas componentes: a força longitudinal \bar{N} absorvida pelas armaduras longitudinais e a força resultante R . Desta forma, a força total longitudinal \bar{N} deve equilibrar a força de tração axial igualmente pelas armaduras superiores e inferiores, tendo em conta os dois intervalos de validade do ângulo γ :

$$\bar{N} = V \cot \gamma + N_{\text{ext}}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.1)$$

$$\bar{N} = -V \cot \gamma + N_{\text{ext}}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.2)$$

Para além de um estado de tensão inicial, a aplicação de um esforço axial externo constante impõe também na viga um estado de deformação inicial que deve ser tido em conta. Para a viga ilustrada na Figura 5.1, o estado de tensão é de tração e o respetivo estado de deformação corresponde a um alongamento longitudinal da viga. Como será explicado mais à frente, a influência da deformação inicial imposta pelo esforço axial externo é tida em conta através da extensão na armadura longitudinal. Desta forma, a tensão na escora diagonal de betão σ_2^c e a tensão no tirante diagonal de betão σ_1^c continuam a ser determinadas através das Equações (4.7) e (4.8), respetivamente.

Para determinar a força em cada armadura longitudinal devem considerar-se as três componentes de forças que intervêm no equilíbrio. A armadura longitudinal deve resistir à componente $\bar{N}/2$ derivada da força de corte V , à força proveniente do momento fletor M , que

na face esquerda toma o valor $\pm M/d_v$ e na face direita o valor $\pm(M + Vd_v \cot \alpha)/d_v$ e, em adição, à força axial de tração N_{ext} .

Para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{2} \quad (5.3)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{2} \quad (5.4)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) + \frac{N_{ext}}{2} \quad (5.5)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) + \frac{N_{ext}}{2} \quad (5.6)$$

Para a situação $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, as equações anteriores (Equação (5.3) a (5.6)) permanecem válidas mas o sinal da força longitudinal deve trocar e considerar-se $\bar{N}/2$ como sendo uma força de compressão.

Uma vez que a incorporação da força axial externa é tida em conta apenas no equilíbrio longitudinal, as restantes equações que formulam o Modelo de Trelíça Plano para o GSVATM permanecem inalteradas.

5.2.2. Viga com secção vazada sujeita à torção e esforço axial externo

Tal como já referido na Secção 2.3.3, de acordo com o assumido por Hsu e Mo em 1985 [71] e também por outros autores, por exemplo Taborda em 2012 [116] e Bernardo em 2015 [32], para o caso de vigas pré-esforçadas o procedimento de cálculo do VATM somente inicia após a descompressão. Assim, não é tido em conta no betão nem na armadura longitudinal ordinária o estado inicial de tensão e deformação induzido pelo pré-esforço. No entanto, o cálculo da deformação da armadura de pré-esforço contabiliza a extensão de tração inicial induzida pela aplicação do pré-esforço, ao qual é somada a extensão correspondente à descompressão e considerada igual, em módulo, à extensão de encurtamento na armadura ordinária longitudinal devido ao pré-esforço. Para o caso em estudo na presente secção, o caso de vigas de betão armado sujeitas à torção combinada com um estado de tensão axial de tração externo (uniforme e constante), é assumido um critério análogo ao anteriormente referido para calcular a curva $M_T - \theta$. Assim, o cálculo da deformação na armadura ordinária longitudinal é realizado de forma análoga ao anteriormente descrito para a armadura de pré-esforço. Desta forma, é contabilizada a influência da tensão axial na extensão de tração inicial na armadura ordinária longitudinal, a ser adicionada à extensão de tração que esta armadura sofre pela aplicação do momento torsor. Além disso, a referida tensão axial é

também contabilizada nas equações que envolvem o equilíbrio longitudinal da viga, através da introdução da força de tração axial (resultante).

A Figura 5.2 mostra uma viga de secção retangular vazada, com armadura longitudinal simétrica e concentrada nos cantos e armadura transversal uniformemente distribuída por toda a viga, sujeita a um momento torsor M_T e à força de tração externa N_{ext} .

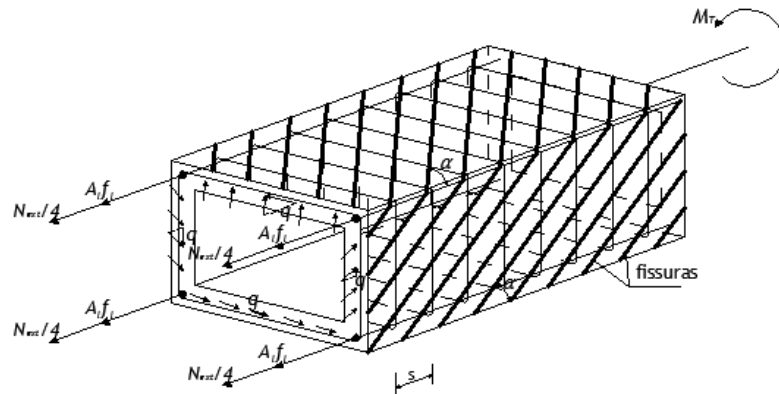


Figura 5.2 - Equilíbrio longitudinal de uma viga de secção retangular vazada

A força nas armaduras longitudinais pode ser obtida tendo em conta as Equações (5.1) e (5.2), para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, respetivamente, e considerando-se que o esforço transversal V corresponde à resultante do fluxo de corte em cada secção da parede do elemento de viga (Equação (4.21)):

$$\bar{N} = ql_q \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.7)$$

$$\bar{N} = -ql_q \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.8)$$

Por sua vez, substituindo-se a Equação (4.20) nas Equações (5.7) e (5.8), obtém-se a força na armadura longitudinal em função do momento torsor e da força externa:

$$\bar{N} = \frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.9)$$

$$\bar{N} = -\frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma + \frac{N_{ext}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.10)$$

A força total nas armaduras longitudinais pode ser calculada considerando que $\Delta N = A_{sl} f_{sl}$, onde A_{sl} e f_{sl} representam a área total e a tensão na armadura longitudinal, respetivamente. Atenda-se, ainda, que p_0 é definido como o perímetro da linha média do fluxo de corte ($\sum l_q$).

A partir das equações anteriores, a força total na armadura longitudinal pode ser calculada através de:

$$A_{sl} f_{sl} = \frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma + N_{ext}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.11)$$

$$A_{sl} f_{sl} = -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma + N_{ext}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.12)$$

O cálculo da curva $M_T - \theta$ exige a existência de três equações de equilíbrio para o cálculo do momento torsor M_T , da espessura efetiva da escora de betão t_c e do ângulo α das escoras de betão com o eixo longitudinal. A Equação (4.53) para o cálculo do momento torsor mantém-se inalterada, sendo válida para os dois intervalos do ângulo γ . A espessura efetiva da escora de betão t_c , que é considerada igual à espessura efetiva do tirante de betão, obtém-se a partir da Equação (4.54) e tendo em conta o equilíbrio longitudinal anteriormente apresentado (Equação (5.11)):

$$t_c = \frac{A_{sl} f_{sl} - N_{ext}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.13)$$

Para $\alpha + \beta > 90^\circ$ utiliza-se o mesmo raciocínio. A partir da Equação (4.55) e tendo em conta o equilíbrio longitudinal anteriormente apresentado através da Equação (5.12) vem:

$$t_c = -\frac{A_{sl} f_{sl} - N_{ext}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.14)$$

Calcule-se agora o ângulo α através de uma relação entre este e a força instalada nas armaduras. Como o equilíbrio transversal se mantém, o cálculo do ângulo α através da força instalada na armadura transversal continua a ser dado pela Equação (4.58). Pelo equilíbrio na armadura longitudinal, resolvendo em relação a M_T a Equação (4.31) e de seguida substituindo na Equação (5.11) e (5.12), para as situações $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$ respetivamente, e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se as seguintes equações que relacionam $\cos \alpha$ com a força instalada na armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl} - N_{ext}}{t_c p_0 \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.15)$$

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl} f_{sl} - N_{ext}}{t_c p_0 \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.16)$$

Igualando a Equação (4.58) com a Equação (5.15) para a situação $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e a Equação (4.58) com a Equação (5.16) para a situação $\alpha + \beta > 90^\circ$, e substituindo γ e γ' pelas Equações (4.3) e (4.16), respetivamente, para a situação $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e pela Equações (4.3) e (4.17), respetivamente, para a situação $\alpha + \beta > 90^\circ$, obtém-se:

$$\frac{A_{sl}f_{sl} - N_{ext}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st}f_{st} p_0}{(A_{sl}f_{sl} - N_{ext})s} = F, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.17)$$

$$-\frac{A_{sl}f_{sl} - N_{ext}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st}f_{st} p_0}{(A_{sl}f_{sl} - N_{ext})s} = -F, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.18)$$

Para resolver as Equações (5.17) e (5.18) em ordem à inclinação da escora de betão α recorreu-se ao *software* MATLAB, tendo-se obtido uma solução global (Equação (5.19)) válida para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$. Para o cálculo do valor do ângulo α basta substituir o parâmetro F definido nas Equações (5.17) e (5.18), sendo que no domínio do problema apenas interessa o valor positivo do ângulo.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{F^2 (\tan \beta)^2 + F (\tan \beta)^4 + F + (\tan \beta)^2}}{F (\tan \beta)^2 + 1} \right) \quad (5.19)$$

Assim, as três equações de equilíbrio do GSVATM modificado para incorporar uma força axial externa constante, são designadamente as Equações (4.53), (5.13) (ou (5.14)) e (5.19).

A construção da curva teórica $M_T - \theta$ tendo por base o GSVATM requer, ainda, três equações de compatibilidade para determinar a extensão na armadura transversal ε_{st} , extensão na armadura longitudinal ε_{sl} , bem como o ângulo de torção θ , por unidade de comprimento. Para tal deve determinar-se a extensão inicial de tração $\varepsilon_{l,i}$ correspondente ao alongamento da armadura longitudinal devido à força constante externa, podendo este alongamento ser calculado pela Equação (5.20), recorrendo à homogeneização da secção de betão armado.

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\sigma_i}{E_c} = \frac{N_{ext}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{N_{ext}}{E_c (A_c - A_h) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (5.20)$$

Onde A_{ch} corresponde à área equivalente de betão, E_c e E_s são os módulos de Young do betão e da armadura ordinária, respetivamente, A_c é a área limitada pelo perímetro exterior da secção e A_h é a área vazada da secção (para secções cheias deve considerar-se $A_h = 0$). Conforme referido anteriormente, a extensão na armadura longitudinal deve contabilizar a extensão de tração induzida pelo estado de tensão axial externo de tração a que a viga se encontra sujeita (Equação (5.20)) e a extensão de tração por aplicação do momento torsor (calculada através do GSVATM original, Equação (4.68)):

$$\varepsilon_{sl} = \varepsilon_{sl, M_T} + \varepsilon_{l,i} \quad (5.21)$$

A equação para a extensão na armadura transversal não sofre alteração, continuando a poder ser calculada através da Equação (4.67), e o ângulo de torção pode ser determinado pela Equação (4.69) do GSVATM original. As Equações (4.67), (4.69) e (5.21) constituem as três equações de compatibilidade do GSVATM modificado. Para finalizar, refere-se que a extensão no tirante de betão continua a ser traduzida pela Equação (4.70) onde, neste caso, a extensão na armadura longitudinal já se encontra afetada pela deformação inicial devida ao estado de tensão axial uniforme.

Para o caso das vigas de betão armado submetidas à torção combinada com um estado de tensão axial de compressão (uniforme e constante) é novamente considerado um critério análogo ao assumido para o VATM por Hsu e Mo [71] para vigas de betão pré-esforçado à torção. De forma análoga às vigas com pré-esforço, as vigas agora em estudo sofrem também um estado inicial de tensão e deformação, designadamente nas armaduras longitudinais, devido à tensão de compressão inicial na direção longitudinal. Devido à aplicação de momentos torsores externos, de forma incremental, esse estado inicial de tensão e deformação é “anulado”. Isso ocorre porque a viga tende a alongar em consequência das extensões de tração que se instalam nas armaduras longitudinais devido ao momento torsor. Desta forma, para o caso das vigas em estudo faz também sentido em falar de “descompressão”, sendo este correspondente ao estado no instante em que a extensão nas armaduras longitudinais volta a ser nula. A modelação do comportamento das vigas até ocorrer a descompressão não tem grande relevância uma vez que o mesmo ocorre para níveis de carregamentos muito baixos e para comportamentos dos materiais no domínio elástico e linear, podendo ser assumido a recuperação total do estado indeformado inicial da viga. Desta forma, o procedimento de cálculo do GSVATM modificado só é iniciado a partir da descompressão, desprezando-se o estado inicial de tensão e deformação referido. Assim, para esta interação de esforços as equações que foram apresentadas ao longo da presente secção continuam válidas, salvo pela necessária troca de sinal da força axial externa resultante, N_{ext} , uma vez que neste caso se trata de uma força de compressão. Tal como exposto atrás, o estado inicial de compressão é desprezado e inicia-se apenas o estudo do comportamento da viga quando é atingido o momento torsor de descompressão. Assim, a extensão na armadura longitudinal deve ser calculada através da Equação (4.68).

5.2.3. Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$

Como já foi referido no Capítulo 4, a utilização do algoritmo do GSVATM para o cálculo da curva $M_T - \theta$ exige a sua implementação computacional devido ao seu carácter não linear e iterativo. A metodologia escolhida para inserir no GSVATM modificado o efeito de um esforço axial constante e externo aplicado a uma viga de betão armado consiste, numa primeira fase e para cada valor de ε_{2s}^c , utilizar o modelo descrito ao longo da Secção 5.2, ou seja, considerar a aplicação do referido esforço externo N_{ext} , que neste caso se considerou um esforço constante externo de tração, e do estado de deformação inicial induzido, $\varepsilon_{l,i}$. A existência do esforço axial externo e a consideração da respetiva deformação inicial não altera as relações constitutivas para o betão à compressão e armaduras ordinárias à tração apresentadas na Secção 2.2.4. A relação constitutiva que caracteriza o betão à tração nos tirantes exposto na Secção 4.2.5 também permanece inalterada.

O aplicativo computacional Torque baseia o seu código no procedimento de cálculo do GSVATM original, pelo que se modificou o código com vista a implementar as alterações anteriormente apresentadas para generalizar o GSVATM a vigas com estado axial de tensão uniforme. O referido aplicativo permite, de forma automática, realizar o procedimento de cálculo do GSVATM para calcular o comportamento global das vigas em estudo. Importa referir que o modelo teórico preserva o mesmo critério de paragem referido em 4.2.6, ou seja, quando a extensão à superfície da escora ou a extensão das armaduras tracionadas atinge os valores das respetivas extensões convencionais de rotura ($\varepsilon_{cu} = 0,0035$ para o betão comprimido na escora, considerando betão de resistência normal, e $\varepsilon_{su} = 0,01$ para as armaduras tracionadas).

O procedimento de cálculo assume t_c , α , ε_{1s}^c e $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ como variáveis inicialmente desconhecidas e interdependentes, e por esta razão torna-se necessário formular e implementar um algoritmo de cálculo iterativo para calcular a curva $M_T - \theta$. O fluxograma do algoritmo de cálculo está apresentado na Figura 5.3. A ordem para verificar as variáveis iniciais foi otimizada para permitir minimizar o tempo de cálculo [27]. Para o cálculo da curva $M_T - \theta$ deve seguir-se o seguinte procedimento de cálculo:

- 1- Selecionar ε_{2s}^c . Assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e β , uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$.
- 2- Calcular a extensão longitudinal inicial, $\varepsilon_{l,i}$ induzida pelo esforço axial externo imposto através da Equação (5.20).

- 3- Calcular k_2^c pela Equação (2.21) se $\varepsilon_{2s}^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{2s}^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$, k_1^c pela Equação (4.51) se $\varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr}$ ou pela Equação (4.52) se $\varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr}$. Determinar a tensão nas escoras σ_2^c a partir da Equação (2.20) e nos tirantes σ_1^c pela Equação (4.50).
- 4- Calcular a força de compressão na escora C pela Equação (4.43), a força de tração no tirante T através da Equação (4.44), a força resultante R pela Equação (4.1) e os ângulos β e γ pelas Equações (4.2) e (4.3), respetivamente.
- 5- Determinar o momento torsor M_T pela Equação (4.53), a extensão na armadura transversal pela Equação (4.67) e na armadura longitudinal pela Equação (5.21) se a tensão axial externa for de tração e pela Equação (4.68) se for de compressão, bem como a tensão nas armaduras através da Equação (2.23) da Tabela 2.2.
- 6- Verificar t_c pela Equação (5.13) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou pela Equação (5.14) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
- 7- Verificar α através da Equação (5.19).
- 8- Verificar ε_{1s}^c pela Equação (4.70).
- 9- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva apresentada na Tabela 2.1.
- 10- Se:
 - 10.1 - Os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β não forem considerados suficientemente próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 1) a 9) até que estes valores convirjam.
 - 10.2- Caso os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β forem considerados suficientemente próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.
- 11- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento, θ , através da Equação (4.69). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $M_T - \theta$ com coordenadas $(\theta; M_T)$;
- 12- Selecionar outros valores de ε_{2s}^c e repetir os Passos 3) a 11) para cada valor de ε_{2s}^c por forma a obter vários pontos $(\theta; M_T)$ que permitam desenhar a previsão da curva $M_T - \theta$.

A Figura 5.3 ilustra o algoritmo de cálculo do GSVATM modificado a vigas com estado axial de tensão uniforme.

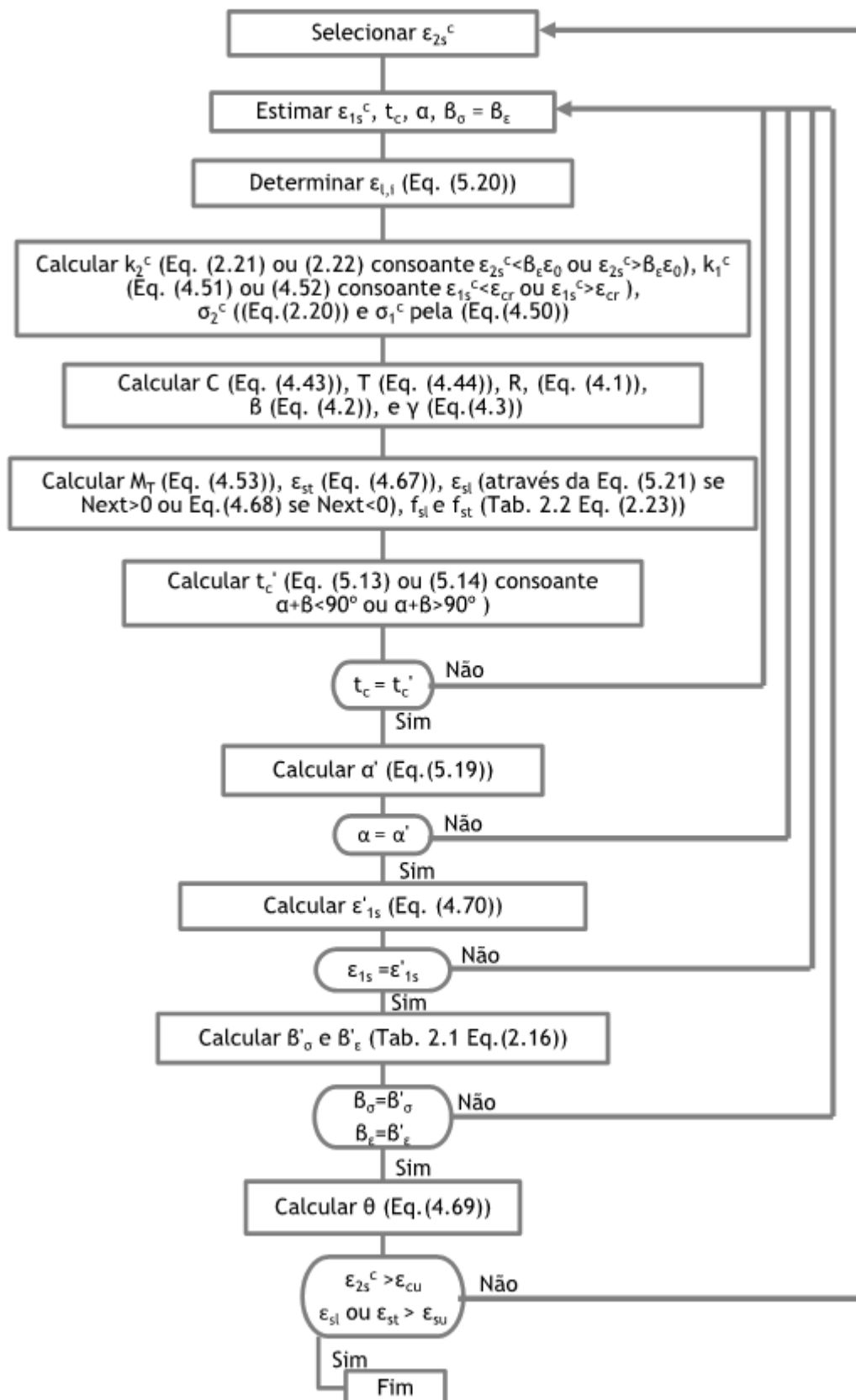


Figura 5.3 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para a interação momento torsor + esforço axial para o cálculo da curva $M_T - \theta$

5.3. Reformulação do GSVATM para vigas com confinamento axial

Conforme já explicado na Secção 1.2.1, uma viga de betão armado submetida à torção tende a sofrer um alongamento na direção longitudinal. No caso de a viga se encontrar restringida pelos elementos estruturais adjacentes, quando sujeita à torção a viga fica sujeita a um estado adicional de compressão axial. A abordagem desta interação de esforços será muito semelhante ao realizado na Secção 2.3.2 para o VATM modificado ao caso de vigas com confinamento axial. Por essa razão, a metodologia escolhida para a incorporação do efeito do confinamento axial considera-se justificado na Secção 2.3.1.

Ao longo da próxima secção são apresentadas todas as alterações realizadas ao GSVATM (modelo apresentado na Secção 4.2) tendo em conta a metodologia abordada para o VATM para o tipo de vigas aqui em estudo. Considerou-se importante a extensão do GSVATM ao caso de vigas confinadas axialmente uma vez que o modelo VATM + Confinamento axial apresentado no Capítulo 2 demonstrou ser importante considerar a influência do confinamento axial no comportamento último de vigas de betão armado à torção, designadamente da sua resistência [116] [32] [31].

5.3.1. Viga sujeita a esforço transverso, momento fletor e força axial

Nesta secção pretende-se adaptar a análise de vigas com base no Modelo de Trelíça Plana ao caso de vigas confinadas axialmente. Este problema pode uma vez mais ser interpretado como uma situação de interação de esforços Flexão + Esforço Transverso + Esforço Axial. O esforço axial é designado F_{ca} e, para derivar as equações, é considerado como sendo um esforço de compressão.

Na Figura 5.4 ilustra-se o novo estado interno de equilíbrio do elemento da viga, em que se encontra sob o esforço transverso V , momento fletor M e força axial de compressão F_{ca} . À semelhança do referido anteriormente, a força de corte V é decomposta na força resultante R e na força longitudinal \bar{N} absorvida pelas armaduras longitudinais (igualmente absorvida pela corda superior e inferior). Nesta nova situação a força \bar{N} deve incorporar a força axial F_{ca} , pelo que a força longitudinal passa a ser dada pelas Equações (5.22) e (5.23) consoante $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.

$$\bar{N} = V \cot \gamma - F_{ca}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.22)$$

$$\bar{N} = -V \cot \gamma - F_{ca}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.23)$$

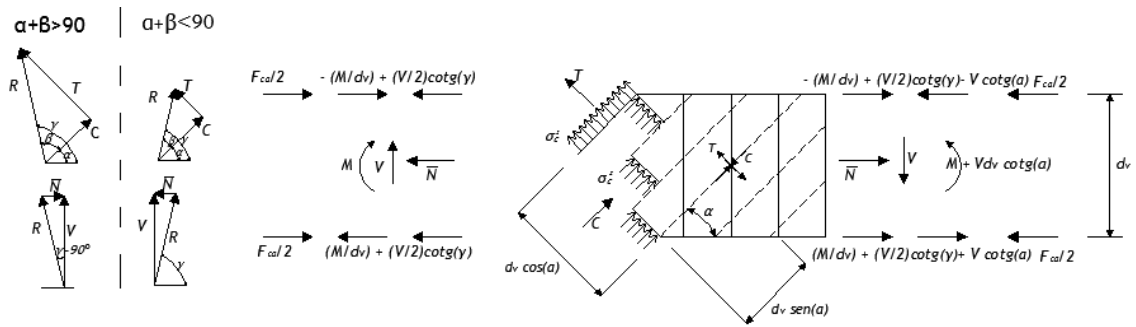


Figura 5.4 - Equilíbrio interno do elemento de viga sob esforço transversal, momento fletor e força de confinamento axial

Devido à presença do esforço axial, a sollicitação nas armaduras para além de incluir a componente devido ao corte ($\bar{N}/2$) e a força resultante do momento fletor deve incorporar a força F_{ca} :

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{2} \quad (5.24)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{2} \quad (5.25)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) - \frac{F_{ca}}{2} \quad (5.26)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) - \frac{F_{ca}}{2} \quad (5.27)$$

As equações anteriores (Equações (5.24) a (5.27)) são válidas para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e quando $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$ o sinal da força longitudinal $\bar{N}/2$ deve ser alterado e considerar-se de compressão.

A presença do esforço axial F_{ca} não influencia a formulação do Modelo de Treliça Plana para o GSVATM para o equilíbrio na direção transversal, assim permanecem válidas as restantes equações apresentadas na Secção 4.2.1.

5.3.2. Viga com secção vazada sujeita à torção e confinada axialmente

Tome-se como base a viga ilustrada na Figura 5.2, para o caso de vigas confinadas axialmente a força longitudinal nas barras de canto deve incorporar, para além da sollicitação longitudinal devida ao momento torsor M_T , a componente do esforço axial $F_{ca}/4$ (assumindo que o esforço axial F_{ca} é de compressão e igualmente repartido pelos varões longitudinais de canto).

Assumindo que o modelo de treliça espacial continua a ser válido para qualquer valor de F_{ca} , a força longitudinal na armadura de canto deve ser calculada para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, respetivamente:

$$\bar{N} = ql_q \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.28)$$

$$\bar{N} = -ql_q \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.29)$$

A força na armadura longitudinal pode escrever-se em função do momento torsor, se se substituir a Equação (4.20) nas Equações (5.28) e (5.29):

$$\bar{N} = \frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.30)$$

$$\bar{N} = -\frac{M_T l_q}{2A_0} \cot \gamma - \frac{F_{ca}}{4}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.31)$$

Definindo a força total nas armaduras longitudinais como ΔN a partir das equações anteriores:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = A_{sl} f_{sl} = \frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma - F_{ca}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.32)$$

$$\Delta N = \sum \bar{N} = A_{sl} f_{sl} = -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma - F_{ca}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.33)$$

Tendo por base o exposto anteriormente, apresenta-se de seguida as três equações de equilíbrio: do momento torsor (M_T), da espessura efetiva da escora de betão (t_c) e do ângulo das escoras de betão com o eixo longitudinal (α). Para o cálculo do momento torsor mantém-se inalterada (Equação (4.53)), sendo esta equação válida para os dois intervalos do ângulo γ . Para determinar a espessura efetiva da escora de betão t_c , que é igual à espessura efetiva do tirante de betão, substitui-se a Equação (4.31) na Equação (5.32), obtendo-se:

$$t_c = \frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.34)$$

Para $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, substitui-se a Equação (4.31) na Equação (5.33):

$$t_c = -\frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.35)$$

Reescrevendo as Equações (5.34) e (5.35) em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se as equações que relacionam o ângulo da escora de betão, α , com a força na armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{t_c p_0 \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.36)$$

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{t_c p_0 \sigma_2} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.37)$$

Como o equilíbrio transversal se mantém, o cálculo do ângulo α através da força instalada na armadura transversal continua a ser dado pela Equação (4.58). Igualando a Equação (4.58) com a Equação (5.36) e (5.37) para a situação $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$, respetivamente, e considerando γ e γ' traduzido pelas Equações (4.3) e (4.16) ou (4.17), obtém-se:

$$\frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st} f_{st} p_0}{(A_{sl} f_{sl} + F_{ca}) s} = F, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.38)$$

$$-\frac{A_{sl} f_{sl} + F_{ca}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st} f_{st} p_0}{(A_{sl} f_{sl} + F_{ca}) s} = -F, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.39)$$

Desta forma, o ângulo α pode ser calculado através da Equação (5.19), onde o parâmetro F é dado pela Equação (5.38) ou (5.39). Assim, encontraram-se as três equações de equilíbrio do GSVATM: Equações (4.53), (5.34) (ou (5.35)) e (5.19).

As equações para o cálculo da extensão na armadura longitudinal e transversal, ε_{sl} e ε_{st} , bem como a equação para o cálculo do ângulo de torção θ , por unidade de comprimento são necessárias para a construção da curva teórica $M_T - \theta$ tendo por base o GSVATM. Tais equações são designadas por equações de compatibilidade. A existência do confinamento axial induz na viga uma modificação do estado de deformação que deve ser tido em conta. Relembre-se que a força de confinamento F_{ca} surge da restrição axial que os elementos adjacentes da viga aplicam quando esta tende a alongar na direção longitudinal devido à aplicação do momento torsor. Desta forma, a restrição livre da viga é impedida e ocorre um encurtamento da viga na direção longitudinal que é estimado pelo encurtamento da armadura longitudinal ($\varepsilon_{l,ca}$):

$$\varepsilon_{l,ca} = \frac{\sigma_{ca}}{E_c} = \frac{F_{ca}}{E_c A_{ch}} = \dots = \frac{F_{ca}}{E_c (A_c - A_h) + A_{sl} (E_s - E_c)} \quad (5.40)$$

Torna-se necessário calcular a força de confinamento, F_{ca} , resultante da existência de molas no modelo de viga isolada (Figura 2.8), em função da rigidez k e conhecendo-se à partida o alongamento total da viga livre, Δl . A força de confinamento axial pode ser calculada simplifadamente através da expressão:

$$F_{ca} = \Delta l \times k \quad (5.41)$$

Tomando como ponto de partida uma viga de betão armado inserida num pórtico simples e pretendendo-se analisar esta viga para uma situação de interação de esforços torção - compressão centrada, em virtude da existência da restrição axial, tem que se ter em conta duas fases para a análise. Tal como já foi referido no Capítulo 2, primeiro deve considerar-se essa mesma viga em situação livre de restrições e submetida à torção pura. Nesta condição verifica-se que a viga alonga ao longo do eixo longitudinal e principalmente no estado fissurado. Admite-se por simplicidade que o alongamento total da viga, Δl , pode ser quantificado através da extensão das armaduras longitudinais ε_{sl} . Considera-se que a extensão nas armaduras longitudinais é constante ao longo de todo o comprimento da viga. Assim, a extensão na armadura longitudinal ε_{sl} é calculada através do GSVATM original, cujo procedimento de cálculo foi apresentado na Secção 4.2.6 (Figura 4.7). Conhecendo-se a extensão na armadura longitudinal e o vão (l) da viga, é possível calcular uma estimativa para o alongamento da viga:

$$\Delta l = l\varepsilon_{sl} \quad (5.42)$$

Numa segunda fase da análise, considera-se a viga inserida no pórtico e restrita pelos elementos estruturais adjacentes, pelo que passa a analisar-se uma situação de interação de esforços torção - compressão centrada. A restrição axial proveniente dos elementos estruturais adjacentes pode ser simulada através da rigidez de molas lineares k . A existência da referida força de compressão centrada está associada à força na viga restituída pelas molas quando a mesma tende a alongar do valor Δl . Essa força é tanto maior quanto maior a rigidez da mola, sendo também diretamente proporcional ao alongamento livre da viga. Em virtude da existência desta interação, o alongamento efetivo da viga é na realidade menor em comparação com a situação de viga livre. Esta rigidez k é considerada, neste trabalho, como parâmetro de entrada no procedimento de cálculo a ser introduzido pelo utilizador e deve ser calculado em função da real situação da viga em análise.

Devido ao facto de existir o confinamento axial na viga, é induzido um encurtamento na armadura longitudinal e, assim, este estado também induz um encurtamento na escora e no tirante de betão inclinados. Desta forma, deve ser calculado o encurtamento que a fibra da face exterior da escora de betão, $\varepsilon_{2s,ca}^c$, e do tirante de betão, $\varepsilon_{1s,ca}^c$. Considerando a Figura 5.5, o cálculo desse encurtamento é feito de forma simplificada:

$$\varepsilon_{2s,ca}^c = \frac{\varepsilon_{l,ca}}{\cos \alpha} \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_{1s,ca}^c = \frac{\varepsilon_{l,ca}}{\sin \alpha} \quad (5.44)$$

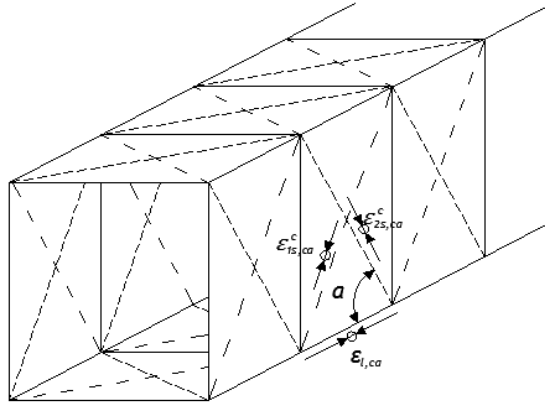


Figura 5.5 - Encurtamento da escora e do tirante de betão

Como o procedimento de cálculo assume como parâmetro de entrada a extensão à superfície da escora e do tirante diagonais de betão, ϵ_{2s}^c e ϵ_{1s}^c devem, deve ser adicionado o encurtamento que estes sofrem devido ao confinamento axial de modo a obter-se a extensão efetiva à superfície, $\epsilon_{2s,ef}^c$ e $\epsilon_{1s,ef}^c$, respetivamente:

$$\epsilon_{2s,ef}^c = \epsilon_{2s}^c + \epsilon_{2s,ca}^c \quad (5.45)$$

$$\epsilon_{1s,ef}^c = \epsilon_{1s}^c - \epsilon_{1s,ca}^c \quad (5.46)$$

A metodologia apresentada permite, de forma simples, corrigir o estado de deformação inicial da viga livre tendo em conta o efeito do confinamento axial.

O cálculo da extensão nas armaduras longitudinais e transversais para o caso da situação de interação de esforços Torção + Força de confinamento axial, é ligeiramente diferente do realizado nas secções anteriores. Note-se que nas situações de aplicação de força axial externa, quer esta seja de compressão ou de tração, esta induz um estado de deformação inicial que é considerado no modelo como uma deformação inicial. No entanto, no caso do confinamento axial, o encurtamento da viga apenas ocorre quando esta tende a alongar na direção longitudinal por aplicação do momento torsor. Desta forma, a extensão na armadura transversal ϵ_{st} pode ser obtido através da Equação (4.67):

$$\epsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c}{p_0 M_T} \frac{\sin \gamma}{\cos \beta \tan \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_{2s,ef}^c \quad (5.47)$$

De forma semelhante, obtém-se a extensão na armadura longitudinal ϵ_{sl} :

$$\epsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c}{p_0 M_T} \frac{\sin \gamma}{\cos \beta \cot \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_{2s,ef}^c \quad (5.48)$$

O ângulo de torção θ continua a ser calculado pela Equação (4.69).

As Equações (5.47), (5.48) e (4.69) constituem as três equações de compatibilidade do GSVATM modificado. A extensão de tração no tirante ε_{1s}^c pode ser obtida a partir da Equação (4.70).

5.3.3. Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$

Tendo por base as expressões matemáticas que formulam o GSVATM modificado a vigas de betão armado com confinamento axial apresentado ao longo da presente secção, torna-se possível estabelecer o novo procedimento de cálculo iterativo para calcular a curva teórica $M_T - \theta$. O procedimento de cálculo do GSVATM modificado a vigas confinadas axialmente foi implementado no aplicativo Torque, desta forma é possível calcular o comportamento global de vigas de betão armado confinadas axialmente.

Assim, o parâmetro ε_{2s}^c continua a constituir o valor de entrada do procedimento. Tal como referido na Secção 2.3.4, a metodologia escolhida para a consideração do efeito do confinamento axial consiste, numa primeira fase e para cada valor de entrada do ε_{2s}^c , utilizar o GSVATM original para calcular a resposta da viga à torção sem confinamento axial, designadamente a extensão das armaduras longitudinais ε_{sl} . A partir desta extensão, é calculado o alongamento da viga Δl e a força de confinamento axial F_{ca} resultante (força de compressão) que é introduzida no novo procedimento de cálculo baseado no GSVATM modificado ao caso de vigas com confinamento axial. Neste ponto, a extensão na escora de betão e no tirante deve ser substituída pela extensão efetiva $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e $\varepsilon_{1s,ef}^c$, respetivamente, de forma a contabilizar o encurtamento das escoras e dos tirantes em resultado da força de confinamento. Desta forma, impõe-se o estado de deformação da viga tendo em conta o confinamento axial.

De seguida, apresenta-se de forma sucinta os passos a realizar para a construção da curva $M_T - \theta$ da viga na situação de confinamento axial.

- 1- Selecionar ε_{2s}^c . Assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e β uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$.
- 2- Calcular F_{ca} pela Equação (5.41) e Δl pela Equação (5.42). Determinar $\varepsilon_{l,ca}$ através da Equação (5.40) e $\varepsilon_{2s,ef}^c$ pela Equação (5.45) $\varepsilon_{1s,ef}^c$ pela Equação (5.46).
- 3- Substituir ε_{2s}^c por $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e ε_{1s}^c por $\varepsilon_{1s,ef}^c$.

- 4- Calcular k_2^c pela Equação (2.21) se $\varepsilon_{2s}^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{2s}^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$, k_1^c pela Equação (4.51) se $\varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr}$ ou pela Equação (4.52) se $\varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr}$, determinar a tensão nas escoras σ_2^c a partir da Equação (2.20) e σ_1^c nos tirantes pela Equação (4.50).
- 5- Calcular a força de compressão na escora C pela Equação (4.43), a força de tração no tirante T através da Equação (4.44), a força resultante R pela Equação (4.1) e os ângulos β e γ pelas Equações (4.2) e (4.3), respetivamente.
- 6- Determinar o momento torsor M_T pela Equação (4.53), a extensão na armadura ordinária transversal ε_{st} pela Equação (5.47) e na armadura ordinária longitudinal ε_{sl} pela Equação (5.48) bem como a tensão nas armaduras ordinárias f_{sl} e f_{st} através da Equação (2.23) da Tabela 2.2.
- 7- Verificar t_c pela Equação (5.34) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou pela Equação (5.35) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
- 8- Verificar α através da Equação (5.19), com o parâmetro F calculado pela Equação (5.38) (ou 5.39)).
- 9- Verificar ε_{1s}^c pela Equação (4.70).
- 10- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva apresentada na Tabela 2.1.
- 11- Se:
 - 11.1 - Os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 4) a 10) até que estes valores convirjam.
 - 11.2- Caso os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β forem próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.
- 12- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (4.69). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $M_T - \theta$ de coordenadas $(\theta; M_T)$;
- 13- Selecionar outros valores de $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e repetir os Passos 4) a 12) para cada valor de $\varepsilon_{2s,ef}^c$ por forma a obter vários pontos $(\theta; M_T)$ que permitam desenhar a previsão da curva $M_T - \theta$.

De uma forma simplificada e resumida, pode apresentar-se o processo iterativo geral na forma de um algoritmo de cálculo cujo diagrama de fluxo se encontra ilustrado na Figura 5.6.

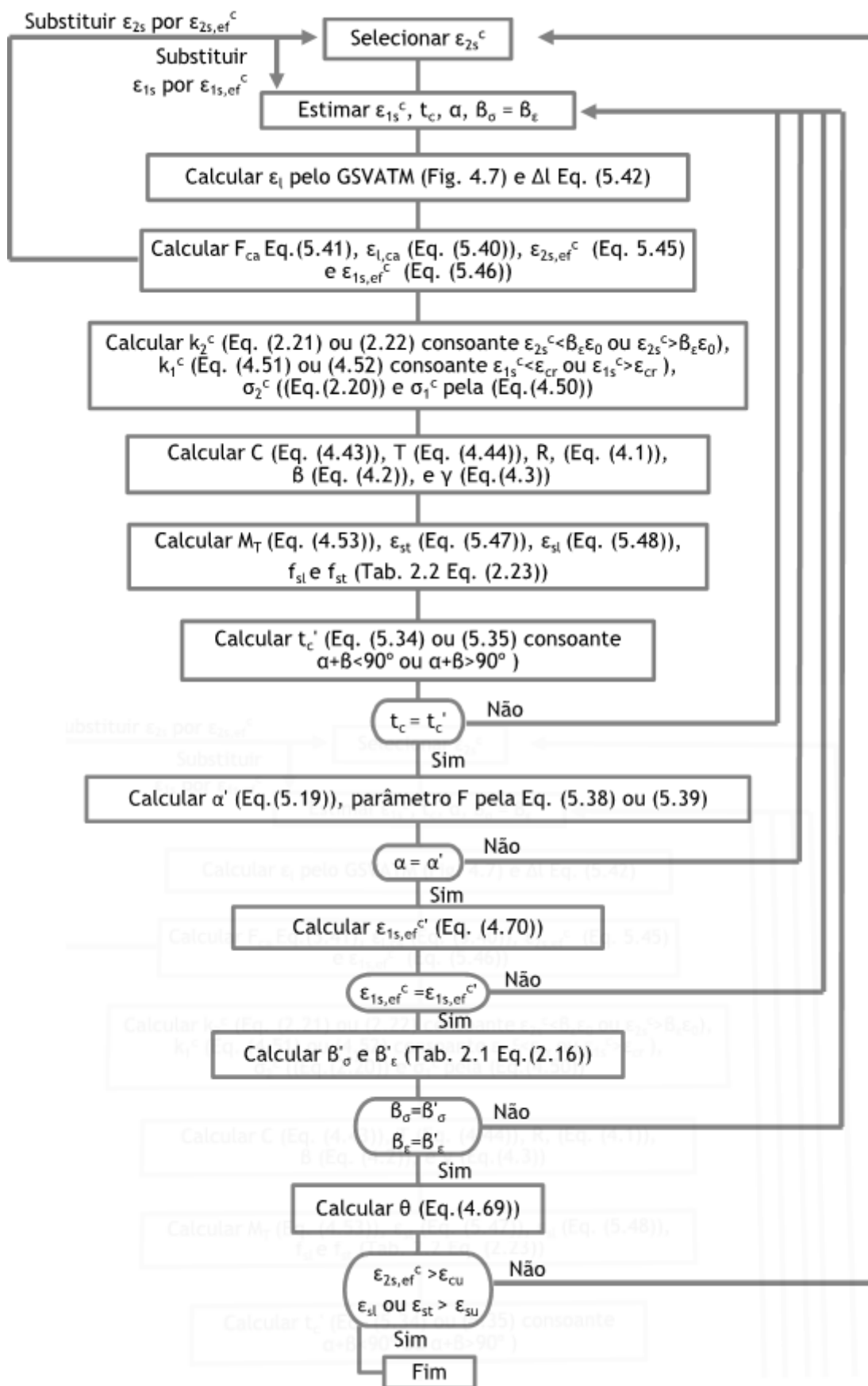


Figura 5.6 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para vigas confinadas axialmente para o cálculo da curva $M_T - \theta$

5.4. Reformulação do GSVATM para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme

A aplicação do pré-esforço numa viga de betão armado induz um estado de compressão que aumenta a sua resistência à fissuração por torção. Neste caso, em cada ponto interior, a combinação da tensão tangencial induzida pelo momento torsor com a tensão de compressão inicial induzida pelo pré-esforço cria um estado de tensão biaxial (corte + compressão) [22] responsável pelo atraso da fissuração. Além disso, após a descompressão as armaduras de pré-esforço passam, com a sua reserva de resistência, a funcionar como armaduras passivas, contribuindo para o aumento da resistência da viga. No entanto, conforme referido na Secção 2.3, vigas de betão pré-esforçado em que as armaduras de pré-esforço longitudinal se encontrem exteriores ou não aderentes ao betão, induzem, em adição ao efeito do pré-esforço, um estado de confinamento axial quando a viga é sujeita a um momento torsor. Este confinamento axial surge da não existência de aderência das armaduras de pré-esforço ao betão e em consequência da rigidez axial dessas mesmas armaduras. Assim, considerou-se importante alargar o GSVATM a estes dois casos de pré-esforço uma vez que estes modelos permitem calcular de forma mais realista o comportamento global da viga de betão pré-esforçado submetida à torção.

Hsu e Mo em 1985 [71] alargaram o VATM ao caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme submetidas à torção pura. A reformulação do GSVATM para incorporar o caso de vigas de betão com pré-esforço aderente é derivado tendo por base o critério exposto pelos referidos autores para o VATM. Resumidamente, para além de se considerar o estado inicial de deformação induzido pelo pré-esforço, é introduzida adicionalmente uma relação $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras de pré-esforço. Deve considerar-se ainda a contribuição das armaduras de pré-esforço no equilíbrio longitudinal. É importante referir que de forma análoga ao apresentado na Secção 5.2, a formulação do modelo de cálculo é realizado apenas a partir da descompressão da viga. Desta forma, apenas são apresentadas as alterações ao GSVATM para incorporar a participação das armaduras de pré-esforço e a deformação inicial imposta devido à aplicação do pré-esforço para calcular a descompressão da viga. A análise do Modelo de Treliça Plana permanece inalterada e igual ao apresentado na Secção 4.3.1.

Em relação à extensão do GSVATM a vigas de betão com pré-esforço exterior e/ou não aderente, é em tudo muito semelhante ao realizado na Secção 5.3 para vigas de betão armado confinadas axialmente. Neste caso, quando a viga de betão pré-esforçado é sujeita à torção pura, esta tende a alongar segundo o seu eixo longitudinal, mobilizando a rigidez axial da armadura de pré-esforço, conferindo assim o estado de compressão.

5.4.1. Pré-esforço longitudinal aderente

5.4.1.1. Vigas com pré-esforço longitudinal e sujeitas à torção

A reformulação do GSVATM tem por base a viga de betão pré-esforçado sujeita à torção, tal como ilustrado na Figura 5.7.

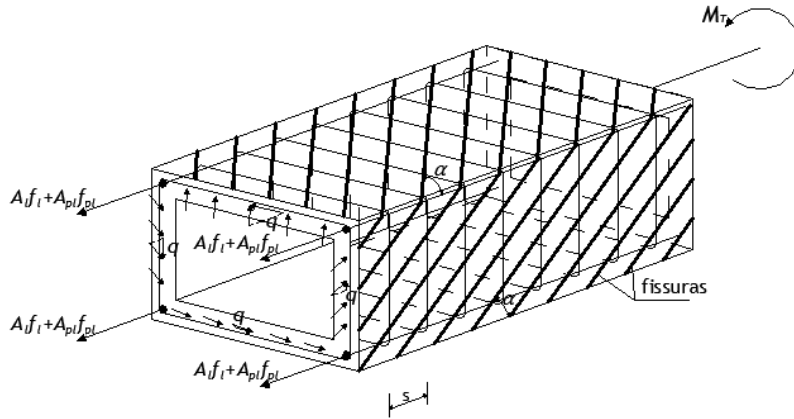


Figura 5.7 - Viga de betão pré-esforçado com seção vazada sujeita a um momento torsor

A força total nas barras longitudinais pode ser obtida se se considerar a totalidade das armaduras longitudinais ΔN (armadura longitudinal ordinária e armadura longitudinal de pré-esforço). Considerando que A_{sl} , f_{sl} e A_{pl} e f_{pl} correspondem à área total de armadura longitudinal ordinária e de pré-esforço e à tensão dessas mesmas armaduras, respetivamente, a força total nas armaduras longitudinais vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = \frac{M_T}{2A_0} \sum l_q \cot \gamma = \frac{M_T}{2A_0} p_0 \cot \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{sl} f_{sl} + A_{pl} f_{pl} = \frac{M_T}{2A_0} p_0 \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.49)$$

$$\Leftrightarrow A_{sl} f_{sl} + A_{pl} f_{pl} = -\frac{M_T}{2A_0} p_0 \cot \gamma, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.50)$$

Para o cálculo da força nas barras transversais, na escora de betão e no tirante de betão mantêm-se as Equações (4.26), (4.31) e (4.32), respetivamente.

À semelhança do exposto nas seções anteriores, torna-se necessário averiguar se as três equações de equilíbrio do GSVATM modificado ao caso de vigas pré-esforçadas sofrem alterações. A equação para o cálculo do momento torsor mantém-se inalterada, e pode ser calculado através da Equação (4.53), esta equação é válida para $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$. Contudo, para o cálculo da espessura efetiva da escora de betão, t_c , é necessário distinguir as duas situações para a relação de α e β .

Para determinar a espessura efetiva da escora de betão quando $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$, substitui-se a Equação (4.31) na Equação (5.49) (equilíbrio novo que se encontra para o caso em análise) obtém-se:

$$t_c = \frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} \quad (5.51)$$

Para $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$, substitui-se a Equação (4.31) na Equação (5.50):

$$t_c = -\frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} \quad (5.52)$$

Para determinar o ângulo da escora de betão α , para os dois intervalos de validade do ângulo γ , partindo da Equação (5.51) e (5.52), respetivamente, e reescrevendo as equações em ordem a $\cos \alpha$, vem:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\sigma_2^c p_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.53)$$

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\sigma_2^c p_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.54)$$

A relação entre o ângulo α e a força instalada na armadura transversal continua a ser traduzida pela equação (4.58). Desta forma e para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$, igualando a Equação (4.58) e a Equação (5.53) e (5.54), respetivamente, tendo em conta que $\gamma = \alpha + \beta$ (Equação (4.3)) e $\gamma' = \alpha - \beta$ (Equação (4.16)), fica:

$$\begin{aligned} \frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\cos \gamma p_0} &= \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) &= \frac{A_{st}f_{st} p_0}{(A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl})s} = F \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} -\frac{A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl}}{\cos \gamma p_0} &= \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) &= -\frac{A_{st}f_{st} p_0}{(A_{sl}f_{sl} + A_{pl}f_{pl})s} = -F \end{aligned} \quad (5.56)$$

Uma vez encontrado o novo parâmetro F (Equações (5.55) ou (5.56)), o ângulo α continua a ser calculado pela Equação (5.19). Assim, obtêm-se as três equações de equilíbrio para o GSVATM modificado: Equações (4.53), (5.51) (ou (5.52)) e (5.19).

De forma a ter-se em conta a deformação inicial induzida pelo pré-esforço na viga de betão armado, é necessário determinar a extensão inicial de tração na armadura de pré-esforço longitudinal $\varepsilon_{pl,i}$ e a extensão de compressão inicial, $\varepsilon_{l,i}$, a que a armadura ordinária fica

submetida. Para tal relembre-se o conceito de descompressão do betão já explicado no início do presente capítulo (e exposto na Secção 2.3.3, Figura 2.12), quando o momento torsor é aplicado a uma viga pré-esforçada surge uma força de tração longitudinal que contraria o estado de tensão instalado inicialmente no betão devido ao pré-esforço. Com o evoluir do carregamento exterior, a força de tração iguala a força de compressão inicial no betão e a partir deste momento (descompressão), a armadura de pré-esforço passa a contribuir como uma armadura ordinária para a resistência da viga à torção.

A extensão na armadura de pré-esforço é calculada pela Equação (5.57), sendo obtida pela soma da extensão de tração da armadura ordinária ε_{sl} (extensão induzida pelo momento torsor) com a extensão de descompressão:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{dec} + \varepsilon_{sl} \quad (5.57)$$

A extensão de descompressão ε_{dec} (Figura 2.12) é a soma da extensão de tração na armadura de pré-esforço, $\varepsilon_{pl,i}$, induzida pela aplicação do pré-esforço com a extensão na armadura ordinária longitudinal necessária para se atingir a descompressão (anular o efeito de compressão induzido nestas armaduras por consequência da aplicação do pré-esforço inicial). Desta forma, a extensão de descompressão ε_{dec} é calculada pela Equação (5.58) e a extensão de tração inicial nas armaduras de pré-esforço $\varepsilon_{pl,i}$ pode ser calculada através da Equação (5.59) onde se recorreu à Lei de Hooke uma vez que se pode considerar que até uma extensão limite proporcional (0,1%) a resposta da armadura é elástico-linear.

$$\varepsilon_{dec} = \varepsilon_{pl,i} + \varepsilon_{l,i} \quad (5.58)$$

$$\varepsilon_{pl,i} = \frac{f_{pl,i}}{E_p} \quad (5.59)$$

Na equação anterior $f_{pl,i}$ corresponde à tensão inicial na armadura de pré-esforço. Na sequência, falta apresentar a equação para o cálculo da extensão de compressão na armadura ordinária longitudinal devida ao pré-esforço:

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{A_{pl} f_{pl,i}}{A_{sl} (E_s - E_c) + (A_c - A_h - A_{pl}) E_c} \quad (5.60)$$

Tendo em conta que o procedimento de cálculo inicia a partir da descompressão das armaduras ordinárias, a extensão de tração efetiva na armadura ordinária transversal e longitudinal pode ser calculada através das Equações (4.67) e (4.68). A extensão de tração no tirante ε_{is}^c pode ser determinada a partir de uma relação de extensões e que é útil para a implementação do modelo, desta forma ε_{is}^c pode ser determinado novamente através da Equação (4.70).

No que se refere à relação constitutiva do betão à compressão torna-se necessário realizar uma correção no cálculo dos parâmetros de redução $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$, uma vez que é necessário determinar o parâmetro η que representa a relação entre as forças resistentes na direção longitudinal e transversal. Assim, tal como apresentado na Secção 2.3.3 deve ser considerada a contribuição da força resistente total, incluindo a participação da armadura ordinária longitudinal e da armadura longitudinal de pré-esforço, o parâmetro η deve ser calculado para este caso através da Equação (2.63).

5.4.1.2. Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$

Face as equações apresentadas ao longo desta secção e as relações constitutivas $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras e tracionado nos tirantes, bem como para as armaduras ordinárias e de pré-esforço tracionadas, apresenta-se o método de cálculo iterativo que formula o GSVATM modificado a vigas de betão com pré-esforço aderente. A aplicação do pré-esforço na viga induz um estado de compressão inicial nas armaduras ordinárias e um estado de tração inicial nas armaduras de pré-esforço. Deste modo, o algoritmo deve inicialmente calcular esta deformação inicial $\varepsilon_{l,i}$ para o cálculo da extensão na armadura de pré-esforço longitudinal que, através das equações, influencia o comportamento global da viga. Refere-se uma vez mais que o algoritmo de cálculo permite calcular o estado evolutivo, após a descompressão, de diversos parâmetros que caracterizam o comportamento da viga de betão pré-esforçado à torção. Os passos para o procedimento de cálculo encontram-se seguidamente listados.

- 1- Selecionar ε_{2s}^c . Assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e β , uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$.
- 2- Determinar $\varepsilon_{l,i}$ através da Equação (5.60).
- 3- Calcular k_2^c pela Equação (2.21) se $\varepsilon_{2s}^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{2s}^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$, k_1^c pela Equação (4.51) se $\varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr}$ ou pela Equação (4.52) se $\varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr}$, determinar a tensão nas escoras σ_2^c a partir da Equação (2.20) e nos tirantes σ_1^c pela Equação (4.50).
- 4- Calcular a força de compressão na escora C pela Equação (4.43), a força de tração no tirante T através da Equação (4.44), a força resultante R pela Equação (4.1) e os ângulos β e γ pelas Equações (4.2) e (4.3), respetivamente.
- 5- Determinar o momento torsor M_T pela Equação (4.53), a extensão na armadura ordinária transversal ε_{st} pela Equação (4.67), na armadura ordinária longitudinal ε_{sl} pela Equação (4.68) e na armadura longitudinal de pré-esforço ε_{pl} pela Equação (5.57), bem como a tensão nas armaduras ordinárias f_{sl} e f_{st} através da Equação (2.23) da Tabela 2.2 e na

armadura longitudinal de pré-esforço f_{pl} pela Equação (2.64) se $\varepsilon_{pl} \leq \varepsilon_{pl0,1\%}$ ou pela Equação (2.65) se $\varepsilon_{pl} > \varepsilon_{pl0,1\%}$.

- 6- Verificar t_c pela Equação (5.51) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou pela Equação (5.52) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
 - 7- Verificar α através da Equação (5.19), em que o parâmetro F deve ser calculado pela Equação (5.55) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e pela Equação (5.56) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
 - 8- Verificar ε_{1s}^c pela Equação (4.70).
 - 9- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva apresentada na Tabela 2.1 e o parâmetro η pela Equação (2.63).
 - 10- Se:
 - 10.1 - Os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 3) a 9) até que estes valores converjam.
 - 10.2- Caso os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β forem próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.
 - 11- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (4.69). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $M_T - \theta$ de coordenadas $(\theta; M_T)$;
 - 12- Selecionar outros valores de ε_{2s}^c e repetir os Passos 3) a 11) para cada valor de ε_{2s}^c por forma a obter vários pontos $(\theta; M_T)$ que permitam desenhar a previsão da curva $M_T - \theta$.
- Na Figura 5.8, encontra-se resumido, na forma de um diagrama de fluxo, o processo iterativo geral.

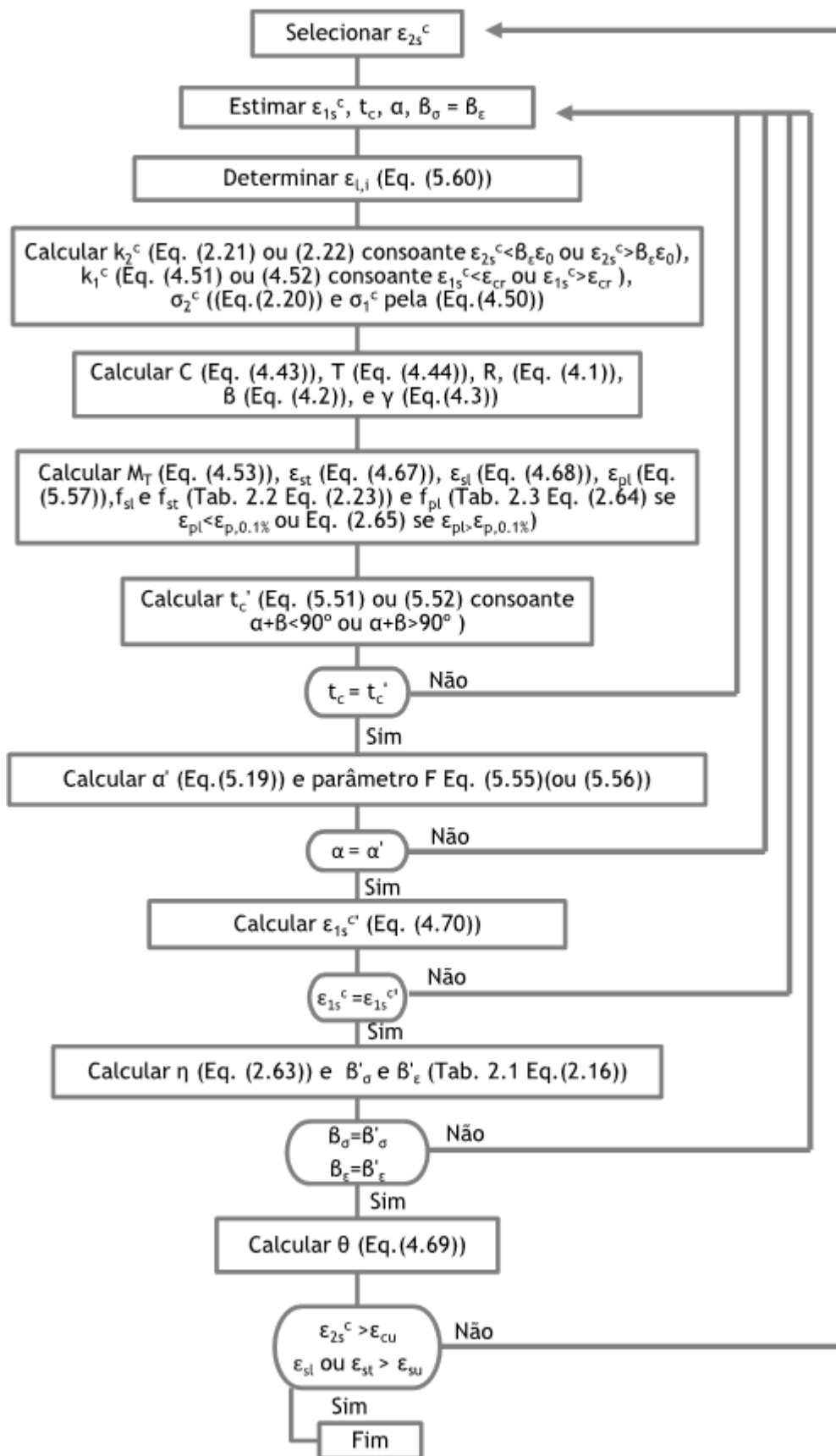


Figura 5.8 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para vigas com pré-esforço longitudinal para o cálculo da curva $M_T - \theta$

5.4.2. Pré-esforço externo ou não aderente

A metodologia adotada nesta secção para simular o efeito do confinamento axial em vigas de betão pré-esforçado com cabos exteriores e/ou não aderentes sujeitas à torção é uma combinação das metodologias apresentadas na Secção 5.3 e 5.4.1, ou seja confinamento axial + vigas pré-esforçadas. Por este motivo, ao longo da presente secção apenas são apresentadas as equações do GSVATM que sofrem as necessárias alterações. Esta derivação adicional tem como premissa que a nova formulação deve coincidir com a formulação do GSVATM + Confinamento axial (Secção 5.3) se se considerar o pré-esforço nulo e deve coincidir com a formulação do GSVATM + Pré-esforço aderente (Secção 5.4.1) se neste caso se considerar o confinamento axial nulo.

5.4.2.1 Vigas com pré-esforço longitudinal e sujeitas à torção

Na presente secção apresenta-se o procedimento de cálculo para calcular a curva teórica $M_T - \theta$ para vigas de betão pré-esforçado com cabos não aderentes ou exteriores e considerando o efeito do confinamento axial induzido pela rigidez axial dos cabos de pré-esforço na viga quando esta tende a alongar devido à aplicação do momento torsor. Para tal, segue-se a mesma linha de raciocínio para as formulações apresentadas nas Secções 5.3 e 5.4.1.

A partir das equações (5.51) e (5.52) que permitem determinar a espessura efetiva da escora, t_c para as duas situações $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$ de uma viga de betão pré-esforçado aderente, e considerando que o confinamento axial também deve ser tido em conta no equilíbrio longitudinal, as equações referidas atrás ficam:

$$t_c = \frac{A_{st} f_{st} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.61)$$

$$t_c = -\frac{A_{st} f_{st} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.62)$$

Para determinar o ângulo da escora de betão α para os dois intervalos de validade do ângulo γ , deve ter-se em conta o parâmetro F e, partindo das Equações (5.55) e (5.56) tendo em consideração a presença do confinamento axial, obtém-se:

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st} f_{st} p_0}{(A_{st} f_{st} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca})s} = F, \quad \gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ \quad (5.63)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st} f_{st} p_0}{(A_{st} f_{st} + A_{pl} f_{pl} + F_{ca})s} = -F, \quad \gamma = \alpha + \beta > 90^\circ \quad (5.64)$$

Quanto às equações de equilíbrio do GSVATM modificado para vigas de betão com pré-esforço exterior e/ou não aderente, mantém-se a Equação (4.53) para o cálculo do momento torsor, a espessura efetiva da escora de betão pode ser calculada através da Equação (5.61) (ou (5.62)) e o ângulo α a Equação (5.19), com o parâmetro F traduzido pelas Equações (5.63) ou (5.64).

De forma a ter-se em conta o efeito do confinamento axial que os cabos de pré-esforço induzem devido à sua rigidez axial, em consequência da falta de aderência ao betão, é necessário considerar essa componente no cálculo da extensão inicial de compressão que corresponde ao encurtamento da armadura longitudinal, $\varepsilon_{l,ca}$, através da Equação (5.40). Onde, F_{ca} traduz a força de confinamento axial resultante da existência da rigidez axial das armaduras de pré-esforço e pode ser calculada através da Equação (5.41). A única alteração que surge para esta nova situação de confinamento é o cálculo da rigidez de confinamento que é função das características do cabo de pré-esforço. Desta forma, k pode ser calculado através da seguinte equação:

$$k = \frac{E_p A_{pl}}{l_p} \quad (5.65)$$

Este modelo deve ser encarado como incorporando duas fases distintas, tal como já referido nos modelos apresentados na Secção 2.3 e 5.3.2. Inicialmente, o algoritmo deve calcular a extensão na armadura ordinária longitudinal livre de restrições e submetida à torção pura, uma vez que a esta extensão corresponde ao alongamento total da viga em situação livre Δl (Equação 5.42). Assim, ε_{sl} é calculada através do GSVATM original cujo procedimento de cálculo foi apresentado na Secção 4.2.6 (Figura 4.7). Posto isto, inicia-se o procedimento de cálculo exposto na presente secção, em que a restrição axial é proveniente dos cabos de pré-esforço. Deste modo, deve recalculer-se o encurtamento que a fibra da face exterior da escora de betão, $\varepsilon_{2s,ca}^c$, e do tirante de betão, $\varepsilon_{1s,ca}^c$, sofrem devido ao confinamento axial, os quais podem ser calculados através das equações (5.43) e (5.44). Posteriormente, deve encontrar-se a respetiva extensão efetiva à superfície $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e $\varepsilon_{1s,ef}^c$ pelas Equações (5.45) e (5.46).

O procedimento de cálculo inicia a partir da descompressão das armaduras ordinárias pelo mesmo motivo exposto nos modelos das secções anteriores. A extensão de tração efetiva na armadura ordinária longitudinal e transversal pode ser calculada através das Equações (4.67) e (4.68), respetivamente, enquanto que a extensão de tração no tirante ε_{1s}^c pode ser determinada a partir da Equação (4.70).

5.4.2.2. Descrição do algoritmo de cálculo - Cálculo da curva $M_T - \theta$

O fluxograma do algoritmo de cálculo para o GSVATM modificado a vigas com pré-esforço longitudinal exterior e/ou não aderente encontra-se apresentado na Figura 5.9. Para o cálculo da curva $M_T - \theta$ deve seguir-se o seguinte procedimento de cálculo:

- 1- Seleccionar ε_{2s}^c . Assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e β uma vez que para o modelo utilizado $\beta_\sigma = \beta_\varepsilon$.

- 2- Determinar F_{ca} pela Equação (5.41), $\varepsilon_{l,i}$ através da Equação (5.60), $\varepsilon_{l,ca}$ através da Equação (5.40) e $\varepsilon_{2s,ef}^c$ pela Equação (5.45) $\varepsilon_{1s,ef}^c$ pela Equação (5.46).
- 3- Substituir ε_{2s}^c por $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e ε_{1s}^c por $\varepsilon_{1s,ef}^c$.
- 4- Calcular k_2^c pela Equação (2.21) se $\varepsilon_{2s}^c \leq \beta_e \varepsilon_0$ ou pela Equação (2.22) se $\varepsilon_{2s}^c > \beta_e \varepsilon_0$, k_1^c pela Equação (4.51) se $\varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr}$ ou pela Equação (4.52) se $\varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr}$, determinar a tensão nas escoras σ_2^c a partir da Equação (2.20) e nos tirantes σ_1^c pela Equação (4.50).
- 5- Calcular a força de compressão na escora C pela Equação (4.43), a força de tração no tirante T através da Equação (4.44), a força resultante R pela Equação (4.1) e os ângulos β e γ pelas Equações (4.2) e (4.3), respetivamente.
- 6- Determinar o momento torsor M_T pela Equação (4.53), a extensão na armadura ordinária transversal ε_{st} pela Equação (4.67), na armadura ordinária longitudinal ε_{sl} Equação (4.68) e na armadura longitudinal de pré-esforço ε_{pl} pela Equação (5.57) bem como a tensão nas armaduras ordinárias f_{sl} e f_{st} através da Equação (2.23) da Tabela 2.2 e na armadura longitudinal de pré-esforço f_{pl} pela Equação (2.64) se $\varepsilon_{pl} \leq \varepsilon_{pl0,1\%}$ ou pela Equação (2.65) se $\varepsilon_{pl} > \varepsilon_{pl0,1\%}$.
- 7- Verificar t_c pela Equação (5.61) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ ou pela Equação (5.62) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
- 8- Verificar α através da Equação (5.19) onde o parâmetro F deve ser calculado pela Equação (5.63) se $\gamma = \alpha + \beta \leq 90^\circ$ e pela Equação (5.64) se $\gamma = \alpha + \beta > 90^\circ$.
- 9- Verificar ε_{1s}^c pela Equação (4.70).
- 10- Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_e$ através da Equação (2.16) definida pela lei constitutiva apresentada na Tabela 2.1 e o parâmetro η pela Equação (2.63).
- 11- Se:
 - 11.1 - Os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β não são próximos dos valores assumidos no Passo 1), então deve repetir-se os Passos 4) a 10) até que estes valores convirjam.
 - 11.2- Caso os valores calculados de t_c , α , ε_{1s}^c e β forem próximos dos valores assumidos então deve proceder-se ao próximo Passo.
- 12- Calcular a rotação de torção por unidade de comprimento θ através da Equação (4.69). Assim obtém-se um ponto pertencente à curva teórica $M_T - \theta$ de coordenadas $(\theta; M_T)$;
- 13- Selecionar outros valores de $\varepsilon_{2s,ef}^c$ e repetir os Passos 4) a 12) para cada valor de $\varepsilon_{2s,ef}^c$ por forma a obter vários pontos $(\theta; M_T)$ que permitam desenhar a curva $M_T - \theta$.

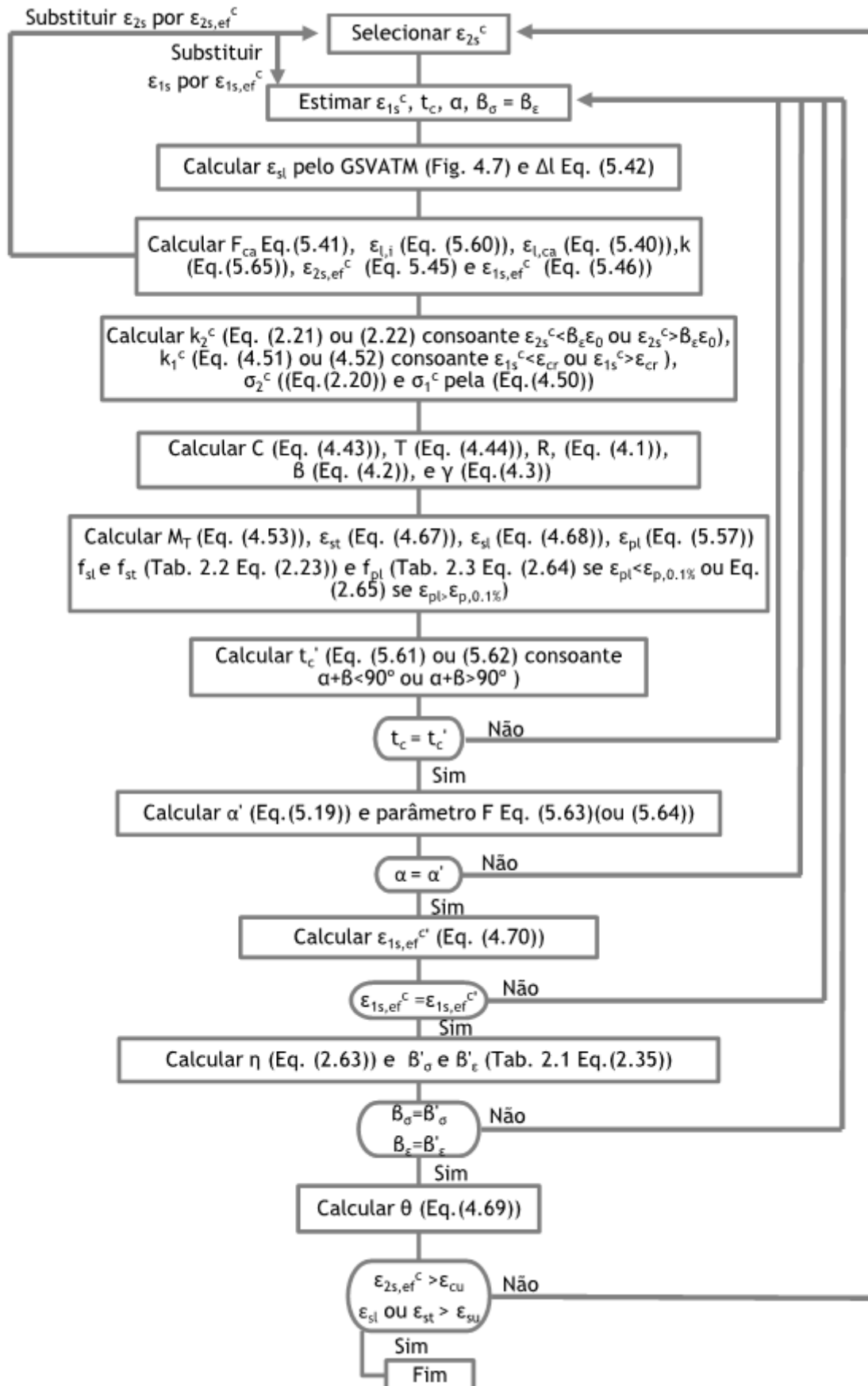


Figura 5.9 - Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo do GSVATM modificado para vigas com pré-esforço longitudinal exterior e/ou não aderente para o cálculo da curva $M_T - \theta$

5.5 Considerações finais

O GSVATM original permite calcular não só a curva $M_T - \theta$ ao longo de todas as fases comportamentais das vigas à torção como também calcular parâmetros suplementares caracterizadores do estado da viga (extensões e tensões nas armaduras, no betão comprimido e tracionado, entre outros). No entanto, não são correntes as situações em que uma viga se encontre sujeita a um momento torsor puro e livre de restrições impostas pelas condições de apoio ou pelas ligações a elementos estruturais adjacentes. Por esta razão, no presente capítulo foram apresentadas e descritas com algum detalhe as alterações realizadas ao GSVATM original de forma a generalizar o modelo para situações em que a viga se encontra simultaneamente sujeita a estados uniformes de tensões axiais. Para tal, foi incorporado o efeito de um esforço axial externo (compressão ou tração), o efeito do pré-esforço longitudinal e o efeito do confinamento axial. Estes novos modelos constituem uma extensão do GSVATM original apresentado no Capítulo 4.

Na abordagem inicial da reformulação do GSVATM a vigas de betão com estado axial de tensão uniforme foram implementadas diferentes metodologias. Por exemplo, foi tentada uma abordagem de incorporar diretamente o estado de deformação inicial devido aos estados de tensão no modelo, através da modificação das leis constitutivas dos materiais. Outra abordagem consistiu em inserir este mesmo estado de deformação inicial nas equações de compatibilidade através da modificação do estado de deformação no círculo de Mohr. No entanto, estas abordagens geraram grandes problemas de convergência do algoritmo para valores baixos de carregamento e, por isso, foram substituídas pela abordagem apresentada ao longo deste capítulo. Uma razão adicional que contribuiu para o abandono das abordagens iniciais esteve relacionada com o facto do estado comportamental em análise corresponder ao inicial, no início do carregamento. Tal estado não é relevante visto estar associado a um comportamento linear inicial na resposta da viga, traduzida através da curva $M_T - \theta$. Desta forma, face à formulação do GSVATM, a metodologia que traduziu de forma adequada o estado axial de tensão em vigas de betão armado, em termos comportamentais e com menores problemas de convergência do algoritmo, foi a metodologia exposta ao longo do presente capítulo.

Capítulo 6 - Análise Paramétrica

6.1. Considerações gerais

Neste capítulo é apresentada uma análise paramétrica que tem por objetivo avaliar a influência do estado de tensão axial externo no comportamento global de vigas à torção. Para tal, utiliza-se como base a viga de referência A2 de Bernardo [20], cuja caracterização é realizada no início do presente capítulo. As curvas teóricas comportamentais da viga A2 sujeita aos diferentes estados de tensão axial uniforme são obtidas através do aplicativo Torque, uma vez que os algoritmos apresentados ao longo do Capítulo 5 foram inseridos neste aplicativo.

Neste capítulo é apresentada inicialmente uma análise paramétrica da influência do estado de tensão axial de tração e compressão no comportamento global à torção da viga A2, tendo por base a evolução da curva teórica $M_T - \theta$ bem como a evolução de alguns parâmetros caracterizadores do estado interno de deformação do modelo de treliça espacial (GSVATM), designadamente: a extensão na escora e no tirante de betão, a extensão na armadura longitudinal e transversal, e o ângulo de inclinação da escora.

Posteriormente, através do estudo das curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga de referência realiza-se uma análise da influência do nível de confinamento axial no comportamento global à torção, sendo analisado o este efeito na cedência das armaduras ordinárias longitudinais e transversais, bem como no momento tursor de fissuração.

Por fim, é ainda analisada a evolução da resistência da viga à torção, a rigidez no estado fissurado e a ductilidade da viga A2, mediante o estudo da curva $M_T - \theta$, quando sujeita a diversos níveis de pré-esforço longitudinal (uniforme). Esta análise irá centrar-se essencialmente no comportamento último da viga pré-esforçada à torção.

Refira-se que a validação dos modelos teóricos apresentados no Capítulo 5, a partir dos quais são realizadas as análises paramétricas apresentadas ao longo do presente capítulo, é feita no Capítulo 7 mediante análises comparativas com resultados experimentais e numéricos.

6.2. Caracterização da viga de referência - viga A2

Para servir de base à análise paramétrica que é desenvolvida ao longo do presente capítulo, tomou-se como base a viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20], à semelhança do realizado em estudos anteriores [116] [32] [31] [55]. Considerou-se que a referida viga possui uma geometria corrente para o problema da torção e características mecânicas compatíveis com um comportamento típico à torção, tal como o apresentado na Figura 1.8. A viga A2, de resistência normal, possui uma secção quadrangular vazada, uma taxa total de armadura de torção moderada e as armaduras longitudinal e transversal equilibradas. Estas características são compatíveis com um comportamento dúctil à torção, tendo este aspeto sido considerado importante na escolha da viga de referência para o presente estudo em questão. De facto, por estar diretamente relacionada com a capacidade de redistribuição de esforços no estado último comportamental e com a segurança estrutural, a ductilidade em torção é também uma propriedade importante a ser analisada no que se refere ao efeito do estado axial de tensão uniforme para as diversas situações apresentadas no Capítulo 5, designadamente: a existência de um estado de tensão axial de compressão ou tração externo centrado, a existência de pré-esforço longitudinal centrado e a existência de confinamento axial.

A viga A2, com secção quadrada vazada (com 0,60 m de dimensão exterior e uma espessura de parede de 0,1067 m) e com cerca de 6,50 m de comprimento total, foi ensaiada à torção até à rotura por Bernardo em 2003 [20] num dispositivo de ensaio que garantiu o encastramento à torção numa das extremidades e a aplicação de um momento torsor na extremidade oposta. O ensaio foi realizado com controlo de deformação, tendo a viga sido sujeita a um momento torsor constante ao longo de todo o seu comprimento (desprezando a influência do peso próprio da mesma para os níveis mais elevados de carregamento). Durante o ensaio, o referido autor registou o nível de momento torsor aplicado na viga, as extensões nas armaduras de torção em 3 secções, bem como a rotação transversal em 10 secções localizadas ao longo do seu comprimento. A Figura 6.1 ilustra a geometria geral da viga de referência A2. Os extremos da viga incorporam cabeças com a geometria adequada para acomodar os pernos metálicos do dispositivo de ensaio, os quais aplicam o momento torsor numa extremidade e restringem a rotação de torção na extremidade oposta.

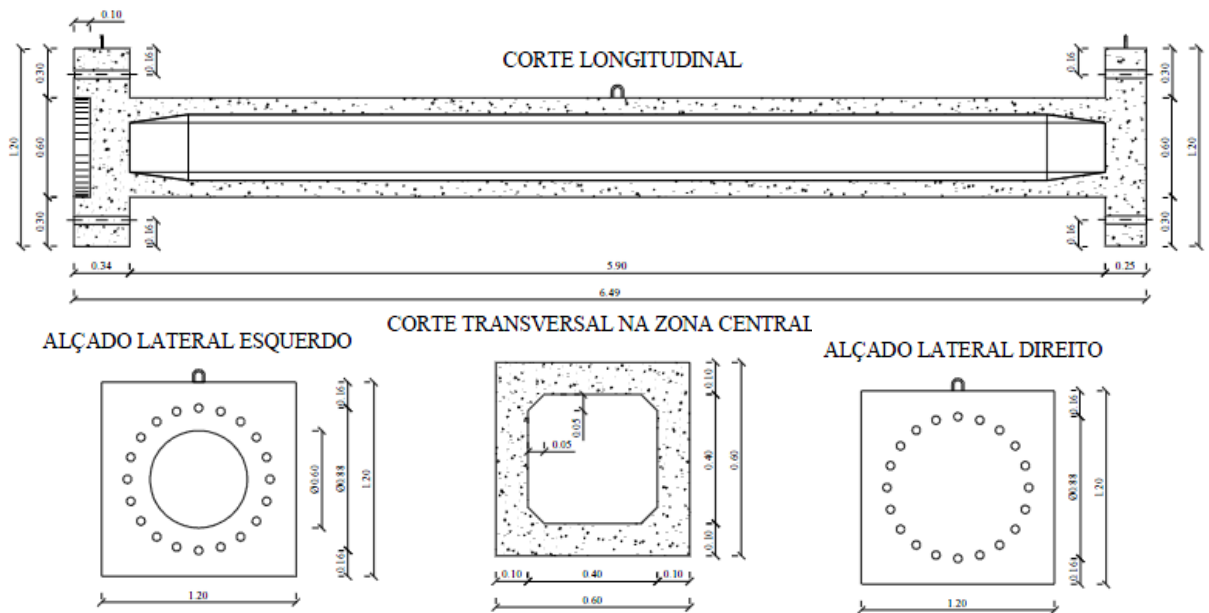
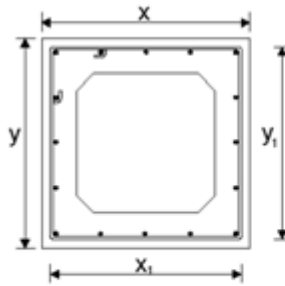


Figura 6.1 - Geometria da viga de referência A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20]

No corte transversal da Figura 6.1 é possível observar-se a existência de chanfros nos cantos interiores, os quais permitiram reduzir o efeito desfavorável da concentração de tensões tangenciais, em virtude da existência de um fluxo circulatório de corte, e evitar uma rotura prematura da viga. No corte longitudinal apresentado na Figura 6.1, observa-se também, nas zonas extremas, um aumento gradual da espessura das paredes. Esta zona tem por objetivo assegurar uma melhor degradação das tensões, “suavizando” a transição entre os topos e o corpo da viga para que ocorra de forma menos brusca, evitando desta forma que a rotura da viga ocorresse na zona extrema.

A pormenorização e as características mecânicas da viga de referência A2 encontram-se resumidas na Figura 6.2. O facto de a viga A2 apresentar secção vazada foi mais um fator que levou à escolha desta viga como referência para este estudo, uma vez que é o tipo de secção considerada como mais efetiva a ser utilizada em estruturas submetidas a elevados momentos torsores. Note-se que, por exemplo, Hsu em 1968 [63] mostrou que o núcleo de betão não tem uma influência notável na resistência à torção de vigas de betão armado.



Características geométricas:

$$x = 60,0 \text{ cm}; y = 60 \text{ cm}$$

$$x_1 = 53,90 \text{ cm}; y = 53,10 \text{ cm}$$

$$t = 10,67 \text{ cm}$$

Betão:

$$f_{cm} = 47,34 \text{ MPa};$$

$$\varepsilon_0 = 0,2\%;$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,35\%$$

$$E_c = 36,10 \text{ GPa}$$

Armadura longitudinal:

$$A_{sl} (4\phi 12 + 12\phi 10) = 13,95 \text{ cm}^2$$

$$\rho_l = 0,39\%$$

Armadura transversal:

$$A_{st} (\phi 8 / 8 \text{ cm}) = 6,28 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$\rho_t = 0,37\%$$

Aço:

$$f_{ty} = 672,42 \text{ MPa}; \varepsilon_{ty} = 0,3362\%; \varepsilon_{tu} = 1,00\%$$

$$f_{ty} = 695,90 \text{ MPa}; \varepsilon_{ty} = 0,3479\%; \varepsilon_{tu} = 1,00\%$$

$$E_s = 200 \text{ GPa}; \rho_{tot} = 0,76\%$$

Figura 6.2 - Pormenorização e características mecânicas da viga A2 [20]

Tal como se pode observar na Figura 6.2, a viga A2 é constituída por um betão de resistência normal uma vez que a resistência uniaxial do betão à compressão, f_{cm} , é de 47,34 MPa. Quanto às armaduras, existe um equilíbrio volumétrico entre as armaduras na direção longitudinal e transversal. Esta situação é a mais usual para o caso da torção pura.

Na Figura 6.3 apresenta-se o traçado da curva $M_T - \theta$ experimental e teórica prevista pelo GSVATM da viga A2 [20]. A curva teórica foi obtida com o auxílio do aplicativo Torque, onde se encontra implementado o algoritmo original para vigas de betão armado apresentado na Secção 4.2.6 (Figura 4.7). Foram consideradas as leis constitutivas para os materiais propostas por Belarbi e Hsu (1991) e Hsu e Zhang (1998) para o betão à compressão e respetivos fatores de redução [17][18][127], Jeng e Hsu (2009) para o betão à tração nos tirantes [74] e Belarbi e Hsu (1994) para as armaduras ordinárias à tração [17]. A Tabela 6.1 sintetiza a comparação dos pontos teóricos e experimentais característicos da curva $M_T - \theta$, designadamente os pontos correspondentes ao momento torsor de fissuração ($\theta_{cr}; M_{T,cr}$) e ao momento torsor resistente ($\theta_{M_{Tu}}; M_{Tu}$).

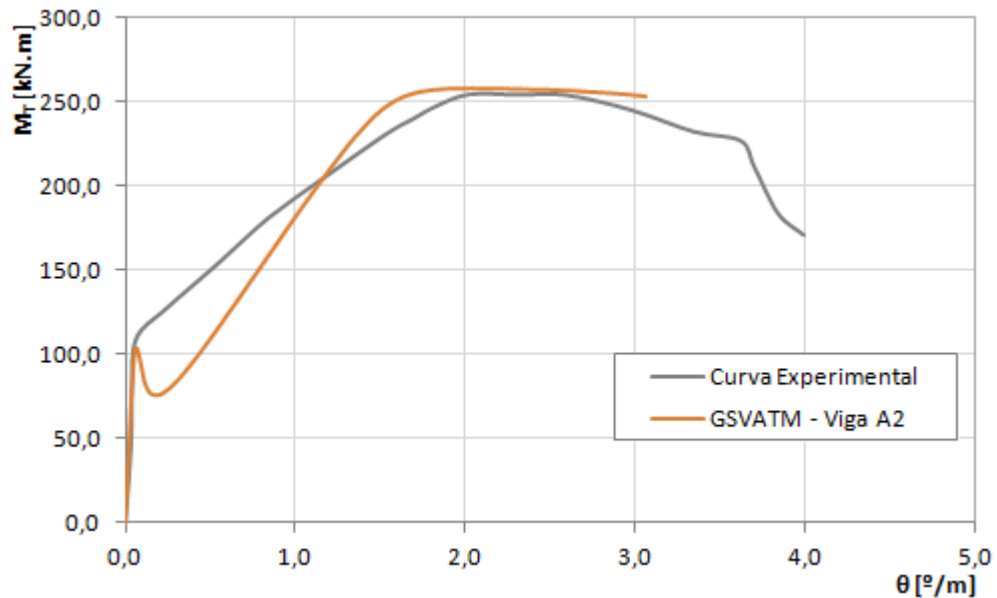


Figura 6.3 - Curvas $M_T - \theta$ para a viga A2

É possível observar-se na Figura 6.3 que a previsão teórica da curva $M_T - \theta$ obtida através do GSVATM é bastante próxima da curva $M_T - \theta$ experimental. O decréscimo do momento torsor resistente que é observável após a fissuração da viga, tal como referido anteriormente e explicado por Bernardo em 2015 [27], deve-se à forma da lei constitutiva $\sigma - \varepsilon$ que caracteriza o comportamento do betão à tração. Na Tabela 6.1 pode observar-se que o GSVATM fornece resultados bastante aceitáveis para a previsão teórica, tanto para o ponto de fissuração como para o ponto correspondente à resistência, uma vez que o quociente entre o parâmetro teórico e experimental apresenta um valor próximo da unidade.

Tabela 6.1 - Análise comparativa dos resultados teóricos do GSVATM com os experimentais da viga A2

$M_{Tcr,exp}$ [kN/m]	109,495	$\theta_{cr,exp}$ [°/m]	0,064	$M_{Tu,exp}$ [kN/m]	254,079	$\theta_{u,exp}$ [°/m]	2,019
$M_{Tcr,th}$ [kN/m]	101,752	$\theta_{cr,th}$ [°/m]	0,0556	$M_{Tu,th}$ [kN/m]	257,726	$\theta_{u,th}$ [°/m]	2,037
$\frac{M_{Tcr,exp}}{M_{Tcr,th}}$	1,076	$\frac{\theta_{cr,exp}}{\theta_{cr,th}}$	1,151	$\frac{M_{Tu,exp}}{M_{Tu,th}}$	0,986	$\frac{\theta_{u,exp}}{\theta_{u,th}}$	0,991

Tendo por base o apresentado anteriormente, considera-se que a viga de referência A2 é adequada para ser modelada à torção tendo por base o GSVATM modificado para ter em conta a influência de um estado axial de tensão uniforme, podendo a mesma servir de base para as análises paramétricas seguidamente apresentadas.

6.3. Análise paramétrica com resultados teóricos - GSVATM modificado

6.3.1. Influência do estado de tensão axial externo no comportamento da viga A2 à torção

Nesta secção procede-se inicialmente a uma análise comparativa entre as curvas teóricas $M_T - \theta$ referentes à viga A2 e calculadas para diferentes níveis de tensão axial de compressão e de tração. As curvas foram calculadas com o auxílio do aplicativo Torque tendo por base o algoritmo de cálculo apresentado na Figura 5.3. Para estabelecer um limite superior ao estado axial de tensão uniforme externo de compressão foi utilizado o Eurocódigo 2 [50]. Tendo por base o disposto na Cláusula 7.2(3) do EC2, considera-se que se pode assumir uma resposta aproximadamente linear do betão à compressão desde que a tensão não exceda $0,45f_{ck}$. Tendo por base este limite superior, foram estabelecidos vários níveis para o estado axial de tensão de compressão, os quais se encontram apresentados na Tabela 6.2. Para a situação com estado axial de tensão de tração, limitou-se a tensão ao valor correspondente à resistência média do betão à tração, f_{ctm} , por forma a apenas analisar a contribuição linear no betão antes da fissuração. Os níveis para o estado axial de tensão de tração considerados para a análise paramétrica estão apresentados na Tabela 6.3. Refere-se também que um critério adicional adotado para definir os limites para ambos os estados de tensão axial é que os mesmos devem ser baixos a moderados para que a rotura teórica da viga A2 seja condicionada pela torção e não pelo estado de tensão axial uniforme exterior imposto. A escolha do intervalo de tensões foi também fortemente influenciado pelos valores das tensões adotados por Ferreira [55] no seu estudo. Dado que na Secção 7.2.2 irá ser realizada uma análise comparativa com os resultados numéricos resultantes desse estudo, tem interesse que os níveis de tensão coincidam.

Tabela 6.2 - Níveis de tensão axial de compressão aplicados na viga A2

Nível de tensão	Tensão axial de compressão, σ_{ci}	Força resultante $N_{ext(C)}$
$0,05f_{ck}$	1,97 MPa	427,1 kN
$0,15f_{ck}$	5,90 MPa	1279,1 kN
$0,25f_{ck}$	9,84 MPa	2133,3 kN
$0,35f_{ck}$	13,77 MPa	2985,3 kN
$0,45f_{ck}$	17,70 MPa	3837,4 kN

Tabela 6.3 - Níveis de tensão axial de tração aplicados na viga A2

Nível de tensão	Tensão axial de tração, σ_{ti}	Força resultante $N_{ext(T)}$
$0,4f_{ctm}$	1,44 MPa	311,8 kN
$0,6f_{ctm}$	2,16 MPa	467,6 kN
$0,8f_{ctm}$	2,86 MPa	623,5 kN
$1,0f_{ctm}$	3,59 MPa	779,4 kN

A Figura 6.4 apresenta, para os diferentes níveis de tensão axial de compressão considerados, as curvas teóricas $M_T - \theta$ obtidas para a viga A2. Refere-se que, a partir do primeiro nível da tensão de compressão, as curvas $M_T - \theta$ apresentam uma forma incongruente nas Zonas 1 e 2 (zonas comportamentais que incluem os níveis baixos de carregamento, ver Figura 1.8), sobretudo para os maiores níveis de tensão de compressão. Após uma análise cuidadosa dos resultados, verificou-se a existência de problemas de convergência do modelo na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, que impossibilitaram o traçado completo das curvas teóricas $M_T - \theta$ nessa zona. Após algumas tentativas de revisão do procedimento de cálculo do GSVATM modificado, verificou-se que o problema encontra-se fortemente relacionado com a forma da lei constitutiva $\sigma - \varepsilon$ (Tabela 4.1) que caracteriza o comportamento do betão à tração e a qual foi implementada no modelo. Nesta lei constitutiva o pico de tensão de tração, ao qual corresponde um ponto com forte descontinuidade na variação da curva, origina problemas de convergência na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado. Este aspeto já tinha sido referido por Bernardo et al. em 2015 [27], tendo os autores concluído sobre a importância de calibrar adequadamente uma lei constitutiva média do betão à tração especificamente para elementos sujeitos ao corte ou torção. Não foram encontradas na literatura novas propostas para a referida lei constitutiva, pelo que não foi possível resolver os referidos problemas de convergência. Por este motivo, as análises de tendências apresentadas seguidamente incidem essencialmente na fase última comportamental da viga de referência, sendo apenas focadas as tendências para baixos níveis de carregamento quando as curvas $M_T - \theta$ estiverem completas nessa zona.

Comparando a curva $M_T - \theta$ da viga A2 com a curva para $\sigma_{ci} = 1,97\text{MPa}$, para a qual foi possível obter uma previsão teórica fiável para baixos níveis de carregamento, é possível observar-se um ligeiro aumento do momento torsor de fissuração. Esta tendência era esperada tendo em vista que o estado de tensão de compressão, ao contrariar o estado de tração imposto pelo momento torsor, atrasa a fissuração da viga. No estado não fissurado, é ainda possível observar que a rigidez da viga aparenta aumentar ligeiramente.

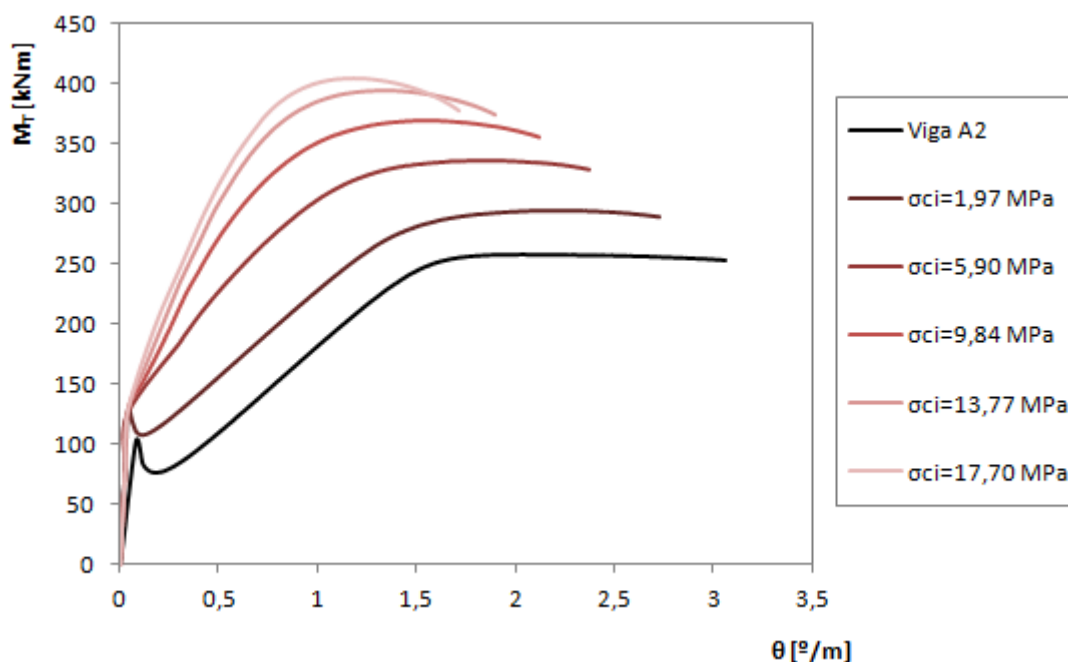


Figura 6.4 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial de compressão

Na Figura 6.4 é ainda observável que com o aumento da tensão axial de compressão o momento torsor máximo da viga aumenta bem como a rigidez no estado fissurado. Por sua vez, tanto a rotação correspondente à rotura da viga (rotação máxima) bem como a ductilidade em torção da viga diminuem, como era expectável. À semelhança do observado por Bernardo et al. em 2015 [32] para vigas a torção e também por Gomes e Rodrigues em 2011 em vigas sujeitas à flexão [57], [107], a influência de compressão centrada moderada é favorável para a capacidade resistente da viga tendo em conta que contraria o estado de tração imposto pelo momento torsor ou momento fletor. A diminuição da rotação máxima está relacionada com o aumento da rigidez da viga no estado fissurado, devido ao estado de confinamento axial criado pela compressão axial uniforme, e com a diminuição da ductilidade em virtude do betão comprimido nas escoras atingir mais rapidamente a sua extensão última.

Na Figura 6.5 apresentam-se as curvas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diferentes níveis de tensão axial de tração. Observam-se novamente problemas de convergência na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, desta vez para todos os níveis de estado de tensão de tração. Por esse motivo não é possível observar-se uma tendência clara para o momento torsor de fissuração. No entanto, é expectável que o mesmo reduza ligeiramente em virtude do estado de tensão de tração, ao se sobrepor ao estado de tração imposto pelo momento torsor, adiantar a fissuração da viga. A partir da Figura 6.5, observa-se ainda que as curvas apresentam um decréscimo notável da resistência à torção com o aumento da tensão de tração. Esta tendência era esperada visto que a existência de um estado axial adicional de tensão uniforme, e ao sobrepor este com o estado de tração imposto pelo momento torsor externo, reduz a resistência à torção da viga. O mesmo explica a observação de que a rigidez em estado fissurado da viga tende a reduzir, sobretudo para os maiores estados de tensão de

tração. Outro aspeto observável no traçado das curvas $M_T - \theta$ é que existe um aumento da rotação máxima (associado à rotura) e da ductilidade em torção até a um determinado nível da tensão de tração, ou seja, o estado de tração é favorável para a capacidade de deformação da viga à torção para os menores níveis da tensão externa imposta (até um valor inferior a $\sigma_{ti} = 2,157 \text{ MPa}$). Tal deve-se ao facto das armaduras longitudinais entrarem mais rapidamente em cedência e da sua deformação axial ser maior em resultado do estado axial de tração adicional. A partir do segundo nível de tensão de tração ($\sigma_{ti} = 2,157 \text{ MPa}$) a viga começa a apresentar uma diminuição considerável da sua capacidade de deformação bem como da sua ductilidade em torção, em virtude provavelmente do estado adicional de tração esgotar mais rapidamente a capacidade de deformação das armaduras longitudinais (as armaduras atingem mais rapidamente a extensão última de tração adotada no modelo, Figura 6.9), sendo a rotura da viga essencialmente condicionada pelas armaduras longitudinais.

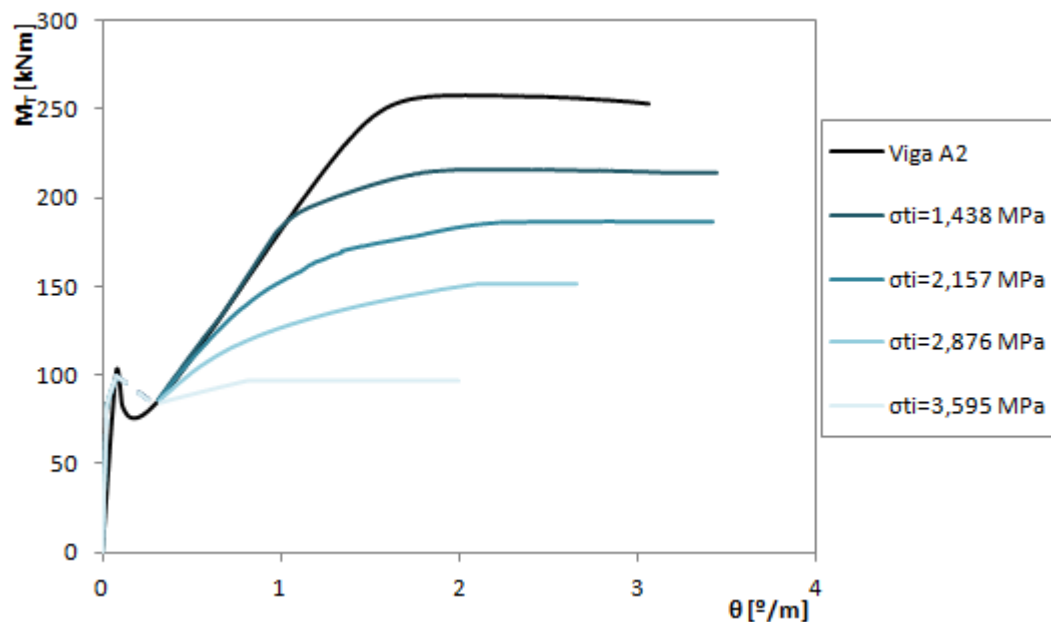


Figura 6.5 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial de tração

De seguida é analisada a influência do estado de tensão axial externo em diversos parâmetros que permitem caracterizar o comportamento dos materiais da viga de referência à torção. As curvas comportamentais apresentadas a seguir incluem os dois estados de tensão axial, o de compressão que se encontra representado com curvas em tons de castanho e o de tração que se encontra representado com curvas em tons de azul. Note-se que, tal como já referido no Capítulo 4 e 5, o modelo teórico possui como critério de paragem a extensão de rotura à superfície da escora ($\epsilon_{cu} = 0,0035$) ou a extensão convencional de roturas nas armaduras ordinárias ($\epsilon_{su} = 0,01$).

Nas Figuras 6.6 e 6.7 apresenta-se, respetivamente, a evolução da extensão à superfície na escora de betão, ε_{2s}^c , e no tirante de betão, ε_{1s}^c , com a deformação angular da secção, θ , para a viga de referência quando submetida a vários níveis dos dois estados axiais de tensão de compressão e de tração. Tomando-se como referência a curva relativa à situação livre de tensões axiais externas (curva a preto - viga A2), o traçado das curvas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ inicia de forma diferente se a viga se encontrar sujeita a um estado de tensão de compressão ou de tração. É importante referir que o estado de tensão externo é constante e aplicado desde o início do carregamento, desta forma é imposta uma deformação inicial da escora de betão, ou seja, no caso do estado de tensão de compressão a extensão inicial à superfície na escora de betão é igual ao valor da deformação inicial induzida pela compressão. Por isso se justifica que, na Figura 6.6, se observe uma extensão inicial à superfície da escora de betão que aumenta com o nível de compressão. É ainda possível observar-se que o ponto inicial das curvas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ também se desloca segundo o eixo da rotação da secção transversal, aumentando a rotação inicial com o nível de tensão aplicado. Esta observação já foi explicada anteriormente e está relacionada com o facto do modelo apenas iniciar os cálculos a partir da descompressão da viga, a qual corresponde a um dado momento torsor ao qual está associada uma deformação inicial de torção.

Tendências similares às anteriormente descritas são observadas na Figura 6.7 para a extensão à superfície do tirante de betão para o estado axial de tensão de tração. Os valores iniciais que definem as coordenadas do primeiro ponto, os quais aumentam com o nível de tensão, resultam do estado inicial de tensão de tração o qual induz uma deformação inicial na viga.

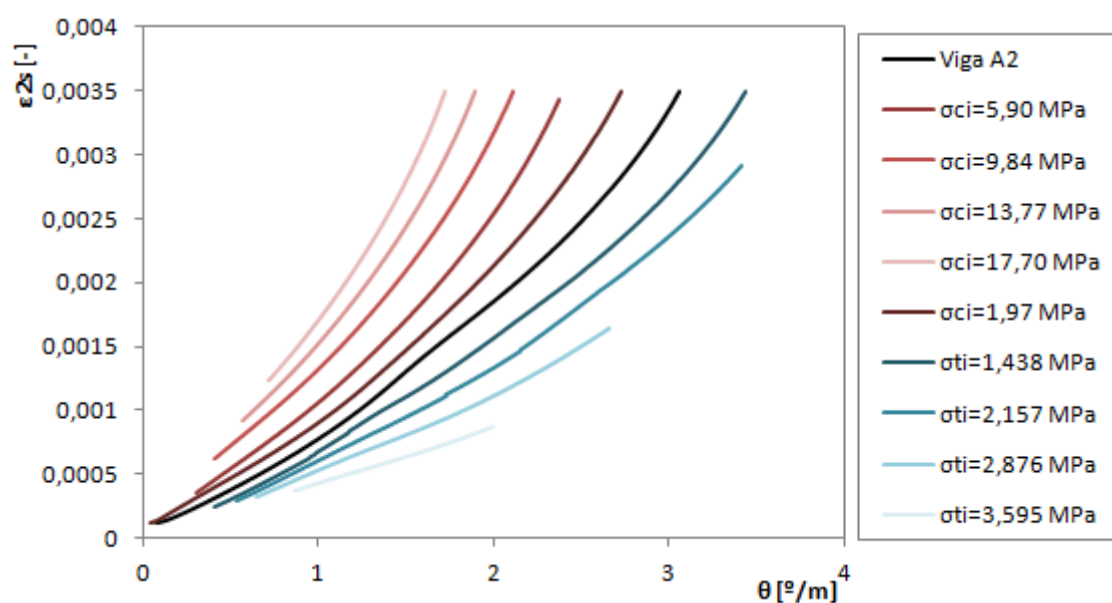


Figura 6.6 - Curvas teóricas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial (compressão e tração)

As Figuras 6.6 e 6.7 mostram que, à medida que o nível do estado axial de tensão de compressão vai aumentando, a viga esgota mais rapidamente a capacidade resistente do betão comprimido na escora uma vez que a rotação última da secção transversal da viga é cada vez menor. Esta observação confirma a justificação anteriormente exposta para explicar as tendências observadas na Figura 6.4 e associadas à capacidade de deformação da viga.

Analisando-se agora a influência do estado axial de tensão de tração na extensão à superfície do tirante e da escora de betão, podem observar-se tendências globalmente idênticas às observadas para o caso compressão. O estado de tração externo constante provoca uma deformação inicial no tirante de betão e na armadura longitudinal. Por esta razão, na Figura 6.7 observa-se que a extensão inicial à superfície no tirante de betão é cada vez maior com o aumento da tensão de tração. As curvas $\varepsilon_{1s}^c - \theta$ mostram que com o aumento do nível de tração aumenta a sollicitação do tirante de betão, mas a extensão última no tirante de betão diminui. Para justificar esta observação recorde-se que este estado induz um estado de tração adicional que se sobrepõe ao induzido pelo momento torsor, pelo que os elementos que se encontram solicitados à tração esgotam mais rapidamente a sua capacidade resistente de deformação.

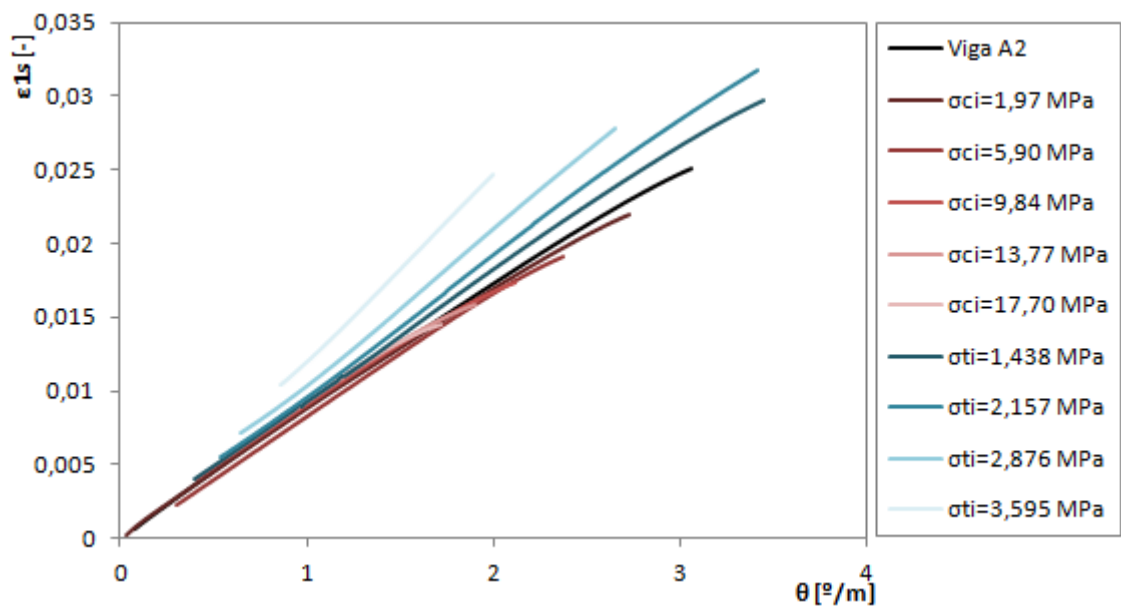


Figura 6.7 - Curvas teóricas $\varepsilon_{1s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial (compressão e tração)

A Figura 6.8 ilustra a evolução da inclinação da escora de betão com a extensão à superfície da escora de betão, $\alpha - \varepsilon_{2s}^c$, para a viga A2 quando submetida aos dois estados axiais de tensão. Tal como esperado, quando a viga se encontra livre do estado de tensão externo, o ângulo da escora de betão ronda os 45°, o que é explicável uma vez que as armaduras longitudinal e transversal encontram-se equilibradas na viga A2.

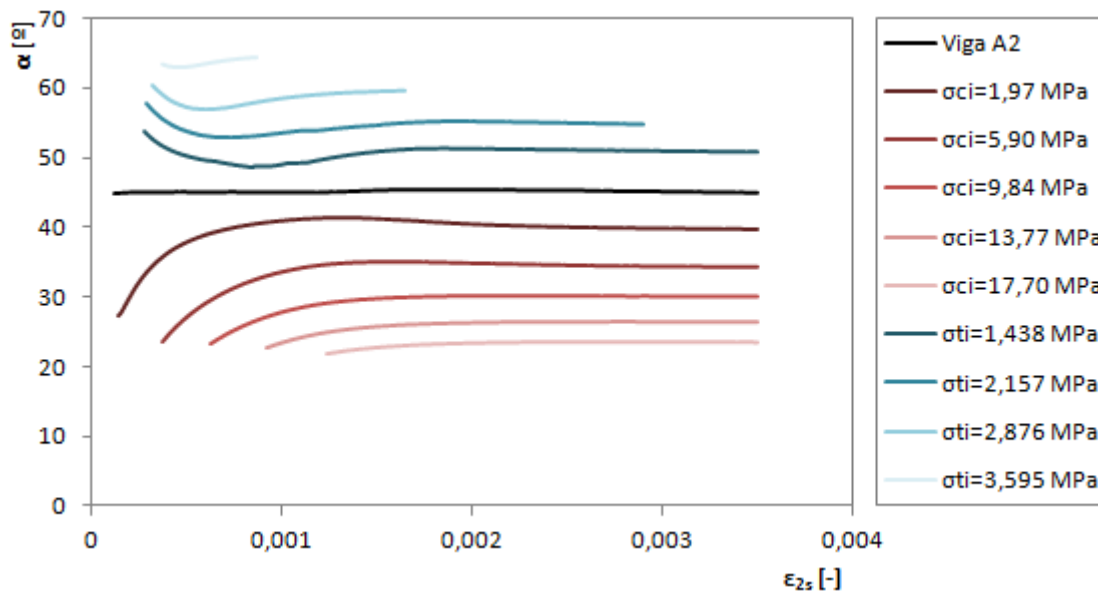


Figura 6.8 - Curvas teóricas $\alpha - \varepsilon_{2s}^c$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial (compressão e tração)

Para o caso da viga A2 com um estado axial de tensão externo observa-se variações no valor da inclinação das escoras. Em particular, para os primeiros níveis de tensão, quer de compressão ou de tração, a variação do ângulo apresenta uma maior variação. A diminuição do ângulo das escoras para a situação de compressão era expectável uma vez que segue a mesma tendência observada por Bernardo et al. em 2015 [32]. Esta observação está de acordo com o código do ACI [6], o qual prescreve uma redução do ângulo das escoras de betão para vigas de betão pré-esforçado sujeitas à torção. Seguindo naturalmente uma tendência oposta, observa-se que, para o caso da tração, o ângulo da escora de betão aumenta relativamente à viga de referência. Tanto para um estado de tensão de compressão como para o de tração, os desvios do ângulo em relação à viga de referência aumentam com o respetivo nível de tensão axial.

As Figuras 6.9 e 6.10 apresentam, respetivamente, a evolução das curvas da extensão na armadura longitudinal, ε_{sl} , e transversal, ε_{st} , com a rotação da secção transversal, θ . No caso do estado de tensão de compressão, como foi assumido como premissa que o algoritmo inicia o cálculo apenas após a descompressão do betão, as curvas $\varepsilon_{sl} - \theta$ têm início para um valor nulo da extensão na armadura longitudinal e para um valor não nulo da deformação angular, correspondente à aplicação do momento torsor de descompressão. Observa-se que, ao contrário do que ocorre para as armaduras longitudinais (Figura 6.9), a sollicitação das armaduras transversais (Figura 6.10) aumenta para a situação de tensão axial de compressão. Tal tendência decorre das condições de equilíbrio e compatibilidade do GSVATM modificado. Observa-se que para os limites máximos de compressão a que a viga se encontra sujeita, a armadura longitudinal encontra-se inicialmente num estado de compressão.

Para o estado de tensão de tração, a curva $\varepsilon_{sl} - \theta$ inicia para os valores de extensão correspondentes à deformação inicial que é imposta pela tensão externa constante aplicada à viga. Observa-se que, ao contrário do que ocorre para as armaduras longitudinais (Figura 6.9), a solicitação das armaduras transversais reduz para a situação de tensão axial de tração, ao contrário do observado anteriormente para o caso da compressão. Este facto pode ser explicado pelo facto do estado axial externo de tração induzir uma maior participação das armaduras longitudinais para o equilíbrio da viga, com a consequente redução da participação das armaduras transversais.

Para complementar as anteriores observações relacionadas com as diferenças em termos de solicitação das armaduras longitudinais e transversais, em função do tipo de estado axial de tensão, toma-se como base a curva a preto da viga de referência A2 (sem tensão axial uniforme). Tendo por base as Figuras 6.9 e 6.10 pode-se referir que armaduras longitudinais e transversais apresentam um comportamento no sentido de balançar a sua contribuição para o equilíbrio interno da treliça espacial. Com o aumento da tensão de compressão aplicado à viga observa-se que a participação da armadura longitudinal para o equilíbrio interno diminui. Em consequência, a participação da armadura transversal aumenta.

O oposto é observado para o estado de tensão de tração axial. Para o estado de tração externo, observa-se agora que a armadura longitudinal é cada vez mais solicitada à medida que o nível da tensão de tração axial aumenta, enquanto que a participação da armadura transversal se reduz. Note-se que, tal como referido atrás, para níveis elevados da tensão uniforme de tração, a viga A2 apresenta uma rotura condicionada pela armadura longitudinal. Este facto é observável na Figura 6.10 uma vez que a viga esgota mais rapidamente (em termos de rotação da viga) a capacidade de deformação da armadura longitudinal.

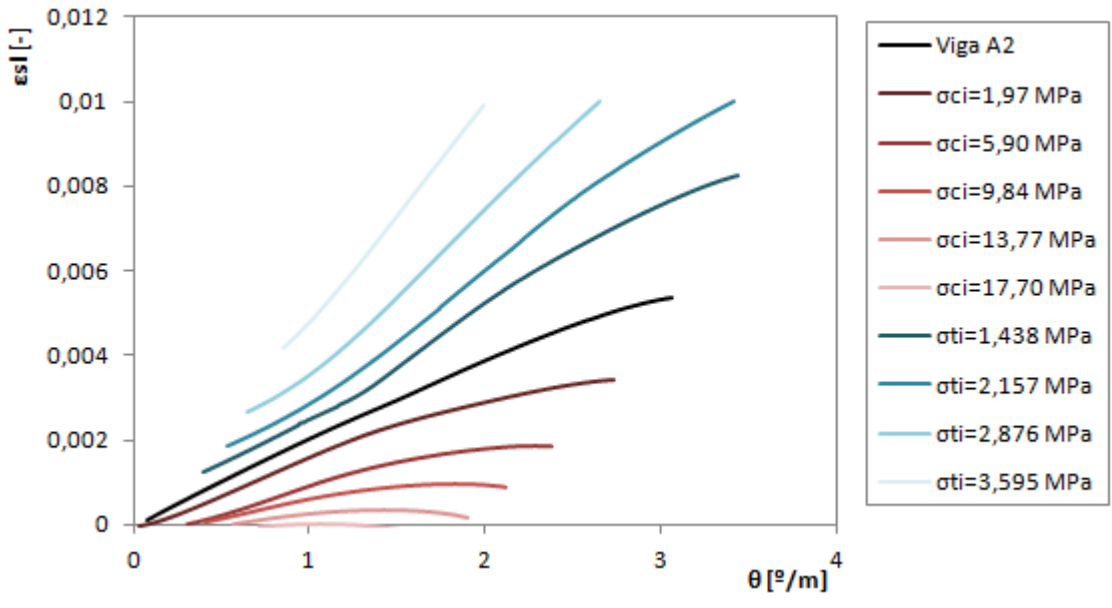


Figura 6.9 - Curvas teóricas $\varepsilon_{sl} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial (compressão e tração)

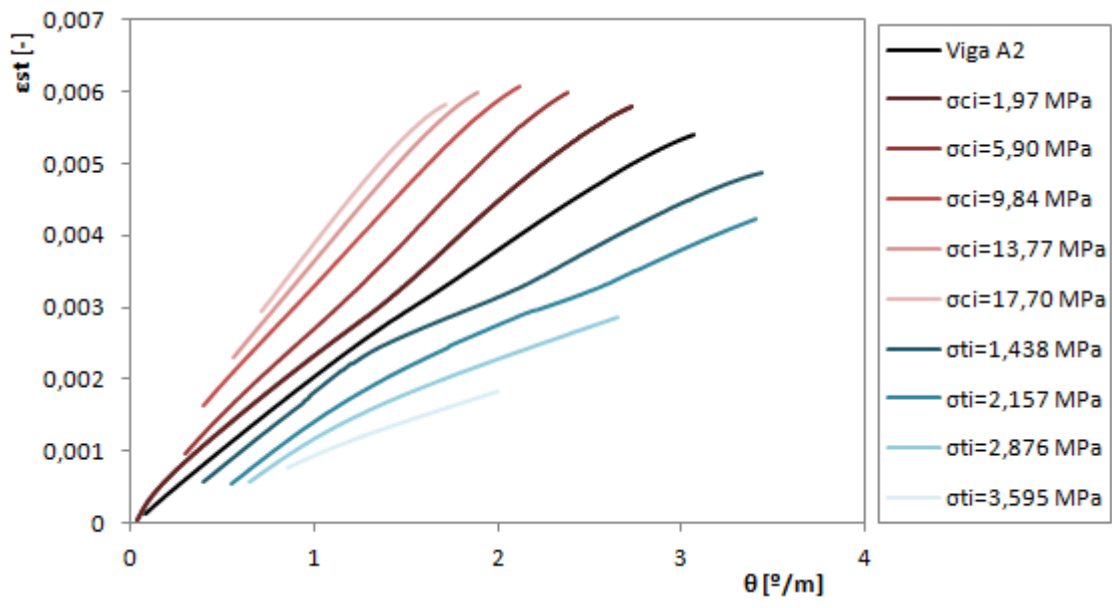


Figura 6.10 - Curvas teóricas $\varepsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de tensão axial (compressão e tração)

6.3.2. Influência do estado do confinamento axial no comportamento da viga A2 à torção

A presente secção tem como objetivo apresentar uma análise das curvas $M_T - \theta$ referentes à viga A2 e calculadas para diferentes níveis de confinamento axial. As curvas foram obtidas com o auxílio do aplicativo Torque onde foi implementado o algoritmo apresentado na Figura 5.6, associado ao GSVATM modificado para vigas com confinamento axial.

Para esta análise foram adotados os mesmos níveis de confinamento axial analisados por Taborda em 2012 [116] tendo por base o VATM modificado: 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000 e 80000 kN/m. Estes valores foram associados as situações de confinamento correntes em estruturas porticadas simples [31].

A Figura 6.11 apresenta as curvas teóricas $M_T - \theta$ da viga A2 com diferentes níveis de confinamento axial, obtidas através do GSVATM modificado. À semelhança do exposto por Taborda em 2012 [116], é possível observar que à medida que aumenta o nível de confinamento axial, aumenta a resistência da viga à torção e diminui a rotação correspondente à rotura da viga e a ductilidade em torção. A primeira observação é facilmente explicável se se recordar que a força de compressão centrada resultante do confinamento axial, moderada, é favorável pois contraria o estado de tração induzido pelo momento torsor, proporcionando um aumento da resistência da secção da viga. No entanto, a força de compressão gera também, uma redução da capacidade de deformação e da ductilidade em torção da viga. Tal tendência deve-se à redução da deformação da armadura longitudinal em consequência da referida força, sobretudo no estado fissurado, que será tanto maior quanto maior for o nível de confinamento axial.

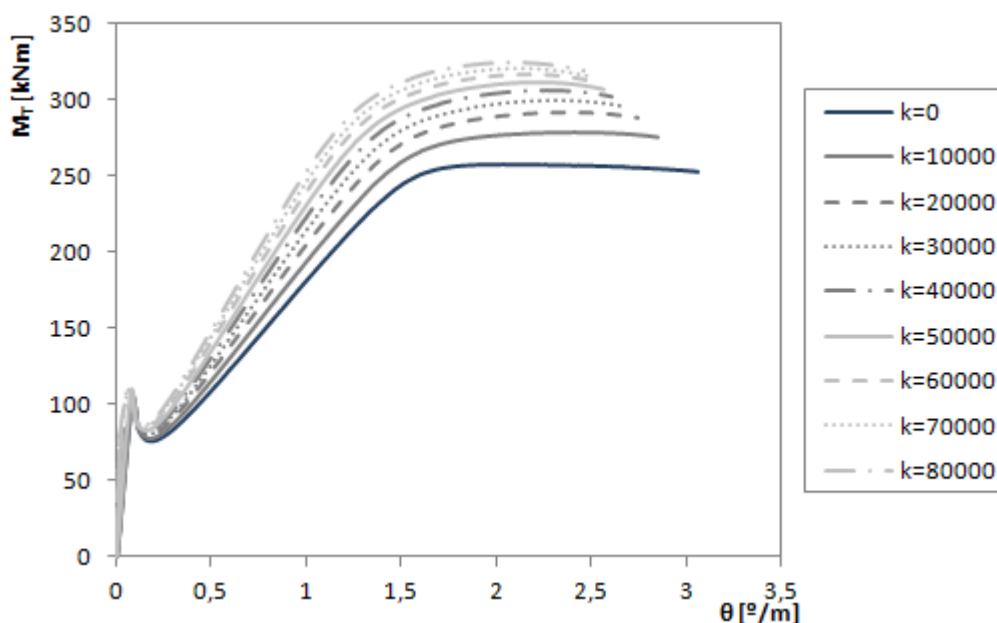


Figura 6.11 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de confinamento axial obtidas através do GSVATM modificado

A partir do momento em que a viga fissa, o efeito do confinamento axial é mais notório pois é no estado fissurado que a viga tende a alongar de forma mais notória em consequência da deformação das armaduras longitudinais. Refira-se que no GSVATM modificado, no estado fissurado a participação do betão à tração é drasticamente reduzida, daí o aumento de deformação da viga na direção longitudinal. Tendo por base este aspeto, compreende-se por observação das curvas da Figura 6.11, que a rigidez de torção da viga aumenta de forma mais notória no estado fissurado do que no estado não fissurado, com o incremento do nível de confinamento. Assim, também se justifica que, com o aumento do confinamento axial, o aumento do momento torsor resistente (M_{Tu}) é maior comparativamente com o aumento do momento torsor de fissuração (M_{Tcr}). Este facto também se pode observar na Tabela 6.4. Esta tabela apresenta a evolução do momento torsor de fissuração, do momento torsor resistente e do momento de cedência das armaduras longitudinais ($M_{T,ly}$) e transversais ($M_{T,ty}$), e respetivas rotações da secção transversal, para os diversos níveis de confinamento axial, incluindo para a situação de confinamento nulo.

Tabela 6.4 - Variação dos momentos torses e das respetivas rotações com o confinamento axial

Nível k [kN/m]	M_{Tcr} [kNm]	$\theta_{M_{Tcr}}$ [°/m]	M_{Tu} [kNm]	$\theta_{M_{Tu}}$ [°/m]	$M_{T,ly}$ [kNm]	$\theta_{M_{T,ly}}$ [°/m]	$M_{T,ty}$ [kNm]	$\theta_{M_{T,ty}}$ [°/m]
0	101,75	0,0794	255,98	2,288	249,92	1,709	252,50	1,809
10000	101,59	0,0796	278,78	2,403	277,06	2,017	270,59	1,693
20000	103,66	0,0776	291,41	2,377	291,32	2,441	278,72	1,628
30000	105,11	0,0762	300,15	2,316	-	-	284,94	1,574
40000	106,56	0,0749	306,74	2,262	-	-	290,02	1,528
50000	108,34	0,0733	312,19	2,212	-	-	294,63	1,494
60000	109,44	0,0723	316,81	2,168	-	-	298,73	1,463
70000	110,63	0,0713	320,84	2,129	-	-	302,33	1,435
80000	112,61	0,0696	324,43	2,088	-	-	305,52	1,409

Tal como referido na Secção 6.2, a viga A2 respeita o princípio da igualdade do volume para as armaduras, ou seja, existe um equilíbrio entre a taxa de armadura longitudinal e transversal. Tal explica a razão de as armaduras da viga A2 entrarem em cedência praticamente em simultâneo para a situação de confinamento nulo. A partir da Tabela 6.4 verifica-se que, a partir de $k=10000$ kN/m, as armaduras longitudinais entram em cedência mais tardiamente comparando com as armaduras transversais. Após $k=30000$ kN/m observa-se que as armaduras longitudinais não chegam a atingir a cedência. A existência da força de compressão centrada originada pelo confinamento axial induz na viga um estado de compressão axial que contraria o estado de tração na armadura longitudinal devido ao momento torsor. Assim, à medida que o nível de confinamento vai aumentando, a armadura longitudinal vai sendo menos solicitada à tração, podendo não chegar a entrar em cedência.

A Figura 6.12 ilustra uma análise comparativa entre a variação percentual do momento torsor resistente (máximo), do momento torsor associado à fissuração e também à cedência das armaduras transversais, obtidos através do GSVATM modificado, para os diversos níveis de confinamento axial a partir da situação de confinamento nulo. Tal como já referido anteriormente, observa-se um incremento do momento torsor resistente, bem como dos momentos torses de cedência das armaduras e de fissuração com o aumento do confinamento axial. No entanto, é também observável que, para o momento torsor resistente, a variação desse incremento aparenta tender a reduzir com o aumento do confinamento axial, provavelmente devido ao facto de a viga tender a esgotar mais rapidamente a sua capacidade resistente por compressão do betão nas escoras. Esta tendência aparenta ocorrer também com o momento torsor associado à cedência das armaduras transversais e com o momento torsor de fissuração, embora para este último seja menos notável.

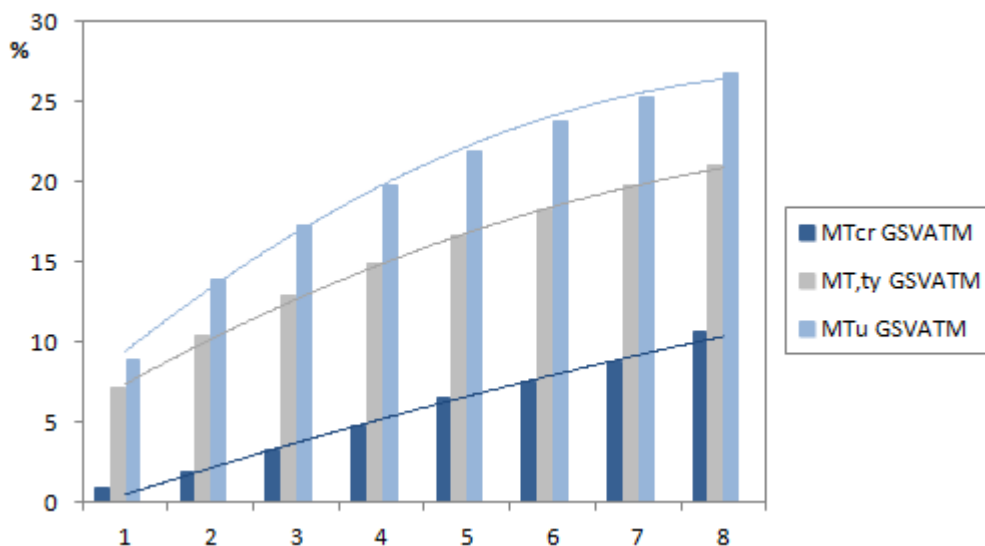


Figura 6.12 - Variação percentual do momento torsor associado à fissuração, à cedência das armaduras transversais e resistente

A análise das tendências das curvas teóricas para os diversos parâmetros que caracterizam o comportamento da viga A2 à torção e para os diversos níveis de confinamento axial foi anteriormente realizada tendo por base o VATM modificado [116][31], designadamente para a inclinação da escora de betão, a espessura da escora de betão, a extensão do betão à compressão bem como da armadura longitudinal e transversal. Tendo-se observado uma concordância entre as previsões do comportamento global a partir do GSVATM modificado e do VATM modificado, optou-se por não repetir a análise dos referidos parâmetros na presente secção. A análise e discussão das tendências para os referidos parâmetros podem ser consultadas na bibliografia, designadamente Taborda [116] ou Bernardo et al. [31].

Refira-se finalmente que, para o GSVATM modificado para vigas com confinamento axial, não foram observados problemas de convergência na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado. Esta constatação pode ser explicada pelo facto do estado axial de

compressão uniforme resultante do confinamento só ser relevante depois da fissuração da viga, ao contrário das situações analisadas na Secção 6.3.1, em que os estados axiais de tensão são impostos desde o início do carregamento.

6.3.3. Influência do pré-esforço longitudinal uniforme no comportamento da viga A2 à torção

Na presente secção pretende-se realizar uma análise das curvas teóricas $M_T - \theta$ da viga A2 sujeita a diferentes níveis de pré-esforço longitudinal uniforme (aderente e não aderente), calculadas a partir do aplicativo Torque, que tem por base os modelos GSVATM modificado para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme apresentado nas Figuras 5.8 e 5.9. É ainda objetivo desta secção analisar-se a tendência de alguns parâmetros caracterizadores do comportamento da viga A2 com pré-esforço longitudinal uniforme e aderente sujeita à torção. À semelhança do observado na Secção 6.3.1, para vigas com estado axial de tensão uniforme, o GSVATM modificado apresentou alguns problemas de convergência para baixos níveis de carregamento, designadamente na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, no cálculo do comportamento à torção da viga A2 sujeita a diferentes níveis de pré-esforço. Esta questão será retomada na Secção 7.3. Por esta razão, a análise de tendências realizada na presente secção incide em particular no comportamento último da viga em estudo.

De forma idêntica ao realizado na Secção 6.3.1, foi adotado um critério para limitar a tensão de compressão inicial no betão devido ao pré-esforço. Para tal, foi adotado o limite para a tensão de compressão no betão de $0,45f_{ck}$ conforme preconizado pelo Eurocódigo 2 na Cláusula 5.10.2.2 [50] especificamente para vigas pré-esforçadas. Também o código do ACI na Cláusula 18.4.2 [6] prescreve o limite de $0,45f_c$ para a tensão de compressão no betão, o qual é similar ao do Eurocódigo 2. Para efeitos de cálculo das tensões de pré-esforço foi utilizado o valor médio da resistência do betão à compressão, f_{cm} . O objetivo do referido limite é reduzir a deformação não linear por fluência e evitar fissuras longitudinais em serviço. Para definir o nível máximo de pré-esforço a considerar, foi analisado o nível de pré-esforço utilizado nas vigas ensaiadas experimentalmente que se encontraram na bibliografia consultada. As características e a análise de resultados destas vigas servirão para comparação com as previsões teóricas do GSVATM modificado e serão apresentadas no Capítulo 7 (Secção 7.3.1). A partir dessa análise, verificou-se que os níveis efetivos de pré-esforço são pequenos comparados com o limite máximo igual a $0,45f_{cm}$, tendo-se observado que o nível máximo de pré-esforço aplicado foi cerca de 20% da resistência média do betão à compressão ($0,20f_{cm}$). Assim, tomou-se para o presente estudo níveis de pré-esforço que variam até um máximo de $0,20f_{cm}$. A Tabela 6.5 apresenta os níveis de pré-esforço utilizados para esta análise, bem como a área das armaduras de pré-esforço relativa a cada nível, a tensão de pré-esforço nas armaduras, f_{pi} , e no betão, f_{ci} .

A força de pré-esforço máxima, $F_{pi,m\acute{a}x}$, foi calculada tendo em conta o limite imposto pelos documentos normativos, anteriormente referido, e considerando a área de betão efetiva, da secção transversal da viga de referência, $A_c = 0,2105 \text{ m}^2$. Assim, tem-se:

$$F_{pi,m\acute{a}x} = 0,45f_{cm} A_c \quad (6.1)$$

Para o cálculo da área de armadura de pré-esforço necessária, a tensão nesta armadura foi limitada a um máximo de 75% do valor característico da sua tensão de rotura, f_{puk} , que consiste num valor intermédio prescrito Eurocódigo 2 [50] e pelo código do ACI [6].

$$F_{pi,m\acute{a}x} = 0,75f_{puk} A_{pl,calc} \Leftrightarrow A_{pl,calc} = \frac{F_{pi,m\acute{a}x}}{0,75f_{puk}} \quad (6.2)$$

Tendo por base o valor de cálculo da área de armadura de pré-esforço calculada, $A_{pl,calc}$, adotou-se uma solução de armaduras constituída por cordões com 15,2 mm de diâmetro, cuja área nominal é de $1,4 \text{ cm}^2$, e obteve-se a área de pré-esforço efetiva, A_{pl} , adotada para a viga de referência e correspondente a cada nível de pré-esforço considerado. Desta forma, é possível calcular a tensão efetiva nas armaduras de pré-esforço e no betão, respetivamente:

$$f_{pi} = \frac{F_{pi,m\acute{a}x}}{A_{pl}} \quad (6.3)$$

$$f_{ci} = f_{pi} \frac{A_{pl}}{A_c} \quad (6.4)$$

Tabela 6.5 - Nível de pré-esforço aplicados na viga A2

Nível de pré-esforço	Solução	A_{pl} [cm ²]	f_{cm} [MPa]	f_{pi} [MPa]	f_{ci} [MPa]
$0,05f_{cm}$	3 ϕ 15,2 mm	4,2	47,34	1186,546	2,367
$0,10f_{cm}$	6 ϕ 15,2 mm	8,4	47,34	1186,546	4,734
$0,15f_{cm}$	8 ϕ 15,2 mm	11,2	47,34	1334,864	7,101
$0,20f_{cm}$	11 ϕ 15,2 mm	15,4	47,34	1294,414	9,468

A Figura 6.13 apresenta as curvas teóricas $M_T - \theta$ da viga A2 com os diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme considerados na Tabela 6.5. Para cada nível foram consideradas duas situações: pré-esforço aderente (PE) e pré-esforço não aderente e/ou exterior (PE_ext). Nas curvas $M_T - \theta$ é possível observar que, com o aumento do nível de pré-esforço, existe um efeito favorável na resistência à torção da viga A2, uma vez que se observa um acréscimo do momento torsor resistente. Esta observação é explicável pois, após a descompressão, as armaduras de pré-esforço, cuja área transversal aumenta em função do nível de pré-esforço, passam a trabalhar como armaduras ordinárias com a sua reserva de resistência. Deste modo, a resistência total das armaduras vai aumentando e, conseqüentemente, aumenta a

resistência à torção da viga. No entanto, com o aumento do nível de pré-esforço o incremento percentual, entre a resistência correspondente a cada nível, tende a diminuir. Tal deve-se ao facto da rotura ser cada vez mais condicionada pelo betão à compressão nas escoras levando a que as deformações sejam menores. Em consequência, a rigidez no estado fissurado aumenta mas a capacidade de deformação da viga, bem como a ductilidade em torção, vai diminuindo à medida que o nível de pré-esforço aumenta. Desta forma, para a viga A2 em estudo, do ponto de vista da resistência e da ductilidade à torção, o aumento do nível de pré-esforço só pode ser considerado vantajoso até um determinado nível, bastante inferior ao nível máximo preconizado pelos documentos normativos anteriormente referido. Este aspeto pode ser observado na Figura 6.13 onde o incremento da resistência entre o nível $0,15f_{cm}$ e $0,20f_{cm}$ é bastante reduzido e a ductilidade também é reduzida.

Outro aspeto que se pode observar na Figura 6.13 é que o efeito de confinamento axial conferido pela rigidez axial das armaduras longitudinais de pré-esforço exterior e/ou não aderentes ao betão é pequeno, em relação ao pré-esforço aderente, e também reduz à medida que o nível de pré-esforço aumenta.

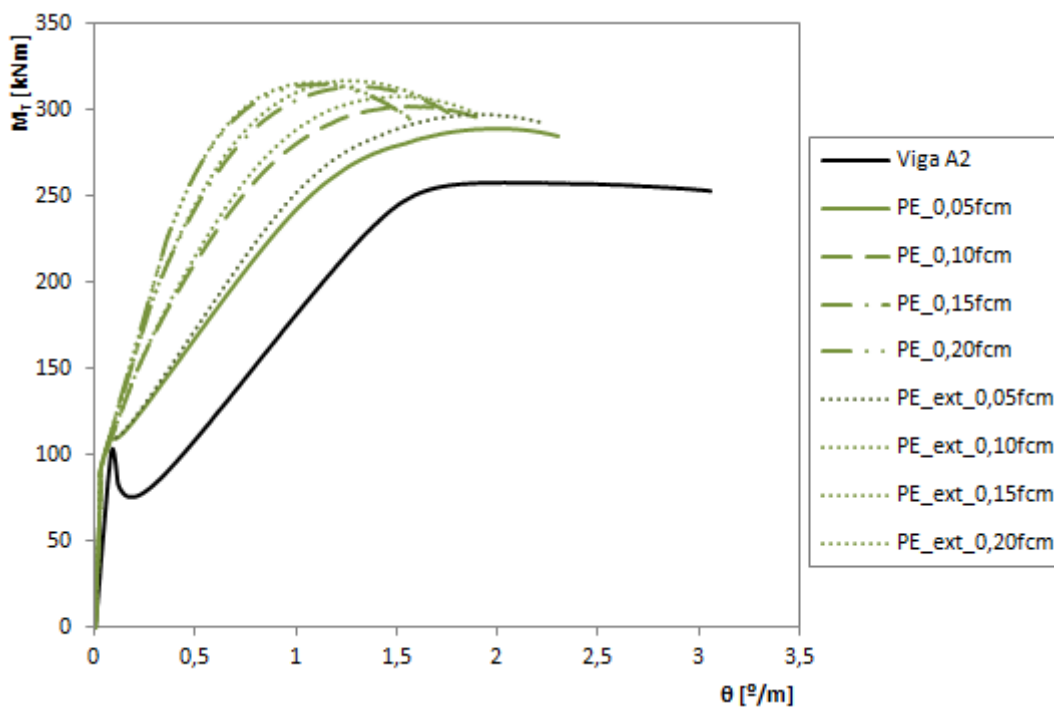


Figura 6.13 - Curvas teóricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis pré-esforço longitudinal uniforme (aderente e não aderente)

As Figuras 6.14 e 6.15 mostram a evolução da extensão da escora, ε_{2s}^c , e do tirante de betão, ε_{1s}^c , respetivamente, com a rotação da secção transversal, θ . A título exemplificativo, foi apenas considerado o caso do pré-esforço aderente. Na Figura 6.14 pode observar-se o facto já comentado anteriormente, a escora de betão esgota a sua capacidade resistente para níveis de rotação da secção transversal cada vez menores. Ou seja, a viga apresenta um aumento da rigidez à torção, pois para um dado nível da extensão da escora de betão, a viga apresenta uma menor deformação à medida que aumenta o nível de pré-esforço. Por observação da Figura 6.15, da mesma forma que a escora de betão é mais solicitada à compressão, à medida que o nível de pré-esforço aumenta, a solicitação do tirante de betão à tração diminui. Esta observação está relacionada com a redução do ângulo das escoras devido ao efeito do pré-esforço (ver Figura 6.16), o que induz uma maior solicitação da escora de betão e, em consequência, uma menor solicitação do tirante de betão.

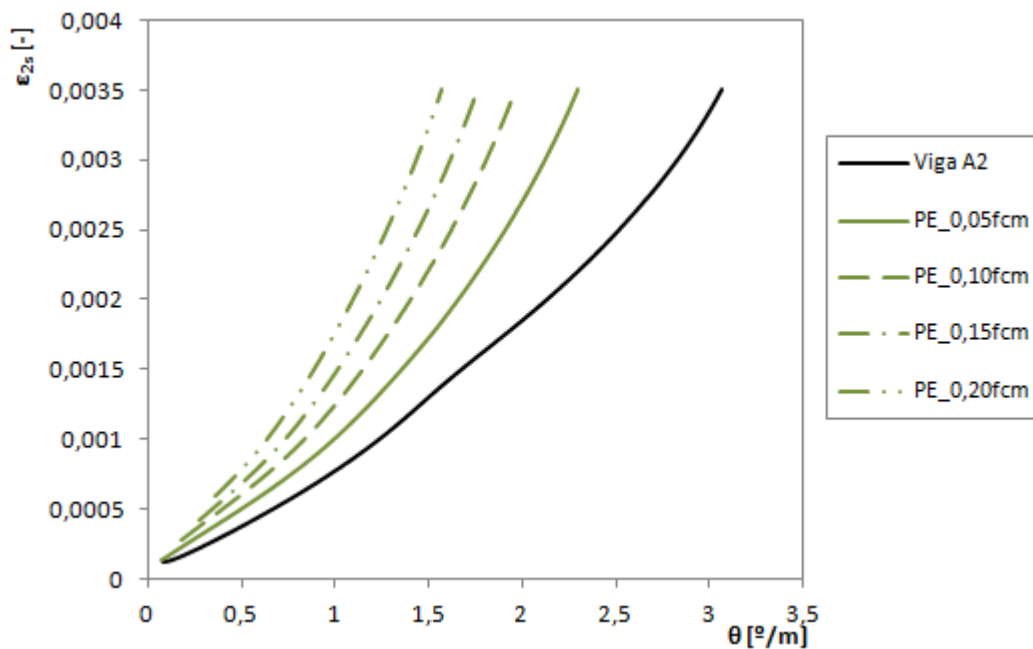


Figura 6.14 - Curvas teóricas $\varepsilon_{2s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente

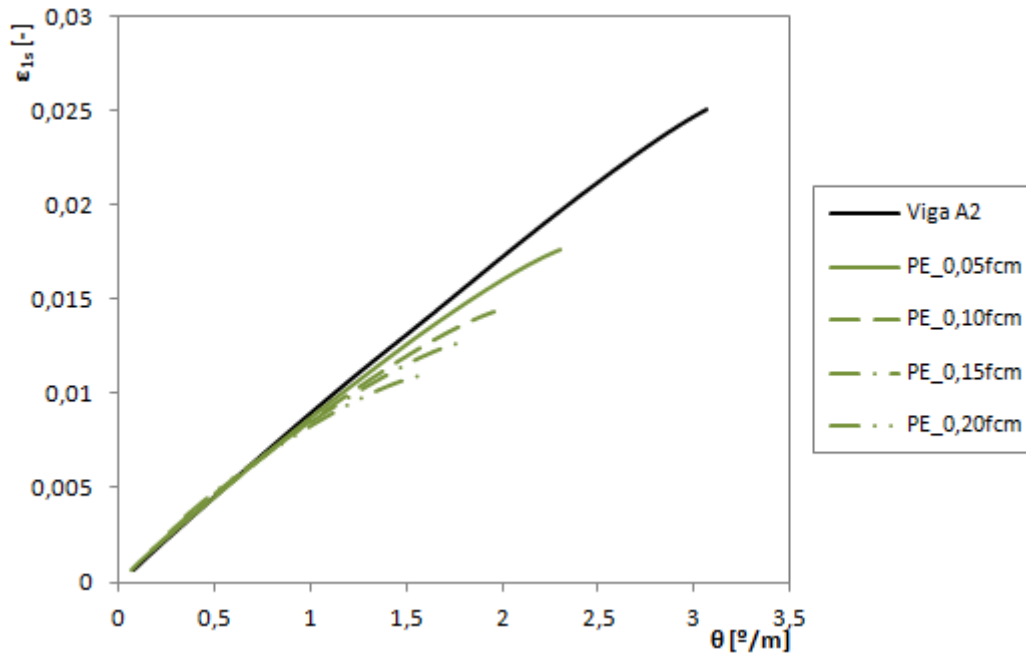


Figura 6.15 - Curvas teóricas $\varepsilon_{1s}^c - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente

A Figura 6.16 ilustra a evolução da inclinação da escora de betão, α , com a extensão de compressão à superfície da escora, ε_{2s}^c , para a viga A2 quando submetida a diferentes níveis de pré-esforço aderente. Tal como apresentado ao longo deste capítulo, quando a viga de referência A2 se encontra livre de qualquer estado de tensão axial uniforme, o ângulo da escora de betão ronda os 45° . Tal facto ocorre porque a viga de referência respeita o princípio da igualdade de volume entre a armadura longitudinal e transversal. Nas vigas com pré-esforço, a armadura longitudinal total encontra-se “em excesso” comparativamente à armadura transversal em virtude da existência de armadura longitudinal de pré-esforço longitudinal. Desta forma, o referido equilíbrio deixa de existir e o ângulo da escora de betão diminui à medida que a área da armadura de pré-esforço aumenta.

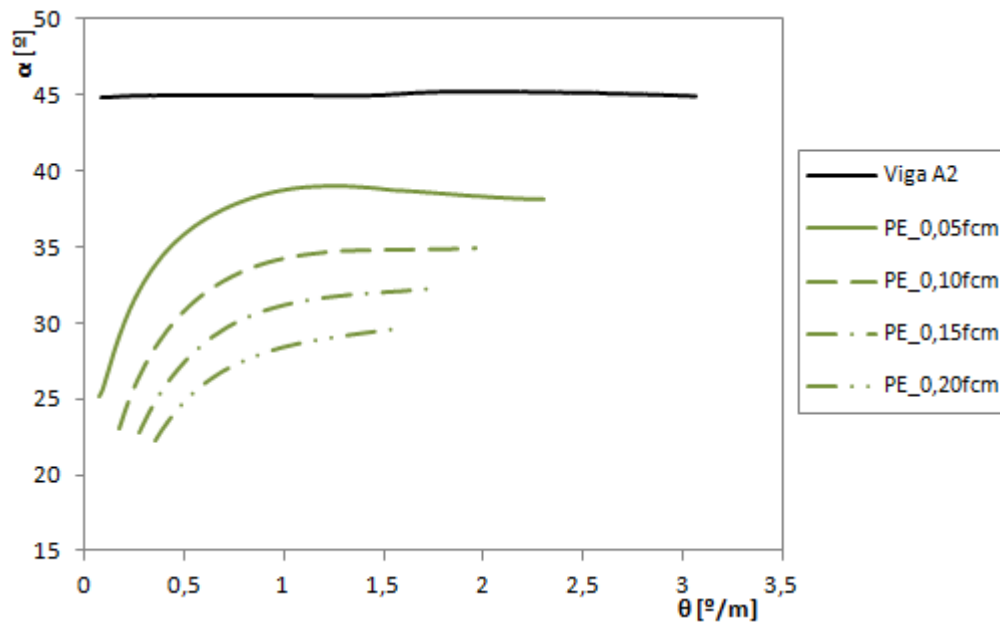


Figura 6.16 - Curvas teóricas $\alpha - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente

Assim, verifica-se que a evolução da inclinação da escora de betão face ao aumento do nível de pré-esforço segue a tendência prescrita pelo código do ACI [6] para o estado limite último, onde é referido que para vigas pré-esforçadas a inclinação das fissuras é menor comparativamente com vigas de betão armado, podendo-se tomar um valor de 30° para efeitos de projeto.

As Figuras 6.17 e 6.18 apresentam a evolução da extensão na armadura ordinária longitudinal, ϵ_{sl} , e na armadura ordinária transversal, ϵ_{st} , com a rotação da secção transversal, θ , da viga de referência submetida a diferentes níveis de pré-esforço (aderente). Já se referiu nas secções anteriores que a viga A2 respeita o princípio da igualdade de volumes e por esta razão se observa que, tanto as armaduras ordinárias longitudinais como transversais, possuem um nível de participação equivalente quando o nível de pré-esforço é nulo. No entanto, com o aumento do nível de pré-esforço, aumenta a área da armadura de pré-esforço e, em consequência a armadura longitudinal total à torção também aumenta. Dada a importante reserva de resistência da armadura de pré-esforço para funcionar como armadura ordinária após a descompressão, esta assume uma contribuição cada vez maior para o equilíbrio na direção longitudinal. Tal implica que a participação da armadura ordinária longitudinal, para o equilíbrio longitudinal, decresça com o aumento do nível de pré-esforço.

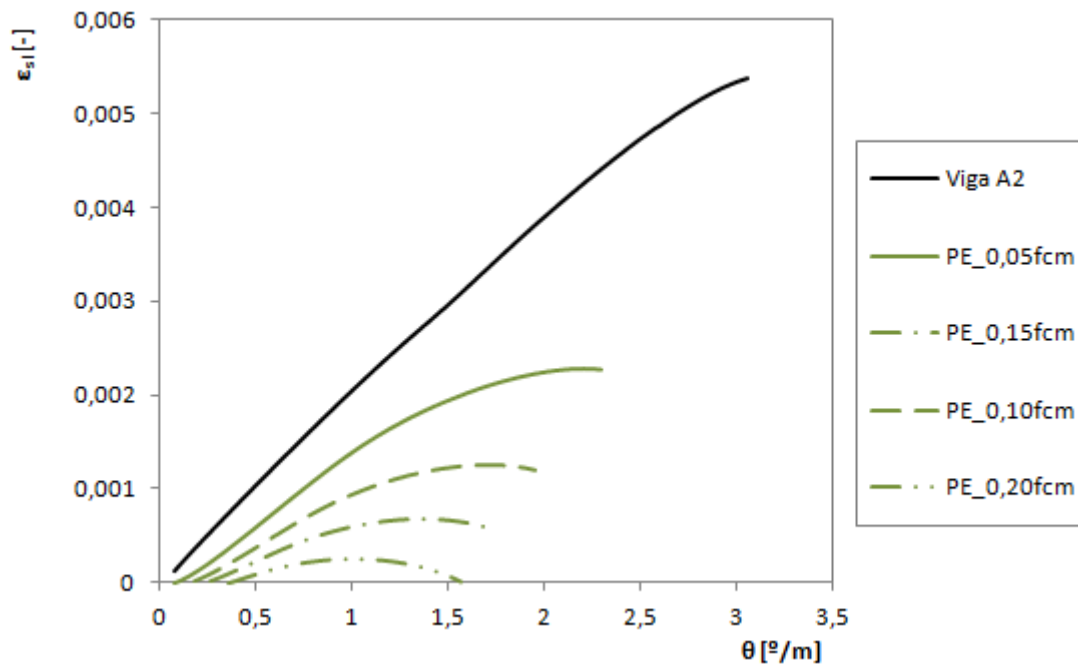


Figura 6.17 - Curvas teóricas $\epsilon_{sl} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente

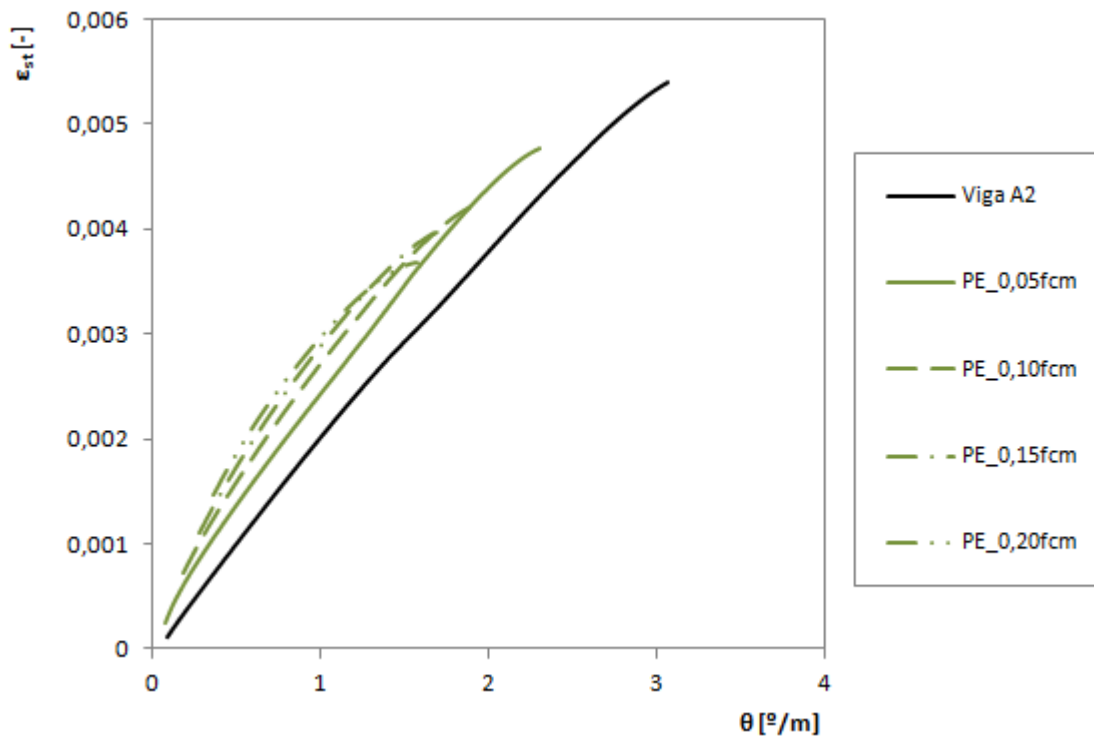


Figura 6.18 - Curvas teóricas $\epsilon_{st} - \theta$ para a viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aderente

6.4. Considerações finais

No presente Capítulo foram apresentados os resultados da análise paramétrica realizada, com a qual se pretendeu avaliar essencialmente a influência do estado de tensão axial uniforme no comportamento global da viga de referência à torção. Para tal, começou por se realizar a caracterização da viga de referência A2, bem como a comparação dos resultados teóricos do GSVATM com os resultados experimentais da viga.

Numa primeira fase analisou-se o efeito do estado externo de tensão axial de compressão e de tração na evolução das curvas de comportamento e de alguns parâmetros caracterizadores do estado interno de deformação e de tensão da viga de referência (designadamente a inclinação da escora de betão, a extensão à superfície da escora e do tirante de betão, bem como da armadura longitudinal e transversal), os quais foram calculados a partir do GSVATM modificado. Numa segunda fase avaliou-se a influência do nível de confinamento axial no comportamento da viga de referência A2, para a qual se concluiu que as tendências gerais calculadas pelo GSVATM modificado para vigas confinadas axialmente eram semelhantes às anteriormente obtidas por Taborda em 2012 [116] tendo por base o VATM modificado para o mesmo tipo de vigas. Deste modo, optou-se por analisar apenas a evolução de alguns parâmetros, designadamente o momento torsor de fissuração, o momento torsor resistente bem como o momento torsor correspondente à cedência das armaduras e respetivas rotações da secção transversal. Por fim, realizou-se uma análise idêntica às referidas anteriormente para o caso da viga A2 com diversos níveis de pré-esforço longitudinal uniforme aplicado (aderente e não aderente).

Após terem sido apresentados os resultados da análise paramétrica, observou-se que a existência de um estado de tensão axial adicional de compressão apresenta um efeito que, até determinado nível, é favorável para a resistência à torção e para a rigidez de torção em estado fissurado, bem como desfavorável para a ductilidade em torção. Relativamente ao estado de tensão axial de tração, observaram-se tendências contrárias às anteriormente referidas para o caso da compressão.

Capítulo 7 - Análises comparativas

7.1. Introdução

Neste capítulo são apresentadas análises comparativas com o objetivo de validar os modelos teóricos e as previsões do GSVATM modificado para vigas à torção com estado axial de tensão uniforme, conforme apresentado nos Capítulos 5 e 6, respetivamente.

Tendo em conta o número reduzido de ensaios experimentais encontrados na bibliografia com vigas à torção sujeitas simultaneamente a um estado axial de tensão uniforme, este capítulo divide-se em duas partes principais. Na primeira parte, são apresentadas análises comparativas das previsões teóricas com resultados numéricos encontrados na bibliografia consultada. Um dos estudos consultados foi realizado pela autora em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32] e o outro estudo foi desenvolvido por Ferreira em 2016 [55]. Na segunda parte são apresentadas análises comparativas das previsões teóricas com resultados experimentais encontrados na bibliografia consultada.

Refere-se que os resultados obtidos no desenvolvimento dos trabalhos anteriores realizados por Ferreira em 2016 e acompanhados pela autora [55] relacionam-se com a implementação de um modelo numérico para simular a viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20] com recurso ao programa de cálculo automático Abaqus, tendo o referido autor realizado uma análise não linear com elementos finitos. O objetivo é aproveitar alguns resultados das simulações realizadas para validar as previsões do GSVATM modificado. De entre as simulações realizadas foram aproveitadas as relativas à viga A2 sujeita à torção com diferentes estados de tensão axial externo centrado e constante de compressão e tração (Secção 5.2). Relativamente ao estudo anterior de Taborda em 2012 [116][32], foram utilizados os resultados da simulação da mesma viga A2, tendo igualmente por base uma análise não linear por elementos finitos mas utilizando o programa de cálculo automático Lusas. Neste estudo, a viga A2 foi sujeita à torção com diferentes níveis de confinamento axial.

A validação do GSVATM modificado para vigas à torção com pré-esforço longitudinal uniforme é apresentada na segunda parte do presente capítulo, sendo feita recorrendo-se a resultados experimentais. Como já explicado nas Secções 1.2.1, 2.3 e 5.4, existem duas possibilidades para o pré-esforço longitudinal uniforme: a situação em que o pré-esforço é aderente ao betão e quando é exterior e/ou não aderente ao betão. Ambas as situações são consideradas neste capítulo para validar o GSVATM modificado.

7.2. Análise comparativa com os resultados de modelos numéricos com elementos finitos

7.2.1. Nota introdutória

Atualmente, as análises de estruturas complexas podem ser realizadas recorrendo a programas de cálculo automático, permitindo simular o comportamento das estruturas de uma forma integrada sem recorrer a ensaios experimentais. O processo de subdivisão do sistema complexo, para efeitos de análise, é uma forma que o Engenheiro encontrou para contornar a dificuldade em analisar tais sistemas [130]. Os modelos numéricos assumem um papel importante na simulação do comportamento das estruturas, quer estático ou dinâmico, em particular quando os materiais evidenciam um comportamento não-linear. Desta forma, um modelo numérico suficientemente refinado que demonstre elevada eficácia na simulação do comportamento de estruturas complexas assume um interesse evidente [110][91]. Tal é o caso de uma viga de betão estrutural sujeita à torção devido ao real comportamento não linear dos materiais bem como à complexidade do estado evolutivo interno das tensões e das deformações que se geram no elemento para equilibrar a ação externa.

O Método dos Elementos finitos (MEF) apresenta atualmente um desenvolvimento tal em que é possível ser utilizado em simulações para diferentes campos da engenharia. Para a engenharia estrutural, a utilização do MEF aplicado a um sólido de geometria arbitrária, sob ações exteriores, permite o cálculo aproximado do estado de tensão e de deformações desse mesmo sólido [55]. De um ponto de vista matemático, o MEF é baseado na substituição de formulações integrais sobre um domínio complexo por um somatório de integrais estendidos a sub-domínios de geometria simples. Cada sub-domínio corresponde a um elemento finito que pode ser, por exemplo, uma reta, um triângulo, um quadrilátero, um tetraedro ou um paralelepípedo. Atualmente, esta área constitui uma área de pesquisa muito ativa. As modernas formulações de elementos finitos integrais podem ser obtidas por dois processos distintos: princípio variacional ou método dos resíduos pesados [15][116].

A primeira publicação em que se refere a designação “elemento finito” surge num célebre artigo na década de 60. A publicação surgiu de estágios de verão onde R. W. Clough e H. C. Martin, professores juniores na Universidade da Califórnia e na Universidade de Washington, respetivamente, com o grupo de M. J. Turner na Boeing durante 1952 e 1953 [16] desenvolveram o primeiro modelo baseado em elementos finitos. Após a publicação desse artigo, Clough formou em Berkeley o primeiro grupo de investigação para impulsionar a ideia em aplicações de Engenharia Civil. Note-se que os estudos pioneiros acerca do MEF surgiram na área aeroespacial, isso não é coincidência pois o MEF tem como base três aspetos fundamentais e um deles é a computação digital. Durante os anos 1950, apenas grandes empresas industriais (assim como algumas agências governamentais) eram capazes de custear a aquisição de computadores de grande porte [54]. O grande desenvolvimento do MEF, que o

conduziu ao formato que atualmente apresenta maior aceitação, foi dado na década de 60 e início da de 70. No entanto, o rápido desenvolvimento do MEF coincidiu praticamente com a generalização da utilização de computadores, uma vez que a utilização deste método depende de um computador digital. Este requisito é devido à grande quantidade e complexidades dos cálculos que é necessário realizar, nomeadamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares [15].

Atualmente, o MEF constitui uma das ferramentas mais usadas para realizar análises não lineares de estruturas. No entanto, têm sido desenvolvidos vários modelos de elementos finitos em virtude da complexidade da modelação do comportamento dos materiais. O comportamento não-linear do betão estrutural advém principalmente devido à não linearidade física dos materiais, como sejam a plasticidade das armaduras de reforço e do betão à compressão (em menor grau), bem como a fissuração do betão. Outras não-linearidades surgem com a interação entre as armaduras de reforço e o betão, o atrito entre os agregados nas fissuras do betão, fluência e retração do betão, entre outros [126]. É de referir também a não linearidade geométrica associada aos fenómenos de instabilidade estrutural. Embora seja um tema avançado e atual no meio técnico-científico, cada vez mais deve ser incentivado o desenvolvimento de modelos que combinem eficiência e uma precisão razoável com vista a simular de forma realista o comportamento de estruturas, incluindo os respetivos danos [112].

O comportamento global dos materiais que constituem o modelo numérico em elementos finitos é manifestamente não linear. Por exemplo, a partir de uma determinada percentagem da resistência do betão à compressão, o betão comprimido apresenta um comportamento não linear. A fissuração do betão é mais um fenómeno que caracteriza o seu comportamento e deve ser tido em conta nos parâmetros caracterizadores do modelo. É necessário ainda contemplar parâmetros que caracterizem a resistência do betão à tração antes da fissuração do mesmo. Para além do betão, as armaduras devem também ser caracterizadas por parâmetros que permitam traduzir o seu comportamento ao longo do estado evolutivo de carregamento [58]. Os referidos parâmetros que caracterizam o comportamento global do betão e das armaduras constituem as relações constitutivas dos materiais.

Ao longo dos tempos têm sido desenvolvidos importantes aspetos na definição das leis constitutivas utilizadas para simular o comportamento do betão. Contudo, ainda não existe nenhum modelo capaz de prever com exatidão todos os aspetos do comportamento não linear do betão [116]. A complexidade do comportamento do betão devido ao estado multiaxial de tensões dificulta a previsão numérica do seu comportamento. Desta forma, recorrentemente é realizada uma calibração dos parâmetros que definem os modelos tendo por base, se possível, resultados experimentais. No entanto, esta calibração nem sempre é tão direta e simples como seria de prever, uma vez que existem mecanismos internos que regem o

comportamento mecânico do betão e que não são observados diretamente. Por exemplo, a formação de fissuras, o interbloqueamento entre agregados, o esmagamento do betão e a dilatação do betão fissurado são parâmetros cujos valores são extrapolados indiretamente através de medições experimentais e observações da superfície [96].

7.2.2. Vigas à torção com estado de tensão axial uniforme

Pretende-se que a modelação com elementos finitos no Abaqus e a análise não linear da viga de referência A2 sujeita à torção com diferentes estados de tensão axial uniforme, realizado por Ferreira em 2016 [55], possa auxiliar na confirmação das tendências teóricas obtidas a partir do GSVATM modificado para o caso de vigas à torção sujeitas a um esforço axial externo centrado e uniforme, de modo a poder validar o modelo apresentado na Secção 5.2 deste trabalho.

Assim, inicialmente nesta secção apresenta-se de forma sumária o modelo numérico da viga A2 (caracterizada na Secção 6.2) modelada com elementos finitos e calibrada para a torção pura através de resultados experimentais, por Ferreira em 2016 [55], utilizando o programa Abaqus que incorpora a possibilidade de realizar uma análise não linear com elementos finitos. Para mais detalhes sobre a modelação da viga de betão armado com comportamento não linear pode ser consultado o documento de Ferreira [55]. É seguidamente apresentado o modelo de elementos finitos da viga A2 bem como as leis constitutivas utilizadas para a caracterização do comportamento dos materiais para a análise não linear, bem como os elementos finitos utilizados na modelação geométrica com os quais a viga foi calibrada. Posteriormente, é realizada uma análise comparativa entre os resultados numéricos provenientes da análise com o Abaqus com os resultados teóricos do GSVATM modificado para vigas à torção com estado de tensão axial uniforme.

7.2.2.1. Modelo numérico da viga de referência A2 no Abaqus

Ferreira em 2016 [55] tomou como base a viga A2 ensaiada por Bernardo em 2003 [20], uma vez que esta viga apresenta um comportamento dúctil à torção, um equilíbrio entre as armaduras longitudinais e transversais bem como uma taxa de armadura de torção moderada. Assim, esta viga foi considerada pelo referido autor como viga de referência para calibrar um modelo numérico com o MEF de modo a reproduzir o respetivo comportamento.

Para modelar o comportamento do betão Ferreira recorreu ao elemento de geometria linear, contínuo e sólido hexaédrico C3D8R [1]. O comportamento não linear do betão foi modelado através de um modelo de dano plástico, designado por *Concrete Damaged Plasticity* (CDP), disponível no ABAQUS. Este modelo de fenda média baseia-se essencialmente na modelação do dano isotrópico em combinação com tração isotrópica e compressão plástica para caracterizar o comportamento inelástico do betão. O modelo de dano plástico caracteriza o betão à compressão e à tração uniaxial. O dano no betão é quantificado através da dissipação de energia de fratura necessária para a criação das microfissuras que é calculada pela área da

curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração. Este modelo é geralmente usado quando se pretende simular o betão submetido a carregamentos monotómicos, cíclicos ou dinâmicos com níveis baixos de confinamento [55]. Como critérios de rotura do betão, o CDP assume dois mecanismos importantes: a fissuração do betão à tração e o esmagamento do betão à compressão. A propagação das fissuras é modelada tendo por base um mecanismo de dano contínuo, designado por *Stiffness Degradation* (“degradação da rigidez”).

As armaduras longitudinais e transversais foram modeladas no Abaqus através do elemento de barra reto T3D2 [1]. Importa referir que o elemento T3D2 é compatível com o elemento tridimensional C3D8R para modelar o betão, sendo ambos também compatíveis para uma análise não linear. Para retratar o comportamento não linear das armaduras à tração, Ferreira utilizou um modelo de plasticidade designado por *Classic Metal Plasticity - CMP*, disponível no Abaqus, tendo este sido conjugado com a definição de um comportamento isotrópico para o material. Para modelar o comportamento plástico último foi considerada a superfície de cedência de Von Mises. A fase plástica do material é caracterizada pelas definições padrão de plasticidade do modelo uma vez que a relação constitutiva $\sigma - \varepsilon$ plástica para o aço inicia onde a tensão máxima de deformação plástica é zero (igual à tensão limite da tensão elástica).

O modelo de Ferreira inclui nas extremidades da viga uma zona com 25 centímetros de espessura com um betão definido por um comportamento somente elástico, de forma a evitar a rotura do betão nas extremidades da viga devido a eventuais concentrações de tensões e também para a localização dos apoios nodais numa das extremidades (simulando o encastramento de torção) e a introdução da ação equivalente ao momento torsor externo na outra extremidade. Para tal, nessas zonas extremas o referido autor apenas definiu o módulo de elasticidade do betão, E_c , bem como o coeficiente de Poisson, ν . Para modelar as zonas extremas da viga, o autor utilizou o elemento C3D8R [1].

Seguidamente é apresentada a geometria do modelo da viga A2 e a malha de elementos finitos do modelo calibrado pelo referido autor. Para a modelação da geometria da secção transversal, o posicionamento das armaduras foi ligeiramente alterado, tal como se ilustra na Figura 7.1, de forma a não considerar as pequenas assimetrias resultantes da colocação das armaduras. A Figura 7.1 (a) ilustra a posição real dos varões na secção, verificando-se que existe uma ligeira diferença na distância entre os ramos das cintas em ambas as direções.

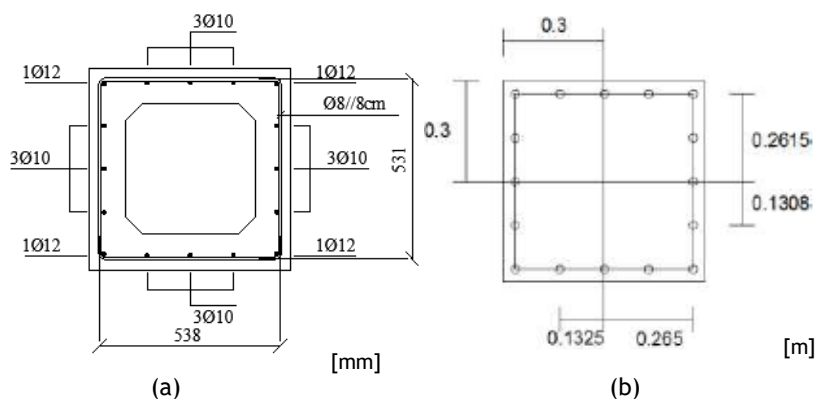


Figura 7.1 - (a) Secção transversal real da viga A2 [116], (b) Secção transversal simplificada da viga A2 no modelo numérico, Abaqus [55]

Para definir a interação entre a armadura e o betão, Ferreira simulou o contato no Abaqus através da técnica designada por *Embedded regions* (regiões embebidas), a qual permite contabilizar automaticamente a referida interação. No entanto, para evitar eventuais problemas de convergência do modelo proveniente do embebedimento das armaduras no betão, o número de elementos finitos dos varões longitudinais é inferior ao número de elementos finitos da componente de betão no sentido longitudinal [1][55], assim os elementos finitos de betão incorporam interiormente os nós dos elementos das armaduras.

De forma a obter um rigor de análise satisfatório, a malha deve ser a mais refinada possível. A configuração da malha deve adequar-se à geometria da secção e por questões práticas deve respeitar um padrão uniforme. A criação da malha foi realizada de forma independente para cada componente [16]. Após varias modelações, Ferreira definiu a malha da viga tal como se ilustra na Figura 7.2 (b). Para um tempo de cálculo consideravelmente mais curto Ferreira optou por criar um modelo mais simplificado da viga, tendo modelado apenas a viga ao longo de 1,5 m de comprimento. O referido autor verificou que esta simplificação não diminui a exatidão dos resultados, no entanto diminui de forma considerável o tempo de cálculo do programa. Na Figura 7.2 (a) e (b) encontra-se ilustrado o modelo de elementos finitos, designadamente o modelo global e a malha de elementos finitos. Na Figura 7.2 (a) é possível observar-se nas duas extremidades da viga as zonas extremas constituídas por betão elástico. O contacto perfeito entre a zona extrema e a zona corrente da viga foi garantido através de restrições de contacto, de modo a existir uma transmissão uniforme de esforços entre elas [55].

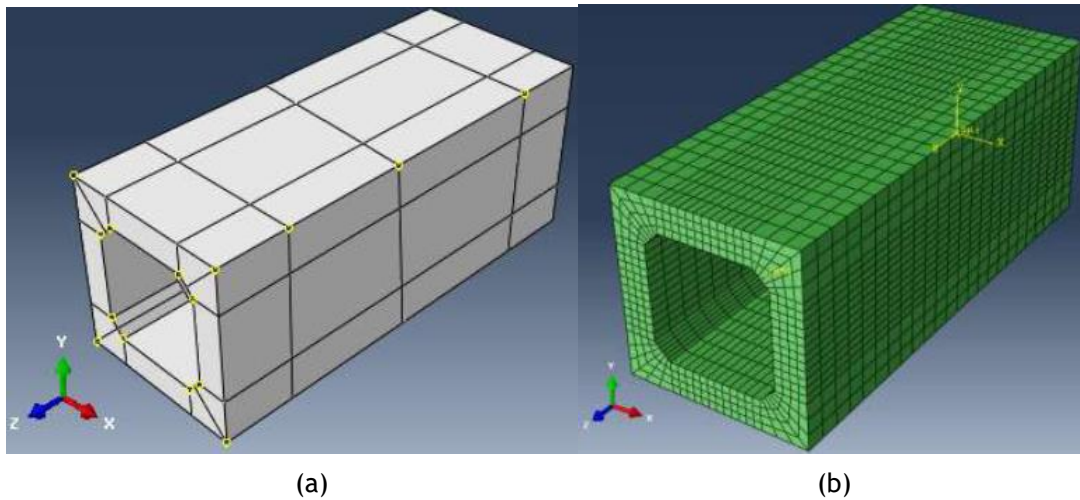


Figura 7.2 - (a) Modelo numérico global (sólido), (b) malha de elementos finitos do modelo numérico global, Abaqus [55]

Os elementos de armadura encontram-se embebidos no modelo global, podendo-se observar a malha definida para as armaduras longitudinais e transversais da viga A2 na Figura 7.3 (a) a verde. As áreas da secção transversal das barras, bem como os espaçamentos entre barras, em ambas as direções, estão de acordo com a pormenorização da viga A2.

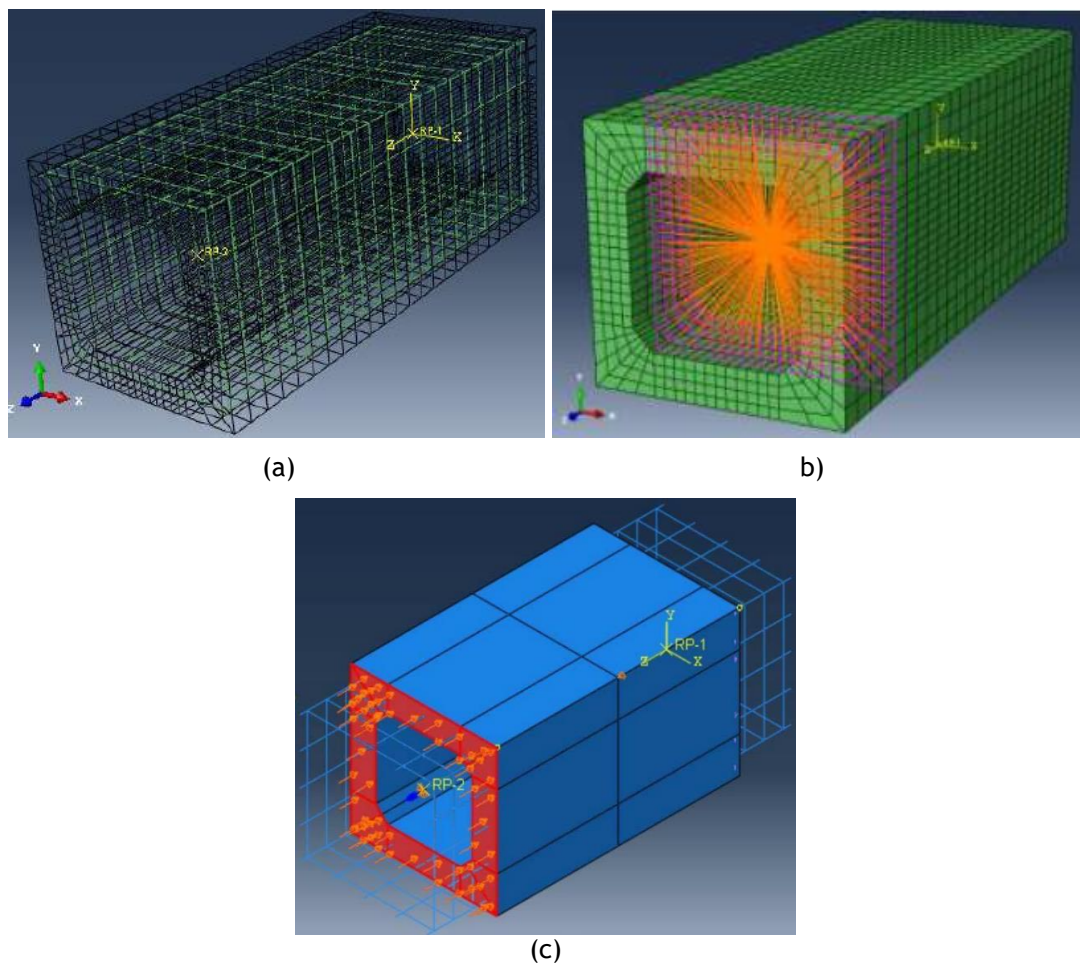


Figura 7.3 - (a) Armaduras longitudinais e transversais no interior da viga, (b) Representação da limitação de acoplamento de um ponto de referência, (c) Aplicação da tensão axial uniforme, Abaqus [55]

Por fim, refere-se ainda que Ferreira criou restrições de acoplamento para distribuir de forma uniforme os esforços impostos entre um ponto e o modelo da viga: o ponto de referência 1, RP1, tem como objetivo simular o encastramento da viga e o ponto de referência 2, RP2, é o ponto onde são impostas as rotações para simular a atuação do momento torsor externo. Um dos referidos pontos pode ser observado na Figura 7.3 (b). Desta forma, o ponto RP1 estabelece a condição de apoio e, para tal, foi travada a translação segundo os eixos transversais à viga bem como a rotação em torno eixo longitudinal da viga. De modo a não restringir o empenamento, foi travada a translação longitudinal num ponto externo correspondente a um dos cantos da secção a meio do desenvolvimento longitudinal do modelo. Desta forma, foram reduzidos alguns problemas de convergência. Quanto à aplicação da rotação transversal num dos extremos da viga para a simulação da torção, foi imposto no ponto de referência 2, RP2, uma rotação limite de 0,069604 rad. Este valor da rotação está diretamente relacionado com a rotação máxima que a viga A2 atingiu nos ensaios experimentais [20][55]. Informações mais detalhadas acerca do modelo numérico da viga A2 podem ser encontradas em Ferreira [55]. Na Figura 7.3 (c) é ainda possível observar-se a metodologia adotada por Ferreira para simular o estado axial de tensão de compressão uniforme, este assunto será retomado na secção seguinte.

Na Figura 7.4 encontram-se ilustradas as curvas $M_T - \theta_m$ experimental e numérica da viga A2 à torção pura. Refere-se que Ferreira ainda realizou um ajustamento dos parâmetros obtidos por correlação com a resistência do betão à compressão de forma a conseguir calibrar o ponto de fissuração e o ponto relativo à resistência máxima, tanto em relação ao momento torsor como para a respetiva rotação.

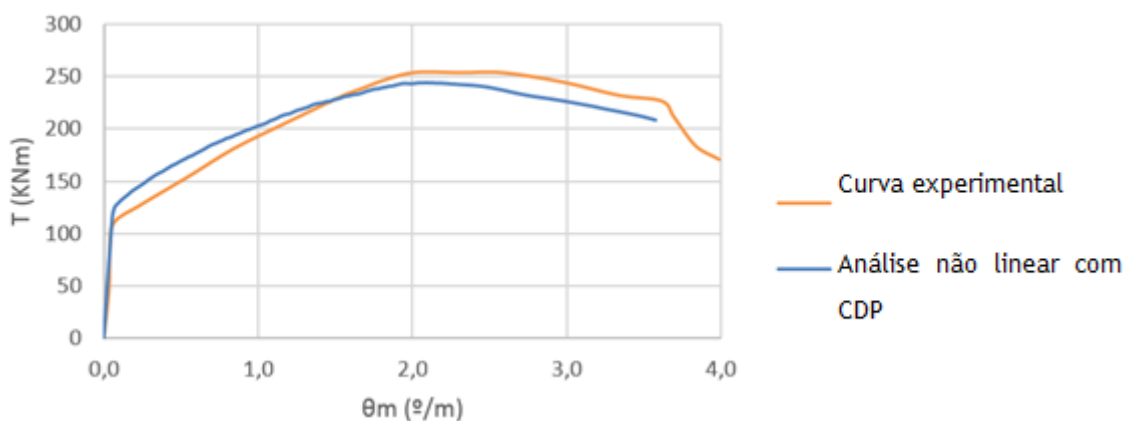


Figura 7.4 -Curva $M_T - \theta_m$ experimental e teórica da viga A2 [55]

Por observação das curvas $M_T - \theta_m$ teórica e experimental, ilustradas na Figura 7.4, pode afirmar-se que a calibração do modelo para a torção pura é bastante satisfatória. A partir do modelo numérico da viga A2 desenvolvido e calibrado para a torção pura, Ferreira [55] simulou o comportamento da viga A2 sujeita à torção combinada com estados axiais de tensão

uniforme. Os resultados obtidos pelo referido autor são seguidamente usados para validar o modelo teórico apresentado ao longo da secção 5.2.

7.2.2.2. Comparação dos resultados teóricos com numéricos - Abaqus

Nesta secção, é realizada uma análise do comportamento global à torção das vigas simuladas numericamente através de uma análise comparativa das curvas $M_T - \theta$ (evolução do momento torsor com a rotação angular média) referentes à viga A2 mas com os diferentes níveis dos estados de tensão axial uniforme, tal como ilustrado na Figura 7.3 (c).

A Figura 7.5 apresenta as curvas numéricas $M_T - \theta$ obtidas para a viga A2 para diferentes níveis constantes de compressão axial uniforme (σ_{ci}), designadamente, 0, 5,9, 9,84, 13,77 e 17,7 MPa. É possível observar-se na Figura 7.5 que a influência do estado de compressão imposto inicialmente só começa a ter efeitos relevantes a partir do momento torsor de fissuração. Observa-se um ligeiro aumento do momento torsor de fissuração com o aumento da tensão axial de compressão, uma vez que este estado de compressão exterior contraria o estado de tração induzido pelo momento torsor e, conseqüentemente, atrasa a fissuração da viga. Observa-se também, após a fissuração da viga, um aumento da rigidez e da capacidade resistente com o aumento da tensão axial de compressão, devido ao efeito de confinamento induzido pelo estado de tensão. Em simultâneo, verifica-se que a capacidade de deformação última da viga reduz com o aumento da tensão axial de compressão. Na Tabela 7.1 é possível observar-se o aumento do momento torsor de fissuração, da rigidez pós-fissuração e do momento torsor resistente em função do aumento da tensão axial de compressão, bem como a redução da deformação associada a este último.

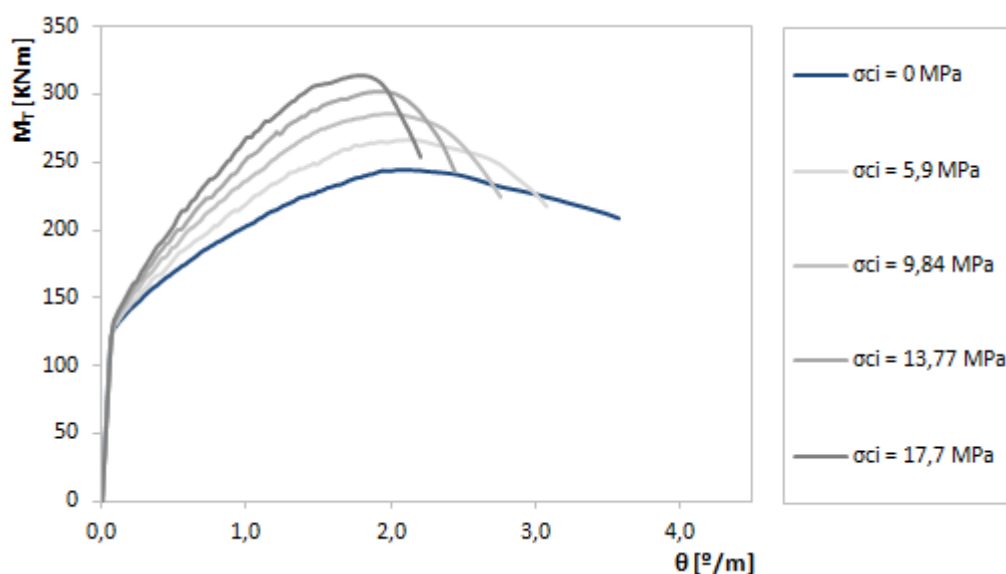


Figura 7.5 - Curvas numéricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diferentes estados de compressão axial constantes

Tal como já tinha sido referido na Secção 6.3.1, a existência do estado de compressão axial exterior induz um aumento da rigidez de torção, particularmente para o estado fissurado. Note-se que o facto de a tensão axial uniforme aumentar o estado de compressão interno da viga, para além de ser favorável para a resistência da viga à torção, atrasa também a fissuração da viga. Recorde-se, que esta tensão axial aumenta a capacidade resistente da viga uma vez que atrasa a cedência das armaduras longitudinais. Do mesmo modo se justifica o aumento da rigidez de torção no estado não fissurado e no estado fissurado, contudo a influência da tensão de compressão exterior é mais notória na fase fissurada uma vez que é nesta fase que a viga evidencia maiores deformações longitudinais, as quais são contrariadas pelo referido estado de tensão axial.

Outra observação importante relativamente às curvas $M_T - \theta$ da Figura 7.5 está relacionada com a visível diminuição de ductilidade das vigas face ao aumento do estado de tensão axial de compressão. Note-se que apesar do estado de tensão axial de compressão aumentar a capacidade resistente da viga à torção, esta compressão exterior também esgota mais rapidamente, em termos de deformação, a capacidade resistente da viga por compressão do betão. Este carácter mais frágil observado para a rotura da viga, à medida que aumenta a tensão axial de compressão, está também associado ao atraso que este estado provoca na cedência da armadura longitudinal de torção.

Tabela 7.1 - Caracterização das curvas $M_T - \theta$ da viga A2 para vários estados de tensão axial de compressão (ponto de fissuração e ponto resistente)

Viga	$M_{T,cr}$ [kNm]	θ_{cr} [°/m]	$(GC)^I$ [kNm ²]	M_{Tu} [kNm]	$\theta_{M_{Tu}}$ [°/m]	$(GC)^{II}$ [kNm ²]
$\sigma_{ci} = 0$	115,25	0,055	120060,7	244,75	2,091	5339,24
$\sigma_{ci} = 5,9$ MPa	117,30	0,062	109216	267,07	2,15	6271,25
$\sigma_{ci} = 9,84$ MPa	117,98	0,062	109824,9	285,34	1,97	7193,87
$\sigma_{ci} = 13,77$ MPa	118,60	0,062	110421,8	301,92	1,92	8163,45
$\sigma_{ci} = 17,7$ MPa	119,23	0,062	111012,6	313,79	1,77	9091,12

Analise-se agora a influência do estado de tensão de tração axial uniforme no comportamento numérico da viga A2 sujeita à torção, a partir das curvas $M_T - \theta$ ilustradas na Figura 7.6. A partir da Figura 7.6 observa-se que, com o aumento da tensão de tração axial externa, a rigidez no estado fissurado diminui. Este aspeto pode ser entendido pois à imposição da tensão axial externa, o estado interno de tração imposto pelo momento torsor na direção longitudinal sofre um acréscimo, pelo que as deformações aumentam. Por consequência deste estado de tração adicional, a capacidade resistente do betão à tração também se esgota mais depressa. Em consequência, o momento torsor de fissuração também deve baixar, embora tal não seja visivelmente notório na Figura 7.6 devido aos baixos níveis de tensão axial de tração considerados. Além disso, em virtude do estado axial de tração, as

armaduras longitudinais atingem a cedência mais rapidamente, resultando numa diminuição na resistência das vigas à torção. Outro aspeto da Figura 7.6 que deve ser comentado está relacionado com o aumento da rotação máxima para o primeiro nível de tensão axial de tração ($\sigma_{ti} = 1,438$ MPa) e redução da mesma para os restantes níveis. Esta observação está provavelmente relacionada com os critérios de paragem do modelo numérico, que impõe limites para as deformações dos materiais.

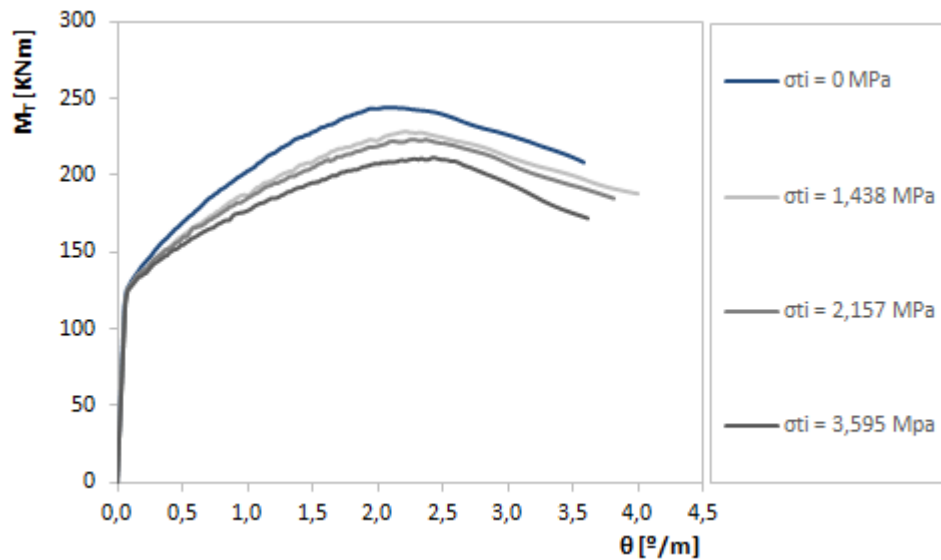


Figura 7.6 - Curvas numéricas $M_T - \theta$ para a viga A2 com diferentes estados de tração axial constantes

A Tabela 7.2 mostra existir uma diminuição do momento torsor resistente com o aumento da tensão axial de tração, bem como uma diminuição da rigidez torsional no estado I e II (antes e após o momento torsor de fissuração). Um facto que se pode observar na Tabela 7.2, que não é visualmente perceptível nas curvas $M_T - \theta$ da Figura 7.6, é o ligeiro decréscimo do momento torsor de fissuração, bem como da rigidez de torção em estado fissurado, com o aumento da tensão axial externa de tração a partir do primeiro nível do estado de tensão de tração. Em relação ao primeiro, a tendência observada pode ser explicada pelo facto da existência de tensão axial de tração externa adiantar a fissuração do betão e aumentar as deformações. Em consequência, a viga fissa mais precocemente, com maiores níveis de deformação. O ligeiro aumento do momento torsor de fissuração observado para o primeiro nível do estado de tensão axial de tração poderá eventualmente ser explicado pelo facto dos modelos numéricos para a viga A2, com e sem estado de tensão uniforme externo, não ser exatamente o mesmo em virtude das condições de carregamento não serem as mesmas. As variações dos valores para os momentos torsesores são no entanto muito pequenas, pelo que este aspeto torna-se menos relevante.

Tabela 7.2 - Caracterização das curvas $M_T - \theta$ da viga A2 para vários estados de tensão axial de tração (ponto de fissuração e ponto resistente)

Viga	$M_{T,cr}$ [kNm]	θ_{cr} [°/m]	$(GC)^I$ [kNm ²]	$M_{T,u}$ [kNm]	$\theta_{M_{T,u}}$ [°/m]	$(GC)^{II}$ [kNm ²]
A2	115,25	0,055	120060,7	244,75	2,091	5339,238
$\sigma_{ti} = 1,438\text{MPa}$	116,07	0,062	108066,9	228,58	2,21	4306,573
$\sigma_{ti} = 2,157\text{MPa}$	115,95	0,062	107953,2	222,67	2,26	4179,764
$\sigma_{ti} = 3,595\text{MPa}$	115,70	0,062	107725,3	211,99	2,42	3751,905

A partir das observações realizadas ao longo da presente secção, pode afirmar-se que, em termos de tendências gerais relacionadas com a forma das curvas $M_T - \theta$, os resultados numéricos obtidos para a viga A2, através do Abaqus, com os diferentes níveis de tensão axial de compressão ou de tração, são congruentes com os resultados teóricos obtidos através do GSVATM modificado, os quais foram apresentados na Secção 6.3.1. Assim, em termos de tendências gerais, podem validar-se os modelos expostos na Secção 5.2.

As Tabelas 7.3 e 7.4 resumem as variações percentuais teóricas e numéricas do momento torsor resistente a partir da situação de estado de tensão axial nulo e para cada nível de tensão de compressão e tração em análise, respetivamente. As Figuras 7.7 e 7.8 ilustram as variações percentuais do momento torsor resistente para o estado de tensão axial de compressão e de tração, respetivamente. Analisando as Figuras 7.7 e 7.8 pode concluir-se que a tendência da evolução do momento torsor resistente teórico e numérico é semelhante, embora os valores em magnitude sejam algo diferentes. A Figura 7.7 mostra existir um aumento do momento torsor resistente, tanto teórico como numérico, quando o estado de tensão axial de compressão aumenta. De acordo com as previsões do GSVATM modificado, esse aumento é mais acentuado para níveis de tensão axial até cerca de 10 MPa, a partir dos quais o referido aumento tende a reduzir. Tal deve-se provavelmente ao facto de, segundo o GSVATM modificado, a viga tender a esgotar mais rapidamente a sua capacidade resistente por compressão do betão à medida que a tensão axial de compressão aumenta.

A Figura 7.8 mostra existir uma redução do momento torsor resistente, tanto teórico como numérico, quando o estado de tensão axial de tração aumenta. A tendência de redução é aproximadamente constante, embora seja mais acentuada segundo o GSVATM modificado

As diferenças observadas entre as previsões teóricas do GSVATM modificado e numéricas do Abaqus poderão resultar do modelo base para simular a viga de referência ser substancialmente diferente. Enquanto que o GSVATM modificado é baseado num modelo de escoras e tirantes, por isso “não contínuo”, o modelo numérico do Abaqus é baseado num modelo “contínuo” o qual considera o betão com um comportamento não linear (ver Secção 7.2.2.1).

Tabela 7.3 - Variação percentual do momento torsor resistente teórico e numérico para o estado de compressão axial

Intervalo	Incremento percentual numérico	Incremento percentual teórico
0 - 5,90 MPa	9,12	30,42
0 - 9,84 MPa	16,58	43,64
0 - 13,77 MPa	23,36	52,97
0 - 17,70 MPa	28,21	57,27

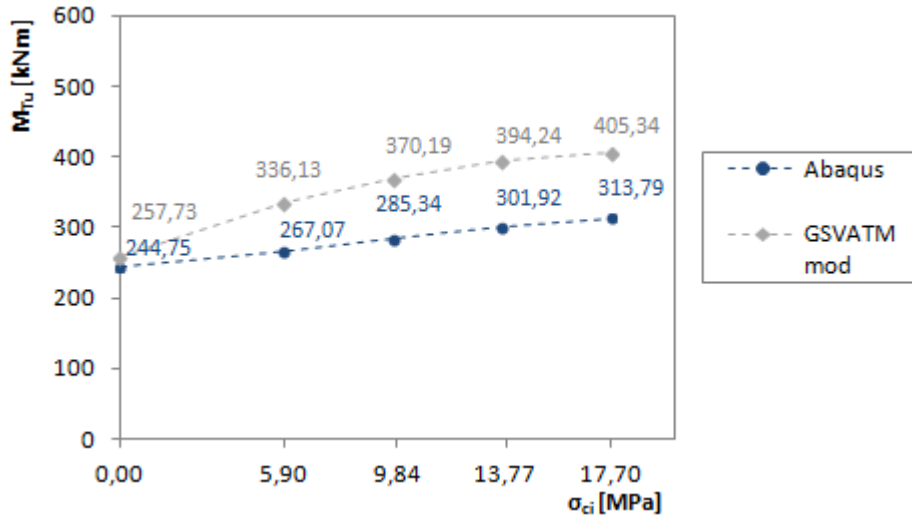


Figura 7.7 - Variação do momento torsor resistente teórico e numérico com os diferentes estados de compressão axial

Tabela 7.4 - Variação percentual do momento torsor resistente teórico e numérico para o estado de tração axial

Intervalo	Incremento percentual numérico	Incremento percentual teórico
0 - 1,438 MPa	-6,61	-16,03
0 - 2,157 MPa	-9,02	-27,67
0 - 3,595 MPa	-13,39	-48,02

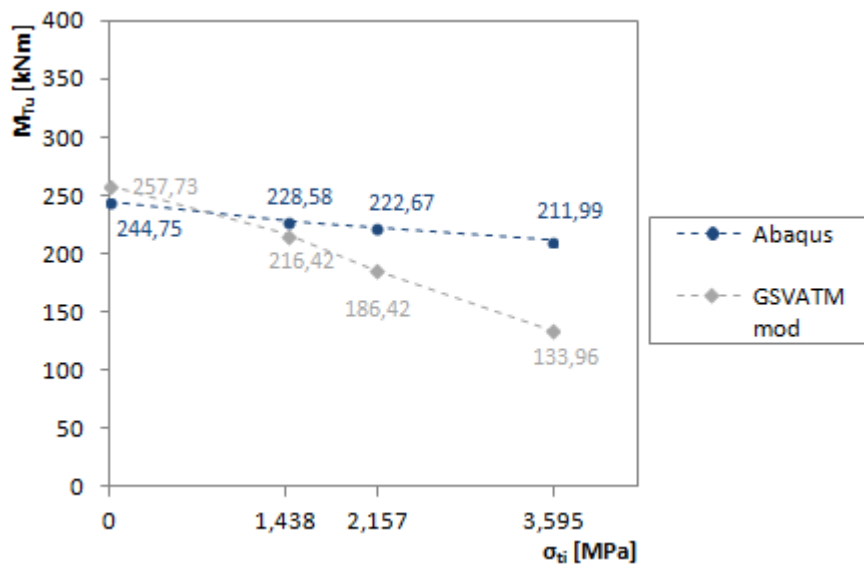


Figura 7.8 - Variação do momento torsor resistente teórico e numérico com os diferentes estados de tração axial

Tendo por base o exposto anteriormente, deve ser referido que a validade do GSVATM modificado para o tipo de vigas em estudo na presente secção deve ser encarada com alguma reserva. Na bibliografia consultada apenas foram encontrados resultados numéricos com elementos finitos para simular o comportamento deste tipo de vigas. Como foi referido na Secção 7.2.2.1, este modelo numérico apenas foi calibrado com resultados experimentais para a torção pura. Na ausência de resultados experimentais envolvendo vigas à torção com estado axial de tensão uniforme constante, não é assim possível estabelecer conclusões sólidas sobre a validade das previsões, quer teóricas quer numéricas, aqui apresentadas, apesar das tendências gerais observadas concordarem e serem congruentes com o esperado.

7.2.3. Vigas confinadas axialmente

Tendo em conta a escassez de resultados experimentais associadas a vigas ensaiadas à torção que possam, em simultâneo, ser consideradas confinadas axialmente, a validação do GSVATM modificado para este tipo de vigas é realizada através da comparação das suas previsões da curva $M_T - \theta$, designadamente do momento torsor resistente, com os resultados obtidos através de um estudo numérico, realizado por Tabora em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32]. Tal estudo consistiu na modelação por elementos finitos novamente da viga A2 de betão armado ensaiada por Bernardo em 2003 [20] (a viga A2 possui as mesmas características geométricas e mecânicas que a viga caracterizada na Secção 6.2). O estudo realizado pelos referidos autores consistiu na utilização do programa LUSAS, que incorpora a possibilidade de realizar uma análise não linear com elementos finitos, para simular o comportamento da referida viga à torção. Após o modelo numérico ter sido calibrado para a torção, a viga A2 foi simulada para a interação de torção + confinamento axial, com diferentes níveis de confinamento axial.

Na presente secção é apresentada, inicialmente, uma breve descrição do modelo numérico de Tabora em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32], bem como das leis constitutivas usadas para caracterizar o comportamento dos materiais constituintes da viga A2 quando sujeita à torção.

Na Figura 7.9 encontra-se ilustrado o modelo numérico da viga A2 com elementos finitos. Este modelo consiste em paredes que compõem a secção vazada da viga, existindo nos extremos duas placas de aço espessas com uma elevada resistência e rigidez, onde estão impostas as condições de apoio da viga e o carregamento. Neste modelo, considerado mais completo comparativamente ao modelo de Ferreira [55] apresentado na Secção 7.2.2.1, os autores modelaram as zonas de transição junto das cabeças de extremidade da viga A2 com o objetivo de reproduzir a zona de suavização das tensões entre as chapas extremas, onde é aplicado o momento torsor externo e onde é imposto o encastramento de torção. Além disso, foi considerado o comprimento total e real da viga para a modelação. Desta forma, o modelo numérico representa mais realisticamente a viga real, Figura 7.9.

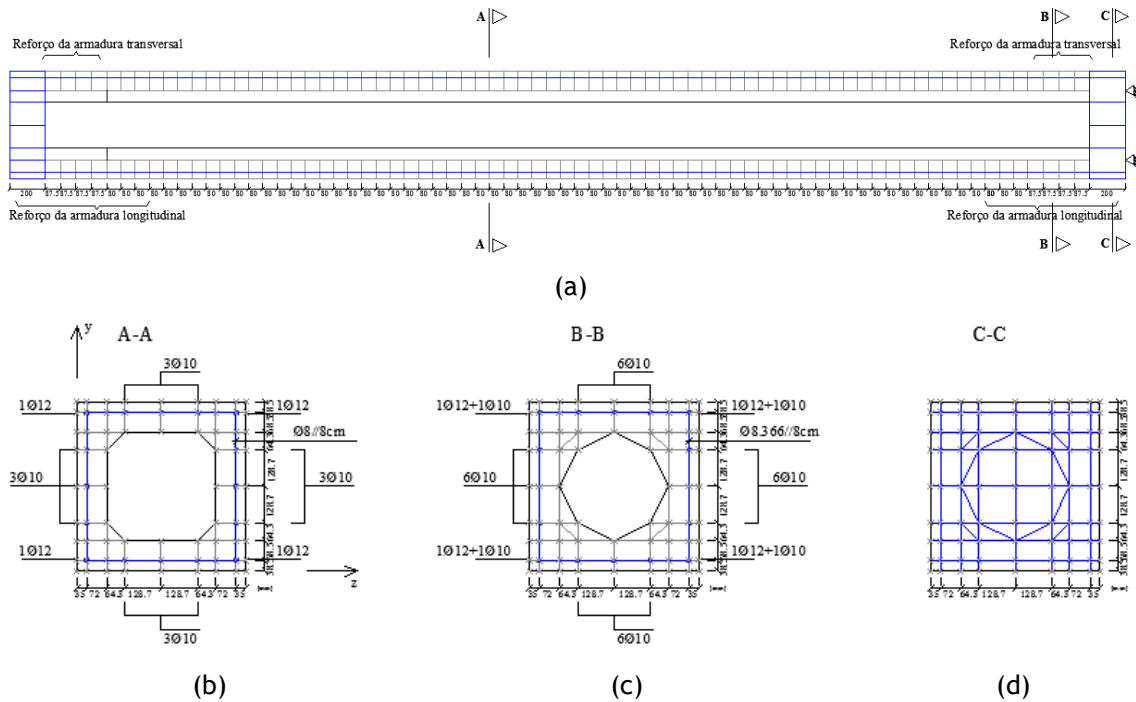


Figura 7.9 - Modelo numérico da viga A2, Lusas: (a) Corte longitudinal - (b),(c) e (d) Cortes transversais [116]

Para simular o confinamento axial, os autores modelaram um cabo não aderente (centrado com a secção) ligado em ambas as extremidades às chapas metálicas de topo, Figura 7.10. A mobilização da rigidez axial do cabo quando a viga tende a alongar por ação do momento torsor simula o confinamento axial. Na Tabela 7.5 apresentam-se as propriedades adotadas para o referido cabo não aderente, designadamente as diferentes áreas da sua secção transversal para simular os diferentes níveis de confinamento axial, k .

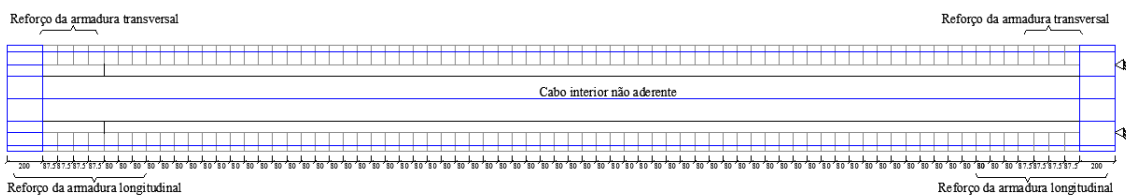
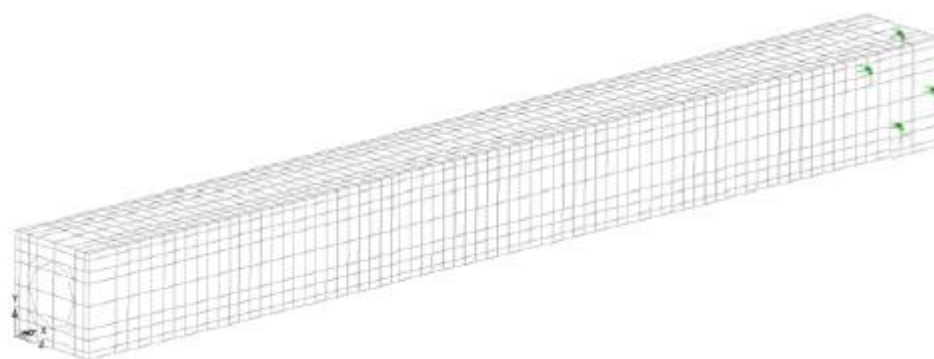


Figura 7.10 - Corte longitudinal do modelo numérico da viga A2 com confinamento axial, Lusas [116]

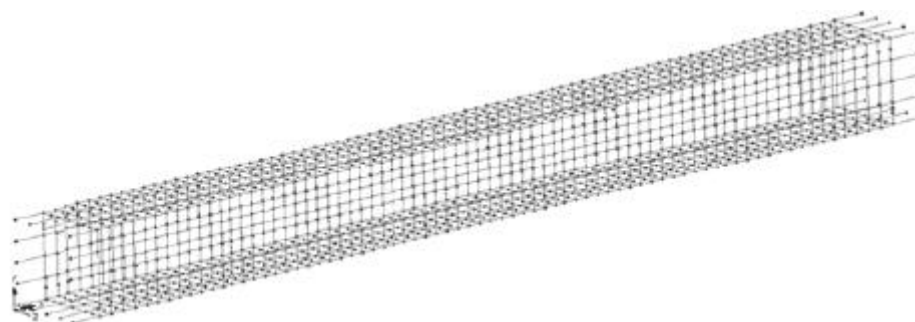
Tabela 7.5 - Propriedades do cabo não aderente para diferentes níveis de confinamento axial

l [m]	E [GPa]	A [cm ²]	$k = \frac{EA}{l}$ [kN/m]
5,90	200	2,95	10000
		5,90	20000
		8,85	30000
		11,8	40000
		14,75	50000
		17,7	60000
		20,65	70000
		23,6	80000

De forma sucinta, é explicado seguidamente o modelo tridimensional de elementos finitos e o tipo de elemento utilizado para modelar os materiais constituintes da viga A2. Informações mais detalhadas podem ser encontrados em [116][32]. O betão foi modelado através de um elemento sólido contínuo, designado HX8 [84], para modelar o comportamento não linear do betão. As chapas de aço utilizam o mesmo elemento HX8 para garantir a compatibilidade entre elementos (inclusive a partilha dos mesmo nós). Na Figura 7.11 (a) ilustra-se o modelo com elementos finitos para o betão e chapas metálicas. Pode observar-se na Figura 7.12 (a) que num dos topos da viga foi imposto na chapa metálica um binário de deslocamentos lineares para simular a ação do momento torsor externo. Na outra extremidade (ver Figura 7.12 (b)) foram dispostos diversos apoios a restringir os deslocamentos lineares de forma a simular um encastramento de torção. Relativamente às armaduras longitudinais e transversais, foi utilizado um elemento de barra isoparamétrico 3D, denominado BRS2 [84] (Figura 7.11 (b)), com as áreas de secção transversal correspondentes aos varões modelados. O cabo longitudinal exterior foi também simulado através do elemento de barra BRS2, com diferentes áreas da secção transversal consoante o nível de confinamento a simular, conforme exposto na Tabela 7.5.

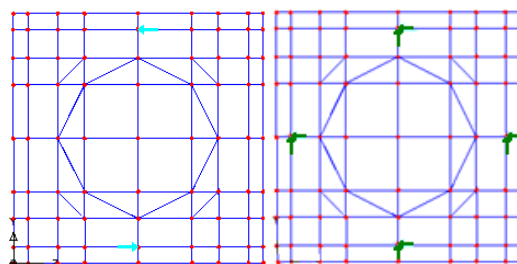


(a)



(b)

Figura 7.11 - Modelo numérico da viga A2, Lusas: (a) Betão + chapas metálicas - (b) Armaduras [116]



(a)

(b)

Figura 7.12 - Modelo numérico da viga A2, Lusas: (a) Binário de forças aplicado na chapa metálica da extremidade esquerda - (b) Encastramento à torção da viga na extremidade direita [116]

O comportamento não linear do betão foi caracterizado através do modelo *Multi-Crack* incorporado no LUSAS, o qual foi desenvolvido por Jefferson em 2003 [72] [73]. Esta teoria assume um comportamento elástico-linear base para o betão à compressão, sendo a componente plástica, para modelar o comportamento não linear do betão à compressão, considerada adicionalmente através de diversos parâmetros que caracterizam o comportamento triaxial de provetes de betão. Tais parâmetros derivam de critérios de cedência e de rotura, potencial plástico, lei de fluxo e relações *hardening/softening*. Através da calibração destes parâmetros, Taborda [116] e Bernardo et al. [32] conseguiram modelar o comportamento do betão para a viga A2 sob a interação de esforços. Para simular a fissuração, o *Multi-Crack* incorpora relações tensão-extensão de um plano de fissura efetiva para gerar uma relação entre tensões e extensões locais. Para retratar o comportamento não linear das armaduras à tração, bem como do cabo não aderente, os autores introduziram a lei

constitutiva de Belarbi e Hsu, 1994, [17] que foi apresentada na Secção 2.2.4, Tabela 2.2. As curvas associadas à referida lei constitutiva foram simplificadas através de troços retos por forma a facilitar a introdução das mesmas no LUSAS (através das coordenadas dos pontos que limitam os referidos troços). Para uma leitura mais pormenorizada do modelo numérico da viga A2 e da respetiva calibração, recomenda-se a consulta dos estudos originais [116], [32].

Após a calibração do modelo numérico tendo por base os resultados experimentais da viga A2, e depois de diversas simulações, os referidos autores conseguiram prever o comportamento da viga A2 através do traçado da curva $M_T - \theta$. A Figura 7.13 ilustra a curva $M_T - \theta$ numérica da viga A2 quando sujeita à torção, bem como a respetiva curva experimental. Uma vez que o objetivo era essencialmente reproduzir o comportamento da viga em termos de momentos torsores, a previsão foi considerada aceitável pelos autores. O modelo numérico calibrado foi seguidamente utilizado pelos autores para simular a viga A2 à torção + confinamento axial. Os resultados associados são seguidamente apresentados e utilizados para validar as previsões do GSVATM modificado para as vigas à torção confinadas axialmente.

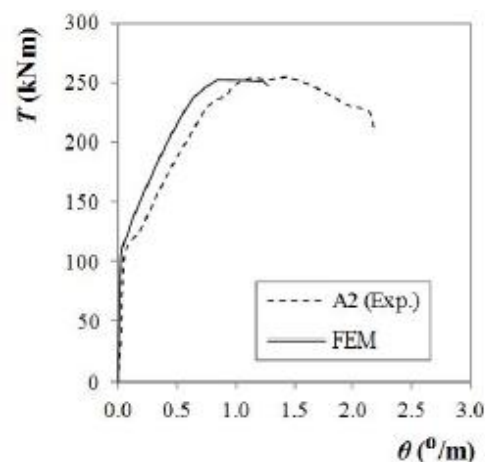


Figura 7.13 - Curvas $M_T - \theta$ experimental e numérica da viga A2, Lusas [32]

A Figura 7.14 (a) apresenta os resultados da análise numérica da viga A2 com confinamento axial, enquanto a Figura 7.14 (b) apresenta as mesmas curvas calculadas anteriormente com o GSVATM modificado (Secção 6.3.2). A partir da observação da Figura 7.14 pode verificar-se que, na zona última comportamental, tanto as curvas obtidas com o GSVATM como as obtidas através do Lusas estão em concordância. As curvas $M_T - \theta$ da Figura 7.14 mostram que, com o aumento do confinamento axial, aumenta o momento torsor resistente e a rigidez de torção das mesmas após a fissuração. À medida que aumenta o nível de confinamento, observa-se uma tendência para uma redução da deformação última da viga. Esta tendência está relacionada com a redução da ductilidade da viga devido à influência da força de compressão centrada que se gera em virtude do confinamento axial. Observa-se também que, à semelhança do que acontece com as vigas pré-esforçadas com armaduras não aderentes [28], não existe uma influência notória do efeito do confinamento axial no estado não fissurado.

Tal é compreensível visto que somente depois da fissuração é que a viga tende a alongar na direção longitudinal.

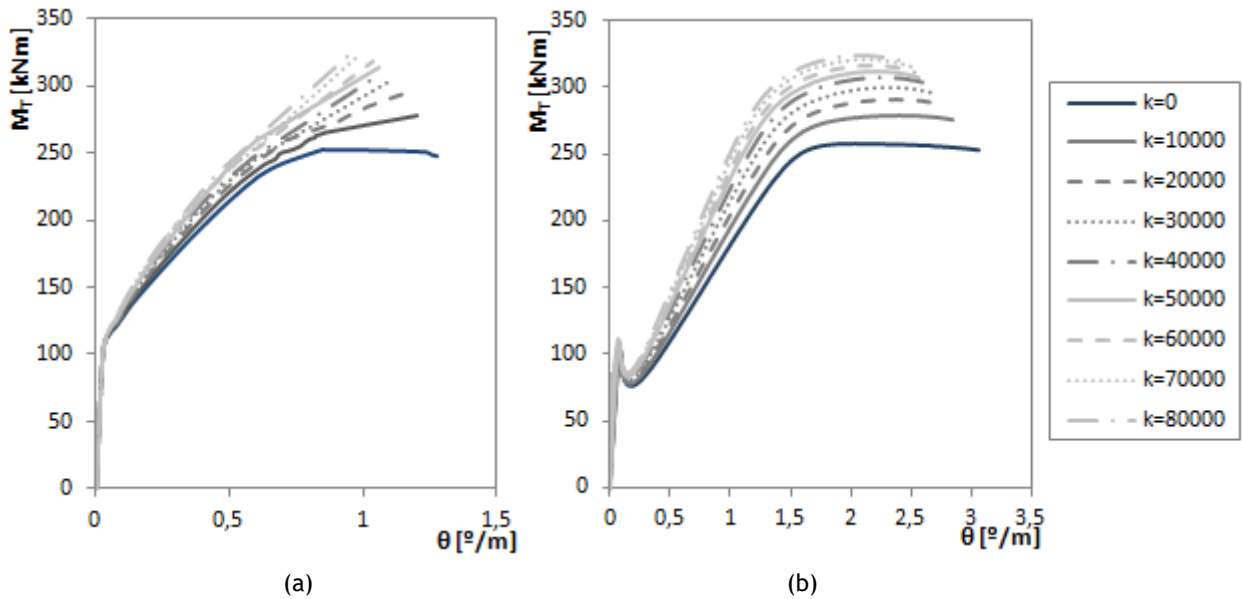


Figura 7.14 - Curvas $M_T - \theta$ da viga A2 com confinamento axial: (a) numérica, Lusas [116] - (b) teórica, GSVATM modificado

Na Figura 7.15 é apresentada uma análise comparativa entre a variação dos valores teóricos para o momento tissor resistente (M_{Tu}) obtidos a partir do GSVATM modificado e os correspondentes valores numéricos, para os vários níveis de confinamento axial (k) analisados. Verifica-se que a referida evolução é semelhante e que os valores dos momentos tissors resistentes são também semelhantes, apresentando uma diferença máxima de 1,98%. Assim, pode concluir-se que os resultados numéricos obtidos por Taborda em 2012 [116] e Bernardo et al. em 2015 [32] permitem validar o GSVATM modificado para a previsão do comportamento de vigas de betão armado confinadas axialmente e sujeitas à torção, em particular para a previsão da resistência à torção.

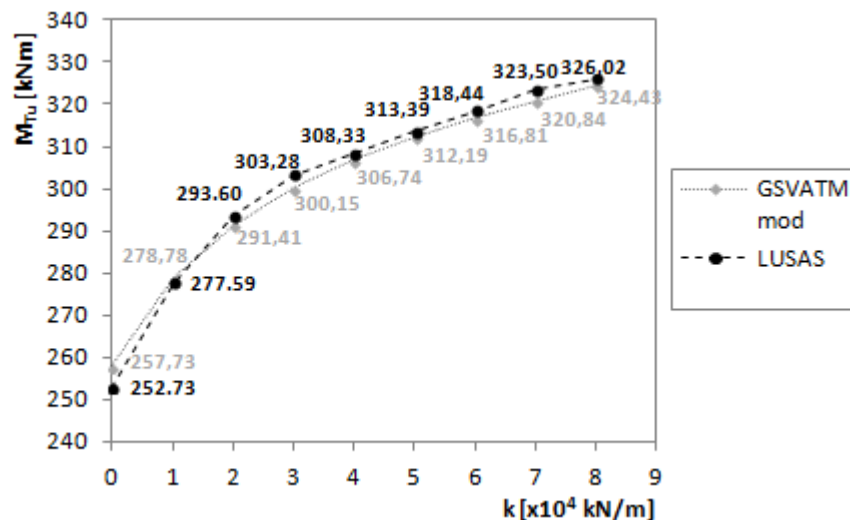


Figura 7.15 - Variação do momento tissor resistente teórico e numérico com o confinamento axial

7.3. Análise comparativa com resultados experimentais

Tendo por base a modificação do GSVATM para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme apresentada na Secção 5.4, e a sua implementação computacional, foi também realizado o cálculo teórico da previsão do comportamento, e em particular da resistência, de diversas vigas ensaiadas por vários autores, designadamente vigas de betão à torção com pré-esforço longitudinal uniforme aderente e não aderente (pré-esforço externo). O objetivo da presente secção é realizar uma análise comparativa das previsões obtidos com o GSVATM modificado, em termos de comportamento último, com os resultados experimentais encontrados na literatura consultada associadas ao tipo de vigas anteriormente referidas. Refere-se desde já que, em diversas simulações de vigas realizadas, o GSVATM modificado para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme apresentou problemas de convergência para baixos níveis de carregamento, designadamente na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, os quais não foi possível solucionar no âmbito do presente trabalho. Por isso, o momento torsor teórico de fissuração obtido para diversas vigas analisadas deve ser encarado com reserva. Uma vez que a análise comparativa foca essencialmente o comportamento último das vigas, designadamente a resistência à torção, este problema não foi considerado relevante para o presente trabalho.

De entre os estudos consultados sobre os resultados de ensaios experimentais de vigas à torção com pré-esforço longitudinal uniforme, referem-se os estudos realizados por El-Degwy e McMullen em 1985 [48], Wafa et al. em 1995 [121], Mitchell e Collins em 1974 [89], Bernardo em 2003 [20] e Hsu em 1985 [71], os quais apresentam todos os dados necessários para os propósitos das análises a realizar no presente trabalho.

Tal como já referido anteriormente (Secções 2.3 e 5.4), pelo facto das armaduras de pré-esforço se encontrarem não aderentes ao betão, quando a viga é sujeita a um momento torsor origina-se um estado de confinamento axial em consequência da rigidez axial dessas mesmas armaduras, em adição ao efeito do pré-esforço. Tal estado depende da rigidez axial das armaduras de pré-esforço. Por este motivo, a presente secção é dividida em duas partes. Inicialmente, é realizada uma análise comparativa dos resultados teóricos do GSVATM modificado para diversas vigas com pré-esforço longitudinal aderente. Posteriormente, é realizada uma análise comparativa com as duas únicas vigas encontradas na bibliografia consultada e em que o pré-esforço longitudinal é exterior e, por consequência, não aderente ao betão.

7.3.1. Vigas com pré-esforço longitudinal uniforme aderente

Na presente secção apresenta-se a análise comparativa baseada nas curvas $M_T - \theta$ de vigas à torção com pré-esforço longitudinal central aderente ao betão. Para tal, foi utilizado o aplicativo Torque onde foi implementado o GSVATM modificado para calcular as referidas curvas de cada viga experimental ensaiada por El-Degwy e McMullen [48], Wafa et al. [121], Mitchell e Collins [89] e Hsu [71]. Refere-se que o estudo experimental realizado por Wafa et al. em 1995 [121], que consistiu no ensaio à torção de 14 vigas de alta resistência com pré-esforço longitudinal uniforme e com secção cheia, apresenta curvas $M_T - \theta$ algo atípicas, designadamente segundo o eixo das rotações, não tendo estas vigas sido consideradas em análises comparativas realizadas por outros autores, por exemplo Jeng et al., em 2010 [76]. No entanto, visto que no presente estudo constitui objetivo analisar essencialmente a resistência últimas das vigas, as referidas vigas foram ainda assim incorporadas no presente estudo.

Nas Tabelas 7.6 e 7.7 encontram-se resumidas as características necessárias para o cálculo teórico das curvas $M_T - \theta$ de 27 vigas ensaiadas por diversos autores. Mais informações sobre as referidas vigas devem ser consultadas na bibliografia. O presente estudo inclui apenas uma viga com secção vazada em betão de classe de resistência normal, a qual foi ensaiada por Mitchell e Collins [89]. Estão também incluídas 12 vigas de alta resistência com secção cheia de Wafa et al. [121] e 14 vigas de resistência normal com secção cheia de El-Degwy e McMullen [48] e Hsu [71]. Refere-se ainda que as vigas experimentais analisadas encontram-se identificadas de acordo com a designação original dos respetivos autores. As Tabelas 7.6 e 7.7 encontram-se organizadas, em relação às vigas, por ordem cronológica do estudo a que pertencem.

A Tabela 7.6 resume as principais características geométricas da secção transversal: a largura (x) e a altura (y) da secção, a espessura das paredes (t) para a viga com secção vazada, bem como as dimensões x_1 e y_1 que representam a largura e altura das cintas ao eixo dos varões que as compõem. São ainda apresentadas as características mecânicas da secção: a área total de armadura ordinária longitudinal (A_{st}), a área total da armadura de pré-esforço longitudinal (A_{pl}), a área distribuída de um ramo da armadura transversal na direção longitudinal (A_{st}/s), a taxa de armadura longitudinal (ρ_l), a taxa de armadura transversal (ρ_t), a taxa total de armadura longitudinal incluindo a armadura longitudinal ordinária e de pré-esforço ($\rho_{l,tot}$) e a taxa total de armadura (ρ_{Tot}).

Tabela 7.6 - Características geométricas e mecânicas das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme e aderente

Viga	x [cm]	y [cm]	t [cm]	x ₁ [cm]	y ₁ [cm]	A _{st} [cm ²]	A _{st} /s [cm ²]	A _{pl} [cm ²]	ρ _l [%]	ρ _t [%]	ρ _{l,tot} [%]	ρ _{Tot} [%]
P2 [89]	35,6	43,2	8,9	31,2	38,9	5,58	7,35	4,63	0,37	0,61	0,66	1,34
P3 [89]	35,6	43,2	-	29,2	36,8	4,26	7,35	1,16	0,28	0,63	0,35	1,00
P8 [71]	25,4	38,1	-	21,6	34,3	5,16	22,58	9,58	0,53	2,90	1,55	4,16
PA1R [48]	25,4	25,4	-	22,2	22,2	2,8	4,5	0,93	0,40	0,80	0,60	1,40
PA2 [48]	25,4	25,4	-	21,6	21,6	5,2	7,7	1,50	0,80	1,40	1,00	2,50
PA3 [48]	25,4	25,4	-	21,9	21,9	8,0	7,9	2,06	1,20	1,40	1,60	3,00
PA4 [48]	25,4	25,4	-	21,9	21,9	11,4	11,0	2,97	1,80	2,00	2,20	4,30
PB1 [48]	17,8	35,6	-	14,6	32,4	2,8	4,5	0,93	0,40	0,80	0,60	1,40
PB2 [48]	17,8	35,6	-	14,0	31,8	5,2	7,7	1,50	0,80	1,50	1,10	2,60
PB3 [48]	17,8	35,6	-	14,3	32,1	8,0	7,5	2,06	1,30	1,40	1,60	3,00
PB4 [48]	17,8	35,6	-	14,3	32,1	11,4	10,2	2,97	1,80	2,00	2,30	4,30
PC1 [48]	14,6	43,8	-	11,4	40,6	2,8	3,9	0,93	0,40	0,80	0,60	1,40
PC2 [48]	14,6	43,8	-	10,8	40,0	5,2	6,9	1,50	0,80	1,50	1,00	2,50
PC3 [48]	14,6	43,8	-	11,1	40,3	8,0	6,8	2,06	1,30	1,40	1,60	2,90
PC4 [48]	14,6	43,8	-	11,1	40,3	11,4	9,5	2,97	1,80	2,00	2,20	4,20
H3AR [121]	14,0	42,0	-	9,8	37,8	8,0	10,3	3,97	1,40	2,00	2,00	4,00
H2A [121]	17,0	34,0	-	12,8	29,8	8,0	12,6	3,97	1,40	2,20	2,10	4,30
H1AR [121]	24,0	24,0	-	19,8	19,8	8,0	12,6	3,97	1,40	2,10	2,10	4,20
H3B [121]	14,0	42,0	-	10,0	38,0	6,2	5,6	2,06	1,00	1,10	1,40	2,50
H2B [121]	17,0	34,0	-	13,0	30,0	6,2	6,0	2,06	1,10	1,10	1,40	2,50
H1B [121]	24,0	24,0	-	20,0	20,0	6,2	6,5	2,06	1,10	1,10	1,40	2,50
M3A [121]	14,0	42,0	-	9,8	37,8	8,0	10,3	3,97	1,40	2,00	2,00	4,00
M2A [121]	17,0	34,0	-	12,8	29,8	8,0	11,3	3,97	1,40	2,00	2,10	4,10
M1A [121]	24,0	24,0	-	19,8	19,8	8,0	12,6	3,97	1,40	2,10	2,10	4,20
M3B [121]	14,0	42,0	-	10,0	38,0	6,2	5,6	2,06	1,00	1,10	1,40	2,50
M2B [121]	17,0	34,0	-	13,0	30,0	6,2	6,0	2,06	1,10	1,10	1,40	2,50
M1B [121]	24,0	24,0	-	20,0	20,0	6,2	6,5	2,06	1,10	1,10	1,40	2,50

As características dos materiais que compõem as 27 vigas em análise são apresentadas na Tabela 7.7, designadamente: a resistência média à compressão (f_{cm}) e à tração (f_{ctm}) do betão, a tensão média de cedência da armadura ordinária longitudinal (f_{slym}) e transversal (f_{stym}), a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% ($f_{p0,1\%}$) para a armadura de pré-esforço, a tensão inicial na armadura de pré-esforço (f_{pi}), a percentagem de pré-esforço no betão em relação à tensão média resistente à compressão do betão ($\% = f_{cp}/f_{cm}$), a tensão inicial no betão induzida pelo pré-esforço (f_{cp}), a tensão de rotura da armadura de pré-esforço (f_{pu}), bem como o valor médio dos módulos de elasticidade do betão (E_c), da armadura ordinária (E_s) e de pré-esforço (E_p). As diversas extensões dos materiais (ε_0 , ε_{cu} , ε_{lu} , ε_{tu}) foram consideradas iguais às preconizadas pelo EC2 [50].

Tabela 7.7 - Características dos materiais das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme e aderente

Viga	f_{cm} [MPa]	f_{ctm} [MPa]	f_{slym} [MPa]	f_{stym} [MPa]	$f_{p0,1\%}$ [MPa]	f_{pi} [MPa]	f_{cp} [MPa]	%	f_{pu} [MPa]	E_c [GPa]	E_s [GPa]	E_p [GPa]
P2 [89]	32,9	3,2	407	407	1476	1145	4,89	14,9	1640	27,2	200	195
P3 [89]	34,0	3,2	328	328	1476	1145	0,86	2,5	1640	27,6	200	195
P8 [71]	31,0	3,1	334	336	959	690	6,83	22,0	1066	26,4	200	205
PA1R [48]	43,6	4,7	435	310	1638	1207	1,74	4,0	1820	34,2	200	189
PA2 [48]	45,6	5,0	483	310	1663	1207	2,80	6,1	1848	34,7	200	195
PA3 [48]	41,8	4,6	389	435	1744	1303	4,17	10,0	1938	33,8	200	199
PA4 [48]	42,2	4,8	419	435	1709	1303	5,99	14,2	1899	33,9	200	192
PB1 [48]	45,8	4,7	435	310	1638	1207	1,77	3,9	1820	34,7	200	189
PB2 [48]	45,8	5,2	483	310	1663	1207	2,85	6,2	1848	34,7	200	195
PB3 [48]	45,5	5,0	389	435	1744	1303	4,24	9,3	1938	34,7	200	199
PB4 [48]	45,5	4,3	419	435	1709	1303	6,10	13,4	1899	34,7	200	192
PC1 [48]	42,2	5,3	435	310	1638	1207	1,75	4,2	1820	33,9	200	189
PC2 [48]	45,1	4,6	483	310	1663	1207	2,82	6,3	1848	34,6	200	195
PC3 [48]	41,3	4,3	389	435	1744	1303	4,21	10,2	1938	33,7	200	199
PC4 [48]	42,1	4,5	419	435	1709	1303	6,05	14,4	1899	33,9	200	192
H3AR [121]	92,2	7,0	487	390	1816	1366	8,30	9,0	1860	42,8	200	195
H2A [121]	91,9	6,8	487	390	1816	1338	8,67	9,4	1860	42,8	200	195
H1AR [121]	94,7	7,0	487	390	1816	1374	6,39	6,7	1860	43,2	200	195
H3B [121]	91,5	6,9	374	387	1841	1309	3,97	4,3	1886	42,7	200	200
H2B [121]	95,6	7,2	374	387	1841	1344	4,28	4,5	1886	43,3	200	200
H1B [121]	89,8	6,9	374	387	1841	1258	4,27	4,8	1886	42,5	200	200
M3A [121]	69,9	5,2	487	390	1816	1036	6,52	9,3	1860	39,4	200	195
M2A [121]	70,1	5,2	487	390	1816	1021	6,21	8,9	1860	39,5	200	195
M1A [121]	72,5	5,6	487	390	1816	1053	6,44	8,9	1860	39,9	200	195
M3B [121]	69,3	5,1	374	387	1841	991,4	3,23	4,7	1886	39,3	200	200
M2B [121]	69,7	5,3	374	387	1841	979,3	3,29	4,7	1886	39,4	200	200
M1B [121]	72,0	5,5	374	387	1841	1008	3,17	4,4	1886	39,8	200	200

Tendo por base os dados das Tabelas 7.6 e 7.7 e fazendo uso do aplicativo computacional Torque foi possível calcular as curvas teóricas $M_T - \theta$ das 27 vigas experimentais. Nas Figuras 7.16 à 7.42 podem ser consultadas, para cada viga em estudo, as respectivas curvas teóricas $M_T - \theta$ obtidas pelo GSVATM modificado (linha a cor cinza) e as curvas experimentais (linha a cor preta). Para o cálculo teórico, o comportamento do betão à compressão foi caracterizado através da relação constitutiva de Belarbi e Hsu 1991 [19], com os fatores de redução (ou de amolecimento) de Hsu e Zhang 1998 [127] (Tabela 2.1). Para o betão à tração foi usada a lei de Belarbi e Hsu 1994 [17] e modificada por Jeng e Hsu 2009 [74] (Tabela 4.1). Quanto às armaduras ordinárias foi utilizada a relação constitutiva de Belarbi e Hsu 1994 [17] (Tabela 2.2) e para as armaduras de pré-esforço foi usada a relação de Ramberg-Osgood 1943 [101] e Hsu e Mo 1985b [71] (Tabela 2.3). Em estudos anteriores realizados por Andrade em 2010 [12] e por Bernardo et al. em 2012 [23], onde foram testadas várias relações constitutivas para o betão à compressão e para as armaduras à tração, foi concluído que as leis constitutivas referidas anteriormente preveem de forma adequada o comportamento de vigas à torção.

Pela análise das Figuras 7.16 a 7.42, observa-se que a previsão teórica da resistência à torção é boa, para a maioria das vigas. Como já tinha sido referido atrás, o GSVATM modificado para

vigas com pré-esforço apresenta, para várias vigas, alguma dificuldade na previsão do momento tursor de fissuração devido a problemas de convergência do algoritmo, o que impossibilita uma análise comparativa para este ponto característico. Ainda assim, para diversas vigas, o modelo teórico aparenta prever de forma aceitável a rigidez à torção, tanto no estado não fissurado como fissurado.

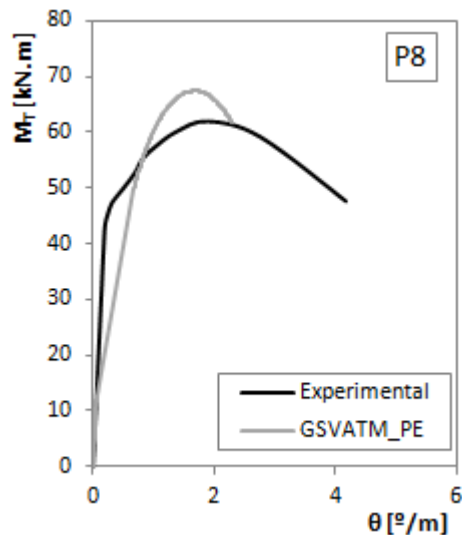


Figura 7.16 - Curva $M_T - \theta$ da viga P8 [71]

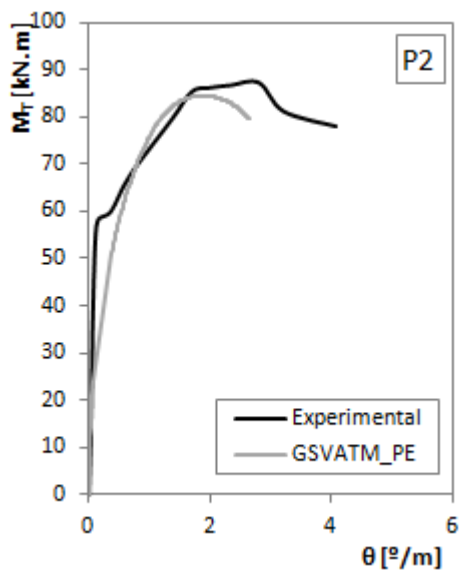


Figura 7.17 - Curva $M_T - \theta$ da viga P2 [89]

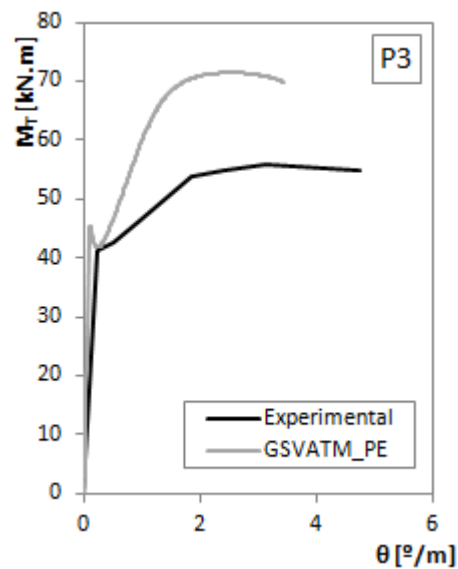


Figura 7.18 - Curva $M_T - \theta$ da viga P3 [89]

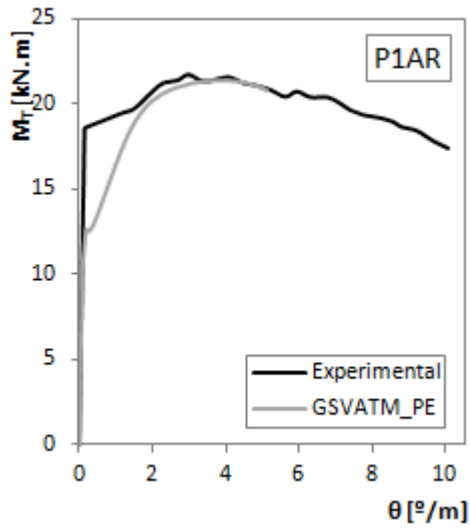


Figura 7.19 - Curva $M_T - \theta$ da viga P1AR [48]

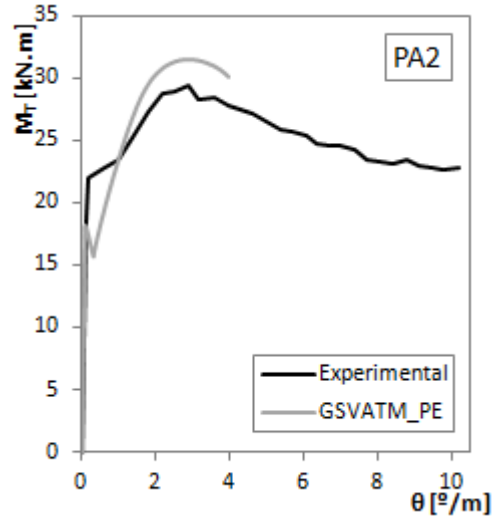


Figura 7.20 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA2 [48]

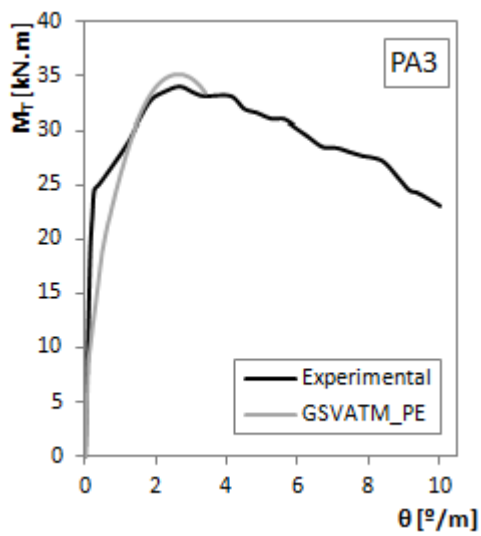


Figura 7.21 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA3 [48]

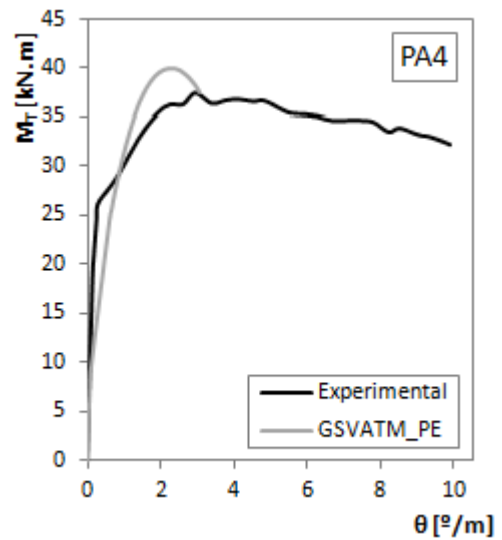


Figura 7.22 - Curva $M_T - \theta$ da viga PA3 [48]

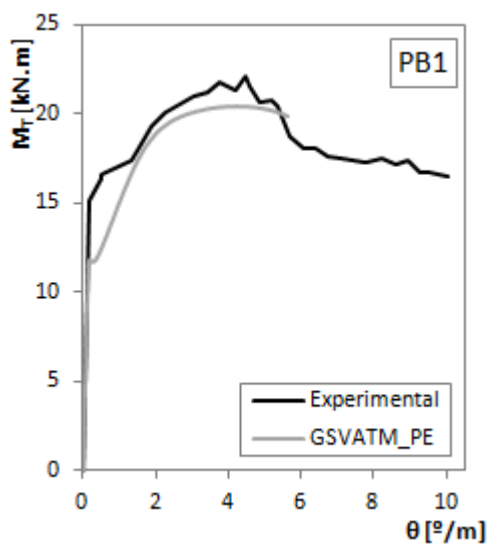


Figura 7.23 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB1 [48]

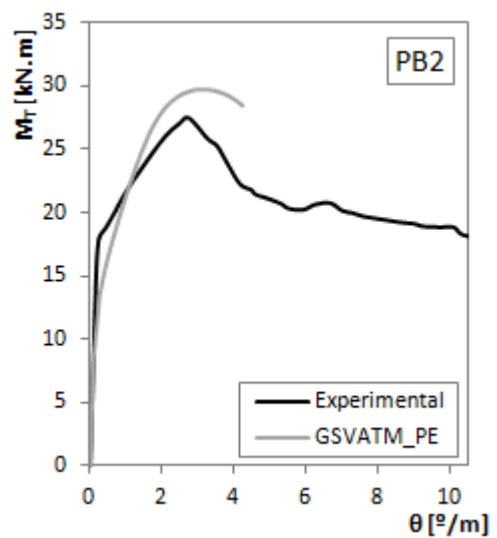


Figura 7.24 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB2 [48]

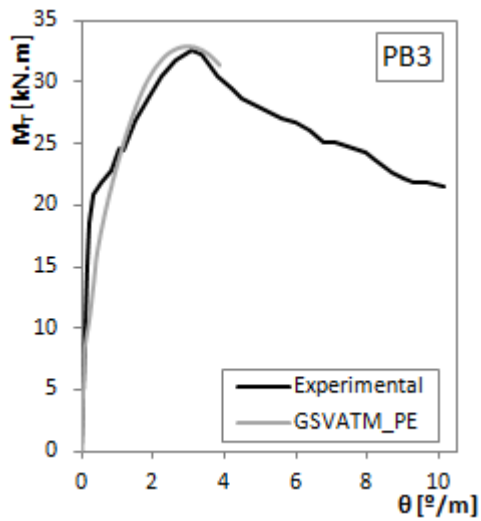


Figura 7.25 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB3 [48]

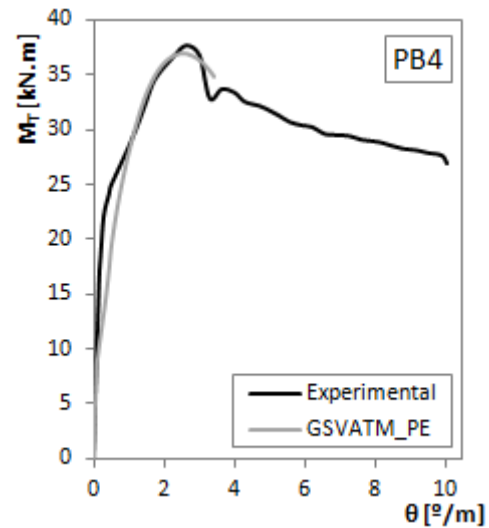


Figura 7.26 - Curva $M_T - \theta$ da viga PB4 [48]

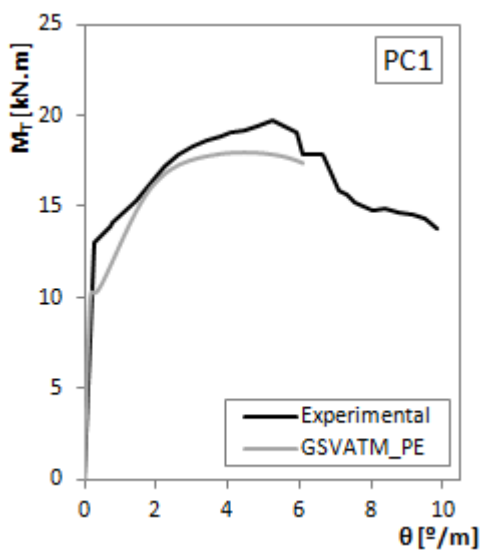


Figura 7.27 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC1 [48]

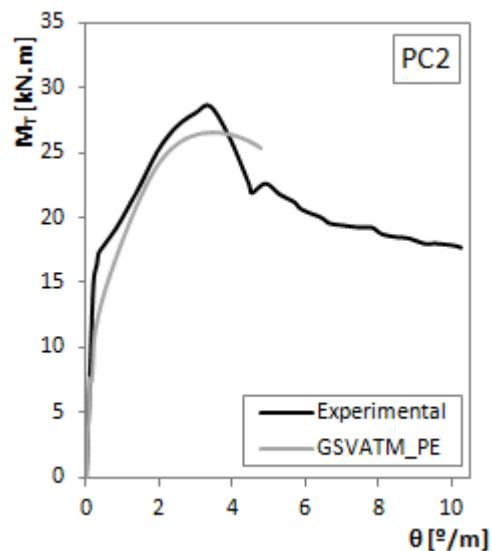


Figura 7.28 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC2 [48]

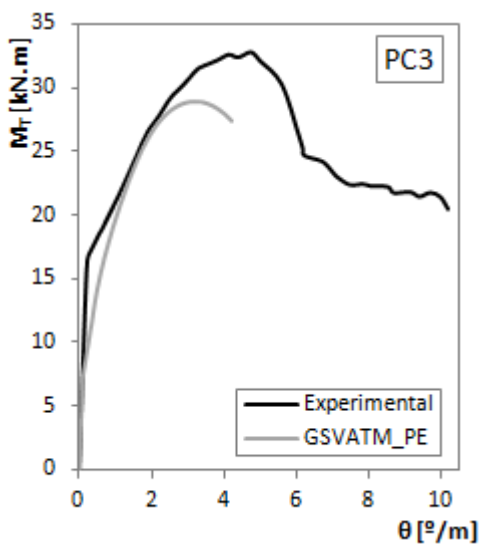


Figura 7.29 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC3 [48]

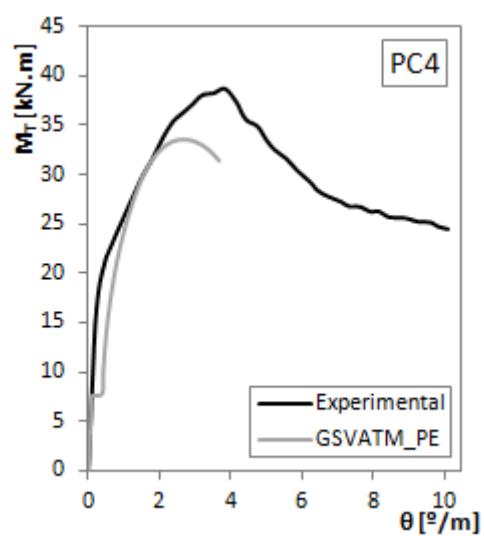


Figura 7.30 - Curva $M_T - \theta$ da viga PC4 [48]

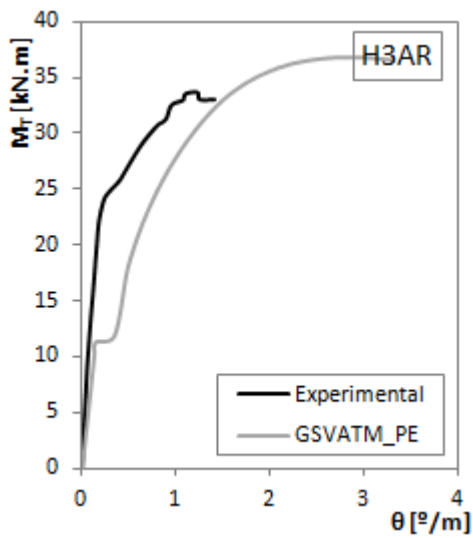


Figura 7.31 - Curva $M_T - \theta$ da viga H3AR [121]

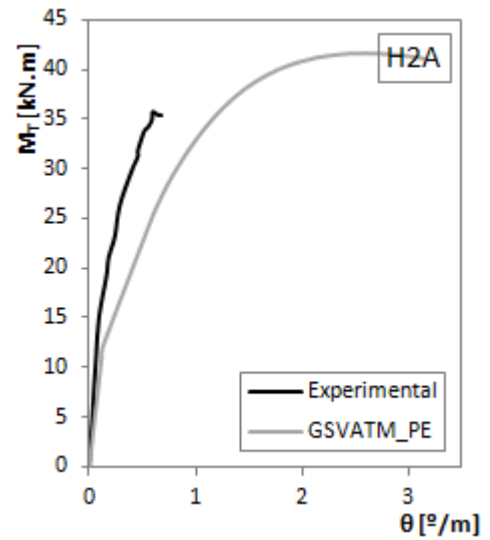


Figura 7.32 - Curva $M_T - \theta$ da viga H2A [121]

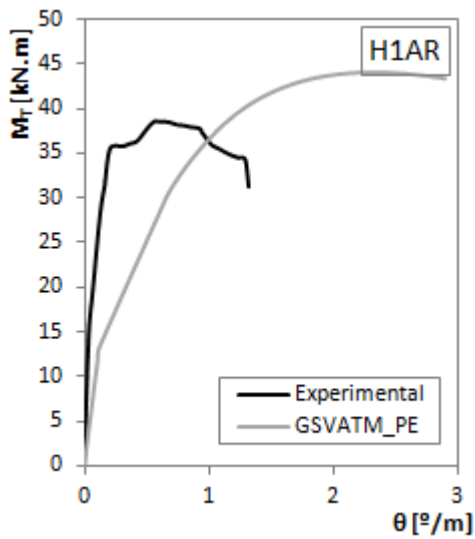


Figura 7.33 - Curva $M_T - \theta$ da viga H1AR [121]

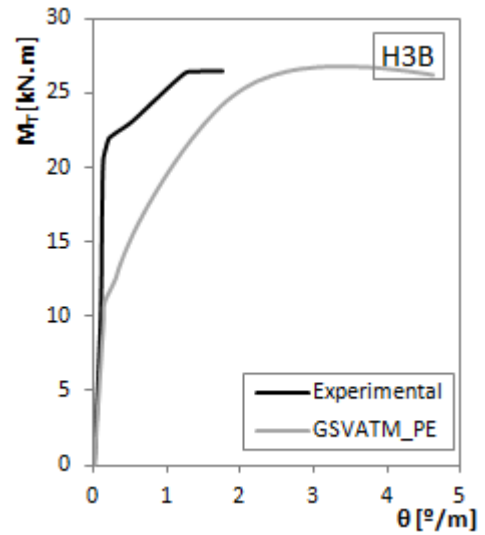


Figura 7.34 - Curva $M_T - \theta$ da viga H3B [121]

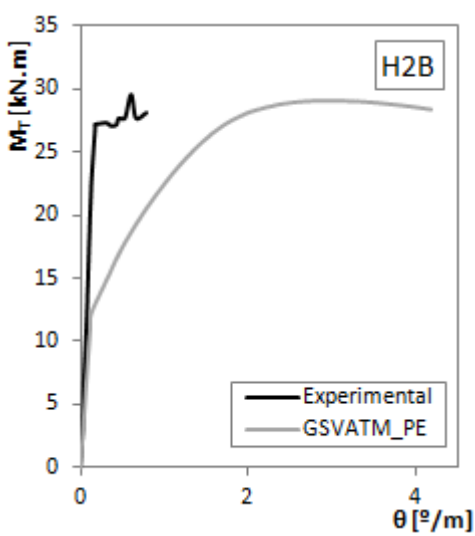


Figura 7.35 - Curva $M_T - \theta$ da viga H2B [121]

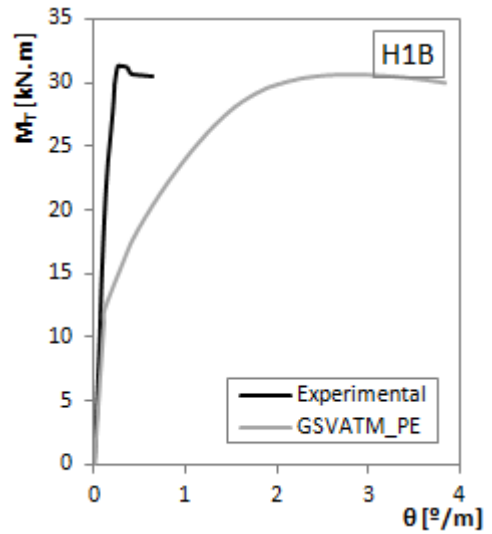


Figura 7.36 - Curva $M_T - \theta$ da viga H1B [121]

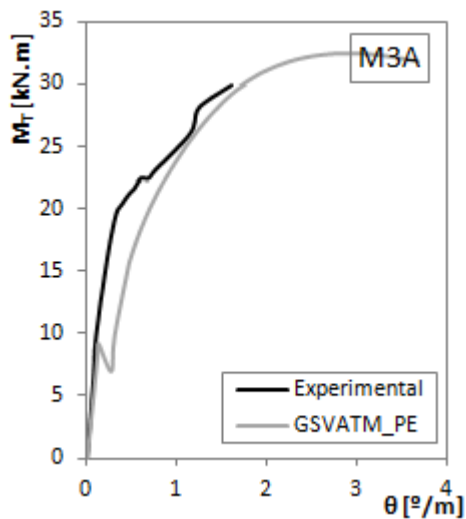


Figura 7.37 - Curva $M_T - \theta$ da viga M3A [121]

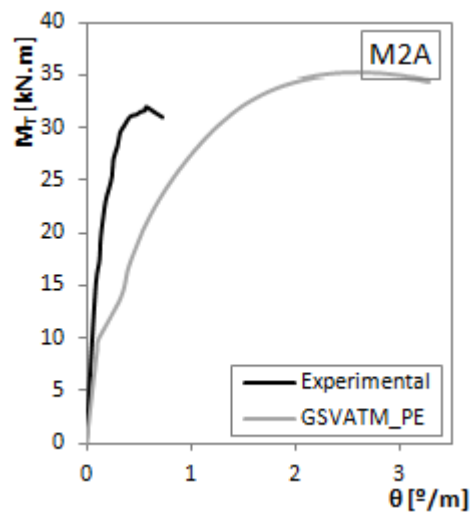


Figura 7.38 - Curva $M_T - \theta$ da viga M2A [121]

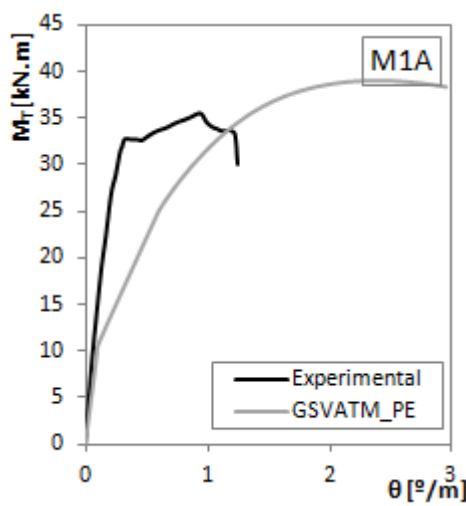


Figura 7.39 - Curva $M_T - \theta$ da viga M1A [121]

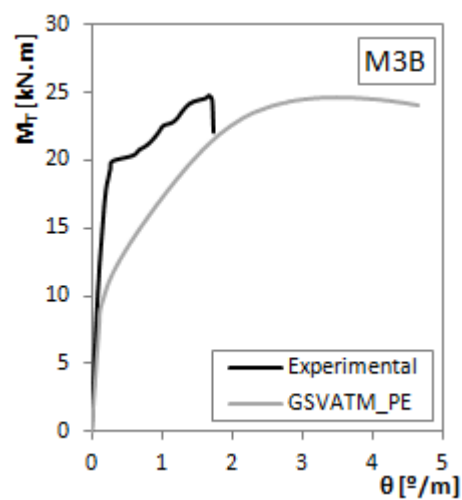


Figura 7.40 - Curva $M_T - \theta$ da viga M3B [121]

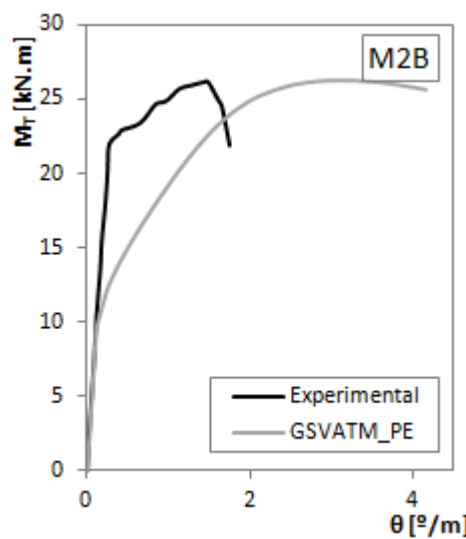


Figura 7.41 - Curva $M_T - \theta$ da viga M2B [121]

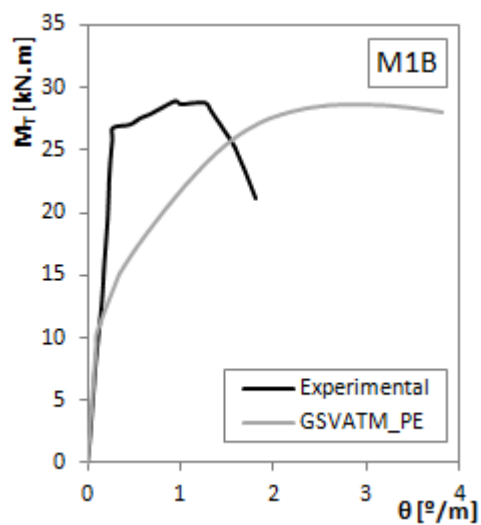


Figura 7.42 - Curva $M_T - \theta$ da viga M1B [121]

Os resultados obtidos nas Figuras 7.16 à 7.42, relativos ao ponto correspondente ao momento torsor máximo, encontram-se sumariados na Tabela 7.8, onde é também apresentada uma análise comparativa entre valores teóricos e experimentais. Para tal, são apresentados os valores experimentais do momento torsor resistente, $M_{Tu,exp}$, bem como o respetivo valor teórico, $M_{Tu,th}$, calculado pelo GSVATM modificado. São também indicados os valores experimentais da rotação da secção transversal correspondente ao momento torsor resistente, $\theta_{Tu,exp}$, e respetivos valores teóricos, $\theta_{Tu,th}$. A Tabela 7.8 apresenta ainda as relações entre os valores experimentais e teóricos para os momentos torsos resistentes e respetivas rotações ($M_{Tu,exp}/M_{Tu,th}$ e $\theta_{Tu,exp}/\theta_{Tu,th}$). Tendo por base os valores destas relações foi calculado o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv). Considerou-se importante calcular o coeficiente de variação pois este constitui uma medida da dispersão dos resultados relativamente ao valor ótimo da relação, que é a unidade. Segundo vários autores (por exemplo [12] e [115]), quando o coeficiente de variação toma valores superiores a 10% pode considerar-se que a dispersão começa a ser elevada.

Refere-se que para o cálculo da relação entre a rotação experimental e teórica se decidiu excluir os valores da rotação das vigas ensaiadas por Wafa et al. em 1995 [121], pois como referido anteriormente estas vigas apresentam curvas $M_T - \theta$ atípicas segundo o eixo das rotações.

Tabela 7.8 - Análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme aderente

Viga	$M_{Tu,exp}$	$M_{Tu,th}$	$\theta_{Tu,exp}$	$\theta_{Tu,th}$	$\frac{M_{Tu,exp}}{M_{Tu,th}}$	$\frac{\theta_{Tu,exp}}{\theta_{Tu,th}}$
	[kNm]	[kNm]	[°/m]	[°/m]		
P2 [89]	87,14	84,49	2,804	1,864	1,031	1,504
P3 [89]	55,79	71,43	3,136	2,598	0,781	1,207
P8 [71]	61,80	67,40	1,885	1,659	0,917	1,136
PA1R [48]	21,75	21,41	2,975	4,342	1,016	0,685
PA2 [48]	29,34	31,47	2,869	2,849	0,932	1,007
PA3 [48]	33,99	35,24	2,677	2,718	0,965	0,985
PA4 [48]	37,43	40,03	2,945	2,367	0,935	1,244
PB1 [48]	22,17	20,47	4,474	4,495	1,083	0,995
PB2 [48]	27,54	29,68	2,748	3,241	0,928	0,848
PB3 [48]	32,61	32,93	3,076	2,980	0,990	1,032
PB4 [48]	37,6	36,90	2,631	2,546	1,019	1,034
PC1 [48]	19,74	18,01	5,229	4,478	1,096	1,168
PC2 [48]	28,59	26,54	3,382	3,458	1,077	0,978
PC3 [48]	32,78	28,83	4,738	3,223	1,137	1,470
PC4 [48]	38,68	33,47	3,840	2,706	1,156	1,419
H3AR [121]	33,66	36,79	1,232	2,840	0,915	-
H2A [121]	35,78	41,62	0,602	2,601	0,860	-
H1AR [121]	38,44	43,95	0,556	2,339	0,875	-
H3B [121]	26,43	26,84	1,748	3,312	0,985	-
H2B [121]	29,5	29,08	0,607	2,901	1,015	-
H1B [121]	31,33	30,65	0,258	2,851	1,022	-
M3A [121]	29,96	32,56	1,610	2,870	0,920	-
M2A [121]	31,94	35,29	0,573	2,583	0,905	-
M1A [121]	35,41	39,08	0,940	2,365	0,906	-
M3B [121]	24,71	24,56	1,667	3,482	1,006	-
M2B [121]	26,17	26,28	1,495	3,110	0,996	-
M1B [121]	28,94	28,57	0,945	2,876	1,013	-
			$\bar{x} =$		0,981	1,114
			$s =$		0,087	0,228
			$cv =$		8,83%	20,49%

Para ajudar a interpretar os resultados da Tabela 7.8, as Figuras 7.43 e 7.44 apresentam graficamente as relações entre os valores experimentais e teóricos para o momento torsor resistente e a correspondente rotação, respetivamente.

A partir da Tabela 7.8 e da Figura 7.43 é possível observar que a relação dos momentos resistentes $M_{Tu,exp}/M_{Tu,th}$ assume valores bastante próximos do ideal, $\bar{x} = 0,981$, concluindo-se que no geral a previsão teórica é bastante próxima do valor experimental. Avaliando agora a dispersão dos valores da relação em estudo através do coeficiente de variação, para o qual se obteve $cv=8,83\%$, pode considerar-se que o grau de dispersão é bastante aceitável, como pode ser confirmado a partir da Figura 7.43. Para as rotações correspondentes às resistências, a Figura 7.44 mostra que para várias vigas, o GSVATM modificado subestima os valores. Apesar de o valor média da relação $\theta_{Tu,exp}/\theta_{Tu,th}$ não estar muito distanciado da unidade, $\bar{x} = 1,114$, o coeficiente de variação mostra que existe uma variabilidade notável dos resultados, $cv=20,49\%$. Segundo Bernardo e Lopes [33] e Bernardo et al. [27], observa-se

experimentalmente que a zona de rotura da viga sofre maiores rotações comparativamente com as rotações sofridas ao longo da viga no seu restante comprimento. Uma vez que as rotações teóricas são baseadas num modelo de análise de secção transversal, e que muitas rotações experimentais constantes na Tabela 7.8 constituem valores médios para todo o comprimento da viga e não somente para a zona de rotura, é compreensível a maior dificuldade do modelo teórico prever com muito rigor as rotações no estado último das vigas.

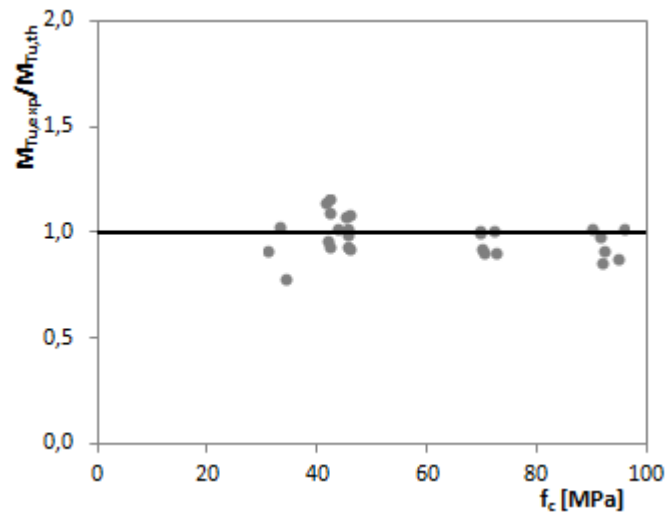


Figura 7.43 - Relação entre os valores experimentais e teóricos do momento torsor resistente

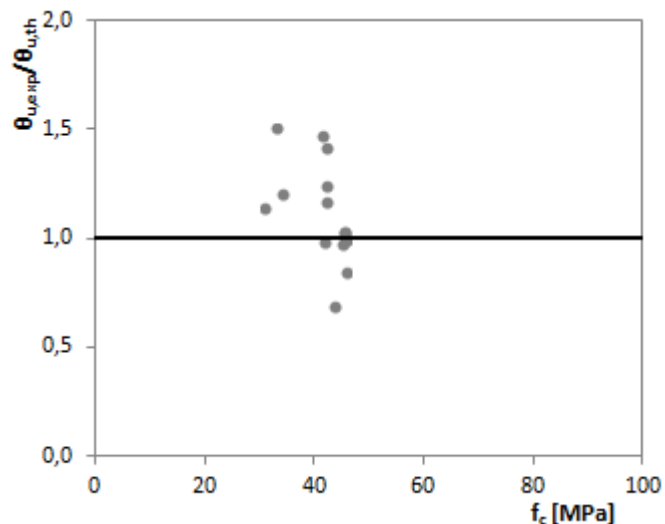


Figura 7.44 - Relação entre os valores experimentais e teóricos da rotação correspondente ao momento torsor resistente

Se se tiver em consideração os resultados apresentados nas Figuras 7.43 e 7.44, bem como a análise comparativa resultante da Tabela 7.8, pode afirmar-se que as previsões teóricas resultantes do GSVATM modificado são bastante congruentes quando comparadas com os resultados experimentais. Esta conclusão tem essencialmente por base uma análise comparativa da evolução das curvas $M_T - \theta$ teórica e experimental. Desta forma, pode validar-se o GSVATM modificado para a previsão do comportamento de vigas de betão com

pré-esforço longitudinal uniforme sujeitas à torção, em particular para a previsão da resistência última à torção.

7.3.2. Vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior e/ou não aderente

Na presente secção pretende-se realizar uma análise comparativa das previsões teóricas obtidas pelo GSVATM modificado, para vigas à torção com pré-esforço longitudinal uniforme exterior e/ou não aderente, com resultados experimentais. Tal como já foi referido no início da Secção 7.3, a aplicação de pré-esforço longitudinal exterior induz um estado de confinamento axial nas vigas devido à rigidez axial das armaduras de pré-esforço ancoradas nas extremidades das vigas. O fenómeno de confinamento axial já foi exposto detalhadamente na Secção 1.2.1. e na Secção 2.3. Na literatura consultada, foram apenas encontrados os resultados experimentais de duas vigas sujeitas à torção com pré-esforço longitudinal centrado e exterior, designadamente as vigas D1 e D2 ensaiadas por Bernardo em 2003 [20]. Na Tabela 7.9 encontram-se resumidas as características geométricas e mecânicas das referidas vigas e na Tabela 7.10 apresentam-se as características dos materiais que constituem as vigas. As duas vigas são iguais, com exceção do nível de pré-esforço introduzido. As vigas encontram-se identificadas de acordo com a designação original do autor. Em virtude do presente estudo apenas incluir duas vigas, não será apresentado um estudo estatístico dos resultados nos mesmos moldes do realizado na secção anterior. São apresentados os resultados na forma das curvas $M_T - \theta$ experimentais e teóricas obtidas, bem como os resultados relativos ao momento torsor resistente e correspondente rotação. Importa referir, uma vez mais, que, para baixos níveis de carregamento, o GSVATM modificado mostrou ter alguns problemas de convergência, designadamente para a viga D2, pelo que o valor teórico do momento torsor de fissuração deve ser encarado com reserva.

Tabela 7.9 - Características geométricas e mecânicas das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior

Viga	x [cm]	y [cm]	t [cm]	x_1 [cm]	y_1 [cm]	A_{st} [cm ²]	A_{st}/s [cm ² /m]	A_{pl} [cm ²]	ρ_l [%]	ρ_t [%]	$\rho_{l,tot}$ [%]	ρ_{Tot} [%]
D1 [20]	60	60	11,4	53,2	54,2	23,75	11,22	4,20	0,66	0,68	0,77	1,45
D2 [20]	60	60	11,5	55,5	55,5	23,75	11,22	5,60	0,66	0,69	0,81	1,50

Tabela 7.10 - Características dos materiais das vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior

Viga	f_{cm} [MPa]	f_{ctm} [MPa]	f_{slym} [MPa]	f_{stym} [MPa]	$f_{p0,1\%}$ [MPa]	f_{pi} [MPa]	f_{cp} [MPa]	f_{pu} [MPa]	E_c [GPa]	E_s [GPa]	E_p [GPa]
D1 [20]	80,8	4,4	724	715	1670	640	1,79	1860	41,2	200	195
D2 [20]	58,8	3,7	724	715	1670	1100	3,08	1860	37,4	200	195

As Figuras 7.45 e 7.46 apresentam as curvas $M_T - \theta$ teóricas, obtidas através do GSVATM modificado, sem efeito de confinamento (curva a cor cinza), e com efeito de confinamento (curva a cor laranja), e as correspondentes curvas experimentais (curva a cor preta). Através da observação das curvas teóricas, é visível a ligeira influência do confinamento axial proporcionado pela armadura longitudinal de pré-esforço externo. Como esta armadura se encontra não aderente ao betão e ancorada nas extremidades, quando a viga tende a alongar por ação do momento torsor, esta armadura restringe esse alongamento através da sua rigidez axial. Tal induz um estado adicional de tensão de compressão longitudinal, o qual justifica o aumento de resistência da viga, relativamente à situação em que o efeito de confinamento não é contabilizado. Para as vigas D1 e D2, o aumento de resistência em virtude do efeito de confinamento é pequeno tendo em vista que as áreas das armaduras de pré-esforço não são grandes. Por observação das Figuras 7.45 e 7.46 verifica-se que o incremento da resistência é ligeiramente maior para a viga D2. Este facto é facilmente explicável ao ter em conta que o nível de pré-esforço da viga D2 (tensão no betão induzida pelo pré-esforço de 3,08 MPa) é maior que o nível de pré-esforço da viga D1 (tensão no betão induzida pelo pré-esforço de 1,79 MPa). Além disso, também, a área das armaduras de pré-esforço na viga D2 é superior à da viga D1, proporcionando por isso uma rigidez axial maior e, consecutivamente, um confinamento axial maior.

Nas Figuras 7.45 e 7.46 pode também observar-se que o modelo GSVATM modificado produz resultados congruentes tendo em conta a forma geral das curvas $M_T - \theta$. Para a viga D1 (Figura 7.45) nota-se uma pequena sobrevalorização do valor do momento torsor máximo e da respetiva rotação. Apesar disso, as previsões do GSVATM modificado para a resistência à torção das vigas D1 e D2 pode ser considerado globalmente aceitável, indicando que o GSVATM modificado aparenta prever bem o comportamento último das vigas.

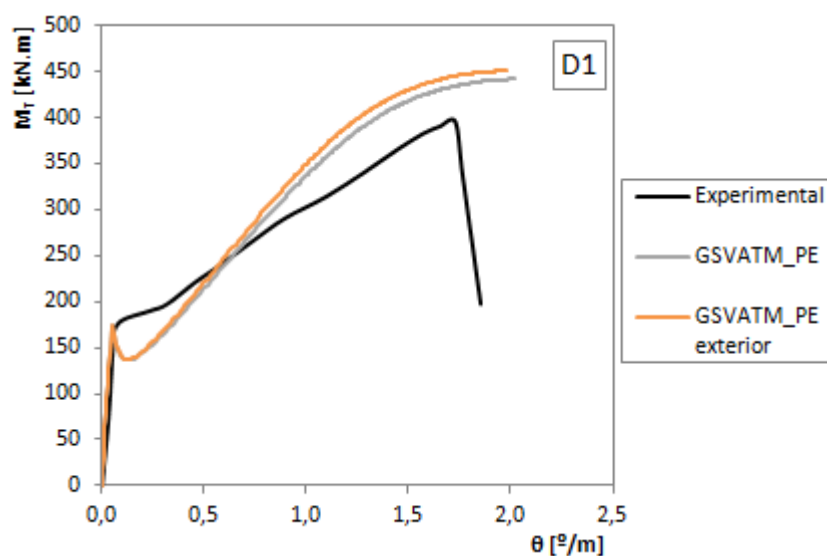


Figura 7.45 - Curva $M_T - \theta$ da viga D1 [20]

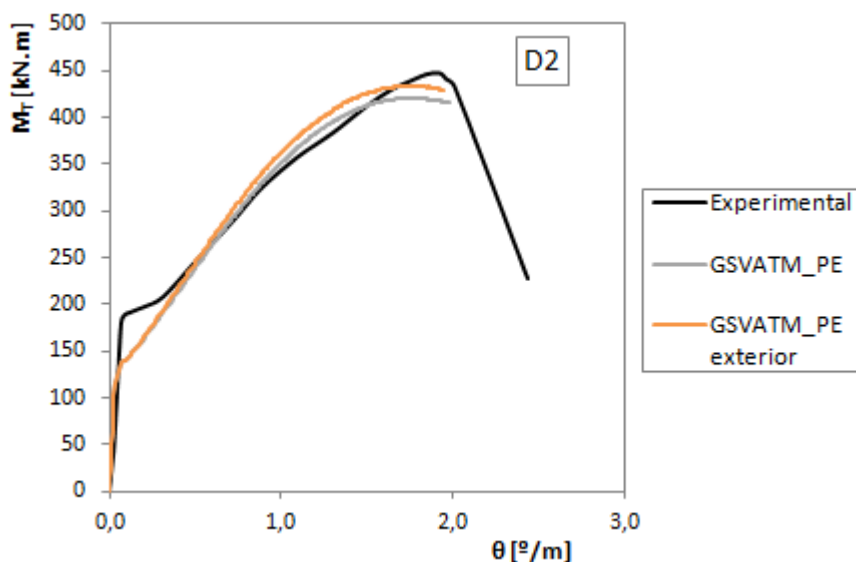


Figura 7.46 - Curva $M_T - \theta$ da viga D2 [20]

A Tabela 7.11 apresenta uma análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais do momento torsor resistente, $M_{T_u,th}$ e $M_{T_u,exp}$, e a respetiva rotação da secção transversal, $\theta_{M_{T_u},th}$ e $\theta_{M_{T_u},exp}$. São ainda apresentadas as relações entre os valores experimentais e teóricos para os momentos torsores resistentes e respetivas rotações da secção transversal, $M_{T_u,exp}/M_{T_u,th}$ e $\theta_{M_{T_u},exp}/\theta_{M_{T_u},th}$. Por observação destas relações comparativas é possível concluir que a previsão teórica é bastante próxima do resultado experimental para a viga D2, sendo aceitável para a viga D1. No entanto, o número de resultados experimentais não são suficientes para se poder verificar com maior certeza a validade do GSVATM modificado para o tipo de vigas em estudo.

Tabela 7.11 - Análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior e/ou não aderente

Viga	$M_{T_u,exp}$ [kNm]	$M_{T_u,th}$ [kNm]	$\theta_{M_{T_u},exp}$ [°/m]	$\theta_{M_{T_u},th}$ [°/m]	$\frac{M_{T_u,exp}}{M_{T_u,th}}$	$\frac{\theta_{T_u,exp}}{\theta_{T_u,th}}$
D1 [20]	396,04	450,59	1,728	1,978	0,88	0,874
D2 [20]	447,67	434,23	1,925	1,677	1,03	1,148

7.4. Considerações finais

No presente Capítulo foram apresentadas diversas análises comparativas entre resultados teóricos obtidos a partir do GSVATM modificado para diversas situações de vigas à torção com estado axial de tensão uniforme, conforme apresentado no Capítulo 5, e resultados de modelos numéricos e também de ensaios experimentais.

Na primeira parte do presente capítulo, os resultados teóricos do modelo GSVATM modificado para vigas de betão armado à torção com esforço axial externo centrado e constante foram comparados com alguns resultados numéricos obtidos através de uma análise não linear com elementos finitos através do Abaqus. Fazendo-se uso do modelo numérico da viga de referência A2 calibrado por Ferreira em 2016, e dos resultados provenientes de simulações da referida viga solicitada à torção com diferentes estados de tensão axial de compressão e tração, foi possível validar as tendências previstas pelo GSVATM modificado.

Os resultados teóricos do modelo GSVATM modificado para vigas à torção confinadas axialmente, foram comparados com os resultados de um modelo numérico calibrado da viga de referência A2 desenvolvido por Tabora em 2012, no Lusas igualmente decorrentes de uma análise não linear com elementos finitos. A partir dos resultados obtidos, para diferentes níveis de confinamento axial, foi possível validar a previsão da resistência à torção pelo GSVATM modificado para este tipo de vigas.

No final do capítulo foi realizada uma análise comparativa entre as previsões do GSVATM modificado, tendo por base resultados experimentais de vigas à torção com pré-esforço longitudinal uniforme encontradas na literatura consultada. Foram distinguidas duas situações, designadamente a vigas com pré-esforço longitudinal uniforme aderente e vigas com pré-esforço longitudinal uniforme exterior e/ou não aderente. Tendo por base a análise da resistência à torção das vigas, e em menor grau da respetiva rotação, das vigas, bem como a forma da curva comportamental $M_T - \theta$, foi novamente possível validar o GSVATM modificado para este tipo de vigas.

Capítulo 8 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

8.1. Introdução

No presente capítulo, resumem-se as conclusões principais decorrentes deste trabalho e apresentam-se também propostas de desenvolvimento futuras. Dos dois objetivos principais que foram propostos no início do trabalho, considera-se que estes foram alcançados com sucesso. Tal afirmação é sustentada pelo facto de, por um lado, a extensão dos ábacos de dimensionamento ter sido realizada tendo por base um modelo teórico que permite simular de forma lógica e congruente o comportamento último à torção de vigas de betão armado confinadas axialmente. Uma vez que tal modelo foi anteriormente validado, pode-se concluir sobre a validade dos referidos ábacos, incluindo também o aplicativo de cálculo. Por outro lado, os modelos teóricos propostos ao longo do presente trabalho permitem simular de forma adequada, e com um grau de precisão geralmente aceitável, o comportamento de vigas de betão armado à torção e submetidas a diferentes estados de tensão axial uniforme, situações estas que se consideram passíveis de ocorrer em projeto.

A opção de se considerar estes dois objetivos como partes principais do presente trabalho, deveu-se ao facto de ambos os objetivos constituírem dois estudos suficientemente extensos e específicos para constituir matéria para um trabalho deste tipo e com potencial de contribuição para a investigação na área da torção de vigas de betão estrutural. Refere-se ainda que, a partir do primeiro objetivo de estudo, foram propostas duas ferramentas com potencial para o auxílio ao dimensionamento à torção de vigas de betão armado confinadas axialmente.

De uma forma geral, pode considerar-se que o presente trabalho constitui uma boa contribuição no sentido de expandir o campo de aplicabilidade do modelo de treliça espacial com ângulo variável para vigas de betão estrutural sujeitas à torção combinada com outras solicitações, neste caso com estados axiais de tensão uniforme.

8.2. Conclusões

A primeira parte deste trabalho teve como objetivo principal a proposta de duas ferramentas que permitem auxiliar o dimensionamento à torção de vigas de secção retangular com confinamento axial. Tendo por base um estado anteriormente realizado pela autora, realizou-se inicialmente uma análise paramétrica de forma a avaliar a influência do fator de forma da secção (relação entre a altura e largura da secção transversal - h/b). Desta análise resultou a conclusão que este fator de forma influencia de forma notória a resistência da viga à torção, tendo-se observado que a resistência à torção aumenta com o fator de forma. Verificou-se ainda que, para vigas similares (materiais, área de secção e quantidades de armaduras), com

valores para h/b diferentes, a viga com menor h/b está associada à viga com menor perímetro exterior da secção transversal e esta apresenta uma resistência torsional maior. Recordando que o momento torsor externo é absorvido pela secção transversal através de um fluxo circulatório de tensões tangenciais ao longo das paredes externas da secção, inclusive no estado fissurado onde em cada parede a resultante do fluxo pode ser decomposta na força de tração nas armaduras longitudinais e na força de compressão na escora de betão. E, por observação da formulação teórica do modelo VATM modificado, conclui-se que para uma viga com menor perímetro da secção transversal, a espessura efetiva da escora de betão será maior, tal implica uma maior resistência à torção.

Na primeira parte do trabalho foi ainda validado o modelo teórico VATM modificado para a previsão da influência da relação h/b no comportamento último de vigas à torção tendo por base resultados experimentais. Para tal, foram calculadas as previsões teóricas das vigas ensaiadas por Hsu em 1968 [63] e foi realizada uma análise idêntica à do referido autor, tendo por base os resultados experimentais, de forma a avaliar a influência da relação h/b na resistência à torção das séries de vigas analisadas. Desta análise originaram resultados teóricos bastante congruentes com os experimentais uma vez que a média obtida entre a resistência experimental e teórica apresentou um valor bastante próximo da unidade (0,956) e com um coeficiente de variação bastante aceitável (8,06%). A partir da análise comparativa da influência da relação h/b no comportamento das vigas à torção, também se observou que as previsões teóricas apresentam tendências idênticas às experimentais. Desta forma, foi possível validar o VATM modificado para a previsão do comportamento de vigas com secção retangular (h/b diferente de 1) e considerar-se este modelo fiável para a obtenção das referidas ferramentas de dimensionamento: ábacos e aplicativo de dimensionamento.

Tanto os ábacos de dimensionamento como o aplicativo de auxílio ao projeto obtidos permitem a obtenção de um coeficiente corretivo, C_{ca} , da resistência torsional, por exemplo obtida através de disposições normativas, de forma a ter em conta o efeito favorável do confinamento axial. Para a utilização destas ferramentas, o utilizador tem que conhecer à partida: a largura e altura da secção transversal, a área total da armadura longitudinal e transversal, o espaçamento da armadura transversal, a resistência do betão à compressão e o valor do confinamento axial. Foi ainda proposta uma correção adicional, na forma de uma equação, para vigas que possuam um comprimento diferente do comprimento da viga de referência utilizada nos estudos que conduziram à obtenção das referidas ferramentas.

A segunda parte deste trabalho consistiu na extensão do GSVATM original de forma a incorporar, no cálculo da viga à torção, os diferentes estados de tensão axial uniforme analisados e passíveis de ocorrer em projeto, designadamente: esforço axial externo centrado de compressão ou tração (constante), confinamento axial e pré-esforço longitudinal centrado aderente e não aderente. De acordo com a metodologia adotada neste trabalho, a proposta de extensão mostrou-se adequada uma vez que as previsões teóricas obtidas a partir dos

modelos mostraram-se congruentes e as tendências obtidas para as curvas comportamentais analisadas possuem um carácter lógico. Esta conclusão foi suportada através de análises comparativas com resultados numéricos (análise não linear com o método dos elementos finitos) e experimentais.

Os modelos propostos são limitados à situação em que as armaduras longitudinais se encontrem sempre em tração.

A partir das análises paramétricas realizadas tendo por base os resultados teóricos do GSVATM modificado para a situação de interação torção com esforço axial externo (compressão ou tração) observou-se que:

- A influência do estado de tensão axial de compressão, baixo a moderado, é favorável para a capacidade resistente da viga à torção e para o momento torsor de fissuração, uma vez que este estado de compressão contraria o estado de tração imposto pelo momento torsor. Foi observado um aumento, tanto do momento torsor de fissuração como do momento torsor resistente, bem como da rigidez torsional no estado fissurado;
- Uma redução da ductilidade à torção da viga com o aumento do nível de tensão axial de compressão, pois a capacidade de deformação última da viga em torção reduz. Esta tendência está associada à redução da solicitação das armaduras longitudinais à tração devido à existência do estado axial de compressão. Além disso, à medida que o nível do estado axial de tensão de compressão vai aumentando, a escora de betão é cada vez mais solicitada atingindo a sua capacidade resistente para valores da rotação da secção transversal cada vez menores, o que confirma a observação sobre a redução da ductilidade em torção da viga;
- A existência de um estado de tensão axial de tração, em adição ao momento torsor externo, induz na viga um estado de tração que adianta a fissuração do betão e provoca uma redução do momento torsor de fissuração. Este estado reduz também a resistência da viga à torção e a rigidez em estado fissurado da viga;
- A ductilidade da viga aumenta até um certo nível de tensão axial de tração. Este facto deve-se à tração adicional que a armadura longitudinal fica sujeita, a qual entre em cedência mais rapidamente, aumentando assim a ductilidade da viga. A partir de certo nível observa-se uma tendência contrária, estando esta associada à limitação teórica da extensão de tração (critério de paragem), indiciando que a rotura é teoricamente condicionada pelas armaduras longitudinais;
- Relativamente à inclinação da escora de betão, existe uma redução do ângulo quando o estado de tensão axial é de compressão e um aumento do mesmo ângulo quando o estado axial é de tração. O facto da inclinação da escora reduzir para estados axiais de compressão encontra-se em acordo com o preconizado em documentos normativos (por exemplo, pelo código do ACI [6] para vigas de betão pré-esforçado sujeitas à torção);
- Para o estado axial de tensão de compressão, enquanto as armaduras longitudinais são cada vez menos solicitadas à tração, com o aumento do nível de tensão, por equilíbrio, as

armaduras transversais são cada vez mais solicitadas. Para o estado axial de tração observa-se o efeito contrário, como era de esperar.

A partir das análises paramétricas realizadas com o GSVATM modificado para vigas confinadas axialmente observou-se que:

- O aumento do confinamento axial aumenta o momento torsor associado à fissuração e o momento torsor resistente devido ao efeito favorável do estado de compressão induzido pela restrição axial que tende a contrariar o estado de tração induzido pelo momento torsor. No entanto, este incremento tende a estabilizar uma vez que a capacidade resistente do betão à compressão é limitada e tende a esgotar mais rapidamente à medida que o confinamento axial aumenta. Verificando-se simultaneamente um aumento da rigidez de torção, sobretudo em estado fissurado;
- Apesar das armaduras longitudinais e transversais se encontrarem equilibradas na viga de referência analisada, as armaduras longitudinais deixam de entrar em cedência a partir de um certo nível de confinamento axial. Por outro lado, as armaduras transversais são cada vez mais solicitadas pelo que entram em cedência para valores da rotação da secção transversal cada vez menores. Ou seja, a escora de betão juntamente com a armadura transversal têm que compensar a menor efetividade da armadura longitudinal para o equilíbrio interno;
- Com o aumento do confinamento axial existe uma redução da rotação associada à rotura da viga (rotação máxima). Assim, conclui-se que também para a situação de confinamento axial existe uma redução da ductilidade à torção da viga, apresentando esta uma rotura tendencialmente mais frágil por compressão do betão nas escoras;
- Relativamente às curvas teóricas de comportamento da viga de referência analisada, observou-se que as tendências são muito idênticas às observadas por Taborda em 2012 [116] tendo por base o VATM modificado.

Relativamente às análises paramétricas realizadas com o GSVATM modificado para a viga de referência com diferentes níveis de pré-esforço longitudinal central centrado observou-se que:

- O pré-esforço apresentou um efeito favorável no incremento do momento torsor resistente. Tal deve-se a que, em adição às tensões iniciais de compressão induzidas pelo pré-esforço, após a descompressão as armaduras de pré-esforço passam a trabalhar como armaduras passivas (ordinárias) com a sua reserva de resistência. Assim, a viga torna-se globalmente mais resistente. Em contrapartida, a ductilidade em torção da viga reduz com o aumento do nível de pré-esforço. Além disso, a rigidez em estado fissurado aumenta, em particular devido à introdução de armadura de pré-esforço, cuja área aumenta com o nível de pré-esforço;
- O incremento da resistência à torção é cada vez menor com o aumento do nível de pré-esforço. Tal ocorre porque a rotura é tendencialmente mais condicionada pelo betão à compressão no betão nas escoras e para menores deformações, em virtude da maior quantidade de armadura longitudinal (incluindo a participação da armadura de pré-esforço);

- Devido à maior quantidade total de armadura longitudinal, devido à existência da armadura de pré-esforço, a contribuição da armadura longitudinal ordinária para o equilíbrio longitudinal torna-se menor. Em consequência, existe um desequilíbrio de armadura longitudinal e transversal, pelo que a armadura transversal tende a ser mais solicitada;
- Refere-se ainda que se observou que o ângulo da escora de betão tende a reduzir com o aumento do nível de pré-esforço, como era esperado. Tal deve-se ao desequilíbrio entre a armadura total longitudinal (ordinária e de pré-esforço) e transversal. Como referido anteriormente, esta observação está em acordo com o prescrito em documentos normativos (por exemplo, o código do ACI [6] para vigas de betão pré-esforçado à torção).

Foi realizada uma análise comparativa entre os resultados numéricos obtidos por Ferreira em 2016 [55] através de uma análise não linear com elementos finitos tendo por base o programa Abaqus, com os resultados teóricos obtidos pelo GSVATM modificado para a viga de referência analisada sujeita à torção com um estado axial de tensão uniforme, quer de compressão quer de tração. Esta análise permitiu validar as tendências gerais teóricas, uma vez que a evolução da resistência à torção teórica mostrou-se semelhante aos resultados numéricos e as restantes tendências observadas apresentaram uma evolução lógica e esperada. No entanto, através de uma comparação direta dos incrementos percentuais da resistência à torção observou-se alguma diferença entre os valores teóricos e numéricos. Contudo, como o modelo numérico apenas foi calibrado com resultados experimentais de vigas à torção pura, não é possível estabelecer conclusões sólidas sobre as previsões, quer teóricas quer numéricas.

Tendo por base a análise comparativa entre os resultados teóricos obtidos pelo GSVATM modificado e os resultados numéricos de Tabora [116] para a viga de referência confinada axialmente e para os vários níveis de confinamento considerados, foi possível validar o modelo teórico proposto no presente trabalho, bem como validar as tendências teóricas gerais obtidas a partir deste modelo. Na comparação da resistência teórica e numérica observou-se um desvio máximo de 1,98% entre os resultados.

Para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal aderente foi possível realizar uma análise comparativa com resultados experimentais, uma vez que foram encontrados os resultados dos ensaios de 27 vigas na literatura consultada, as quais foram consideradas fiáveis para comparação. Esta análise comparativa incidiu essencialmente na comparação da resistência das vigas à torção, uma vez que o modelo GSVATM modificado apresentou problemas de convergência para algumas vigas na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado. Esta análise comparativa permitiu validar o modelo teórico e as respetivas tendências comportamentais, uma vez que a relação entre as resistências experimentais e teóricas apresentou uma média próxima da unidade (0,981), com um coeficiente de variabilidade de 8,83 %, o qual foi considerado bastante satisfatório.

A análise comparativa de vigas com pré-esforço longitudinal exterior foi realizada para duas vigas encontradas na bibliografia. No entanto, como o número de vigas usadas para o estudo é muito reduzido, não foi possível confirmar com certeza a validade do GSVATM modificado e

respetivas tendências. Contudo, para as vigas analisadas obtiveram-se valores da resistência teórica bastante próximos dos experimentais.

8.3. Propostas de trabalhos futuros

Considera-se de especial interesse o desenvolvimento de alguns estudos que poderão ser encarados como uma extensão do presente trabalho dentro da temática abordada, nomeadamente:

- Alargar o número de casos em que são aplicáveis os ábacos de dimensionamento para vigas à torção com confinamento axial, designadamente para secções com diferentes geometrias;
- Conceber e realizar uma campanha de ensaios experimentais com vigas de betão armado sujeitas à ação combinada de torção com estados de tensão axial uniformes decorrentes de diversas situações, designadamente: esforço axial externo de compressão e de tração, confinamento axial devido ao impedimento do alongamento da viga, quer por elementos estruturais adjacentes quer devido à situação de pré-esforço em que as armaduras se encontram exteriores e/ou não aderentes ao betão;
- Complementar as análises comparativas realizadas ao longo do presente trabalho com novos resultados experimentais;
- Realizar um estudo experimental/numérico com o objetivo de calibrar a lei constitutiva média do betão à tração de forma a retratar adequadamente a passagem do estado não fissurado para o estado fissurado, bem como a contribuição do betão à tração entre fissuras, em vigas de betão armado à torção, em que as fissuras principais não são ortogonais às armaduras. O objetivo é incorporar essa lei no GSVATM modificado com vista a resolver os problemas de convergência observados na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado;
- Calibração de modelos numéricos com elementos finitos para simulação do comportamento global de vigas de betão estrutural sujeitas à torção combinada com estados axiais de tensão uniforme, para as diversas situações analisadas ao longo deste trabalho;
- Alargar o GSVATM a outras situações de interação entre torção e outros esforços, quer isolados quer combinados, designadamente esforço transversal e flexão, bem como a vigas com secções transversais não retangulares;
- Mediante a incorporação de leis constitutivas médias adequadas, alargar o GSVATM a vigas à torção executadas com materiais estruturais menos tradicionais, tais como: betões leves, betões com fibras, betões ultrarresistentes, armaduras não metálicas, entre outros.

Referências

- 1 - ABAQUS 6.12 User Manual Vol 4, (2012), Dassault Systèmes, USA
- 2 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05), American Concrete Institute, Detroit, 2005
- 3 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95), American Concrete Institute, Detroit, 1995
- 4 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)) and Commentary (ACI 318R-71), American Concrete Institute, Detroit, 1971
- 5 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete, (ACI 318M-14) and Commentary (ACI 318RM-14), American Concrete Institute, Detroit, 2014
- 6 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete, (ACI 318-11) and Commentary (ACI 318R-11), American Concrete Institute, Detroit, 2011
- 7 - ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete, (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02), American Concrete Institute, Detroit, 2002
- 8 - Akin, J. E., “Application and Implementation of Finite Element Methods”, *Academic Press Inc.*, Londres, 1982
- 9 - Ali, M.A. e White, R.N., “Toward a Rational Approach for Design of Minimum Torsion Reinforcement”, *Journal of the American Concrete Institute*, Proc, Vol. 96, No. 1, January-February 1999, pp.40-45 (citado em [20])
- 10 - Andersen, P., “Experiments with Concrete in Torsion”, *Transactions*, ASCE, Vol. 100, 1935, pp.949-983 (citado em [20])
- 11 - Andrade, A.M.; Bernardo, L.F.A.; Lopes, S.M.R. “TORQUE_MTEAV: ComputingTool to Evaluate the Ultimate Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams in Torsion”, *Structural Concrete Applications (CoRAN 2011): Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models - Structural Concrete Applications*, 24-25 November 2011, Coimbra, Portugal: pp. 369-382
- 12 - Andrade, J. M. A. “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2010
- 13 - Appleton, J. et al., “Verificação da Segurança aos Estados Limites Últimos de elementos com esforço axial desprezável”, *Betão Armado e Pré-Esforçado I*, Folhas de apoio às aulas 2011/2012, Instituto Superior Técnico
- 14 - Armstrong, S., “The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion”, *Proceedingd of a Symposium of the Strength of Concrete Structures*,

- Session B: Paper 2*, Cement and Concrete Association, Londres, Maio 1956, pp. 101-122 (citado em [20])
- 15 - Azevedo, Álvaro, F. M., “Método dos Elementos Finitos”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril, 2003
 - 16 - Baran, Nicholas M., “Finite Element Analysis on Microcomputers”, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1987
 - 17 - Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 91(4), 1994, pp. 465-474 (citado em [12])
 - 18 - Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression” *Structural Journal of American Concrete Institute*, 92 (5), 1995, pp. 562-573 (citado em [12])
 - 19 - Belarbi, A. and Hsu, T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression” Research Report UHCEE 91-2, University of Houston, Texas, 1991 (citado em [118])
 - 20 - Bernardo, L. F. A. “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003
 - 21 - Bernardo, L. F. A.; “Prestressed HSC Hollow Beams Under Torsion” *Journal of Civil Engineering and Management*, 2013 19(S1):S141-S152
 - 22 - Bernardo, L. F. A.; Andrade, J. M. A.; Oliveira, L. A. P., “Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion”. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2012
 - 23 - Bernardo, L. F. A.; Andrade, J.M.A.; Lopes, S.M.R., “Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study”, *Engineering Structures*, 2012, volume 42, pp. 278-296
 - 24 - Bernardo, L. F. A.; Lopes S.M.R., “Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams”, *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, Junho 2008, pp. 1143-1167
 - 25 - Bernardo, L. F. A.; Lopes, S. M. R., “Plastic Analysis of HSC Beams In Flexure”, *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 42, No. 1, Janeiro 2009, pp. 51-69
 - 26 - Bernardo, L. F. A.; Lopes, S. M. R., “Torsion in HSC Hollow Beams: Strength and Ductility Analysis”, *ACI Structural Journal*, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A., Vol. 106, Issue 1, Janeiro-Fevereiro 2009, pp. 39-48

- 27 - Bernardo, L.F.A, Andrade, J.M.A., Nunes, N.C.G. "Generalized softened variable angle truss-model for reinforcement concrete beams under torsion" *Materials and Structures* 2015 48:2169-2193
- 28 - Bernardo, L.F.A., Andrade J.M.A, Oliveira LAP "Reinforced and prestressed concrete hollow beams under torsion" *Journal of Civil Engineering and Management* 2013 19(S1):S141-S152
- 29 - Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. e Lopes, S.M.R. (2012b) "Modified variable angle truss-model for torsion in reinforced concrete beams", *Mater. Struct.*, 45(12), 1877-1902
- 30 - Bernardo, L.F.A., Lopes, S.M.R., "Theoretical Behaviour of HSC Sections under Torsion", *Engineering Structures*, volume 33, Issue 12, December 2011, pp. 3702-3714
- 31 - Bernardo, L.F.A., Taborda, C.S.B. and Gama, J.M.R. "Parametric analysis and torsion design charts for axially restrained RC beams", *Structural Engineering and Mechanics*, An international Journal, Vol. 55, No. 1, July10, 2015
- 32 - Bernardo, L.F.A., Taborda, C.S.B. e Andrade, J.M.A. (2015) "Ultimate torsional behavior of axially restrained RC beams", *Computers and Concrete*, An International Journal, Vol. 16, No. 1, Pages 67-97
- 33 - Bernardo, L.F.A.; Lopes, S.M.R."Plastic analysis and twist capacity of high-strength concrete hollow beams under pure torsion" *Engineering Structures*, 2013, pp.190-201
- 34 - Bredt, R., "Kristische Bemerkungen zur drehungselastizitat" *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 1896 Vol. 40 N°.28, July 11 pp.785-790; No. 29, July 18, pp. 813-817 in German (citado em [27])
- 35 - Cauchy, A. Sur les équations qui expérimentent les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, *Exercices de mathématique*, Paris 1828 (citado em [66])
- 36 - CEB, "Ultimate Limit State Design Models, A State-of-Art Report," *Bulletin d'Information N.º 223*, June 1995 (citado em [20])
- 37 - CEB, "Torsion", *Bulletin d'Information Nº71*, Março 1969 (citado em [20])
- 38 - CEB-FIP MODEL CODE 1990, Comité Euro-Internacional du Béton, Suisse, 1990 (citado em [20])
- 39 - CEB-FIP, "Model Code for Concrete Structures", CEB-FIP International Recommendations, 3rd edition, Paris, 1978, 348 pp. (citado em [20])
- 40 - CEN prEN 1992-1-1, "Eurocode 2: Design of Concrete Structures - Part 1:General Rules and Rules for Buildings", April 2002 (citado em [20])

- 41 - Chiu, H.J., Fang, I.K., Young, W.T. and Shiau J.K., “Behavior of reinforced concrete beams with minimum torsional reinforcement”, *Engineering Structures*, Vol. 29, 2007, pp.2193-2205
- 42 - Collins, M. P., Mitchell, D., “Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams”, *Journal of the Prestressed Concrete Institute, Proc.*, V. 25, No. 5, September-October 1980, pp. 32-100 (citado em [20])
- 43 - Collins, M.P., “Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams”, *Inelasticity and Non-linearity in Structural Concrete, Study No. 8, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, Canada, 1973*, pp. 211-232 (citado em [20])
- 44 - Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression. Research Report UHCEE 91-2, Universidade de Houston, Houston, Texas. 1991 (Citado em [12])
- 45 - Costa, R. J. T., Lopes, S.M.R., Bernardo, L.F.A “Behaviour of RC Panels under Shear”. INCOS 05, *International Conference on Concrete for Structures - Coimbra*, 7-8, July, 2005, pp. 269-276
- 46 - Cowan, H.J., “Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams”, *Magazine of Concrete Research*, Julho 1950, Vol. 2, No. 4, pp.3-8
- 47 - Cuerel, J., “New Waterloo Bridge at London,” *International Association for Bridge and Structural Engineering, 3rd Congress*, Liège, 1948, pp. 367-380 (citado em [14]).
- 48 - El-Degwy, W.M.; McMullen, A. E. “Prestressed Concrete Tests Compared with torsion Theories” *PCI Journal*, September-October 1985, pp. 96-127
- 49 - Elfrgren, L., “Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear”, Publication 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Gotebor, Sweden, 1972 (citado em [12])
- 50 - EN 1992-1-1, “Eurocódigo 2: Projeto de estruturas de betão - Regras gerais e regras para edifícios”, Comité Europeu de Normalização, Abril 2004
- 51 - Fang, I.K., Shiau, J.K., “Torsional behavior of normal and high-strength concrete beams” *ACI Structural Journal* 2004 Volume 101 No.3 pp.304-313
- 52 - Fédération Internationale du Béton (fib), Model Code 2010 - Final draft, Vol. 1, fédération internationale du béton, Bulletin 65, Lausanne, Switzerland, 2012, Vol. 2, 350 p. (citado em [20])
- 53 - Fédération Internationale du Béton (fib), Model Code 2010 - Final draft, Vol. 2, fédération internationale du béton, Bulletin 66, Lausanne, Switzerland, 2012, Vol. 2, 370 p. (citado em [20])
- 54 - Felippa, C. A.; “INTRODUCTION to FINITE ELEMENT METHODS - Appendix O: The Origins of Finite Element Method”, Department of Aerospace Engineering Sciences

and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, 2004

- 55 - Ferreira, M. R.; “Análise não linear por Elementos finitos de Vigas de Betão Armado à Torção” Master Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2016
- 56 - Filho, J.J.H.S., “Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósitos de Fibras de Carbono”, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007
- 57 - Gomes, D. P., “Resistência à Flexão de Vigas de Betão Armado Restringidas Axialmente”, Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, 2011, 79p.
- 58 - Gouveia, A. V.; Barros, J.A.O; Azevedo, A. F. M.; “Modelo de Análise não linear material de Pórticos de betão armado - Calibração das relações constitutivas” (artigo de âmbito pedagógico) Revista Engenharia Civil - Universidade do Minho, Portugal, ISSN 0873-1152 - Número 4 pp. 43-65, 1996
- 59 - GPPE, "Concrete Structures in Portugal / Estruturas de betão em Portugal," *Congresso da Fédération International de la Précontrainte*, Amsterdão, Maio, 1998
- 60 - Grob, J., "Traglast von Stäben mit Dünnwandigen Offenen Querschnitten," *Eidgenössische Technische Hochschule (ETH)*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Zurich, 1975 (em Alemão, citado em [36])
- 61 - Hsu, T. T. C., "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 70, No. 5, May 1973, pp. 352-360
- 62 - Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Plain Concrete Rectangular Sections," *Torsion of Structural Concrete, SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 203-238
- 63 - Hsu, T.T., “Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members” *Torsion of Structural Concrete, SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp.261-306
- 64 - Hsu, T.T.C, Zhang I.X., “Nonlinear analysis of membrane elements by ficed-angle softened-truss model” *ACI Struct* 1997, 94(5):483-92 (citado em [74])
- 65 - Hsu, T.T.C. and Zhu, R.R.H., “Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear” *ACI Struct* 2002, 99(4):460-9 (citado em [74])
- 66 - Hsu, T.T.C., “Torsion of Reinforced Concrete”, Van Nostrand Reinhold Company, 1984

- 67 - Hsu, T.T.C., "Torsion of Structural Concrete - A Summary of Pure Torsion" Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 165-178
- 68 - Hsu, T.T.C., "Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Fevereiro 1968, Vols. 94, ST 2, pp. 485-510 (citado em [12])
- 69 - Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests", *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Vol. 82, No.3, Maio-Junho 1985, pp. 290-303 (citado em [20])
- 70 - Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations", *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Julho-Agosto 1985, Vol. 82, No.4, pp. 443-452. (citado em [12])
- 71 - Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Prestressed Concrete" *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Vol. 82, No. 5, Setembro-Outubro 1985, pp. 603-615 (citado em [20])
- 72 - Jefferson, A. D., "Craft - a plastic-damage-contact model for concrete. Part I Model theory and thermodynamics", *International Journal of Solids and Structures*, Junho, 2003, Vol. 40, No.22, pp. 5973-5999
- 73 - Jefferson, A.D., "Craft - a plastic-damage-contact model for concrete. Part II - Model implementation with implicit return-mapping algorithm and consistent tangent matriz" *International Journal of Solids and Structures*, June, 2003, Vol. 40, pp. 6001-6022
- 74 - Jeng, C.-H. and Hsu T. T. C., "A Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members", *Engineering Structures*, 31 (2009), 1944-1954
- 75 - Jeng, C.H., "Unified Softened Membrane Model for Torsion in Hollow and Solid Reinforced Concrete Members-Modeling the entire Pre- and Post- cracking behavior", *Journal of Structural Engineering*, 2014
- 76 - Jeng, C.H., Chiu, H.J., Chen, C.S., "Modelling the Initial Stresses in Prestressed Concrete Members under Torsion" Structures Congress 2010 pp.1773-1781
- 77 - Koutchoukali, N.E. and Belarbi, A., "Torsion of High-Strength Reinforced Concrete Beams and Minimum Reinforcement Requirement", *ACI Structural Journal*, 98(4), 2001, pp.462-9
- 78 - Lampert, P., Thurlimann, B., "Torsions-Beige-Versuche an Stanhlbetobalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams)", *Bericht*, No. 6506-2, *Institute fur Baustatik, ETH, Zurich*, 1969. (em Alemão, citado em [12])
- 79 - Leonhardt F., Schelling G., "Torsionsversuche an Stahl Betonbalken" 1974 Bulletin

- No. 239, Dreurscher Ausschuss fur Stahlbeton, Berlin (in German) (citado em [74])
- 80 - Levenberg, K. (1944). "A method for the solution of certain non-linear problems in least squares". *Quarterly of Applied Mathematics* 2, p. 164-168
- 81 - Link: [Aplicativo para auxílio ao dimensionamento de vigas de betão armado à torção confinadas axialmente](#)
- 82 - Lopes, S. M. R.; Bernardo, L. F. A., "Theoretical Model for the Mechanical Behavior of Prestressed Beams under Torsion", *Cogent Engineering*, 2014, 1:1, 943934
- 83 - Lou, T., Lopes, A. e Lopes, S. "Numerical Behaviour axially restricted RC beams", *International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models - Structural Concrete Applications*, 2011
- 84 - LUSAS User Manual, (2001). FEA Ltd., London, England
- 85 - MacGregor, J.G. e Ghoneim, M.G., "Design for torsion", *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol.92, No. 2, March-April 1995, pp.211-218 (citado em [20])
- 86 - Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 11 (2), p. 431-441. doi:10.1137/0111030
- 87 - McMullen, A.E., Rangan B.V., "Pure torsion in rectangular sections: a re-examination" 1978 *J American Concr Inst* Volume 75 No.10 pp511-519
- 88 - Measor, E. O. and New, D. H., "The Design and Construction of the Royal Festival Hall South Bank", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 75, N°10, Outubro 1978, pp.511-519 (citado em [20])
- 89 - Mitchell, D.; Collins, M.P. "The Behaviour of Structural Concrete in Pure Torsion" Civil Engineering Publication No. 74-06, Department of Civil Engineering, University of Toronto. March 1974. (citado em [12])
- 90 - Morsh, E., "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", 1st edition, *Wayss and Freytag, A.G., Im selbstverlag der Firma, Neustadt a. d. Haardt*, May 1902, 188 pp.; "der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", 2nd edition, *Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart*, 1906, 252 pp.; 3rd edition (*traduzido para Inglês por E.P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.*) (citado em [40])
- 91 - N. S. V. Pouca. Simulação numérica da resposta sísmica de elementos laminares em betão armado. PhD, FEUP, 2001
- 92 - Nash, J. C. (1990). "Compact Numerical Methods for Computers. Linear Algebra and Function Minimisation" - 2nd edition. Adam Hilger, Bristol and New York

- 93 - Navier, C.L., “Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des machines, Première partie, contentant les leçons sur la résistance des matériaux et sur l'établissement des constructions” (*Article V - de la résistance d'un corps prismatique à la torsion*, pp. 71-76. *Article VI - de la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion*, pp. 76-80), Paris 1826 (citado em [40])
- 94 - Nobre, S.S. “Modelo Modificado de Treliça Espacial com Ângulo Variável - Avaliação da Lei constitutiva do betão à tração para a fissuração de vigas de betão armado sujeitas à torção” Master Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2014
- 95 - NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: Projeto de Estruturas de Betão Parte 1 - Regras gerais e regras para edifícios, Março 2010
- 96 - Nugyen, V. B., “Numerical Modelling of Reinforced Concrete Bridge Pier under Artificially Generated Earthquake Time-Histories” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Birmingham, Birmingham, 2006
- 97 - Oliveira, Rui M. T. R “Vigas helicoidais em betão armado pré-esforçado” Master Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto 1991
- 98 - Pang XB, Hsu, T.T.C. “Fixed angle softened-truss model for reinforced concrete”, *ACI Struct* 1996, 93(2):197-207 (citado em [74])
- 99 - Peng, X.N. and Wong, Y.L., “Behavior of reinforced concrete walls subjected to monotonic pure torsion- An experimental study”, *Engineering Structures*, 2011, Vol. 33, pp. 2495-2508
- 100 - Piloto, P.A.G. e Vila Real, P.J.M.M.F., “Comportamento termo-mecânico de vigas com restrição à deformação axial sujeitas a temperaturas elevadas”, *III Encontro de Construção Metálica e Mista*, Dezembro 2001, pp. 449-457
- 101 - Ramberg, W. e Osgood, W. R. “Description of stress-strain curves by three parameters” 1943, Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC
- 102 - Rasmussen, L.J. e Baker, G., “Torsion in Reinforced Normal and High-Strength Concrete Beams - Part 1: Experimental Test Series”, *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Vol. 92, No. 1, January-February 1995, pp. 56-62 (citado em [20])
- 103 - Rasmussen, L.J. e Baker, G., “Torsion in Reinforced Normal and High-Strength Concrete Beams - Part 2: Theory and Design”, *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Vol. 92, No. 2, March-April 1995, pp. 146-156 (citado em [20])

- 104 - Rausch, E., “Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion)”, *Ph D. Thesis, Berlin*, 1929 (em Alemão, citado em [66])
- 105 - Ritter, W., “Die Bauweise Hennebique”, *Schweizerische Bauzeitung, Zurich*, Fevereiro 1899 (em Alemão, citado em [66])
- 106 - Rodrigues, JATF. “Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT”. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. Portugal. 2011
- 107 - Rodrigues, Rui, “Deformação de vigas de betão armado restringidas axialmente”, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Agosto 2011
- 108 - Roller, J.J. e Russel, H.G., “Shear Strength of High Strength Concrete Beams with Web Reinforcement”, *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 87, No. 2, March-April 1990, pp.191-198 (citado em [20])
- 109 - Saint-Venant, B. de, “Mémoire sur la torsion des prismes, (lu à l’Académie le 13 juin 1853), *Mémoires des savants étrangers, Mémoires des divers savants à l’Académie des Sciences, de l’Institut Impérial de France et imprimé par son ordre*, 1856, Vols. 14, imprimerie Impériale, Paris, pp. 233-560 (citado em [66])
- 110 - Santos, P. M. S.; Santos, F. P. A; Cismasiu, C.; Silva, M. A. G; “Modelação em Elementos Finitos e Análise do Comportamento Dinâmico da Passagem Superior de Peões 3141 - Implementação de elementos de reforço compostos por ligas com memória de forma”, Relatório nº2 - Projeto PTDC/ECM/117618/2010, UNIC/FCT/UNL, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Fevereiro de 2013
- 111 - Sapountzakis, E.J., Tsipiras, V.J., “Effect of axial restraint in composite bars under nonlinear inelastic uniform torsion by BEM”, *Engineering Structures*, vol. 31, 2009, pp. 1190-1203
- 112 - Silva, R.M., Matos, E. F., “Análise não linear de pórticos planos de edifícios altos em concreto armado considerando a contribuição do concreto tracionado”, In: Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, 19., 2000, Punta del Este. Anais, v. único pp. 1-15. CD-ROM (citado em [55])
- 113 - Simão, MIRP. “Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Secção Rectangular Vazada à Torção com base no SMMT”. Dissertação de Mestrado. Universidade da Beira Interior. Portugal. 2011
- 114 - Smith-Pardo, J. Paul e Aristizabal-Ochoa, “Second-order axial force and midspan deflection in a simple supported beam axially restrained”, *Engineering Structure*, vol.30, 2008, pp. 561-569

- 115 - Spiegel, M. R., "Probabilidade e Estatística" São Paulo, Tradução de Alfredo Alves de Farias, McGraw-Hill do Brasil, 1978 (Citado em [12])
- 116 - Taborda, C.S.B. "Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Torção" Master Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2012
- 117 - Vecchio F.J., Collins M.P., "Stress-strain characteristics of reinforced concrete in pure shear" IABSE colloquium, Advanced Mechanics of reinforced concrete, Delft Final report 1981, pp211-225
- 118 - Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "Compression Response of Cracked Reinforced Concrete", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 119 (12), 1993, pp.3590-3610
- 119 - Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", *Journal of the American Concrete Institute*, Março-Abril 1986, Vol. 83, No.2, pp. 219-231
- 120 - Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Forces", Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Março 1982 (citado em [12])
- 121 - Wafa, F.F., Shihata S.A., Ashour, S.A. and Akhtaruzzaman, A.A., "Pre-stressed High-Strength Concrete Beams Under Torsion", *Journal of Structural Engineering*, 1995, September, Vol.121, No.9
- 122 - Wagner, H., "Ebene Blechwandträger mit Sehr Dünnem Stegblech (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web). Zeitschrift für Flugtechnik und Motolufschiffahrt, Berlin, 1929, Vol. 20, No.8 to 12 (em Alemão, citado em [66])
- 123 - Waldren, P. "The Significance of Warping Torsion in the Design of Straight Concrete Box Girder Bridges", *Canadian Journal of Civil Engineering*, 1988, Vol. 15, pp. 879-889
- 124 - Walther, R. et Miehlabradt, M., "Dimensionnement des Structures en Béton - Bases et Technologie," *Traité de Génie Civil - Volume 7, de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse, 1990
- 125 - Wlassow, W. S., "Dünnwandige Elastische Stäbe," *Verly für Bauwesen*, Berlin, 1964 (em Alemão, (citado em [36])
- 126 - Yang, Z. J. e Chen, Jianfei, "Finite element modeling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams", *Engineering Fracture Mechanics*, April 2005, pp. 2281-2297
- 127 - Zhang, L.X. and Hsu, T.C., "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Janeiro-Fevereiro 1998, Vol.

- 124, No. 1, pp.24-34 (citado em [12])
- 128 - Zhu, et al., “Rational Shear Modulus for Smeared-Crack Analysis of Reinforced Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, 98(4), 2001, pp.443-450
- 129 - Zhu, R.R.H, Hsu, T.T.C, “Poisson effect in reinforced concrete membrane elements” *Structural Journal of American Concrete Institute* 2002, 99(5):631-640 (citado em [74])
- 130 - Zienkiewicz, O. C., “The Finite Element Method”, 4ª Edição, McGraw-Hill, Londres, 1977
- 131 - <<http://blogeberick.altoqi.com.br/next1/?p=1434>>, acesso em 25/02/2016
- 132 - <<http://educavita.blogspot.pt/2013/04/viaduto-de-linn-cove-maioria-ambiente.html>>, acesso em 25/02/2016
- 133 - <<http://en.structurae.de/photos/index.cfm?JS=156633>>, acesso em 05/03/2012 (citado em [116])
- 134 - <<http://henriquebgomes.blogspot.pt/2011/01/casa-de-artes-e-cultura-do-tejo-vila.html>>, acesso em 25/02/2016
- 135 - <http://mvpengenharia.com.br/obras_concluidas.html>, acesso em 25/02/2016
- 136 - <<http://portfolio.soaresdacosta.com/pt/portfolio/ponte-da-regua-ip3/>>, acesso em 25/02/2016
- 137 - <<http://www.birddog.co.uk/2011/06/the-business-of-social-media/>>, acesso em 05/03/2012 (citado em [116])
- 138 - <<http://www.dsconto.com/galeria/escada-de-concreto-1/>>, acesso em 25/02/2016
- 139 - <<http://www.engenhariacivil.com/ponte-rotunda-laguna-garzon>>, acesso em 25/02/2016
- 140 - <http://www.travelpod.com/ad/Royal_Festival_Hall-London>, acesso em 05/03/2012 (citado em [116])

