

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela saúde, pela oportunidades, pelo consolo, pela força e coragem para caminhar de modo a concluir este trabalho.

Ao meu pai Capuapua Caxala, às minhas mães Domingas Languissa e Macanda Petrony, a toda a minha família, por todo o apoio, afeto e confiança que me foi depositado.

Aos meus tutores, Professor Doutor Rogério Serôdio e Professora Doutora Ilda Inácio, pela dedicação, paciência, ensinamentos e determinação para conclusão deste trabalho.

A todos os amigos, colegas e pessoas que por mim são queridas, que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

# Resumo

Após uma análise da teoria e dos trabalho existente sobre o triângulo de rascal, apercebemo-nos que existiam lacunas na informação disponível, principalmente falta de informação em português. Motivados pelo interesse e curiosidade sobre as propriedades, conjeturas e aplicações deste triângulo (objeto de estudo recente), tendo em conta a escassa bibliografia encontrada, fomos aprofundar o estudo investigando mais acerca do mesmo.

Nesta dissertação, começamos por apresentar a história do triângulo de rascal, as suas propriedades e resultados existentes na bibliografia consultada. Na nossa investigação foram analisadas conjeturas já conhecidas e outras resultantes das tarefas investigativas que realizámos. Foi-nos, por isso, possível definir novos conceitos e novas propriedades subjacentes ao tema principal desta dissertação. De salientar, que uma parte das propriedades foi obtida por manipulação algébrica (*fórmula algébrica dos números de rascal*) e outra através de interpretações geométricas no triângulo.

Apresentamos, ainda, duas generalizações para o triângulo que consistem na eliminação das restrições dos números de rascal e na interpretação combinatória dos mesmos.

Tendo em conta a escassez bibliográfica, como já referimos, foi-nos bastante trabalhoso e complexo investigar o triângulo e analisar as suas propriedades. Tivemos necessidade de compreender as propriedades fundamentais do triângulo de rascal e estudar a relação entre estas e o já conhecido triângulo de Pascal (estabelecemos uma ligação entre os dois triângulos porque o de Pascal já foi bastante estudado).

Apesar do trabalho árduo, foi-nos possível ultrapassar as dificuldades iniciais e aprofundar/investigar este tema, descobrindo várias propriedades que iam sistematicamente aparecendo. Isto deve motivar vivamente a continuação da investigação do tema da dissertação que apresentamos.

**Palavras chave:** triângulo de rascal, triângulo de Pascal, seqüências, tarefas investigativas.

# Abstract

After an analysis of the theory and the existing works on the rascal triangle, we realized that there were gaps in the available information, mainly the lack of information in Portuguese. Motivated by interest and curiosity about the properties, conjectures and applications of this triangle (object of recent study), and taking into account the scarce bibliography found, we went deeper into the study by investigating more about it.

In this dissertation, we begin by presenting the history of the rascal triangle, its properties and results existing in the consulted bibliography. In our investigation we analyzed known conjectures and others resulting from the investigative tasks that we performed. It was, therefore, possible to define new concepts and new properties underlying the main theme of this dissertation. It should be noted that a part of the properties were obtained by algebraic manipulation (*algebraic formula of the rascal numbers*) and another through geometric interpretations in the triangle.

We present also two generalizations for the triangle that consist in the elimination of the restrictions for the numbers of rascal and in the combinatorial interpretation of the same ones.

Given the scarcity of bibliography, as we have already mentioned, it was quite difficult and complex to investigate the triangle and analyze its properties. We needed to understand the fundamental properties of the rascal triangle and study the relationship between them and the well-known triangle of Pascal (we have established a connection between the two triangles because Pascal's has been well studied).

Despite the hard work, we were able to overcome the initial difficulties and to deepen/investigate this theme, discovering several properties that were systematically appearing. This should strongly motivate the continuation of the investigation of the theme of the dissertation that we present.

**Keywords:** rascal's triangle, Pascal's triangle, sequences, investigative tasks.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>História e Desenvolvimento</b>	<b>3</b>
2.1	Perspectiva histórica . . . . .	3
2.2	O estado da arte . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Novos conceitos e propriedades</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Generalizações no triângulo de rascal</b>	<b>36</b>
4.1	Generalização em $n$ e $k$ : Espaço de rascal . . . . .	36
4.2	Generalização Combinatória . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Outras aplicações</b>	<b>53</b>
5.1	Contagem de pontos de rede . . . . .	53
5.2	Contagem de número de palavras formadas a partir de um semigrupo . . . . .	55
<b>A</b>	<b>Triângulos de rascal</b>	<b>58</b>
A.1	Triângulo de rascal ( $TR$ ) . . . . .	59
A.2	Triângulo de rascal 2 ( $TR_2$ ) . . . . .	60
A.3	Triângulo de rascal 3 ( $TR_3$ ) . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Matriz de rascal</b>	<b>62</b>
<b>C</b>	<b>Espaço de rascal</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A matemática pode ser vista como uma atividade intelectual, cujo seu estudo e aprendizagem requer o raciocínio. Pode cativar todos aqueles que se dispõem a trabalhar de forma empenhada e reflexiva, com persistência e método.

As escolas têm o papel de formar Homens com conhecimentos sólidos para contribuir e desenvolver a sociedade, uma tarefa importante no processo de ensino e aprendizagem.

Os trabalhos e pesquisas feitas durante o processo de ensino e aprendizagem, são como os alicerces na construção de um pensamento lógico no indivíduo. As investigações ajudam o indivíduo a treinar melhor o seu pensamento, o que leva à descoberta de novos conhecimentos.

O conteúdo deste trabalho é resultado de uma investigação em que o nosso processo de ensino e aprendizagem da matemática é baseado nos pressupostos das tarefas investigativas de J. P. Ponte ([4, 5]), como sejam experimentar, debater, formular questões, generalizar, provar, explorar ideias e tomar decisões.

O triângulo de Pascal é um tema bem conhecido e que faz parte do programa curricular do secundário. Em [3], foi desenvolvido um trabalho aplicando as tarefas investigativas no contexto do triângulo de Pascal. Do mesmo modo, este trabalho é baseado em tarefas investigativas num contexto menos conhecido, designado por *triângulo de rascal*.

Sobre o triângulo de rascal existe pouca bibliografia e a bibliografia em português é quase inexistente. A maior informação disponível sobre o triângulo encontra-se publicado na página da OEIS<sup>1</sup>, onde podemos encontrar alguns resultados e conjeturas do triângulo

---

<sup>1</sup>A OEIS é uma sigla que significa *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, que traduzido para português significa “Enciclopédia on-line de sequências inteiras”. Esta página foi criada em 1964 por N. J. Sloane, um matemático britânico consagrado. A página da OEIS está disponível gratuitamente na

de rascal.

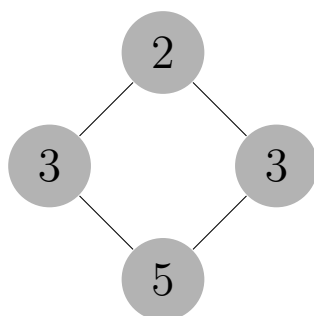
Apresentamos neste trabalho um estudo mais profundo sobre o triângulo de rascal, começando por retratar a história e o surgimento do mesmo. Depois demonstraremos detalhadamente algumas propriedades e resultados, a maioria dos quais são resultados novos obtidos durante a nossa investigação para este trabalho. Registamos algumas conjecturas nossas sobre o triângulo de rascal. Finalizamos apresentando duas generalizações para o triângulo de rascal e algumas aplicações.

Ao longo da nossa investigação foi publicada uma conjectura na página da OEIS, que nos motivou ainda mais a continuar a investigar. Para a concretização e o sucesso da nossa investigação, inicialmente tivemos que estudar e aprofundar os nossos conhecimentos matemáticos, como por exemplo, em funções geradoras e sequências, embora no caso específico das funções geradoras tenhamos posteriormente ultrapassado os problemas sem a necessidade de as utilizar. Por este motivo, não apresentamos qualquer resultado relativo a este tema.

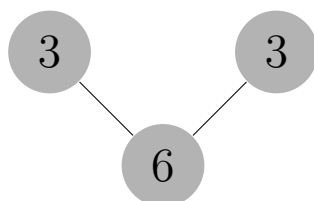
Além disto, usámos ao longo do trabalho o programa informático SAGEMATH (que passou recentemente a chamar-se COCALC), que é disponibilizado gratuitamente na internet no seguinte link <http://cocalc.com>.



Indignado com a resposta dos seus alunos, o professor disse que a mesma estava errada porque não era a quarta linha do triângulo de Pascal. Os alunos refutaram, alegando que não lhes tinham dito que era o triângulo de Pascal, mas apenas lhes pediu que completassem o triângulo. O professor reconheceu que o enunciado poderia não estar claro, mas a ideia dele era essa. O professor pediu aos alunos que justificassem como tinham construído a linha. Os alunos justificaram da seguinte forma: as linhas do triângulo começam e acabam em 1 e os números interiores são obtidos segundo a *fórmula do diamante*:  $Sul = (Oeste \times Leste + 1) \div Norte$ . Por exemplo,  $5 = (3 \times 3 + 1) \div 2$  (ver Figura 2.3).

Figura 2.3: Fórmula do *Diamante*

O professor notou que havia uma lógica no que eles fizeram mas voltou a questioná-los da seguinte forma: a vossa fórmula contém uma divisão e, por isso é mais complexa que a do triângulo Pascal. Com efeito, para este a regra é a seguinte: as linhas do triângulo começam e acabam em 1 e os números interiores são determinados pela *fórmula do triângulo invertido*:  $Sul = Oeste + Leste$ . Por exemplo,  $6 = 3 + 3$  (ver Figura 2.4).

Figura 2.4: Fórmula do *triângulo invertido*

Além disso, o professor colocou a questão: como têm a certeza de que o vosso triângulo terá sempre números inteiros?

Os alunos já haviam feito várias linhas (ver a Figura 2.5), mas o professor não ficou totalmente convencido e disse-lhes que o que fizeram não era suficiente para terem a certeza que não apareceria nenhum número não inteiro no triângulo. A fórmula parece

suficientemente complexa para garantir que só aparecem números inteiros, ao contrário da fórmula do triângulo de Pascal que só envolve adição.

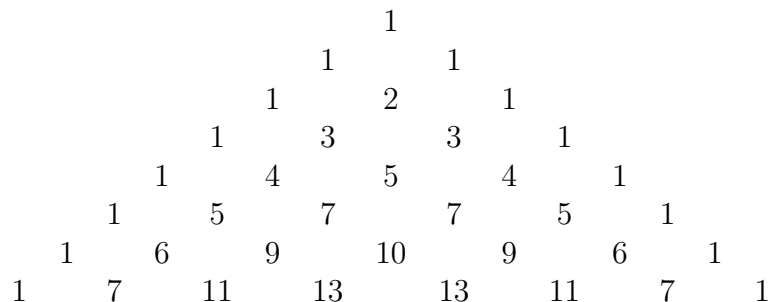


Figura 2.5: Triângulo feito pelos alunos

Mais tarde, os alunos convencidos de que estavam certos, continuaram a sua pesquisa e provaram que os números que formam o triângulo são todos inteiros. À semelhança do nome de Pascal, os alunos decidiram designar o seu triângulo por triângulo de rascal. Das suas pesquisas notaram o seguinte:

- as duas primeiras diagonais do triângulo são iguais para os dois triângulos;
- a terceira diagonal do triângulo de Pascal  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ , é obtida começando em 1 e adicionando ao termo anterior sucessivamente números inteiros consecutivos começando pelo 2, ou seja,  $1, 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15, \dots$ , mas a terceira diagonal do triângulo de rascal são os números ímpares positivos  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ , ou seja, começando do 1 são obtidos adicionando 2 ao anterior,  $1, 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, 7 + 2 = 9, \dots$ ;
- a quarta diagonal do triângulo de Pascal  $1, 4, 10, 20, 35, \dots$  não era fácil para eles estabelecerem um padrão, mas a quarta diagonal do triângulo de rascal  $1, 4, 7, 10, 13, \dots$  são obtidos começando no 1 e adicionando 3 ao anterior.

Não temos conhecimentos que os alunos tenham generalizado as restantes diagonais, embora nos pareça que tal fosse plausível.

À semelhança do triângulo de Pascal, também o triângulo de rascal começa os seus índices em 0. Ou seja, a primeira linha corresponde ao  $n = 0$ , a segunda ao  $n = 1$  e assim sucessivamente. Além disso, para cada linha, o primeiro número corresponde ao  $k = 0$ , o segundo ao  $k = 1$  e assim sucessivamente. Observamos que para os alunos cada diagonal corresponde a um valor de  $k$  constante. Portanto, a primeira diagonal corresponde ao  $k = 0$ .

Os alunos provaram [1] que o  $(m + 1)$ -ésimo elemento da diagonal  $k$  do triângulo, começando a contagem em  $m = 0$ , é dado por  $km + 1$ . Como a diagonal  $k$  começa na linha  $n = k$ , o  $(k + 1)$ -ésimo elemento<sup>1</sup> da linha  $n$  é dado por

$$T(n, k) = k(n - k) + 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

A (2.1) designaremos por **fórmula algébrica** dos números de rascal.

Comparando (2.1) com a expressão para o  $(k + 1)$ -ésimo elemento da linha  $n$  do triângulo de Pascal,

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n - k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0,$$

os alunos chegaram à conclusão de que, embora a fórmula do diamante seja mais complexa do que a do triângulo invertido, a expressão para os números de rascal é mais simples do que a expressão para os números de Pascal.

Na pouca bibliografia existente, encontramos o triângulo (2.5) num artigo de Fielder [2] de 1988, onde o autor o obteve a partir da fórmula algébrica e não da fórmula do diamante. Mais recentemente, Clark Kimberling cria a sequência A077028 na página da OEIS a partir da fórmula onde, segundo ele, a diagonal  $n$  é formada pelos números  $1 \pmod{(n - 1)}$ . Naturalmente, nenhum deles designa o triângulo de triângulo de rascal! Aliás, o primeiro nome associado à sequência A077028 é a do triângulo com a diagonal  $n$  congruente com  $1 \pmod{(n - 1)}$ .

Em anexo, apresentamos um triângulo de rascal com mais linhas.

## 2.2 O estado da arte

Devido ao pouco conhecimento existente sobre este triângulo, tornou-se o nosso objeto de estudo.

O ponto de partida foi encontrar informação acerca deste triângulo. Toda informação existente até ao início deste trabalho encontrava-se na página da OEIS.

Na página da OEIS, o triângulo de rascal aparece identificado pela sequência A077028, e podemos encontrar os seguintes resultados:

---

<sup>1</sup>A atribuição da letra  $T$  aos números de rascal não se deve ao alunos, mas é a utilizada na página da OEIS.

- A  $n$ -ésima diagonal é congruente com  $1 \pmod{n-1}$ , para  $n \geq 3$  (publicado por Clark Kimberling, aos 19 de outubro de 2002).
- As somas, linha a linha, do triângulo de rascal são os números “bolo” (*cake numbers*), cuja sequência aparece na OEIS identificada por A000125 (publicado por Amarnath Murthy, aos 15 de julho de 2005).
- A soma alternada da linha  $n$  é 0 se  $n$  for par e  $(3-n)/2$  se  $n$  for ímpar (publicado por Amarnath Murthy, aos 15 de julho de 2005).
- As linhas são simétricas, começando e terminando com 1. O número de ocorrências de  $k$  neste triângulo é o número de divisores de  $k-1$ , fornecido pela sequência A000005 (publicado por Amarnath Murthy, aos 15 de julho de 2005).
- Conjetura: com exceção de  $n = 0, 1$  e  $6$ , cada linha contém um primo (publicado por Amarnath Murthy, aos 15 de julho de 2005).

Esta conjetura de A. Murthy foi mais tarde contestada por Alois P. Heinz, que publicou em 31 de agosto de 2017, afirmando que a conjetura precisava de mais exceções, porque as linhas 30 e 54 não possuem números primos. A falsidade desta conjetura já tinha sido observada por nós durante o segundo semestre do ano letivo 2016/2017, embora não tenha sido publicada na OEIS.

- O número  $T(n, k)$  representa<sup>2</sup> o número de somas distintas de  $k$  elementos em  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Por exemplo,  $T(5, 4)$  é igual ao número de somas distintas de 4 elementos em  $\Omega_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , que é  $(5 + 4 + 3 + 2) - (4 + 3 + 2 + 1) + 1 = 5$ . (Publicado por Derek Orr, aos 26 de novembro de 2014.)

- A soma das diagonais deste triângulo<sup>3</sup> são os números poligonais, fornecidos pela sequência A057145. (Publicado por Raphie Frank, aos 30 de outubro de 2012)

Quando iniciámos o trabalho de investigação, baseado nos resultados anteriores, pensámos que nos era possível obter novos resultados. Uma primeira conjetura nossa é: excluindo os números 1's do início e fim de cada linha do triângulo de rascal, as linhas

---

<sup>2</sup>Esta representação será utilizada neste trabalho para demonstrar alguns resultados e será designada por *interpretação combinatória*.

<sup>3</sup>Entenda-se por triângulo o triângulo de rascal truncado numa linha.

que contêm apenas números primos são as linhas  $n = 2, 3, 5, 7, 13$  e  $17$ . Este é um resultado a que chegámos e que atempadamente publicámos na página da OEIS. Quando foi publicado, a nossa conjectura tinha sido apenas testada até à linha  $10^9$ . No fim deste trabalho, a nossa investigação já contempla até à linha  $10^{10}$  (publicado por Rogério Serôdio, aos 20 de setembro de 2017).

# Capítulo 3

## Novos conceitos e propriedades

Neste capítulo vamos mostrar resultados, conjecturas e propriedades, em parte conhecidos e outros obtidos no decorrer da investigação deste trabalho.

De acordo com os pressupostos das tarefas investigativas, colocámo-nos no lugar do aluno para obter resultados novos, ou seja, no papel de aluno-investigador.

O triângulo de rascal (à semelhança do de Pascal) pode ser visto na forma de uma matriz infinita. A matriz associada ao triângulo de rascal está ilustrada na Figura 3.1.

Observemos que a matriz de rascal pode ser obtida fazendo uma rotação no sentido antihorário no triângulo de rascal.

Apresentaremos a seguir duas definições que usaremos mais tarde e que ilustramos na Figura 3.2.

**Definição 3.1.** A **diagonal**  $i$  do triângulo de rascal corresponde à coluna  $i$  da matriz de rascal.

A **antidiagonal**  $j$  do triângulo de rascal corresponde à linha  $j$  da matriz de rascal.□

**Definição 3.2.** A coluna central do triângulo de rascal corresponde à diagonal principal

<b>1</b>	1	1	1	1	1	1	...
1	<b>2</b>	3	4	5	6	7	...
1	3	<b>5</b>	7	9	11	13	...
1	4	7	<b>10</b>	13	16	19	...
1	5	9	13	<b>17</b>	21	25	...
1	6	11	16	21	<b>26</b>	31	...
1	7	13	19	25	31	<b>37</b>	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Figura 3.1: Matriz de rascal.

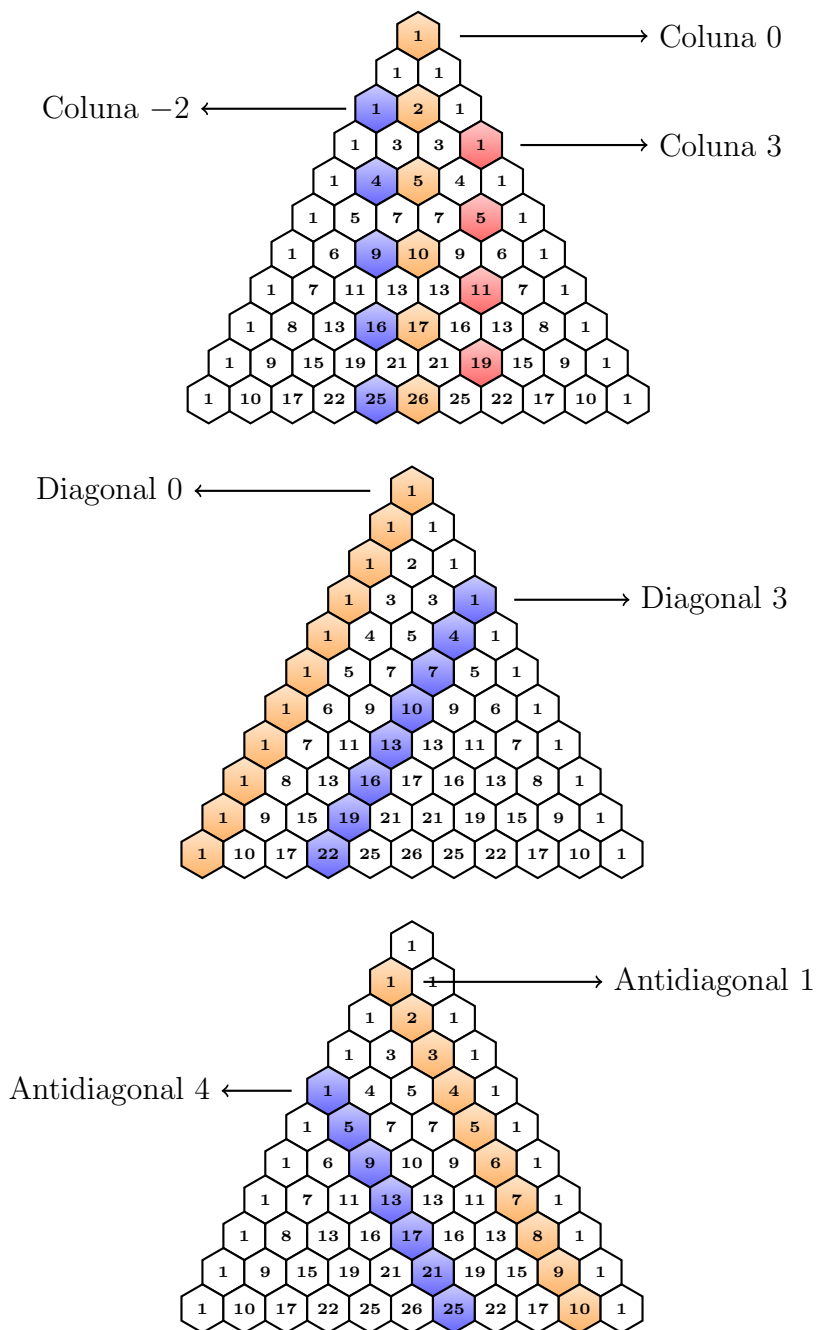


Figura 3.2: Ilustração das diagonais, antidiagonais e colunas no triângulo.

da matriz de rascal. Designamo-la por coluna 0.

A primeira diagonal acima da diagonal principal da matriz de rascal designamos por diagonal 1, a segunda diagonal acima da diagonal principal da matriz de rascal designamos por diagonal 2, e assim sucessivamente. Para as diagonais abaixo, a numeração é análoga, mas negativa.

A coluna  $c$  do triângulo de rascal corresponde à diagonal  $c$  da matriz de rascal.  $\square$

Embora a matriz de rascal não seja utilizada no resto da dissertação, achámos importante apresentá-la pois é uma maneira alternativa de visualizar o triângulo de rascal e de fácil implementação no excel, por exemplo. Além disso, conforme constatámos numa submissão à OEIS, o conceito de coluna no triângulo não está ainda definido e interiorizado na comunidade científica. Na nossa opinião, é mais fácil referenciar uma diagonal da matriz do que uma coluna do triângulo.

Vamos agora demonstrar a fórmula algébrica (2.1) verifica a fórmula do diamante. Para isto, vamos recorrer à indução forte.

**Proposição 3.1.** *O número do triângulo rascal, na linha  $n$  ( $n \geq 0$ ) e posição  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), é dado por  $T(n, k) = k(n - k) + 1$ .*

*Demonstração.* Com os elementos do triângulo de rascal dependem de elementos das duas linhas anteriores, a demonstração é feita por indução dita forte. Assim, vamos verificar primeiro que a fórmula (2.1) é válida para as duas primeiras linhas, tendo em conta a Figura 2.5.

Para  $k = 0$  e  $k = n$ , com  $n = 0$  ou  $n = 1$ , os números exteriores são sempre iguais a 1, ou seja,  $T(n, 0) = T(n, n) = 1$ :

$$T(n, 0) = 0(n - 0) + 1 = 1$$

e

$$T(n, n) = n(n - n) + 1 = 1.$$

Suponhamos que a fórmula é válida para as linhas  $n - 1$  e  $n$ . Para o  $k$ -ésimo elemento da linha  $n + 1$ , teremos de obter  $T(n + 1, k) = k(n + 1 - k) + 1$ .

Pela fórmula do diamante temos

$$T(n+1, k) = \frac{T(n, k-1)T(n, k) + 1}{T(n-1, k-1)}$$

Usando a hipótese de indução vem

$$\begin{aligned} T(n+1, k) &= \frac{[(k-1)(n-(k-1))+1][k(n-k)+1]+1}{(k-1)(n-1-(k-1))+1} \\ &= \frac{[(k-1)(n-k+1)+1][k(n-k)+1]+1}{(k-1)(n-k)+1} \\ &= \frac{(kn-k^2+k-n+k-1+1)(kn-k^2+1)+1}{kn-k^2-n+k+1}. \end{aligned}$$

Considerando  $d = kn - k^2 - n + k + 1$  e tendo em conta que  $kn - k^2 + 1 = d + n - k$ , obtemos

$$\begin{aligned} T(n+1, k) &= \frac{(d+k-1)(d+n-k)+1}{d} \\ &= \frac{d^2 + nd + kn - k^2 - d - n + k + 1}{d} \\ &= \frac{d^2 + nd}{d} \\ &= d + n \\ &= kn - k^2 + k + 1 \\ &= k(n+1-k) + 1. \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução matemática forte, concluímos que a fórmula (2.1) é verdadeira.  $\square$

A Proposição anterior permite-nos representar o triângulo de rascal conforme apresentamos na Figura 3.3.

Analisando o triângulo, observamos uma propriedade semelhante à do triângulo de Pascal, os números de uma linha em colunas opostas em relação à coluna 0 são iguais, ou seja,

$$T(n, k) = T(n, n-k).$$

Por exemplo, o segundo e o penúltimo números da linha 4 do triângulo de rascal são  $T(4, 1)$  e  $T(4, 3) = T(4, 4-1)$ , ambos iguais a 4.

			$T(0, 0)$		
		$T(1, 0)$		$T(1, 1)$	
	$T(2, 0)$		$T(2, 1)$		$T(2, 2)$
$T(3, 0)$		$T(3, 1)$		$T(3, 2)$	$T(3, 3)$
$T(4, 0)$	$T(4, 1)$		$T(4, 2)$	$T(4, 3)$	$T(4, 4)$
...		...		...	...

Figura 3.3: Triângulo de rascal escrito usando  $T(n, k)$

Esta propriedade traduz a simetria de um qualquer triângulo simétrico.

**Lema 3.1.** O triângulo de rascal é simétrico.

*Demonstração.* A demonstração será feita com base na fórmula algébrica, ou seja,  $T(n, k) = k(n - k) + 1 = kn - k^2 + 1$ . Assim,

$$T(n, n - k) = n - k(n - n + k) + 1 = kn - k^2 + 1.$$

Concluimos que  $T(n, n - k) = T(n, k)$ . □

Sejam  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ <sup>1</sup> e  $S_{n,k}$  o conjunto de todas as somas possíveis tomando  $k$  elementos de  $\Omega_n$  e o número 0, para  $0 \leq k \leq n$ . Os elementos do triângulo de rascal podem ser interpretados como a cardinalidade de  $S_{n,k}$ . Esta interpretação<sup>2</sup> foi publicada por Derek Orr na página da OEIS aos 26 de novembro 2014 e designaremos por *interpretação combinatória*.

Como  $\Omega_n$  é um conjunto de números naturais consecutivos, a cardinalidade de  $S_{n,k}$  é igual à diferença entre o máximo e o mínimo deste conjunto somado de uma unidade. Deste modo, é possível obter os elementos do triângulo de rascal a partir da seguinte fórmula:

$$T(n, k) = \max(S_{n,k}) - \min(S_{n,k}) + 1.$$

As seguintes proposições foram derivadas de tarefas investigativas semelhantes às tarefas que poderíamos propor aos nossos alunos acerca do triângulo de Pascal. O resultado

<sup>1</sup>Se  $n = 0$ ,  $\Omega_0 = \{ \}$ .

<sup>2</sup>À interpretação de Derek Orr acrescentámos o número zero às somas para que os conjuntos  $S_{n,k}$  não sejam vazios.

abaixo foi obtido manipulando a fórmula algébrica. Devido à sua simplicidade, demonstraremos recorrendo à interpretação combinatória dos números deascal.

**Proposição 3.2.** *Os números deascal,  $T(n, k)$ , verificam as seguintes propriedades:*

- i)  $T(n + 1, k) = T(n, k) + k$ , para  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$ ;
- ii)  $T(n, k + 1) = T(n, k) + n - 2k - 1$ , para  $n > 0$  e  $0 \leq k < n$ ;
- iii)  $kT(n - 1, k - 1) = (k - 1)T(n, k) + 1$ , para  $n \geq 1$  e  $1 \leq k \leq n$ ;
- iv)  $T(n, 1) = T(n, n - 1) = n$ , para  $n \geq 1$ ;
- v)  $T(n, 2) = T(n - 1, 1) + T(n - 2, 1)$ , para  $n \geq 3$ ;
- vi)  $T(n, k + h) = T(n, k) + T(n, h) - (2kh + 1)$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $0 \leq h \leq n - k$ ;
- vii)  $T(n + j, k) = T(n, k) + kj$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $j \geq k - n$ ;
- viii)  $T(n + j, k + j) = T(n, k) + T(n, j) - T(k, j)$ , para  $n \geq 0$  e  $0 \leq j \leq k \leq n$ .

*Demonstração.* Vamos apresentar uma demonstração combinatória para cada uma destas propriedades.

- i) Seja  $\Omega_{n+1} = \{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ . Considerando as somas de  $k$  elementos de  $\Omega_{n+1}$ , temos

$$\begin{aligned} T(n + 1, k) &= \max(S_{n+1, k}) - \min(S_{n+1, k}) + 1 \\ &= (n + 1) + n + \dots + (n + 2 - k) - (1 + 2 + \dots + k) + 1. \end{aligned}$$

Se ao segundo membro adicionarmos e subtrairmos  $n + 1 - k$ , obtemos

$$\begin{aligned} T(n + 1, k) &= (n + 1) + n + \dots + (n + 2 - k) + (n + 1 - k) - (n + 1 - k) - \\ &\quad - (1 + 2 + \dots + k) + 1. \\ &= n + 1 + \max(S_{n, k}) - n - 1 + k - (1 + 2 + \dots + k) + 1. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\min(S_{n+1, k}) = \min(S_{n, k})$  para  $0 \leq k \leq n$ , obtemos

$$T(n + 1, k) = \max(S_{n, k}) - \min(S_{n, k}) + 1 + k,$$

donde concluimos  $T(n+1, k) = T(n, k) + k$ .

Os valores de  $n$  e  $k$  para os quais esta fórmula é válida surgem das restrições das linhas e do número de elementos por linha. Ou seja,  $n+1 \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n+1$  para o membro à esquerda e  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$  para o membro à direita. Destas condições verificamos que a fórmula é válida para  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$ .

ii) Seja  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Temos que  $\max(S_{n,k+1}) = \max(S_{n,k}) + n - k$  e o  $\min(S_{n,k+1}) = \min(S_{n,k}) + (k+1)$ .

Considerando as somas de  $k+1$  elementos de  $\Omega_n$ , temos

$$\begin{aligned} T(n, k+1) &= \max(S_{n,k+1}) - \min(S_{n,k+1}) + 1 \\ &= \max(S_{n,k}) + n - k - (\min(S_{n,k}) + (k+1)) + 1 \\ &= \max(S_{n,k}) - \min(S_{n,k}) + n - 2k \\ &= T(n, k) + n - 2k - 1. \end{aligned}$$

Inspecionando os dois números de rascais envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k+1 \leq n$  e  $0 \leq k \leq n$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n > 0$  e  $0 \leq k < n$ .

iii) Seja  $\Omega_{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Considerando as somas de  $k-1$  elementos de  $\Omega_{n-1}$ , temos

$$kT(n-1, k-1) = \max(S_{n-1,k-1}) - \min(S_{n-1,k-1}) + 1.$$

Mas,  $\max(S_{n-1,k-1}) = \max(S_{n,k}) - n$  e  $\min(S_{n-1,k-1}) = \min(S_{n,k}) - k$ .

Assim, temos

$$\begin{aligned} kT(n-1, k-1) &= k(\max(S_{n,k}) - n - (\min(S_{n,k}) - k) + 1) \\ &= k(\max(S_{n,k}) - \min(S_{n,k}) + 1 - n + k) \\ &= kT(n, k) - k(n-k). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 T(n, k) &= \max(S_{n,k}) - \min(S_{n,k}) + 1 \\
 &= n + \dots + (n - k + 1) - (1 + \dots + k) + 1 \\
 &= kn - 2(1 + \dots + k) + k + 1 \\
 &= kn - k(k + 1) + k + 1 \\
 &= kn - k^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$kT(n - 1, k - 1) = kT(n, k) - T(n, k) + 1,$$

donde concluimos  $kT(n - 1, k - 1) = (k - 1)T(n, k) + 1$ .

Inspecionando os dois números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n - 1 \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k - 1 \leq n - 1$  e  $0 \leq k \leq n$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 1$  e  $1 \leq k \leq n$ .

iv) Seja  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Considerando as somas de 1 elementos de  $\Omega_n$ , temos

$$\begin{aligned}
 T(n, 1) &= \max(S_{n,1}) - \min(S_{n,1}) + 1 \\
 &= n - 1 + 1,
 \end{aligned}$$

desta forma temos que  $T(n, 1) = n$ . Procedendo da mesma forma temos

$$\begin{aligned}
 T(n, n - 1) &= \max(S_{n,n-1}) - \min(S_{n,n-1}) + 1 \\
 &= n + (n - 1) + \dots + (n + 1 - (n - 1)) - (1 + 2 + \dots + (n - 1)) + 1 \\
 &= n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 - (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) + 1 \\
 &= n.
 \end{aligned}$$

Logo,  $T(n, 1) = T(n, n - 1) = n$ .

Inspecionando os dois números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n \geq 1$  e  $n - 1 \geq 0$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 1$ .

v) Seja  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Considerando as somas de 2 elementos de  $\Omega_n$ , temos

$$\begin{aligned} T(n, 2) &= \max(S_{n,2}) - \min(S_{n,2}) + 1 \\ &= n + (n - 1) - (1 + 2) + 1 \\ &= n - 2 + n - 1 \\ &= \max(S_{n-2,1}) + \max(S_{n-1,1}). \end{aligned}$$

Como  $\min(S_{n-2,1}) = \min(S_{n-1,1}) = 1$ , vemos que

$$\begin{aligned} T(n, 2) &= \max(S_{n-2,1}) - \min(S_{n-2,1}) + 1 + \max(S_{n-1,1}) - \min(S_{n-1,1}) + 1 \\ &= T(n - 2, 1) + T(n - 1, 1). \end{aligned}$$

Inspecionando os três números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n \geq 2$ ,  $n - 2 \geq 1$  e  $n - 1 \geq 1$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 3$ .

vi) Seja  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Considerando as somas de  $k + h$  elementos de  $\Omega_n$ , temos

$$T(n, k + h) = \max(S_{n,k+h}) - \min(S_{n,k+h}) + 1.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \max(S_{n,k+h}) &= n + \dots + (n - k + 1) + (n - k) + (n - k - 1) + \dots + (n - k - h + 1) \\ &= \max(S_{n,k}) + \max(S_{n,h}) - kh \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \min(S_{n,k+h}) &= 1 + 2 + \dots + k + k + 1 + \dots + k + h \\ &= \min(S_{n,k}) + \min(S_{n,h}) + kh. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T(n, k + h) &= \max(S_{n,k}) + \max(S_{n,h}) - kh - (\min(S_{n,k}) + \min(S_{n,h}) + kh) + 1, \\
&= \max(S_{n,k}) - \min(S_{n,k}) + 1 + \max(S_{n,h}) - \min(S_{n,h}) + 1 - 2kh - 1 \\
&= T(n, k) + T(n, h) - (2kh + 1).
\end{aligned}$$

Inspecionando os três números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n \geq 0$ ,  $k + h \leq n$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $0 \leq h \leq n$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $0 \leq h \leq n - k$ .

vii) Seja  $\Omega_{n+j} = \{1, 2, \dots, n + j\}$ . Considerando as somas de  $k$  elementos de  $\Omega_{n+j}$ , temos

$$\begin{aligned}
T(n + j, k) &= \max(S_{n+j,k}) - \min(S_{n+j,k}) + 1 \\
&= n + j + \dots + (n + j + 1 - k) - (1 + 2 + \dots + k) + 1 \\
&= (n + \dots + n + 1 - k) + jk - (1 + \dots + k) + 1 \\
&= T(n, k) + kj.
\end{aligned}$$

Inspecionando os dois números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n + j \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n + j$  e  $0 \leq k \leq n$ . Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $j \geq k - n$ .

viii) Das propriedades (vi) e (vii) para demonstrar a propriedade (viii). Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
T(n + j, k + j) &= T(n + j, k) + T(n + j, j) - (2kj + 1) \\
&= T(n, k) + kj + T(n, j) + j^2 - 2kj - 1 \\
&= T(n, k) + T(n, j) - kj + j^2 - 1.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
T(k, j) &= \max(S_{k,j}) - \min(S_{k,j}) + 1 \\
&= k + k - 1 + \dots + k - (j - 1) - (1 + 2 + \dots + j) + 1 \\
&= kj - 2(1 + 2 + \dots + j) + j + 1 \\
&= kj - j^2 + 1.
\end{aligned}$$

Logo,  $T(n + j, k + j) = T(n, k) + T(n, j) - T(k, j)$ .

Inspecionando os quatro números de rascal envolvidos, verificamos que a fórmula é válida para  $n + j \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k + j \leq n + j$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq j \leq n$  e  $0 \leq j \leq k$ .

Ou seja, a fórmula é válida para  $n \geq 0$  e  $0 \leq j \leq k \leq n$ .

□

No próximo resultado listamos mais algumas propriedades do triângulo obtidas não por manipulação algébrica, mas apenas por tentativa e erro. Estas propriedades, embora mais complexas, são mais fáceis de interpretar geometricamente, como veremos mais tarde. Devido à complexidade, demonstraremos recorrendo à fórmula algébrica dos números de rascal.

**Proposição 3.3.** *Os números de rascal,  $T(n, k)$ , verificam as seguintes propriedades:*

$$i) T(n, k) = \frac{T(n + i, k)T(n + j, k + j) + ij}{T(n + i + j, k + j)}, \text{ para } n \geq 0, 0 \leq k \leq n, i \geq k - n \text{ e } j \geq -k;$$

$$ii) T(n, k) = \frac{T(n + j, k + j)T(n, k + h) - jhT(2n - 2k - h, n - k - h)}{T(n + j, k + h + j)}, \text{ para } n \geq 0, 0 \leq k \leq n, -k \leq h \leq n - k \text{ e } j \geq -k - h;$$

$$iii) T(n, k) = \frac{T(n - 1, k - 1)T(n - 2, k - 1) - T(2n - 2k - 1, n - k + 1)}{T(n - 3, k - 2)}, \text{ para } n \geq 4 \text{ e } 2 \leq k \leq n - 2;$$

$$iv) T(n, k) = \frac{T(n - 1, k)T(n - 2, k - 1) - T(2k - 1, k + 1)}{T(n - 3, k - 1)}, \text{ para } n \geq 4 \text{ e } 2 \leq k \leq n - 2.$$

*Demonstração.* Vamos apresentar uma demonstração com base na definição algébrica dos números de rascal,  $T(n, k) = k(n - k) + 1$ , tendo em consideração as restrições  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$ .

i) Podemos reescrever esta propriedade da seguinte forma

$$T(n, k)T(n + i + j, k + j) = T(n + i, k)T(n + j, k + j) + ij. \quad (3.1)$$

Com base na definição algébrica dos números de rascal temos que

$$\begin{aligned} T(n + i, k) &= k(n + i - k) + 1 \\ &= k(n - k) + 1 + ki, \end{aligned}$$

donde obtemos que

$$T(n+i, k) = T(n, k) + ki. \quad (3.2)$$

Ainda usando a definição algébrica dos números de rascal temos

$$\begin{aligned} T(n+j, k+j) &= (k+j)(n+j-k-j) + 1 \\ &= k(n-k) + 1 + j(n-k), \end{aligned}$$

e deste modo obtemos

$$T(n+j, k+j) = T(n, k) + j(n-k). \quad (3.3)$$

Analogamente, temos ainda que

$$\begin{aligned} T(n+i+j, k+j) &= (k+j)(n+i+j-k-j) + 1 \\ &= T(n, k) + j(n-k+i) + ki. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2), (3.3) e (3.4) na igualdade (3.1), obtemos

$$T(n, k) [T(n, k) + j(n-k+i) + ki] = [T(n, k) + ki] (T(n, k) + j(n-k)) + ij.$$

Desenvolvendo o membro esquerdo (ME) obtemos

$$\text{ME} = T^2(n, k) + (jn - jk + ji + ki)T(n, k).$$

Desenvolvendo o membro direito (MD) obtemos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) + j(n-k)T(n, k) + kiT(n, k) + kij(n-k) + ij \\ &= T^2(n, k) + j(n-k)T(n, k) + kiT(n, k) + ij(kn - k^2 + 1). \end{aligned}$$

Sabendo que  $T(n, k) = kn - k^2 + 1$ , vem que

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) + j(n - k)T(n, k) + kiT(n, k) + ijT(n, k) \\ &= T^2(n, k) + (jn - jk + ji + ki)T(n, k). \end{aligned}$$

Logo,  $\text{ME}=\text{MD}$ , donde concluimos que a propriedade é válida.

Vejamos agora os valores de  $n, k, i, j$  para os quais esta fórmula é válida. Inspeccionando os quatro números de rascal envolvidos, temos que  $n \geq 0, 0 \leq k \leq n, n+i \geq 0, 0 \leq k \leq n+i, n+j \geq 0, 0 \leq k+j \leq n+j, n+i+j \geq 0$  e  $0 \leq k+j \leq n+i+j$ . Desta condições, vem que  $n \geq 0, 0 \leq k \leq n, i \geq k - n$  e  $j \geq -k$ .

ii) Podemos reescrever esta propriedade da seguinte forma

$$\begin{aligned} T(n, k)T(n + j, k + h + j) &= \\ &= T(n + j, k + j)T(n, k + h) - hjT(2n - 2k - h, n - k - h). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Baseando-se na definição algébrica dos números de rascal temos

$$\begin{aligned} T(n, k + h) &= (k + h)(n - k - h) + 1 \\ &= kn - k^2 + hn - 2hk - h^2 + 1 \\ &= k(n - k) + 1 + h(n - 2k - h), \end{aligned}$$

dado isso obtemos que

$$T(n, k + h) = T(n, k) + h(n - 2k - h). \quad (3.6)$$

Ainda aplicando a definição algébrica dos números de rascal temos

$$\begin{aligned} T(n + j, k + h + j) &= (k + h + j)(n + j - k - h - j) + 1 \\ &= kn - k^2 - 2hk + hn - h^2 + jn - jk - jh + 1 \\ &= k(n - k) + h(n - 2k - h) + j(n - k - h) + 1, \end{aligned}$$

consequentemente obtemos

$$T(n+j, k+h+j) = T(n, k) + h(n-2k-h) + j(n-k-h). \quad (3.7)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} T(2n-2k-h, n-k-h) &= (n-k-h)(2n-2k-h-n+k+h) + 1 \\ &= -T(n, k) + n(n-k-h) + hk + 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo (3.6), (3.7), (3.8) e (3.3) na igualdade (3.5).

Para o membro esquerdo (ME), temos

$$\text{ME} = T(n, k) [T(n, k) + h(n-2k-h) + j(n-k-h)]$$

No membro direito (MD), temos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= [T(n, k) + j(n-k)] [T(n, k) + h(n-2k-h)] - \\ &\quad -hj [-T(n, k) + n(n-k-h) + hk + 2]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o membro esquerdo (ME), obtemos

$$\text{ME} = T^2(n, k) + (j(n-k-h) + h(n-2k-h))T(n, k).$$

Desenvolvendo o membro direito (MD), obtemos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) + h(n-2k-h)T(n, k) + j(n-k)T(n, k) + \\ &\quad + (jhn - jhk)(n-2k-h) + hjT(n, k) - hjn(n-k-h) - h^2jk - 2hj \\ &= T^2(n, k) + h(n-2k-h)T(n, k) + j(n-k)T(n, k) - jh(kn - k^2 + 1). \end{aligned}$$

Sabendo que  $T(n, k) = kn - k^2 + 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) + h(n-2k-h)T(n, k) + j(n-k)T(n, k) - jhT(n, k) \\ &= T^2(n, k) + (j(n-k-h) + h(n-2k-h))T(n, k). \end{aligned}$$

Logo,  $ME=MD$ , donde concluimos que a propriedade é válida.

Inspecionando as restrições dos cinco números de rascal envolvidos, concluimos que  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $-k \leq h \leq n - k$  e  $j \geq -k - h$ .

iii) Podemos reescrever esta propriedade da seguinte forma

$$\begin{aligned} T(n, k)T(n - 3, k - 2) &= \\ &= T(n - 1, k - 1)T(n - 2, k - 1) - T(2n - 2k - 1, n - k + 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Com base na definição algébrica dos números de rascal, temos

$$\begin{aligned} T(n - 1, k - 1) &= (k - 1)(n - 1 - k + 1) + 1 \\ &= kn - k^2 + 1 + k - n, \end{aligned}$$

em consequência obtemos que

$$T(n - 1, k - 1) = T(n, k) + k - n. \quad (3.10)$$

Ainda fazendo uso da definição algébrica dos números de rascal temos

$$\begin{aligned} T(n - 2, k - 1) &= (k - 1)(n - 2 - k + 1) + 1 \\ &= k(n - k) + 1 - n + 1, \end{aligned}$$

como resultado obtemos

$$T(n - 2, k - 1) = T(n, k) - n + 1. \quad (3.11)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} T(2n - 2k - 1, n - k + 1) &= (n - k + 1)(2n - 2k - 1 - n + k - 1) + 1 \\ &= -T(n, k) + n(n - k - 1) + k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainda, temos

$$\begin{aligned} T(n-3, k-2) &= (k-2)(n-3-k+2) + 1 \\ &= T(n, k) - 2(n-1) + k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) na igualdade (3.9), temos

$$\begin{aligned} &T(n, k)(T(n, k) - 2(n-1) + k) = \\ &= [T(n, k) + k - n][T(n, k) - n + 1] - [-T(n, k) + n(n-k-1) + k]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o membro esquerdo (ME) obtemos

$$\text{ME} = T^2(n, k) + (k - 2n + 2)T(n, k).$$

Desenvolvendo o membro direito (MD) obtemos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) - 2nT(n, k) + kT(n, k) - n(k - n + 1) + k + T(n, k) + T(n, k) - \\ &\quad - n(n - k - 1) - k \\ &= T^2(n, k) - 2nT(n, k) + kT(n, k) + 2T(n, k) \\ &= T^2(n, k) + (k - 2n + 2)T(n, k). \end{aligned}$$

Logo, ME=MD, donde concluimos que a propriedade é válida.

Inspecionando os cinco números de rascal envolvidos nesta fórmula, concluimos que  $n \geq 4$  e  $2 \leq k \leq n - 2$ .

iv) Podemos reescrever esta propriedade da seguinte forma

$$T(n, k)T(n-3, k-1) = T(n-1, k)T(n-2, k-1) - T(2k-1, k+1). \quad (3.14)$$

Com base na definição algébrica dos números de rascal, temos

$$\begin{aligned} T(n-1, k) &= k(n-1-k) + 1 \\ &= kn - k^2 + 1 - k, \end{aligned}$$

em consequência obtemos que

$$T(n-1, k) = T(n, k) - k. \quad (3.15)$$

Ainda fazendo uso da definição algébrica dos números de rascal temos

$$\begin{aligned} T(n-3, k-1) &= (k-1)(n-3-k+1) + 1 \\ &= kn - k^2 + 1 - k - n + 2 \\ &= T(n, k) - k - n + 2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} T(2k-1, k+1) &= (k+1)(2k-1-k-1) + 1 \\ &= k^2 - k - 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.15), (3.11), (3.16) e (3.17) na igualdade (3.14), temos

$$T(n, k) [T(n, k) - k - n + 2] = [T(n, k) - k] [T(n, k) - n + 1] - k^2 + k + 1.$$

Desenvolvendo o membro esquerdo (ME) obtemos

$$\text{ME} = T^2(n, k) + (2 - k - n)T(n, k).$$

Desenvolvendo o membro direito (MD) obtemos

$$\begin{aligned} \text{MD} &= T^2(n, k) - nT(n, k) + T(n, k) - kT(n, k) + kn - k - k^2 + k + 1 \\ &= T^2(n, k) - nT(n, k) - kT(n, k) + T(n, k) + k(n - k) + 1 \\ &= T^2(n, k) + (2 - k - n)T(n, k). \end{aligned}$$

Logo, ME=MD, donde concluimos que a propriedade é válida.

Inspecionando os cinco números de rascal envolvidos nesta fórmula, concluimos que  $n \geq 4$  e  $2 \leq k \leq n - 2$ .

□

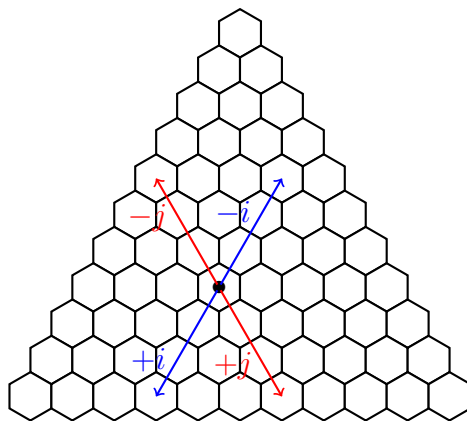


Figura 3.4: Ilustração do sinal dos deslocamentos na diagonal e na antidiagonal.

As propriedades da Proposição anterior podem ser interpretadas de forma geométrica, como iremos ver a seguir.

Relembremos que os números de rascal foram obtidos segundo a fórmula do diamante. Ou seja, qualquer número no interior do triângulo de rascal é obtido dividindo o resultado da soma de uma unidade com o produto dos dois números acima dele, na linha anterior, pelo número da mesma coluna duas linhas acima dele. Portanto, o “diamante” (*losângulo*) é construído da seguinte maneira: um vértice é o número interior do triângulo de rascal; subindo uma linha em cada uma das direções diagonais (diagonal e a antidiagonal) obtemos outros dois vértices, e a partir de um destes subimos mais uma linha para obter o último vértice de tal forma que feche o diamante.

A interpretação geométrica da propriedade i) anterior é baseada também na fórmula de um diamante. A diferença está na construção do mesmo e no valor a somar no numerador. Neste caso, o diamante é construído da seguinte maneira: um vértice é um número interior do triângulo de rascal; subindo  $i$  linhas na diagonal e  $j$  linhas na antidiagonal obtemos outros dois vértices, e a partir do vértice à esquerda (direita) subimos  $i$  ( $j$ ) linhas na diagonal (antidiagonal) para obter o último vértice. Neste trabalho, consideramos que o deslocamento nas diagonais é positivo se for no sentido descendente e negativo em caso contrário (ver Figura 3.4). A Figura 3.5 ilustra esta propriedade.

Observemos que numa mesma diagonal o valor de  $k$  é constante, assim como, numa antidiagonal o que é constante é  $n - k$ .

Na Figura 3.5 o número azul é obtido pela expressão:

$$\text{azul} = \frac{\text{laranja} \times \text{laranja} + i \times j}{\text{verde}}.$$

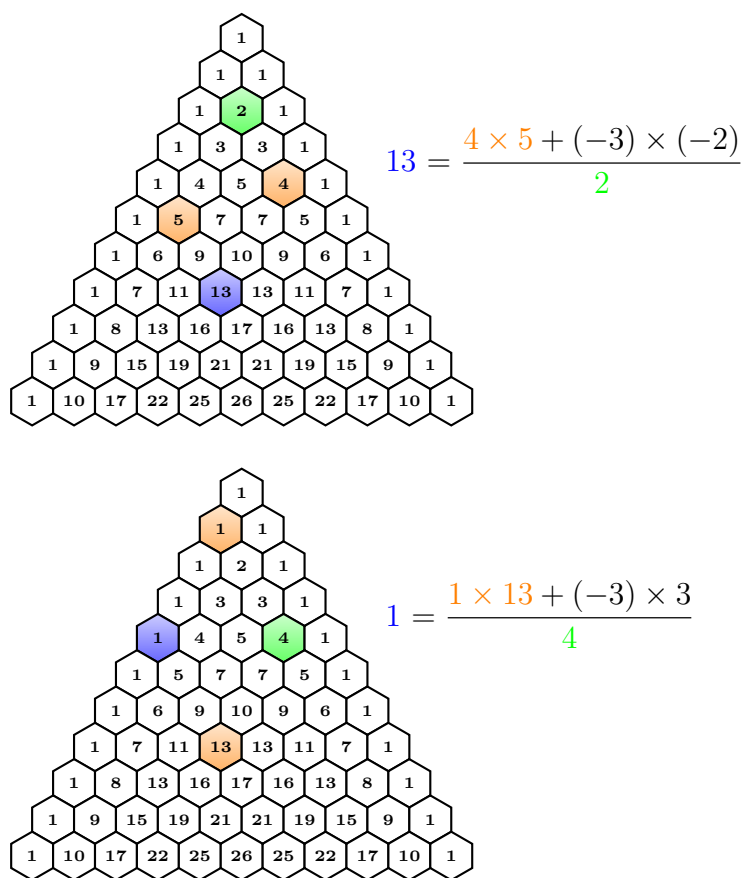


Figura 3.5: Ilustração da propriedade i) da Proposição 3.3: na primeira  $n = 7$ ,  $k = 3$ ,  $i = -3$  e  $j = -2$ , e na segunda  $n = 4$ ,  $k = 0$ ,  $i = -3$  e  $j = 3$ .

A interpretação geométrica da propriedade ii) é baseada na forma de um diamante “deitado”, ou seja, o primeiro vértice é um número diferente de 1; a partir dele obtemos o próximo vértice por deslocamento horizontal  $h$  posições<sup>3</sup>; o vértice a seguir é obtido pelo deslocamento na antidiagonal  $j$  posições e o vértice final aparece com o deslocamento horizontal de  $h$  posições no sentido contrário ao inicial. Assim formou-se o diamante “deitado”, em que o número inicial (*vértice inicial*) é igual ao produto dos dois números dos vértices adjacentes subtraído pelo produto de três números, que são  $h$ ,  $j$  e o número que está na interseção da coluna  $-h$  do triângulo de rascal com a antidiagonal do triângulo à qual pertence o número inicial, dividindo tudo pelo número do quarto vértice. A Figura 3.6 ilustra a propriedade ii).

Na Figura 3.6 o número azul é obtido pela expressão:

$$\text{azul} = \frac{\text{laranja} \times \text{laranja} - h \times j \times \text{vermelho}}{\text{verde}}.$$

Devido à simetria do triângulo de rascal, visto do “avesso” é o mesmo triângulo. Portanto, construindo um diamante da forma anterior e visto do avesso, a fórmula (ii) anterior tem de ser válida depois de algumas adaptações: na construção anterior onde lemos *antidiagonal* passamos a ler *diagonal* e na fórmula o  $j$  passa a  $i$  e o sinal “-” no numerador passa a “+”. Obtemos então o seguinte resultado:

**Corolário 3.3.1.** *Os números de rascal,  $T(n, k)$ , verificam a seguinte propriedade:*

$$T(n, k) = \frac{T(n+i, k)T(n, k+h) + ihT(2k+h, k)}{T(n+i, k+h)},$$

para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $-k \leq h \leq n-k$  e  $i \geq -k-h$ .

A interpretação geométrica da propriedade iii) é baseada num til ( $\sim$ ) em “pé” formado por quatro números consecutivos (linhas consecutivas). O primeiro número da sequência não pode pertencer às duas primeiras diagonais ou antidiagonais. Os restantes números são obtidos pelo deslocamento ascendente na direção antidiagonal, diagonal e antidiagonal.

Assim formou-se o til em “pé”, em que o número inicial é igual ao produto dos dois números seguintes no til, subtraído pelo número que está dois números acima do número na interseção da coluna 3 do triângulo de rascal com a antidiagonal do triângulo à qual pertence o número inicial, dividindo tudo pelo número do quarto número.

<sup>3</sup>O deslocamento para a frente é positivo e negativo para trás.

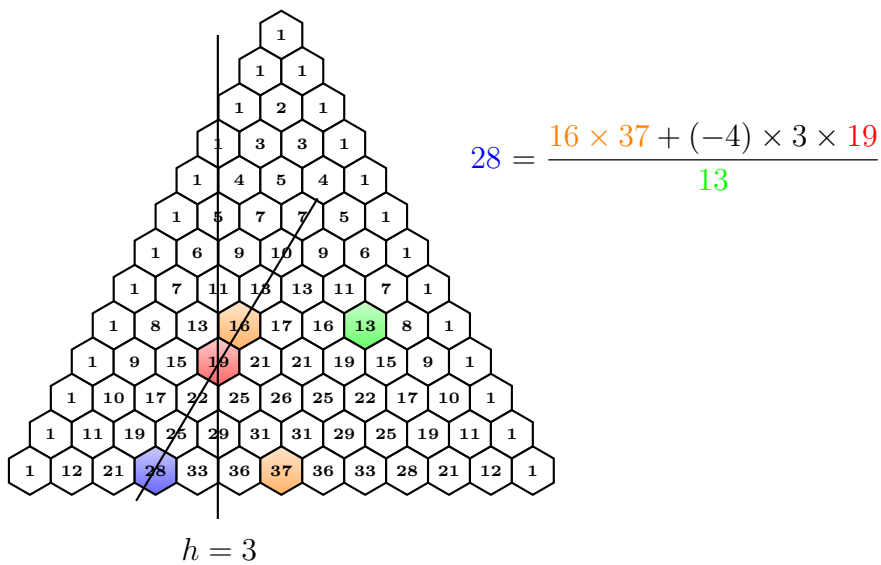
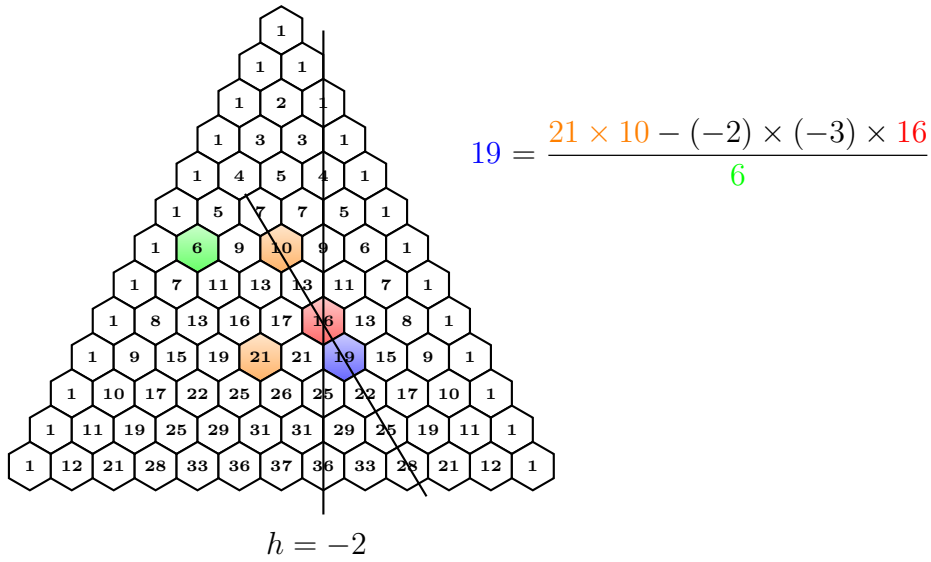
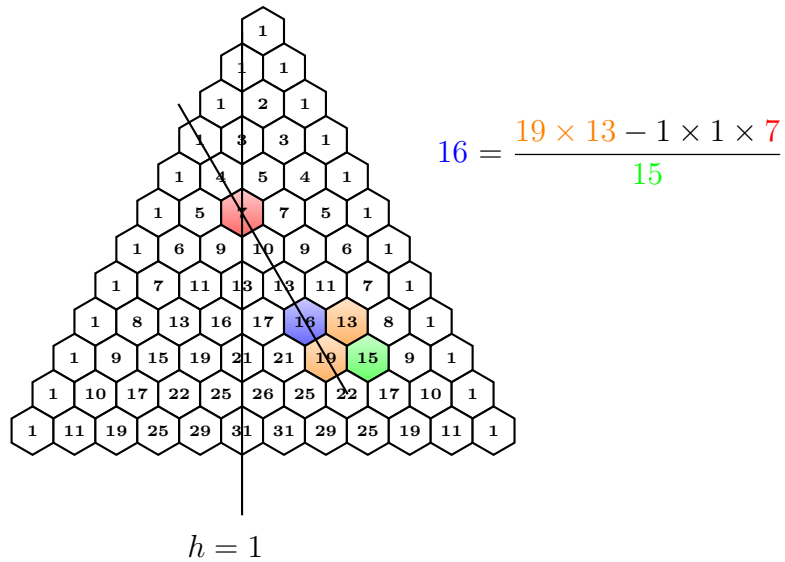


Figura 3.6: Propriedade ii) da Proposição 3.3: na primeira  $n = 8$ ,  $k = 5$ ,  $h = 1$  e  $j = 1$ , na segunda  $n = 9$ ,  $k = 6$ ,  $h = -2$  e  $j = -3$ ; Corolário 3.3.1: na terceira  $n = 12$ ,  $k = 3$ ,  $h = 3$  e  $i = -4$ .

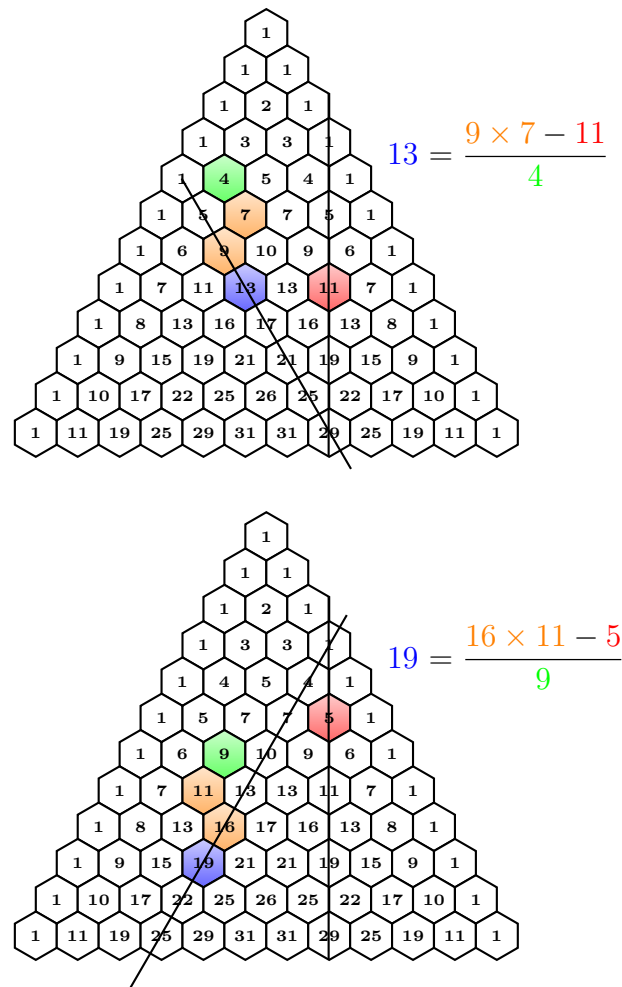


Figura 3.7: Propriedades iii) e iv) da Proposição 3.3: na primeira  $n = 7$  e  $k = 3$ , e na segunda  $n = 9$  e  $k = 3$ .

Na sequência da construção do til, se lermos diagonal onde lemos antidiagonal, e vice-versa, construímos o til para a propriedade iv). Para esta propriedade, só o número que é subtraído é diferente. Este número é o que está um número abaixo do número na interseção da coluna 3 do triângulo de rascal com a *diagonal* do triângulo à qual pertence o número inicial. A Figura 3.7 ilustra estas duas propriedades.

Do triângulo de rascal podemos obter várias sequências e estabelecer um padrão. Iremos apresentar algumas delas.

Vamos considerar sequências que se iniciam na primeira diagonal da linha  $\ell$  do triângulo de rascal. Se deslocarmos sucessivamente  $j$  posições na antidiagonal e  $i$  na diagonal, obtemos uma sequência de números alinhados segundo uma reta. O próximo resultado ilustra estas sequências.

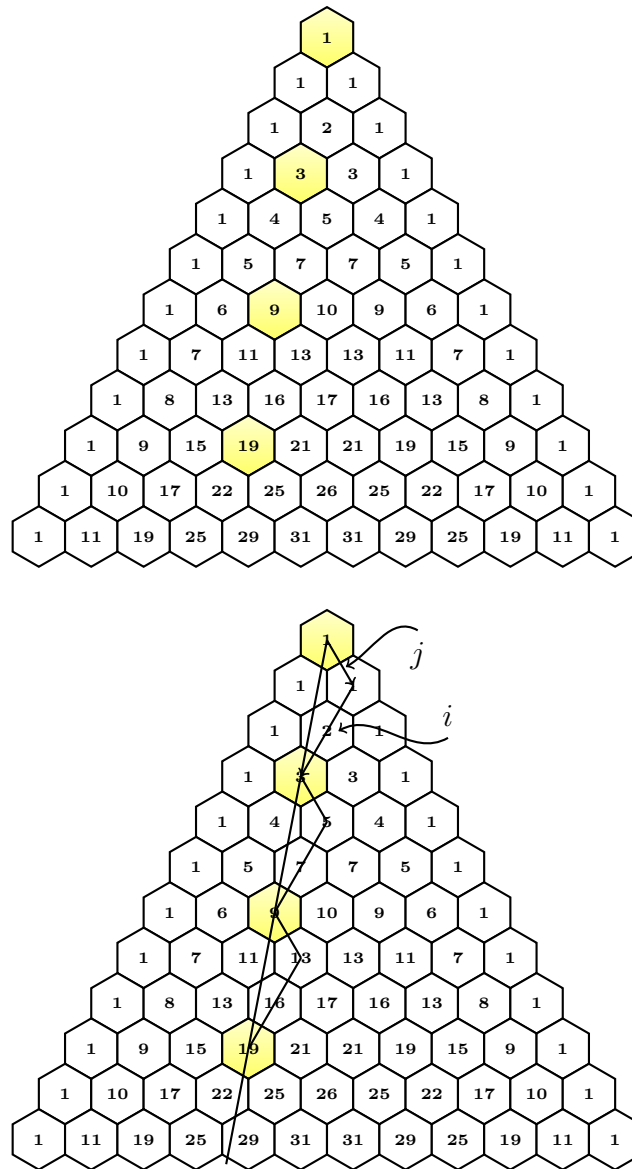


Figura 3.8: Ilustração de uma seqüência no triângulo de rascal

Por exemplo, iniciando na linha 0 ( $\ell = 0$ ) e deslocando sucessivamente uma posição na antidiagonal ( $j = 1$ ) e duas na diagonal ( $i = 2$ ), obtemos a seguinte seqüência de números :  $1, 3, 9, 19, 33, \dots$ , (ver a Figura 3.8). A seqüência é dada por  $2n^2 + 1$  e está identificada na página da OEIS por A058331.

**Proposição 3.4.** *A seqüência de números no triângulo de rascal, iniciando no número 1 da linha  $\ell$  e deslocando-se sucessivamente  $j$  posições na antidiagonal e  $i$  na diagonal (se  $j > 0$  descemos na antidiagonal e se  $j < 0$  subimos), é dada pela expressão  $P(n) = 1 + \ell j n + i j n^2$ .*

*Demonstração.* O primeiro número da diagonal 0 na linha  $\ell$  é  $T(\ell, 0)$ . Deslocando  $i$  posições na diagonal e  $j$  na antidiagonal obtemos o número  $T(\ell + i + j, j)$ . A partir

deste número, deslocando outra vez  $i$  posições na diagonal e  $j$  na antidiagonal, obtemos o número  $T(\ell + 2i + 2j, 2j)$ . Assim, ao fim de  $n$  passos sucessivos, o deslocamento é de  $ni$  posições na diagonal e  $nj$  na antidiagonal, obtendo então o número  $T(\ell + ni + nj, nj)$ .

Portanto, pela fórmula algébrica temos

$$\begin{aligned} T(\ell + ni + nj, nj) &= nj(\ell + ni + nj - nj) + 1 \\ &= \ell nj + n^2 ij + 1 \\ &= 1 + \ell nj + ijn^2, \end{aligned}$$

donde concluímos  $P(n) = 1 + \ell nj + ijn^2$ . □

À medida que se vão atribuindo valores aos parâmetros  $\ell$ ,  $i$  e  $j$  obtêm-se várias sequências de números no triângulo, algumas das quais são bem conhecidas.

**Corolário 3.4.1.** *Para  $\ell = 3$ ,  $j = 1$  e  $i = 2$  obtemos os números triangulares<sup>4</sup> de índice ímpar dados pela expressão  $P(n) = 1 + 3n + 2n^2$ , para qualquer  $n \geq 0$ . Esta sequência aparece na página da OEIS identificada por A000384.*

*Para  $\ell = -3$ ,  $j = 1$  e  $i = 2$  obtemos os números triangulares de índice par<sup>5</sup> dados pela expressão  $P(n) = 1 - 3n + 2n^2$ , para  $n \geq 2$ . Esta sequência aparece na página da OEIS identificada por A014105.*

**Corolário 3.4.2.** *Dos números triangulares apenas dois são da forma  $p+1$ , onde  $p$  é um número primo: 3 e o 6.*

Os números triangulares estão disposto como se apresenta na Figura 3.9.

Na Figura 3.9, observamos que os números triangulares se encontram no meio das linhas, da seguinte forma:

---

<sup>4</sup>Relembramos que os números triangulares têm a forma:

$$T_{\Delta}(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<sup>5</sup>Mais tarde, veremos as linhas do triângulo que correspondem aos  $\ell$  negativos

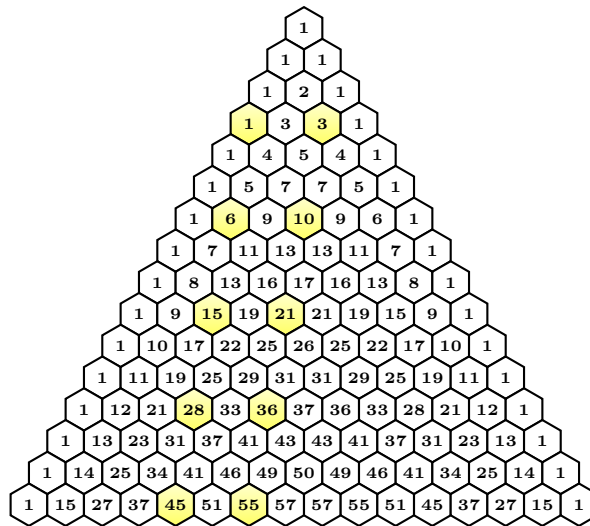


Figura 3.9: Sequência dos números triangulares (Corolário 3.4.1)

$$\begin{aligned}
 T(3,0) &= 1 & , & & T(3,2) &= 3 \\
 T(6,1) &= 6 & , & & T(6,3) &= 10 \\
 T(9,2) &= 15 & , & & T(9,4) &= 21 \\
 T(12,3) &= 28 & , & & T(12,5) &= 36 \\
 & \vdots & & & & \vdots
 \end{aligned}$$

**Corolário 3.4.3.** Para  $\ell = 2$ ,  $j = 1$  e  $i = 1$  teremos a sequência dos quadrados perfeitos, que é dada pela expressão  $P(n) = 1 + 2n + n^2$ , para todo  $n \geq 0$ . Esta sequência aparece na página da OEIS identificada por A000290.

Os números designados por quadrados perfeitos estão disposto como se apresenta na seguinte Figura 3.10.

Na Tabela 3.1 registamos mais algumas sequências identificadas na página da OEIS.

Além dos resultados apresentados e demonstrados neste capítulo, ainda conjecturámos três resultados.

**Conjectura 1.** Depois do número 1, as colunas 21 e -21 do triângulo são as que têm mais primos seguidos, num total de 17. Podemos obtê-los a partir da seguinte sucessão

$$a_n = 1 + 21n + n^2$$

que é igual ao número  $T(21 + 2n, n)$  do triângulo de rascal.

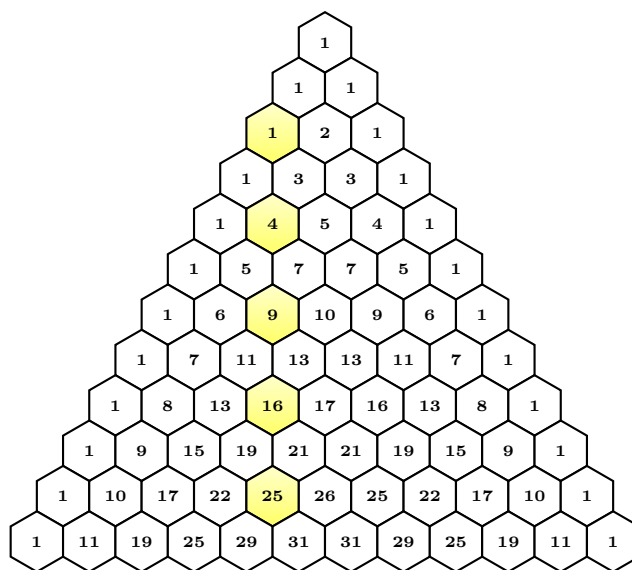


Figura 3.10: Sequência dos quadrados perfeitos (Corolário 3.4.3)

Referência	$\ell$	$j$	$i$	$P(n)$
A000012	0	1	0	1
A000027	1	1	0	$n + 1$
A005408	1	2	0	$2n + 1$
	2	1		
A016754	1	4	1	$4n^2 + 4n + 1$
	2	2	2	
	4	1	4	
A017077	1	8		$8n + 1$
	2	4	0	
	4	2		
	8	1		
A053755	0	1	4	$4n^2 + 1$
		2	2	
		4	1	
A058331	0	1	2	$2n^2 + 1$
		2	1	
A082108	3	2	2	$4n^2 + 6n + 1$
	6	1	4	
A161532	4	2	1	$2n^2 + 8n + 1$
	8	1	2	
A275591	9	1	1	$n^2 + 9n + 1$

Tabela 3.1: Tabela de algumas sequências conhecidas

Nesta conjectura, temos  $\ell = 21$ ,  $j = 1$  e  $i = 1$ . Assim, pela Proposição 3.4 obtemos o polinómio

$$P(n) = 1 + 21n + n^2.$$

Esta conjectura foi testada até à coluna  $10^9$ . Os primos são 23, 47, 73, 101, 131, 163, 197, 233, 271, 311, 353, 397, 443, 491, 541, 593 e 647.

**Conjectura 2.** Depois do número 1, a linha que tem mais números primos seguidos e distintos é a linha 17672287. No total tem 12 primos e podem ser obtidos a partir do polinómio

$$P(n) = 1 + 17672287n - n^2.$$

Esta conjectura foi testada até à linha  $10^8$ . Os primos são 17672287, 35344571, 53016853, 70689133, 88361411, 106033687, 123705961, 141378233, 159050503, 176722771, 194395037 e 212067301.

**Conjectura 3.** As únicas colunas do triângulo de Pascal que não têm números primos são as colunas -2 e 2, que são as colunas dos quadrados perfeitos.

Obviamente, as colunas -2 e 2 não têm primos. Como as colunas são iguais, dado que o triângulo é simétrico, basta ver para uma delas. Para isso, construímos a sequência iniciada no número 1 da coluna 2. Nesta conjectura, temos  $\ell = 2$ ,  $i = 1$  e  $j = 1$ . Assim, pela Proposição 3.4 obtemos

$$P(n) = 1 + 2n + n^2 = (1 + n)^2.$$

Portanto, para todo  $n$ ,  $P(n)$  não é primo!

Esta conjectura foi testada até à coluna  $2 \times 10^7$ . Até aqui, retirando as colunas -2 e 2, a coluna para a qual o número primo surge mais tarde é a coluna 11 546 198, aparecendo o primo na posição 574. Ou seja, o primeiro primo da coluna 11546198 é  $P(574) = 6\,627\,847\,129$ .

# Capítulo 4

## Generalizações no triângulo de rascal

Neste capítulo vamos apresentar duas generalizações a partir do triângulo de rascal. Numa delas retiramos as restrições impostas aos valores de  $n$  e de  $k$ . A outra é obtida a partir da interpretação combinatória dos números de rascal.

### 4.1 Generalização em $n$ e $k$ : Espaço de rascal

Vimos que o triângulo de rascal é infinito e com números  $T(n, k)$  inteiros positivos. Relembramos que o valor de  $n$  representa o número da linha do triângulo e o valor de  $k$  representa a posição na linha.

No triângulo de rascal estudado até aqui tínhamos as restrições:  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$ . Agora serão eliminadas. Podemos então expandir o triângulo, obtendo a forma apresentada na Figura 4.1. Nesta figura temos representado um espaço, designado o “espaço de rascal”.

A partir da figura podemos observar que todos os números no espaço de rascal se obtêm usando a fórmula algébrica de  $T(n, k)$  ou usando a *fórmula do diamante*. Relembre que a “fórmula do diamante” para os números do triângulo de rascal é:

$$Sul = (Oeste \times Leste + 1) \div Norte.$$

Assim temos, por exemplo  $-11 = (-9 \times -17 + 1) \div -14$  (esquematizado na Figura 4.2).

**Observação 4.1.** *A fórmula do diamante é válida para todos os números do espaço de*

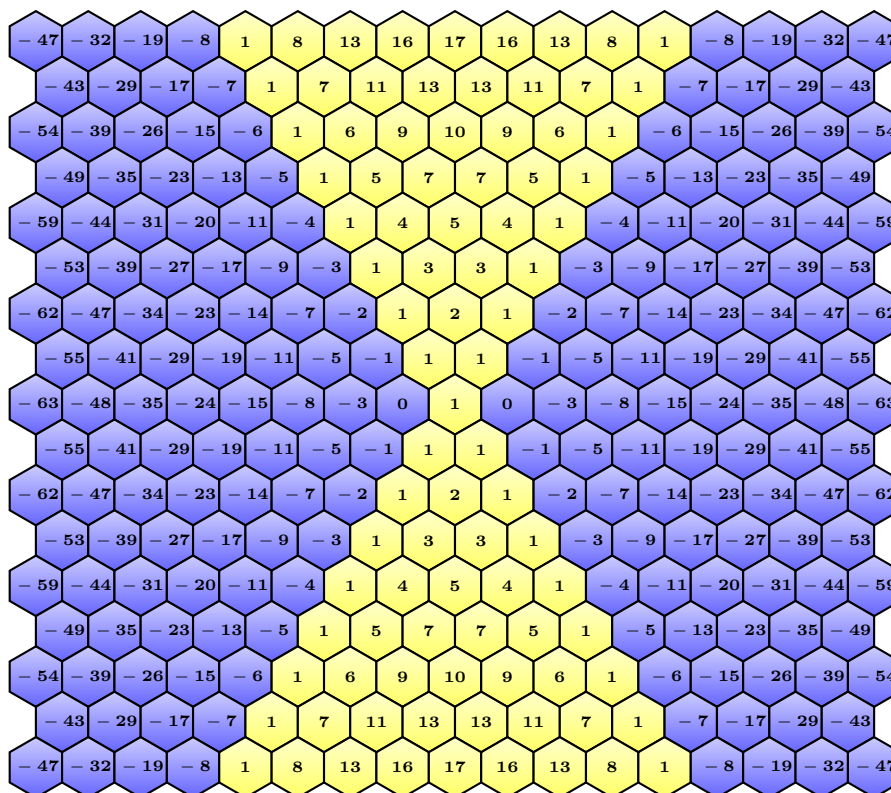


Figura 4.1: O espaço de rascal

rascal, à exceção dos números  $T(2,0)$  e  $T(2,2)$  porque os “nortes” destes números são nulos).

**Observação 4.2.** As linhas  $n$  do espaço de rascal são simétricas e a contagem das linhas começa a ser feita a partir da primeira linha do triângulo de rascal ( $n = 0$ ), as linhas abaixo de zero são positivas e as de cima negativas.

**Observação 4.3.** As diagonais  $k$  e antidiagonais  $(n - k)$  são simétricas, e a contagem é análoga às das linhas do espaço.

Baseados na fórmula algébrica dos números de rascal, temos, por exemplo,  $T(5,6) =$

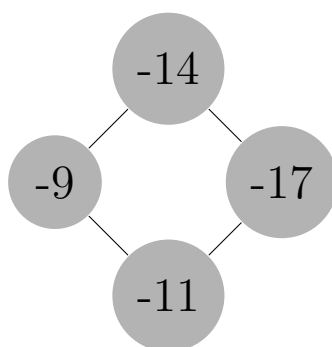


Figura 4.2: Fórmula do *Diamante*

$-5$  e  $T(5, -2) = -13$ .

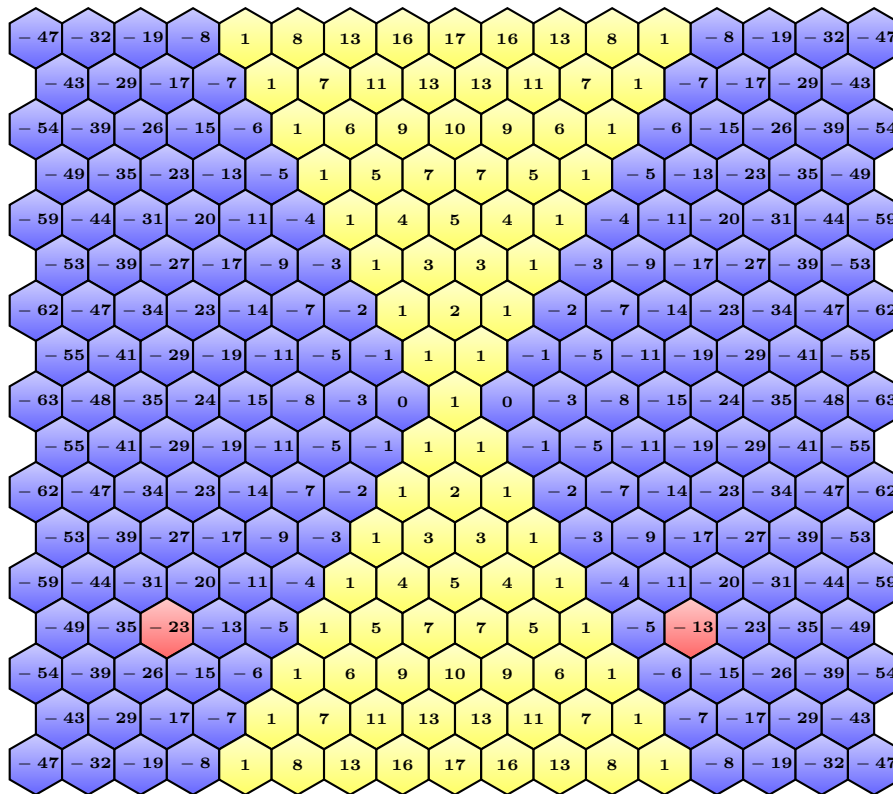


Figura 4.3: Representação dos números  $T(5, -3)$  e  $T(5, 7)$  no espaço de rascal

Tendo em conta a simetria da fórmula  $T(n, k)$ , a quinta linha do espaço de rascal fica constituída pelos seguintes números

$$\dots, -13, -5, 1, 5, 7, 7, 5, 1, -5, -13, \dots,$$

onde os números positivos constituem a quinta linha do triângulo de rascal.

Esta generalização permite retirar as restrições impostas nas propriedades apresentadas no capítulo anterior. Apresentamos a seguir as propriedades anteriores válidas agora em  $\mathbb{Z}$  e não apresentamos as respetivas demonstrações, visto serem idênticas.

**Proposição 4.1.** *Os números  $T(n, k)$  do espaço de rascal verificam as seguintes propriedades. Para todo  $n, k \in \mathbb{Z}$ :*

i)  $T(n + 1, k) = T(n, k) + k;$

ii)  $T(n, k + 1) = T(n, k) + n - 2k - 1;$

iii)  $kT(n - 1, k - 1) = (k - 1)T(n, k) + 1;$

$$iv) T(n, 1) = T(n, n - 1) = n;$$

$$v) T(n, 2) = T(n - 1, 1) + T(n - 2, 1);$$

$$vi) T(n, k + j) = T(n, k) + T(n, j) - (2kj + 1), \forall j \in \mathbb{Z};$$

$$vii) T(n + h, k) = T(n, k) + kh, \forall h \in \mathbb{Z};$$

$$viii) T(n + j, k + j) = T(n, k) + T(n, j) - T(k, j), \forall j \in \mathbb{Z};$$

$$ix) T(n, k) = \frac{T(n + i, k)T(n + j, k + j) + ij}{T(n + i + j, k + j)}, \forall i, j \in \mathbb{Z},$$

desde que não se verifiquem simultaneamente  $n + i + j = 0$  e  $k + j = \pm 1$ ;

$$x) T(n, k) = \frac{T(n + j, k + j)T(n, k + h) - jhT(2n - 2k - h, n - k - h)}{T(n + j, k + h + j)}, \forall j, h \in \mathbb{Z},$$

desde que não se verifiquem simultaneamente  $n + j = 0$  e  $k + h + j = \pm 1$ ;

$$xi) T(n, k) = \frac{T(n + i, k)T(n, k + h) + ihT(2k + h, k)}{T(n + i, k + h)}, \forall i, h \in \mathbb{Z},$$

desde que não se verifiquem simultaneamente  $n + i = 0$  e  $k + h = \pm 1$ ;

$$xii) T(n, k) = \frac{T(n - 1, k - 1)T(n - 2, k - 1) - T(2n - 2k - 1, n - k + 1)}{T(n - 3, k - 2)},$$

desde que não se verifiquem simultaneamente  $n = 3$  e  $k - 2 = \pm 1$ ;

$$xiii) T(n, k) = \frac{T(n - 1, k)T(n - 2, k - 1) - T(2k - 1, k + 1)}{T(n - 3, k - 1)},$$

desde que não se verifiquem simultaneamente  $n = 3$  e  $k - 1 = \pm 1$ .

Os números do espaço de rascal também verificam as propriedades seguintes.

**Proposição 4.2.** *Para todo  $n, k, j \in \mathbb{Z}$ , temos:*

$$i) T(n, -j) = -T(n, j) + 2(1 - j^2);$$

$$ii) T(n - j, k - 2j) = T(n, k) + 3T(k, j) - 2T(n, j) - 1 - j^2;$$

$$iii) T(n, k) = T(n - j, k - j) + j(n - k);$$

$$iv) T(n, k) = T(n, k - j) - j(2k - n - j).$$

As propriedades na proposição anterior foram obtidas a partir da fórmula algébrica dos números de rascal (fórmula 2.1) e a demonstração da proposição é uma mera manipulação algébrica.

## 4.2 Generalização Combinatória

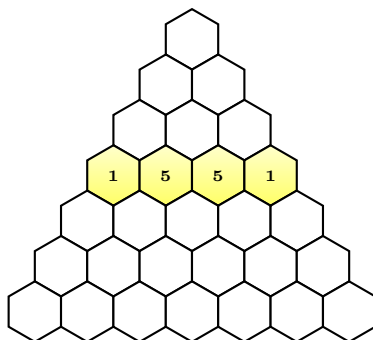
Relembremos que na interpretação combinatória para a obtenção dos números do triângulo de rascal, obtivemos  $T(n, k)$  à custa do número de somas distintas em que consideramos os elementos do conjunto  $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$  tomados  $k$  a  $k$ .

O que aconteceria se em vez de termos o conjunto  $\Omega_n$  tivéssemos um multiconjunto<sup>1</sup> dos primeiros  $n$  números naturais onde todos os elementos tivessem multiplicidade 2, ou seja, uma *bolsa* onde os números naturais até  $n$  são repetidos aos pares, por exemplo,  $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$ ? Neste caso, se a toma fosse como no conjunto  $\Omega_n$ , obteríamos 7 somas distintas, correspondentes às tomas com  $k = 0$  até  $k = 6$ , o que daria uma linha do triângulo com sete números. A linha anterior do triângulo seria obtida considerando a bolsa  $\{1, 1, 2, 2\}$ , e neste caso, obteríamos 5 somas distintas, correspondentes às tomas com  $k = 0$  até  $k = 4$ . Deste modo, não obtemos um triângulo à semelhança do triângulo de rascal. Assim, para que isso não aconteça, é necessário tomarmos os elementos dois a dois, ou seja, aos pares. Observemos que para a bolsa  $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$ , podemos tomar desde  $k = 0$  pares até  $k = 3$  pares. Para  $k = 0$ , obviamente temos apenas uma possibilidade. Para  $k = 1$ , a menor soma corresponde à toma  $\{1, 1\}$  e a maior soma corresponde à toma  $\{3, 3\}$ . Portanto, as somas variam desde 2 até 6, sendo possível obter todos os números intermédios como podemos facilmente constatar. Logo, para  $k = 1$  temos 5 possibilidades. Para  $k = 2$ , a menor soma corresponde à toma  $\{1, 1, 2, 2\}$  e a maior soma corresponde à toma  $\{2, 2, 3, 3\}$ . Portanto, as somas variam desde 6 até 10, sendo possível também obter todos os números intermédios. Logo, para  $k = 2$  temos também 5 possibilidades. Finalmente, para  $k = 3$ , temos apenas uma possibilidade correspondente à soma de todos os elementos do conjunto. Assim, a linha  $n = 3$  deste novo triângulo será 1, 5, 5, 1 (ver Figura 4.4).

Vamos denotar a bolsa  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  por  $\Omega_n^2$ . Assim, o número de somas distintas tomando  $k$  a  $k$  pares de elementos em  $\Omega_n^2$  e o número 0 designaremos por  $T_2(n, k)$ . Variando  $k = 0$  até  $k = n$  obtemos a linha  $n$  do triângulo, que daqui para a frente será designado por *triângulo de rascal 2* e denotado por  $TR_2$ .

Neste caso, para cada  $n$  e  $k$  também as somas são consecutivas. Logo,  $T_2(n, k)$  será igual à diferença entre a maior e a menor soma adicionado de uma unidade.

<sup>1</sup>Segundo Rosen [6], um multiconjunto é a generalização de um conjunto de tal forma que permite a repetição de elementos. O número de vezes que um determinado elemento aparece repetido chamamos de multiplicidade desse elemento. Em Matemática, um multiconjunto também pode ser chamado *bolsa*.

Figura 4.4: Linha correspondente ao  $n = 3$ .

Vejamos as primeiras linhas do  $TR_2$ .

Para  $n = 0$ , temos  $\Omega_0^2 = \{ \}$ . Neste caso, temos apenas uma possibilidade: 0. Logo,  $T_2(0, 0) = 1$ .

Considerando a linha 1, temos  $\Omega_1^2 = \{1, 1\}$  e as possibilidades são as seguintes:

- se tomarmos  $k = 0$  pares, novamente temos uma só situação, ou seja,  $T_2(1, 0) = 1$ ;
- se tomarmos  $k = 1$  par, a única soma possível é  $1 + 1 = 2$ , ou seja,  $T_2(1, 1) = 1$ .

Já para a linha 2, temos  $\Omega_2^2 = \{1, 1, 2, 2\}$ , e as possibilidades são as seguintes:

- se tomarmos  $k = 0$  pares, também teremos apenas uma situação, ou seja,  $T_2(2, 0) = 1$ .
- se tomarmos  $k = 1$  par, temos as seguintes somas distintas  $1 + 1$ ,  $1 + 2$ ,  $2 + 2$ , o que quer dizer que temos 3 somas distintas, ou seja,  $T_2(2, 1) = 3$ . Observemos que poderíamos obter este valor recorrendo à contagem  $T_2(2, 1) = (2+2) - (1+1) + 1 = 3$ .
- se tomarmos  $k = 2$  pares, só é possível obter uma soma, ou seja,  $T_2(2, 2) = 1$ .

Se continuarmos a calcular os números de somas distintas  $T_2(n, k)$ , obteremos a seguinte sequência:

$$1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 7, 9, 7, 1, 1, 9, 13, 13, 9, 1, \dots$$

Dispondo esta sequência em forma de triângulo, obtemos o  $TR_2$  (ver Figura 4.5). Observamos de imediato que este triângulo também é simétrico e, como veremos mais tarde, é constituído apenas por números ímpares. Observamos também que as diagonais

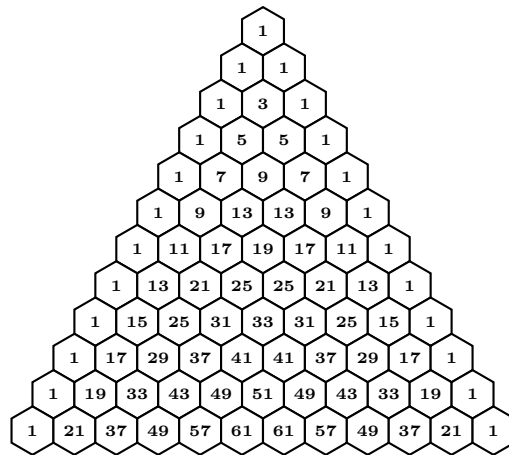


Figura 4.5: Triângulo  $TR_2$ .

deste triângulo são as diagonais pares do triângulo de rascal. Este triângulo aparece na página da OEIS identificado pela sequência A130154.

Tal como no triângulo de rascal, as linhas deste triângulo também começam e acabam em 1 e os números no interior são obtidos por uma fórmula idêntica à *fórmula do diamante*:

$$Sul = (Oeste \times Leste + 2) \div Norte,$$

ou seja,

$$T_2(n, k) = \frac{T_2(n-1, k-1)T_2(n-1, k) + 2}{T_2(n-2, k-1)}, \tag{4.1}$$

para  $0 < k < n$  e  $n \geq 2$ , com  $T_2(n, 0) = T_2(n, n) = 1$  para  $n \geq 0$ .

Por exemplo,  $9 = (5 \times 5 + 2) \div 3$  (ver Figura 4.6).

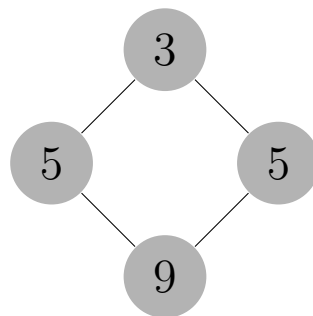


Figura 4.6: Fórmula do *Diamante*

Podemos também obter o triângulo  $TR_2$  eliminando as diagonais ou antidiagonais com numerações ímpares do triângulo de rascal (1, 3, 5,...), o que é o mesmo que manter no triângulo de rascal só as diagonais correspondentes aos  $k$ 's pares ou as antidiagonais

correspondentes aos  $(n - k)$ 's pares. A figura abaixo ilustra o procedimento geométrico para a obtenção do triângulo  $TR_2$ . Podemos ver que uma linha do  $TR_2$  corresponde a uma sequência no  $TR$ , conforme assinalado a vermelho. Representamos também a transformação de um “diamante” no  $TR$  para o  $TR_2$  pela expressão  $17 = \frac{9 \times 13 + (-1)(-2)}{7}$ .

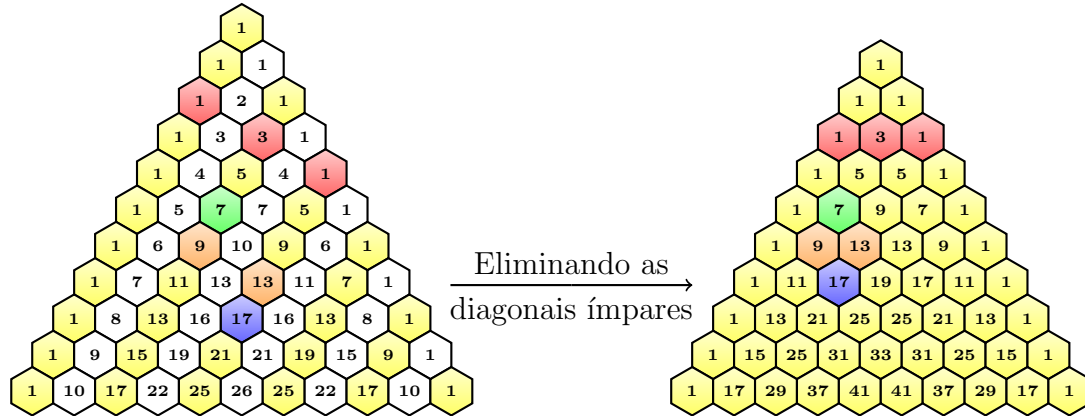


Figura 4.7: Procedimento geométrico para a obtenção do  $TR_2$  a partir do  $TR$

Assim, tendo em conta este procedimento geométrico, podemos estabelecer o seguinte resultado que relaciona o  $TR_2$  com o triângulo de rascal ( $TR$ ).

**Lema 4.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq k \leq n$ , temos

$$T_2(n, k) = T(n + k, 2k). \tag{4.2}$$

*Demonstração.* Pela Figura 4.7 vemos que cada linha do  $TR_2$  é uma sequência do  $TR$ . Pela Proposição 3.4, e tendo em conta que estas sequências correspondem a  $j = 2$  e  $i = -1$ , obtemos

$$P(n) = 1 + 2\ell n - 2n^2.$$

Substituindo  $n \rightarrow k$  e  $\ell \rightarrow n$ , obtemos a expressão para os números  $T_2(n, k)$ . Assim,

$$\begin{aligned} T_2(n, k) &= 1 + 2kn - 2k^2 \\ &= 2k(n - k) + 1 \\ &= 2k(n + k - 2k) + 1 \\ &= T(n + k, 2k). \end{aligned}$$

□

Com este Lema podemos demonstrar a fórmula (4.1), que corresponde à fórmula (i) da Proposição 3.3, considerando  $i = -1$  e  $j = -2$ , pois à medida que vamos eliminando as diagonais ímpares no triângulo de rascal, os números vão se “deslocando” da seguinte forma: andando duas antidiagonais para cima e uma diagonal para cima.

Efetivamente, aplicando a fórmula (i) da Proposição 3.3, com  $i = -1$  e  $j = -2$ , temos

$$\begin{aligned} T_2(n, k) &= T(n+k, 2k) \\ &= \frac{T(n+k-1, 2k)T(n+k-2, 2k-2) + 2}{T(n+k-3, 2k-2)} \\ &= \frac{T(n-1+k, 2k)T(n-1+k-1, 2(k-1)) + 2}{T(n-2+k-1, 2(k-1))}. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a fórmula (4.2), obtemos o resultado desejado,

$$T_2(n, k) = \frac{T_2(n-1, k)T_2(n-1, k-1) + 2}{T_2(n-2, k-1)}.$$

Partindo da fórmula (4.2) e da fórmula algébrica dos números de rascal, obtemos a fórmula algébrica para os números de  $TR_2$ . Assim, a fórmula algébrica de  $T_2(n, k)$  é:

$$T_2(n, k) = 2k(n-k) + 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0.$$

Desta fórmula, verificamos imediatamente que os números  $T_2(n, k)$  são todos ímpares! Verificamos também que existe outra relação para além da (4.2) entre os números do  $TR$  e do  $TR_2$ , dada pela seguinte fórmula

$$T_2(n, k) = 2T(n, k) - 1.$$

Como veremos mais adiante, as propriedades encontradas para os números do  $TR$  podem ser adaptadas para os números do  $TR_2$ .

E se ao invés de termos os números duplicados no conjunto  $\Omega_n$ , eles aparecerem triplicados? Ao aumentarmos os números repetidos para três no conjunto  $\Omega_n$ , ou seja,  $\Omega_n^3 = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, n, n, n\}$ , para obtermos um novo triângulo  $TR_3$  à semelhança de  $TR_2$ , em que a “toma” neste conjunto deve ser feita em quantidades múltiplas de 3, ou seja, fazer a toma em ternos, para que a linha  $n$  tenha  $n+1$  números. A toma dos ternos

deve começar em 0 até ser considerada toda a bolsa.

Assim, o número de somas distintas tomados  $k$  a  $k$  ternos de elementos em  $\Omega_n^3$  e o 0, que designamos por  $T_3(n, k)$ , com  $k = 0$  até  $k = n$ , também é igual à diferença entre a maior e a menor soma adicionado de uma unidade. À medida que tomamos os  $k$  ternos em  $\Omega_n^3$  vamos tendo sempre somas consecutivas que vão desde a soma menor até à soma maior. A soma menor corresponde à toma dos menores  $3k$  números de  $\Omega_3$  e a maior soma corresponde à toma dos  $3k$  maiores.

Assim, calculando os números de soma distintas  $T_3(n, k)$  como vimos no exemplo anterior, obtemos a seguinte sequência:

$$1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 7, 7, 1, 1, 10, 13, 10, 1, 1, 13, 19, 19, 13, 1, \dots$$

Dispondo esta sequência em forma de triângulo, obtemos o  $TR_3$  (ver Figura 4.8). Este triângulo também é um triângulo simétrico à semelhança dos outros dois. Esta sequência aparece na página da OEIS identificada por A296180.

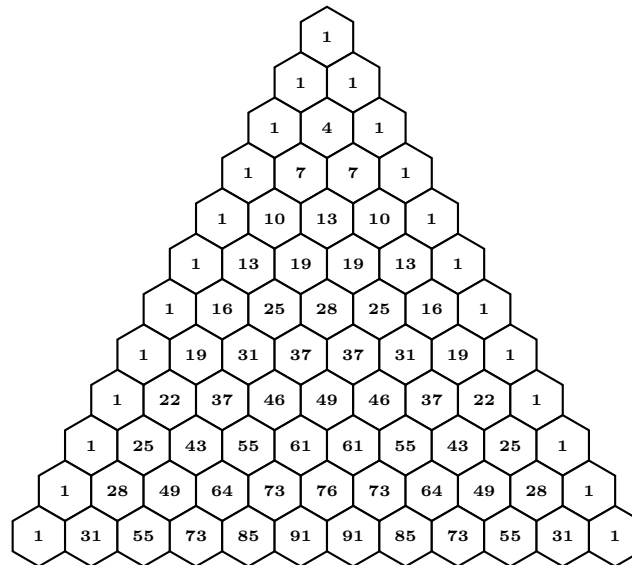


Figura 4.8: Triângulo  $TR_3$

As linhas deste triângulo também começam e acabam em 1, e os números do interior são obtidos por uma fórmula idêntica à *fórmula do diamante* dos outros dois triângulos. Para este triângulo, a fórmula é:

$$Sul = (Oeste \times Leste + 3) \div Norte,$$

ou seja,

$$T_3(n, k) = \frac{T_3(n-1, k-1)T_3(n-1, k) + 3}{T_3(n-2, k-1)}, \quad (4.3)$$

para  $0 < k < n$  e  $n \geq 2$ , com  $T_3(n, 0) = T_3(n, n) = 1$  para  $n \geq 0$ .

Por exemplo,  $19 = (10 \times 13 + 3) \div 7$  (ver Figura 4.9).

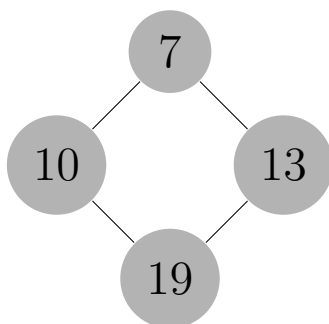


Figura 4.9: Fórmula do *Diamante*

À semelhança de  $TR_2$ , também podemos obter o  $TR_3$  eliminando diagonais (antidiagonais) no triângulo de rascal, mas desta vez eliminando sucessivamente a  $2^a$  e  $3^a$ ,  $5^a$  e  $6^a$ ,... diagonais (antidiagonais). Ou seja, começando na primeira diagonal do triângulo de rascal, eliminamos as duas diagonais (antidiagonais) seguintes deixando a quarta, eliminando a quinta e a sexta, deixando a sétima diagonal (antidiagonal), e assim sucessivamente. Isto é o mesmo que manter no triângulo de rascal só as diagonais (antidiagonais) correspondentes aos  $k$ 's ( $n - k$ 's) múltiplos de 3. Consequentemente, à semelhança do que foi feito anteriormente, podemos estabelecer uma relação entre os números do  $TR_3$  e dos  $TR$ . Esta relação é apresentado no lema seguinte, o qual apresentaremos sem demonstração por ser análogo à demonstração anterior.

**Lema 4.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq k \leq n$ , temos

$$T_3(n, k) = T(n + 2k, 3k). \quad (4.4)$$

Com base neste Lema podemos provar a veracidade da fórmula (4.3). No entanto, não apresentaremos esta demonstração por ser idêntica à demonstração da fórmula (4.1).

A fórmula (4.3) também pode ser obtida com base na fórmula (i) da Proposição 3.3, mas desta vez com  $i = -1$  e  $j = -3$  ou  $i = -3$  e  $j = -1$ .

As figuras abaixo ilustram o procedimento geométrico para a obtenção do triângulo  $TR_3$ .

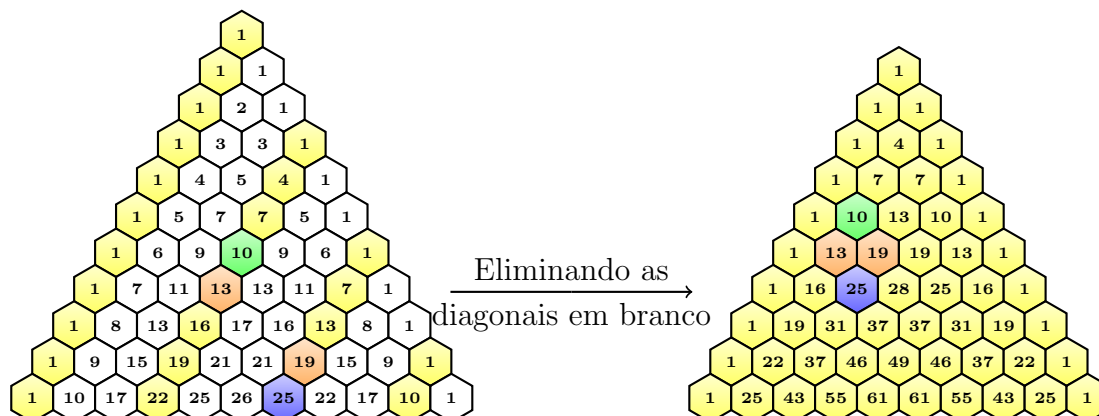


Figura 4.10: Ilustração do procedimento geométrico para a obtenção do  $TR_3$  a partir do  $TR$

Na figura acima temos o triângulo  $TR$  à esquerda e no lado direito o triângulo  $TR_3$ . Chamamos a atenção para os números pintados nas figuras que formam diamantes geometricamente diferentes, mas analiticamente iguais. Para o diamante do  $TR$  somamos no numerador 3, porque a partir do número pintado azul deslocamos 3 antidiagonais acima e uma diagonal acima. Já o diamante do  $TR_3$  somamos 3 no numerador, porque vamos eliminando no  $TR$  as diagonais (antidiagonais) não correspondentes aos  $k$ 's ( $n - k$ 's) múltiplos de 3.

Tal como os números de  $T_2(n, k)$ , também é possível obter os números  $T_3(n, k)$  a partir da fórmula algébrica dos números de rascal e da fórmula (4.4). Neste caso, temos a seguinte fórmula algébrica de  $T_3(n, k)$

$$T_3(n, k) = 3k(n - k) + 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0.$$

Verificamos também que para os números  $T_3(n, k)$ , existe ainda outra relação para além da (4.4), entre os números do  $TR$  e do  $TR_3$ , dada pela seguinte fórmula

$$T_3(n, k) = 3T(n, k) - 2.$$

Como vimos, podemos obter os triângulos  $TR_2$  e  $TR_3$  de duas maneiras: partindo das bolsas  $\Omega_n^2$  e  $\Omega_n^3$  e eliminando ou diagonais ou antidiagonais do triângulo de rascal. Estes

dois triângulos continuam a verificar propriedades semelhantes às do triângulo de rascal. Ou seja, estes processos não alteram o padrão do triângulo de rascal.

Será que este processo pode ser generalizado? Ou seja, partindo do triângulo  $TR_q$  obtido a partir da bolsa  $\Omega_n^q$ , onde os  $n$  primeiros naturais aparecem repetidos  $q$  vezes, e considerando o número de somas distintas resultante das tomas  $kq$  a  $nk$  de elementos de  $\Omega_n^q$  para obter  $T_q(n, k)$ , será que mantém propriedades semelhantes à do  $TR$ ? E se partindo do triângulo de rascal e mantivermos as diagonais (antidiagonais) correspondentes ao  $k$ 's ( $n - k$ 's) múltiplos de  $q$  obtemos o mesmo triângulo  $TR_q$ ?

As respostas são afirmativas e as fórmulas obtidas para o  $TR_2$  e o  $TR_3$  dão-nos uma pista de como generalizar!

Podemos obter a família de triângulos  $TR_q$ , com  $q = 2, 3, 4, \dots$ , usando a interpretação combinatória dos números de rascal, partindo da bolsa  $\Omega_n^q$ , onde  $q$  é a multiplicidade dos  $n$  primeiros números naturais. O  $k$ -ésimo elemento da linha  $n$  do triângulo  $TR_q$  representamos por  $T_q(n, k)$ , que é igual ao número de somas distintas de elementos de  $\Omega_n^q$  tomados  $qk$  a  $nk$ . Os números  $T_q(n, k)$  verificam a seguinte fórmula,

$$T_q(n, k) = qk(n - k) + 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0, \quad (4.5)$$

que passaremos a chamar de fórmula algébrica de  $T_q(n, k)$ . Esta fórmula corresponde à generalização combinatória do triângulo de rascal, onde  $q = 1$  corresponde ao próprio triângulo de rascal.

Outra maneira de obter esta família de triângulos é eliminando sucessivamente diagonais ou antidiagonais de triângulo de rascal. Assim, para um determinado  $q$ , partindo da diagonal 0 (antidiagonal 0) do triângulo de rascal, a cada sequência de  $q$  diagonais (antidiagonais), mantemos a primeira diagonal (antidiagonal) da sequência e eliminamos as restantes  $q - 1$ . Juntando todas as diagonais não eliminadas formamos o triângulo de rascal generalizados  $TR_q$ .

Estes triângulos ( $TR_q$ ) são simétricos, as linhas começam e acabam em 1 e os números interiores são dados por uma fórmula do diamante generalizada

$$T_q(n, k) = \frac{T_q(n - 1, k - 1)T_q(n - 1, k) + q}{T_q(n - 2, k - 1)},$$

onde  $q$  representa o número de diagonais (antidiagonais) consideradas em cada sequência.

Nota: No cálculo dos números do triângulo de rascal, o conjunto  $\Omega_n$  não tem números repetidos. Isto significa que quando  $q = 1$ ,  $\Omega_n^1 \equiv \Omega_n$  e  $T_1(n, k)$  representa os números de rascal. Ou seja,  $T_1(n, k) \equiv T(n, k)$ . Além disso, se  $q = 1$ , então não eliminamos qualquer diagonal (antidiagonal) e portanto  $TR_1 \equiv TR$ .

Os números  $T_q(n, k)$ , com  $q \neq 1$ , verificam propriedades semelhantes às do triângulo de rascal, efetuando algumas adaptações em quase todas as fórmulas. As exceções são as propriedades (iii) e (viii) da Proposição 3.2 que se mantêm iguais para todos os triângulos  $TR_q$ . Na Proposição seguinte, apresentamos essas propriedades com as adaptações necessárias. Não daremos a demonstração de cada uma delas por serem muito semelhantes às das propriedades anteriores.

**Proposição 4.3.** *Os números  $T_q(n, k)$ , verificam as seguintes propriedades:*

- i)  $T_q(n + 1, k) = T_q(n, k) + qk$ , para  $n \geq 0$  e  $0 \leq k \leq n$ ;
- ii)  $T_q(n, k + 1) = T_q(n, k) + q(n - 2k - 1)$ , para  $n > 0$  e  $0 \leq k < n$ ;
- iii)  $kT_q(n - 1, k - 1) = (k - 1)T_q(n, k) + 1$ , para  $n \geq 1$  e  $1 \leq k \leq n$ ;
- iv)  $T_q(n, 1) = T_q(n, n - 1) = (n - 1)q + 1$ , para  $n \geq 1$ ;
- v)  $T_q(n, 2) = T_q(n - 1, 1) + T_q(n - 2, 1) + q - 1$ , para  $n \geq 3$ ;
- vi)  $T_q(n, k + h) = T_q(n, k) + T_q(n, h) - 2qkh - 1$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $0 \leq h \leq n - k$ ;
- vii)  $T_q(n + j, k) = T_q(n, k) + qkj$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  e  $j \geq k - n$ ;
- viii)  $T_q(n + j, k + j) = T_q(n, k) + T_q(n, j) - T_q(k, j)$ , para  $n \geq 0$  e  $0 \leq j \leq k \leq n$ ;
- ix)  $T_q(n, k) = \frac{T_q(n + i, k)T_q(n + j, k + j) + qij}{T_q(n + i + j, k + j)}$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $i \geq k - n$  e  $j \geq -k$ ;
- x)  $T_q(n, k) = \frac{T_q(n + j, k + j)T_q(n, k + h) - qjhT_q(2n - 2k - h, n - k - h)}{T_q(n + j, k + h + j)}$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $-k \leq h \leq n - k$  e  $j \geq -k - h$ ;
- xi)  $T(n, k) = \frac{T_q(n + i, k)T_q(n, k + h) + qihT_q(2k + h, k)}{T_q(n + i, k + h)}$ , para  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $-k \leq h \leq n - k$  e  $i \geq -k - h$ ;
- xii)  $T_q(n, k) = \frac{T_q(n - 1, k - 1)T_q(n - 2, k - 1) - qT_q(2n - 2k - 1, n - k + 1)}{T_q(n - 3, k - 2)}$ , para  $n \geq 4$  e  $2 \leq k \leq n - 2$ ;

$$xiii) T_q(n, k) = \frac{T_q(n-1, k)T_q(n-2, k-1) - qT_q(2k-1, k+1)}{T_q(n-3, k-1)}, \text{ para } n \geq 4 \text{ e } 2 \leq k \leq n-2.$$

Por (4.5), é fácil verificar que os números  $T_q(n, k)$  estão relacionados com os números do triângulo de rascal pela seguinte fórmula

$$T_q(n, k) = T(n + (q-1)k, qk).$$

Verificamos ainda por (4.5) que os números  $T_q(n, k)$ , também estão relacionados aos números do triângulo de rascal pela seguinte fórmula

$$T_q(n, k) = qT(n, k) + 1 - q. \tag{4.6}$$

Vimos que se partimos do triângulo de rascal e a cada  $q$  diagonais (antidiagonais) mantivermos apenas a primeira formamos o triângulo  $TR_q$  cujos números são dados por  $T_q(n, k)$ . Agora, partindo deste triângulo, se procedermos de uma maneira análoga considerando  $p$  diagonais (antidiagonais) e mantendo apenas a primeira, formaremos um novo triângulo que denotaremos por  $TR_{q,p}$  e cujos números serão denotados por  $(T_q)_p(n, k)$ .

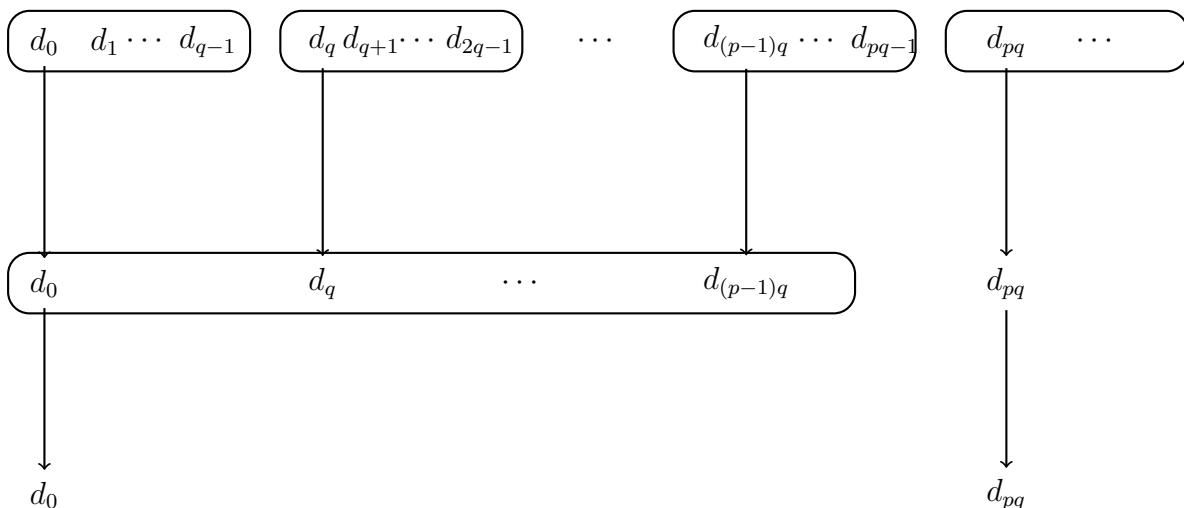


Figura 4.11: Esquema de eliminação das  $pq$  diagonais no triângulo de rascal

No esquema, podemos notar que no primeiro passo eliminamos  $q - 1$  diagonais em cada  $q$  consideradas. No segundo passo eliminamos  $p - 1$  diagonais. Cada uma dessas

corresponde a eliminar  $q$  do triângulo inicial. Portanto, no fim teremos eliminado  $q(p - 1) + q - 1 = pq - 1$  diagonais em cada  $pq$  consideradas. Ou seja, este procedimento corresponde a manter as diagonais correspondentes aos múltiplos de  $qp$ . Assim,

$$(T_q)_p(n, k) = T_{qp}(n, k). \quad (4.7)$$

Portanto, pela relação (4.6), temos

$$\begin{aligned} T_{qp}(n, k) &= qpT(n, k) + 1 - qp \\ &= p(qT(n, k) - q) + 1 \\ &= p(T_q(n, k) - 1) + 1 \\ &= pT_q(n, k) + 1 - p. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(T_q)_p(n, k) = pT_q(n, k) + 1 - p. \quad (4.8)$$

Esta fórmula generaliza a relação (4.6).

Vejamos um exemplo. No triângulo de rascal mantendo apenas as diagonais (antidiagonais) pares obtêm-se o  $TR_2$ ; se do triângulo  $TR_2$  mantivermos apenas as diagonais (antidiagonais) múltiplas de 3, obtemos de novo um triângulo simétrico, que denotamos por  $TR_{2,3}$  (ver Figura 4.12), determinado pelos números  $(T_2)_3(n, k)$ , ou seja, determinado pelos números  $T_6(n, k)$ . Este triângulo é o  $TR_6$  e aparece na página da OEIS identificado pela sequência A287326.

O triângulo  $TR_6$  também pode ser obtido de outra forma. Primeiro eliminando duas diagonais/antidiagonais seguidas sequencialmente no triângulo de rascal ( $q = 3$ ), obtendo o  $TR_3$ . Depois, eliminando do  $TR_3$  uma diagonal/antidiagonal seguida sequencialmente  $p = 2$ ), obtendo o triângulo  $TR_{3,2}$  que é igual ao  $TR_6$ . Como vimos, podemos também determinar os elementos deste triângulo recorrendo aos números de rascal:  $T_6(n, k) = 6T(n, k) - 5$ .

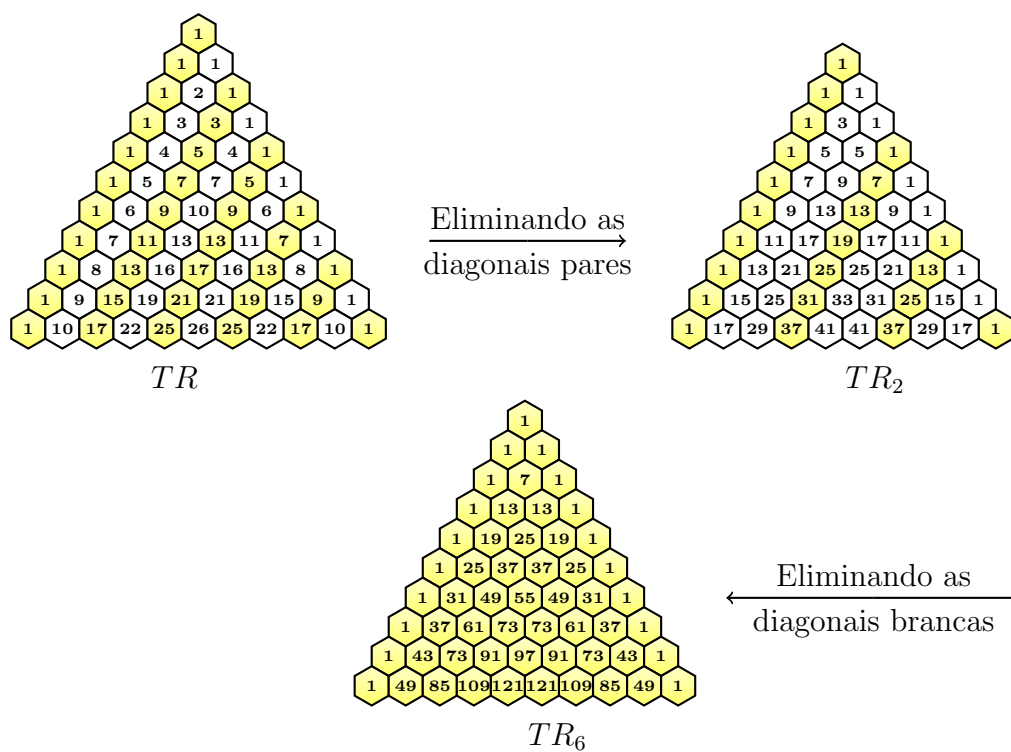


Figura 4.12: Ilustração do procedimento geométrico para obtenção do  $TR_6$ , partindo do  $TR$  e passando pelo  $TR_2$ .

# Capítulo 5

## Outras aplicações do triângulo de rascal e suas generalizações

O triângulo de rascal para além das inúmeras propriedades e generalizações, também tem várias aplicações. Neste capítulo iremos descrever algumas delas, e exemplificaremos em detalhe a aplicação à contagem dos pontos de rede.

Como já vimos ao longo deste trabalho, podemos usar o triângulo de rascal para calcular o número de somas distintas de um multiconjunto  $\Omega_n^q$ . Podemos também utilizar o triângulo de rascal para contar os pontos de rede entre uma certa função e o eixo das abcissas. Uma outra aplicação do triângulo de rascal, publicada na página da OEIS por Moshe Newman (em 6 de Abril de 2008), é a de contar o número de palavras diferentes que se podem formar a partir de um semigrupo  $x, y, q$  com as seguintes relações:  $yx = xyq, qx = xq$  e  $qy = yq$ .

### 5.1 Contagem de pontos de rede

Os números de rascal generalizados,  $T_q(n, k)$ , podem ser interpretados como o número de pontos de rede na reta  $x = k$ , entre a função  $f(x) = qx(n - x)$  e o eixo das abcissas, ou seja, o número de pontos de rede da região delimitada pela função  $f(x) = qx(n - x)$  e o eixo das abcissas sobre cada reta  $x = k$ , com  $k = 0$  até  $n$ , formam a linha  $n$  do triângulo  $TR_q$ .

Como seria de esperar, a expressão da função  $f(x) = qx(n - x)$  é semelhante à fórmula algébrica dos números de rascal generalizados,  $T_q(n, k)$ , com  $x = k$ . A diferença da

unidade deve-se ao facto da contagem do número de pontos de rede ser feita a partir do ponto zero (eixo das abcissas).

Por exemplo, na Figura 5.1 mostramos os pontos de redes delimitados pela função  $f(x) = 3x(3 - x)$  e o eixo das abcissas para  $n = 3$ . A contagem do número de pontos de rede sobre a reta  $x = k$ , com  $k = 0, 1, 2, 3$ , corresponde a 1, 7, 7, 1 que é a linha 3 do triângulo  $TR_3$ .

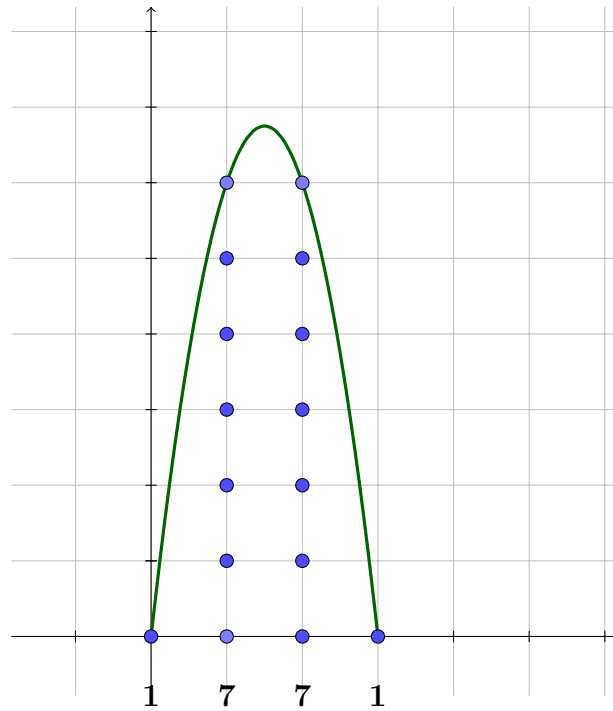


Figura 5.1: Ilustração dos pontos de rede para  $q = 3$  e  $n = 3$

Na Figura 5.1, os pontos pintados a azul são os pontos de redes limitados pela parábola  $f(x) = 3x(3 - x)$ . Se aumentarmos o parâmetro  $n$  na expressão da função obtemos mais pontos de rede. Por exemplo, para  $n = 5$  a função a considerar é  $f(x) = 3x(5 - x)$ , donde obtemos a contagem 1, 13, 19, 19, 13, 1, que corresponde à linha 5 do triângulo  $TR_3$  (ver Figura 5.2).

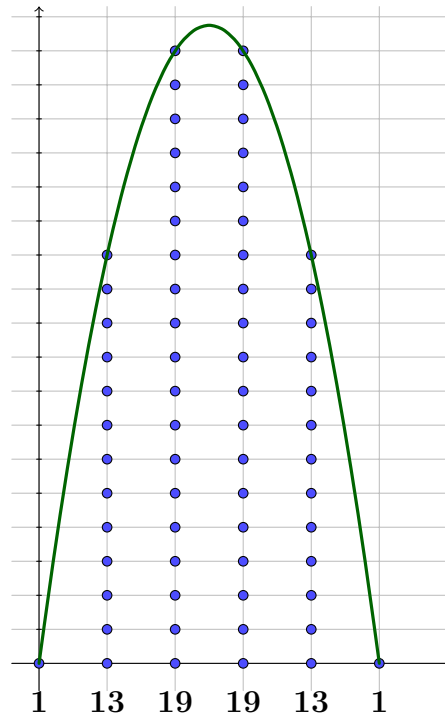


Figura 5.2: Ilustração dos pontos de rede para  $q = 3$  e  $n = 5$

## 5.2 Contagem de número de palavras formadas a partir de um semigrupo

Conforme já referimos, uma outra aplicação do triângulo de Pascal é a de contar o número de palavras diferentes que se podem formar a partir de um certo semigrupo.

Consideremos o multiconjunto com  $n$  letras das quais  $k$  são iguais a  $y$  e as restantes são iguais a  $x$ . A partir de um semigrupo  $x, y, q$  com as seguintes relações:  $yx = xyq$ ,  $qx = xq$  e  $qy = yq$ , uma palavra formada com os elementos deste multiconjunto é uma sequência de letras ordenadas “alfabeticamente” segundo a ordem  $x, y, q$ . O número de palavras distintas que podemos fazer com este multiconjunto é dado pelo número de Pascal  $T(n, k)$ .

Vejamos um exemplo.

Consideremos o multiconjunto  $\{x, x, x, y, y\}$ . Vamos listar todas as palavras que podemos formar, tendo em conta estas relações:  $yx = xyq$ ,  $qx = xq$  e  $qy = yq$ . Portanto,



## Conclusão e Trabalho Futuro

A investigação feita para este trabalho teve como objetivo a realização de um estudo mais aprofundado sobre o triângulo de rascal, de modo a conhecer muitas mais propriedades, aplicações e generalizações. A partir da investigação realizada podemos tirar as seguintes conclusões: o triângulo de rascal assemelha-se muito ao de Pascal, embora haja diferenças na forma de construção e de obtenção dos números; o triângulo de rascal mantém o mesmo padrão, mesmo sendo possível fazer algumas alterações (*como por exemplo, eliminar as diagonais ou antidiagonais sucessivas, manter só as diagonais ou antidiagonais múltiplas de  $qp$* ), contrariamente ao triângulo de Pascal; obtivemos também outros triângulos semelhantes, a partir da interpretação combinatória dos números de rascal, da fórmula algébrica e do procedimento geométrico (*onde eliminamos diagonais ou antidiagonais*); estabelecemos ainda um padrão para todas as sequências de números no triângulo.

A nossa investigação, presente nesta dissertação, sobre o triângulo de rascal pode continuar. Propomos: estudar mais exaustivamente as propriedades do triângulo, demonstrar as conjecturas apresentadas neste trabalho, descobrir novas conjecturas no espaço de rascal e nos triângulos  $TR_{qp}$ .

Na nossa opinião, acreditamos que o desenvolvimento da teoria do triângulo de rascal poderá resultar na inserção deste assunto nos planos curriculares de estudo das escolas.

# Apêndice A

## Triângulos de rascal

Neste apêndice apresentamos o triângulo de rascal com mais linhas, assim como duas generalizações do mesmo: o  $TR_2$  e o  $TR_3$ .







# Apêndice B

## Matriz de rascal

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103
1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120
1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	129	137
1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151	161	171
1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166	177	188
1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145	157	169	181	193	205
1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157	170	183	196	209	222
1	15	29	43	57	71	85	99	113	127	141	155	169	183	197	211	225	239
1	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181	196	211	226	241	256
1	17	33	49	65	81	97	113	129	145	161	177	193	209	225	241	257	273
1	18	35	52	69	86	103	120	137	154	171	188	205	222	239	256	273	290
1	19	37	55	73	91	109	127	145	163	181	199	217	235	253	271	289	307
1	20	39	58	77	96	115	134	153	172	191	210	229	248	267	286	305	324
1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261	281	301	321	341
1	22	43	64	85	106	127	148	169	190	211	232	253	274	295	316	337	358
1	23	45	67	89	111	133	155	177	199	221	243	265	287	309	331	353	375
1	24	47	70	93	116	139	162	185	208	231	254	277	300	323	346	369	392
1	25	49	73	97	121	145	169	193	217	241	265	289	313	337	361	385	409
1	26	51	76	101	126	151	176	201	226	251	276	301	326	351	376	401	426
1	27	53	79	105	131	157	183	209	235	261	287	313	339	365	391	417	443
1	28	55	82	109	136	163	190	217	244	271	298	325	352	379	406	433	460
1	29	57	85	113	141	169	197	225	253	281	309	337	365	393	421	449	477
1	30	59	88	117	146	175	204	233	262	291	320	349	378	407	436	465	494
1	31	61	91	121	151	181	211	241	271	301	331	361	391	421	451	481	511
1	32	63	94	125	156	187	218	249	280	311	342	373	404	435	466	497	528
1	33	65	97	129	161	193	225	257	289	321	353	385	417	449	481	513	545
1	34	67	100	133	166	199	232	265	298	331	364	397	430	463	496	529	562
1	35	69	103	137	171	205	239	273	307	341	375	409	443	477	511	545	579
1	36	71	106	141	176	211	246	281	316	351	386	421	456	491	526	561	596
1	37	73	109	145	181	217	253	289	325	361	397	433	469	505	541	577	613
1	38	75	112	149	186	223	260	297	334	371	408	445	482	519	556	593	630

# Apêndice C

## Espaço de rascal

16	29	40	49	56	61	64	65	64	61	56	49	40	29	16
	15	27	37	45	51	55	57	57	55	51	45	37	27	15
1	14	25	34	41	46	49	50	49	46	41	34	25	14	1
	1	13	23	31	37	41	43	43	41	37	31	23	13	1
-12	1	12	21	28	33	36	37	36	33	28	21	12	1	-12
	-11	1	11	19	25	29	31	31	29	25	19	11	1	-11
-23	-10	1	10	17	22	25	26	25	22	17	10	1	-10	-23
	-21	-9	1	9	15	19	21	21	19	15	9	1	-9	-21
-32	-19	-8	1	8	13	16	17	16	13	8	1	-8	-19	-32
	-29	-17	-7	1	7	11	13	13	11	7	1	-7	-17	-29
-39	-26	-15	-6	1	6	9	10	9	6	1	-6	-15	-26	-39
	-35	-23	-13	-5	1	5	7	7	5	1	-5	-13	-23	-35
-44	-31	-20	-11	-4	1	4	5	4	1	-4	-11	-20	-31	-44
	-39	-27	-17	-9	-3	1	3	3	1	-3	-9	-17	-27	-39
-47	-34	-23	-14	-7	-2	1	2	1	-2	-7	-14	-23	-34	-47
	-41	-29	-19	-11	-5	-1	1	1	-1	-5	-11	-19	-29	-41
-48	-35	-24	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15	-24	-35	-48
	-41	-29	-19	-11	-5	-1	1	1	-1	-5	-11	-19	-29	-41
-47	-34	-23	-14	-7	-2	1	2	1	-2	-7	-14	-23	-34	-47
	-39	-27	-17	-9	-3	1	3	3	1	-3	-9	-17	-27	-39
-44	-31	-20	-11	-4	1	4	5	4	1	-4	-11	-20	-31	-44
	-35	-23	-13	-5	1	5	7	7	5	1	-5	-13	-23	-35
-39	-26	-15	-6	1	6	9	10	9	6	1	-6	-15	-26	-39
	-29	-17	-7	1	7	11	13	13	11	7	1	-7	-17	-29
-32	-19	-8	1	8	13	16	17	16	13	8	1	-8	-19	-32
	-21	-9	1	9	15	19	21	21	19	15	9	1	-9	-21
-23	-10	1	10	17	22	25	26	25	22	17	10	1	-10	-23
	-11	1	11	19	25	29	31	31	29	25	19	11	1	-11
-12	1	12	21	28	33	36	37	36	33	28	21	12	1	-12
	1	13	23	31	37	41	43	43	41	37	31	23	13	1
1	14	25	34	41	46	49	50	49	46	41	34	25	14	1
	15	27	37	45	51	55	57	57	55	51	45	37	27	15
16	29	40	49	56	61	64	65	64	61	56	49	40	29	16

# Bibliografia

- [1] A. Anggoro, E. Liu e A. Tulloch, “*The Rascal Triangle*”, The College Mathematics Journal, Vol. 41, n. 5, 2010,
- [2] D. C. Fielder e C. O. Alford, “*An investigation of sequences derived from Hoggatt Sums and Hoggatt Triangles*”, Application of Fibonacci Numbers, 3 (1990) 77-88. Proceedings of ‘The Third Annual Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications’, Pisa, Italy, July 25-29, 1988.
- [3] M. V. Pires, “*Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática*”, Escola superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, 2011.
- [4] J. P. da Ponte (org.), “*Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*”, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2008.
- [5] J. P. da Ponte *et al*, “*Investigações matemáticas na sala de aula*”, Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.
- [6] K. H. Rosen, Matemática Discreta e suas Aplicações, 6<sup>a</sup> Edição, McGraw-Hil, São Paulo, 2009.