UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Problemas de Otimização em Matemática Elementar

José de Ascenção Abrantes Monteiro

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, Outubro de 2014

Dedicatória

Aos três (Emília, Ana e João), que comigo formam uma unidade indivisível.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Rui Pacheco, pela competência cientifica, determinação e rigor com que acompanhou este trabalho. Pela disponibilidade revelada e ajuda ao longo desta caminhada, pela pertinência das suas observações, pelas críticas e sugestões que foram determinantes na conclusão deste trabalho.

Aos meus filhos, João Francisco e Ana Margarida, pelo apoio que prestaram e gosto que mostraram em ter o pai a atingir esta meta, o que foi motivador e determinante na sua ultrapassagem.

À minha esposa Emília, companheira e cúmplice nesta espiral de emoções que é a vida, pelo apoio e compreensão que foram estimulo para a superação deste desafio.

O pouco que sei devo-o à minha ignorância.
Sacha Guitry

Resumo

Neste trabalho apresentamos a resolução de alguns problemas de otimização recorrendo preferencialmente a processos geométricos e algébricos elementares. Foi nossa intenção apresentar uma abordagem alternativa ao cálculo para a sua resolução. No primeiro capítulo, estudamos o problema de encontrar os extremos de funções polinomiais de baixo grau. No segundo capítulo, apresentamos os argumentos geométricos de Zenodorus e de Steiner para a demonstração da famosa desigualdade isoperimétrica: de entre todas as curvas com um certo comprimento fixado, a circunferência é a que encerra maior área.

Palavras-chave

otimização, extremos, funções polinomiais, desigualdade isoperimétrica.

Abstract

In this work we present the resolution of some optimization problems preferably using elementary geometric and algebraic processes. It was our intention to present an approach alternative to calculus in their solving. In the first chapter, we study the problem of finding the extremes of low degree polynomial functions. In the second chapter, we present the arguments of Zenodorus and Steiner for the demonstration of the famous isoperimetric inequality: among all curves with a certain fixed length, the circumference is the one with the largest area.

Keywords

optimization, extremes, polynomial functions, isoperimetric inequalities.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento/construção deste trabalho foi motivado pela resolução de problemas de otimização recorrendo preferencialmente a processos geométricos e algébricos elementares. Também foi nossa intenção que os conhecimentos matemáticos para a leitura deste trabalho não fossem além daqueles que são lecionados no ensino secundário, nomeadamente:

- Noção de tangente, limites e continuidade;
- Fatorização de polinómios, raízes de um polinómio e sua multiplicidade, teorema do resto;
- Resolução de sistemas de equações;
- Conhecimentos elementares de geometria euclidiana.

Assim, no capítulo 2, e tendo por base o artigo [5], vamos estudar os extremos de funções polinomiais de baixo grau (quadráticas e cúbicas). Vamos ainda estender esta metodologia à obtenção dos extremos de algumas funções polinomiais de grau quatro, não referenciadas pelo autor citado. Este capítulo terminará com exemplos cuja exploração espelhará as conclusões obtidas.

No capítulo seguinte, abordaremos os chamados *problemas isoperimétricos*, ou seja, encontrar, de entre um certo conjunto de superfícies planares com o mesmo perímetro, as que encerram maior área. Começamos por fazer referência à lenda de Dido, que deu o mote ao estudo destes problemas, e, de seguida, apresentamos as ideias de dois autores que os estudaram. Zenodorus mostrou que é o círculo que tem a maior área quando comparada com todos os polígonos que têm perímetro igual ao seu. A demonstração que Zenodorus apresentou tem, no entanto, uma lacuna, que reside na pouco clareza da demonstração de que, entre os polígonos equiláteros, são os equiangulares que encerram maior área. Vamos mesmo assim estudar como Zenodorus a concretizou, baseando-se em argumentos geométricos e visualização de figuras. Quanto à lacuna que apresenta, vamos dar alguns contributos que consistem na sua verificação para triângulos e quadriláteros. Encerramos este capítulo com uma das abordagens que Steiner fez a este tipo de problemas. Steiner vai mais além, considerando superfícies planas arbitrárias e certas transformações geométricas (simetrização) a operarem sobre elas que não alteram a sua área, mas que introduzem novos eixos de simetria. Este processo pode ser repetido tantas vezes quanto as necessárias de forma a se obter uma figura que tenha tantos eixos de simetria quanto se queira. No limite, a superfície obtida tem eixos de simetria em qualquer direção: um círculo, que é a superfície que, de todas as de igual perímetro, encerra maior área. Neste captítulo as nossas principais referências são o artigo de V. Blåsjö [1] e o livro de N. Kazarinoff [3].

Pretendemos assim apresentar uma abordagem alternativa ao cálculo na resolução de problemas de otimização, bem como mostrar que a geometria e a álgebra podem ter um papel relevante em alguns destes problemas.

Capítulo 2

Extremos de funções polinomiais

Para obter os extremos de uma função, no ensino secundário são adotadas duas abordagens: com os alunos de Matemática A usamos o cálculo diferencial, que só é suficientemente dominado para este objetivo no decorrer do 12º ano; com os alunos de Matemática B recorre-se ao uso da calculadora gráfica, sendo que neste caso só temos a garantia de valores aproximados. Será que é possível uma abordagem sem o auxílio do cálculo diferencial ou da calculadora gráfica? Certamente que, para uma função em geral, serão necessárias as ferramentas anteriores. No entanto, tendo por base o artigo [5] iremos ver, neste capítulo, uma abordagem alternativa para funções polinomiais de baixo grau, a saber: funções quadráticas, cúbicas e, não referidas neste artigo, algumas de grau quatro. Esta abordagem será concretizada com recurso a conceitos básicos de geometria e alguns conhecimentos de funções e das suas características. Estes conhecimentos terão de passar por:

- Noção de tangente, limites e continuidade;
- Fatorização de polinómios, raízes de um polinómio e sua multiplicidade, teorema do resto;
- Resolução de sistemas de equações.

Esta secção terminará com propostas de atividades, retiradas de manuais do Ensino Secundário, que ilustrarão as ideias desenvolvidas.

2.1 Definição de extremo de uma função.

No manual [2] para a disciplina de Matemática A, as definições de extremo absoluto e extremo relativo, que iremos adotar ao longo deste trabalho, são apresentadas do seguinte modo:

Definição 1.

- Uma função f, de domínio D, tem um máximo absoluto num ponto a do seu domínio se $f(x) \leq f(a)$, para todo o $x \in D$. Diz-se que $f(a)$ é o máximo absoluto e que a é um maximizante de f.
- Uma função f, de domínio D, tem um mínimo absoluto num ponto b do seu domínio se $f(x) \geq f(b)$, para todo o $x \in D$. Diz-se que $f(b)$ é o mínimo absoluto e que b é um minimizante de f.
- Uma função f, de domínio D, admite um máximo relativo num ponto a do seu domínio, se existir uma vizinhança de centro a – $V(a)$ – tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo o $x \in V(a) \cap D$. Neste caso, $f(a)$ é máximo relativo e a é um maximizante de f.

- Uma função f, de domínio D, admite um mínimo relativo num ponto b do seu domínio, se existir uma vizinhança de centro b – $V(b)$ – tal que $f(x) \geq f(b)$, para todo o $x \in V(b) \cap D$. Neste caso, $f(b)$ é mínimo relativo e b é um minimizante de f.

Por outro lado, os mesmos conceitos são apresentados no manual [4] para a disciplina de Matemática B com algumas diferenças:

Definição 2. Seja f uma função real de variável real de domínio $D_f, a \in D_f$ e $b \in D_f$.

- $f(a)$ é máximo absoluto de f se $f(a)$ é o maior elemento de D'_f, isto é, se para todo o x de $D_f : f(a) \geq f(x)$.
- $f(b)$ é mínimo absoluto de f se $f(b)$ é o menor elemento de D'_f, isto é, se para todo o x de $D_f : f(b) \leq f(x)$.
- $f(a)$ é máximo relativo de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ contido no domínio de f e contendo o ponto a, tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(a) \geq f(x)$. a diz-se um maximizante da função.
- $f(b)$ é mínimo relativo de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ contido no domínio de f e contendo o ponto b, tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(b) \leq f(x)$. b diz-se um minimizante da função.

Repare-se que, de acordo com esta última definição, os extremos relativos só podem ocorrer em pontos interiores ao domínio da função, o que é uma restrição pouco usual e, do nosso ponto de vista, insatisfatória.

2.2 Extremos de funções polinomiais

Consideremos uma função polinomial f de grau n,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com domínio $D = \mathbb{R}$ a $a_n \neq 0$, que sabemos ser uma função contínua.

Para que f tenha um extremo em $x = p$ é necessário que p seja uma raíz de multiplicidade par do polinómio

$$P_p(x) = f(x) - f(p). \tag{2.1}$$

Isto é,

$$P_p(x) = a(x-p)^{2k} h(x),$$

para algum inteiro $k > 0$ e $a \neq 0$, sendo $h(x)$ um polinómio de grau $n-2k$ que não se anula em $x = p$. Efetivamente, a multiplicidade par da referida raiz impõe-se pois o polinómio $P(x) = f(x) - f(p)$ terá de manter o sinal numa vizinhança suficientemente pequena de p. Este sinal será então determinado pelo sinal de $ah(x)$, que não vai variar numa vizinhança de p suficientemente pequena, uma vez que $ah(x)$ é contínua e $ah(p) \neq 0$. Assim:

- se $P_p(x) > 0$ numa certa vizinhança de p, com $x \neq p$, então $f(p)$ é um mínimo relativo;

- se $P_p(x) < 0$ numa certa vizinhança de p, com $x \neq p$, então $f(p)$ é um máximo relativo.

Se a função polinomial f de grau n tiver um extremo relativo em p, então, para os graus mais baixos, $P(x)$ assume a seguinte forma:

- para $n = 2$, $P_p(x) = a(x-p)^2$;

- para $n = 3$, $P_p(x) = a(x-p)^2(x-q)$, com $q \neq p$;

- para $n = 4$, $P_p(x) = a(x-p)^2 h(x)$, com $h(x)$ um polinómio de grau 2 para o qual $h(p) \neq 0$, ou $P_p(x) = a(x-p)^4$.

2.2.1 Existência de extremos absolutos para funções polinomiais.

Caso n seja par e $a_n > 0$, então $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, o que significa, por continuidade, que f admite um mínimo absoluto em $\mathbb{R}$ mas não um máximo absoluto. Do mesmo modo, caso n seja par e $a_n < 0$, vamos ter $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$; consequentemente, f admite um máximo absoluto em $\mathbb{R}$ mas não um mínimo absoluto.

Por outro lado, a função polinomial não admite extremos absolutos quando n é ímpar, uma vez que neste caso vamos ter $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ se $a_n > 0$ e $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$ se $a_n < 0$.

2.2.2 Extremos de funções quadráticas

Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com domínio $D = \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se esta função tem um extremo em $x = p$, então p vai ser uma raíz de multiplicidade 2 do polinómio

$$P_p(x) = f(x) - f(p) = ax^2 + bx + c - k,$$

com $k = f(p)$. Assim,

$$ax^2 + bx + c - k = a(x-p)^2 = ax^2 - 2apx + ap^2.$$

Igualando os coeficientes, vamos obter o sistema

$$\begin{cases} b = -2ap \\ c - k = ap^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{b}{2a} \\ k = c - \frac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

Assim, f tem um único extremo. Tendo em conta o que vimos na Secção 2.2.1, este é necessariamente um extremo absoluto. Mais precisamente:

- se $a > 0$, então $f(p) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ é um mínimo absoluto e $p = -\frac{b}{2a}$ um minimizante de f.

- se $a < 0$, então $f(p) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ é um máximo absoluto e $p = -\frac{b}{2a}$ um maximizante de f.

2.2.3 Extremos de funções cúbicas

Consideremos uma função cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com domínio $D = \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sabemos à partida que f não admite extremos absolutos, uma vez que tem grau ímpar. Se a função f tem um extremo relativo em $x = p$, então p vai ser uma raíz de multiplicidade 2 do polinómio

$$P_p(x) = f(x) - f(p) = ax^3 + bx^2 + cx + d - k,$$

com $k = f(p)$. Assim,

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d - k &= a(x-p)^2(x-q) \\ &= ax^3 + (-aq - 2ap)x^2 + (ap^2 + 2apq)x - aqp^2, \end{aligned}$$

onde $q \neq p$. Igualando os coeficientes, vamos obter o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -aq - 2ap \\ c = ap^2 + 2apq \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{b+2ap}{-a} \\ ap^2 + 2ap\frac{b+2ap}{-a} - c = 0 \end{array} \right.$$

De onde concluímos que

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \quad q = \frac{b + 2ap}{-a}. \tag{2.2}$$

No caso em que $b^2 - 3ac = 0$, então $p = q = -\frac{b}{3a}$, logo

$$P_p(x) = f(x) - f(p) = a\Big(x + \frac{b}{3a}\Big)^3,$$

o que significa que f não tem extremos, relativos ou absolutos. Reciprocamente, uma simples manipulação algébrica mostra-nos que, tendo em conta as fórmulas (2.2), se $p = q$ então $b^2 - 3ac = 0$. Por outro lado, se $b^2 - 3ac < 0$, então p não é um número real e, consequentemente, f também não tem extremos, absolutos ou relativos. No caso $b^2 - 3ac > 0$, então f tem dois extremos relativos.

Exemplos 2.1. 1. Se $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, então vamos ter $p = q = -1$, logo f não tem extremos.

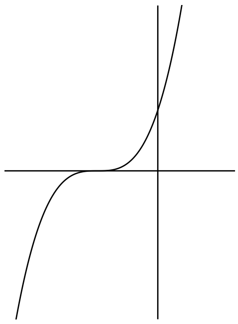


Gráfico da função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

2. Se $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$, então $b^2 - 3ac < 0$, ou seja p não é número real, logo f não tem extremos.

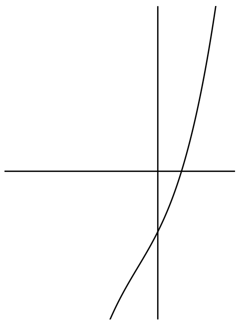


Gráfico da função $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

3. Se $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, então $b^2 - 3ac = 4 > 0$, ou seja f tem extremos em $p = 2$ e $p = \frac{2}{3}$. No primeiro caso, temos $q = 0$ e

$$P_2(x) = f(x) - f(2) = (x-2)^2 x;$$

logo, como $h(x) = x$ é uma função positiva numa vizinhança de $p = 2$, podemos concluir que f tem um mínimo relativo em $x = 2$. Para $p = \frac{2}{3}$, temos $q = \frac{8}{3}$ e

$$P_{\frac{2}{3}}(x) = f(x) - f\big(\frac{2}{3}\big) = \big(x - \frac{2}{3}\big)^2 \big(x - \frac{8}{3}\big);$$

logo, como $h(x) = x - \frac{8}{3}$ é uma função negativa numa vizinhança de $p = \frac{2}{3}$, podemos concluir que f tem um máximo relativo em $x = \frac{2}{3}$.

2.2.4 Extremos de funções polinomiais de grau 4.

Para as funções polinomiais de grau quatro, a existência de um eixo vertical de simetria permite uma abordagem simples e puramente algébrica aos extremos da função. Assim, se a seguinte função polinomial de grau quatro

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

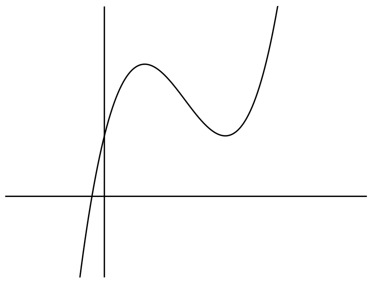


Gráfico da função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$.

admite a reta $x = m$ como eixo de simetria, a translação do seu gráfico associada ao vetor $(-m, -f(m))$ vai corresponder a uma função par g, ou seja,

$$g(x) = f(x+m) - f(m)$$

é uma função par.

Observação 1. Qualquer translação do gráfico de uma função preserva os máximos e mínimos relativos, isto é, se f tem um máximo relativo em x_0 e o gráfico de g é obtido, a partir do gráfico de f, por translação associada ao vector (u_1, u_2), então g terá um máximo relativo em $x_0 + u_1$.

Efectuando as devidas substituições na expressão de f, obtemos:

$$g(x) = ax^4 + (4am + b)x^3 + (6am^2 + 3bm + c)x^2 + (4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d)x.$$

Como g é uma função par, os coeficientes de x^3 e x terão de ser iguais a zero, assim:

$$\begin{cases} 4am + b = 0 \\ 4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d = 0 \end{cases}, \tag{2.3}$$

logo

$$m = -\frac{b}{4a}.$$

A função g vem então dada por:

$$g(x) = ax^4 + \Big(\frac{8ac - 3b^2}{8a}\Big)x^2$$

Desta forma, o problema de encontrar os extremos da função polinomial f equivale ao problema de encontrar os extremos de uma função par do tipo

$$\varphi(x) = Ax^4 + Cx^2 + E.$$

Repare-se que $x = 0$ é sempre uma raíz de multiplicidade par do polinómio $P_0(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. Temos então dois casos possíveis: $x = 0$ é uma raíz de ordem 4 ou $x = 0$ é uma raíz de ordem 2.

1. No primeiro caso ($x = 0$ é uma raíz de ordem 4), podemos escrever $P_0(x) = Ax^4$ e, consequentemente, $\varphi(x) = Ax^4 + E$. Já sabemos que φ tem um extremo em $x = 0$,

vamos de seguida verificar que função φ não tem mais nenhum extremo. Tomando $p \neq 0$, repare-se que

$$P_p(x) = \varphi(x) - \varphi(p) = A(x^4 - p^4) = A(x-p)(x+p)(x^2+p^2),$$

logo p é uma raíz de P_p com multiplicidade ímpar, pelo que φ não tem extremo em $x = p$. Considerando a translação inversa, concluímos que a função f tem um único extremo, necessariamente extremo absoluto, em $x = m$. Este extremo é máximo se $a < 0$ e é mínimo se $a > 0$.

2. No segundo caso ($x = 0$ é uma raíz de ordem 2), tendo em conta a simetria de P_p, com $p \neq 0$, podemos escrever:

$$P_p(x) = A(x-p)^2(x+p)^2 = Ax^4 - 2Ap^2x^2 + Ap^4. \tag{2.4}$$

Então, de (2.1) e (2.4), resulta que

$$Ax^4 - 2Ap^2x^2 + Ap^4 = Ax^4 + Cx^2 + E - (Ap^4 + Cp^2 + E).$$

Igualando os coeficientes, vamos obter o sistema:

$$\begin{cases} C = -2Ap^2 \\ Ap^4 = -Ap^4 - Cp^2 \end{cases},$$

de onde conluímos que

$$p = \pm\sqrt{-\frac{C}{2A}}.$$

Em particular, para a função g, temos $A = a$ e

$$C = \frac{8ac - 3b^2}{8a},$$

e portanto,

$$p = \pm\frac{\sqrt{3b^2 - 8ac}}{4a}. \tag{2.5}$$

Para encontrar os extremos da função f, efectuamos a translação inversa de modo a concluir que estes ocorrem nos pontos $x = p + m$, com $p = 0$ ou p dado por (2.5). Ou seja,

$$x = -\frac{b}{4a}, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{3b^2 - 8ac}}{4a}. \tag{2.6}$$

Exemplos 2.2. 1. Consideremos a função polinomial

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9,$$

com domínio $D = \mathbb{R}$. Tendo em conta (2.3), é fácil de concluir que a recta $x = 2$ é um eixo de simetria da função. Tomemos a função g obtida por tranlação de f

associada ao vector $(-2, -f(2))$:

$$g(x) = x^4 - 2x^2.$$

É claro que $x = 0$ é uma raíz de multiplicidade 2 do polinómio

$$P_0(x) = g(x) - g(0).$$

Assim, estamos no segundo caso acima descrito. Consequentemente, de acordo com (2.6), f tem extremos nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$; que correspondem aos extremos $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ de g, respectivamente.

Como

$$P_0(x) = g(x) - g(0) = x^2(x^2 - 2),$$

concluímos que g tem um máximo relativo em $x = 0$, uma vez que $h(x) = x^2 - 2$ é negativo numa vizinhança de $x = 0$. Por outro lado, temos

$$P_1(x) = g(x) - g(1) = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$

Logo g tem um mínimo relativo em $x = 1$, porque $h(x) = (x + 1)^2$ é positivo numa vizinhança de $x = 1$. Por simetria, g também tem um mínimo relativo em $x = -1$. Em conclusão, f tem máximo relativo em $x = 2$ e tem mínimos relativos em $x = 1$ e $x = 3$. Na realidade, tendo em conta os resultados da Secção 2.2.1 e a simetria de f, f tem mínimos absolutos em $x = 1$ e $x = 3$.

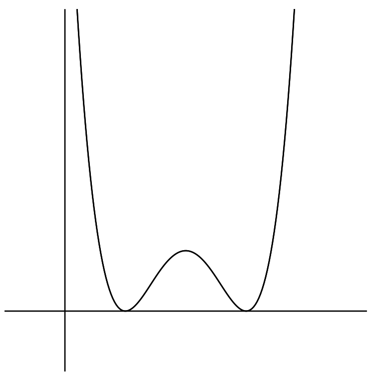


Gráfico da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 22x^2 - 24x + 9$.

2. Consideremos a função polinomial

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 6x + 1,$$

com domínio $D = \mathbb{R}$. Tendo em conta (2.3), vemos que a reta $x = 1$ é um eixo de simetria da função. Tomemos a função g obtida por translação de f associada ao vetor $(-1, -f(1))$:

$$g(x) = -x^4 - x^2.$$

Neste caso $x = 0$ é uma raíz de multiplicidade 2 do polinómio

$$P_0(x) = g(x) - g(0).$$

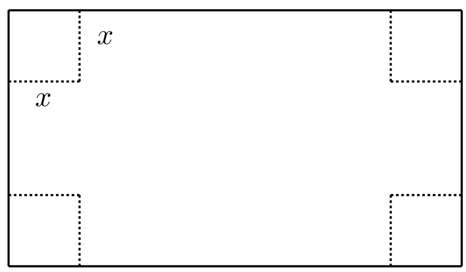
Assim, estamos novamente no segundo caso acima descrito. Aplicando (2.6), concluímos que f tem um único extremo (máximo absoluto) em $x = 1$.

2.3 Atividades

Nesta secção, apresentamos três atividades, onde é possível aplicar os métodos que acima descrevemos para o cálculo dos extremos de funções polinomiais. As duas primeiras são ambas retiradas de [4]. A terceira actividade trabalha um resultado que nos será útil no capítulo seguinte.

2.3.1 Folha de alumínio

Enunciado. Com uma folha de alumínio de dimensões $20\,cm$ por $32\,cm$ pretende-se construir um pequeno tabuleiro. Para tal é necessário cortar os cantos todos iguais, conforme ilustra a figura seguinte:



a) Determine a expressão que permite calcular a capacidade do tabuleiro em função da medida do lado dos cantos cortados.

b) Qual será a dimensão do corte (x) de forma a que o tabuleiro tenha a capacidade máxima.

Proposta de resolução. a) Em primeiro lugar iremos determinar o domínio de valores possíveis para a variável x (dimensão do corte). Depois de efetuados os cortes, o comprimento, a largura e a altura do tabuleiro serão dadas, respectivamente, por $32 - 2x$, $20 - 2x$ e x. Assim, e como estamos a falar de comprimentos, teremos necessariamente de ter as seguintes restrições:

$$32 - 2x > 0, \quad 20 - 2x > 0, \quad x > 0.$$

Resolvido o sistema de inequações, concluímos que $x \in]0; 10[$.

Por outro lado, a expressão que nos vai dar a capacidade do tabuleiro é:

$$C(x) = (32 - x)(20 - 2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 640x,$$

uma função polinomial de grau 3.

b) Aplicando a fórmula (2.2), vemos que a função C tem extremos nos pontos $x = \frac{40}{3}$ e $x = 4$. Como $\frac{40}{3}$ não pertence ao intervalo $]0;10[$, só temos de considerar o ponto $x = 4$. Também por (2.2), para $p = 4$, temos $q = 18$, logo

$$P_4(x) = C(x) - C(4) = 4(x-4)^2(x-18).$$

Assim, como $h(x) = 4(x-18)$ é negativo numa vizinhança de $x = 4$, concluímos que C tem um máximo relativo para $x = 4$. Tomando como domínio o intervalo $]0;10[$, este máximo é absoluto: $x = 4\,cm$ é a dimensão do corte que dará ao tabuleiro maior capacidade.

2.3.2 Baleias

Enunciado. A Comissão Internacional para a proteção das baleias construiu, para a baleia azul do Antárctico, o seguinte modelo matemático, que traduz a variação da sua população em dois anos consecutivos:

$$V(x) = 2 \times 10^{-6}(-2x^3 + 303x^2 - 600x),$$

em que x representa, em milhares, a população de baleias.

a) Determine os valores de x (aproximados à milésima) de modo que a variação da população seja nula.

b) Determine o maior aumento possível de uma população.

Proposta de resolução.

a) Os valores correspondem aos zeros da função V:

$$2 \times 10^{-6}(-2x^3 + 303x^2 - 600x) = 0 \Leftrightarrow x(-2x^2 + 303x - 600) = 0.$$

Logo, os zeros da função V são precisamente $x = 0$ e

$$x = \frac{-303 \pm \sqrt{87009}}{-4},$$

ou, com aproximação à milésima,

$$x = 0, \quad x \approx 2,007, \quad x \approx 149,490.$$

b) Aplicando a fórmula (2.2), vemos que a função V tem extremos nos pontos $x = 1$ e $x = 100$. Também por (2.2), para $p = 1$ e $p = 100$ temos, respetivamente, $q = 149,5$ e

$q = -48,5$. Assim,

$$P_1(x) = V(x) - V(1) = -2(x-1)^2(x-149,5),$$
$$P_{100}(x) = V(x) - V(100) = -2(x-100)^2(x-48,5).$$

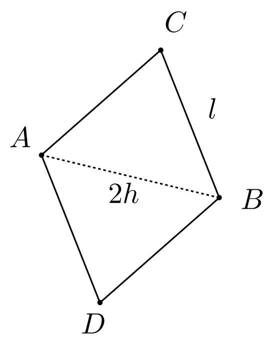
Como $h(x) = -2(x-149,5)$ é positivo numa vizinhança de $x = 1$, V tem um mínimo relativo em $x = 1$; como $h(x) = -2(x+48,5)$ é negativo numa vizinhança de $x = 100$, V tem um máximo relativo em $x = 100$. No contexto do problema, vamos considerar o intervalo $]0;\infty[$ como sendo o domínio de V. Relativamente a este domínio, sabemos, pela alínea anterior, que V é positiva no intervalo $]2,007;149,49[$ e negativa fora deste intervalo. Assim, V tem um máximo absoluto em $x = 100 \in]2,007;149,49[$, ou seja, o maior aumento possível acontece quando a população atingir as 100 000 baleias.

2.3.3 Problema isoperimétrico para quadriláteros.

Enunciado. De todos os quadriláteros com os lados iguais a um certo l dado, qual o que tem maior área?

Proposta de resolução.

Consideremos um quadrilátero, com os lados iguais a um certo $l > 0$, dividido por uma das suas diagonais. Vamos estudar como varia a área dos triângulos congruentes assim obtidos com a dimensão da diagonal $2h$. Finalmente vamos encontrar o triângulo que maximiza a área e, como consequência, qual o quadrilátero com os lados iguais a l de maior área.



Tomemos então o triângulo isósceles $\triangle ABC$, em que $|AC| = |BC| = l$ e $|AB| = 2h$. Como a altura b deste triângulo é dada por

$$b = \sqrt{l^2 - h^2},$$

a sua área A_h é

$$A_h = \frac{2h\sqrt{l^2 - h^2}}{2}.$$

Consideramos A_h como função de h no domínio $]0;l[$. Como A_h é positiva para valores de h nesse domínio, o maximizante de A_h^2 em $]0;l[$ é também maximizante de A_h em $]0;l[$.

Para

$$A_h^2 = h^2(l^2 - h^2) = -h^4 + l^2h^2,$$

que é uma função par ($h = 0$ é um eixo de simetria da função), podemos aplicar a fórmula (2.6): a função A_h tem extremos nos pontos

$$h = 0,\ h = -l\frac{\sqrt{2}}{2},\ h = l\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $h = 0$ e $h = -l\frac{\sqrt{2}}{2}$ não pertencem ao domínio, então $h = l\frac{\sqrt{2}}{2}$ é máximo da função (tendo por base o descrito no primeiro exemplo da Secção 2.2.4 e pelo facto de $a < 0$). Comparando as medidas dos lados do triângulo, concluímos que elas satisfazem a relação do teorema de Pitágoras:

$$l^2 + l^2 = (l\sqrt{2})^2$$

Assim, o triângulo que maximiza a área é o triângulo retângulo com catetos iguais a l, logo o quadrilátero com os lados iguais a l de maior área vai ser o quadrado.

Capítulo 3

Desigualdade isoperimétrica

Nesta secção vamos abordar o problema da desigualdade isoperimétrica. Começamos por fazer referência à chamada “Lenda de Dido", que é tida como despoletadora da análise deste tipo de problemas – procurar superfícies de maior área fixado o seu perímetro. Para concretizar o que nos propomos, vamos referir duas abordagens: a primeira devido a Zenodorus e a segunda a Steiner. A abordagem referente a Zenodorus, essencialmente geométrica, culmina com a prova de que, fixado um perímetro $P > 0$, o círculo de perímetro P encerra maior área do que qualquer polígono com o mesmo perímetro. O caminho para esta conclusão apresenta um argumento pouco convincente na prova de que, entre os polígonos equiláteros, os que têm maior área são os equiangulares. No entanto, vamos dar alguns contributos para este assunto, estudando os casos particulares do triângulo e do quadrilátero. A abordagem de Steiner diz respeito à *simetrização* de superfícies com vista a obter figuras com cada vez mais eixos de simetria, terminando no círculo e concluindo que esta forma é a que encerra mais área.

Neste capítulo iremos denotar por $\overline{AB}$ o segmento com extremos nos pontos A e B; o comprimento de $\overline{AB}$ será denotado por $|AB|$.

3.1 Um pouco de história

A lenda de Dido (ou Elisa) faz parte do Cântico I da obra épica “Eneida", escrita pelo grande poeta romano Virgílio (70 a.C. a 19 a.C.). Dido, que viveu no século IX a.C., era uma princesa fenícia da cidade de Tiro, situada nas margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. O rei Pigmaleão, seu irmão, assassinou-lhe o marido (seu tio), o grande sacerdote Arquebas, com vista a apoderar-se dos seus tesouros. Temendo pela sua vida, Dido fugiu de navio, levando o tesouro referido, com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, "Qart Hadash"(Cartago). No lugar escolhido para ser Cartago (norte da África, nas margens do Mediterrâneo, onde hoje se situa a Tunísia) tentou comprar terras ao rei local, Jarbas da Numídia, para que se pudessem estabelecer. O acordo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido, revelando o quanto era inteligente, decidiu pedir ao seu grupo que cortasse a pele em tiras tão finas quanto possível, unisse todas e colocassem num semicírculo usando a praia (no mediterrâneo) como diâmetro.

3.2 Problemas isoperimétricos

3.2.1 Zenodorus

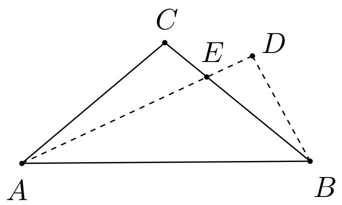
A ideia geral do argumento Zenodorus para provar que o círculo tem uma área maior que qualquer polígono com o mesmo perímetro pode ser encontrada em [1]. De seguida revisitamos este argumento com um pouco mais de detalhe.

Teorema 1. *De todos os triângulos com a mesma base e o mesmo perímetro, o isósceles é o que tem maior área.*

Demonstração: Para esta demonstração seguimos [3]. Seja $\triangle ABC$ o triângulo isósceles com base $\overline{AB}$ e seja $\triangle ABD$ outro triângulo com a mesma base e o mesmo perímetro. Temos então:

$$|AC| + |BC| = |AD| + |BD|. \tag{3.1}$$

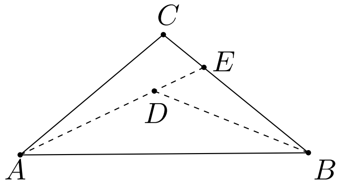
Como $\triangle ABD$ tem o mesmo perímetro que $\triangle ABC$, mas não é isósceles, um dos seus lados, por exemplo o lado $\overline{AD}$, satisfaz $|AD| > |AC|$, enquanto o outro lado $\overline{BD}$ satisfaz $|BD| < |AC|$. Verifiquemos que o segmento $\overline{AD}$ intersecta $\overline{BC}$ num ponto E, com $E \neq D$, tal como ilustra a figura seguinte.



Efetivamente, no caso de não existir a intersecção, temos quatro hipóteses:

1. o vértice D é interior a $\triangle ABC$;
2. o vértice D está sobre algum dos seus lados;
3. o vértice C está no interior de $\triangle ABD$;
4. o vértice C está sobre algum dos lados de $\triangle ABD$.

Suponha-se que D está no interior de $\triangle ABC$ e que E é a intersecção de $\overline{BC}$ com o prolongamento de $\overline{AD}$.



Pela desigualdade triangular,

$$|AC| + |CE| > |AD| + |DE|. \tag{3.2}$$

Também pela desigualdade triangular,

$$|DE| + |EB| > |BD|. \tag{3.3}$$

Somando as desigualdades (3.2) e (3.3), obtemos

$$|AC| + \underbrace{|CE| + |EB|}_{=|CB|} + |DE| > |AD| + |BD| + |DE|,$$

de onde se conclui

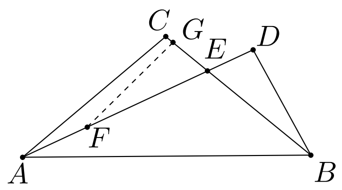
$$|AC| + |CB| > |AD| + |DB|,$$

o que contradiz a hipótese (3.1), logo D não está no interior de $\triangle ABC$. De forma semelhante é possível verificar que nenhuma das restantes hipóteses pode ocorrer.

Retomemos a demonstração do teorema. Uma vez que

$$\measuredangle EAB < \measuredangle CAB = \measuredangle EBA$$

e sabendo que ao maior ângulo de um triângulo se opõe o maior lado, temos $|EB| < |AE|$. Assim podemos fixar F em $\overline{AE}$ com $|EF| = |EB|$. Consideremos também G em $\overline{EG}$ com



$|EG| = |ED|$. Para tal ser possível, é necessário verificar que $|EG| < |EC|$. Como o triângulo $\triangle EFG$ é congruente com $\triangle EBD$ (critério LAL), temos

$$|FG| = |BD|.$$

Assim, tendo também em conta (3.1),

$$\begin{aligned} |AC| + |BC| &= |AF| + |FD| + |FG| = |AF| + |BG| + |FG| \\ &= |AF| + |BC| \pm |CG| + |FG|. \end{aligned}$$

Logo

$$|AC| = |AF| \pm |CG| + |FG|.$$

Temos $\pm$ pois ainda não sabemos se G está situado em $\overline{EC}$. No entanto, a alternativa

$$|AC| = |AF| + |FG| + |CG|,$$

que corresponde a G estar fora de $\overline{EC}$, contradiz a desigualdade triangular.

Representemos a área de um triângulo com vértices em X, Y e Z por $\triangle XYZ$. Temos

$$\begin{aligned} T(ABC) &= T(ABE) + T(EFG) + (T(AFG) + T(ACG)) \\ &= [T(ABE) + T(BDE)] + [T(AFG) + T(ACG)] \\ &= T(ABD) + (T(AFG) + T(ACG)), \end{aligned}$$

de onde se conclui: $T(ABC) > T(ABD)$.

Podemos fazer uma abordagem algébrica a esta demonstração, usando a fórmula de Herão e os resultados do capítulo anterior. Seja $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ o semi-perímetro de um triângulo de lados de comprimento a, b e c. Podemos obter a área A do referido triângulo aplicando a *fórmula de Herão*:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Vamos então ver, nas condições do teorema, que relação tem que existir entre os lados do triângulo para que a sua área A seja máxima. Assim, fixamos p e um dos lados (base), por exemplo c. Denotamos $k := p - c$ e, após as devidas substituições, maximizar A equivale a maximizar

$$A^2 = p(p-a)(p-b)k.$$

Como $a + b = 2p - c$ ou seja $b = 2p - a - c$, tem-se

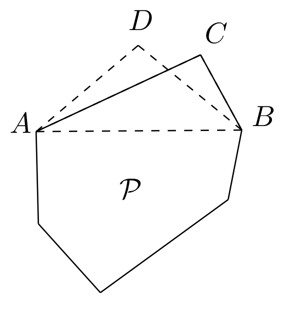
$$A^2(a) = pk(-a^2 + (p+k)a - pk),$$

que, tendo em conta os resultados da secção 2.2.2, tem um máximo em

$$a = \frac{p+k}{2} = \frac{2p-c}{2},$$

donde se conclui que $a = b$ o que permite concluir que o triângulo de maior área (nas condições do teorema) é o isósceles.

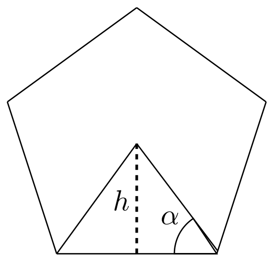
Teorema 2. *De entre todos os polígonos com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados, o que tem maior área deverá ser regular.*



Demonstração: É fácil de povar que o polígono de maior área tem de ser equilátero: se $\mathcal{P}$ é um polígono não regular, então dois dos seus lados consecutivos, digamos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ não são congruentes; podemos então substituir o vértice C por um ponto D, de forma a que $\triangle ABD$ seja isósceles e tenha o mesmo perímetro que o triângulo $\triangle ABC$; pelo teorema anterior, o novo polígono, para além de ter o mesmo perímetro, tem maior área que $\mathcal{P}$. No entanto, o argumento apresentado por Zenodorus não é totalmente convincente na prova que o polígono de maior área é equiangular. Para quadriláteros tal é feito nas atividades do capítulo anterior.

Teorema 3. *Para polígonos regulares com o mesmo perímetro, mais lados implica maior área*

Demonstração: Consideremos o apótema h de um polígono regular, tal como se ilustra na figura seguinte. A área do polígono é metade do produto do apótema pelo perímetro



P. Se aumentarmos o número de lados n, mantendo o perímetro P, o lado do polígono regular diminui. Provemos então que o apótema h aumenta, o que implica que a área do polígono também aumenta:

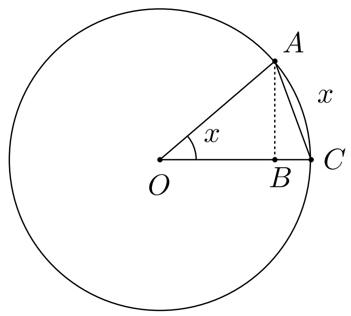
Denotemos o apótema do polígono de n lados por $h(n)$. Como $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{2n}$, vamos ter

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{P}{2n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{2n}\operatorname{tg}\Big(\frac{(n-2)\pi}{2n}\Big) \\ &= \frac{P}{2n}\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\Big) = \frac{P}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \end{aligned} \tag{3.4}$$

A derivada de $h(n)$ é então dada por:

$$\begin{aligned} h'(n) &= \frac{P}{2}\frac{\frac{\pi}{n^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{n})}n - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2} = \underbrace{\frac{P\pi}{2n^3\operatorname{sen}^2\big(\frac{\pi}{n}\big)}}_{=X_n}\Big\{1 - \frac{n}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\Big\} \\ &= X_n\Big\{1 - \frac{\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}\Big\}. \end{aligned}$$

Provando que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ para todo $x > 0$, podemos concluir que $h'(n) > 0$. Para tal, consideremos a seguinte figura, onde $|OC| = 1$.



Como a área do triângulo $\triangle OBC$ é dada por

$$T(OBC) = \frac{1}{2}|AB||OC| = \frac{\text{sen}x}{2},$$

que obviamente é menor que a área do setor circular OAC, sendo esta igual a $\frac{x}{2}$, vamos ter $\text{sen}x < x$. Ficou assim provado que o apótema aumentou e por conseguinte a área do polígono também.

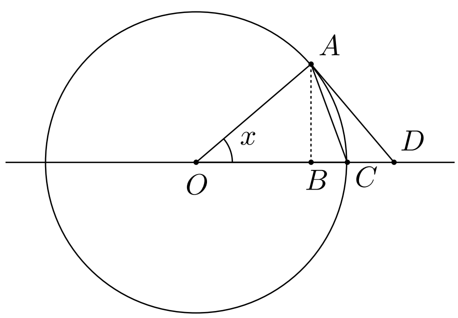
Teorema 4. *O círculo tem maior área que qualquer polígono com o mesmo perímetro.*

Demonstração: Fixemos $P > 0$. Para a nossa demostração vamos considerar poligonos regulares de perímetro P, uma vez que estes encerram maior área que todos os outros com o mesmo perímetro. Começamos por mostrar que o apótema de qualquer polígono regular de perímetro P é menor que o raio do círculo com o mesmo perímetro.

O raio r do círculo é dado por $r = \frac{P}{2\pi}$. Por outro lado, o apótema de um polígono regular com n lados e perímetro P é dado pela fórmula (3.4). Assim, $r > h(n)$ se e só se

$$\text{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}.$$

Resta-nos verificar que $\text{tg}\, x > x$ para todo $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Consideremos a seguinte figura, onde novamente $|OC| = |OA| = 1$.



Como os triângulos $\triangle OBA$ e $\triangle OAD$ são semelhantes (critério AA), temos

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|OA|}{|OB|},$$

logo

$$|AD| = |AB|\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Como a área do triângulo $\triangle OAD$ é dada por

$$T(OBC) = \frac{1}{2}|OA||AD| = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

que obviamente é maior que a área do setor circular OAC, sendo esta igual a $\frac{x}{2}$, vamos ter $\operatorname{tg} x > x$. Concluímos assim que $r > h(n)$ para todo o n.

Então, denotando por $A(n)$ a área do polígono regular com n lados e de perímetro P e por A_P a área do círculo com perímetro P, vamos ter

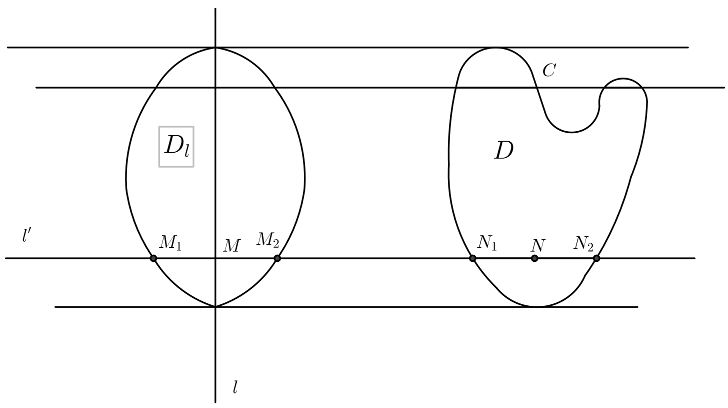
$$A(n) = \frac{1}{2}h(n)P < \frac{1}{2}rP = A_P.$$

3.2.2 Simetrização de Steiner

O argumento de Zenodorus compara a área limitada por polígonos e circunferências de igual perímetro. De seguida vamos considerar curvas fechadas mais gerais: fixado um $P > 0$, qual é a curva fechada com comprimento P que encerra maior área? Como vimos, desde a antiguidade que se sabe que esta curva é uma circunferência. No entanto, a demonstração rigorosa deste resultado é relativamente recente (apresentada pela primeira vez por H. A. Schwarz em 1890).

Não é a demonstração de Schwarz que vamos apresentar, mas sim um método introduzido por J. Steiner [7], a chamada “simetrização", que vale muito mais pela riqueza da ideia subjacente do que pelo seu rigor original. A nossa exposição segue de perto aquela que é adotada em [6]. Efetivamente, este método é ainda hoje aplicado na resolução de muitos problemas variacionais.

O argumento de Steiner (em traços gerais) reside no seguinte:

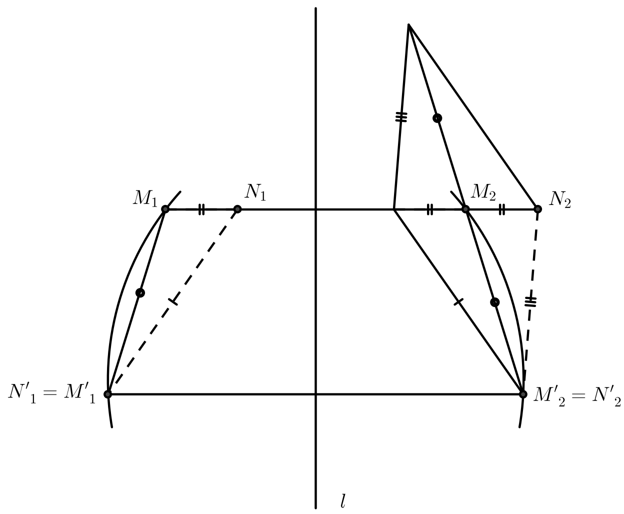


1. Seja D uma superfície plana e seja C a curva que a encerra. Tomemos uma reta l e desenhemos as perpendiculares a esta de modo a obter a superfície D_l, que é simétrica relativamente a l. Esta superfície D_l é obtida do seguinte modo: tomemos uma perpendicular l' a l; seja M a interseção entre l e l' e considerem-se os pontos

M_1 e M_2, em l', de tal modo que M seja o ponto médio do segmento $\overline{M_1M_2}$ e cujo comprimento é igual ao da interseção de l' com a superfície D. Repetindo este processo para todas as retas perpendiculares l' obtemos a superfície plana D_l, tal como se ilustra na figura anterior.

2. A superfície D_l tem a mesma área do que a superfície D, mas a curva C_l tem menor comprimento.

3. Procedendo do mesmo modo relativamente à superfíce D_l e a uma outra recta não paralela a l, vamos obter uma nova superfície com um novo eixo de simetria. Se repetirmos recursivamente o processo, no limite vamos obter uma superfície com infinitos eixos de simetria, isto é uma circunferência com a mesma área da superfície original, mas com menor perímetro, o que é suficiente para concluir que, de entre todas as curvas com comprimento fixado, a circunferência é a que encerra maior área.



Comparemos agora a área A_l e comprimento L_l de D_l com a área A e o comprimento L da superfície plana original D. Da definição de área, uma vez que o segmento $\overline{M_1M_2}$ tem o mesmo comprimento do que a interseção de l' com a superfície D, por definição de área vamos ter $A_l = A$. Demonstramos de seguida que $L \geq L_l$. Consideremos os dois trapézios $N_1N_1'N_2'N_2$ e $M_1M_1'M_2'M_2$, relativamente à figura anterior. Temos $|M_1M_2| = |N_1N_2|$ e $|M_1'M_2'| = |N_1'N_2'|$. Por simetria, temos também $|M_1M_1'| = |M_2M_2'|$. Aplicando a desigualdade triangular, resulta que

$$2|M_2M_2'| \leq |N_1N_1'| + |N_2N_2'|.$$

Fazendo M_1' e M_2' “muito próximos"de M_1 e M_2, respectivamente, e tomando a soma do comprimento de todos esses segmentos, obtemos $L \geq L_l$.

Desenhemos uma outra reta r. Procedendo como para D_l, obtemos a superfície D_{lr}, que vai ter mais simetrias, a mesma área $A_{lr} = A$ e uma fronteira com menor comprimento L_{lr}. Continuando o processo vamos obter, no limite, o círculo D_0. Representando por

$A(D_0)$, $L(D_0)$, a área e o comprimento da fronteira do círculo D_0 vamos ter:

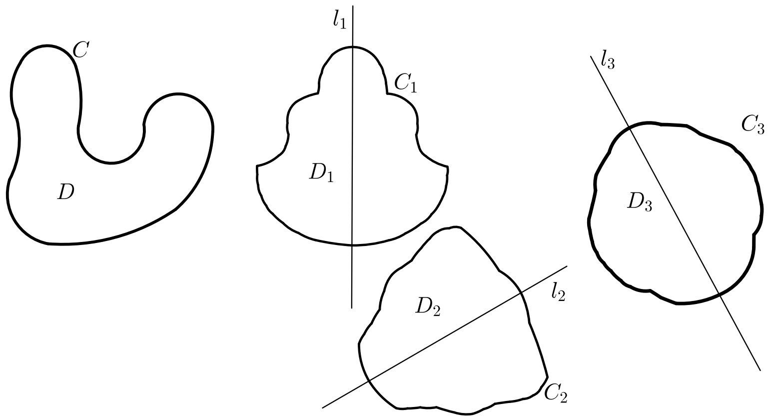
$$\begin{cases} A = A_l = A_{lr} = ... = A(D_0), \\ L \geq L_l \geq L_{lr} \geq ... \geq L(D_0). \end{cases}$$

Mas para o círculo D_0, $4\pi A(D_0) = L(D_0)^2$, o que implica que

$$4\pi A \leq L^2,$$

ou seja a superfície D tem menor àrea que o círculo de perímetro L.

A última figura ilustra como o processo de simetrização de Steiner produz superfícies com um número crescente de simetrias.



Bibliografia

[1] Viktor Blåsjö The Evolution of the Isoperimetric Problem, The American Mathematical Monthly, vol. 112, (2005), pp. 526-566.

[2] A. Jorge, et al, *Infinito 10A Matemática A Ensino Secundário*, Porto, Areal Editores, 2007.

[3] Nicholas D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities.* New Matematical Library. vol. 4, Washington, The Mathematical Association of America, 1961.

[4] A. Soveral, C. Silva, *Matemática B Funções e Gráficos - Generalidades. Funções Polinomiais 10º ou 11º ano*, Lisboa, Texto Editores, 2007.

[5] R.D. Taylor Jr., R. Hansen, *Optimization of Cubic Polynomial Functions Without Calculus.* Mathematics Teacher. Vol. 101, nº 6, pp 408-411. February 2008.

[6] H. Urakawa, Calculus of variations and harmonic maps, Tranlations of Mathematical Monographs, AMS, 1993.

[7] J. Steiner, Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Premier mémoir. J. Reine Angew Math. 24 (1842) 93–162.