



**Filtragem de Kalman Adaptativa e Robusta
para a Reconstrução de Trajetórias**
(Versão corrigida após defesa)

Marco Daniel Laranjeira Martins

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Aeronáutica

mestrado integrado

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

julho de 2020

Dedicatória

Dedico esta dissertação aos meus pais, por todo o apoio e dedicação e carinho que me ofereceram durante esta longa e árdua caminhada.

Dedico à Aida Oliveira, minha mãe, que apesar da enorme distância, esteve sempre a meu lado nos momentos em que senti maior dificuldade, para contornar os meus obstáculos, e nunca desistiu de ser o pilar da minha força de vontade, da minha determinação.

António Martins, Pai, dedico-te também este trabalho pela tua ajuda, disponibilidade, carinho, compreensão e o cuidado que sempre tiveste em verificar se estava tudo bem comigo, o meu muito obrigado.

Agradecimentos

Com muita gratidão expresso os meus agradecimentos a todos aqueles que me apoiaram, ajudaram e contribuíram para o meu sucesso ao longo destes últimos anos.

Expresso, a minha gratidão também ao meu orientador, o Professor Doutor Kouamana Bousson, por me ter dado a oportunidade de trabalhar num tema tão vasto e interessante como este, por todo o conhecimento científico que partilhou comigo, por me ter proporcionado a realização de todo este projeto e por todo o apoio, agradeço ainda a disponibilidade que teve para comigo, o meu muito obrigado.

Aos meus amigos, o meu maior agradecimento por todos os bons momentos de risadas e descontração que vivemos juntos que me ajudaram imenso a elevar a moral mesmo quando me encontrava mais em baixo.

A todos os meus familiares e amigos que acreditaram em mim, o meu muito obrigado.

Expresso sobretudo a minha gratidão aos meus pais, sem eles eu não estaria aqui.

Resumo

Atualmente, o filtro de Kalman apresenta-se como uma importante opção para a estimação e reconstrução de trajetórias, devido sobretudo ao facto de ser um algoritmo relativamente simples de utilizar, assim como os bons resultados que se conseguem alcançar com a sua utilização.

Existe, no entanto, a necessidade de se conhecer os parâmetros de uma trajetória que se pretenda filtrar para ser possível aplicar o filtro de Kalman com maior precisão. Assim, a performance do filtro de Kalman clássico está excessivamente dependente do conhecimento quase total do sistema que se pretende filtrar, o que em aplicações de carácter aeronáutico, quase nunca é possível, originando ainda outro problema: Um projetista pode simplificar e linearizar os parâmetros desconhecidos de um sistema, muitas vezes de forma incorreta, sem construir um filtro de Kalman dinâmico o suficiente para lidar com o incremento do erro resultante da aproximação, originando assim uma maior divergência entre o valor estimado pelo filtro e o valor real medido.

O trabalho desenvolvido na presente dissertação irá lidar com incertezas inerentes a um sistema linear com medições altamente ruidosas, assim como o fenómeno da divergência entre valores medidos e estimados, modificando assim o filtro de Kalman de duas formas distintas: a primeira tornando-o robusto contra incertezas presentes nas equações de sistema, e a segunda melhorando a capacidade de reação do filtro face a novos valores estimados, criando um filtro de Kalman adaptativo e robusto, contribuindo assim para a melhoria da performance do filtro.

Palavras-chave:

Determinação de Órbitas, Filtro de Kalman Clássico, Filtro de Kalman Adaptativo Evanescente, Filtro de Kalman Robusto, Filtro de Kalman Robusto Adaptativo Evanescente

Abstract

Currently, the Kalman filter presents itself as an important option in trajectory estimation and reconstruction, mainly due to the fact of being a relatively simple algorithm to use, as well as the good results that can be achieved with its use.

There is however, a need to know the parameters of a trajectory one wants to filter, so that the Kalman filter may be applied with greater precision. Thus, the performance of the filter usually relies excessively on almost complete knowledge of the system to filter, which, in airspace applications, is hardly ever achievable, and may originate another problem in which the filter designer may oversimplify and linearize the unknown parameters of a system, without implementing a dynamic Kalman filter able to deal with the ever increasing error resulting from the approximation, originating a bigger divergence between measured and estimated data.

This dissertation will deal with uncertainties inherent to a linear model system, as well as the phenomenon of divergence between measured and estimated values, modifying the Kalman filter in two different ways, the first by making it robust against uncertainties present in the system equations, and second improving the filter's capacity of reaction when faced with new estimated values, creating a robust, adaptative filter, thus contributing to improve its performance.

Keywords

Orbit estimation, Classic Kalman Filter, Fading Kalman Filter, Robust Kalman Filter, Robust Fading Kalman Filter

Índice

Dedicatória	iv
Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	x
Lista de figuras	xv
Lista de acrónimos	xxi
Capítulo 1. Introdução	1
1.1. Introdução	1
1.2. Reconstrução de trajetórias	3
1.3. Objetivos da dissertação	4
1.4. Estrutura da dissertação	4
Capítulo 2. Generalidades sobre processos estocásticos lineares	7
2.1. Processos Estocásticos	7
2.2. Propriedades do sistema modelo	8
2.2.1. Sistema tempo-discreto	8
2.2.2. Sistema Observável	8
2.3. Conceitos de Probabilidades e Estatística	9
2.3.1. Variância e desvio padrão	9
2.3.2. Distribuição normal	10
2.3.4. Probabilidade condicionada.....	12
2.3.5. Características do espetro do sinal	12
2.3.6. Ruído Branco.....	13
Capítulo 3. Filtragem de Kalman Adaptativa e Robusta	15
3.1 Introdução	15
3.2 Filtro de Kalman	15
3.3. Algoritmo do filtro de Kalman discreto	17
3.4. Escolha de valores para as matrizes	19
3.5. Limitações do filtro de Kalman Clássico	21
3.6. Filtro de Kalman adaptativo evanescente	22
3.6.1. Filtro de Kalman adaptativo evanescente (primeiro algoritmo)	23
3.6.2. Filtro de Kalman adaptativo evanescente (segundo e terceiro algoritmos) ..	24
3.7. Filtro de Kalman Robusto	25
Capítulo 4. Aplicações práticas	31

4.1. Introdução	31
4.2. Aplicação dos filtros de Kalman	31
4.2.1. Exemplo teórico.....	31
4.2.1.1 Geração de trajetória.....	31
4.2.1.2. Aplicação do Filtro de Kalman clássico	34
4.2.1.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente	36
4.2.1.4. Aplicação do filtro de Kalman robusto	52
4.2.2 Estimação da órbita da estação espacial internacional	65
4.2.2.1 Geração da trajetória inicial	65
4.2.2.2 Aplicação do Filtro de Kalman clássico	68
4.2.2.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente.....	71
4.2.2.4. Aplicação do Filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente.....	78
4.2.3. Estimação da trajetória de um voo comercial de um airbus A321	88
4.2.3.1. Geração de trajetória	88
4.2.3.2. Aplicação do Filtro de Kalman clássico	91
4.2.3.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente.....	93
4.2.3.4. Aplicação do filtro de Filtro de Kalman robusto	98
Capítulo 5. Conclusão e trabalhos futuros	109
Anexo	113
Publicações Realizadas	114

Lista de figuras

Fig.1. Função de distribuição de probabilidade gaussiana

Fig.2. Ruído branco no domínio do tempo

Fig.3. Ruído branco no domínio da frequência

Fig.4. Ciclo do filtro de Kalman discreto

Fig.5. Ilustração completa do algoritmo do filtro de Kalman

Fig.6. Diagrama do efeito de escolha da covariância do ruído na performance do filtro de Kalman

Fig.7. Representação 3D da trajetória gerada

Fig.8. Representação 3D da trajetória gerada, com a inclusão de ruído branco

Fig.9. Representação 3D da trajetória gerada pelo filtro de Kalman clássico

Fig.10. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos, para o FKAE, no eixo de X

Fig.11. Representação 3D da trajetória gerada pelo 1º algoritmo do FKAE

Fig.12. Representação 3D da trajetória gerada pelo 2º algoritmo do FKAE

Fig.13. Representação 3D da trajetória gerada pelo 3º algoritmo do FKAE

Fig.14. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R1

Fig.15. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R2

Fig.16. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R3

Fig.17. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R4

Fig.18. Evolução do fator de esquecimento ao longo do algoritmo do FKAE

Fig.19. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman normal para R1

Fig.20. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman normal para R2

Fig.21. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman normal para R3

Fig.22. Reconstrução da trajetória através do FKAE, 1º algoritmo, matrizes otimizadas

Fig.23. Reconstrução da trajetória através do FKAE, 2º algoritmo, matrizes otimizadas

Fig.24. Reconstrução da trajetória através do FKAE, 3º algoritmo, matrizes otimizadas

Fig.25. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 1º algoritmo, eixo de X

Fig.26. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 2º algoritmo, eixo de X

Fig.27. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 3º algoritmo, eixo de X

Fig.28. Estimação da trajetória com ruído e com um estado incorreto

Fig.29. Estimação da trajetória com um estado incorreto recorrendo ao filtro de Kalman clássico

Fig.30. Estimação de trajetória com um estado incorreto recorrendo ao filtro de Kalman adaptativo evanescente

Fig.31. Evolução do elemento M (1,1)

Fig.32. Evolução do elemento M (2,2)

Fig.33. Evolução do elemento M (3,3)

Fig.34. Evolução iterativa do elemento U (1,1)

Fig.35. Evolução iterativa do elemento U (2,2)

Fig.36. Evolução iterativa do elemento U (3,3)

Fig.37. Trajetória gerada segundo o novo estimador

Fig.38. Trajetória original sem ruído gerada segundo o novo estimador

Fig.39. Estimação da nova trajetória pelo filtro de Kalman Robusto

Fig.40. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKR, eixo de X

Fig.41. Estimação da nova trajetória a partir do FKRAE, 2º algoritmo

Fig.42. Diferença (metros) entre os valores sem ruído reconstruídos para o FKRAE, 2º algoritmo, eixo de X

Fig.43. Movimento orbital da ISS, em coordenadas cartesianas

Fig.44. Movimento orbital da ISS, primeira órbita, em coordenadas cartesianas

- Fig.45. Movimento orbital da ISS, em coordenadas cartesianas, com a presença de ruído
- Fig.46. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao filtro de Kalman clássico
- Fig.47. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para a trajetória da ISS, FKC, eixo de X
- Fig.48. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 1º algoritmo do FKAE
- Fig.49. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 2º algoritmo do FKAE
- Fig.50. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 3º algoritmo do FKAE
- Fig.51. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 1º algoritmo, eixo de X
- Fig.52. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 2º algoritmo, eixo de X
- Fig.53. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 3º algoritmo, eixo de X
- Fig.54. Evolução do fator de esquecimento ao longo do FKAE, 2º algoritmo, da ISS
- Fig.55. Estimação da orbita da ISS recorrendo ao filtro de Kalman clássico com o novo valor de R.
- Fig.56. Trajetória da ISS com ruído e com um estado incorreto
- Fig.57. Estimação da trajetória da ISS, com um estado incorreto, recorrendo ao FKAE, 2º algoritmo
- Fig.58. Estimação da trajetória da ISS, com um estado incorreto, recorrendo ao FKC
- Fig.59. Evolução do elemento M (1,1) da ISS
- Fig.60. Evolução do elemento M (2,2) da ISS
- Fig.61. Evolução do elemento M (3,3) da ISS
- Fig.62. Evolução iterativa do elemento U (1,1) da ISS
- Fig.63. Evolução iterativa do elemento U (2,2) da ISS
- Fig.64. Evolução iterativa do elemento U (3,3) da ISS
- Fig.65. Estimação da trajetória orbital da ISS segundo o novo estimador

- Fig. 66. Estimação da trajetória orbital da ISS segundo o novo estimador, sem ruído
- Fig.67. Estimação da nova trajetória orbital da ISS através do FKRAE, 2º algoritmo
- Fig.68. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o FKRAE, 2º algoritmo, eixo de X
- Fig.69. Projeção ortográfica do voo comercial de um airbus A321
- Fig.70. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321
- Fig.71. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 com a presença de ruído branco
- Fig.72. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321, através de um filtro de Kalman
- Fig.73. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKC
- Fig.74. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 através do 1º algoritmo do FKAE
- Fig.75. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 através do 2º algoritmo do FKAE
- Fig.76. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 através do 3º algoritmo do FKAE
- Fig.77. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 1º algoritmo
- Fig.78. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 2º algoritmo
- Fig.79. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 3º algoritmo
- Fig.80. Evolução do fator de esquecimento ao longo do FKAE, do voo comercial de um airbus A321
- Fig.81. Evolução do elemento $M(1,1)$, do voo comercial de um airbus A321
- Fig.82. Evolução do elemento $M(2,2)$ do voo comercial de um airbus A321
- Fig.83. Evolução do elemento $M(3,3)$, do voo comercial de um airbus A321
- Fig.84. Evolução iterativa do elemento $U(1,1)$ do voo comercial de um airbus A321

Fig.85. Evolução iterativa do elemento $U(2,2)$, do voo comercial de um airbus A321

Fig.86. Evolução iterativa do elemento $U(3,3)$, do voo comercial de um airbus A321

Fig.87. Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador

Fig.88. Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador, sem ruído branco.

Fig.89. Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador, recorrendo ao filtro de Kalman robusto

Fig.90. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKR

Lista de acrónimos

(Por ordem alfabética)

ARE- Algebraic Riccati Equation

ECEF-Earth-Centered, Earth-Fixed

FKAE-Filtro de Kalman Adaptativo Evanescente

FKD-Filtro de Kalman Discreto

FKR-Filtro de Kalman Robusto

FKRAE- Filtro de Kalman Robusto Adaptativo Evanescente

ISS-International Space Station

Capítulo 1. Introdução

1.1. Introdução

A presente dissertação visará o estudo da utilização de modificações ao algoritmo do filtro de Kalman na reconstrução de trajetórias, a saber; o filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto.

O filtro de Kalman, desenhado por Rudolf Emil Kalman [4], é um algoritmo que permite obter uma estimativa de dados quando não é possível obter uma medição física, ou essa medição se encontra demasiado degradada por ruído branco. Este algoritmo produz estimativas do estado de um sistema usando medições ruidosas observadas ao longo do tempo. Este opera de forma recursiva, precisando apenas da medição do estado atual e do cálculo do estado anterior. O filtro de Kalman revela a sua utilidade quando nem sempre for possível medir algumas variáveis de interesse, podendo ser utilizado para calcular essas variáveis através de medições indiretas.

A popularidade do filtro de Kalman deve-se sobretudo à sua facilidade de implementação devido ao seu comportamento recursivo, e poder ser utilizado sem se ter conhecimento completo acerca do funcionamento interno do filtro.

Devido à sua relativa simplicidade e elevada eficácia, o filtro de Kalman é usado em inúmeras áreas, como por exemplo, na medicina, na orientação e navegação de veículos, processamento de sinais e, mais relevante para a presente dissertação, reconstrução de trajetórias.

A reconstrução de trajetórias é uma das maiores e mais importantes aplicações atuais do filtro de Kalman, consistindo na utilização de um filtro, como o filtro de Kalman, para atuar sobre trajetórias estimadas usando sensores e outros instrumentos de medição, trajetórias essas que possuam níveis elevados de impurezas, sobretudo ruído branco. Desta forma, o filtro de Kalman irá “reconstruir” a trajetória, isto é, permitir que essa trajetória tenha níveis de ruídos mais baixos, ficando essa trajetória mais limpa.

A criação do filtro de Kalman está profundamente ligada ao estudo da estimação de trajetórias.

A estimação de trajetórias surgiu sobretudo como determinação de órbitas de corpos celestes aquando das primeiras observações astronómicas a planetas e cometas através do uso de telescópios, realizadas nos séc. XVI-XVII onde através da observação desses

corpos celestes e do conhecimento de parâmetros que descreviam o movimento dos mesmos, novas posições podiam ser deduzidas.

No séc. XIX surgiram novos avanços para a estimação de trajetórias, com a elaboração do Método dos Mínimos Quadrados, desenvolvido na mesma altura de forma independente por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) e Adrian Marie Legendre (1752-1833), com as suas respetivas publicações: *Theoria Motus Corporum Coelestium* (1809) e *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Este método procurava encontrar a melhor solução para um conjunto de dados minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e os valores medidos. [1]

R. A. Fisher [1] desenvolveu em 1912 o método de máxima verosimilhança, um método para estimar os parâmetros de uma distribuição de probabilidade maximizando o logaritmo de uma função de verosimilhança.

Kolmogorov e Wiener [1] desenvolveram, respetivamente em 1941 e 1942, de forma independente, uma estimação linear média dos mínimos quadrados. Esta estimação assume obrigatoriamente que equações lineares devem estar disponíveis para a solução do problema de estimação.

J.W Follin, em 1955, [1] sugeriu uma abordagem recursiva onde novos valores estimados pelo filtro são atualizados a partir de novas medições.

Tendo por base as teorias e os métodos acima enunciados, Kalman publicou o seu famoso artigo [1] [4]: *A new approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, enquanto trabalhava no *Research Institute for Advanced Studies*, motivado principalmente pela corrida espacial. Nesse artigo, Kalman formula as equações para um filtro recursivo, gaussiano e em tempo discreto, o Filtro de Kalman, embora, em 1958, Peter Swerling tenha também publicado um método recursivo para determinação de orbitas semelhante ao filtro de Kalman, cuja maior diferença era a equação usada para atualizar a matriz de covariância do erro ser mais complexa.

Kalman, mais tarde, trabalhou com Bucy para a elaboração de um filtro de Kalman em tempo contínuo, surgindo assim o Filtro de Kalman-Bucy [1].

Desde a sua conceção até à atualidade, o filtro de Kalman foi alvo de inúmeros estudos e aplicações, bem como melhorias ao seu algoritmo. Diferentes grupos de investigadores focaram-se em diferentes áreas do filtro de Kalman de modo a melhorar a sua performance e precisão, assim como tentar resolver algumas das falhas mais evidentes do filtro.

Na referência [2], apresenta-se como solução para as incertezas inerentes ao sistema modelo, um algoritmo para o filtro de Kalman que o tornasse robusto contra incertezas, criando o filtro de Kalman robusto.

Na referência [3], apresenta-se como solução para a degradação de estimações devido ao constante afastamento entre os valores medidos e os valores estimados, aplicando no algoritmo do filtro de Kalman um fator que priorizasse estimações novas em detrimento de estimações mais antigas, criando o filtro de Kalman adaptativo evanescente.

Esta dissertação vai-se basear no trabalho elaborado por estes dois grupos de investigadores, que seguiram paradigmas diferentes para melhorar a performance do filtro de Kalman, aplicando as modificações ao filtro de Kalman clássico desenvolvidas por estes investigadores no âmbito da reconstrução de trajetórias, de modo a melhorar a performance do filtro melhorando a precisão dos resultados obtidos e solucionando algumas das maiores limitações do algoritmo do filtro de Kalman clássico.

1.2. Reconstrução de trajetórias

Nesta dissertação, irá ser analisada a aplicação de um filtro de Kalman adaptativo e robusto na reconstrução de trajetórias.

O filtro de Kalman, ou qualquer outro algoritmo para reconstrução de trajetórias, está dependente de sensores e instrumentos de medição, que fornecem os dados da trajetória para filtrar, para depois enviar esses dados a outros sistemas.

Atendendo a que os sensores não só captam a informação pertinente, mas também vários tipos de ruído e incertezas, entre elas o ruído branco, o filtro de Kalman torna-se especialmente importante, em virtude de a ele competir a remoção do ruído e a obtenção de valores limpos que possam ser utilizados por outros componentes.

Assim, em cada iteração do processo iterativo, o filtro de Kalman irá utilizar os dados e medições ruidosas e assim, ao longo da trajetória, irá devolver uma trajetória reconstruída, isto é, apenas com a informação essencial, limpa de ruído.

Uma vez que o filtro de Kalman Clássico irá possuir várias limitações no âmbito da reconstrução de trajetórias, que serão explicadas nos capítulos seguintes, e porque existem trajetórias que requerem uma maior precisão no seu processo de reconstrução, torna-se necessário implementar várias modificações ao algoritmo do filtro de Kalman, obtendo-se assim o filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto,

numa tentativa de melhorar a performance e a precisão do processo de reconstrução de trajetórias.

1.3. Objetivos da dissertação

O trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação tem como objetivo a reconstrução de trajetórias recorrendo aos filtros que surgiram através de modificações ao algoritmo do filtro de Kalman Clássico: o filtro de Kalman adaptativo evanescente (FKAE) e o filtro de Kalman robusto (FKR). Estes dois filtros apresentam-se como alternativas ao uso do filtro de Kalman clássico (FKC), de modo a melhorar a performance da estimação de trajetórias, assim como para resolver alguns dos maiores problemas do filtro de Kalman clássico.

A presente dissertação visa também a junção destes dois filtros num só filtro robusto e adaptativo, o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente, que possua as vantagens dos dois filtros para máxima performance na reconstrução de trajetórias.

Esta dissertação visa ainda a aplicação do filtro de Kalman, do filtro de Kalman adaptativo evanescente, do filtro de Kalman robusto e do filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente a uma trajetória fictícia gerada através da ferramenta Matlab, à trajetória orbital da International Space Station (ISS) e ao voo comercial de um airbus A321, de Lisboa a Londres.

1.4. Estrutura da dissertação

No capítulo 1 será feita uma pequena introdução ao filtro de Kalman, dando especial ênfase ao uso mais relevante para esta dissertação, a reconstrução de trajetórias. Serão também mencionadas as teorias mais importantes relacionadas com a estimação de trajetórias que precederam o filtro de Kalman, assim como as alterações ao algoritmo do filtro de Kalman que também serão abordadas nesta dissertação, a saber: o filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto.

No capítulo 2 serão analisadas as características que um sistema de equações deve possuir para poder ser submetido a um filtro de Kalman. Serão analisadas também as diferentes propriedades das matrizes que formam o sistema modelo, assim como os elementos estatísticos que estão na base do filtro de Kalman.

No capítulo 3 será analisado o filtro de Kalman, sendo também explicado o seu algoritmo, assim como as suas maiores limitações, a saber: a linearização excessiva de um sistema

real para linear, e seu consequente afastamento dos valores medidos e estimados, assim como incertezas desconhecidas presentes no sistema modelo que poderão afetar a estimativa de trajetórias, podendo assim afetar o desempenho e a precisão do filtro.

Serão assim apresentados, como alternativa, novos algoritmos para o filtro de Kalman que permitam realizar estimativas de trajetória sem apresentarem estas limitações.

No capítulo 4 serão aplicados os filtros desenvolvidos no capítulo anterior, primeiro a uma trajetória gerada por Matlab, depois à órbita da ISS e por último a um voo comercial de um airbus A321, de Lisboa a Londres.

No capítulo 5 serão apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação, bem como sugestões para possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2. Generalidades sobre processos estocásticos lineares

2.1. Processos Estocásticos

Neste capítulo apresentar-se-ão as principais propriedades que regem o sistema de equações para o qual os filtros de Kalman irão ser aplicados.

Por fim, uma vez que as trajetórias a filtrar estão sujeitas a ruído branco, falar-se-á dos fenômenos probabilísticos que estão por trás do ruído.

No entanto uma vez que a filtragem de Kalman irá ter por base processos estocásticos, fazer-se-á uma introdução a estes processos.

Um sistema estocástico é um fenômeno que varia de forma imprevisível com o passar do tempo. Esse fenômeno é composto por diversas observações efetuadas ao longo de um período de tempo, observações essas que serão afetadas por acontecimentos aleatórios, durante todo o intervalo de tempo.

Alguns exemplos, de entre muitos, de um processo estocástico podem ser: as ações de uma empresa na bolsa de valores, o comportamento caótico da turbulência, assim como, a trajetória da estação espacial internacional sujeita a ruídos brancos, exemplo desta dissertação.

A estocasticidade de um sistema é garantida pela seguinte definição [5]:

Definição 2.1: Dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , onde Ω representa um espaço amostral, \mathcal{F} representa o conjunto de resultados de um espaço amostral, e P representa uma função de probabilidade, que atribui a cada conjunto de resultados uma probabilidade entre 0 e 1, um processo estocástico é qualquer coleção de variáveis aleatórias definida neste espaço de probabilidade.

Este conjunto de variáveis aleatórias é definido por:

$\{X(t) : t \in I\}$, onde I é o conjunto de índices, e que irá determinar o tipo de processo estocástico que se obtém.

Se, por exemplo $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ será obtido um processo estocástico de tempo-discreto, uma vez que dentro de um universo infinito de índices, serão escolhidos valores com intervalos definidos.

Se $I = [0, \infty]$, será obtido um processo estocástico de tempo-contínuo.

A um sistema estocástico opõe-se o sistema determinista, ou seja, um sistema onde a aleatoriedade não existe e, assim um evento terá o mesmo resultado, desde que se mantenha as condições iniciais e o estado inicial. [5]

2.2. Propriedades do sistema modelo

Neste subcapítulo, considerar-se-á as propriedades de um sistema de equações modelo do tipo:

$$x_k = Fx_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (1)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

2.2.1. Sistema tempo-discreto

Um sistema a representar um sinal, diz-se em tempo discreto, quando existem valores para as variáveis a medir a ocorrer apenas segundo intervalos de tempo separados e distintos. [11]

Na realidade raramente se encontram sinais em tempo-discreto, existindo predominantemente sinais contínuos. A maior parte dos sinais em tempo discreto que são sujeitos a algoritmos de estimação, como o filtro de Kalman, provêm de uma “discretização” de um sinal contínuo, onde todos os valores de uma variável que podem ocorrer num determinado período de tempo, serão retirados valores de um intervalo de tempo considerado.

2.2.2. Sistema Observável

Considera-se que um sistema é observável se para qualquer estado inicial $x(0)$ poder ser obtido se se conhecer a sua entrada $u(t)$ e saída $z(t)$.

Definição: Um sistema é observável se os valores do vetor de medição nos tempos $t, t^* + \Delta t, \dots, t^* + n \Delta t$ (com $n \geq 1$, Δt sendo o passo de observação), permitem ter uma estimativa fiável do valor do vetor de estado no tempo t .

Segundo Kalman, a matriz de observabilidade θ possui a seguinte forma:

$$\theta = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sendo a ordem da matriz θ igual à dimensão n da matriz F .

O sistema é observável se a ordem da matriz de observabilidade for igual a n :

$$\text{ordem}(\theta) = n$$

Concluindo, um sistema diz-se observável se um estado puder ser observado a partir do conhecimento da entrada e da saída.

2.3. Conceitos de Probabilidades e Estatística

Uma vez que a trajetória a filtrar está sujeita a ruído de distribuição normal, este subcapítulo irá abordar alguns dos conceitos probabilísticos e estatísticos que permitem uma melhor compreensão do comportamento do ruído.

2.3.1. Variância e desvio padrão

Tanto a variância como o desvio padrão são classificados como medidas de dispersão.

A variância de um processo estocástico é uma medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está do valor central médio.

Assim, a variância pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\text{Variância } X = E(X^2) - E(X)^2 \quad (4)$$

Onde:

X é uma variável aleatória,

$E(X^2)$ é o segundo momento de uma variável aleatória, dado por:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (5)$$

Onde:

$E(X)$ é o valor esperado de X , dado por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (6)$$

Assim, a partir da variância, pode-se calcular o desvio padrão.

O desvio padrão é utilizado para encontrar o erro ou o valor mais discrepante de um conjunto de dados, e pode ser calculado a partir da variância através da seguinte equação:

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Variância de } X} \quad (7)$$

2.3.2. Distribuição normal

No sistema modelo, o ruído segue uma distribuição de probabilidade cuja soma tende a seguir uma distribuição normal, ou gaussiana.

Uma distribuição normal é uma distribuição contínua, isto é, possui uma função de distribuição cumulativa que é absolutamente contínua. [6]

Para um processo aleatório contínuo, normalmente distribuído com média μ e variância σ^2):

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (8)$$

A função de densidade de probabilidade, para $-\infty < x < \infty$ é dada por [6]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (9)$$

Qualquer função linear de um processo aleatório com uma distribuição normal é também um processo aleatório com distribuição normal [6].

De acordo com o exemplo anterior, em que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad (10)$$

E a sua função de probabilidade de densidade é dada por [6]:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y - (a\mu + b))^2}{a^2 \sigma^2}} \quad (11)$$

Se X_1 e X_2 forem independentes, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, então [6]:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (12)$$

Logo a função de densidade vem:

$$f_X(x_1 + x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (13)$$

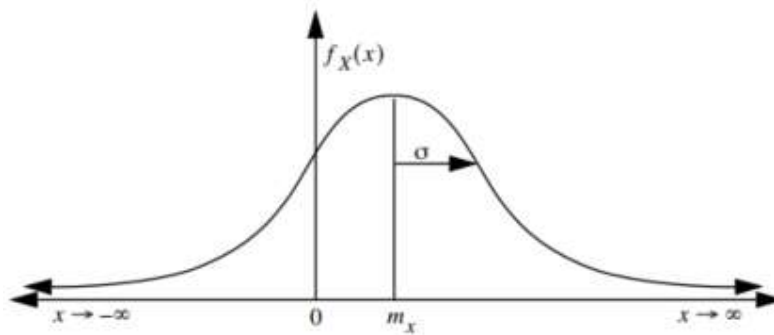


Fig.1. Função de distribuição de probabilidade gaussiana

2.3.3. Independência contínua

Duas variáveis contínuas e aleatórias X e Y dizem-se estatisticamente independentes se a sua probabilidade conjunta $f_{XY}(x, y)$ for igual ao produto das suas probabilidades individuais, ou seja [6]:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (14)$$

2.3.4. Probabilidade condicionada

À probabilidade de um evento A dada a ocorrência de um evento B dá-se o nome de probabilidade condicionada de A dado B:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (15)$$

A partir desta equação, a regra de Bayes permite especificar a probabilidade de densidade de uma variável aleatória X na presença de uma variável aleatória Y, sendo regra de Bayes dada por [6]:

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X|Y}(y)f_X(x)}{f_Y(y)} \quad (16)$$

Dado um processo discreto X e um processo contínuo Y, a função de massa de probabilidade discreta para X condicionado por Y=y é dado por [6]:

$$p_X(x|Y = y) = \frac{f_Y(y|X=x)p_X(x)}{\sum_Z f_Y(y|X=z)p_X(z)} \quad (17)$$

2.3.5. Características do espetro do sinal

A autocorrelação é uma característica temporal de um sinal aleatório de grande importância que pode ser definida como a sua própria correlação com o tempo. A autocorrelação de um sinal aleatório X(t) para os tempos de amostra t_1 e t_2 é definida como sendo [6]:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (18)$$

Se o processo for estacionário, e a densidade de probabilidade não variar com o tempo, então a autocorrelação apenas irá variar com a diferença $\tau=t_1-t_2$, podendo a autocorrelação ser reescrita como:

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (19)$$

Uma vez que a autocorrelação irá variar com o tempo, a sua interpretação espectral no domínio da frequência também irá variar com o tempo. Para um processo estacionário, a relação entre o espectro e o tempo, também conhecida como a relação Wiener-Khinchine irá ser [6]:

$$S_X(j\omega) = \mathfrak{F}[R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau] \quad (20)$$

Onde:

\mathfrak{F} Indica a transformada de Fourier;

ω Indica o número de ciclos (2π) por segundo;

$S_X(j\omega)$ Indica a densidade do poder espectral de um sinal aleatório, que liga as representações do espectro do tempo e da frequência do mesmo sinal.

2.3.6. Ruído Branco

Quando a função de autocorrelação se representa por uma função de delta de Dirac $\delta(\tau)$ tem valor 0 em toda a sua extensão exceto para $\tau=0$, ou seja [6]:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \text{if } \tau = 0, \text{ then } A \\ \text{else } 0 \end{cases} \quad (21)$$

Onde A é uma constante de magnitude.

Neste caso, a correlação irá corresponder a um pico, e a transformada de Fourier resulta num espectro de frequência constante. A este fenómeno dá-se o nome de ruído branco, que irá possuir poder em todas as frequências de espectro, e ser completamente não correlacionado consigo mesmo em todos os instantes exceto para ($\tau=0$), sendo por esse facto que o ruído branco é chamado de independente, uma vez que qualquer amostra do

signal in a determined period of time is independent of a sample in another period of time.

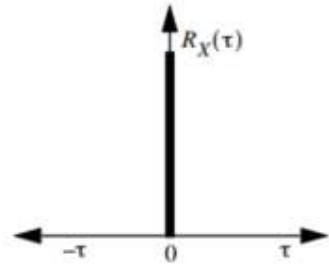


Fig.2. Ruído branco no domínio do tempo

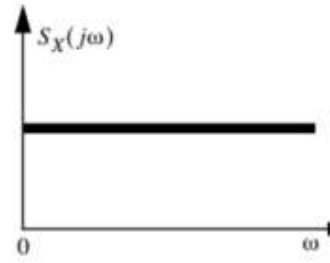


Fig.3. Ruído branco no domínio da frequência

Capítulo 3. Filtragem de Kalman Adaptativa e Robusta

3.1 Introdução

Neste capítulo ir-se-á trabalhar com o algoritmo do filtro de Kalman assinalando algumas das suas maiores limitações e problemas, apresentando o algoritmo do FKAE e do FKR como formas de eliminar, ou pelo menos, minorar essas limitações.

3.2 Filtro de Kalman

Para estimar variáveis de um sistema estocástico com medições com ruído, existe uma vasta panóplia de algoritmos matemáticos. Dentro destes, o mais conhecido e usado é o filtro de Kalman, cujo nome deriva do seu inventor Rudolph Kalman, que publicou um artigo descrevendo uma solução recursiva para a filtragem linear em tempo discreto.

Na sua essência, o filtro de Kalman é um conjunto de equações que se inserem em duas partes, previsão e correção.

Um sistema, linear, estocástico, em tempo discreto será regido pelas seguintes equações:

$$x_k = Fx_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (22)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (23)$$

Enquanto a primeira equação procura estimar o estado seguinte na sequência, $x \in \mathfrak{R}_n$ a segunda equação procura estimar a sua medição, $z \in \mathfrak{R}_m$. [6]

Onde:

F: matriz de transição de estado, que relaciona o estado no passo anterior k-1 para o passo atual k,

B: matriz de controlo

H: matriz de medição, também chamado matriz de observação

As variáveis w_k e v_k representam o ruído de transição de estado e medição, respetivamente, sendo o ruído assumido independente, branco e seguindo distribuições de probabilidade gaussianas. [6]

$$p(w) \sim N(0, Q) \quad (24)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (25)$$

Onde Q e R são respetivamente as matrizes de covariância do erro da transição de estado e de covariância de medição.

Conhecendo o estado anterior, pode-se definir um estado *a priori* para um passo k como sendo:

$$\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$$

Define-se também o estado *a posteriori*, tendo conhecimento do valor de medição z_k , como sendo:

$$\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

Assim, pode-se definir os erros de estimativa como sendo [6]:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^- \quad (26)$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k \quad (27)$$

Através da equação (26) chega-se à covariância do erro de estimação *a priori*:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (28)$$

Através da equação (27) chega-se à covariância do erro de estimação *a posteriori*:

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (29)$$

A equação *a posteriori* para a estimação de estado será uma combinação linear da estimação *a priori* \hat{x}_k^- e uma diferença com ganho entre a medição estimada $H\hat{x}_k^-$ e a medição verdadeira z_k , e é dada por [6]:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (30)$$

Há diferença $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ Chama-se residual, ou inovação de medições, e corresponde à diferença entre o valor de medição estimado e o valor de medição verdadeiro.

A matriz K corresponde ao ganho ou fator de mistura, que procura minimizar a equação de covariância de erro *a posteriori*, podendo ser obtida através da seguinte expressão:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (31)$$

Assim, observa-se que à medida que a matriz covariância do erro de estimação R se aproxima de zero, a matriz de ganho K atribui mais peso ao residual. Por outro lado, se a matriz de covariância *a priori* P_k^- se aproxima de zero, a matriz K atribui menos peso ao residual.

3.3. Algoritmo do filtro de Kalman discreto

O algoritmo do filtro de Kalman em tempo discreto irá consistir num processo de feedback contínuo entre as equações de atualização de tempo e as equações de atualização de medições. [6]

Nas atualizações de tempo, o estado atual e a covariância do erro do estado são projetados para o passo a seguir de modo a se obterem as estimativas *a priori* para esse passo. As atualizações de medição irão incorporar as novas medições às estimativas *a priori* para obter novas estimativas *a posteriori*, melhoradas.

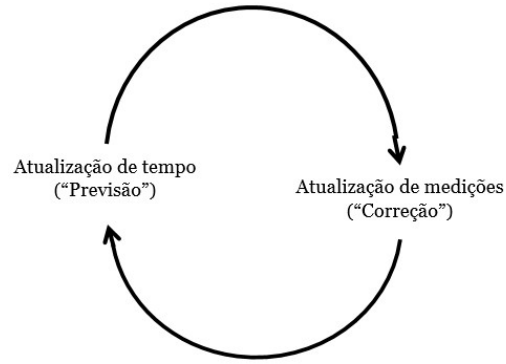


Fig.4. Ciclo do filtro de Kalman clássico

Assim, pode-se dividir as equações acima descritas em dois grupos:

Atualização de estado:

$$\hat{x}_k^- = F\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (32)$$

$$P_k^- = FP_{k-1}A^T + Q \quad (33)$$

Atualização de medições:

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (34)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (35)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (36)$$

A partir do cálculo da matriz de ganho K , assim como a obtenção da matriz de medições z para este passo, os novos valores *a posteriori* para a matriz de estado e a matriz de covariância de erro P podem ser calculados.

Com os valores *a posteriori* calculados, o processo é repetido para novos passos, sendo estes valores usados para calcular os novos valores *a priori*, permitindo desta forma gerar um novo par de atualização tempo e atualização de medições, o que confere ao filtro

a sua natureza recursiva, o que torna o filtro de Kalman apelativo para os seus utilizadores.

A figura abaixo ilustra a natureza recursiva do filtro.

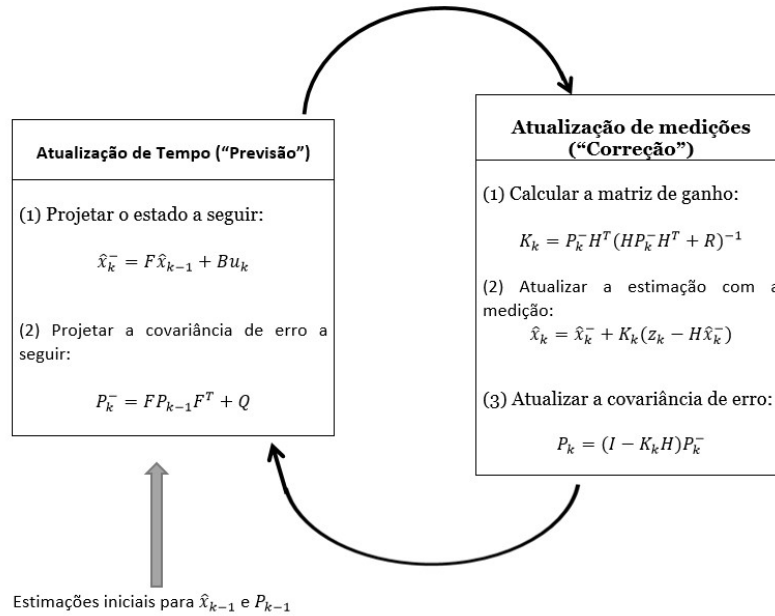


Fig.5. Ilustração completa do algoritmo do filtro de Kalman

3.4. Escolha de valores para as matrizes

A seleção de certas matrizes, como a matriz Q, a matriz R e a matriz P inicial, P_0 , referidas no subcapítulo anterior terá efeitos significativos na performance e na estimacão de um filtro de Kalman Clássico.

A seleção de P_0 , assim como a seleção do estado inicial x_0 , afetarà a convergência inicial do filtro. Porém, em muitas situações, o efeito de P_0 não será muito significativo, podendo ser assumido como uma matriz de identidade. [6]

Em contrapartida, as matrizes Q e R terão um efeito muito mais significativo, podendo melhorar ou piorar a precisão conforme a escolha dos seus valores, uma vez que estas matrizes são fatores de ponderação entre as equações de estado e medição. [6]

A imagem seguinte ilustra o efeito da escolha dos valores para as matrizes Q e R na performance e precisão do Filtro de Kalman Clássico.

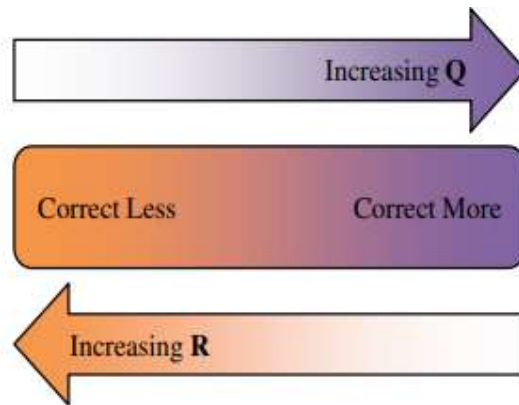


Fig.6. Diagrama do efeito de escolha da covariância do ruído na performance do Filtro

Considerar valores mais elevados para a matriz Q é considerar uma menor incerteza na equação de estado, o que equivale a dizer que se confia mais nos resultados da equação, e assim, o filtro deve procurar corrigir mais com a atualização de medições. [8]

Por outras palavras, considerar valores mais elevados para a matriz Q irá dar origem a uma matriz de covariância de erro P *a priori* mais elevada, o que dá origem a uma matriz de ganho K também mais elevada, que assim irá atribuir mais importância ao residual, e o filtro irá corrigir mais.

Da mesma maneira, considerar valores mais elevados para a matriz R é considerar uma maior incerteza na equação de medições, equivalente a dizer que se confia menos nos resultados desta equação, e assim o filtro deve corrigir menos com a atualização de medições. [8]

Ou, de uma outra forma, considerar valores mais elevados para a matriz R vai resultar em valores mais baixos para a matriz de ganho K , que assim irá atribuir menos importância ao residual, e o filtro corrigirá menos.

Para a implementação correta do filtro, a matriz de covariância R é calculada antes da construção do filtro, podendo esta ser calculada através de amostras de medições conseguidas off-line. [6]

O processo para a determinação da matriz de covariância Q é mais complexo que o da determinação da matriz R . A escolha de uma matriz Q pode salvar um modelo linear demasiado simplificado se contribuir com incerteza suficiente para o filtro, produzindo assim resultados aceitáveis. [6]

Num filtro de Kalman clássico, se as matrizes Q e R forem consideradas constantes ao longo do tempo, as matrizes de covariância P e de ganho K irão estabilizar e permanecer constantes ao fim de pouco tempo. [6]

3.5. Limitações do filtro de Kalman Clássico

Apesar do seu uso recorrente para a estimação de trajetórias, e de proporcionar bons resultados, este algoritmo apresenta também algumas limitações que é necessário assinalar.

A maior limitação do filtro de Kalman provem da natureza do modelo a ser utilizado. Uma vez que o filtro é projetado para modelos lineares, modelos que nem sempre existem na realidade, sendo não-lineares ou quase-lineares, irá assim ser necessário uma “linearização” ao sistema, isto é, irá converter o sistema não linear através de equações de modelo lineares que assemelhem o modelo o mais possível, estas aproximações irão reduzir a precisão do filtro. [2]

Outra limitação do filtro de Kalman clássico reside nas matrizes consideradas para o sistema de equações, sobretudo a matriz de transição de estado, F , e a matriz de medição H . Num filtro de Kalman clássico, os valores destas matrizes são considerados como sendo constantes e conhecidos, uma simplificação que não corresponde à realidade, porque na realidade, associada a estas matrizes, existem incertezas gaussianas e de valor variável. [9]

Outra limitação provém do facto das incertezas associadas serem apenas brancas e de natureza gaussiana, o que na realidade pode nem sempre se observar, sendo necessária uma aproximação para ruído branco. [6]

Outro problema que afeta o filtro de Kalman clássico é a sua elevada dependência dos valores assumidos para as matrizes de transição de estado e medição. Se os valores dessas matrizes forem demasiado baixos, então o desempenho do filtro de Kalman será muito baixo. Se os valores dessas matrizes forem muito elevados, existirá uma elevada diferença entre os valores medidos e estimados, podendo essa diferença aumentar a cada iteração, gerando um fenómeno de divergência entre valores medidos e estimados, e arruinando assim a performance do filtro. [3]

Finalmente, o filtro de Kalman clássico é muito pouco eficaz a reagir a problemas de estimação que possam surgir. Um estado mal medido, irá por sua vez, gerar um estado mal estimado, que por sua vez irá gerar estados cada vez mais mal estimados, podendo originar também um fenómeno de divergência. [3]

3.6. Filtro de Kalman adaptativo evanescente

No capítulo anterior mencionou-se o problema de aproximação do modelo que se quer filtrar por um modelo linear semelhante, e na possível divergência que se podia gerar.

A divergência é um fenómeno que se pode gerar num filtro cujo modelo foi aproximado de forma incorreta, e manifesta-se por uma discrepância entre as estimações obtidas para um determinado estado e as medições reais desse mesmo estado, discrepância essa que devido à natureza recursiva do filtro, se irá propagar com cada iteração do algoritmo.

Esse fenómeno, no melhor das hipóteses irá afetar a performance do filtro, arruinando completamente o filtro na pior das hipóteses.

Assim, para combater este fenómeno, há necessidade de criar um filtro de Kalman mais dinâmico, que reaja de imediato a estados obtidos com um certo grau de incerteza, e que atribua cada vez menos importância a estados mais antigos quando confrontado com estados mais recentes.

Para esse efeito uma das soluções encontradas é a aplicação de um fator de esquecimento, ou fator de esquecimento λ , na equação de covariância de erro *a priori*, ficando a equação com a seguinte forma:

$$P_k^- = \lambda_k F_k P_{k-1}^+ F^T + Q \quad (37)$$

Com $\lambda_k \geq 1$, a cada nova iteração os valores recentes são priorizados em relação aos valores mais antigos. Mesmo que a precisão da informação anterior seja dúbia, a nova informação terá mais peso, e assim é mais prevalente e converge os dados estimados com as medições obtidas, mitigando o fenómeno da divergência.

Com cada iteração, a importância de um estado estimado será cada vez menor, irá desvanecendo, daí o nome do filtro, filtro de Kalman adaptativo evanescente, ou, em português, filtro de Kalman desvanecido.

Assim, torna-se necessário otimizar este fator de esquecimento de modo a melhorar a performance do filtro em geral, existindo três algoritmos que permitem escolher o fator de esquecimento.

3.6.1. Filtro de Kalman adaptativo evanescente (primeiro algoritmo)

Segundo este algoritmo, um fator de esquecimento otimizado pode ser obtido através de sucessivas iterações da seguinte equação:

$$\lambda^{l+1}(k) = \lambda^l(k) - \varphi \frac{\partial f^l(\lambda; k)}{\partial \lambda^l(k)} \quad (38)$$

Com condições iniciais:

$$\lambda^0(1) = 1$$

$$\lambda^0(k) = \lambda(k - 1)$$

Onde:

k é o número de estados

l é o número de iterações de um estado

$0 < \varphi < 1$ é o comprimento do passo

Se, numa iteração p, a seguinte inequação for verdadeira:

$$|\lambda^p(k) - \lambda^{p-1}(k)| < \varepsilon \quad (39)$$

Sendo ε um pequeno escalar positivo que representa o grau de precisão do processo iterativo, o algoritmo de iteração para o fator de esquecimento vem:

$$\lambda(k) = \max\{1, \lambda^p(k)\} \quad (40)$$

Sendo o gradiente da equação (39) obtido pela seguinte equação:

$$\frac{\partial f^l(\lambda; k)}{\partial \lambda^l(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{ij}^l(k) \left(\frac{\partial S^l(k)}{\partial \lambda^l(k)} \right)_{ij} \quad (41)$$

Onde:

$$S^l(k) = P^-(k)H^T - K(k)C_0(k) \quad (42)$$

e:

$$\frac{\partial S^l(k)}{\partial \lambda^l(k)} = FP^+(k-1)F^T H^T [I - T^{-1}(k)C_0(k)] + K(k)HFP^+(-1)F^T H^T [I + T^{-1}(k)C_0(k)] \quad (43)$$

No qual:

$$T(k) = HP^-(k)H^T + R \quad (44)$$

Por último, a covariância do residual, C_0 pode ser calculada pela equação:

$$C_0(k) = \frac{G_1(k)}{G_2(k)} \quad (45)$$

Onde:

$$G_1(k) = \frac{G_1(k-1)}{\lambda(k-1)} + z(k)z^T(k) \quad (46)$$

$$G_2(k) = \frac{G_2(k-1)}{\lambda(k-1)} + 1 \quad (47)$$

Sendo as condições iniciais:

$$G_1(0) = 0 \text{ e } G_2(0) = 0$$

Quando comparado com os outros dois algoritmos, este algoritmo terá um tempo de compilação muito superior, devido sobretudo ao uso extensivo de iterações para o cálculo, problema este que se pode complicar se o número de pontos a estimar for elevado.

3.6.2. Filtro de Kalman adaptativo evanescente (segundo e terceiro algoritmos)

Perante o problema acima assinalado, os dois novos algoritmos calculam o fator de esquecimento de uma forma mais simplificada, recorrendo apenas a uma equação por iteração, tendo em consideração as seguintes assunções:

Q, R e P (o) são matrizes positivamente definidas,

H é uma matriz com característica completa.

Assim, para o segundo algoritmo a equação para o fator de esquecimento fica:

$$\lambda(k) = \max \left\{ 1, \frac{1}{m} \text{trace}[N(k)M^{-1}(k)] \right\} \quad (48)$$

No qual:

$$M(k) = H(k)FP(k-1)F^T H^T \quad (49)$$

$$N(k) = C_0(k) - HQH^T - R \quad (50)$$

O terceiro algoritmo segue o mesmo raciocínio para calcular o fator de esquecimento que o segundo, porém a equação para o fator de esquecimento é mais simplificada:

$$\lambda(k) = \max\{1, \text{trace}[N(k)]/\text{trace}[M(k)]\} \quad (51)$$

3.7. Filtro de Kalman Robusto

Uma das maiores limitações do filtro de Kalman é o facto de o modelo a usar ser necessariamente um modelo linear, sendo necessário um processo de linearização para se converter o modelo inicial em modelo linear.

Durante esse processo de linearização, as matrizes de medição e transição de estado são consideradas como constantes e conhecidas, uma simplificação que na realidade não irá existir, pois na realidade, o sistema a filtrar está sujeito a incertezas gaussianas que variarão com o tempo e que se refletem nas matrizes de transição de estado F e de medição H.

É necessário então modificar o algoritmo do filtro de Kalman para acomodar estas incertezas, e garantir a robustez do filtro perante as mesmas, criando então um filtro de Kalman Robusto.

O algoritmo do filtro de Kalman consistirá em duas partes: a primeira a criação de um novo estimador de estados para gerar uma nova trajetória tendo em consideração as

incertezas assumidas para o filtro e a segunda, a filtragem dessa trajetória recorrendo a um filtro de Kalman clássico.

Para o filtro de Kalman robusto, a incerteza irá ser definida como um parâmetro variável e gaussiano nas matrizes F e H, com a variância de erro estando dentro de um intervalo para todas os estados. As matrizes Q e R são consideradas como matrizes estáveis e conhecidas.

Desta forma, começa-se primeiro por criar um estimador robusto contra incertezas.

Assim as novas equações de modelo, tendo em conta as incertezas em F e H são:

$$\hat{x}_{k+1} = [F + \Delta F_k]x_k + w_k \quad (52)$$

$$z_k = [H + \Delta H_k]x_k + v_k \quad (53)$$

Onde F e H correspondem às partes constantes que se conhecem com certeza da matriz de estimação de estado e de medição, enquanto que $\Delta F(k)$ e $\Delta H(k)$ são matrizes que representam as incertezas em F e H, variando em cada iteração, segundo a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \Delta F_k \\ \Delta H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H1 \\ H2 \end{bmatrix} M_k E \quad (54)$$

Onde M(k) é uma matriz desconhecida que satisfaz a seguinte inequação:

$$M_k^T * M_k \leq I \quad (55)$$

Com k=0, 1, 2...

Sendo H1, H2 matrizes conhecidas e constantes que definem como os elementos das matrizes de transição e de estado são afetadas pela matriz desconhecida M.

Considerando primeiro as seguintes assunções:

A matriz de transição de estado é quadraticamente estável, isto é, para uma matriz simétrica e positivamente definida P a seguinte inequação é provada verdadeira:

$$[F + \Delta F_k]^T P [F + \Delta F_k] - P < 0, k=0, 1, 2 \quad (56)$$

As matrizes de covariância do erro Q e R são assumidas como sendo não negativas, e a matriz de transição de estado F é assumida como sendo invertida.

Sendo todas estas assunções satisfeitas, pode-se criar um estimador que gere novos estados tendo em conta as incertezas do tipo:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{F}\hat{x}_k + K(z_k - \hat{H}\hat{x}_k) \quad (57)$$

Onde \hat{F} é a matriz atualizada de transição de estado, K é a matriz de ganho, e \hat{H} é a matriz de medições atualizada.

Para escolher um estimador estável, é preciso primeiro resolver duas equações de Riccati, primeiro em ordem à matriz de covariância de erro $P=P^T>0$

$$F^T P F - P + F^T P \bar{Q}^{-1} \left(I - \bar{Q}^{-1} P \bar{Q}^{-1} \right)^{-1} \bar{Q}^{-1} P F + \varepsilon (E^T E + \nu I) = 0 \quad (58)$$

Onde ε e ν são pequenos escalares reais e positivos, e \bar{Q} é a nova matriz de covariância de erro obtida pela seguinte equação:

$$\bar{Q} = Q + \frac{1}{\varepsilon} H_1 H_1^T \quad (59)$$

Se a estabilidade da solução P for confirmada, então a seguinte inequação é verdadeira:

$$I - \bar{Q}^{-1} P \bar{Q}^{-1} > 0 \quad (60)$$

Com a primeira equação algébrica de Riccati (ARE) resolvida, os valores atualizados das seguintes matrizes podem ser calculados, tendo em conta as incertezas:

Matriz de transição de estado \hat{F} e de medição \hat{H} :

$$\hat{F} = F + \bar{Q} (P^{-1} - \bar{Q})^{-1} F \quad (61)$$

$$\hat{H} = H + \frac{1}{\varepsilon} H_2 H_1^T (P^{-1} - \bar{Q})^{-1} H_1 H_2^T \quad (62)$$

Matrizes de covariância da transição de estado \hat{Q} e de medição \hat{R} :

$$\hat{Q} = \bar{Q} + \bar{Q}(P^{-1} - \bar{Q})^{-1}\bar{Q} \quad (63)$$

$$\hat{R} = R + \frac{1}{\varepsilon}H_2H_2^T + \frac{1}{\varepsilon^2}H_2H_1^T(P^{-1} - \bar{Q})^{-1}H_1H_2^T \quad (64)$$

Matriz de “cross-variance” entre as matrizes de transição de estado e medição:

$$M = \frac{1}{\varepsilon}(I - \bar{Q}P)^{-1}H_1H_2^T \quad (65)$$

E com as matrizes atualizadas, a segunda equação de Riccati pode ser calculada para:

$$U = U^T > 0$$

$$\hat{F}U\hat{F}^T - U - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} = 0 \quad (66)$$

O que permite calcular a matriz de ganho K:

$$K = (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1} \quad (67)$$

O que, por fim, permite calcular o estimador:

$$\hat{x}^-(k) = Fx^+(k-1)K(k)[y(k) - Hx^+(k)] \quad (68)$$

Este novo estimador irá gerar novos estados, já tendo em consideração as incertezas inerentes às matrizes de transição de estado F e medição H. Porém, estes estados ainda apresentam ruído branco, e como tal, será necessário recorrer a um filtro de Kalman clássico para estimar novos estados que não apresentem esse ruído branco.

Assim, não será incorreto dizer, que um filtro de Kalman robusto não é mais que um filtro de Kalman clássico a filtrar a trajetória gerada por um estimador robusto contra incertezas.

Capítulo 4. Aplicações práticas

4.1. Introdução

Neste este capítulo, ir-se-á aplicar os filtros de Kalman desenvolvidos nos capítulos anteriores a uma trajetória fictícia gerada a partir de equações, a uma trajetória orbital da Estação Espacial Internacional ao longo de 200.000 segundos, ou aproximadamente 2.5 dias, e, por último, um voo comercial de um airbus A321, com partida do aeroporto Humberto Delgado em Lisboa e com destino o Luton Airport, em Londres.

Estas trajetórias foram escolhidas de modo a demonstrar a utilidade do uso dos diferentes filtros de Kalman desenvolvidos em situações reais.

Uma vez que se pretende utilizar os diversos filtros de Kalman para trajetórias cartesianas e geocêntricas, procedeu-se também à conversão das coordenadas de alguns exemplos para coordenadas cartesianas.

Os algoritmos dos diversos filtros de Kalman foram elaborados recorrendo à ferramenta Matlab.

4.2. Aplicação dos filtros de Kalman

4.2.1. Exemplo teórico

Inicialmente, antes de se aplicar os filtros desenvolvidos aos casos reais, procurou-se formular um sinal que simulasse uma trajetória.

O sinal apresentado neste exemplo foi adaptado de um exercício de frequência da cadeira de Otimização e Controlo de Trajetórias do ano de 2018, lecionada pelo Professor Kouamana Bousson. [3]

4.2.1.1 Geração de trajetória

A trajetória a ser filtrada será gerada a partir das seguintes equações para a as três coordenadas $[X \ Y \ Z]$:

As coordenadas X e Y serão dadas por ondas sinusoidais:

$$X = \bar{x} + a_x \cos\left(\frac{2\pi t}{T_x}\right) \quad (69)$$

$$Y = \bar{y} + a_y \sin\left(\frac{2\pi t}{T_y}\right) \quad (70)$$

No qual:

\bar{x} - valor inicial da coordenada x, na qual $\bar{x} = 1\ 000\ 000$ m;

\bar{y} - valor inicial da coordenada y, na qual $\bar{y} = 1\ 000\ 000$ m;

a_x - amplitude da equação sinusoidal para x, com $a_x = 2000$;

a_y - amplitude da equação sinusoidal para y, com $a_y = 2000$;

T_x - período da equação sinusoidal para x, com $T_x = 500$ s;

T_y - período da equação sinusoidal para y, com $T_y = 500$ s;

t - incremento de tempo, de 0.001s

A coordenada Z será dada pela seguinte equação:

$$Z = \bar{z} + z_0 + e(-\alpha t) \quad (71)$$

Nos quais:

$\bar{z} = 1200\ 000$ m;

$z_0 = 3.0367 \cdot 10^6$ m;

Sendo α a solução para a seguinte equação em ordem a m:

$$\bar{z} - z_0 e^{(\alpha t_f)} = z_f \quad (72)$$

Onde:

$Z_f = 400000$, e

t_f - tempo total de geração de sinal, igual a 300s.

Sendo a trajetória gerada pelas equações de coordenadas anteriores representada no gráfico a seguir.

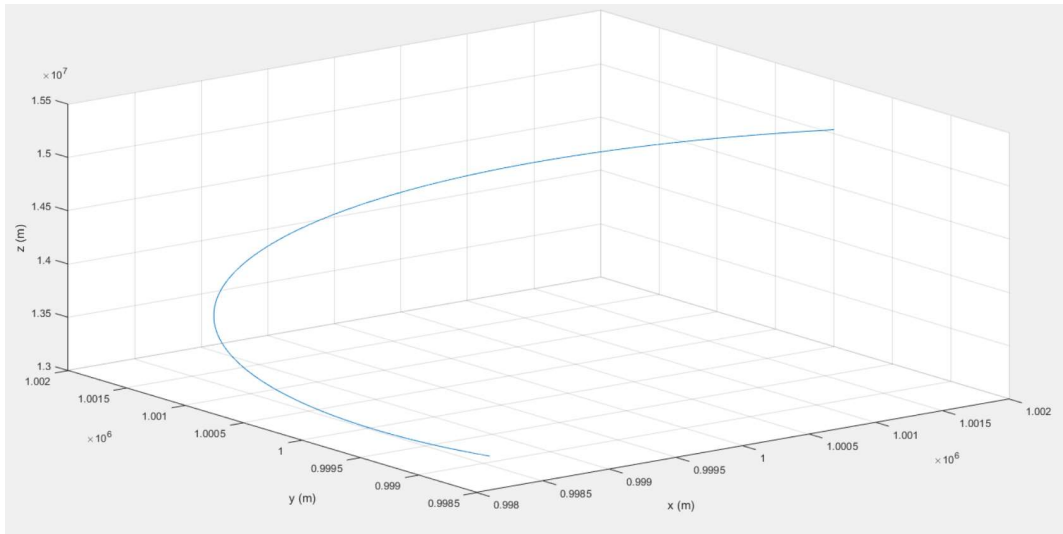


Fig.7. Representação 3D da trajetória gerada

Atendendo a que a trajetória a filtrar necessita de estar sujeita a ruído, procedeu-se à injeção de ruído branco na trajetória, de distribuição normal, dado por $N \sim (0,50)$.

Desta forma, obteve-se a trajetória a filtrar, representada graficamente na figura abaixo.

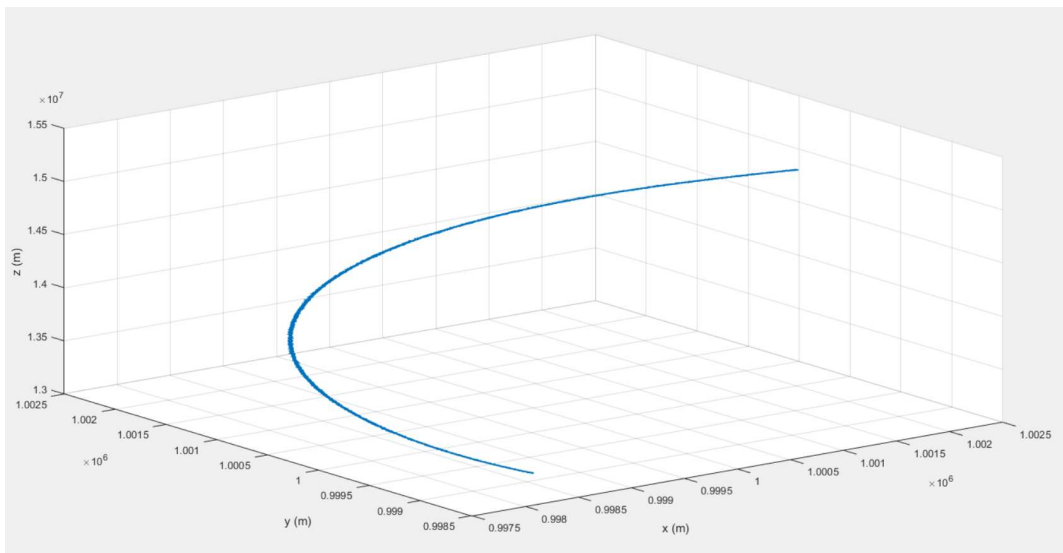


Fig.8. Representação 3d da trajetória gerada, com a inclusão de ruído branco

Será a esta trajetória que irão ser aplicados os filtros de Kalman desenvolvidos no capítulo anterior: o filtro de Kalman clássico, filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto.

4.2.1.2. Aplicação do Filtro de Kalman clássico

Primeiro, ir-se-á aplicar o filtro de Kalman clássico à trajetória estimada, cujos resultados serão comparados com as trajetórias filtradas nos restantes filtros.

Para a implementação do filtro de Kalman, considerou-se a que a trajetória gerada pudesse ser representada pelo seguinte sistema de equações em tempo discreto:

$$x_k = Ax_{k-1} + w_k \quad (73)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (74)$$

Sendo os valores para as seguintes as matrizes:

Matriz de transição de estado F:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de medição H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro da equação de transição de estado:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro da equação de medições:

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro inicial:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtendo assim os seguintes resultados para a estimação de trajetória através do filtro de Kalman clássico:

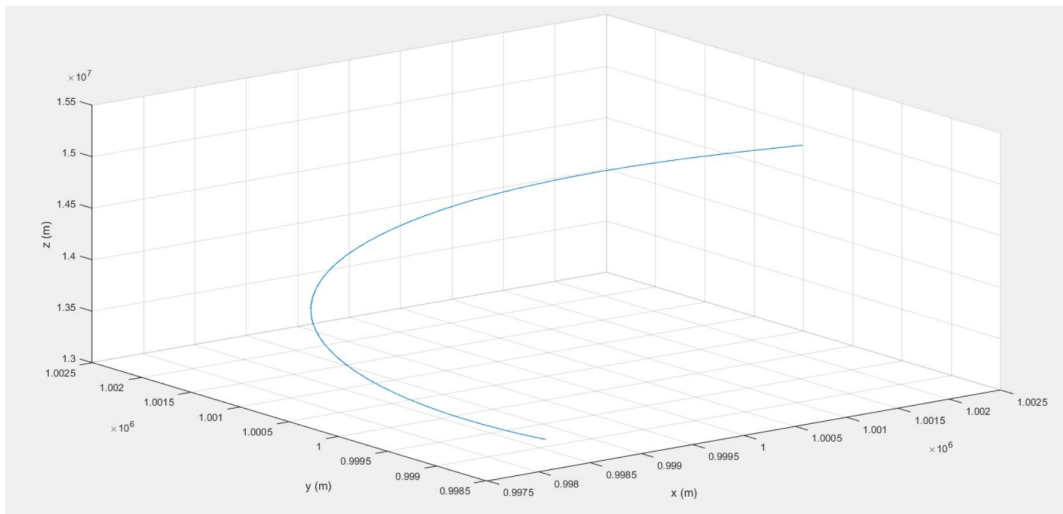


Fig.9. Representação 3D da trajetória gerada pelo filtro de Kalman clássico

Observando estes resultados a “olho nu”, as diferenças entre a trajetória reconstruída pelo Filtro de Kalman Clássico e o sinal sem ruído da figura (7) tornam-se difíceis de observar.

Assim, para melhor clarificar as diferenças entre o sinal original sem ruído e a trajetória reconstruída, procurou-se ilustrar a evolução destas diferenças ao longo do algoritmo.

Uma vez que o sinal a ser filtrado é constituído por três coordenadas, apenas as diferenças entre o sinal original e a trajetória reconstruída referentes ao eixo de X serão ilustradas:

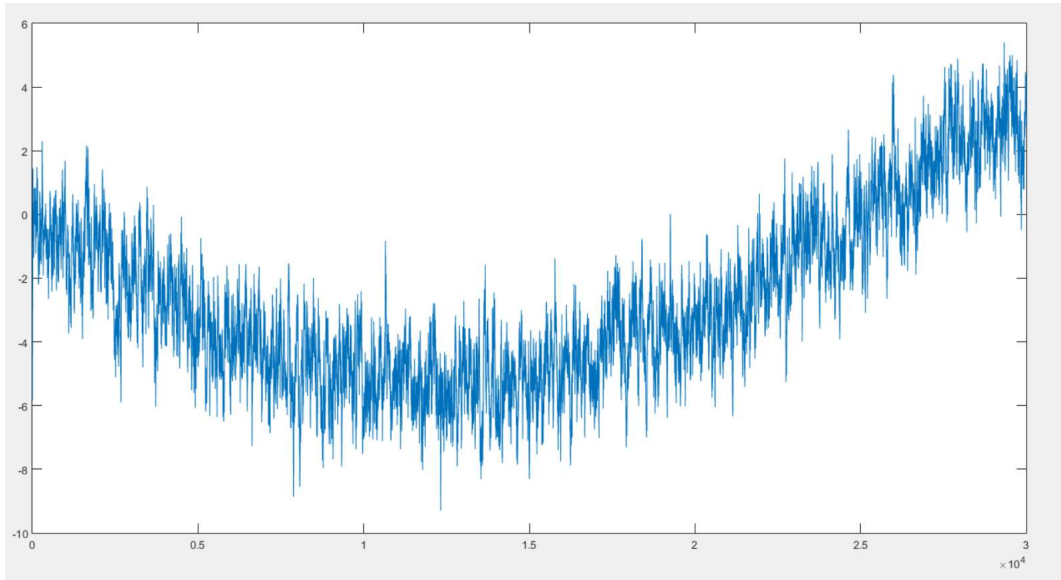


Fig.10. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos, para o FKC, no eixo de X.

Fazendo uma análise dos resultados obtidos, e comparando-os com os das figuras (7) e (8), e sobretudo com os da figura (9) conclui-se que de acordo com o sistema modelo assumido, e atendendo ao ruído existente na distribuição assumida como normal, e com desvio padrão conhecido, o filtro de Kalman permitiu reconstruir estados com a presença de ruído com bastante precisão. Conseguindo-se verificar com bastante facilidade este facto quando se observa a figura (10), onde se podem ver as diferenças entre o sinal original, e a trajetória reconstruída, cujos valores estão na ordem de grandeza dos milhões, estarão contidas num intervalo de $[-8,6]$.

Contudo, a elevada performance do filtro de Kalman deveu-se a um longo processo de escolha de parâmetros, de modo a encontrar valores para as matrizes Q , P_0 e R que garantissem a melhor precisão possível.

Este longo processo iterativo apresenta-se como um dos maiores problemas da aplicação do filtro de Kalman, havendo a necessidade da criação de um filtro que reconstrua a trajetória com um nível de precisão aceitável sem estar tão dependente da escolha de matrizes.

4.2.1.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente

Como já foi dito no terceiro capítulo, o filtro de Kalman adaptativo irá ser diferente de um filtro de Kalman clássico devido há existência de um fator de esquecimento que irá

priorizar a importância a dar a cada um dos estados estimados na estimação de um estado novo.

Para esse efeito, existem três algoritmos distintos para obter o fator de esquecimento ideal.

Para a implementação dos três algoritmos do filtro de Kalman adaptativo evanescente considerou-se o mesmo sistema de equações e as mesmas matrizes adotadas para a elaboração do filtro de Kalman clássico, sendo as estimações de trajetória obtidas pelos três algoritmos obtidas graficamente nos gráficos das figuras (11), (12) e (13).

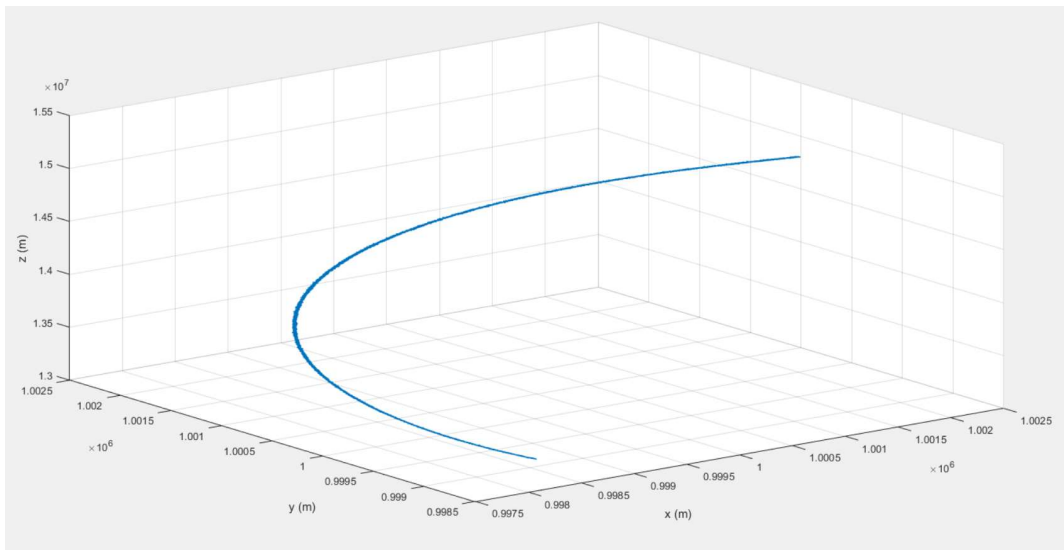


Fig.11. Representação 3D da trajetória gerada pelo 1º algoritmo do FKAE

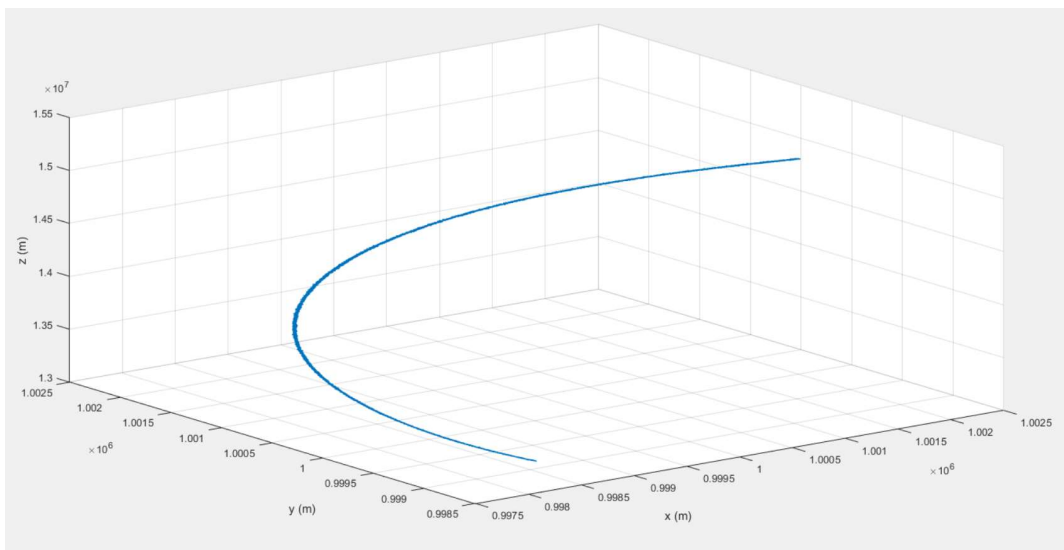


Fig.12. Representação 3D da trajetória gerada pelo 2º algoritmo do FKAE

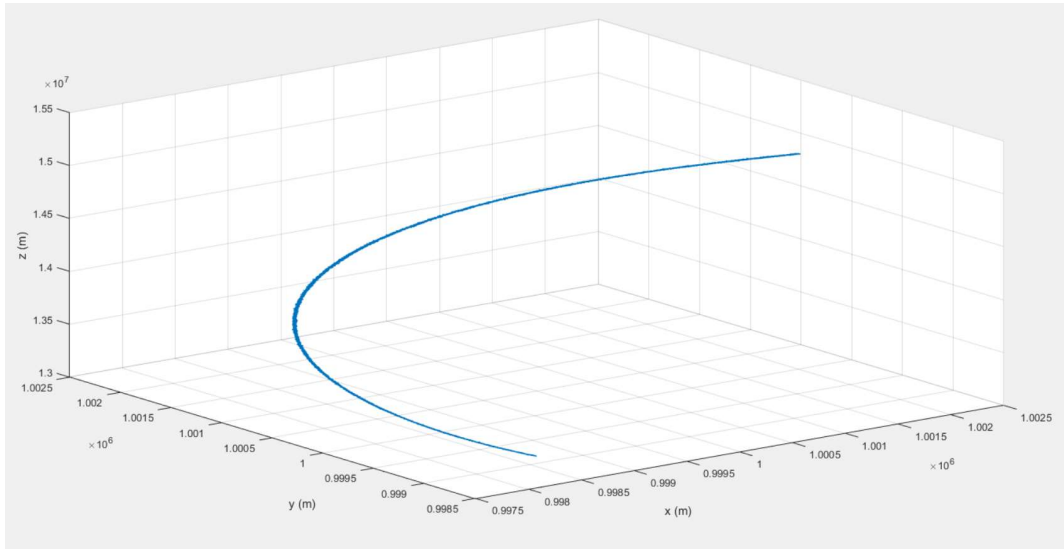


Fig.13. Representação 3D da trajetória gerada pelo 3º algoritmo do FKAE

A partir da observação dos gráficos as figuras (11), (12) e (13) pode-se verificar que, para os três algoritmos, para os valores escolhidos para as matrizes de covariância de erro e de transição de estado e medição, a reconstrução das trajetórias terá uma precisão muito pobre, sendo os resultados obtidos quase iguais à trajetória inicial, com ruído.

Assim, para aumentar a performance do filtro, foram realizadas mais estimações de trajetória, mas variando a matriz de covariância de erro da equação de medições, a matriz R, obtendo-se os resultados ilustrados nas figuras (14), (15), (16) e (17).

Uma vez que os três algoritmos apresentam resultados semelhantes, apenas se irão apresentar os resultados para o segundo algoritmo.

Na figura (15), apresentam-se os resultados da estimação da trajetória com a matriz R considerada como sendo:

$$R1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerou-se este valor para a matriz R em virtude deste valor se aproximar do valor inicialmente considerado para a matriz R:

$$R_{\text{inicial}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

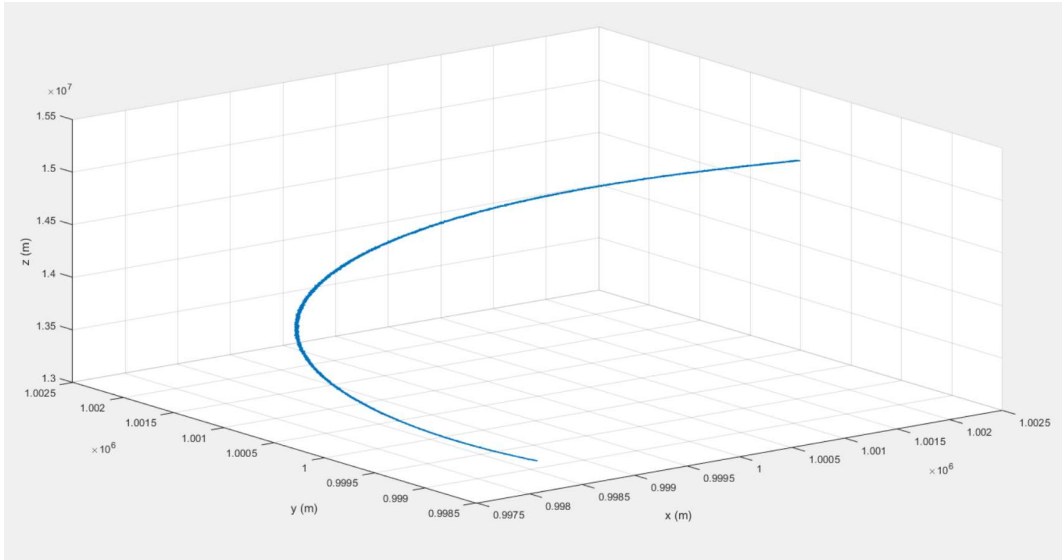


Fig.14. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R₁

Uma vez que o novo valor considerado para a matriz R se aproxima do valor anterior, pode-se concluir que a trajetória reconstruída também terá um comportamento semelhante ao da trajetória estimada inicialmente, sendo a sua precisão também bastante pobre.

De seguida, ir-se-á analisar o comportamento da trajetória estimada atribuindo valores cada vez maiores para a matriz R.

Assim, começou-se por considerar o valor de R para esta nova estimacão de trajetória como sendo:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

Obtendo-se a seguinte trajetória:

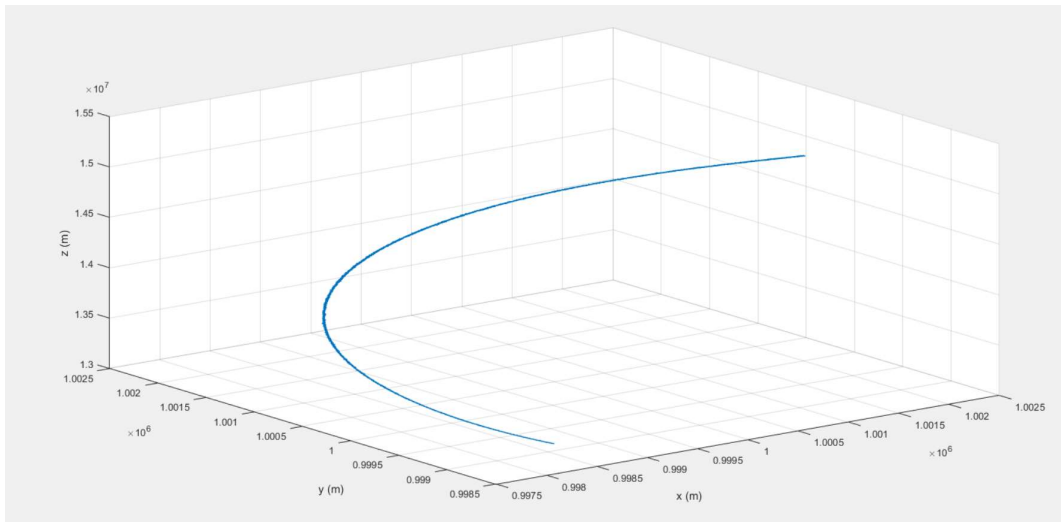


Fig.15. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R2

Analisando a figura (15), verifica-se que com este novo valor para a matriz R, a precisão da reconstrução melhorou ligeiramente.

A seguir, considerou-se o valor de R como sendo um valor ainda maior:

$$R3 = \begin{bmatrix} 1000^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1000^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1000^2 \end{bmatrix}$$

Obtendo-se o seguinte gráfico:

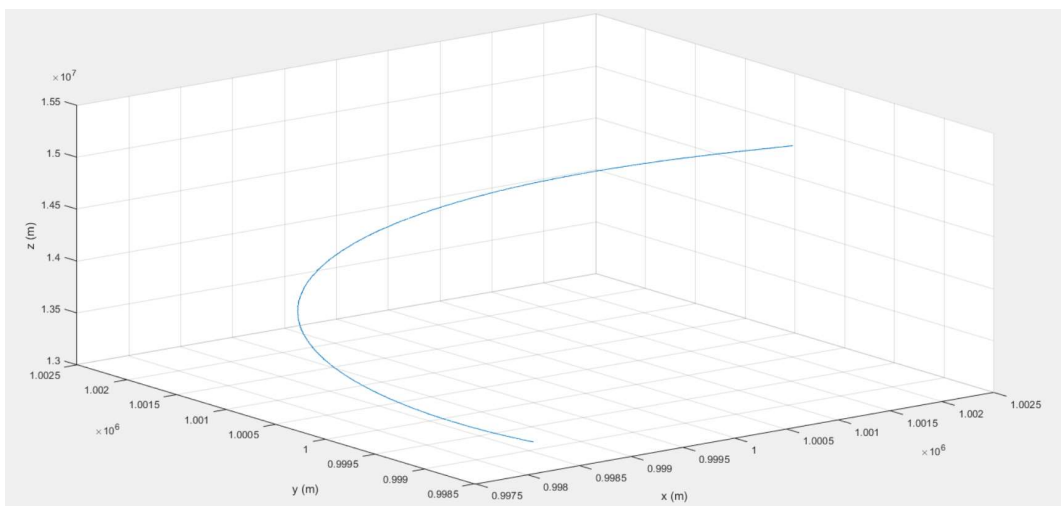


Fig.16. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R3

Por último, considerou-se o valor de R como sendo:

$$R4 = \begin{bmatrix} 1500^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1500^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1500^2 \end{bmatrix}$$

Obtendo-se o seguinte gráfico:

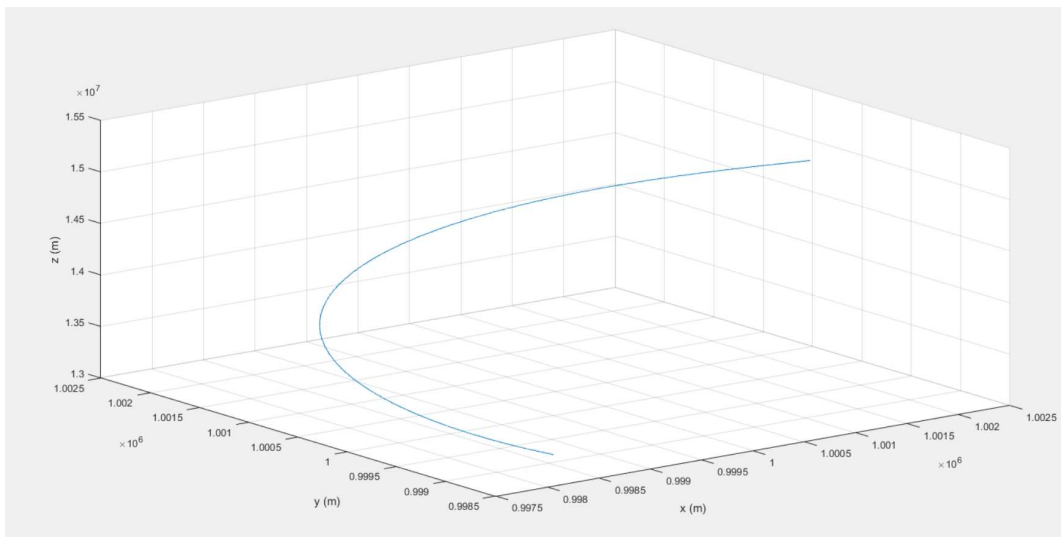


Fig.17. Representação 3D da trajetória gerada pelo FKAE com a matriz R4

Analisando as figuras (14), (15) e (16) e (17) apresentadas anteriormente, poder-se-ia concluir que a performance e precisão do filtro de Kalman adaptativo evanescente torna-se cada vez melhor com a seleção de valores mais elevados para a matriz R, mas esta observação no entanto, está incorreta, como se vai verificar a seguir.

Este fenómeno, é justificado pelo facto da escolha dos valores da matriz R, matriz de covariância da equação de medições, influenciar o quanto se confia nas medições efetuadas. Quando se aumenta os valores da matriz R, considera-se as incertezas inerentes às medições como sendo maiores, confiando-se menos nas mesmas.

Num filtro de Kalman não adaptativo, o aumento da matriz R para estes valores seria desastroso, uma vez que estes valores iriam provocar rapidamente uma diferença

extremamente grande entre os valores originais para filtrar e os valores reconstruídos, arruinando a performance do filtro.

Porém, o filtro de Kalman adaptativo evanescente irá possuir modificações no seu algoritmo, nomeadamente na matriz de covariância P , que permitirá que o filtro se adapte melhor fase a estes valores da matriz R .

Para o FKAE, valores elevados para a matriz R irão gerar valores baixos para a matriz de ganho K , que assim irá atribuir menos importância ao residual, que é a diferença entre o valor medido e o valor estimado. Desta forma, o valor reconstruído para um estado irá ser mais próximo do seu valor estimado, sendo a trajetória reconstruída mais precisa.

O maior problema do facto da matriz R ser muito elevada, é que a mínima discrepância no processo de reconstrução da trajetória pode ser potenciada pela matriz R , aumentando cada vez mais a diferença entre os valores medidos e os valores reconstruídos, num fenómeno de divergência, e arruinando a reconstrução da trajetória.

Porém, o filtro de Kalman adaptativo evanescente é um filtro adaptativo, e através do fator de esquecimento, que prioriza valores recentemente reconstruídos, reage imediatamente, aumentando o valor do fator de esquecimento para os estados imediatamente a seguir de modo a baixar a importância do estado anterior.

Esse esforço é ilustrado pela evolução do fator de esquecimento. No início da estimação de trajetória, onde a diferença entre o valor medido e o valor estimado terá o seu máximo, a priorização de valores recentes será de extrema importância, de modo a evitar uma maior divergência entre os valores medidos e estimados, que pode arruinar a precisão do filtro. Dessa forma, o fator de esquecimento terá igualmente um valor máximo no início da estimação de trajetórias, como a seguinte figura que ilustra a evolução desse parâmetro pode demonstrar:

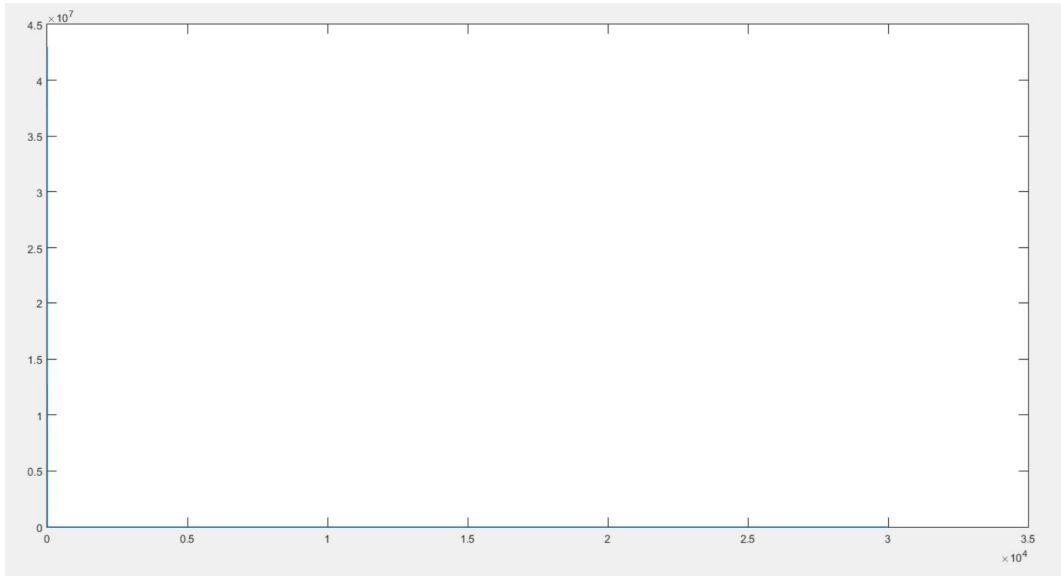


Fig.18. Evolução do fator de esquecimento ao longo do algoritmo do FKAE

À medida que novas posições são estimadas no algoritmo, a diferença entre valores medidos e estimados irá decrescer e estabilizar, e como tal, a necessidade de priorizar valores novos não será tão grande, assim o fator de esquecimento irá decrescer e estabilizar para valores próximos de um, o que significa que todos os valores estimados irão ter sensivelmente a mesma importância.

O filtro de Kalman adaptativo evanescente terá o seu limite. Uma escolha de valores demasiado alta irá também provocar discrepâncias entre os estados reconstruídos que nem o algoritmo adaptativo consegue solucionar, piorando assim a performance do filtro.

Esse fenómeno aconteceu entre as trajetórias da figura (15) e (16), onde a precisão do filtro de Kalman adaptativo evanescente degradou ligeiramente, apresentado resultados ligeiramente piores. Essa diferença, porém, é muito baixa, e como tal, para uma missão que não requeira um nível de rigor e precisão muito elevado, esta diferença pode ser ignorada.

É de notar, porém, que esta perda de qualidade ocorreu para valores bastante altos da matriz R, uma vez que o FKAE irá ser adaptativo, e assim, possui maior tolerância para fenómenos de divergência que arruinariam a precisão de um filtro de Kalman não adaptativo, como o filtro de Kalman Clássico.

A elevada capacidade do FKAE em reagir perante situações de divergência torna-se ainda mais evidente quando se comparam os resultados obtidos com os resultados de estimação de trajetória de um filtro que não possua uma capacidade de reação e

dinamismo tão boa como o filtro de Kalman adaptativo evanescente, como, por exemplo, o filtro de Kalman Clássico.

Assim, foram produzidas novas estimações de trajetória recorrendo ao filtro de Kalman clássico, variando a matriz de covariância R para os mesmos valores adotados para o filtro de Kalman adaptativo evanescente, produzindo assim os seguintes resultados:

Considerando $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

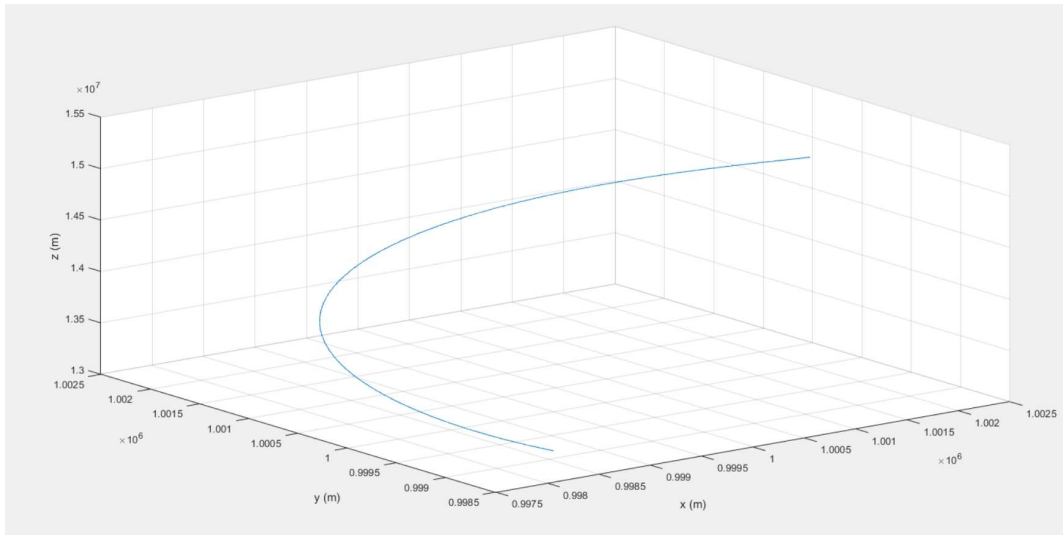


Fig.19. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman clássico para R1

Considerando $R_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$

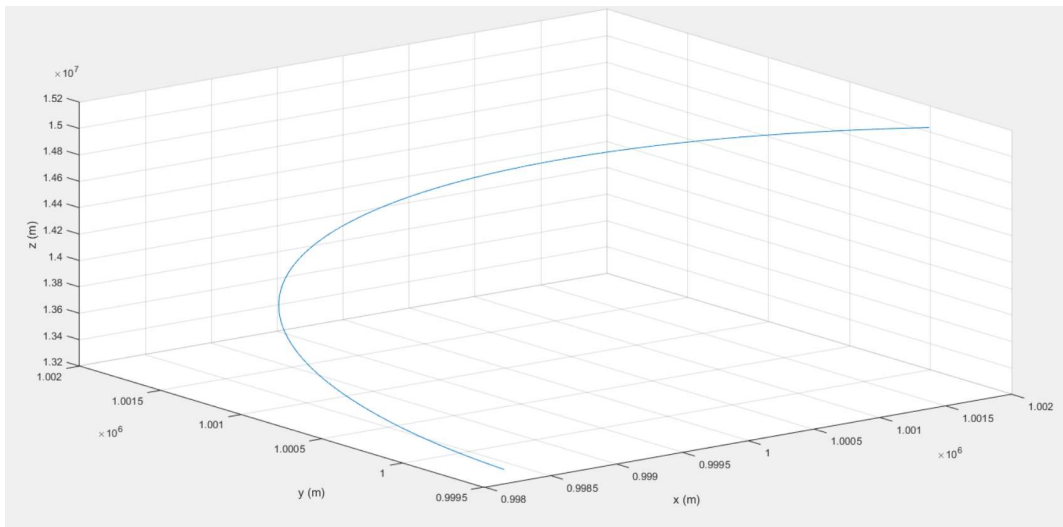


Fig.20. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman clássico para R2

$$\text{Considerando agora } R_3 = \begin{bmatrix} 1000^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1000^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1000^2 \end{bmatrix}$$

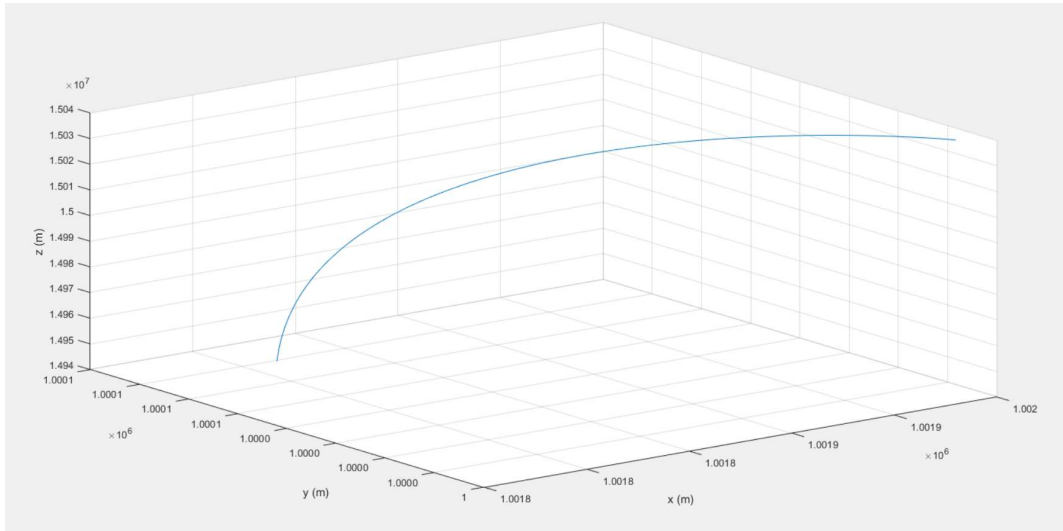


Fig.21. Estimação de trajetória com o filtro de Kalman clássico para R_3

Observando as trajetórias estimadas recorrendo ao filtro de Kalman clássico verifica-se o fenómeno da divergência entre valores medidos e reconstruídos, acentuada para valores maiores para a matriz R , uma vez que este filtro não está adaptado para lidar com eventuais divergências que possam surgir, tal como foi observado no filtro de Kalman adaptativo evanescente, não existindo na matriz de covariância P adaptações, como o fator de esquecimento, para priorizar estimações mais recentes. Assim, cada distância entre os valores medidos e estimados vai degradando cada vez mais a performance do filtro, sendo este fenómeno observado nas figuras (19), (20) e (21) pela gradual deformação da trajetória com a implementação de matrizes R com maior valor.

Quando se compara a prestação de um filtro de Kalman clássico com um filtro de Kalman adaptativo evanescente verifica-se uma grande vantagem do uso do filtro Kalman adaptativo evanescente: a performance do filtro de Kalman está profundamente ligada à seleção das matrizes de covariâncias, principalmente a matriz de covariância da equação de medições, sendo necessário um imenso trabalho de tentativa e erro para a seleção das mesmas, de forma a se evitar não apenas uma situação de divergência, mas também otimizar a reconstrução.

Se o projetista estiver a desenhar um filtro de Kalman para uma missão, e a otimização do filtro e rigor de precisão não tiver especial importância, o filtro de Kalman adaptativo

evanescente não irá ser tão severo na escolha de matrizes, permitindo uma maior gama de valores a selecionar para as matrizes, como se pode verificar com a reconstrução de trajetórias para os dois últimos valores de R, onde apesar de haver uma grande diferença para os valores da matriz, os resultados da estimação de trajetória são semelhantes, havendo apenas uma perda de precisão que pode ser ignorada para este tipo de missões.

Se a missão para o qual o projetista estiver a desenhar o filtro de Kalman for especialmente importante ou delicada, e se o nível de rigor que se exige da precisão e performance do filtro for elevado, então a otimização do filtro de Kalman será de extrema importância. Assim comparar-se-á a performance de um filtro de Kalman Clássico e um filtro de Kalman adaptativo evanescente quando ambos possuem uma escolha de matrizes otimizadas para a performance e precisão, assim como a comparação da performance entre os três algoritmos do filtro de Kalman adaptativo evanescente.

Para este efeito, depois de um longo processo iterativo, considerou-se a matriz R a usar para o novo filtro de Kalman adaptativo evanescente como sendo a matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 300^2 & 0 & 0 \\ 0 & 300^2 & 0 \\ 0 & 0 & 300^2 \end{bmatrix}$$

Obtendo-se os seguintes resultados os seus três algoritmos:

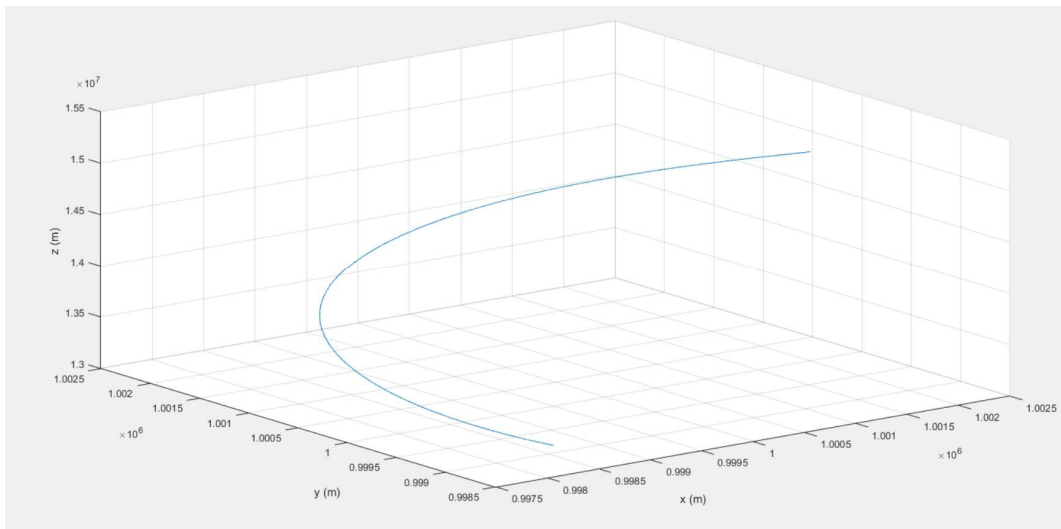


Fig.22. Reconstrução da trajetória através do FKAE,1º algoritmo, matrizes otimizadas

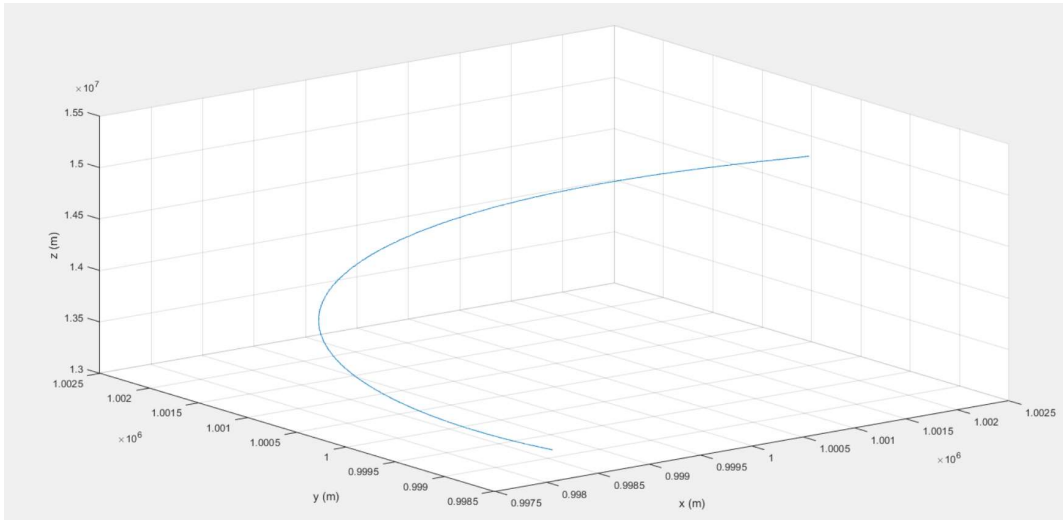


Fig.23. Reconstrução da trajetória através do FKAE, 2º algoritmo, matrizes otimizadas

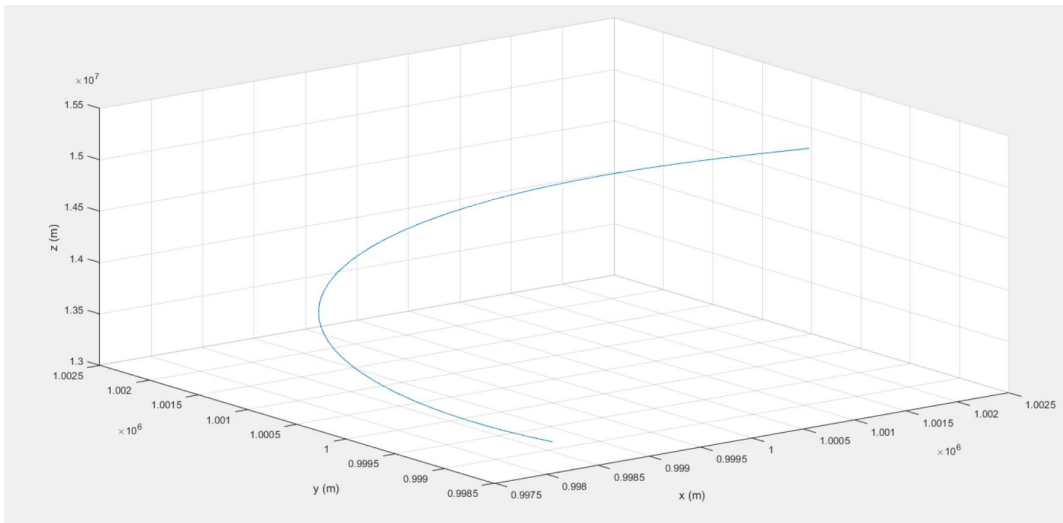


Fig.24. Reconstrução da trajetória através do FKAE, 3º algoritmo, matrizes otimizadas

Uma vez que as diferenças entre os três algoritmos são imperceptíveis, conforme as figuras (22) (23) e (24), à semelhança do que foi feito para o filtro de Kalman Clássico, para cada algoritmo calculou-se a diferença entre o sinal original sem ruído e a trajetória reconstruída, também no eixo de X.

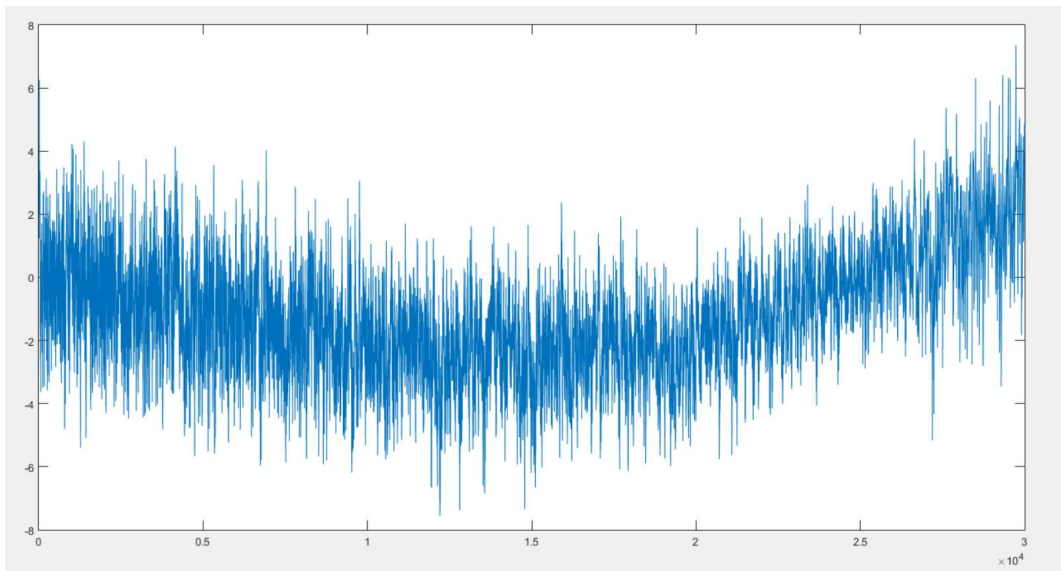


Fig.25. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 1º algoritmo, eixo de X

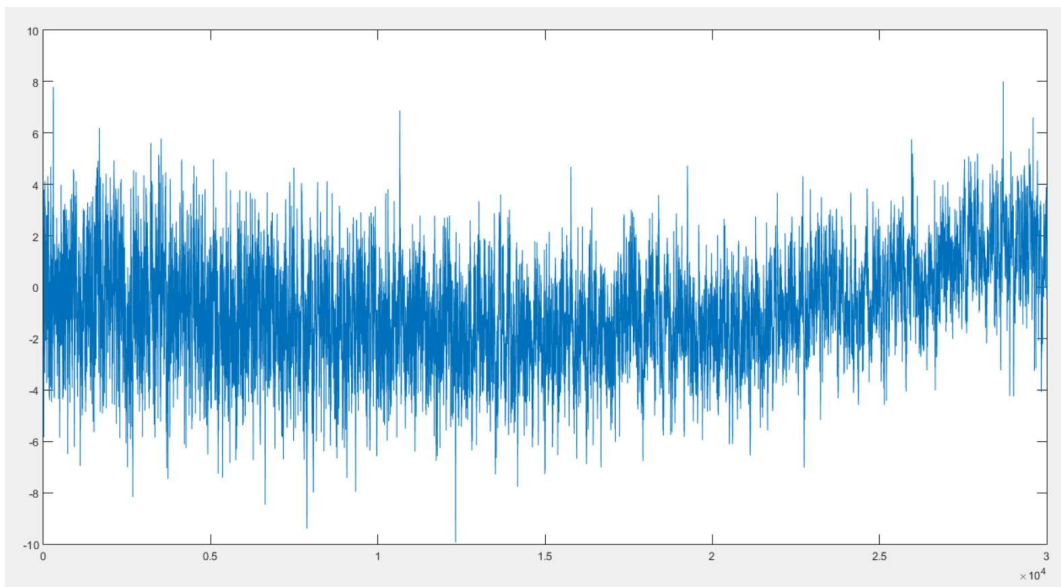


Fig.26. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 2º algoritmo, eixo de X

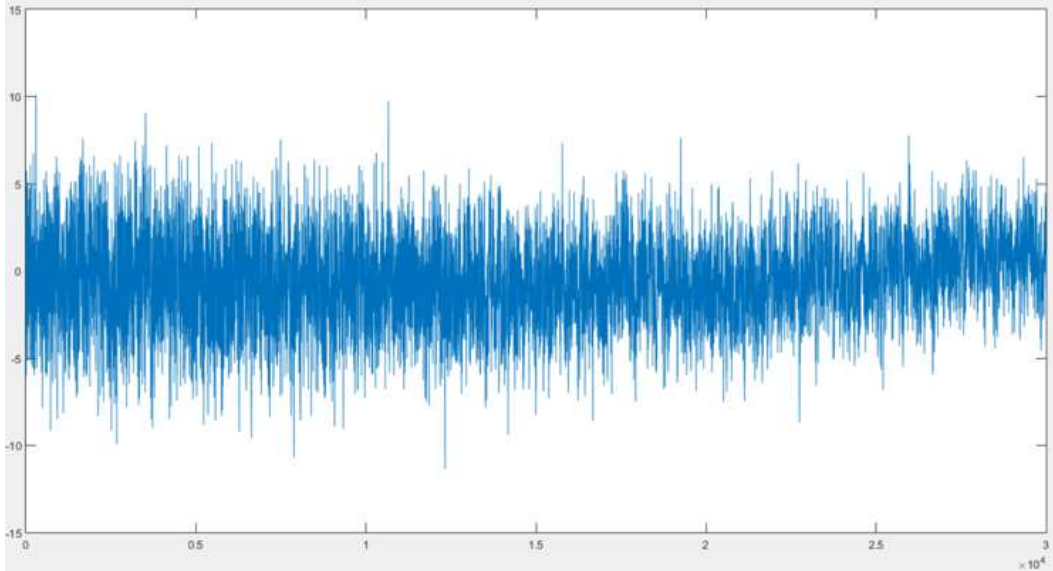


Fig.27. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKAE, 3º algoritmo, eixo de X

Através de uma análise detalhada das figuras (25) (26) e (27), verifica-se que as diferenças entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos serão muito semelhantes.

O segundo algoritmo irá possuir valores reconstruídos mais próximos dos valores originais, visto que o seu gráfico se aproxima ligeiramente mais do eixo de zero, a dispersão dos seus valores será menor. Desta forma é ligeiramente melhor que os outros dois.

É de realçar, que o tempo de compilação do primeiro algoritmo foi muito superior ao dos outros dois algoritmos, e como tal, a sua implementação pode não ser viável.

Porém, quando se comparam os resultados apresentado nas figuras (25), (26) e (27), com os da figura (10) verifica-se mais uma vantagem do uso do FKAE sobre o uso do FKC: para os três algoritmos do FKAE, a diferença entre os valores originais, sem ruído, e os valores reconstruídos apresentarão uma amplitude mais pequena que a amplitude dos valores para o FKC. Desta forma, os valores reconstruídos para o FKAE estarão mais próximos dos valores reais, e desta forma, a precisão de um FKAE otimizado é superior à precisão de um FKC otimizado.

Este fenómeno é explicado devido á natureza dinâmica e reativa do FKAE, no qual se pode utilizar maiores valores para a matriz R, o que irá tornar os valores da matriz de ganho mais baixos, e como tal, o valor reconstruído será mais próximo do valor estimado, aumento assim a precisão do FKAE.

Assim, para uma missão que requeira um filtro de Kalman otimizado para precisão, o FKAE apresenta-se como uma melhor opção do que o FKC.

Uma outra limitação mencionada nesta dissertação acerca do FKC refere-se à incapacidade deste filtro em lidar com estados estimados de forma incorreta. Estes estados provêm de medições incorretas por parte de sensores e outros instrumentos de medição, podendo no melhor dos casos afetar ligeiramente a precisão do filtro de Kalman na estimação de trajetórias, e no pior dos casos causar uma progressiva diferença entre os estados medidos e os estados reconstruídos, arruinando o filtro de Kalman.

Face a esta limitação, o filtro de Kalman adaptativo evanescente revela ser uma grande solução para este problema, devido à sua natureza extremamente dinâmica e ao facto de reagir rapidamente face a estados estimados de uma forma mais dúbia.

Assim, para demonstração, recorrendo ao Matlab, inseriu-se um valor incorreto na trajetória inicial com ruído, obtendo-se a seguinte figura:

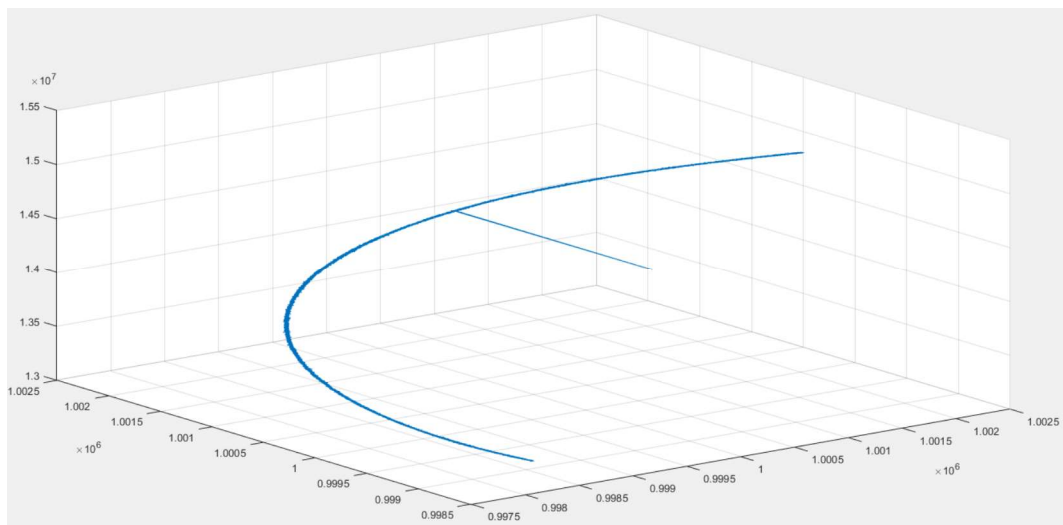


Fig.28. Estimação da trajetória com ruído e com um estado incorreto

Ir-se-á agora sujeitar esta nova trajetória ao filtro de Kalman adaptativo evanescente, usando o segundo algoritmo para obtenção do fator de esquecimento, assim como ao filtro de Kalman clássico, para comparação, obtendo-se os seguintes resultados:

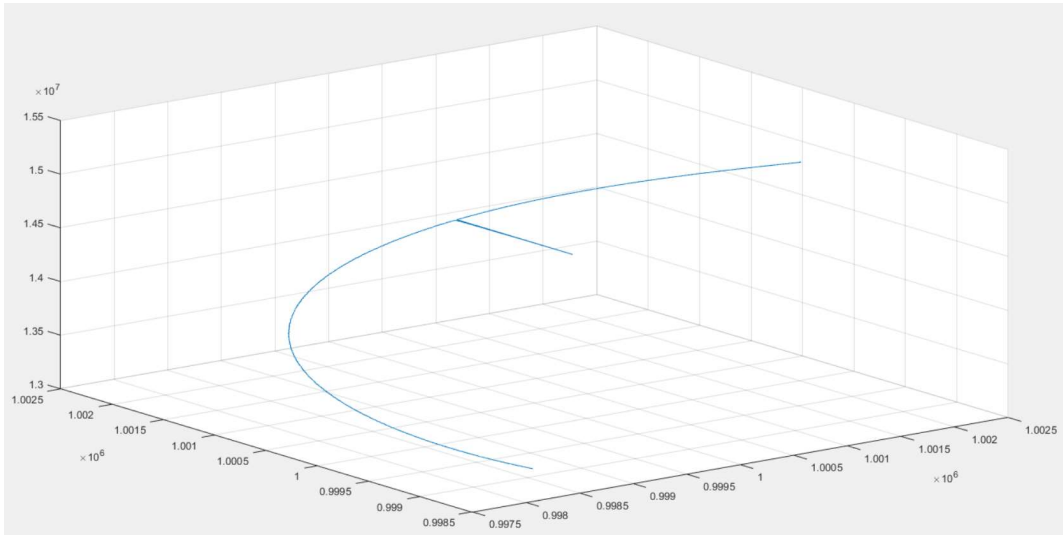


Fig.29. Estimação da trajetória recorrendo ao filtro de Kalman clássico

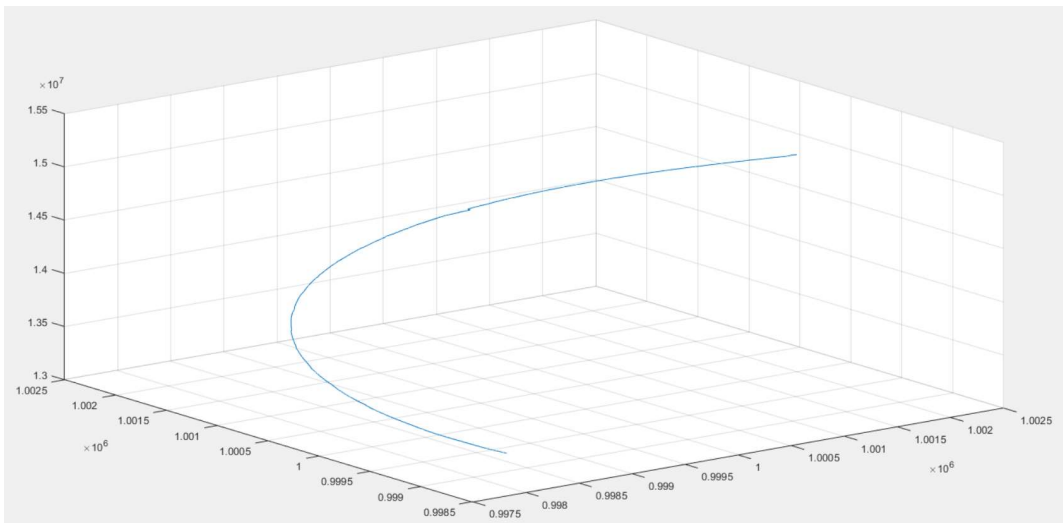


Fig.30. Estimação de trajetória recorrendo ao filtro de Kalman adaptativo evanescente

Como se pode observar pelas figuras (29) e (30), o filtro de Kalman adaptativo evanescente revela-se como sendo o filtro de Kalman ideal para lidar com estados estimados incorretamente.

Este valor mal estimado pelo sensor irá aumentar exponencialmente o residual entre o valor estimado pelo filtro e o valor medido.

Porém, como já foi dito, os valores para a matriz R são tão elevados, que fazem com que a matriz ganho seja muito baixa, e assim, na equação para a reconstrução do estado, o

valor baixo para a matriz de ganho irá contrariar o valor elevado do residual, garantindo que o estado reconstruído não esteja muito distante do estado estimado pelo filtro.

O estado imediatamente a seguir ao estado mal estimado irá receber um peso acrescido através de um aumento do fator de esquecimento, de modo a poder contrariar quaisquer efeitos provocados pela discrepância entre o valor medido e o valor estimado que pudessem surgir.

Em contrapartida, o filtro de Kalman clássico não possui as modificações ao seu algoritmo necessárias para resolver esta limitação.

Como o filtro de Kalman não pode usar matrizes R com valores muito elevados, de modo a evitar a divergência, irá possuir valores mais baixos para a matriz R, a matriz de ganho K terá valores mais elevados, e assim não poderá contrariar tão bem o aumento do residual.

É de salientar, contudo, que devido à forma como o filtro de Kalman clássico está otimizado, este estado incorreto não deu origem a uma situação de divergência entre os valores medidos e estimados, visto que estes voltaram a convergir. Porém, o facto de este filtro estar suscetível a erros de estimação que não consegue resolver revela um problema importante.

O filtro de Kalman adaptativo evanescente, possui as adaptações necessárias no seu algoritmo, através da implementação do fator de esquecimento na equação para a matriz de covariância de erro, reagindo imediatamente face a um estado estimado incorretamente, minorando ao máximo os efeitos de um estado incorreto na estimação dos novos estados sem presença de ruído.

4.2.1.4. Aplicação do filtro de Kalman robusto

Na criação de um sistema modelo linear que reflita a trajetória a ser reconstruída, e porque na realidade o número de processos lineares a ocorrerem na natureza é muito baixo, o projetista irá ter de realizar um número elevado de simplificações e linearizações de modo a poder traduzir o mais próximo possível um determinado processo real por um sistema de equações lineares.

Uma vez que a essas simplificações irão originar incertezas, e num paradigma de constante aproximação à realidade, o projetista poderá usar um filtro de Kalman especialmente criado para ser robusto contra incertezas, o Filtro de Kalman robusto.

Como já foi mencionado, a criação de um filtro de Kalman robusto irá consistir em duas partes, primeiro na criação de um novo estimador com estados atualizados de acordo com a incerteza assumida, e segundo na filtragem desse estimador através de um filtro de Kalman.

Para que se possa implementar primeiramente um estimador robusto será necessário definir os valores das matrizes pertencentes ao sistema de equações.

Assim, a matriz de transição de estado e a matriz de medição irão ter os mesmos valores daqueles considerados no filtro de Kalman Clássico, assim como as matrizes de covariância de erro e da equação de transição de estado, e a matriz de covariância da equação de medições.

A parte incerta da matriz de transição de estado F , ΔF foi assumida como sendo:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que as incertezas são parâmetros normativos dentro de certos limites, definiu-se o limite das incertezas para este filtro como sendo:

$$\|\delta\| \leq 0.5$$

Os limites do parâmetro de incerteza δ foram escolhidos por serem relativamente altos quando comparado com os valores da parte estável da matriz de transição de estado, permitindo assim observar o quanto a trajetória é modificada pela existência de incertezas quando se compara a trajetória estimada com e sem a presença de incertezas. Também se escolheu, deliberadamente, que houvesse incertezas apenas no eixo Y de modo a observar como as incertezas afetam um dos parâmetros da matriz F , quando comparado com os outros dois.

A matriz H , de medições, foi considerada como sendo completamente conhecida, sem incertezas, e como tal $\Delta H=0$.

Desta forma, segundo as equações (54) e (55), as matrizes H_1 , H_2 e E serão assumidas como sendo:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = [0 \ 0.05 \ 0];$$

De modo a encontrar-se um estimador estável, foi necessário encontrar soluções estabilizadoras para as duas ARE.

Primeiro, ir-se-á encontrar a solução estável $P = P^T > 0$ para a primeira ARE:

$$F^T P F - P + F^T P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left(I - \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P F + \varepsilon (E^T E + \nu I) = 0 \quad (75)$$

Para esse efeito, ir-se-á construir um algoritmo iterativo com 100 iterações, tendo por base a seguinte equação, derivada da equação de Riccati.

$$M = F^T P F - P + F^T P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left(I - \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P F + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (76)$$

No qual sucessivos valores da matriz P serão obtidos a partir de valores anteriores de acordo com a seguinte equação:

$$P = A^T P_0 A + A^T P_0 \bar{W} \left(I - \bar{W}^{-\frac{1}{2}} P \bar{W}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{W}^{-\frac{1}{2}} P_0 A + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (77)$$

Considerando o valor inicial para P_0 :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$\nu = 0.01$$

Obteve-se as seguintes figuras que descrevem a evolução dos elementos $M(1,1)$; $M(2,2)$ e $M(3,3)$:

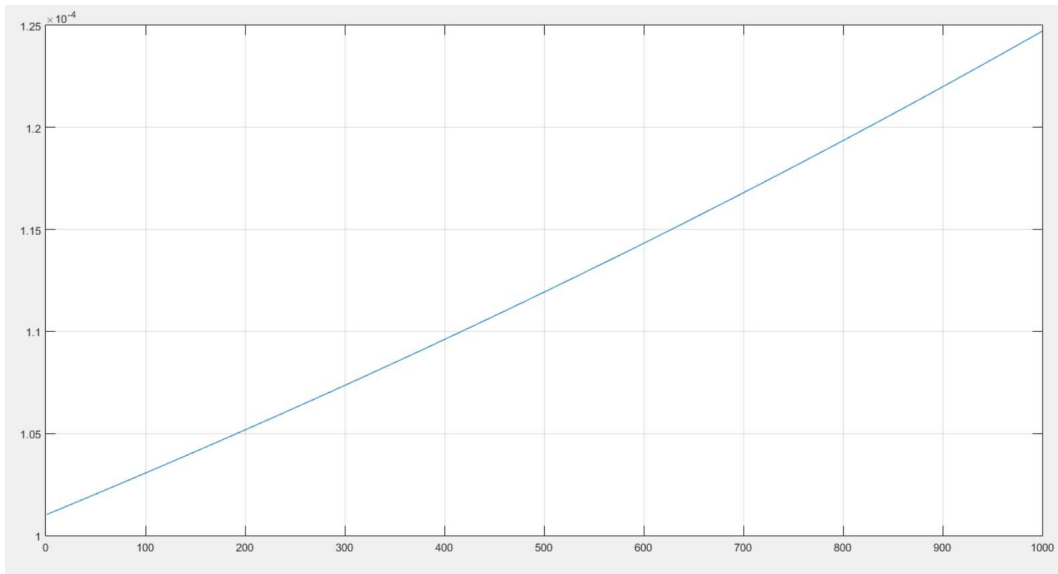


Fig.31. Evolução do elemento M (1,1)

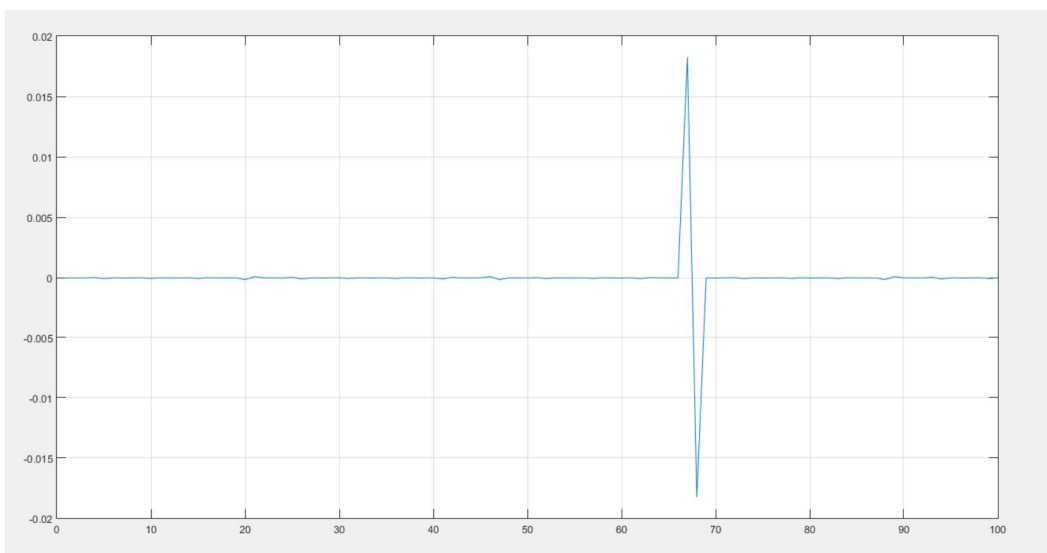


Fig.32. Evolução do elemento M (2,2)

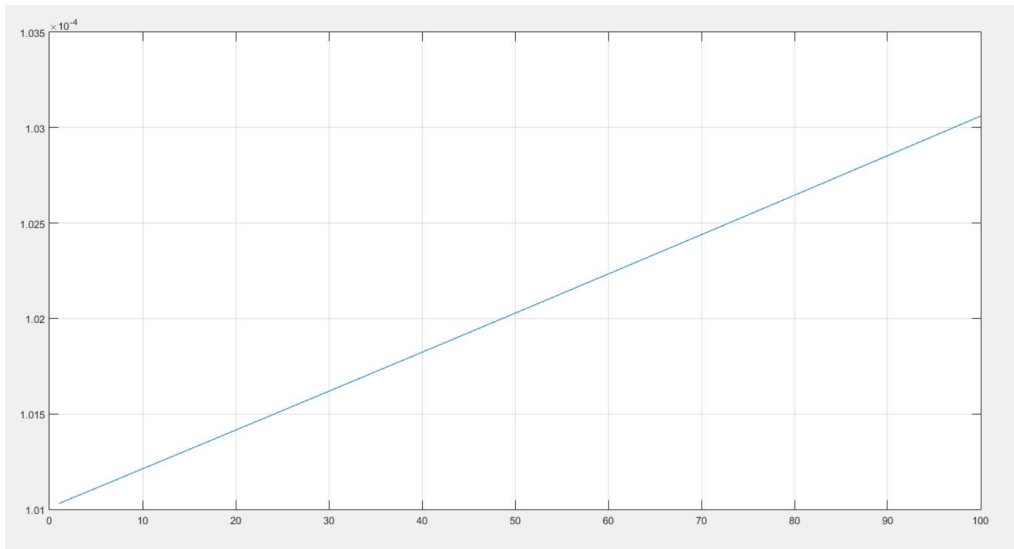


Fig.33. Evolução do elemento M (3,3)

Fazendo uma análise das figuras (31) (32) e (33) sobretudo as figuras (31) e (33) referentes aos elementos M (1,1) e M (3,3) da matriz M, verifica-se que o valor de M para a primeira iteração de P estão mais próximos de satisfazer a primeira equação de Ricatti, uma vez que são os que mais se aproximam de zero.

Também se verifica o efeito da presença de incertezas nos valores do eixo Y, representados através da evolução do elemento M (2,2), quando comparados com os outros dois. Enquanto os elementos dos eixos X e Z aumentam gradualmente ao longo das iterações, os elementos dos eixos Y mantêm-se relativamente constantes.

De facto, se se resolver a equação (75) para a primeira iteração de P obtém-se os seguintes valores para a matriz M:

$$M = \begin{bmatrix} 1.01 * 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 3,52 * 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 * 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Uma vez que os valores obtidos para M se encontram suficientemente próximos de zero, pode-se considerar a matriz P como sendo uma solução estabilizadora, permitindo assim obter os valores atualizados tendo em conta a incerteza para as seguintes matrizes:

Matriz de transição de estado atualizada:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4375 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro de transição de estado.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 * 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 4.3750 * 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 * 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Como, não foram consideradas incertezas na matriz de medições, e assim a matriz H_2 foi considerada como sendo uma matriz zero, o valor atualizado das matrizes de medição atualizada \hat{H} será igual ao valor da matriz H , o valor da matriz de covariância de erro da equação de medição atualizada \hat{R} será igual a R e a matriz de “cross covariance” M será igual a zero.

Nas matrizes \hat{F} e \hat{Q} continua a verificar-se a influência das incertezas, uma vez que os elementos do eixo Y apresentam um maior desvio face a matriz F , enquanto que os valores dos eixos X e Z são quase iguais aos valores da matriz original.

Para resolver a segunda ARE, em ordem a $U=U^T \geq 0$, foi desenvolvido um novo algoritmo, diferente do usado para a primeira equação.

Para esse efeito, transformou-se a segunda equação de Riccati:

$$\hat{F}U\hat{F}^T - U - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} = 0 \quad (78)$$

Na seguinte equação:

$$\hat{F}U\hat{F}^T - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} = U \quad (79)$$

A partir desta equação obter-se-ão novos valores para a matriz U tendo por base valores de U anteriores, verificando-se assim a evolução iterativa da matriz, representada graficamente pela evolução dos elementos $U(1,1)$, $U(2,2)$ e $U(3,3)$:

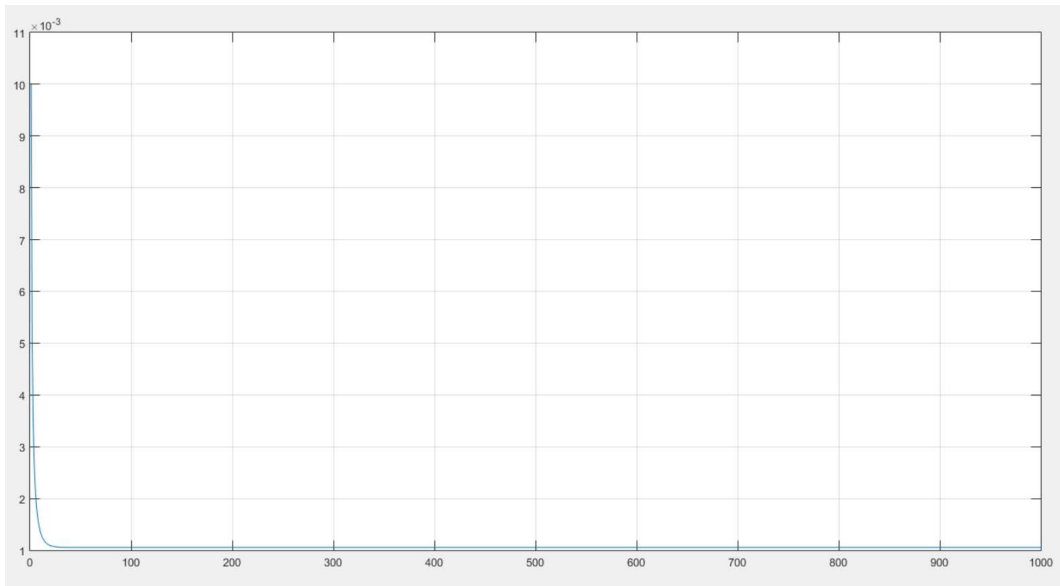


Fig.34. Evolução iterativa do elemento U (1,1)

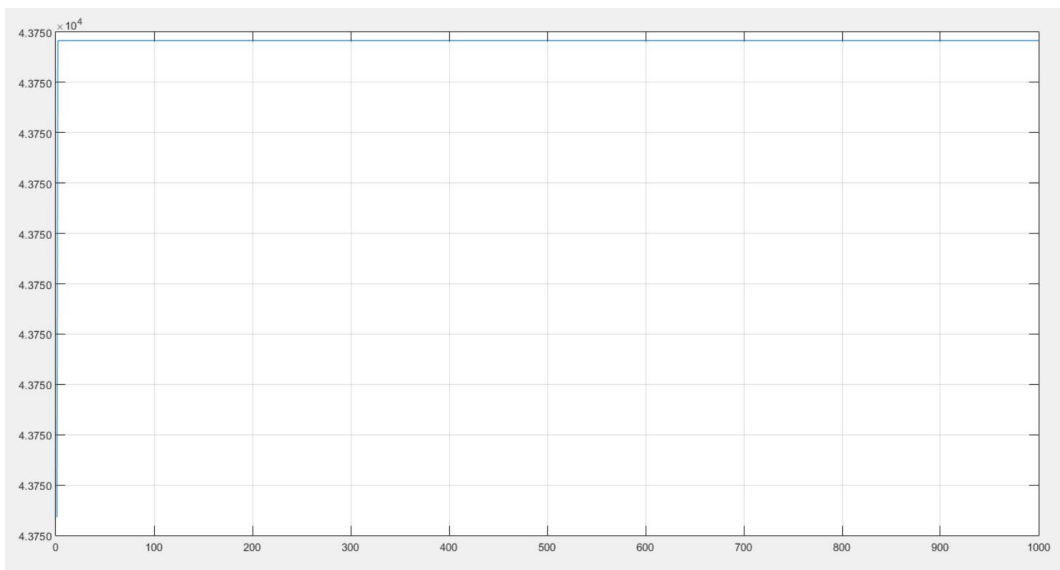


Fig.35. Evolução iterativa do elemento U (2,2)

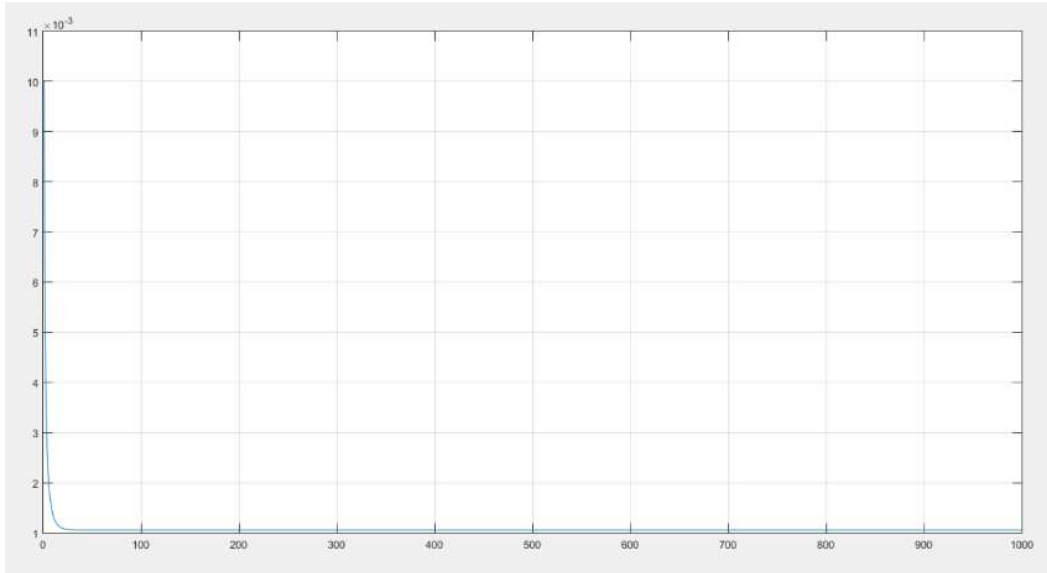


Fig.36. Evolução iterativa do elemento U (3,3)

Através da análise das figuras (34), (35) e (36) verifica-se que ocorreu uma maior discrepância entre valores de Q nas primeiras 50 iterações, ocorrendo nas iterações seguintes uma gradual estabilização dos valores.

Verifica-se também que os elementos com incertezas estabilizaram para valores altos, enquanto os elementos que não foram afetados pelas incertezas estabilizaram para valores perto de zero.

Pela milésima iteração, a diferença entre novo valor de Q e o valor imediatamente anterior é tão pequena que se podem considerar os dois valores iguais.

Para se comprovar esta afirmação, transformou-se a segunda ARE na seguinte equação:

$$N = \hat{F}U\hat{F}^T - U - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} \quad (80)$$

Que, para o valor de Q selecionado, será:

$$N = \begin{bmatrix} -6,7763 * 10^{-20} & 0 & 0 \\ 0 & 1,4552 * 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & -6,7763 * 10^{-20} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, revertendo a equação (80) para a segunda equação de Riccati, considera-se a matriz Q obtida pelo algoritmo como sendo uma solução estabilizadora para a equação de Riccati.

Assim, consegue-se calcular a matriz de ganho K do estimador:

$$K = \begin{bmatrix} 1.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7092 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0004 \end{bmatrix}$$

Possuindo soluções estabilizadoras para as duas equações de Riccati, pode-se calcular o estimador de estado, que irá estimar a seguinte trajetória:

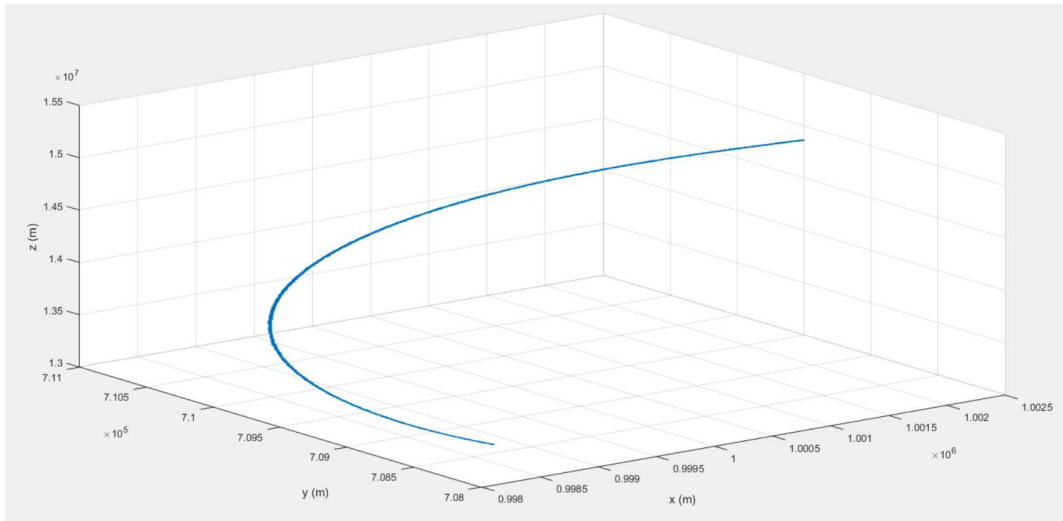


Fig.37. Trajetória gerada segundo o novo estimador

É de notar que a trajetória gerada, apesar de já estar contabilizada para as incertezas inerentes às equações do sistema, ainda apresenta ruído branco que necessita de ser filtrado.

Para além da trajetória sujeita a ruído branco, também se calculou um estimador robusto contra incerteza para a trajetória inicial, sem ruído, de modo a poder-se calcular a precisão do FKR:

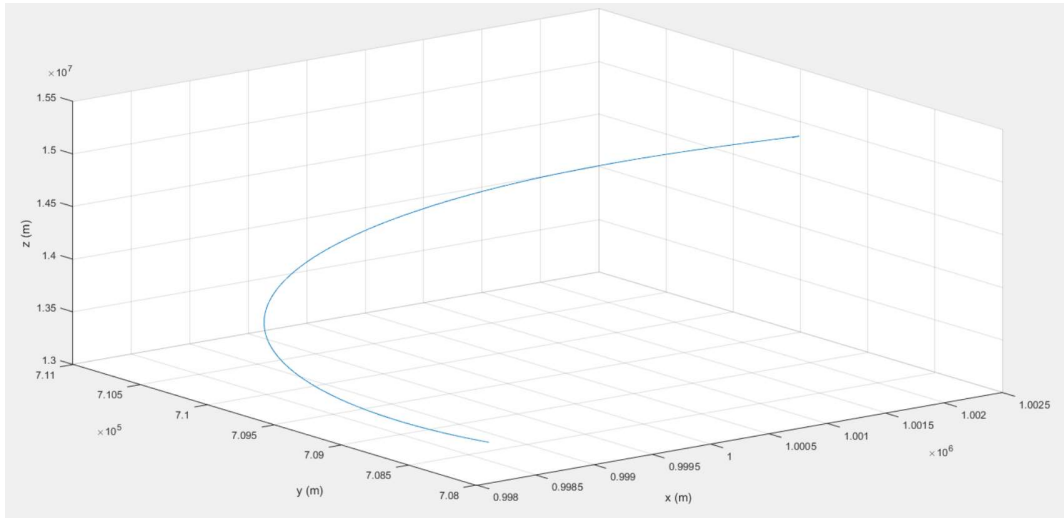


Fig.38. Trajetória original sem ruído gerada segundo o novo estimador

Desta forma, a trajetória obtida na figura (32) será sujeita a um filtro de Kalman permitindo filtrar o ruído e obter-se uma trajetória mais limpa:

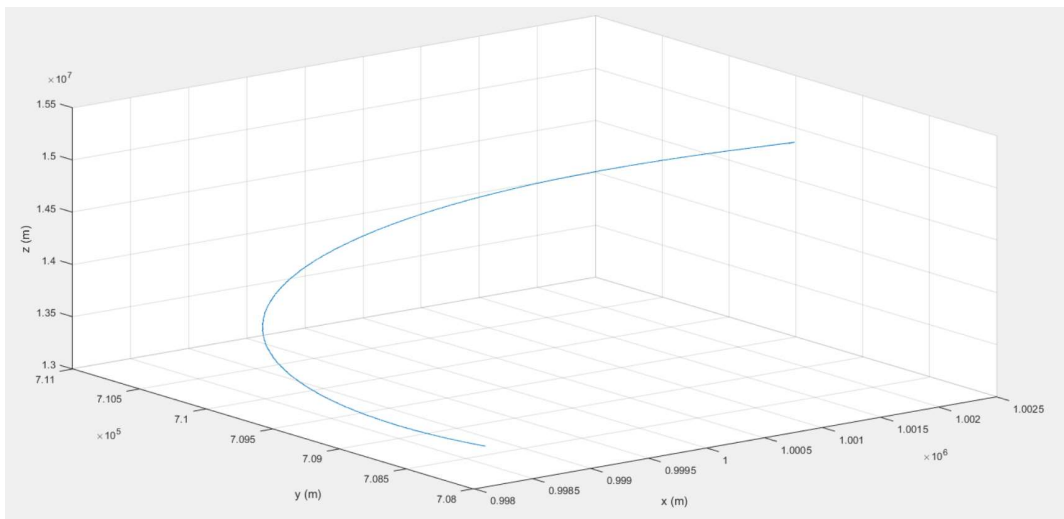


Fig.39. Estimação da nova trajetória pelo filtro de Kalman Robusto

Analisando as trajetórias estimadas segundo o filtro de Kalman robusto, e para as incertezas assumidas para a matriz F, a trajetória gerada sofreu alterações sobretudo no eixo de Y, uma vez que foi nesse eixo que se concentrou todas as incertezas da matriz F.

Usando os valores da trajetória da figura (38), calculou-se também a precisão do FKR através da diferença entre a trajetória sem incertezas reconstruída pelo FKR, e a trajetória inicial robusta contra incertezas, obtendo os seguintes resultados:

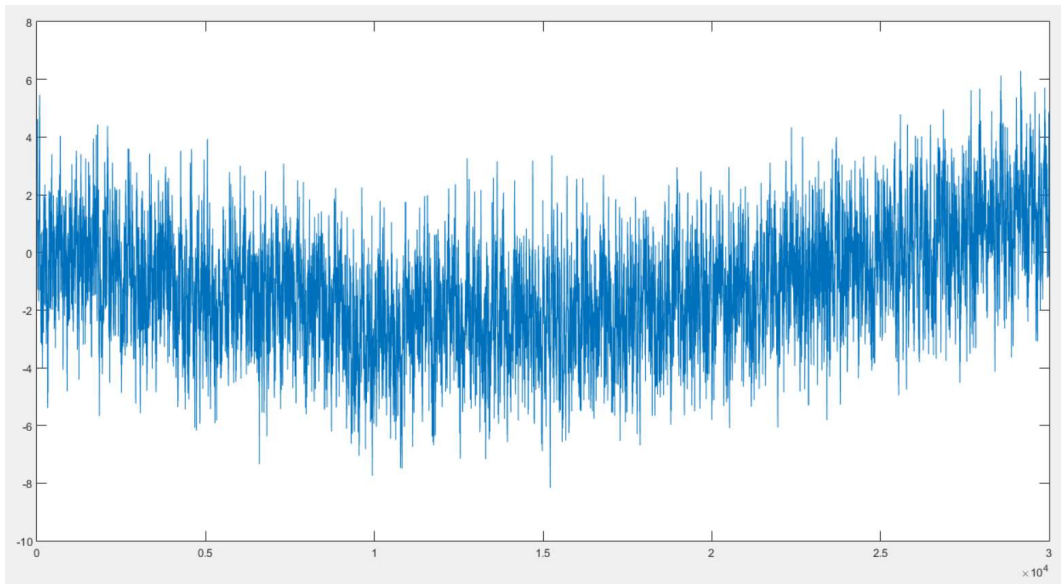


Fig.40. Diferença (em metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para o FKR, eixo de X

Analisando a figura, (40) verifica-se que a precisão do FKR é superior à precisão do FKC e dos três algoritmos do FKAE. Este fenômeno é explicado devido à natureza robusta do filtro: A trajetória gerada a partir do novo estimador não está apenas livre de incertezas, mais importante, está totalmente linearizada. No FKC e no FKAE, as trajetórias iniciais irão possuir incertezas e não são completamente lineares, e quando são simplificadas e linearizadas para poderem ser descritas por um sistema de equações lineares, ir-se-á perder informação, e assim, os estados da trajetória final, linear, irão possuir pequenas discrepâncias em relação aos estados não lineares da trajetória inicial, por filtrar. Essas discrepâncias, como o ruído branco, irão afetar também a precisão do filtro. O FKAE, apesar de conseguir eliminar o ruído branco melhor que o FKC, não é um filtro robusto, e como tal, irá possuir o mesmo problema.

O FKR, no entanto, irá possuir uma adição ao seu algoritmo que os outros dois filtros não possuem, um estimador robusto contra incertezas que lineariza primeiro a trajetória a ser reconstruída. Assim, antes de a trajetória ser filtrada, esta será linearizada pelo estimador e assim, as discrepâncias entre a trajetória original a ser filtrada e a trajetória reconstruída provocadas por uma linearização de um processo não linear não existirão. Apenas existirá ruído branco que depois será removido pelo filtro. Assim, no final da reconstrução da trajetória, a trajetória reconstruída será muito mais próxima da trajetória inicial.

Deste modo, o FKR possui uma melhor performance e precisão que o FKC e o FKAE.

Porém, uma vez que o filtro de Kalman robusto não é mais que um estimador robusto a linearizar uma trajetória que depois será reconstruída por um filtro de Kalman, pode-se aumentar ainda mais a performance e a precisão se se substituir o filtro de Kalman clássico por um FKAE, juntando a robustez e a precisão de um filtro de Kalman Robusto com a capacidade adaptativa de um filtro de Kalman adaptativo evanescente, criando-se assim um Filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente

Assim, se se considerar a matriz R como sendo a matriz usada na estimação do filtro de Kalman adaptativo evanescente, também se pode usar o FKAE para estimar uma nova trajetória sem a presença de ruído, conforme a representação gráfica:

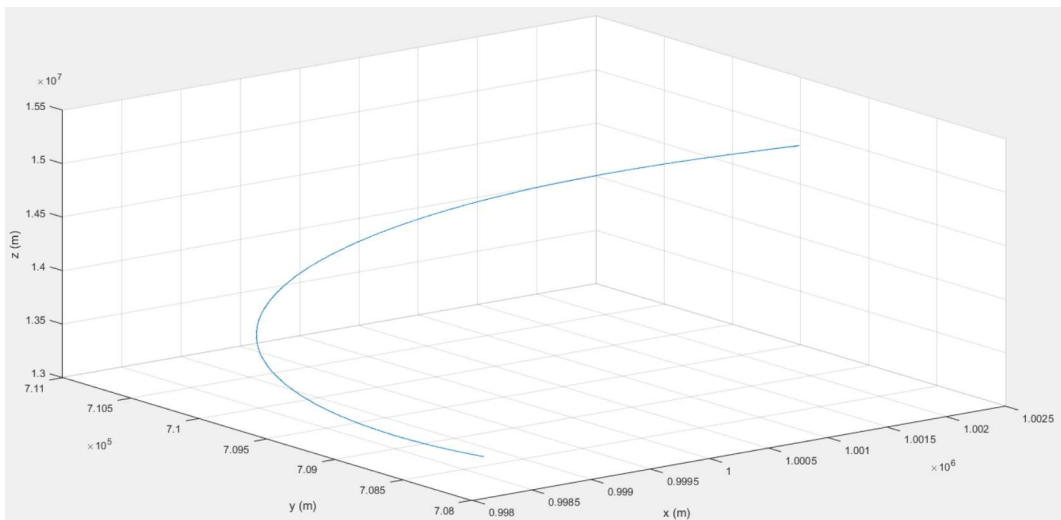


Fig.41. Estimação da nova trajetória a partir do FKRAE, 2º algoritmo

Calculando a diferença entre esta trajetória e a trajetória linearizada sem ruído da figura (38), obtém-se a seguinte figura a ilustrar a evolução dessa diferença:

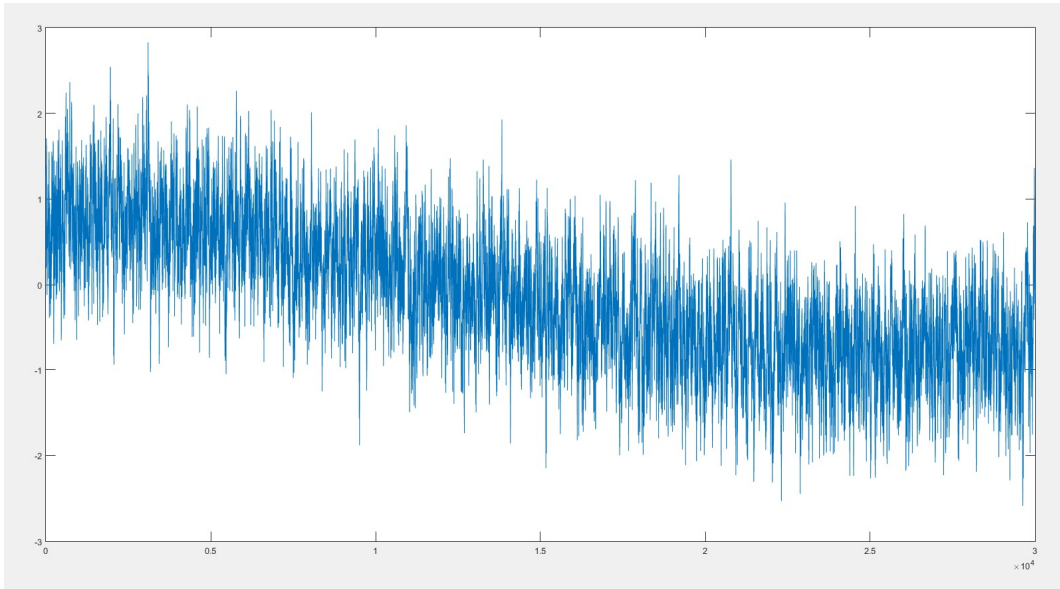


Fig.42. Diferença (metros) entre os valores sem ruído reconstruídos para o FKRAE, 2º algoritmo, eixo de X

Como se pode observar, a diferença entre a trajetória original e a trajetória reconstruída através do FKRAE será ainda mais pequena que a do FKR, o que prova que o melhor filtro a usar para a reconstrução de trajetória é um filtro de Kalman adaptativo e robusto.

Também se consegue provar uma das maiores vantagens do FKR: a sua versatilidade.

Uma vez que o FKR não é mais que um filtro de Kalman a reconstruir uma trajetória estimada por um estimador robusto contra incertezas, esse filtro pode ser escolhido pelo próprio projetista, não estando apenas limitado a filtros de Kalman em tempo discreto. Assim, filtros de Kalman em tempo contínuo, como o Filtro de Kalman-Bucy, também podem ser utilizados.

Desta forma, se se utilizar o FKAE em conjunto com o FKR consegue-se as vantagens dos dois filtros: as melhorias em termos de precisão de reconstrução do FKR e a capacidade de reação contra divergências e estados estimados incorretamente, e a linearização e as melhorias em termos de precisão de um FKR.

4.2.2 Estimação da órbita da estação espacial internacional

4.2.2.1 Geração da trajetória inicial

No primeiro exemplo considerou-se o uso do filtro de Kalman, assim como as suas sucessivas alterações num exemplo teórico.

Com este exemplo prático pretende-se aplicar o filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto para uma trajetória que exista na realidade, a órbita da estação espacial internacional.

A trajetória à qual será aplicada os filtros desenvolvidos neste exemplo foi obtida pelo aluno Pedro Dente, na sua dissertação “*H ∞ Orbital Control of a Space Vehicle on a Low Earth Orbit*”. Nesta dissertação, ele conseguiu gerar a trajetória da estação espacial internacional, segundo coordenadas esféricas, seguindo as seguintes equações do sistema modelo:

$$x_k = Fx_{k-1} + w_k \quad (81)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (82)$$

Considerando as seguintes matrizes:

F é a matriz de transição de estado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0,1000 & 0 & 85,8804 & 1,3164 * 10^{-7} & 0,3488 \\ 4,1942 * 10^{-7} & 1,000 & 0 & 1717,6 & 2,6327 * 10^{-6} & 6,9753 \\ -2,1395 * 10^{-19} & -1,8792 * 10^{-1} & 1 & 0,1000 & 6,5541 * 10^{-1} & -1,5328 * 10^{-11} \\ -4,2790 * 10^{-18} & -3,7584 * 10^{-11} & 0 & 1,000 & 1,3108 * 10^{-9} & -3,0656 * 10^{-10} \\ -8,6886 * 10^{-22} & -7,6316 * 10^{-15} & 0 & 5,4967 * 10^{-12} & 1,0000 & 0,1000 \\ -1,7377 * 10^{-20} & -1,5263 * 10^{-13} & 0 & 1,0993 * 10^{-10} & -1,6139 * 10^{-7} & 1,000 \end{bmatrix}$$

H é a matriz de medições:

$$H = \begin{bmatrix} 0,0050 & 6,3519 * 10^{-7} & 2,5796 * 10^{-9} \\ 0,01000 & 1,2704 * 10^{-5} & 5,1591 * 10^{-8} \\ -9,3961 * 10^{-14} & 7,3962 * 10^{-10} & -1,1337 * 10^{-19} \\ -1,8792 * 10^{-12} & 1,4792 * 10^{-8} & -2,2674 * 10^{-18} \\ -3,8158 * 10^{-16} & 4,0655 * 10^{-20} & 7,3962 * 10^{-10} \\ -7,6316 * 10^{-15} & 8,130 * 10^{-19} & 1,4792 * 10^{-8} \end{bmatrix}$$

E o vetor de estado será:

$$x = [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$$

No qual:

r - distância do centro da Terra até a ISS

θ - ângulo de azimute, o ângulo formado pela projeção do vetor do centro da Terra até a ISS e o eixo de x.

Φ - ângulo de elevação, o ângulo formado pela projeção do vetor do centro da Terra até a ISS e o eixo de z.

\dot{r} , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ - primeiras derivadas de r , θ e Φ , respetivamente.

Atendendo a que os estados obtidos pelas equações acima descritas são representações de coordenadas esféricas, e que, para esta dissertação, considera-se as trajetórias a estimar como sendo cartesianas, irá ser preciso converter as coordenadas de esféricas para cartesianas.

Desta forma, utilizam-se as seguintes equações para converter o vetor de estado x de coordenadas esféricas para cartesianas, do tipo $X=[X \ Y \ Z]^T$. [11]

$$\begin{cases} x_k = r_k \sin \phi_k \cos \theta_k \\ y_k = r_k \sin \phi_k \sin \theta_k \\ z_k = r_k \cos \phi_k \end{cases} \quad (83)$$

A representação da trajetória da estação espacial internacional em coordenadas cartesianas pode então ser calculada, apresentando-se ilustrada na seguinte imagem:

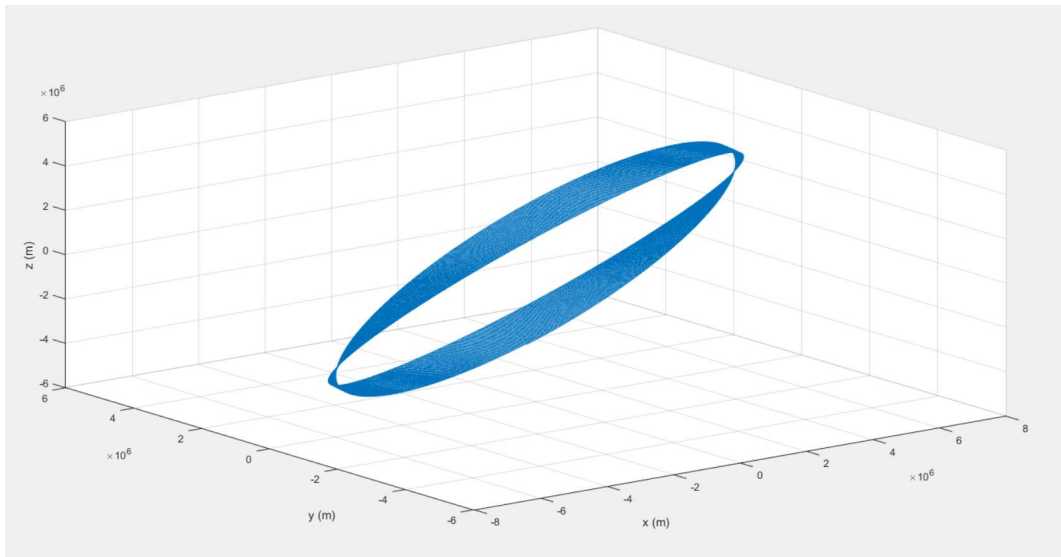


Fig.43. Movimento orbital da ISS, em coordenadas cartesianas

Uma vez que esta trajetória corresponde ao movimento orbital da ISS durante um período de 2,5 dias, o que irá consistir em várias órbitas, para melhor compreensão das imagens, apenas a primeira órbita será considerada:

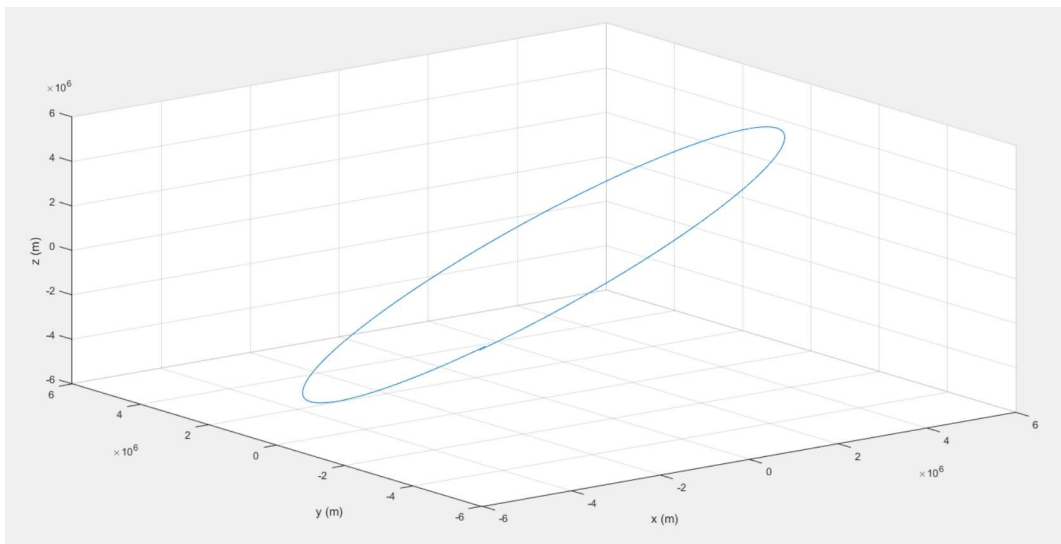


Fig.44. Movimento orbital da ISS, primeira órbita, em coordenadas cartesianas

A esta trajetória será adicionado ruído branco de distribuição normal, $N \sim (0, 15000^2)$:

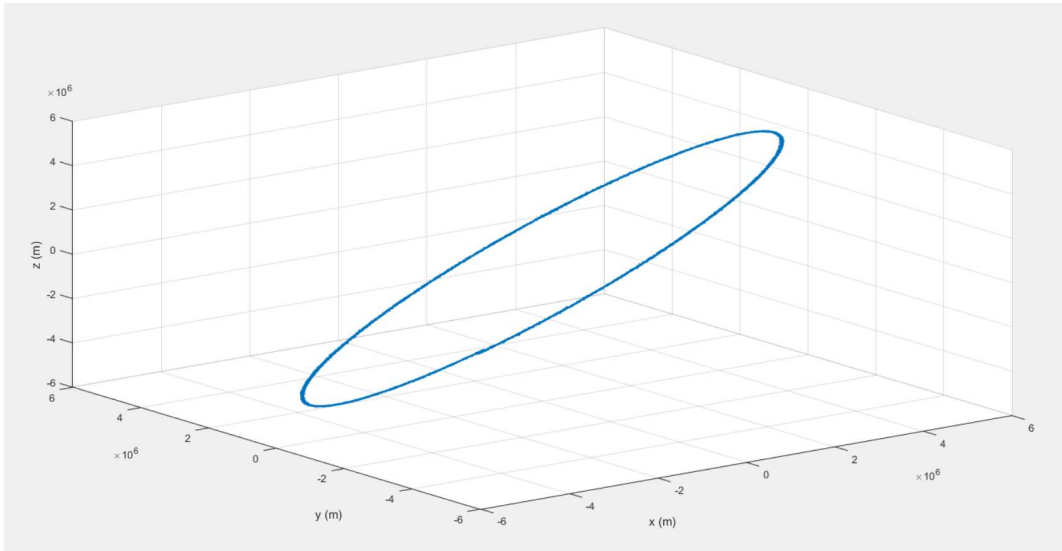


Fig.45. Movimento orbital da ISS, em coordenadas cartesianas, com a presença de ruído

4.2.2.2 Aplicação do Filtro de Kalman clássico

A esta nova trajetória com ruído, será aplicado primeiramente um filtro de Kalman clássico:

Considerando um sistema estocástico, em tempo discreto, com ruído gaussiano:

$$x_k = Fx_{k-1} + w_k \quad (84)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (85)$$

Considerando os seguintes valores para as diferentes matrizes:

Matriz de transição de estado F:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de medição H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância de erro da equação de estado:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix};$$

A matriz de covariância de erro equação de medições:

$$R = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância de erro inicial P_0 :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Os resultados para a estimação de estados de trajetória através do filtro de Kalman foram os seguintes:

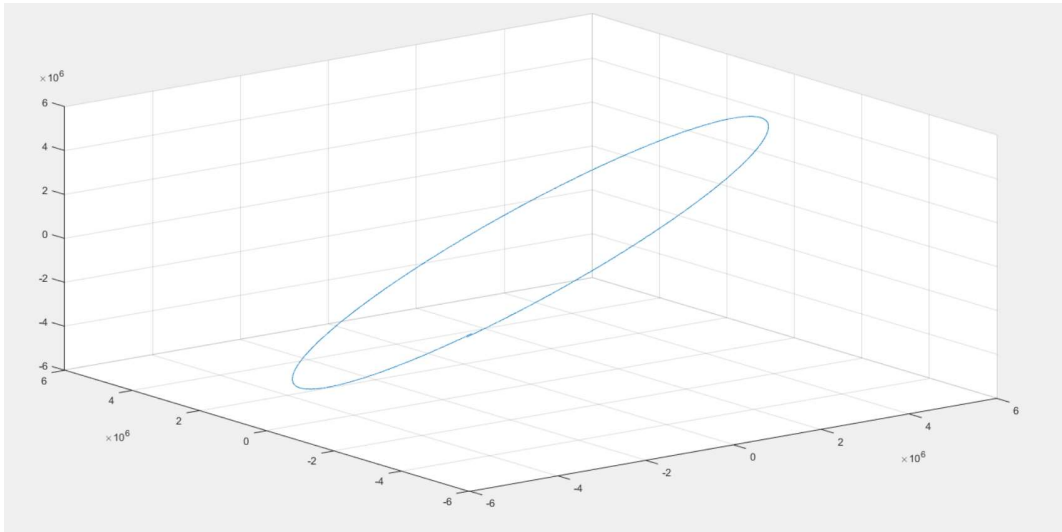


Fig.46. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao filtro de Kalman clássico

Tendo em consideração que as diferenças entre esta reconstrução e a trajetória inicial sem ruído são impercetíveis a olho nu, à semelhança do primeiro exemplo, foi calculada a diferença entre a trajetória reconstruída e o sinal original, também no eixo de X.

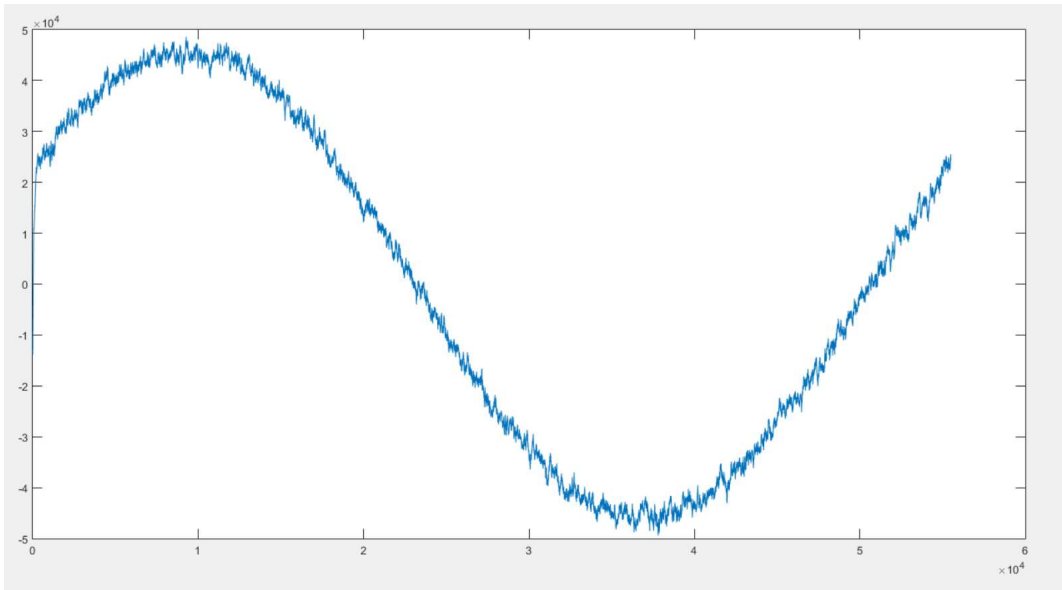


Fig.47. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para a trajetória da ISS, FKC, eixo de X

Fazendo uma análise aos valores da figura (47) e comparando estes valores com os valores obtido no primeiro exemplo para a diferença entre a trajetória inicial e a trajetória reconstruída, verifica-se que a diferença de valores do segundo exemplo é

muito maior. Este fenómeno é justificável, porque o ruído branco implementado neste exemplo foi também maior.

4.2.2.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente

Concluída a implementação de um filtro de Kalman clássico, será agora estimada a trajetória recorrendo ao filtro de Kalman adaptativo evanescente e aos seus três algoritmos.

Para este efeito, e depois de um longo processo iterativo de seleção de matrizes R, considerou-se a matriz R como sendo:

$$R = \begin{bmatrix} 8 * 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 * 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 * 10^8 \end{bmatrix}$$

Todas as outras matrizes consideram-se como sendo iguais às usadas para a estimação de trajetórias usando o filtro de Kalman, sendo geradas as seguintes trajetórias para cada algoritmo.

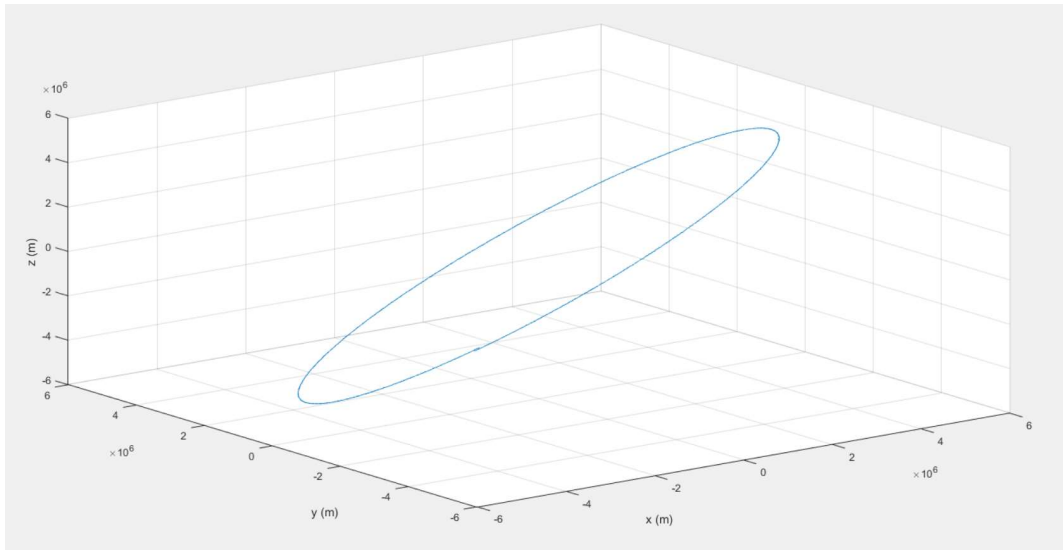


Fig.48. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 1º algoritmo do FKAE

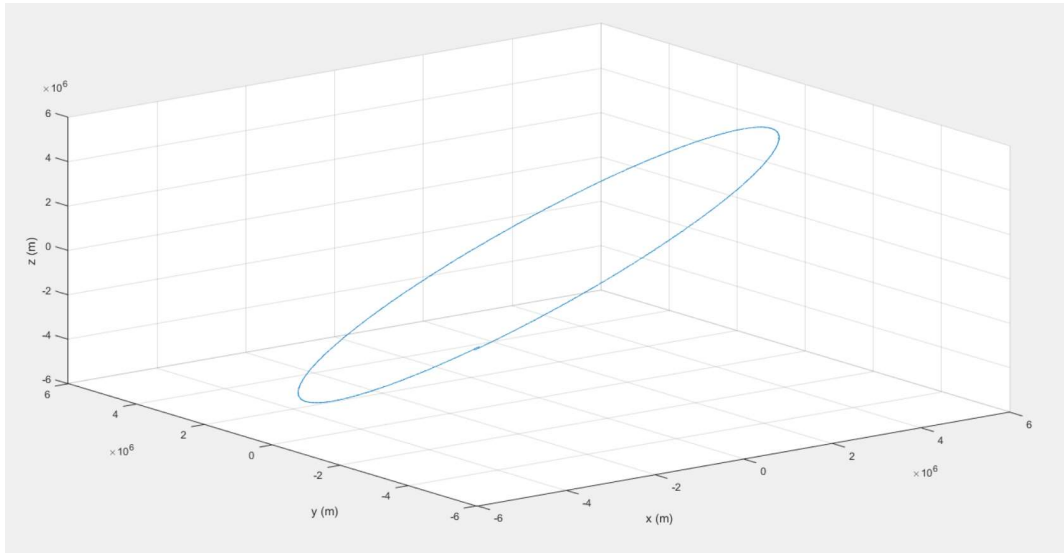


Fig.49. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 2º algoritmo do FKAE

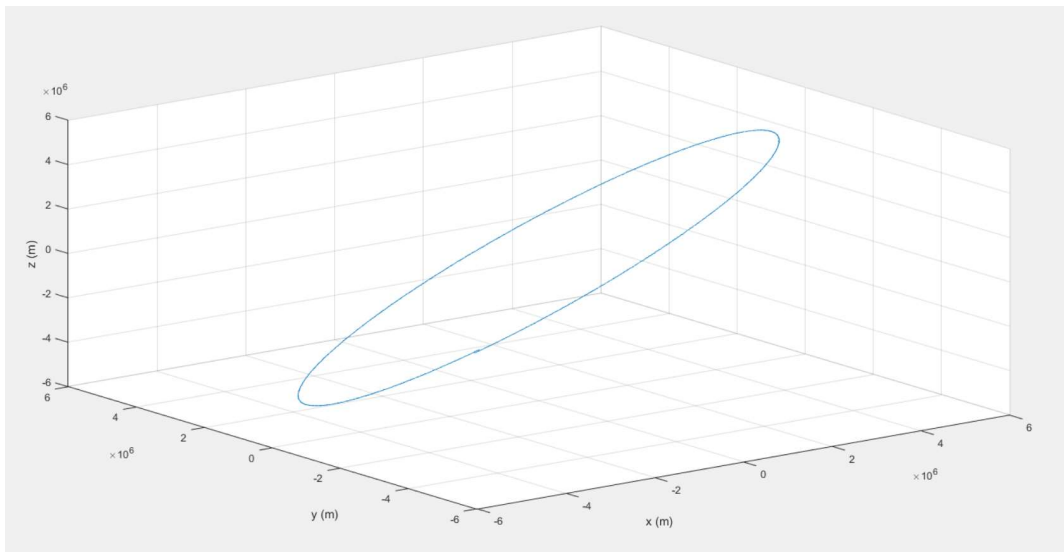


Fig.50. Estimação do movimento orbital da ISS recorrendo ao 3º algoritmo do FKAE

Para melhor se compreender as diferenças entre estes algoritmos, para cada trajetória foi calculada também a diferença entre as trajetórias reconstruídas e o sinal original.

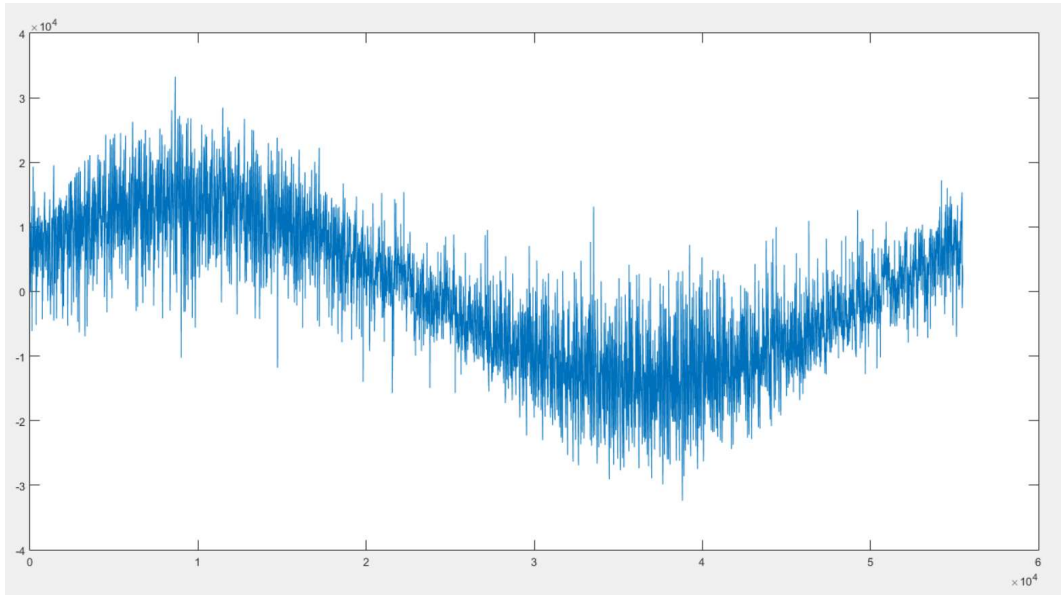


Fig.51. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 1º algoritmo, eixo de X

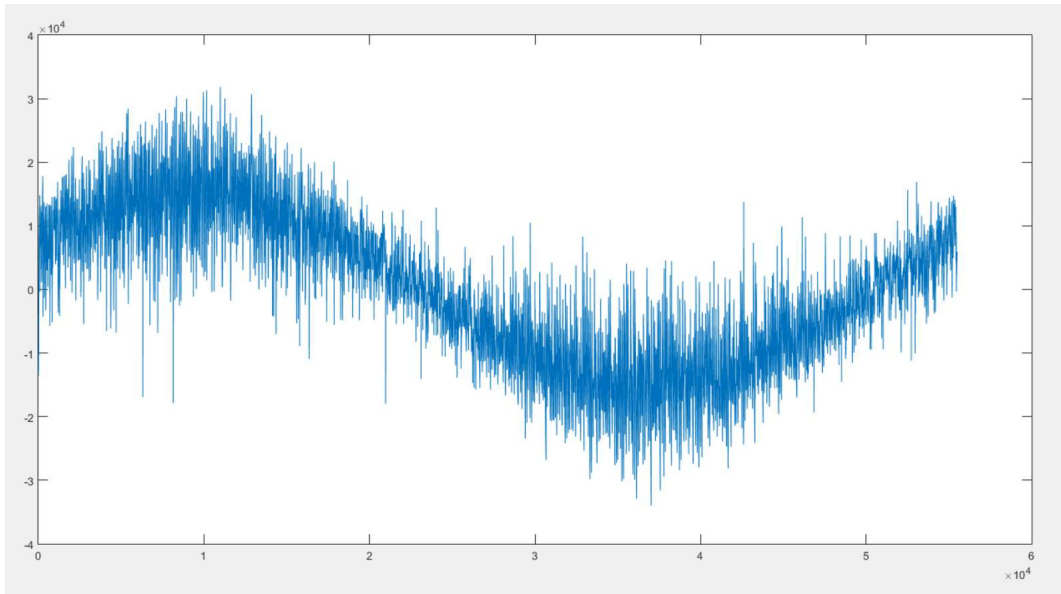


Fig.52. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 2º algoritmo, eixo de X

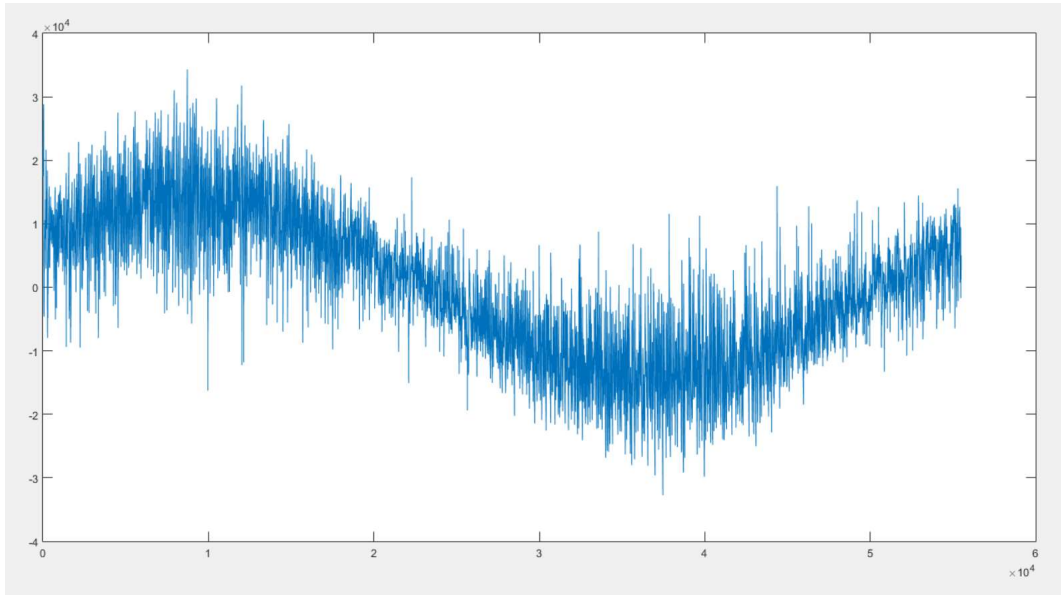


Fig.53. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e reconstruídos para a trajetória da ISS, FKAE, 3º algoritmo, eixo de X

Infelizmente, devido ao facto do ruído adicionado nesta trajetória ser muito elevado quando comparado com o exemplo 1, a diferença entre os valores originais sem ruído e os valores reconstruídos também será grande, e assim, torna-se difícil verificar qual é a figura que apresenta uma menor diferença.

Porém, olhando para as figuras com atenção, verifica-se que a dispersão dos dados será mais pequena para o segundo algoritmo, e como tal, este algoritmo será aquele que possui uma maior precisão.

Mesmo assim, quando comparados com os resultados obtidos da diferença entre a trajetória original e a trajetória reconstruída para o FKC, as diferenças tornam-se evidentes, uma vez que a amplitude da figura (47) será muito maior que qualquer um das figuras referentes aos algoritmos do FKAE.

Assim, o FKAE aproxima-se mais dos valores originais sem ruído do que o FKC, e assim, demonstra-se mais uma vez que o FKAE otimizado para a performance terá uma precisão superior do que o FKC.

Tendo em conta que os resultados para cada um dos três algoritmos serão semelhantes, escolheu-se o segundo algoritmo para fazer a apreciação da evolução do fator de esquecimento ao longo de toda a reconstrução da trajetória.

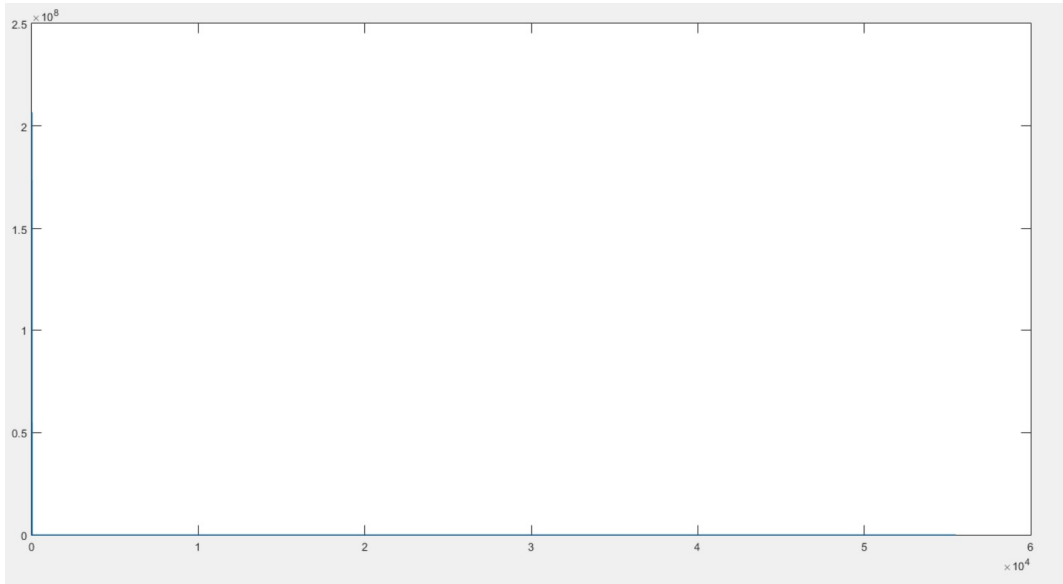


Fig.54. Evolução do fator de esquecimento ao longo do FKAE (2º algoritmo) da ISS

Através da análise da figura (54) mais uma vez se verifica a natureza dinâmica do filtro de Kalman adaptativo evanescente: o fator de esquecimento apresenta valores elevados no início da estimação de trajetória, porém com a contínua estimação, a diferença entre os valores estimados e medidos será mitigada, e como tal, o filtro não precisará de compensar com o fator de esquecimento, fazendo com que esta tenda para valores próximos de um.

Para efeitos de comparação, um filtro de Kalman clássico usando a mesma matriz R foi elaborado, com os resultados apresentados a seguir:

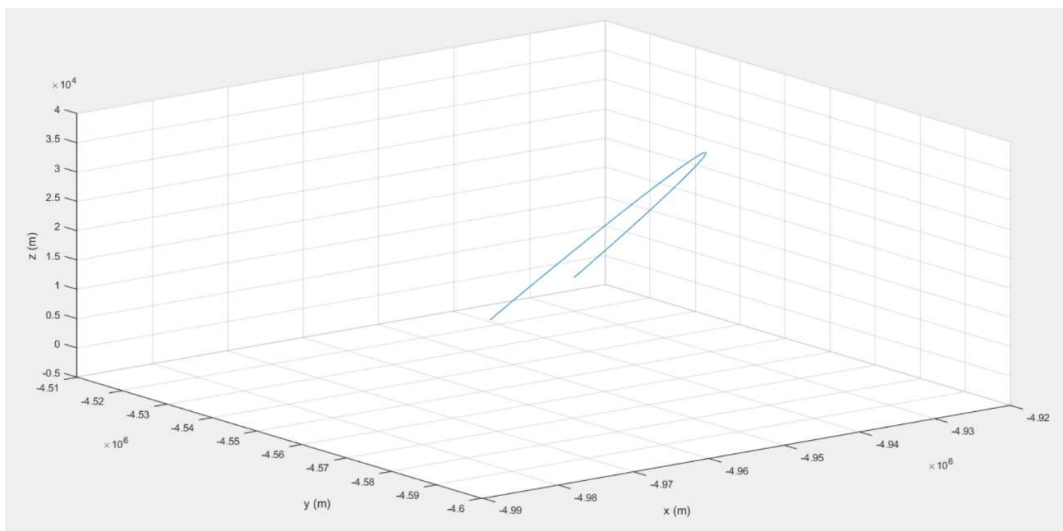


Fig.55. Estimação da órbita da ISS recorrendo ao filtro de Kalman clássico com o novo valor de R.

Como seria de esperar, o elevado valor de R , juntamente com a ineficiência do filtro de Kalman clássico em convergir os valores medidos com os valores estimados com cada iteração levou ao fenómeno de divergência e total ruína da performance do filtro, algo que não aconteceu com a aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente.

De seguida, procurou-se verificar como o FKAE reagiria perante estados estimados incorretamente pelos sensores e instrumentos de medição.

Para esse fim, recorrendo ao Matlab, adicionou-se um estado estimado incorretamente, obtendo-se a seguinte trajetória:

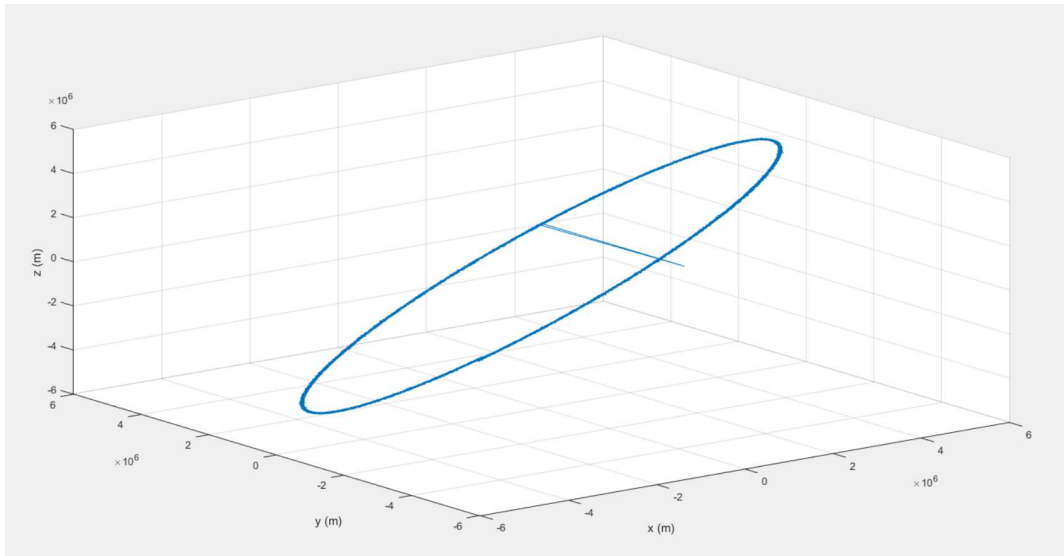


Fig.56. Trajetória da ISS ruído e com um estado incorreto

Sendo esta nova trajetória sujeita a um FKAE, segundo algoritmo e a um FKC, para efeitos de comparação.

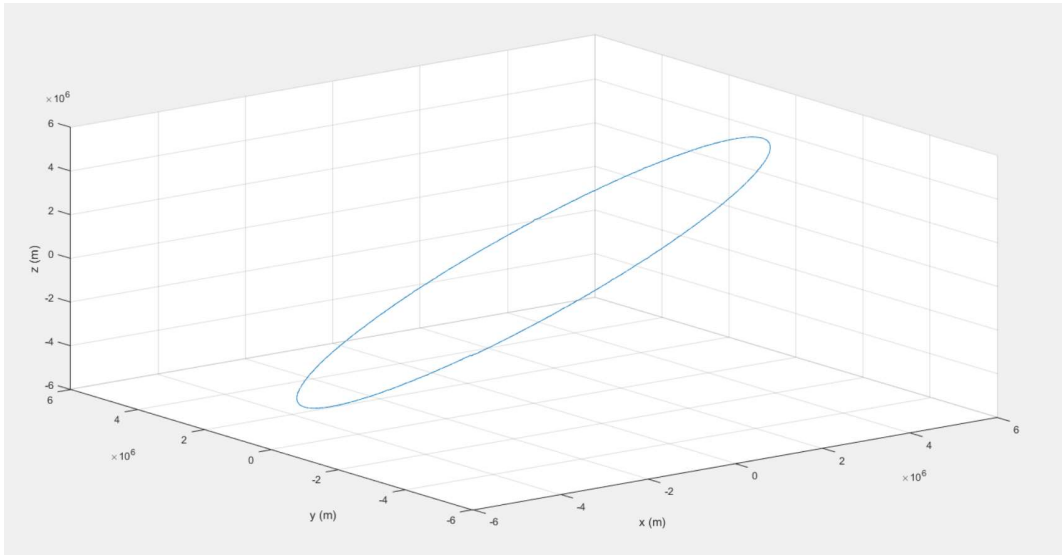


Fig.57. Estimação da trajetória da ISS, com um estado incerto, recorrendo ao FKAE, 2º algoritmo

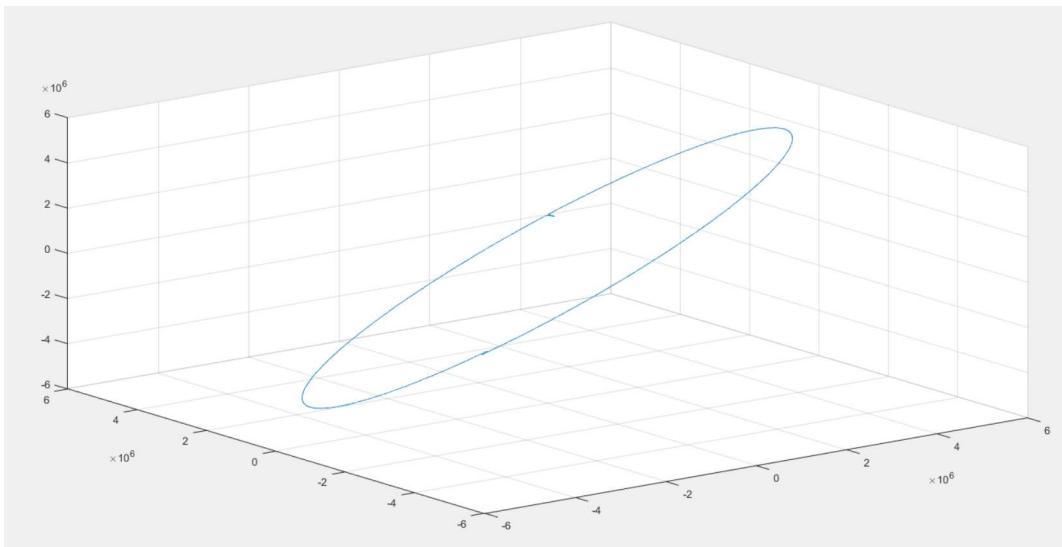


Fig.58. Estimação da trajetória da ISS, com um estado incerto, recorrendo ao FK

Como se pode observar nas figuras (57) e (58), face a este problema, o FKAE irá possuir melhores resultados que o FK. O FKAE está melhor adaptado para lidar com estados estimados incorretamente porque o seu algoritmo contém as modificações necessárias para reagir como maior firmeza perante estes estados, conseguindo usar a informação de estados anteriores, e atendendo à importância que os estados anteriores possuem para a reconstrução da trajetória, o FKAE consegue reconstruir o estado corretamente.

O FKC, apesar de conter a informação de estados anteriores, não tem a informação sobre a importância que os estados anteriores possuíram, como tal, apesar de conseguir reconstruir a trajetória quase corretamente, não consegue estimar esta trajetória sem a presença de estados estimados incorretamente. É de notar, no entanto, que devido ao facto do FKC estar bastante otimizado, consegue lidar com um estado incerto de uma forma notável.

4.2.2.4. Aplicação do Filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente

Como se viu no exemplo 1, um filtro de Kalman robusto consistirá em duas partes: um estimador robusto contra incertezas e que lineariza a trajetória a reconstruir, melhorando a precisão da trajetória reconstruída removendo as discrepâncias entre a trajetória inicial não linearizada e a trajetória reconstruída, linearizada, e um filtro de Kalman que melhora a precisão da trajetória reconstruída removendo o ruído branco presente na trajetória inicial.

Concluiu-se também que o filtro de Kalman ideal para filtra a trajetória criada pelo estimador é o FKAE, pois é adaptativo e a precisão da trajetória reconstruída é maior que a de um filtro não adaptativo.

Deste modo, o último filtro a aplicar a este exemplo, será o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente.

Para este efeito, dividir-se-á a matriz de transição de estado F , numa parte conhecida e estável, F , e numa parte desconhecida, ΔF com valor variável.

A parte incerta da matriz de transição de estado F , ΔF foi assumida como sendo:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E a parte conhecida F foi assumida como:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz de medições:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E as matrizes de covariância de erro da equação de transição de estado Q e equação de medição R:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com $\|\delta\| \leq 0.3$

Para esta trajetória, os limites do parâmetro de incerteza δ irão ser mais pequenos do que o valor considerado para o primeiro exemplo.

Também à semelhança do primeiro exemplo, optou-se deliberadamente por concentrar as incertezas da matriz F no eixo X.

Segundo o exemplo anterior, prevê-se que a trajetória gerada pelo novo estimador seja relativamente igual à trajetória original, por virtude do valor para o parâmetro δ ser relativamente pequeno, assim como a nova trajetória apresentar maiores alterações no eixo X.

A matriz H, de medições, foi considerada como sendo completamente conhecida, assim $\Delta H = 0$.

Assim, segundo as equações (54) e (55), obtemos os seguintes valores para as matrizes H1, H2 e E serão assumidas como sendo:

$$H1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E=[0.03 \ 0 \ 0]$$

Assumiu-se também os valores ε e ν :

$$\varepsilon=0.009;$$

$$\nu=0.009;$$

De seguida, procurou-se encontrar um estimador estável e robusto. Para tal, será necessário resolver as duas equações de Riccati para soluções estáveis.

Primeiro, ir-se-á encontrar a solução estável $P=P^T>0$ para a primeira equação de Riccati:

Para esse efeito, utilizar-se-á o algoritmo desenvolvido no primeiro exemplo para encontrar uma solução P .

Assim, transformou-se a primeira ARE na seguinte equação.

$$M = F^T P F - P + F^T P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left(I - \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} P F + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (86)$$

E desenvolveu-se um algoritmo de 100 iterações para se obter novos valores P a partir de valores antigos de P , P_0 :

$$P = A^T P_0 A + A^T P_0 \bar{W} (I - \bar{W}^{-\frac{1}{2}} P_0 \bar{W}^{-\frac{1}{2}})^{-1} \bar{W}^{-\frac{1}{2}} P_0 A + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (87)$$

Considerando, o valor inicial para P_0 como sendo:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteve-se a seguinte evolução gráfica dos elementos $M(1,1)$, $M(2,2)$, $M(3,3)$:

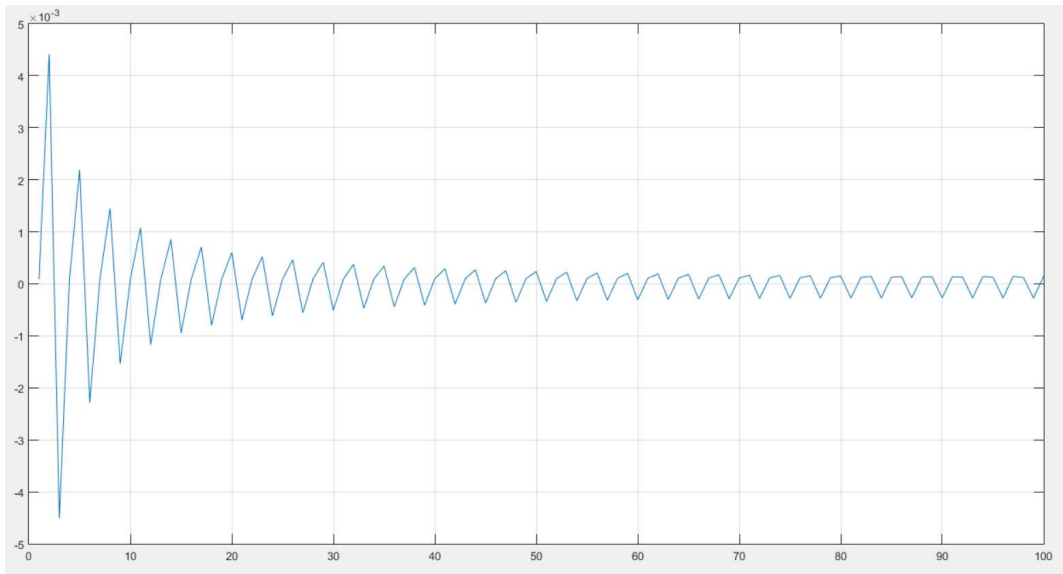


Fig.59. Evolução do elemento $M(1,1)$ da ISS

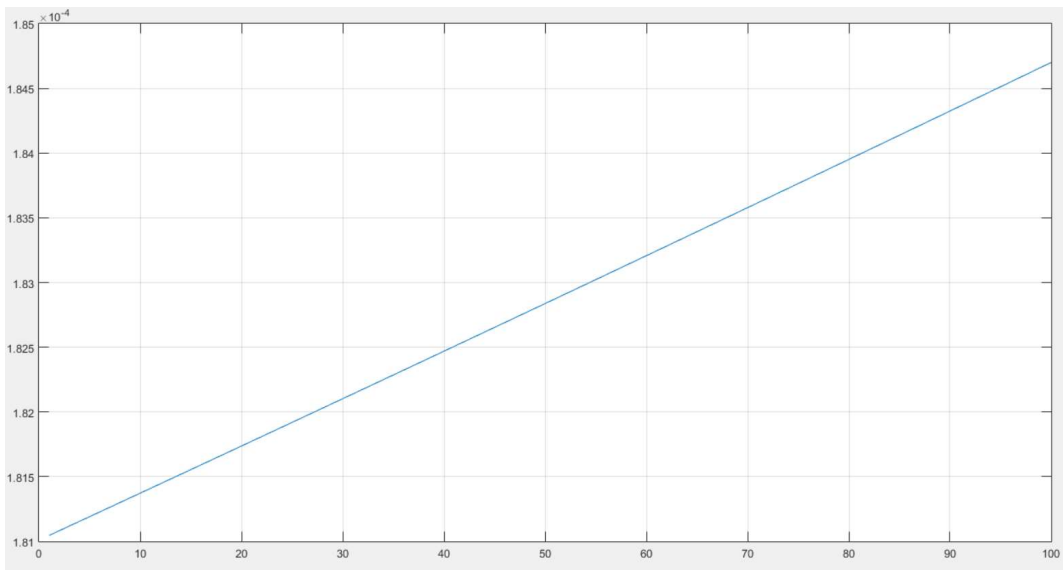


Fig.60. Evolução do elemento $M(2,2)$ da ISS

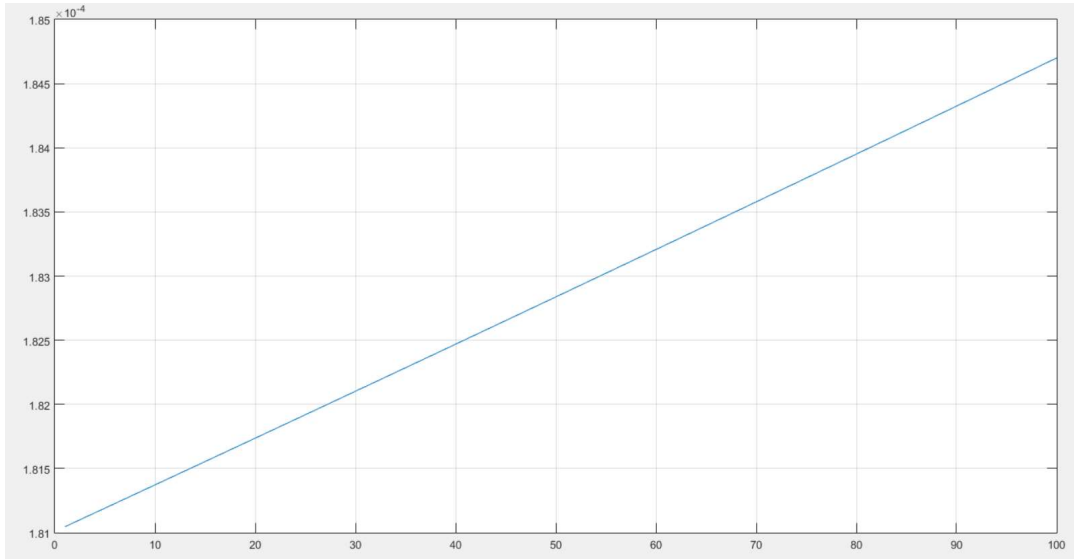


Fig.61. Evolução do elemento M (3,3) da ISS

Fazendo uma análise às figuras (59) (60) e (61) verifica-se que o elemento M (1,1) da matriz M tende a estabilizar para zero com a evolução das iterações. Porém, os elementos M (2,2) e M (3,3) tendem a aumentar. Desta forma, o valor de P que melhor satisfaz a primeira ARE irá ser o valor da primeira iteração.

Assim, substituindo o valor de P na equação ir-se-á obter o seguinte valor para a matriz M:

$$M = \begin{bmatrix} 8.9109^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1.8105^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.8105^{-4} \end{bmatrix}$$

Observando a matriz M, pode-se verificar que esta se encontra suficientemente perto de zero, logo a matriz P pode ser considerada uma solução estável para a primeira ARE.

Desta forma, pode-se obter os valores para as seguintes matrizes:

Matriz de transição de estado atualizada:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0.9900 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro de transição de estado.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 5.5186 * 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0001^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0001^{-4} \end{bmatrix}$$

Como, não foram consideradas incertezas na matriz de medições, e assim a matriz H_2 foi considerada como sendo uma matriz zero, o valor atualizado das matrizes de medição atualizada \hat{H} será igual ao valor da matriz H , o valor da matriz de covariância de erro da equação de medição atualizada \hat{R} será igual a R e a matriz de “cross covariance” M será igual a zero.

Pode-se também verificar na matriz \hat{F} os efeitos da incerteza. Uma vez que a incerteza considerada foi relativamente baixa, os valores dos elementos do eixo X não sofreram grandes mudanças dos seus valores originais. Todos os outros elementos permaneceram quase iguais.

Para resolver a segunda equação de Riccati, em ordem a $U=U^T \geq 0$, recorreu-se ao segundo algoritmo desenvolvido para o primeiro exemplo.

Para esse efeito, transformou-se a segunda ARE na seguinte equação:

$$\hat{F}U_0\hat{F}^T - (\hat{F}U_0\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U_0\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U_0\hat{H} + M)^T + \hat{Q} = U \quad (88)$$

Onde:

U : corresponde ao valor atualizado da matriz U

U_0 : corresponde ao valor anterior da matriz U

A partir desta equação construiu-se um algoritmo de 1000 iterações para obter valores novos de U a partir de valores antigos, obtendo-se a seguinte evolução iterativa para os elementos $U(1,1)$, $U(2,2)$ e $U(3,3)$

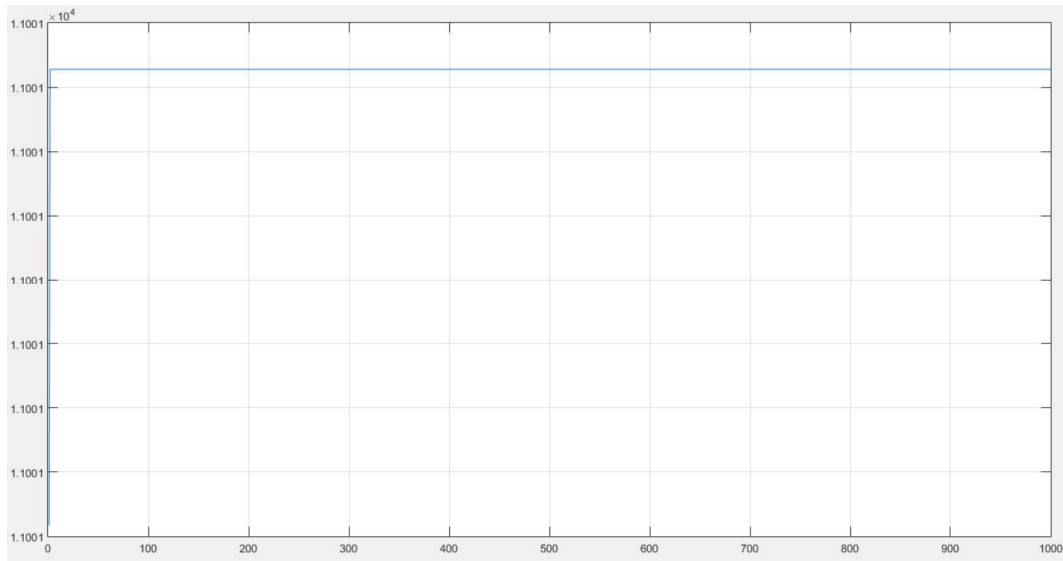


Fig.62. Evolução iterativa do elemento $U(1,1)$ da ISS

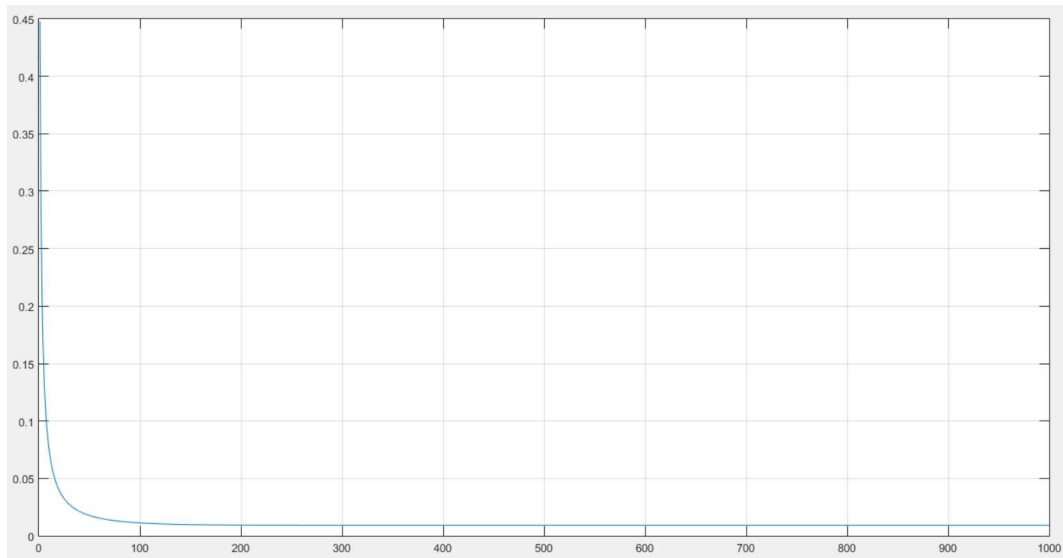


Fig.63. Evolução iterativa do elemento $U(2,2)$ da ISS

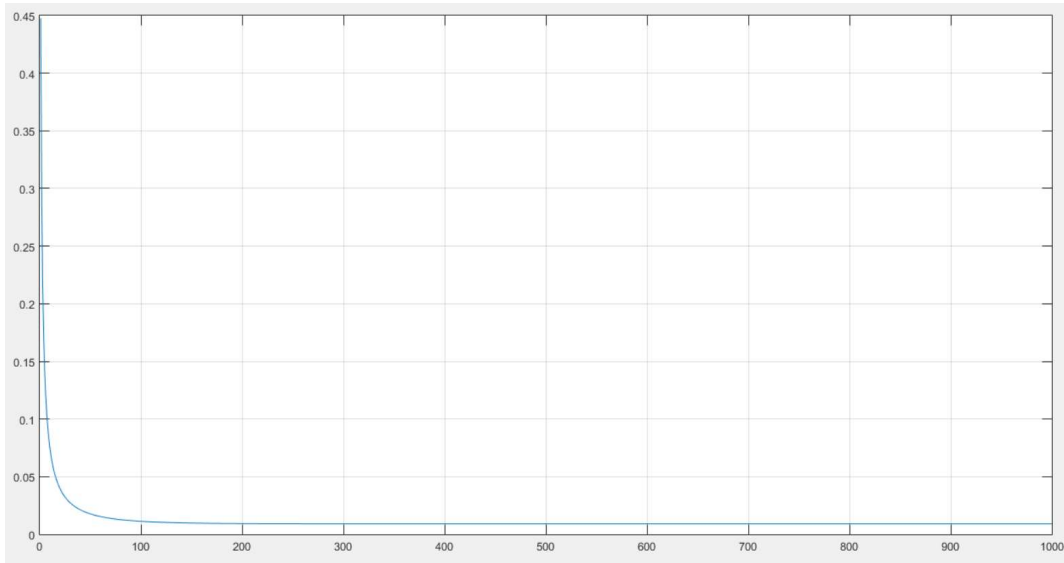


Fig.64. Evolução iterativa do elemento U (3,3) da ISS

Analisando as figuras verifica-se que ao fim de 1000 iterações os valores de U irão estabilizar, e a diferença entre o novo valor de U e valor imediatamente anterior será tão pequena que se pode considerar os dois valores iguais.

Assim considera-se a matriz U obtida pelo algoritmo como sendo uma solução estabilizadora para a equação de Riccati, como se pode verificar se se modificar a segunda ARE para a seguinte equação:

$$N = \hat{F}U\hat{F}^T - U - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} \quad (89)$$

O que irá dar o seguinte valor para a matriz N, muito próximo de o:

$$N = \begin{bmatrix} -1,819 * 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -8,673 * 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 & -8,673 * 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Possuindo soluções estabilizadoras para as duas equações de Riccati, pode-se calcular a matriz de ganho K do estimador:

$$K = \begin{bmatrix} 0.9900 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6283 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6283 \end{bmatrix}$$

Que permite então criar o estimador de estado, que irá estimar a seguinte trajetória:

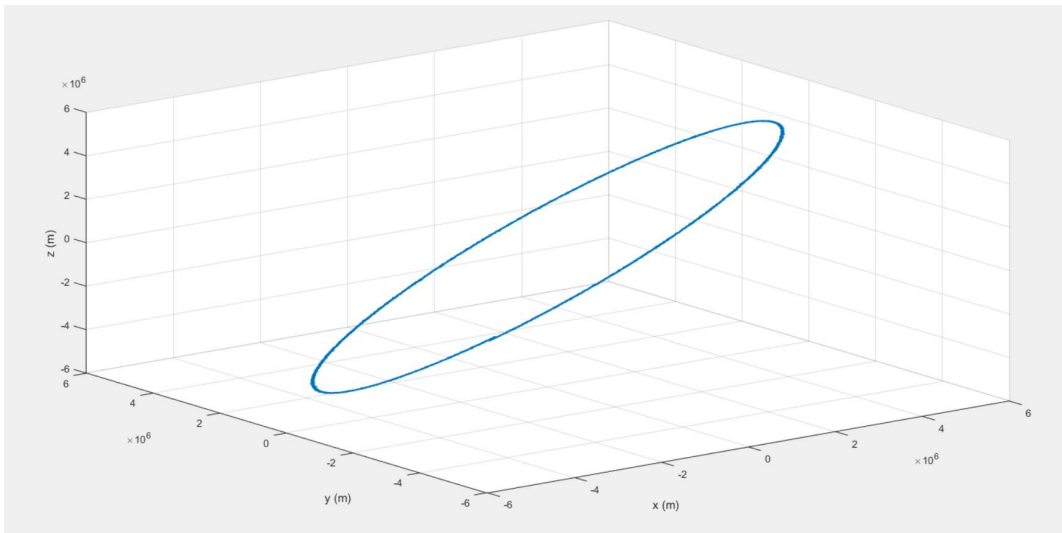


Fig. 65. Estimação da trajetória orbital da ISS segundo o novo estimador

Podendo-se também calcular a estimação da trajetória orbital da ISS segundo o novo estimador, sem ruído:

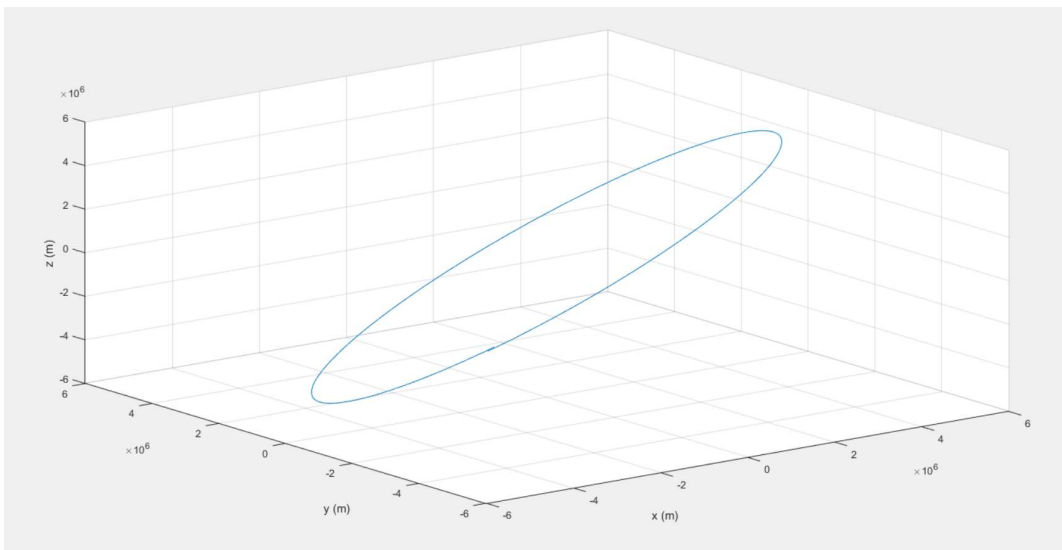


Fig. 66 Estimação da trajetória orbital da ISS segundo o novo estimador, sem ruído

A trajetória da figura (65) também apresenta ruído branco, e depois de ser sujeita a um filtro de Kalman adaptativo evanescente, terá o seguinte aspeto:

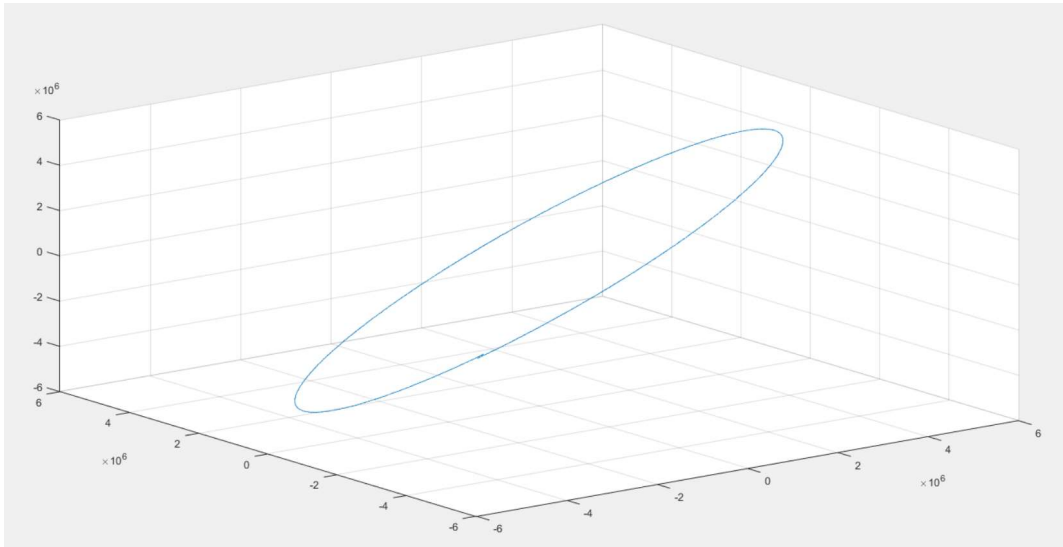


Fig.67. Estimação da nova trajetória orbital da ISS através de um FKRAE, 2º algoritmo

Uma vez que as incertezas consideradas foram relativamente baixas quando comparadas com o valor conhecido para a matriz F , a trajetória estimada a partir do novo estimador será apenas ligeiramente diferente da trajetória inicial, com as maiores alterações a ocorrerem no eixo de X .

A diferença entre a trajetória inicial sem ruído e a trajetória reconstruída será:

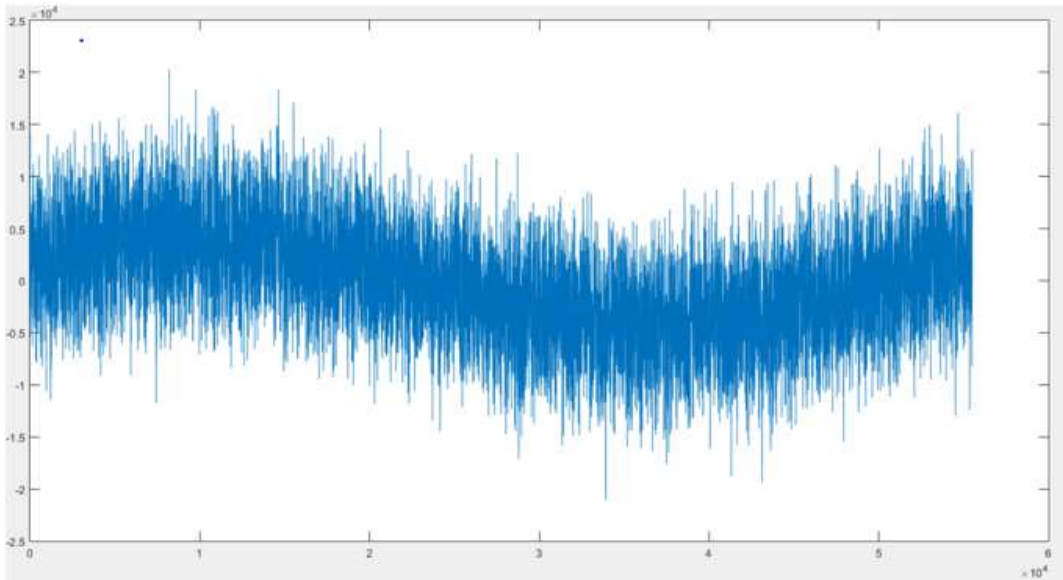


Fig.68. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o FKRAE, 2º algoritmo, eixo de X

Analisando a figura, e como já se tinha comprovado no primeiro exemplo, o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente apresenta-se como o melhor algoritmo para a reconstrução de trajetórias. O estimador inicial irá gerar uma nova trajetória sem a

presença de incertezas e linear, eliminando assim as possíveis discrepâncias que iriam existir entre a trajetória final linear e a trajetória inicial não linear, e que iriam prejudicar a precisão da trajetória reconstruída. O filtro de Kalman adaptativo evanescente, por sua vez irá depois reconstruir a trajetória linearizada pelo estimador, e como fora provado, irá possuir muito maior precisão para esta fase do que o filtro de Kalman clássico.

O resultado final é um filtro com a melhor precisão.

4.2.3. Estimação da trajetória de um voo comercial de um airbus A321

4.2.3.1. Geração de trajetória

Neste último exemplo prático, ir-se-á aplicar os filtros de Kalman desenvolvidos nesta dissertação numa nova situação, um voo de uma aeronave comercial.

Recorrendo ao website Flightradar24, obteve-se os dados de um voo comercial de um airbus A321, com partida do aeroporto Humberto Delgado em Lisboa e com destino o Luton Airport, em Londres. Este avião partiu do aeroporto de Lisboa às 20:30 e chegou a Londres às 23:00, horário de Greenwich, tendo o voo uma duração de duas horas e trinta minutos.

Ao contrário das trajetórias dos dois exemplos anteriores, esta trajetória foi gerada por um número muito mais baixo de pontos, apenas 296.

Começar-se-á por apresentar uma projeção ortográfica para o voo comercial de um airbus A321:



Fig.69. Projeção ortográfica do voo comercial de um airbus A321

Uma vez que os dados de voo fornecidos pelo flightradar24 estão em coordenadas geodéticas, do tipo $[lat, lon, h]$ será necessário converter primeiro estes dados para coordenadas cartesianas.

Para esta conversão, utilizar-se-á as seguintes equações, que irão converter coordenadas geodéticas para coordenadas ECEF, um sistema de coordenadas cartesianas cujo ponto $[0, 0, 0]$ se encontra no centro da Terra:

$$\begin{cases} X = (N(\phi) + h) \cos(lat) \cos(lon) \\ Y = (N(\phi) + h) \cos(lat) \sin(lon) \\ Z = (\frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h) \sin(lat) \end{cases} \quad (90)$$

Onde a é o semieixo maior da Terra, também chamado o raio equatorial, de aproximadamente 6378.1 km, b é o semieixo menor da Terra, também chamado raio polar, de aproximadamente 6356.8 km. $N(\phi)$ é o raio de curvatura da Terra para uma dada latitude, dado pela seguinte equação: [12]

$$N(\phi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 lat}} \quad (91)$$

Onde e^2 é o quadrado da excentricidade de um elipsoide, obtido pela seguinte expressão:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (92)$$

Usando o sistema de equações (90), obteve-se a seguinte representação ECEF do voo realizado:

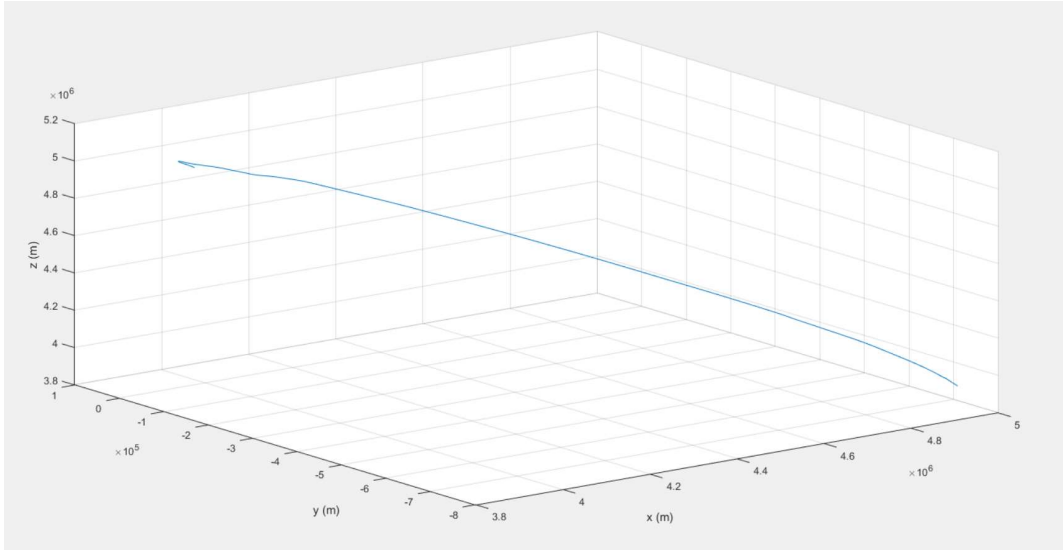


Fig.70. Representação 3D da trajetória de um voo comercial de um airbus A321

Sendo depois adicionado a cada ponto desta trajetória ruído branco, dado por $N(0, 15000^2)$, sendo obtida a seguinte trajetória:

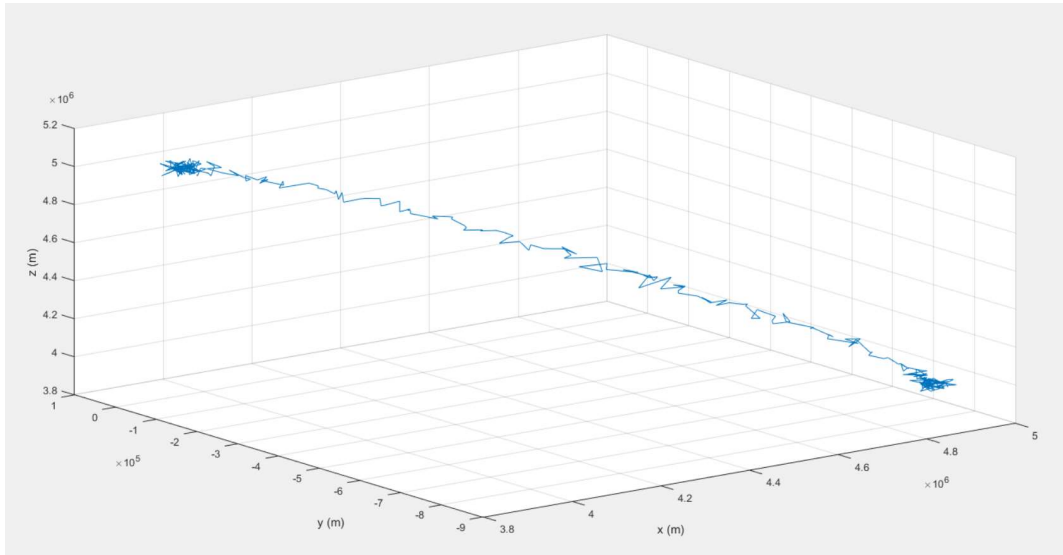


Fig.71. Representação 3D da trajetória de um voo comercial de um airbus A321 com a presença de ruído branco

É de comentar primeiro a concentração de ruído branco existente no início e no fim da trajetória. Este fenómeno ocorreu devido ao facto do website flightradar24 incluir dados da trajetória do avião não só em pleno voo, mas também enquanto este está parado nos dois aeroportos, e assim, esses estados terão a mesma posição, mas, devido ao facto do ruído branco ter uma distribuição normal, esses estados irão possuir ruídos diferentes.

4.2.3.2. Aplicação do Filtro de Kalman clássico

Primeiro, foi aplicado o filtro de Kalman clássico à trajetória obtida acima:

Considerando que a trajetória gerada pode ser descrita pelo sistema de equações de estado e medição:

$$x_k = Fx_{k-1} + w_k \quad (92)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (93)$$

E considerando os seguintes valores para as diferentes matrizes:

Matriz de transição de estado F:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de medição H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância de erro da equação de estado:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância de erro equação de medições:

$$R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância de erro inicial P_0 :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo obtidos os seguintes resultados para a estimação de dados:

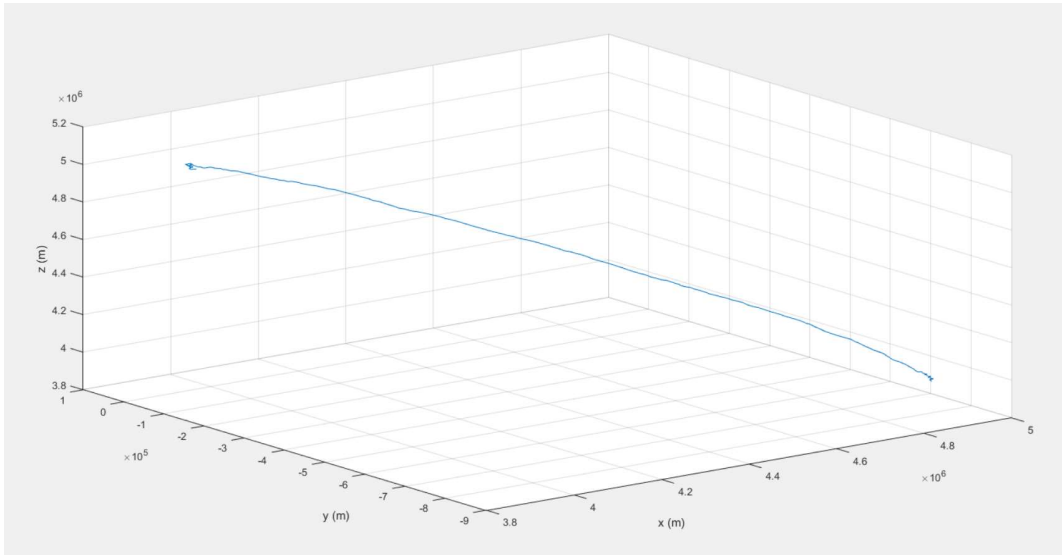


Fig.72. Representação 3D da trajetória de um voo comercial de um airbus A321, através de um filtro de Kalman clássico

Apresentando-se também a diferença entre os valores reconstruídos e os valores originais sem ruído, para uma melhor compreensão da performance do filtro:

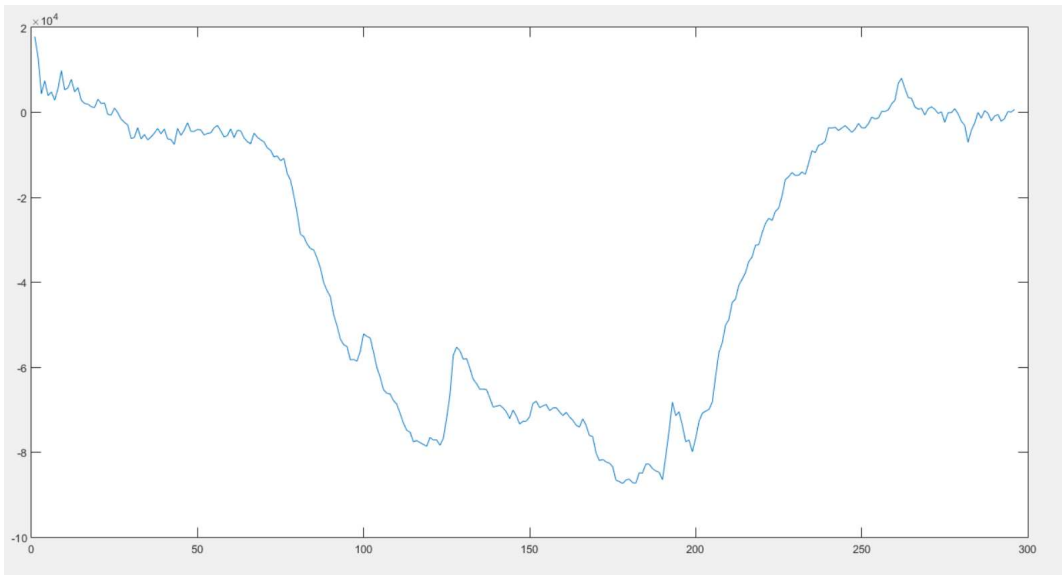


Fig.73. Diferença (em metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FK

4.2.3.3. Aplicação do filtro de Kalman adaptativo evanescente

Para a implementação dos três algoritmos do filtro de Kalman adaptativo evanescente, considerou-se as matrizes do sistema de equações modelo como sendo iguais às do filtro de Kalman, com a exceção da matriz Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 10^8 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$$

O valor inicial do fator de esquecimento é 1.

O valor da matriz Q foi escolhido deliberadamente por ser elevado. Com estes valores selecionados foram obtidos os seguintes resultados para os diferentes algoritmos:

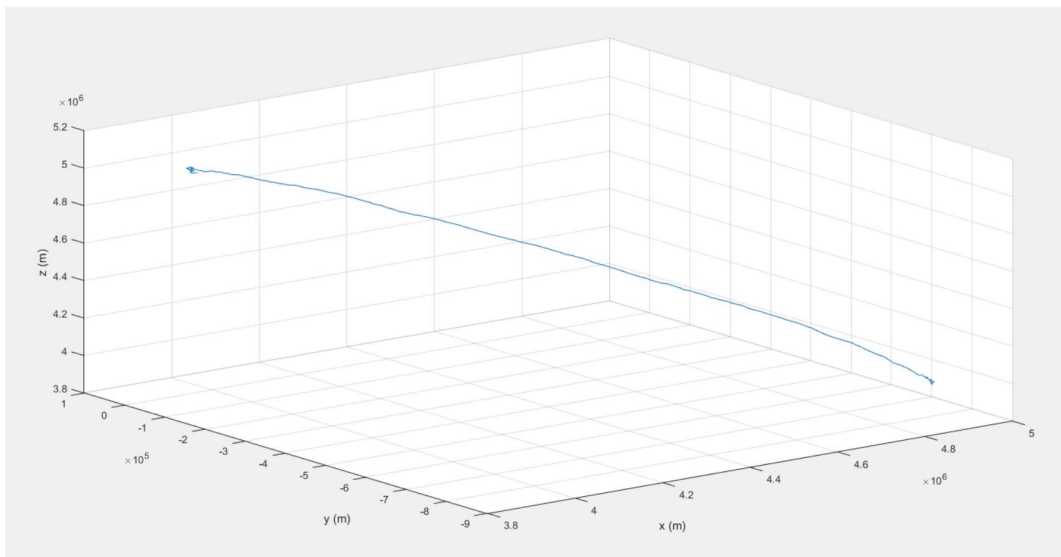


Fig.74. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 através do 1º algoritmo do FKAE

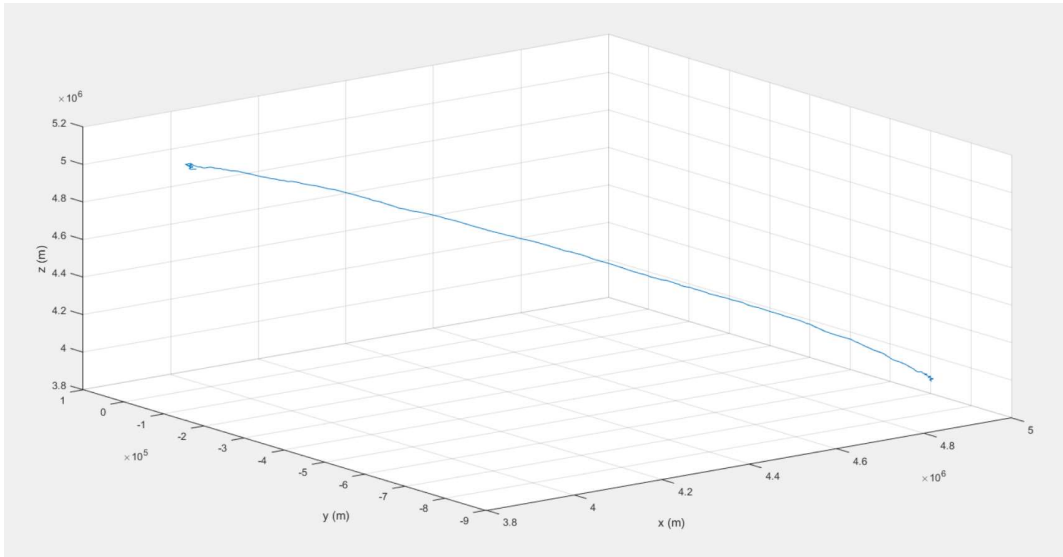


Fig.75. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus através do 2º algoritmo do FKAE

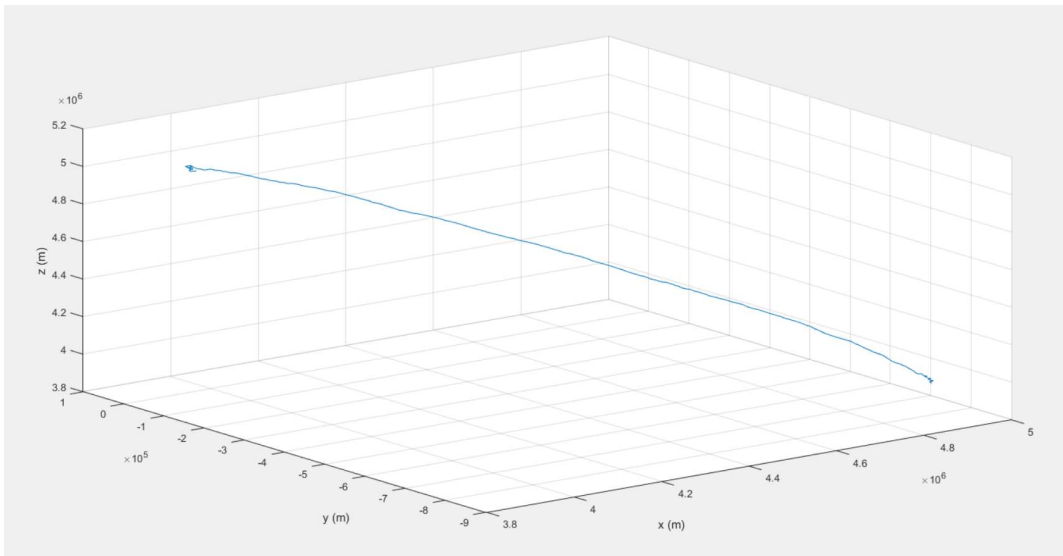


Fig.76. Representação 3D da trajetória do voo comercial de um airbus A321 através do 3º algoritmo do FKAE

Calculou-se, também, as diferenças entre os valores originais e os valores reconstruídos, no eixo de x.

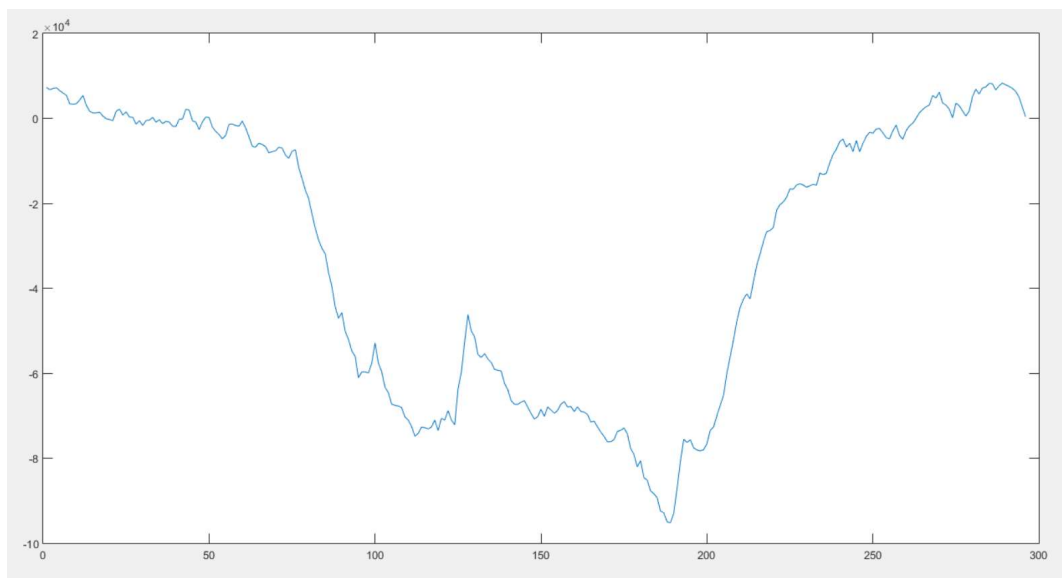


Fig.77. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 1º algoritmo

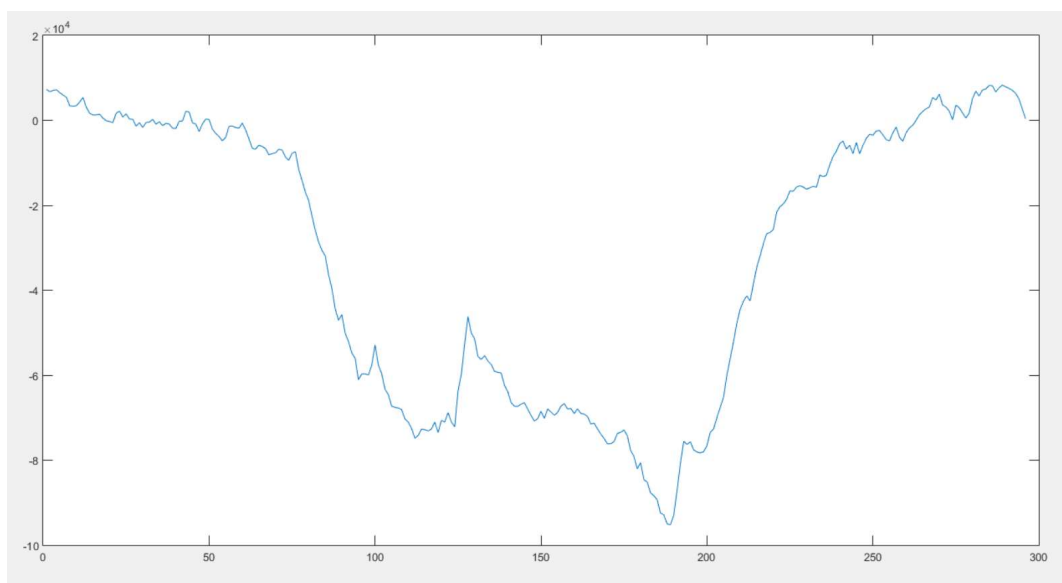


Fig.78. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 2º algoritmo

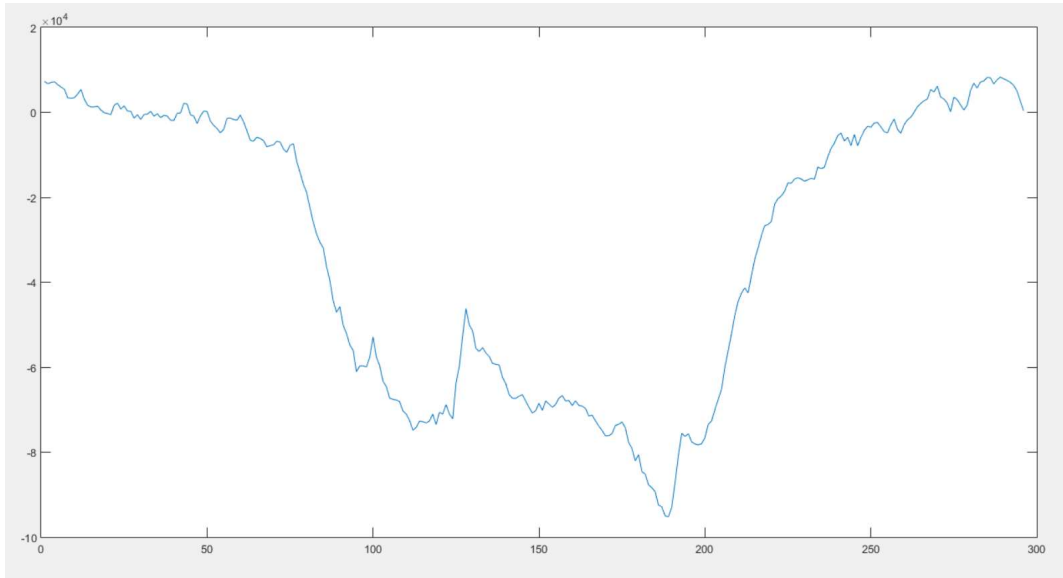


Fig.79. Diferença (metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKAE, 3º algoritmo

Observando as trajetórias estimadas para cada um dos algoritmos, assim como as diferenças entre a trajetória inicial sem ruído e a reconstruída, não só se observa que as trajetórias reconstruídas pelos algoritmos são iguais entre si, mas também são quase iguais à trajetória gerada pelo filtro de Kalman clássico, sendo os valores da diferença para os três algoritmos ligeiramente diferentes dos valores para a trajetória reconstruída para o FK, uma vez que as matrizes R usadas nos dois tipos de filtro de Kalman serão diferentes.

Estas observações são comprovadas pela evolução gráfica do valor do fator de esquecimento:

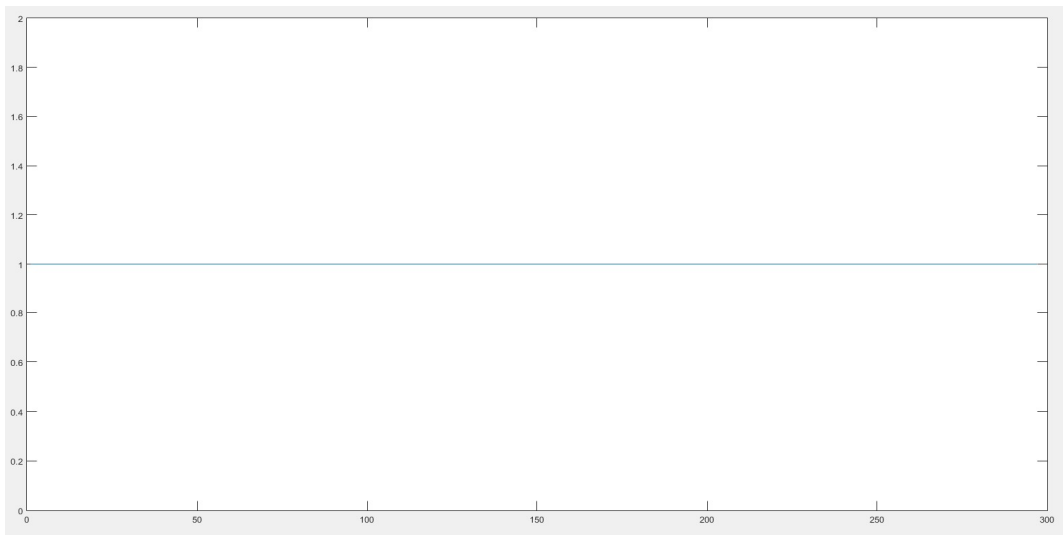


Fig.80. Evolução do fator de esquecimento ao longo do FKAE, do voo comercial de um airbus A321

Como se pode observar, durante a estimação dos valores filtrados da trajetória, todos os valores para o fator de esquecimento serão um.

Para a esta trajetória, e devido aos valores selecionados para as matrizes Q e R, a diferença entre os valores medidos e os valores estimados não irá causar problemas de divergência, e assim, o filtro de Kalman adaptativo evanescente não irá reagir com a priorização dos estados atuais sobre os mais antigos, tendo todos os estados a mesma importância na geração de estados novos, sendo o fator de esquecimento igual a um para todo o algoritmo.

Assim, para esta trajetória, uma vez que o fator de esquecimento irá ser sempre um, a equação da covariância de erro do filtro de Kalman adaptativo evanescente será igual à equação de covariância de erro do filtro de Kalman clássico, e o filtro de Kalman adaptativo evanescente ir-se-á comportar como um filtro de Kalman clássico.

4.2.3.4. Aplicação do filtro de Filtro de Kalman robusto

Por último, elaborou-se um filtro de Kalman robusto para filtrar a trajetória.

Tal como nos outros exemplos, dividiu-se a matriz de transição de estado F, numa parte conhecida e estável, F, e numa parte desconhecida, ΔF com valor variável segundo a equação (54).

Considerou-se as partes conhecidas das matrizes F e H, assim como as matrizes Q e R como possuindo os mesmos valores que as matrizes usadas para a construção do filtro de Kalman clássico.

A parte incerta da matriz de transição de estado F, ΔF foi assumida como sendo:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

Com $\|\delta\| \leq 0.9$

Para este exemplo, ao contrário do exemplo anterior, pretendeu-se concentrar as incertezas nos elementos do eixo de Z. Pretendeu-se também gerar grandes valores para as incertezas, de modo a observar o impacto que estas terão na matriz F atualizada, \hat{F} , assim como na trajetória final gerada pelo filtro de Kalman robusto.

A matriz H, de medições, foi considerada como sendo completamente conhecida, assim $\Delta H=0$.

Considerando:

$$H1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$H2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = [0 \ 0 \ 0.09]$$

Assumindo também os valores dos escalares ε e ν :

$$\varepsilon = 0.001;$$

$$\nu = 0.001;$$

De seguida, procurou-se encontrar um estimador estável e robusto. Para esse fim, procurou-se soluções estáveis para as duas ARE.

Para encontrar uma solução estável $P=P^T>0$ para a primeira ARE recorreu-se ao algoritmo usado nos outros dois exemplos.

Primeiro transformou-se a primeira ARE na seguinte equação:

$$M = F^T P F - P + F^T P \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left(I - \bar{Q}^{\frac{1}{2}} P \bar{Q}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{Q}^{\frac{1}{2}} P F + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (94)$$

Desenvolvendo-se um algoritmo para obter novos valores de P, através de valores mais antigos, P_0 :

$$P = F^T P_0 F + F^T P_0 \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left(I - \bar{Q}^{\frac{1}{2}} P_0 \bar{Q}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \bar{Q}^{\frac{1}{2}} P_0 F + \varepsilon (E^T E + \nu I) \quad (95)$$

Valores esse que serão depois utilizados para obter valores para a matriz M.

Sendo o valor inicial de P_0 :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Registando-se a evolução dos elementos $M(1,1)$, $M(2,2)$ e $M(3,3)$:

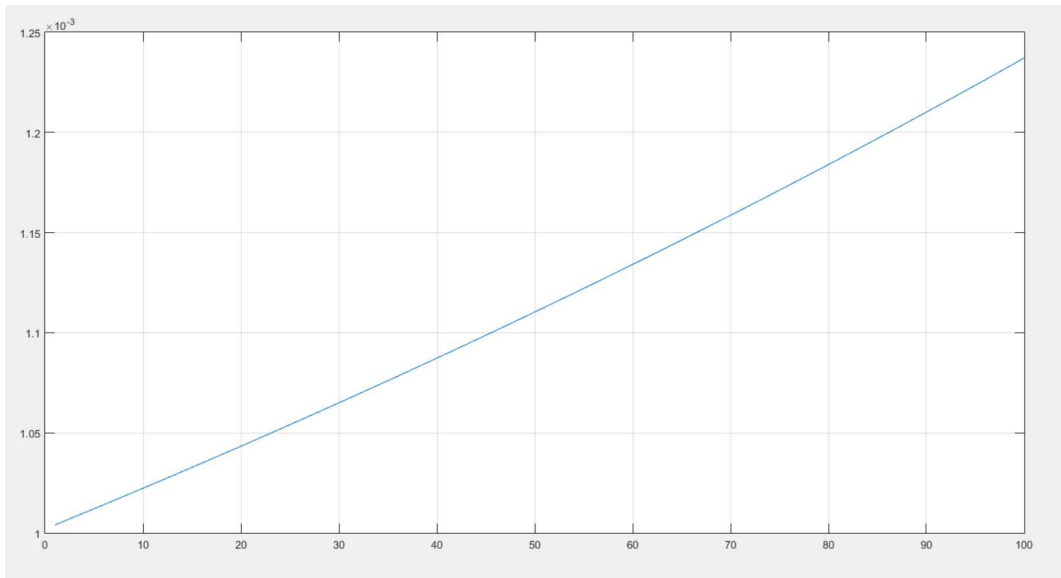


Fig.81. Evolução do elemento $M(1,1)$, do voo comercial de um airbus A321

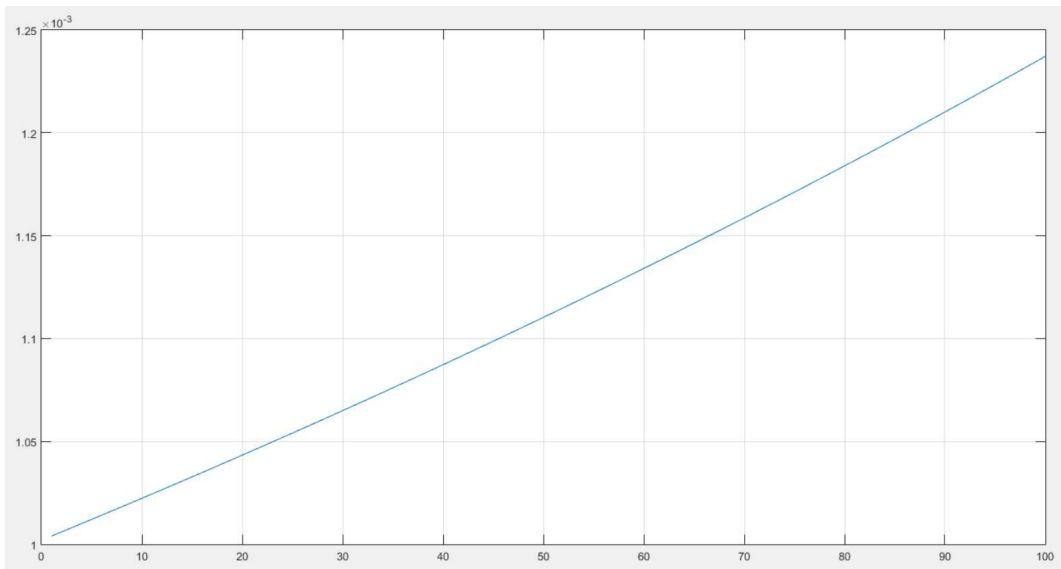


Fig.82. Evolução do elemento $M(2,2)$ do voo comercial de um airbus A321

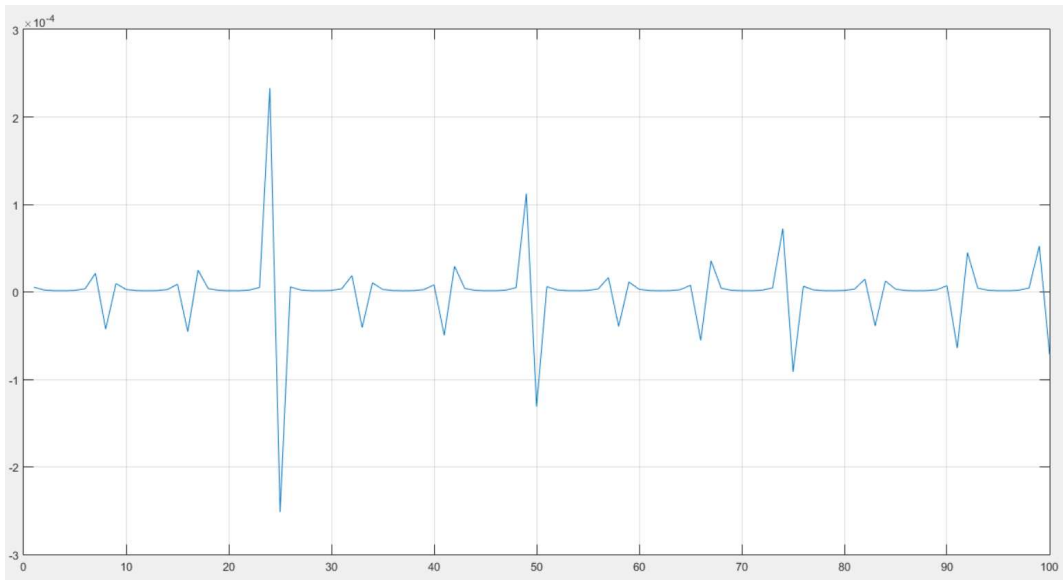


Fig.83. Evolução do elemento M (3,3), do voo comercial de um airbus A321

Uma análise às figuras (81), (82) e (83) permite verificar que a primeira iteração de P será aquela no qual a matriz M mais se aproxima de zero:

$$M = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0012 & 0 \\ 0 & 0 & 8.284 * 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Observando a matriz M, pode-se verificar que esta se encontra suficientemente perto de zero, logo a matriz P pode ser considerada uma solução estável para a primeira ARE.

Obtendo a solução P para a primeira ARE, é possível agora obter os valores atualizados para incertezas das seguintes matrizes

Matriz de transição de estado atualizada:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0011 & 0 \\ 0 & 0 & 9.2661 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância de erro de transição de estado.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 9.2661 * 10^5 \end{bmatrix}$$

Como, não foram consideradas incertezas na matriz de medições, e a matriz H2 foi considerada como sendo uma matriz zero, o valor atualizado das matrizes de medição atualizada \hat{H} será igual ao valor da matriz H, o valor da matriz de covariância de erro da equação de medição atualizada \hat{R} será igual a R e a matriz de “cross covariance” M será igual a zero.

Verifica-se também na matriz \hat{F} que enquanto os elementos dos eixos X e Y se mantêm iguais, o elemento do eixo Z, uma vez que é nesse eixo que se escolher impor incertezas, terá valores mais elevados.

De seguida, procurou-se uma solução estável $U = U^T \geq 0$

Para esse efeito, à semelhança dos outros exemplos, desenvolveu-se um algoritmo para obter novos valores para U a partir de valores mais antigos, U_0 , sendo o valor inicial de U_0 :

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}U_0\hat{F}^T - (\hat{F}U_0\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U_0\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U_0\hat{H} + M)^T + \hat{Q} = U \quad (96)$$

A partir desta equação, obteve-se a evolução iterativa para os elementos U (1,1), U (2,2) e U (3,3):

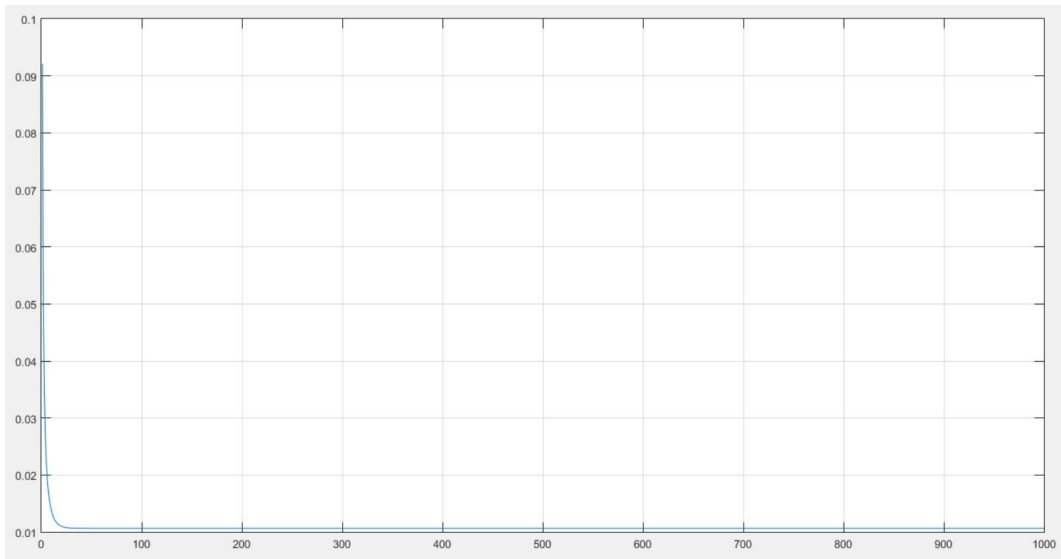


Fig.84. Evolução iterativa do elemento $U(1,1)$ do voo comercial de um airbus A321

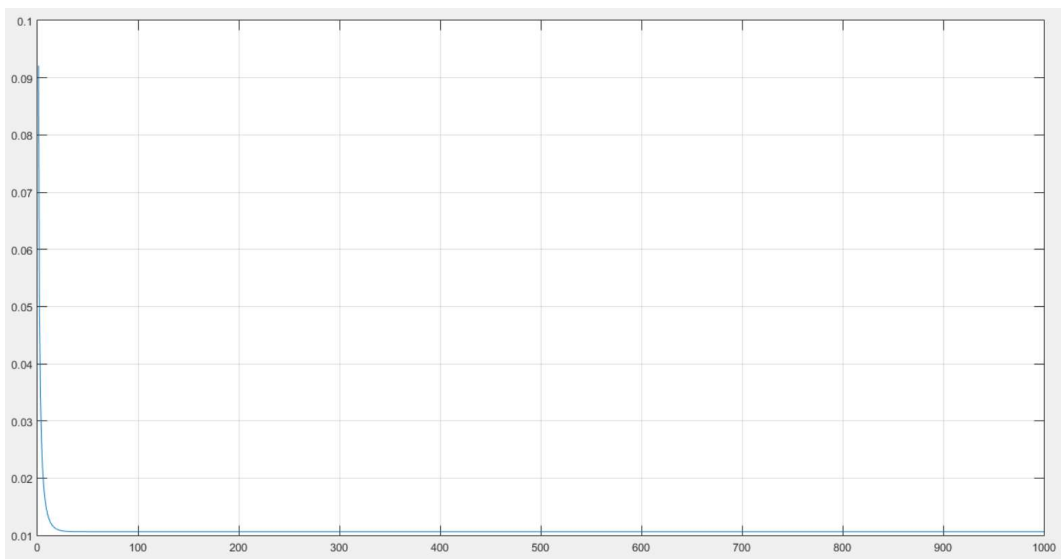


Fig.85. Evolução iterativa do elemento $U(2,2)$, do voo comercial de um airbus A321

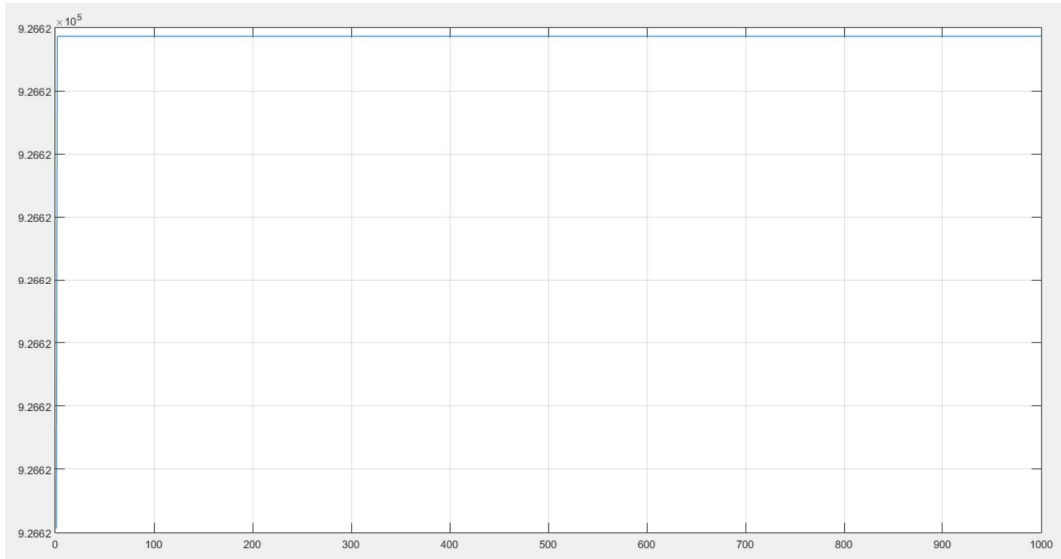


Fig.86. Evolução iterativa do elemento U (3,3), do voo comercial de um airbus A321

Analisando as figuras (86) (87) e (88), verifica-se que os valores da matriz U estabilizam nas primeiras 100 iterações, sendo, na milésima iteração, a diferença entre o valor de U, e o seu valor anterior tão pequeno que pode ser desprezada.

Assim, considera-se a milésima iteração de U como uma solução estabilizadora da segunda ARE.

Pode-se confirmar esta afirmação a partir da seguinte equação:

$$N = \hat{F}U\hat{F}^T - U - (\hat{F}U\hat{H}^T + M)(\hat{R} + \hat{H}U\hat{H}^T)^{-1}(\hat{F}U\hat{H} + M)^T + \hat{Q} \quad (97)$$

Onde, se, se considerar o valor da milésima iteração de U, obtêm-se:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.259 * 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Com as duas ARE resolvidas, pode-se calcular a matriz de ganho:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0961 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0961 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9174 \end{bmatrix}$$

Pode-se finalmente também obter uma trajetória atualizada para as incertezas:

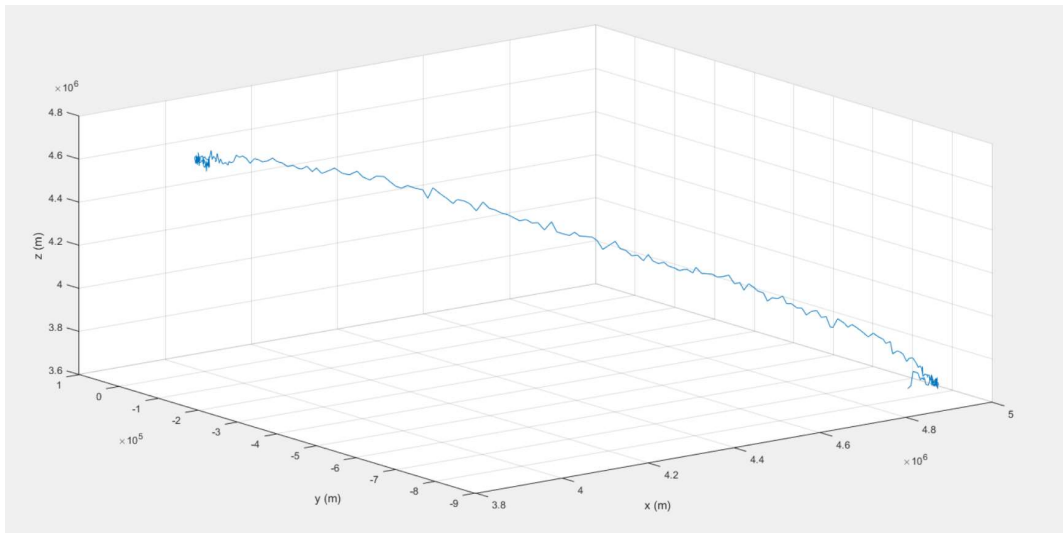


Fig.87.Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador

Uma vez que as incertezas consideradas foram extremamente elevadas quando comparadas com o valor conhecido para a matriz F , a trajetória estimada a partir do novo estimador sofreu grandes alterações em relação à trajetória inicial, sendo essas alterações focadas sobretudo no eixo Z .

E, correndo o estimador gerado para a trajetória original sem ruído do voo, obtém-se a seguinte trajetória:

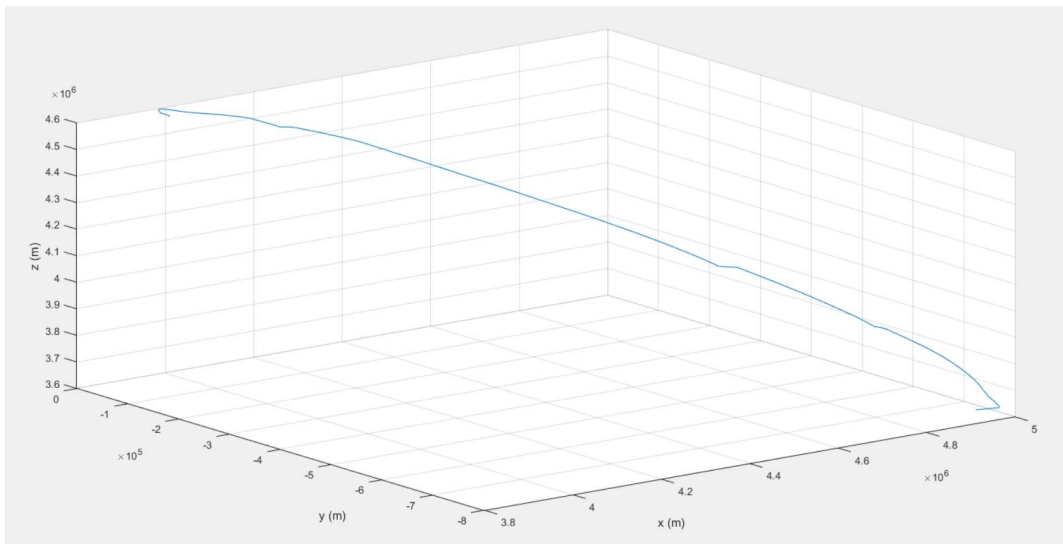


Fig.88.Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador, sem ruído branco.

Por último, utiliza-se um filtro de Kalman clássico para estimar valores novos sem a presença de ruído branco. É de salientar que, sob circunstâncias diferentes, e como foi provado nos exemplos anteriores, dever-se-ia utilizar um filtro de Kalman adaptativo evanescente para melhor precisão no processo de filtragem, mas como já se provou, para este exemplo e para os valores considerados para as matrizes Q e R, o FKAE comportar-se-á como um FKC.

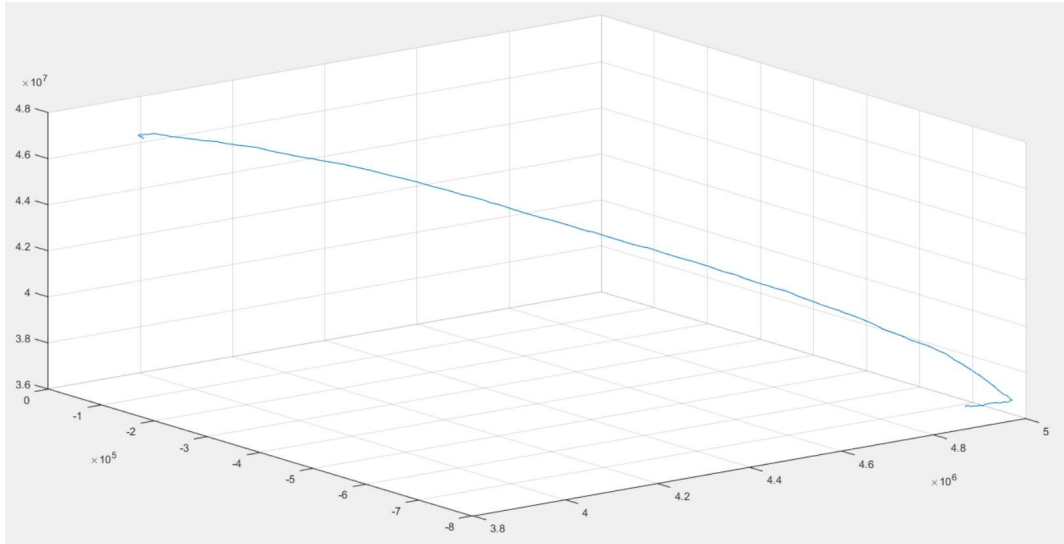


Fig.89. Estimação da trajetória 3D do voo comercial de um airbus A321, segundo o novo estimador, recorrendo ao filtro de Kalman robusto

Obtendo-se também a diferença entre a trajetória reconstruída e a trajetória original sem ruído, gerada pelo estimador:

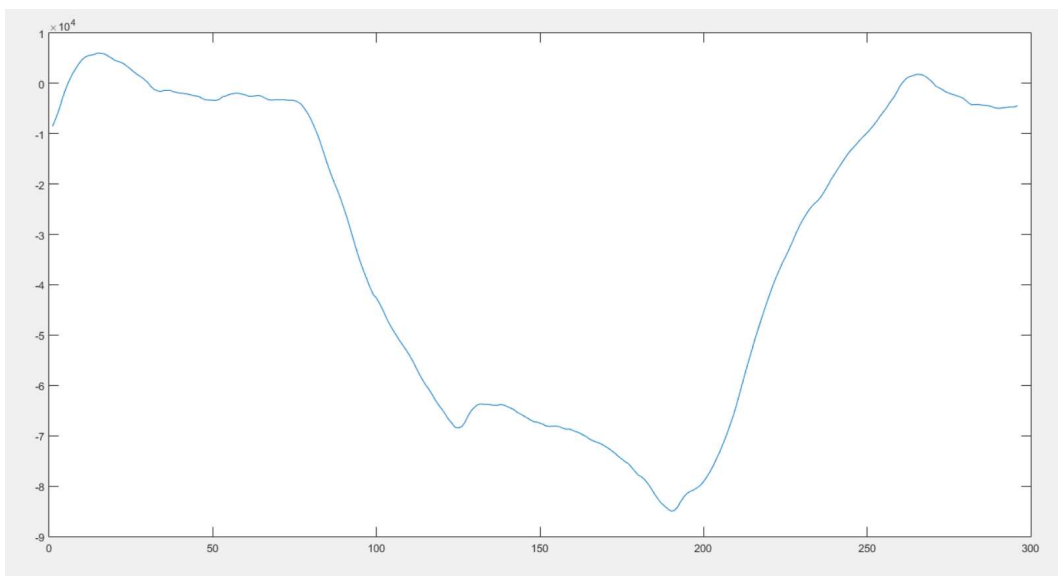


Fig.90. Diferença (em metros) entre os valores sem ruído e os valores reconstruídos para o voo comercial, FKR

Observando estes resultados, e comparando-os com os resultados das figuras (73), (77), (78), (79) verifica-se que houve um incremento na precisão da reconstrução aplicando o FKR, justificado pelo facto do novo estimador ter reproduzido linearmente a trajetória original, e como tal ter removido todos os erros resultantes, antes da trajetória ser sujeita ao filtro de Kalman Clássico.

Desta forma, comprova-se mais uma vez, que o FKR é o mais indicado para missões que exijam um elevado nível de precisão na reconstrução das suas trajetórias.

Capítulo 5. Conclusão e trabalhos futuros

Na presente dissertação pretendeu-se estudar a implementação de dois filtros de Kalman distintos resultantes da modificação do algoritmo do filtro de Kalman clássico: o filtro de Kalman adaptativo evanescente e o filtro de Kalman robusto, como soluções para alguns problemas que afetam o algoritmo do filtro de Kalman clássico, respetivamente o fenómeno de divergência entre valores medidos e estimados que ameaça a performance do filtro, e a presença de incertezas no sistema de equações que não são consideradas num filtro de Kalman clássico, que então pode gerar uma trajetória que não seja inteiramente realista.

Pretendeu-se também melhor a precisão no processo de reconstrução de trajetórias.

Para esse efeito, juntou-se os dois filtros de Kalman analisados nesta dissertação num só filtro, o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente, de modo a combinar as vantagens de ambos os filtros: o filtro de Kalman robusto e o filtro de Kalman adaptativo evanescente.

Para demonstrar que os filtros analisados podem ser aplicados a situações práticas reais, estes foram aplicados ao movimento orbital da estação espacial internacional, e a um voo comercial de um airbus A321, com partida do aeroporto Humberto Delgado em Lisboa e com destino o Luton Airport, em Londres, onde apenas foi acrescentado ruído branco em proporções irrealistas para melhor visualizar a diferença entre a trajetória a aplicar os diferentes filtros, e a trajetória com os ruídos filtrados.

Da mesma forma, as incertezas consideradas para a aplicação do filtro de Kalman robusto não podem ser consideradas realistas. Os diferentes valores da incerteza foram escolhidos para as diferentes trajetórias de modo a demonstrar de uma forma perceptível e clara o quanto as incertezas presentes no sistema de equações (ou a não consideração das incertezas) podem transformar a trajetória gerada final.

Numa situação real, as incertezas associadas a um sistema terão valores mais baixos, e o novo estimador construído irá estimar estados muito próximos dos estados estimados sem ter as incertezas em conta. Porém essa diferença pode ser crítica para aplicações do filtro de Kalman que exijam um maior grau de precisão.

Considerando primeiro o filtro de Kalman adaptativo evanescente e face aos resultados obtidos, conclui-se que este algoritmo é uma boa alternativa ao uso de um filtro de Kalman clássico, pelas seguintes razões: a sua performance não irá estar tão dependente

da escolha das matrizes do sistema de equações, sobretudo a matriz de covariância do erro da equação de medições, a matriz R ; e para uma missão que não requeira um filtro de Kalman otimizado, o filtro de Kalman adaptativo evanescente irá oferecer uma maior gama de valores para selecionar para a matriz R . Se a missão para qual o filtro de Kalman está a ser selecionado requeira um nível de precisão mais elevado, então o FKAE irá possuir uma melhor precisão na reconstrução de trajetórias que o FKC. O Filtro de Kalman adaptativo evanescente provou-se também ser adaptativo e verificou-se a sua superioridade em lidar com estados estimados incorretamente, apresentando melhores resultados que o FKC.

Considerando de seguida o filtro de Kalman robusto, verificou-se que este apresentou os melhores resultados na reconstrução de trajetórias, uma vez que este não só filtrou o ruído existente na trajetória, mas mais importante, linearizou a trajetória a filtrar primeiro, de modo a remover perdas de informação produzidas pela linearização de uma trajetória não linear. Verificou-se, também, que devido ao facto do filtro de Kalman Robusto ser constituído por um estimador robusto a gerar trajetórias sem incertezas e lineares, e um filtro de Kalman a reconstruir essas trajetória, este podia ser substituído por um filtro de Kalman adaptativo evanescente, para ainda maior precisão na reconstrução.

A grande contribuição desta dissertação na reconstrução de trajetórias foi a junção do algoritmo do filtro de Kalman adaptativo evanescente e do algoritmo do filtro de Kalman robusto num novo algoritmo, o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente, com uma precisão no processo de reconstrução não só superior ao filtro de Kalman clássico, mas também ao filtro de Kalman adaptativo evanescente e ao filtro de Kalman robusto.

Nesta dissertação considerou-se as matrizes de covariância Q e R como sendo constantes ao longo do processo iterativo. Na realidade, estas matrizes irão variar com o processo iterativo, sendo a decisão de considerar as matrizes de covariâncias constantes uma simplificação para reduzir o tempo de compilação dos códigos para os diferentes algoritmos. Para trabalhos futuros, seria interessante verificar o impacto da variação das matrizes Q e R na aplicação dos diferentes filtros de Kalman desenvolvidos.

Também para trabalhos futuros, seria interessante aplicar o filtro criado nesta dissertação, o filtro de Kalman robusto adaptativo evanescente, para estimação de dados em aplicações aviónicas.

Bibliografia

1. Sorenson, H. W., “Least-squares estimation: from Gauss to Kalman,” IEEE Spectrum, (1970), 7: 63-68.
2. Xie. L., Soh. Y, C, Souza. C. E. “Robust Kalman Filtering for uncertain discrete-time systems”, IEEE transactions on automatic control, (1994), 39, (6): 1310-1314.
3. Xia, Q., Rao, M., Ying, Y., Shen, X., “Adaptative fading Kalman filter with an application”, Automatica, (1994), 30, (8), 1333-1338.
4. Kalman, R. E., “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Journal of Basic Engineering, (1960), 82 (1), 35-45.
5. Florescu I., “Probability and stochastic Processes”, Wiley, (2015).
6. Welch, G., Bishop G.,” An Introduction to the Kalman Filter”, Chapel Hill, (2006).
7. Maybeck, Peter S., “Stochastic models, estimation and control”, volume 1, mathematics in science and engineering, (1979).
8. Rhudy, M. B., Salguero, R. and Keaton, H., A. “A Kalman filtering tutorial for undergraduate students” International Journal of Computer Science & Engineering Survey (IJCSSES), (2017), 8 , (1), 1-18.
9. Ding, W., Wang. J and Rizos C. “Improving Adaptive Kalman Estimation in GPS/INS”, Integration the Journal of Navigation (2007), 60:517-529.
10. Smith. S. W., “The Scientist and engineer’s Guide to Digital Signal Processing”, California Technical Publishing, (1997).
11. Vermeille, H., “Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates”, Journal of Geodesy, (2002), 76, 451-454.
12. Bowring, B. R. "Transformation from Spatial to Geographical Coordinates", Survey Revised, (1976) 23 (181): 323-327.
13. Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., “Optimal Filtering”, Prentice-Hall, (1979).
14. Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., “Optimal Control: Linear Quadratic Methods”, Dover Publications, (2007).
15. Bousson K. “Apontamentos das aulas teóricas de Otimização e controlo de voo”, Departamento de ciências aeroespaciais, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2018.

16. Souza, C. E. and Xie, L., "On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers," *System Control Letter*, (1992) 18: 61-71.
17. Dente, P. "H ∞ Orbital Control of a Space Vehicle on a Low Earth Orbit", dissertação de mestrado, Departamento de ciências aeroespaciais, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2019.
18. Fitzgerald R. L., "Divergence of the Kalman filter *IEEE Trans. Automatic Control*", AC-16, (1971): 736-747.
19. Friedland, B., "Control System Design: An Introduction to State-space Methods", McGraw-Hill, (2002).
20. Graham C., Robert L. Payne, "Dynamic System Identifications: Experiment Design and Data Analysis", Goodwin, (1986).
21. Hargrave, P., "A tutorial introduction to Kalman filtering", *IEEE Colloquium on Kalman Filters: Introduction, Applications and Future Developments*, (1989).
22. [http:// https://www.flightradar24.com/](http://https://www.flightradar24.com/) (visitado em Abril de 2020).
23. Jazwinski, A. H., "Stochastic Processes and Filtering Theory", Academic, (1970).
24. Kalman, R. E. and R. S. Bucy 1961 "New results in linear filtering and prediction theory". *Translated ASME Journal of Basic Engineering*, 83, (95)
25. L. Xie, C. E. de Souza, and M. Fu, "H ∞ estimation for discrete-time linear uncertain systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (1991) 1: 111-123.
26. M. Fu, C. E. de Souza, and Z. Luo, "Finite horizon robust Kalman filter design," *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*, (1999): 4555-4560.
27. Park, J. U. et al., "Orbital rendezvous using two-step sliding mode control", *Aerospace Science and Technology*, (1999), 3(4): 239-245.
28. Shaked, U. and Souza, C. E., "Robust minimum variance filtering", *IEEE Trans. on Signal Processing*, (1995), 43: 2474-2483.

ANEXO

Publicações Realizadas

Dente, P.M.M., Marco, D.L., Bousson, K., " H_∞ Orbital Control and Trajectory Estimation of a Space Vehicle on a Low Earth Orbit". Julho de 2020. *Submetido*.

Marco, D.L., Bousson, K., "Adaptive Robust Kalman Filtering with Increased State Estimation Performance". Julho de 2020. *Submetido*.