UMA INTRODUÇÃO À FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

EDUARDO CASTRO

Este livro é um manual para um primeiro curso de filosofia da matemática. Pode ser usado ao nível de uma graduação ou de uma pós-graduação, de filosofia ou de matemática. Restantes académicos e investigadores, bem como professores do ensino não-universitário, podem também encontrar aqui uma referência e uma orientação para o seu trabalho e investigação. O livro apenas pressupõe conhecimentos de matemática e de filosofia, de nível pré-universitário.

I N V E S T I G A Ç Ã O

EDIÇÃO
Imprensa da Universidade de Coimbra
Email: imprensa@uc.pt
URL: https://www.uc.pt/imprensa
Vendas online: https://livrariadaimprensa.uc.pt

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Imprensa da Universidade de Coimbra

CONCEÇÃO GRÁFICA
Imprensa da Universidade de Coimbra

IMAGEM DA CAPA
Aldebaran S — Unsplash

INFOGRAFIA
Pedro Bandeira

EXECUÇÃO GRÁFICA
KDP

ISBN
978-989-26-2710-6

ISBN DIGITAL
978-989-26-2711-3

DOI
https://doi.org/10.14195/978-989-26-2711-3

DEPÓSITO LEGAL
544198/25

UMA **INTRODUÇÃO** À **FILOSOFIA** DA **MATEMÁTICA**

EDUARDO CASTRO

(Página deixada propositadamente em branco)

SUMÁRIO

Desde sempre, na história da humanidade, quando os nós da civilização se tornam tão apertados que não permitem mais a passagem do sangue da Vida, um Bárbaro vem com um machado e diz: “Ça suffit”. Soulages é este Bárbaro iluminado que faz tábua rasa de tudo para encontrar o essencial. Neste Ocidente que valoriza as imagens em detrimento das pessoas, como não ficar fascinado pelas presenças antracite do único profeta de toda a história da pintura – fora dela?

Lydie Dattas, *La Blonde: Les icônes barbares de Pierre Soulages*, (Paris : Gallimard, 2014).

(Página deixada propositadamente em branco)

PREFÁCIO

Este livro é um manual para um primeiro curso de Filosofia da Matemática. Pode ser usado ao nível de uma graduação ou de uma pós-graduação, de Filosofia ou de Matemática. Restantes académicos e investigadores, bem como professores do ensino não-universitário, podem também encontrar aqui uma referência e uma orientação para o seu trabalho e investigação. O livro apenas pressupõe conhecimentos de matemática e de filosofia, de nível pré-universitário.

O livro é constituído por uma introdução e seis capítulos: "Filosofia da Geometria", "Logicismo", "Intuicionismo", "Realismo Matemático", "Antirrealismo Matemático" e "Revoluções em Matemática". Excetuando o último capítulo, os capítulos são quase totalmente autocontidos e podem assim ser estudados de forma separada.

O capítulo 1, "Filosofia da Geometria", analisa diferentes conceções filosóficas sobre a geometria, desde a geometria euclidiana grega até ao surgimento das geometrias não-euclidianas no século XIX. O capítulo 2, "Logicismo", analisa passo a passo a tentativa de Gottlob Frege de fundar a aritmética em princípios lógicos. O capítulo 3, "Intuicionismo", analisa a conceção segundo a qual entidades matemáticas são entidades criadas pela mente humana. Os capítulos 4 e 5, "Realismo Matemático" e "Antirrealismo Matemático", são capítulos de metafísica matemática. Analisam-se conceções a favor e contra a existência de entidades matemáticas. O capítulo 6, "Revoluções em Matemática", revisita os três primeiros capítulos do livro, os capítulos sobre as geometrias não-euclidianas, a lógica moderna e o intuicionismo, segundo uma ótica de episódios revolucionários na matemática.

Com vista à utilização do livro no contexto de ensino-aprendizagem, no final de cada capítulo apresenta-se uma lista de "Leituras adicionais recomendadas". Um conjunto de fontes primárias sobre o tópico do respetivo capítulo. Serve para aprofundar o estudo ao longo do capítulo e recomenda-se para leitura e discussão nas aulas. No final do livro, por sua vez, apresenta-se uma "Bibliografia Anotada". Um conjunto complementar de referências para o estudo individual e autónomo dos alunos. Esta lista é particularmente útil para a redação de trabalhos escritos, sobre os tópicos abordados nos capítulos. Os docentes podem também usar esta bibliografia para uma preparação de fundo das aulas.

Procurou-se que o manual tivesse uma extensão suscetível de ser integralmente coberta num semestre letivo. Muitos assuntos foram assim de antemão colocados de parte. O manual é completamente omisso sobre o Estruturalismo Matemático, a Explicação Matemática, o Predicativismo e a Filosofia da Matemática de Wittgenstein e a de Lakatos. Existem ainda outros assuntos que são apenas brevemente referidos como o Formalismo Matemático e a Teoria de Conjuntos ZFC.

Neste livro, todas as citações foram por mim traduzidas, quando originalmente redigidas em língua inglesa ou em língua francesa. Quando existe no mercado livreiro uma tradução portuguesa, da qual eu tenha conhecimento, por vezes, referencio a tradução, mas tomando a liberdade de introduzir ligeiras modificações, se as considerar apropriadas.

No capítulo 5, secções 2 a 5, fiz algum uso de material meu publicado em Castro (2011, 2014). No capítulo 6, secções 1 a 4, fiz algum uso de material meu publicado em Castro (2022). O material outrora publicado foi sujeito a uma operação de reescrita, tornando-o mais conforme com o nível de compreensão que este manual encerra. Aumentou-se a granularidade dos argumentos e procurou-se simplificar as ideias.

Estou muito agradecido a José Mestre por me ter providenciado uma crítica detalhada a respeito de uma versão preliminar do Capítulo 2. Estou agradecido a dois árbitros anónimos da IUC os comentários e as incorreções que identificaram numa versão preliminar deste livro.

Escusado será dizer que os eventuais erros e falhas que persistam neste livro são da minha inteira responsabilidade. Espero que a distância temporal ao texto e a bondade noutros pares me aportem outras falhas que corrigirei numa nova edição se a IUC assim também concordar.

Entre 2007 e 2024, fui membro integrado do Grupo LanCog, Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa. Presentemente, sou apenas colaborador do grupo. No LanCog, a fronteira para a minha investigação foi definida pelo limite da minha própria curiosidade intelectual. Não teria reunido condições para escrever um manual deste género, onde confluem várias linhas disciplinares de filosofia, se previamente não tivesse podido percorrer um caminho diversificado pela filosofia. Estou agradecido aos seus sucessivos coordenadores, João Branquinho, Adriana Silva Graça e Ricardo Santos, o apoio e as condições materiais e humanas que permitiram o meu desenvolvimento intelectual.

*

Não há um cânone estabelecido sobre os conteúdos programáticos que um manual de filosofia da matemática deve conter, nem sobre a ótica disciplinar que se deve privilegiar na redação dos respetivos conteúdos. Os manuais existentes no mercado são assim muito diversos. Existem uns manuais de cariz mais filosófico e outros de cariz mais matemático. Outros ainda privilegiam uma perspetiva histórica dos assuntos. A respeito dos tópicos *Logicismo*, *Intuicionismo* e *Formalismo*, Shapiro (2000), por exemplo, dedica três capítulos separados a cada um dos tópicos; em contraste, Colyvan (2012) dedica apenas uma breve síntese conjunta de algumas páginas sobre o assunto, dedicando um capítulo inteiro a teoremas matemáticos que levaríamos para uma ilha deserta!

A explicação para este estado de coisas não está à superfície. Não temos uma ideia consensual sobre o que seja a filosofia. Muitos de nós nem sequer consegue ter uma ideia clara sobre o que isso seja. A minha ideia não é original e vem de longe: a filosofia é um campo de batalha (Kant, 1787/1994, p. BXV). Este campo tem tido várias frentes. Uma frente é sobre a referência dos conceitos da nossa linguagem. O termo *filosofia* não deixa de ser também um conceito da nossa linguagem, entre tantos outros, cuja referência se vem disputando desde o seu aparecimento na Antiga Grécia. Como vamos constatar ao longo do livro, também não temos uma ideia consensual sobre o que seja a matemática. "A matemática é sobre o quê?" ou "O que é a matemática?" são questões filosóficas e não são questões matemáticas. São questões que remetem para um pensamento de segunda ordem que apenas a filosofia pode ensaiar responder. Novamente, as disputas emergem.

Enquanto docente universitário tive a oportunidade de ministrar disciplinas de cariz filosófico a estudantes de matemática e disciplinas de cariz formal a estudantes de filosofia. Concretamente regi uma disciplina de História e Filosofia da Matemática, para estudantes de matemática, e uma disciplina de Lógica, para estudantes de filosofia. Motivado por uma pedagogia de abertura de espírito, a minha abordagem foi contrária à formação principal dos alunos. Na disciplina de História e Filosofia da Matemática privilegiei uma ótica filosófica e na disciplina de Lógica privilegiei uma ótica formal. Na primeira disciplina eliminei quase todos os conteúdos de cálculo e de demonstração; e na segunda disciplina recorri abundantemente à formalização e à demonstração. Naturalmente, se o universo de alunos fosse invertido, a minha abordagem teria sido diferente, mas não inversa. Na disciplina de História e Filosofia da Matemática passaria a incluir mais alguns conteúdos de matemática e da sua história; e na disciplina de Lógica passaria a incluir mais alguns conteúdos de filosofia. A Filosofia da Matemática, mesmo historicamente informada, é primariamente filosófica; e a Lógica, numa fase inicial da sua aprendizagem, é primariamente formal.

Escusado será dizer que este "esconde-esconde" disciplinar que operei com os alunos não pode ser seguido neste manual. Suponho que este manual seja suscetível de ser lido por estudantes de filosofia, de matemática e por pessoas educadas noutras formações. Um dos meus objetivos na redação foi procurar um equilíbrio disciplinar na apresentação dos assuntos, mantendo uma escrita clara e acessível.

Alguns dos assuntos abordados neste manual requerem na sua apresentação tecnicismos incontornáveis. Seria bastante surpreendente que um manual desta natureza pudesse ser redigido sem qualquer tecnicismo. A notação simbólica introduz precisão e torna a apresentação dos assuntos mais sintética. Em contrapartida, a notação simbólica exige um esforço redobrado da atenção de um leitor não familiarizado com a mesma. Novamente, foi necessário encontrar um equilíbrio, mas neste caso um equilíbrio entre a notação simbólica e a fluidez na leitura.

De uma forma geral, tive a preocupação de explicar em português a notação simbólica, na sua primeira aparição no texto. Também tive a preocupação de minimizar a inclusão de conteúdos matemáticos como definições, teoremas e demonstrações. Incluí apenas o estritamente necessário para uma compreensão da dimensão filosófica do assunto em análise. A matemática tem muitas demonstrações belas e elegantes, mas o seu lugar é o manual de matemática, não é o manual de filosofia, ainda que seja um manual de filosofia da matemática. Quanto mais leitores com formações diversas conseguirem seguir o fio das ideias aqui apresentadas, tanto mais acertei na cabeça do prego.

Este manual introduz à filosofia da matemática, mas também pretende introduzir a pensar filosoficamente sobre a matemática. Para este último efeito, alguns dos assuntos são abordados com algum detalhe na sua dialética. O leitor adquire conhecimento sobre um conjunto de *ismos*, ideias, definições e conceções, mas simultaneamente pretende-se que o leitor aprenda a “atravessar” esse conhecimento pelo seu próprio ato de pensar.

A história do logicismo ilustra bem por que razão uma análise detalhada sobre uma proposta autoral não dever ser um objetivo despiciente. Como veremos mais adiante, a proposta logicista de Frege, originalmente formulada na obra *Die Grundlagen der Arithmetik*, de tentar reduzir a aritmética a princípios lógicos, foi dinamitada pelo paradoxo de Russell. Foi preciso esperar mais de 50 anos para os académicos se aperceberem que, efetivamente, a proposta de Frege podia ser emendada e o logicismo vindicar. O que aconteceu durante esses 50 anos é que simplesmente ninguém leu com cuidado *Os Grundlagen*. Paradoxalmente, esta obra foi considerada durante quase todo o século XX como uma das obras mais importantes de filosofia. A obra tem mesmo o estatuto de obra seminal da chamada *Filosofia Analítica*. *Os Grundlagen* caíram assim naquela categoria de livros académicos de que todos falam e (quase) ninguém leu.

*

Havendo no mercado vários manuais de filosofia da matemática em língua inglesa, um autor de língua portuguesa interroga-se interiormente com a questão seguinte: "por que razão devo escrever um manual em língua portuguesa e não, simplesmente, traduzir algum dos manuais de língua inglesa?"

Durante os vários anos em que regi a disciplina de História e Filosofia da Matemática fui adquirindo algumas ideias sobre os conteúdos a incluir num manual de filosofia da matemática. Ou seja, tenho as minhas próprias ideias sobre o que deve ser um manual de filosofia da matemática. No entanto, a razão principal que me motivou para a redação deste manual é ser um manual originalmente redigido em língua portuguesa e, a montante, a própria cultura latino-mediterrânica em que a língua portuguesa se enraíza.

Grande parte do pensamento filosófico, e a filosofia da matemática não é uma exceção, acaba por ser acerca de palavras e de conceitos. As palavras e os conceitos de uma linguagem são constituintes do pensamento dos seres humanos. Ainda que os problemas filosóficos possam ser comuns a diferentes línguas, não me parece haver tal coisa como uma correspondência direta entre línguas que, a existir, permitiria operacionalizar a tradução imediata desses problemas nas diferentes línguas.[1] Toda a tradução é uma tradução *manquée*.

[1] Um sintoma deste problema evidencia-se nos seminários de investigação em Filosofia Analítica. Quando estes seminários decorrem em língua portuguesa é corrente a invocação de termos ingleses. Quando um termo técnico é invocado em inglês estamos mais seguros de que o seu significado é partilhado por todos na sala. Por sua vez, nos seminários de História da Filosofia Antiga a invocação recai sobre os termos originais gregos.

A filosofia no seu todo também não é suscetível de se formalizar como a matemática. A proposição matemática 2+2=4 tem o mesmo significado para todas as pessoas instruídas. Ou seja, o seu significado é o mesmo para europeus, asiáticos, africanos, americanos, independentemente da sua língua materna ou da sua cultura. Todavia, a proposição kantiana segundo a qual *todo o nosso conhecimento começa pela experiência* pode ter significados diferentes para pessoas diferentes. Numa mesma sala de um Seminário de Filosofia, duas pessoas podem atribuir significados diferentes aos conceitos *conhecimento* e *experiência* e, assim, atribuirão também significados diferentes à proposição *todo o nosso conhecimento começa pela experiência*. Este problema adensa-se para pessoas com línguas nativas diferentes. Para explicar os conceitos *conhecimento* e *experiência* é necessário invocar outras frases que levantarão novos problemas nos seus significados.

Há um problema mais profundo e corrosivo que o problema da tradução. O problema das culturas em que as próprias línguas se enraízam. A cultura de um povo reflete-se no pensamento dos seus indivíduos. A minha experiência com a utilização de manuais originalmente escritos em língua inglesa, mesmo as suas traduções, é que levantam dificuldades acrescidas ao docente no seu ensino, quer devido a problemas inerentes à própria tradução, quer devido a aspetos inerentes à própria cultura anglo-americana. Há nuances e passagens ancoradas na cultura anglo-americana que não são completamente traduzíveis.

Obviamente que a solução para o problema anterior não passa por um aprofundamento da cultura anglo-americana na cultura latina. A americanização do mundo já atingiu um nível monstruoso. O problema anterior apenas revela que, apesar do imperialismo anglo-americano em que vivemos, há elementos culturais que permanecem irredutíveis a esse imperialismo. É justamente esta irredutibilidade que necessita de ser aprofundada. A cultura latina é irredutível à cultura anglo-americana e, na verdade, cada uma destas culturas é constituinte para o processo de apreensão do mundo.

Milan Kundera, em *Un Occident Kidnappé*, refere que uma das consequências mais importantes da ocupação russa da antiga

Checoslováquia foi a destruição total da cultura checa, nomeadamente, a cultura como representação de valores supremos. A partir de então viveu-se uma época de "pós-cultura", onde o ego fundado na Modernidade, como um ego da dúvida e do pensamento, ficou nu face ao exército russo e à televisão do Estado. Junto dos seus amigos franceses de então, Kundera lamuriava-se de todas as revistas literárias e culturais terem sido liquidadas pelos russos. Nem os nazis tinham ido assim tão longe. Os seus amigos olhavam a sua lamúria com indulgência e embaraço. Só muito mais tarde ele conseguiu compreender verdadeiramente o significado dessa indulgência e embaraço.

> Se em França ou em Inglaterra todas essas revistas desaparecessem, pessoa alguma se aperceberia, mesmo os seus editores. Em Paris, mesmo nos meios cultivados, discutia-se ao jantar as emissões televisivas e não essas revistas. Pois a cultura já tinha cedido o seu lugar. O seu desaparecimento, que vivemos em Praga como uma catástrofe, um choque, uma tragédia, era visto em Paris como uma coisa banal e insignificante. (Kundera, 1983)

A chamada *impregnação teórica das observações* defende que não há observações "puras", despidas de uma qualquer teoria científica. As teorias científicas condicionam o próprio ato da observação científica. Um astrónomo coperniciano observa o universo de forma diferente de um astrónomo ptolemaico. Em geral, comunidades científicas diferentes operam observações científicas diferentes, a respeito de um mesmo fenómeno empírico.

A cultura desempenha na sociedade em geral um papel análogo ao que as teorias científicas desempenham em comunidades científicas particulares. Há uma impregnação cultural das próprias observações. A cultura influencia a observação que um povo tem do mundo à sua volta. Em Portugal, um arrivista é um novo-rico; em França, é um *Rastignac*; e nos Estados Unidos, é um *self-made man*. Em França, um *Rastignac* é olhado de soslaio, porque os franceses aprendem desde cedo que "o segredo das grandes fortunas sem causa aparente é um crime esquecido, porque foi bem urdido" (Balzac, *Le Père Goriot*).[2] Em contraste, nos Estados Unidos, um *self-made man* é o ideal a seguir por qualquer pessoa da classe trabalhadora, numa sociedade que reduz as pessoas a *winners & losers*. Assim, o termo *arrivista* pode ter um significado pejorativo ou laudatório consoante a cultura que o suporta. O leitor que ignora as culturas que suportam as respetivas línguas é insensível a diferenças deste tipo.

Hume, Russell ou Quine podem ser lidos no original. Porém, nos dias de hoje, importa relembrar que Platão, Descartes, Kant ou Poincaré também podem ser lidos no original. Há aspetos culturais que se apreendem nessas leituras. Nas leituras em inglês apreendem-se aspetos da cultura anglo-americana; nas leituras em grego e em latim apreendem-se aspetos da cultura grega e latina; e nas leituras em alemão e em francês apreendem-se aspetos das culturas prussiana e francesa. Uma aprendizagem cultural *diversificada* é importante na formação de um indivíduo. No entanto, um manual de filosofia não é uma obra clássica de filosofia. O seu objetivo é muito mais modesto. No processo de uma aprendizagem, o manual prepara o caminho para a obra clássica de filosofia; introduz o espírito ao conhecimento; introduz ao universal.

Comecei a redigir este livro durante o primeiro confinamento. A primeira versão foi submetida à IUC em junho de 2023.

Bairro da Beira-Mar,
11 de setembro de 2024

[2] *Rastignac* é um personagem no grande fresco de Balzac, *La Comédie Humaine*, desempenhando um papel principal na obra *Le Père Goriot*.

(Página deixada propositadamente em branco)

Introdução
Matemática e Filosofia

1. Filosofia da matemática

A filosofia da matemática é um ramo da filosofia da ciência. A filosofia da ciência, por sua vez, ancora-se em duas disciplinas: epistemologia e metafísica.

A epistemologia é um estudo sobre o conhecimento. Investiga a natureza do conhecimento em geral, nomeadamente de como é possível o conhecimento e de como o podemos justificar. A epistemologia, apesar de ter como objeto de estudo o conhecimento, não tem como objetivo formular novo conhecimento científico. A epistemologia não procura estabelecer novas teorias científicas ou formular novos teoremas matemáticos. Também não é propósito da epistemologia formular novo conhecimento de senso comum como *a água afoga* e *o pão alimenta*.

Existem conceções epistemológicas muito diversas a respeito da fonte do conhecimento como o empirismo, o racionalismo, o criticismo e o convencionalismo. Estas conceções epistemológicas são uma forma de conhecimento, mas não são entendidas como fazendo parte do nosso conhecimento científico. A epistemologia investiga temas que gravitam em torno do conceito *conhecimento* como crença, verdade, justificação, indução, dedução, ceticismo, entendimento, explicação, inferência e racionalidade.

A metafísica é um estudo sobre o que existe e a sua natureza. No entanto, não cai no âmbito da metafísica procurar descobrir novas entidades como partículas atómicas, espécies, planetas, estrelas, galáxias ou mesmo números. Também não é objetivo da metafísica descobrir leis científicas, relações causais ou fazer previsões. As atividades de descoberta, de previsão e de explicação são atividades predominantemente científicas.

Dado aquilo que é descoberto pela ciência e o senso comum, a metafísica tenta caracterizar a natureza do que existe, se isso existe de todo. Algumas conceções metafisicas defendem que só existem universais, outras defendem que só existem particulares. As primeiras agrupam-se debaixo do epíteto filosófico *realismo*; e as segundas agrupam-se debaixo do epíteto filosófico *nominalismo*. A metafísica investiga uma grande variedade de temas como causalidade, leis da natureza, possibilidade, necessidade, existência, ecceidade, mundos possíveis, tempo, espaço, universais e verdade.

Embora a epistemologia e a metafísica não tenham como objetivo gerar conhecimento científico, elas não estão completamente excluídas da investigação científica. O psicólogo que no seu laboratório estuda a consciência humana está a fazer psicologia, mas também pode estar a contribuir um pouco para a epistemologia. É um problema filosófico saber quais são as características da consciência, nomeadamente como podemos internamente aceder a um estado de conhecimento da consciência. O físico que elabora uma experiência mental, na qual supõe o movimento de uma partícula a viajar a uma velocidade superior à velocidade da luz, está a realizar uma suposição metafísica. No sentido original do termo, *metafísica* significa *para além da física*. Tal físico está a imaginar uma experiência que está para além das leis físicas conhecidas.[1]

Willard van Quine (1969) defendeu que a filosofia é uma atividade contínua com a ciência, sendo a matemática parte da ciência. A filosofia está a par da ciência. Esta doutrina é conhecida por *naturalismo*.

---

[1] O termo *metafísica* foi originalmente cunhado na Antiga Grécia, para agrupar os 14 livros que Aristóteles redigiu, depois de ter redigido o livro *Física*. Ou seja, *metafísica* significa historicamente *para ler depois da Física de Aristóteles*.

No âmbito desta doutrina, Quine defendeu também que a epistemologia e metafísica deviam ser naturalizadas. No caso da metafísica, isso significava que as questões sobre *existência* deviam ser exclusivamente respondidas pela ciência. No caso da epistemologia, isso significava que a epistemologia devia passar a ser um ramo da psicologia e deixar de ser uma atividade de "poltrona", como aquela que foi levada a cabo por Descartes, nas *Meditações sobre a Filosofia Primeira*, e por Kant, na *Crítica da Razão Pura*.

O naturalismo é uma doutrina dominante nos círculos filosóficos atuais, mas a prescrição concreta de Quine para a epistemologia e para a metafísica não vingou. A epistemologia e a metafísica continuam a ser disciplinas centrais na filosofia. A epistemologia e a metafísica podem ser disciplinas contínuas com a ciência, mas nenhuma delas é exclusivamente um capítulo de ciência.

A filosofia da matemática tem assim dois desideratos, decorrentes do próprio tandem disciplinar onde a filosofia da ciência se ancora. Por um lado, pretende investigar a natureza do conhecimento matemático. Por outro lado, pretende analisar a presumível existência de objetos matemáticos e a sua concomitante natureza.

2. Matemática e filosofia

Platão (1996, pp. 525b, 537c) defendeu que a aprendizagem de matemática, durante 10 anos, era um requisito prévio para o estudo de filosofia. Esta sequência curricular ainda continua a ser o caso um pouco por todo o mundo. O estudo de filosofia geralmente surge na parte final do ensino secundário, após vários anos de estudo de matemática. Em alguns países, como em Inglaterra, o estudo de filosofia apenas é possível ao nível universitário. Existem mesmo cursos universitários exclusivamente dedicados ao estudo conjunto de matemática e de filosofia. Isto não é uma frivolidade académica.

Os melhores filósofos, quando deixaram de praticar matemática no alargamento das suas fronteiras, nunca deixaram de se alimentar de matemática; e os melhores matemáticos, quando deixaram de praticar filosofia no alargamento das suas fronteiras, nunca deixaram de se alimentar de filosofia. Gottlob Frege disse que "um bom matemático é pelo menos metade filósofo; e um bom filósofo é pelo menos metade matemático". Brouwer, Russell, Quine e Badiou são exemplos de luminárias recentes. Quanto mais para o passado caminharmos, menos se aplica o princípio da divisão do trabalho e mais exemplos de luminárias encontraremos que contribuíram conjuntamente para a filosofia e para a matemática como Kant, Leibniz, Newton, Descartes e Platão.

Nos currículos académicos atuais, a Matemática e a Filosofia partilham algumas disciplinas. A Filosofia da Matemática é um exemplo óbvio, mas analisemos o caso da Lógica. A Lógica foi criada por Aristóteles na Grécia Antiga. Até ao século XIX, esta era a única lógica que se estudava e conhecia. No final do século XIX, Frege criou a Lógica Simbólica, uma lógica muito mais poderosa do que a Lógica Aristotélica. A Lógica Simbólica, por sua vez, levou à criação da Lógica Matemática. Nos dias de hoje, quer a Lógica Simbólica, quer a Lógica Matemática, são estudadas em Filosofia e em Matemática, pelo menos em alguns cursos universitários. A Lógica Aristotélica, por sua vez, tornou-se praticamente um capítulo de História da Lógica com interesse para a História da Filosofia e para a História da Matemática.

O papel comum da lógica na matemática e na filosofia, levou alguns autores a considerar que a matemática e a filosofia tinham o mesmo método de investigação – o método da lógica. Por exemplo, Christian Wolff defendeu em *Preliminary Discourse on Philosophy in General*, que "a filosofia e a matemática derivam os seus métodos da verdadeira lógica" (Wolff, 1728/1963, p. 77). As proposições matemáticas deduziam-se de definições por regras lógicas (notavelmente, a inferência baseada no silogismo) e por análise conceptual. Este arquétipo do raciocínio matemático deveria ser também o arquétipo seguido pelo raciocínio filosófico.

Na *Crítica da Razão Pura*, Immanuel Kant (1787/1994, pp. B737--B766) desenvolve uma argumentação vigorosa contra a ideia segundo a qual a matemática e a filosofia têm um mesmo método de investigação. Para Kant só existem dois tipos de conhecimento racional: o conhecimento matemático e o conhecimento filosófico. No entanto, a matemática e a filosofia têm métodos de investigação diferentes. O conhecimento matemático obtém-se por construção de conceitos e o conhecimento filosófico obtém-se por conceitos. O método filosófico consiste em engendrar proposições analíticas por simples análise de conceitos. No entanto, a matemática não procede por análise conceptual. Na matemática, os conceitos são necessariamente construídos por uma síntese, por intermédio da intuição pura.

Kant ilustra esta ideia através do conceito *triângulo*. Por mais que um filósofo reflita acerca desse conceito, nada produzirá de novo acerca desse conceito. Ou seja, o filósofo não produzirá nada de novo que já não esteja contido no próprio conceito *triângulo*. A análise conceptual filosófica não permite ir além do próprio conceito. Em contraste, um matemático ao refletir sobre o conceito *triângulo*, baseado em raciocínios e na intuição (pura), poderá construir todo um conjunto de proposições sobre triângulos, que não estão contidas no próprio conceito *triângulo*. Por exemplo, poderá chegar à conclusão de que a soma interna dos seus ângulos é dois ângulos retos.

Kant leva o contraste entre a matemática e a filosofia muito longe, retirando a conclusão seguinte.

> Não convém à natureza da filosofia (...) tomar ares dogmáticos e ornamentar-se com títulos e insígnias da matemática (...) São pretensões vãs que nunca podem realizar-se, mas que devem antes fazê-la retroceder à sua finalidade, que é descobrir as ilusões de uma razão que desconhece os seus limites e reconduzi-la, mediante uma explicação suficiente dos nossos conceitos, das presunções da especulação ao conhecimento modesto, mas sólido, de si mesma. (Kant, 1787/1994, p. B763)

Bertrand Russell, em *Recent Work on the Principles of Mathematics*, publicado em 1901, defende que a matemática pura nasceu no século

XIX, em 1854, sendo o seu pai George Boole, na obra *Laws of Thought*. A definição que ele propõe é de que a matemática pura consiste num conjunto de asserções tais que se uma dessas proposições é verdadeira de alguma coisa, então uma outra proposição é verdadeira dessa mesma coisa. Neste sentido, não importa saber se a primeira proposição é efetivamente verdadeira, nem a respeito de quê ela pode ser verdadeira. Isso é um assunto para a matemática aplicada investigar e não faz parte do âmbito da matemática pura a sua investigação. A conclusão que Russell retira destas ideias é famosa e escandalosa: a matemática (pura) é definida "como o assunto segundo o qual nunca sabemos do que estamos a falar, nem sabemos se aquilo que dizemos é verdade" (Russell, 1994, p. 366).

A definição de matemática de Russell é, na verdade, a tese logicista disfarçada, a tese segundo a qual *a matemática é lógica*. Frege foi quem pela primeira vez sistematizou a tese logicista, no final do século XIX, sendo Russell um propulsionador da mesma. De acordo com esta tese, a Aritmética e a Análise Matemática, enquanto disciplinas de matemática, nada mais seriam do que lógica. Ou seja, as suas proposições seriam deriváveis de princípios lógicos. Neste sentido, as proposições de aritmética e de análise matemática seriam proposições analíticas. A tese logicista encontra raízes nas ideias racionalistas que Kant atacou na *Crítica*, ideias essas que consideravam a matemática como uma atividade que procedia por análise conceptual.

O que estas clivagens bem ilustram é que os autores têm conceções diferentes sobre o que se entende por *matemática*. A questão da definição da natureza da matemática – "o que é a matemática?" – é uma questão filosófica e não é uma questão matemática. Kant, vindo do lado da filosofia, Frege e Russell, vindos do lado da matemática, propuseram respostas diferentes à questão da definição da natureza da matemática, em particular, à questão da definição da natureza do conhecimento matemático. O fundamento dessas respostas é um fundamento filosófico.

Kant define o conhecimento matemático como sendo conhecimento sintético *a priori* e o conhecimento lógico como sendo conhecimento analítico *a priori*. Mais à frente, no capítulo 1, veremos o significado preciso destes termos. Neste momento apenas importa saber que os termos *sintético* e *analítico* referem conjuntos exclusivos de juízos. Ou seja, todo o juízo sintético não é um juízo analítico, e reciprocamente. Assim, à luz destas definições, a lógica não fazia parte da matemática. Frege, por sua vez, define o conhecimento matemático como sendo conhecimento derivado de princípios lógicos. O conhecimento matemático era conhecimento analítico, não no sentido kantiano do termo *analítico*, mas no sentido de ser derivado de princípios lógicos. Assim, à luz desta definição, a matemática fazia parte da lógica.

Importa notar que a questão da definição da natureza da matemática também depende dos próprios conteúdos matemáticos que se pretende definir a sua natureza. O problema é que estes conteúdos vão-se modificando ao longo do tempo, em virtude de novas teorias matemáticas que se vão formulando no seu horizonte.

Os trabalhos principais de Kant e Frege estão separados por mais de 100 anos. Obviamente que ao longo destes 100 anos houve uma modificação dos conteúdos da matemática. Ou seja, os conteúdos da matemática no tempo de Kant eram diferentes dos conteúdos da matemática no tempo de Frege. Por exemplo, para Kant, a Lógica era simplesmente Lógica Aristotélica. Para Frege, a Lógica incluía a Lógica Aristotélica e, principalmente, a nova Lógica Simbólica que ele acabava de criar. E existiam muitas outras diferenças no campo da Análise Matemática e da Geometria. Portanto, o termo *matemática* referia conteúdos diferentes para Kant e Frege. As conceções filosóficas que Kant e Frege acabaram por desenvolver acerca da natureza do conhecimento matemático, eram a respeito de conteúdos de matemática diferentes.

Contemporaneamente a filosofia continua a ter vários modos de filosofar. George Moore alicerçou o seu filosofar na análise conceptual, na clareza e tudo fez para evitar a retórica e a obscuridade. José Ortega y Gasset, por sua vez, alicerçou o seu filosofar na forma como os fenómenos aparecem à consciência e formulando o seu pensamento num estilo de redação literário. O modo de filosofar de Moore enquadra-se na chamada *tradição analítica* da filosofia; o modo de filosofar de Ortega y Gasset enquadra-se na chamada *tradição fenomenológica* da filosofia. Apesar de terem modos de filosofar diferentes, Moore e Ortega y Gasset estavam de acordo a respeito do objeto de estudo da filosofia, a saber: o Universo. Em 1953, em *Some Main Problems in Philosophy*, Moore considera que "o problema primeiro e mais importante da filosofia é dar uma descrição geral de *todo* o Universo" (Moore, 1953, p. 1). Em 1958, em *¿Qué es filosofia?*, Ortega y Gasset considera que "a filosofia é o conhecimento do Universo" (Ortega y Gasset, 1958/1993, p. 47).

Fazendo a matemática parte do Universo, ainda que possa fazer parte apenas da componente abstrata do Universo, segue-se que o objeto de estudo da filosofia da matemática é a própria matemática. Note-se, no entanto, que a filosofia da matemática é uma investigação *sobre* matemática, mas não é uma investigação *de* matemática. Tal como vejo as coisas, a filosofia da matemática é um pensamento de segunda ordem sobre matemática, mas um pensamento filosófico e não um pensamento matemático. Não é um objetivo do filósofo, ao fazer filosofia da matemática, criar teorias matemáticas.

Não há uma fronteira clara entre a matemática e a filosofia. Já vimos que algumas disciplinas são comuns à filosofia e à matemática, como a Lógica e a Filosofia da Matemática. Contrariamente a Kant, também há uma sobreposição de alguns dos seus métodos. A filosofia e a matemática partilham o método do rigor, da dedução, da abstração, da análise e do esclarecimento conceptual.

Contrariamente a Wolff, a matemática e a filosofia têm também alguns métodos próprios que não partilham entre si. Na filosofia, a dialética é um método que é usado desde a Antiguidade. A dialética é um modo de diálogo ou de exposição de um assunto baseado na objeção e na réplica. A filosofia, por vezes, recorre a figuras da linguagem como a metáfora. Na matemática não existe qualquer método dialético nem há qualquer recurso a figuras de linguagem na escrita das suas proposições. A matemática, por sua vez, recorre abundantemente ao cálculo – um conjunto de regras para a resolução prática de problemas. A matemática é baseada num sistema axiomático e demonstrativo das suas proposições. A filosofia, excetuando a lógica, não usa qualquer cálculo nem tem qualquer sistema axiomático e demonstrativo.

3. Questões matemáticas e questões filosóficas

Há questões exclusivamente matemáticas, questões exclusivamente filosóficas e questões que não são exclusivamente matemáticas nem são exclusivamente filosóficas. "Por que razão num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos?", "por que razão o teorema de Fermat é o caso?" e "por que razão 2+2=4?" são questões exclusivamente matemáticas. "O que é uma explicação matemática?", "o que é o conhecimento matemático?" e "o que é um objeto matemático?" são questões exclusivamente filosóficas. "O que é o infinito?", "o que é a continuidade?" e "o que é o espaço?" são questões que não parecem ser exclusivamente matemáticas nem exclusivamente filosóficas. Neste tipo de questões, o objeto questionado pode ser investigado pela matemática e pela filosofia, no sentido que podem ser propostas respostas de cariz matemático e outras de cariz filosófico.

John Searle (1999) sugere que uma questão filosófica deixa de o ser, e passa a ser uma questão científica, quando conseguimos dar-lhe uma resposta sistemática, tida como correta por todos os investigadores competentes na área. Ele dá o exemplo da questão "o que é a *vida*?" Inicialmente não sabíamos bem como uma matéria inerte podia adquirir vida. Quando a Biologia entendeu os mecanismos moleculares da matéria, esta questão deixou de ser filosófica e passou a ser um facto científico estabelecido o que se entendia por *vida*.

As questões acima, "o que é o infinito?" e "o que é a continuidade?", surgiram na Antiguidade com Zenão. Foram questões levantadas a partir de paradoxos sobre o movimento, os chamados *paradoxos de Zenão*. Cauchy (e, mais tarde, Dedekind) deu uma resposta matemática ao problema da continuidade matemática; e Cantor deu uma resposta matemática ao problema do infinito matemático. Estas respostas foram consensualmente partilhadas pela comunidade científica. Muitos julgaram que os próprios paradoxos de Zenão, que as espoletaram, também se encontravam definitivamente resolvidos (Russell, 1994, p. 370). Ora, mais tarde, Brouwer acabou por disputar novamente essas questões a partir do intuicionismo matemático. A conceção de partida de Brouwer sobre a natureza da matemática era muito diferente das conceções de Cantor e de Cauchy. Os paradoxos de Zenão, por sua vez, reemergiram e continuam a ser matéria de debate na filosofia contemporânea.[2]

A questão da definição do espaço ainda milita mais contra a sugestão de Searle. Esta questão também está associada aos paradoxos de Zenão, em virtude de que os paradoxos do movimento são paradoxos que levantam questões acerca da própria natureza do espaço físico. Pouco tempo depois de Zenão, Euclides, nos *Elementos da Geometria*, deu uma resposta à questão do que seria o espaço geométrico. Esta resposta durou mais de 2000 anos e influenciou muitos filósofos nas suas conceções do espaço. O espaço físico era tido como euclidiano e isto parecia uma resposta definitiva sobre a sua natureza. Ou seja, haveria um isomorfismo entre o espaço geométrico euclidiano e o espaço físico. No século XIX, no entanto, surgiram as primeiras formulações geométricas contrárias à geometria euclidiana, chamadas *geometrias não-euclidianas*. Estas geometrias propuseram uma conceção paradigmaticamente diferente da conceção euclidiana do espaço geométrico e do próprio espaço físico. Contemporaneamente continua a ser uma questão em aberto saber qual é a verdadeira natureza do espaço físico. Este é um assunto de vivo debate na filosofia entre *substantivismo vs. relacionismo*.

O que estes três exemplos pretendem ilustrar é que algumas questões filosóficas, se respondidas de forma sistemática pela ciência e consensualmente avalizadas por pessoas competentes na área, não deixam definitivamente de ser questões filosóficas e passam a

[2] A respeito dos paradoxos de Zenão ver, por exemplo, a coletânea de artigos em Salmon (2001b).

ser questões científicas. Parece haver questões que são suscetíveis de ser permanentemente desafiadas, mesmo quando foram consensualmente respondidas por alguma teoria científica. Essas questões, momentaneamente, podem deixar de interessar à filosofia, mas novas respostas científicas fazem reemergir essas questões na filosofia. Há questões que parecem ser uma interminável fonte de perplexidade para o filósofo.

Segundo Quine (1951), nenhuma proposição científica é imune à revisão da experiência. As próprias proposições da lógica e da matemática são suscetíveis de serem revistas pela experiência. Segundo Thomas Kuhn (1996), a história da ciência é um enorme repositório de teorias científicas abandonadas, em consequência de ruturas científicas revolucionárias que conduzem ao aparecimento de novas teorias científicas, ancoradas em novos paradigmas científicos. O paradigma geocêntrico foi revolucionariamente descartado pelo paradigma heliocêntrico. Segundo Karl Popper (2005), uma teoria científica apenas pode ser classificada de científica se no seu enunciado estiver implicitamente formulado como pode a mesma sujeitar-se à falsificação da experiência. O enunciado “todos os dias o Sol nasce” é suscetível de ser falsificado, na medida em que, caso o Sol não nasça no horizonte terrestre num período compreendido de 24 horas, então tal observação falsificará o enunciado. Portanto, à luz destes três autores, mesmo as respostas científicas, a questões exclusivamente científicas, não são eternas e podem ser revistas ou modificadas pela própria atividade de investigação científica.

Esta introdução sobrevoou alguns dos assuntos que abordaremos neste livro. Podemos agora terminá-la reformulando os títulos dos capítulos seguintes em termos de questões. Capítulo 1: o que é o conhecimento geométrico? Capítulos 2 e 3: o que é a matemática? Capítulos 4 e 5: existem objetos matemáticos? Capítulo 6: o que é uma revolução matemática? Estas são as questões centrais deste livro.

(Página deixada propositadamente em branco)

Capítulo 1
Filosofia da Geometria

Este capítulo é sobre filosofia da geometria. Começaremos por introduzir algumas noções epistemológicas, nomeadamente, as noções de *crença*, *verdade* e *justificação*. Faremos uma síntese da geometria euclidiana e dos seus axiomas. Abordaremos a conceção racionalista de Platão, as conceções empiristas de Hume e de Mill e a conceção criticista de Kant. Sintetizaremos a discussão em volta do postulado das paralelas que culminou na formulação das geometrias não-euclidianas. Analisaremos as consequências epistemológicas das geometrias não-euclidianas nas conceções abordadas nas secções anteriores. Terminaremos o capítulo com a conceção convencionalista de Poincaré relativamente aos axiomas da geometria.

1. Noções epistemológicas

A epistemologia é uma investigação a respeito do conhecimento e da sua justificação. A epistemologia está preocupada com questões como as seguintes: Será que temos conhecimento? Como alcançamos conhecimento? Como distinguimos crenças de conhecimento? Como justificamos o conhecimento?

Existe uma conceção tradicional do conhecimento segundo a qual temos conhecimento que *p* se, e só se, temos uma crença verdadeira e justificada que *p*. Para o caso, *p* é uma proposição que pode ser substituída por uma frase declarativa como, por exemplo, “as baleias são mamíferos”. Sinteticamente, esta é a conceção tripartida do conhecimento:

conhecimento = crença + verdade + justificação

As condições de crença, verdade e justificação são condições separadamente necessárias e conjuntamente suficientes para o conhecimento. Por outras palavras, se tenho uma crença verdadeira e justificada que *p* é o caso, então isso é suficiente e necessário para que tenha conhecimento que *p* é o caso. Inversamente, se tenho conhecimento que *p* é o caso, então isso é suficiente e necessário para que tenha uma crença verdadeira e justificada que *p* é o caso.

Clarifiquemos as noções de *crença*, *verdade* e *justificação*. Em geral, uma crença é um estado mental que podemos ter ou não acerca de uma dada proposição. O jargão é de que uma crença é uma *atitude proposicional*, sendo uma proposição aquilo que é expresso por uma frase. Assim, as frases “a neve é branca”, “snow is white” e “la neige est blanche” são frases que têm o mesmo significado e expressam a mesma proposição, digamos, *a neve é branca*. A *atitude* é o estado mental que um sujeito tem relativamente a uma proposição. Por exemplo:

> António [sujeito] acredita [atitude] que Marte é um planeta [proposição];
> João [sujeito] teme [atitude] que HFM seja uma disciplina difícil [proposição].

Consideremos as atitudes relativas a crenças. Todos nós temos muitas crenças, algumas verdadeiras e outras falsas. Por exemplo, consideremos que acredito que *a capital de Portugal é Madrid*. Naturalmente, não posso dizer que *sei* qual é a capital de Portugal, porque, simplesmente, é falso que a capital de Portugal seja Madrid. Neste caso, estamos perante uma crença falsa que, como tal, não se constitui em conhecimento.

Também podemos ter crenças verdadeiras, mas que não se constituem em conhecimento. Suponhamos que jogo no Euromilhões e que tenho uma crença que vou acertar na chave sorteada. Assumamos que acabo mesmo por acertar na chave do Euromilhões. Antes do sorteio, a minha crença era verdadeira, mas era verdadeira por mero acaso, porque, presumivelmente, não tinha qualquer justificação plausível para a verdade dessa crença. Assim, antes do sorteio, apesar de ter uma crença verdadeira, não podia afirmar que sabia que iria acertar na chave do Euromilhões.

Nos exemplos anteriores, as noções de *verdadeiro* e *falso* foram introduzidas como correspondência com os factos. Ou seja, a proposição *a capital de Portugal é Madrid* é uma proposição falsa, porque não é um facto que a capital de Portugal seja Madrid. Por sua vez, digamos, a proposição *a capital de Portugal é Lisboa* é uma proposição verdadeira, porque é um facto que a capital de Portugal é Lisboa. Esta teoria é a chamada *teoria da verdade como correspondência*. Segundo esta teoria, uma proposição *p* é verdadeira se, e só se, é um facto que *p*. Há muitas outras teorias sobre a verdade, como a teoria deflacionista ou a teoria funcionalista. Para o que se segue neste capítulo, a teoria da verdade como correspondência é suficiente para a nossa análise.

Finalmente consideremos a noção de *justificação*. Esta talvez seja a noção mais problemática das três. Em alternativa a este termo, a literatura também refere termos como *racional*, *garantia* ou *razoabilidade*. Por exemplo, pode ser dito que é racional acreditar que acabei de queimar o estrugido, quando há um forte odor na cozinha a cebola queimada. A noção de *justificação* é uma noção normativa, contrastando com as noções descritivas. O ser racional acreditar que *p*, não descreve um estado de um agente. Pelo contrário, o ser racional acreditar que *p* é respeitante ao dever que um agente tem para estar justificado a acreditar que *p*.

Este capítulo é justamente centrado na noção de *justificação*. Veremos muitas formas de justificarmos a nossa crença na verdade dos axiomas da geometria. Ou seja, admitiremos que os axiomas da geometria são proposições verdadeiras, nas quais acreditamos, e tentaremos analisar diferentes razões que podemos ter ou não para acreditarmos na sua verdade.

Importa referir que a conceção tradicional tripartida do conhecimento está longe de ser consensual e pode ser disputada, dando origem a outras teorias do conhecimento. Famosamente Edmund Gettier (1963) avançou vários contraexemplos à teoria.[1] Um desses exemplos é o seguinte. Suponhamos que o João, que não é propriamente um adepto de futebol, liga o televisor de casa. Está a decorrer a final da taça de futebol entre o Benfica e o Porto. O jogo termina com a vitória do Benfica. Portanto, o João infere que o Benfica ganhou a final da taça de futebol deste ano. Todavia, suponhamos que houve uma falha técnica na transmissão televisiva e que, na verdade, foi transmitida uma gravação da final da taça de futebol do ano anterior. Essa final também fora entre o Benfica e o Porto. Suponhamos ainda que enquanto o João assistia à transmissão televisiva do jogo do ano anterior, o Benfica ganhou a taça de futebol deste ano. Portanto, nesta situação verifica-se: a) *o Benfica ganhou a taça de futebol deste ano* é uma proposição verdadeira; b) o João acredita que *o Benfica ganhou a taça de futebol deste ano*; c) o João tem uma justificação para essa crença, que lhe foi dada pela transmissão televisiva. Porém, parece implausível que possamos dizer que a frase "o João sabe que o Benfica ganhou a taça de futebol deste ano" é uma frase verdadeira.[2] Ou seja, as condições de crença, verdade e justificação, embora sejam condições separadamente necessárias para o conhecimento, não parece ser condições conjuntamente suficientes para o conhecimento de coisa alguma.

Há várias respostas aos contraexemplos à teoria tradicional do conhecimento. Por exemplo, a teoria causal do conhecimento considera que deve ser acrescentada uma quarta condição à conceção tripartida de conhecimento, para se evitarem os contraexemplos de Gettier. A quarta condição é a de que a crença de um sujeito *S* num estado de coisas *x* tem de ser *causada* pelo estado de coisas *x*: tem de haver

[1] Este deve ser o artigo de 3 páginas mais famoso da Filosofia!

[2] Este exemplo é inspirado num exemplo apresentado em Dancy (1985/1990, p. 41).

uma relação causal entre o sujeito *S* e o estado de coisas *x*. Assim, para uma pessoa conhecer um estado de coisas *x*, é necessário que essa pessoa tenha interagido causalmente com *x* de um modo apropriado. A teoria fiabilista do conhecimento, por sua vez, considera que as nossas crenças verdadeiras têm de ser obtidas por um processo fidedigno. Relativamente ao exemplo acima, esta teoria observa que as transmissões televisivas, por si só, não serão um processo fidedigno para obtenção de crenças verdadeiras.

2. Geometria euclidiana

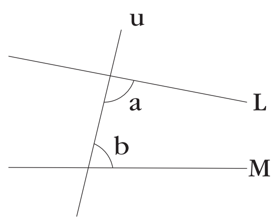
Euclides, por volta de 300 a.C., escreveu uma obra chamada *Elementos de Geometria*. Tanto quanto se sabe, este é o primeiro manual de matemática que foi alguma vez escrito. Esta obra é uma sistematização de resultados de geometria de matemáticos anteriores como Pitágoras e Hipócrates de Chios. A obra está dividida em treze livros, sendo constituída por definições, noções, postulados e demonstrações respetivas de outras proposições. No início do primeiro livro, além das definições, são estabelecidos cinco postulados e também são estabelecidas cinco noções comuns. As noções comuns são entendidas como sendo proposições mais abrangentes do que os postulados. Ou seja, enquanto os postulados são precisamente acerca da geometria, as noções comuns são considerações genéricas não especificamente geométricas.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais forem adicionados a iguais, os totais serão iguais.
3. Se iguais forem subtraídos a iguais, os restos serão iguais.
4. Figuras coincidentes são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte.

Postulados

1. Dois pontos determinam uma linha reta.
2. Uma linha reta pode ser estendida em qualquer direção.
3. Sobre qualquer ponto existe uma circunferência de raio específico [centrada nesse ponto].
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta cair sobre duas linhas retas e fizer ângulos internos de um mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se num ponto do lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos. [Postulado das paralelas] (Euclides, 2008, p. 7)



Doravante, designarei as *definições*, *noções comuns* e *postulados* da geometria euclidiana, bem como de outros sistemas geométricos por *axiomas*. Excecionalmente, continuarei a designar o quinto postulado de Euclides por *postulado das paralelas*, porque esta é a designação habitual na literatura. Independentemente destes aspetos terminológicos, o que importa salientar é que, num qualquer sistema matemático, os axiomas são tidos como proposições primeiras a partir das quais se derivam outras proposições, como teoremas ou corolários, por intermédio de regras lógicas de inferência.

Os axiomas da geometria levantam dois problemas: primeiro, como podemos justificar que os axiomas são verdadeiros; segundo, como podemos justificar que as proposições matemáticas, derivadas a partir deles, também são verdadeiras. Este segundo problema é um problema a respeito do estatuto epistémico das regras lógicas usadas na derivação de proposições matemáticas. Ou seja, é um problema sobre a “transmissão” da verdade por intermédio de inferências lógicas. Neste capítulo, focar-nos-emos apenas no primeiro problema. Mais à frente, no capítulo 3, abordaremos o segundo problema.

Importa referir desde já que o primeiro problema é o mais importante dos dois, na medida em que o segundo problema depende do primeiro problema. Se não conseguirmos justificar que os axiomas geométricos são verdadeiros, então o segundo problema nem sequer se levantará. Nesse caso não haveria qualquer verdade a ser “transmitida” por regras de inferência lógica. No capítulo 3, veremos que as próprias regras de inferência da lógica clássica também podem ser questionadas, nomeadamente, por conceções intuicionistas sobre o conhecimento matemático.

Até ao século XIX, a geometria euclidiana foi tida como um paradigma de certeza, clareza e rigor. Uma evidência desse estatuto foram as muitas tentativas de tentar fundamentar outros ramos da matemática na geometria euclidiana, como a Aritmética, a Análise ou a Álgebra. Com tal empreendimento, a verdade destes outros ramos da matemática ficaria ancorada numa base mais sólida. Este procedimento é conhecido como *geometrização da matemática*. Por outro lado, a geometria euclidiana também tinha o estatuto de ser *a* geometria do espaço físico. Aliás, a geometria euclidiana era a única geometria sobre o espaço físico. Para qualquer operação de medição de distância, área, volume, etc., sobre objetos no espaço físico, aplicavam-se os resultados da geometria euclidiana.

3. Racionalismo e empirismo

Uma divisão epistemológica, a respeito dos axiomas da geometria de Euclides, é entre racionalismo e empirismo. O racionalismo defende que os axiomas da geometria são verdades que se justificam independentemente da experiência. O empirismo defende que os axiomas da geometria são verdades que se justificam pela experiência, em virtude de a geometria euclidiana ser a geometria do espaço físico.

3.1. Racionalismo

Platão foi, talvez, o primeiro a defender uma conceção racionalista para o conhecimento matemático. Ele argumenta que o conhecimento matemático é conhecimento inato. Por mera reflexão cognitiva é possível alcançar esse conhecimento que já se encontra em nós. Esta conceção é introduzida por um paradoxo sobre como podemos alcançar conhecimento. O paradoxo é conhecido como *paradoxo de Ménon* e pretende mostrar que não se alcança conhecimento por intermédio de uma investigação sobre um assunto. Ou seja, as nossas investigações não conduzem a qualquer conhecimento. Seja p um axioma da geometria de Euclides.

(1) No início da nossa investigação, ou conheço p ou não conheço p.
(2) Se conheço p, então é escusado tentar investigar sobre p. Já conheço p e não preciso de investigar sobre aquilo que já conheço.
(3) Se não conheço p, então também é escusado investigar sobre p. Não conhecendo p, não faço ideia sobre o que devo investigar e, mesmo estando perante p, que não conheço, jamais poderei saber que estou perante aquilo que pretendo investigar.
$\therefore$ Não obtemos conhecimento por investigação.

A solução para o paradoxo é dada no diálogo *Ménon* de Platão (1992). Sócrates tenta mostrar que um escravo de Ménon, alguém que jamais teve contacto com geometria na sua vida terrena, pode alcançar conhecimento geométrico. Sócrates vai questionando o escravo sobre comprimentos e áreas de figuras geométricas que vai desenhando no solo. O inquérito de Sócrates serve para ilustrar como obtemos conhecimento geométrico independentemente da experiência. Esse conhecimento já preexiste em nós, de forma inata, e o inquérito tem o propósito de espoletar esse mesmo conhecimento.

De acordo com a Teoria das Formas de Platão, a alma de cada ser humano supostamente viveu no mundo das formas, antes da sua incorporação. O ato de conhecer é nada mais do que um processo de reminiscência dessa vida anterior da alma, nesse mundo das formas. O escravo perante um teorema geométrico sabe e não sabe da sua verdade. Não sabe que o teorema é verdadeiro, porque se esqueceu da sua verdade aquando da união do corpo com a alma, na vida terrena. Sabe que o teorema é verdadeiro, porque na sua vida anterior a alma já sabia que o teorema era verdadeiro. Todavia, o conhecimento alcançado não decorre de qualquer investigação, mas sim de uma atividade de reminiscência que o próprio escravo executa.

O tempo encarregou-se de extirpar todo o misticismo da teoria platónica, a respeito do conhecimento inato. O conhecimento inato pode simplesmente ser formulado como uma conceção que defende que temos conhecimento alcançado independentemente da experiência. A objeção geral que se levanta a esta conceção do conhecimento inato é de que alguma vez nós tivemos de alcançar conhecimento. Ou seja, no caso do escravo de Ménon, embora se consiga compreender que a alma do escravo conhece o teorema, porque outrora viveu no mundo das formas, fica por explicar como é que a alma do escravo obteve conhecimento desse teorema, digamos, redundantemente, "pela primeira vez". É um mistério como o conhecimento inato preexiste em nós ou como efetivamente o alcançamos pela "primeira vez".

O problema anterior, para a origem do conhecimento inato, tenta-se ultrapassar por intermédio de uma conceção alternativa que articula a *intuição* e a *dedução*. A fonte do conhecimento que se alcança independentemente da experiência é a intuição. Após serem estabelecidas proposições primeiras, por intermédio da intuição, podemos, num segundo momento, recorrer à dedução e estabelecer outras proposições que continuam a não depender da experiência. Esta conceção foi defendida, por exemplo, por David Hume, em *Investigação sobre o Entendimento Humano*.

> Todos os objetos da razão ou investigação humanas podem ser naturalmente divididos em dois tipos, a saber, as *relações de ideias* e as *questões de facto*. Da primeira espécie são as ciências da

> geometria, da álgebra e da aritmética e, em resumo, toda afirmação e qualquer afirmação que seja intuitiva ou demonstrativamente certa. *Que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos* é uma proposição que expressa uma relação entre essas grandezas. *Que três vezes cinco é igual à metade de trinta* expressa uma relação entre esses números. As proposições deste tipo podem ser descobertas pela simples operação do pensamento, sem depender do que exista em qualquer parte do universo. Mesmo que nunca existisse um círculo ou triângulo na natureza, as verdades demonstradas por Euclides conservariam para sempre a sua certeza e evidência.
>
> As questões de facto, que são os segundos objetos da razão humana, não são determinadas da mesma maneira, e tampouco a prova que temos da sua verdade, por maior que seja, é da mesma natureza que a dos anteriores. O contrário de toda e qualquer questão de facto permanece sendo possível, porque não pode jamais implicar contradição e a mente concebe-o com a mesma facilidade e nitidez, como se fosse conforme à realidade. (Hume, 1748/2002, p. 42)

Antes de avançar, importa realçar que esta passagem de Hume pode levar a pensar que Hume era um racionalista, mas tal classificação seria bastante precipitada. Embora Hume admita que o conhecimento que resulta de relações de ideias seja um conhecimento intuitivo, as ideias, em última instância, derivam-se da experiência. Ou seja, a ideia de triângulo ou de qualquer figura geométrica são ideias derivadas da experiência. Apenas é conhecimento intuitivo o próprio raciocínio que envolve essas figuras geométricas como, por exemplo, *a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois ângulos retos*. Na literatura, Hume é geralmente considerado um empirista, mas esta passagem sobre a geometria mostra que tal classificação, se efetuada *tout court*, também seria precipitada. Mais à frente, veremos como John Stuart Mill tem uma posição empirista bastante mais extrema sobre a geometria.

A conceção intuicionista/dedutivista enfrenta um problema semelhante ao da conceção de conhecimento inato: a noção de *intuição* é também ela misteriosa. Tentar substituir o termo *intuição* pelos termos *reflexão interior* ou *insight* é substituir um termo misterioso por outros termos igualmente misteriosos. Esta solução cai assim num *obscurum per obscurius*.

Esclarecemos dois tipos de conhecimento que não derivam da experiência – conhecimento inato e conhecimento intuitivo – mas não foi apresentado qualquer argumento a favor destes tipos de conhecimento. Consideremos então um argumento a favor da ideia segundo a qual o conhecimento geométrico é obtido de forma inata ou pela intuição. O argumento inverte a análise realizada até ao momento. Até agora analisámos de que forma podemos obter conhecimento; inversamente, o argumento alicerça-se na própria natureza do conhecimento geométrico atual.

O conhecimento geométrico é conhecimento necessário. Uma proposição geométrica verdadeira é verdadeira em todos os mundos possíveis. Por exemplo, *a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois ângulos retos* é uma proposição verdadeira em todos os mundos possíveis, na medida em que não existe um mundo em que, digamos, essa soma seja inferior a dois ângulos retos. Trata-se de uma verdade necessária; não é uma verdade contingente.

Contrariamente, o conhecimento que é derivado da experiência é um conhecimento contingente. As leis da física têm sido constantemente modificadas. O que hoje se pensava como sendo verdade, amanhã pode revelar-se uma falsidade. A experiência é uma fonte de conhecimento contingente. Assim, dado que nós temos conhecimento geométrico e sendo esse conhecimento necessário, então apenas a razão, seja inata ou intuitiva, é um instrumento fiável para a obtenção de crenças necessariamente verdadeiras. A experiência não tem esse mesmo grau de fiabilidade e deve ser rejeitada como suposta fonte de conhecimento necessário. Nos *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*, Gottfried Leibniz socorreu-se deste mesmo argumento para defender a plausibilidade do conhecimento inato:

> Os sentidos, apesar de serem necessários para o nosso conhecimento atual, não são suficientes para nos dar todo o conhecimento, uma vez que os sentidos apenas dão exemplificações, ou seja, verdades individuais e particulares. Ora, todas as exemplificações que confirmam uma verdade geral, por mais numerosas que possam ser, não são suficientes para estabelecer a necessidade universal dessa mesma verdade, pois não se segue que o que aconteceu também voltará a acontecer da mesma maneira. (…) Assim, parece que verdades necessárias, como aquelas que encontramos na matemática pura, particularmente, na aritmética e na geometria, devem ter princípios cuja demonstração não depende de exemplificações, nem consequentemente do testemunho dos sentidos, apesar de, sem os sentidos, jamais nos poderia ter ocorrido em pensar nas mesmas. (Leibniz, 1765/1996, pp. 49-50)

3.2. Empirismo

Analisemos agora a conceção empirista de John Stuart Mill elaborada em *Um Sistema de Lógica Dedutiva e Indutiva*, publicado em 1843. Comecemos por relembrar a questão simples que estamos a abordar neste capítulo. Como obtemos conhecimento geométrico? À primeira vista, a matemática que se pratica atualmente, pelo menos aquela que habitualmente se designa por *matemática pura*, parece ser uma atividade bastante afastada da experiência. Habitualmente não vemos os seus praticantes a fazer qualquer teste experimental que alegadamente serviria para testar o valor de verdade das proposições matemáticas criadas. Todavia, a questão que estamos a colocar não é uma questão sobre como alcançamos novo conhecimento. A questão é sobre como alcançamos conhecimento que já se encontra estabelecido. Como é que os atuais matemáticos obtiveram o conhecimento geométrico básico como, por exemplo, a respeito dos axiomas da geometria euclidiana? Ora, à primeira vista, poderemos pensar que isso ocorreu durante o processo educativo que tiveram, sendo essa matemática ensinada como uma matemática completamente afastada da experiência. Todavia, segundo Mill, esta é uma reconstrução enviesada de como esse conhecimento foi efetivamente alcançado. Quer na infância desses matemáticos, quer mesmo na génese desse conhecimento no antigo Egipto, esse conhecimento é derivado da experiência. O conhecimento geométrico decorre da manipulação de objetos físicos no espaço, bem como do desenho de figuras geométricas no papel.

Mill faz uma distinção entre proposições *reais* e proposições *verbais*. As primeiras são dependentes da experiência; as segundas não dão qualquer informação relativamente ao mundo exterior. Mill argumenta que as proposições da matemática e da lógica são proposições verbais. Segundo ele, estas proposições são generalizações derivadas da experiência, a partir da indução empírica. A indução empírica é o procedimento segundo o qual, após a observação de vários exemplares de *F*s que são *G*s, infere-se que *todos os Fs são Gs*. Por exemplo, de *todos os corvos observados são negros*, infere-se que *todos os corvos são negros*. Em particular, Mill considera que este mesmo princípio de generalização indutiva se aplica para estabelecer os axiomas da geometria.[3]

> [A]s definições [da geometria], tal como são habitualmente designadas, devem ser consideradas como algumas das nossas primeiras e mais óbvias generalizações a respeito desses objetos naturais. A exatidão dessas generalizações, como generalizações, é sem falhas: a igualdade de todos os raios de uma circunferência é verdadeira para todos as circunferências, na medida em que é verdadeira para qualquer circunferência. Todavia, não é exatamente

[3] Na sua exposição, Mill oscila entre as noções de *definição* e de *axioma*, quando refere as proposições geométricas de Euclides. Embora em algumas partes, Mill faça uma distinção entre as noções, essa distinção não é prosseguida noutras partes da obra. Nesta parte do capítulo, vou-me socorrer de ambas as expressões. As definições são caracterizadas como sendo proposições elementares, a respeito da própria definição de figuras geométricas.

> verdadeira para nenhuma circunferência [física] – é apenas aproximadamente verdadeira. Tão aproximada tal que, na prática, nenhum erro considerável será incorrido se se simular que é exatamente verdadeira. (Mill, 1963, pp. 225-226)

No sentido estrito, as figuras da geometria euclidiana são uma ficção, porque, na verdade, não existem os objetos referidos pelas definições geométricas.

> Não existem pontos sem magnitude, nem retas sem espessura, nem retas perfeitas; nenhuma circunferência com os raios exatamente iguais, nem quadrados com ângulos perfeitamente retos. Poderá ser objetado que a suposição [da existência dos objetos das definições geométricas] não se estende às coisas atuais, mas apenas à possível existência de tais coisas. Eu respondo que, de acordo com qualquer teste que temos sobre a noção de possibilidade, essas coisas nem sequer são possíveis. A sua existência, na medida em que podemos formar qualquer juízo, seria inconsistente com a composição física do nosso planeta, pelo menos, senão com todo o Universo. (Mill, 1963, p. 225)

A conceção racionalista é uma conceção incorreta ao defender que as figuras da geometria podem ser acedidas por mera inspeção mental ou por intuição. Mill rejeita tal ideia: "nós não podemos conceber uma linha sem espessura; nós não podemos formar uma imagem mental de tal reta; todas as retas que temos em mente são linhas que possuem espessura" (Mill, 1963, p. 225).

Qual é então a posição reservada à geometria neste sistema filosófico? Mill considera que as figuras geométricas são aproximadas às figuras que desenhamos e aos objetos do mundo físico. Ou seja, as figuras geométricas são o *limite* das figuras reais do mundo exterior. Os teoremas da geometria são derivados das definições destas mesmas figuras. Os teoremas da geometria são assim condicionalmente verdadeiros no sentido seguinte: se existem os objetos das definições geométricas, então os teoremas da geometria que se deduzem destas definições são necessariamente verdadeiros: “[q]uando, portanto, é afirmado que as conclusões da geometria são verdades necessárias, a necessidade consiste, na verdade, no seguinte: elas seguem-se corretamente das suposições a partir das quais são deduzidas” (Mill, 1963, p. 228).

Mill também se pronuncia sobre o argumento que vimos acima a favor do conhecimento inato ou intuitivo, que pretendia estabelecer o conhecimento geométrico como sendo um conhecimento necessário. Mill interpreta a noção de *necessário* como sendo conhecimento cuja negação do mesmo, além de ser falso, é também inconcebível. De acordo com a tese de que o conhecimento geométrico é um conhecimento necessário, por exemplo, será inconcebível que por um ponto exterior a uma reta possa ser traçada mais do que uma linha reta, segundo o postulado das paralelas de Euclides. Ora, como veremos mais à frente, a formulação das geometrias não-euclidianas decorre justamente da negação do postulado das paralelas, dando assim razão a Mill. É assim incorreta a tese de que tal conhecimento seria inconcebível. Mill nega que exista tal coisa como conhecimento necessário, na medida em que a imaginação humana é um instrumento limitado para o que é ou não concebível. Há coisas concebíveis que supostamente não conseguimos imaginar. Portanto, o argumento a favor da natureza intuitiva ou inata do conhecimento, baseado na noção de necessidade, é incorreto.

> Agora, não posso deixar de me perguntar que tanta ênfase deve ser colocada nas circunstâncias da inconcebilidade. Quando existe uma experiência tão ampla que mostra que a nossa capacidade ou incapacidade de conceber uma coisa tem muito pouco a ver com a possibilidade da coisa em si mesma. Na verdade, é muito mais uma situação acidental que depende da história e dos hábitos passados das nossas próprias mentes. Não há facto mais reconhecido na natureza humana do que a extrema dificuldade sentida a princípio em conceber qualquer coisa como possível que esteja em contradição com

> uma experiência familiar e estabelecida há muito tempo, ou mesmo com velhos hábitos familiares de pensamento. (Mill, 1963, p. 238)

O problema principal da teoria empirista de Mill é de que ela apenas parece ser válida para a matemática elementar, como é o caso da geometria euclidiana. Acontece que a matemática avançada está comprometida com entidades que, à primeira vista, não têm qualquer relação com o mundo empírico, nem no presente, nem no passado. Ou seja, não parece que seja possível elaborar uma reconstrução histórica desse conhecimento, onde se consiga mostrar que num primeiro momento esse conhecimento foi derivado da experiência. Willard van Quine, um herdeiro do empirismo de Mill, cuja proposta analisaremos mais à frente no capítulo 4, considerou que conjuntos de ordem elevada eram "uma recreação matemática sem direitos ontológicos" (Quine, 1998, p. 400).

*

Analisámos duas conceções distintas sobre a forma de alcançar conhecimento geométrico – o racionalismo e o empirismo. O problema que agora se levanta é saber como pode ser o conhecimento geométrico um conhecimento a respeito do mundo exterior. Este problema não se levanta para a conceção empirista. Para esta conceção, o conhecimento geométrico é derivado da experiência e, portanto, esse mesmo conhecimento é também a respeito do mundo exterior. Todavia, este problema levanta-se de forma vincada para o racionalismo. Sendo o conhecimento geométrico estabelecido de forma independente da experiência, pelo raciocínio, como pode então tal conhecimento ser acerca do mundo exterior?

Platão dissolveu este problema considerando que o conhecimento abstrato é conhecimento acerca de entidades abstratas do mundo das formas. Assim, para Platão, o conhecimento geométrico não é simplesmente acerca do mundo exterior. Hume, por sua vez, considerou que, embora o conhecimento geométrico pudesse ser aplicado em leis empíricas, não poderia ser considerado conhecimento acerca do mundo exterior, sob pena de cairmos em sofística ou ilusão, que devem ser lançadas às chamas.

> A geometria ajuda-nos a aplicar essa lei [do movimento], (...) mas apesar disso a descoberta da própria lei continua a dever-se simplesmente à experiência e todos os raciocínios abstratos do mundo nunca nos poderiam levar a dar um passo na direção do seu conhecimento (Hume, 1748/2002, p. 46)

> Parece-me que os únicos objetos das ciências abstratas ou da demonstração são a quantidade e o número, e que todas as tentativas para estender essa espécie mais perfeita de conhecimento além desses limites não passam de sofística e ilusão. (Hume, 1748/ /2002, p. 174)

> Quando percorremos as bibliotecas, persuadidos destes princípios, o que deveremos destruir? Se tomarmos nas mãos um volume qualquer, de teologia ou metafísica das escolas, por exemplo, perguntemo-nos apenas: encerra ele qualquer raciocínio abstrato a respeito da quantidade e do número? Não. Encerra qualquer raciocínio experimental a respeito de questões de facto e existência? Não. Lancemo-lo às chamas, porque não pode conter mais do que sofismas e ilusões. (Hume, 1748/2002, p. 176)

O problema da "sofística e ilusão" de Hume é o problema que Kant vai enfrentar, a saber: como conciliar a tese segundo a qual o conhecimento geométrico é conhecimento obtido independentemente da experiência e, simultaneamente, ser um conhecimento que se aplica ao mundo exterior.

4. Criticismo

Immanuel Kant formulou uma teoria epistemológica acerca do fundamento dos axiomas da geometria euclidiana, bem como de todo o conhecimento matemático em geral. Irei focar-me na sua proposta para a geometria. Como vimos atrás, David Hume defendeu que o conhecimento geométrico não era conhecimento a respeito do mundo exterior. Esta conceção teve um enorme impacto em Kant, nas suas palavras isso "acordou-o do sono dogmático" do racionalismo. Kant defende que o conhecimento matemático, nomeadamente, o conhecimento geométrico, é um conhecimento sintético *a priori*. A sua teoria é exposta na *Crítica da Razão Pura*, publicada em 1781, ainda antes do aparecimento das geometrias não-euclidianas. Como veremos mais à frente, as geometrias não-euclidianas vão acabar por minar os alicerces da teoria epistemológica kantiana.

O problema principal que a *Crítica* pretende responder é determinar como é possível o conhecimento sintético *a priori*. No entanto, para compreendermos bem a proposta kantiana temos de começar por introduzir alguns esclarecimentos conceptuais.

No início da *Crítica* afirma-se que "todo o conhecimento se inicia *com* a experiência, isso não prova que todo ele derive *da* experiência" (Kant, 1787/1994, p. B1). Os seres humanos, após estarem na posse de conceitos, que de uma ou outra maneira podem ser derivados da experiência, num segundo momento, podem estabelecer conhecimento que não depende da experiência. Tal conhecimento é designado de *conhecimento a priori*. Por sua vez, um conhecimento *a posteriori* é um conhecimento que é obtido da experiência.

Consideremos alguns exemplos. A proposição *todos os celibatários são solteiros* expressa um conhecimento *a priori*. Estando na posse dos conceitos *celibatário* e *solteiro* não preciso mais de recorrer à experiência para estabelecer que todos os celibatários são solteiros. A justificação de um conhecimento *a priori* não recorre à experiência. A proposição *o carro é branco*, a propósito de um carro estacionado nos Campos Elísios, é uma proposição que estabelece um conhecimento *a posteriori*. Por uma mera inspeção dos conceitos *carro* e *branco* não se consegue estabelecer uma relação entre ambos. Apenas por intermédio da experiência, neste caso, uma experiência visual, se consegue estabelecer uma conexão entre esses dois conceitos. A justificação de um conhecimento *a posteriori* depende da experiência.

Outra distinção conceptual importante é entre *juízos analíticos* e *juízos sintéticos*. Consideremos uma proposição universal com a forma genérica "Todos os S são P", tal que S é o conceito a respeito do *sujeito* da proposição e P é o conceito a respeito do *predicado* da proposição, nos termos a seguir exemplificados. Uma proposição é analítica se o conceito referido pelo predicado fizer parte do conceito referido pelo sujeito; uma proposição é sintética se o conceito referido pelo predicado ampliar o conceito referido pelo sujeito.

> Em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (apenas considero os juízos afirmativos, porque é fácil depois a aplicação aos negativos) esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo *analítico* ao juízo, no segundo *sintético*. (Kant, 1787/1994, pp. A6-A7)

Alguns exemplos de proposições analíticas:

a) Todos os celibatários são solteiros.
b) Todos os homens são mortais.
c) Todos os triângulos têm três ângulos.

Em a) o conceito *solteiro* faz parte do conceito *celibatário*.
Em b) o conceito *mortal* faz parte do conceito *homem*.
Em c) o conceito *três ângulos* faz parte do conceito *triângulo*.

Alguns exemplos de proposições sintéticas:

a) A torre de Pisa é inclinada.
b) Todos os presidentes da república são homens.
c) 7+5=12.

Em a) o conceito *inclinada* acrescenta uma propriedade à *torre de Pisa*.

Em b) o conceito *homem* vai para além do conceito *presidente da república*.

Em c) o conceito *12* não está contido nos conceitos *soma*, *5* e *7*.

À primeira vista poder-se-á pensar que *a priori* é conceptualmente equivalente a *analítico*; e que *a posteriori* é conceptualmente equivalente a *sintético*. Na verdade, essas equivalências não são o caso. A distinção conceptual *a priori* e *a posteriori* é uma distinção epistemológica – uma distinção a respeito da *justificação* do conhecimento. Enquanto a distinção conceptual *analítico* e *sintético* é uma distinção semântica e lógica a respeito da relação entre os conceitos referidos pelos sujeitos e predicados em proposições. Note-se ainda que o conhecimento *a priori* é tido como um conhecimento de certeza apodítica, isto é, um conhecimento que não é suscetível de ser refutado. Assim, o conhecimento *a priori* é um conhecimento que, além de ser justificado independentemente da experiência, não é suscetível de ser refutado pela experiência (Kant, 1787/1994, p. A4). No caso particular do conhecimento matemático, além de ser um conhecimento (puro) *a priori*, é também um conhecimento universal e necessário. Diz-se que um conhecimento é universal se não admitir exceções. À luz do criticismo, diz-se que um conhecimento é necessário na medida em que é válido em todos os mundos possíveis constituídos por seres humanos cognitivamente semelhantes a nós.

O que é o espaço? A resposta a esta pergunta é dada na *Estética Transcendental*, da *Crítica*, enquanto teoria da sensibilidade. O espaço (e o tempo) é uma forma pura da intuição, no sentido de que esta forma não é composta por qualquer sensação. Esta forma pura da intuição origina-se na nossa própria sensibilidade e não tem origem nos objetos exteriores. A sensibilidade é a nossa faculdade ou capacidade mental para representar as coisas ou os objetos físicos que nos aparecem. Por outras palavras, o espaço (e o tempo) é uma característica da constituição subjetiva das nossas próprias mentes. O espaço providencia, assim, a forma ou a estrutura de todas as sensações, nomeadamente acerca do próprio espaço físico e dos seus objetos. A conexão entre a conceção kantiana do espaço e o conhecimento geométrico é a seguinte: o conhecimento geométrico é nada mais do que um conhecimento acerca das propriedades do espaço; o espaço é a fonte do conhecimento geométrico.

O conhecimento geométrico, bem como o conhecimento matemático em geral, é conhecimento sintético *a priori*: "as proposições da geometria são conhecidas sinteticamente *a priori* e com uma certeza apodítica" (Kant, 1787/1994, pp. A46-A47). O carácter *a priori* sustenta-se na ideia segundo a qual apenas por mera reflexão mental, independente da experiência, conseguimos estabelecer esse conhecimento. No entanto, note-se que este não é um conhecimento analítico. Por exemplo, por mais que reflitamos acerca dos conceitos *5*, *soma* e *7*, não conseguiremos estabelecer que 5+7=12. Ou seja, o conceito 12 está para além dos conceitos *5*, *soma* e *7*. É necessário efetuar uma síntese sobre os conceitos *5*, *soma* e *7* para se conseguir estabelecer uma relação entre eles e o conceito *12*. E apenas a intuição pode ser a fonte para efetuar essa síntese. O mesmo acontece relativamente à proposição *uma linha reta é a distância mais curta entre dois pontos*. Esta é uma proposição sintética. O conceito de *distância mais curta* é acrescentado ao conceito *linha reta*. Por mais que reflitamos acerca do conceito *linha reta* não conseguiremos extrair deste conceito a consequência que é a *distância mais curta entre dois pontos*.

Outro aspeto importante da abordagem kantiana é relativamente à aplicabilidade do conhecimento geométrico ao espaço físico e aos objetos nesse espaço. Isso é afirmado em várias passagens da *Crítica*: "o espaço abrange todas as coisas que nos possam aparecer exteriormente" (Kant, 1787/1994, p. A27); "o espaço [é] condição dos fenómenos que constituem a experiência externa" (Kant, 1787/1994, p. A157); "este princípio transcendental da matemática (…) permite a aplicação da matemática pura, com toda a sua exatidão, aos objetos da experiência" (Kant, 1787/1994, p. A165).

Uma questão que se levanta é saber como é possível o conhecimento matemático aplicar-se ao espaço físico e aos objetos físicos e não ser suscetível de ser refutado ou revisto pela própria experiência. Por exemplo, no caso da aritmética, se somar 5 laranjas a 7 laranjas, obtenho 12 laranjas e, aparentemente, a operação efetuada, 5+7=12, não é suscetível de ser refutada por qualquer experiência. Note-se, no entanto, que muitas outras teorias científicas são suscetíveis de ser refutadas pela experiência. Por exemplo, a teoria geocêntrica ptolemaica foi refutada pelas observações das trajetórias planetárias a respeito da teoria heliocêntrica. Todavia, contrariamente à matemática, no sistema kantiano, as teorias físicas, como as teorias geocêntrica e heliocêntrica, são teorias empíricas – são conhecimento *a posteriori*. Ou seja, são teorias derivadas da experiência e, assim, é pacífico neste sistema que experiências recalcitrantes contrárias as possam falsificar.

O significado contemporâneo do termo *experiência* é geralmente tido como referindo um acontecimento que ocorre “exclusivamente fora de nós próprios”. Contudo, na teoria kantiana, este termo tem um significado ligeiramente diferente. O significado do termo *experiência* refere, em certa medida, o próprio sujeito que experiencia. Por exemplo, quando observo esta caneta na minha mão, a experiência visual ocorre em virtude das minhas próprias faculdades de perceção. Ou seja, a experiência visual ocorre em virtude da minha própria observação da caneta. Neste contexto, o termo *experiência* é mais bem interpretado como sendo um *fenómeno*, sendo este o objeto de uma intuição. Como vimos acima, o espaço é condição necessária para o fenómeno ocorrer. É aquilo que enforma a próprio fenómeno. Sendo o conhecimento geométrico um conhecimento acerca das propriedades do próprio espaço, segue-se que tal conhecimento jamais pode ser refutado. Faz parte da própria estrutura cognitiva do sujeito e é condição necessária para a própria experiência ocorrer.

A principal objeção à teoria kantiana, enquanto teoria epistemológica sobre a geometria, decorre da formulação das geometrias não-euclidianas. Introduziremos, na secção seguinte, os resultados principais destas geometrias e, seguidamente, analisaremos então as consequências que estas geometrias tiveram na teoria kantiana.

5. Geometrias não-euclidianas

O estatuto da geometria euclidiana, como disciplina rainha e modelo para os outros ramos da matemática, esconde um problema sério no âmago dos seus próprios axiomas. O quinto postulado, conhecido como *postulado das paralelas*, foi objeto de uma grande discussão desde a Antiguidade. Contra a conceção apriorista, não é de todo evidente que este postulado seja verdadeiro por si mesmo. Contra a conceção empirista, o postulado pressupõe uma noção de *infinito* (inerente à expressão *estendidas indefinidamente*) que é problemática. O espaço físico, se tido como finito, levanta o problema de saber como um axioma a respeito do infinito se pode aplicar numa estrutura física finita. O postulado das paralelas era assim uma "pedra no sapato", quer para a conceção apriorista, quer para a conceção empirista.

O postulado das paralelas não é um postulado de menor importância nos *Elementos*, bem pelo contrário. Este postulado talvez seja um dos postulados mais importantes da obra. Euclides usou-o, por exemplo, para demonstrar o teorema de Pitágoras, bem como para demonstrar a proposição de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

Desde a Antiguidade, foram duas as abordagens relativamente ao postulado das paralelas. Primeira, o postulado seria suscetível de ser demonstrado a partir dos restantes postulados, definições e noções comuns (ou de outras proposições dos *Elementos*, mas cuja demonstração não dependesse do postulado das paralelas). Ou seja, o postulado seria, na verdade, um teorema inferido a partir de proposições mais básicas da obra de Euclides. Segunda, o postulado seria suscetível de ser substituído por outra proposição, mas cuja verdade fosse menos controversa. Escusado será dizer que nenhuma das abordagens foi bem-sucedida. Famosamente, d'Alembert, em 1759, declarou que o problema do postulado das paralelas era "o escândalo dos *Elementos da Geometria*". O surgimento das geometrias não-euclidianas no século XIX decorre justamente destes esforços perenes de clarificação do postulado das paralelas.

A respeito da segunda abordagem acima, John Wallis, em 1693, mostrou que o postulado era equivalente à proposição segundo a qual "existem figuras similares que não são congruentes: ou seja, uma cópia de uma dada figura pode ser realizada de modo que tenha a mesma forma, mas um tamanho diferente" (Grattan-Guinness, 1994, p. 878). Todavia, esta solução, bem como outras do mesmo género, acabaram por ser descartadas, porque implicavam noções matemáticas que não eram mais evidentes do que o próprio postulado das paralelas.

A respeito da primeira abordagem acima, as primeiras tentativas começaram na Antiguidade por Ptolomeu e Proclus. A tentativa mais famosa ocorreu em 1773, por Girolamo Saccheri. Com vista a simplificar a nossa exposição desta proposta, consideremos uma proposição equivalente ao postulado das paralelas: por um ponto exterior a uma linha reta passa uma, e uma só, reta que não intersecta a primeira reta por mais que seja estendida. Para demonstrar então que o postulado das paralelas se podia deduzir das outras proposições básicas dos *Elementos*, bastaria mostrar que as duas condições seguintes conduziam a uma contradição, no interior do próprio sistema euclidiano: 1) por um ponto exterior a uma linha reta, nenhuma outra reta se pode traçar que não intersecta a primeira (*postulado de nenhuma paralela*); 2) por um ponto exterior a uma linha reta, mais do que uma linha reta se pode traçar que não intersecta a primeira (*postulado das multi-paralelas*). Saccheri conseguiu demonstrar 1) mas não conseguiu demonstrar 2).[4]

---

[4] Na verdade, Saccheri usou outras proposições equivalentes a esta, nomeadamente, duas proposições referentes aos ângulos de um quadrilátero. A proposição (1) em questão, na geometria esférica, tem a seguinte interpretação: numa qualquer esfera, quaisquer dois círculos máximos intersectam-se em dois pontos. Ou seja, por um ponto exterior a um círculo máximo, nenhum outro círculo máximo se pode traçar

A formulação das geometrias não-euclidianas é muito simples. Substitui-se o postulado das paralelas, o postulado problemático da geometria euclidiana, pelo postulado de nenhuma paralela ou pelo postulado das multi-paralelas. No caso da substituição pelo postulado das multi-paralelas assumem-se conjuntamente as restantes proposições básicas dos *Elementos* que não dependam do postulado das paralelas. No caso da substituição pelo postulado de nenhuma paralela, deixam-se também cair outras proposições implícitas em Euclides (evitando-se assim a contradição derivada por Saccheri).[5]

A primeira descrição completa do espaço geométrico, em termos não-euclidianos, foi elaborada no início do século XIX, mas de forma independente, pelo húngaro János Bolyai e pelo russo Nicolai Lobachevskii (conhecida por *geometria hiperbólica*). Um pouco mais tarde, mas ainda no século XIX, Bernhard Riemann também avançou com uma proposta não-euclidiana (conhecida por *geometria esférica*).

Geometria de Lobachevskii:

1. Por um ponto exterior a uma linha reta uma infinitude de retas pode ser traçada que não intersectam a reta.
2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.
3. A razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu raio é maior do que o valor euclidiano de 2π.
4. Não existem figuras similares de diferentes áreas.
5. Linhas retas são extensíveis até infinito. (Sklar, 1974, p. 18)

Geometria de Riemann:

1. Por um ponto exterior a uma reta nenhuma reta pode ser traçada que não intersecte a reta.

---

que não intersecte o primeiro. Os círculos máximos estão para a geometria da esfera tal como retas estão para a geometria euclidiana. Conclusão: na geometria da esfera não existem retas paralelas.

[5] Por exemplo, os axiomas de ordem são deixados cair; interpreta-se o segundo postulado como afirmando a ausência de limite de todas as linhas retas extensíveis.

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.
3. A razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu raio é menor do que o valor euclidiano de 2π.
4. Figuras similares de diferente área não existem.
5. Todas as linhas retas são do mesmo comprimento finito quando totalmente estendidas. (Sklar, 1974, p. 19)

O surgimento das geometrias não-euclidianas levantou um conjunto de novos problemas matemáticos, físicos e epistemológicos.

Um problema matemático primeiro foi o de averiguar se estas geometrias eram consistentes. Pois, caso as geometrias não-euclidianas fossem inconsistentes, então simplesmente passariam a ser ignoradas pela comunidade de matemáticos. Apesar de, à primeira vista, as geometrias não gerarem contradições, era necessário avançar com uma demonstração matemática da sua consistência. Essa demonstração chegou mais tarde pela mão de Felix Klein. Sinteticamente, Klein conseguiu operar uma tradução da geometria não-euclidiana na terminologia da geometria euclidiana. Supondo que a geometria euclidiana é consistente, segue-se que a geometria não-euclidiana também é consistente.[6]

Um problema físico levantado pelas geometrias não-euclidianas foi respeitante à sua aplicação ao espaço físico. Estando criada uma geometria, seria então necessário averiguar se essa geometria era suscetível ou não de encontrar aplicações no espaço físico. Gauss foi o primeiro a tentar mostrar que, para triângulos "muito grandes", a soma dos ângulos internos seria inferior a dois ângulos retos. Para o efeito, Gauss iluminou três cumes de montanhas distantes e mediu os ângulos do triângulo formado por essas três montanhas. A margem de erro na sua medição foi tão grande que implicou que tais resultados

[6] Mais tarde, David Hilbert também demonstrou a consistência da geometria não-euclidiana por intermédio da Aritmética.

não foram considerados conclusivos.[7] Apenas muito mais tarde, já no século XX, a geometria de Riemann encontrou uma aplicação ao espaço físico, no interior da Teoria da Relatividade Geral.

6. Consequências epistemológicas das geometrias não-euclidianas

A descoberta das geometrias não-euclidianas, no século XIX, e a sua aplicação ao espaço físico, no século XX, nomeadamente, no âmbito da Teoria da Relatividade Geral, levantou grandes problemas às teorias epistemológicas que até então haviam sido formuladas. Relembre-se que um dos axiomas das geometrias não-euclidianas é justamente a negação do postulado das paralelas. O racionalismo ficou com o problema de explicar como duas proposições contrárias podiam ser simultaneamente verdadeiras. O empirismo ficou com o problema de explicar qual seria então a geometria verdadeira do espaço físico. No entanto, o impacto epistemológico mais forte foi na teoria kantiana do criticismo que, na altura, era tida como a teoria *nec plus ultra* da epistemologia.

À luz do criticismo, o conhecimento geométrico é considerado um conhecimento sintético *a priori*, universal e necessário. Por definição, este conhecimento seria um conhecimento irrefutável e universalmente válido. Assim, as proposições matemáticas da geometria euclidiana constituíam-se em conhecimento acerca do qual não nos poderíamos ter "enganado" na sua formulação, digamos, *um conhecimento falso*. À luz da teoria kantiana, a geometria euclidiana era concebida como um conhecimento que se fundamentava na nossa própria estrutura cognitiva da intuição do espaço, sendo condição necessária para qualquer fenómeno. A geometria euclidiana era uma geometria verdadeira em todos os mundos possíveis, com seres com

---

[7] Note-se que Gauss também é autor de material original sobre as geometrias não--euclidianas, formulado ainda antes de Bolyai e de Lobachevskii, mas que nunca publicou em vida. Gauss escusou-se de as publicar em vida por receios de ridicularização académica.

estruturas cognitivas semelhantes à nossa. Após o surgimento das geometrias não-euclidianas, não podíamos agora "trocar" a geometria euclidiana pelas geometrias não-euclidianas, argumentando que houvera um "engano" da nossa parte; e tentar argumentar que a geometria euclidiana afinal era uma geometria falsa e devia ser trocada pelas geometrias não-euclidianas, sendo estas as geometrias verdadeiras.

Aparentemente, a teoria kantiana não distingue entre geometria pura e geometria aplicada. Neste sentido, alguns positivistas do início do século XX (nomeadamente, Reichenbach (1958)) argumentaram que os axiomas da geometria podiam ser vistos como fórmulas lógicas, não sendo atribuído qualquer valor semântico aos seus termos não lógicos. Esta seria a parte da geometria pura. A geometria pura era um conjunto de proposições *a priori*, isto é, um conjunto de proposições que não dependia da experiência. A interpretação dos termos da geometria pura decorria justamente da sua aplicação ao espaço físico. Esta era a parte da geometria aplicada. A geometria aplicada era um conjunto de proposições *a posteriori*. Por exemplo, à luz da geometria euclidiana, o termo *reta* era interpretado como *menor distância entre dois pontos*, mas, à luz da teoria da Relatividade o termo *reta* era interpretado como *geodésica*, ou seja, o caminho percorrido por um raio de luz no vazio. Em geral, os positivistas defenderam assim um estatuto epistémico *empírico* para a geometria. Ou seja, a verdade dos axiomas da geometria era determinada pela experiência.

Vários autores tentaram emendar a proposta kantiana. Ainda antes da formulação da teoria da Relatividade, Bertrand Russell (1956), em 1897, considerou que o conhecimento geométrico era conhecimento *a priori*. Russell manteve a ideia kantiana do espaço como uma estrutura mental que enforma toda a experiência. Todavia, contrariamente a Kant, as propriedades desse espaço não seriam as propriedades da geometria euclidiana, mas as propriedades da geometria projetiva. A geometria projetiva surgiu no século XIX e permite derivar a geometria euclidiana bem como as geometrias não-euclidianas. A geometria projetiva é uma geometria a respeito das qualidades do espaço, enquanto a geometria euclidiana e as geometrias não-euclidianas são geometrias a respeito da métrica e das quantidades do espaço. O argumento de Russell a favor da geometria projetiva, em detrimento das restantes, era de que as propriedades qualitativas precediam as propriedades quantitativas. Mais tarde, o próprio Russell (1956, p. 31) repudiou esta tentativa de emenda do criticismo. De acordo com a suas palavras, se a sua proposta tivesse sido correta, a geometria que fundamentou a Teoria da Relatividade Geral teria sido simplesmente impossível. A sua conclusão foi retumbante: "não penso que haja alguma coisa de válido neste meu primeiro livro"!

Mais tarde, já depois do estabelecimento da Teoria da Relatividade Geral, Peter Strawson (1975, pt. 5) observa que o erro na teoria de Kant foi de esta não distinguir entre uma interpretação fenomenal e uma interpretação física da geometria euclidiana. Ou seja, a teoria kantiana era válida enquanto geometria do espaço fenomenal, mas não era válida enquanto geometria do espaço físico. A geometria do espaço físico é a geometria não-euclidiana, sendo esta última determinada *a posteriori* pelas nossas melhores teorias científicas. Strawson argumenta, contra os positivistas, que a geometria euclidiana pode continuar a ser considerada uma geometria infalsificável por qualquer experiência, se restringirmos a sua aplicação a este mundo fenomenal das aparências.[8] Ele acrescenta que este aspeto da geometria euclidiana é fundamental para a sua aprendizagem. As crianças não aprendem a geometria como um conjunto de fórmulas lógicas ininterpretadas, nem como um conjunto de fórmulas de uma teoria da física. Pelo contrário, a aprendizagem decorre justamente nesse mundo fenomenal, onde as fórmulas geométricas são verdades autoevidentes.

[8] Note-se que para Strawson os termos "fenómeno" e "aparência" não têm exatamente o mesmo significado que esses termos têm na teoria kantiana, mas que, para a nossa análise, não é importante clarificar essa diferença.

7. Convencionalismo geométrico

Henri Poincaré, no início do século XX, mas ainda antes do surgimento da teoria da relatividade geral, formulou uma proposta convencionalista para o conhecimento geométrico. A sua proposta foi a primeira tentativa original de ultrapassar os problemas que as geometrias não-euclidianas levantaram, quer à teoria kantiana, quer às teorias racionalistas.

O argumento para o convencionalismo foi publicado de forma dispersa ao longo de vários capítulos nos livros seguintes: *La Science et l'Hypothèse* (1902/1968), *La Valeur de la Science* (1905/1970), *Science et Méthode* (1908/1930) e *Dernières Pensées* (1913).[9] Os pensamentos filosóficos de Poincaré, sobre as mais diversas matérias, encontram-se reunidos nestes quatro livros. Estes livros resultaram de uma reunião de artigos, anteriormente publicados em revistas científicas diversas, os quais foram ligeiramente reescritos pelo autor com vista à sua publicação coligida em livro. Para além da sua dimensão filosófica, estes livros têm uma dimensão de divulgação científica de alto nível, para um público erudito. São livros que continuam a ser atualmente editados e lidos um pouco por todo o mundo.

Em seguida, faço uma reconstrução do argumento de Poincaré para a tese convencionalista da geometria, a tese segundo a qual os axiomas da geometria são convenções. Articulo o argumento segundo uma estrutura de objeção/réplica, porque, em geral, é essa a estrutura de desenvolvimento do pensamento de Poincaré ao longo dos livros.

Objeção. As geometrias não-euclidianas são inconsistentes.

---

[9] Os capítulos são os seguintes: "As geometrias não-euclidianas", "O espaço e a geometria" e "A experiência e a geometria" (*La Science et l'Hypothèse*); "A noção de espaço" e "O espaço e as suas três dimensões" (*La Valeur de la Science*); "A relatividade do espaço" (*Science et Méthode*); "O espaço e o tempo" e "Porque o espaço tem três dimensões" (*Dernières Pensées*). Na minha reconstrução do seu argumento irei focar-me nos três capítulos de *La Science et l'Hypothèse*.

Poincaré replica a esta objeção apresentando uma demonstração informal da consistência da geometria não-euclidiana de Lobachevskii. Ele começa por estabelecer um dicionário entre a linguagem da geometria de Lobachevskii e a linguagem da geometria euclidiana. Posteriormente, considera que as proposições da geometria de Lobachevskii podem ser traduzidas, por intermédio desse dicionário, em proposições da geometria euclidiana. Se houvesse alguma inconsistência na geometria de Lobachevskii, então essa inconsistência também se verificaria nas proposições respetivas traduzidas na linguagem da geometria euclidiana. Ora, não se verificando qualquer inconsistência nas proposições traduzidas na linguagem da geometria euclidiana, segue-se que as proposições da geometria de Lobachevskii não são inconsistentes, pressupondo que a geometria euclidiana não é ela própria inconsistente.

> Objeção. As geometrias não-euclidianas não têm aplicação, porque o espaço sensorial é euclidiano.

Poincaré replica a esta objeção considerando dois significados diferentes do termo *aplicação*. Primeiro, considera o termo *aplicação*$_1$, enquanto significando aplicação a outros ramos da matemática. Afirma que ele próprio e Klein fizeram uso das geometrias não-euclidianas para integração de equações lineares. Segundo, considera o termo *aplicação*$_2$, enquanto significando aplicação ao espaço físico. É esta segunda réplica que nos interessa aqui detalhar. Poincaré estabelece uma distinção entre espaço geométrico e espaço representativo. O espaço representativo é constituído pelos espaços visual, táctil e motor. O espaço representativo é distinto do espaço geométrico, na medida em que não é homogéneo, não é isotrópico, nem tem três dimensões. Portanto, o espaço sensorial não é euclidiano.

> Objeção. O conhecimento geométrico é conhecimento sintético *a priori* e é aquele estabelecido pelas proposições euclidianas.

Se o conhecimento geométrico fosse conhecimento sintético *a priori*, então nem sequer poderíamos alguma vez ter formulado as geometrias não-euclidianas, uma vez que um dos postulados destas geometrias é justamente a negação do postulado das paralelas de Euclides. Ou seja, as geometrias não-euclidianas nunca teriam sido criadas. Porém, as geometrias não-euclidianas foram criadas. Logo, o conhecimento geométrico não é conhecimento sintético *a priori* e euclidiano.

> Objeção. O conhecimento geométrico é conhecimento sintético *a priori* e estabelecido pelas proposições não-euclidianas.

Mutatis mutandis, a partir da réplica anterior. Se o conhecimento geométrico fosse conhecimento sintético *a priori*, então nem sequer poderíamos alguma vez ter formulado a geometria euclidiana, uma vez que um dos postulados desta geometria é justamente a negação dum dos postulados da geometria não-euclidiana. Ou seja, a geometria euclidiana nunca teria sido criada. Porém, a geometria euclidiana foi criada. Logo, o conhecimento geométrico não é conhecimento sintético *a priori* e não-euclidiano.

> Objeção. O conhecimento geométrico é conhecimento sintético *a priori*, *simpliciter*.

Numa primeira aproximação à objeção, Poincaré considera a parábola seguinte. Consideremos seres achatados, com as mesmas capacidades cognitivas que as nossas, e que vivem numa superfície de uma esfera. Para estes seres, o espaço geométrico teria as características seguintes: o espaço não teria limite, mas seria finito, na medida em que esses seres poderiam caminhar indefinidamente na superfície da esfera, mas a própria esfera teria uma superfície finita. O espaço teria duas dimensões, na medida em que os seres viveriam apenas na superfície da esfera. Nesse espaço, a distância mais curta entre dois pontos seria um arco de grande círculo.[10] Estes seres construiriam uma geometria muito diferente da geometria euclidiana. Para o caso, construiriam uma geometria não-euclidiana a duas dimensões. Em conclusão, seres com as mesmas capacidades cognitivas que as nossas criariam uma geometria diferente da geometria euclidiana.

> Objeção. Seres imaginários com as mesmas capacidades cognitivas que as nossas, mas com espaços representativos diferentes do nosso, criariam geometrias diferentes da euclidiana. Portanto, o conhecimento geométrico é determinado pelo espaço representativo, segundo uma forma de neo-kantismo de conhecimento sintético *a priori*.

Poincaré refina a parábola anterior com vista a que o espaço representativo de tais seres seja em tudo semelhante ao nosso espaço representativo, ou seja, as impressões visuais, tácteis e motoras passariam a ser semelhantes às nossas.[11] Estes seres também acabariam por criar uma geometria não-euclidiana, de acordo com as mudanças de posição dos objetos nesse mundo. O espaço representativo não desempenha qualquer papel no estabelecimento da geometria. O conhecimento geométrico não é um conhecimento sintético *a priori*.

> Objeção. Seres com as mesmas capacidades cognitivas e representações que as nossas, mas num espaço físico não-euclidiano, criariam uma geometria não-euclidiana; nós que vivemos num espaço físico euclidiano criámos uma geometria euclidiana. Logo, o conhecimento geométrico é conhecimento experimental.

---

[10] Poincaré considera que a geometria de Riemann é geometria da esfera estendida a três dimensões.

[11] Consideremos novamente seres com as mesmas capacidades intelectuais que as nossas que vivem numa esfera com as leis seguintes: a temperatura não é uniforme; é máxima no centro e é zero na superfície, segundo a proporcionalidade, $T(r) \propto (R^2 - r^2)$, onde R é o raio da esfera e r é a distância de um ponto ao centro da esfera; finalmente, todos os corpos têm o mesmo coeficiente de dilatação e equilíbrio calórico com o meio é instantâneo. Ver Poincaré (1902/1968, pp. 88-91).

Poincaré argumenta que, caso nós fossemos transportados para o mundo esférico da parábola acima, continuaríamos a usar nesse espaço físico a geometria euclidiana. Usaríamos a geometria euclidiana para estudar o movimento dos objetos nesse mundo imaginário. Por sua vez, se esses seres imaginários fossem transportados para o nosso espaço físico, continuariam a usar a geometria não-euclidiana. Ou seja, os nossos fenómenos espaciais seriam estudados de acordo com a geometria não-euclidiana. Há uma *sobredeterminação* das geometrias pela experiência, isto é, geometrias alternativas e contraditórias podem aplicar-se aos mesmos factos experimentais. A geometria euclidiana e as geometrias não-euclidianas são empiricamente equivalentes. Portanto, não é a experiência que determina o conhecimento geométrico. A experiência apenas serve de guia para a escolha da geometria.

> Objeção. Se a experiência permite guiar-nos na escolha da geometria, então há uma geometria mais verdadeira do que as outras.

A noção de *geometria verdadeira* é desprovida de sentido. Analogamente não tem sentido perguntar se o sistema métrico internacional é mais verdadeiro do que o sistema métrico inglês; nem tem sentido perguntar se as coordenadas polares são mais verdadeiras do que as coordenadas cartesianas. A experiência serve para escolher a geometria *mais cómoda*, mas não a geometria mais verdadeira. *Os axiomas da geometria são convenções*. Por que razão escolhemos nós, humanos, a geometria euclidiana? Porque a geometria euclidiana é mais simples do que as restantes e é aquela a que o nosso espírito está mais habituado.

Resumidamente, o convencionalismo geométrico de Poincaré é assim articulado. As geometrias não-euclidianas são consistentes e não podem ser rejeitadas. Contrariamente à teoria kantiana, o conhecimento geométrico não é sintético *a priori*, porque foram criadas várias geometrias inconsistentes entre si e seres cognitivamente semelhantes criariam geometrias diferentes em espaços físicos diferentes. Contrariamente ao empirismo geométrico, o conhecimento geométrico não é experimental, porque há uma sobredeterminação das diferentes geometrias pela experiência, na medida em que geometrias diferentes se aplicam a um mesmo fenómeno experimental. O conhecimento geométrico é uma convenção, onde a experiência serve como guia para a escolha da convenção mais cómoda.

A principal crítica ao convencionalismo decorre justamente da aplicação da geometria não-euclidiana ao espaço físico, por intermédio da teoria da Relatividade Geral. Por exemplo, Rudolf Carnap, nas notas introdutórias ao livro de Reichenbach (1958), observa que a geometria não-euclidiana não é uma geometria mais simples do que a geometria euclidiana. Portanto, contrariamente ao convencionalismo, a escolha da geometria não se opera por uma questão de comodidade ou simplicidade, mas sim por uma questão empírica. A experiência é que determina qual é a geometria verdadeira do espaço físico.

Leituras adicionais recomendadas

Kant (1787/1994). *Crítica da Razão Pura*. [Introdução B (36-57), Estética Transcendental (61-87)].

Mill (1963). *The Collected Works of John Stuart Mill, in 33 vols.* [Livro II, Capítulo V].

Platão (1992). *Ménon*. [O diálogo entre Sócrates e o Escravo].

Poincaré (1902/1968). *La Science et l'Hypothèse*. Paris: Flammarion. [Capítulos III-V]. Tradução portuguesa: Poincaré (2010) [dos capítulos III e V].

(Página deixada propositadamente em branco)

CAPÍTULO 2
LOGICISMO

Este capítulo é sobre as ideias fundamentais do logicismo de Frege. Começaremos por fazer uma introdução ao projeto logicista e aos princípios que o norteiam. Faremos uma breve descrição sobre as objeções do logicismo às teses empiristas, psicológicas e ao criticismo. Faremos uma introdução à nova lógica criada por Frege. Em seguida, analisaremos os passos mais importantes do pensamento de Frege na elucidação dos fundamentos lógicos que ele presumia servir para derivar a Aritmética e, num segundo momento, a própria Análise Matemática. Faremos uma exposição do paradoxo de Russell que dinamitou o logicismo de Frege. Terminaremos com duas evasões possíveis ao paradoxo: a teoria de tipos de Russell e de Whitehead e o teorema de Frege.

1. Projeto de Frege

"O que é o número um?". É com esta questão que Gottlob Frege inicia *Os Fundamentos da Aritmética* (1992), publicado em 1884. O objetivo principal de Frege é esclarecer quais são os fundamentos da aritmética.

Os Fundamentos são constituídos por duas partes distintas: uma destrutiva e outra construtiva. Na parte destrutiva, Frege refuta diferentes conceções epistemológicas, a respeito dos fundamentos da matemática, nomeadamente, o empirismo, a psicologia e o criticismo.

Na parte construtiva é desenvolvida e fundamentada a tese logicista, a tese segundo a qual os fundamentos da aritmética são definições e leis lógicas gerais. Por sua vez, os restantes ramos da matemática (com exceção da Geometria) também seriam redutíveis a estes princípios lógicos. Concretamente, e à luz da matemática contemporânea, isso significaria que, no caso da aritmética, os axiomas de Peano/Dedekind da aritmética (ver apêndice) seriam redutíveis a essas definições e leis lógicas. Deste modo, os chamados *axiomas* de Peano/Dedekind perderiam o estatuto de axiomas e passariam a ser considerados teoremas que se deduziriam das definições e leis lógicas gerais estabelecidas. O logicismo pretende proceder a uma identificação concreta dessas definições e leis lógicas gerais.

Dedicámos o capítulo 1 inteiramente à geometria. Levanta-se assim a questão de saber por que razão Frege investigou sobre os fundamentos da aritmética e não investigou sobre os fundamentos da geometria. Para compreendermos melhor a direção das investigações de Frege, importa esclarecer um pouco o contexto da matemática na altura da redação d'*Os Fundamentos*.

Desde a Antiguidade, a geometria euclidiana era tida como o paradigma de rigor e precisão. Por exemplo, quando surgiu a Análise Matemática, no século XVII, muitos dos seus teoremas eram demonstrados por recurso à própria geometria euclidiana. Tal como vimos no capítulo 1, apenas no final do século XIX, e com o surgimento das geometrias não-euclidianas, a geometria euclidiana deixou de ser considerada como a disciplina mais importante da Matemática. No caso da Análise Matemática, assiste-se à chamada *aritmetização da Análise*. Ou seja, as proposições de análise matemática seriam deriváveis dos axiomas básicos da aritmética. No tempo de Frege, a Aritmética tinha destronado a Geometria como a área mais importante da Matemática. Deste modo, compreende-se que Frege tenha dirigido as suas investigações para os fundamentos da aritmética e não para os fundamentos da geometria.

Frege publica três obras fundamentais que edificam o logicismo. Antes da publicação da obra *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Os Funda-*

mentos da Aritmética), em 1884, Frege publica *Begriffsschrift* (*Notação Conceptual*, (1972)), em 1879, onde expõe as suas novas ideias sobre a lógica. Após a publicação da obra *Die Grundlagen*, Frege publica os dois volumes de *Grundgesetze der Arithmetik* (*Leis Básicas da Aritmética*, (1893/2013)), em 1893 e 1903, onde procede a uma formalização das ideias propostas em *Die Grundlagen* e estende a sua proposta com vista a cobrir também os números reais. A famosa carta de Bertrand Russell para Frege, onde lhe refere ter encontrado uma inconsistência no seu sistema, chega às mãos do destinatário aquando da publicação do segundo volume de *Grundgesetze der Arithmetik*. Ingloriamente, Frege tenta ainda emendar a sua proposta, num apêndice ao livro, ainda antes da sua publicação.

Há três princípios que são enunciados no início d'*Os Fundamentos* e que são programáticos para a investigação de Frege:[1]

> É necessário separar com nitidez o que é psicológico do que é lógico, o que é subjetivo do que é objetivo;
>
> Só se pode perguntar pela denotação de uma palavra no contexto de uma proposição e não a considerando isoladamente; [princípio do contexto]
>
> Deve manter-se sempre presente a distinção entre conceito e objeto. (Frege, 1992, p. X)

O princípio do contexto talvez seja o princípio mais importante destes três princípios. Se pretendermos determinar o significado de uma palavra, devemos verificar o contexto em que a palavra é usada. Ou seja, identificar as frases ou proposições onde a palavra aparece no uso corrente das linguagens (naturais ou formais). Por exemplo,

[1] Em alemão, o termo *anzahl* é usado para designar "número cardinal"; enquanto o termo *zahl* é usado para designar um qualquer número (incluindo números racionais e negativos). Não vou seguir esta distinção e vou usar o termo *número* para simplesmente designar um qualquer número natural, {0, 1, 2, …}. Nas citações d'*Os Fundamentos da Aritmética*, a partir da tradução portuguesa, oblitero a palavra "cardinal" sempre que a considerar desnecessária.

alguém que desconhece o significado da palavra "cão" tem de começar por analisar frases onde esta palavra é correntemente usada. Frases do género: "um cão é um mamífero", "um cão é um animal de quatro patas", "um cão ladra", "gosto muito do meu cão Snoopy", etc. A palavra "cão", por si própria, nada diz acerca do seu significado, para alguém que *a priori* desconhece o seu significado.

Consideremos o primeiro princípio da distinção entre o que é objetivo e o que é psicológico. Quando enunciamos a palavra "cão", para muitos de nós nada mais acontece do que uma representação mental individual de uma imagem de um cão, muito provavelmente, a imagem de um cão que nos seja próximo. Todavia, nada disto interessa para a determinação do significado da palavra "cão". Se queremos saber o significado da palavra "cão", temos de distinguir os aspetos psicológicos (subjetivos) que esse termo pode despertar em todos nós, mas com significados diferentes, do significado lógico (objetivo) que a palavra "cão" poderá ter, e que se presume que terá o mesmo significado para todos nós. Estando Frege preocupado com o significado das palavras numéricas como "um", "dois", etc., ele vai começar por analisar o uso que fazemos dessas palavras no contexto de frases, obliterando o seu significado psicológico, e verificando a própria estrutura lógica de tais frases.

A distinção entre psicologia e objetividade está intimamente relacionada com a distinção entre ideias, no sentido de pensamentos e imagens que ocorrem na mente, e verdade. Podemos ter muitas ideias que são falsas; e podem existir muitas verdades que nunca foram pensadas. Por exemplo, 2+2=5 é uma ideia que já possamos ter tido, mas é uma ideia falsa; por sua vez, o teorema de Pitágoras já era verdadeiro ainda antes de ter sido formulado pelo próprio Pitágoras. No trabalho filosófico há que manter assim distintos o domínio da lógica e o domínio da psicologia. O cálculo aritmético é do domínio da lógica; enquanto a psicologia é um estudo da própria mente e dos pensamentos que podem ocorrer. A psicologia pode contribuir para o esclarecimento de como a nossa mente procede num cálculo aritmético ordinário, mas em nada contribuirá para justificar ou demonstrar por que razão as proposições da aritmética são efetivamente verdadeiras.

O princípio da distinção entre objeto e conceito resulta também da própria análise da estrutura das frases da linguagem natural. Como veremos mais à frente, na secção 3, "Nova lógica", Frege vai distinguir entre objetos que podem ou não cair sob conceitos. Os conceitos são como propriedades que se aplicam aos objetos que caem sob eles.

2. Logicismo: destruindo

Na parte destrutiva d'*Os Fundamentos*¸ Frege refuta algumas conceções acerca dos números. Nomeadamente, desenvolve argumentos contra o empirismo, a psicologia e o criticismo.

2.1. Antiempirismo e antipsicologia

Frege começa por refutar a ideia segundo a qual o conhecimento aritmético é um conhecimento empírico. No seu entender, não precisamos de recorrer a qualquer experiência sensorial para determinar a verdade das proposições aritméticas. Comecemos pela refutação da ideia empirista para a matemática segundo a qual os números são propriedades dos objetos exteriores.

Suponhamos que entregamos uma pilha de cartas a um nosso interlocutor e perguntamos-lhe: "qual é o número?", no sentido de "quantos?". Várias respostas são possíveis. O interlocutor pode contar as cartas e responder "104", porque foi esse o número de cartas que ele contou. O interlocutor pode contar as cartas e responder "2", porque foi esse o número de baralhos que ele contou. O interlocutor pode responder "1", porque foi simplesmente uma pilha de cartas que lhe foi entregue. E assim por diante. Por outras palavras, a pergunta "qual é o número?" pode ser interpretada de diferentes maneiras pelo nosso interlocutor. Nomeadamente, “qual é o número de cartas?”, “qual é o número de baralhos?”, “qual é o número de pilhas?”, etc. A pergunta “qual é o número?”, por si só, não indica com precisão qual a contagem que ele deve efetuar.

Em contraste, se entregarmos a um interlocutor uma camisa branca, e lhe perguntamos “qual é a cor?”, a resposta será sempre a mesma para qualquer interlocutor (que não tenha distúrbios psíquicos a respeito das cores!): “branco”. Se entregarmos a um interlocutor um objeto pesado e lhe perguntamos “qual é o peso?”, a resposta será sempre a mesma. Em ambas as situações, os potenciais interlocutores saberão determinar qual é a resposta a dar. Em conclusão, se os números fossem uma propriedade dos objetos exteriores, tal como no caso das cores ou do peso, então obteríamos sempre a mesma resposta perante a pergunta “qual é o número?”. Como isso não é o caso, os números não são uma propriedade dos objetos exteriores.

A objeção anterior, a respeito do empirismo, conecta-se com a objeção à psicologia: os números são uma propriedade dos objetos exteriores, que depende como o sujeito olha para o objeto. Ou seja, o número depende do modo subjetivo como o sujeito olha para o objeto. Perante uma pilha de cartas, um sujeito pode vê-la como uma pilha, 2 baralhos, a totalidade de cartas da pilha, etc. Neste sentido os números são propriedades subjetivas que dependem da perspetiva que o sujeito tem sobre o objeto. Assim, perante um mesmo objeto “aglomerado”, diferentes sujeitos podem atribuir diferentes números.

Ora, isto não é o que acontece no dia a dia. Quando se faz uma pergunta numérica a alguém sobre um determinado objeto “aglomerado”, supomos que existe uma, e uma só, resposta correta à nossa pergunta. Ou seja, a pergunta é necessariamente acompanhada com uma descrição a respeito da qual é feita a contagem. Perante a pergunta “quantas cartas existem neste baralho?”, sabendo de antemão que existem 52 cartas, ficaríamos muito surpreendidos se a resposta do nosso interlocutor fosse “uma”. Portanto, números não são propriedades subjetivas que os sujeitos atribuem aos objetos.

2.2. Anticriticismo

Embora Frege concorde com Kant que o conhecimento geométrico é conhecimento sintético *a priori*, ele não considera que o conhecimento aritmético seja também conhecimento sintético *a priori*, como Kant defendeu que fosse (ver capítulo 1). Se o conhecimento aritmético fosse conhecimento sintético *a priori*, então esse conhecimento aplicar-se-ia apenas à estrutura do espaço e do tempo, pois, de acordo com Kant, são as formas puras de intuição – o espaço e o tempo – que fundamentam esse conhecimento. Frege considera que o conhecimento aritmético, além de se aplicar ao espaço e ao tempo, também se aplica a outros domínios da realidade. O conhecimento aritmético é distinto do conhecimento geométrico e tem um domínio de aplicação mais vasto.

> [A]s verdades aritméticas regem o domínio do contável. Este é, de entre todos, o mais abrangente; pertence-lhe não apenas o que é real, nem só o que é intuível, mas também tudo o que é pensável. Não será assim de esperar que as leis dos números estejam na mais íntima das ligações com as do pensamento? (Frege, 1992, p. § 14)

No capítulo 1, vimos que Kant introduziu uma distinção entre juízos analíticos e juízos sintéticos. Recordando, um juízo analítico é um juízo cujo predicado faz parte do conceito. Por exemplo, no juízo *Todos os homens são mortais* o predicado *mortal* faz parte do conceito *homem*.

Ora, acontece que há asserções que não obedecem à estrutura anterior. Por exemplo, a frase "chove ou não chove" não tem uma estrutura kantiana, sujeito-predicado, mas é igualmente uma frase com uma estrutura importante e corrente no dia a dia. A estrutura da frase é do género: *P* ou não-*P*. A análise kantiana é insuficiente para expressar esta frase. No entanto, Frege considera que a estrutura da frase anterior é analítica. Frege propõe assim uma nova definição de verdades analíticas: todas as proposições que se derivam de definições e leis lógicas gerais.

Uma lei ou definição lógica geral aplica-se a qualquer objeto e não pode ser negada. Por exemplo, a afirmação de que "qualquer objeto é idêntico a si mesmo" é uma afirmação que refere qualquer objeto atual ou possível; e é uma afirmação que não pode ser negada, sob pena de entrarmos em contradição. Em contraste com Kant, Frege vai assim defender que o conhecimento aritmético é conhecimento analítico.

3. Nova lógica

Até Frege, a Lógica era dominada pela Lógica Aristotélica, nomeadamente, pela teoria do silogismo. A Lógica era uma disciplina filosófica e não tinha qualquer conexão com a Matemática. A partir do final do século XVII, Leibniz inaugura uma abordagem sobre a Lógica, chamada *matematização da Lógica*. Um ponto de viragem na Lógica, onde a Matemática aborda o domínio da Lógica. Esta abordagem atingiu o seu apogeu no século XIX, pelas mãos de George Boole e Gottlob Frege. Frege é o criador de uma nova lógica revolucionária que corta definitivamente com a Lógica Aristotélica. *Begriffsschrift* (1972) (*Notação Conceptual*), publicado em 1879, é a primeira obra que aborda e procede a uma sistematização formal da Lógica Proposicional e da Lógica de Predicados.[2] Por sua vez, Frege é também o criador de um novo ramo da Matemática, a Lógica Matemática.

Para conseguirmos compreender o logicismo e conseguir formalizá-lo minimamente, temos de introduzir algumas noções da nova lógica de Frege.

[2] Esta nova lógica é também abreviadamente designada *lógica simbólica*. No final do século XIX, a apreciação da Lógica Simbólica na Academia era assim descrita por Whitehead: "a lógica simbólica (...) foi rejeitada por muitos lógicos sob o argumento de que o seu interesse é matemático, e por muitos matemáticos sob o argumento de que o seu interesse é lógico" (Whitehead, 1898, p. vi).

3.1. Noções de lógica de primeira ordem

Nomes são entidades linguísticas e podem ser nomes próprios ou descrições definidas.

Exemplos de nomes próprios:
"Frege"
"Kant"
"João"

Exemplos de descrições definidas:
"O autor d'*Os Fundamentos*"
"O prédio mais alto de Nova Iorque"
"O primeiro-ministro de Portugal"

Objetos são a contraparte ontológica dos nomes. Ou seja, objetos são entidades referidas por nomes. Basicamente, a respeito dos exemplos anteriores, esses objetos são obtidos das expressões linguísticas anteriores, mas sem as aspas: Frege, Kant, o autor d'*Os Fundamentos*, etc. Note-se que diferentes nomes podem referir um mesmo objeto, por exemplo, "Álvaro Campos" e "Alberto Caeiro" referem um mesmo indivíduo, Fernando Pessoa.

O domínio de quantificação das proposições de lógica de primeira ordem é respeitante a objetos. Na prática, isto significa que as variáveis ligadas aos quantificadores universal e existencial são variáveis a respeito de objetos (e.g. $\exists x$, $\forall x$).

Predicados são entidades linguísticas que se obtêm pela remoção de nomes em frases declarativas.

p: "Platão nasceu antes de Frege"
Se em *p* retirarmos o nome "Platão", obtemos:
Predicado: "_nasceu antes de Frege".

Um predicado de primeira ordem é verdadeiro para alguns nomes e falso para outros. Por exemplo, o predicado anterior é verdadeiro para o nome "Aristóteles", mas é falso para o nome "Bertrand Russell", pois Aristóteles nasceu antes de Frege, mas Bertrand Russell nasceu depois de Frege.

O **grau de um predicado** (ou aridade) é determinado pelo número de nomes removidos numa frase declarativa.

Frase: "A relva é verde"
Predicado de grau 1: "_é verde".

Frase: "Kant nasceu antes de Frege"
Predicado de grau 2: "_nasceu antes de_".

Frase: "Coimbra está entre Porto e Lisboa"
Predicado de grau 3: "_está entre _e_".

Conceitos são a contraparte ontológica de predicados. Ou seja, conceitos são entidades que são referidas por predicados. Temos de adotar uma terminologia para designar os conceitos. Os conceitos, inferidos de predicados respetivos, serão escritos sem as aspas, sem o "tracinho" e em itálico. Por exemplo, designam conceitos as expressões seguintes: *é verde*, *nasceu antes de*, etc. Diferentes predicados podem referir um mesmo conceito, por exemplo, "_est vert" e "_is green" referem um mesmo conceito, digamos, *é verde*.

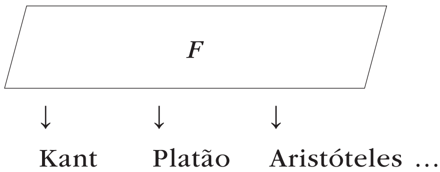
Tal como os predicados, os conceitos são entidades incompletas, na medida em que vários objetos podem cair ou não sob os mesmos. Os predicados têm um "tracinho" que pode ou não ser preenchido por um nome. Analogamente os conceitos podem cair ou não sobre objetos. Conceitos de primeira ordem podem também ser vistos como propriedades a respeito de objetos.[3] Por exemplo, o meu gato, sendo de cor branca, tem a propriedade da *brancura*.

[3] Conceitos podem também ser vistos como funções. O domínio é um conjunto de objetos (no caso de conceitos monádicos), pares ordenados de objetos (no caso de conceitos diádicos), etc. O contradomínio é o conjunto dos valores de verdade, {V, F}.

Seja o conceito *F*

F: *nasceu antes de Frege*.

Sob o conceito *F* caem vários objetos, como, por exemplo, Kant, Platão e Aristóteles.



E há muitos outros objetos que não caem sob o conceito *F*, como, por exemplo, Karl Popper, Bertrand Russell, etc.

Extensão de um conceito é o conjunto de objetos que caem sob esse conceito.[4] A extensão de um conceito é um objeto. Usamos uma descrição definida para referir uma extensão, designadamente, "a extensão do conceito *F*". Todo o conceito tem uma extensão. Mesmo um conceito sob o qual não caia qualquer objeto, tem uma extensão que é o conjunto vazio.

Recuperando o exemplo anterior, a extensão do conceito *nasceu antes de Frege* é o conjunto de pessoas que nasceu antes de Frege, designadamente, {Kant, Platão, Aristóteles, …}. Importa salientar que neste exemplo estamos perante três entidades distintas: 1) o conceito *nasceu antes de Frege*; 2) os objetos que caem sob o conceito, designadamente, Kant, Platão, Aristóteles, …; 3) a extensão do conceito, isto é, o conjunto de pessoas que cai sob o conceito *nasceu antes de Frege*, {Kant, Platão, Aristóteles, …}.[5]

---

[4] Há autores que, em vez do termo *conjunto*, utilizam outros termos como *classe*, *aglomerado*, *coleção*, etc.

[5] Não é claro em Frege que uma *extensão de um conceito F* seja *o conjunto de objetos que cai sob o conceito F*. Para Frege, na verdade, as extensões de um conceito são o "curso de valores" de uma função, ou seja, o conjunto de valores da função para cada argumento-objeto da função. Este aspeto exegético não é importante para a exposição e a análise deste capítulo.

Como veremos mais à frente, a introdução da expressão "extensão do conceito" vai-se revelar desastrosa no projeto logicista, conduzindo a uma inconsistência. No entanto, Frege introduz esta noção n'*Os Fundamentos* com uma grande ligeireza, sem atribuir importância ao seu significado: "[n]esta definição pressupusemos como conhecido o sentido da expressão 'extensão do conceito'" (Frege, 1992, p. § 107). Esta desvalorização do verdadeiro significado da expressão "extensão do conceito" decorre de que era corrente o uso desta expressão na Lógica do tempo de Frege. Na verdade, o seu uso remonta à Idade Média. Numa das obras mais importantes de Lógica, pós-Aristóteles, *A Lógica ou a Arte de Pensar*, publicada no séc. XVII, Antoine Arnauld e Pierre Nicole (1683/2016) fazem uso dessa noção, embora de forma ligeiramente diferente do uso que Frege faz dessa expressão. N'*Os Fundamentos* a expressão "extensão do conceito" é assim um termo primitivo, que Frege não esclarece de todo. Mais tarde, no *Grundgesetze der Arithmetik*, a definição deste termo vai originar uma inconsistência.

3.2. Noções de lógica de segunda ordem

As noções lógicas que vimos na secção anterior são todas respeitantes à chamada *lógica de primeira ordem*. Introduzamos agora algumas noções da chamada lógica de segunda ordem.

Predicados de segunda ordem são entidades linguísticas que se obtêm pela remoção de predicados de primeira ordem em frases declarativas.

Conceitos de segunda ordem são entidades referidas por predicados de segunda ordem. Conceitos de segunda ordem podem ser vistos como propriedades de propriedades a respeito de objetos. Vamos adotar a terminologia de referir estes conceitos pelos parêntesis retos [*F*]. O domínio de quantificação das proposições de lógica de segunda-ordem é sobre conceitos. Em termos formais, isto significa que as variáveis ligadas aos quantificadores universal e existencial podem ser variáveis a respeito de conceitos (e.g. $\exists F$, $\forall F$).

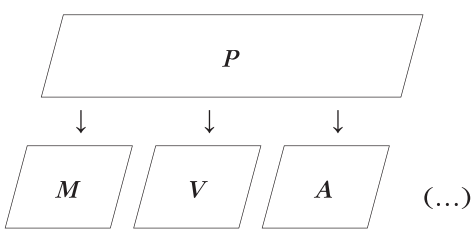
Consideremos concretamente a noção de *existência*, por intermédio de um exemplo.

Frase: "Existem homens".

Seja o predicado de primeira ordem "_é homem", correspondente à expressão na frase "homens";
Retirando na frase o predicado "_é homem", correspondente à expressão na frase "homens", obtemos o predicado de segunda ordem "existe_", correspondente à expressão na frase "existem".
Seja o conceito F
F: *é homem*
Formalização: $\exists x\ Fx$
Retirando à formalização o conceito F, obtemos o conceito de segunda ordem [P]: [existe]
[P]: $\exists x\ \_x$

Sob o conceito [P] caem vários conceitos de primeira ordem. Por exemplo:

M: *é mamífero*;
V: *é vegetal*;
A: *é animal*,
(…)



E há muitos outros conceitos de primeira ordem que não caem sob o conceito [*P*], como, por exemplo, *é marciano*, *é unicórnio*, etc., na medida em que, supostamente, nenhum objeto cairá sob estes conceitos.

A noção de *existência* é um conceito de segunda ordem. Quando afirmamos que "existem homens", não estamos a dizer nada acerca de homens particulares, digamos, "Pedro tem a propriedade de existir". A afirmação "existem homens" é acerca do próprio conceito genérico *é homem*, nomeadamente, que esse conceito tem a propriedade de ter exemplares. A noção de *existência* define-se para Frege nos termos seguintes:

> O conceito de segunda ordem, [existe], ∃, sob o qual cai um conceito de primeira ordem *G* se, e só se, pelo menos um objeto cai sob *G*.

Extensão de um conceito de segunda ordem é a coleção de conceitos de primeira ordem que cai sob esse conceito. A extensão de um conceito de segunda ordem é novamente um objeto. No exemplo anterior, a extensão do conceito [*P*] é o conjunto de conceitos que cai sob o conceito [*P*], designadamente, {*é mamífero*, *é vegetal*, *é animal*, …}.

Frege admite outras ordens superiores à segunda, mas para analisarmos a edificação do projeto logicista são suficientes as duas primeiras ordens.

4. Logicismo: construindo

A partir do parágrafo § 55 d'*Os Fundamentos* há um corte abrupto na redação levada até então. Frege para de criticar outros filósofos e outras conceções. Inicia-se a parte construtiva do livro. Avança a sua proposta, que se prolonga até ao final do livro – § 109. São estes cerca de 50 parágrafos que vão ser um ponto de viragem na filosofia e nos fundamentos da matemática. Vão influenciar toda a investigação no século XX.

4.1. Atribuições de números

Consideremos as asserções numéricas seguintes:

a) A pilha tem 52 cartas.
b) A Terra tem uma lua.
c) Vénus tem zero luas.
d) A carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos.

De acordo com Frege, o conteúdo de asserções numéricas deste género são asserções acerca de conceitos. Brevemente:

Em a) atribuímos o número 52 ao conceito *é carta numa pilha*;
Em b) atribuímos o número 1 ao conceito *é lua da Terra*;
Em c) atribuímos o número 0 ao conceito *é lua de Vénus*;
Em d) atribuímos o número 4 ao conceito *é cavalo que puxa a carruagem do Imperador*.

A formalização da frase "Vénus tem zero luas" é a seguinte:
Seja o conceito F
F: *é lua de Vénus*.
Formalização: $\neg\exists x\ Fx$ (equivalente a $\forall x\ \neg Fx$).

A formalização da frase "A Terra tem exatamente uma lua" é a seguinte:
Seja o conceito F
F: *é lua da Terra*.
Formalização: $\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow y = x))$

Consideremos a frase: "a Terra tem exatamente duas luas".

Seja o conceito F

F: *é lua da Terra*.

Formalização: $\exists x \exists y\ (Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge \forall z\ (Fz \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

Estas formalizações podem ser prolongadas indefinidamente.

Frege (1992, p. § 57) segue a ideia de Leibniz, segundo a qual definindo os números 0 e 1, e a noção de sucessor, então podemos automaticamente derivar todos os restantes números. Para o efeito, Frege considera as três condições seguintes:

1) O número 0 vem para o conceito F se, para todo o a, a não cai sob F.
2) O número 1 vem para o conceito F se não é o caso que para todo o a, a não cai sob F; mas é o caso que se a cai sob F e b cai sob F, então a e b são o mesmo.
3) O número n+1 vem para o conceito F se existir um objeto a que caia sob F, tal que o número n vem para o conceito cai sob F mas não é a.

A proposição 3) é um procedimento recursivo, que permite definir um número à custa do anterior. Formalmente, este procedimento recursivo expressa-se da maneira seguinte:

$\exists_0 x\ Fx$ significa que "não existem x tal que Fx" e define-se por $\neg\exists x\ Fx$

$\exists_{n+1} x\ Fx$ significa que "existem exatamente n+1 x, tal que Fx" e define-se por $\exists x\ (Fx \wedge \exists_n y\ (Fy \wedge x \neq y))$

Aplicabilidade

A partir destas definições é possível provar diferentes proposições aritméticas, sem ter de invocar qualquer vocabulário matemático, recorrendo unicamente a noções de lógica. Por exemplo:

3+2=5

$[\exists_3 x\ Fx \wedge \exists_2 x\ Gx \wedge \neg\exists x\ (Fx \wedge Gx)] \rightarrow \exists_5 x\ (Fx \vee Gx)$

Um problema central para qualquer filosofia da matemática é explicar por que razão a matemática (aritmética) se aplica ao mundo físico? Este exemplo serve para ilustrar a aplicabilidade da aritmética ao mundo físico. A proposição “3+2=5” pode ser uma aplicação de que se 3 peras na mesa de Napoleão forem adicionadas a 2 maçãs na mesa de Napoleão, então obteremos 5 frutos que podem ser maçãs ou peras na mesa de Napoleão. Formalmente, a explicação é a seguinte. Se há exatamente três objetos que caem sob o conceito *é pera na mesa de Napoleão* e há exatamente dois objetos que caem sob o conceito *é maçã na mesa de Napoleão* e não há qualquer objeto que simultaneamente caia sob o conceito *é pera na mesa de Napoleão* e sob o conceito *é maçã na mesa de Napoleão*, então há exatamente cinco objetos que caem sob o conceito *é maçã na mesa de Napoleão* ou sob o conceito *é pera na mesa de Napoleão*.

A aplicabilidade da aritmética ao mundo físico é possível, porque cada um dos conceitos anteriores cai sob um conceito numérico respetivo. Por exemplo, o conceito *é pera na mesa de Napoleão* cai sob o conceito de segunda ordem [três]. Seja três* o facto físico de que existem três peras na mesa de Napoleão. Pondo tudo junto, existem três* peras na mesa de Napoleão (um facto físico) que caem sob o conceito *é pera na mesa de Napoleão*; por sua vez, o conceito *é pera na mesa de Napoleão* cai sob o conceito de segunda ordem [três] (um facto matemático). Conclusão: três* se, e só se, [três].[6]

Abstração

Diz-se que um procedimento é *abstrativo* quando se extrai uma propriedade comum de várias coisas diferentes. Por exemplo, após observar várias bolas de tons de vermelho, posso extrair a ideia abstrata de *vermelho*. A ideia abstrata de *vermelho* é obtida por abstração a partir de vários objetos observados – uma *abstração objetal*. Neste caso, a propriedade *é vermelho* é a propriedade comum a todas as bolas observadas. Por sua vez, uma abstração diz-se *abstração conceptual*

[6] *Mutatis mutandis*, o mesmo se segue para o caso das duas maçãs.

quando abstraímos uma ideia a partir de conceitos. Por exemplo, a ideia de *existência* é extraída da constatação de que é uma propriedade comum a todos os conceitos sob os quais caem objetos. Frege é hostil à abstração objetal e vai adotar a abstração conceptual.

Podemos agora compreender melhor por que razão Frege rejeita a ideia de que os números possam ser uma propriedade de objetos exteriores e qual é, concretamente, a sua proposta alternativa. Os números não são alcançados por abstração a partir de objetos, mas sim por abstração a partir de conceitos. Os números individuais vêm para conceitos, ou seja, os números são atribuídos a conceitos, os quais caem sobre objetos respetivos. Por exemplo, o número "um" é uma propriedade do conceito *é primeiro-ministro de Portugal* e de todos os outros conceitos que caem sobre um único objeto. Por abstração conceptual extrai-se assim a ideia de que o número "um" é a propriedade comum a todos os conceitos que caem sobre um único objeto. Ressalva-se, no entanto, que este exemplo é apenas ilustrativo de uma abstração conceptual. Mais à frente, veremos que, na verdade, os números são extensões de conceitos de segunda ordem, ou seja, os números são objetos e não propriedades.

Em suma, o conhecimento aritmético dos números individuais e das proposições de aritmética em geral é alcançado por abstração a partir de noções de lógica. Mais à frente, aquando do princípio de Hume, voltaremos a este assunto.

4.2. Primeira tentativa de definição dos números individuais

Para quem lê *Os Fundamentos*, e chegado a esta parte da obra, acredita que Frege mais nada terá a acrescentar ao seu projeto logicista. Aparentemente, o projeto logicista encontra-se concluído. Primeiro, os números "zero", "um", "dois", etc., definem-se pelo procedimento recursivo acima. Segundo, as definições dos números foram estabelecidas seguindo o princípio do contexto, o princípio segundo o qual para conseguirmos uma definição dos números devemos analisar o uso ordinário dos números em asserções numéricas. Finalmente, através das definições numéricas podemos provar inúmeras proposições da aritmética do dia a dia. Mais à frente, veremos que, na verdade, Frege rejeita a ideia de que os números possam ser definidos desta maneira.

Analisemos com cuidado o caminho até agora percorrido. Esta tentativa de definição dos números foi obtida removendo o conceito de primeira ordem *F*, nas formalizações acima. O resultado desta remoção foi a obtenção de conceitos de segunda ordem, sob os quais caem conceitos de primeira ordem. Portanto, os números acabam por ser definidos como sendo conceitos numéricos de segunda ordem, por intermédio das fórmulas seguintes:

(i) $0 \equiv \neg\exists x\ \_x$

(ii) $1 \equiv \exists x\ (\_x \wedge \forall y\ (\_y \rightarrow y = x))$

(iii) $2 \equiv \exists x \exists y\ (\_x \wedge \_y \wedge x \neq y \wedge \forall z\ (\_z \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

(...)

(n) $n \equiv \exists x\ (\_x \wedge \exists_{n\text{-}1} y\ (\_y \wedge x \neq y))$

Podemos interpretar (i) como sendo o conceito de segunda ordem, sob o qual caem conceitos de primeira ordem, como, por exemplo, *é marciano*, *é unicórnio*, *é ferro de madeira*, etc. Ou seja, em (i) caem todos os conceitos de primeira ordem para os quais não cai qualquer objeto. [Zero], 0, é o conceito de segunda ordem, sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem, nos quais não cai qualquer objeto.

Uma análise semelhante pode ser feita relativamente a (ii) e (iii):

– Em (ii) caem todos os conceitos de primeira ordem para os quais cai exatamente um objeto. [Um], 1, é o conceito de segunda ordem, sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem, nos quais cai exatamente um objeto.
– Em (iii) caem todos os conceitos de primeira ordem para os quais caem exatamente dois objetos. [Dois], 2 é o conceito de segunda ordem, sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem, nos quais caem exatamente dois objetos.

As proposições (i)-(n) são assim propriedades de conceitos de primeira ordem.

Antes de avançarmos razões para a rejeição destas definições, importa dar uma pista que aponta para que algo está incorreto nesta definição dos números. As formalizações (i)-(n) são conceitos de segunda ordem, mas que não são as referências respetivas para os predicados numéricos que habitualmente usamos: “zero”, “um”, “dois”, etc. Rigorosamente, (i)-(n) são conceitos de segunda ordem correspondentes aos predicados de segunda ordem seguintes:

(i) “existem exatamente 0 *x*’s tais que _*x*”
(ii) “existe exatamente 1 *x* tal que _*x*”
(iii) “existem exatamente 2 *x*’s tais que _*x*”
(...)
(n) “existem exatamente *n* *x*’s tais que _*x*”.

Esta tentativa de definição dos números é incorreta por duas razões. Primeira, as proposições (i)-(n) são incapazes de analisar identidades numéricas (e desigualdades numéricas) como, por exemplo:

a) “O número de torres brancas do xadrez é igual ao número de bispos brancos do xadrez”.

Podemos, por exemplo, ser tentados a formalizar a frase a) de diferentes maneiras, mas todas erradas.

Dicionário:
F: *é torre branca do xadrez*.
G: *é bispo branco do xadrez*.

$\exists_2 x\ Fx = \exists_2 x\ Gx$

Esta formalização é sem sentido, uma vez que os conceitos *F* e *G* são conceitos diferentes

$\exists_2 x\ Fx \wedge \exists_2 x\ Gx$

Esta formalização também não é adequada, porque falha em exprimir o significado da identidade. Na verdade, a formalização acima é uma formalização da frase "Existem exatamente duas de torres brancas do xadrez *e* existem exatamente dois bispos brancos do xadrez".

Segunda, as proposições (i)-(n) são conceitos de segunda ordem. Frege insiste que os números são objetos autónomos e não são conceitos. Veremos mais à frente, na subsecção 4.7, que Frege vai definir os números individuais como extensões de conceitos (relembre-se que as extensões de conceitos são objetos autónomos). Precisamente os números individuais vão ser definidos como sendo extensões de conceitos de segunda ordem. Em particular, o número individual 0 vai ser a extensão do conceito definido por (i), o número individual 1 vai ser a extensão do conceito definido por (ii), e assim por diante.

4.3. Números são objetos e não conceitos

Consideremos novamente as frases:

a) A pilha tem 52 cartas.
b) A Terra tem uma lua.
c) Vénus tem zero luas.
d) A carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos.

Nestas frases, do dia a dia, os números são utilizados como adjetivos. Ou seja, os números são atribuições de conceitos. São propriedades que se atribuem a determinados conceitos. Algo análogo às frases seguintes: em "a relva é verde", a *verdicidade* é uma propriedade que se atribui à relva; "Sócrates é sábio", a *sapiência* é uma propriedade que se atribui a Sócrates.

Frege considera que os números são objetos autónomos. De acordo com um princípio que enunciámos no início deste capítulo, objetos são entidades distintas de conceitos. Consideremos a frase “Júpiter têm quatro luas”. Nesta frase, tal como nas frases anteriores, parece que estamos a atribuir o número quatro ao conceito *é lua de Júpiter*. Todavia, esta atribuição é incorreta e decorre da forma como formulamos as frases do dia a dia. Com vista a verificar o carácter “objetual” das palavras numéricas, a frase anterior deve ser reescrita da seguinte forma: “o número das luas de Júpiter é quatro”. E a mesma reescrita deve ser realizada para as frases anteriores:

a) O número de cartas da pilha é 52.
b) O número de luas da terra é um.
c) O número de luas de Vénus é zero.
d) O número de cavalos que puxa a carruagem do imperador é qua tro.

Objeção. Numa parte introdutória deste capítulo afirmou-se que, em frases do género “a relva é verde”, “_é verde” é um predicado de primeira ordem que designa o conceito de primeira ordem *é verde*. Do mesmo modo, nas frases acima “_é 52”, “_é um”, “_é zero”, “_é quatro” também parecem ser predicados de primeira ordem que designam conceitos de primeira ordem. Ou seja, aparentemente, e contrariamente ao que Frege defende, as palavras numéricas serão conceitos de primeira ordem!

A objeção anterior faz uma interpretação incorreta a respeito das frases em análise: interpreta a cópula “é” como sendo um elemento de um predicado. Mas esta interpretação é incorreta. Nas frases a)-d) o “é” tem o mesmo sentido de “é igual”, equivalente ao símbolo “=”, e não tem o mesmo sentido que, por exemplo, “a relva *é* verde”. Na frase “a relva é verde”, “_é verde” é um predicado de primeira ordem que refere um conceito de primeira ordem *é verde*. Isso não é o caso nas asserções numéricas acima.

> Encontramo-nos assim perante uma igualdade que afirma que a expressão “O número de luas de Júpiter” designa o

> mesmo objeto que a palavra “quatro”. E a igualdade é a forma dominante na Aritmética (Frege, 1992, p. § 57).

Este passo é crucial no projeto logicista. Frege vai definir os números por intermédio da noção de *igualdade*.[7]

Frege insiste que os números não são conceitos, mas sim objetos autónomos: “cada número individual é um objeto autónomo” é o subtítulo do parágrafo §55. Um qualquer objeto tem a propriedade da identidade e, como tal, pode ser continuamente reconhecido. O argumento de Frege para o carácter “objetual” dos números é de que os números fazem parte de equações. Ou seja, os números fazem parte de identidades e conseguimos reconhecê-los continuamente. Por exemplo, em 3+2=5 reconhecemos o mesmo objeto em ambos os lados da igualdade, mas referido por dois nomes diferentes (Kenny, 2000, p. 84).

4.4. Igualdades numéricas

Com vista a uma formalização lógica das igualdades numéricas, consideremos o exemplo seguinte. Dado um conjunto de facas e garfos, para sabermos se o número de facas é igual ao número de garfos, podemos alinhar as facas aos garfos. Se nesse alinhamento nenhuma faca ou garfo restar, então o número de facas é igual ao número de garfos. Esta correspondência chama-se *correspondência biunívoca* (um a um): as facas ficam numa correspondência biunívoca com os garfos.

[7] Para Frege os termos igualdade e identidade são intersubstituíveis: “Se se diz tal como Leibniz, ‘idêntico’ ou o mesmo, ou se se diz ‘igual’ é irrelevante” (Frege 1992: § 65).

Princípio de Hume[8]

Sejam F e G dois conceitos. O número que vem para o conceito F é igual ao número que vem para o conceito G se, e só se, existe uma correspondência biunívoca entre F e G.

$\#x\ Fx = \#x\ Gx \leftrightarrow F \approx G$

Correspondência biunívoca

Sejam F e G dois conceitos. Uma correspondência biunívoca entre F e G define-se por existir uma relação R tal que cada objeto que cai sob F relaciona-se por R com um único objeto que cai em G, e reciprocamente. Diz-se que F e G são *equinuméricos*.

$\exists \mathrm{R}\ [\forall x\ (Fx \rightarrow \exists_1 y\ (Rxy \wedge Gy)) \wedge \forall \mathrm{y}\ (Gy \rightarrow \exists_1 x\ (Rxy \wedge Fx))]$.

O princípio de Hume é um *princípio de abstração*. Diz-se que dois conceitos são equivalentes se forem equinuméricos. Temos a seguinte definição: um conceito F é equivalente a um conceito G se existe uma correspondência biunívoca, um a um, entre os objetos que caem sob o conceito F com os objetos que caem sob o conceito G. Assumindo então que dois conceitos são equivalentes, podemos extrair desta equivalência conceptual a ideia de que números iguais vêm para esses dois conceitos. Estamos a reafirmar o que foi referido no fim da secção 4.1. A noção de *números iguais* é obtida por abstração a partir de conceitos e não de objetos.

4.5. O problema de Júlio César

O problema que agora se levanta é de que o princípio de Hume apenas se verifica se em ambos os lados da igualdade, "$\#x\ Fx = \#x\ Gx$", aparecer um número, digamos, "número de mandamentos bíblicos = número de dedos das mãos", mas o princípio de Hume, por si só,

[8] A cunhagem do princípio com o nome de Hume decorre de Frege citar uma passagem do *Tratado da Natureza Humana*, de David Hume (1739/2012), quando introduz este princípio n'*Os Fundamentos da Aritmética*. Ver Frege (1992, p. § 63)

não impede ter um número de um dos lados da igualdade e um qualquer nome do outro lado da igualdade, digamos, "10 = Júlio César". Por outras palavras, "o número que vem para o conceito *F* = Júlio César". Pois, quer "10", quer "Júlio César" são nomes e como tal podem aparecer em ambos os lados da igualdade. Formalmente, o princípio de Hume é incapaz de avaliar proposições da forma "$\#x\ Fx = t$", onde t não é dado na forma "$\#x\ Gx$". Este é o chamado *problema de Júlio César*.

O problema de Júlio César levanta-se porque o princípio de Hume é uma definição contextual de número. O princípio não define explicitamente "o número que vem para o conceito *F*". Em vez disso, *intuitivamente* pressupõe que "o número que vem para o conceito *F* = *t*, onde *t* é um termo que designa um número".

Intuitivamente, não confundimos números com o próprio Júlio César. Ou seja, diríamos que a afirmação "o número que vem para o conceito *F* = Júlio César" é uma afirmação falsa, porque pessoas não são números. No entanto, a análise que estamos a realizar é feita no domínio da lógica e não no domínio das intuições nem das impressões sensoriais que possamos ter relativamente a números ou pessoas. O princípio de Hume é consistente com a ideia de que os números podem ser idênticos a qualquer outro nome como "Júlio César", "João", "Lisboa", etc. Assim, o princípio de Hume carece de uma definição alternativa de número, nomeadamente, uma definição explícita de número que impossibilite que tal coisa aconteça.

4.6. Definição explícita de número

Para ultrapassar o problema de Júlio César, Frege propõe uma definição explícita da expressão "o número que vem para o conceito *F*".

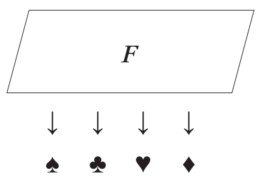
> *Definição explicita de número*
> O número que vem para o conceito *F* = a extensão do conceito *equinumérico com F*.

Não há qualquer circularidade nesta definição. O termo “número” aparece no lado esquerdo da igualdade, mas não aparece no lado direito da igualdade (note-se que a noção *equinumérico* foi definida atrás e igualmente não depende do termo “número”).

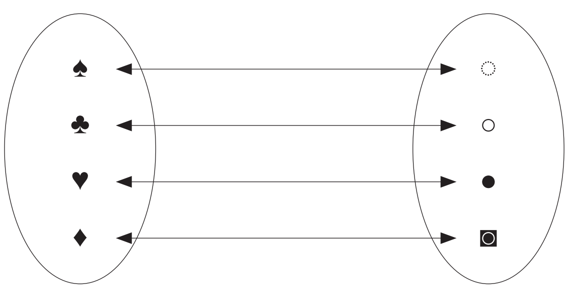
O problema de Júlio César também fica dissolvido. Júlio César não é uma extensão de um conceito. Júlio César é um objeto que cai sob conceitos. Uma extensão de um conceito é um conjunto de objetos que caem sob um conceito. Um objeto que cai sob um conceito não é a mesma coisa que um conjunto de objetos.

Para compreendermos um pouco melhor esta definição explícita de número, e antes de vermos como a mesma é utilizada para a definição dos números individuais, consideremos um exemplo simples do dia a dia.

Seja o conceito *F*, *é naipe num baralho de cartas*. Sob o conceito *F* caem exatamente quatro objetos:

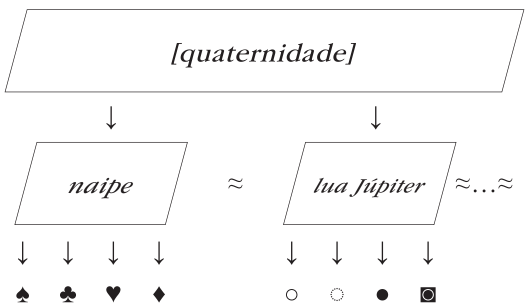


O conceito *F*, *é naipe num baralho de cartas*, é equinumérico com o conceito *G é lua de Júpiter*, na medida em que caem exatamente quatro objetos sob o conceito *G*. Os objetos que caem sob cada um dos conceitos podem ser colocados numa relação biunívoca. Ou seja, os naipes de um baralho de cartas podem ser colocados numa correspondência biunívoca com as luas de Júpiter. Por exemplo:



é naipe de cartas *é lua de Júpiter*

O conceito *F* é equinumérico com muitos outros conceitos sob os quais caem quatro objetos, como, por exemplo, *é torre no jogo de xadrez*, *é estação do ano*, *é pata de cavalo*, etc. Consideremos agora todos os conceitos sob os quais caem quatro objetos: *é naipe num baralho de cartas*, *é torre no jogo de xadrez*, *é lua de Júpiter*, *é estação do ano*, *é pata de cavalo*, etc. Estes conceitos caem todos sob o conceito de segunda-ordem [é equinumérico com o conceito *é naipe num baralho de cartas*]. Designemos este conceito de [quaternidade]. O conceito [quaternidade] é o conceito de segunda ordem, sob o qual caem todos os conceitos de primeira ordem, sob os quais caem quatro objetos. O número quatro é assim simultaneamente definido como sendo o conjunto de conceitos que têm a propriedade de quaternidade {*é naipe num baralho de cartas*, *é torre no jogo de xadrez*, *é lua de Júpiter*, *é estação do ano*, *é pata de cavalo*, ...} e como sendo a extensão do próprio conceito de segunda ordem [quaternidade].



4.7. Definição dos números individuais

Podemos agora definir cada número individual. Frege segue o procedimento de Leibniz de definir todos os números naturais a partir dos números 0 e 1. Para o efeito define primeiro o número 0, depois define o que se entende por um número ser *sucessor* a outro e, por fim, define o número 1. Os restantes números definem-se a partir das caracterizações estabelecidas para 0 e 1, aplicando a definição de sucessor em cada passo.

Para o número zero temos de pensar num conceito lógico, sob o qual nenhum objeto caia sob o mesmo.

> Consideremos o conceito *F*
> *F: é desigual a si mesmo*.

Ora, não cai nenhum objeto sob este conceito na medida em que nenhum objeto é desigual a si mesmo. 0 é o número que vem para o conceito *é desigual a si mesmo*. O mesmo acontece para a extensão deste conceito. Nenhum objeto pertence à extensão do conceito *é desigual a si mesmo*. A extensão do conceito *é desigual a si mesmo* é um conjunto vazio. Antes ainda de estabelecer a definição de zero, importa fazer duas notas a respeito do conceito *é desigual a si mesmo*.

Primeira, poder-se-ia considerar outro qualquer conceito alternativo sob o qual não cai nenhum objeto como, por exemplo, *é unicórnio*, *é marciano*, etc. No entanto, Frege prefere considerar o conceito *é desigual a si mesmo*, porque este é um conceito inteiramente definido por termos lógicos. É uma verdade analítica que é conhecida *a priori*.

Segunda, quando se afirma que "nenhum objeto é desigual a si mesmo", o termo "nenhum" parece ser sinónimo do termo "zero". Não será esta definição circular? Não, na medida em que há formulações equivalentes que contornam essa aparente circularidade. Por exemplo, uma formulação equivalente a "nenhum objeto é desigual a si mesmo" é a seguinte: "o que quer que seja *x*, não é o caso que *x* não seja igual a *x*". Nesta reformulação, não existe nenhum termo que pareça ser sinónimo de "zero".

Consideremos agora o conceito de segunda ordem [é equinumérico com o conceito *é desigual a si mesmo*]:

> O número 0 é definido como sendo a extensão do conceito de segunda ordem [é equinumérico com o conceito *é desigual a si mesmo*].

Pertencem a esta extensão todos os conceitos que satisfazem a fórmula $\neg\exists x\, Fx$. Ou seja, todos os conceitos sob os quais não cai qualquer objeto.

Em seguida, estabelece-se uma definição para sucessor.

Diz-se que *n* segue imediatamente a *m* na sucessão de números naturais:

> Há um conceito *F* e um objecto *x* que sob ele cai, de tal modo que o número que vem para o conceito *F* é *n* e que o número que vem para o conceito *que cai sob F, mas não é igual a x* é *m*. (Frege, 1992, p. § 76)

Seja *Smn*: "*n é sucessor de m*".

Smn: $\exists F\ \exists x\ [Fx \wedge n = \#u\ Fu \wedge m = \#u\ (Fu \wedge u \neq x)]$

Consideremos uma aplicação desta definição de sucessor, num caso do dia a dia, para mostrar que, por exemplo, 4 é o sucessor de 3. Seja o conceito *é lua de Júpiter* e um objeto que cai sob este conceito, e.g. Calisto:

> Há um conceito, *é lua de Júpiter*, e um objeto que cai sob o conceito, Calisto, de tal modo que o número que vem para o conceito *é lua de Júpiter* é 4, e o número que vem para o conceito [cai sob *é lua de Júpiter, mas não é igual a Calisto*] é 3.

Consideremos agora novamente os números. Queremos mostrar que 1 é o sucessor de 0. Para tal consideremos o conceito *é idêntico com 0*. Sob este conceito só cai um, e um só, objeto, 0. Portanto, o número 1 é o número que vem para o conceito *é idêntico com 0*. Aplicando a definição *Smn*, resulta:

> Há um conceito, *é idêntico com 0*, e um objeto que cai sob o conceito, 0, de tal modo que o número que vem para o conceito *é idêntico com 0* é 1, e o número que vem para o conceito [cai sob *é idêntico com 0, mas não é igual a 0*] é 0.
>
> 1 é o número que vem para o conceito *é idêntico com 0*. O número 1 é definido como sendo a extensão do conceito

> de segunda ordem [é equinumérico com o conceito *é idêntico com 0*].

Pertencem a esta extensão todos os conceitos que satisfazem a fórmula $\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow y = x))$. Ou seja, todos os conceitos sob os quais caem um, e um só, objeto.

Aplicando novamente a definição *Smn*, obtém-se a definição de 2:

> 2 é o número que vem para o conceito *é idêntico a 0 ou 1*. O número 2 é definido como sendo a extensão do conceito de segunda ordem [é equinumérico com o conceito *é idêntico a 0 ou 1*].

E assim por diante.

Podemos considerar que, armados com a definição de sucessor (*Smn*) e tendo elucidado os números 0 e 1, então os números naturais estão automaticamente todos definidos. Ou seja, *n* é número natural se aplicarmos *n* vezes a definição de sucessor, partindo da caracterização dada para o número 0. O problema é que esta definição de número natural, digamos, "tosca", é circular: o termo "*n*" aparece simultaneamente como *definiendum* (o que se quer definir) e *definiens* (o que a define).

4.8. Definição de número natural

A definição de *número natural* requer que introduzamos primeiro a definição de *propriedade hereditária* numa sucessão. Por exemplo, dizemos que a propriedade *humanidade* é hereditária na sucessão de seres humanos, na medida em que a criança herda a propriedade de humanidade dos seus pais. Ou seja, a propriedade *humanidade* é propriedade comum a todos os seres humanos, supondo que os seres humanos constituam uma sucessão de indivíduos.

A definição geral de hereditariedade é a seguinte. Uma propriedade é hereditária numa sucessão, quando para qualquer objeto *d*, se a propriedade pertencer a *d*, então essa propriedade pertence a qualquer outro objeto com o qual *d* se relacione nessa sucessão.

Em termos de uma sucessão de números, a propriedade de hereditariedade define-se na proposição seguinte.

> Sempre que x cai sob o conceito F e y é o sucessor de x, então y cai também sob o conceito F.
>
> Seja *Her* (F): o conceito F é hereditário relativamente ao sucessor.
>
> $Her\ (F)$: $\forall x\ \forall y\ [(Fx \wedge Sxy) \rightarrow Fy)]$

Podemos agora estabelecer uma definição de número natural.

> Diz-se que k é um número natural se tiver todas as propriedades hereditárias tidas por 0.
>
> $\forall F\ [(F0 \wedge Her\ (F)) \rightarrow Fk]$

Pondo tudo junto:

> *k é um número natural* se, e só se, $\forall F\ [(F0 \wedge \forall x\ \forall y\ ((Fx \wedge Sxy) \rightarrow Fy)) \rightarrow Fk]$

Consideremos duas observações relativamente à definição de número natural. Primeira, a definição é uma fórmula de lógica de segunda ordem, na medida em que a quantificação universal incide sobre um conceito de primeira ordem. Segunda, a definição não é circular. A noção de *número natural* apenas aparece do lado esquerdo da definição. Terceira, no entanto, o conceito F pode ser o próprio conceito *é número natural*, pois a quantificação é a respeito de qualquer conceito. Neste sentido a definição é impredicativa. Uma definição diz-se impredicativa quando o domínio de quantificação inclui a própria entidade que se está a definir.

5. Paradoxo de Russell

Em *As Leis Básicas da Aritmética*, Frege tenta elucidar a noção de *extensão de um conceito*, que n'*Os Fundamentos da Aritmética* é assumida como sendo um termo primitivo.

> *Lei Básica V*
> Sejam dois conceitos F e G. A extensão do conceito F é igual à extensão do conceito G, se e só se, todos os objetos que caem sob F são exatamente os mesmos objetos que caem sob G.
> $\{x\colon Fx\} = \{x\colon Gx\} \leftrightarrow \forall x\ (Fx \leftrightarrow Gx)$

Posteriormente, Frege deriva o Princípio de Hume da Lei Básica V. A Lei Básica V ancora-se na noção de extensão de um conceito, em particular, na assunção de que todos os conceitos têm uma extensão. Russell mostra que a noção *extensão de um conceito* gera uma inconsistência. Consequentemente, a Lei Básica V gera uma inconsistência que arruína o sistema logicista.

O paradoxo de Russell pode ser introduzido por uma versão do chamado paradoxo de Grelling-Nelson. Há conjuntos que são membros de si próprios. Por exemplo, o conjunto de pentassílabos, tem como elementos todas as palavras constituídas por cinco sílabas. A própria palavra "pentassílabo" faz parte deste conjunto, pois é formada por cinco sílabas.

Pentassílabo = {pentassílabo, democracia, classificado, ...}

Há conjuntos que não são membros de si próprios. Por exemplo, o conjunto de monossílabos tem como elementos todas as palavras constituídas por uma única sílaba. A própria palavra "monossílabo" não faz parte deste conjunto, pois é uma palavra formada por cinco sílabas.

Monossílabo = {sim, não, mas, ...}

O paradoxo gera-se considerando agora o conceito *é conjunto que não é membro de si próprio*. Seja F a extensão deste conceito.

$F = \{x\text{: } x \text{ é um conjunto e } x \notin x\}$

Por exemplo, o conjunto *monossílabo* é membro de F, porque não é membro de si próprio. O conjunto *pentassílabo* não é membro de F, porque é membro de si próprio.

A questão que agora se coloca é saber se F é membro de si próprio. Tal como foi definido F, F é membro de F se, e só se, F cai sob o conceito *é conjunto que não é membro de si próprio*. Formalmente:

$F \in F \leftrightarrow F \notin F$

Contradição.

5.1. Evasão I: teoria de tipos

Russell foi o primeiro a sugerir que o paradoxo que ele levantou à teoria de Frege envolve uma falácia. Relembrando, uma definição é impredicativa quando o domínio de quantificação inclui a própria entidade que se está a definir. Para gerar o conjunto que conduz ao paradoxo, esse próprio conjunto é impredicativo.

Inicialmente é definido um conceito *é conjunto que não é membro de si próprio*. Seja F a extensão deste conceito.

$F = \{x\text{: } x \text{ é um conjunto e } x \notin x\}$

F é um conjunto. O paradoxo gera-se partindo do pressuposto que F pode fazer parte do conjunto que é gerado pelo próprio conceito inicial que o define *é conjunto que não é membro de si próprio*. Neste sentido a definição de F é impredicativa.

Russell propõe o chamado *princípio do círculo vicioso* com vista a bloquear o paradoxo, bem como os restantes paradoxos deste género.

> Sempre que, em virtude de proposições sobre "todos" ou "alguns" dos valores que uma variável pode significativamente assumir, geramos um novo objeto, este novo objeto não deve estar entre os valores que a variável anterior pode assumir, uma vez que, se estivesse, a totalidade de valores cujo âmbito a variável poderia percorrer só seria definível em termos de si própria, o que nos remeteria para um círculo vicioso. Por exemplo, se eu disser "Napoleão tinha todas as qualidades que fazem um grande general", tenho de definir "qualidades" de maneira tal que a definição não inclua o que estou agora a afirmar, i.e., "ter todas as qualidades que fazem um grande general" não pode, em si, ser uma qualidade no sentido suposto. (Russell, 1919/2015, p. 275)

> *O princípio do círculo vicioso*
> "Tudo o que envolve o termo 'todos' de uma coleção não deve fazer parte dessa coleção" ou inversamente, "se, uma dada coleção tivesse uma totalidade, teria elementos apenas definíveis em termos dessa totalidade, então a dita coleção não teria uma totalidade". (Russell, 1908, p. 225)

Russell e Whitehead (1910), em os *Principia Mathematica*, vão propor uma teoria de tipos que conduz a uma partição adequada dos objetos matemáticos, em termos de uma hierarquização.[9] No nível mais baixo da hierarquia estão os chamados *indivíduos*. Um *indivíduo* é um objeto que não é um conjunto. Os indivíduos são de tipo 0. No nível seguinte da hierarquia estão os conjuntos, cujos indivíduos são elementos desses conjuntos. Os conjuntos de indivíduos são de tipo 1. No nível seguinte, temos conjuntos de conjuntos – tipo 2. E assim por diante. Esta estruturação impede estabelecer o alegado conjunto de todos os conjuntos. Os conjuntos são sempre definidos relativamente a um nível, apenas podendo

[9] Apenas abordaremos a teoria simples de tipos.

conter elementos do nível imediatamente inferior. Por exemplo, seja F o conjunto e $P(x)$ uma proposição genérica a respeito de x:

$$F = \{x\colon P(x)\}$$

De acordo com a teoria de tipos, se x for respeitante a indivíduos, então F apenas pode ser um conjunto de indivíduos; se x for respeitante a conjuntos de indivíduos, então F apenas pode ser um conjunto de conjuntos de indivíduos. E assim por diante. Por outras palavras, no sistema de Russell as frases $F \in F$ e $F \notin F$ são malformadas. Não fazem sentido. O paradoxo de Russell fica bloqueado.

5.2. Evasão II: teorema de Frege

Foi preciso passar mais de 50 anos para notar que, na verdade, o projeto logicista original de Frege poderia ser recuperado se se ignorasse a famosa Lei Básica V. Geach (1955) foi o primeiro a reparar nesse caminho alternativo. Charles Parsons (1965) mostrou que o Princípio de Hume era suficiente para a derivação dos axiomas de Peano/Dedekind. Crispin Wright (1983) realizou uma derivação efetiva dos axiomas. As investigações contemporâneas que alimentam esta perspetiva são classificadas de *neo-logicíssimo*.

Os axiomas de Peano/Dedekind podem ser derivados a partir do princípio de Hume adicionado como axioma à lógica de segunda ordem, ignorando, obviamente, a definição explícita de número que depende da noção de *extensão de um conceito*. Apenas se considera para o efeito a definição contextual (implícita) de número. Neste caso, a noção de *número que vem para o conceito F* é considerada como primitiva. Ou seja, no princípio de Hume, assume-se que $\#x\ Fx$ é uma noção primitiva. Este resultado é conhecido como *teorema de Frege*.

A única tentativa de Frege para emendar o seu sistema foi acrescentar um apêndice, ao segundo volume d'*As Leis Básicas da Aritmética*, com vista a tentar resolver o paradoxo de Russell, gerado pela Lei

Básica V. Essa tentativa não vingou. Para conseguir emendar cabalmente o seu sistema, Frege precisaria de regressar mais atrás no seu pensamento, nomeadamente, às ideias expostas n'*Os Fundamentos*, onde pela primeira vez aparece o princípio de Hume, mas onde nunca é evocada tal proposição como a Lei Básica V. O que acontece é que Frege nunca considerou que o princípio de Hume fosse uma lei suficientemente geral. Na obra *As Leis Básicas da Aritmética* ele tentou esclarecer o princípio de Hume por intermédio da Lei Básica V.

O sistema de Frege alicerça-se na existência de três tipos de entidades: conceitos, objetos e extensões, sendo que as extensões são elas próprias também objetos. Note-se que há conceitos sob os quais nenhum objeto cai, mas que não deixam de ter uma extensão. Todo o conceito tem uma extensão, mas nem sob todo o conceito cai um objeto. Neste sentido, as extensões são ontologicamente dependentes de conceitos. De acordo com Zalta (2020, sec. 6) "a existência de conceitos e extensões é derivável da sua regra de substituição e da Lei Básica V, respetivamente".[10] Mas tais afirmações de existência não parecem ser puramente analíticas. Um kantiano, por exemplo, pode reclamar que apenas por intermédio da intuição é que poderemos ter acesso a tais entidades – conceitos e extensões. A montante isto implica que a Lei Básica V não pode ter um estatuto analítico tal como Frege pretendia que tivesse.

No âmbito do teorema de Frege, há duas questões que se podem levantar: 1) como sabemos que os números existem? 2) que tipo de objetos são os números? A respeito da questão 1), dado que o princípio de Hume não é puramente analítico e dado que para Frege apenas podemos ter acesso à existência de entidades lógicas por meios analíticos, então é um mistério como poderemos alguma vez saber que existem números. A respeito da questão 2), como o problema de Júlio César se aplica ao Princípio de Hume e dado que não temos qualquer definição explícita de número, não sabemos que tipos de objetos são os números. Apenas com o princípio de Hume a bordo

[10] Não importa estar aqui a esclarecer a regra de substituição.

do nosso sistema, um número pode ser uma entidade referida por um qualquer nome![11]

Leituras adicionais recomendadas

Frege (1992). *Os Fundamentos da Aritmética*. [Três princípios: Introdução. Antiempirismo e antipsicologia: §21-§27. Anticriticismo: §12-§17. Parte construtiva: a partir de §55].

Apêndice

Axiomas de Peano/Dedekind

(1) $\mathbb{N}0$

0 é um número natural

(2) $\forall x\ \forall y\ [(\mathbb{N}x \wedge Sxy) \rightarrow \mathbb{N}y]$

Para todo o *x* e *y*, se *x* é um número natural e *y* é sucessor de *x*, então *y* é um número natural.

(3) $\forall x\ [(\mathbb{N}x \rightarrow \exists \mathrm{y}\ (Sxy \wedge \mathbb{N}y)\ ]$

Todo o número natural tem sucessor.

(4) $\forall x \forall y \forall y'\ [(\mathbb{N}x \wedge Sxy \wedge Sxy') \rightarrow y = y']$

Todo o número natural tem um único sucessor.

(5) $\forall x\ \neg Sx0$

0 não é sucessor de qualquer número natural.

(6) $\forall x \forall y \forall x'\ \forall y'\ [(\mathbb{N}x \wedge \mathbb{N}y \wedge Sxx' \wedge Syy' \wedge x'= y') \rightarrow x = y)]$

Se *x* e *y* são números naturais e o sucessor de *x* é igual ao sucessor de *y*, então *x* é igual a *y*.

(7) $\forall F\ [(F0 \wedge \forall x \forall y\ ((Fx \wedge \mathrm{S}xy) \rightarrow Fy)) \rightarrow \forall k\ (\mathrm{N}k\rightarrow Fk)]$

Para todo o conceito *F*, se 0 é *F* e *F* é hereditário relativamente ao sucessor e *k* é um número natural qualquer, então *k* é *F*. [Princípio de indução matemática]

[11] Estes dois últimos parágrafos são baseados em Zalta (2020, sec. 6).

(Página deixada propositadamente em branco)

Capítulo 3
Intuicionismo

Este capítulo é sobre o intuicionismo. Começaremos por fazer uma introdução ao conceito *infinito*. Para tal, abordaremos os paradoxos de Zenão, a distinção entre infinito atual e infinito potencial em Aristóteles e Cantor e, finalmente, analisaremos aspetos em torno dos ordinais, conjuntos infinitos e cardinalidade. Consideraremos as conceções intuicionistas de Brouwer, Heyting e Dummett. Faremos ainda algumas notas sobre a matemática intuicionista. No final, analisaremos algumas demonstrações matemáticas, comparando os pontos de vista clássico e intuicionista a respeito dessas demonstrações.

1. Introdução

As primeiras formas de intuicionismo foram propostas por Poincaré, Borel e Lebesgue.[1] É inspirado nestas primeiras formas de intuicionismo, propostas por estes matemáticos, que L. E. J. Brouwer (1881-1966) vai fundar o intuicionismo. Mais tarde, o seu estudante Arend Heyting procedeu à formalização da lógica intuicionista, nomeadamente, estabeleceu o significado das constantes lógicas. A lógica intuicionista é assim uma consequência do intuicionismo original proposto por

[1] Estes matemáticos continuaram a usar nas suas demonstrações a lei do terceiro excluído. Como veremos mais à frente, esta lei vai ser rejeitada pelo intuicionismo.

Brouwer. Posteriormente, Michael Dummett desenvolveu uma base filosófica para a lógica intuicionista.

Segundo Dummett (2000, p. ix), o intuicionismo é um escândalo para aqueles que pensam que a Filosofia não interessa para nada ou que há domínios sacrossantos, como a Matemática, nas quais a Filosofia não interfere. O intuicionismo é uma proposta de reconstrução da Matemática, a partir de um ponto de vista filosófico sobre a referência das proposições matemáticas e o seu respetivo significado. Naturalmente, muitos podem-se converter ao intuicionismo por uma questão de fé, sem propriamente analisar os argumentos filosóficos a favor ou contra o intuicionismo. Esses são crentes, mas não teólogos. Importa compreender e analisar tais argumentos, pois o intuicionismo apenas terá sucesso se conseguir vencer a batalha filosófica contra os matemáticos clássicos.[2]

2. Infinito

O conceito *infinito* pode ser acerca do domínio abstrato (e.g. números matemáticos) ou acerca do domínio físico (e.g. espaço e tempo). Além disso, este conceito pode ser acerca do infinitamente grande ou do infinitamente pequeno (i.e., infinitésimos). Assim, existem quatro possibilidades acerca do infinito: entidades abstratas infinitamente grandes ou infinitamente pequenas; e entidades físicas infinitamente grandes ou infinitamente pequenas. No domínio abstrato dos números é possível estabelecer uma distinção adicional entre conjuntos infinitos numeráveis (e.g. o conjunto dos números naturais) e conjuntos infinitos não numeráveis (e.g. o conjunto dos números reais). Nesta secção, analisaremos estas variantes do infinito.

[2] Se "vencer uma batalha" mede-se pela quantidade de praticantes, então o intuicionismo perdeu esta batalha. Nos dias de hoje, o número de matemáticos intuicionistas é residual.

2.1. Paradoxos de Zenão

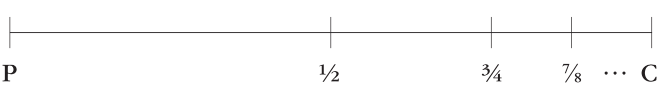
Os chamados *paradoxos de Zenão* foram formulados por Zenão de Eleia (séc. V, a.C.). Estes paradoxos chegaram até nós pela mão de Aristóteles, relatados na *Física* (239b9), pois os escritos originais de Zenão acabaram por se perder. Segundo Bertrand Russell (1929/2001, p. 54), "os argumentos de Zenão, em certa medida, forneceram fundamentos para quase todas as teorias do espaço, do tempo e do infinito, que têm sido propostas até aos nossos dias".

Os paradoxos de Zenão são paradoxos contra a ideia da existência de movimento. Pretendem mostrar que todo o movimento é uma ilusão. Vamos analisar três desses paradoxos: 1) o paradoxo da dicotomia, 2) o paradoxo de Aquiles e da tartaruga e 3) o paradoxo do estádio.

Dicotomia

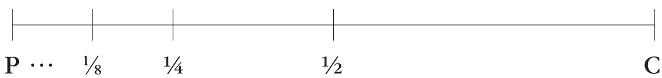
O paradoxo da dicotomia é um paradoxo a respeito do movimento de um corredor, que para o efeito chamaremos *Aquiles*, e que pretende correr a distância PC. Este paradoxo pode ser apresentado segundo duas versões.

Numa primeira versão, para Aquiles chegar à meta, ele tem de percorrer a primeira metade do percurso, ou seja, ½ do percurso. Para percorrer a segunda metade do percurso, ele tem de percorrer metade desse percurso, ou seja, os primeiros ¾ do percurso. Percorridos os primeiros ¾ do percurso, ele tem de percorrer metade desse percurso, ou seja, os primeiros ⅞ do percurso. E assim por diante.



A subdivisão do espaço de corrida até à meta é uma subdivisão infinita, ainda que de pedaços finitos de espaço físico. Para chegar à meta, Aquiles teria assim de percorrer um conjunto infinito de pedaços de espaço físico de corrida, constituído por distâncias cada vez mais pequenas. Ora, é impossível percorrer um conjunto infinito de pedaços de corrida. Tal coisa implicaria um tempo igualmente infinito, que é o mesmo que dizer que nunca será completada a corrida. A conclusão a retirar deste paradoxo é de que Aquiles nunca chegará à meta.

A segunda versão do paradoxo da dicotomia consiste na inversão da versão anterior. Para Aquiles chegar à meta, ele tem de percorrer a primeira metade do percurso, ou seja, ½ percurso. Para percorrer a primeira metade do percurso, ele tem de percorrer metade desse percurso, ou seja, ¼ desse percurso. Para percorrer ¼ do percurso, ele tem de percorrer metade desse percurso, ou seja, os primeiros ⅛ desse percurso. E assim por diante.



Para chegar à meta, Aquiles teria assim de percorrer um conjunto infinito de pedaços de corrida, constituídos por distâncias cada vez mais pequenas. Ora, novamente, é impossível percorrer um conjunto infinito de pedaços de corrida (distâncias cada vez mais pequenas). Na verdade, de acordo com esta versão do paradoxo, Aquiles jamais conseguirá iniciar a corrida!

Aquiles e a tartaruga

O paradoxo de Aquiles e da tartaruga é uma variante do paradoxo da dicotomia. Suponhamos que Aquiles e uma tartaruga fazem uma corrida. Aquiles, como bom desportista, permite que a tartaruga parta com uma distância de avanço relativamente a ele. Iniciada a corrida, quando Aquiles atinge o ponto de partida da tartaruga, já a tartaruga avançou um pouco na corrida, digamos, percorreu a distância x_1. Ambos continuam a corrida. Quando Aquiles atinge a distância x_1, a distância inicialmente percorrida pela tartaruga, já a tartaruga avançou um pouco na corrida, digamos, percorreu a distância x_2. E assim por diante. Aquiles nunca alcançará a tartaruga. A tartaruga vence a corrida!

Estes dois paradoxos pressupõem uma divisão infinita do espaço físico. A divisão considera pedaços de espaço físico cada vez mais pequenos. Uma forma de tentar resolver estes paradoxos consiste em assumir que o espaço físico não é contínuo, mas discreto. Ou seja, o espaço físico não pode ser infinitamente divisível. Se o espaço for discreto, no primeiro paradoxo, Aquiles vai acabar por partir e chegar à meta. É como se Aquiles, ao longo da corrida, fosse percorrendo um conjunto finito de pedaços de espaço físico, saltitando de pedaço em pedaço. Naturalmente, nestas circunstâncias, Aquiles não necessitará de um tempo infinito para o fazer. *Mutatis mutandis*, no segundo paradoxo, Aquiles acaba por ultrapassar a tartaruga e vencer a corrida.

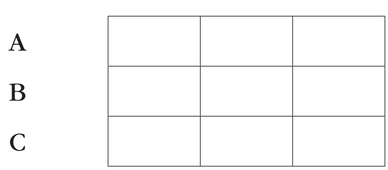
Estádio

O paradoxo do estádio é diferente dos dois paradoxos anteriores e um pouco menos intuitivo. Consideremos três tipos de blocos – A, B e C – com a mesma dimensão. Suponhamos que os blocos de tipo A estão em repouso e que os blocos de tipo B e C movimentam-se com uma mesma velocidade.

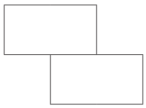
O alinhamento inicial dos blocos é o seguinte:

Suponhamos agora que os blocos B movimentam-se para a direita e os blocos C movimentam-se para a esquerda. O movimento é simultâneo. Dado que os blocos B e C se movimentam com a mesma velocidade, eles ficarão alinhados de forma simultânea com A.

O alinhamento final é o seguinte:



O paradoxo emerge se analisarmos o movimento dos blocos assumindo o espaço e o tempo como sendo quantidades físicas discretas. Ou seja, o espaço e o tempo são atómicos. Suponhamos então que a unidade atómica mais pequena de espaço físico é um "salto" entre os blocos; e a unidade atómica mais pequena de tempo é uma unidade de tempo. Vamos também assumir que a "velocidade" de movimentação dos blocos B e C são um "salto" por unidade de tempo. Note-se ainda que, como estamos num movimento discreto, durante o movimento os blocos não podem ficar parcialmente sobrepostos, digamos, "metade" do bloco B por cima de "metade" do bloco C.



No movimento dos blocos B relativamente aos blocos A, decorrida uma unidade de tempo, há 1 salto atómico. Os blocos B ficam alinhados com os blocos A. No movimento em sentido oposto, dos blocos C relativamente aos blocos A, decorrida a mesma unidade de tempo, há também 1 salto atómico. Os blocos C ficam alinhados com os blocos A.

Se analisarmos o movimento entre os blocos B e C, decorrida a mesma unidade de tempo, há 2 saltos atómicos de espaço físico. Até agora não há qualquer paradoxo. O tempo gasto no movimento é o mesmo para os blocos B e C. Numa mesma uma unidade de tempo, os blocos B, ora percorrem 1 unidade atómica de espaço físico relativamente aos blocos A, ora percorrem 2 unidades atómicas de espaço físico relativamente aos blocos C. Os blocos B movimentam-se em sentido oposto ao movimento dos blocos C; à medida que os blocos B se movimentam para a direita, os blocos C movimentam-se para a esquerda. Decorrida uma unidade de tempo obtém-se a configuração final.

O paradoxo resulta em reparar que não existe qualquer instante de tempo em que o bloco C mais à esquerda fica alinhado com o segundo bloco B, durante o movimento. Antes do movimento, o bloco C mais à esquerda está localizado à direita do segundo bloco B.

Passada uma unidade de tempo, o bloco C mais à esquerda está localizado à esquerda do segundo bloco B. Em nenhum instante, estes dois blocos ficaram alinhados. Todavia, uma observação direta do movimento identificaria que, em algum instante de tempo, se observaria o alinhamento entre os blocos em causa, pois os blocos têm de passar um pelo outro para se conseguir obter a configuração final! Absurdo.[3] (Russell, 1929/2001, pp. 53-54).

A solução para o paradoxo do estádio consiste em descartar a suposição inicial de que o tempo e o espaço são quantidades físicas discretas e substituí-la pela suposição de que o tempo e o espaço são quantidades físicas contínuas. Há assim uma continuidade no movimento: a uma qualquer configuração dos blocos no espaço far-se-á corresponder um instante de tempo. O paradoxo dissolve-se.

Em resumo, se assumirmos que o espaço físico é discreto, solucionamos os dois primeiros paradoxos, mas não solucionamos o último paradoxo. Por sua vez, se assumirmos que o espaço físico é contínuo, solucionamos o terceiro paradoxo, mas não solucionamos os dois primeiros paradoxos. Por outras palavras, os dois primeiros paradoxos pretendem refutar a ideia de que o espaço é contínuo; enquanto o paradoxo do estádio pretende refutar a ideia de que o espaço é discreto.

2.2. Infinito potencial e infinito atual

Os paradoxos de Zenão são em volta do infinitamente pequeno (ou infinitesimais): uma divisão infinita do espaço. Por sua vez, o infinito também pode referir o infinitamente grande (seja ele positivo ou negativo). Quando começamos a contar os números naturais, não parece que esse procedimento alguma vez termine. No processo

---

[3] Na literatura há outras interpretações do paradoxo do estádio. Note-se que o paradoxo se levanta para qualquer unidade mínima de tempo e espaço discreto que se suponha.

de contagem vamos obtendo números cada vez maiores; e se contarmos os negativos, vamos obtendo números cada vez mais "negativamente" maiores. Em geral, contemporaneamente, a distinção entre infinito potencial e infinito atual é em volta desta noção do *infinitamente grande*. De um ponto de vista do infinito potencial, o termo *infinito* é interpretado como sendo um processo interminável ao longo do tempo. De um ponto de vista do infinito atual, o termo *infinito* é interpretado como sendo uma totalidade completa.

Os matemáticos intuicionistas defendem que apenas nos podemos comprometer com o infinito potencial. Os matemáticos clássicos comprometem-se apenas com o infinito atual. Esta distinção, entre infinito potencial e infinito atual, fundamenta uma ideia central do intuicionismo, ideia segundo a qual a matemática é um processo de construção mental. Na matemática não existem, nem podem existir, totalidades infinitas completas, dado que todo o processo mental, quando muito, apenas pode ser um processo potencialmente infinito.

Aristóteles

A distinção entre infinito potencial e infinito atual foi originalmente estabelecida e formulada por Aristóteles. Esta formulação foi de tal forma fecunda que estruturou toda a discussão subsequente até aos dias de hoje. Há dois momentos distintos na análise de Aristóteles. Primeiro, ele analisa o infinito (*apeiron*, em grego) a respeito das entidades físicas (i.e., corpos físicos), que ele designa geralmente de *magnitudes*. Apenas num segundo momento, ele analisa o infinito a respeito dos números matemáticos, mas conectando a sua análise com os resultados obtidos a respeito das magnitudes.

Na análise do infinito de uma magnitude genérica, os dois sentidos de infinito acima referidos – o infinitamente grande e o infinitamente pequeno – são abordados de forma conjunta. Estabelece-se uma dependência entre estes dois infinitos. Aristóteles reduz o infinitamente grande ao infinitamente pequeno, na medida em que o infinitamente grande é visto como resultado da soma de divisões cada vez mais pequenas, mas a respeito de magnitudes finitas.

> As coisas são ditas existir quer potencialmente quer completamente. Além disso, uma coisa é infinita ou por adição ou por divisão. (...) [A] magnitude não é atualmente infinita. Mas por divisão é infinita. (...) A alternativa que resta é que o infinito tem uma existência potencial. (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 206a14-206a18)

Nesta passagem são invocadas duas noções de construção do infinito: *infinito por divisão* e *infinito por adição*. Aristóteles vai aceitar a primeira e rejeitar a segunda.

A noção de *infinito por divisão* consiste num processo de divisão de uma dada magnitude. Os paradoxos de Zenão são um exemplo de divisão infinita, a respeito do espaço físico. Para compreendermos um pouco melhor esta noção consideremos um salame. Podemos dividir um salame inúmeras vezes. Na verdade, será atingido um ponto no processo no qual não conseguimos mais dividir o salame. Todavia, a noção *possibilidade*, a respeito da divisão infinita de uma magnitude, não se fundamenta no processo, mas na estrutura da própria magnitude a dividir. A estrutura da magnitude é potencialmente infinita na sua divisão. Assim, a sua divisão é infinita, mas no sentido que é uma divisão potencialmente infinita.

A noção de *infinito por adição* consiste num processo de acrescentos intermináveis a um corpo físico de partida. Aristóteles rejeita o *infinito por adição*, porque no seu entender não existe tal coisa como um corpo físico que possa ser estendido indefinidamente. Ou seja, não existe um corpo físico segundo o qual possam ser acrescentados pedaços ao corpo físico de forma interminável. A conclusão que ele retira é de que "relativamente à adição não pode ser nem potencialmente infinita" (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 206b21). O processo de adição é sempre finito, dado o carácter finito dos próprios seres humanos. Para Aristóteles, o processo apenas poderia ser infinito, se o próprio corpo físico de partida fosse infinito.

Aristóteles considera que, em certa medida, a adição infinita reduz-se à divisão infinita: "o infinito por adição é a mesma coisa que o infinito por divisão" (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 206b4).

Consideremos novamente o paradoxo de Zenão da dicotomia. Podemos somar infinitamente os pedaços da divisão da distância espacial da corrida. Uma divisão infinita de uma quantidade finita. Ou seja, ao efetuarmos a divisão da distância espacial da corrida em pedaços cada vez mais pequenos, podemos simultaneamente ir somando cada um desses pedaços espaciais de corrida (½ + ¼ + ⅛ + …). A adição reduz--se assim à divisão. Todavia, há aqui um aspeto saliente nesta redução. A distância total da corrida é ela própria finita. Quando somamos cada pedaço de corrida, a soma nunca excede a distância total da própria corrida (no caso acima, a distância total da corrida é 1). Não é pressuposta nenhuma quantidade infinita, nem poderia ser pressuposta, porque para Aristóteles qualquer magnitude é sempre finita.[4]

Aristóteles refuta o infinito atual (completo) (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 208a5-208a25) e defende a existência do infinito potencial. O infinito potencial é definido nos termos seguintes: "o infinito tem este modo de existência: uma coisa é sempre considerada após uma outra, e cada coisa que é considerada é sempre finita mas diferente" (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 206a27-206a29); "uma coisa é infinita se, considerando-a quantidade por quantidade, podemos sempre considerar alguma coisa do exterior" (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 207a7-207a14). O processo de divisão de uma magnitude é potencialmente infinito, em virtude da própria estrutura da magnitude a dividir.

A análise precedente foi relativamente a corpos físicos (magnitudes). Analisemos agora o que Aristóteles defende relativamente aos números da matemática e à sua suposta infinitude.

Ele começa por referir que Platão fez uma distinção entre o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, mas que Platão nunca fez uso dessa distinção na matemática. Por um lado, o infinitamente grande não era necessário na matemática platonista, porque Platão tinha uma conceção do número baseada na escola pitagórica, segundo

[4] "Dado que nenhuma magnitude sensível é infinita, é impossível exceder qualquer magnitude finita, pois, se isso fosse possível, existiria algo maior do que os céus". (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 207b16-207b21)

a qual todo e qualquer número se podia reduzir à sucessão de números de 1 a 10; por outro lado, o infinitamente pequeno também não era necessário na matemática platonista, porque a unidade 1 era o número mais pequeno admitido por Platão.

A respeito dos números, Aristóteles defende exatamente o oposto que defende para os corpos físicos. Enquanto nos corpos físicos não é possível o infinito por adição, porque não há corpos físicos infinitos; nos números há o infinito por adição, na medida em que, a respeito de qualquer número, pode-se sempre pensar num outro número maior. Nos corpos físicos há o infinito por divisão, porque um corpo pode ser dividido infinitas vezes; nos números não há o infinito por divisão, porque Aristóteles apenas admitia a existência da sucessão de números inteiros positivos, sendo o número 1 o número mais pequeno dessa sucessão e, como tal, este número era indivisível.

> Também parece razoável supor que nos números haja um limite na direção do mínimo, mas que na direção do maior toda a pluralidade pode ser sempre superada. Nas magnitudes, pelo contrário, toda a magnitude é superada na direção do mais pequeno, mas na direção do maior não há uma magnitude infinita. A razão para isto é que a unidade (...) é indivisível. Assim, o número deve terminar no indivisível. Mas na direção do número maior é sempre possível pensar noutro número maior. (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 207a34-207b15)

Desta conceção surgem dois problemas: como justificar então que os números são a) infinitos e b) potencialmente infinitos.

Para Aristóteles os números são abstrações dos objetos físicos. Ora, dado que os corpos físicos são finitos, quer na sua extensão, quer na sua quantidade, então os números teriam de ser finitos e não (potencialmente) infinitos como Aristóteles pretendia que eles fossem. A solução de Aristóteles para estes dois problemas é bastante engenhosa e decorre justamente da análise precedente do infinito por adição, relativamente aos corpos (magnitudes) físicos.

> É sempre possível pensar num número maior, pois é infinito o número de vezes que uma magnitude pode ser dividida. Assim este infinito é potencial, nunca actual: o número de partes que pode ser considerado passa sempre uma quantidade definida. Mas este número não é separável [do processo da dicotomia]. (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 207a32-207b15)

Faz-se uma correspondência um a um entre as possíveis divisões de uma magnitude e os respetivos números matemáticos. Recuperando o paradoxo de Zenão da dicotomia, para uma distância genérica de corrida l, obtemos a correspondência seguinte entre a divisão dos pedaços de corrida e os números matemáticos:

$$
\begin{gathered}
l/2 \leftrightarrow 1 \\
l/4 \leftrightarrow 2 \\
l/8 \leftrightarrow 3 \\
l/16 \leftrightarrow 4 \\
\ldots
\end{gathered}
$$

Desta forma, o modo de existência dos números é a) infinita, porque as divisões de uma magnitude são infinitas e b) os números são potencialmente infinitos, porque a divisão de uma magnitude é sempre potencialmente infinita.

De acordo com Aristóteles, esta conceção de infinito potencial não levanta problemas à matemática, porque, no seu entender, a matemática não faz uso de qualquer noção de infinito atual.

> A nossa explicação não rouba os matemáticos da sua ciência, desaprovando a existência atual do infinito na direção do aumento (...) Na verdade, eles não necessitam do infinito e não o usam. Eles apenas postulam que uma linha recta pode ser estendida quanto queiram. (Aristotle, 1984, liv. Physics, III, 207b28-207b34)

Jonathan Lear (1980) considera que a noção de *possibilidade* aristotélica, inerente ao infinito potencial, difere da noção de *possibilidade* dos matemáticos intuicionistas. Para os intuicionistas, a *possibilidade* de realizar infinitamente a divisão de uma magnitude fundamenta-se nas próprias capacidades humanas; para Aristóteles a possibilidade de realizar infinitamente a divisão de uma magnitude fundamenta-se na estrutura da própria magnitude. Ou seja, um processo de divisão de uma magnitude é potencialmente infinita, na medida em que a estrutura da magnitude é potencial e infinitamente divisível. A estrutura fundamenta o processo. Mesmo que a divisão de uma dada magnitude acabe por parar, a divisão *poderia* ter sido continuada. Porém, Aristóteles mantém-se em silêncio sobre a real possibilidade de haver uma tal pessoa, com capacidades de divisão. Em contraste, para um intuicionista, a possibilidade de divisão em questão está intrinsecamente ligada ao próprio processo de divisão. Ou seja, assume-se que há um ser humano com tais capacidades de divisão. Não havendo seres humanos, tal divisão jamais seria possível.[5]

Cantor

A conceção do infinito como infinito potencial, em oposição ao infinito atual, foi a conceção dominante desde Aristóteles até George Cantor, no século XIX.[6] Por exemplo, Leibniz e Gauss defenderam o infinito potencial.

> No entanto, Descartes e os seus seguidores, ao tornarem o mundo exterior indefinido de tal forma que não podemos conceber nenhum fim para o mesmo, disseram que a matéria não tem limites. Eles têm alguma razão ao substituir o termo “infinito” por “indefinido”, pois não existe nunca um todo infinito no mundo, embora haja todos maiores do que outros *ad infinitum*. (Leibniz, 1765/1996, pp. 150-151)

[5] Nesta subsecção a minha análise de Aristóteles foi baseada em Lear (1980).

[6] Ver Linnebo & Shapiro (2019).

> Eu protesto contra o uso de uma magnitude infinita como algo completo, que nunca é permissível em matemática. Infinito é apenas uma maneira de falar. (Gauss 1831 traduzido para o inglês em Linnebo & Shapiro (2019), 160)

Apenas no século XIX surgiu uma defesa articulada do infinito atual. Cantor propôs que os conjuntos matemáticos eram infinitos, mas atualmente infinitos.

> Não posso atribuir qualquer ser ao indefinido, o variável, o infinito impróprio, independentemente da forma que ele surgir, porque não são nada ou conceitos relacionais ou apenas representações subjectivas ou intuições, mas nunca ideias adequadas. (Cantor 1883: 205, nota 3 traduzido para o inglês em Linnebo & Shapiro (2019), 165)

> Todo o infinito potencial, se aplicado num modo matematicamente rigoroso pressupõe o infinito actual. (Cantor 1932: 410-411 traduzido para o inglês em Linnebo & Shapiro (2019), 165)

O argumento de Cantor para a defesa do infinito atual é de que o infinito atual é estabelecido por definição, por intermédio do próprio intelecto humano: "todas as coisas, sejam finitas ou infinitas, são definidas e, com a exceção de Deus, podem ser determinadas pelo intelecto" (Cantor, 1932/1976, p. 76). Concretamente, Cantor considera que a faculdade de "entendimento humano tem uma capacidade inerentemente ilimitada para a formação (...) de classes numéricas inteiras" (Cantor, 1932/1976, p. 76).

Note-se que, bizarramente, há um paralelismo entre a conceção de infinito atual de Cantor e a conceção de infinito potencial dos intuicionistas. Para ambas as conceções, o infinito é um produto da própria natureza humana. Para Cantor, a faculdade de entendimento humano é ela própria ilimitada e, enquanto tal, pode definir o infinito atual. Para os intuicionistas, as capacidades intelectuais humanas são limitadas e, enquanto tal, apenas podem construir o infinito potencial. Ressalve-se, no entanto, que a conceção contemporânea de infinito atual é uma conceção metafísica diferente da conceção proposta por Cantor. Contemporaneamente assume-se que a existência de entidades matemáticas é uma existência independente do mental. Esta noção de existência é intemporal: se subitamente os seres humanos desaparecessem, tais entidades matemáticas continuariam a existir; e se nunca tivesse havido seres humanos, tais entidades matemáticas também existiriam.

2.3. Ordinais, conjuntos infinitos e cardinalidade

A noção de infinito matemático, nos termos cantorianos acima descritos, pode ser definida por intermédio de ordinais ou por intermédio de conjuntos.

Ordinais

Consideremos os números naturais 1, 2, 3, 4, ... Os números naturais podem ser apresentados numa sucessão ordenada ou não-ordenada. Uma sucessão não-ordenada é, por exemplo, a seguinte: 1, 3, 5, 4, 7, 2, ... No entanto, podemos forçar uma sucessão ordenada dos números naturais: na primeira posição fica o número 1, na segunda posição fica o número 2, e assim por diante. Ou seja, ordenando os números naturais segundo a relação "<", lida "menor do que" obtemos a sucessão: 1, 2, 3, 4, 5, ... Os ordinais são tidos como réplicas dos números naturais, que representam a posição que ocupa cada número natural ordenado. Os números ordinais são como abstrações dos próprios números naturais.

A sucessão dos números ordinais é a seguinte: 1, 2, 3, ..., ω. Sendo ómega (ω) a última letra do alfabeto grego, ω define-se como sendo o primeiro ordinal infinito da sucessão infinita de ordinais. ω tem sucessor, mas não tem um predecessor imediato. Se tivesse um predecessor imediato, então seria um ordinal finito, pois retrocedendo na contagem, $\omega - 1$, $\omega - 2$, ... poderíamos chegar novamente a 1. ω representa uma totalidade infinita completa e designa-se de *ordinal limite*. Note-se que a sucessão anterior pode ser continuada:

$1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, 2\omega, 2\omega + 1, \ldots, 3\omega, 3\omega + 1, \ldots,$
$\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^3, \omega^3 + 1, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega + 1, \ldots$

Sendo 2ω o segundo ordinal infinito, 3ω o terceiro ordinal infinito, e assim por diante.

Com esta formulação, Cantor pretendeu replicar à objeção de Aristóteles ao infinito atual, apresentada na *Metafísica* (1984, pp. 1067a6--1684), a objeção segundo a qual o infinito atual não seria possível, porque o finito acabaria por se dissolver no infinito e assim ser destruído. Concretamente, para Cantor (1932/1976, p. 77) a lei da comutatividade da adição, que é válida para números finitos, não é válida para ordinais infinitos: $1 + \omega = \omega$, mas $\omega \neq \omega + 1$. Ou seja, $1 + \omega \neq \omega + 1$.

Tudo depende da posição do ordinal finito (1), relativamente ao ordinal infinito (ω). Se o ordinal finito (1) surge primeiro (e temporalmente primeiro) do que o ordinal infinito (ω), então a sua soma a um ordinal infinito (ω), postulado posteriormente ao ordinal finito (1), implica a dissolução do ordinal finito (1) no ordinal infinito (ω), tal como preconizava Aristóteles. Porém, se o ordinal finito (1) surge depois (e temporalmente depois) do ordinal infinito (ω), então a sua soma a um ordinal infinito, postulado antes do ordinal finito (1), implica a formação de um novo ordinal infinito ($\omega + 1$) (Cantor, 1932/1976, p. 77).

Conjuntos infinitos e cardinalidade

Comecemos por duas definições:

> Definição: Um *subconjunto próprio* de um conjunto *C* é um subconjunto que não contém todos os elementos de *C*.
>
> Definição: Um *conjunto é infinito* se, e só se, se conseguir estabelecer uma correspondência um a um com um dos seus subconjuntos próprios.[7]

[7] Definição de Dedekind (1888/1963, p. 63). Note-se que Cantor (em 1878) e Bolzano (em 1851) já tinham estabelecido uma definição equivalente a esta. Ver Dedekind (1888/1963, p. 41).

Por exemplo, o conjunto de números pares, {2, 4, 6, ...}, é um subconjunto próprio do conjunto de números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. No entanto, mostra-se que podemos colocar o subconjunto de números pares numa correspondência um a um com o conjunto de números naturais. Basicamente, faz-se a correspondência um a um seguinte: $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$, ... Logo, o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é um conjunto infinito.

Dedekind (1888/1963, p. 64) faz uma demonstração do teorema de que *existem sistemas infinitos*. Para o caso, podemos considerar que no teorema a noção de *sistema* pode ser trocada pela noção de *conjunto*, ou seja, pretende-se demonstrar que *existem conjuntos infinitos*. A demonstração começa assim:

> O meu próprio domínio do pensamento, i.e., a totalidade *S* de todas as coisas, que podem ser objeto do meu pensamento, é infinito. Pois se *s* significa um elemento de *S*, então o pensamento *s*' – "*s* pode ser objeto do meu pensamento" – é ele próprio também um elemento de *S*. (Dedekind, 1888/1963, p. 64)

Dedekind conclui que *S* é infinito.[8] Para um intuicionista, a premissa de partida da demonstração, a premissa segundo a qual o meu próprio domínio do pensamento é infinito, é rejeitada. Um ser humano é uma entidade espacial e temporalmente finita e, enquanto tal, os objetos do seu pensamento nunca podem ser em quantidade infinita.

Como podemos estabelecer a cardinalidade de um conjunto infinito? Ou seja, quantos elementos tem um conjunto infinito? Ora, estipulou-se designar a cardinalidade do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, por $\aleph_0$ ("alefe-zero", sendo $\aleph$ a primeira letra do alfabeto hebraico). $\aleph_0$ representa uma totalidade infinita completa. Todos os conjuntos infinitos que se consigam colocar numa correspon-

[8] Uma interpretação contemporânea da demonstração é a seguinte: faz-se uma correspondência um a um entre *S* e um conjunto infinito *S*', sendo *S*' um subconjunto próprio de *S*.

dência um a um com o conjunto de números naturais tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais, $\aleph_0$. Tais conjuntos designam-se *conjuntos numeráveis*. Mostra-se que o conjunto de números inteiros, Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}, tem a mesma cardinalidade do que o conjunto de números naturais; e a cardinalidade dos números racionais, Q, também tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais. Consegue-se mostrar que a cardinalidade dos números naturais, $\aleph_0$, é a cardinalidade mais pequena que existe. Ou seja, todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ ou são finitos ou, se infinitos, consegue-se estabelecer uma correspondência um a um entre esse subconjunto e os números naturais.

E a respeito dos números reais, R? O conjunto de números reais tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais? George Cantor mostrou que o conjunto dos números naturais não está numa correspondência um a um com o conjunto dos números reais. Analisaremos esta demonstração mais à frente neste capítulo, na secção "Análise de demonstrações". Como o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais, infere-se que a cardinalidade dos números reais é maior do que a cardinalidade dos números naturais.

> Definição: O *conjunto potência* P*C* de um conjunto *C* é o conjunto de todos os subconjuntos que se podem formar do conjunto *C*.

Por exemplo, seja o conjunto {9, 25, 32}. O conjunto potência deste conjunto é {Ø, {9}, {25}, {32}, {9, 25}, {9, 32}, {25, 32}, {9, 25, 32}}. A cardinalidade deste conjunto potência é 8. Ou seja, 2^3. Generalizando, a cardinalidade do conjunto potência P*C* de um qualquer conjunto *C* (mesmo um conjunto infinito) é igual a 2 elevado à cardinalidade do conjunto *C*.

> *Teorema de Cantor*: Para um qualquer conjunto *C*, a cardinalidade de P*C* é maior do que a cardinalidade de *C*.

Cantor conseguiu mostrar que a cardinalidade dos números reais é igual à cardinalidade do conjunto potência dos números naturais, isto é, $2^{\aleph_0}$. Pelo teorema de Cantor, segue-se que a cardinalidade dos números reais é maior do que a cardinalidade dos números naturais. Estipulando uma sucessão hierarquizada de números cardinais infinitos: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, ..., sendo esta sucessão também interminável, a questão que se levanta é saber se a cardinalidade dos números reais é a cardinalidade imediatamente a seguir à cardinalidade dos números naturais. Ou seja, se não existe uma cardinalidade entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Formalmente, a questão é se $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Cantor encontrou vários conjuntos com a mesma cardinalidade que a dos números naturais e vários conjuntos com a mesma cardinalidade que a dos números reais. Mas não encontrou nenhum conjunto com uma cardinalidade maior do que a cardinalidade dos números naturais e menor do que a cardinalidade dos números reais. *A hipótese do contínuo* é a hipótese segundo a qual a cardinalidade imediatamente a seguir à cardinalidade dos números naturais é a cardinalidade dos números reais. Ou seja, a cardinalidade dos números naturais é $\aleph_0$; a cardinalidade dos números reais é $\aleph_1$. Formalmente, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. A hipótese do contínuo é assim designada, porque o número de números reais é o número do contínuo. Não há "buracos" entre os números reais; são contínuos. Uma hipótese em aberto. Por outras palavras, não se sabe se a hipótese é verdadeira ou é falsa. (Giaquinto, 2002, p. 29)

3. Brouwer

E. J. Brouwer inspira-se na fenomenologia de Edmund Husserl e na filosofia criticista kantiana para a sua filosofia do intuicionismo. A filosofia intuicionista de Brouwer tem alguns aspetos obscuros que dificultam a sua interpretação. Vamos começar por esses aspetos mais obscuros, a respeito da forma pura da intuição do tempo, enquanto mecanismo responsável pela criação dos números naturais.

3.1. Forma pura do tempo

Como vimos no primeiro capítulo, o surgimento das geometrias não-euclidianas levou a uma forte desconsideração da filosofia da geometria kantiana. O espaço, enquanto forma pura intuição, não podia mais ser regido pelos axiomas da geometria não-euclidiana. Não havendo tal coisa como *a* geometria do espaço físico, eterna e imutável, outras geometrias de cariz não-euclidiano revelaram-se experimentalmente mais adequadas para compreender os fenómenos espaciais. A jusante a própria ideia de o conhecimento matemático, como sendo um conhecimento sintético *a priori*, foi questionada.

Os intuicionistas tentaram ultrapassar os problemas em torno da forma pura kantiana do espaço, considerando, em alternativa, a outra forma pura kantiana da intuição – a forma pura do tempo. Os intuicionistas defendem que a forma pura do tempo passa a ser o fundamento da aritmética e, assumindo que a restante matemática seria redutível à aritmética, a restante matemática também seria fundada na intuição pura do tempo. Por exemplo, Brouwer invoca Descartes para afirmar que a geometria é redutível à aritmética. Assim, tal como defendeu Kant, é restabelecida a ideia segundo a qual o conhecimento matemático é um conhecimento sintético *a priori*, onde a forma pura do espaço é substituída pela forma pura do tempo.

Kant nunca explicou muito adequadamente no que consistiam as formas puras do espaço e do tempo. Os intuicionistas, ao fundarem a matemática na forma pura do tempo, sentiram-se obrigados a tentar explicar no que consistia esta forma pura da intuição. Mas a explicação avançada acaba por manter na obscuridade o verdadeiro significado desta forma pura da intuição. A sua explicação incorre num *obscurum per obscurius*. Em todo o caso, vamos fazer um esforço interpretativo sobre as passagens de Brouwer.

Brouwer começa por tentar esclarecer a forma pura da intuição nos termos seguintes:

> O neo-intuicionismo considera que a separação de momentos da vida em partes qualitativamente diferentes, são reunidos apenas enquanto permanecem separados pelo tempo, como sendo o fenómeno fundamental do intelecto humano, passando pela abstração do seu conteúdo emocional para o fenómeno fundamental do pensamento matemático, a intuição da bi-unidade. Esta intuição da bi-unidade, a intuição básica da matemática, cria não apenas os números um e dois, mas também todos os números ordinais finitos, na medida em que um dos elementos da bi-unidade pode ser pensado como uma nova bi-unidade, cujo processo pode ser repetido indefinidamente; isso dá origem ainda mais ao menor número ordinal infinito ω. Finalmente, esta intuição básica da matemática, na qual se unem o conectado e o separado, o contínuo e o discreto, dá origem imediatamente à intuição do continuum linear, ou seja, do "entre", que não é esgotável pela interposição de novas unidades e que, portanto, nunca pode ser pensado como uma mera coleção de unidades. (Brouwer, 1913/1983, p. 80)

No chamado *primeiro ato do intuicionismo*, Brouwer esclarece ligeiramente a passagem anterior:

> Separe-se completamente a matemática da linguagem matemática e, portanto, dos fenómenos da linguagem descritos pela lógica teórica. Reconheça-se que a matemática intuicionista é essencialmente uma atividade sem linguagem da própria mente, que tem a sua origem na perceção do movimento do tempo. Esta perceção do movimento do tempo pode ser descrita como a desintegração de um momento da vida em duas coisas distintas: uma das quais dá lugar à outra, mas é retida pela memória. Se a bi-unidade assim nascida é despojada de toda a qualidade, ela passa para a forma vazia do substrato comum de todas as bi-unidades. E é esse substrato comum, essa forma vazia, que é a intuição básica da matemática. (Brouwer, 1981, pp. 4-5)

Tentemos interpretar estas passagens. O fluxo de consciência é um ato contínuo no tempo. Ou seja, a consciência é um ato temporal contínuo. Consideremos, por exemplo, o ato contínuo de observar uma pessoa que se levanta e que, num segundo momento, essa mesma pessoa senta-se. Em termos de consciência, a experiência sensorial é um ato contínuo, mas que opera conjuntamente com a memória. Ou seja, ao observar-se a pessoa a sentar-se, está retida na nossa memória o ato anterior, precisamente, a pessoa a levantar-se. O ato de consciência de quando a pessoa se senta conjuga-se com a própria memória do ato da pessoa que se levantou. Temos assim uma unidade que não está separada no tempo, mas que, simultaneamente, é uma unidade dupla: pessoa a sentar-se (tempo presente) + pessoa a levantar-se (ato fisicamente passado, mas atualmente presente na memória). Segundo Brouwer, quando apreendemos internamente esta biunidade, despojada do seu conteúdo emocional, ficamos com uma estrutura que é a forma pura da intuição da matemática. A forma pura da intuição da matemática é a entidade geradora dos números.

A fenomenologia construtivista procede da forma seguinte. Formalmente podemos representar a biunidade pela simbologia $|(|)$, sendo o que está entre parênteses como o que ocorre depois de $|$. Esta estrutura pode ser replicada indefinidamente $|(|(|))$... Ou seja, por um processo de iterações repetidas podemos gerar os números naturais. Por sua vez, por intermédio de operações algébricas, entre os números naturais, podemos criar os números inteiros (nomeadamente, os inteiros negativos), bem como os números racionais (como pares de inteiros), mas sempre no âmbito da construção de um conjunto finito de objetos.[9]

No segundo ato do intuicionismo, Brouwer afirma o seguinte:

[9] A hipótese do contínuo generalizada é de que $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. Ou seja, assume-se que a cardinalidade de um conjunto potência é a cardinalidade imediatamente a seguir à cardinalidade do respetivo conjunto infinito. Ou seja, se a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é $\aleph_0$, a cardinalidade da potência de $\mathbb{N}$, $\mathbb{PN}$ é $\aleph_1$; a cardinalidade da potência da potência de $\mathbb{N}$, $\mathbb{PPN}$, é $\aleph_2$; e assim sucessivamente.

> Admitindo duas maneiras de criar novas entidades matemáticas: primeiro, na forma de sucessões infinitas de entidades matemáticas adquiridas anteriormente mais ou menos livremente...; em segundo lugar, na forma de espécies matemáticas, ou seja, propriedades supostas para entidades matemáticas previamente adquiridas, satisfazendo a condição de que, se valem para uma certa entidade matemática, valem também para todas as entidades matemáticas que foram definidas como "iguais" a ela... (Brouwer, 1981, p. 8)

Nesta passagem, Brouwer defende que podemos criar sucessões de números de uma forma mais ou menos livre. Esta ideia suporta a formação do contínuo matemático intuicionista. Mais à frente, na secção "Matemática intuicionista", explicaremos melhor o significado desta sucessão.

3.2. Intuicionismo e formalismo

O intuicionismo é também uma reação contra o formalismo (nomeadamente, o formalismo de David Hilbert). Em termos gerais, o formalismo defendeu que a matemática não passaria de um conjunto de proposições conectadas pelas regras lógicas clássicas – a chamada *lógica simbólica* –, sendo essas proposições desprovidas de qualquer significado. Por outras palavras, a matemática obedecia a um mero conjunto de regras formais, tal como o xadrez obedece a um conjunto de regras, mas as proposições matemáticas em si próprias eram desprovidas de um qualquer significado. Para um formalista, a matemática é como um conjunto de receitas de manipulação simbólica. Contudo, estas proposições tinham de ser consistentes entre si.

O formalismo não precisava da intuição kantiana para coisa alguma. Formulados os axiomas, podíamos deduzir a restante matemática, por intermédio das regras da lógica simbólica, sem recorrer a qualquer intuição. A respeito dos próprios axiomas, os termos primitivos nestes axiomas podiam ser substituídos por outros quaisquer termos.

Famosamente, Hilbert afirmou que nos axiomas da geometria os termos *pontos*, *linhas retas* e *planos* podiam ser substituídos por *cadeiras*, *mesas* e *canecas de cerveja*.

Brouwer tinha uma aversão à formalização da matemática. Notavelmente, as *Lectures in Cambridge* foram redigidas quase na sua totalidade sem recurso a qualquer simbologia matemática, sendo quase unicamente redigidas em língua natural. Esta aversão à formalização, além de ser uma reação ao próprio formalismo, é fundamentada na própria conceção intuicionista de como o conhecimento matemático é originalmente concebido. Relembremos que, no primeiro ato do intuicionismo, Brouwer defende que a matemática se separa da própria linguagem matemática, pois é uma atividade sem linguagem que "brota" da própria mente, como uma atividade de perceção do próprio fluxo do tempo mental. A linguagem não tem qualquer elemento intuitivo e nenhuma linguagem simbólica pode descrever com precisão o que ocorre na consciência geradora da matemática.

A esta visão de Brouwer objeta-se que as linguagens naturais e as linguagens simbólico-formais são linguagens que expressam o pensamento mental. É obscuro considerar que a matemática "brota" da mente sem qualquer linguagem e, ao mesmo tempo, usar uma linguagem para expressar tais pensamentos matemáticos. Porque efetivamente a matemática sempre se expressou por uma linguagem (natural ou simbólica) desde o seu nascimento, na Antiguidade, até aos dias de hoje.

3.3. Lei do terceiro excluído

Lei do terceiro excluído (*tertium non datur*): para toda a proposição *S*, *S* é verdadeira ou não-*S* é verdadeira.

Brouwer considera que a lei do terceiro excluído é uma lei válida para totalidades finitas, mas é uma lei inválida para totalidades pressupostas infinitas. Assim, a lei do terceiro excluído pode aplicar-se no nosso dia a dia, na medida em que estejamos a falar de universos de objetos constituídos por totalidades finitas. Brouwer considera que na matemática primordial também era possível aplicar a lei do terceiro excluído, porque nos tempos primordiais a matemática era apenas acerca de totalidades finitas. O erro na aplicação irrestrita da lei do terceiro excluído ocorreu quando se começou a admitir uma ontologia com infinitas entidades, sem se dar conta que a própria lei foi originalmente proposta como sendo uma lei a respeito de totalidades finitas. Note-se que Brouwer, nesta forma de abordar o assunto, faz depender a Lógica da Metafísica. São as propriedades metafísicas de um domínio ontológico particular que determinam qual é a lógica mais adequada que se pode aplicar a esse domínio.

Apliquemos estas ideias Brouwer à análise de duas conjeturas matemáticas: a conjetura de Goldbach e a conjetura dos números primos.

Conjetura de Goldbach

> *Conjetura de Goldbach*: todo o número par maior do que 2 é a soma de dois primos.

A conjetura de Goldbach é um problema matemático em aberto. Não sabemos se a conjetura é verdadeira ou falsa. Até ao momento não foi dada qualquer demonstração da sua verdade, nem foi apresentado qualquer contraexemplo à mesma.

Para um matemático clássico, a proposição enunciada na conjetura de Goldbach é verdadeira ou falsa. Ou seja, apesar de não termos qualquer demonstração da sua verdade ou qualquer contraexemplo que mostre a sua falsidade, pelo menos sabemos que a proposição é verdadeira ou falsa. O matemático clássico tem uma conceção metafísica acerca dos objetos matemáticos, a conceção segundo a qual os objetos matemáticos têm uma existência objetiva e independente do mental. Existe um alegado domínio abstrato constituído pela totalidade dos objetos matemáticos, no qual as proposições matemáticas acerca desses objetos apenas podem ter dois valores de verdade disjuntos: *verdadeiro* ou *falso*.

O intuicionista considera um ponto de vista de análise diferente. Para um intuicionista, "existir" significa "ser construído". Deste modo, o intuicionista não partilha a conceção metafísica do matemático clássico a respeito dos objetos matemáticos. A realidade matemática depende dos seus criadores, em particular, depende da mente humana. Apenas existe aquilo que foi criado pela mente humana. Assim, perante a conjetura de Goldbach, ele suspende o juízo a respeito da mesma. Ele não está em condições de afirmar que a conjetura é verdadeira ou é falsa, porque, para poder fazer tal afirmação, ele teria de supor de antemão a existência de uma realidade matemática objetiva e independente do mental. Ele rejeita que os objetos matemáticos existam de forma independente da mente, embora concorde com o matemático clássico a respeito da sua objetividade. Por exemplo, o número 2 tem o mesmo significado para todos; o significado não é subjetivo, mas é dependente da mente.

Conjetura dos números primos

Consideremos agora outro exemplo analisado por Heyting (1956, p. 2):

> Sejam k e l dois números naturais tais que
>
> (I) k é o maior primo tal que $k - 1$ é primo ou $k = 1$ se não existir esse número.
>
> (II) l é o maior primo tal que $l - 2$ é primo ou $l = 1$ se não existir esse número.

A respeito da proposição (I) sabemos que $k = 3$ é o maior número primo tal que $3 - 1 = 2$ também é primo. A segunda proposição (II) remete para a *conjetura dos números primos gémeos*, segundo a qual existe um número infinito de primos gémeos. São exemplos de primos gémeos os pares (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) … Atualmente, não se sabe se a proposição expressa pela conjetura dos primos gémeos é falsa ou verdadeira. Ou seja, sabemos calcular o valor de $k = 3$, mas não sabemos calcular o valor de l, pois não sabemos qual é o maior número primo gémeo ou se os números primos gémeos são infinitos (nestas circunstâncias, l seria então igual a 1). A definição (II) não indica nenhum modo para calcular l. No entanto, o matemático clássico considera como válidas ambas as definições de k e l. Pois, de um ponto de vista sintático, ele não encontra qualquer diferença entre as mesmas. O intuicionista rejeita a definição (II), pois esta definição não indica qualquer processo para calcular o número l. Para um intuicionista, uma definição de um qualquer número apenas é aceite se for dado um processo para calcular tal número.

4. Heyting

Heyting, aluno de Brouwer, foi o primeiro a propor uma formalização rigorosa da lógica intuicionista.

4.1. Anti-filosofia?

Heyting tem uma visão oposta à de Brouwer relativamente à Metafísica e à Filosofia em geral. Enquanto Brouwer valoriza a Metafísica e fundamenta o intuicionismo numa conceção filosófica associada ao kantismo e à fenomenologia, Heyting (1983, p. 70) desvaloriza-as. Heyting afirma que a "única tese filosófica da matemática intuicionista é de que não é necessária qualquer filosofia para entender a matemática" (Heyting, 1974, p. 79). Ataca também a própria conceção metafísica dos matemáticos clássicos acerca dos objetos matemáticos. Recorde-se que esta conceção defende que os objetos matemáticos existem objetiva e independentemente dos seres humanos, num alegado domínio abstrato, que fixa metafisicamente o valor de verdade das proposições matemáticas, ainda antes de os matemáticos saberem qual é o valor de verdade efetivo de tais proposições. No seu entender, um matemático intuicionista deve manter-se afastado de tal conceção metafísica.

Parece haver aqui alguma precipitação de Heyting. O problema não está na Metafísica ou na Filosofia. A conceção de Brouwer, partilhada por Heyting, segundo a qual os objetos matemáticos são construções humanas é ela própria também uma conceção metafísica. Uma conceção metafísica acerca dos objetos matemáticos. Tal como foi referido na introdução do capítulo, Dummett considera que o intuicionismo fornece uma perspetiva reconstrutiva da Matemática que se fundamenta em considerações filosóficas sobre a própria Matemática. Portanto, o problema não está na Metafísica ou na Filosofia, mas no conteúdo diferenciado das propostas metafísicas e filosóficas que o matemático clássico e o matemático intuicionista têm sobre os objetos matemáticos e a sua conexão com as proposições matemáticas respetivas.

4.2. Semântica de Heyting

Na lógica intuicionista, o significado das constantes lógicas (os conectivos "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" e "$\neg$", e os quantificadores "$\exists$" e "$\forall$"), enquanto operadores em frases proposicionais, é diferente do significado atribuído pela lógica clássica. Para o intuicionismo, as explicações que os matemáticos clássicos dão das constantes lógicas, em termos de condições de verdade para as proposições nas quais ocorrem essas constantes (vulgarmente exibidas em tabelas de verdade), são circulares. Por exemplo, o conector "$\vee$" é assim explicado pela lógica clássica:

> Dadas duas proposições X e Y diz-se que $X \vee Y$ é verdadeira numa dada interpretação se, e só se, X é verdadeira ou Y é verdadeira nessa interpretação.

Numa primeira aproximação, o aspeto circular da explicação é de que o lado direito usa o termo metalinguístico "ou" que é equivalente à própria constante lógica que estamos a querer explicar o significado: "ou" aparece simultaneamente à esquerda e à direita na proposição acima. Ou seja, "ou" ocorre no *explanans* e no *explanandum*. Concretamente, a circularidade verifica-se se as proposições em questão (*X*, *Y*) são indecidíveis (Dummett, 1993b, pp. 69-70).

Uma proposição é indecidível, num dado sistema formal, quando sabemos que não conseguimos demonstrar nem refutar essa proposição. A linguagem natural também permite a construção de frases indecidíveis. São casos de frases indecidíveis as frases a respeito do passado de que não conseguimos verificar a verdade ou falsidade, (e.g. "passou por aqui um dinossauro", pressupondo não haver qualquer dado empírico que suporte essa frase) ou a respeito de regiões do espaço-tempo que nos sejam inacessíveis (e.g. "está presentemente a haver um terramoto em Saturno") (Dummett, 1993b, p. 46).

Dummett (2000, p. 8) observa que na lógica intuicionista, o significado de cada constante lógica é dado identificando, para uma dada proposição matemática genérica, na qual essa constante aparece como operador principal, uma demonstração dessa mesma proposição. Ou seja, o significado dessas constantes é fiel ao princípio de que uma proposição matemática é verdadeira apenas se pudermos identificar uma demonstração que estabelece construtivamente essa mesma proposição. O valor de verdade de uma proposição matemática é equivalente à sua *demonstração*. Sem demonstração não há verdade! Pelo contrário, para o matemático clássico o valor de verdade de uma proposição matemática dá-se numa realidade exterior ao matemático, ainda que não haja qualquer demonstração da proposição em análise.

Heyting fixou o seguinte significado para as constantes lógicas:

(a) Uma demonstração de $X \wedge Y$ é uma demonstração de X e uma demonstração de Y.
(b) Uma demonstração de $X \vee Y$ é uma demonstração de X ou uma demonstração de Y.
(c) Uma demonstração de $X \rightarrow Y$ é uma operação que transforma toda a demonstração de X numa demonstração de Y.
(d) Uma demonstração de $\neg X$ é uma demonstração de $X \rightarrow \curlywedge$ (absurdo).

(e) Uma demonstração $\forall x Fx$ é uma operação que, para cada numeral n, produz uma demonstração de Fn.

(f) Uma demonstração de $\exists x Fx$ é uma demonstração de Fn, para um n particular.[10]

Num certo sentido, tal como na lógica clássica, também há uma circularidade na proposta intuicionista para a explicação do significado das constantes lógicas. Os termos metalinguísticos ("e", "ou", etc.) são equivalentes às constantes lógicas das quais quereremos explicar o seu significado. No entanto, esta circularidade é inócua, porque os significados das constantes lógicas apelam a demonstrações das proposições (X, Y) que se encontram "ao lado" da constante lógica de que queremos explicar o significado. Alegadamente conseguimos reconhecer se uma dada demonstração é ou não uma demonstração correta da proposição matemática em causa. Note-se que no caso do intuicionismo apenas são admissíveis proposições decidíveis, proposições que conseguimos demonstrar ou refutar.

4.3. Análise de inferências

Consideremos agora a análise de algumas inferências, à luz das regras acima estabelecidas.

Exemplo 1: inferência da introdução da dupla negação

$$\frac{X}{\neg\neg X}$$

Esta inferência é aceite pelo intuicionista e pelo matemático clássico:

1) Por (d) segue-se que se $\neg X$ é uma demonstração de que $X \to \curlywedge$, então $\neg\neg X$ é uma demonstração de que $(X \to \curlywedge) \to \curlywedge$. Ou seja, a conclusão da inferência é assim reescrita: $(X \to \curlywedge) \to \curlywedge$.

[10] Note-se que as explicações (e) e (f) apenas servem para a Aritmética.

2) Por (c), uma demonstração de $(X \rightarrow \curlywedge) \rightarrow \curlywedge$ é uma operação que transforma toda a demonstração de $X \rightarrow \curlywedge$ numa demonstração de $\curlywedge$.

3) Suposição: temos uma demonstração $X \rightarrow \curlywedge$. Ou seja, temos uma operação que transforma toda a demonstração de X numa demonstração de $\curlywedge$.

4) Temos uma demonstração de X (premissa).

5) Logo, via *modus ponens* de 3) e 4), temos uma demonstração de $\curlywedge$.

Os passos 3), 4) e 5) são uma operação que transformou uma demonstração de $X \rightarrow \curlywedge$ numa demonstração de $\curlywedge$, isto é, a conclusão expressa em 2).

Exemplo 2: inferência da eliminação da dupla negação

$$\frac{\neg\neg X}{X}$$

Esta inferência é aceite como válida pelo matemático clássico, mas é inválida para o intuicionista.

1) Por (d) uma demonstração de $\neg\neg X$ é uma demonstração de $(X \rightarrow \curlywedge) \rightarrow \curlywedge$.

2) Por (c), uma demonstração de $(X \rightarrow \curlywedge) \rightarrow \curlywedge$ é uma operação que transforma toda a demonstração de $X \rightarrow \curlywedge$ numa demonstração de $\curlywedge$. Esta proposição é equivalente a afirmar que a premissa é uma operação que transforma uma refutação de X numa demonstração de um absurdo.

Ora, de 2), o intuicionista não tem qualquer regra lógica que lhe permita inferir X.

Exemplo 3: inferência por casos

$$\frac{X \rightarrow Y \quad \neg X \rightarrow Y}{Y}$$

Esta inferência é aceite como válida pelo matemático clássico, mas é inválida para o intuicionista. Para o matemático clássico, o universo matemático dos valores de verdade das proposições matemáticas está fixo: dado X, X ou ¬X. Ora, o intuicionista não considera que o universo matemático dos valores de verdade das proposições matemáticas esteja de (antemão) fixo. As duas premissas leem-se: 1) operação que transforma toda a demonstração de X numa demonstração de Y; 2) operação que transforma toda a demonstração de uma refutação de X numa demonstração de Y. Apenas destas duas premissas o intuicionista não consegue inferir Y. Seria necessário acrescentar uma terceira premissa, X ∨ ¬X, a lei do terceiro excluído para X, para o intuicionista conseguir inferir Y. Ou seja, para inferir Y seria necessário ter uma demonstração de X ou de ¬X.

Vamos agora considerar duas inferências com quantificadores. Mas antes disso façamos uma breve digressão.

Consideremos a frase "nem tudo é belo". Esta frase parece ser equivalente às duas frases seguintes: 1) "existe pelo menos uma coisa que não é bela"; 2) "não é verdade que tudo é belo". Ora, se 1) e 2) fossem logicamente equivalentes, então isso significaria que uma se poderia inferir da outra. Porém, o intuicionista não aceita as inferências em ambos os sentidos, quando o domínio de quantificação é infinito.

Suponhamos que os números naturais podem ser ou não belos. O domínio de quantificação é assim infinito. Para o intuicionista, da frase "existe pelo menos uma coisa que não é bela" podemos inferir que "não é verdade que tudo é belo"; mas da frase "não é verdade que tudo é belo" não podemos inferir que "existe pelo menos uma coisa que não é bela".

Exemplo 4

$$\frac{\exists x \neg Fx}{\neg \forall x Fx}$$

Esta inferência é aceite como válida pelo intuicionista e pelo matemático clássico.

1) Por (f), uma demonstração $\exists x \neg Fx$ é uma demonstração de $\neg Fn$ para um n particular, digamos, de $\neg Fk$.

2) Por (d), uma demonstração de $\neg Fk$ é uma demonstração de $Fk \to \curlywedge$. Ou seja, temos uma demonstração de que $Fk \to \curlywedge$.
3) Por (d), uma demonstração de $\neg\forall xFx$ é uma demonstração de $\forall xFx \to \curlywedge$.
4) Por (c), uma demonstração de $\forall xFx \to \curlywedge$ é uma operação que transforma toda a demonstração de $\forall xFx$ numa demonstração de $\curlywedge$.
5) Suposição: temos uma demonstração de $\forall xFx$. Por (e), se temos uma demonstração de $\forall xFx$, temos uma demonstração de um desses casos particulares, digamos, de Fk.
6) Logo, por *modus ponens* de 2) e 5), segue-se que temos uma demonstração de $\curlywedge$.

Os passos 5) e 6) são uma operação que transformou uma demonstração de $\forall xFx$ numa demonstração de $\curlywedge$, isto é, a conclusão expressa em 4).

Exemplo 5

$$\frac{\neg\forall xFx}{\exists x\, \neg Fx}$$

Esta inferência é aceite como válida pelo matemático clássico, mas é inválida para o intuicionista.

1) Por (d), uma demonstração de $\neg\forall xFx$ é uma demonstração de $\forall xFx \to \curlywedge$.
2) Por (c), uma demonstração de $\forall xFx \to \curlywedge$ é uma operação que transforma cada demonstração de $\forall xFx$ numa demonstração de $\curlywedge$.
3) Por (f), uma demonstração $\exists x\, \neg Fx$ é uma demonstração de $\neg Fn$ para um n particular, digamos, de $\neg Fk$.

Ora, o intuicionista não tem qualquer regra lógica para inferir 3) a partir de 1) e 2).

5. Dummett

Dummett considera um ponto de vista sobre o intuicionismo bastante diferente dos pontos de vista de Heyting e de Brouwer. Ele não adota um ponto de vista eclético relativamente à matemática intuicionista e à matemática clássica, o ponto de vista segundo o qual ambas as matemáticas poderiam conviver “lado a lado”. Pelo contrário, Dummett pretende repudiar a lógica clássica e defender um fundamento para a lógica intuicionista. Para tal, vai defender que a discussão sobre os enunciados matemáticos se enquadra numa discussão muito mais ampla sobre o *significado* de frases da linguagem humana e do seu *uso*.

5.1. Lema: *o significado é o uso*

Consideremos o exemplo dado por Dummett (1994), a respeito do termo *equador*. O equador é uma entidade abstrata. Ao atravessá-lo nada sentimos nem nada observamos. Se desejarmos saber qual é o significado do termo *equador*, temos de analisar o uso desse termo na linguagem. O termo, em si próprio, nada permite aferir sobre o seu significado. Apenas no contexto de frases e pelo seu uso é que podemos determinar o significado do termo *equador*.

Dummett defende que o significado de um enunciado matemático é determinado exaustivamente pelo seu uso. Apenas podemos entender o significado de um enunciado matemático se conseguirmos identificar uma demonstração ou uma computação do mesmo. Acresce que a verdade desse enunciado decorre justamente da própria demonstração ou computação. Brevemente, *verdade* e *demonstração/computação* são faces de uma mesma moeda. Em contraste, o matemático clássico defende que entendemos um enunciado matemático quando apreendemos o que é para esse enunciado ser verdadeiro, mesmo quando não temos maneira de demonstrar se o enunciado é verdadeiro ou falso.

O lema *o significado é o uso* não implica um holismo sobre toda a linguagem. Ou seja, para determinarmos o significado de um enunciado matemático não temos de contextualizar esse enunciado no conjunto de todos os enunciados matemáticos. Dummett rejeita tal holismo geral. O significado de um enunciado matemático pode ser analisado no contexto de frases particulares sem ser necessário analisar toda a linguagem matemática.

Dummett adota o *dictum* de Kreisel, o *dictum* segundo o qual a disputa do realismo em Matemática não é primariamente um problema acerca da existência de objetos matemáticos mas um problema acerca da objetividade das proposições matemáticas. Em particular, ele considera que a metáfora metafísica que tem estabelecido a discussão entre platonistas e construtivistas não precisa de ser respondida em primeiro lugar. A metáfora é a seguinte. Para os platonistas, o matemático é como um astrónomo que descobre propriedades matemáticas a respeito de objetos matemáticos que existem de forma objetiva e independente do mental; para os construtivistas, o matemático é como um artista que cria objetos matemáticos por intermédio da sua mente.

Para Dummett, a questão que tem de ser respondida, antes de mais, é determinar qual é o modelo correto para o significado dos enunciados matemáticos em geral. Os intuicionistas repudiam a ideia de que a noção de verdade pode ser atribuída a enunciados matemáticos, independentemente se temos uma demonstração ou uma computação desses enunciados. Pelo contrário, a demonstração ou a computação de um enunciado particular é que permite inferir a verdade do próprio enunciado. Em contraste, os matemáticos clássicos consideram que a noção de verdade está associada aos nossos enunciados matemáticos, independentemente se sabemos ou não qual é o valor de verdade desses enunciados.

Ao respondermos primeiro à questão do modelo, as duas opções da metáfora metafísica são uma consequência desta resposta. Se considerarmos que uma demonstração adequada ou uma computação é que estabelece a verdade dos enunciados matemáticos, então segue-se que os enunciados matemáticos são atos criativos dos matemáticos, tal como os artistas criam obras de arte. Se considerarmos que os enunciados matemáticos são verdadeiros ou falsos, antes de qualquer demonstração ou computação dos mesmos, então segue-se que os enunciados matemáticos são "descobertas" dos matemáticos, tal como os astrónomos descobrem estrelas.[11]

[11] As ideias apresentadas nesta secção foram baseadas em Dummett (1975).

Uma objeção ao lema de que *o significado é o uso* é a seguinte: por que razão o uso abundante da lei do terceiro excluído, pelos matemáticos clássicos, não pode ser aceite pelo intuicionista? Por outras palavras, como podemos definir um critério para que determinado uso (neste caso, o uso da lei do terceiro excluído pelos matemáticos clássicos) seja ou não correto e adequado?

Dummett tem consciência deste problema e chega mesmo a admitir que na filosofia da matemática o problema é "extremamente intratável" (Dummett, 1963/2009, p. 819). Importa começar por referir que o lema, *o significado é o uso*, é meramente programático. Dummett (1978, p. 153) especifica melhor este lema: "sabemos o significado de um enunciado matemático se, e só se, sabemos o que conta como sendo uma demonstração do enunciado". O intuicionista perante uma demonstração que faz uso da lei de terceiro excluído considerará essa demonstração incorreta, se a demonstração não permitir estabelecer a verdade do enunciado a demonstrar. Concretamente, se o passo demonstrativo, que introduz a lei do terceiro excluído, pressupuser uma realidade metafísica independente do sujeito, que fixa de antemão os valores de verdade das proposições matemáticas, o intuicionista rejeitará essa demonstração.

Recordemos que, para um intuicionista, o que faz de um enunciado matemático verdadeiro, se verdadeiro, é a existência de uma demonstração ou de uma computação desse enunciado. Enquanto para um matemático clássico, o que faz de um enunciado matemático verdadeiro, se verdadeiro, é a existência de uma realidade matemática independente do sujeito. Assim perante a pergunta "o que fará a conjetura de Goldbach verdadeira, se verdadeira?" o intuicionista responderá que apenas uma demonstração poderá estabelecer a verdade dessa conjetura. No entanto, o matemático clássico dará uma resposta completamente bizarra e trivial a esta questão. "O que fará a conjetura de Golbach verdadeira, se verdadeira?" é de que *todo o número par maior do que 2 é a soma de dois primos*. Ou seja, o matemático clássico limita-se a responder com um enunciar da própria conjetura. A realidade matemática que lhe é independente é que determina a verdade da conjetura (Dummett, 1982, p. 77). O matemático clássico tenta-se elevar puxando os cordões dos próprios sapatos.

5.2. Infinito e o paradoxo de Cantor

A respeito da sucessão de alefes de Cantor $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, ..., Dummett observa que, segundo o matemático clássico, estamos proibidos de perguntar qual é o número desta sucessão, isto é, qual é o número cardinal da sucessão dos números cardinais. Esta proibição que o matemático clássico pretende impor não tem qualquer explicação que a sustente. É inexplicável.

Recapitulemos o raciocínio de Cantor. Primeiro, ele considerou a sucessão de números naturais e questionou se esta sucessão, apesar de infinita, tinha ou não uma cardinalidade. A resposta foi afirmativa. A cardinalidade dos números naturais era $\aleph_0$. Ou seja, a "quantidade" de números naturais era $\aleph_0$. Note-se que, para alguém que apenas está habituado a contar quantidades finitas, é verdadeiramente bizarro que possamos contar uma quantidade infinita de números. Ou seja, para alguém com escrúpulos "finitistas", este é, digamos, "o primeiro sapo que tem de engolir" na teoria de Cantor: podemos contar uma quantidade infinita de números naturais e vamos designar essa "primeira" quantidade por $\aleph_0$.

Num segundo momento, Cantor começou a fazer distinções entre diferentes cardinalidades. Ou seja, existem outros conjuntos, para além dos números naturais, que apesar de infinitos, têm cardinalidades diferentes da cardinalidade dos números naturais. Concretamente notou que determinados conjuntos tinham uma "quantidade" de números maior do que a "quantidade" de números naturais. Em seguida, estabeleceu uma sucessão de números cardinais: $\aleph_1$ seria a cardinalidade imediatamente a seguir a $\aleph_0$, e assim por diante.

Chegados a este ponto da teoria de Cantor, a pergunta razoável que se impõe é aquela que formulámos acima: "quantos números cardinais existem?". Ora, por que razão podemos perguntar "quanto números naturais existem?", mas não podemos perguntar "quantos cardinais transfinitos existem?". À luz da matemática clássica, se tentarmos responder a esta questão, vamos cair numa contradição. Dummett considera que ameaçar com uma contradição não fornece qualquer explicação para proibir a pergunta "qual é o número cardinal da sucessão dos números cardinais?".

A questão de Dummett é uma questão antiga que cai no âmbito dos paradoxos da teoria ingénua de conjuntos que surgiram no final do século XIX e no início do século XX. A questão de Dummett subsume-se com pertinência no chamado *paradoxo de Cantor*.[12] Uma versão particular do paradoxo de Cantor corre o raciocínio seguinte.

Consideremos U como sendo o conjunto de todos os conjuntos. Como U é o conjunto de todos os conjuntos, então cada elemento do conjunto potência PU faz parte de U. Portanto, a cardinalidade de PU não é maior do que a cardinalidade de U. Todavia, de acordo com teorema de Cantor, a cardinalidade de PU é maior do que a cardinalidade de U. Conclusão: a cardinalidade de PU não é maior do que a cardinalidade de U *e* a cardinalidade de PU é maior do que a cardinalidade de U. Contradição.[13]

Para compreendermos como a teoria de Cantor tenta acomodar esta versão do paradoxo, temos de voltar à noção de infinito. Além da noção de infinito atual, Cantor admitiu outra noção de infinito – *o infinito absoluto*. Numa carta dirigida a Dedekind, em 1899, Cantor distingue dois tipos de multiplicidades: multiplicidades consistentes (conjuntos) e multiplicidades inconsistentes (absolutamente infinitas).

---

[12] Os paradoxos mais relevantes da teoria ingénua de conjuntos em questão deste período são o paradoxo de Russell, o paradoxo de Burali-Forti e o paradoxo de Cantor. Existem várias versões destes paradoxos na literatura. A teoria ingénua de conjuntos distingue-se da chamada *teoria axiomática de conjuntos*, nomeadamente, da teoria de conjuntos ZFC, na medida em que esta tem uma base axiomática, enquanto a primeira não é o caso – parte de conceções "ingénuas" sobre os conjuntos.

[13] A versão geral do paradoxo de Cantor é aquela que considera como proposição de partida seja U *a classe de todas as classes*, sendo que a noção de *classe* pode referir multiplicidades absolutamente infinitas ou conjuntos. A versão particular aqui apresentada é aquela em que o termo *classe* refere exclusivamente conjuntos. A minha análise é baseada em Giaquinto (2002, pp. 42-48) que faz uma análise muito mais detalhada deste assunto.

> É necessário distinguir dois tipos de multiplicidades (com este termo pretendo referir sempre *multiplicidades definidas*). Uma multiplicidade pode ser tal que a suposição de que todos os seus elementos "estão juntos" conduz a uma contradição, de tal forma que é impossível conceber a multiplicidade como uma unidade, como "uma coisa acabada". Tais multiplicidades designo-as *absolutamente infinitas* ou *multiplicidades inconsistentes* (...) Se, por outro lado, a totalidade dos elementos de uma multiplicidade pode ser pensada sem contradição como "estando junta", de tal forma que pode ser colocada junta "numa só coisa", designo-a de *multiplicidade consistente* ou de um "conjunto" (Cantor, 1899/1996, pp. 931-932)

E em duas cartas para Hilbert, de 1897, Cantor refere-se à noção de *transfinito*:

> Totalidades que não podem ser apreendidas por nós como "conjuntos" (como, por exemplo a totalidade dos alefes (...)) [h]á muitos anos que as designo de "absolutamente infinitas" e distingo-as claramente dos conjuntos transfinitos. (Cantor, 1897/1996b, p. 927)

> O "transfinito" coincide com o que desde a Antiguidade tem sido chamado de "infinito atual". (Cantor, 1897/1996a, p. 927)

Temos assim dois tipos de infinitos: infinito atual e infinito absoluto. O infinito atual é uma propriedade das multiplicidades consistentes, isto é, dos conjuntos transfinitos. Ou seja, todos os conjuntos transfinitos são infinitudes atuais.[14] Por sua vez, o infinito absoluto é uma propriedade das multiplicidades inconsistentes, isto é, das multiplicidades absolutamente infinitas.

A razão que Cantor evoca para estabelecer as multiplicidades absolutamente infinitas é simplesmente a de evitar contradições.

---

[14] "Trans-finito": o que transcende o finito.

Cantor estipula que a totalidade de todos os ordinais é uma multiplicidade absolutamente infinita.[15] Desta estipulação decorre que, por exemplo, a totalidade de todos os cardinais e a totalidade de todos os conjuntos são multiplicidades absolutamente infinitas. Em contraste, cada um dos números ordinais infinitos (ω, 2ω, 3ω, etc.) são números transfinitos; e cada um dos números cardinais ($\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...) são também números transfinitos.

Feitos estes esclarecimentos, regressemos ao paradoxo de Cantor, segundo a versão acima. Ora, à luz da teoria de Cantor, não existe um alegado conjunto U de todos os conjuntos. U não é um conjunto, mas sim uma multiplicidade absolutamente infinita. Portanto, a teoria de Cantor bloqueia esta versão do paradoxo.

Analogamente, a contradição que Dummett aponta, gerada pela questão "quantos cardinais transfinitos existem?", resulta de uma confusão entre conjunto infinito e multiplicidade absolutamente infinita. A totalidade de todos os cardinais não é um conjunto, mas sim uma multiplicidade infinita. Podemos perguntar qual é a cardinalidade de um conjunto, mas, na teoria de Cantor, a "pergunta quantos cardinais transfinitos existem?" não tem significado. Não existe um alegado conjunto U de todos os cardinais transfinitos.

Um intuicionista, como Dummett, rejeita todas estas respostas. A distinção entre conjuntos e multiplicidades absolutamente infinitas é introduzida de forma *ad hoc* debaixo de uma ameaça de cairmos numa contradição. Efetivamente não é dada qualquer outra explicação que motive a distinção. Na verdade, não é dada qualquer resposta substantiva ao paradoxo de Cantor.

---

[15] Seja uma classe *C*. *C* é uma multiplicidade absolutamente infinita se existir uma correspondência um a um com a totalidade de todos os ordinais e *C* ou alguma das "subclasses" de *C*.

5.3. Conceitos indefinidamente extensíveis e o teorema de Gödel

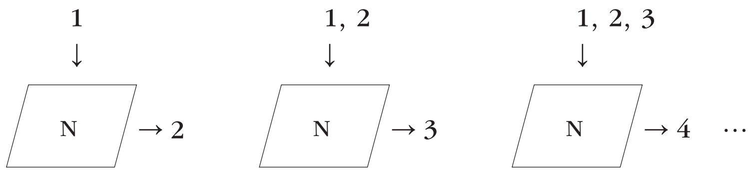
Outra noção que Dummett introduz no intuicionismo é a noção de *conceito indefinidamente extensível* e é assim definida:

> Um conceito é indefinidamente extensível se, para qualquer caracterização definida dele, existe uma extensão natural desta caracterização, a qual produz um conceito mais inclusivo; esta extensão será feita de acordo com um princípio geral gerador de tais extensões e, tipicamente, a nova caracterização será formulada por referência à caracterização anterior. (Dummett, 1963/2009, p. 826)

> Um conceito indefinidamente extensível é tal que, se pudermos formar uma conceção definida de uma totalidade, cujos todos os elementos caem sobre o conceito, podemos, por referência a essa totalidade, caracterizar uma totalidade maior segundo a qual todos os seus elementos caem sobre ela. (Dummett, 1994, p. 24)

Um conceito P é indefinidamente extensível se tiver um "princípio gerador de extensão", tal que para uma totalidade definida de objetos T, que caem sob o conceito P, o princípio de extensão gera um novo objeto que cai sob o conceito P, mas que não pertence à totalidade T. Dummett considera que, por exemplo, os conceitos *número natural*, *número real* e *cardinal* são conceitos indefinidamente extensíveis.

A caracterização de Dummett de conceito indefinidamente extensível é um pouco obscura. Note-se, por exemplo, que os termos "indefinidamente" e "definida" aparecem em ambos "os lados" da caracterização. Todavia, uma tentativa de esquematizar a ideia é a seguinte. Consideremos, por exemplo, o conceito *número natural*. Existe uma "máquina" dentro do conceito *número natural*, N, que vai gerando números que não pertencem à totalidade e que vão sendo acrescentados sucessivamente à totalidade.



Esta noção de *conceito indefinidamente extensível* remete para a distinção anteriormente feita neste capítulo entre infinito atual e infinito potencial. Por exemplo, a proposição matemática $\forall_{x \in \mathbb{N}} Fx$, lida como "para todo x pertencente a $\mathbb{N}$ tal que x tem a propriedade F", a variável x ligada ao quantificador não é vista como uma variável que "corre" sobre uma totalidade completamente infinita. A totalidade em causa, o conjunto de números naturais, $\mathbb{N}$, é apenas uma totalidade potencialmente infinita.

Em 1931, Gödel estabeleceu dois teoremas que são tidos como dois dos resultados mais importantes na matemática do século XX. Uma boa ilustração do poder destes teoremas foi terem dinamitado o chamado *programa de Hilbert*. O programa de Hilbert visava axiomatizar toda a matemática e derivar, por métodos finitos, o valor de verdade de qualquer proposição matemática. Ainda dentro do programa de Hilbert, também se pensava que seria possível demonstrar a consistência do próprio sistema a partir do conjunto de axiomas estabelecidos para o sistema.

Primeiro teorema da incompletude:

> Seja T uma teoria formal axiomatizada, cuja linguagem contém a linguagem da aritmética básica. Então, se T é verdadeira, haverá uma asserção verdadeira G_T da aritmética básica tal que $T \nvdash \mathrm{G}_T$ e $T \nvdash \neg\, \mathrm{G}_T$.[16] (Smith, 2021, p. 12)

[16] Diz-se que *T é uma teoria formal axiomatizada* se tem uma linguagem formalizada, um conjunto de axiomas formulados nessa linguagem e um sistema de demonstração formalizado (Smith, 2021, p. 2). Diz-se que T é verdadeira se, e só se, os seus axiomas são verdadeiros e o seu sistema de demonstração preserva a verdade (Smith, 2021, p. 9). Interpreta-se "$T \nvdash \mathrm{G}_T$ e $T \nvdash \neg\, \mathrm{G}_T$" como, quer G_T, quer $\neg\, \mathrm{G}_T$ não são deriváveis dos axiomas de T.

Dummett (1963/2009) faz uma interpretação intuicionista do próprio significado do primeiro teorema de Gödel, considerando para o efeito a seguinte formalização do teorema:

> Existe, para qualquer sistema formal intuitivamente correto, para a aritmética elementar, uma proposição *I* exprimível no sistema mas indemonstrável nele, que não só é verdadeira mas que pode ser reconhecida por nós como sendo verdadeira. (Dummett, 1963/2009, p. 815)

Aparentemente, o teorema de Gödel atinge o intuicionismo no seu "coração". À luz do intuicionismo, uma proposição matemática apenas pode ser reconhecida como sendo verdadeira se a proposição matemática puder ser demonstrada. Ora, a proposição *I* é reconhecida como sendo verdadeira, mas indemonstrável. Portanto, o teorema de Gödel refuta a alegada identificação entre *verdade aritmética* e *demonstração* operada pelo intuicionismo.

Esta objeção é falaciosa. O teorema de Gödel é respeitante a sistemas *formais* da aritmética. As regras de demonstração do intuicionismo são regras *informais* e não são válidas para sistemas formais, em particular, para sistemas formais da aritmética: "a conceção intuitiva [do intuicionismo] de uma demonstração matemática válida (…) não podem geralmente ser identificadas com o conceito de uma demonstração dentro de um sistema formal" (Dummett, 1963/2009, p. 832). Portanto, os intuicionistas, tal como os matemáticos clássicos, aceitam que a proposição *I* pode ser reconhecida como sendo verdadeira, apesar de não haver qualquer demonstração da mesma (a partir de *T*). (Shapiro, 1998, pp. 613-614).

Dummett defende que o teorema de Gödel mostra que os conceitos *demonstração aritmética* e *verdade aritmética* são conceitos indefinidamente extensíveis.

O conceito *demonstração aritmética* é indefinidamente extensível, ou nas próprias palavras de Dummett, "a classe de *demonstrações intuicionisticamente aceitáveis*" é uma classe indefinidamente extensível, porque um sistema formal da aritmética não incorpora em si todos os princípios de demonstração intuicionistas. Podem ser acrescentados outros princípios de demonstração intuicionistas que, por sua vez, permitem derivar outras proposições que não são deriváveis apenas a partir dos princípios de demonstração do próprio sistema formal original.

O conceito *verdade aritmética* é um conceito indefinidamente extensível, porque este conceito não pode ser completamente caracterizado por proposições (de aritmética) que possamos fazer acerca dele. Ou seja, dado um conjunto de verdades aritméticas, pode-se construir uma outra proposição da aritmética verdadeira *U*, mas agora no sentido de *construção intuicionista*[17], e que não faz parte do conjunto de verdades aritméticas inicialmente estabelecidas (Shapiro & Wright, 2006, p. 263).

6. Matemática intuicionista

Quais são as implicações das ideias intuicionistas para a matemática? Olhando para trás, os matemáticos intuicionistas parece que apenas não aceitam algumas demonstrações da matemática clássica, nomeadamente, aquelas baseadas em regras de inferência que eles consideram inválidas. Ora, se os matemáticos intuicionistas conseguirem providenciar demonstrações construtivas desses mesmos resultados, então, à primeira vista, os resultados da matemática intuicionista serão os mesmos que os resultados da matemática clássica. As coisas não são assim tão simples.

A ideia anterior apenas é válida para a aritmética de primeira ordem. A respeito da aritmética, os matemáticos clássicos e os intuicionistas partilham os mesmos axiomas e apenas discordam nas regras de inferência lógica. Concretamente, em 1933, Gödel demonstrou

[17] Dummett (1963/2009, p. 822) dá uma pista de como esta “construção” pode ser feita e Wright (1994) faz uma efetiva demonstração construtiva dessa proposição.

que os teoremas da Aritmética de Peano (teoria formal da aritmética clássica), que não contenham os quantificadores existencial e universal, são os mesmos teoremas da Aritmética de Heyting (teoria formal da aritmética intuicionista).

As maiores diferenças entre a matemática intuicionista e a matemática clássica surgem no domínio da Análise Real, em virtude de o intuicionista ter uma definição do contínuo matemático diferente da definição do matemático clássico. A partir desta diferença nasce uma "nova matemática". Apenas posso dar aqui uma breve descrição do ponto de partida dessa diferença.

Uma maneira que o matemático clássico usa para definir os números reais é por intermédio de sucessões infinitas convergentes de números racionais, chamadas *sucessões de Cauchy* de números racionais. Estas sucessões são listas de números racionais ordenados denotadas por $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$. Os sucessivos termos da sucessão aproximam-se cada vez mais um dos outros, ou seja, a distância entre os termos da sucessão é cada vez mais pequena.[18]

Formalmente, $\{a_n\}$ é uma sucessão de Cauchy se

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \exists N \in \mathbb{Z}^+ : \forall m, n > N \left(|a_m - a_n| < \frac{1}{k} \right).$$

Por exemplo, assumamos que a sucessão de números racionais {1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4141, 1.41412, 1.4141213 ...} é uma sucessão que converge para o número irracional $\sqrt{2}$. Ora, esta sucessão é tida pelo matemático clássico como sendo uma sucessão atualmente infinita. Uma vez que o intuicionista apenas aceita o infinito potencial, ele não está em condições de aceitar a definição clássica dos números reais. O intuicionista vai aceitar que os números reais são definidos por sucessões de Cauchy, mas não sucessões de Cauchy atualmente infinitas.

O matemático clássico e o intuicionista interpretam de forma diferente os quantificadores sobre os números inteiros positivos que

[18] Um número real é o conjunto de todas as sucessões de Cauchy que convergem para esse número. Formalmente, um número real é uma *classe de equivalência* de sucessões de Cauchy.

aparecem na fórmula acima. Para o matemático clássico, para cada número natural *k*, existe um número natural *N*, tal que... Para o intuicionista, para cada número natural *k*, *podemos encontrar* um número natural *N* tal que... A diferença está na expressão "podemos encontrar". Para o intuicionista as sucessões de Cauchy são *processos* implementados.

Para o intuicionista, o contínuo matemático é construído por intermédio de *sucessões de escolhas* (também por vezes designadas de *sucessões de escolhas livres*). Estas sucessões podem ser geradas de forma algorítmica, isto é, por um processo computacional e, neste sentido, são deterministas. Ou podem ser geradas de forma não algorítmica, isto é, de forma aleatória. Por exemplo, lançando uma moeda ou lançando um dado para determinar cada um dos números das expansões decimais para cada termo da sucessão e, neste sentido, são indeterministas ("escolhas livres"). Ou ainda podem ser geradas por processo "misto" de determinismo e indeterminismo. Numa fase inicial, Brouwer apenas admitia sucessões de escolhas deterministas, mas posteriormente passou a admitir sucessões de escolhas indeterminadas. As sucessões de escolhas são sucessões convergentes e potencialmente infinitas.[19]

Concretamente uma sucessão de escolhas α é assim definida:

a) é dado um segmento inicial finito ;

b) dado $\langle \alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n), \ldots, \alpha(k) \rangle$, é dada uma regra que determina o intervalo de valores possíveis para $\alpha(k+1)$ e seguintes.

Se a regra apenas permitir obter um único valor para $\alpha(k+1)$ para cada *k*, então o procedimento é algoritmo. Se a regra permitir obter uma coleção de valores possíveis para $\alpha(k+1)$ para cada *k*, então o procedimento não é algorítmico. Neste caso, há *escolhas* possíveis para os termos da sucessão.

[19] As sucessões de escolhas foram introduzidas por Brouwer em 1918. Mais tarde, em 1927 e 1928, nas *Lições de Berlim* e *Lições de Viena*, respetivamente, Brouwer apresentou outra técnica para gerar os números reais a partir de propriedades de "fuga" [*fliehende Eigenschaft*] a respeito de números naturais (van Dalen, 1999, p. 309).

Para compreendermos melhor a noção de *sucessão de escolhas* e de como pode ser usada para gerar números reais, consideremos o exemplo seguinte.

Seja $\alpha(1)=\frac{1}{2}$ e a regra segundo a qual para cada k, $\alpha(k+1)$ é um número racional, tal que:

$$|\alpha(k+1)-\alpha(k)|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

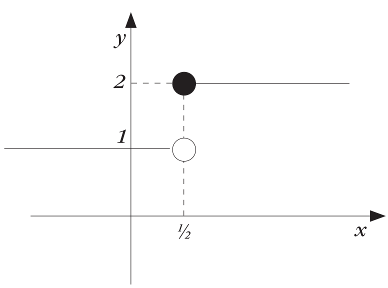
Neste caso, existe uma infinidade de escolhas possíveis para cada termo $\alpha(k)$. Note-se, no entanto, que a partir do momento que é feita uma escolha para $\alpha(k)$, o conjunto de escolhas possíveis para $\alpha(k+1)$ pertence ao intervalo $\left[\alpha(k)-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1},\alpha(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$. Por exemplo, dado $\alpha(1)=\frac{1}{2}$, então $\alpha(2)$ pertence ao intervalo $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$. Por outras palavras, a regra acima para a determinação de cada termo da sucessão não é uma regra algorítmica. Note-se ainda que, estabelecida uma sucessão, apenas podemos escolher os termos seguintes dessa sucessão, não podemos "voltar atrás" e alterar os termos da sucessão já formada. A sucessão também não é atualmente infinita, mas sim potencialmente infinita. A sucessão é um processo.

A sucessão de escolhas α converge e gera um número real, r_α, que pertence ao intervalo [0, 1]. Ou seja, r_α é o número real para o qual a sucessão converge. Contudo, não podemos afirmar que $r_\alpha<\frac{1}{2}$ ou $r_\alpha=\frac{1}{2}$ ou $r_\alpha>\frac{1}{2}$. Ou seja, a lei da matemática clássica da tricotomia segundo a qual para quaisquer números reais x e y, $x<y$ ou $x=y$ ou $x>y$, não é válida no intuicionismo.[20]

Para dar uma pequena ideia do que esta maneira de gerar os números reais implica, atentemos a função seguinte.

Seja f:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\geq\frac{1}{2}\\ 1, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$



[20] Estes parágrafos sobre sucessões de escolhas são baseados em Posy (2005, pp. 323-324, 2020, pp. 27-28).

Do ponto de vista da matemática clássica, esta função não é contínua, porque, informalmente, temos de "levantar o lápis" para conseguir desenhar o gráfico da função. No entanto, do ponto de vista da matemática intuicionista, f não é sequer uma função. Mais precisamente, f não é um objeto matemático. Isto decorre da forma como os números reais são gerados pela conceção intuicionista, por exemplo, os números reais serem gerados por sucessões de escolha.

Uma função é definida num número do seu domínio apenas se o seu valor puder ser calculado para esse número. A função f diz-nos como podemos calcular o seu valor para números x segundo os quais sabemos que $x < \frac{1}{2}$ ou $x \geq \frac{1}{2}$. Consideremos agora, por exemplo, o número real, r_α, gerado pela sucessão de escolhas anterior α. Sabemos que r_α pertence ao intervalo [0, 1]. Contudo, não podemos afirmar que $r_\alpha < \frac{1}{2}$ ou $r_\alpha = \frac{1}{2}$ ou $r_\alpha > \frac{1}{2}$. Portanto, não conseguimos calcular f se $x = r_\alpha$.

A modelação do contínuo matemático pelas sucessões de escolhas conduz a uma conceção na natureza do contínuo matemático que é diferente da conceção clássica. O contínuo matemático clássico de Cantor é "quebradiço"; enquanto o contínuo matemático intuicionista de Brouwer é "viscoso" (Posy, 2008, p. 22). A metáfora é de que se cortarmos um contínuo "quebradiço", nenhum pedaço ficará agarrado à faca e conseguiremos separar perfeitamente as duas partes; enquanto se cortarmos um contínuo "viscoso", haverá pedaços do contínuo que ficarão agarrados à faca no corte (Posy, 2005, p. 346). O contínuo de Brouwer é uma entidade por si mesma:

> o continuum como um todo foi-nos dado pela intuição; uma construção para ele, uma ação que criaria a partir da intuição matemática "todos" os seus pontos como indivíduos, é inconcebível e impossível. (Brouwer, 1975, p. 45)

Esta noção de contínuo matemático "viscoso" remete para uma noção de contínuo originalmente estabelecida por Aristóteles: "nada do que é contínuo pode ser composto de indivisíveis" (Aristotle, 1984, liv. Physics, VI, § 1).

7. Análise de demonstrações

Analisemos agora algumas demonstrações de teoremas matemáticos que permitem ilustrar as ideias anteriores deste capítulo.

Exemplo 1

Teorema: existem números irracionais x e y tais que x^y é racional.

Demonstração (construtiva):

Sabendo que $\sqrt{2}$ é irracional e que $\log_2 9$ é irracional.

Seja $x = \sqrt{2}, y = \log_2 9$.

$x^y = \sqrt{2}^{\log_2 9} = \sqrt{2}^{\log_2 3^2} = \sqrt{2}^{2\log_2 3} = (\sqrt{2}^2)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$. 3 é racional □

Demonstração (não-construtiva e por casos):

Sabendo que $\sqrt{2}$ é irracional.

Suposição: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é racional.

Caso 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional. Seja $x = y = \sqrt{2}$, ou seja, x e y são irracionais. Como se está a assumir que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, logo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional.

Caso 2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é racional. Seja $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, ou seja, x e y são irracionais. $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. 2 é racional.

Conclusão: em ambos os casos o teorema é verdadeiro □

Análise

Na primeira demonstração, partimos de dois números que sabemos serem números irracionais e construímos, a partir desses dois números, um terceiro número que é racional, segundo as condições estabelecidas no teorema.

A segunda demonstração não é intuicionisticamente válida, porque, implicitamente, supõe a Lei do Terceiro Excluído. A estrutura lógica da demonstração é a seguinte:

$$\frac{X \rightarrow Y \quad \neg X \rightarrow Y}{Y}$$

A suposição de que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *é racional ou* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *não é racional* não é demonstrada. Ou seja, em parte alguma da demonstração se demonstra qual é o valor de verdade destas duas alternativas.

Exemplo 2

Teorema: não existe o conjunto de todos os conjuntos.

Demonstração:

Suposição: V = o conjunto de todos os conjuntos, tal que

$$R = \{x \in V: x \notin x\}$$

1) Se $R \in R$, então, por definição de R, $R \notin R$. Absurdo. Logo, $\neg (R \in R)$

2) Se $\neg (R \in R)$, então, por definição de R, $R \in R$. Absurdo. Logo, $\neg\neg (R \in R)$

De 1) e 2) obtém-se: $\neg (R \in R)$ e $\neg\neg (R \in R)$. Absurdo.

Logo, não é verdade que exista V, isto é, não existe o conjunto de todos os conjuntos □

Análise

Esta demonstração é intuicionisticamente válida. A sua estrutura lógica:

$$\frac{X \rightarrow \curlywedge}{\neg X}$$

A partir da suposição que existe o conjunto de todos os conjuntos derivámos um absurdo, a saber, $\neg (R \in R)$ e $(R \in R)$. Logo, podemos negar a suposição de partida.

Este teorema faz parte da teoria de conjuntos ZFC e bloqueia o paradoxo de Russell. No entanto, o matemático clássico vai um pouco mais longe nesta demonstração. O matemático clássico designa a coleção de todos os conjuntos de *classe própria*. Classicamente, temos assim dois tipos de coleções: 1) coleções que são conjuntos e 2) coleções que são classes próprias. Tal como no paradoxo de Cantor, para um intuicionista esta distinção entre *conjunto* e *classe própria* é inexplicável e obscura.

Exemplo 3

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração (por redução ao absurdo):

Suposição: $\sqrt{2}$ é racional.

Seja:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (*)$$

tal que a e b são números naturais e que não têm fatores comuns, isto é, $\frac{a}{b}$ está escrito na sua forma mais simples. Ou seja, o maior divisor comum é igual a 1.

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$a^2 = 2b^2$$

Ou seja, a^2 é par. Mas, se a^2 é par, então a é par (não vou demonstrar esta condicional).

Seja $a = 2k$, para k igual a um número natural. Substituindo em (∗):

$$(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$$

Ou seja, b^2 é par. Mas se b^2 é par, então b é par.

Seja $b = 2l$, para l igual a um número natural. Substituindo em (∗) $a = 2k$ e $b = 2l$:

$$\sqrt{2} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l}$$

Mas tínhamos assumido que a e b que não tinham fatores comuns, isto é, $\frac{a}{b}$ estava escrito na sua forma mais simples. Contradição.

Logo, não é verdade que $\sqrt{2}$ é racional. Isto é, $\sqrt{2}$ não é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional $\sqrt{2}$ □

Análise

Esta demonstração é uma demonstração por redução ao absurdo. Do ponto de vista clássico não há aqui qualquer problema. Do lado intuicionista também se considera que a demonstração é construtiva. A estrutura lógica da demonstração é a seguinte:

$$\frac{X \rightarrow \curlywedge}{\neg X}$$

Exemplo 4

Teorema: a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior do que $\aleph_0$ (alefe-zero).

Demonstração (usando a técnica de diagonalização):

Suposição: o conjunto dos números reais tem cardinalidade $\aleph_0$.

Isto significa que o conjunto de números reais pode ser colocado numa correspondência um a um (biunívoca) com o conjunto de números naturais. Ora, para facilitar as coisas consideremos apenas o conjunto dos números reais compreendido entre 0 e 1. Neste intervalo, se se conseguir colocar numa correspondência um a um os números reais com o conjunto dos números naturais, então nos restantes números reais também se conseguirá estabelecer essa correspondência. Vamos considerar a expansão decimal de cada um destes números reais. Uma expansão decimal infinita. Por exemplo, expansões do género: 0,111123...; 0,111124.... Em termos abstratos, as expansões estarão numa correspondência um a um com os números naturais, onde cada dígito, d_i^j, a seguir à vírgula, é um algarismo compreendido entre 0 e 9. O numeral subscrito, *i*, refere-se à ordem que ocupa o dígito; o numeral sobrescrito, *j*, refere-se à ordem do número real. A formatação é a seguinte:

$$\begin{array}{ll} 1 & 0,d_1^1 d_2^1 d_3^1 d_4^1 d_5^1 \ldots \\ 2 & 0,d_1^2 d_2^2 d_3^2 d_4^2 d_5^2 \ldots \\ 3 & 0,d_1^3 d_2^3 d_3^3 d_4^3 d_5^3 \ldots \\ & \ldots \end{array}$$

Por exemplo, se o segundo número é 0,21573..., então $d_1^2 = 2, d_2^2 = 1,$ $d_3^2 = 5, d_4^2 = 7, d_5^2 = 3\ldots$ Consideremos agora o número correspondente aos dígitos da diagonal, $0,d_1^1 d_2^2 d_3^3 d_4^4$. Este número é chamado de *número diagonal*. Uma vez que nesta lista estão todos os números reais compreendidos entre 0 e 1, então o número diagonal faz parte desta lista. Consideremos agora a seguinte alteração ao número diagonal: se o dígito for diferente de 9, somar 1 a esse dígito; se for igual a 9, transformar o dígito em 1. Este novo número passa a chamar-se *número diagonal de Cantor*. O número diagonal de Cantor não se encontra na nossa lista original. O primeiro dígito é diferente do primeiro d0ígito do primeiro número; o segundo dígito é diferente do segundo dígito do segundo número; o terceiro dígito é diferente do terceiro dígito do terceiro número; e assim por diante. Todavia, supusemos que na nossa lista inicial tínhamos todos os números reais compreendidos entre 0 e 1 e acabámos de gerar um número – o número diagonal de Cantor – que não se encontra nessa lista original. Contradição. A suposição de partida é falsa. Ou seja, não é verdade que o conjunto dos números reais tem cardinalidade $\aleph_0$. Ora, como o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais, então a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior do que a cardinalidade dos números naturais, $\aleph_0$ □

Análise

Brouwer aceita a demonstração de Cantor de que o conjunto de números reais não pode ser colocado numa correspondência um a um (biunívoca) com o conjunto dos números naturais. Mas nega que se possa estabelecer a existência de um novo número cardinal maior do que $\aleph_0$. Para Brouwer, o conjunto em questão apenas é "interminavelmente numerável".

> O intuicionista apenas reconhece a existência de conjuntos numeráveis, i.e., conjuntos cujos elementos podem ser colocados numa correspondência um-a-um com elementos de um número ordinal finito ou com os elementos de um número ordinal infinito, ω [o primeiro tipo ordinal infinito para os números naturais]. (Brouwer, 1913/1983, p. 81)

> Alefe 0 é a única potência infinita de que o intuicionista reconhece a existência. (Brouwer, 1913/1983, p. 84)

A respeito da demonstração acima Brouwer faz a análise seguinte.

Seja o conceito *número real compreendido entre 0 e 1*. O matemático clássico interpreta este conceito como "sequência elementar de dígitos a seguir à vírgula". O intuicionista interpreta este conceito como "lei para a construção de uma sequência elementar de dígitos a seguir à vírgula, por intermédio de um conjunto finito de operações". A partir do conceito anterior, o matemático clássico sente-se na liberdade de criar "o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1"; todavia, para o intuicionista tal conjunto não tem significado. O matemático clássico e o intuicionista concordam que, primeiro, conjuntos infinitos numeráveis de números reais entre 0 e 1 podem ser construídos de diferentes maneiras; e, segundo, para cada um desses conjuntos é possível obter um número que não pertence a esse conjunto. A discordância começa quando o matemático clássico pretende retirar a conclusão de que a cardinalidade dos números reais entre 0 e 1 é maior do que alefe-zero; e, além disso, especula sobre se a cardinalidade dos números reais é a segunda cardinalidade infinita, isto é, alefe-um (a hipótese do *continuum*). As duas pretensões do matemático clássico são sem sentido para o intuicionista (Brouwer, 1913/1983, p. 85).

Dummett faz uma análise semelhante à análise de Brouwer. Ele considera que a demonstração de Cantor mostra o seguinte:

> [D]ada uma qualquer totalidade numerável de números reais, podemos definir, *a partir dessa totalidade*, um número real que não pertence a essa totalidade. A demonstração não demonstra que os números reais formam uma totalidade não-numerável, a menos que assumamos de início que os números reais formam uma totalidade determinada contendo todos os números reais. (Dummett, 1994, p. 27)

Em alternativa, Dummett defende que o conceito de *número real* é um conceito indefinidamente extensível.

Leituras adicionais recomendadas

Aristotle (1984). *The Complete Works of Aristotle the Revised Oxford Translation*. [*Física*, Livro III, caps. 4 a 8, faz-se a análise do infinito; *Metafísica*, cap. XI, secção 10, encontram-se algumas considerações adicionais sobre o infinito].

Brouwer (1981). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. [Páginas 1-8, encontram--se os dois atos do intuicionismo].

Brouwer (1913/1983). Intuitionism and formalism.

Heyting (1983). Disputation.

Dummett (1994). What is Mathematics About? [Recomendo apenas a leitura dos primeiros 6 parágrafos e alguns parágrafos contidos nas páginas 25 a 29. Existem outras referências sobre Dummett na bibliografia anotada e nas referências do livro que o leitor pode consultar. Mas devo advertir o leitor que o estilo de redação de Dummett, além de lógica e matematicamente erudito, é bastante esdrúxulo e difícil de acompanhar, mesmo para profissionais].

Capítulo 4
Realismo Matemático

Este capítulo e o seguinte são sobre conceções realistas e antirrealistas em matemática. Este capítulo é dedicado inteiramente ao realismo matemático. Começaremos por analisar a conceção realista do platonismo matemático, de que existem entidades matemáticas abstratas, e o problema epistemológico de Benacerraf que se levanta a esta conceção. Seguem-se outras conceções realistas: a conceção da indispensabilidade matemática, de que existem simplesmente entidades matemáticas; e as conceções do platonismo naturalizado e do aristotelismo matemático, de que existem entidades matemáticas, mas localizadas no espaço-tempo.

1. Introdução

Vimos no capítulo 3, "Intuicionismo", que a discussão metafísica a respeito da forma de existência das entidades matemáticas, se construídas pela mente humana ou se independentes dos seres humanos, foi crucial para alicerçar uma nova lógica – a lógica intuicionista – e a jusante uma nova matemática – a matemática intuicionista. O que faremos neste capítulo é detalhar um conjunto de conceções filosóficas, a respeito da existência e da forma de existência das entidades matemáticas. Em termos filosóficos esta discussão enquadra-se no domínio da ontologia e da metafísica da ciência. A ontologia é um estudo sobre a noção de existência e do que existe; a metafísica da ciência é um estudo sobre a natureza do que existe, nomeadamente, um estudo sobre o *ser* e a sua *forma* de existência.

Apesar da importância crucial que a discussão metafísica teve para a criação da matemática intuicionista, esta discussão é ignorada por quase toda a comunidade matemática. O matemático clássico assume a lei do terceiro excluído como uma lei válida, sem retirar as consequências que a mesma pressupõe, a saber: a quantificação sobre um domínio infinito de objetos pressupõe que os objetos desse domínio existem de forma independente da mente humana.

Para o domínio dos objetos físicos, a ideia anterior pode ser assim ilustrada. Consideremos a afirmação "existe uma moeda no meu bolso". Ora, para saber se esta frase é verdadeira, tem de existir um objeto – uma moeda – no meu bolso. Por exemplo, ponho a mão no bolso e encontro uma moeda. A existência de uma moeda no meu bolso assegura-me que a afirmação é verdadeira. Se não encontrar qualquer moeda no bolso, então isso significa que a afirmação é falsa.

Nos termos da teoria da verdade como correspondência, diz-se que a afirmação "existe uma moeda no meu bolso" é verdadeira se, e só se, "existe uma moeda no meu bolso" corresponde ao facto de que *existe uma moeda no meu bolso*. Segundo esta teoria há assim uma relação entre frases e factos no mundo. Uma frase é verdadeira se, e só se, existir um facto no mundo que lhe corresponda; uma frase é falsa se, e só se, não existir um facto no mundo que lhe corresponda.

O paralelismo entre os objetos físicos e os objetos matemáticos é o seguinte. Consideremos a afirmação "2 é um número par". Assumindo que os números são entidades abstratas, como poderemos determinar o valor de verdade desta afirmação? Para a afirmação ser verdadeira, tem de existir uma entidade abstrata, mais precisamente, tem de existir o número 2, com a propriedade de ser par, que torne a frase verdadeira. Não existindo tal número, então a frase é falsa. Novamente estamos a aplicar a teoria da verdade como correspondência, mas agora sobre o domínio abstrato. Diz-se que a proposição "2 é um número par" é verdadeira se, e só se, "2 é um número par" corresponde ao facto de que *2 é um número par*. O problema ontológico que se levanta é de como podemos então defender ou negar a existência de tais entidades matemáticas. O problema metafísico subsidiário é conseguir argumentar sobre a respetiva natureza dos objetos matemáticos existentes.

Antes de terminar esta introdução, importa fazer uma breve clarificação relativamente às titulações deste capítulo e do próximo capítulo – “Realismo Matemático” e “Antirrealismo Matemático”. Outra titulação corrente sobre este assunto é a titulação “Platonismo Matemático” e “Nominalismo Matemático”. O platonismo defende que existem entidades abstratas; mais concretamente, o platonismo matemático defende que existem entidades matemáticas e que estas entidades são entidades abstratas. O nominalismo nega a existência de entidades abstratas (e nega a existência de universais); mais concretamente, o nominalismo matemático nega a existência de entidades matemáticas abstratas. Só existem entidades concretas. A divisão *Realismo/antirrealismo* estabelece uma divisão ontológica simples entre existência/não-existência; a divisão *Platonismo/Nominalismo* estabelece uma divisão metafísica entre abstrato/concreto.

A divisão *Realismo/antirrealismo* revela-se uma divisão mais simples do que a divisão *Platonismo/Nominalismo* e que, no meu entender, respeita a ordem do inquérito. Primeiro, vem a ontologia; depois, vem a metafísica. Primeiro, devemos argumentar sobre o que existe; depois, argumentar sobre a respetiva forma de existência daquilo que existe.

Há conceções de cariz empírico sobre a matemática, que defendem a existência de entidades matemáticas, mas cujo modo de existência é no espaço-tempo. Ou seja, as entidades matemáticas não são entidades abstratas, mas entidades concretas. Um empirista na matemática parece ser um nominalista, porque nega a existência de entidades abstratas. Mas tal classificação não é de todo consensual na literatura, em virtude de haver definições nominalistas ligeiramente diferentes da acima enunciada (e.g. negam *tout court* a existência de entidades matemáticas). À luz da nossa divisão, o empirismo matemático é simplesmente uma conceção realista.

2. Platonismo matemático

O platonismo matemático é a doutrina segundo a qual existem entidades matemáticas, abstratas e independentes do mental, e que as nossas teorias e proposições matemáticas descrevem essas entidades. O platonismo matemático remonta ao mundo das formas de Platão. Um argumento para a sua defesa foi formulado por Frege (1992, 1893/2013):

(1) Se uma frase simples da forma "*a* é *F*" é verdadeira, então existem as entidades denotadas pelos termos singulares dessa frase.
(2) Frases simples verdadeiras da aritmética têm termos singulares que referem números naturais.
(3) Números naturais existem.
(4) Se números naturais existem, então são entidades abstratas e independentes do mental.
∴ Existem números naturais, abstratos e independentes do mental.[1]

O argumento anterior é apenas a respeito dos números naturais – a aritmética. Recorde-se que segundo a perspetiva logicista de Frege, o proponente do argumento, a aritmética seria suscetível de ser reduzida a princípios lógicos. No entanto, o argumento pode ser estendido a outros domínios da matemática e ser formulado concretamente a respeito de muitas outras entidades matemáticas, como números reais, conjuntos, funções, etc. Naturalmente, se se entender, por exemplo, que a matemática é redutível à teoria de conjuntos ZFC, então apenas precisamos de afirmar a existência de conjuntos para termos a ontologia necessária para a construção de todo o edifício matemático.

[1] Termos singulares são termos como *nomes* ("João", "Lisboa", "7", etc.) e *descrições definidas* ("o autor d'*Os Fundamentos*", "o atual rei de França", "o número par primo", etc.).

O argumento também é consistente com interpretações variadas sobre a natureza das próprias entidades matemáticas, ainda que sejam entidades abstratas e independentes do mental. Podem ser assim elaboradas diferentes versões platonistas, consoante o que se entende por *entidades matemáticas*. Por exemplo, Frege (1992) considera que as entidades matemáticas são objetos, porque os termos singulares numéricos referem objetos.[2] O argumento pode ser assim interpretado como uma defesa do *platonismo de objetos*. Michael Resnik (1997) e Stewart Shapiro (1997) consideram que as entidades matemáticas são estruturas. O argumento pode ser assim interpretado como uma defesa do *platonismo de estruturas*. Mark Balaguer (1998) considera que as entidades matemáticas são todos os objetos matemáticos logicamente possíveis. O argumento pode ser assim interpretado como uma defesa do *platonismo pleno*.

> Defino um *sistema* como uma coleção de objetos com certas relações (...) Uma *estrutura* é a forma abstrata de um sistema, que sublinha as inter-relações entre os objetos e ignora quaisquer outras características dos objetos que não afetam como eles se relacionam com outros objectos no sistema. (Shapiro, 1997, pp. 73-74)

> Na matemática a matéria-prima fundamental não são objetos matemáticos individuais, mas estruturas nos quais esses objetos estão dispostos. Os objetos da matemática, isto é, as entidades denotadas pelas nossas constantes matemáticas e quantificadores são elas átomos, pontos destruturados ou posições em estruturas. Enquanto tal, elas não têm identidade nem características fora da estrutura. (Resnik, 1997, p. 201)

[2] No capítulo 2, vimos que os números são extensões de conceitos de segunda ordem, sendo as próprias extensões objetos.

> Todos os objetos [matemáticos] são objetos atualmente existentes (...) Os objetos atualmente existentes esgotam todas as possibilidades lógicas desses objetos; ou seja, todos os objetos matemáticos que lógica e possivelmente *poderiam* existir, na verdade, existem atualmente; ou seja, o domínio matemático está completo. (Balaguer, 1998, p. 6)

Uma das premissas mais problemáticas do argumento é a premissa (4). No capítulo "Intuicionismo", reparámos que não é de todo pacífico que as entidades matemáticas possam ser independentes da mente. Mas o próprio termo *abstrato* também levanta problemas na sua caracterização. Até agora, unicamente enunciámos exemplos de entidades abstratas, mas não propusemos qualquer caracterização do que isso seja. Na literatura é possível encontrar três modos de tentar caracterizar as entidades abstratas.

Modo de abstração. As entidades abstratas são abstrações das entidades concretas; segundo Cantor, são produtos de uma atividade mental de "seleção desatenta".

Modo de conflação. As entidades concretas distinguem-se das entidades abstratas, porque as primeiras são entidades individuais e as outras são "tudo o resto" (conjuntos, universais, propriedades, etc.); uma conflação de coisas variadas.

Modo negativo. As entidades abstratas não se localizam no espaço-tempo; as entidades abstratas não têm poderes causais.[3]

O carácter abstrato das entidades matemáticas, segundo o modo negativo acima enunciado, levanta um problema epistémico a respeito da possibilidade do seu próprio conhecimento que analisaremos em seguida.

[3] Estes modos resultam de Burgess e Rosen (1997, pp. 16-26).

3. O problema epistemológico de Benacerraf

Paul Benacerraf (1973) formulou um problema para o platonismo matemático e que desempenha um papel incontornável na formulação das conceções realistas que analisaremos neste capítulo.

O problema epistemológico de Benacerraf fundamenta-se numa teoria causal do conhecimento (ver cap. 1, secção 1). As teorias causais do conhecimento defendem que apenas podemos obter conhecimento daquilo com o qual seja possível estabelecer uma relação causal, ainda que essa relação causal possa ser bastante extensa e remota. Por exemplo, apesar de a maior parte de nós nunca ter estabelecido perceção visual direta com pedras lunares, muitos de nós podemos afirmar que temos conhecimento da existência de pedras lunares, porque já vimos fotografias ou imagens das mesmas; ou acreditamos que houve astronautas que trouxeram tais pedras da superfície lunar. Nestas circunstâncias, acreditamos que tais imagens e vídeos são fidedignos e existe uma relação causal, ainda que muito remota, entre essas pedras e nós próprios.

Considerando o domínio matemático, parece óbvio que, neste domínio, a relação causal anterior simplesmente se evapora. O problema de Benacerraf levanta o problema de explicar como é que o nosso conhecimento matemático é um conhecimento acerca de entidades de um domínio supostamente inacessível. Como explicar que temos, e podemos alcançar, conhecimento acerca de entidades que não se relacionam causalmente connosco? O problema pode ser assim formalizado:

Argumento epistemológico de Benacerraf

(1) Existimos localizados no espaço-tempo.

(2) Se existem entidades matemáticas, então elas existem não localizadas no espaço-tempo.

(3) Se existem entidades matemáticas, então não podemos alcançar o seu conhecimento, uma vez que entidades não localizadas no espaço-tempo não se relacionam causalmente com entidades localizadas no espaço-tempo.

Logo:

(4) Se o platonismo matemático é correto (existem entidades matemáticas não localizadas no espaço-tempo), então não podemos ter conhecimento matemático.

(5) Porém, temos conhecimento matemático.

∴ O platonismo matemático é incorreto. (Balaguer, 1998, p. 22)

Há várias respostas realistas ao argumento epistemológico de Benacerraf. As respostas têm-se centrado na disputa da teoria da causalidade para o conhecimento que suporta o argumento. Nomeadamente, defende-se que os seres humanos têm a faculdade de gerar crenças acerca de entidades matemáticas abstratas, ainda que não haja uma relação de causalidade entre os humanos e essas entidades. Neste capítulo, veremos como algumas dessas propostas são articuladas.

Importa notar que Gödel (1964/2009) avançou uma proposta muito diferente das que analisaremos. Segundo ele, os seres humanos teriam uma faculdade – a intuição matemática – que lhes permitiria obter conhecimento dos objetos da teoria de conjuntos da mesma forma que obtêm conhecimento dos objetos físicos. Esta faculdade explicaria assim como seria possível obter conhecimento matemático, enquanto conhecimento de entidades abstratas.

4. Indispensabilidade matemática

O argumento da indispensabilidade matemática é geralmente atribuído a Quine e a Putnam (Quine (1981, pp. 149-150, 1983, p. 367) e Putnam (1971, p. 425, 1975a, p. 74)), em virtude de aparecer de forma implícita em algumas passagens destes autores:

> O discurso científico interpretado ordinariamente está irremediavelmente comprometido com objetos abstratos – como nações, espécies, números, funções, conjuntos – bem como com maçãs e outros corpos físicos. Todas estas coisas aparecem como valores de

variáveis no nosso sistema global do mundo. Os números e as funções contribuem tão genuinamente para as teorias físicas como as partículas hipotéticas. (Quine, 1981, pp. 149-150)

A matemática – não a matemática ininterpretada, mas a genuína teoria de conjuntos, lógica, teoria de números, álgebra de números reais e complexos, cálculo diferencial e integral, etc. – é melhor vista como uma parte integral da ciência, a par da física, da economia, etc. Na qual a matemática é dita encontrar as suas aplicações. (Quine, 1954/1995, p. 39)

A quantificação sobre entidades matemáticas é indispensável na ciência, quer formal, quer física; portanto, devemos aceitar tal quantificação; mas isso compromete-nos com a existência das entidades matemáticas em questão. É claro que este argumento é descendente de Quine, que por muitos anos defendeu a indispensabilidade da quantificação sobre entidades matemáticas e a desonestidade intelectual de negar a existência daquilo que diariamente se pressupõe. (Putnam, 1971, p. 425)

As passagens acima estabelecem uma ponte entre a matemática e as demais ciências empíricas. Se formos realistas científicos, então também teremos de ser realistas matemáticos, em virtude de não ser possível desemaranhar as partes matemáticas e as partes empíricas das nossas melhores teorias científicas. Por outras palavras, se estivermos comprometidos com a existência de entidades físicas, como protões, eletrões, ondas gravitacionais, campos eletromagnéticos, genes, bactérias, vírus, então também teremos de estar comprometidos com a existência das entidades matemáticas invocadas nessas mesmas teorias científicas. É intelectualmente desonesto ser realista acerca das entidades físicas invocadas nas teorias científicas e, ao mesmo tempo, ser antirrealista relativamente à componente matemática dessas mesmas teorias científicas.

Formalmente, o argumento da indispensabilidade matemática de Quine-Putnam é o seguinte:

(1) Devemo-nos comprometer ontologicamente com todas, e só aquelas, entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.
(2) As entidades matemáticas são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.
∴ Devemo-nos comprometer ontologicamente com as entidades matemáticas. (Colyvan, 2001)

Uma primeira observação a fazer sobre este argumento é de que a primeira premissa é "excessiva" para a conclusão do argumento. É uma premissa que vai para além do que é necessário para se obter a mesma conclusão. Ou seja, se subtrairmos a condição necessária contida nesta premissa, continuamos a obter a mesma conclusão do argumento. Concretamente, isto significa subtrair à primeira premissa a expressão "e só aquelas":

(1) Devemo-nos comprometer ontologicamente com todas as entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.

No entanto, esta reformulação da primeira premissa não é inteiramente feliz. À primeira vista, a premissa (1)' é consistente com a ideia de que nos podemos comprometer com entidades esotéricas, como deuses, fantasmas, espíritos, bruxas, etc., uma vez que a indispensabilidade das entidades matemáticas nas nossas melhores teorias científicas é apenas uma condição suficiente para nos comprometermos com essas entidades. Uma forma de excluirmos, automaticamente, estes compromissos indesejáveis é defendermos também a conversa da premissa e restabelecermos (1) na sua forma original.

Uma segunda observação sobre o argumento é que se fizermos uma interpretação literal da sua redação, o argumento é omisso sobre a natureza das entidades matemáticas com que temos de nos comprometer. Ou seja, nada é referido no argumento se o compromisso é a respeito de entidades abstratas ou entidades concretas. A conclusão apenas afirma que nos devemos comprometer com a *existência* de entidades matemáticas, independentemente de qual seja a natureza das entidades matemáticas em questão. Neste sentido, o argumento pode ser usado para defender conceções platonistas, mas também pode ser usado para sustentar conceções antiplatonistas, desde que sejam conceções realistas. Por exemplo, conceções empiristas, segundo as quais existem entidades matemáticas, mas enquanto entidades empíricas, podem usar este argumento para defender a existência de entidades matemáticas. Ao argumento da indispensabilidade matemática podem-se assim acrescentar premissas consoante a conceção platonista ou antiplatonista que se pretende defender:

Argumento da indispensabilidade matemática platonista:

(1) Devemo-nos comprometer ontologicamente com todas, e só aquelas, entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.

(2) As entidades matemáticas são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.

(3) As entidades matemáticas são entidades abstratas.

∴ Devemo-nos comprometer ontologicamente com as entidades matemáticas, enquanto entidades abstratas.

Argumento da indispensabilidade matemática antiplatonista:

(1) Devemo-nos comprometer ontologicamente com todas, e só aquelas, entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.

(2) As entidades matemáticas são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.

(3) As entidades matemáticas são entidades concretas.

∴ Devemo-nos comprometer ontologicamente com as entidades matemáticas, enquanto entidades concretas.

Deixemos de lado, momentaneamente, estas variedades do argumento e concentremo-nos na primeira versão do argumento que introduzimos acima. Vamos agora analisar as doutrinas que suportam o argumento.

A premissa (2) é geralmente tida como um "facto" bruto, nomeadamente, as nossas teorias científicas estão repletas "até ao pescoço" de entidades matemáticas.[4] Esta premissa sustenta-se assim nos inúmeros exemplos de entidades matemáticas que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas, como números, funções, conjuntos, espaços topológicos, entre outras. Basta folhear qualquer manual ou artigo científico de Física ou de Química para constatar que isso é verdade.

A premissa (1) é suportada pela doutrina do naturalismo, pelo critério de compromisso ontológico de Quine e pela doutrina do holismo da confirmação. Brevemente, a doutrina naturalista defende que a filosofia é uma atividade a par da atividade científica; o critério de compromisso ontológico defende que nos devemos comprometer com os valores das variáveis ligadas a quantificadores; a doutrina holista da confirmação defende que as teorias científicas são testadas *en bloc* contra a experiência.

4.1. Naturalismo

A doutrina naturalista é constituída por a) uma tese normativa respeitante à metodologia da filosofia e da ciência natural e por b) uma tese normativa respeitante à ontologia da ciência natural, que se consubstancia no chamado *critério de compromisso ontológico de Quine*, que analisaremos na subsecção seguinte.

A tese normativa do naturalismo, respeitante à metodologia da filosofia e da ciência natural, rejeita a velha pretensão cartesiana de fundar a ciência natural num tribunal supostamente supracientífico de índole filosófico. As *Meditações sobre a Filosofia Primeira* começam justamente por afirmar a pretensão de Descartes: "estabelecer algo

[4] Uso aspas em *facto*, pois, como veremos, esta premissa é também argumentativamente disputada. Como "contra factos não há argumentos", a palavra *facto* tem assim de vir entre aspas.

de seguro e duradouro nas ciências" (Descartes, 1641/1992, p. 105). Em contraste, de acordo com a tese normativa do naturalismo, na relação entre a filosofia e a ciência natural, a filosofia não ocupa uma posição privilegiada relativamente à ciência natural; a filosofia *é contínua* com a ciência natural; ambas, conjuntamente, tentam uma investigação e uma explicação dos fenómenos empíricos.

Uma imagem famosa de Quine (inspirada em Neurath) é a de que o filósofo naturalista e o cientista são dois marinheiros num barco (ciência) em alto-mar, não havendo uma doca seca (alegados fundamentos filosóficos) à qual se possa aportar para reconstruir o barco: o barco tem de ser permanentemente reconstruído em alto-mar (Quine, 2013, p. 3). Assim, se o filósofo naturalista pretender estudar a ciência natural, não o deve fazer através da epistemologia tradicional cartesiana. Descartes considerava que a filosofia e a ciência se enraizavam na metafísica, sendo a própria metafísica uma atividade filosófica. Quine, por seu lado, opera uma naturalização da epistemologia. A chamada *epistemologia naturalizada* é uma disciplina que utiliza os resultados e a linguagem da própria ciência.

Quando o filósofo naturalista centra o seu estudo sobre como os sujeitos humanos, enquanto fenómenos físicos do mundo natural, podem formular aquilo que designamos por teorias científicas, então a epistemologia naturalizada é vista como uma atividade no domínio da psicologia empírica. Deste modo, a epistemologia é uma atividade que, além de utilizar os resultados da ciência natural, também utiliza os seus métodos. Neste caso, o estudo em questão é sobre uma relação complexa – *entrada* vs. *saída* – estabelecida nesse sujeito humano do mundo natural. Por exemplo, no caso dos sentidos da visão, da audição e, talvez, do tato a relação é assim descrita. *Entrada* (diminuta): radiações de diferentes comprimentos de onda estimulam recetores sensoriais do sujeito. *Saída* (torrencial): o sujeito profere discursos organizados que podem conduzir àquilo que correntemente designamos de teorias científicas.

O filósofo naturalista, na qualidade de cidadão da comunidade científica, não se limita apenas a descrever a metodologia da ciência natural. A conceção naturalista de suporte à premissa (1) é uma conceção que também permite ao filósofo naturalista ter uma função prescritiva sobre a própria ciência natural. Esta função prescritiva serve o propósito de tentar melhorar, clarificar e compreender o sistema científico a partir de dentro. No caso de haver uma discordância entre o filósofo naturalista e o cientista, sobre qualquer assunto, por exemplo, uma disputa acerca da existência ou não de entidades científicas particulares, isso não implica que o cientista tenha sempre a "última palavra" sobre o assunto. O filósofo naturalista pode sempre resistir a resultados científicos e criticar as atitudes dos cientistas, desde que argumente baseado em razões científicas.

Uma exemplificação do trabalho do filósofo naturalista é justamente sobre a alegada existência de entidades matemáticas. Para um matemático imerso na sua investigação do dia a dia, a disputa sobre a existência de entidades matemáticas é uma disputa que ele simplesmente ignora. Os matemáticos em geral, simplesmente, não discutem este assunto. No entanto, um filósofo naturalista considera incontornáveis as ideias apresentadas na introdução deste capítulo, sobre a conexão entre verdade e existência. À luz de uma teoria da verdade como correspondência, as proposições matemáticas apenas poderão ser verdadeiras, existindo as entidades matemáticas por referidas por essas proposições.

4.2. Critério de compromisso ontológico

A tese normativa do naturalismo respeitante à ontologia defende que devemos olhar para a ciência natural em ordem a determinar as entidades com que nos devemos comprometer, ou seja, devemos abandonar a conceção de uma *philosophia prima* que justifique a alegada existência de outras entidades com as quais as teorias científicas podem estar ou não comprometidas. Para Quine, as questões ontológicas estão a par das questões da ciência natural. A questão é então a seguinte: como determinamos a nossa ontologia?

Quine estabeleceu o seguinte critério *descritivo* que permite determinar as entidades com que as teorias científicas estão comprometidas: os compromissos ontológicos das teorias científicas são determinados através do *dictum* "Ser é ser um valor de uma variável ligada." Por outras palavras, o compromisso ontológico de uma teoria científica determina-se identificando os elementos do domínio de quantificação dessa teoria.[5]

O procedimento aplica-se a teorias científicas, mas também se aplica a outros discursos na linguagem natural. Iremos apenas considerar o caso particular das teorias científicas. Tecnicamente o procedimento segue as etapas seguintes: 1) as proposições das teorias científicas são arregimentadas em linguagem formal da lógica de primeira ordem, com vista a eliminarem-se eventuais compromissos espúrios;[6] 2) nesta linguagem determinamos então quais são as entidades que têm de estar entre os valores das variáveis quantificadas, para que as teorias científicas em arregimentação sejam teorias verdadeiras.

Por exemplo, a proposição científica *há eletrões* é parafraseada através do quantificador existencial, assumindo que o domínio de quantificação é o domínio das coisas:

Dicionário:
C_: _é eletrão.
Formalização: $\exists x\ Cx$
Portanto, existem eletrões.

Concretamente, a frase matemática "2 é um número par" fica assim formalizada:

---

[5] Por exemplo, Quine afirma: "Uma teoria está comprometida com aquelas, e só aquelas, entidades às quais as variáveis ligadas da teoria tenham que ser capazes de se referir de modo que as afirmações feitas na teoria sejam verdadeiras." (Quine, 1948, p. 33)

[6] A lógica de primeira ordem é uma lógica cujo domínio de quantificação é um domínio sobre objetos. Em contraste, a lógica de segunda ordem é uma lógica cujo domínio de quantificação também abrange as relações ou propriedades. Por exemplo, a formalização da frase "existe uma propriedade que António e Manuel têm em comum" fica $(\exists X)\ (Xa \wedge Xm)$.

Dicionário:
N_: _é um número.
P_: _é par.
_a: 2_
Formalização: $Na \wedge Pa$
Da formalização anterior podemos inferir: $\exists x\ (Nx \wedge Px)$
Portanto, existem números pares.

O critério anterior é um critério *descritivo*: descreve como determinamos as entidades com que uma qualquer teoria científica está comprometida, mesmo que seja uma teoria efetivamente falsa. Ou seja, é um critério meramente sintático. Este critério ainda não estabelece o que efetivamente há. Para estabelecermos o que efetivamente há precisamos ainda de indicar como determinamos as nossas *melhores* teorias científicas, entre o conjunto de teorias científicas candidatas à explicação dos fenómenos empíricos. Quine defende que as teorias científicas devem ter cinco benefícios (virtudes):

1. Simplicidade: as diferentes leis empíricas sobre diferentes fenómenos tendem a ser integradas numa teoria unitária e compacta.
2. Familiaridade: as familiares leis do movimento são bem-sucedidas, não sendo necessárias leis independentes para explicar os fenómenos associados ao movimento.
3. Alcance: uma teoria unificada implica um mais vasto conjunto de consequências testáveis do que quaisquer outras leis separadas implicariam.
4. Fecundidade: devem ser possíveis extensões da teoria que expliquem o eventual surgimento de novos fenómenos.
5. Comprovação: as consequências testáveis da teoria devem ocorrer; as escassas exceções que não são explicadas pela teoria são consideradas como interferências inexplicadas.[7]

[7] Note-se que, noutras obras, Quine referiu virtudes ligeiramente diferentes das agora apresentadas.

Resumidamente a nossa ontologia estabelece-se assim:

1) De entre as teorias científicas disponíveis consideramos aquelas, e apenas essas, a que podemos atribuir os cinco benefícios anteriores, independentemente das postulações destas teorias, ou seja, os benefícios anteriores permitem-nos estabelecer as teorias que são as nossas *melhores* teorias científicas;
2) Com o critério descritivo quiniano de compromisso das teorias científicas determinamos as entidades com as quais estas teorias científicas (as melhores) estão comprometidas;
3) Consideramos que estas entidades, e só estas, são as entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas;
4) Apenas temos de nos comprometer com estas entidades para ficarmos com a nossa ontologia estabelecida.

Através dos quatro passos anteriores podemos determinar as entidades indispensáveis às nossas melhores teorias científicas e, consequentemente, podemos determinar as entidades com que nos devemos comprometer. Para tal, temos de identificar quais são as entidades postuladas nas nossas melhores teorias científicas e que implicam o conjunto anterior de benefícios para as nossas melhores teorias científicas. Naturalmente este procedimento não é simples nem imediato. Há disputas sobre se determinada entidade é ou não postulada numa teoria científica. Há disputas sobre se a postulação de uma entidade científica particular é crucial para o conjunto de benefícios anteriores que as teorias científicas devem proporcionar.

4.3. Holismo

Quine vai recuperar uma ideia antiga de Pierre Duhem, a ideia segundo a qual as teorias científicas são experimentalmente testadas de forma holística.

> O físico nunca pode sujeitar uma hipótese isolada a um teste experimental, mas apenas todo um conjunto de hipóteses; quando a experiência está em desacordo com as suas previsões, o que aprendemos com isso é de que pelo menos uma das hipóteses, que fazem parte do conjunto, é inaceitável e deve ser modificada; mas a experiência não designa qual é a hipótese que deve ser modificada. (Duhem, 1906/2007, p. 262)

A doutrina holística que vamos analisar é chamada *doutrina holística da confirmação* (ou epistémica).[8] Esta doutrina considera que as proposições de uma teoria científica não são testadas individualmente contra a experiência, mas apenas *en bloc*, como pertencentes a um corpo de proposições científicas; as proposições científicas, se consideradas isoladamente das restantes proposições da teoria, são proposições desprovidas de conteúdo empírico (Rosa & Lepore, 2004, pp. 65-67). Uma qualquer experiência que se realize a propósito de uma determinada teoria científica coloca em teste, não apenas essa teoria científica, mas, no limite, a totalidade do nosso sistema de crenças. Ou seja, uma qualquer outra teoria científica pode ser refutada no teste.

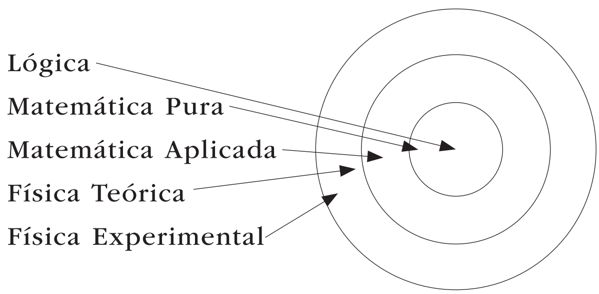
Teia de crenças

Em "Two Dogmas of Empiricism", Quine (1951) propõe uma perspetiva holista sobre o conhecimento científico. As teorias científicas são tomadas globalmente como uma teia de crenças interligadas. Para o caso que nos interessa aqui, a respeito da matemática, nas nossas teorias científicas as componentes físicas e as componentes matemáticas estão interligadas, não havendo uma maneira óbvia de desemaranhar umas partes das outras. Tais teorias são confirmadas ou infirmadas num todo – de forma abrangente – pela experiência.

---

[8] Existe também a doutrina holística do significado (ou semântica). Esta doutrina considera que o significado de um termo linguístico *x*, pertencente a uma linguagem *L*, depende das relações que este termo tem com os restantes termos da linguagem *L*.

À luz do holismo, os diferentes elementos do conhecimento científico não estão distribuídos homogeneamente na teia, mas estão distribuídos segundo o grau de proximidade que têm com a experiência. Os enunciados observacionais situam-se na periferia da teia; enquanto os enunciados não observacionais se situam no interior da teia. Partindo da periferia para o interior podemos estabelecer a ordenação seguinte: frases observacionais, leis das ciências experimentais (Física, Química, Biologia, etc.) princípios gerais das ciências, enunciados teóricos, lemas matemáticos, corolários matemáticos, teoremas matemáticos, axiomas matemáticos e, no centro, as leis da lógica.



Representação esquemática da teia de crenças

Princípio de mutilação mínima quiniano

Segundo a doutrina anterior, as teorias científicas apenas poderão ser revistas pela experiência, quando consideradas globalmente. Porém, isto não significa que face a uma experiência recalcitrante particular decorra imediatamente a revisão de todo o sistema de crenças. Há uma tendência natural para perturbar o menos possível o sistema total de crenças. Acomodam-se as experiências recalcitrantes através de uma revisão dos enunciados científicos que se situam mais perto da periferia, em detrimento dos enunciados científicos mais afastados. Este é o *princípio de mutilação mínima* quiniano. Por exemplo, uma tentativa de rever o princípio da conservação de energia implicaria uma perturbação maior no sistema total das teorias científicas do que rever as condições laboratoriais numa experiência particular. O princípio da conservação de energia é um princípio comum a diferentes teorias científicas e a sua eventual modificação irradiaria por quase toda a teia de crenças.[9] Assim, há uma tendência para rever enunciados científicos que são particularmente respeitantes à experiência. A conclusão a retirar é de que o procedimento de revisão de crenças prefere operar pequenas "mutilações" que não impliquem grandes perturbações no nosso sistema total de crenças.

4.4. Conhecimento matemático sem contacto

Feito este esclarecimento sobre as doutrinas que suportam o argumento da indispensabilidade, importa agora esclarecer como é que o argumento responde ao problema epistemológico de Benacerraf. Recordemos que o argumento da indispensabilidade pode ser defendido por conceções realistas platonistas e por conceções realistas antiplatonistas. Para estas últimas, o problema de Benacerraf não se coloca, porque as entidades matemáticas são entidades concretas no espaço-tempo.

Recordemos o argumento da indispensabilidade platonista:

(1) Devemo-nos comprometer ontologicamente com todas, e só aquelas, entidades que são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.
(2) As entidades matemáticas são indispensáveis às nossas melhores teorias científicas.
(3) As entidades matemáticas são entidades abstratas.
∴ Devemo-nos comprometer ontologicamente com as entidades matemáticas, enquanto entidades abstratas.

---

[9] O princípio de conservação de energia afirma que num sistema físico isolado a energia total do sistema é conservada. Formalmente, num sistema físico simples com apenas energia cinética e energia potencial, a energia cinética transforma-se em energia potencial, e reciprocamente.

À luz das conceções que suportam o argumento, o conhecimento de entidades matemáticas ocorre da mesma forma que o conhecimento das restantes entidades científicas. Aquando de uma experiência, a respeito de uma teoria científica, todo o nosso sistema de crenças é testado no âmbito dessa experiência (holismo). Ou seja, as partes nominalistas (concretas) da teoria científica, bem como as partes abstratas são testadas em simultâneo. As nossas teorias científicas estão comprometidas com entidades concretas, mas também estão comprometidas com entidades abstratas (critério de compromisso ontológico). Ora, se a nossa teoria científica for confirmada pela experiência, então isso significa que as partes nominalistas (concretas) as partes abstratas (matemáticas) da teoria científica são verdadeiras. Por outras palavras, as teorias matemáticas emaranhadas nas teorias científicas são elas próprias também verdadeiras. Logo, existem as entidades matemáticas com que as nossas teorias matemáticas estão comprometidas. O conhecimento matemático abstrato decorre da confirmação empírica holista das nossas teorias científicas.

A objeção que se levanta a esta solução é de que ela apenas dá conta das teorias da matemática aplicada. Todavia, a matemática não se esgota na matemática aplicada. Existem muitas teorias matemáticas, no âmbito da chamada *matemática pura*, que se desenvolvem independentemente das suas eventuais aplicações. Para um platonista, as teorias da matemática pura são verdadeiras, independentemente da sua aplicação. E, assim, o problema de Benacerraf volta a levantar-se para a matemática pura.

Quine (1998, p. 400) famosamente afirmou que as teorias da matemática pura, respeitantes a conjuntos de ordem elevada, são "recriações matemáticas sem direitos ontológicos". No entanto, se analisada com mais cuidado, a matemática pura também se aplica indiretamente na ciência. A matemática pura encontra aplicações na própria matemática aplicada; a matemática aplicada, por sua vez, aplica-se às teorias científicas; logo, a matemática pura aplica-se indiretamente na ciência. Há uma cadeia indireta entre a matemática pura e as teorias empíricas que, em certa medida, também pode justificar a verdade das teorias da matemática pura.

4.5. Objeções ao argumento da indispensabilidade

A literatura tem-se centrado em dois caminhos para disputar o argumento: um caminho fácil e outro mais difícil. O chamado *caminho fácil do nominalismo* disputa a primeira premissa do argumento; o chamado *caminho difícil do nominalismo* disputa a segunda premissa do argumento.

A disputa da primeira premissa do argumento consiste em disputar alguma das doutrinas de suporte ao argumento, ou seja, disputar o naturalismo, o holismo ou o critério do compromisso ontológico. No próximo capítulo, veremos como Joddy Azzouni e Penelope Maddy vão disputar a primeira premissa. Joddy Azzouni vai atacar o critério de compromisso ontológico, no âmbito de uma conceção de *nominalismo deflacionário*; Maddy vai atacar o naturalismo quiniano, o holismo e/ou critério de compromisso ontológico, no âmbito de uma conceção de *filosofia segunda*. A disputa da segunda premissa consiste em mostrar que não é de todo um "facto" bruto que as entidades matemáticas sejam indispensáveis nas teorias científicas. No próximo capítulo, veremos como Hartry Field vai disputar a segunda premissa, defendendo que as entidades matemáticas são dispensáveis nas teorias científicas, por intermédio de uma conceção chamada de *ficcionismo matemático*.

5. Platonismo naturalizado

Penelope Maddy (1990) desenvolveu uma doutrina, chamada de *Platonismo Naturalizado*, segundo a qual existem entidades matemáticas mas estas entidades localizam-se no espaço-tempo. Esta é uma conceção empirista sobre a matemática. Maddy defende a existência de entidades matemáticas, nomeadamente, conjuntos matemáticos, por intermédio do argumento da indispensabilidade antiplatonista, acima referido, e por intermédio de teorias da perceção. Argumenta-se que os conjuntos são entidades percecionáveis. Ou seja, o platonismo naturalizado desenvolve um argumento contra a premissa (2) do argumento epistemológico de Benacerraf.

(1) Temos crenças numéricas.
(2) As crenças numéricas resultam de perceções.
(3) A melhor maneira de explicar as crenças percetuais numéricas é supor que conjuntos são as entidades que são percecionadas.
(4) Entidades percecionadas existem localizadas no espaço-tempo.
∴ Conjuntos existem localizados no espaço-tempo.

A principal virtude desta conceção empirista da matemática é conseguir responder ao argumento epistemológico de Benacerraf. Ao localizar as entidades matemáticas no espaço-tempo não parece haver qualquer problema em obter conhecimento matemático. Todavia, na verdade, esta resposta não é tão eficaz quanto parece. Esta forma de empirismo matemático estabelece apenas um *bypass* à teoria causal do conhecimento.

5.1. Teoria de conjuntos ZFC

Maddy refere que as entidades observadas são conjuntas e não são outras coisas como, digamos, agregados. Ora, há uma razão para esta escolha. O fundamento matemático contemporâneo da matemática é a chamada *teoria de conjuntos ZFC*. O acrónimo ZFC é respeitante às três letras iniciais das palavras seguintes: "Zermelo", "Fraenkel" e "Choice". Ernest Zermelo começou a desenvolver a teoria em 1908 e, mais tarde, em 1922, Abraham Fraenkel desenvolveu a teoria de Zermelo. "Choice" é o termo inglês para referir o *axioma da escolha*.

A teoria de conjuntos foi formulada no início do século XX e é uma teoria que pretendeu responder aos paradoxos da teoria *ingénua* de conjuntos desse período como os paradoxos de Burali-Forti, de Cantor e de Russell. Ou seja, foi necessário encontrar uma base axiomática a respeito de conjuntos que conseguisse evitar ou solver esses paradoxos. Em 1908, Zermelo dava conta destas preocupações: "A existência desta disciplina [a teoria de conjuntos] parece estar ameaçada por certas contradições ou 'antinomias', que podem ser derivadas dos seus princípios (...) às quais ainda não foi encontrada qualquer solução satisfatória" (Zermelo, 1908/1967, p. 200).

A teoria ZFC é constituída por um conjunto de axiomas, sendo que todo o edifício matemático é redutível a conjuntos. Ou seja, números, funções, espaços, estruturas algébricas podem ser modeladas como sendo conjuntas. Formalmente, o axioma da escolha é o seguinte:

> Para todo o conjunto z de conjuntos disjuntos e não-vazios existe um conjunto escolha, ou seja, existe um conjunto contendo precisamente um elemento de cada elemento de z.

Intuitivamente o axioma da escolha afirma que se tivermos uma mala contendo outras malas não vazias, então é possível produzir outra mala que contém um elemento de cada uma das malas da mala inicial. Este axioma foi formulado por Zermelo. Atualmente é um axioma consensual, mas foi polémico durante muito tempo. Na escolha do conjunto não é explicitamente definida a forma como devemos operar para formar tal conjunto. Assim, muitas escolhas são possíveis. Outra implicação controversa deste axioma é originar o *paradoxo de Banach-Tarski*: uma esfera pode ser particionada em finitos pedaços que posteriormente "rearranjados" formam duas esferas, com o mesmo raio da esfera inicial.

Para evitar os paradoxos da teoria ingénua de conjuntos, os conjuntos são criados em níveis (neste sentido, imita-se a teoria de tipos de Russell e Whitehead), indexados por números ordinais.

> Seja:
> O conjunto vazio denotado por Ø.

V_n a coleção de conjuntos construídos no nível n.

Definição: O *conjunto potência* PC de um conjunto C é o conjunto de todos os subconjuntos que se podem formar do conjunto C.

Definição recursiva: $V_{n+1} = V_n \cup \mathbb{P}(V_n)$

Ilustremos como são construídos os primeiros níveis de conjuntos:

Seja: $V_0 = \varnothing$.

Então:

$$V_1 = V_0 \cup \mathbb{P}(V_0) = \emptyset \cup \mathbb{P}(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$V_2 = V_1 \cup \mathbb{P}(V_1) = \{\emptyset\} \cup \mathbb{P}\left(\{\emptyset\}\right) = \{\emptyset\} \cup \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\} = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}$$

$$V_3 = V_2 \cup \mathbb{P}(V_2) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\} \cup \mathbb{P}\left(\left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\} \cup \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \left\{\{\emptyset\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right\}$$

$$= \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \left\{\{\emptyset\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right\}$$

(…)

Seja: $V_\omega = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \ldots$

Então:

$$V_{\omega+1} = V_\omega \cup \mathbb{P}(V_\omega)$$

$$V_{\omega+2} = V_{\omega+1} \cup \mathbb{P}(V_{\omega+1})$$

(…)

Relembre-se que uma versão do paradoxo de Cantor estabelece-se considerando a proposição de partida *o conjunto de todos os conjuntos*. Ou seja, deriva-se uma contradição desta proposição. Dada esta construção por níveis, não existe *o conjunto de todos os conjuntos*. Ou seja, não existe tal coisa como um nível onde se possa "agrupar" todos os conjuntos. Em ZFC, a *coleção* de todos os conjuntos é designada de *classe própria*.[10]

Há dois resultados em volta da teoria de conjuntos ZFC que importa referir. Primeiro, Kurt Gödel (1938) demonstrou que se ZFC

[10] A coleção de todos os números ordinais e a coleção de todos os números cardinais também são designadas de classes próprias.

é uma teoria consistente, então também é consistente a teoria ZFC mais a hipótese do contínuo. Por outras palavras, se ZFC é consistente, então não é possível refutar a hipótese do contínuo. Relembre-se que a hipótese do contínuo é a hipótese segundo a qual a cardinalidade imediatamente a seguir à cardinalidade dos números naturais é a cardinalidade dos números reais. Segundo, Paul Cohen (1963) demonstrou que a hipótese do contínuo não é derivável a partir da teoria ZFC, ou seja, a hipótese do contínuo é *independente* de ZFC.[11]

5.2. Objeções ao platonismo naturalizado

Comecemos por uma objeção à teoria ZFC que indiretamente é uma objeção ao platonismo naturalizado. Segundo Gödel (1964/2009), a independência do contínuo, acima referida, implica que a teoria ZFC é incompleta. A teoria ZFC não consegue descrever completamente o universo matemático. Ou seja, há um resultado que a teoria não consegue determinar se é verdadeiro ou é falso. Gödel defende que a saída para este problema é tentar encontrar novos axiomas para a teoria ZFC.

Consideremos agora objeções diretas ao platonismo naturalizado. Para alguém que desconheça os números naturais, não parece ser possível que tal pessoa tenha alguma vez crenças numéricas sobre qualquer quantidade de objetos que percecione. Ou seja, parece que sem conceitos prévios na nossa mente, a observação e a correta identificação de objetos à nossa volta ficam comprometidas.

Outro problema é respeitante à suposta impossibilidade de observação de conjuntos puros, como o conjunto vazio que está na base dos ordinais de von Neumann ou de Zermelo (Maddy, 1990, pp. 156-157). De acordo com a teoria de conjuntos, os números naturais podem

[11] Gödel (1947) já tinha considerado esta hipótese (existe uma versão revista e alargada deste artigo na tradução Gödel (1964/2009)).

ser definidos por recurso aos ordinais de von Neumann ou aos ordinais de Zermelo.

Segundo von Neumann os números naturais são assim definidos:

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

...

Segundo Zermelo os números naturais são assim definidos:

$0 = \varnothing$

$1 = \{\varnothing\}$

$2 = \{\{\varnothing\}\}$

$3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$

...

Ora, de acordo com o platonismo naturalizado, não parece termos disponível qualquer forma de perceção do conjunto vazio, Ø. Qual é o objeto que corresponderá à perceção do conjunto vazio? Entende-se que uma perceção pressupõe sempre a perceção de algum objeto. À luz do platonismo naturalizado, não parece assim que tenhamos maneira de definirmos os números naturais. Note-se ainda que existem muitas outras formas de identificarmos os números naturais (na verdade, existem infinitas maneiras). É um problema para a teoria de conjuntos ZFC que diferentes identificações sejam igualmente válidas (Benacerraf, 1965). Maddy acabou por abandonar esta conceção. No capítulo seguinte, na secção "Filosofia segunda", regressaremos a Maddy.

6. Aristotelismo matemático

O aristotelismo é visto como sendo uma doutrina rival do platonismo. Para o platonismo, as entidades matemáticas fazem parte do mundo das formas; enquanto para o aristotelismo, as entidades matemáticas fazem parte do mundo concreto – o espaço-tempo. Ora, na verdade, ambas as conceções são conceções realistas. Nenhuma delas nega a existência de entidades matemáticas. E é este aspeto em comum que as coloca do lado do realismo matemático.

O aristotelismo é também visto como sendo uma doutrina rival do nominalismo. O nominalismo nega a existência de universais e nega a existência de entidades abstratas. Em particular, o nominalismo nega a existência de entidades matemáticas, enquanto entidades abstratas. O aristotelismo também nega a existência de entidades abstratas, mas não nega a existência de universais, nem nega a existência de entidades matemáticas. Para o aristotelismo as entidades matemáticas são universais e não são entidades abstratas. São entidades que existem no espaço-tempo. O aristotelismo matemático não é assim uma conceção simplesmente empirista, como o platonismo naturalizado de Maddy ou o empirismo matemático de Mill. No aristotelismo matemático, o compromisso com universais tem, digamos, resquícios de "eternidade" que o diferencia das conceções empiristas anteriores.

6.1. Noções aristotélicas

Para compreendermos a conceção aristotélica da matemática é necessário introduzir algumas noções prévias.

Há uma distinção comum na linguagem entre *espécime* e *tipo*. Consideremos o quadro seguinte:

Olá Olá

Quantas palavras existem no quadro? Uma ou duas? Se pretendermos referir a quantidade de *espécimes* no quadro, diríamos que existem duas palavras – a palavra "olá" aparece duas vezes. No entanto, se pretendermos referir a quantidade de *tipos* de palavras no quadro, diríamos que existe apenas uma palavra no quadro. Um mesmo tipo de palavra. Esta distinção é válida para palavras, mas também é válida para muitas outras coisas como cisnes, vestidos e automóveis.

Consideremos a frase ambígua: "as duas senhoras vestiam a mesma camisola". Esta frase é ambígua porque, por um lado, parece que estamos na presença de um único *espécime*, por outro lado, parece que estamos na presença de dois *espécimes*, mas de um mesmo *tipo*.

Consideremos a interpretação de que as senhoras vestem, separadamente, uma camisola, mas uma camisola de um mesmo tipo. As camisolas têm uma propriedade em comum que as torna iguais. As camisolas, cada uma delas, são exemplificações de um mesmo tipo de camisola. Da mesma forma, dizemos que todos os objetos vermelhos são exemplificações da cor vermelho, e assim por diante. A designação usada na Grécia Antiga a respeito deste género de exemplificações era de *um em muitos*. Esta propriedade comum, que coisas particulares diferentes podem ter, é definida como sendo um *universal*. Coisas que partilham um mesmo universal são assim semelhantes em algum aspeto.[12] A alegada existência de universais é disputada pelo argumento seguinte. Tico é Teco são dois cães brancos. Para a frase "Tico e Teco são dois cães brancos" ser verdadeira, apenas é necessário existir um cão branco chamado "Tico" e um cão branco chamado "Teco". Não é necessário existir tais alegadas coisas universais como *brancura* e *canicidade* (Quine, 1948, p. 32).

6.2. Universais

Existem duas conceções opostas da noção *universal*. A conceção platonista considera que os universais existem de forma independente das coisas. Os universais têm uma existência intemporal no mundo das formas. São entidades abstratas. A designação latina é *universalia ante rem* ("universais antes da coisa"). A conceção aristotélica, nos termos

[12] Os exemplos são adaptações de Armstrong (1989, pp. 1-2).

que aqui iremos abordar, pelo contrário, considera que os universais apenas podem existir havendo coisas que as exemplifiquem. Os universais não são assim independentes das coisas. Não existe tal coisa como universais nunca exemplificados. Todos os universais que existem, existem justamente enquanto exemplificação de coisas particulares. A designação latina é *universalia in re* ("universais na coisa").

A conceção aristotélica da matemática defende que as entidades matemáticas são universais. As entidades matemáticas exemplificam-se em coisas particulares, que existem no espaço-tempo. Por exemplo, a simetria e a proporção (razão) são duas propriedades matemáticas percecionáveis. O corpo dos seres humanos é aproximadamente simétrico, segundo um eixo vertical imaginário que divide o corpo em duas partes aproximadamente simétricas. A simetria é estudada na matemática pura pela chamada teoria de grupos. A respeito da proporção, por exemplo, diz-se que a Torre Eiffel é diretamente proporcional às miniaturas turísticas vendidas em seu redor. A Torre Eiffel é, digamos, cerca de cem vezes maior do que as suas miniaturas. A proporção é uma relação que se aplica a comprimentos, volumes e outras quantidades. Existem muitas outras propriedades matemáticas que podem ser percecionadas como a continuidade, a linearidade ou pontos discretos. Na subsecção 6.4, veremos como os números também são universais (relações entre agregados e propriedades).

Para um aristotélico da matemática, nem todas as propriedades matemáticas têm de ser necessárias e diretamente percecionáveis para poderem existir. Analogamente, nem todas as propriedades físicas ou objetos físicos são diretamente percecionáveis e isso não implica que tais coisas não existam. Eletrões e protões não são diretamente percecionáveis e são entidades que existem. Mais concretamente, os universais são *postulações* da nossa melhor ciência; são inferências para a melhor explicação dos fenómenos que se observam. A postulação é, no entanto, uma postulação acerca do que existe no espaço-tempo.

A postulação de entidades matemáticas no espaço-tempo dá assim uma resposta ao problema epistemológico de Benacerraf. Ou seja, as entidades matemáticas não são entidades abstratas, mas existem no espaço-tempo, enquanto exemplificação de coisas particulares. Podem ser diretamente percecionáveis, ou indiretamente testadas, no âmbito de experiências científicas cujas teorias postulam a sua existência.

6.3. Indispensabilidade e aristotelismo matemático

Como vimos atrás, o argumento da indispensabilidade matemática é silencioso sobre a natureza das entidades matemáticas com que nos devemos comprometer. Assim, os aristotélicos defendem a existência das entidades matemáticas por intermédio do próprio argumento da indispensabilidade, segundo a versão antiplatonista do mesmo. A respeito da primeira premissa do argumento, em termos gerais, os aristotélicos da matemática subscrevem a doutrina naturalista, são indiferentes à doutrina holista, mas introduzem uma ligeira modificação no critério de compromisso ontológico de Quine.

Quine apenas admite a realização de compromissos ontológicos com objetos. Ou seja, apenas admite a lógica de primeira ordem, na qual as variáveis ligadas aos quantificadores são respeitantes a objetos. No entanto, a lógica de primeira ordem não é uma lógica suficiente para os compromissos que os aristotélicos pretendem efetuar. Os aristotélicos estendem a lógica à lógica de segunda ordem, porque consideram que também pode haver compromissos com propriedades. Ou seja, as propriedades – os universais – também podem ser variáveis ligadas aos quantificadores.

Recordemos a formalização anterior da frase matemática "2 é um número":

Dicionário: P_: _é um número.
_*a*: 2_
Formalização: P*a*

Para Quine, o compromisso ontológico da formalização anterior é explicitamente o seguinte:

$$\exists x \, Px$$

Ou seja, *existe algo que é P*. Para um aristotélico, para P*a* ser verdadeira é necessário que existam 1) a propriedade P, 2) o particular *a*, e 3) o facto que *a é P*. Ou seja, pondo tudo junto, o compromisso ontológico da formalização anterior é explicitamente o seguinte:

$$\exists x \, \exists \mathrm{P} \; \mathrm{P}x$$

Neste caso, a propriedade P aparece igualmente ligada ao quantificador existencial.[13]

6.4. Objeções ao aristotelismo matemático

As duas principais objeções ao aristotelismo são de que: 1) a natureza física não parece estar de acordo com algumas presumíveis entidades matemáticas como o infinito matemático e as figuras geométricas em geral; 2) decorrente de Frege (1992), os números não são propriedades dos objetos físicos.

Sendo o universo do espaço-tempo composto por uma quantidade finita de objetos, não parece assim que o infinito matemático possa ser exemplificado em qualquer conjunto de objetos físicos no espaço--tempo. Por sua vez, as figuras geométricas, como circunferência ou quadrado, também não parece que tenham alguma vez sido exemplificadas em qualquer objeto físico. Ou seja, na natureza física não parece haver tal coisa como circunferências "perfeitamente" circulares ou quadrados "perfeitamente" quadrangulares. Quando muito, na natureza existem objetos aproximadamente circulares ou aproximadamente quadrangulares. E, portanto, a modelização matemática destas entidades opera uma idealização, antes de aplicar qualquer matemática.

Newstead e Franklin (2012, p. 88) replicam que estruturas infinitas serão universais de mera possível exemplificação e não são universais concretamente exemplificados. Algumas versões do aristotelismo acabam por considerar que infinitudes matemáticas são entidades ficcionais ou, em alternativa, veem-se obrigados a admitir na sua

[13] Exemplo adaptado de Newstead e Franklin (2012).

ontologia universais não exemplificados (Forrest & Armstrong, 1987). Relativamente à segunda parte da objeção, Franklin (2009, p. 118) replica que a matemática contemporânea efetivamente já tem instrumentos matemáticos (resultantes do estudo de funções contínuas) para estudar matematicamente circunferências que não são "perfeitamente" circulares ou quadrados que não são "perfeitamente" quadrangulares, não sendo necessário ter de operar qualquer idealização do objeto físico em estudo, para se conseguir aplicar a matemática.

Recordemos o argumento para a segunda objeção, decorrente de Frege (1992), segundo a qual os números não são propriedades de objetos físicos. Perante uma pilha de cartas, a pergunta "quantos?" tem diversas respostas. Se interpretarmos a pergunta como "qual é o número de pilhas?", a resposta é 1. Se interpretarmos a pergunta como "qual é o número de baralhos?", a resposta é 2. Se interpretarmos a pergunta "qual é o número de cartas?", a resposta é 104. Portanto, os números não podem ser propriedades dos objetos físicos, porque diferentes números se aplicam a um mesmo objeto, dependendo da maneira como interpretamos a pergunta relativamente ao objeto em questão. Para cada interpretação da pergunta corresponde uma individuação de partes do objeto percecionado.

Glenn Kessler (1980), baseado em Mill, replica que os números são relações. Em concreto, um número é uma "relação que se verifica entre agregados e propriedades que selecionam partes desses agregados" (Kessler, 1980, p. 69). O argumento de Frege confunde propriedades com relações.

Vejamos novamente o exemplo das cartas. Seja *x* o agregado de cartas. Segue-se então que:

> 104 é a relação entre o agregado *x* e a propriedade *ser uma carta*.
>
> 2 é relação entre o agregado *x* e a propriedade *ser um baralho*.
>
> 1 é a relação entre o agregado *x* e a propriedades *ser uma pilha*.

A definição geral do numeral *n*

> *n* denota a relação numérica entre um agregado *x* e uma propriedade *p* se, e só se, *x* tem *n* *p*-partes (i.e., *n* partes que exemplificam a propriedade *p*) (Kessler, 1980, pp. 69-70)

Esta relação é um universal. Por exemplo, a relação entre um agregado de 7 maçãs e a propriedade é maçã é a mesma relação entre um agregado de 7 peras e a propriedade é *pera*, e assim por diante.

Esta definição permite também resolver um problema em volta do número zero. O problema para o aristotelismo é de que, aparentemente, o número zero não é exemplificado por qualquer objeto *físico. A solução para este problema é muito simples e resulta de uma mera substituição na definição acima: zero é a relação numérica entre um agregado x* e uma propriedade *p* se, e só se, *x não conter* *p*-partes.

Leituras adicionais recomendadas

Benacerraf (1973). Mathematical Truth.

Quine (1955/1995). Postulações e Realidade.

Maddy (1990). *Realism in Mathematics*. [58-67 descreve a perceção de conjuntos].

Newstead e Franklin (2012). Indispensabilty without Platonism.

Capítulo 5
Antirrealismo Matemático

Começaremos por analisar duas conceções inteiramente antirrealistas: a conceção do ficcionismo matemático de Field e a conceção do nominalismo deflacionário. Ambas defendem que não existem entidades matemáticas abstratas. Analisaremos a conceção de filosofia segunda que não é uma conceção inteiramente antirrealista. É uma conceção mista de realismo fino e arrealismo matemático.

1. Introdução

O nominalismo, no sentido que vai ser usado neste capítulo, é a doutrina segundo a qual não há entidades abstratas. Esta doutrina é suscetível de ser evocada em todos os domínios da filosofia. No caso específico da filosofia da matemática, o nominalismo rejeita a existência de entidades matemáticas, por considerar que estas entidades são entidades abstratas. Na matemática, o nominalismo é conhecido por *nominalismo matemático*. No domínio matemático existem diversas versões nominalistas. Neste capítulo analisaremos o ficcionismo matemático, em particular, o programa de Hartry Field e analisaremos o nominalismo deflacionário de Joddy Azzouni.[1]

[1] O nominalismo remonta à época medieval de William Ockham, mas, contemporaneamente, iniciou-se nos anos 40 e 50 do século XX, pela mão de Nelson Goodman e Willard Quine. Numa fase inicial, Quine foi nominalista (Goodman & Quine, 1947). Só mais tarde, Quine adotou o platonismo, via argumento da indispensabilidade matemática.

O nominalismo alicerça-se na ideia ingénua de que, à primeira vista, não existem bons candidatos para serem exemplares de entidades matemáticas entre os objetos que sabemos existir. Portanto, a melhor explicação para esta ausência de bons candidatos, entre os objetos existentes, será inferir que não existem tais entidades matemáticas. Olhando à nossa volta, observamos objetos físicos: objetos concretos que ocupam uma posição no espaço-tempo e têm poderes causais. De uma maneira ou outra, tais objetos interagem causalmente com o nosso sistema percetual. Mesmo os objetos físicos microscópios, como eletrões ou protões, interagem indiretamente com o nosso aparato percetual, via tecnologia apropriada. No entanto, à primeira vista, não parece que alguém possa afirmar que observou o número 15, o infinito ou uma linha reta sem dimensão. No caso em questão, nem sequer há ou poderá haver qualquer tecnologia que seja suscetível de detetar tais objetos, mesmo de forma indireta.

Existem dois argumentos centrais que motivam o nominalismo matemático: um epistemológico e outro metafísico. O argumento epistemológico é o argumento de Benacerraf, que analisámos no capítulo anterior. Relembra-se que este argumento se sustenta numa teoria causal do conhecimento: não podemos ter conhecimento de entidades abstratas, porque os seres humanos não têm capacidades epistémicas para estabelecer conexões causais com esse alegado domínio abstrato. Portanto, devemos rejeitar a existência de entidades abstratas.

O argumento metafísico foi proposto por Goodman (1956). Seja o princípio metafísico segundo o qual entidades distintas devem ter constituintes distintos. Sejam, por exemplo, dois conjuntos: o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ e o conjunto $\{\{b\}, \{a, b\}\}$. Por um lado, estes dois conjuntos são distintos, porque o primeiro conjunto é constituído pelos conjuntos $\{a\}$ e $\{a, b\}$, enquanto o segundo conjunto é constituído pelos conjuntos $\{b\}$ e $\{a, b\}$. Por outro lado, os dois conjuntos não são distintos, porque, em última instância, são constituídos pelos mesmos particulares a e b. Dada a situação paradoxal que se deriva, Goodman conclui que não existem conjuntos (matemáticos).

No capítulo anterior, fizemos uma conexão entre verdade matemática e existência matemática. Esta conexão entre verdade e existência fundamenta-se na teoria da verdade como correspondência. As proposições matemáticas apenas podem ser verdadeiras se existirem as entidades matemáticas que elas referem. Por exemplo, a proposição "2 é um número par" é verdadeira se, e só se, "2 é um número par" corresponde ao facto de que *2 é um número par*. Ou seja, tem de existir um objeto – o número 2 – com a propriedade de ser par, que torne a proposição "2 é um número par" verdadeira.

O antirrealismo matemático defende que não existem entidades matemáticas e, como tal, levanta-se o problema de como será possível considerar que algumas proposições matemáticas são verdadeiras sem a existência de quaisquer entidades matemáticas que lhes correspondam. Existem duas estratégias para tentar endereçar este problema. Uma, consiste em tentar descartar a conceção de *verdade matemática* e propor outra conceção alternativa que não dependa da alegada existência de entidades matemáticas; outra, consiste em tentar rejeitar a teoria da verdade como correspondência e propor outra teoria sobre a verdade que não dependa da alegada existência de entidades matemáticas. Nas duas próximas secções, sobre o ficcionismo matemático, veremos tentativas a respeito da primeira estratégia; e na secção 4, "Nominalismo deflacionário", veremos uma tentativa a respeito da segunda estratégia.

2. Ficcionismo matemático

O termo *ficcionismo* decorre da ideia de que as obras literárias não são literalmente verdadeiras. São obras de ficção. Personagens literárias, como Eugénie Grandet ou D. Quixote, não existem. São personagens ficcionais. No entanto, esta analogia não pretende ir mais longe na comparação entre a matemática e a ficção. Em geral, a analogia mais forte que presume a matemática como sendo literalmente uma ficção é uma analogia rejeitada pelo ficcionismo.

Um argumento para o ficcionismo é o seguinte:

(1) As proposições matemáticas devem ser interpretadas pelo seu valor facial.
(2) Se as proposições matemáticas verdadeiras são interpretadas pelo seu valor facial, então devem existir as entidades matemáticas que elas referem, sendo que essas entidades são entidades abstratas.
(3) Não existem entidades abstratas.
∴ As proposições matemáticas não são verdadeiras.

Comecemos por um breve esclarecimento sobre a noção de *valor facial*. Se tenho uma moeda antiga e rara na minha mão, onde está gravado o valor de 1 €, então o seu valor facial é de precisamente 1 €. Contudo, o seu real valor é supostamente superior ao seu valor facial de 1 €, dado ser uma moeda rara e antiga. Analogamente, o valor facial de uma proposição consiste numa interpretação literal do que é afirmado nessa proposição.

A segunda premissa considera que as proposições matemáticas verdadeiras devem ser consideradas pelo seu valor facial. Por exemplo, a proposição "existe um número par primo" afirma literalmente que existe uma entidade matemática que é o número 2 e que, além disso, é um número par e primo. Assim, a proposição apenas pode ser verdadeira, se existir a entidade matemática respetiva que torne a proposição verdadeira – o próprio número 2. Para um ficcionista, as entidades matemáticas, se existissem, teriam de ser entidades abstratas. Ou seja, a segunda premissa pressupõe que as proposições matemáticas apenas poderiam ser verdadeiras se existissem as entidades matemáticas referidas nessas proposições.

A terceira premissa nega a existência de entidades abstratas, em particular, nega a existência de entidades matemáticas, porque as considera como sendo abstratas. Esta premissa é essencialmente suportada no argumento epistemológico de Benacerraf que analisámos no capítulo anterior.

Ora, não existindo entidades matemáticas, a conclusão a retirar, via *modus tollens*, é de que as proposições matemáticas não são verdadeiras. As teorias matemáticas são teorias falsas. Por exemplo, as proposições matemáticas existenciais, que recorrem ao quantificador existencial, são falsas (e.g. $\exists xFx$); enquanto as proposições universais, que recorrem ao quantificador universal, são vacuamente verdadeiras (e.g. $\forall xFx$, não existe nenhum dos objetos do domínio de quantificação).

O *nominalismo de paráfrase* defende que as proposições matemáticas não devem ser consideradas pelo seu valor facial. Neste sentido, esta forma de nominalismo não subscreve o argumento anterior. Concretamente, o nominalismo de paráfrase rejeita a primeira premissa. Ou seja, a afirmação "existe um número par primo" não deve ser interpretada literalmente, porque tais proposições não são literalmente acerca de números. Hilary Putnam (1975b) e Geoffrey Hellman (1989) defendem que as proposições matemáticas devem ser interpretadas como proposições de possibilidade. Esta forma de nominalismo é conhecida como *se-entãoismo*. Por exemplo, a proposição "2 é um número par" deve ser interpretada como "se existissem números, então 2 seria um número par" ou, em alternativa, "necessariamente, se há números, então 2 é um número par".

A objeção corrente a esta proposta nominalista é que a mesma é contrária à interpretação que os matemáticos e as pessoas no dia a dia fazem das proposições matemáticas. Ou seja, quando afirmamos "2 é um número par", não parece que haja alguma outra intenção para além da interpretação literal que afirma a existência de números.

3. Ficcionismo matemático de Field

Hartry Field (1980), em *Science Without Numbers*, considera que o único bom argumento a favor da existência das entidades matemáticas é o argumento da indispensabilidade matemática referido no capítulo anterior. O ficcionismo de Field é um ataque direto à segunda premissa do argumento da indispensabilidade matemática, enquadrando-se no chamado *caminho difícil do nominalismo*. O programa consiste assim em tentar mostrar que, na verdade, as entidades matemáticas são dispensáveis às teorias científicas. Se as entidades matemáticas forem dispensáveis às teorias científicas, então não teremos qualquer boa razão para supor a sua existência. As teorias matemáticas são teorias falsas. Há dois aspetos fundamentais no programa de Field, a nominalização e a conservação.

3.1. Nominalização

Entende-se por *nominalização* o processo de reformulação de teorias científicas com vista a que as mesmas não façam qualquer referência ou quantifiquem sobre entidades matemáticas. Note-se que, no entanto, as teorias científicas emergentes deste processo de reformulação têm de continuar a ser verdadeiras. Field tenta aplicar o procedimento de nominalização a uma única teoria científica: a teoria da gravitação de Newton.[2] O argumento de "fundo" que o ficcionismo pretende estabelecer é indutivo, a saber: se a teoria newtoniana puder ser inteiramente reformulada, não fazendo referência a entidades matemáticas, então as restantes teorias científicas também serão suscetíveis de ser reformuladas sem fazer referência a entidades matemáticas.

Olhando para a teoria da gravitação de Newton, podemos encontrar uma matemática variada como proposições de aritmética, de análise e de geometria, equações diferenciais e equações integrais, a respeito da posição e do movimento dos corpos no espaço. Ora, é então necessário ter um mecanismo que permita nominalizar toda esta matemática e ficarmos apenas com o "osso" da física da teoria. Toda e qualquer referência a números tem de desaparecer. Na verdade, o projeto não é assim tão ambicioso. A nominalização de Field da

---

[2] Outros autores têm procurado estender a nominalização a outras teorias científicas. Por exemplo, Mark Balaguer (1998, p. ? cap. 5) apresenta uma tentativa de nominalização da mecânica quântica.

teoria da gravitação tem várias lacunas. Não se trata de uma nominalização completa da teoria. Por exemplo, o cálculo integral não é nominalizado e também existem problemas em volta da constante de gravitação universal. Vejamos um pouco melhor em que consiste esta nominalização a respeito da geometria do espaço.

Geometria

A nominalização da geometria do espaço realiza-se por intermédio da axiomatização de Hilbert da geometria euclidiana. Esta base axiomática não faz qualquer referência a números reais e, como tal, serve os propósitos de Field de nominalização do espaço.

Há duas formas de conceber a geometria euclidiana. Uma, mais antiga e decorrente de Euclides, considera o espaço geométrico como sendo livre de coordenadas. Esta geometria é conhecida como *geometria sintética*. Outra, mais recente e decorrente de Descartes, considera o espaço geométrico como sendo representado por coordenadas. Esta geometria é conhecida como *geometria analítica*. A primeira apenas faz referência a pontos, retas e planos, mas não a números. A segunda faz referência a números: os pontos no espaço são referidos por triplo-ordenados (x, y, z); as retas e os planos no espaço são referidos por equações (e.g. $y = x + 1$). Por exemplo, a respeito de geometria sintética, o próprio teorema de Pitágoras, tal como formulado por Euclides, é respeitante a *áreas* de quadrados que se desenham nos lados do triângulo retângulo: a área do quadrado desenhado na área da hipotenusa é igual às áreas dos quadrados desenhados nos lados dos catetos (segundo esta geometria não são evocados números presentes na formulação contemporânea $h^2 = c^2 + c'^2$).

Field vai então adotar a geometria sintética definindo, por exemplo, predicados como os seguintes para as noções de *um ponto estar entre outros dois pontos* e da *distância entre dois pontos ser igual à distância entre outros dois pontos distintos*:

_E_ _:_entre_ _
_ _C_ _:_ _congruente_ _

> “y está entre x e z” (simboliza-se, y E xz) intuitivamente significa que y é um ponto num segmento de reta cujos extremos são x e z.
>
> “xy é congruente com zw” (simboliza-se, xy C zw) intuitivamente significa que a distância do ponto x ao ponto y é a mesma que a distância do ponto z ao ponto w. (Field, 1980, pp. 25-26)

A questão que se levanta é saber se existe alguma correspondência entre a geometria sintética e a geometria analítica. Recorrendo a Hilbert, uma vez mais, sabemos que existe uma correspondência entre as duas geometrias e que é dada pelo *teorema da representação*. As proposições matemáticas referentes ao espaço sintético – proposições que não fazem referência a números – são equivalentes às proposições matemáticas referentes ao espaço analítico, sendo que estas fazem referência a números. Tecnicamente, diz-se que o espaço-tempo da geometria sintética é isomórfico no espaço-tempo da geometria analítica. Formalmente, o teorema é o seguinte:

> *Teorema da representação*
> Dado um qualquer modelo para o sistema de axiomas do espaço, existe pelo menos uma função d de pares de pontos nos números reais negativos, satisfazendo as condições de “homomorfismo seguintes”:
> a) para quaisquer pontos x, y, z e w: xy C zw se, e só se, d(x, y)= d(z, w).
> b) para quaisquer pontos x, y, z: y E xz se, e só se, d(x, y) + d(y, z)= d(x, z). (Field, 1980, p. 26)

O teorema da representação faz então uma ponte entre a parte abstrata e a parte concreta da teoria de Newton. Ou seja, a parte matemática da teoria representa a parte concreta da teoria. Sendo que d representa a noção de distância, o teorema da representação mostra que proposição acerca de “entre” ou de “congruência” são equivalentes à noção de distância. Em particular, a) conecta pontos no espaço com a distância numérica entre esses pontos; b) conecta pontos no espaço com a soma numérica de distâncias entre esses pontos.

Uma objeção que se levanta a esta tentativa de nominalização do espaço físico é de que, mesmo no caso da geometria sintética, continua a falar-se de pontos do espaço físico, sendo que, à primeira vista, estes pontos serão pontos abstratos. Para evitar esta objeção, Field vai adotar uma visão substantivalista do espaço-tempo. De acordo com o substantivalismo, além dos objetos físicos do mundo, o espaço--tempo é ele próprio um objeto físico. Esta visão substantivalista é polémica e opõe-se à visão relacionista do espaço-tempo, a visão segundo a qual o espaço-tempo não é um objeto físico, mas apenas existem os objetos físicos no espaço-tempo.

Outra objeção geral que se levanta ao programa de Field é de que ele apenas o aplica à teoria de Newton. Mas existem muitas outras teorias físicas. David Malament (1982), por exemplo, defende que existem algumas teorias que não podem ser nominalizadas de todo por esta estratégia, como é o caso da Mecânica Quântica.

Passemos agora ao segundo passo do programa de Field – a conservação.

3.2. Conservação

O segundo aspeto do programa – a conservação – pretende mostrar que a matemática acrescentada às teorias científicas nominalizadas é conservativa. Informalmente, diz-se que uma teoria matemática é conservativa no sentido seguinte:

> *Definição da conservação*
> Seja M uma teoria matemática aplicada numa teoria empírica T. Diz-se que a conjunção de T e M é uma extensão conservativa de T se toda a asserção da linguagem (empírica) de T

que se demonstra com a conjunção de *T* e *M*, pode ser demonstrada, mas talvez com maior dificuldade, apenas com recurso à teoria empírica *T*.

A conservação garante, assim, que qualquer derivação "matemática" de uma proposição nominalista (i.e., uma proposição completamente empírica), que parte de uma outra proposição nominalista (i.e., uma proposição completamente empírica), pode ser igualmente derivada, mas sem qualquer recurso a matemática.

$$T + M \rightarrow T'$$
$$T \rightarrow T'$$

Outra conclusão que se retira desta definição é de que as teorias matemáticas não têm de ser teorias verdadeiras para serem úteis, quando são aplicadas às teorias científicas. As teorias matemáticas apenas têm de ser teorias *conservativas* para poderem ser aplicadas às teorias científicas.

A utilidade da matemática nas teorias científicas manifesta-se por duas razões. Primeira, permite facilitar o cálculo. Ou seja, a matemática torna mais simples o processo de derivar conclusões nominalistas que partem de premissas igualmente nominalistas. Segunda, a matemática pode ser útil na própria formulação de premissas de uma teoria científica. Por exemplo, no eletromagnetismo, as equações de Maxwell são formuladas em termos de equações matemáticas (e.g. div **B** = 0) (Field, 1982, pp. 50, 53). Todavia, da utilidade da matemática não se infere qualquer indispensabilidade da matemática nas teorias científicas. Na subsecção anterior, vimos como as teorias científicas podem ser reformuladas com vista a ficarmos apenas com o seu aspeto nominalista.

Vejamos agora um exemplo simples da teoria de números que ilustra o carácter útil da matemática, no sentido de facilitação do cálculo. Suponhamos que tenho em cima de uma mesa exatamente dois objetos: um prato e um copo. Queremos determinar quantos objetos temos em cima da mesa. Informalmente, o nosso raciocínio é o seguinte:

1. Existe exatamente um prato na mesa.
2. Existe exatamente um copo na mesa.
3. Nada é simultaneamente um prato na mesa e um copo na mesa.
4. Logo, existem exatamente dois objetos na mesa que ou são um prato ou são um copo.

Queremos então justificar como inferimos a conclusão 4 a partir das premissas 1-3. Há duas formas diferentes para justificar a conclusão. Uma, por intermédio da lógica de primeira-ordem (com identidade); outra, por intermédio da matemática.

No capítulo 2, secção 4.1, vimos que utilizando lógica de primeira ordem podemos explicar as aplicações da aritmética. Relembre-se que nestes exemplos os números não são objetos, mas atribuições a conceitos. Formalmente, o procedimento é o seguinte:

Dicionário:
P_:_é prato na mesa.
C_:_é copo na mesa.

1*. $\exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \rightarrow y = x))$
2*. $\exists x\ (Cx \wedge \forall y\ (Cy \rightarrow y = x))$
3*. $\neg \exists x\ (Px \wedge Cx)$
4*. $\exists x \exists y\ [(Px \vee Fx) \wedge (Py \vee Fy) \wedge x \neq y \wedge \forall z\ ((Pz \vee Fz) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$

Por sua vez, na justificação matemática, a operação mental que fazemos é a seguinte: primeiro identificamos um objeto físico; depois identificamos o segundo objeto físico; depois fazemos uma bijeção entre objetos físicos e objetos matemáticos. Finalmente efetuamos a operação aritmética de adição 1+1=2. Concluímos que temos 2 objetos físicos na mesa. Utilizando um pouco de teoria de números e de teoria de conjuntos, o raciocínio acima pode ser assim formalizado:

1’. O número cardinal do conjunto é prato na mesa é 1.
2’. O número cardinal do conjunto é copo na mesa é 1.
3’. O número cardinal do conjunto é prato na mesa e é copo na mesa é zero.
4’. Dado que 1+1=2.
5’. O número cardinal do conjunto é prato na mesa ou é copo na mesa é 2.

A justificação baseada na lógica de primeira-ordem pode ser replicada indefinidamente. Quanto mais objetos forem considerados, mais morosa e extensa se torna a justificação. As fórmulas a respeito dos quantificadores tornam-se extremamente longas. Em contraste, a justificação matemática é muito mais simples.

Pode-se levantar o argumento seguinte contra o ficcionismo. Na justificação matemática, a inferência efetuada é correta; e, qualquer que seja o caso, a inferência é sempre correta. Ora, se na justificação matemática as inferências são sempre corretas, então isso parece ocorrer devido à própria teoria matemática que suporta a inferência ser uma teoria verdadeira. Se a teoria matemática não fosse verdadeira, então poderíamos cair numa inferência inválida com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa.

Field replica que há uma distinção entre verdade e conservação. Na justificação matemática, as inferências são corretas em virtude do carácter conservativo da própria matemática. Ou seja, não é a alegada verdade da teoria matemática que garante a correção da inferência. A inferência é correta, porque a própria inferência nominalista é correta e a matemática, quando aplicada nas premissas nominalistas em causa, é ela própria uma extensão conservativa. Note-se ainda que as proposições 1’-3’ não são proposições verdadeiras, *simpliciter*. As proposições 1’-3’ são verdadeiras, porque as proposições 1-3 são verdadeiras (para um ficcionista a proposição 4’, tal como está redigida, é simplesmente falsa).

3.3. Objetividade matemática sem entidades matemáticas

Um dos problemas para o ficcionismo é a respeito da objetividade matemática, porque, aparentemente, existe uma conexão entre objetividade matemática e entidades matemáticas. A matemática é uma ciência objetiva e apenas a existência de entidades matemáticas, enquanto entidades independentes dos seres humanos, podem assegurar a objetividade da matemática.

Quando pretendemos obter uma resposta correta a um problema matemático, digamos, "quantos números primos existem entre 1 e 100?", parece que uma resposta objetiva a esta questão depende da existência de entidades matemáticas. Se não houvesse tais entidades, não teríamos maneira de averiguar qual seria a resposta correta. Vimos anteriormente que o nominalismo de paráfrase argumenta que podemos ter uma resposta objetiva a esta questão, admitindo que as proposições matemáticas são apenas proposições de possibilidade, se efetuarmos uma interpretação não-literal das proposições matemáticas.

Outra objeção à alegada conexão entre objetividade matemática e entidades matemáticas é considerar que a objetividade matemática se fundamenta, antes de mais, na objetividade da lógica. Temos uma ideia precisa e clara do que é uma demonstração matemática correta. Na presença de uma demonstração matemática formal conseguimos verificar claramente se a demonstração segue os cânones das regras da lógica; e se se tratar de uma demonstração informal, podemos converter tal demonstração numa demonstração formal que obedeça às regras da lógica. Ora, isto significa que aquilo que define uma demonstração matemática como sendo correta ou não é completamente objetivo. Sendo a lógica objetiva, segue-se que as demonstrações em matemática são também objetivas. Portanto, se considerarmos que a objetividade da matemática se fundamenta na objetividade da lógica, então a ligação entre objetividade matemática e entidades matemáticas é completamente ilusória (Field, 1998, pp. 388-389).

Pode-se também considerar a objetividade matemática, como desligada da alegada existência de entidades matemáticas, defendendo que as proposições matemáticas são objetivamente "corretas" se se conseguirem derivar de axiomas aceites pela comunidade matemática. Neste caso, a objetividade da matemática não depende da objetividade da lógica, mas depende de uma escolha objetiva dos axiomas a partir dos quais tentamos derivar as proposições matemáticas.

Não existindo verdades matemáticas, como podemos então distinguir entre proposições matemáticas "falsas" e proposições matemáticas "verdadeiras". Por exemplo, para um ficcionista, 2+2=4 e 2+2=5 são proposições falsas. No entanto, correntemente é tido pelos matemáticos e pelas pessoas em geral de que a primeira proposição é verdadeira, enquanto a segunda proposição é falsa.

A réplica de Field (1989, p. 4) baseia-se numa analogia. "Eugénie Grandet apaixonou-se pelo seu primo Charles Grandet" é uma proposição verdadeira no âmbito da obra ficcional de Balzac; enquanto a proposição "Eugénie Grandet casou-se com o seu primo Charles Grandet" é uma proposição falsa na obra ficcional de Balzac. Todavia, ambas as proposições são literalmente falsas, porque não existem tais personagens ficcionais. Analogamente, a proposição 2+2=4 é uma proposição verdadeira, porque a mesma faz parte da matemática *standard*; enquanto a segunda proposição, 2+2=5, não é verdadeira porque não faz parte da matemática *standard*. No entanto, ambas as proposições, se interpretadas de forma literal, são ambas falsas, porque não existem tais entidades matemáticas. Por outras palavras, um ficcionista não acredita literalmente que 2+2=4.

4. Nominalismo deflacionário

Joddy Azzouni (2004) propõe uma forma de nominalismo deflacionária. No seu entender, as nossas teorias científicas podem supor quantificações sobre entidades, mas não se segue que tenhamos de nos comprometer com as entidades quantificadas nas teorias científicas. Em particular, as teorias matemáticas podem ser verdadeiras, sem existirem as respetivas entidades matemáticas por elas referidas.

O nominalismo deflacionário rejeita a teoria da verdade como correspondência e o critério de compromisso ontológico de Quine.

4.1. Verdade matemática sem objetos

O termo *deflacionário*, na designação de *nominalismo deflacionário*, decorre de pressupor uma teoria da verdade deflacionária. Uma teoria da verdade deflacionária é uma teoria que considera que a noção de *verdade* é única e simplesmente decorrente do papel que ela desempenha na nossa linguagem ou pensamento comuns. Ou seja, não existe nada de metafisicamente profundo em volta da noção de *verdade*. Contrariamente à teoria da verdade como correspondência, que fundamenta algumas das teorias realistas da matemática, a *verdade* não requer qualquer correspondência com factos no mundo.

Vimos que o ficcionismo considera que as proposições matemáticas podem ser comparadas às proposições das obras ficcionais. Ambas são proposições literalmente falsas, na medida em que não existem as entidades por elas referidas. Por exemplo, "2+2=4" e "Eugénie Grandet apaixonou-se pelo seu primo Charles Grandet" são ambas afirmações falsas, porque não existem números nem as personagens ficcionais Eugénie Grandet e Charles Grandet. No entanto, consideremos agora as frases seguintes:

a) Eugénie Grandet é descrita como filha do príncipe dos avaros na obra de Balzac *Eugénie Grandet*.
b) Eugénie Grandet é descrita como filha do príncipe dos generosos na obra de Balzac *Eugénie Grandet*.

Ora, apesar de Eugénie Grandet ser uma personagem ficcional, a frase a) é uma frase verdadeira e a frase b) é uma frase falsa. Ou seja, podemos falar claramente acerca de objetos inexistentes e falar de forma verdadeira ou falsa acerca de objetos inexistentes. Estes exemplos atentam contra a teoria da verdade como correspondência.

Analogamente, as proposições matemáticas podem ser verdadeiras ou falsas apesar de serem inteiramente acerca de coisas que não existem. Por exemplo:

a) 2+2=4 é uma proposição da teoria de números.
b) 2+2=5 é uma proposição da teoria de números.

Ora, a) é verdadeira e b) é falsa, ainda que não existam os objetos matemáticos 2, 4 e 5 (nem quaisquer outros).

4.2. Deflacionismo e indispensabilidade

Esta conceção deflacionária da verdade tem uma implicação direta no argumento da indispensabilidade matemática. Na sua análise, Azzouni (2004, p. 4) considera uma versão do argumento da indispensabilidade matemática ligeiramente diferente da referida no capítulo anterior. A versão de Azzouni enfatiza o papel do critério de compromisso ontológico no argumento:

(1) Se a teoria matemática *x* é indispensável à prática científica, então essa teoria matemática *x* é verdadeira.
(2) A teoria matemática *x* é indispensável à prática científica.
(∴)A teoria matemática *x* é verdadeira.

Pelo critério de compromisso ontológico:

(3) Se a teoria matemática *x* é verdadeira, então existem as entidades matemática pressupostas na teoria matemática *x*.
(4) A teoria matemática *x* é verdadeira.
(∴)As entidades matemáticas existem.

Azzouni considera a primeira e a segunda premissas verdadeiras. Ele disputa a terceira premissa: a verdade de uma teoria matemática não implica que existam as entidades abstratas alegadamente quantificadas por essa doutrina. Vimos acima como ele rejeita a teoria da verdade como correspondência. Agora, ele vai disputar o critério de compromisso ontológico de Quine que suporta a terceira premissa.

Ao contrário do ficcionismo de Field, o nominalismo deflacionário não envolve, assim, qualquer reformulação das teorias científicas. Nem sequer implica que as teorias matemáticas sejam teorias falsas. As teorias matemáticas são teorias verdadeiras, mesmo não existindo entidades matemáticas (abstratas ou concretas). A proposta de Azzouni enquadra-se no chamado *caminho fácil do nominalismo*.

O critério de compromisso ontológico de Quine estabelece uma identificação entre compromissos resultantes de quantificações (a linguagem natural arregimentada em lógica de primeira-ordem) e compromissos ontológicos. Azzouni é contra esta identificação. Para Azzouni, o critério de compromisso ontológico sustenta-se na ideia segundo a qual a quantificação resulta de uma arregimentação do uso do vernáculo "há" de frases da linguagem natural. Sendo que os falantes destas linguagens supõem que o uso deste vernáculo, por si só, implica um compromisso ontológico. Ou seja, se afirmarmos "há mesas", "há protões", "há números", etc., então estamos comprometidos com a existência de mesas, protões, números, etc., porque estas frases, quando arregimentadas em lógica de primeira ordem, os valores das variáveis aparecem ligados a quantificadores.

Com vista a mostrar por que razão os nossos compromissos ontológicos não se estabelecem via critério de compromisso ontológico, Azzouni analisa a frase seguinte:

(M) "há ratos ficcionais que falam".

Esta frase coloca um problema ao critério do compromisso ontológico de Quine: o critério de compromisso ontológico não pode ser fundamentado na tese de que o uso do vernáculo "há" implica um compromisso ontológico automático, uma vez que na frase (M) não é claro qual é o compromisso ontológico que estabelecemos ou se não há de todo qualquer compromisso ontológico. Na frase (M), o uso do vernáculo “há” implica um compromisso ontológico com ratos ficcionais falantes?

Os defensores do critério do compromisso ontológico têm algumas opções disponíveis para interpretar o uso do vernáculo “há” na frase (M). Uma delas é o chamado *parafraseamento*. Pode-se defender que, por vezes, fazemos um uso “preguiçoso” do vernáculo “há”. Nestes casos, não há qualquer compromisso ontológico com a alegada entidade mencionada na frase. Ou seja, podemos estabelecer paráfrases com vista a eliminar compromissos aparentes com entidades que não existem de todo.

Concretamente, um defensor do critério do compromisso ontológico poderia estabelecer as duas paráfrases seguintes relativamente à frase (M):

(i) “alguns ratos que falam não existem”;
(ii) “não há quaisquer ratos que falem”;

Azzouni considera que nenhuma destas paráfrases é bem-sucedida.

A paráfrase (i) não serve como paráfrase de (M), porque a elocução “alguns ratos” parece tornar-se na mesma coisa que “há ratos”. Ou seja, a frase (i) “alguns ratos que falam não existem” é a mesma coisa que afirmar: “há ratos que falam mas que não existem”. Nesta última frase, usamos explicitamente o vernáculo “há” que, se interpretado literalmente, continua a implicar um compromisso ontológico com ratos falantes.

A paráfrase (ii) não serve como paráfrase de (M), porque (ii) apenas é verdadeira como uma negação da existência de algo real, mas (ii) é falsa enquanto considerada como uma frase acerca do domínio ficcional. Por exemplo, nas obras de ficção da Disney há ratos que falam.

John Burgess (2004) levantou a seguinte objeção ao nominalismo deflacionário. Sejam as asserções “há números maiores do que 10^{10} que são números primos” e “há números”. Para um nominalista deflacionário, a primeira asserção é verdadeira, porque é uma asserção que faz parte de uma teoria matemática; mas a segunda asserção já não é verdadeira, porque o nominalista nega a existência de números. No entanto, ambas fazem uso do vernáculo "há" e, à primeira vista, não existe qualquer maneira de distinguir uma da outra. Por que razão, para um nominalista, na primeira asserção, o vernáculo "há" não implica um compromisso ontológico com números e na segunda asserção o vernáculo "há" já implica um compromisso ontológico com números, para que a mesma possa ser falsa?

Azzouni replica que podemos quantificar sobre um conjunto variado de coisas, o que é o caso nas duas asserções acima, mas apenas podem existir compromissos ontológicos com entidades que não são dependentes da mente e da linguagem. Este é o critério de independência ontológica.

4.3. Espesso, fino e ultrafino

Rejeitado o critério de compromisso ontológico, Azzouni propõe, em alternativa, que os compromissos ontológicos são estabelecidos pelo critério de independência ontológica. Ou seja, em vez do critério semântico de Quine, passamos a ter um critério metafísico. O que existe não depende da nossa linguagem, nem depende da nossa psicologia. Este critério é corrente para pessoas comuns.

> Não existem maneiras filosoficamente conclusivas para defender o *nosso* critério sobre o que existe. Ou seja, podemos imaginar comunidades diferentes, com a mesma ciência que temos, mas com crenças diferentes sobre o que existe, porque (e apenas porque) elas têm um critério diferente para o que existe. (Azzouni, 2004, pp. 5-6)

> O que resta é uma proposta muito mais modesta – a sugestão que de facto (um facto sociológico, se assim preferir) nós temos

coletivamente adotado como critério a *independência ontológica*. (Azzouni, 2004, p. 99)

Dado que as entidades matemáticas dependem da nossa linguagem e dos nossos processos psicológicos, então, via critério de independência ontológica, essas entidades não existem.

Azzouni estabelece uma distinção entre três tipos de postulações: ultrafinas, finas e espessas. Estas diferentes postulações dependem do seu acesso epistémico: se temos algum acesso epistémico às mesmas e, em caso afirmativo, qual é o tipo de acesso epistémico que temos. Portanto, o que existe não é simplesmente avaliado numa ótica dual sim/não, mas há uma gradação sobre aquilo que pode eventualmente existir, em virtude de considerações epistémicas.

As postulações ultrafinas não têm qualquer acesso epistémico. São exemplos de postulações ultrafinas as postulações da matemática pura. As postulações em matemática pura decorrem do nada, apenas pelo estabelecimento de, por exemplo, os axiomas da teoria de conjuntos. As postulações ultrafinas são entidades que não existem de todo.

As postulações finas são aquelas que decorrem nas nossas melhores teorias científicas, estabelecidas segundo os critérios epistémicos quinianos referidos no capítulo anterior: simplicidade, familiaridade, alcance, fecundidade e comprovação. Por exemplo, vírus ainda não detetados experimentalmente são postulações finas; ou entidades fora do nosso cone de luz como estrelas, galáxias, etc.

As postulações espessas são aquelas às quais temos acesso epistémico espesso. Ou seja, são postulações que podemos aceder de forma sensorial direta ou por intermédio de instrumentos de observação (microscópios, radares, aceleradores de partículas, etc.). São exemplo de postulações espessas os objetos macroscópicos (mesas, planetas, estrelas, etc.), bem como os objetos microscópicos (protões, bactérias, quarks, etc.).[3]

[3] As entidades que são postuladas no âmbito da matemática aplicada ou são postulações ultrafinas ou são postulações finas ou espessas.

5. Filosofia segunda

Penelope Maddy (1997, 2005, 2007, 2011) desenvolveu, num primeiro momento, uma nova forma de naturalismo pós-quiniano – o *naturalismo matemático*. Num segundo momento, esta forma de naturalismo foi posta em prática. Esta prática é chamada de *filosofia segunda*. Maddy defende que a matemática, se analisada na sua própria prática, é simultaneamente consistente com uma forma de realismo matemático e com uma forma de antirrealismo matemático, a saber: realismo fino matemático e arrealismo matemático. Esta conceção não é assim uma conceção inteiramente antirrealista, mas que acaba por se incluir neste capítulo.

5.1. Naturalismo matemático

O naturalismo matemático é uma forma de naturalismo derivada do naturalismo de Quine. O naturalista matemático concorda com a ideia de que a filosofia é uma atividade contínua com a ciência. A sua divergência com naturalismo quiniano é a respeito da própria matemática. Quine considera a matemática como uma disciplina científica: a matemática é uma disciplina que se sujeita ao mesmo método científico que governa as restantes ciências – o método hipotético-dedutivo. Em contraste, o naturalista matemático considera que a matemática é uma ciência, mas tem um estatuto diferente das restantes ciências. A matemática não é contínua com as outras ciências. Ele evoca duas razões para estas diferenças. Primeira, muitas teorias científicas que usam matemática, usam conteúdos matemáticos altamente sofisticados que apenas podem ser expressos por intermédio dessa linguagem matemática altamente especializada. Segunda, a matemática tem os seus próprios métodos e estes métodos são diferentes dos métodos das restantes ciências. Em geral, a matemática não usa o método hipotético-dedutivo, métodos observacionais ou testes experimentais. O método principal da matemática é o método demonstrativo:

umas proposições demonstram-se rigorosamente a partir de outras, sendo que estas, em última instância, dependem de axiomas.

Uma objeção imediata a esta pretensa singularidade da matemática, relativamente às outras ciências, é de que aparentemente não temos maneira de distinguir a matemática da astrologia. A astrologia também tem os seus próprios métodos, que são diferentes dos métodos científicos. A astrologia é uma pseudociência e, portanto, a matemática também será uma pseudociência.

A réplica do naturalista matemático é de que há uma diferença crucial entre a astrologia e a matemática. A matemática, ainda que tenha os seus próprios métodos, encontra aplicações nas restantes ciências. A astrologia, por sua vez, não encontra quaisquer aplicações nas restantes ciências. Estas aplicações fazem da matemática uma ciência. A inexistência de aplicações da astrologia faz da astrologia uma pseudociência.

Outra característica importante do naturalismo matemático é o seu *anti-holismo* e/ou *anticritério de compromisso ontológico de Quine*. As nossas teorias científicas estão comprometidas com entidades que de antemão sabemos que são ficções, idealizações ou questões em aberto. Vejamos alguns exemplos.

Ficções. No início do século XX, a teoria atómica possuía todas as virtudes enumeradas na secção 4.2 do capítulo anterior e, contudo, os cientistas em geral não estavam comprometidos com a existência de átomos. Foi necessário aguardar alguns anos por testes experimentais adicionais, e mais determinantes, para que a crença na existência de átomos se generalizasse na comunidade científica.

Idealizações. Não existem tais coisas como planos inclinados sem atrito, colisões elásticas ou fluidos contínuos. Contudo, estas idealizações são comummente utilizadas no âmbito das nossas teorias. Planos inclinados sem atrito são parte da teoria newtoniana; colisões elásticas entre moléculas são parte da teoria cinética dos gases; fluidos contínuos são parte da teoria dinâmica dos fluidos.

Questões em aberto. Comummente é assumido que o espaço-tempo é uma entidade física contínua. Isto resulta da própria teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde o espaço-tempo é uma variedade contínua. No entanto, a continuidade do espaço-físico é uma hipótese em aberto.

A conclusão que se pretende retirar destes exemplos é a seguinte. Apesar das nossas teorias científicas estarem comprometidas com entidades ficcionais, idealizações ou entidades especulativas, é prematuro afirmar que tudo o que está pressuposto numa teoria está em causa numa experiência científica. Na eventualidade das teorias passarem com sucesso testes experimentais relevantes, não decorrem comprometimentos ontológicos automáticos em volta das entidades pressupostas nessas teorias. Maddy não especifica se a "culpa" está no holismo ou no critério de compromisso ontológico de Quine. Pelo menos um deles é responsável por estes problemas.

O naturalista matemático não subscreve assim o argumento da indispensabilidade matemática. Relembre-se que o argumento da indispensabilidade se suporta nas doutrinas do naturalismo (de Quine) e do holismo e no critério de compromisso ontológico. Já vimos que o naturalismo matemático é diferente do naturalismo de Quine. O naturalista matemático tem também uma posição contrária ao holismo e/ou critério de compromisso do ontológico de Quine. O naturalismo matemático de Maddy disputa a primeira premissa do argumento da indispensabilidade matemática, enquadrando-se no chamado *caminho fácil do nominalismo*.

O naturalista matemático, quando realiza um estudo da matemática, não adota uma filosofia naturalista contínua com a ciência, pois, no seu entender, a matemática é uma disciplina à parte das restantes ciências. No seu entender, o estudo e a análise da matemática têm de ser contínuos com a própria matemática. Ou seja, as considerações metafísicas que se enraízam em considerações externas à matemática são desqualificadas, mesmo aquelas que sejam cientificamente suportadas numa outra ciência. Os debates metafísicos, em torno da matemática, são para ser considerados apenas numa ótica que considere razões internas à própria matemática.

Há um exemplo largamente discutido por Maddy a respeito de axiomas candidatos na teoria de conjuntos ZFC: o axioma da construtibilidade (conhecido por V=L) vs. os axiomas de grande cardinal. Na matemática pura entende-se que a teoria de conjuntos deve ser tão generosa quanto possível. Ou seja, não devem existir restrições ontológicas de partida que restrinjam a prática livre da matemática. À luz deste princípio, os axiomas de grande cardinal são axiomas mais apropriados do que o axioma da construtibilidade da teoria de conjuntos. No entanto, esta opção é contrária ao princípio de parcimónia, digamos, "menos é melhor". À luz deste mesmo princípio, Quine defendeu que o axioma de construtibilidade seria um melhor candidato para resolver uma série de questões em aberto da teoria de conjuntos (nomeadamente, a hipótese do contínuo). Ora, Maddy critica essa opção. No seu entender, o princípio de parcimónia pode ser válido em teorias científicas, mas não é válido nas teorias matemáticas. Assim, considera que os axiomas melhor posicionados para a resolução de problemas da teoria de conjuntos são os axiomas de grande cardinal, porque estes estão mais de acordo com a prática matemática.

5.2. Filosofia segunda

O conjunto de ideias anteriores, a respeito do naturalismo matemático, é posto em prática por Maddy na chamada *filosofia segunda*. A filosofia segunda descreve os pensamentos e práticas de um investigador idealizado – o filósofo segundo – em diversos contextos científicos. Note-se que a filosofia segunda não é uma doutrina ou um sistema de crenças, mas antes uma ação. Ou seja, a filosofia segunda é uma prática influenciada pela metodologia científica e que rejeita qualquer posição filosófica de investigação que seja extra-empírica. Defende-se uma subordinação da filosofia à ciência natural. No caso particular da matemática, defende uma subordinação da filosofia à matemática. Portanto, a filosofia segunda procede a uma inversão do sonho cartesiano. Descartes tentou fundar a ciência na metafísica – a chamada filosofia primeira; a filosofia segunda pretende fundar a própria filosofia ou, pelo menos, a filosofia da matemática na matemática. O *dictum* passa a ser *matemática primeiro*.

A matemática está repleta de afirmações de existência: existem conjuntos, existem números, existem espaços, e assim por diante. No entanto, de um ponto de vista interno à matemática, esta pouco ou nada diz acerca da natureza das entidades matemáticas. Considerações metafísicas sobre a existência de entidades matemáticas, enquanto entidades não localizadas no espaço-tempo ou enquanto criações mentais, são quase completamente estranhas à comunidade matemática. No entanto, as questões metafísicas não são para ser "lançadas às chamas", tal como Hume pretendia lançar toda a metafísica. Questões científicas sobre a natureza da atividade matemática humana são levadas a sério pelo filósofo segundo. Exemplos dessas questões são as seguintes:

> Como é que a linguagem matemática funciona? Será que se relaciona com o mundo da mesma forma que a linguagem da ciência natural? O que acontece quando os seres humanos começam a compreender as teorias matemáticas? Como é que a matemática funciona nos vários tipos de aplicações? (Maddy, 2007, p. 367)

Estas questões, por sua vez, conduzem ao levantamento de questões metafísicas: "As entidades matemáticas existem e, se sim, qual é a natureza da sua existência? São as proposições matemáticas verdadeiras e, se sim, como é que os humanos sabem que sim?" (Maddy, 2007, p. 367).

Realismo fino

O realismo fino é uma forma de realismo "fraco". Segundo esta conceção, a existência de entidades matemáticas é estabelecida pelas proposições matemáticas respetivas que as referem. Por exemplo, as proposições matemáticas da teoria de conjuntos afirmam que existem conjuntos, logo, existem conjuntos. Note-se que, de acordo com esta conceção, as entidades matemáticas são entidades abstratas e objetivas.

À primeira vista não parece haver diferença entre esta forma de realismo e outras formas de realismo precedentes como o platonismo matemático. Para estabelecer essas diferenças, Maddy contrasta esta forma de realismo com o chamado *realismo robusto*. O realismo fino é mais fraco do que o realismo robusto. O realismo robusto, por exemplo, considera que o estudo levado a cabo pela teoria de conjuntos é um estudo sobre uma alegada realidade independente e objetiva do matemático. Assim, para o realista robusto o valor de verdade da hipótese do contínuo é estabelecido por essa realidade independente. Ora, o filósofo segundo rejeita esta visão, porque a mesma não está de acordo com a prática matemática. Não é essa suposta realidade independente do matemático que irá ditar se a hipótese do contínuo é ou não verdadeira. Apenas os métodos matemáticos podem ditar o valor de verdade da hipótese do contínuo, independentemente do que outros possam pensar acerca dessa alegada realidade independente do matemático.

Uma vez que o realismo fino partilha com o realismo robusto a conceção de que as entidades matemáticas são acausais e não-espácio-temporais, o realismo fino também enfrenta o problema de Benacerraf. A resposta de Maddy a este problema é a seguinte: "conjuntos são o tipo de coisas que podem ser conhecidos por uma cuidadosa aplicação dos métodos da teoria de conjuntos" (Maddy, 2007, p. 369). As razões que levaram à aceitação dos axiomas da teoria de conjuntos são exclusivamente internas à matemática.

Arrealismo

Arrealismo é uma forma de antirrealismo. Segundo esta conceção, as entidades matemáticas não existem e não é um objetivo da matemática pura a descoberta de verdades. Esta conceção é motivada pela ideia de que a maior parte das postulações da matemática pura, no âmbito de teorias científicas, ocorre no contexto de idealizações ou simplificações. Por exemplo, assume-se que o espaço-tempo físico é contínuo quando não temos qualquer ideia firme acerca do mesmo; em estudos geográficos a respeito da superfície terrestre assume-se que esta é plana, quando efetivamente sabemos que a superfície terrestre não é plana; em estudos acerca do oceano assume-se que a profundidade do oceano é infinita, quando efetivamente sabemos que isso não é o caso. Na matematização da realidade também são feitas simplificações: assume-se que os planetas percorrerem trajetórias “perfeitamente” elípticas, quando efetivamente isso não é o caso; considera-se que uma partícula (e.g. molécula) é um ponto no espaço-tempo físico, quando se sabe que isso é uma simplificação, para conseguir tratar matematicamente o fenómeno.

Para se alcançar um estudo matemático de fenómenos físicos é necessário modelar matematicamente o fenómeno. Esta modelação pressupõe idealizações e simplificações. Assim, para um arrealista, dessa aplicação não resulta qualquer compromisso ontológico com as entidades matemáticas que surgem no tratamento matemático do fenómeno. Por sua vez, um arrealista também recusa que, nessa modelação, se tenha de assumir que a matemática usada é verdadeira ou que as entidades dessas teorias matemáticas existem. O arrealismo dissolve assim o problema de Benacerraf. Assumindo que não existem entidades matemáticas, não existe o problema de como podemos estabelecer uma relação causal com tais alegadas entidades.

*

A conclusão a retirar é de que o filósofo segundo convive bem com estas duas conceções metafísicas – realismo fino e arrealismo. O filósofo segundo não sente qualquer obrigação a tomar partido por qualquer das duas, porque ambas são consistentes com a prática matemática.

Leituras adicionais recomendadas

Azzouni (2015). Nominalism, the Nonexistence of Mathematical Objects.

Field (1982). Realism and Anti-Realism about Mathematics.

Maddy (2005). Three Forms of Naturalism.

(Página deixada propositadamente em branco)

Capítulo 6
Revoluções em Matemática

Este capítulo revisita os três primeiros capítulos do livro e constitui-se no fecho do livro. Começaremos por apresentar alguns dos aspetos mais importantes da teoria de Thomas Kuhn, sobre a estrutura das revoluções científicas, que enquadram os assuntos subsequentes do capítulo. Em seguida, analisaremos a questão da possibilidade da existência de revoluções em matemática. As três secções seguintes são três casos de estudo: argumenta-se que as geometrias não-euclidianas e a nova lógica de Frege foram revoluções na matemática; e o intuicionismo foi uma revolução matemática falhada. Terminaremos o capítulo com exemplos a favor da ideia segundo a qual a matemática é uma instigadora de revoluções científicas.

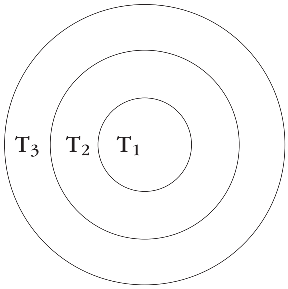
1. Introdução

O termo *revoluções* é um termo comum no nosso dia a dia. Fala-se de revoluções na arte, na política, na ciência, na indústria, na tecnologia e fala-se até de revoluções na vida pessoal. Este uso comum do termo parece simplesmente querer referir que existem mudanças radicais e abruptas a respeito de um curso de acontecimentos.

Em geral, faz parte do senso comum o conjunto seguinte de ideias: cada vez sabemos mais coisas acerca da natureza em nosso redor; cada vez sabemos melhor como se comporta a natureza em nosso redor; há uma contínua acumulação do conhecimento científico;

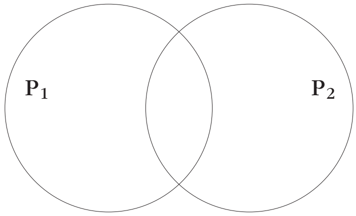
as novas teorias científicas suplantam as velhas teorias científicas, sendo que as velhas teorias são casos particulares das novas teorias; as teorias científicas são sucessivamente cada vez mais verdadeiras. Um modelo simplista deste conjunto de ideias é o seguinte.

Sejam T_1, T_2 e T_3 teorias científicas, tal que T_3 é mais recente do que T_2, e T_2 é mais recente do que T_1.



Contra esta visão, Thomas Kuhn publica *A Estrutura das Revoluções Científicas*, em 1962. Uma proposta radical: o desenvolvimento da ciência é um processo dinâmico. Períodos mais ou menos longos de prática da chamada *ciência normal* são interrompidos por períodos breves da chamada *ciência revolucionária*. As revoluções científicas produzem mudanças de paradigmas científicos. A cumulatividade do conhecimento científico apenas ocorre durante os períodos de ciência normal. Ou seja, o modelo anterior, quando muito, apenas será válido para teorias pertencentes a um mesmo paradigma.

O processo revolucionário é um processo de rutura com o paradigma científico precedente. Após uma revolução, o conhecimento científico anterior não é completamente acomodado no novo paradigma. Uma revolução científica é um processo não-cumulativo no conhecimento científico. Se P_2 for um paradigma que sucede revolucionariamente a P_1, então haverá partes de P_1 que se perdem irremediavelmente. Ou seja, há teorias científicas ou suposições do velho paradigma que se perdem. Numa transição revolucionária, a sobreposição de paradigmas será apenas parcial.



Consideremos um exemplo que ilustra esta ideia. Sejam dois paradigmas científicos rivais: o paradigma da teoria geocêntrica e o paradigma da teoria heliocêntrica. A teoria geocêntrica tinha como pressuposição fundamental a Terra no centro do universo e os restantes planetas, incluindo o próprio Sol (o Sol era visto como um planeta), gravitavam em torno da mesma. A teoria heliocêntrica coloca o Sol no centro do sistema solar (passando a ser uma estrela) e os restantes planetas gravitam em torno do mesmo. Portanto, na transição revolucionária, do paradigma geocêntrico para o paradigma heliocêntrico, não há uma continuidade entre as teorias respetivas. A teoria geocêntrica não é um caso particular da teoria heliocêntrica, porque, à luz da teoria heliocêntrica, a pressuposição fundamental da teoria geocêntrica é considerada como sendo uma pressuposição falsa.

Para conseguirmos obter uma compreensão do desenvolvimento da ciência é necessário empreender um estudo de história da ciência. A história da ciência é uma história intrincada e apenas esta pode revelar como funcionou e se modificou a ciência, ao longo dos tempos, e dar uma visão de conjunto do seu desenvolvimento. A filosofia da ciência não pode ser baseada apenas na ciência contemporânea ou numa história da ciência adulterada. As teses ou teorias filosóficas têm de estar em acordo com o que aconteceu na ciência ao longo da sua história.

Os cientistas, em geral, não são historiadores da ciência. O cientista de laboratório e o historiador até podem partilhar o mesmo método de investigação – o método hipotético-dedutivo. No entanto, as hipóteses do cientista no seu laboratório são acerca do que pode ocorrer no futuro; as hipóteses do historiador na sua pesquisa são acerca do que poderá ter ocorrido no passado.

Um cientista *qua* cientista pouco ou nada sabe da história da sua ciência. Ao longo da formação de um cientista, os conhecimentos gerais de história da ciência limitam-se a breves passagens "românticas" em manuais de ensino. Com fins pedagógicos, a história das disciplinas científicas é apresentada nos manuais de ensino como uma cronologia de heróis e feitos científicos do passado. A própria sequência dos conteúdos científicos dos programas disciplinares é reconstruída. A dinâmica do conhecimento científico é apresentada segundo uma estrutura linear e contínua de desenvolvimento. Os manuais de ensino são permanentemente reescritos à luz do paradigma dominante. As novas descobertas são ilusoriamente descritas como mais um "tijolo" a um longo "muro" de conhecimento, em construção desde a Antiguidade, desde que começou a existir ciência. Esta historiografia é assim assimilada pelos cientistas e inculcada nos estudantes como sendo *a* história do desenvolvimento científico. Mas esta é uma história presentista e, na verdade, adulterada.

Nos manuais de ensino há uma reescrita permanente da história da ciência, à luz do paradigma dominante em vigor. Vejamos um exemplo que ilustra esta ideia. Consideremos a definição de continuidade de uma função real de variável real. Nos manuais de ensino contemporâneos, esta definição é creditada a Cauchy. Contudo, a forma da definição contemporânea é muito diferente daquela originalmente apresentada por Cauchy, no seu próprio manual.

A definição de Cauchy, no seu célebre *Curso de Análise*, de 1821:

> Seja $f(x)$ uma função de uma variável x e supondo que, para cada valor de x entre dois dados limites, esta função constantemente toma um valor finito. Se, a partir do valor de x entre esses limites, se se atribui à variável x um incremento infinitamente pequeno α, a função ela mesma receberá como incremento a diferença
>
> $$f(x + \alpha) - f(x),$$

que depende simultaneamente da nova variável α e do valor de x. Assumindo isto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites atribuídos à variável x, função contínua desta variável, se, para cada valor de x intermédio entre estes limites, o valor numérico da diferença

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decresce indefinidamente com α. Por outras palavras, *a função f (x) permanecerá contínua relativamente a x entre os limites dados, se, entre estes limites, um crescimento infinitamente pequeno da variável produz sempre um crescimento infinitamente pequeno da função ela própria*. (Cauchy, 1821, pp. 34-35)

Consideremos agora a definição de continuidade de uma função real de variável real apresentada num manual contemporâneo de matemática:

A função f é contínua em a se

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}:\forall_{x>0},\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

(Spivak, 2008, pp. 101, 103)

As duas definições são formuladas de forma muito diferente, ainda que, eventualmente, expressem uma mesma ideia. Apesar destas diferenças formais, a definição de continuidade de uma função é contemporaneamente creditada a Cauchy. Note-se que a noção de quantificador universal, utilizada na segunda definição, apenas foi introduzida por Frege no final do século XIX, mas a notação que Frege usou para o efeito nem sequer era a que é usada contemporaneamente.[1]

[1] O quantificador universal foi criado por Frege em *Begriffsschrift*, mas o símbolo contemporâneo do mesmo só surge depois de Frege.

A Estrutura das Revoluções Científicas foi publicada em 1962 e continua a ser uma das obras mais importantes de filosofia da ciência do século XX. *A Estrutura* é estudada em qualquer curso de filosofia da ciência, a nível mundial. Este é o livro mais citado de sempre na área das ciências sociais. A proposta avançada neste livro foi de tal forma original e fecunda que temas atuais de investigação em filosofia da ciência continuam a gravitar em torno de conceitos originalmente propostos nesse livro, como *revolução*, *paradigma* e *incomensurabilidade*. Conjuntamente com toda a discussão de aspetos internos da obra, surgiram linhas de investigação que tentaram aplicar o modelo kuhniano à história de disciplinas científicas particulares. Em particular, e para o que nos interessa neste capítulo, existem algumas publicações científicas que procuraram aplicar o modelo kuhniano a episódios da história da matemática, explorando a hipótese da existência de revoluções em matemática.

Dito isto, é verdadeiramente escandaloso que os cursos de filosofia da matemática ignorem a obra de Kuhn e a temática das revoluções em matemática. Pois, tanto quanto sei, nenhum manual de filosofia da matemática aborda a obra de Kuhn ou a temática das revoluções em matemática. Parece que o preconceito segundo o qual *não há revoluções em matemática* continua a fazer o seu caminho na filosofia da matemática. O que vamos fazer neste capítulo é contrário a este estado de coisas. Numa primeira parte, apresentaremos uma síntese geral das ideias principais do ciclo kuhniano de desenvolvimento científico; e, numa segunda parte, sintetizaremos tentativas autorais de aplicação do ciclo kuhniano a episódios revolucionários da história da matemática. Consideraremos a revolução na geometria, baseada em Luciano Boi (1992) e Yuxin Zheng (1992); a revolução na lógica, segundo a análise de Donald Gillies (1992c); a revolução (falhada) da matemática intuicionista, segundo a análise de Bruce Pourciau (2000); e terminaremos com a perspetiva de Stephen Brush (2015) sobre a matemática como uma instigadora de revoluções científicas.

2. A estrutura das revoluções científicas

O ciclo do desenvolvimento científico kuhniano tem a estrutura seguinte:

Ciência Normal/ /Paradigma → Anomalias → Crise → Revolução Científica

Analisemos cada um dos elementos principais do ciclo de desenvolvimento científico.

2.1. Ciência normal

A atividade de ciência normal apenas ocorre em ciências maturas que partilham um paradigma científico para o seu desenvolvimento. A ciência normal é caracterizada pela atividade de resolução de quebra-cabeças. Um quebra-cabeças é visto como um problema científico. Não há nada de profundo nesta noção de *quebra-cabeças*. Um quebra-cabeças científico é como um quebra-cabeças de palavras cruzadas, xadrez ou sudoku, no sentido que é preciso dominar uma técnica para a sua resolução. Esta técnica de resolução de problemas pode ser uma técnica laboratorial ou mesmo uma qualquer técnica teórica. Uma constante resolução de problemas mas que não questiona as teorias que fundamentam o paradigma, de onde esses problemas emergem. A atividade de ciência normal não é propriamente uma atividade para a criação de novidades.

A atividade de ciência normal consiste numa permanente articulação e refinação das teorias, de um dado paradigma, com os próprios dados empíricos da natureza. “A ciência normal deve continuamente empenhar-se para que as teorias e os factos estejam cada vez mais em concordância” (Kuhn, 1996, p. 80). A atividade de ciência normal é assim uma atividade inteiramente cumulativa, a respeito do conhecimento que proporciona. A atividade de ciência normal vai acrescentando “tijolos” ao muro do paradigma em que a mesma se desenrola.

2.2. Paradigma

A noção de paradigma é um tanto ou quanto vaga e "circular". Um paradigma é aquilo que é partilhado por uma comunidade científica; uma comunidade científica define-se por partilhar um mesmo paradigma.

Numa comunidade científica, a partilha não se constitui somente na partilha de teorias empíricas centrais à comunidade, mas também na partilha de técnicas de resoluções de problemas, valores científicos e crenças metafísicas (Kuhn, 1996, pp. 181-187). Num sentido global, um paradigma é aquilo que abarca todos os compromissos de uma comunidade científica. Um paradigma é uma matriz disciplinar que envolve o conjunto de crenças, valores e técnicas de uma comunidade científica.

Uma forma de identificar concretamente um paradigma é identificar as leis, as teorias científicas e os exercícios exemplares que são partilhados pela comunidade científica em questão. Os exercícios exemplares são aqueles exercícios clássicos que são partilhados por todos os membros da comunidade científica, aquando da sua educação científica. Cada comunidade científica tem o seu conjunto de exercícios exemplares clássicos, tal como cada comunidade científica tem o seu paradigma. Estes exercícios encontram-se em manuais, sebentas, aulas práticas ou experiências laboratoriais. Na verdade, acabam por ser o elemento mais fundamental na formação de um estudante.

Por exemplo, ao nível universitário do ensino de matemática são exercícios exemplares, no âmbito da Análise Matemática, o cálculo diferencial e integral, a aplicação das definições de limite e de continuidade, a análise de gráficos de funções, etc.; no âmbito da Álgebra Linear, são exercícios exemplares as resoluções de sistemas de equações por diferentes técnicas, o cálculo matricial, etc. Estes conteúdos programáticos e respetivos exercícios são comuns a qualquer disciplina sobre o assunto, no ensino universitário do mundo ocidental.

2.3. Anomalias e crise

A atividade de ciência normal consiste na resolução de quebra-cabeças e não é propriamente uma atividade que esteja dirigida para a descoberta de novidades. Uma novidade é uma anomalia. Uma anomalia não encaixa no paradigma em que se desenrola a atividade de ciência normal. Em certa medida, uma anomalia é como se a natureza surpreendesse o cientista no seu trabalho de investigação. Note-se, no entanto, que as anomalias resultam da própria atividade de ciência normal. A relação da atividade de ciência normal com o aparecimento de anomalias é paradoxal. Quanto mais preciso e refinado é o paradigma que coordena a atividade de ciência normal, tanto mais este é sensível ao aparecimento de anomalias.

Podem-se distinguir dois tipos de anomalias: umas, mais insignificantes, são resolvidas pela própria atividade de ciência normal; outras, mais sérias, conduzem a crises científicas. As crises científicas, por sua vez, conduzem a períodos de ciência extraordinária. O período de ciência extraordinária é um período de convolução com duas saídas possíveis. Numa saída, não se consegue resolver a anomalia, sendo esta colocada "entre parêntesis" para uma análise futura, esperando que mais tarde alguma nova teoria científica a consiga resolver. Há um regresso à atividade de ciência normal que se desenrola ainda no âmbito do paradigma que esteve na origem da anomalia. Noutra saída, a anomalia e a crise que ela espoletou resolvem-se por uma mudança de paradigma. Neste caso ocorre uma revolução científica.

Analogamente às crises políticas ou de regime, uma crise é um período de insegurança profissional dos cientistas. O paradigma que coordena a atividade de ciência normal é questionado pela comunidade de cientistas que trabalham na área científica em que o paradigma se desenrola. Uma das características dos períodos de crise é a proliferação de novas teorias e de experiências de pensamento com vista a solucionar as anomalias no interior do paradigma (Kuhn, 1977, p. 263).

2.4. Revolução científica

A transição de um período de ciência extraordinária, para um novo período de ciência normal, com um novo paradigma, opera-se por intermédio de uma revolução científica. Sucintamente, uma revolução científica é uma mudança de paradigma.

O acumular de anomalias, e a crise que lhe está associada, conduzem a um extremar de posições entre os cientistas. Inicialmente, um grupo maioritário, digamos, um grupo reacionário, defende o "velho" paradigma contra grupos minoritários, digamos, grupos "revolucionários", que propõem "novos" paradigmas candidatos à sucessão. O que geralmente acontece é que as posições acabam por se extremar. Há uma quebra na comunicação entre os cientistas. Por um lado, alguns termos científicos sintaticamente iguais começam a ter significados diferentes; por outro lado, alguns termos antigos caem em desuso e começam a surgir novos termos com novos significados. Ou seja, os cientistas pertencentes a paradigmas rivais acabam por ter grandes dificuldades em comunicar. No final deste período conturbado há um "novo" paradigma que acaba por substituir o "velho" paradigma.

Por muito grande que seja a crise científica numa dada disciplina, o paradigma científico que a suporta nunca é abandonado se não houver um paradigma alternativo que o substitua. Ou seja, não existe tal coisa como uma atividade científica matura e longa no tempo sem haver um paradigma que a suporte. O paradigma ptolemaico foi acumulando anomalias durante séculos e nunca foi abandonado, enquanto não surgiu um paradigma alternativo – o paradigma copernicano. Esta exigência de haver necessariamente uma alternativa paradigmática "positiva" para o corte com o passado, a par da crise resultante das anomalias, faz com que as revoluções científicas sejam fenómenos raros.

Após uma revolução, as novas teorias científicas emergentes no novo paradigma são, em certa medida, incompatíveis com as teorias científicas do velho paradigma. Há uma *incomensurabilidade* entre paradigmas. A incomensurabilidade tem três dimensões: epistémica, semântica ou de mundos.

Diz-se que uma mudança é incomensuravelmente epistémica, quando há dificuldades em comparar as virtudes epistémicas de paradigmas rivais como a fecundidade, o alcance, a simplicidade e a comprovação empírica. Este tipo de incomensurabilidade pretende defender que não existe um ponto de vista neutro que consiga comparar "as virtudes e os defeitos" de teorias científicas pertencentes a paradigmas rivais.

Diz-se que uma mudança é incomensuravelmente semântica quando os significados de termos científicos se modificam na transição entre paradigmas rivais. Por exemplo, para um newtoniano a *massa* de um objeto é fixa, enquanto para um einsteiniano a *massa* de um objeto é convertível em energia; no modelo geocêntrico, "Sol" significa planeta, enquanto no modelo heliocêntrico, "Sol" significa estrela.

Finalmente, com uma mudança de paradigma há também "visões" da realidade que são incomensuráveis. Na mudança paradigmática, os cientistas começam a ver o mundo à sua volta de forma diferente. Há uma mudança abrupta.

> apesar de o mundo não mudar com uma mudança de paradigma, o cientista em seguida trabalha num mundo diferente. (Kuhn, 1996, p. 121)

> Durante as revoluções, os cientistas veem coisas novas e diferentes quando (...) olham para os mesmos aspetos já examinados anteriormente. É como se a comunidade profissional tivesse sido subitamente transportada para um novo planeta (...) [N]uma mudança de paradigma os cientistas começam a ver o seu mundo de investigação de forma diferente. (Kuhn, 1996, p. 111)

> [o]s membros de comunidades científicas diferentes vivem em mundos diferentes, e (...) as revoluções científicas mudam o

> mundo em que um cientista trabalha (Kuhn, 1977, p. 309, nota 18)

3. Sobre a possibilidade de revoluções em matemática

A Estrutura aborda exemplos de teorias revolucionárias que ocorreram essencialmente na Física, na Química e na Astronomia. No entanto, Kuhn nunca refere qualquer exemplo de uma teoria matemática revolucionária. A matemática ficou de fora da análise de Kuhn e, tanto quanto sei, não há nenhuma passagem onde ele avance uma explicação para esta exclusão.

O problema que temos assim entre mãos é saber se podem existir revoluções em matemática. Precisamente, o problema é saber se a teoria kuhniana – os seus conceitos e a sua estrutura – pode ser aplicada inteira ou parcialmente ao desenvolvimento da história da matemática. Este problema é um problema extremamente difícil. Primeiro, não existe um consenso sobre o que seja a teoria kuhniana de desenvolvimento científico. Como vimos atrás, os conceitos das diferentes etapas da estrutura de uma revolução científica, como *ciência normal* e *paradigma*, são conceitos um tanto ou quanto imprecisos e vagos. Não existe um consenso sobre o que efetivamente seja uma revolução científica kuhniana. Segundo, como fomos constatando ao longo deste livro, também não existe um consenso sobre o que seja a matemática. A matemática é acerca de criações mentais? É acerca de objetos abstratos? O conhecimento matemático é *a priori* ou *a posteriori*? Nem sequer parece que exista uma fronteira clara que separe a matemática de outras áreas disciplinares.

A referência do termo *revolução matemática* determina, assim, a discussão sobre a possibilidade da existência de revoluções em matemática. Ou seja, a possibilidade da existência de revoluções em matemática depende da definição ou da caracterização de partida do que se entende por *matemática* e do que se entende por *revolução*. Consideremos agora três ângulos diferentes de análise deste problema:

um defende que as revoluções em matemática são impossíveis; e os outros dois defendem que as revoluções matemáticas são possíveis, mas são possíveis por razões diferentes.

Michael Crowe (1992) defende que “nunca ocorrem revoluções na matemática”. Segundo a interpretação que Crowe faz da teoria de Kuhn, quando ocorre uma revolução científica, necessariamente, alguma entidade do paradigma precedente é irremediavelmente descartada e perdida. Quando o modelo ptolemaico foi completamente substituído pelo modelo coperniciano, a noção de *epiciclo* foi irremediavelmente perdida, sendo transformada em trajetórias planetárias de movimento elíptico, pela mão de Kepler. Na revolução química, o flogisto foi substituído pelo oxigénio. Na revolução relativista, a noção de *massa*, como sendo uma propriedade imutável dos corpos e das partículas, foi substituída por uma noção de *massa* com outro significado, como sendo uma propriedade dos corpos e das partículas convertível em energia.

Ora, segundo Crowe, o desenvolvimento de novas teorias matemáticas nunca conduz a uma eliminação de teorias matemáticas passadas. Mesmo do ponto de vista ontológico, não parece que entidades matemáticas sejam alguma vez eliminadas. Por exemplo, as “novas” geometrias não-euclidianas estavam comprometidas com triângulos, cuja soma dos ângulos internos é maior ou menor do que 180º. No entanto, as geometrias não-euclidianas não conduziram à eliminação da figura triangular euclidiana cuja soma dos ângulos internos perfaz exatamente 180º. Esta é a décima lei de Crowe:

> *As revoluções nunca ocorrem na matemática* (...) esta lei depende, pelo menos, na estipulação mínima de que uma característica de uma revolução é de que uma entidade previamente existente (seja um rei, constituição ou teoria) deve ser deposta e irrevogavelmente eliminada. O meu argumento é baseado numa distinção entre descobertas revolucionárias ou transformacionais (astronomia ptolemaica “transformada” em astronomia coperniciana) e descobertas criativas (onde

> novas áreas são formadas ou criadas sem a eliminação de doutrinas anteriores). Creio que é este último processo, em vez do primeiro, que ocorre na história da matemática. (Crowe, 1992, p. 19)

Na sua análise do conceito *revolução matemática*, Crowe usa os termos *revolução* e *matemática* em sentidos bastante restritos. O termo revolução é interpretado como "descartar de entidades de teorias passadas". O termo *matemática* é usado apenas para referir teorias e conceitos matemáticos. Crowe ignora outros aspetos da matemática como a sua nomenclatura, simbolismo, metodologia e princípios meta-matemáticos. Portanto, a lei de Crowe não é incompatível com a possibilidade de haver revoluções em matemática, desde que se adote uma caracterização mais ampla dos termos *revolução* e/ou *matemática*.

Joseph Dauben (1992) concorda com Crowe que, se fizermos uma interpretação restrita do termo *revolução*, tal como Crowe a faz, necessariamente, as revoluções em matemática são impossíveis. Segundo Dauben, não parece que em momento algum da história da matemática esta tenha perdido irremediavelmente as entidades que foi propondo. Dauben, no entanto, não concorda com a interpretação restrita do termo *revolução* que é efetuada por Crowe. No seu entender, uma revolução matemática não implica necessariamente que uma entidade ou teoria matemática seja irremediavelmente eliminada na transição revolucionária.

Eis uma analogia estabelecida por Donald Gillies (1992a). Na transição revolucionária de um regime absolutista para um regime não-absolutista podemos identificar dois tipos de revoluções. Em algumas revoluções, o monarca é irremediavelmente destituído; noutras, o monarca mantém-se como figura do regime, mas com poderes bastante diminuídos relativamente ao regime precedente. Por exemplo, na *revolução russa*, o monarca (Czar Nicolau II) foi assassinado e destituído para todo o sempre. Iniciou-se um novo regime político. Na revolução inglesa, o monarca (Carlos II sucedeu a seu pai, Carlos I) manteve-se como figura do regime, mas continuou a exercer na chamada *monarquia parlamentar*, com poderes bastante mais diminutos do que no anterior regime.

A analogia anterior permite identificar dois tipos de revoluções científicas. Nas revoluções científicas do tipo *revolução russa*, as entidades do paradigma precedente são irremediavelmente descartadas. Por exemplo, o modelo ptolemaico foi completamente descartado pelo modelo coperniciano. Nas revoluções científicas do tipo *revolução inglesa* não há qualquer eliminação de entidades, mas as teorias científicas precedentes perdem radicalmente muita da sua importância. Por exemplo, a teoria clássica newtoniana perdeu muita da sua importância com a revolução relativista einsteiniana, mas ainda assim continua a aplicar-se para velocidades muito inferiores à velocidade da luz. As revoluções matemáticas são revoluções deste segundo tipo.

> É muitas vezes claro que as novas ideias [matemáticas] nunca teriam sido permitidas no âmbito duma interpretação construída estritamente no interior da matemática anterior, mesmo se a nova matemática encontrar maneiras de acomodar as descobertas antigas de forma consistente ou compatível. Muitas vezes, muitos dos teoremas e descobertas da matemática anterior são relegados para uma posição muito menos relevante, como resultado da revolução conceptual que faz emergir uma nova teoria ou disciplina matemática. (Dauben, 1992, p. 52)

Bruce Pourciau (2000) considera que efetivamente existem revoluções matemáticas no seguinte sentido kuhniano de revolução científica: existência de episódios não-cumulativos de desenvolvimento na matemática. Algumas verdades matemáticas do velho paradigma podem não ser traduzíveis no novo paradigma e, assim, serem irremediavelmente perdidas. Contrariamente a Dauben e Crowe, Pourciau acaba por se aproximar da ideia de que as revoluções em matemática podem ser assim do tipo *revolução russa*, onde verdades matemáticas se perdem irremediavelmente. Ou seja, os velhos teoremas não são traduzíveis no novo paradigma. No seu entender, este tipo de desenvolvimento da matemática não contradiz a própria natureza do conhecimento matemático.

> As revoluções kuhnianas são logicamente possíveis, no sentido de que não são inconsistentes com a natureza da matemática; e, em segundo lugar, as revoluções kuhnianas são atualmente possíveis, no sentido de que pode ser mostrado um paradigma kuhniano para a matemática que produziria uma revolução kuhniana total, se tivesse sido aceite pela comunidade matemática. (Pourciau, 2000, p. 300)

O exemplo que Pourciau explora é o da transição da matemática clássica para a matemática intuicionista. No seu entender, esta foi uma transição revolucionária (falhada) incomensurável, no sentido em que os teoremas da matemática clássica não preservam o seu significado, quando traduzidos no paradigma da matemática intuicionista; nem sequer são inteligíveis no novo paradigma. Todavia, esta revolução acabou por não vingar, mas por razões históricas, e o paradigma da matemática clássica manteve-se dominante.

4. Revolução na geometria

Revisitemos agora aspetos do capítulo 1, a respeito do surgimento das geometrias não-euclidianas. Analisemos em que medida o surgimento das geometrias não-euclidianas pode ser considerado como uma revolução matemática.[2]

Relembremos a formulação original do *postulado das paralelas*, estabelecida no *Elementos* de Euclides:

> Se uma linha reta cair sobre duas linhas retas e fizer ângulos internos de um mesmo lado menores do que dois ângulos retos,

[2] Esta secção é baseada em Boi (1992) e Zheng (1992).

> então as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se num ponto do lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos. (Euclides, 2008, p. 7)

Como vimos no capítulo 1, desde a Antiguidade houve várias tentativas de tornar mais claro o próprio postulado ou então tentar derivar o postulado a partir dos outros postulados euclidianos. Este postulado pode ser visto como uma *anomalia* no interior do sistema euclidiano.[3]

Quando surgiram as primeiras formulações das geometrias não-euclidianas, no início do século XIX, começou a instalar-se uma crise na geometria. A crise da geometria tinha duas facetas. Primeira, até ao aparecimento das geometrias não-euclidianas, a geometria euclidiana era considerada como *a* geometria do espaço físico. Não havia qualquer distinção entre o espaço geométrico euclidiano e o espaço físico. A criação das geometrias não-euclidianas questionou esta indistinção e, a montante, conduziu ao questionamento dos fundamentos epistémicos e matemáticos das geometrias em geral. A questão que pressionava os matemáticos e os filósofos era a seguinte: se a geometria euclidiana não se aplicasse ao espaço físico e o fundamento epistémico da geometria euclidiana fosse a experiência, então, ou a geometria euclidiana não era verdadeira ou a geometria euclidiana não se fundamentava na experiência. Segunda, ao nível dos fundamentos matemáticos da geometria, as investigações procuravam formular demonstrações de consistência das novas geometrias não-euclidianas, esclarecer as relações lógicas entre as diferentes geometrias e procurar uma base axiomática mais clara para a própria geometria euclidiana que estava a ser questionada.

A crise da geometria termina no início do século XX. As questões da aplicabilidade ao espaço físico e dos fundamentos epistémicos da geometria foram (acidentalmente) resolvidas pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Esta teoria estabelece que o espaço

[3] Além desta anomalia recalcitrante em torno do postulado das paralelas, muitas outras anomalias foram sendo identificadas no sistema euclidiano.

físico, mais apropriadamente, o espaço-tempo obedece à geometria não-euclidiana e não obedece à geometria euclidiana.

Determinar qual era a verdadeira geometria do espaço físico tornou-se assim um assunto empírico, quer do ponto de vista científico, quer do ponto de vista epistémico. Para a escola filosófica dominante deste período – o positivismo lógico – bem como para a sua herdeira – o empirismo lógico – a geometria passou a fundamentar-se na experiência. Ou seja, para estas duas escolas é a experiência que determina qual é a geometria verdadeira. A doutrina kantiana do criticismo, a doutrina segundo a qual o espaço geométrico era uma forma pura da intuição, foi definitivamente rejeitada, bem como as propostas convencionalistas de Poincaré sobre a geometria.

As geometrias não-euclidianas representaram também uma revolução ao nível da metamatemática. Foi descartada a crença segundo a qual a geometria euclidiana descrevia o espaço físico e que seria a única teoria matemática consistente sobre o espaço físico. As geometrias não-euclidianas contribuíram para destronar a geometria euclidiana como paradigma formal de demonstração para as restantes teorias matemáticas. Recorde-se que Frege, no final do século XIX, procurou derivar a aritmética de princípios lógicos. Ou seja, a Aritmética assumiu-se como a disciplina rainha da matemática, ao invés da Geometria. Entrou-se no período chamado de *aritmetização da matemática*.

Numa carta redigida em 1817, Gauss já observava que a geometria devia ser relegada para o domínio empírico e com um estatuto diferente da aritmética.

> Estou cada vez mais convencido que [o carácter de] necessidade da nossa geometria [euclidiana] não pode ser provada, pelo menos, pela razão humana nem para a razão humana. Talvez numa outra vida possamos obter uma compreensão da natureza do espaço que agora não é atingível. Até lá deveremos colocar a geometria não na mesma classe da aritmética, que é totalmente *a priori*, mas na classe da mecânica (Gauss, 1900/2011, p. 170)

Cristalizou-se então uma conceção epistémica de cariz empírico para a geometria que alguns filósofos acabaram por estender a toda a matemática, como Quine e Lakatos.

Para além das mudanças ao nível da metamatemática, há dois outros aspetos de relevo associados às geometrias não-euclidianas e que "assentam que nem uma luva" na proposta de Kuhn da estrutura das revoluções. Kuhn defendeu que, aquando de uma revolução científica, há um período chamado de *florescimento disciplinar*. O florescimento disciplinar é constituído pelo aparecimento de novas disciplinas. As novas disciplinas podem surgir por um processo de divisão disciplinar ou por um processo de fusão disciplinar. Por exemplo, a Física foi derivada da Filosofia Natural; a Bioquímica é resultado de uma fusão da Biologia e da Química.

O aparecimento das geometrias não-euclidianas foi um novo ramo da matemática: "[n]o meio de todas as criações técnicas complexas do século XIX, a mais profunda de todas, a geometria não-euclidiana, era tecnicamente a mais simples. *Esta criação deu origem a novos ramos da matemática*." (Kline 1972, 861, itálico meu). Foram criadas as geometrias elípticas (simples e dupla) e a geometria hiperbólica. O aparecimento das geometrias não-euclidianas enquadra-se assim no chamado *florescimento disciplinar* kuhniano.

As geometrias não-euclidianas demoraram muito tempo a serem aceites pela comunidade matemática. Após a publicação dos trabalhos de Bolyai e Lobachevskii, no início do século XIX, estas geometrias foram ignoradas por quase toda a comunidade matemática, durante mais de trinta anos. Aqueles que porventura as conheciam, ou as consideravam uma mera curiosidade ou, preconceituosamente, as classificavam como sendo internamente inconsistentes sem, obviamente, avançarem qualquer demonstração para o efeito. Apenas com a publicação póstuma dos trabalhos de Gauss sobre o assunto, na segunda metade do século XIX, bem como com a publicação dos trabalhos realizados por Riemann, as geometrias não-euclidianas começaram a ser respeitadas pela comunidade matemática (Kline, 1980, p. 88).

Este desenvolvimento "silencioso" ou controverso daquilo que é cientificamente revolucionário é também uma das características das revoluções científicas. Nomeadamente, a resistência à mudança de paradigma que os cientistas revelam numa transição revolucionária.

> As obras de Lobachevskii e Bolyai não tiveram, aquando da sua publicação, o acolhimento que tantos séculos de lenta e continua preparação pareciam prometer. No entanto, isto não nos deve surpreender, porque a história da ciência ensina-nos que toda a mudança radical nas suas disciplinas particulares não altera repentinamente as convicções e os preconceitos sobre os quais os pensadores e estudiosos, durante um longo período, edificaram as suas doutrinas. (Bonola, 1906, sec. 60)

A este respeito, Kuhn cita uma passagem da autobiografia de Max Planck, ainda mais dramática que a observação de Bonola: "uma nova verdade científica não triunfa convencendo os seus oponentes a ver a luz, contrariamente, triunfa porque os seus oponentes acabam por morrer e uma nova geração cresce familiarizada com a mesma" (Planck, 1950, pp. 33-34).

5. Revolução na lógica

Revisitemos agora a nova lógica de Frege, introduzida no capítulo 2. Donald Gillies (1992c) defende que existiu uma revolução na lógica durante o período 1879-1931. Esta revolução começa em 1879 com a publicação de *Begriffsschrift* [Notação conceptual] de Gottlob Frege e termina em 1931 com a publicação dos teoremas da incompletude de Gödel.

> A publicação de *Begriffsschrift* marcou, como Quine afirma, o início da lógica moderna. Esta obra surpreendente foi realizada com o intuito de constituir o quadro lógico no qual a formalização

das diferentes teorias matemáticas seria realizada. É a primeira formulação do cálculo funcional de segunda ordem. É surpreendente porque não tem predecessores: parece ter nascido do cérebro de Frege sem ser fertilizado por influências externas. (Dummett, 1993a, p. xvii)

Gillies considera que a revolução na lógica é uma revolução do tipo *revolução inglesa*. Não há uma supressão de entidades ou de teorias matemáticas passadas; em vez disso, há uma transformação radical da matemática ou de uma sua especialidade, na qual as teorias matemáticas anteriores perdem muita da sua importância.

Com vista a aplicar a estrutura kuhniana de análise ao nascimento da lógica de Frege, Gillies introduz duas ligeiras modificações na noção de *paradigma* de Kuhn. Primeira, Gillies rejeita a ideia de Kuhn de que paradigmas diferentes são incomensuráveis e, como tal, são incomparáveis. Ou seja, Gillies interpreta Kuhn como considerando que incomensurabilidade é sinónimo de incomparabilidade. Em alternativa, Gillies defende que paradigmas diferentes podem ser comparados, embora concorde que pode haver uma modificação dos termos de uma linguagem através de diferentes paradigmas. Por exemplo, o termo *planeta* tem significados diferentes consoante o usemos no paradigma ptolemaico ou no paradigma coperniciano. Em Ptolomeu, o Sol é um planeta; em Copérnico, o Sol não é um planeta (é uma estrela). Segunda, Gillies rejeita a ideia de Kuhn de que um novo paradigma nasça como uma espécie de "flash da intuição". Nem sempre isso é o caso e, geralmente, o processo é exatamente o inverso:

Em geral, no entanto, um novo paradigma é concebido sobre um período muito mais longo, e por um processo que pode envolver flashes de inspiração, mas também pode envolver longos períodos de investigação dolorosa e sistemática. (Gillies, 1992c, p. 267)

Gillies compara a revolução fregiana na lógica à revolução einsteiniana na física. Apesar de revolução de Einstein, a física de Newton ainda continua a ser válida para velocidades muito inferiores à velocidade da luz. Apenas para velocidades próximas da velocidade da luz é que as leis de Newton deixam de ser válidas. Analogamente, a lógica de Aristóteles continua a ser válida para alguns tipos de silogismos, mas não para todos.

Uma forma de identificar os paradigmas científicos consiste em analisar os conteúdos dos manuais académicos. Gillies faz uma análise cuidadosa dos manuais de lógica publicados durante o final do século XIX e durante o século XX, em Inglaterra. O manual *Studies and Exercises in Formal Logic*, de John Neville Keynes, foi publicado em 1894 e teve várias edições até 1906. Outro livro importante foi o de P. Coffey, *The Science of Logic*, de 1912. Ambos os livros eram inteiramente aristotélicos. Não tinham qualquer referência à lógica proposicional e à lógica de predicados de Frege. São manuais considerados como pré-revolucionários. Gillies contrasta estes manuais com os manuais publicados nos anos 60 e 70, e que não tinham qualquer referência à lógica aristotélica: *Introduction to Mathematical Logic* de E. Mendelson (1964) e *A Course in Mathematical Logic* de J. L. Bell e M. Machover (1977). São manuais considerados como pós-revolucionários. São manuais que já refletem o novo paradigma.

Importa referir que, ao invés do que acontece no mundo anglo-saxónico, em Portugal, ainda não estamos completamente no novo paradigma da lógica moderna. Vive-se ainda um período de crise, mas já na sua fase terminal, que antecede o estabelecimento pleno de um novo paradigma. Existem no mercado português vários manuais com conteúdos em Lógica Aristotélica (e.g. Philippe Thiry, *Noções de Lógica*, (Lisboa: Edições 70, 2010)). No entanto, também já existem manuais que não fazem qualquer referência à Lógica Aristotélica (Newton-Smith, *Lógica – um Curso Introdutório*, (Lisboa: Gradiva, 1998)). No ensino não-universitário de Filosofia, o programa oficial contempla ambas as lógicas (a aristotélica e a proposicional), cabendo ao docente optar por uma delas. Ao nível do ensino não-universitário de matemática, a Lógica Aristotélica não existe nos programas, pelo menos, há mais de 30 anos, e nem sei se alguma vez foi sequer ministrada neste nível de ensino.

No ensino universitário, a Lógica Aristotélica desapareceu quase totalmente dos conteúdos dos cursos de Filosofia. A Lógica Aristotélica começa agora a reemergir nos planos de estudos dos cursos de Filosofia, mas enquanto um conteúdo de disciplinas de História da Lógica. Este enquadramento nas disciplinas de História é um sintoma claro da mudança paradigmática em curso. É como se a teoria de Newton começasse apenas a ser ensinada na disciplina de História da Ciência, deixando de fazer parte dos conteúdos das disciplinas de Física como a Mecânica ou a Dinâmica.

5.1. Declínio da lógica aristotélica

O paradigma dominante na lógica, antes da revolução, era o paradigma da lógica aristotélica. A lógica aristotélica nasce justamente com Aristóteles, na Grécia Antiga, e imperou até ao final do século XIX.

Na lógica aristotélica existem quatro proposições categóricas:

A) Todo S é P.
E) Nenhum S é P.
I) Algum S é P.
O) Algum S não é P.

Sendo que as letras S e P representam os termos *sujeito* e *predicado*, respetivamente. A partir destas proposições podem-se construir os chamados silogismos aristotélicos. Um silogismo é constituído por duas premissas e uma conclusão, sendo que uma das premissas é chamada de *premissa maior* e outra é chamada de *premissa menor*. Por exemplo:

1) Todos os homens são mortais.
2) Todos os presidentes são homens.
Logo, todos os presidentes são mortais.

Aristóteles defendeu que as proposições A e E eram proposições contrárias: não podiam ser ambas verdadeiras, mas ainda que pudessem ser ambas falsas.

Ora, à luz da nova lógica de Frege, *não é verdade que proposições contrárias não possam ser ambas verdadeiras. Este é o primeiro "rombo" no paradigma aristotélico. Consideremos as frases seguintes.*

1) Todos os unicórnios são belos
2) Nenhum unicórnio é belo

Segundo Aristóteles, 1) é uma proposição categórica de tipo A e 2) é uma proposição categórica de tipo E. Não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas.

Consideremos agora a formalização das frases 1) e 2), segundo a nova lógica de Frege.

Dicionário:
F:_é unicórnio
G:_é belo

1) $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx)$
2) $(\forall x)\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$

Ambas as frases são vacuamente verdadeiras. Os antecedentes de ambas as condicionais são falsos, porque não existem objetos que sejam unicórnios. De acordo com a tabela de verdade da condicional, se o antecedente de uma condicional for falso, então a condicional é verdadeira. Ora, qualquer que seja o objeto considerado nas quantificações 1) e 2), segue-se que 1) e 2) são ambas verdadeiras. Portanto, a lógica aristotélica está errada ao afirmar que proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras.

Gillies (1992c, p. 287) faz notar que Frege apenas se referiu à lógica aristotélica em breves passagens de *Begriffsschrift*. Em nenhuma dessas passagens, Frege mencionou o problema que a sua teoria importava na lógica aristotélica. Tanto quanto se sabe, Frege nunca detetou este problema. Somente mais tarde, em 1888, Giuseppe Peano (1888/2000) reparou no problema. Acresce que este problema, em volta das proposições categóricas, acaba por se alastrar à própria teoria do silogismo aristotélico. Este é o segundo "rombo" no paradigma aristotélico. Ou seja, há contraexemplos a inferências silogísticas, que eram tidas como válidas por Aristóteles, que passam agora a ser inválidas. Por exemplo, os silogismos seguintes não são universalmente válidos, se considerarmos casos onde não existem M's:

Nenhum M é P
Todo M é S
Logo, algum S não é P

Nenhum P é M
Todo M é S
Logo, algum S não é P (Gillies, 1992c, p. 283)

5.2. Metanível e resistência

Gillies defende que há duas características salientes numa revolução matemática: uma mudança no meta-nível e uma resistência ao novo paradigma. A revolução de Frege na lógica partilha estas duas características.

Antes da revolução de Frege, na lógica, havia a crença de que a lógica aristotélica era uma formulação definitiva das leis da lógica. Esta crença era tida por figuras eminentes como Kant ou Duhem.

> Pode reconhecer-se que a *lógica*, desde remotos tempos, seguiu a via segura, pelo facto de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás (...) Também é digno de nota que não tenha até hoje progredido, parecendo, por conseguinte acabada e perfeita (...) os limites da lógica estão rigorosamente determinados por se tratar

> de uma ciência que apenas expõe minuciosamente e demonstra rigorosamente as regras formais de todo o pensamento. (Kant, 1787/1994, p. BVIII-BIX)

> Existe um método geral de dedução. Aristóteles formulou as suas leis para todo o sempre. (Duhem, 1915, p. 58)

A obra *Begriffsschrift* foi ignorada por um longo tempo e poucas revisões foram publicadas a respeito dela, sendo que a maior parte delas foi largamente negativa. Isto é uma prova da resistência à mudança. Um novo paradigma demora ainda algum tempo para se impor na comunidade científica.

6. Revolução (falhada) no intuicionismo

Revisitemos alguns aspetos do capítulo 3, a respeito do intuicionismo. Pourciau (2000) analisa a putativa transição do paradigma da matemática clássica para o paradigma da matemática intuicionista. No seu entender, esta transição teria sido uma transição revolucionária, no sentido de que teria sido uma transição não-cumulativa. No entanto, foi uma transição falhada, porque o paradigma da matemática intuicionista acabou por não vingar.

6.1. Mudanças não-cumulativas

Pourciau distingue dois sentidos para uma mudança *não-cumulativa* entre paradigmas: incomensurável e incongruente. Diz-se que uma mudança não-cumulativa é incomensurável quando os teoremas do paradigma precedente não encontram qualquer tradução no paradigma emergente, que preserve o significado original do teorema. Diz-se que uma mudança não-cumulativa é incongruente quando os teoremas do paradigma precedente podem ser traduzidos na linguagem do novo paradigma, mas, no novo paradigma, tais teoremas deixam de ter o estatuto de teoremas. Mais concretamente, são proposições inverdadeiras no novo paradigma. Pourciau defende que ambos os sentidos de mudança – incomensurável e incongruente – podem ser encontrados na transição do paradigma da matemática clássica para a matemática intuicionista. Ele dá o exemplo seguinte:

> Seja Q
> Q: na expansão decimal infinita de π, ocorre um número finito de pares de dígitos iguais consecutivos ou ocorre um número infinito de pares de dígitos iguais consecutivos.

A interpretação que o matemático clássico faz de Q é o teorema $Q \equiv P \vee \neg P$, sendo P

> P: na expansão decimal infinita de π, existe um número natural *n* tal que nenhum par de dígitos iguais consecutivos ocorre após a enésima casa decimal.

Este teorema da matemática clássica decorre simplesmente da forma lógica da disjunção $Q \equiv P \vee \neg P$. Em contraste, para um matemático intuicionista, o teorema acima é desprovido de sentido, porque a proposição P não pode ser demonstrada, nem se pode inferir um absurdo de P. Consequentemente a proposição Q não tem sentido para um intuicionista. Por outras palavras, o sentido clássico do teorema não pode ser preservado quando o intuicionista o tenta interpretar. O sentido clássico semântico do teorema desaparece numa interpretação intuicionista do teorema. Este exemplo mostra que uma mudança da matemática clássica para matemática intuicionista seria incomensurável (e como tal não-cumulativa).

Pourciau também usa este exemplo para tentar ilustrar uma mudança não-cumulativa incongruente. Para tal, o intuicionista, em vez de fazer uma interpretação semântica do teorema da matemática clássica, i.e., uma interpretação literal do teorema da matemática clássica,

$Q \equiv P \vee \neg P$, procede a uma interpretação não-semântica do teorema. Ou seja, o intuicionista tenta interpretar o teorema, segundo uma tradução homofónica, mas não semântica. Pourciau reclama que, mesmo nestas circunstâncias, há uma mudança não-cumulativa e incongruente. Pois, para o intuicionista conseguir demonstrar Q isso significaria que o intuicionista teria um método/processo para demonstrar P ou para demonstrar ¬P. Na verdade, o intuicionista não tem tal método/processo. Para o matemático clássico, P "aponta" para uma totalidade infinita externa ao matemático. Para o matemático intuicionista, P "aponta" para um desejável método/processo de construção que o intuicionista não tem de todo. Esse processo de construção teria ele próprio de ser infinito… Portanto, o intuicionista não consegue demonstrar Q, ainda que possa considerar Q como inteligível. Se Q não se consegue demonstrar, então Q é inverdadeiro.

6.2. Incomensurabilidade semântica e de mundos

A mudança entre a matemática clássica e a mudança intuicionista também pode ser vista como uma mudança incomensurável, nos sentidos semântico e de mundos que referimos na subsecção 2.4 deste capítulo.[4]

Pourciau *dá* vários exemplos de mudança no significado dos termos matemáticos, quando se transita do paradigma da matemática clássica para o paradigma da matemática intuicionista. Termos da matemática clássica, como *conjunto*, *subconjunto*, *elemento*, *função*, *número real*, modificam drasticamente o seu significado quando são interpretados intuicionisticamente. Alguns dos significados dos conectores da lógica clássica também se alteram na lógica intuicionista. Na disjunção, de acordo com as regras clássicas de dedução da introdução da disjunção, o matemático clássico infere $p \vee q$ da maneira seguinte: dado p, e independentemente da forma que p é obtida, logo $p \vee q$. No entanto, para um intuicionista $p \vee q$ apenas pode ser

[4] Pourciau *não adota esta minha grelha de análise.*

demonstrado se temos uma demonstração construtiva de p ou uma demonstração construtiva de q.

O intuicionista vive no paradigma segundo o qual a matemática é uma construção mental; o matemático clássico vive no paradigma segundo o qual a matemática é acerca de uma realidade externa ao matemático que de antemão fixa o valor de verdade das proposições matemáticas. Deste modo, o intuicionista e o matemático clássico têm como objeto de estudo dois tipos de realidades muito distintas. Um estuda construções mentais; e o outro estuda uma realidade externa e objetiva.

Para o matemático intuicionista, o que há depende de uma construção mental. Ou seja, a realidade matemática é ela própria dependente do sujeito. Se nunca tivessem existido seres humanos, jamais teria existido matemática. No entanto, esta realidade é uma realidade objetiva, no sentido em que todos os sujeitos partilham uma mesma "forma" de construção – a forma kantiana do tempo. Relembre-se a ideia kantiana, que referimos no capítulo 1, de que o nosso conhecimento depende das formas puras da intuição – o tempo e o espaço. Estas formas puras da intuição fazem parte do próprio aparato cognitivo dos sujeitos. Como referi no capítulo 3, o intuicionismo recupera a ideia kantiana a respeito da forma pura do tempo. A forma pura do tempo é necessária para a construção dos objetos matemáticos.

Um intuicionista e um matemático clássico vivem assim em mundos diferentes. Um vive no mundo das construções mentais; enquanto o outro vive no mundo de uma realidade objetiva e independente de ele próprio. Um matemático clássico que transita para a matemática intuicionista, começa a viver num outro mundo. As proposições matemáticas deixam de referir uma realidade externa e são produto da sua própria atividade mental.

6.3. Revolução falhada

No início do século XX, a matemática enfrentava uma crise em volta dos paradoxos da teoria ingénua de conjuntos. O intuicionismo era um paradigma alternativo para a resolução da crise. No entanto, este paradigma não vingou. A comunidade matemática não adotou este paradigma. Pourciau avança várias razões para o falhanço da revolução.

Primeiro, houve um problema de comunicação. Brouwer explicitou, desde o início, quais os fundamentos filosóficos da matemática intuicionista, a partir da fenomenologia e a partir do criticismo kantiano. Como vimos no capítulo 3, estes fundamentos filosóficos estão longe de ser claros. O pouco que se consegue entender em volta destes fundamentos filosóficos é que remetem para aspetos de psicologia que não são compatíveis de todo com a conceção objetiva que se pretende para a matemática. Recorde-se que um dos princípios de Frege, contra a psicologia de Husserl, era separar claramente aquilo que era objetivo daquilo que era subjetivo. Pourciau considera que Brouwer foi imprudente. Estes fundamentos filosóficos deveriam ter sido deixados "em privado" e apenas deveriam ter sido apresentadas as definições matemáticas dos números e os resultados matemáticos que daí podiam ser derivados.

Segundo, Brouwer tomou decisões técnicas erradas. Brouwer dedicou muito do seu tempo em volta da noção do contínuo. Havia duas conjeturas básicas intuicionistas que ele tentou (ingloriamente) demonstrar durante toda a sua vida.[5] Isto revelou-se desastroso. Segundo Pourciau, esta perda de tempo impossibilitou Brouwer de reconstruir a Análise Matemática de forma construtiva.

Outras razões que contribuíram para o falhanço da matemática intuicionista são as seguintes: os teoremas da matemática clássica transformavam-se em proposições não verdadeiras na matemática intuicionista; a matemática intuicionista não conseguiu ressuscitar muitos dos teoremas fundamentais da matemática clássica; a matemática intuicionista era esteticamente menos apelativa que a matemática clássica; a matemática clássica possui uma simetria bilateral (verdadeiro vs. falso) que não existia de todo na matemática intuicio-

---

[5] As conjeturas eram: 1) toda a função construtivamente dada de R em R é contínua; 2) toda a função contínua construtivamente dada *f*: $[0,1] \rightarrow R$ é uniformemente contínua.

nista; a matemática intuicionista não suscitava qualquer promessa de fecundidade, no sentido de que a matemática proposta pudesse ter uma base sólida para o futuro.

7. A matemática como instigadora de revoluções científicas

Stephen Brush (2015) desenvolve uma ideia sobre o papel da matemática nas revoluções científicas, a ideia segundo a qual a matemática é uma instigadora de revoluções científicas. Quando uma nova teoria científica é proposta, a comunidade de cientistas começa por usar a teoria apenas para realizar cálculos matemáticos, mas sem se comprometer inteiramente com os pressupostos da teoria científica, nomeadamente, aqueles pressupostos fundamentais que são contrários à teoria precedente. No entanto, a partir de determinado momento, o uso dos aspetos matemáticos da teoria acaba por se tornar de tal forma generalizado que se torna impossível não aceitar como corretos todos os pressupostos da teoria científica em causa. Dá-se então uma mudança de paradigma e a nova teoria científica é aceite como inteiramente correta pela comunidade científica. A matemática é assim vista como uma instigadora da revolução que a teoria científica encerra.

Brush *dá vários exemplos deste papel da matemática na génese das revoluções científicas. Nesta secção analisaremos o caso do sistema heliocêntrico de Copérnico, a teoria de gravitação de Newton e a teoria cinética de gases.*

Ninguém sabe ao certo como é que Copérnico chegou à ideia de colocar o Sol, em vez da Terra, no centro do sistema solar, onde os restantes planetas girariam em torno do Sol. Brush considera que a melhor hipótese que existe foi a proposta por Bernard Goldstein (2002).

Copérnico partiu da hipótese segundo a qual os períodos de revolução dos planetas são temporalmente mais longos à medida que estes estão mais afastados do centro de translação. Isto é verdade se assumirmos que os planetas têm todos uma mesma velocidade de translação. Ora, olhando para as tabelas observacionais, segundo o modelo geocêntrico, Copérnico reparou que isso era verdade para os planetas Marte (23 meses), Júpiter (144 meses) e Saturno (354 meses), mas não era verdade para os planetas Mercúrio, Vénus e o Sol (no sistema geocêntrico, o Sol é um planeta). Estes últimos planetas demorariam 12 meses a dar uma volta em torno da Terra. Isto era uma anomalia no interior do sistema geocêntrico. Estes planetas, encontrando-se a diferentes distâncias do seu centro de translação, o planeta Terra, deveriam ter também períodos de translação diferentes.

Ao colocar o Sol no centro do sistema solar e os restantes planetas a girar à sua volta, Copérnico reparou que a anomalia do sistema geocêntrico ficava corrigida. O período de translação de Mercúrio passaria a ser de 3 meses, o período de translação de Vénus passaria a ser de 7 meses e o período de translação da Terra passaria a ser de 12 meses. Os restantes planetas mantinham os períodos de translação anteriores. A anomalia ficava corrigida!

A partir da publicação da obra de Copérnico, *De Revolutionibus*, em 1543, os astrónomos começaram a usá-la para fazer cálculos em volta da posição dos planetas do sistema solar, mas considerando como falsa a sua pressuposição fundamental de que o Sol seria o centro do sistema solar. Ou seja, ao nível da matemática e dos seus cálculos, a teoria de Copérnico não representava qualquer engulho para os cientistas.

> Muitos astrónomos acharam possível explorar o sistema matemático de Copérnico e contribuir para o sucesso da nova astronomia, mas negando ou ficando em silêncio acerca do movimento da Terra. (...) Os astrónomos renascentistas tinham a liberdade de tratar o círculo que representava a órbita da Terra como uma ficção matemática, útil apenas para os cálculos; podiam e ocasionalmente calculavam posições planetárias *como se* a Terra se movesse, mas sem se comprometer com a realidade física desse movimento. (Kuhn, 1985, p. 187)

Só muito mais tarde, pela influência de Galileu, Kepler e Newton, os cientistas acabaram por aceitar que a Terra afinal se moveria em torno do Sol.

Outro exemplo do mesmo género é a respeito da teoria da gravitação de Newton. Entre 1666 e 1687, Newton aceitava como correto o axioma de Descartes segundo o qual a ação à distância do Sol no planeta Terra seria impossível. Uma força não poderia "viajar" tal distância longínqua. Todos os cálculos que Newton fazia sobre as posições e os movimentos planetários, eram feitos como se houvesse uma atração gravítica entre eles e o Sol, mas, na verdade, Newton não se comprometia com essa ideia de ação gravitacional.

> O próprio Newton, como bem sabemos, nunca admitiu a atração como uma força "física". Repetidas vezes ele disse que era apenas uma "força matemática", que era perfeitamente impossível – não apenas para a matéria, mas também para Deus – agir à distância, isto é, exercer acção onde o agente não estava presente. (Koyré, 1965, p. 15)

Este procedimento matemático tornou-se generalizado. Somente mais tarde é que se rejeitou o axioma de Descartes e se aceitou que a atração gravitacional entre os corpos celestes era uma realidade.

Uma das teorias baseada na teoria de Newton é a teoria cinética dos gases. Esta teoria foi formulada no século XIX por Boltzmann, Maxwell, Clerck e Clausius. Quando esta teoria foi formulada, assumiu-se como sendo correta a ideia newtoniana de que o movimento das partículas de um gás seria um movimento determinista. No entanto, na prática, seria impossível estudar o movimento de qualquer gás de uma forma determinista, dada a dimensão minúscula de tais partículas. Um gás tem uma quantidade elevadíssima de partículas. Por exemplo, uma grama de hidrogénio tem 10^{23} átomos de hidrogénio. O que a chamada *mecânica estatística* faz, para ultrapassar esta dificuldade, é assumir que o movimento das partículas de um gás é um movimento aleatório. Ou seja, as posições e as velocidades das partículas de um gás são aleatórias. Feita esta suposição, a modelização do movimento é completamente estatística. Portanto, em termos práticos, os cientistas assumiam uma suposição falsa, com vista a conseguirem modelar matematicamente o movimento molecular de um gás.

Apenas nos anos 20 do século passado é que foi proposto que o movimento de um gás era efetivamente indeterminista. Contudo, quando esta proposta foi avançada, a comunidade científica não levantou objeções à mesma, porque todo o tratamento que era feito até então, no âmbito da teoria cinética dos gases, era um tratamento puramente estatístico, onde o movimento molecular era como se fosse um movimento aleatório.

A partir destes exemplos podemos ser tentados a inferir que sempre que começarmos a tratar um qualquer fenómeno de um ponto de vista matemático, então estaremos no bom caminho: "mais cedo ou mais tarde" surgirá uma revolução científica que acabará por impor as suposições físicas de partida como suposições verdadeiras. Na verdade, as coisas não são assim tão simples. Existem vários exemplos que mostram que uma modelização matemática inicial não resultou em qualquer revolução e as teorias científicas das quais elas emergiram tiveram simplesmente de ser abandonadas.

Vejamos dois exemplos. Os pitagóricos acreditavam que o número de corpos celestes tinha de ser um número perfeito. Ou seja, tinham de existir 10 corpos celestes. Como até então eles só conheciam 8 corpos celestes – a Terra, a Lua, Mercúrio, Vénus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno – eles assumiram que existiam dois outros corpos celestes que revolviam para além de um "fogo central" que os ocultaria. Ora, nunca se verificou a existência desse "fogo central" nem muito menos se verificou que o número de corpos celestes seria 10. Platão, por sua vez, também acreditava que existiam apenas cinco elementos, porque existiam apenas cinco sólidos regulares. Esta consideração em termos de elementos caiu completamente em desuso. A tabela periódica contém muitos mais elementos químicos. Estes dois exemplos ilustram que existem suposições exclusivamente matemáticas que não levaram a qualquer revolução científica e, bem pelo contrário, conduziram a previsões físicas completamente erróneas.

Leituras adicionais recomendadas

Gillies (1992c). The Fregean Revolution in Logic.

Kuhn (1996). *The Structure of Scientific Revolutions*. [Posfácio].

Pourciau (2000). Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics.

(Página deixada propositadamente em branco)

Bibliografia Anotada

Obras de referência de âmbito geral

Branquinho, João; Murcho, Desidério (eds.). (2001). *Enciclopédia de Termos Lógico--Filosóficos,* (Lisboa: Gradiva). Conjunto de entradas e artigos na área dos "estudos lógico-filosóficos". É o recurso mais importante de consulta em língua portuguesa para estudantes e académicos de Filosofia e de Lógica.

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica. Recurso em linha, em língua portuguesa, com artigos de estado da arte. O material é de nível intermédio e de nível avançado.

Stanford Encyclopedia of Philosophy; *Internet Encyclopedia of Philosophy*. Dois recursos em linha. O material é essencialmente expositivo, com artigos de nível introdutório e de nível intermédio de Filosofia.

Cambridge Companions to Philosophy, editado pela Cambridge University Press. Coleção de livros sobre os filósofos mais importantes da história da filosofia como Platão, Kant, Mill, Frege, Quine, etc. Cada livro é constituído por uma coleção de artigos que cobrem as teorias mais importantes de cada filósofo. O material é introdutório, expositivo e redigido numa linguagem simples e clara.

Putnam, Hilary; Benacerraf, Paul (eds). (1983). *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, (Cambridge: CUP). Coletânea de artigos clássicos de Filosofia da Matemática. Quando não havia manuais de Filosofia da Matemática, este livro era a referência principal usada nos cursos de Filosofia da Matemática. Material avançado.

Shapiro, Stewart. (2005). *Oxford Handbook of Logic and Philosophy of Mathematics*, (New York: OUP). Coletânea de artigos escritos por filósofos da matemática e lógicos contemporâneos, que cobrem tópicos centrais de Filosofia da Matemática e de Lógica. O material não é introdutório, mas sim avançado e para especialistas.

Manuais de Filosofia da Matemática

Bostock, David. (2009). *Philosophy of Mathematics: An Introduction*, (Chichester, U.K.; Malden, MA: Wiley-Blackwell).

Colyvan, Mark. (2012). *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, (Cambridge: CUP).

Friend, Michele. (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*, (Stocksfield: Acumen).

George, Alexander; Velleman, Daniel. (2001). *Philosophies of Mathematics*, (Malden, Mass: Wiley-Blackwell).

Linnebo, Øystein. (2017). *Philosophy of Mathematics*, (Princeton: Princeton University Press).

Shapiro, Stewart. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, (New York: OUP). Tradução portuguesa: Shapiro (2000/2015).

Silva, Jairo. (2007). *Filosofias da Matemática*, (São Paulo: UNESP).

George & Velleman (2001) é o mais matemático de todos e centrado nos Fundamentos da Matemática. No final de cada capítulo existe uma lista de exercícios lógico-matemáticos para resolução. Shapiro (2000) é o único que se encontra traduzido em português. É o mais informal. Uma leitura divertida para profissionais; uma ilusão de conhecimento para aprendizes. Linnebo (2017) é o mais conciso. Uma abordagem contemporânea, mesmo dos assuntos mais escolásticos. Friend (2007) é o mais filosófico e o menos "manual". Um ponto de partida para outras leituras. Colyvan (2012) é o mais centrado em tópicos contemporâneos de Filosofia da Matemática. Inclui uma lista de 20 teoremas matemáticos para filósofos numa ilha deserta! Bostock (2009) é o mais enfático na História da Filosofia da Matemática e o que apresenta menos tópicos contemporâneos. Silva (2007) é único escrito em português, por um autor brasileiro. Não aborda qualquer tópico contemporâneo.

Capítulo 1

Sklar, Lawrence. (1974). *Space, Time and Spacetime*, (Los Angeles: UCP). O capítulo 2 cobre quase todos os aspetos por mim abordados sobre Filosofia da Geometria. O material tem uma dimensão filosófica e uma dimensão técnica – do ponto de vista da Física Teórica – a respeito das teorias físicas do espaço-tempo.

Capítulo 2

Kenny, Anthony. (2000). *An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*, (Oxford: Blackwell). Uma introdução ao trabalho de Frege, a respeito da Lógica, Filosofia da Matemática e Filosofia da Linguagem. Os capítulos 4 e 5 do livro são uma exegese minuciosa, muito clara e elucidativa, sobre *Os Fundamentos da Aritmética* de Frege.

Weiner, Joan. (2004). *Frege Explained*, (Chicago: Open Court). Alguns capítulos contêm uma exposição das ideias de Frege n'*Os Fundamentos da Aritmética* bem como

da nova lógica criada por Frege. Livro introdutório escrito numa linguagem simples e acessível.

Frege, Gottlob. (1892/2019). Sobre Conceito e Objecto. Em *Cinco Ensaios Lógico-Filosóficos*, (Lisboa: Guimarães). Uma clarificação das noções de *conceito* e de *objeto* utilizadas no livro *Os Fundamentos da Aritmética*.

Boolos, George. (1998). Gottlob Frege and the Foundations of Arithmetic. Em *Logic, Logic, Logic*, (Cambridge, MA: Harvard University Press). Uma introdução crítica aos *Fundamentos da Aritmética*, de Frege.

Heck, Richard. (1998/2007). O Teorema de Frege: uma Introdução. Em *Do Círculo de Viena à Filosofia Analítica Contemporânea*, (Lisboa: Livros de Areia). Uma introdução acessível ao Teorema de Frege redigida por um especialista sobre o assunto.

Dummett, Michael. (1991). *Frege Philosophy of Mathematics*, (Cambridge, MA: Harvard University Press). Material avançado e exegético sobre a Filosofia da Matemática de Frege. Redigido no estilo característico de Dummett: recôndito e exigindo esforço ao leitor.

Wright, Crispin. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*, (Aberdeen: Aberdeen University Press). Material avançado, crítico e exclusivamente centrado na parte construtiva d'*Os Fundamentos da Aritmética* de Frege. Neste livro faz-se ainda uma defesa da perspetiva neo-logicista, com uma demonstração formal e detalhada do Teorema de Frege.

Ferreira, Fernando. (2014). Logicismo. Em *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*, (Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa). Material avançado e sobre o estado da arte.

Capítulo 3

Salmon, Wesley. (2001a). Introduction. Em *Zeno's Paradoxes*, (Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing). Uma introdução geral e acessível aos paradoxos de Zenão.

Pourciau, Bruce. (1999). The Education of a Pure Mathematician. *The American Mathematical Monthly* 106 (8): 720-732. Material introdutório e bastante acessível. Um diálogo entre um aluno intuicionista e um professor com uma visão clássica sobre a matemática.

Posy, Carl. (2005). Intuitionism and Philosophy. Em *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics*, (New York: OUP). O material não é introdutório, mas avançado e para especialistas.

Dummett, Michael. (1975). The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. Em *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, (Elsevier: New York). Material avançado.

Dummett, Michael. (1963/2009). O Significado Filosófico do Teorema de Gödel. Em *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*, (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian). Material avançado.

Capítulo 4

Balaguer, Mark. (2008). Mathematical Platonism. Em *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Mathematical Association of America Publications.

Uma visão geral dos assuntos abordados no capítulo e de outros que, por falta de espaço, ficaram de fora. Material bastante sintético e de nível acessível.

Franklin, James. (2009). Aristotelian Realism. Em *The Philosophy of Mathematics (Handbook of the Philosophy of Science series)*, (Amsterdam: North-Holland Elsevier). Uma descrição muito completa dos principais aspetos do realismo aristotélico.

Resnik, Michael. (2005). Quine and the Web of Belief. Em *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, (New York: Oxford University Press). Material excelente para compreender a proposta de Quine para a matemática, a respeito do holismo, naturalismo e critério de compromisso ontológico.

Castro, Eduardo. (2014). Realismo/Antirrealismo. Em *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*, (Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa). Cobre o assunto realismo/antirrealismo na ciência em geral, com uma secção dedicada à matemática. Material de nível intermédio.

Capítulo 5

Burgess, John; Rosen Gideon. (1997). *A Subject With No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, (Oxford, New York: OUP). A introdução analisa os pontos principais do nominalismo do ponto de vista antinominalista perfilhado pelos autores. Tem uma discussão detalhada de várias interpretações possíveis do problema epistemológico de Benacerraf. Escrito por vezes num tom irónico. O material oscila entre o nível intermédio e o nível avançado.

Field, Hartry. (1980). *Science Without Numbers*, (Princeton, NJ: Princeton University Press). A obra central sobre o nominalismo. A segunda edição tem um prefácio valiosíssimo e de acessível compreensão. Os restantes capítulos do livro são bastante técnicos, mas obrigatórios para quem pretenda vir a desenvolver investigação sobre o assunto.

Capítulo 6

Gillies, Donald. (1992b). *Revolutions in Mathematics*. (New York: OUP). Coletânea de artigos sobre as revoluções em matemática. Contém alguns artigos de antologia e outros que foram originalmente escritos para serem incluídos no livro. Tanto quanto sei, este é o único livro deste tipo existente sobre o assunto abordado no capítulo.

Castro, Eduardo. (2022). Revoluções Científicas. Em *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*, (Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa). Material intermédio que analisa as ideias principais de Thomas Kuhn a respeito das revoluções científicas e tem uma secção dedicada às revoluções em matemática. Note-se que partes do capítulo 6 são baseadas neste meu artigo e, assim, há alguma sobreposição entre ambos.

REFERÊNCIAS

Aristotle. (1984). *The Complete Works of Aristotle the Revised Oxford Translation* (J. Barnes, Ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Armstrong, D. (1989). *Universals: An Opinionated Introduction*. London: Westview Press.

Arnauld, A., & Nicole, P. (2016). *A Lógica ou a Arte de Pensar* (N. Fonseca, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado em 1683).

Azzouni, J. (2004). *Deflating Existential Consequence: A Case for Nominalism*. New York: Oxford University Press.

Azzouni, J. (2015). Nominalism, the nonexistence of mathematical objects. Em E. Davis & P. Davis (Eds.), *Mathematics, Substance and Surmise: Views on the Meaning and Ontology of Mathematics* (pp. 133-145). Cham: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-21473-3_7.

Balaguer, M. (1998). *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Balaguer, M. (2008). Mathematical Platonism. Em B. Gold & R. Simons (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* (pp. 179-204). Mathematical Association of America Publications.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could not Be. *The Philosophical Review*, *74*(1), 47-73. doi: 10.2307/2183530.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, *70*(19), 661-679. doi: 10.2307/2025075.

Boi, L. (1992). The «revolution» in the geometrical vision of space in the ninetennth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 183-208). New York: Oxford University Press.

Bonola, R. (1906). *La geometria non-euclidea: Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. Bologna: Nicola Zanichelli.

Boolos, G. (1998). Gottlob Frege and the Foundations of Arithmetic. Em R. Jeffrey (Ed.), *Logic, Logic, and Logic* (pp. 143-154). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Bostock, D. (2009). *Philosophy of Mathematics: An Introduction*. Chichester, U.K.; Malden, MA: Wiley-Blackwell.

Branquinho, J., & Murcho, D. (2001). *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos*. Lisboa: Gradiva.

Brouwer, L. (1975). *Philosophy and Foundations of Mathematics: L. E. J. Brouwer* (A. Heyting, Ed.). Amsterdam: North Holland.

Brouwer, L. (1981). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism* (D. van Dalen, Ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L. (1983). Intuitionism and Formalism. Em H. Putnam & P. Benacerraf (Eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2.ª ed., pp. 77-89). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171519.005 (Trabalho original publicado em 1913).

Brush, S. (2015). Mathematics as an Instigator of Scientific Revolutions. *Science & Education*, *24*(5), 495-513. doi: 10.1007/s11191-015-9762-x.

Burgess, J. (2004). Azzouni Jody, Deflating existential consequence: A case for nominalism. Oxford University Press, Oxford, 2004, viii + 342 pp. *Bulletin of Symbolic Logic*, *10*(4), 573-577. doi: 10.1017/S1079898600003656.

Burgess, J., & Rosen, G. (1997). *A Subject With No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*. Oxford, New York: Oxford University Press.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: Teubner.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen: Mathematischen und Philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer.

Cantor, G. (1976). Foundations of a General Theory of Manyfolds: A mathematical--philosophical study in the theory of the infinite (U. Parpart, Trad.). *The Campaigner*, *9*(1-2), 69-96. (Trabalho original publicado em 1932).

Cantor, G. (1996). Letter to Dedekind 3 August 1899. Em W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. 2, pp. 931-932). Oxford, New York: Oxford University Press. (Trabalho original publicado em 1899).

Cantor, G. (1996a). Letter to Hilbert 2 October 1897. Em W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. 2, pp. 927-928). Oxford, New York: Oxford University Press. (Trabalho original publicado em 1897).

Cantor, G. (1996b). Letter to Hilbert 26 September 1897. Em W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. 2, pp. 926-927). Oxford, New York: Oxford University Press. (Trabalho original publicado em 1897).

Castro, E. (2011). *A Indispensabilidade da Matemática na Ciência Natural*. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa.

Castro, E. (2014). Realismo/Antirrealismo. Em J. Branquinho & R. Santos (Eds.), *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa.

Castro, E. (2022). Revoluções Científicas. Em P. Galvão & R. Santos (Eds.), *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, 1re partie. Analyse algébrique*.

Cohen, P. (1963). The Independence of the Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *50*(6), 1143-1148.

Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Colyvan, M. (2012). *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Crowe, M. (1992). Ten «laws» concerning patterns of change in the history of mathematics. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 15-20). New York: Oxford University Press.

Dancy, J. (1990). *Epistemologia Contemporânea* (T. Pérez, Trad.). Lisboa: Edições 70. (Trabalho original publicado em 1985).

Dauben, J. (1992). Conceptual revolutions in the history of mathematics: Two studies in the growth of knowledge. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 49-71). New York: Oxford University Press.

Dedekind, R. (1963). The Nature and Meaning of Numbers. Em *Essays on the Theory of Numbers* (pp. 31-115). New York: Dover. (Trabalho original publicado em 1888).

Descartes, R. (1992). *Meditações sobre a Filosofia Primeira* (G. Fraga, Trad.). Coimbra: Almedina. (Trabalho original publicado em 1641).

Duhem, P. (1915). *La Science Allemande*. Paris: Hermann & Fils.

Duhem, P. (2007). *La Théorie Physique, son Objet, sa Structure*. Paris: Vrin. (Trabalho original publicado em 1906).

Dummett, M. (1975). The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. Em H. Rose & J. Shepherdson (Eds.), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* (pp. 5-40). New York: Elsevier. doi: 10.1016/S0049-237X(08)71941-4.

Dummett, M. (1978). Realism. Em *Truth and Other Enigmas* (pp. 145-165). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dummett, M. (1982). Realism. *Synthese*, *52*(1), 55-112. doi: 10.1007/BF00485255.

Dummett, M. (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dummett, M. (1993a). *Frege: Philosophy of Language* (2.ª ed.). Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Dummett, M. (1993b). What is a Theory of Meaning (II). Em *The Seas of Language* (pp. 34-93). New York: Oxford University Press. doi: 10.1093/0198236212.001.0001.

Dummett, M. (1994). What is Mathematics About? Em D. Jacquette (Ed.), *Philosophy of Mathematics: An Anthology* (pp. 19-29). Oxford: Blackwell.

Dummett, M. (2000). *Elements of Intuitionism* (2.ª ed.). Oxford, New York: Oxford University Press.

Dummett, M. (2009). O Significado Filosófico do Teorema de Gödel. Em M. Lourenço (Ed.), *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (2.ª ed., pp. 813-832). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado em 1963).

Euclides. (2008). *Euclid's Elements of Geometry* (J. Heiberg, Ed.; R. Fitzpatrick, Trad.). s.l.: Richard Fitzpatrick.

Ferreira, F. (2014). Logicismo. Em J. Branquinho & R. Santos (Eds.), *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa. doi: 10.51427/cfi.2021.0051.

Field, H. (1980). *Science Without Numbers*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Field, H. (1982). Realism and Anti-Realism about Mathematics. *Philosophical Topics*, *13*(1), 45-69.

Field, H. (1989). *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Blackwell.

Field, H. (1998). Mathematical Objectivity and Mathematical Objects. Em S. Laurence & C. Macdonald (Eds.), *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics* (pp. 387-403). Oxford: Wiley-Blackwell.

Forrest, P., & Armstrong, D. (1987). The Nature of Number. *Philosophical Papers*, *16*(3), 165-186. doi: 10.1080/05568648709506275.

Franklin, J. (2009). Aristotelian Realism. Em A. Irvine (Ed.), *The Philosophy of Mathematics (Handbook of the Philosophy of Science series)* (pp. 103-155). Amsterdam: North-Holland Elsevier.

Frege, G. (1972). *Conceptual Notation and Related Articles* (T. Bynum, Ed.). Oxford, New York: Oxford University Press.

Frege, G. (1992). *Os Fundamentos da Aritmética* (A. Zilhão, Trad.). Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Frege, G. (2013). *Gottlob Frege: Basic Laws of Arithmetic* (P. Ebert & M. Rossberg, Eds.). Oxford, New York: Oxford University Press. (Trabalho original publicado em 1893).

Frege, G. (2019). Sobre Conceito e Objecto. Em A. Zilhão (Trad.), *Cinco Ensaios Lógico--Filosóficos* (pp. 101-128). Lisboa: Guimarães. (Trabalho original publicado em 1892).

Friend, M. (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*. Stocksfield: Acumen.

Gauss, C. (1831). Briefwechsel mit Schumacher. *Werke*, *Band 8*(216).

Gauss, C. (2011). Grundlagen der Geometrie. Em *Cambridge Library Collection – Mathematics*: *Vol. 8*. *Werke* (pp. 157-268). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139058292.005 (Trabalho original publicado em 1900).

Geach, P. (1955). Class and Concept. *The Philosophical Review*, *64*(4), 561-570. doi: 10.2307/2182633.

George, A., & Velleman, D. (2001). *Philosophies of Mathematics*. Malden, Mass: Wiley--Blackwell.

Gettier, E. (1963). Is Justified True Belief Knowledge? *Analysis*, *23*(6), 121-123. doi: 10.1093/analys/23.6.121.

Giaquinto, M. (2002). *The Search for Certainty*. New York: Oxford University Press. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199285945.001.0001.

Gillies, D. (1992a). Introduction. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 1-14). New York: Oxford University Press.

Gillies, D. (Ed.). (1992b). *Revolutions in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Gillies, D. (1992c). The Fregean Revolution in Logic. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 265-305). New York: Oxford University Press.

Gödel, K. (1938). The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *24*(12), 556-557. doi: 10.1073/pnas.24.12.556.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's Continuum Problem? *The American Mathematical Monthly*, *54*(9), 515-525. doi: 10.2307/2304666.

Gödel, K. (2009). O que é o Problema do Contínuo de Cantor? Em M. Lourenço (Ed.), *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (2.ª ed., pp. 915-941). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado 1964).

Goldstein, B. (2002). Copernicus and the Origin of his Heliocentric System. *Journal for the History of Astronomy*, *33*(3), 219-235. doi: 10.1177/002182860203300301.

Goodman, N. (1956). A World of Individuals. Em A. Church & I. Bochenski (Eds.), *The Problem of Universals: A symposium* (pp. 13-31). Notre Dame, IN: University of Notre Dame.

Goodman, N., & Quine, W. (1947). Steps Toward a Constructive Nominalism. *Journal of Symbolic Logic*, *12*(4), 105-122. doi: 10.2307/2266485.

Grattan-Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. New York; London: Routledge.

Heck, R. (2007). O Teorema de Frege: Uma Introdução. Em A. Zilhão (Ed.), *Do Círculo de Viena à Filosofia Analítica Contemporânea* (pp. 259-279). Lisboa: Livros de Areia. (Trabalho original publicado em 1998).

Hellman, G. (1989). *Mathematics Without Numbers*. Oxford: Oxford University Press.

Heyting, A. (1956). *Intuitionism: An introduction*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Heyting, A. (1974). Intuitionistic Views on the Nature of Mathematics. *Synthese*, *27*(1/2), pp. 79-91.

Heyting, A. (1983). Disputation. Em H. Putnam & P. Benacerraf (Eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2.ª ed., pp. 66-76). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171519.004.

Hume, D. (2002). *Tratados Filosóficos – Investigação sobre o Entendimento Humano* (Vol. 1; J. Monteiro, Trad.). Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda. (Trabalho original publicado em 1748).

Hume, D. (2012). *Tratado da Natureza Humana* (S. Fontes, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado em 1739).

Kant, I. (1994). *Crítica da Razão Pura* (M. Santos & A. Morujão, Trads.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado em 1787).

Kenny, A. (2000). *Frege: An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*. Oxford: Wiley-Blackwell.

Kessler, G. (1980). Frege, Mill, and the Foundations of Arithmetic. *The Journal of Philosophy*, *77*(2), 65-79. doi: 10.2307/2025431.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times* (Vol. 3). New York: Oxford University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press.

Koyré, A. (1965). *Newtonian Studies:* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kuhn, T. (1977). *The Essential Tension*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuhn, T. (1985). *The Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought* (18.ª ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kuhn, T. (1996). *The Structure of Scientific Revolutions* (3.ª ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Kundera, M. (1983). Un Occident kidnappé. *Le Debat*, *27*(5), 3-23.

Lear, J. (1980). Aristotelian Infinity. *Proceedings of the Aristotelian Society*, *80*(1), 187-210. doi: 10.1093/aristotelian/80.1.187.

Leibniz, G. (1996). *New Essays on the Human Understanding* (P. Remnant & J. Bennett, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press. (Trabalho original publicado em 1765).

Linnebo, Ø. (2017). *Philosophy of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Linnebo, Ø., & Shapiro, S. (2019). Actual and Potential Infinity. *Noûs*, *53*(1), 160-191. doi: 10.1111/nous.12208.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Maddy, P. (2005). Three Forms of Naturalism. Em S. Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 437-459). New York: Oxford University Press.

Maddy, P. (2007). *Second Philosophy – A Naturalistic Method*. Oxford: Oxford University Press.

Maddy, P. (2011). *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Malament, D. (1982). Review of: Science Without Numbers: A Defense of Nominalism. by Hartry Field. *The Journal of Philosophy*, *79*(9), 523-534. doi: 10.2307/2026384.

Mill, J. (1963). *The Collected Works of John Stuart Mill, in 33 vols.* (J. Robson, Ed.). Toronto: University of Toronto Press.

Moore, G. (1953). *Some Main Problems of Philosophy*. London: George Allen and Unwin.

Newstead, A., & Franklin, J. (2012). Indispensabilty without Platonism. Em A. Bird, B. Ellis, & H. Sankey (Eds.), *Properties, Powers and Structures* (pp. 81-97). New York: Routledge.

Ortega y Gasset, J. (1993). *O que é a Filosofia?* (J. Bento, Trad.). Lisboa: Cotovia. (Trabalho original publicado em 1958).

Parsons, C. (1965). Frege's Theory of Number. Em M. Black (Ed.), *Philosophy in America* (pp. 180-203). Ithaca: Cornell University Press.

Peano, G. (2000). The Operations of Deductive Logic. Em L. Kannenberg (Trad.), *Geometric Calculus: According to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann* (pp. 1-16). Boston, MA: Birkhäuser. doi: 10.1007/978-1-4612-2132-6_1 (Trabalho original publicado em 1888).

Planck, M. (1950). *Scientific Autobiography, and Other Papers* (F. Gaynor, Trad.). London: Williams & Norgate.

Platão. (1992). *Ménon* (E. Gomes, Trad.). Lisboa: Edições Colibri.

Platão. (1996). *República* (M. Pereira, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Poincaré, H. (1913). *Derniéres Pensées*. Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1930). *Science et Méthode*. Paris: Flammarion. (Trabalho original publicado em 1908).

Poincaré, H. (1968). *La Science et l'Hypothèse*. Paris: Flammarion. (Trabalho original publicado em 1902).

Poincaré, H. (1970). *La Valeur de la Science*. Paris: Flammarion. (Trabalho original publicado em 1905).

Poincaré, H. (2010). *Henri Poincaré – Filosofia da Matemática: Breve Antologia de textos de Filosofia da Matemática de Henri Poincaré* (A. Franco de Oliveira, Ed.). Lisboa: Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa.

Popper, K. (2005). *The Logic of Scientific Discovery*. London: Routledge.

Posy, C. (2005). Intuitionism and Philosophy. Em S. Shapiro (Ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 319-355). New York: Oxford University Press.

Posy, C. (2008). Brouwerian infinity. Em M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007): The Cerisy Conference* (pp. 21-36). Basel: Publications des Archives Henri Poincaré / Publications of the Henri Poincaré Archives.

Posy, C. (2020). *Mathematical Intuitionism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pourciau, B. (1999). The Education of a Pure Mathematician. *The American Mathematical Monthly*, *106*(8), 720-732. doi: 10.1080/00029890.1999.12005111.

Pourciau, B. (2000). Intuitionism as a (failed) Kuhnian revolution in mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, *31*(2), 297-329. doi: 10.1016/S0039-3681(00)00010-8.

Putnam, H. (1971). Philosophy of Logic. Em S. Laurence & L. Macdonald (Eds.), *Contemporary Readings in Foundations of Metaphysics* (pp. 404-434). Oxford: Blackwell.

Putnam, H. (1975a). *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*. Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H. (1975b). Mathematics Without Foundations. Em *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers* (pp. 43-59). Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H., & Benacerraf, P. (Eds.). (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2.ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171519.004.

Quine, W. (1948). On What There Is. *The Review of Metaphysics*, *2*(5), 21-38.

Quine, W. (1951). Two Dogmas of Empiricism. *The Philosophical Review*, *60*(1), 20-43.

Quine, W. (1969). Epistemology Naturalized. Em *Ontological relativity and other essays* (Vol. 13, pp. 69-90).

Quine, W. (1981). Success and Limits of Mathematization. Em *Theories and Things* (pp. 148-155). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Quine, W. (1983). Carnap and Logical Truth. Em P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics Selected Readings* (2.ª ed., pp. 355-376). Cambridge: Cambridge University Press.

Quine, W. (1995). O Alcance e a Linguagem da Ciência. Em J. Sàágua (Ed.), *Filosofia e Linguagem* (pp. 19-41). Lisboa: Edições Asa. (Trabalho original publicado em 1954).

Quine, W. (1995). Postulações e Realidade. Em J. Sàágua (Ed.), *Filosofia e Linguagem* (pp. 177-187). Lisboa: Edições Asa. (Trabalho original publicado em 1955).

Quine, W. (1998). Reply to Charles Parsons. Em L. Hahn & P. Schilpp (Eds.), *The Philosophy of W.V. Quine* (2.ª ed., pp. 396-403). Chicago and La Salle, Illinois: Open Court.

Quine, W. (2013). *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT press.

Reichenbach, H. (1958). *The Philosophy of Space and Time*. New York: Dover.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. New York: Clarendon Press.

Resnik, M. (2005). Quine and the Web of Belief. Em S. Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 412-436). New York: Oxford University Press. doi: 10.1093/oxfordhb/9780195325928.003.0012.

Rosa, R., & Lepore, E. (2004). Quine's Meaning Holisms. Em R. Gibson (Ed.), *The Cambridge Companion to Quine* (pp. 65-90). Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, B. (1908). Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics*, *30*(3), 222-262. doi: 10.2307/2369948.

Russell, B. (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry*. New York: Dover.

Russell, B. (1994). *The Collected Papers of Bertrand Russell: Toward the «Principles of Mathematics» 1900-02* (Vol. 3; Gregory Moore, Ed.). London; New York: Routledge.

Russell, B. (2001). The Problem of Infinity Considered Historically. Em W. Salmon (Ed.), *Zeno´s Paradoxes* (pp. 45-58). Indianapolis/Cambridge: Hackett Pub Co Inc. (Trabalho original publicado em 1929).

Russell, B. (2015). *Introdução à Filosofia Matemática* (2.ª ed.; A. Graça, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original publicado em 1919).

Russell, B., & Whitehead, A. (1910). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

Salmon, W. (2001a). Introduction. Em W. Salmon (Ed.), *Zeno's Paradoxes* (pp. 5-44). Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing.

Salmon, W. (Ed.). (2001b). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing.

Searle, J. (1999). The Future of Philosophy. *Philosophical Transactions: Biological Sciences*, *354*(1392), 2069-2080.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New York: Oxford University Press.

Shapiro, S. (1998). Induction and Indefinite Extensibility: The Gödel Sentence is True, but Did Someone Change the Subject? *Mind*, *107*(427), 597-624.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Shapiro, S. (Ed.). (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. New York: Oxford University Press.

Shapiro, S. (2015). *Filosofia da Matemática* (A. Franco de Oliveira, Trad.). Lisboa: Edições 70. (Trabalho original publicado em 2000).

Shapiro, S., & Wright, C. (2006). All Things Indefinitely Extensible. Em A. Rayo & G. Uzquiano (Eds.), *Absolute Generality* (pp. 255-304). Oxford, New York: Clarendon Press.

Silva, J. (2007). *Filosofias da Matemática*. São Paulo: UNESP.

Sklar, L. (1974). *Space, Time and Spacetime*. Berkeley, Los Angeles: University of California Press.

Smith, P. (2021). *Gödel Without (Too Many) Tears*. Logic Matters.

Spivak, M. (2008). *Calculus* (4.ª ed.). Houston, Texas: Publish or Perish.

Strawson, P. (1975). *The Bounds of Sense: An Essay on Kant's Critique of Pure Reason*. London: Routledge.

Tieszen, R. (2008). The intersection of intuitionism (Brouwer) and phenomenology (Husserl). Em M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau, & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007): The Cerisy Conference* (pp. 78-95). Basel: Birkhäuser. doi: 10.1007/978-3-7643-8653-5_6.

van Dalen, D. (1999). From Brouwerian Counter Examples to the Creating Subject. *Studia Logica*, *62*(2), 305-314. doi: 10.1023/A:1026411905257.

Weiner, J. (2004). *Frege Explained: From Arithmetic to Analytic Philosophy*. Chicago and La Salle, Illinois: Open Court.

Whitehead, A. (1898). *A Treatise on Universal Algebra: With Applications*. Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511693175.

Wolff, C. (1963). *Preliminary Discourse on Philosophy in General* (R. Blackwell, Trad.). Indianapolis: Bobbs-Merrill. (Trabalho original publicado em 1728).

Wright, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.

Wright, C. (1994). About «The Philosophical Significance of Gödel's Theorem»: Some Issues. Em B. McGuiness & G. Oliveri (Eds.), *The Philosophy of Michael Dummett* (pp. 167-202). Kluwer Academic Publishers.

Zalta, E. (2020). Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic. Em E. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Zermelo, E. (1967). Investigations in the Foundations of Set Theory I. Em J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel* (pp. 200-215). Cambridge, Mass.: Harvard University Press. (Trabalho original publicado em 1908).

Zheng, Y. (1992). Non-Euclidean geometry. Em D. Gillies (Ed.), *Revolutions in Mathematics* (pp. 169-182). New York: Oxford University Press.

(Página deixada propositadamente em branco)

(Página deixada propositadamente em branco)

Eduardo Castro é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Investigador no grupo LanCog, Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa. Licenciado em Física/Matemática Aplicada (Porto), mestre em História e Filosofia da Ciência (Nova de Lisboa) e doutor em Filosofia (Lisboa). Desenvolve investigação em Filosofia da Ciência e em Filosofia da Matemática.

Série Investigação

•

Imprensa da Universidade de Coimbra

Coimbra University Press

2025

1 2 9 0

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

COIMBRA UNIVERSITY PRESS